

ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS DEL CONFORMADO DE METALES,
CON ORIENTACIÓN A LA LAMINACIÓN DE TUBOS SIN COSTURA

Tesis presentada por

HORACIO JAVIER ANTÚNEZ

Ingeniero Mecánico — Universidad Nacional de Buenos Aires (1986)

En cumplimiento parcial de los requisitos para la obtención del grado de

DOCTOR EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS, EXACTAS Y NATURALES

Supervisada por: Dr. Sergio Rodolfo Idelsohn

SANTA FE, NOVIEMBRE DE 1990.

A mis padres

RESUMEN

Se presenta una formulación para el análisis de procesos de conformado de metales. Se utiliza una relación constitutiva viscoplástica para el material modelado. Se consideran problemas planos, axisimétricos y algunos tipos de problemas tridimensionales; estados estacionarios y transitorios; incluyendo también el acoplamiento del problema de deformación plástica con el problema térmico asociado.

Se utiliza la formulación de flujo, se estudian y resuelven algunos de los problemas numéricos inherentes, y se proponen técnicas para hacer el modelo original numéricamente más robusto y de convergencia más rápida.

Los problemas con acoplamiento térmico se resuelven extendiendo a este campo una técnica de *upwind* basada en un principio variacional.

Los modelos para estados transitorios se obtienen con el método de la pseudo-concentración. Se introduce la distinción de las superficies libres de acuerdo con su orientación con respecto a la dirección de avance del material, dándoseles un tratamiento particular en cada caso.

Se propone un esquema alternativo, extensión del método de la pseudo-concentración, para tratar las superficies libres en estados estacionarios.

Se presenta un modelo semi-analítico enmarcado en la formulación de flujo, que permite el tratamiento de problemas de simetría axial en la geometría pero no en las cargas ni en las condiciones de contorno. Para ello se desarrolla una formulación incremental en la que se toma como carga equivalente la parte del residuo debida a la no-linealidad material. El tratamiento no axisimétrico de la superficie libre se lleva a cabo mediante el esquema propuesto.

Con este trabajo se han logrado avances substanciales hacia el objetivo propuesto, la simulación numérica de algunas de las etapas de la fabricación de tubos sin costura. Ha dado lugar a la elaboración de los respectivos códigos computacionales con aplicación del método de los elementos finitos.

SUMMARY

A formulation for the analysis of metal forming processes is presented. A visco-plastic constitutive relation for the material is used. Plane, axisymmetric and some types of three dimensional problems are considered. Both steady and transient states are treated, as well as the coupling of the plastic deformation problem with the associated thermal one.

Starting from the flow formulation, some of the inherent numerical problems are studied and solved, and various techniques are proposed to improve the robustness and convergence fastness of the original numerical model.

The thermally coupled problems are solved, with an extension to this field of a variational principle based *upwind* technique.

The transient processes are modelled in terms of the pseudo-concentration method. Free surfaces are treated in different ways according to their orientation with respect to the direction of the material flow. An alternative scheme, in fact an extension of the pseudo-concentration method, is proposed to deal with free surfaces in steady state cases.

A semi-analytical model, based on the framework of the flow formulation, is presented. It allows to deal with problems which are axisymmetric in geometry but not in the loads nor in the boundary conditions. An incremental formulation is developed to this purpose, where the part of the residual due to the material non-linearity acts as an equivalent load. The proposed scheme based on the pseudo-concentration method allows the calculation of non-axisymmetric free surfaces.

On practical grounds, substantial progress has been achieved towards the aim of the present work, i.e. numerical simulation of some of the stages of the seamless tube manufacturing. The whole work has yielded the development of the respective computational codes, with application of the finite element method.

RÉSUMÉ

On présente une formulation pour l'analyse du procédé de mise en forme des métaux. Une relation constitutive viscoplastique est utilisée pour le matériaux modélisé.

On considère des problèmes plans, axisymétriques et quelques types de problèmes tri-dimensionnels; dans des états stationnaires et instationnaires, ainsi que le problème du couplage de la déformation plastique avec le problème thermique associé.

Une formulation fluide est utilisée, et on étudie et résoud quelques problèmes numériques associés à cette formulation. Quelques techniques sont proposées pour rendre le modèle original plus robuste et pour accroître la vitesse de convergence.

Les problèmes avec couplage thermique sont résolus en étendant une technique de décentrement basée sur un principe variationnel.

La méthode de la pseudo-concentration est utilisée pour le calcul des cas instationnaires. On distingue la surface libre selon son orientation par rapport à la direction d'avance du matériaux.

On propose un schéma alternatif qui étend la méthode de pseudo-concentration pour traiter les surfaces libres dans les cas stationnaires.

On présente un modèle semi-analytique dans le cadre de la formulation fluide, qui permet le traitement des problèmes à géométrie de symétrie axiale sans que les charges ou les conditions aux limites soient elles-même à symétrie axiale. Pour cela, on développe une formulation incrémentale dans laquelle, on prend comme charge équivalente la partie du résidu engendrée par la non-linéarité du matériaux. Le traitement dans le cas non-axisymétrique de la surface libre est réalisé par le schéma proposé.

Dans ce travail, on a fait quelques avancées significatives dans la simulation numérique du quelques étapes du laminage des tubes sans couture. Ce travail est aussi motivé par le développement de codes de calcul en éléments finis.

AGRADECIMIENTOS

Al cabo de estos años en los que he trabajado en esta tesis, es de justicia intentar saldar mis deudas de gratitud con muchas personas, que han tenido directa o indirecta vinculación con estos resultados.

En primer lugar, vaya mi reconocimiento a mi director de tesis, Dr. Sergio R. Idelsohn, en quien no solamente encontré indicaciones sobre mi trabajo sino también una sincera amistad. También he de mencionar al resto de los integrantes del Grupo de Tecnología Mecánica del INTEC, que junto con frecuentes consultas y discusiones sobre temas profesionales compartí muchos momentos que toda mi vida he de recordar. En particular, estoy en deuda con el Dr. Alberto Cardona, el Ing. Eduardo Laitano y el Lic. Mario Storti.

Asimismo agradezco al Dr. Eduardo N. Dvorkin por sus valiosas sugerencias relativas a esta tesis, y su continuado interés por la misma. Por su intermedio, agradezco a la empresa Siderca S. A., por haber solventado gastos de viajes y haberme permitido realizar una visita a la planta de fabricación de tubos sin costura de Campana, Pcia. de Buenos Aires. Igualmente manifiesto mi reconocimiento al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas por haber solventado este trabajo, a través de su sistema de becas y subsidios a la investigación.

Por último, aunque no por eso es lo menos importante, agradezco profundamente a mis padres la educación en las virtudes y en el afán de superación que me supieron dar, así como el continuo apoyo que continuaron brindándome durante estos años.

NOTACION	17
Capítulo 1. INTRODUCCION	21
Capítulo 2. ANTECEDENTES EN EL TEMA Y DEFINICION DEL PROBLEMA FISICO	25
2.1 Introducción	25
2.2 Descripción del fenómeno	26
2.3 Antecedentes en el tema	27
2.4 Etapas del desarrollo del modelo	29
REFERENCIAS	30
Capítulo 3. CARACTERIZACION DEL MATERIAL VISCOPLASTICO	35
3.1 Introducción	35
3.2 Materiales elasto-viscoplásticos y elásticos/viscoplásticos	37
3.3 Definición de un material inelástico estable	38
3.4 Ecuaciones constitutivas	40
3.5 Algunas formas de las ecuaciones constitutivas	42

CONTENIDO		13
3.6	La condición dinámica para un material inelástico estable	46
3.7	Comparaciones con datos experimentales	47
3.8	Tratamiento del material viscoplástico como un fluido no newtoniano	49
	REFERENCIAS	51
 Capítulo 4. MODELO NUMERICO PARA LA FORMULACION DE FLUJO		 53
4.1	Introducción	53
4.2	Modelo para el estado estacionario e isotérmico	54
4.3	Discretización	56
4.4	Análisis de la convergencia	63
	i) Cálculo del incremento de velocidad en base a las dos últimas iteraciones	63
	ii) Cambio en la estimación inicial	65
4.5	Condicionamiento de matrices	66
	i) Imposición de la condición de desplazamiento de cuerpo rígido	67
	i.a) Multiplicadores de Lagrange	68
	i.b) Parámetros de penalización	69
	ii) Escalado de matrices	71
	ii.a) En la resolución	71
	ii.a.1) Escalado de la matriz de grados de libertad condensables	72
	ii.a.2) Escalado de la matriz entera de cada subestructura	73
	ii.b) Escalado en la generación: matriz elemental	74
4.6	Fricción y superficies libres	75
4.7	Ejemplos de aplicación	78
	REFERENCIAS	88

Capítulo 5. EL PROBLEMA EN TEMPERATURAS	91
5.1 Introducción	91
5.2 Ecuaciones básicas	92
5.3 Discretización en elementos finitos	93
i) Esquemas de <i>upwind</i>	97
i.a) Esquemas Petrov–Galerkin	97
i.b) Difusividad artificial	101
i.c) Formulación SU/PG	102
ii) Esquema de <i>upwind</i> mediante un principio variacional	105
ii.a) Construcción del principio variacional	106
ii.b) Discretización del principio variacional	110
5.4 Ejemplos de aplicación	112
5.5 Conclusiones	122
REFERENCIAS	122
Capítulo 6. PROCESOS TRANSITORIOS	125
6.1 Introducción	125
6.2 Métodos para análisis de transitorios	126
6.3 Ventajas e inconvenientes de cada método	128
6.4 El método de la pseudo–concentración	130
6.5 Resolución de la ecuación de transporte	132
i) Análisis de estabilidad de la ecuación de transporte advectivo	133
ii) Discretización de la ecuación de advección	134
iii) Comentarios sobre la validez de la solución	135
6.6 Algunos aspectos numéricos	136
6.7 Ejemplos de aplicación	138
6.8 Comentarios finales	155

	CONTENIDO	15
	REFERENCIAS	156
	Capítulo 7. CÁLCULO DE SUPERFICIES LIBRES USANDO PSEUDO-CONCENTRACIONES	159
7.1	Introducción	159
7.2	Esquema propuesto	160
7.3	Ventajas y aplicaciones	161
7.4	Interpolación cuadrática de la velocidad sobre la interfaz	163
	REFERENCIAS	165
	Capítulo 8. FORMULACIÓN INCREMENTAL	167
8.1	Introducción	167
8.2	El método incremental explícito	168
8.3	Extensión de la formulación incremental a casos con superficies libres	171
8.4	Esquema incremental implícito	173
8.5	Algunos aspectos numéricos	176
	i) Actualización de matrices inversas mediante escalado	176
	ii) Aplicación de los incrementos en las condiciones de contorno	179
	APENDICE	180
	REFERENCIAS	181
	Capítulo 9. ELEMENTO CON DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER PARA EL ESQUEMA INCREMENTAL IMPLÍCITO	183
9.1	Introducción	183
9.2	Construcción del elemento	184
9.3	Cálculo del término independiente	191
9.4	Estados transitorios	196

9.5	Algunos aspectos numéricos	199
i)	Cuestiones relativas a la convergencia del algoritmo implícito	199
ii)	Otros aspectos	199
9.6	Aplicaciones	200
9.7	Conclusiones	213
	REFERENCIAS	213
	Capítulo 10. CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS	215
10.1	Introducción	215
10.2	Recopilación de las principales conclusiones	216
10.3	Aspectos originales	217
10.4	Desarrollos futuros	218
	REFERENCIAS	219

NOTACIÓN*

Convenciones generales

Se adopta la notación de Einstein, salvo indicación expresa en contrario.

$\begin{bmatrix} \dots \\ \cdot \\ \dots \end{bmatrix}$	matriz
$\left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\}$	matriz columna
$[\dots]$	matriz fila
$\underline{\mathbf{k}}$	tensor
K_{ij}	elemento (ij) de la matriz \mathbf{K}
\dot{a}	derivada temporal de a
$a_{,r}$	derivada de a con respecto a r
$a_{,i}$	derivada de a con respecto a la coordenada i ésima

Símbolos particulares

\mathbf{B}	matriz velocidad-velocidad de deformación
\mathcal{C}	como subíndice: ref. a grados de libertad condensables
c	calor específico; concentración; constante
$\{c^N\}$	vector de presiones nodales
\mathbf{D}	matriz para expresar la ley constitutiva $\underline{\underline{s}}$ vs. $\underline{\underline{\epsilon}}$
$\frac{DT}{Dt}$	derivada material de la temperatura
E	módulo de Young
F	función superficie de fluencia
\mathbf{F}	vector de fuerzas
\mathcal{F}	funcional para el enunciado variacional de la ecuación de energía térmica

* Se consignan los símbolos de uso global. La nomenclatura de uso local se aclara en el momento de usarla. Las posibles ambigüedades se resuelven claramente por el contexto.

h	tamaño de la malla
$\underline{\underline{I}}$	tensor isótropo
\mathbf{I}	matriz para el cálculo de la velocidad de deformación volumétrica a partir de $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$
\mathbf{I}^i	matriz para definir el desarrollo en serie
I_i^p	invariante i ésimo del tensor velocidad de deformación
J_i	invariante i ésimo del tensor desviador de tensiones
$\mathbf{K}, \mathbf{K}_p, \mathbf{K}_0$	submatrices de la matriz de rigidez
\mathbf{K}^i	matriz para definir el desarrollo en serie
k	factor de escala; difusividad
N_x	Funciones de forma para la variable x
n	exponente de la ley viscoplástica
\mathbf{n}	vector normal
\mathbf{P}	fuerza por unidad de volumen
Pe	número de Peclet
p	presión
\tilde{p}	corrección de la función de forma para calcular la función de ponderación
$\{p^N\}$	vector de presiones nodales
\dot{q}	calor generado por unidad de volumen y de tiempo
R	como subíndice: ref. a grados de libertad retenidos
\mathbf{R}	vector residuo
r, z, θ	coordenadas cilíndricas
$\underline{\underline{s}}$	tensor desviador de tensiones
T	temperatura
\mathbf{T}	fuerza por unidad de superficie
$\{T^N\}$	vector de temperaturas nodales
t	tiempo
\mathbf{u}	vector velocidad
u, v, w	componentes de la velocidad
$\{\mathbf{u}^N\}$	vector de velocidades nodales
\mathbf{W}	función de ponderación
W_p	energía de deformación plástica
x, y, z	coordenadas cartesianas
\mathbf{A}	vector de factores de escala

α	parámetro de penalidad; coeficiente de convección; parámetro para introducir el <i>upwind</i>
β	parámetro para introducir el <i>upwind</i>
Γ	frontera del dominio de integración
$\mathbf{\Gamma}$	vector de factores de escala
γ	coeficiente de fluidez; número local de Peclet; interfaz entre dos materiales
δ_{ij}	Delta de Kronecker
δa	variación de a
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	tensor de deformaciones
$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$	tensor velocidad de deformación
η	coordenada local elemental
θ	azimut, en coordenadas cilíndricas; coeficiente variable entre 0 y 1
κ	parámetro de endurecimiento por deformación; número de condición de una matriz
λ	multiplicador de Lagrange
μ	viscosidad
ν	coeficiente de Poisson; coeficiente de fricción
ξ	coordenada local elemental
Π	funcional para enunciados variacionales
ρ	densidad; multiplicador de Lagrange
$\underline{\underline{\sigma}}$	tensor de tensiones
ρ	densidad
σ_y	tensión de fluencia estática
Φ	flujo de calor
ϕ	función para definir la ley viscoplástica
Ω	dominio de integración
ω	velocidad angular
∇a	gradiente de a
$\nabla \cdot \mathbf{a}$	divergencia de \mathbf{a}

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, con el desarrollo de la computadora se ha dado también un notable crecimiento de los métodos que permiten llevar a cabo un análisis numérico de los problemas ingenieriles. Mediante la resolución numérica de ecuaciones diferenciales se amplía de manera explosiva la capacidad de análisis de problemas físicos, antes confinada sólo a aquellos casos en que, a través de una serie de simplificaciones, admiten solución analítica las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema en cuestión.

En particular, el método de los elementos finitos ha pasado a ser una herramienta de análisis de gran generalidad para cualquier tipo de problemas cuyas ecuaciones de gobierno sean conocidas y de cualquier geometría. Su aplicación computacional ha sido a su vez impulsada por un desarrollo paralelo de su fundamentación matemática. Así, lo que nació como un método para el cálculo de estructuras es ahora aplicable a todos los problemas de ingeniería. Precisamente por razón de la intención que dio origen al método éste ha conservado terminología propia de la ingeniería estructural.

Como es lógico, el continuado desarrollo de la capacidad y velocidad de las computadoras ha hecho superar las limitaciones que inicialmente surgieron para atacar problemas que involucraban un alto número de grados de libertad, como cuando se tienen singularidades o en problemas en tres dimensiones. Esta mayor capacidad permite también obtener resultados más exactos en los problemas que se resuelven, sobre todo cuando luego pueden combinarse estas ventajas con técnicas

de refinamiento adaptivo, que densifican la distribución de los grados de libertad en las zonas donde, mediante un estimador apropiado, se observa que es mayor el error de la solución numérica.

En esta presentación se aplica el método de los elementos finitos a problemas de conformado plástico de metales. Entre los posibles enfoques que admite la resolución de este tipo de problemas se seguirá la formulación de flujo, en la que se describe el movimiento del metal como si fuera un fluido no-newtoniano. Como objetivo final se ha fijado el análisis general del problema del conformado plástico llevado a cabo con dicha formulación de flujo, la cual es ampliada en su rango de aplicabilidad. Se presta atención al acoplamiento entre deformaciones y temperaturas, condiciones de contorno con fricción y con superficies libres, estados estacionarios y transitorios. En una primera etapa se resuelven problemas en estados planos o axisimétricos. Constituye un objetivo particular la resolución de problemas tecnológicos relativos a la fabricación de tubos sin costura. Para ello se analizarán procesos con simetría axial en la geometría, pero no en las cargas ni en las fijaciones. Este estudio se llevará a cabo por un procedimiento semi-analítico con desarrollo en series de Fourier en sentido circunferencial. Oportunamente se indicarán las hipótesis que autorizan esta técnica. Como resultado se contará con una herramienta que permita realizar el análisis de dicho proceso (aunque no se limita sólo a este), ya sea para una configuración ya existente como para distintas variantes que se deseen ensayar con respecto a los parámetros del sistema para solucionar los problemas que se presentan en el mencionado proceso industrial, o para variar las características finales del producto, como el diámetro, el espesor de pared, su uniformidad a lo largo del tubo, temperaturas de trabajo, historia de las deformaciones y tensiones, etc.

La estructura de este trabajo es la siguiente: primeramente se hace una definición del problema que se desea estudiar, señalando los objetivos que se han fijado. Simultáneamente se presenta una reseña histórica de los avances en esta materia, con las distintas líneas que se han seguido. El lector interesado podrá acudir a la bibliografía citada para estudiar alguna formulación distinta de las consideradas aquí. Este es el objeto del capítulo 2. En el capítulo 3 se encuadra el modelo constitutivo del material a utilizar, haciendo hincapié en su formulación desde un punto de vista físico y su consiguiente modelo

matemático. A partir de lo allí desarrollado, se estará en condiciones de abordar el modelo numérico computacional, llevado a cabo mediante el método de los elementos finitos. Este modelo se encuadra dentro de la llamada formulación de flujo, en la que se trata el material en estado viscoplástico como un fluido no newtoniano. El capítulo 4 se ocupa de los casos estacionarios, con exclusión del acoplamiento térmico y configuraciones planas o axisimétricas. Asimismo se discute el desempeño numérico del modelo, proponiendo diversas alternativas para superar algunos inconvenientes inherentes al mismo. También se muestran esquemas de uso standard para el tratamiento de superficies libres y de la fricción del material con las superficies de trabajo.

A continuación, en el capítulo 5, nos ocuparemos del problema del acoplamiento térmico, considerando las técnicas de *upwind* usuales, y presentando para estos problemas una técnica basada en la construcción de un principio variacional. Los estados transitorios son considerados en el capítulo 6, mediante un método que permite tratar esta evolución en forma conservativa. En los capítulos 7 a 9 encaramos el problema de la laminación de tubos sin costura, que es un objetivo particular de esta tesis, como queda dicho más arriba. El problema es tratado como uno que, teniendo simetría axial en su geometría, no la tiene en las cargas ni en las condiciones de contorno. Esto exige la formulación de un nuevo esquema para tratar superficies libres, tal que admita una variación de las mismas en función de la coordenada azimutal, y a este punto está dedicado el capítulo 7. La linealización del problema mediante una formulación incremental apropiada se lleva a cabo en el capítulo 8, y finalmente en el 9 se efectúa la formulación semi-analítica que permite el análisis de los problemas mencionados. El capítulo 10 cierra esta presentación con la reseña de los principales aportes aquí consignados, y un panorama para futuros avances en esta línea de investigación.

ANTECEDENTES EN EL TEMA Y DESCRIPCION DEL PROBLEMA FISICO

2.1 Introducción

En la industria metalúrgica nacional se controlan las propiedades de los productos obtenidos por deformación plástica —ya sea en frío o en caliente— en base a una regulación empírica e intuitiva de las variables que intervienen en el proceso, por prueba y error. Esta circunstancia, motivada por la falta de conocimiento de los mecanismos por los que actúa cada variable, ocasiona una gran falta de eficiencia técnica y económica y por consiguiente, se hace muy ardua la competitividad de esos productos en el mercado nacional y en el extranjero.

En esta presentación buscamos llegar a un conocimiento global de esos procesos industriales, analizando el comportamiento del material según distintos modelos y considerando el efecto de diversos factores, de manera de poder saber, a priori, cuáles serán las propiedades del producto e inversamente, sobre qué variables actuar para obtener determinadas propiedades.

El interés científico reside en el mayor conocimiento obtenido, en los distintos modelos matemáticos, de la importancia de cada factor en el resultado final, y de las distintas ecuaciones constitutivas que describen estos fenómenos de deformación plástica. Los modelos permiten además la comparación entre ellos y la confrontación con datos experimentales.

La aplicación de estas conclusiones a la industria metalúrgica, en los procesos de deformación plástica de metales podrá contribuir por un lado a la reducción de los costos en el desarrollo de un producto determinado, y por otro, a mejorar la calidad de ese producto.

En el presente capítulo se hará una definición del problema de ingeniería que es objeto de este trabajo, y a continuación, una reseña del estado del arte en esta materia. Por último, y en vista de los dos puntos anteriores, se definen los pasos que componen el trabajo en su conjunto.

2.2 Descripción del fenómeno

Mediante la aplicación de deformaciones permanentes —plásticas— a los metales se logran de manera eficiente piezas de formas deseadas y de propiedades físicas orientadas en forma conveniente a causa del trabajo de deformación impuesto. Así se mejoran la tenacidad y la resistencia a la flexión o al esfuerzo de corte, y se aumentan el límite de fluencia, la resistencia a tensiones de origen térmico y a la concentración de tensiones, etc. Esto permite el uso de piezas más livianas, con ahorro de material.

En estado plástico —es decir superado el límite de fluencia, valor umbral que depende de la composición del material, de la temperatura, de deformaciones plásticas anteriores y, en algunos casos, de la velocidad de aplicación de la carga— el material se deforma en función no sólo del estado actual de tensiones, sino también de la historia de las deformaciones. Por otra parte existe un acoplamiento de este problema con el problema térmico: la resistencia del material depende de la temperatura, y existe a su vez un calentamiento del material debido, por un lado a la deformación (fricción interna), y por otro, al rozamiento con las superficies de trabajo: boquilla, pistón y matriz, en extrusión, rodillo en laminación, etc. Adicionalmente, si bien muchos procesos pueden ser considerados como estacionarios, en su puesta en marcha tienen lugar regímenes transitorios, en los que, si se conoce el estado del material, puede intentarse minimizar los desperdicios que habitualmente se producen.

2.3 Antecedentes en el tema

Los trabajos iniciales publicados sobre el tema, suponen que la velocidad de aplicación de la carga y, por lo tanto las velocidades de deformación, son bajas. Por esta razón se pueden desprestigiar los efectos dinámicos (cf., por ejemplo, Zienkiewicz *et al.*, 1978). Esta circunstancia concuerda con la realidad de los procesos en estudio, salvo casos muy excepcionales. En estas condiciones puede hablarse de una analogía con el régimen elástico reemplazando, respectivamente, velocidades por desplazamientos y velocidades de deformación por deformaciones. En caso de aplicar esta analogía debe asegurarse la incompresibilidad del material "elástico" equivalente.

También cabe estudiar la deformación plástica como la de un fluido no newtoniano, cuya viscosidad es función de las tensiones o bien de las velocidades de deformación (Goon *et al.*, 1968, y Zienkiewicz y Godbole, 1974). Con respecto a estas referencias, se puede decir que el modelo adoptado es muy simplificado, y que no consideran el acoplamiento térmico, de gran importancia ya que las propiedades físicas del material dependen, en estas condiciones, fuertemente de la temperatura. Tampoco ha sido posible establecer las tensiones residuales en el material.

Se han formulado modelos más elaborados. Entre ellos, Chandra (1984) presenta uno apto para pequeñas deformaciones que, por lo tanto, no es invariante frente a rotaciones finitas.

Los trabajos más recientes se centran en el estudio de modelos para deformaciones finitas. El análisis de grandes deformaciones y grandes desplazamientos para materiales elasto-plásticos ha sido tratado utilizando formulaciones lagrangiana incremental (Hibbit, Marcal y Rice, 1970), y euleriana (McMeeking y Rice, 1975), basadas en el principio de los trabajos virtuales. El uso de una malla actualizada como configuración de referencia fue aplicado sobre todo en materiales cuya deformación depende de la historia de la misma, por Argyris *et al.* (1976 y 1977), y Cescotto *et al.* (1979).

El acoplamiento térmico fue incorporado por Argyris y Doltsinis (1981), y Kikuchi y Cheng (1983) incluyeron condiciones de contacto con fricción.

Una variante en el desarrollo consiste en desprestigiar la deformación elástica frente a la plástica (Kobayashi, 1978), lo que permite tener en cuenta la velocidad de deformación (materiales viscoplásticos). Este modelo luego no permite calcular las tensiones residuales al retirar las cargas. Esta falencia es resuelta con éxito para pequeñas deformaciones por Dawson y Thompson (1978).

En cuanto a la discretización de elementos finitos y la estrategia incremental, de gran importancia en problemas elasto-plásticos no lineales, Cristfield (1981), Tracey y Freese (1981), y Nyssen (1981) estudiaron distintos métodos para integrar las ecuaciones constitutivas. Bathe *et al.* (1980) resumieron los métodos en uso en la actualidad puntualizando sus limitaciones.

El problema de la fricción ya mencionado fue tratado en una formulación por desigualdades variacionales por Oden y Kikuchi (1982).

Las restricciones en las condiciones de contorno han sido tratadas con el método de los multiplicadores de Lagrange y con el de penalización. Yamada *et al.* (1979) propusieron el uso de elementos de ligazón. También se usó la teoría incremental para la obtención de la ley de fricción (Okamoto y Nakazawa, 1979, y Oden y Kikuchi, 1981). Cheng y Kikuchi (1985) formularon los problemas de valores de contorno en la configuración deformada, llegando, luego de transformar y linealizar las ecuaciones no lineales, a las formulaciones de Lagrange total y actualizada.

Para describir el comportamiento del material, Cheng y Kikuchi (1985) generalizaron la teoría de von Mises para grandes deformaciones. Christoffersen y Hutchinson (1979) elaboraron una versión modificada de la " J_2 corner theory" para salvar algunas dificultades asociadas con los fenómenos relacionados con la bifurcación en el rango plástico. Otros autores estudiaron las teorías del endurecimiento isótropo, del endurecimiento cinemático y teorías mixtas (Axelsson y Samuelsson, 1979, Hashiguchi, 1979) y otras, compendiadas por Nemat-Nasser (1983). Sin embargo, según Hibbitt *et al.*, (1970) las ecuaciones generalizadas de Prandtl-Reuss son las más comúnmente usadas. En el trabajo de Cheng y Kikuchi, (1985), a fin de permitir rotaciones finitas y satisfacer el requerimiento de objetividad en la ley constitutiva del material, se adoptó que el incremento (o velocidad) de Zaremba-Jaumann del tensor de tensiones de Cauchy

fuera una función del tensor incremento (o velocidad) de deformaciones. Ha habido otras formulaciones pero ninguna asegura como ésta que al anularse la velocidad de cambio de la tensión de Zaremba-Jaumann, los invariantes del tensor sean estacionarios. En cuanto al problema de la fricción, lo han tratado tomando en cuenta el efecto de la reacción normal durante el proceso de deformación, que en general no es constante.

Zienkiewicz, Oñate y Heinrich (1981) incluyeron, en el marco de una formulación euleriana, el acoplamiento térmico que considera el calentamiento por deformación plástica, y la consiguiente variación de las propiedades mecánicas. Posteriormente, van der Lugt y Huetink (1986) desarrollaron un modelo que contempla el efecto térmico aplicando una formulación mixta Euler-Lagrange, con la que se pueden resolver procesos transitorios, y para considerar la fricción tomaron una hilera de elementos sujetos a tensión de corte, cuya tensión de fluencia (tomada en este caso constante, para una aplicación en trafilación) determina el valor de la fricción.

Finalmente, se han propuesto otras alternativas además de la citada de van der Lugt y Huetink para tratar problemas no estacionarios. Kobayashi, (1984) utilizó una formulación de Lagrange actualizada, que requiere, al cabo de un cierto número de pasos de tiempo, la regeneración de la malla. Por su parte, Thompson y Smelser, (1988) proponen el llamado método de la pseudo-concentración, en el que, sin necesidad de regenerar la malla, se sigue el avance de la interfaz entre el metal y un material ficticio que se ubica llenando el espacio del dominio discretizado aún no ocupado por el material.

2.4 Etapas del desarrollo del modelo

Los diversos factores que intervienen en el proceso que se desea modelar determinan en forma natural las etapas a seguir hasta completar su tratamiento, comenzando por un modelo simple, que mantiene constantes la mayoría de las variables, hasta alcanzar la formulación final. En este sentido pueden definirse los siguientes pasos, que son los que se han seguido en este trabajo:

- Análisis de estados estacionarios e isotérmicos. Material rígido-plástico y rígido-visco-plástico. Tratamiento de la fricción con las superficies de trabajo. Estados plano y axisimétrico.

- Introducción del acoplamiento térmico para el caso estacionario. Cálculo del calentamiento por deformación plástica. Análisis del problema convección-difusión, aplicación de técnicas de *upwind*.
- Tratamiento de superficies libres. Determinación de la forma final del material.
- Régimen transitorio. Análisis de las tensiones y deformaciones hasta alcanzar el régimen estacionario.
- Desarrollo de un modelo tridimensional, por medio de la formulación de un elemento desarrollable en serie de Fourier, que admita el tratamiento de una geometría axisimétrica con cargas y condiciones de contorno no axisimétricas.

REFERENCIAS

Argyris, J. H. & Kleiber, M., "Incremental Formulation in Nonlinear Mechanics and Large Strain Elasto-Plasticity—Natural Approach. Part I", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engng.*, vol 11 (1977), pp. 215–247.

Argyris, J. H., St. Doltsinis, J. & Kleiber, M., "Incremental Formulation in Nonlinear Mechanics and Large Strain Elasto-Plasticity—Natural Approach. Part II", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engng.*, vol 14 (1978), pp. 259–294.

Argyris, J. H. & St. Doltsinis, "On the Natural Formulation and Analysis of Large Deformation Coupled Thermomechanical Problems", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engng.*, vol 25 (1981), pp. 195–253.

Axelsson, K. & Samuelsson, A., "Finite Element Analysis of Elasto-Plastic Materials Displaying Mixed Hardening", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol 14 (1979), pp. 211–225.

Bathe, K. J., Synder, M. D., Cimento, A. P. & Donald, R. W., "On some Current Procedures and Difficulties in Finite Element Analysis of Elastic-Plastic Response", *Comput. & Struct.*, vol 12 (1980), pp. 607–624.

Cescotto, S., Frey, F & Fonder, G., "Total and Updated Lagrangian Descriptions in Nonlinear Structural Analysis: A Unified Approach", en *Energy Methods in Finite Element Analysis.*, R. Glowinsky, ed., Wiley, New York (1979).

Chandra, A. & Mukherjee, S., "A Finite Element Analysis of Metal Forming Problems with an Elastic-Viscoplastic Material Model", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol 20 (1984), pp. 1613-1628.

Chen, C. C. & Kobayashi, S., "Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Ring Compression", en *Appl. Numer. Methods to Forming Processes*, AMD, vol 28, ASME, New York (1978), pp. 163-170.

Cheng, J-H. & Kikuchi, N., "An Analysis of Metal Forming Processes Using Large Deformation Elastic Plastic Formulations", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, vol 49 (1985), pp. 71-108.

Christoffersen, J. & Hutchinson, J. W., "A Class of Phenomenological Corner Theories of Plasticity", *J. Mech. Phys. Solids* , vol 27 (1979), pp. 465-487.

Cristfield, M. A., "A Fast Incremental Iterative Solution Procedure that Handles 'Snap-Through' ", *Comput. & Struct.*, vol 13 (1981), pp. 55-62.

Dawson, P. R. & Thompson, E. G., "Finite Element Analysis of Steady State Elasto-Visco-Plastic Flow by the Initial Stress Rate Method", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol 12 (1978), pp. 47-57.

Goon, G. Y., Poluchin, P. I., Poluchin, W. P. & Prudcowsky, B. A., *Las deformaciones plásticas de los metales*, Moscú (1968) (en ruso).

Hashiguchi, K., "Constitutive Equations of Elastoplastic Materials with Anisotropic Hardening and Elastic-Plastic Transition", *J. Appl. Mech.*, vol 48 (1981), pp. 297-301.

Hibbit, H. D., Marcal P. V. & Rice, J. R., "A Finite Element Formulation for Problems of Large Strain and Large Displacement", *Int. J. Solids Struct.*, vol 6 (1970), pp. 1069-1086.

Kikuchi, N. & Cheng, J. H., "Finite Element Analysis for Large Deformation Problems Including Unilateral Contact and Friction", en *Computer Methods for Nonlinear Solids and Struct. Mechanics*, AMD, vol 54, S. N. Atluri, ed. ASME, New York (1983), pp. 121-132.

Kikuchi, N. & Oden, J. T., *Contact Problems in Elasticity* SIAM, Philadelphia, PA (1981).

Kobayashi, S., "Thermoviscoplastic Analysis of Metal Forming Problems by the Finite Element Method", *Numerical Analysis of Forming Processes*, Chap. 2, J. F. T. Pittman, O. C. Zienkiewicz, R. D. Wood y J. M. Alexander (eds.), Wiley, Chichester (1984), pp. 45-70.

McMeecking, R. M. & Rice, J. R., "Finite Element Formulation for Problems of Large Elastic-Plastic Deformation", *Int. J. Solids Struct.*, vol 11 (1975), pp. 601-616.

Nemat Nasser, S., "On Finite Plastic Flow of Crystalline Solids and Geomaterials", *J. Appl. Mech.*, vol 50 (1983), pp. 1114-1126.

Nyssen, C., "An effective and Accurate Iterative Method, Allowing Large Incremental Steps, to Solve Elastic-Plastic Problems", *Comput. & Struct.*, vol 13 (1981), pp. 63-71.

Oden, J. T. & Kikuchi, N., "Finite Element Methods for Constrained Problems in Elasticity", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol 18 (1982), pp. 701-725.

Okamoto, N. & Nakazawa, N., "Finite Element Incremental Contact Analysis with Various Frictional Conditions", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol 14 (1979), pp. 337-357.

Oñate, E. & Pérez Lama, R., "Possibilities of the Friction Element Viscous Approach for Analysis of the Sheet Metal Forming Problems", SIMOP-I, Stuttgart (1985).

Thompson, E. & Smelser, R. E., "Transient Analysis of Forging Operations by the Pseudo-Concentration Method", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol 25 (1988), pp. 177-189.

- Tracey, D. M. & Freese, C. E., "Adaptive Load Incrementation in Elastic-Plastic Finite Element Analysis", *Comput. & Struct.*, vol 13 (1981), pp. 45-53.
- Van der Lugt, J. & Huetink, J., "Thermal Mechanically Coupled Finite Element Analysis in Metal Forming Processes", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, vol 54 (1986), pp. 154-160.
- Yamada, Y., Ezawa, Y., Nishiguchi, I. & Okabe, M., "Handy Incorporation of Bond and Singular Elements in Finite Element Solution Routine", *Trans 5th International Conf. on Smirt* (1979).
- Zienkiewicz, O. C. & Godbole, P. N., "Flow of plastic and viscoplastic solids with special reference to extrusion and forming processes", *Int. J. Num. Engng.*, vol 8 (1974), pp. 3-16.
- Zienkiewicz, O. C., Jain, P. C. & Oñate, E., "Flow of Solids During Forming and Extrusion: Some Aspects of Numerical Solutions", *Int. J. Solids Structures*, vol 14 (1978), pp. 15-38.
- Zienkiewicz, O. C., Oñate, E. & Heinrich, J. C., "A General Formulation for Coupled Thermal Flow of Metals Using Finite Elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol 17 (1981), pp. 1497-1514.

CARACTERIZACIÓN DEL MATERIAL VISCOPLÁSTICO

3.1 Introducción

Tradicionalmente, al formularse modelos para reproducir el comportamiento de un determinado material, se han hecho abstracciones en las que se pretendió estudiar por separado los procesos que se llevan a cabo superando el límite de fluencia, y aquellos en los que el tiempo entra como una variable del mismo. Esta bifurcación ha originado el desarrollo independiente de la plasticidad y de la reología, cada una con sus propios métodos experimentales, y suponiendo, respectivamente, que la duración de los ensayos era suficientemente corta para que no se observaran fenómenos de relajación o fluencia viscosa (*creep*), por un lado, y que los ensayos no llegaban a superar el rango elástico, por otro.

Sin embargo, en vista de las desviaciones que de esta forma se obtenían entre los resultados teóricos y los experimentales, se ha hecho necesario el tratamiento conjunto de ambos fenómenos, y esto ha desembocado en una nueva disciplina, también con sus propios métodos experimentales: la viscoplasticidad.

Lógicamente esta descripción simultánea de ambos fenómenos agrega severas dificultades en cuanto a su formulación teórica y también en cuanto al diseño de experimentos que permitan cuantificar las leyes propuestas y su confrontación. Estas leyes ahora tendrán en cuenta la historia de las deformaciones y tensiones y, al mismo tiempo, la dependencia de las variables con respecto al tiempo.

Una de las mayores dificultades que surgen es el establecimiento de un criterio de fluencia adecuado. También, la variedad en el comportamiento de un determinado material en ensayos dinámicos es muy grande. Tal como sucede al considerar, por ejemplo, criterios de fluencia en los procesos de carga estáticos, aquí aparecen modelos diversos que responden más concretamente a un determinado tipo de material. En este caso, además, la complejidad y las variaciones en el comportamiento del material son mucho mayores, ya que se presentan nuevas variables en el problema.

Así, por ejemplo, en cuanto a la sensibilidad de un material a la velocidad de aplicación de las cargas, en algunos materiales puede ser ignorada: es el caso de algunas aleaciones de aluminio, mientras que el hierro dulce y el acero de bajo carbono, por el contrario, son típicos casos de materiales muy sensibles a este fenómeno, pudiendo crecer apreciablemente el límite de fluencia si la carga se aplica a alta velocidad. En cualquier caso, es un hecho aceptado por todos los investigadores del área el que no se pueden tomar los ensayos estáticos como una estimación del caso dinámico.

En este capítulo se presentará el modelo matemático sobre el que se desarrolla la teoría de los materiales viscoplásticos, dejando para el capítulo siguiente la formulación del modelo computacional. Primeramente se definen dos grandes modelos, a saber, de materiales con efectos viscosos en el rango plástico solamente o en todo el espacio de tensiones; luego se define el material inelástico estable, que constituye una hipótesis en la obtención de las relaciones constitutivas (de las que trata la sección 4), y que además permite asegurar que la superficie de fluencia para un dado material será convexa. Las formas particulares que toma la ecuación constitutiva general, con las que se describe en forma más precisa el comportamiento de cada tipo de material, son consideradas en la sección 5. La sección 6 analiza la llamada "condición dinámica" para un material estable, con la que se verifican los resultados previos para cuando se consideran los efectos dinámicos. La siguiente sección recoge una comparación de los resultados teóricos con los datos experimentales, que permite verificar la formulación de los modelos. Finalmente, a partir de las relaciones constitutivas, y mediante la elección de una ley para la función potencial plástico y de un criterio de fluencia, se obtiene el modelo que sirve de base para la formulación de flujo. Con estos elementos queda bien configurado el material que se considera al plantear el modelo para procesos

de conformado plástico de metales.

3.2 Materiales elasto-viscoplásticos y elásticos/viscoplásticos

Ya los modelos más simplificados muestran una velocidad de deformación creciente con la diferencia entre la tensión real y la que existiría si el ensayo fuera estático. Así, Sokolovsky (Perzyna, 1966) propuso la función

$$\phi = c[\sigma - f(\varepsilon)] \quad (3.1)$$

para la ley

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \langle \phi [\sigma - f(\varepsilon)] \rangle \quad ; \quad \langle \phi \rangle = \begin{cases} \phi & \text{si } \sigma > f(\varepsilon) \\ 0 & \text{si } \sigma \leq f(\varepsilon) \end{cases} \quad (3.2)$$

y Malvern (1951), para la misma ley, analiza una función exponencial

$$\phi = a\{\exp b[\sigma - f(\varepsilon)] - 1\} \quad (3.3)$$

Como resultado de estas hipótesis se concluye el hecho comprobado experimentalmente de que el frente de una onda de tensiones se propaga a igual velocidad que la de deformaciones. Paralelamente a las teorías que estudian estos fenómenos desde un punto de vista macroscópico, se ha formulado también el problema mediante la teoría de las dislocaciones, en la que se llega a una expresión más general, que considera la influencia no sólo de la velocidad de deformación sino también de la aceleración de deformación. Mediante hipótesis adicionales se pueden obtener como casos particulares teorías macroscópicas como la de Sokolovsky y Malvern antes citada.

Se suele distinguir, convencionalmente, entre materiales elasto-viscoplásticos, en los que las propiedades dependientes del tiempo (viscosas) se manifiestan tanto en el rango elástico como en el plástico, y materiales elásticos/viscoplásticos, en los cuales los efectos viscosos están presentes en el rango plástico solamente. Este último caso constituye un caso particular (y una gran simplificación) para cuando esta hipótesis es admisible. Se considera el comportamiento dentro del rango

elástico del modo tradicional usado para casos estáticos. Por el contrario el tratamiento del material elasto-viscoplástico, además de ser más complejo, presenta problemas aún no del todo resueltos, como la determinación adecuada de un criterio de fluencia, cuestión que es trivial para un material elástico/viscoplástico. En lo que sigue nos ocuparemos preferentemente de este último tipo de materiales, que corresponde al de los problemas a estudiar.

3.3 Definición de un material inelástico estable

En el tratamiento del material elástico/viscoplástico es preciso introducir condiciones adicionales que, si bien constituyen limitaciones al modelo general, permiten estudiar el comportamiento de dicho material en condiciones que son de interés. Se trata, como afirma Drucker (1959), de poner esas condiciones de manera coherente. El postulado de estabilidad permite la obtención de condiciones fundamentales cuyo cumplimiento conduce a una deducción de las relaciones físicas en forma consistente, dando a una determinada clase de materiales un molde matemático adecuado.

Consideremos un cuerpo de volumen Ω limitado por una superficie regular Γ sometido a tracciones superficiales T_i y fuerzas de masa P_i , siendo ambas función del tiempo, así como los estados de desplazamiento u_i , deformaciones ε_{ij} y tensiones σ_{ij} producidos por las condiciones de carga impuestas. Supongamos que estas condiciones de carga sufren ciertas variaciones de manera de tener ahora tracciones superficiales $T_i + \Delta T_i$ y fuerzas de masa $P_i + \Delta P_i$. Correspondientemente se tendrán los estados de desplazamientos $u_i + \Delta u_i$, de deformaciones $\varepsilon_{ij} + \Delta \varepsilon_{ij}$ y de tensiones $\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}$. Entonces, el postulado de Drucker para el material inelástico estable exige que *el trabajo desarrollado por los incrementos de fuerzas externas sobre los incrementos correspondientes de las componentes del vector desplazamiento debe ser no negativo*.

El postulado puede expresarse como

$$\int_0^{t^*} \left\{ \int_{\Gamma} \Delta T_i \Delta \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \Delta P_i \Delta \dot{u}_i d\Omega \right\} dt \geq 0 \quad (3.4)$$

siendo $t = 0$ el instante en el cual se aplican los incrementos de carga.

Frecuentemente es preferible hablar de dos caminos de carga, $T_i^{(1)}, P_i^{(1)}$ y $T_i^{(2)}, P_i^{(2)}$, que se separan a partir de $t=0$. Así, (3.4) puede escribirse

$$\int_0^{t_k} \left\{ \int_{\Gamma} [T_i^{(2)} - T_i^{(1)}] [\dot{u}_i^{(2)} - \dot{u}_i^{(1)}] d\Gamma + \int_{\Omega} [P_i^{(2)} - P_i^{(1)}] [\dot{u}_i^{(2)} - \dot{u}_i^{(1)}] d\Omega \right\} dt \geq 0 \tag{3.5}$$

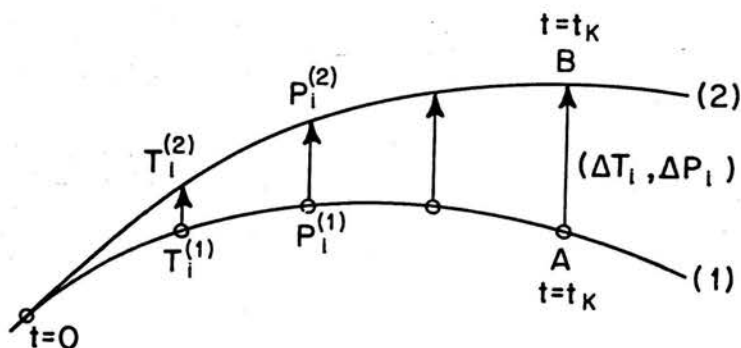


Figura 1. Los dos caminos de carga para enunciar el postulado de Drucker

Mediante la aplicación del principio de los trabajos virtuales podemos llegar a una forma más apropiada para (3.5). En efecto, el principio afirma que para cualquier estado continuo de velocidades \dot{u}_i se cumple

$$\int_{\Gamma} T_i \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} P_i \dot{u}_i d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega, \tag{3.6}$$

siendo T_i, P_i , y σ_{ij} un juego de magnitudes mecánicas en equilibrio, y \dot{u}_i y $\dot{\epsilon}_{ij}$, un juego de magnitudes cinemáticas en equilibrio, con la característica de que ambos sistemas no son interdependientes.

Considerando campos homogéneos de tensiones y de deformaciones (ver Malvern, 1969) podemos reescribir (3.5) como

$$\int_0^{t_k} \left[\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)} \right] \left[\dot{\epsilon}_{ij}^{(2)} - \dot{\epsilon}_{ij}^{(1)} \right] dt \geq 0. \quad (3.7)$$

Cuando se estudian materiales con efectos viscosos también en el rango elástico (materiales elasto-viscoplásticos) se plantea el problema de si la superficie de fluencia es convexa, ya que, dependiendo la misma del camino seguido durante la deformación, no queda asegurado el cumplimiento de (3.7). Por ello, para esos materiales se define un "camino de carga rápida", mediante el cual se determina la "superficie instantánea de fluencia", con la que se demuestra que efectivamente es convexa la superficie de fluencia para un material elasto-viscoplástico. En cambio, en los materiales elásticos/viscoplásticos resulta inmediato, a partir de (3.7) la condición de "convexa" de la superficie de fluencia. Asimismo es directa la conclusión acerca de la dirección de la componente inelástica del vector velocidad de deformación, $\dot{\epsilon}_{ij}^p$: resulta ortogonal a la superficie de fluencia. Estos resultados son importantes ya que constituyen dos hipótesis que se requerirán al tratar las ecuaciones constitutivas.

3.4 Ecuaciones constitutivas

Comenzamos expresando el tensor velocidad de deformación como la suma de una componente elástica y otra plástica, siendo esta última solamente quien incluye los efectos viscosos

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (3.8)$$

Tomamos en el espacio de las tensiones una superficie de fluencia de la forma

$$F(\sigma_{ij}, \epsilon_{kl}^p) = \frac{f(\sigma_{ij}, \epsilon_{kl}^p)}{\kappa} - 1 \quad (3.9)$$

donde κ está dado por

$$\kappa = \kappa(W_p) \quad , \quad W_p = \int_0^{\epsilon_{kl}^p} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p, \quad (3.10)$$

y representa el endurecimiento por deformación.

Imponiendo la condición $F = 0$ obtenemos la superficie de fluencia en dicho espacio de tensiones, que se considera regular y convexa. Así, la relación constitutiva queda en su forma general

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \dot{s} \delta_{ij} + \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (3.11)$$

Los dos primeros términos del segundo miembro corresponden a la parte elástica, y el último a la viscoplástica, donde

$$\gamma = \frac{\gamma^0}{\kappa} \quad (3.12)$$

representa una constante de viscosidad del material, y

$$\langle \phi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } F \leq 0, \\ F & \text{si } F > 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

En (3.11) se hace la hipótesis de que la parte inelástica del tensor velocidad de deformación depende de la diferencia en exceso de las tensiones con respecto a la superficie de fluencia estática. Así se relacionan las velocidades de deformación inelásticas con las tensiones a través de una ley de viscosidad de tipo Maxwell.

En (3.11) también se incluye el comportamiento con endurecimiento por deformación a través del parámetro κ . Su efecto al figurar en el denominador se traduce en una disminución de $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ cuanto mayor sea el trabajo de deformación realizado para alcanzar el valor actual de deformación plástica ε_{ij}^p .

Considerando la expresión para la velocidad de deformación inelástica de (3.11),

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (3.14)$$

puede verse que, si pensamos en dicho tensor como en un vector del espacio de las tensiones, de nueve dimensiones, el mismo siempre tiene dirección normal a la superficie de fluencia instantánea, la cual va a su vez cambiando a causa de efectos de endurecimiento por deformación, ya sea isótropo o anisótropo, y por el efecto de la velocidad de deformación.

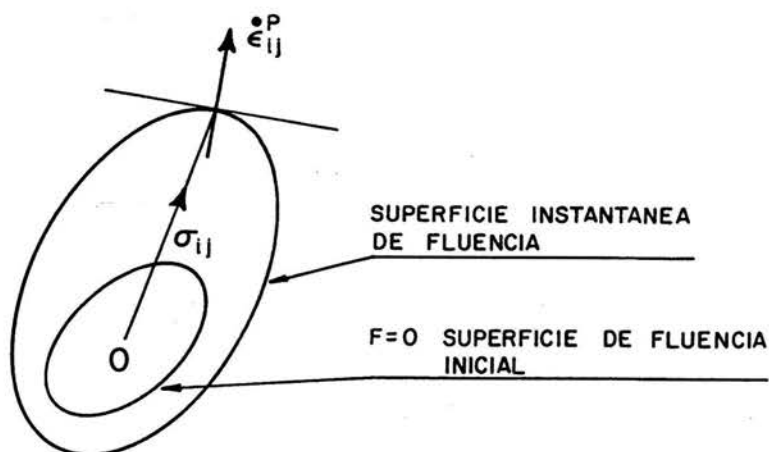


Figura 2. Superficies de fluencia y vector velocidad de deformación

3.5 Algunas formas de las ecuaciones constitutivas

Resulta de interés particularizar (3.14) para casos comunes en las aplicaciones prácticas. Se va a considerar la forma que adquiere dicha ecuación constitutiva cuando la función f es, respectivamente, función solamente del tensor de tensiones que corresponde al caso del material elástico/viscoplástico con endurecimiento isótropo; y función solamente del desviador de tensiones, que es el caso del material elástico/visco-perfectamente plástico.

Para el primer caso tenemos

$$f(\sigma_{ij}) = f(J_1', J_2, J_3), \quad (3.15)$$

donde

- J_1' primer invariante del tensor de tensiones σ_{ij} ,
 J_2, J_3 segundo y tercer invariantes del tensor desviador de tensiones s_{ij} .

