

Krzysztof Kycia

**Przetworniki kompozytowe do zastosowań w ultradźwiękowej
diagnostyce medycznej**

Rozprawa doktorska

Promotor Profesor dr hab. Andrzej Nowicki

Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk

Warszawa 1997

Krzysztof Kycia
Zakład Ultradźwięków
IPPT-PAN

Przetworniki kompozytowe do zastosowań w ultradźwiękowej diagnostyce medycznej

Streszczenie

Celem pracy jest określenie oraz analiza właściwości ultradźwiękowego przetwornika kompozytowego typu 1-3 pod kątem możliwości jego zastosowania w diagnostyce medycznej. Omówiono ogólne wymagania stawiane przetwornikom do diagnostyki medycznej na tle porównania wybranych materiałów piezoelektrycznych i wynikające z tego przesłanki do zastosowań piezoelektrycznych kompozytów. Opisano klasyfikację, a następnie strukturę wewnętrzną wybranego typu kompozytu. Przedstawiono różne technologie wykonywania struktur kompozytowych z podkreśleniem ich wpływu na zmiany własności fizykochemicznych obrabianego materiału. Przedstawiono prosty model fizyczny ujednorodnienia przetwornika kompozytowego wraz z podkreśleniem ograniczeń jego zastosowania (zwłaszcza ze względu na nieuwzględnienie przez ten model wszystkich geometrycznych właściwości struktury kompozytowej). Wykazano przydatność zastosowania teorii homogenizacji asymptotycznej do wymienionego ujednorodnienia. Za pomocą metody elementu skończonego obliczono numerycznie efektywne wartości tensorów materiałowych bryły kompozytowej w oparciu o metodę asymptotyczno-homogenizacyjną. Uzasadniono dopuszczalność stosowalności schematu zastępczego Masona do opisu własności elektroakustycznych kompozytu. Korzystając z metody elementu skończonego obliczono numerycznie wartość współczynnika sprzężenia elektromechanicznego struktury kompozytowej. Wykonano egzemplarze przetworników kompozytowych w celu przeprowadzenia pomiarów potwierdzających poprawność modelowania. Przedstawiono wyniki pomiarów wybranych wielkości elektroakustycznych tych przetworników. Wykazano zgodność uzyskanych empirycznie wyników z rezultatami obliczeń modelowych. Doświadczalnie potwierdzono fakt poszerzenia częstotliwościowego pasma przenoszenia kompozytu w porównaniu z piezoceramicznym. Uzasadniono celowość stosowania przetworników kompozytowych w ultradźwiękowej diagnostyce medycznej. Przedstawiono schemat zastępczy przetwornika oraz omówiono program komputerowy w zakresie analizy zarówno statycznej jak i dynamicznej bazujący na metodzie elementu skończonego i prowadzący do wyznaczenia tensorów materiałowych i współczynnika sprzężenia elektromechanicznego kompozytu. Ponadto opisano zastosowane metody pomiarowe służące wyznaczeniu wybranych wartości wielkości elektroakustycznych przetworników kompozytowych. W

podsumowaniu przedstawiono własności przetwornika kompozytowego uzasadniające jego zastosowanie w głowicach używanych w ultrasonograficznej diagnostyce medycznej.

Ważniejsze oznaczenia literowe:

- u - wektor przemieszczenia mechanicznego
- Φ - skalar potencjału elektrycznego
- S - tensor odkształcenia
- T - tensor naprężenia
- E - wektor natężenia pola elektrycznego
- D - wektor indukcji elektrycznej
- ρ - skalar gęstości masy
- c - tensor sztywności mechanicznej
- e - tensor piezoelektryczny
- ϵ - tensor dielektryczny
- T_c - temperatura Curie materiału piezoelektrycznego
- h - współczynnik piezoelektryczny
- N_u - przemieszczeniowa funkcja kształtu
- N_Φ - potencjałowa funkcja kształtu
- λ - długość fali akustycznej
- div - operator różniczkowy dywergencji
- ∇ - operator różniczkowy gradientu
- sym ∇ - symetryczny operator różniczkowy gradientu
- k - współczynnik sprzężenia elektromechanicznego
- k_t - współczynnik sprzężenia elektromechanicznego dla drgań tłokowych
- f_e - częstotliwość rezonansu elektrycznego przetwornika
- f_1 - pierwsza częstotliwość kwadrantowa przetwornika
- f_2 - druga częstotliwość kwadrantowa przetwornika
- Q_a - dobroć akustyczna zastępczego układu rezonansowego
- f_m - częstotliwość rezonansu mechanicznego przetwornika
- G_e - konduktancja dla częstotliwości rezonansu elektrycznego
- B_e - susceptancja dla częstotliwości rezonansu elektrycznego
- R_e - rezystancja dla częstotliwości rezonansu elektrycznego
- X_e - reaktancja dla częstotliwości rezonansu elektrycznego
- C_0 - pojemność gałęzi równoległej rezonansu elektrycznego
- C - pojemność gałęzi szeregowej rezonansu elektrycznego
- Z - impedancja akustyczna
- H - nadawczo-odbiorcza funkcja przenoszenia
- K_{uu} - macierz sztywności mechanicznej
- $K_{u\Phi}$ - macierz sztywności piezoelektrycznej
- $K_{\Phi\Phi}$ - macierz sztywności dielektrycznej

1. Wprowadzenie

1.1 Wymagania stawiane przetwornikom ultradźwiękowym do diagnostyki medycznej

W większości zagadnień ultradźwiękowych, a w szczególności w diagnostyce medycznej stosowane są impulsy wielkiej częstotliwości o krótkim okresie trwania, zawierające często tylko dwa lub trzy okresy. Podyktowane jest to koniecznością uzyskania dużej rozdzielczości osiowej w ultrasonografii. Wzbudzenie i odbiór fal akustycznych odbywa się za pomocą odpowiednich przetworników. Przetwornik piezoelektryczny stanowi zasadniczy element konstrukcji głowicy ultrasonograficznej będącej integralną częścią każdego urządzenia ultradźwiękowej diagnostyki obrazowej. Przetwornik powinien zapewniać : dużą czułość, dużą wartość współczynnika sprzężenia elektromechanicznego, dopasowanie akustyczne do ośrodka badanego oraz dopasowanie elektryczne do elektronicznych układów nadawczych i odbiorczych [36]. W materiale przetwornika ma miejsce wzajemne przetwarzanie energii pola elektrycznego oraz pola naprężeń i odkształceń mechanicznych tworzących łącznie pole elektroakustyczne. Miarą sprawności wymienionego przetwarzania energii jest współczynnik sprzężenia elektromechanicznego k_t . Wartość impedancji akustycznej Z przetwornika silnie wpływa z kolei na dopasowanie akustyczne przetwornika i ośrodka biologicznego, do którego promieniowana jest fala ultradźwiękowa , a więc na efektywny energetyczny współczynnik odbicia na granicy wymienionych ośrodków [26]. Wartość stałej dielektrycznej ϵ określa natomiast własności dielektryczne przetwornika. W ogólności czułość głowicy ultradźwiękowej zależy od dopasowania zarówno akustycznego do ośrodka badanego jak i elektrycznego do impedancji nadajnika i odbiornika elektronicznego [27].

1.2 Porównanie wybranych materiałów piezoelektrycznych

Wśród wielu materiałów charakteryzujących się występowaniem efektu piezoelektrycznego możemy wyróżnić materiały monokrystaliczne (kwarc, niobian litu), ceramiczne (PZT) oraz polimerowe (PVDF) [41]. Kwarc nie jest obecnie już stosowany jako materiał piezoelektryczny w konstrukcji głowic ultrasonograficznych ze względu na złe dopasowanie elektryczne do układów nadawczo-odbiorczych [28]. Kwarc posiada ponadto wartość współczynnika sprzężenia elektromechanicznego k_t równą zaledwie 0,1. Powszechne zastosowanie piezoelektryków w technologii elektronicznej nastąpiło dopiero po opanowaniu technologii wytwarzania ceramiki piezoelektrycznych [41]. Ceramiki te odznaczają się przede wszystkim silnym efektem piezoelektrycznym. Metody ich wytwarzania pozwalają na otrzymanie elementu piezoelektrycznego o dowolnej wielkości i kształcie. W diagnostyce medycznej - obrazowaniu struktur wewnętrznych i metodach dopplerowskich jest powszech-

nie używana ceramika na bazie cyrkonianu i tytanianu ołowiu w literaturze oznaczana jako PZT [36]. Charakteryzuje się ona dużą wartością współczynnika sprzężenia elektromechanicznego k_t równą od 0,4 do 0,5. Wartość względnej stałej dielektrycznej ϵ^S dla PZT jest również korzystnie wysoka ($\epsilon^S \sim 700-830$) ze względu na dopasowanie elektryczne do układów elektronicznych nadajnika i odbiornika. Wadą wymienionego materiału jest natomiast duża wartość impedancji akustycznej Z przekraczająca 30 MRayl, o ponad rząd wielkości większa od wartości impedancji miękkich tkanek biologicznych równej około 1,5 MRayl. Oznacza to wyraźne wzajemne niedopasowanie akustyczne wymienionych ośrodków, co bezpośrednio wpływa na obniżenie czułości głowicy ultradźwiękowej. Polimery piezoelektryczne (dwufluorek polivinilidenu PVDF) odznaczają się wartością impedancji akustycznej $Z \sim 4$ MRayl bliskiej impedancji akustycznej miękkich tkanek biologicznych. Ich zasadniczą wadą pozostaje natomiast bardzo niewielka wartość względnej stałej dielektrycznej ($\epsilon \sim 10$) utrudniająca skuteczne dopasowanie elektryczne do układów elektronicznych nadajnika i odbiornika [11].

1.3 Przesłanki skłaniające do zastosowania kompozytów piezoelektrycznych

Właściwości fizyczne kompozytów piezoelektrycznych łączą w sobie własności piezoceramiki PZT i piezopolimeru PVDF. Literatura związana z przetwornikami piezoelektrycznymi opisuje wybrane wartości wielkości elektroakustycznych kompozytu o strukturze przedstawionej na rys. 1. Według niej wartość współczynnika sprzężenia elektromechanicznego ($k_t \sim 0,6 - 0,7$) kompozytu jest większa o co najmniej 20 % od analogicznej wartości dla piezoceramiki [7]. Możliwe jest ponadto uzyskanie wartości impedancji akustycznej kompozytu Z mniejszej od 10 MRayl, a więc bliskiej wartości odpowiadającej PVDF [21]. Względna stała dielektryczna kompozytu zawarta jest w granicach ($\epsilon^S \sim 200 - 500$) co umożliwia otrzymanie dopasowania elektrycznego do układów elektronicznych nadajnika i odbiornika [27]. Niezależnie od dobrych wartości materiałowych kompozyt umożliwia realizację technologicznie trudnych w przypadku piezoceramiki i konstrukcyjnie złożonych, specjalnych głowic ultrasonograficznych (z niepłaskorównoległym lub wielopięścieniowym przetwornikiem). Stosunkowo duża objętościowa zawartość żywicy epoksydowej w kompozycie (zwykle 60-80 % objętościowo stanowi spolimeryzowana żywica epoksydowa) powoduje, że posiada on wyraźnie obserwowalne własności plastyczne już w temperaturze wrzenia wody (poniżej temperatury Curie piezoceramiki). Właściwość tę można wykorzystać do wytlaczania z płaskich krążków przetworników sferycznych wklęsłych o zadanym promieniu krzywizny. Przetworniki wklęsłe umożliwiają ogniskowanie wiązki ultradźwiękowej bez konieczności dodatkowego formowania akustycznych soczewek ogniskujących. Natomiast poprzez odpo-

wiednie uformowanie jednej z elektrod przetwornika kompozytowego jako zbioru współśrodkowych pierścieni można również uzyskać głowicę dynamicznie ogniskującą wiązkę ultradźwiękową [11]. Nie zachodzi w tym przypadku potrzeba technologicznie skomplikowanej obróbki materiału samego przetwornika (tak jak ma to miejsce dla przetworników piezoceramicznych). Dla kompozytu z elektrodami wielopierścieniowymi potencjał elektryczny przyłożony do pojedynczego pierścienia będzie oddziaływał praktycznie wyłącznie na bezpośrednio pod nim znajdującą się część przetwornika.

1.4 Analiza możliwości przeprowadzenia obliczeń wielkości elektroakustycznych przetwornika kompozytowego

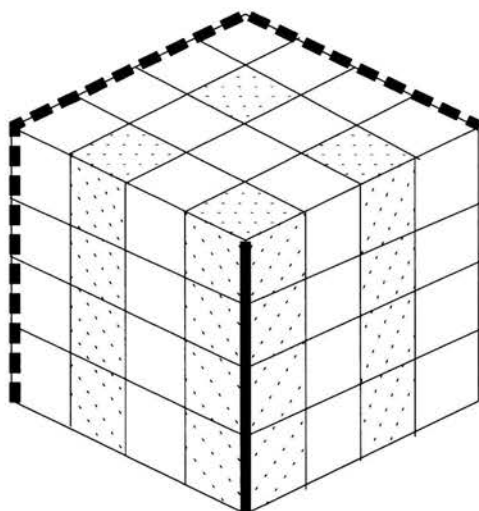
Głównym celem obliczeń wartości wielkości elektroakustycznych (współczynnika sprzężenia elektromechanicznego, impedancji akustycznej, sześciodecybelowego pasma przenoszenia częstotliwości, czułości i innych wielkości) przetwornika kompozytowego o strukturze przedstawionej na rys. 2 jest określenie wpływu konstrukcyjnych wielkości geometrycznych na wymienione wartości. Przeprowadzone obliczenia służą następnie optymalizacji konstrukcji opartej na modelowaniu teoretycznym. Późniejsze badania wykonanych modeli miały za zadanie potwierdzić poprawność modelowania teoretycznego. Zagadnienie propagacji fal pola elektroakustycznego w strukturze kompozytowej (rys. 2) jest trójwymiarowe. Sformułowanie analityczne prowadziłyby do trójwymiarowego zagadnienia równań falowych przy spełnieniu określonych warunków brzegowych. W literaturze podano jedynie plan analitycznego rozwiązania trójwymiarowego zagadnienia własnego drgań pojedynczego niepiezoelektrycznego elementu prostopadłościennego w zakresie prowadzącym do nieskończonego układu równań algebraicznych [13]. Ścisłe rozwiązanie analityczne tego zagadnienia dla co najmniej kilkuset regularnie rozmieszczonych piezoelektrycznych prostopadłościaków tworzących strukturę kompozytową jest ekstremalnie trudne [10]. Możliwe jest natomiast wykorzystanie metody elementu skończonego do obliczeń numerycznych przetwornika traktowanego jako trójwymiarowo drgająca bryła piezoelektryczna [11]. Szczególnie pożądane jest obliczenie na drodze numerycznej wartości współczynnika sprzężenia elektromechanicznego [23] oraz wartości zastępczych tensorów materiałowych hipotetycznego zastępczego materiału jednorodnego. Możliwym się staje ponadto oszacowanie wpływu samej konstrukcji przetwornika (wymiarów makroskopowych całej bryły jak i mikroskopowych elementarnej komórki symetrii kompozytu) na wartości jego wielkości elektroakustycznych. W przypadku obliczania wartości wielkości elektroakustycznych przetworników piezoceramicznych charakteryzujących się częstotliwościami rezonansu elektrycznego od 1MHz do 10 MHz - piezoceramika jest traktowana jako materiał jednorodny, pomimo że fizycznie posiada własności wielodomowego kryształu piezoelektrycznego. Założenie homogeniczności jest w tym przypadku dopuszczalne ze względu na

dysproporcję co do rzędu wielkości długości fali ultradźwiękowej odpowiadającej częstotliwości rezonansowej i rozmiaru ziaren krystalitów (te ostatnie mają rozmiar kilkunastu mikrometrów). Dopiero w zakresie częstotliwości kilkudziesięciu MHz wymienione wartości wielkości stają się porównywalne - fala akustyczna ulega rozproszeniu i tłumienie jej gwałtownie rośnie. W analogiczny sposób należy sformułować warunki dopuszczalności ujednorodnienia struktury kompozytowej w celu wyznaczenia efektywnej wartości zastępczych tensorów materiałowych hipotetycznej struktury homogenicznej. Warunki te muszą określać dopuszczalną relację co do różnic wartości długości fali ultradźwiękowej odpowiadającej częstotliwości rezonansowej i geometrycznego wymiaru charakterystycznego sieci periodycznej fazy piezoelektrycznej w kompozycie. W przypadku zastosowań praktycznych ujednorodnienie umożliwia wykorzystanie równoważnych elektrycznych układów zastępczych (schemat Masona), a w dalszych obliczeniach stwarza możliwość wykorzystania metody analizy obwodów elektrycznych. Nie zachodzi również konieczność rozwiązywania analitycznego równań falowych (przy spełnieniu określonych warunków brzegowych), skrajnie trudnych w przypadku kompozytu, w celu obliczenia własności przetworników.

2. Konstrukcja przetwornika wykonanego z kompozytu typu 1-3

2.1 Klasyfikacja typu kompozytu

Dla materiałów kompozytowych dwuskładnikowych umownie przyjęto określenie typu kompozytu na podstawie analizy elementarnego sześciennego fragmentu struktury (o rozmiarach geometrycznych znacznie mniejszych od całkowitych wymiarów bryły kompozytowej) [16]. Zgodnie z rys. 1 ocenie podlega fakt istnienia dla każdej z dwóch faz materiałowych połączenia pomiędzy każdą z trzech par przeciwległych ścian sześcianu. Następnie każdej fazie materiałowej przyporządkowuje się liczbę odpowiadającą liczbie par przeciwległych ścian sześcianu posiadających połączenia. Liczba ta jest równa jednej z czterech następujących wartości : 0, 1, 2, 3. Typ kompozytu umownie określają połączone myślnikiem liczby określone w opisany powyżej sposób dla każdej z faz materiałowych, na przykład 0-1, 2-1 lub 1-3. Zgodnie z rys. 1 rozpatrywany kompozyt charakteryzuje się istnieniem połączeń wszystkich trzech par naprzeciwległych ścian sześcianu elementarnego dla fazy polimerowej i połączeniem tylko jednej pary dla fazy piezoceramicznej. Zgodnie z opisanymi zasadami nazewnictwa badany kompozyt jest typu 1-3.

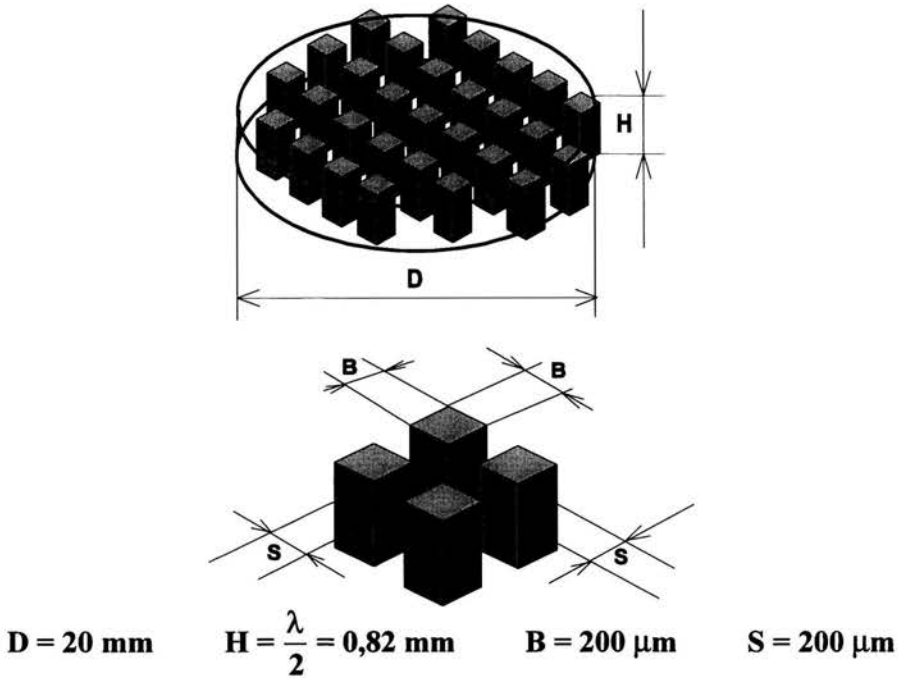


- Połączenia przeciwległych ścian:
- fazy polimerowej (trzy)
 - fazy piezoceramicznej (jedno)

Rys. 1 Kompozyt typu 1-3

2.2 Struktura wewnętrzna kompozytu typu 1-3

Ultradźwiękowy przetwornik kompozytowy pod względem geometrycznym jest płaskorównoległym dyskiem o średnicy co najmniej o rząd wielkości większej od jego grubości (rys. 2). Materiał, z którego na drodze obróbki mechanicznej (przez szlifowanie) wykonywany jest dysk posiada dwuskładnikową strukturę wewnętrzną [34]. Strukturę tę stanowi regularna, periodyczna sieć prostopadłościanów o wysokości równej grubości całej bryły płaskorównoległego dysku [17]. Przekrój poprzeczny każdego z wymienionych prostopadłościanów jest kwadratem o długości boku porównywalnej z wartością odległości pomiędzy sąsiednimi prostopadłościanami. Dodane do siebie wartości długości boku przekroju poprzecznego prostopadłościanu i odległości pomiędzy sąsiednimi prostopadłościanami (wymiar charakterystyczny struktury kompozytowej) powinny łącznie być co najmniej o rząd wielkości mniejsze od długości λ (równiej podwojonej grubości przetwornika $2H$) podłużnej fali akustycznej promieniowanej przez przetwornik odpowiadającej częstotliwości rezonansowej drgań własnych przetwornika. Nie zachowanie tego ostatniego warunku spowoduje w rezultacie interferencję w zbliżonym zakresie częstotliwości dwóch różnych modów drgań - grubościowego



Rys. 2 Struktura wewnętrzna kompozytu typu 1-3

podłużnego i typu Lamba (związanego z periodycznością struktury kompozytu) [35]. Ponadto płaskorównoległą bryłę kompozytową można uważać za drgającą tłokowo jednorodnie jedynie w zakresie częstotliwości o rząd wielkości mniejszych od częstotliwości odpowiadającej długości fali równej wymiarowi charakterystycznemu struktury kompozytowej. Dla przetwornika kompozytowego o strukturze wewnętrznej i wymiarach makroskopowych przedstawionych na rys. 2 długość fali odpowiadająca częstotliwości 2.10 MHz jednorodnych rezonansowych drgań tłokowych wynosi 2.05 mm. Wymiar charakterystyczny struktury kompozytowej wynosi natomiast 0.40 mm. Z przyczyn trudności technologicznych uzyskania drobniejszej struktury różnica pomiędzy wartością wymiaru charakterystycznego a długością fali w wykonanym modelu jest jedynie pięciokrotna. Opierając się na przeprowadzonych badaniach doświadczalnych nie stwierdzono jednak interferencji w bliskim zakresie częstotliwości drgań tłokowych z modami drgań innymi niż grubościowe. W opisie rys. 2 podano rzeczywiste wymiary charakterystyczne przetworników kompozytowych typu 1-3 o częstotliwości rezonansu elektrycznego 2.10 MHz wykonanych przez autora [22].

