SYESZ[illegible]WSKI

MATEMATYKA

3.

GEOMERYJA

329

1831

BIBLIOTEKA NAUKOWA

wydawana staraniem

C. K. TOWARZYSTWA NAUKOWEGO KRAKOWSKIEGO.

ELEMENTARNY WYKŁAD
MATEMATYKI

przez

JANA KANTEGO STECZKOWSKIEGO

Professora Wszechnicy Jagiellońskiéj.

CZĘŚĆ III.

GEOMETRYJA.

PLANIMETRYJA I STEREOMETRYJA.

W KRAKOWIE

W DRUKARNI C. K. UNIWERSYTETU

1858.

PRZEDMOWA.

Kiedy prawie przed dziesiątkiem lat Towarzystwo Naukowe Krakowskie wówczas z Uniwersytetem Jagiellońskim połączone, pomiędzy swemi celami wytknęło sobie także wydawanie Biblioteki Naukowéj *mającéj obejmować szczególniéj dzieła do wykładu uniwersyteckiego służące, odłożywszy inne prace, zatrudniłem się napisaniem książki w moim przedmiocie, któréj dałem tytuł* **Elementarny wykład Matematyki**. *Tego wykładu wydało Towarzystwo Naukowe dwie części, mianowicie: Arytmetykę w r. 1851 i Algebrę w r. 1852. A że z istoty rzeczy do zupełności tytułem zapowiedzianego wykładu należy również Geometryja, więc téż nad tą bez przerwy pracowałem. Tę już prawie od roku ukończywszy, oddaję pod sąd moich współpracowników. Wypada mi tu atoli nadmienić nieco o jéj treści i układzie.*

Lubo przymiotnik „elementarny“ *wyklucza niejako z Geometryi, według dawniéjszych autorów, Trygonometryją sferyczną i Geometryją analityczną, to przecież obie te części w moim wykładzie zamieściłem. Nie dość na tém, pisząc Geometryją analityczną w dwóch i trzech wymiarach, nie podobna było wstrzymać się* *od wykładu teoryi linij i powierzchni krzywych drugiego stopnia, bo ta jest tylko zastósowaniem piérwszéj. Nie pomału téż znaglała mnie do tego uwaga, że w teraźniéjszym stanie nauk przyrodniczych, dzięki pracom najsławniejszych Matematyków, każda prawie w téj dziedzinie prawda, może być tak elementarnie, jako téż i wyższym sposobem dowiedziona. Zważywszy wreszcie, że udający się na nauki Wyższego Rachunku, Astronomii, Fizyki, Mechaniki i Mineralogii, jeźli nauczyciel nie chce przestawać na mniéj ścisłym wykładzie, tak bez Trygonometryi sferycznéj, jako téż i wspomnionéj teoryi linij i powierzchni krzywych drugiego stopnia, obejść się nie mogą, uznałem za stósowne i korzystne objąć wykładem moim następujące przedmioty:*

Planimetryją,
Sterometryją,
Trygonometryją płaską,
Trygonometryją sferyczną,
Geometryją analityczną w dwóch wymiarach, z teoryją linij krzywych drugiego stopnia znanych pod nazwą przecięć ostrokręgowych (sectiones conicae)
i Geometryją analityczną w trzech wymiarach z teoryją powierzchni krzywych drugiego stopnia.

Tym sposobem taż Geometryja składa się z trzech części:

1. *Planimetryi z Stereometryją,*
2. *Trygonometryi płaskiéj i sferycznéj,*
3. *Geometryi analitycznéj w dwóch i trzech wymiarach, wraz z teoryją linij i powierzchni krzywych drugiego stopnia.*

Układ Planimetryi i Stereometryi tak się starałem urządzić, iżby uczących się zapoznać li z najpotrzebniejszemi twierdzeniami i zagadnieniami, w różnych zastósowaniach swój użytek mającemi; opuściłem zaś wszystkie, które każdy, pojąwszy i strawiwszy pierwsze, łatwo przy pilności, w innych autorach napotkane, zrozumieć potrafi. Dlatego to nie dotknąłem w téj części tak w tych czasach bogatéj teoryi transwersalnych, symetryi i innych nową Geometryją stanowiących; sądzę bowiem, iż tu nie może znaleść trudności, kto przejął się należycie zasadami Geometryi Euklidesowéj. Zresztą myślę, iż nie daleko jest ten czas, gdzie równie dzielny jak Euklidesa geniusz, zebrawszy w całość liczne już dotąd przygotowane materyjały nowéj Geometryi i takowe uporządkowawszy, obdarzy uczony świat Geometryją zbudowaną na nowych zasadach, która w edukacyi zajmie miejsce przeszło przez 20 wieków używanéj Euklidesa Geometryi.

Jak Planimetryja z Stereometryją, tak równie obie Trygonometryje stanowią i stanowić powinny nierozerwaną całość, bo dowody twierdzeń sferycznéj, całkiem się opierają na Trygonometryi płaskiéj tak dalece, że nawet wszystkie wzory pierwszéj, z płaskiego czyli prostokreślnego trójkąta otrzymać można.

Gdy inni autorowie najczęściéj uważają linije trygonometryczne w kole, a rzadziéj wyprowadzają je z uważania prostopadłych, to ja poszedłem cokolwiek odmienną w tym względzie drogą; a czyli zdążając tędy do celu, nie postawiłem jakiego fałszywego kroku, znawcy to dopatrzą.

W układzie Geometryi analitycznéj, szczególnemi przewodnikami byli mi Bourdon *i* Etingshausen; *przy tém jednak korzystałem i z innych w tym przedmiocie pisanych dzieł jako téż z pism czasowych a szczególniéj z* „Archiv. der Mathematik und Physik von A. Grunert“ *i* „Nouvelles annales de Mathematiques par Terquem et Gerono.“

Jeżeli tą moją pracą zdołałem naszéj młodzieży, dla któréj pracować jest całém i jedyném zadaniem mego życia, ułatwić wstęp do przybytku nauk przyrodniczych, będzie to dla mnie, przy schyłku mego zawodu i bliskości wieczora, sowitą nagrodą.

Pisałem w Krakowie dnia 23. Kwietnia 1857 r.

SPIS ROZDZIAŁÓW

ZAWARTYCH W TYCH DWÓCH CZĘŚCIACH GEOMETRYI.

Stron.

CZĘŚĆ I. PLANIMETRYJA.

CZĘŚĆ II. STEREOMETRYJA.

WAŻNIEJSZE DOSTRZEŻONE OMYŁKI DRUKARSKIE.

Str.	wiérsz	zamiast	czytaj
43	17 od góry	tylko	tych
43	18 "	tych	tylko
56	16 od dołu	A	E
73	8 od góry	równoległe	równolegle
84	17 od dołu	AB	AD
96	3 "	$70+4$	$4+70$
107	15 od góry	łuk	tak
147	18 "	mając	mające
158	19 "	zobaczemy	zobaczmy
160	20 "	AB —BC	$\overline{AB}^2-\overline{BC}^2$
173	12 "	przedstawą	podstawą
189	14 "	N'RL'DRC $\sim$	N'RL' $\sim$ DRC
198	4 "	P	K
212	14 od dołu	$W = w$	$W : w$
"	ostatni	A'S'C'	A'SC'
221	4 od góry	powierzchni	powierzchnią
231	8 od dołu	wzajemne	wzajemnie
232	7 od góry	poprowadzony	poprowadzonéj
278	4 od dołu	BE	BF
291	1 od góry	objętość	objętości
312	8 "	$P\sqrt{P}$	$\sqrt{P}$
332	10 "	A'_1D	A_1D.

OMYŁKI W FIGURACH.

Tablica II fig. 40. Długość linii AB być powinna taka, jak punktami jest oznaczona.

" VI fig. 170. opuszczone są na boku AB głoski *m, n, o, p*.

" IX zamiast fig. 134, być powinno fig. 234

" X " fig. 144, " " " 244.

WSTĘP.

Otaczające nas przedmioty zmysłowego świata, zewnętrznie i ogólnie uważane, przedstawiają nam tylko tożsamość albo różność, t. j. przedmioty te albo noszą jednę i tęż samę, albo też różne nazwy. Przedmioty téjże saméj nazwy prowadzą nas do wyobrażenia liczby, różnéj zaś nazwy, do wyobrażenia kształtu.

Kształt jest to odgraniczenie każdego przedmiotu od reszty przestrzeni. Każdy z tych przedmiotów zajmuje w ogólnéj przestrzeni pewne miejsce (spatium) co jego *rozciągłością* (extensio) nazywamy. Rozciągłość jest wszystkim przedmiotom zmysłowego świata spólną własnością tak dalece, że gdyby też przedmioty nie były rozciągłe, t. j. nie zajmowały żadnéj przestrzeni, nie moglibyśmy sobie zrobić żadnego o nich pojęcia; same zaś przedmioty przestałyby być rzeczywistemi i zamieniłyby się w utwory wyobraźni na wzór duchów, każde i żadnego miejsca nie zajmujących, t. j. zamieniłyby się na istoty przenikliwe, jakich w rzeczywistym świecie nie znamy.

Gdyby nie ciała zajmujące różne miejsca ogólnéj przestrzeni, nie moglibyśmy mieć żadnego o niéj wyobrażenia.

Każdy przedmiot naszemi zmysłami ująć się dający, nazywamy pospolicie *ciałem fizyczném* (corpus v. solidum). Skoro więc każde cialo zajmuje pewną przestrzeń, która z tego powodu musi być rozciągłą t. j. mieć musi swoje wymiary, czyli być musi długą, széroką i wysoką lub grubą, przeto każde także ciało ma też same trzy wymiary. Chcąc ciało jakie bliżéj poznać czyli opisać, wskazać potrzeba dokładnie trzy co dopiéro wspomnione wymiary, przez toż ciało zajętéj przestrzeni.

Jakim sposobem przychodzi człowiek do pojęcia przestrzeni, jest rzeczą Psychologii; my tyle tylko tu powiemy, że wypadek tego pojęcia jest tenże sam u każdego człowieka, t. j. że każdy tym tylko sposobem pojmuje przytomność ciał, że są rozciągłe, czyli że zajmują pewną przestrzeń. Poniekąd atoli przyjść możemy do wyobrażenia przestrzeni następującym sposobem: wystawiwszy sobie jaki przedmiot w ruchu, miejsce jakie tenże w każdéj chwili zajmuje, będzie coraz inne, bo otoczenia jego będą coraz inne a inne; jeżeli więc te szczególne pojęcia miejsca ruchomego ciała zbierzemy w jedno, takowe niczém inném być nie może, jak porządkiem pośrednich miejsc w jakim też po sobie następują, te zaś pośrednie miejsca są rzeczywiście przestrzenią. Stąd wnioskować można, że pojęcie przestrzeni bez ruchu byłoby albo zbyt trudne, albo niepodobne. Danego tu pojęcia przestrzeni nie należy uważać za jéj definicyją, ale raczéj za skazówkę cechującą przestrzeń; Geometryja bowiem nie definijuje, ale już przypuszcza w każdym pojęcie przestrzeni, nie mogąc go nikomu wlać, jeżeli go nie posiada.

Przestrzeń zajętą przez ciało fizyczne, nazywamy *ciałem geometryczném*. Pojęcie więc ciała geometrycznego, jest oderwaném od ciała fizycznego. Geometryja *czysta* (pura) wszystkie swe prawdy odnosi do ciał geometrycznych, skoro zaś ma na celu ciała fizyczne, nazywa się wtenczas Geometryją *zastósowaną* (applicata).

Każde ciało ma ze wszech stron granice, bo ciała bez granic pojąćbyśmy nie mogli; te téż granice stanowią jego kształt, jak na początku powiedzieliśmy. Granice te nazywamy w Geometryi *powiérzchniami* (superficies); powiérzchnie zatém nie mogą być niczém rzeczywistém, bo bez ciał istnieć nie mogą. Każdą znowu powiérzchnią ograniczają *linije* (linea), a nareszcie granicami tych ostatnich są *punkta*. Punkt zatém geometryczny będąc tylko początkiem lub końcem linii, nie może mieć żadnéj rozciągłości, jest więc w Geometryi tém, czém zero w Arytmetyce.

Linija geometryczna jest długość bez szérokości i grubości. Taką liniją mieć tylko można w myśli, ale jéj ani widzieć, ani narysować nie można. Wszystkie linije jakie na papiérze i tablicach kréślimy, są linijami fizycznemi; służą one jedynie do łatwiejszego pojęcia i zatrzymania w pamięci linij geometrycznych.

Lubo powiedzieliśmy wyżéj, że punkt jest zerem geometryczném, nie idzie zatém iżbyśmy sobie nie mogli zmysłowo wystawić linii jako złożonéj z punktów, albo raczéj utworzonéj ruchem punktu. Ten ruch jeżeli ciągle będzie w jednymże kierunku, rzeczony punkt zrodzi nam *liniją prostą* (linea recta), jaką *Fig.* 1 pokazuje, jeżeli zaś kierunek tego ruchu w każdéj chwili czyli ciągle zmieniać się będzie, pomyślany punkt zrodzi nam *liniją krzywą* (linea curva), jak na *Fig.* 2. Linii prostéj wszystkie części, albo lepiéj wszystkie punkta leżą w jednym i tymże samym kierunku; w linii zaś krzywéj dwie obok siebie leżące cząstki mają różne kierunki; dlatego téż każda cząstka linii prostéj, jest także prostą; gdy przeciwnie najmniejsza cząstka linii krzywéj, ściśle mówiąc, nie może być prostą, ale krzywą; bo inaczéj kierunek ruchu, tęż liniją tworzącego punktu, zmieniałby się nie ciągle, lecz przeskokiem. A że punkt w ruchu będący zmieniać może w bardzo różny sposób swój kierunek, przeto krzywych linij jest nieskończona liczba, kiedy prosta linija jest zawsze jedna i taż sama.

Ponieważ wszystkie punkta linii prostéj leżą w tymże samym kierunku, wypada więc z tego, iż każdą taką liniją wystawić sobie możemy przedłużoną dowolnie tak w jednę, jako téż i drugą stronę, przez to bowiem przedłużenie, natury jéj całkiem nie zmieniamy. Z takiego pojęcia linii prostéj wypada również, iż ona jest najkrótszą odległością między dwoma danemi punktami, a następnie, że między dwoma punktami jedna tylko *prosta* (tak w dalszym ciągu zwać będziemy najczęściéj liniją prostą) przechodzić może; wszystkie bowiem inne linije, jakie od jednego do drugiego punktu poprowadzić można, zbaczać będą mniéj lub więcéj od kierunku prostéj i z tego powodu będą albo linijami krzywemi, albo téż z prostych złożonemi czyli *łamanemi*, jak nam to przedstawia *Fig*. 3. Z jednego punktu nieskończona jest liczba możebnych kierunków, dlatego téż przez jeden punkt nieskończona liczba prostych przechodzić może. Z pojęcia rodzenia się prostéj wypada i ta prawda, że ponieważ na prostéj pomyśleć sobie można dowolnie jeden lub ilekolwiek punktów, każdą zatém prostą dzielić można na tyle i takich części, na ile i jakich się podoba.

Z linij krzywych najważniejszą, a zarazem najznajomszą jest *linija kołowa* czyli jak zwyczajnie mówimy *okrąg koła* (peripahaeria v. circumferentia circuli). Ma ona tę najwalniejszą własność, iż każdy jéj punkt jest w równéj odległości od pewnego wśród niéj leżącego punktu, a który z tego powodu *środkiem* (centrum) nazywamy. Odległość każdego punktu linii kołowéj od środka, czyli co na jedno wychodzi, każda prosta łącząca środek z którymkolwiek punktem okręgu, jak są proste SA, SB, SC i t. d. *Fig*. 4 zowie się *promieniem* (radius). Wszystkie zatém promienie jednéjże linii kołowéj są sobie równe. Z własności linii kołowéj w jéj definicyi wyrażonéj, nastręcza się zaraz bardzo łatwy sposób jéj wykréślenia. Jeżeli bowiem otworzymy każdemu znane narzędzie cyrkiel i jednę jego nożkę postawimy w punkcie, w którym ma być środek, jak tu w S, drugą zaś oprowadzać będziemy naokoło kréśląc nią na papiérze lub stole liniją, dopóki nie powrócimy do punktu skąd kréślenie rozpoczęliśmy, krzywa tym sposobem zakréślona, będzie liniją kołową; w każdém bowiem położeniu cyrkla koniec nożki kreślącéj, jest ciągle w jednéjże odległości od punktu w którym druga stoi, a zatém według definicyi, każdy punkt zakréślonéj krzywéj, jest w téjże saméj odległości od środka. Odległość końców nożek cyrkla, która mierzy w każdéj chwili odległość punktów krzywéj od środka, jest właśnie to co wyżéj promieniem nazwaliśmy.

Prostą przez środek przechodzącą i kończącą się w obu kierunkach na okręgu koła, nazywamy *średnicą* (diameter).

Tak proste DE, FG, HI i t. d. są średnicami. Każda taka średnica co do swéj długości równa się naturalnie dwom promieniom. A jako wszystkie promienie, których być może nieskończona liczba, są sobie równe, tak też i średnice są sobie równe, bo każda z nich równa się dwom promieniom. Średnic także może być nieskończona liczba jako prostych przez jeden punkt przechodzących.

Każde ciało, według tego co wyżéj powiedzieliśmy, ma koniecznie trzy wymiary, długość, szérokość i wysokość, czyli grubość, inaczéj bowiem przestałoby być ciałem. Jeżeli w ciele nie uważamy na jego grubość, ale tylko mamy na celu jego długość i szérokość, t. j. jeżeli nas tylko jego kształt zajmuje, nie mając względu na grubość, ciało zniknąć musi a pozostaną w naszéj myśli jedynie jego granice, które wyżéj powiérzchnią nazwaliśmy. Powiérzchnia więc geometryczna jest to rozciągłość wzdłuż i wszérz. Te powiérzchnie tak jak linije są albo proste czyli raczéj *płaskie* (superficies plana) albo *krzywe* (superficies curva). Jak liniją tak również powiérzchnią mieć tylko można w myśli, ale jéj ani widzieć a tém mniéj nakréślić można.

Płaskiéj powiérzchni czyli *płaszczyzny* (planum) [tak bowiem w dalszym ciągu powiérzchnią płaską nazywać będziemy] nie można także dać definicyi, można tylko podać niektóre znamiona, po których ją zawsze poznamy. Piérwszém i najwybitniejszém takiém znamieniem jest, że prosta przez dwa którekolwiek jéj punkta poprowadzona, całkiem i wszystkiemi swemi punktami leży na płaszczyźnie. Drugiém znamieniem płaszczyzny, lubo może potrzebującém dowodu, jest, że trzy punkta nie w jednym kierunku leżące, dokładnie wyznaczają położenie płaszczyzny, tak, że przez takie trzy punkta jedna tylko płaszczyzna przechodzić może; wszystkie bowiem inne przez też punkta poprowadzone, zmieszać się z piérwszą muszą, i stanowić jednę tylko płaszczyznę. Z powodu że prosta mająca z płaszczyzną dwa punkta spólne, całkiem na niéj leży, stolarze i inni rękodzielnicy próbując czyli deska, kamień lub inny przedmiot jest dokładnie płasko obrobiony, przykładają do téj powiérzchni we wszystkich kierunkach *linijał* (znane narzędzie do prowadzenia czyli kréślenia linij prostych), a skoro tenże wszystkiemi swemi częściami i w każdym kierunku przylega zupełnie do powiérzchni, mówią że jest *dokładnie płaską* t. j. płaszczyzną. Wyobrażenie płaszczyzny może nam jeszcze dać powiérzchnia wody w stawie spokojnie stojącéj i najmniejszym wiatrem niezmarszczonéj.

Tak poznawszy płaszczyznę po jéj znamionach, każdą inną powiérzchnią tych znamion nie mającą, nazywać będziemy powiérzchnią krzywą. Ta znowu być może albo zupełnie albo po części krzywą, a po części płaską lub nareszcie z płaskich złożoną.

Jeżeli przy powiérzchni nie mamy względu na jéj długość lub jéj szérokość, ale tylko na jeden z tych wymiarów, pozostanie naturalnie w myśli naszéj tylko granica powiérzchni w jednym z tychże kierunków. Granica ta jak już wiémy jest liniją prostą lub krzywą.

Miejsce na płaszczyźnie lub w przestrzeni ze wszech stron ograniczone, nazywamy pospolicie *figurą*. A że takie miejsce, jak widzieliśmy, jest rozciągłe wzdłuż, szérz i głąbsz i jest przedmiotem Geometryi, zadaniem więc téj nauki będzie: znaléźć wielkość, położenie, kształt i kierunek figur geometrycznych, tudzież figur zrodzonych ruchem lub obrotem piérwszych.

Miejsce na płaszczyźnie ograniczyć można linijami prostemi lub krzywemi, z tego powodu wszystkie takie figury nazywać będziemy *płaskiemi* (planae), piérwsze *prostokréślnemi* (rectilineae), drugie *krzywokréślnemi* (curvilineae). Przestrzeni nie można ograniczyć tylko powiérzchniami, które także są jak widzieliśmy płaskie lub krzywe, a stąd powstają ciała *graniaste* (polyedra) i *okrągłe* (rotunda).

Ponieważ położenie figury a w szczególności ciała, znajduje się szukając jego odległości od wiadomych punktów lub płaszczyzn,— kształt zaś figury lub ciała zależy od położenia szczególnych jego części,— a ruch jest to zmiana położenia czyli miejsca,— obrot nareszcie jest zmiana kierunku;— wszystkie zaś te wymogi mają za cel wyznaczenie wielkości w przestrzeni, przeto i zadanie Geometryi zwraca się do znalezienia w każdym razie wielkości ilości ciągłéj w przestrzeni.

Dokładne poznanie ciała i jego własności, rozumié się pod względem rozciągłości, zależy od poznanin jego granic czyli powiérzchni, poznanie zaś tych ostatnich wymaga znowu znajomości ich granic czyli linij; nie od ciał zatém poczynać musi Geometryja, ale od ilości najmniéj złożonych t. j. od linij, potém przejść do powiérzchni, a nakoniec od tych do samychże ciał. Lecz widzieliśmy że linija jest albo prosta, albo krzywa, uważając liniją łamaną, jak jest rzeczywiście, za złożoną z prostych, a zatém osobnego gatunku nie stanowiącą, Geometryja przeto zatrudnić się naprzód musi linijami prostemi. A że powiérzchnie ograniczone być mogą piérwszemi lub drugiemi linijami, przeto od prostych linij naturalne jest przejście do powiérzchni czyli figur prostemi ograniczonych czyli do powiérzchni *prostokréślnych*, a potém do powiérzchni krzywemi linijami zamkniętych. Poznawszy własności tak piérwszych jako i drugich powiérzchni, zatrudnia się dopiéro Geometryja ostatecznie ciałami. Nauka o linijach i powiérzchniach płaskich t. j. na płaszczyźnie uważanych, stanowi *Epifaneometryją* (epiphaneometria) zwyczajnie *Planimetryją* nazwana, nauka zaś o ciałach bądźto płaskiemi, bądź krzywemi powiérzchniami ograniczonych, *Stereometryją*. Dwie więc główne części ma Geometryja, z których każda ma swe poddziały. I tak Planimetryja mówi o linijach prostych i figurach takiemiż linijami ograniczonych, potém o linijach krzywych i powiérzchniach, również krzywemi linijami zamkniętych. Stereometryja mówi naprzód o ciałach płaskiemi, a potém krzywemi powiérzchniami ograniczonych. W tym ostatnim poddziale mówi tylko o trzech ciałach okrągłych, które jak to na swojém miejscu zobaczymy, do elementarnéj Geometryi należą.

W każdéj z tych części mówić najprzód będziemy o prawach, według których te ciągłe ilości powstają, a potém o ich wzajemnych stósunkach pochodzących z ich między sobą połączenia. Łącząc ilości ciągłe między sobą, starać się będziemy wyznaczać nietylko ich wielkość, ale też ich położenie i kierunek.

Do dowiedzenia prawd wynikających z uważania ilości ciągłéj, używa Geometryja albo *wykréślenia* (constructio) albo *rachunku* (calculus), albo jednego i drugiego razem. Ponieważ w piérwszym sposobie każda prawda przedstawiona jest zmysłom w osobnym rysunku, dla czego w wysokim stopniu działa na przekonanie nasze, zatém sposób ten jest najwłaściwszym do rozwinięcia zasadniczych twierdzeń Geométryi. Chcąc zaś ogarnąć wszystkie z dowodzoną spokrewnione prawdy, użyć musimy sposobu rachunkowego. A że Geometryja wyprowadza każdą następną prawdę z poprzedzających, na jéj przeto wydobycie łączyć musi z sobą już dowiedzone twierdzenia. W tém zatrudnieniu postępuje się albo sposobem *zbiorowym* (synthesis), albo *rozbiorowym* (analysis). Zbiorowym sposobem postępuje się wtedy, gdy na udowodnienie jakiego twierdzenia zbiéra się już poprzednio dowiedzione a tu swe zastósowanie mające i te się tak z sobą łączy, że twierdzenie będące przedmiotem dowodzenia, jest rzeczywiście wypadkiem tego połączenia. Postępuje się zaś sposobem rozbiorowym (analitycznym), rozkładając rzeczone twierdzenie na części, każdą z tych udowodniając i nareszcie na całość wnioskując, że jeżeli części są prawdziwe i całe twierdzenie takiém być musi, a przeciwnie gdyby części były fałszywe, twierdzenie też fałszywém być musi.

Z tego opisania tak pomocy jako i sposobów w Geometryi używanych jasno się pokazuje, że do wyłożenia początków, wykréślenie ma niezaprzeczoną wyższość nad rachunkiem; ale ten ostatni tak w dokładności jako téż i w ogólności przewyższa tamten; do wyższych więc prawd geometrycznych, należy koniecznie z wykréśleniem łączyć rachunek.

Co do sposobów wykładania prawd geometrycznych tak jeden jako téż i drugi ma swoje zalety, i często jeden bez drugiego obejść się nie może; sądzę jednak, że na sposobie syntetycznym kształtci się umysł do analitycznego, który Geometryją posuwa do najwyższego ogólności stopnia, przedstawiając *zależność* ilości ciągłych między sobą.

W obecném dziełku używać będziemy obu tych sposobów, stósując nabyte w dwóch piérwszych częściach wiadomości rachunkowe do Geometryi. Dla nieprzerywania atoli ciągu naszych rozumowań, wyłożymy naprzód sposobem rysunkowym obie części t. j. Planimetryją i Stereometryją, czyli rozwiążemy piérwsze zadanie Geometryi, jak się wyznacza wielkość ilości rozciągłych. Potém przejdziemy do sposobu rachunkowego, pokazując jak się wyznacza położenie i kierunek tychże ilości.

CZĘŚĆ I.

Epifaneometryja (Planimetryja).

ROZDZIAŁ I.

O linijach prostych i wzajemném ich względem siebie położeniu.

§. 1.

Jak o każdéj ilości saméj w sobie uważanéj nic więcéj powiedzieć nie można, tylko że jest *tém* i *taką*, tak téż o jednéj linii prostéj więcéj nad to co we wstępie powiedzieliśmy, ani wiémy ani powiedzieć możemy; chyba że obrawszy na jéj kierunku dwa punkta, już tym sposobem z nieskończonéj długość jéj ograniczamy. Oznaczoną długość zwykliśmy mianować przez wymienienie jéj końców, na których zwyczajnie głoski abecadła kładziemy. A tak zwyczajnie mówimy: prosta AB, Aa, Ab, ab, bB, i t. d. *fig.* 5 albo, długość AB, Aa, Ab, i t. d. Aby oznaczyć kierunek prostéj, dosyć jest wymienić dwa którekolwiek na niéj leżące punkta. Według tego Aa, Ab, AB, ab, aB, bB, oznaczają jednę i tęż samę prostą AB.

Przy wyznaczaniu długości linii prostéj nie dość jest mieć wzgląd na jéj stósunek do innéj długości, którą *jednostką* albo *miarą* zwać będziemy, ale jeszcze uważać potrzeba i na jéj kierunek. Ponieważ kierunki są nieskończenie różne, a każdy ma sobie wprost przeciwny, przeciwieństwo to koniecznie być musi względem jakiegoś punktu od którego iść można na téjże saméj prostéj w jednym lub drugim kierunku, w prawo lub w lewo, naprzód lub w tył, które kierunki są rzeczywiście wprost sobie przeciwnemi. Punkt ze względu którego przeciwne sobie kierunki uważamy, nazywać zwykliśmy *początkiem* (origo). Jeżeli na tymże samym kierunku znajduje się jaki przedmiot np. po prawéj ręce albo naprzód, tedy postępując w prawo lub naprzód, zbliżać się, idąc zaś w lewo lub wtył, oddalać się będziemy od tegoż przedmiotu; zbliżanie się więc i oddalanie od jakiego przedmiotu, są kierunkami wprost sobie przeciwnemi i dają ile mi się zdaje, wraz z powyższém w prawo i lewo bardzo naturalne pojęcie kierunków sobie przeciwnych. Oznaczywszy kierunek w prawo albo naprzód znakiem (+), kierunek w lewo lub wtył znakiem (—) oznaczyć musimy i przeciwnie; temi bowiem dwoma znakami oznaczaliśmy także w Arytmetyce dwie sobie przeciwne ilości. Mieć więc będziemy i w Geometryi ilości dodatne i odjemne, wyrażające dwa wprost sobie przeciwne kierunki, jak to już we wstępie do Arytmetyki widzieliśmy, a w ciągu obecnéj części liczne przykłady różnych kierunków napotkamy.

§. 2.

Porównywając dwie proste między sobą, ponieważ każda z nich jest tylko długością i kierunkiem, więc téż w tych tylko cechach różnić się od siebie mogą. Co dopiéro powiedzieliśmy, że długość prostéj wtedy tylko zajmować może naszą uwagę, kiedy ją dwoma punktami ograniczamy, inaczéj bowiem w obu kierunkach dowolnie przedłużoną być może. Wszelkie mierzenie jest porównywanie znanéj ilości z nieznaną; jeżeli więc chcemy zmierzyć czyli poznać długość prostéj ograniczonéj, do tego inaczéj przyjść nie możemy, tylko biorąc dobrze nam znajomą lub téż dowolną długość czyli inną prostą i tę przykładając do prostéj mierzyć się mającéj. Tym więc sposobem mamy do czynienia z dwiema prostemi. Chcąc porównać dwie proste AB i CD *fig. 6* między sobą we względzie ich długości, co nie znaczy co innego, tylko że chcemy podać ile razy jedna jest dłuższą od drugiéj, czyli wiele razy dłuższa AB mieści w sobie krótszą CD, tak postępujemy: krótszą liniją za pomocą cyrkla przenosimy i odcinamy na dłuższéj tyle razy ile się da np. 3razy; jeżeli z dłuższéj prostéj nic się nie zostaje, czyli jeżeli CD mieści się w AB zupełnie 3razy, powiémy wtedy że prosta AB jest

3razy dłuższą niż CD, a w takim razie krótsza CD może służyć za miarę dla AB, i jeżeli CD jest znajomą długością np. sążniem, łokciem, stopą i t. d., długość AB znajdziemy téż w znajomych miarach czyli jednostkach. Jeżeli zaś CD nie jest żadną znajomą miarą ale długością dowolną, tedy chociaż CD nie przestaje w obecnym przypadku być miarą prostéj AB, wszelako tyle tylko z tego porównania wnieść możemy, że AB jest 3razy dłuższą niż CD, nie wiedząc nic o jéj długości.

Gdyby po odcięciu prostéj CD na AB 3razy, pozostał się jeszcze kawałek EB, powiedzielibyśmy że $AB = 3CD + EB$. Tę pozostałą długość EB przenosimy na CD znowu tyle razy ile się da, np. raz i zostaje kawałek FD, zatém $CD = EB + FD$. Daléj ten ostatni kawałek FD przenosi się na poprzednią resztę EB tyle razy ile się znowu da, np. 3razy i zostaje GB, tedy podobnież powiémy że $EB = 3FD + GB$.

Postąpiwszy nareszcie z pozostałym kawałkiem GB względem FD tymże samym sposobem, przypuśćmy że się zupełnie mieści 2razy, tedy nasze porównywanie tym sposobem już skończone, bo mamy: $FD = 2GB$

A że

$EB = 3FD + GB$ więc $EB = 6GB + GB$ czyli $EB = 7GB$

Lecz

$CD = EB + FD$ więc $CD = 7GB + 2GB$ czyli $CD = 9GB$

Nareszcie

$AB = 3CD + EB$ więc $AB = 27GB + 7GB$ czyli $AB = 34GB$

Wyrażenie to dwóch długości AB i CD znaczy, iż dłuższa AB mieści w sobie prostą GB 34, a krótsza CD 9razy. Jeżeliby więc GB było np. calem albo inną znajomą miarą, powiedzielibyśmy że prosta AB zamyka 34, zaś CD 9 cali lub innych miar. Jeżeli zaś GB żadnéj ze znajomych miar nie znaczy, uważaną tu wszelako będzie zawsze jako taka która dokładnie t. j. bez pozostawienia reszty, mierzy tak AB jako i CD. Taką długość spólną dwom lub więcéj prostym nazywać będziemy *jednostką* lub *spólną miarą*, a mianowicie *spólną największą miarą* (maxima communis mensura).

Same proste w takim razie nazywać się będą *spółmiernemi* (commensurabiles), a powyższe postępowanie *szukaniem spólnéj największéj miary.* Że ta spólna miara jest największą jaką proste AB i CD mają, przekonywa nas o tém samo postępowanie. Chcąc poznać stósunek dwóch długości AB i CD mamy:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{34GB}{9GB}=\frac{34}{9}$$

t. j. stósunek tych długości jest wyrażony w liczbach, jak téż natura rzeczy wymaga.

Uważać tu potrzeba, że otrzymany stósunek w liczbie ułamkowéj jest zawsze takim, iż dwa jego wyrazy są liczbami pierwszemi między sobą. Gdyby bowiem było inaczéj t. j. gdyby licznik i mianownik znalezionego stósunku, miały jakiego spólnego dzielnika, tedy wyraziwszy ogólnie ów stósunek przez $\frac{p}{q}$ a spólną największą miarę przez δ mielibyśmy w naszym przypadku $\delta=GB$, $AB=p\delta$, $CD=q\delta$ a następnie $\frac{AB}{CD}=\frac{p\delta}{q\delta}=\frac{p}{q}$. Gdyby więc p i q miały jakiego spólnego dzielnika m, mielibyśmy téż $AB=pm\delta$, $CD=qm\delta$ a w takim razie nie δ ale $m\delta$ byłoby spólną największą miarą dwóch prostych AB i CD, co się sprzeciwia tak definicyi jako téż i postępowaniu naszemu w szukaniu téj spólnéj największéj miary. Często wyrażając długość prostéj piszemy ją przez skrócenie w liczbach tak np. $AB=34$, $CD=9$; skoro się jednak z uwagą nad temi wyrażeniami zastanowimy, dostrzeżemy iż są niedorzeczne chociaż prawdziwe. Lubo bowiem prosta AB zamyka rzeczywiście 34 takich części jakich CD zamyka 9, pisząc atoli w ten sposób, wyrażamy, że linija AB równa się liczbie 34, co jest wielką niedorzecznością, bo różnorodne ilości nie tylko równe, ale nawet żadnego stósunku między sobą mieć nie mogą. Dla tego téż jeżeli się kiedy tego sposobu pisania używa, pamiętać zawsze potrzeba, że przy liczbie domyślna jest długość wzięta za miarę czyli jednostkę.

Jeszcze i na to nie zawadzi zwrócić uwagę, że przez mierzenie, zamieniliśmy każdą z powyższych dwóch prostych na ilość krotną, co nas dowodnie przekonać może, iż każda ilość ciągła sposobem poprzedzającemu podobnym lub innym mierzona, przechodzi na ilość krotną, kiedy odwrotny przypadek nigdy miejsca mieć nie może.

§. 3.

Jeżeli postępowanie w szukaniu spólnéj największéj miary dwóch prostych dobrze rozważymy, dostrzeżemy bez trudności, że zupełnie odpowiada szukaniu spólnego największego dzielnika dwóch liczb całkowitych w Arytmetyce. Jedyna tylko zachodzi różnica w wypadku, iż działanie arytmetyczne jakkolwiekby było długiém, kończy się nareszcie w każdym przypadku, gdy przeciwnie w szukaniu spólnéj największéj miary dwóch prostych, nie rzadko wydarzyć się może, iż działanie przenoszenia pozostałego kawałka na poprzedzający, nigdy się nie skończy (rozumié się nie mechaniczne ale umysłowe działanie). W Arytmetyce bowiem koniecznie przyjdziemy kiedyś do reszty zero, gdy w działaniu geometryczném może być przypadek iż nigdy takiéj reszty nie otrzymamy. Cóż za przyczyna téj osobliwości? Nie inna zaiste tylko ta, że, jak wiadomo, w działaniu arytmetyczném t. j. w dzieleniu, zawsze większéj przez mniejszą liczbę, konieczny warunek dobrego ilorazu jest, iżby reszta z odjęcia cząstkowego iloczynu z ilorazu przez dzielnik otrzymanego, wypadła przynajmniéj o 1 mniejsza od dzielnika; tu więc reszty mają swoje granice oznaczone, których nigdy przestąpić nie mogą; w działaniu zaś geometryczném nie masz takich granic, bo się oznaczyć nie dadzą; tu bowiem tak dzielnik jako téż i dzielna są ilościami ciągłemi a zatém bez końca podzielnemi. Z tego powodu, lubo tak w postępowaniu geometryczném jak i w arytmetyczném, każda następna reszta będzie rzeczywiście mniejszą od poprzedzającéj, atoli w Arytmetyce dojdziemy kiedyś do reszty 1, następna zaś koniecznie musi być zero, bo 1 jest spólną miarą wszystkich liczb całkowitych, sama nie będąc przez żadną podzielna, gdy tym czasem przy linijach nie przyjdziemy nigdy do reszty któréjby już daléj dzielić nie można; jest to bowiem własnością ilości ciągłych, iż bez końca dzielone być mogą, gdyż nie mają jednostki zasadniczéj jak liczby całkowite. Jeżeli się więc taki przypadek wydarzy, nie będziemy mogli podać dokładnie stósunku dwóch długości jak nam się wyżéj udało. Gdy jednak posuwając coraz daléj działanie, każda następna reszta staje się mniejsza od poprzedzającéj, zatém możemy się tym sposobem dowolnie zbliżyć do prawdziwego stósunku; bo ostatecznie spólna największa miara mniéj się będzie różnić od prawdziwéj, niż wszelka jakkolwiek mała ilość. Możemy nawet, używając ułamków ciągłych, ocenić błąd jaki popełniamy biorąc jednę z reszt za spólną największą miarę. Taki stósunek nazywamy w Arytmetyce jak wiadomo *niewymiernym* (irrationalis), w Geometryi zaś dwie podobne proste, nazywają się pospolicie *niespólmiernemi* (incommensurabiles), bo rzeczywiście nie mają żadnéj spólnéj miary.

Wszystko dotąd o dwóch prostych powiedziane, prowadzi nas do téj prawdy, iż aby długości pod rachunek podciągnąć można, wyrazić je potrzeba w liczbach, czyli przez mierzenie zamienić na ilości krotne. Że na ten koniec obiera się pewną znaną lub dowolną długość za jednostkę i z tą porównywa się długości pod rachnek podciągnąć się mające, a w takim przypadku mieć będziemy do czynienia z samemi stósunkami czyli liczbami; bo każda liczba wyrażać nam będzie stósunek długości do obranéj jednostki. Tak w §. 2. Gdyby CD mieściła się zupełnie w AB np. m razy, moglibyśmy napisać $AB = m.CD = m.1$, biorąc CD za jednostkę, albo krócéj $AB = m$ t. j. $\frac{AB}{CD} = \frac{AB}{1} = m$, gdzie liczba *m*, jak naocznie widzimy, wyraża stósunek długości AB do CD za jednostkę obranéj. Jeszcze atoli raz powtarzam, iż pisząc $AB = m$, pamiętać potrzeba iż to tylko jest sposób skrócony pisania, inaczéj bowiem wpadlibyśmy na tę niedorzeczność, iż długość równać się może liczbie.

§. 4.

Ponieważ o dwóch prostych razem uważanych, we względzie ich długości nic więcéj powiedzieć nie można, przeto przystąpmy do drugiéj cechy, mogącéj proste od siebie różnić t. j. do kierunku; w téj atoli części Geometryi rozumieć zawsze będziemy proste na jednéjże płaszczyznie leżące.

Dwie proste mogą tylko mieć albo tenże sam kierunek, albo mniéj lub więcéj od niego zbaczać. Dwie proste na jednéj płaszczyznie leżące i mające tenże sam kierunek, nazwiemy *równoległemi* (parallelae); a że proste, skoro ich długości nie oznaczamy, czyli nie ograniczamy, uważamy w obu kierunkach do nieskończoności ciągnące się, przeto będąc w całym swym ciągu jednegoż kierunku, nigdzie się z sobą spotkać nie mogą. Jeżeli zaś dwie proste mają różne kierunki, te w nieskończenie rozmaity sposób zmieniać mogą. O takich prostych mówić będziemy że do siebie są *nachylone.* Pod wyrazem *nachylenie,* nie co innego wystawić sobie możemy, jak *zbliżanie się* (convergentia) do spotkania czyli przecięcia się z sobą w jednym kierunku; w przeciwnym więc kierunku musi być naturalnie ich *oddalanie się* od siebie (divergentia). Nachylenie do siebie dwóch prostych jest rzeczywiście większém lub mniejszém ich zboczeniem od tegoż samego kierunku; wyrażenia więc: *różność kierunków, nachylenie* i *przecięcie się* dwóch prostych, jedno i toż samo znaczą.

Skoro dwie proste AB i AC *fig.* 7. zbaczają od jednegoż kierunku, a jeszcze kierunek jednéj z nich np. AB weźmiemy za stały, tedy druga AC różnić się koniecznie musi o pewną ilość od kierunku prostéj AB. Tę tedy różnicę ich kierunków nazywamy *kątem* (angulus). Takie dwie proste nieskończonéj długości pomyślane, przetną się z sobą i to w jednym tylko punkcie; gdyby bowiem miały dwa przynajmniéj punkta spólne, jużby, według tego co we wstępie powiedzieliśmy, były jedną i tąż samą prostą. Otwartość więc prostych AB i AC która różnicę ich kierunków oznacza, daje nam jaśniejsze pojęcie kąta, jaki te proste czynią między sobą. Same proste AB i AC zowiemy *ramionami* (crura), a punkt A w którym się przecinają, *wiérzchołkiem kąta* (vertex anguli). A że kierunki prostych kąt czyniących nie zależą od ich wielkości czyli długości, bo te tak w najmniejszych cząstkach, jako téż i w nieskończonych prostych są zawsze jednakowe, przeto wypada stąd, iż wielkość kąta całkiem nie żależy od długości jego ramion, i że jedynie za zmianą kierunku prostych kąt tworzących zmienia się téż kąt. Kąt oznacza się i czyta trzema głoskami kładąc dwie na kierunkach ramion a trzecią w wierzchołku. W czytaniu, głoska u wiérzchołka stojąca kładzie się zawsze w środku, tak np. czyta się kąt BAC lub CAB. Jeżeli przy punkcie A nie masz więcéj kątów oprócz kąta BAC, można go téż przeczytać wymawiając tylko głoskę stojącą w wiérzchołku; jeżeli zaś przy tymże samym punkcie jest więcéj kątów, można jednak i w takim przypadku kąt oznaczyć jedną głoską kładąc takową między jego ramionami w bliskości wiérzchołka. Tak np. powyższy kąt można naznaczyć i przeczytać jak wyżéj BAC, albo A, albo nareszcie α.

§. 5.

Przypuściwszy że ramię AC *Fig.* 8 ma położenie ramienia AB, w takim razie dwie te proste stanowić będą jednę AB i żadnego kąta tworzyć nie będą, albo jak często mówimy czynią między sobą kąt zero. A skoro pomyślimy że prosta AC, obracając się około punktu A, zacznie coraz więcéj zbaczać od kierunku prostéj AB, kąt jaki tworzą między sobą coraz bardziéj rosnąć będzie. Tak np. jeżeli prosta AC weźmie położenie względem AB takie jak jest na figurze, kąt jaki czynią między sobą jest BAC; przyszedłszy w swym obrocie do położenia AC′, AC″, AC‴, i t. d. ponieważ przez te nowe położenia prostéj AC, zmienił się jéj kierunek względem AB, zmienił się więc i kąt jaki czynią między sobą, bo ten jest różnicą ich kierunków. Tak kąt BAC′ > BAC, bo różnica kierunków prostych AB i AC′ jest większą niż różnica kierunków AB i AC. Podobnież kąt BAC″ > BAC′ a tém bardziéj BAC″ > BAC, bo różnica kierunków AB i AC'' jest większą niż AB i AC' a tém bardziéj większą niż AB i AC i t. d. Przypuszczając iż prosta AC obraca się w przeciwnym kierunku około punktu A t. j. w stronę ku B i bierze położenie AD, AD', w takim razie kąt BAC zmieniać się także będzie, ale w przeciwném piérwszemu rozumieniu t. j. jak w piérwszym razie zmieniając się rósł, tak tu maleć będzie. Skoro więc kąt, jaki dwie proste czynią z sobą, może się powiększać lub zmniejszać nie tracąc nic z swéj natury, zatém przekonywamy się, że kąt jest ilością. A jeżeli jeszcze zgodzimy się przyjąć prostą AB za kierunek względem którego inne kierunki uważamy, tudzież kierunek obrotu prostéj AC od AB w stronę ku C, C', C'', i t. d. przyjmiemy za kierunek w którym kąty rosną, przeciwny temu t. j. w stronę ku $C_{,}$, $C_{,,}$, $C_{,,,}$, i t. d. będzie kierunkiem w którym kąty maleją. Naocznie bowiem widzimy, iż jeżeli ramię AC weźmie położenie jak AD, AD', i t. d. kąt $BAD < BAC$, kąt $BAD' < BAD$ a tém bardziéj $BAD' < BAC$. Gdy ramię AC w obrocie swoim przyjdzie do położenia AB, kąt będzie $= 0$. Niech prosta AC nie wstrzymując się w swoim obrocie, przyjdzie do położenia $AC_{,}$, tedy kąt $BAC_{,}$ ze względu prostéj AB, którą zupełnie tak sobie wystawić należy jak ów punkt na prostéj któryśmy początkiem nazwali, jest rzeczywiście kątem w przeciwnym piérwszemu kierunkowi uważanym. A że przeciwne kierunki zgodziliśmy się wyrażać dwoma znakami (+) i (—), przeto jeżeli piérwszym kątom przyznamy znak (+), drugie jako leżące z przeciwnéj strony prostéj AB, oznaczymy drugim z rzeczonych znaków t. j. (—) i tym sposobem mieć będziemy kąty dodatne i odjemne jako ilości.

§. 6.

Jeżeli dwie różnego kierunku proste AB i CD *Fig.* 9, uważać będziemy jako ciągnące się bez końca, te przeciąwszy się z sobą w punkcie E, uczynią naturalnie dwa kąty BEC i AEC po jednéj, a dwa inne BED i AED po drugiéj stronie prostéj AB. Zastanówmy się tylko nad dwoma piérwszemi. Ponieważ te kąty powstają z różnicy kierunku prostéj EC względem AB, wniesiemy stąd, że ile razy się dwie proste przecinają, powstają nam zawsze dwa różne kąty, między któremi z tego powodu zachodzić koniecznie musi pewien związek; związek ten odnosić się jedynie może do ich wielkości. Jakoż dwa te kąty mogą tylko być równe lub nie równe. W przypadku nierówności, zawsze jeden jest naturalnie mniejszy, drugi większy; mniejszy nazywa się *kątem ostrym* (angulus acutus), większy zaś *rozwartym* (obtusus). Ale widzieliśmy wyżéj, że odsuwając czyli raczéj obracając ramię EC koło punktu E, czyli co na jedno wychodzi rozwierając coraz bardziéj ramiona kąta BEC, kąt ten rosnąć, a w naturalném następstwie kąt AEC maleć będzie, bo jak powiedzieliśmy z tamtym jest w związku. Jest więc koniecznie jedno położenie, ale tylko jedno, dla ramienia EC takie jak EF, że oba kąty BEF i AEF są między sobą równe. Takie kąty nazywają się *prostemi* (recti), a położenie prostéj EF względem AB *prostopadłe* lub *pionowe;* samę zaś prostą EF takie położenie względem AB mającą, nazywać będziemy *prostopadłą* lub *pionową* (perpendicularis), a punkt E w którym spotyka prostą AB, nazwiemy *spodkiem prostopadłéj*. Ogólniéj nazywamy punkt E *rzutem* (projectio) któregokolwiek punktu na prostopadłéj EF wziętego, jak jest np. punkt F. Nawzajem téż prosta AB jest prostopadłą do EF, bo czyni z nią dwa kąty po jednéjże jéj stronie leżące równe. Każdą inną prostą, różne od téj ostatniéj położenie względem AB mającą, nazwiemy *pochyłą* (obliqua). Gdyby ramię EC jeszcze daléj swój obrót odbywało i przyszło do położenia EG, znowu kąty staną się nierówne ale przeciwnie bo kąt BEC będąc mniejszym od kąta AEC, przeszedłszy na kąt BEG, stał się teraz większym niż kąt AEG, który taż sama prosta EG tworzy z prostą AB. Skąd się pokazuje, że kąt ostry zawsze jest mniejszy od prostego, a rozwarty większy. Jeżeli się dwom takim kątom jak BEC i AEC, albo BEF i AEF, lub nareszcie BEG i AEG z uwagą przypatrzymy, dostrzeżemy zaraz, że jedno ramię (EC, EF, EG) mają spólne, drugie zaś ich ramiona (EB, EA) leżą w w jednymże kierunku; oprócz tego mają oba wiérzchołek w tymże samym punkcie. Takie to dwa kąty nazywać będziemy *przyległemi* (anguli adjacentes v. deinceps positi). *Kąty więc przyległe są te, które mają wiérzchołek spólny w jednymże punkcie, ramię jedno spólne, a drugie ramię jednego, jest przedłużeniem drugiego ramienia kąta drugiego* czyli oba te ramiona leżą na jednéj prostéj.

Z tego co się o kątach przyleglych powiedziało, łatwo sobie utworzyć wniosek, że tylko kąty proste są zawsze jedne i też same t. j. sobie równe, kąty zaś tak ostre jako i rozwarte nieskończenie być mogą różne.

Samo spojrzenie na figurę daje nam poznać, że cokolwiek powiedzieliśmy o kątach BEC i AEC, wszystko to rozumié się także o kątach BED i AED z drugiéj strony prostéj AB leżących. Przypatrzywszy się dobrze tym cztérem kątom, zaraz dostrzeżemy, że ramiona każdego z nich są przedłużeniami ramion jednego z trzech pozostałych kątów. I tak: ramię EA jest przedłużeniem ramienia BE, ramię ED przedłużeniem ramienia CE, a nareszcie EB, przedłużeniem ramienia AE, a EC przedłużeniem ramienia DE. Skoro się więc dwie proste przecinają, tworzą zawsze cztéry kąty, z których dwa a dwa takie, iż ramiona jednego są przedłużeniami ramion drugiego kąta, jak są kąty BEC i AED, tudzież AEC i BED, nazywać będziemy *kątami wiérzchołkiem przeciwległemi* (anguli ad verticem oppositi), albo krócéj: *kątami wiérzchołkowemi* (a. verticales). Tak tedy dwie proste przecinające się, tworzą dwie pary kątów przyległych i dwie pary kątów wiérzchołkowych.