Para reemplazar en (3.10) hacemos

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial J_1'} \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial J_2} s_{ij} + \frac{\partial f}{\partial J_3} t_{ij}, \quad (3.16)$$

donde

$$t_{ij} = s_{ik} s_{kj} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij}. \quad (3.17)$$

De esta forma la ecuación constitutiva queda

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \gamma \langle \phi(F) \rangle \left(\frac{\partial f}{\partial J_1'} \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial J_2} s_{ij} + \frac{\partial f}{\partial J_3} t_{ij} \right). \quad (3.18)$$

Con la condición de incompresibilidad de los metales en estado de deformación plástica se tiene $\frac{\partial f}{\partial J_1'} = 0$, de donde

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = B(J_2, J_3, \kappa) s_{ij} + C(J_2, J_3, \kappa) t_{ij}, \quad (3.19)$$

donde

$$B(J_2, J_3, \kappa) = \gamma \left\langle \phi \left(\frac{f}{\kappa} - 1 \right) \right\rangle \frac{\partial f}{\partial J_2}, \quad (3.20)$$

$$C(J_2, J_3, \kappa) = \gamma \left\langle \phi \left(\frac{f}{\kappa} - 1 \right) \right\rangle \frac{\partial f}{\partial J_3}.$$

De adoptar el criterio de fluencia de Von Mises, queda $f(\sigma_{ij}) = (J_2)^{\frac{1}{2}}$ y por lo tanto

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \gamma \left\langle \phi \left(\frac{\sqrt{J_2}}{\kappa} - 1 \right) \right\rangle \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}. \quad (3.21)$$

Elevando ambos miembros al cuadrado y sumando, queda

$$\sqrt{I_2^p} = \gamma \left\langle \phi \left(\frac{\sqrt{J_2}}{\kappa} - 1 \right) \right\rangle, \quad (3.22)$$

de donde el criterio de fluencia dinámica queda

$$\sqrt{J_2} = \kappa \left[1 + \phi^{-1} \left(\frac{\sqrt{I_2^p}}{\gamma} \right) \right]. \quad (3.23)$$

Si en cambio queremos analizar el material elástico/viscoplástico, tendremos

$$F = \frac{f(J_2, J_3)}{c} - 1 \quad ; \quad c = \text{cte.} \quad (3.24)$$

La relación constitutiva se escribe ahora

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \gamma \left\langle \phi \left[\frac{f(J_2, J_3)}{c} - 1 \right] \right\rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (3.25)$$

donde ahora será $\gamma = \gamma^0/c$. Adoptando el criterio de fluencia de Huber-Mises tenemos

$$F = \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1, \quad (3.26)$$

donde k es la tensión de fluencia en corte puro. Así (3.25) queda

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \gamma \left\langle \phi \left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right) \right\rangle \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}. \quad (3.27)$$

Elevando al cuadrado y sumando, llegamos, igual que antes, al criterio de fluencia dinámico

$$\sqrt{J_2} = k \left[1 + \phi^{-1} \left(\frac{\sqrt{I_2^p}}{\gamma} \right) \right]. \quad (3.28)$$

Con relación a (3.23) se ve que ahora el término entre corchetes queda multiplicado por una constante, y así la tensión efectiva de fluencia $\sqrt{J_2}$ depende sólo de la velocidad de deformación efectiva, $\sqrt{I_2^p}$.

Comparando estos resultados con los que surgen de la teoría de plasticidad para materiales con endurecimiento isótropo se ve una analogía formal, en la que la velocidad de deformación inelástica ocupa el lugar de la deformación plástica. Sin embargo, en viscoplasticidad, el flujo plástico ocurrirá siempre que sea $J_2 > k^2$, independientemente de si \dot{J}_2 es mayor, igual o menor que cero, de manera que, al descargar el material, también se seguirá en estado plástico, hasta que sea efectivamente $J_2 \leq k^2$.

En general en todas las formas particulares de la relación constitutiva se debe considerar además la componente elástica de la velocidad de deformación

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \dot{s} \delta_{ij} \quad (3.29)$$

para tener finalmente

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (3.30)$$

Sin embargo, en muchas aplicaciones, en especial en el caso del conformado de metales se pueden desprestigiar, por su magnitud relativa, las deformaciones elásticas frente a las plásticas. En este sentido, se ha demostrado que las ecuaciones constitutivas de los materiales viscoplástico y perfectamente plástico guardan entre sí las mismas relaciones que las de fluidos viscosos y perfectos, respectivamente.

También se puede obtener la relación constitutiva que da la teoría de flujo como caso límite de la de un material elástico/viscoplástico. Para ello se debe tomar $\gamma \rightarrow \infty$, y exigir el cumplimiento del criterio estático de fluencia

$$F(\sigma_{ij}, \epsilon_{kl}^p) = 0 \quad (3.31)$$

Y en particular, tomando el material elástico/visco-perfectamente plástico se llega entonces a

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\sqrt{I_2^p}}{k} s_{ij} \quad (3.32)$$

Lógicamente esta expresión sólo será válida para cuando la velocidad de deformación no sea nula.

3.6 La condición dinámica para un material elástico/viscoplástico estable

La condición de estabilidad para un material inelástico en el que se incluyen los términos dinámicos resulta

$$\int_{t=0}^{t_k} \left\{ \int_{\Omega} [\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)}] [\dot{\epsilon}_{ij}^{(2)} - \dot{\epsilon}_{ij}^{(1)}] d\Omega \right\} dt + \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho [\dot{u}_i^{(2)} - \dot{u}_i^{(1)}]^2 d\Omega \right\}_{t=0}^{t_k} \geq 0 \quad (3.33)$$

Los juegos $\sigma_{ij}^{(1)}, \dot{\epsilon}_{ij}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(2)}, \dot{\epsilon}_{ij}^{(2)}$ corresponden, respectivamente, a los tensores de tensión y de velocidad de deformación para dos caminos distintos en el espacio de dichos tensores, habiendo partido, para $t = 0$ de un mismo punto común. El segundo término de (3.33) corresponde a la diferencia, entre los estados inicial y final, de la energía resultante de efectuar la diferencia de las velocidades entre un camino y el otro. Esta expresión tiene la forma de una energía cinética, y por ser, para $t = 0$, $\dot{u}_i^{(1)} = \dot{u}_i^{(2)}$, se tiene que el segundo término de (3.33) siempre será positivo. Por eso resulta una condición más fuerte la desigualdad

$$\int_{t=0}^{t_k} \left\{ \int_{\Omega} [\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)}] [\dot{\epsilon}_{ij}^{(2)} - \dot{\epsilon}_{ij}^{(1)}] d\Omega \right\} dt \geq 0, \quad (3.34)$$

que resulta del análisis cuasi-estático del mismo problema.

Se concluye que el tener en cuenta los efectos dinámicos no invalida las conclusiones obtenidas sobre las relaciones tensión-deformación habiendo ignorado dichos términos.

La condición de ortogonalidad entre el tensor velocidad de deformación y la superficie de fluencia queda asegurada por (3.34), junto con la convexidad de las sucesivas superficies de fluencia dinámicas. Ambas condiciones se han tenido como hipótesis al escribir la relación constitutiva general, (3.11).

3.7 Comparaciones con datos experimentales

Hasta este punto se ha dejado sin determinar la forma que adopta la función ϕ , en (3.11) y en las relaciones que de allí se derivan. Se han propuesto varias opciones, cuya validez se ha terminado en comparación con datos experimentales.

En general, se puede decir que estas conclusiones no pueden extenderse a otros materiales distintos del usado en la experimentación, ya que la forma de las curvas que se desea aproximar varía de un material a otro. Otra observación importante es que los ensayos se llevan a cabo con estados uniaxiales de tensión y deformación, y la función ϕ se determina sobre la reducción de las relaciones constitutivas a ese caso particular. La extensión de las conclusiones así obtenidas a estados triaxiales de tensión, y en particular el uso de los mismos coeficientes en las funciones ϕ es válida solamente si se hace la hipótesis de que la curva $(\sqrt{J_2}, \sqrt{I_2^p})$ coincide con la curva (σ, ε) , lo cual no se ha podido demostrar, y tampoco es fácil diseñar un experimento que dé información de estados completos de deformación en casos dinámicos.

Las funciones más comúnmente adoptadas son

$$\phi(F) = F^\delta \quad (3.35a)$$

$$\phi(F) = F \quad (3.35b)$$

$$\phi(F) = \exp F - 1 \quad (3.35c)$$

$$\phi(F) = \sum_{\alpha=1}^N A_\alpha (\exp F^\alpha - 1) \quad (3.35d)$$

$$\phi(F) = \sum_{\alpha=1}^N B_\alpha \exp F^\alpha \quad (3.35e)$$

De (3.35a) y (3.27) podemos particularizar la relación constitutiva para el caso unidimensional

$$\dot{\varepsilon} = \gamma^* \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)^\delta \quad (3.36)$$

mientras que, aplicando la forma (3.35c), tenemos

$$\dot{\epsilon} = \gamma^* \left[\exp \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right) - 1 \right] \quad (3.37)$$

En la figura 3 se muestra una típica curva experimental (obtenida por Clark y Duwez, 1950), comparada con los resultados de las curvas (3.35a) a (3.35c). Las dos formas restantes, por su mayor número de parámetros, permiten aproximar las curvas experimentales tanto como se quiera.

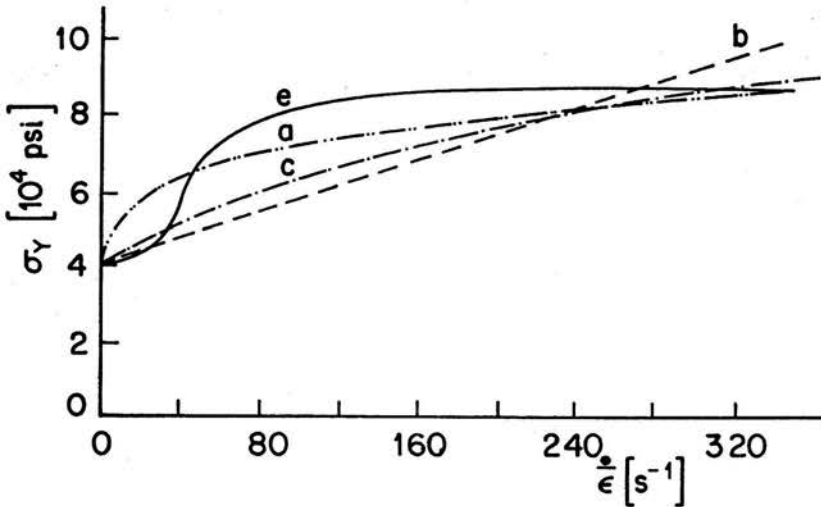


Figura 3. Comparación de funciones $\phi(F)$ con resultados experimentales: a: (3.35a), con $\delta = 3$, $\gamma^* = 180$; b: (3.35b), con $\gamma^* = 200$; c: (3.35c), con $\gamma^* = 120$; e: experimental

En función de las condiciones de trabajo podrá usarse un tipo u otro. Los datos experimentales muestran que no hay aumento significativo de las tensiones por encima de un cierto valor de la velocidad de deformación, alrededor de 200 seg^{-1} .

Entre los ensayos usados para verificar estas relaciones constitutivas semiempíricas puede citarse el de J. D. Campbell y J. Duby (1957), en el que se somete a una carga impulsiva una probeta de acero calmado, midiéndose las curvas tensión-tiempo y velocidad de deformación-tiempo, para comparar ésta última curva con la que resulta de obtener la velocidad de deformación con las tensiones y la relación constitutiva. Este ensayo reproduce aceptablemente la forma de la curva, con un corrimiento en el tiempo que puede asociarse con el tiempo de retraso debido a la propagación de ondas de tensión.

3.8 Tratamiento del material viscoplástico como un fluido no newtoniano

Teniendo en cuenta la ausencia de efectos viscosos que, por hipótesis, se tiene en el rango elástico, el criterio de fluencia es el mismo que el usado en plasticidad estática, si bien una vez alcanzada la fluencia sí habrá diferencias en el modo de deformarse del sólido. En concreto, se ha adoptado el criterio de fluencia de von Mises, considerando que es el más adecuado para materiales dúctiles.

Reescribimos la ecuación (3.27), que da la relación constitutiva de un material visco-plástico, considerando flujo asociado y criterio de fluencia de von Mises

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \gamma \left\langle \phi \left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right) \right\rangle \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad (3.38)$$

para compararla con la relación constitutiva de un fluido

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} s_{ij}. \quad (3.39)$$

De esta relación buscamos una expresión para la viscosidad. Igualamos los factores

$$\frac{1}{2\mu} \equiv \gamma^* \left\langle \phi \left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right) \right\rangle \frac{1}{2\sqrt{J_2}}, \quad (3.40)$$

donde hemos tomado $\gamma^* = 2\gamma$.

De la definición de los invariantes del desviador de tensiones y de la velocidad de deformación,

$$\sqrt{I_2^p} = \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p}, \quad (3.41)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p}, \quad (3.42)$$

tenemos

$$\dot{\bar{\epsilon}} = 2\sqrt{I_2^p}, \quad (3.43)$$

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}}. \quad (3.44)$$

Elevando (3.39) al cuadrado y sumando sobre i, j queda

$$J_2 = \mu^2 \dot{\bar{\epsilon}}^2. \quad (3.45)$$

Si sustituimos (3.45) en (3.40) queda

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \gamma^* \left\langle \phi \left[\frac{\mu \dot{\bar{\epsilon}}}{k} - 1 \right] \right\rangle. \quad (3.46)$$

Si adoptamos una ley potencial para la función ϕ , (3.35a), (3.46) quedará

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \gamma^* \left(\frac{\mu \dot{\bar{\epsilon}}}{k} - 1 \right)^n. \quad (3.47)$$

De aquí podemos evaluar la viscosidad

$$\mu = \frac{k \left(1 + \left(\frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\gamma^*} \right)^{\frac{1}{n}} \right)}{\dot{\bar{\epsilon}}}. \quad (3.48)$$

Podemos escribir (3.48) en una forma ligeramente distinta

$$\mu = \frac{\sigma_y + \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\gamma_2 \sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{3} \dot{\epsilon}}, \quad (3.49)$$

donde $\sigma_y = k\sqrt{3}$ es la tensión de fluencia para el caso estático, y $\gamma_2 = \frac{\gamma^*}{k^n \sqrt{3}}$.

La expresión (3.49) resulta más gráfica en cuanto a su significado. En el numerador se suma a la tensión de fluencia estática la que resulta del comportamiento viscoso del material. De (3.49) pueden obtenerse como casos particulares la ley constitutiva para el material rígido—perfectamente plástico (tomando $\gamma_2 \rightarrow \infty$), y la del material en estado de fluencia viscosa (*creep*), haciendo $\sigma_y = 0$.

REFERENCIAS

Campbell, J. D. & Duby, J., "Delayed yield and other dynamic lading phenomena in a medium-carbon steel", en *Proc. of the Conference on the properties of materials at high rates of strain*, Inst. Mech. Engrs., Londres (1957), pp. 214-230.

Clark, D. S. & Duwez, P. E., "The influence of strain rate on some tensile properties of steel", *Proc. Amer. Soc. Testing Materials*, vol 50 (1950), pp. 560-575.

Drucker, D. C., "A definition of stable inelastic material", *J. Appl. Mechs.*, vol 26 (1959), pp. 101-106.

Malvern, L. E., "The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of material exhibiting a strain rate effect", *J. Appl. Mechs.*, vol 18 (1951), pp. 203-208.

Malvern, L. E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice Hall (1969).

Perzyna, P., "Fundamental Problems in Viscoplasticity", en *Recent Advances in Applied Mechanics*, Chap. 9, Academic Press, New York (1966), pp. 243-377.

MODELO NUMÉRICO PARA LA FORMULACIÓN DE FLUJO

4.1 Introducción

Sobre la base de las conclusiones presentadas en el capítulo precedente acerca de las ecuaciones constitutivas de los materiales viscoplásticos, se presentará en este capítulo la llamada formulación de flujo, en su forma básica, en la que se representan estados estacionarios y no dependientes de la temperatura, cuya primera versión es debida a Goon *et al.* (1968), y que luego Zienkiewicz y Godbole (1974) aplicaron a materiales viscoplásticos.

En esta formulación, que se apoya en la analogía entre las ecuaciones de un material para el estado plástico y un fluido no newtoniano, se describe el estado del material tomando como variable básica las velocidades. Así, ante las dos principales formas posibles de representar un problema, con coordenadas materiales (enfoque lagrangiano) y con coordenadas espaciales (enfoque euleriano), se elige esta última, que tiene particular interés para los casos en que las deformaciones plásticas son suficientemente grandes, de manera que, por un lado, se desprecian las deformaciones elásticas, y por otro, para la descripción del proceso interesa más conocer el campo de velocidades que seguir a una partícula en todo su recorrido. Se logra así tener un esquema sencillo para modelar procesos de conformado de metales, que tiene aplicación inmediata en casos en que cabe hablar de un estado estacionario en la deformación del material, como sucede, por ejemplo, al laminar o al extrudar piezas relativamente largas, que es lo habitual en esos procesos.

Dicha sencillez ha conferido a la formulación de flujo una gran difusión. Se presentan, sin embargo, algunos inconvenientes en lo que hace a la solución numérica del sistema algebraico resultante.

En este capítulo se desarrollará la formulación de flujo en su implementación por el método de los elementos finitos. A continuación de la formulación en sí se discuten los problemas numéricos que surgen y su solución. Finalmente se tratará acerca de la fricción y de las superficies libres, con lo que se completa el modelo, mostrando algunas aplicaciones prácticas en las que puede confrontárselo con resultados prácticos y/o predichos por otros modelos.

4.2 Modelo para el estado estacionario e isotérmico

Mediante la formulación de flujo se hace uso de la analogía, señalada en el capítulo anterior (ecuaciones (3.38) y (3.40)) entre la relación constitutiva de un material viscoplástico y la de un fluido no newtoniano.

El flujo de un fluido se describe más adecuadamente por medio de la distribución de velocidades en un dominio fijo en el espacio, por esta razón se utiliza, de modo habitual, una descripción euleriana del movimiento.

Si planteamos el equilibrio en un elemento de volumen, tenemos

$$\sigma_{ij,j} + \rho \left(P_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_j u_{i,j} \right) = 0 \quad (4.1)$$

donde, dentro del paréntesis, el primer término corresponde a las fuerzas másicas debidas a causas externas (aceleración de la gravedad), y los otros dos términos representan la aceleración en una descripción euleriana, el tercer término corresponde a la transferencia de cantidad de movimiento en el elemento de volumen.

La ecuación de equilibrio (4.1) puede reemplazarse por su expresión equivalente de velocidades virtuales, en la que se exige que para cualquier conjunto de velocidades virtuales δu_i compatibles con las condiciones de contorno, los trabajos de las fuerzas externas sean iguales a los de las fuerzas internas en un dominio acotado Ω .

Así resulta

$$\int_{\Omega} \delta \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i \rho \left(P_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_j u_{i,j} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_T} \delta u_i T_i d\Gamma = 0 \quad (4.2)$$

donde $\delta \dot{\epsilon}_{ij}$ son las componentes de la velocidad de deformación virtual, que se relaciona con la velocidad virtual arbitraria δu_i mediante las relaciones cinemáticas

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (4.3)$$

y \mathbf{T} son las fuerzas por unidad de superficie en Γ_T , y siendo además $\delta u_i = 0$ en $\Gamma_u = \Gamma - \Gamma_T$, siendo Γ el contorno total del dominio Ω .

Para el fluido incompresible tenemos también la condición de incompresibilidad

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{ii} = 0. \quad (4.4)$$

Restamos al tensor de tensiones su parte esférica, que corresponde a la presión (con signo contrario) y obtenemos las componentes del tensor desviador de tensiones, con las que se relacionan las del tensor velocidad de deformación

$$\sigma_{ij} = s_{ij} - p\delta_{ij}. \quad (4.5)$$

Para un fluido tenemos la relación constitutiva

$$s_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (4.6)$$

donde, haciendo uso de los resultados del capítulo anterior, podemos escribir

$$2\mu = \left(\gamma^* \left\langle \phi \left[\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right] \right\rangle \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \right)^{-1}. \quad (4.7)$$

Llevando la descomposición (4.5) a (4.2) el teorema de las velocidades virtuales nos queda

$$\int_{\Omega} \delta \dot{\epsilon}_{ij} 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \dot{\epsilon}_{ij} p \delta_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i \rho \left(P_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_j u_{i,j} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} \delta u_i T_i d\Gamma = 0. \quad (4.8)$$

Resta añadir la condición de incompresibilidad, que lo hacemos exigiendo que sea nula la potencia interna debida a cualquier variación de la presión δp

$$\int_{\Omega} \delta p \dot{\epsilon}_{ii} d\Omega = 0. \quad (4.9)$$

En (4.9) la presión actúa como un multiplicador de Lagrange, que permite imponer la incompresibilidad.

Si consideramos, por un momento, que en (4.8), μ y \mathbf{T} son funciones solamente de la posición, las ecuaciones (4.8) y (4.9) equivalen formalmente a requerir que el funcional

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{\epsilon}_{ij} 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} u_i \left(P_i - \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - \rho u_j u_{i,j} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} u_i T_i d\Gamma \quad (4.10)$$

sea estacionario con respecto a las variaciones de la velocidad \mathbf{u} , y que además se cumpla la condición (4.4), o lo que es lo mismo, a requerir que el funcional

$$\bar{\Pi} = \Pi - \int_{\Omega} p \dot{\epsilon}_{ii} d\Omega \quad (4.11)$$

sea estacionario con respecto a las variaciones de velocidad y presión.

4.3 Discretización

A continuación se lleva a cabo la discretización del problema mediante elementos finitos.

Dado un punto de coordenadas (x, y) perteneciente al dominio Ω , expresamos las variables básicas del problema en términos de los valores que éstas toman en los nodos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{N}_u^T \{ \mathbf{u}^N \} \\ p &= N_p^T \{ p^N \} \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde N_u y N_p son arreglos que contienen, respectivamente, las funciones de interpolación de la velocidad y de la presión. Las mismas tienen soporte compacto, es decir que son no nulas en una pequeña porción del dominio, por lo que la velocidad y la presión en cada punto es combinación lineal de velocidades y presiones en unos pocos nodos. Las funciones N_u y N_p se obtienen a partir de polinomios básicos expresados en coordenadas locales de la forma

$$\begin{aligned} P_u &= [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \xi^2\eta^2] \\ P_p &= [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta] \end{aligned} \quad (4.13)$$

que se definen en dominios (elementos) determinados por la posición de los nodos, y donde ξ y η varían entre -1 y 1 .

Así se tendrá

$$N_{ui} = P_{uj} a_{ji}, \quad (4.14)$$

donde los coeficientes a_{ij} se determinan de modo que, en un nodo j de coordenadas (x_j, y_j) , sea

$$N_{ui}(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \quad (4.15)$$

y con la presión se procede análogamente.

Puede observarse que, en las ecuaciones (4.12) a (4.15), se utilizan funciones bilineales para interpolar la presión, y bicuadráticas, para la velocidad. Esta es una exigencia de la ecuación diferencial que gobierna el problema, en la que las velocidades aparecen derivadas en un orden más que la presión (aquí se tiene derivadas primeras y de orden cero respectivamente). Este resultado surge de la condición de Brezzi y Babuska (también llamada condición *inf-sup*), que asegura la convergencia de la solución numérica a la solución exacta.

Con algunos otros tipos de aproximaciones se tiene convergencia para la velocidad, pero no para la presión. La condición de Brezzi y Babuska asegura la estabilidad de la presión. En efecto, algunos elementos muestran resultados para la presión con grandes oscilaciones, aún con cambios de signo, y varios órdenes de magnitud mayor en valor absoluto que la presión real. Este fenómeno, debido al incumplimiento de la condición *inf-sup*, y conocido como "tablero de ajedrez",

ha sido explicado diciendo que la incompresibilidad está sobre-impuesta, con una condición excesivamente fuerte. Por su parte, el uso de funciones de aproximación de un grado menor para la presión que para la velocidad, en la que además resultan unas funciones de forma continuas para la presión, provoca una relajación en la condición de incompresibilidad, que da resultados satisfactorios. Esta técnica tiene su equivalente, para los elementos con la condición de incompresibilidad impuesta por parámetros de penalidad, en la integración reducida selectiva (el término de penalidad se integra en menos puntos de Gauss), que evita una imposición en exceso restrictiva de dicha condición.

La incompresibilidad así impuesta queda asegurada en el dominio global, mientras que es sólo aproximada para cada elemento. Se demuestra que esta formulación da una aproximación de orden 2

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq ch^2 \{\|\mathbf{u}\|_3 + \|p\|_2\} \quad (4.16)$$

donde

- \mathbf{u} solución exacta de velocidad
- p solución exacta de presión
- \mathbf{u}_h solución numérica de velocidad
- p_h solución numérica de presión
- h tamaño de la malla

y

$$\|\mathbf{u}\|_m = \left(\sum_{j=0}^m |u|_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int |D^{\bar{\alpha}} u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{norma de Sobolev}$$

donde a su vez

$$D^{\bar{\alpha}} u = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

Una vez expresadas las magnitudes básicas como interpolación de los valores en los nodos, podemos obtener las magnitudes derivadas. A través de las relaciones cinemáticas escribimos

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x_{(j)}} \{u_{(i)}^N\} + \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x_{(i)}} \{u_{(j)}^N\} \right) \quad (4.17)$$

para las componentes del tensor velocidad de deformación. Indicamos con el subíndice entre paréntesis el número de la componente de los vectores posición y velocidad considerado en cada caso. A los efectos de las derivadas espaciales, los valores nodales son constantes. En cambio, constituyen grados de libertad en el problema variacional, de manera que

$$\delta u_{(i)} = \mathbf{N}_u \delta \left\{ u_{(i)}^N \right\}^T \quad (4.18)$$

$$\delta \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x_{(j)}} \delta \left\{ u_{(i)}^N \right\}^T + \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x_{(i)}} \delta \left\{ u_{(j)}^N \right\}^T \right). \quad (4.19)$$

La ecuación que efectivamente se resuelve contiene, como simplificación, la eliminación de los efectos dinámicos (teniendo en cuenta las bajas velocidades que habitualmente tienen lugar). Esto equivale a tomar, en lo referente al problema mecánico, una densidad nula $\rho = 0$, con lo que la tercera integral de (4.8) se anula. En términos de mecánica de fluidos, equivale a tomar la solución de Stokes, que para fluidos newtonianos se reduce a un problema lineal, válido para bajo número de Reynolds. En nuestro caso, subsiste la no linealidad debida al material.

La ecuación (4.8) quedará

$$\int_{\Omega} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} p \delta_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta u_i T_i d\Gamma = 0. \quad (4.20)$$

Reemplazamos en (4.20) y (4.9), que constituyen los dos términos de la variación del principio variacional que minimizamos, por las expresiones en función de las variables nodales, (4.10), (4.11) y (4.17) a (4.19), y, por la arbitrariedad de las variaciones de velocidades y presión, queda el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbf{K} \{ \mathbf{u}^N \} + \mathbf{K}_p^T \{ p^N \} \\ \mathbf{K}_p \{ \mathbf{u}^N \} \end{cases} = \begin{cases} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.21)$$

donde

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} 2\mu \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{u,x}^T \mathbf{N}_{u,x} + \frac{1}{2} \mathbf{N}_{u,y}^T \mathbf{N}_{u,y} & \\ & \mathbf{N}_{u,y}^T \mathbf{N}_{u,y} + \frac{1}{2} \mathbf{N}_{u,x}^T \mathbf{N}_{u,x} \end{bmatrix} d\Omega \quad (4.22)$$

$$\mathbf{K}_p = \int_{\Omega} [\mathbf{N}_p^T \mathbf{N}_{u,x} \quad \mathbf{N}_p^T \mathbf{N}_{u,y}] d\Omega \quad (4.23)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma_t} \{\mathbf{N}_u^T \mathbf{T}\} d\Gamma \quad (4.24)$$

y

$$\{\mathbf{u}^N\} = \begin{Bmatrix} u_{(1)}^N \\ u_{(2)}^N \end{Bmatrix}. \quad (4.25)$$

De la definición de (4.23), y comparando con el segundo término de (4.20), se ve que la presión discretizada será de signo contrario a la presión física.

Puede verse que, al resolver conjuntamente para la velocidad y la presión, en la matriz global se tendrán ceros en la diagonal y en todo elemento de la matriz que vincule grados de libertad correspondientes a sendas presiones. Estos grados de libertad representan multiplicadores de Lagrange mediante los cuales se impone la condición de incompresibilidad.

El sistema (4.21) es no lineal debido a que la viscosidad μ es función del campo de velocidades. Puede resolverse por sustituciones sucesivas, actualizando cada vez la matriz de coeficientes

$$\begin{Bmatrix} u_n^N \\ p_n^N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{n-1} & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

Se ha aconsejado (Zienkiewicz *et al.*, 1978) llevar a cabo la resolución por este medio, dejando de lado métodos de mayor orden de convergencia. En efecto, tal como explican Thompson y Berman (1984), cuando la viscosidad es función

altamente no lineal de la velocidad de deformación, los métodos tangentes divergen. En vista de este hecho se analiza en la sección 4.4 algunas opciones para acelerar la convergencia al usar un método de sustituciones sucesivas. El problema de la convergencia merece especial atención cuando se manejan materiales con comportamiento cercano al perfectamente plástico. En estos casos, para un pequeño aumento en la carga se tienen variaciones de velocidad muy altas, y la matriz tangente es prácticamente singular.

De todas formas, los métodos tangentes tienen su aplicación en el análisis de materiales donde el efecto de endurecimiento por velocidad de deformación plástica es más notorio. Recordando la expresión que da, para nuestro modelo de material viscoplástico, la viscosidad en función de la velocidad de deformación,

$$\mu = \frac{\sigma_y + \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\gamma_2 \sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{3} \dot{\epsilon}}, \quad (4.27)$$

Karagiannis *et al.* (1988) han analizado el desempeño de distintos métodos de resolución variando el exponente n de la ley viscoplástica, comprobando que —siendo siempre $n > 1$ y el caso perfectamente plástico alcanzado cuando $n \rightarrow \infty$ —, un método tangente podrá converger para valores de n inferiores a 2. Afortunadamente esto tiene su aplicación práctica, ya que si bien el exponente n vale 8.25 para una aleación de aluminio (Sulijoadikusomo y Dillon, 1978), para aceros se tienen valores del orden de 1.5 (Grill y Schwerdtfeger, 1979).

Para resolver el sistema de ecuaciones (4.21) por el método de Newton-Raphson, expresamos el residuo para la iteración n como

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{K}_{G_n} \mathbf{X}_n - \mathbf{F} \quad (4.28)$$

donde

$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

y

$$\mathbf{X} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{u}^N \\ \mathbf{p}^N \end{matrix} \right\}. \quad (4.30)$$

Desarrollamos el residuo para la iteración siguiente con el primer término de una serie de Taylor,

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n + \frac{\partial \mathbf{R}_n}{\partial \mathbf{X}} \Delta \mathbf{X}_n, \quad (4.31)$$

y buscamos el incremento de la solución necesario para que el nuevo residuo se anule

$$\Delta \mathbf{X}_n = - \left(\frac{\partial \mathbf{R}_n}{\partial \mathbf{X}} \right)^{-1} \mathbf{R}_n \quad (4.32)$$

En caso de comenzar la solución dentro del radio de convergencia, se converge cuadráticamente a la solución. En cada iteración se debe calcular e invertir la derivada del residuo con respecto a los grados de libertad

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{K}_G}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{X} + \mathbf{K}_G. \quad (4.33)$$

Del sistema (4.21) tenemos, indicando con un supraíndice i que se trata de matrices integrando,

$$\mathbf{K}^* = \mu \mathbf{K}_0^i \quad (4.34)$$

siendo \mathbf{K}_0 dependiente sólo de factores geométricos. Derivando μ con respecto a los grados de libertad resulta

$$\mathbf{D}\mu = \left[\frac{\partial \mu}{\partial X_1}, \frac{\partial \mu}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial \mu}{\partial X_n} \right] \quad (4.35)$$

y

$$\frac{\partial \mathbf{K}_G}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{X} = \int_{\Omega} \mathbf{D}\mu \mathbf{K}_0^i d\Omega \{ \mathbf{u}^N \} \quad (4.36)$$

4.4 Análisis de la convergencia

El siguiente estudio está dirigido a materiales de comportamiento cercano al perfectamente plástico. En esos casos se ha mostrado (Thompson y Bermann, 1984) que, por la no linealidad, el método de Newton Raphson sólo es aplicable en un pequeño entorno de la solución. El tamaño del mismo es inversamente proporcional al número de grados de libertad del problema a resolver, y también depende de los parámetros que definen la ley viscoplástica del material: cuanto más se aproxime al material perfectamente plástico, menor es el radio de convergencia, teniéndose en el límite que la tensión efectiva es constante para cualquier velocidad de deformación, y por lo tanto la matriz tangente es singular. Para alcanzar la solución el sistema debe resolverse por iteraciones sucesivas, de manera que para reducir el número de las mismas y acelerar la velocidad de convergencia se analizan las alternativas que se detallan a continuación.

i) Cálculo del incremento de velocidad en base a las dos últimas iteraciones

El orden de convergencia del método de sustituciones sucesivas es lineal y, a causa de las características del sistema a resolver y de la estimación inicial adoptada, la convergencia es monotónica. Por esto, la variación entre dos incrementos del vector solución es cada vez menor, a medida que el residuo decrece. Manteniendo este hecho, requerido por la convergencia, puede hacerse la siguiente hipótesis, de manera de introducir un algoritmo acelerador que haga el paso algo más largo:

$$\Delta X_{n+1} - \Delta X_n = \Delta X_n - \Delta X_{n-1} \quad (4.37)$$

donde ΔX_n es el incremento calculado en la iteración n , de manera que

$$X_{n+1} = X_n + \Delta X_n \quad (4.38)$$

que resulta de resolver (4.31).

Al resolver por sustituciones sucesivas estamos considerando

$$\frac{\partial R_n}{\partial X} \simeq K_{G_n} \quad (4.39)$$

En la derivada de (4.39) no se ha tomado en cuenta que la matriz de rigidez es función de los grados de libertad, lo cual evidentemente es inexacto. En caso de haber considerado esa dependencia se tendría el método de Newton Raphson, que es de limitada aplicación aquí.

De (4.37) tenemos

$$\Delta X_{n+1} = 2 \Delta X_n - \Delta X_{n-1} \quad (4.40)$$

$$X_{n+2} = X_n + \Delta X_{n+1} + \Delta X_n \quad (4.41)$$

es decir

$$X_{n+2} = X_n + 3 \Delta X_n - \Delta X_{n-1} \quad (4.42)$$

De esta forma estimamos la iteración $(n + 2)$ al calcular la iteración $(n + 1)$. Si esta estimación fuera exacta, esto significaría una reducción del 50% en el número de iteraciones. Por eso, este método equivale a tomar un paso más largo que el calculado al resolver el sistema de ecuaciones, y el enunciado representa un criterio para evaluar dicho paso aumentado.

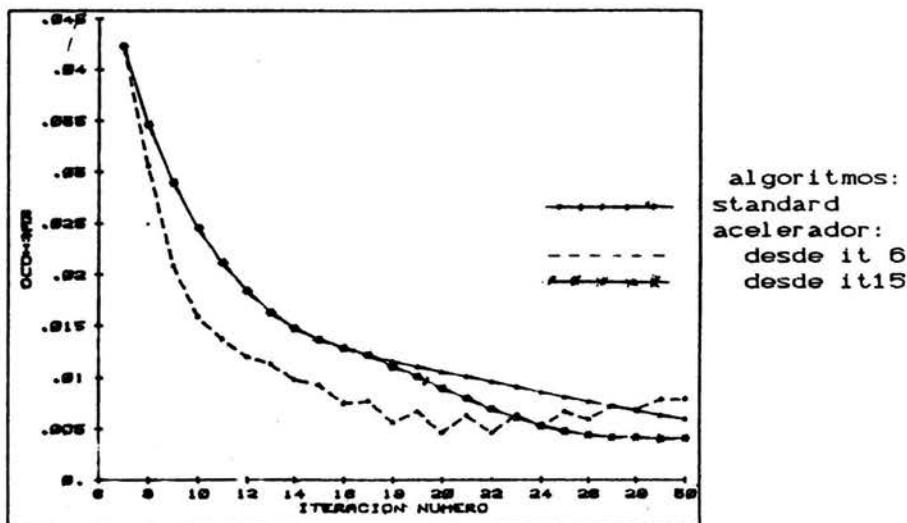


Figura 1. Algoritmo acelerador comenzando desde distintas iteraciones

En la figura 1 se compara la variación del residuo global a lo largo de las iteraciones con el método standard y con este algoritmo acelerador, en un caso de extrusión modelado con nueve elementos. Este esquema de resolución representa una mejora cuando se lo utiliza luego de algunas iteraciones, cuando el residuo se ha estabilizado; es entonces cuando se comporta de acuerdo con la hipótesis indicada en (4.37). La línea de trazos representa el residuo global cuando el algoritmo acelerador es aplicado desde la sexta iteración. Se observa primeramente un descenso más rápido con respecto al esquema standard (línea llena), pero luego el efecto acelerador va decayendo a lo largo de las iteraciones, debido a que la dirección del vector incremento, ΔX resulta suficientemente distinta de la que se obtiene de resolver simplemente el sistema algebraico. El mismo comportamiento se observa cuando el algoritmo acelerador se comienza a aplicar desde la decimosexta iteración (línea llena con asteriscos). Por eso es que, para lograr mejores resultados, el algoritmo acelerador debe ser aplicado durante un cierto número de iteraciones, alternándolo con el esquema standard para corregir la dirección del vector incremento ΔX . Mediante este procedimiento se han obtenido reducciones de hasta el 40% en el número de iteraciones requeridas para satisfacer un cierto criterio de convergencia.

ii) Cambio en la estimación inicial

Un segundo factor que afecta la velocidad de convergencia es la estimación inicial que se adopta. De acuerdo con la estrategia usual de solución, se resuelve, en la primera iteración, un problema lineal de Stokes, donde la viscosidad se toma constante. Así se halla un campo de velocidades. Desde allí, la solución cambia a lo largo de las iteraciones de manera de tener una viscosidad alta donde la velocidad de deformación es baja, como cerca del pistón y afuera de la boquilla, en extrusión, y lejos del rodillo, en laminación. En estas zonas, cuando la viscosidad aumenta, el campo de velocidades se hace más uniforme (baja velocidad de deformación), de manera que la viscosidad crece nuevamente en la iteración siguiente, hasta que lentamente se llega a la solución. En las zonas con alta velocidad de deformación, la viscosidad es baja, y ocurre lo contrario.

Por eso, se ha introducido como estimación inicial un campo de velocidades tal que su variación para llegar a la solución fuera en sentido inverso: que las zonas más

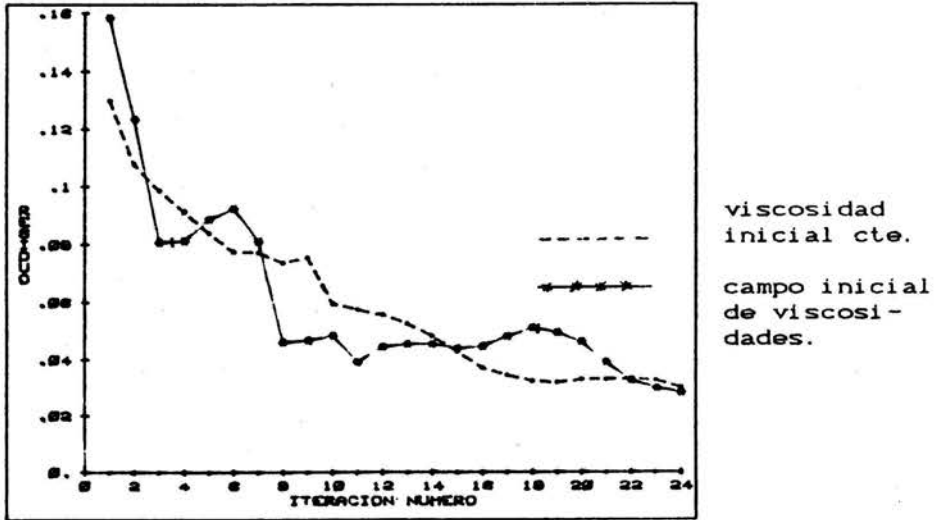


Figura 2. Variación del residuo con diferentes campos iniciales de viscosidad

rígidas se tornen más fácilmente deformables y viceversa. Los resultados muestran que este cambio en la estimación inicial afecta la velocidad de convergencia, haciéndola más irregular (unas veces más rápida, otras más lenta, línea llena en figura 2) que cuando se comienza con una viscosidad inicial constante para todos los elementos (línea de trazos). Por lo tanto, no se puede sacar una conclusión general acerca de la conveniencia de cambiar la estimación inicial con respecto a la viscosidad. Sobre todo, no es posible tener más que una idea cualitativa acerca del campo de viscosidades que haga que el sistema de ecuaciones esté bien direccionado hacia la solución.

4.5 Condicionamiento de matrices

Cuando se intenta resolver ciertos problemas, como procesos de extrusión donde hay grandes zonas con velocidad uniforme, se encuentran singularidades numéricas en las matrices a resolver. Esto es porque, de una parte, se utilizan multiplicadores de Lagrange para imponer la incompresibilidad (éstos son los grados de libertad correspondientes a la presión), de manera que las matrices, al tener algunos ceros en la diagonal, no son ya definidas positivas. Por otra parte, debido a la ley constitutiva, una submatriz de las matrices de los elementos queda multiplicada por la viscosidad, la cual varía en un mismo problema en varios

órdenes de magnitud (cfr. ec. (4.27)): es tanto mayor cuanto menor sea la velocidad de deformación, y para valores de esta última menores que uno dado, se asigna convenientemente un máximo para la viscosidad. Análogamente, la viscosidad es baja donde los gradientes de velocidad son altos. En una primera etapa esta dificultad se resolvía adoptando un límite para la velocidad de deformación más alto, en (4.27). De esta manera, la máxima viscosidad admisible era menor, introduciendo una distorsión en el modelo.

Los dos factores indicados causan el mal condicionamiento del sistema a resolver. En este trabajo hemos buscado una solución a este problema que permita no limitar el rango de validez del modelo. Se han estudiado las siguientes alternativas para mejorar este condicionamiento.

i) Imposición de la condición de desplazamiento de cuerpo rígido

El efecto que tiene un alto valor de la viscosidad es dar una mayor rigidez a los grados de libertad que se ven afectados por la misma. Intentando tener el mismo resultado por otros caminos, se han impuesto dos condiciones adicionales a la que impone la incompresibilidad, de manera de tener el desplazamiento de cuerpo rígido.

Por la condición de incompresibilidad tenemos, para un estado plano de deformación

$$\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y = 0 \quad (4.43)$$

Además exigimos que

$$\dot{\epsilon}_x = 0 \quad (4.44)$$

$$\dot{\epsilon}_{xy} = 0 \quad (4.45)$$

De (4.43) y (4.44), resulta

$$\dot{\epsilon}_y = 0 \quad (4.46)$$

Las condiciones (4.44) y (4.45) han sido impuestas, en forma alternativa, con multiplicadores de Lagrange y con parámetros de penalización.

i.a) Multiplicadores de Lagrange

Siendo

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x} \cdot \{u^N\} \quad (4.47)$$

$$\dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial y} \cdot \{v^N\} \quad (4.48)$$

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x} \cdot \{v^N\} + \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial y} \cdot \{u^N\} \right) \quad (4.49)$$

para satisfacer (4.43), (4.44) y (4.45) exigimos que

$$\int_{\Omega} p(\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p \{p^N\} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x} \cdot \{v^N\} + \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial y} \cdot \{u^N\} \right) d\Omega = 0 \quad (4.50)$$

$$\int_{\Omega} \lambda \dot{\epsilon}_x d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p \{\lambda^N\} \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x} \cdot \{u^N\} d\Omega = 0 \quad (4.51)$$

$$\int_{\Omega} \rho \dot{\epsilon}_{xy} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p \{\rho^N\} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x} \cdot \{u^N\} + \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial y} \cdot \{v^N\} \right) d\Omega = 0 \quad (4.52)$$

Solamente debemos sumar (4.44) y (4.45) a las ecuaciones de gobierno, ya que (4.43) estaba previamente presente en las mismas, imponiendo la incompresibilidad. Cuando se toma variaciones con respecto de u , p , λ , y ρ , y luego se construye la matriz de rigidez del elemento nos queda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_L \\ \mathbf{K}_L^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^N \\ \mathbf{L}^N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

donde

K matriz que vincula velocidades consigo mismas;

$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p \\ \mathbf{K}_\lambda \\ \mathbf{K}_\rho \end{bmatrix}^T$ matriz que vincula velocidades con los mutliplicadores de Lagrange;

$\mathbf{u}^N = \begin{Bmatrix} u^N \\ v^N \end{Bmatrix}$ vector de velocidades;

$\mathbf{L}^N = \begin{Bmatrix} p^N \\ \lambda^N \\ \rho^N \end{Bmatrix}$ vector de multiplicadores de Lagrange.

Las condiciones (4.51) y (4.52) deben ser aplicadas únicamente para velocidades de deformación menores que un valor límite. Hasta entonces los grados de libertad correspondientes a las variables λ^N y ρ^N habrán permanecido fijadas en cero. Cuando el valor límite es alcanzado las matrices de las subestructuras deben ser modificadas dinámicamente para permitir a los respectivos grados de libertad cambiar de retenidos a libres.

Los resultados obtenidos por este procedimiento no mejoran el condicionamiento de las matrices. Además, el trabajo computacional se incrementa debido a la necesidad de manejar un mayor número de grados de libertad por nodo que en esquema clásico. También las singularidades o quasi-singularidades numéricas se han presentado para los mismos casos.

i.b) *Parametros de penalización*

Recordando la expresión del funcional $\bar{\Pi}$ a minimizar (ecuaciones (4.10) y (4.11)), que se tiene en la formulación original, para imponer las condiciones (4.43) y (4.44) escribimos el nuevo funcional

$$\Pi^* = \bar{\Pi} + \frac{\alpha}{2} (\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_{xy}^2)^2 \quad (4.54)$$

El cual, tomando variaciones resulta

$$\delta \Pi^* = \delta \bar{\Pi} + 2\alpha (\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_{xy}^2) (\dot{\varepsilon}_x \cdot \delta \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_{xy} \cdot \delta \dot{\varepsilon}_{xy}) \quad (4.55)$$

$$\delta\Pi^* = \delta\bar{\Pi} + \alpha (\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_{xy}^2) \left[\left(2 \frac{\partial N_u}{\partial x} \{u^N\} \right) \left(\frac{\partial N_u}{\partial x} \delta\{u^N\} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial N_u}{\partial y} \{u^N\} + \frac{\partial N_u}{\partial x} \{v^N\} \right) \left(\frac{\partial N_u}{\partial y} \delta\{u^N\} + \frac{\partial N_u}{\partial x} \delta\{v^N\} \right) \right] \quad (4.56)$$

Por lo tanto, el sistema para un solo elemento es

$$\left\{ \left[\begin{array}{cc} \mathbf{K} & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{array} \right] + \alpha (\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_{xy}^2) \left[\begin{array}{cc} \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}^N \\ p^N \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (4.57)$$

donde

$$\mathbf{K}_1 = \left[\begin{array}{cc} 2 \frac{\partial N_u^T}{\partial x} \frac{\partial N_u}{\partial x} + \frac{\partial N_u^T}{\partial y} \frac{\partial N_u}{\partial y} & \frac{\partial N_u^T}{\partial y} \frac{\partial N_u}{\partial x} \\ \frac{\partial N_u^T}{\partial x} \frac{\partial N_u}{\partial y} & \frac{\partial N_u^T}{\partial x} \frac{\partial N_u}{\partial x} \end{array} \right] \quad (4.58)$$

α es el parámetro de penalidad, elegido suficientemente grande como para asegurar el cumplimiento de las condiciones (4.44) y (4.45). Se lo ha tomado tres órdenes de magnitud mayor que el máximo, extendido sobre todos los elementos, de las componentes de la matriz \mathbf{K} . Para distintas iteraciones este parámetro ha sido recalculado. Tal como era de esperar, los resultados son similares a los que resultan de utilizar los multiplicadores de Lagrange.

Los métodos descritos en *i.a)* e *i.b)* imponen la misma condición que una muy alta viscosidad, pero no pueden reproducir el comportamiento de la relación constitutiva, que permite una graduación en el endurecimiento debido a la velocidad de deformación. Por esta razón su aplicación no representó una mejora de los resultados.

ii) Escalado de matrices

ii.a) En la resolución

Una manera de mejorar el condicionamiento de matrices es mediante su escalado durante la resolución del sistema de ecuaciones, el cual se realiza en nuestro caso mediante el método frontal, que ha sido presentado por Irons (1970). Se lleva a cabo una subdivisión en subestructuras, dentro del dominio discretizado, en las cuales se distinguen tres tipos de variables: "fijadas", es decir aquellas cuyo valor esta impuesto y por lo tanto integran los términos de carga para los otros dos tipos de variables; "condensables", que son aquellas que serán expresadas en función de otros grados de libertad al pasar a la subestructura siguiente; y "retenidas", que son conservadas para la resolución final, ya con un número mucho menor de ecuaciones. En este apartado ii.a) asignaremos a las variables \mathbf{X} el significado de incrementos.

Para la subestructura i tenemos, luego de haber eliminado las variables fijadas

$$\begin{bmatrix} {}_i\mathbf{K}_{RR} & {}_i\mathbf{K}_{RC} \\ {}_i\mathbf{K}_{CR} & {}_i\mathbf{K}_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_i\mathbf{X}_R \\ {}_i\mathbf{X}_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}_i\mathbf{R}_R \\ {}_i\mathbf{R}_C \end{Bmatrix}. \quad (4.59)$$

Los vectores ${}_i\mathbf{R}_R$ y ${}_i\mathbf{R}_C$ contienen el residuo, que se anulará cuando se alcance la solución, más el vector de fuerzas aplicadas. Para llegar al sistema reducido final, que será resuelto, es necesario expresar las variables condensables en función de las retenidas de la misma subestructura.

En cada paso de condensación, la matriz ${}_i\mathbf{K}_{CC}$ debe ser invertida. Es durante estas inversiones cuando tienen lugar singularidades numéricas.

De la segunda fila de (4.59) queda

$${}_i\mathbf{X}_C = {}_i\mathbf{K}_{CC}^{-1} ({}_i\mathbf{R}_C - {}_i\mathbf{K}_{CR} {}_i\mathbf{X}_R) \quad (4.60)$$

Reemplazando en la primera fila de (4.59),

$$({}_i\mathbf{K}_{RR} - {}_i\mathbf{K}_{RC} {}_i\mathbf{K}_{CC}^{-1} {}_i\mathbf{K}_{CR}) {}_i\mathbf{X}_R = {}_i\mathbf{R}_R - {}_i\mathbf{K}_{RC} {}_i\mathbf{K}_{CC}^{-1} {}_i\mathbf{R}_C \quad (4.61)$$

Así se tiene una nueva matriz de rigidez y un nuevo vector para los grados de libertad retenidos, que se suma a la proveniente de la subestructura siguiente.

La matriz final, que se invierte, se forma con la matriz condensada de la última subestructura. Lo mismo ocurre con el residuo final. Con ellos se obtienen los grados de libertad retenidos de la última subestructura

$${}_n\mathbf{K} = {}_n\mathbf{K}_{RR} - {}_n\mathbf{K}_{RC}{}_n\mathbf{K}_{CC}^{-1}{}_n\mathbf{K}_{CR} \quad (4.62)$$

$${}_n\mathbf{R} = {}_n\mathbf{R}_{Rn}{}_n\mathbf{K}_{RC}{}_n\mathbf{K}_{CC}^{-1}{}_n\mathbf{R}_C \quad (4.63)$$

$${}_n\mathbf{X} = {}_n\mathbf{K}^{-1} {}_n\mathbf{R}, \quad (4.64)$$

entre los que se encuentran los ${}_{n-1}\mathbf{X}_R$. Con una expresión similar a (4.60) obtenemos ${}_{n-1}\mathbf{X}_C$, y de allí armamos por conectividades ${}_{n-2}\mathbf{X}_R$, y así sucesivamente. En este proceso se invierten las matrices ${}_i\mathbf{K}_{CC}$ de cada subestructura, y la matriz final ${}_n\mathbf{K}$. En estas inversiones aparecen singularidades numéricas en las matrices, y para superarlas, se analizan tres formas diferentes de realizar el escalado.

ii.a.1) Escalado de la matriz de grados de libertad condensables

Una primera opción es escalar solamente la submatriz a ser invertida en cada caso, desescalándola luego de la inversión

$$\mathbf{K}'_{CC} = \mathbf{K}_{CC}\alpha \quad (4.65)$$

donde α es una matriz diagonal que contiene los factores de escala para cada columna. Invertiendo se tiene

$$\mathbf{K}'_{CC^{-1}} = \{\mathbf{K}_{CC}\alpha\}^{-1} = \alpha^{-1}\mathbf{K}_{CC}^{-1} \quad (4.66)$$

Entonces

$$\mathbf{K}_{CC}^{-1} = \alpha\mathbf{K}'_{CC^{-1}} \quad (4.67)$$

El mismo procedimiento se aplica para la matriz final.

ii.a.2) Escalado de la matriz entera de cada subestructura

En este caso, en cambio, los factores de escala son calculados en función de las columnas de la matriz completa de la subestructura para resolver el sistema escalado, y luego desescalarlo posteriormente en la restitución (que es el proceso inverso a la condensación).