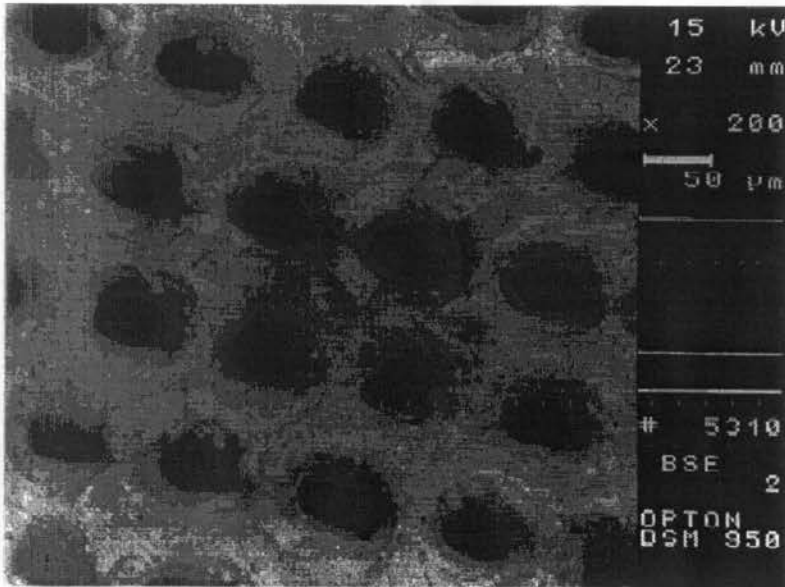
2.3 Technologie wykonywania kompozytu typu 1-3

Strukturę kompozytową typu 1-3 można uzyskać przy zastosowaniu różnych technologii obróbki mechanicznej. Surowcem wyjściowym jest zazwyczaj gotowy przetwornik piezoceramiczny (spolaryzowany) o grubości znacznie większej od grubości wytwarzanego przetwornika kompozytowego [12]. Obróbce mechanicznej podlega płaskorównoległa warstwa grubego przetwornika piezoceramicznego przylegająca bezpośrednio do płaszczyzny górnej elektrody. Przy zastosowaniu piły tarczowej z nasypem diamentowym lub też drutu wolframowego z nasypem diamentowym wykonać należy szereg płaskorównoległych nacięć (na grubość odpowiadającą projektowanej grubości przetwornika kompozytowego) w dowolnym kierunku w płaszczyźnie elektrody, a następnie taką samą ilość nacięć w kierunku ortogonalnym do pierwotnie obranego [18]. W wyniku opisanej operacji powstaje regularna periodyczna sieć prostopadłościów zamocowana w podłożu. Przestrzenne odstępy pomiędzy prostopadłościami zalewane są żywicą epoksydową. W literaturze zawarte są informacje o próbach wykorzystywania obróbek laserowej, elektrochemicznej a nawet odlewniczej do wykonywania periodycznej struktury kompozytowej [34]. Własne próby związane z zastosowaniem technologii laserowej zawiodły przede wszystkim z powodu depolaryzacji materiału w wyniku szoku termicznego (przekroczenia temperatury Curie równej $T_c \approx 350 \text{ }^\circ\text{C}$ warstw przypowierzchniowych materiału piezoceramicznego) [17].

2.4 Wybór technologii wykonywania kompozytu typu 1-3

Jednym z podstawowych kryteriów oceny konkretnej technologii wykonywania struktur kompozytowych jest inwazyjność wybranej metody [34]. Rozumiemy ją jako wpływ wybranej technologii obróbki na przeobrażenia własności fizykochemicznych zwłaszcza wierzchnich warstw obrabianego materiału. Szczególnie pod tym względem znamienny jest potencjalnie występujący efekt depolaryzacji częściowej lub całkowitej uprzednio wymienionych warstw materiału [8]. Zastosowanie lasera jest bardzo problematyczne ze względu na rodzaj obrabianego materiału. Na przykład ceramiki o składzie chemicznym z dominującym udziałem azotku krzemu są dobrym materiałem do obróbki laserowej. Posiadają one bowiem lotne produkty rozpadu powstałe w wyniku reakcji chemicznych zachodzących w wyniku działania lasera. Natomiast ceramika piezoelektryczna PZT (będąca domieszkowanym rozwiązaniem stałym cyrkonianu i tytanianu ołowiu) nie przejawia skłonności do wyparowywania w wyniku szoku termicznego. W wyniku cięcia laserowego pozostaje więc szereg wytopionych „kraterów”, z których następnie trudno jest uzyskać geometrycznie regularną szczelinę. Na rys. 3 przedstawione są rezultaty własnych prób obróbki laserowej. Wyraźnie widoczne są regularne

rzędy „kraterów”. Nad brzegami „kraterów” znajdują się nadtopione a następnie zastygłe warstwy materiału. Uzyskano więc rozwiniętą powierzchniową strukturę niepłaską. Innym, o wiele bardziej niekorzystnym zjawiskiem w przypadku zastosowania obróbki laserowej są - ze względu na szok termiczny - przemiany nie tylko własności fizykochemicznych warstw powierzchniowych (daleko posunięta depolaryzacja) ale i również nieodwracalne reakcje chemiczne zachodzące w samym materiale. W rezultacie tych przemian chemicznych powstaje wierzchni pancierz niepiezoelektrycznego materiału, który nie jest podatny nawet na ewentualną powtórna polaryzację. Na rys. 4 widzimy wyściełające „krater” wierzchnie warstwy niepiezoelektrycznego materiału. Warstwy te zostały w sposób nieodwracalny przeobrażone chemicznie. Nie mogą więc być one podatne na ewentualną powtórna polaryzację.



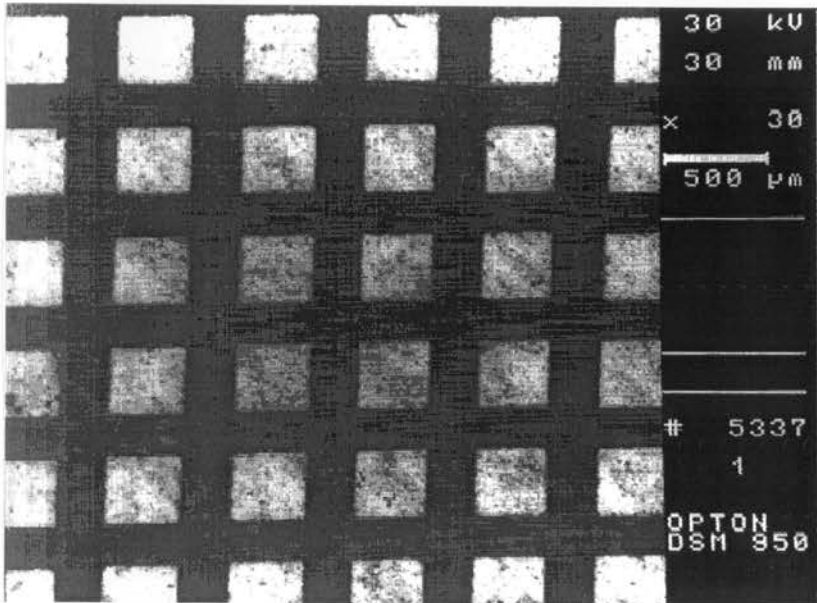
Rys. 3 Rezultaty własne obróbki laserowej (uzyskano za pomocą mikroskopu elektronowego OPTON DSM 950)

Periodyczną strukturę regularnie rozmieszczonych prostopadłościów można wykonać za pomocą obróbki mechanicznej. Można w tym celu stosować piłę tarczową z nasypem diamentowym lub drut wolframowy z nasypem diamentowym [20]. Obróbka przy zastosowaniu piły drutowej jest mniej inwazyjna ze względu na dużo mniejszą prędkość względną narzędzia i przedmiotu w trakcie procesu obróbki (ma w tym przypadku miejsce mniejsze wydzielanie ciepła powstającego w wyniku procesu ścierania) [8]. Obróbka



Rys. 4 Przeobrażenia chemiczne wierzchniej warstwy obrabianej laserowo (uzyskano za pomocą mikroskopu elektronowego OPTON DSM 950)

piłą tarczową jest natomiast bardziej ekonomiczna ze względu na mniejszą czasochłonność. Dla tej metody obróbki w literaturze [8] zaproponowano wprowadzenie współczynnika efektu depolaryzacji dla korekcji efektywnej wartości współczynnika sprężenia elektromechanicznego (wartość współczynnika sprężenia ulega zmniejszeniu w wyniku opisywanego zjawiska). Na rys. 5 przedstawiono zdjęcia własnych prób obróbki piłą drutową [19]. W porównaniu z rys. 3 na rys. 5 widzimy płaską strukturę powierzchni. Jest ona bardziej podatna technologicznie na późniejsze kolejne zabiegi wytwarzania przetwornika kompozytowego (próżniowe zalewanie żywicą, szlifowanie na grubość odpowiadającą konkretnej częstotliwości rezonansowej, próżniowe naparowywanie cienkich metalizacji elektrod). Na rys. 5 nie widać przeobrażonych warstw wierzchnich obrabianego materiału. Struktura jest regularna i periodyczna. Zarówno w przypadku obróbki piłą drutową jak i tarczową musi być w sposób szczególnie zachowana możliwie jak największa sztywność układu "obrabiarka - uchwyt - przedmiot - narzędzie". Jest to konieczne ze względu na konieczność eliminacji "bicia poprzecznego" obrabiającego narzędzia. Wytrzymałość mechaniczna nacinanых kruchych słupków piezoceramicznych o mikroskopowych rozmiarach maleje bowiem z trzecią potęgą wymiaru przekroju poprzecznego (bok kwadratu na rys. 5 posiada na przykład długość 200 μm).



Rys. 5 Przekrój poprzeczny struktury kompozytowej naciętej piłą drutową (uzyskano za pomocą mikroskopu elektronowego OPTON DSM 950)

3. Schemat zastępczy przetwornika piezoelektrycznego według Masona

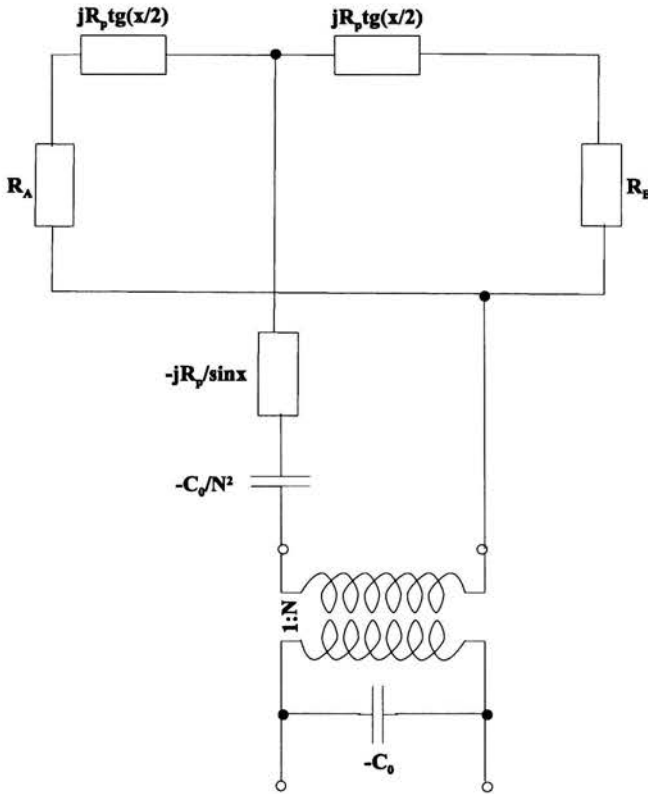
Schemat zastępczy przetwornika piezoelektrycznego według Masona wolno stosować kiedy spełnione jest założenie tłokowego charakteru drgań podłużnych. Sytuacja taka ma miejsce w przypadku kiedy podwojona grubość przetwornika (równa długości fali akustycznej dla częstotliwości rezonansu elektrycznego) jest o rząd wielkości mniejsza od średnicy przetwornika a jego tył uprzednio został dostatecznie obciążony akustycznie [41].

Przy założeniu modelu jednowymiarowego propagacji płaskiej podłużnej fali akustycznej proste i odwrotne zjawisko piezoelektryczne można zapisać w postaci (1-2).

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}^p \mathbf{S} - \mathbf{h} \mathbf{D} \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{h} \mathbf{S} + \frac{1}{\epsilon^s} \mathbf{D} \quad (2)$$

\mathbf{E} - natężenie pola elektrycznego, \mathbf{D} - indukcja elektryczna, \mathbf{S} - odkształcenie, u - przemieszczenie, \mathbf{T} - naprężenie, ϵ^s - przenikalność dielektryczna przy $\mathbf{S}=\text{const.}$, c^D - współczynnik sprężystości przy $\mathbf{D}=\text{const.}$,



Rys. 6 Układ zastępczy przetwornika w/g Masona [29]

Przy założeniu zagadnienia jednowymiarowego druga zasada dynamiki dla ośrodka ciągłego przyjmuje postać (3):

$$\rho_p \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} \quad (3)$$

Przy tym samym założeniu prawo Gaussa można przedstawić w postaci (4):

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (4)$$

Wstawiając (1) do (3) i uwzględniając (4) otrzymujemy (5):

$$\rho_p \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{c}^D \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} \quad (5)$$

Przetwornik piezoelektryczny (dysk o grubości d i impedancji akustycznej $\rho_p c_p$) jest obustronnie obciążony ośrodkami o impedancjach akustycznych

$\rho_A c_A$ i $\rho_B c_B$. Przy tak określonym założeniu otrzymujemy rozwiązanie równania (5) wewnątrz przetwornika w postaci (6) a rozwiązanie w ośrodkach obciążających powierzchnie przetwornika zgodnie z (7) i (8):

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}_3 e^{\frac{-j\omega x}{c_p}} + \mathbf{B}_2 e^{\frac{j\omega x}{c_p}} \quad (6)$$

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{B}_1 e^{\frac{j\omega x}{c_A}} \quad (7)$$

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{B}_4 e^{\frac{-j\omega x}{c_B}} \quad (8)$$

c_p - prędkość fali w przetworniku, c_A - prędkość fali w ośrodku obciążającym tylną powierzchnię, c_B - prędkość fali w ośrodku badanym

Stałe B_1, B_2, B_3, B_4 wyznaczone zostają z warunków brzegowych (9 - 12):

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u} \quad \text{dla } x = 0 \quad (9)$$

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{u} \quad \text{dla } x = d \quad (10)$$

$$c_A \frac{\partial \mathbf{u}_A}{\partial x} = c^D \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} - \mathbf{hD} \quad \text{dla } x = 0 \quad (11)$$

$$c_B \frac{\partial \mathbf{u}_B}{\partial x} = c^D \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} - \mathbf{hD} \quad \text{dla } x = d \quad (12)$$

Przy założeniu sinusoidalnej zmiany indukcji D w czasie z pulsacją ω prędkość wypromieniowywanej fali dana jest przez (13):

$$v_B = \frac{\mathbf{hD} \sin \omega t}{\rho_p c_p} \frac{-1 + \cos \frac{\omega d}{c_p} + j m_A \sin \frac{\omega d}{c_p}}{(m_A + m_B) \cos \frac{\omega d}{c_p} + j(1 + m_A m_B) \sin \frac{\omega d}{c_p}} \quad (13)$$

gdzie $m_A = \rho_A c_A / \rho_p c_p$, $m_B = \rho_B c_B / \rho_p c_p$

Całka z natężenia pola elektrycznego (2) względem x na całej grubości d przetwornika jest równa napięciu V przyłożonemu do przetwornika (14):

$$V = -\text{hu} \Big|_{x=0}^{x=d} + \frac{d}{\epsilon^s} D \quad (14)$$

Jeżeli A jest polem powierzchni przetwornika to prąd płynący przez przetwornik dany jest przez (15):

$$I = A \frac{dD}{dt} \quad (15)$$

Impedancja wejściowa przetwornika jest równa (16):

$$Z_w = \frac{V}{I} = \frac{-\text{hu} \Big|_{x=0}^{x=d}}{j\omega DA} + \frac{d}{j\omega A \epsilon^s} \quad (16)$$

Wielkość $C_0 = A\epsilon^s/d$ jest pojemnością statyczną przetwornika. Po wykonaniu przekształceń otrzymujemy wyrażenie na impedancję wejściową przetwornika w postaci (17):

$$Z_w = \frac{1}{j\omega C_0} \left(1 - \frac{h^2 C_0^2}{j\omega C_0} \frac{F}{A\rho_p c_p} \right) \quad (17)$$

gdzie F dane jest wzorem (18):

$$F = \frac{-\text{tg}^2 \frac{\omega d}{2c_p} + j(m_A + m_B) \text{tg} \frac{\omega d}{2c_p}}{\frac{1}{2}(m_A + m_B)(1 - \text{tg}^2 \frac{\omega d}{2c_p}) + j(1 + m_A m_B) \text{tg} \frac{\omega d}{2c_p}} \quad (18)$$

Występujący w (17) człon $A\rho_p c_p/h^2 C_0^2 F$ oznaczamy jako $Z_d = A\rho_p c_p/h^2 C_0^2 F$ a hC_0 jako $N = hC_0$. Ponadto impedancje przetwornika R_p oraz ośrodków obciążających R_A i R_B oznaczamy jako $R_p = A\rho_p c_p$, $R_A = A\rho_A c_A$, $R_B = A\rho_B c_B$ a $x = \omega d/c_p$ jest częstotliwością względną odniesioną do częstotliwości rezonansu mechanicznego przetwornika. Przy tak przyjętych oznaczeniach z postaci wyrażenia (17) wynika schemat zastępczy przetwornika przedstawiony na rys. 6.

4. Rezonansowy schemat zastępczy przetwornika piezoelektrycznego

Dla przetwornika obciążonego symetrycznie ($R_A = R_B$) impedancja Z_R gałęzi szeregowej układu zastępczego Masona (rys. 6) wynosi (19) [28]:

$$Z_R = \frac{R_B}{2N^2} + j \frac{1}{\omega C_0} \left(1 - \frac{1}{k_t^2} \frac{\pi f}{2f_m} \operatorname{ctg} \frac{\pi f}{2f_m} \right) \quad (19)$$

Admitancja wejściowa symetrycznie obciążonego przetwornika stanowi równoległe połączenie pojemności statycznej C_0 i impedancji Z_R i jest równa (20):

$$Y_w = \frac{1}{Z_R} + j\omega C_0 \quad (20)$$

Admitancja Y_W ma charakter zbliżony do admitancji szeregowego układu rezonansowego (rys. 7) o parametrach R' , C' , L' (rys. 8) [28].