§. 7.

Widzieliśmy że kąty przyległe są w takim z sobą związku, że zawsze jeden jest mniejszy drugi większy. Związek ten może mieć nieskończenie wiele zmian, nie co do istoty ale co do wielkości każdego z kątów; jeden tylko jest przypadek, jak to już także widzieliśmy, gdzie te kąty są między sobą równe t. j. proste. Pomimo tak licznych zmian jakim oba kąty podlegać mogą, jest wszelako jedno znamię z którego znając jeden z nich, drugi zaraz poznamy. Tém łatwo dostrzeżoném znamieniem jest to, że *oba kąty przyległe czynią razem dwa kąty proste.* Skąd wypada, że jeżeli dwa kąty, mając jedno ramię spólne, czynią razem dwa kąty proste, drugie ich ramiona muszą być w linii prostéj; tudzież że dwa kąty są sobie równe, jeżeli im przyległe są także między sobą równe, bo każdy z przyległym sobie, czyni dwa kąty proste. Dlatego to dwa kąty wiérzchołkowe są sobie równe, gdyż na figurze poprzedzającéj kąt BEC ma sobie przyległy CEA, jak równie kąt AED ma sobie przyległy tenże sam kąt CEA. Co do drugiéj pary kątów wiérzchołkowych t. j. kątów AEC i BED, mamy tenże sam przypadek, że kąt AEC ma sobie przyległy kąt BEC i tenże sam kąt jest przyległym kąta BED; przeto AEC musi być równym kątowi BED, bo każdy z nich czyni z tymże samym kątem dwa kąty proste. *Kąty przeto wiérzchołkowe zawsze sobie są równe.*

Z tego co w tym §. powiedzieliśmy o kątach przyległych i wiérzchołkowych, wypada naturalny wniosek, iż narysowawszy ilekolwiek kątów po jednéj stronie prostéj AB lecz tak, iżby wszystkie miały wiérzchołek spólny w jednymże punkcie E, kąty te razem wzięte nie więcéj uczynią jak dwa kąty proste. A że po drugiéj stronie téjże prostéj jest toż samo, więc około jednego punktu jest nie więcéj, ani mniéj, jak cztéry kąty proste, t. j. narysowawszy tyle kątów ile się podoba, lecz tak iżby wszystkie miały wiérzchołek spólny, summa ich koniecznie czyni cztéry kąty proste. Bo przedłużywszy którekolwiek ramię nieograniczenie, znajdziemy się zawsze w tym przypadku, że po jednéj stronie tak przedłużonego ramienia summa wszystkich kątów czynić będzie dwa, a po drugiéj znowu dwa kąty proste.

§. 8.

Przekonajmy się teraz, że z kątami tak jak z ilościami wszystkie działania arytmetyczne odbywać można. Niech kąty AOB, BOC, COD, DOE i EOF *Fig. 10* będą między sobą równe, tedy ponieważ

$$AOC = AOB + BOC = 2AOB$$
$$AOD = AOC + COD = 2AOB + COD = 3AOB$$
$$AOE = AOD + DOE = 3AOB + DOE = 4AOB$$
$$AOF = AOE + EOF = 4AOB + EOF = 5AOB$$
i t. d.

przeto widzimy że każde dwa kąty mające jedno ramię spólne i wiérzchołek w jednymże punkcie, jak np. dwa kąty AOB i BOC, mające ramię OB spólne i wiérzchołek w punkcie O, można do siebie dodać. Można téż podobne kąty od siebie odjąć; bo wziąwszy dwa kąty AOC i BOC mające ramię OC spólne, jeżeli sobie wystawimy że toż spólne ramię OC obraca się około punktu O zbliżając się do OA, skoro w obrocie swoim weźmie położenie prostéj OB czyli spólnego ich ramienia, kąt AOC zamieni się na AOB czyli stanie się różnicą między AOC i BOC. Daléj widzimy że np. kąt AOE jest cztéry razy większy od kąta AOB, i że tenże kąt AOB jest $1/5$ kąta AOF czyli $AOE = 4 \times AOB$, zaś $AOB = \frac{AOF}{5}$. Stąd wypada, że kiedy sobie zawsze pomyśleć można kąt 2, 3, 4 . . . razy większy niż kąt dany, można téż wzajemnie pomyślić sobie kąt 2, 3, 4 . . . razy mniejszy, t. j. że każdy kąt można tak mnożyć, jako téż i dzielić.

Jeżeli dwóch kątów chcemy znaléść stósunek, postępowanie jest zupełnie podobne, jak przy linijach prostych, t. j. chcąc znaléść stósunek dwóch kątów AOB i *aob*, *Fig 11.* Kąt mniejszy *aob* przenosimy na większy układając go w ten sposób, iżby wiérzchołki *o* i O przypadły na siebie, tudzież ramię *oa* padło na ramię OA; w takim razie ramię *ob* weźmie położenie Ob'; a zdjąwszy ten kąt i położywszy go drugi raz tak, iżby zachowując tenże sam wiérzchołek, ramię *oa* padło na Ob', ramię *ob* w tém nowém położeniu weźmie kierunek prostéj Ob''; powtórzywszy takież samo przeniesienie, ramię *ob* pójdzie w kierunku Ob'''; kąt więc AOB zamyka kąt mniejszy *aob* trzy razy i pozostawia resztę $b'''OB$. Z tą resztą postąpiwszy tymże samym sposobem, przenosząc ją podobnież na kąt *aob* i układając tak, żeby Ob''' przypadło na *oa* i punkt O na *o*, ramię OB niech weźmie położenie prostéj $ob_{,}$, a przeniosłszy jeszcze raz tenże kąt, niech w tém drugiém położeniu ramię OB padnie na ramię *ob*; w takim razie, według tego co było wyżéj, będzie

$$aob = 2b'''\mathrm{OB}$$

$$\mathrm{AOB} = 3aob + b'''\mathrm{OB} = 6b'''\mathrm{OB} + b'''\mathrm{OB} = 7b'''\mathrm{OB}$$

skąd wniesiemy że kąt b'''OB jest *spólną największą miarą* kątów AOB i *aob*, a ich stósunek jest $\frac{\mathrm{AOB}}{aob} = \frac{7b'''\mathrm{OB}}{2b'''\mathrm{OB}} = \frac{7}{2}$. Kąt ten b'''OB uważać tu można za jednostkę kątową. Gdyby *aob* mieścił się był dokładnie w AOB np. cztéry razy, kąt ten *aob* byłby sam spólną miarą. Kąty takie jak tu AOB i *aob*, nazywają się także *spółmiernemi*; być bowiem może przypadek, że posuwając jak najdaléj powyższe postępowanie, nie dojdziemy do spólnéj miary, a wtedy dwa kąty będą *niespółmierne*.

Uwaga. Skoro się w dalszym ciągu przekonamy, że łuki okręgu koła są miarami kątów, poznamy także że działanie z kątami przenoszenia jednych na drugie zastąpionem być może przez daleko łatwiejsze działanie z łukami też kąty mierzącemi.

§. 9.

W piérwszych trzech §§. poznaliśmy jeden gatunek ilości ciągłych t. j. długości czyli linije i widzieliśmy iż chcąc takowe pod rachunek podciągnąć, potrzeba było pewną znajomą lub dowolną długość obrać za jednostkę i z tą porównać wszystkie inne długości, skąd nam wypadły ich stósunki do jednostki czyli liczby, z któremi wszystkie rachunki wykonać możemy. W następnych §§. poznaliśmy znowu nowy gatunek ilości t. j. kąty. Aby kąty pod rachunek podciągnąć, należy je także wyrazić w liczbach. Na ten koniec obrać potrzeba jednostkę, i z tą wszystkie kąty porównać, z czego otrzymamy ich stósunki do jednostki czyli liczby. A jako przy mierzeniu długości jednostka była także długą czyli liniją, tak téż do mierzenia kątów jednostka być musi tegoż samego gatunku t. j. kątową czyli kątem. A że w §. 6 przekonaliśmy się, że tak kąty ostre, jako téż i rozwarte mogą być nieskończenie różne, i że tylko kąty proste są stale między sobą równe, zatém najnaturalniejszą jest rzeczą taki kąt stały a nie inny obrać za *jednostkę kątową*. Porównywając więc kąty ostre i rozwarte z prostym, starać się potrzeba podać w liczbach jaką częścią jest każdy z nich względem kąta prostego. Dla tém łatwiejszego atoli porównywania i prędkiego dostrzeżenia stósunku dwóch lub więcéj kątów, podzielono kąt prosty na 90 części równych nazwanych *stopniami*; każdy stopień na 60 części równych i te nazwano *minutami* a nareszcie każdą minutę na 60 części także równych, które się *sekundami* nazywają. Dalsze jeszcze drobniejsze podziały, które jako w ilości ciągłéj, do nieskończoności posunąć można, dla nadzwyczajnéj swéj drobności nie są w używaniu. Chcąc według téj ugody oznaczyć wielkość kąta, dosyć jest wyrazić go w stopniach, minutach i sekundach, a czasem dziesiętnych i setnych częściach sekundy. Z takiego wyrażenia kąta przez liczbę stopni, minut i sekund, zaraz sądzić można o jego wielkości czyli stósunku do jednostki t. j. do kąta prostego. Dla oszczędzenia tak miejsca, jako téż i czasu w pisaniu, znaczymy stopnie przez (^{0}), minuty ($'$) a sekundy ($''$) u góry z prawéj strony tak stopni, jako téż minut i sekund położone. Tak 47^0, $53'$, $25''$ czyta się 47 stopni, 53 minuty i 25 sekund. Według téjże ugody kąty przyległe czynią 180^0, w około jednego punktu jest 360^0. Kąt prosty często i pospolicie znaczą autorowie przez głoskę R (rectus) więc $R=90^0$, $180^0=2R$, $360^0=4R$.

Każdy kąt miejszy od 2R czyli od 180^0 nazywa się *wklęsłym* (concavus), większy zaś *wypukłym* (convexus). Z dwóch kątów przyległych, każdy nazywa się *spełnieniem* drugiego (supplementum) do dwóch kątów prostych, a w ogólności dwa kąty są spełnieniem jeden drugiego, jeżeli w summę wzięte czynią 180^0 czyli 2R. Jeżeli zaś dwa kąty w summę wzięte czynią 90° czyli kąt prosty, natenczas jeden drugiego nazywa się *dopełnieniem* (complementum).

§. 10.

Kiedy dwie proste przecinające się czynią kąt, który jest różnicą ich kierunków, zatém proste równoległe czyli mające tenże sam kierunek nigdzie się z sobą przecinać a następnie tworzyć kąta nie mogą, jak to już w §. 4 wspomnieliśmy.

Jeżeli dwie takie proste AB i CD *Fig.* 12 przetniemy trzecią EF, którą *sieczną* (secans) zwać będziemy, powstają nam z tego przecięcia różne a bardzo ważne kąty, które dla téj ważności mają nawet szczególne swe nazwy. A *naprzód* wszystkie kąty po jednéj stronie siecznéj leżące, jak są kąty FHB, BHE, FGD i DGE, nazywają się *jednostronne* (anguli ad eandem partem positi); toż samo ma się rozumieć o kątach z drugiéj strony siecznéj. 2°. Takie kąty jak BHE i DGF, tudzież AHE i CGF, nazywają się *wewnętrznemi* (a. interni) jako leżące wewnątrz równoległych. 3°. Kąty FHB i DGE, jako téż AHF i CGE nazywamy *zewnętrznemi* (a. externi) bo leżą zewnątrz równoległych. 4°. Dwa kąty wewnętrzne lub zewnętrzne, jeden z jednéj a drugi z drugiéj strony siecznéj, jak są kąty BHE i CGF, albo AHE i DGF, tudzież BHF i CGE lub AHF i DGE, zowiemy kątami *naprzemianległemi* (a. alterni) a mianowicie piérwsze dwie pary są *naprzemianległe wewnętrzne* (alterni interni), drugie zaś dwie pary *naprzemianległe zewnętrzne* (alterni externi). 5°. Dwa kąty jednostronne, jeden wewnętrzny a drugi zewnętrzny naprzeciwko siebie położone, jak są kąty BHF i DGF, albo BHE i DGE, jak również kąty AHF i CGF albo AHE i CGE, zowią się kątami *odpowiadającemi sobie* (a. correspondentes v. oppositi).

Twierdzenie. *Jeżeli dwie proste równoległe przecina trzecia, tedy czyni z niemi 1° kąty jednostronne odpowiadające sobie równe; 2° kąty naprzemianległe tak wewnętrzne między sobą, jako i zewnętrzne także między sobą równe; 3° summę kątów jednostronnych wewnętrznych, jako téż summę kątów* *jednostronnych zewnętrznych, każdą równą dwom kątom prostym. I nawzajem, jeżeli którakolwiek z trzech tych własności będzie dowiedziona, dwie proste będą równoległe.*

Niech prosta EF przecina dwie równoległe AB i CD w punktach H i G, tedy z tego przecięcia powstają kąty jak je co dopiéro wymieniliśmy; mamy naprzód dowiéść że którekolwiek dwa kąty jednostronne odpowiadające sobie są równe.

Ponieważ proste AB i CD mają tenże sam kierunek, bo z założenia są równoległe, przeto z trzecią EF mając tęż samę różnicę kierunków, czynić muszą kąty równe, mianowicie zaś kąty zawarte między jednoimiennemi kierunkami. A tak kąty jednostronne odpowiadające sobie są równe t. j. kąt BHF$=$DGF; ramiona bowiem tych kątów są jednokierunkowe. Z równości kątów BHF i DGF wypada, że też dwa kąty im przyległe BHE i DGE jak równie i inne dwa przyległe AHF i CGH są sobie równe, a nareszcie ich kąty wiérzchołkowe AHE i CGE są także równe według §. 7. Każda z trzech tych ostatnich par, są również kątami odpowiadającemi sobie i także między jednoimiennemi kierunkami zawarte. W każdym więc przypadku gdy dwie proste równoległe przecina trzecia, kąty jednostronne odpowiadające sobie są równe i nawzajem, skoro kąty jednostronne odpowiadające sobie są równe, proste są równoległe; za równością bowiem kątów idzie różnica kierunków: a kiedy jaka prosta ma z dwiema innemi tęż samę różnicę kierunku, dwie ostatnie mieć muszą koniecznie tenże sam kierunek t. j. muszą być równoległemi.

Co do drugiego. Za równością kątów jednostronnych odpowiadających sobie, idzie téż równość kątów naprzemianległych tak wewnętrznych jako i zewnętrznych. Jeżeli bowiem BHF$=$DGF, tedy ponieważ BHF$=$AHE jako wiérzchołkowe, więc téż AHE$=$DGF; tudzież, kiedy BHE$=$DGE zaś DGE$=$CGF jako wiérzchołkowe, zatém BHE$=$CGF. Podobnież BHF$=$DGF$=$CGE i nareszcie DGE$=$BHE$=$AHF. Równość więc kątów odpowiadających, sprowadza równość kątów naprzemianległych tak wewnętrznych jako i zewnętrznych. A że za równością kątów jednostronnych odpowiadających idzie równoległość prostych AB i CD według powyższego, przeto gdy proste AB i CD są równoległe, kąty naprzemianległe tak wewnętrzne jako i zewnętrzne są sobie równe. Odwrotnie: skoro kąty naprzemianległe czy wewnętrzne czy zewnętrzne są sobie równe, proste AB i CD są równoległe; kąty bowiem te są równe kątom odpowiadającym, a za równością tych ostatnich idzie równoległość prostych.

Co do trzeciego. Ponieważ $BHE+BHF=2R$ jako przyległe, zaś $BHF=DGF$, więc $DGF+BHE=2R$ t. j. jeżeli proste AB i CD są równoległe, summa kątów jednostronnych wewnętrznych równa jest dwom kątom prostym. Toż samo rozumié się o dwóch drugich kątach jednostronnych wewnętrznych z drugiéj strony siecznéj t. j. że $AHE+CGF=2R$. Również, ponieważ $DGE+DGF=2R$ jako przyległe, a $DGF=BHF$, więc téż $BHF+DGE=2R$ t. j. skoro proste AB i CD są równoległe, kąty jednostronne zewnętrzne w summę wzięte czynią także dwa kąty proste. Tym samym sposobem dowiedzie się że summa kątów zewnętrznych z drugiéj strony siecznéj, czyni dwa kąty proste. Jeżeli więc proste AB i CD są równoległe, tak summa kątów jednostronnych wewnętrznych jako téż i summa kątów jednostronnych zewnętrznych równa się dwom kątom prostym. Wzajemnie gdy dwie proste przecina trzecia tak, że summa kątów czy wewnętrznych, czy zewnętrznych jednostronnych jest równa dwom kątom prostym, dwie piérwsze proste są równoległe.

§. 11.

Co dopiéro dowiedzione własności kątów powstających z przecięcia się dwóch prostych równoległych z trzecią sieczną, w tak ścisłym są związku z równoległością prostych, iż skoro jedna którakolwiek jest dana lub dowiedziona, wszystkie inne są prostym jéj wypadkiem i proste są równoległe. Nawzajem, jeżeli którakolwiek z trzech rzeczonych własności nie ma miejsca, dwie inne ostać się także nie mogą i proste nie są równoległe.

Dla pokazania jak z którékolwiek własności dowieść inne, przyjmijmy za dowiedzione, że dwa kąty naprzemianległe wewnętrzne BHE i CGF *fig.* poprzedzająca, są sobie równe, a starajmy się dowieść własności innych kątów.

a) Ponieważ BHF+BHE=2R i podobnież CGF+CGE=2R §. 7, zatém BHF+BHE=CGF+CGE. A że z założenia BHE=CGF, przeto od dwóch ilości równych odjąwszy równe reszty pozostałe będą równe t. j. BHF=CGE t. j. kąty naprzemianległe zewnętrzne są sobie równe.

Dwa inne kąty naprzemianległe zewnętrzne t. j. AHF i DGE są wiérzchołkowemi kątów z założenia równych, przeto także są równe.

b) Według §. 7 jest BHF+BHE=2R, tudzież DGF+CGF=2R, zatém BHF+BHE=DGF+CGF; odjąwszy tu od piérwszéj strony BHE a od drugiéj CGF jako równe, pozostanie BHF=DGF t. j. kąty jednostronne odpowiadające sobie są równe. Podobnież AHE+BHE=2R jako téż CGF+CGE=2R, przeto AHE+BHE=CGF+CGE. Lecz BHE=CGF zatém AHE=CGE t. j. takież kąty po drugiéj stronie siecznéj są sobie równe.

Dwa inne tegoż samego nazwiska kąty z jednéj i dwa z drugiéj strony siecznéj, będąc wiérzchołkowemi kątów danych z założenia równych, są także równe.

c) Summa CGF+DGF=2R według §. 7; a że CGF=BHE z założenia, przeto położywszy w miejsce kąta CGF jemu równy BHE, będzie téż BHE+DGF=2R.

Również BHE+AHE=2R a wziąwszy CGF za BHE jako jemu równy, będzie także AHE+CGF=2R t. j. kąty jednostronne wewnętrzne w summę wzięte czynią dwa kąty proste.

Podobnież BHF+BHE=2R; a że BHE=CGF zaś CGF=DGE jako wiérzchołkowe, więc kładąc DGE za BHE, znajdziemy téż BHF+DGE=2R.

I znowu: CGE+CGF=2R; lecz CGF=BHE=AHF, zatém CGE+AHF=2R, t. j. summa kątów jednostronnych zewnętrznych czyni dwa kąty proste.

Tym sposobem z przyjętéj jednéj własności, że dwa kąty naprzemianległe wewnętrzne są sobie równe, dowiedliśmy własności innych kątów.

Uwaga. Uczący się dobrze uczynią skoro każdą z własności przyjmować będą za dowiedzioną, a starać się będą udowodnić inne, tym bowiem sposobem na tém bardzo łatwém dowodzeniu, nabędą wprawy tyle potrzebnéj przy trudniejszych dowodzeniach.

Pokażmy tu jeszcze sposób dowodzenia, gdy na odwrót którakolwiek z wiadomych własności nie ma miejsca, że też i inne ostać się nie mogą, a następnie że proste nie są równoległe.

Niech będzie dowiedzione że $BHE+DGF>2R$ t. j. że summa kątów jednostronnych wewnętrznych nie czyni dwóch kątów prostych, ale jest np. większą, tedy

a) ponieważ $BHE+BHF=2R$, tudzież $DGF+DGE=2R$, zatém $(BHE+DGF)+(BHF+DGE)=4R$. Od dwóch ilości równych odjąwszy nierówne, reszty pozostałe będą nie równe, a mianowicie ta reszta będzie mniejszą, która pozostaje z odjęcia większéj ilości; jeżeli więc od piérwszéj strony ostatniego zrównania odejmiemy $BHE+DGF$ a od drugiéj 2R, znajdziemy $BHF+DGE<2R$.

Podobnież: ponieważ $BHE=AHF$ a $DGF=CGE$ jako wiérzchołkowe, zaś z założenia $BHE+DGF>2R$ więc też $AHF+CGE>2R$, t. j. summa kątów zewnętrznych tak z jednéj jako i drugiéj strony siecznéj nie jest równa dwom kątom prostym, ale jedna jest mniejsza a druga większa niż dwa kąty proste.

b) Summa kątów $BHF+BHE=2R$. Odjąwszy tu z piérwszéj strony $BHE+DGF$ a z drugiéj 2R, pozostanie $BHF-DGF<0$ czyli $BHF<DGF$, przeto także $AHE<CGE$ jako wiérzchołkowe piérwszych. Również $DGE+DGF=2R$; a odjąwszy tu znowu założoną nierówność, znajdziemy $DGE-BHE<0$ czyli $BGE<BHE$, a następnie $CGF<AHF$ jako kąty wiérzchołkowe po-

przedzających. Żadne więc dwa kąty odpowiadające sobie nie są równe.

c) Nareszcie: $AHE + BHE = 2R$; lecz $BHE + DGF > 2R$ przeto tymże samém co wyżéj rachunkiem znajdziemy $AHE - DGF < 0$ czyli $AHE < DGF$.

Daléj: $CGF + DGF = 2R$, ale $BHE + DGF > 2R$, zatém $CGF - BHE < 0$ czyli $CGF < BHE$.

$BHE + BHF = 2R$, lecz $BHE + DGF > 2R$, więc $BHF - DGF < 0$ czyli $BHF < DGF$ lecz $DGF = CGE$ jako wiérzchołkowe, zatém również $BHF < CGE$.

$DGF + DGE = 2R$, zaś $BHE + DGF > 2R$, skąd $DGE - BHE < 0$ albo $DGE < BHE$; a że $BHE = AHF$ jako wiérzchołkowe, więc téż $DGE < AHF$. Jeżeli przeto summa dwóch kątów jednostronnych wewnętrznych nie jest równa dwom kątom prostym, ani kąty wewnętrzne ani zewnętrzne naprzemianległe nie są sobie równe.

Uwaga. Uczący się i tu nie bez korzyści mogą założenie zmieniać a dowodzić niepodobieństwa innych prawd przy prostych równoległych dowiedzionych.

§. 12.

Twierdzenie. *Dwie proste AB i CD fig. 13 przecięte od trzeciéj EF i nie czyniące kątów jednostronnych odpowiadających sobie równych, nie mogą być równoległe.*

Niech bowiem będzie kąt $CHE > AGE$, tedy przez punkt H pomyśleć sobie można poprowadzoną inną prostą IK tak, że będzie kąt $IHE = AGE$ i że następnie ta prosta IK będzie równoległą do AB; dwie więc równoległe AB i IK mieć muszą koniecznie jednakowe położenie względem prostéj CD. A że CD przecina jednę z nich t. j. IK, więc téż i drugą AB także przecinać musi pod tém samém nachyleniem, skoro ją dostatecznie przedłużymy; a kiedy się proste AB i CD przecinają, nie mogą zatém być równoległemi, co téż potrzeba było dowieść.

Wniosek. Przez dany punkt za prostą, jak tu przez punkt H, dany za prostą AB, jedna tylko równoległa do téjże prostéj AB poprowadzona być może, wszystkie bowiem inne, podobne do prostéj CD, dostatecznie przedłużone, przecinają bliżéj lub daléj prostą AB.

§. 13.

Twierdzenie. *Prosta prostopadła do jednéj z dwóch równoległych, jest téż prostopadła i do drugiéj.*

Niech AB i CD *fig. 14* będą dwie równoległe i niech trzecia EF będzie prostopadła np. do AB, trzeba dowieść, że téż jest prostopadłą i do CD. Niech EF przecina AB w punkcie G, zaś CD w punkcie H, tedy z założenia kąt EGB jest prosty, przeto i jemu przyległy BGF jest prosty. Ale kąt BGF z kątem DHE jako jednostronne wewnętrzne względem równoległych AB i CD tudzież siecznéj EF czynią dwa kąty proste, zatém i ten ostatni kąt prostym być musi, a proste EF i CD do siebie prostopadłe.

Albo tak: kąty BGE i DHE jako jednostronne odpowiadające sobie są równe; a że piérwszy z założenia jest prosty, zatém i drugi prostym być musi i prosta EF również do HD czyli CD prostopadła co było do dowiedzenia.

Wniosek 1. Z tego wypada, że jeżeli z dwóch równoległych jedna jest prostopadła do trzeciéj, druga téż musi być do téjże prostéj prostopadłą, co wprost i naturalnie z poprzedzającego twierdzenia wypływa.

Wniosek 2. Dwie proste równoległe do trzeciéj są téż między sobą równoległe. Bo poprowadziwszy czwartą prostą prostopadłą do jednéj z dwóch piérwszych i tę przedłużywszy tak iżby dwie inne także przecinała, widoczną jest rzeczą iż wszystkie trzy będą do téj czwartéj prostopadłe, gdyż piérwsza z trzecią i druga z trzecią jako między sobą równoległe, są do niéj prostopadłe, a przeto i piérwsza z drugą są także prostopadłe, a następnie między sobą równoległe. Ogólnie więc ilekolwiek będzie prostych prostopadłych do jednéjże prostéj, wszystkie będą między sobą równoległe, i wzajemnie jeżeli jedna z ilukolwiek równoległych będzie prostopadłą do jakiéj prostéj, wszystkie téż do niéj będą prostopadłe.

§. 14.

Twierdzenie. *Dwa kąty których ramiona są równoległe od siebie i rozchodzą się w jednę stronę t. j. w jednymże kierunku, są sobie równe.*

Niech będą dwa kąty ABC i *abc fig. 15.* takie, że *ba* ramię kąta *abc* jest równoległe do BA ramienia kąta ABC, jak również drugie ramię *bc* kąta *abc* równoległe do BC ramienia kąta ABC, potrzeba dowieść że kąt $abc = ABC$.

Uważając kierunki ramion w prawo t. j. od B ku A i C, jako też od *b* ku *a* i *c* za dodatne, przeciwne kierunki względem punktów B i *b* będą odjemne. Wystawiwszy sobie ramiona tych kątów do nieskończoności w jednymże kierunku przedłużone, dwa z nich nie równoległe, jak tu BC i *ba* koniecznie przeciąć się muszą według §. 12., niech punkt przecięcia będzie *d*. Kąt $ABC = adC$ tudzież $adC = abc$ jako jednostronne odpowiadające sobie piérwsze względem dwóch równoległych AB i *ab* i trzeciéj siecznéj BC, drugie zaś względem dwóch równoległych BC i *bc* tudzież siecznéj *ab*; przeto $ABC = abc$ co należało dowieść.

Uwaga. Dodaliśmy tu w twierdzeniu *i rozchodzą się w jednę stronę* z tego powodu, że ramiona dwóch kątów ABC i *cba'* są także równoległe, rozchodzą się atoli w przeciwne strony i dla tego też te kąty nie są równe ale w summę wzięte czynią dwa kąty proste, bo $abc + cba' = 2R$ jako przyległe; a wziąwszy ABC za *abc* jako jemu równy, będzie też $ABC + cba' = 2R$. — Jednak kąt $a'bc'$, chociaż ramiona jego rozchodzą się w przeciwnych kierunkach ramionom kąta ABC, jest mu wszelako równy jako wiérzchołkowy kąta *abc* równego kątowi ABC; przypatrzywszy się atoli z uwagą tak kątom ABC i *abc*, jako też kątom ABC i *cba'* a nareszcie kątom ABC i $a'bc'$, dostrzeżemy tę prawdę, że kąty równe których ramiona są równoległe, mają każdy oba swe ramiona w jednymże kierunku. Tak ramiona kątów ABC i *abc* mają kierunek w prawo, t. j. dodatny, jako też kąty ABC i $a'bc'$ chociaż ramiona ba' i bc' rozchodzą się w przeciwne strony, oba przecież mają jednoimienne kierunki t. j. odjemne, tak jak ramiona BA i BC, chociaż ich kierunki idą w prawo, oba jednak są jednoimienne t. j. dodatne. Tymczasem dwa kąty ABC i *cba'* są takie, iż piérwszego oba ramiona są dodatne, gdy drugiego ramię *bc* jest dodatne, a ramię *ba'* odjemne, zatém różnoimienne. Dla tego możeby ogólniéj wysłowić można poprzedzające twierdzenie następującym sposobem: *dwa kąty których ramiona są równoległe od siebie i oba w każdym kącie idą w tymże samym lub przeciwnym kierunku, są sobie równe.*

ROZDZIAŁ II.

Figury prostokreślne, to jest prostemi linijami ograniczone, tudzież ich równość i przystawanie (congruentia).

§. 15.

Miejsce na płaszczyznie ilukolwiek prostemi ograniczone, nazywa się figurą geometryczną prostokreślną. Już w poprzedzającym rozdziale widzieliśmy, że dwiema prostemi nie można zupełnie miejsca ograniczyć, dla tego téż przybrawszy do dwóch prostych jeszcze trzecią i te poprowadziwszy tak iżby każda z nich dwie inne przecinała, trzy te proste już zamkną miejsce czyli ograniczą ze wszech stron płaszczyznę. I tak, niech trzy proste GH, IK, LM *fig. 16* przecinają się z sobą w ten sposób, że GH przecina dwie inne w punktach A i B, IK przecina dwie inne w punktach A i C, nareszcie trzecia LM przecina dwie inne GH i IK w punktach B i C, tedy miéjsce temi trzema prostemi ograniczone, czyli figura ABC nazywa się *trojkątem* (triangulum v. trigonum). Ponieważ do zamknięcia miejsca potrzeba najmniéj trzech prostych, przeto trójkąt jest najprostszą z figur; ale ponieważ, jak to później zobaczymy, wszystkie inne figury można rozłożyć lub zamienić na trójkąty, przeto trójkąt jest podstawą całéj Geometryi.

Kawałek każdéj z prostych GH, IK, LM zawarty między dwiema innemi, jak są AB, AC i BC, nazywa się *bo-*

kiem trójkąta (latus trianguli). Każdy kąt między dwoma bokami zawarty, nazywa się *kątem wewnętrznym trójkąta* (angulus internus), takiemi kątami są: BAC, ABC i ACB. Każdy zaś kąt zawarty między bokiem i przedłużeniem drugiego, zowie się *kątem zewnętrznym* (angulus externus), jak są kąty IAB, ABL, HBC i t. d. Z tych kątów każde dwa są sobie równe jako wiérzchołkowe, jak np. IAB=GAC i podobnież inne. Summa trzech boków trójkąta stanowi i nazywa się jego *obwodem* (perimeter).

Co do boków trójkąta samo z siebie wypada, że summa dwóch którychkolwiek jest większą od trzeciego, bo ten trzeci bok będąc liniją prostą, jest najkrótszą odległością jednego punktu od drugiego, gdy przeciwnie dwa inne boki stanowią liniją złamaną, a zatém dłuższą drogę między temiż punktami. Różnica zaś tychże samych boków jest mniejsza od boku trzeciego.

TWIERDZENIE. *Wziąwszy wewnątrz trójkąta* ABC *fig*. 17. *gdziekolwiek punkt* D *i ten złączywszy z punktami* A *i* C *prostemi* AD *i* CD, *summa tych dwóch prostych jest mniejsza niż summa* AB *i* BC *t. j.* AB+BC>AD+DC.

Przedłużywszy bowiem AD aż do przecięcia się z BC w punkcie E, mamy w trójkącie ABE według powyższego AB+BE>AE czyli AB+BE>AD+DE; również w trójkącie DEC jest DE+EC>DC. Do dwóch ilości nierównych dodawszy nierówne i to tak że większą do większéj a mniejszą do mniejszéj, summy wypadną nierówne, a mianowicie piérwsza będzie większa niż druga, zatém

AB+BE+DE+EC>AD+DE+DC. Lecz BE+EC=BC, przeto AB+BC+DE>AD+DC+DE; a od nierównych ilości odjąwszy równe, reszty pozostają nierówne; odjąwszy przeto od każdéj z ostatnich ilości DE, pozostaje

AB+BC>AD+DC. Prawdą zatém jest że i t. d.

Trójkąty ze względu boków mają właściwe swoje nazwy. I tak: trójkąt którego wszystkie trzy boki są między sobą równe, nazywa się *równobocznym* (aequilaterum), trójkąt mający dwa tylko boki między sobą równe, zowie się *równoramiennym* (aequicrurum v. isosceles), nareszcie trójkąt którego wszystkie trzy boki są różne, *różnobocznym* (scalenum) nazywamy.

Definicyja. Wystawiwszy sobie trójkąt jako stojący, na jednym z swych boków, nazywać będziemy ten bok *podstawą trójkąta* (basis). Z wierzchołka kąta przeciwległego podstawie prostą prostopadłą do téjże podstawy, zwać będziemy *wysokością trójkąta* (altitudo). W trójkącie równoramiennym bierzemy zwyczajnie bok trzeci za podstawę, w innych zaś trójkątach każdy bok można wziąść za podstawę. Każdy trójkąt równoboczny uważać można za równoramienny.

§. 16.

Połączmy następnie cztéry proste tak, iżby każda z nich dwie z pozostałych trzech przecinała; albo, co na jedno wychodzi, poprowadziwszy w trójkącie prostą tak, iżby dwa którekolwiek jego boki przecinała, ograniczymy tym sposobem na płaszczyznie miejsce cztérema prostemi, które *czworokątem* (quadrilaterum v. tetragonum) nazywamy. Tak np. jeżeli się cztéry proste AB, CD, EF i GH *fig. 18* w powyższy sposób przecinają w punktach P, Q, R, S, lub téż, jeżeli w trójkącie KQR poprowadzimy prostą EF tak iżby dwa jego którekolwiek boki np. KQ i KR przecinała, miejsce PQRS cztérema prostemi w ten sposób ograniczone, jest czworokątem. Część każdéj prostéj między dwiema innemi jak PQ, QR, RS i PS, nazywa się tu znowu bokiem czworokąta. Każdy kąt zawarty między takiemi bokami, zowie się kątem wewnętrznym, kąt zaś zawarty między bokiem i przedłużeniem drugiego, zewnętrznym czworokąta. Już w trójkącie widzieliśmy że ta figura ma tyle kątów ile boków; w czworokącie znowu toż samo dostrzegamy, wnioskować więc możemy, że każda figura prostokreślna ma tyle boków ile kątów; z tego téż powodu brano czasem nazwy figur od liczby boków i zamiast *czworokąt*, mówiono i pisano *czworobok*; teraz atoli zgodzono się ogólnie brać te nazwy od kątów. Summa wszystkich cztérech boków czworokąta nazywa się także jego obwodem. Odmiany czworokątów oraz ich szczególne nazwy są następujące:

1. Każdy czworokąt podobnie poprzedzającemu nakreślony, nazywamy pospolicie *czworokątem* albo *trapezojdem* (trapesoides) *fig. 19.*

2. Jeżeli w czworokącie dwa którekolwiek boki są równoległe lecz nierówne, nazywano go dawniéj *równoległobokiem niezupełnym*, sądzę jednak iż nie mając stósowniejszéj nazwy dla takiego czworokąta, lepiéj zostać przy greckiéj *trapez* (trapezium) pochodzącéj od ἡ τραπεζα, *stół* znaczącéj, *fig. 20.*

3. Skoro oprócz dwóch boków równoległych i dwa inne także między sobą są równoległe, wtenczas czworokąt nazywamy *równoległobokiem* (parallelogramum) *fig. 21.*

4. Jeżeli w równoległoboku jeden kąt jest prosty, wszystkie téż inne muszą być prostemi; bo dwa a dwa przy jednymże boku leżące jako jednostronne wewnętrzne, czynią dwa kąty proste. Taki znowu czworokąt nazwiemy *prostokątem* (rectangulum) *fig. 22.*

5. Jeżeli w prostokącie wszystkie cztéry boki są między sobą równe, przechodzi on na *kwadrat* (quadratum) *fig. 23.*

6. Zdarzyć się może równoległobok mający wszystkie cztéry boki równe, a kąty nierówne, albo kwadrat mający kąty różne od prostego, natenczas czworokąt taki nazwiemy *kwadratem ukośnym* (rhombus). Francuzi nazywają go l o s a n g e *fig. 24.* R h o m b u s, nazywają zwyczajnie każdy równoległobok.

7. Nareszcie między trapezojdami czyli zwyczajnemi czworokątami, znajduje się jeden ich gatunek mający wyłącznie sobie służące własności i dlatego nadano mu także szczególną nazwę *antiparallelogramu.* Jest to rzeczywiście czworokąt taki, że summa dwóch jego przeciwległych kątów, czyni dwa kąty proste, on téż sam między trapezojdami jest, jak późniéj zobaczymy, czworokątem mogącym być w koło w pisanym lub liniją kołową opisanym.

W jakimkolwiek czworokącie prosta łącząca dwa wiérzchołki kątów przeciwległych, nazywa się *przekątnią* (diagonalis). Wysokością równoległoboku nazywa się prostopadła, z któregokolwiek punktu jednego z boków, na jemu przeciwległy, lub jego przedłużenie spuszczona. Bok na który prostopadła pada, uważa się w tym razie za podstawę. W trapezie wysokością jest prostopadła z któregokolwiek punktu jednego z boków równoległych na drugi spuszczona. W prostokącie wziąwszy jeden z jego boków za podstawę, jemu przyległy będzie wysokością prostokąta.

§. 17.

Jeżeli pięć prostych połączymy z sobą tak, iżby każda z nich dwie z pozostałych przecinała, albo jeszcze prościéj, przybrawszy do cztérech prostych, z których czworokąt złożyliśmy, piątą i tą przeciąwszy dwa którekolwiek boki przecinające się, miejsce tak ograniczone pięciu prostemi, nazwiemy *pięciokątem* (pentagonum).

I tak połączywszy proste MN, PQ, RS, TU i VW *fig.* 25 sposobem jak wspomnieliśmy, lub téż w czworokącie ABCD z cztérech piérwszych prostych złożonym, przeciąwszy dwa boki np. AD i CD przecinające się w punkcie D, piątą prostą VW, ograniczymy tym sposobem miejsce ABCDE które pięciokątem nazwaliśmy. Jak w trójkątach i czworokątach, tak téż i tu część każdéj z prostych ograniczających, zawarta między dwiema innemi, nazywa się bokiem pięciokąta. Kąty zawarte między każdemi dwoma bokami, nazywają się kątami wewnętrznemi, zawarte zaś między każdym bokiem i przedłużeniem jemu przyległego, kątami zewnętrznemi.

Z tego co powiedzieliśmy o trójkącie, czworokącie i pięciokącie, łatwo pojąć jaką figurę nazwiemy *sześciokątem* (hexagonum), *siedmiokątem* (heptagonum), *ośmiokątem* (octogonum) i w ogólności *wielokątem* (polygonum). Zwyczajnie każdą figurę więcéj niż cztéry boki mającą, nazywamy wielokątem. Jak w czworokącie tak téż podobnie i w pięciokącie, a w ogólności w każdym wielokącie prosta łącząca dwa którekolwiek wiérzchołki kątów przeciwległych nazywa się przekątnią.

Summa wszystkich boków w każdym wielokącie, również jak w trójkącie i czworokącie nazywa się *obwodem wielokąta.*

Co do kątów wewnętrznych każdego wielokąta poczynając od czworokąta, nie zawadzi tu powiedzieć, że też wielokąty, mogą mieć nie same kąty *wklęsłe* ale téż i *wypukłe* §. 9. Pospolicie nazywamy piérwsze *wyskakującemi* (salientes), drugie zaś *wskakującemi* (insilientes). Tak np. w czworokącie ABCD *fig. 26* kąt ADC, w pięciokącie ABCDE *fig. 27* kąt EDC, w sześciokącie ABCDEF *fig. 28* kąty AFE i BCD i t. d. są wskakującemi czyli wypukłemi.

Każdy wielokąt którego wszystkie boki między sobą, tudzież wszystkie kąty także między sobą są równe, nazywać będziemy *wielokątem foremnym* (polygonum regulare). A tak trójkąt równoboczny jest trójkątem foremnym, jak równie kwadrat, czworokątem foremnym.

§. 18.

W §. 15 wśpomnieliśmy że każdy wielokąt można rozłożyć, czyli rozebrać na trójkąty, poznawszy przeto też wielokąty, zobaczmy w jaki sposób to rozłożenie da się uskutecznić. Niech będzie wielokąt jakikolwiek ABCDEFGHIK *fig. 29* który chcemy rozłożyć na trójkąty; którykolwiek z wiérzchołków jego kątów np. K połączywszy ze wszystkiemi innemi wiérzchołkami linijami prostemi, czyli, z jednegoż wiérzchołka K poprowadziwszy do innych wiérzchołków przekątnie, jak tu KB, KC, KD, KE, KF, KG i KH, przekątnie te podzielą cały wielokąt, jak to naocznie widzimy, na same trójkąty. Albo: wewnątrz wielokąta obrawszy gdziekolwiek punkt O i ten złączywszy prostemi ze wszystkiemi wiérzchołkami kątów wielokąta, podzieli się tenże wielokąt także na trójkąty, mające wszystkie punkt O za wiérzchołek spólny. W drugim razie rozbiera się wielokąt na tyle trójkątów, ile wielokąt ma boków, w piérwszym zaś na tyle, ile przekątni poprowadzić można więcéj jeden.

§. 19.

Abyśmy w każdym razie mogli dokładnie wiedzieć na ile trójkątów da się jaki wielokąt rozłożyć, zastanówmy się nad tém ile z jednegoż wiérzchołka poprowadzić można przekątni w wielokącie o jakiéjkolwiek liczbie boków, którą w ogólności wyraźmy przez *n*. Ponieważ w trójkącie żaden kąt wewnętrzny nie ma sobie przeciwległego, żadnéj téż przekątni w trójkącie poprowadzić nie można.

W czworokącie, w którym jak wiémy są cztéry kąty każdy z nich ma sobie przeciwległy ale tylko jeden; więc téż jednę tylko przekątnię z tegoż samego wiérzchołka poprowadzić można. W pięciokącie każdy kąt ma sobie dwa inne przeciwległe, a przeto obrawszy którykolwiek z nich za ten z którego przekątnie prowadzić chcemy, tych nie więcéj jak dwie poprowadzić możemy.

W sześciokącie podobnież rozumując, znajdziemy że tylko trzy przekątnie z jednegoż z jego wiérzchołków kątów, do innych poprowadzić można i t. d. Zestawiając więc pod jeden widok to co o przekątniach powiedzieliśmy, mamy, że

w trójkącie *żadnéj* przekątni prowadzić nie można czyli					$0=3-3$
w czworokącie *jednę* tylko	„	„	„		$1=4-3$
w pięciokącie *dwie*	„	„	„	„	$2=5-3$
w sześciokącie *trzy*	„	„	„	„	$3=6-3$
a zatém w siedmiokącie *cztéry*	„	„	„		$4=7-3$
w ośmiokącie *pięć*	„	„	„		$5=8-3$
w wielokącie mającym *n* boków, poprowadzić można przekątni	„	„	„	„	$n-3$

A że czworokąt przez prowadzenie *jednéj* przekątni, rozbiéra się na *dwa* trójkąty, pięciokąt przez dwie przekątnie rozbiéra się na *trzy* trójkąty, sześciokąt przez trzy przekątnie na *cztéry* trójkąty i t. d. zatém

czworokąt rozbiéra się na			$2=4-2$	trójkąty
pięciokąt	„	„	$3=5-2$	„
sześciokąt	„	„	$4=6-2$	„

i t. d.

a w ogólności wielokąt mający *n* boków, rozbiéra się przez przekątnie powyższym sposobem prowadzone na $n-2=n-3+1$ trójkąty.

Z tego roztrząsania pokazuje się, że każdy wielokąt rozebrać można albo na $n-2$, albo téż na n trójkątów.

§. 20.

Do figur prostokreślnych przyłączmy tu dobrze wszystkim znajomą figurę krzywokreślną, a która, jak później zobaczymy, pomimo że jest krzywokreślną, wszelako z prostokreślną, a mianowicie z wielokątem foremnym porównaną być może. Chcę tu mówić o figurze liniją kołową ograniczonéj.

Miejsce na płaszczyznie kołową liniją ograniczone, nazywamy *kołem* (circulus). Ponieważ już ze wstępu wiémy co to jest linija kołowa, co promień a co średnica, przeto teraz powiedzieć nam wypada o innych prostych w kole prowadzonych, jako téż o częściach tak okręgu jako téż i koła.

Prosta łącząca dwa którekolwiek punkta okręgu i nie przez środek koła ale mimo tegoż przechodząca, zowie się *cięciwą* (chorda) jak jest prosta AB *fig. 30.*

Prosta przecinająca okrąg koła w dwóch punktach i przynajmniéj w jednę stronę wychodząca za okrąg, nazywa się *sieczną* (secans), taką sieczną jest prosta CD.

Prostą w jednym tylko punkcie dotykającą okrąg koła, nazywać będziemy *styczną* (tangens), jak jest prosta EF.

Jakkolwiek wielką część linii kołowéj nazwiemy *łukiem* (arcus) jak BG.

Średnica dzieli okrąg koła na dwa *półokręgi* (semiperiphaeria), koło zaś na dwa *półkola* (semicirculus) między sobą równe. Dwie średnice HG i IK do siebie prostopadłe, dzielą tak cały okrąg, jako téż i koło na cztéry części równe, które *ćwiartkami* (quadrans) zwać będziemy.

Część koła, zawartą między dwoma promieniami i łukiem, nazwiemy *wycinkiem koła* (sector), jak np. część koła BSG.

Część tegoż koła zawarta między cięciwą i łukiem, nazywa się *odcinkiem koła* (segmentum), jak np. AIB.

Z opisania średnicy i cięciwy łatwo dostrzedz, że średnica jest także cięciwą, lecz największą, że cięciwa dzieli koło na dwa odcinki nierówne, że zatém do każdéj cięciwy dwa odcinki należą, jeden większy drugi mniejszy; a następnie, że jednéj tylko średnicy odpowiadają dwa odcinki równe półkolami wyżéj nazwane. Tak do cięciwy AB należy odcinek AIB, jak równie odcinek AKB. Mówiąc atoli o odcinku, zawsze rozumieć będziemy odcinek mniejszy.

Równość i przystawanie figur prostokreślnych (congruentia).

§. 21.

Ponieważ figury są to ograniczone miejsca, czyli pola na płaszczyznie, mówiąc przeto o ich równości, nie co innego mieć będziemy na celu, tylko równość miejsc prostemi ograniczonych. Ale to każdy wié z doświadczenia, że miejsca, a zatém figury bardzo różnego kształtu, mogą sobie być wszelako równe; ogród bowiem lub dziedziniec czworokątny, kwadratowy lub trójkątny, może być zupełnie tak obszernym, jak pięciokątny, lub sześciokątny; stół kwadratowy lub prostokątny co do swéj wielkości może być zupełnie równy stołowi innego nawet okrągłego lub owalnego kształtu i t. d. O takiéj równości dopiéro później mówić będziemy, tu zaś będzie mowa o równości figur tegoż samego nazwiska. Ale i figury téjże saméj nazwy, mogą mieć kształt bardzo od siebie różny, a wszelako być sobie równe we względzie miejsc prostemi ograniczonych. O takich figurach będzie mowa także na innném miejscu. Pozostaje więc tylko przypadek równości figur jednéjże nazwy i tegoż samego zupełnie kształtu, które położone na sobie przykrywają się dokładnie we wszystkich swych częściach. O takich figurach mówić będziemy, że *przystają do siebie* (congruunt). Jak skoro figury przystają do siebie, już tém samém są sobie równe. Aby łatwiéj poznać cechy takiéj równości figur, zacznijmy od najprostszych t. j. od trójkątów.

§. 22.

Mając trzy proste materyjalne, np. trzy druciki lub pręciki oznaczonéj długości, lecz takie, iżby summa długości dwóch którychkolwiek była większą od trzeciego, z powodu w §. 15 wyłożonego, i złożywszy je tak, iżby każdy z nich dwoma swemi końcami, dotykał końców dwóch innych druików dla zamknięcia trójkąta, bez trudności dostrzeżemy, iż długości trzech tych drucików złożonych w trójkąt, w tak ścisłym zostają związku z trzema kątami przez też druciki uformowanemi, iż chcąc długość któregokolwiek z nich zmienić, koniecznie przynajmniéj dwa kąty zmienią także swą wielkość. Nawzajem, chcąc którykolwiek z kątów powiększyć lub zmniejszyć, zmiana jego pociąga za sobą konieczną zmianę długości przynajmniéj jednego drucika, a następnie zmianę przynajmniéj jednego z pozostałych kątów. Zastąpiwszy myślą owe druciki prostemi geometrycznemi, prawda co do ścisłéj zależności czyli związku boków z kątami, nie podlega żadnemu ograniczeniu, ale będzie tenże sam wypadek, chcąc boki geometryczne albo kąty powiększać lub zmniejszać. Przy oznaczonéj więc długości każdego z boków, każdy z kątów ma téż wielkość oznaczoną, a zatém stałą i niezmienną; trzy przeto oznaczone boki trójkąta z trzema jego kątami, stanowią niejako całość, która za zmianą któregokolwiek z sześciu elementów (trzy boki i trzy kąty), koniecznie także zmienić się musi; wypadkiem téj zmiany będzie zawsze trójkąt różny od piérwszego. Dla tego rozumiem iż każdy łatwo pojmie, że z trzech prostych długości danéj, nie można złożyć dwóch trójkątów różnych ale tylko jeden. A chociaż każda z prostych coraz inne miejsce zajmować i coraz w inną stronę tymże samym końcem skierowaną być może, to wszelako nie stanowi różności trójkątów, gdyż to wychodzi na odwrócenie w różny sposób raz złożonego trójkąta. Wypada téż rzeczywiście z nauki o przestawieniach §. 45 *Arytm.*, że z trzech elementów jest 1. 2. 3 = 6 przestawień, skądby się zdawało, iż sześć różnych trójkątów z trzech prostych danych złożyć można. Jak atoli każde z sześciu przestawień tęż samę całość stanowi bez względu na porządek, tak w trójkącie, z powodu że go przeczytać można, poczynając od któregokolwiek z wiérzchołków i to w jednym lub drugim kierunku, nie zmienia się całkiem mówiąc: trójkąt ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA, bo tém czytaniem zawsze tenże sam trójkąt wyrażamy, sześć zatém pozornych trójkątów, zlewają się w jeden i tenże sam.

