

Instytut Podstawowych Problemów Techniki
Polska Akademia Nauk

OPTYMALNE STEROWANIE DRGANIAMI MASZTÓW Z ODCIĄGAMI

Bartłomiej D. Błachowski

Promotor:
Prof. dr hab. Witold Gutkowski

Warszawa 2004

<http://rcin.org.pl>

Podziękowania

Pragnę podziękować Profesorowi Witoldowi Gutkowskiemu za serdeczność, wyrozumiałość oraz szereg cennych wskazówek w trakcie czteroletniej współpracy.

Chciałbym również wyrazić swoją wdzięczność Komitetowi Badań Naukowych, za wsparcie finansowe udzielone w latach 2002-2004 w ramach grantu promotorskiego nr 5 T07A 001 23.

Spis treści

ROZDZIAŁ 1 Wstęp.....	1
1.1 Cel i motywacja podjęcia pracy	1
1.2 Przegląd literatury	3
1.2.1 Modele dynamiki masztów	3
1.2.2 Obciążenia wiatrem.....	4
1.2.3 Pasywne tłumienie drgań	5
1.2.4 Sterowanie drganiami.....	6
1.2.5 Sterowanie drganiami konstrukcji ciągnowych	9
1.3 Organizacja rozprawy	11
1.4 Nowe elementy w dziedzinie sterowania masztami zawarte w pracy	12
ROZDZIAŁ 2 Przestrzenny model masztu	13
2.1 Założenia konstrukcyjne.....	13
2.2 Dynamika masztu	14
2.3 Analiza modalna odciagu	19
2.4 Analiza modalna masztu.....	24
2.5 Stochastyczny model wiatru	29
ROZDZIAŁ 3 Sterowanie drganiami masztu	35
3.1 Schemat układu sterowania	35
3.2 Sterowalność.....	37
3.3 Obserwowalność	43
3.4 Strategia sterowania.....	45
3.5 Estymator stanu	47
3.6 Sterowanie optymalne	53
3.7 Identyfikacja parametrów masztu.....	57
ROZDZIAŁ 4 Symulacja numeryczna	61
4.1 Dane konstrukcyjne.....	61
4.2 Opis modelu MES	63
4.3 Dane dotyczące wiatru	64
4.4 Opis układu sterowania optymalnego	66
4.5 Wyniki obliczeń	67
ROZDZIAŁ 5 Wnioski końcowe.....	73
Literatura	75

Wstęp

1.1 Cel i motywacja podjęcia pracy

Celem niniejszej pracy jest komputerowa symulacja optymalnego sterowania drganiami masztów z odciągami. Problem ten łączy wiedzę z zakresu takich dyscyplin jak dynamika konstrukcji, teoria sterowania i metody numeryczne.

Maszty z odciągami, powszechnie stosowane w telewizji, radiofonii i telefonii komórkowej, stanowią grupę konstrukcji silnie narażonych na drgania. Wysokości takich konstrukcji sięgające nawet kilkuset metrów oraz ich usytuowanie na otwartych przestrzeniach, powodują, że są one poddawane działaniu silnych podmuchów wiatrów o zróżnicowanych częstościach. Dodatkowo, w okresach zimowych często zdarza się, iż maszty są oblodzone. Wpływa to na wzrost nie tylko masy konstrukcji, ale także powierzchni elementów poddanych działaniu wiatru. Wynikiem tego jest znaczne zwiększenie całkowitego obciążenia konstrukcji. Jak wskazują dane opublikowane w pracy [1], oblodzenie oraz parcie wiatru stanowią najczęstsze przyczyny awarii masztów. W niniejszej pracy zaprezentowana zostanie komputerowa symulacja sterowania optymalnego, którego zadaniem będzie minimalizacja amplitud drgań poprzecznych konstrukcji spowodowanych działaniem porywów wiatru.

Teoria sterowania optymalnego jest rozwijana od przeszło pół wieku. Jednocześnie z pojawieniem się nowoczesnych komputerów, powstało wiele metod numerycznych pozwalających na szerokie zastosowanie układów sterowania, w tym również do redukcji niekorzystnych efektów drgań maszyn i konstrukcji. Z drugiej strony znaczący rozwój elektroniki daje szerokie możliwości w

Połączenie opisanych powyżej modeli trzonu i odciągów prowadzi do zestawienia równań opisujących drgania całego masztu. Korzystając z belkowego modelu trzonu oraz stosując linearyzację równań ruchu odciagu autorzy pracy [8] przedstawiają analizę modalną masztu z odciągami.

Nowocześniejsze podejście modelowania masztów z odciągami bazujące na metodzie elementów skończonych zamieszczono w pracy [9]. W podejściu [10] odciągi masztu podzielone zostały na szereg wstępnie napiętych przestrzennych elementów prętowych. Następnie dla podzielonego na elementy odciagu autor przedstawia kształty modalne. Analiza powyższa wymaga jednak pewnego komentarza. Kolejność występowania poszczególnych modów nie jest jednakowa dla wszystkich odciągów. Korzystając z wniosków płynących z analitycznych rozważań Irvine'a należy nadmienić, iż symetryczne kształty modalne drgań odciagu w płaszczyźnie grawitacji zależą od ciężaru własnego odciagu, jego współczynnika sprężystości oraz siły naciągu. Odpowiedni dobór tych parametrów może spowodować tzw. przecięcie modalne, którego wynikiem jest przesuwanie się częstości odpowiadających symetrycznym kształtom modalnym ponad antysymetryczne.

1.2.2 Obciążenia wiatrem

Po ustaleniu kwestii modelowania dynamiki masztów z odciągami zainteresowanie wielu autorów skierowało się w stronę sprecyzowania obciążeń działających na konstrukcje ciągnowe. Spośród tych obciążeń dużo miejsca poświęcono badaniom wpływu wiatru na konstrukcje [11]. Powstają pierwsze publikacje uwzględniające stochastyczne modele fluktuacji prędkości wiatru (Davenport, Kaimal).

Wykorzystując zarówno liniowy, jak i nieliniowy model masztu z odciągami autorzy pracy [12] obliczają średniokwadratową wartość wychylenia masztu poddanego działaniu wiatru opisanego funkcją gęstości widmowej Davenporta. Obliczona wartość jest kolejno weryfikowana eksperymentalnie w tunelu wiatrowym. Badania przeprowadzone na wykonanym w skali 1:100 modelu ukazują dużą zgodność wyników obliczeń z eksperymentem.

Oddziaływanie sił wiatru modelowanych przy pomocy, zarówno spektrum Davenporta jak i Kaimala było przedmiotem zainteresowań pracy [13]. Przeprowadzając szereg symulacji autorzy analizują wpływ podmuchów wiatru na zakłócenia w przekazywaniu sygnału z anteny talerzowej o średnicy 70 metrów. W podsumowaniu pracy stwierdzono, iż pomimo dominującego udziału niskich częstości w spektrum wiatrowym możliwe jest wzbudzenie przez siły wiatru wyższych częstości drgań konstrukcji.

Oprócz wymienionych powyżej oddziaływań samego tylko wiatru, w przypadku konstrukcji ciągnowych występuje również zjawisko polegające na łącznym działaniu deszczu i wiatru. W trakcie intensywnych opadów strugi deszczu spływające wzdłuż górnej powierzchni odciagu tworzą przekrój aerodynamiczny podatny na drgania o znacznych amplitudach już nawet przy niewielkiej prędkości wiatru [14].

Na zakończenie przeglądu różnych zjawisk dynamicznych zachodzących w masztach z odciągami należy wspomnieć o rezonansie parametrycznym, który po raz pierwszy zaobserwowany został przez Bołotina [15]. Do zilustrowania tego zjawiska autor posłużył się statycznie ścisną belką poddaną dodatkowo działaniu niewielkiej siły dynamicznej. Następnie udowodnił, że wybór odpowiedniej częstości siły wymuszającej, działającej w kierunku osiowym powoduje powstawanie znacznych amplitud drgań w kierunku poprzecznym.

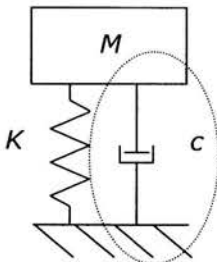
Przenosząc powyższe rozważania na przypadek konstrukcji ciągnowych zauważono [16], że gdy częstość drgań konstrukcji jest równa podwojonej częstości drgań odciagu występuje zjawisko samowzbudnych drgań odciągów powodowanych poprzez ruch wspieranej konstrukcji.

1.2.3 Pasywne tłumienie drgań

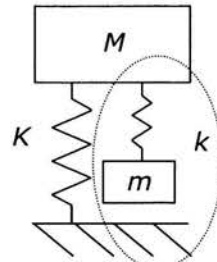
Mając na uwadze względy związane z niekorzystnym wpływem drgań na konstrukcje, zaczęto poszukiwać różnych metod tłumienia drgań. W 1974 roku w trakcie przygotowań do budowy najwyższego na świecie masztu o wysokości 640 metrów, główny projektant pisał [17] „... nie ma skutecznych sposobów, żeby zapobiec występowaniu zjawiska drgań, ale trzeba próbować zredukować je do minimum”.

Obecnie metody redukcji drgań dzieli się na trzy grupy: pasywne, aktywne i półaktywne.

Tłumik wiskotyczny



Tłumik absorbcyjny



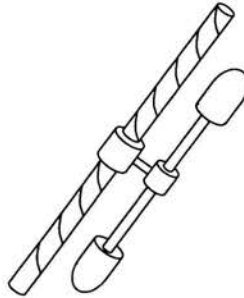
Rysunek 1-2 Pasywne układy redukcji drgań

Dwa podstawowe elementy pasywnych układów sterowania drganiami to: tłumik wiskotyczny i tłumik absorbcyjny.

Autor pracy [18] pokazuje, że dla masy M poddanej działaniu siły wymuszającej o znanej częstości p możliwe jest dobranie parametrów m oraz k , w taki sposób, iż masa ta pozostaje w spoczynku. Jest to znana zależność $p^2=k/m$. Ten bardzo prosty wynik posiada jednak ograniczone zastosowanie, gdyż w praktyce często obciążenie wymuszające zamiast w jednej znanej częstości działa w pewnym ich zakresie.

Drugim elementem stosowanym często w układach pasywnego tłumienia drgań jest tłumik wiskotyczny. Poprzez zastosowanie takich tłumików uzyskuje się pożądaną redukcję pików w krzywych rezonansowych. Jednakże w sytuacji, gdy masa tłumionej konstrukcji ulega zmianie równocześnie zmienia się efektywność takiego układu tłumienia. W przypadku masztów z odciągami czynnikiem powodującym zmianę masy konstrukcji może być oblodzenie. Dodatkowo spadek sił napinających w odciągach przekłada się na spadek sztywności całego masztu.

W przeszłości do zredukowania drgań odciągów stosowane były tłumiki Stockbridge'a.



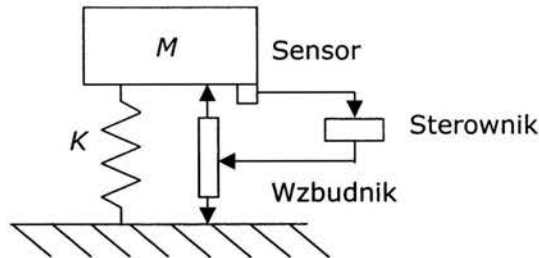
Rysunek 1-3 Tłumik Stockbridge'a

Zasada działania tłumika Stockbridge'a polegała na wzbudzeniu, w trakcie drgań odciagu, intensywnych ruchów łopatek tłumika rozpraszających w ten sposób energię poprzez wewnętrzne tarcie w odciagu.

1.2.4 Sterowanie drganiami

Chęć poprawy jakości działania układów pasywnych powodowała dalsze poszukiwania bardziej efektywnych układów redukcji drgań. W tym czasie równocześnie wraz z rozwojem technik obliczeniowych nastąpił szybki wzrost dostępnych na rynku różnego

rodzaju sensorów i aktywatorów [19]. Stąd następnie pojawił się pomysł zaczerpnięcia pewnych rozwiązań z dziedziny elektroniki i automatyki [20, 21, 22]. Wykształcił się wówczas nowy rodzaj układów tłumienia drgań określane dzisiaj jako układy aktywne.



Rysunek 1-4 Aktywny układ tłumienia drgań

Punktem wyjścia do późniejszych badań stała się zasada sprzężenia zwrotnego [23]. W pracy [24] do projektowania układów sterowania drganiami zaproponowane zostają metody wykorzystujące dziedzinę częstotliwości.

W trakcie rozważań na temat różnych strategii sterowania podejmowano próby równoczesnego poszukiwania rozwiązań optymalnych. Jedną z pierwszych obszernych prac dotyczących teorii sterowania optymalnego [25] obejmowała rozwiązania problemów: minimalno-czasowego, minimalnego zużycia paliwa oraz równoczesnej minimalizacji amplitud stanu i zużycia energii sterowania. W przypadku tłumienia drgań dużym powodzeniem cieszyło się zwłaszcza ostatnie z wymienionych rozwiązań, gdzie po przyjęciu kwadratowego kryterium jakości otrzymano liniową strategię sterowania. Mankamentem powyższych metod był fakt, iż do praktycznej realizacji wymagały one pomiaru wszystkich wielkości tj. przemieszczeń i prędkości charakteryzujących rozpatrywany układ dynamiczny. Niestety konstrukcje sprężyste, posiadające teoretycznie nieskończoną a przy dokładnej dyskretyzacji MES bardzo dużą liczbę stopni swobody sprawiały, iż zastosowanie technik sterowania ze sprzężeniem zwrotnym od pełnego wektora stanu było trudne do realizacji. Wkrótce zatem zaczęły pojawiać się prace [26, 27] proponujące pomysł zainicjowany przez Luenbergera a następnie uogólniony przez Kalmana polegający na wprowadzeniu obserwatora. Zadaniem tego dodatkowego wirtualnego układu dynamicznego było odtworzenie pełnego stanu konstrukcji na podstawie pomiaru niewielkiego podzbioru wektora stanu.

Po wprowadzeniu idei obserwatora możliwa stała się implementacja sterowania ze sprzężeniem zwrotnym teraz już nie od rzeczywistego wektora stanu, lecz jego estymaty. Ze względu jednak na dużą liczbę stopni swobody modelu MES konstruowanie sterownika dla takiego modelu byłoby dosyć złożone i kosztowne.

Kolejną trudność stanowił długi czas obliczeń wymagany przy symulacjach numerycznych. Do zmniejszenia wymiaru zadania a co za tym idzie i czasochłonności obliczeń zaproponowano zatem redukcję modalną [28]. Technika ta dobrze spełniająca swoje zadanie dla układów o pętli otwartej tzn. przy obciążeniu niezależnym od aktualnej deformacji konstrukcji, po przejściu do układów ze sprzężeniem zwrotnym powodowała pojawienie się jednak pewnych trudności. Efekt pominięcia wyższych częstotliwości pierwszy raz odnotowany został w pracy [29] i od tego momentu w literaturze anglosaskiej występuje pod nazwą „spillover”. Konstrukcja o zredukowanym modelu, użytym tylko do zaprojektowania układu sterowania, w rzeczywistości posiada jednak dynamikę opisaną przez wszystkie częstotliwości. Wielkości pomiarowe zawierają zatem, zarówno informację o uwzględnionych jak i pominiętych częstotliwościach. Analogicznie sytuacja przedstawia się dla wzbudników, gdzie siły sterujące oddziałują na całą dynamikę masztu. Balas pokazał, że fakt ten może spowodować destabilizację układu sterowania przewidzianego jako stabilny dla zredukowanego modelu konstrukcji.

W celu uniknięcia tego problemu ten sam autor w kolejnej pracy [30] zaproponował zamiast układu ze sprzężeniem zwrotnym od estymowanego wektora stanu zdecentralizowany układ sterowania, w którym sprzężenie odbywa się bezpośrednio od wielkości mierzonych bez korzystania z obserwatora. Dodatkowo Balas wskazał, że kolokacja czujników i wzbudników prowadzi do układu sterowania, który odporny jest na „spillover”. W proponowanym podejściu jednak nie wspomniano już nic o optymalności rozwiązania.

Naturalną konsekwencją tego faktu było ponowne poszukiwanie rozwiązań optymalnych tym razem jednak dla sprzężenia zwrotnego od wyjścia [31]. Joshi w pracy [32] pokazuje, iż możliwe jest dobranie kwadratowego wskaźnika jakości, przy którym sterowanie z bezpośrednim sprzężeniem od prędkości pozostaje optymalne. Wybór ten jednak nie jest dowolny stąd w literaturze pojawiają się dalsze pomysły na wyeliminowanie wspomnianej niestabilności, przy jednoczesnym zachowaniu optymalności względem dowolnie wybranych macierzy wagowych.

Równocześnie z poszukiwaniem optymalnej macierzy wzmocnienia minimalizującej zużycie energii potrzebnej do sterowania, zaczęto zastanawiać się nad optymalnym rozmieszczeniem sił sterujących i czujników pomiarowych. Związanymi z tym faktem, pojęciami istniejącymi już wcześniej w teorii sterowania, są odpowiednio sterowalność i obserwowalność. Ogólnie można powiedzieć, że podczas, gdy pierwsze z tych pojęć miało określać wpływ sterowań na stan układu, tak zadaniem drugiego była ocena zdolności do odtworzenia stanu układu na podstawie pomiarów. Jak już wspomniano pojęcia te znane były przed wprowadzeniem teorii sterowania do układów sprzężystych jednak ze względu na

specyficzny charakter tych ostatnich wymagały pewnej specjalizacji. Przede wszystkim chodziło o ilościową ocenę sterowalności i obserwowalności co pierwotnie uzyskano dzięki podejściu grammiczowemu [33]. W pracy [34] zaproponowano natomiast do oceny sterowalności tzn. modalne indeksy sterowalności. Dalsze pomysły z tej tematyki zawierają prace Skeltona [35], Lauba [36] oraz Friedlanda [37].

Z początkiem lat 80-tych następuje znaczny wzrost zainteresowania sterowaniem aktywnym. Powstaje szereg prac [38, 39] proponujących rozmaite zastosowania z dziedziny inżynierii lądowej jak też tłumienia drgań lekkich konstrukcji lotniczych. Wprowadzane zostają nowe strategie sterowania oparte na minimalizacji norm H_2 oraz H_∞ , gdzie w przypadku układów drgających pierwsza oznacza minimalizację średniego kwadratu amplitud drgań, natomiast druga charakteryzuje maksymalną amplitudę drgań odpowiadającą częstości rezonansowej [40]. Prowadzone są badania nad najkorzystniejszym modelem układu sterowania poprzez dobór odpowiednich współrzędnych stanu (węzłowe, modalne, zbalansowane) jak i strategii sterowania [41].

Na początku ubiegłej dekady obserwowany jest wzrost zainteresowania wprowadzaniem do układu sterowania coraz bardziej złożonych modeli obciążenia. W pracy [42] w celu zredukowania drgań 60-cio kondygnacyjnego budynku wykorzystany zostaje sterownik zawierający w sobie informacje o skorelowanym przestrzennie modelu fluktuacji prędkości wiatru. Autorzy dokonują także porównania efektywności różnych mechanizmów sterujących.

1.2.5 Sterowanie drganiami konstrukcji ciągnowych

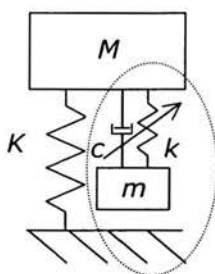
W połowie lat 90-tych pojawiają się próby sterowania drganiami konstrukcji ciągnowych [43]. Pomysł zapoczątkowany przez Fuijino, kontynuowany jest następnie przez zespół naukowców z Laboratorium Aktywnych Konstrukcji w Belgii. Tam też powstaje projekt [44] proponujący zdecentralizowany algorytm sterowania drganiami mostów podwieszanych. Zasadniczą ideą wprowadzoną przez Achkire jest wyposażenie konstrukcji w zestaw aktywnych kabli, których zadaniem jest redukcja drgań pomostu. Ostatecznie pomysł ten doczekał się realizacji [45] i w ośrodku badawczym JRC Ispra we Włoszech przeprowadzono eksperyment potwierdzający przewidywaną jakość zaprojektowanego układu sterowania. Do eksperymentu wykorzystano 30 metrowy model jednego przęsła mostu wspartego sześcioma pasywnymi oraz dwoma aktywnymi ciągnami. Realizację sił sterowania uzyskano dzięki specjalnie skonstruowanym do tego celu siłownikom hydraulicznym.

Kolejny etap w rozwoju technik sterowania drganiami następuje po roku 2000. Wówczas to zaczynają ukazywać się prace dotyczące sterowania drganiami układów o parametrach niepewnych [46]. Rozróżnia się tutaj dwa pojęcia krzepkości układu sterowania ze względu na niepewności modelu: krzepka stabilność i krzepka jakość. Pierwsze z nich oznacza nic więcej jak tylko tyle, iż układ sterowania pozostaje stabilny dla każdej z dopuszczalnej konfiguracji niepewnych parametrów. Drugie dodatkowo daje gwarancję, że jakość sterowania nie ulegnie drastycznemu pogorszeniu przy małej zmianie parametrów. Zastosowanie techniki krzepkiego sterowania H_∞ do tłumienia drgań ramy o niepewnej sztywności przedstawiono w pracy [47].

Kolejnym pomysłem na sterowanie układami z niepewnymi parametrami jest sterowanie adaptacyjne. Idea polega tutaj na identyfikacji w czasie rzeczywistym parametrów układu a następnie dostosowanie sterownika do zmieniających się parametrów. Ljung [48] zaproponował do tego celu, podobnie jak to było w przypadku estymatora stanu, filtr Kalmana.

Wszystkie wymienione dotychczas strategie sterowania przewidują, iż model konstrukcji, która zamierza się sterować, ma skończoną liczbę stopni swobody. Warto wspomnieć jednak, iż powstają również prace, w których podejmuje się próby sterowania konstrukcjami modelowanymi jako układy ciągłe. W pracy [49] w oparciu teorię stabilności Lapunowa zaprojektowany został sterownik, który następnie użyto do sterowania drganiami kabla.

Trzecią grupą obok wymienionych powyżej pasywnych i aktywnych układów tłumienia drgań są układy półaktywne. Charakteryzują się one tym, iż w pewnych sytuacjach mogą osiągać jakość zbliżoną do układów aktywnych zużywając jednak przy tym mniej energii.



Rysunek 1-5 Półaktywny układ tłumienia drgań

Na schemacie powyżej widać, iż układy półaktywne są w zasadzie opisanymi wcześniej tłumikami wiskotycznymi bądź absorbcyjnymi z możliwością jednak modyfikacji sztywności k i tłumienia c w trakcie drgań. Półaktywnym układem tłumienia może być zatem tłumik olejowy ze zmienną średnicą otworów.

Ostatnio duża popularnością cieszą się tłumiki wypełnione płynami magnetoreologicznymi. Modyfikacja parametrów tłumika odbywa się wówczas poprzez zmianę natężenia pola magnetycznego, które oddziałuje na płyn znajdujący się wewnątrz tłumika. Przykład zastosowania takich tłumików do redukcji drgań kabli mostów podwieszanych przedstawił Spencer w pracy [50]. Innego rodzaju półaktywny układ tłumienia wykorzystano w pracy [51]. Do zredukowania drgań lekkich konstrukcji kratowych zastosowano bowiem materiał piezoelektryczny, który powodował zmiany sił tarcia w przegubach konstrukcji.

1.3 Organizacja rozprawy

Na treść niniejszej pracy składa się pięć rozdziałów. W pierwszym rozdziale wprowadzającym, zawarto motywację skłaniającą do podjęcia tematu optymalnego sterowania drganiami masztów z odciągami, oraz przegląd literatury związanej z podejmowanym tematem.

Kolejne dwa rozdziały stanowiące część teoretyczną pracy zawierają opis metod wykorzystanych następnie przy symulacji numerycznej. I tak, rozdział 2 obejmuje sprawy związane z tworzeniem modelu dynamicznego zachowania przestrzennych masztów z odciągami. Pierwszy punkt tego rozdziału wprowadza przyjęte przy modelowaniu założenia konstrukcyjne. W kolejnym punkcie do opisu dynamiki konstrukcji wykorzystane zostają równania Lagrange'a. Następnie poprzez zastosowanie dyskretyzacji utworzony zostaje model masztu w ujęciu metody elementów skończonych. Przy użyciu MES potwierdzone zostają analityczne rozważania Irvine'a dotyczące ograniczeń z naciągiem lin odciągowych masztu. Korzystając z elementarnego modelu odciążu przedstawiony zostaje wpływ wstępnej deformacji statycznej odciążu na jego symetryczne kształty modalne. Analiza modalna całego masztu z odciągami jest przedmiotem rozważań trzeciego punktu. Wreszcie, na koniec rozdziału drugiego wprowadzony zostaje stosowany w dalszej części pracy stochastyczny model wiatru uwzględniający jego fluktuacje w czasie oraz przestrzenną korelację.

