

**Instytut Podstawowych Problemów Techniki  
Polska Akademia Nauk**

**Naturalna warstwa wierzchnia metali - opis  
fizyczny i model fenomenologiczny**

**mgr Grzegorz Starzyński**  
praca doktorska

promotor: doc dr hab. Wiktor Gambin

Warszawa, 1998

# Spis treści

1. WPROWADZENIE.....	1
1.1. Naturalna warstwa wierzchnia a technologiczne warstwy wierzchnie metali .....	1
1.2. Cel i zakres pracy .....	5
2. NATURALNA WARSTWA WIERZCHNIA METALI W ŚWIELE BADAŃ DOŚWIADCZALNYCH .....	7
2.1. Przegląd literatury .....	7
2.1.1. Badania doświadczalne - uwagi ogólne .....	7
2.1.2. Badania naprężeń własnych .....	10
2.1.3. Pomiary granicy plastyczności .....	13
2.1.4. Badania mikrotwardości .....	16
2.2. Badania własne - zmiany struktury geometrycznej powierzchni próbki odkształcanej .....	17
2.2.1. Uwagi ogólne.....	17
2.2.2. Zasada pracy profilometru skaningowego.....	18
2.2.3. Mapa konturowa i widok powierzchni.....	20
2.2.4. Wielkości opisujące strukturę geometryczną powierzchni .....	20
2.2.5. Próbki.....	25
2.2.6. Doświadczenia.....	25
2.3. Zdefiniowanie naturalnej warstwy wierzchniej .....	38
3. WARSTWA WIERZCHNIA KRYSZTAŁÓW METALI .....	42
3.1. Wpływ powierzchni kryształu na zachowanie się pojedynczej dyslokacji .....	42
3.1.1. Działanie zewnętrznego pola naprężeń - siła działająca na dyslokację .....	44
3.1.2. Pole naprężeń własnych wokół dyslokacji odległych od brzegu ośrodka .....	46
3.1.3. Pole naprężeń wokół dyslokacji w pobliżu brzegu ośrodka .....	49
3.1.4. Naprężenia potrzebne do uruchomienia dyslokacji .....	55
3.2. Wpływ powierzchni kryształu na zachowanie się źródła dyslokacji .....	57
3.2.1. Źródło w ośrodku nieograniczonym .....	58
3.2.2. Źródło znajdujące się w pobliżu powierzchni ośrodka .....	60
3.3. Wnioski płynące z dotychczasowych rozważań .....	65

<b>4. MODEL FENOMENOLOGICZNY NATURALNEJ WARSTWY WIERZCHNIEJ .....</b>	<b>68</b>
4.1. Granice plastyczności swobodnego ziarna i polikryształu .....	68
4.2. Hipoteza o dekompozycji naprężeń krytycznych w ziarnach naturalnej warstwy wierzchniej .....	71
4.2.1. Model uproszczony .....	71
4.2.2. Model ogólny .....	73
4.3. Rozkład granicy plastyczności wewnątrz naturalnej warstwy wierzchniej polikryształu .....	78
4.3.1. Rozkład schodkowy i odcinkowo-liniowy .....	78
4.3.2. Rozkład „gładki” .....	81
4.4. Podsumowanie dotychczasowych rozważań .....	84
<b>5. ANALIZA STANÓW SPRĘŻYSTO - PLASTYCZNYCH W ELEMENTE Z NATURALNĄ WARSTWĄ WIERZCHNIĄ .....</b>	<b>86</b>
5.1. Przyjęte założenia.....	86
5.2. Rozciąganie walca z warstwą wierzchnią - model jednopowłokowy .....	88
5.3. Rozciąganie walca z warstwą wierzchnią - model wielopowłokowy .....	96
5.4. Model wielopowłokowy uwzględniający naprężenia promieniowe w warstwie .....	100
5.5. Identyfikacja wzmocnienia kinematycznego i izotropowego .....	106
5.6. Opis algorytmu programu obliczeniowego .....	112
<b>6. SYMULACJA NUMERYCZNA ZACHOWANIA SIĘ WARSTW WIERZCHNICH METALI .....</b>	<b>117</b>
6.1. Wyznaczanie pętli histerezy i naprężeń resztkowych.....	117
6.2. Ilustracja działania programu symulacyjnego na przykładzie technologicznej warstwy wierzchniej .....	119
6.2.1. Warstwa wierzchnia próbki stalowej modelowana pojedynczą powłoką .....	119
6.2.2. Warstwa wierzchnia hartowanej indukcyjnie próbki stalowej modelowana wieloma powłokami .....	127
6.3. Symulacja procesu obciążania próbki z naturalną warstwą wierzchnią .....	129
6.3.1. Model obliczeniowy naturalnej warstwy wierzchniej .....	129
6.3.2. Naprężenia resztkowe w próbce z naturalną warstwą wierzchnią po jednokrotnym obciążeniu .....	130

6.3.3. Naprężenia resztkowe w próbce z naturalną warstwą wierzchnią w stanie ustalonym po obciążeniu cyklicznym.....	133
6.4. Wpływ naturalnej warstwy wierzchniej na stan naprężeń własnych próbki z technologiczną warstwą wierzchnią .....	136
6.5. Wpływ naturalnej warstwy wierzchniej na wartość modułu Younga .....	139
7. PODSUMOWANIE.....	145
LITERATURA.....	148

# Rozdział 1

## WPROWADZENIE

### 1.1 Naturalna warstwa wierzchnia a technologiczne warstwy wierzchnie metali

Rola warstwy leżącej bezpośrednio pod powierzchnią odkształcanych plastycznie metali już dawno była przedmiotem uwagi wielu badaczy. Użytkownicy elementów metalowych i części maszyn dość szybko zorientowali się, że warstwa ta ma istotny wpływ na trwałość odkształcanych elementów, a zwłaszcza elementów poddanych procesowi zmęczenia. Stwierdzono, że początkowa faza plastycznej deformacji zachodzi właśnie w zewnętrznej części odkształcanego materiału - w jego warstwie wierzchniej. Co rozumie się przez warstwę wierzchnią materiału? W pracy przyjęte zostanie określenie, zgodne z polską normą PN-73/M-04250 [1]:

*„Warstwa wierzchnia - warstwa materiału ograniczona rzeczywistą powierzchnią przedmiotu i obejmująca tę powierzchnię oraz część materiału w głąb od powierzchni rzeczywistej, która wykazuje zmienione cechy fizyczne i niekiedy chemiczne w stosunku do cech materiału w głębi przedmiotu”.*

Określenie granicy warstwy wierzchniej zależy od badanej cechy materiału i na ogół jest bardzo trudne. Przyjmuje się, że wartość danej cechy określa granicę warstwy wierzchniej jeżeli różni się od wartości badanej cechy w rdzeniu materiału o umowną wielkość. Cechami warstwy wierzchniej, których wartości porównuje się z odpowiednimi wartościami cech w rdzeniu badanego elementu są między innymi:

- mikrotwardość,
- naprężenia własne,
- granica plastyczności,
- własności sprężyste,
- parametry opisujące strukturę wewnętrzną,
- parametry opisujące rozkład wdyfundowanego lub zaimplantowanego pierwiastka.

Z warstwą wierzchnią i powierzchnią elementu związanych jest szereg zjawisk towarzyszących, takich jak absorpcja czy utlenianie się powierzchni, którymi jednak w pracy zajmować się nie będę.

Badania mające na celu określenie wpływu warstwy wierzchniej na zachowanie się deformowanego materiału są prowadzone w dwóch kierunkach: technicznym i fizycznym. Badania techniczne mają na celu dobór warstw wierzchnich pod kątem ich późniejszej przydatności w praktyce. W wyniku tych badań powstają *technologiczne warstwy wierzchnie*. Celem wytwarzania technologicznych warstw wierzchnich na elementach metalowych i częściach maszyn jest podniesienie trwałości i wytrzymałości elementów oraz ich odporności na zmęczenie, zużycie i korozję. Warstwy te tworzono od dawna, na przykład poprzez podnoszenie granicy plastyczności przez zgmiot powierzchniowy, podczas zabiegu dokonywanego przez kowali. Jednak dopiero ostatnio próbuje się projektować warstwy ściśle odpowiadające zapotrzebowaniom użytkowników. Tradycyjne techniki obróbki powierzchni metali opisano w książce [2]. Opis najnowszych technik wytwarzania warstw powierzchniowych można znaleźć w monografii [3]. Metody wytwarzania technologicznych warstw wierzchnich dzieli się na sześć grup: mechaniczne, cieplno-mechaniczne, cieplne, cieplno-chemiczne, elektrochemiczne-i-chemiczne oraz fizyczne. Rozpiętość w grubości warstw wierzchnich wytworzonych przy zastosowaniu różnych metod sięga kilku rzędów wielkości (od nanometrów przy implantacji jonowej, napyłaniu czy naparowywaniu do milimetrów przy obróbce cieplnej czy mechanicznej). Pozwala to wyobrazić sobie różnorodność problemów z jakimi stykają się badacze starający się znaleźć odpowiednią metodę wytworzenia warstwy, która ma spełniać określone przez

użytkownika warunki. Nie mniejsze problemy napotyka się przy badaniach własności wytworzonej już warstwy.

Zbadanie cech fizycznych i mechanicznych technologicznej warstwy wierzchniej, która nie jest jednorodna materiałowo i której własności zmieniają się wraz z odległością od powierzchni wymaga wielu uproszczeń. Własności rdzenia elementu można zbadać, tworząc próbki z materiału, na którym jeszcze nie wytworzono technologicznej warstwy wierzchniej, lub z którego zdjęto (mechanicznie lub chemicznie) wytworzoną już warstwę. Jeżeli grubość takiej próbki będzie odpowiednio duża, pomiar parametrów opisujących własności rdzenia będzie obarczony niewielkim błędem. Inaczej jest w przypadku badania własności technologicznej warstwy wierzchniej. Niektóre jej cechy, takie jak naprężenia własne mierzone metodą rentgenowską, lub mikrotwardość, udaje się zmierzyć przy samej powierzchni. Interesujące wyniki można uzyskać metodą propagacji fal ultradźwiękowych [4]. Jednak obszar całej warstwy rzadko daje się zbadać dokładnie. Jednym ze sposobów zbadania własności technologicznej warstwy wierzchniej jest jej podział na strefy, w których zakłada się niezmiennosc parametrów materiałowych, a następnie wykonanie próbek o identycznych własnościach. Przy badaniu własności tak wykonanych próbek zaobserwowano jednak *efekt skali* - własności mechaniczne zależały od grubości próbek. Moduł sprężystości zmniejszał się w miarę zmniejszania promienia próbki. Podobnie zachowywała się granica plastyczności. Kolejnym zjawiskiem było pojawianie się naprężeń własnych w warstwie przypowierzchniowej próbek rozciąganych poniżej granicy plastyczności.

Powyższe zjawiska można wyjaśnić, jeżeli uwzględni się istnienie w jednorodnych próbkach *naturalnej warstwy wierzchniej*, która ulega wcześniejszemu uplastycznieniu niż reszta materiału. Zmiana granicy plastyczności w tej warstwie związana jest z oddziaływaniem swobodnej powierzchni materiału i ziarnistą budową badanych próbek. Potraktowanie materiału próbki jak ośrodka polikrystalicznego, pozwala na uwzględnienie różnicy pomiędzy krzywymi rozciągania polikryształu i pojedynczego ziarna. Krzywa opisująca element polikrystaliczny leży znacznie powyżej krzywej opisującej pojedyncze ziarno.

Podwyższenie granicy plastyczności polikryształu w stosunku do granicy plastyczności pojedynczego ziarna jest związane w dużej mierze z istnieniem granic ziaren, które blokują ruch dyslokacji, tworząc naturalne przeszkody w uplastycznieniu się materiału. W przypadku ziaren leżących w rdzeniu próbki, daleko od brzegu, przeszkody te są bardzo silne. Jak jednak będą się zachowywać dyslokacje w ziarnach leżących przy brzegu próbki? Wiele badań doświadczalnych wskazuje na to, że ziarna te uplastyczniają się wcześniej niż reszta materiału. Warstwa, której granica plastyczności jest obniżona w stosunku do rdzenia próbki sięga 2 - 3 ziaren [5,6]. Jeżeli grubość próbki jest rzędu kilkunastu średnic ziaren - pojawiają się opisane wyżej efekty skali.

Badania mikroskopowe wskazują na podobieństwo w zachowaniu się materiału w pojedynczym ziarnie i polikryształ: warstwa przypowierzchniowa kryształu również uplastycznia się wcześniej niż materiał wewnątrz ziarna. Badania ruchu dyslokacji wskazują na zmiany ich gęstości w pobliżu brzegu kryształu. Okazuje się, że zarówno pojedyncze dyslokacje jak i ich źródła generujące pętle dyslokacyjne, zachowują się odmiennie w zależności od tego w jakiej odległości od brzegu są usytuowane. W wyniku tych obserwacji stworzono pojęcie *fizycznej warstwy wierzchniej* pojedynczego kryształu [7,8,9]. Siły niezbędne do uruchomienia dyslokacji czy wygenerowania pętli ze źródła dyslokacji są znacznie mniejsze w przypadku gdy dyslokacja czy źródło leżą w pobliżu brzegu, niż gdy leżą one daleko od powierzchni kryształu. Rozważaniom tym poświęcona jest znaczna część niniejszej pracy (rozdz. 3).

Analogicznie do pojęcia fizycznej warstwy wierzchniej pojedynczych kryształów można wprowadzić i badać *naturalną warstwę wierzchnią polikryształów*. Obejmuje ona 2-3 ziarna materiału, w których dyslokacje zachowują się inaczej niż we wnętrzu materiału. Jest rzeczą oczywistą, że własności naturalnej warstwy wierzchniej determinują własności wytwarzanych później na niej technologicznych warstw wierzchnich. Dlatego też powinny być one brane pod uwagę w procesie projektowania. Przy opisie własności technologicznych warstw wierzchnich naturalna warstwa wierzchnia powinna być rzeczywistym stanem odniesienia.

Modelowi naturalnej warstwy wierzchniej polikryształów poświęcone są rozdziały 4 i 5. W rozdziale 6 przedstawione zostaną przykłady symulacji monotonicznego i cyklicznego obciążania próbki z technologiczną i naturalną warstwą wierzchnią. Otrzymany w wyniku symulacji stan reszkowych naprężeń własnych zostanie porównany w przypadku uwzględnienia istnienia naturalnej warstwy wierzchniej i bez jej uwzględnienia.

## 1.2 Cel i zakres pracy

Celem pracy jest:

- Wprowadzenie pojęcia *naturalnej warstwy wierzchniej* metali.
- Ilustracja doświadczalna i analiza zachowania się naturalnej warstwy wierzchniej rozciąganej próbki miedzianej poprzez analizę stereometryczną struktury geometrycznej powierzchni.
- Opis mechanizmów dyslokacyjnych determinujących własności naturalnej warstwy wierzchniej.
- Zbudowanie modelu fenomenologicznego naturalnej warstwy wierzchniej.
- Opracowanie programu komputerowego symulującego zachowanie się naturalnej warstwy wierzchniej.
- Wyjaśnienie efektu skali i efektów brzegowych związanych z istnieniem naturalnej warstwy wierzchniej,

Rozważania niniejszej pracy ograniczone są do materiałów polikrystalicznych, sprężysto-plastycznych ze wzmocnieniem, poddanych obciążeniom quasi-statycznym w temperaturze pokojowej. Badane materiały, to metale jednofazowe o ziarnach zbliżonej wielkości. Następny rozdział pracy poświęcony jest szczegółowemu opisowi przedstawionych w literaturze badań doświadczalnych dotyczących warstwy przypowierzchniowej ciała stałego. Znaczna część tego rozdziału poświęcona jest badaniom własnym. W części tej zbadano płaskie próbki o strukturze jednorodnego i izotropowego polikryształu. Zostały one wycięte z blachy miedzianej w taki sposób, aby nie wprowadzić naprężeń własnych, zanieczyszczeń i spękań na ich powierzchni. W celu zlikwidowania naprężeń własnych zastosowano wygrzewanie, a dla usunięcia pozostałości po obróbce

mechanicznej - jej polerowanie. Próbkę tę poddano rozciąganiu poniżej ich granicy plastyczności  $R_{0,2}$ , a następnie szczegółowo zbadano efekt „marszczenia się” powierzchni próbek po ich całkowitym odciążeniu. Efekt ten, obserwowany jako matowienie powierzchni rozciąganych próbek wyraźnie świadczy o wcześniejszym uplastycznieniu ich naturalnej warstwy wierzchniej. Na koniec, przeprowadzono szczegółowe pomiary stereometryczne otrzymanych powierzchni oraz podano interpretacje otrzymanych wyników.

Zachowaniu się dyslokacji i źródeł dyslokacji w fizycznej warstwie wierzchniej pojedynczego ziarna materiału poświęcony jest kolejny rozdział pracy. Rozważania tego rozdziału pozwoliły na wprowadzenie modelu naturalnej warstwy wierzchniej materiału polikrystalicznego jako tej, w której dyslokacje zachowują się inaczej niż w głębi materiału. Model ten umożliwia symulację komputerową zachowania się naturalnej warstwy wierzchniej i rdzenia próbki, do której przyłożone są obciążenia zewnętrzne. Wyjaśnia też mechanizm wcześniejszego uplastycznienia warstwy oraz powstawania w niej naprężeń własnych.

Opracowany program komputerowy umożliwia symulację zachowania się technologicznych warstw wierzchnich metali o dowolnym rozkładzie początkowych naprężeń własnych a także własności sprężystych i plastycznych. Program pozwala na uwzględnienie wpływu zarówno umocnienia izotropowego jak i kinematycznego na końcowy stan próbek walcowych poddanych cyklicznym obciążeniom rozciągającym i ściskającym. Analiza numeryczna procesu rozciągania w zakresie sprężystym cienkich próbek metalowych z naturalną warstwą wierzchnią umożliwiła wyjaśnienie zjawiska zmniejszania się modułu Younga wraz ze średnicą próbki.

## Rozdział 2

### NATURALNA WARSTWA WIERZCHNIA METALI W ŚWIETLE BADAŃ DOŚWIADCZALNYCH

#### 2.1 Przegląd literatury

##### 2.1.1 Badania doświadczalne - uwagi ogólne

Badania doświadczalne własności warstwy przypowierzchniowej ciała stałego zaczęto prowadzić bardzo wcześnie, już w latach 40. Szybko również okazało się, że określenie tych własności jest trudne i nie daje jednoznacznych wyników. Spory o istotę warstwy wierzchniej, zarówno w pojedynczym kryształach jak i w polikryształach trwały bardzo długo i sprowadzały się do odpowiedzi na następujące pytanie: Czy warstwa wierzchnia rozciąganej próbki uplastycznia się wcześniej, później, czy też jednocześnie z jej wnętrzem? W odniesieniu do *pojedynczych kryształów* różni badacze otrzymywali wyniki potwierdzające każdą z tych trzech tez. Mianowicie:

1. W pracach [9,10,11,12,13,14] wykazano osłabienie warstwy wierzchniej;
2. prace [15,16,17,18,19,20,21,22] pokazały, że warstwa wierzchnia jest umocniona w stosunku do reszty kryształu;
3. brak mierzalnych zmian wykazano w pracach [23,24,25,26,27].

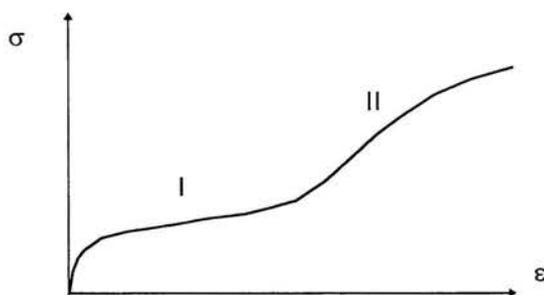
Aby wyjaśnić rozbieżności pomiędzy wynikami przedstawionymi w powyższych pracach, należy wziąć pod uwagę następujące zjawiska:

- - Relaksacja struktury dyslokacyjnej podczas odciążania próbki. [14,28]

Niektóre materiały, w szczególności Al i Cu, mają tendencje do szybkiej relaksacji struktur dyslokacyjnych po odciążeniu próbki. Późniejsze pomiary gradientu gęstości

dyslokacji dawały błędny wynik, ponieważ zanikał on po stosunkowo krótkim czasie. Zmierzony czas relaksacji przypowierzchniowych struktur dyslokacyjnych dla aluminium wynosi 1 godzinę. Podobny rząd wielkości ma czas relaksacji dla Ti, Au i Cu. Aby móc przeprowadzić pomiar gradientu gęstości dyslokacji w tych materiałach należy zastosować specjalną technikę „zamrażania” struktury dyslokacyjnej (np. oświetlanie wiązką neutronów). Metoda ta pozwoliła [29] wyznaczyć gradient gęstości dyslokacji w strefie warstwy przypowierzchniowej zarówno dla aluminium jak i dla miedzi.

- - zbyt duże odkształcenia badanych kryształów metali, przekraczające II stopień umocnienia (rys.2.1) [10,11,14].



Rys. 2.1 Krzywa  $\sigma - \epsilon$  kryształu Al. Zaznaczone kolejne stopnie umocnienia [30]

Liczne struktury dyslokacyjne pojawiają się w warstwie wierzchniej odkształcanego kryształu bardzo wcześnie, już na początku I stopnia umocnienia, nie pojawiając się jednocześnie w rdzeniu próbki. Wówczas to gradient gęstości dyslokacji jest największy. W miarę wzrostu wartości odkształcenia różnica pomiędzy gęstością dyslokacji w warstwie przypowierzchniowej i rdzeniu maleje, aby dla  $\epsilon = 5 - 7\%$  zaniknąć całkowicie. Przy tej wielkości odkształceń brak jest istotnych różnic pomiędzy własnościami warstwy wierzchniej i rdzenia kryształu.

- - wybór wzorca do badania struktur dyslokacyjnych z materiału leżącego w zbyt dużej odległości od powierzchni kryształu [31,32]. Kolejnym poważnym błędem metodycznym spotykanym przy badaniach warstwy przypowierzchniowej było pobieranie wzorców do badań strukturalnych z materiału leżącego w zbyt dużej odległości od powierzchni kryształu. We wczesnych pracach, kiedy o rzeczywistej

grubości warstwy wierzchniej prawie nic nie było wiadomo, wzorce te pobierano z materiału leżącego w odległości 100 - 500  $\mu\text{m}$  od powierzchni próbki. Rzeczywista grubość warstwy nie przekraczała natomiast kilkunastu mikrometrów.

Wydaje się, że najbardziej przekonujący jest model wcześniejszego uplastycznienia się warstwy przypowierzchniowej, który prowadzi do umocnienia tej warstwy podczas jej dalszej deformacji. Taki model tłumaczy większość wyników - zarówno tych, w których otrzymywano warstwę osłabioną, jak i tych, w których była ona umocniona. Prowadzi on także do wniosku, że właściwie nie ma sprzeczności pomiędzy wynikami dotychczasowych badań - warstwa, w zależności od tego jak i kiedy się ją bada może być osłabiona lub umocniona. Zgodnie z tym modelem, proces deformacji plastycznej warstwy przypowierzchniowej można podzielić na dwie części. Początkowo, w warstwie wierzchniej powstaje więcej źródeł dyslokacji, a siły niezbędne do ich uruchomienia są mniejsze niż we wnętrzu kryształu. Prowadzi to do wcześniejszego uplastycznienia tej warstwy. Druga część procesu deformacji prowadzi do powstania efektu bariery dyslokacyjnej wywołanego nagromadzeniem się dyslokacji uruchomionych w początkowym stadium tego procesu. Cały proces wyprzedza w czasie analogiczne zjawiska zachodzące we wnętrzu kryształu. W rezultacie, w pobliżu powierzchni kryształu powstaje warstwa nieruchomych dyslokacji o podwyższonej gęstości, która utrudnia wychodzenie pasm poślizgu na powierzchnię i opóźnia uplastycznienie jego wnętrza. Tak więc, efekt przypowierzchniowy zmienia swój charakter: w wyniku wcześniejszego uplastycznienia osłabionej warstwy powstaje przypowierzchniowa bariera dyslokacyjna wzmacniająca tę warstwę.

Zachowanie się dyslokacji w pobliżu powierzchni pojedynczych kryształów ma swoją analogię w zachowaniu się spiętrzeń dyslokacyjnych na granicach ziaren naturalnej warstwy wierzchniej polikryształów. Niższa niż w rdzeniu próbki granica plastyczności tej warstwy powoduje jej wcześniejsze uplastycznienie podczas obciążenia. Po odciążeniu powstałe naprężenia własne oraz zwiększona gęstość dyslokacji nieruchomych w ziarnach naturalnej warstwy wierzchniej powodują jej umocnienie. Taka też jest teza, którą będę się starał uzasadnić. Opierając się na niej proponuję *model fenomenologiczny* zachowania się naturalnej warstwy

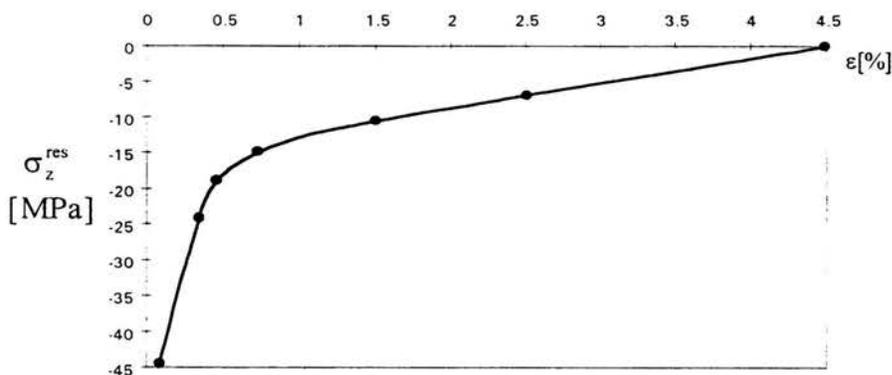
wierzchniej polikryształów. Teza ta poparta jest wynikami wielu doświadczeń, których przegląd przedstawiony jest w następujących podrozdziałach.

### 2.1.2. Badania naprężeń własnych

W badaniach warstwy wierzchniej najczęściej stosowane są pomiary naprężeń własnych. Wprawdzie ich wyniki mogą być obarczone pewnym błędem, ale są jednocześnie najlepiej opisaną pośrednią metodą oceny zachowania się warstwy wierzchniej w czasie deformacji próbki. Istnieje wiele metod pomiaru naprężeń własnych, z których najczęściej używane są dwie: *metoda rentgenowska* i *metoda trawienia*. Ta ostatnia znana jako metoda Weissmanna - Philipsa [33], w rosyjskiej literaturze nazywana jest metodą Dawidenkowa [34]. Wyznaczenie naprężeń metodą rentgenowską polega na pomiarze odkształceń sieci krystalograficznej w niewielkim obszarze działania promieni Rentgena [35]. Korelacja pomiędzy zmierzonym odkształceniem sieci, a naprężeniem obliczonym na podstawie związków teorii sprężystości jest podstawową zasadą rentgenowskiej analizy naprężeń własnych. Wadą tej metody jest to, że pomiar możliwy jest tylko w pobliżu powierzchni, praktycznie na grubości warstwy rzędu długości fali, która jest bardzo mała. Trudno jest zatem zmierzyć rozkład naprężeń własnych w funkcji odległości od powierzchni. Można to zrobić, mierząc naprężenia własne na zglądach poprzecznych lub ukośnych. Metoda pomiaru naprężeń własnych poprzez trawienie polega na zdejmowaniu z jednej strony płaskiej próbki niewielkich warstw materiału. Powoduje to zmianę rozkładu tych naprężeń i wygięcie próbki. Pomiar strzałki ugięcia skorelowany z grubością zdjętej warstwy materiału pozwala oszacować początkową wartość naprężeń własnych. Wadą tej metody jest jej mała dokładność, zwłaszcza w przypadku małych naprężeń własnych. Ponadto konieczność uśredniania otrzymanych wyników po grubości próbki, w przypadku dużych gradientów naprężeń, może prowadzić do znacznych błędów.

Rozważmy teraz próbkę polikrystaliczną zbudowaną z ziaren o zbliżonej średnicy, bez naprężeń własnych. Poddajmy ją rozciąganiu tak, aby nie przekroczyć nominalnej granicy plastyczności, a następnie odciążmy i zmierzmy w niej naprężenia własne. Gdyby własności próbki były jednorodne i jej materiał

odkształcał się tak samo w całym przekroju, naprężenia własne po odciążeniu nie pojawiłyby się. Jeżeli jednak warstwa wierzchnia odkształca się szybciej niż rdzeń, pojawią się w niej naprężenia własne, równoważące powstałe w warstwie trwale odkształcenia plastyczne. Na podstawie tego rozumowania wielu badaczy próbowało doświadczalnie udowodnić istnienie warstwy wierzchniej o własnościach różnych od własności rdzenia próbki. Glikman [36,37] przeprowadził doświadczenie na starannie przygotowanych płaskich próbkach stalowych. Próbki rozciągano do pięciu różnych wartości odkształcenia (maksymalnie 4.5%) po czym były one odciążane i mierzono w nich naprężenia własne metodą trawienia. Prób takich wykonano na tyle dużo, że pozwoliło to zmniejszyć błąd pomiaru strzałki ugięcia do 1.5  $\mu\text{m}$ . Próbki rozciągano początkowo nie przekraczając nominalnej granicy plastyczności badanej stali. W kolejnych próbach maksymalne naprężenie rozciągające było zwiększane. Otrzymano zależność naprężeń własnych zarówno od odległości od powierzchni próbki jak i od jej odkształcenia. Wyniki pomiarów ściskających naprężeń własnych mierzonych tuż przy powierzchni, gdzie naprężenia były największe, przedstawione są na rys.2.2.



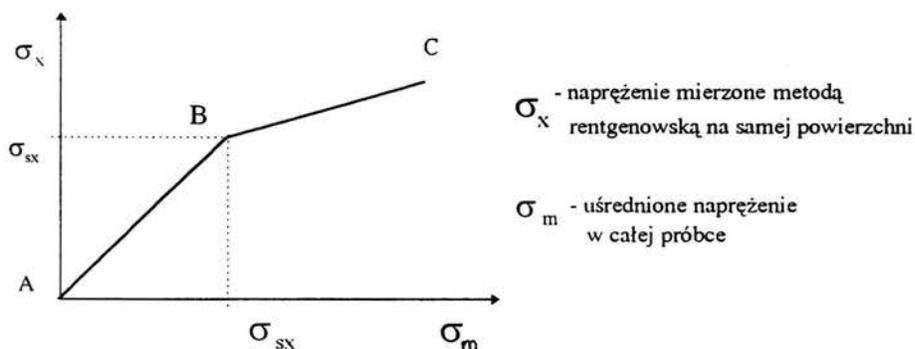
Rys.2.2 Zależność naprężeń własnych przy powierzchni próbki od stopnia jej odkształcenia [37]

Największe co do wartości bezwzględnej naprężenia własne występują w początkowej fazie odkształcenia, gdy próbka jako całość odkształca się sprężysto. W miarę wzrostu odkształceń naprężenia własne stopniowo maleją i znikają przy odkształceniu 4.5%. Przeprowadzone pomiary pozwoliły ocenić głębokość ich

zalegania. W badanym przypadku wynosiła ona 0.1 mm i na tyle można oszacować grubość osłabionej warstwy, którą nazwaliśmy naturalną warstwą wierzchnią. W pracy Glikmana porównano również głębokość zalegania naprężeń własnych ze średnim rozmiarem ziarna i okazało się, że wcześniejsze uplastycznienie warstwy wierzchniej badanych próbek zachodziło w pierwszych trzech ziarnach.

Ciekawą propozycję porównania granicy plastyczności całej próbki z granicą plastyczności jej warstwy wierzchniej zaproponował Macherauch [35], a rozwinęli i zastosowali do badań zmęczeniowych Wang i Nen [38]. Rys. 2.3 tłumaczy sposób stosowania tej metody.

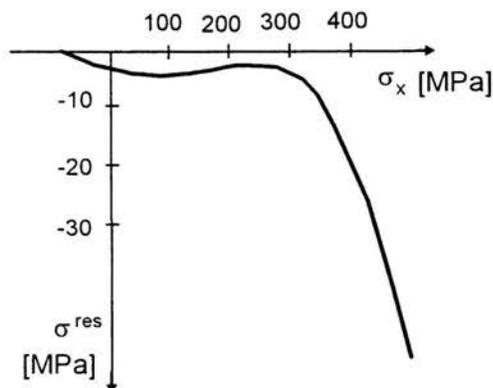
Próbkę poddajemy jednoosiowemu rozciąganiu. Na osi poziomej odkładamy przyłożone do próbki naprężenie  $\sigma_m$ . Na osi pionowej - naprężenie  $\sigma_x$  mierzone metodą rentgenowską panujące w warstwie przypowierzchniowej o niewielkiej grubości. Gdy wszystkie ziarna próbki są obciążane w zakresie sprężystym (odcinek AB), naprężenie  $\sigma_x$  i  $\sigma_m$  są jednakowe. Kiedy jednak warstwa wierzchnia zaczyna się uplastyczniać, wartość  $\sigma_x$  maleje (odcinek BC). Naprężenie przy którym to następuje, oznaczone przez  $\sigma_{sx}$ , reprezentuje krytyczną wartość naprężenia, które inicjuje plastyczne płynięcie naturalnej warstwy wierzchniej.



Rys.2.3 Ilustracja metody Macheraucha wyznaczania granicy plastyczności warstwy wierzchniej

Przeprowadzone przez Wang i Nen [38] pomiary naprężeń własnych w próbkach stopniowo rozciąganych do kolejnych wartości naprężeń  $\sigma_x$  a następnie odciążanych

wykazały, że dla początkowych wartości  $\sigma_x$ , naprężenia własne są bardzo małe (w granicach błędu), natomiast zaczynają szybko rosnąć po przekroczeniu pewnej granicy (Rys. 2.4). Wartość tego granicznego naprężenia jest całkowicie zgodna z wyznaczonym wcześniej metodą Macheracha naprężeniem  $\sigma_{sx}$ .

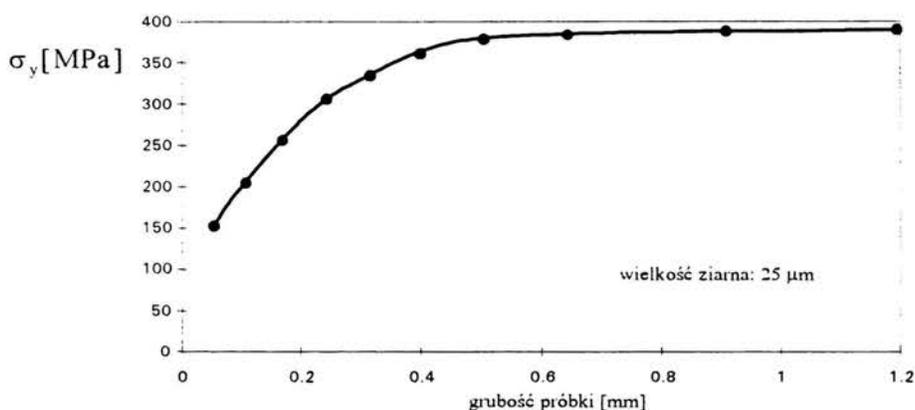


Rys.2.4 Naprężenia własne  $\sigma^{res}$  dla różnych wartości naprężeń rozciągających  $\sigma_x$

### 2.1.3. Pomiary granicy plastyczności

Bezpośredni pomiar granicy plastyczności w warstwie wierzchniej jest bardzo trudny. Często jednak badania granicy plastyczności próbek polikrystalicznych i wpływu różnych parametrów na jej wartość, mogą dostarczyć pewnych informacji o uplastycznieniu samej warstwy wierzchniej. Prowadzone przez Fujito i Miyazaki [39] badania nad wpływem wielkości ziarna i grubości próbki na granicę plastyczności wykazały, że granica plastyczności nie tylko zmienia się w zależności od wielkości ziarna, lecz także od grubości samej próbki. Jeśli wykonamy szereg próbek z żelaza o tej samej średnicy ziarna lecz różnej grubości i zmierzmy kolejno ich granicę plastyczności, to otrzymamy jej zależność od liczby ziaren na przekroju próbki. Rys. 2.5 pokazuje wynik tego doświadczenia. Widać wyraźnie, że powyżej pewnej liczby ziaren, a więc także powyżej pewnej grubości próbki wartość granicy plastyczności nie ulega zmianie. Zmniejszenie liczby ziaren na przekroju próbki powoduje silne obniżenie granicy plastyczności dochodzące

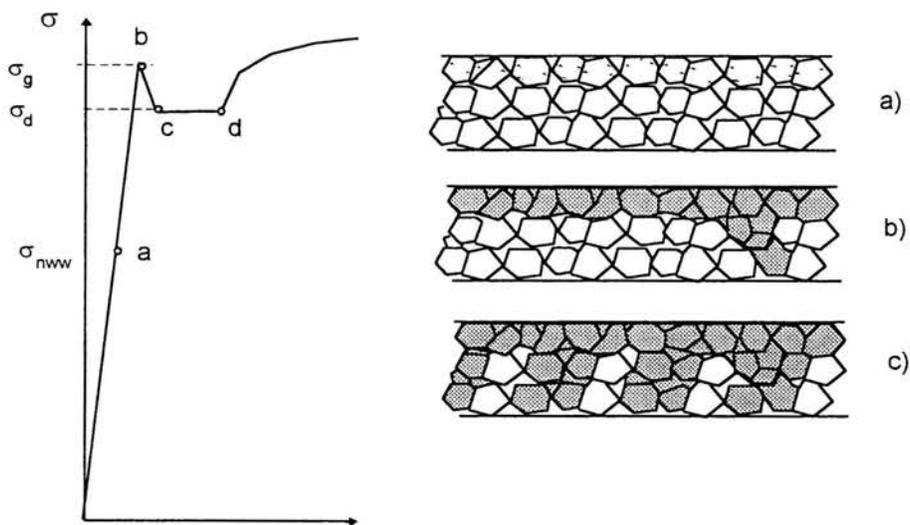
nawet do 50% gdy na przekroju próbki znajduje się kilka ziaren. Takie zachowanie się materiału próbki można wytłumaczyć istnieniem warstwy wierzchniej o grubości rzędu 2-3 ziaren o obniżonej granicy plastyczności. Gdy grubość tej warstwy staje się porównywalna z rozmiarami próbki, wówczas może mieć ona wpływ na granicę plastyczności całej próbki. Zwiększanie liczby ziaren spowoduje zmniejszenie się wpływu warstwy aż do momentu, gdy wpływ ten będzie na tyle znikomy, że dalsze zwiększanie grubości próbki nie spowoduje żadnych zmian wartości mierzonej granicy plastyczności.



Rys.2.5 Zmiana granicy plastyczności próbki w zależności od liczby ziaren na przekroju

Szabolin [40] prowadził badania eksperymentalne mające na celu ustalenie mechanizmu deformacji plastycznej metali. Badania były prowadzone na próbkach z żelaza armco, które poddawano rozciąganiu, a następnie dokonywano pomiarów deformacji ziaren położonych w różnej odległości od powierzchni. Choć cała próbka była rozciągnięta do wartości odkształcenia  $\epsilon = 2.34\%$ , to ziarna wewnętrzne wykazywały deformację liniową prawie trzykrotnie mniejszą od ziaren leżących przy powierzchni. Po odciążeniu zauważono relief powierzchni świadczący o obrotach ziaren przypowierzchniowych podczas deformacji. Z badań tych wyciągnięto wniosek o innym charakterze deformacji plastycznej w ziarnach przypowierzchniowych i w ziarnach wewnątrz próbki.

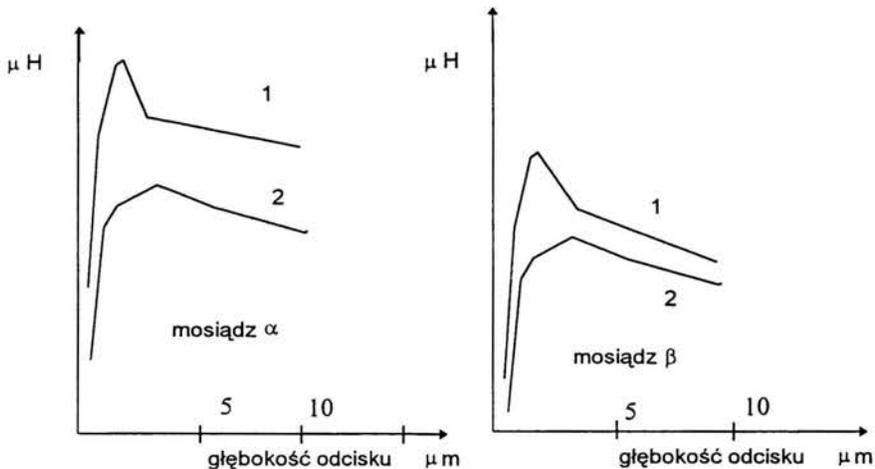
Przy założeniu wcześniejszego uplastycznienia warstwy wierzchniej o grubości 2 - 3 ziaren, Terientiew [5], wysnuł interesujący wniosek, który tłumaczy powstanie zęba plastyczności i płaszczyzny Lüdersa na krzywej  $\sigma$ - $\epsilon$ . Na rys. 2.6 przedstawiony jest schematycznie analizowany przez niego proces deformacji. Gdy naprężenie rozciągające osiągnie wartość równą granicy plastyczności naturalnej warstwy wierzchniej  $\sigma_{nww}$ , w punkcie *a* na rys. 2.6 rozpoczyna się proces plastycznego płynięcia, który będzie obejmował kolejne strefy naturalnej warstwy wierzchniej, do grubości 3 ziaren. Dalsze podwyższanie naprężenia powoduje zwiększenie gęstości dyslokacji w warstwie wierzchniej i tworzenie bariery dyslokacyjnej. Największe skupisko dyslokacji powinno znajdować się w 2-3 ziarnie, ponieważ pierwsze ma kontakt ze swobodną powierzchnią, co umożliwia wychodzenie dyslokacji na powierzchnię. Osiągnięcie przez naprężenie wartości  $\sigma_d$  nie spowoduje uplastycznienia całej próbki, ponieważ jest ona jakby „otoczona” utwardzoną warstwą wierzchnią. Dopiero wartość naprężenia  $\sigma_g$  (punkt *b* na rys. 2.6) umożliwi odkształcenie plastyczne materiału. Tu następuje obniżenie wartości naprężenia do wartości  $\sigma_d$ , a następnie ustalone plastyczne płynięcie całej próbki (odcinek *cd* na rys. 2.6).



Rys. 2.6 Ilustracja powstawania „zęba plastyczności” na krzywej  $\sigma$ - $\epsilon$ .

#### 2.1.4. Badania mikrotwardości

Opisane w rozdz. 2.2 metody mierzenia naprężeń własnych są metodami pośrednimi pomiaru granicy plastyczności w naturalnej warstwy wierzchniej. Prowadzono też próby pomiaru bezpośredniego. Znakomitym narzędziem do tego wydawał się pomiar mikrotwardości. Okazało się jednak, że prowadzi on do dużej rozbieżności otrzymywanych wyników. Pomiar mikrotwardości polega na znalezieniu zależności między średnicą wciskanego penetratora a siłą wciskającą i jest w pewien sposób związany z wartością granicy plastyczności w materiale. Jeśli zastosujemy bardzo małe siły nacisku, tak aby penetrator cały czas znajdował się w naturalnej warstwie wierzchniej, to mikrotwardość tak zmierzona powinna być znacznie mniejsza niż mikrotwardość otrzymana dla dużych sił nacisku, na którą wpływ warstwy wierzchniej jest nikły. Takie badania przeprowadzili Boczwiar i Żadajewa [41] dla różnych metali kolorowych i otrzymali gwałtowny spadek mikrotwardości przy zmniejszaniu głębokości penetracji. Najmniejszą wartość pomiarową uzyskano przy samej powierzchni materiału. O tym jak różne można otrzymać wyniki badając ten sam materiał świadczy rys. 2.7.



Rys.2.7 Wpływ głębokości odcisku na mikrotwardość mosiądzu [41]

Przedstawia on wyniki pomiaru mikrotwardości mosiądzu  $\alpha$  i  $\beta$ . Krzywe 1 odpowiadają mechanicznemu, a krzywe 2 elektrolitycznemu polerowaniu próbek obu rodzajów mosiądzu. Różnica stanu powierzchni polega na tym, że w pierwszym przypadku nastąpiło utwardzenie warstwy wierzchniej, a w drugim nie pojawiło się ono. Spowodowało to znaczną różnicę między krzywymi 1 i 2. Wspólne dla wszystkich doświadczeń opadanie krzywych przy głębokości poniżej 5  $\mu\text{m}$  uwidacznia wpływ *warstwy osłabionej*. Pojęcie to wprowadził Szaposznikow, opierając się na przedstawionych wyżej badaniach mikrotwardości oraz na wynikach badań dotyczący naprężeń własnych [37] i granicy plastyczności 2-3 ziaren leżących przy powierzchni [5]. Twierdzi on, że [6]:

*„Warstwa osłabiona jest to warstwa tworząca się w sposób naturalny na każdej powierzchni ciała stałego mająca mniejszy opór plastycznego odkształcenia i niższą granicę sprężystości niż warstwy o tym samym składzie położone już o kilka ziaren głębiej.”*

## **2.2 Badania własne - zmiany struktury geometrycznej powierzchni próbki odkształcanej**

### **2.2.1 Uwagi ogólne**

Pomiary zmian struktury geometrycznej powierzchni próbki poddanej odkształceniu były prowadzone od wielu lat, jednak głównie dotyczyły zmian chropowatości powierzchni próbki poddanej obciążeniom kontaktowym (np. [42,43]). W przypadku innych obciążeń należy wymienić badania dotyczące zwiększania się chropowatości powierzchni elementów wytłaczanych. Ze zjawiskiem tym mamy także do czynienia w procesie formowania blach [44]. Badano również zmiany chropowatości próbek poddanych obciążeniom wysokocyklicznym w celu oszacowania stopnia zmęczenia materiału [45].

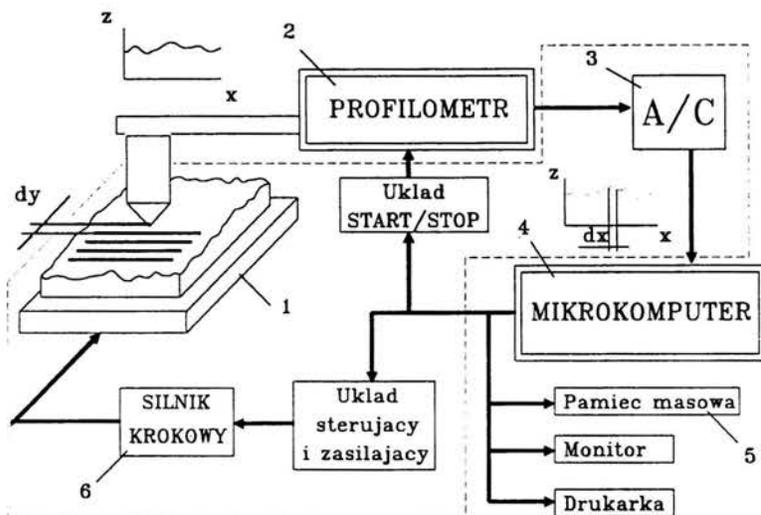
Rozwój aparatury pomiarowej pozwolił na wykonywanie pomiarów z większą dokładnością i możliwe stały się badania próbek poddanych także mniejszym odkształceniom. Prakash w swojej pracy doktorskiej [46] przedstawił wyniki pomiarów profilometrycznych dla kilku materiałów (brąz, stal zwykła, stal

nierdzewna, aluminium), które odkształcał od 0.5% do kilkunastu a nawet dwudziestukilku procent. W zakresie małych odkształceń wyraźną zmianę chropowatości uzyskał tylko w przypadku stali nierdzewnej. Wynikało to z faktu, że tylko w tym przypadku badano próbki uprzednio polerowane. Wyraźne zmiany chropowatości dla pozostałych materiałów widoczne były dopiero po rozciągnięciu do kilkunastu procent odkształcenia.

Korzystając ze zbudowanej w Pracowni Warstwy Wierzchniej IPPT PAN aparatury do profilometrii skaningowej, przeprowadziłem eksperyment pokazujący wcześniejsze uplastycznienie się naturalnej warstwy wierzchniej metalu. W tym celu płaską próbkę miedzianą o zmiennej szerokości poddałem precyzyjnemu polerowaniu, a następnie rozciągnąłem do wartości całkowitego odkształcenia  $\varepsilon = 0.5\%$ . Po odciążeniu natychmiast zarejestrowałem stan powierzchni przy pomocy profilometru skaningowego. W wyniku uzyskałem zależność wybranych parametrów opisujących strukturę geometryczną powierzchni od zadanego odkształcenia próbki. Użyty w badaniach profilometr skaningowy, dawał możliwość odwzorowania powierzchni rzędu kilku mm<sup>2</sup>. Standardowe profilometry umożliwiają wykonanie i analizę jedynie pojedynczego profilu.

### **2.2.2. Zasada pracy profilometru skaningowego**

Profilometr skaningowy zbudowano w IPPT, w oparciu o profilometr konwencjonalny TALYSURF 5M-120 wyprodukowany przez firmę Rank Taylor Hobson sprzężony z mikrokomputerem klasy IBM PC. Schemat działania profilometru skaningowego pokazany jest na rys. 2.8. Profilometr ten odwzorowuje badaną powierzchnię "linia po linii", jako układ równoległych, jednakowo odległych profili generowanych przy pomocy profilometru konwencjonalnego. Ten ostatni sprzężony jest z mikrokomputerem, który steruje pomiarem oraz gromadzi i przetwarza dane. W skład urządzenia wchodzi ponadto: urządzenie realizujące przesuw badanej powierzchni w kierunku  $y$  (rys.2.8), przetwornik analogowo-cyfrowy oraz urządzenia peryferyjne (drukarka, pamięć masowa itp.).



Rys.2.8. Schemat działania profilometru skaningowego

Przebieg pomiaru jest następujący. Element, którego strukturę geometryczną powierzchni chcemy odwzorować, umieszczany jest na stoliku pomiarowym (1). Na sygnał START podany z komputera, igła profilometru przesuwana jest po powierzchni elementu. Sygnał analogowy, proporcjonalny do pionowych przemieszczeń igły, przetwarzany jest na postać cyfrową w przetworniku A/C (3). Jest on wysyłany po przesunięciu się igły o wielkość  $dx$ . Kolejne punkty profilu są zapamiętywane w pamięci komputera (4). Po zakończeniu pomiaru profilu igła profilometru wraca w położenie początkowe. Stolik pomiarowy, napędzany silnikiem krokowym (6), wraz z badaną powierzchnią przesuwany jest o odstęp  $dy$  w kierunku  $y$ . Komputer ponownie wysyła sygnał START i następuje pomiar następnego profilu. Taka sekwencja czynności wykonywana jest aż do momentu odwzorowania żądanej liczby profili. Po zakończeniu pomiaru w pamięci komputera zgromadzone są dane o topografii powierzchni w postaci zbioru  $N$ -punktów pogrupowanych w  $m$  sekwencji po  $n$  punktów każda (gdzie  $N=m \times n$ ). Każdemu punktowi przyporządkowane są trzy współrzędne:  $x_i$ ,  $y_j$ ,  $z_{ij}$  (gdzie  $i = 1, 2, \dots, n$ , oraz  $j = 1, 2, \dots, m$ ). Współrzędna  $z_{ij}$  jest wysokością punktu na badanej powierzchni ponad

*płaszczyznę odniesienia*. Ta ostatnia jest miejscem geometrycznym punktów o współrzędnej  $z_{ij}=0$ .