To dobrze zrozumiawszy, dwoma trójkątami równemi i do siebie przystającemi będą te, w których trzy boki jednego, są równe trzem bokom drugiego trójkąta każdy każdemu. Tak tedy mamy *piérwszą* cechę równości dwóch trójkątów i możemy ustanowić

Twierdzenie. *Dwa trójkąty w których trzy boki jednego są równe trzem bokom drugiego, każdy każdemu są sobie równe i przystają do siebie.*

Za dowód tego twierdzenia służy powyższe rozumowanie, które żadnéj sprzeczności nie zamyka. Kiedy trójkąty przystają, wszystkie części jednego muszą być dokładnie równe odpowiednim częściom drugiego trójkąta tak, iż położywszy je na sobie, przykryją się wzajemnie najdokładniéj we wszystkich swych częściach; skąd naturalny wniosek wypływa, że kąty ~~tylko~~ tych dwóch trójkątów są sobie równe także każdy każdemu. Uważać ~~tych~~ tylko potrzeba, że w tym przykryciu się zupełném, te kąty są sobie równe, które leżą naprzeciwko boków równych, lub zawarte są między bokami równemi. Takie kąty nazywać będziemy w dalszym ciągu *kątami jednakowo położonymi* (anguli homologi). Toż samo rozumié się względem boków, iż leżące naprzeciwko kątów równych, zwać będziemy także bokami jednakowo położonemi, albo lepiéj *bokami odpowiadającemi* (latera homologa).

§. 23.

Twierdzenie. *Dwa trójkąty mające po dwa boki równe każdy każdemu i po kącie między temiż bokami zawartym równym, są sobie równe i przystają do siebie.*

Niech będą dwa trójkąty ABC i abc *fig. 31* takie, że $AB = ab$, $BC = bc$ i $B = b$; potrzeba dowieść, że te trójkąty położone stósownie na sobie, zupełnie się przykryją, a tém samém są sobie równe, t. j. że téż $AC = ac$, $A = a$, $C = c$. Na dowiedzenie tego dosyć jest tylko dowieść, że $AC = ac$, a już według poprzedzającego twierdzenia dwa te trójkąty przystaną do siebie.

Wystawmyż sobie trójkąt *abc* oderwany z swego miejsca i położony na trójkącie ABC i ułożony w ten sposób, iżby punkt *b* padł na B, a bok *ba* poszedł w kierunku boku BA; tedy z powodu że kąt $b = B$, bok *bc* pójdzie téż w kierunku BC. Ale że z założenia $ba = BA$ i $bc = BC$, przeto punkt *a* padnie koniecznie na punkt A i punkt *c* na C; a że przez dwa punkta jedna tylko prosta przechodzić może, zatém bok *ac* przykryje zupełnie bok AC tak, iż się staną jedną i tąż samą prostą, a następnie $ac = AC$ co potrzeba było rzeczywiście dowieść. Dwa więc założone trójkąty przystawszy do siebie, są sobie we wszystkich swych częściach równe, a przeto również i $a = A$, $c = C$.

Jest to więc *druga* cecha po któréj się poznaje równość i przystanie trójkątów. W piérwszym przypadku z równości trzech boków, dowiedliśmy przystania trójkątów, z czego wnioskowaliśmy o równości kątów; w obecnym przypadku podobnież z równości trzech elementów (dwóch boków i kąta), dowiedliśmy, że trójkąty przystają do siebie, a następnie wnioskujemy o równości trzech innych elementów.

§. 24.

Twierdzenie. *Dwa trójkąty mające po jednym boku równym i po dwa kąty przy tychże bokach leżące równe, są sobie także równe i przystają do siebie.*

Niech dwa trójkąty ABC i *abc* *fig. 31* będą takie, że $AC = ac$, kąt $A = a$ i kąt $C = c$; mamy dowieść że te trójkąty są sobie we wszystkich częściach równe, czyli że przystają do siebie, t. j. że téż $AB = ab$, $CB = cb$ i $B = b$. Aby tego dowieść, dosyć tu znowu pokazać że $AB = ab$, $CB = cb$, bo tym sposobem dwa te trójkąty mieć będą po trzy boki równe, a zatém będą sobie równe.

Podobnie jak w poprzedzającém wystawmy sobie trójkąt *abc* położony na trójkącie ABC w ten sposób, iżby punkt *a* padł na A a bok *ac* poszedł w kierunku boku AC. Ponieważ te boki z założenia są równe, zatém i punkt *c* padnie na punkt C, a bok *ac* przykryje zupełnie bok AC. A że również z założenia kąt $a = A$ i $c = C$, przeto bok *ab* pójdzie po AB, a bok *cb* po boku CB; punkt więc *b* padnie w piérwszym razie gdziekolwiek na bok AB lub jego przedłużenie, w drugim zaś razie tenże sam punkt *b* padnie na bok CB lub jego przedłużenie; ten przeto punkt znajdować się będzie razem na dwóch prostych, t. j. na AB i CB, gdzieindziéj więc żadną miarą znajdować się nie może jak na spólném tych prostych przecięciu czyli w punkcie B, bo proste rzeczone ten tylko jedyny punkt mają spólny: więc nareszcie i punkt *b* pada na punkt B, a bok *ab* przykrywa dokładnie bok AB i bok *cb* przykrywa podobnież bok CB. Dwa zatém założone trójkąty przystają do siebie a tém samém są sobie równe; skąd wniesiemy że $ab = AB$, $cb = CB$ i kąt $b = B$ co było do dowiedzenia.

Uwaga 1. Co dopiéro dowiedzione twierdzenie stanowi *trzecią* cechę równości trójkątów. W niém widzimy, że znowu z równości trzech elementów trójkąta, pomiędzy któremi znajduje się jeden bok, dowodzimy przystania czyli równości trójkątów, a potém wnioskujemy o równości trzech innych elementów. Trzy te cechy uczą nas, że jeżeli z sześciu elementów trójkąta trzy sę dane, trójkąt wtedy tylko jest zupełnie oznaczonym, gdy danemi elementami są: albo trzy boki, albo dwa boki z kątem między niemi zawartym, lub nareszcie jeden bok z dwoma kątami przyległemi.

Uwaga 2. Trzy poprzedzające twierdzenia o równości i przystawaniu trójkątów są bardzo ważne, na nich bowiem polega dowód wielu prawd w Geometryi i prawie ciągłego będą w dalszym ciągu użycia; dla tego téż już tu należy się przejąć duchem geometrycznego dowodzenia i nie mieć na oku prostych trójkąt ograniczających, albo samych trójkątów jako materyjalnych, ale raczéj dobrze uważać na sposób i ścisłość z jaką każdą prawdę udowodnić należy, jeżeli kogo o jéj rzetelności przekonać chcemy. Z téj strony uważając poprzednie i następne dowodzenia, wlejemy w owe linije i figury ducha, że je słyszeć będziemy przemawiające do nas i wskazujące nam co to jest prawdziwe dowodzenie jakiéjkolwiek prawdy.

Uwaga 3. Co się tyczy przystawania innych figur, niepotrzebne są osobne twierdzenia; rozebrawszy albowiem każde dwa wielokąty tymże samym sposobem za pomocą przekątni na trójkąty, skoro każde dwa odpowiadające sobie, a tém samém wszystkie części w tymże samym porządku, jak są ułożone, przystają do siebie, natenczas i całości t. j. same wielokąty przystać także muszą. Dwa zatém równoległoboki mające po dwa boki przyległe równe i po kącie między temiż bokami zawartym równym, przystają do siebie. Dwa prostokąty mające po dwa boki przyległe równe, także przystają do siebie i t. d.

Za pomocą nabytych już dotąd wiadomości, możemy rozwiązać następujące zagadnienia.

§. 25.

Zagadnienie 1. *Na danéj prostéj i przy punkcie danym narysować kąt równy danemu.*

Rozwiązanie. Niech będzie kąt M i prosta AB, tudzież punkt A na niéj dany *fig. 32* potrzeba z tego punktu poprowadzić inną prostą, któraby z daną czyniła kąt równy danemu M. Na ten koniec z punktu M dowolną otwartością cyrkla kréślimy łuk przecinający ramiona kąta M w punktach N i P tąż samą otwartością cyrkla, kréślimy z danego punktu A łuk z téj strony prostéj danéj, z któréj chcemy mieć kąt, tak iżby przeciął prostą AB, jak tu w punkcie D. Wziąwszy potém cyrklem odległość punktów N i P, i tą z punktu D (t. j. postawiwszy jednę nożkę cyrkla w punkcie D), przecinamy ostatni łuk w punkcie C, a poprowadziwszy przez punkta A i C prostą, ta z daną AB czynić będzie kąt równy danemu M. Dla dowiedzenia, że takiém postępowaniem zagadnienie to jest rzetelnie rozwiązane, połączmy tak punkta N i P jako też C i D prostemi NP i CD, tedy w dwóch trójkątach MNP i ACD jest AC=MN, AD=MP i CD=NP z wykréślenia, bo tak oba łuki tąż samą otwartością cyrkla nakréśliliśmy, przez co promienie MN, MP i AC, AD są między sobą równe, jako też i odległość NP tęż samę przenieśliśmy od D do C, zatém dwa te trójkąty według twierdzenia §. 22 przystają do siebie, a z przystania wnosimy że kąty jednakowo położone są sobie równe, przeto CAD=CAB=M co było do okazania.

§. 26.

ZAGADNIENIE 2. *Prostą oznaczonéj długości podzielić na dwie części równe.*

Rozwiązanie. Niech prostą daną będzie AB, *fig. 33,* potrzeba tę prostą podzielić na dwie części równe. Z końców jéj A i B jako ze środków koła, dowolną otwartością cyrkla, byle tylko większą niż połowa prostéj AB, zakréślamy z obu stron prostéj łuki jakiéjkolwiek wielkości, byle się tylko z sobą przecięły, co w każdym razie nastąpi, skoro warunek otwartości cyrkla był zachowany, jak tu w punktach C i D. Złączywszy te dwa punkta prostą CD, ta podzieli AB w punkcie w którym ją przecina, t. j. w E na dwie równe części.

Na dowiedzenie rzetelności tego postępowania, złączmy punkta C i D z punktami A i B prostemi AC, BC, AD, BD; w dwóch trójkątach CAD i CBD jest AC=BC, AD=BD i CD spólne, przeto dwa te trójkąty według §. 22 przystają do siebie, z przystania zaś wnosimy, że kąty jednakowo położone, są między sobą równe, zatém ACD=BCD. W dwóch znowu trójkątach ACE i BCE jest AC=BC, bok CE spólny i kąt ACE=BCE, zatém według §. 23 przystają do siebie, a w szczególności bok AE=BE co było do okazania.

Uwaga. Zupełnie takiém samém postępowaniem podzielić można łuk dany na dwie równe części, kréśląc z jego końców łuki tak jak z końców prostéj danéj kréśliliśmy i łącząc punkta przecięcia się dwóch łuków prostą, która podzieli dany łuk, na dwie równe części.

§. 27.

ZAGADNIENIE 3. *Z danego punktu na prostéj danéj poprowadzić inną prostą do piérwszéj prostopadłą.*

Rozwiązanie. Daną prostą niech będzie AB *fig. 34,* tudzież niech na jéj kierunku danym punktem będzie C, potrzeba z tego punktu poprowadzić w jednę lub drugą stronę prostopadłą do AB. Na ten koniec od punktu C tak ku A jako téż i ku B, odetnijmy części CD i CE między sobą równe a z resztą dowolne, z punktów D i E jakąkolwiek otwartością cyrkla, byle większą niż połowa DE, czyli większą niż każda z odciętych części, zakréślmy nad, lub pod prostą AB dwa łuki jak w zagadnieniu poprzedzającém, które przetną się w punkcie F; złączywszy punkt F z danym C prostą FC, ta będzie prostopadłą żądaną.

Na dowiedzenie rzetelności tego rozwiązania, połączmy punkt F z punktami D i E prostemi DF i EF, tedy dwa trójkąty DFC i CFE są sobie równe i przystają do siebie, według §. 22, bo DF = EF, gdyż punkt F znajduje się tak na okręgu koła ze środka D, jako téż i na okręgu koła ze środka E, tymże samym promieniem zakréślonym, CD = CE także z wykréślenia i CF spólne, z przystania zaś tych trójkątów wnosimy; że kąt DCF = ECF. Ale te kąty są przyległe, czynią zatém dwa kąty proste, a kiedy sobie są równe, każdy z nich jest prostym §. 6 a prosta FC jest prostopadłą do AB co należało dowiéść.

Gdyby z końca danéj prostéj potrzeba było poprowadzić do niéj prostopadłą, wtedy należy przedłużyć prostą daną w przeciwną stronę i postąpić jak wyżéj.

Uwaga. Jeżeli z punktu na prostéj danego potrzeba poprowadzić prostopadłą do téjże, używamy w takim razie wyrażenia: *z punktu na prostéj danego, wyprowadzić lub wystawić do niéj prostopadłą.*

§. 28.

ZAGADNIENIE 4. *Z punktu danego nad liniją prostą poprowadzić prostopadłą do téjże.*

Rozwiązanie. Niech AB będzie prostą daną, tudzież nad nią (może téż być i pod nią) punkt C *fig. 35,* potrzeba z tego punktu poprowadzić prostopadłą do AB. Z danego punktu C, kréśli się łuk otwartością cyrkla większą niż jest odległość punktu C od AB, a zatém dowolną byle tylko taką, iżby zakréślony łuk przeciął prostą AB w dwóch punktach D i E; z tych ostatnich punktów jako ze środków jednymże promieniem, ale większym niż połowa DE, kréślimy dwa łuki z przeciwległéj strony punktu danego względem prostéj danéj, przecinające się w punkcie F, lub téż między prostą i punktem danym, przecinające się w punkcie G, lub nareszcie nad punktem C, przecinające się w K (piérwsze w każdym razie jest dokładniejsze); punkta C i F lub C i G, lub téż C i K łączymy prostą, którą w dwóch ostatnich przypadkach przedłużamy aż do przecięcia się z AB w punkcie H, a ta będzie prostopadła do AB. Na udowodnienie że tak jest w istocie, połączmy punkta C i F z punktami D i E prostemi CD, CE, DF i EF, tedy zupełnie jak w zagadnieniu poprzedzającém, dwa trójkąty CDF i CEF przystają do siebie według §. 22, a w szczególności kąt DCF=FCE.

Dwa znowu trójkąty DCH i HCE przystają także do siebie według §. 23, a następnie kąt DHC=CHE. A że te kąty są przyległe, więc każdy z nich jest prosty, a prosta CH prostopadła do AB według §. 6 co było do dowiedzenia.

Gdybyśmy z jakich powodów musieli kreślić łuki przecinające się w G lub K, wtenczas dowód zupełnie jest ten sam jak poprzedzający.

Uwaga 1. Przez punkt dany za prostą poprowadzić prostopadłą do téjże, używa się w Geometryi wyrażenia: *z punktu danego za liniją, spuścić prostopadłą do téjże.*

Uwaga 2. Że tak z punktu na prostéj, jako téż i za prostą danego nie więcéj jak jednę prostopadłą do niéj poprowadzić można, jest rzeczą bardzo jasną, gdyż w piérwszym razie każda inna, w inny sposób prowadzona jak np. CG lub CH *fig. 34* czynić będzie z prostą daną dwa kąty nierowne; bo kąt GCB$<$FCB t. j. od prostego, kąt zaś HCB$>$FCB, piérwszy więc jest ostry a drugi rozwarty; proste więc CG i CH są pochyłemi względem AB stósownie do §. 6. Co się tyczy drugiego przypadku, pozwólmy, jeżeli to być może, że prosta CE *fig. 35* z punktu C do AB poprowadzona, jest także do AB prostopadła. Dwie proste prostopadłe do trzeciéj są od siebie równoległe według §. 13, więc CE musiałaby być równoległą do HC. Ale proste równoległe nigdzie się z sobą nie schodzą, proste zaś HC i EC spotykają się w punkcie C, nie mogą więc być równoległemi a następnie prosta CE nie jest prostopadłą do AB lecz pochyłą; zatém z punktu za liniją nie można więcéj jak tylko jednę spuścić do niéj prostopadłą.

§. 29.

ZAGADNIENIE 5. *Przez punkt dany za prostą poprowadzić inną prostą równoległą do piérwszéj.*

Rozwiązanie. Niech daną prostą będzie AB i punkt za nią C *fig. 36*, potrzeba przez ten punkt poprowadzić równoległą do AB. Z punktu C poprowadźmy prostą CD pod jakiémkolwiek nachyleniem do AB, potém przy prostéj CD i przy punkcie C według §. 25 narysujmy kąt ECD$=$CDB, a przedłużywszy jego ramię CE w obie strony nieograniczenie, prosta EF jest żądaną równoległą do AB. Kąty bowiem ECD i CDB są naprzemianległe wewnętrzne i sobie równe z wykreślenia, zatém proste AB i EF według §. 10 są równoległe.

Uwaga. Że przez punkt C nie więcéj jak jedna równoległa do AB jest możebną, przekonać się można z §. 12 jako téż i ztąd, że przypuściwszy iż prosta GH przez punkt C przechodząca różna od EF, jest także równoległa od AB, musiałby kąt GCD być równy kątowi CDB; a że CDB$=$ECD z wykreślenia, zatém i kąt GCD byłby równy kątowi ECD. Ale kąt GCD, jest częścią kąta ECD więc mu nie może być równy, przeto i to być nie może, iżby prosta GH była równoległą do AB; zatém przez punkt C nie więcéj nad jednę prostą równoległą do AB poprowadzić można.

§. 30.

ZAGADNIENIE 6. *Przez dany za prostą punkt poprowadzić inną, któraby z daną czyniła kąt żądany lub dany.*

Rozwiązanie. Niech AB będzie prostą, C punktem, M kątem danym, jaki prosta przez C przechodząca ma czynić z AB *fig. 37*. Przy którymkolwiek punkcie M′ prostéj danéj narysujmy kąt NM′D równy danemu według §. 25, a potém według zagadnienia poprzedzającego poprowadźmy przez punkt C równoległą do NM' a ta z daną prostą czynić będzie kąt CDB=M. Rozwiązanie to tak jest oczywistém, że żadnego dowodzenia nie potrzebuje, pamiętając tylko własność linij równoległych.

§. 31.

Zagadnienie 7. *Mając dane trzy proste oznaczonéj długości, narysować trójkąt, któregoby bokami były te trzy proste dane.*

Rozwiązanie. Niech danemi trzema prostemi będą AB, CD i EF *fig. 38*, nakreśliwszy prostą nieograniczonéj długości, odcina się na niéj jedna z prostych danych np. AB od M do N, potém z punktu M otwartością cyrkla równą jednéj z pozostałych prostych np. CD kreśli się łuk, a z punktu N otwartością cyrkla równą drugiéj prostéj przecina się tenże łuk; punkt przecięcia się tych łuków P połączywszy z punktami M i N prostemi MP, NP, otrzymamy trójkąt żądany. Gdy bowiem MN=AB, MP=CD a NP=EF, z wykreślenia, więc bokami trójkąta MNP są trzy proste dane, jest zatém trójkąt MNP żądanym, bo z trzech prostych jeden tylko trójkąt nakreślić można według §. 22.

Uwaga 1. Aby to zagadnienie było podobném do rozwiązania, jedyny tylko jest warunek, aby summa dwóch którychkolwiek prostych danych była większą niż trzecia według §. 15.

Uwaga 2. Gdy z danych elementów mamy narysować trójkąt, używamy w Geometryi wyrażenia się: *wykreślić* lub *wystawić trójkąt.* Tak ostatnie zagadnienie wysłowia się zwyczajnie: *z trzech prostych danych wykreślić* lub *wystawić trójkąt.* Tegoż samego wyrażenia się używać także będziemy przy innych prostokreślnych figurach.

Uwaga 3. Gdyby trzy proste były między sobą równe, wystawiony trójkąt byłby równobocznym, a w takim razie zagadnienie zmieniłoby swoje brzmienie w następujące: *na prostéj danéj wystawić trójkąt równoboczny,* którego rozwiązanie niczém się nie różni od poprzedzającego.

§. 32.

Zagadnienie 8. *Mając dane dwie proste i kąt mający być między niemi zawarty, wystawić trójkąt.*

Rozwiązanie. Niech danemi prostemi będą AB i CD, tudzież danym kątem M *fig. 39* nakreśliwszy prostą nieograniczonéj długości, odcina się na niéj jedna z prostych danych np. CD od M do N, potém przy prostéj MN i przy punkcie M lub N, kreśli się kąt równy danemu M, a odciąwszy na ramieniu nakreśloném, drugą z prostych danych AB od M do P i złączywszy punkta P i N prostą PN, otrzymamy trójkąt MPN żądany; albowiem MN = CD i MP = AB tudzież kąt PMN = M jest kątem między danemi prostemi zawartym, jak żądano; a z dwóch prostych i kąta między niemi zawartego nie podobna mieć dwóch trójkątów różnych według §. 23.

§. 33.

ZAGADNIENIE 9. *Dana jest prosta i dwa kąty mające przy niéj leżeć, wystawić z tych trzech elementów trójkąt.*

Rozwiązanie. Niech daną prostą będzie AB a dwoma danemi kątami M i N *fig. 40,* potrzeba z tych rzeczy wystawić trójkąt. Nakreśliwszy prostą nieograniczonéj długości, odcina się na niéj prostą daną AB od M do N; przy punkcie M kreśli się kąt równy danemu M, a przy punkcie N kąt równy kątowi N lub przeciwnie; nakreślone ramiona przedłużają się aż do przecięcia się z sobą w punkcie P, a te zamkną trójkąt MNP żądany; jest bowiem MN = AB, PMN = M, PNM = N i oba te kąty leżą przy prostéj MN = AB jak żądano: z trzech zaś takich elementów nie można wystawić dwóch różnych trójkątów według §. 24.

Uwaga. Żeby to zagadnienie było podobném do rozwiązania, koniecznym jest warunkiem aby summa dwóch danych kątów była mniejszą niż 2R, inaczéj bowiem przedłużone ramiona nie przetną się z sobą ale raczéj rozchodzić się będą jak np. ramiona MP i NQ *fig. 41,* z tego powodu, iż dwie proste MP i NQ przecięte od trzeciéj MN czynią summę kątów jednostronnych wewnętrznych większą niż 2R, zatém nie przetną się nad ale pod prostą MN w punkcie R i zamkną rzeczywiście trójkąt MNR, którego dwa kąty RMN i RNM są spełnieniami kątów danych do dwóch kątów prostych. W takim więc przypadku wykreślony trójkąt nie będzie zamykał elementów danych a mianowicie kątów, ale ich spełnienia.

Gdyby summa danych kątów równała się 2R, ramiona MP i NQ nigdzieby się nie przecięły, gdyż w takim przypadku summa kątów PMN i QNM będąc równa 2R, proste MP i NQ byłyby równoległemi według twierdzenia §. 10 *co do trzeciego.*

§. 34.

Zagadnienie 10. *Dany kąt podzielić na dwie równe części.*

Rozwiązanie. Danym kątem niech będzie kąt A *fig. 42,* na ramionach jego naznaczywszy dwa punkta B i C jednakowo od wiérzchołka A odległe, z tych punktów B i C jako ze środków dowolnym promieniem byle większym niż połowa odległości BC zakreśliwszy dwa łuki przecinające się w punkcie D, prosta łącząca wiérzchołek z punktem D podzieli dany kąt A na dwie równe części.

Na udowodnienie rzetelności tego rozwiązania, złączmy punkta B i C z punktem D prostemi BD i CD, tedy dwa trójkąty ABD i ACD według §. 22 przystają do siebie, a następnie kąty jednakowo położone są sobie równe; przeto kąt BAD leżący naprzeciwko boku BD, jest równy kątowi CAD przeciwległemu bokowi CD a równemu bokowi BD, co było do okazania.

Wniosek. Dzieląc tym samym sposobem każdy z kątów BAD i CAD znowu na dwie równe części, podzielimy kąt dany A na cztéry części równe; a dzieląc każdy z ostatnich kątów na dwie, cały kąt A podzielimy tym sposobem na ośm części równych i t. d. Widzimy przeto że powyższém postępowaniem każdy kąt podzielić możemy na 2, 4, 8, 16 .... czyli 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 ..... 2^n części równych.

§. 35.

Zagadnienie 11. *Mając dane dwie proste na dwa przyległe boki równoległoboku i kąt mający być między niemi zawarty, wykreślić czyli wystawić równoległobok.*

Rozwiązanie. Prostemi danemi niech będą AB i CD tudzież danym kątem M *fig. 43,* potrzeba z tych elementów wystawić równoległobok. Na ten koniec kreśli się naprzód prosta nieograniczonéj długości i na niéj odcina się jedna z prostych danych np. większa AB od P do R; przy punkcie P lub R kreśli się kąt równy danemu; a na jego nakreśloném ramieniu odciąwszy drugą prostą daną CD od P do T, przez punkt T prowadzi się równoległa od PR, a przez punkt R równoległa od PT; te przedłużone aż do ich przecięcia się z sobą, zamkną równoległobok żądany. Lub téż na równoległéj od PR odciąwszy $TS = PR$, punkt S złączyć z punktem R prostą, dwie tak poprowadzone proste z dwiema piérwszemi zamkną równoległobok jak poprzednio. Rzetelność tego rozwiązania nie potrzebuje dowodu; jest bowiem rzeczą widoczną, że wystawiona figura jest równoległobokiem i zawiera trzy elementa dane.

ROZDZIAŁ III.

Własności figur prostokréślnych, co do boków i kątów, tudzież własności prostych prostopadłych i pochyłych.

---

§. 36.

Po rozwiązaniu poprzednich zagadnień, łatwo dowiedziemy zasadnicze twierdzenie całéj nauki o trójkątach, a zatém i figurach prostokréślnych, które jak już wspomnieliśmy, można albo rozebrać, albo zamienić na trójkąty. Twierdzenie to jest następujące:

Twierdzenie. *W każdym trójkącie prostokréślnym summa trzech jego wewnętrznych kątów równa się dwom kątom prostym.*

Niech będzie trójkąt ABC *fig. 44*, potrzeba dowiéść że $A + B + C = 2R = 180^0$.

Przez wiérzchołek któregokolwiek z jego kątów np. B poprowadziwszy prostą DE równoległą do boku przeciwległego AC, kąt $A = DBA$, kąt $C = CBE$ jako naprzemianległe wewnętrzne względem dwóch równoległych AC i DE i siecznych AB i CB. Ale summa kątów $DBA + B + CBE = 2R$

według §. 7, wziąwszy więc zamiast kątów DBA i CBE im równe A i C, będzie téż $A+B+C=2R$ co było do dowiedzenia.

Wniosek 1. W każdym trójkącie prostokréślnym summa dwóch którychkolwiek kątów mniejsza jest od dwóch kątów prostych i warunek w uwadze przy zagadnieniu §. 33 głównie na téj zasadzie polega.

Wniosek 2. Jeżeli w trójkącie prostokréślnym znamy dwa kąty, już tém samém i trzeci jest znany; równa się bowiem różnicy między 180^0 a summą dwóch wiadomych. Twierdzenie więc §. 24 może być ogólniéj wysłowione tym sposobem: *dwa trójkąty mające po jednym boku równym i po dwa którekolwiek kąty równe, są sobie równe i przystają do siebie.*

Wniosek 3. Jeżeli w trójkącie jeden kąt jest prosty, dwa inne koniecznie muszą być ostre. A gdyby w trójkącie jeden kąt był rozwartym, dwa inne tém więcéj muszą być ostre.

Uwaga. Trójkąty ze względu kątów mają także szczególne nazwy. I tak: trójkąt mający kąt prosty, nazywa się *prostokątnym* (triangulum rectangulum). W takim trójkącie bok przeciwległy kątowi prostemu, zowie się *przeciwprostokątnią* (hypothenusa), dwa zaś inne boki nazywają się *bokami kątowi prostemu przyległemi* (catheti). Trójkąt, którego jeden kąt jest rozwarty, nazywać będziemy *rozwartokątnym* (obtusangulum), a bok temu kątowi przeciwległy, *przeciwrozwartokątnią.* Trójkąt nareszcie, którego każdy z trzech kątów jest ostry, zwać będziemy *ostrokątnym* (acutangulum), bok zaś przeciwległy kątowi ostremu, *przeciwostrokątnią.* Dwie ostatnie nazwy rzadko się używają, a trójkąty rozwarto- i ostrokątne noszą jeszcze jednę ogólną nazwę *ukośnokątnych* (obliquangulum).

§. 37.

Na podstawie poprzedzającego twierdzenia, znajdziemy w każdym wielokącie summę jego kątów wewnętrznych następującym sposobem:

a) W czworokącie ABCD *fig. 45* poprowadziwszy przekątnią AC lub BD, ta podzieli czworokąt na dwa trójkąty, których kąty wewnętrzne należą do kątów czworokąta. A że w każdym z tych trójkątów summa trzech kątów czyni 2R czyli 180°, zatém summa kątów wewnętrznych czworokąta czyni 2.2R = 4R = 2.180° = 360°.

Można téż znaléść summę wewnętrznych kątów czworokąta tak: gdziekolwiek wewnątrz czworokąta obrawszy punkt E i takowy połączywszy z wiérzchołkami kątów czworokąta prostemi, te podzielą czworokąt jak wiemy na cztéry trójkąty, których kąty, oprócz tych które są przy punkcie E, stanowią kąty wewnętrzne czworokąta. Ponieważ w każdym z cztérech trójkątów summa trzech kątów czyni 2R, zatém summa wszystkich kątów czyni 4.2R = 8R. Ale, jak to wspomnieliśmy, kąty przy E nie należą do kątów czworokąta, a czynią 4R według §. 7, zatém summa kątów wewnętrznych czworokąta jest równa 8R—4R = 4R jak wyżéj. Tę summę dla dalszego wyraźmy tak 4.2R—4R.

b) W pięciokącie ABCDE, *Fig. 46* z wiérzchołka któregokolwiek z jego kątów np. A poprowadziwszy do innych wiérzchołków przekątnie, których dwie tylko według §. 18 prowadzić można, te według tegoż §. podzielą pięciokąt na trzy trójkąty, których kąty wewnętrzne stanowią kąty wewnętrzne pięciokąta. A że summa trzech kątów każdego trójkąta czyni 2R, zatém summa kątów wszystkich trzech trójkątów, czyli summa kątów wewnętrznych pięciokąta, równa się 3.2R = 6R.

Albo: obrawszy wewnątrz pięciokąta gdziekolwiek punkt S i ten złączywszy prostemi ze wszystkiemi wierzchołkami kątów pięciokąta, podzieli się tym sposobem pięciokąt ten na pięć trójkątów. W każdym z tych trójkątów summa jego kątów wewnętrznych czyni 2R, więc we wszystkich trójkątach summa kątów czynić będzie 5.2R = 10R. Ale znowu kąty przy S czynią 4R a nie należą do kątów pięciokąta, więc nareszcie summa kątów wewnętrznych pięciokąta jest równa 10R—4R=6R jak wyżéj, albo 5.2R—4R.

c) Zobaczmy jeszcze w sześciokącie. Postąpiwszy tu dwoma powyższemi sposobami, znajdziemy według piérwszego summę kątów wewnętrznych sześciokąta równą 4.2R=8R; bo przez prowadzenie przekątni, których będzie trzy, podzieli się sześciokąt na cztéry trójkąty. Według zaś drugiego sposobu tenże sześciokąt podzieli się na sześć trójkątów, a zatém summa kątów wewnętrznych sześciokąta będzie równa 6.2R—4R=8R jak piérwszym sposobem.

Zestawiając to co dotąd o summie kątów wewnętrznych trójkąta, czworokąta, pięciokąta i sześciokąta dowiedliśmy, pod jeden widok, i pisząc 2R=3.2R—4R summę kątów wewnętrznych w trójkącie, mieć będziemy:

summa kątów wewnętrznych			trójkąta	=2R=3.2R—4R
„	„	„	czworokąta	=4R=4.2R—4R
„	„	„	pięciokąta	=6R=5.2R—4R
„	„	„	sześciokąta	=8R=6.2R—4R

więc w ogólności summa kątów wewnętrznych wielokąta mającego n boków równa się . . n.2R—4R=(n—2)2R. t. j. summa rzeczonych kątów równa się tyle razy wziętym dwom kątom prostym ile wielokąt ma boków mniéj 4 kąty proste, albo: równa się tyle razy wziętym dwom kątom prostym, ile wielokąt ma boków mniéj 2.

Uwaga. Ponieważ summa kątów wewnętrznych

trójkąta	czyni	2	kątów prostych
czworokąta	„	4	
pięciokąta	„	6	
sześciokąta	„	8	
siedmiokąta	„	10	

i t. d.

więc summa kątów wewnętrznych wielokątów tak jak po sobie następują, poczynając od trójkąta, stanowią szereg liczb parzystych 2, 4, 6, 8, 10 . . . . którego ogólny wyraz jest

2 (n—2) wyrażający summę kątów wewnętrznych wielokąta n boków mającego.

§. 38.

Definicyja zewnętrznego kąta w §§. 15 i 16 podana, pozostaje dla każdego wielokąta taż sama, zobaczmy więc co jest uwagi godnego względem kątów zewnętrznych każdego o jakiéjkolwiek liczbie boków wielokąta.

Jeżeli w trójkącie ABC *fig. 47* idąc w kierunku ABC przedłużymy jego boki w tymże kierunku, otrzymamy przy każdym wiérzchołku jeden tylko kąt zewnętrzny, jak tu są kąty DBC, ECA i FAB; takie kąty nazywać właściwie będziemy kątami zewnętrznemi trójkąta, ile razy będzie mowa o wszystkich razem; mają one bowiem tę własność, że w summę wzięte czynią 4R. Jakoż przy każdym wiérzchołku kąt zewnętrzny z wewnętrznym czynią 2R jako przyległe, w trzech przeto wiérzchołkach jest 6R, od czego odjąwszy kąty wewnętrzne, których summa = 2R, pozostaje na summę kątów zewnętrznych trójkąta 4R.

W czworokącie ABCD *fig. 48* postąpiwszy tymże samym sposobem, otrzymamy jego kąty zewnętrzne EBC, FCD, GDA i BAH. A że znowu każdy kąt zewnętrzny z wewnętrznym czyni 2R, a wiérzchołków jest cztéry, zatém summa kątów zewnętrznych z wewnętrznemi czyni 4.2R = 8R. Odjąwszy od téj summy kąty wewnętrzne czworokąta, które według poprzedzającego §. czynią 4R, pozostaje na summę kątów zewnętrznych czworokąta 4R.

W pięciokącie ABCDE *fig. 49* przedłużywszy jego boki w sposób przy trójkącie i czworokącie wskazany, otrzymamy summę kątów zewnętrznych i wewnętrznych = 5.2R = 10R. A że według powyższego summa drugich = 6R, zatém na summę kątów zewnętrznych pięciokąta wypada 10R—6R = 4R.

W sześciokącie przez podobneż rozumowanie znaleźlibyśmy summę kątów zewnętrznych z wewnętrznemi = 6.2R = 12R; ale że summa drugich czyni 8R, summa przeto piérwszych czyli zewnętrznych czynić będzie 12R—8R = 4R.

Kiedy dla każdego z cztérech przywiedzionych wielokątów summa kątów zewnętrznych wypada $=4$R, wniesiemy więc ogólnie: że *summa kątów zewnętrznych każdego wielokąta jest stałą i równa się cztérem kątom prostym.*

Albo tak: wielokąt mający n boków, ma téż n wiérzchołków kątów, przeto summa kątów zewnętrznych i wewnętrznych razem, czyni $n.2$R. Ale według poprzedzającego §. summa drugich czyni $n.2\text{R}-4\text{R}$, które odjąwszy od poprzedzającéj summy, otrzymamy $n.2\text{R} - (n.2\text{R}-4\text{R}) = 4\text{R}$ na summę kątów zewnętrznych jak szczegółowo widzieliśmy.

§. 39.

Twierdzenie. *Kąt zewnętrzny trójkąta równa się dwom wewnętrznym naprzeciwko leżącym.*

Niech będzie trójkąt ABC *fig. 50*, w którym przedłużywszy jeden z boków np. AC nieograniczenie, otrzymamy kąt BCD zewnętrzny trójkąta ABC; potrzeba dowiéść że $\text{BCD}=\text{A}+\text{B}$. Przez punkt C poprowadziwszy prostą CE równoległą do AB, będzie kąt $\text{BCE}=\text{B}$, jako naprzemianległe wewnętrzne względem AB i CE i siecznéj BC; podobnież kąt $\text{ECD}=\text{A}$ jako jednostronne odpowiadające sobie względem tychże równoległych i siecznéj AD. A że $\text{BCE}+\text{ECD}=\text{BCD}$, więc téż $\text{A}+\text{B}=\text{BCD}$ co było do dowiedzenia.

Uwaga. Kąty naprzeciwkoleżące nazywają się te, które z kątem zewnętrznym nie mają spólnego wiérzchołka.

Wniosek. Z tego twierdzenia wypada, że kąt zewnętrzny trójkąta jest zawsze większy od każdego z wewnętrznych naprzeciwko położonych.

§. 40.

Poznawszy cechy równości trójkątów, tudzież że summa kątów wewnętrznych trójkąta jest stałą i równa się 2R, zobaczmy teraz jaki wpływ mają boki trójkąta na jego kąty i wzajemnie, gdyż już wiemy że pomiędzy niemi ścisły zachodzi związek.

Twierdzenie. *W trójkącie naprzeciwko boków równych leżą kąty równe i wzajemnie: naprzeciwko kątów równych leżą boki równe.*

Co do piérwszego. Niech będzie trójkąt ABC *fig. 51,* w którym AB=BC; potrzeba dowieść że téż kąt A=C. Na dowiedzenie téj prawdy, bok trzeci AC podzielmy w punkcie D na dwie równe części i punkt podziału złączmy z wiérzchołkiem kąta przeciwległego B prostą BD. Dwa trójkąty ABD i DBC według §. 22 przystaną do siebie, bo trzy boki jednego są równe trzem bokom drugiego, każdy każdemu, t. j. AB=BC z założenia, AD=DC z podzielenia a BD spólny, należy bowiem tak do trójkąta ABD jako téż i DBC. Z przystania tych trójkątów wnosimy, że kąty ich jednakowo położone są sobie równe; jest więc A=C, ADB=BDC i ABD=DBC. Pierwsza przeto część obecnego twierdzenia jest tym sposobem dowiedziona.

Twierdzenie to wysłowia się zwyczajnie tak: *w trójkącie równoramiennym kąty leżące przy podstawie są sobie równe.*

Wniosek 1. Ponieważ każdy trójkąt równoboczny jest zarazem równoramienny, więc taki trójkąt jest oraz równokątnym, t. j. trzy jego kąty są między sobą równe. A kiedy summa trzech kątów trójkąta jest $=180^0$, zatém w trójkącie równobocznym każdy kąt jest $=60^0$.

Wniosek 2. Ponieważ z przystania dwóch powyższych trójkątów wypadło także iż ADB=BDC, a te kąty jako przyległe czynią 2R, zatém każdy z nich jest prostym a prosta BD prostapadła do podstawy AC. A że również z przystania rzeczonych trójkątów wnieśliśmy że ABD=DBC, więc prosta BD dzieli kąt w wiérzchołku na dwie równe części. Wniesiemy więc ogólnie, że w trójkącie równoramiennym połączywszy wiérzchołek kąta przeciwległego podstawie ze środkiem téjże podstawy liniją prostą, ta jest prostopadłą do podstawy i dzieli kąt w wiérzchołku na dwie równe części.

Co do drugiego. Jeżeli w trójkącie ABC kąt A=C, potrzeba dowieść, że téż bok AB=BC. Na dowiedzenie tego, podzielmy kąt B na dwie równe części według §. 34, a prostą dzielącą przedłużmy aż do przecięcia się z bokiem AC w punkcie D. Ponieważ A=C z założenia, zaś ABD=DBC z wykréślenia, zatém i trzecie kąty są sobie równe §. 36 *wniosek 2*; a że i bok BD jest spólny, przeto te trójkąty według §. 24 przystają do siebie, a w szczególności boki odpowiadające sobie są między sobą równe, t. j. AB = BC i AD = DC. Druga przeto część powyższego twierdzenia jest także dowiedziona, t. j. że trójkąt mający dwa kąty między sobą równe, jest równoramienny.

Wniosek 1. Ponieważ AD = DC i kąty przy D są równe, a jako przyległe są proste, wniesiemy z poprzedzającego że w trójkącie równoramiennym podzieliwszy kąt przeciwległy podstawie na dwie równe części, prosta dzieląca dzieli też podstawę na dwie równe części, i jest do niéj prostopadłą.

Wniosek 2. W trójkącie równoramiennym prostopadła z wiérzchołka kąta przeciwległego podstawie, spuszczona na tęż podstawę, dzieli tak kąt w wiérzchołku, jako téż i podstawę na dwie równe części; tudzież prostopadła ze środka podstawy trójkąta równoramiennego do niéj wyprowadzona, koniecznie przechodzić musi przez wiérzchołek kąta przeciwległego i podzielić tenże kąt na dwie części równe, bo z punktu na prostéj danego, jednę tylko prostopadłą do téjże poprowadzić można.

§. 41.

Twierdzenie. *W każdym trójkącie naprzeciwko boku większego leży kąt większy, i odwrotnie.*

Niech będzie trójkąt ABC *fig. 52*, w którym BC > AB, trzeba dowieść że kąt A > C. Na ten koniec na boku większym BC odcina się BD = AB, a złączywszy punkta A i D prostą AD, ponieważ AB = BD, trójkąt przeto ABD jest równoramienny; zatém BAD = BDA według poprzedzającego twierdzenia. Lecz kąt BDA > C jako zewnętrzny względem trójkąta ADC, zatém i kąt BAD > C, a témbardziéj kąt A, którego tamten jest tylko częścią, jest większy od kąta C co było do dowiedzenia.

Odwrotnie. Jeżeli w trójkącie ABC kąt A > C, potrzeba dowieść, że téż BC > AB. Gdyby ktoś temu twierdzeniu przeczył, nie mógłby tego w inny sposób czynić, tylko mówiąc, że nie jest BC > AB, ale, albo BC = AB, albo téż BC < AB, bo nie masz innego przypadku. Jeżeli utrzymuje piérwsze, t. j. że BC = AB, według poprzedzającego §. byćby musiało A = C; jeżeli zaś drugie, tedy według piérwszéj części obecnego twierdzenia byćby powinno A < C. A że oba wypadki tych przeciwnych twierdzeń sprzeciwiają się założeniu że kąt A > C, nie może więc być ani BC = AB ani BC < AB; trzeci więc możliwy przypadek BC > AB jest koniecznym, co téż potrzeba było dowieść.

Wniosek. Z tego twierdzenia wypada, że w trójkącie prostokątnym przeciwprostokątnia jest większą od każdego z boków przyległych kątowi prostemu. W trójkącie zaś rozwartokątnym bok przeciwległy kątowi rozwartemu jest najdłuższy.

Uwaga. Dowód, którego w drugiéj części tego twierdzenia użyliśmy, nazywają Geometrowie *dowodem nie wprost* (demonstratio indirecta), w Filozofii nazywa się *deductio ad absurdum.* Uważać tylko potrzeba, że taki dowód polega na okazaniu czyli dowiedzeniu, że prawda twierdzeniu przeciwna, pod żadnym względem ostać się nie może.

§. 42.

Z dwóch poprzedzających twierdzeń razem, wypływają następujące prawdy:

a) Ze środka prostéj danéj AB *fig. 53* wyprowadziwszy do niéj prostopadłą CD nieograniczonéj długości, każdy punkt téj prostopadłéj, jak są E, F, G, H i t. d. jest w równéj od obu końców prostéj AB odległości. Uważając bowiem AB za podstawę trójkąta, prostopadła z jéj środka przechodzi przez wiérzchołek kąta przeciwległego tylko w trójkącie równoramiennym; skoro więc którykolwiek punkt prostopadłéj złączymy z końcami A i B prostemi, te wraz z AB, zamkną nie inny tylko równoramienny trójkąt, a następnie będą sobie równe.

b) Że ze wszystkich prostych, jakie z danego punktu poprowadzić można do prostéj danéj, najkrótsza jest prostopadła; wszystkie zaś pochyłe tym są dłuższe, im punkt ich przecięcia się z prostą daną, daléj pada od spodka prostopadłéj. Jakoż, jeżeli z punktu B spuścimy prostopadłą BD do AC *fig. 54*, tudzież poprowadzimy inne proste BE, BF i t. d., które jak wiemy nazywają się pochyłemi, każda taka pochyła jest przeciwprostokątnią w trójkącie prostokątnym, jakiemi są trójkąty DBE, DBF i t. d. a zatém każda jest dłuższą niż bok przyległy kątowi prostemu BD §. 41 *wniosek*. Również, ponieważ kąt BED jest ostry §. 36 *wniosek 3*, więc kąt jemu przyległy BEF jest rozwarty; w trójkącie więc rozwartokątnym BEF, bok BF jest najdłuższy według tegoż samego §. a zatém BF > BE. Ale też punkt F, w którym pochyła BF spotyka prostą AC, daléj leży od spodka prostopadłéj D niż punkt E, prawda więc że pochyłe im się bardziéj oddalają od spodka prostopadłéj, tym są dłuższe. Kiedy więc prostopadła z jakiego punktu do prostéj danéj spuszczona jest najkrótszą, jest więc stałą i użytą być może, jakoż używa się za *miarę odległości punktu* z którego jest spuszczona od linii danéj.

c) Dwie pochyłe równe, są w równéj odległości od spodka prostopadłéj i nie mogą inaczéj być poprowadzone, tylko jedna z jednéj, druga z drugiéj strony prostopadłéj. Jeżeli bowiem BE = BG, trójkąt GBE jest równoramienny, a prostopadła BD pada na środek jego podstawy GE §. 40 *wniosek 1 i 2*, więc DE = DG.

d) W trójkącie prostokreślnym prostopadła z wiérzchołka kąta na podstawę spuszczona, trojakie mieć może położenie, t. j. paść może *wewnątrz trójkąta* na jego podstawę, albo *na koniec* téj podstawy, lub nareszcie *zewnątrz* trójkąta na jéj przedłużenie. Jeżeli kąty przy podstawie trójkąta oba są ostre, prostopadła koniecznie paść musi wewnątrz trójkąta; dwa bowiem boki czyniące z podstawą kąty ostre, są dwiema w przeciwne strony pochyłemi z wiérzchołka trójkąta do podstawy poprowadzonemi, prostopadła więc przypaść musi między niemi a zatém wewnątrz. Jeżeli zaś jeden kąt przy podstawie jest prosty, ten musi leżeć przy prostopadłéj, a wtedy prostopadła pada na koniec podstawy. Gdyby nakoniec jeden kąt przy podstawie był rozwarty, prostopadła padnie zewnątrz trójkąta, bo dwa boki będą pochyłemi w jednęż stronę względem podstawy; z tego też powodu prostopadła pada ze strony kąta rozwartego, a zatém na przedłużenie podstawy. I tak: w trójkącie ABC *fig.* 55, w którym dwa kąty przy podstawie A i C są ostre, a przeto boki AB i CB nachylają się do AC w przeciwne strony, prostopadła BD z wiérzchołka kąta B przeciwległego podstawie do téjże spuszczona, pada wewnątrz trójkąta t. j. na podstawę AC. W trójkącie A'BC rozwartokątnym przy A', ponieważ boki A'B i CB są pochylone do AC w jednąż stronę, leżeć muszą z téjże saméj strony prostopadłéj, a zatém prostopadła BD leżeć musi za obu ramionami czyli padnie zewnątrz trójkata A'BC na przedłużenie podstawy CA'.

§. 43.

TWIERDZENIE. *Dwa trójkąty prostokątne, mające przeciwprostokątnie równe i po jednym boku przyległym kątowi prostemu równym, są sobie równe i przystają do siebie.*

Niech bowiem będą dwa takie trójkąty ABC i *abc fig.* 56, w których BC$=$*bc* i AB$=$*ab*, trzeba dowieść że te trójkąty przystają do siebie t. j. że też AC$=$*ac* i B$=$*b*, C$=$c. Wystawiwszy sobie trójkąt *abc* położony na trójkącie ABC w ten sposób, iżby punkt *b* padł na punkt B a bok *ba* poszedł po boku BA, tedy ponieważ te boki z założenia są sobie równe, punkt *a* padnie na punkt A. W tém położeniu gdyby przeciwprostokątnia *bc* nie wzięła kierunku BC, musiałaby przypaść z jednéj lub drugiéj strony BC, t. j. albo jak BD, albo też jak BD'. W piérwszym razie jest BC$>$BD, w drugim zaś BC$<$BD' §. poprzedzający *b*). A że w piérwszém położeniu byłby trójkąt ABD$=$*abc*, skąd BD$=$*bc* i podobnież w drugiém położeniu byłby trójkąt ABD'$=$*abc*; skąd BD'$=$*bc*; z tego powodu byćby też musiało BC$>$*bc* i BC$<$*bc*; co ponieważ się w obu razach sprzeciwia założeniu że BC $=bc$, przeto przeciwprostokątnia bc nie może paść ani z jednéj ani z drugiéj strony przeciwprostokątni BC; musi więc pójść w kierunku BC, a następnie punkt c padnie na C i bok ac przystanie do boku AC; bo przez dwa punkta jedna tylko prosta przechodzić może. Skoro więc wszystkie części, tedy i cały trójkąt abc przystaje do trójkąta ABC, a z przystania wniesiemy że AC $=ac$, B $=b$ i C $=c$ co było do dowiedzenia.

Uwaga. Czwarta ta cecha równości trójkątów, służy tylko samym trójkątom prostokątnym.

Wniosek. Dwa trójkąty prostokątne mające albo przeciwprostokątnie, albo którekolwiek boki przyległe kątowi prostemu równe i po jednym z kątów ostrych równym, przystają także do siebie, bo drugie kąty ostre są tém samém sobie równe, w którym razie znajdują się te trójkąty w przypadku §. 24.

§. 44.