Si llamamos A y Γ , respectivamente, a las matrices diagonales que contienen los factores de escala para las columnas R (grados de libertad retenidos) y C (grados de libertad condensables), tenemos, de (4.59)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR}A & \mathbf{K}_{RC}\Gamma \\ \mathbf{K}_{CRA} & \mathbf{K}_{CC}\Gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A^{-1}\mathbf{X}_R \\ \Gamma^{-1}\mathbf{X}_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_R \\ \mathbf{R}_C \end{Bmatrix} \quad (4.68)$$

Entonces,

$$\Gamma^{-1}\mathbf{X}_C = \mathbf{K}_{CC}\Gamma^{-1} \{ \mathbf{R}_C - (\mathbf{K}_{CRA})(A^{-1}\mathbf{X}_R) \} \quad (4.69)$$

y

$$\begin{aligned} & \left((\mathbf{K}_{RR}A) - (\mathbf{K}_{RC}\Gamma)(\mathbf{K}_{CC}\Gamma)^{-1}(\mathbf{K}_{CRA}) \right) (A^{-1}\mathbf{X}_R) = \\ & \mathbf{R}_R - (\mathbf{K}_{RC}\Gamma)(\mathbf{K}_{CC}\Gamma)^{-1}\mathbf{R}_C \end{aligned} \quad (4.70)$$

La matriz condensada pasa entonces a la subestructura siguiente, que nuevamente se escala, y lo propio ocurre con el residuo. Almacenando convenientemente el vector de factores de escala, el desescalado se puede llevar a cabo durante la restitución.

Los resultados obtenidos con el escalado durante la resolución (es decir, los dos casos precedentes), concuerdan con los que se obtienen sin escalar, y nuevamente aparecen singularidades numéricas. Por lo tanto, si bien el número de condición de las matrices que se invierten se mejora, no resultan mejoras en el proceso de resolución.

ii.b) Escalado en la generación: matriz elemental

Entre los dos factores señalados como causantes de la singularidad de matrices en este tipo de problemas, el más importante es que, tratándose de elementos mixtos, las velocidades y las presiones están en unidades diferentes, y en una misma matriz de rigidez elemental, los elementos que ligan presiones consigo mismas son ceros, y aquellos que vinculan velocidades y presiones son pequeños con respecto a los que vinculan velocidades consigo mismas. Por esta razón, se encuentran filas numéricamente nulas en la matriz de rigidez. Sobre la base de esta observación, se han escalado los grados de libertad correspondientes a la presión. Resulta conveniente hacerlo en las matrices de los elementos, donde los distintos tipos de grados de libertad están separados en submatrices.

Tenemos que el sistema para un solo elemento es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^N \\ p^N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4.71)$$

Escalando resulta

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & k\mathbf{K}_p^T \\ k\mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{N*} \\ p^{N*} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u^* \\ \mathbf{F}_p^* \end{Bmatrix} \quad (4.72)$$

Tomando

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}^{N*}\} &= \{\mathbf{u}^N\} \\ \{p^{N*}\} &= \left\{ \frac{p^N}{k} \right\} \end{aligned} \quad (4.73)$$

el residuo, dado por la diferencia entre ambos miembros de (4.72), cuando aún no se haya alcanzado la solución del sistema de ecuaciones será

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_u^* &= \mathbf{R}_u \\ \mathbf{R}_p^* &= \mathbf{R}_p k \end{aligned} \quad (4.74)$$

De esta manera, el sistema a resolver queda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & k\mathbf{K}_p \\ k\mathbf{K}_p^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}^{N*} \\ \Delta p^{N*} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_u^* \\ \mathbf{R}_p^* \end{Bmatrix}. \quad (4.75)$$

Comparado con el sistema sin escalar da

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}^N &= \Delta \mathbf{u}^{N*} \\ \Delta p^N &= \Delta p^{N*} k \end{aligned} \quad (4.76)$$

es decir que los incrementos de presión calculados deberán ser multiplicados por el factor de escala para tenerlos en verdadera magnitud. Se necesita un solo valor de k para todos los elementos. El mismo se evalúa proporcional a la media geométrica de la viscosidad sobre todos los elementos. Por lo tanto, en problemas donde hay grandes zonas con pequeña velocidad de deformación el valor requerido para el factor de escala k será elevado.

Mediante este procedimiento todos los problemas numéricos son resueltos, haciendo posible la resolución de los casos peor condicionados, como elementos muy oblongos (por ejemplo los usados para modelar la fricción), altas relaciones de extrusión y conformado de piezas largas. Este es, por lo tanto, el procedimiento adoptado, dada su simplicidad y sus ventajas con respecto a los otros estudiados.

4.6 Fricción y superficies libres

El modelo de la formulación de flujo se completa con una correcta especificación de las condiciones de contorno. A diferencia del caso de fluidos, que, en contacto con bordes sólidos tienen la misma velocidad que éstos, los metales en estado plástico podrán deslizarse sobre las superficies de trabajo venciendo una fuerza de rozamiento contra las mismas.

Por otra parte, también es importante poder describir las superficies libres, cuyo contorno está determinado por la solución en velocidades, de manera que, en estado estacionario, la superficie libre constituya una línea de corriente.

Para la simulación de la fricción se ha sugerido (Zienkiewicz *et al.*, 1978) disponer una hilera delgada de elementos como una interfaz entre el metal y la superficie de trabajo, de manera que las velocidades sobre ésta estén fijadas. Considerando que la tensión instantánea de fluencia está dada, de (4.27), por

$$\sigma_{y_i} = \sigma_y + \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\gamma_2 \sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (4.77)$$

es posible simular una ley de fricción tipo Coulomb si se hace depender esta tensión de fluencia de la presión, que en el contorno es indicativa de la fuerza normal entre el metal y las superficies de trabajo (figura 3)

$$\sigma_{y_i} = \begin{cases} \sigma_{y_i}^{VP} & \text{si } \nu p \geq \sigma_{y_i}^{VP}; \\ \nu p & \text{si } \delta < \nu p < \sigma_{y_i}^{VP}; \\ \delta & \text{si } \nu p \leq \delta. \end{cases} \quad (4.78)$$

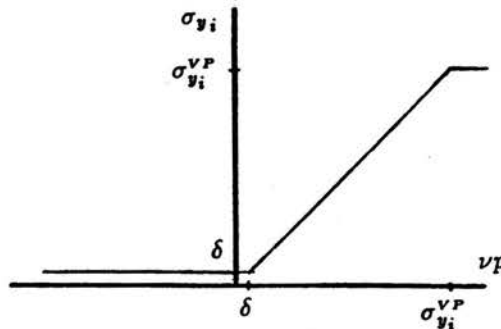


Figura 3. Tensión instantánea de fluencia para los elementos de fricción

donde ν es el coeficiente de fricción y δ un valor positivo suficientemente menor que $\sigma_{y_i}^{VP}$. No puede valer cero pues causaría una matriz de rigidez singular. Con este modelo, en un material que no presiona sobre la superficie los elementos se deforman fácilmente, y se reproduce la condición de deslizamiento sin fricción; si el metal ejerce una presión muy alta sobre el borde se tendrán elementos de fricción más rígidos, que aplican sobre el metal una elevada tensión de corte, equivalente a la que se podría imponer mediante una fuerza de rozamiento. Este método tiene la

ventaja adicional de no requerir un cálculo de la velocidad relativa entre el metal y la superficie de trabajo, para imponer la fuerza de rozamiento en sentido contrario, como sucede en otros esquemas de fricción.

Las superficies libres exigen una adaptación de la malla al nuevo contorno, que deberá satisfacer esta condición. Si se cuenta con un punto fijo o uno cuya velocidad es conocida, se puede decir, llamando y a la coordenada de la superficie libre

$$y' = \frac{dy}{dx} \cong \frac{v}{u} \quad (4.79)$$

De manera que, para hallar $y = y(x)$ sólo se necesita resolver

$$y = \int_{x_1}^x y' dx \cong \int_{x_1}^x \frac{v}{u} dx. \quad (4.80)$$

El procedimiento de integración se ilustra en la figura 4. Luego del corrimiento según y de los nodos de la superficie libre se requiere acomodar también el resto de los nodos de la malla, para evitar distorsiones excesivas en la misma.

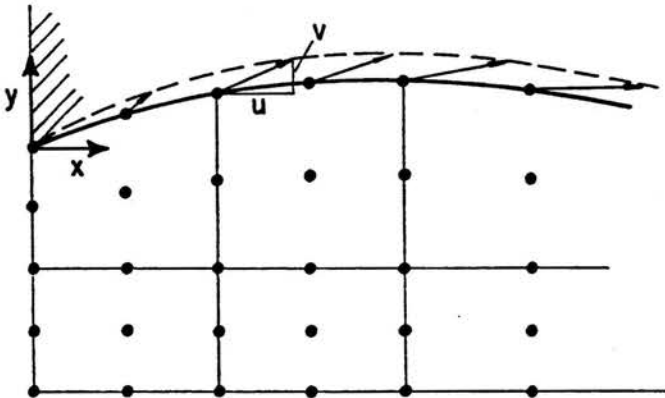


Figura 4. Cálculo de la superficie libre por integración del cociente de las componentes de velocidad.

Mediante esta integración es posible conocer, por ejemplo, la forma del material que sale de una boquilla de extrusión. Más aún, esta técnica es aplicable a problemas donde la forma real del material es muy diferente de aquella con la que se comenzó el proceso iterativo. Esto ocurre al modelar la extrusión de tubos sin costura, donde existen tres superficies libres y hay una reducción en el diámetro interior, como se muestra en las aplicaciones.

4.7 Ejemplos de aplicación

i) *Extrusión Directa*

Una de las aplicaciones de la formulación de flujo ha sido desde el principio el análisis de procesos de extrusión. Para este problema se cuenta con resultados numéricos con los cuales se puede contrastar el modelo para un material perfectamente plástico, estado plano de deformación, y condiciones de contorno sin fricción. Asimismo, existe una solución teórica provista por la *teoría de la línea de deslizamiento*. Para estas condiciones la solución numérica debe converger a la que predice dicha teoría, ya que se apoyan sobre las mismas hipótesis. En la tabla I se comparan nuestros resultados con una selección de los de otros autores, y con la solución teórica, cuantificados mediante la presión de extrusión adimensionalizada con la tensión de fluencia, σ_y . Se ha usado una misma discretización que los autores citados. Para los dos valores de relación de extrusión (radio del pistón *vs.* radio de la boquilla) se obtienen resultados más cercanos a la solución teórica que en los otros trabajos citados. Esta mejora en los resultados se debe a la integración numérica más exacta de las relaciones constitutivas: calculamos un valor de viscosidad para cada punto de Gauss, y no uno por cada elemento. También es importante el efecto del escalado de las matrices elementales, con la que se evita la distorsión en el modelo para bajas velocidades de deformación, como se ha señalado en la sección 4.5.

El caso de relación de extrusión $ER = 3$ se ha resuelto también considerando la fricción y la superficie libre. La figura 5 muestra un caso de extrusión directa, donde los desplazamientos debido a la corrección por la superficie libre han sido amplificados cinco veces. Se han utilizado elementos de fricción para modelar las condiciones de contacto con las paredes de la matriz de extrusión.

Tabla 1. Presión de extrusión según diversos autores

p/k , $k = \sigma_y/k$	$ER = 2$	$ER = 3$
Línea de deslizamiento	2.600	3.425
Este trabajo	2.683	3.495
Zienkiewicz <i>et al.</i>	2.704	3.700
Bianchi & Sheppard	2.724	—

Como estos elementos deben ser angostos, presentan una relación largo/ancho muy alta. En esta configuración puede observarse claramente la ganancia obtenida al escalar matrices de la forma expuesta en Sec. 4.5.ii.b. Antes de escalar, se requería, para el cálculo de la viscosidad, un límite en la velocidad de deformación de $1.E - 04 \text{seg}^{-1}$ para evitar singularidades numéricas, mientras que al escalar pudo utilizarse $1.E - 07 \text{seg}^{-1}$, no siendo necesario tomar un valor más pequeño, ya que en casi todos los puntos se superaba este límite. También en la figura 5 se muestran las isocurvas de máxima tensión tangencial en la configuración deformada. Para comparación, también se ha resuelto el caso sin fricción, que puede observarse en la figura 6, donde los cambios con respecto a la malla inicial igualmente han sido ampliados 5 veces.

Es patente que, mientras para el caso con fricción, la superficie libre se angosta inmediatamente después de la boquilla de extrusión, en el caso sin fricción aparece primero un ligero ensanchamiento. También hay pequeñas diferencias en las isocurvas de tensión tangencial. Como era de esperar, en ambos casos la tensión isostática es máxima y de compresión en el interior de la matriz, y cerca de la salida hay elevados gradientes de tensión tangencial, la cual también es máxima en el interior de la matriz de extrusión.

ii) Laminación de tubos sin costura

En el siguiente ejemplo se modela la laminación de un tubo sin costura tomado primero con un vástago interior y luego sin él. Ambas variantes corresponden a

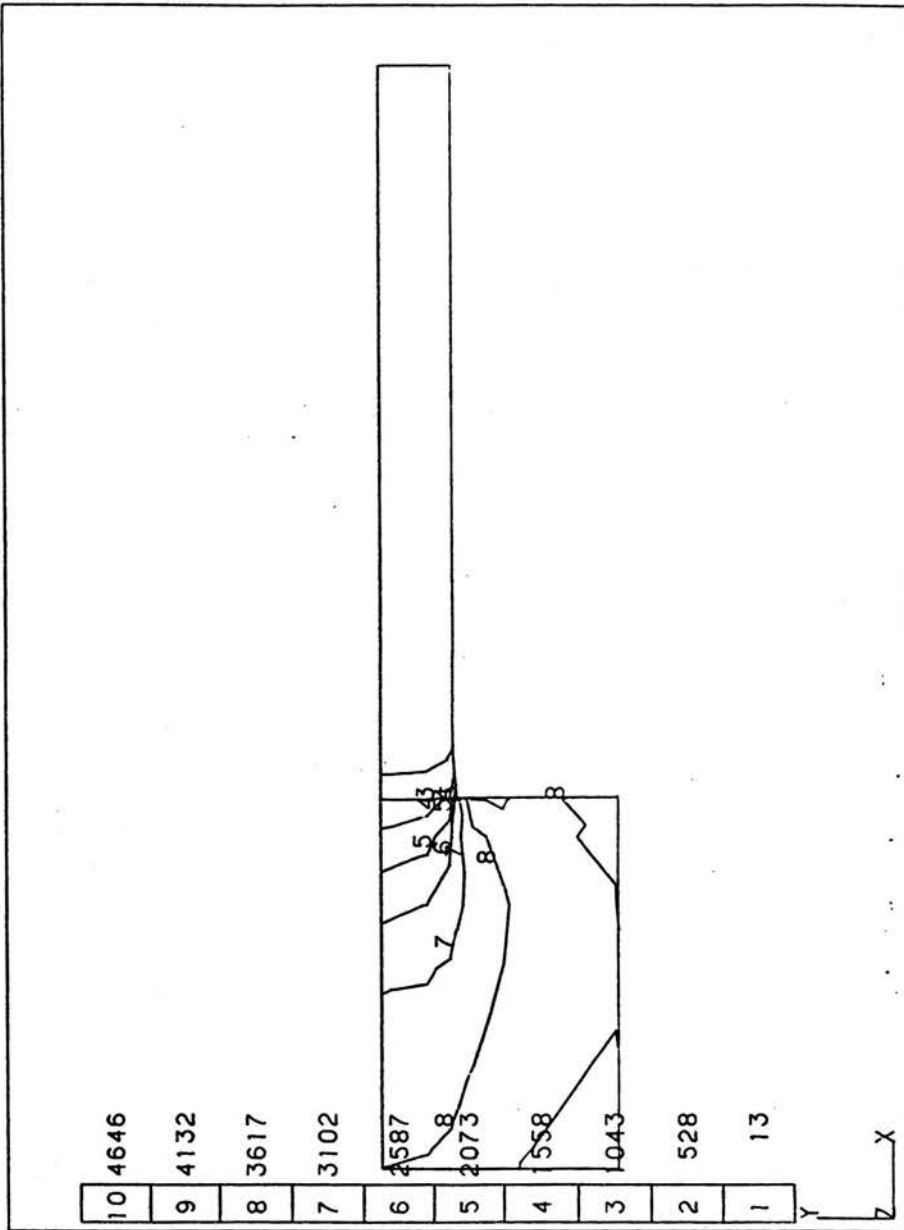


Figura 5. Extrusión directa: máxima tensión de corte

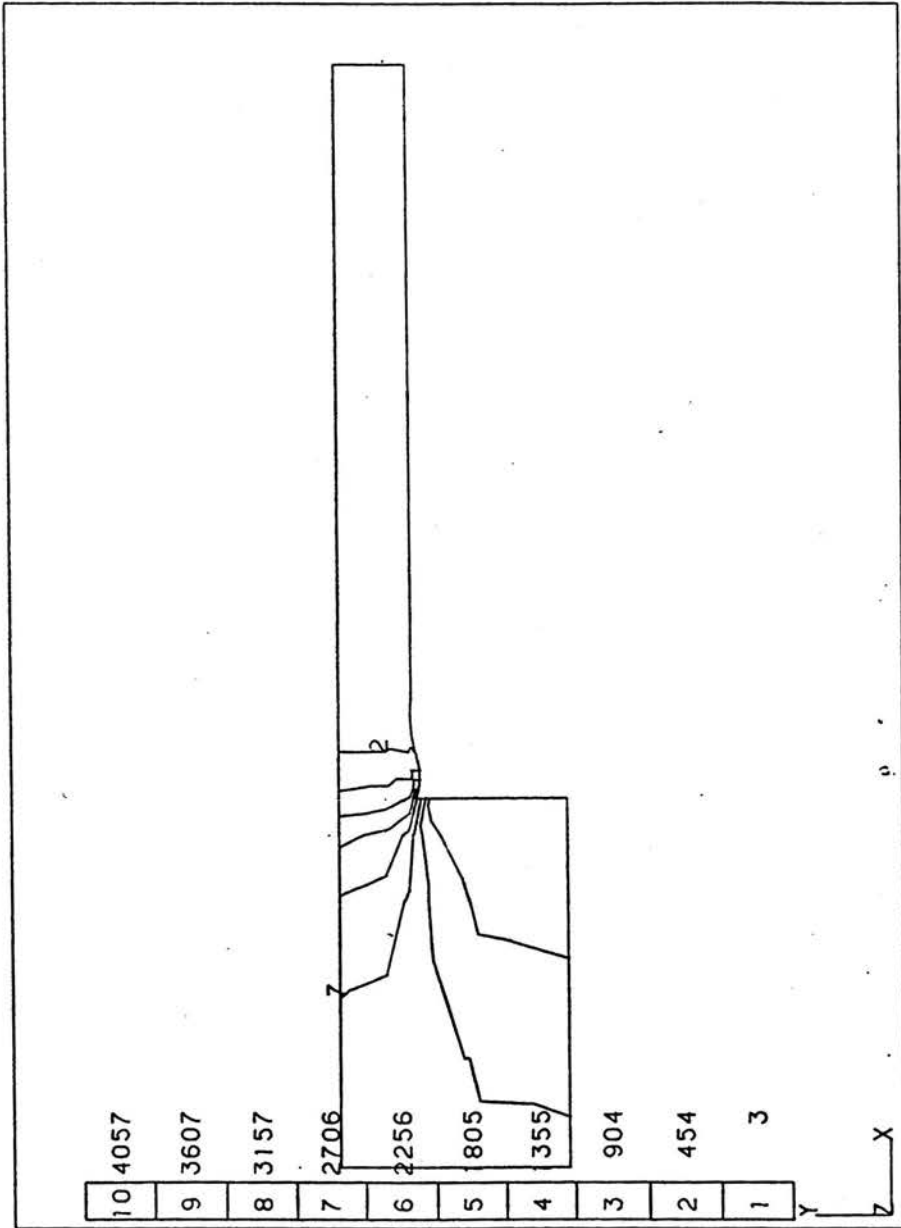


Figura 6. Extrusión directa sin fricción: máxima tensión de corte

las primeras y las últimas etapas del proceso, respectivamente. Hemos supuesto simetría axial, si bien en el proceso real existen tensiones y deformaciones de corte en sentido circunferencial, debido a que los rodillos imponen una velocidad que es proporcional a su radio, y entonces el material en contacto con los bordes exteriores del rodillo tiene una mayor velocidad impuesta que el que está en el plano de simetría del rodillo. La figura 7 muestra la primera etapa, con vástago. Aquí los cambios desde la malla inicial son muy pequeños. Puede observarse, cualitativamente, que debajo del rodillo, el material está comprimido. Además en esa zona las tensiones de corte también son máximas, en especial en la zona de contacto con el rodillo. A una pequeña distancia del rodillo el material se ve descargado y la velocidad es prácticamente uniforme, de manera que no es necesario trabajar con una malla de mayor longitud que la usada en el ejemplo. Se han utilizado elementos de fricción para el contacto entre rodillo y material.

Observaciones similares pueden hacerse para el caso sin vástago, que se muestra en la figura 8. Hemos comenzado con la misma malla que en el caso previo, retirando las restricciones para la velocidad radial en la cara interior. En la figura 8a puede verse —en la configuración final— que las tensiones se han extendido a lo largo del dominio, antes y después del rodillo. También se observan tensiones de tracción en la cara interior. La figura 8b muestra las isocurvas de máxima tensión de corte que, debido al cambio en el flujo del material, ya no están concentradas regularmente como en el caso con vástago.

Adicionalmente, resulta interesante hacer notar la necesidad de traccionar el tubo para controlar su espesor: en la figura 8 no hay tracción aplicada, y el espesor crece ligeramente, mientras que en la figura 9 se aplica una velocidad 10% mayor que la del rodillo en el extremo derecho, y la reducción del espesor es del 5%. Esto mismo es lo que debe hacerse en el proceso real de laminado. Los cambios observados en las tensiones al aplicar la tracción son como cabría esperar.

Otro resultado de este análisis es la determinación del *punto de no deslizamiento*, en el que el material tiene la misma velocidad que el rodillo. Hasta ese punto, el rodillo avanza más rápidamente que el material, y la fuerza de rozamiento tiene la dirección de avance del rodillo, mientras que, a partir del mismo, el flujo se ve frenado por la fuerza de rozamiento. Este hecho es puesto de manifiesto en el diagrama de isocurvas del módulo de velocidad, que se muestra

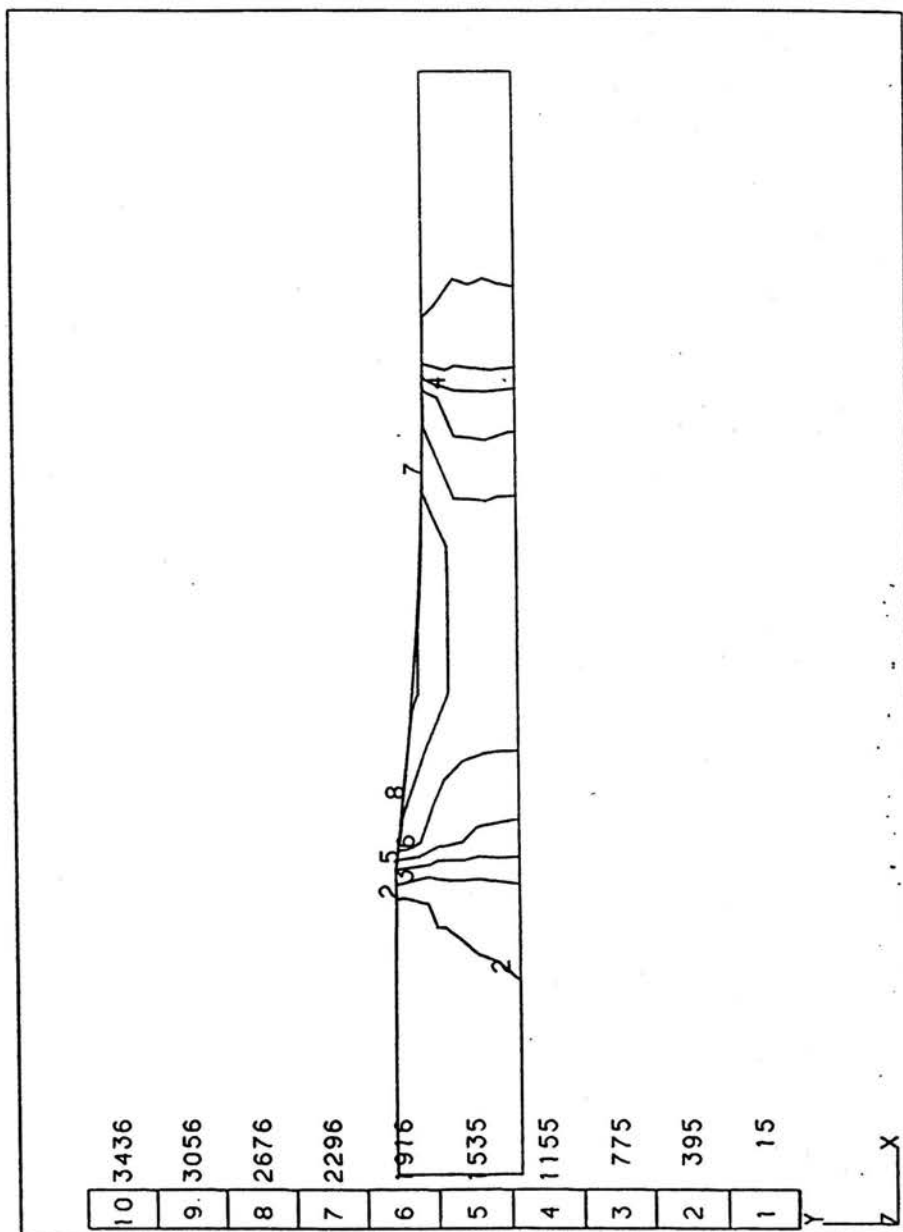


Figura 7. Laminación de tubos. Primera etapa: máxima tensión de corte

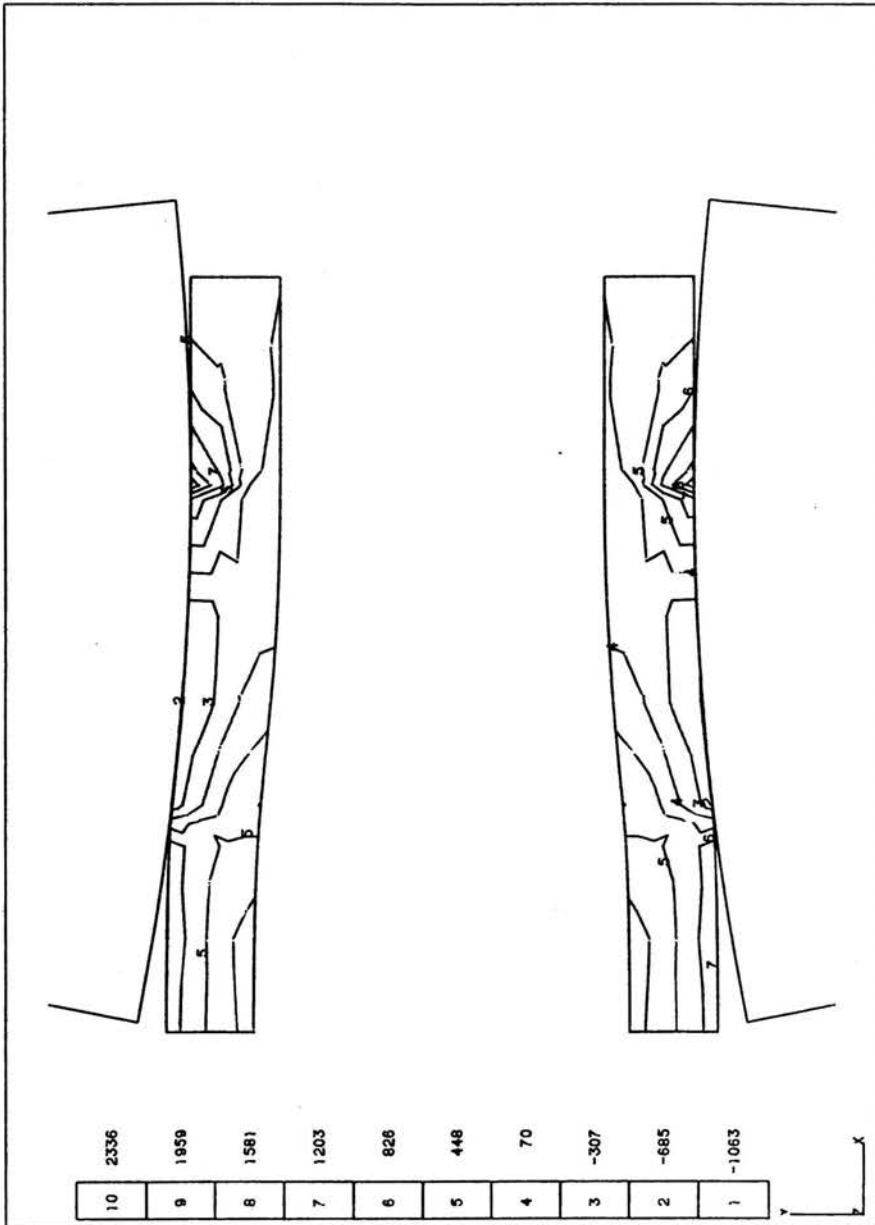


Figura 8a. Laminación de tubos. Etapa final: máxima tensión principal

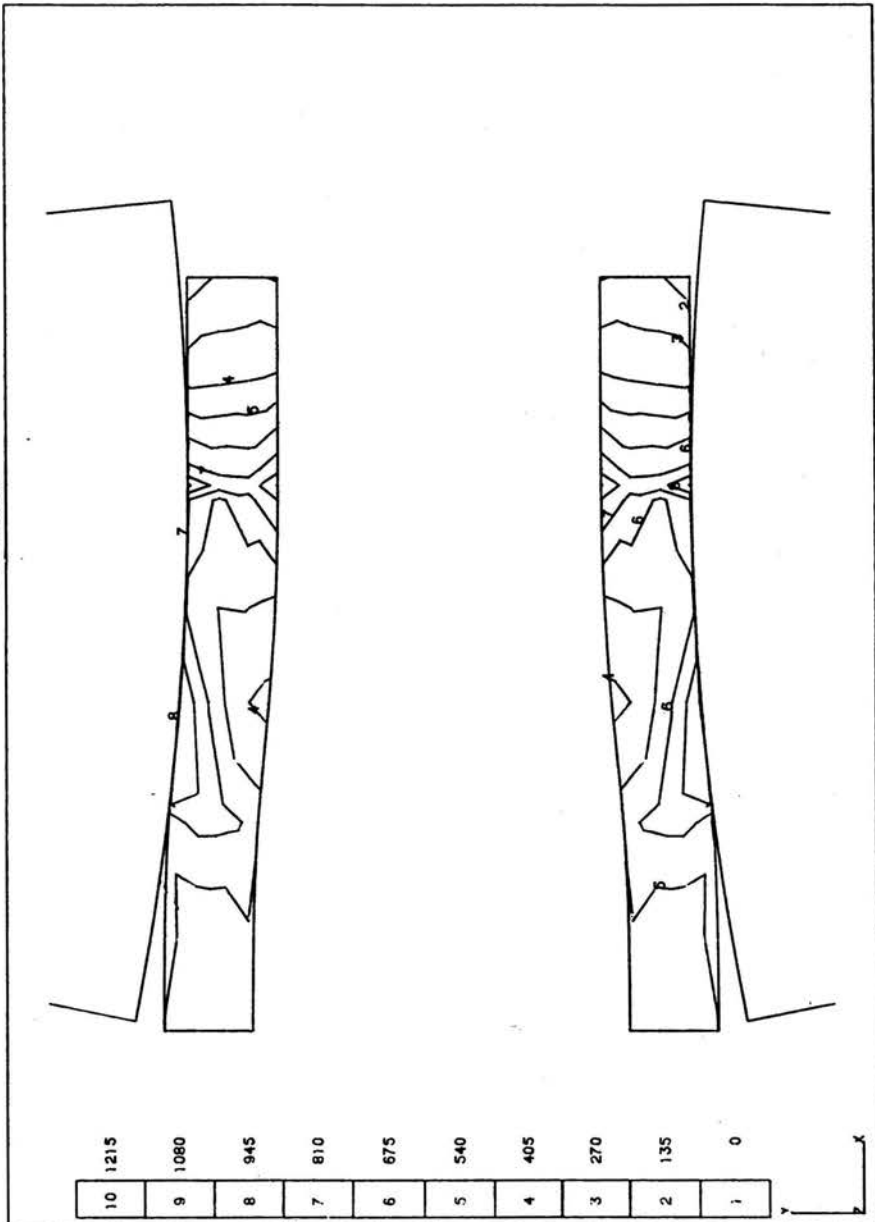


Figura 8b. Laminación de tubos. Etapa final: máxima tensión de corte

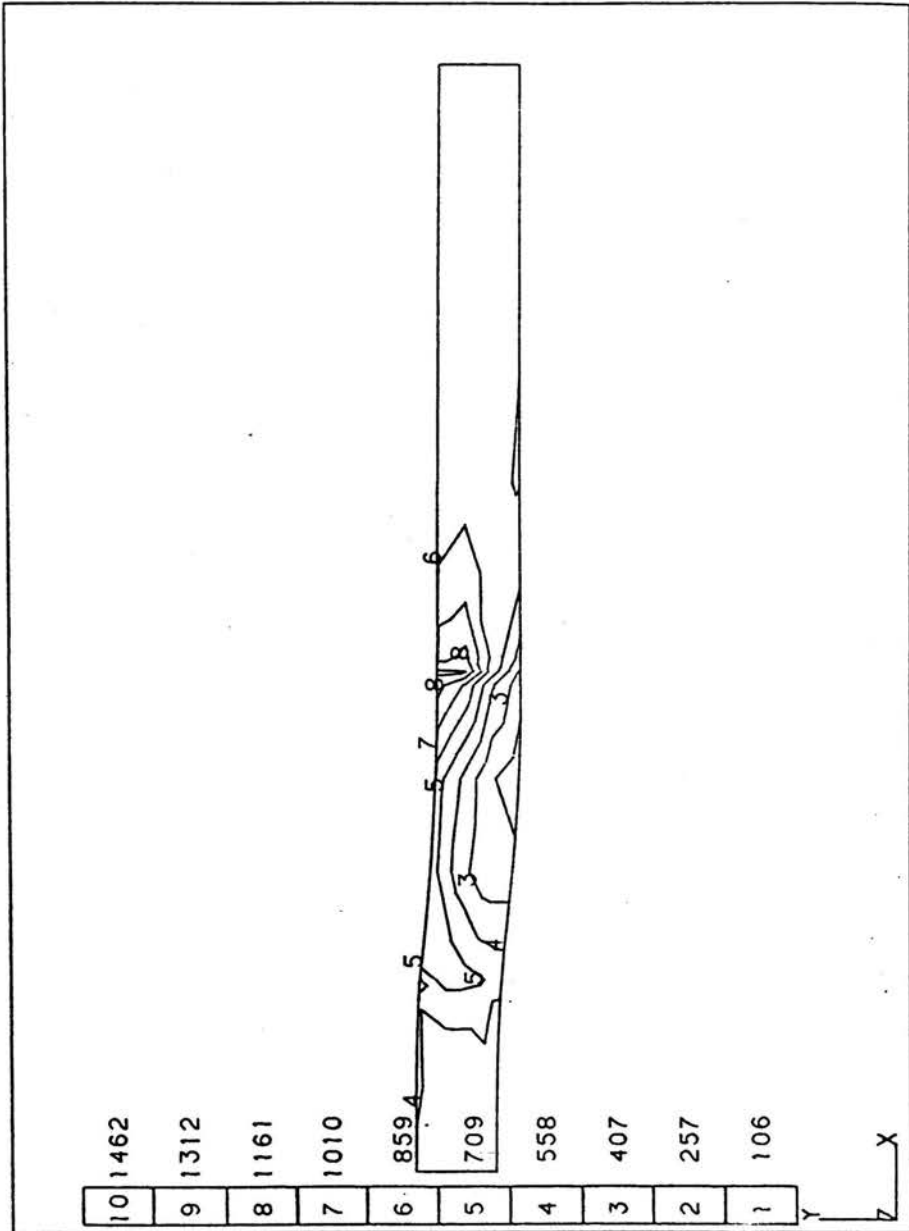


Figura 9a. Laminación de tubos con tracción: máxima tensión de corte

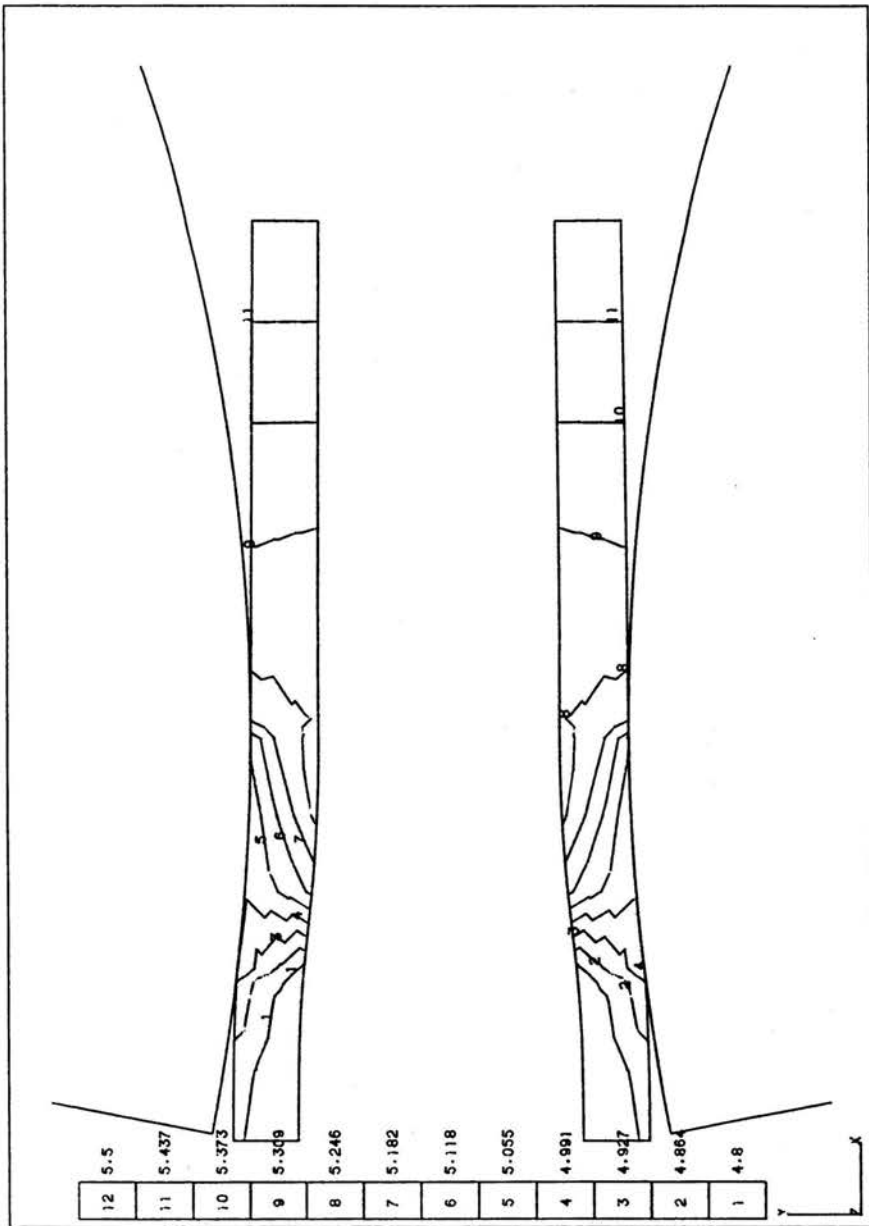


Figura 9b. Laminación de tubos con tracción: determinación del punto de no deslizamiento

en la figura 9b, para el caso de laminación con tracción.

4.8 Conclusiones

Se ha presentado la formulación de flujo para problemas planos o axisimétricos, en estados estacionario e isotérmico, y con inclusión del tratamiento de condiciones de contorno de superficie libre y con fricción. Se ha efectuado un análisis para mejorar el desempeño numérico del modelo, en el que surge como claramente una opción a incorporar el escalado a nivel de matrices elementales. El algoritmo presentado para acelerar la convergencia resulta conveniente para problemas con material perfectamente plástico, sin efectos viscosos.

REFERENCIAS

Bianchi, J. H. & Sheppard, T., "A Comparison of a Viscoplastic Finite Element Model with Slip Line Field and Upper Bound Solution for Non Hardening Material Subjected to Plane Strain and Axisymmetric Extrusion", *Int. J. Mech. Sci.*, vol 29 (1987), pp. 61-68.

Girault, V. & Raviart, P. A. *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag (1980).

Goon, G. Y., Poluchin, P. I., Poluchin, W. P. & Prudcowsky, B. A., *Las deformaciones plásticas de los metales*, Moscú (1968) (en ruso).

Grill, A. & Schwerdtfeger, K., "Finite element analysis of bulging produced by creep incontinuously cast steel slabs", *Ironmaking Steelmaking*, vol 3 (1979), pp. 131-135.

Irons, B. M., "A frontal solution program for finite elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol 2 (1970), pp. 5-32.

Karagiannis, A. & Mavridis, H., "A finite element convergence study for shear-thinning flow problems", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol 8 (1988), pp. 128-138.

Sulijoadikusomo, A. U. & Dillon, O. W., "Temperature distribution of the axisymmetric extrusion of $TiAl_6V_4$ ", *Int. Rep.*, Univ. of Kentucky, Lexington (1978).

Thompson, E. G. & Berman, H. M., "Steady State Analysis of Elasto-Visco-Plastic Flow During Rolling", en *Numerical Analysis of Forming Processes*, Chap. 9, Pitmann *et al.*, eds., Wiley (1984).

Zienkiewicz, O. C. & Godbole, P. N., "Flow of plastic and viscoplastic solids with special reference to extrusion and forming processes", *Int. J. Num. Engng.*, vol 8 (1974), pp. 3-16.

Zienkiewicz, O. C., Jain, P. C. & Oñate, E., "Flow of Solids During Forming and Extrusion: Some Aspects of Numerical Solutions" *Int. J. Solids Structures*, vol 14 (1978), pp. 15-38.

EL PROBLEMA EN TEMPERATURAS

5.1 Introducción

En los todos los procesos de conformación plástica de metales se ponen en juego altos valores de energía, que al producir deformaciones permanentes en la pieza que está siendo trabajada, también inducen un calentamiento en el material, precisamente debido a la conversión de la energía mecánica de las herramientas en energía de deformación, de la cual la gran mayoría es plástica, siendo sólo un pequeño porcentaje la energía absorbida por deformación elástica. De esta forma la energía mecánica invertida se degrada finalmente en energía térmica, produciendo un calentamiento en la pieza de material.

La variable de temperatura es de capital importancia en el conformado de metales, ya que influye fuertemente en las características del producto y en la potencia consumida durante el proceso. También del control de esta variable depende que el proceso sea efectivamente posible: si la temperatura es demasiado baja se podrá fisurar el material, y si es demasiado alta aparecen principios de fusión, con la consecuencia de grandes heterogeneidades en la estructura del material (este fenómeno se conoce como “quemado” del material). Sin llegar a esos extremos, en determinados procesos se busca que los productos tengan los granos orientados en la dirección de la deformación con el consiguiente aumento de tenacidad (esto suele buscarse en las etapas finales de un proceso), mientras que en otros se desea ante todo minimizar la potencia consumida en la deformación. Estos objetivos se logran, respectivamente, trabajando por debajo y por encima de la llamada

temperatura de recristalización, superada la cual tiene lugar una regeneración de los granos de material, que de esa manera vuelven a ser aptos para continuar el trabajo plástico. De acuerdo con una serie de trabajos iniciados por J. J. Jonas (puede verse T. Sakai y J. J. Jonas, 1984) en el campo de la metalurgia, pueden definirse para un determinado material las llamadas “ventanas” de recristalización dinámica, en las que, trabajando dentro de un intervalo de temperaturas y otro de velocidad de deformación se eliminará todo endurecimiento por deformación de los granos de material. En esas condiciones de trabajo, durante la deformación plástica se suministra al material la energía que éste necesita para recristalizar y regenerar así su estructura cristalográfica. Así se podrá, entonces, trabajar a potencia prácticamente constante y reducida a un mínimo.

Por todas estas consideraciones resulta importante la resolución conjunta del problema mecánico con el problema de generación y transmisión de calor en el medio analizado. La variación en la temperatura, causada por la generación de calor produce un cambio en las propiedades mecánicas del material y esta circunstancia incide sobre el modo de deformarse del mismo y sobre la potencia consumida, produciendo a su vez un cambio en la generación de calor. Así definido el ciclo de acoplamiento se ve la necesidad de invertir el esfuerzo del caso para su manejo adecuado.

En este capítulo se tratará del acoplamiento térmico-mecánico que tiene lugar en los procesos de conformado plástico. Luego de formular las ecuaciones básicas que gobiernan el problema, procedemos a mostrar la solución numérica del mismo, mediante su discretización en elementos finitos. Las características del problema requieren el uso de técnicas apropiadas para eliminar difusividades numéricas y oscilaciones espúreas en la solución. Se hace una reseña de las principales técnicas en uso, y se presenta otra basada en la formulación de un principio variacional, que permite una mayor justificación del camino seguido para alcanzar la solución numérica.

5.2 Ecuaciones básicas

Se comienza la formulación del problema acoplado con las ecuaciones del problema mecánico, teniendo en cuenta que ahora los parámetros que definen la ley viscoplástica son funciones de la temperatura. Simultáneamente se resuelve la

ecuación de transmisión del calor

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} \quad (5.1)$$

donde

$\frac{DT}{Dt}$	derivada material de la temperatura respecto al tiempo
ρ	densidad
c	calor específico
k	conductividad
\dot{q}	calor generado por unidad de volumen y tiempo

El término de generación \dot{q} es calculado como una fracción de la energía de deformación plástica, teniendo en cuenta que parte de dicha energía, por otro lado, se gasta en la recristalización

$$\dot{q} = f \sigma \dot{\epsilon} \quad (5.2)$$

Habitualmente el coeficiente f varía entre 0.75 y 0.95.

Para (5.1) tenemos como condiciones de contorno la fijación de flujos de calor

$$-k \nabla T = q + \alpha(T - T_a) = \Phi \quad \text{en } \Gamma_\Phi \quad (5.3)$$

o de temperaturas

$$T = T^* \quad \text{en } \Gamma_T \quad (5.4)$$

5.3 Discretización en elementos finitos

Al sistema de ecuaciones precedente se lo puede resolver numéricamente aplicando las técnicas usuales del método de los elementos finitos, donde se tendrá además de las variables correspondientes a los grados de libertad de la velocidad y de la presión, los de la temperatura.

Sin embargo, es un fenómeno muy frecuente en problemas de convección-difusión el obtener oscilaciones espúreas en la solución. Esto se debe a que en la teoría del método de los elementos finitos se asegura la convergencia de la solución numérica a la exacta cuando el problema que se trata se representa con

un operador autoadjunto. Observando el balance de energía térmica (5.1), se ve que la ecuación pierde el carácter elíptico cuando el término convectivo adquiere importancia frente al de difusión. El peso relativo de ambos términos se mide con el número adimensional de Peclet

$$Pe = \frac{|\mathbf{u}|L\rho c}{k} \quad (5.5)$$

donde

- L longitud característica
- $|\mathbf{u}|$ módulo de la velocidad del fluido

En rigor, el mismo problema existiría en la resolución del problema mecánico, si se considera el término convectivo del balance de cantidad de movimiento. Sin embargo, a causa de las bajas velocidades (bajo número de Reynolds, considerando al metal como un fluido) a que se desarrollan los procesos de conformado de metales, no existen problemas de oscilaciones en la solución en velocidades. Más aun, es habitual no incluir esos términos en la formulación, sin perjuicio de la validez de la solución.

Con relación a la resolución numérica de (5.1) se hace uso del número local de Peclet, γ , en el que la longitud característica se toma con relación a la malla que se está utilizando. Concretamente, si

$$\gamma = \frac{\bar{u}h\rho c}{k} > 2 \quad (5.6)$$

donde

- h tamaño de la malla
- \bar{u} máxima velocidad dentro del elemento

se observan oscilaciones en la solución cuando, en diferencias finitas, se utiliza para la aproximación de las derivadas un esquema centrado (Heinrich *et al.*, 1977a).

Las técnicas que se utilizan para subsanar este problema coinciden en producir esquemas no centrados que dan una mayor importancia a la solución que viene de "corriente arriba". Por esta circunstancia se las conoce en la literatura como técnicas de *upwind*. En todos los casos se agrega una difusividad artificial de modo que restablezca las condiciones de estabilidad.

Al considerar la solución de (5.1) mediante un esquema en diferencias, se observó inicialmente que aproximando la derivada primera con un esquema no centrado (adelantado), las oscilaciones en la solución desaparecían. Sin embargo el resultado numérico así obtenido contiene errores por un exceso de difusividad. En efecto, el esquema no centrado (adelantado) introduce una difusividad artificial que puede cuantificarse considerando los respectivos operadores en diferencias:

$$\begin{array}{l} u \frac{1}{2h} (-1 \ 0 \ 1) \quad \text{centrado} \\ + \frac{uh}{2} \frac{1}{h^2} (-1 \ 2 \ -1) \quad \text{centrado de 2do orden} \\ \hline u \frac{1}{h} (-1 \ 1 \ 0) \quad \text{no centrado (adelantado)} \end{array}$$

En cuanto a la solución numérica alcanzada con esquemas centrados para casos de bajo número de Peclet, en los que no aparecen oscilaciones, resultan con un defecto de difusividad. Esta observación, junto con la mejora en las soluciones aportada por el uso combinado de esquemas central y de *upwind* permite concluir que el modelo numérico está introduciendo, para el caso de diferencias centradas, una difusividad negativa, que se compensa agregando una cantidad adecuada de difusividad numérica. Este análisis tiene su equivalente en elementos finitos aplicando, respectivamente, funciones de ponderación simétricas o no simétricas.

En problemas unidimensionales resulta sencillo determinar el parámetro que regula la contribución de los esquemas centrado y de *upwind*. Conocida la solución exacta, puede establecerse dicho parámetro de modo de tener error nulo en los nodos. Por esta razón los distintos métodos de *upwind* dan resultados coincidentes para el caso en una dimensión, basados en una expresión de Christie *et al.* (1976), que da los valores óptimos de la difusividad artificial en función del número local de Peclet.

Las dificultades aparecen al intentar la solución de problemas multidimensionales, en los que se busca el modo de aplicar en una determinada dirección los valores de los parámetros que resultan en una dimensión. El éxito de estos esquemas es variado, en general muy aceptable en los casos prácticos. Se suelen señalar como inconvenientes la introducción de difusividad artificial en dirección normal al flujo y la consistencia de los esquemas en cuanto al manejo de términos fuente y en problemas dependientes del tiempo. En cuanto a la evaluación de los parámetros

que introducen la difusividad artificial, se ha señalado (Brooks y Hughes, 1982), que no es tan importante su valor concreto cuanto la estructura de las funciones de ponderación. Dicha estructura toma formas particulares según la técnica de que se trate. Así, en la formulación Petrov-Galerkin (Heinrich *et al.* 1977 a y b) se plantea el método de los residuos ponderados usando funciones de ponderación asimétricas, que dan mayor importancia a la solución que viene en dirección de la corriente. La formulación resultante es, de esta forma, consistente, ya que todos los términos de la ecuación están multiplicados por la misma función de ponderación. Resultados muy semejantes en casos estacionarios y sin términos fuente se obtienen con la "disipación artificial" (Kelly *et al.*, 1980), en la que se introduce el *upwind* a través de la adición de una difusividad artificial anisotrópica, no nula solamente en la dirección del flujo másico. Resulta una formulación más sencilla en cuanto a su implementación, ya que se usan como funciones de ponderación las mismas funciones de forma. Tal como señalan Yu y Heinrich (1986), semejante esquema conduce a algoritmos inconsistentes en su aplicación a problemas dependientes del tiempo, ya que al ser la difusividad artificial equivalente a las funciones de ponderación no simétricas para los términos convectivos, resulta que los distintos términos de la ecuación no están ponderados todos con una misma función. La preocupación general al concebir un esquema de *upwind* es no introducir difusividad artificial en dirección normal al flujo. Si esto no se consigue, los resultados se alejan mucho de la realidad. Otra propuesta consiste en modificar la regla de integración numérica por cuadratura para el término convectivo, de manera de tener el efecto del *upwind*. Este método fue introducido por Hughes (1978). Finalmente, existe la llamada formulación "Streamline Upwind / Petrov Galerkin" (SU/PG) (Brooks y Hughes, 1982), en la que, recogiendo el concepto de Kelly *et al.* (1980) de difusividad anisotrópica agregada a la del problema real, aplica también funciones de ponderación distintas de las de forma pero que, sin embargo, no necesitan tener un grado mayor que las de forma. Frente a estos esquemas, Hughes y Atkinson (1978) propusieron la obtención de los parámetros de *upwind* mediante un principio variacional. Su aplicación no se difundió por requerir la solución de un sistema auxiliar del mismo tamaño que el problema original. Posteriormente Idelsohn (1988) logró soluciones mediante la aplicación de principios variacionales localizados y en forma discreta, que hicieron posible la aplicación de estos métodos por la gran mejora alcanzada en cuanto al costo de la solución. El interés de los mismos está en que posibilita la aplicación del *upwind*

ofreciendo una justificación más rigurosa que los otros esquemas, y resulta directo el tratamiento de problemas multidimensionales.

