Adam Piskorek

ELEMENTY ANALIZY WYPUKŁEJ

WARSZAWA 1980

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 24 lipca 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 29/1980

Wykład przygotowany na kurs szkoleniowy
organizowany przez Zakład Układów Mechanicznych IPPT PAN
i Sekcję Mechaniki Teoretycznej Komitetu Mechaniki PAN

Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 170 egz. Ark.wyd. 3,2. Ark.druk. 5,5.
Oddano do drukarni w lipcu 1980 r.
Nr zamówienia 535/0/80

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Adam Piskorek
Uniwersytet Warszawski

ELEMENTY ANALIZY WYPUKŁEJ

0. WSTĘP

Na przełomie poprzedniego i naszego stuleci matematyk i fizyk niemiecki Hermann MINKOWSKI zwrócił uwagę na rolę wypukłości w geometrii i w matematyce oraz w zastosowaniach.

Naszym celem jest przedstawienie podstawowych pojęć analizy wypukłej i jej twierdzeń oraz ukazanie ich zastosowań.

Rozważania będziemy prowadzić w rzeczywistej przestrzeni wektorowej V lokalnie wypukłej. Przez odcinek łączący dwa punkty u, v przestrzeni V rozumiemy zbiór

$$[u,v] = \{\lambda u + (1-\lambda)v : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

Przypominamy, że podzbiór A w przestrzeni V nazywa się wypukły, gdy wraz z jego dwoma dowolnymi punktami u, v odcinek $[u,v]$ je łączący należy również do tego zbioru.

Inne elementarne własności zbiorów wypukłych czytelnik może znaleźć np. w podręczniku W.KOŁODZIEJA - Wybrane rozdziały analizy matematycznej, PAN, Warszawa 1970, lub A.ALEXIEWICZA - Analiza funkcjonalna, PWN, Warszawa 1969.

1. PRELIMINARIA FUNKCJONALNO-ANALITYCZNE

Przyjmujemy, iż pojęcie przestrzeni topologicznej oraz pojęcie przestrzeni wektorowej topologicznej są znane /por. [1] str. 15-37, 44-95/, nadto przyjmujemy, że jest również znane pojęcie normy i przestrzeni wektorowej unormowanej.

Podamy niżej podstawowe własności przestrzeni LOKALNIE WYPUKŁYCH określonych za pomocą układu półnorm spełniających aksjomat oddzielania. Pojęcie półnormy odgrywa podstawową rolę w naszych rozważaniach.

<u>OKREŚLENIE 1.1.</u> Funkcja rzeczywista $p(\cdot)$ określona na przestrzeni wektorowej V nazywa się PÓŁNORMĄ, gdy spełnia ona następujące warunki:

/p1/ $\quad p(v+w) \leq p(v)+p(w)$ $\quad$ /subaddytywność/

/p2/ $\quad p(\alpha v) = |\alpha| p(v)$ $\quad$ /bezwzględna jednorodność/

<u>PRZYKŁAD 1.1.</u> Niech V będzie zbiorem $\mathbb{R}^n$ układów n liczb rzeczywistych, czyli iloczynem kartezjańskim n egzemplarzy zbioru $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych; $\mathbb{R}^n$ jest przestrzenią wektorową, gdy[1/]

$$x+y \stackrel{df}{=} (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$$

a

$$\alpha x \stackrel{df}{=} (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

Funkcja:

$$\mathbb{R}^n \ni x \longrightarrow p_j(x) \stackrel{df}{=} |x_j| \in \mathbb{R}$$

jest oczywiście półnormą.

<u>PRZYKŁAD 2.2.</u> Niech Ω będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$. Zbiór $C_0^\infty(\Omega)$ funkcji dowolnie wiele razy różniczkowalnych w Ω, które znikają poza ograniczonymi domkniętymi podzbiorami zbioru Ω, jest przestrzenią wektorową, gdy $(f_1+f_2)(x) \stackrel{df}{=} f_1(x)+f_2(x)$ a $(\alpha f)(x) \stackrel{df}{=} \alpha \cdot f(x)$.

Funkcja:

$$C_0^\infty(\Omega) \ni f \longrightarrow p_{m,K}(f) \stackrel{df}{=} \sup_{x \in K,\, |s| \leq m} |(\partial^s f)(x)|$$

gdzie K oznacza ograniczony i domknięty podzbiór zbioru Ω, a $\partial^s f$ - pochodną cząstkową funkcji f rzędu m, tzn. $\partial^s f = (\partial/\partial x_1)^{s_1} (\partial/\partial x_2)^{s_2} \ldots (\partial/\partial x_n)^{s_n}$, a s oznacza tzw. wielowskaźnik, tj. $s=(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $|s| = s_1+s_2+\ldots+s_n$, przyczym $s_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dla $j=1,2,\ldots,n$, jest półnormą w przestrzeni $C_0^\infty(\Omega)$.

<u>WNIOSEK 1.1.</u> Półnorma p określona na przestrzeni wektorowej V spełnia warunki:

1/ Symbol $\stackrel{df}{=}$ oznacza równość definiującą.

/1.1/ $p(0)=0$.

/1.2/ $p(v-w)\geq |p(v)-p(w)|$

/1.3/ $p(v)\geq 0$

DOWÓD. Z warunku /p2/ mamy natychmiast /1.1/ dla $\alpha=0$.
Na mocy /p1/ jest $p(v-w)+p(w)\geq p(v)$
tzn. $p(v)-p(w)\leq p(v-w)$
prócz tego mamy $p(w-v)+p(v)\geq p(w)$
tzn. $-p(w-v)\leq p(v)-p(w)$
Stąd oraz z /p2/ otrzymujemy /1.2/, a w szczególności mamy również /1.3/.

WNIOSEK 1.2. Niech p będzie półnormą w przestrzeni wektorowej V , a ε dowolną liczbą dodatnią.
Podzbiór $M \stackrel{df}{=} \{v\in V:\ p(v)\leq\varepsilon\}$
ma następujące własności:

(i) $M\ni 0$

(ii) M jest WYPUKŁY, tj. jeżeli $w,v\in M$, $0<\alpha<1$, to $\alpha w+(1-\alpha)v\in M$

(iii) M jest WYWAŻONY, tj. jeżeli $v\in M$, $|\alpha|\leq 1$, to $\alpha v\in M$

(iv) M jest WCHŁANIAJĄCY, tj. dla każdego $v\in V$ istnieje $\alpha>0$, że $\alpha^{-1}v\in M$

oraz

(v) $$p(v)=\inf_{\substack{\alpha>0\\ \alpha^{-1}v\in M}}\alpha\varepsilon$$

DOWÓD. Własność (i) wynika z /1.1/. Z /p1/ i /p2/ wynika własność (ii) , a z /p2/ otrzymujemy własności (iii) , (iv) . Aby wykazać własność (v) zauważymy, że zachodzą następujące równoważności

$$(\alpha^{-1}v\in M)\iff (p(\alpha^{-1}v)\leq\varepsilon)\iff (p(v)\leq\varepsilon\alpha)$$

z których mamy:

$$p(v) \leq \varepsilon \inf_{\substack{\alpha>0 \\ \alpha^{-1}v\in M}} \alpha$$

Załóżmy, że $p(v) < \varepsilon \inf\limits_{\substack{\alpha>0 \\ \alpha^{-1}v\in M}} \alpha$ wobec tego na mocy określenia kresu dolnego istnieje takie α_0, że $\alpha_0^{-1}v \in M$ oraz

$$\varepsilon\alpha_0 < \varepsilon \inf_{\substack{\alpha>0 \\ \alpha^{-1}v\in M}} \alpha + \Big(\varepsilon \inf \alpha - p(v)\Big)$$

a stąd mamy

$$p(v) < 2\varepsilon \inf_{\substack{\alpha>0 \\ \alpha^{-1}v\in M}} \alpha - \varepsilon\alpha_0 = \varepsilon\Big(2 \inf_{\substack{\alpha>0 \\ \alpha^{-1}v\in M}} \alpha - \alpha_0\Big).$$

Ponieważ $\inf \alpha > 2\inf \alpha - \alpha_0$, co jest niemożliwe, zatem

$$p(v) = \varepsilon \inf_{\substack{\alpha>0 \\ \alpha^{-1}v\in M}} \alpha .$$

<u>OKREŚLENIE 1.2.</u> Niech M będzie podzbiorem wypukłym, wyważonym i wchłaniającym przestrzeni V. Funkcjonał dany wzorem:

/1.4/ $$p_M(v) \overset{df}{=} \inf_{\substack{\alpha>0 \\ \alpha^{-1}v\in M}} \alpha$$

nazywa się FUNKCJONAŁEM MINKOWSKIEGO podzbioru M.

<u>TWIERDZENIE 1.1.</u> Niech $\{p_\gamma(\cdot) : \gamma \in \Gamma\}$ będzie rodziną półnorm zadanych na przestrzeni wektorowej V, która spełnia warunek:[1]

dla dowolnego $v_0 \neq 0$ istnieje taka półnorma p_{γ_0}, że

(h) $$p_{\gamma_0}(v_0) \neq 0$$

[1] Warunek ten nazywa się aksjomatem oddzielania.

Wybierzmy z tej rodziny skończony układ półnorm p_{γ_1}, $p_{\gamma_2}, \dots, p_{\gamma_n}$ oraz układ n dodatnich liczb $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ i rozważmy zbiór

/1.5/ $$U = \{ v \in V : p_{\gamma_j}(v) \leq \varepsilon_j \ , \ j = 1, 2, \dots, n \}$$

który jest wypukły, wyważony i wchłaniający. Zbiory tego typu będziemy traktować jako otoczenia $v=0$ przestrzeni V. Jako otoczenia innego dowolnego wektora $v_0 \neq 0$ w przestrzeni V przyjmiemy zbiory postaci

/1.6/ $$v_0 + U = \{ w \in V : \ w = v_0 + u \ , \ u \in U \}$$

Rozważmy rodzinę wszystkich takich podzbiorów G przestrzeni V, że każdy z tych podzbiorów zawiera pewne otoczenie typu (1.5) lub (1.6) dowolnego swego elementu v. Rodzina $\{G\}$ wszystkich takich podzbiorów spełnia akcjomaty rodziny zbiorów otwartych przestrzeni topologicznych.

DOWÓD. Najpierw pokażemy, że zbiór $G_0 = \{ v \in V : p_\gamma(v) < \varepsilon \}$ należy do rodziny $\{G\}$, tzn. jest on w sensie wyżej sformułowanym - otwartym. Istotnie, niech v_0 będzie dowolnym elementem zbioru G_0, wówczas $p_\gamma(v_0) = \eta < \varepsilon$; wówczas otoczenie $v_0 + U$ elementu v_0, gdzie $U = \{ w \in V : p_\gamma(w) \leq \frac{\varepsilon - \eta}{2} \}$ zawiera się w G_0, bowiem jeżeli element $u \in U$, to $p_\gamma(v_0 + u) \leq$ $\leq p_\gamma(v_0) + p_\gamma(u) \leq \eta + \frac{\varepsilon - \eta}{2} < \varepsilon$.

Stąd wynika w szczególności, że dla dowolnego elementu $v_0 \in V$ istnieje otwarty podzbiór $v_0 + G_0$ zawierający v_0; zatem V jest również zbiorem otwartym.

Oczywiście, że suma dowolnej ilości zbiorów otwartych i część wspólna skończonej liczby zbiorów otwartych są zbiorami otwartymi. Zatem przestrzeń wektorowa V jest przestrzenią topologiczną.

Pokażemy, że V jest przestrzenią Hausdorffa. Niech $v_1 \neq v_2$, pokażemy, że istnieją dwa takie zbiory otwarte G_1 i G_2, że $v_1 \in G_1$, $v_2 \in G_2$ i $G_1 \cap G_2 = \phi$. Nie zmniejszając ogólności rozważań przyjmijmy, iż $v_1 = 0$. Na mocy (h) istnieje taka półnorma p_{γ_0}, że $p_{\gamma_0}(v_2) = c > 0$
Wobec tego, jak łatwo sprawdzić, $G_1 = \{v : p_{\gamma_0}(v) < \frac{c}{2}\}$
a $G_2 = v_2 + G_1$
Istotnie:

$$0 = v_1 \in G_1 \quad , \quad G_2 \ni v_2 \quad .$$

nadto

$$G_1 \cap G_2 = \phi$$

bowiem, gdyby $w \in G_1 \cap G_2$, to $p_{\gamma_0}(w) < \frac{c}{2}$, a z przedstawienia

$$w = v_2 + u = v_2 - (-u)$$

mamy, na mocy /1.2/,

$$p_{\gamma_0}(w) \geq p_{\gamma_0}(v_2) - p_{\gamma_0}(-u) > c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2}$$

co stanowi sprzeczność, zatem twierdzenie jest udowodnione.

<u>WNIOSEK 1.3.</u> Przestrzeń V z rodziną zbiorów otwartych określonych w TWIERDZENIU 1.1. jest przestrzenią wektorową topologiczną, tzn. przestrzenią równocześnie wektorową i topologiczną, w której działania są ciągłe, tj.

$$V \times V \ni (v, w) \longrightarrow v + w \in V$$
$$\mathbb{R} \times V \ni (\alpha, w) \longrightarrow \alpha w \in V$$

nadto każda półnorma p_γ, gdzie $\gamma \in \Gamma$, jest funkcją ciągłą.

<u>DOWÓD.</u> Zauważymy, że dla dowolnego otoczenia U elementu $v = 0$, istnieje takie jego otoczenie W, że

$$W+W=\{w\in V: w=v_1+v_2,\ v_1,v_2\in W\}\subset U$$

ponieważ półnorma jest subaddytywna. Zatem działanie

$$(v,w)\longrightarrow v+w$$

jest ciągłe dla dowolnego punktu $(v_0,w_0)\in V\times V$
gdyż $v+w-(v_0+w_0)=(v-v_0)+(w-w_0)$

Zauważymy następnie, że dla tego otoczenia U elementu $v=0$, oraz dowolnego $\alpha\neq 0$ zbiór $\alpha U\overset{df}{=}\{v\in V: v=\alpha u,\ u\in U\}$ jest pewnym otoczeniem elementu $v=0$. Zatem na mocy /1.2/ i równości

$$\alpha v-\alpha_0 v_0=\alpha(v-v_0)-(\alpha-\alpha_0)v_0$$

stwierdzamy, że działanie

$$(\alpha,w)\longrightarrow\alpha w$$

jest ciągłe dla dowolnego punktu (α_0,w_0).
Ciągłość dowolnej półnormy p_γ, gdzie $\gamma\in\Gamma$, wynika z nierówności

$$|p_\gamma(v)-p_\gamma(w)|\le p_\gamma(v-w)$$

OKREŚLENIE 1.3. Przestrzeń topologiczna wektorowa V nazywa się lokalnie wypukłą topologiczną przestrzenią wektorową, lub krótko lokalnie wypukłą przestrzenią, gdy każdy podzbiór otwarty tej przestrzeni, zawierający $v=0$, zawiera również pewien wypukły, wyważony i wchłaniający otwarty podzbiór.

STWIERDZENIE 1.1. Funkcjonał MINKOWSKIEGO p_M dowolnego podzbioru wypukłego, wyważonego i wchłaniającego przestrzeni wektorowej V jest półnormą na tej przestrzeni.

DOWÓD. Niech M będzie wypukłym, wyważonym i wchłaniającym podzbiorem przestrzeni V. Niech w, v będą dwoma dowolnymi elementami przestrzeni V.

Aby wykazać najpierw subaddytywność p_M zauważymy, że z wypukłości M dla dowolnego $\varepsilon>0$ wynika

$$\frac{p_M(w)+\varepsilon}{p_M(w)+p_M(v)+2\varepsilon}\cdot\frac{w}{p_M(w)+\varepsilon}+\frac{p_M(v)+\varepsilon}{p_M(w)+p_M(v)+2\varepsilon}\cdot\frac{v}{p_M(v)+\varepsilon}\in M$$

jeśli tylko

$$\frac{w}{p_M(w)+\varepsilon}\,,\quad\frac{v}{p_M(v)+\varepsilon}\in M$$

Zatem mamy

$$\frac{v+w}{p_M(w)+p_M(v)+2\varepsilon}\in M$$

a więc ze wzoru /1.4/ otrzymujemy

$$p_M\left(\frac{v+w}{p_M(w)+p_M(v)+2\varepsilon}\right)\le 1$$

Mamy nawet więcej, dla $\lambda>0$ i dowolnego elementu $u\in\lambda M$ mamy $p_M(u)\le\lambda$, stąd więc zauważamy, że

$$p_M(w+v)\le p_M(w)+p_M(v)+2\varepsilon$$

co wobec dowolności ε daje subaddytywność p_M

Wykażemy teraz jednorodność funkcjonału MINKOWSKIEGO. Niech $\lambda>0$, wówczas dla dowolnego $v\in V$ mamy:

$$\lambda p_M(v)=\lambda\inf\{\alpha>0:\alpha^{-1}v\in M\}=\inf\{\alpha\lambda>0:\alpha^{-1}v\in M\}=$$
$$=\inf\{\beta>0:\beta^{-1}(\lambda v)\in M\}=p_M(\lambda v)$$

Zatem p_M jest dodatnio jednorodnym funkcjonałem.

Zauważymy, że dla dowolnego $v\in V$ i dowolnej liczby dodatniej ε, $v(p_M(v)+\varepsilon)^{-1}\in M$ wobec czego i na mocy tego, że M jest zbiorem wyważonym mamy dla dowolnego $\lambda<0$ następujące relacje

$$\frac{\lambda}{|\lambda|} v (p_M(v)+\varepsilon)^{-1} \in M . \qquad \left(\left|\frac{\lambda}{|\lambda|}\right| \leq 1\right)$$

oraz

$$p_M\left(\frac{\lambda v}{|\lambda|}\right) \leq p_M(v)+\varepsilon$$

co wobec dowolności ε i dodatniej jednorodności p_M daje

$$p_M(\lambda v) \leq |\lambda| p_M(v)$$

Zatem wobec dodatniej jednorodności p_M otrzymana nierówność jest prawdziwa dla $\lambda \neq 0$. Stąd mamy

$$p_M(v) = p_M(\lambda \lambda^{-1} v) \leq |\lambda^{-1}| p_M(\lambda v)$$

a zatem

$$|\lambda| p_M(v) \leq p_M(\lambda v)$$

skąd już dla $\lambda \neq 0$ mamy

$$p_M(\lambda v) = |\lambda| p_M(v)$$

Zatem stwierdzenie jest udowodnione, bo w przypadku $\lambda = 0$ jest ono banalne.

WNIOSEK 1.4. Dowolna przestrzeń wektorowa V topologizowana za pomocą rodziny półnorm $\{p_\gamma(\cdot) : \gamma \in \Gamma\}$ spełniającej warunek (h) jest przestrzenią LOKALNIE WYPUKŁĄ Hausdorffa, w której każda półnorma p_γ tej rodziny jest ciągła. Odwrotnie, dowolna przestrzeń V LOKALNIE WYPUKŁA Hausdorffa jest przestrzenią wektorową topologizowaną za pomocą rodziny półnorm, które są funkcjonałami Minkowskiego wszystkich wypukłych, wyważonych i wchłaniających zbiorów otwartych w przestrzeni V .

UWAGA 1.1. Niech V będzie przestrzenią wektorową, a $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ - rodziną podprzestrzeni wektorowych przestrzeni V , przy czym

$$V = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$$

nadto zakładamy, że każda podprzestrzeń V_α jest LOKALNIE WYPUKŁĄ przestrzenią, oraz dla dowolnych α_1, α_2 spełniony jest następujący warunek: jeżeli $V_{\alpha_1} \subseteq V_{\alpha_2}$ to topologia w V_{α_1} pokrywa się z topologią indukowaną z przestrzeni V_{α_2}. Określamy w V podzbiory otwarte te i tylko te zbiory wypukłe wyważone i wchłaniające U, których części wspólne $U \cap V_\alpha$ dla $\alpha \in A$ są zbiorami otwartymi w V_α zawierającymi $v=0$. Tak określona topologia w V nazywa się topologią granicy indukowanej przestrzeni V_α.

Gdy wybierzemy otoczenie U_α wypukłe i wyważone $v=0$ w przestrzeni V_α, to wypukła powłoka $U = con\left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right)$ tzn. podzbiór

$$U = \{u \in V: \ u = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \ , \ v_j \in V, \ \beta_j \geqslant 0, \ \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1, n \in N\}$$

jest wypukłym wchłaniającym i wyważonym, którego część wspólna $U \cap V_\alpha$ jest wyważonym i wypukłym otoczeniem $v=0$ w przestrzeni V_α. Zbiór wszystkich takich podzbiorów U odpowiadających dowolnemu wyborowi otoczeń U_α stanowi układ podstawowy otoczeń elementu $v=0$ przestrzeni V, tzn. dowolne otoczenie elementu $v=0$ w przestrzeni V zawiera otoczenie postaci U. Przestrzeń V z topologią granicy induktywnej przestrzeni V_α, $\alpha \in A$, /skonstruowaną w wyżej opisany sposób/ nazywamy krótko granicą induktywną przestrzeni V_α, $\alpha \in A$.

PRZYKŁAD 1.3. Rozważmy przestrzeń $C_0^\infty(\Omega)$, następnie /por. Przykład 1.2./ oznaczmy przez $\mathcal{D}_K(\Omega)$ zbiór funkcji $f \in C_0^\infty(\Omega)$, których nośniki[1] są zawarte w podzbiorze zwartym K w Ω.