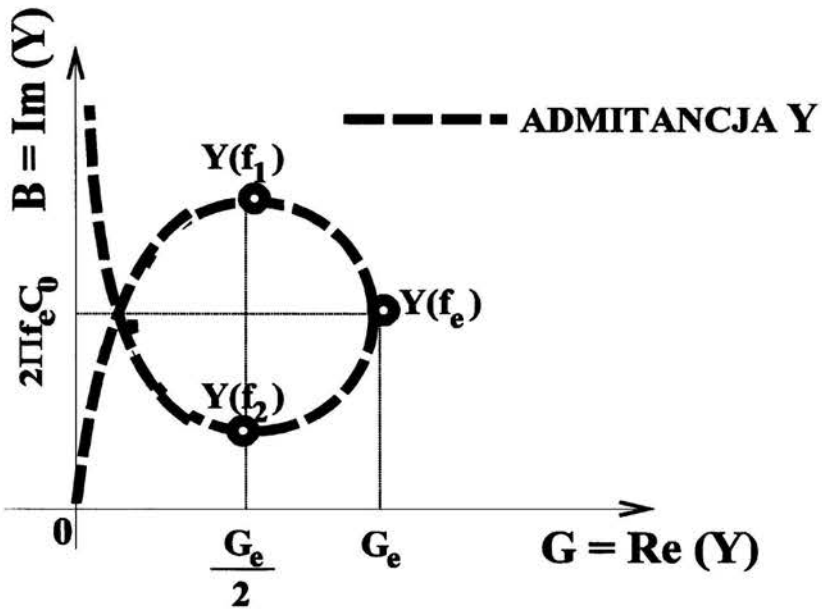
$$R' = \frac{1}{8k_t^2 f_c C_0} \frac{R_A + R_B}{R_p} \quad (21)$$

$$C' = \frac{8C_0 k_t^2}{\pi^2} \frac{1}{1 - \frac{8k_t^2}{\pi^2}} \quad (22)$$

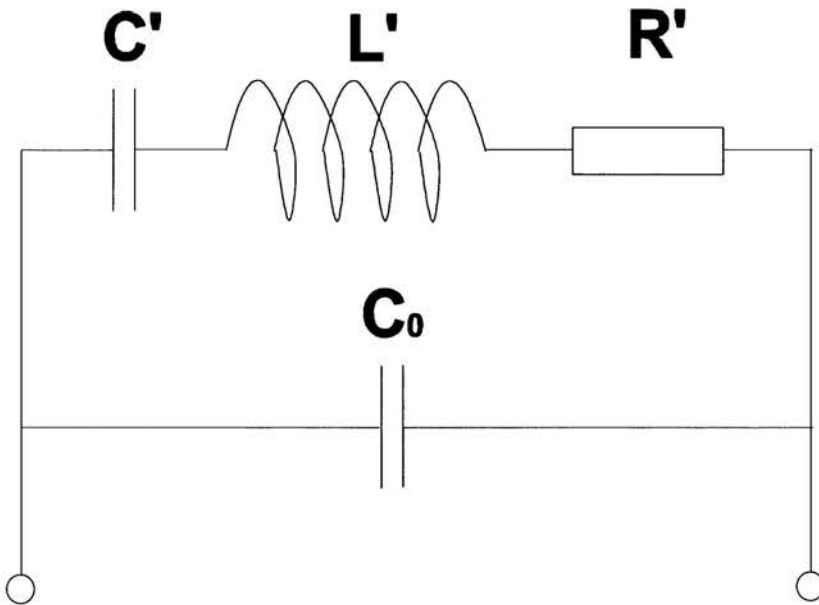
$$L' = \frac{8k_t^2}{2\pi f_c C'} \quad (23)$$

$$Q_a = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{8k_t^2}{\pi^2} \right) \frac{R_p}{R_A + R_B} \quad (24)$$

Wartość wielkości dobroci Q_a (24) jest związana z częstotliwościowym pasmem przenoszenia układu rezonansowego. Ze wzrostem Q_a maleje pasmo przenoszenia. Dobroć Q_a zależy od wartości impedancji akustycznych materiału przetwornika R_p i obciążeń akustycznych R_A i R_B oraz współczynnika sprzężenia elektromechanicznego.



Rys. 7 Przebieg krzywej admittance przetwornika dla stanu ustalonego w pobliżu częstotliwości rezonansowej



Rys. 8 Rezonansowy szeregowy układ zastępczy przetwornika

5. Numeryczne obliczenie wartości współczynnika sprzężenia elektromechanicznego przetwornika kompozytowego

5.1 Sformułowanie równań opisujących propagację fali akustycznej w jednorodnej bryle piezoelektrycznej

Zagadnienie propagacji fal pola elektroakustycznego w jednorodnym materiale piezoelektrycznym opisane jest układem równań (25-30) [30]. Równanie (25) stanowi drugą zasadę dynamiki Newtona dla ośrodka ciągłego. Prawo Gaussa (26) wyklucza możliwość istnienia swobodnych ładunków elektrycznych w objętości bryły piezoelektrycznej nie będącej przewodnikiem. Prosty i odwrotny efekt piezoelektryczny zapisany jest w postaci równań (27-28). Relacja pomiędzy tensorem przemieszczenia a wektorem odkształcenia przedstawiona jest w równaniu (29). Wektor natężenia pola elektrycznego jest związany ze skalarą potencjału pola elektrycznego zgodnie z równaniem (30).

$$\operatorname{div}_x \mathbf{T} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (25)$$

$$\operatorname{div}_x \mathbf{D} = 0 \quad (26)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{c} \mathbf{S} - \mathbf{e} \mathbf{E} \quad (27)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e} \mathbf{S} + \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} \quad (28)$$

$$\mathbf{S} = \operatorname{sym}_x \nabla \mathbf{u} \quad (29)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla_x \Phi \quad (30)$$

gdzie: \mathbf{u} - wektor przemieszczenia mechanicznego, Φ - skalar potencjału elektrycznego, \mathbf{S} - tensor odkształcenia, \mathbf{T} - tensor naprężenia, \mathbf{E} - wektor natężenia pola elektrycznego, \mathbf{D} - wektor indukcji elektrycznej, ρ - skalar gęstości masy, \mathbf{c} - tensor sztywności mechanicznej, \mathbf{e} - tensor piezoelektryczny, $\boldsymbol{\varepsilon}$ - tensor dielektryczny

Występujące w równaniach (25-30) tensory materiałowe \mathbf{c}_{ijkl} , \mathbf{e}_{kij} , $\boldsymbol{\varepsilon}_{ik}$ podlegają rozpisaniu w postaci macierzowej na poszczególne składowe według notacji symbolicznej Aulda [2]. Istotna jest postać tensorów materiałowych dla ośrodka ortotropowego (spolaryzowana piezoceramika) i anizotropowego (polimer - żywica epoksydowa). Ze względu na postać tensorów materiałowych \mathbf{c}_{ijkl} , \mathbf{e}_{kij} , $\boldsymbol{\varepsilon}_{ik}$ dla spolaryzowanej piezoceramiki (materiału ortotropowego) oraz polimeru (własności izotropowe) większość wyrazów w reprezentacji macierzowej wymienionych tensorów poza przekątną główną ma wartość zero.

Macierze sztywności mechanicznej dla piezoceramiki i polimeru mają postać:

PIEZOCERAMIKA

$$\begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & c_{1111} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & c_{2323} & 0 & 0 \\ \cdot & \text{symetria} & \cdot & \cdot & c_{2323} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1212} \end{bmatrix}$$

POLIMER

$$\begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & c_{1111} & c_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & c_{2222} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & c_{2222} & 0 & 0 \\ \cdot & \text{symetria} & \cdot & \cdot & c_{2222} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1212} \end{bmatrix}$$

Macierze sztywności dielektrycznej dla piezoceramiki i polimeru:

PIEZOCERAMIKA

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ \cdot & \epsilon_{11} & 0 \\ \text{symetria} & \cdot & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

POLIMER

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ \cdot & \epsilon_{11} & 0 \\ \text{symetria} & \cdot & \epsilon_{11} \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności piezoelektrycznej dla piezoceramiki:

PIEZOCERAMIKA

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{311} \\ 0 & 0 & e_{311} \\ 0 & 0 & e_{333} \\ 0 & e_{223} & 0 \\ e_{223} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.2 Prosty model fizyczny ujednorodnienia przetwornika kompozytowego

W literaturze [36,43] przedstawiony został opis prostego modelu fizycznego wyznaczenia wybranych efektywnych wartości tensorów materiałowych przetwornika kompozytowego. Wymieniony model dotyczy płaskorównoległego dysku kompozytowego drgającego tłokowo (o średnicy co najmniej dwudziestokrotnie większej od grubości). Wymiar charakterystyczny struktury kompozytowej (wartość odległości pomiędzy dwiema sąsiednimi jednorodnymi ścianami prostopadłościanów w przypadku struktury o geometrii przedstawionej na rys. 2) powinien ponadto być o rząd wielkości mniejszy od podwojonej grubości dysku kompozytowego (czyli długości emitowanej po-

długości fali ultradźwiękowej dla drgań tłokowych). Opisu dokonujemy w układzie współrzędnych kartezjańskich umieszczonym w środku symetrii dysku kompozytowego. Płaszczyzną symetrii kompozytu jest płaszczyzna $x-y$, a oś z jest prostopadła do płaszczyzny symetrii dysku. Równania opisujące prosty i odwrotny efekt piezoelektryczny uprzednio przedstawione w postaci tensorowej (27-28) podlegają rozpisaniu na poszczególne składowe według notacji symbolicznej Aulda [2] rozdzielnie dla każdej z faz materiałowych. Zmiennymi niezależnymi są odkształcenie S i wektor natężenia pola elektrycznego E .

Dla izotropowej fazy polimerowej :

$$\mathbf{T}_1^p = c_{11}^p S_1^p + c_{12}^p S_2^p + c_{12}^p S_3^p \quad (31)$$

$$\mathbf{T}_2^p = c_{12}^p S_1^p + c_{11}^p S_2^p + c_{12}^p S_3^p \quad (32)$$

$$\mathbf{T}_3^p = c_{12}^p S_1^p + c_{12}^p S_2^p + c_{11}^p S_3^p \quad (33)$$

$$\mathbf{T}_4^p = c_{44}^p S_4^p \quad (34)$$

$$\mathbf{T}_5^p = c_{44}^p S_5^p \quad (35)$$

$$\mathbf{T}_6^p = c_{44}^p S_6^p \quad (36)$$

$$\mathbf{D}_1^p = \varepsilon_{11}^p E_1^p \quad (37)$$

$$\mathbf{D}_2^p = \varepsilon_{11}^p E_2^p \quad (38)$$

$$\mathbf{D}_3^p = \varepsilon_{11}^p E_3^p \quad (39)$$

Dla ortotropowej fazy piezoceramicznej:

$$\mathbf{T}_1^c = c_{11}^c S_1^c + c_{12}^c S_2^c + c_{13}^c S_3^c - e_{31}^c E_3^c \quad (40)$$

$$\mathbf{T}_2^c = c_{12}^c S_1^c + c_{11}^c S_2^c + c_{13}^c S_3^c - e_{31}^c E_3^c \quad (41)$$

$$\mathbf{T}_3^c = c_{13}^c S_1^c + c_{13}^c S_2^c + c_{33}^c S_3^c - e_{33}^c E_3^c \quad (42)$$

$$\mathbf{T}_4^c = c_{44}^c S_4^c - e_{15}^c E_2^c \quad (43)$$

$$\mathbf{T}_5^c = c_{44}^c S_5^c - e_{15}^c E_1^c \quad (44)$$

$$\mathbf{T}_6^c = c_{66}^c S_6^c \quad (45)$$

$$\mathbf{D}_1^c = e_{15}^c S_5^c + \varepsilon_{11}^c E_1^c \quad (46)$$

$$\mathbf{D}_2^c = e_{15}^c S_4^c + \varepsilon_{11}^c E_2^c \quad (47)$$

$$\mathbf{D}_3^c = e_{31}^c S_1^c + e_{31}^c S_2^c + e_{33}^c S_3^c + \varepsilon_{33}^c E_3^c \quad (48)$$

Następnie przyjmujemy sześć następujących założeń:

Pierwsze założenie:

Zarówno pole odkształceń i naprężeń jak i elektryczne są niezależne od współrzędnych x i y (są wyłącznie funkcją współrzędnej z wyznaczającej kierunek grubościowych drgań tłokowych). Rozróżniamy je poprzez górne in-

deksy wartości opisujących ich wielkości odpowiednio "P" dla fazy polimerowej oraz "c" dla fazy piezoceramicznej.

Drugie założenie:

Składowe wektora natężenia pola elektrycznego inne niż związane ze współrzędną z są zerowe dla każdej z faz materiałowych ($\mathbf{E}_1^p = \mathbf{E}_2^p = \mathbf{0}$ i $\mathbf{E}_1^c = \mathbf{E}_2^c = \mathbf{0}$). W płaszczyźnie x - y jest zachowana symetria ($\mathbf{S}_1^p = \mathbf{S}_2^p$, $\mathbf{T}_1^p(\mathbf{z}) = \mathbf{T}_2^p(\mathbf{z})$ oraz $\mathbf{S}_1^c = \mathbf{S}_2^c$, $\mathbf{T}_1^c(\mathbf{z}) = \mathbf{T}_2^c(\mathbf{z})$). Założenie powyższe uzasadnia geometria dysku kompozytowego (niewspółmierność grubości i średnicy oraz symetria osiowa).

Trzecie założenie:

Płaskorównoległy dysk kompozytowy można uważać za homogenicznie drgający tłokowo w zakresie częstotliwości o rząd wielkości mniejszych od częstotliwości odpowiadającej długości fali równej wymiarowi charakterystycznemu struktury kompozytowej. Zakładamy, że kompozyt posiada wymiar charakterystyczny struktury o rząd wielkości mniejszy od długości fali modu drgań grubościowych - tłokowych. Możemy wtedy przyjąć, że odkształcenia wzdłuż osi z drgań grubościowych są dla obydwu faz polimerowej i piezoceramicznej jednakowe ($\mathbf{S}_3^p(\mathbf{z}) = \mathbf{S}_3^c(\mathbf{z}) = \bar{\mathbf{S}}_3(\mathbf{z})$). (Górna pozioma kreska nad daną wielkością oznacza efektywną uśrednioną wartość dla obydwu faz).

Czwarte założenie:

Na obie płaskorównoległe okładki przetwornika kompozytowego naniesiono elektrody srebrne w postaci cienkich warstw metalizacji. Przebieg linii sił pola elektrycznego pomiędzy okładkami przetwornika przyjmujemy jako analogiczny do występującego w kondensatorze płaskim o nieskończenie rozległych okładkach. W związku z powyższym uprawnione jest założenie jednakowej wartości składowej wzdłuż osi z drgań grubościowych wektora natężenia pola elektrycznego dla obydwu faz materiałowych ($\mathbf{E}_3^p(\mathbf{z}) = \mathbf{E}_3^c(\mathbf{z}) = \bar{\mathbf{E}}_3(\mathbf{z})$).

Piąte założenie:

Rozważamy wzajemne oddziaływania faz materiałowych. Z równania statyki dla bryły kompozytowej wynika fakt równej wartości składowych poprzecznych naprężenia dla obydwu faz materiałowych ($\mathbf{T}_1^p(\mathbf{z}) = \mathbf{T}_1^c(\mathbf{z}) = \bar{\mathbf{T}}_1(\mathbf{z})$). Przyjmujemy, że odkształcenia poprzeczne faz materiałowych wzajemnie się kompensują tak, że efektywne odkształcenie poprzeczne struktury kompozytowej jest zerowe ($\bar{\mathbf{S}}_1(\mathbf{z}) = (1 - \nu)\mathbf{S}_1^p(\mathbf{z}) + \nu\mathbf{S}_1^c(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$, gdzie ν stanowi procentową objętościową zawartość piezoceramiki w kompozycie).

Szóste założenie:

Upřednio określiliśmy wymiar charakterystyczny struktury kompozytowej jako o rząd wielkości mniejszy od długości emitowanej podłużnej fali ultradźwiękowej dla modu drgań tłokowych. Możemy więc przyjąć, że składowe z indukcji elektrycznej i naprężenia są średnimi ważonymi wartościami składowych dla poszczególnych faz materiałowych ($\bar{\mathbf{T}}_3(\mathbf{z}) = \nu \mathbf{T}_3^c(\mathbf{z}) + (1 - \nu) \mathbf{T}_3^p$, $\bar{\mathbf{D}}_3(\mathbf{z}) = \nu \mathbf{D}_3^c(\mathbf{z}) + (1 - \nu) \mathbf{D}_3^p(\mathbf{z})$).

Przy powyższych założeniach, po dokonaniu przekształceń [36] otrzymujemy równania (49-50) opisujące prosty i odwrotny efekt piezoelektryczny dla hipotetycznego materiału homogenicznego. Materiał ten odpowiada własnościami piezoelektrycznymi dwuskładnikowemu kompozytowi.

$$\bar{\mathbf{T}}_3(\mathbf{z}) = \bar{\mathbf{c}}_{33} \bar{\mathbf{S}}_3(\mathbf{z}) - \bar{\mathbf{e}}_{33} \bar{\mathbf{E}}_3(\mathbf{z}) \quad (49)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_3(\mathbf{z}) = \bar{\mathbf{e}}_{33} \bar{\mathbf{S}}_3(\mathbf{z}) + \bar{\mathbf{\epsilon}}_{33} \bar{\mathbf{E}}_3(\mathbf{z}) \quad (50)$$

W równaniach (49-50) występują efektywne wartości składowe tensorów materiałowych $\bar{\mathbf{c}}_{33}$, $\bar{\mathbf{e}}_{33}$ i $\bar{\mathbf{\epsilon}}_{33}$ o postaci przedstawionej w równaniach (51-53):

$$\bar{\mathbf{c}}_{33} = \nu \left[\mathbf{c}_{33}^c - \frac{2(1 - \nu)(\mathbf{c}_{13}^c - \mathbf{c}_{12}^p)^2}{\nu(\mathbf{c}_{11}^p + \mathbf{c}_{12}^p) + (1 - \nu)(\mathbf{c}_{11}^c + \mathbf{c}_{12}^c)} \right] + (1 - \nu) \mathbf{c}_{11}^p \quad (51)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_{33} = \nu \left[\mathbf{e}_{33}^p - \frac{2(1 - \nu) \mathbf{e}_{31}^p (\mathbf{c}_{31}^c - \mathbf{c}_{12}^p)}{\nu(\mathbf{c}_{11}^p + \mathbf{c}_{12}^p) + (1 - \nu)(\mathbf{c}_{11}^c + \mathbf{c}_{12}^c)} \right] \quad (52)$$

$$\bar{\mathbf{\epsilon}}_{33} = \nu \left[\mathbf{\epsilon}_{33}^c + \frac{2(1 - \nu)(\mathbf{e}_{31}^c)^2}{\nu(\mathbf{c}_{11}^p + \mathbf{c}_{12}^p) + (1 - \nu)(\mathbf{c}_{11}^c + \mathbf{c}_{12}^c)} \right] + (1 - \nu) \mathbf{\epsilon}_{11}^p \quad (53)$$

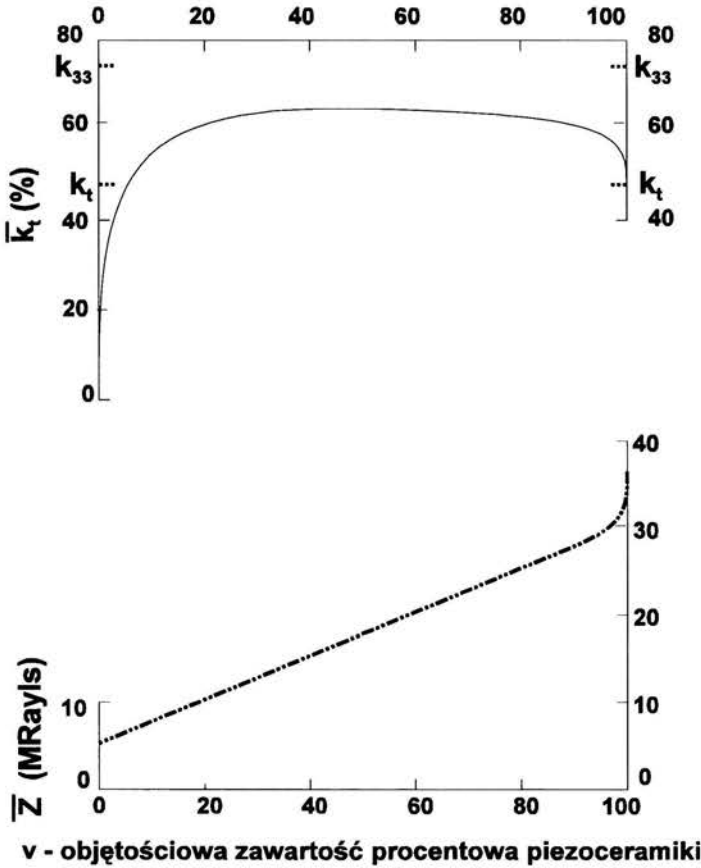
$$\bar{\mathbf{c}}_{33}^D = \bar{\mathbf{c}}_{33} + \frac{(\bar{\mathbf{e}}_{33})^2}{\bar{\mathbf{\epsilon}}_{33}} \quad (54)$$

$$\bar{\rho} = \nu \rho^c + (1 - \nu) \rho^p \quad (55)$$

Na podstawie równań (49-55) i układu zastępczego Masona [23,28] wyznaczamy impedancję akustyczną $\bar{\mathbf{Z}}$ (56) oraz współczynnik sprzężenia elektromechanicznego $\bar{\mathbf{k}}_t$ (57).

$$\bar{\mathbf{Z}} = \sqrt{\bar{\mathbf{c}}_{33}^D \bar{\rho}} \quad (56)$$

$$\bar{k}_t = \frac{\bar{e}_{33}}{\sqrt{\bar{c}_{33}^D \bar{\epsilon}_{33}}} \quad (57)$$



Rys. 9 Przebiegi zmienności impedancji akustycznej Z oraz współczynnika sprzężenia elektromechanicznego k_t w funkcji v zawartości procentowej piezoceramiki [36]

Na rys. 9 przedstawiono przebieg zmienności impedancji akustycznej \bar{Z} oraz współczynnika sprzężenia elektromechanicznego \bar{k}_t w funkcji v procentowej objętościowej zawartości piezoceramiki w kompozycie [36]. W założeniach dopuszczalności stosowania powyższego modelu zawarty został warunek posiadania przez strukturę kompozytową wymiaru charakterystycznego o rząd wielkości mniejszego od długości fali modu drgań grubościowych - tłokowych. W dalszych kolejnych krokach ujednorodniania struktury jedynym jej parametrem jest procentowa zawartość poszczególnych faz materiałowych. Parametry geometryczne struktury, a zwłaszcza komórki elementarnej

są natomiast brane pod uwagę w wybranej przez autora metodzie homogenizacji asymptotycznej opisanej w rozdziale 5.5.