Twierdzenie. *Dwa trójkąty mające po dwa boki równe każdy każdemu i po kącie przeciwległym bokowi większemu równym, są sobie równe i przystają do siebie.*

Niech trójkąty ABC i abc *fig.* 57 będą takie, że AB $=ab$, BC $=bc$ i kąt A $=a$, ale także BC $>$ AB jako téż $bc>ab$; trzeba dowieść że dwa te trójkąty przystają do siebie, czyli że są sobie równe we wszystkich swych częściach. Z wiérzchołków kątów B i b, spuśćmy prostopadłe BD i bd na trzecie boki AC *i* ac; prostopadłe te padną, jak z poprzedzającego wiemy, wewnątrz albo zewnątrz trójkątów. W obu przypadkach jest tenże sam dowód. Przyjmijmy że kąty A i C, a i c są ostre i że zatém prostopadłe padają wewnątrz trójkątów, tedy dwa trójkąty ABD i abd, w których kąt A $=a$, kąt ADB $=adb$ a zatém i trzecie kąty są sobie równe t. j. $abd=$ ABD §. 36 *wniosek* 2, oprócz tego AB $=ab$ z założenia, przystają do siebie według §. 23, a z przystania wnosimy, że $bd=$ BD. Dwa też trójkąty prostokątne DBC i dbc mają przeciwprostokątnie równe i po boku przyległym kątowi prostemu równym, bo $bc=$ BC z założenia, a $bd=$ BD z poprzedzającego dowiedzenia, zatém również przystają do siebie według §. 43. Kiedy więc części składające trójkąty ABC i *abc*, t. j. części ABD i *abd*, DBC i *dbc* przystały do siebie, zatém i całości przystają, co było do dowiedzenia.

Cecha równości trójkątów w tém twierdzeniu wskazana i dowiedziona, jest *piątą* i ostatnią cechą; widzimy atoli iż ona nie jest ogólną ale wyjątkową czyli pod pewném ograniczeniem wystarczającą do równości i przystania trójkątów.

Uwaga. W obecném twierdzeniu dodaliśmy: że *kąty przeciwległe bokom większym są sobie równe*, gdyby bowiem zamiast kątów A i *a*, dane były kąty C i *c* z warunkiem, że C$=$*c*, t. j. gdyby twierdzoném było, że kąty leżące naprzeciwko boków mniejszych są sobie równe, natenczas mogą być dwa trójkąty mające te trzy elementa równe, a wszelako nie przystaną do siebie, będąc całkiem różnemi między sobą. Jakoż, w trójkącie *abc*, *bd* będąc prostopadłą, z punktu *b* do *ac*, zaś *ba* pochyłą, można z drugiéj strony prostopadłéj poprowadzić inną pochyłą tak, że $ba'=ba$; dosyć bowiem wziąść $da'=da$ i punkt a' złączyć z *b* prostą ba'. Tym sposobem dwa trójkąty ABC i $a'bc$ mają także $AB=a'b$, $BC=bc$ i kąt $C=c$, a jednak w żaden sposób przystać do siebie nie mogą, bo trójkąt $a'bc$ jest częścią trójkąta *abc* równego trójkątowi ABC, a zatém część do całości przystać nie może. Że trójkąty ABC czyli *abc* i $a'bc$ zupełnie między sobą są różne, widzimy to naocznie, bo trójkąt ABC jest ostrokątny, zaś $a'bc$ rozwartokątny.

§. 45.

Twierdzenie. *Z punktu wziętego za, lub między ramionami kąta danego spuściwszy prostopadłe do tychże ramion, kąt jaki te prostopadłe czynią między sobą, jest równy kątowi danemu.*

Niech danym kątem będzie BAC a danym punktem D *fig. 58*, spuściwszy z tego punktu prostopadłe DE i DF, piérwszą na AC a drugą na AB, trzeba dowieść że kąt między prostopadłemi t. j. kąt $EDF=BAC$. Nazwawszy, albo raczéj wyraziwszy kierunek ramienia AC przez *a*, zaś ramienia AB przez b, tudzież kierunek piérwszéj prostopadłéj czyli DE przez p a drugiéj przez q dla jaśniejszego i krótszego wyrażenia się, bo tylko znaki $+$ i $-$ wyrażają w Geometryi kierunki, możemy kąt AED wyrazić przez $a-p$, jako różnicę kierunków dwóch prostych AC i ED; dla téjże saméj przyczyny kąt AFD wyrazimy przez $b-q$. A że te kąty jako proste są sobie równe, więc $a-p=b-q$, albo przenosząc b na piérwszą a p na drugą stronę tego zrównania, wypada $a-b=p-q$. Lecz $a-b$ wyraża różnicę kierunków dwóch prostych AC i AB czyli kąt BAC, zaś $p-q$ wyraża również kąt EDF, zatém te kąty są sobie równe jak twierdzono.

Albo tak: W dwóch trójkątach AGE i DGF kąty przy G są sobie równe jako wiérzchołkowe, kąty przy E i F proste, więc i trzecie kąty są sobie równe t. j. GAE czyli BAC$=$GDE jak wyżéj.

Uwaga. Dwie prostopadłe jako proste przecinając się czynią dwa kąty przyległe różne, ale też i dwa ramiona kąta danego jako proste, czynią podobnież dwa kąty przyległe różne skoro jedno z nich przedłużymy w przeciwną stronę, uważać więc potrzeba o których kątach mówimy i twierdzimy. Uważając atoli punkt D za początek, prostopadłe ze względu tego punktu mają dwa kierunki, jako też ramiona kąta danego ze względu na jego wiérzchołek A jako także początek, mają również dwa kierunki; jeżeli więc kierunki AB i AC przyjmiemy za dodatne, tudzież kierunki prostopadłych DE i DF także za dodatne, dostrzeżemy że w każdym razie kąty równe zawarte są między jednoimiennemi kierunkami.

Jeżeli punkt dany jest między ramionami kąta, jak jest punkt D między AB i AC *fig. 59*, natenczas kąt jaki prostopadłe czynią między sobą, jest spełnieniem danego kąta do dwóch kątów prostych. Poprowadziwszy bowiem też prostopadłe jak na figurze widzimy, zamkną one wraz z ramionami danego kąta czworokąt AEDF, w którym kąty przy E i F są proste; kąt więc EDF z kątem A czynią 2R §. 37 *a)*, a zatém jeden drugiego nazywa się spełnieniem jak to w §. 9 powiedzieliśmy.

Uwaga. Tak proste AB i AC, jako téż DE i DF przecinając się czynią również jak poprzednio dwa różne kąty, pamiętając atoli na ich kierunki, nigdy nie weźmiemy jednego kąta za drugi, oraz znajdziemy zawsze, że kąty między jednoimiennemi kierunkami zawarte, są sobie równe.

Co do równości innych figur prostokreślnych, ale równości o jakiéj dotąd mówiliśmy, dosyć jest powiedzieć, że skoro każda taka figura przez prowadzenie przekątni z jednego wiérzchołka kąta do wszystkich innych, może być rozebrana na same trójkąty, przeto dwie figury czyli dwa wielokąty o jednéjże liczbie boków, mogące być rozebrane na trójkąty przystające do siebie i podobnie w jednym jak w drugim wielokącie ułożone, również przystają do siebie; bo kiedy części przystają i całości przystać muszą, jeżeli części w tymże samym porządku w obu wielokątach są sobie równe.

§. 46.

Zagadnienie 1. *Mając daną prostą z położenia *) i dwa punkta z jednéjże jéj strony leżące, znaleść na niéj punkt trzeci któryby był w równéj odległości od punktów danych.*

Rozwiązanie. Niech prostą daną będzie AB, tudzież dane dwa pnnkta C i D *fig. 60,* potrzeba na prostéj AB znaleść punkt któryby był w równéj odległości od C i D. Dla znalezienia tego punktu, łączę punkta C i D prostą CD, tę w punkcie E dzielę na dwie równe części i z tego punktu E wyprowadzam prostopadłą do CD aż do przecięcia się z AB w punkcie F, który będzie punktem szukanym. Dowód rzetelności tego postępowania zasadza się na własności prostopadłéj ze środka prostéj wyprowadzonéj §. 42 *a).*

§. 47.

Zagadnienie 2. *Mając daną prostą z położenia i dwa punkta z jednéjże jéj strony leżące, znaleść na prostéj danéj trzeci punkt taki, iżby proste łączące go z danemi czyniły z daną kąty równe.*

*) To znaczy, że jéj miejsce i kierunek są dane.

Niech znowu prostą daną będzie AB i dwa dane punkta C i D *fig. 60* jak w poprzedzającém zagadnieniu; z jednego z punktów danych np. z punktu C spuściwszy prostopadłą do AB i tę przedłużywszy za prostą AB do punktu G, lecz tak iżby HG było równe CH i punkt G złączywszy z drugim z danych D prostą GD, ta naznaczy na prostéj danéj punkt K szukany. Poprowadziwszy bowiem prostą CK ponieważ CH=HG, zatém według §. 42 jest téż CK=GK, a następnie według §. 40, *wniosek* 2 kąt CKA=AKG. Lecz AKG=BKD jako wiérzchołkowe, zatém kąt CKA=DKB jak zagadnienie wymaga.

§. 48.

W §. 27 pokazało się sposób wyprowadzenia prostopadłéj do prostéj danéj z punktu na niéj danego; ten atoli sposób nie może być użytym w przypadku gdy punkt dany znajduje się na końcu prostéj danéj, a téj dla jakich przeszkód przedłużyć nie można. W takim przypadku zagadnienie to inaczéj musi być rozwiązaném, a sposób jego rozwiązania dopiéro tu wskazanym być może, samo zaś zagadnienie wysłowi się następnie:

Zagadnienie 3. *Z końca prostéj danéj wyprowadzić do niéj prostopadłą nie przedłużając jéj.*

Rozwiązanie. Daną prostą niech będzie AB *fig. 61*, potrzeba z jéj końca A wyprowadzić prostopadłą. Wziąwszy w tym celu gdziekolwiek za prostą daną punkt C, i z niego odległością równą CA naznaczmy na AB punkt D, a poprowadziwszy przez punkta D i C prostą nieograniczonéj długości, odetnijmy na niéj tęż samą odległość CA=CD, z drugiéj strony punktu C do E, t. j. tak żeby było CE=CD=CA, a złączywszy punkta E i A prostą AE, ta będzie żądaną prostopadłą, czego się tak dowodzi: tak trójkąt ACD jako i ACE jest równoramienny, przeto kąty przy trzecim boku leżące w każdym, są między sobą równe; zatém CAD=CDA, CAE=CEA. Lecz w trójkącie AED jest CEA+EAD+EDA=CEA+CAE+CAD+EDA=2R według §. 36, czyli CAE+CAE+CAD+CAD=2 (CAE+CAD)=2R, a następnie CAE + CAD = EAD = R; przeto prosta EA jest prostopadła do AB jak żądano.

§. 49.

Zagadnienie 4. *Na danéj prostéj wystawić kwadrat.*

Rozwiązanie. Prostą daną niech będzie AB *fig. 62*, mamy na niéj wystawić kwadrat. W tym celu z końców A i B wyprowadzają się dwie prostopadłe do AB i na nich odcinają się cyrklem długości AC i BD tak żeby AC = BD = AB, nareszcie łączą się punkta C i D prostą CD a ta zamknie żądany kwadrat.

Albo tak: z końców A i B *fig. 63* otwartością cyrkla równą prostéj danéj, t. j. równą AB, kreślą się dwa łuki przecinające się w C; z punktu C tąż samą otwartością cyrkla przecina się łuk z końca A zakreślony w punkcie D; daléj szuka się punktu jednakowo odległego od punktów C i D kreśląc zawsze tąż samą otwartością cyrkla (można téż i inną) z tychże punktów dwa łuki przecinające się w punkcie E; a złączywszy punkta E i A, prosta łącząca przetnie łuk CD w punkcie F; potém z punktu C otwartością cyrkla równą CF, kreśli się łuk który przetnie łuk zakreślony z punktu B w punkcie G; nareszcie punkta F i G, B i G złączywszy prostemi, te zamkną żądany kwadrat. Albowiem, AF = AB, bo są promieniami jednegoż okręgu, punkt C jest w równéj odległości tak od punktów A i B, jako téż od punktów F i G, przeto środki prostych AB i FG z punktem C leżą na jednéjże prostéj, dzielącéj każdą z piérwszych na dwie równe części. Ta prosta dzieląca, w myśli tylko poprowadzona, będąc prostopadłą tak do AB jako téż i do FG, jest równoległą od AF według §. 13; przeto i FG równoległa od AB; a kiedy $\frac{1}{2}$AB = $\frac{1}{2}$FG, zatém téż FG = AB, BG oczywiście = AB; wszystkie przeto cztéry boki téj figury są między sobą równe; a że i kąt przy A jest prosty, zatém wszystkie inne są także proste, jest więc ten czworokąt kwadratem §. 16.

Uwaga. Drugie to rozwiązanie zdawać się może nieco przydłuższém, rzeczywiście atoli mniéj zachodu potrzebuje niż piérwsze, a przytém jest pewniejszém; dwa bowiem punkta F i G wynajdują się przy pomocy cyrkla przez przecięcie się i to nie ostro łuków, co nie mało wpływa na pewność wyznaczyć się mających punktów. Prócz tego nie prowadzi się tutaj żadnéj do szukanego kwadratu nie należącéj linii, ani się spuszcza na dokładność trójkątów prostokątnych *ekierkami* (èquerre) zwanych, a do prowadzenia prostopadłych i równoległych pospolicie używanych.

§. 50.

Zagadnienie 5. *Mając daną prostą mającą być jednym z boków trójkąta, kąt mający być przyległym temuż i summę dwóch innych boków, wystawić trójkąt.*

Rozwiązanie. Niech prostą daną będzie A, kątem danym M a prosta B niech będzie summą dwóch innych boków *fig. 64*, z tych rzeczy mamy wystawić trójkąt. Na prostéj nieograniczonéj długości odetnijmy PR=A i przy punkcie P wykreślmy kąt równy danemu M, dając mu za drugie ramię PS=B; punkt S złączywszy z R prostą SR, tę podzielmy w punkcie O na dwie równe części, i z punktu O wyprowadźmy prostopadłą do RS aż do przecięcia się z PS w punkcie T; złączywszy nareszcie punkt T z R prostą RT, otrzymamy trójkąt PTR żądany. Że tak jest, dowodzi się następującym sposobem: RT=TS jako dwie pochyłe jednakowo od O odległe, zatém trójkąt PTR zamyka wszystkie rzeczy dane t. j. PR=A, TPR=M i PT+TR=B, jest więc trójkątem żądanym z danych elementów wystawionym.

ROZDZIAŁ IV.

Podobieństwo figur prostokréślnych czyli wielokątów.

§. 51.

Jak w dwóch poprzedzających tak i w tym rozdziale zacznijmy od najprostszych figur, to jest od trójkątów i zobaczmy jakie własności trójkątów odkryją nam linije równoległe. Na ten koniec dowiedźmy naprzód parę przygotowawczych twierdzeń.

Twierdzenie. *Jeżeli dwie proste równoległe przetniemy dwiema innemi także równoległemi, części piérwszych równoległych, zawarte między dwiema drugiemi między sobą, a części drugich zawarte między piérwszemi równoległemi znowu między sobą są równe.*

Niech dwie równoległe AB i CD *fig. 65* przecięte będą od dwóch innych EF i GH także równoległych w punktach M, N, O, P, potrzeba dowiéść, że tak części dwóch piérwszych MO i NP między sobą, jako téż części dwóch drugich MN i OP między sobą są równe. Poprowadziwszy w równoległoboku MNPO przekątnią NO, ta podzieli go na dwa trójkąty MNO i NOP, w których bok NO jest spólnym, kąt MNO = NOP, tudzież kąt MON = ONP jako naprzemianległe wewnętrzne, piérwsze względem dwóch równoległych EF i GH, a drugie względem równoległych AB i CD i siecznéj ON; dwa przeto te trójkąty według §. 24 przystają do siebie, a z ich przystania wnosimy, że boki odpowiadające sobie są równe. A tak bok MN przeciwległy kątowi MON, równy jest bokowi OP przeciwległemu kątowi ONP; podobnież NO = NP, oba bowiem te boki leżą naprzeciwko kątów równych, co potrzeba było dowiéść.

Wniosek 1. Z tego twierdzenia wprost wypada, że przekątnia dzieli równoległobok na dwa trójkąty przystające do siebie, tudzież że w każdym równoległoboku kąty przeciwległe są sobie równe.

Wniosek 2. W równoległoboku poprowadziwszy dwie przekątnie, te przecinają się wzajemnie jedna drugą na dwie równe części; dwa bowiem trójkąty MOS i NPS albo MNS i OPS przystają do siebie.

§. 52.

Twierdzenie. *W trójkącie jakimkolwiek podzieliwszy jeden z jego boków na ilekolwiek części równych, a przez punkta podziału poprowadziwszy proste równoległe do jednego z pozostałych boków, równoległe te przedłużone aż do przecięcia się z trzecim bokiem, podzielą go na tyleż części między sobą równych.*

Niech będzie trójkąt ABC *fig. 66*, w którym podzielmy którykolwiek bok np. AB na ilekolwiek części B*a*, *ab*, *bc*, i t. d. między sobą równych, a przez punkta podziału *a*, *b*, *c*..... prowadźmy równolegle od AC, które przedłużmy aż do przecięcia się z trzecim bokiem BC w punktach *a'*, *b'*, *c'*...... potrzeba dowiéść, że części tego ostatniego boku t. j. części B*a'*, *a'b'*, *b'c'*...... są między sobą równe.— Z punktów *a'*, *b'*, *c'*...... równolegle do boku AB poprowadźmy proste aż do przecięcia się każdéj z najbliższą z piérwszych równoległych w punktach *m*, *n*, *o*..... Ponieważ $Ba = ab = bc = ...$ więc także $a'm = b'n = c'o = ...$ według poprzedzającego twierdzenia; kąt $aBa' = ma'b = nb'c' = ...$ bo wszystkie są jednostronne odpowiadające sobie. Również kąt $Baa' = Bbb' = Bcc'$, zaś $Bbb' = a'mb'$, $Bcc' = b'nc' =$ i t. d., przeto trójkąty B*aa'*, *a'mb'*, *b'nc'* i t. d. według §. 24 przystają do siebie i są sobie równe, a z przystania wnosimy, że ich boki odpowiadające są sobie także równe, t. j. $Bb' = a'b' = b'c' =$ i t. d. co było do dowiedzenia.

§. 53.

Twierdzenie. *W jakimkolwiek trójkącie prostokréślnym poprowadziwszy do jednego z jego boków równoległą, ta podzieli dwa inne boki na części proporcyjonalne.*

Niech będzie trójkąt ABC *fig. 67*, poprowadziwszy prostą DE równolegle do AC i tę przedłużywszy aż do przecięcia się z bokami AB i BC, mamy dowiéść że ta prosta podzieli boki AB i BC na części proporcyjonalne, t. j. że będzie

$$BD : AD = BE : CE.$$

Chcąc to twierdzenie dowiéść z całą ścisłością, uważać potrzeba iż tu mogą być dwa przypadki, t. j. albo części BD i AD są spółmierne albo niespółmierne §§. 2 i 3.

Co do piérwszego. Jeżeli części BD i AD są spółmierne, przypuśćmy że B*a* jest spólną największą ich miarą i że BD zamyka takich części *m*, zaś AD *n*, będzie więc $BD = m.Ba$, $AD = n.Ba$, zatém

$$BD : AD = m.Ba : n.Ba = m : n;$$

cały przeto bok AB podzielić można na $m+n$ części między sobą równych i równych spólnéj miarze Ba. Pomyśliwszy przez te $m+n$ podziałów poprowadzone proste równoległe do AC, te według poprzedzającego twierdzenia podzielą téż bok BC na tyleż części znowu między sobą równych i równych prostéj Bb, mianowicie zaś BE podzieloną zostanie na m, a CE na n takich części. Dlatego mieć téż będziemy BE$=m$.Bb, a CE$=n$.Bb, skąd

$$\mathrm{BE}:\mathrm{CE}=m.\mathrm{B}b:n.\mathrm{B}b=m:n$$

Łącząc z sobą dwa stósunki trzeciemu równe, znajdziemy

$$\mathrm{BD}:\mathrm{AD}=\mathrm{BE}:\mathrm{CE}$$

co mieliśmy dowiéść.

Pomiędzy własnościami proporcyi ilorazowéj w §. 98 *Arytm.* dowiedzionemi znajduje się i ta, że w każdéj proporcyi ilorazowéj summa dwóch wyrazów piérwszych tak się ma do summy dwóch wyrazów drugich, jak poprzednik do poprzednika lub jak następnik do następnika. Stósując tę własność do ostatniéj proporcyi, otrzymamy:

$$\mathrm{BD}+\mathrm{AD}:\mathrm{BE}+\mathrm{CE}=\mathrm{BD}:\mathrm{BE}=\mathrm{AD}:\mathrm{CE}$$

albo $$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=\mathrm{BD}:\mathrm{BE}=\mathrm{AD}:\mathrm{CE}$$

t. j. że prosta równoległa do podstawy trójkąta, dzieli dwa inne jego boki na części takie, iż stósunek dwóch odpowiednich sobie jak BD i BE albo AD i CE, równa się stósunkowi samych boków AB i BC.

Co do drugiego. Jeżeli części BD i AD nie są spółmierne, uważmy iż proporcyją AB:BC=BD:BE wyprowadziliśmy z proporcyi BD:AD=BE:CE; cokolwiek więc powiemy lub dowiedziemy o piérwszéj, wszystko to odniéść można do drugiéj; jeżeli przeto dowiedziemy, że w razie niespółmierności części BD i AD proporcyja AB:BC=BD:BE jest prawdziwa, tém samém dowiedziemy, że téż i proporcyja BD:AD=BE:CE jest prawdziwa, bo z fałszywéj prawdziwa wypłynąćby nie mogła. Przypuśćmyż więc że proporcyja AB:BC=BD:BE jest fałszywa. Ponieważ trzy wyrazy każdéj proporcyi mogą być jakiekolwiek, byle tylko czwarty dopełniał proporcyi, zatém fałszywość téj proporcyi pochodzić jedynie może od czwartego jéj wyrazu, że ten jest albo za mały, albo za wielki. Niechże wyraz BE będzie za mały i dajmy że powiększywszy go o ilość Ep, czyli w miejsce BE położywszy Bp, proporcyja AB : BC = BD : Bp będzie prawdziwa.

Podzielmy chociaż w myśli bok BC na tyle części równych na ile można z tym wszelako warunkiem, iżby wielkość każdéj była mniejsza niż przydana ilość Ep, i niech jedną taką częścią będzie B$b <$ Ep; wziąwszy ją w cyrkiel i przenosząc od B ku C, żaden podział nie padnie na punkt p, lecz z jednéj lub drugiéj jego strony, z powodu że B$b <$ Ep. Weźmyż więc podział przypadający między E i p jak jest punkt d, tedy prowadząc przez ten punkt d równoległą dc do AC, znajdujemy się w piérwszym przypadku gdzie Bd i Cd będąc spółmierne, równoległa przez d do AC dzieli bok AB na dwie części Bc i Ac proporcyjonalne częściom Bd i Cd; jest zatém według piérwszéj części tego twierdzenia

AB:BC = Bc:Bd

z przypuszczenia mamy proporcyją AB:BC = BD:Bp

więc téż będzie Bc:BD = Bd:Bp.

Ale w każdéj proporcyi ilorazowéj czém jest poprzednik względem swego następnika w piérwszym, tém téż być powinien poprzednik względem swego następnika w drugim stósunku; więc jako B$c >$ BD, tak téż być powinno B$d >$ Bp, gdy tymczasem naocznie widzimy, że B$d <$ Bp; ta przeto ostatnia proporcyja jest fałszywa. A że ona wypadła z dwóch poprzedzających, albo więc obie, albo przynajmniéj jedna z nich jest fałszywa. Druga jest prawdziwą jako dowiedziona, przeto piérwsza czyli przypuszczona jest fałszywa. Wyraz więc czwarty BE nie jest za mały, bo większy Bp nie może być wyrazem téj proporcyi.

Zmniejszywszy BE o jakąkolwiek ilość np. Ep' i biorąc Bp' za BE, zupełnie podobnym sposobem dowiedlibyśmy, że to Bp' nie może także być czwartym wyrazem proporcyi o którą chodzi i że następnie wyraz BE nie jest za wielki. A kiedy tenże wyraz nie jest ani za mały ani za wielki, więc być musi takim, jakim być powinien, aby proporcyja była prawdziwa, bo innego przypadku nawet pomyślić nie można. Jest zatém ogólnie w każdym przypadku

$$AB:BC = BD:BE.$$

Uwaga 1. W obecnym dowodzie uważać potrzeba, że prawdę dowiedzioną dla ilości spółmiernych, przenieśliśmy do ilości niespółmiernych, t. j. ze stósunku ilości spółmiernych przeszliśmy do stósunku ilości niespółmiernych. Ponieważ w dalszym ciągu takie przejścia nie rzadko nam się wydarzać będą, przeto nie od rzeczy będzie powiedzieć tu nieco o tém przejściu.

Szukając sposobem w §. 2 wyłożonym spólnéj największéj miary dwóch prostych niespółmiernych, przekonaliśmy się że jakkolwiek daleko tamże wskazane działanie posuniemy, zawsze jednak pozostanie reszta, która wszelako tém mniejszą będzie, im daléj działanie posuwamy; skąd wypada naturalny wniosek, że resztę tę uczynić można mniejszą niż wszelka ilość jakkolwiek mała. Uważając więc dwie proste niespółmierne jako spółmierne, popełniamy rzeczywiście błąd ale tém mniejszy, im spólną ich miarę mniejszą weźmiemy; a że takową brać można dowolnie małą, zatém biorąc proste niespółmierne za spółmierne, popełnić można błąd dowolnie mały a do tego taki, iż go uczynić można mniejszym od każdéj ilości jakkolwiek małéj. Dowiodłszy więc jakiéj prawdy dla wszystkich bez wyjątku ilości spółmiernych, bez żadnego skrupułu przenieść możemy tę prawdę do ilości niespółmiernych; każdą bowiem taką ilość wystawić sobie można zamkniętą między dwie spółmierne takie, iż ich różnica jest mniejszą od wszelkiéj pomyślić się mogącéj ilości jakkolwiek małéj; tém zaś bardziéj różnica między jedną ze spółmiernych a środkującą niespółmierną, będzie jeszcze mniejsza, tak dalece, że nie można nigdy dosięgnąć granicy, gdzie się spółmierność kończy a niespółmierność zaczyna. Jeżeli się więc dostrzeże jakie prawo dla wszystkich ilości spółmiernych, toż samo prawo zachodzić musi i między niespółmiernemi; albo innemi słowy: stósując jakie prawo, dowiedzione dla ilości spółmiernych, do ilości niespółmiernych, popełnić można błąd mniejszy niż wszelka jakkolwiek mała ilość, albo raczéj nie popełnia się żadnego błędu. Porównawszy to rozumowanie z użytém w Arytmetyce dla ilości niewymiernych §. 43, dostrzeżemy że jest zupełnie toż samo.

Uwaga 2. Wziąwszy w obecném twierdzeniu bok AC za podstawę trójkąta, możnaby toż twierdzenie wysłowić, jakoż najczęściéj wysłowia się, następującym sposobem: *W trójkącie prostokréślnym prosta równoległa do podstawy jego dzieli dwa inne boki trójkąta na części proporcyjonalne.*

§. 54.

Twierdzenie. *W trójkącie prostokréślnym poprowadziwszy prostą równoległą do podstawy, ta od całego trójkąta odetnie trójkąt, którego boki są proporcyjonalne z bokami danego.*

Niech danym trójkątem będzie ABC *fig. 68*, poprowadziwszy prostą DE równoległą do podstawy AC, ta odcina trójkąt DBE; mamy dowiéść że boki tego ostatniego są proporcyjonalne z bokami piérwszego, czyli że

$$AB:BD=BC:BE=AC:DE.$$

Poprowadziwszy z punktu E prostą EF równoległą do AB, (można téż z punktu D prowadzić równoległą do BC) według poprzedzającego twierdzenia jest:

$$AB:BD=BC:BE$$

w trójkącie zaś ACB, EF jest równoległą do AB z wykréślenia, przeto według tegoż samego twierdzenia jest

$$BC:BE=AC:AF$$

Lecz $AF=DE$ §. 51, zatém $BC:BE=AC:DE$; trzy więc stósunki $AB:BD$, $BC:BE$ i $AC:DE$ są między sobą równe t. j.

$AB:BD=BC:BE=AC:DE$ co było do dowiedzenia.

Wniosek. Prosta więc równoległa do podstawy trójkąta dzieli dwa inne jego boki na części proporcyjonalne, a sama jest do podstawy w takim stósunku, w jakim boki do swych w wiérzchołku trójkąta przecinających się części.

§. 55.

Twierdzenie. *W trójkącie prostokréślnym poprowadziwszy z wiérzchołka kąta przeciwległego podstawie ilekolwiek* *prostych aż do przecięcia się z podstawą, te podzielą każdą równoległą do podstawy na części proporcyjonalne częściom na jakie podstawa podzieloną została.*

Niech będzie trójkąt ABC *fig. 69*, z wiérzchołka kąta B poprowadziwszy proste BD, BE, BF i t. d. aż do przecięcia się z podstawą AC, jeżeli gdziekolwiek poprowadzimy prostą MN równoległą do podstawy, potrzeba dowiéść że taż jest podzielona przez poprzednie proste w punktach *d*, *e*, *f*, i t. d. na części proporcyjonalne częściom podstawy, t. j. że

$$AD:Md = DE:de = EF:ef = FC:fN = \text{ i t. d.}$$

W trójkącie ABD, M*d* jest równoległą do podstawy AD, dlatego według poprzedzającego twierdzenia

jest $BD:Bd = AD:Md$

podobnież w trójkącie DBE jest $BD:Bd = DE:de = BE:Be$

również w trójkącie EBF „ $BE:Be = EF:ef = BF:Bf$

nareszcie w trójkącie FBC „ $BF:Bf = FC:fN$

Z tych proporcyj wypada $AD:Md = DE:de = EF:ef = FC:fN$ co było do dowiedzenia.

Wniosek. Gdyby przez powyższe proste podstawa podzieloną została na części równe, t. j. gdyby było $AD = DE = EF = FC$, byłoby téż także $Md = de = ef = fN$ czyli prosta MN byłaby podzieloną na części także równe. A jeżeli części AD, DE, EF i FC mają pewien oznaczony stósunek między sobą, części téż M*d*, *de*, *ef* i *f*N mieć będą tenże sam stósunek między sobą. To nam wskazuje sposób dzielenia prostéj danéj na części równe, lub na części pewien stósunek między sobą mające.

§. 56.

Po tych przygotowawczych twierdzeniach, przystąpmy do podobieństwa figur geometrycznych.

Sądzę iż nie masz człowieka któryby nie miał wyobrażenia wyrazu *podobieństwa* i któryby zaraz nie czuł, iż pewien jaki przedmiot przedstawiony w rysunku, zazwyczaj bywa mały ale zupełnie i ze wszystkiemi szczegółami przedstawiający przedmiot rzeczywisty czasem nieporównanie większy. W Geometryi zatém dwie jakiekolwiek figury są także podobne skoro obie ograniczone są tąż samą liczbą prostych lub płaszczyzn jednakowo w obu figurach położonych i zupełnie jednakowo wzajemnie do siebie nachylonych. Czuje téż każdy że w takich figurach nie masz takiego punktu w jednéj, aby sobie nie miał odpowiedniego w drugiéj, tak że połączywszy w jakikolwiek, ale tenże sam sposób w obu figurach odpowiednie punkta prostemi, stósunki odpowiednich prostych wszystkie będą między sobą równe. Spólny ten stósunek dla wszystkich prostych, nazywa się *stósunkiem podobiéństwa* dwóch lub więcéj figur. Że podobiéństwo zachodzić tylko może między jednoimiennemi figurami, sądzę iż ostrzegać nie potrzebuję. Zacznijmyż więc od najprostszych figur t. j. od trójkątów i zobaczmy jakie są potrzebne koniecznie warunki, iżby dwa lub więcéj trójkątów były podobnemi.

Definicyja. Jak dwa trójkąty, w których trzy boki jednego są równe trzem bokom drugiego trójkąta każdy każdemu §. 22, nazwaliśmy *równemi*, tak znowu dwa lub więcéj trójkątów, w których trzy kąty jednego są równe trzem kątom drugiego każdy każdemu, albo krócéj, trójkąty *równokątne* nazywać będziemy *trójkątami podobnemi* (similes). Podobieństwo figur wyrażać będziemy dla krótkości znakiem $\backsim$. A że dwa trójkąty mające po dwa kąty równe, mają téż i trzecie kąty także równe §. 36, *wniosek 2*, przeto stósownie do téj definicyi, dwa lub więcéj trójkątów mających po dwa kąty równe każdy każdemu, są podobne.

Uwaga. Na podobieństwie figur spoczywa cała Geometryja zastósowana, dlatego téż nauka o podobieństwie figur jest bardzo ważną i w praktycznéj Geometryi konieczną.

Twierdzenie. *Trójkąty podobne mają boki odpowiadające proporcyjonalne.*

Niech będą dwa trójkąty ABC i *abc fig.* 70 podobne t. j. takie że kąt $A=a$, $B=b$ i $C=c$, potrzeba dowiéść że ich boki odpowiadające są proporcyjonalne t. j. że

$$AB:ab=BC:bc=AC:ac.$$

Gdyby było $AB=ab$, trójkąty byłyby równe i przystały do siebie według §. 24 a ich boki miałyby się w tym przypadku do siebie jak $1:1$, przeto i twierdzenie byłoby tém samém dowiedzione. Niech atoli będzie AB $>$ *ab*, tedy na boku AB odciąwszy BD$=$*ab* i poprowadziwszy prostą DE równoległą do AC aż do przecięcia się z bokiem BC w punkcie E, ponieważ kąt BDE$=$A, tudzież BED$=$C, zaś kąt A$=$*a*, B$=$*b* i C$=$*c* z założenia, zatém kąt BDE$=$*a*, BED$=$*c*; dwa więc trójkąty BDE i *abc* przystają do siebie i są sobie równe według §. 24, a następnie BE$=$*bc*, DE$=$*ac*. W trójkącie ABC, DE jest równoległa do AC, przeto według §. 54 jest

$$AB:BD=BC:BE=AC:DE.$$

Położywszy w miejscu BD, BE i DE ilości im równe *ab*, *bc* i *ac*, będzie też

$$AB:ab=BC:bc=AC:ac.$$

co było do dowiedzenia.

Uwaga. W przystawaniu trójkątów za równością ich boków szła równość kątów i przeciwnie: w podobieństwie zaś trójkątów za równością kątów idzie proporcyjonalność boków i przeciwnie; a jako z równości boków wnioskowaliśmy o równości kątów im przeciwległych, tak tu z równości kątów, wnioskować będziemy o proporcyjonalności boków im przeciwległych, lub kąty równe obejmujących. Wzajemnie też z proporcyjonalności boków dwóch trójkątów wnioskować można o równości ich kątów, czyli o ich podobieństwie. Wychodząc z definicyi trójkątów równych czyli z twierdzenia §. 22, na jego zasadzie wskazaliśmy cechy, po których równe trójkąty rozpoznać można; tak też i tu opiérając się na definicyi trójkątów podobnych, wskażemy również cechy ich podobieństwa.

§. 57.

TWIERDZENIE. *Dwa trójkąty są podobne t. j. równokątne, jeżeli boki jednego są proporcyjonalne bokom drugiego trójkąta.*

Niech będą dwa trójkąty ABC i *abc fig. 70* takie, że

$$AB:ab=BC:bc=AC:ac,$$

potrzeba dowiéść że kąt A$=$*a*, B$=$*b* i C$=$*c* czyli że te trójkąty są podobne.

Na boku AB odetnijmy BD $=ab$ (gdyby było AB $<ab$ wtedy można odciąć AB na ab lub też ab na przedłużeniu boku AB) i poprowadźmy DE równoległą do AC; tedy według §. 54 jest

$$AB:BD=BC:BE=AC:DE.$$

A że z wykreślenia BD $=ab$,

przeto $AB:ab=BC:BE$ tudzież $AB:ab=AC:DE$

Ale z założenia jest

$AB:ab=BC:bc$ jako też $AB:ab=AC:ac$

przeto, kiedy w dwóch proporcyjach trzy wyrazy jednéj, są równe trzem wyrazom drugiéj, czwarte wyrazy są sobie także równe; jest zatém BE $=bc$ i DE $=ac$. Dwa trójkąty DBC i abc według §. 22 są sobie równe i przystają do siebie, są zatém równokątne, a w szczególności BDE $=a$, B $=b$ i BED $=c$. A że BDE $=$ A, BED $=$ C jako jednostronne odpowiadające sobie, zatém A $=a$ i C $=c$ co potrzeba było dowieść.

Twierdzenie to stanowi *piérwszą* cechę podobieństwa trójkątów. Dobrze atoli uważać potrzeba że w podobnych trójkątach te kąty są sobie równe, które leżą albo naprzeciwko boków proporcyjonalnych, albo też są zamknięte między takiemiż bokami. Jak przy równości trójkątów tak i przy ich podobieństwie nazywać będziemy takie kąty *jednakowo położonemi* lub krócéj *odpowiadającemi* §. 22.

§. 58.

Twierdzenie. *Dwa trójkąty mające po dwa boki proporcyjonalne i po kącie między temiż bokami zawartym równym, są podobne.*

Niech znowu trójkąty ABC i abc *fig. 70* będą takie, że $AB:ab=BC:bc$ i kąt B $=b$, potrzeba dowieść że są równokątne czyli podobne, t. j. że też kąt A $=a$ i kąt C $=c$.

Na boku AB wziąwszy BD $=ab$ i przez punkt D poprowadziwszy DE równoległą do AC, ponieważ według §. 54 jest $AB:BD=BC:BE$,

zaś z założenia $AB:ab=BC:bc$

a z wykreślenia BD $=ab$, zatém BE $=bc$. Dwa przeto trójkąty DBE i abc według §. 23 są sobie równe i przystają do siebie a w szczególności kąt $D=a$ i kąt $E=c$. A że kąt $D=A$ i $E=C$, więc téż kąt $A=a$ i $C=c$; dane zatém trójkąty są równokątne, a tém samém podobne.

Twierdzenie tó stanowi *drugą* cechę podobieństwa trójkątów.

§. 59.

Twierdzenie. *Dwa trójkąty których dwa boki jednego są proporcyjonalne dwom bokom drugiego i kąty leżące naprzeciwko boków większych między sobą równe, są podobne.*

Niech trójkąty ABC i *abc fig. 70* będą takie, że $AB:ab=AC:ac$ i kąt $B=b$ tudzież $AC>AB$, jako téż $ac>ab$; dowieść potrzeba że są równokątne, czyli że téż kąt $A=a$ i kąt $C=c$. Podobnie jak w dwóch poprzedzających twierdzeniach na boku AB wziąwszy $BD=ab$ i przez punkt D poprowadziwszy prostą DE równoległą do AC, według §. 54 jest $AB:BD=AC:DE$. Ale z wykreślenia $BD=ab$, a z założenia $AB:ab=AC:ac$, więc czwarte wyrazy tych dwóch proporcyj są sobie równe, t. j. $DE=ac$. Dwa trójkąty DBE i *abc* w których $BD=ab$, $DE=ac$ i kąt $B=b$, według §. 44 przystają do siebie, a z przystania wnosimy że kąty odpowiadające są sobie równe t. j. kąt $D=a$ i kąt $E=c$. Ale DE równoległa do AC, więc kąt $D=A$ i kąt $E=C$, przeto téż kąt $A=a$ i $C=c$; są więc dwa te trójkąty równokątne a następnie podobne, co było do dowiedzenia.

Jestto *trzecia* cecha podobieństwa trójkątów.

§. 60.

Twierdzenie. *Trójkąty których boki są równoległe od siebie każdy od każdego, są podobne.*

Niech będą dwa trójkąty ABC i *abc fig. 70,* w których bok AB równoległy od *ab*, BC od *bc* i AC od *ac*, dowieść potrzeba że są równokątne, czyli co jedno jest, podobne.

W §. 14 dowiedliśmy że dwa kąty których ramiona są równoległe i rozchodzą się w tychże samych kierunkach, są równe; na mocy więc tego twierdzenia, ponieważ AB równoległa od *ab* i BC od *bc*, kąt $B=b$. Podobnież AB równoległa od ab i AC od ac, więc kąt $A = a$. Dla téj saméj przyczyny kąt $C = c$. Dwa więc te trójkąty są równokątne a zatém podobne, co chcieliśmy dowieść.

Równoległość przeto boków dwóch lub więcéj trójkątów stanowi *czwartą* cechę ich podobieństwa.

§. 61.

Twierdzenie. *Trójkąty w których boki jednego są prostopadłe do boków drugiego, są równokątne a następnie podobne.*

Przedsiębiorąc dowiedzenie tego twierdzenia, napotkać możemy dwa różne przypadki co do położenia jednego względem drugiego trójkąta; t. j. albo jeden z nich leży zewnątrz albo wewnątrz drugiego. W obu przypadkach dowód jest nader łatwy że takie trójkąty są równokątne, przypomniawszy sobie to co w §. 45 dowiedliśmy.

Niech bowiem będą dwa trójkąty ABC i abc *fig.* 71 takie że ab prostopadłe do AB, bc do BC i ac do AC i trójkąt abc leży zewnątrz trójkąta ABC, tedy ponieważ ab jest prostopadła do AB a ac do AC, kąt zawarty między temi prostopadłemi z punktu a zewnątrz leżącego na ramiona AB i AC kąta A spuszczonemi, jest równy temuż kątowi, t. j. kąt $a = A$. Zupełnie tym samym sposobem dowiedzie się że kąt $b = B$ i kąt $c = C$; przeto te trójkąty są podobne.

Podobnież, jeżeli trójkąt $a'b'c'$ leży wewnątrz trójkąta ABC, z punktu a' dwie prostopadłe $a'm$ i $a'n$ czyli $b'a'm$ i $a'c'n$ do AB i AC spuszczone, czynią kąt równy kątowi zawartemu między AB i AC, a zatém kąt $a' = A$ według tegoż co wyżéj §. A że i o kątach zawartych między $a'b'$ i $b'c'$, jako téż między $b'c'$ i $a'c'$ toż samo powiedzieć można, zatém również kąt $b' = B$ i kąt $c' = C$ co było do dowiedzenia.

Albo tak: w czworokącie $Ama'n$ summa cztérech jego kątów wewnętrznych czyni 4R; a że kąty przy m i n są proste, zatém kąt A z kątem α czynią także 2R. Lecz kąt α z kątem a' czynią również 2R jako przyległe, zatém kąt $A = a'$, i tak o dwóch innych kątach.

Prostopadłość boków jednego do boków drugiego trójkąta jest *piątą* i ostatnią cechą podobieństwa trójkątów.

Uwaga. Podobieństwo trójkątów zakończmy tą ogólną uwagą która się i do wszystkich wielokątów stósuje, że w trójkątach równokątnych boki odpowiadające są te które leżą naprzeciwko kątów równych lub obejmują kąty równe.— W trójkątach których boki są równoległe lub prostopadłe, odpowiadającemi są te boki, które są równoległe lub prostopadłe do siebie.

§. 62.

Twierdzenie. *W trójkącie prostokreślnym wziąwszy jeden z jego boków za podstawę i podzieliwszy kąt przeciwległy téjże na dwie równe części, prosta dzieląca podzieli także i podstawę na dwa odcinki ktorych stósunek jest równy stósunkowi dwóch innych boków.*

Niech będzie trójkąt ABC *fig.* 72 w którym biorąc AC za podstawę, podzielmy kąt B na dwie równe części według §. 34 prostą BD, trzeba dowieść że taż prosta przedłużona aż do przecięcia się z podstawą AC, podzieli ją na dwa odcinki AD i DC takie że AB : CD = AD : BC. Na dowiedzenie téj prawdy, z końca podstawy A lub C wyprowadźmy równoległą do BD aż do przecięcia się z przedłużonym bokiem CB w punkcie E lub téż z przedłużonym bokiem AB w punkcie F; tedy trójkąt AEB jest równoramienny, bo kąt EAB = ABD jako naprzemianległe, tudzież kąt AEB = DBC jako odpowiadające sobie; z założenia kąt ABD = DBC, skąd téż kąt AEB = EAB; przeto według §. 40 AB = BE. W trójkącie ACE, BD jest równoległa do AE, zatém według §. 53 jest AD : DC = BE : BC; a że BE = AB, więc AD : DC = AB : BC co potrzeba było dowieść. Zupełnie ten sam dowód z trójkąta AFC.

Uwaga. Podzieliwszy kąt ABE spełniający piérwszy do dwóch kątów prostych na dwie równe części prostą BD′, ta również jak BD podzieli, albo raczéj wyznaczy na przedłużeniu podstawy punkt D′ podobny co do własności punktowi D, t. j. że téż będzie CD′ : AD′ = BC : AB. Jakoż

poprowadziwszy z punktu C prostą CE' równoległą do dzielącej BD' aż do spotkania się z przedłużonym bokiem BA w punkcie E', kąt BE'C = D'BE' jako naprzemianległe; kąt BCE' = EBD' jako odpowiadające sobie; a że kąt D'BE' = EBD z podzielenia, więc téż i kąt BE'C = BCE'; przeto trójkąt E'BC jest równoramienny i BE' = BC. Trójkąt AD'B ∽ AE'C bo kąty przy A są równe jako wiérzchołkowe, kąt ABD' = BE'C, zatém i kąt AD'B = ACE'. Z podobieństwa tych trójkątów wypada następująca proporcyja AD' : AC = AB : AE' z któréj AD' + AC : AD' = AB + AE' : AB,
albo CD' : AD' = BE' : AB = BC : AB co było do dowiedzenia.

Łącząc tę proporcyją z dowiedzioną w twierdzeniu, t. j. z proporcyją DC : AD = BC : AB, wypada CD' : AD' = CD : AD. Położywszy CD' = a, DD' = b, AD' = c i porównawszy z §. 20 Alg. dział II, dostrzeżemy że to jest proporcyja harmoniczna i dlatego ile razy taka proporcyja ma miejsce, mówimy że prosta AC jest podzielona *harmonicznie* a dwa punkta D i D' nazywają się punktami *z sobą złączonemi* albo *do siebie należącemi* (puncta conjugata). Jeźli więc prosta AC jest podzielona w punkcie D w stósunku danym, tedy znajduje się zawsze na jéj przedłużeniu drugi punkt D' taki że jest proporcyja

$$CD' : AD' = CD : AD$$

Odmieniwszy w téj proporcyi miejsce średnim wyrazom będzie

$$CD' : CD = AD' : AD$$

która nas uczy że punkta A i C tak są położone względem prostéj DD' jak punkta D i D' względem prostéj AC. Cztéry punkta C, D, A, D' tym sposobem ułożone formują związek albo *układ harmoniczny*.

§. 63.

TWIERDZENIE. *W trójkącie prostokątnym spuściwszy z wiérzchołka kąta prostego prostopadłą na przeciwprostokątnię, ta podzieli trójkąt na dwa inne także prostokątne podobne całemu a następnie podobne między sobą; potém dzieli przeciwprostokątnię na dwa odcinki takie, że każdy bok przyle-*

gły kątowi prostemu jest średnią geometrycznie proporcyjonalną między całą przeciwprostokątnią i odcinkiem jemu przyległym, a nareszcie że ta prostopadła jest średnią geometrycznie proporcyjonalną między odcinkami.

Niech będzie trójkąt ABC prostokątny przy A *fig. 73*, spuściwszy prostopadłą AD z wiérzchołka kąta prostego na przeciwprostokątnię, mamy dowieść naprzód, że każdy z trójkątów ABD i ADC jest podobny trójkątowi ABC. Jakoż dwa trójkąty ABC i ABD mają kąt B spólny, kąty przy A i D równe jako proste, przeto i kąt DAB $=$ C według §. 36 *wniosek 2*, są więc te trójkąty podobne. Również dwa trójkąty ABC i ADC mają kąt C spólny, kąty przy A i D proste zatém równe, przeto i kąt BAC $=$ B i te więc trójkąty są podobne. Lecz że dwie ilości równe lub podobne trzeciéj muszą być między sobą równe lub podobne, przeto trójkąt ABD $\backsim$ ADC co téż i z równości ich kątów wnioskować można; mają bowiem kąty przy D równe jako proste, a z poprzedzającego kąt B $=$ DAC i kąt BAD $=$ C są więc równokątne a zatém podobne.

Co do drugiego i trzeciego: W podobnych trójkątach, boki odpowiadające są proporcyjonalne według §. 56, zatém kiedy trójkąt ABC $\backsim$ ABD będzie

$$BC : AB = AB : BD$$

Również, ponieważ trójkąt ABC $\backsim$ ADC, jest téż

$$BC : AC = AC : DC$$

Nareszcie trójkąt ABD $\backsim$ ADC, zatém

BD : AD $=$ AD : DC co było do dowiedzenia.

Wniosek. Niech będzie BC $= h\alpha$, AB $= a\alpha$, AC $= b\alpha$, BD $= m\alpha$ i DC $= n\alpha$, t. j. niech α będzie obraną jednostką, którą przemierzywszy boki uważanych tu trójkątów, znaleźliśmy że takich jednostek bok BC zamyka h, AB zamyka ich a, AC, b, BD m, a DC n; tedy dwie pierwsze z powyższych proporcyj według §§. 2 i 3 zamienią się na następujące liczbowe

$$h : a = a : m \text{ skąd } a^2 = hm$$
$$h : b = b : n \quad „ \quad b^2 = hn$$

Z dwóch tych zrównań wypada $a^2 : b^2 = hm : hn = m : n$
tudzież $a^2 + b^2 = hm + hn = (m + n) h$.
Ale $m + n = \text{BD} + \text{DC} = \text{BC} = h$, zatém $a^2 + b^2 = h . h = h^2$ t. j. że *kwadrat z liczby wyrażającéj długość przeciwprostokątni, równa się summie kwadratów z liczb wyrażających długości boków przyległych kątowi prostemu; poprzedzająca zaś proporcyja uczy nas, że też kwadraty mają się do siebie jak odcinki przeciwprostokątni przyległe odpowiednim bokom.*

§. 64.

Twierdzenie. *W trójkątach podobnych, stósunek ich wysokości równa się stósunkowi podstaw tychże trójkątów, czyli,* jak się zwyczajnie wyraża, *wysokości dwóch podobnych trójkątów, mają się do siebie jak podstawy.*

Niech będą dwa trójkąty ABC i *abc fig. 74* podobne, ich podstawy AC i *ac* a wysokości BD i *bd*, dowieść potrzeba że $\text{BD} : bd = \text{AC} : ac$.

Dwa trójkąty ABD i *abd* są równokątne, bo kąt $\text{A} = a$ z założenia, gdyż trójkąty ABC i *abc* są podobne, kąt $\text{D} = d$ jako prosty prostemu, trzecie więc kąty są sobie także równe, t. j. $\text{ABD} = abd$, są więc te trójkąty podobne, a z ich podobieństwa według §. 54 wypada następująca proporcyja

$$\text{AB} : ab = \text{BD} : bd$$

Ale że trójkąt $\text{ABC} \backsim abc$ z założenia, przeto według tegoż §. jest téż $\text{AB} : ab = \text{AC} : ac$
zkąd wypada $\text{BD} : bd = \text{AC} : ac$ co należało dowieść.

§. 65.