---

[1] Nośnikiem funkcji f, który oznaczamy supp f, nazywamy najmniejszy domknięty podzbiór w Ω, poza którym funkcja f znika.

w $\mathcal{D}_K(\Omega)$ określamy za pomocą półnorm zdefiniowanych w przykładzie 1.2. topologię tak, że $\mathcal{D}_K(\Omega)$ stanie się przestrzenią lokalnie wypukłą. Granica indukcyjna przestrzeni $\mathcal{D}_K(\Omega)$, gdzie K przebiega wszystkie podzbiory zwarte w Ω, oznaczamy symbolem $\mathcal{D}(\Omega)$.

Niech V będzie przestrzenią wektorową. Zbiór wszystkich funkcjonałów liniowych nad przestrzenią V oznaczamy przez V^*. Punktem wyjścia dla konstrukcji funkcjonałów liniowych jest następujące stwierdzenie.

STWIERDZENIE 1.2. Dla dowolnego elementu v przestrzeni V istnieje taki funkcjonał liniowy $f \in V^*$, że $f(v)=1$.

DOWÓD. Element v można dołączyć do takiego podzbioru liniowo niezależnego L, by wraz z v stanowił on bazę przestrzeni V. Kładąc na elementach u tej bazy $f(u)=1$ i przedłużając liniowo f na przestrzeń V otrzymujemy funkcjonał $f \in V^*$.

Niech f będzie niezerowym funkcjonałem liniowym nad V, $H = f^{-1}(\{0\})$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V i zbiór $H \cup \{u\}$ rozpina przestrzeń V dla dowolnego $u \notin H$. Istotnie, jeżeli $v \in V$ to $v - (f(v)/f(u))u \in H$. Zatem nie istnieje podprzestrzeń wektorowa w V zawierająca podprzestrzeń H, tzn. H jest maksymalną podprzestrzenią w V. Odwrotnie, jeżeli H jest maksymalną podprzestrzenią w V, to istnieje taki funkcjonał liniowy f, że

$$f^{-1}(\{0\}) = H$$

Istotnie, istnieje element $u \notin H$, wówczas dowolny element przestrzeni V można przedstawić w postaci $v + \lambda u$, gdzie $v \in H$; kładziemy wówczas $f(v+\lambda u) = \lambda\alpha$, przy czym $\alpha \neq 0$. Oczywiście f znika na H. Maksymalna podprzestrzeń H przestrzeni V nazywa się hiperpodprzestrzenią.

Każdą poziomicę $\mathcal{H}$ niezerowego funkcjonału liniowego f, tzn. $\mathcal{H} = \{ v \in V : f(v) = \alpha, f \neq 0 \}$, nazywamy afiniczną hiperpłaszczyzną w V.

Zbiory

$$\{v\in V: f(v)<\alpha\}, \{v\in V: f(v)>\alpha\}$$
$$\{v\in V: f(v)\leq\alpha\}, \{v\in V: f(v)\geq\alpha\}$$

nazywamy odpowiednio <u>otwartymi</u> i <u>domkniętymi</u> półprzestrzeniami <u>ograniczonymi hiperpłaszczyzną afiniczną</u> $\mathcal{H}$.

Niech V będzie topologiczną przestrzenią wektorową, podprzestrzeń V' przestrzeni V^*, której elementami są funkcjonały liniowe i ciągłe, nazywamy przestrzenią sprzężoną topologicznie z V.

Przypominamy, że funkcjonał liniowy f jest ciągły na V wtedy i tylko wtedy, gdy jest on ograniczony na pewnym otoczeniu $v=0$. Istotnie, jeżeli $|f(v)|\leq\alpha$ na U; to $|f(v)|<\varepsilon$ na $\varepsilon\alpha^{-1}U$, zatem jest ciągły dla $v=0$, a stąd i na V.

Niech V będzie przestrzenią lokalnie wypukłą a p niech oznacza taką ciągłą półnormę, że $|f(v)|\leq p(v)$ zachodzi dla wszystkich $v\in V$, wówczas funkcjonał f jest ciągły, bowiem jest on ograniczony na otoczeniu $\{v: p(v)\leq 1\}$.

<u>UWAGA 1.2.</u> Jeżeli f jest funkcjonałem liniowym i ciągłym, to $|f(\cdot)|$ jest ciągłą półnormą.

<u>UWAGA 1.3.</u> Niezerowy funkcjonał liniowy f jest w pełni określony przez swoje jądro, tzn. zbiór $H=f^{-1}(\{0\})$, oraz wartość dla elementu $u\notin H$. Zatem funkcjonał liniowy można zadać przez podanie H i elementu u, w którym $f(u)=1$.

<u>LEMAT 1.1.</u> Niech f będzie funkcjonałem liniowym nad przestrzenią V, $H=f^{-1}(\{0\})$, $f(u)=1$ i $U=\{v\in V: |f(v)|<1\}$. Jeżeli W jest zbiorem wyważonym, to $(u+W)\cap H=\emptyset$, wtedy i tylko wtedy gdy $W\subset U$.

DOWÓD. Niech $W \subset U$. Jeżeli $v \in W$, to $f(u+v) = 1 + f(v) \neq 0$ gdyż $v \in W$, a więc $(u+W) \cap H = \phi$. Dowód w drugą stronę jest dowodem niewprost. Załóżmy, że $W \not\subset U$, wobec tego istnieje taki element $v \in W$, że $|f(v)| \geq 1$, oczywiście wobec wywążenia W $-\frac{v}{f(v)} \in W$, zatem $f(u - \frac{v}{f(v)}) =$ $= 1 - 1 = 0$, a więc $u - \frac{v}{f(v)} \in H$ tzn. $(u+W) \cap H \neq \phi$ co przeczy założeniu, a więc lemat jest udowodniony.

TWIERDZENIE 1.2. Funkcjonał liniowy f nad przestrzenią wektorową topologiczną V jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy jego jądro $f^{-1}(\{0\})$ jest domkniętą podprzestrzenią.

DOWÓD. Jeżeli f jest liniowym i ciągłym funkcjonałem nad V, to $f^{-1}(\{0\})$ jest domknięte jako przeciwobraz zbioru domkniętego $\{0\}$ w $\mathbb{R}$.
Dowód w drugą stronę opiera się na lemacie 1. Niech $H = f^{-1}(\{0\})$ będzie domkniętym podzbiorem w V i niech $U = \{v \in V : |f(v)| < 1\}$. Jeżeli f nie jest funkcjonałem zerowym /gdyby tak było, f byłoby ciągłym funkcjonałem/ to istnieje taki element $u \notin H = \overline{H}$, że $f(u) = 1$. Wobec tego istnieje wyważone otoczenie W elementu $v = 0$, że $(u+W) \cap H = \phi$, stąd na mocy lematu 1.1. wynika, że $W \subset V$, a więc funkcjonał liniowy jest ograniczony na W, a więc jest ciągły.

STWIERDZENIE 1.3. Jeżeli H jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni wektorowej topologicznej V, to domknięcie $\overline{H}$ jest również podprzestrzenią wektorową w V.

DOWÓD. Niech $u \in \overline{H}$, $v \in \overline{H}$ a U niech będzie otoczeniem $v = 0$. Oczywiście istnieje otoczenie W takie, że $W + W \subset U$. Wówczas $u + W$ i $v + W$ mają punkty wspólne z H, wobec tego $u + v + W$ również ma punkty wspólne z $H + H = H$, tzn. $u + v \in \overline{H}$, analogicznie pokazuje się, że jeżeli $v \in \overline{H}$ to $\lambda v \in \overline{H}$ dla dowolnych $\lambda \in \mathbb{R}$.

STWIERDZENIE 1.4. W przestrzeni wektorowej topologicznej hiperpodprzestrzeń H jest albo domkniętą podprzestrzenią albo jest zbiorem gęstym w V.

DOWÓD. Domknięcie $\overline{H}$ jest podprzestrzenią w V na mocy stwierdzenia 1.3. Z drugiej strony H jest maksymalną podprzestrzenią w V, a jej domknięcie $\overline{H} \supset H$ więc albo jest $\overline{H} = H$, albo $\overline{H} = V$.

Podstawowym twierdzeniem Analizy jest twierdzenie HAHNA-BANACHA, według którego funkcjonał liniowy i ciągły na podprzestrzeni M przestrzeni lokalnie wypukłej V można przedłużyć na całą przestrzeń V. Omówimy i podamy dowód tego twierdzenia w wariancie geometrycznym. W tym celu udowodnimy

LEMAT 1.2. Niech V będzie przestrzenią lokalnie wypukłą, A - otwartym i wypukłym jej podzbiorem a H podprzestrzenią wektorową rozłączną z A. Wówczas, albo H jest hiperpodprzestrzenią, albo istnieje taki element $u \notin H$, że podprzestrzeń wektorowa rozpięta na podprzestrzeni H i u jest rozłączna z A.

DOWÓD. Połóżmy

$$C_+ = H + \bigcup_{\lambda>0} \lambda A$$

$$C_- = H + \bigcup_{\lambda<0} \lambda A$$

Oczywiście oba te zbiory są otwarte i nadto mamy

$$C_+ \cap C_- = \phi .$$

Istotnie, jeżeli $w \in C_+ \cap C_-$, to $w = h + \lambda v = h' - \lambda' v'$ gdzie $h, h' \in H$, a $v, v' \in A$ i $\lambda, \lambda' > 0$. Oczywiście mamy $h' - h = \lambda v + \lambda' v'$ a stąd $(\lambda v + \lambda' v')/(\lambda + \lambda') \in H$ i równocześnie $(\lambda v + \lambda' v')/(\lambda + \lambda') \in A$ dzięki wypukłości zbioru A; a stąd mamy już rozłączność C_+ i C_-.

Rozważmy teraz przypadek: $H \cup C_+ \cup C_- \neq V$. W tym przypadku istnieje element u, który nie należy ani do H ani do $C_+ \cup C_-$. Rozpatrzmy teraz podprzestrzeń rozpiętą na podprzestrzeni H i elemencie u. Jeżeli by ta podprzestrzeń miała element wspólny v z podzbiorem A, to istniałoby takie $\lambda \neq 0$, że

$$u = \lambda v + H$$

ale wiadomo, że $\lambda v + H \subset C_+ \cup C_-$, co stanowi sprzeczność, a więc podprzestrzeń rozpięta na podprzestrzeni H i elemencie u nie ma punktów wspólnych ze zbiorem A.

Rozważmy jeszcze pozostały przypadek, a mianowicie $H \cup C_+ \cup C_- = V$. Jeżeli H nie jest hiperpodprzestrzenią, to istnieje taki element $a \in C_+$, że podprzestrzeń G rozpięta na H i a nie pokrywa się z V /dla hiperpodprzestrzeni i elementu a mamy następujący rozkład dowolnego $v \in V$ dany wzorem $v = u + \frac{f(v)}{f(a)} a$, gdzie $u \in H$, por. str. 13/, tzn. istnieje taki element $b \in C_-$, który nie należy do G. Określmy funkcję $f(\lambda) = (1-\lambda)a + \lambda b$ w przedziale $[0, 1]$. Na podstawie ciągłości tej funkcji i faktu, iż C_+, C_- są zbiorami otwartymi, mamy dwa podzbiory otwarte $I = f^{-1}(C_+)$, $J = f^{-1}(C_-)$ w odcinku $[0, 1]$. Oczywiście $0 \in I$, $1 \in J$ oraz $I \cap J = \Phi$, bowiem $C_+ \cap C_- = \phi$. Niech $\alpha = \sup\{\lambda : \lambda \in I\}$, wówczas

$$\alpha \in \overline{I} \cap CI \subset \overline{CJ} \cap CI = CJ \cap CI$$

Wobec tego $f(\alpha) \notin C_+ \cup C_-$, zatem $f(\alpha) \in H$ tzn. $(1-\alpha)a + \alpha b \in H$; ale fakt ten przeczy temu, że $b \notin G$, a to oznacza, iż podprzestrzeń H jest hiperpodprzestrzenią w V.

<u>TWIERDZENIE 1.3.</u> Niech A będzie otwartym i wypukłym podzbiorem przestrzeni lokalnie wypukłej V a M - podprzestrzenią w V rozłączną z A. Wówczas istnieje domknięta hiperpodprzestrzeń H zawierająca M i rozłączna z A.

DOWÓD. Niech $\mathcal{E}$ zbiór wszystkich podprzestrzeni w V zawierających M i rozłącznych z A. Zgodnie z aksjomatem wyboru /por. LEMAT KURATOWSKIEGO-ZORNA, [1] /, który stosujemy do trywialnego łańcucha $\mathcal{C} = \{M\}$ wnioskujemy, że w $\mathcal{E}$ istnieje element maksymalny $\mathcal{M}$, który zawiera łańcuch $\mathcal{C}$. Niech H będzie sumą teoriomnogościową wszystkich podprzestrzeni należących do $\mathcal{M}$. Oczywiście H jest podprzestrzenią w V rozłączną z A i zawierającą H. Na mocy lematu 1.2 jest hiperpodprzestrzenią, bowiem w przeciwnym wypadku przeczyłoby to maksymalności łańcucha $\mathcal{M}$ /można by wówczas dołączyć do $\mathcal{M}$ podprzestrzeń rozpiętą na zbiorze $H \cup \{u\}$ /, nadto H jest zbiorem domkniętym, bo w przeciwnym wypadku H byłoby zbiorem gęstym w V /por. stwierdzenie 1.4 / i nie byłoby rozłączne z żadnym zbiorem otwartym, a więc i w szczególności z A, co kończy dowód.

WNIOSEK 1.5. Dowolna podprzestrzeń domknięta M w lokalno wypukłej przestrzeni V jest częścią wspólną /przekrojem!/ wszystkich hiperpodprzestrzeni domkniętych ją zawierających.

DOWÓD. Niech $a \notin M$, wobec tego istnieje otwarte otoczenie wypukłe A elementu a rozłączne z M. Według twierdzenia 1.3 istnieje hiperpodprzestrzeń domknięta H_α zawierająca M i rozłączna z A, zatem $a \notin H_a$, stąd już widać, iż $M = \bigcap_{a \notin M} H_a$

TWIERDZENIE 1.4. /o przedłużaniu funkcjonału/. Niech $p(\cdot)$ będzie półnormą na przestrzeni wektorowej V, a f niech będzie funkcjonałem liniowym na podprzestrzeni M w V, którego wartości na M nie przewyższają wartości p na M. Wówczas istnieje funkcjonał liniowy $\bar{f}$ na V, który jest przedłużeniem f na V i jego wartości nie przewyższają wartości półnormy p na V.

DOWÓD. Niech V będzie wyposażone w topologię określoną półnormą p, a $U=\{v\in V: p(v)<1\}$. Załóżmy, że $f\neq 0$ i niech u będzie elementem podprzestrzeni M, dla którego $f(u)=1$ i niech $A=u+U$. Oczywiście A jest zbiorem otwartym i wypukłym. Niech $N=f^{-1}(\{0\})$, a wiadomo, że dla $v\in U\cap M\subset U$, $|f(v)|<1$ i na mocy lematu 1.1. N jest rozłączny z A. Stąd według twierdzenia 1.3. istnieje domknięta hiperpodprzestrzeń H zawierająca N i rozłączna z A. Niech $\tilde{f}$ będzie funkcjonałem liniowym, dla którego $\tilde{f}^{-1}(\{0\})=H$ i $\tilde{f}(u)=1$. Wówczas $\tilde{f}$ jest przedłużeniem f na V, nadto $|\tilde{f}(v)|\leq p(v)$ dla $v\in U$, a stąd $|\tilde{f}(v)|\leq p(v)$ dla $\forall\ v\in V$, co kończy dowód twierdzenia.

WNIOSEK 1.6. Dowolny ciągły funkcjonał liniowy f na podprzestrzeni M w przestrzeni lokalnie wypukłej V ma liniowe i ciągłe przedłużenie na całe V.

DOWÓD. Istnieje takie otoczenie wypukłe, wchłaniające i wyważone U, że dla $v\in U\cap M$, $|f(v)|\leq 1$. Oznaczamy przez p_U funkcjonał Minkowskiego otoczenia U, oczywiście mamy $|f(v)|\leq p_U(v)$ dla $v\in U\cap M$, gdyż $p_U(v)=1$, $v\in U$, a z ciągłości na M wynika, iż $|f(v)|\leq p_U(v)$ dla $v\in M$. Stąd na mocy twierdzenia 1.4 istnieje liniowe i ciągłe przedłużenie $\tilde{f}$ funkcjonału f na V.

WNIOSEK 1.7. Dla dowolnego elementu u przestrzeni wektorowej V i półnormy p na V istnieje taki funkcjonał liniowy i ciągły f na V, że

$$f(u)=p(u)$$

$$|f(v)|\leq p(v)$$

dla wszelkich $v\in V$.

DOWÓD. Istotnie, na podprzestrzeni M rozpiętej na elemencie u określamy funkcjonał

$$f(\lambda a) = \lambda p(a)$$

i przedłużamy go na całą przestrzeń V .

WNIOSEK 1.8. Niech V będzie przestrzenią lokalnie wypukłą Hausdorffa oraz niech V' będzie przestrzenią sprzężoną z V . Jeżeli $f(u)=0$ dla $f \in V'$, to $u=0$.

DOWÓD. Jeżeli $u \neq 0$, to istnieje półnorma p , taka, że $p(a)>0$. Wówczas na mocy Wniosku 1.7. istnieje funkcjonał liniowy i ciągły f taki, że $f(u) \neq 0$, co stanowi sprzeczność.

STWIERDZENIE 1.5. /HAHNA-BANACHA o oddzielaniu wypukłych zbiorów/. Niech V będzie lokalno wypukłą przestrzenią A i B rozłączne zbiory wypukłe i otwarte. Wówczas istnieje taki funkcjonał liniowy i ciągły f , że $f(A)$ i $f(B)$ są rozłączne / f "oddziela" zbiory A i B /.

DOWÓD. Podzbiór $A-B$ jest otwarty i wypukły i nie zawiera zera. Na mocy twierdzenia 1.3. istnieje domknięta hiperpodprzestrzeń $H = f^{-1}(\{0\})$ zawierająca podprzestrzeń $\{0\}$ i rozłączna z $A-B$. Ponieważ hiperpodprzestrzeń H jest domknięta, to funkcjonał f jest ciągły, nadto $f(A)$ jest rozłączny z $f(B)$.

LEMAT 1.3. Dowolny funkcjonał liniowy nad przestrzenią lokalnie wypukłą V odwzorowuje otwarte podzbiory w V na otwarte podzbiory w $\mathbb{R}$.

DOWÓD. Niech A będzie zbiorem otwartym i $u \in A$. Wówczas zbiór $A-u$ zawiera zero i jego otoczenie, które jest wchłaniające. Niech f będzie funkcjonałem liniowym niezerowym, wówczas istnieje takie $a \in V$, że $f(a)=1$. Można znaleźć taką liczbę $\alpha>0$, że $\lambda a\in A-u$ dla $|\lambda|\leq\alpha$, zatem $f(u)+\lambda\in f(A)$, gdy $|\lambda|\leq\alpha$, bo $f(u+\lambda a)=f(u)+\lambda$ a więc $f(A)$ jest zbiorem otwartym.

WNIOSEK 1.9. Niech B będzie wypukłym podzbiorem lokalnie wypukłej przestrzeni V i niech $a\notin\overline{B}$. Wówczas istnieje taki funkcjonał liniowy i ciągły f, że $f(a)\notin\overline{f(B)}$

DOWÓD. Ponieważ $a\notin\overline{B}$, wobec tego istnieje takie otoczenie wypukłe i wyważone U zera, że $(a+U)\cap B=\phi$.
Na mocy stwierdzenia 1.5. istnieje funkcjonał liniowy i ciągły f, który "oddziela" zbiory $a+U$ i B, tzn. $f(a+U)\cap f(B)=$ $=\phi$. Na mocy wniosku 1.9. zbiór $f(a+U)$ jest otwarty, a stąd $f(a)\notin\overline{f(B)}$, co było do udowodnienia.

WNIOSEK 1.10. Niech A i B będą rozłącznymi zbiorami wypukłymi w przestrzeni lokalnie wypukłej V. Jeżeli A jest zbiorem otwartym, to istnieje funkcjonał liniowy i ciągły f oraz stała α, że $f(v)>\alpha$ dla $v\in A$ i $f(v)\leq\alpha$ dla $v\in B$.

DOWÓD. Na podstawie stwierdzenia 1.5. istnieje liniowy i ciągły funkcjonał f, który "oddziela" zbiory A i B, tzn. zbiory $f(A)$ i $f(B)$ są rozłączne. Zatem dla $f(A)$ i $f(B)$ jako podzbioru wypukłych prostej $\mathbb{R}$ mamy

$$\sup\{f(v): v\in B\}\leq\inf\{f(v): v\in A\}$$

/gdyby nierówność ta nie zachodziła, to należy funkcję f pomnożyć przez - 1/. Niech $\alpha=\inf\{f(v): v\in A\}$, wówczas oczywiście jest $f(v)\leq\alpha$ dla $v\in B$, ale $f(A)$ jest zbiorem otwartym, zatem $\alpha\notin f(A)$ stąd więc mamy $f(v)>\alpha$ dla $v\in B$.

STWIERDZENIE 1.6. Niech V będzie lokalnie wypukłą przestrzenią, f - funkcjonałem liniowym na podprzestrzeni M o własności: $f(v)>0$, gdy $v\in M\cap A=\phi$, gdzie A jest podzbiorem wypukłym w V. Wówczas istnieje funkcjonał liniowy $\tilde{f}$, który jest przedłużeniem funkcjonału f i $\tilde{f}(v)>0$ dla $v\in A$.