5.3 Zastosowanie teorii homogenizacji asymptotycznej do ujednorodnienia przetwornika kompozytowego

Analityczne obliczenie wartości wielkości elektroakustycznych przetwornika kompozytowego jest trudne ze względu na współmierność wszystkich trzech wymiarów najmniejszego elementu symetrii przetwornika (zagadnienie trójwymiarowe). Metodę alternatywną do wymienionej stanowi obliczenie numeryczne z wykorzystaniem metody elementów skończonych MES [44,15]. Obliczenia wartości współczynnika sprzężenia elektromechanicznego polegają na wyznaczeniu wartości wielkości energetycznych zarówno pola elektromagnetycznego, jak i pola naprężeń i odkształceń w bryle przetwornika za pomocą MES [25]. W praktyce możliwość obliczeń wielkości energetycznych przy zastosowaniu MES jest ograniczona jedynie do niewielkiego fragmentu bryły kompozytu ze względu na potęgowo rosnący rząd wielkości globalnej macierzy sztywności wraz ze wzrostem całkowitej liczby stopni swobody [44]. Analiza dynamiczna całej bryły kompozytu jest natomiast możliwa na drodze podzielenia zagadnienia numerycznego na dwa następujące etapy :

Etap pierwszy :

Analizę statyczną elementarnej jednostki symetrii kompozytu prowadzącą do wyznaczenia zastępczych tensorów materiałowych hipotetycznej struktury homogenicznej.

Etap drugi :

Analizę dynamiczną zastępczej homogenicznej struktury kompozytowej całej bryły [9].

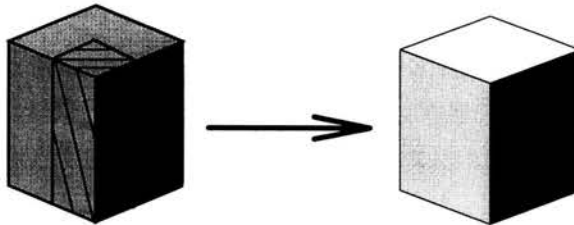
Analizę dynamiczną można zastąpić rozwiązaniem mniej ogólnym - obliczeniami przeprowadzonymi w oparciu o schemat zastępczy Masona. Jest to możliwe wyłącznie w przypadku kiedy są spełnione warunki dopuszczalności stosowania wymienionego schematu zastępczego (obowiązującego dla jednorodnego przetwornika piezoelektrycznego drgającego tłokowo). W proponowanym, zmodyfikowanym procesie rozwiązania numerycznego metoda MES jest stosowana dwukrotnie - raz w analizie statycznej a następnie w dynamicznej. Tym samym sieć węzłów MES jest rozciągana dwa razy niezależnie od siebie. Wygenerowana w ten sposób sieć MES osiąga za każdym razem stopień zagęszczenia ograniczony od góry jedynie przez rząd globalnej macierzy sztywności dopuszczalny przez stosowane środowisko obliczeniowe. W pierwszym etapie dotyczy to wyłącznie objętości ograniczonej do pojedynczej komórki elementarnej. Duże zagęszczenie sieci MES na elementarnej objętości oznacza wtedy wysoką dokładność obliczeń zastępczych tensorów

materiałowych. W następnym etapie kolejne rozciąganie sieci MES obejmuje swoim zasięgiem całą homogeniczną już bryłę, a ujednorodniony materiał nie wymaga niezbędnego zagęszczenia sieci MES w pobliżu stref nieciągłości - co byłoby konieczne w kompozycie. W efekcie stworzona została możliwość realizacji analizy dynamicznej całej bryły ze znacznie zredukowaną liczbą stopni swobody w stosunku do niemodyfikowanego rozwiązania MES. Jest to osiągane bez uszczerbku dla dokładności obliczeń. W przypadku szczególnym, gdy spełnione zostały warunki dopuszczalności stosowania układu zastępczego Masona, etap analizy dynamicznej można zastąpić tym właśnie prostszym wariantem rozwiązania.

5.4 Homogenizacja asymptotyczna komórki elementarnej przetwornika

Celem homogenizacji elementarnej komórki przetwornika kompozytowego (Rys. 10) jest wyznaczenie zastępczej elementarnej jednostki symetrii zbudowanej z hipotetycznego jednorodnego materiału. Materiał ten posiada wartości efektywnych tensorów materiałowych związane z:

- 1 - Uśrednioną wartością tensorów materiałów składowych kompozytu.
- 2 - Skokowym charakterem zmian własności fizycznych na granicach faz materiałowych w objętości elementarnej jednostki symetrii bryły kompozytowej [42].



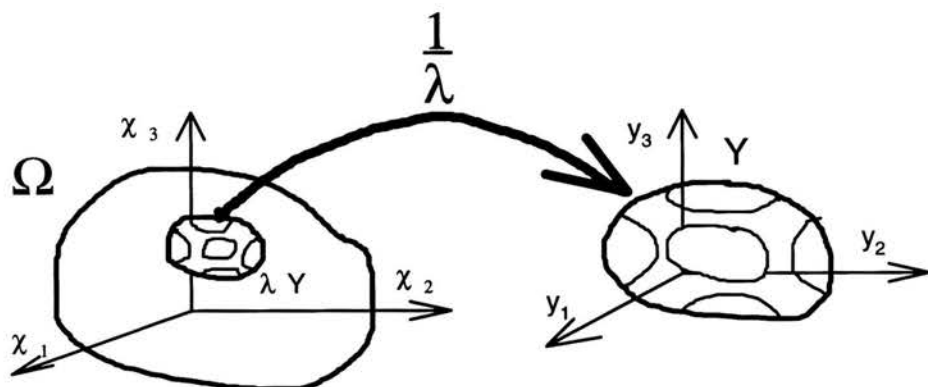
Rys. 10 Idea homogenizacji komórki elementarnej przetwornika kompozytowego

Proces homogenizacji bryły kompozytowej rozpoczynamy od transformacji asymptotycznej [5]. Rozważmy bryłę kompozytu o strukturze periodycznej zajmującej objętość Ω (rys. 11). Przedmiotem rozważań jest wyłącznie bryła Ω o całkowitych rozmiarach znacznie większych od rozmiarów jej pojedynczej elementarnej jednostki symetrii Y .

Założenie powyższe jest określone w równaniu (58), w którym $\text{dia}(\Psi)$ oznacza wymiar charakterystyczny bryły Ψ . Poprzez pojęcie "wymiar charakterystyczny bryły" rozumiemy średnicę najmniejszej kuli zawierającej wymienioną bryłę.

$$\lambda = \frac{\text{dia}(Y)}{\text{dia}(\Omega)} \ll 1 \quad (58)$$

Założenie sformułowane w równaniu (58) stanowi podstawę analizy asymptotycznej bryły materiału kompozytowego z parametrem λ dążącym do zera (rys. 11), [3].



(x_1, x_2, x_3) - globalny układ współrzędnych

(y_1, y_2, y_3) - lokalny układ współrzędnych

\bar{x}_i - wektor wodzący

Ω - bryła kompozytu

Y - element symetrii

Rys. 11 Transformacja układu współrzędnych

Zgodnie z rys. 11 dokonujemy transformacji układu współrzędnych z globalnego układu bryły (x_1, x_2, x_3) na lokalny (y_1, y_2, y_3) związany z pojedynczym elementem symetrii kompozytu. W trakcie transformacji dokonuje się zmiana skali osi współrzędnych, co przedstawia równanie (60).

$$x_i = \bar{x}_i + y_i \quad (59)$$

$$\{y_i\} = \frac{\{x_i\}}{\lambda} \quad (60)$$

W równaniu (59) \bar{x}_i jest wektorem wodzącym, natomiast w (60) $\{x_i\}$ i $\{y_i\}$ oznaczają długości wektorów jednostkowych odpowiednio osi x_i i y_i .

Uwzględniając (59) i (60) pochodną cząstkową względem zmiennej x_i można zapisać w postaci danej przez (61):

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}}_i} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_i} \quad (61)$$

W dalszej analizie zastosowane zostaną symetryczny operator gradientu $\mathbf{sym}\nabla_{\mathbf{x}_i}$ (62) i dywergencji $\mathbf{div}_{\mathbf{x}_i}$ (63).

$$\mathbf{sym}\nabla_{\mathbf{x}_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_3} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_3} & \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\mathbf{div}_{\mathbf{x}_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} & \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_3} & \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (63)$$

Z zapisu pochodnej cząstkowej względem zmiennej \mathbf{x}_i danej przez (61) wynika postać operatora Nabla (62), symetrycznego operatora gradientu (63), operatora gradientu (64) i dywergencji (65).

$$\nabla_{\mathbf{x}_i} = \nabla_{\bar{\mathbf{x}}_i} + \frac{1}{\lambda} \nabla_{\mathbf{y}_i} \quad (64)$$

$$\mathbf{sym}\nabla_{\mathbf{x}_i} = \mathbf{sym}\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_i} + \frac{1}{\lambda} \mathbf{sym}\nabla_{\mathbf{y}_i} \quad (65)$$

$$\mathbf{grad}_{\mathbf{x}_i} = \mathbf{grad}_{\bar{\mathbf{x}}_i} + \frac{1}{\lambda} \mathbf{grad}_{\mathbf{y}_i} \quad (66)$$

$$\mathbf{div}_{\mathbf{x}_i} = \mathbf{div}_{\bar{\mathbf{x}}_i} + \frac{1}{\lambda} \mathbf{div}_{\mathbf{y}_i} \quad (67)$$

Dokonujemy rozwinięć asymptotycznych dwóch zmiennych niezależnych pola elektroakustycznego przemieszczenia u i potencjału Φ zgodnie z (68-69) [33].

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}_0(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \lambda \mathbf{u}_1(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \lambda^2 \mathbf{u}_2(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \dots \quad (68)$$

$$\Phi(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \Phi_0(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \lambda \Phi_1(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \lambda^2 \Phi_2(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \dots \quad (69)$$

Zagadnienie propagacji fal pola elektroakustycznego w materiale kompozytowym zawierającym składnik piezoelektryczny jest sformułowane w postaci układu sześciu równań (70-75) (uprzednio omówionych w rozdziale 5.1) :

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{T}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y}) \ddot{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \quad (70)$$

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{D}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad (71)$$

$$\mathbf{T}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \mathbf{c}(\mathbf{y}) \mathbf{S}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) - \mathbf{e}(\mathbf{y}) \mathbf{E}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \quad (72)$$

$$\mathbf{D}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \mathbf{e}(\mathbf{y}) \mathbf{S}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) \mathbf{E}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \quad (73)$$

$$\mathbf{S}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \operatorname{sym}_{\mathbf{x}} \nabla \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \quad (74)$$

$$\mathbf{E}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = -\nabla_{\mathbf{x}} \Phi(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \quad (75)$$

Rozwinięcie dwóch zmiennych niezależnych pola elektroakustycznego - przemieszczenia mechanicznego u i potencjału elektrycznego Φ w zbieżne szeregi potęgowe względem λ implikuje rozwinięcia asymptotyczne wszystkich wielkości pochodnych (76-79):

$$\mathbf{S}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \lambda^{-2} \mathbf{S}_{-2}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \lambda^{-1} \mathbf{S}_{-1}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \mathbf{S}_0(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \lambda \mathbf{S}_1(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \lambda^2 \mathbf{S}_2(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \dots \quad (76)$$

$$\mathbf{T}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \lambda^{-2} \mathbf{T}_{-2}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \lambda^{-1} \mathbf{T}_{-1}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \mathbf{T}_0(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \lambda \mathbf{T}_1(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \lambda^2 \mathbf{T}_2(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \dots \quad (77)$$

$$\mathbf{E}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \lambda^{-2} \mathbf{E}_{-2}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \lambda^{-1} \mathbf{E}_{-1}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \mathbf{E}_0(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \lambda \mathbf{E}_1(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \lambda^2 \mathbf{E}_2(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \dots \quad (78)$$

$$\mathbf{D}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \lambda^{-2} \mathbf{D}_{-2}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \lambda^{-1} \mathbf{D}_{-1}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \mathbf{D}_0(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \lambda \mathbf{D}_1(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \lambda^2 \mathbf{D}_2(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \dots \quad (79)$$

Rozwinięcia wielkości (76-79) w szeregi potęgowe posiadają również wyrazy zawierające potęgi λ równe minus jeden i minus dwa. Wynika to z faktu, że zgodnie z (74-75, 72-73) wszystkie wielkości pochodne (76-79) są zdefiniowane jako funkcje przemieszczenia mechanicznego u i potencjału elektrycznego Φ poddanych działaniu operatorów różniczkowych (64-67). Z kolei operatory (64-67) zawierają w swojej strukturze pochodne cząstkowe (62-63). Pochodna cząstkowa (61) posiada natomiast składnik z ułamkiem $1/\lambda$. Ten właśnie składnik odpowiedzialny jest za zmniejszenie o jeden wykładni-

ka potęgi λ dla argumentu pochodnej będącego wielomianem zawierającym potęgę λ . Następnie zastępujemy w równaniach (70-75) wartości wielkości u , Φ , S , T , E , D ich nieskończonymi rozwinięciami (68-69) w szeregi potęgowe. Wtedy po obu stronach układu równań (70-75) występują wyłącznie nieskończone szeregi potęgowe względem λ . Wyrazy po obu stronach równań związane z jednakowymi potęgami λ są sobie równe. Porównujemy wyrazy zawierające zerową potęgę λ :

$$\mathbf{S}_0(\bar{x}, y) = \text{sym} \nabla_{\bar{x}} u_0(\bar{x}, y) + \text{sym} \nabla_y u_1(\bar{x}, y) \quad (80)$$

$$\mathbf{E}_0(\bar{x}, y) = -\nabla_{\bar{x}} \Phi_0(\bar{x}, y) - \nabla_y \Phi_1(\bar{x}, y) \quad (81)$$

$$\mathbf{T}_0(\bar{x}, y) = \mathbf{c}(y) \mathbf{S}_0(\bar{x}, y) - \mathbf{e}(y) \mathbf{E}_0(\bar{x}, y) \quad (82)$$

$$\mathbf{D}_0(\bar{x}, y) = \mathbf{e}(y) \mathbf{S}_0(\bar{x}, y) + \varepsilon(y) \mathbf{E}_0(\bar{x}, y) \quad (83)$$

$$\text{div}_y \mathbf{T}_1(\bar{x}, y) + \text{div}_{\bar{x}} \mathbf{T}_0(\bar{x}, y) = \rho(y) \ddot{u}(\bar{x}, y) \quad (84)$$

$$\text{div}_y \mathbf{D}_1(\bar{x}, y) + \text{div}_{\bar{x}} \mathbf{D}_0(\bar{x}, y) = \mathbf{0} \quad (85)$$

Następnie czynimy to samo w odniesieniu do wyrazów zawierających potęgę λ równą minus jeden :

$$\mathbf{S}_{-1}(\bar{x}, y) = \text{sym} \nabla_y u_0(\bar{x}, y) \quad (86)$$

$$\mathbf{E}_{-1}(\bar{x}, y) = -\nabla_y \Phi_0(\bar{x}, y) \quad (87)$$

$$\mathbf{T}_{-1}(\bar{x}, y) = \mathbf{c}(y) \mathbf{S}_{-1}(\bar{x}, y) - \mathbf{e}(y) \mathbf{E}_{-1}(\bar{x}, y) \quad (88)$$

$$\mathbf{D}_{-1}(\bar{x}, y) = \mathbf{e}(y) \mathbf{S}_{-1}(\bar{x}, y) + \varepsilon(y) \mathbf{E}_{-1}(\bar{x}, y) \quad (89)$$

$$\text{div}_y \mathbf{T}_0(\bar{x}, y) + \text{div}_{\bar{x}} \mathbf{T}_{-1}(\bar{x}, y) = \mathbf{0} \quad (90)$$

$$\text{div}_y \mathbf{D}_0(\bar{x}, y) + \text{div}_{\bar{x}} \mathbf{D}_{-1}(\bar{x}, y) = \mathbf{0} \quad (91)$$

Na koniec porównujemy wyrazy zawierające potęgę λ równą minus dwa (92-97):

$$\mathbf{S}_{-2}(\bar{x}, y) = \mathbf{0} \quad (92)$$

$$\mathbf{E}_{-2}(\bar{x}, y) = \mathbf{0} \quad (93)$$

$$\mathbf{T}_{-2}(\bar{x}, y) = \mathbf{0} \quad (94)$$

$$\mathbf{D}_{-2}(\bar{x}, y) = \mathbf{0} \quad (95)$$

$$\text{div}_y \mathbf{T}_{-1}(\bar{x}, y) = \mathbf{0} \quad (96)$$

$$\text{div}_y \mathbf{D}_{-1}(\bar{x}, y) = \mathbf{0} \quad (97)$$

Z równań (96-97), (88-89) i (86-87) wynikają następujące dwie ważne zależności :

$$\operatorname{div}_y [\mathbf{c}(y) \operatorname{sym} \nabla_y \mathbf{u}_0(\bar{\mathbf{x}}, y) - \mathbf{e}(y) \nabla_y \Phi_0(\bar{\mathbf{x}}, y)] = \mathbf{0} \quad (98)$$

$$\operatorname{div}_y [\mathbf{e}(y) \operatorname{sym} \nabla_y \mathbf{u}_0(\bar{\mathbf{x}}, y) + \varepsilon(y) \nabla_y \Phi_0(\bar{\mathbf{x}}, y)] = \mathbf{0} \quad (99)$$

Układ równań (98-99) jest tożsamościowo spełniony jedynie w przypadku gdy zachodzą zależności określone w równaniach :

$$\mathbf{u}_0(\bar{\mathbf{x}}, y) = \mathbf{u}_0(\bar{\mathbf{x}}) \quad (100)$$

$$\Phi_0(\bar{\mathbf{x}}, y) = \Phi_0(\bar{\mathbf{x}}) \quad (101)$$

Z (100-101) wynika ważny wniosek dotyczący wyrazów rzędu zerowego rozwinięcia w szeregi potęgowe dwóch zmiennych niezależnych pola elektroakustycznego przemieszczenia \mathbf{u} (68) i potencjału Φ (69). Na podstawie (100-101) stwierdzamy, że wyrazy te są niezależne od zmiennej lokalnej y . Uwzględniając zależności (100-101) w układzie równań (86-91) otrzymujemy następujący układ równań (102-107):

$$\mathbf{S}_{-1}(\bar{\mathbf{x}}, y) = \mathbf{0} \quad (102)$$

$$\mathbf{E}_{-1}(\bar{\mathbf{x}}, y) = \mathbf{0} \quad (103)$$

$$\mathbf{T}_{-1}(\bar{\mathbf{x}}, y) = \mathbf{0} \quad (104)$$

$$\mathbf{D}_{-1}(\bar{\mathbf{x}}, y) = \mathbf{0} \quad (105)$$

$$\operatorname{div}_y \mathbf{T}_0(\bar{\mathbf{x}}, y) = \mathbf{0} \quad (106)$$

$$\operatorname{div}_y \mathbf{D}_0(\bar{\mathbf{x}}, y) = \mathbf{0} \quad (107)$$

Dla wartości λ dużo mniejszej od jedności ($\lambda \approx 0,011$ dla bryły o geometrii przedstawionej na rys.2) dopuszczalne jest zaniedbanie w rozwinięciu asymptotycznym dowolnej wielkości elektroakustycznej Ψ wszystkich wyrazów poza Ψ_0 związanym z zerową potęgą λ [33]. Oznacza to przybliżenie wartości Ψ jej rozwinięciem asymptotycznym Ψ_0 .