Przejdźmy teraz do podobieństwa wielokątów. Można tu dać ogólne pojęcie wielokątów podobnych, wychodząc z podobieństwa trójkątów, że *dwa wielokąty o jednakowéj liczbie boków, których kąty są sobie równe, każdy każdemu i w tymże samym porządku w obu wielokątach ułożone, a boki obejmujące kąty równe proporcyjonalne, są podobne.*

Twierdzenie. *Dwa wielokąty podobne można zawsze rozebrać za pomocą przekątni na jednakową liczbę trójkątów podobnych i podobnie w obu wielokątach ułożonych.*

Niech bowiem będą dwa np. sześciokąty ABCDEF i *abcdef fig.* 75 takie, że kąt A$=a$, B$=b$, C$=c$, D$=d$, E$=e$ i F$=f$, tudzież AB:ab=BC:bc=CD:cd=DE:de= EF:ef słowem podobne, tedy z wiérzchołków kątów A i a poprowadziwszy przekątnie AC, AD, AE i ac, ad, ae, każdy z tych sześciokątów rozbierze się na cztéry trójkąty według §. 18; pozostaje więc tylko dowieść że te trójkąty są sobie podobne w tym porządku jak po sobie następują. Trójkąt ABC ∽ abc według §. 58, zatém kąt BCA$=bca$ i kąt BAC$=bac$, tudzież BC:bc=AC:ac; a że kąt C$=c$, więc kąt ACD$=acd$. W dwóch następnych trójkątach ACD i acd jest kąt ACD$=acd$ i CD:cd=AC:ac; bo z poprzedzającego jest BC:bc=AC:ac, a z założenia BC:bc=CD:cd, przeto trójkąt ACD∽acd §. 58. Z podobieństwa tych trójkątów wynika, że kąt CDA$=cda$, i kąt CAD$=cad$, jako też że CD:cd=AD:ad. Przechodząc tym samym sposobem do dwóch następnych trójkątów, znajdziemy je także podobnemi według tegoż samego §., zkąd wniesiemy iż prawdą jest że wielokąty podobne rozebrać można na równą liczbę trójkątów podobnych i podobnie ułożonych.

Nawzajem też twierdzić można, iż dwa lub więcéj wielokątów które się dają, jednymże sposobem w obu, rozebrać na równą liczbę trójkątów podobnych, i podobnie ułożonych, są także podobne.

Że dwa lub więcéj wielokątów foremnych o jednakowéj liczbie boków są podobne, rozumiem że nie potrzebuje dowodu.

§. 66.

Twierdzenie. *W dwóch wielokątach podobnych, przekątnie lub jakiekolwiek proste jednymże sposobem w obu wielokątach prowadzone, mają się do siebie w stósunku odpowiadających boków.*

Niech będą dwa pięciokąty ABCDE i *abcde fig. 76* podobne; poprowadziwszy w nich jednakowo przekątnie AD i *ad*, tedy dwa trójkąty ADE i *ade* są podobne, bo z założenia kąt $E = e$ i $AE:ae = DE:de$ jako w wielokątach podobnych: zatém także

$AD:ad = AE:ae$ albo $= DE:de = CD:cd = BC:bc = AB:ab$.

Poprowadziwszy powtóre proste AF i *af* także jednakowo, t. j. żeby np. z bokami AE i *ae* czyniły kąty równe, będą kąty FAE i *fae* sobie równe, więc znowu trójkąt $AFE \backsim afe$, a następnie $AF:af = AE:ae = AB:ab =$ i t. d.

Poprowadźmy potrzecie proste GF i *gf* jakkolwiek byle jednakowo w obu wielokątach, a zatém żeby np. BG było taką częścią względem BC, jaką jest *bg* względem *bc*; również EF względem DE takąż częścią jaką *ef* względem *de*; złączywszy punkta G i F z punktem A, jak również punkta *g* i *f* z punktem *a* prostemi AG, AF i *ag*, *af*, według poprzedzającego tak trójkąt $ABG \backsim abg$ jako téż i trójkąt $AEF \backsim aef$, zkąd ponieważ $AG:ag = AB:ab$ i $AF:af = AE:ae = AB:ab$, wypada że $AG:ag = AF:af$. A że kąt $A = a$ z założenia, zaś kąt $BAG = bag$ i kąt $EAF = eaf$ z poprzedzającego, z powodu że trójkąt $BAG \backsim bag$, a trójkąt $EAF \backsim eaf$, więc kąt $GAF = gaf$; dla tego trójkąt $AGF \backsim agf$. Z podobieństwa ich wypada $AG:ag = GF:gf$; a że $AG:ag = AB:ab$, więc téż $GF:gf = AB:ab = BC:bc =$ i t. d. co potrzeba było dowieść.

§. 67.

Twierdzenie. *Obwody dwóch wielokątów podobnych mają się do siebie w stósunku dwóch którychkolwiek odpowiadających boków.*

Oznaczywszy obwody dwóch wielokątów podobnych przez O i *o*, boki piérwszego przez A, B, C, D, i t. d. a odpowiadające boki drugiego przez *a, b, c, d,* i t. d., tedy według definicyi wielokątów podobnych mamy $A:a = B:b = C:c = D:d = E:e =$ i t. d. Ale z Arytmetyki §. 97 wiadomo że $(A + B + C + D + E \ldots):(a + b + c + d + e \ldots) = A:a = B:b = C:c = D:d =$ i t. d.

zatém ponieważ według §. 17 $A+B+C+D+E+\ldots=O$,
tudzież $a+b+c+d+e+\ldots=o$,
przeto $O:o=A:a=B:b=C:c=D:d=E:e=$ i t. d. co było do dowiedzenia.

Wniosek. Zatém obwody dwóch wielokątów podobnych mają się także według poprzedzającego twierdzenia, w stósunku dwóch prostych jednakowo w obu wielokątach poprowadzonych.

§. 68.

Zagadnienie 1. *Na danéj prostéj wykreślić trójkąt podobny danemu.*

Rozwiązanie. Niech danym trójkątem będzie ABC *fig.* 77 a prostą daną MN, potrzeba na téj prostéj wystawić trójkąt któryby był podobny danemu ABC.

Ponieważ podobnemi trójkątami są trójkąty równokątne, zatém dla rozwiązania tego zagadnienia dosyć jest wykreślić trójkąt, któregoby jednym bokiem była prosta MN, a kąty równe kątom trójkąta ABC. Na ten koniec przy punkcie M i przy prostéj MN wykreślmy kąt $LMN=A$ i podobnież przy punkcie N i z téjże saméj strony prostéj MN kąt $KNM=C$, a przedłużywszy ramiona tych kątów aż do ich przecięcia się z sobą w punkcie P, te wraz z prostą daną zamkną trójkąt żądany. Gdy bowiem kąt $M=A$ kąt $N=C$ więc téż i kąt $P=B$; a kiedy trójkąty MNP i ABC są równokątne, więc są podobne §. 56.

Albo tak: na kierunku AC boku danego trójkąta odciąwszy prostą daną MN od A do D i przez punkt D poprowadziwszy równoległą do boku BC aż do przecięcia się z bokiem AB w punkcie E, trójkąt ADE będzie żądanym §. 60. W przypadku że prosta $MN > AC$, punkt D przypadnie na przedłużenie AC, a punkt E na przedłużenie AB co ani wykreślenia ani dowodu nie zmienia. Na tento przypadek powiedzieliśmy ogólnie że się odcina MN na kierunku AC.

§. 69.

Zagadnienie 2. *Na danéj prostéj wystawić wielokąt podobny danemu.*

Rozwiązanie. Danym wielokątem niech będzie pięciokąt ABCDE, daną zaś prostą linija MN *fig.* 78, potrzeba na téj ostatniéj wystawić pięciokąt podobny danemu.

Na ten koniec z wiérzchołka kąta A poprowadziwszy w danym wielokącie przekątnie AD i AC, podzielimy go tym sposobem na trzy trójkąty; wystawiwszy teraz na prostéj MN trójkąt MNO $\backsim$ ADE, potém na prostéj MO trójkąt MOP $\backsim$ ADC, a nareszcie na prostéj MP trójkąt MPR $\backsim$ ABC, tym sposobem otrzymamy pięciokąt MNOPR $\backsim$ ABCDE, są bowiem te pięciokąty złożone z téjże saméj liczby trójkątów podobnych i podobnie ułożonych, zatém według §. 65 są podobne.

Można tu także postąpić jako w poprzedzającém zagadnieniu, t. j. na kierunku boku AE wielokąta danego, odciąć prostą daną od A do K lub od A do *k*, według tego jak MN $>$ AE lub MN $<$ AE. Z punktu K lub *k* poprowadźmy prostą równoległą do ED aż do przecięcia się z przedłużoną lub téż z samą przekątnią AD w punkcie L lub *l*; przez punkt L lub *l*; poprowadźmy znowu równoległą LM lub *lm* do DC aż do przecięcia się z następną przekątnią AC przedłużoną w punkcie M, lub z tąż przekątnią w punkcie *m*; nareszcie z punktu M lub *m*, równoległą MN lub *mn* do boku BC aż do przecięcia się z przedłużonym lub samymże bokiem AB w punkcie N lub *n*; tym sposobem otrzymany pięciokąt AKLMN lub A*klmn* będzie podobny danemu. Jakoż wielokąty ABCDE i AKLMN są równokątne, bo ramiona każdego kąta w piérwszym, są równoległe od ramion odpowiadających kątów w drugim wielokącie. Że boki jednego są proporcyjonalne bokom drugiego wielokąta jest oczywistém; w trójkącie bowiem AKL prosta DE jest równoległa od KL zatém AK : AE = AL : AD = KL : DE; w trójkącie ALM dla téjże saméj przyczyny jest AL : AD = AM : AC = LM : DC; daléj w trójkącie AMN, AM:AC=AN:AB=MN:BC a następnie AB:AN=BC:MN=CD:LM=DE:KL=AE:AK.

Jak postąpić z wielokątem o jakiéjkolwiek liczbie boków, chcąc na prostéj danéj wystawić jemu podobny, sądzę że z tego co się powiedziało o pięciokącie jest jasném i dalszego tłómaczenia nie potrzebuje.

§. 70.

Zagadnienie 3. *Prostą daną podzielić na ilekolwiek części równych.*

Rozwiązanie. Niech prostą daną do podzielenia na równe części będzie AB *fig. 79.* Założmy sobie podzielić ją na 7 części równych, tedy na prostéj nieograniczonéj długości począwszy od którегokolwiek jéj punktu, odetnijmy w jednę lub drugą stronę siedm części równych dowolnéj długości np. od M do N; na prostéj MN wystawmy trójkąt równoboczny MNP §. 31 *uwaga 3.* Na boku MP od P ku M odetnijmy PR=AB, a przez punkt R poprowadziwszy równoległą RS do MN, lub téż na boku PN odciąwszy PS=AB i połączywszy punkta R i S prostą RS, ta będzie równa prostéj AB danéj do podzielenia; bo według §. 54 jest MP:PR=MN:RS; a że MP=MN więc téż i PR=RS. Ale PR=AB z wykreślenia, przeto również RS=AB. Jeżeli teraz wiérzchołek kąta P połączymy z punktami podziału 1, 2, 3,...... prostemi, te podzielą RS=AB na tyleż części proporcyjonalnych częściom piérwszym według §. 55. A że piérwsze części są między sobą równe, więc téż i drugie między sobą są równe, co było do okazania.

Albo tak: na prostéj nieograniczonéj długości jak przed tém, odcinamy również tyle części między sobą równych, lecz wielkości dowolnéj, na ile prostą daną podzielić chcemy *fig. 80;* z jednego lub drugiego końca t. j. z punktu M, lub 7 prowadzimy prostą MP, pod jakiémkolwiek nachyleniem do MN i na niéj od wiérzchołka kąta M odcinamy MR=AB; punkt R łączymy z ostatnim podziałem jak tu z 7 prostą R7 i przez wszystkie inne podziały prowadzimy równoległe do R7, a te podzielą prostą MR=AB na żądaną liczbę części równych. W trójkącie bowiem MNR prosta $1a$ będąc równoległą do R7, dzieli dwa inne boki na części proporcyjonalne; jest więc $M7:M1 = MR:Ma$. A jako $M1 = \frac{1}{7}N7$, tak też być musi $Ma = \frac{1}{7}MR = \frac{1}{7}AB$ t. j. Ma jest siódmą częścią prostéj danéj AB. Podobnież w tymże samym trójkącie uważając $b2$ równoległą do R7, mamy też proporcyją $M7:M2 = MR:Mb$, z któréj, ponieważ $M2 = \frac{2}{7}M7$ wypada, że też $Mb = \frac{2}{7}MR = \frac{2}{7}AB$ i t. d.

Uwaga. Ponieważ nie tak jest łatwo z potrzebną dokładnością prowadzić równoległe, przeto ułatwia się podział prostéj na części równe lub żądane i zyskuje na dokładności, prowadząc z punktu R w przeciwnym kierunku prostą RS równoległą do MN i na tę, począwszy od punktu R, przenoszą się podziały, któreśmy na MN naznaczyli; łącząc nareszcie odpowiednie punkta podziałów t. j. 1 i 1, 2 i 2, 3 i 3 i t. d. prostemi, te podzielą jak wprzód prostą $MR = AB$ na części żądane.

Gdyby potrzeba prostą daną podzielić na dwie części któreby się miały do siebie w stósunku dwóch prostych danych, tedy chociaż na zasadzie twierdzenia §. 55 łatwo to uskutecznić, najłatwiejszy atoli sposób jest następujący:

Niech AB będzie prostą daną do podzielenia na dwie części mające się do siebie w stósunku dwóch innych prostych P i Q *fig. 81*, z końców prostéj danéj A i B, poprowadźmy dwie inne proste AC i BC′ w jakimkolwiek kierunku lecz do siebie równoległe i jednę z jednéj, a drugą z drugiéj strony prostéj AB. Na piérwszéj weźmy $AC = P$ a na drugiéj $BC' = Q$ lub przeciwnie, a połączywszy punkta C i C′ prostą CC′, ta przetnie prostą daną AB w punkcie D w stósunku żądanym. Jakoż trójkąt $ADC \sim BDC'$,

przeto $$AD:DB = AC:BC' = P:Q.$$

Prowadząc równoległe z końców prostéj danéj po jednéj ich stronie, jak są AC i $BC'' = Q$, a potem łącząc punkta C i C″ prostą, ta przetnie prostą daną przedłużoną w punkcie D′ tak, że też jest $AD':BD' = AC$ i $BC'' = P:Q$. Tę proporcyją łącząc z powyżéj otrzymaną,

będzie $AD' : BD' = AD : BD$

Porównywając tę ostatnią proporcyją z otrzymaną w §. 62 *uwaga* dostrzeżemy, że jest harmoniczną a dwa punkta D i D' są punktami do siebie należącemi. Podzielić zatém prostą w stósunku danym znaczy toż samo jak podzielić prostą w proporcyi harmonicznéj, lub nareszcie wynaléść na jéj kierunku dwa punkta do siebie należące.

§. 71.

Są téż i inne sposoby dzielenia prostéj na części równe, a szczególniéj kiedy wypadnie podzielić prostą daną na drobne części. Potrzeba takiego podziału zachodzi zawsze w zastósowaniach Geometryi, gdziekolwiek przedstawia się jakibądź przedmiot w linijowym rysunku. Gdy bowiem takie rysunki bywają w zmniejszonych wymiarach robione z zachowaniem podobieństwa, rysują się zatém zawsze figury podobne, te zaś jak wiemy, muszą mieć odpowiadające boki proporcyjonalne. Z tego powodu obiéra się dowolna długość czyli prosta mająca np. cal długości (jednostka), która nam przedstawiać może jakąkolwiek długość rzeczywistą, czyli odnośnie do przedmiotu, jako to: sążeń, sznur, 10, 100, 1000 i t. d. sznurów, milę i t. d. Chcąc zaś przy rysowaniu takiego przedmiotu mieć podziały mniejsze, czego zawsze niezbędna potrzeba wypada, rzeczoną calową długość mieć musimy podzieloną na drobniejsze części. Tak podzielona jednostka nazywa się zwyczajnie *podziałką* (scala). A że wspomnione rysunki przedstawiać mogą mniejsze lub większe obrazy przedmiotów, prawie zaś zawsze mniejsze od samychże przedmiotów, zatém im obraz ma być mniejszy, tém podziałka przedstawiająca np. cal długości, na drobniejsze części dzielona być musi. Sądzę więc że tu będzie właściwe miejsce ku podaniu sposobów robienia, czyli wykréślania podziałki.

Najpospolitsza podziałka, używana nie do bardzo dokładnych rysunków, są to dwie proste równoległe blisko siebie pociągnione, jedna grubsza druga cieńsza. Wzdłuż tych odcina się jednostka dowolną liczbę razy i te podziały znaczą się prostopadłemi poprowadzonemi między piérwszemi dwiema równoległemi i przynajmniéj w jednę stronę nieco przedłużonemi jako główne podziały znaczącemi. Piérwszy główny podział dzieli się na drobniejsze części, a to stósownie do potrzeby na 4, 5, 10 i t. p. części. Drugi główny podział znaczy się liczbą zamykającą tyle jedności, ile ich ta jednostka ma przedstawiać, drugi 2razy tyle i t. d. jak na *fig.* 82 widzimy podziały 10, 20, 30...... Tym sposobem drobniejsze podziały w piérwszym głównym, wyrażać będą każdy 2 sążnie; dlatego też znaczymy je liczbami 2, 4, 6, 8. W końcu podziałki dopisuje się jakie długości ta podziałka przedstawia, jak tu sążnie. Gdyby główny podział przedstawiał sążeń, oznaczylibyśmy drugi i następne podziały zamiast liczbami 10, 20, 30 i t. d., liczbami 1, 2, 3 i t. d. a dzieląc piérwszy na 6 części, każdy z tych drobnych podziałów wyrażałby stopę, dlaczego nie liczbami 2, 4, 6, 8, ale liczbami 1, 2, 3, 4, 5 oznaczyćby je potrzeba. Użycie takiéj podziałki nie potrzebuje jak sądzę objaśnienia.

Drugi gatunek podziałki, który się używa ile razy chcemy zrobić dokładniejszy rysunek, jest to podziałka wykréślona za pomocą tak nazwanych *prostych transwersalnych*. Aby taką podziałkę wykréślić, należy liczbę miar, jaką ma wyrażać każdy podział główny, rozebrać na dwa czynniki. Tak np. chcąc nakréślić podziałkę gdzieby główny podział wyrażał 20 sążni rzeczywistych i z któréjby pojedyncze sążnie brać można, tak postąpić należy. Liczbę 20 rozłożywszy na dwa czynniki 4 i 5, kréśli się prostą MN nieograniczonéj długości *fig.* 83 i na niéj odcina się tyle części równych, ile potrzeba wymagać będzie i równych obranéj jednostce np. calowi, jak tu AB, BC, CD...... Piérwszy z tych podziałów dzieli się na 4 mniejsze części, ale także między sobą równe; z punktów A i B wyprowadziwszy prostopadłe do MN dowolnéj długości, bierze się na któréjkolwiek z nich 5 części także między sobą równych, a z resztą dowolnych od B do P; przez punkt P prowadzi się równoległa do MN i tę przedłuża aż do przecięcia się z piérwszą prostopadłą, oraz przenoszą się na nię cztéry mniejsze podziały poprzednio na AB zrobione. Przez pięć na prostopadłéj zrobionych podziałów, prowadzą się równoległe do MN przedłużając je tak daleko, jak podziałka zasięga. Nakoniec łącząc punkt P z piérwszym podziałem mniejszym Q, a potém następne łącząc także z sobą, mamy tym sposobem podziałkę ukończoną. Zobaczmy tylko czyli zadość wymogom czyni? Trójkąt $BPQ \backsim a1P$ przeto $BP:P1 = BQ:a1$; a że $P1 = \frac{1}{5}BP$, więc podobnież $a1 = \frac{1}{5}BQ$. Ale $BQ = \frac{1}{4}AB$, zatém $a1 = \frac{1}{5}.\frac{1}{4}AB = \frac{1}{20}AB$.

Zupełnie tym samym sposobem okaże się że $b2 = \frac{2}{20}AB$, że daléj $c3 = \frac{3}{20}AB$ i t. d. więc $a1$ wyraża jeden, $b2$, dwa, $c3$, trzy i t. d. sążnie; dlatego téż na tych równoległych widzimy wzdłuż prostopadłéj PB liczby 1, 2, 3, 4. Każdy z mniejszych podziałów jak BQ będąc czwartą częścią 20tu sążni, wyraża 5 sążni i z tego powodu widzimy wzdłuż górnéj równoległéj liczby 5, 10, 15.

Po takiém wyjaśnieniu w mowie będącéj podziałki, rozumiem iż jéj użycie nie stawi żadnéj trudności ani wątpliwości.

Z tego rodzaju podziałek najużywańsza jest dziesiętna, z powodu że téż i rachunek dziesiętny, szczególniéj między uczonymi, stał się prawie ogólnym. Taka podziałka kréśli się zupełnie jak poprzedzająca z tą jedyną różnicą, że się liczba nie rozkłada na dwa czynniki i piérwszy główny podział dzieli się na 10 części równych, tudzież na prostopadłéj BP odcina się także 10 części równych, a tym sposobem ponieważ $BQ = \frac{1}{10}AB$, będzie $a1 = \frac{1}{100}AB$, $b2 = \frac{2}{100}AB$ i t. d. Taką podziałkę przedstawia nam *fig. 84*. Użycie jéj jak piérwszéj, t. j. niech AB przedstawia 100 sznurów, tedy chcąc z podziałki wziąść 374 sznury, potrzeba jednę nożkę cyrkla postawić w punkcie R, a drugą w r na prostéj transwersalnéj liczbą 70 z góry oznaczonéj, a tak długość rR wyrażać będzie 374 sznury,

$$\text{bo } Rr = R4 + 4d + dr = 300 + 70 + 4 = 374.$$

Zresztą prędkiego i dokładnego użycia podziałki, nabywa się dopiéro w praktyce.

§. 72.

Zagadnienie 4. *Mając prostą podzieloną na ilekolwiek części, a zatém w ogólności na* n *części równych, podzielić też prostą na* n + *1 części także równych.*

Rozwiązanie. Prostą daną podzieloną na n części niech będzie AB, $n^{\text{tą}}$ jéj częścią niech będzie AC *fig. 85*, znaléść potrzeba jéj $(n+1)$tą część. Na ten koniec na prostéj AB wystawmy kwadrat ABDE, a poprowadziwszy przekątnię AD, tudzież punkta C i E złączywszy prostą CE, ta przetnie przekątnię w punkcie F; prowadząc przez punkt F prostą GH, równoległą do boku kwadratu AE, ta odetnie nam od AC część AH, która jest żądana $(n+1)$tą częścią prostéj AB.

Dowód rzetelności tego postępowania jest bardzo prosty, albowiem trójkąt EFD $\sim$ AFC bo są równokątne, przeto FD:AF=ED:AC. W trójkącie BAD, HF równoległa do BD dzieli dwa inne jego boki na części proporcyjonalne, zatém FD : AF=HB : AH. Z dwóch ostatnich proporcyj wy-
AB
pada ED:AC=BH:AH. Lecz ED=AB, $AC=\frac{1}{n}AB$ zatem $AB:\frac{1}{n}AB=BH:AH$ albo $1:\frac{1}{n}=BH:AH$, skąd $AH=\frac{1}{n}BH$, albo $n.AH=BH$. Dodawszy do każdéj z dwóch tych ilości równych, ilość AH, będzie $n.AH+AH=BH+AH$, albo $(n+1)\,AH=AB$ skąd nareszcie $AH=\frac{1}{n+1}AB$ co było do dowiedzenia.

§. 73.

Zagadnienie 5. *Mając dany punkt między ramionami kąta, poprowadzić przez tenże prostą, któraby kończąc się na ramionach kąta, w punkcie danym podzieloną była na dwie równe części.*

Rozwiązanie. Niech BAC będzie kątem danym i punkt M między jego ramionami *fig. 86*, potrzeba przez ten punkt poprowadzić prostą między ramionami, któraby w tymże punkcie podzieloną była na dwie części równe.

Przez dany punkt poprowadźmy równoległą do jednego z ramion danego kąta np. do AC, ta przetnie drugie ramię w punkcie H; zróbmy HD=AH i przez punkta D i M poprowadźmy prostą DME, ta będzie prostą żądaną t. j. że będzie DM=ME. Gdy bowiem HM równoległa do AE więc AH:HD=ME:DM. A że AH=HD z wykréślenia, więc téż ME=DM co należało dowiéść.

§. 74.

Zagadnienie 6. *Mając dany kąt i prostą między jego ramionami z wiérzchołka poprowadzoną, tudzież za ramionami kąta punkt dany, poprowadzić między ramionami rzeczonego kąta prostą tak, iżby przez prostą daną podzielona była na dwie równe części a w przedłużeniu swojém przechodziła przez punkt dany.*

Rozwiązanie. Niechże danym kątem będzie BAC, prostą daną AD, a nareszcie E punktem danym *fig.* 87, potrzeba przez ten punkt poprowadzić prostą tak, iżby jéj część między ramionami kąta zawarta, podzieloną była przez prostą AD na dwie równe części. Na danéj prostéj AD obierzmy gdziekolwiek punkt F, i przez ten, według poprzedniego zagadnienia, poprowadźmy prostą B′C′ podzieloną w tymże punkcie na dwie równe części tak że B′F=FC′. Jeżeli teraz przez punkt dany E poprowadzimy EN równoległą do téj ostatniéj prostéj, część jéj MN będzie także podzieloną w punkcie O, a zatém przez prostą daną, na dwie równe części; jest więc prostą żądaną. Dowód téj prawdy jest oczywisty przeto go pomijam.

§. 75.

Zagadnienie 7. *Mając dane trzy proste oznaczonéj długości, znaléść czwartą proporcyjonalną.*

Rozwiązanie. Trzema prostemi danemi niech będą A, B, C *fig.* 88, potrzeba do nich znaléść czwartą proporcyjonalną. Na ten koniec wykréślmy jakikolwiek kąt P i na jednéni z jego ramion odetnijmy prostą piérwszą A od P do A, tak, że PA=A; na drugiém ramieniu odetnijmy PB=B; trzecią prostą odetnijmy na ramieniu piérwszém, tak że PC=C;

złączywszy nareszcie punkta A i B prostą AB, przez punkt C poprowadźmy równoległą do AB, a ta na drugiém ramieniu odetnie PD, która jest czwartą proporcyjonalną szukaną. W trójkącie bowiem CPD, w którym AB równoległa do CD jest AP:BP=CP:DP czyli A:B=C:DP; jest więc rzeczywiście DP czwartą proporcyjonalną, któréj żądaliśmy.

§. 76.

Zagadnienie 8. *Do dwóch prostych znaléść trzecią ciągłą.*

Rozwiązanie. Niech prostemi danemi będą A i B *fig. 89* i niech B będzie tą prostą, która ma być średnią geometrycznie proporcyjonalną, a znaléść potrzeba trzecią któraby z danemi czyniła proporcyją ciągłą. Dla znalezienia jéj wykréślmy znowu jak poprzednio jakikolwiek kąt P i na jedném z jego ramion weźmy PA=A, na drugiém PB=B i znowu na piérwszém PB′=B. Punkta A i B złączywszy prostą AB a przez punkt B′ poprowadziwszy równoległą od niéj ta odetnie na drugiém ramieniu prostą PC, która będzie trzecią ciągle proporcyjonalną szukaną; według bowiem poprzedzającego zagadnienia jest AP:BP=B′P:CP. A że AP=A, BP=B, B′P=B, więc A:B=B:CP czyli ∺ A:B:CP; jest więc CP trzecią ciągłą do dwóch danych A i B.

§. 77.

Zagadnienie 9. *Mając dane dwie proste, znaléść między niemi średnią geometrycznie proporcyjonalną.*

Rozwiązanie. Niech A i B *fig. 90* będą dwiema prostemi, pomiędzy któremi znaléść mamy średnią geometrycznie proporcyjonalną. Wiedząc z §. 63 że prostopadła z wiérzchołka kąta prostego na przeciwprostokątnię spuszczona jest średnią geometrycznie proporcyjonalną między odcinkami przez siebie zrobionemi, na zasadzie téj kréśli się prosta nieograniczonéj długości, i na niéj odcina się jedna z prostych danych np. A od M do N, potém druga B od N do P; z punktu N wyprowadza się prostopadła do MP, także nieograniczonéj długości; chodzi teraz o to, jak jéj długość naznaczyć? Naznaczenie téj długości zależy na wyznaczeniu na téj prostopadłéj takiego punktu, iżby proste łączące go z punktami

M i P czyniły w tymże punkcie kąt prosty. Na ten koniec dzieli się prostą MP w punkcie Q na dwie równe części i z tego punktu otwartością cyrkla równą QM, kréśli się łuk przecinający tęż prostopadłą w punkcie R; mówię że NR jest średnią geometrycznie proporcyjonalną szukaną. Aby tę prawdę udowodnić, potrzeba okazać, że kąt MRP jest prosty. Złączywszy punkt R z punktami M, Q, P prostemi, tak trójkąt MQP, jako téż trójkąt QRP jest równoramienny, bo $QM = QR = QP$, zatém kąt $M = MRQ$, tudzież kąt $P = QRP$. W trójkącie MQR jest $M + MRQ + MQR = 2R$ czyli $2MRQ + MQR = 2R$; podobnież w trójkącie QRP jest

$$P + QRP + RQP = 2R \text{ czyli } 2QRP + RQP = 2R,$$

zatém
$$2(MRQ + QRP) + (MQR + RQP) = 4R.$$

Lecz $MRQ + QRP = MRP$, zaś $MQR + RQP = 2R$ jako przyległe, przeto odjąwszy po obu stronach ostatniego zrównania ilości równe t. j. od piérwszéj ilość $MQR + RQP$ a od drugiéj $2R$, otrzymamy $2MRP = 2R$ czyli $MRP = R$. Jest więc kąt MRP prosty, a prostopadła NR średnią geometrycznie proporcyjonalną między MN i NP czyli między A i B co należało dowiéść.

§. 78.

Zagadnienie 10. *Mając dane dwa iloczyny, każdy z dwóch linij prostych, znaléść stósunek tych iloczynów także w linijach prostych, czyli znaleść dwie proste, któreby się tak miały do siebie, jak się mają rzeczone iloczyny.*

Rozwiązanie. Niech dane iloczyny będą $A \times B$ i $C \times D$, gdzie A, B, C, D wyrażają linije proste albo ich stósunki do jednostki, a w takim razie wyrażałyby liczby. Jeżeli wyrażają liczby, przypuśćmy że $A = 5$, $B = 14$, $C = 7$, $D = 4$, tedy mamy znaléść stósunek równający się stósunkowi

$$5 \times 14 : 7 \times 4.$$

Na ten koniec do trzech liczb 14, 7 i 4 szukamy czwartéj proporcyjonalnéj, którą według Arytmetyki znajdziemy

$$14 : 7 = 4 : \frac{4 \times 7}{14}$$ czyli $14 : 7 = 4 : 2$ skąd $7 \times 4 = 2 \times 14$; mieć

więc będziemy $5 \times 14 : 7 \times 4 = 5 \times 14 : 2 \times 14 = 5 : 2$; liczby więc 5 i 2 mają się do siebie w takim samym stósunku, w jakim są iloczyny 5×14 i 7×4, gdyż $5 \times 14 : 7 \times 4 = 5 : 2$ czyli $70 : 28 = 5 : 2$ skąd $70 \times 2 = 28 \times 5$, co dowodzi rzetelności téj ostatniéj proporcyi.

Jeżeli zaś A, B, C, D wyrażają linije, jak rzeczywiście w zagadnieniu wyrażono, postępowanie w rozwiązaniu zagadnienia w tym przypadku jest toż samo, t. j. do trzech prostych B, C, D szuka się czwartéj proporcyjonalnéj §. 75, którą nazwawszy K, mamy $B : C = D : K$ skąd $C \times D = B \times K$; będzie więc $A \times B : C \times D = A \times B : B \times K = A : K$. Dwie więc proste A i K mają się do siebie, jak dwa iloczyny dane.

§. 79.

Zagadnienie 11. *Mając dane dwa iloczyny, każdy z trzech prostych złożony, znaléść ich stósunek wyrażony także w linijach prostych.*

Rozwiązanie. Niech iloczynami danemi będą $A \times B \times C$ i $A' \times B' \times C'$ gdzie ilości A, B, C i A', B', C' wyrażają linije proste, potrzeba znaléść stósunek tych iloczynów wyrażony w linijach. Na ten koniec naprzód do trzech prostych A', A, B szukamy czwartéj proporcyjonalnéj, którą nazwawszy K będzie $A' : A = B : K$ skąd $A \times B = A' \times K$.

Potém do trzech prostych C, B', C' szukamy znowu czwartéj proporcyjonalnéj i tę K' nazywamy, tak że

$$C : B' = C' : K' \text{ skąd } B' \times C' = C \times K'.$$

Jeżeli teraz w miejsce iloczynów $A \times B$ i $B' \times C'$ położymy znalezione im równe ważności, będzie:

$$A \times B \times C : A' \times B' \times C' = A' \times K \times C : A' \times C \times K' = K : K';$$

skąd się pokazuje, że znalezione dwie proste K i K', mają się do siebie jak podane iloczyny, co też w zagadnieniu żądano.

ROZDZIAŁ V.

Własności prostych w różny sposób względem okręgu koła prowadzonych, jako też kątów, różnie wśród linii kołowéj, na niéj lub za nią położonych.

---

§. 80.

Z §. 20 już wiemy co jest łuk i co cięciwa, w tym więc rozdziale dowiedziemy naprzód następujące

TWIERDZENIE. *Kątom równym mającym swe wiérzchołki w środku koła, odpowiadają cięciwy równe i łuki między ich ramionami zawarte równe.* Nawzajem, *cięciwom równym odpowiadają kąty równe i łuki równe, jako téż łukom równym odpowiadają cięciwy i kąty równe.*

Co do piérwszego. Niech będą dwa kąty ASB i CSD *fig. 91* równe, mające swoje wiérzchołki w środku koła S; jeżeli połączymy punkta A i B, C i D prostemi, czyli co jedno jest, jeżeli poprowadzimy cięciwy AB i CD, potrzeba dowiéść że te cięciwy są sobie równe, tudzież że i łuki do nich należące także sobie są równe.

Dwa trójkąty ASB i CSD według §. 23, są sobie równe i przystają do siebie, bo mają po dwa boki AS i BS, CS i DS, jako promienie jednegoż koła równe i po kącie między niemi zawartym z założenia równym; z ich więc przystania wnosimy że $AB = CD$.

Wycinek ASB położywszy na wycinku CSD tak, aby punkt S przypadł na S, promień SA poszedł w kierunku SC, tedy punkt A przypada na C dla równości promieni, a promień SB pójdzie w kierunku SD dla równości kątów przy S. A że $SB = SC$ więc i punkt B padnie na punkt D. Skoro więc dwa punkta A i B łuku AB padły na dwa punkta C i D łuku CD, muszą téż wszystkie inne punkta łuku AB, paśdź na odpowiadające punkta łuku CD, czyli łuki te zupełnie przykryć się muszą, gdyż wszystkie punkta obu, będąc w równéj od środka S odległości, nie mogą paść ani bliżéj ani daléj tegoż środka, jak są punkta łuku CD, co było do dowiedzenia.

Co do drugiego. Ponieważ zakładamy że AB=CD, więc trójkąty ASB i CSD według §. 22 przystają do siebie, a w szczególności kąt ASB=CSD. Że łuki są sobie równe, już bardzo łatwo wnioskować, bo z przystania trójkątów, punkta A i B leżą na C i D.

Co do trzeciego. Wycinek ASB położywszy na wycinku CSD tak, aby punkt A padł na C, punkt B przypaść musi na D, albowiem te łuki z założenia są sobie równe. A że przez dwa punkta jedna tylko prosta przechodzić może, zatém cięciwa AB przykryje cięciwę CD, a następnie te cięciwy są sobie równe. Z przystania potém trójkątów mających po trzy boki równe każdy każdemu, wniesiemy że kąt

ASB=CSD.

Prawdą więc jest wszystko, co twierdziliśmy.

Wniosek. Z samego toku dowodzenia tego twierdzenia wypływa, że kątom równym przy środku koła odpowiadają nie tylko cięciwy i łuki, ale także wycinki i odcinki równe.

§. 81.

Podzieliwszy kąt ASB *fig. 92* na ilekolwiek części równych, i podziałowe proste przedłużywszy aż do przecięcia się z łukiem jakimkolwiek promieniem z wierzchołka kąta S jako ze środka zakreślonym, łuk ten podzielonym zostanie na tyleż części równych. Wzajemnie, jeżeli podzielimy łuk między ramionami kąta z jego wierzchołka jakimkolwiek promieniem zakreślony na ilekolwiek części równych i punkta podziału połączymy z wierzchołkiem prostemi, te podzielą téż kąt między którego ramionami łuk został zakreślony na tyleż części równych. Oprócz tego jasno widzimy, że dwa, trzy, cztéry i t. d. razy większy łuk jest zawarty między ramionami kąta dwa, trzy, cztéry i t. d. razy większego; bo np. łuk A5 będąc 5 razy większym od łuku A1, jest téż zawarty między ramionami kąta AS5 5 razy większego od kąta AS1; łuk A8 będąc 4 razy większy od łuku A2, jest téż zawarty między ramionami kąta AS8, 4razy większego od kąta AS2 i t. d. Kiedy więc łuki nakreślone z wierzchołków kątów tymże samym promieniem powiększają się w tymże samym stósunku w jakim się kąty powiększają, naturalną jest rzeczą, iż w miejsce stósunku kątów, wziąść można stósunek łuków jednymże promieniem z wiérzchołków pomiędzy ich ramionami zakreślonych; kąty przeto mają się w ogólności do siebie jak łuki z ich wierzchołków jednymże promieniem nakreślone. Jeżeli bowiem łuki są spółmierne, rzetelność tego twierdzenia z poprzedzającego jest jasną i oczywistą; jeżeli zaś są niespółmierne tedy według tego co w §. 53 *uwaga* wyrzekliśmy, można łatwo dowieść że i w tym przypadku stósunek kątów jest równy stósunkowi łuków z ich wiérzchołków jednymże promieniem między ich ramionami zakreślonych.

Poprowadziwszy przez środek koła dwie średnice do siebie prostopadłe, te jak już wiemy dzielą tak okrąg koła jako téż i samo koło na cztéry części równe, które w §. 19 ćwiartkami koła nazwaliśmy. Lecz z przecięcia się dwóch średnic prostopadle do siebie, powstają cztéry kąty proste, więc czwarta część okręgu koła zawarta jest tym sposobem między ramionami kąta prostego wierzchołek w środku koła mającego; zamiast więc porównywać kąt z kątem prostym jako jednostką, można porównywać łuk z wierzchołka tegoż kąta jakimkolwiek promieniem między jego ramionami nakreślony, z czwartą częścią okręgu koła takimże promieniem nakreślonego, i w tém to rozumieniu mówimy zwyczajnie: *miarą kąta jest łuk między jego ramionami z wierzchołka jako ze środka jakimkolwiek promieniem nakreślony.*

W §. 9 przyjąwszy kąt prosty za jednostkę do mierzenia kątów, dla większéj wygody podzieliliśmy go na 90 części które stopniami nazwaliśmy, zatém i czwartą część okręgu koła jako miarę kąta prostego dzieli się także na 90 części; tym sposobem cały okrąg koła jakimkolwiek promieniem zakreślony, zamykać będzie 360 części, bo on jest miarą cztérech kątów prostych, które téż czynią 360 stopni, z których każdy dzieli się na minuty a te na sekundy. A tak czyli to chcemy wyrazić w liczbach kąt czyli téż łuk, w każdym razie wyrażamy je liczbą stopni, minut, sekund i t. d.

Chcąc zaś znaleść stósunek dwóch kątów lub łuków, dosyć jest znaleść stósunek dwóch liczb wyrażających ile każdy z nich zamyka stopni, minut i sekund.

Po tém co dotąd o kątach i łukach razem uważanych powiedzieliśmy, łatwo poznamy jak geometryczne działanie w dochodzeniu stósunku dwóch kątów czyli ich spólnéj miary w §. 8 wskazane, zamienić można na działanie bez porównania łatwiejsze z łukami tymże kątom za miarę służącemi.

Uwaga. Powiedzieliśmy że cały okrąg koła jest miarą czterech kątów prostych i to okrąg koła jakimkolwiek promieniem nakreślony; skąd się pokazaje, że wielkość kąta nie zależy od wielkości promienia. Rzeczywiście ponieważ tu ramionami kąta są promienie, a od długości ramion nie zależy wielkość kąta §. 4, więc téż i od wielkości promienia zależeć nie może. Lecz długość łuku między ramionami kąta zakreślonego tém jest większa im promień dłuższy; skądby poszło że łuk jako, co do swéj długości zmienny, nie może być miarą kąta jak poprzednio dowiedliśmy. Atoli jakkolwiek długość linii kołowéj tém jest większa im promień dłuższy, wszelako tak mały okrąg jako i wielki, zawsze jest miarą czterech kątów prostych; jeżeli bowiem między ramionami kąta prostego nakreślimy różnemi promieniami łuki, a kąt prosty wystawimy sobie podzielony na 90 części, podziałowe linije podzielą téż każdy z nakreślonych łuków na 90 części, dla tego to okrąg koła jakimkolwiek promieniem nakreślony, dzielimy zawsze na 360 części równych nazwanych stopniami i każda taka część jest miarą kąta mającego 1 stopień; jakkolwiek bowiem ta miara co do długości swojéj jest różna, według długości promienia, zawsze jednak jest 90tą częścią czwartéj części okręgu. W nowszych czasach Francuzi, wprowadziwszy użycie miar dziesiętnych, podzielili téż okrąg koła na 400 części nazwanych stopniami (grade), każdy taki stopień podzielili na 100 części nazwanych minutami, a każdą minutę na 100 sekund. Chcąc więc w dawnym podziale znaleść stósunek jakiegokolwiek kąta do jednostki, dosyć jest liczbę jego sto-

pni podzielić przez 90, w nowym zaś podziale liczbę stopni (grade) podzielić potrzeba przez 100. Chcąc zaś zamienić stopnie dawnego podziału na stopnie nowego, potrzeba liczbę stopni pomnożyć przez $\frac{10}{9}$, a przeciwnie przechodząc z nowego do dawnego, liczba stopni mnoży się przez $\frac{9}{10}$. Tak np. $25^0 54' 36''$ czyli $25^0.96$ dawnego podziału czynią nowych $25{\cdot}96 \times \frac{10}{9} = 28^g 8444\ldots$ czyli $28^g 84' 44''\ldots$
$13^0 75' 92''$ czyli $13{\cdot}7592$ nowego podziału, czynią $13{\cdot}7592 \times \frac{9}{10} = 12^0 38328 = 12^0 22' 59'' 808$ podziału dawnego.

§. 82.

Twierdzenie. *Prostopadła ze środka koła do cięciwy spuszczona, dzieli ją i łuk do niéj należący na dwie równe części.*

Niech będzie prosta SC prostopadła do cięciwy AB *fig. 93*, potrzeba dowieść że ta prostopadła dzieli cięciwę w punkcie przecięcia się z nią D na dwie równe części, a w przedłużeniu swojém, dzieli także łuk do niéj należący na dwie równe części.

Poprowadziwszy promienie SA i SB, dwa trójkąty ASD i BSD według §. 35 przystają do siebie, są bowiem prostokątne przy D tudzież mają przeciwprostokątnie SA, SB równe i po jednym boku przyległym kątowi prostemu równym t. j. SD = SD; z ich więc przystania wnosimy że AD = BD.

Albo tak: SD jest z założenia prostopadła do AB, zaś SA i SB są dwiema pochyłemi; ponieważ te pochyłe są równe jako promienie jednegoż okręgu, więc według §. 32 c), są w równéj od spodku prostopadłéj SD odległości, przeto BD = BD.

Powtóre: Dwa trójkąty ACD i BCD mają po dwa boki z kątem zawartym równe, gdyż AD = BD z poprzedzającego CD = CD i kąty przy D proste, więc przystają do siebie według §. 23, a z przystania wnosimy, że cięciwa AC = BC.

Albo: kiedy CD prostopadła do AB a z poprzedzającego dowodzenia AD = BD, zatém pochyła AC = BC. Lecz pochyłe te są cięciwami, zatém według §. 80 *co do drugiego*, łuki do nich należące są sobie równe. Prawdą przeto jest że prostopadła ze środka koła i t. d.

Uwaga. Trzy punkta S, D, C, t. j. środek koła, środek cięciwy i środek do niéj należącego łuku, leżą jak widzimy na jednéj prostéj. Ale do poprowadzenia każdéj prostéj dosyć jest mieć dwa punkta, a dla tego każda prosta przechodząca przez dwa którekolwiek z rzeczonych trzech punktów, koniecznie przechodzić musi i przez trzeci oraz być prostopadłą do cięciwy. A jeżeli jaka prosta dopełnia dwóch którychkolwiek z cztérech warunków t. j. przechodzenia przez środek koła, dzielenia cięciwy na dwie równe części, prostopadłości do niéj i przechodzenia przez środek łuku do téjże cięciwy należącego, dwa inne są już koniecznym wypadkiem piérwszych. Dlatego prostopadła ze środka cięciwy wyprowadzona przechodzi ~~łuk~~ tak przez środek koła jako też i środek łuku; prosta łącząca środek koła z środkiem łuku, dzieli cięciwę do niego należącą na dwie równe części i jest do niéj prostopadłą; nareszcie prosta łącząca środek łuku z środkiem cięciwy do niego należącéj, jest do téj cięciwy prostopadłą i przechodzi przez środek koła.

§. 83.

Twierdzenie. *Przez trzy nie w jednym kierunku dane punkta, zawsze nakreślić można okrąg koła ale nie więcéj jak tylko jeden.*

Niech trzema danemi punktami będą A, B, C, *fig. 94*, połączywszy jeden z nich np. B z dwoma innemi linijami prostemi BA i BC tudzież ze środków tych prostych D i E wyprowadziwszy prostopadłe DF i EG, te przetną się koniecznie z sobą, jak tu w punkcie S; gdyby się bowiem nie przecięły, byłyby równoległe, a dwie proste AB i BC przez punkt B prostopadle do DF i EG poprowadzone, byćby musiały jedna na przedłużeniu drugiéj, co jest przeciwne założeniu, że trzy punkta A, B, C, nie w jednym są kierunku. Poprowadziwszy proste AS, BS, i CS, te są między sobą równe; albowiem punkt S uważany jako będący na prostopadłéj DF, jest w równéj odległości tak od A jako i B; tenże punkt S uważany jako leżący na prostopadłéj EG jest w równéj odległości od B i C; przeto okrąg koła promieniem SA z punktu S zakreślony, przejdzie przez trzy punkta A, B, C.

Że przez te trzy punkta więcéj okręgów kół przechodzić nie może, bardzo łatwo okazać: gdyby bowiem to być mogło, środek każdego takiego okręgu znajdowaćby się musiał tak na prostopadłéj DF jako téż i na prostopadłéj EG; a kiedy dwie proste nie więcéj jak w jednym punkcie przecinać się mogą, przeto jest niepodobieństwem z tegoż samego punktu i tymże samym promieniem zakreślić dwa lub więcéj okręgów kół.

Wniosek 1. Połączywszy punkta A i C prostą AC, otrzymamy trójkąt ABC, skąd wniesiemy że przez trzy wiérzchołki kątów trójkąta prostokreślnego, zawsze można nakreślić okrąg koła, czyli jak późniéj mówić będziemy, każdy trójkąt można opisać okręgiem koła.

Wniosek 2. Ze środka prostéj AC wyprowadziwszy prostopadłą HI, ta koniecznie przejść musi przez punkt S, gdyż punkta A i C są w równéj od niego odległości; skąd wniesiemy, że w trójkącie prostokreślnym podzieliwszy każdy z boków na dwie części równe i z punktów podziału wyprowadziwszy prostopadłe do tychże boków, trzy te prostopadłe przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem koła na trójkącie opisanego.

Wniosek 3. Dwa okręgi kół mieć tylko mogą dwa punkta spólne czyli jak zwyczajnie mówimy: nie więcéj jak w dwóch punktach przecinać się mogą; gdyby bowiem miały przynajmniéj trzy punkta spólne, jużby według poprzedzającego twierdzenia były jednym i tymże samym okręgiem czyli przykryłyby się zupełnie.

§. 84.

Twierdzenie. *Cięciwy równe są w równéj od środka koła odległości, tudzież cięciwa większa leży bliżéj środka koła niż cięciwa mniejsza.*

Niech będą dwie cięciwy AB i CD *fig. 95* równe, potrzeba dowieść, że odległości ich od środka koła S są także równe, czyli że prostopadła SE=SF, bo prostopadłe mierzą odległość punktu od prostéj. Na dowiedzenie téj prawdy, poprowadźmy promienie AS i CS, tedy dwa trójkąty ASE i CSF prostokątne przy E i F, mają przeciwprostokątnie równe i boki przyległe kątowi prostemu AE i CF równe, gdyż AB=CD z założenia, przeto i $\frac{1}{2}$AB=$\frac{1}{2}$CD czyli AE=CE. Dwa więc te trójkąty według §. 42 przystają do siebie a w szczególności SE=SF, co było do dowiedzenia.

Niech powtóre będzie AG>AB, potrzeba dowiéść że téż SE>SH. Ponieważ SE jest oczywiście większe niż SK zaś SK>SH jako przeciwprostokątnia, więc tém bardziéj SE>SH; zatém większa cięciwa bliżéj leży środka koła niż mniejsza

Wniosek. Ze wszystkich cięciw jakie w témże samém kole poprowadzić można, największa jest ta, która leży najbliżéj środka, przeto średnica przechodząc przez sam środek a następnie nie mając od niego żadnéj odległości, jest największą między cięciwami.

§. 85.

Twierdzenie. *Prosta z końca promienia prostopadle do tegoż wyprowadzona, ma tylko ten jeden punkt spólny z okręgiem koła, czyli jest styczną.* Wzajemnie, *styczna jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu jéj dotknięcia się z okręgiem koła.*

Niech prosta AB w końcu promienia SC poprowadzona, będzie prostopadłą do tegoż, t. j. niech kąt SCA będzie prostym *fig. 96,* dowiéść potrzeba, że ta prosta AB ma tylko ten jedyny punkt spólny z okręgiem koła. Jeżeliby ktoś twierdził, że prosta AB sposobem w twierdzeniu wyrażonym poprowadzona, ma jeszcze inne punkta spólne z okręgiem koła, tedy pozwólmy że punkt którykolwiek D na prostéj AB wzięty, leży także na okręgu koła, złączywszy go ze środkiem S prostą SD, otrzymamy trójkąt SDC prostokątny przy C. Lecz w trójkącie prostokątnym, przeciwprostokątnia jest najdłuższym z jego boków, zatém SD>SC; a że punkt C leży na okręgu, więc punkt D leżeć musi koniecznie za okręgiem.

Podobnież każdy inny punkt prostéj AB różny od punktu C leżeć musi za okręgiem, bo prosta łącząca go ze środkiem S, będzie zawsze przeciwprostokątnią a zatém dłuższą niż SC.