DOWÓD. Niech $N=f^{-1}(\{0\})$, oczywiści $N\cap A=\phi$ wobec tego na mocy twierdzenia 1.3. istnieje hiperpodprzestrzeń H zawierająca N i rozłączna z A. Niech $u\in A\cap M$. Określamy $\tilde{f}$ przez przyjęcie $\tilde{f}(u)=f(u)$ oraz $\tilde{f}^{-1}(\{0\})=H$. Oczywiście /por. UWAGA 1.3 / $\tilde{f}$ jest przedłużeniem f na V. Pokażemy, że $\tilde{f}(v)>0$ dla $v\in A$. Istotnie, połóżmy $\tilde{f}(u)=\lambda>0$ i załóżmy, że istnieje $w\in A$, dla którego $\tilde{f}(w)=-\mu\leq 0$. Ponieważ A jest podzbiorem wypukłym, wobec tego element $(\lambda w+\mu u)/(\lambda+\mu)$ należy do A i nadto

$$\tilde{f}((\lambda w+\mu u)/(\lambda+\mu))=(-\lambda\mu+\mu\lambda)/\lambda+\mu=0 \quad \text{tzn.}$$

$(\lambda w+\mu u)/(\lambda+\mu)$ jest również elementem należącym do H, co wobec tego, że $H\cap A=\phi$, stanowi sprzeczność.

UWAGA 1.4. Jeżeli funkcjonał liniowy f jest ciągły na podprzestrzeni M o własności: $f(v)>0$, gdy $v\in M\cap A=\phi$, gdzie A jest podzbiorem wypukłym w V. Wówczas istnieje przedłużenie ciągłe $\tilde{f}$ funkcjonału f na całą przestrzeń V, przy czym

$$\tilde{f}(v)>0$$

dla $v\in A$.

Dowód wynika bezpośrednio z dowodu stwierdzenia 1.6. przez zastosowanie twierdzenia 1.4.

2. DWOISTOŚĆ I SŁABA TOPOLOGIA

Niech V będzie przestrzenią lokalnie wypukłą, a V' podprzestrzenią przestrzeni V^*, której elementami są funkcjonały liniowe i ciągłe, tzn. V' jest przestrzenią sprzężoną /topologicznie/ z V. Zauważamy, że każdemu elementowi $v\in V$ można przyporządkować funkcjonał liniowy $\hat{v}$, który dany jest wzorem $\hat{v}(f) \overset{df}{=} f(v)$. A więc istnieje odwzorowanie liniowe przestrzeni V w V'^* określone wzorem

$$V \ni v \xrightarrow{\;\wedge\;} \hat{v}(f) = f(v)$$

UWAGA 2.1. Jeżeli V jest przestrzenią topologiczną Hausdorffa, to odwzorowanie $\wedge$ jest równowartościowe. Istotnie, niech $\hat{v} = \hat{u}$, taka równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $f(v) = f(u)$ dla wszelkich $f \in V'$, a to na mocy wniosku 1.8. tylko zachodzi dla $v = u$.

WNIOSEK 2.1. Przestrzeń lokalnie wypukła V może być utożsamiona z podprzestrzenią wektorową $\hat{V}$ przestrzeni V'^* jeżeli tylko V jest przestrzenią Hausdorffa.

Dowód tego wniosku jest trywialny.

Zachodzi więc pomiędzy przestrzeniami V i V' algebraiczna symetria, polegająca na tym, iż każdą z tych przestrzeni można utożsamić z podprzestrzenią przestrzeni algebraicznie sprzężonej z przestrzenią pozostałą. Ta symetria rozszerza się do symetrii topologicznej. Przedstawimy to niżej.

Można pokazać, co uczynimy dalej, że w podprzestrzeni V' istnieje topologia, w którą wyposażona V' staje się przestrzenią lokalnie wypukłą i Hausdorffa, przy czym przestrzeń sprzężona /topologicznie/ z nią jest przestrzenią V .

Aby to wykazać, wprowadzimy następujące oznaczenie. Elementy przestrzeni V' oznaczać będziemy symbolami v', u', w',...; wartość funkcjonału v' dla elementu u przestrzeni V będziemy zapisywać w następującej postaci $\langle u, v' \rangle$, wówczas $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza funkcjonał dwuliniowy określony na produkcie $V \times V'$ spełniający dwa warunki:

(B) dla każdego elementu $v \neq 0$ przestrzeni V istnieje taki funkcjonał liniowy i ciągły $v' \in V'$, że $\langle v, v' \rangle \neq 0$

(B') dla każdego funkcjonału liniowego i ciągłego $v' \neq 0$ przestrzeni V' istnieje taki element $v \in V$, że

$$\langle v, v' \rangle \neq 0$$

Powyższe dwa warunki na funkcjonał dwuliniowy $\langle \cdot , \cdot \rangle$ wynikają z naszych poprzednich rozważań, a mianowicie warunek (B) wynika z twierdzenia Hahna Banacha /por. Wniosek 1.7. str. 19 /, a (B') jest oczywisty.

Może być ogólniejsza sytuacja. Niech E i F będą dwoma przestrzeniami wektorowymi nad tym samym polem skalarów K, oraz $\langle \cdot , \cdot \rangle$ niech będzie funkcjonałem dwuliniowym /o wartościach w K / spełniającym warunki (B), (B'), które można sformułować w formie równoważnej:

(B_1) ze znikania $\langle e_0, f \rangle = 0$ dla pewnego $e_0 \in E$ i dowolnego $f \in F$ wynika $e_0 = 0$.

(B_1') ze znikania $\langle e, f_0 \rangle = 0$ dla pewnego $f_0 \in F$ i dowolnego $e \in E$ wynika $f_0 = 0$.

Mówimy wówczas, że przestrzenie wektorowe E, F /system: $\{E, F, \langle \cdot , \cdot \rangle\}$) tworzą parę dualną, lub że są słabo dualne; zapisujemy tę parę symbolem (E, F).

Dla każdej pary dualnej istnieje naturalne odwzorowanie h przestrzeni F w przestrzeni E^* zdefiniowane w sposób następujący:

$$F \ni f \xrightarrow{h} h(f) = \langle \cdot , f \rangle \in E^*$$

Oczywiście to odwzorowanie jest liniowe, a z warunku (B_1') wynika, że jest ono różnowartościowe i wobec tego F można utożsamić /jest izomorficzna / z podprzestrzenią przestrzeni E^*. Analogicznie można pokazać, że dzięki warunkowi (B_1), E można utożsamić /jest izomorficzna/ z podprzestrzenią przestrzeni F^*.

Parę dualną w szczególności stanowi para V i V' z funkcjonałem dwuliniowym $\langle\cdot,\cdot\rangle$, tj. $(V,V')=(\{V,V';\langle\cdot,\cdot\rangle\})$
Parę taką nazywamy <u>naturalną parą dualną</u>.

Niech (E,F) będzie parą dualną; każdemu elementowi $f\in F$ odpowiada półnorma określona wzorem

$$p(e)=|\langle e,f\rangle|$$

Najsłabsza topologia, przy której wszystkie te półnormy są ciągłe, nazywamy słabą topologią w E określoną przez przestrzeń F i oznaczamy ją $\sigma(E,F)$. Oczywiście, jest to również najsłabsza topologia, przy której wszystkie funkcjonały $\langle\cdot,f\rangle$, gdzie $f\in F$ są ciągłe.

Podzbiory postaci

$$\{e\in E:\ \sup_{1\le i\le m}|\langle e,f_i\rangle|\le 1\}$$

stanowią bazę /domkniętych/ otoczeń zera w topologi $\sigma(E,F)$. Oczywiście przestrzeń E wyposażona w topologię $\sigma(E,F)$ jest przestrzenią lokalnie wypukłą i Hausdorffa, ponieważ zapewnia tę ostatnią własność warunek (B_1'), który jest równoważny warunkowi (B) i warunkowi (h). Fakt ten wynika z twierdzenia 1.1. i wniosku 1.4., przy czym ε_j dla $j=1,2,\dots,n$ występujące we wzorze /5/ §1 w powyższych sformułowaniach można zastąpić przez 1, bowiem

$$|\langle e,f_i/\varepsilon_i\rangle|\le 1,\qquad i=1,2,\dots,n$$

jest równoważne

$$|\langle e,f_i\rangle|\le\varepsilon_i\qquad i=1,2,\dots,n$$

Przestrzeń /topologicznie/ sprzężona z przestrzenią E wyposażoną w topologię $\sigma(E,F)$ zawiera oczywiście przestrzeń F, tzn. $E'\supset F$.

Pokażemy, że przestrzeń E' może być utożsamiona /jest izomorficzna/ z przestrzenią F. W tym celu udowodnimy lemat.

LEMAT 2.1. Jeżeli $f_0, f_1, \dots, f_n$ są funkcjonałami nad przestrzenią E, to albo f_0 jest liniową kombinacją funkcjonałów $f_1, \dots, f_n$, albo istnieje taki element $e_0 \in E$, że $f_0(e_0) = 1$ i $f_j(e_0) = 0$ dla $j = 1, 2, \dots, n$.

DOWÓD. Bez zmniejszania ogólności rozważań przyjmijmy, że $f_1, \dots, f_n$ są liniowo niezależnymi funkcjonałami nad E. Dowód przeprowadzimy indukcyjnie. Dla $n = 0$ lemat jest prawdziwy. Niech lemat będzie prawdziwy dla $n-1$. Ponieważ funkcjonał f_i dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$ nie jest kombinacją liniową funkcjonałów $f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_n$, to na mocy założenia indukcyjnego istnieją takie elementy e_i, że $f_j(e_i) = 0$ $i \neq j$, a $f_i(e_i) = 1$. Dla dowolnego elementu $e \in E$ mamy

$$e - \sum_{i=1}^{n} f_i(e) e_i \in N = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(\{0\})$$

Zatem, albo istnieje taki element $e_0 \in N$, że $f_0(e_0) = 1$ (a $f_j(e_0) = 0$ dla $j = 1, \dots, n$), albo $f_0(e) = 0$ dla dowolnego $e \in N$. W tym ostatnim przypadku dla $e \in E$ mamy

$$f_0(e) = \sum_{i=1}^{n} f_i(e) f_0(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(e)$$

i wobec tego

$$f_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$$

co należało dowieść.

WNIOSEK 2.2. Jeżeli $f_1, \dots, f_n$ są liniowo niezależnymi funkcjonałami nad przestrzenią E, to w przestrzeni E istnieją takie elementy $e_1, \dots, e_n$, że $f_i(e_i) = 1$ i $f_i(e_j) = 0$ dla $i \neq j$ $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$

DOWÓD. Dowód jest natychmiastowy.

STWIERDZENIE 2.1. Niech (E, F) będzie parą dualną, to F jest przestrzenią sprzężoną /topologicznie/ z przestrzenią E wyposażoną w topologię $\sigma(E, F)$.

DOWÓD. Niech f będzie funkcjonałem liniowym i ciągłym nad przestrzenią E wyposażoną w topologię $\sigma(E,F)$. Zatem $|f(e)|<\alpha<1$ na pewnym otoczeniu postaci

$$U=\{e: \sup_{1\leq i\leq n}|<e,f_i>|\leq 1\}$$

gdzie $f_1,\dots,f_n\in F$ /bo f ciągły w topologii $\sigma(E,F)$ /.

Wobec tego na mocy lematu 2.1., albo f jest kombinacją liniową funkcjonałów $f_1,\dots,f_n$ albo istnieje taki element $e_0\in E$, że $f(e_0)=1$, a $<e_0,f_i>=0$ dla $i=1,\dots,n$. Ale to stanowi sprzeczność, gdyż $e_0\in U$, a $|f(e_0)|>\alpha$, zatem

$$f=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\in F$$

Z drugiej strony każdy element przestrzeni F jest ciągły w topologii $\sigma(E,F)$, wobec tego przestrzeń sprzężona /topologicznie/ E' z przestrzenią E wyposażoną w topologię $\sigma(E,F)$ jest identyczna z F, co należało pokazać.

UWAGA 2.2. Niech E będzie lokalnie wypukłą przestrzenią a E' niech będzie przestrzenią sprzężoną /topologicznie/ z przestrzenią E. Para (E',E) jest naturalną parą dualną, przez $\sigma(E',E)$ oznaczmy lokalnie wypukłą topologię w E', przy której przestrzenią sprzężoną /topologicznie/ z E' jest przestrzeń E.

Niech (E,F) będzie dualną parą; każda lokalnie wypukła topologia w przestrzeni E, przy której przestrzeń sprzężona /topologicznie/ E' z przestrzenią E jest izomorficzna z przestrzenią F, będziemy nazywać topologią zgodną z dualnością między E i F.

Stwierdzenie 2.1. daje właśnie przykład takiej topologii w przestrzeni E, jest to najsłabsza z topologii zgodnych z dualnością między E i F. Ponieważ ta topologia $\sigma(E,F)$ jest topologią Hausdorffa, więc wszystkie inne topologie zgodne z dualnością między E i F są również topologiami Hausdorffa. Okazuje się, że istnieją takie własności topologiczne, które są zależne od pary dualnej, a nie od wybranej topologii zgodnej z dualnością między E i F. Zatem badania tych własności można prowadzić w topologii $\sigma(E,F)$. Przykładem takiej własności jest następujące

STWIERDZENIE 2.2. Niech (E,F) będzie parą dualną i A podzbiorem wypukłym przestrzeni E. Wówczas domknięcie podzbioru A jest identyczne we wszystkich topologiach zgodnych z dualnością między E i F.

DOWÓD. Niech $\mathcal{T}$ będzie dowolną topologią w E zgodną z dualnością między E i F. Pokażemy, że domknięcie $\overline{A}$ podbzioru A w topologii $\mathcal{T}$ jest identyczne z domknięciem $\overline{A}(\sigma)$ podzbioru A w topologii $\sigma(E,F)$. Ponieważ topologia $\mathcal{T}$ jest mocniejsza od topologii $\sigma(E,F)$, wobec tego $\overline{A} \subset \overline{A}(\sigma)$.
Niech $e \notin \overline{A}$, wówczas na mocy wniosku 1.9. istnieje ciągły i liniowy funkcjonał $f \in E$ taki, że

$$<e,f> \notin \overline{<A,f>} = \overline{\{<g,f> \in \mathbb{R} : g \in A\}}$$

Zatem istnieje $\delta > 0$, że $|<e-g,f>| \geq \delta$ dla $g \in A$.
Niech $U = \{g \in E : |<g,f>| < \delta\}$ jest więc otoczeniem w topologii $\sigma(E,F)$ zera takim, że $e + U$ jest rozłączne z A, tzn. że element $e \notin \overline{A}(\sigma)$, a zatem $\overline{A}(\sigma) \subset \overline{A}$, co należało dowieść.

UWAGA 2.3. Gdyby topologia $\mathcal{T}$ nie była zgodna z dualnością między E i F, wówczas na mocy wniosku 1.9 istniałby funkcjonał liniowy i ciągły $f' \in E$ inny niżeli funkcjonał $f \in F$, bo wtedy $E' \neq F$, a stąd nie można by udowodnić równość $\overline{A} = \overline{A}(\sigma)$.
Zatem na ogół jest w tym przypadku $\overline{A} \subset \overline{A}(\sigma)$. Podzbiór $\overline{A}(\sigma)$ nazywa się słabym domknięciem / σ - domknięciem/ A.

WNIOSEK 2.3. W lokalnie wypukłej przestrzeni V każdy podzbiór słabo domknięty / σ - domknięty/ jest również domknięty w topologii lokalnie wypukłej przestrzeni V .

DOWÓD. Dowód tego wniosku jest trywialny i zawarty w uwadze 2.3.

Na zakończenie tego paragrafu podamy jeszcze pewne interpretacje geometryczne Twierdzenia HAHNA-BANACHA sformułowanego wyżej w postaci twierdzenia 1.4. Z tego twierdzenia i twierdzenia 1.3. wynika następujące stwierdzenie.

STWIERDZENIE 2.3. Niech V będzie przestrzenią lokalnie wypukłą, A otowartym i wypukłym jej podzbiorem, a Z rozmaitością liniową rozłączną z A . Wówczas istnieje hiperpłaszczyzna afiniczna $\mathcal{H}$, domknięta w V , zawierająca Z i rozłączna z A .

Dowód tego stwierdzenia jest zawarty w dowodach twierdzeń 1.3. i 1.4.

Przypomnimy że hiperpłaszczyzna afiniczna $\mathcal{H}$ rozdziela /ściśle/ podzbiory A i B w przestrzeni wektorowej V , gdy każda z domkniętych /otwartych/ półprzestrzeni /por. str. 14/ ograniczonych hiperpłaszczyzną afiniczną $\mathcal{H}$ zawiera jedynie jeden z nich. Zatem wniosek 1.10. można sformułować w języku geometrycznym, a mianowicie

WNIOSEK 2.4. Niech A i B będą rozłącznymi zbiorami wypukłymi w przestrzeni lokalnie wypukłej V . Jeżeli A jest zbiorem otwartym, to istnieje domknięta hiperpłaszczyzna afiniczna $\mathcal{H}$ rozdzielająca zbiory A i B .

Z tego wniosku otrzymujemy:

WNIOSEK 2.5. Niech A i B będą rozłącznymi zbiorami wypukłymi w przestrzeni lokalnie wypukłej V . Jeżeli A jest zbiorem domkniętym, a B zbiorem zwartym, to istnieje domknięta hiperpłaszczyzna afiniczna $\mathcal{H}$ rozdzielająca ściśle zbiory.

Niech A będzie podzbiorem topologicznej przestrzeni wektorowej V , a $\mathcal{H}$ - domkniętą hiperpłaszczyzną afiniczną zawierającą przynajmniej jeden punkt u zbioru A, przy czym podzbiór A zawiera się w jednej z domkniętych półprzestrzeni ograniczonych hiperpłaszczyzną $\mathcal{H}$. Wówczas hiperpłaszczyznę domkniętą afiniczną $\mathcal{H}$ nazywamy hiperpłaszczyzną <u>podpierającą</u>, a punkt u nazywa się <u>punktem podparcia</u>.

Z powyższego określenia i wniosku 2.4. otrzymujemy następujący wniosek:

<u>WNIOSEK</u> 2.6. Niech A będzie wypukłym podzbiorem o niepustym wnętrzu w przestrzeni lokalnie wypukłej V. Wówczas każdy punkt brzegowy, który należy do A, jest jego punktem podparcia.

Dowód tego wniosku jest trywialny.

Przypomnimy jeszcze pojęcie punktu <u>algebraicznie wewnętrznego</u> i punktu <u>algebraicznie brzegowego</u> zbioru A w przestrzeni wektorowej topologicznej V.

Punkt u zbioru A nazywa się punktem algebraicznie wewnętrznym zbioru A, gdy dowolna prosta przechodząca przez punkt u ma ze zbiorem A tylko jeden punkt wspólny /tzn. punkt u /, albo też wspólny odcinek $[u_1, u_2]$, którego wnętrze zawiera punkt u. Wszystkie inne punkty zbioru A nazywamy albebraicznie brzegowymi.

Oczywiście, że każdy punkt wewnętrzny zbioru A jest jego punktem algebraicznie wewnętrznym, na odwrót nie jest to prawdą, przykładem tego są punkty odcinka otwartego zawartego w przestrzeni wektorowej topologicznej V o wymiarze nie mniejszym niż 2.

Jeżeli punkt u jest dowolnym punktem algebraicznie wewnętrznym, a v jest dowolnym punktem algebraicznie brzegowym podzbioru wypukłego i domkniętego A w przestrzeni wektorowej topologicznej V, to v jest jednym z końców odcinka prostej L przechodzącej przez punkt u i v. Dowód tego faktu nie jest trudny.

Zauważymy jeszcze, że jeżeli wnętrze zbioru A jest niepuste, to każdy punkt zbioru A jest algebraicznie wewnętrzny wtedy i tylko wtedy, gdy jest wewnętrzny, oraz jest algebraicznie brzegowy wtedy i tylko wtedy, gdy jest brzegowy.

Na zakończenie podamy konsekwencję wniosku 2.5., którą sformułujemy w postaci następującego wniosku.

<u>WNIOSEK 2.7.</u> W lokalnie wypukłej przestrzeni V dowolny domknięty wypukły podzbiór jest częścią wspólną wszystkich zawierających go półprzestrzeni domkniętych.

Na podstawie tego wniosku łatwo jest już zauważyć, że każdy domknięty podzbiór wypukły jest słabo domknięty w V /por. Wniosek 2.3. str. 28/.

Niech P będzie dowolnym podzbiorem przestrzeni wektorowej i topologicznej V. Część wspólna wszystkich zawierających podzbiór P domkniętych zbiorów wypukłych jest najmniejszym domkniętym zbiorem wypukłym, który oznacza się przez $\overline{co}\, P$ i nosi nazwę wypukłego domknięcia zbioru P. Oczywiście $\overline{co}\, P$ jest domknięciem powłoki wypukłej $co\, P$ zbioru P, ale nie jest wypukłą powłoką domknięcia $\overline{P}$, bo $co\, P \subset co\, \overline{P}$.

Z wniosku 2.3 dla przestrzeni wektorowych unormowanych wynika twierdzenie, zwane lematem MAZURA.

<u>LEMAT MAZURA.</u> Niech V będzie przestrzenią wektorową unormowaną a $\{u_n\}_{n\in N}$ ciągiem słabo zbieżnym do elementu $\bar{u}$. Wówczas istnieje ciąg wypukłych kombinacji liniowych $\{v_n\}_{n\in N}$ postaci

$$v_n = \sum_{j=n}^{N} \alpha_j u_j \qquad \sum_{j=n}^{N} \alpha_j = 1 \qquad \alpha_j \geq 0 \quad n \leq j \leq N$$

który jest zbieżny według normy do elementu $\bar{u}$.