Rozdział 3 to zasadniczo opis proponowanej w pracy strategii sterowania. Na początku rozdziału przedstawiony został schemat implementacji układu sterowania, w którym redukcja drgań miałyby się odbywać poprzez sterowanie naciągiem w linach odciągowych masztu. W następnych dwóch punktach rozdziału opisane zostały zagadnienia związane ze sterowalnością i obserwowalnością proponowanego układu sterowania. Punkt czwarty jest syntetycznym opisem strategii sterowania

optymalnego bazującego na predykcji modelu, zarówno konstrukcji jak i wiatru. Wymagany do tego celu estymator analizujący na podstawie pomiaru prędkości odciągów aktualną deformację całej konstrukcji zostaje wprowadzony w punkcie piątym. Na koniec rozdziału trzeciego, wszystkie występujące wcześniej elementy układu sterowania zostają zebrane w całość, w celu wyznaczenia sterowania minimalizującego kwadratowy wskaźnik jakości.

Po zaprezentowaniu strategii sterowania drganiami masztu, w rozdziale 4 przedstawione zostają wyniki obliczeń numerycznych. Analizowany jest przykład przestrzennego masztu sterowanego sześcioma aktywnymi odciągami, gdzie zarówno trzon jak i odciąg masztu poddane są działaniu losowych podmuchów wiatru.

W ostatnim piątym rozdziale znajduje się podsumowanie całej pracy ze wskazaniem granic stosowalności proponowanej metody. Zakończenie pracy stanowi wykaz cytowanej literatury.

1.4 Nowe elementy w dziedzinie sterowania masztami zawarte w pracy

- W rozdziale 2 (punkt „Analiza modalna odciagu”) zbadano charakterystyki dynamiczne odciagu przy zmiennych siłach naciagu, ciężarze właściwym oraz sztywności co zdecydowało o przyjętym w pracy modelu.
- W rozdziale 3 (punkt „Estymator stanu”) wprowadzony został obserwator, którego zadaniem jest oszacowanie stanu konstrukcji oraz aktualnej siły wiatru działającej na maszt z odciągami.
- W punkcie „Sterowanie optymalne” do sterowania drganiami masztów wykorzystane zostało sterowanie z predykcją modelu. Predykcja ta polega na przewidywaniu na podstawie aktualnego pomiaru najbardziej prawdopodobnych przyszłych stanów konstrukcji oraz najbardziej prawdopodobnej przyszłej siły wiatru.
- W punkcie „Identyfikacja parametrów masztu” obserwator zaproponowany został również do estymacji aktualnych parametrów masztu tj. sztywności, masy i tłumienia.
- W rozdziale 4 przedstawione zostały wyniki symulacji numerycznej procesu sterowania drganiami. Obliczono ponadto modalne indeksy sterowalności dla poszczególnych kształtów modalnych masztu.

Przestrzenny model masztu

2.1 Założenia konstrukcyjne

Równania ruchu konstrukcji masztu z odciągami wprowadzone zostaną po przyjęciu następujących założeń:

- zagadnienie drgań masztu rozpatrywane jest jako zadanie przestrzenne
- trzon masztu stanowi pryzmatyczna kratownica o przekroju trójkąta równobocznego
- analizowane są drgania o małych amplitudach wokół położenia równowagi
- naprężenia występujące w całej konstrukcji masztu wraz z odciągami znajdują się w stanie sprężystym
- w trakcie drgań odciąg masztu pozostają cały czas trwania procesu w stanie napiętym
- odciąg masztu są idealnie wiotkie
- ze względu na znaczne siły napinające w odciągach w stosunku do ich ciężaru własnego, konfigurację statyczną odciagu stanowi parabola

W praktyce założenie o małych przemieszczeniach należy spełnić dla zapewnienia właściwej eksploatacji konstrukcji. Nadmierne wychylenia trzonu masztu powodują bowiem trudności w transmisji sygnału przesyłanego z urządzeń nadawczych. Polska norma dotycząca projektowania masztów radiowych dopuszcza, aby

maksymalne wychylenie trzonu masztu wynosiło 1/100 wysokości całej konstrukcji.

Druga uwaga dotyczy założenia o idealnej wiotkości odciągów. Oznacza to, że odciągi wspierające maszt są w stanie przetransmitować jedynie siły osiowe, a ściślej rozciągające. Przyjmuje się, że zarówno momenty zginające jak i siły ścinające w dowolnym punkcie odciagu wynoszą zero. W rzeczywistości odciągi posiadają oczywiście pewną niewielką sztywność na zginanie, jednak jej wielkość w stosunku do sztywności na rozciąganie jest pomijalna.

2.2 Dynamika masztu

Uwzględniając powyższe założenia konstrukcyjne, równania ruchu masztu uzyskane zostaną przy pomocy równań Lagrange'a [52].

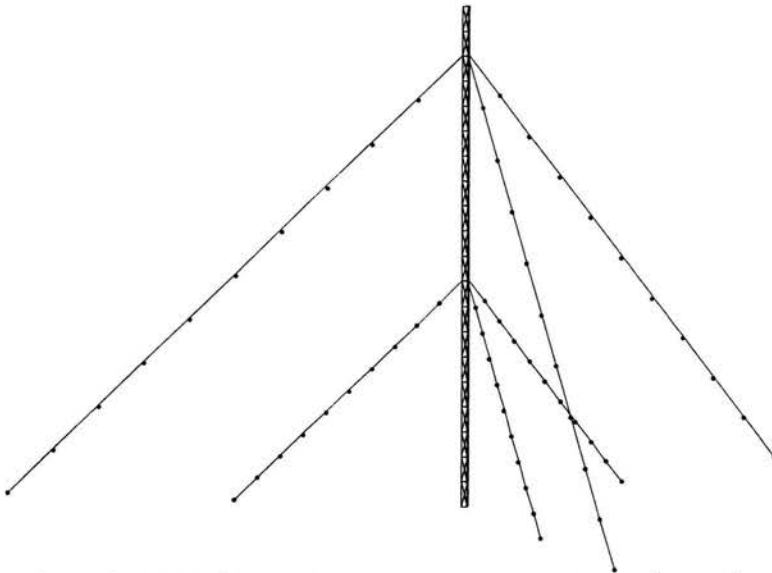
Zgodnie z powyższym ruch dowolnego układu mechanicznego opisany jest poprzez układ równań różniczkowych typu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (2.1)$$

W przedstawionym wzorze zastosowano funkcję \mathcal{L} zwaną *lagranżianem*, która określona jest poprzez różnicę energii kinetycznej i energii odkształcenia sprężystego

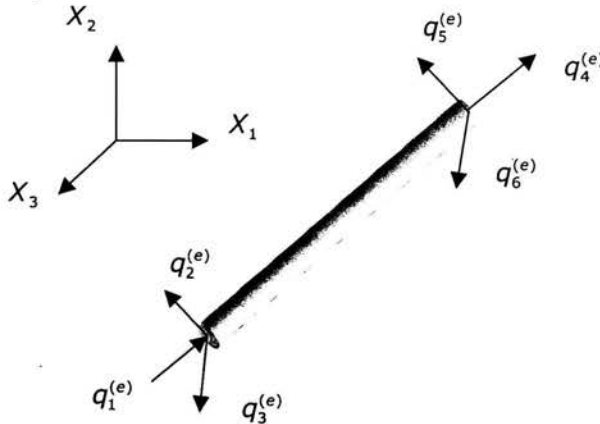
$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$$

Występujący w równaniach (2.1) wektor $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ to wektor przemieszczeń uogólnionych, natomiast wektor $\mathbf{Q} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$ to wektor sił uogólnionych.



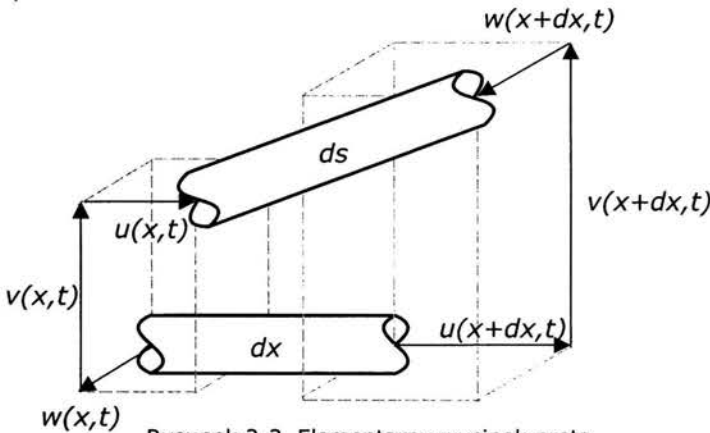
Rysunek 2-1 Dyskretyzacja masztu przy użyciu elementów skończonych

W celu określenia wyrażen na energię kinetyczną \mathcal{T} i odkształcenia sprężystego \mathcal{U} układu, konstrukcja masztu zostaje zdyskretyzowana. Dyskretyzacja zastosowana w tej pracy bazuje na powszechnie stosowanej obecnie [53] metodzie elementów skończonych (MES).



Rysunek 2-2 Przestrzenny element prętowy

Do zamodelowania pojedynczego elementu konstrukcji masztu z odciągami wykorzystany zostanie przestrzenny element prętowy o trzech stopniach swobody w każdym węźle. Element ten może być wykorzystany zarówno do trzonu masztu, którym jest jak wcześniej wspomniano konstrukcja kratownicowa, jak i do odciaгу, który w wyniku podziału stanowi łańcuch takich elementów.



Rysunek 2-3 Elementarny wycinek pręta

W przypadku masztu oprócz sztywności sprężystej, wynikającej z charakterystyki użytego materiału, mamy do czynienia również ze sztywnością powstałą wskutek wstępnego sprężenia konstrukcji poprzez odciaги. Uwzględnienie tego faktu jest istotne, dlatego też przy modelowaniu pojawić powinna się odpowiednia rozszerzona macierz sztywności.

Kluczową sprawą przy formułowaniu macierzy elementowych jest definicja odkształcenia elementarnego wycinka pręta. Na podstawie rysunku otrzymujemy, iż

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

Teraz wprowadzone zostaną znane z mechaniki klasycznej wzory na energię kinetyczną pojedynczego elementu skończonego

$$\mathcal{T}^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(x) \dot{\mathbf{u}}^{(e)T} \dot{\mathbf{u}}^{(e)} d\Omega \quad (2.2)$$

oraz energię odkształcenia sprężystego elementu

$$\mathcal{U}^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (2.3)$$

gdzie, Ω to objętość elementu, $\rho(x)$ to gęstość masy, $\mathbf{u}^{(e)}(x,t) = \{u(x,t), v(x,t), w(x,t)\}$ to wektor przemieszczenia, $\boldsymbol{\sigma}$ to wektor naprężenia, natomiast $\boldsymbol{\varepsilon}$ to wektor odkształcenia. Korzystając z założenia, iż konstrukcja znajduje się w stanie sprężystym zależność pomiędzy odkształceniem a naprężeniem przyjmuje znaną postać $\sigma_x = E\varepsilon_x$, gdzie σ_x i ε_x stanowią jedyne niezerowe składowe wektorów $\boldsymbol{\sigma}$ oraz $\boldsymbol{\varepsilon}$, odpowiednio, wreszcie E to moduł Younga.

Zaletą MES jest fakt, iż przemieszczenie $\mathbf{u}^{(e)}(x,t)$ w dowolnym punkcie elementu skończonego można przedstawić jako iloczyn przyjętych funkcji kształtu oraz przemieszczeń węzłów tego elementu

$$\mathbf{u}^{(e)}(x,t) = \mathbf{N}^{(e)}(x) \mathbf{q}^{(e)}(t) \quad (2.4)$$

gdzie

$$\mathbf{N}^{(e)}(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{x}{L} & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{x}{L} & 0 & 0 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^{(e)} \\ \mathbf{N}_2^{(e)} \\ \mathbf{N}_3^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^{(e)} \\ \mathbf{N}_G^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}^{(e)}(t) = \{q_1^{(e)}, q_2^{(e)}, q_3^{(e)}, q_4^{(e)}, q_5^{(e)}, q_6^{(e)}\}$$

Podstawiając zależność (2.4) do wzorów na energię kinetyczną (2.2) oraz energię odkształcenia sprężystego (2.3) powyższe wyrażenia można przedstawić jako funkcje współrzędnych uogólnionych

$$\mathcal{T}^{(e)} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{(e)T} \underbrace{\left[\rho A \int_0^L \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{N}^{(e)} dx \right]}_{\mathbf{M}^{(e)}} \dot{\mathbf{q}}^{(e)}$$

Otrzymana macierz $\mathbf{M}^{(e)}$ to macierz mas elementu skończonego. Po wykonaniu operacji całkowania na funkcjach kształtu ma ona jawną postać

$$\mathbf{M}^{(e)} = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Analogicznie postępując ze wzorem (2.3) na energię odkształcenia sprężystego $\mathcal{U}^{(e)}$, w którym po pominięciu nieliniowych członów otrzymuje się

$$\mathcal{U}^{(e)} = \frac{1}{2} EA \int_0^L \varepsilon_x^2 dx = \underbrace{\frac{EA}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx}_{u_1} + \underbrace{\frac{EA}{2} \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{EA}{2} \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx}_{u_2}$$

Przyjmując, że siła osiowa w elemencie może być przybliżona przez zależność $T = EA(\partial u / \partial x)$ uzyskuje się dwa człony w wyrażeniu na energię odkształcenia sprężystego

$$u_1 = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{(e)T} \underbrace{\left[EA \int_0^L \left(\frac{d\mathbf{N}_1^{(e)}}{dx} \right)^T \left(\frac{d\mathbf{N}_1^{(e)}}{dx} \right) dx \right]}_{\mathbf{K}_E^{(e)}} \mathbf{q}^{(e)}$$

gdzie, $\mathbf{K}_E^{(e)}$ to macierz sztywności sprężystej, która przyjmuje postać

$$\mathbf{K}_E^{(e)} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oraz drugi człon energii odkształcenia sprężystego

$$u_2 = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{(e)T} \underbrace{\left[T \int_0^L \left(\frac{d\mathbf{N}_G^{(e)}}{dx} \right)^T \left(\frac{d\mathbf{N}_G^{(e)}}{dx} \right) dx \right]}_{\mathbf{K}_G^{(e)}} \mathbf{q}^{(e)}$$

gdzie, $\mathbf{K}_G^{(e)}$ to macierz sztywności geometrycznej (lub macierz wstępnych naprężeń)

$$\mathbf{K}_G^{(e)} = \frac{T}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Powyższa macierz posłuży do uwzględnienia wspomnianego faktu wstępnego stanu naprężeń występujących, zarówno w odciegach jak i trzonie masztu. Geometryczny składnik macierzy sztywności jest szczególnie istotny dla odciegów, gdyż bez niego stanowiły by one mechanizm.

Po obliczeniu elementowych macierzy sztywności i mas można przystąpić do sformułowania równań ruchu dla całej konstrukcji. W tym celu należy postąpić zgodnie z kolejnymi etapami MES tj. po przemnożeniu macierzy elementowych przez macierze obrotu, a następnie przez macierze alokacji, można zsumować poszczególne macierze otrzymując zależność na energię kinetyczną i energię odkształcenia całego układu.

Energia kinetyczna układu wynosi

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}$$

natomiast energia odkształcenia układu to

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}$$

Po wykonaniu operacji różniczkowania zgodnie z (2.1) otrzymuje się następujące równania ruchu masztu z odciegami

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{Q}$$

wraz z warunkami początkowymi $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0$.

Powyższe równania ruchu wskazują, że dla układu, gdzie $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, całkowita energia jest stała. W rzeczywistych konstrukcjach występuje jednak zjawisko dysypacji energii czyli tłumienie drgań. Uwzględnienie tego faktu w równaniach ruchu odbywa się przez wprowadzenie dodatkowego członu zależnego od prędkości

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{Q}$$

gdzie macierz \mathbf{D} przyjmowana jest zwykle jako liniowo zależna od macierzy mas i sztywności $\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$. Tłumienie w tej postaci nazywane jest tłumieniem proporcjonalnym.

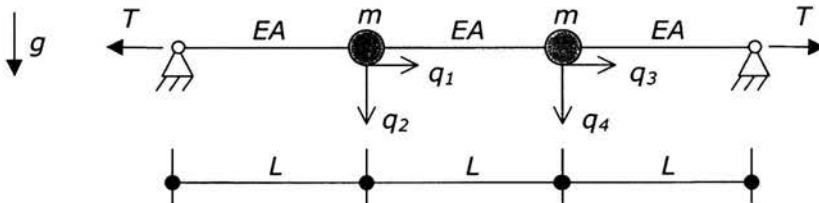
Oprócz wyżej wymienionego tłumienia konstrukcyjnego wynikającego z własności materiału, typu połączeń poszczególnych

elementów konstrukcji (spawanie, nitowanie, itp.) wyróżnić możemy inny rodzaj tłumienia, a mianowicie tłumienie aerodynamiczne. Tłumienie tego typu wynika z faktu, iż drgania konstrukcji odbywają się w ośrodku jakim jest powietrze i wpływ oporu tego ośrodka działa korzystnie na zjawisko tłumienia drgań.

2.3 Analiza modalna odciągu

Celem niniejszego punktu jest wyznaczenie częstości własnych i kształtów modalnych opisujących drgania odciągów. Przed rozwiązaniem ogólnego zagadnienia własnego odciągu rozpatrzony zostanie najprostszy możliwy model powstały w wyniku podziału odciągu na 3 elementy skończone. Ten wydawałoby się bezużyteczny dla praktycznych zastosowań model dostarcza już jednak pewnych ogólnych wniosków, które ułatwiają zrozumienie zachowania się charakterystyk dynamicznych odciągu przy zmianie jego parametrów tj. wstępnego naciągu, ciężaru własnego czy też współczynnika sprężystości.

Analizowany zatem będzie odciąg usytuowany poziomo i składający się z 3 elementów skończonych o 4 stopniach swobody. Zakłada się, iż masa skoncentrowana jest w węzłach oraz, że odciąg jest poddany działaniu siły rozciągającej T . Tak sformułowane zadanie ilustruje jedynie drgania odciągu w płaszczyźnie grawitacji, drgania wychodzące poza płaszczyznę grawitacji zostaną dodane w dalszej części tego punktu.



Rysunek 2-4 Uproszczony model odciągu

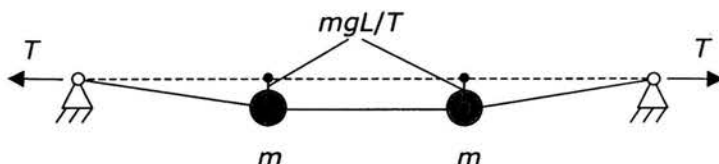
Uwzględniając fakt, iż w rzeczywistych konstrukcjach masztów ugięcie odciągu jest nieznaczne w stosunku do jego długości, zakłada się, że stan przemieszczeń można otrzymać rozwiązując liniowe równania statyki postaci

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{q}_0 = \mathbf{Q}_0$$

gdzie

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} \frac{2EA}{L} & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{2T}{L} & 0 & \frac{-T}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & \frac{2EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-T}{L} & 0 & \frac{2T}{L} \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań uzyskuje się deformację statyczną odciągu pod wpływem ciężaru własnego.



Rysunek 2-5 Deformacja statyczna odciągu

Przy gęstszym podziale odciągu współrzędne pionowe przyjmowane przez kolejne węzły opisuje parabola. W analitycznym rozwiązaniu problemu kształt ugięcia określony jest przez krzywą łańcuchową, którą jest cosinus hiperboliczny. Jak jednak wspomniano wcześniej rozważane są tutaj małe przemieszczenia, stąd też różnica pomiędzy rozwiązaniem ścisłym a rozwiązaniem uzyskanym na drodze liniowej MES jest znikoma. Poprawę rozwiązania można byłoby otrzymać poprzez zastosowanie procedury iteracyjnej jednak powyższe zagadnienie nie jest przedmiotem zainteresowań niniejszej pracy.

Uzyskane rozwiązanie dostarcza informacji o konfiguracji zajmowanej przez odcąg po uwzględnieniu obciążenia ciężarem własnym. Dla tej konfiguracji można teraz utworzyć nową macierz sztywności, która przyjmuje następującą postać

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{2EA}{L} & \frac{mg EA}{T L} & \frac{-EA}{L} & 0 \\ \frac{mg EA}{T L} & \left(\frac{mg}{T}\right)^2 \frac{EA}{L} + \frac{2T}{L} & 0 & \frac{-T}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & \frac{2EA}{L} & \frac{-mg EA}{T L} \\ 0 & \frac{-T}{L} & \frac{-mg EA}{T L} & \left(\frac{mg}{T}\right)^2 \frac{EA}{L} + \frac{2T}{L} \end{bmatrix}$$

Przy tworzeniu powyższej macierzy zastosowano kilka uproszczeń polegających głównie na pozostawieniu jedynie tych wielkości,

które mają największe znaczenie przy rozwiązywaniu. Ze względu na niewielkie wydłużenie przyjmuje się, że długości poszczególnych elementów skończonych pozostają niezmienione, cosinusy kątów są zatem w przybliżeniu równe jedności, natomiast sinusy dla małych kątów jak wiadomo równają się tangensom tychże kątów, wreszcie sztywność na rozciąganie odciagu EA jest kilka rzędów większa od siły rozciągającej T .

Ostatni krok przed właściwym przystąpieniem do wyznaczenia częstości własnych odciagu to redukcja stopni swobody. Wykorzystana tutaj technika kondensacji stopni swobody układu w dynamice konstrukcji nazywana jest redukcją Guyana. Niech zatem równania ruchu odciagu zostaną rozdzielone na dwie części odpowiadające odpowiednio dwóm ortogonalnym kierunkom ruchu układu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_u \\ \ddot{\mathbf{q}}_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{uv} \\ \mathbf{K}_{uv}^T & \mathbf{K}_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_u \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

gdzie \mathbf{q}_u to wektor przemieszczeń w kierunku poziomym, natomiast \mathbf{q}_v to wektor przemieszczeń w kierunku pionowym.

Na podstawie analizy modalnej idealnie napiętej, nieważkiej struny wiadomo, że kształty modalne odpowiadające podłużnym i poprzecznym drganiom są rozprzężone. Sytuacja ta zmienia się z teoretycznego punktu widzenia, gdy uwzględni się wstępne ugięcie jednak obliczenia numeryczne ukazują słabą dynamiczną zależność drgań w ortogonalnych kierunkach. Wynika stąd, że przy drganiach poprzecznych wpływ sił bezwładności na stopnie swobody odpowiadające kierunkowi podłużnemu jest mały, dlatego też dopuszczalne jest, aby wyrazić podłużne stopnie swobody poprzez poprzeczne wykorzystując kondensację statyczną. Matematycznie całość polega na wyzerowaniu odpowiedniego bloku w macierzy mas

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_u \\ \ddot{\mathbf{q}}_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{uv} \\ \mathbf{K}_{uv}^T & \mathbf{K}_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_u \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

skąd wynika następująca zależność

$$\mathbf{K}_{uu}\mathbf{q}_u + \mathbf{K}_{uv}\mathbf{q}_v = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}_u = -\mathbf{K}_{uu}^{-1}\mathbf{K}_{uv}\mathbf{q}_v$$

Ostatecznie zredukowane równania ruchu przyjmują postać

$$\underbrace{\mathbf{M}_v}_{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}}_v + \underbrace{(\mathbf{K}_{vv} - \mathbf{K}_{uv}^T \mathbf{K}_{uu}^{-1} \mathbf{K}_{uv})}_{\mathbf{K}} \mathbf{q}_v = \mathbf{0}$$

Przedstawione równania można uzyskać również bez zerowania macierzy \mathbf{M}_u stosując do pełnego układu przekształcenie postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_u \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{uv}^{-1}\mathbf{K}_{uu} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{q}_v$$

wówczas zredukowaną macierz mas otrzymuje się z następującej zależności

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{uv}^T\mathbf{K}_{uu}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{uv}^{-1}\mathbf{K}_{uu} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

co prowadzi do

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_v + \mathbf{K}_{uv}^T\mathbf{K}_{uu}^{-1}\mathbf{M}_u\mathbf{K}_{uv}^{-1}\mathbf{K}_{uv}$$

Prawy składnik powyższej sumy macierzowej jest mały i bez przyjmowania $\mathbf{M}_u = \mathbf{0}$ może zostać pominięty jako mający nieznaczny wpływ na końcową postać $\hat{\mathbf{M}}$.

Dalsze postępowanie przebiega w sposób typowy dla analizy modalnej to znaczy po obliczeniu wyznacznika dynamicznej zredukowanej macierzy sztywności o postaci

$$\mathbf{K}_{dyn} = \hat{\mathbf{K}} - \omega^2\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\left(\frac{mg}{T}\right)^2\frac{EA}{L} + \frac{2T}{L} - \omega^2m & \frac{1}{3}\left(\frac{mg}{T}\right)^2\frac{EA}{L} - \frac{T}{L} \\ \frac{1}{3}\left(\frac{mg}{T}\right)^2\frac{EA}{L} - \frac{T}{L} & \frac{1}{3}\left(\frac{mg}{T}\right)^2\frac{EA}{L} + \frac{2T}{L} - \omega^2m \end{bmatrix}$$

otrzymuje się następujące równanie charakterystyczne

$$\left[\frac{1}{3}\left(\frac{mg}{T}\right)^2\frac{EA}{L} + \frac{2T}{L} - \omega^2m \right]^2 = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{mg}{T}\right)^2\frac{EA}{L} - \frac{T}{L} \right]^2$$

Istnieją dwa rozwiązania powyższego równania

$$\omega_1^2 = \frac{3T}{mL}$$

oraz

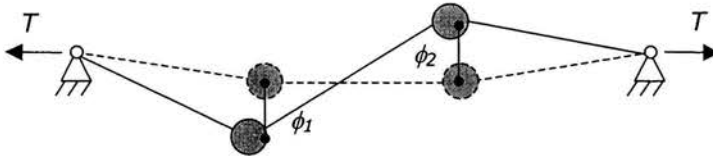
$$\omega_2^2 = \frac{T}{mL} \left[\frac{2}{3}\left(\frac{mg}{T}\right)^2\frac{EA}{T} + 1 \right] = \frac{T}{mL} \left[\frac{2}{3}\lambda^2 + 1 \right]$$

2.3. Analiza modalna odciaǳu

Pierwszej częstości odpowiada wektor własny, którego elementy spełniają zależność

$$\phi_1^{(1)} = -\phi_2^{(1)}$$

jest to tzw. antysymetryczny kształt modalny, którego częstość zależy tylko od T/mL (analogia do drgań struny).