Określamy następnie wartość efektywną $\Psi_E(\bar{\mathbf{x}})$ dowolnej wielkości elektroakustycznej Ψ w objętości elementu symetrii Y bryły kompozytu Ω jako funkcję wyrazu zerowego rzędu Ψ_0 rozwinięcia asymptotycznego Ψ (102). Objętość elementu symetrii Y oznaczono jako $\operatorname{vol}(Y)$.

$$\Psi_E(\bar{\mathbf{x}}) \equiv \|\Psi_0(\bar{\mathbf{x}}, y)\|_Y \equiv \frac{1}{\operatorname{vol}(Y)} \iiint_Y \Psi_0(\bar{\mathbf{x}}, y) dY \quad (108)$$

W wyniku działania operatorem (108) obustronnie na układ równań (70-75) otrzymujemy układ równań (109-114) opisujący relacje pomiędzy wielkościami efektywnymi, to znaczy uśrednionymi na objętości komórki elemen-

tarnej Y według przepisu (108). Wielkościami poszukiwanymi są \mathbf{c}^{EF} , \mathbf{e}^{EF} , $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{EF}}$ - efektywne wartości tensorów materiałowych zastępczego homogenicznego materiału piezoelektrycznego w stosunku do rozpatrywanego dwuskładnikowego kompozytu.

$$\mathbf{div}_x \mathbf{T}_E(\bar{\mathbf{x}}) = \rho^{\text{EF}} \ddot{\mathbf{u}}_E(\bar{\mathbf{x}}) \quad (109)$$

$$\mathbf{div}_x \mathbf{D}_E(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (110)$$

$$\mathbf{T}_E(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{c}^{\text{EF}} \mathbf{S}_E(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{e}^{\text{EF}} \mathbf{E}_E(\bar{\mathbf{x}}) \quad (111)$$

$$\mathbf{D}_E(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{e}^{\text{EF}} \mathbf{S}_E(\bar{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{EF}} \mathbf{E}_E(\bar{\mathbf{x}}) \quad (112)$$

$$\mathbf{S}_E(\bar{\mathbf{x}}) = \text{sym}_x \nabla \mathbf{u}_E(\bar{\mathbf{x}}) \quad (113)$$

$$\mathbf{E}_E(\bar{\mathbf{x}}) = -\nabla_x \Phi_E(\bar{\mathbf{x}}) \quad (114)$$

Z równań (80-85, 100-101 i 113-114) wynikają następujące zależności (115-116):

$$\mathbf{S}_0(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \mathbf{S}_E(\bar{\mathbf{x}}) + \text{sym} \nabla_y \mathbf{u}_1(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \quad (115)$$

$$\mathbf{E}_0(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \mathbf{E}_E(\bar{\mathbf{x}}) - \nabla_y \Phi_1(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \quad (116)$$

Z równań (106-107, 80-81 i 115-116) wynikają następujące zależności (115-116):

$$\begin{aligned} \mathbf{div}_y [\mathbf{c}(\mathbf{y}) \cdot \text{sym} \nabla_y \mathbf{u}_1(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) - \mathbf{e}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_y \Phi_1(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})] = \\ - \mathbf{div}_y \mathbf{c}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{S}_E(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{div}_y \mathbf{e}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}_E(\bar{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (117)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{div}_y [\mathbf{e}(\mathbf{y}) \cdot \text{sym} \nabla_y \mathbf{u}_1(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_y \Phi_1(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})] = \\ - \mathbf{div}_y \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{S}_E(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{div}_y \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}_E(\bar{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (118)$$

Wprowadzamy następnie pomocnicze tensory $\mathbf{A}(\mathbf{y})$, $\mathbf{B}(\mathbf{y})$, $\mathbf{G}(\mathbf{y})$, $\mathbf{H}(\mathbf{y})$ wiążące wzajemnie $\mathbf{u}_1(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})$, $\Phi_1(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})$ z $\mathbf{S}_E(\bar{\mathbf{x}})$, $\mathbf{E}_E(\bar{\mathbf{x}})$ zgodnie z równaniami (119-120):

$$\mathbf{u}_1(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{S}_E(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{B}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}_E(\bar{\mathbf{x}}) \quad (119)$$

$$\Phi_1(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \mathbf{G}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{S}_E(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{H}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}_E(\bar{\mathbf{x}}) \quad (120)$$

Z równań (117-120) otrzymujemy układ zależności (121-124), którego rozwiązaniem są wartości wielkości pomocniczych tensorów $\mathbf{A}(\mathbf{y})$, $\mathbf{B}(\mathbf{y})$, $\mathbf{G}(\mathbf{y})$, $\mathbf{H}(\mathbf{y})$:

$$\operatorname{div}_y [\mathbf{c}(\mathbf{y}) \cdot \operatorname{sym} \nabla_y \mathbf{A}(\mathbf{y}) - \mathbf{e}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_y \mathbf{G}(\mathbf{y})] = -\operatorname{div}_y \mathbf{c}(\mathbf{y}) \quad (121)$$

$$\operatorname{div}_y [\mathbf{e}(\mathbf{y}) \cdot \operatorname{sym} \nabla_y \mathbf{A}(\mathbf{y}) + \varepsilon(\mathbf{y}) \cdot \nabla_y \mathbf{G}(\mathbf{y})] = -\operatorname{div}_y \mathbf{e}(\mathbf{y}) \quad (122)$$

$$\operatorname{div}_y [\mathbf{c}(\mathbf{y}) \cdot \operatorname{sym} \nabla_y \mathbf{B}(\mathbf{y}) - \mathbf{e}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_y \mathbf{H}(\mathbf{y})] = \operatorname{div}_y \mathbf{e}(\mathbf{y}) \quad (123)$$

$$\operatorname{div}_y [\mathbf{e}(\mathbf{y}) \cdot \operatorname{sym} \nabla_y \mathbf{B}(\mathbf{y}) + \varepsilon(\mathbf{y}) \cdot \nabla_y \mathbf{H}(\mathbf{y})] = -\operatorname{div}_y \varepsilon(\mathbf{y}) \quad (124)$$

Modyfikujemy układ równań (121-124) używając zapisu tensorowego (125-128):

$$[\mathbf{c}_{ijkl} \mathbf{A}_{k,l}^{pq} - \mathbf{e}_{kij} \mathbf{G}_{,k}^{pq}]_{,j} = -\mathbf{c}_{ijpq,j} \quad (125)$$

$$[\mathbf{e}_{ikl} \mathbf{A}_{k,l}^{pq} + \varepsilon_{ik} \mathbf{G}_{,k}^{pq}]_{,i} = -\mathbf{e}_{ipq,i} \quad (126)$$

$$[\mathbf{c}_{ijkl} \mathbf{B}_{k,l}^p - \mathbf{e}_{kij} \mathbf{H}_{,k}^p]_{,j} = \mathbf{e}_{pjl,j} \quad (127)$$

$$[\mathbf{e}_{ikl} \mathbf{B}_{k,l}^p + \varepsilon_{ik} \mathbf{H}_{,k}^p]_{,i} = -\mathbf{e}_{lp,i} \quad (128)$$

Równania (121-124 i 125-128) są równaniami statyki (rys. 12). Występują w nich : uogólnione reakcje w postaci uogólnionych sił (129-130) i uogólnionych ładunków (131-132) oraz uogólnione wymuszenia w postaci uogólnionych sił (133-134) i uogólnionych ładunków (135-136).

Uogólnione reakcje w postaci uogólnionych sił (129-130):

$$\bar{\mathbf{T}}_{ij}^{kl} = \mathbf{c}_{ijpq} \mathbf{A}_{p,q}^{kl} - \mathbf{e}_{pjl} \mathbf{G}_{,p}^{kl} \quad (129)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{ij}^k = \mathbf{c}_{ijpq} \mathbf{B}_{p,q}^k - \mathbf{e}_{pjl} \mathbf{H}_{,p}^k \quad (130)$$

Uogólnione reakcje w postaci uogólnionych ładunków (131-132):

$$\bar{\mathbf{D}}_k^{ij} = \mathbf{e}_{kppq} \mathbf{A}_{p,q}^{ij} + \varepsilon_{kp} \mathbf{G}_{,p}^{ij} \quad (131)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_i^j = \mathbf{e}_{ipq} \mathbf{B}_{p,q}^j + \varepsilon_{ip} \mathbf{H}_{,p}^j \quad (132)$$

Uogólnione wymuszenia w postaci uogólnionych sił (133-134):

$\mathbf{n}_j = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3]$ jest wektorem normalnej zewnętrznej.

$$(\mathbf{F})_i^{pq} \equiv [[\mathbf{c}_{ijpq}]] \cdot \mathbf{n}_j \quad (133)$$

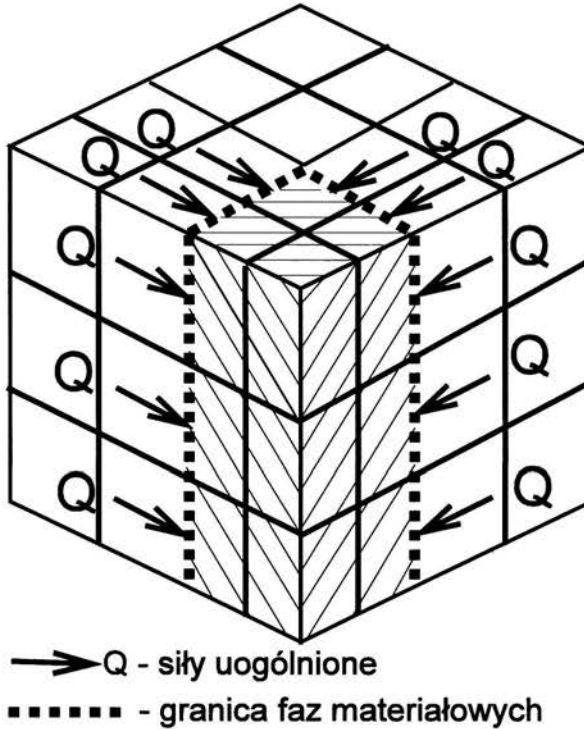
$$(\mathbf{F})_i^p \equiv -[[\mathbf{e}_{pjl}]] \cdot \mathbf{n}_j \quad (134)$$

Uogólnione wymuszenia w postaci uogólnionych ładunków (135-136):

$$(\mathbf{Q})^{pq} \equiv \left[\left[\mathbf{e}_{ipq} \right] \right] \cdot \mathbf{n}_i \quad (135)$$

$$(\mathbf{Q})^p \equiv \left[\left[\boldsymbol{\varepsilon}_{ip} \right] \right] \cdot \mathbf{n}_i \quad (136)$$

Zagadnienie statyczne sformułowane w postaci równań statyki (125-128) zilustrowano na rys. 12:



Rys. 12 Analiza statyczna przy podziale $4 \times 4 \times 3$ komórki elementarnej

Dla układu równań (125-128) określono zadane obciążenia na granicach faz materiałowych na objętości elementu symetrii Y bryły kompozytu w postaci uogólnionych sił (129-130) i uogólnionych ładunków (131-132), które są indukowane poprzez skokową zmianę wartości tensorów materiałowych na granicach faz w objętości wymienionego elementu Y (rys. 12). Wymienione warunki brzegowe znajdują odzwierciedlenie w postaci prawej strony układu równań (121-124) i (125-128).

Macierze sztywności mechanicznej dla piezoceramiki i polimeru mają postać:

PIEZOCERAMIKA

$$\begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & c_{1111} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & c_{2323} & 0 & 0 \\ \cdot & \text{symetria} & \cdot & \cdot & c_{2323} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1212} \end{bmatrix}$$

POLIMER

$$\begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & c_{1111} & c_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & c_{2222} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & c_{2222} & 0 & 0 \\ \cdot & \text{symetria} & \cdot & \cdot & c_{2222} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1212} \end{bmatrix}$$

Macierze sztywności dielektrycznej dla piezoceramiki i polimeru:

PIEZOCERAMIKA

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ \cdot & \epsilon_{11} & 0 \\ \text{symetria} & \cdot & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

POLIMER

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ \cdot & \epsilon_{11} & 0 \\ \text{symetria} & \cdot & \epsilon_{11} \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności piezoelektrycznej dla piezoceramiki:

PIEZOCERAMIKA

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{311} \\ 0 & 0 & e_{311} \\ 0 & 0 & e_{333} \\ 0 & e_{223} & 0 \\ e_{223} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ze względu na postać tensorów materiałowych c_{ijkl} , e_{kij} , ε_{ik} dla spolaryzowanej piezoceramiki (materiału ortotropowego) oraz polimeru (własności izotropowe) większość wyrazów w reprezentacji macierzowej wymienionych tensorów poza przekątną główną ma wartość zero.

Równania (137-139) przedstawiają postulowaną postać przepisu na efektywne obliczenie wartości tensorów materiałowych c^{EF} , e^{EF} , ε^{EF} zastępczego homogenicznego materiału piezoelektrycznego [6]:

$$c_{ijkl}^{EF} = \|c_{ijkl}\|_Y + \|\bar{T}_j^{kl}\|_Y \quad (137)$$

$$\varepsilon_{ij}^{EF} = \|\varepsilon_{ij}\|_Y + \|\bar{D}_i^j\|_Y \quad (138)$$

$$e_{ijk}^{EF} = \|e_{ijk}\|_Y + \|\bar{T}_j^p\|_Y = -\|e_{ikj}\|_Y + \|\bar{D}_k^j\|_Y \quad (139)$$

W równaniach (137-139) wyodrębnione zostały po dwa składniki po prawej stronie każdego równania. Pierwszy z nich związany jest ze średnią ważoną wartości tensorów materiałowych składowych kompozytu na objętości bryły komórki elementarnej. Drugi natomiast obrazuje wpływ skokowej nieciągłości wartości wymienionych tensorów na objętości wymienionej bryły.

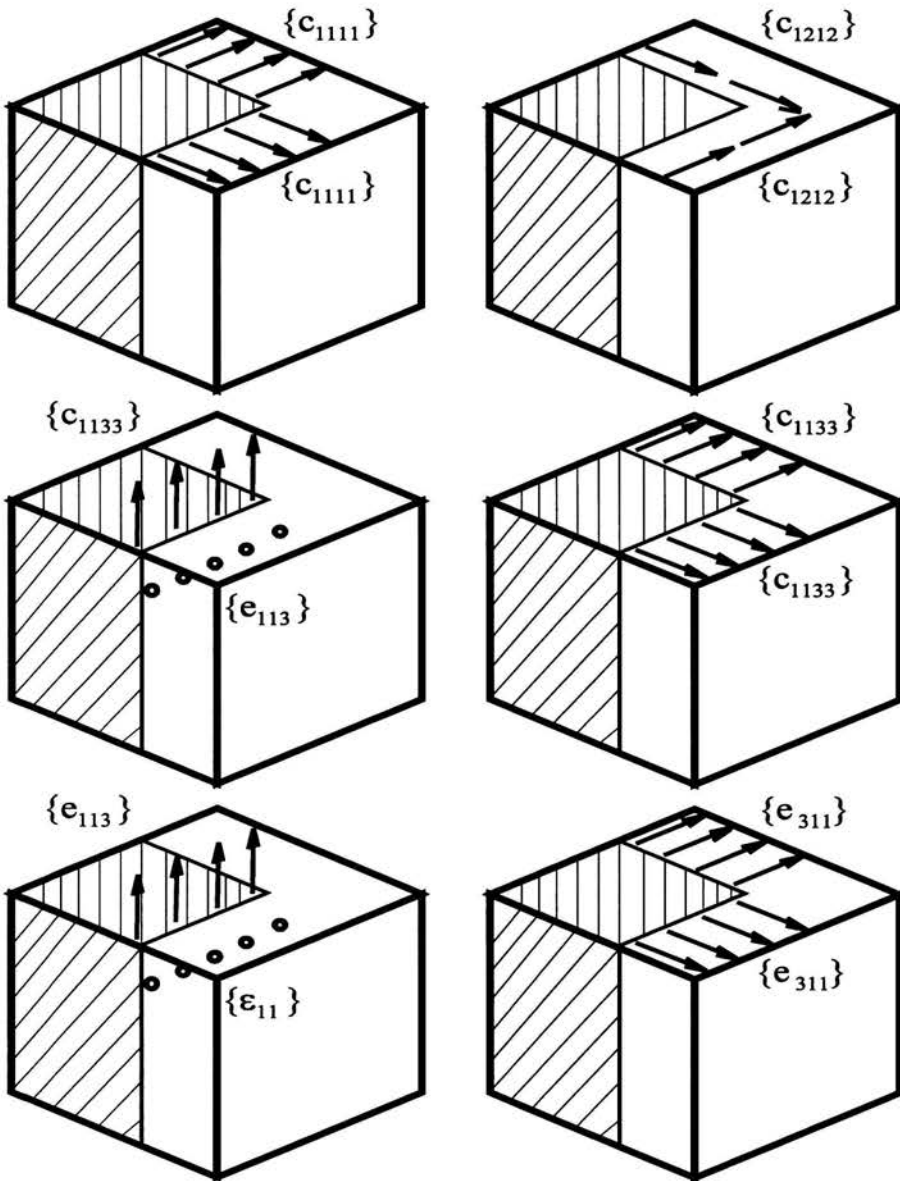
5.5 Efektywne obliczenie wartości tensorów materiałowych przetwornika kompozytowego przy zastosowaniu teorii homogenizacji asymptotycznej

Przedstawiona na rys. 12 analiza statyczna sprowadza się zgodnie z równaniami (137-139) do rozwiązania sześciu niezależnych elementarnych zadań statycznych o przypadkach obciążenia przedstawionych na rys. 13.

W oparciu o (137-139) przeprowadzono obliczenia wartości składowych tensorów, które zestawiono w Tabeli 1.

Do obliczeń numerycznych obejmujących zarówno wyznaczenie efektywnych wartości tensorów materiałowych (analiza statyczna) jak i wartości współczynnika sprzężenia elektromechanicznego zastosowano program zaprojektowany w oparciu o metodę elementu skończonego [44]. Pierwotny program nosi nazwę POLSAP i powstał w 1990 roku w Samodzielnej Pracowni Metod Komputerowych Mechaniki Instytutu Podstawowych Problemów Techniki [9]. Autor w sposób oryginalny istotnie rozszerzył i zmodyfikował program POLSAP. W zmodyfikowanej wersji może on być stosowany do obliczeń wielkości pola elektroakustycznego brył piezoelektrycznych.

Zgodnie z podstawową zasadą metody elementów skończonych [15] bryła przetwornika kompozytowego jest traktowana jako periodyczna sieć jednej lub wielu grup podstawowego elementu skończonego przedstawionego na rys. 14. Jest nim prostopadłościenny element skończony.



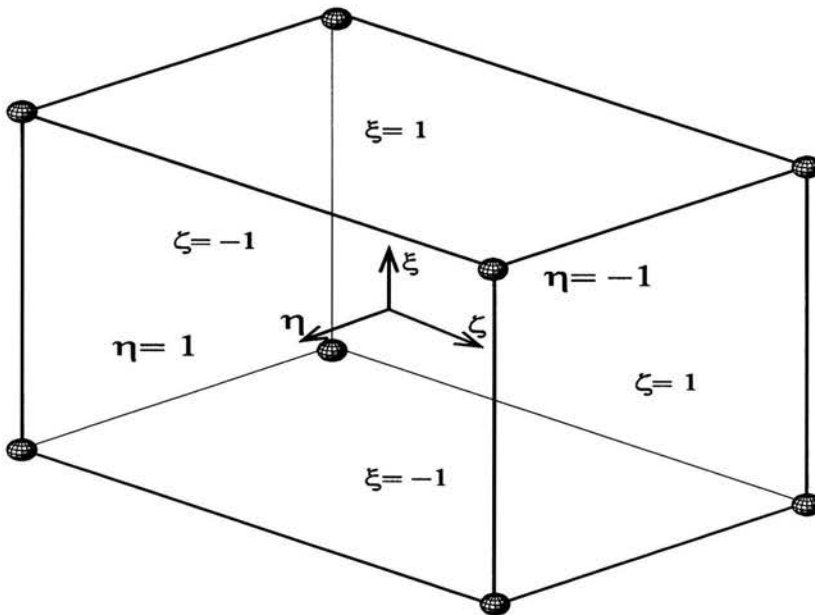
Rys. 13 Sześć elementarnych zadań statycznych obciążenia elementarnej jednostki symetrii kompozytu wywołanych skokową zmianą wartości tensorów materiałowych na granicach faz materiałowych.

W dowolnym punkcie elementu skończonego wielkości fizyczne są obliczane poprzez interpolację wartości w punktach węzłowych za pomocą funkcji interpolacji określanej jako "funkcja kształtu". Równanie (140) stanowi zapis "funkcji kształtu" prostopadłościennego elementu skończonego.

Tabela 1. Zestawienie wartości składowych tensorów materiałowych piezoceramiki, żywicy epoksydowej i wykonanego z obydwu wymienionych materiałów kompozytu.

		Piezoceramika	Żywica epoksydowa	Kompozyt
c11	kg/(m*s ²)	12,1*10 ¹⁰	7,4*10 ¹⁰	3,52*10 ¹⁰
c12	kg/(m*s ²)	7,5*10 ¹⁰	1,4*10 ¹⁰	1,93*10 ¹⁰
c13	kg/(m*s ²)	7,7*10 ¹⁰	1,4*10 ¹⁰	1,89*10 ¹⁰
c33	kg/(m*s ²)	7,3*10 ¹⁰	7,4*10 ¹⁰	3,26*10 ¹⁰
c44	kg/(m*s ²)	2,1*10 ¹⁰	4,7*10 ¹⁰	8,76*10 ⁹
c66	kg/(m*s ²)	2,3*10 ¹⁰	4,7*10 ¹⁰	9,17*10 ⁹
ε11	A ² *s ⁴ /(kg*m ³)	14,6*10 ⁻⁹	3,53*10 ⁻¹¹	2,25*10 ⁻⁹
ε33	A ² *s ⁴ /(kg*m ³)	15*10 ⁻⁹	3,53*10 ⁻¹¹	1,93*10 ⁻⁹
e31	A*s/m ²	-5,4	0	-1,71
e33	A*s/m ²	15,1	0	6,10
e15	A*s/m ²	12,3	0	3,39

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_i)(1 + \zeta_i)(1 + \eta_i) \quad (140)$$



Rys. 14 Prostopadłościenny element skończony

Początek układu współrzędnych (ξ, ζ, η) znajduje się w środku geometrycznym prostopadłościennego elementu skończonego (rys. 14). Każda ze współrzędnych ξ, ζ, η posiada tak dobraną długość wektora jednostkowego osi, że współrzędne punktu przecięcia tej osi ze ścianami elementu skończonego (rys. 14) wynoszą 1 i -1. Z równania (140) wynika, że z wyjątkiem jednego węzła (którego współrzędne (ξ, ζ, η) są $(1, 1, 1)$) na całym brzegu prostopadłościennemu funkcja kształtu jest równa zero.

Potencjał elektryczny i przemieszczenie mechaniczne są dwiema zmiennymi niezależnymi pola elektroakustycznego. Natomiast siły mechaniczne i ładunki elektryczne stanowią odpowiednio uogólnione siły wymuszające i uogólnione reakcje pola elektroakustycznego. Wszystkie wielkości fizyczne wymienionego pola są ściśle określone w każdym z punktów węzłowych elementu skończonego. Natomiast w dowolnym punkcie elementu skończonego wartości wektora przemieszczenia $\mathbf{u}_{3 \times 1}$ i skalaru potencjału $\Phi_{1 \times 1}$ są dane w postaci (141-142), gdzie $\bar{\mathbf{u}}_{24 \times 1}$ i $\bar{\Phi}_{8 \times 1}$ są wartościami odpowiednio przemieszczenia i potencjału w węzłach elementu a $\mathbf{N}_u_{3 \times 24}$ i $\mathbf{N}_\phi_{1 \times 8}$ są funkcjami kształtu odpowiednio dla przemieszczenia i potencjału. Dolne indeksy liczbowe odnoszą się do wymiaru macierzy reprezentującej daną wielkość.

$$\mathbf{u}_{3 \times 1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{N}_u_{3 \times 24}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \bar{\mathbf{u}}_{24 \times 1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (141)$$

$$\Phi_{1 \times 1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{N}_\phi_{1 \times 8}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \bar{\Phi}_{8 \times 1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (142)$$

Do każdego z ośmiu węzłów prostopadłościennego elementu skończonego przypisane są cztery stopnie swobody (trzy składowe wektora przemieszczenia oraz jedna składowa skalaru potencjału). Z faktu tego wynikają rzędy wielkości macierzy w równaniach (141-142).