<u>DOWÓD.</u> Dla dowolnej liczby naturalnej $n \in N$ $\bar{u}$ należy do słabego domknięcia zbioru $\bigcup_{j=n}^{\infty} \{u_j\}$, a więc tym bardziej do

słabego domknięcia $\operatorname{co} \bigcup_{j=n}^{\infty} \{u_j\}$, które jest identyczne z wypukłym słabym domknięciem zbioru $\bigcup_{j=n}^{\infty} \{u_j\}$. Na mocy wniosku 2.3 wypukłe słabe domknięcie tego zbioru jest jego wypukłym /mocnym, tzn. według normy/ domknięciem, tzn. $\bar{u} \in \overline{\operatorname{co}} \bigcup_{j=n}^{\infty} \{u_j\}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Stąd więc można już wybierać $v_n \in \operatorname{co} \bigcup_{j=n}^{\infty} \{u_n\}$ tak, by był spełniony warunek

$$\|v_n - \bar{u}\| < \frac{1}{n}$$

co kończy dowód twierdzenia.

3. FUNKCJE WYPUKŁE

Niech V będzie przestrzenią wektorową. Będziemy rózważać odwzorowania podzbiorów A przestrzeni V w rozszerzoną prostą rzeczywistą $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$.

OKREŚLENIE 3.1. Niech A będzie wypukłym podzbiorem w przestrzeni V i niech F będzie odwzorowaniem podzbioru A w $\overline{\mathbb{R}}$, tzn. $F: A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Funkcja F nazywa się WYPUKŁA, gdy dla dowolnych elementów u i v podzbioru A jest prawdziwa nierówność:

$$F(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha F(u) + (1-\alpha)F(v) \qquad /3.1./$$

dla wszelkich $\alpha \in [0,1]$, przy warunku, że prawa strona tej nierówności jest dobrze określona /ma sens!/.

Oczywiście ten ostatni warunek jest spełniony zawsze poza przypadkiem, gdy

$$F(u) = -F(v) = \pm\infty$$

STWIERDZENIE 3.1. Jeżeli funkcja $F: A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest wypukła, to jest prawdziwa nierówność:

$$F\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j F(v_j) \qquad /3.2./$$

dla dowolnych elementów $v_1, \ldots, v_n$ podzbioru A i dowolnych nieujemnych liczb $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, których suma jest równa 1, tzn. $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$, przy warunku, że prawa strona tej nierówności jest dobrze określona /ma sens!/

Dowód tego stwierdzenia jest indukcyjny.

STWIERDZENIE 3.2. Jeżeli F jest funkcją wypukłą to zbiory LEBESGUE'A

$$\{ v \in V : F(v) \leq a \}$$

$$\{ v \in V : F(v) \leq a \}$$

dla wszelkiego $a \in \overline{\mathbb{R}}$ są wypukłe.

DOWÓD. Dowód jest natychmiastowy z określenia 3.1.

UWAGA 3.1. Stwierdzenie odwrotne jest fałszywe, bowiem superpozycja funkcji rosnącej stosownie dobranej z funkcją wypukłą nie jest funkcją wypukłą, ale zbiory Lebesgue'a dla takiej superpozycji są wypukłe. Przykładem tego jest następująca superpozycja $\phi \circ F$ gdzie $\phi(u) = \sqrt[3]{u}$ a F jest dowolną funkcją wypukłą.

OKREŚLENIE 3.2. Dla funkcji $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, zbiór LEBESGUE'A

$$\{ v \in V : F(v) < \infty \}$$

nazywamy dziedziną efektywną i oznaczamy go symbolem dom F.

Oczywiście dziedzina efektywna funkcji wypukłej jest zbiorem wypukłym.

Zauważymy, że rozważanie funkcji numerycznych /przyjmujących wartości $\pm\infty$ / ma duże znaczenie praktyczne; dzięki temu właśnie badanie funkcji wypukłych określonych na podzbiorach wypukłych można zastąpić badaniem ich rozszerzeń na przestrzeń V. Rozszerzenie to określa się w następujący sposób: jeżeli A jest podzbiorem w V, a $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$, to rozszerzenie $\tilde{F}$ funkcji F dane jest wzorem:

$$\tilde{F}(v) = \begin{cases} F(v) & , v \in A \\ = \infty & , v \notin A \end{cases}$$

Oczywiście rozszerzenie $\tilde{F}$ jest wypukłą funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy F jest funkcją wypukłą określoną na podzbiorze wypukłym A.

Dzięki tak rozszerzonym funkcjom można zagadnienie badania podzbiorów wypukłych w danej przestrzeni wektorowej V sprowadzić do badania pewnych funkcji numerycznych wypukłych. Istotnie, dla dowolnego podzbioru A przestrzeni wektorowej V określamy funkcją indykatorową zbioru A wzorem:

$$V \ni v \longrightarrow \chi_A(v) = \begin{cases} = 0 & v \in A \\ = \infty & v \notin A \end{cases}$$

Zauważymy, że funkcja χ_A jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy podzbiór A jest wypukły w V. Zatem badać wypukłość podzbioru A przestrzeni V oznacza to samo co badać wypukłość funkcji indykatorowej χ_A podzbioru A.

Na specjalną uwagę zasługują jeszcze funkcje wypukłe, które przyjmują wartość $-\infty$. Można je łatwo opisać; a mianowicie, jeżeli funkcja wypukła F przyjmuje dla u wartość $F(u) = -\infty$, to albo $F(u + \alpha v) = -\infty$ dla $\alpha > 0$ i pewnego elementu $v \in V$, albo też przyjmuje ona na odcinku $]u, u + \alpha_0 v[$, wartość $-\infty$, dla $u + \alpha_0 v$ - dowolną wartość, a na pozostałej części półprostej $u + \alpha v$ dla $\alpha > \alpha_0$ - wartość $+\infty$.

Aby wyłączyć w niektórych rozważaniach tego typu funkcje wypukłe wprowadzimy pojęcie <u>funkcji wypukłej właściwej</u>, mianowicie funkcja wypukła F nazywa się właściwą, gdy nie przyjmuje wartości $-\infty$ i nie jest tożsamościowo równa $+\infty$.

<u>OKREŚLENIE 3.3.</u> <u>Nadwykresem</u> funkcji $F: V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ nazywamy zbiór

$$\mathrm{epi}\,F = \{ (v,a) \in V \times \mathbb{R} \; : \; F(v) \leq a \}$$

UWAGA 3.2. Poglądowo mówiąc, nadwykresem funkcji F jest podzbiór punktów iloczynu kartezjańskiego $V \times \mathbb{R}$, które leżą "nad" wykresem funkcji F. Oczywiście rzut nadwykresu funkcji F jest jej dziedziną efektywną, $\mathrm{dom}\,F$, tzw.

$$pr_1(\mathrm{epi}\,F) = \mathrm{dom}\,F$$

Pojęcie nadwykresu jest bardzo pożyteczne w dalszych badaniach własności funkcji wypukłych.

STWIERDZENIE 3.3. Funkcja $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ jest wypukłą wtedy i tylko wtedy, gdy jej nadwykres jest zbiorem wypukłym.

DOWÓD. Niech F będzie funkcją wypukłą, mamy pokazać, że wraz z punktami (u,a) i (v,b) cały odcinek należy do epi F. Zatem stąd, że

$$(u,a) \in \mathrm{epi}\,F \quad , \quad (v,b) \in \mathrm{epi}\,F$$

mamy otrzymać, iż dla $0 < \lambda < 1$

$$\lambda(u,a) + (1-\lambda)(v,b) \in \mathrm{epi}\,F$$

Istotnie z wypukłości F mamy

$$F(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda F(u) + (1-\lambda) F(v)$$

a ponieważ $F(u) \leq a$ i $F(v) \leq b$ więc otrzymujemy

$$F(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda a + (1-\lambda) b$$

zatem punkt $(\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda a + (1-\lambda)b)$ iloczynu kartezjańskiego $V \times \mathbb{R}$ należy do nadwykresu funkcji F, czyli

$$\lambda(u,a) + (1-\lambda)(v,b) \in \mathrm{epi}\,F$$

co należało pokazać.

Dowód w drugą stronę, niech nadwykres epi F będzie wypukły, tzn. wraz z punktami

(u, a) i (v, b)

gdzie

$$F(u) \leq a < \infty \qquad F(v) \leq b < \infty$$

$$\lambda(u, a) + (1-\lambda)(v, b) \in \mathrm{epi}\, F$$

czyli

$$(\lambda u + (1-\lambda)v \, , \, \lambda a + (1-\lambda) b) \in \mathrm{epi}\, F$$

a więc mamy

$$(\ast) \qquad F(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda a + (1-\lambda) b$$

dla wszelkich

$$\infty > a \geqslant F(u) \quad \text{i} \quad \infty > b \geqslant F(v)$$

a więc i w szczególności otrzymujemy

$$(\ast\ast) \qquad F(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda F(u) + (1-\lambda) F(v)$$

położywszy $a = F(u)$ i $b = F(v)$. Powyższe rozumowanie stanowiące drugą część dowodu może być przeprowadzone, gdy u, $v \in \mathrm{dom}\, F$, bowiem $\mathrm{dom}\, F$ jako projekcja na V zbioru wypukłego $\mathrm{epi}\, F$ jest zbiorem wypukłym. Dla zakończenia dowodu należy rozważyć przypadek, gdy $F(u) = -\infty$ lub $F(v) = -\infty$. W takim przypadku należy przejść do granicy w nierówności $(\ast)$ i wobec czego również i w tym przypadku nierówność $(\ast\ast)$ będzie prawdziwa, co należało wykazać.

Podamy niżej jeszcze wyniki standardowych operacji wykonywanych nad funkcjami wypukłymi. W wyniku tych operacji można będzie zauważyć, iż zbiór funkcji wypukłych stanowi stożek wypukły. Wyniki te można wyrazić w następującej postaci:

STWIERDZENIE 3.4. /i/ Jeżeli $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ jest funkcją wypukłą, to dla każdej liczby dodatniej λ funkcja λF jest funkcją wypukłą.

/ii/ Jeżeli $F: V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ i $G: V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ są funkcjami wypukłymi, to $F+G$ jest również funkcją wypukłą /przy czym przyjmujemy dla $F(u) = -G(u) = \pm\infty$ $(F+G)(u) = \infty$ /.

/iii/ Jeżeli $\{F_i\}_{i\in I}$ jest rodziną wypukłych funkcji określonych na V o wartościach w $\overline{\mathbb{R}}$, to punktowy kres górny funkcji tej rodziny

$$F = \sup_{i\in I} F_i : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

jest funkcją wypukłą.

DOWÓD. Dowód części /i/, /ii/ są trywialne. Aby wykazać część /iii/ zauważymy, że na mocy stwierdzenia 3.3 dla dowolnego $i\in I$ nadwykres epi F_i jest zbiorem wypukłym, a z określenia punktowego kresu górnego mamy

$$\operatorname{epi}\left(\sup_{i\in I} F_i\right) = \bigcap_{i\in I} \operatorname{epi} F_i$$

wobec czego epi $\left(\sup_{i\in I} F_i\right)$ jest zbiorem wypukłym, a stąd na mocy stwierdzenia 3.3 $\sup F_i$ jest funkcją wypukłą, co kończy dowód.

OKREŚLENIE 3.4. Niech A będzie podzbiorem wypukłym przestrzeni V, a $F: A \longrightarrow \mathbb{R}$. Funkcja F nazywa się ściśle wypukłą, gdy jest ona wypukła i dla dowolnych elementów u, v zbioru A takich, że $u \neq v$, oraz $\lambda \in]0,1[$ - jest prawdziwa nierówność

$$F(\lambda u + (1-\lambda)v) < \lambda F(u) + (1-\lambda) F(v)$$

UWAGA 3.3. Z powyższego określenia wynika, iż każda funkcja ściśle wypukła jest funkcją wypukłą w sensie określenia 1. Wobec tego wszystkie stwierdzenia, które wyżej zostały sformułowane i udowodnione są prawdziwe mutatis mutandis dla funkcji ściśle wypukłych.

4. FUNKCJE PÓŁCIĄGŁE DOLNIE I FUNKCJE CIĄGŁE

Niech V będzie przestrzenią lokalnie wypukłą. Rozważymy dwie klasy funkcji określonych na V o wartościach w $\overline{\mathbb{R}}$; klasę funkcji półciągłych na V oraz jej podklasę - funkcje ciągłe.

OKREŚLENIE 4.1. Funkcja $F: V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ nazywa się półciągła dolnie na V (pc na V) , gdy dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \in \mathbb{R}$ zbiór

$$\{v \in V : F(v) \leq a\}$$

jest domknięty w V .

STWIERDZENIE 4.1. Warunki:

/i/ $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{v \in V : F(v) \leq a\}$ domknięty w V

/ii/ $\forall u \in V$, $\varliminf_{v \to u} F(v) \geq F(u)$

są równoważne.

DOWÓD. Załóżmy, że jest spełniony warunek /i/. Pokażemy, że on implikuje /ii/. Załóżmy w tym celu, że nie zachodzi /ii/, tzn. istnieje taki element $\bar{u} \in V$, że

$$\varliminf_{v \to \bar{u}} F(v) < F(\bar{u})$$

Stąd wynika istnienie takiego ciągu $v_n \to \bar{u}$, że $F(v_n) \to g < F(\bar{u})$ innymi słowy dla

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N, \ \forall n > N : \quad g - \varepsilon < F(v_n) < g + \varepsilon$$

Niech $g + \varepsilon < F(\bar{u})$. Zauważamy, że ciąg $v_{N+1}, \ldots, v_n, \ldots$ jest ciągiem elementów zbioru

$$\{ v \in V : F(v) \leq g + \varepsilon \}$$

dla którego element $\bar{u}$ jest punktem skupienia, który nie należy do niego, bo

$$g + \varepsilon < F(\bar{u})$$

zatem stanowi to sprzeczność z /i/, wobec czego /i/ implikuje /ii/.

Dowód w drugą stronę /od /ii/ do /i// jest natychmiastowy. Niech element $\bar{u} \in V$ będzie punktem skupienia zbioru $\{ v \in V : F(v) \leq a \}$. Oczywiście istnieje taki ciąg elementów v_n tego zbioru, że $v_n \neq \bar{u}$ i $v_n \to \bar{u}$, gdy $n \to \infty$, zatem z warunku /ii/ mamy

$$F(\bar{u}) \leq \varliminf_{n \to \infty} F(v_n)$$

a ponieważ $F(v_n) \leq a$, więc stąd otrzymujemy, iż element $\bar{u} \in \{ v \in V : F(v) \leq a \}$, co kończy dowód.

UWAGA 4.1. Przypominamy, że funkcja $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ nazywa się półciągła górnie na V, gdy funkcja $-F$ jest półciągła dolnie.

PRZYKŁAD 1. Funkcja indykatorowa χ_A podzbioru A przestrzeni V jest półciągła dolnie na V wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem domkniętym w V.
Analogicznie funkcja χ_A jest półciągła górnie wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem otwartym w V.

TWIERDZENIE 4.1. Funkcja $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ jest półciągła dolnie na V wtedy i tylko wtedy, gdy jej nadwykres jest domknięty w $V \times \mathbb{R}$.

DOWÓD. Określamy funkcję pomocniczą $\varphi : V \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ wzorem $\varphi(v, a) = F(v) - a$. Jest oczywista następująca równoważność:

funkcja F jest półciągła dolnie na V wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja φ jest półciągła dolnie na $V \times \mathbb{R}$. Zauważamy, że dla $\tau \in \mathbb{R}$ zbiór

$$\{ (v, a) : \varphi(v, a) \leq \tau \}$$

jest nadwykresem epi F funkcji F przesuniętym w kierunku $\mathbb{R} \circ \tau$ w iloczynie kartezjańskim $V \times \mathbb{R}$. Zatem epi F jest domknięty w $V \times \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{ (v, a) : \varphi(v, a) \leq \tau \}$ jest domknięty w $V \times \mathbb{R}$.

Połączenie obu wyżej sformułowanych równoważności stanowi dowód twierdzenia.

UWAGA 4.2. Z wyżej przedstawionych własności funkcji półciągłych dolnie wynika, iż punktowy kres górny funkcji półciągłych dolnie na przestrzeni V jest funkcją półciągłą dolnie na V.

Dowód tej uwagi jest analogiczny do dowodu stwierdzenia 3.4. /iii/.

OKREŚLENIE 4.2. Niech $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ będzie dowolną funkcją numeryczną. Największa z wszystkich funkcji półciągłych dolnie, które nie przewyższają wartości funkcji F, nosi nazwę półciągłej dolnie regularyzacji funkcji F i oznaczamy ją symbolem $\overline{F}$.

WNIOSEK 4.1. Dla dowolnego elementu v przestrzeni V jest prawdziwa równość

$$\overline{F}(v) = \sup \{ \phi(v) : \ \phi : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ półciągła dolnie, } \phi \leq F \}$$

Dowód tego wniosku jest oczywisty.

WNIOSEK 4.2. Niech $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ a $\overline{F}$ niech będzie półciągłą dolnie regularyzacją funkcji F. Wówczas są prawdziwe równości

/i/ $\quad \mathrm{epi}\ \bar{F} = \overline{\mathrm{epi}\ F}$

/ii/ $\quad \forall v \in V \qquad \bar{F}(v) = \varliminf_{u \to v} F(u)$

DOWÓD. Z faktu, iż $\bar{F}$ nie przewyższa funkcji F i jest jej półciągłą dolnie regularyzacją wynika, że

$$\mathrm{epi}\ \bar{F} \supset \mathrm{epi}\ F$$

a stąd ponieważ

$$\mathrm{epi}\ \bar{F} = \overline{\mathrm{epi}\ \bar{F}}$$

więc mamy

(*) $$\mathrm{epi}\ \bar{F} \supset \overline{\mathrm{epi}\ F}$$

Zauważymy, że zbiór $\overline{\mathrm{epi}\ F}$ jest nadwykresem. Istotnie, niech $(u, a) \in \overline{\mathrm{epi}\ F}$, wówczas istnieje ciąg $(u_\nu, a_\nu) \in \mathrm{epi}\ F$, który jest zbieżny do (u, a). Jeżeli $b > a$, to $a_\nu \leq b$ dla pewnego podciągu, a stąd na mocy $F(u_\nu) \leq a_\nu$ otrzymujemy $(u_\nu, b) \in \mathrm{epi}\ F$, wobec czego $(u, b) \in \overline{\mathrm{epi}\ F}$. Część wspólna $\overline{\mathrm{epi}\ F}$ z prostą $\{v\} \times \mathbb{R}$, albo jest zbiorem pustym, albo półprostą $\{v\} \times [a, \infty)$. Zatem kładąc w pierwszym przypadku $G(v) = \infty$, a w drugim $G(v) = a$, otrzymujemy funkcję $G: V \to \bar{\mathbb{R}}$, dla której $\mathrm{epi}\ G = \overline{\mathrm{epi}\ F}$. Oczywiście, G jest półciągła dolnie i $G \leq F$, nadto $G \leq \bar{F}$, tzn.

$$\mathrm{epi}\ \bar{F} \subset \mathrm{epi}\ G = \overline{\mathrm{epi}\ F}$$

co w połączeniu z relacją /x/ daje /i/. Równość /ii/ jest równoważna[1/] równości /i/, co kończy dowód wniosku.

1/ Wynika to z rozumowania przedstawionego w dowodzie stwierdzenia 4.1.

Dla funkcji wypukłych, ze względu na własność ich nadwykresów /por. stwierdzenie 3.3./, wynika wniosek.

WNIOSEK 4.3. Każda funkcja wypukła półciągła dolnie na V jest również półciągła dolnie w słabej topologii $\sigma(V,V')$ na V.

Dowód jest oczywisty, wynika on z wniosku 2.3. i wniosku 2.7.

Jeżeli funkcja wypukła jest półciągła dolnie i przyjmuje wartość $-\infty$ /nie jest właściwa/ wówczas jest prawdziwa.

STWIERDZENIE 4.2. Funkcja F półciągła dolnie, wypukła przyjmująca wartość $-\infty$ nie przyjmuje wartości skończonych.

DOWÓD. Załóżmy, że istnieje element $\bar{u} \in V$, dla którego jest $F(\bar{u}) \in \mathbb{R}$. Obierzmy $\bar{a} \in \mathbb{R}$ tak, by $\bar{a} < F(\bar{u})$ i $(\bar{u}, \bar{a})$ mogło być ściśle odzielone od nadwykresu epi F /jest on wypukły i domknięty/. To oznacza, że istnieje taki funkcjonał liniowy i ciągły oraz liczba $\beta \in \mathbb{R}$, że

$$\forall (u,a) \in \text{epi } F$$

jest:

$$l(\bar{u}) + \beta \bar{a} < l(u) - \beta . a$$

Kładąc $u = \bar{u}$ i $a = F(\bar{u})$ otrzymujemy $\beta(F(\bar{u}) - a) > 0$, czyli $\beta > 0$. Wobec tego dzieląc strony wyżej napisanej nierówności mamy

$$\forall u \in V$$

$$\frac{1}{\beta} l(\bar{u} - u) + \bar{a} < F(u)$$

co prowadzi do sprzeczności z założeniem, gdyż prawa strona tej nierówności jest zawsze skończona, a przecież F przyjmuje wartość $-\infty$.

Udowodnimy podstawowy lemat dla badania ciągłości funkcji wypukłych.

LEMAT 4.1. Jeżeli w pewnym otoczeniu elementu $u \in V$ funkcja wypukła F jest ograniczona, to jest ona ciągła w u.