### 2.2.3. Mapa konturowa i widok powierzchni

Otrzymany w wyniku pomiaru zbiór punktów odwzorowujący badaną powierzchnię, zostaje opracowany przy pomocy programów komputerowych. Programy te dokonują wizualizacji wyników oraz obliczają parametry struktury geometrycznej powierzchni. Odpowiedni wybór tych parametrów pozwala prawidłowo opisać i zinterpretować otrzymane wyniki.

Jedną z form wizualizacji wyników jest mapa konturowa powierzchni. Jest to obraz powstały w wyniku przecięcia powierzchni rzeczywistej określoną liczbą przekrojów równoodległych i równoległych do płaszczyzny odniesienia. Inną z form prezentacji mikrostereometrii powierzchni jest widok stereometryczny tworzony na ekranie mikrokomputera oraz rejestrowany na drukarce lub ploterze. Widok ten przedstawia w znacznym powiększeniu obraz odwzorowanego przez profilometr skaningowy fragmentu powierzchni, w postaci układu profili przesuniętych względem siebie o odpowiedni odcinek nachylony do osi  $x$  pod kątem  $45^\circ$ . Wrażenie trójwymiarowości uzyskuje się m. in. przez zastosowanie procedury usuwania niewidocznych linii [47]. Algorytm przewiduje przypisanie odpowiednich kolorów tym fragmentom profilu, których wysokość ponad płaszczyznę odniesienia zawiera się w przedziale wyznaczonym przez kolejne współrzędne warstwic. Kolory te odpowiadają kolorom na mapie konturowej co ułatwia identyfikację stanu zarejestrowanej powierzchni.

### 2.2.4 Wielkości opisujące strukturę geometryczną powierzchni.

Struktura geometryczna powierzchni jest kształtowana w procesach technologicznych a później w procesie eksploatacji przez wiele czynników o różnym zasięgu i intensywności. Dlatego też opis jej przez ograniczoną liczbę współczynników jest bardzo trudny. Z konieczności należy wybrać takie parametry,

które, w danym procesie wytwórczym czy eksploatacyjnym, wykazują największą wrażliwość na oddziaływania zewnętrzne. Dlatego też nie zostanie tu przedstawiony wybór typowych wielkości określających powierzchnię a jedynie te, które pozwolą zinterpretować zmiany zachodzące na powierzchni w początkowej fazie procesu odkształcania. Ponadto, wielkości te będą definiowane w sposób umożliwiający wykonanie pomiarów stereometrycznych, co nie zmienia ich charakteru a jedynie sposób obliczania. Zmienia się również przyjęte powszechnie oznaczenia dotyczące profili, na ogół zamiast litery R oznaczającej chropowatość (roughness) wielkości będą opisywane litera S (stereometry).

Zarówno przy definiowaniu parametrów chropowatości jak i ich obliczaniu istotny jest układ odniesienia. Rolę tego układu będzie pełniła *płaszczyzna średnia* odpowiednik *linii średniej* dla pojedynczego profilu. *Płaszczyznę średnią* wyznacza się tak aby suma kwadratów odchyłeń rzędnych powierzchni od tej płaszczyzny, czyli wielkość

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m z_{ij}^2 \quad (2.1)$$

osiągała minimum.

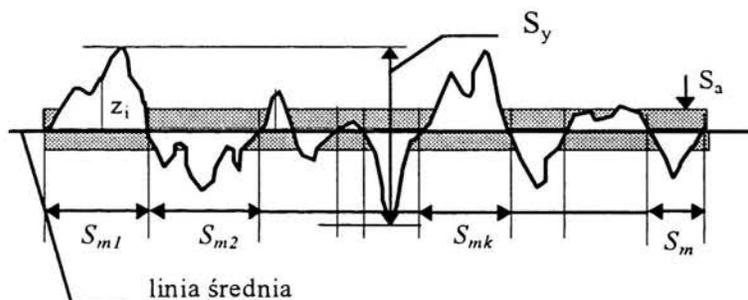
Parametry i funkcje opisujące chropowatość powierzchni dzieli się na te, które opisują:

- cechy wysokościowe,
- cechy horyzontalne,
- kształt nierówności,
- rozkłady statystyczne,
- parametry rozkładów,
- funkcje częstotliwościowe.

Wśród parametrów wysokościowych najczęściej stosowanym i uważanym za podstawowy parametr chropowatości *jest średnie arytmetyczne odchylenie profilu*  $R_a$ , a w przypadku pomiaru stereometrycznego -  $S_a$ . Wyznacza się je na podstawie wzoru

$$S_a = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |z_{ij}| \quad (2.2)$$

Rysunek 2.9 pokazuje sposób pomiaru i interpretację graficzną tego parametru, dla przejrzystości pokazaną na przykładzie pojedynczego profilu. W przypadku pomiaru stereometrycznego procedura dotyczy określonego wycinka powierzchni i odniesiona jest do płaszczyzny średniej, a nie linii średniej. Interpretacją tego parametru jest wówczas prostopadłościan o wysokości  $S_a$  i polu powierzchni podstawy równego polu badanego wycinka, a objętości równej sumie objętości wszystkich chropowatości. Na rys. 2.9 pokazano również odległość pomiędzy największym zagłębieniem i najwyższym wierzchołkiem nazywaną *rozstępem chropowatości* i oznaczaną przez  $S_y$ .



Rys. 2.9 Profil chropowatości i interpretacja graficzna parametru  $S_a$  oraz rozstępu chropowatości  $S_y$  oraz odstępu  $S_m$

Parametrem zbliżonym do  $S_a$  jest *średnie kwadratowe odchylenie od płaszczyzny średniej* -  $S_q$ , obliczane według wzoru:

$$S_q = \sqrt{\frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (z_{ij})^2} \quad (2.3)$$

Cechy horyzontalne powierzchni są najczęściej określane przez wyznaczenie średniej wartości *podziałki*  $D$ , która charakteryzuje powierzchniową gęstość wierzchołków chropowatości. Definiuje się ją jako odwrotność średniego *odstępu chropowatości*  $S_m$  pokazanych na rys.2.9.

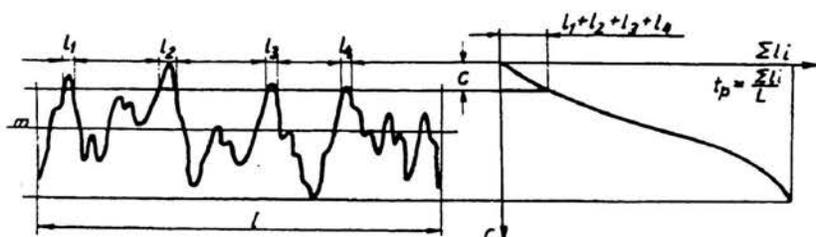
$$D = \frac{1}{S_m} \quad \text{gdzie} \quad S_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{m_i} \quad (2.4)$$

Kształt nierówności powierzchni charakteryzują parametry opisujące ich *średnie pochylenie* oraz promienie krzywizny wierzchołków. Średnie pochylenie nierówności obliczane jest jako średnia arytmetyczna pochylenia zboczy wszystkich chropowości

$$\Delta a = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left| \frac{\Delta z_{ij}^2}{\Delta x_i \Delta y_j} \right| \quad (2.5)$$

Spośród rozkładów statystycznych opisujących cechy powierzchni najszersze zastosowanie ma rozkład *udziału nośnego* profilu  $t_p$ . Poprowadźmy linię równoległą do linii średniej w odległości  $c$  od najwyższego wierzchołka (rys. 2.10). Udział nośny profilu jest równy stosunkowi sumy długości odcinków przecięć profilu przez linię równoległą do linii średniej do długości odcinka pomiarowego, dla założonego poziomu przecięcia  $c$ :

$$t_p = \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{L} \quad (2.6)$$



Rys. 2.10 Zasada pomiaru udziału nośnego profilu [48]

Udział nośny profilu  $t_p$  przedstawiony jako funkcja poziomego przecięcia (zbliżenia)  $c$  nazywany jest *krzywą nośności profilu*. W przypadku pomiaru stereometrycznego odcinki zamieniają się w pola przekroju poprzecznego płaszczyzną równoległą do płaszczyzny średniej. Udział nośny jest wielkością charakteryzującą zdolność powierzchni do przenoszenia obciążeń stykowych i jako taki ma szerokie zastosowanie w projektowaniu i budowie maszyn.

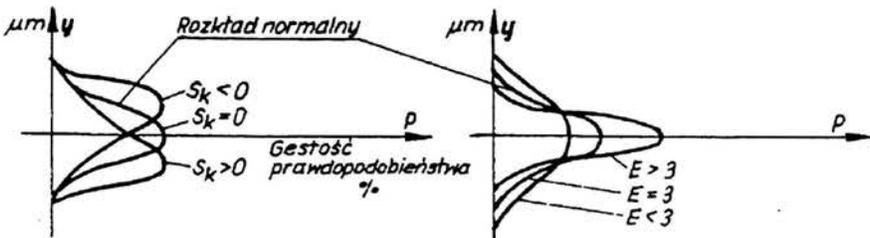
Do opisu rozkładów statystycznych niektórych wielkości stosuje się parametry takie jak skośność  $S_{ssk}$  czy eksces  $S_{sku}$ , pozwalające porównywać go z rozkładem normalnym. Parametry te określone są przez następujące wzory:

$$S_{ssk} = \frac{1}{S_q^3} \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |z_{ij}|^3 \quad (2.7)$$

oraz

$$S_{sku} = \frac{1}{S_q^4} \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |z_{ij}|^4 \quad (2.8)$$

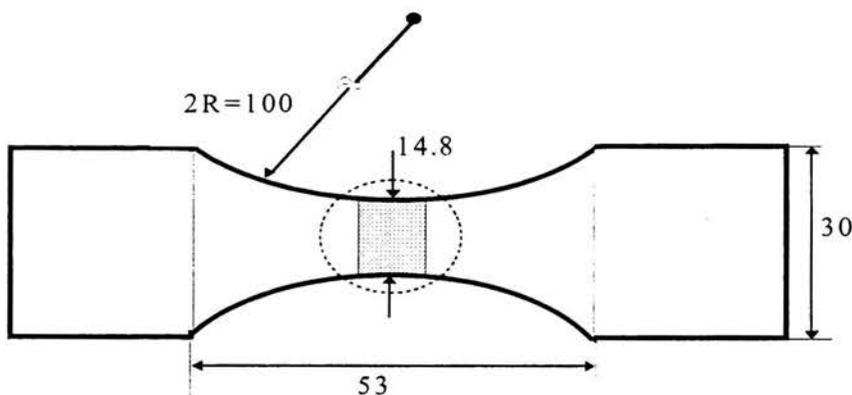
gdzie  $S_q$  jest średnim kwadratowym odchyleniem od płaszczyzny średniej zdefiniowanym wzorem 2.3. Współczynnik asymetrii opisany przez skośność  $S_{ssk}$  określa kierunek i wartość przesunięcia rozkładu wysokości wierzchołków względem płaszczyzny średniej, natomiast eksces  $S_{sku}$  - stopień „rozmycia” tego rozkładu. Dzięki tym wartościom można porównywać badane rozkłady statystyczne z rozkładem normalnym, dla którego parametry te mają wartości  $S_{ssk} = 0$  oraz  $S_{sku} = 3$ . Porównanie takie przedstawiono na rys. 2.11, na którym skośność oznaczono przez  $S_k$ , a eksces przez  $E$ .



Rys. 2.11 Skośność  $S_k$  i eksces  $E$  rozkładu prawdopodobieństwa. Krzywa o parametrach  $S_k = 0$  oraz  $E = 3$  odpowiada rozkładowi normalnemu [48]

### 2.2.5 Próbki

W doświadczeniu użyte zostały płaskie próbki z blachy miedzianej o grubości 2.85 mm oraz kształcie i wymiarach podanych na rys. 2.12. Specyficzny kształt próbek wynikał z faktu, że nieznane było odkształcenie, przy którym można spodziewać się pierwszych zmian struktury geometrycznej powierzchni. Odpowiednio przygotowaną próbkę poddano rozciąganiu do odkształcenia całkowitego  $\varepsilon = 0.5\%$ . Naprężenie odpowiadające temu odkształceniu przekroczyło nieznacznie granicę plastyczności w największym miejscu próbki. Zwiększenie pola przekroju próbki powyżej tego miejsca spowodowało spadek naprężenia poniżej granicy plastyczności. Dzięki temu już na pojedynczej próbce można było znaleźć zależność pomiędzy przyłożonym naprężeniem, niższym od granicy plastyczności a chropowatością próbki. Wykonanie przewężenia o stosunkowo dużym promieniu, zminimalizowało efekt karbu w badanym obszarze. Aby jeszcze bardziej zmniejszyć wpływ karbu, pomiary struktury geometrycznej powierzchni prowadzone były w pobliżu osi podłużnej próbki.

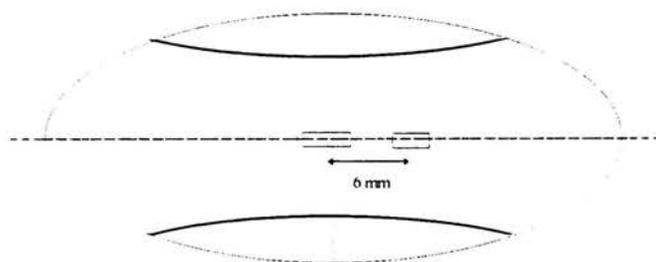


Rys. 2.12 Próbki użyte w doświadczeniu (wymiar w mm)

### 2.2.6 Doświadczenie

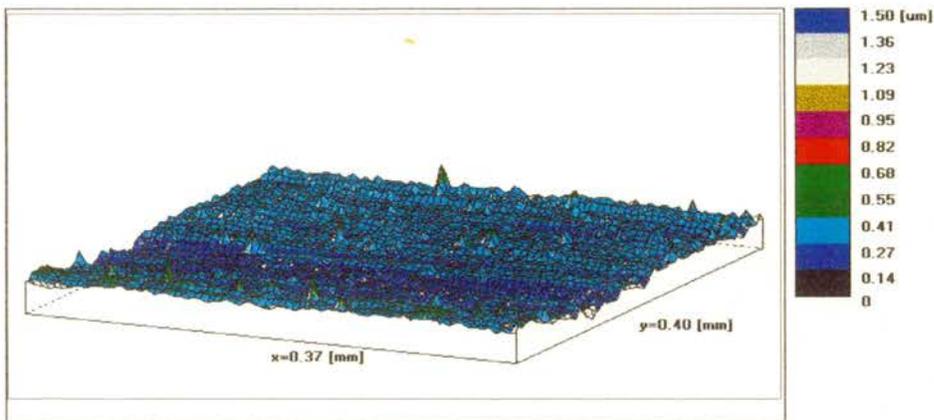
Przygotowanie próbki do badań polegało na precyzyjnym polerowaniu jej powierzchni na polerce, przy użyciu początkowo papierów ściernych o zwiększającej się gradacji, aż do papieru o gradacji 1000. Następnie próbka była polerowana na

filcu z proszkiem diamentowym o ziarnie  $3\ \mu\text{m}$  i na końcu  $1\ \mu\text{m}$ . Powierzchnia tak przygotowanej próbki została zbadana na profilometrze w kilku miejscach, w których przewidywano dokonanie pomiarów po rozciągnięciu próbki (rys. 2.13).

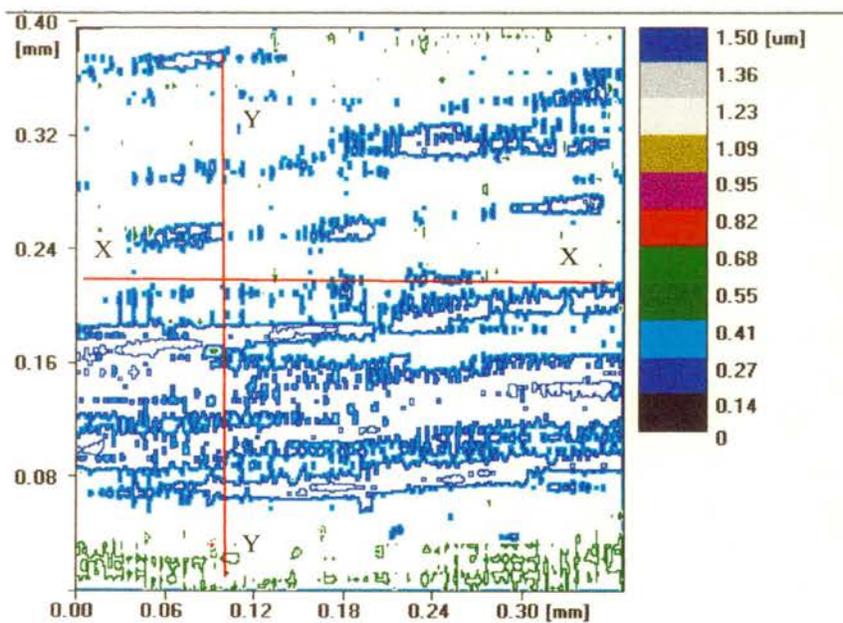


Rys. 2.13 Środkowy fragment próbki z zaznaczonymi polami o wymiarach  $1.5 \times 3\text{mm}^2$ , na których przeprowadzano pomiar.

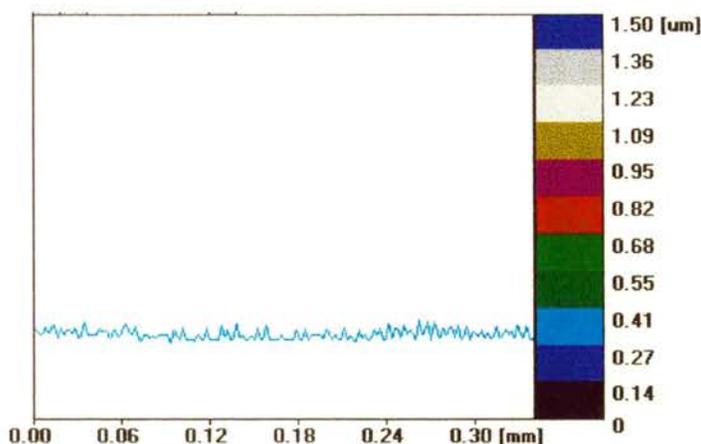
Wyniki przedstawione są na załączonych rysunkach. Na rys. 2.14 pokazany jest widok fragmentu powierzchni o wymiarach  $0.4 \times 0.4\ \text{mm}^2$ , natomiast na rys.2.15 pokazano mapę konturową tego samego wycinka. W obu przypadkach widać bardzo dobrą gładkość powierzchni, dla której parametr  $S_a = 0.05\ \mu\text{m}$ . Na rys. 2.15 zaznaczono czerwonymi liniami usytuowanie przykładowych profili pokazanych na rys. 2.16 i 2.17. Wykresy tych profili pozwalają stwierdzić, że w wyniku polerowania nie uzyskano absolutnie izotropowej powierzchni. Profil XX, czyli profil wzdłuż osi próbki (równoległy do późniejszego kierunku rozciągania) jest wyraźnie gładszy, o mniejszym  $R_a$ , ale o większej podziałce  $D$  (wzór (2.4)). W kierunku YY, który odpowiada pomiarowi w kierunku prostopadłym do późniejszego kierunku rozciągania, chropowatość zwiększa się, ale maleje jej podziałka  $D$ . Standardowa wielkość  $R_a$  wykorzystywana do porównywania stanu powierzchni wynosiła w przypadku pierwszego profilu  $0.015\ \mu\text{m}$ , a w przypadku drugiego -  $0.027\ \mu\text{m}$ . Dla ułatwienia porównania zmian zachodzących na powierzchni po obciążeniu, wszystkie rysunki rysowane są w tej samej skali.



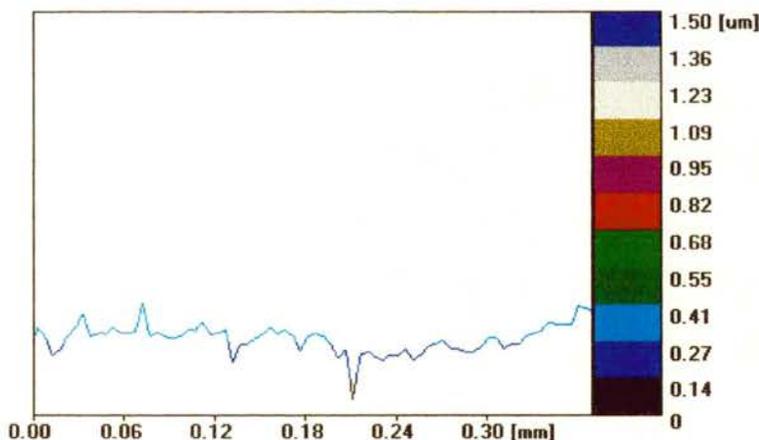
Rys. 2.14 Widok powierzchni po polerowaniu



Rys. 2.15 Mapa konturowa powierzchni po polerowaniu z zaznaczonymi liniami usytuowania profili



Rys. 2.16 Profil XX wybrany z powierzchni przedstawionej na rys. 2.14 i 2.15



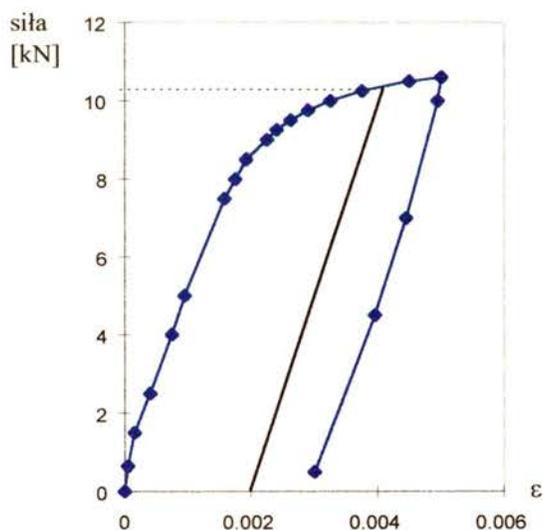
Rys. 2.17 Profil YY wybrany z powierzchni przedstawionej na rys. 2.14 i 2.15

Próbki zostały poddane rozciąganiu na maszynie wytrzymałościowej INSTRON do całkowitego odkształcenia  $\varepsilon = 0.5\%$ . Po odciążeniu otrzymano trwałe odkształcenie  $\varepsilon_{tr} = 0.3\%$ . Pomiar odkształcenia prowadzony był przy pomocy ekstensometru o bazie 10 mm, zaczeponego w największym miejscu próbki. Mała baza pomiarowa ekstensometru dodatkowo minimalizowała błędy wynikające ze zmienności przekroju próbki. Krzywa rozciągania próbki przedstawiona jest na rys. 2.18.

Ponieważ badany materiał nie posiadał wyraźnej granicy plastyczności, do obliczeń przyjęto umowną granicę plastyczności  $R_{0.2}$  odpowiadającą trwałemu odkształceniu  $\epsilon_{tr} = 0.2\%$ . Na rysunku 2.18 zaznaczono siłę odpowiadającą takiemu odkształceniu. Obliczona granica plastyczności wyniosła 250 MPa. Uwzględniając krzywiznę bocznego wycięcia próbki ( $2R = 100$  mm), znaleziono miejsce, gdzie naprężenia zewnętrzne odpowiadały obliczonej granicy plastyczności. Otrzymano odległość ok. 6 mm od najwęższego przekroju próbki. Dla porównania struktury geometrycznej powierzchni przed i po odkształceniu wybrano dwa miejsca:

- miejsce gdzie naprężenia odpowiadały granicy plastyczności a  $\epsilon_{tr} = 0.2\%$  (6 mm od środka próbki),
- miejsce największych naprężeń gdzie  $\epsilon_{tr} = 0.3\%$  (środek próbki).

W obu przypadkach pomiary były prowadzone na osi próbki, tak jak to zostało przedstawione na rys. 2.13.



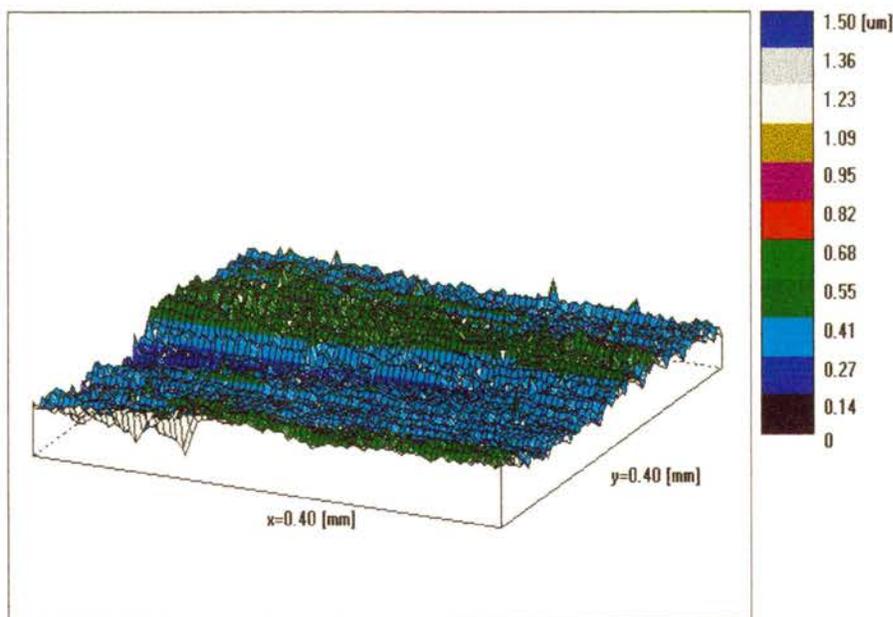
Rys. 2.18 Krzywa rozciągania próbki miedzianej

Kolejne rysunki (2.19 - 2.22) opisujące stan powierzchni próbki w miejscu gdzie  $\epsilon_{tr} = 0.2\%$ , odpowiadają rysunkom 2.14 - 2.17, które opisywały powierzchnię próbki przed obciążeniem. Wszystkie rysunki przedstawione są w tej samej skali. Na rysunkach 2.19 - 2.22 widać rozpoczynające się zmiany struktury geometrycznej powierzchni. Najlepiej jest to widoczne na wybranych profilach - zmiana

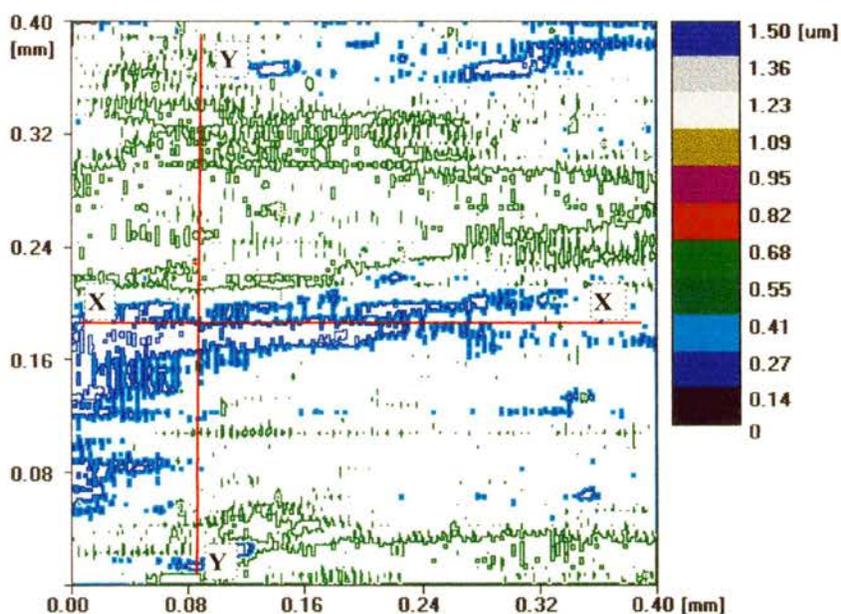
chropowatości jest wyraźna, jednocześnie zmienia się podziałka chropowatości oraz zaokrąglenia wierzchołków. Dokładne wyniki podane są w tabeli 2.1.

Tab. 2.1

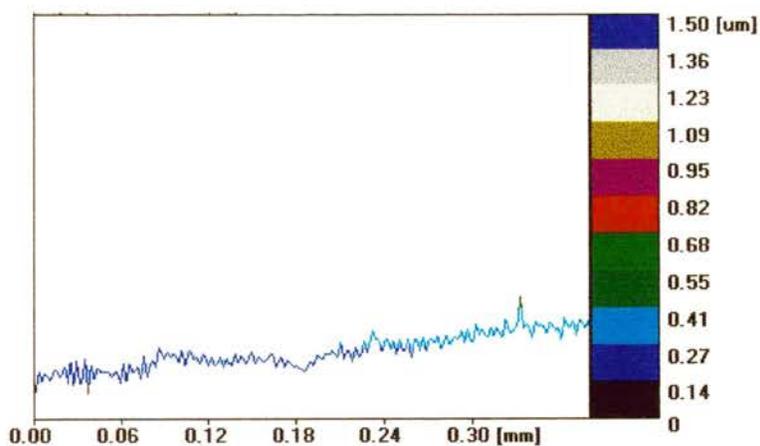
	PRZED ODKSZTAŁCENIEM	GRANICA PLASTYCZNOŚCI	ODKSZTAŁCENIE MAKSYMALNE
$S_a$	0.04 $\mu\text{m}$	0.06 $\mu\text{m}$	0.10 $\mu\text{m}$
pochylenie zbczy w kierunku x	0.54	1.14	1.05
podziałka D w kierunku x (na profilu)	140	90	70
podziałka D w kierunku y (na profilu)	70	60	40



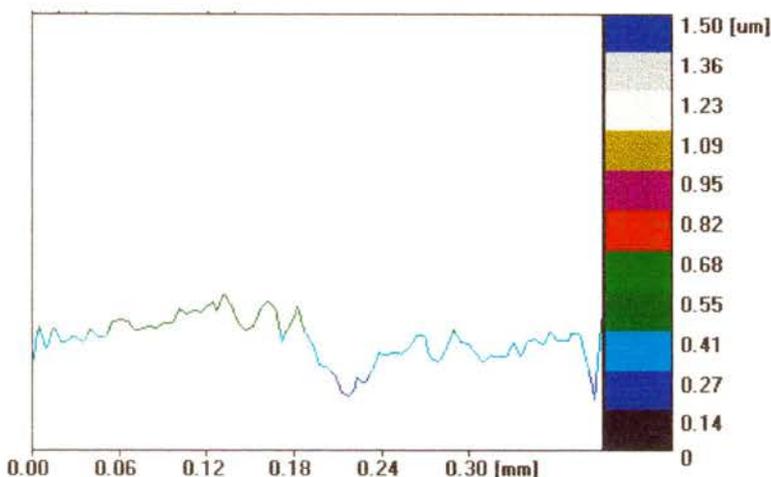
Rys. 2.19 Widok trójwymiarowy powierzchni próbki w miejscu obciążonym do granicy plastyczności ( $\epsilon_{ty} = 0.2\%$ )



Rys. 2.20 Mapa konturowa powierzchni próbki w miejscu obciążonym do granicy plastyczności z zaznaczonymi liniami usytuowania profili

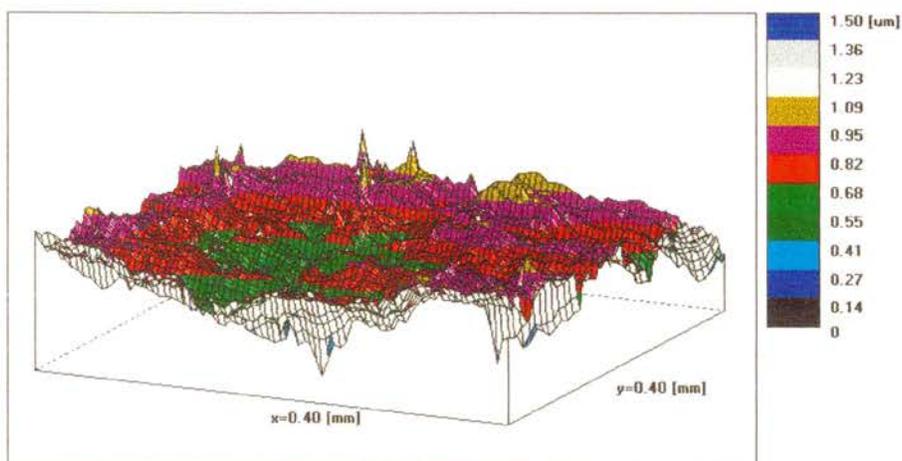


Rys. 2.21 Profil XX wybrany z powierzchni przedstawionej na rys. 2.19 i 2.20

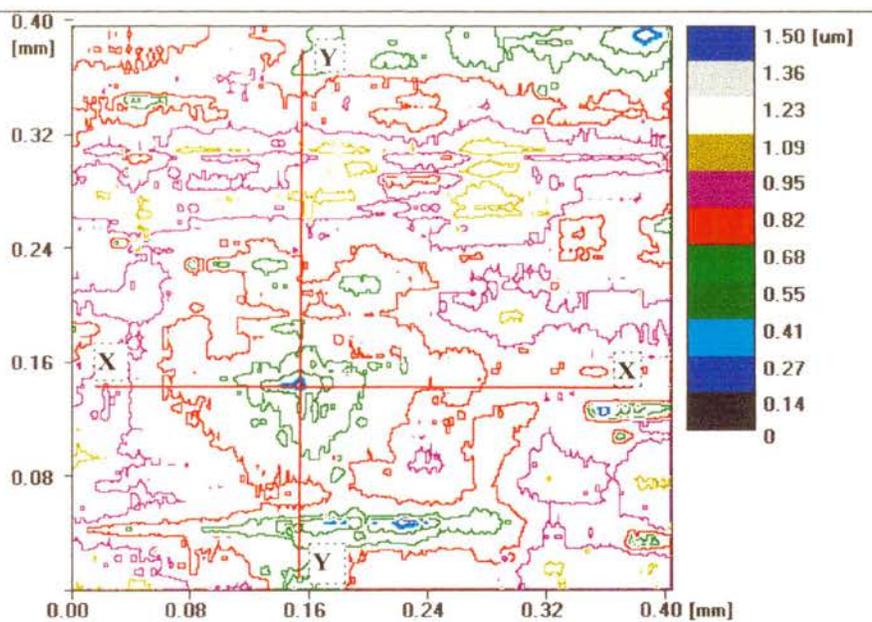


Rys. 2.22 Profil YY wybrany z powierzchni przedstawionej na rys. 2.19 i 2.20

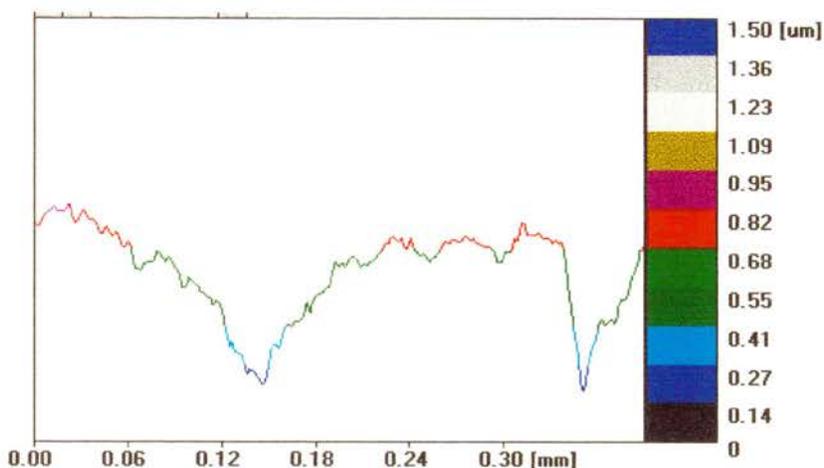
Odształcenie próbki spowodowało pojawienie się falistości o stosunkowo dużej długości fali, która była praktycznie niewidoczna na rysunkach przedstawiających powierzchnię przed odształceniem. Można to łączyć z obrotami ziaren powierzchniowych i wcześniejszym uplastycznieniem ziaren w warstwie wierzchniej. Aby pokazać to jeszcze wyraźniej, przedstawiono analogiczne pomiary dla największego naprężenia na kolejnych rysunkach: 2.23 - 2.26. Tu zmiany są nie tylko mierzalne, ale wynoszą od kilkudziesięciu do stu kilkudziesięciu procent (patrz tab. 2.1). W znacznie wyraźniejszej formie pojawia się falistość (patrz rys. 2.25, 2.26), a także zanika wprowadzona przez polerowanie anizotropia. Profile prostopadłe i równoległe do osi podłużnej próbki są niemal identyczne i charakteryzują się bardzo zbliżonymi parametrami określającymi chropowatość, podziałkę i falistość.



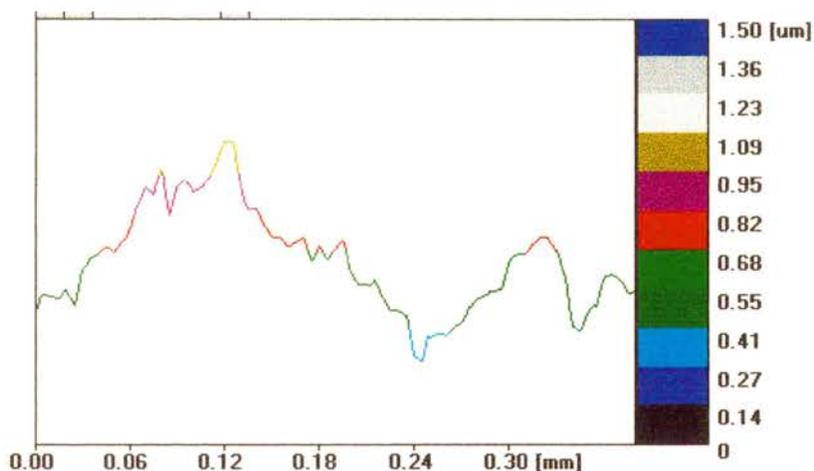
Rys. 2.23 Widok trójwymiarowy powierzchni próbki odkształconej do  $\epsilon_{tr} = 0.3\%$



Rys. 2.24 Mapa konturowa powierzchni próbki odkształconej do  $\epsilon_{tr} = 0.3\%$  z zaznaczonymi liniami usytuowania profili



Rys. 2.25 Profil XX wybrany z powierzchni przedstawionej na rys. 2.23 i 2.24

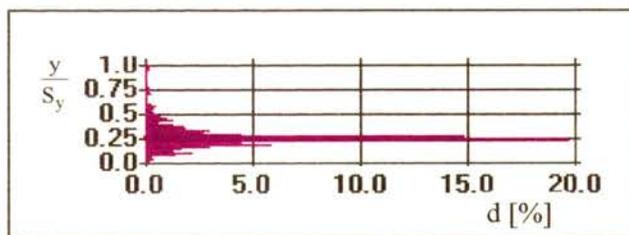


Rys. 2.26 Profil YY wybrany z powierzchni przedstawionej na rys. 2.23 i 2.24

Interesująco wygląda porównanie rozkładów wysokości wierzchołków oraz krzywych nośności dla badanych trzech przypadków. Rozkład wysokości wierzchołków obliczany jest jako zależność częstości ich występowania (nazywanej *gęstością* i mierzoną w procentach) od względnej wysokości wierzchołków (która jest stosunkiem wysokości wierzchołka do rozstępu  $S_y$  (patrz rys. 2.9)). Na rys. 2.27 - 2.28 pokazane są zmiany rozkładu wysokości wierzchołków w miarę wzrostu

odkształcenia trwałego próbki. Dla próbki nieodkształconej rozkład ten skupiony jest wokół wartości  $0.25S_y$ , dla której gęstość wierzchołków wynosi ok. 20% (rys.2.27). Oznacza to, że duża część wierzchołków ma tę samą albo bardzo zbliżoną wysokość. Wartości rozkładu reszty wierzchołków mieszczą się praktycznie w obszarze  $0.10S_y - 0.40S_y$ . Poza tym zakresem częstość ich występowania nie przekracza 2%. Charakter tego rozkładu dobrze określają dwa parametry stosowane do opisu rozkładu prawdopodobieństwa, współczynnik asymetrii (skośność)  $S_{ssk}$  oraz eksces  $S_{sku}$ . Parametry te stanowią momenty statystyczne trzeciego i czwartego rzędu, a ich wartości można wyznaczyć z zależności 2.7 i 2.8. W badanym przypadku bierzemy pod uwagę nie wszystkie rzędne, a jedynie te, które dotyczą wierzchołków. Współczynnik asymetrii określa kierunek i wartość przesunięcia rozkładu wysokości wierzchołków względem płaszczyzny średniej, natomiast eksces - stopień „rozmycia” tego rozkładu. Dzięki tym wartościom można porównywać badane rozkłady z rozkładem normalnym, dla którego parametry te mają wartości  $S_{ssk} = 0$  oraz  $S_{sku} = 3$ .

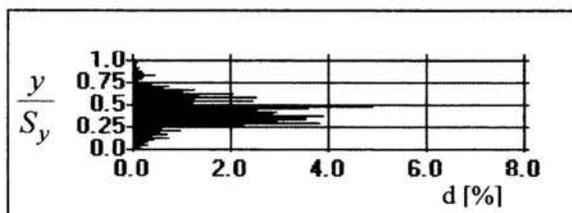
Dla przypadku próbki nieodkształconej skośność wynosi  $S_{ssk} = 1.11$ , natomiast eksces  $S_{sku} = 7.65$ . Oznacza to, że powierzchnia ta charakteryzuje się początkową anizotropową strukturą geometryczną, odbiegającą od rozkładu normalnego.



Rys.2.27 Rozkład wysokości wierzchołków dla próbki nieodkształconej:  
d - gęstość, y - wysokość wierzchołków

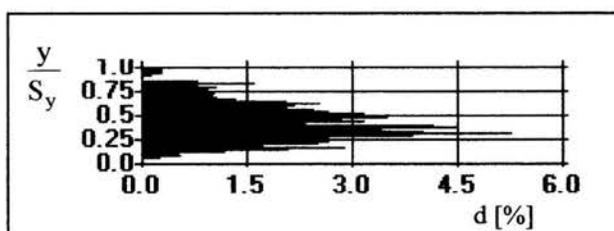
Rozkład wysokości wierzchołków zmienia się znacznie wraz z odkształceniem próbki. Przy odkształceniu  $\epsilon_{tr} = 0.2\%$  odpowiadającym umownej granicy plastyczności, maksymalna gęstość wierzchołków nie przekracza 8% a ich rozkład jest znacznie bardziej równomierny (rys. 2.28). Rozkład o gęstości

wierzchołków większej od 2% zawiera się w przedziale  $0.20 S_y - 0.60 S_y$ , co oznacza znaczny wzrost wysokości wierzchołków. Skośność charakteryzująca rozkład spada tu do wartości  $S_{ssk} = 0.33$ , a eksces wynosi  $S_{sku} = 3.42$ . Oznacza to, że niewielkie odkształcenie próbki spowodowało zlikwidowanie początkowego anizotropowego rozkładu chropowatości wprowadzonego przez polerowanie, a struktura geometryczna badanej powierzchni zbliżyła się do struktury losowej, a rozkład wysokości wierzchołków do rozkładu normalnego.



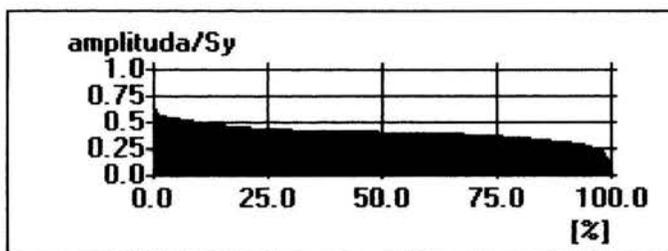
Rys.2.28 Rozkład wysokości wierzchołków dla próbki odkształconej do granicy plastyczności; d - gęstość wierzchołków, y - wysokość wierzchołków

Podobny charakter rozkładu obserwujemy w przypadku próbki odkształconej do  $\epsilon_{tr} = 0.3\%$ . Maksymalna gęstość wierzchołków spada do 6%, a gęstości powyżej 2% zawierają wierzchołki o względnych wysokościach  $0.15S_y - 0.60S_y$  (rys.2.29). Skośność w tym przypadku jest podobna do poprzedniej i wynosi  $S_{ssk} = 0.29$ , a eksces jeszcze bardziej się zmniejszył i osiąga wartość  $S_{sku} = 2.70$ . Wprowadzić różnice pomiędzy tymi wartościami parametrów dla  $\epsilon_{tr} = 0.2\%$  oraz  $\epsilon_{tr} = 0.3\%$  są niewielkie, ale można się spodziewać, że zwiększanie odkształcenia może doprowadzić do zmiany struktury powierzchni z losowej na wyraźnie anizotropową przy większych odkształceniach.

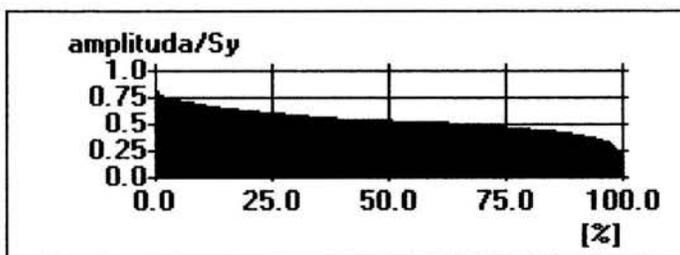


Rys.2.29 Rozkład wysokości wierzchołków dla próbki odkształconej do  $\epsilon_{tr} = 0.3\%$ . d - gęstość wierzchołków, y - wysokość wierzchołków

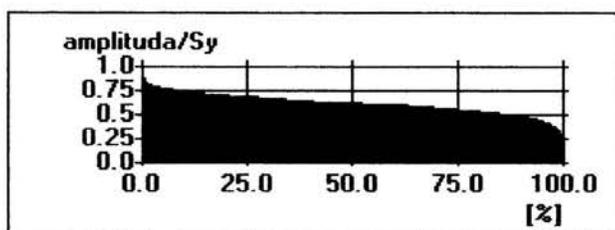
Jedną z ważniejszych wielkości charakteryzujących powierzchnię jest krzywa nośności (rys. 2.10). Jej kształt związany jest częściowo z rozkładem wysokości wierzchołków. Przedstawiana jest jako zależność względnej amplitudy powierzchni ( $amp/S_y$ ) od częstości jej występowania (gęstości) wyrażonej w procentach. Kolejne rysunki (2.30 - 2.32) przedstawiają krzywe nośności dla trzech badanych przypadków. Dla próbki nieodkształconej krzywa jest skupiona, amplitudy od 0.0 - 0.4  $S_y$  mają gęstość powyżej 25% (rys.2.30). Dla próbki odkształconej do granicy plastyczności gęstość taką mają amplitudy o zakresie 0.0  $S_y$  - 0.65  $S_y$  (rys. 2.31), a dla maksymalnego odkształcenia osiągają ją amplitudy o zakresie 0.0  $S_y$  - 0.70  $S_y$  (rys.2.32). Krzywa nośności charakteryzuje zdolność przenoszenia obciążeń kontaktowych i jej znajomość jest na tyle istotna w ocenie stanu powierzchni, że została ujęta w normie (PN-73/M-04250) jako jedna z kilku wielkości określających strukturę geometryczną warstwy wierzchniej.



Rys. 2.30 Krzywa nośności dla próbki nieodkształconej



Rys. 2.31 Krzywa nośności dla próbki odkształconej do granicy plastyczności



Rys. 2.32 Krzywa nośności dla próbki odkształconej do  $\epsilon_{tr} = 0.3\%$ .

Podsumujmy dotychczasowe rozważania. Badania własne zmian struktury geometrycznej powierzchni podczas odkształcania próbki wyraźnie wskazały na wczesne zmiany w chropowatości i falistości powierzchni. Próbka poddana naprężeniom równym umownej granicy plastyczności wykazywała zmiany w geometrii powierzchni, które można łączyć z uplastycznieniem ziaren przypowierzchniowych. Doświadczalne badania własne łącznie z badaniami opisanymi w literaturze pozwalają sformułować definicję naturalnej warstwy wierzchniej.

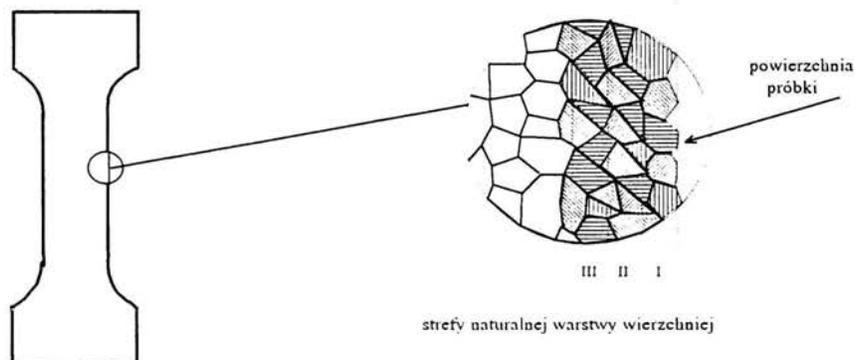
### 2.3 Zdefiniowanie naturalnej warstwy wierzchniej

Rozważmy jednorodny i izotropowy polikryształ, z którego wycinamy płaską próbkę w taki sposób, aby nie wprowadzić naprężeń własnych, zanieczyszczeń i spękań na jej powierzchni. Wówczas *naturalną warstwę wierzchnią polikryształu* zdefiniujemy jako

*warstwę o grubości 2 - 3 ziaren, która w wyniku oddziaływania swobodnej powierzchni elementu polikrystalicznego ma niższą granicę plastyczności niż materiał leżący wewnątrz tego elementu.*

Jest to definicja robocza, którą postaram się uzasadnić. W tym celu warstwę przypowierzchniową próbki podzielę na strefy o grubości jednego ziarna, z których pierwsza tworzy czystą, swobodną powierzchnię próbki (Rys.2.33). Powierzchnię taką można otrzymać po chemicznym lub elektrochemicznym wytrawieniu

ziarnach przypowierzchniowych. Aby znaleźć przyczynę takiego zachowania się materiału, wydaje się niezbędne sięgnięcie do poziomu mikroskopowego i porównanie zachowania się dyslokacji w ziarnach leżących przy powierzchni próbki i ziarnach wewnętrznych, usytuowanych daleko od powierzchni.



Rys.2.33 Schematyczne przedstawienie naturalnej warstwy wierzchniej polikryształu

Ze względu na brak silnych barier dyslokacyjnych na powierzchni próbki liczba ruchomych dyslokacji w I strefie będzie większa niż w pozostałych strefach. Ona też pierwsza ulegnie uplastycznieniu w procesie rozciągania próbki. Plastyczne płynięcie ziaren tej strefy spowoduje osłabienie barier dyslokacyjnych na granicy ze strefą II. W konsekwencji doprowadzi to do wcześniejszego uplastycznienia kolejnych stref warstwy wierzchniej materiału. Całkowita grubość warstwy materiału o obniżonej granicy plastyczności będzie *grubością naturalnej warstwy wierzchniej*.