Że wzajemnie styczna jest prostopadłą do promienia, bardzo łatwo jest dowiéść; albowiem jeżeli AB jest styczną w punkcie C, tedy ten tylko punkt ma spólny z okręgiem koła, wszystkie zaś inne jéj punkta leżą za okręgiem, a zatém daléj od środka koła. Dlatego proste łączące też punkta z środkiem koła będą pochyłe a zatém każda z nich będzie dłuższą niż SC. Ze wszystkich więc prostych jakie z punktu S do prostéj AB poprowadzić można, najkrótszą jest prosta SC, jest więc ta prosta według §. 42 *b)* prostopadłą do AB co potrzeba było dowiéść.

§. 86.

TWIERDZENIE. *Dwie cięciwy równoległe, odcinają na okręgu koła łuki między sobą zawarte równe.*

Niech będą dwie cięciwy AB i CD *fig. 97* równoległe, potrzeba dowiéść że łuki AC i BD między temiż cięciwami zawarte są sobie równe. Na ten koniec ze środka koła S spuściwszy do którejkolwiek z tych cięciw prostopadłą SE, ta téż będzie prostopadłą i do drugiéj według §. 13. Według zaś §. 82 dzieli tak łuk CED, jako téż i AEB w punkcie E na dwie równe części; skoro więc CE = DE, tudzież AE = BE, zatém i CE — AE = DE — BE czyli AC = BD, co należało dowiéść.

Gdyby jedna z cięciw np. AB była styczną do okręgu koła, jak jest prosta FG, tedy ponieważ SE prostopadła do FG jest téż prostopadła i do CD i dzieli łuk AED w punkcie E na dwie równe części, więc CE = DE.

W przypadku gdy obie cięciwy przechodzą na styczne równoległe, dowód jest oczywistym i żadnéj nie zamyka trudności.

§. 87.

Definicyja. Kąt mający swój wiérzchołek w środku koła, nazywać będziemy *środkowym* (angulus ad centrum), kąt zaś którego wiérzchołek jest na okręgu koła, *okręgowym* (a.

ad periphaeriam). Ten ostatni nazywają także kątem wpisanym.

Twierdzenie. *Kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta okręgowego, ramionami swemi tenże sam łuk jak piérwszy obejmującego.*

W dowodzeniu tego twierdzenia mogą być trzy przypadki: t. j. albo jedno ramię kąta okręgowego przechodzi przez środek koła, albo téż ramiona tegoż kąta obejmują środek, lub nareszcie oba ramiona są mimo środka.

Co do piérwszego. Niech będzie kąt okręgowy ABC *fig. 98* ramionami swemi obejmujący łuk AC, poprowadziwszy promień SA otrzymamy kąt środkowy ASC tenże sam łuk jak piérwszy ramionami swemi obejmujący; potrzeba dowiéść że $ASC = 2ABC$. Ponieważ kąt ASC jest zewnętrznym trójkąta ABS, więc się równa dwom wewnętrznym naprzeciwko siebie położonym, t. j. kąt $ASC = SAB + ABS$. Lecz trójkąt ASB jest równoramienny bo $SA = SB$ zatém kąt

$$SAB = ABS = ABC,$$

przeto téż kąt $ASC = ABC + ABC = 2ABC$.

Co do drugiego. Niech będzie kąt okręgowy AB'C ramionami swemi środek koła S obejmujący; poprowadziwszy średnicę B'D, ta dzieli tak kąt okręgowy, jako téż i środkowy na dwie części i sprowadza ten przypadek do piérwszego; albowiem według piérwszego przypadku jest kąt

$$ASD = 2AB'D \text{ tudzież kąt } DSC = 2DB'C$$

skąd $ASD + DSC = 2AB'D + 2DB'C = 2(AB'D + DB'C)$. A że $ASD + DSC = ASC$ zaś $AB'D + DB'C = AB'C$, zatém kąt $ASC = 2AB'C$.

Co do trzeciego. Niech okręgowym kątem będzie AB''C którego ramiona AB'' i B''C idą mimo środka, potrzeba dowiéść że i w tym przypadku kąt $ASC = 2AB''C$. Poprowadziwszy i tu średnicę B''D', sprowadza się ten przypadek również do piérwszego, bo kąt D'B''C jest okręgowym, którego jedno ramię B''D' przechodzi przez środek koła, jako téż i kąt D'B''A; piérwszemu odpowiada kąt środkowy D'SC drugiemu zaś takiż kąt D'SA. Ale według piérwszego przypadku jest D'SC = 2D'B''C, tudzież D'SA = 2D'B''A skąd D'SC—D'SA = 2D'B''C—2D'B''A = 2(D'B''C—D'B''A). A że D'SC—D'SA = ASC zaś D'B''C—D'B''A = AB''C więc kąt ASC = 2AB''C. W każdym więc z trzech przypadków dowiedliśmy założonego twierdzenia, że kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta okręgowego, ramionami swemi tenże sam łuk obejmującego.

Wniosek 1. Ponieważ według §. 81 miarą kąta środkowego jest łuk między ramionami jego zawarty, zatém wniesiemy że *miarą kąta okręgowego jest połowa łuku między jego ramionami zawartego.*

Wniosek 2. Wszystkie kąty okręgowe wspiérające się ramionami swemi na jednymże łuku, czyli jak zwyczajnie mówimy, wszystkie kąty w jednymże odcinku koła są sobie równe; każdy bowiem ma za miarę połowę tegoż samego łuku: skoro więc miary są równe i kąty muszą być równe.

Wniosek 3. Kąt okręgowy ramionami swemi obejmujący średnicę, a zatém wspiérający się na połowie okręgu, jest prosty, ma bowiem za miarę połowę półokręgu, czyli ćwierć tego okręgu czyli 90°, który łuk jest miarą kąta prostego według §. 81 *uwaga.* Własność tę wyrażamy zwyczajnie: *kąt w półkolu jest prostym.*

Wniosek 4. Każdy kąt okręgowy wspiérający się ramionami swemi na łuku mniejszym niż połowa okręgu koła, jest ostrym, wspierający się zaś na łuku większym niż połowa okręgu, jest rozwartym.

§. 88.

Twierdzenie. *Kąt mający swój wiérzchołek gdziekolwiek na płaszczyznie koła, ma za miarę połowę summy łuków zawartych między jego ramionami i przedłużeniami tychże, kąt zaś mający swój wiérzchołek za okręgiem koła, ma za miarę połowę różnicy dwóch łuków między jego ramionami zawartych.*

Niech będzie kąt ABC *fig. 99*, mający swój wiérzchołek w punkcie B na płaszczyznie koła; przedłużywszy jego ramiona aż do przecięcia się z okręgiem w punktach D i E, potrzeba dowiéść, że $\frac{AC + DE}{2}$ jest miarą kąta ABC. Na ten koniec z punktu D poprowadziwszy cięciwę DF równoległą do ramienia BC, jest kąt ABC $=$ ADF jako jednostronne odpowiadające sobie, więc i miary ich są sobie równe. Lecz według poprzedzającego §. miarą kąta ADF, jako okręgowego jest połowa łuku AF między jego ramionami zawartego, więc téż i miarą kąta ABC jest połowa tegoż łuku. Ale łuk $AF = AC + CF$, zaś według §. 86 $CF = DE$ przeto $AF = AC + DE$, a następnie miarą kąta ABC jest połowa łuku AF czyli $\frac{AC + DE}{2}$.

Niech powtóre będzie kąt $AB'C'$ mający swój wiérzchołek za okręgiem koła w punkcie B', okazać potrzeba, że miarą jego jest połowa różnicy łuków AC' i GH czyli $\frac{AC' - GH}{2}$. Na dowiedzenie tego z punktu G poprowadźmy GF' równoległą do $B'C'$, tedy kąt $AGF' = AB'C'$, zatém i miary ich są równe. Lecz miarą kąta okręgowego AGF' jest połowa łuku AF' zaś $AF' = AC' - F'C'$ a $F'C' = GH$; przeto miarą kąta $AB'C'$ jest połowa łuku AF' czyli $\frac{AC' - F'C'}{2} = \frac{AC' - GH}{2}$ co potrzeba było dowiéść.

Dwie części tego twierdzenia można téż innym sposobem następnie dowiéść:

Co do piérwszego. Punkta A i E złączywszy prostą, kąt $ABC = CEA + EAD$ §. 39, więc miarą kąta ABC jest połowa miary kątów CEA i EAD. Ale miarą kąta CEA jest połowa łuku AC, zaś miarą kąta EAD jest połowa łuku DE, zatém miarą kąta ABC jest połowa łuku AC więcéj połową łuku DE czyli $\frac{AC + DE}{2}$.

Co do drugiego. Poprowadziwszy prostą AH, kąt

$$AHC' = AB'C' + HAB' \text{ skąd } AB'C' = AHC' - HAB'.$$

Miarą kąta AHC' jest połowa łuku AC', miarą zaś kąta HAB'

jest połowa łuku HG więc miarą kąta AB′C′ jest połowa łuku AC′, mniéj połową łuku HG czyli $\frac{AC' - HG}{2}$.

§. 89.

Twierdzenie. *Kąt zawarty między cięciwą i styczną poprowadzoną w jednym z punktów, w których cięciwa przecina okrąg koła, jest połową kąta środkowego wspiérającego się ramionami swemi na końcach cięciwy.*

Niech prosta AB będzie cięciwą zaś AD styczną *fig. 100*, poprowadziwszy promienie SA i SB, które utworzą kąt środkowy ASB, potrzeba dowiéść że $ASB = 2DAB$.

Ze środka koła S spuściwszy prostopadłą SC na cięciwę AB, ponieważ w trójkącie ACS kąt przy C jest prosty, przeto kąt CAS z kątem CSA czynią także kąt prosty, czyli $CAS + CSA = R$. Ale též kąt SAD jest prosty, bo styczna AD jest prostopadłą do promienia SA, ten zaś kąt składa się z dwóch CAS i CAD czyli że $CAS + CAD = R$, przeto $CAS + CSA = CAS + CAD$, skąd po odjęciu kąta CAS spólnego obu stronom, pozostaje $CSA = CAD$. Lecz prostopadła SC dzieli kąt ASB na dwie równe części §. 40 *wniosek 2*, przeto kąt DAB jest połową kąta ASB, co należało dowieść.

Wniosek 1. Miarą kąta uczynionego przez cięciwę i styczną na okręgu koła przecinające się, jest połowa łuku między styczną i cięciwą zawartego.

Wniosek 2. Wziąwszy jakikolwiek punkt D za okręgiem koła i poprowadziwszy z niego dwie styczne DA i DB do okręgu koła, a punkta ich dotknięcia się A i B złączywszy cięciwą, ponieważ według poprzedzającego tak kąt DAB jako též i kąt DBA jest równy połowie kąta ASB, zatém kąt $DAB = DBA$, a trójkąt ADB jest równoramienny, przeto DC z wiérzchołka kąta do środka podstawy poprowadzona, jest do niéj prostopadłą i dzieli kąt między stycznemi ADB na dwie równe części. Ale dwie prostopadłe DC i SC leżą na jednéj prostéj, obie bowiem mają dwa punkta spólne t. j. C i E, bo prostopadła SC przechodząc przez punkt C, przechodzić též musi i przez punkt E §. 82 *uwaga*, i podobnież prosta DC przechodząc przez punkta D i C, koniecznie przechodzić musi przez punkt E; z tego wypada, że prosta łącząca punkt przecięcia się dwóch stycznych z środkiem koła, przechodzi przez środek łuku między stycznemi zawartego, środek cięciwy do tegoż łuku należącéj i dzieli kąt między stycznemi zawarty na dwie równe części, oraz jest prostopadłą do rzeczonéj cięciwy.

§. 90.

Twierdzenie. *Części dwóch cięciw przecinających się wśród okręgu koła mają się w stósunku odwrotnym.*

Niech będą dwie cięciwy AB i CD przecinające się w punkcie E *fig. 101*, potrzeba dowieść, że części cięciw z tego przecięcia powstające, są w stósunku odwrotnym. Na dowiedzenie tego punkta A i D, B i C połączmy prostemi, tedy trójkąt $ADE \backsim BEC$, bo kąty przy E są równe jako wiérzchołkowe, tudzież kąt $A = C$, $B = D$ jako mające za miarę połowę jednegoż łuku. Z podobieństwa tych trójkątów wypływa

$$AE : CE = DE : BE \text{ skąd } AE.\ BE = CE.\ DE;$$

iloczyn więc z części jednéj cięciwy, jest równy iloczynowi z części cięciwy drugiéj i to téż jest cechą ich stósunku odwrotnego; w stósunku albowiem prostym nie iloczyny ale ilorazy byłyby równe. Albo jeszcze wyraźniéj mówiąc, części jednéj cięciwy są skrajnemi, części zaś drugiéj średniemi wyrazami proporcyi.

Wniosek. Ponieważ średnica koła FG jest także cięciwą, tedy, chociaż drugiéj cięciwie HI nadamy szczególne względem pierwszéj położenie, mianowicie, iżby była prostopadłą do średnicy, poprzedzające twierdzenie, gdzie położenia cięciw zupełnie nie uszczególnialiśmy, i tu jest w całéj swéj mocy; a zatém będzie podobnież

$$FK : HK = KI : KG.$$

Lecz promień lub średnica prostopadła do cięciwy dzieli ją na dwie równe części, przeto $HK = KI$, a następnie

$$FK : HK = HK : KG$$

t. j. *z któregokolwiek punktu okręgu koła spuściwszy prosto-*

8.

padłą do średnicy, ta prostopadła jest średnią geometrycznie proporcyjonalną między odcinkami średnicy.

Uwaga. Połączywszy punkt H z końcami średnicy, otrzymamy trójkąt HFG prostokątny przy H §. 87 *wniosek 3*, więc prostopadła HK z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątnią spuszczona, jest średnią geometrycznie proporcyjonalną między odcinkami przeciwprostokątni, co już inną drogą w §. 63 dowiedliśmy. Bok HG jest średnią geometrycznie proporcyjonalną między FG i GK, jako też HF między FG i FK według tegoż §. 63. To posłuży nam do łatwiejszego rozwiązania zagadnienia w §. 77 innym sposobem rozwiązanego.

§. 91.

Twierdzenie. *Z punktu wziętego za okręgiem koła poprowadziwszy dwie sieczne, ich stósunek jest równy odwrotnemu stósunkowi ich części za okręgiem koła leżących.*

Niech danym punktem za okręgiem koła będzie A *fig. 102*, poprowadziwszy dwie sieczne AB i AC, potrzeba dowieść, że stósunek $AB:AC=AE:AD$. Połączywszy punkta B i E, C i D prostemi, mamy dwa trójkąty ABE i ADC podobne, gdyż kąt A spólny obu trójkątom, kąt $B=C$ bo każdy ma za miarę połowę łuku DE, więc też kąt $ADC=AEB$ według §. 36, przeto na mocy twierdzenia §. 56 jest
$AB:AC=AE:AD$ co należało dowieść.

Własność ta siecznych wyraża się zwyczajnie: *sieczne z jednegoż punktu poprowadzone, mają się w stósunku odwrotnym swych części za okręgiem:* to ma znaczyć, że sieczna i część jéj za okręgiem stanowią wyrazy skrajne lub średnie w proporcyi.

Wystawiwszy sobie jednę z siecznych np. AB obracającą się około punktu A a zatém zmieniającą swój kierunek, jasną jest rzeczą, iż ona coraz w innych a innych punktach przecinać będzie okrąg koła i wielkość jéj części BD za każdą zmianą jéj kierunku zmieniać się będzie. Przypuściwszy, że taż sieczna w obrocie swoim wzięła kierunek taki, iż się stała styczną AF, tedy ponieważ z proporcyi wyżéj dowie-

dzionéj wypada $AC.AE = AB.AD = (AD + DB)AD$, a w takiém położeniu siecznéj, część jéj w kole zawarta BD znikła zupełnie, część zaś za okręgiem AD przeszła na AF, zatém $AC.AE = AF.AF = AF^2$ t. j. *styczna jest średnią geometrycznie proporcyjonalną między sieczną i częścią jéj za okręgiem koła.* Ta ostatnia prawda może téż być i tak dowiedziona: poprowadziwszy proste FC i FE, trójkąt $AFC \backsim AFE$ bo $AFC + GFC = 2R$, jako téż $AEF + FEC = 2R$; a że $FEC = GFC$ §. 89, więc $AFC = AEF$, kąt A jest spólny obu trójkątom, a nareszcie kąt $AFE = FCA$. Z podobieństwa zaś tych trójkątów wypada
$AC:AF = AF:AE$ skąd $AC.AE = AF^2$ jak wprzód.

§. 92.

Twierdzenie. *Gdziekolwiek na okręgu koła obrawszy trzy punkta i poprowadziwszy w tychże punktach styczne aż do wzajemnego ich przecięcia się z sobą, jeżeli punkt przecięcia się którychkolwiek dwóch stycznych, złączymy z punktem dotknięcia się trzeciéj stycznéj liniją prostą i tenże sam ostatni punkt połączymy prostemi z dwoma innemi punktāmi dotknięcia, otrzymamy kąt, między którego ramionami każda prosta równolegle do trzeciéj stycznéj prowadzona, jest podzielona na dwie równe części przez piérwszą prostą łączną.*

Niech na okręgu koła będą dane lub obrane trzy punkta A, B, C *fig. 103* poprowadziwszy w tych punktach styczne przecinające się w punktach D, G, H i połączywszy np. punkt D z punktem A prostą AD, jako téż punkt A połączywszy z B i C prostemi AB, AC, potrzeba dowieść, że każda prosta między ramionami kąta BAC, równolegle do trzeciéj stycznéj GH prowadzona, jak np. prosta mn, jest podzielona przez pierwszą prostą łączącą t. j. przez prostą AD na dwie równe części tak, że $mp = np$.

Według §. 89 *wniosek* 2, jest $AG = GB$; trójkąt $AGB \backsim BDE$, gdyż kąty przy B równe jako wiérzchołkowe, kąt $AGB = BDE$ jako naprzemianległe wewnętrzne i kąt $BAG = BED$ dla téjże saméj przyczyny; przeto według twierdzenia §. 56 mamy $AG:GB = DE:BD$. A że $AG = GB$

więc téz DE = BD. Podobnież dowiedzie się, że w dwóch trójkątach podobnych ACH i CDF jest AH : HC = DF : CD; a ponieważ znowu AH = HC, więc téż DF = DC. Ale BD = DC jako styczne z jednegoż punktu D poprowadzone, zatém DE = DF. Nareszcie w trójkącie EAE poprowadziwszy *mn* równoległą od podstawy EF, tę podzieli prosta AD z wiérzchołka A do podstawy poprowadzona w takim stósunku, w jakim dzieli podstawę EF §. 55, przeto ponieważ DE = DF, być téż musi *mp* = *np* co należało dowieść.

§. 93.

Zagadnienie 1. *Mając dany okrąg koła znaleść jego środek.*

Rozwiązanie. Obrawszy gdziekolwiek na okręgu danego koła trzy punkta A, B, C *fig. 104*, połączmy jeden z nich np. B z dwoma innemi prostemi linijami BA, BC; każdą z tych prostych podzielmy na dwie równe części i z punktów podziału D i E wyprowadźmy prostopadłe, a punkt przecięcia się ich S, będzie szukanym środkiem koła. Albowiem BA i BC są cięciwami, więc prostopadłe z ich środków przechodzić muszą przez środek koła według §. 82. Skoro więc środek koła leży tak na jednéj jako i na drugiéj prostopadłéj, nie gdzieindziéj zatém znajdować się musi tylko na wzajemném ich przecięciu się z sobą. Ale dwie proste nie w więcéj jak jednym punkcie przecinać się mogą, tém więc przecięciem nie inny jest punkt tylko środek koła.

Albo tak: Poprowadziwszy jakąkolwiek cięciwę MN *fig. 104,* podzielmy ją na dwie równe części według §. 26 przez liniją PR, ta według §. 82 przechodzić będzie przez środek koła, będzie przeto jego średnicą; skoro tę ostatnią t. j. PR podzielimy znowu przez liniją QT na dwie równe części, punkt podziału S będzie szukanym środkiem.

Tym samym sposobem szuka się środka koła, do którego należy łuk dany, obierając na tymże łuku trzy punkta i postępując jak się wyżéj wskazało.

Albo tak: Niech będzie łuk dany ABC *fig. 105*, potrzeba znaleść środek koła do którego należy. Z któregokolwiek punktu B danego łuku otwartością dowolną, zakreśla się okrąg koła tak, żeby z obu stron punktu B ten okrąg przecinał łuk dany. Z końców łuku A i C tąż samą otwartością cyrkla kreślą się łuki przecinające piérwszy okrąg każdy w dwóch punktach D, E i F, G. Poprowadziwszy wreszcie proste DE i FG, te przecięciem się swojém wyznaczą środek szukany. Dowód rzetelności tego postępowania każdy łatwo dostrzeże.

§. 94.

Zagadnienie 2. *Mając w trójkącie długość prostopadłéj z wiérzchołka na podstawę spuszczonéj, długość prostéj dzielącéj kąt w wiérzchołku na dwie równe części, zawartéj między wiérzchołkiem i podstawą i nareszcie długość prostéj od wiérzchołka do środka podstawy poprowadzonéj, wystawić trójkąt.*

Rozwiązanie. Niech trzema danemi prostemi w tym porządku jak w zagadnieniu są przywiedzione, będą AB, AC i AD *fig. 106*, niech prosta HI będzie kierunkiem podstawy, bo ten jest dowolny. W którymkolwiek punkcie B téj ostatniéj prostéj, wystawmy prostopadłą w jednę lub drugą stronę, na niéj odetnijmy BA równą prostéj danéj AB. Otwartością cyrkla równą prostéj danéj AC, z punktu wprzód naznaczonego A, naznaczmy na prostéj HI punkt C, potém otwartością cyrkla równą danéj prostéj AD, z tegoż samego punktu A naznaczmy na HI punkt D; a poprowadziwszy proste AC i AD, z punktu D wyprowadźmy prostopadłą do HI w przeciwną stronę punktu A aż do przecięcia się z przedłużoną AC w punkcie E; prostą AE podzielmy w punkcie F na dwie równe części i z tegoż punktu wyprowadźmy prostopadłą do AE aż do przecięcia się z prostopadłą DE przedłużoną, jeżeli potrzeba, w punkcie S; nareszcie z punktu S promieniem równym SA lub SE zakreśliwszy okrąg koła, ten przetnie prostą HI w punktach H i I, które z punktem

A złączywszy prostemi AH, AI, otrzymamy trójkąt HAI szukany.

Dowodzenie. Ponieważ AB, AC, AD według wykreślenia są prostemi danemi, zatém tu dosyć będzie dowieść, że punkt D jest środkiem podstawy HI, tudzież że prosta AC dzieli kąt HAI na dwie równe części. Poprowadziwszy SH i SI, dwie te pochyłe względem prostopadłéj SD są sobie równe jako promienie jednego koła, zatém według §. 41, HD = DI, przeto punkt D jest środkiem podstawy trójkąta HAI.— Uważając HI jako cięciwę, prostopadła DE według §. 82 dzieli łuk HEI na dwie równe części, zatém łuk HE = EI. A że połowy tych łuków są miarami kąłów HAE i IAE, zatém kąt HAC = IAC, prosta zatém AC dzieli kąt HAI na dwie równe części, co potrzeba było dowieść.

§. 95.

Zagadnienie 3. *Z końca danéj prostéj wyprowadzić do niéj prostopadłą.*

Rozwiązanie. Niech będzie prosta AB *fig. 107*, z któréj końca A potrzeba wyprowadzić do niéj prostopadłą. Na ten koniec gdziekolwiek za prostą daną obiera się punkt S i z tego punktu jako ze środka promieniem równym odległości SA, kreśli się okrąg koła przecinający prostą daną w punkcie C, lub na jéj przedłużeniu; potém łączy się ten punkt przecięcia się C z punktem S prostą CS i tę przedłuża się aż do przecięcia się z nakreślonym okręgiem w punkcie D, czyli prowadzi się średnica CSD, a złączywszy punkt D z punktem A prostą AD, ta będzie prostopadłą żądaną. Kąt albowiem DAC jako obejmujący ramionami swemi średnicę, jest prosty §. 87 *wniosek 3*, a następnie DA prostopadła do AB.

Uwaga. Porównawszy to rozwiązanie z rozwiązaniem §. 48, przekonamy się, że zupełnie na jedno wychodzi; dowód tylko obecny jest daleko łatwiejszy jako oparty na własności kąta w półkolu już poprzednio dowiedzionéj.

§. 96.

ŻAGADNIENIE 4. *Na danéj prostéj wykreślić odcinek koła w którymby kąt okręgowy był równy danemu kątowi.*

Rozwiązanie. Prostą daną niech będzie AB, tudzież M danym kątem *fig. 108.* Przy punkcie A lub B wykreśliwszy kąt DAB = M, z punktu A wyprowadźmy prostopadłą AE, tedy uważając AD jako styczną okręgu koła, którego odcinka szukamy, prostopadła ta przechodzić musi przez środek koła; uważając teraz prostą AB za cięciwę, prostopadła z jéj środka C wyprowadzona także przechodzić musi przez środek koła, punkt więc przecięcia się tych prostopadłych, naznaczy środek koła S, z któregc promieniem SA = SB zakreśliwszy okrąg koła, odcinek AFB będzie odcinkiem szukanym. Którykolwiek bowiem punkt łuku AFB złączywszy z końcami prostéj danéj, otrzymamy kąt okręgowy mający za miarę połowę łuku AB; a że téż i kąt DAB ma za miarę połowę tegoż łuku, więc każdy z piérwszych będzie równy kątowi DAB. A ponieważ ten ostatni jest z wykreślenia równy kątowi danemu M, więc i każdy z piérwszych będzie równy danemu.

§. 97.

ZAGADNIENIE 5. *Przez punkt dany poprowadzić styczną do danego okręgu koła.*

Rozwiązanie. Jeżeli punkt z którego mamy prowadzić styczną jest na okręgu koła, zagadnienie to nie stawia żadnéj trudności. Na mocy bowiem twierdzenia §. 85 punkt dany połączywszy z środkiem koła prostą i do niéj z danego punktu wyprowadziwszy prostopadłą, ta będzie styczną żądaną.

Jeżeli zaś dany punkt znajduje się za okręgiem koła, jak np. punt A *fig. 109,* tedy złączywszy środek danego koła z tym punktem prostą SA i na niéj jako na średnicy wykreśliwszy okrąg koła, ten z danym okręgiem przetnie się w dwóch punktach B i C; punkta te złączywszy z punktem A prostemi AB i AC, te są stycznemi do danego okręgu koła. Albowiem poprowadziwszy SB i SC, tak kąt SBA jako téż i SCA jest prosty, bo każdy z nich jest w półkolu; przeto AB prostopadła do BS, AC prostopadła do CS. A że BS i CS są promieniami danego koła, przeto AB i AC są stycznemi §. 85. Że te styczne są sobie równe, już to wiemy z §. 89, że zaś z liniją AS czynią kąty równe, to z przystania trójkątów ABS i ACS wnioskować można.

Uwaga. Piérwszy raz tu w Geometryi na jedno żądanie otrzymujemy dwie odpowiedzi; to atoli nie powinno nas zadziwiać, pamiętając z Algebry, że tam na jedno pytanie często nie tylko dwie ale trzy, cztéry i t. d. odpowiedzi znajdowaliśmy; zdarzają się nawet przypadki tak w Geometryi jako i w Algiebrze, iż na jedno pytanie znajdujemy nieskończoną liczbę odpowiedzi. W obecném zagadnieniu przekonywamy się, że z punktu danego za okręgiem koła zawsze dwie styczne równe, do tegoż okręgu poprowadzić można.

§. 98.

Zagadnienie 6. *Mając daną prostą z położenia *) i dwa punkta po jednéjże jéj stronie leżące, znaleść na niéj trzeci punkt taki, iżby okrąg koła przez dane punkta przechodzący dotykał prostéj danéj w tym punkcie.*

Rozwiązanie. Niech prostą daną będzie PQ, a danemi punktami A i B *fig. 110*, potrzeba na prostéj PQ znaleść trzeci punkt, w którymby okrąg koła przechodzący przez A i B dotykał prostą PQ.

Ponieważ według §. 91 styczna jest średnią geometrycznie proporcyjonalną między sieczną z tegoż samego punktu poprowadzoną i częścią jéj za kołem, zatém przedłużywszy prostą BA przez dwa dane punkta idącą aż do spotkania się z prostą daną PQ w punkcie C, na prostéj BC jako na średnicy wykreślmy pół okręgu, a wyprowadziwszy z punktu A prostopadłą do CB aż do spotkania się z co dopiéro wykreślonym półokręgiem w punkcie D, i z punktu C jako ze środka koła promieniem CD zakreśliwszy łuk, ten prze-

---

*) Wyrażenie *z położenia* znaczy, iż prosta ma na płaszczyznie pewne oznaczone położenie.

tnie prostą daną PQ w punkcie E szukanym. Aby mieć okrąg koła przechodzący przez A i B, z wyznaczonego punktu E wyprowadźmy prostopadłą do PQ, potém uważając prostą AB jako cięciwę żądanego okręgu koła, z jéj środka wyprowadźmy również prostopadłą do niéj w stronę ku prostéj danéj, a punkt przecięcia się dwóch tych prostopadłych S będzie środkiem okręgu koła przez A i B przechodzącego a prostą PQ w punkcie E dotykającego, który promieniem $SA = SB = SE$ z punktu S wykreślić możemy. Chcąc dowieść rzetelności tego postępowania, dosyć jest okazać, że CE jest średnią geometrycznie proporcyjonalną między CB i CA a zatém styczną, reszta bowiem jest sama z siebie jasną. Jakoż połączywszy punkta D i B prostą, trójkąt CDB jest prostokątny przy D, więc według §. 63 $CB : CD = CD : CA$. A że $CD = CE$ więc téż $CB : CE = CE : CA$. Jest więc CE, a zatém i PQ styczną w punkcie E do okręgu koła przez A i B przechodzącego.

§. 99.

ZAGADNIENIE 7. *Do dwóch prostych danych, znaleść średnią geometrycznie proporcyjonalną.*

Rozwiązanie. Zagadnienie to już w §. 77 rozwiązane, rozwiążemy teraz nieco łatwiejszym lubo w istocie na toż samo wychodzącym sposobem, opierając się na twierdzeniu §. 63.

Niech dwiema danemi prostemi będą A i B *fig. 111*, chcąc między niemi znaleść średnią geometrycznie proporcyjonalną, postąpimy zupełnie tak jak w wspomnionym §. to jest na prostéj nieograniczonej długości, odcinamy jednę z nich np. B od M do N, a potém drugą A w tymże samym kierunku od N do P; całą prostą MP wyrażającą summę prostych danych, dzielimy w punkcie S na dwie równe części i z punktu tego jako na średnicy zakreślamy półokręgu lub cały okrąg koła, a wyprowadziwszy z punktu N prostopadłą do MP aż do przecięcia się z okręgiem w punkcie R, ta będzie szukaną średnią geometrycznie proporcyjonalną. Na dowiedzenie téj prawdy połączmy punkt R z punktami M i P, a otrzymamy trójkąt MRP prostokątny przy R według §. 87 *wniosek 3*, przeto prostopadła RN jest średnią geometrycznie proporcyjonalną między MN i NP §. 63 czyli między prostemi im równemi B i A.

Albo też: opierając się na własności trójkąta prostokątnego w rzeczonym §. dowiedzionéj, że bok przyległy kątowi prostemu jest średnią geometrycznie proporcyjonalną między przeciwprostokątnią i odcinkiem przy tymże boku leżącym, możemy obecne zagadnienie rozwiązać następującym sposobem:

Na większéj z dwóch prostych danych, którą tu niech będzie MP = A jako na średnicy zakreślamy pół lub cały okrąg koła, potém na téjże średnicy, poczynając od jéj końca, odcinamy drugą B od M do N i z punktu N wyprowadzamy prostopadłą do średnicy aż do przecięcia się z okręgiem w punkcie R, a złączywszy punkta R i M prostą RM, ta będzie prostą szukaną, bo złączywszy jeszcze punkta R i P, mamy według przywiedzionego §. MP : MR = MR : MN czyli A : MR = MR : B jak żądano.

§. 100.

Zagadnienie 8. *Mając daną prostą oznaczonéj długości, podzielić takową na dwie części takie, iżby większa była średnią geometrycznie proporcyjonalną między całą prostą i mniéjszą jéj częścią.*

Niech prostą do podzielenia daną będzie AB *fig. 112*, z końca B wyprowadźmy do niéj prostopadłą BS = $\frac{1}{2}$AB i promieniem SB zakréślmy okrąg koła; przez punkt A i S poprowadźmy sieczną AD, a nareszcie z punktu A promieniem AC zakréślmy łuk przecinający AB w E, tedy AE będzie częścią szukaną. Według bowiem §. 91 mamy:

AD : AB = AB : AC skąd według §. 98 *Arytm.* jest

AD — AB : AB = AB — AC : AC czyli,

ponieważ AB = 2SB = 2SC = CD, przez co

AD — AB = AD — CD = AC = AE

zaś AB — AC = AB — AE = EB, będzie AE : AB = EB : AE albo zmieniwszy w téj proporcyi miejsce skrajnych i średnich wyrazów, czyli co na jedno wychodzi, odwróciwszy oba stósunki, otrzymamy nareszcie AB:AE=AE:EB jak żądano.

Uwaga. Aby wyrazić żądanie podzielenia prostéj w sposób co dopiéro opisany, wysłowiamy krócéj to zagadnienie tak: *Prostą daną podzielić w stósunku średnim i skrajnym.* Ale to wysłowienie jak każdy dostrzeże jest fałszywe i winno być sprostowane w ten sposób: *prostą daną podzielić na skrajne i średnią,* co znaczy: podzielić prostą na dwie części, z którychby jedna zawsze i koniecznie większa niż druga, była średnią geometrycznie proporcyjonalną między całą prostą i częścią mniejszą. W piérwszéj proporcyi t. j. w proporcyi AD:AB=AB:AC prostą AB zastąpiwszy jéj równą CD, będzie AD:CD=CD:AC t. j. sieczna AD podzielona jest w punkcie C na średnią i skrajne.

§. 101.

Weźmy teraz pod uwagę dwa okręgi kół i zobaczmy co nam godnego uwagi oba razem przedstawić mogą.

Dwa okręgi kół różnych promieni, razem uważane mogą mieć trojakie względem siebie położenie, t. j. może być jeden wewnątrz drugiego, albo jeden może przecinać drugi, lub nareszcie piérwszy może być zewnątrz drugiego.

W piérwszém położeniu mogą dwa okręgi mieć środek spólny, a wtedy nazywają się *spółśrodkowe* (concentricae) w takim razie i płaszczyzny czyli koła, nazywają się także *spółśrodkowemi* (circuli concentrici). Jeżeli zaś ich środki znajdują się w różnych punktach, odległość ich środków jest zawsze mniejsza niż różnica promieni, o czém naocznie przekonać się można, wykréśliwszy dwa okręgi w takiém położeniu.

W drugiém położeniu t. j. gdy się przecinają, przecinać się nie mogą w więcéj jak w dwóch punktach §. 83, a prosta łącząca te dwa punkta czyli cięciwa obu spólna, jest prostopadłą do prostéj łączącéj ich środki, którą *prostą środków* zwać będziemy. Niech bowiem będą dwa okręgi, których środki S i S′ przecinające się w punktach A i B *fig. 113*, poprowadziwszy proste AB i SS′, tudzież promienie SA i SB, S′A i S′B, dwa trójkąty SAS′ i SBS′ według §. 22 przystają do siebie, a w szczególności kąt ASS'=BSS' i kąt

AS'S=BS'S;

w trójkącie równoramiennym ASB prosta SS' dzieląca kąt w wiérzchołku na dwie równe części, pada na środek podstawy i jest do niéj prostopadłą §. 40. Toż samo wypada także z trójkąta AS'B; prawdą przeto jest co, twierdzono, że AB prostopadła do SS'.

W trzeciém nareszcie położeniu, czyli gdy się dwa okręgi znajdują zewnątrz siebie, odległość ich środków jest większą, niż summa ich promieni, co jest oczywistém i dowodu nie potrzebuje.

W piérwszym przypadku powiedzieliśmy, że odległość środków jest mniejsza niż różnica, w ostatnim zaś, iż taż odległość jest większa, niż summa promieni obu okręgów. Jeżeli atoli będzie przypadek, iż albo różnica, albo summa promieni równa się odległości środków, w takim razie dwa okręgi dotykają się, a mianowicie w piérwszym przypadku wewnątrz, w drugim zaś zewnątrz, a punkt dotknięcia leży w każdym razie na prostéj środków. Ile więc razy odległość środków dwóch kół równa się różnicy ich promieni, okręgi dotykają się wewnątrz t. j. jeden leży w drugim; skoro zaś rzeczona odległość równa się summie promieni, okręgi kół dotykają się zewnątrz. W obu razach mówimy téż, że *okręgi* lub *koła są stycznemi.*

§. 102.

Zagadnienie 9. *Mając dane z położenia dwa okręgi kół, poprowadzić styczną spólną obu okręgom.*

Rozwiązanie. Niech będą dane z położenia dwa okręgi kół, których środki są S i *s*, a promienie R i *r fig. 114*, mamy do tych dwóch okręgów poprowadzić styczną spólną obu okręgom. Na ten koniec połączywszy środki okręgów danych prostą S*s* i na niéj jako na średnicy wykréśliwszy okrąg koła, ze środka piérwszego S promieniem $=\mathrm{R}-r$ zakréślmy łuk, który na okręgu wykréślonym na linii środków naznaczy dwa punkta A i *a*; przez punkta S i A poprowadziwszy prostą SA i tę przedłużywszy aż do przecięcia się z okręgiem piérwszym, którego promień R ta naznaczy punkt T dotknięcia się stycznéj na tymże okręgu; a jeżeli ze środka s drugiego okręgu poprowadzimy promień równoległy od ST, ten naznaczy na drugim okręgu punkt t, w którym taż styczna dotknie drugi okręg koła i prosta Tt będzie szukaną. Kąt albowiem SAs jest prosty jako w półkolu, więc sA jest prostopadłą do ST; a że st równoległa do ST i równa AT, więc czworokąt ATts jest prostokątem, i Tt prostopadła tak do ST jako téż i do st, jest przeto styczną tak do piérwszego jako i drugiego okręgu, jak żądano. Ale łuk zakréślony promieniem $=$R$-r$ przeciął okrąg koła na prostéj środków wykréślony nie tylko w punkcie A, ale téż w drugim punkcie a, przeto postąpiwszy tu znowu tymże samym co wyżéj sposobem, otrzymamy drugą prostą T't' również styczną do obu danych okręgów, skąd się pokazuje, że dwa okręgi dane z położenia mają dwie styczne spólne.

W poprzedzającém ze środka S nakréśliliśmy łuk promieniem $=$R$-r$, gdybyśmy z tegoż środka wykréślili łuk promieniem $=$R$+r$, znaleźlibyśmy również jak wyżéj dwa punkta przecięcia się jego z okręgiem na linii środków wykréślonym t. j. punkta A' i a'; złączywszy punkta A' i s prostą A's i przez punkta S i A' poprowadziwszy także prostą, ta nam naznaczy na okręgu S punkt T'', przez który prowadząc równoległą T''t'' do A's, ta będzie trzecią styczną spólną obu okręgom. Gdyż znowu kąt SA's jako w półkolu jest prosty, zatém sA' prostopadła do SA'; a że T''t'' równoległa do A's, zatém jest także prostopadłą do ST'', jest więc styczną do okręgu S. Że jest styczną i do drugiego okręgu s łatwo okazać, bo st'' $=$A'T'', kąty przy T'' i A' proste, zatém czworokąt A'T''$t''s$ jest znowu prostokątem i kąt przy t'' prosty, a T''t'' prostopadła do st''. Ale zakréślony łuk przeciął téż okrąg koła na linii środków wykréślony w drugim punkcie a', postąpiwszy więc z tym punktem tak jak z poprzedzającym, otrzymamy czwartą styczną T'''t''' spólną obu okręgom. Tak tedy zamierzywszy sobie znaléść styczną do dwóch okręgów danych z położenia, postępowanie nasze w rozwiązaniu tego zagadnienia przyprowadziło nas do téj prawdy, że do dwóch okręgów kół danych z położenia nie jednę, ale cztéry styczne obu spólne poprowadzić można. Dwie piérwsze z tych stycznych nazywamy *zewnętrznemi*, dwie zaś drugie *wewnętrznemi*. Piérwsze przedłużywszy dostatecznie, dostrzeżemy, że się przecinają na linii środków przedłużonéj także, t. j. za mniejszym okręgiem koła w punkcie B. Drugie dwie przecinają się także na téjże linii, ale między obu okręgami w punkcie B′ co jest widoczném.

Drugi sposób. Na zasadzie §§. 62 i 70 t. j. dzielenia prostéj w proporcyi harmonicznéj, można to zagadnienie daleko prędzéj i prościéj rozwiązać następującym sposobem. Przypatrzywszy się z uwagą stycznym już wykréślonym, t. j. uważając jakoby zagadnienie już było rozwiązaném, przekonamy się, że do ich poprowadzenia dostateczną jest znajomość punktów B i B′, w których rzeczone styczne przecinają prostą środków. W trójkącie bowiem TBS *fig. 114* st jest równoległa do ST i dlatego $SB:Ss=ST:st$, a z dwóch trójkątów $ST''B'$ i $st''B'$ podobnych jest także $SB':sB'=ST'':st''=ST:st$, przeto $SB:Ss=SB':sB'$, z któréj proporcyi czytamy, że prosta Ss łącząca środki dwóch okręgów danych, podzieloną jest w punktach B:B′ w proporcyi harmonicznéj §. 62 *uwaga*, a punkta B i B′ są punktami do siebie należącemi. Chcąc przeto znaléść te punkta, dosyć jest przez środek S poprowadzić jakąkolwiek średnicę MN *fig. 115*, a przez środek s promień do niéj równoległy sm; proste łączące punkta M i N z m, naznaczą tak na przedłużeniu prostéj Ss, jako téż i na niéj saméj szukane punkta B i B′. Nareszcie z tych punktów według §. 97 prowadząc do jednego z okręgów styczną, ta zarazem będzie styczną i do drugiego.

Uwaga. Gdyby dane dwa okręgi kół były równe czyli gdyby było $R=r$, robiąc toż samo wykréślenie, przekonalibyśmy się że piérwsze dwie styczne są od siebie równoległe dwie zaś drugie, przecięłyby się z sobą na linii środków i to dokładnie w połowie odległości Ss.

Dalsze rozbiéranie tego zagadnienia przekonałoby nas że jeżeli się dwa dane koła dotykają zewnątrz, dwie wewnętrzne styczne zamieniają się na jedną do linii łącznéj prostopadłą i w tym przypadku trzy tylko styczne są możebne. Jeżeli się zaś przecinają, dwie wewnętrzne styczne są niemożebne i do takich dwóch kół tylko dwie styczne poprowadzić można. Gdyby się okręgi dotykały wewnątrz, wtedy tylko jedna styczna możebna. Nareszcie gdyby jedno koło leżało wewnątrz drugiego, nie przecinając go ani dotykając, w takim razie żadnéj stycznéj wspólnéj poprowadzić nie można.

ROZDZIAŁ VI.

Krzywa kołowa wraz z figurami prostokréślnemi uważana.

---

§. 103.

Dotąd uważaliśmy figury prostokréślne same w sobie, jak również jednę figurę krzywokréślną kołem nazwaną, jedynie w związku z prostemi w kole rozmaicie prowadzonemi; teraz potrzeba nam zastanowić się nad figurami prostokréślnemi w związku z liniją kołową uważanemi.

Definicyja. Każdą figurę prostokréślną albo raczéj każdy wielokąt, którego wiérzchołki wszystkich kątów znajdują się na okręgu koła, nazywać będziemy *wielokątem w koło wpisanym* (polygonum circulo inscriptum), okrąg zaś koła takie położenie mający nazwiemy *okręgiem koła na wielokącie opisanym.* Wielokąt którego wszystkie boki są stycznemi do okręgu koła, nazywać się będzie *wielokątem opisanym na kole* (polygonum circulo circumscriptum); okrąg zaś koła w tym przypadku, *kołem wpisaném w wielokąt.*

Twierdzenie. *W wielokącie foremnym podzieliwszy każdy z jego wewnętrznych kątów na dwie równe części, proste dzielące schodzą się wszystkie w jednym punkcie.*

Niech będzie ABCDE...... *fig. 116* wielokąt foremny o jakiéjkolwiek liczbie boków; podzieliwszy dwa którekolwiek jego kąty np. A i B na dwie równe części, proste dzielące AS i BS przetną się naturalnie w jednym tylko punkcie S; połączywszy ten punkt S z wiérzchołkami wszystkich innych kątów prostemi SC, SD, SE i t. d., jeżeli dowiedziemy, że każda z tych prostych dzieli kąt, przez którego wiérzchołek przechodzi, na dwie równe części, tém samem dowiedzie się prawdy założonego twierdzenia.

Z punktu S spuśćmy prostopadłe Sa i Sb na boki wielokąta AB i BC. Ponieważ kąt A = B jako w wielokącie foremnym, zatém i połowy ich są także równe t. j. kąt SAa=SBa, kąty przy a są proste, więc dwa trójkąty SAa i SBa przystają do siebie, a w szczególności SA=SB i Aa=Ba. Dwa trójkąty SBa i SBb mają bok SB spólny, kąty przy B jako téż kąty przy a i b równe, według więc §. 36 *wniosek* 2, przystają do siebie, a z przystania wnosimy, że Sa = Sb i Ba=Bb. A że Ba=$\frac{1}{2}$AB, więc téż Bb=$\frac{1}{2}$BC bo z założenia AB = BC. Dwa znowu trójkąty SBb i SbC według §. 23 przystają do siebie, gdyż Sb mają spólne, Bb=bC jako połowy boku BC i kąty przy b równe jako proste; z przystania ich wnosimy, że SC=SB i kąt SCb = SBb. A że kąt C=B z założenia a SBb = $\frac{1}{2}$B, więc téż i kąt SCb = $\frac{1}{2}$C. Zupełnie tym samym sposobem okazuje się, że prosta SD dzieli kąt D na dwie równe części i że SC = SD. Toż samo dowiedzie się téż o wszystkich prostych łączących wiérzchołki kątów wielokąta z punktem S, a następnie łatwo wnieść nawzajem, że proste dzielące kąty wielokąta foremnego na dwie równe części, przecinają się w jednym punkcie S, co było do dowiedzenia.

Wniosek 1. Ponieważ z ciągu dowodzenia powyższego twierdzenia wypadło, że SA = SB = SC = SD = ... przeto punkt S jest w równéj odległości od każdego z wiérzchołków kątów wielokąta. A że również z dowodzenia otrzymaliśmy Sa = Sb = Sc = Sd = ... zatém punkt S jest także w równéj odległości od każdego z boków tegoż wielokąta, słusznie więc ten punkt S nazywa się *środkiem wielokąta* (centrum polygoni).

Wniosek 2. Kiedy punkta A, B, C, D..... są w równéj odległości od punktu S, muszą one leżeć na okręgu koła promieniem SA zakréślonego. Podobnież punkta a, b, c, d..... leżą na okręgu koła z punktu S promieniem Sa zakréślonego. Jeżeli więc z punktu S promieniem SA zakréślimy okrąg koła, ten musi przejść przez wiérzchołki wszystkich kątów wielokąta i będzie okręgiem koła opisanym na wielokącie, a wielokąt wpisanym w okrąg koła. Podobnież, jeżeli z tegoż punktu S promieniem Sa zakréślimy drugi okrąg koła, ten przejdzie znowu przez punkta a, b, c, d..... tak, że boki wielokąta AB, BC, CD..... będą w punktach a, b, c...... stycznemi do tegoż okręgu jako prostopadłe do promieni, a zatém ten ostatni okręg koła, według definicyi, będzie w wielokąt wpisanym, sam zaś wielokąt będzie opisanym na kole.

§. 104.

Wniosek 3. Z toku dowodu poprzedniego twierdzenia wypływa jeszcze, że kąt ASB = BSC = CSD = ... t. j., że wszystkie kąty przy środku wielokąta a zatém i koła opisanego na nim, są między sobą równe; skąd wniesiemy, iż, aby w dany okrąg wpisać wielokąt, rozumié się foremny, dosyć jest tenże okrąg koła podzielić na tyle części równych, o ilu bokach chcemy wpisać wielokąt i punkta podziału połączyć prostemi. Gdy bowiem kątom rownym przy środku koła odpowiadają łuki i cięciwy równe §. 80, a te cięciwy są bokami wielokąta, każdy zaś kąt między dwoma bokami zawarty, ma za miarę połowę łuku $= n - 2$ częściom (jeżeli przez n rozumiemy liczbę boków wielokąta wpisać się mającego, a zatém i liczbę części na którą cały okrąg podzieliliśmy), przeto tak boki między sobą, jako téż i kąty wielokąta między sobą są równe; stósownie więc do §. 17 wielokąt ten jest foremny. Jeżeli do boków tego ostatniego wielkokąta spuścimy ze środka koła S prostopadłe i te przedłużymy aż do przecięcia się z okręgiem, a potém przez te punkta poprowadzimy styczne do okręgu koła, te przedłużone aż do przecięcia się z promieniami przez A, B, C, D i t. d. przechodzącemi, a zatém i do przecięcia się z sobą, zamkną wielokąt foremny na kole opisany o takiéjże liczbie boków jak wielokąt wpisany.

Niech bowiem będzie okrąg koła, którego środek S *fig. 117*, podzielmy go na n części równych np. na 6, tedy łącząc te punkta podziału prostemi, otrzymamy sześciokąt foremny w koło wpisany. Że boki jego są między sobą równe, nie potrzeba dowodu, gdyż są cięciwami łuków równych. Że zaś kąty są między sobą równe, łatwo dowiéść według tego co wyżéj powiedzieliśmy. Kąt bowiem np. ABC jako okręgowy ma za miarę połowę łuku $n-2$ bo tyle części okręgu ramionami swemi obejmuje (w naszym sześciokącie $6-2=4$); a że i każdy inny kąt obejmuje swemi ramionami takąż liczbę części, a te części są między sobą równe, zatém miary tych kątów a następnie i same kąty są między sobą równe i wielokąt jest foremny.