DOWÓD. Nie zmniejszając ogólności rozważań możemy przyjąć, iż $u = 0$ i $F(u) = 0$. Niech $\mathcal{V}$ będzie otoczeniem zera 0, w którym funkcja F jest ograniczona, tzn.

$$F(v) \leq a < \infty$$

dla wszelkich $v \in \mathcal{V}$.

Połóżmy $\mathcal{W} = \mathcal{V} \cap -\mathcal{V}$, wówczas $\mathcal{W}$ jest symetrycznym otoczeniem zera; niech $\varepsilon \in (0,1)$. Jeżeli $v \in \varepsilon \mathcal{W}$ to na mocy wypukłości funkcji F mamy

$$\frac{v}{\varepsilon} \in \mathcal{V} \Rightarrow F(v) \leq (1-\varepsilon) F(0) + \varepsilon F\left(\frac{v}{\varepsilon}\right) \leq \varepsilon a$$

$$-\frac{v}{\varepsilon} \in \mathcal{V} \Rightarrow F(v) \geq (\varepsilon - 1) F(0) - \varepsilon F\left(-\frac{v}{\varepsilon}\right) \geq -\varepsilon a$$

gdyż z wypukłości F i własności $F(0) = 0$ jest $-F(-u) \leq F(u)$ a stąd i z wypukłości otrzymujemy $F(-v) = F\left(\varepsilon\left(-\frac{v}{\varepsilon}\right) + (1-\varepsilon)0\right) \leq \varepsilon F\left(-\frac{v}{\varepsilon}\right) + (1-\varepsilon) F(0)$ oraz nierówność ostatnią. Zatem mamy

$$|F(v)| \leq \varepsilon a$$

dla dowolnych v z otoczenia $\varepsilon \mathcal{W}$, co oznacza właśnie ciągłość F w u.

Jest jeszcze prawdziwe

STWIERDZENIE 4.3. Niech $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ będzie funkcją wypukłą. Następujące warunki są równoważne:

/i/ istnieje niepusty otwarty podzbiór $\mathcal{O}$, na którym funkcja F jest ograniczona z góry stałą liczbą $\alpha \in \mathbb{R}$ i nie jest tożsamościowo równa $-\infty$

/ii/ funkcja F jest właściwa i ciągła w wnętrzu swojej efektywnej dziedziny, która jest zbiorem niepustym.

<u>DOWÓD.</u> Z warunku /ii/ wynika warunek /i/, gdyż $F(v) \neq -\infty$ i $F(\cdot) \not\equiv \infty$ /bo właściwa/ oraz intdom $F = \{v : F(v) < \infty\}$ - zbiór otwarty /bo ciągła w intdom F /.

Niech będzie spełniony warunek /i/ wobec tego $\mathcal{O} \subset$ intdom F, oraz niech $u \in \mathcal{O}$ i $F(u) > -\infty$. Na podstawie lematu 4.1. funkcja F jest ciągła w u i ograniczona w otoczeniu u wobec tego jest właściwa. Dla dowolnego elementu $v \in$ intdom F istnieje taka liczba ϱ większa od jedności, że $w = u + \varrho(v - u)$ jest również elementem intdom F. Przekształcanie homotetyczne $v \longrightarrow h(v) = \sigma(v - w) + w$ o środku w w i z współczynnikiem podobieństwa $\sigma = 1 - \varrho^{-1}$ przekształca u na v, a podzbiór $\mathcal{O}$ na otwarty podzbiór zawierający $h(\mathcal{O})$. Dla dowolnego elementu $z \in h(\mathcal{O})$ mamy na podstawie wypukłości funkcji F nierówność

$$F(z) \leq \frac{\varrho - 1}{\varrho} (F \circ h^{-1})(z) + \frac{1}{\varrho} F(w)$$

gdyż

$$F(z) = F((1 - \varrho^{-1})(h^{-1}(z) - w) + w)$$

wobec czego

$$F(z) \leq \frac{\varrho - 1}{\varrho} \alpha + \frac{1}{\varrho} F(w)$$

Stąd wynika, że każdy element $z \in$ intdom F, który jest również elementem otoczenia $h(\mathcal{O})$, ma tę własność, iż funkcja F jest ograniczona liczbą skończoną, a więc na mocy lematu 4. funkcja F jest ciągła w z, co kończy dowód.

W przypadkach szczególnych można uzyskać mocniejsze wyniki.

<u>WNIOSEK 4.4.</u> Funkcja F wypukła i właściwa określona na przestrzeni skończenie wymiarowej V jest ciągła w wnętrzu swej dziedziny elektywnej.

<u>DOWÓD.</u> Niech intdom F będzie zbiorem niepustym, wobec tego istnieje $n+1$ afinicznie niezależnych elementów u_i $1 \leq i \leq n+1$ $(n = \dim V)$. Z określenia wypukłości łatwo jest zauważyć,

iż F jest ograniczona z góry liczbą $\max\limits_{1 \le i \le n+1} F(u_i)$ w otwartym zbiorze

$$\{ v \in V : v = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i \ ; \ \lambda_i > 0 \ \forall i \ , \ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \}$$

co kończy kowód.

WNIOSEK 4.5. Niech F będzie funkcją wypukłą i właściwą określoną na przestrzeni unormowanej V . Następujące warunki są równoważne:

/i/ istnieje niepusty otwarty podzbiór, na którym funkcja F jest ograniczona z góry;

/ii/ $\mathrm{intdom}\, F \neq \phi$ i F jest funkcją lokalnie regularnie ciągła na tym zbiorze.

DOWÓD. Oczywiście z warunku /ii/ wynika /i/. /argumentacja analogiczna - mutatis mutandis - do argumentacji w dowodzie stwierdzenia 4. , gdy /ii/$\Longrightarrow$/i//.

Niech będzie spełniony warunek /i/, wówczas F jest ciągła w intdom F /na mocy stwierdzenia 4 /. Wybierzmy $u \in$ intdom F i rozważmy kulę $B(u;r) = \{ v : \|v - u\| \le r \}$ w przestrzeń V . Na mocy ciągłości F w u istnieje taka liczba $r_0 > 0$, że

$$\forall v \in B(u, r_0) \ , \qquad -\infty < m \le F(v) \le M < \infty$$

Niech $\varrho \in (0, r_0)$ i niech $\bar{v} \in B(u, \varrho)$ oraz połóżmy

$$G(w) = F(w + \bar{v}) - F(\bar{v})$$

oczywiście $G(0) = 0$ i na kuli $B(0; r_0 - r)$ G jest ograniczona z góry liczbą $M - m$, a więc na mocy lematu 4 mamy

$$\forall \varepsilon \in [0,1] : \quad \forall w \in B(0, r_0 - r)$$

$$|G(w)| \le \varepsilon (M - m)$$

Jeżeli $\|v-\bar{v}\| \leq r_0 - r$, to wówczas element $w = v - \bar{v}$ $\in \varepsilon B(0; r_0 - r)$ przy $\varepsilon = \|v-\bar{v}\|/(r_0-r)$ i otrzymujemy na mocy wyżej zapisanej nierówności

/4.1/ $\forall v \in B(\bar{v}; r_0 - r)\ , \quad |F(v) - F(\bar{v})| \leq \frac{M-m}{r_0 - r}\|v-\bar{v}\|$

Jeżeli $\tilde{v} \in B(u; r)$, to odcinek $[\bar{v}, \tilde{v}] \subset B(u; r)$ dzielimy na równe części przy pomocy elementów

$$u_1 = \bar{v}\ , \quad u_2, \dots, u_{n-1}\ , \quad u_n = \tilde{v}$$

tak by $\|u_j - u_{j+1}\| \leq r_0 - r$ dla $j = 1, \dots, n-1$

Na mocy /4.1./ mamy

/4.2./ $$|F(u_j) - F(u_{j+1})| \leq \frac{M-m}{r_0 - r}\|u_j - u_{j+1}\|$$

dla $j = 1, \dots, n-1$

Dodając stronami /4.2./ dla $j = 1, \dots, n-1$ otrzymujemy lokalny warunek LIPSCHITZA:

$$\forall \bar{v}, \tilde{v} \in B(u, r) \Rightarrow \|F(\tilde{v}) - F(\bar{v})\| \leq \frac{M-m}{r_0 - r}\|\bar{v} - \tilde{v}\|$$

co kończy dowód.

<u>WNIOSEK 4.6.</u> Każda funkcja półciągła dolnie i wypukła określona na przestrzeni beczkowej czy Banacha jest ciągła w punktach wewnętrznych swej efektywnej dziedziny.

<u>DOWÓD.</u> Niech $u \in \operatorname{intdom} F$ /z założenia ten zbiór jest niepusty/. Nie zmniejszając ogólności rozważań możemy przyjąć $u = 0$ /przez przesunięcie/. Niech $a > F(0)$. Zbiór $C = \{u \in V;\ F(u) < a\}$ jest domknięty /półciągłość dolna/ i wypukły. Zbiór C jest wchłaniający, gdyż obcięcie funkcji F do dowolnej prostej $L \supset [0, v]$, które oznaczamy $F|_L$, jest funkcją ciągłą na L w otoczeniu elementu 0 /na mocy wniosku 4.4./. Istotnie niech v będzie dowolnym elementem V, wobec tego na mocy ciągłości $F|_L$, do dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $R > 0$, że

$$|F(\tfrac{v}{R}) - F(0)| < \varepsilon$$

stąd więc

$$F(0) - \varepsilon < F(\tfrac{v}{R}) < F(0) + \varepsilon$$

niech więc ε będzie takie, że $F(0) + \varepsilon < a$
stąd mamy

$$\tfrac{v}{R} \in \mathcal{C}$$

co należało pokazać. Zatem $\mathcal{C} \cap -\mathcal{C}$ jest beczką, a więc otoczeniem 0, a więc funkcja F jest ograniczona na C liczbą a wobec tego jest ciągła w 0, a więc na mocy stwierdzenia 4.3 jest ciągła w wnętrzu swej efektywnej dziedziny, co kończy dowód.

5. PUNKTOWE KRESY GÓRNE CIĄGŁYCH FUNKCJI AFINICZNYCH

Niech V będzie przestrzenią lokalnie wypukłą.

OKREŚLENIE 5.1. Funkcją afiniczną ciągłą na przestrzeni nazywamy funkcją postaci

$$V \ni v \longrightarrow L(v) + a$$

gdzie $L(\cdot)$ ciągły funkcjonał liniowy nad V, $\alpha \in R$.

OKREŚLENIE 5.2. Zbiór funkcji $F: V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, z których każda jest punktowym kresem górnym funkcji afinicznych i ciągłych należących do pewnej rodziny oznaczamy przez $\Gamma(V)$.

Przez $\Gamma_0(V)$ oznaczamy podzbiór $\Gamma(V)$, którego elementami są funkcje nie równe tożsamościowo $+\infty$ ani $-\infty$.

Z tego określenia oraz Stwierdzenia 3.3. i twierdzenia 4.1. otrzymujemy

WNIOSEK 5.1. Każda funkcja $F \in \Gamma(V)$ jest wypukła i półciągła dolnie na V.

STWIERDZENIE 5.1. Następujące warunki są równoważne:

/i/ $F \in \Gamma(V)$

/ii/ F jest wypukła i półciągła dolnie określona na V o wartościach w $\overline{\mathbb{R}}$, przy czym, gdy F przyjmuje wartość $-\infty$, to jest ona tożsamościowo równa $-\infty$.

DOWÓD. Przyjmiemy, że dla pustej rodziny funkcji afinicznych i ciągłych punktowy kres górny jest równy tożsamościowo $-\infty$. /ex definitiwne/. Stąd więc, jeżeli rodzina jest niepusta, wówczas F nie może być tożsamościowo równa $-\infty$. Zatem warunek /i/ pociąga za sobą warunek /ii/.

Niech teraz F będzie funkcją wypukłą, półciągłą dolnie i nie przyjmuje wartości $-\infty$. Jeżeli $F \equiv \infty$, to F jest punktowym kresem górnym rodziny wszystkich funkcji afinicznych i ciągłych określonych na V o wartościach w $\mathbb{R}$. Jeżeli $F \not\equiv \infty$ i nie przyjmuje wartości $-\infty$, to wobec tego istnieje $\bar{u} \in V$ i takie $\bar{a}$, że $\bar{a} < F(\bar{u})$. Pokażemy, że istnieje funkcja afiniczna i ciągła na V, która nie przewyższa wartości funkcji F a w punkcie $\bar{u}$ przyjmuje wartość pośrednią pomiędzy $\bar{a}$ a $F(\bar{u})$, to zakończy dowód twierdzenia. Istotnie, element $(\bar{u},\bar{a})$ nie należy do domkniętego i wypukłego nadwykresu epi F, wobec tego na mocy wniosku 2.5. można zbiory epi F i $\{(\bar{u},\bar{a})\}$ ściśle rozdzielić hiperpłaszczyzną $\mathcal{H}$ w przestrzeni $V \times \mathbb{R}$ danej równaniem:

$$\mathcal{H} = \{ (u,a) \in V \times \mathbb{R} : l(u) + \alpha a = \beta \}$$

gdzie l funkcjonał liniowy i ciągły nad przestrzenią V, a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wówczas zachodzą nierówności:

$$l(\bar{u}) + \alpha \bar{a} < \beta$$

$$\forall (u,a) \in \text{epi } F \quad l(u) + \alpha a > \beta$$

Jeżeli $F(\overline{u}) < \infty$ możemy położyć w /5.3./ $u = \overline{u}$ i $a = F(\overline{u})$ i łącząc z /5.2./ otrzymujemy $\alpha(F(\overline{u}) - \overline{a}) > 0$ stąd mamy $\alpha > 0$. Dzieląc więc stronami /5.2./ i /5.3./ otrzymujemy

/5.4./ $$\overline{a} < \frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} l(\overline{u}) < F(\overline{u})$$

tym sposobem skonstruowaliśmy potrzebną dla dowodu funkcję afiniczną i ciągłą, której wykresem jest $\mathcal{H}$. W przypadku, gdy $F(\overline{u}) = \infty$, to albo $\alpha \neq 0$ /wtedy powtarzamy powyższe rozumowanie i konstrukcja wymaganej funkcji jest przeprowadzona/ albo $\alpha = 0$. W tym ostatnim przypadku, nierówności /5.2./ i /5.3./ wskazują, że funkcja afiniczna i ciągła $\beta - l(\cdot)$ jest większa od zera dla $u = \overline{u}$ i mniejsza od zera w dom F. W taki sam sposób jak poprzednio[x/] konstruujemy funkcję afiniczną i ciągłą $\gamma - m(\cdot)$, która nie przewyższa wartości F. Następnie dla dowolnego $c > 0$ funkcja afiniczna i ciągła $\gamma - m(\cdot) + c(\beta - l(\cdot))$, co łatwo jest zauważyć, również nie przekracza wartości F, wobec tego, aby był spełniony dodatkowy warunek, postawiony na początku dowodu dla funkcji afinicznej i ciągłej, dobieramy tak stałą c by było

/5.5./ $$\gamma - m(\overline{u}) + c(\beta - l(\overline{u})) > \overline{a}$$

co kończy dowód twierdzenia.

---

x/ konstrukcja funkcji afinicznej $m(\cdot) - \gamma$ przebiega tak samo, jak funkcji $(\beta/\alpha) - l(\cdot)/\alpha$, obierając np. tak $\overline{u}_1$ by $F(\overline{u}_1) < \infty$

6. Γ-REGULARYZACJA

Z poprzednich rozważań wynika, iż operacja brania punktowego kresu górnego nie wyprowadza poza $\Gamma(V)$.

STWIERDZENIE 6.1. Niech będą dane funkcje $F: V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $G: V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Następujące warunki są równoważne:

/i/ G jest punktowym kresem górnym funkcji afinicznych i ciągłych nie przewyższających wszędzie na V wartości funkcji F

/ii/ G jest największą minorantą funkcji F należącą do $\Gamma(V)$

DOWÓD. Z warunku /i/ mamy

$$V \ni v \longrightarrow G(v) = \sup\{ l(v) + \alpha : l(u) + \alpha \leq F(u) \quad \forall u \in V \}$$

i niech

$$V \ni v \longrightarrow H(v) = \sup\{ L(v) : L(u) \leq F(u) \quad \forall u \in V , L \in \Gamma(V) \}$$

Oczywiście $G \in \Gamma(V)$, jak i również $H \in \Gamma(V)$ i jest $G \leq H$.

Z drugiej strony każda minoranta afiniczna i ciągła funkcji H jest funkcją z $\Gamma(V)$ i oczywiście nie przekracza wartości F . Zgodnie z określeniem taka minoranta nie przewyższa wszędzie na V wartości G . Zatem funkcje H i G mają taką samą rodzinę minorant afinicznych i ciągłych, a ponieważ obie należą do $\Gamma(V)$ zatem muszą być identyczne, zatem $G = H$, co należało pokazać.

OKREŚLENIE 6.1. Funkcja G mająca własność /i/ czy też /ii/ nazywa się Γ regularyzacją funkcji F .

WNIOSEK 6.1. Jeżeli funkcja F należy do $\Gamma(V)$ to pokrywa się ona z swoją Γ- regularycją.

Dowód tego wniosku wynika z rozważań przedstawionych w dowodzie stwierdzenia 6.1.

STWIERDZENIE 6.2. Niech będzie dana funkcja $F: V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ i G jej Γ-regularyzacja. Jeżeli istnieje funkcja afiniczna i ciągła nie przewyższająca wszędzie w V wartości F, to

$$\operatorname{epi} G = \overline{\operatorname{co}} \operatorname{epi} F$$

DOWÓD. Niech φ będzie funkcją afiniczną i ciągłą, która na V nie przekracza wartości F. Łatwo jest zauważyć, że domknięty wypukły zbiór $\overline{\operatorname{co}} \operatorname{epi} F$ jest nadwykresem wypukłej i półciągłej dolnie funkcji H /por. wniosek 2.7./. Ponieważ dolnie funkcji

$$\operatorname{epi} F_{\setminus} \subset \overline{\operatorname{co}} \operatorname{epi} F \subset \operatorname{epi} \varphi$$

wobec tego otrzymujemy

$$\varphi \leq H \leq F$$

zatem $H \in \Gamma(V)$. Niech G będzie Γ-regularyzacją funkcji F, to jej nadwykres epi G jest zbiorem wypukłym i domkniętym oraz

$$\operatorname{co} \operatorname{epi} F \subset \operatorname{epi} G$$

a więc i $\quad \overline{\operatorname{co}} \operatorname{epi} F \subset \operatorname{epi} G$

zatem $\quad \operatorname{epi} H \subset \operatorname{epi} G$, stąd więc

$$G \leq H$$

czyli $G = H$, co należało pokazać.

WNIOSEK 6.2. Jeżeli $A \subset V$, to Γ-regularyzacją funkcji indykatorowej χ_A zbioru A jest funkcja indykatorowa domknięcia wypukłej powłoki zbioru A, tzn. $\chi_{\overline{\operatorname{co}} A}$

Związek pomiędzy Γ-regularyzacją G i regularyzacją półciągłą dolnie $\overline{F}$ funkcji $F: V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ wyraża następujące stwierdzenie, które bezpośrednio wynika z Wniosku 4.2. i Stwierdzenia 6.2.

STWIERDZENIE 6.3. Niech będą dane funkcja $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ oraz jej Γ- regularyzacja G. Wówczas:

/i/ $G \leq \overline{F} \leq F$,

/ii/ jeżeli F jest funkcją wypukłą oraz ma minorantę afiniczną i ciągłą, to

$$\overline{F} = G$$

7. FUNKCJE SPRZĘŻONE

W dalszym ciągu będziemy zakładać, że przestrzenie wektorowe V i V^* stanowią parę dualną z formą dwuliniową $\langle \cdot , \cdot \rangle$, która oczywiście spełnia warunki (B_1), (B_2). Przestrzenie wektorowe V i V^* są wyposażone w słabe topologie $\sigma(V, V^*)$ i $\sigma(V^*, V)$ odpowiednio, wobec czego są one przestrzeniami topologicznymi Hausdorffa /por. str. 25-27/ lokalnie wypukłymi.

Rozważmy funkcję $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Niech $u^* \in V^*$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, to funkcja afiniczna i ciągła

$$V \ni u \longrightarrow \langle u^*, u \rangle - \alpha \in \mathbb{R}$$

nie przewyższa wszędzie w V wartości F wtedy i tylko wtedy, gdy

/7.1./ $\forall u \in V \qquad \alpha \geq \langle u^*, u \rangle - F(u)$

tzn. gdy

/7.2./ $$\alpha \geq \sup_{u \in V} (\langle u^*, u \rangle - F(u))$$

Oznaczmy prawą stronę tej nierówności przez $F^*(u^*)$

tj.

/7.3./ $$F^*(u^*) = \sup_{u \in V} (\langle u^*, u \rangle - F(u))$$

Rozważenie minorant afinicznych i ciągłych danej funkcji $F : V \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ prowadzi do określenia nowej funkcji

$$F^* : V^* \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

<u>OKREŚLENIE 7.1.</u> Niech $F : V \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, wówczas wzór /7.3./ określa funkcję na przestrzeni V^* o wartościach w $\bar{\mathbb{R}}$, którą oznaczamy przez F^* i nazywamy funkcją sprzężoną z funkcją

<u>UWAGA 7.1.</u> Jest prawdziwa równość

$$F^*(u^*) = \sup_{u \in \operatorname{dom} F} \left(\langle u^*, u \rangle - F(u) \right)$$

Dowód tej uwagi jest natychmiastowy i wynika z określenia 3.2.