Opiszemy teraz kolejno uproszczony mechanizm uplastycznienia: *swobodnego ziarna, ziarna z wnętrza polikryształu i ziarna leżącego przy powierzchni próbki*.

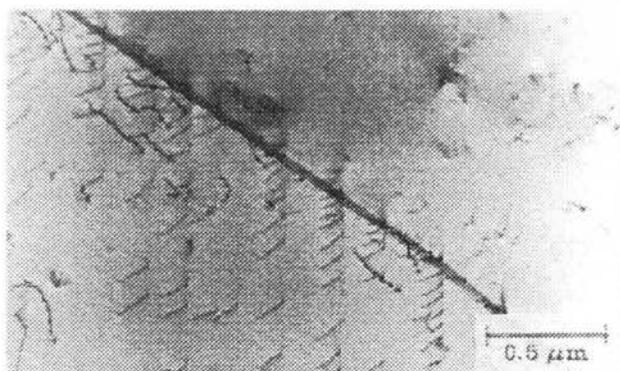
Aby nastąpiło uplastycznienie swobodnego ziarna należy przyłożyć obciążenie zewnętrzne, które uruchomi odpowiednio dużą liczbę dyslokacji i umożliwi im pokonanie szeregu barier, które napotykają w czasie ruchu. Najważniejsze z tych barier to:

1° pola naprężeń pochodzących od pojedynczych dyslokacji i defektów punktowych, a w szczególności:

- dyslokacji równoległych i pętli dyslokacyjnych leżących w płaszczyźnie poślizgu,
- dyslokacji przecinających płaszczyznę poślizgu, czyli lasu dyslokacji;

2° pola naprężeń pochodzących od splotów i sieci dyslokacji.

Bardziej złożony jest mechanizm uplastycznienia ziarna wewnątrz polikryształu. Granice tego ziarna z otaczającymi go sąsiednimi ziarnami dodatkowo blokują ruch dyslokacji. Naprężenie, które było w stanie wywołać poślizg w pojedynczym kryształku, w przypadku agregatu ziaren jest zbyt małe. Pod wpływem przyłożonego obciążenia zewnętrzne dyslokacje propagują się aż do osiągnięcia granicy ziarna, gdzie zostają zablokowane. Tworzy się tam spiętrzenie dyslokacji nazwane *superdyslokacją* (Rys. 2.34).



Rys.2.34 Tworzenie się superdyslokacji na granicach ziaren [49]

W miarę wzrostu obciążenia identyczne procesy zachodzą w innych ziarnach. W końcu zostanie osiągnięte stadium, w którym naprężenie ścinające na końcu pasma poślizgu, przy granicy ziarna, jest wystarczająco duże dla zainicjowania poślizgu w ziarnie sąsiednim. Nowe ruchome dyslokacje w sąsiednim ziarnie mogą powstać przez zarodkowanie na granicy ziaren albo mogą zostać odblokowane dyslokacje już tam istniejące.

Badania doświadczalne opisane w literaturze sugerują, że obniżenie granicy plastyczności 2 - 3 ziaren warstwy wierzchniej materiału nie poddanej obróbce technologicznej spowodowane jest odmiennym zachowaniem się dyslokacji w ziarnach tej warstwy. Ze względu na znaczne podobieństwo w zachowaniu się fizycznej warstwy wierzchniej pojedynczego kryształu i naturalnej warstwy wierzchniej polikryształu, celowe jest zbadanie wpływu swobodnej powierzchni pojedynczego kryształu na zachowanie się znajdujących się w nim dyslokacji i źródeł dyslokacji, co zostanie zrobione w następnym rozdziale. Opis fizyczny zjawisk zachodzących w pojedynczym kryształcie porównany z wynikami badań doświadczalnych polikryształów umożliwi w dalszej części pracy zbudowanie *modelu fenomenologicznego* naturalnej warstwy wierzchniej metali.

## Rozdział 3

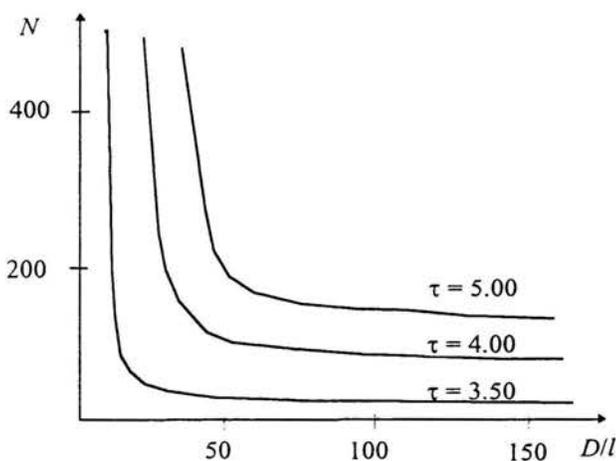
### WARSTWA WIERZCHNIA KRYSZTAŁÓW METALI

#### 3.1. Wpływ powierzchni kryształu na zachowanie się pojedynczej dyslokacji

Każde ziarno deformowanego metalu ulega uplastycznieniu dopiero wtedy gdy pojawi się w nim odpowiednio duża liczba ruchomych dyslokacji. Naprężenie krytyczne wprawiające dyslokację w ruch musi pokonać stan naprężeń własnych wytworzonych przez dyslokację oraz przez otaczające ją przeszkody. Naprężenia własne wokół dwóch nieoddziaływujących ze sobą identycznych dyslokacji, położonych daleko od brzegu ziarna, będą takie same. Sytuacja zmieni się jeżeli dyslokacje znajdują się w pobliżu swobodnej powierzchni kryształu. Dla dyslokacji położonych bliżej powierzchni kryształu, wytworzone przez nie pola naprężeń własnych będą słabsze niż w przypadku dyslokacji oddalonych od brzegu ziarna. Oznacza to, że naprężenia zewnętrzne potrzebne do uruchomienia dyslokacji będzie mało w miarę zbliżania się do powierzchni swobodnej. Aby określić wartość siły działającej na dyslokację położoną w pobliżu brzegu ziarna potrzebną do jej uruchomienia, wprowadza się pojęcie *siły pozornej* [50, str.68], „wyciągającej” dyslokację z materiału.

Podobne zjawisko zachodzi w przypadku sił potrzebnych do pokonania naprężeń blokujących źródło dyslokacji, a które pochodzą od pętli dyslokacyjnych otaczających badane źródło. Pętla taka działa na źródło położone w pobliżu brzegu kryształu znacznie mniejszą siłą niż w przypadku gdy źródło to znajduje się we wnętrzu materiału. Oznacza to, że istnieje warstwa brzegowa kryształu, w której

naprężenia krytyczne uruchamiające dyslokacje lub odblokowujące źródła dyslokacji są znacznie mniejsze niż odpowiednie naprężenia krytyczne we wnętrzu materiału. Efektem tego jest zwiększenie liczby dyslokacji generowanych przez źródło leżące w pobliżu powierzchni. Problem ten badał między innymi Sumino [51] i wyprowadził zależność liczby pętli dyslokacyjnych  $N$  generowanych przez źródło od wartości przyłożonego naprężenia zewnętrznego  $\tau$  i znormalizowanej odległości  $D/l$  źródła od powierzchni (rys. 3.1). Z rysunku widać, że liczba generowanych pętli szybko wzrasta ze zmniejszaniem odległości od powierzchni oraz zwiększaniem przyłożonego naprężenia zewnętrznego. Sumino tłumaczył te zjawiska występowaniem naprężeń wewnętrznych działających na źródło. Naprężenia te miały różną wartość w zależności od położenia źródła względem powierzchni. Zróżnicowanie ich wartości powoduje zmianę efektywnego naprężenia działającego na źródło.



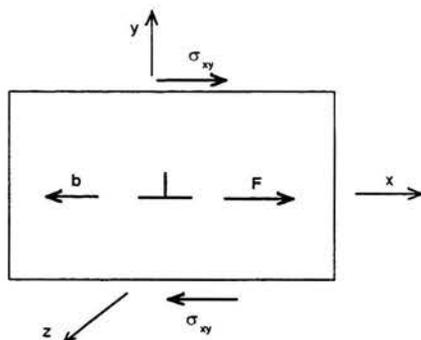
Rys. 3.1 Zależność liczby pętli dyslokacyjnych  $N$  od przyłożonego naprężenia  $\tau$  i znormalizowanej odległości od powierzchni  $D/l$ . Naprężenia  $\tau$  wyrażone w jednostkach  $Gb/2l$ .  $G$  - moduł Kirchoffa,  $b$  - wektor Burgersa,  $l$  - odległość między pętlami

W dalszym ciągu rozważań opiszemy wpływ powierzchni kryształu na zachowanie się pojedynczej dyslokacji i źródła dyslokacji. W tym celu porównamy siły potrzebne do uruchomienia dyslokacji znajdujących się we wnętrzu materiału i w pobliżu jego brzegu. Następnie obliczymy naprężenia potrzebne do odblokowania źródeł dyslokacji we wnętrzu materiału i w pobliżu jego brzegu. Pokażemy że w obu

przypadkach badane wielkości maleją w miarę zbliżania się do powierzchni swobodnej kryształu.

### 3.1.1. Działanie zewnętrznego pola naprężeń - siła działająca na dyslokację

Rozważmy siłę działającą na dyslokację znajdującą się pod wpływem przyłożonego do kryształu zewnętrznego pola naprężeń. Na rys. 3.2 pokazana jest dyslokacja krawędziowa oraz działające na nią zewnętrzne naprężenie ścinające  $\sigma_{xy}$ . Jeżeli przyjmiemy, że linia dyslokacyjna biegnie wzdłuż osi  $z$ , zgodnie z jej kierunkiem dodatnim, to wektor Burgersa  $\mathbf{b}$  skierowany będzie w kierunku przeciwnym do osi  $x$ . Podczas ruchu dyslokacji materiał po obu stronach płaszczyzny poślizgu doznaje przemieszczenia, które jest wielokrotnością długości wektora Burgersa  $b=|\mathbf{b}|$ . Aby przesunąć dyslokację na pewną odległość należy pokonać oddziaływanie sił międzyatomowych. Siła działająca na jednostkę długości dyslokacji, która jest w stanie tego dokonać, jest przeciwnie skierowana do wektora Burgersa  $\mathbf{b}$ , i jest opisana wzorem [52, str.83]:

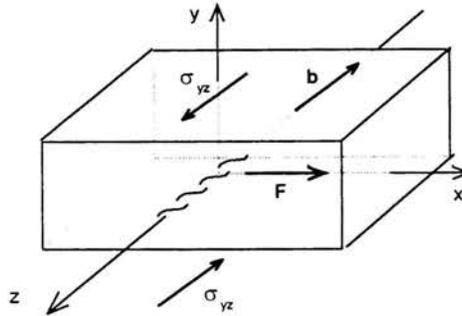


Rys. 3.2. Siła działająca na dyslokację krawędziową pod wpływem naprężeń  $\sigma_{xy}$ .

$$\mathbf{F} = -\sigma_{xy} \mathbf{b} = \sigma_{xy} b \mathbf{i} \quad (3.1)$$

gdzie  $\mathbf{i}$  jest wersorem osi  $x$ .

Analogicznie można znaleźć siłę działającą na dyslokację śrubową. Na rys. 3.3 przedstawiona jest prawoskrętna dyslokacja śrubowa oraz działające na nią zewnętrzne naprężenie ścinające  $\sigma_{yz}$ .



Rys. 3.3 Siła działająca na dyslokację śrubową pod wpływem naprężenia  $\sigma_{yz}$

Jeżeli zwrot linii dyslokacyjnej jest zgodny z dodatnim kierunkiem osi  $z$ , to wektor Burgersa  $\mathbf{b}$  skierowany będzie w kierunku przeciwnym do osi  $z$ . Tym razem siła działająca na jednostkę długości dyslokacji, która może przesunąć dyslokację na pewną odległość w kierunku osi  $x$ , jest skierowana zgodnie z osią  $x$ , i jest opisana wzorem [52, str 84]:

$$\mathbf{F} = \sigma_{yz} \mathbf{b} \mathbf{i} \quad (3.2)$$

Wzory (3.1-3.2) stanowią szczególne przypadki równania Peacha-Koehlera [53] opisującego siłę  $d\mathbf{F}$  działającą na liniowy element  $d\mathbf{l}$  dowolnej dyslokacji o wektorze Burgersa  $\mathbf{b}$  w polu naprężeń opisanym tensorem  $\sigma$ . Wówczas

$$d\mathbf{F} = -d\mathbf{l} \times (\sigma \cdot \mathbf{b}), \quad (3.3)$$

gdzie symbolem  $(\times)$  oznaczono iloczyn wektorowy, a symbolem  $(\cdot)$  - proste nasunięcie tensora na wektor. Istotnie:

- dla dyslokacji krawędziowej (rys. 3.2), mamy

$$d\mathbf{l} = (0, 0, l); \quad \mathbf{b} = (-b, 0, 0); \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

skąd otrzymujemy wzór (3.1);

- dla dyslokacji śrubowej (rys. 3.3), mamy

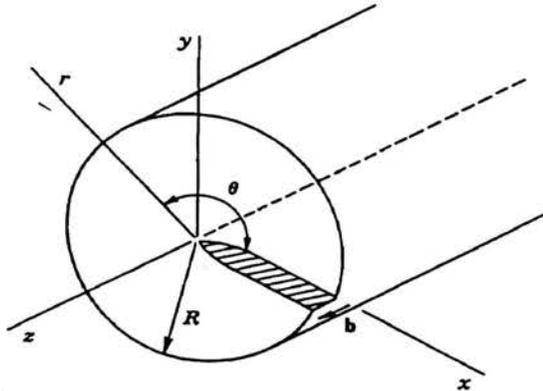
$$d\mathbf{l} = (0, 0, l), \quad \mathbf{b} = (0, 0, -b), \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{yz} \\ 0 & \sigma_{yz} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

skąd otrzymujemy wzór (3.2).

### 3.1.2. Pole naprężeń własnych wokół dyslokacji odległych od brzegu ośrodka

#### - Dyslokacja śrubowa.

Rozpatrzmy prawoskrętną dyslokację śrubową pokazaną na rys.3.4, o wektorze Burgersa  $\mathbf{b} = (0,0,b)$ . Przyjmujemy, że ośrodek w którym pojawiła się dyslokacja wypełnia całą przestrzeń.



Rys. 3.4. Pole przemieszczeń wywołane dyslokacją śrubową [50, str.60]

Mamy tu do czynienia z antyplaskim polem przemieszczeń którego jedyna składowa  $u_z$  rośnie liniowo wraz z kątem  $\Theta$  zmieniając się od zera, gdy  $\Theta = 0$ , do wartości  $b$ , gdy  $\Theta = 2\pi$ . Zatem

$$u_z = \frac{b \cdot \theta}{2\pi} = \frac{b}{2\pi} \arctg \frac{y}{x}, \quad \text{oraz} \quad u_x = u_y = 0 \quad (3.6)$$

Oznacza, to że jedynymi niezerowymi składowymi pola odkształceń są wielkości:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad \text{oraz} \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial y}. \quad (3.7)$$

Natomiast, nieznikające składowe pola naprężeń to

$$\sigma_{xz} = 2\mu\varepsilon_{xz} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad \text{oraz} \quad \sigma_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (3.8)$$

gdzie  $\mu$  jest modułem Kirchhoffa.

Podstawiając (3.6<sub>2</sub>) do (3.8) otrzymujemy następujące pole naprężeń własnych wokół dyslokacji śrubowej

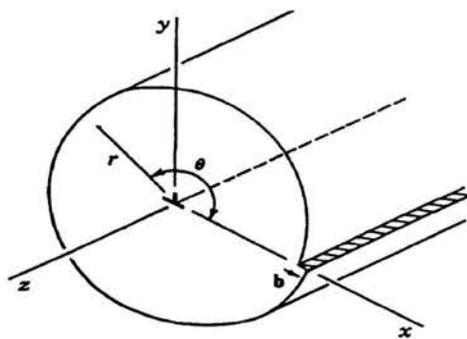
$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= -\frac{\mu b}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \\ \sigma_{yz} &= \frac{\mu b}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \\ \sigma_{xy} = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} &= 0.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Szczególną rolę odgrywa tu naprężenie  $\sigma_{yz}$ , ponieważ, zgodnie ze wzorem (3.2), siła uruchamiająca dyslokację śrubową zależy od naprężenia zewnętrznego  $\sigma_{yz}$  (rys. 3.3).

### **- Dyslokacja krawędziowa.**

Podobnie jak poprzednio przyjmujemy, że dyslokacja pojawiła się w ośrodku, który wypełnia całą przestrzeń (rys. 3.5). Tym razem mamy do czynienia z płaskim stanem odkształcenia, w którym  $u_z = 0$ ,

$\frac{\partial u_i}{\partial z} = 0$  dla  $i = x, y, z$  oraz  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$



Rys. 3.5 Pole przemieszczeń wywołane dyslokacją krawędziową [50, str.74]

Aby znaleźć pole naprężeń własnych wokół dyslokacji krawędziowej, wprowadzamy funkcję naprężeń Airy'ego  $\Psi$  taką, że:

$$\sigma_{xy} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}\tag{3.10}$$

We współrzędnych biegunowych  $(r, \theta)$  ma ona postać

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} \quad (3.11)$$

Funkcję  $\Psi$  wyznaczmy korzystając z równania nierozdzielności dla odkształceń [54]

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (3.12)$$

które wyrażone w naprężeniach ma postać:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \quad (3.13)$$

Korzystając z podstawienia Airy'ego (3.10) i wyrażając wynik we współrzędnych biegunowych otrzymujemy:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \Psi = 0. \quad (3.14)$$

Postać równania (3.14) umożliwia wprowadzenie nowej funkcji:

$$\phi = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \nabla^2 \Psi \quad (3.15)$$

gdzie

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (3.16)$$

jest operatorem Laplace'a.

Równanie (3.14) przyjmie wówczas postać

$$\nabla^2 \phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \phi = 0. \quad (3.17)$$

Celem naszym jest znalezienie całki szczególnej tego równania, która spełnia odpowiednie warunki brzegowe narzucone na stan naprężeń i odkształceń.

Analizując rys. 3.5 widzimy, że funkcja  $\phi = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$  powinna osiągać maksimum

dla  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ , a minimum dla  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Ponadto pole odkształceń wywołane wprowadzeniem dystorsji opisanej wektorem Burgersa o długości  $b$  powinno spełniać warunek [50, str 75]:

$$b = \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ \eta > 0}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\varepsilon_{xx}(x, y) - \varepsilon_{xx}(x, -\eta)] dx. \quad (3.18)$$

Jedyną rozwiązaniem równania (3.21), które spełnia powyższe warunki brzegowe ma postać:

$$\phi = -\frac{\mu b}{\pi(1-\nu)} r^{-1} \sin \theta \quad (3.19)$$

gdzie  $\mu$  jest modułem Kirchhoffa, a  $\nu$  współczynnikiem Poissona.

Odpowiada mu funkcja

$$\psi = -\frac{\mu b r \sin \theta}{4\pi(1-\nu)} \ln r. \quad (3.20)$$

Przechodząc do współrzędnych prostokątnych i korzystając ze wzorów (3.10), otrzymujemy następujący stan naprężeń własnych spowodowany pojawieniem się dyslokacji krawędziowej:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{y(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \sigma_{yy} &= \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \sigma_{xy} &= \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{\mu b \nu}{\pi(1-\nu)} \frac{y}{x^2 + y^2}, \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Szczególne role odgrywa tu naprężenie  $\sigma_{xy}$ , ponieważ, zgodnie ze wzorem (3.2), siła uruchamiająca dyslokację śrubową zależy od naprężenia zewnętrznego  $\sigma_{xy}$  (rys. 3.1).

### 3.1.3. Pole naprężeń własnych wokół dyslokacji w pobliżu brzegu ośrodka

Wyznaczenie pola naprężeń własnych wokół dyslokacji znajdującej się w pobliżu brzegu ośrodka jest bardziej skomplikowane. Spełnienie naprężeniowych warunków

brzegowych wymaga wprowadzenia pojęcia *dyslokacji pozornej* i pochodzącej od niej *siły pozornej* działającej na dyslokację rzeczywistą. Siła pozorna działa na dyslokację rzeczywistą „wyciągając” ją na powierzchnię. Oznacza to, że po przyłożeniu naprężeń zewnętrznych, siła potrzebna do uruchomienia dyslokacji będzie mniejsza niż w przypadku gdy dyslokacja znajduje się daleko od brzegu ośrodka. Wyjaśnijmy to zjawisko.

Dyslokacja ma pewną energię własną utworzoną przez otaczające ją pole odkształceń. Załóżmy, że dyslokacja porusza się powoli w kierunku powierzchni swobodnej. W chwili osiągnięcia tej powierzchni dyslokacja wydostaje się z kryształu i jej energia własna znika, ponieważ znika otaczające ją pole odkształceń. Wydaje się prawdopodobne, że energia ta zmniejsza się stopniowo, w miarę jak dyslokacja zbliża się do powierzchni. Można powiedzieć, że na dyslokację działa pewna fikcyjna siła przyciągająca ją do powierzchni. Aby obliczyć zmianę energii własnej dyslokacji wprowadza się pojęcie dyslokacji pozornej analogiczne do pojęcia ładunków pozornych w elektrostatyce [55]. Siły wywierane przez dyslokacje pozorne nazywane są siłami pozornymi.

#### **- Dyslokacja śrubowa.**

Rozważmy dyslokację śrubową o wektorze Burgersa  $\mathbf{b}$  usytuowaną w pobliżu brzegu w półprzestrzeni  $x < 0$  (rys. 3.6). Linia dyslokacyjna równoległa do brzegu  $x = 0$  biegnie równoległe do osi  $z$  przecinając płaszczyznę  $xy$  w punkcie  $(-l, 0)$ . Przez  $l$  oznaczono odległość linii dyslokacyjnej od brzegu półprzestrzeni.

Stan naprężenia powinien spełniać na brzegu  $x = 0$  warunki:  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ . Nie spełniają ich naprężenia opisane wzorami (3.9) słusznymi dla dyslokacji w ośrodku nieograniczonym. Wprawdzie  $\sigma_{yz}(0, y) = 0$ , ale

$$\sigma_{xz}(0, y) = -\frac{\mu b}{2\pi} \frac{y}{l^2 + y^2} \neq 0 \quad (3.22)$$

Aby spełnić warunek  $\sigma_{xz}=0$ , wprowadzimy dyslokację pozorną ( $S'$ ) przeciwnego znaku, będącą zwierciadlanym odbiciem dyslokacji rzeczywistej ( $S$ ). Od tego momentu wszystkie wielkości dotyczące dyslokacji pozornych będą oznaczane

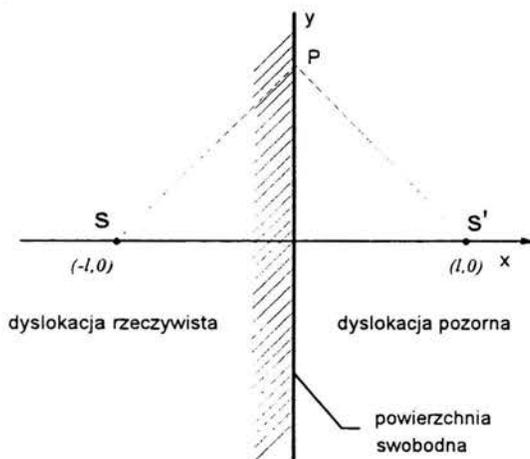
dotychczasowym indeksem ( $S'$ ) a dyslokacji rzeczywistej przez ( $S$ ). Zatem pole naprężeń  $\sigma$  pochodzące od dyslokacji śrubowej leżącej w pobliżu brzegu półprzestrzeni będzie superpozycją pól  $\sigma^{(S)}$  i  $\sigma^{(S')}$  [56].

Naprężenie ścinające  $\sigma_{xz}$  na brzegu  $x = 0$  pochodzące od dyslokacji pozornej jest następujące (wzór (3.9) z uwzględnieniem zmiany znaku wektora Burgersa):

$$\sigma_{xz}^{(S')}(0,y) = \frac{\mu b}{2\pi} \frac{y}{l^2 + y^2}. \quad (3.23)$$

Porównując je z wielkością  $\sigma_{xz}(0,y)$  opisaną wzorem (3.22) widzimy, że jest ono identyczne co do wartości lecz przeciwne co do znaku. Jest to jedyna składowa tensora naprężeń pochodzących od dyslokacji pozornej, która niezeruje się na brzegu. Superpozycja pól naprężeń pochodzących od dyslokacji rzeczywistej  $\sigma^{(S)}$  i pozornej  $\sigma^{(S')}$  spełnia warunki brzegowe i stanowi rozwiązanie zadania. Ostatecznie, składowe tensora naprężenia w dowolnym punkcie  $x, y$  w obszarze  $x < 0$  wyrażają się wzorami (por. wzory (3.9)):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0 \\ \sigma_{xz} &= -\frac{\mu b}{2\pi} \left( \frac{y}{(x+l)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-l)^2 + y^2} \right) \\ \sigma_{yz} &= \frac{\mu b}{2\pi} \left( \frac{x+l}{(x+l)^2 + y^2} - \frac{x-l}{(x-l)^2 + y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$



Rys. 3.6 Dyslokacja śrubowa ( $S$ ) równoległa do powierzchni swobodnej i dyslokacja pozorna ( $S'$ )

W powyższych wzorach, pierwsza część wyrażenia opisuje wpływ dyslokacji rzeczywistej, a druga wpływ dyslokacji pozornej. Ta ostatnia powoduje zmianę pola naprężenia wywołaną obecnością brzegu ośrodka. Wpływ dyslokacji pozornej jest równoważny przyłożeniu pewnego zewnętrznego pola naprężeń, które działa pewną siłą (siłą pozorną) na dyslokację rzeczywistą. Zatem, znając pole naprężeń wokół dyslokacji śrubowej położonej w pobliżu brzegu ośrodka, można obliczyć siłę pozorną działającą na tę dyslokację. W tym celu należy obliczyć naprężenia pochodzące od dyslokacji pozornej ( $S'$ ) w punkcie, w którym znajduje się dyslokacja rzeczywista ( $S$ ). Ponieważ odległość między dyslokacjami jest równa  $2l$ , to składowa  $\sigma_{yz}^{(S')}$  pochodząca od dyslokacji pozornej w punkcie  $S(-l,0)$  będzie równa (por. wzory (3.9<sub>2</sub>), (3.24<sub>3</sub>))

$$\sigma_{yz}^{(S')}(-l,0) = \frac{\mu b}{4\pi l} \quad (3.25)$$

Zgodnie ze wzorem (3.2) naprężenie to powoduje powstanie siły pozornej

$$F^{(S')} = b\sigma_{yz}^{(S')}(-l,0) = \frac{\mu b^2}{4\pi l} \quad (3.26)$$

gdzie  $l$  jest odległością dyslokacji od powierzchni swobodnej. Zwróćmy uwagę, że siła ta maleje wraz ze wzrostem odległości dyslokacji od powierzchni ośrodka.

### **- Dyslokacja krawędziowa.**

Rozważmy dyslokację krawędziową w półprzestrzeni  $x < 0$  (rys.3.7), równoległą do powierzchni swobodnej. Przyjmijmy, że jej płaszczyzna poślizgu jest prostopadła do brzegu półprzestrzeni. Podobnie jak w przypadku dyslokacji śrubowej wprowadzimy pozorną dyslokację krawędziową ( $E'$ ) o znaku przeciwnym do znaku dyslokacji rzeczywistej ( $E$ ). Pole naprężeń pochodzące od dyslokacji rzeczywistej oznaczmy przez  $\sigma^{(E)}$ , a od dyslokacji pozornej przez  $\sigma^{(E')}$ . Zsumowanie naprężeń pochodzących od obu dyslokacji spowoduje, że na powierzchni ośrodka wszystkie składowe tensora naprężenia będą równe zeru, z wyjątkiem składowej  $\sigma_{xy}^{(E)} + \sigma_{xy}^{(E')}$ .

Mianowicie

$$(\sigma_{xy}^{(E)} + \sigma_{xy}^{(E')})(0,y) = \frac{\mu b}{\pi(1-\nu)} \frac{l(l^2 - y^2)}{r^4} \quad (3.27)$$

gdzie  $r^2 = l^2 + y^2$ . Okazuje się, że do opisanego pola naprężeń wokół dyslokacji krawędziowej znajdującej się w pobliżu brzegu ośrodka, nie wystarczy wprowadzenie pola naprężeń pochodzącego od dyslokacji pozornej. Należy wprowadzić dodatkowo pole naprężeń  $\sigma''$  takie, że:

$$\sigma_{xy}''(0,y) = -\frac{\mu b}{\pi(1-\nu)} \frac{l(l^2 - y^2)}{r^4} \quad (3.28)$$

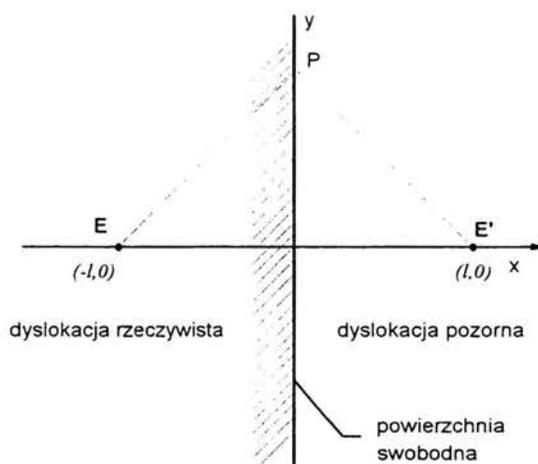
oraz

$$\sigma_{xx}''(0,y) = \sigma_{zz}''(0,y) = 0 \quad (3.29)$$

Aby je otrzymać wprowadzimy funkcję naprężeń  $\Psi(x,y)$ , dla której

$$\sigma_{xy}''(0,y) = -\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}\right)_{x=0} = -\frac{\mu b}{\pi(1-\nu)} \frac{l(l^2 - y^2)}{r^4} \quad (3.30)$$

$$\sigma_{xx}''(0,y) = \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right)_{x=0} = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x,y) = 0$$



Rys. 3.6 Dyslokacja krawędziowa (E) równoległa do powierzchni swobodnej i dyslokacja pozorna (E')

Można pokazać [50, str 75], że funkcja  $\Psi$  ma następującą postać:

$$\Psi = -\frac{\mu b l x y}{\pi(1-\nu)[(l-x)^2 + y^2]} \quad (3.31)$$

Znając postać funkcji  $\Psi(x,y)$  można obliczyć pole naprężeń  $\sigma''$ , które spełnia warunki brzegowe (3.30). Ma ono postać

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}'' &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{2\mu b l x y}{\pi(1-\nu)r^6} [3(x-l)^2 - y^2] \\ \sigma_{yy}'' &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{\mu b l}{\pi(1-\nu)r^6} [4(x-l)^3 y - 6(x-l)^2 x y + 4(x-l)y^3 + 2x y^3] \\ \sigma_{xy}'' &= -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = -\frac{\mu b l}{\pi(1-\nu)r^6} [(x-l)^4 - 2x(x-l)^3 + 6x y^2(x-l) - y^4] \quad (3.32) \\ \sigma_{zz}'' &= \nu(\sigma_{xx}'' + \sigma_{yy}'') = -\frac{4\mu b l \nu}{\pi(1-\nu)r^6} [(x-l)^3 y + (x-l)y^3]\end{aligned}$$

Dodanie tego pola do pól naprężeń pochodzących od dyslokacji rzeczywistej (E) i pozornej (E'), daje końcowe pole naprężeń własnych wokół dyslokacji krawędziowej leżącej w odległości  $l$  od powierzchni

$$\sigma = \sigma^{(E)} + \sigma^{(E')} + \sigma'' \quad (3.33)$$

gdzie (porównaj wzór 3.21)

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(E)} &= -\frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{y[3(x+l)^2 + y^2]}{[(x+l)^2 + y^2]^2} \\ \sigma_{yy}^{(E)} &= \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{y[(x+l)^2 - y^2]}{[(x+l)^2 + y^2]^2} \\ \sigma_{xy}^{(E)} &= \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x+l)[(x+l)^2 - y^2]}{[(x+l)^2 + y^2]^2} \quad (3.34) \\ \sigma_{zz}^{(E)} &= \nu(\sigma_{xx}^{(E)} + \sigma_{yy}^{(E)}) = -\frac{\mu b \nu}{\pi(1-\nu)} \frac{y}{(x+l)^2 + y^2} \\ \sigma_{xz}^{(E)} &= \sigma_{yz}^{(E)} = 0\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(E')} &= \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{y[3(l-x)^2 + y^2]}{[(l-x)^2 + y^2]^2} \\ \sigma_{yy}^{(E')} &= -\frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{y[(l-x)^2 - y^2]}{[(l-x)^2 + y^2]^2} \\ \sigma_{xy}^{(E')} &= \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{(l-x)[(l-x)^2 - y^2]}{[(l-x)^2 + y^2]^2} \quad (3.35) \\ \sigma_{zz}^{(E')} &= \nu(\sigma_{xx}^{(E')} + \sigma_{yy}^{(E')}) = \frac{\mu b \nu}{\pi(1-\nu)} \frac{y}{(l-x)^2 + y^2} \\ \sigma_{xz}^{(E')} &= \sigma_{yz}^{(E')} = 0\end{aligned}$$

a składowe tensora  $\sigma''$  dane są wzorami (3.32).

Podobnie jak w przypadku dyslokacji śrubowej, znając pole naprężeń wokół dyslokacji krawędziowej, można obliczyć działającą na nią siłę pozorną. W tym celu obliczymy naprężenie pochodzące od dyslokacji pozornej ( $E'$ ) i od pola  $\sigma''$  w punkcie, w którym znajduje się dyslokacja rzeczywista ( $E$ ). Okazuje się, że wszystkie składowe pola  $\sigma''$  w punkcie  $(-l,0)$  znikają. Podobnie, znikają wszystkie składowe pola  $\sigma^{(E')}$  w tym punkcie z wyjątkiem składowej  $\sigma_{xy}^{(E')}$ . Otrzymujemy (wzór (3.35<sub>3</sub>))

$$\sigma_{xy}^{(E')}(-l,0) = \frac{\mu b}{4\pi l(1-\nu)} \quad (3.36)$$

Zgodnie ze wzorem (3.1) naprężenie to powoduje powstanie siły pozornej

$$F^{(E')} = b\sigma_{xy}^{(E')}(-l,0) = \frac{\mu b^2}{4\pi l(1-\nu)} \quad (3.37)$$

gdzie  $l$  jest odległością dyslokacji od powierzchni swobodnej.

Jak widać, siła ta różni się od siły pozornej wywieranej ze strony powierzchni na dyslokację śrubową jedynie współczynnikiem  $\frac{1}{1-\nu}$  i również maleje wraz ze wzrostem odległości dyslokacji od powierzchni ośrodka.

### 3.1.4 Naprężenia potrzebne do uruchomienia dyslokacji znajdującej się w pobliżu brzegu ośrodka

Niezależnie od położenia dyslokacji, naprężenie zewnętrzne potrzebne do jej uruchomienia zależy wyłącznie od pola naprężeń własnych tej dyslokacji. Jeżeli dyslokacja leży daleko od powierzchni ośrodka, naprężenia ścinające, które ją uruchamiają, nie zależą od jej położenia. Naprężenia te oznaczymy przez  $\tau_0$ . Zostały one obliczone przez Peierlsa i Nabarro [57] poprzez określenie zmiany energii otoczenia dyslokacji, podczas jej przejścia od jednego położenia równowagi do drugiego. Dla sieci regularnej odpowiedni wzór ma postać:

$$\tau_0 = \frac{2\mu}{1-\nu} e^{-2\pi(1-\nu)}, \quad \text{lub } \tau_0 = 2 \cdot 10^4 \mu \text{ dla } \nu = 0.33. \quad (3.38)$$

Sytuacja zmieni się jeżeli dyslokacja znajdzie się w pobliżu powierzchni swobodnej kryształu. W tym przypadku pole naprężeń będzie tym słabsze im bliżej

brzegu znajduje się dyslokacja. Wpływ brzegu uwzględniony został poprzez wprowadzenie siły pozornej  $F_p$  (wzór (3.26) lub (3.37)) działającej na dyslokację. Z drugiej strony, zgodnie z rozważaniami punktu 3.3.1, siłę pozorną można przyporządkować fikcyjne pole naprężeń zewnętrznych (wzór (3.1) lub (3.2))

$$\tau_p = \frac{F_p}{b}, \quad (3.39)$$

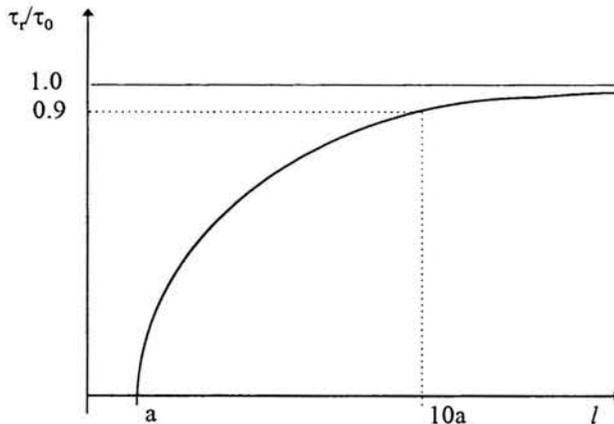
które wspomaga przyłożone *rzeczywiste pole naprężeń  $\tau_r$  uruchamiających badaną dyslokację*. Tak więc, naprężenie  $\tau_r$  jest mniejsze od naprężenia  $\tau_0$  o wielkość  $\tau_p$ :

$$\tau_r = \tau_0 - \tau_p \quad (3.40)$$

Rzeczywiste naprężenia  $\tau_r$  uruchamiające dyslokację będą tym mniejsze im bliżej brzegu kryształu się ona znajduje. Dla dyslokacji krawędziowej (wzór (3.36)) mamy

$$\frac{\tau_r}{\tau_0} = 1 - \frac{\mu b}{4\pi(1-\nu)\tau_0 l} \quad (3.41)$$

Zależność  $\tau_r$  od odległości  $l$  rdzenia dyslokacji od brzegu kryształu pokazana jest na rys. 3.8.



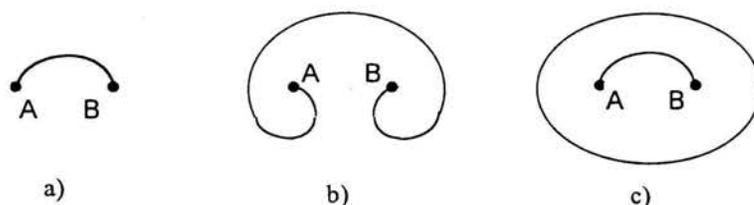
Rys. 3.8 Zewnętrzne naprężenie uruchamiające dyslokację krawędziową w funkcji odległości od brzegu kryształu;  $a = 200b$

Do obliczeń przyjęto  $\nu=0.33$ . Zwróćmy uwagę na stosunkowo krótki zasięg strefy wpływu warstwy brzegowej kryształu. Strefa będzie znacznie szersza dla większej liczby dyslokacji znajdujących się przy powierzchni kryształu [7, str. 112]. Jeszcze

większy jest zasięg wpływ warstwy brzegowej na zachowanie się źródła dyslokacji. Ten problem będzie przedmiotem rozważań następnego podrozdziału.

### 3.2. Wpływ powierzchni kryształu na zachowanie się źródła dyslokacji

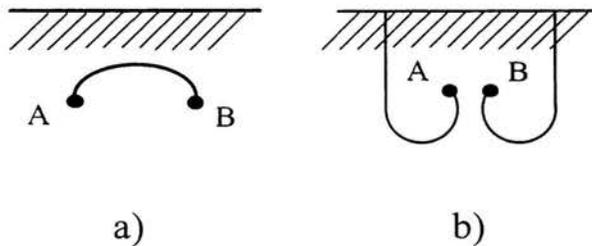
W poprzednich podrozdziałach rozpatrywany był wpływ jaki wywiera powierzchnia swobodna kryształu na wielkość siły potrzebnej do uruchomienia pojedynczej dyslokacji leżącej w pewnej odległości od tej powierzchni. W tym podrozdziale omówione zostaną źródła emitujące pętle dyslokacyjne. Typowym przykładem źródła dyslokacji jest źródło Franka-Reada [58] pokazane na rys. 3.9. Pod wpływem sił zewnętrznych, pętla dyslokacyjna zaczepiona w punktach A i B (rys. 3.9a) wydłuża się (rys. 3.9b) aż do chwili gdy dwa jej fragmenty zetkną się ze sobą tworząc pętlę zamkniętą (rys. 3.9c). Zamknięta pętla wytwarza wokół siebie pole naprężeń własnych, które blokują źródło AB utrudniając wyemitowanie następnej pętli. Naprężenia zewnętrzne przyłożone do kryształu, równe co do wartości lecz przeciwne co do znaku naprężeniom blokującym źródło dyslokacji, są naprężeniami krytycznymi niezbędnymi do uaktywnienia źródła.



Rys. 3.9. Źródło Franka-Reada

Zgodnie z poprzednimi rozważaniami wielkość naprężeń własnych wokół pętli dyslokacyjnej maleje wraz ze zbliżeniem się tej pętli do brzegu kryształu. Zatem maleją także naprężenia blokujące źródło dyslokacji i naprężenia krytyczne potrzebne do emisji nowych pętli dyslokacyjnych. Powoduje to zmniejszenie się liczby nieruchomych dyslokacji w pobliżu brzegu kryształu. W konsekwencji odległość punktów A i B wzrasta przy powierzchni ziarna, wzrasta średnica wyemitowanej pętli dyslokacyjnej i maleją naprężenia blokujące źródło dyslokacji.

Jeżeli źródło dyslokacji znajduje się odpowiednio blisko brzegu, źródło Franka-Reada zamienia się w źródło Fishera pokazane na rys. 3.10 [59].



Rys. 3.10. Źródło Fishera

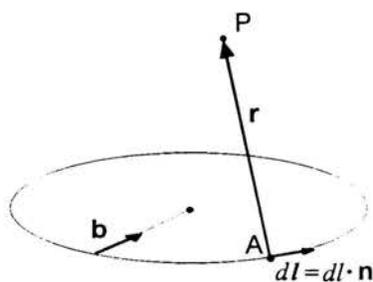
W tym przypadku emitowana pętla dyslokacji zaczepiona w punktach A i B (rys. 3.10a) wychodzi na brzeg kryształu zanim jej przeciwległe fragmenty zetkną się ze sobą (rys.3.10b). Pętla rozpada się na dwie części, a wielkość pola naprężeń własnych wokół każdej z nich ulega dalszemu zmniejszeniu.

Przejdziemy do porównania naprężeń blokujących źródło dyslokacji w przypadku gdy leży ono daleko od brzegu kryształu i w przypadku gdy znajduje się ono w pobliżu jego powierzchni.

### 3.2.1 Źródło w ośrodku nieograniczonym

Rozważmy dowolną zamkniętą pętlę dyslokacyjną znajdującą się w nieograniczonym ośrodku krystalicznym o kierunku obiegu opisanym wektorem  $\mathbf{n}$  i wektorze Burgersa  $\mathbf{b}$  pokazanych na rys. 3.11.

W punkcie A leżącym na pętli wyróżnimy jej infinytymalny element  $d\mathbf{l}=d\mathbf{l}\cdot\mathbf{n}$  o długości  $d\mathbf{l}$ . Interesować nas będzie przyrost pola naprężeń własnych  $d\sigma$  w dowolnym punkcie P leżącym poza pętlą pochodzący od elementu  $d\mathbf{l}$ . Oznaczmy przez  $r$  promień wiodący punktu P zaczepiony w punkcie A.



Rys. 3.11. Zamknięta pętla dyslokacyjna w nieograniczonym ośrodku krystalicznym

Zgodnie z prawem Peacha-Koehlera [53], przyrost ten opisany jest wzorem

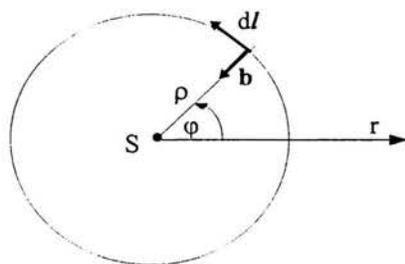
$$d\sigma = \frac{Gb \cdot (dl \times r)}{4\pi|r|^3}, \quad (3.42)$$

który w prostokątnym układzie współrzędnych  $\{x_i; i = 1,2,3\}$  przyjmuje postać:

$$d\sigma_{ij} = \frac{Gb_i \varepsilon_{jkl} dl_k r_l}{(r_m r_m)^{3/2}} \quad (3.43)$$

W powyższych wzorach  $G$  jest modułem ścinania, natomiast  $\varepsilon_{jkl}$  jest symbolem permutacyjnym Ricciiego.

Założmy, że źródło  $S$  wyemitowało jedną kołową pętlę dyslokacyjną o promieniu  $\rho$  (rys. 3.12)



Rys. 3.12. Kołowa pętla dyslokacyjna wyemitowana przez źródło  $S$

Wprowadzimy biegunowy układ współrzędnych  $\{r, \varphi, z\}$ . W układzie tym:  $\mathbf{b} = \{b, 0, 0\}$ ,  $dl = \rho d\varphi$ ,  $\mathbf{r} = \{\rho, 0, 0\}$ . W badanym przypadku przyrost tensora naprężenia  $d\sigma$  w punkcie  $S$  będzie miał tylko jedną składową styczną  $d\sigma_{z\varphi}$  różną od zera. W dalszym ciągu będziemy ją oznaczać przez  $d\tau^{(0)}$ .

Zgodnie ze wzorem (3.42) otrzymamy:

$$d\tau^{(0)} = \frac{Gb}{4\pi} \frac{dl}{\rho^2} = \frac{Gb}{4\pi} \frac{d\varphi}{\rho} \quad (3.44)$$

Naprężenia własne w źródle S pochodzące od całej pętli dyslokacyjnej otrzymamy całkując wzór (3.44) po całej długości pętli

$$\tau^{(0)} = \frac{Gb}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\rho} = \frac{Gb}{2\rho} \quad (3.45)$$

Naprężenie  $\tau^{(0)}$  jest naprężeniem blokującym źródło i opóźniającym emisję kolejnych pętli dyslokacyjnych.

### 3.2.2 Źródło znajdujące się w pobliżu powierzchni ośrodka.

Do obliczenia naprężeń blokujących źródło wykorzystamy metodę lustrzanego odbicia, z której korzystaliśmy przy analizie pola naprężeń własnych wokół pojedynczej dyslokacji. Przyjmując brzeg ośrodka za płaszczyznę symetrii, wprowadzimy źródło pozorne S' będące odbiciem źródła rzeczywistego S. Przyjmiemy, że emituje ono pozorną pętlę dyslokacyjną, która w punkcie S generuje naprężenie styczne  $\tau^{(1)}$ . Całkowite naprężenie blokujące źródło S będzie sumą naprężenia  $\tau^{(R)}$  pochodzącego od pętli rzeczywistej i naprężenia  $\tau^{(1)}$ . Oznaczmy je przez  $\tau^{(S)}$ . Zatem

$$\tau^{(S)} = \tau^{(R)} + \tau^{(1)} \quad (3.46)$$

Przy obliczaniu wielkości  $\tau^{(R)}$  oraz  $\tau^{(1)}$  należy rozpatrzeć dwa rodzaje pętli dyslokacyjnych: zamkniętej wokół źródła Franka-Reada oraz półpętli generowanej przez źródło Fishera.

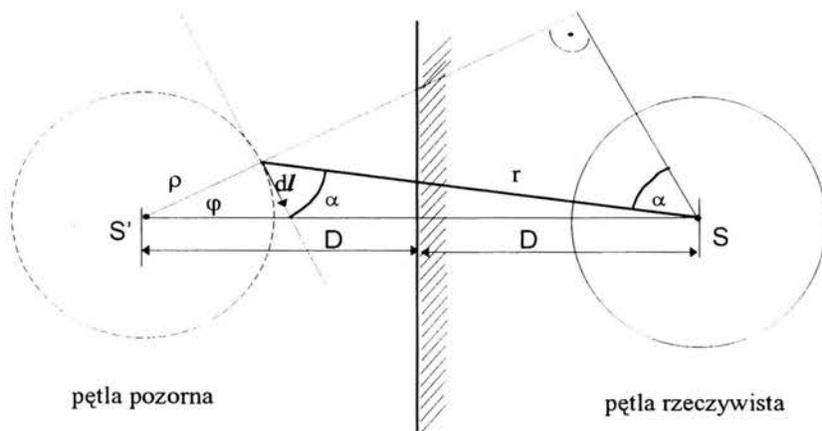
#### - Źródło Franka-Reada

Rozważmy źródło S i otaczającą go pętlę dyslokacyjną z ich zwierciadlanym odbiciem względem brzegu ośrodka (rys. 3.13). Źródło S znajduje się w odległości D od brzegu ośrodka. W tym przypadku naprężenie  $\tau^{(R)}$  pochodzące od pętli rzeczywistej jest równe wielkości  $\tau^{(0)}$  opisanej wzorem (3.45). Aby obliczyć  $\tau^{(1)}$  skorzystamy ze wzoru (3.42), który teraz przyjmie postać

$$d\tau^{(1)} = -\frac{Gb}{4\pi} \frac{\rho r \sin \alpha}{r^{3/2}} d\varphi \quad (3.47)$$

gdzie  $\alpha$  jest kątem pomiędzy wektorami  $d\mathbf{l}$  i  $\mathbf{r}$  (por. rys. 3.12 i 3.13). Zwróćmy uwagę na przeciwną orientację sieci pozornej, która implikuje znak minus we wzorze (3.47). Analiza rys. 3.13 pozwala na wyeliminowanie we wzorze (3.47) wielkości  $r$  i  $r \sin \alpha$ . Mianowicie

$$r = \sqrt{\rho^2 + 4D^2 - 4D\rho \cos \varphi} \quad \text{oraz} \quad r \sin \alpha = 2D \cos \varphi - \rho \quad (3.48)$$



Rys. 3.13. Schemat źródła Franka-Reada i jego zwierciadlane odbicie

Podstawiając powyższe wyrażenia do (3.47), otrzymujemy

$$\tau^{(1)} = -\frac{Gb}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - 2D\rho \cos \varphi}{(\rho^2 + 4D^2 - 4D\rho \cos \varphi)^3} d\varphi \quad (3.49)$$

Skąd (por. [7, str 115])

$$\tau^{(1)} = -\frac{Gb}{32} \frac{\rho^2}{D^3} \quad (3.50)$$

Napężenie to jest przeciwnego znaku niż napężenie  $\tau^{(R)} = \tau^{(0)}$  opisane wzorem (3.45). Zatem całkowite napężenie pochodzące od pętli znajdującej się w pobliżu brzegu ośrodka i blokujące źródło, jest mniejsze co do wartości bezwzględnej od napężenia  $\tau^{(0)}$  pochodzącego od pętli znajdującej się w ośrodku nieograniczonym.

$$\tau^{(S)} = \tau^{(R)} + \tau^{(1)} = \frac{Gb}{2\rho} \left( 1 - \frac{\rho^3}{16D^3} \right) \quad (3.51)$$

Oznacza to, że w badanym przypadku naprężenie zewnętrzne uruchamiające źródło dyslokacji będzie również mniejsze co do wartości bezwzględnej od naprężenia uruchamiającego źródło dyslokacji znajdujące się w ośrodku nieograniczonym.