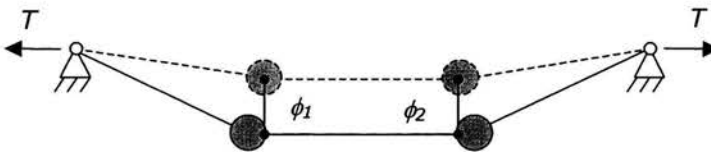


Rysunek 2-6 Antysymetryczny kształt modalny

Druga częstość własna prowadzi do warunku

$$\phi_1^{(2)} = \phi_2^{(2)}$$

czyli symetrycznego kształtu modalnego.

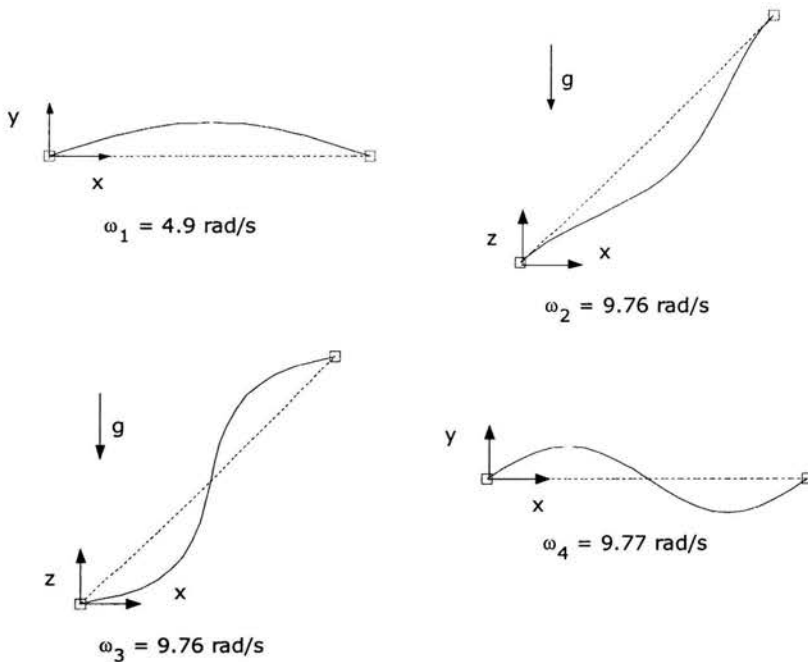


Rysunek 2-7 Symetryczny kształt modalny

Różnica w stosunku do symetrycznych drgań struny jest zawarta w parametrze λ^2 znanym jako parametr Irvine'a a objawia się ona, zarówno w częstości drgań jak i kształcie modalnym. Co ciekawsze okazuje się, że parametr ten decyduje o tym, która z wyznaczonych częstości jest niższa to znaczy czy jest to częstość odpowiadająca symetrycznej czy antysymetrycznej postaci drgań. Dla słabo napiętych odciaǳów pierwszym dominującym kształtem staje się kształt antysymetryczny. Wynika to z faktu, iż znacznie łatwiej „rozkołysać” taki odciaǳ niż go rozciągnąć jak wynikałoby z symetrycznej postaci drgań. Powyższe wnioski mają charakter ogólny i przesuwanie się kształtów symetrycznych nad antysymetryczne występuje również dla wyższych częstości. Wyczerpująca analiza tego zjawiska znajduje się w pracy [54].

Po wyznaczeniu rozwiązania dla zredukowanego zagadnienia własnego przemieszczenia pominiętych stopni swobody wyznacza się z wprowadzonej wcześniej zależności

$$\mathbf{q}_u = -\mathbf{K}_{uu}^{-1} \mathbf{K}_{uv} \mathbf{q}_v$$



Rysunek 2-8 Kształty modalne odciągu nachylonego do poziomu

Jak wspomniano na początku tego punktu oprócz drgań w płaszczyźnie grawitacji występują również drgania odciągów w kierunku prostopadłym do płaszczyzny grawitacji. Okazuje się jednak, że drgania te wykazują pełną analogię do drgań struny co zostało zilustrowane kolejnym przykładem obliczeniowym. Tym razem jest to odciąg nachylony do poziomu pod kątem 45° podzielony na 20 przestrzennych elementów skończonych o 3 stopniach swobody w każdym węźle.

W powyższym przykładzie parametr Irvine'a został dobrany tak, aby zilustrować efekt zrównania się dwóch pierwszych częstości drgań w płaszczyźnie grawitacji (Rysunek 2-8). Częstości własne drgań odciągu z płaszczyzny grawitacji równają się kolejnym częstościom własnym struny.

2.4 Analiza modalna masztu

Drgania swobodne odciągów były przedmiotem rozważań poprzedniego punktu. W tym punkcie dotychczasowe wyniki uzupełnione zostaną o drgania trzonu masztu. Jak wcześniej wspomniano, zarówno odciągi jak i trzon modelowane są przy użyciu tego samego elementu skończonego jednak jako całe

elementy konstrukcyjne wymagają odrębnego traktowania. Do utworzenia globalnej macierzy sztywności masztu wraz z odciągami zastosować można następującą procedurę:

- Przyłożyć do trzonu masztu wstępne obciążenie powodowane przez siły napinające odciągi w celu wyznaczenia rozkładu sił wewnętrznych w poszczególnych prętach trzonu. Uwzględnienie tego faktu jest istotne, gdyż siły napinające odciągi ściskają trzon stąd też należy spodziewać się spadku częstości drgań całego układu [55]
- Po wyznaczeniu wielkości sił wewnętrznych w trzonie utworzyć macierz sztywności geometrycznej trzonu
- Zsumować odpowiednio powiększone macierze mas i sztywności odciągów oraz trzonu otrzymując w ten sposób globalne macierze problemu dla całego układu

Po utworzeniu globalnych macierzy sztywności i mas można przystąpić do rozwiązania zagadnienia własnego masztu z odciągami

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M})\varphi_i = \mathbf{0} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

gdzie φ_i to i -ty wektor własny, λ_i to i -ta wartość własna, natomiast n jest liczbą stopni swobody układu.

Rozwiązanie uogólnionego problemu własnego postaci

$$\mathbf{K}\varphi_i = \lambda_i \mathbf{M}\varphi_i \quad \text{gdzie } \lambda_i = \omega_i^2$$

uzyskiwane jest zwykle przy użyciu algorytmów numerycznych. Ze względu na fakt, iż macierz mas masztu nie jest osobiwa możliwe jest sprowadzenie uogólnionego problemu własnego do postaci standardowej

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\varphi_i = \lambda_i \varphi_i$$

Poprzez takie sprowadzenie problemu do standardowego zagadnienia własnego utracona zostaje jednak symetria zadania. Z drugiej strony szereg algorytmów numerycznych efektywnie rozwiązuje zagadnienie własne w postaci symetrycznej.

Zastosowanie faktoryzacji Cholesky'iego tj. rozkładu macierzy mas na dwie macierze trójkątne pozwala zachować symetrię również dla standardowego zagadnienia własnego. Otrzymuje się wówczas

$$\mathbf{K}\Phi = \mathbf{L}\mathbf{L}^T\Phi\Lambda$$

gdzie $\Phi = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_n]$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Wprowadzając teraz transformację postaci

$$\Psi = \mathbf{L}^T\Phi$$

oraz mnożąc lewostronnie zagadnienie własne przez \mathbf{L}^{-1} uzyskuje się

$$\underbrace{\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{L}^{-T}}_{\tilde{\mathbf{K}}}\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Lambda}$$

Widać stąd, że macierz $\tilde{\mathbf{K}}$ jest symetryczna i dodatnio określona, a zatem wektory własne $\boldsymbol{\Psi}$ tej macierzy są ortogonalne i mogą być znormalizowane jako

$$\boldsymbol{\Psi}^T\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{I}$$

Z powyższej zależności wynikają dwie własności bardzo często stosowane w dynamice konstrukcji, a mianowicie

$$\boldsymbol{\Psi}^T\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{L}\mathbf{L}^T\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I}$$

oraz

$$\boldsymbol{\Psi}^T\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{L}^{-T}\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{L}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{L}^{-T}\mathbf{L}^T\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Lambda}$$

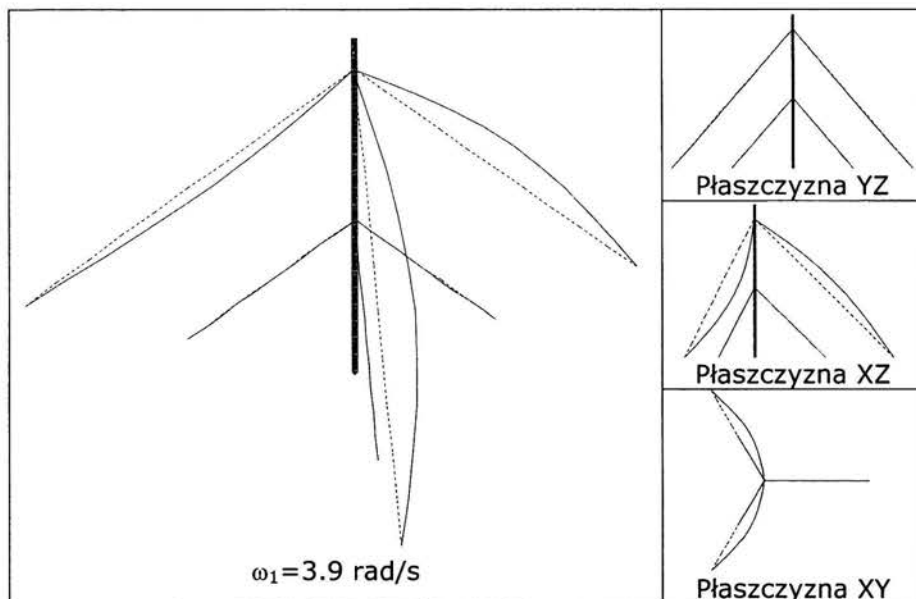
Powyższe własności stanowią, iż równania ruchu masztu z odciągami mogą zostać rozprzęgnięte na układ n – niezależnych równań, przy założeniu jednak, że macierz tłumienia jest proporcjonalna do macierzy mas i macierzy sztywności.

W przypadku obliczeń numerycznych ten znany fakt, należy uzupełnić jednak pewnym komentarzem. Otóż, przestrzenne konstrukcje do jakich należą maszty z odciągami posiadają wielokrotne wartości własne tzn. dla jednej częstości drgań może zachodzić kilka różnych postaci drgań. Algorytmy numeryczne stosowane w wielu programach obliczeniowych natomiast wyznaczają wektory własne nie sprawdzając powyższych własności. W takiej sytuacji zachodzić może potrzeba dodatkowej ortogonalizacji wektorów własnych odpowiadającej wielokrotnej wartości własnej.

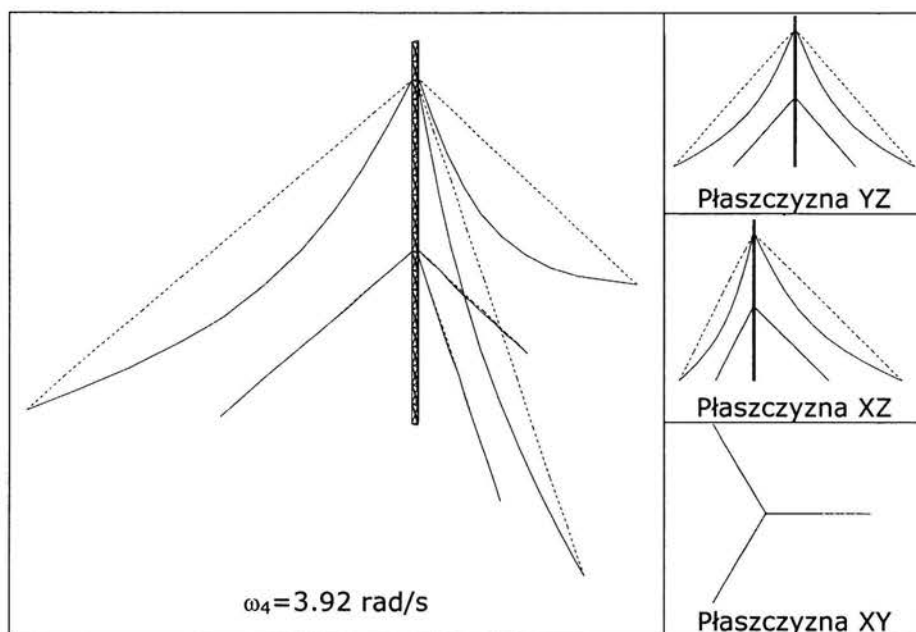
Można zadać teraz pytanie o dynamiczną interakcję pomiędzy odciągami a trzonem. Okazuje się, że dla masztów z silnie napiętymi odciągami, które dodatkowo charakteryzują się nieznaczną masą własną w stosunku do masy całej konstrukcji, interakcja ta jest również nieznaczna. Ponownie zatem można byłoby zredukować liczbę stopni swobody odciagu, którego działanie sprowadzałoby się wówczas do pręta. Podobnie sytuacja wygląda kiedy rozważane są stosunkowo sztywne trzony przy słabo napiętych odciągach, wówczas jako kilka pierwszych kształtów modalnych otrzymuje się lokalne drgania odciągów przy nieruchomym trzonie.

Najbardziej interesujący zatem przypadek występuje wówczas, gdy dynamiczne własności obu elementów są zbliżone. Kształty modalne odpowiadające takiej sytuacji przedstawiono na poniższych rysunkach:

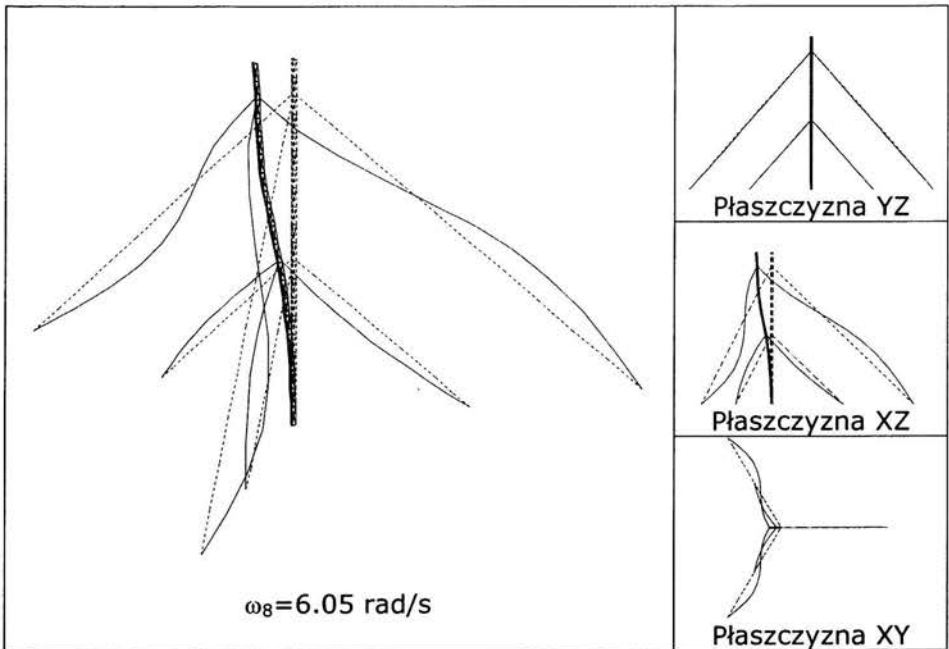
2.4. Analiza modalna masztu



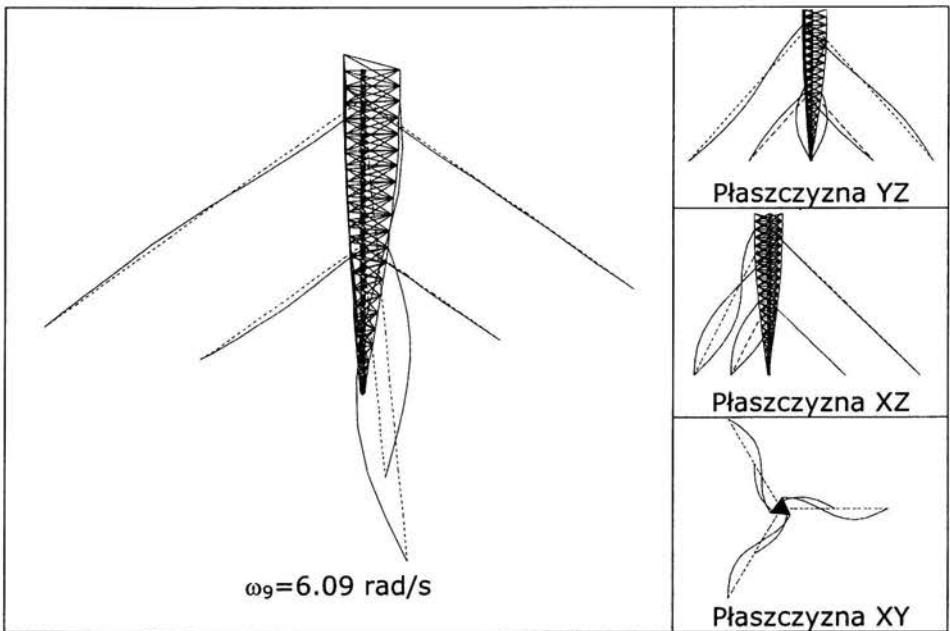
Rysunek 2-9 Pierwszy kształt modalny masztu



Rysunek 2-10 Czwarty kształt modalny masztu



Rysunek 2-11 Ósmy kształt modalny masztu



Rysunek 2-12 Dziewiąty kształt modalny masztu

2.5 Stochastyczny model wiatru

Konstrukcje masztów z ociągami poddane są działaniu różnego rodzaju obciążeń do których zalicza się wstępne sprężenie, oblodzenie, czy też oddziaływanie wiatru. W wielu zagadnieniach inżynierskich działanie wiatru traktowane jest jako obciążenie statyczne. Istnieje jednak szeroka grupa wiotkich konstrukcji, w których porywy wiatru mogą wywołać drgania o znacznych amplitudach, skracając tym samym czas użytkowania obiektu. Jednym z przykładów nie docenienia dynamicznych oddziaływań wiatru była awaria mostu wiszącego w mieście Tacoma w Stanach Zjednoczonych. Wydarzenie miało miejsce w 1940 roku a jego bezpośrednią przyczyną było działanie sił wiatru o niewielkich co prawda amplitudach jednak o częstościach pokrywających się z częstościami rezonansowymi konstrukcji.

W masztach z ociągami obserwuje się cały szereg zjawisk powodowanych działaniem porywów wiatru, spośród nich wymienić można chociażby drgania galopujące ociągów czy też drgania wywoływane odrywaniem się wirów powietrznych von Karmana. Dodatkowo działanie porywów wiatru ma charakter losowy, stąd też przy modelowaniu tego zjawiska wykorzystuje się teorię procesów stochastycznych.

Matematyczny opis siły wiatru działającej w określonym punkcie konstrukcji przedstawia się następująco:

$$F(z, t) = \frac{1}{2} \rho_a C_d A_e [v(z, t) - \dot{q}(z, t)]^2 \quad (2.5)$$

gdzie

ρ_a	- gęstość powietrza $\rho = 1.226 \text{ kg/m}^3$
C_d	- współczynnik parcia
A_e	- pole ekspozycji m^2
$v(z, t)$	- prędkość wiatru w rozpatrywanym punkcie
$\dot{q}(z, t)$	- prędkość konstrukcji w punkcie

Występującą w powyższej zależności prędkość wiatru $v(z, t)$ dogodnie jest przedstawić jako sumę prędkości średniej $\bar{v}(z)$ i losowych fluktuacji prędkości $\tilde{v}(z, t)$ czyli $v(z, t) = \bar{v}(z) + \tilde{v}(z, t)$. Podstawiając do wzoru (2.5) zaproponowaną dekompozycję prędkości wiatru na wartość średnią i fluktuacje, siłę działania wiatru zapisać można jako

$$F(z, t) = \frac{1}{2} \rho_a C_d A_e [\bar{v}^2(z) + 2\bar{v}(z)\tilde{v}(z, t) + \tilde{v}^2(z, t) + \\ - 2\bar{v}(z)\dot{q}(z, t) - 2\tilde{v}(z, t)\dot{q}(z, t) + \dot{q}^2(z, t)]$$

W rzeczywistości średnia prędkość wiatru $\bar{v}(z)$ jest znacznie większa od fluktuacji prędkości $\tilde{v}(z, t)$ oraz prędkości w rozpatrywanym punkcie konstrukcji $\dot{q}(z, t)$ stąd powyższą zależność można zredukować do następującej postaci

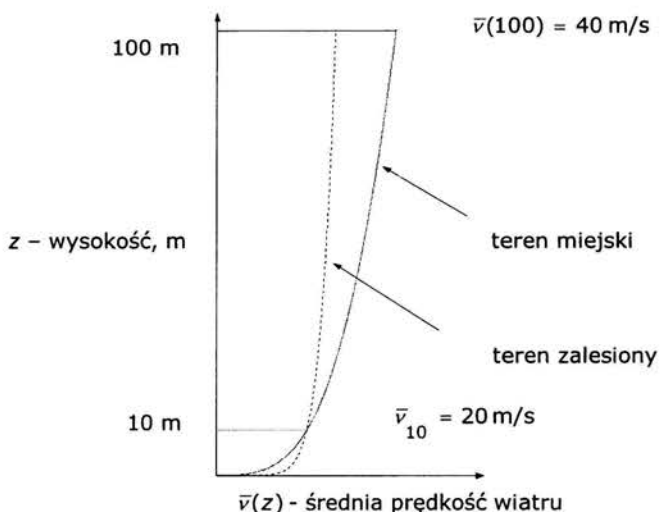
$$F(z, t) = \underbrace{\frac{1}{2} \rho_a C_d A_e \bar{v}^2(z)}_{F_{stat}(z)} + \underbrace{\rho_a C_d A_e \bar{v}(z) \tilde{v}(z, t)}_{F_{dyn}(z, t)} - \underbrace{\rho_a C_d A_e \bar{v}(z) \dot{q}(z, t)}_{c_a}$$

Ostatecznie pozostają trzy człony, gdzie $F_{stat}(z)$ to siła statyczna zależna od kwadratu średniej prędkości wiatru, $F_{dyn}(z, t)$ to siła dynamiczna zależna od iloczynu średniej prędkości wiatru i jego fluktuacji, wreszcie c_a to współczynnik tłumienia aerodynamicznego. Uwzględnienie ostatniego członu odbywa się zwykle po lewej stronie równań ruchu jako dodatkowy składnik macierzy tłumienia układu [56].

Jak wynika z wprowadzonych powyżej zależności do wyznaczenia siły wywoływanej parciem wiatru niezbędna jest znajomość średniej prędkości wiatru oraz fluktuacji prędkości wiatru. Zgodnie z danymi pomiarowymi przyjmuje się, iż wartość średnia prędkości wiatru $\bar{v}(z)$ nie zależy od czasu (stacjonarny proces losowy). Do wyznaczenia rozkładu średniej prędkości wiatru wraz ze wzrostem wysokości posłużyć może wzór empiryczny postaci

$$\bar{v}(z) = \bar{v}_{10} \left(\frac{z}{10} \right)^\alpha$$

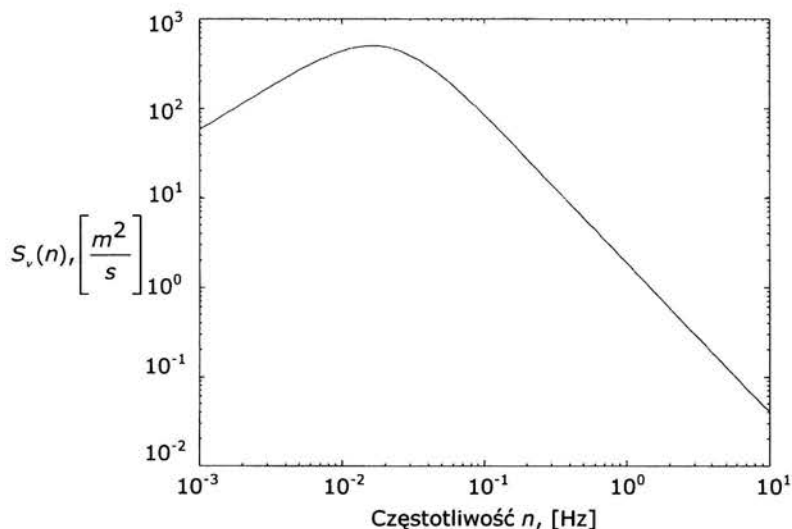
gdzie \bar{v}_{10} to średnia prędkość wiatru mierzona 10m nad poziomem terenu, natomiast α to współczynnik zależny od rodzaju terenu i tak $\alpha=0.12$ dla terenów z niską zabudową, $\alpha=0.3$ dla miast ze średnią zabudową ponad 15m.