Zgodnie z (29-30, 141-142) natężenie pola elektrycznego $\mathbf{E}_{3 \times 1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ oraz odkształcenie mechaniczne $\mathbf{S}_{6 \times 1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ jest wyrażone poprzez (143-144).

$$\mathbf{S}_{6 \times 1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{sym} \nabla_{6 \times 3} \mathbf{N}_u_{3 \times 24}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \bar{\mathbf{u}}_{24 \times 1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (143)$$

$$\mathbf{E}_{3 \times 1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = -\nabla_{3 \times 1} \mathbf{N}_\phi_{1 \times 8}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \bar{\Phi}_{8 \times 1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (144)$$

Następnie definiujemy operatory różniczkowe funkcji interpolacji \mathbf{B}_u i \mathbf{B}_ϕ :

$$\mathbf{B}_u_{6 \times 24}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{sym} \nabla_{6 \times 3} \mathbf{N}_u_{3 \times 24}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (145)$$

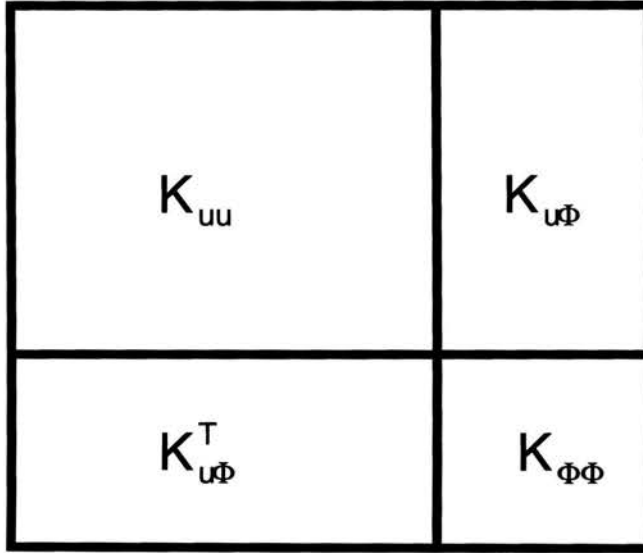
$$\mathbf{B}_\phi_{3 \times 8}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = -\nabla_{3 \times 1} \mathbf{N}_\phi_{1 \times 8}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (146)$$

Uwzględniając (145-146) w (143-144) ostatecznie otrzymujemy :

$$\mathbf{S}_{6 \times 1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{B}_u{}_{6 \times 24}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \bar{\mathbf{u}}_{24 \times 1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (147)$$

$$\mathbf{E}_{3 \times 1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{B}_\phi{}_{3 \times 8}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \bar{\Phi}_{8 \times 1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (148)$$

W procesie rozwiązywania zarówno zagadnienia statycznego jak i dynamicznego tworzona jest globalna macierz sztywności dla bryły Ω przetwornika kompozytowego (rys. 15).



Rys. 15 Globalna macierz sztywności dla bryły przetwornika kompozytowego

Macierze składowe tworzące globalną macierz sztywności zdefiniowane są poprzez (149-151):

Macierz sztywności mechanicznej jest równa :

$$\mathbf{K}_{uu} = \iiint_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \mathbf{c}^E \mathbf{B}_u \, d\Omega \quad (149)$$

Macierz sztywności piezoelektrycznej :

$$\mathbf{K}_{u\phi} = \iiint_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \mathbf{e}^T \mathbf{B}_\phi \, d\Omega \quad (150)$$

Macierz sztywności dielektrycznej odpowiednio :

$$\mathbf{K}_{\phi\phi} = \iiint_{\Omega} \mathbf{B}_\phi^T \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{B}_\phi \, d\Omega \quad (151)$$

5.6 Analiza statyczna

W rozdziale 5.4 została opisana analiza statyczna elementarnej jednostki symetrii kompozytu prowadzącą do wyznaczenia zastępczych tensorów materiałowych hipotetycznej struktury homogenicznej. Ogólny układ równań analizy statycznej (przy założeniu braku tłumienia drgań w materiale przetwornika) przedstawia układ równań :

$$\mathbf{K}_{uu}\mathbf{u} + \mathbf{K}_{u\Phi}\bar{\Phi} = \hat{\mathbf{F}} \quad (152)$$

$$\mathbf{K}_{u\Phi}^T\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{\Phi\Phi}\bar{\Phi} = \hat{\mathbf{Q}} \quad (153)$$

gdzie : \mathbf{K}_{uu} , $\mathbf{K}_{u\Phi}$, $\mathbf{K}_{\Phi\Phi}$ - oznaczają globalne macierze sztywności mechanicznej, piezoelektrycznej i dielektrycznej (149-151), $\bar{\mathbf{u}}$ i $\bar{\Phi}$ określają globalne macierze wektorów przemieszczeń oraz potencjałów w węzłach sieci elementów skończonych, natomiast $\hat{\mathbf{F}}$ i $\hat{\mathbf{Q}}$ są globalnymi macierzami uogólnionych sił w węzłach sieci (wymuszeń i reakcji) odpowiednio mechanicznych i dielektrycznych

Numeryczne rozwiązanie układu równań (152-153) stanowią obliczone wartości zmiennych niezależnych wektora przemieszczenia i skalara potencjału w każdym z węzłów sieci elementów skończonych. Przy odpowiednim zagęszczeniu węzłów sieci elementów skończonych otrzymujemy wierny obraz przestrzennej zmienności określonych w węzłach sieci wartości wielkości.

5.7 Analiza dynamiczna

Do obliczenia wartości współczynnika sprzężenia elektromechanicznego można zastosować wybrany wariant numerycznej analizy dynamicznej. Ogólny układ równań analizy dynamicznej (przy założeniu braku tłumienia drgań w materiale przetwornika) przedstawia para wyrażeń :

$$\mathbf{M}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{uu}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{u\Phi}\bar{\Phi} = \hat{\mathbf{F}} \quad (154)$$

$$\mathbf{K}_{u\Phi}^T\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{\Phi\Phi}\bar{\Phi} = \hat{\mathbf{Q}} \quad (155)$$

gdzie : \mathbf{K}_{uu} , $\mathbf{K}_{u\Phi}$, $\mathbf{K}_{\Phi\Phi}$ - oznaczają globalne macierze sztywności mechanicznej, piezoelektrycznej i dielektrycznej (149-151), $\bar{\mathbf{u}}$ i $\bar{\Phi}$ określają globalne macierze wektorów przemieszczeń oraz potencjałów w węzłach sieci elementów skończonych, $\bar{\mathbf{u}}$ - jest przyspieszeniem, natomiast $\hat{\mathbf{F}}$ i $\hat{\mathbf{Q}}$ są globalnymi macierzami uogólnionych sił w węzłach sieci odpowiednio mechanicznych i dielektrycznych, ρ - stanowi gęstość masy, globalna macierz masy \mathbf{M} określona jest przez następujące wyrażenie :

$$\mathbf{M} = \iiint_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{N}_u \, d\Omega \quad (156)$$

Rozwiązanie układu równań (154-155) polega na wyznaczeniu wszystkich trzech składowych przemieszczenia oraz potencjału elektrycznego w każdym węźle sieci elementów skończonych, przy czym wszystkie wymienione wartości obliczane są jako funkcje czasu. W efekcie otrzymujemy końcowe rozwiązanie w postaci zdyskretyzowanej (w węzłach sieci). Numerycznie obliczone wartości wielkości w węzłach odpowiednio zagęszczonej sieci elementów skończonych aproksymują w sposób wystarczająco wierny rzeczywiste wartości wielkości.

5.8 Efektywne obliczenie współczynnika sprzężenia elektromechanicznego przetwornika kompozytowego

W poprzednim rozdziale dokonano homogenizacji złożonej struktury przetwornika kompozytowego poprzez wyznaczenie efektywnych wartości tensorów materiałowych zastępczej struktury jednorodnej. Dalsze obliczenia będą dotyczyły właśnie tej zastępczej jednorodnej struktury.

Efektywne obliczenie współczynnika sprzężenia elektromechanicznego przetwornika kompozytowego możliwe jest z ogólnej definicji (157) na drodze całkowania bezpośredniego w MES. Metodą alternatywną do uprzednio wymienionej jest zastosowanie schematu zastępczego Masona [28]. Druga z wymienionych metoda jest mniej ogólna. Stosować ją wolno bowiem wyłącznie w przypadku kiedy spełnione zostały warunki dopuszczalności stosowania schematu zastępczego Masona dla jednorodnego przetwornika piezoelektrycznego drgającego tłokowo.

5.8.1 Zastosowanie metody całkowania bezpośredniego w MES

Jedną z najważniejszych wielkości materiału piezoelektrycznego jest współczynnik sprzężenia elektromechanicznego \mathbf{k} [29]. Wartości wymienionego współczynnika obliczono na drodze numerycznej analizy dynamicznej poprzez całkowanie bezpośrednie w metodzie elementów skończonych [15]:

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{E}_m}{\sqrt{\mathbf{E}_{st} \mathbf{E}_d}} \quad (157)$$

$$\mathbf{E}_m = \frac{1}{4} (\mathbf{u}' \mathbf{K}_{u\phi} \Phi + \Phi' \mathbf{K}_{\phi u} \mathbf{u}) \quad (158)$$

$$\mathbf{E}_{st} = \frac{1}{2} \mathbf{u}' \mathbf{K}_{uu} \mathbf{u} \quad (159)$$

$$\mathbf{E}_d = \frac{1}{2} \Phi' \mathbf{K}_{\phi\phi} \Phi \quad (160)$$

gdzie:

E_m - energia elektromechaniczna

E_{st} - energia pola odkształceń i naprężeń

E_d - energia pola elektrycznego

u - macierz przemieszczeń

Φ - macierz potencjałów

K_{uu} - macierz sztywności mechanicznej

$K_{u\Phi}$ - macierz sztywności piezoelektrycznej

$K_{\Phi\Phi}$ - macierz sztywności dielektrycznej

K_t - macierz transponowana w stosunku do macierzy K

Przeprowadzono obliczenia wartości współczynnika sprzężenia elektromechanicznego k w oparciu o wzór (157) dla przetwornika kompozytowego (Rys. 2) i przetwornika z PZT o identycznej częstotliwości rezonansu elektrycznego i takiej samej średnicy. Wyniki zestawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Wartości współczynnika sprzężenia elektromechanicznego k dla przetwornika piezoceramicznego i kompozytowego poddanego homogenizacji:

Typ przetwornika	Częstotliwość rezonansu elektrycznego MHz	Współczynnika sprzężenia elektromechanicznego k
piezoceramiczny	1,92	0,49
kompozytowy po homogenizacji	2,10	0,63

Z tabeli 2 wynika, że obliczona wartość współczynnika k w przypadku przetwornika kompozytowego jest o 29 % większa w odniesieniu do wartości dla przetwornika piezoceramicznego.

5.8.2 Zastosowanie schematu zastępczego przetwornika piezoelektrycznego drgającego tłokowo według Masona

Dla przypadku płaskorównoległego dysku drgającego grubościowo (tłokowo) uprawnione jest założenie poniżej przedstawionych brzegowych warunków sprężystych [28]:

$$T_1 = T_2 \neq 0 \quad (161)$$

$$T_3 \neq 0 \quad (162)$$

$$S_1 = S_2 = 0 \quad (163)$$

$$S_3 \neq 0 \quad (164)$$

Dla przyjętych warunków brzegowych ogólną postać równania (157) można zastąpić jego szczególnym przypadkiem [28].

$$k_t = \frac{e_{33}}{\sqrt{c_{33} \epsilon_{33}}} \quad (165)$$

W równaniu (165) przy wielkości współczynnika sprzężenia elektromechanicznego k znajduje się indeks "t". Indeks ten oznacza obowiązywanie dla analizowanego szczególnego przypadku uprzednio założonych warunków brzegowych danych przez (161-164).

Z postaci równania (165) wnioskujemy, że wielkość k_t jest stałą zależną wyłącznie od trzech następujących wartości: składowej e_{33} tensora sztywności piezoelektrycznej, składowej ϵ_{33} tensora sztywności dielektrycznej i składowej c_{33} tensora sztywności mechanicznej.

Przeprowadzono obliczenia wartości współczynnika sprzężenia elektromechanicznego k w oparciu o wzór (165) dla przetwornika kompozytowego (Rys. 2) i przetwornika z PZT o identycznej częstotliwości rezonansu elektrycznego i średnicy dysku. Wyniki zestawiono w tabeli 3.

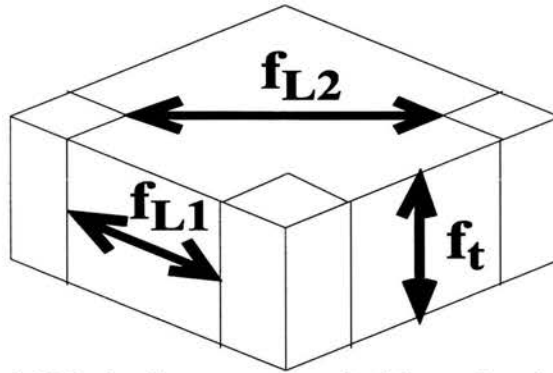
Tabela 3. Wartości współczynnika sprzężenia elektromechanicznego k_t dla przetwornika piezoceramicznego i kompozytowego poddanego uprzednio homogenizacji:

Typ przetwornika	Częstotliwość rezonansu elektrycznego MHz	Współczynnika sprzężenia elektromechanicznego k_t
piezoceramiczny	1,92	0,48
kompozytowy po homogenizacji	2,10	0,61

Z tabeli 3 wynika, że obliczona wartość współczynnika k_t w przypadku przetwornika kompozytowego jest o 27 % większa w odniesieniu do wartości dla przetwornika piezoceramicznego.

5.9 Zagadnienie propagacji fal typu Lamba

Drgająca materialna bryła kompozytu posiada strukturę periodyczną. W widmie częstotliwości wyróżnić możemy pewne szczególne wartości związane z periodycznością struktury. Poza częstotliwością rezonansu grubościowego f_t oznaczamy ponadto kolejne częstotliwości rezonansu typu Bragga z których pierwsze dwie to f_{L1} i f_{L2} (rys. 16) [35]. Istnienie rezonansów typu braggowskiego w periodycznym kompozycie typu 1-3 jest nieuniknione.



Rys. 16 Mechanizm powstawania fal typu Lamba [35]

f_t - rezonans grubościowy, f_{L1} - rezonans typu Bragga pierwszego rzędu,
 f_{L2} - rezonans Bragga drugiego rzędu

Fakt nieuniknionego istnienia rezonansu braggowskiego nie dyskwalifikuje jednak struktury kompozytowej, o ile częstotliwości rezonansu grubościowego i częstotliwości zwłaszcza pierwszych najsilniejszych rezonansów typu Bragga różnią się co do rzędu wielkości [1]. Nie ma wówczas miejsca interferencja zakresów wymienionych częstotliwości. Wymieniona interferencja wystąpi natomiast kiedy stała periodyczności struktury będzie o rząd wielkości mniejsza od podwojonej grubości płaskorównoległego przetwornika (równej długości fali akustycznej odpowiadającej częstotliwości rezonansu elektrycznego). W praktyce określony powyżej warunek pokrywa się z uprzednio sformułowanym warunkiem dopuszczalności traktowania bryły jako jednorodnej.

6. Pomiary własności elektroakustycznych przetwornika kompozytowego

Wielokrotnie w pracy podawano wartości wielkości elektroakustycznych uzyskanych na drodze doświadczalnej w opisanych poniżej (rozdział 6.1 i 6.2) układach pomiarowych. Na szczególną uwagę zasługuje metoda pomiaru współczynnika sprzężenia elektromechanicznego oraz nadawczo-odbiorczej funkcji przenoszenia.

6.1 Współczynnik sprzężenia elektromechanicznego

Punktem wyjścia do opisu stosowanej metody pomiaru współczynnika sprzężenia elektromechanicznego jest rezonansowy układ zastępczy przetwornika (rys. 8). W oparciu o zależności (21-24) wartość k_t wyznaczamy z krzywej admitancji wejściowej [14] (rys. 7). Pomiaru części rzeczywistej jak i urojonej admitancji w funkcji częstotliwości dokonujemy za pomocą mostka admitancyjnego Hewletta - Packarda HP 3577A.

Na podstawie tych pomiarów wyznaczamy częstotliwość rezonansową f_e i częstotliwości kwadrantowe f_1, f_2 a następnie dobroć Q_a z wyrażenia :

$$Q_a = \frac{f_e}{f_2 - f_1} \quad (166)$$

W kolejnym kroku obliczamy ze wzoru (167) pojemność gałęzi rezonansu elektrycznego (rys. 8):

$$C' = \frac{1}{2\pi f_e R' Q_a} \quad (167)$$

gdzie $R' = \frac{1}{\text{Real}[Y_w(f_e)]}$

Następnie obliczamy pojemność równoległą C_0 :

$$C_0 \approx \frac{\text{Im}[Y(f_e)]}{2\pi f_e} \quad (168)$$

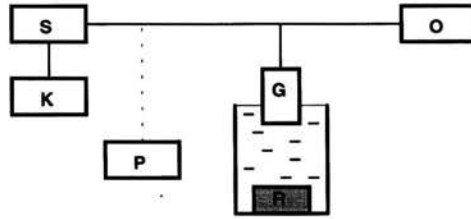
Wartość k_t wyznaczamy z przekształconego wzoru (22) :

$$k_t = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{8C_0}{\pi^2 C}}} \quad (169)$$

Zgodnie ze wzorem (169) współczynnik sprzężenia elektromechanicznego k_t wyznaczamy na podstawie znajomości stosunku C_0/C pojemności gałęzi równoległej do pojemności szeregowej zastępczego układu rezonansowego [14].

6.2 Funkcja przenoszenia

Pomiar funkcji przenoszenia przeprowadzono dla przypadku odbicia fali akustycznej generowanej przez przetwornik kompozytowy od idealnego (mosiężnego) płaskiego reflektora (rys. 17). Wykorzystano w tym celu sterowany komputerem nadajnik paczek (burstów) impulsów elektrycznych RITEC RAM -10000. Do oceny kształtu impulsu odbitego wykorzystano natomiast nadajnik impulsów prostokątnych RITEC SP - 801.



K - komputer PC, S - nadajnik RAM-10000-Ritec, P- Nadajnik fali prostokątnej P-801- Ritec, O - oscyloskop LeCroy 9310, G - głowica, R - reflektor

Rys.17 Schemat układu pomiarowego nadawczo-odbiorczej funkcji przenoszenia głowic

Nadajnik RITEC RAM-10000 umożliwia generację paczek (burstu) impulsów o regulowanej ilości okresów sygnału wielkiej częstotliwości (od 1 do 40). Zakres zmian częstotliwości impulsów wynosi od 0,5 do 17,5 MHz. Dla głowic ultrasonograficznych amplituda impulsu odebranego praktycznie nie ulega zmianie przy wydłużaniu impulsu badawczego powyżej trzech przebiegów. W przeprowadzonych badaniach nadawczo-odbiorczej funkcji przenoszenia stosowano impulsy o 15 okresach. Nadajnik fali prostokątnej RITEC SP-801 wykorzystujemy natomiast do oceny kształtu impulsy odbitego od idealnego reflektora. Impuls odbity składa się wówczas z dwóch składowych, z których każda stanowi odpowiedź na kolejne pobudzenie zboczem narastającym i opadającym impulsu prostokątnego. Dla elektronicznych układów odbiorczych urządzeń diagnostyki medycznej pożądane są krótkie impulsy odbiorcze o szybko zanikających końcowych oscylacjach. Podyktowane jest to powszechnie stosowanymi wzmacniaczami sygnału o charakterystyce logarytmicznej. Gdy występują długie końcowe oscylacje impulsu odbiorczego, w przypadku pobudzenia falą prostokątną obserwujemy interferencję impulsów odbiorczych składowych dla każdego ze zboczy fali prostokątnej. Składowe impulsy odbiorcze dla poszczególnych zboczy nie są wówczas wyraźnie rozdzielone w dziedzinie czasu.

7.1 Pomiary impedancji i współczynnika sprzężenia elektromechanicznego

Na podstawie przeprowadzonych pomiarów porównano wartości wielkości elektroakustycznych dwóch przetworników - całkowicie wykonanego z PZT i kompozytowego typu 1-3 o 25 % zawartości piezoceramiki (tabela 4). Oba przetworniki posiadały jednakową średnicę i charakteryzowały się praktycznie jednakową wartością częstotliwości rezonansu elektrycznego. Badania porównawcze miały na celu doświadczalne potwierdzenie przewidywanych na podstawie obliczeń korzystnych zmian wartości wybranych wielkości

elektroakustycznych kompozytu w odniesieniu do piezoceramiki. Ponadto badania te stanowiły podstawę oceny poprawności modelowania przetwornika kompozytowego typu 1-3. Wartości współczynnika sprzężenia elektromechanicznego dla obydwu przetworników wyznaczono doświadczalnie w oparciu o pomiar części rzeczywistej i urojonej krzywej admitancji na analizatorze sieci HP3677A. Posłużono się w tym celu rezonansowym schematem zastępczym opisanym w rozdziale 2.6 oraz schematem Masona opisanym w rozdziale 2.5. Wzory (166-169) przedstawiają zastosowaną metodę obliczenia parametrów materiału piezoelektrycznego przetworników w oparciu o uprzednio wymienione schematy. Uzyskane wyniki doświadczalne oraz wyznaczone na ich podstawie wielkości elektroakustyczne zestawiono w tabeli 5.