Z uwagi 7.1. wynika, że funkcja F^* jest punktowym kresem górnym rodziny funkcji afinicznych i ciągłych indeksowanej elementami dziedziny efektywnej funkcji F. Stąd więc wynika, iż $F^* \in \Gamma(V^*)$ dla dowolnej funkcji $F : V \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, tzn. F^* jest wypukła i półciągła dolnie na V^*.

Przyjmujemy, że gdy $F \equiv \infty$, to wówczas $\operatorname{dom} F = \emptyset$ i wobec tego F^* jest tożsamościowo równa $-\infty$.

<u>WNIOSEK 7.1.</u> Są prawdziwe następujące relacje:

/i/ $$F^*(0) = -\inf_{u \in V} F(u),$$

/ii/ $$(F \leq G) \Rightarrow (G^* \leq F^*)$$

/iii/ $$\left(\inf_{i \in I} F_i \right)^* = \sup_{i \in I} F_i^*$$

$$\left(\sup_{i \in I} F_i \right)^* \leq \inf_{i \in I} F_i^*$$

dla dowolnej rodziny $\{F_i\}_{i\in I}$ funkcji określonych na V ;

(iv) $$(\lambda F)^*(u^*) = \lambda F^*(u^*/\lambda)$$

dla dowolnej liczby dodatniej (!) λ ;

(v) $$(F+\alpha)^* = F^* - \alpha$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej α ;

(vi) $$(F_\alpha)^*(u^*) = F^*(u^*) + \langle u^*, \alpha\rangle$$

gdzie α oznacza dowolną liczbę rzeczywistą, a $F_\alpha(u) = F(u-\alpha)$ tzn. F_α oznacza funkcję z przesuniętym argumentem o α .

Dowódy tych własności są łatwe i wynikają z określenia /7.3/ oraz własności kresu górnego. Pokażemy dla przykładu własności /iii/; z oczywistej nierówności /ii/ mamy na mocy $\inf_{i\in I} F_i \leq F_j$ następującą nierówność

$$F_j^* \leq (\inf_{i\in I} F_i)^*$$

skąd otrzymujemy

$$\sup_{i\in I} F_i^* \leq (\inf_{i\in I} F_i)^*$$

Z drugiej strony z określenia /7.3/ mamy

$$(\inf_{i\in I} F_i)^*(u^*) = \sup_{u\in V} (\langle u^*, u\rangle - (\inf_{i\in I} F_i)(u)) = \sup_{u\in V} (\langle u^*, u\rangle + \sup_{i\in I}(-F_i)(u))$$
$$= \sup_{u\in V} \sup_{i\in I} (\langle u^*, u\rangle - F_i(u))$$

Dalej zauważymy, że dla dowolnego wskaźnika $j\in I$ mamy

$$\langle u^*, v\rangle - F_j(v) \leq \sup_{u\in V} (\langle u^*, u\rangle - F_j(u))$$

dla wszelkiego $v\in V$, stąd jest

$$\sup_{u\in V} \sup_{i\in I} (\langle u^*, u\rangle - F_i(u)) \leq \sup_{i\in I} \sup_{u\in V} (\langle u^*, u\rangle - F_i(u))$$

Łącząc powyższą nierówność z wyrażeniem $\left(\inf_{i\in I} F_i\right)^*(u^*)$ otrzymujemy

$$\left(\inf_{i\in I} F_i\right)^*(u^*) \leq \sup_{i\in I} F_i^*(u^*)$$

co z nierównością /7.4/ daje /iii/.
Analogicznie dowodzi się pozostałe własności.

8. FUNKCJE DWUSPRZĘŻONE, DWOISTOŚĆ FUNKCJI WYPUKŁYCH

Przeprowadzając rozważania z poprzedniego paragrafu dla funkcji sprzężonych dochodzimy do pojęcia <u>funkcji dwusprzężonej</u> $(F^*)^*$, którą oznaczamy przez F^{**}, z funkcją $F: V \to \bar{\mathbb{R}}$. Oczywiście funkcja dwusprzężona F^{**} z funkcją F, jest również określona na V i przyjmuje wartości $\bar{\mathbb{R}}$ zgodnie ze wzorem

/8.1/ $$F^{**}(u) = \sup_{u^*\in V^*} \left(\langle v^*, u\rangle - F^*(u^*)\right)$$

Łatwo jest zauważyć, że $F^{**} \in \Gamma(V)$ wobec tego można próbować porównywać funkcję F z funkcją podwójnie sprzężoną F^{**}. Jest prawdziwe następujące stwierdzenie.

<u>STWIERDZIENIE 8.1.</u> Niech F będzie funkcją określoną na V o wartościach w $\bar{\mathbb{R}}$. Wówczas funkcja dwusprzężona F^{**} z funkcją F jest jej Γ- regularyzacją. W szczególności, jeżeli $F \in \Gamma(V)$ to $F^{**} = F$

<u>DOWÓD</u>. Zgodnie z określeniem Γ- regularyzacji funkcji F jest ona punktowym kresem górnym wszystkich minorant ciągłych i afinicznych funkcji F. Oczywiście możemy ograniczyć się do największych minorant funkcji F, tzn. do funkcji postaci

/8.2/ $$v \longrightarrow \langle v^*, v\rangle - F^*(v^*)$$

Punktowy kres górny takich funkcji /por. wzór /8.1// jest właśnie funkcją F^{**}, co należało dowieść.
Zauważymy, że dla funkcji dwusprzężonych można konstruować funkcje z nimi sprzężone, tzn. dla $F^{**}: V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ można określić wzorem

/8.3/ $$v^* \longrightarrow (F^{**})^*(v^*) = \sup_{v \in V} \left(\langle v^*, v \rangle - F^{**}(v) \right)$$

funkcję z nią sprzeżoną, którą oznaczamy przez F^{***}.
Jest prawdziwe następujące

<u>STWIERDZENIE 8.2.</u> Dla dowolnej funkcji $F: V \to \overline{\mathbb{R}}$ zachodzi równość

/8.4/ $$F^{***} = F^*$$

<u>DOWÓD.</u> Ponieważ F^{**} jest Γ- regularyzacją funkcji F, wobec tego mamy nierówność

$$F^{**} \leq F$$

wobec czego na mocy własności /ii/ z paragrafu 7 zachodzi nierówność

/8.5/ $$F^* \leq F^{***}$$

Z drugiej strony na mocy określenia /8.1/ dla dowolnego elementu v mamy

$$\langle v^*, v \rangle - F^*(v^*) \leq F^{**}(v)$$

czyli

$$\langle v^*, v \rangle - F^{**}(v) \leq F^*(v^*),$$

a więc

$$F^{***}(v^*) = \sup_{v \in V} \left(\langle v^*, v \rangle - F^{**}(v) \right) \leq F^*(v^*)$$

Stąd wraz z nierównością /8.5/ otrzymujemy /8.4/ czyli tezę stwierdzenia.

WNIOSEK 8.1. Funkcja $F \in \Gamma(V)$ wtedy i tylko wtedy gdy $F = F^{**}$.

Dowód tego wniosku w jedną stronę jest zawarty w dowodzie Stwierdzenia 8.1., natomiast w drugą stronę jest trywialny i jest zawarty w określeniu /8.1/.

Powyższe własności operacji sprzężenia i operacji podwójnego sprzężenia prowadzą do następującego pojęcia.

OKREŚLENIE 8.1. Sprzężenie ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między $\Gamma(V)$ i $\Gamma(V^*)$. Mówimy, że funkcje $F \in \Gamma(V)$ i $G \in \Gamma(V^*)$ są w relacji dwoistości, lub krótko są w dwoistości, gdy

$$F = G^* \quad \text{i} \quad G = F^*$$

UWAGA 8.1. Funkcje tożsamościowo równe $\pm\infty$ na V i $\mp\infty$ na V^* są odpowiednio w dwoistości /por. str. 53 /. Zatem funkcja $F \in \Gamma_0(V)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F^* \in \Gamma_0(V^*)$, czyli sprzężenie ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między $\Gamma_0(V)$ i $\Gamma_0(V^*)$.

PRZYKŁAD 8.1. Niech A będzie dowolnym podzbiorem przestrzeni V, a χ_A jego funkcją indykatorową /por. str.34 /. Rozważmy funkcję sprzężoną χ_A^* z funkcją χ_A, tzn.

$$V^* \ni v^* \longrightarrow \chi_A^*(v^*) = \sup_{v \in V} \left(\langle v^*, v \rangle - \chi_A(v) \right)$$

Oczywiście mamy

$$\chi_A^*(v^*) = \sup_{v \in A} \langle v^*, v \rangle$$

i wobec tego χ_A^* jest funkcją wypukłą, półciągłą dolnie oraz dodatnio jednorodną na przestrzeni V^*.
Funkcja χ_A^* nosi nazwę <u>funkcji podpierającej zbiór A</u>. Łatwo jest zauważyć /por. Wniosek 8.1./, że zbiór A i zbiór $\overline{co}A$ mają taką samą funkcję podpierającą. Istotnie, funkcja $\psi_{\overline{co}A}$ jest Γ – regularyzacją funkcji ψ_A, wobec tego na mocy Stwierdzenia 8.1. mamy

$$\psi_A^{**} = \psi_{\overline{co}A}$$

a stąd i Stwierdzenia 8.2. otrzymujemy

$$\chi_{\overline{co}A}^* = \psi_A^*$$

co należało pokazać.

<u>PRZYKŁAD 8.2.</u> Niech V będzie przestrzenią unormowaną, jako przestrzeń V^* przyjmijmy przestrzeń topologicznie sprzężoną. Przez $\|\cdot\|$ oznaczmy normę w przestrzeni V, a przez $\|\cdot\|_*$ – normę w przestrzeni V^*. Przestrzenie V i V^* z topologiami $\sigma(V,V^*)$ i $\sigma(V^*,V)$ odpowiednio stanowią naturalną parę dualną.
Niech $\varphi \in \Gamma_0(\mathbb{R})$ będzie funkcją parzystą, a φ^* niech będzie funkcją sprzężoną z φ. Oczywiście φ^* również należy do $\Gamma_0(\mathbb{R})$. Określamy następujące funkcje

$$V \ni v \longrightarrow F(v) \overset{df}{=} \varphi(\|v\|)$$
$$V^* \ni v^* \longrightarrow G(v^*) \overset{df}{=} \varphi^*(\|v^*\|_*)$$

Funkcje F i G tak określone są w dwoistości.
Istotnie, $F \in \Gamma_0(V)$ i $G \in \Gamma_0(V^*)$ na mocy Stwierdzenia 5.1. oraz Określenia 5.2. Zatem pozostaje wykazać, że $F^* = G$.
W tym celu zauważymy, że $F^* = G$

$$F^*(v^*) = \sup_{v \in V} \left(\langle v^*, v \rangle - \varphi(\|v\|) \right) =$$

$$= \sup_{t \geq 0} \sup_{\|v\| = t} \left(\langle v^*, v \rangle - \varphi(\|v\|) \right) =$$

$$= \sup_{t \geq 0} \left(\sup_{\|v\| = t} \langle v^*, v \rangle \right) - \varphi(t) =$$

$$= \sup_{t \geq 0} \left(\sup_{\|v\| = 1} t \langle v^*, v \rangle \right) - \varphi(t) =$$

$$= \sup_{t \geq 0} \left(t \sup_{\|v\| = 1} \langle v^*, v \rangle \right) - \varphi(t) =$$

$$= \sup_{t \geq 0} \left(t \|v^*\|_* - \varphi(t) \right) =$$

$$= \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\|v^*\|_* t - \varphi(t) \right) =$$

$$= \varphi^*(\|v^*\|_*) = G(v^*)$$

co kończy dowód.

<u>UWAGA 8.2.</u> Założenie, że funkcja φ jest parzysta jest isto[illegible] bowiem

$$F^*(v^*) = \varphi_1^*(\|v^*\|_*) = \varphi_2^*(\|v^*\|_*)$$

gdzie funkcje φ_i^* $i = 1,2$ są w dwoistości odpowiednio z [illegible] kcjami

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow \varphi_1(t) = \varphi(|t|)$$

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow \varphi_2(t) = \begin{cases} \infty & , t < 0 \\ \varphi(t) & , t \geq 0 \end{cases}$$

UWAGA 8.3. Założenie o funkcji φ można osłabić w następujący sposób: dla dowolnego $m > 0$ funkcja

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow \varphi(t) - mt$$

osiąga minimum w punkcie $t \geq 0$. Oczywiście funkcja φ parzysta spełnia ten warunek.

UWAGA 8.4. Niech p oraz $p^* \in (1, \infty)$ i spełniają waruenk

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$$

Łatwo jest sprawdzić, że funkcja $\varphi(t) = |t|^p / p$ i $\varphi^*(t) = |t|^{p^*} / p^*$ należą do $\Gamma_0(\mathbb{R})$ i są w dwoistości. Stąd można już wyprowadzić, że

$$F(v) = \frac{1}{p} \|v\|^p$$

i

$$G(v^*) = \frac{1}{p^*} \|v^*\|_*^{p^*}$$

są funkcjami wypukłymi i sprzężonymi.

9. SUBRÓŻNICZKOWALNOŚĆ

Niech V oznacza przestrzeń lokalnie wypukłą i V^* przestrzeń z nią topologicznie sprzężoną, a $\langle \cdot , \cdot \rangle$ - naturalną dwuliniową formę na $V \times V^*$.

OKREŚLENIE 9.1. Niech F będzie funkcją określoną na V o wartościach w $\overline{\mathbb{R}}$, tzn. $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Mówimy, że funkcja ciągła i afiniczna l na V nie przewyższająca F jest dokładna w elemencie $u \in V$, gdy $l(u) = F(u)$, przy czym funkcja F dla elementu przyjmuje wartość skończoną, a L ma postać

/9.1/
$$v \longrightarrow L(v) = \langle u^*, v - u \rangle + F(u) \equiv \equiv \langle u^*, v \rangle + F(u) - \langle u^*, u \rangle$$

UWAGA 9.1. Aby funkcja afiniczna i ciągła $L(\cdot)$ nie przewyższała funkcji F, winna zachodzić nierówność $F(v) \geqq L(v)$ dla wszelkich $v \in V$, tzn.

$$F(v) \geqq \langle u^*, v - u \rangle + F(u)$$

czyli na mocy /9.1/ winno być $\forall\ v \in V$

$$\langle u^*, u \rangle - F(u) \geqq \langle u^*, v \rangle - F(v)$$

zatem funkcjonał u^* winien być tak wybrany, by

$$\langle u^*, u \rangle - F(u) \doteq F^*(u^*)$$

tzn. $L(v) = \langle u^*, v \rangle - F^*(u^*)$

a więc we wzorze /9.1/ stała $F(u) - \langle u^*, u \rangle$ winna przyjmować wartość najmniejszą, tzn.

/9.2./
$$F(u) - \langle u^*, u \rangle = -F^*(u^*)$$

Oczywiście można to osiągnąć przez taki wybór funkcjonału u^*, by była prawdziwa powyższa równość.

OKREŚLENIE 9.2. Funkcja $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ nazywa się subróżniczkowalna w elemencie $u \in V$, jeżeli istnieje funkcja $L(\cdot)$ afiniczna, ciągła i nieprzewyższająca F oraz dokładna w tym elemencie u. Funkcjonał u^* wyznaczający funkcję $L(\cdot)$ nosi nazwę <u>subgradientu funkcji F</u> w elemencie u. Zbiór wszystkich subgradientów funkcji F w elemencie u nazywa się <u>subróżniczką funkcji F</u> i oznacza się przez $\partial F(u)$. Jeżeli funkcja F

nie jest subróżniczkowalna w elemencie u to wówczas piszemy $\partial F(u) = \phi$.

WNIOSEK 9.1. Funkcjonał $u^* \in \partial F(u)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F(u)$ jest skończone oraz

$$\forall v \in V \quad , \quad \langle u^*, v - u \rangle + F(u) \leq F(v)$$

Dowód tego wniosku jest natychmiastowy.

UWAGA 9.2. Jeżeli funkcja $l(\cdot)$ ciągła afiniczna nie przewyższa funkcji F , to również nie przewyższa jej Γ – regularyzacji F^{**}. Jeżeli $l(\cdot)$ jest dokładna w elemencie u , tzn. $l(u) = F(u)$ wówczas wobec nierówności $l(u) \leq F^{**}(u) \leq F(u)$ otrzymujemy $l(u) = F^{**}(u)$.

Z powyższej uwagi mamy następujący wniosek:

WNIOSEK 9.2. /i/ Jeżeli $\partial F(u) \neq \phi$, $F(u) = F^{**}(u)$.

/ii/ Jeżeli $F(u) = F^{**}(u)$, to $\partial F(u) = \partial F^{**}(u)$.

Z określenia 9.2. i wniosku 9.1. otrzymujemy jeszcze ważny w zagadnieniach optymalizacji wniosek:

WNIOSEK 9.3. Funkcja $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ma w $u \in V$ minimum absolutne, tzn.

$$F(u) = \min_{v \in V} F(v)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $0 \in \partial F(u)$.

Podamy charakteryzację subgradientu za pomocą funkcji sprzężonych.

STWIERDZENIE 9.1. Niech $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, a F^* będzie funkcją sprzężoną z F . Wówczas $u^* \in \partial F(u)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

/9.3/ $$F(u) + F^*(u^*) = \langle u^*, u \rangle$$

DOWÓD. Konieczność warunku /9.3/ wynika z uwagi 9.1. i wzoru /9.2/. Dowód dostateczności warunki /9.3/ wynika z rozważań w uwadzie 9.1; istotnie, z warunku /9.3/ wynika, iż funkcja afiniczna i ciągła

$$\langle u^*, \cdot \rangle + F(u) - \langle u^*, u \rangle$$

nie przewyższa funkcji F, ponieważ zachodzi równość /9.2/, oraz jest dokładna w elemencie $u \in V$., co kończy dowód.

WNIOSEK 9.4. Zbiór $\partial F(u)$ /być może pusty/, jest wypukły i $\sigma(V^*, V)$ - domknięty w V^*.

DOWÓD. Na mocy określenia 7.1 i wzoru /7.3/ mamy

$$F^*(u^*) - \langle u^*, v \rangle \geq -F(v)$$

dla wszelkich $v \in V$. Wobec tego według Stwierdzenia 9.1. i wzoru /9.3/ subróżniczkę $\partial F(u)$ można zapisać w sposób następujący

$$\partial F(u) = \{ u^* \in V^* : F^*(u^*) - \langle u^*, u \rangle \leq -F(u) \}$$

Oczywiście, ponieważ $F^* \in \Gamma(V^*)$., więc $\partial F(u)$ na mocy tego przedstawienia /por. stwierdzenie 5.1/ jest wypukły i domknięty, co kończy dowód.

WNIOSEK 9.5. Dla dowolnej funkcji $F: V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest prawdziwa implikacja

/9.4/ $$u^* \in \partial F(u) \Longrightarrow u \in \partial F^*(u^*)$$

Jeżeli $F \in \Gamma(V)$, to jest prawdziwa następująca równoważność

/9.5/ $u^* \in \partial F(u) \Longleftrightarrow u \in \partial F^*(u^*)$

DOWÓD. Ponieważ $F^{**} \leq F$ dla dowolnej funkcji $F: V \longrightarrow \overline{R}$, wobec tego, jeżeli $u^* \in \partial F(u)$ to na mocy /9.3/ mamy

/9.7/ $F^{**}(u) + F^*(u^*) \leq \langle u^*, u \rangle$.

ale z określenia /8.1/ funkcji dwusprzężonej jest prawdziwa nierówność:

$$F^{**}(u) + F^*(u^*) \geq \langle u^*, u \rangle$$

stąd więc na mocy stwierdzenia 9.1 otrzymujemy

$$u \in \partial F^*(u^*)$$

czyli /9.4/.

Jeżeli $F \in \Gamma(V)$, to $F = F^{**}$ i na mocy /9.4/ otrzymujemy /9.5/, co kończy dowód.

Dla funkcji wypukłych jest prawdziwe następujące kryterium nietrywialności ($\neq \phi$) subróżniczki.

STWIERDZENIE 9.2. Niech $F: V \longrightarrow \overline{R}$ będzie wypukłą funkcją skończoną i ciągłą dla elementu $u \in V$. Wówczas $\partial F(v) \neq \phi$ dla $v \in \operatorname{int dom} F$; w szczególności $\partial F \neq \phi$

DOWÓD. Ponieważ funkcja F jest skończona i ciągła dla $u \in V$, wobec tego jest ograniczona z góry na pewnym otoczeniu elementu u. Zatem jest ona, na mocy Stwierdzenia 4.3, ciągła i skończona dla dowolnego elementu v należącego do $\operatorname{intdom} F$. Wobec tego wystarczy pokazać, że $\partial F(u) \neq \phi$. W tym celu zauważymy, że nadwykres $\operatorname{epi} F$ jest wypukłym podzbiorem w produkcie $V\times\mathbb{R}$, bowiem funkcja F jest wypukła, nadto z ciągłości funkcji F w elemencie u wynika, iż wnętrze nadwykresu epi F jest niepuste. Istotnie, niech $\mathcal{O}$ będzie otwartym otoczeniem u, w którym funkcja F jest ograniczona z góry stałą $c\in\mathbb{R}$. Istnienie takiego otoczenia zapewnia ciągłość w u funkcji F /por. Stwierdzenie 4.3/. Oczywiście zbiór $\mathcal{O}\times(c,\infty)$ jest otwartym podzbiorem w produkcie $V\times\mathbb{R}$ zawartym w nadwykresie epi F. Zatem intepi $F\neq\phi$.