Rysunek 2-13 Profil średniej prędkości wiatru

Fluktuacje prędkości wiatru $\tilde{v}(z, t)$ scharakteryzowane są w dziedzinie częstotliwości przez funkcję gęstości widmowej. Istnieje

kilka różnych zależności określających funkcję gęstości widmowej, najczęściej stosowane są jednak dwie funkcje.



Rysunek 2-14 Funkcja gęstości widmowej Davenporta

Pierwszą z nich jest funkcja Davenporta [57]

$$S_v(n) = \frac{4v_*^2 f^2(n)}{n[1 + f^2(n)]^{4/3}} \quad f(n) = \frac{1200n}{\bar{v}_{10}}$$

gdzie $v_* = \bar{v}_{10} \sqrt{\kappa}$, natomiast κ to współczynnik chropowatości terenu i tak $\kappa = 28 \div 30 \cdot 10^{-3}$ dla terenów zalesionych, $\kappa = 20 \div 25 \cdot 10^{-3}$ dla dużych miast, wreszcie n to częstotliwość, Hz. Druga ze wspomnianych funkcji gęstości widmowej to funkcja Kaimala

$$S_v(n, z) = \frac{200v_*^2 f(n, z)}{n[1 + 50f(n, z)]^{5/3}} \quad f(n, z) = \frac{zn}{\bar{v}(z)}$$

Zaletą funkcji gęstości widmowej Kaimala jest fakt, iż uwzględnia ona wpływ wysokości na fluktuację prędkości wiatru.

Przedstawiony opis fluktuacji prędkości wiatru traktuje oddziaływanie wiatru w każdym punkcie niezależnie od pozostałych. Uwzględnienie fluktuacji prędkości wiatru w kilku punktach wymaga zamiast jednej funkcji gęstości widmowej analizowanie całej macierzy gęstości widmowej $S_v(n)$.

Zakładając wzdłuż wysokości konstrukcji kilka różnych punktów, na które oddziałują fluktuacje wiatru macierz gęstości widmowej $\mathbf{S}_v(n)$ przyjmuje postać

$$\mathbf{S}_v(n) = \begin{bmatrix} S_{11}^v(n) & S_{12}^v(n) & \dots & S_{1m}^v(n) \\ S_{21}^v(n) & S_{22}^v(n) & \dots & S_{2m}^v(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m1}^v(n) & S_{m2}^v(n) & \dots & S_{mm}^v(n) \end{bmatrix}$$

Elementy macierzy $\mathbf{S}_v(n)$ znajdujące się na głównej przekątnej to funkcje gęstości widmowej wyznaczone dla kolejnych punktów czyli

$$S_{kk}^v(n) = S_v(n, z_k)$$

Elementy znajdujące się natomiast poza główną przekątną wyznacza się z następującej zależności

$$S_{kl}^v(n) = \sqrt{S_{ll}^v(n)S_{kk}^v(n)} e^{-\phi} \quad \phi = \frac{2nC_z|z_l - z_k|}{\bar{v}(z_l) + \bar{v}(z_k)} \quad C_z = 10$$

Tym samym wprowadzając macierz gęstości widmowej uwzględniona została przestrzenna korelacja fluktuacji prędkości wiatru.

Znając rozkład średniej prędkości wiatru i jego fluktuacji ze wzrostem wysokości można przystąpić do wygenerowania próbki danych symulującej zachowanie porywów wiatru. W tym celu wprowadza się liniowy stacjonarny układ dynamiczny, który poddany na wejściu działaniu czysto losowej sekwencji danych w odpowiedzi posiada funkcję gęstości widmowej wyjścia równą jednej z przedstawionych wcześniej funkcji Davenporta bądź Kaimala.

Poszukiwany jest zatem układ we współrzędnych stanu postaci

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_w(t) = \mathbf{A}_w \mathbf{x}_w(t) + \mathbf{B}_w \mathbf{w}(t) \\ v(t) = \mathbf{C}_w \mathbf{x}_w(t) \end{cases}$$

o funkcji przejścia wynoszącej

$$\mathbf{H}_w(s) = \mathbf{C}_w (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_w)^{-1} \mathbf{B}_w$$

i posiadający macierz gęstości widmowej wyjścia równą $\mathbf{S}_v(n)$.

Na podstawie zależności wejściowo-wyjściowej układu

$$v(j\varpi) = \mathbf{H}_w(j\varpi) \mathbf{w}(j\varpi) \quad \varpi = 2\pi n$$

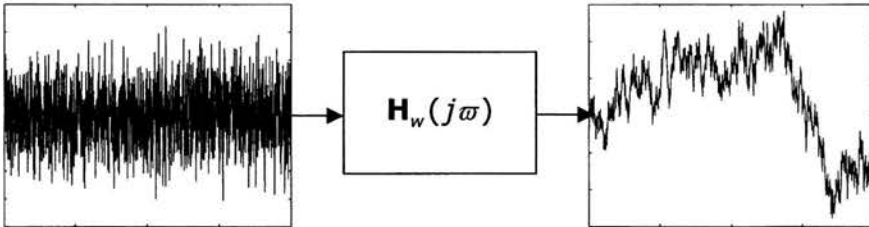
można dla rozpatrywanego układu obliczyć macierz gęstości widmowej

$$\mathbf{S}_v(\varpi) = \mathbf{H}_w(j\varpi) \mathbf{S}_w(\varpi) \overline{\mathbf{H}}_w^T(j\varpi)$$

Widać stąd, że wybranie czysto losowej próbki danych $\mathbf{w}(t)$ tak, aby posiadała jednostkową macierz gęstości widmowej $\mathbf{S}_w(\omega) = \mathbf{I}$ prowadzi do zadania znalezienia takiej funkcji przejścia $\mathbf{H}_w(j\omega)$, która spełnia następującą zależność

$$\mathbf{S}_v(\omega) = \mathbf{H}_w(j\omega)\overline{\mathbf{H}_w^T(j\omega)}.$$

Ze względu na swoją postać funkcja Davenporta daje się jedynie aproksymować przez układy liniowe. Po doborze wymiaru wektora stanu $\mathbf{x}_w(t)$ zadaniem procedury aproksymacyjnej jest znalezienie macierzy systemowych $\mathbf{A}_w, \mathbf{B}_w, \mathbf{C}_w$ w taki sposób, aby funkcja przejścia $\mathbf{H}_w(j\omega)$ jak najlepiej przybliżała spektrum wiatru w wymaganym zakresie częstotliwości.



Rysunek 2-15 Filtr aproksymujący spektrum wiatru

Sterowanie drganiami masztu

3.1 Schemat układu sterowania

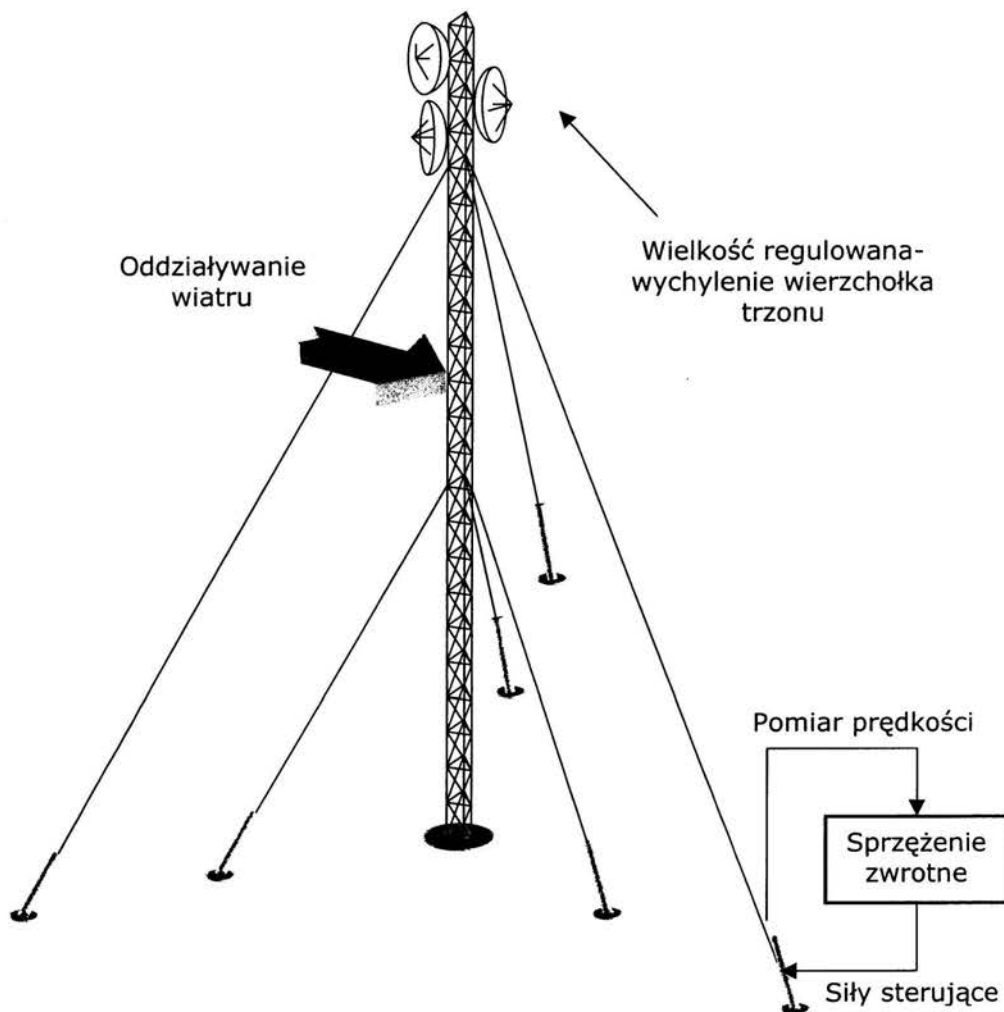
Pomimo, iż celem niniejszej pracy jest raczej symulacja procesu sterowania drganiami aniżeli jego praktyczna implementacja, w tym punkcie wprowadzone zostaną jednak pewne rozwiązania techniczne omawianego problemu. Zakres rozpatrywanych rozwiązań nie jest oczywiście wyczerpujący i koncentruje się bardziej na samej idei niż na szczegółach technicznych wydaje się jednak, że nawet dla potrzeb symulacji numerycznej dobrze jest posiadać pewien obraz całości zagadnienia, również od strony praktycznej.

Proponowanym sposobem na aktywne zredukowanie niepożądanych drgań masztu jest wprowadzenie sił sterujących, które byłyby realizowane poprzez dynamiczną zmianę naciągu w odciągach masztu [58]. Zmiany naciągu mogłyby zostać osiągnięte przez zainstalowanie w miejscu zakotwienia odciągów siłowników hydraulicznych. Następnie na podstawie pomiaru prędkości w punktach zamocowania odciągów do siłowników można, przy użyciu cyfrowego sterownika, generować sygnał wykorzystywany kolejno przez siłownik do redukcji drgań.

Konstrukcja siłownika hydraulicznego zdolnego do podtrzymywania dużej statycznej siły napinającej przy jednoczesnej możliwości korygowania naciągu w sposób dynamiczny została opracowana w ramach koordynowanego przez Unię Europejską programu badawczego „EC Brite-Euram project ACE”.

Układ sterowania proponowany w tej pracy został schematycznie przedstawiony na poniższych rysunkach. Całość przewidziana jest do pracy w pętli zamkniętej tzn. pomiar prędkości, następnie

decyzja o wielkości sił sterowania i ostatecznie realizacja przewidzianego naciągu [59].

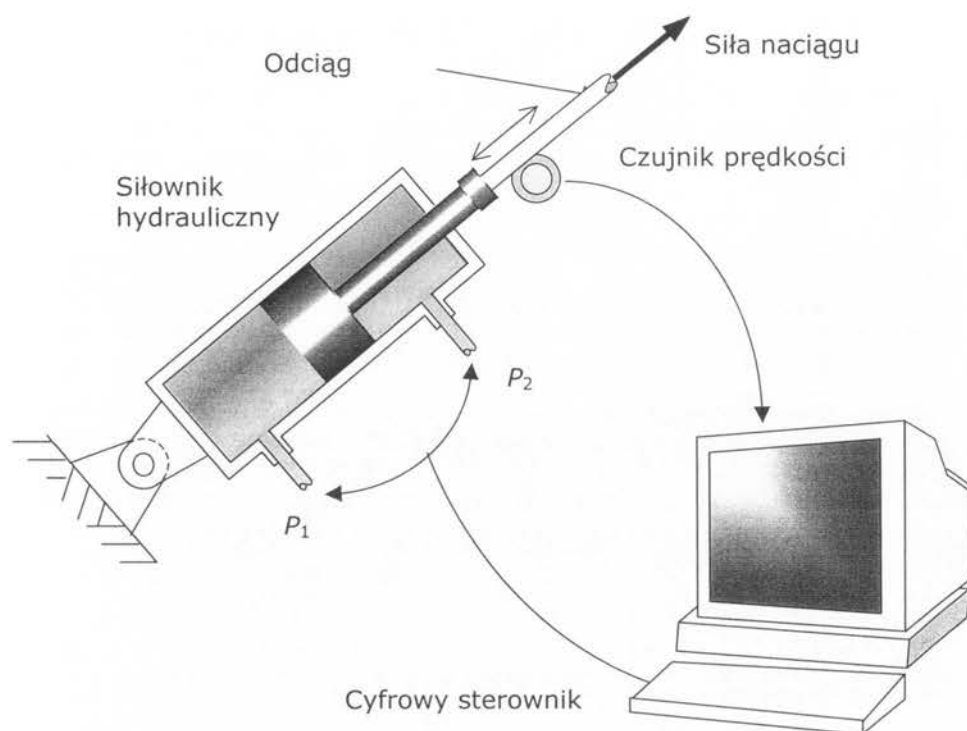


Rysunek 3-1 Schemat masztu z układem sterowania

Przy rozpatrywaniu tego typu zagadnień powstaje oczywiście cały szereg problemów technicznych. Zastanawiać można się na przykład skąd dostarczać energii potrzebnej do sterowania masztem, który znajduje się w otwartym terenie. Jednym z pomysłów na rozwiązanie tego problemu są popularne ostatnio ogniwa paliwowe [60].

Na tym etapie należy jednak podkreślić, iż dalsze szczegóły technicznej realizacji układu sterowania nie będą przedmiotem zainteresowań niniejszej pracy.

3.1. Schemat układu sterowania



Rysunek 3-2 Schemat układu sterowania

3.2 Sterowalność

W tym punkcie wprowadzone zostanie istotne przy analizowaniu wszelkich układów sterowania pojęcie sterowalności. Przed przyjęciem bowiem konkretnej strategii sterowania ważne jest, aby udzielić odpowiedzi na pytanie czy układ w ogóle jest sterowalny, a jeśli tak to jak będzie wyglądała sprawa wydajności takiego sterowania. Ostatnia kwestia stanowi, iż rozpatrywanie sterowalności układu w ramach jest lub nie jest sterowalny nie jest wystarczające. Łatwo można bowiem wyobrazić sobie konstrukcję sprężystą, która posiada wzbudnik w miejscu węzłowym dla któregoś z jej kształtów modalnych. Wówczas oczywiście dany kształt modalny nie będzie sterowalny a co za tym idzie i cała konstrukcja. Jednakże już niewielka zmiana położenia siły sterującej tzn. przesunięcie jej z punktu węzłowego, spowoduje, iż układ nagle stanie się sterowalny. Każdy doskonale zdaje sobie jednak sprawę, że ilość energii zużytej do sterowania takim układem będzie ogromna. W tej sytuacji rozsądnym rozwiązaniem jest najpierw ustalenie kształtów modalnych, które w pierwszej

kolejności decydują o pożądanym własnościach konstrukcji a następnie umieszczenie wzbudników tak, aby najistotniejsze kształty modalne były dobrze sterowalne.

Przy analizowaniu sterowalności układu dynamicznego wprowadza się zapis równań ruchu we współrzędnych stanu. W tym celu dla układu danego równaniami różniczkowymi drugiego rzędu postaci

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{B}_v\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}_u\mathbf{u}(t)$$

gdzie $\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K}$ to macierze mas, tłumienia i sztywności odpowiednio, wektor $\mathbf{u}(t)$ to wektor sterowań o wymiarze $(m \times 1)$, wektor $\mathbf{v}(t)$ to wektor fluktuacji prędkości wiatru o wymiarze $(p \times 1)$, natomiast wektor $\mathbf{q}(t)$ to wektor przemieszczeń o wymiarze $(n \times 1)$ wprowadza się wektor stanu jako $\mathbf{x}^T(t) = [\mathbf{q}^T(t) \ \dot{\mathbf{q}}^T(t)]$. Wówczas przy założeniu odwracalności macierzy mas, równania ruchu można zapisać w postaci

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{c1}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}_{c2}\mathbf{u}(t) \quad (3.1)$$

W powyższym wzorze poszczególne macierze to

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{c1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_v \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{c2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u \end{bmatrix}$$

Przenosząc pierwszy składnik prawej strony równań stanu na lewą stronę i mnożąc lewostronnie przez $e^{-\mathbf{A}_c t}$ otrzymuje się

$$e^{-\mathbf{A}_c t}(\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}_c\mathbf{x}(t)) = e^{-\mathbf{A}_c t}(\mathbf{B}_{c1}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}_{c2}\mathbf{u}(t))$$

Można zaobserwować wówczas, że lewa strona to pochodna wyrażenia $e^{-\mathbf{A}_c t}\mathbf{x}(t)$, czyli

$$\frac{d}{dt}(e^{-\mathbf{A}_c t}\mathbf{x}(t)) = e^{-\mathbf{A}_c t}(\mathbf{B}_{c1}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}_{c2}\mathbf{u}(t))$$

Następnie wykonując operacje całkowania w granicach $[0, t]$ dostaje się

$$e^{-\mathbf{A}_c t}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}_c \tau}(\mathbf{B}_{c1}\mathbf{v}(\tau) + \mathbf{B}_{c2}\mathbf{u}(\tau))d\tau$$

Ostatecznie mnożąc lewostronnie przez $e^{\mathbf{A}_c t}$ otrzymuje się rozwiązanie równań stanu w formie

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_c t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}_c(t-\tau)}(\mathbf{B}_{c1}\mathbf{v}(\tau) + \mathbf{B}_{c2}\mathbf{u}(\tau))d\tau \quad (3.2)$$

Do określenia trafności wyboru miejsca działania sił sterujących wprowadza się pojęcie sterowalności, które najczęściej spotykane w literaturze [61], [62] ma postać:

Definicja. Układ (3.1) nazywamy sterowalnym, jeżeli istnieje sterowanie $\mathbf{u}(t)$ w przedziale $[t_0, t_f]$, które w czasie $t_f - t_0$, przeprowadza układ z dowolnego stanu początkowego $\mathbf{x}(t_0)$ do dowolnego stanu końcowego $\mathbf{x}(t_f)$.

Bez utraty ogólności rozważań możemy wybrać za chwilę początkową $t_0 = 0$ oraz za stan końcowy $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$, wówczas definicja powyższa stanowi, iż maszt z odciągami jest sterowalny, jeżeli istnieje takie sterowanie, które w zadanym czasie potrafi sprowadzić przemieszczenia i prędkości konstrukcji do zera.

Uwzględniając powyższe założenia w rozwiązaniu (3.2) uzyskuje się

$$\mathbf{x}(t_f) = e^{\mathbf{A}_c t_f} \mathbf{x}_0 + \int_0^{t_f} e^{\mathbf{A}_c(t_f - \tau)} \mathbf{B}_{c2} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

W powyższej zależności pominięto człon zależny od sił wiatru, gdyż w świetle wprowadzonej definicji nie wpływa on na sterowalność masztu. Podstawiając kolejno $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$ oraz dokonując prostych przekształceń otrzymuje się następującą zależność

$$-\mathbf{x}_0 = \int_0^{t_f} e^{-\mathbf{A}_c \tau} \mathbf{B}_{c2} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

Na podstawie twierdzenia Cayleya-Hamiltona, które mówi, że każda macierz spełnia swoje równanie charakterystyczne można napisać

$$\mathbf{A}_c^k = \sum_{i=0}^{N-1} c_{ki} \mathbf{A}_c^i \quad k = N, N+1, \dots$$

gdzie N to wymiar macierzy \mathbf{A}_c równy podwojonej liczbie stopni swobody konstrukcji.

Teraz korzystając z rozwinięcia funkcji $e^{\mathbf{A}_c t}$ w szereg Taylora, otrzymuje się

$$e^{\mathbf{A}_c t} = \mathbf{I} + \frac{t}{1!} \mathbf{A}_c + \frac{t^2}{2!} \mathbf{A}_c^2 + \dots + \frac{t^m}{m!} \mathbf{A}_c^m + \dots$$

Łącząc obydwie powyższe fakty można zapisać

$$e^{\mathbf{A}_c t} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k(t) \mathbf{A}_c^k$$

Wykorzystując tę zależność w równaniu (3.3) uzyskuje się

$$-\mathbf{x}_0 = \underbrace{\left[\mathbf{B}_c \quad \mathbf{A}_c \mathbf{B}_c \quad \mathbf{A}_c^2 \mathbf{B}_c \quad \dots \quad \mathbf{A}_c^{N-1} \mathbf{B}_c \right]}_C \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{N-1} \end{bmatrix}$$

gdzie $\mathbf{d}_k = \int_0^{t_f} a_k(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau$.

Ostatecznie zatem otrzymuje się układ równań. Układ powyższy posiada rozwiązanie, gdy macierz C nazywana macierzą sterowalności, spełnia następujący warunek

$$\text{rzęd } C = N$$

Po tej analizie widać, że rozpatrywany w ogólnej teorii sterowania warunek sterowalności daje globalną odpowiedź co do sterowalności układu, jest to niewątpliwie jego dużą zaletą. W tym miejscu należy jednak wymienić też jego podstawowe wady, a

mianowicie po określeniu rzędu macierzy sterowalności otrzymuje się jedynie odpowiedź na pytanie czy układ jest czy też nie jest sterowalny, nie wiadomo jednak nic o jakości takiego sterowania. Drugą wadą szczególnie ważną z praktycznego punktu widzenia jest fakt, iż przy modelowaniu konstrukcji sprężystych metodą elementów skończonych otrzymuje się układ o znacznych rozmiarach np. konstrukcja o 100 stopniach swobody daje macierz \mathbf{A}_c o wymiarze 200 na 200. Oczywiście jest, że w tej sytuacji podniesienie macierzy \mathbf{A}_c do potęgi $N-1$ jest kłopotliwe numerycznie. Widać zatem, że w przypadku konstrukcji masztu z odciągami dogodniej z punktu widzenia numerycznego używać jakiegoś alternatywnego warunku sterowalności.

W celu ilościowej oceny sterowalności polegającej na wyznaczeniu minimalnej energii niezbędnej do przeprowadzenia układu z zadanego stanu początkowego do zadanego stanu końcowego rozwiązane zostanie następujące zadanie: znaleźć sterowanie $\mathbf{u}(t)$, które przeprowadza w przestrzeni stanu układ z punktu $\mathbf{x}(t_0)$ do punktu $\mathbf{x}(t_r)$ w czasie $t_r - t_0$, takie że, energia zużyta przez to sterowanie jest minimalna.