Z tabeli 5 wynika fakt 20 % wzrostu wartości współczynnika sprzężenia elektromechanicznego i trzykrotnej redukcji wartości impedancji akustycznej w przypadku przetwornika kompozytowego w odniesieniu do piezoceramicznego. Z pozostałych własności materiałowych wymienić należy 64 % redukcję wartości współczynnika sprzężenia elektromechanicznego k_t (dla szczególnego przypadku drgań tłokowych).

Wykonano głowice z przetworników o własnościach zestawionych w tabeli 5. Dopasowujące warstwy ćwierćfalowe wytworzono dla kompozytów z żywicy epoksydowej, a dla ceramiki z mieszaniny wolframu i żywicy w stosunku wagowym 2:1. Tym samym spełniony został w przybliżeniu warunek De Silets'a na impedancję akustyczną warstw [26]. Tylną powierzchnię przetworników obciążono w przypadku kompozytu mieszaniną żywicy z korkiem, a dla piezoceramiki mieszaniną żywicy z korundem. Następnie dokonano pomiaru przebiegu zmienności impedancji dla głowic z przetwornikiem kompozytowym (rys. 18) i piezoceramicznym (rys. 19).

Z analizy rys. 18 i rys. 19 wynika, że dla głowicy z przetwornikiem kompozytowym zmiany zarówno części rzeczywistej jak i urojonej admitancji są mniejsze w większym zakresie częstotliwości niż dla piezoceramiki. Tym samym głowica z przetwornikiem kompozytowym ma szersze pasmo. Fakt ten będzie mógł być dowiedziony na podstawie późniejszego pomiaru nadawczo-odbiorczej funkcji przenoszenia. W tabeli 4 zestawiono wartości wybranych parametrów głowic.

Tabela 4 Parametry głowic

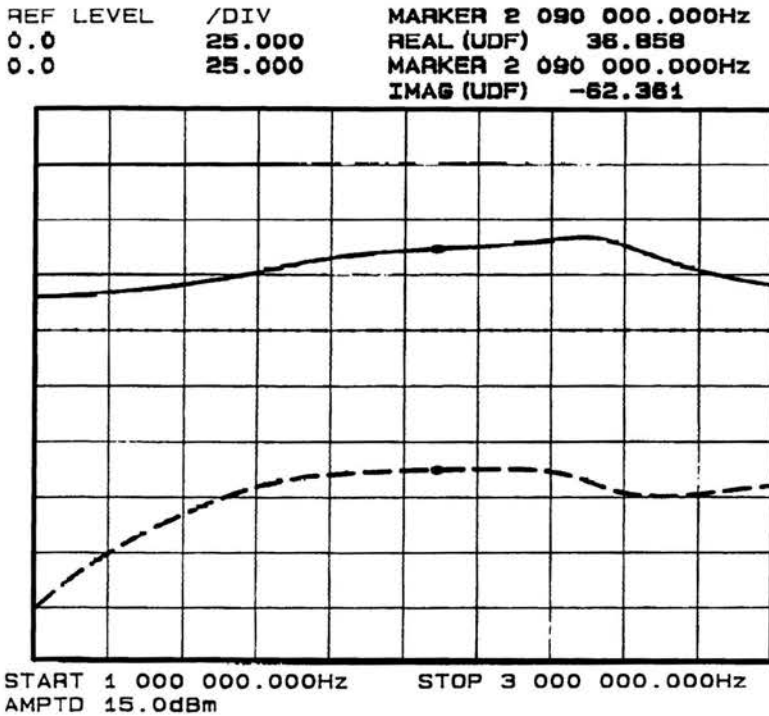
materiał piezo	współczynnik sprzężenia el-mech. k_t	przenikalność dielektryczna ϵ	impedancja akustyczna 10^6 [kg/m ² s]	impedancja obc. tylnego 10^6 [kg/m ² s]	impedancja warstwy $\lambda/4$ 10^6 [kg/m ² s]
ceramika	0.51	693	32.4	4	4.5
kompozyt	0.61	286	11.6	2	3.2

Tabela 5. Zestawienie własności przetworników piezoceramicznego i kompozytowego o 25 % zawartości piezoceramiki. Grubym drukiem podano własności materiałowe.

			Piezoceramika	Kompozyt
D	mm	średnica	20	20
g	mm	grubość	0,95	0,82
f_e	MHz	częstotliwość rezonansu elektrycznego	1,92	2,1
f_1	MHz	pierwsza częstotliwość kwadrantowa	1,83	1,76
f_2	MHz	druga częstotliwość kwadrantowa	2,02	2,46
Q		dobroć	9,87	3,02
f_m	MHz	częstotliwość rezonansu mechanicznego	2,16	2,51
G_e	mS	konduktancja dla częstotliwości rezonansowej	67,93	18,18
B_e	mS	susceptancja dla częstotliwości rezonansowej	23,75	12,77
R_e	Ω	rezystancja dla częstotliwości rezonansowej	13,01	40,62
X_e	Ω	reaktancja dla częstotliwości rezonansowej	-4,36	-30,83
C_0	pF	pojemność gałęzi równoległej układu zastępczego	1973,6	969,8
C	pF	pojemność gałęzi szeregowej układu zastępczego	572	457,5
k_t		współczynnik sprzężenia elektromechanicznego	0,51	0,61
ϵ/ϵ_0		względna stała dielektryczna	693	286
ρ	kg/m³	gęstość	7700	2852
c	m/s	prędkość dźwięku	4204	4111,5
Z	MRayl	impedancja akustyczna	32,4	11,61

Różnice w wartościach impedancji akustycznych materiału na warstwy ćwierćfalowe wynikają z konieczności zachowania warunku De Silets'a na impedancję akustyczną warstw [26]. Impedancja obciążenia tylnego ma zgodnie z (24) wpływ na szerokość pasma przenoszenia głowicy. Pasma to ulega poszerzeniu w wyniku obecności obciążenia tylnego. Odbywa się to jednak kosztem częściowej utraty czułości w wyniku strat energii w materiale

obciążenia. Czułość głowicy definiujemy jako stosunek amplitudy V_{pp} impulsu odbitego od idealnego reflektora do amplitudy V_{pp} impulsu nadawczego.



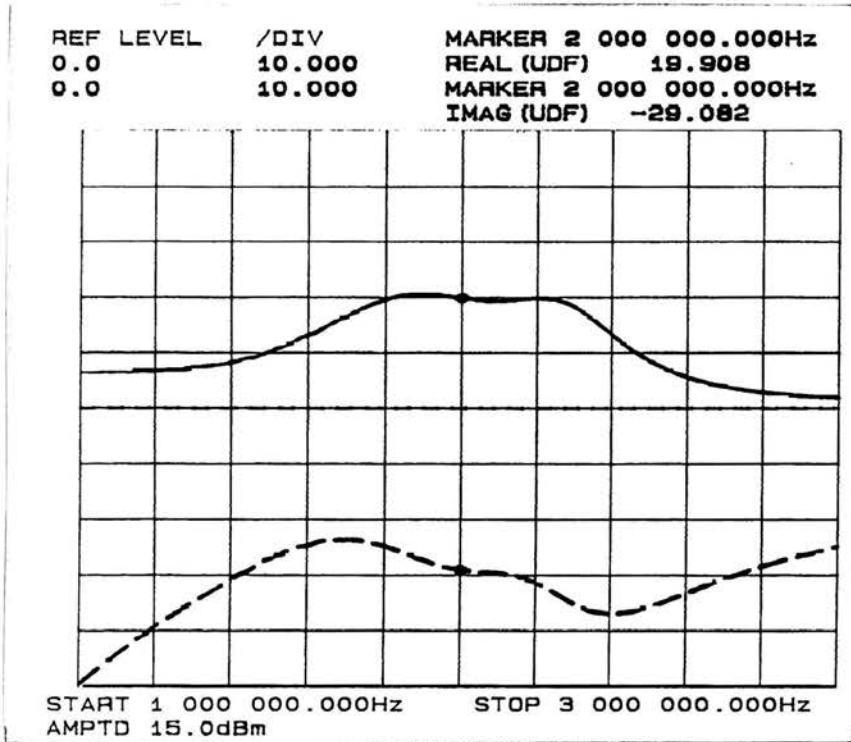
Rys. 18 Impedancja zmierzona za pomocą mostka Network Analyser HP 3577A (część rzeczywista - linia ciągła, część urojona - linia przerywana) głowicy z przetwornikiem kompozytowym o średnicy z warstwą ćwierćfalo-wą z przodu oraz tylnym obciążeniem mieszaną żywicą z korkiem

6.4 Funkcja przenoszenia i czułość

Przeprowadzono pomiary nadawczo-odbiorczej funkcji przenoszenia głowic ultradźwiękowych pierwszej z przetwornikiem piezoceramicznym i drugiej z przetwornikiem kompozytowym. Metodę pomiaru opisano w rozdziale 6.2. Obliczenia funkcji przenoszenia przeprowadzono natomiast w oparciu o schemat zastępczy Masona [28].

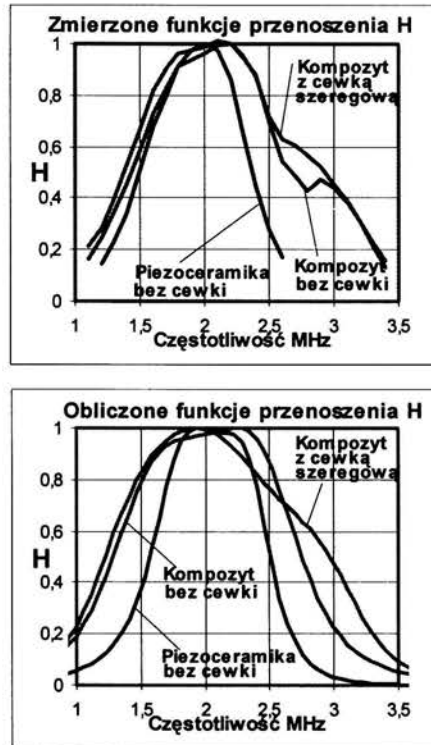
Z analizy rys. 20 wynika, że zmierzone sześciodecybelowe pasmo przenoszenia dla głowicy z przetwornikiem kompozytowym (bez cewki) wynosi 1238 kHz, a z piezoceramicznym (bez cewki) 857 kHz. Otrzymane wyniki potwierdzają jakościowe rozważania wynikające z analizy wzoru (24) na dobroć zastępczego układu rezonansowego. W ogólności pasmo przenoszenia głowicy rośnie wraz ze zmniejszaniem wartości jej dobroci - zgodnie z

zastępczym układem rezonansowym (opisanym w rozdziale 4), co właśnie ma miejsce w przypadku przetwornika kompozytowego w odniesieniu do piezoceramicznego odpowiednika. Na zmniejszenie wartości dobroci układu zastępczego w przypadku kompozytu w porównaniu z piezoceramiką ma w



Rys. 19 Impedancja zmierzona za pomocą mostka Network Analyser HP 3577A (część rzeczywista - linia ciągła, część urojona - linia przerywana) głowicy z przetwornikiem piezoceramicznym z warstwą ćwierćfalową z przodu oraz tylnym obciążeniem mieszaniną wagowo 1:2 żywicy z korundem

analizowanej sytuacji większy wpływ trzykrotne zmniejszenie impedancji akustycznej materiału przetwornika niż zwiększenie o 43 % wartości kwadratu współczynnika sprzężenia elektromechanicznego (24). Na podstawie przeprowadzonego pomiaru stwierdzono, że zastosowanie cewki równoległej prawie nie zmienia szerokości pasma. Natomiast zastosowanie cewki szeregowej spowodowało rozszerzenie pasma przenoszenia do 1571 kHz dla przypadku kompozytu. Wynika to z lepszego (tabela 6) dopasowania elektrycznego do układu nadawczo-odbiorczego.



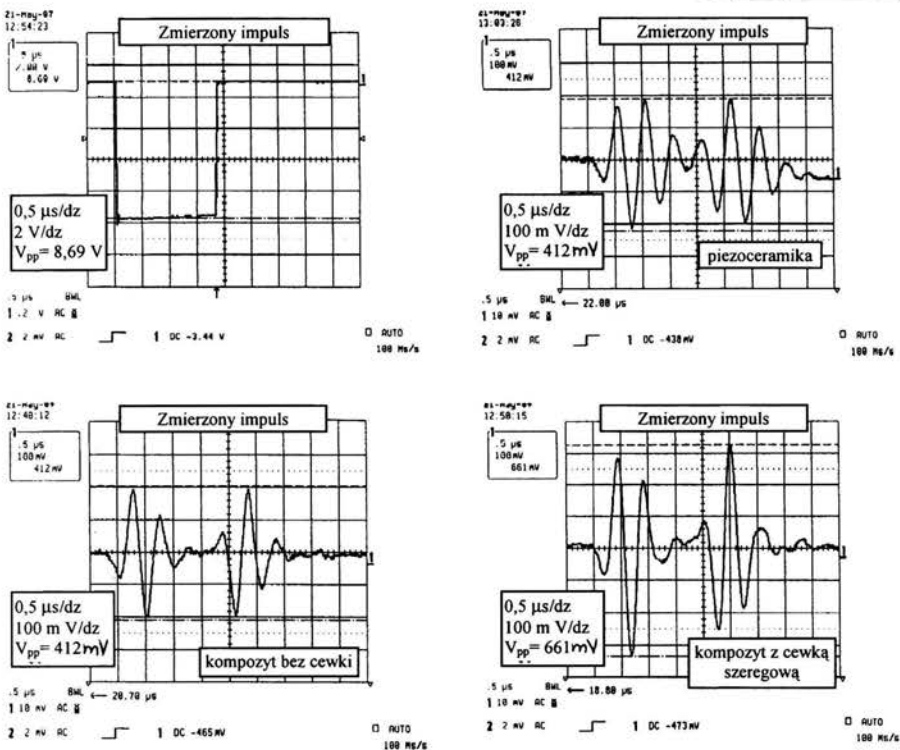
Rys.20 Nadawczo-odbiorcze funkcje przenoszenia przetworników piezoceramicznego i kompozytowych

Układ omawianego przetwornika kompozytowego (częstotliwość rezonansowa f_e 2,1 MHz, średnica 20 mm) z cewką szeregową kompensującą jego pojemność statyczną poza praktycznie równą zero wartością reaktancji charakteryzuje się wartością rezystancji najbliższą 50Ω dla zestawionych w tabeli 6 przypadków.

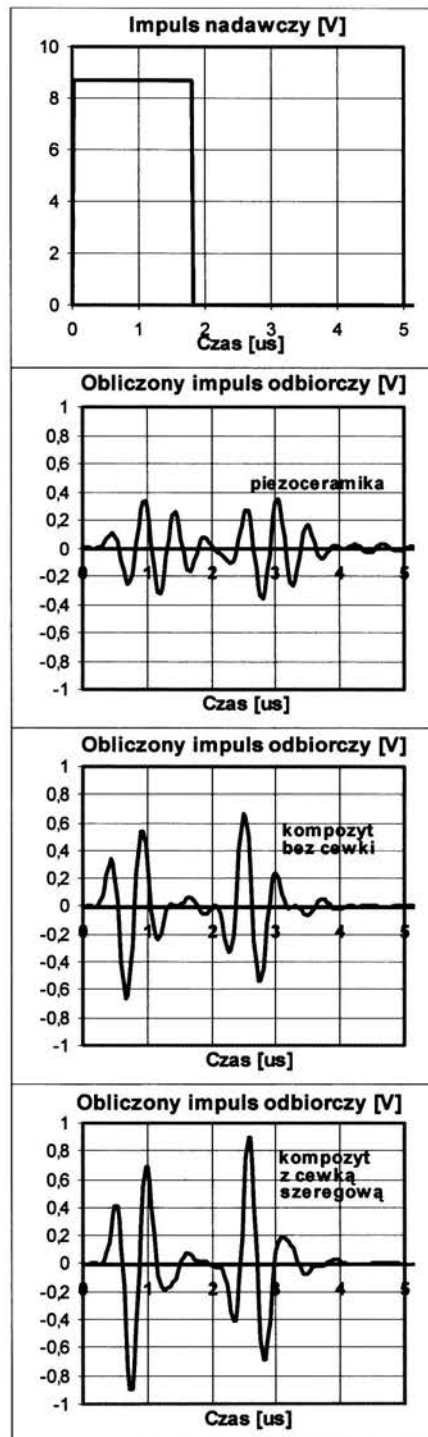
Tabela 6 Część rzeczywista i urojona impedancji przetworników piezoceramicznego i kompozytowych

	R [Ω]	X [Ω]
PZ 27	19,008	-29,082
Kompozyt bez cewki	36,858	-62,361
Kompozyt z cewką równoległą	144,68	0
Kompozyt z cewką szeregową	38,124	0

W celu porównania rozdzielczości głowic kompozytowych i piezoceramicznych zmierzono impulsy odbite od reflektora dla pobudzenia impulsem prostokątnym o czasie trwania 1,8 μs . Opis pomiaru zawarty jest w rozdziale 6.2. Wybór takiego właśnie typu impulsu pobudzającego podyktowany był zamiarem oceny kształtu i zwłaszcza czasu trwania impulsu od dwóch zbroczy narastającego i opadającego. Szczególnie istotna jest ocena czy kolejne dwa impulsy odbiorcze przetwornika stanowiące odpowiedź na kolejne dwa zbroczy impulsu nadawczego - nie interferują ze sobą z powodu końcowego dzwonienia. Występowanie „ogona impulsu” - końcowych oscylacji o długim czasie trwania i znacznej amplitudzie jest szczególnie niekorzystne gdy stosujemy elektroniczne układy odbiorcze o logarytmicznej charakterystyce. Jak widać na rys. 21 dla kompozytu impulsy od zbroczy zarówno opadającego i narastającego są krótsze i wyraźniej rozdzielone niż dla piezoceramiki. Natomiast amplitudy impulsów odbitych są dla kompozytu i ceramiki takie same. Zastosowanie cewki równoległej w głowicy kompozytowej prawie nie



Rys.21 Zmierzone impulsy - nadawczy i odbiorcze przetworników piezoceramicznego i kompozytowych



Rys. 22 Impuls nadawczy i obliczone impulsy odbiorcze przetworników piezoceramicznego i kompozytowych

zmieniło impulsów odbitych, natomiast zastosowanie cewki szeregowej spowodowało wzrost amplitudy o 60 %. Wynika to z lepszego dopasowania elektrycznego. Impedancja głowicy z cewką równoległą wynosi 38Ω a z cewką szeregową 145Ω (tabela 6). Rysunek 22 zawiera wyniki obliczeń impulsów odbitych w oparciu o zastosowanie schematu zastępczego Masona. Założone parametry głowic przedstawiono w tabeli 4. Porównując wyniki pomiarów z obliczeniami (rys. 21 i 22), można stwierdzić pełną zgodność odnośnie kształtu odbitych impulsów i wpływu indukcyjności kompensacyjnej. Różnice w bezwzględnych wartościach amplitud wynikają głównie z nieznaności impedancji elektrycznej źródła, która wpływa w wyraźny sposób na wartość funkcji przenoszenia.

7. Podsumowanie i wnioski

7.1 Zestawienie i porównanie wyników doświadczalnych wielkości elektroakustycznych i obliczeń numerycznych

Aproksymowanie wartości efektywnych tensorów materiałowych hipotetycznego materiału homogenicznego jedynie średnią wagową składników obarczone jest błędem nieuwzględnienia wpływu skokowej (w przypadku kompozytu typu 1-3) zmiany własności fizycznych na granicach faz materiałowych w objętości elementarnej jednostki symetrii kompozytu. Nieuwzględniany jest ponadto w tym wariantcie rozwiązania wpływ geometrii samej elementarnej jednostki symetrii na efektywne wartości wymienionych wielkości. W pracy przedstawiono numeryczne obliczenie zarówno współczynnika sprzężenia elektromechanicznego jak i efektywnych wartości tensorów materiałowych kompozytu. Zaproponowano dokonanie podziału rozwiązania zagadnienia na dwa niezależne etapy (analizę statyczną dla kompozytowej komórki elementarnej i analizę dynamiczną dla całej homogenicznej bryły) obliczeń numerycznych, co umożliwia ich przeprowadzenie dla całej bryły kompozytowej. Omijamy bowiem w ten sposób ograniczenie ze strony dopuszczalnego rzędu globalnej macierzy sztywności zagadnienia. Obliczenia potwierdziły 20% wzrost wartości współczynnika sprzężenia elektromechanicznego kompozytu w stosunku do piezoceramiki. Obliczona numerycznie wartość współczynnika sprzężenia elektromechanicznego (równa 0,63 dla metody całkowania bezpośredniego i 0,61 dla zastosowania układu Masona do uprzednio wyznaczonych zastępczych tensorów materiałowych) odpowiada wartości 0,61 otrzymanej doświadczalnie. Potwierdzono wzrost rzędu 50 % częstotliwościowego pasma przenoszenia w przypadku kompozytu, który jakościowo wynika ze zmniejszenia wartości dobroci zastępczego układu Masona w odniesieniu do piezoceramicznego odpowiednika. Zwiększenie pasma przenoszenia w przypadku kompozytu wynika przede wszystkim z trzykrotnie mniejszej wartości impedancji akustycznej kompozytu w

porównaniu z piezoceramiką i w mniejszym stopniu ze zwiększenia o 20 % wartości współczynnika sprzężenia elektromechanicznego. Przeprowadzone obliczenia stanowią wkład własny autora w analizę własności elektroakustycznych przetworników kompozytowych. Badania doświadczalne wykonanych modeli własnych przetworników kompozytowych pozostawały w daleko idącej zgodności z rezultatami obliczeń. Całokształt wymienionej pracy autora stanowi uzasadnienie głównej tezy o przydatności wymienionych przetworników do aplikacji w diagnostyce medycznej.