En lo que sigue se presentan brevemente estos métodos para luego considerar la formulación basada en un principio variacional, que se utilizará para el tratamiento del problema termomecánico acoplado del conformado de metales. La primera aplicación de las técnicas clásicas a estos problemas fue llevada a cabo, con el esquema Petrov–Galerkin (Heinrich *et al.*, 1977 a y b), por Zienkiewicz *et al.*, (1981).

i) *Esquemas de upwind*

i.a) *Esquemas Petrov–Galerkin*

Expresamos (Heinrich *et al.* 1977b) la forma débil de (5.1) como

$$\int_{\Omega} \mathbf{W}^T (\nabla \cdot k \nabla T - \frac{DT}{Dt}) d\Omega = 0 \quad (5.7)$$

que, para problemas en estado estacionario, queda

$$\int_{\Omega} \mathbf{W}^T (\nabla \cdot k \nabla T - \mathbf{u} \cdot \nabla T) d\Omega = 0 \quad (5.8)$$

donde T es tal que cumple las condiciones de contorno (5.3) y (5.4) impuestas. Por aplicación del teorema de la divergencia podemos expresar igualmente

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{W})^T \cdot k \nabla T d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{W}^T (\mathbf{u} \cdot \nabla T) d\Omega = 0 \quad (5.9)$$

En este problema se tiene la condición

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (5.10)$$

donde no se especifique otra cosa. La condición de contorno natural es, pues, que la frontera es adiabática.

La función de ponderación $W_i = W_i(x, y)$ ya no será como en la aproximación tipo Galerkin la misma función de forma N_{T_i} con que se expresa

$$T = N_{T_i} T_i^N = N_T \{T^N\}. \quad (5.11)$$

Para un problema unidimensional podemos expresar (figura 1)

$$\begin{aligned} W_{i+1} &= N_{T_{i+1}} + \alpha F(x) \\ W_i &= N_{T_i} - \alpha F(x) \end{aligned} \quad (5.12)$$

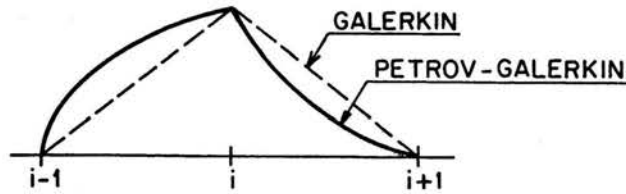


Figura 1. Funciones de ponderación en el esquema Petrov-Galerkin

para el elemento que conecta los nodos $(i, i + 1)$. Para determinar el parámetro α , se adopta una función $F(x)$ que se anule en los nodos y que, en cada elemento cumpla $\int_0^h F(x) dx = \frac{1}{2}h$, por ejemplo

$$F(x) = \frac{3}{h^2} x(h - x) \quad (5.13)$$

En estas condiciones se llega, a partir de (5.9) a la ecuación en diferencias

$$\left(1 + \frac{\gamma}{2}(\alpha + 1)\right) T_{i-1} - (2 + \gamma\alpha) T_i + \left(1 + \frac{\gamma}{2}(\alpha - 1)\right) T_{i+1} = 0 \quad (5.14)$$

en la cual γ es el número local de Peclet, definido en (5.6). La solución exacta de (5.14) es de la forma

$$T_i = A + B \left[\frac{1 + (\alpha + 1)\gamma/2}{1 + (\alpha - 1)\gamma/2} \right]^i \quad (5.15)$$

Esta solución no es oscilatoria para

$$\gamma < 2 \quad , \quad \alpha = 0 \quad (5.16a)$$

ó

$$\gamma \geq 2 \quad , \quad \alpha \geq 1 - \frac{2}{\gamma} \quad (5.16b)$$

Christie et al. (1976), han demostrado que tomando

$$\alpha = \alpha_0 = \coth \frac{\gamma}{2} - \frac{2}{\gamma}, \quad (5.17)$$

se tiene un error nulo en la ecuación en diferencias (5.14).

Al extender este planteo al caso en dos o más dimensiones se procede análogamente a la construcción de las funciones de forma bidimensionales a partir de las unidimensionales, como se hace en elementos de tipo Lagrange

$$W_i = W_i(\xi)W_i(\eta) \quad (5.18)$$

En elementos bilineales se hace la evaluación de las $W_i(\xi)$ y $W_i(\eta)$ en los lados correspondientes, con la obtención para cada uno de ellos de los parámetros α_{ij} ó β_{ik} donde i es el nodo cuya función de ponderación se calcula y j ó k es el nodo con el cual i forma un elemento unidimensional en donde se aplica el procedimiento señalado previamente. En cada caso se toma la proyección de la velocidad media en cada lado sobre la dirección del lado

$$\mathbf{u}_{ij} = (\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{l}_{ij}/2. \quad (5.19)$$

sin suma sobre i, j .

Las mismas ideas puestas en juego para elementos lineales han sido aplicadas para elementos cuadráticos (Heinrich, 1977b). En este caso, las (5.12) quedan

$$W_i = N_{T_i}(x) - \alpha F(x) \quad \text{nodos extremos} \quad (5.20)$$

$$W_i = N_{T_i}(x) - 4\beta F(x) \quad \text{nodo central} \quad (5.21)$$

Para la función F se toma un polinomio de tercer grado y como solución de la ecuación en diferencias resultante se tiene

$$T_i = A + B \left[\frac{1 + (4/\gamma)(1 + \beta)}{1 - (4/\gamma)(1 - \beta)} \right]^i \quad (5.22)$$

La solución no será oscilatoria si

$$\beta = 0 \quad ; \quad \gamma < 4 \quad (5.23a)$$

o bien si

$$\beta \geq \beta_c = 1 - 4/\gamma \quad (5.23b)$$

y en cuanto a α , se tiene la misma condición que para el caso lineal. Los valores óptimos resultan

$$\beta = \beta_0 = \coth(\gamma/4) - 4/\gamma \quad (5.24)$$

$$\alpha = \alpha_0 = 2 \tanh(\gamma/2) \left(1 + \frac{3\beta_0}{\gamma} + \frac{12}{\gamma^2} \right) - \frac{12}{\gamma} - \beta_0 \quad (5.25)$$

En el caso bidimensional nuevamente se tienen seis parámetros α (correspondientes a nodos extremos) y seis β (de nodos centrales), que surgen de considerar los seis elementos unidimensionales de tres nodos determinados por los nodos del elemento bidimensional.

Este procedimiento resulta práctico y en su aplicación demuestra eliminar las oscilaciones en la temperatura, aunque, así como en el caso unidimensional se obtienen valores óptimos para los coeficientes, no queda justificada la aplicación de los mismos óptimos en dos dimensiones. Las principales críticas que ha recibido este esquema (Kelly *et al.*, 1980) se basan en que es susceptible de introducir disipación numérica en dirección normal al flujo. Estos autores a su vez han propuesto el esquema tratado en el apartado siguiente.

i.b) *Difusividad Artificial*

En este método (Kelly *et al.*, 1980) se propone agregar una difusividad igual y de signo contrario a la difusividad negativa que se observa en esquemas centrados. Así, para el caso unidimensional se tendría

$$k' = \frac{1}{2}\alpha|u|h \quad (5.26)$$

donde k' se suma a la difusividad física k en (5.1). Para introducirla sólo en la dirección del flujo, se propone hacerlo mediante el tensor anisótropo

$$\underline{\underline{k}}' = \begin{bmatrix} k' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

En (5.27), $\underline{\underline{k}}'$ está expresado en la base ortogonal que definen los ejes (r, s) , donde r tiene la misma dirección del flujo. Para la resolución se aplica simplemente una rotación del tensor $\underline{\underline{k}}'$ a los ejes globales y se suma al tensor $\underline{\underline{k}} = k\underline{\underline{I}}$, isótropo, de la difusividad real. Las funciones de ponderación usadas son las mismas funciones de forma, y a cambio se introducen derivadas cruzadas en la discretización.

Con esta técnica, al tener una formulación de tipo Bubnov-Galerkin se generaliza de manera más racional (y también más elegante) el problema de convección-difusión a casos en dos y tres dimensiones, en comparación con el esquema de Petrov-Galerkin. Inclusive la interpolación de la velocidad para determinar la dirección de los ejes (r, s) , donde el tensor $\underline{\underline{k}}'$ se diagonaliza, puede hacerse, en forma mucho más precisa, en cada punto de integración.

Los resultados obtenidos con este método no muestran diferencias sustanciales con los que da el método de Petrov-Galerkin. En ambos casos, además, se aplica el criterio de asimilar el problema a uno unidimensional en lo referente a evaluar los coeficientes que introducen el *upwind*.

i.c) Formulación SU/PG (Streamline Upwind/Petrov-Galerkin)

Esta formulación arranca del esquema de difusividad artificial (*i.b*), con la intención de superar sus falencias. En efecto, en dicho esquema se tiene una inconsistencia en las funciones de ponderación cuando se tratan problemas transitorios y/o con generación de calor. Esta inconsistencia resulta porque la difusividad artificial que se agrega es equivalente a usar funciones de ponderación no simétricas para el término convectivo, mientras se siguen usando las funciones de ponderación simétricas para los otros términos. De aquí resulta la necesidad de aplicar el *upwind* a todos los términos de la ecuación. Así, manteniendo la ausencia de *upwind* transversal a la dirección del flujo, se logra una formulación consistente.

Se parte del esquema de difusividad artificial, la cual se aplica mediante una modificación de la función de ponderación para el término convectivo. La función modificada así obtenida se aplica para todos los términos de la ecuación, y de esta manera se logra el efecto deseado. El método se ha desarrollado sobre los siguientes supuestos:

- 1) elementos rectangulares (jacobiano constante);
- 2) funciones de forma multilineales;
- 3) isotropía en la difusividad.

En estas condiciones las funciones de ponderación discontinuas que resultan son válidas. Si los elementos no son rectangulares pero no excesivamente distorsionados las conclusiones se podrán aceptar con una aproximación razonable.

Dada la ecuación del balance térmico (5.1), llevamos a cabo una formulación en residuos ponderados usando funciones de ponderación de la forma

$$W_i = N_{Ti} + \tilde{p}, \quad (5.28)$$

donde \tilde{p} es una función discontinua y es la que introduce el *upwind*. De aquí

resulta la expresión equivalente a (5.9), pero ahora ya con la ecuación completa

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}_T^T (T_{,t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}_T^T \cdot \underline{\mathbf{k}} \cdot \nabla T d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \tilde{p}(T_{,t} + \mathbf{u} T - \nabla \cdot (\underline{\mathbf{k}} \cdot \nabla T) - \dot{q}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}_T^T \dot{q} d\Omega + \int_{\Gamma_*} \mathbf{N}_T^T \Phi d\Gamma, \tag{5.29}$$

donde los Ω^e indican los dominios de los elementos, que cumplen

$$\bigcup_e \overline{\Omega^e} = \Omega \tag{5.30}$$

$$\bigcap_e \Omega^e = \emptyset \tag{5.31}$$

$\overline{\Omega^e}$ indica el elemento e con su frontera,

$$\overline{\Omega^e} = \Omega^e \cup \Gamma^e. \tag{5.32}$$

Definimos la frontera interior como

$$\Gamma_{int} = \bigcup_e \Gamma^e - \Gamma \tag{5.33}$$

Considerando el balance a través de un punto perteneciente a la frontera interior definimos el “salto” en el flujo transmitido por difusión como

$$[\Phi_n^d] = [(-\underline{\mathbf{k}} \cdot \nabla T)^+ - (-\underline{\mathbf{k}} \cdot \nabla T)^-] \cdot \mathbf{n}^+ = (-\underline{\mathbf{k}} \cdot \nabla T)^+ \cdot \mathbf{n}^+ + (-\underline{\mathbf{k}} \cdot \nabla T)^- \cdot \mathbf{n}^- \tag{5.34}$$

donde \mathbf{n} es el vector normal a la frontera interior en el punto considerado y los supraíndices corresponden a los lados positivo y negativo definidos arbitrariamente con respecto a la frontera interior.

La ecuación (5.29), mediante integración por partes resulta

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{\Omega^e} \mathbf{W}^T (T_{,t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot (\underline{\mathbf{k}} \cdot \nabla T) - \dot{q}) d\Omega \\ - \int_{\Gamma_*} \mathbf{N}_T^T (-\underline{\mathbf{k}} \cdot \nabla T + \Phi) d\Gamma - \int_{\Gamma_{int}} \mathbf{N}_T^T [\Phi_n^d] d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Claramente se ve que las ecuaciones de Euler-Lagrange son el balance térmico (5.1) restringido al interior de los elementos, la condición de contorno (5.3), y la condición de continuidad del flujo de calor por difusión a través de la frontera interior,

$$[\Phi_n^d] = 0. \quad (5.36)$$

Se puede observar que la parte de las funciones de ponderación que introduce el *upwind*, \tilde{p} , pondera solamente en el interior de los elementos y por lo tanto no afecta las condiciones de continuidad (5.36) ni interviene en la ponderación de Φ . Por otra parte, para las condiciones 1 a 3 indicadas más arriba, se anulará la divergencia del flujo de calor por difusividad, $\nabla \cdot (\underline{\mathbf{k}} \cdot \nabla T) = 0$, y por lo tanto, como se observa en (5.29), el término de difusividad no aparece ponderado por las funciones \tilde{p} . Sin embargo esto no sucede necesariamente así cuando los elementos no son rectangulares y/o se usan elementos de mayor orden.

En cuanto a la obtención de las funciones \tilde{p} , recurrimos al tensor de difusividad artificial introducido en i.b, con el cual el término de difusión quedaría

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}_T^T \cdot (\underline{\mathbf{k}} + \underline{\mathbf{k}}') \cdot \nabla T d\Omega \quad (5.37)$$

Como se ha visto esto equivale a modificar la función de ponderación para el término convectivo

$$\int_{\Omega} (\mathbf{N}_T + \tilde{p})^T \mathbf{u} \cdot \nabla T d\Omega. \quad (5.38)$$

Escribiendo el tensor de difusividad artificial como

$$\underline{\mathbf{k}}' = k' \hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{u}}, \quad (5.39)$$

donde $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$ es el versor de dirección coincidente con la velocidad, resulta

$$\tilde{p} = k' \frac{\nabla N_T^T \cdot \hat{\mathbf{u}}}{\|\mathbf{u}\|} \quad (5.40)$$

La figura 2 muestra el aspecto de la función de ponderación resultante

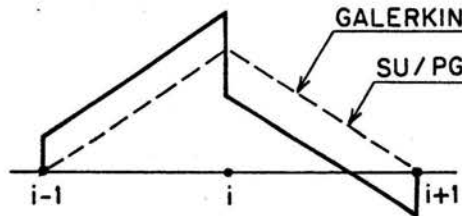


Figura 2. Función de ponderación para el esquema SU/PG

ii) Esquema de *upwind* mediante un principio variacional

Ante esa falta de justificación en la evaluación de los coeficientes de *upwind* para casos multidimensionales se ha buscado un criterio mejor fundamentado para determinar la disipación artificial que es necesario introducir. No se trata simplemente de una cuestión de interés académico: en muchos esquemas de *upwind*, si no se da con los valores correctos de los coeficientes para ponderar la solución proveniente de una determinada dirección, se podrá, probablemente, eliminar las oscilaciones, pero a cambio de una pérdida innecesaria en la exactitud en la solución. En este sentido, Idelsohn (1988) ha propuesto una técnica basada en la construcción de un principio variacional del cual surgen los valores requeridos. Como el planteo se expresa en forma de operadores, su generalización a casos de más de una dimensión es inmediata. Es más, como se verá, el caso unidimensional se obtiene como una particularización de las expresiones más generales. Esta técnica ha sido aplicada al problema en temperaturas asociado a los procesos de conformado de metales. Ya se ha señalado el acoplamiento que existe entre ambos problemas.

ii.a) Construcción del principio variacional

Dada la ecuación

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{w})}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{w}) + \nabla \cdot (\mathbf{G}(\nabla \mathbf{w})) = 0, \quad (5.41)$$

con la que se describe una gran variedad de problemas, y en la que

$$G^i = -K^{ij} \varepsilon^j \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_l} \right), \quad (5.42)$$

siendo \mathbf{H} , \mathbf{F} , \mathbf{G} y ε vectores, y \mathbf{w} la variable vectorial del problema, y donde se dan como condiciones iniciales

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 \quad \text{para } t = t_0, \quad (5.43)$$

y condiciones de contorno

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_\Gamma \quad \text{sobre } \Gamma_w \quad (5.44)$$

y

$$h \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} \right) = h_\Gamma \quad \text{sobre } \Gamma_h \quad (5.45)$$

Partiendo de condiciones iniciales conocidas expresamos (5.41) integrada en un paso de tiempo según un esquema general de integración con dos puntos

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}(\mathbf{w}) - \mathbf{H}(\mathbf{w}_0) + \theta_1 \Delta t \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{w}) \\ & + \theta_2 \Delta t \nabla \cdot \mathbf{G} + (1 - \theta_1) \Delta t \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{w}_0) + (1 - \theta_2) \Delta t \nabla \cdot \mathbf{G}(\mathbf{w}_0) = 0 \end{aligned} \quad (5.46)$$

que puede expresarse también, agrupando la parte correspondiente al estado inicial, conocido, \mathbf{w}_0

$$\mathbf{H}(\mathbf{w}) + \theta_1 \Delta t \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{w}) + \theta_2 \Delta t \nabla \cdot \mathbf{G}(\mathbf{w}) + \mathbf{H}_0 = 0 \quad (5.47)$$

Buscamos un funcional tal que al hacerse estacionario ante variaciones de la variable \mathbf{w} satisfaga la ecuación (5.47). Mostraremos que el funcional

$$\mathcal{F}(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \left(-\varepsilon^{iT} Q \mathbf{G}^i \theta_2 \Delta t + \mathbf{w}^T Q \mathbf{H} \right) + \mathbf{w}^T Q \mathbf{H}_0 \right] d\Omega = 0 \quad (5.48)$$

cumple este requisito si, además, Q está definido de modo que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \delta \mathbf{w}^T (\theta_1 Q \nabla \cdot \mathbf{F} - \theta_2 \nabla Q \cdot \mathbf{G}) d\Omega = 0 \\ Q \neq 0 \quad \text{sobre } \Omega \end{cases} \quad (5.49)$$

Notemos que (5.48) toma la forma de un operador autoadjunto si recordamos (5.42) y tomamos un operador M tal que $\mathbf{H} = M\mathbf{w}$:

$$\mathcal{F}(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \left(\varepsilon^{iT} Q K^{ij} \varepsilon^j \theta_2 \Delta t + \mathbf{w}^T M Q \mathbf{w} \right) + \mathbf{w}^T Q \mathbf{H}_0 \right] d\Omega = 0 \quad (5.50)$$

Tomando variaciones en (5.48) se tiene

$$\delta \mathcal{F}(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \left[\delta \varepsilon^{iT} Q \mathbf{G}^i \theta_2 \Delta t + \delta \mathbf{w}^T Q \mathbf{H} + \delta \mathbf{w}^T Q \mathbf{H}_0 \right] d\Omega = 0 \quad (5.51)$$

Integrando por partes el primer término, siendo $\delta \mathbf{w} = 0$ sobre $\Gamma_{\mathbf{w}}$ resulta

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F}(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \delta \mathbf{w}^T Q (\nabla \cdot \mathbf{G} \theta_2 \Delta t + \mathbf{H} + \mathbf{H}_0) d\Omega + \\ \int_{\Omega} \delta \mathbf{w}^T \nabla Q \cdot \mathbf{G} \theta_2 \Delta t d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (5.52)$$

Reemplazamos la segunda integral teniendo en cuenta la condición (5.49)

$$\delta \mathcal{F}(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \delta \mathbf{w}^T Q (H + \theta_1 \Delta t \nabla \cdot \mathbf{F} + \theta_2 \Delta t \nabla \cdot \mathbf{G} + \mathbf{H}_0) d\Omega = 0 \quad (5.53)$$

siendo $\delta \mathbf{w}$ arbitrario y $Q \neq 0$, por (5.49), resulta la ecuación (5.47).

La condición (5.49) implica

$$\theta_1 Q \nabla \cdot \mathbf{F} = \theta_2 \nabla Q \cdot \mathbf{G} \quad (5.54)$$

ya que $\delta \mathbf{w}$ es arbitrario. Sin embargo, la resolución de (5.54) implica un esfuerzo del mismo orden de magnitud que el requerido en el problema principal, (5.47). Además, ya que en la práctica los $\delta \mathbf{w}$ quedan restringidos al subespacio de funciones determinado por las funciones de forma globales, pretender una solución general implica restringir innecesariamente el espacio de las Q posibles, para soluciones discretas. Por esto se usa una discretización basada en expresiones simples para las funciones Q .

El mismo desarrollo se simplifica si se pretende resolver problemas estacionarios en los que además la variable \mathbf{w} es un escalar, como la temperatura. En efecto, si particularizamos (5.41) para nuestro problema tendremos

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= T \\ \mathbf{H}(\mathbf{w}) &= T \\ \mathbf{F} &= \mathbf{u}T \\ \varepsilon &= \nabla T \\ K^{ij} &= k_{ij} \end{aligned} \quad (5.55)$$

y quedará

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot (k \nabla T) = q \quad (5.56)$$

teniendo en cuenta que el campo de velocidades tiene divergencia nula ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$).

Para el caso estacionario incluyendo el término de generación de calor tendremos

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{w}) + \nabla \cdot \mathbf{G}(\mathbf{w}) - q = 0 \quad (5.57)$$

Adoptemos ahora el funcional

$$\mathcal{F}(\mathbf{w}) = - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon^i T Q G^i + \mathbf{w} Q q \right) d\Omega \quad (5.58)$$

donde Q debe cumplir la misma condición (5.49).

Tomando variaciones será

$$\delta \mathcal{F}(\mathbf{w}) = - \int_{\Omega} \left(\delta \varepsilon^{iT} Q \mathbf{G} + \delta \mathbf{w} Q q \right) d\Omega \quad (5.59)$$

e integrando por partes

$$\delta \mathcal{F}(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \delta \mathbf{w}^T (\nabla Q \cdot \mathbf{G} + Q \nabla \cdot \mathbf{G} - Q q) d\Omega \quad (5.60)$$

e introduciendo (5.49) en (5.60)

$$\delta \mathcal{F}(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \delta \mathbf{w}^T Q (\nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G} - q) d\Omega = 0 \quad (5.61)$$

Por ser $\delta \mathbf{w}$ arbitraria y $Q \neq 0$ el cumplimiento de (5.61) equivale al de (5.57).

Para el problema en temperaturas el funcional nos queda

$$\mathcal{F}(T) = - \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \nabla T \cdot (Q \mathbf{k} \nabla T) + T Q q \right] d\Omega, \quad (5.62)$$

donde la función Q debe cumplir la condición

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \delta T (Q \mathbf{u} \cdot \nabla T - \nabla Q \cdot \underline{\mathbf{k}} \cdot \nabla T) d\Omega = 0 \\ Q \neq 0 \quad \text{sobre } \Omega \end{cases} \quad (5.63)$$

ii.b) *Discretización del principio variacional*

Una vez establecido el funcional (5.62), queda pendiente la obtención de Q según la condición (5.63). Al discretizar el funcional quedan a su vez tantas condiciones Q como grados de libertad tenga el problema de temperaturas (para nuestro caso), por ser arbitrarias las variaciones de cada uno de esos grados de libertad. Como consecuencia, la función Q , al satisfacer esas condiciones tendrá otros tantos parámetros que intervendrán en la expresión analítica de Q . En el caso de un problema unidimensional, con coeficientes \mathbf{F} y \mathbf{G} constantes las condiciones se reducen a una, y puede resolverse analíticamente. Resulta

$$Q = e^{xu/k}, \quad (5.64)$$

con la que se obtiene la solución exacta en los nodos.

En casos más generales puede procederse a una resolución numérica de (5.63), con la que se obtiene la función Q_d que aproxima a Q . Esta opción implica, sin embargo, resolver un problema de la misma magnitud que el inicial. Una tercera variante surge al considerar la resolución de (5.63) cuando se tiene expresada la variable (w o T) en términos de los valores nodales, a través de funciones de interpolación (funciones de forma)

$$T_d = \sum_{k=1}^n N_k T_k \quad (5.65)$$

donde n es el número de grados de libertad con que se discretiza, en nuestro caso, la temperatura.

Tomar una variación arbitraria de T_d conduce a un conjunto de variaciones arbitrarias de las variables nodales T_k

$$\delta T_d = \sum_{k=1}^n N_k \delta T_k \quad (5.66)$$

que, como son independientes, de la condición (5.63) resulta un conjunto de n condiciones discretas

$$\begin{cases} \int_{\Omega} N_k (Q_j \nabla \cdot \mathbf{F}_j - \nabla Q_j \cdot \mathbf{G}_j) d\Omega = 0 \\ Q \neq 0 \end{cases} \quad (5.67)$$

En las (5.67) se tiene en cuenta que las funciones de forma globales N_k tienen soporte compacto: son no nulas sólo en los elementos conectados por el nodo k , donde valen 1, valiendo 0 en todos los demás. Este hecho se indica con la integral extendida sobre

$$\Omega^* = \bigcup_{i=1}^{N_e} \Omega_{ki}^e \quad (5.68)$$

siendo Ω_{ki}^e el área de los elementos que contienen al nodo k .

Esta variante equivale a aplicar el principio variacional y la condición aneja en forma discreta y una vez por cada nodo. Para cada uno de ellos se obtiene la función Q_k asociada. La misma suele expresarse mediante un número reducido de parámetros, ya que por la localización de la formulación presentada no es necesario utilizar polinomios de grados altos. En consecuencia, de cada aplicación del principio variacional con la condición (5.67) resulta un pequeño sistema de ecuaciones cuya resolución comporta un esfuerzo numérico mucho menor que una solución a través de una única función Q_d global.

En la resolución se requiere evaluar las funciones \mathbf{F}_k y \mathbf{G}_k o sus derivadas. Un camino sencillo de hacerlo es a través de la solución numérica que ya se tenga para la temperatura. Se hace notar que el sistema queda así transformado en no lineal, y la solución se alcanza por iteraciones.

En cuanto a las funciones Q_k , su forma debe fijarse para obtener los parámetros. En la aplicación del método se han usado planos

$$Q_k = 1 + \sum_{i=1}^{N_d} a_i^k (x_i - x_i^k) \quad (5.69)$$

que equivale a tomar como función de ponderación la suma de la función de forma más un polinomio de segundo grado que se anula en los nodos; siendo este el caso de las técnicas de *upwind* tipo Petrov-Galerkin.

En más de una dimensión, ya que (5.67) es una ecuación escalar, se requiere imponer alguna condición adicional para determinar los parámetros de las Q_k . Sin embargo, los resultados son poco sensibles a la condición concreta que se adopte. Por razón de esta indeterminación resulta poco atractivo intentar lograr una mejora en la precisión del método por medio de funciones Q_k de grado más alto.

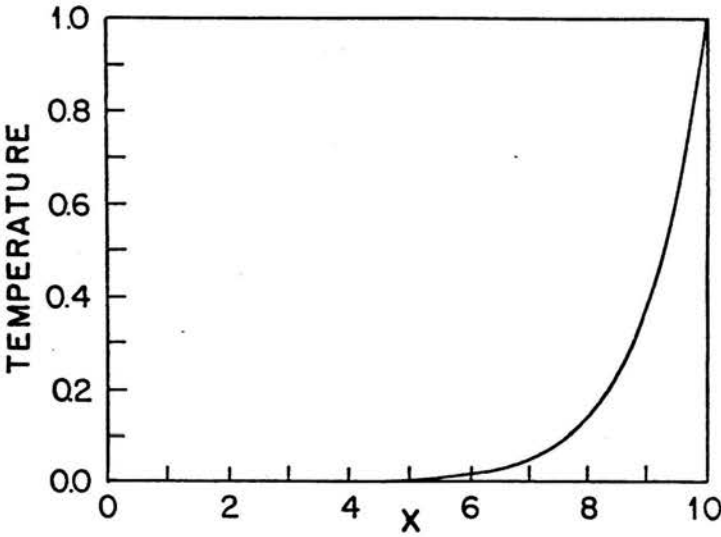


Figura 3. Caso unidimensional sin generación, Peclet = 10

5.4 Ejemplos de aplicación

i) Caso unidimensional

En una primera etapa se ha resuelto un problema desacoplado unidimensional de transferencia de calor para distintos valores del número adimensional de Peclet, de modo de probar el algoritmo.

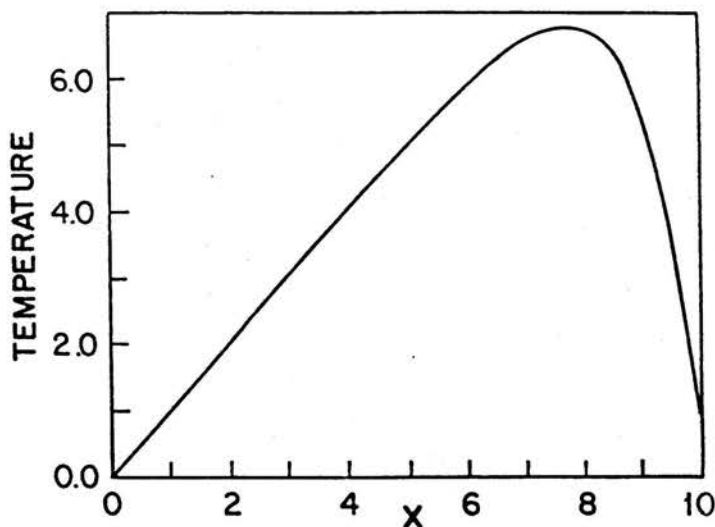


Figura 4. Caso unidimensional con generación, Peclet = 10

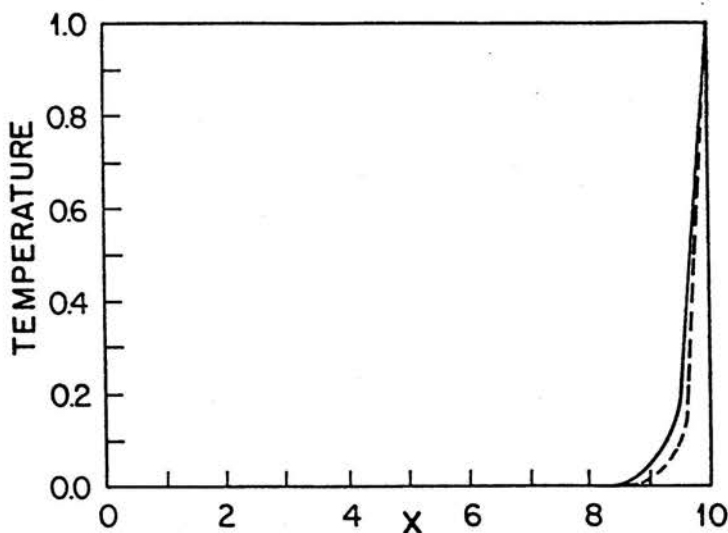


Figura 5. Caso unidimensional sin generación, Peclet = 50

Los resultados, recogidos en las figuras 3 a 8, muestran que nuestras soluciones están de acuerdo con las obtenidas con un esquema de *upwind* standard —donde los coeficientes son calculados de forma tal de producir una solución exacta (Heinrich *et al.*, 1977 a y b)— para valores relativamente bajos del número de Peclet,

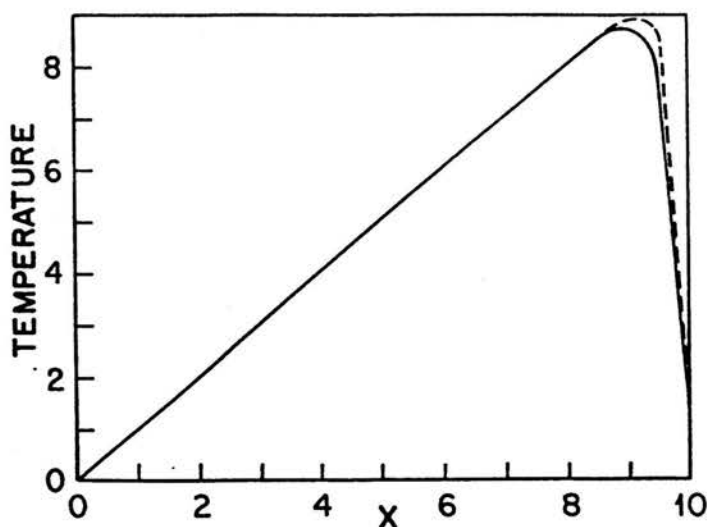


Figura 6. Caso unidimensional con generación, Pecllet = 50

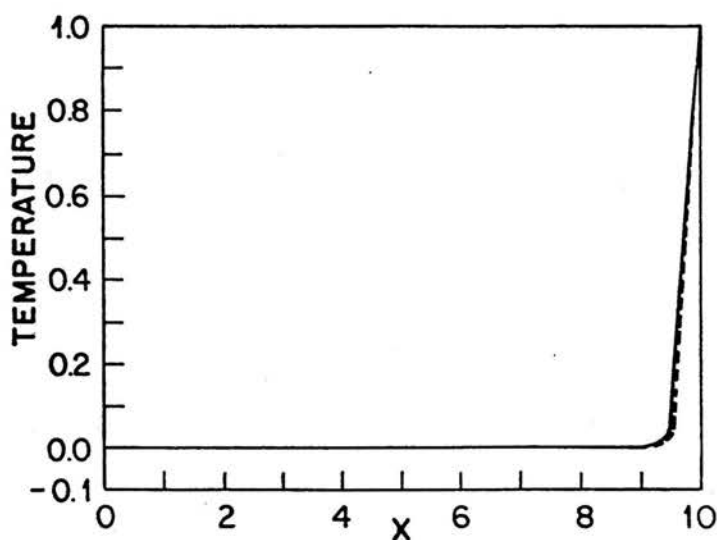


Figura 7. Caso unidimensional sin generación, Pecllet = 100

mientras que presentan leves diferencias para valores más altos. En estos caso se observa una mayor difusión cuando el esquema basado en el principio variacional es aplicado. La línea llena indica nuestra solución, y la línea de trazos, la obtenida con un esquema Petrov-Galerkin.

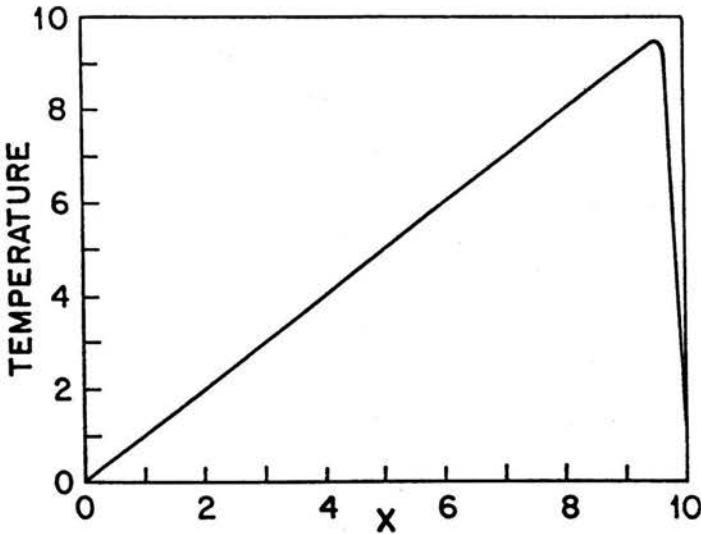


Figura 8. Caso unidimensional con generación, Peclet = 100

ii) *Caso bidimensional sin generación*

Posteriormente se ha resuelto el caso bidimensional sin generación de calor. La figura 9 muestra la configuración y las figuras 10 y 11 muestran los perfiles de temperatura para una velocidad de émbolo de 3.5 cm/s, logrados con un esquema estándar y mediante el principio variacional. Nuevamente se observa una difusión mayor en este último.

iii) *Caso bidimensional con acoplamiento térmico-mecánico*

Finalmente se ha resuelto el caso bidimensional con generación de calor por deformación plástica para dos velocidades de émbolo: 0.35 cm/s y 3.5 cm/s. Para la primera, que se muestra en la figura 12, las isotermas son idénticas a los obtenidos con un esquema standard. La figuras 13 y 14 comparan los perfiles de temperatura obtenidos por ambos métodos para el segundo caso. Puede observarse que se corresponden muy bien.

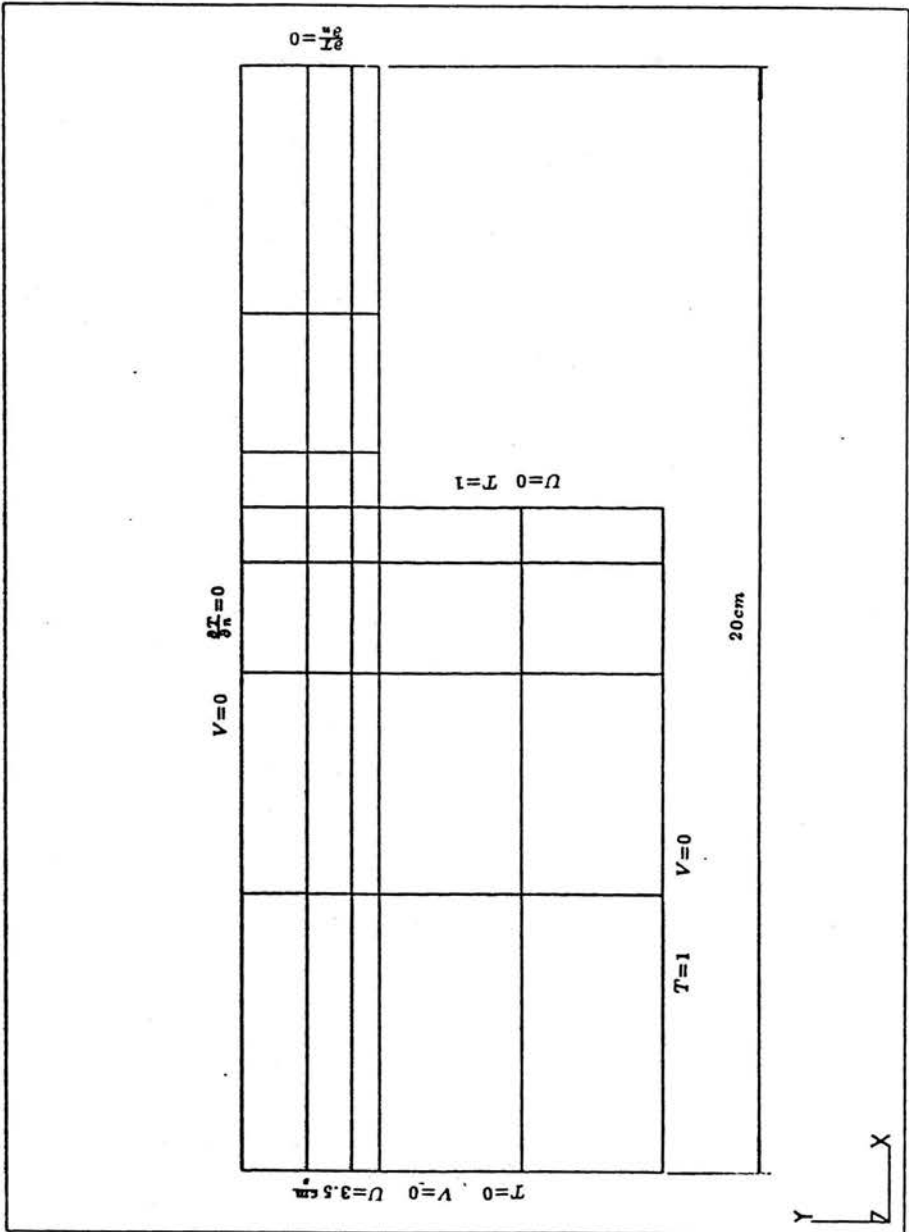


Figura 9. Convección-difusión sin generación. Configuración

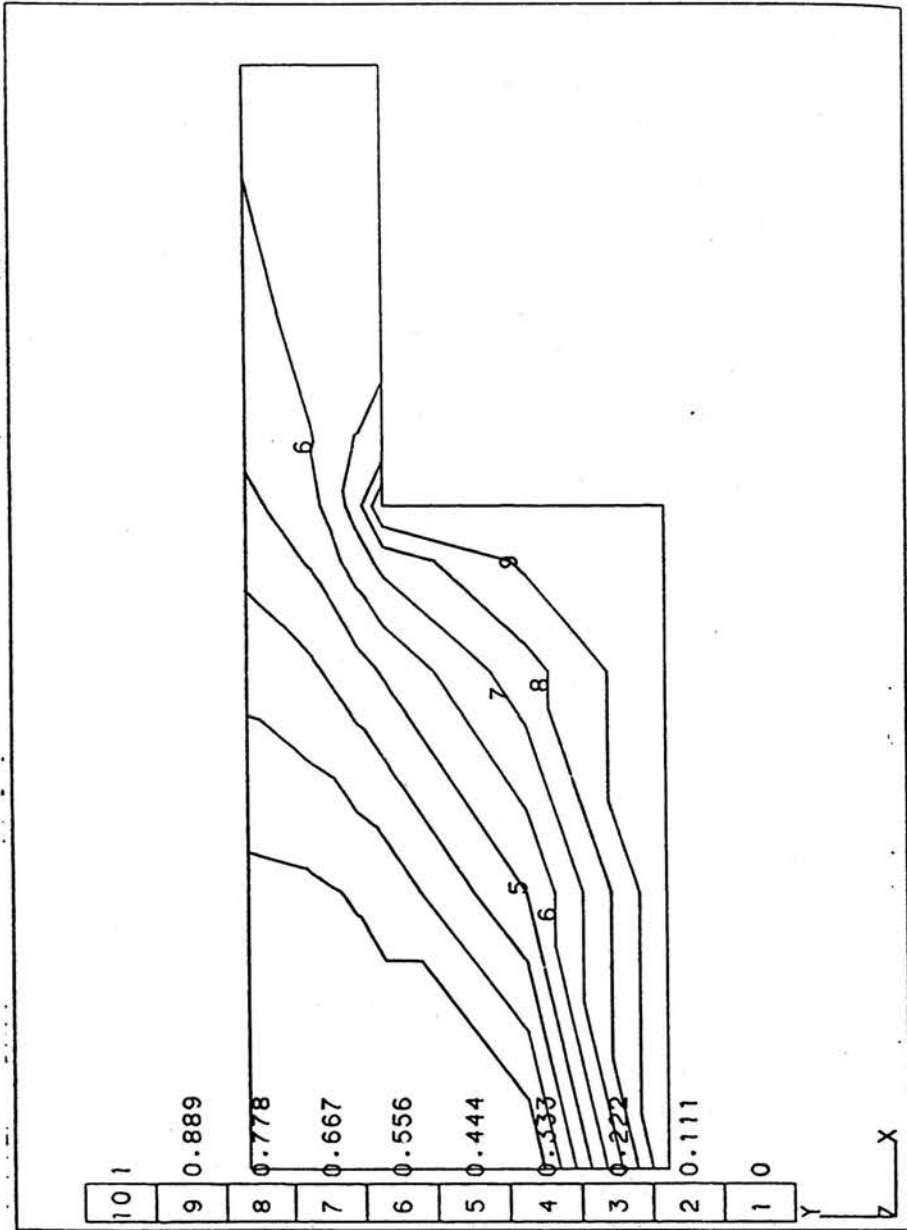


Figura 10. Convección-difusión sin generación: Esquema de *upwind* standard

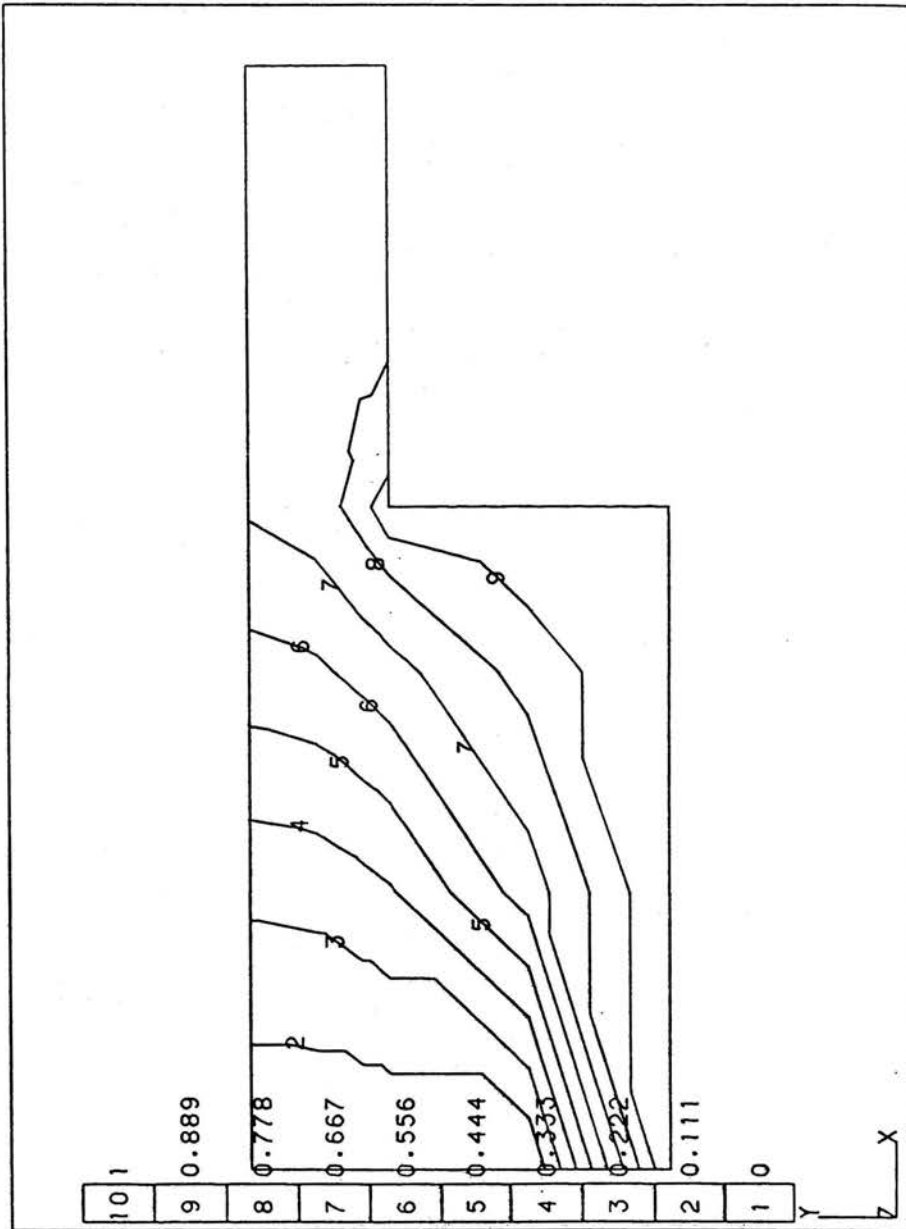


Figura 11. Convección-difusión sin generación: Esquema de *upwind* mediante principio variacional

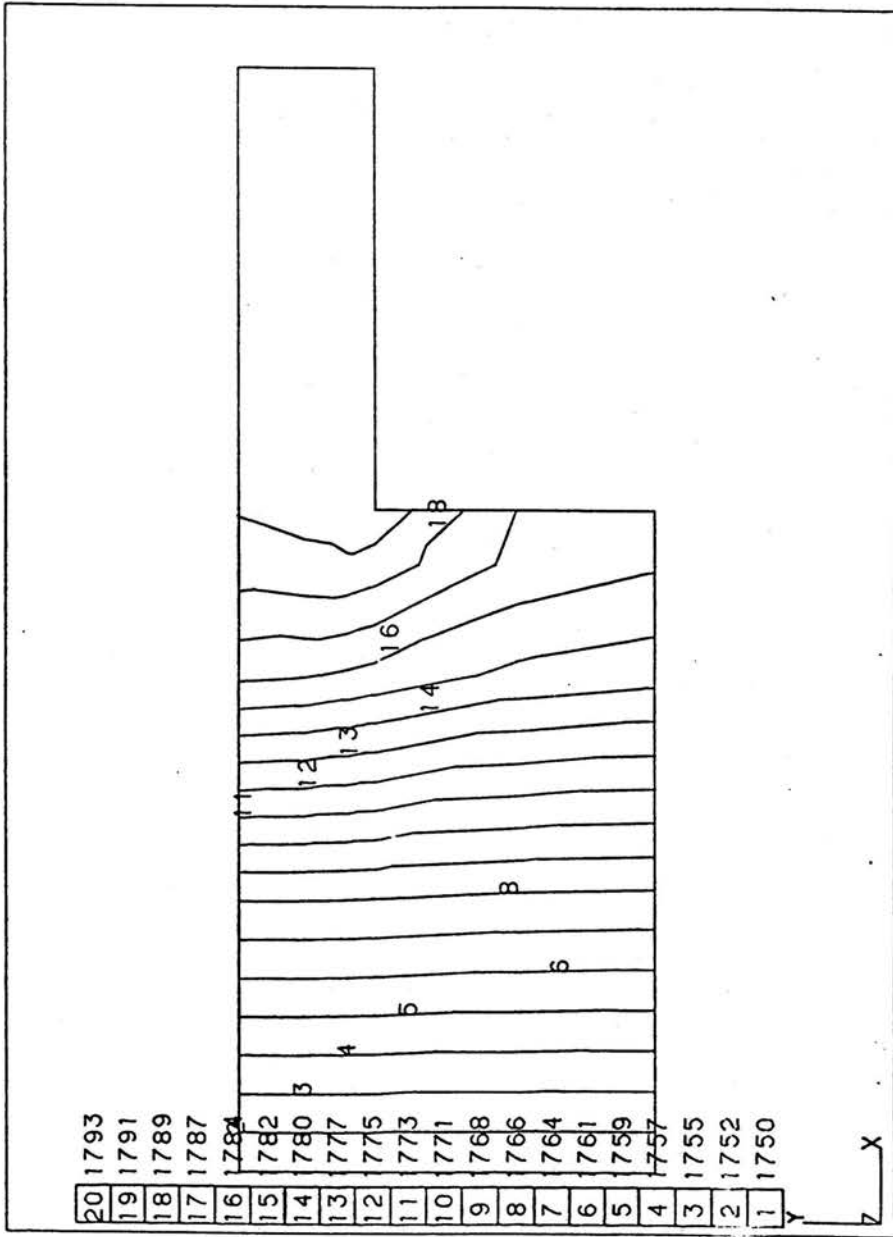


Figura 12. Convección-difusión acoplada con el problema de deformación plástica: soluciones por esquemas standard y mediante principio variacional. Velocidad del pistón: 0.35cm/s

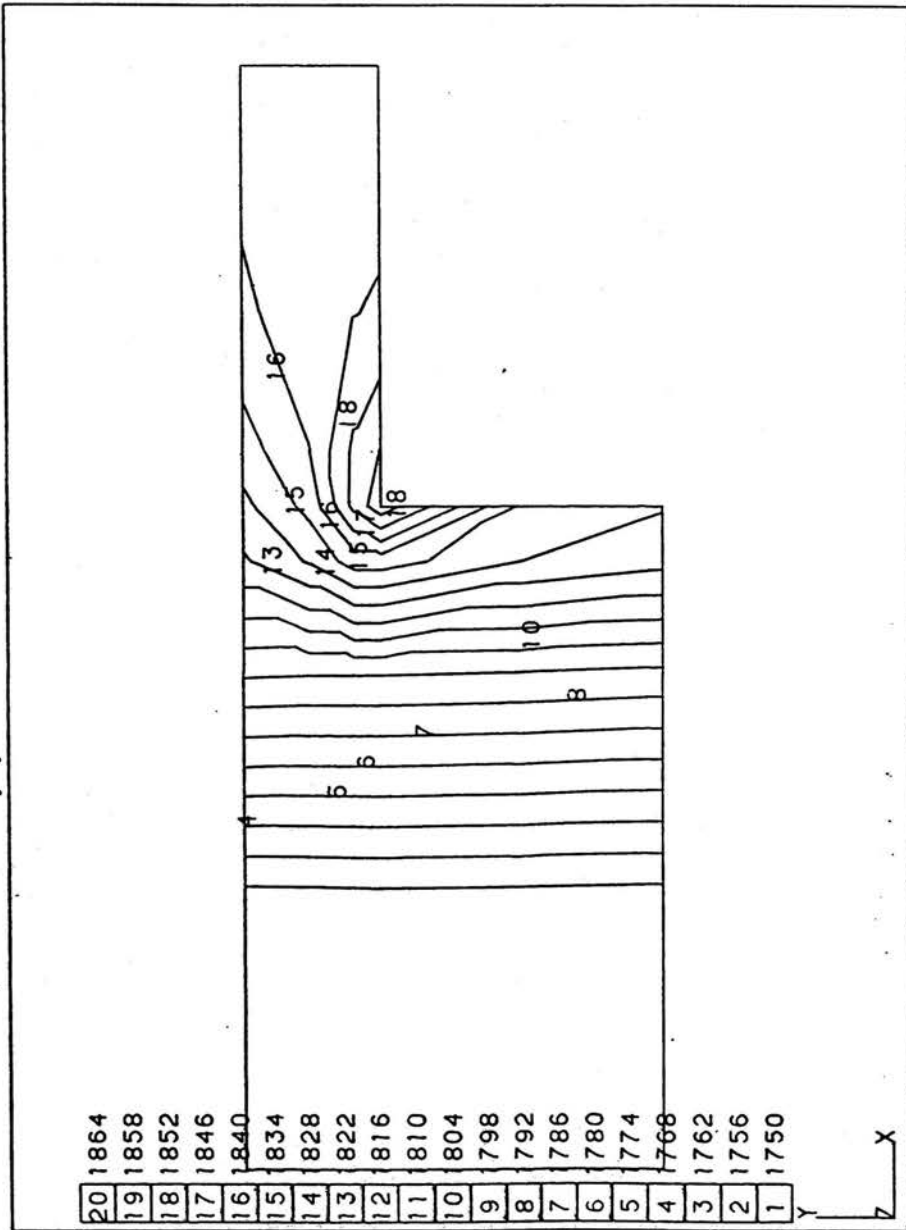


Figura 13. Convección-difusión acoplada con el problema de deformación plástica: solución por esquema standard. Velocidad del pistón: 3.5cm/s

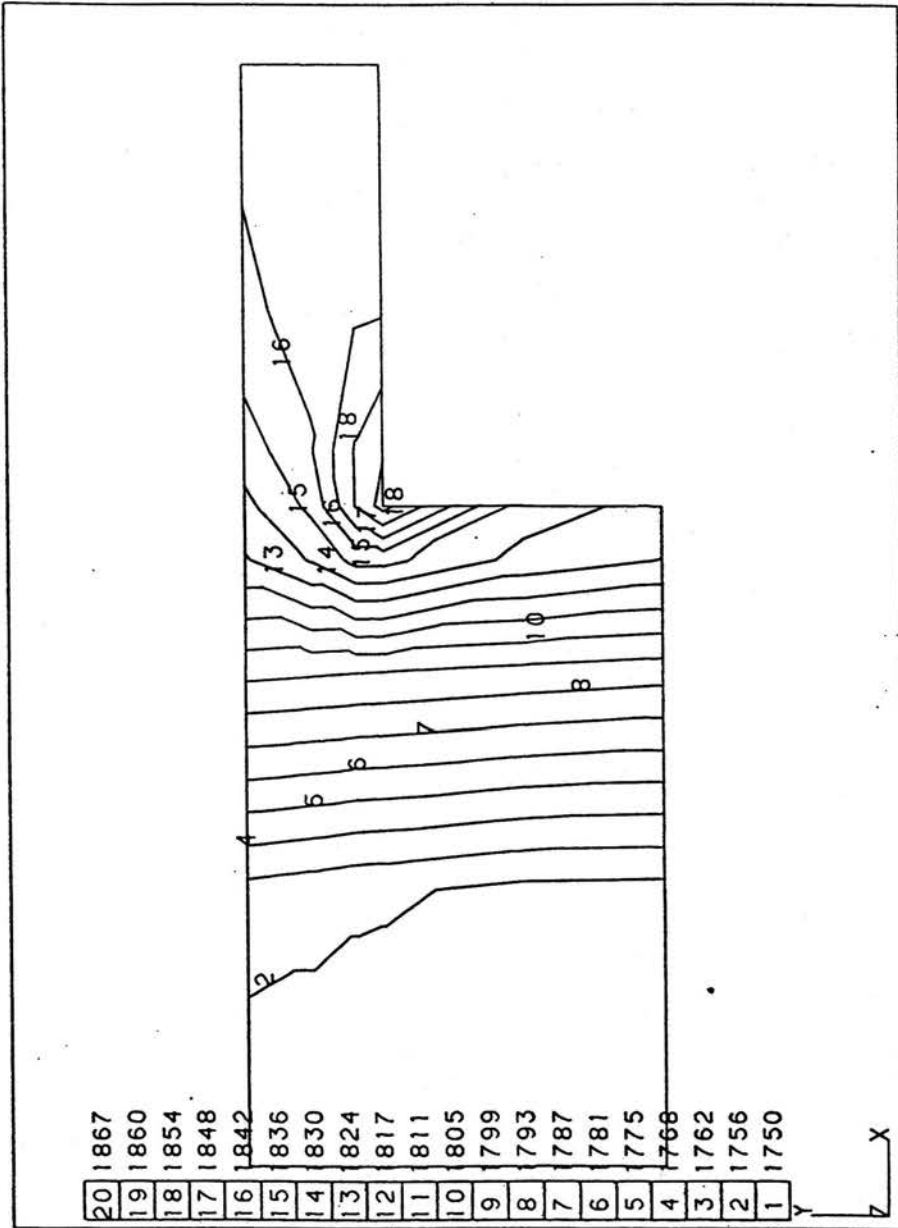


Figura 14. Convección-difusión acoplada con el problema de deformación plástica: soluciones mediante principio variacional. Velocidad del pistón: 3.5cm/s

5.5 Conclusiones

En este capítulo se ha tratado el problema del acoplamiento térmico en el conformado de metales. Se ha hecho hincapié en las técnicas de *upwind*, habituales en la resolución del balance de energía (5.1), y se han comparado los resultados de las técnicas usuales con los proporcionados por la técnica basada en la construcción de un principio variacional. La mayor difusividad relativa que se observa en éste con respecto a esquemas standard (figuras 10 y 11), se debe a que estos últimos, para bajos números de Peclet no introducen *upwind*, y por lo tanto no corrigen la difusividad negativa inherente a la discretización mencionada en la sección 5.3. No obstante, el principio variacional para la introducción del *upwind* convierte al problema lineal en uno no lineal: los parámetros buscados dependen de la solución en temperaturas, y así hay que iterar hasta lograr la convergencia de ambos juegos de variables. Podemos concluir que, por su mejor justificación este esquema de *upwind* puede ser usado para chequear otros esquemas propuestos, pero en general resultará más económico el uso de un esquema lineal suficientemente confiable, que tenga en cuenta esa corrección debida a la difusividad negativa introducida por la discretización.