Powyższe zadanie można zapisać jako problem optymalizacyjny w postaci

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_r} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) dt \quad \text{- wskaźnik jakości}$$

oraz

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{c2} \mathbf{u}(t) \quad \text{- ograniczenia}$$

Stosując metodę mnożników Lagrange'a otrzymuje się

$$\begin{aligned} L &= \int_{t_0}^{t_r} \left[\frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) (\mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{c2} \mathbf{u}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t)) \right] dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_r} \left[\frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) (\mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{c2} \mathbf{u}(t)) + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t) \mathbf{x}(t) \right] dt - \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{x}(t) \Big|_{t_0}^{t_r} \end{aligned}$$

Optymalne rozwiązanie uzyskuje się z warunku

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x}(t) + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u}(t) = 0.$$

Wykonując kolejno operacje różniczkowania uzyskuje się

$$\begin{aligned} \delta L &= -\boldsymbol{\lambda}^T(t_r) \delta \mathbf{x}(t_r) + \boldsymbol{\lambda}^T(t_0) \delta \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_r} (\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A}_c + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T) dt \delta \mathbf{x} + \\ &+ \int_{t_0}^{t_r} (\mathbf{u}^T + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}_{c2}) dt \delta \mathbf{u} \end{aligned}$$

Warunek początkowy $\mathbf{x}(t_0)$ i końcowy $\mathbf{x}(t_r)$ są stałe, zatem wariacje na końcach $\delta \mathbf{x}(t_0)$ oraz $\delta \mathbf{x}(t_r)$ są równe zero. Pozostałe równania to

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\mathbf{A}_c^T \boldsymbol{\lambda}(t) \quad \mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}_{c2}^T \boldsymbol{\lambda}(t)$$

Wykorzystując powyższe zależności w równaniach stanu otrzymuje się

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) - \mathbf{B}_{c2} \mathbf{B}_{c2}^T \boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) - \mathbf{B}_{c2} \mathbf{B}_{c2}^T e^{-\mathbf{A}_c^T(t-t_0)} \boldsymbol{\lambda}(t_0)$$

Po rozwiązaniu tych równań można wyznaczyć warunek początkowy $\boldsymbol{\lambda}(t_0)$

$$\mathbf{x}(t_f) = e^{\mathbf{A}_c(t_f-t_0)} \mathbf{x}(t_0) - \int_{t_0}^{t_f} e^{\mathbf{A}_c(t_f-\tau)} \mathbf{B}_{c2} \mathbf{B}_{c2}^T e^{-\mathbf{A}_c^T(\tau-t_0)} \boldsymbol{\lambda}(t_0) d\tau$$

Następnie po przekształceniach otrzymuje się

$$e^{-\mathbf{A}_c t_0} \mathbf{x}(t_0) - e^{-\mathbf{A}_c t_f} \mathbf{x}(t_f) = \underbrace{\left(\int_{t_0}^{t_f} e^{-\mathbf{A}_c \tau} \mathbf{B}_{c2} \mathbf{B}_{c2}^T e^{-\mathbf{A}_c^T \tau} d\tau \right)}_{\mathbf{W}_c} e^{\mathbf{A}_c^T t_0} \boldsymbol{\lambda}(t_0)$$

Interesujące jest teraz wyrażenie znajdujące się w nawiasach po prawej stronie powyższej zależności. Z teorii macierzowych równań algebraicznych wiadomo, że równanie Lapunowa typu

$$\mathbf{A}_c \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_c^T + \mathbf{B}_{c2} \mathbf{B}_{c2}^T = \mathbf{0}$$

ma rozwiązanie w postaci

$$\mathbf{X} = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}_c \tau} \mathbf{B}_{c2} \mathbf{B}_{c2}^T e^{\mathbf{A}_c^T \tau} d\tau$$

Rozwiązanie to spełnia również zależność

$$\int_{-\infty}^0 e^{-\mathbf{A}_c \tau} \mathbf{B}_{c2} \mathbf{B}_{c2}^T e^{-\mathbf{A}_c^T \tau} d\tau = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}_c \tau} \mathbf{B}_{c2} \mathbf{B}_{c2}^T e^{\mathbf{A}_c^T \tau} d\tau$$

Widać teraz, że wybór chwili początkowej $t_0 = -\infty$ oraz końcowej $t_f = 0$ pozwoli uzyskać macierz \mathbf{W}_c w prosty sposób poprzez rozwiązanie równań Lapunowa bez konieczności całkowania.

Ostatecznie zatem $\boldsymbol{\lambda}(t_0)$ określone jest zależnością

$$\boldsymbol{\lambda}(t_0) = e^{-\mathbf{A}_c^T t_0} \mathbf{W}_c^{-1} (e^{-\mathbf{A}_c t_0} \mathbf{x}(t_0) - e^{-\mathbf{A}_c t_f} \mathbf{x}(t_f))$$

Kolejno bez utraty ogólności rozważań przyjmuje się jako stan początkowy $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(-\infty) = \mathbf{0}$ a jako stan końcowy $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_r$. Ponadto zakłada się, że $|\mathbf{x}(t_f)| = 1$ czyli interesujące stany końcowe znajdują się na jednostkowym okręgu w przestrzeni stanu.

Zadanie powyższe zostało zatem sprowadzone do znalezienia minimum energii, która przeprowadza układ ze stanu zerowego w chwili $t = -\infty$ do dowolnego stanu znajdującego się na jednostkowym okręgu w chwili $t = 0$. Mając określony warunek początkowy dla mnożników Lagrange'a $\boldsymbol{\lambda}(t_0)$ można zapisać poszukiwane sterowanie optymalne $\mathbf{u}(t)$ w postaci jawnej

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}_{c2}^T e^{-\mathbf{A}_c^T t} \mathbf{W}_c^{-1} \mathbf{x}_r$$

Dla wyznaczonego sterowania obliczyć można teraz odpowiadającą mu energię

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \mathbf{x}_f^T \mathbf{W}_c^{-1} e^{-\mathbf{A}_c t} \mathbf{B}_{c2} \mathbf{B}_{c2}^T e^{-\mathbf{A}_c^T t} \mathbf{W}_c^{-1} \mathbf{x}_f dt = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_f^T \mathbf{W}_c^{-1} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}_c t} \mathbf{B}_{c2} \mathbf{B}_{c2}^T e^{\mathbf{A}_c^T t} dt}_{\mathbf{W}_c} \mathbf{W}_c^{-1} \mathbf{x}_f = \frac{1}{2} \mathbf{x}_f^T \mathbf{W}_c^{-1} \mathbf{x}_f \end{aligned}$$

Otrzymany wynik można uzupełnić krótkim komentarzem, który uwidacznia znaczenie \mathbf{W}_c w określaniu sterowalności układu. Macierz \mathbf{W}_c nazywana gramianem sterowalności jest zawsze albo dodatnio albo półdodatnio określona. Dodatnio określona jeżeli układ jest sterowalny, natomiast półdodatnio określona w przypadku układu niesterowalnego. Dodatkowo należy zaznaczyć, iż powyższe rozważania są ważne tylko dla układów asymptotycznie stabilnych, w przeciwnym razie gramian sterowalności nie istnieje.

Poprzez odpowiednią transformację współrzędnych stanu można sprowadzić gramian sterowalności do postaci diagonalnej. W takiej sytuacji widać wpływ poszczególnych współrzędnych wektora stanu na energię sterowania. Dalej można powiedzieć, że współrzędne które mają największy wkład do wskaźnika jakości \mathcal{J} są najsłabiej sterowalne, gdyż wymagają największego nakładu energii do osiągnięcia zamierzonej konfiguracji końcowej.

Przedstawione powyżej podejście energetyczne służące określeniu sterowalności układu, pozwala uniknąć wspomnianych wcześniej trudności z obliczaniem rzędu macierzy sterowalności oraz daje pewną informację ilościową o sterowalności poszczególnych stanów. Okazuje się jednak, że w przypadku układów mechanicznych danych równaniami drugiego rzędu możliwe jest inne podejście w celu określenia sterowalności. Główna idea polega tutaj na wprowadzeniu do równań ruchu transformacji modalnej. Po wyznaczeniu zatem kształtów modalnych, co było przedmiotem rozważań poprzedniego rozdziału można utworzyć macierz transformacji modalnej, której kolumny są poszczególnymi kształtami modalnymi

$$\Phi = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_n]$$

Zakładając teraz, że tłumienie w konstrukcji jest proporcjonalne i stosując przekształcenie

$$\mathbf{q}(t) = \Phi \boldsymbol{\zeta}(t)$$

można sprowadzić równania ruchu do postaci

$$\underbrace{\Phi^T \mathbf{M} \Phi}_{\mathbf{I}} \ddot{\boldsymbol{\zeta}}(t) + \underbrace{\Phi^T \mathbf{D} \Phi}_{2\Xi\Omega} \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) + \underbrace{\Phi^T \mathbf{K} \Phi}_{\Omega^2} \boldsymbol{\zeta}(t) = \Phi^T \mathbf{B}_u \mathbf{u}(t) \quad (3.4)$$

gdzie

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \Xi = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \xi_n \end{bmatrix} \quad \Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n \end{bmatrix}$$

Otrzymane macierze to kolejno: \mathbf{I} - macierz jednostkowa o wymiarze $(n \times n)$, Ξ - macierz modalnych współczynników tłumienia o wymiarze $(n \times n)$, wreszcie Ω to również macierz o wymiarze $(n \times n)$ zawierająca na diagonalnej kolejne częstotliwości własne.

Znajdująca się natomiast po prawej równań (3.4) macierz $\Phi^T \mathbf{B}_u$ określa wpływ wzbudników na poszczególne mody konstrukcji. Do określenia sterowalności można zatem wykorzystać długość wektora będącego pojedynczym wierszem tej macierzy

$$\mu_i = \varphi_i^T \mathbf{B}_u \mathbf{B}_u^T \varphi_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

gdzie n to liczba modów konstrukcji równa liczbie stopni swobody, μ_i natomiast nazywane jest modalnym indeksem sterowalności. Interpretacja indeksu μ_i jest następująca: ze względu na fakt, iż jest to długość wektora, μ_i przyjmuje zatem zawsze wartość nieujemną. Zero dla któregośkolwiek z modów oznacza brak sterowalności tegoż modu. Porównanie natomiast dodatnich indeksów pomiędzy dwoma różnymi modami stanowi, który z nich jest lepiej sterowalny (większy indeks odpowiada lepszej sterowalności). Szczególny przypadek zachodzi jednak dla modów o jednakowej częstotliwości własnej, wówczas wymagane jest dodatkowo oprócz niezerowego indeksu sterowalności, aby wiersze macierzy $\Phi^T \mathbf{B}_u$ odpowiadające badanym modom były liniowo niezależne. Sytuacja powyższa wystąpiłaby, gdyby np. przestrzenny trzon masztu był sterowany przez jeden wzbudnik usytuowany w taki sposób, że wartości μ_i dla obydwu modów byłyby różne. Oczywiście jest, że nie można przy użyciu jednego wzbudnika sterować dwoma ortogonalnymi kierunkami drgań.

3.3 Obserwowalność

Obok sterowalności drugim pojęciem mającym podstawowe znaczenie w teorii sterowania jest pojęcie obserwowalności. Ogólnie można powiedzieć, że podczas gdy, sterowalność wiąże ze sobą wejście $\mathbf{u}(t)$ ze stanem układu $\mathbf{x}(t)$, tak obserwowalność obrazuje powiązanie pomiędzy stanem układu $\mathbf{x}(t)$ a mierzonym wyjściem $\mathbf{y}(t)$.

Ścisłej natomiast obserwowalność definiowana jest następująco:

Definicja. Układ (3.1) nazywamy obserwowalnym w chwili t_0 , jeżeli stan początkowy układu $\mathbf{x}(t_0)$ może zostać odtworzony na podstawie znajomości wyjścia $\mathbf{y}(t)$ dla $t \in [t_0, t_f)$.

Wspomnianym równaniem wyjścia jest równanie wielkości mierzonych zapisywane w postaci

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t)$$

Dodatkowo można zauważyć, że obserwowalność nie zależy od wejścia, a zatem do dalszych rozważań przyjęty zostanie układ autonomiczny $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$. Po rozwiązaniu równań stanu i przyjęciu za chwilę początkową $t_0 = 0$ otrzymuje się

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_c t} \mathbf{x}_0 \qquad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c e^{\mathbf{A}_c t} \mathbf{x}_0$$

Korzystając podobnie jak przy sterowalności z rozwinięcia funkcji $e^{\mathbf{A}_c t}$ można napisać

$$e^{\mathbf{A}_c t} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k(t) \mathbf{A}_c^k$$

Kolejno wprowadzając tę zależność do równania wyjścia powoduje, iż przyjmuje ono następującą postać

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k(t) \mathbf{C}_c \mathbf{A}_c^k \mathbf{x}_0$$

a stąd ostatecznie po pogrupowaniu wyrazów przy odpowiednich potęgach uzyskuje się

$$\mathbf{y}(t) = [a_1(t) \ a_2(t) \ a_3(t) \ \dots \ a_{N-1}(t)] \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_c \\ \mathbf{C}_c \mathbf{A}_c \\ \mathbf{C}_c \mathbf{A}_c^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_c \mathbf{A}_c^{N-1} \end{bmatrix}}_O \mathbf{x}_0$$

Powyższy układ równań posiada rozwiązanie, gdy rząd $O = N$.

Przedstawione rozważania doprowadziły zatem do kryterium oceny obserwowalności układu. Kryterium owo posiada jednak analogiczne wady jak kryterium sterowalności. Naturalną konsekwencją będzie zatem podobnie jak w przypadku sterowalności również wprowadzenie ilościowej oceny obserwowalności.

Do zdefiniowania grammianu obserwowalności wykorzystuje się ponownie autonomiczny układ sterowania $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t)$ z warunkiem początkowym $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ oraz równaniem wyjścia $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t)$.

Wykorzystując rozwiązanie powyższych równań $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c e^{\mathbf{A}_c t} \mathbf{x}_0$ można wyznaczyć energię jaką niesie ze sobą obliczony wektor wyjścia $\mathbf{y}(t)$, co zapisuje się jako

$$\|\mathbf{y}(t)\|^2 = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{y}^T(t) \mathbf{y}(t) dt = \mathbf{x}_0^T \int_{t_0}^{t_f} e^{\mathbf{A}_c^T t} \mathbf{C}_c^T \mathbf{C}_c e^{\mathbf{A}_c t} dt \mathbf{x}_0$$

Przyjęcie za chwilę początkową $t_0 = 0$ oraz chwilę końcową $t_f = \infty$ pozwala łatwo obliczyć gramian obserwowalności

$$\mathbf{W}_o = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}_c^T t} \mathbf{C}_c^T \mathbf{C}_c e^{\mathbf{A}_c t} dt$$

spełniający równanie Lapunowa

$$\mathbf{A}_c^T \mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o \mathbf{A}_c + \mathbf{C}_c^T \mathbf{C}_c = \mathbf{0}$$

Ostatecznie podobnie jak to było w przypadku sterowalności, badanie obserwowalności również może odbywać się przy użyciu równań drugiego rzędu.

Równanie wyjścia dla pomiaru prędkości ma postać

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix}$$

co po wykorzystaniu przekształcenia modalnego $\mathbf{q}(t) = \Phi \boldsymbol{\zeta}(t)$ daje

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_v \Phi \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)$$

Modalne indeksy obserwowalności wówczas definiuje się następująco

$$\eta_i = \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{C}_v^T \mathbf{C}_v \boldsymbol{\varphi}_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Jak jednak wspomniano wcześniej w projektowanym układzie sterowania przewidywana jest kolokacja czujników i wzбудników stąd $\mathbf{C}_v = \mathbf{B}_u^T$ a zatem modalne indeksy sterowalności i obserwowalności są sobie równe

$$\eta_i = \mu_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Aktualne są także podane przy sterowalności uwagi dotyczące kilku modów posiadających tę samą częstość własną.

Mając do dyspozycji narzędzia służące do ilościowej oceny, zarówno sterowalności jak i obserwowalności można w efektywny sposób przystąpić do projektowania układu sterowania dla rozpatrywanej konstrukcji masztu z odciągami.

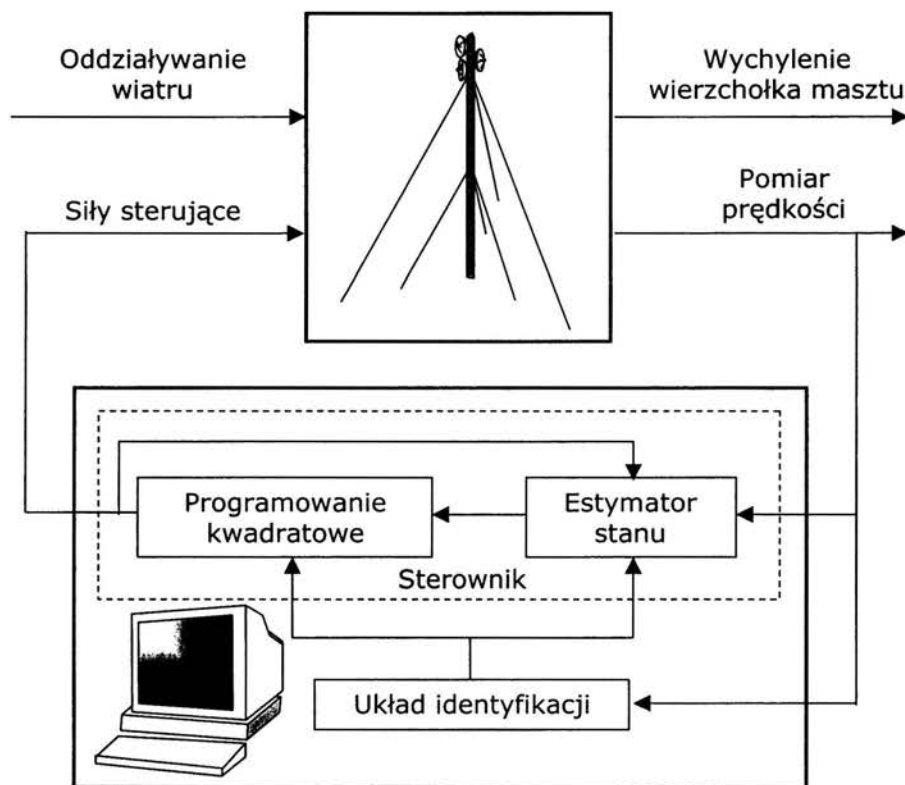
3.4 Strategia sterowania

Po udzieleniu odpowiedzi na pytanie czy przyjęta lokalizacja wzбудników i czujników zapewnia dobrą sterowalność i obserwowalność układu, można przystąpić do wyboru odpowiedniej strategii sterowania. Proponowany w tej pracy algorytm sterowania należy do grupy sterowania predykcyjnego [63]. Jest to algorytm bazujący na rozwiązywaniu w czasie rzeczywistym problemu

optymalnego sterowania. Kolejne etapy proponowanego algorytmu można przedstawić następująco:

- (i) w każdej chwili czasu używając przeszłych i bieżących wielkości pomiarowych szacowany jest aktualny wektor stanu układu
- (ii) następnie rozwiązywany jest problem sterowania optymalnego na określonym w przód horyzoncie czasowym, biorąc pod uwagę aktualne i przyszłe ograniczenia na wielkości sił sterujących
- (iii) z obliczonej sekwencji optymalnych sterowań używany jest tylko pierwszy krok i w następnej chwili czasu cała procedura powtarzana jest od początku.

Schematycznie omawiany układ sterowania przedstawiono na poniższym rysunku



Rysunek 3-3 Strategia sterowania

Dodatkowo kiedy rozpatrywana konstrukcja, którą zamierza się sterować, posiada niepewne parametry, strategia sterowania powinna zostać rozszerzona o procedurę identyfikacji aktualnej dynamiki konstrukcji. Dla masztów z ociągami ma to kluczowe znaczenie, ponieważ zmiany czynników środowiskowych, takich jak

oblodzenie, znaczna różnica temperatur, czy też osiadanie podpór mogą powodować, iż rzeczywiste własności dynamiczne konstrukcji znacznie różnią się od przyjętych wartości nominalnych. W skrajnej sytuacji nie uwzględnienie tego faktu może doprowadzić do destabilizacji całego układu sterowania.

W tym miejscu należy nadmienić, że istnieją oczywiście inne algorytmy sterowania, które nie są wrażliwe na niedokładności modelu jednak rozpatrywany tutaj algorytm zapewnia optymalne rozwiązanie względem wybranego kryterium jakości [64].

3.5 Estymator stanu

Optymalne sterowanie układem dynamicznym wymaga znajomości stanu tego układu. W praktyce, poszczególne zmienne stanu nie mogą być wyznaczone poprzez bezpośrednie pomiary. Zamiast tego pomiary, które mogą być wykonane są funkcjami zmiennych stanu oraz dodatkowo zawierają szумы pomiarowe. W nowoczesnych układach sterowania pomiar wielkości mierzonych odbywa się najczęściej w sposób cyfrowy tzn. dostępne pomiarowo wielkości są mierzone w wybranych chwilach czasu. W związku z powyższym dogodnie będzie całość rozważanego dotychczas zagadnienia sformułować w sposób dyskretny. Gromadząc zatem równania stanu i równania wielkości mierzonych, otrzymuje się układ ciągły w formie

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{c1} v(t) + \mathbf{B}_{c2} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{d}(t) \end{cases}$$

gdzie $\mathbf{d}(t)$ to nieuniknione w rzeczywistych układach szумы pomiarowe.

W punkcie dotyczącym sterowalności wprowadzone zostało rozwiązanie równań stanu w postaci

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_c(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}_c(t-\tau)} [\mathbf{B}_{c1} v(\tau) + \mathbf{B}_{c2} \mathbf{u}(\tau)] d\tau$$

Teraz dobierając odpowiednio mały krok próbkowania $\Delta = t_{k+1} - t_k$ można przyjąć, iż wymuszenia układu tj. $v(t)$ oraz $\mathbf{u}(t)$ mają na przedziale $t_k \leq t < t_{k+1}$ w przybliżeniu stałą wartość. Odnośnie odpowiednio małego kroku próbkowania rozumie się tutaj, że jest to krok dla którego częstość próbkowania kilkukrotnie przewyższa największą uwzględnioną w dynamice masztu częstość własną. Po spełnieniu tego warunku i przyjęciu za chwilę początkową $t_0 = t_k$ rozwiązanie równań stanu dla chwili t_{k+1} przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_{k+1}) &= e^{\mathbf{A}_c(t_{k+1}-t_k)} \mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{A}_c(t_{k+1}-\tau)} [\mathbf{B}_{c1}v(\tau) + \mathbf{B}_{c2}\mathbf{u}(\tau)] d\tau = \\ &= e^{\mathbf{A}_c\Delta} \mathbf{x}(t_k) + \int_0^\Delta e^{\mathbf{A}_c(\Delta-\tau)} d\tau \mathbf{B}_{c1}v(t_k) + \int_0^\Delta e^{\mathbf{A}_c(\Delta-\tau)} d\tau \mathbf{B}_{c2}\mathbf{u}(t_k) \end{aligned}$$

Kolejno wprowadzając następujące oznaczenia $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$, $v_k = v(t_k)$, $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(t_k)$ oraz

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c\Delta}$$

$$\mathbf{B}_1 = \int_0^\Delta e^{\mathbf{A}_c(\Delta-\tau)} d\tau \mathbf{B}_{c1} = -\mathbf{A}_c^{-1} e^{\mathbf{A}_c(\Delta-\tau)} \mathbf{B}_{c1} \Big|_0^\Delta = \mathbf{A}_c^{-1} (\mathbf{e}^{\mathbf{A}_c\Delta} - \mathbf{I}) \mathbf{B}_{c1}$$

$$\mathbf{B}_2 = \int_0^\Delta e^{\mathbf{A}_c(\Delta-\tau)} d\tau \mathbf{B}_{c2} = \mathbf{A}_c^{-1} (\mathbf{e}^{\mathbf{A}_c\Delta} - \mathbf{I}) \mathbf{B}_{c2}$$

otrzymuje się dyskretny układ równań stanu w postaci

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_1v_k + \mathbf{B}_2\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k \end{cases}$$

macierz \mathbf{C} pozostaje taka sama jak w równaniu ciągłym.

Dysponując teraz układem dyskretnym zamiast układu ciągłego, pojawia się pytanie czy zachowane zostały warunki sterowalności i obserwowalności. Odpowiedzi na to pytanie udziela rozwiązanie tym razem dyskretnych równań stanu

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 + \sum_{l=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-l} \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_l$$

a stąd

$$-\mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}\mathbf{B}_2 & \mathbf{A}^2\mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{N-1} \\ \mathbf{u}_{N-2} \\ \mathbf{u}_{N-3} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix}$$

Można tutaj zaobserwować, że jeżeli macierz \mathbf{A} nie jest osobliwa warunek sterowalności dla układu dyskretnego jest identyczny z warunkiem dla układu ciągłego

$$\text{rząd} [\mathbf{B}_2 \quad \mathbf{A}\mathbf{B}_2 \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}_2 \quad \dots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}_2] = N$$

Przy proponowanej dyskretyzacji, gdzie $\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c\Delta}$ wspomniana osobliwość nie występuje.

Warunek obserwowalności wynika wprost z rozwiązania równań stanu, a mianowicie

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{A}^k \mathbf{x}_0$$

skąd wynika

$$\text{rząd} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^T \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{N-1} \end{bmatrix} = N$$

Jeżeli teraz otrzymany układ dyskretny jest obserwowalny to jak wynika z definicji obserwowalności możliwe jest odtworzenie stanu układu na podstawie znajomości wektora \mathbf{y}_k . Ze względu na fakt, iż na maszt działa nieznane obciążenie powodowane przez fluktuacje wiatru oraz dodatkowo dane wielkości mierzone obarczone są pewnym błędem pomiarowym otrzymana informacja o wektorze stanu może polegać jedynie na oszacowaniu jego aktualnej wartości.

Ostatecznie zatem do zaimplementowania proponowanej w pracy strategii sterowania niezbędne jest rozwiązywanie w czasie rzeczywistym zadania optymalnej estymacji stanu układu na podstawie pomiarów.

Rozpatrywany jest zatem układ dynamiczny postaci

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{Ax}_k + \mathbf{B}_1 v_k + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{Cx}_k + \mathbf{d}_k \end{cases}$$

z warunkiem początkowym \mathbf{x}_0 .

Zakłada się, że stan początkowy układu \mathbf{x}_0 jest zmienną losową o rozkładzie Gaussa. Znana jest wartość oczekiwana oraz wariancja stanu początkowego

$$E[\mathbf{x}_0] = \bar{\mathbf{x}}_0 \quad E[(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^T] = \mathbf{M}_0$$

Dodatkowo znane są wielkości pomiarowe

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{Cx}_0 + \mathbf{d}_0$$

Pomiar obarczony jest błędem \mathbf{d}_0 , o którym można powiedzieć, że również jest gaussowską zmienną losową i jest niezależny od \mathbf{x}_0 .