Ponieważ punkt $(u,F(u))$ należy do brzegu nadwykresu epi F, wobec tego punkt ten, jako zbiór jednoelementowy $\{(u,F(u))\}$ w $V\times\mathbb{R}$, oraz intepi F można rozdzielić na mocy wniosku 2.4 hiperpłaszczyzną $\mathcal{H}$, która jest hiperpłaszczyzną podpierającą epi F w punkcie podparcia $(u,F(u))$ i jej równanie jest następującej postaci

$$\mathcal{H}=\{(v,a)\in V\times\mathbb{R}:\ \langle u^*,v\rangle+\alpha a=\beta\}$$

gdzie $u^*\in V^*$, α, $\beta\in\mathbb{R}$ przy czym zarówno u^*, jak i α, β nie są równocześnie zerami. Funkcjonał u^* i stałe α, β są związane następującymi relacjami:

$$\forall (v,a)\in \mathrm{epi}\,F,\quad \langle u^*,v\rangle+\alpha a\geq\beta$$

oraz

$$\langle u^*,u\rangle+\alpha F(u)=\beta$$

Przypuśćmy, że $\alpha=0$, wówczas $\langle u^*,v-u\rangle\geq 0$ dla wszelkich $v\in\mathrm{dom}\,F$, a zatem $u^*=0$, gdyż dom F jest otoczeniem u. Wobec tego $\alpha>0$ i dzieląc stronami przez α obydwie wyżej napisane relacje otrzymamy

$$\forall v\in\mathrm{dom}\,F\qquad \frac{\beta}{\alpha}-\langle u^*/\alpha,v\rangle\leq F(v)$$

oraz

$$\frac{\beta}{\alpha}-\langle u^*/\alpha,u\rangle=F(u)$$

gdyż w szczególności $a=F(v)$. Zatem skonstruowaliśmy funkcję afiniczną ciągłą nie przewyższającą F i dokładną w u, która ma postać

$$L(v) = -< u^*/\alpha, v> - \beta/\alpha$$

Oczywiście $\forall v \in V$ jest $L(v) \leq F(v)$ i nadto $L(u) = F(u)$, zatem $-u^*/\alpha \in \partial F(u)$, tzn. $\partial F(u) \neq \phi$, co należało udowodnić.

Opierając się na stwierdzeniu 9.2 pokażemy jaki zachodzi związek między subróżniczkowalnością a różniczkowalnością funkcji wypukłych.

Przypomnimy pojęcie pochodnej funkcji w zadanym kierunku oraz pochodną GATEAUX.

<u>OKREŚLENIE 9.3.</u> Niech F będzie funkcją określoną na V o wartościach w $\bar{\mathbb{R}}$. Granicę, gdy $\lambda \longrightarrow +0$ ilorazu

/9.6/ $$\frac{F(u+\lambda v) - F(u)}{\lambda}$$

gdy istnieje, nazywamy pochodną w kierunku v funkcji F w elemencie u i oznaczamy $F'(u;v)$. Jeżeli istnie taki funkcjonał, $u^* \in V^*$, że

$$\forall v \in V \qquad F'(u;v) = < u^*, v>$$

to mówimy, że funkcja F jest różniczkowalna w sensie GATEAUX w elemencie u, a u^* nazywamy pochodną GATEAUX funkcji F w elemencie u i oznaczamy

$$F'(u) = u^* .$$

<u>UWAGA 9.3.</u> Jeżeli istnieje pochodna GATEAUX funkcji F, to jest ona jednoznaczna; można ją zapisać wzorem

/9.10/ $$\forall v \in V \qquad \lim_{\lambda \to +0} \frac{F(u+\lambda v) - F(u)}{\lambda} = < F'(u), v>$$

Przypadek, gdy funkcja F jest wypukła jest szczególnie ważny, bowiem w tym przypadku iloraz różnicowy dla dowolnych u i v jest funkcją niemalejącą parametru λ. Istotnie, niech $0 < \mu \leq \lambda \leq 1$; z wypukłości funkcji F wynika następująca nierówność

$$F(u+\mu v) = F\left(\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)u + \frac{\mu}{\lambda}(u+\lambda v)\right) \leq$$
$$\leq \left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)F(u) + \frac{\mu}{\lambda}F(u+\lambda v)$$

skąd mamy

$$\frac{F(u+\mu v)-F(u)}{\mu} \leq \frac{F(u+\lambda v)-F(u)}{\lambda}$$

dla $\mu \leq \lambda$. Zatem, gdy $\lambda \to +0$, to iloraz różnicowy funkcji wypukłej F ma zawsze granicę, która może być niewłaściwa, tzn. może być równa $\pm\infty$. Pokażemy, że różniczkowalność w sensie GATEAUX funkcji wypukłych jest równoważna takiej subróżniczkowalności tych funkcji, w której subróżniczka jest zbiorem jednoelementowym.

STWIERDZENIE 9.3. Niech F będzie funkcją wypukłą o wartościach w $\overline{\mathbb{R}}$. Jeżeli F jest różniczkowalna w sensie GATEAUX w $u \in V$, to jest ona również subróżniczkowalna w u, przy czym

$$\partial F(u) = \{F'(u)\}$$

Odwrotnie, jeżeli w elemencie $u \in V$ funkcja wypukła jest skończona i ciągła oraz jej subróżniczka jest zbiorem jednoelementowym, to funkcja F jest różniczkowalna w sensie GATEAUX w u oraz

$$\partial F(u) = \{F'(u)\}$$

DOWÓD. Jeżeli F jest różniczkowalna w sensie GATEAUX w elemencie $u \in V$, to oczywiście $F'(u) \in \partial F(u)$. Istotnie, jeżeli $v \in V$ i $w = v - u$, to

$$F(u+w) - F(u) \geq F'(u;w) = \langle F'(u), w\rangle$$

tzn. $$F(v) - F(u) \geq \langle F'(u), v-w\rangle$$

a więc $F'(u) \in \partial F(u)$. Z drugiej strony, jeżeli $u^* \in \partial F(u)$, to dla dowolnych $w \in V$ i $\lambda > 0$ mamy

$$F(u+\lambda w) - F(u) \geq \lambda \langle u^*, w\rangle$$

Dzieląc stronami przez λ i przechodząc do granicy, gdy $\lambda \longrightarrow +0$, otrzymujemy

$$\langle F'(u), w\rangle \geq \langle u^*, w\rangle$$

a stąd

$$\langle F'(u) - u^*, w\rangle \geq 0$$

co wobec dowolności elementu $w \in V$ mamy

$$u^* = F'(u)$$

Aby wykazać drugą część stwierdzenia zauważymy, że z wypukłości funkcji F dla dowolnego elementu $v \in V$ mamy

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad F(u) + \lambda F'(u;v) \leq F(u+\lambda v)$$

Sens geometryczny tej nierówności polega na tym presta w produkcie $V \times \mathbb{R}$

$$\mathcal{L} = \{(u+\lambda v, F(u) + \lambda F'(u;v)) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

nie przecina wnętrza nadwykresu epi F . Wiadomo jest /por. dowód stwierdzenia 9.2, s. 64/, że intepi F jest niepustym otwartym podzbiorem produktu $V \times \mathbb{R}$, gdyż funkcja F jest wypukła, skończona i ciągła. Wobec tego na mocy twierdzenia HAHNA-BANACHA istnieje taka domknięta hiperpłaszczyzna $\mathcal{H}$ zawierająca prostą $\mathcal{L}$ i rozłączna z intepi F .

Oczywiście, łatwo jest zauważyć, iż $\mathcal{H}$ jest wykresem funkcji ciągłej i afinicznej, nieprzewyższającej F i dokładnej w elemencie u. Wobec tego, iż funkcja F w u ma jedyny subgradient u^*, który oczywiście wyznacza $\mathcal{H}$, a ponieważ $\mathcal{H}$ zawiera $\mathcal{L}$, więc $F'(u;v) = \langle u^*, v \rangle$. Tym sposobem pokazaliśmy, że funkcja F jest różniczkowalna w sensie GATEAUX w elemencie $u \in V$ a jej pochodna jest dana funkcjonałem u^*, co kończy dowód.

Podamy jeszcze charakteryzację funkcji wypukłych różniczkowalnych w sensie GATEAUX.

<u>STWIERDZENIE 9.4.</u> Niech F będzie funkcją różniczkowalną w sensie GATEAUX w obszarze wypukłym A przestrzeni V o wartościach w $\mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne

/9.11/ F jest wypukła w A

/9.12/ $\forall u, v \in A, \quad F(v) \geq F(u) + \langle F'(u), v-u \rangle$.

Analogicznie, następujące warunki są również równoważne:

/9.13/ F jest ściśle wypukła w A

/9.14/ $\forall u, v \in A, u \neq v \quad F(v) > F(u) + \langle F'(u), v-u \rangle$

<u>DOWÓD.</u> Z poprzedniego stwierdzenia 9.3 wynika implikacja /9.11/ $\Longrightarrow$ /9.12/. Dowód w drugą stronę polega na wykorzystaniu wypukłości obszaru A i nierówności /9.12/. Położymy w nierówności /9.12/ $v = u$, a $(1-\lambda)u + \lambda v$, $\lambda \in (0,1)$ zamiast u, wobec tego otrzymamy

/9.15/ $F(u) \geq F(u + \lambda(v-u)) + \lambda \langle F'(u+\lambda(v-u)), u-v \rangle$

dla wszelkich $u, v \in A$.
Analogicznie mamy

/9.16/ $F(v) \geq F(u+\lambda(v-u)) + (1-\lambda) \langle F'(u+\lambda(v-u)), v-u \rangle$

Mnożąc /9.15/ przez $(1-\lambda)$, a /9.16/ przez λ i dodając stronami otrzymujemy

/9.17/ $F((1-\lambda)u+\lambda v) \leq (1-\lambda)F(u) + \lambda F(v)$

co kończy dowód równoważności /9.11/ i /9.12/.

Dowód równoważności /9.13/ i /9.14/, tzn. w przypadku ściślej wypukłości, opiera się na własnościach funkcji ściśle wypukłych i analogicznych rozważaniach, jak wyżej. Zauważymy tylko, że dla funkcji F ściśle wypukłej mamy

$$F(u+\lambda(v-u)) < (1-\lambda) F(u) + \lambda F(v)$$

dla $u, v \in A$, $u \neq v$ i $\lambda \in (0,1)$, ponadto w następstwie wypukłości funkcji F otrzymujemy

$$\langle F'(u), v-u \rangle \leq \frac{F(u+\lambda(v-u)) - F(u)}{\lambda} < F(v) - F(u)$$

Zatem korzystając z wyżej wypisanych nierówności dowodzi prawdziwości równoważności /9.13/ i /9.14/ analogicznie jak w przypadku poprzednim, co kończy dowód stwierdzenia.

Na zakończenie podamy związek między wypukłością gładkiej funkcji a własnościami pochodnej GATEAUX.

STWIERDZENIE 9.5. Niech $F: V \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną w sensie GATEAUX w podzbiorze wypukłym A przestrzeni V . Wówczas funkcja F jest wypukła na A wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna GATEAUX F' jest monotonicznym operatorem działającym z V w V^*, tzn.

/9.18/ $\forall u, v \in V \quad \langle F'(u) - F'(v), u - v \rangle \geq 0$

DOWÓD. Niech F będzie funkcją wypukłą, wobec tego na mocy stwierdzenia 9.3, jeżeli $F'(u)$ i $F'(v)$ są subgradientami funkcji F w u i v, to

$$\langle F'(u), v - u \rangle + F(u) \leq F(v)$$

$$\langle F'(v), u - v \rangle + F(v) \leq F(u)$$

dodając stronami obie te nierówności otrzymujemy /9.18/.

Niech F będzie funkcją różniczkowalną w sensie GATEAUX w zbiorze wypukłym A, a jej pochodna GATEAUX niech spełnia warunek /9.18/, tzn. będzie operatorem monotonicznym. Wówczas funkcja pomocnicza φ dana wzorem

$$[0,1] \ni \lambda \longrightarrow \varphi(\lambda) = F(u + \lambda(v - u))$$

jest różniczkowalna i jej pochodna wyraża się w sposób następujący:

$$\varphi'(\lambda) = \langle F'(u + \lambda(v - u)), v - u \rangle$$

Z nierówności /9.18/ wynika, że $\varphi'(\cdot)$ jest funkcją niemalejącą, zatem funkcja pomocnicza φ jest wypukła na $[0,1]$, w szczególności więc mamy

$$\varphi(\lambda) \leq (1-\lambda)\varphi(0) + \lambda\varphi(1)$$

dla każdego $\lambda \in [0,1]$, oczywiście stąd otrzymujemy nierówność

$$F((1-\lambda)u + \lambda v) \leq (1-\lambda)F(u) + \lambda F(v)$$

zatem funkcja F jest wypukła, co kończy dowód.

UWAGA 9.4. Stwierdzenia 9.3, 9.4, 9.5 wskazują, że subróżniczkowalność funkcji wypukłych jest uogólnieniem różniczkowalności.

10. PRAWA SUBRÓŻNICZKOWANIA

Podamy prawa subróżniczkowania, wskazując na pewne bądź różnice, bądź analogie w stosunku do praw różniczkowania.

Z określenia subróżniczki /por. Określenie 9.2/ bezpośrednio wynikają następujące stwierdzenia.[1]

STWIERDZENIE 10.1. Niech $F: V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda > 0$. Wówczas w dowolnym elemencie $u \in V$ jest prawdziwa równość:

/10.1/ $$\partial(\lambda F)(u) = \lambda(\partial F)(u)$$

STWIERDZENIE 10.2. Niech F i $G: V \longrightarrow \mathbb{R}$. Wówczas w dowolnym elemencie $u \in V$ jest prawdziwa relacja:

/10.2/ $$\partial(F+G)(u) \supset \partial F(u) + \partial G(u)$$

Kwestię, kiedy relacjaa/10.2/ staje się równością, rozstrzyga następne stwierdzenie.

STWIERDZENIE 10.3. Jeżeli funkcje F i G należą do $\Gamma(V)$ i nadto istnieje element $\overline{u} \in$ dom $F \cap$ dom G , w którym np. F jest ciągła, to

/10.3/ $$\forall u \in V \quad \partial(F+G)(u) = \partial F(u) + \partial G(u)$$

[1] W stwierdzeniach mnożenie przez skalar λ subróżniczki ∂F i sumę subróżniczek ∂F i ∂G rozumie się jako mnożenie przez λ podzbioru przestrzeni V^* i jako sumę algebraiczną.

DOWÓD. Pokażemy, że jest prawdziwe zawieranie przeciwne w stosunku do /10.2/, tzn. każdy funkcjonał $u^* \in \partial(F+G)(u)$ można przedstawić w postaci sumy $u_1^* + u_2^*$, gdzie $u_1^* \in \partial F(u)$ i $u_2^* \in \partial G(u)$. W tym celu zauważymy, że funkcje F i G przyjmują skończone wartości dla elementu $u \in V$ i wobec tego mamy

$$/10.4/ \quad \forall v \in V \qquad F(v) + G(v) \geq \langle u^*, v-u \rangle + F(u) + G(u)$$

Rozważmy wypukłe podzbiory w produkcie $V \times \mathbb{R}$

$$C_1 = \{ (v,a) : F(v) - \langle u^*, v-u \rangle - F(u) \leq a \}$$

$$C_2 = \{ (v,a) : \quad a \leq G(u) - G(v) \}$$

Z nierówności /10.4/ wynika, że podzbiory C_1 i C_2 mogą mieć jedynie wspólne punkty brzegowe. Podzbiór C_1 jest nadwykresem funkcji $F(\cdot) - \langle u^*, \cdot \rangle - F(u) + \langle u^*, u \rangle$, która jest wypukła i ciągła w elemencie $\bar{u}$. Wobec tego podzbiór C_1 jest wypukły o wnętrzu niepustym /por. dowód stwierdzenia 9.2/, zatem int C_1 i C_2 można rozdzielić na mocy wniosku 2.4 hiperpłaszczyzną $\mathcal{H}$. Podobnie, jak w dowodzie stwierdzenia 9.2, można pokazać, że hiperpłaszczyzna $\mathcal{H}$ nie jest "pionowa" i wobec tego jest ona wykresem funkcji afinicznej i ciągłej postaci

$$V \ni v \longrightarrow \langle v^*, v \rangle + \alpha$$

gdzie $v^* \in V^*$ i $\alpha \in \mathbb{R}$

Rozdzielenie podzbiorów C_1 i C_2 wyraża się następującą relacją

$$G(u) - G(v) \leq \langle v^*, v \rangle + \alpha \leq F(v) - \langle u^*, v-u \rangle - F(u) \quad \forall v \in V$$

Kładąc w tej relacji $v = u$ otrzymujemy

$$\alpha = - \langle v^*, u \rangle$$

a stąd $\forall v \in V \quad \langle -v^*, v-u \rangle + G(u) \leq G(v)$

oraz

$$\forall v \in V \quad \langle u^* + v^*, v-u \rangle + F(u) \leq F(v)$$

Zatem $-v^* \in \partial G(u)$ i $u^* + v^* \in \partial F(u)$

wobec czego $u^* = u_1^* + u_2^*$, gdzie

$$u_1^* = u^* + v^* \quad , \quad u_2^* = -v^*$$

co kończy dowód.

Na zakończenie rozważań zbadamy subróżniczkowalność funkcji złożonej /superpozycji funkcji/.

TWIERDZENIE 10.1. Niech V i W będą przestrzeniami lokalnie topologicznymi, a V^* i W^* - przestrzeniami topologicznie sprzężonymi z przestrzeniami V i W odpowiednio. Niech Λ będzie odwzorowaniem liniowym i ciągłym przestrzeni V w przestrzeń W , tzn. $\Lambda : V \longrightarrow W$, a F - funkcją należącą do $\Gamma(W)$.

Wówczas funkcja $F \circ \Lambda$ należy do $\Gamma(V)$, nadto, jeżeli istnieje element $\Lambda \bar{u} \in W$, w którym funkcja F jest skończona i ciągła, to dla wszelkich elementów $u \in V$ jest prawdziwa równość

$$\partial(F \circ \Lambda)(u) = \Lambda^* \partial F(\Lambda u) \tag{10.5}$$

gdzie Λ^* jest odwzorowaniem sprzężonym z odwzorowaniem Λ i działa z przestrzeni W^* w przestrzeń V^* .

DOWÓD. Niech $w^* \in \partial F(\Lambda u)$, wobec tego mamy

$$\forall w \in W \quad \langle w^*, w - \Lambda u \rangle + F(\Lambda u) \leq F(w)$$

a stąd otrzymujemy

$$\forall v \in V \; ; \; \langle w^*, \Lambda v - \Lambda u \rangle + (F \circ \Lambda)(u) \leq (F \circ \Lambda)(v)$$

Zgodnie z określeniem odwzorowania sprzężonego ostatnią nierówność można zapisać w następującej postaci

$$\forall v \in V \, , \; \langle \Lambda^* w^*, v - \Lambda u \rangle + (F \circ \Lambda)(u) \leq (F \circ \Lambda)(v)$$

z której wynika, że

$$\Lambda^* w^* \in \partial (F \circ \Lambda)(u)$$

Zatem pokazaliśmy, że jest prawdziwa następująca relacja

$$/10.6/ \qquad \Lambda^* \partial F(\Lambda u) \subset \partial (F \circ \Lambda)(u)$$

Niech $u^* \in \partial (F \circ \Lambda)(u)$, zatem mamy

$$/10.7/ \quad \forall v \in V \, , \; \langle u^*, v - u \rangle + (F \circ \Lambda)(u) \leq (F \circ \Lambda)(v)$$

Rozważmy podprzestrzeń afiniczną /= zbiór liniowy/ w produkcie $W \times \mathbb{R}$ określoną w następujący sposób:

$$\mathcal{P} \triangleq \{ (\Lambda v, \langle u^*, v - u \rangle + (F \circ \Lambda)(u)) : \; v \in V \}$$

Oczywiście z nierówności /10.7/ wynika, że podprzestrzeń $\mathcal{P}$ i nadwykres epi F funkcji F mogą mieć tylko punkty wspólne, które są punktami brzegowymi nadwykresu epi F. Ponieważ funkcja F jest wypukła oraz skończona i ciągła w elemencie $\Lambda \pi \in W$, wobec tego wnętrze epi F jest zbiorem niepustym. Zatem istnieje hiperpłaszczyzna $\mathcal{H}$ zawierająca $\mathcal{P}$ i rozłączna z intepi F. Można pokazać /por. dowód stwierdzenia 9.2/, że $\mathcal{H}$ nie jest "pionowa" i jest wykresem funkcji afinicznej i ciągłej określonej na W o wartościach w $\mathbb{R}$ danej wzorem

$$W \ni w \longrightarrow \langle w^*, \Lambda v \rangle + \alpha$$

gdzie $w^* \in W^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ponieważ hiperpłaszczyzna $\mathcal{H}$ zawiera $\mathcal{P}$, otrzymujemy następujący związek

$$\forall w \in W \;, \langle w^*, \Lambda v\rangle + \alpha = \langle u^*, v - u\rangle + (F \circ \Lambda)(u)$$

z którego można wyznaczyć α , a mianowicie

$$/10.7/ \qquad \alpha = (F \circ \Lambda)(u) - \langle u^*, u\rangle$$

i następnie otrzymać równość

$$/10.8/ \qquad \forall v \in V \;, \langle w^*, \Lambda v\rangle = \langle u^*, v\rangle$$

Z równości /10.8/ wynika, iż $u^* = \Lambda^* w^*$. Ponieważ hiperpłaszczyzna $\mathcal{H}$ jest rozłączna z int epi F , wobec tego mamy

$$\forall w \in W \;, \langle w^*, w\rangle - \langle u^*, u\rangle + (F \circ \Lambda)(u) \leq F(w)$$

a stąd

$$\forall w \in W \quad \langle w^*, w - \Lambda u\rangle + F(\Lambda u) \leq F(w)$$

czyli

$$w^* \in (\partial F)(\Lambda u)$$

Zatem, z tej ostatniej relacji i faktu, że $u^* = \Lambda^* w^*$ otrzymujemy

$$u^* = \Lambda^* w^* \in (\Lambda^* \partial F)(\Lambda u)$$

skąd mamy

$$\partial (F \circ \Lambda)(u) \subset (\Lambda^* \partial F)(\Lambda u)$$

co kończy dowód.