REFERENCIAS

- Brooks, A. N. & Hughes, T. J. R., "Streamline Upwind Petrov Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier Stokes Equations", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, vol 32 (1982), pp. 199-259.
- Christie, I., Griffiths, D. F., Mitchell, A. R. & Zienkiewicz, O. C., "Finite Element Methods for Second Order Differential Equations With Significant First Derivatives", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol 10 (1976), pp. 1389-1396.
- Heinrich, J. C., Huyakorn, P. S., Mitchell, A. R. & Zienkiewicz, O. C., "An Upwind Finite Element Scheme for Two-Dimensional Convective Transport Equation", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol 11 (1977), pp. 131-143.

- Heinrich, J. C. & Zienkiewicz, O. C., "Quadratic Finite Element Schemes for Two Dimensional Convective Transport Problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol 11 (1977), pp. 1831-1844.
- Huetink, J., "Analysis of Metal Forming Processes based on a Combined Eulerian-Lagrangian Finite Element Formulation", en *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, J. F. T. Pittman, R. D. Wood, J. M. Alexander & O. C. Zienkiewicz, (eds.), Pineridge Press, Swansea, (1982).
- Hughes, T. J. R., "A Simple Scheme for Developing *upwind* Finite Elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol 12 (1978), pp. 1359-1365.
- Hughes, T. J. R. & Atkinson, J., "A Variational Basis for *Upwind* Finite Elements", *IUTAM Symposium on Variational Methods in the Mechanics of Solids*, Northwestern University, Evanston, IL (1978).
- Idelsohn, S. R., "Upwind Techniques via Variational Principles" *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol 28 (1988), pp. 769-784.
- Kelly, P., Nakazawa, A., Zienkiewicz, O. C., Heinrich, J. C., "A Note On Upwinding and Anisotropic Balancing Dissipation in Finite Elements Approximations to Convective Diffusion Problems", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol 15 (1980), pp. 1705-1711.
- Sakai, T. & Jonas, J. J., "Dynamic Recrystallization, Microscopic and Structural considerations", *Acta Metallurgica*, vol 32 (1984), pp. 231-255.
- Van der Lugt, J. & Huetink, J., "Thermal Mechanically Coupled Finite Element Analysis in Metal Forming Processes", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, vol 54 (1986), pp. 154-160.
- Yu, P. & Heinrich, J. C., "Petrov Galerkin Method for the Time Dependent Convective Transport Equation", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol 23 (1986), pp. 883-901.
- Zienkiewicz, O. C., "Flow Formulation for Numerical Solution of Forming Processes", en *Numerical Analysis of Forming Processes*, J. F. T. Pitt-

man, O. C. Zienkiewicz, R. D. Wood & J. M. Alexander, (eds.), Wiley, Chichester (1984), pp. 1–44.

Zienkiewicz, O. C., Oñate, E. & Heinrich, J. C., “A General Formulation for Coupled Thermal Flow of Metals using Finite Elements”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol 17 (1981), pp. 1497–1514.

PROCESOS TRANSITORIOS

6.1 Introducción

Hasta este punto se han estudiado procesos en los que ya se ha alcanzado un equilibrio en función del tiempo. Ha sido posible modelar en especial procesos de extrusión y de laminación de piezas suficientemente largas en donde puede considerarse válida esta hipótesis, tanto en lo que respecta al problema mecánico como al térmico que lleva acoplado. Si bien resulta una formulación limitada a los casos mencionados, es de interés por la gran simplificación que resulta en el planteo del problema, dando lugar a códigos de fácil manipulación.

En el presente capítulo se resolverán problemas planos y axisimétricos en régimen transitorio. De esta manera se amplía el rango de problemas que es posible analizar: la puesta en marcha de los procesos analizados con la formulación para estados estacionarios, la finalización de los mismos, y también una gran variedad de procesos en los que no puede hablarse de un estado estacionario, sino que permanecen en evolución desde el principio hasta el final. Este último caso, por otra parte, es sumamente frecuente entre los procesos de conformado plástico.

En la sección 2 se verá una breve reseña de los métodos vigentes para el análisis transitorio, analizando las características con relación a cada tipo de procesos en la sección 3. En las tres secciones siguientes se presenta el método de la pseudo-concentración, que será ilustrado en la sección 7 con algunas aplicaciones prácticas.

6.2 Métodos para análisis transitorios

Al considerar un dominio en el cual se lleva a cabo una evolución temporal, caben clásicamente dos grandes familias de enfoques. Por un lado, el enfoque lagrangiano, en el que las ecuaciones de equilibrio se plantean en la configuración inicial, y las variables que gobiernan el problema son los desplazamientos. Así se obtiene una nueva configuración, para el instante de tiempo siguiente como

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n \quad (6.1)$$

Aquí la variable temporal entra en juego en la velocidad de aplicación de las cargas o de los desplazamientos impuestos. En esta línea se encuadran las formulaciones "Lagrangiana total" y "Lagrangiana actualizada", en las que se plantean las ecuaciones de equilibrio, respectivamente, en la configuración al inicio de la evolución o al inicio del paso de tiempo presente. En ambos casos se utilizan coordenadas materiales, fijas al dominio, y el dominio a su vez va cambiando conforme avanza el proceso, acompañando a la pieza bajo deformación.

Este enfoque surge de considerar una prolongación del análisis de medios sometidos a pequeñas deformaciones, en las cuales la opción natural es plantear el equilibrio en la configuración de referencia, que no se distingue sustancialmente de la configuración deformada. Para llevar a cabo esta extensión se precisa introducir tensores de tensión y de deformación adecuados para hacer la transformación entre la configuración deformada y la inicial. Dentro de esta línea se cuenta un caso particular cuyo autor ha llamado "formulación natural", (Argyris & St. Doltsinis, 1981). En ella se toma como configuración de referencia para cada paso de tiempo la que tendría la pieza si se la descargara.

La otra gran familia de métodos plantea el problema utilizando coordenadas espaciales, según la modalidad habitual en mecánica de fluidos. Aquí se encuadra en principio, la formulación de flujo. A través del dominio, fijo en el espacio, circula el material. En este enfoque euleriano las velocidades son la variable principal, y tradicionalmente se ha visto limitado en la capacidad de aplicar condiciones de contorno que sigan al cuerpo que está siendo deformado, si bien, por otra parte las ecuaciones de equilibrio se ven simplificadas por el uso de coordenadas espaciales. Por esta razón, cuando se ha pretendido resolver problemas transitorios

mediante la formulación de flujo se ha procedido, inicialmente (Zienkiewicz, 1984 y Kobayashi, 1984), a una actualización del dominio a través de lo que varían sus coordenadas en un paso de tiempo

$$x_{n+1} = x_n + u_n \Delta t_n \quad (6.2)$$

Por este camino la formulación de flujo desemboca en un enfoque lagrangiano, con coordenadas materiales, y en el que, dentro de cada intervalo temporal se resuelve un problema como si estuviera en el estado estacionario. Se mostrará más adelante que esa filosofía conduce a esquemas no conservativos al llevar a cabo la integración temporal, y en los que la única forma de reducir el error es tomar pasos de tiempo más pequeños.

Se han propuesto aplicaciones de la formulación de flujo que permitan conservar el enfoque euleriano. En cada una de ellas se busca dar solución a los problemas ya mencionados, inherentes a esa formulación. Por eso lo más destacable en estas técnicas no es el desarrollo matemático ni el modo en que se formula el problema, sino más bien las técnicas computacionales con que se logra el fin propuesto.

Así, para aplicación en problemas de moldeado por inyección, Couniot y Crochet (1986) han propuesto el uso de una malla semi-fija, en la que se desplazan los nodos más próximos a la superficie libre, quedando sin ensamblar los elementos a los que aún no ha llegado el material, para volver a su posición original una vez que la superficie de avance del material pase más cerca de otros nodos. Se presenta como un método muy versátil, con unos pocos elementos levemente distorsionados, si bien hasta el presente no se lo ha utilizado para problemas de conformado de metales ni en problemas con contornos móviles.

Otro de los esquemas que utilizan una formulación euleriana es el método de la pseudo-concentración (Thompson, 1986, y Thompson y Smelser, 1988), en el que se trabaja con dos materiales, el metal y un material ficticio de propiedades adecuadas como para no incidir en el flujo del material. La interfaz entre ambos materiales, que representa la superficie libre del metal, se transporta en forma advectiva para cada paso de tiempo.

Finalmente, como una combinación de las dos familias de enfoques, y con el propósito de conservar las ventajas de una y de otra se ha propuesto el método

lagrangiano-euleriano arbitrario (Huetink, 1982), en el cual el contorno del dominio discretizado es variado siguiendo la deformación producida por las superficies de trabajo, mientras que los nodos interiores tienen una velocidad arbitraria con la que se mueve la malla de manera que la distorsión que sufre se reduzca a un mínimo. Puede considerarse este método como una generalización de los otros dos, los cuales pueden obtenerse como casos particulares fijando la velocidad de la malla igual a la del material (formulación lagrangiana), o velocidad nula (formulación euleriana).

6.3 Ventajas e inconvenientes de cada método

En general se puede decir que cada enfoque resulta más apto para algunas aplicaciones determinadas, de acuerdo a las características del proceso. Así, por ejemplo, un problema de geometría fuertemente variable y en el que las partículas de material realizan recorridos relativamente cortos parece resuelto en forma más natural mediante una formulación en desplazamientos, lagrangiana, mientras que un proceso en que una misma partícula se mueve en un largo recorrido, y en el que las trayectorias de las mismas son semejantes se podrá describir más eficientemente (con menos esfuerzo y menos error) con un enfoque euleriano, y con la formulación en velocidades (formulación de flujo). Por su parte, problemas de elasto/viscoplasticidad son más fácilmente tratados con esquemas lagrangianos o de tipo euler-lagrange arbitrarios, por su capacidad de retener las deformaciones elásticas.

Sin embargo también pueden señalarse algunos aspectos de carácter general, a saber, que mediante una formulación de Lagrange se distorsiona la malla de elementos, y, alcanzado un cierto grado de deformación, se requiere una regeneración de la discretización. En cambio, por coincidir el contorno del dominio discretizado con el contorno de la pieza, la aplicación de cargas a lo largo del proceso es inmediata. Esto último también ocurre en una formulación Euler-Lagrange arbitraria, y con respecto a la distorsión de los elementos y la necesidad de regenerar, esto se evita si se define adecuadamente la velocidad arbitraria de la malla, lo cual suele requerir cierta experiencia por parte del usuario, además del esfuerzo numérico que lleva la obtención de esa velocidad (del mismo orden que la resolución del problema principal), que suele señalarse como uno de los inconvenientes serios de

este método. Debe decirse también que en la actualidad se está investigando sobre este punto y recientemente se han propuesto técnicas para calcular esa velocidad de la malla con menores costos computacionales (Ponthot, 1989).

En cuanto a la formulación en velocidades, si la integración temporal se lleva a cabo con un esquema de actualización de las coordenadas dado por la ecuación (6.2), el resultado será comparable al de un esquema en desplazamientos, con la ventaja de que, al resolver el problema dentro de un intervalo temporal en coordenadas espaciales la formulación es más simple. Por otra parte, si se comparan las ecuaciones (6.1) y (6.2) se ve que un proceso transitorio se describe con más sentido físico con una formulación en velocidades, ya que resulta inmediata la incidencia de una mayor o menor velocidad, independientemente del número de pasos de tiempo que se tomen. Sin embargo permanece el problema de la distorsión de la malla y la necesidad de regenerar los elementos.

Finalmente, una formulación de Euler, con dominio fijo, dentro del cual se mueve por deformación la pieza evita la regeneración de la malla pero es más problemática la imposición de las condiciones de contorno. También se han investigado alternativas para poder aplicar este enfoque con éxito. La señalada de Couniot y Crochet (1986) utiliza un dominio fijo, que se va llenando de material, y resuelve sólo la parte ocupada por el metal. Se puede considerar como el método más poderoso dentro de ésta línea el propuesto por Thompson (1986, 1988), en el que se hace una pequeña variante de la formulación de Euler: se busca que el dominio varíe de acuerdo al movimiento de las superficies de trabajo, pero no en lo referente a las superficies libres, que quedan dentro del dominio como interfaces entre dos medios. De esta forma la malla debe tener una velocidad cuya definición es muy simple, como simples son las trayectorias de las herramientas en procesos de conformado plástico.

Este método incluye otro concepto que lo hace superior a los demás, y es que el avance del material dentro del dominio se calcula con una ecuación conservativa, por lo que se mantiene constante el volumen de la pieza a lo largo de la operación de conformado. Esto no ocurre así cuando la actualización de coordenadas o el corrimiento de las superficies libres se realiza con los esquemas usuales, representados por las ecuaciones (6.1) ó (6.2). Allí el error es proporcional a la longitud del paso de tiempo adoptado, y para evitar mantener acotado el error por debajo

de cierta tolerancia la única solución es reducir la longitud de los pasos de tiempo, con el consiguiente aumento en el costo de la solución particularmente a causa del mayor número de resoluciones a tiempo constante que deben efectuarse.

Por las circunstancias apuntadas se ha adoptado en este trabajo el método de la pseudo-concentración para el estudio de procesos transitorios; se han realizado aplicaciones originales que exigieron una extensión del método, y en el último capítulo se sugerirán nuevas perspectivas y posibilidades del mismo. A continuación se presenta el desarrollo teórico del método.

6.4 El método de la pseudo-concentración

Ya se ha señalado el objetivo de conservar una formulación euleriana para resolver problemas transitorios. Este método se apoya en el hecho de que resulta más sencillo seguir el movimiento de una interfaz entre dos medios que el de una superficie libre. Por eso se adopta como dominio discretizado el inicialmente ocupado por el material junto con aquél hacia donde se espera que fluya cuando se lleve a cabo el proceso de conformado. Este último se supone lleno de un material ficticio de propiedades mecánicas y térmicas tales que no afecten el flujo del metal. Esto se consigue imponiéndole una baja viscosidad, y si se toma en cuenta el problema en temperaturas, con un calor específico y conductividad pequeñas respecto al metal. Así se tiene como condiciones de contorno para la superficie libre del metal esfuerzos tangenciales nulos y superficie adiabática. Si además el material ficticio puede fluir libremente se tienen también esfuerzos normales nulos a través de la interfaz, completando así las condiciones de contorno naturales para una superficie libre.

Con el problema así configurado, se resuelve para un dado paso de tiempo, como si se tratara de un proceso estacionario, de la forma desarrollada en los capítulos 4 y 5. No es necesario ajustar la formulación a procesos transitorios debido a que los términos dinámicos son totalmente despreciables a causa de las bajas velocidades que habitualmente se desarrollan. La diferencia con lo expuesto en esos capítulos está en que se debe contemplar la existencia de dos materiales distintos en el mismo dominio del problema. Para identificar las zonas ocupadas por cada uno de ellos se define sobre todo el dominio un campo escalar tal que una determinada curva de nivel del mismo, γ , identifique la interfaz entre ambos

materiales. En un punto cualquiera se tendrá un material u otro según que en el mismo el campo escalar tome un valor superior o inferior a ese valor de referencia. El autor del método ha dado a este campo escalar el sentido de una pseudo-concentración (si bien esto se presta un poco a confusión), y de allí toma su nombre el método.

El campo escalar es utilizado también para avanzar en un paso de tiempo, y en este punto radica el mayor mérito de este método. Para avanzar se resuelve una ecuación de transporte advectivo (*i.e.* convección sin difusión)

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = 0 \quad (6.3)$$

con lo que se calcula, a partir de la solución para el instante t_n el valor del campo escalar para el instante t_{n+1} . Del campo transportado, c_{n+1} surge la nueva posición de la interfaz entre ambos materiales, γ_{n+1} determinada por la ubicación de la isocurva del valor de referencia. Una vez hecho el transporte se está en condiciones de resolver el problema en velocidad-presión ($\mathbf{u}_{n+1}, p_{n+1}$), y en su caso temperatura (T_{n+1}), y de esta forma se reinicia el ciclo.

Cuando se trata de procesos con contornos móviles el transporte advectivo se hace con relación a la malla, mientras que en una resolución a tiempo constante se obtienen velocidades absolutas. En esas condiciones la ecuación (6.3) toma la forma

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_M) \cdot \nabla c = 0 \quad (6.4)$$

donde \mathbf{u}_M es la velocidad de la malla.

Su determinación se efectúa en general con simples interpolaciones lineales por tramos en la dirección de avance de las herramientas, que habitualmente desarrollan trayectorias rectilíneas (descenso de una matriz de forja, avance de un pistón de extrusión, etc.). Adicionalmente puede determinarse un crecimiento de la malla en la dirección de avance del material, de modo de reducir al mínimo la proporción de malla no ocupada por el metal. Así se logra una economía en cuanto al tamaño de la malla necesario, y se mejora la precisión del método, ya que se puede hacer coincidir una zona más refinada de la malla con la posición de la superficie libre. En este caso, luego de avanzar cada paso de tiempo es necesario correr las coordenadas de los nodos.

En la figura 1 está esquematizado el proceso de resolución.



Figura 1. Esquema del proceso de resolución

6.5 Resolución de la ecuación de transporte

Al final de cada resolución a tiempo constante debe avanzarse un paso de tiempo, y obtener, a partir del campo escalar y velocidades para el tiempo n , c_n y u_n , el campo escalar para el tiempo $n+1$, c_{n+1} . Para ello reescribimos la ecuación (6.4) en su versión en diferencias

$$\frac{c_{n+1} - c_n}{\Delta t} = (\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{Mn}) \cdot \nabla (\theta c_n + (1 - \theta)c_{n+1}) \quad (6.5)$$

que expresa la llamada familia de métodos trapezoidales generalizados.

En (6.5) es $0 \leq \theta \leq 1$, correspondiendo el caso $\theta = 1$ al método de Euler, explícito, mientras que con $\theta < 1$ resultan esquemas implícitos de integración temporal. En concreto tomando $\theta = \frac{1}{2}$ resulta el método de Crank-Nicholson, que es el que se ha adoptado, y para el cual se demuestra la estabilidad. También tomando $\theta = \frac{1}{2}$ se obtiene un orden cuadrático de convergencia, en relación al orden lineal que resulta con otros valores de θ .

i) *Análisis de estabilidad de la ecuación de transporte advectivo*

La ecuación

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = 0 \quad (6.6)$$

toma la forma, para el caso unidimensional

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u \frac{\partial c}{\partial x}. \quad (6.7)$$

Aproximando las derivadas parciales tenemos la ecuación en diferencias

$$\frac{c_i^{k+1} - c_i^k}{\Delta t} = -u \left[\frac{\theta(c_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} - c_{i-\frac{1}{2}}^{k+1}) + (1-\theta)(c_{i+\frac{1}{2}}^k - c_{i-\frac{1}{2}}^k)}{\Delta x} \right], \quad (6.8)$$

donde c_i^k es la concentración en los nodos de abscisa $i\Delta x$ en el tiempo $k\Delta t$. El error entre la solución exacta y la numérica puede ser desarrollado en serie de Fourier para un paso de tiempo dado, teniendo términos de la forma $\exp(\alpha t) \exp(j\beta x)$, donde $j = \sqrt{-1}$, $\alpha = \alpha(\beta)$ y β es un número real positivo. El criterio de estabilidad de von Neuman (Mitchell & Griffiths, 1980), asegura que la componente espacial del error $\exp(j\beta x)$ permanecerá acotado para valores crecientes del tiempo si $|\exp(\alpha\Delta t)| \leq 1$. Sustituyendo $\exp(\alpha t) \exp(j\beta x)$ en (6.8) y dividiendo por $\exp(\alpha k\Delta t) \exp(j\beta i\Delta x)$ tenemos

$$\exp(\alpha\Delta t) = \frac{1 - (1-\theta)2dj \sin \frac{j\Delta t}{2}}{1 + \theta 2dj \sin \frac{j\Delta t}{2}}, \quad (6.9)$$

donde $d = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$.

Para $\theta = \frac{1}{2}$ (esquema de Crank–Nicholson) resulta

$$\exp(\alpha\Delta t) = \frac{1 - dj \sin \frac{\beta\Delta t}{2}}{1 + dj \sin \frac{\beta\Delta t}{2}}, \quad (6.10)$$

que satisface la condición requerida, para cualquier Δt .

El mismo análisis puede extenderse para el caso en dos dimensiones.

ii) Discretización de la ecuación de advección

Consideramos conocidos para el instante t_n los valores en los nodos de la velocidad, $\{\mathbf{u}_n^N\}$ y del campo escalar $\{c_n^N\}$. Así podemos expresar estas magnitudes para un punto cualquiera:

$$\mathbf{u}_n(x, y) = \mathbf{N}_u^T(x, y) \cdot \{\mathbf{u}_n^N\} \quad (6.11)$$

$$c_n(x, y) = \mathbf{N}_c^T(x, y) \cdot \{c_n^N\} \quad (6.12)$$

y análogamente se expresará el campo escalar para el instante t_{n+1} , que se desea obtener. Así escribimos (6.5), tomando ya $\theta = \frac{1}{2}$, de acuerdo al esquema de Crank–Nicholson

$$\mathbf{N}_c(\{c_{n+1}^N\} - \{c_n^N\}) = \frac{\Delta t}{2}(u_n - u_{Mn}) \cdot \nabla \mathbf{N}_c(\{c_n^N\} + \{c_{n+1}^N\}). \quad (6.13)$$

Agrupando $\{c_{n+1}^N\}$ y $\{c_n^N\}$, y aplicando el método de los residuos ponderados obtenemos

$$\mathbf{M}_1(\{c_{n+1}^N\} - \{c_n^N\}) = \mathbf{M}_2(\{c_{n+1}^N\} + \{c_n^N\}) \quad (6.14)$$

donde

$$\mathbf{M}_1 = \int_{\Omega} \mathbf{N}_c \mathbf{N}_c^T d\Omega \quad (6.15)$$

$$\mathbf{M}_2 = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \mathbf{N}_c((\mathbf{u} - \mathbf{u}_M) \cdot \nabla \mathbf{N}_c)^T d\Omega \quad (6.16)$$

De (6.14) calculamos los valores nodales del campo escalar para el paso de tiempo $n + 1$

$$\{c_{n+1}^N\} = (M_1 - M_2)^{-1}(M_1 + M_2)\{c_n^N\} \quad (6.17)$$

La implementación en elementos finitos de este sistema de ecuaciones se ha llevado a cabo con elementos de cuatro nodos con funciones de forma bilineales N_c , obtenidas en forma similar al caso de la interpolación de la velocidad, ecuaciones (4.12) a (4.15): a partir de monomios

$$P_c = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta], \quad (6.18)$$

de donde resulta

$$\nabla P_c = J^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 1 & \xi \end{pmatrix}, \quad (6.19)$$

siendo J la matriz Jacobiana entre coordenadas locales y globales. Las integrales numéricas (ecuaciones (6.15) y (6.16)) son calculadas con 2×2 ó 3×3 puntos de Gauss, según se trate de problemas planos o axisimétricos.

iii) Comentarios sobre la validez de la solución

En el capítulo 5 se ha considerado el problema de cuando un operador elíptico contiene términos en derivadas primeras importantes con la consiguiente necesidad de aplicar técnicas de *upwind*. Deseamos averiguar si no se presentan problemas similares en este caso.

Si comparamos (6.3) con la ecuación (5.1), resulta un número de Peclet infinito. Entonces, tomando funciones de formas asimétricas (en la variable espacial) definidas por (5.12) y (5.13) se llega a que las derivadas espaciales deben tomarse con un coeficiente de asimetría $\alpha = 1$. Sin embargo, tomando como funciones de ponderación las mismas funciones de peso ($\alpha = 0$) arroja resultados coherentes, que verifican los valores predichos analíticamente, y que además son muy similares a los que se obtienen si se toma $\alpha = 1$. Puede verse que el desarrollo para llegar de (5.9) a (5.14) hecho en esa ocasión no es válido para este caso, en que $k = 0$, y que además se tienen términos del tipo $\int_{\Omega} W_i N_j d\Omega$. En la práctica, si bien no se ha hecho especial hincapié en este problema, nunca se presentaron inconvenientes numéricos en la resolución.

6.6 Algunos aspectos numéricos

Se comentarán brevemente algunos aspectos que hacen a la implementación y a las posibilidades de aplicación del método, considerando especialmente la resolución de cada paso temporal.

En primer lugar, nos referimos al campo escalar generado de manera tal de identificar, con respecto a un valor de referencia dónde está el metal y dónde el material ficticio.

Conviene destacar que sólo importa esa condición, y no el valor que efectivamente toma el campo en un punto dado. Por eso, teniendo en cuenta que, al transportar repetidas veces, pueden producirse altos gradientes que aumentan mucho el error que se comete, se procede a una regeneración del campo escalar de manera de suavizarlo, a partir de la última interfaz γ calculada. De las distintas posibilidades que existen para generar este campo da buenos resultados hacerlo en función de la distancia de cada punto del dominio a la curva, colocando el signo de acuerdo a de qué lado de la curva se encuentra el punto. En algunos casos, en cambio, ha resultado más conveniente trabajar con una superficie cilíndrica cuya intersección con el plano del dominio sea la superficie libre, y cuya proyección de las generatrices sea paralela a una determinada dirección, en general coincidente con la de avance del material. Esto sucede en especial cuando la superficie libre forma ángulos muy pequeños con respecto al contorno, como en el ejemplo que se muestra de extrusión inversa.

En lo que se refiere al problema a tiempo constante, se deben calcular matrices de rigidez de elementos que contienen dos materiales. Para esto una opción es subdividir el elemento de manera de tener sub-elementos con un solo material. Así puede hallarse con prolijidad la matriz tangente. Otra técnica más sencilla, es simplemente aumentar el número de puntos de integración, y según en qué material se ubique cada punto de Gauss, se multiplica o no la viscosidad por un número muy pequeño (figura 2).

En este caso, al ser la superficie libre fija para un dado tiempo t_n , esta técnica es aceptable. Si tuviera que ajustarse iterativamente la posición de la misma, como ocurre en problemas de cambio de fase, sería posible que nunca se alcanzara

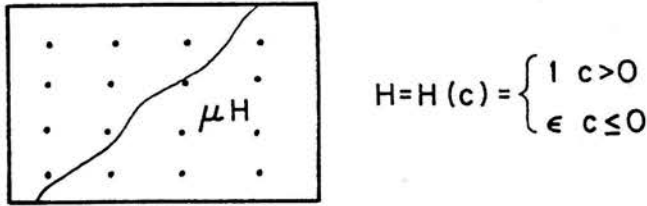


Figura 2. Evaluación de la viscosidad en un elemento con dos materiales

la convergencia del sistema no lineal de ecuaciones, por pasar un punto de Gauss alternativamente de un medio a otro.

Se debe considerar el caso particular de las superficies libres casi tangentes a la dirección de avance del material, que no pueden ser tratados con el método habitual. Esta situación se presenta en procesos transitorios de laminación de tubos. Cuando se quiera transportar una tal superficie se verá que el gradiente del campo escalar es casi normal a la velocidad

$$\mathbf{u} \cdot \nabla c \approx 0 \quad (6.20)$$

de manera que será grande el error en la resolución de (6.4). En la práctica se observan las superficies transportadas separándose del rodillo donde claramente hay estados de compresión, o introduciéndose dentro de él, en zonas donde, por estar fijada la velocidad como tangente al rodillo de laminación, y constante en módulo, debería deslizarse la superficie sobre sí misma. Ello obliga a buscar otra forma de tratar esas superficies. Un modo es actualizar sus coordenadas mediante la ecuación (6.2), aunque sólo sería de puntos de la superficie, no de los nodos.

Se ha visto que semejante esquema es no conservativo y puede originar inexactitudes en cuanto a la conservación de la masa.

Parece más razonable entonces, ajustar esa superficie libre imponiéndose la condición de que la velocidad le sea tangente, como ocurre en casos estacionarios

$$\frac{u_y}{u_x} \approx \frac{dy_{SL}}{dx} \quad (6.21)$$

Este criterio se ve justificado por la poca variación que hay en el dominio discretizado entre antes y después de la llegada del metal, por la importancia de asegurar la conservación de la masa, y por la necesidad de que el estado final coincida con un proceso resuelto en estado estacionario, cosa que queda asegurada con el criterio adoptado.

Una ventaja adicional de la aplicación de este criterio consiste en el menor tamaño de malla que debe tomarse, ya que la misma no necesita extenderse más allá de las superficies libres aludidas.

Finalmente, considerando el método en su conjunto se ve que permite con un bajo error tomar pasos de tiempos largos, ya que las velocidades en la zona del material ficticio, adonde aún no llegó el metal sirven como una buena aproximación para cuando éste llegue allí. La consecuencia es el ahorro en el número de resoluciones a tiempo constante que se requieren, que son la parte más costosa de la resolución.

6.7 Ejemplos de aplicación

El método de la pseudo-concentración ha sido aplicado por su autor para el modelado de un caso de forja libre (Thompson, 1986), y del forjado de un engranaje (Thompson & Smelser, 1988). A continuación se mostrarán aplicaciones a una forja libre, en la que se podrán comparar resultados con los obtenidos mediante un método basado en una descripción lagrangiana del movimiento, y con resultados experimentales. Luego se presenta un ejemplo de laminación de tubos en la que se considera el tratamiento de superficies libres que en estado estacionario serán tangenciales al material (y que seguirán siendo superficies libres), siendo su comportamiento distinto que el de la interfaz entre el material ficticio y el metal. Por último se recoge un ejemplo de extrusión inversa, que servirá para mostrar, con respecto a una descripción lagrangiana, la conservatividad del método. En el conjunto se puede apreciar también su versatilidad.

i) Forja libre

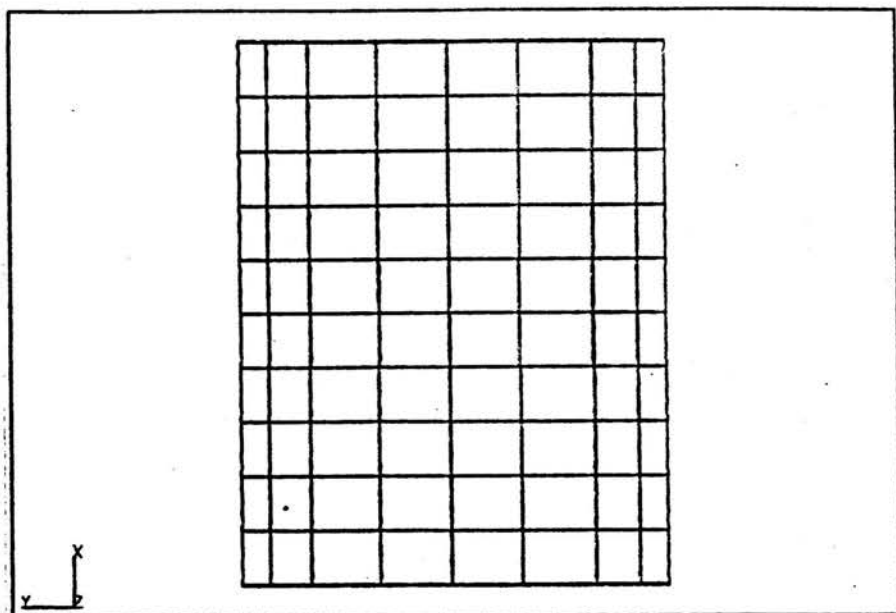


Figura 3. Forja libre, malla inicial para el metal

La figura 3 reproduce la malla inicial de un cilindro que ha de ser forjado axialmente hasta una reducción en altura del 50%. Esta malla está inicialmente ocupada por el metal. Se adicionan a sus lados dos hileras de elementos para contener el material ficticio. Por consideraciones de simetría, sólo un cuarto de la malla se usa para la resolución. Las sucesivas posiciones de la superficie libre para cada 10% de deformación están representadas en la figura 4, que pueden ser comparadas con la solución obtenida por el uso de una viscosidad constante — caso lineal—, que se muestra en la figura 5. En el caso viscoplástico se observa que el ensanchamiento de la pieza en el centro es mayor, mientras que el caso lineal presenta una curva más chata en esa zona. En la figura 6 se muestra la forma final (en línea gruesa), junto con las formas intermedias correspondientes a cada 10% de reducción (líneas finas). La figura 7 *I* reproduce el resultado experimental, en línea gruesa, comparado con nuestros resultados, en trazo fino. El contorno exterior reproduce los resultados experimentales con muy buena aproximación.

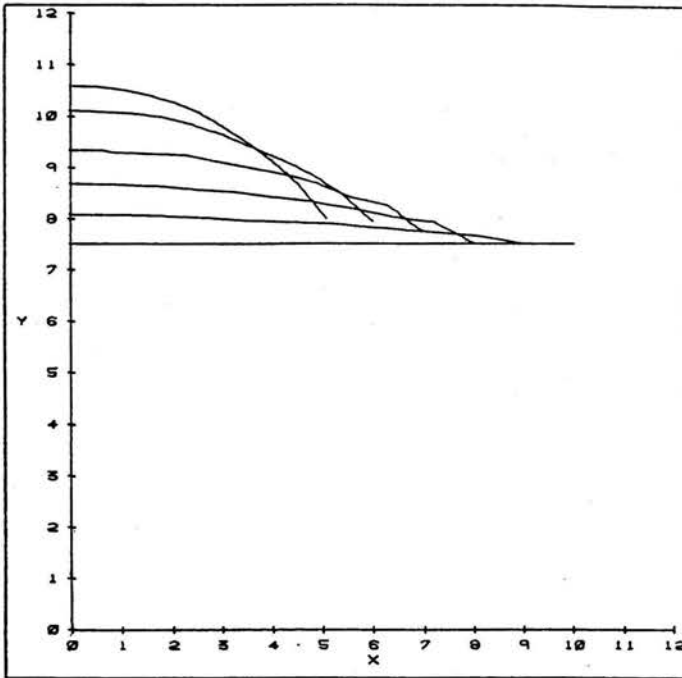


Figura 4. Forja libre, perfiles para el caso viscoplastico

Esta forma ha sido alcanzada luego de doce soluciones a tiempo constante, sólo la mitad de las que hubieran sido necesarias en una descripción lagrangiana. Es de destacar que este ahorro de tiempo de computación es en la parte más costosa del cálculo. Se debe al hecho de que se cuenta con un campo de velocidades también para la zona aún no ocupada por el material, que sirve a su vez como una buena aproximación para la velocidad del material, cuando éste alcance esa parte del dominio.

También comparamos nuestros resultados con los obtenidos mediante una descripción lagrangiana. Esto puede verse también en la figura 7, donde *II* corresponde a un modelo rígido-plástico, y *III* y *IV* a un modelo elasto-plástico, con elementos de ocho nodos. Estos son los mejores resultados que consignan Gudmunson & Rebelo (1982), que se obtuvieron usando mallas de veinticinco y cincuenta elementos, y con un alto orden de integración. La mejora en la solución que provee la aplicación del método de la pseudo-concentración es patente, aún usando un número menor de elementos: como se muestra en la figura 3, se han tomado veinte elementos para el dominio inicial del metal, cuatro para modelar

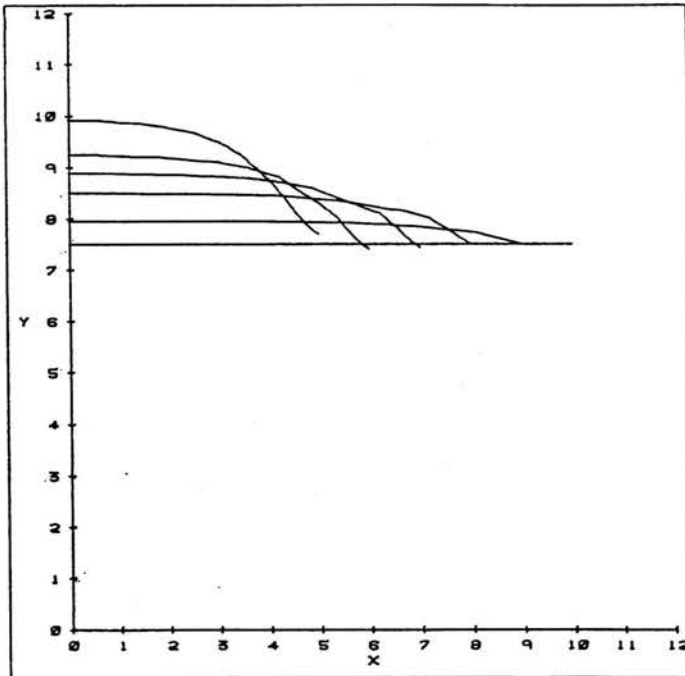


Figura 5. Forja libre, perfiles para el caso lineal

la fricción en el contorno y doce para recibir el flujo del metal durante la deformación. Estas ventajas se suman al ahorro en el número de pasos de tiempo ya mencionado.

ii) Laminación de tubos

El pasaje de un tubo sin costura a través de una jaula formada por tres rodillos decalados 120° es aproximada con un modelo axisimétrico. Las figuras 8 a 11 muestran el extremo frontal del material en diferentes instantes de tiempo, junto con la forma que toma la superficie libre para el metal y para el material ficticio. En las etapas intermedias la curvatura de este perfil está dada por la velocidad relativa entre el rodillo y el metal: al tomar contacto metal y rodillo, éste avanza más rápido y tracciona la superficie del material en dirección tangencial. Más adelante es el metal quien avanza más rápidamente, y se ve frenado por el rodillo a través de una fuerza de rozamiento opuesta al movimiento. Si en cada una de estas etapas se calculan las tensiones, se observan los sucesivos estados de flexión

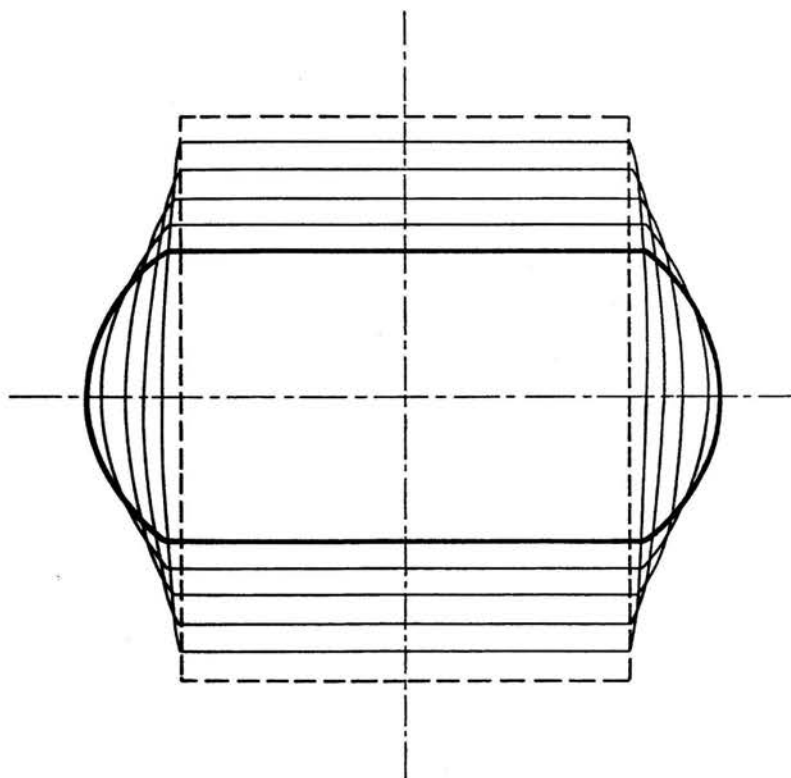


Figura 6. Forja libre, formas final e intermedias

a que está sometido el material. Éstos quedan indicados por el signo y la dirección de la máxima tensión principal (figura 12). Ésta y la máxima tensión de corte (figura 13) se anulan inmediatamente después de la interfaz entre el metal y el material ficticio. La forma y el estado de tensiones calculado cuando el material alcanza el extremo derecho coinciden con los obtenidos resolviendo el problema en estado estacionario.

iii) Extrusión inversa

Por último, se modela un caso de extrusión inversa axisimétrica, a partir de una pieza cilíndrica. Se alcanza una reducción en altura del 90% en nueve pasos. En la solución de este problema se han dispuesto de intento condiciones de contorno de no deslizamiento, para comparar resultados con un caso similar analizado por Zienkiewicz (1984), también mediante la formulación de flujo, pero con un enfoque

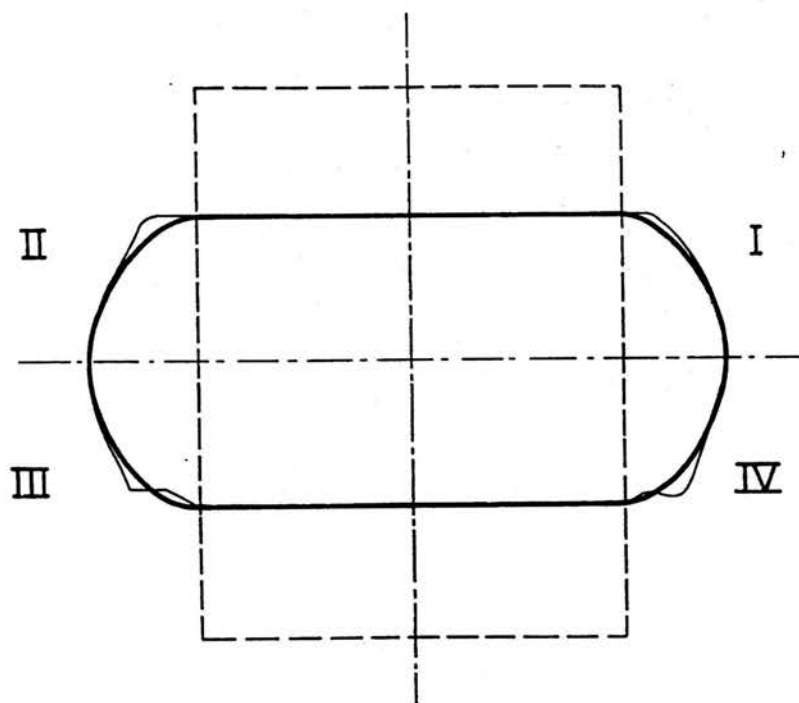
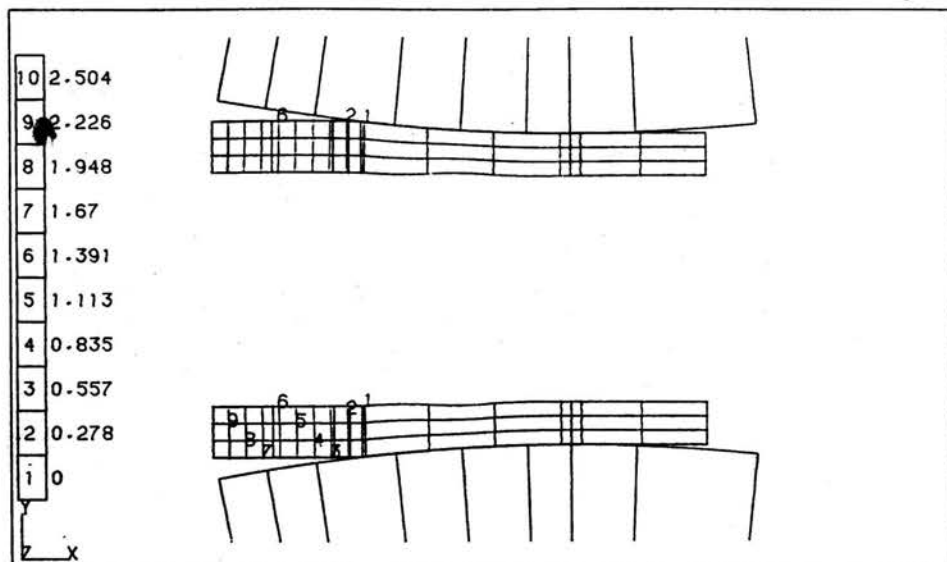
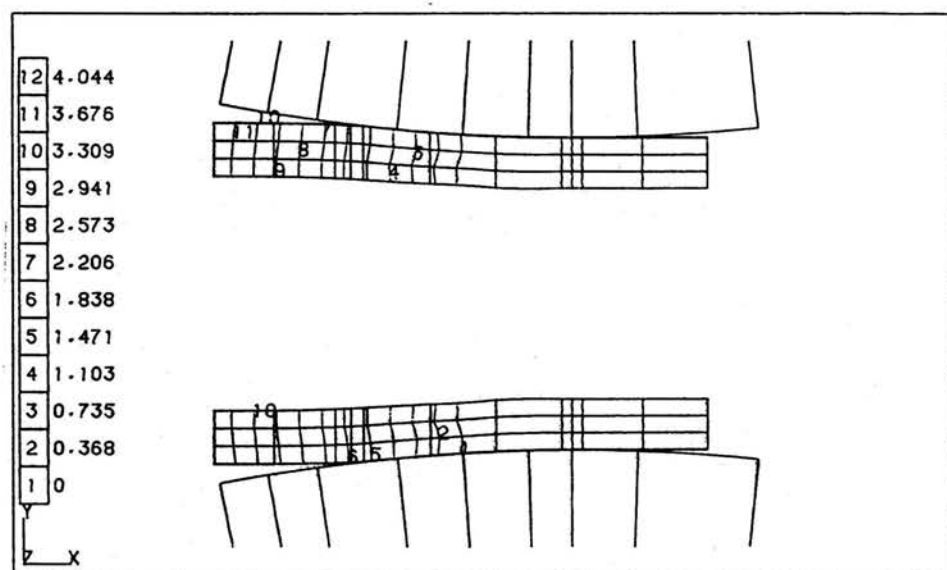


Figura 7. Forja libre, resultado experimental (Boër *et al.*, 1982), comparado con soluciones numéricas

lagrangiano.