Dane są jego parametry statystyczne

$$E[\mathbf{d}_0] = \mathbf{0} \quad E[\mathbf{d}_0 \mathbf{d}_0^T] = \mathbf{R}$$

Poszukiwane jest \mathbf{x}_0 , które maksymalizuje łączną funkcję prawdopodobieństwa określoną jako

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0) &= p(\mathbf{x}_0)p(\mathbf{d}_0) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{M}_0|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^T \mathbf{M}_0^{-1} (\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)} \frac{1}{(2\pi)^{P/2} |\mathbf{R}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{d}_0^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}_0} \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{d}_0 = \mathbf{y}_0 - \mathbf{Cx}_0$, N to wymiar wektora stanu, P to wymiar wektora szumów pomiarowych, natomiast $|\cdot|$ oznacza wyznacznik macierzy.

Różniczkując i przyrównując do zera otrzymuje się warunek na optymalną estymatę \mathbf{x}_0

$$\mathbf{M}_0^{-1}(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0) - \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}_0 - \mathbf{C}\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

co po przekształceniu ostatecznie daje

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{P}_0 \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}_0 - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_0)$$

gdzie

$$\mathbf{P}_0 = (\mathbf{M}_0^{-1} + \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C})^{-1}$$

$\hat{\mathbf{x}}_0$ jest nową średnią obliczoną dla \mathbf{x}_0 , natomiast \mathbf{P}_0 jest macierzą wariancji po uwzględnieniu pomiaru \mathbf{y}_0 .

Znając estymatę $\hat{\mathbf{x}}_0$ można obliczyć sterowanie \mathbf{u}_0 . Poszukiwanie optymalnego sterowania \mathbf{u}_0 będzie przedmiotem rozważań kolejnego punktu. Na tym etapie wystarczy przyjąć, że jest ono znane.

Równania stanu i równanie obserwacji dla kolejnego kroku czasowego mają postać

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}_1 v_0 + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{y}_1 = \mathbf{C}\mathbf{x}_1 + \mathbf{d}_1 \end{cases}$$

Dla powyższego układu zakłada się, iż znane są estymata $\hat{\mathbf{x}}_0$, sterowanie \mathbf{u}_0 , oraz dane statystyczne dotyczące \mathbf{d}_1 . Dodatkowo, zakłada się również, iż v_0 jest scharakteryzowane przez wartość oczekiwaną i wariancję. Jak napisano w punkcie dotyczącym stochastycznego modelu wiatru wartość średnia fluktuacji prędkości wiatru wynosi zero, zatem $E[v_0] = \bar{v}_0 = \mathbf{0}$. Na podstawie funkcji gęstości widmowej możliwe jest natomiast wyznaczenie macierzy kowariancji $E[v_0 v_0^T] = \mathbf{V}$.

Dysponując powyższymi danymi można obliczyć średnią wektora stanu układu \mathbf{x}_1 pod warunkiem zajścia $\mathbf{x}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0$

$$\bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{B}_1 \bar{v}_0 + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_0 = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_0$$

oraz macierz kowariancji

$$E[(\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}_1)(\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}_1)^T] = \mathbf{M}_1 = \mathbf{A}\mathbf{P}_0\mathbf{A}^T + \mathbf{B}_1\mathbf{V}\mathbf{B}_1^T$$

gdzie uwzględniono zależność $E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)v_0^T] = \mathbf{0}$.

Uwzględniając pomiar \mathbf{y}_1 ponownie otrzymuje się estymatę \mathbf{x}_1 będącą nową średnią

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \bar{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{P}_1 \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}_1 - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_1)$$

gdzie

$$\mathbf{P}_1 = (\mathbf{M}_1^{-1} + \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C})^{-1}$$

Obliczone $\hat{\mathbf{x}}_1$ wykorzystuje się teraz do obliczenia nowego sterowania \mathbf{u}_1 potrzebnego do redukcji drgań masztu.

3.5. Estymator stanu

Cała procedura w k -tym kroku czasowym wygląda następująco:

1. Obliczenie średniej przed wykonaniem pomiaru

$$\bar{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}_{k-1}$$

2. Obliczenie wariancji przed wykonaniu pomiaru

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}_1\mathbf{V}\mathbf{B}_1^T$$

3. Średnia po wykonaniu pomiaru

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{P}_k\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_k)$$

4. Wariancja po wykonaniu pomiaru

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{M}_k^{-1} + \mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$$

Ostatecznie po zestawieniu powyższych zależności otrzymujemy się układ równań służący jako optymalny estymator bieżącego stanu układu

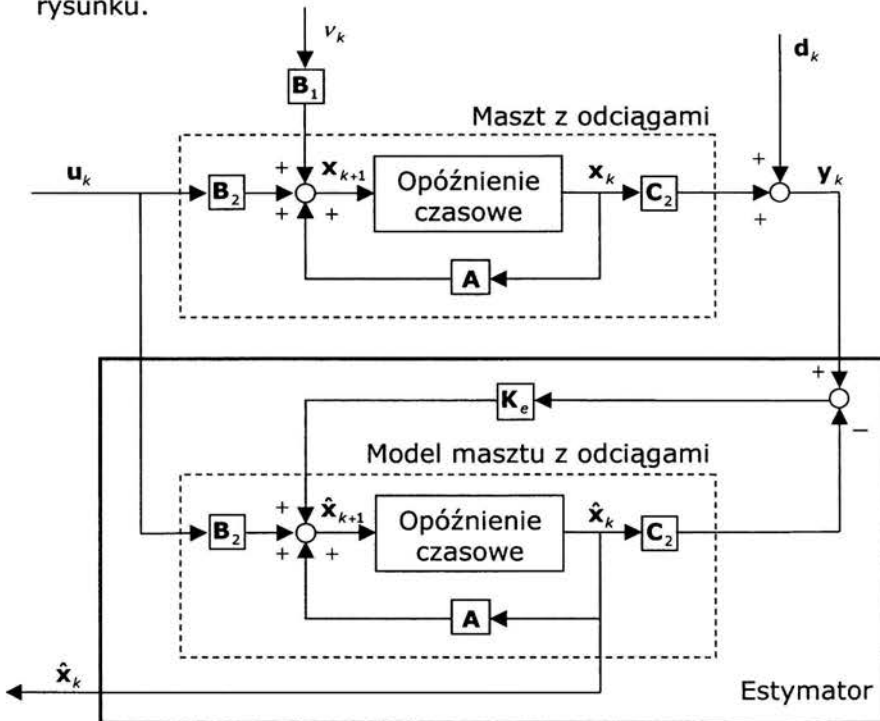
$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}_2\mathbf{u}_k + \mathbf{K}_e(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k), \quad \mathbf{x}_0 \text{ znane}$$

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{A}\mathbf{P}_k\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1} \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{M}_k - \mathbf{M}_k\mathbf{C}^T(\mathbf{R} + \mathbf{C}\mathbf{M}_k\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M}_k$$

$$\mathbf{M}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_k\mathbf{A}^T + \mathbf{B}_1\mathbf{V}\mathbf{B}_1^T$$

Ideę działania estymatora stanu przedstawiono na poniższym rysunku.



Rysunek 3-4 Schemat estymatora stanu

Na przedstawionym schemacie można zauważyć, że dodatkowy wirtualny układ dynamiczny jakim jest estymator zawiera w sobie model konstrukcji, która ma być sterowana i sprzęgający oba układy człon \mathbf{K}_e . Wielkościami wchodzącymi do estymatora są sterowanie \mathbf{u}_k i pomiar \mathbf{y}_k , natomiast jego wyjściem jest estymata całego wektora stanu układu.

Przedstawiona powyżej procedura estymacyjna wymaga, aby zarówno obciążenie jak i szумы pomiarowe były w pełni losowymi sekwencjami. Warunek ten jest zwykle spełniony w przypadku szumów pomiarowych jednak przy oddziaływaniach wiatru występuje czasowa korelacja pomiędzy fluktuacją prędkości wiatru w kolejnych chwilach czasu. Powoduje to, iż nie jest spełniona zależność $E[v_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T] = \mathbf{0}$. Aby zatem rozważana procedura estymacyjna była rzeczywiście optymalna należy do stanu masztu z odciągami dołączyć wprowadzony w rozdziale 2 filtr wiatrowy. Całość można wówczas zapisać jako

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_m(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_m(t) + \mathbf{B}_{c1} v(t) + \mathbf{B}_{c2} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_w(t) = \mathbf{A}_w \mathbf{x}_w(t) + \mathbf{B}_w \mathbf{w}(t) \end{cases}$$

gdzie $\mathbf{x}_m(t)$ to wektor stanu masztu, a $\mathbf{x}_w(t)$ to wektor stanu modelu wiatru.

Na podstawie równań wyjścia filtra wiadomo jednak, że

$$v(t) = \mathbf{C}_w \mathbf{x}_w(t)$$

pozwała to zapisać powyższy układ równań jako jeden powiększony układ dynamiczny postaci

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(t) \\ \mathbf{x}_w(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_{c1} \mathbf{C}_w \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_w \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}_c} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(t) \\ \mathbf{x}_w(t) \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}_c(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_w \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}_{c1}} \mathbf{w}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{c2} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}_{c2}} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{C}}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(t) \\ \mathbf{x}_w(t) \end{bmatrix} + \mathbf{d}(t) \end{cases}$$

Następnie dyskretyzując powiększony układ stanu otrzymuje się

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{B}}_1 \mathbf{w}_k + \tilde{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{d}_k \end{cases}$$

Powyższy zapis oznacza, iż efekt oddziaływania wiatru uzyskiwany jest poprzez działanie na filtr wiatrowy losowej sekwencji \mathbf{w}_k . Sekwencja ta spełnia następującą zależność $E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_l^T] = \mathbf{Q} \delta_{kl}$. Dodatkowo jak wspomniano wcześniej w układzie występują całkowicie losowe błędy pomiaru, stąd $E[\mathbf{d}_k \mathbf{d}_l^T] = \mathbf{R} \delta_{kl}$. Zależności

te wskazują na brak korelacji czasowej występujących w układzie zakłóceń.

Ostatecznie zatem obliczenie estymaty dla powiększonego układu sprawia, iż w każdym kroku czasowym szacowany jest stan masztu jak również aktualnie działająca na maszt siła wiatru.

Ostatnia uwaga dotycząca opisywanej procedury estymacyjnej dotyczy dyskretyzacji obciążenia wiatrem. Wprowadzony w poprzednim rozdziale filtr wiatrowy utworzony został na podstawie znajomości funkcji gęstości widmowej fluktuacji wiatru. Następnie w celu wyznaczenia przykładowego przebiegu czasowego podmuchów wiatru przyjęto, iż ciągła losowa próbka zakłócająca $\mathbf{w}(t)$ posiada macierz korelacji równą

$$E[\mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(\tau)] = \mathbf{I}\delta(t - \tau)$$

Do uzyskania równości macierzy korelacji wyjścia ciągłego i dyskretnego filtra wiatrowego należy zapewnić, aby dyskretna losowa sekwencja zakłócająca \mathbf{w}_k posiadała macierz korelacji postaci

$$E[\mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_l] = \frac{1}{\Delta} \delta_{kl}$$

gdzie Δ to przyjęty krok próbkowania.

Dobranie \mathbf{w}_k , tak aby spełniona była powyższa zależność zapewnia, że wartość prędkość wiatru obliczona w wybranych chwilach czasu nie będzie zależała od długości kroku próbkowania.

3.6 Sterowanie optymalne

Celem tego punktu jest zebranie wszystkich informacji wprowadzonych dotychczas w pracy, aby ostatecznie znaleźć sterowanie, które minimalizując zadany wskaźnik jakości doprowadzi do redukcji drgań masztu.

Rozpoczynając od opisu dynamiki masztu uzyskanego przy użyciu metody elementów skończonych, utworzony został następnie model w przestrzeni stanów. Branie jednak pod uwagę pełnego modelu we współrzędnych konfiguracji posiadającego znaczną liczbę stopni swobody jest dość czasochłonne w trakcie wykonywania obliczeń dynamicznych. Z drugiej strony wiadomo, iż model MES opisujący ruch n -stopni swobody uwzględnia n kształtów modalnych co w praktyce nie jest konieczne, ponieważ jedynie pewien niewielki podzbiór form modalnych możliwy jest do wzbudzenia. Spowodowane jest to w głównej mierze poprzez tłumienie, które zwykle dla wyższych częstości jest tak duże, że udział tych częstości w odpowiedzi dynamicznej konstrukcji jest nieznaczny.

Wnioski powyższe sugerują zatem opisanie dynamiki masztu przez zbiór pierwszych kilkudziesięciu modów, redukując tym samym

czas obliczeń wymagany przy symulacji numerycznej. Model masztu z odciągami przyjmie więc następującą postać

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{c1} v(t) + \mathbf{B}_{c2} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_{c1} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_{c2} \mathbf{x}(t) + \mathbf{d}(t) \end{cases}$$

Wypisane powyżej równania to kolejno równanie stanu, równanie wielkości regulowanych oraz równanie obserwacji. W przedstawionych równaniach poszczególne macierze to

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\boldsymbol{\Omega}_c^2 & -2\boldsymbol{\Xi}_c \boldsymbol{\Omega}_c \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{c1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Phi}_c^T \mathbf{B}_v \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{c2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Phi}_c^T \mathbf{B}_u \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_{c1} = [\mathbf{C}_p \boldsymbol{\Phi}_c \quad \mathbf{0}] \quad \mathbf{C}_{c2} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{C}_v \boldsymbol{\Phi}_c]$$

gdzie macierz $\boldsymbol{\Phi}_c$ to zredukowana macierz transformacji modalnej składająca się jedynie z m pierwszych wektorów własnych, przy czym oczywiście $m \ll n$, macierz $\boldsymbol{\Omega}_c$ natomiast to zredukowana macierz zawierająca na głównej przekątnej m uwzględnionych częstości własnych, wreszcie $\boldsymbol{\Xi}_c$ to zredukowana macierz współczynników tłumienia.

Ostatecznie jak sugerowano w poprzednim punkcie tego rozdziału, dogodnie jest powyższy model ciągły zapisać w postaci dyskretniej

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_1 v_k + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_k \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k \end{cases}$$

Mając tak przygotowane równania problemu można przystąpić do sformułowania zadania optymalizacji. A zatem, jak wspomniano wcześniej celem sterowania jest redukcja amplitud drgań wierzchołka masztu opisanego wektorem \mathbf{z}_k . Wybór wskaźnika jakości dla rozpatrywanego zadania jest następujący

$$\mathcal{J} = \mathbf{z}_h^T \boldsymbol{\Phi}_{zh} \mathbf{z}_h + \sum_{k=0}^{h-1} \mathbf{z}_k^T \mathbf{z}_k + \mathbf{u}_k^T \boldsymbol{\Psi} \mathbf{u}_k$$

gdzie $\boldsymbol{\Phi}_{zh}$ oraz $\boldsymbol{\Psi}$ to macierze wagowe.

Uwzględniając we wskaźniku jakości zależność $\mathbf{z}_k = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_k$ otrzymuje się

$$\mathcal{J} = \mathbf{x}_h^T \boldsymbol{\Phi}_h \mathbf{x}_h + \sum_{k=0}^{h-1} \mathbf{x}_k^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \boldsymbol{\Psi} \mathbf{u}_k$$

Wybrany wskaźnik jakości odzwierciedla życzenie sprowadzenia przemieszczenia wierzchołka trzonu \mathbf{z}_k do możliwie najmniejszej

wartości w czasie h kroków czasowych, przy jednoczesnym wykorzystaniu do tego celu minimalnych sił sterujących \mathbf{u}_k .

Wprowadzony w poprzednim punkcie estymator umożliwia oszacowanie aktualnego stanu układu. Przyjmując teraz estymatę wektora stanu w chwili p jako warunek początkowy $\mathbf{x}_0 = \hat{\mathbf{x}}_p$ można korzystając z równań stanu wyznaczyć najbardziej prawdopodobny stan układu w kolejnych krokach czasowych

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 + \sum_{m=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-m} \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_m \quad k = 1, 2, \dots, h$$

lub zapisując macierzowo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 + \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}^{k-2} \mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{A} \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k-2} \\ \mathbf{u}_{k-1} \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 + \Lambda_{k-1} \mathbf{U}_{k-1} \end{aligned}$$

gdzie przyjęto, że wymuszenie v_k równa się swojej wartości średniej, która wynosi zero $\bar{v}_k = \mathbf{0}$.

Podstawiając teraz powyższe rozwiązanie do wskaźnika jakości problem optymalizacyjny sprowadzony zostaje do postaci

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \mathbf{x}_0^T (\mathbf{A}^h)^T \Phi_h \mathbf{A}^h \mathbf{x}_0 + 2 \mathbf{x}_0^T (\mathbf{A}^h)^T \Phi_h \Lambda_{h-1} \mathbf{U}_{h-1} + \mathbf{U}_{h-1}^T \Lambda_{h-1}^T \Phi_h \Lambda_{h-1} \mathbf{U}_{h-1} + \\ &+ \sum_{k=0}^{h-1} \left\{ \mathbf{x}_0^T (\mathbf{A}^k)^T \Phi \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 + 2 \mathbf{x}_0^T (\mathbf{A}^k)^T \Phi \Lambda_{k-1} \mathbf{U}_{k-1} + \mathbf{U}_{k-1}^T \Lambda_{k-1}^T \Phi \Lambda_{k-1} \mathbf{U}_{k-1} \right\} + \\ &+ \mathbf{U}_{h-1}^T \bar{\Psi} \mathbf{U}_{h-1} = \mathbf{x}_0^T \Omega^T \bar{\Phi} \Omega \mathbf{x}_0 + 2 \mathbf{x}_0^T \Omega^T \bar{\Phi} \Lambda \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \bar{\Lambda}^T \bar{\Phi} \Lambda \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \bar{\Psi} \mathbf{U} = \\ &= \mathcal{J}_0 + \underbrace{2 \mathbf{x}_0^T \Omega^T \bar{\Phi} \Lambda}_{\Gamma} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \underbrace{(\bar{\Lambda}^T \bar{\Phi} \Lambda + \bar{\Psi})}_{\Theta} \mathbf{U} \end{aligned}$$

czyli ostatecznie

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + \Gamma \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \Theta \mathbf{U}$$

gdzie, składnik \mathcal{J}_0 nie zależy od sekwencji sterującej \mathbf{U} a występujące we wskaźniku jakości macierze to

$$\bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^2 \mathbf{B}_2 & \mathbf{A} \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{h-1} \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}^{h-2} \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}^{h-3} \mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad \Omega = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{h-1} \\ \mathbf{A}^h \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Psi} = \begin{bmatrix} \Psi & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Psi & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Psi & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \Psi \end{bmatrix} \quad \bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \Phi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \Phi_h \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{h-1} \end{bmatrix}$$

Dodatkowo do powyższego zadania można dołożyć ograniczenia na wielkości sił sterujących

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}_k \leq \mathbf{u}_{\max}$$

czyli dla sekwencji sterowań od 0 do $h-1$

$$\mathbf{U}_{\min} \leq \mathbf{U} \leq \mathbf{U}_{\max}$$

co ostatecznie można przedstawić w zwartej postaci jako liniową nierówność typu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \mathbf{U} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{U}_{\min} \\ \mathbf{U}_{\max} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Całość razem stanowi problem kwadratowego programowania z ograniczeniami

$$\mathbf{U}^{OPT} = \arg \min_{\mathbf{U} \in \mathbf{L} \leq \mathbf{U} \leq \mathbf{b}} \Gamma \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \Theta \mathbf{U}$$

Po wyznaczeniu \mathbf{U}^{OPT} do konstrukcji masztu przykładany jest tylko pierwszy krok \mathbf{u}_0 z całej sekwencji \mathbf{U}^{OPT} , a następnie w kolejnym kroku czasowym cała procedura powtarzana jest od początku.

Tak sformułowane zadanie poszukiwania optymalnego sterowania nie uwzględnia jednak posiadanych informacji o spektrum fluktuacji prędkości wiatru. Wykorzystanie tych informacji przy projektowaniu układu sterownia odbywa się analogicznie jak to było w przypadku estymatora tzn. poprzez powiększenie stanu układu o filtr wiatrowy. Wprowadzony w poprzednim punkcie powiększony układ dynamiczny ma postać

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{B}}_1 \mathbf{w}_k + \tilde{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}_k \\ \mathbf{z}_k = \tilde{\mathbf{C}}_1 \tilde{\mathbf{x}}_k \\ \mathbf{y}_k = \tilde{\mathbf{C}}_2 \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{d}_k \end{cases}$$

Podobnie jak poprzednio stan $\tilde{\mathbf{x}}_k$ składa się tutaj z modalnych amplitud i prędkości masztu oraz modelu wiatru.

Rozwiązanie problemu optymalizacyjnego dla tak utworzonego układu dynamicznego powoduje znalezienie sterowania optymalnego \mathbf{u}_0 , które uwzględnia teraz, zarówno przyszłe stany

konstrukcji jak również najbardziej prawdopodobne wartości sił wiatru. Predykcja powiększonego wektora stanu odbywa się h kroków czasowych w przód na podstawie znajomości bieżącej estymaty stanu masztu jak i bieżącej estymaty sił wiatru.

Ostatecznie przeformułowanie problemu optymalizacyjnego nie nastręcza trudności i wymaga jedynie powiększenia macierzy wagowych do postaci

$$\tilde{\Phi}_h = \begin{bmatrix} \Phi_h & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Co oznacza, że w dalszym ciągu celem sterowania jest stabilizowanie drgań wierzchołka masztu, podczas gdy układ sterowania nie ma wpływu na oddziaływanie wiatru.

3.7 Identyfikacja parametrów masztu

Ostatnim elementem proponowanej w niniejszym rozdziale strategii sterowania jest układ identyfikacji. Zadaniem tego układu jest estymacja zmiennych parametrów masztu, takich jak: masa, tłumienie czy też sztywność. Warto tutaj zaznaczyć, iż zadanie identyfikacji parametrów konstrukcji mechanicznych wciąż jest aktualnym przedmiotem badań o czym świadczą ukazujące się ostatnio publikacje [65]. Obszerny przegląd obecnie używanych metod znaleźć można w pracy [66].

Proponowany w niniejszym punkcie rekurencyjny algorytm identyfikacji polega na wykorzystaniu filtra Kalmana. W tym celu należy najpierw przekształcić równania stanu do postaci znanej w literaturze pod nazwą *ARMA (autoregressive moving-average model)*.

Ogólnie model ten przedstawiany jest następująco:

$$\mathbf{y}_k + \alpha_1 \mathbf{y}_{k-1} + \alpha_2 \mathbf{y}_{k-2} + \dots + \alpha_m \mathbf{y}_{k-m} = \beta_1 \mathbf{w}_{k-1} + \beta_2 \mathbf{w}_{k-2} + \dots + \beta_m \mathbf{w}_{k-m} + \gamma_1 \mathbf{u}_{k-1} + \gamma_2 \mathbf{u}_{k-2} + \dots + \gamma_m \mathbf{u}_{k-m} + \mathbf{d}_k$$

gdzie $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ to macierze o odpowiednich wymiarach ($i = 1, 2, \dots, m$), m to wymiar modelu.

Przejście ze współrzędnych stanu do modelu ARMA odbywać może się w następujący sposób

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_1\mathbf{w}_k + \mathbf{B}_2\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}_2\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{k-m} &= \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_{k-m} && + \mathbf{d}_{k-m} \\
 \mathbf{y}_{k-m+1} &= \mathbf{C}_2 \mathbf{A} \mathbf{x}_{k-m} && + \mathbf{C}_2 (\mathbf{B}_1 \mathbf{w}_{k-m} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_{k-m}) + \mathbf{d}_{k-m+1} \\
 \mathbf{y}_{k-m+2} &= \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^2 \mathbf{x}_{k-m} && + \sum_{l=k-m}^{k-m+1} \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{k-m+1-l} (\mathbf{B}_1 \mathbf{w}_l + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_l) + \mathbf{d}_{k-m+2} \\
 &\vdots && \\
 \mathbf{y}_{k-1} &= \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{m-1} \mathbf{x}_{k-m} && + \sum_{l=k-m}^{k-2} \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{k-2-l} (\mathbf{B}_1 \mathbf{w}_l + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_l) + \mathbf{d}_{k-1}
 \end{aligned}$$

czyli zapisując macierzowo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k-m} \\ \mathbf{y}_{k-m+1} \\ \mathbf{y}_{k-m+2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{A} \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{m-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k-m} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{A} \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{m-2} \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{m-3} \mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{k-m} \\ \mathbf{w}_{k-m+1} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{k-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{A} \mathbf{B}_2 & \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{m-2} \mathbf{B}_2 & \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{m-3} \mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k-m} \\ \mathbf{u}_{k-m+1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{k-m} \\ \mathbf{d}_{k-m+1} \\ \mathbf{d}_{k-m+2} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{k-1} \end{bmatrix}$$

lub krócej

$$\mathbf{Y}_{k-m} = \mathbf{O}_m \mathbf{x}_{k-m} + \mathbf{H}_1 \mathbf{W}_{k-m} + \mathbf{H}_2 \mathbf{U}_{k-m} + \mathbf{D}_{k-m} \quad (3.5)$$

gdzie \mathbf{O}_m to macierz obserwowalności.