11. MINIMIZACJA FUNKCJI WYPUKŁYCH I NIERÓWNOŚCI WARIACYJNE

Podamy podstawowe fakty związane z zagadnieniem minimizacji funkcji wypukłych, tj. istnienie minimum, kryterium rozwiązania zagadnień minimizacji, itp.

Niech V będzie refleksywną[1/] przestrzenią BANACHA z normą $\|\cdot\|$, $\mathcal{C}$ - niepustym domkniętym wypukłym podzbiorem przestrzeni V.

Rozważmy funkcję F określoną na $\mathcal{C}$ o wartościach w $\overline{\mathbb{R}}$.

Zakładamy:

/11.1/ $F:\mathcal{C}\to\overline{\mathbb{R}}$ jest wypukła, właściwa i półciągła dolnie.

Zbadamy zagadnienie minimizacji funkcji F, tj. wyznaczenia kresu dolnego F na $\mathcal{C}$, czyli liczby

/11.2/ $$\alpha = \inf_{v\in\mathcal{C}} F(v)$$

Dowolny taki element $u\in\mathcal{C}$, że

/11.3/ $$F(u) = \inf_{v\in\mathcal{C}} F(v)$$

nazywamy rozwiązaniem zagadnienia minimizacji /11.2/

UWAGA 11.1. Niekiedy wygodnie badać zagadnienie /11.2/ na przestrzeni V. Wówczas funkcję F zastępuje się jej rozszerzeniem $\widetilde{F}:V\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$, które jest określone wzorem

/11.4/ $$V\ni v\longrightarrow \widetilde{F}(v)=\begin{cases} F(v) & \text{gdy } v\in\mathcal{C} \\ \infty & \text{gdy } v\notin\mathcal{C}\end{cases}$$

1/ Przypominamy, że przestrzeń BANACHA V nazywa się refleksywna, gdy jej kula jednostkowa /o promieniu 1/ jest słabo zwarta. W refleksywnej przestrzeni V każdy ciąg ograniczony zawiera podciąg słabo zbieżny. Przestrzeń HILBERTA i przestrzenie $L^p(1<p<\infty)$ są refleksywne.

Oczywiście $\widetilde{F}$ jest funkcją wypukłą i półciągłą dolnie na V, a zagadnienie wyznaczenia kresu dolnego $\widetilde{F}$ na V, czyli liczby

/11.5/ $$\beta = \inf_{v \in V} \widetilde{F}(v)$$

jest równoważne zagadnieniu /11.2/, tzn. $\alpha = \beta$ i zbiory rozwiązań /mogą być puste/ są identyczne.

STWIERDZENIE 11.1. Zbiór rozwiązań zagadnienia minimizacji /11.2/ funkcji F wypukłej i półciągłej dolnie na wypukłym i domkniętym podzbiorze $\mathcal{C}$ przestrzeni V jest podzbiorem wypukłym i domkniętym /być może pustym/ w $\mathcal{C}$.

DOWÓD. Wykluczając przypadki trywialne, tzn. takie, gdy $\alpha = \pm\infty$ w zagadnieniu /11.2/, zbiór rozwiązań tego zagadnienia można opisać w sposób następujący

$$\{ u \in V : \widetilde{F}(u) \leq \alpha \}$$

Zbiór ten, ponieważ $\widetilde{F}$ jest wypukła i półciągła dolne na V, jest wypukły i domknięty w $\mathcal{C}$ /por. stwierdzenie 3.2 i określenie 4.1/.

Podamy jeszcze prosty warunek wystarczający istnienia rozwiązania zagadnienia minimizacji /11.2/.

TWIERDZENIE 11.1. Niech będzie spełnione założenie /11.1/ o funkcji F. Jeżeli jeszcze podzbiór $\mathcal{C}$ przestrzeni V jest ograniczony, lub jeżeli funkcja F jest koercytywna, tzn.

/11.6/ $$\lim_{\substack{\|v\| \to \infty \\ v \in \mathcal{C}}} F(v) = \infty$$

to zagadnienie /11.2/ ma co najmniej jedno rozwiązanie. Rozwiązanie to jest jedyne, jeżeli funkcja F jest ściśle wypukła na $\mathcal{C}$.

DOWÓD. Niech $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem minimizującym dla zagadnienia /11.2/, tzn. takim ciągiem elementów v_m podzbioru $\mathcal{C}$, że

$$F(v_m) \longrightarrow \alpha = \inf_{u\in\mathcal{C}} F(u)$$

gdzie $n \to \infty$

Zauważamy, że $\alpha \in [-\infty, \infty)$. Ciąg $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony w V, wynika to bądź z ograniczoności podzbioru $\mathcal{C}$, bądź też, gdy nie jest on ograniczony z koercytywności /11.6/ i ograniczoności z góry ciągu $\{F(v_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$. Zatem z ciągu $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ można wyjąć podciąg $\{v_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ słabo zbieżny w V do elementu $u\in\mathcal{C}$.

Z wniosku 4.3 wynika, że funkcja F jest również półciągła dolnie w słabej topologii ($\sigma(V,V^*)$) na $\mathcal{C}$, wobec tego mamy

$$F(u) \leq \varliminf_{n_k\to\infty} F(v_{m_k}) = \alpha \tag{11.7}$$

Stąd u jest rozwiązaniem zagadnienia /11.2/ i $\alpha \neq -\infty$, gdyż funkcja F jest właściwa /por. założenie 11.1/.

Jeżeli istnieją dwa rozwiązania u i $\bar{u}$ zagadnienia, to $(u+\bar{u})/2$ jest również rozwiązaniem tego zagadnienia na mocy stwierdzenia 11.1. Jeżeli funkcja F jest ściśle wypukła to $(u+\bar{u})/2$ nie jest rozwiązaniem, gdyż

$$F\left(\frac{u+\bar{u}}{2}\right) < \frac{1}{2}F(u) + \frac{1}{2}F(\bar{u}) = \alpha$$

Zatem w tym przypadku istnieje tylko jedno rozwiązanie zagadnienia /11.2/.

PRZYKŁAD 11.1. Niech $a(\cdot,\cdot)$ będzie symetryczną, ciągłą, dwuliniową formą określoną na $V\times V$ i koercytywną, tzn.

$$a(v,v) \geq c\|v\|^2 \quad \forall v\in V \tag{11.8}$$

gdzie $c>0$. Jeżeli L jest dowolnym funkcjonałem liniowym i ciągłym nad V , tzn. $L \in V^*$, to istnieje jedyny element $u \in V$, w którym funkcja

$$V \ni v \longrightarrow F(v) = a(v,v) - 2\langle L, v\rangle \in \mathbb{R} \tag{11.9}$$

przyjmuje kres dolny swych wartości na V , tj.

$$F(u) = \inf_{v \in V} F(v) \tag{11.10}$$

Fakt ten jest wnioskiem z Twierdzenia 11.1. Istotnie, wystarczy tylko pokazać ścisłą wypukłość funkcji

$$V \ni v \longrightarrow a(v,v)$$

oraz koercytywność /por. /11.6// funkcji F na V . Z nierówności /11.8/ mamy dla dowolnych elementów v i w przestrzeni V nierówność

$$c\|v-w\|^2 \leq a(v-w, v-w) = a(v,v) - 2a(v,w) + a(w,w)$$

skąd dla $v \neq w$ otrzymujemy

$$2a(v,w) < a(v,v) + a(w,w)$$

Zatem dla $\lambda \in (0,1)$ mamy

$$a(\lambda v + (1-\lambda)w, \lambda v + (1-\lambda)w) = \lambda^2 a(v,v) +$$

$$+ 2\lambda(1-\lambda)a(v,w) + (1-\lambda)^2 a(w,w) <$$

$$< \lambda a(v,v) + (1-\lambda)a(w,w)$$

co zapewnia już ścisłą wypukłość funkcji F .
Koercytywność funkcji F otrzymujemy z następujących oszacowań

$$F(v) = a(v,v) - 2\langle L, v\rangle \geq c\|v\|^2 - 2\|L\|_*\|v\|$$

oraz

$$2\|L\|_*\|v\| \leq \frac{c}{2}\|v\|^2 + \frac{2}{c}\|L\|_*^2$$

z których wynika nierówność

$$F(v) \geq \frac{c}{2}\left(\|v\|^2 - \frac{4}{c^2}\|L\|_*^2\right)$$

zapewniająca /11.6/.

<u>UWAGA 11.2.</u> W przypadku, gdy forma $a(\cdot,\cdot)$ jest określona na podzbiorze ograniczonym produktu $V \times V$, to nierówność /11.8/ można zastąpić nierównością

$$a(v,v) \geq 0 \qquad \forall v \in C$$

gdzie C jest zbiorem wypukłym domkniętym i ograniczonym.

Scharakteryzujemy rozwiązania zagadnienia /11.2/ zakładając o funkcji F nieco więcej, np. gdy F jest różniczkowalna, czy też przedstawialna w postaci sumy funkcji różniczkowalnej i nieróżniczkowalnej.

<u>STWIERDZENIE 11.2.</u> Niech F będzie funkcją wypukłą właściwą półciągłą dolnie na wypukłym i domkniętym podzbiorze C przestrzeni V.

Jeżeli funkcja F jest różniczkowalna w sensie GATEAUX w C i jej pochodna jest ciągła w C, to dla $u \in C$ następujące warunki są równoważne:

(i) u - jest rozwiązaniem zagadnienia /11.2/

(ii) $\langle F'(u), v - u\rangle \geq 0 \qquad \forall v \in C$

(iii) $\langle F'(v), v - u\rangle \geq 0 \qquad \forall v \in C$

DOWÓD. Niech u będzie rozwiązaniem zagadnienia /11.2/, wobec tego dla dowolnego $v \in V$ i $\lambda \in (0,1)$ otrzymujemy

$$F(u) \leq F((1-\lambda)u + \lambda v)$$

co można zapisać w postaci

$$F(u + \lambda(v-u)) - F(u) \geq 0$$

Dzieląc tę nierówność przez λ i przechodząc do granicy, gdy $\lambda \to +0$ mamy (ii) ; tak więc wykazaliśmy, że $(i) \Rightarrow (ii)$.
Odwrotnie, niech będzie spełniony warunek (ii) i niech $\lambda \in (0,1)$.
Oczywiście z wypukłości /por. uwaga 9.3/ mamy

$$F(v) - F(u) \geq \frac{1}{\lambda}\left(F((1-\lambda)u + \lambda v) - F(u)\right)$$

Przechodząc do granicy w tej nierówności, gdy $\lambda \to +0$, otrzymujemy

$$F(v) - F(u) \geq \langle F'(u), v-u \rangle$$

skąd na mocy (ii) mamy

$$F(v) - F(u) \geq 0 \qquad \forall v \in C$$

Zatem u jest rozwiązaniem zagadnienia /11.2/. Tym sposobem wykazaliśmy równoważność warunków (i) oraz (ii) .

Wykażemy teraz równoważność warunków (ii) oraz (iii) .
Najpierw zauważymy na mocy Stwierdzenia 9.5, że pochodna $F' : C \longrightarrow V^*$ jest operatorem monotonicznym, tzn. mamy

/11.11/ $\forall u,v \in C \quad \langle F'(v) - F'(u), v-u \rangle \geq 0$

Niech będzie spełniony warunek (ii) . Zatem dodając stronami (ii) oraz /11.11/ otrzymujemy (iii) , a więc: $(ii) \Rightarrow (iii)$.

Dowód w drugą stronę, tzn. $(iii) \Rightarrow (ii)$, opiera się na ciągłości pochodnej F' w C .

Niech zatem u spełnia warunek (iii) . Kładąc $v = (1-\lambda)u + \lambda w$, gdzie $w \in C$, a $\lambda \in (0,1)$ w (iii) otrzymujemy

$$\lambda \langle F'((1-\lambda)u+\lambda w),\, w-u\rangle \geq 0$$

które po podzieleniu stronami przez λ przyjmuje postać

$$\langle F'(u+\lambda(w-u)),\, w-u\rangle \geq 0 \tag{11.12}$$

Łatwo jest zauważyć, iż lewa strona tej nierówności jest pochodną funkcji

$$(0,1) \ni \lambda \longrightarrow \varphi(\lambda) \stackrel{\mathrm{df}}{=} F(u+\lambda(w-u))$$

Pochodna ta, tzn.: $\varphi'(\lambda) = \langle F(u+\lambda(w-u)),\, w-u\rangle$ jest funkcją ciągłą parametru λ, wobec tego przechodząc w nierówności /11.12/ do granicy, gdy $\lambda \to +0$ otrzymujemy (ii), co kończy dowód.

UWAGA 11.3. W przykładzie 11.1 funkcja F jest różniczkowalna i jej pochodna ma postać

$$V \ni v \longrightarrow \langle F'(v),\cdot\rangle = 2\left(a(v,\cdot) - \langle l,\cdot\rangle\right)$$

Zatem element $u \in V$ stanowi rozwiązanie zagadnienia /11.10/ wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z warunków

$$a(u,v-u) - \langle l, v-u\rangle \geq 0 \quad \forall v \in V \tag{11.13}$$

$$a(v,v-u) - \langle l, v-u\rangle \geq 0 \quad \forall v \in V \tag{11.14}$$

STWIERDZENIE 11.3. Niech $F = F_1 + F_2$, przy czym F_1, F_2 są funkcjami wypukłymi, półciągłymi dolnie i właściwymi na $\mathcal{C}$ nadto niech funkcja F_1 będzie różniczkowalną w sensie GATEAUX, której pochodna F_1' jest ciągła na $\mathcal{C}$. Wówczas dla $u \in \mathcal{C}$ następujące warunki są równoważne:

(i) u jest rozwiązaniem zagadnienia /11.2/;

(ii) $\langle F_1'(u), v-u\rangle + F_2(v) - F_2(u) \geq 0 \quad \forall v \in V$

(iii) $\langle F_1'(v), v-u\rangle + F_2(v) - F_2(u) \geq 0 \quad \forall v \in V$

DOWÓD. Niech u będzie rozwiązaniem zagadnienia /11.2/ wobec tego dla dowolnego elementu $v \in C$ i $\lambda \in (0,1)$ mamy

$$F(u) \leq F((1-\lambda)u + \lambda v)$$

skąd, dzięki wypukłości funkcji F_2, otrzymujemy nierówność

$$F_1(u) + F_2(u) \leq F_1((1-\lambda)u + \lambda v) + (1-\lambda)F_2(u) + \lambda F_2(v)$$

która po uproszczeniach przyjmuje postać

$$0 \leq F_2(v) - F_2(u) + \frac{1}{\lambda}\left(F_1(u+\lambda(v-u)) - F_1(u)\right)$$

Przechodząc do granicy, gdy $\lambda \to +0$, otrzymujemy warunek (ii). Pokazaliśmy więc, że (i) $\Rightarrow$ (ii). Odwrotnie, niech będzie spełniony warunek (ii). Z wypukłości funkcji F_1 mamy /por. dowód stwierdzenia 11.2/ następującą nierówność

$$F_1(v) - F_1(u) - \langle F_1'(u), v-u\rangle \geq 0 \quad \forall v \in C$$

która dodana stronami do (ii) daje

$$F(v) - F(u) \geq 0 \qquad \forall v \in C$$

i pokazuje, że u jest rozwiązaniem zagadnienia /11.2/. Zatem równoważność warunków (i) oraz (ii) jest udowodniona.

Aby udowodnić równoważność warunków (ii) oraz (iii) postępujemy podobnie jak w dowodzie Stwierdzenia 11.2. Niech będzie spełniony warunek (ii). Z monotoniczności F_1' wynika, iż

$$\forall v \in C. \qquad \langle F_1'(v) - F_1'(u), v-u\rangle \geq 0$$

wobec tego dodając stronami tę nierówność i nierówność w warunku (ii) otrzymujemy warunek (iii) . Zatem (ii) $\Longrightarrow$ (iii) . Dowód w drugą stronę opiera się /por. dowód Stwierdzenia 11.2/ na ciągłości pochodnej F_1' . Niech będzie spełniony warunek (iii) ; kładąc $v = (1-\lambda)u + \lambda w$ w (iii) otrzymujemy

$$\lambda < F_1'((1-\lambda)u + \lambda w), w-u> + F_2((1-\lambda)u+\lambda w) - F_2(u) \geq 0$$

Dzięki wypukłości funkcji F_2 mamy

$$\lambda < F_1'((1-\lambda)u + \lambda w, w-u> + \lambda F_2(w) - \lambda F_2(u) \geq 0$$

Dzieląc strony tej ostatniej nierówności przez λ i następnie przechodząc w niej do granicy, gdy $\lambda \to +0$, otrzymujemy, dzięki ciągłości pochodnej F_1' , warunek (ii) , co kończy dowód.

<u>UWAGA 11.4.</u> Stwierdzenie 11.3 zawiera oczywiście stwierdzenie 11.2.

<u>PRZYKŁAD 11.2.</u> Niech V będzie przestrzenią HILBERTA z iloczynem skalarnym $(\cdot|\cdot)$, a φ - funkcja wypukła, półciągła dolnie i właściwa określona na V o wartościach w $\bar{\mathbb{R}}$ /tzn. $\varphi \in \Gamma_0(V)$/. Niech $F = F_1 + F_2$, przy czym

$$F_1(v) = \|v - x\|^2/2 \qquad\qquad F_2(v) = \varphi(v)$$

gdzie x dany element w przestrzeni HILBERTA. Funkcja F_1 jest ściśle wypukła i półciągła dolnie, a nadto koercytywna na V . Wobec tego, dla dowolnej funkcji $\varphi \in \Gamma_0(V)$, która jest ograniczona z dołu funkcją afiniczną i ciągłą postaci $(y|v) + \alpha$, $y \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$, mamy następujące nierówności

$$F(v) \geq \frac{1}{2}\|v - x\|^2 + (y|v) + \alpha$$

$$F(v) \geq \frac{1}{2}\|v + y - x\|^2 - \frac{1}{2}\|y - x\|^2 + \frac{1}{2}\|x\|^2 - \alpha$$

skąd już wynika koercytywność funkcji F , tzn. $F(v) \to \infty$, gdy $\|v\| \to \infty$.

Na mocy Twierdzenia 11.1 istnieje element $u \in V$, który stanowi rozwiązanie zagadnienia /11.2/ dla funkcji

$$V \ni v \longrightarrow F(v) = \frac{1}{2}\|v - x\|^2 + \varphi(v)$$

tzn. istnieje element u, w którym funkcja F przyjmuje wartość równą swemu kresowi dolnemu na V.

Ze Stwierdzenia 11.3 wynika następująca charakteryzacja rozwiązania u, a mianowicie, element u jest rozwiązaniem zagadnienia /11.2/ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia jeden z warunków

/11.15/ $\quad (u - x \mid v - u) + \varphi(v) - \varphi(u) \geqq 0 \quad \forall v \in V$

/11.16/ $\quad (v - x \mid v - u) + \varphi(v) - \varphi(u) \geqq 0 \quad \forall v \in V$

Odwzorowanie, które przy zadanej funkcji φ, określa się wzorem

$$V \ni x \longrightarrow u \in V$$

gdzie u jest rozwiązaniem zagadnienia /11.2/ dla funkcji $F(v) = \frac{1}{2}\|v - x\|^2 + \varphi(v)$, oznaczamy symbolem prox_φ i nazywamy "najbliższy przy φ". Zatem odwzorowanie to można zapisać w następujący sposób

/11.17/ $\quad V \ni x \longrightarrow \mathrm{prox}_\varphi(x) = u \in V$

W szczególności, gdy $\varphi = \chi_{\mathcal{C}}$, tzn. gdy φ jest funkcją indykatorową zbioru $\mathcal{C}$ wypukłego i domkniętego, wówczas odwzorowanie $\mathrm{prox}_{\chi_{\mathcal{C}}}$ stanowi tzw. odwzorowanie najkrótszego rzutowania na $\mathcal{C}$. Element u jest najkrótszym rzutowaniem elementu x na $\mathcal{C}$, wtedy i tylko wtedy /por. Stwierdzenie 11.3/, gdy

/11.18/ $\quad (u - x \mid v - u) \geqq 0 \quad \forall v \in \mathcal{C}$

lub

$$/11.19/ \quad (u-x \mid v-u) \geq 0 \qquad \forall v \in C$$

UWAGA 11.5. Nierówności (ii), (iii) w Stwierdzeniach 11.2 i 11.3 nazywają się nierównościami wariacyjnymi. Nierówności te w sposób naturalny pojawiają się w zagadnieniach minimizacji funkcji wypukłych /w zagadnieniach typu /11.2//. Twierdzenie 1.1 i Stwierdzenia 11.2, 11.3 stanowią warunki istnienia rozwiązań pewnych nierówności wariacyjnych.

Literatura

1 ALEXIEWICZ A., Analiza funkcjonalna, PWN, Warszawa 1969.

2 KOŁODZIEJ W., Wybrane rozdziały analizy matematycznej, PAN, Warszawa 1970.

3 EKELAND J., TEMAM R., Convex Analysis and variational problems, NHPC, N.-Y. 1976.

4 YOSHIDA K., Functional Analysis, S.V., Berlin 1965.