Co do wielokąta opisanago, niech piérwsza styczna przez punkt a poprowadzona, spotyka promienie przez A i B przechodzące w punktach A′ i B′, tedy ponieważ tak AB jako téż i A′B′ są prostopadłe do Sa, dwie te proste są do siebie równoległe, a następnie, kiedy trójkąt ASB jest równoramienny, i trójkąt A′SB′ jest takze równoramienny; bo kąty przy A i A′, B i B′ są sobie równe, że zaś kąty przy A i B są sobie równe, bo SA = SB, zatém i kąty przy A′ i B′ są także równe. Ale w trójkącie równoramiennym prostopadła z wiérzchołka na bok trzeci dzieli tenże na dwie równe części, zatém A′a = B′a. Połączywszy punkt B′ z b prostą B′b i tę przedłużywszy aż bo przecięcia się z promieniem przez C przechodzącym, w punkcie C′, dwa trójkąty B′Sa i B′Sb mają bok SB′ spólny, Sa = Sb i kąt B′Sa = BSb, bo mają za miarę łuki równe aB i Bb, które są połowami łuków AB i BC między sobą równych, przeto przystają do siebie, skąd wnosimy, że aB′ = B′b i kąt SaB′ = SbB′. A że piérwszy kąt jest prosty, więc i drugi prosty, a prosta B′C′ będąc prostopadłą do promienia w końcu tegoż wyprowadzona jest styczną. Trójkąt B′SC′ dla téj saméj przyczyny jak trójkąt A′SB′ jest równoramienny, przeto B′b = bC′. A że wyżéj dowiedliśmy, że $A'a = B'a$, przeto $B'a = \frac{1}{2}A'B'$, jak również $B'b = \frac{1}{2}B'C'$, a stąd wypada, że $A'B' = B'C'$. Postępując daléj, dowiedziemy tym samym sposobem, że $B'C' = C'D'$ i t. d., t. j. dowiedziemy, że wszystkie boki są stycznemi i są sobie równe; jest więc wielokąt $A'B'C'D'$........ opisanym na okręgu koła. Że jest foremnym, potrzeba jeszcze dowiéść, że wszystkie jego kąty między sobą są równe. Ale te kąty są równe kątom wielokąta w pisanego każdy każdemu, bo ich ramiona są od siebie równoległe i rozchodzą się w jednychże kierunkach; a kiedy te ostatnie są między sobą równe, zatém i piérwsze są także między sobą równe i wielokąt jest foremny.

Że także wielokąt opisany jest podobny wpisanemu, wypada stąd, że są równokątne, tudzież że boki ich są proporcyjonalne. Bo np. w trójkącie $A'SB'$, AB jest równoległa od $A'B'$, więc $B'S : BS = A'B' : AB$; w trójkącie $B'SC'$ jest znowu $B'S : BS = B'C' : BC$ skąd $A'B' : AB = B'C' : BC$ i tak o innych bokach. Skąd wniesiemy, że mając wielokąt w koło wpisany, można zawsze opisać na témże kole wielokąt podobny wpisanemu.

Wzajemnie, mając wielokąt opisany, można także przy jego pomocy w pisać w koło wielokąt jemu podobny, łącząc tylko wiérzchołki jego kątów z środkiem koła a potém punkta przecięcia się tych prostych z okręgiem koła łącząc prostemi, te bowiem zamkną wielokąt foremny wpisany, podobny opisanemu.

Mając wielokąt wpisany w koło, można jeszcze drugim sposobem opisać jemu podobny na kole, prowadząc przez wiérzchołki kątów wpisanego styczne do okręgu koła, aż do wzajemnego ich przecięcia się z sobą, jak to *fig. 118* wskazuje. Aby i tu dowiéść, że wielokąt $A'B'C'D'E'F'$ jest foremny, uważmy tylko, że na zasadzie §. 88, 89 $AA' = A'B$, $B'B = B'C$, $C'C = C'D$, i t. d., a następnie $A'S$, $B'S$, $C'S$ i t. d. przechodzą przez środki łuków należących do boków wielokąta wpisanego i środki tychże boków, tudzież dzielą kąty przy S na dwie części równe i są prostopadłe do boków wielokąta wpisanego, więc dwa trójkąty $B'SB$ i $A'SB$ według §. 24 przystają do siebie, gdyż BS spólne kąty przy B proste i kąty przy S równe jako mające jednakowe miary, a z przystania wnosimy, że $B'B = A'B$. Tym samym sposobem dowiedzie się, że $B'C = C'C$, a następnie że $A'B' = B'C' = C'D' =$ i t. d. Każdy z kątów A', B', C', D'..... jest spełnieniem kąta przy środku, jak np. $B' + BSC = 180$, a że wszystkie kąty przy środku są sobie równe, więc i ich spełnienia są równe t. j. kąt $A' = B' = C' =$.... przeto wielokąt $A'B'C'D'E'F'$ jest foremny. Że jest podobny wpisanemu, potrzeba okazać że jest z nim równokątny i boki mają proporcyjonalne. Kąty wielokąta wpisanego są także spełnieniami kątów równych między sobą i równych kątom, których kąty A', B', C', D'..... są spełnieniami, przeto $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$..... Trójkąty $AA'B$, $BB'C$, $CC'D$..... są wszystkie sobie podobne

$$\text{więc} \quad A'B : B'C = AB : BC$$
$$\text{albo} \quad 2A'B : 2B'C = AB : BC$$
$$\text{lub} \quad A'B' : B'C' = AB : BC$$

i tak o innych bokach; jest więc opisany wielokąt podobny wpisanemu. Z wielokąta opisanego znajdziemy wpisany, łącząc tylko punkta dotknięcia się boków okręgu koła prostemi, które zamkną wielokąt foremny i podobny opisanemu.

§. 105.

Wniosek 4. Kiedy wszystkie kąty przy środku wielokąta foremnego między sobą są równe, a razem czynią 4R, więc kąt środkowy w tymże wielokącie jest wiadomy, równa się bowiem n^{tej} części cztérech kątów prostych. Dlatego też w sześciokącie foremnym kąt środkowy $= \frac{4}{6}R = \frac{2}{3}R = 60^0$, przeto dwa kąty przy boku sześciokąta leżące czynią

$$180^0 - 60^0 = 120;$$

a że są między sobą równe jako w trójkącie równoramiennym, więc każdy z nich zamyka 60^0. Trójkąt przeto, którego dwoma bokami są promienie koła, w które jest wpisany sześciokąt, a trzecim bokiem bok sześciokąta, ma wszystkie trzy kąty między sobą równe, ma téż zatém i wszystkie trzy boki między sobą równe, jest przeto równobocznym i *bok* *sześciokąta foremnego w koło wpisanego równa się promieniowi tegoż koła.* Chcąc zatém wpisać sześciokąt foremny w koło dane, dosyć jest promień tegoż koła przenieść na okrąg koła jako cięciwę, który się da sześć razy dokładnie odciąć, i punkta tak naznaczone połączyć prostemi.

Łącząc podział piérwszy z trzecim, trzeci z piątym a piąty z piérwszym, otrzymamy trójkąt foremny czyli równoboczny w koło wpisany. Skąd wniesiemy, że aby w dany okrąg koła wpisać trójkąt równoboczny, potrzeba wprzód wpisać sześciokąt foremny, a potém postąpić do trójkąta jak co dopiéro wspomnieliśmy.

Można téż obejść się bez wpisywania sześciokąta, używając następującego sposobu, który w istocie na toż samo wychodzi. W danym okręgu koła, w które mamy wpisać trójkąt równoboczny poprowadziwszy średnicę MN *fig. 119* i z jednego jéj końca np. N promieniem równym promieniowi danego koła, zakréśliwszy łuk przecinający, dany okrąg w punktach A i B, cięciwa AB będzie bokiem trójkąta żądanego. Połączywszy potém punkta A i B z punktem M t. j. z drugim końcem średnicy, otrzymamy trójkąt AMB żądany. Aby w dane koło wpisać kwadrat, dosyć jest poprowadzić dwie średnice MN i PQ prostopadłe do siebie i punkta w których okrąg koła przecinają, połączyć prostemi.

§. 106.

Widzieliśmy, że wpisanie trójkąta foremnego w koło, zależy na wpisaniu sześciokąta foremnego. Gdybyśmy ze środka koła spuścili prostopadłe do boków sześciokąta i te przedłużyli aż do przecięcia się z okręgiem, te jak wiadomo podzielą łuki, których cięciwami są boki sześciokąta, każdy na dwie równe części, a zatém cały okrąg koła na 12 części równych. Połączywszy te punkta podziału z wiérzchołkami kątów sześciokąta, otrzymamy dwunastokąt foremny w koło wpisany; a postąpiwszy tu znowu tak jak z sześciokątem, otrzymalibyśmy 24rokąt foremny w koło wpisany. Przy pomocy tego ostatniego wielokąta wpiszemy w koło 48kąt foremny i t. d. Tym sposobem umiejąc wpisać sześciokąt foremny w koło, umiemy wpisać w toż koło wielokąty o 3, 6, 12, 24, 48, 96......3.2^{m-1} bokach, gdzie $m=1, 2, 3, 4$.....

Umiejąc według powyższego wpisać w koło kwadrat i postąpiwszy z nim jak z sześciokątem postąpiliśmy, otrzymamy ośmiokąt foremny w koło wpisany, a przy jego pomocy przyjdziemy do 16stokąta i t. d. t. j., za pomocą kwadratu umiemy wpisać w koło wielokąty o 4, 8, 16, 32, 64....... 4.2^{m-1} bokach, gdzie znowu $m=1, 2, 3$......

Dla wpisania pięciokąta foremnego w koło, potrzebaby okrąg tegoż koła podzielić na pięć części równych; atoli na to nie mamy elementarnego sposobu i dlatego pięciokąta wpisać w koło inaczej nie możemy, tylko przy pomocy dziesięciokąta. Aby wpisać dziesięciokąt foremny w koło, potrzeba nam naprzód dowiéść następujące twierdzenie.

§. 107.

Twierdzenie. *Bok dziesięciokąta foremnego w koło wpisanego równa się większemu odcinkowi promienia podzielonego na skrajne i średnią.*

Niech promień SB będzie podzielony w punkcie C *fig. 120* na skrajne i średnią, t. j. niech będzie SB:SC$=$SC:BC; wziąwszy AB$=$SC, potrzeba dowiéść, że łuk AB jest $\frac{1}{10}$ częścią całego okręgu koła, lub co na jedno wychodzi, że kąt ASB jest $\frac{1}{10}$ częścią cztérech kątów prostych. Na ten koniec poprowadziwszy AC, ponieważ SC $=$ AB, jest téż SB:AB$=$AB:BC. Lecz SB i AB są dwoma bokami trójkąta ASB kąt B obejmującemi, zaś AB i BC dwoma bokami tenże kąt B, w trójkącie ACB obejmującemi, przeto trójkąt ASB$\backsim$ABC; a że trójkąt ASB jest równoramienny, więc i trójkąt ABC jest także równoramienny, a mianowicie kąt ACB$=$B, kąt BAC$=$S i AC$=$AB, następnie zaś AC$=$SC; skąd wypada, że téż trójkąt ASC jest równoramienny. Ale kąt ACB$=$CAS$+$S §. 39, a kiedy kąt CAS$=$S, zaś kąt ACB$=$B, więc kąt B$=$2S. W trójkącie ASB mamy

$A+B+S=2R$, czyli ponieważ $A=B$, $2S+2S+S=2R$ albo $5S=2R$, przeto $S=\frac{1}{5}2R=\frac{2}{10}2R=\frac{1}{10}4R$, t. j. kąt S jest $\frac{1}{10}$ częścią całego okręgu koła, a następnie cięciwa AB jest bokiem dziesięciokąta foremnego w koło wpisanego, co było do dowiedzenia.

Aby więc wpisać w koło dziesięciokąt foremny, potrzeba promień tegoż koła podzielić na skrajne i średnią, a wziąwszy większy odcinek rzeczonego promienia, przenieść go jako cięciwę na okrąg danego koła, co się 10 razy zupełnie da uskutecznić. Połączywszy potém punkta tak naznaczone prostemi, otrzymamy żądany dziesięciokąt foremny w koło wpisany.

Jeżeli teraz połączymy końce każdych dwóch takich części okręgu koła prostemi, te zamkną pięciokąt foremny w koło wpisany.

Praktyczny sposób wpisania pięciokąta foremnego w koło nie wpisując wprzód dziesięciokąta, jest następujący:

W daném kole poprowadziwszy średnicę AB *fig. 121* i ze środka koła wyprowadziwszy promień SC do niéj prostopadły, podzielmy promień SB w punkcie E na dwie równe części i z punktu E promieniem EC zakreślmy łuk przecinający średnicę AB w punkcie F, tedy CF będzie bokiem pięciokąta a SF bokiem dziesięciokąta; nareszcie z punktu C promieniem CF zakreślmy inny łuk przecinający okrąg koła w punkcie G, cięciwa $CG = CF$ będzie bokiem pięciokąta foremnego w dane koło wpisanego.

Sposób ten wpisywania pięciokąta i dziesięciokąta w dane koło znajduje się już w Euklidesie ks. 13.

Wniosek. Ponieważ trójkąt CFS jest prostokątny przy S, więc według §. 63 *wniosek* będzie *kwadrat z liczby wyrażającéj długość prostéj* FC *czyli długość boku pięciokąta w koło wpisanego, równy summie kwadratów z liczb wyrażających długość promienia i boku dziesięciokąta w toż koło wpisanego:* albo, jak zwyczajnie mówić będziemy, *summa kwadratów z promienia i boku dziesięciokąta w koło wpisanego, równa się kwadratowi z boku pięciokąta w toż koło wpisanego.*

Uwaga 1. Piérwszy sposób wpisania pięciokąta zasadzał się na wpisaniu dziesięciokąta, ten drugi, wpisując pięciokąt, wpisuje zarazem dziesięciokąt, a w użyciu jest prędszy i łatwiéjszy *).

Uwaga 2. Umiejąc wpisać pięciokąt foremny w koło, możemy téż wpisać wielokąty o 5, 10, 20, 40, 80 . . . 5.2^{m-1} bokach, gdzie $m = 1, 2, 3, 4 \ldots$.

Wniosek 2. Ponieważ $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$, przeto umiejąc wpisać sześciokąt i dziesięciokąt w koło, umiemy téż wpisać pietnastokąt. Jeżeli bowiem łuk DE *fig. 120* jest $\frac{1}{6}$, a łuk EF $\frac{1}{10}$ częścią całego okręgu, tedy łuk DF $=$ DE $-$ EF według powyższego, będzie $\frac{1}{15}$ częścią okręgu koła; przeto cięciwa DF będzie bokiem pietnastokąta foremnego w koło wpisanego. Przy jego pomocy umiemy téż wpisać wielokąty o 30, 60, 120 . . . 15.2^{m-1} bokach, gdzie znowu

$$m = 1, 2, 3, 4 \ldots$$

§. 108.

Podaję tu jeszcze praktyczne sposoby wpisania w koło siedmiokąta, dziewięciokąta i jedenastokąta.

Dla siedmiokąta zakreśla się z któregokolwiek punktu danego okręgu koła np. z A *fig. 122* promieniem równym promieniowi danego koła łuk przecinający okrąg w dwóch punktach B i C, a połowa cięciwy BC t. j. BB′ jest bokiem siedmiokąta żądanego.

Dla dziewięciokąta zrobiwszy toż samo i znalazłszy cięciwę BC *fig. 122*, z jéj środka D promieniem równym promieniowi danego koła zakreśla się łuk przecinający przedłużoną cięciwą DC w punkcie E, z punktu E tąż samą otwartością cyrkla przecina się łuk piérwszy w punkcie F; prosta łącząca punkt F z środkiem koła naznaczy punkt G na okręgu, ten złączywszy z punktem C prostą GC, ta będzie bokiem dziewięciokąta w toż koło wpisanego.

Nareszcie dla jedenastokąta, potrzeba promień SM *fig. 122*, podzielić w punkcie H na dwie równe części, potém tak z punktu H jako téż i M, promieniem $=$ MH zakreślić

---

*) Sposób ten podany jest przez Ptolemeusza w jego *Almageście* (*Συνταξις μεγαλη*).

dwa łuki przecinające się w punkcie K i oprócz tego naznaczyć punkt przecięcia się łuku z M zakreślonego, z okręgiem danym jak tu L; na ostatek z punktu L otwartością cyrkla = LK zakreśliwszy łuk przecinający dany okrąg w punkcie I, prosta łącząca punkta H i I, jest szukanym bokiem jedenastokąta w koło wpisanego *).

Ogólny praktyczny sposób wpisania wielokąta w koło o ilukolwiek bokach, podany przez tegoż samego co poprzedzające autora, jest następujący:

Poprowadziwszy w danėm kole średnią AB *fig. 123*, prowadzi się potém prosta AM nieograniczonéj długości pod jakiémkolwiek do średnicy nachyleniem. Na téj prostéj poczynając od punktu A odcina się tyle części równych dowolnéj długości, o ilu bokach chcemy wpisać wielokąt np. 7; ostatni ten podział łączy się z drugim końcem średnicy B prostą B7, a przez podział 2 prowadzi się do niéj równoległą przecinającą średnicę w punkcie C. Z obu końców średnicy, otwartością cyrkla równą średnicy, kreślą się dwa łuki przecinające się w punkcie D. Nareszcie przez punkta D i C prowadzi się prosta, która przetnie okrąg danego koła w punkcie E, a prosta łącząca ten punkt E z końcem średnicy A będzie bokiem szukanego wielokąta w toż koło wpisanego. Wszystkie te sposoby podane są w przytoczoném dziełku praktycznie bez żadnego dowodu. A kiedy przy pomocy dotąd poznanych prawd nie moglibyśmy dowieść jak daleko zgodne są te sposoby z prawdą (bo rzeczywiście są tylko zbliżonemi), dla tego téż przytaczając je jako tylko praktyczne, dla poradzenia sobie w potrzebie, żadnych dowodów nie dołączam.

---

*) Te praktyczne sposoby znalazłem w dziełku zupełnie na miedzi rytém pod tytułem: „*Anweisung zum Zirkel- und Lineal-Gebrauch sowohl vor die Jugend als Professionisten und Handwerker. Verlegt in Augsburg von Johann Hertel*" bez roku i autora.— Autorem tego dziełka składającego się z 244 stronic jest Anthoni Ernst Burckhard von Birkenstein. Piérwsze jego wydanie wyszło także w Augsburgu u *Jakóba Koppmayera* r. 1689.

Uwaga. Kończąc rzecz o wpisywaniu i opisywaniu wielokątów foremnych w koło, wypada nam jeszcze wspomnieć, iż od Euklidesa aż do początku bieżącego stólecia sądzono, że sposobem geometrycznym t. j. elementarnym (za pomocą prostéj i okręgu koła) nie można wpisać innych wielokątów w koło jak tylko trójkąt, kwadrat, pięciokąt, sześciokąt, dziesięciokąt i pietnastokąt; jako téż te, które przez podwajanie liczby boków z wymienionych wielokątów, jak to wyżéj widzieliśmy, powstają. Atoli sławnéj pamięci matematyk Gauss w wydanéj w r. 1801 w Lipsku Arytmetyce pod tytułem „Disquisitiones Arithmeticae“ dowiódł, że tym samym sposobem można wpisać wszystkie wielokąty, których liczba boków jest wyrażoną przez 2^n+1 byle tylko ta liczba była liczbą pierwszą.

§. 109.

Że każdy trójkąt można opisać kołem, już to z §. 83 wiemy. Że nawzajem w każdy trójkąt można wpisać okrąg koła, to następnie okażemy.

Twierdzenie. *W trójkącie prostokreślnym podzieliwszy każdy z jego kątów na dwie równe części, proste dzielące przecinają się w jednym punkcie, który jest w równéj odległości od każdego z boków trójkąta.*

Niech będzie trójkąt ABC *fig. 124*, podzieliwszy którekolwiek dwa jego wewnętrzne kąty np. A i C na dwie równe części i poprowadziwszy proste dzielące, te przetną się naturalnie w jednym tylko punkcie O. Złączywszy ten punkt O z wiérzchołkiem trzeciego kąta B prostą BO, jeżeli dowiedziemy, że ta ostatnia prosta dzieli kąt B także na dwie równe części, tém samém dowiedziemy piérwszéj części założonego twierdzenia.

Jakoż z punktu O spuściwszy prostopadłe OD, OE i OF, piérwszą do boku AB, drugą do AC, trzecią do BC, w dwóch trójkątach AOD i AOE prostokątnych przy D i E, kąt DAO $=$ EAO z założenia, przeto i trzecie kąty są sobie równe §. 36 *wniosek 2*; oprócz tego przeciwprostokątnia jest obu spólna, zatém dwa te trójkąty przystają do siebie, a z przystania wnosimy, że OD=OE. Zupełnie dla téj saméj przyczyny dwa trójkąty OEC i OFC także przystają do siebie a w szczególności OE=OF. Nareszcie dwa trójkąty prostokątne BDO i BFO mają przeciwprostokątnią BO spólną i po boku kątom prostym przyległym równym t. j. OD=OF, zatém również przystają do siebie, a z przystania wnosimy, że kąty jednakowo położone w obu, są sobie równe, t. j. że kąt DBO=FBO, co potrzeba było dowieść. A że z dowodzenia wypadło, że OD=OE=OF, zatém i druga część twierdzenia także dowiedziona, że punkt przecięcia się prostych dzielących kąty w trójkącie na dwie równe części, jest w równéj odległości od każdego z boków.

Jeżeli teraz z punktu O promieniem =OD=OE=OF, zakreślimy okrąg koła, ten dotknie boki trójkąta w punktach D, E, F i będzie kołem w trójkąt ABC wpisaném.

Uwaga. Nie tylko proste dzielące kąty wewnętrzne trójkąta przecinają się w jednym punkcie, ale téż i proste dzielące dwa kąty zewnętrzne i jeden wewnętrzny przecinają się także w jednym punkcie jak proste AO′ BO′ i CO′, skąd powstaną trzy koła styczne do boków trójkąta lub do ich przedłużeń. W ogólności więc są cztéry koła styczne do boków trójkąta uważanych jako proste nieograniczonéj długości.

§. 110.

Że czworokąt może być wpisany w koło, łatwo jest pojąć, bo obrawszy gdziekolwiek na okręgu koła cztéry punkta i te połączywszy prostemi, te zamkną czworokąt w koło wpisany. Że atoli nie każdy czworokąt może być w koło wpisany przekonać się można z tego co w §. 83 dowiedliśmy. Albowiem obrawszy tamże czwarty punkt gdziekolwiek, okrąg koła przechodzący przez trzy punkta, nie zawsze przejdzie i przez punkt obrany. Po czémże więc poznać, który czworokąt może być wpisany w koło? Aby tę cechę odkryć, obierzmy dowolnie cztéry punkta A, B, C, D na okręgu koła *fig. 125*, te połączmy prostemi dla zamknięcia czworokąta. Poprowadziwszy potém dwie przekątnie AC i BD uważmy np. trójkąt ABC: w tym summa kątów wewnętrznych czyni 2R czyli B+BAC+BCA=2R. Lecz kąt BAC=BDC bo każdy z nich ma za miarę połowę łuku BC; kąt BCA=BDA bo są w jednymże odcinku, zatém BAC+BCA=D; przeto B+D=2R. A że w każdym czworokącie summa kątów wewnętrznych równa się czterem kątom prostym, więc również A+C=2R. Albo krócéj: kąt B ma za miarę połowę łuku ADC, kąt D ma za miarę połowę łuku ABC, a że summa łuków ABC+ADC czyni cały okrąg, więc summa kątów B+D ma za miarę połowę okręgu koła; czyni więc dwa kąty proste. Cecha tedy o którą nam chodziło jest ta, że tylko czworokąt w którym summa kątów przeciwległych czyni 2R, może być wpisany w koło. Jest to więc czworokąt któryśmy w §. 16 nazwali *antiparallelogramem.*

Uwaga. Może téż być opisany kołem czworokąt trapez którego dwa boki nierównoległe są sobie równe a któryby z tego powodu *trapezem równoramiennym* nazwać można.

§. 111.

Twierdzenie. *W każdym trójkącie prostokreślnym iloczyn z dwóch jego boków równa się iloczynowi ze średnicy koła opisanego i prostopadłéj na bok trzeci z wiérzchołka kąta przeciwległego spuszczonéj.*

Niech będzie trójkąt ABC *fig. 126*, opisawszy go kołem §. 83 i z punktu np. A poprowadziwszy średnicę AE, tudzież z wiérzchołka B spuściwszy prostopadłą BD na bok AC, mamy dowieść, że AB×BC=AE×BD. Na dowiedzenie tego poprowadziwszy prostą BE, dwa trójkąty ABE i BDC są podobne; jest bowiem kąt ABE prosty jako w półkolu równy prostemu D, kąt E=C, bo są w jednymże odcinku, przeto i kąt BAE=DBC, a stąd według twierdzenia §. 56 jest AB:BD=AE:BC. Z téj proporcyi wypada AB×BC=AE×BD, jak w twierdzeniu wyrażono.

Wniosek. Rozmnożywszy dwie ostatnie ilości równe każdą przez AC, będzie AB×BC×AC=AC×BD×AE. Lecz, jak w następnym rozdziale zobaczymy, iloczyn AC×BD wyraża podwójną powiérzchnią trójkąta ABC, zatém w każdym trójkącie prostokreślnym iloczyn z trzech jego boków równa się iloczynowi z podwójnéj jego powiérzchni przez średnicę; czyli nazwawszy promień koła opisanego przez R, a powiérzchnię trójkąta ABC przez $\triangle$, ponieważ $AE=2R$ będzie $AB\times BC\times AC=2\triangle\times 2R=4\triangle R$

skąd $\triangle=\frac{AB\times BC\times AC}{4R}$ zaś $R=\frac{AB\times BC\times AC}{4\triangle}$

t. j. *powiérzchnia trójkąta równą się iloczynowi z trzech jego boków podzielonemu przez 4 razy wzięty promień koła opisanego*; zaś *prómień koła opisanego na trójkącie, równa się iloczynowi z trzech jego boków podzielonemu przez 4 razy wziętą powiérzchnię tegoż trójkąta.*

Uwaga. Może tu nie jednemu wpadnie na myśl, jak znaleść iloczyn z dwóch, trzech i t. d. prostych? Tego odsyłamy do §§. 2 i 3, gdzie powiedzieliśmy, iż zamieniwszy długości, a zatém linije na ilości krotne czyli liczby, już wszystkie działania arytmetyczne z niemi uskutecznić można.

§. 112.

TWIERDZENIE. *W trójkącie prostokréślnym podzieliwszy jeden z jego kątów na dwie równe części, prosta dzieląca podzieli téż bok temu kątowi przeciwległy na dwa odcinki takie, że iloczyn z dwóch innych boków równać się będzie iloczynowi z odcinków powiększonemu drugą potęgą z prostéj dzielącéj.*

Niech znowu będzie trójkąt ABC *fig. 127*, podzieliwszy kąt jego B na dwie równe części prostą BD, ta podzieli bok AC na dwa odcinki AD i DC. Według twierdzenia ma być $AB\times BC=AD\times DC+BD^2$. Aby téj prawdy dowieść, opiszmy trójkąt dany kołem, a przedłużywszy prostą dzielącą aż do spotkania się z okręgiem kołu w punkcie E, złączmy punkt E z punktem C prostą CE. Trójkąt $ABD\backsim BCE$, bo z założenia kąt $ABD=EBC$, kąt $BAC=BEC$ mają bowiem każdy za miarę połowę łuku BC, przeto i kąt $ADB=BCE$. Z podobieństwa tych trójkątów mamy $AB:BE=BD:BC$ skąd $AB\times BC=BE\times BD$. Lecz $BE=BD+DE$ przeto $AB\times BC=BD(BD+DE)=BD^2+BD\times DE$.

Ale $BD \times DE = AD \times DC$ §. 90, więc nareszcie

$AB \times BC = BD^2 + AD \times DC$, co było do dowiedzenia.

§. 113.

O czworokącie w koło wpisanym czyli antiparallelogramie, dowiedźmy następujące

TWIERDZENIE. *Iloczyn z przekątni antiparallelogramu, równa się summie iloczynów z boków przeciwległych.*

Niech będzie czworokąt wpisany w koło ABCD *fig. 128*, poprowadziwszy przekątnie AC i BD, mamy dowieść, że $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$. Na ten koniec weźmy łuk $DE = AB$ i poprowadźmy CE przecinającą BD w punkcie F, tedy trójkąt $ABC \backsim CFD$, bo kąt $BAC = BDC$ jako w jednymże odcinku, kąt $BCA = FCD$, bo łuk $ED = AB$ z wykreślenia, przeto i kąt $ABC = CFD$. Z podobieństwa ich wypada według §. 56

$AC : CD = AB : FD$ skąd $AC \times FD = AB \times CD$.

Podobnież trójkąt $ACD \backsim BFC$, bo kąt $CAD = CBD$ kąt $ACD = BCF$, każdy bowiem składa się z dwóch kątów równych t. j. kąt $ACD = ACE + ECD$ a kąt $BCF = BCA + ACE$, zaś kąt $BCA = ECD$, więc kąt $ADC = BEC$. Z podobieństwa znowu tych trójkątów wypada $AC : BC = AD : BF$ skąd $AC \times BF = BC \times AD$. Z dwóch otrzymanych zrównań dodając je stronami do siebie wypada

$AC(FD + BF) = AB \times CD + BC \times AD$. A że $FD + BF = BD$, zatém $AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD$, co było do dowiedzenia.

§. 114.

TWIERDZENIE. *W czworokącie wpisanym w koło stósunek przekątni równa się stósunkowi sum iloczynów z boków wspierających się na tychże samych końcach przekątni.*

Niech będzie czworokąt ABCD *fig. poprzedzająca* wpisany w koło, poprowadziwszy przekątnie AC i BD przecinające się w punkcie G, potrzeba dowieść że

$$AC : BD = AB \times AD + BC \times CD : AB \times BC + AD \times CD$$

Trójkąt $ABG \backsim DGC$, przeto $AB : CD = BG : CG$

trójkąt $ADG \backsim BCG$, zatém $AD : BC = AG : BG$

Z obu prroporcyj wypada . . $AB \times AD : BC \times CD = AG : CG$

a stąd według §. 98. *Arytm.*

$$AB \times AD + BC \times CD : AB \times AD = AG + CG : AG,$$

czyli, ponieważ $AG + CG = AC$,

$$AC : AG = AB \times AD + BC \times CD : AB \times AD \;\ldots\ldots\; (1)$$

Z tychże samych trójkątów wypada:

z trójkątów ABG i DGC . . . . $AB : CD = AG : DG$,

z trójkątów ADG i BCG . . . . $BC : AD = BG : AG$

a stąd $\overline{AB \times BC : AD \times CD = BG : DG}$

a następnie $AB \times BC + AD \times CD : AB \times BC = BG + DG : BG$;

a że $BG + DG = BD$

zatém $BD : BG = AB \times BC + AD \times CD : AB \times BC \;\ldots\; (2)$

Wyrazy proporcyj (1) i (2) dzieląc przez siebie, otrzymamy

$$\frac{AC}{BD} \cdot \frac{AG}{BG} = \frac{AB \times AD + BC \times CD}{AB \times BC + AD \times CD} \cdot \frac{AB \times AD}{AB \times BC} = \frac{AB \times AD + BC \times CD}{AB \times BC + AD \times CD} \cdot \frac{AD}{BC}$$

Ale z podobnych trójkątów AGD i BGC jest

$$AG : BG = AD : BC \text{ czyli } \frac{AG}{BG} = \frac{AD}{BC}$$

przeto z ostatniéj proporcyi wypada

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \times AD + BC \times CD}{AB \times BC + AD \times CD}$$

czyli $AC : BD = AD \times AB + BC \times CD : AB \times BC + AD \times CD$
co potrzeba było dowieść.

Uwaga. Dwa ostatnie twierdzenia o czworokącie wpisanym w koło, posłużą nam do znalezienia przekątni z wiadomych boków tego czworokąta. Piérwsze nazywają autorowie twierdzeniem Ptolemeusza, albowiem wielki ten alexandryjski astronom około r. 140 po Chr. piérwszy użył tego twierdzenia w swém dziele *Almagest* zwaném do obrachowania cięciw w kole różnéj wielkości łukom odpowiadających, które ułożone w tablice, zastępowały długi czas nasze tablice trygonometryczne.

ROZDZIAŁ VII.

Powierzchnie figur prostokréślnych i ich stósunki między sobą.

---

§. 115.

Dotąd uważaliśmy dwa gatunki ilości geometrycznych t. j. *długości* czyli *linije* i *kąty* czyli różnice ich kierunków. W tym rozdziale zatrudnimy się nowym gatunkiem geometrycznych ilości, mianowicie zaś zatrudnimy się *powierzchniami* figur geometrycznych prostokreślnych. A jako mierząc długości obieraliśmy pewną znaną lub dowolną długość za jednostkę, do mierzenia zaś wielkości kątów użyliśmy jednostki także kątowéj, obierając za takową kąt prosty, tak téż mierząc powierzchnie, potrzeba będzie obrać na ten cel za jednostkę ilość tegoż samego gatunku, a zatém pewną powierzchnią i z nią wszystkie inne porównać; stąd naturalnie otrzymamy stósunki powierzchni tychże figur wyrażone w liczbach a zatém mogące być pod rachunek podciągnione.

Najprościejsza na ten cel powierzchnia nawija nam się *kwadrat wystawiony na jednostce długości*, bo i kąty jego będąc wszystkie proste, są jednostkami do mierzenia kątów użytemi, i figura ta jest najznajomsza każdemu, oraz najłatwiejsza do nakreślenia. Lecz jak w długościach i kątach, tak téż i tu jednostka, jakiéj użyć chcemy do porównania z nią wszelkich powierzchni, jest zupełnie dowolną, gdziekolwiek zaś zostawiony nam jest dowolny między wielu rzeczami wybór, tam pospolicie najprostszą obieramy, przeto i tu nie dla innéj przyczyny obrano kwadrat.

Przy mierzeniu powierzchni figur chodzić nam będzie jedynie o to, ile razy powierzchnia kwadratu wziętego za jednostkę, mieści się w powierzchni danéj, lub co na jedno wychodzi, ile razy dana powierzchnia większa jest lub mniejsza od powierzchni kwadratu na jednostce długości wystawionego. Stąd wypada, że kwadrat porównywać będziemy musieli z innemi figurami. A że figury prostokreślne mogą być bardzo różnego od kwadratu kształtu, przeto obrać nam potrzeba taką drogę postępowania, iżbyśmy zawsze porównywali figury jak najwięcéj kształtem do siebie zbliżone. Dla tego, ponieważ podobieństwem najbliższą kwadratu figurą jest *prostokąt*, przedewszystkiém ten wypada nam porównać z kwadratem, iżbyśmy w każdym przypadku mieli pewny, między temi dwiema figurami zachodzący, stósunek. Nim jednak dwie te figury porównamy z sobą, dla łatwiejszego i jaśniejszego pojęcia zachodzącego między niemi stósunku, porównajmy dwie zupełnie sobie podobne figury, to jest: porównajmy dwa prostokąty. Te jeżeli mają podstawy i wysokości równe, muszą koniecznie do siebie przystać i powierzchnie ich są tém samém równe. Jeżeli zaś mają albo podstawy albo wysokości różne, szukajmy ich w tym przypadku stósunku.

§. 116.

Twierdzenie. *Dwa prostokąty mające równe wysokości a podstawy różne, mają się do siebie w stósunku tychże podstaw.*

Niech będą dwa prostokąty ABCD i ABEF *fig. 129*, mające równe wysokości t. j. AB=CD, a podstawy AD i AF różne; mamy dowieść, że powierzchnia ABCD:ABEF=AB:AF. W dowodzeniu téj prawdy natrafić możemy na dwa przypadki, mianowicie, że podstawy AB i AF są prostemi spółmiernemi, lub niespółmiernemi. Zobaczmy dowód w każdym razie. Jeżeli AB i AF są spółmierne, niech AH będzie spólną ich największą miarą, tudzież niech $AD=m.AH$ zaś $AF=n.AH$, tedy $AD:AF=m.AH:n.AH=m:n$ i podstawa piérwszego prostokąta da się podzielić na m części równych, podstawa zaś drugiego na n takichże części. Wystawiwszy sobie przez te punkta podziału wystawione prostopadłe do podstaw prostokątów, tedy prostokąt piérwszy podzieli się na m, prostokąt zaś drugi na n prostokątów zupełnie między sobą równych, gdyż wszystkie mają tak podstawy jako téż i wysokości równe. Prostokąt więc piérwszy zamyka m takich prostokątów, jakich drugi zamyka n, a przeto powierzchnia prostokąta

$$ABCD:ABEF=m:n.$$

Łącząc tę proporcyją z powyższą, znajdziemy

$$ABCD:ABEF=AD:AF.$$

W piérwszym więc przypadku twierdzenie tym sposobem jest dowiedzione.

Jeżeli podstawy AD i AF rzeczonych prostokątów są niespółmierne, uważmy, jak to już w §. 53. uczyniliśmy, że proporcyja ABCD : ABEF = AD : AF może tylko być fałszywą z powodu czwartego jéj wyrazu AF, że ten jest albo za wielki albo za mały, aby z wyrazem trzecim AB czynił stósunek równy pierwszemu. Przypuśćmy więc, że on jest za wielki i że go potrzeba zmniejszyć np. o ilość FL i że po zmniejszeniu proporcyja ABCD : ABEF = AD : AL jest prawdziwa. Podstawę AD prostokąta ABCD podzielmy na tyle części równych, na ile się da, byle tylko mniejszych niż ilość FL o którą zmniejszyliśmy wyraz czwarty. Niech taką częścią będzie AO. Wziąwszy tę część w cyrkiel i przenosząc ją na podstawę AF, ponieważ AD i AF są niespółmierne; żaden punkt podziału nie padnie na F, lecz albo z jednéj albo z drugiéj strony tego punktu. Przypuśćmy, iż pada jeden z podziałów między L i F w punkcie M (następny podział padłby z prawéj strony punktu F). Wyprowadziwszy z punktu M prostopadłą MN, ponieważ dwa prostokąty ABCD i ABNM mają podstawy AD i AM spółmierne, zatém według piérwszéj części tego twierdzenia jest ABCD : ABNM = AD : AM. Porównawszy tę proporcyją z przypuszczoną, ponieważ w nich poprzedniki stosunków są równe, więc następniki uczynią także proporcyją i będzie

ABEF : ABNM = AL : AM.

A że w każdéj proporcyi czém jest poprzednik względem swego następnika w piérwszym, tém téż być powinien poprzednik względem swego następnika w drugim stósunku, przeto jako ABEF > ABNM, tak téż być powinno AL > AM. A gdy naocznie widzimy, że AL < AM, przeto ostatnia proporcyja jest fałszywa. Lecz ona powstała z dwóch innych, przeto albo obie, albo przynajmniéj jedna z nich jest fałszywą. Druga jest prawdziwą, bo jest dowiedzioną, przeto przypuszczona jest fałszywą. Nie jest więc wyraz czwarty AF za wielki.

Przypuściwszy powtóre, że wyraz AF jest za mały, dowiedlibyśmy zupełnie podobnym sposobem fałszywość tego przypuszczenia. Skoro więc wyraz czwarty ani jest za wielki ani za mały do uczynienia proporcyi, jest więc takim jakim być powinien i jest ogólną prawdą, że dwa prostokąty, których wysokości są równe, mają się do siebie w stósunku swych podstaw.

Wniosek 1. Ponieważ z §. 16. wiemy, że którykolwiek z boków prostokąta można wziąść za podstawę, a wtedy bok jemu przyległy będzie wysokością prostokąta, przeto jeżeli dwa prostokąty mają podstawy równe a wysokości różne, wziąwszy te ostatnie za podstawy, dowiedziemy, że dwa *prostokąty mające równe podstawy a wysokości różne, mają się do siebie jak też wysokości.* Nazwawszy ogólnie powierzchnie dwóch prostokótów przez P i p, ich podstawy przez B i b a wysokości przez W i w, mamy

w przypadku $W = w$ . . . $P : p = B : b$

w przypadku $B = b$ . . . $P : p = W : w$.

§. 117.

Twierdzenie. *Dwa prostokąty mające tak podstawy jako i wysokości różne, mają się do siebie w stósunku iloczynów z ich podstaw przez wysokości.*

Niech będą dwa prostokąty ABCD i *abcd fig. 130,* których tak podstawy $AD = B$ i $ad = b$ jako téż i wysokości $AB = W$ i $ab = w$ są różne; potrzeba dowieść, że powierzchnia piérwszego do powierzchni drugiego ma się jak $B \times W : b \times w$. Na ten koniec na wysokości AB piérwszego prostokąta odetnijmy $Ab' = ab$ i poprowadźmy $b'c'$ równoległą do AD; a nazwawszy powierzchnią prostokąta ABCD przez P, prostokąta *abcd* przez p, a nareszcie prostokąta $Ab'c'D$ przez q, będzie według poprzedzającego §.

$p : q = b : B$ bo ich wysokości ab i Ab' są równe z wykreślenia

$q : P = w : W$ bo oba stoją na téjże saméj podstawie AD składając proporcyje wypada $p:\mathrm{P}=b\times w:\mathrm{B}\times\mathrm{W}$ co było do dowiedzenia.

Nie potrzebuję tu zapewne powtarzać że ilości B, W, *b*, są wyrażone w liczbach, t. j. przez mierzenie tych długości, spólną jednostką, zamienione na ilości krotne czyli stósunki do jednostki.

Wniosek. Wziąwszy w miejsce prostokąta *p*, kwadrat *abef*, będący gatunkiem prostokąta, w którym niech *ab* będzie $=1$, t. j. niech będzie jednostką którą mierzymy B i W, tedy nazwawszy powiérzchnią tego kwadratu K, według ostatniego twierdzenia mamy $\mathrm{P}:\mathrm{K}=\mathrm{B}\times\mathrm{W}:af\times ab=\mathrm{B}\times\mathrm{W}:1\times1$ skąd
$$\mathrm{P}=\mathrm{B}\times\mathrm{W}\times\mathrm{K}$$
t. j. powiérzchnia prostokąta P jest równa $\mathrm{B}\times\mathrm{W}$ razy wziętemu kwadratowi K. Jeżeli teraz weźmiemy kwadrat K za jednostkę do mierzenia powierzchni prostokąta P, znajdziemy
$$\mathrm{P}=\mathrm{B}\times\mathrm{W}$$
t. j. że *powiérzchnia prostokąta równa się iloczynowi z jego podstawy przez wysokość.*

Prawdę tę można naocznie tak okazać: Ponieważ B i W wyrażają liczby, t. j. każda z tych ilości wyraża liczbę jednostek długości zawartych tak w podstawie MN jako téż i w wysokości MP prostokąta *fig. 131,* przeto przypuściwszy że $\mathrm{B}=9$, $\mathrm{W}=4$ i zrobiwszy te podziały tak na podstawie jako i wysokości, jeżeli przez punkta podziałów poprowadzimy równoległe do wysokości i podstawy prostokąta, dostrzeżemy, iż cały prostokąt podzieli się na kwdraty na rzeczonéj jednostce długości wystawione, a dla tego między sobą równe. Liczba tych kwadratów w przyjętym tu przypadku równa się $36=9\times4$, t. j. powiérzchnia prostokąta równa się iloczynowi z dwóch liczb wyrażających długość podstawy i długość wysokości zmierzonych przyjętą jednostką długości.

Uwaga. Po dowiedzeniu tego twierdzenia, łatwo zrozumiemy iloczyny z prostych o jakich w poprzednim rozdziale mówiliśmy. I tak w §. 63 *wniosek* wysłowimy, że w trójkącie prostokątnym spuściwszy prostopadłą z wiérzchołka kąta prostego na przeciwprostokątnią, kwadrat z boku przyległego kątowi prostemu równa się prostokątowi z przeciwprostokątni i odcinka temuż bokowi przyległego; że kwadrat z prostopadłéj równa się prostokątowi z odcinków i że nareszcie kwadrat na przeciwprostokątni wystawiony, równa się summie kwadratów wystawionych na bokach przyległych kątowi prostemu. W §. 90 powiedzieć możemy, że prostokąt wystawiony na częściach jednéj, równa się prostokątowi wystawionemu na częściach drugiéj z cięciw przecinających się na powiérzchni koła. Kwadrat wystawiony na prostopadłéj z któregokolwiek punktu okręgu koła na średnicę spuszczonéj, równa się prostokątowi z odcinków średnicy przez prostopadłą zrobionych. Również inaczéj wysłowić można twierdzenia w §§. 111, 112, 113 i 114 dowiedzione.

§. 118.

Porównawszy dwa prostokąty z sobą i prostokąt z kwadratem, przystąpmy teraz do figury najbliżéj z prostokątem spowinowaconéj t. j. do równoległoboku i ten porównajmy z prostokątem dowodząc następujące

Twierdzenie. *Powiérzchnia równoległoboku, równa się iloczynowi z jego podstawy przez wysokość.*

Niech będzie równoległobok ABCD *fig. 132*, którego podstawa AD a wysokość prostopadła z któregokolwiek punktu boku BC na podstawę spuszczona, a zatém Bb lub Cc. Spuściwszy dwie te prostopadłe z końców boku BC na podstawę, z których druga Cc pada na jéj przedłużenie, otrzymamy prostokąt bBCc, którego powiérzchnia według poprzedzającego §. jest $= bc \times$ Bb. Ale trójkąt ABb równy trójkątowi DCc, bo kąty przy B i C są sobie równe §. 14, bok AB $=$ CD, bok Bb $=$ Cc przeto i Ab $=$ Dc a następnie bc $=$ AD. Powiérzchnia więc prostokąta bBCc równa się także iloczynowi AD $\times$ Bb. Lecz obie figury t. j. równoległobok i prostokąt mają powiérzchnią czyli czworokąt bBCD spólny i jeżeli do tego czworokąta dodamy trójkąt DCc, otrzymujemy prostokąt bBCc, jeżeli zaś do tegoż samego czworokąta dodamy trójkąt ABb $=$ DCc, otrzymujemy równoległobok dany

ABCD; skąd wniesiemy, że równoległobok ABCD = prostokątowi $bBCc$. A że powiérzchnia tego ostatniego $= AD \times Bb$, więc i powiérzchnia równoległoboku $= AD \times Bb$, co było do dowiedzenia.

Wniosek 1. Każdy więc prostokąt równy jest co do powiérzchni równoległobokowi mającemu z nim téż samą podstawę i wysokość, albo równe podstawie i wysokości równoległoboku.

Figury różne kształtem a wszelako równe co do powiérzchni, nazywać będziemy *równemi co do powiérzchni* (aequivalentes). W tym przeto rozdziale będzie mowa o równości figur o jakiéj w §. 21 wspomnieliśmy.

Wniosek 2. Z tego téż twierdzenia wypływa, że kiedy równoległobok równa się co do powiérzchni prostokątowi mającemu z nim podstawę i wysokość równe, a dwa prostokąty mające równe podstawy, mają się do siebie jak wysokości, mające zaś równe wysokości mają się do siebie w stósunku podstaw, że dwa równoległoboki mające równe podstawy mają się do siebie również jak ich wysokości; jeżeli zaś mają wysokości równe, powiérzchnie ich są w stósunku podstaw. Nakoniec dwa równoległoboki mające różne podstawy i wysokości, mają się do siebie jak iloczyny z ich podstaw przez wysokości.

§. 119.

Porównajmy teraz dwa równoległoboki z sobą co do ich powiérzchni.

Twierdzenie. *Dwa równoległoboki mające podstawy równe i wysokości równe, są sobie równe co do powiérzchni.*

Niech będą dwa równoległoboki ABCD i *abcd* mające podstawy równe i wysokości równe; położywszy jeden na drugim tak, iżby ich podstawy do siebie przystały, bok przeciwległy podstawie jednego, koniecznie przypadnie na kierunek odpowiadającego boku drugiego równoległoboku, z powodu że ich wysokości są równe. Co do położenia dwóch innych boków, mogą byc trzy przypadki t. j. albo położony równoległobok pokaże się względem drugiego tak jak *fig. 133*, albo tak jak *fig. 134*, albo nareszcie tak jak *fig. 135* przedstawia. W przypadku piérwszym trójkąty BA*b* i CD*c*, w drugim trójkąty BAC i CD*c*, a w trzecim nareszcie BA*b* i CD*c* są sobie równe, dodawszy potém na piérwszéj figurze do każdego z trójkątów trapez A*b*CD, na drugiéj trójkąt ACD, a na trzeciéj trójkąt A*z*D i odejmując trójkąt C*bz*, wypadną zawsze dwa dane równoległoboki równe.

Wniosek. Więc wszystkie równoległoboki stojące na téjże saméj podstawie i mające boki przeciwległe podstawie na prostéj równoległéj od téjże podstawy, są sobie równe co do powiérzchni, bo mają wysokości równe.

§. 120.

Twierdzenie. *Powiérzchnia trójkąta równa się iloczynowi z podstawy przez połowę jego wysokości.*

Niech będzie trójkąt ABC *fig. 136*, wziąwszy bok AC za podstawę i z wiérzchołka kąta przeciwległego B spuściwszy prostopadłą BD, potrzeba dowieść, że powiérzchnia trójkąta $ABC = AC \times \frac{1}{2}BD$. Przez wiérzchołek kąta B poprowadziwszy prostą równoległą do AC jako też przez punkt C równoległą do AB i te równoległe przedłużywszy aż do ich przecięcia się w punkcie E, powiérzchnia równoległoboku $ABEC = AC \times BD$. Ale dany trójkąt $ABC = BCE$, bo trzy boki jednego równe są trzem bokom drugiego każdy każdemu, przeto trójkąt ABC jest połową równoległoboku ABEC a następnie i powiérzchnia jego będzie

$= \frac{1}{2}AC \times BD = AC \times \frac{1}{2}BD$ co chcieliśmy dowieść.

Wniosek 1. Z tego twierdzenia wypada, że powiérzchnia trójkąta jest połową powiérzchni równoległoboku mającego z nim podstawę i wysokość równe.

Wniosek 2. Dwa trójkąty mające równe podstawy i wysokości, są sobie równe co do powiérzchni. Wszystkie więc trójkąty stojące na téjże saméj podstawie i mające swe wiérzchołki na prostéj równoległéj od podstawy jak na *fig. 137* widzieć można, są sobie równe co do powiérzchni. Trójkąty mające równe wysokości, mają się do siebie jak podstawy; mające zaś równe podstawy, mają się do siebie jak wysokości, a nareszcie mające tak podstawy jako téż i wysokości różne, są w stósunku iloczynów z podstaw przez wysokości; połowy bowiem dwóch jakichkolwiek ilości, zawsze są w tymże samym stósunku, w jakim się całości znajdowały.

Uwaga. Ponieważ wyrażenie powiérzchni trójkąta można trojako napisać t. j. $\frac{1}{2}AC\times BD$, albo $AC\times\frac{1}{2}BD$ albo nareszcie $\frac{AC\times BD}{2}$, zatém wysłowienia: *powiérzchnia trójkąta równa się iloczynowi z połowy jego podstawy przez wysokość*, albo *iloczynowi z podstawy przez połowę wysokości* lub nareszcie *połowie iloczynu z podstawy przez wysokość*, są równoznaczne.

§. 121.

TWIERDZENIE. *Powiérzchnie dwóch trójkątów podobnych, mają się do siebie jak kwadraty z odpowiadających boków.*

Jeżeli bowiem są dwa trójkąty ABC i *abc fig. 74* podobne, tedy z §. 64 wiadomo, że ich wysokości BD i *bd* mają się do siebie jak podstawy AC i *ac*, czyli że jest $BD:bd=AC:ac$. Rozmnożywszy w téj proporcyi poprzedniki przez AC a następniki przez *ac* a potém wyrazy piérwszego stósunku podzieliwszy przez 2, otrzymamy $\frac{BD\times AC}{2}:\frac{bd\times ac}{2}=\overline{AC}^2:\overline{ac}^2$. Lecz $\frac{BD\times AC}{2}$=powiérzchni trójkąta ABC, a $\frac{bd\times ac}{2}$= powiérzchni trójkąta *abc* §. poprzedzający, zatém trójkąt $ABC:abc=\overline{AC}^2:\overline{ac}^2$ Ale z powodu podobieństwa trójkątów jest $AC:ac=AB:ab=BC:bc$, według zaś własności proporcyi geometrycznéj jest $\overline{AC}^2:\overline{ac}^2=\overline{AB}^2:\overline{ab}^2=\overline{BC}^2:\overline{bc}^2$, przeto nareszcie trójkąt $ABC:abc=\overline{AC}^2:\overline{ac}^2=\overline{AB}^2:\overline{ab}^2=\overline{BC}^2:\overline{bc}^2$, t. j. powiérzchnie trójkątów podobnych, mają się do siebie w stósunku kwadratów z odpowiadających boków.