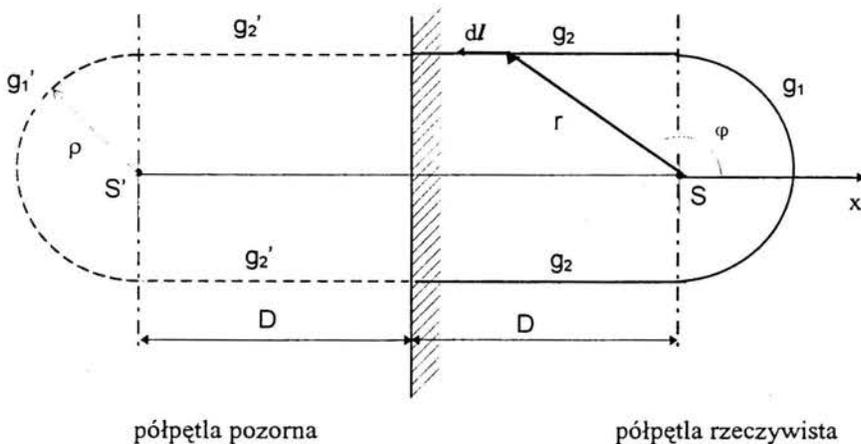
**- Źródło Fischera**

W tym przypadku źródło S emituje pętlę dyslokacyjną, która wychodzi na powierzchnię ośrodka rozpadając się na dwie półpętle. Ostateczna postać linii dyslokacyjnej otaczającej źródło S wraz z jej zwierciadlanym odbiciem pokazana jest schematycznie na rys. 3.14. Źródło S znajduje się w odległości D od brzegu ośrodka. Naprężenie  $\tau^{(R)}$  blokujące źródło S i pochodzące od dyslokacji rzeczywistej jest sumą naprężeń pochodzących od gałęzi półkolistej  $g_1$ :

$$\tau^{(R_1)} = \frac{Gb}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\rho} = \frac{Gb}{4\rho} \quad (3.52)$$

i dwóch gałęzi prostoliniowych  $g_2$ :

$$\tau^{(R_2)} = 2 \frac{Gb}{4\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \arctg\left(\frac{D}{\rho}\right)} \frac{\sin \varphi}{\rho} d\varphi = \frac{Gb}{2\pi\rho} \sin \left[ \arctg\left(\frac{D}{\rho}\right) \right] \quad (3.53)$$



Rys. 3.14. Schemat źródła Fischera i jego zwierciadlane odbicie - oddziaływanie dyslokacji rzeczywistej

Przejdziemy teraz do obliczenia naprężenia  $\tau^{(1)}$  blokującego źródło S, ale pochodzącego od dyslokacji pozornej (rys. 3.15). Naprężenie to jest sumą naprężeń pochodzących od gałęzi półkolistej  $g'_1$

$$\tau^{(1)} = -\frac{Gb}{4\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\rho^2 - 2D\rho \cos\varphi}{(\rho^2 + 4D^2 - 4D\rho \cos\varphi)^3} d\varphi \quad (3.54)$$

i dwóch gałęzi prostoliniowych  $g'_2$  (por. [51]):

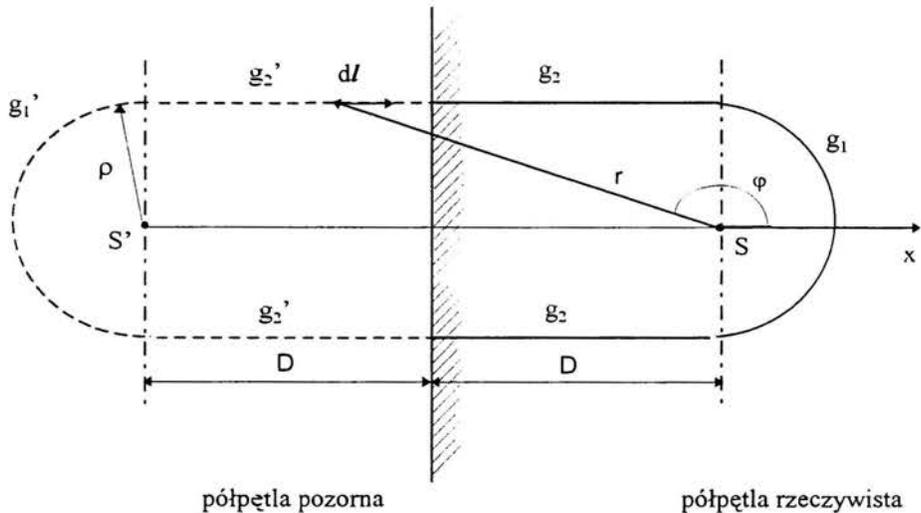
$$\tau^{(1,2)} = -2 \frac{Gb}{4\pi} \int_{\frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{D}{\rho}\right)}^{\frac{\pi}{2} + \arctg\left(\frac{D}{\rho}\right)} \frac{\sin\varphi}{\rho} d\varphi = -\frac{Gb}{2\pi\rho} \left\{ \sin \left[ \arctg \left( \frac{2D}{\rho} \right) \right] - \sin \left[ \arctg \left( \frac{D}{\rho} \right) \right] \right\} \quad (3.55)$$

Można pokazać (por. [7]), że

$$\tau^{(1)} = -\frac{Gb}{4\pi} \left[ \frac{\pi\rho}{(\rho + 2D)^2} - \frac{2}{5} \frac{\sqrt{2D\rho}}{(\rho + 2D)^2} + \frac{8}{5} \frac{\rho\sqrt{2D\rho}}{(\rho + 2D)^3} \right] \quad (3.56)$$

Zatem, gdy źródło znajdujące się w pobliżu powierzchni kryształu emituje pętlę, która wychodząc na powierzchnię rozpada się na dwie półpętle, to półpętla te blokują źródło dyslokacji naprężeniem

$$\tau^{(S)} = \tau^{(R_1)} + \tau^{(R_2)} + \tau^{(I_1)} + \tau^{(I_2)} \quad (3.57)$$

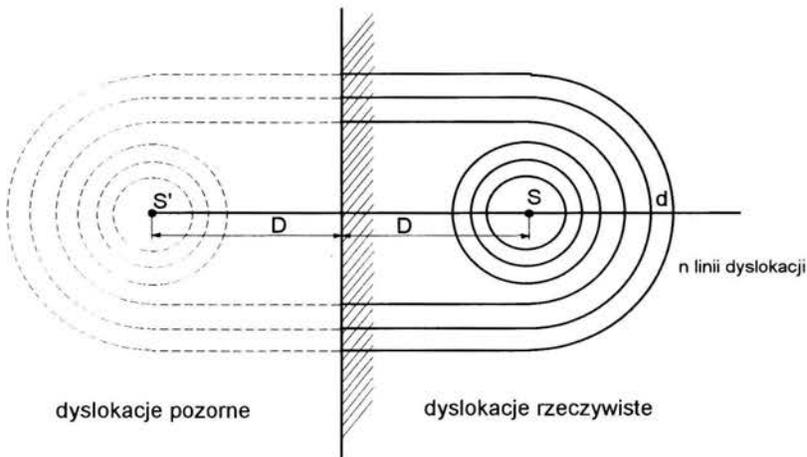


Rys. 3.15. Schemat źródła Fischera i jego zwierciadlane odbicie -oddziaływanie dyslokacji pozornej

Porównując naprężenia  $\tau^{(S)}$  dla źródła Franka-Reada i dla źródła Fishera widzimy, że w tym drugim przypadku naprężenia blokujące źródło są znacznie mniejsze.

- **Źródło emitujące wiele dyslokacji**

Rozważmy źródło leżące w odległości  $D$  od powierzchni ośrodka, które emituje serię pętli i półpętli propagujących się z zachowaniem stałej odległości  $d$  pomiędzy nimi (rys. 3.16). Dla uproszczenia rozważań przyjmijmy, że  $D$  jest wielokrotnością  $d$ . Rozważmy  $n$  linii dyslokacyjnych. Przyjmijmy, że wśród nich znajdzie się  $D/d - 1$  pętli kołowych o promieniu  $\rho$ . Pozostałe tworzą półpętle. Dla dowolnej  $k$ -tej dyslokacji mamy:  $\rho = k d$ . Wzory (3.51 - 3.56) umożliwiają obliczenie całkowitego naprężenia  $\tau^{(ns)}$  blokującego źródło, które pochodzi od wszystkich  $n$  wyemitowanych dyslokacji:



Rys. 3.16. Oddziaływanie n linii dyslokacyjnych na źródło leżące w pobliżu brzegu ośrodka

$$\tau^{(ns)} = \frac{Gb}{2} \sum_{k=1}^{D/d-1} \left( \frac{1}{kd} - \frac{k^2 d^2}{16D^2} \right) +$$

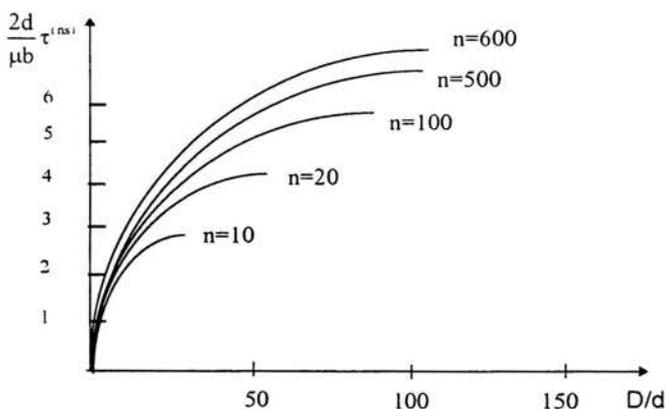
$$+ \frac{Gb}{4} \sum_{k=D/d}^n \left\{ \left[ \frac{1}{kd} - \frac{kd}{(kd+2D)^2} \right] + \frac{2}{5} \frac{\sqrt{2Dkd}}{\pi(kd+2D)^2} \left( 1 - \frac{4kd}{kd+2D} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{4D}{\pi kd \sqrt{k^2 d^2 + D^2}} - \frac{4D}{\pi kd \sqrt{k^2 d^2 + 4D^2}} \right\} \quad (3.58)$$

W powyższym wzorze pierwszy składnik opisuje wpływ pętli kołowych (wzór (3.51), pozostałe - wpływ pętli półkolistych i odcinków prostoliniowych (wzory (3.52-3.58).

Oczywiście naprężenie zewnętrzne potrzebne do odblokowania źródła dyslokacji musi być równe co do wartości bezwzględnej naprężeniu  $\tau^{(ns)}$ . Rysunek 3.17 przedstawia zmianę tego naprężenia w funkcji odległości źródła S od brzegu kryształu dla różnej liczby emitowanych dyslokacji (por. [15]). Odległość d pomiędzy dyslokacjami przyjmujemy za ustaloną.

Charakter otrzymanych krzywych jest taki sam jak krzywej pokazanej na rys. 3.8. Rysunek ten opisywał zależność naprężeń potrzebnych do uruchomienia dyslokacji krawędziowej w funkcji jej odległości od brzegu kryształu.

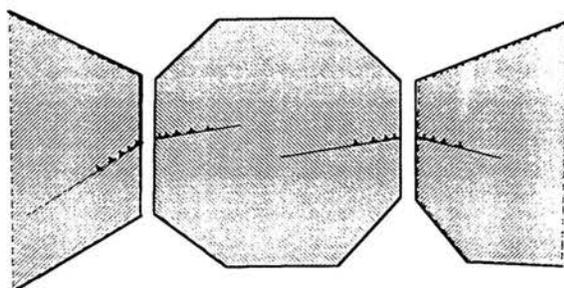


Rys. 3.17. Zależność naprężeń blokujących źródło od jego położenia dla różnej liczby wyemitowanych dyslokacji

### 3.3. Wnioski płynące z dotychczasowych rozważań

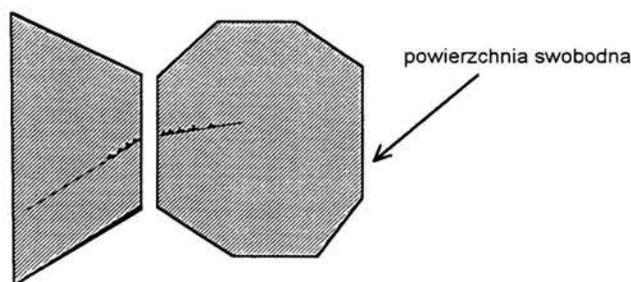
Przegląd literatury przedstawiony w rozdz. 2 wskazał na liczne analogie w zachowaniu się warstwy wierzchniej polikryształu i swobodnego ziarna. Doświadczenia pokazują, że w polikryształe pierwsze 2 - 3 ziarna przy powierzchni uplastyczniają się wcześniej niż wewnątrz materiału. Podobnie jest w przypadku kryształu, gdzie zarówno pojedyncze dyslokacje, jak i źródła dyslokacji znajdujące się w pobliżu powierzchni potrzebują znacznie mniejszego naprężenia uaktywniającego. Wynika to z działania sił pozornych, opisujących wpływ

powierzchni na zachowanie się dyslokacji. Analogie w zachowaniu się warstwy wierzchniej polikryształu i swobodnego ziarna wykorzystamy przy budowaniu modelu fenomenologicznego przedstawionego w następnym rozdziale. Do budowy tego modelu wykorzystamy mechanizm uplastycznienia *swobodnego ziarna, ziarna z wnętrza polikryształu i ziarna leżącego przy powierzchni próbki*, które można traktować jako formę przejściową między pierwszymi dwoma. Różnica w mechanizmie uplastycznienia ziaren polegać będzie przede wszystkim na różnicy w zachowaniu się dyslokacji podczas pokonywania przeszkody jaką jest granica ziarna.



Rys.3.18 Ścinanie ziarna z wnętrza polikryształu; spiętrzenia dyslokacji na obu granicach ziarna

Rozważmy proces ścinania polikryształu pokazany na rys. 3.18. W przypadku ziarna leżącego we wnętrzu materiału, na obu jego pionowych granicach tworzą się jednakowe spiętrzenia dyslokacji. Jeżeli jednak granicą ziarna jest swobodna powierzchnia próbki (rys. 3.19) to na niej nie pojawiają się spiętrzenia dyslokacji.



Rys.3.19 Ścinanie ziarna leżącego przy swobodnej powierzchni polikryształu; spiętrzenia dyslokacji na jednej granicy ziarna

Pojawi się tam natomiast zwiększona liczba ruchomych dyslokacji wychodzących na zewnątrz materiału. Spowoduje to wcześniejsze uplastycznienie zewnętrznej części tego ziarna. Po zwiększeniu obciążenia ulegnie ono całkowitemu uplastycznieniu, podczas gdy pozostałe ziarna pozostaną w stanie sprężystym.

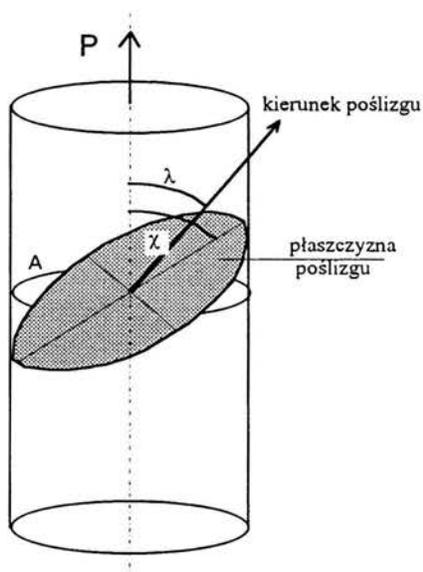
Rozważmy teraz kolejne ziarno, sąsiadujące z ziarnem zewnętrznym. Po uplastycznieniu ziarna zewnętrznego, spiętrzenie dyslokacji na granicy z tym ziarnem napotka na znacznie mniejszy opór. Umożliwi to zwiększenie liczby ruchomych dyslokacji a w konsekwencji wcześniejsze uplastycznienie kolejnego ziarna warstwy wierzchniej badanego kryształu. Można oczekiwać, że każde z ziaren tej warstwy, w zależności od tego, w jakiej odległości od powierzchni jest usytuowane, potrzebuje innego naprężenia uplastyczniającego. Wyznaczenie wartości tego naprężenia będzie przedmiotem dalszych rozważań.

## Rozdział 4

### MODEL FENOMENOLOGICZNY NATURALNEJ WARSTWY WIERZCHNIEJ

#### 4.1. Granice plastyczności swobodnego ziarna i polikryształu

Rozpatrzmy monokryształ o polu przekroju A, który pod wpływem siły rozciągającej P ulega uplastycznieniu. Przyjmujemy, że uplastycznienie zachodzi na skutek ścinania na jednym systemie poślizgu. Kąty nachylenia płaszczyzny poślizgu i kierunku poślizgu do kierunku rozciągania wynoszą odpowiednio:  $\chi$  i  $\lambda$  (Rys.4.1).



Rys.4.1 Ścinanie na jednym systemie poślizgu rozciąganego monokryształu [57]

Krytyczne naprężenie ścinające na aktywnym systemie poślizgu dane jest wzorem:

$$\tau_c = \sigma_c \sin \chi \cos \lambda \quad (4.1)$$

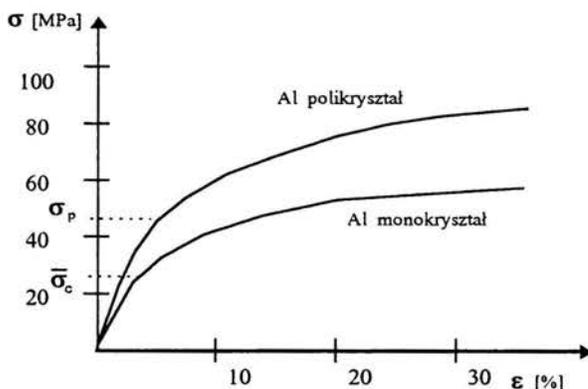
gdzie  $\sigma_c = P/A$  jest krytycznym naprężeniem rozciągającym monokryształ.

Wielkość  $\tau_c$  jest stałą materiałową, natomiast granica plastyczności  $\sigma_c$  zmienia się wraz ze zmianą kątów  $\chi$  i  $\lambda$ . Uśredniając  $\sigma_c(\chi, \lambda)$  po wszystkich możliwych orientacjach płaszczyzny poślizgu, otrzymamy naprężenie będące uśrednioną granicą plastyczności rozciąganego monokryształu:

$$\bar{\sigma}_c = m \tau_c \quad (4.2)$$

Liczba  $m$  jest stałą bezwymiarową, która zależy od typu sieci monokryształu. Dla kryształów o *sieci regularnej płasko centrowanej* otrzymujemy:  $m = 2.238$  [60]. W dalszym ciągu ograniczymy się do kryształów o sieci regularnej, w których  $\tau_c$  jest takie samo dla wszystkich systemów poślizgu. Taką budowę mają metale powszechnie stosowane w przemyśle: żelazo, miedź, aluminium.

Badania doświadczalne wskazują na zasadniczo różne przebiegi uśrednionych krzywych rozciągania  $\sigma - \epsilon$  dla monokryształów i analogicznych krzywych dla polikryształów metali. Na Rys. 4.2 pokazano krzywą  $\sigma - \epsilon$  dla monokryształu i krzywą  $\sigma - \epsilon$  dla polikryształu czystego aluminium.



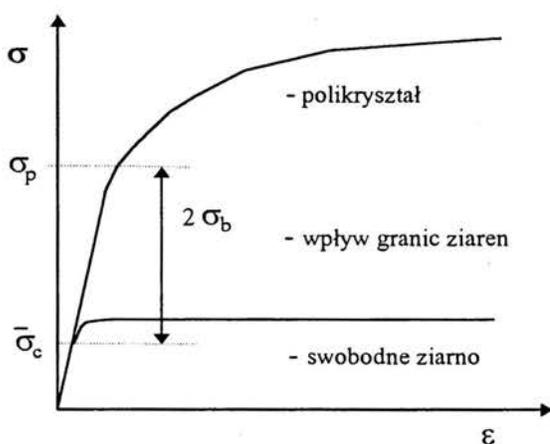
Rys.4.2 Krzywe rozciągania monokryształu i polikryształu czystego aluminium

W modelu naturalnej warstwy wierzchniej skorzystamy z dwóch wielkości, które przyjmujemy za znane. Jest to *granica plastyczności próbki polikrystalicznej*  $\sigma_p$ , wyznaczona w próbie rozciągania, oraz *krytyczne naprężenie ścinające*  $\tau_c$ , powodujące uruchomienie jednego z systemów poślizgu w monokryształ. Znając  $\tau_c$  możemy obliczyć uśrednioną granicę plastyczności rozciąganego monokryształu  $\bar{\sigma}_c$ . Zależność między  $\sigma_p$  i  $\bar{\sigma}_c$  pokazana jest poglądowo na rys. 4.3. Różnica między nimi oznaczona przez  $2\sigma_b$ , określa wpływ granic ziaren sąsiadujących z ziarnem z wnętrza polikryształu. Najmniejsza jest ona dla aluminium ( $\sigma_p/\bar{\sigma}_c = 1.5$ ), większa dla żelaza.

Zwróćmy uwagę, że przy obliczeniu  $\bar{\sigma}_c$  nie jest uwzględnione wzajemne oddziaływanie sąsiednich ziaren, co powoduje, że  $\sigma_p$  i  $\bar{\sigma}_c$  są tak różne. Taylor [61], poszukując stałej  $M$  w związku

$$\sigma_p = M\tau_c, \quad (4.3)$$

założył, że wszystkie ziarna rozciąganego monokryształu ulegają temu samemu odkształceniu. Dla metali o *sieci regularnej płasko centrowanej* otrzymał  $M = 3.06$ , co daje dobry wynik w przypadku czystego aluminium. Dla innych metali, zwłaszcza zawierających zanieczyszczenia na granicach ziaren stała  $M$  znacznie przekracza tę wartość. Z tego powodu w naszym modelu traktujemy wielkości  $\tau_c$  i  $\sigma_p$  jako niezależne.



Rys.4.3 Różnica pomiędzy granicami plastyczności monokryształu i polikryształu

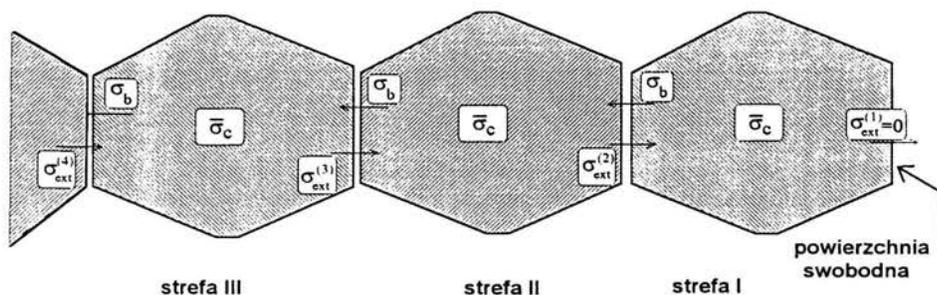
## 4.2 Hipoteza o dekompozycji naprężeń krytycznych w ziarnach naturalnej warstwy wierzchniej

### 4.2.1 Model uproszczony

Oznaczmy przez  $2\sigma_b$  różnicę pomiędzy  $\sigma_p$ , granicą plastyczności rozciąganego polikryształu i  $\bar{\sigma}_c$ , granicą plastyczności rozciąganego ziarna, uśrednioną po wszystkich możliwych orientacjach sieci (Rys.4.3). Zatem, daleko od powierzchni polikryształu naprężenie potrzebne do uplastycznienia ziarna jest równe

$$\sigma_p = \bar{\sigma}_c + 2\sigma_b \quad (4.4)$$

gdzie wielkość  $\sigma_b$  będziemy interpretować jako naprężenie umożliwiające pokonanie granicy ziarna podczas propagacji poślizgu. Ze względu na konieczność pokonania granic obu sąsiednich ziaren: wewnętrznego i zewnętrznego, we wzorze (4.4) naprężenie  $\sigma_b$  mnożone jest przez 2. Jest to słuszne dla ziarna leżącego daleko od powierzchni polikryształu. Dla ziaren leżących w małej odległości od powierzchni, naprężenia potrzebne do pokonania granicy z ziarnem wewnętrznym i zewnętrznym będą różne. Ponumerujmy ziarna warstwy wierzchniej numerami  $K = 1, 2, 3, \dots, N$  licząc kolejno od powierzchni swobodnej (rys. 4.4). Naturalne wydaje się być założenie, zgodnie z którym naprężenie potrzebne do pokonania granic z ziarnami wewnętrznymi są takie same i wynoszą  $\sigma_b$ . Natomiast naprężenia potrzebne do pokonania granic z ziarnami zewnętrznymi będą, zbliżając się do powierzchni swobodnej, coraz mniejsze a na samej powierzchni będą równe zero. Oznaczmy je przez  $\sigma_{ext}^{(K)}$ , dla  $K = 1, 2, \dots, N$  przy czym  $\sigma_{ext}^{(1)} = 0$ ,  $\sigma_{ext}^{(N)} = \sigma_b$ .



Rys.4.4 Naprężenia potrzebne do propagacji poślizgu poprzez wewnętrzne granice ziaren  $\sigma_b$  oraz poprzez zewnętrzne granice ziaren  $\sigma_{ext}^{(K)}$ .

Całkowite naprężenie potrzebne do uplastycznienia K-tego ziarna będzie równe:

$$\sigma^{(K)} = \bar{\sigma}_c + \sigma_b + \sigma_{\text{ext}}^{(K)} \quad (4.5)$$

W szczególności dla pierwszego ziarna warstwy mamy:

$$\sigma^{(1)} = \bar{\sigma}_c + \sigma_b \quad (4.6)$$

a dla ostatniego ziarna warstwy:

$$\sigma^{(N)} = \sigma_p = \bar{\sigma}_c + 2\sigma_b \quad (4.7)$$

Aby obliczyć całkowite naprężenia potrzebne do uplastycznienia K - tego ziarna  $\sigma^{(K)}$  dla  $K = 2, 3, \dots, N-1$ , trzeba określić naprężenia  $\sigma_{\text{ext}}^{(K)}$ . Są to naprężenia potrzebne do pokonania barier dyslokacyjnych na granicy tego ziarna z ziarnem K-1. Przyjmijmy, że siła potrzebna do pokonania tych barier jest proporcjonalna do granicy plastyczności ziarna K-1, a zatem, że słuszna jest następująca

**HIPOTEZA:** *Wartość naprężenia  $\sigma_{\text{ext}}^{(K)}$  w ziarnie K zależy od stosunku granicy plastyczności  $\sigma^{(K-1)}$  w ziarnie K-1 do granicy plastyczności polikryształu  $\sigma_p$ , zgodnie ze wzorem:*

$$\sigma_{\text{ext}}^{(K)} = \frac{\sigma^{(K-1)}}{\sigma_p} \sigma_b \quad \text{dla } K=1, \dots, N \quad \text{przy } \sigma^{(0)}=0 \quad (4.8)$$

Zwróćmy uwagę, że dla  $K=1$  i  $K=N$  wzór (4.8) sprowadza się do (4.6) i (4.7).

Związki (4.4), (4.5) i (4.8) prowadzą do następującego rekurencyjnego wzoru na granicę plastyczności K-tego ziarna [62,63]:

$$\sigma^{(K)} = \bar{\sigma}_c + \frac{1}{2}(\sigma_p - \bar{\sigma}_c) \left( 1 + \frac{\sigma^{(K-1)}}{\sigma_p} \right) \quad \text{dla } K=1, \dots, N \quad (4.9)$$

W ten sposób znaleźliśmy rozkład granicy plastyczności wewnątrz naturalnej warstwy wierzchniej polikryształu w zależności od granicy plastyczności całego polikryształu  $\sigma_p$  oraz, uśrednionej po wszystkich orientacjach, granicy plastyczności swobodnego ziarna  $\bar{\sigma}_c$ .

Zgodnie ze wzorem (4.9) w kolejnych strefach o grubości jednego ziarna (rys. 4.4) granica plastyczności przyjmuje wartości:

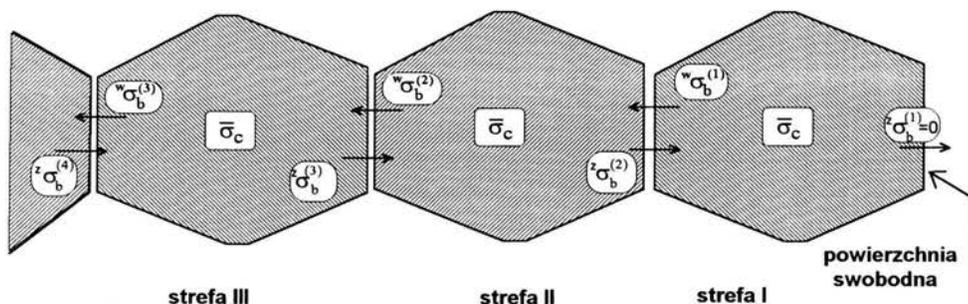
$$\begin{aligned}
\sigma^{(1)} &= \frac{1}{2}(\sigma_p + \bar{\sigma}_c) \\
\sigma^{(2)} &= \frac{1}{4}\left(3\sigma_p + 2\bar{\sigma}_c - \frac{\bar{\sigma}_c^2}{\sigma_p}\right) \\
\sigma^{(3)} &= \frac{1}{8}\left(7\sigma_p + 3\bar{\sigma}_c - \frac{3\bar{\sigma}_c^2}{\sigma_p} + \frac{\bar{\sigma}_c^3}{\sigma_p^2}\right) \\
\sigma^{(4)} &= \frac{1}{16}\left(15\sigma_p + 4\bar{\sigma}_c - \frac{6\bar{\sigma}_c^2}{\sigma_p} + \frac{4\bar{\sigma}_c^3}{\sigma_p^2} - \frac{\bar{\sigma}_c^4}{\sigma_p^3}\right) \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{4.10}$$

#### 4.2.2 Model ogólny

Okazuje się, że nie jest konieczne założenie, aby wartość  $\sigma_b$  nie zmieniała się od ziarna do ziarna. Równanie analogiczne do (4.5) można sformułować uwzględniając różne wartości naprężenia  $\sigma_b$  po obu stronach rozpatrywanego ziarna. Naprężenie potrzebne do uplastycznienia K-tego ziarna - licząc od powierzchni swobodnej polikryształu - będzie wówczas równe:

$$\sigma^{(K)} = \bar{\sigma}_c + {}^z\sigma_b^{(K)} + {}^w\sigma_b^{(K)} \quad \text{dla } K=1, \dots, N \tag{4.11}$$

gdzie oprócz znanej wielkości  $\bar{\sigma}_c$  występują naprężenia wywołane istnieniem barier spowodowanych sąsiedztwem innych ziaren. Wielkość  ${}^z\sigma_b^{(K)}$  oznacza naprężenie wywołane istnieniem bariery od strony zewnętrznej ziarna (czyli od sąsiada K-1) natomiast  ${}^w\sigma_b^{(K)}$  - analogiczne naprężenie od strony wewnętrznej, czyli sąsiada K+1 (rys.4.5).



Rys.4.5 Naprężenia potrzebne do propagacji poślizgu poprzez wewnętrzne granice ziaren  ${}^z\sigma_b^{(K)}$  oraz poprzez zewnętrzne granice ziaren  ${}^w\sigma_b^{(K)}$ .

Ogólnie, naprężenia te będą różne dla kolejnych ziarn a ich wartość będzie zależała od stosunku granicy plastyczności sąsiedniego ziarna do granicy plastyczności całego polikryształu. Przyjmijmy - podobnie, jak poprzednio - że naprężenie potrzebne do pokonania tych barier jest proporcjonalne do granicy plastyczności ziarna K-1, a zatem, że słuszna jest następująca

**HIPOTEZA:** *Wartość naprężenia  ${}^z\sigma_b^{(K)}$  w ziarnie K zależy od stosunku granicy plastyczności  $\sigma^{(K-1)}$  w ziarnie K-1 do granicy plastyczności polikryształu  $\sigma_p$ , a wartość naprężenia  ${}^w\sigma_b^{(K)}$  od stosunku granicy plastyczności  $\sigma^{(K+1)}$  w ziarnie K+1 do granicy plastyczności polikryształu  $\sigma_p$ , zgodnie ze wzorem:*

$$\begin{aligned} {}^z\sigma_b^{(K)} &= \frac{\sigma^{(K-1)}}{\sigma_p} \sigma_b & \text{dla } K = 1, \dots, N & \quad (4.12) \\ {}^w\sigma_b^{(K)} &= \frac{\sigma^{(K+1)}}{\sigma_p} \sigma_b \end{aligned}$$

W zależności (4.12)  $\sigma^{(K-1)}$ ,  $\sigma^{(K+1)}$  są granicami plastyczności ziaren K-1 i K+1, natomiast  $\sigma_b$  jest naprężeniem umożliwiającym pokonanie granicy ziarna, które leży wewnątrz polikryształu (wzór (4.4)).

Dwa skrajne przypadki rozważanego problemu to: ziarno usytuowane przy powierzchni swobodnej oraz ziarno daleko od powierzchni, wewnątrz polikryształu. W pierwszym przypadku wzór (4.11) przekształca się w zależność

$$\sigma^{(1)} = \bar{\sigma}_c + {}^w\sigma_b^{(1)} \quad (4.13)$$

którą otrzymujemy również na podstawie wzoru (4.5) wyprowadzonego dla uproszczonego modelu. W tym przypadku uwzględniana jest tylko jedna bariera związana z istnieniem sąsiada jedynie od strony wnętrza polikryształu (rys.4.5). We wzorze (4.13) znikło wyrażenie opisujące wpływ sąsiada zewnętrznego, czego konsekwencją jest brak pierwszej części wzoru (4.12). We wzorze tym  $\sigma^{(1)}$  jest interpretowane jako naprężenie powodujące plastyczne płynięcie pierwszej strefy polikryształu (rys. 4.4).

$$\sigma_p = \bar{\sigma}_c + 2\sigma_b \quad (4.14)$$

zgodną ze wzorem (4.4) obowiązującym także w modelu uproszczonym.

Wyrażenia (4.11-4.12) nie stanowią jednak zamkniętego układu równań. Wartość granicy plastyczności K-tego ziarna jest określona pośrednio przez niewiadomą  $\sigma^{(K+1)}$ , która nie może być wyznaczona bez znajomości granic plastyczności dla ziaren następnych. Przyjmijmy zatem iteracyjny sposób rozwiązania problemu i w pierwszym kroku założmy, że wpływ sąsiedztwa ziaren w kierunku do wewnątrz jest taki sam dla wszystkich stref i równy  $\sigma_b$ . Pozwoli to na sformułowanie układu równań identycznego z układem otrzymanym w poprzednim rozdziale (pomijamy górne wskaźniki „z” i „w” ponieważ  ${}^w\sigma_b^{(K)} \equiv \sigma_b$  oraz  ${}^z\sigma_b^{(K)} \equiv \sigma_b^{(K)}$  dla  $K=1, \dots, N$  ziaren, natomiast wprowadzamy dolny wskaźnik iteracji (1)).

$$\sigma_{(1)}^{(K)} = \bar{\sigma}_c + \sigma_b^{(K)} + \sigma_b \quad (4.15a)$$

$$\text{dla} \quad \sigma_b^{(K)} = \frac{\sigma_{(1)}^{(K-1)}}{\sigma_p} \sigma_b \quad \text{oraz} \quad \sigma_b = \frac{1}{2}(\sigma_p - \bar{\sigma}_c) \quad (4.15b)$$

Stąd otrzymujemy rekurencyjny wzór na granicę plastyczności K-tego ziarna w pierwszej iteracji

$$\sigma_{(1)}^{(K)} = \bar{\sigma}_c + \frac{1}{2}(\sigma_p - \bar{\sigma}_c) \left( 1 + \frac{\sigma_{(1)}^{(K-1)}}{\sigma_p} \right) \quad \text{dla } K=1, \dots, N \quad (4.16)$$

pokrywający się ze wzorem (4.9) modelu uproszczonego.

Przeprowadźmy drugą iterację, aby przekonać się jaki błąd wprowadziliśmy przyjmując założenie o niezmienności oporu barier na wewnętrznych granicach ziaren. Wykorzystamy wyniki pierwszej iteracji i zastosujemy drugi krok, w którym układ równań będzie uwzględniał znane już granice plastyczności poszczególnych ziaren. W oznaczeniach przywrócimy wskaźniki „w” i „z” aby uwzględnić kierunek do wewnątrz i na zewnątrz badanego ziarna. Wzory (4.11 - 4.12) oraz wzór (4.4) prowadzą do następującego układu równań:

$$\sigma_{(2)}^{(K)} = \bar{\sigma}_c + {}^z\sigma_b^{(K)} + {}^w\sigma_b^{(K)} \quad (4.17a)$$

$$\text{dla } {}^z\sigma_b^{(K)} = \frac{\sigma_{(2)}^{(K-1)}}{\sigma_p} \sigma_b, \quad {}^w\sigma_b^{(K)} = \frac{\sigma_{(1)}^{(K+1)}}{\sigma_p} \sigma_b, \quad \sigma_b = \frac{1}{2}(\sigma_p - \bar{\sigma}_c) \quad (4.17b)$$

Stąd otrzymamy zmodyfikowany wzór rekurencyjny uwzględniający obliczoną w pierwszym kroku iteracji granicę plastyczności K+1 ziarna, a także inne wielkości obliczone już w drugiej iteracji. Przyjmuje on postać analogiczną do wzoru (4.16)

$$\sigma_{(2)}^{(K)} = \bar{\sigma}_c + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\bar{\sigma}_c}{\sigma_p} \right) (\sigma_{(2)}^{(K-1)} + \sigma_{(1)}^{(K+1)}) \quad \text{dla } K=1, \dots, N \quad (4.18)$$

Podobnie jak poprzednio, granice plastyczności kilku pierwszych stref warstwy wierzchniej, można wyrazić przez dwie wielkości  $\sigma_p$  i  $\bar{\sigma}_c$ , mianowicie

$$\begin{aligned} \sigma_{(2)}^{(1)} &= \frac{1}{8} \left( 3\sigma_p + 7\bar{\sigma}_c - \frac{3\bar{\sigma}_c^2}{\sigma_p} + \frac{\bar{\sigma}_c^3}{\sigma_p^2} \right) \\ \sigma_{(2)}^{(2)} &= \frac{1}{8} \left( 5\sigma_p + 8\bar{\sigma}_c - \frac{8\bar{\sigma}_c^2}{\sigma_p} + \frac{4\bar{\sigma}_c^3}{\sigma_p^2} - \frac{\bar{\sigma}_c^4}{\sigma_p^3} \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

.....

Zwróćmy uwagę na dość złożoną postać wzorów nawet dla pierwszej strefy warstwy wierzchniej.

Porównajmy oba podejścia i oszacujmy błąd wynikający z nieuwzględnienia zmian naprężenia  $\sigma_b$  na wewnętrznych granicach poszczególnych ziarn. W tym celu oszacujemy różnicę granicy plastyczności obliczoną na podstawie wzorów (4.10) i (4.19) dla pierwszej i drugiej strefy. Oznaczmy stosunek  $\bar{\sigma}_c/\sigma_p$  przez  $q$ . Wielkość ta dodatkowo będzie równa stosunkowi między stałymi  $m$  i  $M$  odpowiednio we wzorach Sachsa [60] i Taylora [61]. Jeżeli we wzorach (4.10) i (4.19) wyciągniemy przed nawias  $\sigma_p$  wówczas różnice granic plastyczności kolejnych ziarn w pierwszych dwóch iteracjach zostaną wyrażone poprzez  $q$  i  $\sigma_p$

$$\frac{\sigma_{(1)}^{(1)} - \sigma_{(2)}^{(1)}}{\sigma_p} = \frac{1}{2}(1+q) - \frac{1}{8}(3+7q-3q^2+q^3) \quad (4.20)$$

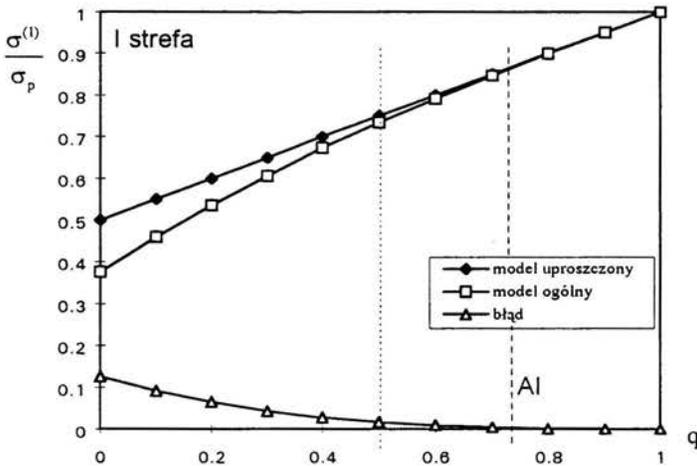
$$\frac{\sigma_{(1)}^{(2)} - \sigma_{(2)}^{(2)}}{\sigma_p} = \frac{1}{4}(3+2q-q^2) - \frac{1}{8}(5+8q-8q^2+4q^3-q^4)$$

skąd

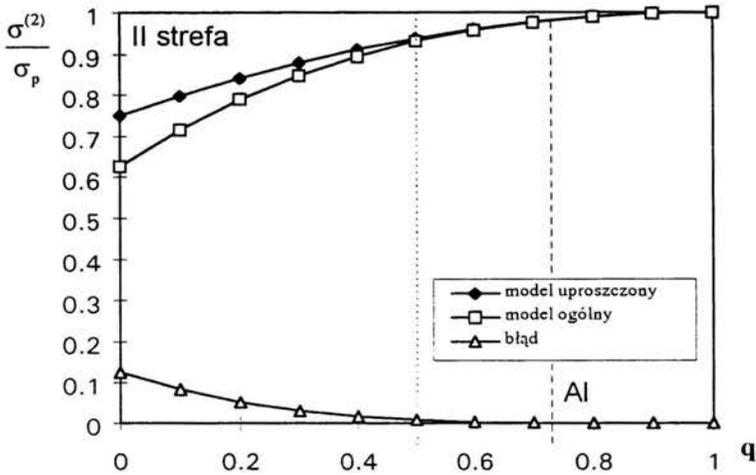
$$\frac{\sigma_{(1)}^{(1)} - \sigma_{(2)}^{(1)}}{\sigma_p} = \frac{1}{8}(1-3q+3q^2-q^3) \quad (4.21)$$

$$\frac{\sigma_{(1)}^{(2)} - \sigma_{(2)}^{(2)}}{\sigma_p} = \frac{1}{8}(1-4q+6q^2-4q^3+q^4)$$

Na rys. 4.6 i 4.7 przedstawione są granice plastyczności dwóch pierwszych stref modelu uproszczonego i ogólnego w zależności od wielkości  $q$ . Wielkość  $q$  teoretycznie może przybierać wartości w granicach  $(0,1)$ , jednak w praktyce zawiera się w granicach  $(0.5, 1)$ , co zaznaczone jest linia kropkowaną na obu wykresach. Jak widać, im  $q$  jest bliższe jedności tym błąd staje się mniejszy. Dla wartości  $q = 0.5$  również jest bardzo mały i wynosi  $1/64$  dla pierwszej strefy i  $1/128$  dla drugiej. Widać zatem, że dla materiałów wykorzystywanych w praktyce może być używany model uproszczony.



Rys. 4.6 Stosunek granicy plastyczności pierwszej strefy naturalnej warstwy wierzchniej do granicy plastyczności polikryształu dla modelu uproszczonego i ogólnego w funkcji  $q = \bar{\sigma}_c / \sigma_p$ .



Rys. 4.7 Stosunek granicy plastyczności drugiej strefy naturalnej warstwy wierzchniej do granicy plastyczności polikryształu dla modelu uproszczonego i ogólnego w funkcji  $q = \bar{\sigma}_c / \sigma_p$

### 4.3. Rozkład granicy plastyczności wewnątrz naturalnej warstwy wierzchniej polikryształu

#### 4.3.1 Rozkład schodkowy i odcinkowo - liniowy

Przedstawione wzory zastosujemy do obliczenia rozkładu granicy plastyczności w naturalnej warstwie wierzchniej *czystego aluminium*. W tym przypadku stosunek pomiędzy  $\bar{\sigma}_c$  a  $\sigma_p$  jest równy stosunkowi pomiędzy stałą  $m = 2.238$  (wzór (4.2)) a stałą  $M = 3.06$  w modelu Taylora (wzór (4.3)). Zatem

$${}^{\text{Al}}\bar{\sigma}_c = 0.731 {}^{\text{Al}}\sigma_p \quad (4.22)$$

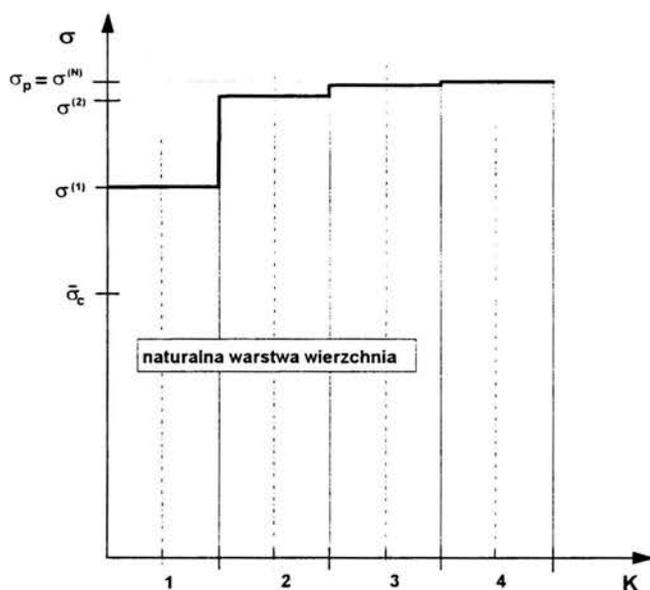
Wstawiając to wyrażenie do wzorów (4.10) otrzymamy wartość granicy plastyczności dla kolejnych stref naturalnej warstwy wierzchniej aluminium:

$$\begin{aligned} {}^{\text{Al}}\sigma^{(1)} &= 0.866 \cdot {}^{\text{Al}}\sigma_p \\ {}^{\text{Al}}\sigma^{(2)} &= 0.982 \cdot {}^{\text{Al}}\sigma_p \\ {}^{\text{Al}}\sigma^{(3)} &= 0.998 \cdot {}^{\text{Al}}\sigma_p \\ {}^{\text{Al}}\sigma^{(4)} &= 1.000 \cdot {}^{\text{Al}}\sigma_p \end{aligned} \quad (4.23)$$

Porównajmy oba modele, uproszczony i ogólny dla badanego przypadku. W tym celu wykorzystamy wzory (4.19) oraz analogiczne wyprowadzenia dla ziarn (3) i (4). Otrzymamy wówczas:

$$\begin{aligned}
 {}^{\text{Al}}\sigma_{(2)}^{(1)} &= 0.829\sigma_p \\
 {}^{\text{Al}}\sigma_{(2)}^{(2)} &= 0.971\sigma_p \\
 {}^{\text{Al}}\sigma_{(2)}^{(3)} &= 0.994\sigma_p \\
 {}^{\text{Al}}\sigma_{(2)}^{(4)} &= 1.000\sigma_p
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

Jak widać, w przypadku czystego aluminium różnica pomiędzy pierwszą i drugą iteracją jest minimalna i można przyjąć uproszczoną wersję modelu zaproponowaną w rozdziale 4.2.1. Widać również, że średnia granica plastyczności kolejnych ziaren polikryształu szybko osiąga wartość bliską  $\sigma_p$ . Mimo, że w ziarnie pierwszym różnica pomiędzy  ${}^{\text{Al}}\sigma^{(1)}$  i  ${}^{\text{Al}}\sigma_p$  wynosi 13.4%, to w ziarnie drugim jest ona mniejsza niż 2%, a przy trzecim spada do 0.2%. Jeżeli przyjmiemy dokładność obliczeń 0.1%, to grubość naturalnej warstwy wierzchniej w przypadku czystego aluminium jest równa średnicy ziarna metalu pomnożonej przez  $N=3$ . Wyniki przedstawione są na rys.4.8.

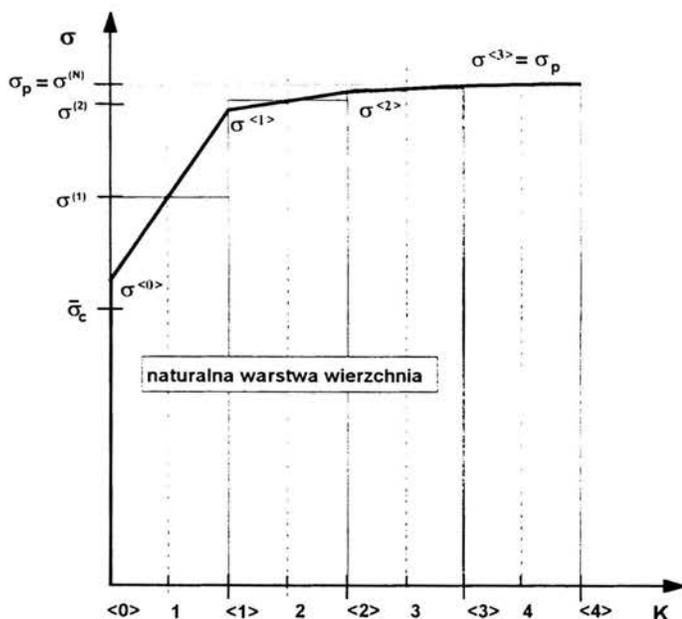


Rys.4.8 Rozkład schodkowy granicy plastyczności w naturalnej warstwie wierzchniej polikryształu

Linia przerywaną pokazano wartości granic plastyczności w środku ziaren  $K=1, 2, 3$ . Skokowy wykres granicy plastyczności można zastąpić wykresem odcinkowo - liniowym ciągłym na granicach ziaren. W tym celu należy obliczyć wartość granicy plastyczności  $\sigma^{<K>}$  na brzegu ziaren ( $K$ ) i ( $K-1$ ). Przez  $\sigma^{<0>}$  oznaczymy wartość tej granicy na powierzchni swobodnej polikryształu. Wówczas

$$\sigma^{<N>} = \sigma_p \quad (4.24)$$

jest wartością granicy plastyczności na wewnętrznej granicy naturalnej warstwy wierzchniej. Oznaczmy przez  $<K-1>$  oraz  $<K>$  granice ziarna o numerze  $K$ .