7.2 Wnioski wskazujące na potencjalne zastosowanie przetworników kompozytowych

Przetworniki kompozytowe charakteryzują się szeregiem pożądanych właściwości w porównaniu z ceramiką piezoelektryczną stosowaną na przetworniki w ultradźwiękowej diagnostyce medycznej. Posiadają co najmniej 20 % większą wartość współczynnika sprzężenia elektromechanicznego i około trzykrotnie mniejszą wartość impedancji akustycznej. Częstotliwościowe pasmo przenoszenia kompozytów jest co najmniej 50 % większe. Rozdzielenie ech od dwóch zbroczy prostokątnego impulsu pobudzającego jest zdecydowanie wyraźniejsze dla przetwornika kompozytowego niż dla piezoceramicznego. Serie wykonanych przetworników kompozytowych odznaczały się dużą powtarzalnością a ich własności elektroakustyczne dobrze opisywał schemat zastępczy Masona przy zachowaniu warunku dysproporcji pomiędzy długością fali akustycznej a wymiarem charakterystycznym struktury kompozytowej. Zwłaszcza na ten ostatni warunek należy szczególnie starannie zwracać uwagę przy projektowaniu przetworników kompozytowych. W diagnostyce ultradźwiękowej często stosuje się impulsy nadawcze wysokiej częstotliwości o dwóch lub trzech okresach czyli szerokopasmowe. Do detekcji impulsów odbiorczych lepiej w tym przypadku stosować bardziej szerokopasmowe kompozyty. Te ostatnie umożliwiają ponadto w daleko większym stopniu niż piezoceramiczne odpowiedniki generowanie dwóch różnych częstotliwości przez jedną głowicę.

9. Piśmiennictwo

- [1] A. Alippi, F. Cracium, *Stopband edges in the dispersion curves of Lamb waves propagating in piezoelectric periodical structures*, Applied Physics Letters, 57 (19), November 1988, 1806-1808.
- [2] B.A. Auld, *Acoustic Fields and Waves in Solids*, vol. 1, Krieger, 1990.
- [3] A. Bensoussan, J.Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [4] H.L. Chan, J. Unsworth, *Effect of Ceramic Anisotropy on the Properties of Ceramic/Polymer Piezoelectric Composites*, IEEE 1987 Ultrasonic Symposium, 1987, 651-655.
- [5] A. Gałka, J. J. Telega, R. Wojnar, *Homogenisation and Thermopiezoelectricity*, Mech. Res. Comm., 19, pp. 315-324, 1991
- [6] A. Gałka, J.J. Telega, R. Wojnar, *Some computational aspects of homogenization of thermopiezoelectric composites*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 3, pp. 133-154, 1996
- [7] M. Grewe, T.R. Gururaja, "Acoustic properties of particle polymer composites for ultrasonic transducer backing applications", *IEEE Transactions on Ultrasonic, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol 37, no. 6, pp. 506-513, 1990.
- [8] G. Hayward, J. Hossack, "Unidimensional modelling of 1-3 composite transducers", *Journal of the Acoustic American*, vol. 88, no. 2, pp. 599-608, 1990.
- [9] T. D. Hien, *Deterministic and stochastic sensitivity in computational structural mechanics*, Institute of Fundamental Technological Research Reports, Warsaw, Poland, 1990, vol. 46, pp. 18-20.
- [10] J. Hossack, G. Hayward, "Finite-element analysis of 1-3 composite transducers", *IEEE Transactions on Ultrasonic, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 38, no. 6, pp. 618-629, 1991.
- [11] J.W. Hunt, M. Arditi, "Ultrasound transducers for pulse-echo medical imaging", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. BME-30, no.8, pp. 453-481, 1983.

- [12] J.H. Ih, B.H. Lee, "Performance analysis of piezoelectric composite plates with consideration of the internal losses", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 35, no. 1, pp. 73-77, 1988.
- [13] S. Kaliski, *The dynamical problem of the rectangular parallelepiped*, Biuletyn Wojskowej Akademii Technicznej, 1953, 53, 330-369.
- [14] G.S. Kino, *Acoustics waves: devices, imaging, and the signal processing*, Stanford University, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1987.
- [15] M. Kleiber, *Wprowadzenie do Metody Elementów Skończonych*, PWN, Warszawa-Poznań, 1989.
- [16] K.A. Klicker, R.E. Newnham, "Piezoelectric Composites with 3-1 Connectivity and a Foamed Polyurethane Matrix", *Journal of the American Ceramic Society*, vol. 65, pp. C208-C210, 1982.
- [17] K. Kycia, A. Nowicki, O. Gajl, T.D. Hien, M. Kleiber, "Piezoceramiczno-polimerowy przetwornik kompozytowy; dyskusja wyników badań modeli i opis sposobu homogenizacji", *Prace XI Sympozjum z Hydroakustyki*, Gdynia - Akademia Marynarki Wojennej, vol. 534-143(063), pp. 219-226, 1994.
- [18] K. Kycia, A. Nowicki, O. Gajl, T.D. Hien, M. Kleiber, "Przetwornik kompozytowy piezoceramiczno-polimerowy: dyskusja wyników badań modeli, opis sposobu homogenizacji i numeryczne obliczanie wartości współczynnika sprzężenia elektromechanicznego", *XLI Otwarte Seminarium z Akustyki*, *Prace Naukowe Instytutu Telekomunikacji i Akustyki Politechniki Wrocławskiej* Nr 78, Seria Konferencje Nr 24, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, pp. 125-128, 1994.
- [19] K. Kycia, A. Nowicki, O. Gajl, T.D. Hien, M. Kleiber, "Electromechanical characteristics, asymptotic homogenisation analysis and numerical calculation based on finite element method of ultrasonic composite transducer for medical applications", *Proceedings 8th International Piezoelectric Conference PIEZO'94*, Tele & Radio Research Institute, Warsaw, pp. 163-175, April 1995
- [20] K. Kycia, A. Nowicki, O. Gajl, M. Kleiber, T.D. Hien, "Analiza piezoceramiczno-polimerowych przetworników kompozytowych do zastosowań w ultradźwiękowej diagnostyce medycznej", *XLII Otwarte*

Seminarium z Akustyki, Prace Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN, Warszawa, pp. 169-172, 1995.

[21] K. Kycia, A. Nowicki, T. D. Hien, O. Gajl, M. Kleiber, "Ultrasonic composite transducers for medical applications", Ultrasonic World Ultrasonic Congress 1995 Proceedings, Gerhard-Mercator-Universität Duisburg Germany, pp. 343-346, 1996.

[22] K. Kycia, A. Nowicki, O. Gajl, T.D. Hien, "Zastosowanie teorii homogenizacji asymptotycznej do wyznaczenia efektywnych tensorów materiałowych kompozytowego przetwornika ultradźwiękowego", XLIII Otwarte Seminarium z Akustyki, wydane przez Oddział Górnośląski Polskiego Towarzystwa Akustycznego, Gliwice, tom 1, pp. 407-412, 1996.

[23] K. Kycia, A. Nowicki, O. Gajl, T.D. Hien, "Calculations of effective material tensors and the electromechanical coupling coefficient of a type 1-3 composite transducer", *Archives of Acoustics*, **21**, 4, 1996.

[24] K. Kycia, *Comparison of ceramic and composite transducers*, Proceedings of the 1997 International Symposium on Hydroacoustics and Ultrasonics, Gdańsk-Jurata, 1997, 333-336.

[25] R. Lerch, "Simulation of Piezoelectric Devices by Two- and Three-Dimensional Finite Elements", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 37, no. 2, pp. 233-246, 1990.

[26] G. Łypacewicz, E. Duriasz, "Design of ultrasonic probes used for medical diagnostics", *Archives of Acoustics*, vol. 15, no. 3-4, pp. 137-159, 1990.

[27] G. Łypacewicz, "Influence of the electrical parameters on the ultrasonic probe impedance and the reflected pulses", *Archives of Acoustic*, vol. 19, no. 4, pp. 47-66, 1994.

[28] G. Łypacewicz, "Piezoelektryczne układy nadawczo-odbiorcze dla celów ultrasonografii", Prace IPPT PAN, nr 22/1995.

[29] W. P. Mason, *Physical Acoustics*, vol. 1, part A, Academic Press, New York, 1964.

[30] M. Naillon, R.H. Coursant, F. Besnier, "Analysis of piezoelectric structures by a finite element method", *Acta Electronica*, vol. 25, no. 4, pp. 341-362, 1983.

- [31] A. Nowicki, K. Kycia, T. D. Hien, O. Gajl, M. Kleiber, "Numerical calculations of the acoustic properties of the 1-3 composite transducers for medical applications", 1995 IEEE Ultrasonic Symposium Proceedings, Institute of Electrical and Electronic Engineers, New York, USA, pp. 1041-1044, 1996.
- [32] A. Nowicki, K. Kycia, G. Łypacewicz, O. Gajl, "Kompozytowe przetworniki piezoelektryczne do zastosowań w ultradźwiękowej diagnostyce medycznej", Akustyka w Technice Medycynie i Kulturze Seminarium Granty Komitetu Badań Naukowych realizowane w latach 1993-1995, wydane przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Warszawa, pp. 355-360, kwiecień 1996.
- [33] E. Sanchez-Palenzia, *Non homogenous media and vibration theory*, Springer, Berlin, 1980.
- [34] W.A. Smith, "New opportunities in ultrasonic transducers emerging from innovations in piezoelectric materials", *New Device in Ultrasonic Transducers* SPIE - The International Society for Optical Engineering Bellingham, Washington State, USA, vol. 1733, pp. 3-26, 1992.
- [35] W. A. Smith, A.A. Shaulov, B.A. Auld, "Design of piezocomposites for ultrasonic transducers", *Ferroelectrics*, vol. 91, pp. 155-162, 1989.
- [36] W.A. Smith, B.A. Auld, "Modelling 1-3 composite piezoelectrics: thickness-mode oscillations", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 38, no. 1, pp. 40-47, 1991.
- [37] W.A. Smith, *Modeling 1-3 Composite Piezoelectrics: Hydrostate Response*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 40, No. 1, January 1993, 41-48.
- [38] W.A. Smith, *Calculating the Hydrophone Response of Piezoceramic-Rod/Piezopolymer-matrix Composites*, Proceedings IEEE Ultrasonic Symposium, 1990, 757-761.
- [39] W.A. Smith, A. Shaulov, *Composite Piezoelectrics: Basic Research to a Practical Device*, *Ferroelectrics*, **87**, 1988, 309-320.
- [40] W.A. Smith, *The Role of Piezocomposites in Ultrasonic Transducers*, Proceedings 1989 Ultrasonic Symposium, 1989, 1-12
- [41] W. Soluch, *Wstęp do piezoelektroniki*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 1980.

- [42] J. J. Telega, *Piezoelectricity and Homogenisation, Application to Biomechanics, Continuum Models and Discrete Systems*, ed. G. A. Maugin, vol. 2, pp. 220-229, Longman, Essex, 1991.
- [43] H. L. Wah Chan, J. Unsworth, "Simple model for piezoelectric ceramic/polymer 1-3 composites used in ultrasonic transducer applications", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 36, no. 4, pp. 434-441, 1989.
- [44] O.C. Zienkiewicz, *Metoda Elementów Skończonych*, Arkady, Warszawa, 1972.

9. Dodatek - opis wybranej metody rozwiązania zagadnienia dynamicznego

W rozdziale 5.7 przedstawiono równanie ruchu (154) dla modelu metody elementów skończonych w postaci:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{uu}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{u\Phi}\dot{\Phi} = \hat{\mathbf{F}} \quad (154)$$

$$\mathbf{K}_{\Phi u}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{\Phi\Phi}\dot{\Phi} = \hat{\mathbf{Q}} \quad (155)$$

gdzie : \mathbf{K}_{uu} , $\mathbf{K}_{u\Phi}$, $\mathbf{K}_{\Phi\Phi}$ - globalne macierze sztywności mechanicznej, piezoelektrycznej i dielektrycznej (149-151), \mathbf{u} i Φ globalne macierze wektorów przemieszczeń oraz potencjałów w węzłach sieci elementów skończonych, $\ddot{\mathbf{u}}$ - przyspieszenie, $\hat{\mathbf{F}}$ i $\hat{\mathbf{Q}}$ globalne macierze uogólnionych sił w węzłach sieci odpowiednio mechanicznych i dielektrycznych, ρ - gęstość, globalna macierz masy \mathbf{M} określona jest przez (156)

$$\mathbf{M} = \iiint_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{N}_u \, d\Omega \quad (156)$$

Równanie ruchu (154) można zapisać w postaci uogólnionej (170):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{K} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{R} \quad (170)$$

gdzie : \mathbf{K} - uogólniona globalna macierz sztywności (rys. 15) zbudowana z globalnych macierzy sztywności mechanicznej \mathbf{K}_{uu} , piezoelektrycznej $\mathbf{K}_{u\Phi}$ i dielektrycznej $\mathbf{K}_{\Phi\Phi}$ (149-151), \mathbf{r} - globalna macierz uogólnionych przemieszczeń zbudowana z macierzy \mathbf{u} i Φ wektorów przemieszczeń oraz potencjałów w węzłach sieci elementów skończonych, \mathbf{R} - globalna macierz uogólnionych sił w węzłach sieci

W procesie rozwiązania równania (170) stosujemy metodę całkowania równania ruchu „krok po kroku”. Wybraną metodą jest tzw. metoda Wilsona, zwana także metodą parametru ϑ [15]. Wymieniona metoda stanowi rozszerzenie innej opisaną w literaturze [15] metody korzystającej z założenia liniowej zmienności przyspieszenia w przedziale czasu $[t, t+\Delta t]$ i redukuje się do niej dla wartości parametru $\vartheta=1$. Zakładamy, że $\tau \in (0, \vartheta \Delta t)$ oraz że w podanym przedziale zachodzi (171)

$$\ddot{\mathbf{r}}_{t+\tau} = \ddot{\mathbf{r}}_t + \frac{\tau}{\vartheta \Delta t} (\ddot{\mathbf{r}}_{t+\vartheta \Delta t} - \ddot{\mathbf{r}}_t) \quad (171)$$

Całkując (171) względem czasu kolejno otrzymujemy (172) i (173):

$$\dot{\mathbf{r}}_{t+\tau} = \dot{\mathbf{r}}_t + \ddot{\mathbf{r}}_t \tau + \frac{\tau^2}{2\vartheta\Delta t} (\ddot{\mathbf{r}}_{t+\vartheta\Delta t} - \ddot{\mathbf{r}}_t) \quad (172)$$

$$\mathbf{r}_{t+\tau} = \mathbf{r}_t + \dot{\mathbf{r}}_t \bar{\tau} + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}}_t \bar{\tau}^2 + \frac{\tau}{6\vartheta\Delta t} \bar{\tau}^3 (\ddot{\mathbf{r}}_{t+\vartheta\Delta t} - \ddot{\mathbf{r}}_t) \quad (173)$$

Dla chwili $\tau = t + \vartheta \Delta t$ (równoważne $\bar{\tau} = \vartheta \Delta t$) otrzymujemy:

$$\dot{\mathbf{r}}_{t+\vartheta\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}_t + \frac{\vartheta\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{r}}_{t+\vartheta\Delta t} + \ddot{\mathbf{r}}_t) \quad (174)$$

$$\mathbf{r}_{t+\vartheta\Delta t} = \mathbf{r}_t + \vartheta\Delta t \dot{\mathbf{r}}_t + \frac{\vartheta^2(\Delta t)^2}{6} (\ddot{\mathbf{r}}_{t+\vartheta\Delta t} + 2\ddot{\mathbf{r}}_t) \quad (175)$$

Z równań (174) i (175) znajdujemy $\ddot{\mathbf{r}}_{t+\vartheta\Delta t}$ i $\dot{\mathbf{r}}_{t+\vartheta\Delta t}$ w funkcji $\mathbf{r}_{t+\vartheta\Delta t}$ (176,177):

$$\ddot{\mathbf{r}}_{t+\vartheta\Delta t} = \frac{6}{\vartheta^2(\Delta t)^2} (\mathbf{r}_{t+\vartheta\Delta t} - \mathbf{r}_t) - \frac{6}{\vartheta\Delta t} \dot{\mathbf{r}}_t - 2\ddot{\mathbf{r}}_t \quad (176)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{t+\vartheta\Delta t} = \frac{3}{\vartheta\Delta t} (\mathbf{r}_{t+\vartheta\Delta t} - \mathbf{r}_t) - 2\dot{\mathbf{r}}_t - \frac{\vartheta\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{r}}_t \quad (177)$$

Równanie ruchu (170) dla chwili $t + \vartheta \Delta t$ jest wyrażone przez (178):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}_{t+\vartheta\Delta t} + \mathbf{K} \mathbf{r}_{t+\vartheta\Delta t} = \bar{\mathbf{R}}_{t+\vartheta\Delta t} \quad (178)$$

gdzie

$$\bar{\mathbf{R}}_{t+\vartheta\Delta t} = \mathbf{R}_t + \vartheta(\mathbf{R}_{t+\Delta t} - \mathbf{R}_t) \quad (179)$$

Wstawiając (175) i (176) do (178) otrzymujemy (180):

$$\begin{aligned} \left[\frac{6}{(\vartheta\Delta t)^2} \mathbf{M} + \mathbf{K} \right] \mathbf{r}_{t+\vartheta\Delta t} &= \mathbf{R}_t + \vartheta(\mathbf{R}_{t+\Delta t} - \mathbf{R}_t) + \\ &+ \mathbf{M} \left[\frac{6}{(\vartheta\Delta t)^2} \mathbf{r}_t + \frac{6}{\vartheta\Delta t} \dot{\mathbf{r}}_t + 2\ddot{\mathbf{r}}_t \right] \end{aligned} \quad (180)$$

Z równania (180) można wyliczyć niewiadomy wektor $\mathbf{r}_{t+\vartheta\Delta t}$ ponieważ prawa strona równania (180) jest na rozpatrywanym kroku wielkością znaną. Następnie wstawiając wyliczoną wartość $\mathbf{r}_{t+\vartheta\Delta t}$ do (176) znajdujemy wektor

$\ddot{\mathbf{r}}_{t+\theta\Delta t}$. Przy założeniu $\tau = \Delta t$ na podstawie (171-173) wyznaczamy kolejno $\ddot{\mathbf{r}}_{t+\Delta t}$, $\dot{\mathbf{r}}_{t+\Delta t}$ i $\mathbf{r}_{t+\Delta t}$. W przedstawionym algorytmie nie zachodzi potrzeba opracowywania żadnej procedury startowej, ponieważ przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia w chwili $t+\Delta t$ są wyrażone jedynie w funkcji wielkości zdefiniowanych dla chwili t .

Streszczenie	2
Ważniejsze oznaczenia literowe	4
1. Wprowadzenie	
1.1 Wymagania stawiane przetwornikom ultradźwiękowym do diagnostyki medycznej	5
1.2 Porównanie wybranych materiałów piezoelektrycznych	5
1.3 Przesłanki skłaniające do zastosowania kompozytów piezoelektrycznych	6
1.4 Analiza możliwości przeprowadzenia obliczeń wielkości elektroakustycznych przetwornika kompozytowego	7
2. Konstrukcja przetwornika wykonanego z kompozytu typu 1-3	
2.1 Klasyfikacja typu kompozytu	8
2.2 Struktura wewnętrzna kompozytu typu 1-3	9
2.3 Technologie wykonywania kompozytu typu 1-3	11
2.4 Wybór technologii wykonywania kompozytu typu 1-3	11
3. Schemat zastępczy przetwornika piezoelektrycznego według Masona	14
4. Rezonansowy schemat zastępczy przetwornika piezoelektrycznego	18
5. Numeryczne obliczenie wartości współczynnika sprzężenia elektromechanicznego przetwornika kompozytowego	
5.1 Sformułowanie równań opisujących propagację fali akustycznej w jednorodnej bryle piezoelektrycznej	20
5.2 Prosty model fizyczny ujednorodnienia przetwornika kompozytowego	21
5.3 Zastosowanie teorii homogenizacji asymptotycznej do ujednorodnienia przetwornika kompozytowego	26
5.4 Homogenizacja asymptotyczna komórki elementarnej przetwornika	27
5.5 Efektywne obliczenie wartości tensorów materiałowych przetwornika kompozytowego przy zastosowaniu teorii homogenizacji asymptotycznej	37
5.6 Analiza statyczna	42
5.7 Analiza dynamiczna	42
5.8 Efektywne obliczenie współczynnika sprzężenia elektromechanicznego przetwornika kompozytowego	
5.8.1 Zastosowanie metody całkowania bezpośredniego w metodzie elementów skończonych	43
5.8.2 Zastosowanie schematu zastępczego przetwornika piezoelektrycznego drgającego tłokowo według Masona	44

5.9 Zagadnienie propagacji fal typu Lamba	45
6. Pomiar własności elektroakustycznych przetwornika kompozytowego	
6.1 Współczynnik sprzężenia elektromechanicznego	46
6.2 Funkcja przenoszenia	47
6.3 Pomiar impedancji i współczynnika sprzężenia elektromechanicznego	48
6.4 Funkcja przenoszenia i czułość	51
7. Podsumowanie i wnioski	
7.1 Zestawienie i porównanie wyników doświadczalnych wielkości elektroakustycznych i obliczeń numerycznych	56
7.2 Wnioski wskazujące na potencjalne zastosowanie przetworników kompozytowych	57
8. Piśmiennictwo	58
9. Dodatek - opis wybranej metody rozwiązania zagadnienia dynamicznego	63