Do dalszych rozważań wystarczające jest wykorzystanie informacji pomiarowych z jednego tylko czujnika, dla którego jednak układ jest obserwowalny. Przejście do modelu ARMA na podstawie znajomości kilku pomiarów także nie stanowi trudności jednak utracona wówczas zostaje przejrzystość wyprowadzenia. A zatem korzystając z równania (3.5) można wyznaczyć wektor stanu jako

$$\mathbf{x}_{k-m} = \mathbf{O}_m^{-1} (\mathbf{Y}_{k-m} - \mathbf{H}_1 \mathbf{W}_{k-m} - \mathbf{H}_2 \mathbf{U}_{k-m} - \mathbf{D}_{k-m}) \quad (3.6)$$

Następnie wypisując równanie wyjścia dla chwili t_k otrzymuje się

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^m \mathbf{x}_{k-m} + \sum_{l=k-m}^{k-1} \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{k-1-l} (\mathbf{B}_1 \mathbf{w}_l + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_l) + \mathbf{d}_k \quad (3.7)$$

Teraz wstawiając zależność (3.6) do (3.7) i porządkując stronami uzyskuje się model ARMA, który można wówczas przedstawić jako

$$\mathbf{y}_k = \boldsymbol{\Psi}_k (\mathbf{Y}_{k-m}, \mathbf{U}_{k-m}) \boldsymbol{\Theta}_k (\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2) + \mathbf{e}_k$$

Zapis ten został wprowadzony w celu utworzenia wektora stanu parametrów, którym jest Θ_k . Jak przedstawiono w powyższej zależności, wektor stanu parametrów jest funkcją niepewnych macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2$. Wektor Ψ_k natomiast zależy od wielkości znanych tj. pomiarów \mathbf{Y}_{k-m} oraz sterowań \mathbf{U}_{k-m} . Ostatni człon równania zawiera wszystkie nieznanne losowe wymuszenia działające na układ czyli \mathbf{W}_{k-m} oraz \mathbf{D}_{k-m} .

Pomijając teraz w powyższej zależności człon odpowiadający nieprzewidywalnym losowym zakłóceniom, można oszacować wyjście y_k na podstawie następującej zależności

$$\hat{y}_k = \Psi_k \hat{\Theta}_{k-1}$$

Ostatecznie również parametry posiadają równanie opisujące ich zmienność w czasie tj.

$$\Theta_{k+1} = \Theta_k + \xi_k$$

ξ_k jest tutaj nieznanym zaburzeniem wywołującym zmianę wartości parametrów w kolejnych chwilach czasu.

Powyższe równanie można zatem traktować jako równanie stanu parametrów, gdzie przyjąć należy ograniczenia na niepewność ξ_k .

Podobnie jak w przypadku estymatora stanu w celu scharakteryzowania niepewności wprowadza się wartość średnią $E[\xi_k] = \mathbf{0}$ oraz macierz korelacji $E[\xi_k \xi_l^T] = \mathbf{R}_1 \delta_{kl}$.

Postępując teraz analogicznie jak to zrobiono w punkcie „Estymator stanu” wprowadza się estymator parametrów jako

$$\hat{\Theta}_{k+1} = \hat{\Theta}_k + \mathbf{K}_\Theta (y_k - \hat{y}_k)$$

Ponownie powstaje tutaj problem optymalnego doboru macierzy wzmocnienia \mathbf{K}_Θ . Korzystając zatem z wprowadzonej w punkcie 3.5 procedury estymacyjnej, macierz wzmocnienia \mathbf{K}_Θ można obliczyć z następującej zależności

$$\mathbf{K}_\Theta = \frac{1}{R_2 + \Psi_k \mathbf{P}_{k-1} \Psi_k^T} \mathbf{P}_{k-1} \Psi_k^T$$

gdzie $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k-1} + \mathbf{R}_1 - \frac{1}{R_2 + \Psi_k \mathbf{P}_{k-1} \Psi_k^T} \mathbf{P}_{k-1} \Psi_k^T \Psi_k \mathbf{P}_{k-1}$.

Występujący w powyższej zależności symbol R_2 oznacza kowariancję wymuszenia e_k czyli $E[e_k^2] = R_2$. Dodatkowo w celu obliczenia aktualnej estymaty parametrów wymagana jest znajomość warunku początkowego $\hat{\Theta}_0$.

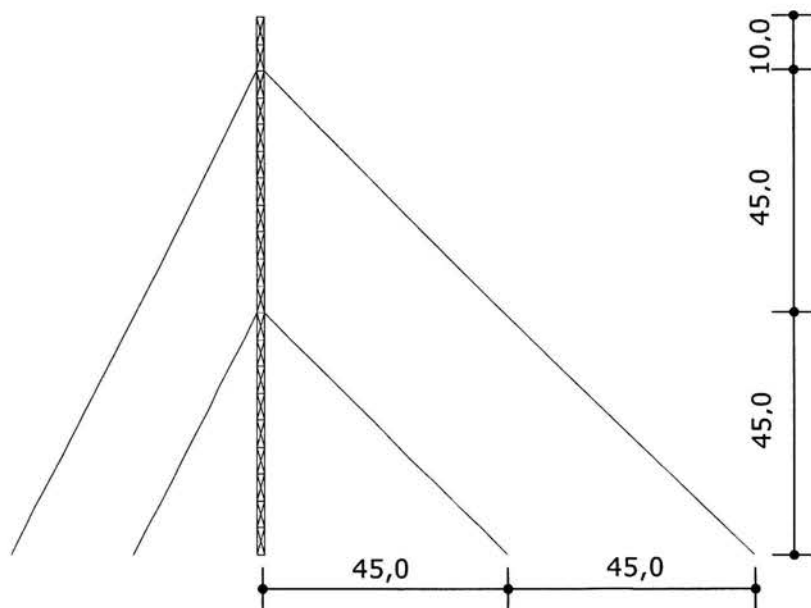
Jak można było zauważyć przedstawiony estymator dokonuje jednak tylko oszacowania macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ oraz \mathbf{C}_2 . Nie stanowi to problemu jeżeli do opisu dynamiki masztu stosuje się model we współrzędnych konfiguracji, ponieważ w tej sytuacji macierz \mathbf{C}_1

zależy tylko od lokalizacji wielkości regulowanych. Zmiana masy czy sztywności powodująca zmianę częstości własnych i kształtów modalnych, nie wpływa wówczas na postać macierzy \mathbf{C}_1 . Inaczej sytuacja przedstawia się w przypadku modalnego modelu masztu. W tym modelu wraz ze zmianą parametrów zmianie ulegną także elementy macierzy \mathbf{C}_1 . Aby uniknąć tej niedogodności można jak wspomniano wcześniej zastosować zredukowany model we współrzędnych konfiguracji, bądź przy modelu modalnym wyposażyć wielkości regulowane w sensory co sprawi, iż wektor \mathbf{z}_k stanie się dostępny pomiarowo.

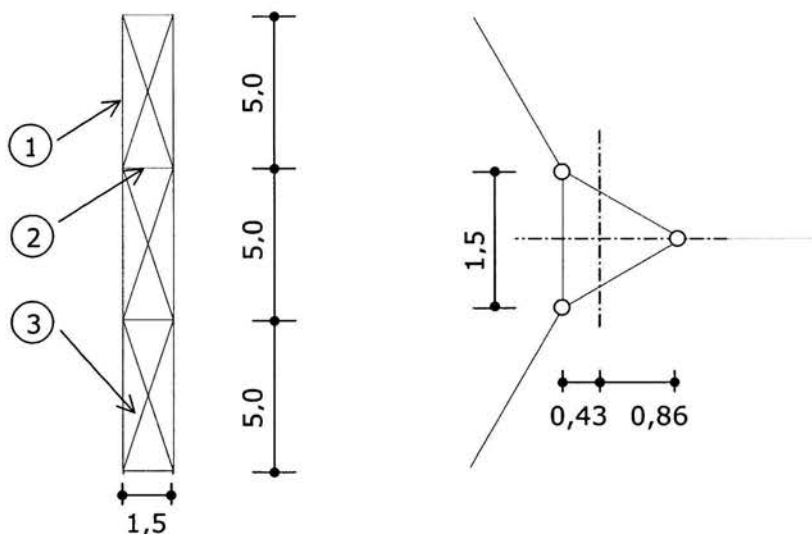
Symulacja numeryczna

4.1 Dane konstrukcyjne

Przedstawione w pracy rozważania teoretyczne, w tym rozdziale zostały zilustrowane przykładem obliczeniowym. Rozpatrywany był maszt o wysokości 100 metrów wspierany sześcioma aktywnymi odciągami.



Rysunek 4-1 Wymiary rozpatrywanego masztu



Rysunek 4-2 Wymiary trzonu masztu

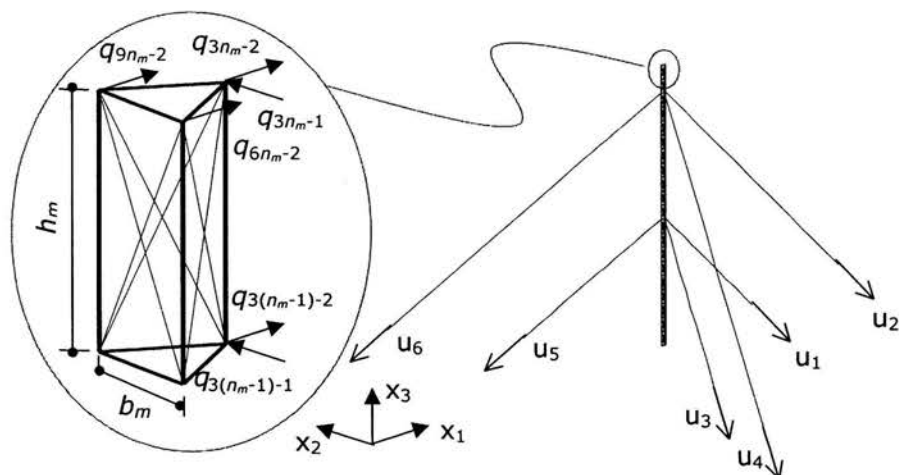
Trzon masztu stanowiła przestrzenna kratownica o przekroju poprzecznym będącym trójkątem równobocznym o długości boku równym 1,5 metra. Dane dotyczące przekrojów poprzecznych poszczególnych prętów trzonu zamieszczono w poniższej tabeli

Nazwa	Pole przekroju
Krawężniki ①	0,0074 m ²
Słupki ②	0,001 m ²
Krzyżulce ③	0,001 m ²

Przyjęto, że odcigi masztu posiadają wstępny naciąg $T=400$ kN co przy polu przekroju $A=0,0007$ m² ($d=30$ mm) odpowiadało naprężeniu 570 MPa. Założono, że konstrukcja wykonana jest z materiału o współczynniku sprężystości $E=205$ GPa. Gęstość objętościową przyjęto równą 7850 kg/m³.

4.2 Opis modelu MES

Do zamodelowania, zarówno trzonu jak i odcigów masztu wykorzystano wprowadzony w rozdziale 2 przestrzenny element prętowy o 3 stopniach swobody w każdym węźle. Trzon masztu podzielony został na 20 modułów składających się z 15 prętów, każdy z odcigów masztu podzielony został na 10 elementów skończonych.



Rysunek 4-3 Podział masztu na elementy skończone

Występujące na powyższym rysunku oznaczenia to:

- n_m - liczba modułów trzonu masztu
- u_j - siła sterująca w j -tym odcigu
- q_k - k -te przemieszczenie wierzchołka masztu
- b_m - szerokość trzonu masztu
- h_m - wysokość pojedynczego modułu trzonu masztu

Na podstawie powyższych oznaczeń wektor wielkości regulowanych przyjęto jako

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{z}(t_k) = \begin{bmatrix} q_{3n_m-1}(t_k) \\ q_{3n_m-2}(t_k) \\ (q_{3n_m-1}(t_k) - q_{3(n_m-1)-1}(t_k)) / h_m \\ (q_{3n_m-2}(t_k) - q_{3(n_m-1)-2}(t_k)) / h_m \\ (q_{9n_m-2}(t_k) - q_{6n_m-2}(t_k)) / b_m \end{bmatrix}$$

Końcowy model masztu uzyskano na następującej drodze. Najpierw utworzona została macierz sztywności sprężystej trzonu. Następnie trzon obciążony został siłami wstępnego naciągu w celu uwzględnienia wstępnego stanu naprężeń jaki występuje w jego poszczególnych prętach. Po wyznaczeniu sił wewnętrznych w elementach trzonu, utworzona została macierz sztywności geometrycznej trzonu. Na tym etapie całkowitą macierz sztywności trzonu stanowiła suma macierzy sztywności geometrycznej i sztywności sprężystej. Sumaryczna macierz sztywności trzonu następnie rozszerzona została o macierze sztywności odciągów uwzględniające wstępny naciąg. Kolejno do całej konstrukcji przyłożone zostało obciążenie ciężarem własnym powodujące dalszy wzrost naprężeń w prętach trzonu masztu oraz wstępne ugięcie odciągów. Po uzyskaniu ostatecznej deformacji statycznej masztu zbudowane zostały nowe macierze sztywności elementów uwzględniające wstępny stan naprężeń oraz aktualną konfigurację węzłów konstrukcji. Zbudowane zostały również konsyistentne macierze mas dla wszystkich elementów.

Z powodu braku bardziej szczegółowych informacji na temat tłumienia występującego w masztach z odciągami przyjęto tłumienie proporcjonalne postaci $\mathbf{D} = 0.006\mathbf{M} + 0.0001\mathbf{K}$. Odpowiada to 1% tłumienia krytycznego dla pierwszych dziesięciu modów.

Ze względu natomiast na znaczną liczbę stopni swobody tak utworzonego modelu zdecydowano się zredukować model masztu poprzez użycie transformacji modalnej. Ostatecznie dynamika masztu reprezentowana jest przez 32 kształty modalne obejmujące zakres częstotliwości od 0 do około 20 rad/s.

4.3 Dane dotyczące wiatru

Do obliczeń przyjęto model fluktuacji prędkości wiatru opisany funkcją gęstości widmowej Davenporta. Dane charakteryzujące porywy wiatru to gęstość powietrza, która wynosi $1,22 \text{ kg/m}^3$ oraz średnia prędkość wiatru równa 25 m/s . Współczynnik parcia przyjęto jako $C_d=1$, natomiast pole ekspozycji jako połowę powierzchni wszystkich prętów schodzących się w danym węźle. Dodatkowo założono pełną przestrzenną korelację fluktuacji prędkości wiatru, co jak należy się spodziewać prowadzić może do pewnego przeszacowania działania sił wiatru na konstrukcję.

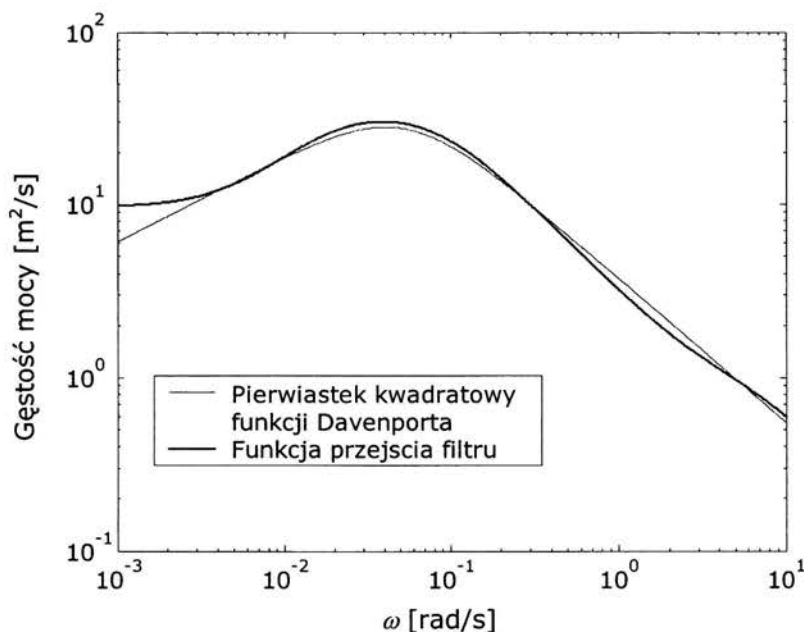
Do uzyskania próbki danych symulujących zachowanie fluktuacji prędkości wiatru wprowadzono filtr postaci

$$H(s) = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + b_3s^3 + b_4s^4}$$

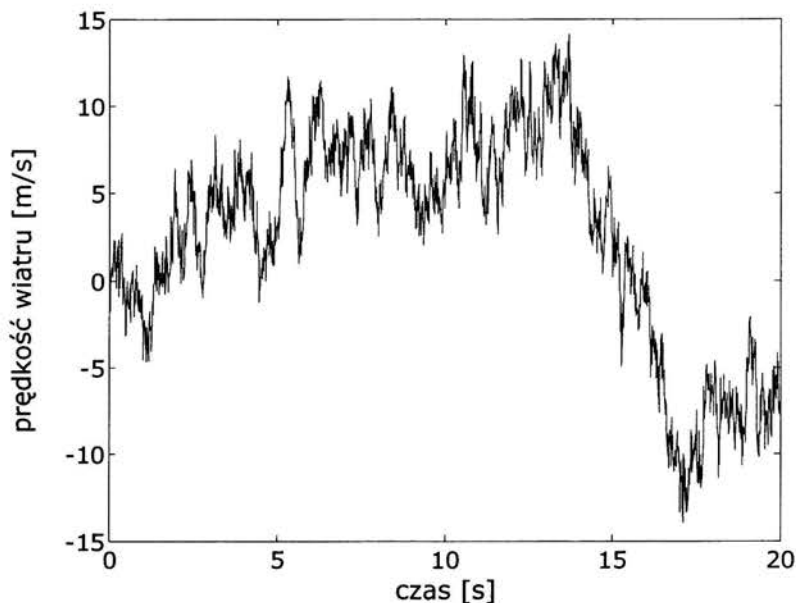
gdzie poszczególne współczynniki to

$a_0 = 3.4197$	$b_0 = 0.3538$
$a_1 = -686.3151$	$b_1 = 22.7788$
$a_2 = 230.1426$	$b_2 = 224.7118$
$a_3 = 3.9021$	$b_3 = 38.2997$
	$b_4 = 0.331$

Filtr wiatrowy został dobrany tak, aby w zadanym zakresie częstości masztu (0-20 rad/s) kwadrat funkcji przejścia filtru $H(s)$ aproksymował funkcję gęstości widmowej Davenporta. Szczegółowa analiza projektowania filtrów wiatrowych znajduje się w pracy [67].



Rysunek 4-4 Aproksymacja spektrum Davenporta



Rysunek 4-5 Fluktuacje prędkości wiatru

4.4 Opis układu sterowania optymalnego

Strategia sterowania przyjęta do redukcji drgań masztu to sterowanie z predykcją modelu, które wprowadzone zostało w poprzednim rozdziale.

Celem sterowania optymalnego była minimalizacja wychylenia wierzchołka masztu przy jednoczesnej minimalizacji wymaganych do tego celu sił sterowania. Do tego celu wykorzystano wskaźnik jakości postaci

$$\mathcal{J} = \mathbf{x}_h^T \Phi_h \mathbf{x}_h + \sum_{k=0}^{h-1} \mathbf{x}_k^T \Phi \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \Psi \mathbf{u}_k$$

Jako horyzont czasowy przyjęto $h=3$.

Do wyznaczenia w każdym kroku aktualnej macierzy wzmocnienia przyjęto następujące macierze wagowe

$$\Phi_h = 10 \mathbf{C}_{z1}^T \mathbf{C}_{z1} \quad \Phi = \mathbf{C}_{z1}^T \mathbf{C}_{z1} \quad \Psi = 10^{-8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie \mathbf{C}_{z1} to macierz obserwacji, zawierająca informację o udziale wychylenia i obrotu wierzchołka masztu w poszczególnych modach składających się na dynamikę masztu. Przyjęta postać macierzy Ψ oznacza, iż do wskaźnika jakości wszystkie siły sterujące wchodzą z taką samą wagą.

Dla potrzeb procedury estymacyjnej założono, iż szumy pomiarowe oraz stan początkowy masztu scharakteryzowane są przez następujące dane statystyczne:

$$E[\mathbf{d}_k] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad E[\mathbf{d}_k^T \mathbf{d}_l] = 10^{-4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \delta_{kl}$$

$$E[\mathbf{x}_0] = \mathbf{0} \quad E[\mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_0] = \mathbf{0}$$

gdzie δ_{kl} to delta Kroneckera, która dla $k=l$ wynosi 1, a w pozostałych przypadkach równa się 0.

W niniejszym przykładzie przyjęto, iż wartość średnia i macierz kowariancji stanu początkowego \mathbf{x}_0 są zerowe.

Ograniczenia na maksymalną amplitudę sił sterujących oprócz macierzy wagowej Ψ , zostały wprowadzone jawnie w postaci

$$-\frac{T}{10} \leq \mathbf{u}_k \leq \frac{T}{10}$$

gdzie T to początkowy naciąg odciągów.

Powyższa nierówność oznacza, że co do wartości bezwzględnej maksymalna siła sterująca może wynosić co najwyżej 10% początkowego naciągu statycznego.

Wreszcie przyjęta częstotliwość próbkowania wynosi 100 Hz.

Po ustaleniu częstotliwości próbkowania zdyskretyzowano ciągły filtr wiatrowy. Następnie wyznaczona została losowa sekwencja w_k działające na filtr, tak aby jej macierz korelacji wynosiła

$$E[w_k^T w_l] = \frac{1}{\Delta} \delta_{kl} = 100 \delta_{kl}$$

gdzie Δ to krok próbkowania będący odwrotnością przyjętej częstotliwości próbkowania.

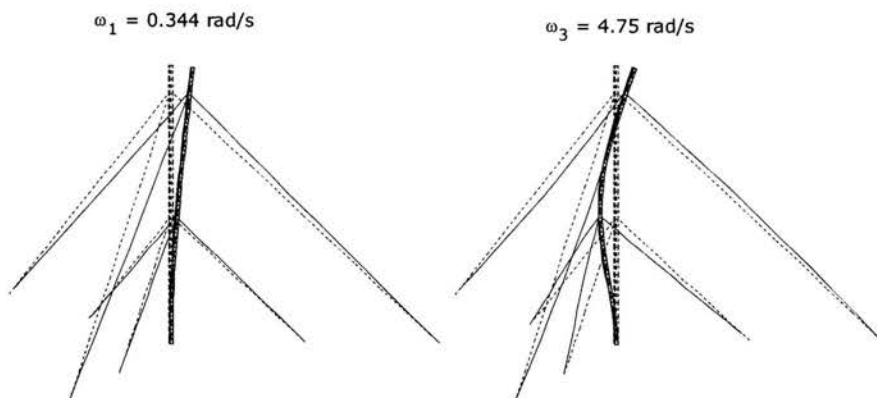
4.5 Wyniki obliczeń

Prezentacja symulacji numerycznej proponowanego procesu sterowania drganiami, poprzedzona została obserwacjami dotyczącymi sterowalności konstrukcji masztu. Do tego celu wykorzystana została analiza modalna masztu z odciągami,

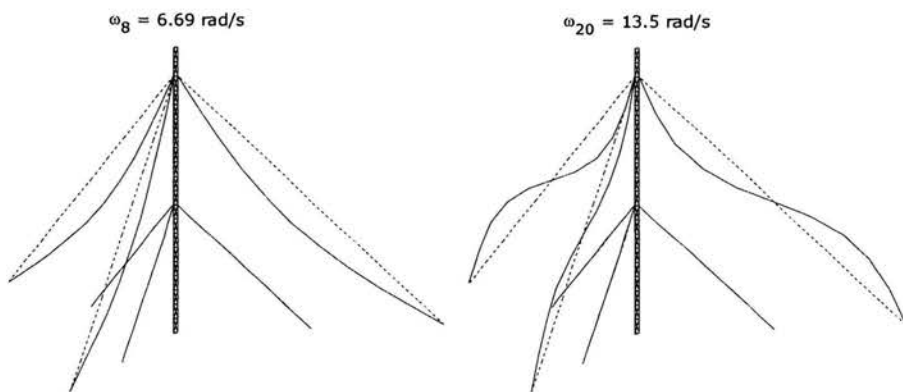
przetawiona w rozdziale 2. Ogólnie, kształty modalne masztu można podzielić na dwie grupy [68]: pierwsza grupa to kształty z dominującymi drganiami odciągów. Druga grupa to kształty, w których dominują drgania trzonu masztu. Zarówno w pierwszej jak i drugiej grupie modów, trzon masztu poddany jest jednej z trzech podstawowych postaci drgań. Wyróżnia się tutaj zginanie, skręcanie oraz ściskanie. Oprócz samej specyfiki kształtów modalnych w przypadku masztów z odciągami występują również wielokrotne częstości drgań co wymaga, jak wskazano w rozdziale 3, szczególnej uwagi przy badaniu sterowalności.