Rys.4.9 Rozkład odcinkowo - liniowy granicy plastyczności w naturalnej warstwie wierzchniej polikryształu

Prowadząc na rys.4.9 linię prostą przez punkt o współrzędnych  $\{<N>, \sigma^{<N>}\}$  oraz  $\{N, \sigma^{(N)}\}$  otrzymamy na zewnętrznej granicy ziarna  $N$  wartość

$$\sigma^{<N-1>} = 2\sigma^{(N)} - \sigma_p \quad (4.25)$$

Kontynuując procedurę dla  $K=N-2, N-3, \dots, 1$  otrzymamy ogólny wzór na wartość granic plastyczności na wewnętrznej granicy ziarna ( $K$ ).

$$\sigma^{<K>} = 2\sigma^{(K+1)} - \sigma^{<K+1>} \quad (4.26)$$

Zwróćmy uwagę, że granica plastyczności na zewnętrznej granicy naturalnej warstwy wierzchniej

$$\sigma^{<0>} = 2\sigma^{(1)} - \sigma^{<1>} \quad (4.27)$$

jest zawsze nieco większa niż  $\bar{\sigma}_c$ .

W przypadku czystego aluminium otrzymujemy:

$$\begin{aligned} {}^{Al}\sigma^{<3>} &= 1.000 {}^{Al}\sigma_p \\ {}^{Al}\sigma^{<2>} &= 0.996 {}^{Al}\sigma_p \\ {}^{Al}\sigma^{<1>} &= 0.968 {}^{Al}\sigma_p \\ {}^{Al}\sigma^{<0>} &= 0.764 {}^{Al}\sigma_p \end{aligned} \quad (4.28)$$

Na powierzchni próbki obserwujemy spadek granicy plastyczności o 24%. W przypadku stali węglowej badania rentgenograficzne warstwy wierzchniej o grubości 0.01 mm wskazują na spadek tej granicy dochodzący do 30% [64].

### 4.3.2 Rozkład „gładki”

Wykorzystując wzory (4.10) można przedstawić „gładki” rozkład granicy plastyczności naturalnej warstwy wierzchniej w poszczególnych jej strefach.

Wykorzystajmy wprowadzone wcześniej oznaczenie stosunku  $\bar{\sigma}_c/\sigma_p$  przez  $q$ . Wówczas wzory (4.10) można będzie wyrazić poprzez  $q$  i  $\sigma_p$ , mianowicie

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} &= \frac{1}{2}(1+q)\sigma_p = q_1\sigma_p \\ \sigma^{(2)} &= \frac{1}{4}(3+2q-q^2)\sigma_p = q_2\sigma_p \\ \sigma^{(3)} &= \frac{1}{8}(7+3q-3q^2+q^3)\sigma_p = q_3\sigma_p \\ \sigma^{(4)} &= \frac{1}{16}(15+4q-6q^2+4q^3-q^4)\sigma_p = q_4\sigma_p \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (4.29)$$

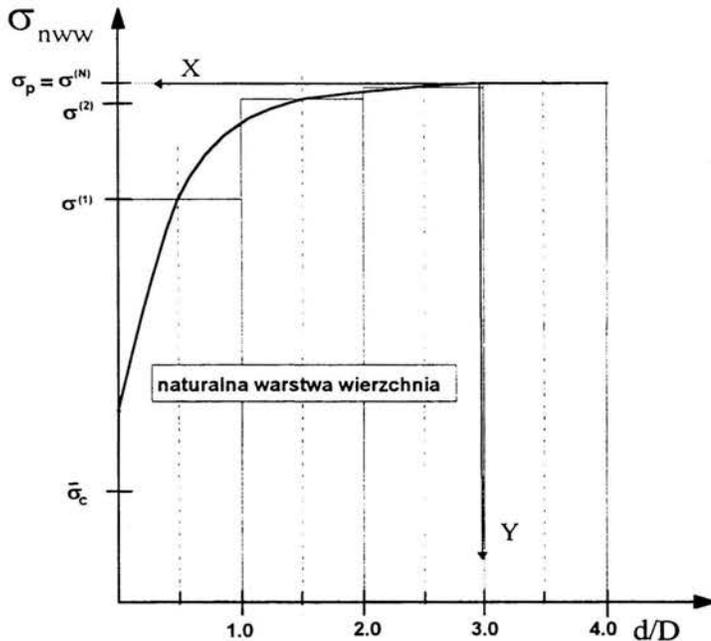
gdzie  $q_k = \frac{\sigma^{(k)}}{\sigma_p} \quad (4.30)$

W praktyce zmiana granicy plastyczności w naturalnej warstwie wierzchniej jest dostrzegalna w zakresie trzech pierwszych ziaren. Wartości  $\sigma^{(1)}$ ,  $\sigma^{(2)}$ ,  $\sigma^{(3)}$  oznaczają

uśrednione wartości granicy plastyczności w tych ziarnach. Przyjmiemy, że przebieg zmian tych wartości jest ciągły i spełnia następujące warunki:

- w czwartym ziarnie (przy przejściu do rdzenia) osiąga wartość 0,
- kolejne wartości  $\sigma^{(1)}$ ,  $\sigma^{(2)}$ ,  $\sigma^{(3)}$  osiągane są w połowie grubości poszczególnych ziaren.

Warunki takie spełnia krzywa trzeciego stopnia



Rys. 4.10 Aproksymacja rozkładu granicy plastyczności w naturalnej warstwie wierzchniej krzywą trzeciego stopnia.

$$Y = aX^3 + bX^2 + cX \quad (4.31)$$

przedstawiona w układzie współrzędnych  $(X, Y)$  pokazanym na rys. 4.10. Na rysunku tym  $D$  jest średnicą ziarna, a  $d$  - odległością od powierzchni swobodnej polikryształu. Funkcja  $Y(X)$  musi spełniać następujące warunki:

$$\begin{aligned} \text{a). } X = 0.5 &\rightarrow Y = \sigma_p - \sigma_3 = (1 - q_3)\sigma_p \\ \text{b). } X = 1.5 &\rightarrow Y = \sigma_p - \sigma_2 = (1 - q_2)\sigma_p \\ \text{c). } X = 2.5 &\rightarrow Y = \sigma_p - \sigma_1 = (1 - q_1)\sigma_p \end{aligned} \quad (4.32)$$

Uwzględniając je otrzymujemy układ równań pozwalający obliczyć współczynniki występujące w równaniu krzywej (4.31), mianowicie

$$\begin{aligned} a + 2b + 4c &= 8(1 - q_3) \\ 2a + b &= 2\left(-\frac{1}{3}q_2 + q_3 - \frac{2}{3}\right) \\ 4a + b &= 2\left(-\frac{1}{5}q_1 + \frac{1}{3}q_2 - \frac{2}{15}\right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymujemy

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{5}q_1 + \frac{2}{3}q_2 - q_3 + \frac{8}{15} \\ b &= 2\left(\frac{1}{5}q_1 - q_2 + 2q_3 - \frac{8}{15}\right) \\ c &= \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{5}q_1 + \frac{10}{3}q_2 - 15q_3 + \frac{184}{15}\right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Parametry  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ , określone są wzorami (4.30).

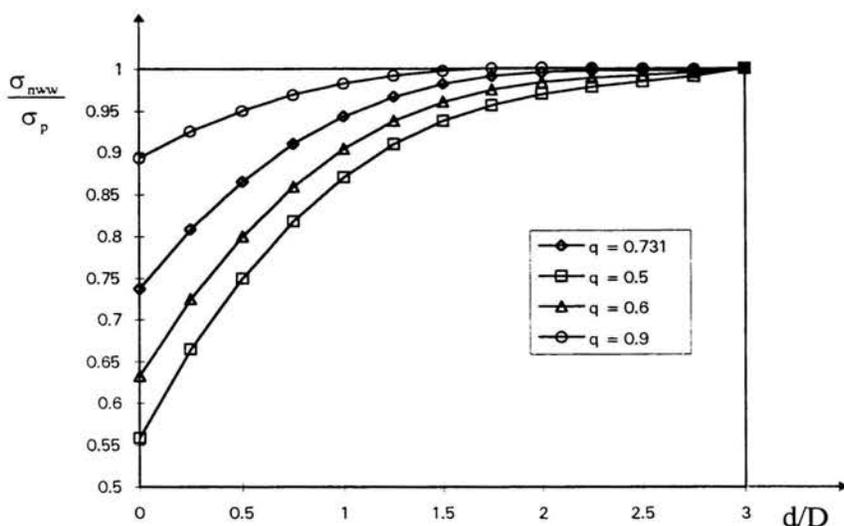
Oznaczmy przez  $\sigma_{nww}(d/D)$  wartość granicy plastyczności naturalnej warstwy wierzchniej w odległości  $d$  od powierzchni swobodnej polikryształu. Wówczas

$$\sigma_{nww} = \sigma_p - Y \quad \text{dla} \quad \frac{d}{D} = (3 - X) \quad \text{oraz} \quad 0 \leq X \leq 3 \quad (4.35)$$

Otrzymujemy następującą krzywą aproksymującą rozkład granicy plastyczności w pierwszych trzech ziarnach naturalnej warstwy wierzchniej:

$$\sigma_{nww} = -a\left(3 - \frac{d}{D}\right)^3 - b\left(3 - \frac{d}{D}\right)^2 - c\left(3 - \frac{d}{D}\right) + \sigma_p \quad (4.36)$$

Rysunek 4.11 pokazuje przykładowe zmiany granicy plastyczności w zależności od zadanej wartości  $q = \frac{\bar{\sigma}_c}{\sigma_p}$  i stałej wartości  $\sigma_p$ . Trzeba zauważyć, że wartości granicy plastyczności przy samej powierzchni wynikające z aproksymacji krzywą trzeciego stopnia, są bardzo zbliżone do wartości  $\bar{\sigma}_c = q\sigma_p$  i zmieniają się w granicach od  $0.56\sigma_p$  do  $0.89\sigma_p$  dla zmian  $q$  w przedziale  $0.5 \div 0.9$ . Oznacza to, że wartość granicy plastyczności przy powierzchni polikryształu jest zbliżona do granicy plastyczności swobodnego ziarna.



Rys. 4.11 Stosunek granicy plastyczności w pierwszych trzech ziarnach naturalnej warstwy wierzchniej do granicy plastyczności polikryształu

Jak widać największy spadek granicy plastyczności występuje w zewnętrznej strefie warstwy, oraz dla małych stosunków  $q = \bar{\sigma}_c / \sigma_p$ .

#### 4.4. Podsumowanie dotychczasowych rozważań

Aby racjonalnie opisać mechaniczne własności technologicznych warstw wierzchnich metali należy wprowadzić pojęcie naturalnej warstwy wierzchniej ośrodka polikrystalicznego, a więc takiej, która istniała przed zastosowaniem jakiegokolwiek obróbki powierzchniowej materiału. Warstwa ta staje się swego rodzaju stanem odniesienia dla późniejszych działań, zarówno technologicznych jak też obliczeniowych. Dlatego też niezbędne jest wprowadzenie modelu takiej warstwy. Budując model fenomenologiczny naturalnej warstwy wierzchniej, podzielono ją na strefy o grubości jednego ziarna. Biorąc pod uwagę fakt, że siła potrzebna do pokonania barier dyslokacyjnych na granicy sąsiadujących ze sobą ziaren jest proporcjonalna do liczby spiętrzonych na niej dyslokacji, zbudowano prosty model uplastycznienia kolejnych stref naturalnej warstwy wierzchniej.

Znaleziono rozkład granicy plastyczności wewnątrz naturalnej warstwy wierzchniej. Stwierdzono, że jej grubość wynosi od 2 do 3 ziaren, a granica plastyczności warstwy może być do 30% niższa od granicy plastyczności materiału polikrystalicznego. Pokrywa się to w pełni z wcześniejszymi obserwacjami opisanymi w literaturze [64].

## Rozdział 5

### ANALIZA STANÓW SPRĘŻYSTO - PLASTYCZNYCH W ELEMENCIE Z NATURALNĄ WARSTWĄ WIERZCHNIĄ

#### 5.1. Przyjęte założenia

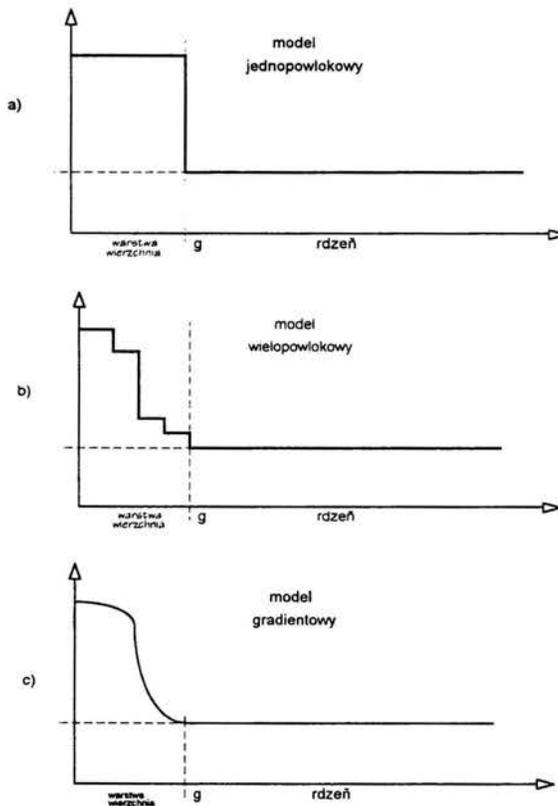
Model fenomenologiczny naturalnej warstwy wierzchniej, zaprezentowany w poprzedniej części pozwala na oszacowanie zmian granicy plastyczności zachodzących w pierwszych ziarnach polikryształu. Korzystając z niego opracowano program symulujący zachowania się elementu z naturalną warstwą wierzchnią poddanego rozciąganiu i ściskaniu. Opracowany program może również służyć do analizy zachowania się elementów z technologiczną warstwą wierzchnią, w której, oprócz zmiany własności materiałowych, zadane są początkowe naprężenia własne [65]. Zachowanie się naturalnej warstwy wierzchniej opisano w ramach klasycznej teorii plastyczności zaproponowanej przez Hilla [66] i przedstawionej w języku polskim w monografiach [67,68,69,70].

Przy typowej analizie stanu naprężenia w elemencie konstrukcji wpływ warstwy wierzchniej jest zazwyczaj pomijany. Istotnie, jej wpływ na sztywność elementu jest niewielki ze względu na małą grubość warstwy w stosunku do wymiaru elementu. Natomiast w zagadnieniach wytrzymałości zmęczeniowej, efekt warstwy wierzchniej jest istotny, bowiem inicjacja szczelin zachodzi zazwyczaj w warstwie przypowierzchniowej i lokalny stan naprężenia ma tu znaczenie podstawowe [71,72,73,74]. Efekt warstwy wierzchniej ma również istotne znaczenie w problemach kontaktu powierzchni z elementem współpracującym [75,76]. Rozwój

zużycia powierzchni i uszkodzeń przypowierzchniowych jest uzależniony od własności warstwy i początkowego stanu naprężenia [77,78,79]. Wreszcie, efekt warstwy wierzchniej jest ważny przy istnieniu koncentratorów naprężenia (otwory, karby), gdy grubość warstwy jest porównywalna z promieniem koncentratora. Stan naprężenia zależy wtedy w istotny sposób od własności warstwy i początkowego stanu naprężenia związanego z utworzeniem tej warstwy [80,81].

W warstwie powierzchniowej zachodzi szybka zmiana granicy plastyczności i stanu naprężeń w kierunku normalnym do powierzchni. Dlatego właściwy model mechaniczny warstwy powinien stosunkowo dokładnie opisywać zmiany tych wielkości. Możliwe jest zbudowanie trzech typów modeli o różnym stopniu złożoności (Rys.5.1) [82], a mianowicie:

- a) model jednowłokowy,
- b) model wielowłokowy,
- c) model gradientowy.



Rys.5.1 Trzy modele warstwy wierzchniej

W pracy przedstawiony zostanie model warstwy wierzchniej dla materiału sprężysto - plastycznego ze wzmocnieniem mieszanym i wielopowłokowym opisem niejednorodności warstwy.

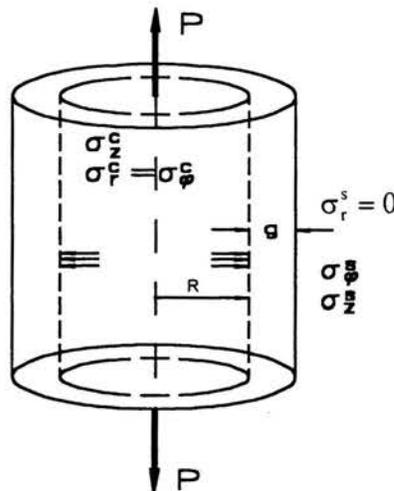
Wprowadzenie wzmocnienia mieszanego pozwala lepiej opisać zmiany naprężeń w trakcie deformacji cyklicznych materiału, natomiast wielopowłokowy opis warstwy - lepiej opisuje stan początkowy materiału, zatem lepiej przybliży model do rzeczywistego przebiegu zmian stałych materiałowych i naprężeń wstępnych jako funkcji odległości od powierzchni elementu.

W następnym punkcie tego rozdziału przedstawiony zostanie model jednorodnego walca z warstwą wierzchnią traktowaną jako jednorodna powłoka (Rys.5.1a). Model ten uwzględniać będzie wzmocnienie mieszane. Punkt 5.3 zawierać będzie rozwinięcie opisu modelu na model wielopowłokowy (rys.5.1b) z uwzględnieniem wzmocnienia mieszanego. Model gradientowy warstwy (rys.5.1c) może być aproksymowany z dowolnym przybliżeniem modelem wielopowłokowym. W punkcie 5.4 zaprezentujemy modyfikację pozwalającą uwzględniać również naprężenia promieniowe w poszczególnych powłokach warstwy, a więc model opisujący warstwy grube w porównaniu ze średnicą rdzenia elementu. Ograniczymy się tu do wzmocnienia izotropowego. Procedurę identyfikacji wzmocnienia kinematycznego i izotropowego opiszemy w punkcie 5.5. W ostatnim punkcie niniejszego rozdziału opisany zostanie algorytm i program komputerowy do obliczania naprężeń w elemencie osiowosymetrycznym z warstwą wierzchnią.

## **5.2 Rozciąganie walca z warstwą wierzchnią - model jednopowłokowy**

Rozpatrzmy jednorodny walec otoczony cienkościenną powłoką również jednorodną, ale o innych stałych materiałowych i naprężeniach własnych. Walec wraz z powłoką poddany jest jednoosiowemu rozciąganiu i ścisaniu z wymuszeniem kinematycznym sterowanym stałym odkształceniem. Zadaniem

naszym jest zbudowanie modelu z warstwą wierzchnią, który umożliwi symulację numeryczną procesu rozciągania i ściskania. W wyniku symulacji chcemy otrzymać stan naprężeń w warstwie i rdzeniu po obciążeniu i odciążeniu. Powłoka ma grubość (g), a promień wewnętrznego cylindra stanowiącego rdzeń walca wynosi R (Rys.5.2). Wielkości dotyczące rdzenia oznaczane są indeksem (c) a powłoki indeksem (s). W powłoce - jako rurce cienkościennej - zakładamy płaski stan naprężeń  $(\sigma_z^{(s)}, \sigma_\varphi^{(s)})$ , zaś w rdzeniu panuje stan naprężenia opisany przez składowe  $\sigma_z^{(c)}$ , oraz  $\sigma_\varphi^{(c)} = \sigma_r^{(c)}$ . Równość naprężeń obwodowych i promieniowych  $\sigma_\varphi^{(c)} = \sigma_r^{(c)}$  wynika z równań równowagi pręta osiowo-symetrycznego.



Rys.5.2. Model walca z warstwą wierzchnią

Założmy, że cały walec rozciągany jest zadaną prędkością odkształcenia osiowego  $\dot{\epsilon}$ . Zatem prędkości odkształceń osiowych rdzenia i powłoki są takie same

$$\dot{\epsilon}_z^{(c)} = \dot{\epsilon}, \quad \dot{\epsilon}_z^{(s)} = \dot{\epsilon} \quad (5.1)$$

zaś z warunków ciągłości na powierzchni kontaktu rdzenia i powłoki mamy

$$\dot{\epsilon}_\varphi^{(c)} = \dot{\epsilon}_\varphi^{(s)} \quad (5.1a)$$

Pamiętając o równości naprężeń obwodowych i promieniowych w rdzeniu walca, dysponujemy równaniem wiążącym stan naprężeń błonowych  $\sigma_\varphi^{(s)}$  z ciśnieniem wewnętrznym  $\sigma_r^{(c)} = \sigma_\varphi^{(c)}$  działającym na powłokę otaczającą walec. Zapišemy je w postaci różniczkowej

$$\dot{\sigma}_\varphi^{(c)} = -\frac{g}{R} \dot{\sigma}_\varphi^{(s)}. \quad (5.2)$$

Po rozłożeniu prędkości odkształceń całkowitych rdzenia i warstwy na część sprężystą i plastyczną, związki (5.1) i (5.1a) przyjmą postać:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_z^{(c)e} + \dot{\varepsilon}_z^{(c)p} = \dot{\varepsilon} & \quad \dot{\varepsilon}_z^{(s)e} + \dot{\varepsilon}_z^{(s)p} = \dot{\varepsilon} \\ \dot{\varepsilon}_\varphi^{(c)e} + \dot{\varepsilon}_\varphi^{(c)p} = \dot{\varepsilon}_\varphi^{(s)e} + \dot{\varepsilon}_\varphi^{(s)p} \end{aligned} \quad (5.3)$$

gdzie  $\dot{\varepsilon}_z^{(c)p}$ ,  $\dot{\varepsilon}_\varphi^{(c)p}$ ,  $\dot{\varepsilon}_z^{(s)p}$ ,  $\dot{\varepsilon}_\varphi^{(s)p}$  oznaczają składowe prędkości odkształceń plastycznych odpowiednio w rdzeniu i w warstwie wierzchniej a  $\dot{\varepsilon}_z^{(c)e}$ ,  $\dot{\varepsilon}_\varphi^{(c)e}$ ,  $\dot{\varepsilon}_z^{(s)e}$ ,  $\dot{\varepsilon}_\varphi^{(s)e}$ , - odpowiednie prędkości odkształceń sprężystych.

Zależność odkształceń sprężystych od naprężeń opisana jest przez prawo Hooke'a. Różniczkując ją i podstawiając do równań (5.3), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\sigma}_z^{(c)}}{E^{(c)}} - \frac{2V^{(c)}}{E^{(c)}} \dot{\sigma}_\varphi^{(c)} + \dot{\varepsilon}_z^{(c)p} = \dot{\varepsilon} \\ \frac{\dot{\sigma}_z^{(s)}}{E^{(s)}} - \frac{V^{(s)}}{E^{(s)}} \dot{\sigma}_\varphi^{(s)} + \dot{\varepsilon}_z^{(s)p} = \dot{\varepsilon} \\ \frac{\dot{\sigma}_\varphi^{(c)}}{E^{(c)}} - \frac{V^{(c)}}{E^{(c)}} \left( \dot{\sigma}_\varphi^{(c)} + \dot{\sigma}_z^{(c)} \right) + \dot{\varepsilon}_\varphi^{(c)p} = \frac{\dot{\sigma}_\varphi^{(s)}}{E^{(s)}} - \frac{V^{(s)}}{E^{(s)}} \dot{\sigma}_z^{(s)} + \dot{\varepsilon}_\varphi^{(s)p} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Równania (5.4) wraz z równaniem (5.2) stanowią 4 równania na 4 składowe prędkości naprężeń:  $\dot{\sigma}_z^{(c)}$ ,  $\dot{\sigma}_\varphi^{(c)}$ ,  $\dot{\sigma}_z^{(s)}$ ,  $\dot{\sigma}_\varphi^{(s)}$  oraz 4 składowe prędkości odkształceń plastycznych:  $\dot{\varepsilon}_z^{(c)p}$ ,  $\dot{\varepsilon}_\varphi^{(c)p}$ ,  $\dot{\varepsilon}_z^{(s)p}$ ,  $\dot{\varepsilon}_\varphi^{(s)p}$ . Te ostatnie wyeliminujemy korzystając z warunków plastyczności dla rdzenia i warstwy. W przypadku wzmocnienia mieszane warunki te przyjmują postać

- dla rdzenia:

$$F^{(c)}(\sigma_r^{(c)}, \sigma_\varphi^{(c)}, \sigma_z^{(c)}, \alpha_r^{(c)}, \alpha_\varphi^{(c)}, \alpha_z^{(c)}, \lambda_c) = \frac{1}{\sigma_0^{(c)}} \left\{ \left[ (\sigma_r^{(c)} - \alpha_r^{(c)}) - (\sigma_\varphi^{(c)} - \alpha_\varphi^{(c)}) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[ (\sigma_r^{(c)} - \alpha_r^{(c)}) - (\sigma_z^{(c)} - \alpha_z^{(c)}) \right]^2 + \left[ (\sigma_\varphi^{(c)} - \alpha_\varphi^{(c)}) - (\sigma_z^{(c)} - \alpha_z^{(c)}) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} = 0 \quad (5.5)$$

- dla warstwy:

$$F^{(s)}(\sigma_\varphi^{(s)}, \sigma_z^{(s)}, \alpha_\varphi^{(s)}, \alpha_z^{(s)}, \dot{\lambda}_s) = \\ = \frac{1}{\sigma_0^{(s)}} \left[ (\sigma_\varphi^{(s)} - \alpha_\varphi^{(s)})^2 - (\sigma_\varphi^{(s)} - \alpha_\varphi^{(s)})(\sigma_z^{(s)} - \alpha_z^{(s)}) + (\sigma_z^{(s)} - \alpha_z^{(s)})^2 \right]^{\frac{1}{2}} - 1 = 0 \quad (5.6)$$

gdzie  $\dot{\lambda}_c > 0$  oraz  $\dot{\lambda}_s > 0$  są parametrami opisującymi prędkości wzmocnienia izotropowego odpowiednio w rdzeniu i powłoce. Tensor przesunięcia  $\alpha_i(\lambda)$  gdzie  $i = r, \varphi, z$  wprowadza się, aby opisać sztywny ruch powierzchni plastycznego płynięcia czyli wzmocnienie kinematyczne. Promień powierzchni płynięcia opisany jest przez funkcję  $\sigma_y^{(c)}(\lambda)$  dla rdzenia i  $\sigma_y^{(s)}(\lambda)$  dla warstwy. Początkowe wartości promieni  $\sigma_0^{(c)}$  i  $\sigma_0^{(s)}$  są równe granicom plastyczności podawanym w tabelach danych materiałowych. Pochodne  $\sigma_y^{(c)}(\lambda)$  oraz  $\sigma_y^{(s)}(\lambda)$  względem  $\lambda_c$  oraz  $\lambda_s$  oznaczone przez  $\sigma_y^{\prime(c)}$  oraz  $\sigma_y^{\prime(s)}$  określają wartości współczynników wzmocnienia izotropowego. Korzystając z prawa wzmocnienia izotropowego i kinematycznego zgodnego z prawem Zieglera [83] otrzymujemy zależności opisujące wzmocnienie mieszane, mające postać

- dla rdzenia

$$\dot{\sigma}_y^{(c)} = \sqrt{2} \sigma_y^{\prime(c)} \cdot \dot{\lambda}_c, \quad \text{gdzie } i = r, \varphi, z \text{ oraz } \sigma_y^{\prime(c)} = \frac{d\sigma_y^{(c)}}{d\lambda_c} \quad (5.7)$$

$$\dot{\alpha}_i^{(c)} = c^{(c)}(\lambda) \cdot (\sigma_i^{(c)} - \alpha_i^{(c)}) \dot{\lambda}_c,$$

- dla warstwy:

$$\dot{\sigma}_y^{(s)} = \sqrt{2} \sigma_y^{\prime(s)} \cdot \dot{\lambda}_s, \quad \text{gdzie } i = \varphi, z \text{ oraz } \sigma_y^{\prime(s)} = \frac{d\sigma_y^{(s)}}{d\lambda_s} \quad (5.8)$$

$$\dot{\alpha}_i^{(s)} = c^{(s)}(\lambda) \cdot (\sigma_i^{(s)} - \alpha_i^{(s)}) \dot{\lambda}_s,$$

a wielkości  $c^{(c)}(\lambda_c)$  oraz  $c^{(s)}(\lambda_s)$  są pewnymi funkcjami parametrów  $\lambda_c$  i  $\lambda_s$ .

Korzystając z warunków plastyczności dla rdzenia (5.5) oraz stowarzyszonego z nim prawa plastycznego płynięcia

$$\dot{\varepsilon}_r^{(c)p} = \dot{\lambda}_c \frac{\partial F^{(c)}}{\partial \sigma_r^{(c)}}, \quad \dot{\varepsilon}_\varphi^{(c)p} = \dot{\lambda}_c \frac{\partial F^{(c)}}{\partial \sigma_\varphi^{(c)}}, \quad \dot{\varepsilon}_z^{(c)p} = \dot{\lambda}_c \frac{\partial F^{(c)}}{\partial \sigma_z^{(c)}} \quad (5.9a)$$

otrzymujemy wyrażenia na prędkości odkształceń plastycznych dla walca

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_r^{(c)p} &= \dot{\lambda}_c \frac{2(\sigma_r^{(c)} - \alpha_r^{(c)}) - (\sigma_\varphi^{(c)} - \alpha_\varphi^{(c)}) - (\sigma_z^{(c)} - \alpha_z^{(c)})}{\sigma_o^{(c)} \sqrt{2}} \\ \dot{\varepsilon}_\varphi^{(c)p} &= \dot{\lambda}_c \frac{2(\sigma_\varphi^{(c)} - \alpha_\varphi^{(c)}) - (\sigma_r^{(c)} - \alpha_r^{(c)}) - (\sigma_z^{(c)} - \alpha_z^{(c)})}{\sigma_o^{(c)} \sqrt{2}} \\ \dot{\varepsilon}_z^{(c)p} &= \dot{\lambda}_c \frac{2(\sigma_z^{(c)} - \alpha_z^{(c)}) - (\sigma_\varphi^{(c)} - \alpha_\varphi^{(c)}) - (\sigma_r^{(c)} - \alpha_r^{(c)})}{\sigma_o^{(c)} \sqrt{2}} \end{aligned} \quad (5.9b)$$

Ponieważ dla rdzenia  $\sigma_r^{(c)} = \sigma_\varphi^{(c)}$  to również  $\alpha_r^{(c)} = \alpha_\varphi^{(c)}$ . Uwzględniając to otrzymujemy następującą postać warunku plastyczności (5.6) oraz prawa płynięcia (5.9)

$$F^{(c)} = \frac{1}{\sigma_o^{(c)}} \left| (\sigma_\varphi^{(c)} - \alpha_\varphi^{(c)}) - (\sigma_z^{(c)} - \alpha_z^{(c)}) \right| - 1 = 0 \quad (5.10)$$

$$\dot{\varepsilon}_r^{(c)p} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \dot{\lambda}_c, \quad \dot{\varepsilon}_\varphi^{(c)p} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \dot{\lambda}_c, \quad \dot{\varepsilon}_z^{(c)p} = \sqrt{2} \cdot \dot{\lambda}_c \quad (5.11)$$

Analogicznie można wyprowadzić wyrażenia określające przyrosty odkształceń plastycznych dla powłoki. Przyjmują one postać

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_r^{(s)p} &= 0, \\ \dot{\varepsilon}_\varphi^{(s)p} &= \dot{\lambda}_s \frac{2(\sigma_\varphi^{(s)} - \alpha_\varphi^{(s)}) - (\sigma_z^{(s)} - \alpha_z^{(s)})}{2\sigma_o^{(s)}}, \\ \dot{\varepsilon}_z^{(s)p} &= \dot{\lambda}_s \frac{2(\sigma_z^{(s)} - \alpha_z^{(s)}) - (\sigma_\varphi^{(s)} - \alpha_\varphi^{(s)})}{2\sigma_o^{(s)}}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Aby wyznaczyć nieznanne parametry  $\dot{\lambda}_c$  i  $\dot{\lambda}_s$  korzystamy z równań zgodności teorii plastyczności. Ze względu na ich ogólny charakter wprowadzimy chwilowo zapis dwuindeksowy. Zarówno dla rdzenia jak i powłoki związki te mają postać:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} - \dot{\sigma}_o = 0 \quad \text{dla } i,j = 1,2,3, \quad (5.13)$$

gdzie  $\sigma_{11} = \sigma_r$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_\varphi$ ,  $\sigma_{33} = \sigma_z$ ,  $\alpha_{11} = \alpha_r$ ,  $\alpha_{22} = \alpha_\varphi$ ,  $\alpha_{33} = \alpha_z$ , a pozostałe składowe są równe zero. Wielkości  $F$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $\alpha_{ij}$ ,  $\dot{\sigma}_o$ ,  $\sigma'_o$ ,  $\lambda$ ,  $c$ , odnoszą się zarówno do rdzenia jak i powłoki. We wzorze powyższym i następnych obowiązuje konwencja sumacyjna.

Korzystając z zależności

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} = -\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{i} \quad \dot{\alpha}_{ij} = c(\lambda)(\sigma_{ij} - \alpha_{ij})\dot{\lambda} \quad (5.14)$$

otrzymujemy następującą postać równania (5.13)

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \left[ c(\lambda) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) + \sigma'_o \right] \dot{\lambda} = 0. \quad (5.15)$$

Ponadto, wykorzystując twierdzenie Eulera o pochodnej funkcji jednorodnej, otrzymujemy

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = \sigma_o \quad (5.16)$$

i wówczas wyrażenie (5.15) można napisać w postaci

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - [c(\lambda)\sigma_o + \sigma'_o] \dot{\lambda} = 0, \quad \text{skąd} \quad (5.17)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}}{c(\lambda)\sigma_o + \sigma'_o}. \quad (5.18)$$

Zależność ta jest prawdziwa zarówno dla walca jak i powłoki. Ze względu na różną postać funkcji  $F$ , przyjmuje ona dla walca postać

$$\dot{\lambda}_c = \frac{\dot{\sigma}_z^{(c)} - \dot{\sigma}_\varphi^{(c)}}{\sqrt{2[c^{(c)}(\lambda)\sigma_o^{(c)} + \sigma_o'^{(c)}]}} \quad (5.19)$$

a dla powłoki

$$\dot{\lambda}_s = \frac{[2(\sigma_\varphi^{(s)} - \alpha_\varphi^{(s)}) - (\sigma_z^{(s)} - \alpha_z^{(s)})] \dot{\sigma}_\varphi^{(s)} + [2(\sigma_z^{(s)} - \alpha_z^{(s)}) - (\sigma_\varphi^{(s)} - \alpha_\varphi^{(s)})] \dot{\sigma}_z^{(s)}}{2\sigma_o^{(s)} [c^{(s)}(\lambda)\sigma_o^{(s)} + \sigma_o'^{(s)}]} \quad (5.20)$$

Jednocześnie, pomijając podział na wzmocnienie izotropowe i kinematyczne, i traktując je łącznie, możemy napisać ogólnie:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - H \dot{\lambda} = 0 \quad \text{dla } i, j = 1, 2, 3, \quad (5.21)$$

gdzie  $H$  jest *modułem stycznym wyznaczonym z doświadczenia* zawierającym zarówno część kinematyczną jak i izotropową. Dla rdzenia opisany jest on wzorem

$$H^{(c)} = [c^{(c)}(\lambda)\sigma_o^{(c)} + \sigma_o'^{(c)}] \dot{\lambda}_c, \quad (5.22)$$

a dla powłoki przyjmuje postać

$$H^{(s)} = [c^{(s)}(\lambda)\sigma_o^{(s)} + \sigma_o'^{(s)}] \dot{\lambda}_s, \quad (5.23)$$

Powróćmy do poprzednich oznaczeń zmiennych z jednym indeksem  $i = r, \varphi, z$ . Na podstawie równań (5.11) (5.19) i (5.22) otrzymujemy proste wyrażenia na prędkości odkształceń plastycznych dla walca

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r^{(c)p} &= \dot{\epsilon}_\varphi^{(c)p} = -\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_z^{(c)p} \\ \dot{\epsilon}_z^{(c)p} &= \frac{\dot{\sigma}_z^c - \dot{\sigma}_\varphi^c}{H^{(c)}} \end{aligned} \quad (5.24)$$

a z równań (5.12), (5.20) i (5.23) wynika postać prędkości odkształceń plastycznych dla powłoki

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r^{(s)p} &= 0 \\ \dot{\epsilon}_\varphi^{(s)p} &= \frac{(2\bar{\sigma}_\varphi^{(s)} - \bar{\sigma}_z^{(s)})(2\bar{\sigma}_z^{(s)} - \bar{\sigma}_\varphi^{(s)})}{4(\sigma_o^{(s)})^2 H^{(s)}} \dot{\sigma}_z^{(s)} + \frac{(2\bar{\sigma}_\varphi^{(s)} - \bar{\sigma}_z^{(s)})^2}{4(\sigma_o^{(s)})^2 H^{(s)}} \dot{\sigma}_\varphi^{(s)} \\ \dot{\epsilon}_z^{(s)p} &= \frac{(2\bar{\sigma}_z^{(s)} - \bar{\sigma}_\varphi^{(s)})^2}{4(\sigma_o^{(s)})^2 H^{(s)}} \dot{\sigma}_z^{(s)} + \frac{(2\bar{\sigma}_\varphi^{(s)} - \bar{\sigma}_z^{(s)})(2\bar{\sigma}_z^{(s)} - \bar{\sigma}_\varphi^{(s)})}{4(\sigma_o^{(s)})^2 H^{(s)}} \dot{\sigma}_\varphi^{(s)} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Dla skrócenia zapisu przyjęto oznaczenie  $\bar{\sigma}_i = \sigma_i - \alpha_i$  dla  $i = r, \varphi, z$ . Ponadto, można wyznaczyć przyrosty tensora  $\alpha_i$  wykorzystując zależność (5.8) oraz wyrażenia (5.19) i (5.20)

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_r^{(c)} &= \dot{\alpha}_\varphi^{(c)} = \frac{\bar{\sigma}_\varphi^{(c)}(2\dot{\sigma}_z^{(c)} - \dot{\sigma}_\varphi^{(c)})c^{(c)}}{H^{(c)}} \\ \dot{\alpha}_z^{(c)} &= \frac{\bar{\sigma}_z^{(c)}(2\dot{\sigma}_z^{(c)} - \dot{\sigma}_\varphi^{(c)})c^{(c)}}{H^{(c)}} \end{aligned} \quad (5.26a)$$

oraz

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_r^{(s)} &= 0 \\ \dot{\alpha}_\varphi^{(s)} &= \frac{\bar{\sigma}_\varphi^{(s)} \left[ (2\bar{\sigma}_z^{(s)} - \bar{\sigma}_\varphi^{(s)}) \dot{\sigma}_z^{(s)} + (2\bar{\sigma}_\varphi^{(s)} - \bar{\sigma}_z^{(s)}) \dot{\sigma}_\varphi^{(s)} \right]}{2\sigma_0^{(s)} H^{(s)}} c^{(s)} \\ \dot{\alpha}_z^{(s)} &= \frac{\bar{\sigma}_z^{(s)} \left[ (2\bar{\sigma}_\varphi^{(s)} - \bar{\sigma}_z^{(s)}) \dot{\sigma}_\varphi^{(s)} + (2\bar{\sigma}_z^{(s)} - \bar{\sigma}_\varphi^{(s)}) \dot{\sigma}_z^{(s)} \right]}{2\sigma_0^{(s)} H^{(s)}} c^{(s)}\end{aligned}\quad (5.26b)$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\begin{aligned}\chi &\equiv \frac{1}{2H^{(c)}}; & a &\equiv \frac{(2\bar{\sigma}_z^{(s)} - \bar{\sigma}_\varphi^{(s)})^2}{4(\sigma_0^{(s)})^2 H^{(s)}}; & b &\equiv \frac{(2\bar{\sigma}_\varphi^{(s)} - \bar{\sigma}_z^{(s)})^2}{4(\sigma_0^{(s)})^2 H^{(s)}} \\ d &\equiv \frac{(2\bar{\sigma}_z^{(s)} - \bar{\sigma}_\varphi^{(s)})(2\bar{\sigma}_\varphi^{(s)} - \bar{\sigma}_z^{(s)})}{4(\sigma_0^{(s)})^2 H^{(s)}}; & p &\equiv \frac{g}{RE^{(c)}} (1 - \nu^{(c)}) + \frac{1}{E^{(s)}}\end{aligned}\quad (5.27)$$

otrzymujemy następujące wyrażenia opisujące odkształcenia plastyczne:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_r^{(c)p} = \dot{\varepsilon}_\varphi^{(c)p} &= -\chi \left( \dot{\sigma}_z^{(c)} + \frac{g}{R} \dot{\sigma}_\varphi^{(s)} \right) \\ \dot{\varepsilon}_z^{(c)p} &= 2\chi \left( \dot{\sigma}_z^{(c)} + \frac{g}{R} \dot{\sigma}_\varphi^{(s)} \right)\end{aligned}\quad (5.28a)$$

oraz

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_r^{(s)p} &= 0 \\ \dot{\varepsilon}_\varphi^{(s)p} &= d\dot{\sigma}_z^{(s)} + b\dot{\sigma}_\varphi^{(s)} \\ \dot{\varepsilon}_z^{(s)p} &= a\dot{\sigma}_z^{(s)} + d\dot{\sigma}_\varphi^{(s)}\end{aligned}\quad (5.28b)$$

Wstawiając wyrażenia (5.28) do równań (5.4), po uporządkowaniu wyrazów podobnych, otrzymujemy następujący układ równań opisujących prędkości naprężeń:

$$\begin{aligned}\left( 2\chi + \frac{1}{E^{(c)}} \right) \dot{\sigma}_z^{(c)} + 2\frac{g}{R} \left( \chi + \frac{\nu^{(c)}}{E^{(c)}} \right) \dot{\sigma}_\varphi^{(s)} &= \dot{\varepsilon} \\ \left( a + \frac{1}{E^{(s)}} \right) \dot{\sigma}_z^{(s)} + \left( d - \frac{\nu^{(s)}}{E^{(s)}} \right) \dot{\sigma}_\varphi^{(s)} &= \dot{\varepsilon} \\ \left( \chi + \frac{\nu^{(c)}}{E^{(c)}} \right) \dot{\sigma}_z^{(c)} + \left[ \frac{g}{R} \frac{(1 - \nu^{(c)})}{E^{(c)}} + \frac{g}{R} \chi + \frac{1}{E^{(s)}} + b \right] \dot{\sigma}_\varphi^{(s)} + \left( d - \frac{\nu^{(s)}}{E^{(s)}} \right) \dot{\sigma}_z^{(s)} &= 0\end{aligned}\quad (5.29)$$

Układ ten można również przedstawić w postaci

$$\mathbf{M} \cdot \dot{\sigma} = \dot{\varepsilon}\quad (5.30a)$$

lub

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{E^{(c)}} + 2\chi & 2\frac{g}{R}\left(\frac{v^{(c)}}{E^{(c)}} + \alpha\right) & 0 \\ 0 & d - \frac{v^{(s)}}{E^{(s)}} & a + \frac{v^{(c)}}{E^{(c)}} \\ \chi + \frac{v^{(c)}}{E^{(c)}} & p + \frac{g}{R}\chi + b & d - \frac{v^{(s)}}{E^{(s)}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{\sigma}_z^{(c)} \\ \dot{\sigma}_\varphi^{(s)} \\ \dot{\sigma}_z^{(s)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{\epsilon} \\ \dot{\epsilon} \\ 0 \end{vmatrix} \quad (5.30b)$$

przy czym

$$\det M = -\left(a + \frac{1}{E^{(s)}}\right) \left[ \left(2\chi + \frac{1}{E^{(c)}}\right) \left(p + \frac{g}{R}\chi + b\right) - \frac{2g}{R} \left(\chi + \frac{v^{(c)}}{E^{(c)}}\right)^2 \right] + \left(\frac{v^{(s)}}{E^{(s)}} - d\right)^2 \left(2d + \frac{1}{E^{(c)}}\right) \quad (5.30c)$$

Rozwiązując go otrzymujemy explicite wyrażenia określające prędkości naprężeń:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_z^{(c)} &= \frac{1}{\det M} \cdot \left[ -\frac{2g}{R} \left(\chi + \frac{v^{(c)}}{E^{(c)}}\right) \left(2\chi + \frac{1}{E^{(c)}}\right) + \left(\chi + \frac{1}{E^{(c)}}\right) \left(\frac{v^{(s)}}{E^{(s)}}\right)^2 - \left(p + \frac{g}{R}\chi + b\right) \right] \cdot \dot{\epsilon} \\ \dot{\sigma}_\varphi^{(s)} &= \frac{1}{\det M} \cdot \left[ \left(\frac{v^{(s)}}{E^{(s)}}\right) \cdot \left(2\chi + \frac{1}{E^{(c)}}\right) + \left(a + \frac{1}{E^{(s)}}\right) \left(\chi + \frac{v^{(c)}}{E^{(c)}}\right) \right] \cdot \dot{\epsilon} \\ \dot{\sigma}_z^{(s)} &= \frac{1}{\det M} \cdot \left[ \frac{2g}{R} \left(\chi + \frac{v^{(c)}}{E^{(c)}}\right)^2 - \left(2\chi + \frac{1}{E^{(c)}}\right) \left(p + \frac{g}{R}\chi + b\right) - \left(\chi + \frac{v^{(c)}}{E^{(c)}}\right) \left(\frac{v^{(s)}}{E^{(s)}}\right) \right] \cdot \dot{\epsilon} \end{aligned} \quad (5.31)$$

oraz

$$\dot{\sigma}_r^{(c)} = \dot{\sigma}_\varphi^{(c)} = -\frac{g}{R} \dot{\sigma}_\varphi^{(s)} \quad (5.32)$$

Wyrażenia (5.26) i (5.31) w pełni opisują prędkości naprężeń z uwzględnieniem zarówno wzmocnienia kinematycznego opisanego tensorem  $\alpha_i$  (dla  $i = r, \varphi, z$ ) jak i wzmocnienia izotropowego określonego przez wielkość  $\sigma'_0$  (wzory (5.7) i oraz (5.8)).

### 5.3. Rozciąganie walca z warstwą wierzchnią - model wielopowłokowy

W punkcie 5.2 warstwa wierzchnia otaczająca walec traktowana była jako cienka powłoka współosiowa z walcem o innych niż rdzeń stałych materiałowych. Często jednak takie przybliżenie jest zbyt duże. Ma to miejsce przede wszystkim w przypadku występowania naprężeń początkowych, które mogą się zmieniać w obszarze warstwy wierzchniej o kilkaset MPa. Dlatego też niezbędne było rozszerzenie modelu. Poniżej zostanie przedstawiony model walca z warstwą

wierzchnią reprezentowaną przez  $k$  cienkościennych powłok. Problem jest podobny do opisanego poprzednio, dlatego w dalszym ciągu powoływać się będziemy na podane tam rozwiązania. Przyjmiemy następujące oznaczenia. Indeks (o) będzie dotyczył rdzenia, natomiast indeks (i) będzie zmieniał się od 1 do  $k$  i będzie dotyczył kolejnych powłok począwszy od powłoki wewnętrznej, przylegającej do rdzenia. Warunki odkształcenia nie zmieniają się, gdyż przyjmujemy, że cały walec jest rozciągany osiowo zadany odkształceniem. Zatem

$$\dot{\varepsilon}_z^{(o)} = \dot{\varepsilon}, \quad \dot{\varepsilon}_z^{(i)} = \dot{\varepsilon}, \quad \text{oraz} \quad \dot{\varepsilon}_\varphi^{(o)} = \dot{\varepsilon}_\varphi^{(i)}, \quad \text{dla } i = 1, \dots, k \quad (5.33)$$

Przyjmujemy dalej, że promień rdzenia wynosi  $R$ , a całkowita grubość warstwy wierzchniej  $g$ . Tak więc, grubość każdej powłoki wynosi  $g/k$ , a promień  $i$ -tej powłoki  $r_{(i)} = R + i \cdot g/k$ . Dla rdzenia przyjmujemy  $r_{(o)} = R$ .