En las figuras 14 a 16 se comparan los resultados obtenidos por ambos métodos. En vista de las diferencias con las de la referencia, hemos verificado en nuestros resultados la condición de volumen constante, encontrando que se cumple con un error del 1%. Este hecho pone de manifiesto otra ventaja del método de la pseudo-concentración, y es que, mientras la formulación lagrangiana introduce un error en la conservación del volumen en función de la longitud del paso de tiempo adoptado (y la única forma de reducir este error es achicar tanto como se pueda dicho paso), este método, por basarse en una ecuación de conservación mantiene constante el volumen, aún cuando los pasos en la integración temporal sean grandes. Los resultados también se comportan coherentemente de acuerdo con las condiciones de contorno impuestas, si bien no son realistas. Para mejorar estos resultados hemos introducido una hilera de elementos de fricción en los

Figura 8. Laminación de tubos: $t=0.0$ Figura 9. Laminación de tubos: $t=0.4$

contornos que están en contacto con las superficies de trabajo. Así se permite un desplazamiento relativo del material. Este caso se muestra en las figuras 17 a 19. También las tensiones axiales para un 30% de reducción en altura se grafican en

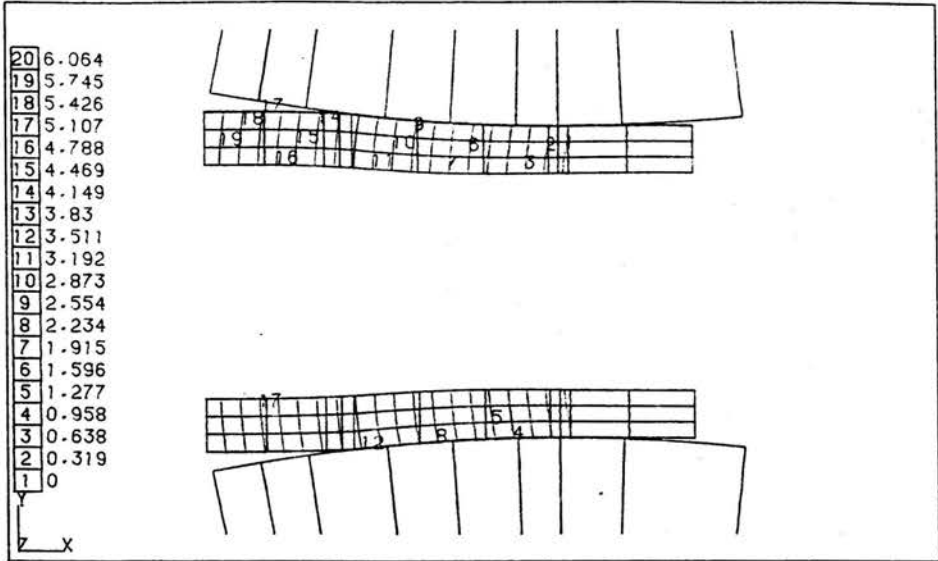


Figura 10. Laminación de tubos: $t=1.0$

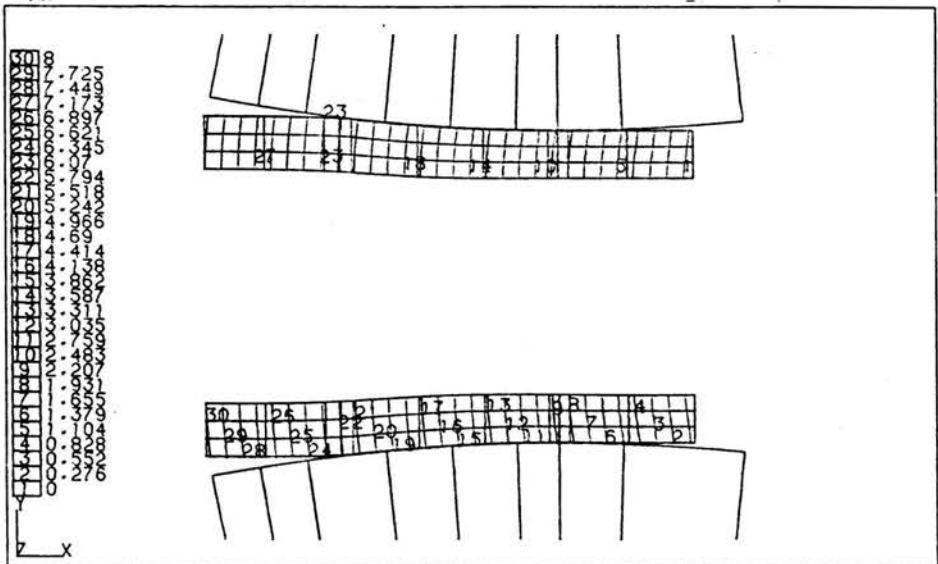


Figura 11. Laminación de tubos: $t=1.6$

la figura 20, donde puede verse que las mismas decrecen abruptamente cuando el material ya no está debajo del pistón de extrusión.

Para terminar se comentarán algunos aspectos de la modelación de este ejem-

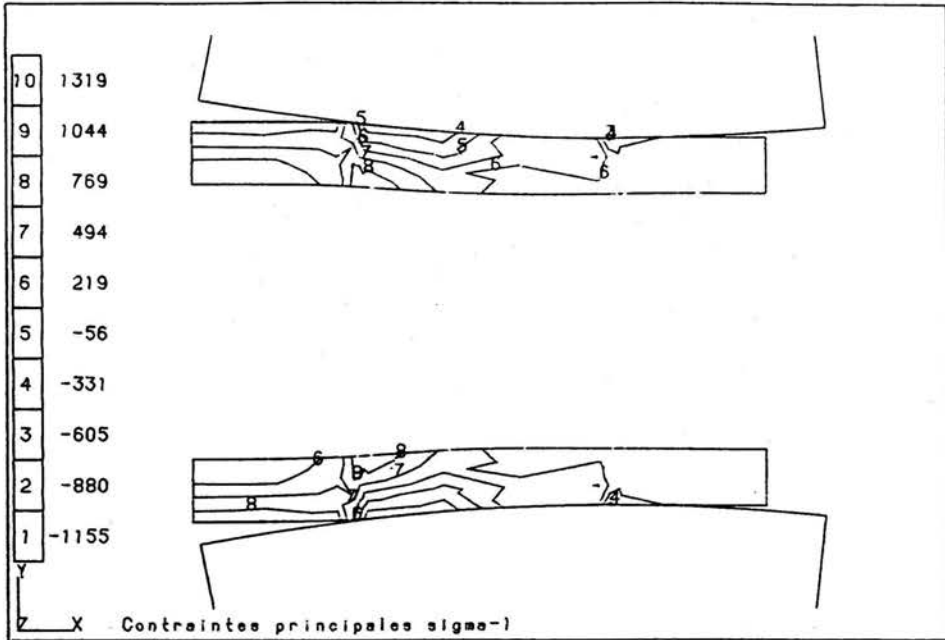


Figura 12. Laminación de tubos: Máxima tensión principal, para $t=1.0$

plo. En este problema tiene lugar una singularidad en el campo de velocidades correspondiente al vértice del pistón. Allí se produce un importante error por incumplimiento local de la condición de incompresibilidad $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Este error influye luego en el transporte advectivo, conduciendo a situaciones irreales. A esta causa de error se suma la ya mencionada de la casi ortogonalidad entre la velocidad y el gradiente de concentraciones. En efecto, en este problema la superficie libre tiene dos bornes, uno fijo a la pared y el otro fijo al vértice del pistón (ya que se han supuesto condiciones de contorno sin deslizamiento), y al resolver la ecuación de advección para un paso de tiempo resulta que el borne en contacto con el pistón experimenta un corrimiento mayor que el pistón mismo, mientras que el otro borne permanece sensiblemente en la misma posición.

En vista de estos resultados se ha analizado el transporte advectivo teniendo en cuenta las características del campo escalar y del campo de velocidades, obteniéndose las siguientes conclusiones:

- 1) En un borde con velocidad cero, si el campo de concentraciones forma un plano, la concentración en ese borde permanece fija.

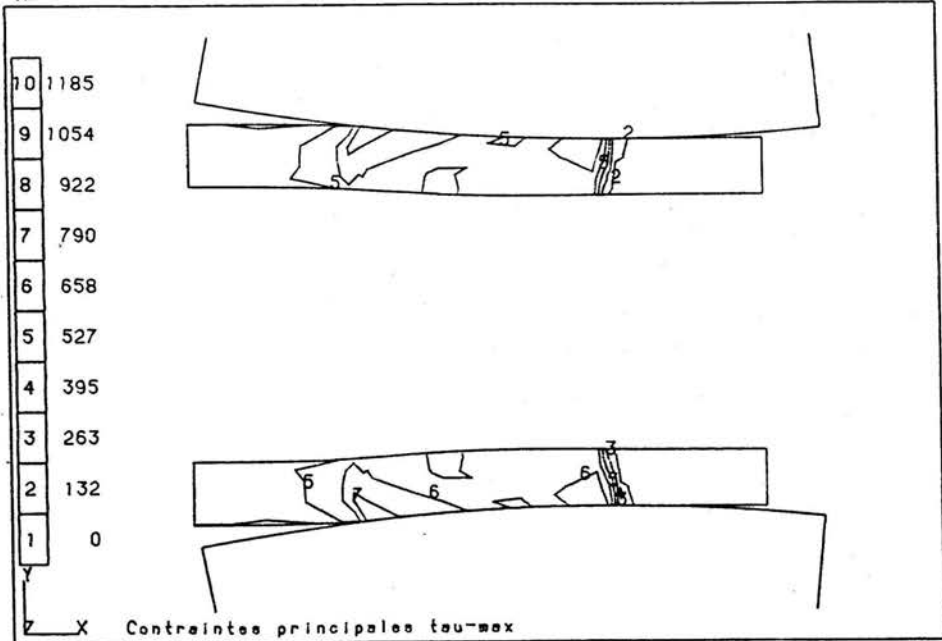


Figura 13. Laminación de tubos: Máxima tensión de corte, para $t=1.0$

- 2) Para el caso 1), si este transporte se lleva a cabo con velocidades con divergencia no nula ($\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$), el campo de concentraciones obtenido deja de ser un plano.
- 3) Posteriormente, cuando se vuelve a transportar ese campo no planar, se producen variaciones en las concentraciones del borde fijo.

Existen otros factores a tener en cuenta para la resolución de este problema, que también han estado presentes en los ejemplos anteriores. En primer lugar, se debe llevar a cabo el movimiento de las condiciones de contorno. Para esto se imprime a la malla una velocidad que debe ser nula en el fondo de la matriz, y los nodos en contacto con el pistón deben simular el movimiento del mismo. Se resuelve la ecuación de transporte utilizando la velocidad relativa del fluido respecto a la malla. Esta velocidad relativa ya no tiene divergencia nula, debido a que el tamaño de los elementos va cambiando en función del tiempo. Con este factor se vuelven a introducir irregularidades en la solución en la zona del vértice. Finalmente, en esta zona son muy altos los gradientes de concentraciones en los pasos más avanzados del proceso, y esta es una nueva causa de los errores numéricos

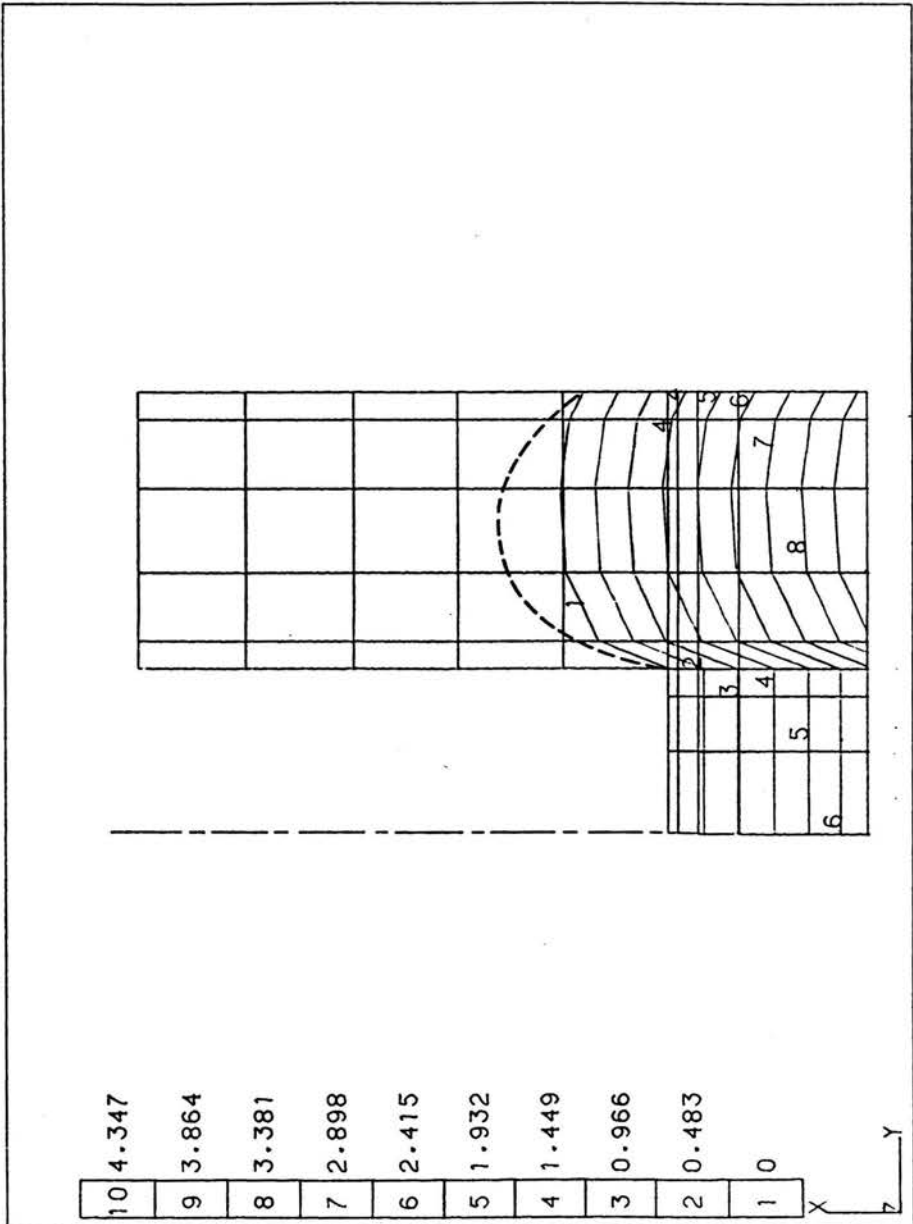


Figura 14. Extrusión inversa: reducción del 30% en altura

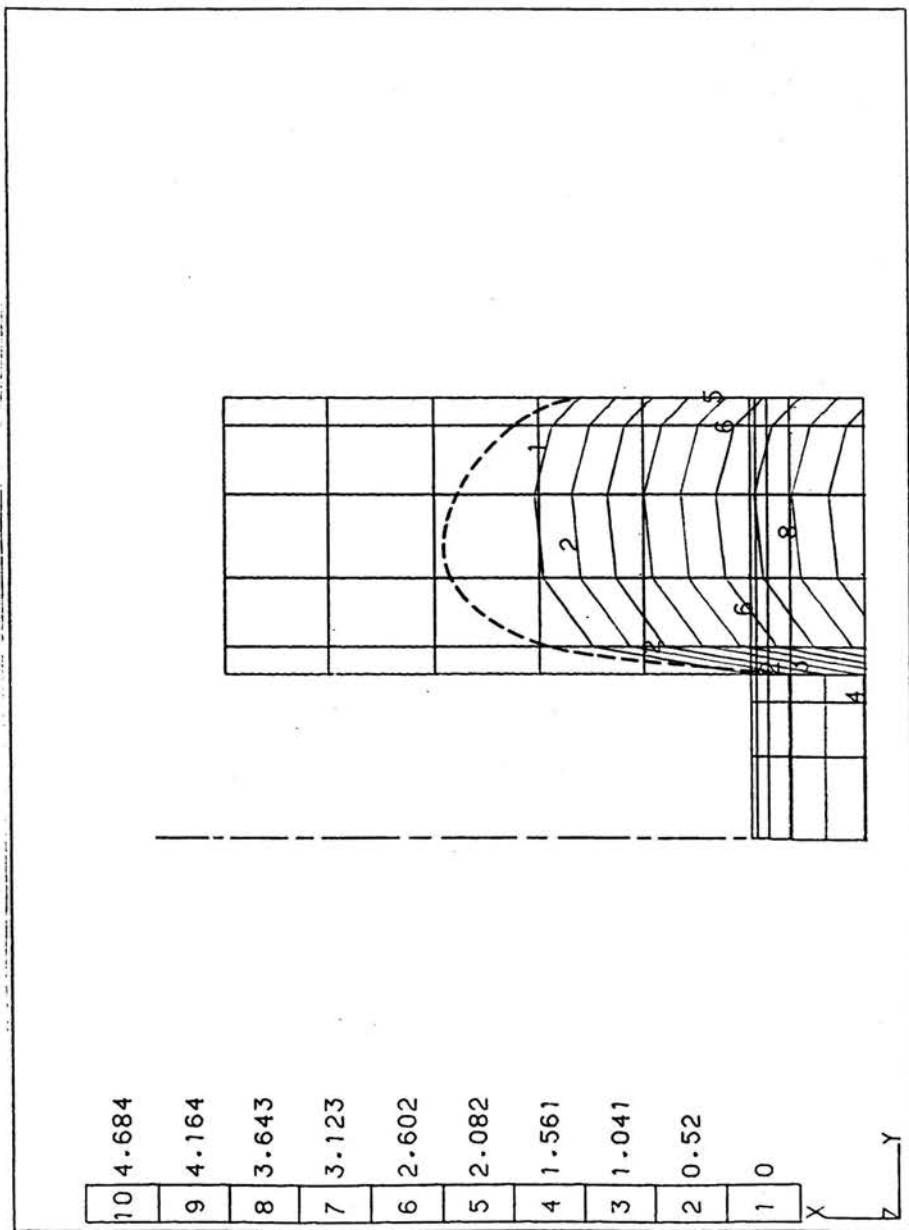


Figura 15. Extrusión inversa: reducción del 60% en altura

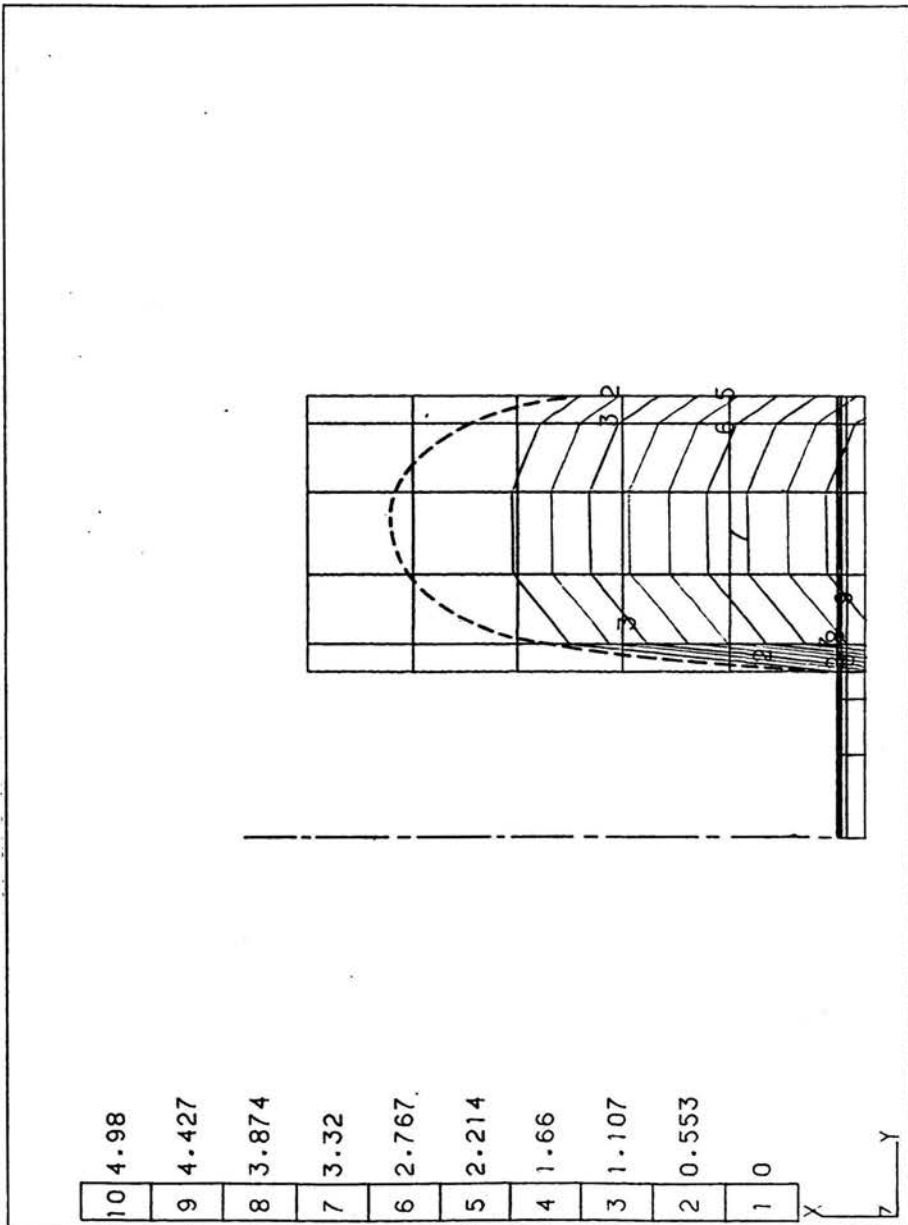


Figura 16. Extrusión inversa: reducción del 90% en altura

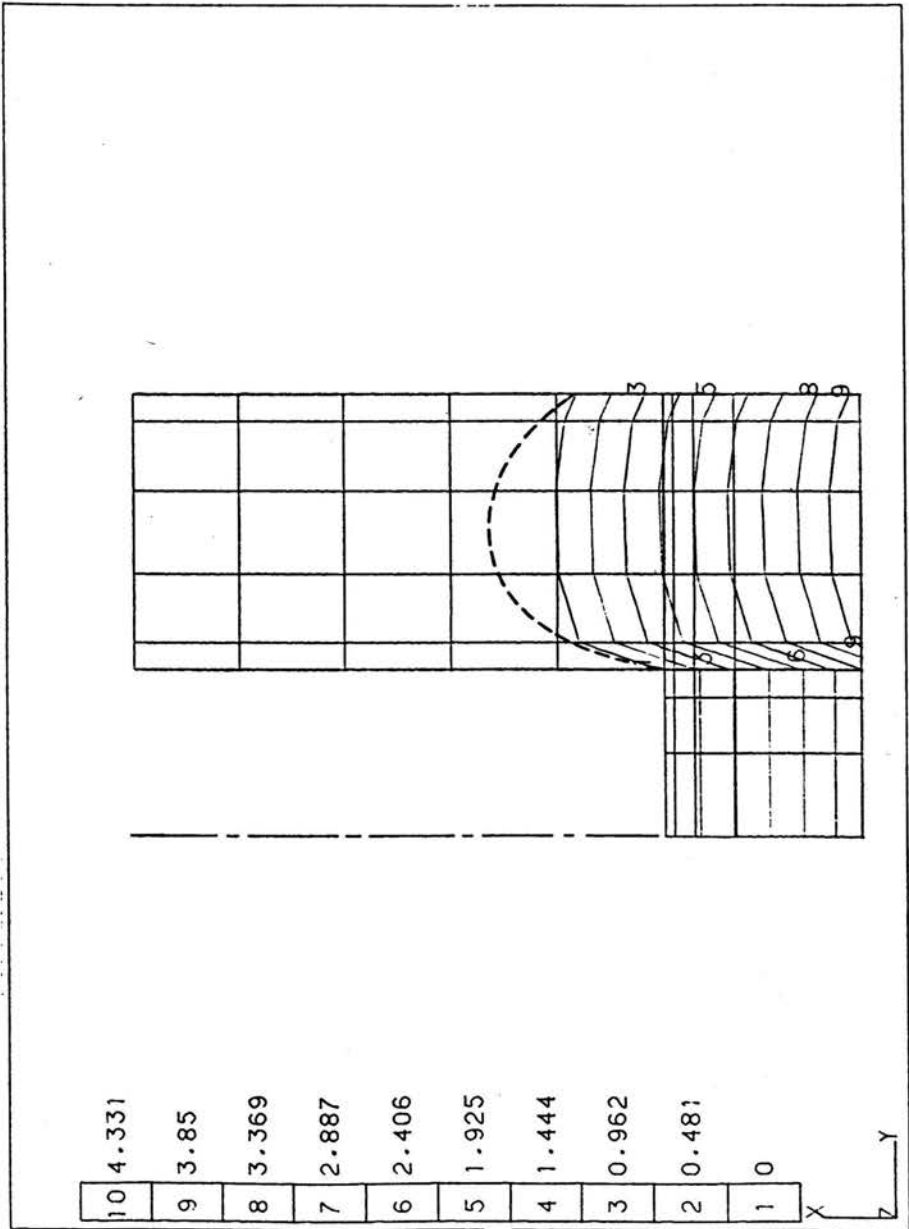


Figura 17. Extrusión inversa con fricción en el contorno: reducción del 30% en altura

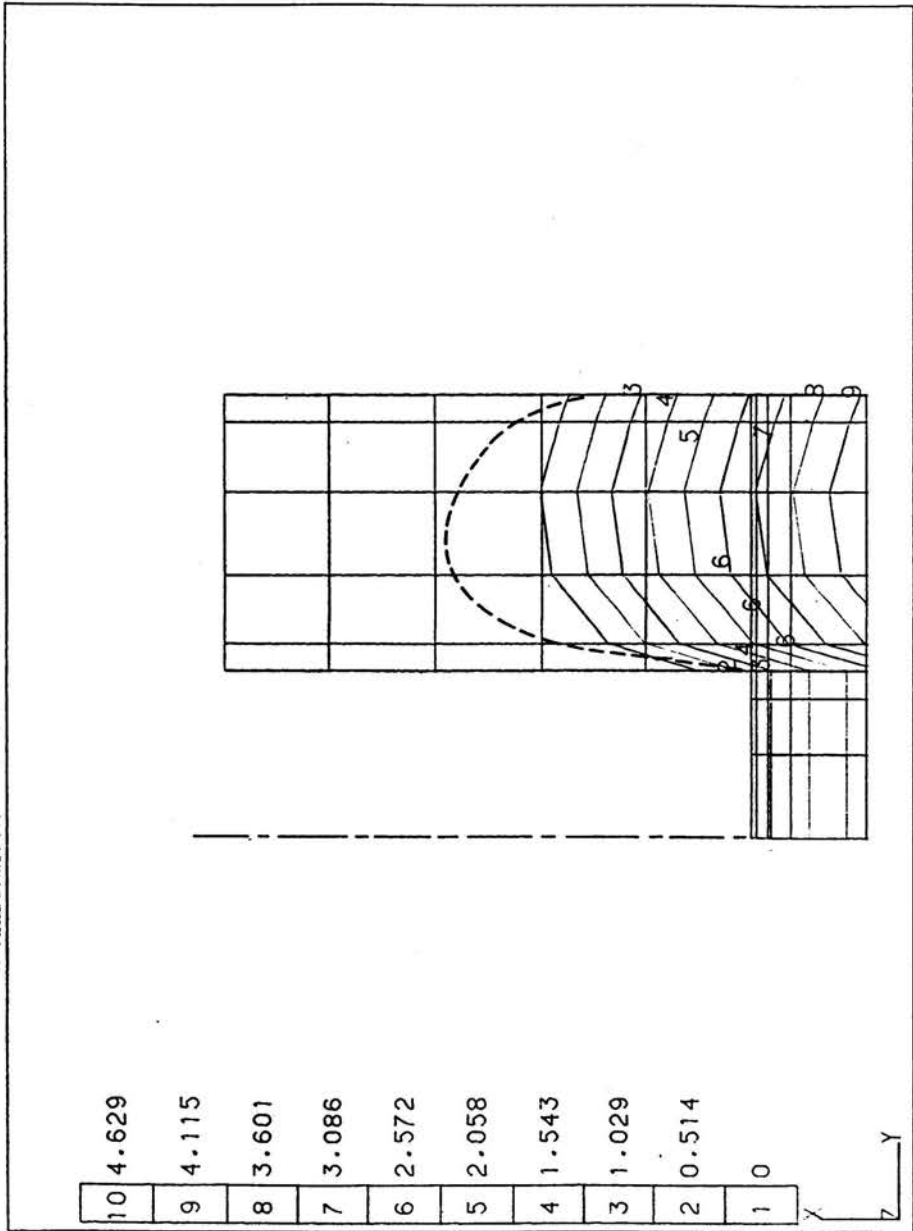


Figura 18. Extrusión inversa con fricción en el contorno: reducción del 60% en altura

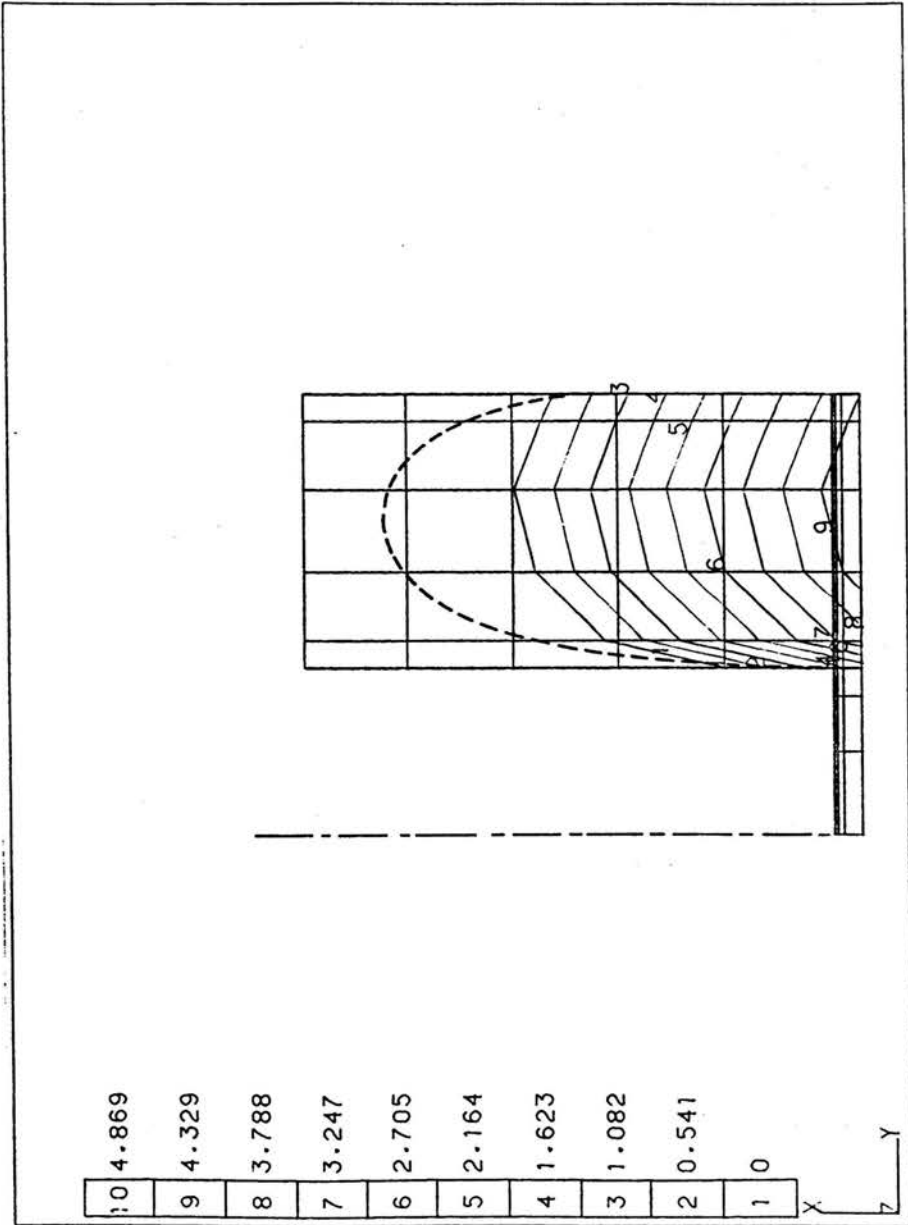


Figura 19. Extrusión inversa con fricción en el contorno: reducción del 90% en altura

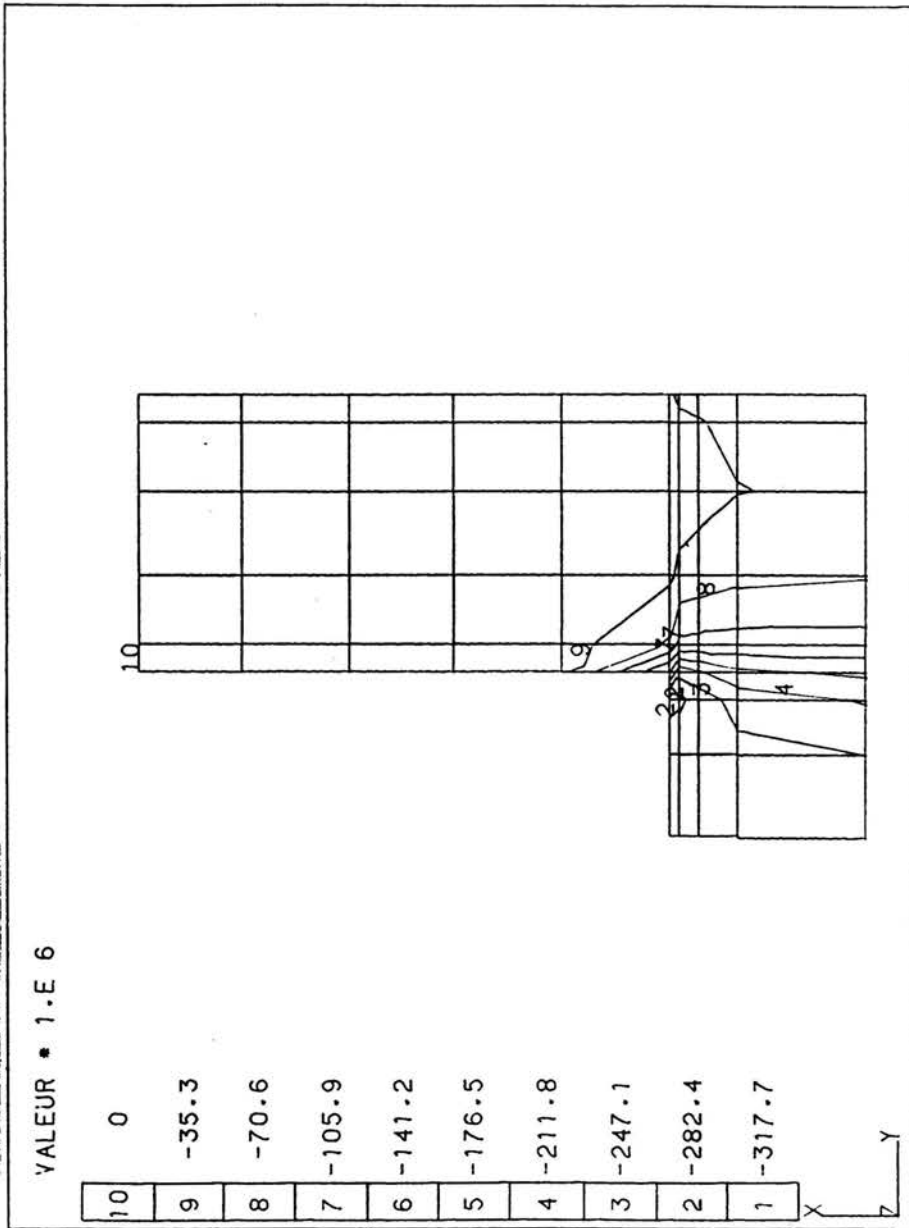


Figura 20. Extrusión inversa con fricción en el contorno: reducción del 30% en altura—Tensiones axiales

en la solución.

Para sortear estas dificultades se ha refinado la malla, se ha reducido el tamaño de los pasos de tiempo que se hacen entre dos soluciones a tiempo constante, aunque aumentando su número para mantener constante el intervalo de tiempo total entre ellas; y al final de cada subpaso de tiempo se ha corregido la posición de los extremos de la superficie libre. Esto último es posible porque se conocen las posiciones en que deben estar ubicados, y además porque las variaciones no implican una distorsión del resto de la superficie libre, al tener ángulos agudos con respecto al contorno. Por último, entre distintas opciones en cuanto a la definición de la velocidad de la malla para reproducir el cambio en las condiciones de contorno, hemos elegido la que contribuye a reducir las causas de error arriba señaladas. En este caso la malla tiene una velocidad axial que varía linealmente desde el fondo de la matriz (velocidad nula) hasta el extremo del pistón, y desde allí hasta el final de la malla, una velocidad constante e igual a la del pistón.

6.8 Comentarios finales

En este capítulo se ha aplicado un método alternativo para resolver procesos no estacionarios a nuevos tipos de problemas. También se han hecho comparaciones con otros métodos para tratar este tipo de procesos y con resultados experimentales. La aplicación a procesos de laminación ha requerido la definición de dos clases de superficies libres, con tratamiento diferente, y se ha dado un criterio que permite resolver la limitación del método, cuando se pretende tratar superficies cuya orientación es muy cercana a la dirección del flujo. El trabajo también ha permitido puntualizar algunas ventajas del método que hasta el presente no habían sido señaladas por su autor: posibilidad de tomar pasos de tiempo largos con respecto a otros métodos, debido a que se cuenta con un campo de velocidades también para la zona donde aún el metal no ha llegado; conservación del volumen, por partirse de una ecuación de conservación, definida a su vez sobre un campo de velocidades de divergencia nula. Además, no se requiere regenerar la malla después de un cierto grado de deformación.

Quedan como únicos parámetros a controlar la cantidad de soluciones a tiempo constante requeridas, y, entre dos de ellas consecutivas, cuántos pasos de tiempo

son necesarios. Estas son cuestiones usuales en problemas transitorios, donde simultáneamente se busca reducir costos de cálculo y mejorar la precisión.

REFERENCIAS

Argyris, J. H. & St. Doltsinis, J., "On the Natural Formulation and Analysis of Large Deformation Coupled Thermomechanical Problems", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engng.*, vol 25 (1981), pp. 195-253.

Boër, C. R., Gudmundson, P. & Rebelo, N., "Comparison of Elastoplastic F.E.M., Rigid-Plastic F.E.M. and experiments for Cylinder Upsetting", en *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, J. F. T. Pittman, R. D. Wood, J. M. Alexander & O. C. Zienkiewicz, (eds.), Pineridge Press, Swansea (1982), pp. 217-226.

Couniot, A. & Crochet, M. J. "Finite Elements for the Numerical Simulation of Injection moulding", en K. Mathiasson, A. Samuelsson, R. D. Wood & O. C. Zienkiewicz (eds.), NUMIFORM'86, *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, A. A. Balkena, Rotterdam (1986), 165-170.

Huetink, J., "Analysis of Metal Forming Processes Based on a Combined Eulerian-Lagrangian Finite Element Formulation". en *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, J. F. T. Pittman, R. D. Wood, J. M. Alexander & O. C. Zienkiewicz, (eds.), Pineridge Press, Swansea (1982), pp. 501-509.

Kobayashi, S., "Thermoviscoplastic Analysis of Metal Forming Problems by the Finite Element Method", en *Numerical Analysis of Forming Processes*, Chap. 2, J. F. T. Pittman, O. C. Zienkiewicz, R. D. Wood y J. M. Alexander (eds.), Wiley, Chichester (1984), pp. 45-70.

Mitchell, A. R. & Griffiths, D. F., *The Finite Difference Method in Partial Differential Equations*. Wiley, Chichester (1980).

Ponthot J. P., "Efficient mesh management in eulerian-lagrangian method for large deformations analysis", presentado en NUMIFORM'89, *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, Colorado State University,

Fort Collins, Co, U.S.A. (1989).

Thompson, E., "Use of Pseudo-Concentrations to follows creeping viscous flows during transient analysis", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, vol 6 (1986), pp. 749-761.

Thompson, E., Smelser, R. E., "Transient Analysis of Forging Operations by the Pseudo-Concentration Method", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol 25 (1988), pp. 177-189.

Zienkiewicz, O. C., "Flow Formulation for Numerical Solution of Forming Processes", en *Numerical Analysis of Forming Processes*, J. F. T. Pittman, O. C. Zienkiewicz, R. D. Wood & J. M. Alexander, (eds.), Wiley, Chichester (1984), pp. 1-44.

CÁLCULO DE SUPERFICIES LIBRES USANDO PSEUDO-CONCENTRACIONES

7.1 Introducción

El método inicialmente adoptado para modelar una superficie libre está dado por el esquema clásico, que ya lo han utilizado Zienkiewicz *et al.* (1978), y que consiste en la modificación de la malla, realizando una integral desde un punto fijo, para obtener la variación necesaria de la coordenada de un nodo normal a la dirección de integración de manera que las velocidades en el contorno sean tangentes al mismo. Para esto habíamos aproximado, en la notación de coordenadas cilíndricas

$$\frac{dr}{dz} \cong \frac{u}{v} \quad (7.1)$$

y exigiendo

$$r' = \frac{dr}{dz} \cong \frac{u}{v} \quad (7.2)$$

resultaba

$$r - r_0 = \int_{z_0}^z \frac{u}{v} dz \quad (7.3)$$

donde (r_0, z_0) son las coordenadas del punto fijo desde donde se comienza a integrar.

Para conservar el aspecto de la malla y evitar errores numéricos hemos regularizado la malla luego de la corrección de los nodos del contorno, como puede verse en los ejemplos del capítulo 4.

Es oportuno mencionar que este esquema es muy apropiado para problemas planos o axisimétricos, de modo que pueden modelarse problemas con superficies libres en casi todo el contorno, y en los que la malla final varía considerablemente con respecto a la inicial. Un típico caso es el que sucede en la fabricación de tubos sin costura, cuando se asimila el problema a uno axisimétrico. En el mismo hay superficies libres en todo el interior del tubo y, en el exterior, antes y después del rodillo.

Proponemos aquí una nueva forma de calcular estas superficies libres, basada en el método de la pseudo-concentración (Thompson & Smelser, 1988). Se ha expuesto en otro capítulo la filosofía de dicho método, que permite tratar problemas en estado transitorio.

En la sección 2 se describe el esquema que es objeto de este capítulo, para señalar sus ventajas y posibles aplicaciones en la sección 3. En la última sección mostramos un esquema para realizar la integración de la línea de corriente en sí, que resulta más exacto que los esquemas usuales y que permite resolver la indeterminación en la pendiente al inicio de una superficie libre que tiene lugar en determinadas configuraciones.

7.2 Esquema propuesto

Para el tratamiento de superficies libres en estado estacionario discretizamos un dominio que ahora permanecerá fijo, y que es suficientemente extenso como para contener todo el material, después de que, por actualización de la superficie libre, haya alcanzado su forma final.

Inicialmente se ubica la superficie libre, que ahora será la interfaz entre el metal y el material ficticio, en la misma posición en que se lo hacía con el método anterior. Al iterar en la resolución del problema no lineal, se modifica la posición de los puntos que definen la interfaz según (7.3), para que ésta se disponga sobre una línea de corriente. En consonancia con lo que sucede en los casos transitorios, ya no serán los nodos quienes se muevan, sino la interfaz entre ambos materiales, que pasará por dentro de los elementos.

Lógicamente esta circunstancia exige una integración numérica más fina en los elementos por los que pase la interfaz. Hasta ahora hemos venido resolviendo esto mediante el incremento de los puntos de integración, aunque también es factible una subdivisión del elemento para poder hacer esta integración en forma exacta.

En cada iteración lo que se actualizará, entonces, serán las coordenadas de esta superficie libre. Obviamente una clara prueba de la validez de este método será que arroje los mismos resultados que por el otro camino. Aquí habrá que considerar el “efecto de borde” del material ficticio: de una parte debe ser lo suficientemente sutil como para no alterar el flujo del metal (es decir que no se transmitan tensiones normales ni tensiones de corte). Por otro lado, debe examinarse el efecto de la cantidad de hileras de pseudo-material y el espesor que deberá tener para que el resultado no dependa de los mismos.

Dos esquemas de interpolación de las velocidades se analizan para hacer la integral (7.3): lineal, por cálculo de las velocidades en los puntos que definen la interfaz, y por interpolación cuadrática a los puntos de Gauss, para integración por cuadratura en cada tramo de la interfaz. Este esquema se ilustra en la sección 7.4.

7.3 Ventajas y Aplicaciones

Debe señalarse primeramente que por esta vía se agranda el tamaño del problema, ya que se agregan más elementos para contener al material ficticio; y por otro lado, al requerirse la integración con mayor precisión para elementos con dos materiales, también crece el trabajo computacional.

Sin embargo, su aplicación se ve justificada en el caso de problemas con simetría axial en la geometría pero no en las cargas ni en las condiciones de borde. Otra aplicación secundaria se refiere a la determinación de los puntos de contacto, que puede automatizarse mediante la aplicación de esta técnica de integración.

Volviendo a la aplicación señalada en primer lugar, como se explica en los capítulos 8 y 9, en ese problema se trabaja con una matriz de rigidez con viscosidad constante, y se pasa al miembro de la derecha la diferencia que surge de no haber adoptado el valor calculado de viscosidad.

Este esquema exige una geometría constante en cuanto a la malla, y por eso al buscar la superficie libre sólo podríamos pensar en la que resulta del modo constante, dentro de las componentes de velocidad desarrolladas en series de Fourier.

Con el esquema que proponemos, en cambio, podemos, teniendo una malla axisimétrica, evaluar la forma de la superficie libre no axisimétrica, que sería efecto de la falta de simetría en cargas y fijaciones.

De todas formas, antes de acceder a esta aplicación, utilizaremos este esquema para el caso bidimensional, plano o axisimétrico, cuyos resultados podemos comparar con el otro método ya en marcha.

Merece la pena aclarar que, con respecto al método de la pseudo-concentración, aquí no haremos ningún tipo de transporte advectivo del campo de pseudo-concentraciones, sino que sólo variará acompañando la interfaz en sus movimientos para conservar en ella la velocidad tangente a la misma.

Al llevar a cabo este esquema de integración de la superficie libre se observan diferencias con respecto a la solución moviendo los nodos. Esto concuerda con lo esperado, ya que se ha cambiado la discretización del problema. Cuando se procede a refinar la malla los resultados mejoran notablemente, reduciéndose las diferencias cuanto se quiera. En la Tabla I se recogen las coordenadas de la superficie libre para un ejemplo axisimétrico de extrusión. Se comparan el método con actualización de las coordenadas de los nodos (malla móvil) con el esquema propuesto aquí (malla fija). La malla inicial (malla 1, en tabla I) es suficientemente fina en dirección radial, en lo referente a captar bien los movimientos de la superficie libre. Por eso al refinar en esa dirección no se observa una mejora sustancial en los resultados. Inclusive, aún integrando dentro de los elementos con 10×10 puntos de Gauss no se obtiene convergencia en el método, debido a la discontinuidad de las matrices de rigidez.

Sin embargo, resulta una mejora muy apreciable en los resultados cuando se refina la malla en dirección axial, tal como puede verse comparando las mallas 1 y 3.

Tabla 1. Comparación de dos esquemas de superficie libre, con refinamiento de mallas: Malla 1: gruesa; Malla 2: refinada según r ; Malla 3: refinada según z ; MM: malla móvil; MF: malla fija

z	r					
	MM1	MF1	MM2	MF2*	MM3	MF3
5.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
5.5	1.11159	1.1264	1.10755	1.165	1.05736	1.05047
					1.07873	1.07334
6.	1.1515	1.1815	1.14378	1.240	1.08035	1.07049
					1.08608	1.08607
7.	1.10889	1.1391	1.09974	1.2	1.08698	1.08339
					1.08563	1.08360
8.	1.11889	1.1763	1.10881	1.237	1.08585	1.08693

* Solución no convergida

7.4 Interpolación cuadrática de la velocidad sobre la interfaz

Los resultados consignados en la tabla I hacen pensar también en mejorar la exactitud de la integral (7.3), que se ha resuelto tradicionalmente calculando el cociente $\frac{u}{v}$ en los extremos de cada intervalo entre cada par de puntos de la superficie, y tomar para ese intervalo el promedio de ambos. Así se tendría

$$r_n = r_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta z_i}{2} \left(\frac{u_i}{v_i} + \frac{u_{i-1}}{v_{i-1}} \right) \quad (7.4)$$

Sin embargo, la discretización llevada a cabo nos permite efectuar esa integral con una mayor precisión: en cada elemento cada una de las componentes de la velocidad es una función bicuadrática, que sobre una curva dentro del elemento resultan funciones cuadráticas de la coordenada curvilínea de la interfaz, o de su proyección sobre alguno de los ejes. Esto es válido cuando la curvatura no es muy grande. Con esta sola hipótesis, que resulta muy razonable en una superficie libre

como la que estudiamos, podemos hallar una expresión mucho más aproximada para evaluar la integral haciendo

$$r' \cong \frac{u}{v} = \frac{P_{2u}(z)}{P_{2v}(z)} \quad (7.5)$$

P_{2u} y P_{2v} son los polinomios de segundo orden que expresan las velocidades en función de las velocidades de los puntos de la curva correspondiente a un nodo. Así podremos expresar

$$r_{2i-1} = r_{2i-2} + \sum_{j=1}^{N_{PG}} H_j \frac{P_{2u}^i(z_j^{i1})}{P_{2v}^i(z_j^{i1})} \quad (7.6)$$

$$r_{2i} = r_{2i-1} + \sum_{j=1}^{N_{PG}} H_j \frac{P_{2u}^i(z_j^{i2})}{P_{2v}^i(z_j^{i2})}$$

con $i = 1$ a $N_{E SL}$, donde $N_{E SL}$ es el número de elementos sobre la superficie libre, (r_0, z_0) es el punto inicial, y z_j^{i1} y z_j^{i2} son las coordenadas de los puntos de Gauss en los dos intervalos en que queda dividido el elemento i por el nodo de interfaz.

Hay un punto más que merece la pena ser comentado y es que en procesos en los cuales se tenga un punto de velocidad nula, allí se tiene indeterminada la derivada de la curva con respecto a z . En el esquema antes utilizado cabía tomar para ese punto derivada nula, o de igual valor que en el punto siguiente u otra variante por el estilo. Al hacer la integral numérica ese problema queda aclarado ya que en los puntos donde se evalúan los polinomios de interpolación, la derivada del cociente de velocidades existe, y los valores interpolados serán tanto más significativos cuanto más se refine la malla en el entorno de la singularidad. Adicionalmente, el peso del error en la integración de la superficie libre por la presencia de un punto singular para la velocidad es menor cuando se integra (7.3) por puntos de Gauss.

7.5 Comentarios finales

El esquema presentado en este capítulo resulta una alternativa al esquema de integración de una línea de corriente mediante la deformación de la malla. A diferencia de éste, no se requiere un cambio en la discretización, que puede llevar a excesivas distorsiones si los cambios debidos son muy grandes con respecto a la estimación inicial de la superficie libre.

Se verá en los próximos capítulos que esta forma de tratar las superficies libres es imprescindible para posibilitar el desarrollo de una técnica semi-analítica para el análisis de los problemas de que nos venimos ocupando.

Adicionalmente, la técnica de interpolación cuadrática de las componentes de la velocidad en el interior del elemento, y la integración de la línea de corriente por puntos de Gauss permite resolver la indeterminación que existe en la pendiente al comienzo de una superficie libre en donde la velocidad del primer punto sea nula. Cabe destacar que esta variante es aplicable a la integración de la línea de corriente por variación de las coordenadas tanto de los nodos como de la interfaz entre dos materiales.

REFERENCIAS

Thompson, E., Smelser, R. E., "Transient Analysis of Forging Operations by the Pseudo-Concentration Method", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol 25 (1988), pp. 177-189.

Zienkiewicz, O. C., Jain, P. C. & Oñate, E., "Flow of Solids During Forming and Extrusion: Some Aspects of Numerical Solutions" *Int. J. Solids Structures*, vol 14 (1978), pp. 15-38.

FORMULACIÓN INCREMENTAL

8.1 Introducción

Como ya se ha visto, la formulación de flujo resulta una solución elegante y sencilla para tratar problemas de conformado de metales que presentan un comportamiento viscoplástico, y donde las deformaciones son suficientemente grandes como para despreciar el comportamiento elástico del material. Esta formulación conduce a un sistema no lineal de ecuaciones cuya resolución puede efectuarse en unas pocas iteraciones del método de Newton Raphson, si el material es suficientemente viscoplástico. Por el contrario, para el caso perfectamente plástico, se tiene que para cualquier valor de desplazamientos tiene lugar una misma tensión efectiva. Esta circunstancia se traduce en una matriz tangente singular. Cuando el material se aproxima a este comportamiento, la resolución debe hacerse por substituciones sucesivas. Debido al mal condicionamiento de la matriz del sistema de ecuaciones, la convergencia es lenta. Esto hace que pueda resultar más conveniente transformar el problema no lineal en una sucesión de problemas lineales en los cuales se va incrementando la carga aplicada o las condiciones de contorno impuestas no nulas, calculando en cada caso la variación en la solución que surge del incremento aplicado.

Esta técnica tiene una aplicación aún más interesante, que se refiere concretamente a los problemas que se desean estudiar, referentes al conformado de tubos. En ellos se tiene una geometría que puede tomarse como axisimétrica, mientras que en las cargas (que en la práctica se introducen como velocidades impuestas

en el contorno), no tienen esa simetría. Para problemas lineales existen técnicas conocidas (Bathe, 1982, Wilson, 1965, Zienkiewicz, 1977) que proceden a una solución semianalítica, acudiendo a desarrollos en series de Fourier de las cargas y de las variables intervinientes, para luego resolver el problema en dos dimensiones restante en forma numérica. Para la aplicación de estas técnicas a problemas de conformado de metales es necesario transformar el problema no lineal en una sucesión de problemas lineales.

En este capítulo se presenta la formulación incremental, mediante la cual se lleva a cabo la linealización de la formulación de flujo. La opción inmediata para lograr este objetivo resulta una versión explícita, que se desarrolla en la sección 2. Es importante asegurar que al dar el paso de la linealización se conserve la versatilidad que la formulación tiene en su versión no lineal. En concreto, se discute en la sección 3 la validez del tratamiento de las superficies libres. Finalmente, en la sección 4 se presenta una versión implícita de la formulación incremental, que será apta para efectuar el desarrollo en serie de Fourier.

8.2 El método incremental explícito

El presente trabajo está íntegramente enmarcado en un enfoque euleriano, por lo que a pesar de tratar con procesos en los que las deformaciones y los desplazamientos son grandes, no nos afectan en cuanto a la no linealidad del problema, sino que ésta es solamente debida al material: en la fig. 1 se representa una típica curva velocidad de deformación efectiva *vs.* tensión efectiva que en nuestro caso supondremos compuesta de una sucesión de pequeños segmentos de recta.