W poniższej tabeli przedstawione zostały 23 pierwsze częstości drgań konstrukcji i odpowiadające im modalne indeksy sterowalności:

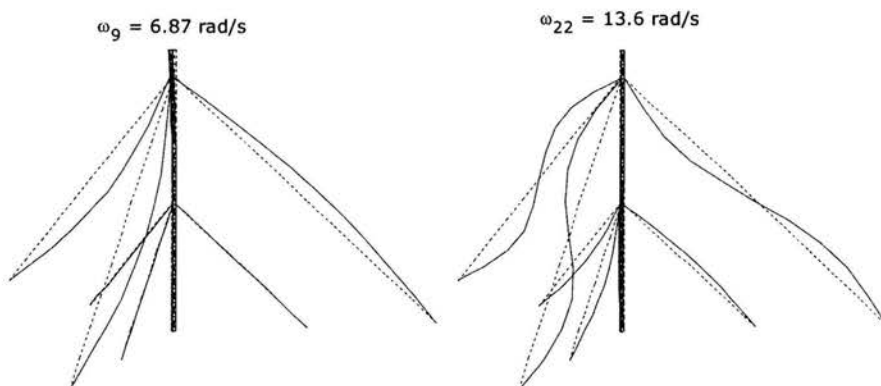
Nr.	ω [rad/s]	μ
1.	0.3438	9.8361e-2
2.	0.3440	9.8499e-2
3.	4.7474	9.0610e-2
4.	4.7492	9.0650e-2
5.	6.6279	7.9389e-9
6.	6.6892	4.2767e-6
7.	6.6892	3.9231e-6
8.	6.6899	1.8798e-7
9.	6.8727	8.8209e-3
10.	6.8747	8.9116e-3
11.	11.5763	6.4870e-9
12.	13.3274	1.8637e-6
13.	13.3702	6.3974e-4
14.	13.3707	5.8618e-4
15.	13.3762	7.3052e-7
16.	13.3781	2.8166e-4
17.	13.3786	3.3391e-4
18.	13.5429	1.6763e-5
19.	13.5432	1.0541e-5
20.	13.5444	2.0178e-6
21.	13.6106	1.4548e-3
22.	13.6123	1.4449e-3
23.	13.7911	5.8731e-7
24.	14.4948	1.5735e-2
25.	14.4950	1.5711e-2
26.	19.2137	6.0985e-7
27.	20.7280	4.9844e-5
28.	20.7291	5.5616e-6
29.	20.7302	1.5232e-5
30.	20.7772	8.8935e-4
31.	20.7803	8.4117e-4
32.	20.8909	3.9216e-6



Rysunek 4-6 Kształty modalne z dominującym ruchem trzonu masztu.



Rysunek 4-7 Osiowosymetryczne kształty modalne z dominującym ruchem odciągów wywołujące wzdłużną deformację trzonu.



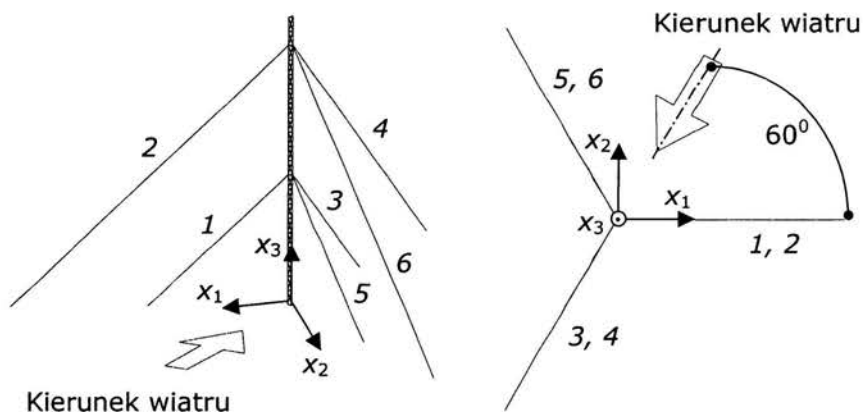
Rysunek 4-8 Kształty modalne z dominującym ruchem odciągów wywołujących zginanie trzonu masztu.

Na podstawie przedstawionej tabeli można powiedzieć, iż najsłabiej sterowalne są mody 5 i 11. Są to postacie drgań, w których dochodzi do skręcania trzonu.

Dodatkowo widać, iż występują mody o takich samych częstościach (do dwóch miejsc po przecinku). Fakt ten związany jest z występowaniem w układzie płaszczyzn symetrii. Jak zatem napisano w rozdziale 3 do oceny sterowalności pomimo niezerowych indeksów sterowalności należy sprawdzić liniową niezależność odpowiadającym im wierszy macierzy $\Phi^T \mathbf{B}_u$. Sprawdzenie rzędu macierzy utworzonych z wybranych wierszy odpowiadających tej samej częstości dało jednak pozytywny wynik, zatem wszystkie mody są sterowalne. Oczywiście słabo sterowalne są wskazane wcześniej mody skrętne oraz mody, w których dochodzi do wydłużenia i skrócenia trzonu tj. kształtów modalnych, w których dochodzi do drgań odciągów odbywających się symetrycznie względem osi pionowej trzonu masztu. Są to kształty modalne o numerach 8 i 15.

Podsumowując należy napisać, iż wszystkie słabo sterowalne mody posiadają postacie drgań, w których występują niewielkie wychylenia trzonu. Taki wniosek sprawia, iż dalej można bez obaw przystąpić do projektowania układu sterowania dla rozpatrywanego masztu.

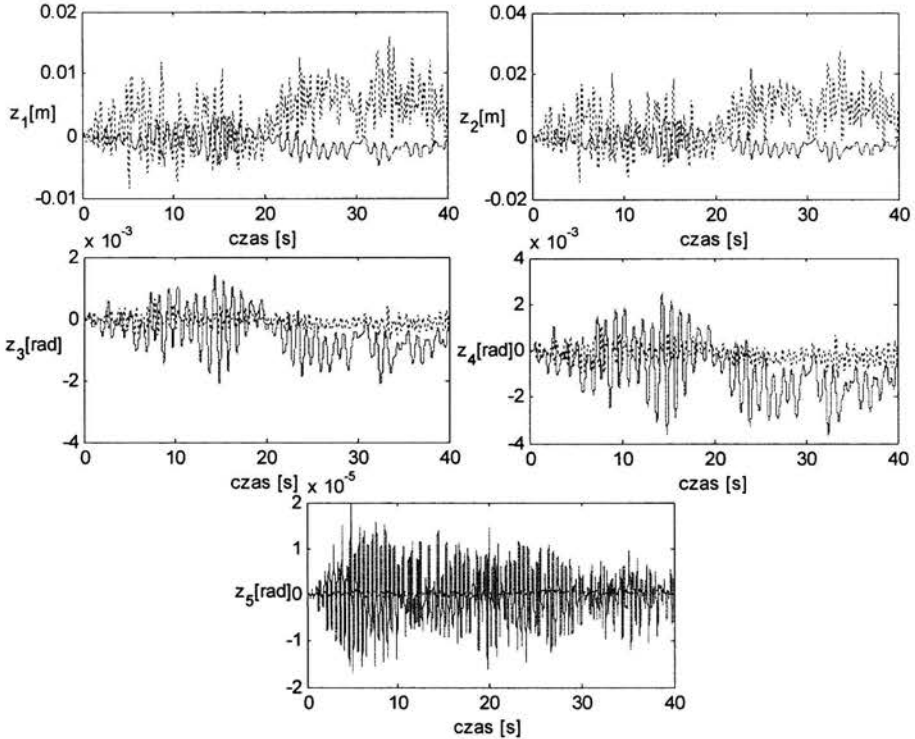
Po przeanalizowaniu sterowalności układu przeprowadzona została symulacja numeryczna. Przy obliczeniach uwzględniono działanie wiatru zarówno na trzon, jak i na odciągi masztu. Kierunek działania wiatru przedstawiono na poniższym rysunku



Rysunek 4-9 Kierunek działania wiatru

4.5. Wyniki obliczeń

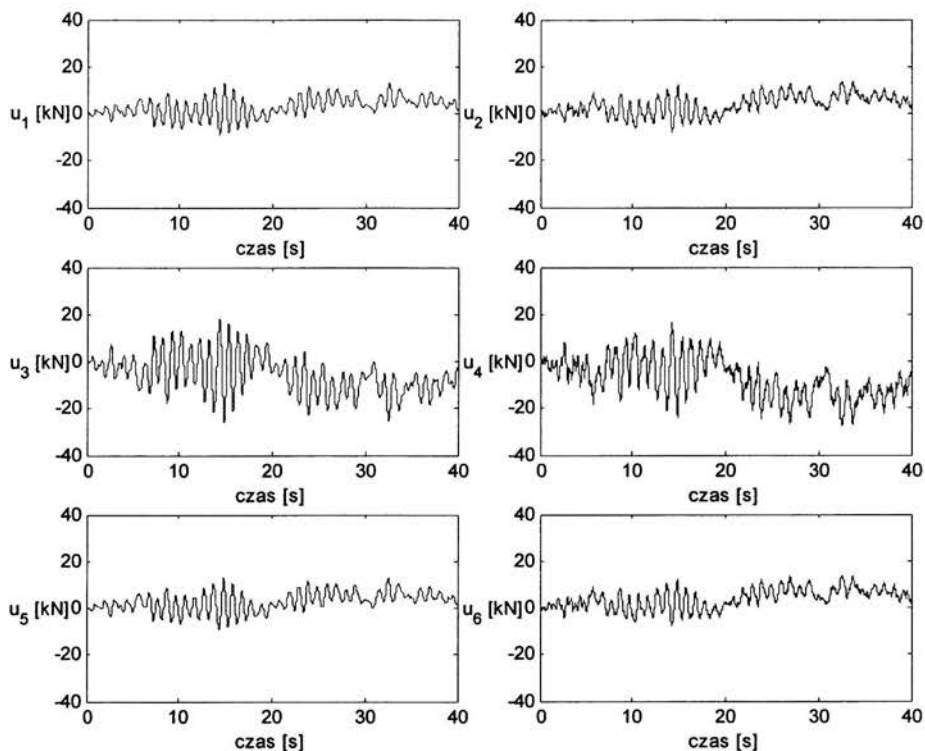
Na kolejnych wykresach znajdują się przebiegi czasowe wielkości wychylenia trzonu masztu oraz wielkości sił sterujących niezbędnych do redukcji drgań masztu.



Rysunek 4-10 Wektor wielkości regulowanych (linia przerywana – układ bez sterowania, linia ciągła - układ ze sterowaniem)

- z_1 - przemieszczenie wierzchołka masztu w kierunku x_1
- z_2 - przemieszczenie wierzchołka masztu w kierunku x_2
- z_3 - kąt obrotu wierzchołka masztu wokół osi x_2
- z_4 - kąt obrotu wierzchołka masztu wokół osi x_1
- z_5 - kąt obrotu wierzchołka masztu wokół osi x_3 (kąt skręcenia)

Na przedstawionych wykresach widać, iż uzyskana została zamierzona redukcja przemieszczeń wierzchołka masztu powodowanych działaniem wiatru (wielkości z_1 i z_2). W przypadku kątów obrotu nastąpiło natomiast zwiększenie ich wartości (wielkości z_3 i z_4). Podobnie wygląda sytuacja dla kąta skręcenia.



Rysunek 4-11 Wykresy sił sterujących

u_1, u_3, u_5 - siły sterowania w krótszych odciegach
 u_2, u_4, u_6 - siły sterowania w dłuższych odciegach (Rysunek 4-9)

Jak można zauważyć w przedstawionym przykładzie siły sterowania nie osiągnęły narzuconych ograniczeń tj. 40 kN. W momencie wystąpienia silniejszych wiatrów bądź nałożenia ostrzejszych ograniczeń na wielkości sił sterowania okazuje się, że układ sterowania daje rezultaty gorsze niż układ pasywny. Wynika to z faktu, iż powstają wówczas znaczne siły reakcji przewyższające maksymalne sterowania.

Wnioski końcowe

Podsumowując niniejszą rozprawę należy stwierdzić, iż cel postawiony przed proponowanym w pracy układem sterowania został uzyskany. Omawiana strategia sterowania, bazująca na rozwiązywaniu w czasie rzeczywistym problemu optymalnego sterowania, okazała się skuteczna. W wyniku zastosowania procedury kwadratowego programowania, osiągnięta została redukcja amplitud drgań poprzecznych wierzchołka masztu z $2.8 \cdot 10^{-2}$ do $5.8 \cdot 10^{-3}$ metra.

Wykorzystywana w niniejszej rozprawie strategia sterowania predycyjnego, stosowana była wcześniej m.in. w przemyśle petrochemicznym. Po raz pierwszy jednak zaproponowana została do tłumienia drgań konstrukcji masztu.

Ponadto, w pracy wyznaczone zostały modalne indeksy sterowności, określające wydajność sterowania drganiami masztu poprzez zmianę naciągu w linach odciągowych. Uwzględniony został przy tym realistyczny model oddziaływania podmuchów wiatru. Do analizy przyjęto stochastyczny opis prędkości porywów wiatru scharakteryzowany poprzez funkcję gęstości widmowej Davenporta. Następnie informacja o najbardziej prawdopodobnych prędkościach wiatru wykorzystana została przy tworzeniu układu sterowania drganiami masztu.

Wprowadzenie sterowania bazującego na predykcji modelu masztu i sił wiatru wymaga utworzenia obserwatora oraz stosowania układu identyfikacji parametrów, co czyni cały układ sterowania bardziej złożonym od sterowania ze sprzężeniem zwrotnym bezpośrednio od wyjścia.

Sterowanie predycyjne ma przewagę nad strategiami sterowania klasycznego polegającą na optymalizacji kwadratowego wskaźnika jakości oraz możliwości jawnego uwzględnienia ograniczeń nałożonych na amplitudy sił sterujących.

W pracy pominięto dynamikę siłowników hydraulicznych pełniących rolę wzбудników (ang. *actuators*). Byłoby interesujące zbadanie wpływu dynamiki tych urządzeń, ze względu na ich nieliniowy charakter.

Interesującym problemem również, nie podejmowanym w pracy, jest liczba postaci drgań opisujących zachowanie maszty. Bazując w niniejszej pracy na modelu modalnym z góry przyjęto zadaną liczbę tych postaci. Podyktowane to było w dużej mierze faktem, iż na etapie modelowania nie jest możliwe dokładne określenie występującego w układzie tłumienia. Dlatego też, w praktyce należałoby, najpierw zidentyfikować właściwą liczbę postaci drgań maszty poprzez zastosowanie metody identyfikacji podprzestrzeni stochastycznych. Następnie dla ustalonej liczby zastosować zaproponowany w pracy rekurencyjny algorytm identyfikacji. Interesujące byłoby również uwzględnienie opóźnień czasowych występujących w układzie sterowania. Pamiętać bowiem należy o fakcie, iż nawet przy dużej częstotliwości próbkowania, pomiar zawsze opóźniony jest o jeden krok czasowy w stosunku do sił sterowania.

Powyższe względy sprawiają, iż zagadnienie sterowania predykcyjnego posiada wiele otwartych problemów i przed ostateczną implementacją układu sterowania wymagane są dalsze prace w kierunku rozwiązania omówionych trudności.

Literatura

-
- [1] PRACA ZBIOROWA POD KIERUNKIEM W. GUTKOWSKIEGO, „Prace rozpoznawcze związane z budową nowego masztu radiowego w Gąbinie”, IPPT PAN 1992.
- [2] GROCHOWSKI I., „Maszty radiowe i telewizyjne”, Poradnik projektanta konstrukcji metalowych, Rozdział 17, Arkady, Warszawa 1982.
- [3] PAŁKOWSKI SZ., „Numeryczne wyznaczanie częstości i postaci drgań własnych ustrojów ciągnowych”, Arch. Inż. Łąd., Z. 1/1981, 11-20.
- [4] PAŁKOWSKI SZ., „Podstawy stateczności konstrukcji prętowych”, Wyd. Uczelniane WSI w Koszalinie, Koszalin, 1984.
- [5] TAKAHASHI K., KONISHI Y., „Non-linear vibrations of cables in three dimensions, part I: Non-linear free vibrations”, Journal of Sound and Vibration, 118(1), 85-97, 1987.
- [6] IRVINE H. M., „Linear theory of free vibrations of a suspended cable.”, Proceedings of the Royal Society, London, 341, 299-315, 1974.
- [7] TRIANTAFYLLOU M. S., „The dynamics of taut inclined cables”, Quarterly Journal of Mechanics and Mathematics 37, 421-440, 1984.
- [8] MCCAFFREY R. J., HARTMANN A. J., „Dynamics of guyed tower”, J. Structural Division Proceedings of the ASCE, vol. 98, no ST6, June 1972.
- [9] SPARLING B. F., DAVENPORT A. G., „Evaluation of simplified guy models in the dynamic analysis of guyed masts”, Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures: IASS, vol 43, n.138, 2002.
- [10] PAŁKOWSKI SZ., „Konstrukcje ciągnowe”, WNT, 1994.
- [11] SIMIU E., SCANLAN R. H., „Wind effects on structures: An Introduction to wind engineering”, John Wiley & Sons 1987.

-
- [12]YAN-LI H., XING M., ZHO-MIN W., SHI-LIN D., "Wind-induced response of guyed masts", Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures IASS, vol. 42, n. 137, 2001.
- [13]GAWRONSKI W., BIENKIEWICZ B., HILL R. E., "Wind-induced dynamics of a deep space network antenna", Journal of Sound and Vibration, 178(1), 67-77, 1994.
- [14]SEIDEL CH., DINKLER D., "Mode Switching of Rain-Wind Induced Vibrations", 21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, August 15-21, Warsaw, Poland, 2004.
- [15]BOLOTIN V. V., "The Dynamic Stability of Elastic Systems", Holden-Day Inc., San Francisco, 1964.
- [16]BOSSENS F., PREUMONT A., "Active Tendon Control of Cable-Stayed Bridges: a large-scale demonstration", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 30:961-979, 2001.
- [17]POLAK J., "Maszt radiowy o wysokości 640 m dla Warszawskiej Radiostacji Centralnej", Inżynieria i Budownictwo, nr 7-8, 1974.
- [18]THOMSON W. T., "Theory of vibration with applications", Prentice Hall, 1981.
- [19]HEIMANN B., GERTH W., POPP K., "Mechatronika. Komponenty, metody, przykłady", Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2001.
- [20]JANOCHA H., "Adaptronics and smart structures. Basics Materials, Design and Applications", Springer-Verlag, 1999.
- [21]DORF R. C., BISHOP R. H., "Modern Control Systems", 9th Edition, Prentice Hall, 2001.
- [22]MIU D. K., "Mechatronics: Electromechanics and Contromechanics", Springer-Verlag, 1993.
- [23]FRANKLIN G. F., POWELL J. D., EMAMI-NAEINI A., "Feedback Control of Dynamic Systems", Addison-Wesley, 3th Edition, 1994.
- [24]DOYLE J., FRANCIS B., TANNENBAUM A., "Feedback Control Theory", Macmillan Publishing, 1990.
- [25]ATHANS M., FALB F.L., "Optimal control", McGraw-Hill, New York, 1976.

-
- [26]ANDERSON B.D.O., MOORE J.B., *"Optimal Control: Linear Quadratic Methods"*, Prentice Hall, 1989.
- [27]BRYSON A.E. JR., HO Y., *"Applied Optimal Control. Optimization, Estimation and Control"*, Hemisphere Publishing Corporation, 1975.
- [28]MEIROVITCH L., *"Computational Methods in Structural Dynamics"*, Sijthoff & Noordhoff, 1980.
- [29]BALAS M.J., *"Active Control of Flexible Systems"*, J. Of Optim. Theory App, vol. 25, no 3, 415-436, 1978.
- [30]BALAS M.J., *"Direct Velocity Feedback Control of Large Space Structures"*, AIAA J. Of Guidance, vol 2(3), 252-253, 1979.
- [31]LEVINE W. S., ATHANS M., *"On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems"*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-15. No. 1, 44-48, 1970.
- [32]JOSHI S.M., *"Control of large flexible space structures"*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 131, Springer-Verlag, Berlin 1989.
- [33]KALIATH T., *"Linear Systems"*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1980.
- [34]JOSHI S. M., KELKAR A. G., *"Control of Flexible Space Structures"*, The Control Handbook, Levine W. S., CRC Press, 1996.
- [35]SKELTON R.E., HUGHES P.C., *"Controllability and observability of linear matrix-second-order systems"*, Journal of Applied Mechanics, 47, 1980.
- [36]ARNOLD W.F., LAUB A.J., *"Controllability and observability criteria for multivariable linear second-order models"*, IEEE Transactions on Automatic Control AC-29, no 2, 1984.
- [37]FRIEDLAND B., *"Controllability index based on condition number"*, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 1975.
- [38]JUNKINS J. L., *"Mechanics and control of large flexible structures"*, AIAA, 1990.

-
- [39]MEIROVITCH L., *"Dynamics and Control of Structures"*, John Wiley Interscience, 1990.
- [40]GAWRONSKI W., *"Dynamics and Control of Structures: A Modal Approach"*, Springer, New York, 1998.
- [41]GAWRONSKI W., *"Balanced Control of Flexible Structures"*, Springer-Verlag, 1996.
- [42]SUHARDJO J., SPENCER B. F. JR., KAREEM A., *"Frequency domain optimal control of wind-excited buildings"*, Journal of Engineering Mechanics, vol. 118, no. 12, December, 1992.
- [43]FUJINO Y., WARNITCHAI P., PACHECO B.M., *"Active stiffness control of cable structures"*, ASME J. of Applied Mechanics, vol 60, 948-953, December, 1993.
- [44]ACHKIRE Y., *"Active Tendon Control of Cable-Stayed Bridges"*, Ph.D. thesis, Active Structures Laboratory, Universite Libre de Bruxelles, Belgium, 1997.
- [45]MAGONETTE G., MARAZZI F., BOSSENS F., DUMOULIN C., *"Active Control Experiment of a Large Scale Cable-Stayed Bridge Mock-up"*, 3th International Symposium on Cable Dynamics, Trondheim, Norway, August 1999.
- [46]DULLERUD G. E., PAGANINI F., *"A Course in Robust Control Theory-A Convex Approach"*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [47]MARINOVA D., STAVROULAKIS G., *"Robust Control Design of a Smart Building Structure"*, 7th Conference on Dynamical Systems Theory and Applications, Łódź, December 8-11, 2003.
- [48]LJUNG L., *"System Identification: Theory for the User."*, Second edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1999.
- [49]DE QUEIROZ M. S. I INNI, *"Lyapunov-based control of mechanical system"*, Birkhauser, 2000.
- [50]SPENCER B. F. JR., *"Smart damping technology: Opportunities and applications"*, 34th Solid Mechanics Conference SolMech'02, September 2-7, Zakopane, Poland, 2002.
- [51]GAUL L., ALBRECHT H., WIRNITZER J., *"Semi-Active Friction Damping of Flexible Lightweight Structures"*,

AMAS/ECOMAS/STC Workshop on Smart Materials and Structures, SMART'03, Jadwisin, September 2-5, 2003.

- [52]GUTKOWSKI W., „*Regularne konstrukcje prętowe*”, Państwowe Wydawnictwa Naukowe, 1973.
- [53]KLEIBER M., „*Wprowadzenie do metody elementów skończonych*”, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1989.
- [54]IRVINE H.M., „*Cable structures*”, M.I.T. Press, 1981.
- [55]TIMOSHENKO S., „*Vibration problems in engineering*”, D. Van Nostrand Company Inc., 1953.
- [56]INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR SHELL AND SPATIAL STRUCTURES, „*Recommendations for guyed masts*”, IASS Madrid, 1981.
- [57]IANNUZZI A., SPINELLI P., „*Artificial Wind Generation and Structural Response*”, J. of Structural Engineering, vol 113, no. 12, 1987.
- [58]BŁACHOWSKI B., GUTKOWSKI W., „*Vibration control of masts with tendons*”, 34th Solid Mechanics Conference SolMech 2002, September 2-7, Zakopane, Poland, 2002.
- [59]BŁACHOWSKI B., „*Sterowanie drganiami z zastosowaniem do masztów z odciągami*”, XLII Sympozjon PTMTS „Modelowanie w mechanice”, 10-14.02, Wisła 2003.
- [60]MILEWSKI J., MILLER A., „*Koncepcja modelu ogniwa paliwowego SOFC*”, XLII Sympozjon PTMTS „Modelowanie w mechanice”, Wisła, 10-14 luty, 2003.
- [61]KACZOREK T., „*Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice*”, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1998.
- [62]KACZOREK T., „*Teoria sterowania i systemów*”, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1999.
- [63]GOODWIN G.C., GRAEBE S. F., SALGADO M. E., „*Control System Design*”, Prentice Hall, 2001.
- [64]BŁACHOWSKI B., GUTKOWSKI W., „*Optimal vibration control of guyed masts*”, 21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics ICTAM04, August 15-21, Warsaw, Poland, 2004.

-
- [65] PEETERS B., „Operational Modal Analysis: A Tool for Structural Health Monitoring”, Summer Academy SAMCO 2003, Robinson College, Cambridge University, July 14-18, 2003.
- [66] PEETERS B., „System Identification and Damage Detection in Civil Engineering”, PhD Thesis, Department of Civil Engineering, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 2000.
- [67] GAWRONSKI W., „Three Models of Wind-Gust Disturbances for the Analysis of Antenna Pointing Accuracy”, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, IPN Progress Report 42-149, May 15, 2002.
- [68] BŁACHOWSKI B., „Active Vibration Control of Guyed Masts”, AMAS/ECOMAS/STC Workshop on Smart Materials and Structures SMART'03, Jadwisin, September 2-5, 2003.