Rozważmy naprężenia błonowe  $\sigma_\varphi^{(k)}$  w ostatniej zewnętrznej powłoce. Pochodzą one od ciśnienia przekazywanego przez powłokę  $(k-1)$ , które oznaczymy przez  $p_{(k-1)}$ . Naprężenia błonowe  $\sigma_\varphi^{(k-1)}$  w kolejnej powłoce wywołane są już różnicą ciśnień: pochodzącego od powłoki  $(k-2)$ , oznaczonego przez  $p_{(k-2)}$ , oraz ciśnienia  $p_{(k-1)}$ . W ten sposób możemy związać ciśnienia błonowe w  $i$ -tej powłoce z różnicą ciśnień  $p_{(i-1)}$  oraz  $p_{(i)}$ . W przypadku pierwszej powłoki, przylegającej do rdzenia, działa na nią ciśnienie  $p_{(1)}$  pochodzące od powłoki drugiej oraz ciśnienie  $p_{(o)}$ , pochodzące od rdzenia, które można wyrazić przez wielkość  $\sigma_r^{(o)} = \sigma_\varphi^{(o)}$ . Wiążąc naprężenia błonowe  $\sigma_\varphi^{(i)}$  z ciśnieniem które je wywołuje wzorem analogicznym do (5.2), dostajemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
P_{(k-1)}r_{(k-1)} &= \sigma_{\varphi}^{(k)} \frac{g}{k} \\
P_{(k-1)}r_{(k-1)} - P_{(k-2)}r_{(k-2)} &= -\sigma_{\varphi}^{(k-1)} \frac{g}{k} \\
&\dots\dots\dots \\
P_{(2)}r_{(2)} - P_{(1)}r_{(1)} &= -\sigma_{\varphi}^{(2)} \frac{g}{k} \\
P_{(1)}r_{(1)} - P_{(0)}r_{(0)} &= -\sigma_{\varphi}^{(1)} \frac{g}{k} \\
P_{(0)}r_{(0)} &= -\sigma_{\varphi}^{(0)} \frac{g}{k} = -\sigma_r^{(0)} \frac{g}{k}
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Sumując stronami k pierwszych równań (5.34) otrzymujemy równanie (5.34a) wiążące naprężenie obwodowe w rdzeniu z sumą naprężeń obwodowych w poszczególnych powłokach

$$\sigma_r^{(0)} = \sigma_{\varphi}^{(0)} = -\frac{1}{kR} \sum_{i=1}^k \sigma_{\varphi}^{(i)}. \tag{5.34a}$$

Wzmocnienie mieszane zdefiniujemy analogicznie jak w poprzednim przypadku, mianowicie

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_o^{(i)} &= \sqrt{2} \sigma_o'^{(i)} \dot{\lambda}_{(i)} && \text{dla } i = 0, \dots, k \\
\dot{\alpha}_j^{(i)} &= c^{(i)}(\lambda)(\sigma_j^{(i)} - \alpha_j^{(i)}) \dot{\lambda}_{(i)} && j = r, \varphi, z
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Korzystając nadal z wprowadzonego wcześniej uproszczonego zapisu

$$\bar{\sigma}_j^{(i)} = \sigma_j^{(i)} - \alpha_j^{(i)} \quad \text{dla } i = 0, \dots, k, \quad j = r, \varphi, z \tag{5.36}$$

zapiszemy warunek plastyczności w następującej postaci:

- dla rdzenia

$$\begin{aligned}
F^{(0)}(\bar{\sigma}_r^{(0)}, \bar{\sigma}_{\varphi}^{(0)}, \bar{\sigma}_z^{(0)}, \lambda_o) &= \\
\frac{1}{\sigma_o^{(0)}} \left\{ [(\bar{\sigma}_r^{(0)}) - (\bar{\sigma}_{\varphi}^{(0)})]^2 + [(\bar{\sigma}_r^{(0)}) - (\bar{\sigma}_z^{(0)})]^2 + [(\bar{\sigma}_{\varphi}^{(0)}) - (\bar{\sigma}_z^{(0)})]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} &= 0
\end{aligned} \tag{5.37a}$$

- dla każdej z powłok

$$F^{(i)}(\bar{\sigma}_{\varphi}^{(i)}, \bar{\sigma}_z^{(i)}, \lambda_i) = \frac{1}{\sigma_o^{(i)}} \left[ (\bar{\sigma}_{\varphi}^{(i)})^2 - (\bar{\sigma}_{\varphi}^{(i)})(\bar{\sigma}_z^{(i)}) + (\bar{\sigma}_z^{(i)})^2 \right]^{\frac{1}{2}} - 1 = 0 \tag{5.37b}$$

Równania plastycznego płynięcia rdzenia i każdej z powłok są analogiczne do równań (5.11) oraz (5.12) i zależą od parametrów plastycznego płynięcia  $\lambda_{(0)}$  oraz

$\lambda_{(i)}$ , dla  $i = 1, 2, \dots, k$ . Wyznamy je korzystając z równań zgodności (5.13). Po wstawieniu wyznaczonych parametrów do równań płynięcia otrzymujemy wyrażenia określające pochodne odkształceń plastycznych

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_z^{(o)p} &= 2\chi\dot{\sigma}_z^{(o)} + \frac{2g}{kR}\chi\sum_{i=1}^k\dot{\sigma}_\varphi^{(i)} \\ \dot{\epsilon}_\varphi^{(o)p} &= -\chi\dot{\sigma}_z^{(o)} - \frac{g}{kR}\chi\sum_{i=1}^k\dot{\sigma}_\varphi^{(i)} \\ \dot{\epsilon}_z^{(i)p} &= a_{(i)}\dot{\sigma}_z^{(i)} + d_{(i)}\dot{\sigma}_\varphi^{(i)} \\ \dot{\epsilon}_\varphi^{(i)p} &= d_{(i)}\dot{\sigma}_z^{(i)} + b_{(i)}\dot{\sigma}_\varphi^{(i)}\end{aligned}\quad (5.38)$$

gdzie

$$\begin{aligned}\chi &= \frac{1}{2H_0}; \quad a_{(i)} \equiv \frac{(2\bar{\sigma}_z^{(i)} - \bar{\sigma}_\varphi^{(i)})^2}{4(\sigma_0^{(i)})^2 H^{(i)}}; \quad b_{(i)} \equiv \frac{(2\bar{\sigma}_\varphi^{(i)} - \bar{\sigma}_z^{(i)})^2}{4(\sigma_0^{(i)})^2 H^{(i)}} \\ d &\equiv \frac{(2\bar{\sigma}_z^{(i)} - \bar{\sigma}_\varphi^{(i)})(2\bar{\sigma}_\varphi^{(i)} - \bar{\sigma}_z^{(i)})}{4(\sigma_0^{(i)})^2 H^{(i)}}; \quad p \equiv \frac{g}{RE^{(o)}}(1 - \nu^{(o)}) + \frac{1}{E^{(o)}}\end{aligned}\quad (5.39)$$

dla  $i = 1, \dots, k$

Ostatecznie, po wprowadzeniu wyrażeń (5.38-5.39) do równań wiążących prędkości odkształceń sprężystych i plastycznych analogicznych do (5.3), otrzymujemy układ  $2k+1$  równań na  $2k+1$  niewiadomych:  $\dot{\sigma}_z^{(i)}, \dot{\sigma}_\varphi^{(i)}$ , dla  $i = 1, \dots, k$  oraz  $\dot{\sigma}_z^{(o)}$ , i dodatkowe równanie (5.34a) umożliwiające obliczenie wielkości  $\sigma_\varphi^{(o)} = \sigma_r^{(o)}$ .

Układ powyższych równań można napisać w postaci macierzowej

$$[M_{ij}]\{\dot{\sigma}_j\} = \{\dot{\epsilon}_i\} \quad (5.40)$$

gdzie  $i, j = 1, 2, \dots, 2k+1$ ,

$$\{\dot{\sigma}_j\} = \{\dot{\sigma}_z^{(o)}, \dot{\sigma}_\varphi^{(1)}, \dot{\sigma}_z^{(1)}, \dots, \dot{\sigma}_\varphi^{(k)}, \dot{\sigma}_z^{(k)}\}^T$$

oraz

$$\{\dot{\epsilon}_i\} = \left\{ \underbrace{\dot{\epsilon}_1, \dots, \dot{\epsilon}_k}_{k+1}, \underbrace{0, \dots, 0}_k \right\}^T \quad (5.41)$$

Wielkości  $a, b, d, \chi$ , oraz  $H$  zostały zdefiniowane wcześniej, natomiast

$$c_i = b_i + \frac{1}{E_i}, \quad \gamma = \frac{2g}{kR} \left( \chi + \frac{v_o}{E_o} \right), \quad \delta = \frac{g}{kR} \left( \chi + \frac{1 - v_o}{E_o} \right) \quad (5.42)$$

a macierz  $[M_{ij}]$  ma postać następującą:

$$\begin{array}{cccccccccc} \frac{1}{E_o} + 2\chi & \gamma & 0 & \gamma & 0 & \gamma & 0 & \gamma & 0 & \\ 0 & d_1 - \frac{v_1}{E_1} & a_1 + \frac{1}{E_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 - \frac{v_2}{E_2} & a_2 + \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{n-1} - \frac{v_{n-1}}{E_{n-1}} & a_{n-1} + \frac{1}{E_{n-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_n - \frac{v_n}{E_n} & a_n + \frac{1}{E_n} & 0 \\ \chi + \frac{v_o}{E_o} & \delta + c_1 & d_1 - \frac{v_1}{E_1} & \delta & 0 & \delta & 0 & \delta & 0 & 0 \\ \chi + \frac{v_o}{E_o} & \delta & 0 & \delta + c_2 & d_2 - \frac{v_2}{E_2} & \delta & 0 & \delta & 0 & 0 \\ \chi + \frac{v_o}{E_o} & \delta & 0 & \delta & 0 & \delta + c_{n-1} & d_{n-1} - \frac{v_{n-1}}{E_{n-1}} & \delta & 0 & 0 \\ \chi + \frac{v_o}{E_o} & \delta & 0 & \delta & 0 & \delta & 0 & \delta + c_n & d_n - \frac{v_n}{E_n} & 0 \end{array}$$

#### 5.4 Model wielopowłokowy uwzględniający naprężenia promieniowe w warstwie

Może się zdarzyć, że grubość naturalnej warstwy wierzchniej będzie porównywalna z grubością próbki. Jest to możliwe nawet przy drobnym ziarnie materiału, gdy próbki są bardzo cienkie, lub też w przypadku grubszych próbek gdy ziarno polikryształu jest stosunkowo duże. Podobna sytuacja może zaistnieć przy grubości naturalnej warstwy wierzchniej porównywalnej z grubościami niektórych warstw technologicznych. Istnieje zatem konieczność uwzględnienia naprężeń promieniowych w powłokach i odejścia od traktowania ich jako powłok cienkościennych. W tym rozdziale ograniczymy się do przypadku izotropowego wzmocnienia materiału.

Przypomnijmy, że warstwa wierzchnia została podzielona na cieńsze warstwy, a indeksy określające kolejne warstwy zmieniają się od (1) do (k) (k-

oznacza powłokę zewnętrzną), indeks (0) oznacza rdzeń. Zależność naprężeń promieniowych od obwodowych w poszczególnych warstwach można wyznaczyć dodając do uprzednio wyprowadzonych równań błonowych określających  $\sigma_{\varphi}^{(i)}$  równania równowagi sił w kierunku promieniowym, które definiują  $\sigma_r^{(i)}$ .

Mianowicie:

$$p^{(i-1)} \cdot r_{(i-1)} - p^{(i)} \cdot r_{(i)} = \frac{g}{k} \sigma_{\varphi}^{(i)} \quad (5.43)$$

$$\sigma_r^{(i)} = -\frac{1}{2}(p^{(i-1)} + p^{(i)}), \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, k \quad (5.44)$$

przy czym

$$p^{(k)} = 0 \quad (5.45)$$

W powyższych wzorach  $p^{(i)}$  oznacza ciśnienie na zewnętrznej granicy  $i$ -tej powłoki.

Dla  $i = k$ , czyli dla zewnętrznej powłoki ciśnienie to wynosi zero. Przekształcając (5.43) i (5.44) otrzymujemy

$$p^{(i-1)} = \frac{1}{r_{(i-1)} + r_{(i)}} \left( \frac{g}{k} \sigma_{\varphi}^{(i)} - 2 r_{(i)} \sigma_r^{(i)} \right) \quad (5.46)$$

$$p^{(i)} = -\frac{1}{r_{(i-1)} + r_{(i)}} \left( \frac{g}{k} \sigma_{\varphi}^{(i)} - 2 r_{(i-1)} \sigma_r^{(i)} \right), \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, k \quad (5.47)$$

Podstawiając  $i = k$  do równania (5.47) i korzystając z (5.45) otrzymujemy zależność naprężeń promieniowych od obwodowych dla powłoki zewnętrznej.

$$\sigma_r^{(k)} = -\frac{1}{2} \frac{g}{k r_{(k-1)}} \sigma_{\varphi}^{(k)} \quad (5.48)$$

Z kolei, podstawiając (5.48) do (5.46), w którym przyjęliśmy  $i = k-1$ , otrzymujemy

$$p^{(k-1)} = \frac{1}{r_{(k-1)}} \frac{g}{k} \sigma_{\varphi}^{(k)} \quad (5.49)$$

Zależności (5.47) i (5.49) pozwalają znaleźć zależność naprężeń promieniowych od obwodowych dla  $i=k-1$

$$\sigma_r^{(k-1)} = -\frac{1}{2} \left( \frac{g}{k r_{(k-2)}} \sigma_{\varphi}^{(k-1)} + \frac{r_{(k-2)} + r_{(k-1)}}{r_{(k-2)} \cdot r_{(k-1)}} \frac{g}{k} \sigma_{\varphi}^{(k)} \right) \quad (5.50)$$

Ogólnie dla  $i$ -tej powłoki wyrażenie na naprężenia przyjmą postać:

$$\sigma_r^{(i)} = -\frac{1}{2} \frac{g}{k r_{(i-1)}} \sigma_{\varphi}^{(i)} - \frac{1}{2} \frac{r_{(i-1)} + r_{(i)}}{r_{(i-1)} \cdot r_{(i)}} \frac{g}{k} \sigma_{\varphi}^{(i+1)} \quad (5.51)$$

którą zapiszemy krócej

$$\sigma_r^{(i)} = -\kappa^{(i)} \sigma_\varphi^{(i)} - \omega^{(i)} \sigma_\varphi^{(i+1)}$$

gdzie

$$\kappa^{(i)} = \frac{1}{2} \frac{g}{kr_{(i-1)}} \quad \text{dla } i = 1, \dots, k; \quad \sigma_\varphi^{(k+1)} = 0 \quad (5.52)$$

$$\omega^{(i)} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{r_{(i-1)} + r_{(i)}}{r_{(i-1)} \cdot r_{(i)}} \frac{g}{k} & \text{dla } i = 1, \dots, k-1 \quad \text{oraz} \quad \omega^{(k)} = 0 \end{cases}$$

Trzeba zauważyć, że teraz naprężenia promieniowe i-tej warstwy zależą od naprężeń obwodowych tej warstwy oraz naprężeń obwodowych warstwy sąsiedniej o numerze (i-1). Zauważmy też, że uprzednio rozpatrywany przypadek cienkich powłok otrzymamy, jeśli położymy  $\kappa^{(i)} = \omega^{(i)} = 0$ , dla  $i = 1, 2, \dots, k$ . Równania wiążące prędkości odkształceń sprężystych i plastycznych w poszczególnych warstwach są analogiczne do wównań (5.3). Jednakże, podstawiając do nich zależność odkształceń sprężystych od naprężeń opisaną przez prawo Hooke'a i uwzględniając naprężenia promieniowe, otrzymujemy układ równań wyraźnie różniący się od analogicznego układu równań (5.4). Teraz ma on postać

$$\frac{\dot{\sigma}_z^{(o)}}{E^{(o)}} - \frac{2\nu^{(o)}}{E^{(o)}} \dot{\sigma}_\varphi^{(o)} + \dot{\epsilon}_z^{(o)p} = \dot{\epsilon}$$

$$\frac{\dot{\sigma}_z^{(i)}}{E^{(i)}} - \frac{\nu^{(i)}}{E^{(i)}} (1 - \kappa^{(i)}) \dot{\sigma}_\varphi^{(i)} + \frac{\nu^{(i)}}{E^{(i)}} \omega^{(i)} \dot{\sigma}_\varphi^{(i+1)} + \dot{\epsilon}_z^{(i)p} = \dot{\epsilon} \quad (5.53)$$

$$\frac{\dot{\sigma}_\varphi^{(o)}}{E^{(o)}} - \frac{\nu^{(o)}}{E^{(o)}} (\dot{\sigma}_\varphi^{(o)} + \dot{\sigma}_z^{(o)}) + \dot{\epsilon}_\varphi^{(o)p} = \frac{\dot{\sigma}_\varphi^{(i)}}{E^{(i)}} (1 + \nu^{(i)} \kappa^{(i)}) - \frac{\nu^{(i)}}{E^{(i)}} \dot{\sigma}_z^{(i)} + \frac{\nu^{(i)}}{E^{(i)}} \omega^{(i)} \dot{\sigma}_\varphi^{(i+1)} + \dot{\epsilon}_\varphi^{(i)p}$$

dla  $i = 1, 2, \dots, k$  oraz  $\sigma_\varphi^{(k+1)} = 0$ .

Jeśli położymy  $\kappa^{(i)} = \omega^{(i)} = 0$  to układ (5.53) będzie uogólnieniem układu (5.4) na przypadek wielu cienkościennych powłok.

Aby obliczyć składowe prędkości odkształceń plastycznych, skorzystamy z warunków plastyczności Hubera - Misesa dla rdzenia i warstwy wierzchniej (wzór (5.37), z prawa płynięcia (wzory analogiczne do (5.9a) i (5.12)) oraz z równań zgodności (5.13). Prędkości odkształceń plastycznych rdzenia próbki będą opisywane w dalszym ciągu wzorami (5.38<sub>1</sub>) oraz (5.38<sub>2</sub>), natomiast w poszczególnych warstwach przyjmują postać analogiczną do (5.38<sub>3</sub>) oraz (5.38<sub>4</sub>), mianowicie

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_z^{(i)p} &= a^{(i)} \dot{\sigma}_z^{(i)} + d_1^{(i)} \dot{\sigma}_\varphi^{(i)} + e_1^{(i)} \dot{\sigma}_\varphi^{(i+1)} \\ \dot{\varepsilon}_\varphi^{(i)p} &= d_2^{(i)} \dot{\sigma}_z^{(i)} + b^{(i)} \dot{\sigma}_\varphi^{(i)} + e_2^{(i)} \dot{\sigma}_\varphi^{(i+1)}\end{aligned}\quad (5.54)$$

dla  $i = 1, \dots, k-1$ , oraz  $\sigma_\varphi^{(k+1)} = 0$ , gdzie

$$\begin{aligned}a^{(i)} &\equiv \frac{\left(2\sigma_z^{(i)} - B^{(i)}\sigma_\varphi^{(i)} + \omega^{(i)}\sigma_\varphi^{(i+1)}\right)^2}{4\left(\sigma_\varphi^{(i)}\right)^2 H^{(i)}} \\ b^{(i)} &\equiv \frac{\left(A^{(i)}\sigma_\varphi^{(i)} - \sigma_z^{(i)} + \omega^{(i)}\sigma_\varphi^{(i+1)}\right)\left[\left(A^{(i)} + D^{(i)}\kappa^{(i)}\right)\sigma_\varphi^{(i)} + D^{(i)}\omega^{(i)}\sigma_\varphi^{(i+1)} - B^{(i)}\sigma_z^{(i)}\right]}{4\left(\sigma_\varphi^{(i)}\right)^2 H^{(i)}} \\ d_1^{(i)} &\equiv \frac{\left(-B^{(i)}\sigma_\varphi^{(i)} + 2\sigma_z^{(i)} + \omega^{(i)}\sigma_\varphi^{(i+1)}\right)\left[\left(A^{(i)} + D^{(i)}\kappa^{(i)}\right)\sigma_\varphi^{(i)} + D^{(i)}\omega^{(i)}\sigma_\varphi^{(i+1)} - B^{(i)}\sigma_z^{(i)}\right]}{4\left(\sigma_\varphi^{(i)}\right)^2 H^{(i)}} \\ d_2^{(i)} &\equiv \frac{\left(A^{(i)}\sigma_\varphi^{(i)} - \sigma_z^{(i)} + \omega^{(i)}\sigma_\varphi^{(i+1)}\right)\left(2\sigma_z^{(i)} - B^{(i)}\sigma_\varphi^{(i)} + \omega^{(i)}\sigma_\varphi^{(i+1)}\right)}{4\left(\sigma_\varphi^{(i)}\right)^2 H^{(i)}} \\ e_1^{(i)} &\equiv \frac{\left(-B^{(i)}\sigma_\varphi^{(i)} + 2\sigma_z^{(i)} + \omega^{(i)}\sigma_\varphi^{(i+1)}\right)\left(D^{(i)}\sigma_\varphi^{(i)} + 2\omega^{(i)}\sigma_\varphi^{(i+1)} - \sigma_z^{(i)}\right)\omega^{(i)}}{4\left(\sigma_\varphi^{(i)}\right)^2 H^{(i)}} \\ e_2^{(i)} &\equiv \frac{\left(A^{(i)}\sigma_\varphi^{(i)} - \sigma_z^{(i)} + \omega^{(i)}\sigma_\varphi^{(i+1)}\right)\left(D^{(i)}\sigma_\varphi^{(i)} + 2\omega^{(i)}\sigma_\varphi^{(i+1)} - \sigma_z^{(i)}\right)\omega^{(i)}}{4\left(\sigma_\varphi^{(i)}\right)^2 H^{(i)}}\end{aligned}\quad (5.55)$$

$$A^{(i)} \equiv 2 + \kappa^{(i)}$$

dla  $B^{(i)} \equiv 1 - \kappa^{(i)}$

$$D^{(i)} \equiv 1 + \kappa^{(i)}$$

oraz  $H^{(i)} = \frac{\partial \sigma_\varphi^{(i)}}{\partial \lambda^{(i)}}$

Zmianę wielkości  $\lambda^{(i)}$  na kolejnym kroku obliczeń określamy na podstawie wzoru

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}^{(i)} &= \frac{\left(A^{(i)} + D^{(i)}\kappa^{(i)}\right)\sigma_\varphi^{(i)} + D^{(i)}\omega^{(i)}\sigma_\varphi^{(i+1)} - B^{(i)}\sigma_z^{(i)}}{\sigma_\varphi^{(i)}\sqrt{2H^{(i)}}}\dot{\sigma}_\varphi^{(i)} + \\ &+ \frac{D^{(i)}\sigma_\varphi^{(i)} + 2\omega^{(i)}\sigma_\varphi^{(i+1)} + \sigma_z^{(i)}}{\sigma_\varphi^{(i)}\sqrt{2H^{(i)}}}\omega^{(i)}\dot{\sigma}_\varphi^{(i+1)} + \frac{-B^{(i)}\sigma_\varphi^{(i)} + \omega^{(i)}\sigma_\varphi^{(i+1)} + 2\sigma_z^{(i)}}{\sigma_\varphi^{(i)}\sqrt{2H^{(i)}}}\dot{\sigma}_z^{(i)}\end{aligned}\quad (5.56)$$

Zwróćmy uwagę, że współczynniki  $a^{(i)}, \dots, e^{(i)}$  są funkcjami naprężeń i zależą od aktualnej granicy plastyczności i stałych materiałowych w danej powłoce. Dla

ostatniej powłoki (k) wzory (5.55) upraszczają się. Nie występują w nich ostatnie człony zależne od naprężeń w sąsiedniej strefie (i+1), gdyż  $\omega^{(k)} = 0$ ,  $\sigma_j^{(k+1)} = 0$ .

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_z^{(k)p} &= \mathbf{a}^{(k)} \dot{\sigma}_z^{(k)} + \mathbf{d}_1^{(k)} \dot{\sigma}_\varphi^{(k)} \\ \dot{\epsilon}_\varphi^{(k)p} &= \mathbf{d}_2^{(k)} \dot{\sigma}_z^{(k)} + \mathbf{b}^{(k)} \dot{\sigma}_\varphi^{(k)} \end{aligned} \quad (5.57)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(k)} &\equiv \frac{(2\sigma_z^{(k)} - B^{(k)}\sigma_\varphi^{(k)})^2}{4(\sigma_o^{(k)})^2 H^{(k)}} \\ \mathbf{b}^{(k)} &\equiv \frac{(A^{(k)}\sigma_\varphi^{(k)} - \bar{\sigma}_z^{(k)})[(A^{(k)} + D^{(k)}\kappa^{(k)})\sigma_\varphi^{(k)} - B^{(k)}\sigma_z^{(k)}]}{4(\sigma_o^{(k)})^2 H^{(k)}} \\ \mathbf{d}_1^{(k)} &\equiv \frac{(-B^{(k)}\sigma_\varphi^{(k)} + 2\sigma_z^{(k)})[(A^{(k)} + D^{(k)}\kappa^{(k)})\sigma_\varphi^{(k)} - B^{(k)}\sigma_z^{(k)}]}{4(\sigma_o^{(k)})^2 H^{(k)}} \\ \mathbf{d}_2^{(k)} &\equiv \frac{(A^{(k)}\sigma_\varphi^{(k)} - \bar{\sigma}_z^{(k)})(2\sigma_z^{(k)} - B^{(k)}\sigma_\varphi^{(k)})}{4(\sigma_o^{(k)})^2 H^{(k)}} \end{aligned} \quad (5.58)$$

W przypadku, gdy w każdej z powłok tworzących warstwę wierzchnią przyjmiemy płaski stan naprężenia, to  $\omega^{(i)} = \kappa^{(i)} = 0$ , a równania (5.54) upraszczają się do postaci wyprowadzonej w rozdziale 5.3 (wzory (5.38<sub>3</sub>) oraz (5.38<sub>4</sub>)).

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_z^{(i)p} &= \mathbf{a}^{(i)} \dot{\sigma}_z^{(i)} + \mathbf{d}^{(i)} \dot{\sigma}_\varphi^{(i)} \\ \dot{\epsilon}_\varphi^{(i)p} &= \mathbf{d}^{(i)} \dot{\sigma}_z^{(i)} + \mathbf{b}^{(i)} \dot{\sigma}_\varphi^{(i)} \end{aligned} \quad (5.60)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(i)} &\equiv \frac{(2\sigma_z^{(i)} - \sigma_\varphi^{(i)})^2}{4(\sigma_o^{(i)})^2 H^{(i)}} \\ \mathbf{b}^{(i)} &\equiv \frac{(2\sigma_\varphi^{(i)} - \sigma_z^{(i)})^2}{4(\sigma_o^{(i)})^2 H^{(i)}} \\ \mathbf{d}^{(i)} &\equiv \frac{(2\sigma_z^{(i)} - \sigma_\varphi^{(i)})(2\sigma_\varphi^{(i)} - \sigma_z^{(i)})}{4(\sigma_o^{(i)})^2 H^{(i)}} \end{aligned} \quad (5.61)$$

dla  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Podobnie jak w rozdziale 5.3, układ powyższych równań można napisać w postaci macierzowej, gdzie  $i, j = 1, 2, \dots, 2k+1$ ,

$$[M_{ij}] \{\dot{\sigma}_j\} = \{\dot{\epsilon}_i\} \quad (5.62)$$

a  $[M_{ij}]$  ma postać przedstawioną w poniższej tabelicy:

$\frac{1}{E^{(0)}} + 2\chi$	$\gamma$	0	$\gamma$	0	$\gamma$	0	$\gamma$	0
0	$d_1^{(1)} - \frac{v^{(1)}}{E^{(1)}}(1 - \kappa^{(1)})$	$a^{(1)} + \frac{1}{E^{(1)}}$	$e_1^{(1)} + \frac{v^{(1)}}{E^{(1)}}\omega^{(1)}$	0	0	0	0	0
0	0		$d_1^{(2)} - \frac{v^{(2)}}{E^{(2)}}(1 - \kappa^{(2)})$	$a^{(2)} + \frac{1}{E^{(2)}}$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$d_1^{(k-1)} - \frac{v^{(k-1)}}{E^{(k-1)}}(1 - \kappa^{(k-1)})$	$a^{(k-1)} + \frac{1}{E^{(k-1)}}$	$e_1^{(k-1)} + \frac{v^{(k-1)}}{E^{(k-1)}}\omega^{(k-1)}$	0
0	0	0	0	0	$\delta$	0	$d^{(k)} - \frac{v^{(k)}}{E^{(k)}}(1 - \kappa^{(k)})$	$a_k + \frac{1}{E_k}$
$\chi + \frac{v^{(0)}}{E^{(0)}}$	$\delta + c^{(1)} + \frac{v^{(1)}}{E^{(1)}}\kappa^{(1)}$	$d_2^{(1)} - \frac{v^{(1)}}{E^{(1)}}$	$\delta + e_2^{(1)} + \frac{v^{(1)}}{E^{(1)}}\omega^{(1)}$	0	$\delta$	0	$\delta$	0
$\chi + \frac{v^{(0)}}{E^{(0)}}$	$\delta$	0	$\delta + c^{(2)} + \frac{v^{(2)}}{E^{(2)}}\kappa^{(2)}$	$d_2^{(2)} - \frac{v^{(2)}}{E^{(2)}}$	$\delta$	0	$\delta$	0
$\chi + \frac{v^{(0)}}{E^{(0)}}$	$\delta$	0	$\delta$	0	$\delta + c^{(k-1)} + \frac{v^{(k-1)}}{E^{(k-1)}}\kappa^{(k-1)}$	$d_2^{(k-1)} - \frac{v^{(k-1)}}{E^{(k-1)}}$	$\delta + e_2^{(k-1)} + \frac{v^{(k-1)}}{E^{(k-1)}}\omega^{(k-1)}$	0
$\chi + \frac{v^{(0)}}{E^{(0)}}$	$\delta$	0	$\delta$	0	$\delta$	0	$\delta + c^{(k)} + \frac{v^{(k)}}{E^{(k)}}\kappa^{(k)}$	$d_2^{(k)} - \frac{v^{(k)}}{E^{(k)}}$

Wielkości  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $d_i$ ,  $\chi$ , oraz  $H$  zostały zdefiniowane wcześniej.

Ponadto

$$\begin{aligned} \{\dot{\sigma}_i\} &= \{\dot{\sigma}_z^{(0)}, \dot{\sigma}_\varphi^{(1)}, \dot{\sigma}_z^{(1)}, \dots, \dot{\sigma}_\varphi^{(k)}, \dot{\sigma}_z^{(k)}\}^T \\ \{\dot{\epsilon}_i\} &= \left\{ \underbrace{\dot{\epsilon}_1, \dots, \dot{\epsilon}_k}_{k-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_k \right\}^T \end{aligned} \quad (5.63a)$$

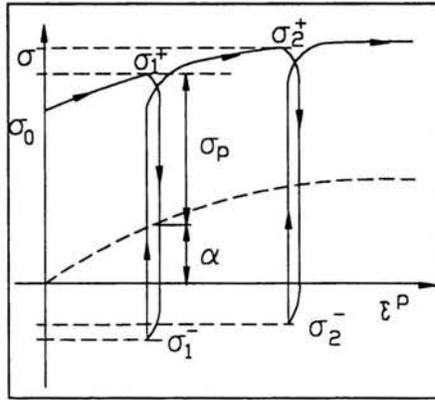
natomiast

$$c_i = b_i + \frac{1}{E_i}, \quad \gamma = \frac{2g}{kR} \left( \chi + \frac{\nu_o}{E_o} \right), \quad \delta = \frac{g}{kR} \left( \chi + \frac{1 - \nu_n}{E_o} \right) \quad (5.63b)$$

## 5.5. Identyfikacja wzmocnienia kinematycznego i izotropowego

Jak widać z analizy przedstawionej w punktach 5.2 i 5.3, istotnym problemem pozostaje identyfikacja udziału części izotropowej i kinematycznej we wzmocnieniu mieszanym. Można ją przeprowadzić w różny sposób, w zależności od liczby danych jakimi dysponujemy. Celem identyfikacji jest znalezienie wartości współczynnika  $c$  oraz wielkości  $\sigma'_i$  w wyrażeniach (5.7) i (5.8). W ogólnym przypadku będą to funkcje parametru  $\lambda$ , który opisuje wielkość odkształcenia plastycznego. Pierwsza z nich, poprzez swój związek z tensorem  $\alpha_{ij}$  opisuje wzmocnienie kinematyczne, druga zaś jest równa modułowi stycznemu  $H_i$  krzywej wzmocnienia izotropowego. Celem przedstawionych poniżej rozważań, będzie wybór takiego sposobu identyfikacji tych wielkości aby przy minimalnej liczbie danych wejściowych uzyskać możliwie najlepszy opis rzeczywistego zachowania materiału.

Jednym z prostszych sposobów wprowadzenia danych uwzględniających wzmocnienie mieszane jest skorzystanie ze współczynnika Bauschingera  $\beta$ , który określa udział wzmocnienia kinematycznego we wzmocnieniu mieszanym. Współczynnik ten wprowadza jednak silny warunek na przebieg krzywej  $c(\lambda)$  opisującej wzmocnienie kinematyczne - musi być ona podobna do krzywej  $\sigma^+(\lambda)$ , która określa całkowite wzmocnienie materiału (rys.5.3).



Rys. 5.3 Wzmocnienie mieszane i schemat metody "kolejnych odciążań" [84]

Współczynnik Bauschigera  $\beta$  przy oznaczeniach pokazanych na rys. 5.3, zdefiniowany jest następująco

$$\beta = \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2(\sigma^+ - \sigma_0)} = \text{const.} \quad (5.62)$$

Wyznaczyć go można z prostego doświadczenia polegającego na jednoosiowym rozciąganiu i ściśnięciu próbki. Wówczas udziały wzmocnienia kinematycznego  $\alpha$  i izotropowego  $\sigma_p$  opisują wzory

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} \\ \sigma_p &= \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2} \end{aligned} \quad (5.63)$$

Na podstawie wzorów (5.62) i (5.63) otrzymujemy

$$\alpha = \beta(\sigma^+ - \sigma_0) \quad (5.64)$$

a po zróżniczkowaniu

$$\dot{\alpha} = \beta \frac{\partial \sigma^+}{\partial \lambda} \dot{\lambda} = \beta (\sigma^+)' \dot{\lambda} \quad (5.65)$$

Uwzględniając, że wielkość  $(\sigma^+)' = H$  czyli jest równa modułowi stycznym otrzymanemu w próbie jednoosiowego rozciągania oraz, że (por. 5.7) oraz (5.8)

$$\dot{\alpha} = c(\sigma^+ - \alpha)\dot{\lambda} \quad (5.66)$$

otrzymujemy

$$c = \frac{\beta(\sigma^+)'}{\sigma^+ - \alpha} = \frac{\beta H}{\sigma_0} \quad (5.67)$$

Podobnie można wyznaczyć udział wzmocnienia izotropowego we wzmocnieniu mieszanym. Mianowicie, jeżeli (rys. 5.3)

$$\sigma_p = \sigma^+ - \alpha \quad (5.68)$$

to

$$\dot{\sigma}_p = (\sigma^+)'\dot{\lambda} - \beta(\sigma^+)'\dot{\lambda} = (1-\beta)(\sigma^+)'\dot{\lambda} \quad (5.69)$$

Z drugiej strony

$$\dot{\sigma}_p = \sigma_0'\dot{\lambda} \quad (5.70)$$

zatem

$$\sigma_0' = (1-\beta)H \quad (5.71)$$

Zastosowanie współczynnika Bauschingera dla określenia udziału wzmocnienia kinematycznego ma swoje zalety, ale ma też szereg wad. Podstawową zaletą jest fakt, że wielkość ta jest znana dla wielu materiałów i często można się posłużyć w badaniach symulacyjnych jej wartościami stabilizowanymi. Wadą takiego postępowania jest nieuwzględnienie zmienności współczynnika Bauschingera  $\beta$  w funkcji odkształceń plastycznych. Można wprawdzie wprowadzić jego zależność od odkształceń plastycznych, ale wymagałoby to wykonania dodatkowych doświadczeń i wówczas ta stosunkowo prosta metoda znacznie by się skomplikowała.

Innym, podobnym sposobem określenia udziału poszczególnych wzmocnień we wzmocnieniu całkowitym, jest wprowadzenie wielkości  $\delta$  opisującej udział wzmocnienia kinematycznego we wzmocnieniu całkowitym. Mianowicie, jeżeli

$$H_k = \delta H, \quad (5.72)$$

jest modułem stycznym wzmocnienia kinematycznego, to

$$H_i = (1-\delta)H, \quad (5.73)$$

jest modułem stycznym wzmocnienia izotropowego, przy czym  $H$  opisuje moduł styczny wzmocnienia całkowitego. Wielkość  $\delta$  jest pozbawiona ograniczeń narzuconych na współczynnik Bauschingera. Wartość współczynnika Bauschingera

zawiera się w przedziale  $0 \leq \beta \leq 1$ , natomiast  $\delta$  może przyjmować dowolne wartości. Przy  $0 \leq \delta \leq 1$  odpowiada ona współczynnikowi Bauschingera, natomiast dla  $\delta > 1$  wartość  $H_i = 1 - \delta < 0$  co odpowiada zmniejszaniu się promienia powierzchni płynięcia.

Najpełniejszy i najbardziej odpowiadający rzeczywistości opis daje wprowadzenie danych otrzymanych z doświadczenia znanego pod nazwą "metody kolejnych odciażeń", zaproponowanej przez Trąmpczyńskiego [84,85]. Doświadczenie to polega na wielokrotnym rozciąganiu i ściskaniu tej samej próbki przy systematycznie powiększanej amplitudzie odkształceń rozciągających i odkształceń ściskających, które powodują jej minimalne uplastycznienie (rys.5.3, [84]). Na wykresie  $\sigma - \epsilon$  wyznaczamy krzywą łączącą środki punktów, w których, po stronie rozciągania rozpoczyna się odciażanie próbki ( $\sigma^+$ ), a po stronie ściskania - przejście w stan plastyczny ( $\sigma^-$ ). Ponieważ

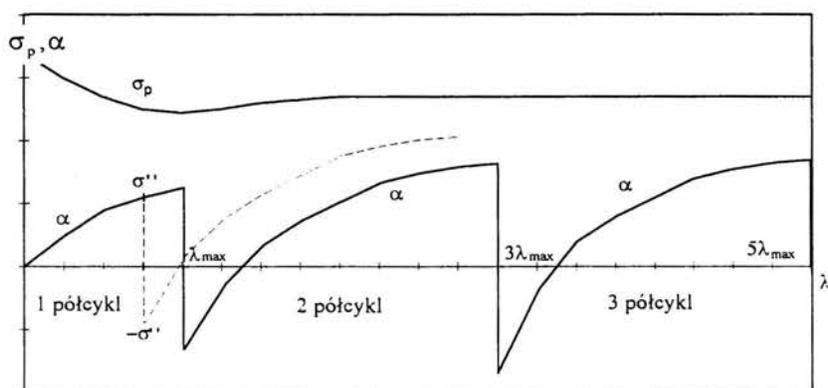
$$d\alpha = c(\lambda)(\sigma - \alpha)d\lambda \quad (5.74)$$

możemy wprowadzić parametr

$$H_i = \frac{d\alpha}{d\lambda} = c(\lambda)(\sigma - \alpha) \quad (5.75)$$

Wielkość  $H_i$  określa nachylenie krzywej  $\alpha(\lambda)$  przedstawionej na rys. 5.3.

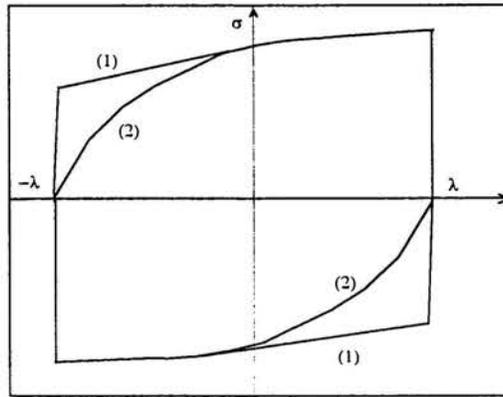
Krzywa  $\alpha(\lambda)$  określa położenie środka powierzchni płynięcia a wielkość  $\sigma_p$  wyznacza promień powierzchni płynięcia. Obie wielkości są funkcjami odkształcenia plastycznego opisanej parametrem  $\lambda$ , przy czym, jak wskazują doświadczenia  $\frac{d\sigma_p}{d\lambda} < \frac{d\alpha}{d\lambda}$ , a przy wartości  $\lambda > 10\%$   $\frac{d\sigma_p}{d\lambda} = 0$ . W opisanym wyżej doświadczeniu mieliśmy do czynienia z monotonicznie rosnącymi odkształceniami rozciągającymi. Odpowiadające im wartości  $\alpha$  przyjmowały wartości dodatnie i leżały na jednej krzywej monotonicznie rosnącej. Dla opisanego obciążenia wielokrotnego lub niskocyklowego zmęczenia należy zadać krzywe  $\alpha(\lambda)$  i  $\sigma_p(\lambda)$  nie tylko dla monotonicznego rozciągania, lecz także dla pierwszych kilku cykli, po których następuje ustalenie pętli histerezy.



Rys.5.4 Przebieg krzywych  $\alpha(\lambda)$  i  $\sigma_p(\lambda)$  w kolejnych półcyklach obciążenia; linią przerywaną zaznaczono przebieg krzywej  $\alpha$  spowodowany wcześniejszym odciążeniem

Doświadczenie pokazuje, że następuje to po 8-9 cyklach. Metodą kolejnych odciążań można wyznaczyć obie krzywe  $\alpha(\lambda)$  i  $\sigma_p(\lambda)$ . Kolejne gałęzie  $\alpha(\lambda)$  określają tę zależność w następujących po sobie półcyklach obciążenia dla pętli histerezy o szerokości  $\lambda_{\max}$  (rys.5.4). Zwróćmy uwagę na opadającą początkowo krzywą  $\sigma_p(\lambda)$  i rosnące na każdym półcyklu wartości  $\alpha(\lambda)$ . W procesie cyklicznych obciążeń mamy do czynienia ze wzrostem wpływu wzmocnienia kinematycznego kosztem malejącego wzmocnienia izotropowego.

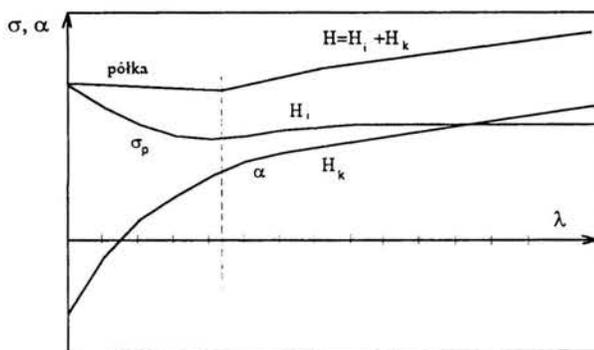
Celem opisywanego modelu obciążanego walca z warstwą wierzchnią jest wyznaczenie stanu naprężeń i odkształceń po obciążaniu i odciążaniu przy uwzględnieniu wzmocnienia mieszanego. W związku z tym należy przestrzegać szeregu wymogów. Jeżeli odciążenie nastąpi zanim zostanie osiągnięta wartość  $\lambda_{\max}$  (np. przy obciążeniu  $\sigma''$  (rys.5.4)), wówczas ponowne obciążenie rozpocznie się od punktu  $-\sigma''$  po krzywej z następnej gałęzi, podobnej do krzywej  $\alpha(\lambda)$ . Dzięki temu, przy zmianie kierunku obciążania, otrzymujemy "gładkie" przejście do płaskiego fragmentu pętli histerezy. Rys.5.5 pokazuje różnicę pomiędzy wynikami otrzymanymi przy wprowadzeniu danych tylko z krzywej monotonicznej (1) oraz krzywej cyklicznej (2) dla pętli ustalonej.



Rys. 5.5 Różnica pomiędzy wynikami otrzymanymi przy wprowadzeniu danych tylko z krzywej monotonicznej (1) oraz krzywej cyklicznej (2) dla pętli ustalonej.

Oznaczmy przez  $\alpha^d$  dewiator tensora  $\alpha$  a przez  $\alpha_o^d$  jego wartość w momencie ostatniej zmiany kierunku obciążenia. W kolejnych cyklach, konieczne jest porównywanie wielkości  $|\alpha^d - \alpha_o^d|$ . Potrzebne jest to dla ustalenia, co dzieje się w danej powłoce lub rdzeniu po zmianie kierunku obciążenia. Jeśli  $|\alpha^d - \alpha_o^d|$  jest mniejsze od wartości poprzedniej oznacza to, że obciążenie w przeciwną stronę będzie następowało po nowej gałęzi  $\alpha$ . Jeśli jednak  $|\alpha^d - \alpha_o^d|$  dalej rośnie, oznacza to, że mimo zmiany kierunku wymagane jest pozostanie na poprzedniej gałęzi  $\alpha$ .

W przypadku wzmocnienia izotropowego, doświadczenie wskazuje, że nie zmienia się ono zbytnio z odkształceniem, a już przy  $\lambda \approx 10\%$  praktycznie zanika i promień powierzchni płynięcia ustala się na pewnej wartości. Zwrócić tu jednak trzeba uwagę na dwa istotne elementy. Po pierwsze, we wstępnej fazie odkształcenia (do  $\varepsilon=2\%$ ) w materiałach rzeczywistych często występują tzw. "półki" (inaczej zwane platformami Lüdersa). Charakteryzują się one brakiem lub minimalnym wzmocnieniem całkowitym materiału. Sytuacja taka wynika na ogół z bardzo specyficznego układu modułów krzywej wzmocnienia kinematycznego  $H_k$  i izotropowego  $H_i$ , które w sumie dają wzmocnienie całkowite. Na rys.5.6 przedstawiony został przykładowy przebieg wszystkich trzech krzywych. Dla opisanego takiego układu, potrzebna jest możliwość wprowadzenia ujemnego modułu  $H_i$ , który opisywałby zmniejszanie się powierzchni płynięcia. Sytuacja taka została w modelu uwzględniona.



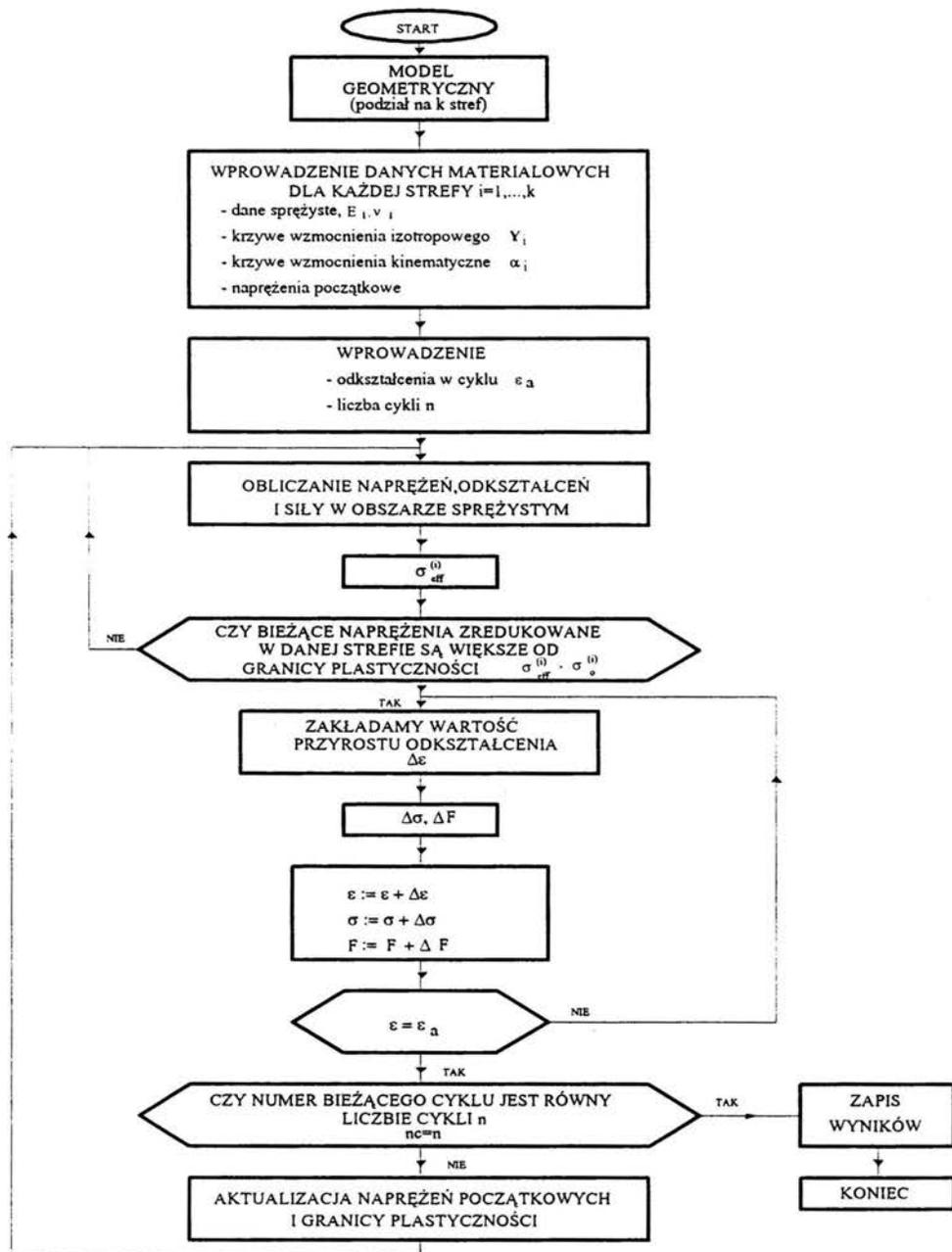
Rys.5.6 Powstanie platformy Lüdersa w wyniku specyficznego układu krzywych wzmocnienia

## 5.6. Opis algorytmu programu obliczeniowego

Analizę naprężeń powstających podczas odkształcania walca z warstwą wierzchnią, umożliwia opracowany algorytm i program obliczeniowy. Program ten symuluje statyczną próbę rozciągania oraz cykliczne odkształcanie próbki z warstwą wierzchnią w zakresie sprężysto - plastycznym. Schemat blokowy programu pokazany jest na rys.5.7.

Pierwsze trzy jego etapy to proces przygotowania i wprowadzania danych. Warstwa musi być podzielona na strefy i każdej strefie trzeba przypisać dane materiałowe i naprężenia początkowe. Wprowadzamy też wartość amplitudy zadanych odkształceń i liczbę cykli odkształceń. Następnym etapem jest obliczenie w zakresie sprężystym. Dla każdej strefy oblicza się odkształcenie, przy którym wartość naprężeń zredukowanych osiągnie granicę plastyczności. Potem program realizowany jest dwutorowo: dla tych stref, gdzie granica plastyczności została osiągnięta obliczamy przyrosty naprężeń korzystając z równań teorii plastyczności. W innych strefach kontynuowane są obliczenia w zakresie sprężystym. Dzieje się tak do chwili, gdy całkowite odkształcenie osiągnie zadaną wartość. Po osiągnięciu tej wartości sprawdzany jest numer cyklu i albo cały proces jest powtarzany dla następnego cyklu po aktualizacji danych, albo, po osiągnięciu założonej liczby cykli następuje zapis wyników i koniec programu. Proces aktualizacji danych realizowany jest przez wprowadzanie do każdego następnego cyklu naprężeń resztkowych

powstałych w wyniku poprzednich cykli obciążeń. Historię obciążenia uwzględnia się również przez modyfikację parametrów opisujących własności plastyczne materiału rdzenia i warstwy wierzchniej w trakcie cyklicznego odkształcania.



Rys.5.7 Schemat blokowy programu analizy walca z warstwą wierzchnią

Algorytm obliczeń stanu naprężeń w walcu kołowym z warstwą wierzchnią, którego schemat blokowy przedstawiony jest na rys.5. można podzielić na 9 etapów.

1\*. Wprowadzenie danych zawierających

- dane geometryczne
  - promień zewnętrzny walca  $R$
  - promień podziału rdzenia i warstwy  $R_0$
  - grubość warstwy  $g$
  - liczbę stref  $k$
- dane materiałowe dla rdzenia ( $i = 0$ ) i każdej strefy osobno ( $i = 1, \dots, k$ )
  - moduły Younga  $E_i$
  - krzywe umocnienia izotropowego  $Y_i$
  - współczynnik Poissona ( $\nu^{(i)}$ )
  - krzywe umocnienia kinematycznego  $\alpha_i$
  - naprężenia wstępne obwodowe  $\sigma_{\theta\phi}^{(i)}$
  - naprężenia wstępne osiowe  $\sigma_{oz}^{(i)}$
- ponadto
  - całkowite odkształcenie w cyklu  $\epsilon_a$
  - przyrost odkształceń w zakresie plastycznym  $d\epsilon$
  - błąd względny obliczenia odkształceń i siły rozciągającej lub ściskającej walec

2\*. Poszukiwanie takiego minimalnego odkształcenia  $\epsilon'_z$ , przy którym przynajmniej w jednej ze stref lub w rdzeniu zostanie przekroczona granica plastyczności. Odkształcenie to wyznaczone jest z zadaną z góry dokładnością. Realizuje się to metodą bisekcji zadanego odkształcenia odpowiednio zmniejszając lub powiększając zadawane odkształcenie sprężyste. Obliczane jest odpowiadające mu naprężenie, oraz naprężenie zredukowane  $\sigma_0^{(i)}$ , które jest porównywane z granicą plastyczności  $\sigma_y^{(i)}$ .

3\*. Zadanie przyrostu odkształcenia  $d\epsilon_z$ . Podobnie jak poprzednio próbka jest odkształcana do takiej wartości  $\epsilon_z$ , przy której kolejna strefa lub rdzeń przejdzie w stan plastyczny. Naprężenie w strefach, które w poprzednim kroku przeszły w stan

plastyczny, jest obliczane na podstawie związków Prandla - Reussa, a w tych, które pozostały w stanie sprężystym według prawa Hooke'a. Zadany przyrost odkształcenia musi być odpowiednio mały, aby z wystarczającą dokładnością aproksymować nieliniowe prawo plastycznego płynięcia. Po znalezieniu wszystkich składowych  $d\sigma_k^{(i)}$  ( $k = r, \varphi, z$ ) odpowiadających odkształceniu  $d\varepsilon^\circ$  obliczamy nowe wartości naprężeń  $\sigma_k^{(i)} := \sigma_k^{(i)} + d\sigma_k^{(i)}$ , a następnie porównujemy naprężenia zredukowane z granicą plastyczności.