En su forma no lineal, el problema queda planteado con el principio de las velocidades virtuales con la condición adicional de incompresibilidad, que conduce, al exigir su estacionariedad, a las ecuaciones (4.20) y (4.9), respectivamente, y que al ser discretizadas conducen a su vez al sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^N \\ p^N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (8.1)$$

donde

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mu \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega, \quad (8.2)$$

y

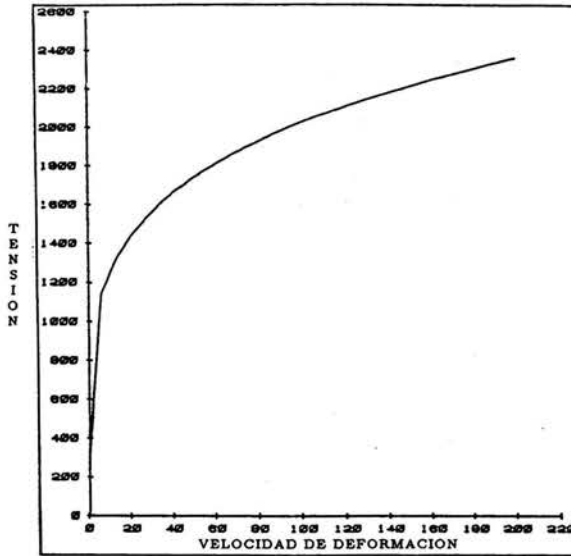


Figura 1. Relación tensión vs. velocidad de deformación

$$K_p = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} N_p^T I B d\Omega. \tag{8.3}$$

Aquí es B tal que $\underline{\dot{\epsilon}} = B\mathbf{u}$, D , tal que $\underline{s} = \mu D \underline{\dot{\epsilon}}$, e I tal que $\dot{\epsilon}_v = I \underline{\dot{\epsilon}}$. Para el caso plano es $I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Para la formulación incremental tenemos

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}_{n+1}^N\} &= \{\mathbf{u}_n^N + \Delta \mathbf{u}_n^N\} \\ \{p_{n+1}^N\} &= \{p_n^N + \Delta p_n^N\}, \end{aligned} \tag{8.4}$$

De manera que será

$$\begin{aligned} \delta \{\mathbf{u}_{n+1}^N\} &= \delta \{\Delta \mathbf{u}_n^N\} \\ \delta \{p_{n+1}^N\} &= \delta \{\Delta p_n^N\}, \end{aligned} \tag{8.5}$$

ya que los grados de libertad en cada incremento de carga están dados por los incrementos en las variables nodales, y los valores de $\{\mathbf{u}_n^N\}$ y $\{p_n^N\}$ actúan como una condición inicial para pasar del estado de carga n al $n + 1$.

La ecuación perturbada queda ahora

$$\begin{aligned} \delta W = & \delta \{ \Delta \mathbf{u}_n^N \}^T \left[\int_{\Omega} \mathbf{B} \mu \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \{ \mathbf{u}_n^N + \Delta \mathbf{u}_n^N \} - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{I}^T \mathbf{N}_p d\Omega \{ p_n^N + \Delta p_n^N \} \right] \\ & - \delta \{ \Delta p_n^N \}^T \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \mathbf{I} \mathbf{B} d\Omega \{ \mathbf{u}_n^N + \Delta \mathbf{u}_n^N \} - \delta \{ \Delta \mathbf{u}_n^N \}^T \int_{\Gamma} \mathbf{T} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (8.6)$$

de donde resulta el sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_n^N \\ \Delta p_n^N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{u_n} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_n^N \\ p_n^N \end{Bmatrix}. \quad (8.7)$$

El segundo miembro computa la carga debida a la velocidad de deformación inicial existente en el intervalo. Por eso, por analogía con otros métodos se puede denominar a esta formulación incremental el *método de la velocidad de deformación inicial*.

En este sistema de ecuaciones la viscosidad, que afecta a toda la matriz \mathbf{K} es función del campo de velocidades. A lo largo del intervalo de carga considerado suponemos constante su valor en cada punto, habiendo sido calculado este campo escalar en función de las derivadas de la velocidad al comienzo del intervalo de tiempo. Esta hipótesis es tanto más correcta cuanto más pequeños sean los intervalos de carga, y en este punto está la linealización del problema de flujo viscoplástico. En cuanto a la longitud de estos pasos, Cormeau (1974) ha estudiado el valor crítico por debajo del cual se asegura la estabilidad de un esquema de integración de este tipo.

Con este procedimiento, y si se toma un número suficiente de pasos puede resolverse el problema con una precisión aceptable con respecto a la solución no lineal. Esto se ha comprobado calculando, con los resultados del proceso de carga, el residuo normalizado. En la tabla I se muestran dichos valores en función del número de pasos para un problema de extrusión directa que se ha modelado con nueve elementos.

Tabla I. Residuo normalizado en función del número de pasos

Cant. de pasos	Res. Norm.	CPU(min:seg)
3	0.03493	1:08
5	0.01907	1:34
8	0.01129	2:10
10	0.00890	2:40

Este esquema de resolución admite el tratamiento de superficies libres, tal como se estudia en la sección siguiente, y esto es de gran interés para mantener la generalidad del método.

8.3 Extensión de la formulación incremental a casos con superficies libres

Como ya se ha visto, en los procesos de conformado plástico existen variadas superficies libres que hacen que para un dado proceso en estado estacionario se desconozca la forma final del dominio en el que se representa el material. Este factor se traduce en una no linealidad dentro de cada incremento. Ante la condición de superficie libre pueden obtenerse incrementos de velocidad que conduzcan a vectores velocidad que no sean tangentes con la superficie libre en cuestión. Si entonces procedemos a ajustar las coordenadas de los nodos de manera de satisfacer esta condición, se tiene que si bien el campo de velocidades es el mismo, la geometría del problema habrá cambiado. Ello obliga a recalcular la matriz de rigidez global para poder obtener nuevos valores de los desplazamientos. A su vez con ellos se deberán ajustar nuevamente las coordenadas de los nodos e iterar hasta lograr una convergencia. Para ello definimos, para la sub-iteración i el residuo

$$R = \sum_{k=1}^{N_{SL}} \left(\frac{u_k}{v_k} - m_k \right)^2, \quad (8.8)$$

y la norma

$$N = \sum_{k=1}^{N_{SL}} \left(\frac{u_k}{v_k} \right)^2, \quad (8.9)$$

donde

- N_{SL} cantidad de nodos de la superficie libre,
- m_k pendiente de la tangente al dominio por el nodo k ,
- u_k, v_k componentes de la velocidad del nodo k ,

y se continúan las sub-iteraciones hasta que

$$\frac{R}{N} < \delta, \quad (8.9)$$

siendo δ la tolerancia de convergencia.

Sin embargo, ya que la variación en la geometría para cada incremento de carga es pequeña, podemos intentar realizar las iteraciones con un esquema quasi-Newton, es decir utilizando la misma matriz tangente. De esta manera recalculamos cada vez el residuo, pero no se triangulariza la matriz global. Este paso se apoya en que la no linealidad agregada por la consideración de las superficies libres es suave; el campo de velocidades es fijo con respecto a los nodos, y así, de hecho, la convergencia del sub-problema se logra dentro de las tres primeras iteraciones. Cada una de ellas implica, en caso de no hacer esta simplificación, la resolución completa de todo el sistema de ecuaciones, de manera que el ahorro en tiempo de cálculo al adoptar un esquema quasi-Newton es considerable.

Un paso más en las simplificaciones consiste en linealizar este sub-problema no lineal, de manera de suponer que la geometría hallada por integración de las superficies libres es tal que los incrementos de velocidad calculados a partir de esa geometría satisfacen las condiciones de contorno de superficie libre. Esto equivale a suprimir toda sub-iteración en los incrementos de carga. Nuevamente, los resultados de esta simplificación son muy favorables. Los mismos son evaluados calculando el residuo normalizado que resulta de reemplazar la solución hallada en el sistema no lineal de ecuaciones.

Puede verse que la aproximación hecha para linealizar este problema es a lo sumo del mismo orden de magnitud que la realizada para acceder a la forma incremental. De esta forma el método converge linealmente con el número de pasos de carga adoptado, también cuando se incluyen para él el tratamiento simultáneo de las superficies libres. A medida que crece el número de pasos de carga, la diferencia se hace más pequeña entre los tres métodos ensayados, hasta hacerse imperceptible, en general, cuando el número de pasos de carga es mayor que 20.

8.4 Esquema incremental implícito

El objetivo que se persigue, en esta sección, es poder plantear la formulación de flujo (pensando en los problemas del conformado de tubos), de manera que admita una descomposición en serie de Fourier, según un esquema semi-analítico. Para ello es imprescindible tener una expresión en la que la matriz de rigidez no sea función de la coordenada circunferencial. Pero como la viscosidad, que es factor de una submatriz de la matriz de rigidez depende de la velocidad de deformación, debemos recurrir a un esquema iterativo implícito para poder cumplir con la condición mencionada, pasando al miembro de la derecha parte del producto de la matriz completa por el vector solución.

Para introducir el algoritmo incremental implícito consideremos la resolución de una ecuación lineal de una incógnita

$$ax + b = 0. \quad (8.10)$$

Si descomponemos el coeficiente a como $a = a_0 + a_1$, podemos decir

$$x = -\frac{b}{a_0} - \frac{a_1}{a_0}x. \quad (8.11)$$

Podemos utilizar esta expresión en un proceso iterativo escribiendo

$$x_{n+1} = -\frac{b}{a_0} - \frac{a_1}{a_0}x_n. \quad (8.12)$$

Obtenemos la solución de (8.10) cuando

$$|x_{n+1} - x_n| < \delta \quad (8.13)$$

donde δ es una tolerancia de convergencia.

El proceso de resolución está representado gráficamente en la figura 2, de donde pueden hacerse las siguientes observaciones

- 1) para la convergencia del algoritmo se requiere que $a_0 > a/2$, es decir, $a_0 > a/2$. Si $a_0 = a/2$ la solución numérica se alterna entre dos valores equidistantes de la solución exacta, y si $a_0 < a/2$ el algoritmo diverge
- 2) la convergencia es tanto más rápida cuanto más se acerque a_0 a a
- 3) para valores de a_0 mayores que a no existe limitación en la convergencia, pero debe tratarse de que a_0 sea lo más bajo posible, por lo indicado en 2)
- 4) la sucesión de soluciones numéricas es monótonica cuando $a_0 > a$, mientras que es alternada si $a > a_0 > a/2$
- 5) como es obvio, si $a_0 = a$ la solución se alcanza en una iteración.

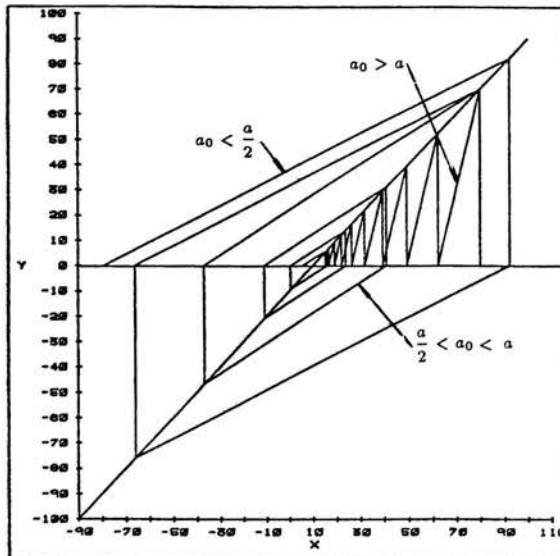


Figura 2. Esquema unidimensional del algoritmo incremental implícito

Mediante este desarrollo analizamos la posibilidad de alcanzar la solución si el coeficiente de la incógnita es una función no constante y se desea iterar con una recta de pendiente constante. Al extender este esquema de solución al problema de flujo viscoplástico con desarrollo en serie de Fourier, se contará con una matriz de coeficientes que no será función de la coordenada circunferencial, quedando la parte variable de la matriz como parte del término de cargas. Esta condición de matriz no dependiente de la coordenada circunferencial es necesaria para posibilitar el desarrollo en serie, con el desacoplamiento entre modos de la matriz de rigidez de la estructura.

Antes de considerar el problema tridimensional, obtenemos la expresión del algoritmo implícito para un problema en dos dimensiones. Para ello escribimos la forma incremental explícita descomponiendo

$$\mu = \mu' + \mu_M, \quad (8.14)$$

donde $\mu = \mu(\mathbf{x})$, $\mu' = \mu'(\mathbf{x})$, y $\mu_M = \text{constante}$ en todo el dominio, y a su vez \mathbf{x} es el vector posición. De aquí en adelante establecemos la siguiente notación: definiendo la matriz $\mathbf{K}_0 = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega$, nos referiremos a \mathbf{K} (ecuación (8.2)), como $\mathbf{K} = \mu \mathbf{K}_0$. Aunque el factor μ sea variable con el vector posición, denotamos el uso de distintas definiciones de la viscosidad (la cual es un factor en el integrando), como el producto de esa viscosidad por la matriz \mathbf{K}_0 , que sólo depende de factores geométricos.

Así, la forma incremental implícita nos queda

$$\begin{bmatrix} (\mu'_n + \mu_{Mn})\mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_n^k \\ \Delta p_n^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{un} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_n \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_n^k \\ p_n^k \end{Bmatrix} \quad (8.15)$$

de donde

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mu_{Mn} \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_n^k \\ \Delta p_n^k \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{un} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_n \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_n^k \\ p_n^k \end{Bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} \mu'_n \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_n^{k-1} \\ \Delta p_n^{k-1} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Para la convergencia de este algoritmo se necesita que

$$\left\| \begin{bmatrix} \mu_{M_n} \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \right\| \cdot \left\| \begin{bmatrix} (\mu_n - \mu_{M_n}) \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\| < 1, \quad (8.17)$$

que se cumple automáticamente si tomamos

$$\mu_{M_n} = \max_{e=1, N_E} \mu_{ne}, \quad (8.18)$$

donde μ_{ne} es la viscosidad media del elemento e para el paso de carga n , y N_E el número de elementos. De esta manera se satisface otra condición, referente a la velocidad de convergencia de este algoritmo: será tanto mayor cuanto más se acerque a 1 el producto de normas de (8.17), por tanto es conveniente tomar un valor lo más bajo posible. Sin embargo, si resultara demasiado bajo el algoritmo divergería.

Observéese que de esta forma sólo es preciso evaluar las matrices elementales al comienzo del intervalo, para luego simplemente recalculer el miembro de la derecha de (8.16). Además, al comienzo de los pasos posteriores al primero es posible obtener la matriz global invertida a partir de la matriz inversa de la iteración anterior, lo cual agrega una nueva ventaja en cuanto a la economía de la solución.

8.5 Algunos aspectos numéricos

i) Actualización de matrices inversas mediante escalado

El sistema de ecuaciones a resolver en el esquema incremental implícito contiene para cada paso un valor de viscosidad que se toma en base a las consideraciones expuestas al tratar dicho esquema, relativas a la convergencia del algoritmo iterativo.

Deseamos obtener las matrices inversas de un paso a partir de las del paso anterior, implementando luego la técnica de actualización en el marco del método frontal. Para ello, considerando la matriz inversa del sistema inicial,

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2^T \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 \end{bmatrix}, \quad (8.19)$$

puede verse que la matriz inversa del sistema para el paso siguiente será

$$\begin{bmatrix} \mu_2 \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\mu_1}{\mu_2} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2^T \\ \mathbf{M}_2 & \frac{\mu_2}{\mu_1} \mathbf{M}_3 \end{bmatrix}. \quad (8.20)$$

Por otra parte, al explicar el método frontal se vió que se almacenan las siguientes matrices, que se usarán en la triangularización del residuo y en la restitución

$$\mathbf{K}_{CC}^{-1} \mathbf{K}_{CR}, \quad \mathbf{K}_{CC}^{-1}, \quad \text{y} \quad \mathbf{K}_{RC} \mathbf{K}_{CC}^{-1} \quad (8.21a)$$

por cada subestructura, y la matriz final de grados de libertad retenidos

$$\mathbf{K}_{RR}^{-1}. \quad (8.21b)$$

Podemos expresar el escalamiento como el producto

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}')_{ij} &= \alpha_{ij} (\mathbf{K})_{ij} \\ (\mathbf{K}^{-1}')_{ij} &= \beta_{ij} (\mathbf{K}^{-1})_{ij} \end{aligned} \quad (8.22)$$

sin suma sobre (i, j) .

Para establecer los factores α_{ij} , β_{ij} , definimos las clases de equivalencia

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \{\text{números de grados de libertad de velocidad}\} \\ \hat{\mathbf{p}} &= \{\text{números de grados de libertad de presión}\} \end{aligned} \quad (8.23)$$

Resulta entonces

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{\mu_2}{\mu_1} & \text{si } i, j \in \hat{\mathbf{u}} \\ 1 & \text{si } i \in \hat{\mathbf{u}}, j \in \hat{\mathbf{p}}, \text{ ó } i \in \hat{\mathbf{p}}, j \in \hat{\mathbf{u}} \\ \frac{\mu_1}{\mu_2} & \text{si } i, j \in p, \text{ teniendo en cuenta que aquí es } (\mathbf{K})_{ij} \equiv 0 \end{cases} \quad (8.24a)$$

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \frac{\mu_1}{\mu_2} & \text{si } i, j \in \hat{\mathbf{u}} \\ 1 & \text{si } i \in \hat{\mathbf{u}}, j \in \hat{\mathbf{p}}, \text{ ó } i \in \hat{\mathbf{p}}, j \in \hat{\mathbf{u}} \\ \frac{\mu_2}{\mu_1} & \text{si } i, j \in p, \text{ teniendo en cuenta que aquí es } (\mathbf{K})_{ij} \equiv 0 \end{cases} \quad (8.24b)$$

Con esto ya pueden calcularse por escalado $(\mathbf{K}_{RR}^{-1})'_{ij}$ y $(\mathbf{K}_{CC}^{-1})'_{ij}$. Para los otros dos casos tenemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_{CC}^{-1}\mathbf{K}_{CR})'_{ij} &= \sum_l (\mathbf{K}_{CC}^{-1})'_{il} (\mathbf{K}_{CR})'_{lj} \\ &= \sum_l (\mathbf{K}_{CC}^{-1})_{il} (\mathbf{K}_{CR})_{lj} \beta_{il} \alpha_{lj} \end{aligned} \quad (8.25)$$

Analizamos los casos posibles

$$\text{a) } i, j \in \hat{u} \quad \beta_{il} \alpha_{lj} = \begin{cases} \frac{\mu_1}{1} \cdot \frac{\mu_2}{1} = 1 & \text{si } l \in \hat{u} \\ \frac{\mu_2}{1} \cdot \frac{\mu_1}{1} = 1 & \text{si } l \in \hat{p} \end{cases} \quad (8.26a)$$

$$\text{b) } i \in \hat{u}, j \in \hat{p} \quad \beta_{il} \alpha_{lj} = \begin{cases} \frac{\mu_1}{1} \cdot 1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} & \text{si } l \in \hat{u} \\ 1 \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} & \text{si } l \in \hat{p} \end{cases} \quad (8.26b)$$

$$\text{c) } i \in \hat{p}, j \in \hat{u} \quad \beta_{il} \alpha_{lj} = \begin{cases} 1 \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} & \text{si } l \in \hat{u} \\ \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot 1 = \frac{\mu_2}{\mu_1} & \text{si } l \in \hat{p} \end{cases} \quad (8.26c)$$

$$\text{d) } i, j \in \hat{p} \quad \beta_{il} \alpha_{lj} = \begin{cases} 1 \cdot 1 = 1 & \text{si } l \in \hat{u} \\ \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2} = 1 & \text{si } l \in \hat{p} \end{cases} \quad (8.26d)$$

Sustituyendo las (8.26) en (8.25) tenemos

$$(\mathbf{K}_{CC}^{-1}\mathbf{K}_{CR})'_{ij} = \gamma_{ij} (\mathbf{K}_{CC}^{-1}\mathbf{K}_{CR})_{ij} \quad (8.27)$$

con

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i, j \in \hat{u} \\ \frac{\mu_1}{\mu_2} & \text{si } i \in \hat{u}, j \in \hat{p} \\ \frac{\mu_2}{\mu_1} & \text{si } i \in \hat{p}, j \in \hat{u} \\ 1 & \text{si } i, j \in \hat{p} \end{cases} \quad (8.28)$$

Análogamente resulta

$$(\mathbf{K}_{RC}\mathbf{K}_{CC}^{-1})'_{ij} = \frac{1}{\gamma_{ij}} (\mathbf{K}_{RC}\mathbf{K}_{CC}^{-1})_{ij} \quad (8.29)$$

ii) Aplicación de los incrementos en las condiciones de contorno

Para la aplicación de las condiciones de contorno se tienen a cada momento un vector solución y un vector incremento de solución, que, cuando utilizamos el algoritmo implícito se obtienen en forma iterativa. Un determinado problema queda especificado mediante la fijación de algunas componentes de dichos vectores, en valores nulos o no. Al comienzo de la evolución pseudo-temporal se dividen los valores de velocidad impuestos por el número de pasos de carga a realizar, y en ese valor se incrementará el respectivo grado de libertad. Físicamente, en cada paso de carga se aplica a un sistema en equilibrio una perturbación, y la respuesta del sistema es el valor en que se tienen que incrementar los grados de libertad libres para restablecer el equilibrio. Es computacionalmente más ventajoso aplicar la perturbación al vector solución que al vector incremento de la solución; a continuación se muestra que ambos procedimientos son equivalentes.

Llamando

$$\left\{ \begin{matrix} \hat{\mathbf{u}}^k \\ \hat{\mathbf{p}}^k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{u}^k + \delta\mathbf{u}^k \\ \mathbf{p}^k + \delta\mathbf{p}^k \end{matrix} \right\} \quad (8.30)$$

al vector solución del paso de carga k perturbado, tenemos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mu_M \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_l^k \\ \Delta \mathbf{p}_l^k \end{Bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \mu \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}^k \\ \hat{\mathbf{p}}^k \end{Bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} (\mu - \mu_M) \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{l-1}^k \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (8.31)$$

es decir

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mu_M \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_l^k \\ \Delta \mathbf{p}_l^k \end{Bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \mu \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \mathbf{u}^k \\ \mathbf{p}^k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{u}^k \\ \delta\mathbf{p}^k \end{Bmatrix} \right) \\ &+ \begin{bmatrix} (\mu - \mu_M) \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{l-1}^k \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Haciendo

$$-\begin{bmatrix} \mu \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_i^k \\ \delta p_i^k \end{Bmatrix} = -\left(\begin{bmatrix} (\mu - \mu_M) \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_M \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}^k \\ \delta p^k \end{Bmatrix} \quad (8.33)$$

queda

$$\begin{bmatrix} \mu_M \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_i^k + \delta \mathbf{u}^k \\ \Delta p_i^k + \delta p^k \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mu \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^k \\ p^k \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} (\mu - \mu_M) \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{i-1}^k - \delta \mathbf{u}^k \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (8.34)$$

por lo que resulta equivalente perturbar el vector solución que el incremento de solución,

$$\begin{bmatrix} \mu_M \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}}_i^k \\ \Delta \hat{p}_i^k \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mu \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^k \\ p^k \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} (\mu - \mu_M) \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{i-1}^k \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (8.35)$$

APÉNDICE

Demostración de la condición (8.17) para la convergencia del algoritmo incremental implícito

Llamando

$$\mathbf{X}_k = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_n^{N^k} \\ \Delta p_n^{N^k} \end{Bmatrix} \quad (A.1)$$

al incremento en el vector solución del paso de carga n en la iteración k , tenemos que el algoritmo deberá converger si se cumple

$$\frac{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}\|}{\|\mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{X}_{k-2}\|} < 1 \quad (A.2)$$

Con la condición (A.2) se asegura que el error en la iteración k está acotado con el de la iteración $k - 1$, y así la sucesión formada por las normas del error a lo largo de las iteraciones es decreciente. Como al final del incremento de carga anterior el sistema está en equilibrio, tenemos

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{K}_M^{-1} \mathbf{K}' \mathbf{X}_{k-1} \quad (\text{A.3})$$

siendo

$$\mathbf{K}_M = \begin{bmatrix} \mu_M \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \mu' \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Entonces resulta

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}\| &= \|\mathbf{K}_M^{-1} \mathbf{K}' (\mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{X}_{k-2})\| \\ &\leq \kappa(\mathbf{K}_M) \frac{\|\mathbf{K}'\|}{\|\mathbf{K}_M\|} \|\mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{X}_{k-2}\|, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

donde $\kappa(\mathbf{K}_M) = \|\mathbf{K}_M\| \cdot \|\mathbf{K}_M^{-1}\|$ es el número de condición de \mathbf{K}_M . De modo que si se cumple (8.17), se asegura la convergencia por (A.2).

REFERENCIAS

- Bathe, K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall, (1982)
- Cormeau, J., "Numerical Stability in quasi static elasto-visco-plasticity and creep in elastic solids — a unified numerical solution approach", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol 8 (1974), pp. 821-845.
- Wilson, E. L., "Structural Analysis of Axisymmetric Solids", *A. I. A. A. Journal*, vol 3 (1965), pp. 2269-2274.
- Zienkiewicz, O. C. *The Finite Element Method*, Mc Graw Hill (1977).

*ELEMENTO CON DESARROLLO EN
SERIE DE FOURIER PARA EL
ESQUEMA INCREMENTAL IMPLÍCITO*

9.1 Introducción

Es sabido que en determinados problemas, en los que la geometría se mantiene invariable a lo largo de una de las coordenadas, resulta una alternativa conveniente el uso de formulaciones que efectúan una descomposición en serie de Fourier de las variables en dicha dirección, con el consiguiente ahorro en volumen de cálculo. Así, en lugar de resolver un problema n -dimensional, se resuelven varios problemas en $n - 1$ dimensiones, donde cada sub-problema corresponde a una componente armónica del desarrollo en serie. La convergencia del desarrollo en serie a la solución, al aumentar el número de términos del mismo, está asegurada por el tipo de funciones que componen la solución, a saber, combinaciones lineales de funciones continuas. Sobre este particular puede verse cualquier libro de análisis matemático (Courant, 1946).

El atractivo de esta técnica surge cuando, debido a la linealidad del problema, los modos están desacoplados. Este hecho es inmediato en problemas lineales, y se han hecho numerosas aplicaciones en este sentido (Wilson, 1966, Zienkiewicz, 1977, Bathe 1982, entre otros). En cambio, en problemas no lineales aparece un acoplamiento entre las componentes del desarrollo en serie, y así, si N es el número de grados de libertad de cada problema en $n - 1$ dimensiones, y L_H es el número de componentes del desarrollo en serie, resulta, en principio, una matriz de rigidez de $(N \cdot L_H) \times (N \cdot L_H)$, en lugar de las L_H matrices de $N \times N$ del sistema diagonal por bloques que quedan al desacoplarse los modos. Han habido

intentos de extender esta técnica a problemas no lineales, y entre ellos, Winnicki y Zienkiewicz (1979) propusieron una forma de aplicación en plasticidad, pero que no admite el tratamiento de materiales viscoplásticos. El planteo incremental que se ha formulado en dicho trabajo transforma la formulación en velocidades, en la cual estamos enmarcados, en una formulación en desplazamientos.

En este capítulo se va a encarar el tratamiento semianalítico de problemas de simetría axial en la geometría, pero no en las cargas ni en las condiciones de contorno. Esto permite resolver problemas del mismo tipo que los que se resuelven en la formulación de flujo tradicional, con el agregado de las mencionadas peculiaridades en la definición del problema. Se utiliza para ello un desarrollo en series de Fourier en la coordenada azimutal. Los pasos del capítulo precedente, de linealización y transformación del problema en uno en cuya matriz de coeficientes la viscosidad es constante estaban encaminados a posibilitar el desarrollo que sigue a continuación.

En esta etapa deben distinguirse dos objetivos, que son la generación de las matrices elementales y la evaluación de los términos independientes, que se consideran en las dos próximas secciones. En la sección 4 se presenta el desarrollo para extender la formulación semi-analítica a estados transitorios. Seguidamente, en la sección 5, se consideran algunos aspectos numéricos a tener en cuenta al llevar a cabo la implementación de este método. Finalmente, se presentan algunos ejemplos numéricos que muestran el comportamiento del modelo.

9.2 Construcción del elemento

De acuerdo con la estrategia de resolución planteada, se busca resolver tantos sistemas de ecuaciones desacoplados cuantas funciones base se tomen para efectuar los desarrollos en serie. Tal como ya se ha mostrado, hemos transformado el problema de manera de tener matrices de coeficientes de cada modo no dependientes de la coordenada azimutal. Esto ha sido al precio de resolver en forma implícita, y por lo tanto iterativa, un problema que, de no mediar el desarrollo en serie deseado, podría resolverse en forma explícita y lineal, ya que al tomar incrementos pequeños en el proceso de imposición de las cargas (que realizamos especificando velocidades en el contorno), el problema se linealiza.

Para la resolución desacoplada de los modos debemos calcular el término independiente de cada modo teniendo en cuenta, además de la contribución del propio modo, la de todos los demás. De esta manera se consigue tratar el acoplamiento entre modos surgido por la naturaleza no lineal del material visco-plástico sin perder el desacoplamiento en el sistema de ecuaciones a resolver para cada iteración.

Para el cálculo de las matrices elementales partimos del vector velocidad de deformación, expresado en coordenadas cilíndricas y para un campo de velocidades no axi-simétrico:

$$\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_r \\ \dot{\epsilon}_z \\ \dot{\epsilon}_\theta \\ \dot{\epsilon}_{rz} \\ \dot{\epsilon}_{z\theta} \\ \dot{\epsilon}_{\theta r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

Teniendo en cuenta consideraciones geométricas, resulta conveniente definir el desarrollo en serie de las componentes de la velocidad de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} + \sum_{l=1}^L \left[\begin{pmatrix} u_l \cos l\theta \\ v_l \cos l\theta \\ w_l \sin l\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u_{-l} \sin l\theta \\ -v_{-l} \sin l\theta \\ w_{-l} \cos l\theta \end{pmatrix} \right], \quad (9.2)$$

donde L es el número de modos con los que se hace el desarrollo en serie. Esta forma surge de ver que a una carga de dirección r o z simétrica corresponden desplazamientos simétricos en r y z pero antisimétricos en θ , y viceversa. Este hecho, junto con los signos adoptados conducen a un sistema global que está desacoplado por armónicos y también dentro de un mismo armónico la componente $\{u\}_l$ está desacoplada con respecto a la componente $\{u\}_{-l}$. Por último, como se mostrará en el desarrollo que sigue, las matrices de ambas componentes de un mismo armónico son iguales, lo cual reduce el tiempo requerido para su cálculo y resolución. Se cuenta entonces con $2L + 1$ sistemas de $N \times N$, donde N es el número de grados de libertad por cada componente de armónico, en los cuales existen sólo $L + 1$ matrices a calcular e invertir.

Para tener en cuenta esta agrupación de las componentes de velocidad en las dos fases dentro de un mismo modo l (que designamos con un subíndice con signo positivo y negativo respectivamente), definimos las matrices

$$\mathbf{I}^l = \begin{pmatrix} \cos l\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos l\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sin l\theta \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

$$\mathbf{K}^l = \begin{pmatrix} \sin l\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin l\theta & 0 \\ 0 & 0 & -\cos l\theta \end{pmatrix}$$

(en rigor cada elemento de \mathbf{I}^l y \mathbf{K}^l es una matriz diagonal de orden igual al número de nodos del elemento). Así, podemos reescribir (9.2) como

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \sum_{l=1}^L (\mathbf{u}_l \mathbf{I}^l - \mathbf{u}_{-l} \mathbf{K}^l) \quad (9.4)$$

También podemos expresar el tensor de deformaciones como suma de las contribuciones de cada componente armónica

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{\varepsilon}\}_0 + \sum_{l=1}^L (\{\dot{\varepsilon}\}_l + \{\dot{\varepsilon}\}_{-l}) \quad (9.5)$$

donde

$$\{\dot{\varepsilon}\}_0 = \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_0 \quad (9.6)$$

$$\{\dot{\varepsilon}\}_l = (\mathbf{B}_0 \mathbf{I}^l - l \hat{\mathbf{B}} \mathbf{K}^l) \mathbf{u}_l \quad (9.7)$$

$$\{\dot{\varepsilon}\}_{-l} = (-\mathbf{B}_0 \mathbf{K}^l - l \hat{\mathbf{B}} \mathbf{I}^l) \mathbf{u}_{-l} \quad (9.8)$$

donde, de (9.1) y (9.2) resulta

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_u}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_u}{\partial z} & 0 \\ \frac{N_u}{r} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_u}{\partial z} & \frac{\partial N_u}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_u}{\partial r} - \frac{N_u}{r} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_u}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (9.9)$$

y

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{N_u}{r} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.10)$$

Nos referiremos en lo sucesivo, al hablar de componentes armónicas de la velocidad, a los valores nodales, de modo que, por comodidad en la notación, se omitirá el supraíndice N .

Las ecuaciones (9.6) a (9.8) definen la matriz \mathbf{B} , que relaciona velocidades con velocidades de deformación. Será

$$\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = \mathbf{B}\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{B}_0 \quad \mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_{-1} \quad \dots \quad \mathbf{B}_L \quad \mathbf{B}_{-L}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}^L \\ \mathbf{u}^{-L} \end{Bmatrix} \quad (9.11)$$

Con estas definiciones estamos en condiciones de iniciar el cálculo de la matriz del elemento. Por aplicación del principio de las velocidades virtuales quedarán expresiones del tipo

$$\delta \left[\int_{\Omega} \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}_{\pm i}^T \mu \mathbf{D} \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}_{\pm j} d\Omega - \int_{\Omega} \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}_{\pm i}^T \mathbf{I} \{p_j\} d\Omega - \int_{\Omega} \{\mathbf{u}\}_{\pm i}^T \mathbf{F}_j d\Omega \right] = 0, \quad (9.12)$$

con suma sobre j , y donde i, j son las componentes armónicas, y varían de 1 a L .

Para el caso tridimensional es

$$\mathbf{I} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (9.13)$$

y

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & 0 & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 1 & & \\ 0 & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

Calculamos, por aplicación del algoritmo incremental implícito, presentado en la sección 8.4, la submatriz elemental \mathbf{K} , que liga velocidades con velocidades

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mu_M \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_A \mathbf{B}^T \mu_M \mathbf{D} \mathbf{B} dA d\theta \quad (9.15)$$

Considerando arbitrarias las variaciones de los grados de libertad queda, tomando simultáneamente ambas fases, $i, j, -i, -j$, la matriz que conecta las velocidades del armónico $\pm i$ con las del $\pm j$, resulta

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_0 \mathbf{I}^i - i \dot{\mathbf{B}} \mathbf{K}^i)^T \mathbf{D} & (\mathbf{B}_0 \mathbf{I}^i - i \dot{\mathbf{B}} \mathbf{K}^i)^T \mathbf{D} \\ (\mathbf{B}_0 \mathbf{I}^j - j \dot{\mathbf{B}} \mathbf{K}^j) & (-\mathbf{B}_0 \mathbf{K}^j - j \dot{\mathbf{B}} \mathbf{I}^j) \\ (-\mathbf{B}_0 \mathbf{K}^i - i \dot{\mathbf{B}} \mathbf{I}^i)^T \mathbf{D} & (-\mathbf{B}_0 \mathbf{K}^i - i \dot{\mathbf{B}} \mathbf{I}^i)^T \mathbf{D} \\ (\mathbf{B}_0 \mathbf{I}^j - j \dot{\mathbf{B}} \mathbf{K}^j) & (-\mathbf{B}_0 \mathbf{K}^j - j \dot{\mathbf{B}} \mathbf{I}^j) \end{bmatrix} d\Omega \quad (9.16)$$

Las integrales en función de θ resultan ser

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin i\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos i\theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos i\theta \cos j\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin i\theta \sin j\theta d\theta = \begin{cases} \pi & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin i\theta \cos j\theta d\theta = 0$$
(9.17)

por lo que la matriz entera \mathbf{K} resulta diagonal por bloques, que, para $i = j$, tiene la forma

$$\mathbf{K}_{ij} = \pi \begin{bmatrix} \int_A (\mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0 - j(\mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \hat{\mathbf{B}})^* - i(\hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0)^* + ij \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \hat{\mathbf{B}}) dA & 0 \\ 0 & \int_A (\mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0 - j(\mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \hat{\mathbf{B}})^* - i(\hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0)^* + ij \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \hat{\mathbf{B}}) dA \end{bmatrix}$$
(9.18)

donde

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M} \mathbf{L}$$
(9.19)

siendo

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
(9.20)

En esta evaluación se ha tomado una viscosidad μ_M constante, o que, al menos, no es función de θ . La diferencia entre la viscosidad real y el valor μ_M se computa como una carga equivalente, según se muestra en la sección 3.

La matriz elemental se completa con las matrices \mathbf{K}_p y \mathbf{K}_p^T que proceden de la condición de incompresibilidad y del segundo término de (9.12), respectivamente. Tomamos también un desarrollo en serie para la presión en un punto

$$p = p_0 + \sum_{l=1}^L (p^l \cos l\theta - p^{-l} \sin l\theta) \quad (9.21)$$

Al exigir la nulidad de la potencia disipada por deformación volumétrica queda, para los armónicos $\pm i, \pm j$

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \cos i\theta \\ \sin i\theta \end{bmatrix} \mathbf{N}_p^T [\mathbf{I}\mathbf{B}_0\mathbf{I}^j - j\mathbf{I}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{K}^j \quad -\mathbf{I}\mathbf{B}_0\mathbf{K}^j - j\mathbf{I}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{I}^j] d\Omega \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^j \\ \mathbf{u}^{-j} \end{Bmatrix} = 0 \quad (9.22)$$

Resulta ser

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\mathbf{B}_0 &= \begin{pmatrix} \mathbf{N}_p^T(\mathbf{N}_{u,r} + \mathbf{N}_u^T/r) & \mathbf{N}_p^T\mathbf{N}_{u,z} & 0 \\ \mathbf{I}\hat{\mathbf{B}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{N}_p^T\mathbf{N}_u/r \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.23)$$

Operando llegamos a

$$\mathbf{K}_{p_{ij}} = \pi \delta_{ij} \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{0p}^j & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{0p}^j \end{pmatrix}, \quad (9.24)$$

donde

$$\mathbf{K}_{0p}^j = (\mathbf{N}_p^T(\mathbf{N}_{u,r} + \mathbf{N}_u/r) \quad \mathbf{N}_p^T\mathbf{N}_{u,z} \quad j\mathbf{N}_p^T\mathbf{N}_u/r) \quad (9.25)$$

y nuevamente se tiene para ambas componentes del armónico $i = j$ una misma matriz.

9.3 Cálculo del término independiente

El desarrollo de la sección precedente contiene la hipótesis de que la viscosidad, que interviene en la definición de la matriz \mathbf{K} (ecuación (9.15)), es constante. La restricción en realidad es que solamente no sea función de θ , pero en la sección 8.4 se ha considerado la condición, más severa aún, de tomarla constante. Esto permite garantizar el desacoplamiento entre modos, según las ecuaciones (9.16). Para restablecer el equilibrio debe calcularse el término de la carga equivalente, que es de la forma

$$\mathbf{F} = - \begin{bmatrix} \mu \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_n \\ p_n \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} (\mu - \mu_M) \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_n^{l-1} \\ \Delta p_n^{l-1} \end{Bmatrix} \quad (9.26)$$

A diferencia del caso incremental implícito, los grados de libertad del problema son las componentes armónicas de las velocidades y presiones nodales. Observando las matrices notamos que, por ser μ función de la coordenada circunferencial, la matriz global no tendrá solamente matrices no nulas en la diagonal, sino que tendrá lugar un acoplamiento entre los modos: para la evaluación del término independiente de un modo debe computarse también la contribución de todos los demás. Para calcular las integrales en θ evaluamos estos términos independientes en distintos ángulos, para luego realizar una integral numérica. Remarcamos que este acoplamiento no se extiende a la matriz del sistema que queremos resolver, por lo que cada armónico se seguirá resolviendo en forma independiente.

Para ilustrar el procedimiento a seguir presentamos el cálculo de

$$\mathbf{F}_1 = - \begin{bmatrix} \mu \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_p^T \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_n \\ p_n \end{Bmatrix} \quad (9.27)$$

siendo el otro término, que se recalculará para cada iteración dentro de cada caso de carga, de características similares.

Primeramente debemos evaluar

$$\mathbf{F}_1^u = \int_0^{2\pi} \int_A \mathbf{B}^T \sigma dA d\theta = \int_0^{2\pi} \int_A \mathbf{B}^T \mu \mathbf{D} \mathbf{B} dA d\theta \{ \mathbf{u} \} \quad (9.28)$$

donde la integral en θ se efectúa numéricamente por evaluación del integrando en distintos ángulos.

La contribución del modo j al vector de fuerzas del modo i está dada por

$$\mathbf{F}_{1ij}^u = \int_0^{2\pi} \int_A \begin{pmatrix} \mathbf{B}_i^T \\ \mathbf{B}_{-i}^T \end{pmatrix} \mu \mathbf{D} (\mathbf{B}_j \quad \mathbf{B}_{-j}) dAd\theta \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_j \\ \mathbf{u}_{-j} \end{Bmatrix} \quad (9.29)$$

$$\mathbf{F}_{1ij}^u = \int_0^{2\pi} \int_A \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i^T \mu \mathbf{D} \mathbf{B}_j & \mathbf{B}_i^T \mu \mathbf{D} \mathbf{B}_{-j} \\ \mathbf{B}_{-i}^T \mu \mathbf{D} \mathbf{B}_j & \mathbf{B}_{-i}^T \mu \mathbf{D} \mathbf{B}_{-j} \end{bmatrix} dAd\theta \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_j \\ \mathbf{u}_{-j} \end{Bmatrix} \quad (9.30)$$

Calculemos:

$$\mathbf{B}_i^T \mu \mathbf{D} \mathbf{B}_j =$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,r}^T & 0 & \frac{\mathbf{N}_r^T}{r} & \mathbf{N}_{,z}^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_{,z}^T & 0 & \mathbf{N}_{,r}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{N}_{,r}^T - \frac{\mathbf{N}_r^T}{r} & \mathbf{N}_{,z}^T \end{bmatrix} \mathbf{I}^i - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mathbf{N}_r^T}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mathbf{N}_{,z}^T}{r} \\ 0 & 0 & \frac{\mathbf{N}_r^T}{r} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{K}^i \right\}$$

$$\mu \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,r} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_{,r} & 0 \\ \mathbf{N}_r & 0 & 0 \\ \mathbf{N}_{,z} & \mathbf{N}_{,r} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{N}_{,r} - \mathbf{N}_r \\ 0 & 0 & \mathbf{N}_{,z} \end{bmatrix} \mathbf{I}^j - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathbf{N}_r}{r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mathbf{N}_r}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{N}_z}{r} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{K}^j \right\} \quad (9.31)$$

es decir

$$\mathbf{B}_i^T \mu \mathbf{D} \mathbf{B}_j =$$

$$2\mu \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,r}^T \mathbf{N}_{,r} + \frac{\mathbf{N}_r^T}{r} \mathbf{N}_r & \frac{\mathbf{N}_{,z}^T \mathbf{N}_{,r}}{2} & 0 \\ + \frac{\mathbf{N}_{,z}^T \mathbf{N}_{,z}}{2} & \mathbf{N}_{,z}^T \mathbf{N}_{,z} & 0 \\ \frac{\mathbf{N}_{,r}^T \mathbf{N}_{,z}}{2} & + \frac{\mathbf{N}_{,z}^T \mathbf{N}_{,z}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \left((\mathbf{N}_{,r} - \frac{\mathbf{N}_r}{r})^T (\mathbf{N}_{,r} - \frac{\mathbf{N}_r}{r}) + \mathbf{N}_{,z}^T \mathbf{N}_{,z} \right) \end{bmatrix} \mathbf{I}^i \mathbf{I}^j - \right.$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & \frac{N^T}{r} \frac{N}{r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{N_{,r}}{2} - \frac{N}{r}\right)^T \frac{N}{r} & \frac{N^T_{,z}}{2} \frac{N}{r} & 0 \end{array} \right] \mathbf{I}^i_j \mathbf{K}^j -$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & \frac{N^T}{2r} (N_{,r} - \frac{N}{r}) \\ 0 & 0 & \frac{N^T}{2r} N_{,z} \\ \frac{N^T}{r} \frac{N}{r} & 0 & 0 \end{array} \right] i \mathbf{K}^i \mathbf{I}^j + \left[\begin{array}{ccc} \frac{N^T}{2r} \frac{N}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N^T}{2r} \frac{N}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N^T}{r} \frac{N}{r} \end{array} \right] i \mathbf{K}^i_j \mathbf{K}^j \end{array} \right\} \quad (9.32)$$

Los otros tres términos son de forma semejante, variando sólo los factores que multiplican a cada matriz. Vemos que por lo que se refiere a la integral en (r, z) , sólo hace falta evaluar las siguientes:

$$I_1 = \int_A 2\mu N^T_{,r} N_{,r} dA \quad (9.33a)$$

$$I_2 = \int_A \mu N^T_{,r} N_{,z} dA \quad (9.33b)$$

$$I_3 = \int_A 2\mu N^T_{,z} N_{,z} dA \quad (9.33c)$$

$$I_4 = \int_A 2\mu \frac{N^T}{r} \frac{N}{r} dA \quad (9.33d)$$

$$I_5 = \int_A \mu \frac{N^T}{r} (N_{,r} - \frac{N}{r}) dA \quad (9.33e)$$

$$I_6 = \int_A \mu \frac{N^T}{r} N_{,z} dA \quad (9.33f)$$

De manera que resultaría, por ejemplo:

$$\int_A \mathbf{I}^i \mathbf{B}_0^T \mu \mathbf{D} \mathbf{B}_0 \mathbf{I}^j dA$$

$$= \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_4 + \mathbf{I}_3/2) \cos i\theta \cos j\theta & \mathbf{I}_2 \cos i\theta \cos j\theta & -\mathbf{I}_5 i \sin i\theta \cos j\theta \\ +\mathbf{I}_4/2 i \sin i\theta j \sin j\theta & & -\mathbf{I}_4 \cos i\theta j \sin j\theta \\ \mathbf{I}_2^T \cos i\theta \cos j\theta & (\mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_1/2) \cos i\theta \cos j\theta & -\mathbf{I}_6 i \sin i\theta \cos j\theta \\ -\mathbf{I}_5^T \cos i\theta j \sin j\theta & +\mathbf{I}_4/2 i \sin i\theta j \sin j\theta & (\mathbf{I}_1/2 - \mathbf{I}_5^T - \mathbf{I}_5 - \mathbf{I}_4/2) \cos i\theta \cos j\theta \\ -\mathbf{I}_4 i \sin i\theta \cos j\theta & -\mathbf{I}_6^T \cos i\theta j \sin j\theta & +\mathbf{I}_4 i \sin i\theta j \sin j\theta \end{bmatrix}. \quad (9.34)$$

Sumando convenientemente estas integrales podemos evaluar cualquier término

$$\int_A \mathbf{B}_i^T \mu \mathbf{D} \mathbf{B}_j dA \quad (9.35)$$

y, consiguientemente, el término independiente. Notemos además que al ser $\mu = f(\mathbf{u}_j)$, donde \mathbf{u}_j es el campo de velocidades para el paso de carga j , en dicho intervalo la matriz que estamos calculando no varía. Con la misma matriz hallamos también el término restante:

$$\mathbf{F}_{2ij} = \begin{bmatrix} (\mu - \mu_M) \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \Delta \mathbf{u}_j^{i-1} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (9.36)$$

Teniendo en cuenta que, al ser μ_M constante para todo el dominio de integración, el término

$$\mu_M \mathbf{K}_0 \quad (9.37)$$

contiene los modos desacoplados. Por lo tanto, a la submatriz

$$\int_A \mathbf{B}_i^T \mu \mathbf{D} \mathbf{B}_j dA \quad (9.38)$$

sólo le restaremos

$$\int_A \mathbf{B}_i^T \mu_M \mathbf{D} \mathbf{B}_j dA \quad (9.39)$$

cuando sea $i = j$.

El cálculo de los términos independientes para cada modo se completa con la parte esférica del tensor de tensiones ($\mathbf{K}_p^T\{p\}$) y con la condición de incompresibilidad ($\mathbf{K}_p\{u\}$). Como se verá, se sigue cumpliendo a nivel global que

$$\mathbf{K}_p = (\mathbf{K}_p^T)^T, \quad (9.40)$$

sin embargo, no será así al considerar la submatriz que permite evaluar la contribución del modo j al término independiente del modo i . Allí será

$$(\mathbf{K}_p)_{ij} \neq ((\mathbf{K}_p^T)_{ij})^T. \quad (9.41)$$

Sin embargo, por comodidad mantendremos la notación habitual. La relación entre ambas matrices puede conocerse recordando que, por lo dicho más arriba,

$$(\mathbf{K}_p)_{ji} = ((\mathbf{K}_p^T)_{ij})^T. \quad (9.42)$$

De (9.27), la parte de la carga equivalente sobre los grados de libertad de la velocidad debida a la parte esférica del tensor de tensiones resulta

$$\mathbf{F}_1^{up} = -\mathbf{K}_p^T\{p\} = -\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{I}^T \mathbf{N}_p d\Omega \{p_n\}. \quad (9.43)$$

Puede verse que este término es lineal, por lo que, debido a las propiedades de ortogonalidad de las funciones base, esta parte del problema está desacoplada por modos, y, dentro de cada modo, por fase.

Será, entonces

$$\mathbf{F}_1^{up}{}_{ij} = \pi \delta_{ij} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{0p}^j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{0p}^j \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_j \\ p_{-j} \end{Bmatrix} \quad (9.44)$$

donde \mathbf{K}_{0p}^j es la obtenida en (9.25). La deducción para la contribución recíproca, $\mathbf{F}_1^{pu}{}_{ij}$ es del todo análoga.

Finalmente, el vector carga equivalente se obtiene, para cada componente armónica, como suma de las contribuciones de todos los modos

$$\mathbf{F}_i^u = \sum_{j=1}^L (\mathbf{F}_{1ij}^u + \mathbf{F}_{2ij}^u) + \mathbf{F}_{1ii}^{up}, \quad (9.45)$$

$$\mathbf{F}_i^p = \mathbf{F}_{1ij}^{pu},$$

sin suma sobre i .

9.4 Estados transitorios

La extensión del modelo semi-analítico para estados no estacionarios no ofrece mayores inconvenientes teóricos que los resueltos hasta este punto. Ante todo, debe tenerse en cuenta la necesidad de conservar la simetría axial en la geometría. Por esta razón es inadmisibles un esquema basado en la actualización de las coordenadas de los nodos a través de la ecuación (7.2). Ante este requerimiento, el método de la pseudo-concentración surge como una opción satisfactoria, que permite conservar este enfoque semi-analítico.

Al buscar esta extensión, generamos primeramente el campo escalar (pseudo-concentraciones) a partir de la geometría, conocida, al tiempo t_n , tomando la interfaz metal-material ficticio para la generación de dicho campo. Procedemos luego a la descomposición en armónicos del campo escalar

$$c_n = c_{n0} + \sum_{l=1}^L (c_{nl} \cos l\theta - c_{n-l} \sin l\theta). \quad (9.46)$$

Recordando el desarrollo hecho para el problema bidimensional, tendremos, para el esquema de Cranck-Nicolson

$$(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \{c_{n+1}^N\} = (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) \{c_n^N\}, \quad (9.47)$$

donde ahora será

$$\begin{aligned} M_{1ij} &= \int_{\Omega} \begin{pmatrix} N_c^T N_c \cos i\theta \cos j\theta & -N_c^T N_c \cos i\theta \sin j\theta \\ -N_c^T N_c \sin i\theta \cos j\theta & N_c^T N_c \sin i\theta \sin j\theta \end{pmatrix} d\Omega \\ &= \delta_{ij} \pi \int_A \begin{pmatrix} N_c^T N_c & 0 \\ 0 & N_c^T N_c \end{pmatrix} dA. \end{aligned} \tag{9.48}$$

Sin embargo, para M_2 tenemos

$$\begin{aligned} M_{2ij} &= \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \cos i\theta N_c^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}_M) \cdot \nabla N_c \cos j\theta \\ -\sin i\theta N_c^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}_M) \cdot \nabla N_c \cos j\theta \\ -\cos i\theta N_c^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}_M) \cdot \nabla N_c \sin j\theta \\ \sin i\theta N_c^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}_M) \cdot \nabla N_c \sin j\theta \end{bmatrix} d\Omega, \end{aligned} \tag{9.49}$$

donde es evidente que, por ser la velocidad una función no constante de la coordenada circunferencial, el sistema de ecuaciones se acopla. En este punto caben dos opciones. La primera es acudir a un algoritmo iterativo implícito tal como se hizo con la velocidad. En ese caso se tendrá

$$M_2 = \overline{M}_2 + \overline{\overline{M}}_2, \tag{9.50}$$

donde \overline{M}_2 es una matriz diagonal por bloques construida con el término axi-simétrico de $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_M)$, y $\overline{\overline{M}}_2$ es una matriz llena, que se construye con los términos restantes.

Así decimos

$$(M_1 - \overline{M}_2) \{c_{n+1}^{N,k}\} = (M_1 + M_2) \{c_n^{N,k}\} + \overline{\overline{M}}_2 \{c_{n+1}^{N,k-1}\}, \tag{9.51}$$

e iteramos hasta alcanzar una tolerancia de convergencia.

La integral del segundo miembro se puede llevar a cabo, para la coordenada circunferencial, en forma numérica, evaluando el vector de carga equivalente en las estaciones que se desee.