4\*. Procedura (3\*) powtarzana jest aż do chwili gdy całkowite odkształcenie osiągnie zadaną wartość  $\varepsilon_a$ .

5\*. Po otrzymaniu stanu naprężeń wywołanego zadanym odkształceniem  $\varepsilon_a$  obliczana jest siła, jaką należałoby przyłożyć do walca, aby otrzymać taki sam stan naprężenia. Siła ta jest sumą sił działających na poszczególne strefy warstwy i rdzeń walca.

6\*. Kolejnym etapem jest odciążanie walca aż do chwili gdy działająca na niego siła spadnie do zera. Jest ono realizowane podobnie jak proces obciążania, z tym, że przyrosty odkształcenia zadawane są z ujemną wartością. Jeżeli w którejkolwiek strefie warstwy lub w rdzeniu nastąpi przejście w stan plastyczny, będą one odkształcały się plastycznie. Uwzględniana jest zmiana granicy plastyczności wynikająca ze wzmocnienia materiału. Na każdym kroku obliczeń określany jest stan naprężeń wywołany zadanym odkształceniem oraz odpowiadająca mu siła, która porównywana jest z siłą wyliczoną w punkcie 5\*. W chwili, gdy siła ta różni się od zera o zadaną w punkcie (1\*) wartość, znajduje się towarzyszące jej odkształcenie.

7\*. Wyliczenie resztkowych naprężeń własnych po odciążeniu, które są różnicą naprężeń otrzymanych w wyniku zadanego odkształcenia  $\varepsilon_a$  (4\*) oraz w wyniku odciążenia (6\*), a następnie obliczenie odkształcenia trwałego, które jest różnicą odkształceń przed i po odciążeniu.

8\*. Postępując podobnie uzyskujemy stan naprężeń dla dowolnego odkształcenia ściskającego a po odciążeniu otrzymujemy pełną pętlę procesu rozciągania i ściskania.

9\*. Ponieważ program przystosowany jest także do obliczeń obciążeń cyklicznych, można zadać dodatkowo liczbę cykli obciążenia  $n$ , a nawet zmienne wartości odkształcenia w poszczególnych cyklach. Dane wejściowe w poszczególnych cyklach są modyfikowane i określane przez stan naprężeń w poprzednim cyklu.

Przedstawiony program obliczeniowy oparty jest na analitycznych rozwiązaniach problemu rozciągania i ściskania osiowo-symetrycznej próbki z warstwą wierzchnią o zmiennych własnościach materiałowych i początkowych naprężeniach własnych. W wyniku obliczeń otrzymujemy naprężenia osiowe i obwodowe (w szczególnych przypadkach także promieniowe) dla zadanego odkształcenia, a także naprężenia resztkowe po odciążeniu próbki. Pozwala to na symulacje monotonicznego oraz niskocyklicznego obciążania próbki z warstwą wierzchnią. W następnym rozdziale program ten zostanie wykorzystany do symulacji zachowania się przykładowych próbek z technologiczną warstwą wierzchnią, oraz symulacji wpływu naturalnej warstwy wierzchniej na stan naprężeń resztkowych, które pozostają po monotonicznym oraz niskocyklicznym obciążaniu próbki.

## Rozdział 6

### SYMULACJA NUMERYCZNA ZACHOWANIA SIĘ WARSTW WIERZCHNICH METALI

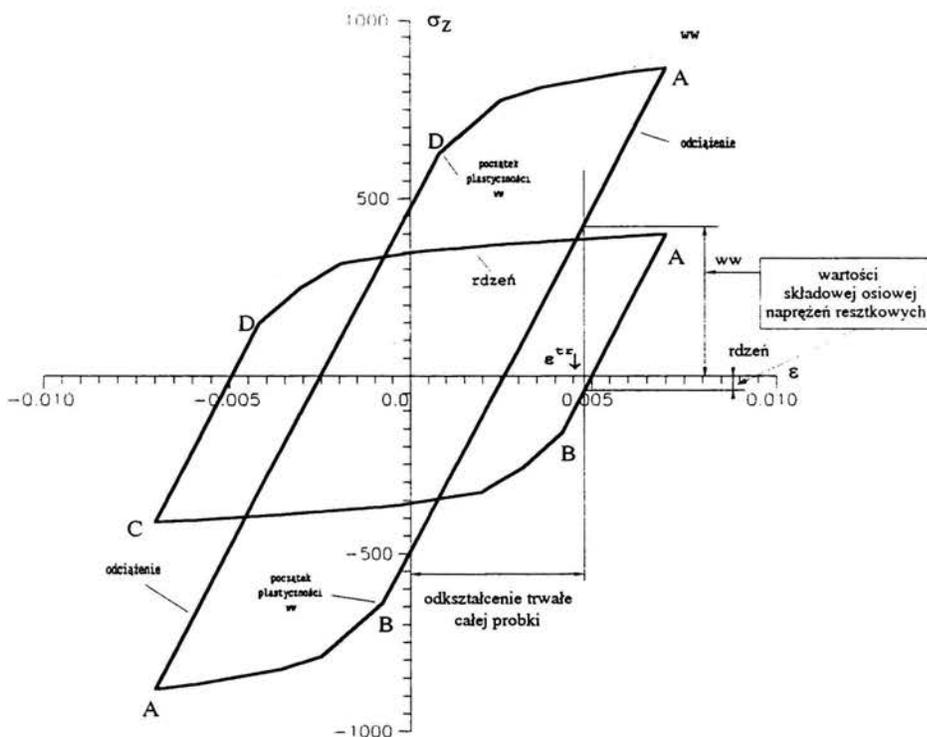
#### 6.1. Wyznaczanie pętli histerezy i naprężeń resztkowych

Opracowany algorytm i program obliczeniowy (rozd.5) umożliwia wyznaczenie naprężeń w warstwie wierzchniej i w rdzeniu odkształcanego cyklicznie elementu osiowo symetrycznego. Jeżeli ustalimy amplitudę odkształcenia, to po kilku cyklach odkształceń ustala się wartość naprężeń resztkowych, zarówno w warstwie wierzchniej jak i w rdzeniu. Podstawowym celem obliczeń jest znalezienie wartości naprężeń resztkowych jakie powstają w badanych warstwach wierzchnich po pierwszym cyklu obciążenia i w stanie ustalonym. Wartości te wyznaczone są dla zadanego odkształcenia całkowitego, które zmienia się w czasie obciążeń cyklicznych od wartości  $-\varepsilon_a$  do  $+\varepsilon_a$ .

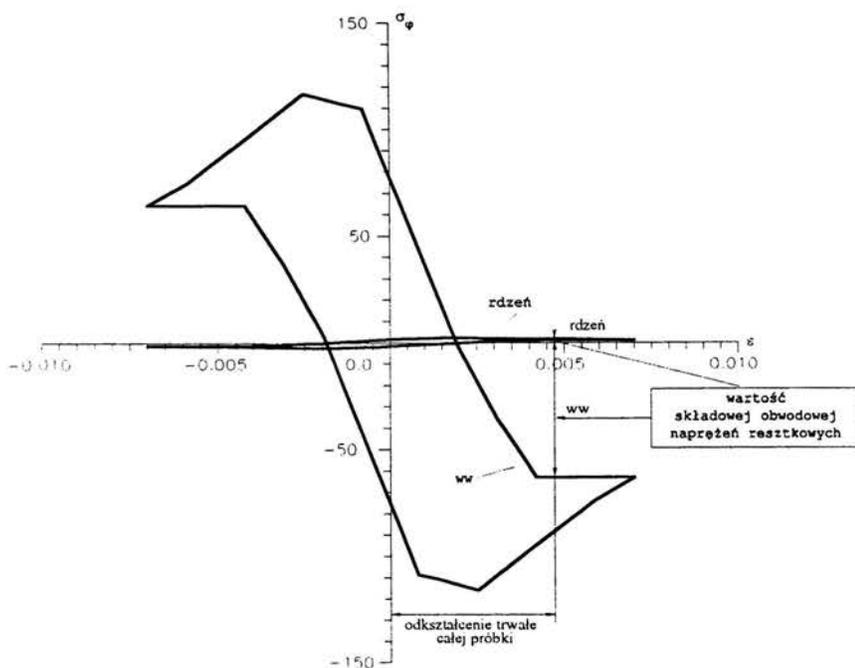
Graficzny obraz wyników analizy numerycznej to pętle histerezy narysowane na podstawie kilkudziesięciu punktów obliczeniowych. Na podstawie wyników obliczeń można wyznaczyć pętle histerezy dla:

- $\sigma_n$  - naprężeń nominalnych, obliczonych jako stosunek przyłożonej siły do aktualnego przekroju całej próbki,
- $\sigma_z^{(c)}$ ,  $\sigma_z^{(s)}$  - naprężeń osiowych w rdzeniu i w warstwie wierzchniej,
- $\sigma_\varphi^{(c)}$ ,  $\sigma_\varphi^{(s)}$  - naprężeń obwodowych w rdzeniu i w warstwie wierzchniej,

W celu wyznaczenia naprężeń nominalnych dla walca z warstwą wierzchnią całkujemy składową osiową naprężeń w rdzeniu i w warstwie wierzchniej po odpowiednich polach, a otrzymaną w ten sposób siłę dzielimy przez całkowite pole przekroju próbki. Można w ten sposób otrzymać pętlę histerezy dla naprężeń nominalnych. Znając ją możemy wyznaczyć odkształcenia trwałe  $\epsilon_{tr}$  całej próbki, czyli odkształcenie jakie pozostaje po jej odciążeniu. Pętle histerezy dla składowych osiowych naprężeń, zarówno dla warstwy wierzchniej jak i dla rdzenia, pokazano schematycznie na rys. 6.1, a dla składowych obwodowych na rys. 6.2. Aby zachować przejrzystość rysunku, nie pokazano na nim pętli histerezy naprężeń nominalnych, a jedynie przecięcie jej z osią odkształceń, pokazujące wielkość odkształcenia trwałego  $\epsilon_{tr}$ .



Rys. 6.1 Schematyczne przedstawienie pętli histerezy całkowitych naprężeń osiowych dla warstwy wierzchniej i rdzenia z charakterystycznymi punktami umożliwiającymi obliczenie osiowych naprężeń resztkowych



Rys. 6.2 Schematyczne przedstawienie pętli histerezy całkowitych naprężeń obwodowych dla warstwy wierzchniej i rdzenia z charakterystycznymi punktami umożliwiającymi obliczenie obwodowych naprężeń resztkowych

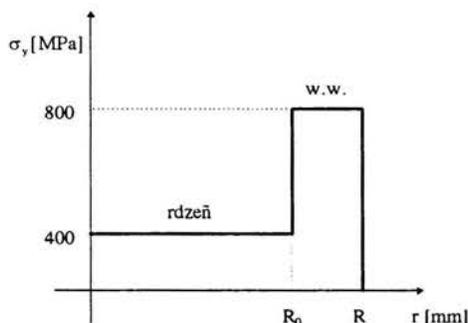
W opracowanym modelu przyjęto założenie płaskich przekrojów co oznacza identyczne odkształcenia osiowe rdzenia i warstwy wierzchniej. Znając odkształcenie trwałe  $\epsilon_{tr}$  całej próbki możemy wyznaczyć naprężenia resztkowe w warstwie wierzchniej i w rdzeniu. Na rys.6.1 pokazano pętlę histerezy składowej osiowej, a na rys.6.2 składowej obwodowej naprężeń resztkowych w warstwie wierzchniej i w rdzeniu. Obie pętle odpowiadają wyznaczonej wartości odkształcenia trwałego  $\epsilon_{tr}$ .

## 6.2 Ilustracja działania programu symulacyjnego na przykładzie technologicznej warstwy wierzchniej

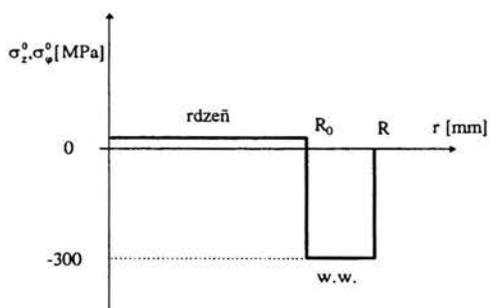
### 6.2.1 Warstwa wierzchnia próbki stalowej modelowana pojedynczą powłoką

Ilustrację działania programu symulującego cykliczne rozciąganie i ściskanie próbki z warstwą wierzchnią przedstawimy na dwóch przykładach: technologicznej warstwy wierzchniej modelowanej pojedynczą powłoką oraz technologicznej

warstwy wierzchniej modelowanej wieloma powłokami. Pierwszy sposób modelowania jest bardzo uproszczony, można go jednak stosować w celu zorientowania się w tendencjach zmian badanych wielkości jakie zachodzą w rdzeniu i w warstwie wierzchniej. Sposób ten jest często wykorzystywany przy modelowaniu warstw galwanicznych, charakteryzujących się skokową zmianą własności [86].



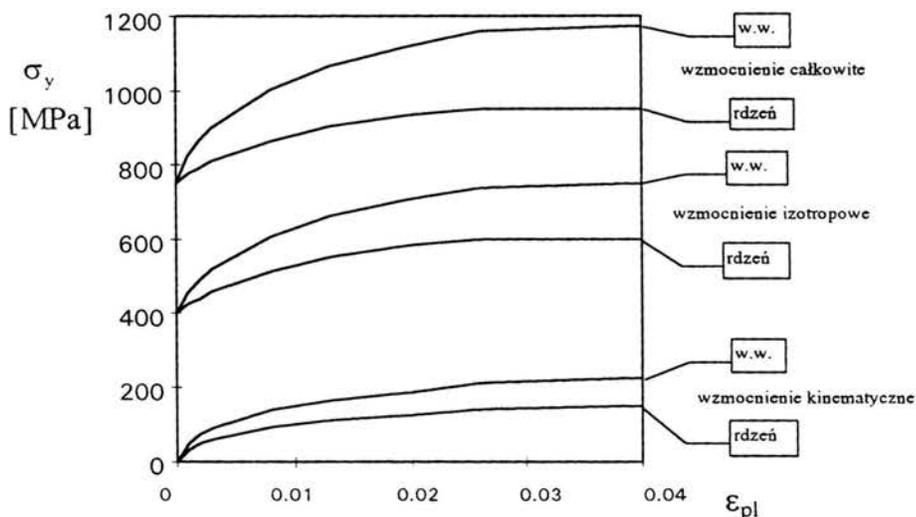
Rys. 6.3a Zmiana granicy plastyczności w próbce z warstwą wierzchnią modelowaną pojedynczą powłoką



Rys. 6.3b Rozkład początkowych naprężeń własnych w próbce z warstwą wierzchnią modelowaną pojedynczą powłoką

Rys. 6.3a przedstawia zmianę granicy plastyczności, a rys. 6.3b rozkład początkowych naprężeń własnych w rdzeniu i warstwie wierzchniej próbki walcowej o grubości  $R = 10$  mm, w której grubość warstwy wierzchniej wynosi 0.2 mm. Przez  $R_0$  oznaczono na rysunku promień rdzenia próbki. Podwyższenie granicy plastyczności przy powierzchni próbki z jednoczesnym wprowadzeniem ścisających naprężeń osiowych i obwodowych modeluje - w uproszczony sposób - zachowanie się próbki stalowej poddanej procesowi azotowania. Dla stali tej moduł

Younga  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa, a współczynnik Poissona  $\nu = 0.3$ . Krzywe wzmocnienia izotropowego i kinematycznego oraz sumaryczna krzywa wzmocnienia uzyskana w procesie monotonicznego rozciągania pokazane są na rysunku 6.4.

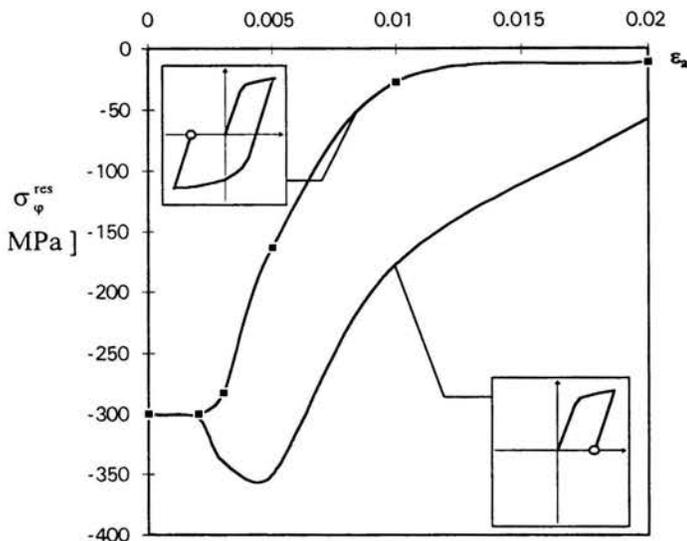


Rys. 6.4 Krzywe wzmocnienia izotropowego i kinematycznego oraz krzywa wzmocnienia całkowitego w funkcji odkształcenia plastycznego

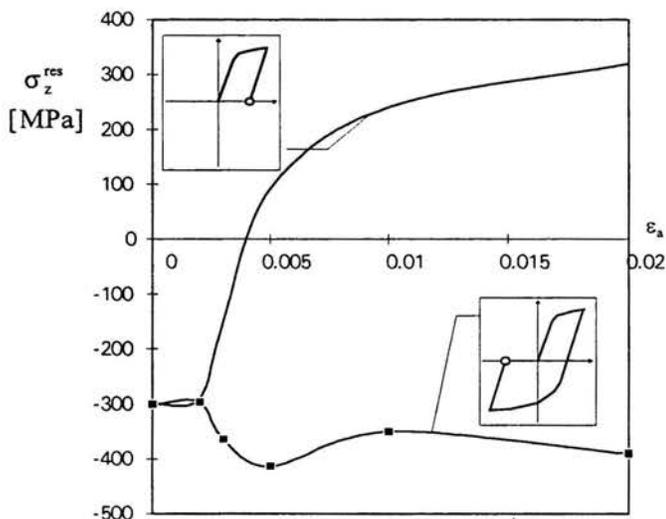
Wyniki symulacji procesu rozciągania i ściskania pokazano na rys. 6.5 - 6.8. Przedstawiono zależność resztkowych naprężeń obwodowych  $\sigma_{\phi}^{res}$  oraz resztkowych naprężeń osiowych  $\sigma_z^{res}$  od maksymalnych wartości odkształceń  $\epsilon_x$ . Zależności te pokazano po pierwszym cyklu obciążenia (rys.6.5 oraz 6.6) a także w stanie ustalonym (rys.6.7 oraz 6.8). Na poszczególnych wykresach porównano naprężenia jakie pozostały w warstwie wierzchniej próbki: 1° - po odciążeniu próbki uprzednio rozciągniętej, 2° - po odciążeniu próbki uprzednio rozciągniętej a następnie ściśniętej. Obie sytuacje oznaczone są na wykresach symbolicznymi etykietami.

Zależność resztkowych naprężeń obwodowych od amplitudy odkształcenia charakteryzuje się dość szybkim zmniejszaniem się ich wartości bezwzględnej. Ma to miejsce zwłaszcza w przypadku odciążania po ściskaniu (rys.6.5) już przy stosunkowo niewielkich amplitudach odkształcenia. Największe zmiany naprężeń resztkowych obwodowych można zauważyć w zakresie niewielkich odkształceń

powodujących częściowe uplastycznienie próbki. Początkowe obniżenie krzywej opisującej zmianę naprężeń obwodowych i osiągnięcie przez nią minimum związane jest z uplastycznieniem rdzenia, podczas gdy warstwa wierzchnia pozostaje sprężysta.



Rys. 6.5 Naprężenia obwodowe w funkcji amplitudy odkształcenia po pierwszym cyklu rozciągania i odciążenia (—) oraz rozciągania, ściskania i odciążenia (—■—).



Rys. 6.6 Naprężenia osiowe w funkcji amplitudy odkształcenia po pierwszym cyklu rozciągania i odciążenia (—) oraz rozciągania, ściskania i odciążenia (—■—).

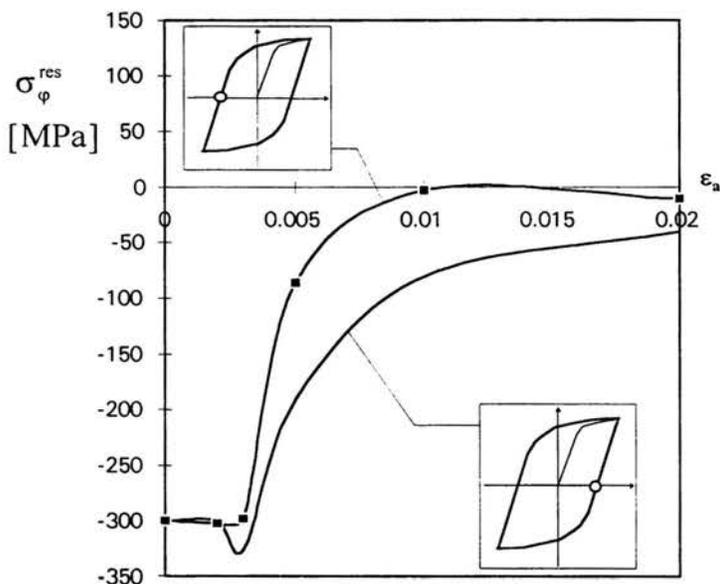
Inaczej zachowują się resztkowe naprężenia osiowe po pierwszym cyklu obciążenia (rys. 6.6). Wzrost amplitudy odkształcenia powoduje ustalenie się tych naprężeń na pewnym poziomie. Poziom ten - różny w zależności od tego, czy naprężenia są mierzone w stanie odciążonym po uprzednim rozciągnięciu próbki czy też po jej rozciągnięciu i ściśnięciu - pozostaje taki sam co do wartości bezwzględnej. Odciążenie po rozciągnięciu próbki powoduje powstanie w niej naprężeń dodatnich, a po rozciągnięciu i ściśnięciu - ujemnych, mimo, że stan początkowy był taki sam dla obu przypadków - silne, ujemne, początkowe naprężenia własne.

Zależność resztkowych naprężeń, zarówno obwodowych jak i osiowych, od amplitudy odkształcenia w stanie ustalonym - po wykonaniu symulacji ok. 10 cykli - nie różni się w sposób zasadniczy od zależności otrzymanych po pierwszym cyklu obciążenia. Na poszczególnych wykresach - podobnie jak poprzednio - porównano naprężenia jakie pozostały w warstwie wierzchniej próbki: 1° - po odciążeniu próbki uprzednio wielokrotnie rozciąganej i ściskanej, przy czym ostatnim aktywnym procesem było rozciąganie, 2° - po odciążeniu próbki uprzednio wielokrotnie rozciąganej i ściskanej, przy czym ostatnim aktywnym procesem było ściskanie. Obie sytuacje oznaczone są na wykresach symbolicznymi etykietami.

Porównując rysunek 6.5 z rysunkiem 6.7 widzimy, że zachowany został charakter badanych krzywych, natomiast widoczna jest wyraźnie szybsza redukcja wartości naprężeń resztkowych. Minimum, które występuje w rozkładzie resztkowych naprężeń obwodowych (rys. 6.7) pojawia się przy mniejszych amplitudach odkształcenia w porównaniu z analogicznym minimum dla tych naprężeń po pierwszym cyklu i obejmuje znacznie węższy zakres odkształceń - gradienty krzywej są większe i spadek wartości naprężeń znacznie szybszy.

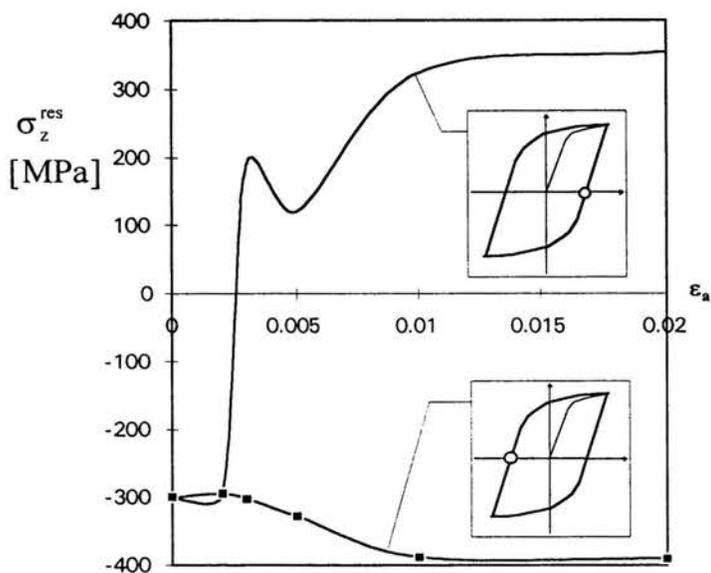
Inaczej zachowują się resztkowe naprężenia osiowe (rys. 6.6, 6.8). Wzrost amplitudy odkształcenia powoduje ustalenie się tych naprężeń na pewnym poziomie. Różnią się one co do znaku w zależności od tego, czy są mierzone w stanie odciążonym po uprzednim rozciągnięciu próbki czy też po jej ściśnięciu, pozostają natomiast takie same co do wartości bezwzględnej. Warto zwrócić uwagę na fakt, że uprzednie rozciągnięcie próbki powoduje powstanie resztkowych naprężeń dodatnich

a ściskanie - ujemnych, mimo, że stan początkowy był taki sam dla obu przypadków - silne ujemne naprężenia własne. Jeżeli po kilku cyklach odkształceń ostatnim aktywnym procesem było rozciąganie, na krzywej  $\sigma_z^{\text{res}} - \varepsilon_a$  pojawi się charakterystyczne załamanie (rys. 6.8). Występuje ono w zakresie małych wartości  $\varepsilon_a$ .

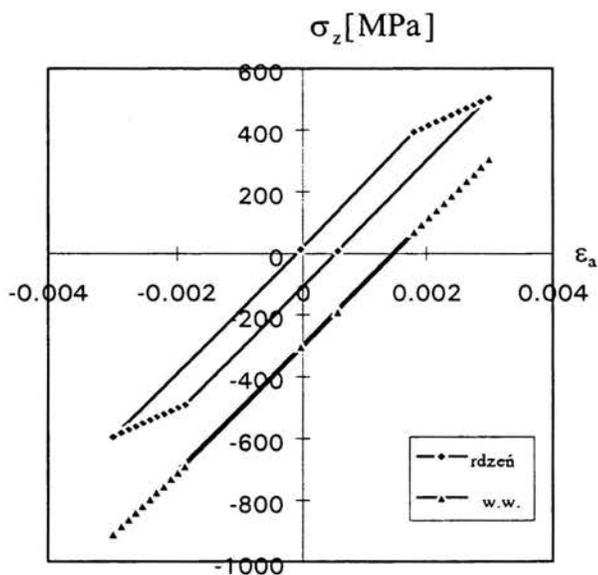


Rys. 6.7 Naprężenia obwodowe w funkcji amplitudy odkształcenia w stanie ustalonym po rozciąganiu i odciążeniu (—) oraz rozciąganiu, ścisaniu i odciążeniu (—■—).

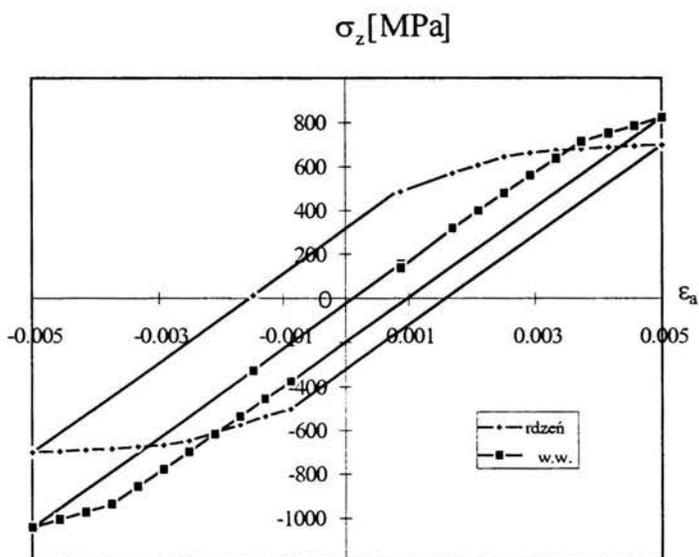
Rysunki 6.9a - 6.9c przedstawiają pętle histerezy naprężeń osiowych w stanie ustalonym dla wybranych wartości amplitudy odkształcenia. Pokazano na nich pętle histerezy dla rdzenia i warstwy wierzchniej przyjmując trzy wartości odkształcenia:  $\varepsilon_a = 0.003$  (rys. 6.9a),  $\varepsilon_a = 0.005$  (rys. 6.9b),  $\varepsilon_a = 0.02$  (rys. 6.9c). W pierwszym przypadku rdzeń ulega uplastycznieniu natomiast warstwa wierzchnia praktycznie pozostaje sprężysta. Przy  $\varepsilon_a = 0.005$ , zarówno rdzeń jak i warstwa wierzchnia ulegają uplastycznieniu, jednak rdzeń wykazuje znacznie większe odkształcenie plastyczne. Natomiast wartość  $\varepsilon_a = 0.02$  powoduje na tyle duże odkształcenie plastyczne całej próbki, że różnice w kształcie i wielkości pętli histerezy rdzenia i warstwy znacznie maleją.



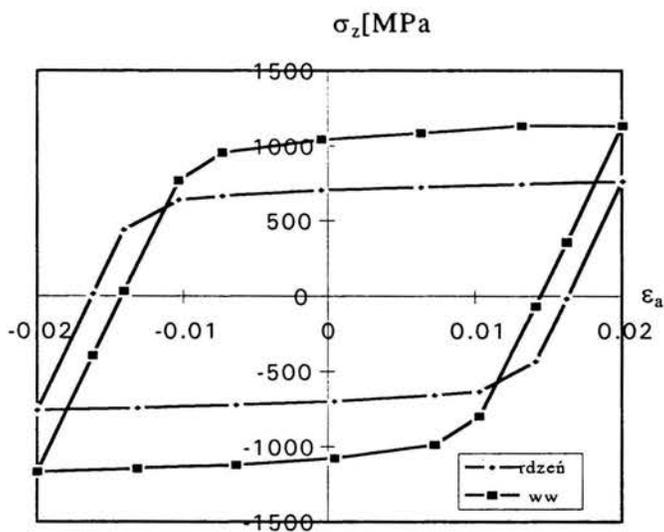
Rys. 6.8 Naprężenia osiowe w funkcji amplitudy odkształcenia w stanie ustalonym po rozciąganiu i odciążeniu (—) oraz rozciąganiu, ściszeniu i odciążeniu (—■—).



Rys. 6.9a Pętle histerezy naprężeń osiowych w stanie ustalonym dla rdzenia i warstwy wierzchniej przy maksymalnych odkształceniach  $\epsilon_a = 0.003$ .



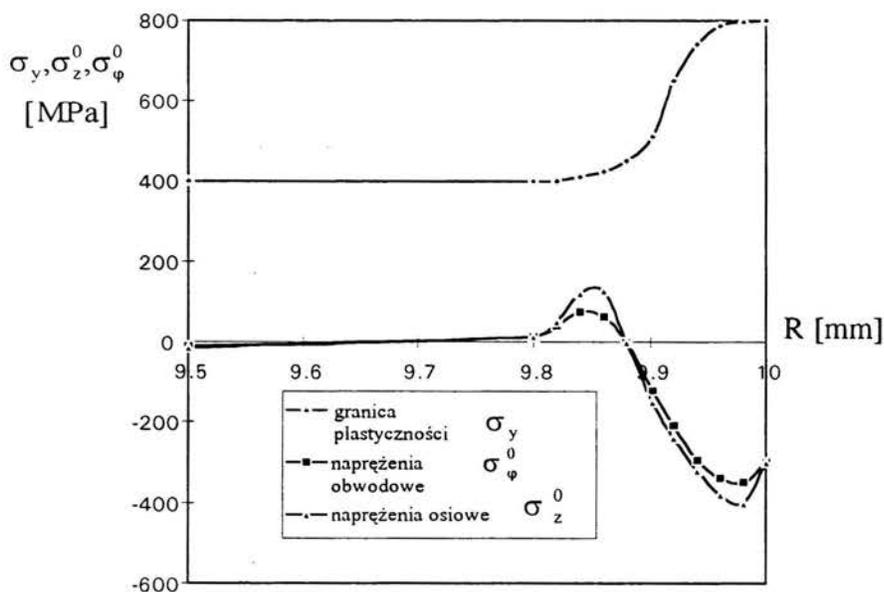
Rys. 6.9b Pętle histerezy naprężeń osiowych w stanie ustalonym dla rdzenia i warstwy wierzchniej przy maksymalnych odkształceniach  $\epsilon_a = 0.005$ .



Rys. 6.9c Pętle histerezy naprężeń osiowych w stanie ustalonym dla rdzenia i warstwy wierzchniej przy maksymalnych odkształceniach  $\epsilon_a = 0.02$ .

## 6.2.2 Warstwa wierzchnia hartowanej indukcyjnie próbki stalowej modelowana wieloma powłokami

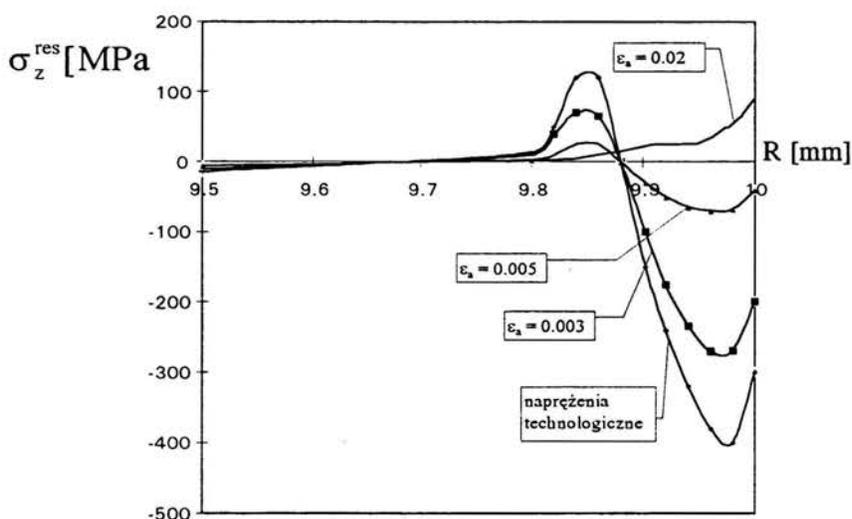
Prezentowane w poprzednim punkcie wyniki badań dotyczyły technologicznej warstwy wierzchniej modelowanej pojedynczą powłoką. W rzeczywistości własności technologicznych warstw wierzchnich zmieniają się w sposób ciągły na ich grubości. Należy więc podzielić warstwę na szereg stref jednorodnych tak, aby krzywą opisującą ciągły przebieg parametrów warstwy zamienić na krzywą schodkową. Na rys. 6.10 pokazano dane doświadczalne opisujące zmianę granicy plastyczności i rozkład początkowych naprężeń własnych (technologicznych) w elemencie walcowym o promieniu 10 mm ze stali 45 hartowanego indukcyjnie. Zostały one przygotowane na podstawie prac [87,88] oraz danych zawartych w zbiorze [89]. Dają one możliwość oszacowania granicy plastyczności w kolejnych strefach warstwy wierzchniej poprzez pomiar twardości kolejnych stref i porównanie ich z wynikami otrzymanymi dla stali 45 ulepszonej cieplnie na taką samą twardość. Wytworzona warstwa wierzchnia miała grubość 0.2 mm.



Rys. 6.10 Zmiana granicy plastyczności i rozkład początkowych naprężeń własnych (technologicznych) dla próbki stalowej hartowanej indukcyjnie; ■, ◆, ▲ oznaczają punkty pomiarowe

W procesie symulacji numerycznej próbkę poddano cyklicznym odkształceniom przemiennym przy czym maksymalna wartość odkształceń  $\epsilon_a$  wynosiła: 0.002, 0.003, 0.004, 0.005, 0.010, 0.020. Rozkład naprężeń resztkowych rejestrowano po jednym cyklu odkształceń oraz po takiej liczbie cykli, dla której wszystkie składowe naprężeń we wszystkich strefach warstwy wierzchniej osiągnęły ustaloną wartość. Stan ten, nazwany stanem nasycenia osiągany był po około 10 cyklach odkształceń [90,91].

Na rys. 6.11 przedstawiono przebieg składowej osiowej naprężeń resztkowych w funkcji promienia próbki, dla różnych wartości maksymalnych odkształceń. Dla porównania pokazano naprężenia technologiczne, które istniały w próbce przed obciążeniem. Naprężenia resztkowe osiowe wraz ze wzrostem maksymalnych odkształceń maleją co do wartości bezwzględnych. Ich rozkład w strefach przylegających do rdzenia, które charakteryzują się taką samą granicą plastyczności jak rdzeń jest odmienny od rozkładu w strefach zewnętrznych, które mają podwyższoną granicę plastyczności. Dla maksymalnych wartości  $\epsilon_a$ , przy których prowadzone były obliczenia ( $\epsilon_a = 0.02$ ) resztkowe naprężenia osiowe zanikają w strefach przylegających do rdzenia, natomiast ustalają się na poziomie 50 - 100 MPa w zależności od strefy w zewnętrznych obszarach warstwy.



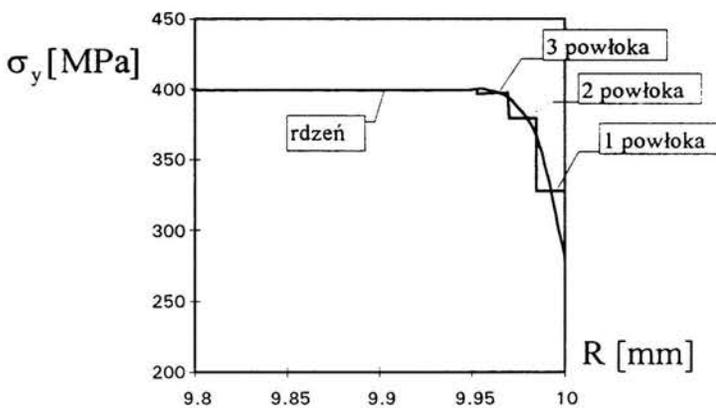
Rys.6.11 Rozkład osiowych naprężeń resztkowych  $\sigma_z^{\text{res}}$  wzdłuż promienia próbki R dla różnych amplitud odkształcenia  $\epsilon_a$

Istotnym wnioskiem wynikającym z przeprowadzonej analizy numerycznej jest zanikanie naprężeń technologicznych w obszarze warstwy, w którym granica plastyczności nie różni się od granicy plastyczności rdzenia (obszar pomiędzy  $R = 9.8$  mm a  $R = 9.9$  mm). W obszarze występowania podwyższonej granicy plastyczności można się spodziewać ustalenia się naprężeń resztkowych na różnych poziomach w zależności od odkształcenia  $\epsilon_a$ . Przy większych wartościach ( $\epsilon_a = 0.02$ ) możliwa jest nawet zmiana znaku naprężeń tak, jak to pokazano na rys. 6.11.

## 6.3 Symulacja procesu obciążania próbki z naturalną warstwą wierzchnią

### 6.3.1 Model obliczeniowy naturalnej warstwy wierzchniej

Korzystając z przedstawionego w rozdz. 5 programu obliczeniowego, dokonamy symulacji procesów monotonicznego i cyklicznego obciążania próbki z naturalną warstwą wierzchnią. Model obliczeniowy naturalnej warstwy wierzchniej jest prostszy w porównaniu z modelem obliczeniowym technologicznej warstwy wierzchniej, gdyż nie występują w nim początkowe naprężenia technologiczne. Charakteryzuje go obniżenie wartości granicy plastyczności w obszarze przypowierzchniowym. Model fenomenologiczny naturalnej warstwy wierzchniej przedstawiony w rozdz. 4 pozwala na oszacowanie zmian granicy plastyczności w funkcji promienia próbki  $R$ . Pokazano je na rys.6.12.



Rys. 6.12 Zmiana granicy plastyczności w próbce z naturalną warstwą wierzchnią i jej aproksymacja linią schodkową

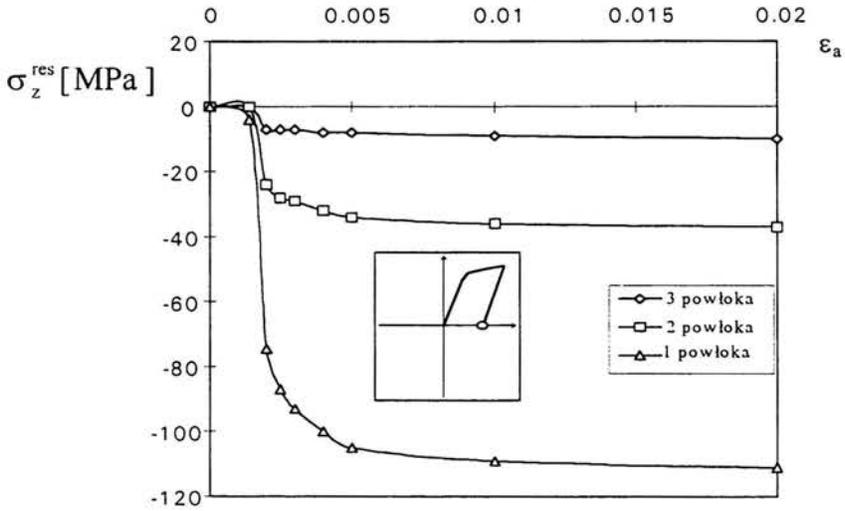
Próbki z naturalną warstwą wierzchnią poddano cyklicznym odkształceniom przemiennym, przy czym wartości maksymalnych odkształceń  $\varepsilon_a$  wynosiły podobnie jak poprzednio: 0.002, 0.003, 0.004, 0.005, 0.010, 0.020. Podobnie jak poprzednio przyjęto, że odkształcenie zmienia się od wartości  $-\varepsilon_a$  do wartości  $+\varepsilon_a$ . Analiza resztkowych naprężeń obwodowych i osiowych przeprowadzona była po jednym cyklu obciążenia oraz po takiej liczbie cykli, dla której wszystkie składowe naprężeń we wszystkich strefach warstwy wierzchniej osiągnęły wartość ustaloną. Podobnie jak poprzednio, stan nasycenia osiągany był po około 10 cyklach odkształceń.

Na poszczególnych rysunkach (6.13 - 6.16) przedstawione zostały zależności resztkowych naprężeń osiowych i obwodowych w naturalnej warstwie wierzchniej w funkcji odkształcenia  $\varepsilon_a$  po jednokrotnym rozciąganiu i odciążeniu oraz po wielokrotnym obciążeniu. Wykresy pokazują przebiegi tych zależności dla pierwszych trzech powłok o grubości jednego ziarna modelujących naturalną warstwę wierzchnią.

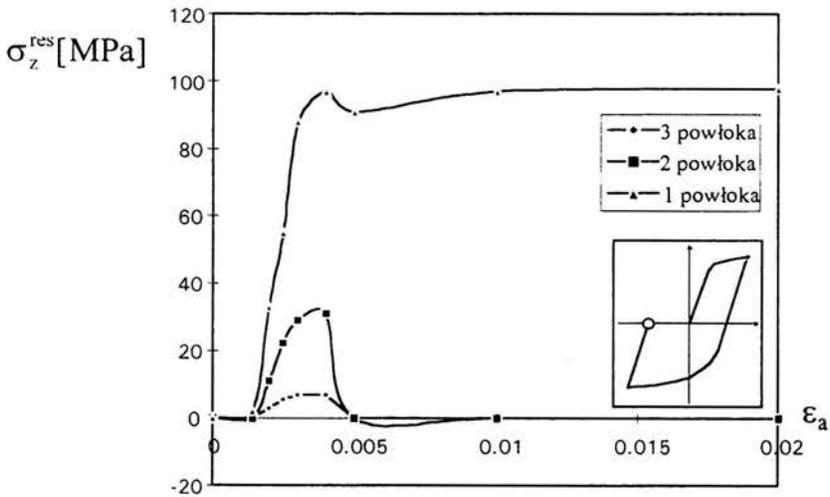
### **6.3.2 Naprężenia resztkowe w próbce z naturalną warstwą wierzchnią po jednokrotnym obciążeniu**

Na rys. 6.13a,b pokazano resztkowe naprężenia osiowe obliczone po jednokrotnym rozciągnięciu a następnie odciążeniu próbki (rys. 6.13a) oraz te same naprężenia po rozciągnięciu, ściśnięciu i odciążeniu (rys. 6.13b). Jak widać największe co do wartości bezwzględnej naprężenia resztkowe pozostają w powłoce, w której wystąpiło największe obniżenie granicy plastyczności, czyli w powłoce zewnętrznej (1 powłoka na rys. 6.12). Stan naprężeń pokazany na rys. 6.13a jest możliwy do przewidzenia - naprężenia ustalają się na różnych poziomach, w zależności od granicy plastyczności poszczególnych powłok warstwy. Jednak już następny półcykl (ściskanie) wytwarza stan trudny do przewidzenia, zwłaszcza że jest on różny dla różnych powłok (rys. 6.13b). W powłoce zewnętrznej ustalają się naprężenia, których wykres jest podobny do wykresu naprężeń po rozciąganiu lecz są one przeciwnego znaku. Natomiast w powłokach wewnętrznych, w których

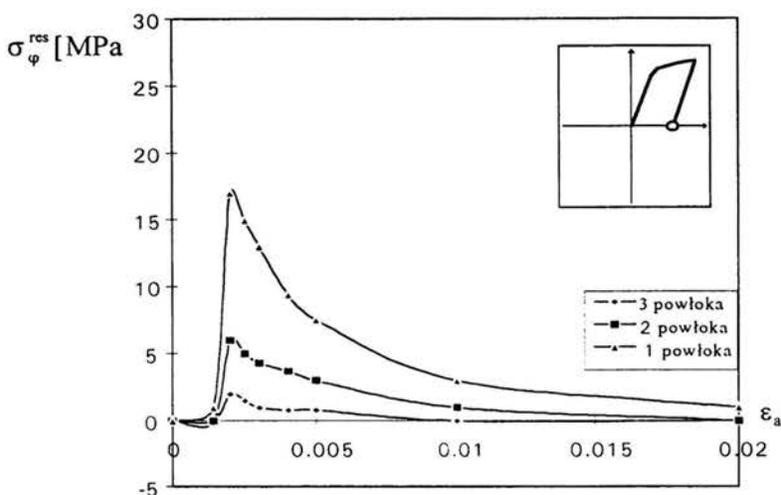
wpływ powierzchni jest mniejszy, powstają naprężenia resztkowe jedynie dla małych wartości odkształceń  $\epsilon_a$  ( $\epsilon_a < 0.005$ ), natomiast dla większych maleją do zera.



Rys. 6.13a Resztkowe naprężenia osiowe w naturalnej warstwie wierzchniej w funkcji maksymalnego odkształcenia po jednokrotnym rozciąganiu i odciążeniu

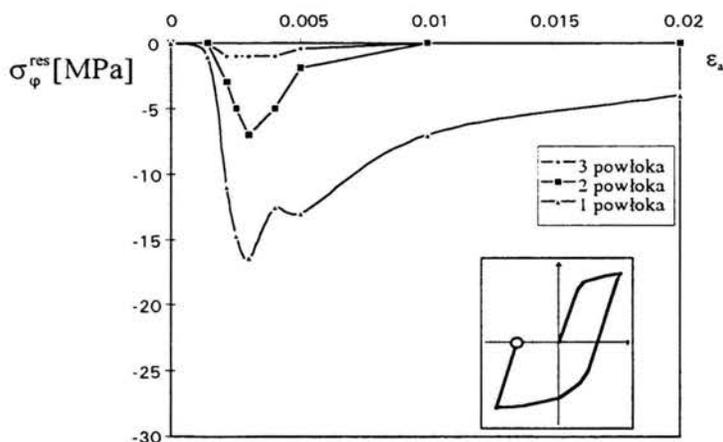


Rys. 6.13b Resztkowe naprężenia osiowe w naturalnej warstwie wierzchniej w funkcji maksymalnego odkształcenia po jednokrotnym rozciąganiu, ściśnięciu i odciążeniu



Rys. 6.14a Resztkowe naprężenia obwodowe w naturalnej warstwie wierzchniej w funkcji maksymalnego odkształcenia po jednokrotnym rozciągnięciu i odciążeniu

W przypadku naprężeń obwodowych (rys. 6.14a,b) sytuacja jest prostsza - największe naprężenia powstają dla wartości  $\epsilon_a$ , które spowodowały uplastycznienie warstwy, a przy których rdzeń pozostał sprężysty. W miarę wzrostu maksymalnych odkształceń naprężenia resztkowe maleją prawie do zera. Tak jest zarówno dla przypadku odciążania po rozciągnięciu (rys.6.14a), jak i po odciążeniu poprzedzonym ścisnaniem (rys.6.14b), przy czym - podobnie jak w dla składowych osiowych - wartości naprężeń resztkowych obwodowych w obu tych przypadkach są przeciwnego znaku.

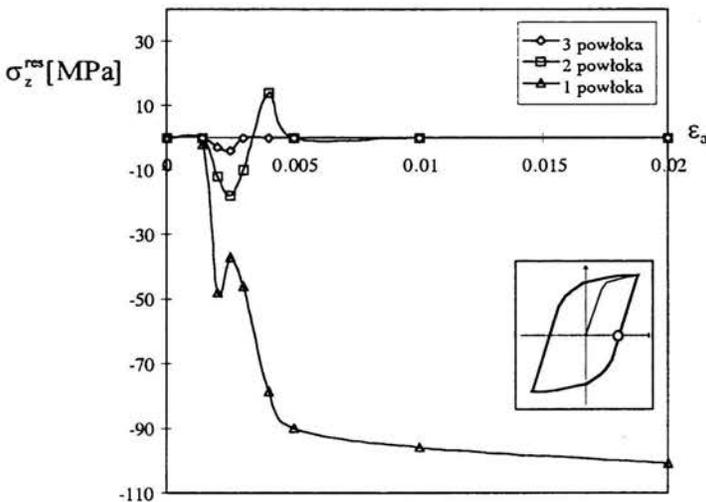


Rys. 6.14b Resztkowe naprężenia obwodowe w naturalnej warstwie wierzchniej w funkcji maksymalnego odkształcenia po jednokrotnym rozciągnięciu, ściśnieniu i odciążeniu

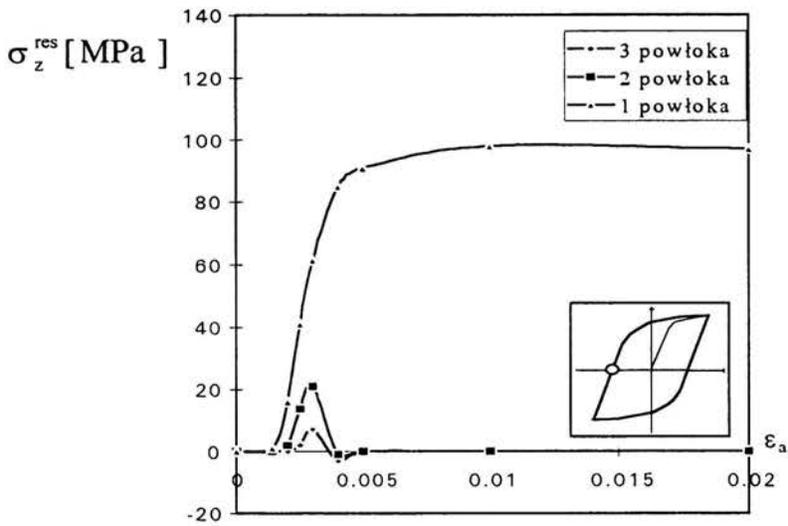
### 6.3.3 Naprężenia resztkowe w próbce z naturalną warstwą wierzchnią w stanie ustalonym po obciążeniu cyklicznym

Resztkowe naprężenia osiowe w stanie ustalonym (po kilkunastu cyklach obciążania) mają dość skomplikowany przebieg zwłaszcza dla małych wartości odkształceń  $\epsilon_a$  ( $\epsilon_a < 0.005$ , rys. 6.15a). Gdy próbkę wielokrotnie odkształcimy, a następnie zdejmemy siłę obciążającą w momencie gdy próbka była rozciągnięta, stan naprężeń resztkowych w warstwie jest ustalony w zakresie większych odkształceń  $\epsilon_a$ . Wówczas pojawiają się silne naprężenia ściskające (ok. -100 MPa) w pierwszej powłoce, a naprężenia w pozostałych powłokach maleją do zera. Dla małych odkształceń stan ich jest silnie zależny od wartości maksymalnych odkształceń  $\epsilon_a$  i, jak widać z rysunku, może przyjmować różne wartości nawet co do znaku.

W przypadku wielokrotnego odkształcania i odciążenia próbki, która była ściśnięta na ostatnim cyklu obciążeń, sytuacja jest nieco prostsza (rys. 6.15b). W powłokach przylegających do rdzenia powstają niewielkie naprężenia ściskające w zakresie małych wartości odkształceń  $\epsilon_a$ , aby szybko zaniknąć przy większych wartościach. W pierwszej powłoce ustalają się silne naprężenia rozciągające, tego samego rzędu co uzyskane w poprzednim przypadku, lecz przeciwnego znaku.

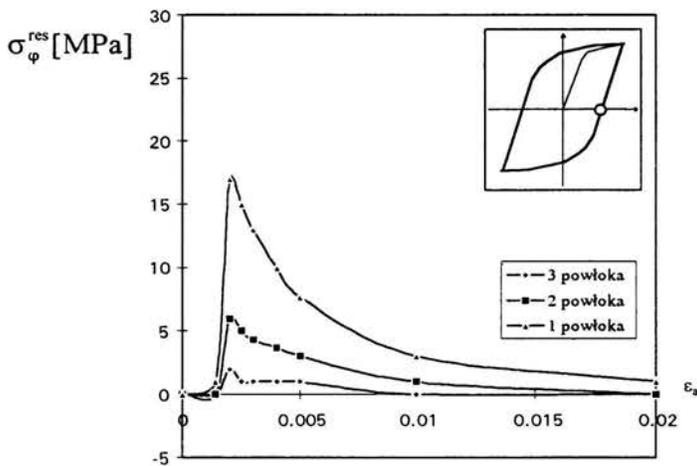


Rys. 6.15a Resztkowe naprężenia osiowe w naturalnej warstwie wierzchniej w funkcji maksymalnych odkształceń w stanie ustalonym po odciążeniu poprzedzonym rozciąganiem

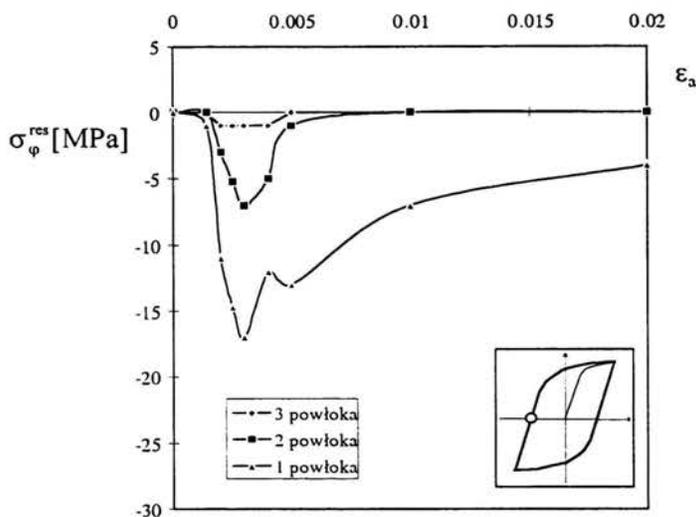


Rys. 6.15b Resztkowe naprężenia osiowe w naturalnej warstwie wierzchniej w funkcji maksymalnego odkształcenia w stanie ustalonym po odciążeniu poprzedzonym ścisnaniem

Resztkowe naprężenia obwodowe w stanie ustalonym (rys. 6.16a,b) nie różnią się w sposób zasadniczy od tych, jakie powstały w próbce po jednokrotnym obciążeniu. Wartości ekstremalne uzyskują one bezpośrednio po uplastycznieniu poszczególnych powłok. W miarę wzrostu odkształceń  $\epsilon_a$  naprężenia te zanikają.



Rys. 6.16a Resztkowe naprężenia obwodowe w naturalnej warstwie wierzchniej w funkcji odkształceń w stanie ustalonym po odciążeniu poprzedzonym rozciąganiem



Rys. 6.16b Resztkowe naprężenia obwodowe w naturalnej warstwie wierzchniej w funkcji maksymalnych odkształceń w stanie ustalonym po odciążeniu poprzedzonym ściskaniem

Wyniki analizy numerycznej jednokrotnie i wielokrotnie obciążanej naturalnej warstwy wierzchniej można ująć w następujących punktach:

1. W przypadku warstwy obciążonej jednokrotnie, osiowe naprężenia resztkowe pojawiają się w pierwszych trzech ziarnach warstwy, niezależnie od wartości maksymalnych odkształceń  $\epsilon_a$ .
2. W przypadku warstwy obciążonej wielokrotnie, osiowe naprężenia resztkowe pojawiają się w całej warstwie, jeżeli  $\epsilon_a < 0.005$ , a tylko w pierwszym ziarnie gdy  $\epsilon_a > 0.005$ .
3. Wartość resztkowych naprężeń obwodowych jest o rząd wielkości mniejsza od naprężeń osiowych.
4. Znak resztkowych naprężeń zarówno osiowych jak i obwodowych zależy od tego, czy odciążenie próbki było poprzedzone rozciąganiem czy ściskaniem.

Przedstawione wyniki symulacji numerycznej wskazują ponadto na jeden ważny fakt, który może być pomijany, gdy nie uwzględni się istnienia naturalnej warstwy wierzchniej w metalu. Poprzez obniżenie granicy plastyczności w obszarze przypowierzchniowym materiał odkształca się wcześniej niż wskazywałyby na to

jego dane materiałowe. Dotyczy to również ziaren przypowierzchniowych technologicznej warstwy wierzchniej. Zjawisko to może spowodować istotną zmianę naprężeń własnych w warstwie wierzchniej obrabianego elementu. Ta z kolei może mieć wpływ na zmianę jego wartości użytkowej.

#### **6.4 Wpływ naturalnej warstwy wierzchniej na stan naprężeń własnych próbki z technologiczną warstwą wierzchnią**

W poprzedniej części tego rozdziału przedstawiono wpływ naturalnej warstwy wierzchniej na powstawanie naprężeń resztkowych w próbce z materiału jednorodnego. Teraz obliczymy naprężenia resztkowe w próbce z technologiczną warstwą wierzchnią z uwzględnieniem istnienia naturalnej warstwy wierzchniej.

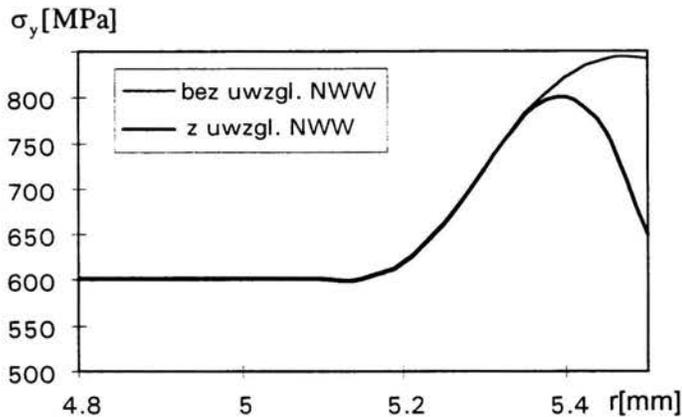
Poprawność wyników badań symulacyjnych zależy od właściwego doboru parametrów opisujących stan początkowy warstwy wierzchniej wraz z panującym w niej stanem naprężeń własnych. Granicę plastyczności poszczególnych stref warstwy można szacować poprzez szczegółowy pomiar jej twardości, co jest procedurą stosunkowo czasochłonną, niepewną, a w strefie zewnętrznej, w pobliżu powierzchni - obarczoną dużym błędem. Można też przyjąć, że początkowa granica plastyczności w strefie zewnętrznej jest taka sama jak w całej warstwie technologicznej. Prowadzi to jednak do znacznych błędów. Ale można też uwzględnić zmianę tej granicy poprzez uwzględnienie wpływu naturalnej warstwy wierzchniej. Aby zbadać ten wpływ, przeprowadzono symulacje zachowania się stalowych próbek walcowych z umocnioną poprzez hartowanie indukcyjne warstwą wierzchnią przyjmując do opisu stanu początkowego jeden z dwóch modeli:

1° - ze stałą granicą plastyczności w zewnętrznej strefie technologicznej warstwy wierzchniej,

2° - z granicą plastyczności malejącą w obrębie naturalnej warstwy wierzchniej.

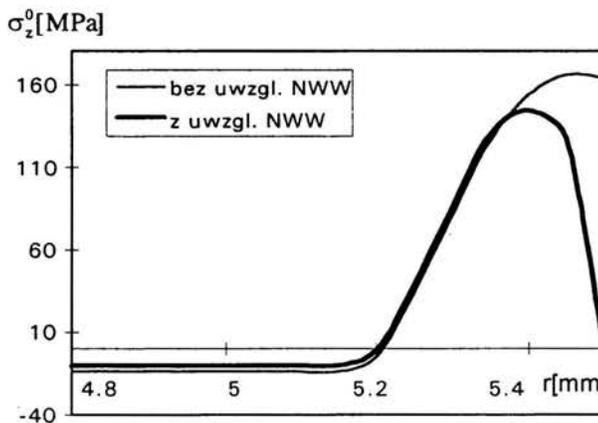
Analizę przeprowadzono dla próbki o promieniu  $r = 5.5$  mm, grubości warstwy  $g = 0.3$  mm i średnicy ziaren  $d = 50$   $\mu\text{m}$ . Granica plastyczności rdzenia wynosiła 600 MPa, wzmocnionej warstwy 840 MPa, a maksymalny jej spadek w naturalnej warstwie wierzchniej sięgał 30% (rys. 6.17). Obliczenia przeprowadzono

dla obciążeń cyklicznych. Ograniczono się do sytuacji, w której próbka przed ostatecznym odciążeniem jest rozciągana, ponieważ tylko wówczas w umocnionej technologicznej warstwie wierzchniej powstają niekorzystne reszkowe naprężenia rozciągające.



Rys.6.17 Rozkład granicy plastyczności wzdłuż promienia próbki z umocnioną technologicznie warstwą wierzchnią

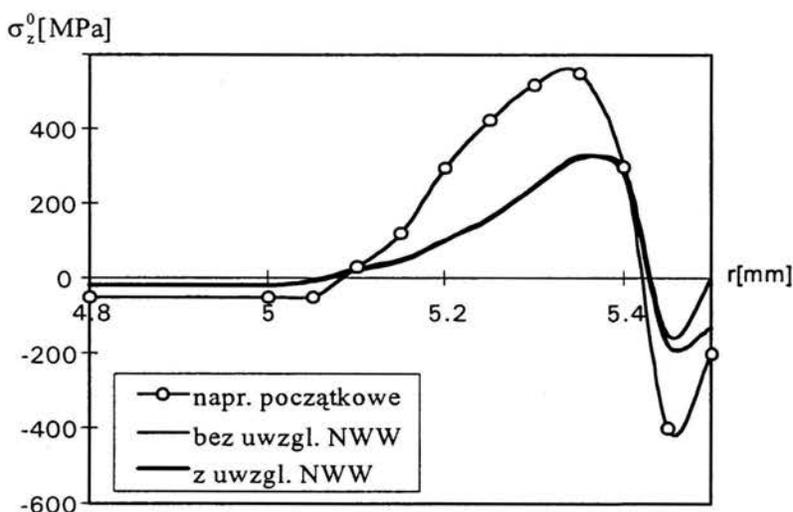
W pierwszym etapie obliczeń przyjęto brak naprężeń początkowych i znaleziono rozkład osiowych naprężeń reszkowych w funkcji promienia próbki dla przypadku 1° oraz 2°, zadając całkowite odkształcenie rozciągające próbki  $\epsilon_a = 0.005$  (rys. 6.18).



Rys.6.18 Rozkłady osiowych naprężeń reszkowych wywołane odkształceniem  $\epsilon_a = 0.005$

Odształcenie to spowodowało uplastycznienie rdzenia oraz - w przypadku 2° uwzględniającym naturalną warstwę wierzchnią - częściowe uplastycznienie strefy przypowierzchniowej warstwy technologicznej. Jak widać z rys. 6.18, w tej właśnie strefie o grubości 0.1 mm widoczne są największe i znaczące zmiany w rozkładzie osiowych naprężeń własnych. Należy zwrócić uwagę na znikanie tych naprężeń na powierzchni zewnętrznej próbki.

Następnie obliczenia te powtórzono uwzględniając istnienie w warstwie technologicznej dodatkowo *początkowych* naprężeń własnych. Pokazuje je na rys. 6.19 wykres oznaczony kółeczkami. Na tym samym rysunku pokazano osiowe naprężenia resztkowe po odkształceniu  $\epsilon_a = 0.005$  przy uwzględnieniu i nieuwzględnieniu naturalnej warstwy wierzchniej. Okazuje się, że uwzględnienie istnienia naturalnej warstwy wierzchniej prowadzi do ustalenia się osiowych naprężeń ściskających na poziomie ok. -200 MPa przy powierzchni próbki, podczas gdy naprężenia te zanikają przy nieuwzględnieniu wpływu naturalnej warstwy wierzchniej.

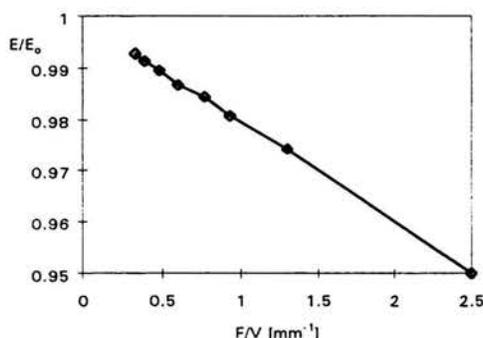


Rys. 6.19. Rozkład naprężeń własnych w deformowanej próbce przy uwzględnieniu naprężeń początkowych.

Przedstawione wyniki pokazują *stabilizujący wpływ naturalnej warstwy wierzchniej na stan naprężeń resztkowych w technologicznej warstwie wierzchniej* poddanej obciążeniom eksploatacyjnym [92]. Zapobiega ona powstawaniu naprężeń rozciągającym na powierzchni próbki a tym samym opóźnia powstawanie pęknięć zmęczeniowych.

## 6.5 Wpływ naturalnej warstwy wierzchniej na wartość modułu Younga

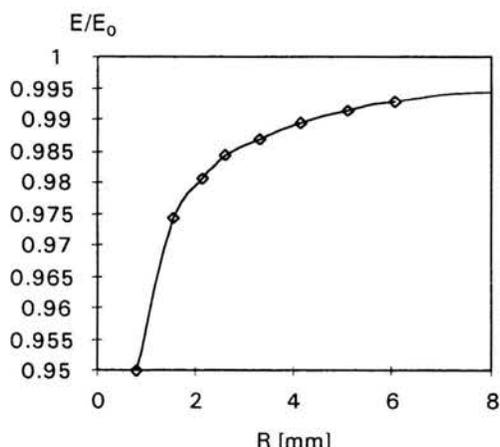
Literatura dotycząca wpływu różnych czynników na pomiar modułu Younga jest bardzo bogata. Znane są teoretyczne zależności między energią powierzchniową a modułem Younga [93], a także dotyczące wpływu stanu powierzchni próbek stalowych na wartość modułu Younga [94]. Szczególnie interesująca jest praca Zakrzewskiego i Żuchowskiego [95], poświęcona badaniu zależności modułu Younga od stosunku powierzchni bocznej  $F$  do objętości próbki  $V$  (Rys. 6.20).



Rys.6.20 Doświadczalna zależność modułu Younga od stosunku powierzchni bocznej  $F$  do objętości próbki  $V$  [95].

Badania były przeprowadzone na walcowych próbkach mosiężnych o przekroju kołowym dla różnych promieni. Ponieważ stosunek powierzchni do objętości próbki jest odwrotnie proporcjonalny do promienia próbki, to wartości modułu Younga maleją w miarę zmniejszania się promienia próbki  $R$  tak jak to pokazuje Rys. 6.21. Na rysunku tym przez  $E_0$  oznaczono wartość modułu Younga dla próbek o średnicy większej niż 16 mm, dla których, jak widać z rysunku, błąd względny wyniku pomiaru jest już znacznie mniejszy od 1%.

Efekt zmiany modułu Younga autorzy tłumaczyli różnym stanem energetycznym materiału wewnątrz elementu i w jego warstwie wierzchniej. Wyniki ostatnich badań pozwalają stwierdzić, że przyczyną zjawiska jest niższa granica plastyczności warstwy wierzchniej badanych próbek [7]. Trzeba tu zwrócić uwagę na ogólnie przyjęty pogląd, że wszystko co dotyczy wyznaczania modułu Younga łączy się z odkształceniami sprężystymi. Wiele badań doświadczalnych jak i rozważań teoretycznych wskazuje na to, że odkształcenia plastyczne nie zaczynają się dopiero po przekroczeniu umownej granicy plastyczności. Pojawiają się one znacznie wcześniej, a ich wartość staje się mierzalna dla coraz niższych obciążeń, w miarę doskonalenia aparatury pomiarowej. Szczególnie jest to widoczne w warstwie przypowierzchniowej materiału, w której, w wyniku obniżonej granicy plastyczności, odkształcenia plastyczne mają miejsce już wówczas, gdy cały rdzeń próbki pozostaje w stanie sprężystym. Zaproponowany wcześniej model naturalnej warstwy wierzchniej o obniżonej granicy plastyczności w stosunku do granicy plastyczności rdzenia, pozwala nie tylko przewidzieć kierunek zmian modułu Younga lecz również wielkość tych zmian. Okazuje się, że w przypadku cienkich prętów zmiany te mogą być znaczne.



Rys.6.21 Doświadczalna zależność modułu Younga od promienia próbki (na podstawie [94]).

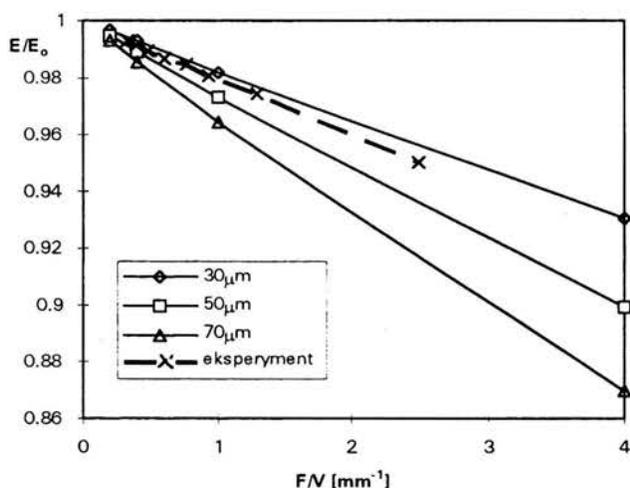
Aby to wykazać obliczymy moduł Younga rozciąganej próbki uwzględniając przedstawiony w rozdziale 4 model naturalnej warstwy wierzchniej. Otrzymane

wyniki porównamy z wynikami badań doświadczalnych. Porównanie to potraktujemy jako ilustrację dotychczasowych rozważań.

Wyobraźmy sobie walcową próbkę metalową o danej średnicy. Naturalna warstwa wierzchnia, jak to było pokazane w modelu, zajmuje obszar o grubości około trzech ziarn, a granica plastyczności w warstwie zmniejsza się w miarę zbliżania się do powierzchni. Jeżeli zatem rozciągniemy próbkę do wartości naprężenia bliskiej lecz nie przekraczającej jej granicy, materiał w warstwie wierzchniej wejdzie w stan plastyczny podczas gdy rdzeń próbki pozostanie sprężysty. Jeżeli obliczymy moduł Younga dla całej próbki, będzie on mniejszy od modułu Younga dla próbki, w której nie uwzględniono wpływu warstwy wierzchniej. Wpływ ten nie będzie jednak stały — będzie tym większy im większy będzie udział warstwy wierzchniej w całej objętości próbki. A zatem, im cieńsza próbka tym moduł Younga powinien być mniejszy.

Doświadczenia mające na celu zbadanie zależności modułu Younga od wartości stosunku powierzchni do objętości próbki ( $F/V$  [ $\text{mm}^{-1}$ ]) były przeprowadzone przez Zakrzewskiego i Żuchowskiego [95] na próbkach mosiężnych o przekroju kołowym, dla różnych promieni  $R$ . Udział powierzchni do objętości  $F/V=2/R$  zmieniał się w granicach od  $0.33 \text{ mm}^{-1}$  do  $2.5 \text{ mm}^{-1}$ . Wyniki tych doświadczeń porównaliśmy z wynikami symulacji komputerowej procesu rozciągania próbki. Przyjęto, że walec kołowy o promieniu  $R$  złożony jest z rdzenia i warstwy wierzchniej. W rdzeniu przyjęto stałą granicę plastyczności, natomiast warstwa wierzchnia była podzielona na kilka stref w postaci współosiowych rurek, z których każda miała inną granicę plastyczności. W naszym przypadku wielkością, która podlegała zmianie w warstwie wierzchniej była granica plastyczności. Przedstawiono trzy zależności modułu Younga od grubości próbki dla trzech wartości stosunku uśrednionej granicy plastyczności pojedynczego ziarna  $\bar{\sigma}_c$  do granicy plastyczności polikryształu  $\sigma_p$ , a mianowicie  $\bar{\sigma}_c/\sigma_p = 0.4, 0.5$  i  $0.6$ . Dla każdej z tych wartości otrzymano krzywe aproksymujące rozkład granicy plastyczności w warstwie wierzchniej próbki. Uzyskane dane wstawiono do programu symulującego rozciąganie próbki do wartości naprężenia nie przekraczającego granicy plastyczności rdzenia. Następnie obliczany był moduł

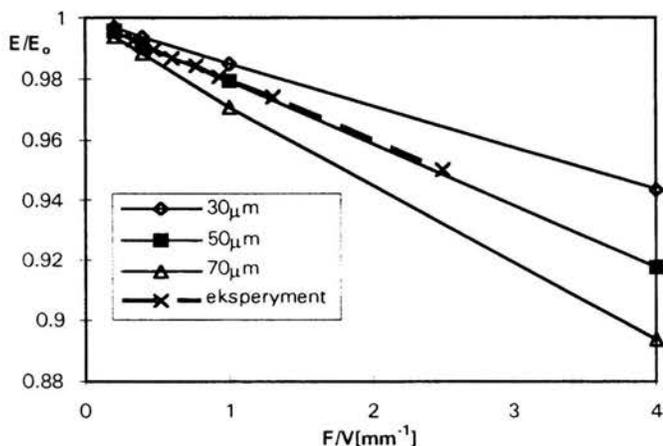
Younga dla całej próbki. Obliczenia takie były powtarzane dla różnych promieni próbki, przy zachowaniu tej samej grubości warstwy wierzchniej. Wyniki przedstawiono na rys. 6.22, 6.23 i 6.24, gdzie pokazano zależność zmian modułu Younga w funkcji udziału powierzchni do objętości dla trzech średnic ziarn i porównano z krzywą doświadczalną z rysunku 6.20. Podobnie jak poprzednio przez  $E_0$  oznaczono wartość modułu Younga dla próbek o średnicy większej niż 8 mm. Na podstawie opisu metalograficznego materiału, z którego zostały wykonane próbki w doświadczeniu Zakrzewskiego i Żuchowskiego [96] oszacowano, że średnice ziaren wynoszą 30 - 70 $\mu\text{m}$ . Okazało się, że zmiany modułu Younga w funkcji  $F/V = 2/R$ , zarówno w doświadczeniu jak i obliczeniach modelowych są liniowe [97].



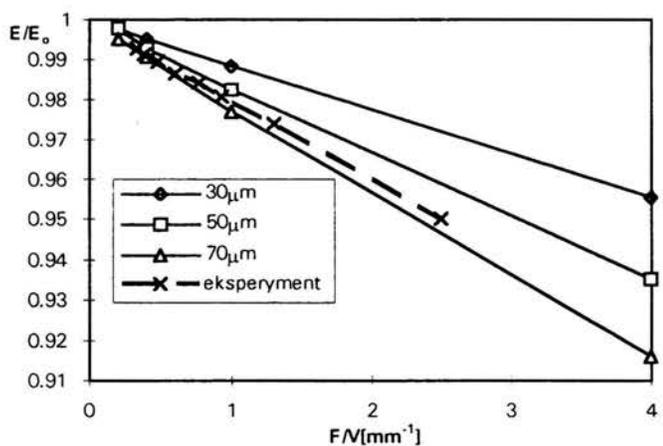
Rys. 6.21 Zależność zmian modułu Younga w funkcji udziału powierzchni do objętości dla trzech średnic ziaren otrzymana w wyniku symulacji komputerowej dla  $\bar{\sigma}_c/\sigma_p=0.4$  i porównanie z krzywą eksperymentalną

Z powyższych rozważań wynika, że wprowadzenie pojęcia naturalnej warstwy wierzchniej materiału umożliwia wyjaśnienie zjawiska zmniejszania wartości modułu Younga mierzonego dla coraz cieńszych próbek. Zastosowanie programu symulującego rozciąganie próbki z naturalną warstwą wierzchnią, pozwoliło oszacować zmiany wartości modułu Younga mierzonego dla próbek o

różnych grubościach. Wyniki otrzymane z obliczeń modelowych okazały się zgodne ze znanymi wynikami doświadczeń opisanymi w pracy [95].



Rys. 6.22 Zależność zmian modułu Younga w funkcji udziału powierzchni do objętości dla trzech średnic ziaren otrzymana w wyniku symulacji komputerowej dla  $\bar{\sigma}_c/\sigma_p=0.5$  i porównanie z krzywą eksperymentalną



Rys. 6.23 Zależność zmian modułu Younga w funkcji udziału powierzchni do objętości dla trzech średnic ziaren otrzymana w wyniku symulacji komputerowej dla  $\bar{\sigma}_c/\sigma_p=0.6$  i porównanie z krzywą eksperymentalną

Zwróćmy uwagę, że przedstawiono tu dwa zjawiska, które chociaż znane z badań doświadczalnych to jednak nigdy nie były ze sobą łączone: występowanie

naturalnej warstwy wierzchniej oraz pojawianie się efektu zmiany wartości modułu Younga w przypadku cienkich próbek. Wykorzystano fakt, że naturalna warstwa wierzchnia charakteryzuje się obniżoną granicą plastyczności, najmniejszą przy powierzchni i stopniowo zwiększającą się w głąb materiału. Ponieważ zmiany te występują w obszarze o grubości trzech ziaren to wpływ naturalnej warstwy wierzchniej na pomiar modułu Younga znaczący jest w przypadku materiałów o dużych ziarnach w porównaniu z rozmiarami próbki, a nieistotny jest w przypadku materiałów drobnoziarnistych i niezbyt cienkich próbek. Dla ustalonej średnicy ziarna, wpływ ten widoczny będzie przy zmniejszaniu się grubości próbek.

## Rozdział 7

### PODSUMOWANIE

Na podstawie obserwacji doświadczalnych przedstawionych w literaturze oraz badań własnych wprowadzono i zdefiniowano pojęcie naturalnej warstwy wierzchniej metali jako warstwy, która w wyniku oddziaływania powierzchni polikryształu ma niższą granicę plastyczności niż materiał leżący wewnątrz polikryształu. Obejmuje ona 2-3 ziarna materiału przylegającego do powierzchni. Na przykładzie rozciąganej próbki miedzianej zbadano zachowanie się naturalnej warstwy wierzchniej poprzez analizę stereometryczną powierzchni próbki. Pomiary były prowadzone przy pomocy profilometru skaningowego. Uzyskano wyraźne zmiany chropowatości powierzchni próbki rozciąganej poniżej umownej granicy plastyczności. W szczególności dotyczyło to zmian rozkładów statystycznych wysokości wierzchołków. Świadczy to o odmiennym zachowaniu się przypowierzchniowych ziaren materiału próbki. Z kolei wyniki badań doświadczalnych opisanych w literaturze sugerują, że obniżenie granicy plastyczności 2 - 3 ziaren naturalnej warstwy wierzchniej spowodowane jest odmiennym zachowaniem się dyslokacji w ziarnach tej warstwy. Ze względu na znaczne podobieństwo w zachowaniu się fizycznej warstwy wierzchniej pojedynczego kryształu i naturalnej warstwy wierzchniej polikryształu, zbadano wpływ powierzchni swobodnego kryształu na zachowanie się znajdujących się w nim dyslokacji i źródeł dyslokacji. Szczegółowo opisano mechanizmy dyslokacyjne decydujące o pojawieniu się i zachowaniu fizycznej warstwy wierzchniej. Wykorzystano pojęcie siły pozornej działającej na dyslokacje i ich źródła w pobliżu

powierzchni kryształu. Rozważania dotyczące fizycznej warstwy wierzchniej kryształu umożliwiły sformułowanie modelu naturalnej warstwy wierzchniej polikryształu. Zaproponowano model fenomenologiczny naturalnej warstwy wierzchniej w wersji rozbudowanej i uproszczonej, oparty na hipotezie postulującej zależność naprężeń krytycznych w ziarnach tej warstwy od granicy plastyczności w ziarnie swobodnym i granicy plastyczności całego polikryształu. W wyniku otrzymano obniżenie granicy plastyczności w obszarze pierwszych kilku ziaren przy powierzchni próbki. Opracowano program komputerowy umożliwiający symulację zachowania się dowolnych technologicznych warstw wierzchnich rozciąganych lub ściskanych osiowosymetrycznych próbek metalowych o zadanym rozkładzie własności materiałowych oraz początkowych naprężeń własnych. Program uwzględnia zarówno wpływ wzmocnienia izotropowego jak i kinematycznego na zachowanie się próbek poddanych obciążeniom monotonicznym oraz cyklicznym. Przeprowadzona symulacja procesu obciążania wykazała wpływ naturalnej warstwy wierzchniej na stan naprężeń resztkowych w próbce z technologiczną warstwą wierzchnią. Porównane zostały także wyniki obliczeń dla procesu monotonicznego i cyklicznego obciążania próbki jednorodnej, w której w jednym przypadku uwzględniono, a w drugim nie uwzględniono faktu istnienia naturalnej warstwy wierzchniej.

Przedstawione wyniki symulacji numerycznej wskazują na ważny fakt, który może być pomijany gdy nie uwzględniono istnienia naturalnej warstwy wierzchniej w metalu. Poprzez obniżenie granicy plastyczności w obszarze przypowierzchniowym materiał odkształca się wcześniej niż wskazywałyby na to jego dane materiałowe. Wynikiem tego może być powstanie dodatkowych naprężeń własnych w tym obszarze, które mogą zmienić własności użytkowe elementu.

Na koniec, istnienie naturalnej warstwy wierzchniej umożliwiło wyjaśnienie efektu zmniejszania się wartości modułu Younga mierzonego na cienkich próbkach metalowych. Przedstawiono tu dwa zjawiska, które chociaż znane z badań doświadczalnych to jednak nigdy nie były ze sobą łączone — występowanie naturalnej warstwy wierzchniej o obniżonej, w stosunku do rdzenia materiału,

granicy plastyczności oraz pojawianie się efektu zmiany wartości modułu Younga w przypadku cienkich próbek.

Wydaje się, że zjawisko występowania naturalnej warstwy wierzchniej może mieć istotny wpływ na własności technologicznych warstw wierzchnich w elementach metalowych poddanych złożonym stanom naprężeń. Szczególne znaczenie może mieć ono przy cienkich warstwach, gdzie liczba ziaren na przekroju elementu nie jest zbyt duża. Wydaje się również, że bardzo interesujące może być rozszerzenie badań nad zmianą stanu struktury geometrycznej powierzchni w początkowej fazie odkształcenia. Badania te są bardzo pracochłonne, ze względu na konieczność precyzyjnego przygotowania materiału próbki (ujednolicenie wielkości ziaren), powierzchni próbki bez wprowadzania naprężeń własnych, oraz pomiarów stereometrycznych powierzchni i ich analizy. Zmiana struktury geometrycznej powierzchni może stać się miarą powierzchniowego odkształcenia materiału.

W dalszej perspektywie otwiera się możliwość sterowania własnościami technologicznych warstw wierzchnich poprzez wytwarzanie w nich odpowiedniej anizotropii plastycznej. Jest to możliwe poprzez odpowiednie ukształtowanie w nich tekstury krystalograficznej. Przy tak szczegółowej analizie procesu powstawania warstwy wierzchniej niezbędne byłoby uwzględnienie istnienia naturalnej warstwy wierzchniej. Do opisu mikroplastycznego zachowania się warstw wierzchnich metali można wykorzystać istniejące modele plastycznego płynięcia polikryształów bazujące na modelach sprężysto - plastycznego zachowania się pojedynczych kryształów [98,99]. Możliwość uzyskania na tej drodze interesujących wyników sugeruje zastosowanie jednego z tych modeli do analizy tekstur w warstwach wierzchnich metali podczas procesu nagniatania [100].

## LITERATURA

1. PN - 73/M-04250 - *Warstwa wierzchnia. Nazwy i określenia.*
2. Kaczmarek J., *Podstawy obróbki wiórowej ścierniej i erozyjnej*, WNT, Warszawa, (1970)
3. Burakowski T., Wierchoń T., *Inżynieria powierzchni metali*, WNT, Warszawa, (1995)
4. Deputat J., *Własności i wykorzystanie zjawiska elastoakustycznego do pomiaru naprężeń własnych*, Prace IPPT, No 8, (1987)
5. Terentiev W.F., *Nature of Physical Yield Point and Brittleness Fracture*, Doklady Akademiji Nauk, Vol. 185, No 1, (1969), (po rosyjsku)
6. Szaposznikow N., *Badanie własności mechanicznych metali*, PWN, (1954)
7. Alehin W.P., *Physics of Strength and Plasticity of Surface Layers of Metals*, Nauka, Moscow, (1983) (po rosyjsku)
8. Gadaj P., Handzel - Powierża Z., Ziembra S., Żukowski S., *Rola warstwy wierzchniej w procesach odkształceń i dekohezji*, Prace IPPT, No 31, (1976)
9. Uput G.P., Warczenija S.A., *Wytrzymałość nitkowych kryształów i mikrotwardość LiF*, Doklady Akademiji Nauk, 178, 4, pp. 834-837, (1968) (po rosyjsku)
10. Fourie J.T., *Surface and Size Effects in Unloading Yield Point*, Phil. Mag. Vol. 22, No 179, pp. 923-930, (1970)
11. Mughrabi H., *Some Consequences of Surface and Size Effect in Plastic Deformed Copper Single Crystals*, Phys. Status Solidi, Vol. 44, No 1, pp.391-402, (1971)
12. Brydges W.T., *Comments regarding „On Surface Layer Effects”*, Scripta Met., Vol. 3, No 4, pp. 271-372, (1969)
13. Revie R.W., Uhlig H.H., *Effect of Applied Potential and Surface Dissolution on the Creep Behaviour of Copper*, Acta Met., Vol. 22, No 5, pp. 619-627, (1974)
14. Fourie J.T., Dent N.C.G., *The Soft Surface Effect in Deformed  $\alpha$  Phase Cu-5.8At.%Al*, Acta Met. Vol. 20, No 11, pp. 1291-1297, (1972)
15. Sumino K., Yamamoto H., - *Preferential Plastic Deformation in the Surface Region of Al and  $\alpha$  - Fe Single Crystal*, J. Phys. Soc. Jap. Vol. 16, No 1, (1961)
16. Suzuki T., *Dyslokacje i mechaniczne własności materiałów*, wyd. MIL, str. 151-153, (1960) (po rosyjsku)
17. Smirnow B. I., *Wytrzymałość metali i stopów*, wyd LDNTP, str. 77-81, (1965) (po rosyjsku)
18. Kimura A., Maddin R., *The Effect of Surface on the Recrystallization of Gold Single Crystals*, Acta Met., Vol. 12, No 10, pp. 1167-1171, (1964)

19. Kolb K., Macherauch E., *The Flow Stress of Surface Layers of Polycrystalline Nickel and its Influence on the Residual Stresses in Deformed Specimens*, Phil. Mag., Vol. 7, No 75, pp. 415-419, (1962)
20. Worsala F.J., Robinson W.H., *Dislocation Distribution during Stage I Deformation of Silver Single Crystals*, Phil. Mag., Vol. 15, No 137, pp. 939-948, (1967)
21. Latanision R.M., Stachle R.W., *Plastic Deformation of Electrochemically Polarized Nickel Single Crystals*, Acta Met. Vol. 17, No 3, pp. 307-314, (1969)
22. Kramer I.R., *Comment on „Effect of Applied Potential and Surface Dissolution on the Creep Behavior of Copper”*. Scripta Met., Vol. 8, No 11, pp. 1231-1234, (1974)
23. Swann P.R., *The Dislocation Distribution near the Surface of Deformed Copper*. Acta Met., Vol. 14, No 7, pp. 900-903, (1966)
24. Block R.T., Johnson R.M., *The Tensile Deformation of Copper Single Crystals Containing BeO Particles*, Acta Met., Vol.17, No 3, p. 229-306, (1969)
25. Essman U. Rapp M., *Die Versetzungsanordnung in Plastisc Verformten Kopper - Vielkristallen*, Acta Met., Vol.16, No 10, pp. 1275-1287, (1968) (po niemiecku)
26. Himstedt N., Neuhäuser H., *Surface Effect on Slip Line Structure of Copper Single Crystals*, Scripta Met., Vol. 6, No 12, pp. 1151-1157, (1972)
27. Block R.J., *Reply to Comments on „The Existance of Preferential Surface Deformation in Copper Single Crystals”*, Scripta Met., Vol. 3, No 7, pp. 511-512, (1969)
28. Kramer I.R., Kumar A., *On Surface Layer Effects*, Scripta Met., Vol. 3, No 4, pp. 205-208, (1969)
29. Kramer I.R., Balasubramanian N., *Metallographic Study of the Surface Layer*, Acta Met., Vol. 21, No 5, pp. 695-701, (1973)
30. Schmid E., Boas W., *Plasticity of Crystals*, Hughes, London, (1982)
31. Duguet D.J., *The Role of Free Surface in the Deformation of Metal Single Crystals*, Scripta Met., Vol. 3, No 7, pp. 513-516, (1969)
32. Tabata T., Fujita H., *An Electron Microscope Study of Dislocation Arrangement in the Surface Layer of Aluminium Single Crystals*, J.Phys.Soc.Jap., Vol. 32, No 6, pp. 1536-1540, (1972)
33. Weisman I.L., Phillips A., *Simplified Measurement of Residual Stresses*, Proc. of Experimental Stress Analysis, SESA, Vol. XI, No 2, p.102 (1952)
34. Dawidenkov N.N., *Residual Stresses as a Result of Surface Yielding Data*, Zurnal Techn. Fiziki, Vol. 14, No 9, (1944) (po rosyjsku)
35. Macherauch A., *X-ray stress analysis.*, Expl. Mech. Vol. 4, p. 140, (1966)
36. Glikman L.A., *Experimental Research of Surface Layer of Steel*, Zurnal Techn. Fiziki Vol. 16, No 6, (1946) (po rosyjsku)
37. Glikman L.A., Sarifilowa T.P., Stiepanov W.A., *Appearance of Residual Stresses of the First Order Due to Tension*, Zurnal Techn. Fiziki, Vol. 19, No 3, (1949) (po rosyjsku)
38. He J., Wang H., Nan J., *Fatigue Strength Evaluation from Surface Yielding Data*, Fat. Fract. Eng. Mat. Struc., Vol. 16, No 6, p.591, (1993)
39. Fujita H., Miyazaki S., *Lüders Deformation in Polycrystalline Iron*. Acta Met., Vol. 26, p.1273 (1978)

40. Szabalin W.J., *Plastic Deformation in Metals*, Doklady Akademiji Nauk, Vol. 144, No 3, (1962) (po rosyjsku)
41. Boczwara A.A., Żadajewa O.C., *Influence of the Free Surface on the Microhardness of  $\alpha$  and  $\beta$  Brass*, Izv. Akademiji Nauk, (tech. nauk.) No 3, (1947) (po rosyjsku)
42. Axeirad D., *Characterization of Surfaces for the Description of Their Functional Behavior in Contact Problems*, CIRP. Ann. Vol. 36, No 1 (1986).
43. Bush. A, Gibson R., *The Elastic Contact of Rough Surface*, Wear, Vol. 35, (1976)
44. Klimczak T., Dautzenberg H., Kals J.A.G., *On the Roughening of Free Surface during Sheet Metal Forming*, Annals of the CIRP, Vol. 37, No 1, pp. 267-270, (1988)
45. Kocańda S., *O niektórych zjawiskach zmęczenia w stali o bardzo małej zawartości węgla*, Dod. do Biul. WAT, Vol. 121/122, No 9/10, Warszawa, (1962)
46. Prakash A., *Digital Techniques of Roughness Measurement Applied to Surfaces Representing Some Manufacturing Processes*, Dissertation, Eindhoven University of Technology, (1975)
47. Angelo I.O., *Wprowadzenie do grafiki komputerowej*, Warszawa, (1988).
48. Nowicki B., *Struktura geometryczna - chropowatość i falistość powierzchni*, Warszawa, WNT, (1991).
49. Oliferuk W., Świątnicki W., Grabski M., *Effect of the Grain Size on the Rate of Energy Storage During the Tensile Deformation of an Austenitic Steel*, Mat.Sc.Eng. Vol. A197, p. 49, (1995)
50. Hirth, J.P., Lothe J., *Theory of Dislocations*, John Wiley & Sons Publ. (1982)
51. Sumino, *Easy Operation of Dislocation Sources in the Surface Region of Crystals during Plastic Deformation*, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 17, No 3, p. 454, (1962)
52. Weertman J., Weertman J.R., *Podstawy teorii dyslokacji*, PWN, (1969)
53. Peach M., Koehler I.S., *The Forces Exerted on Dislocations and the Stress Fields Produced by Them*, Phys. Rev. Vol. 80, pp. 436-440, (1950)
54. Nowacki W., *Teoria sprężystości*, PWN, (1970)
55. Tichonow A.N., Samarski A.A., *Równania fizyki matematycznej*, PWN, (1963)
56. Lardner R.W. *Mathematical Theory of Dislocations and Fracture*, University of Toronto Press, (1974)
57. Honeycombe R.W.K., *The Plastic Deformation of Metals*, Edward Arnold Ltd. (1984)
58. Hull D., *Dyslokacje*, PWN, (1982)
59. Fischer J.C. at all, *Theory of Slip - Band Formation*, Phys. Rev., Vol. 87, No 5, pp. 958-964, (1952)
60. Sachs G., *Zur Ableitung einer Fiessbedingung*, Z. d. Ver. deut. Ing. Vol. 72, (1928)
61. Taylor G.I., *Mechanism of Plastic Deformation of an Austenitic Steel*, Proc. Roy.Soc., Vol. A145, p.362, (1934)
62. Starzyński G., Gambin W., *Natural Surface Layer of Metals*, Acta Physica Polonica A, Vol. 89, No 3 (1996)

63. Starzyński G., Gambin W., *Yield Stress Distribution in Natural Surface Layer of Polycrystals*, Engineering Trans. Vol. 44, No 2 (1996)
64. Glocker R., Hasenmeier H., *Roentgen - Spannungsmessungen über den Beginn des Fiesvorganges bei Kohlenstoffstahl*, VDI Zeitschrift 84, No 43, (1940)
65. Przybylski W., *Technologia obróbki nagniataniem*, WNT, Warszawa, (1987)
66. Hill R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, Oxford, (1950)
67. Olszak W., Perzyna P., Sawczuk A. (wydawcy), Marciniak Z., Mróz Z., Rychlewski J., Szczepiński W., Urbanowski W., Życzkowski M., *Teoria plastyczności*, IPPT PAN - PWN, Warszawa, (1965)
68. Skrzypek J., *Teoria plastyczności i pełzania*, Politechnika Krakowska, Kraków (1975)
69. Szczepiński W., *Mechanika plastycznego płynięcia*, PWN, Warszawa, (1978)
70. Życzkowski M., *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*, PWN, Warszawa, (1973)
71. Handzel-Powierża Z., Kucharski S., Starzyński G., *Theoretical and experimental studies on elasto-plastic deformation of an element with technological surface layer*, Engineering Trans. Vol. 44, No 1 (1996)
72. Handzel-Powierża Z., Starzyński G., *Symulacja komputerowa niskocyklicznego obciążania elementów z TWW*, Prace Naukowe PW (Mechanika) zeszyt 121 (1989)
73. Kocańda S., *Zmęczeniowe niszczenie metali*, Warszawa, WNT, (1978).
74. Woodtli-Folprecht J. *Oberflächendewformation Eines Austenitischen Stahls im Frühstadium der Ermüdung*, praca doktorska, Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich, (1982)
75. Klimczak T., *Predicting Contact Spots Size Distribution in Contact Problems*, Annals of the CIRP, 41/1 pp.609 - 612, (1992)
76. Greenwood J.A., Williamson .B.P., *Contact of Nominally Flat Surfaces*, Proc. Roy.Soc., London, Vol. A 295, pp. 300 - 319, (1966)
77. Kucharski S., Handzel-Powierża Z., Starzyński G., Poljaniuk A., *Rola warstwy wierzchniej w kształtowaniu trwałości elementów i zespołów maszyn*, V Konferencja CPBP-02.05, Zakopane, Wyd. PW, Warszawa (1992)
78. Handzel-Powierża Z., Kucharski S., Starzynski G., *Symulacyjne badania wpływu warstwy nagniatanej i hartowanej indukcyjnie na stan naprężeń elementu wielokrotnie obciążanego*, Seminarium Naukowe, "Współzależność warstwy wierzchniej z własnościami użytkowymi części maszyn", Krasiczyn, (1995)
79. Krajowy Kongres Eksploatacji Urządzeń Technicznych, Krynica, Trybologia 5-6, (1997)
80. M. Kujawińska, L. Sałbut, S. Kucharski, G. Starzyński,, - *"Experimental - Numerical Analysis of the Influence of Surface Layers on Strain Distribution at Tensile Elements with Notch"*, International Symposium on Optical Science Engineering and Instrumentation, San Diego, (1995)
81. Kucharski S. *Cyclic Loading of a Notched Element with Technological Surface Layer*, Engng. Trans. Vol. 43, No 4, pp. 553 - 569, (1995)
82. Mróz Z., Starzyński G., *An Elasto - Plastic Analysis of a Cylinder with Surface Layer under Cyclic Loading*, Archiwum Budowy Maszyn , No 3-4, (1996)
83. Ziegler H., *A Modification of Pragers Hardening Rule*, Quart.Appl.Math., Vol. 17, (1959)

84. Trąmpczyński W., *The Experimental Verification of the Evolution of Kinematic and Isotropic Hardening in Cyclic Plasticity*, J.Mech.Phys.Solids, Vol. 36, No.4, pp. 417-441, (1988)
85. Trąmpczyński W., *Badanie wpływu historii obciążania na pełzanie metali w złożonym stanie naprężenia*, Prace IPPT 36/1985, praca habilitacyjna
86. Handzel-Powierża Z., Kucharski S., Starzyński G., *Weryfikacja symulacyjnej metody badań technologicznej warstwy wierzchniej*, Postępy Technologii Maszyn i Urządzeń, No 1, (1993)
87. Marciniak M., Nakonieczny A., Skalski K., *Umocnienie kompozytowych warstw wierzchnich części maszyn*, Prace Pol. W-skiej, Warszawa (1993)
88. Starzyński G., Handzel-Powierża Z., Kucharski S., Nakonieczny A., Janowski S., *Zmiany naprężeń własnych w cyklicznie odkształcanej warstwie wierzchniej wytworzonej w procesie hartowania indukcyjnego*, Inż. Powierzchni, No 2, (1996)
89. Databook 1975, Metal Progress, Vol. 106, No 1, p. 44, (1974)
90. Mróz Z., Starzyński G., *Ewolucja naprężeń technologicznych przy niskocyklowym zmęczeniu elementu z warstwą wierzchnią*, Przeg. Mech., No 14, (1995)
91. Mróz Z., Starzyński G., *Deformacja plastyczna i ewolucja naprężeń technologicznych przy niskocyklowym zmęczeniu elementu z warstwą wierzchnią*, VIII Konferencja Naukowa "Problemy Rozwoju Maszyn Roboczych", Zakopane (1995)
92. Starzyński G., Gambin W., *Wpływ naturalnej warstwy wierzchniej na własności technologicznych warstw wierzchnich*, XI Konf. Naukowa "Problemy Rozwoju Maszyn Roboczych", Zakopane (1998)
93. Cottrell A.H., *Własności mechaniczne materii*, PWN, Warszawa, (1970)
94. Gurjev A.V., Vodopjanov V.I., *Influence of Specimen Surface Layer on the Yield Limit*, Zavodsk.Lab., No 9, (1971) (in Russian)
95. Zakrzewski M., Żuchowski R., *Powierzchnia ciała stałego a równowaga sił wewnętrznych*, Prace Naukowe Instyt. Mat. i Mech. Teor. Pol. Wrocł., No 24, (1975)
96. Józewicz S., Zakrzewski M., Żuchowski R., *Zmiany wartości modułu Younga mosiężnego pręta w wyniku różnic struktury uzyskanej w procesie jego wytwarzania*, Prace Naukowe Instyt. Mat. i Mech. Teor. Pol. Wrocł., 24, (1975)
97. Gambin W., Starzyński G., *Wpływ naturalnej warstwy wierzchniej metali na wynik pomiaru modułu Younga*, Przeg. Mech. No 2, (1997)
98. Asaro R.J., *Crystal Plasticity*, ASME J. Appl.Mech., Vol. 50, pp.921 - 934, (1983)
99. Gambin W., *Refined Analysis of Elastic - Plastic Crystals*, Int. J. of Solids & Struc., Vol.29, No 16, pp. 2013-2021, (1992)
100. Gambin W., *Textures Induced by the Rolled Burnishing Process*, J. of Theor.& Appl. Mech., Vol. 36, No 1, pp.15 - 29, (1998)