Alternativamente, y si bien no se tienen tan claramente las propiedades de ortogonalidad de dos funciones de la base, si tenemos la velocidad desarrollada en serie de Fourier, podremos efectuar productos de tres funciones base, y en ese caso, podremos hacer uso de las siguientes relaciones, válidas para i, j y $k > 1$

$$\int_0^{2\pi} \cos i\theta \cos j\theta \cos k\theta d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } i = 1, k = j + 1 \text{ o equivalente} \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases} \quad (9.52a)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos i\theta \cos j\theta \sin k\theta d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } i = 1, k = j + 1 \text{ o equivalente} \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases} \quad (9.52b)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin i\theta \cos j\theta \sin k\theta d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } i = 1, k = j + 1 \text{ o equivalente} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } i = 1, k = j - 1 \text{ o equivalente} \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases} \quad (9.52c)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin i\theta \sin j\theta \sin k\theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{para cualquier valor de } i, j \text{ y } k \end{cases} \quad (9.52d)$$

De esta forma puede reducirse el volumen de cálculos necesarios para computar el acoplamiento entre componentes modales.

Existe otra opción, que evita caer en un algoritmo iterativo para determinar la concentración del tiempo t_{n+1} , y que consiste en adoptar un esquema de integración temporal de Euler (explícito), de modo que queda

$$\mathbf{M}_1 \{c_{n+1}^N\} = (\mathbf{M}_1 + 2\mathbf{M}_2) \{c_n^N\}. \quad (9.52)$$

La matriz de coeficientes es diagonal por bloques, y el segundo miembro debe igualmente evaluarse en los distintos ángulos exigidos por el esquema de integración numérica en θ que se elija. Este esquema de Euler, sin embargo, por ser condicionalmente estable puede obligar a tomar pasos de tiempo más cortos y, por lo tanto, a efectuar más resoluciones a tiempo constante, por lo que se considera como más ventajoso el esquema implícito, aunque la resolución para avanzar en un paso de tiempo es más costosa. Otro argumento en favor del algoritmo implícito es que, por ser la velocidad constante para el intervalo t_n a t_{n+1} no deben recalcularse la matrices \mathbf{M}_1 , $\overline{\mathbf{M}}_2$ y $\overline{\overline{\mathbf{M}}}_2$; en las iteraciones posteriores a la primera únicamente se evalúa el residuo.

9.5 Algunos aspectos numéricos

i) Cuestiones relativas a la convergencia del algoritmo implícito

Al resolver numéricamente el problema en 3-D con formulación de semi-analítica, por errores debidos a la integración numérica se notan acoplamientos indebidos entre modos, puestos de manifiesto al utilizar una ley constitutiva lineal (problema lineal de Stokes), la cual se logra colocando en (4.27) $n = 1$ y $\sigma_y = 0$

Este acoplamiento espúreo debe ignorarse y para ello se deben comparar las componentes de cada armónico con una cierta norma, construida con el vector desplazamientos global. Sin embargo, recién se deben ignorar estos términos al final de las iteraciones dentro de cada paso. De lo contrario ocurre que no puede resolverse el sistema algebraico con tanta precisión como se quiera, sino que permanece un residuo debido a los términos que se están ignorando dentro del sistema algebraico.

ii) Otros aspectos

La aplicación de las cargas se lleva a cabo en forma incremental. Vienen dadas por valores no nulos de algunos grados de libertad fijados. A su vez, su distribución circunferencial es no axisimétrica.

El cálculo se inicia mediante la imposición de una carga inicial, que resulta de dividir la carga final por el número de pasos, y con la cual se resuelve un problema lineal, tal como se hace en el análisis no lineal en dos dimensiones.

Las funciones mediante las que se especifican las velocidades impuestas se descomponen en armónicos, para luego ser aplicadas en el incremento de las variables impuestas: las variables que se incrementan son las respectivas componentes del desarrollo en serie de un determinado grado de libertad.

Cuando se aplica el vector de velocidades impuestas, se calcula su efecto sobre todas las componentes armónicas, teniendo en cuenta el acoplamiento producto de la no linealidad material.

Condiciones de contorno no axisimétricas: en el problema real existen circunferencias (r, z) que para algunos valores de θ un mismo grado de libertad está libre y para otros, fijado. En los ángulos en los que está libre se transforman los elementos de fricción en elementos de material ficticio. Debe tenerse en cuenta que multiplicar por un número muy pequeño a la viscosidad (que eso se hace en el elemento de material ficticio), es una aproximación para decir que el límite con el pseudo-material es como una superficie libre, tiene condiciones de contorno naturales. Aquí al mismo tiempo se hace muy pequeña la contribución de un modo con los demás modos (y consigo mismo, salvo los productos que llevan μ_M), entonces, es como si, en ese ángulo, se considerara nula la contribución de un modo en el término independiente correspondiente a otro modo.

9.6 Aplicaciones

i) Comparación con resultados de un programa de elasticidad lineal

Mediante la asignación conveniente de propiedades físicas del material se puede simular un problema lineal, que resulta de hecho un problema lineal de Stokes, y que, tomando velocidades por desplazamientos se puede comparar con resultados análogos obtenidos con un programa de elasticidad lineal. Esta confrontación arroja resultados satisfactorios, si bien se observan leves diferencias debido a que el código disponible para análisis por desarrollo en serie de Fourier no es capaz de tratar materiales incompresibles (coeficiente de Poisson, $\nu = 0.5$), siendo que en nuestro problema siempre tenemos impuesta esa condición.

La comparación fue efectuada considerando el efecto de imponer, sobre la periferia de un extremo de una barra cilíndrica, un desplazamiento variable en función del ángulo θ y con componentes sobre el plano (r, z) . Se ha observado un buen acuerdo entre los desplazamientos en los otros grados de libertad y las tensiones, en uno y otro caso. Mediante esta verificación simplemente se pretendió chequear parcialmente la descomposición en serie de Fourier, en cuanto a su implementación computacional, y por eso no se añadirán más detalles al respecto.

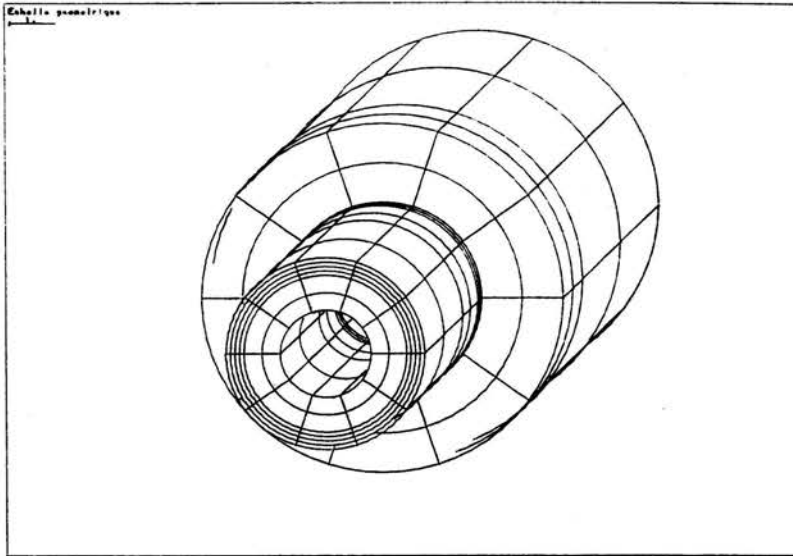


Figura 1. Extrusión: estructura en 3-D

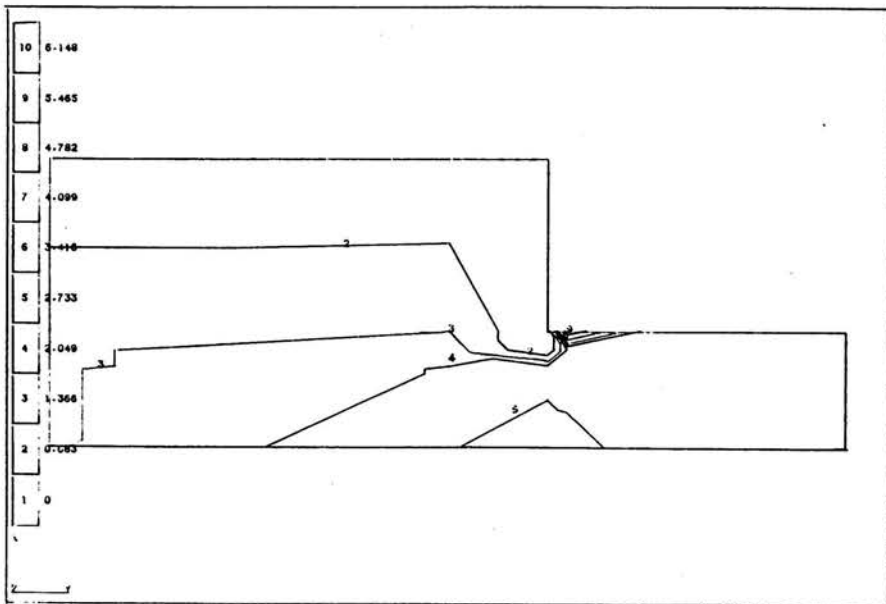


Figura 2. Extrusión: módulo de la velocidad, en $\theta = 0^\circ$

ii) *Extrusión directa*

A continuación se ha modelado un caso que, si bien no tiene aplicación práctica, resultó conveniente hacerlo en un determinado grado del desarrollo del modelo. Se trata de una matriz de extrusión de tubos en la que el pistón impone al material una velocidad que es variable con el ángulo θ .

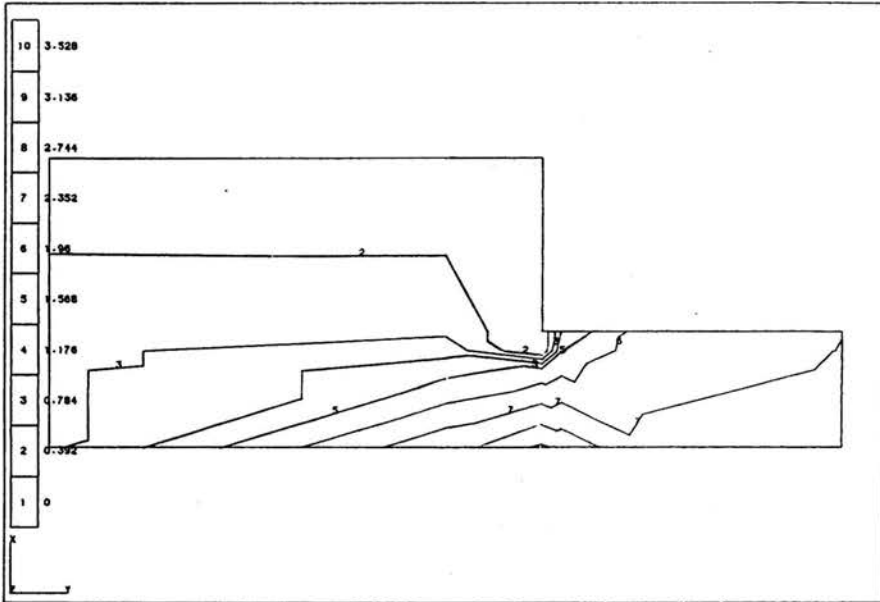


Figura 3. Extrusión: módulo de la velocidad, en $\theta = 54^\circ$

La figura 1 muestra una vista en perspectiva de la estructura deformada luego de la recombinación de los armónicos. En las figuras 2 y 3 se muestran isocurvas del módulo de la velocidad para dos estaciones de la evaluación del término de carga equivalente. En el ejemplo se han restringido las velocidades en la coordenada circunferencial, y esto origina un desacoplamiento entre las velocidades en el plano (r, z) y las velocidades en dirección θ . Por esto se observa una gran similitud en ambos gráficos, si bien existen diferencias en los valores entre los cuales varían las isocurvas. Se puede ver que las diferencias en el aspecto de las isocurvas responden a la no linealidad material. Lo dicho para el módulo de la velocidad puede repetirse

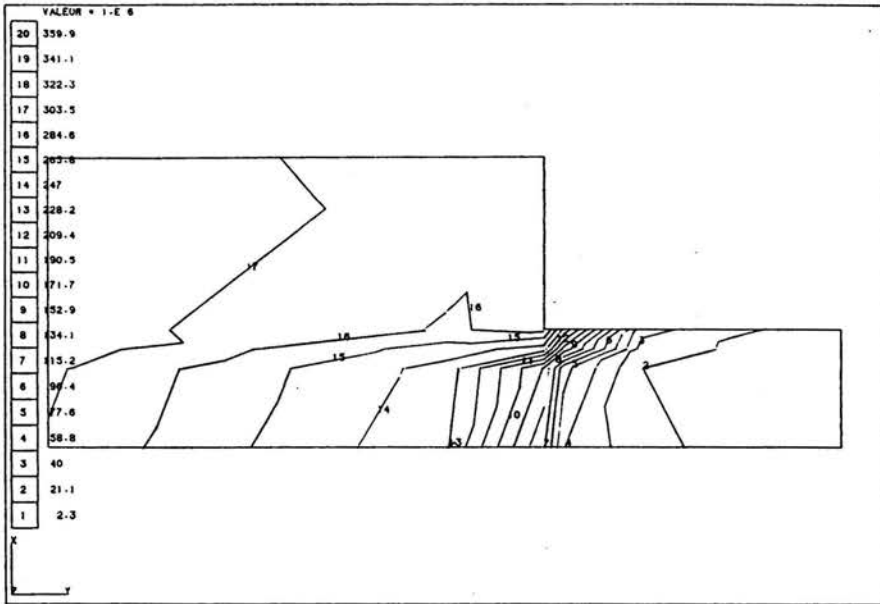


Figura 4. Extrusión: máxima tensión de corte, en $\theta = 0^\circ$

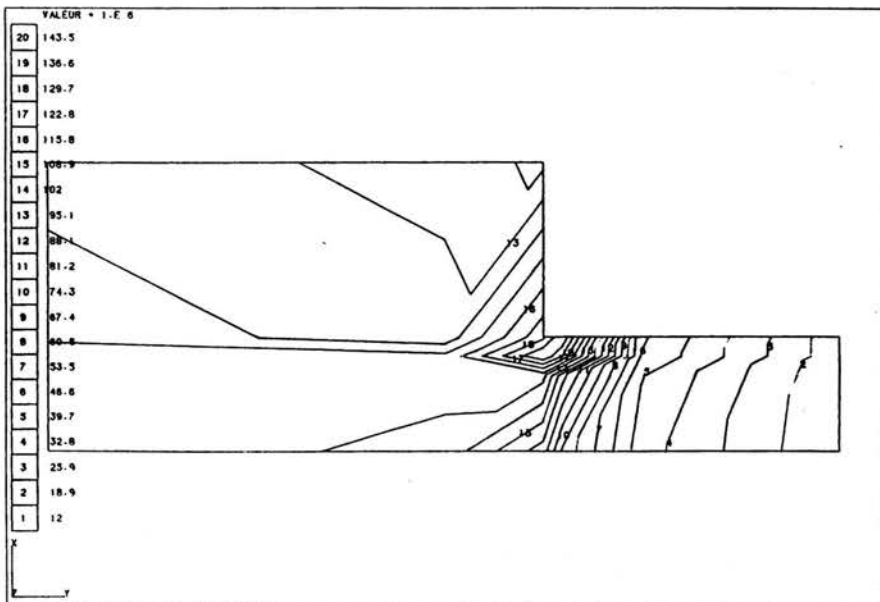


Figura 5. Extrusión: máxima tensión de corte, en $\theta = 54^\circ$

también para las otras magnitudes que se deseen analizar. Como ilustración se recogen en las figuras 4 y 5, y para los mismos ángulos, los diagramas de máxima tensión de corte, donde pueden hacerse las mismas apreciaciones cualitativas que en el caso axisimétrico, referentes a la zona de máximas tensiones y máximos gradientes, etc. (ver sección 4.7.a)). El análisis se ha hecho considerando primero dos, y luego tres modos en la descomposición en serie. El aspecto de la solución no presenta diferencias apreciables entre uno y otro caso.

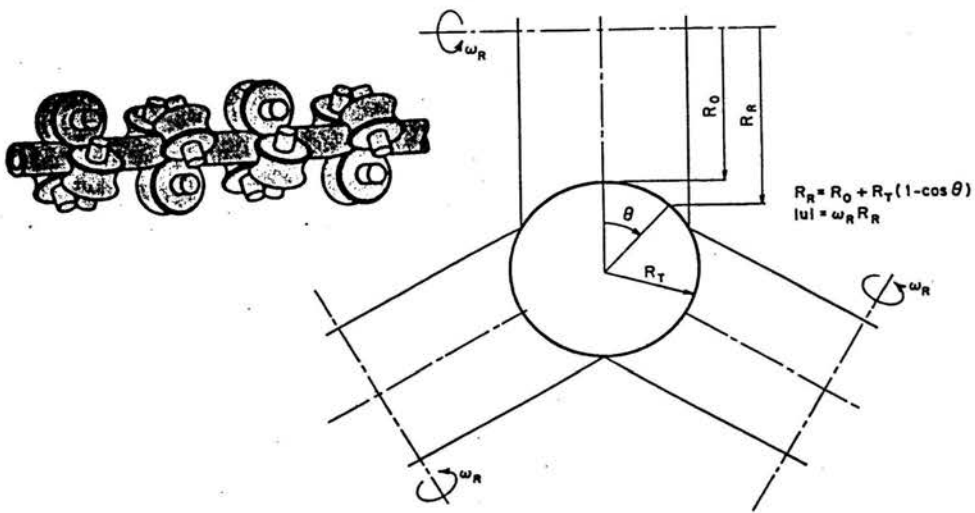


Figura 6. Laminación: configuración

iii) Laminación

La laminación de piezas de sección circular sí es un proceso frecuente en la práctica. En este problema entran en juego, con particular importancia la no simetría axial en la imposición de las cargas y el manejo de las superficies libres, que también se apartarán de la simetría axial. En primer lugar mostramos la

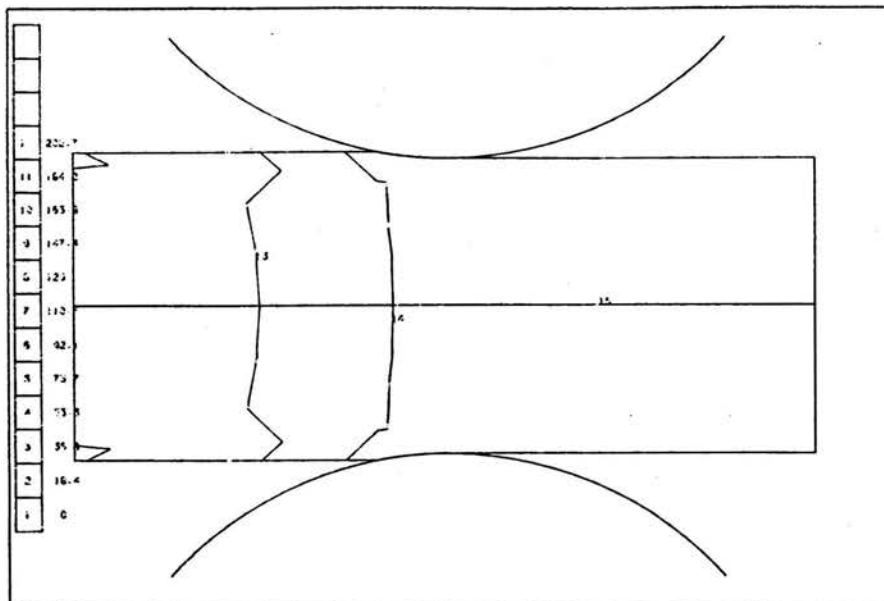


Figura 7. Laminación de una barra: módulo de la velocidad, en $\theta = 0^\circ$

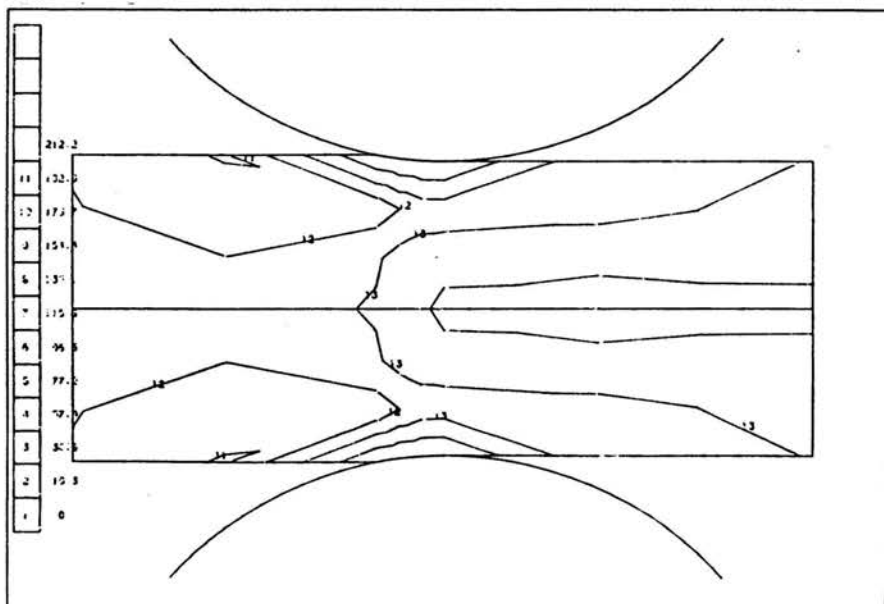


Figura 8. Laminación de una barra: módulo de la velocidad, en $\theta = 32^\circ$

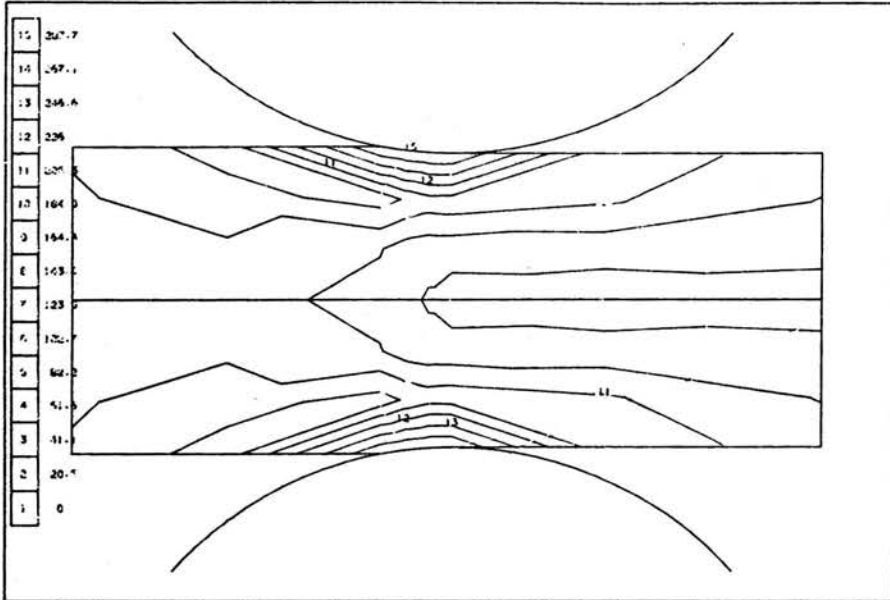


Figura 9. Laminación de una barra: módulo de la velocidad, en $\theta = 54^\circ$

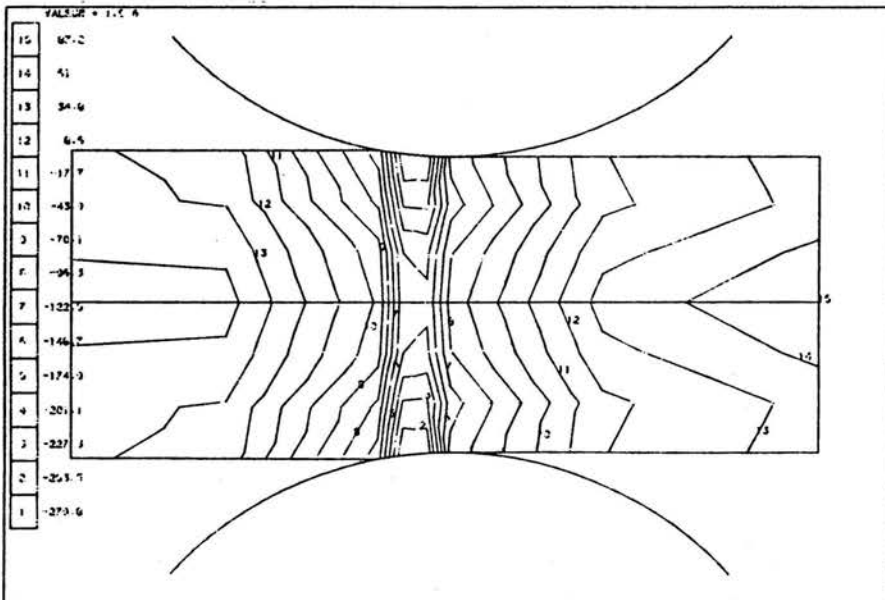


Figura 10. Laminación de una barra: tensiones axiales, en $\theta = 32^\circ$

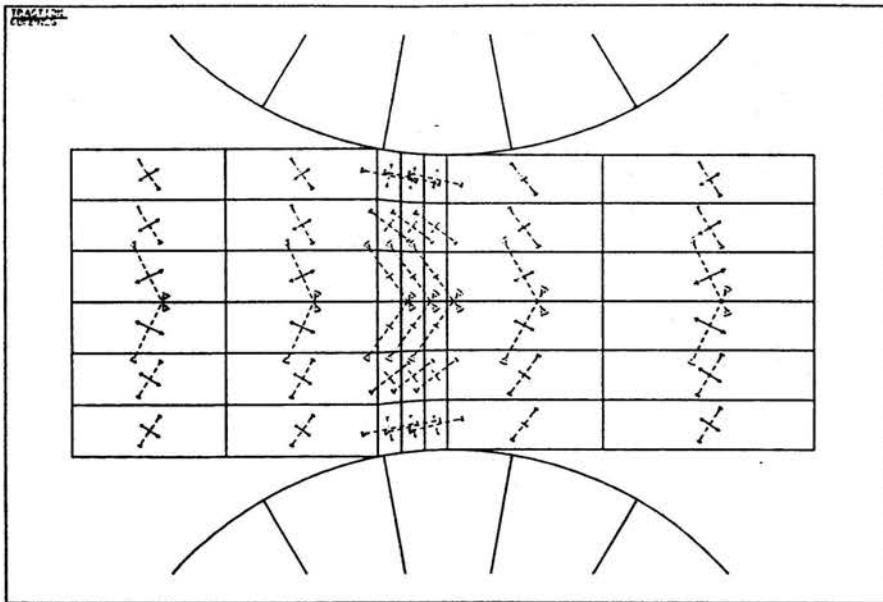


Figura 11. Laminación de una barra: tensores de tensión, en $\theta = 32^\circ$

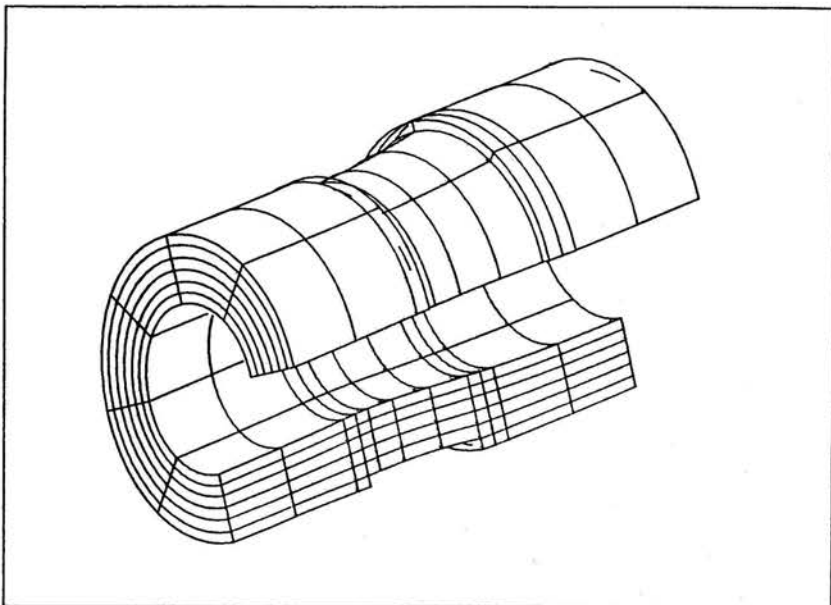


Figura 12. Laminación de tubos: discretización, desarrollada en 3-D

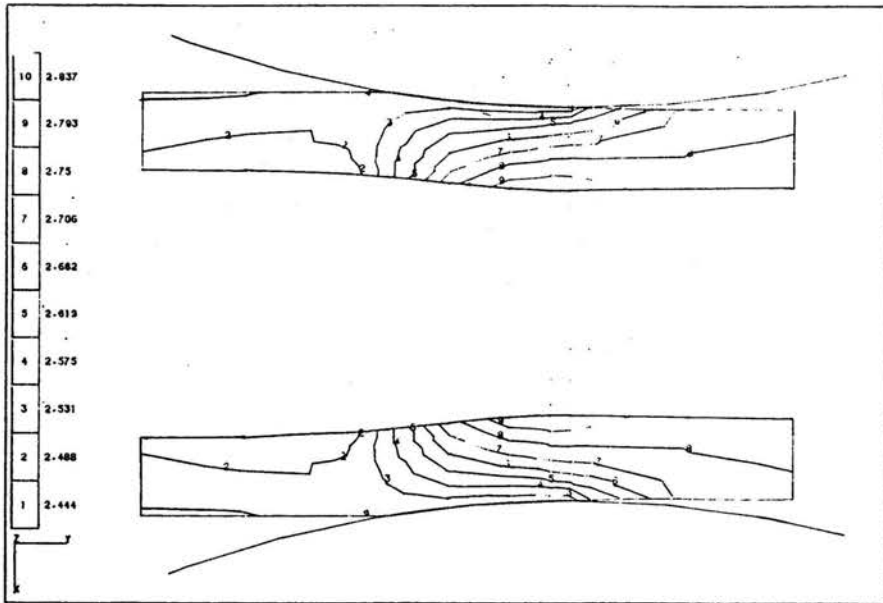


Figura 13. Laminación de tubos: módulo de la velocidad, en $\theta = 0^\circ$ (caso lineal)

laminación de un redondo, con la finalidad de reducir su diámetro. La velocidad impuesta es de la forma

$$|\mathbf{u}| = u_0(a - b \cos \theta), \quad (9.53)$$

donde \mathbf{u} está en el plano (r, z) y es tangente al rodillo. La figura 6 muestra un esquema del problema. R_T y R_R son, respectivamente, el radio del tubo y de los rodillos, y ω es la velocidad angular de los rodillos. Los rodillos se ubican decalados 120° . En las figuras 7 a 9 puede verse la disminución en la uniformidad del campo de velocidades para valores crecientes del ángulo θ , desde $\theta = 0^\circ$ hasta $\theta = 60^\circ$, debido a la falta de simetría axial de las velocidades impuestas. En puntos alejados del plano de simetría cobran importancia las componentes del tensor de velocidades de deformación, que se anulan en dicho plano, y así en esta zona se tiene una menor viscosidad que causa la aparición de un elevado gradiente de velocidad en las proximidades del rodillo.

Para este caso, las superficies libres se obtienen también como función de θ , pero las variaciones no son significativas, al menos con respecto al diámetro de la pieza. En realidad las variaciones desde la geometría inicial para piezas macizas

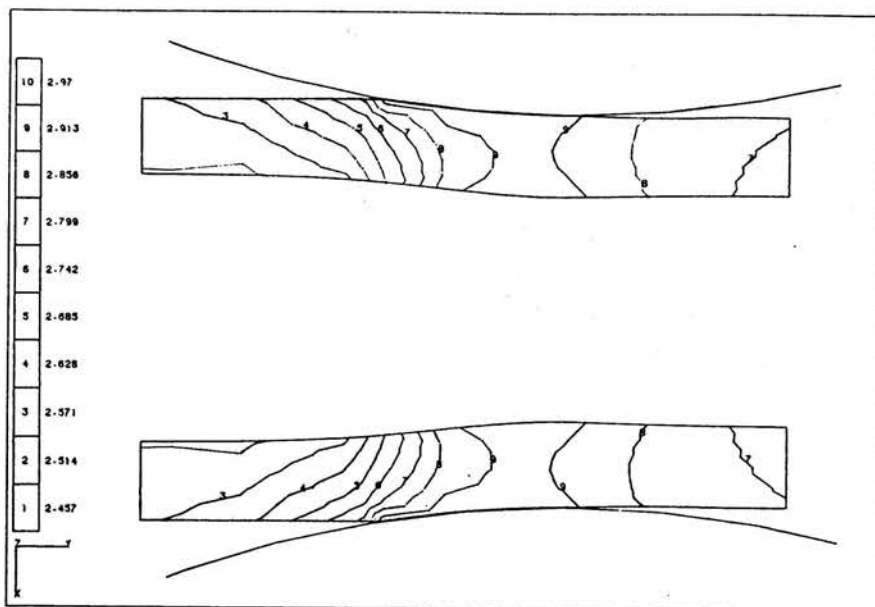


Figura 14. Laminación de tubos: módulo de la velocidad, en $\theta = 58^\circ$ (caso lineal)

también son pequeñas en el caso axisimétrico, como puede verse en los ejemplos del capítulo 4. Es de esperar, sin embargo, que para casos de laminación de tubos dichas variaciones sean más apreciables.

Las figuras 10 y 11 muestran, respectivamente, la tensión axial y los tensores de tensión, evaluadas en un ángulo intermedio. En las mismas el efecto de los rodillos puede observarse en el estado tensional del material.

En cuanto a la laminación de tubos, en la figura 12 se muestra una vista en tres dimensiones de la estructura resuelta. La misma incluye filas de elementos adicionales que primeramente contuvieron material ficticio, y que en contacto con el metal formaron la superficie libre en su estimación inicial. Posteriormente la superficie libre fue variando dentro de la región discretizada, tal como se describió en el capítulo 7. En los distintos ángulos en que se evalúa el vector de carga equivalente para su integración numérica, también se recombina la velocidad y se aplica la técnica de integración a lo largo de una línea de corriente descrita en ese capítulo.

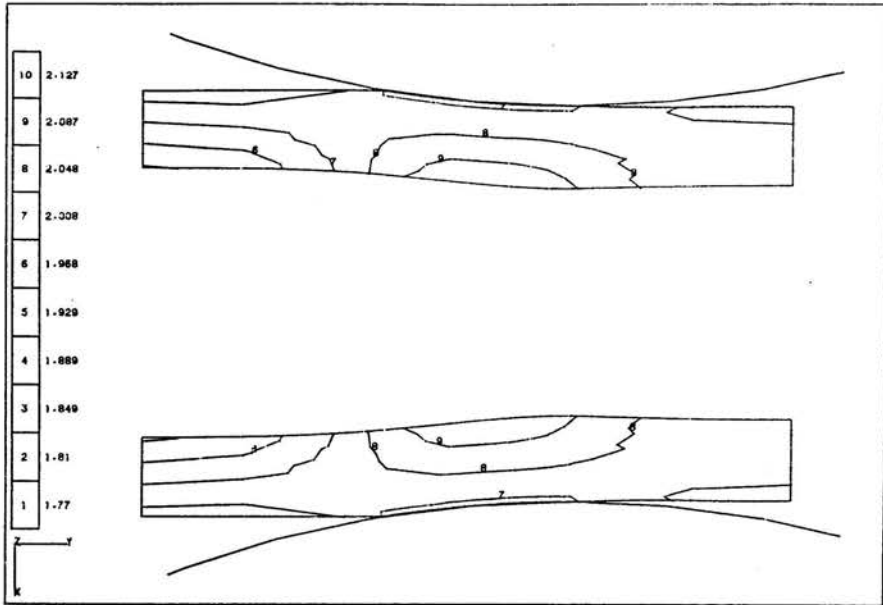


Figura 15. Laminación de tubos: módulo de la velocidad, en $\theta = 0^\circ$ (caso no lineal)

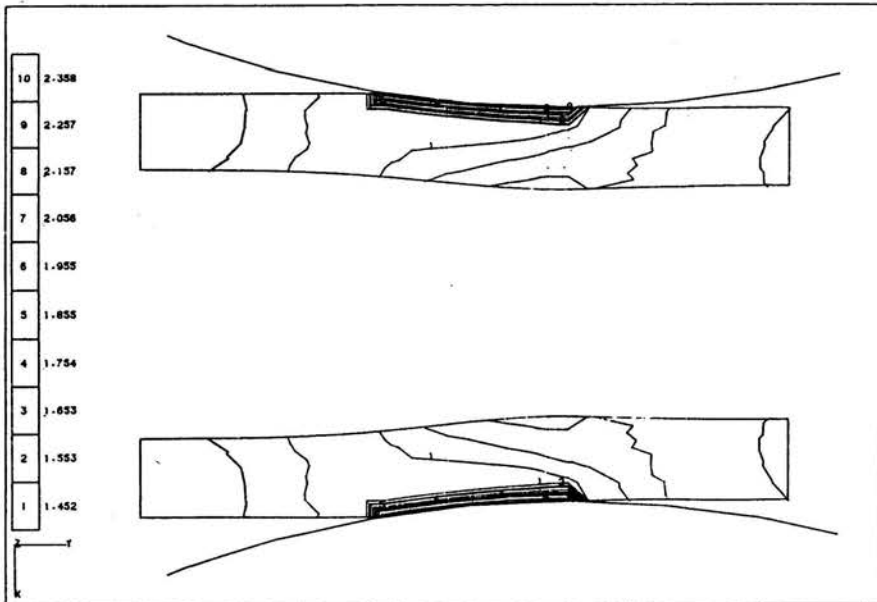


Figura 16. Laminación de tubos: módulo de la velocidad, en $\theta = 58^\circ$ (caso no lineal)

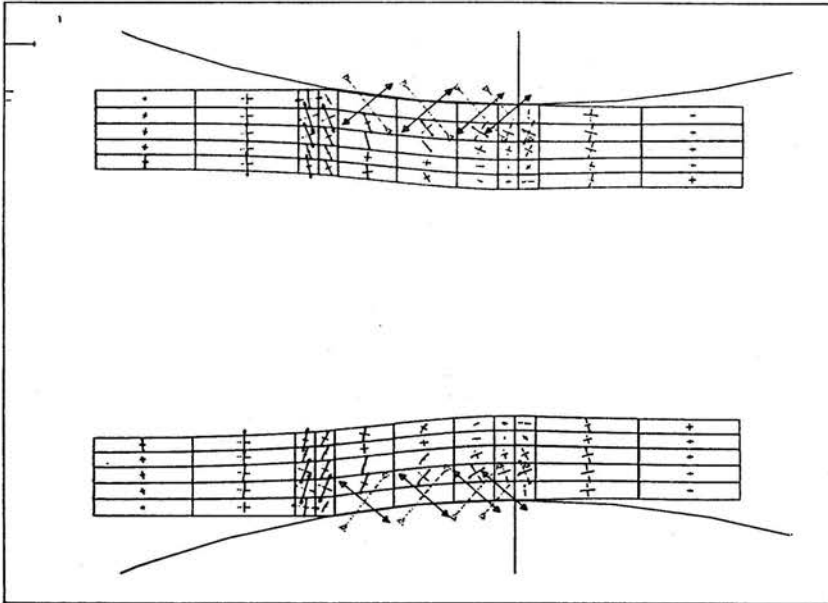


Figura 17. Laminación de tubos: tensores de tensión, en $\theta = 58^\circ$ (caso no lineal)

Las figuras 13 y 14 muestran las isocurvas del módulo de la velocidad para los ángulos extremos de la integración según θ , para el caso de fluido newtoniano, y las 15 y 16, para el fluido viscoplástico. En el caso lineal se observa con claridad que el material avanza más rápidamente que el rodillo en el plano de simetría, mientras que esta situación se revierte en los ángulos correspondientes a los extremos del rodillo. Lo mismo sucede en el caso no lineal, en el que se ve nuevamente el elevado gradiente de velocidades en dichos ángulos. Correspondientemente se tienen elevadas tensiones de corte en esa zona, como se muestra en la figura 17. Cualitativamente siguen siendo válidas las observaciones sobre el estado tensional formuladas al analizar los casos axisimétricos. Debe destacarse que la no axisimetría es función del diámetro de los rodillos con relación al diámetro de la pieza a laminar: cuanto más cercanos sean uno y otro, más fuertemente no axisimétrico será el problema.

En el capítulo 4 se puso énfasis en el cambio de la geometría entre la configuración inicial y la final, debido a la integración de las superficies libres. Aquí en cambio, no efectuamos variación alguna en la malla, por exigencia del desarrollo en serie. Para conocer la forma estimada de malla que permita el tratamiento

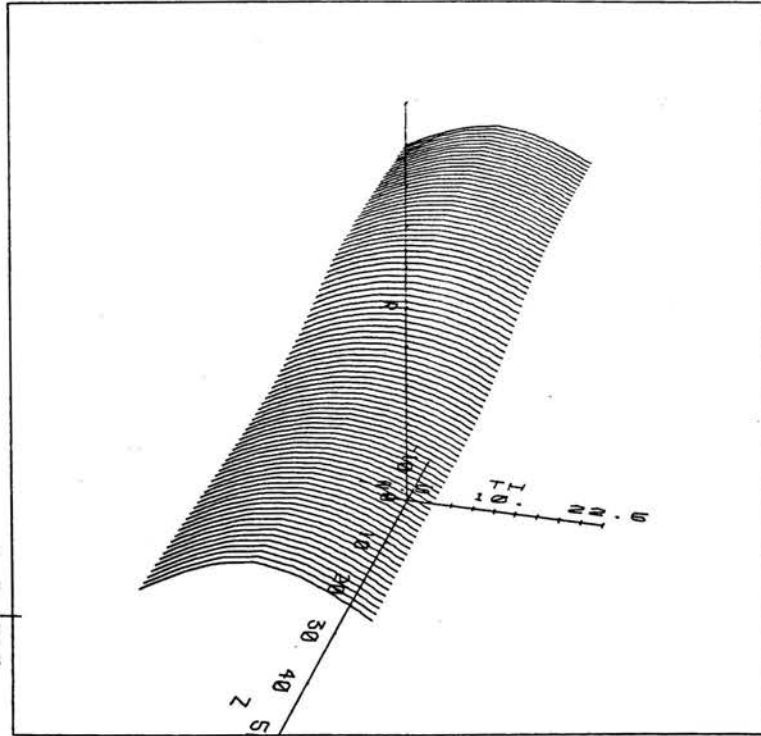


Figura 18. Laminación de tubos: cara exterior de la superficie libre

de superficie libre mencionado más arriba efectuamos una resolución axisimétrica con variación de las coordenadas de la malla. La figura 18 recoge la forma de la superficie libre exterior obtenida mediante la simulación de una interfaz. Si bien las variaciones son al menos un orden de magnitud mayores que en la laminación del cilindro macizo, siguen siendo poco perceptibles con relación al diámetro del tubo.

9.7 Conclusiones

En este capítulo, y sobre la base de los desarrollos expuestos en los dos capítulos precedentes, se ha alcanzado una forma semi-analítica para el problema de conformado plástico en el marco de la formulación de flujo. La técnica de linealización y traslado del acoplamiento entre modos de la matriz de rigidez al término de carga es susceptible de ser aplicada en cualquier problema que presente una no linealidad únicamente material. Esta formulación ha sido presentada para configuraciones de geometría cilíndrica. Una extensión inmediata de la misma consiste en efectuar un desarrollo similar para casos de laminación plana, con la que podrían determinarse, por ejemplo, el desplazamiento lateral de material durante una laminación. Por otra parte, resulta de interés confrontar el modelo con un tratamiento tridimensional completo, para evaluar sus resultados y el costo relativo de la solución. La versión 3-D de la formulación de flujo, si bien no presenta mayores inconvenientes teóricos, no se ha implementado, al menos en conocimiento del autor. Entre las posibles dificultades de su desarrollo pueden mencionarse, además del notable aumento en esfuerzo de cálculo requerido, la necesidad de tratar verdaderamente con superficies libres, y no con líneas, y de considerar adecuadamente los problemas de contacto. En este capítulo las evaluaciones hechas tienen un carácter cualitativo, en ausencia de datos experimentales (por otra parte, muy difíciles de obtener para estos problemas), y de datos provistos por otros modelos.

REFERENCIAS

Bathe, K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall, (1982).

Courant, R., *Differential and Integral Calculus*, Interscience Publishers, Inc., New York (1946).

Wilson, E. L., "Structural Analysis of Axisymmetric Solids", *A. I. A. A. Journal*, vol 3 (1965), pp. 2269-2274.

Winnicki, L. A. & Zienkiewicz, O. C., "Plastic (or viscoplastic) behaviour of axisymmetric bodies subjected to non-axisymmetric loading —Semi-analytical Finite Element Solution", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol 14 (1979), pp. 1399–1412.

Zienkiewicz, O. C. *The Finite Element Method*, Mc Graw Hill (1977).

*CONCLUSIONES***10.1 Introducción**

Luego de haber considerado por separado cada una de las partes que constituyen el modelo que ha sido objeto de este trabajo, estamos en condiciones de afirmar que se han cubierto satisfactoriamente los objetivos iniciales. Se pretendió, entonces, llegar a un modelo para el análisis de procesos de conformado de metales en el que, paulatinamente, se fueran abordando situaciones no previstas en modelos anteriores. Así fuimos pasando de una formulación que permitía tratar casos en estado estacionario e independientes de la temperatura, a casos acoplados térmicamente y luego a estados transitorios. Finalmente se han considerado situaciones que, siendo axisimétricas en la geometría, no lo son en las cargas ni en las condiciones de contorno.

Para cada etapa se han desarrollado los respectivos elementos que se han implementado en códigos computacionales destinados a llevar a la práctica, con el método de los elementos finitos, los resultados aquí consignados. También han surgido, a lo largo de la investigación, diversos obstáculos a los que ha habido que dar respuesta. Si bien es cierto que algunas de esas dificultades pueden admitir una solución más sencilla que alguna aquí propuesta, el hecho de que la presente área fuera una nueva línea dentro del grupo de investigación al que pertenece el autor, ha motivado que en algún caso, el camino recorrido no fuera el más directo. No obstante el resultado final ha satisfecho los requerimientos en cada caso. Valga, de todas formas, esa experiencia así adquirida.

Este es el momento de hacer resaltar la importante variedad de tópicos que intervienen en los problemas estudiados: deformaciones plásticas, transferencia de calor (con el correspondiente tratamiento de las derivadas primeras), fricción, superficies libres, evolución temporal, el problema de la incompresibilidad, y el uso de multiplicadores de Lagrange para imponer condiciones en el problema.

A continuación se recogen las principales conclusiones que surgen de este trabajo, señalando luego las contribuciones originales más importantes que aquí se presentan. Por último, hacemos sugerencias sobre posibles desarrollos futuros, que surgen como lógicas extensiones en los temas cubiertos a lo largo de los capítulos que componen esta presentación.

10.2 Recopilación de las principales conclusiones

Una conclusión general que puede afirmarse, vistas las numerosas aplicaciones aquí hechas, es que la formulación de flujo ha demostrado ser sumamente versátil, y los sucesivos aportes que ha recibido le han ampliado su rango de aplicabilidad, incluso para tratar problemas que típicamente están asociados a formulaciones en desplazamientos, como ocurre en el ejemplo de la forja, que se muestra en el capítulo 6. También la aplicación en laminación de tubos estimamos que no estaba prevista inicialmente, por la gran proporción de superficies libres que existe, y la poca cantidad de fijaciones.

Las conclusiones particulares de cada capítulo han sido señaladas oportunamente. Entre las más importantes, ordenadas según los capítulos en que fueron tratadas, pueden mencionarse

- la aplicación del escalado de matrices como solución adecuada al mal condicionamiento de las mismas, en formulaciones mixtas;
- la extensión del esquema para tratar superficies libres a casos en los que las variaciones de ésta es considerable con respecto a su posición inicial, y en los que las mismas constituyen una gran parte del contorno del problema;
- el tratamiento del acoplamiento térmico según una técnica de *upwind* basada en principios variacionales;

- la aplicación del método de la pseudo-concentración para tratar estados transitorios, con su confrontación con resultados ofrecidos por otras formulaciones y con resultados experimentales. Esta parte ha dado ocasión de puntualizar, sobre la base de las aplicaciones, distintas virtudes del método. Como extensión del mismo, se ha mostrado la necesidad de brindar a una superficie libre un tratamiento adecuado según su orientación con respecto a la dirección de avance del material, y se han propuesto los esquemas correspondientes en los casos analizados;
- sobre la base del método de la pseudo-concentración se ha presentado también un esquema alternativo para tratar superficies libres en estado estacionario, que no requiere la modificación de las coordenadas de la malla;
- la posibilidad de tratar problemas con estados triaxiales de deformación pero con geometría axial, mediante el desarrollo, para este problema no lineal, de una formulación semi-analítica.

Estos resultados significan una extensión de la formulación de flujo, en cuanto al tipo de problemas que pueden ser tratados y en cuanto a la robustez numérica de la formulación misma.

Cabe mencionar, también, que las conclusiones no condujeron inexorablemente a un modelo cada vez más complejo. En algunas situaciones se ha podido comprobar la poca importancia de una determinada variable, con lo que ha podido simplificarse el tratamiento de ciertos problemas. Por ejemplo, en casos en los que se comprueba una baja generación de calor por deformación plástica, puede continuarse el análisis dejando de lado el acoplamiento térmico.

10.3 Aspectos originales

En vista de los resultados alcanzados, pueden señalarse los siguientes aspectos, en conocimiento del autor, como contribuciones originales de esta tesis

- Derivación de una forma semi-analítica para el modelado de problemas de conformación plástica de metales susceptibles de ser tratados mediante la formulación de flujo;

- Esquemas para el tratamiento de superficies libres en problemas estacionarios y transitorios, considerando, para estos últimos, la naturaleza de la superficie, determinada por su orientación con respecto a la dirección del flujo de material;
- Introducción del escalado de matrices como medio para mejorar el condicionamiento en la formulación mixta u/p , con la ampliación del rango de problemas que pueden resolverse, en cuanto a la severidad de su geometría (altas relaciones de extrusión, largas salidas de material, etc.);
- Resolución del problema de convección-difusión asociado y acoplado a la deformación plástica mediante un esquema de *upwind* basado en un principio variacional.

10.4 Desarrollos futuros

Al poner punto final a este trabajo, y sobre la base de los avances puntualizados, surgen nuevas posibilidades hacia las cuales volcar el esfuerzo de futuras investigaciones.

Un clásico problema, en el que se han sugerido soluciones (Zienkiewicz, 1984), pero sin que, en conocimiento del autor, fueran llevadas a la práctica, es la determinación de la recuperación elástica del material que se ve descargado al finalizar el conformado plástico.

Por otra parte, en el planteo correcto de determinados problemas, resulta de interés establecer el o los puntos de contacto, de manera de poder evitar situaciones irreales, como estados de tracción en zonas donde el material no debería estar en contacto con el rodillo. Por tratarse de problemas formulados en velocidades, este planteo difiere de los problemas ordinarios de contacto, que están formulados en desplazamientos. Sugerimos para el análisis de estos casos el empleo de ligazones entre grados de libertad, a través de multiplicadores de Lagrange. Este procedimiento, cuya aplicación tendría lugar afuera de la generación de matrices, incrementaría el número de grados de libertad en el sistema global, pero proveería una solución elegante desde el punto de vista matemático y computacional.

En lo que respecta al modelo presentado en el capítulo 9, su desarrollo fue hecho para geometrías axiales. Su extensión a problemas planos es inmediata, lo que permitiría el análisis de los problemas típicos de laminación en esa geometría, como la expansión lateral de una chapa.

Por último, una opción que se ve cada vez más factible, dada la creciente capacidad de las computadoras, es la elaboración de versiones en tres dimensiones para la formulación de flujo. Si bien este paso tropieza con algunas dificultades teóricas, ya que la condición de convergencia, de Brezzi y Babuska, para los elementos propuestos actualmente en uso, sólo ha sido demostrada para casos bi-dimensionales, no se ve que su extensión a tres dimensiones sea incapaz de mostrar un buen desempeño en la práctica (Girault & Raviart, 1979). Mediante ese paso se podrán modelar casos de geometrías cualesquiera, como la extrusión de perfiles. Por su parte, también permitiría contrastar los resultados de nuestra formulación semi-analítica, los cuales solamente se han confrontado, para el caso lineal, con un programa de elasticidad, también con formulación semi-analítica; y se han verificado en detalle las características de la solución en forma cualitativa.

En el modelo tridimensional será una extensión interesante el tratamiento de problemas en régimen transitorio con el método de la pseudo-concentración, en la que ahora se deberán transportar, no curvas, sino superficies. Recordando las ventajas de ese método en cuanto a la precisión y economía en la solución, puntualizadas en el capítulo 6, se prevé que dicha aplicación será muy conveniente.

REFERENCIAS

Girault, V. & Raviart, P. A. *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag (1980).

Zienkiewicz, O. C., "Flow Formulation for Numerical Solution of Forming Processes", en *Numerical Analysis of Forming Processes*, J. F. T. Pittman, O. C. Zienkiewicz, R. D. Wood & J. M. Alexander, (eds.), Wiley, Chichester (1984), pp. 1-44.