Ponieważ z piérwszéj proporcyi wypada także $\overline{BD}^2:\overline{bd}^2=\overline{AC}^2:\overline{ac}^2$ przeto téż $ABC:abc=\overline{BD}^2:\overline{bd}^2$ t. j.

powiérzchnie trójkątów podobnych, mają się także jak kwadraty z ich wysokości.

Wniosek. Ponieważ trójkąt jest połową równoległoboku mającego z nim podstawę i wysokość równe, zatém również powierzchnie dwóch równoległoboków podobnych, mają się do siebie jak kwadraty z boków odpowiadających.

§. 122.

Twierdzenie. *Powiérzchnie dwóch trójkątów mających jeden kąt spólny, albo mających po jednym kącie równym, są w stósunku iloczynów z boków kąt ten obejmujących.*

Niech będą dwa trójkąty ABC i ADE mające kąt spólny A *fig. 138*, punkta B i E połączywszy prostą BE, dwa trójkąty ABC i ABE uważać można jako stojące, piérwszy na podstawie AC, drugi na AE, mające w punkcie B wierzchołek spólny, więc i wysokości mają równe; mają się zatém do siebie jak podstawy, czyli że jest trójkąt ABC:ABE = AC:AE. Podobnież trójkąty ABE i ADE, można uważać jako stojące piérwszy na podstawie AB, drugi na podstawie AD i mające wiérzchołek spólny w punkcie E, więc znowu mają wysokości równe, mają się więc do siebie jak podstawy, czyli że trójkąt ABE:ADE = AB:AD.

Mnożąc te dwie proporcyje przez siebie i skracając piérwszy stósunek, znajdziemy trójkąt
ABC:ADE = AB × AC:AE × AD co było do dowiedzenia.

Wniosek. Dwa trójkąty ABC i ADE byłyby równe, gdyby iloczyny AB × AC i AE × AD były równe, czyli gdyby było AB × AC = AE × AD albo raczéj AB:AD = AE:AC. Ale ta proporcyja jest prawdziwa, jeżeli prosta DC jest równoległą do BE, przeto i trójkąty ABC i ADE w tym tylko przypadku są równe.

§. 123.

Twierdzenie. *Powiérzchnia trapezu równa się iloczynowi z połowy summy jego boków równoległych przez wysokość.*

Niech będzie trapez ABCD *fig. 139*, wysokość jego BE lub DF. Poprowadziwszy przekątnię BD, podzielimy go na dwa trójkąty ABD i BCD mające podstawy AD i BC, a wysokości równe. Powiérzchnia trójkąta $ABD = \frac{1}{2}AD \times BE$, trójkąta zaś $BCD = \frac{1}{2}BC \times DE = \frac{1}{2}BC \times BE$ zatém powiérzchnia trapezu $= ABD + BCD = \frac{1}{2}(AD + BC)BE =$

$$\frac{AD+BC}{2} \times BE \text{ jak twierdzono.}$$

Wniosek. Jeden z boków nierównoległych trapezu np. CD podzieliwszy w punkcie G na dwie równe części i przez ten punkt G poprowadziwszy dwie równoległe HK i GL, piérwszą do AB aż do zamknięcia równoległoboku ABHK, a drugą aż do przecięcia się z bokiem AB, ponieważ $LG = BH = BC + CH$, tudzież $LG = AK = AD - DK$, przeto dodawszy te zrównania stronami do siebie, otrzymamy $2LG = AD + BC + CH - DK$. Lecz dwa trójkąty DGK i CGH przystają do siebie, bo $CG = DG$ z wykreślenia, kąty przy G równe jako wiérzchołkowe, kąt $KDG = GCH$ jako naprzemianległe wewnętrzne; z ich przeto przystania wnosimy, że

$DK = CH$, a następnie $2LG = AD + BC$, skąd

$LG = \frac{AD+BC}{2}$. Tym sposobem będzie powiérzchnia trapezu $= LG \times BE$ t. j. *równa się ta powiérzchnia iloczynowi z prostéj łączącej środki boków nierównoległych trapezu przez jego wysokość.* Albo: *powiérzchnia trapezu równa się powiérzchni prostokąta lub równoległoboku mającego za podstawę prostą średnią arytmetyczną między bokami równoległemi a za wysokość wysokość trapezu.*

Wyrażenie powiérzchni trapezu $\frac{AD + BC}{2} \times BE$ można jeszcze i tak wysłowić: *powiérzchnia trapezu równa się powiérzchni trójkąta mającego za podstawę summę boków równoległych trapezu, a wysokość równą jego wysokości.*

§. 124.

Chcąc znaleść powiérzchnią jakiegokolwiek wielokąta prostokreślnego, dzielimy go zwyczajnie na trójkąty przez prowadzenie przekątni, lub na trapezy, lub nareszcie na trójkąty i trapezy razem; a obrachowawszy powiérzchnie wszystkich części, summa ich będzie powiérzchnią wielokąta.

Jeżeli wielokąt jest foremny, powiérzchnią jego daleko łatwiéj obrachować można, łatwo bowiem dowieść następujące

Twierdzenie. *Powiérzchnia wielokąta foremnego równa się iloczynowi z jego obwodu przez połowę prostopadłéj ze środka wielokąta na którykolwiek bok spuszczonéj.*

Niech np. będzie sześciokąt foremny ABCDEF *fig. 117* środek jego S połączywszy ze wszystkiemi wiérzchołkami kątów, podzieli on się tym sposobem na tyle trójkątów między sobą równych, ile tenże wielokąt ma boków. Powiérzchnia trójkąta $ASB = AB \times \frac{1}{2} Sa$; a że powiérzchnia każdego innego trójkąta równa się temuż samemu iloczynowi, z powodu, że $AB = BC = CD =$ i t. d. jako téż $Sa' = Sb' = Sc' =$ i t. d. §. 103, zatém summa tych trójkątów czyli powiérzchnia wielokąta, równa się iloczynowi $AB \times \frac{1}{2} Sa'$ wziętemu tyle razy ile wielokąt ma boków. Nazwawszy więc w ogólności liczbę boków wielokąta przez n, będzie powiérzchnia wielokąta $= n.AB \times \frac{1}{2} Sa'$. Lecz $n.AB$ stanowi obwód wielokąta który wyraziwszy ogólnie głoską O, tak że $O = n.AB$, tudzież prostopadłą Sa' nazwawszy r, będzie nareszcie powiérzchnia wielokąta $P = O \times \frac{1}{2} r$, co było do dowiedzenia. Powiérzchnia wielokąta foremnego równa się jeszcze prostokątowi lub równoległobokowi mającemu za podstawę obwód wielokąta a za wysokość połowę prostopadłéj ze środka na bok wielokąta spuszczonéj; albo mającemu za podstawę połowę obwodu a za wysokość rzeczoną prostopadłą. Albo powiérzchnia wielokąta foremnego równa się powiérzchni trójkąta, mającego za podstawę obwód wielokąta a za wysokość prostopadłą, o któréj tu mowa.

§. 125.

Twierdzenie. *Powiérzchnie dwóch wielokątów podobnych mają się do siebie w stósunku kwadratów z boków odpowiadających.*

Niech będą dwa wielokąty np. dwa pięciokąty ABCDE i *abcde fig. 140* podobne; ponieważ takie wielokąty mogą być rozebrane na jednakową liczbę trójkątów podobnych i podobnie ułożonych §. 65 przez prowadzenie przekątni, przeto według §. 121 mamy:

ponieważ trójkąt $ABC \backsim abc$ . . $ABC : abc = \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2$
podobnież $ACD \backsim acd$ . . $ACD : acd = \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2 = \overline{AD}^2 : \overline{ad}^2$
nareszcie $AED \backsim aed$ . . $AED : aed = \overline{AD}^2 : \overline{ad}^2$
skąd wypada że $ABC : abc = ACD : acd = AED : aed$
albo według własności stósunków równych §. 97 *Arytm.*

$$ABC + ACD + AED : abc + acd + aed = ABC : abc = ACD : acd = AED : aed.$$

Ale piérwsza summa stanowi powiérzchnią wielokąta ABCDE, druga zaś powiérzchnią wielokąta *abcde*, przeto powiérzchnia $ABCDE : abcde = ABC : abc = \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2 = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2 =$ i t. d. co mieliśmy dowieść.

Wniosek. W §. 66 dowiedliśmy, że proste jednakowo w podobnych wielokątach prowadzone są w stósunku dwóch odpowiadających boków, przeto łatwo z ostatniego twierdzenia wniesiemy, że *powiérzchnie wielokątów podobnych, mają się także do siebie w stósunku kwadratów z prostych jednymże sposobem w tych wielokątach poprowadzonych.*

§. 126.

Zobaczmy teraz jak wyrażenie *kwadrat* używane w Arytmetyce zamiast *druga potęga*, zaczerpniętém zostało z Geometryi i jak trzy prawdy tamże w §. 8, dowiedzione to jest

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

i $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ odpowiadają zupełnie wykreśleniu geometrycznemu.

Twierdzenie. *Kwadrat wystawiony na linii będącéj summą dwóch innych, składa się z kwadratu pierwszéj, więcej kwadratem z linii drugiéj i więcéj dwa razy wziętym prostokątem wystawionym na tychże dwóch prostych.*

Niech prosta AC będzie summą dwóch innych AB i BC *fig. 141,* wystawiwszy na niéj kwadrat ACED, weźmy AG=AB i poprowadźmy GI równoległą do AC, tudzież BF równoległą do AD. Tym sposobem kwadrat ACED podzielony będzie na cztéry części, t. j. ABHG, EFHI, DGHF i BCIH. Piérwsza z tych części jest kwadratem wystawionym na AB czyli na prostéj piérwszéj, bo AG=AB; druga jest kwadratem wystawionym na prostéj BC, gdyż

AD$=$AC, AG$=$AB, zatém AD$-$AG$=$AC$-$AB czyli DG$=$BC, tudzież HI$=$BC. Trzecia część DGHF jest prostokątem mającym podstawę GH$=$AB a wysokość DG$=$BC, przeto jego powierzchnia $=$AB$\times$BC. Ostatnia część t. j. BCIH jest także prostokątem mającym dwa wymiary*) t. j. podstawę BH$=$AG$=$AB a wysokość BC, przeto również jego powierzchnia $=$ AB$\times$BC; więc nareszcie kwadrat ACED$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2AB\times BC$ co inaczéj tak piszemy

$$(AB+BC)^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2AB\times BC.$$

Położywszy AB$=a$, BC$=b$, czyli zamieniwszy długości na liczby, mieć będziemy piérwszą z założonych prawd dowiedzioną.

§. 127.

Twierdzenie. *Na prostéj będącej różnicą dwóch innych, wystawiwszy kwadrat, ten składa się z kwadratu na piérwszéj, więcéj kwadratem na drugiéj prostéj wystawionym, mniéj dwomą prostokątami z piérwszéj przez drugą prostą.*

Niech prosta AB będzie różnicą dwóch innych AC i BC tak, że AB$=$AC$-$BC *fig. 142*, wystawiwszy na niéj kwadrat, potrzeba dowieść, że

$$(AC-BC)^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2AC\times BC$$

Na prostéj AC wystawmy kwadrat ACDE, weźmy AF$=$AB; przez punkt F poprowadźmy równoległą FH do AC, a przez punkt B równoległą BI do AE; nareszcie na prostéj EF wystawmy kwadrat EFLK. Prostokąt LGIK ma za podstawę LG$=$AC, bo FG$=$AB, FL$=$FE$=$BC, a za wysokość FE$=$BC, jego więc powiérzchnia $=$AC$\times$BC. Podobnież prostokąt BCDI ma za podstawę BI$=$AC a za wysokość BC, przeto jego powiérzchnia $=$AC$\times$BC. Cała figura ACDKLFA składa się jak widzimy raz z dwóch kwa-

*) Wymiarami (dimensiones) prostokąta nazywamy jego podstawę i wysokość czyli długość i szérokość i dla tego to wymierzanie powierzchni nazywamy często *Geometryją w dwóch wymiarach*, wymierzanie zaś objętości ciał *Geometryją w trzech wymiarach*, bo jak to na swém miéjscu zobaczymy, do wymierzenia każdego ciała użyć jeszcze musimy trzeciego wymiaru, t. j. grubości, lub głębokości, lub wysokości.

dratów t. j. ACDE i EFLK, drugi raz składa się z trzech części t. j. z kwadratu $ABGF = \overline{AB}^2$, prostokąta BCDI i prostokąta GIKL, które prostokąty są sobie równe, bo każdy z nich $= AC \times BC$, przeto kiedy

$ACDKLFA = ACDE + EFLK = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ iako téż
$ACDKLFA = ABGF + BCDI + GIKL = \overline{AB}^2 + AC \times BC +$
$AC \times BC = \overline{AB}^2 + 2AC \times BC$, jest téż $\overline{AB}^2 + 2AC \times BC =$
$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$, skąd $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC \times BC$; a że
$AB = AC - BC$, więc nareszcie
$(AC - BC)^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC \times BC$ jak założyliśmy.

Położywszy tu znowu $AC = a$, $BC = b$, mieć będziemy drugą z arytmetycznych prawd dowiedzioną.

§. 128.

Twierdzenie. *Prostokąt wystawiony na summie i różnicy dwóch prostych równa się różnicy kwadratów wystawionych na każdéj z tych prostych.*

Niechże będą dwie proste AB i BC *fig. 143*, na przedłużeniu prostéj AB weźmy $BD = BC$, tedy prosta $AD = AB + BC$, zaś $AC = AB - BC$, mamy dowieść że $AD \times AC$ czyli $(AB + BC)(AB - BC) = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$,

Na prostych AB i AC wystawmy kwadraty ABEF i ACGH, tudzież z punktu D poprowadźmy równoległą do AH aż do przecięcia się z przedłużoną HG w punkcie I; tedy prostokąt ADIH ma za podstawę $AD = AB + BC$ a za wysokość $AH = AC = AB - BC$, jego więc powierzchnia równa się $(AB + BC)(AB - BC)$. Ale ten prostokąt uważać można jako złożony z dwóch innych ABKH i BDIK to jest $(AB + BC)(AB - BC) = ABKH + BDIK$; z tych ostatni czyli $BDIK = HGLF$, gdyż $BK = AH = HG$, a $BD = BC = HF$, przeto $(AB + BC)(AB - BC) = ABKH + HGLF$.

Lecz dwa prostokąty ABKH i HGLF składają kwadrat ABEF skoro od niego odejmiemy GKEL, która figura jest kwadratem z BC, gdyż $GK = BC$, $GL = HE = BC$, więc nareszcie

$$(AB + BC)(AB - BC) = ABEF - GKEL = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$$

jak twierdzono.

Położywszy tu $AB = a$, $BC = b$, będziemy mieć trzecią i ostatnią prawdę dowiedzioną.

§. 129.

Dowiedźmy téż tu ściśle geometrycznie prawdy w §. 63 *wniosek* innym sposobem dowiedzionéj.

TWIERDZENIE. *W trójkącie prostokątnym kwadrat wystawiony na przeciwprostokątni, równa się summie dwóch kwadratów wystawionych na bokach przyległych kątowi prostemu.*

Niech będzie trójkąt ABC prostokątny przy B *fig. 144*, wystawiwszy na przeciwprostokątni AC kwadrat ACIH tudzież na bokach AB i BC przyległych kątowi prostemu kwadraty ABED i BCGF, potrzeba dowieść, że kwadrat ACIH$=$ABED$+$BCGF czyli jak zwyczajnie piszemy $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$. Na dowiedzenie téj prawdy, punkta D i C, A i G, B i H, B i I połączmy prostemi, tedy kwadrat ABED z trójkątem ACD uważać można jako stojące na jednéjże podstawie AD, przeto z wierzchołka kąta C przeciwległego podstawie w trójkącie ACD spuściwszy prostopadłą na tęż podstawę, ta padnie na jéj przedłużenie w punkcie K i będzie $CK = AB$, bo EC równoległa do DK; przeto trójkąt ACD z kwadratem ABED mają równe podstawy i wysokości; dlaczego według §. 120 powierzchnia tego trójkąta jest połową powierzchni kwadratu ABDE. Podobnież: uważając trójkąt ABH z prostokątem ALMH jako stojące na podstawie AH, wysokości ich są także równe bo BM jest równoległa do podstawy i prostopadła czyli wysokość trójkąta $BP = AL$; przeto również powierzchnia trójkąta ABH jest połową powierzchni prostokąta ALMH. Ale trójkąt ACD przystaje do trójkąta ABH według §. 23, bo AD i AC w trójkącie ACD równe są AB i AH w trójkącie ABH, tudzież kąt DAC zawarty między piérwszemi, równy jest kątowi BAH zawartemu między drugiemi bokami, gdyż każdy z nich złożony jest z kąta prostego DAB, LAH i kąta BAC obu kątom spólnego; powierzchnie przeto tych trójkątów są równe. A że ACD jest połową kwadratu ABED, a ABH połową prostokąta ALMH, przeto kiedy połowy są sobie równe, i całości muszą być równe; powierzchnia zatém kwadratu ABED równa się powierzchni prostokąta ALMH. Zupełnie tym samym sposobem dowiedziemy, że powierzchnia kwadratu BCGE równa się powierzchni prostokąta CLMI. A kiedy summa obu prostokątów składa kwadrat ACIH, zatém prawdą jest, że kwadrat ACIH = ABED + BCGF czyli raczéj $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, jak założyliśmy.

Wniosek 1. Z ostatniego zrównania wypada $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$, jako téż $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$, t. j. że w trójkącie prostokątnym kwadrat z boku przyległego kątowi prostemu, równa się kwadratowi z przeciwprostokątni zmniejszonemu kwadratem z drugiego boku przyległego kątowi prostemu.

Wniosek 2. Poprowadziwszy w kwadracie ABCD przekątnią AC *fig. 145*, ta podzieli kwadrat na dwa trójkąty prostokątne i równoramienne ABC i ADC, przeto $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AB}^2$, skąd wniesiemy, że kwadrat wystawiony na przekątni kwadratu, jest równy dwa razy wziętemu kwadratowi z boku danego kwadratu; co téż i naocznie pokazać można wykreśliwszy na przekątni kwadrat EFGH i prowadząc drugą przekątnią BD w kwadracie danym; wszystkie bowiem tym sposobem uformowane trójkąty są między sobą równe, a widocznie kwadrat ABCD zamyka ich cztéry, kwadrat zaś EFGH zamyka tych trójkątów ośm, zatém kwadrat drugi jest dwa razy większy od piérwszego.

Rozłożywszy powyższe zrównanie na proporcyją, będzie $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 = 2:1$, a z własności proporcyi geometrycznéj wypada $AC:AB = \sqrt{2}:1$. A że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, §. 43. *Arytm.*, zatém wniesiemy z téj proporcyi, że dwie proste AC i AB t. j. przekątnia i bok kwadratu są dwiema prostemi niespółmiernemi.

Wniosek 3. Dowiedliśmy, że kwadrat ABED *fig. 144* równa się prostokątowi ALMH, ten zaś prostokąt z kwadratem ACIH mają wysokość AH spólną, przeto ich powierzchnie mają się do siebie, jak podstawy t. j. kwadrat ACIH : prostokąta ALMH = AC : AL. A że w miejsce prostokąta ALMH można wziąść jemu równy kwadrat ABED, przeto

$ACIH:ABED = AC:AL$ albo raczéj $\overline{AC}^2:\overline{AB}^2 = AC:AL$ i podobnież
$ACIH:BCGF = AC:LC$ . . . . $\overline{AC}^2:\overline{BC}^2 = AC:LC$
t. j. *kwadrat z przeciwprostokątni ma się do kwadratu z jednego z przyległych boków kątowi prostemu, jak się ma przeciwprostokątnia do odcinka przyległego temu bokowi.*

Wniosek 4. Z poprzedzającego twierdzenia wypada także: ponieważ dwa ptostokąty ALMH i LCIM mają jednakowe podstawy t. j. LM, ich więc powierzchnie mają się do siebie jak wysokości AL i LC. A że te prostokąty równają się kwadratom ABED i BCGF, więc i powierzchnie dwóch ostatnich kwadratów mają się do siebie jak AL i LC t. j. $ABED:BCGF = AL:LC$ czyli raczéj $\overline{AB}^2:\overline{BC}^2 = AL:LC$, co wyrażając słowy znaczy: iż *kwadraty z przyległych boków kątowi prostemu w trójkącie prostokątnym, mają się do siebie jak odcinki przeciwprostokątni przyległe tymże bokom.*

Wniosek 5. Dowiedliśmy w §. 125, że powierzchnie dwóch wielokątów podobnych mają się do siebie jak kwadraty z boków odpowiadających, przeto wystawiwszy na trzech bokach trójkąta prostokątnego wielokąty podobne, wielokąt wystawiony na przeciwprostokątni, równa się summie wielokątów wystawionych na bokach przyległych kątowi prostemu. Nazwawszy bowiem powierzchnie tych trzech wielokątów przez M, N, P, gdzie P jest wielokątem na przeciwprostokątni, ponieważ AB, BC i AC są trzema bokami odpowiadającemi sobie w wielokątach podobnych, tedy $M:N = \overline{AB}^2:\overline{BC}^2$ skąd $M+N:M = \overline{AB}^2+\overline{BC}^2:\overline{AB}^2$. Ale także $M:P = \overline{AB}^2:\overline{AC}^2$, przeto łącząc te dwie proporcyje znajdziemy:
$M+N:P = \overline{AB}^2+\overline{BC}^2:\overline{AC}^2$; a że $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$, więc też $M+N = P$. Z proporcyi $M:P = \overline{AB}^2:\overline{AC}^2$ wypada także $P-M:M = \overline{AC}^2-\overline{AB}^2:\overline{AB}^2$. Ale $M:N = \overline{AB}^2:\overline{BC}^2$, przeto $P-M:N = \overline{AC}^2-\overline{AB}^2:\overline{BC}^2$. A że według wniosku 1. $\overline{AC}^2-\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$, zatém również $P-M = N$ t. j. wielokąt N jest różnicą powierzchni wielokątów P i M.

Uwaga 1. Ostatnie twierdzenie nosi nazwę Pitagoresa, ten bowiem wielki filozof i geometra w szóstym przed Chr.

wieku żyjący, takowe miał wynaleść; a jakkolwiek wszystkie twierdzenia Geometryi są ważne, bo jedna prawda na drugiéj spoczywa, to przecież PITAGORESA twierdzenie w całéj Geometryi jest może najważniejsze z powodu następstw, które z niego wypływają.

Uwaga 2. Porównawszy to twierdzenie z twierdzeniem w §. 63 dowiedzioném, przekonamy się, że jest zupełnie tém samém, co nam posłużyć może za cechę jego rzetelności, dwiema albowiem całkiem różnémi drogami przychodzimy do jednych i tychże samych prawd. Wypadki tu otrzymane z uważania powierzchni będąc zupełnie zgodnemi z wypadkami w §. 63 dowodzą nam téj prawdy, że równość kwadratu z przeciwprostokątni dwom kwadratom z przyległych boków kątowi prostemu w trójkącie prostokątnym, jest właściwie następstwem proporcyjonalności boków w trójkątach podobnych. I ta téż okoliczność jest godna uwagi, iż wnioskując z jakiego twierdzenia lub z kilku twierdzeń, natrafiamy często na prawdy już innym sposobem dowiedzione. To téż jest zaiste najwybitniejszą cechą pewności prawd geometrycznych, że łącząc je z sobą w jakikolwiek sposób, byle tylko rozumowania nasze oparte były na pewnych, już dowiedzionych lub skądinąd wiadomych zasadach, dochodzimy zawsze do wypadków prawdziwych. Inaczéj, gdyby prawdy geometryczne podległe były najmniejszéj niepewności, przez łączenie ich z sobą na wyprowadzenie innéj prawdy, małe nawet błędy w jeden wniosek nagromadzone, okazałyby błąd widoczny, a najpiękniejsza zgoda między rzeczonemi prawdami zamieniłaby się w pewne chaos wyjątków i wyjąteczków, ograniczeń, uwag, dodatków i t. d. zgoła zamieniłaby się w budowę, którąby lada wiatr w gruzy mógł zamienić.

§. 130.

TWIERDZENIE. *W trójkącie prostokreślnym spuściwszy prostopadłą z wierzchołka któregokolwiek kąta na bok przeciwległy, kwadrat z boku przeciwległego kątowi ostremu równa się summie kwadratów z dwóch innych, zmniejszonéj dwo-*

ma prostokątami z boku na który prostopadła pada, przez odcinek przyległy kątowi ostremu o którym mowa.

Niech będzie trójkąt ABC *fig. 146*, w którym kąt A jest ostry; z wierzchołka kąta B spuściwszy prostopadłą BD do AC, ta jak wiadomo paść może wewnątrz albo zewnątrz trójkąta ABC, według tego jak kąt C jest ostrym *fig. a,* lub rozwartym *fig. b.* Jeżeli pada wewnątrz jak na *fig. a*, tedy ponieważ $DC = AC - AD$, a według §. 127 mamy

$$\overline{DC}^2 = (AC - AD)^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2AC \times AD,$$

dodawszy z obu stron tego zrównania $\overline{BD}^2$, będzie

$$\overline{DC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2AC \times AD.$$

Lecz $\overline{DC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2$, tudzież $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$, zatém $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AC \times AD$, jak twierdzono.

Gdybyśmy zamiast A uważali kąt ostry C, tedy zupełnie tym samym sposobem znajdziemy

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC \times DC.$$

Jeżeli prostopadła pada zewnątrz trójkąta jak na *fig. b*, mamy również $CD = AD - AC$, a następnie według przytoczonego wyżéj §. $\overline{CD}^2 = (AD - AC)^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC \times AD$; a dodawszy podobnież po obu stronach $\overline{BD}^2$, będzie $\overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC \times AD$. Ale znowu $\overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2$ i $\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2$ według §. poprzedzającego, przeto zupełnie jak wyżéj jest

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC \times AD.$$

§. 131.

Twierdzenie. *W trójkącie rozwartokątnym, kwadrat wystawiony na boku przeciwległym kątowi rozwartemu jest mniejszy niż summa kwadratów z boków tenże kąt obejmujących; a spuściwszy z jednego z kątów ostrych prostopadłą na bok przeciwległy, przewyżka ta równać się będzie prostokątowi z boku, na który prostopadła pada, przez odcinek przyległy kątowi rozwartemu.*

Niech będzie trójkąt ABC *fig. 147* rozwartokątny przy A, z wierzchołka kąta B spuściwszy prostopadłą BD na bok AC, ta już nie możc paść wewnątrz ale zewnątrz trójkąta

§. 42 *d)*, mamy dowieść, że $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AC \times AD$. Ponieważ $CD = AC + AD$, więc według §. 126 jest $\overline{CD}^2 = (AC + AD)^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 + 2AC \times AD$. Dodawszy po obu stronach $\overline{BD}^2$ i uważając, że $\overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2$, tudzież $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$, otrzymamy nareszcie $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + 2AC \times AD$ co założyliśmy.*)

Uwaga. Porównawszy z sobą trzy ostatnie twierdzenia dostrzeżemy, że muszą być wypływem jednego ogólnego, które też w Trygonometryi poznamy. Rzeczywiście jedno z dwóch ostatnich jest ogólniejszém niż piérwsze, gdyż to ostatnie z jednego z pierwszych wyprowadzoném być może. Przypuściwszy bowiem, że kąt A jest prosty, prostopadła BD zmiesza się z bokiem BA i odcinek AD stanie się zero, a wtedy iloczyn $2AC \times AD = 0$ i wypadnie $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$ jak w pierwszém z rzeczonych twierdzeń. Przekonamy się również, że tylko w trójkącie prostokątnym summa kwadratów z dwóch boków jest równa kwadratowi z boku trzeciego; w razie bowiem, że kąt zawarty między temi dwoma bokami jest ostry, rzeczona summa jest większa, jeżeli zaś tenże kąt jest rozwarty, jest mniejsza niż kwadrat z boku przeciwległego.

§. 132.

Twierdzenie. *W trójkącie prostokréślnym podzieliwszy jeden z jego boków na dwie części równe i punkt podziału złączywszy prostą z wierzchołkiem kąta przeciwległego, summa kwadratów z dwóch innych boków, równa się podwójnemu kwadratowi z prostéj dzielącéj, więcéj podwójnym kwadratem z połowy podzielonego boku.*

Niech będzie trójkąt ABC *fig. 148*, podzieliwszy bok jego AC na dwie równe części w punkcie D i tenże punkt złączywszy z wierzchołkiem kąta B prostą BD, potrzeba dowieść, że $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{BD}^2$. Na ten koniec spu-

---

*) Dwa ostatnie twierdzenia można także całkiem geometrycznie dowieść nie używając rachunku, jak to w czasowém piśmie przez Grunerta w Greifswald pod tytułem *„Archiv der Mathematik und Physik“* wydawaném, w Tomie 23 uczyniłem.

ściwszy prostopadłą BE do AC, według dwóch poprzedzających twierdzeń mamy

w trójkącie ABD...... $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 - 2AD \times DE$,

w trójkącie zaś BDC...... $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 + 2DC \times DE$,

albo, ponieważ $DC = AD$,

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 + 2AD \times DE$$

Dodając pierwsze zrównanie z trzeciém, znajdziemy

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{BD}^2 + 2\overline{AD}^2$$

co było do dowiedzenia.

Wniosek. W równoległoboku lub prostokącie, przekątnie dzielą się wzajemnie na dwie części równe, przeto *fig. 149*

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2$$

jako też $\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{DE}^2$

skąd $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = 4\overline{AE}^2 + 4\overline{BE}^2$

Lecz $4\overline{AE}^2 = 2AE \times 2AE = AC \times AC = \overline{AC}^2$,

jako też $4\overline{BE}^2 = 2BE \times 2BE = BD \times BD = \overline{BD}^2$,

przeto $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$ t. j. *summa kwadratów wystawionych na cztérech bokach równoległoboku równa się dwom kwadratom wystawionym na przekątniach.*

§. 133.

Twierdzenie. *W trójkącie prostokreślnym wystawiwszy na dwóch jego bokach równoległoboki jakiekolwiek i boki ich równoległe do boków trójkąta przedłużywszy aż do przecięcia się z sobą, potém złączywszy ten punkt przecięcia się z najbliższym wierzchołkiem kąta w trójkącie danym prostą i nakoniec wystawiwszy na trzecim boku trójkąta równoległobok, dając mu za drugi bok przyległy owę prostą równolegle do niéj położony, summa dwóch piérwszych równoległoboków równa się trzeciemu.*

Jeżeli w trójkącie ABC *fig. 150* na bokach AB i BC wystawimy dwa jakiekolwiek równoległoboki lub prostokąty, lub nareszcie kwadraty AFGB i BCDE, boki ich FG i DE przedłużymy aż do przecięcia się w punkcie O, punkt ten złączymy z wierzchołkiem najbliższego kąta B prostą OB, a nareszcie na trzecim boku AC wystawimy równoległobok ACIH mający za drugi bok przyległy $AH = OB$ i równoległy do OB, tedy mamy dowieść, że $AFGB+BCDE=ACIH$. Na dowiedzenie tego, boki HA i IC równoległoboku na AC wystawionego, przedłużmy aż do przecięcia się z bokami FG i DE równoległoboków piérwszych w punktach K i L, i te punkta połączmy prostą KL. Ponieważ $KO=AB$, $OL=BC$ i kąt $O=B$, zatem trójkąt KOL przystaje i jest równy trójkątowi ABC, a następnie kąt $OKL=BAC$, kąt $OLK=BCA$, i KL równoległa od AC. Równoległobok $AFGB=AKOB$, jako też równoległobok $ACDE=BCLO$ według §. 119.

przeto $AFGB+BCDE=AKOB+BCLO$.

Lecz pięciokąt $AKOLC=HABCI$ bo $AC=HI$, $AK=BO=AH$, $KO=AB$, $LO=BC$ i $LC=BO=CI$, tudzież kąty zawarte między odpowiedniemi bokami są sobie równe t. j. kąt $O=B$, kąt $OKA=BAH$, bo każdy z nich składa się z dwóch innych sobie równych, jako to: kąt $OKA=OKL+AKL=BAC+CAH=BAH$ i t. d. dwa przeto rzeczone pięciokąty przystają do siebie, a następnie ich powierzchnie są sobie równe.

Ale ponieważ $AKOLC-ABC=AKOB+BCLO$,

zaś $HABCI-ABC=ACIH$

zatém $AKOB+BCLO=ACIH=AFGB+BCDE$ *).

§. 134.

Zagadnienie 1. *Wykreślić kwadrat któregoby powierzchnia równała się powierzchni dwóch kwadratów danych.*

Rozwiązanie. Nakreśliwszy kąt prosty, na jedném jego ramieniu poczynając od wierzchołka, odcina się bok jednego z danych kwadratów, a na drugiém bok drugiego, prosta łącząca te dwa punkta czyli przeciw prostokątnia, będzie bokiem szukanego kwadratu na mocy §. 129.

Jeżeliby potrżeba wykreślić kwadrat dwa razy większy od danego, tedy na każdém z ramion kąta prostego odcina

---

*) Na zasadzie tego ogólnego twierdzenia, dowodzi się łatwo twierdzenie §. 129, który dowód podałem w czasowém piśmie *„Archiv der Mathematik und Physik herausgegeben von Prof.* Grunert. *Theil XXII.* §. *354.*

się jak wprzód, bok kwadratu danego, a prosta łącząca te dwa punkta będzie bokiem kwadratu dwa razy większego.

Albo: w danym kwadracie poprowadziwszy przekątnią, ta według §. 129 *wniosek 2* będzie bokiem kwadratu dwa razy większego.

§. 135.

ZAGADNIENIE 2. *Wykreślić kwadrat 2, 3, 4, 5, 6 . . . n razy większy od kwadratu danego.*

Rozwiązanie. Niech danym kwadratem będzie ABCD *fig. 151,* poprowadziwszy przekątnią BD, ta będzie bokiem 2 razy większego kwadratu. Tę przekątnią odciąwszy na prostéj AE od A do 2 i ten punkt 2 złączywszy z punktem B prostą B2, ta będzie bokiem kwadratu 3 razy większego; albowiem w trójkącie prostokątnym BA2 mamy $\overline{B2}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{A2}^2$. Lecz $\overline{A2}^2 = 2\overline{AB}^2$, przeto $\overline{B2}^2 = 3\overline{AB}^2$. Jeżeli teraz przeciwprostokątnią B2 odetniemy od A do 3 i ten punkt 3 złączymy z punktem B prostą B3, będzie ona bokiem 4 razy większego kwadratu; bo w trójkącie prostokątnym AB3 jest $\overline{B3}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{A3}^2$. A że $A3 = B2$ zaś $\overline{B2}^2 = 3\overline{AB}^2$, więc téż także $\overline{A3}^2 = 3\overline{AB}^2$, a następnie $\overline{B3}^2 = 4\overline{AB}^2$ i t. d. Tym sposobem wykreślić możemy kwadrat tyle razy większy od danego ile chcemy, lub ile potrzeba wymagać będzie; albo mówiąc ogólnie, dany kwadrat możemy powiększyć w postępie różnicowym, którego wyrazy są liczbami naturalnego porządku 1, 2, 3, 4 . . . . Albo tak: niechby potrzeba wykleślić kwadrat 7 razy większy od danego; pociągnąwszy prostą AB nieograniczonéj długości, odetnijmy na niéj 7 razy bok kwadratu danego *fig. 152,* potém na prostéj A7 wykreśliwszy półokręgu i z punktu 1 wyprowadziwszy prostopadłą do AB aż do przecięcia się z okręgiem w punkcie C, cięciwa łącząca tenże punkt C z punktem A jest bokiem kwadratu 7 razy większego niż dany; gdyż według §. 129 *wniosek* 3, jest $\overline{AC}^2 = AB \times A1$, zaś prostokąt $AB \times A1$ jest widocznie 7 razy większy od danego kwadratu.

§. 136.

Zagadnienie 3. *Wykreślić kwadrat, któregoby powierzchnia była różnicą dwóch kwadratów danych.*

Rozwiązanie. Nakreśliwszy kąt prosty, na jednym z jego ramion odcina się bok kwadratu mniejszego *np.* od A do B *fig. 153,* wziąwszy potém w cyrkiel bok kwadratu większego i z punktu B zakreśliwszy łuk przecinający drugie ramię w punkcie C, będzie AC bokiem szukanego kwadratu, gdyż $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2$ §. 129 *wniosek 1.*

§. 137.

Zagadnienie 4. *Wykreślić kwadrat równy co do powierzchni danemu prostokątowi.*

Rozwiązanie. Na większym boku BC prostokąta danego *fig. 154,* jako na średnicy wykreśliwszy półokręgu i na téj średnicy od punktu B odciąwszy $BE = AB$ t. j. drugi bok przyległy piérwszemu, z punktu E wyprowadziwszy prostopadłą EF do BC aż do przecięcia się z okręgiem, cięciwa BF jest bokiem żądanego kwadratu; bo według §. 129 *wniosek 3* jest $\overline{BF}^2 = BC \times BE = BC \times AB$.

§. 138.

Zagadnienie 5. *Mając dany równoległobok, wykreślić kwadrat równy mu co do powierzchni.*

Rozwiązanie. Niech będzie dany równoległobok ABCD *fig. 155,* którego podstawa AD a wysokość BE; chcąc wykreślić kwadrat równy mu co do powierzchni, potrzeba znaleść bok tegoż kwadratu. Na ten koniec do podstawy AB i wysokości BE równoległoboku, szukajmy średniéj geometrycznie proporcyjonalnéj według §. 99, a ta będzie bokiem kwadratu równego równoległobokowi. Nazwawszy bowiem tę średnią geometrycznie proporcyjonalną MN, z wykreślenia mamy

$$AD : MN = MN : BE$$

skąd $\overline{MN}^2 = AD \times BE$. A że $AD \times BE$ jest miarą powierzchni danego równoległoboku, zaś $\overline{MN}^2$ miarą powierzchni kwadratu wystawionego na MN, przeto dwie te powierzchnie są sobie równe jak żądano.

Lub też: zamieniwszy wprzód równoległobok na prostokąt, potém zapomocą poprzedzającego zagadnienia zamienia się prostokąt na kwadrat i tym sposobem dany równoległobok zamienimy na kwadrat równy mu co do powierzchni.

§. 139.

Zagadnienie 6. *Na danéj prostéj wystawić prostokąt równy co do powierzchni prostokątowi danemu.*

Rozwiązanie. Niech dwoma wymiarami danego prostokąta będą proste M i N, tudzież prostą daną P, potrzeba na téj ostatniéj wystawić prostokąt, któregoby powierzchnia równała się powierzchni prostokąta danego. Do prostéj danéj P i do dwóch wymiarów prostokąta danego M i N, szukajmy czwartéj geometrycznie proporcyjonalnéj według §. 75; tę znalazłszy, oznaczmy ją przez X, tedy ponieważ według tego wykreślenia jest $P:M=N:X$ skąd $P\times X=M\times N$, a iloczyn $M\times N$ wyraża powierzchnią prostokąta danego i jest równy iloczynowi $P\times X$, który wyraża powierzchnią prostokąta wystawionego na P i X, zatém te prostokąty są sobie równe.

§. 140.

Zagadnienie 7. *Dany trójkąt zamienić na kwadrat równy mu co do powierzchni.*

W tém zagadnieniu chodzi jedynie o znalezienie boku kwadratu równającego się trójkątowi co do powierzchni. Niechże więc danym trójkątem będzie ABC *fig. 146*, którego podstawą AC a wysokość BD. Dla znalezienia boku żądanego kwadratu, do podstawy trójkąta AC i połowy wysokości BD, albo też do połowy podstawy AC i do wysokości BD szukajmy średniéj geometrycznie proporcyjonalnéj według §. 99; tę nazwawszy X,

ponieważ $AC:X=X:\frac{1}{2}BD$ skąd $X^2=AC\times\frac{1}{2}BD$
albo $\frac{1}{2}AC:X=X:BD$ skąd $X^2=\frac{1}{2}AC\times BD$

więc powierzchnia kwadratu wystawionego na prostéj X równa się powierzchni danego trójkąta.

Uwaga. Jak skoro więc umiéć będziemy przerobić każdy wielokąt prostokreślny na trójkąt równy mu co do powierzchni, przerobimy téż tenże wielokąt na kwadrat mający powierzchnią równą powierzchni wielokąta.

§. 141.

ZAGADNIENIE. 8. *Wykreślić prostokąt równający się co do powierzchni danemu kwadratowi, a któregoby summa lub różnica dwóch wymiarów t. j. dwóch jego przyległych boków równała się prostéj danéj.*

Rozwiązanie. Niech prostą daną będzie MN *fig. 156*, i niech naprzód ta prosta wyraża summę dwóch wymiarów szukanego prostokąta, bokiem danego kwadratu niech będzie prosta *mn*, tedy na prostéj MN jako na średnicy wykreśliwszy okrąg koła i z punktu M wyprowadziwszy do MN prostopadłą $MP = mn$, tudzież przez punkt P poprowadziwszy równoległą PR do MN aż do przecięcia się z okręgiem koła w punktach Q i R, a nareszcie z punktów Q i R spuściwszy prostopadłe QO i RT do MN, dwoma wymiarami prostokąta szukanego będą MO i ON albo téż TN i MT. Albowiém $MO \times ON = \overline{QO}^2 = \overline{MP}^2 = \overline{mn}^2$ tudzież $MO + ON = MN$. Również $TN \times MT = \overline{RT}^2 = \overline{MP}^2 = \overline{mn}^2$ zaś $TN + TM = MN$.

Uwaga. Zastanowiwszy się nad rozwiązaniem tego zagadnienia, dostrzeżemy, że tylko w przypadku, gdy $MP < SL$ czyli $mn < SM$ albo raczéj $mn < \frac{1}{2}MN$, a przynajmniéj $mn = \frac{1}{2}MN$ jest podobném do rozwiązania, co nam dowodzi, że *największy prostokąt jaki wystawić możemy na dwóch częściach prostéj danéj, jest to kwadrat wystawiony na połowie tejże prostéj.*

Jeżeli prosta MN wyraża różnicę między dwoma wymiarami prostokąta mającego się równać kwadratowi danemu, tedy zrobiwszy wykreślenie jak wyżéj, przez punkta P i S poprowadźmy średnicę PK przecinającą okrąg koła w punktach I i K, natenczas dwoma wymiarami żądanego prostokąta będą proste PK i PI. Albowiem według §. 91 $PK \times PI = \overline{PM}^2 = \overline{mn}^2$, tudzież $PK - PI = IK = MN$.

To zagadnienie przeciwnie, w każdym przypadku jakiekolwiek są dane MN i *mn* jest podobném do rozwiązania.

§. 142.

Te kilka zagadnień, a szczególniéj zagadnienie §. 140 pokazują już dowodnie, że cała nauka o powierzchniach figur prostokreślnych spoczywa na znajomości powierzchni trójkąta, którą znowu, jak wiadomo wyprowadziliśmy z powierzchni równoległoboku albo w szczególnym przypadku z powierzchni prostokąta. Aże tak trójkąt jako téż i prostokąt umiemy zamienić na kwadrat i wzajemnie, przeto gdybyśmy jeszcze umieli zamienić każdą figurę prostokreślną na trójkąt, potrafilibyśmy tym sposobem każdą takąż figurę zamienić na kwadrat równy mu co do powierzchni i twierdzenie w §. 15 wyrzeczone, że trójkąt jest podstawą całéj Geometryi, byłoby usprawiedliwione. Usiłujmyż więc przekonać się dostatecznie o téj prawdzie, że każdy wielokąt zamienić można na trójkąt rozwiązując następujące ogólne,

Zagadnienie 9. *Dany wielokąt zamienić na inny równy mu co do powierzchni, a któryby miał mniéj o jeden bok niż wielokąt dany.*

Rozwiązanie. Niech danym wielokątem będzie np. sześciokąt ABCDEF *fig. 157*, z któregokolwiek wierzchołka np. z B poprowadźmy przekątnią ale tak, iżby z jednéj jéj strony pozostał tylko jeden kąt wielokąta, a z drugiéj wszystkie inne oprócz dwóch przekątnią złączonych; (w naszym przeto sześciokącie przekątnią BD albo BF,) przez pozostały wierzchołek kąta C poprowadziwszy prostą równoległą do przekątni co dopiero poprowadzonéj, jeden z następnych boków wielokąta, jak tu AB lub ED przedłużmy aż do spotkania się z tąż równoległą w punkcie G, tedy widzimy, że trójkąt BCD$=$BGD, bo stoją na jednéjże podstawie a wierzchołki mają na prostéj równoległéj do podstawy, są więc sobie równe, wziąwszy zatém za BCD trójkąt BGD, widzimy oczywiście, że sześciokąt ABCDEF zamienia się tym sposobem na pięciokąt ABGEF t. j. wielokąt mający o jeden bok mniéj niż dany, a wszelako jemu równy co do powierzchni

Ten nowy wielokąt podobnymże sposobem zamieniając na inny o jeden znowu mniéj mający boków, prowadząc przekątnią AE i zamiast trójkąta AFE biorąc trójkąt AHE, otrzymamy w naszym przypadkn czworokąt BGEH; nareszcie w tym czworokącie prowadząc przekątnią GH i równoległą EI, zamienimy tenże na trójkąt BGI równy co do powierzchni sześciokątowi danemu.

Z poprzedzającego postępowania przekonywamy, się że o jakkolwiek wielkiéj liczbie boków byłby wielokąt dany, powtarzając ciągle jedno i tożsamo działanie, przyjdziemy zawsze w końcu do trójkąta równającego się temu wielokątowi; a zatém każdy wielokąt umiemy zamienić na trójkąt a następnie według §. 140 na kwadrat. Ale przy zamianie jednych figur na drugie, często przydawane bywają (szczególniéj zdarza się to w praktyce) osobne warunki, którym zadość uczynić należy, przeto tu jeszcze o takich przypadkach nieco powiemy, przywodząc najczęściéj wydarzające się zagadnienia. Tu atoli najwięcéj mieć potrzeba na baczności §. 120. Zatrudnijmy się naprzód zamianą trójkątów jednych na drugie.

§. 143.

Jeżeli danego trójkąta podstawa jest AC a wysokość BD, zaś innego mającego się równać piérwszemu też wymiary są *ac* i *bd*, tedy skoro powierzchnie tych dwóch trójkątów mają być równe, mieć powinniśmy $AC \times \frac{1}{2}BD = ac \times \frac{1}{2}bd$ czyli $AC \times BD = ac \times bd$. W zrównaniu tém są cztéry ilości, dwie znane AC i BD a dwie nieznane *ac* i *bd*, nie może więc być w żaden inny sposób rozwiązaném, dopóki albo jedna z nieznanych niebędzie daną, lub przez przydanie jakiego warunku za znaną uważaną. Dla tego to zagadnienie „*wystawić trojkąt równy danemu co do powierzchni i którybv miał podstawę albo wysokość równą danemu trójkątowi*“ jest zupełnie oznaczoném, albowiem w powyższém zrównaniu jedna tylko nieznana zostaje, na którą otrzyma się zaraz ważność, lub téż zapomocą wykreślenia znajdzie się *ac* lub *bd*. Rozłożywszy to zrównanie na proporcyją, mamy

$$AC : ac = bd : BD$$

ta proporcyja uczy nas, że *wysokości dwóch trójkątów równych* *co do powierzchni, są w stósunku odwrotnym ich podstaw.* W każdym więc przypadku czyli będzie dane *ac* czyli *bd*, rozumie się oprócz AC i BD, zawsze zagadnienie sprowadza się do znalezienia czwartéj geometrycznie proporcyjonalnéj do trzech prostych danych.

Zagadnienie 10. *Dany trójkąt zamienić na inny równy mu co do powierzchni a wierzchołek jego żeby się znajdował na jednym z boków danego trójkąta lub na przedłużeniu tegoż boku, tudzież żeby oba trójkąty miały jeden kąt spólny.*

Rozwiązanie. Niechże danym trójkątem będzie ABC *fig. 158*, potrzeba go zamienić na inny, któryby miał z piérwszym kąt A spólny a wierzchołek drugiego kąta na boku AB w punkcie D. Na ten koniec złączywszy punkt D, z C prostą DC i przez punkt B poprowadziwszy inną prostą do tamtéj równoległą aż do przecięcia się z przedłużonym bokiem AC w punkcie E, nareszcie poprowadzona prosta DE zamknie trójkąt ADE żądany; trójkąt bowiem BCD = CDE jako na jednéj podstawie DC stojące i mające wierzchołki B i E na równoległéj BE do podstawy BC.

Gdyby się wierzchołek żądanego trójkąta miał znajdować na przedłużeniu boku AB np. w punkcie D', wykreślenie zupełnie jest toż samo, bo złączywszy znowu punkt D' z C prostą D'C i przez B poprowadziwszy do niéj równoległą BE' aż do przecięcia się z bokiem AC w punkcie E', a nareszcie prostą D'E', będzie trójkąt AD'E' = ABC.

§. 144.

Zagadnienie 11. *Zamienić dany trójkąt na inny równy mu co do powierzchni i któregoby wierzchołek jednego z kątów znajdował się na powierzchni trójkąta danego a bok jemu przeciwległy na boku danego trójkąta.*

Rozwiązanie. Niech znowu będzie trójkąt ABC *fig. 159*, który mamy zamienić na inny mający wierzchołek jednego z kątów w punkcie D t. j. wewnątrz trójkąta danego, a bok jemu przeciwległy *np.* na boku AC. Punkt D złączywszy z punktami A i C prostemi AD, DC i przez punkt B poprowadziwszy do tych prostych równoległe aż do przecięcia się z przedłużonym bokiem AC w punktach E i E', punkt D złączony z temi ostatniemi prostemi DE i DE', te zamkną trójkąt EDE' równy co do powierzchni trójkątowi ABC, co łatwo dowieść, prowadząc prostą DB. Albowiem trójkąt ADE= ABD tudzież trójkąt DCE' = DBC.

§. 145.

Zagadnienie 12. *Dany trójkąt zamienić na inny równy mu co do powierzchni, a któregoby wierzchołek jednego z kątów leżał zewnątrz trójkąta danego.*

Rozwiązanie. Niechże jeszcze będzie trójkąt ABC *fig.* 160, który chcemy przerobić na inny mający swój wierzchołek w punkcie D leżącym zewnątrz trójkąta danego. Z punktu D poprowadziwszy równoległą do AC aż do przecięcia się z jednym z dwóch innych boków trójkąta np. z przedłużonym bokiem AB w punkcie D', zamieńmy trójkąt ABC na inny mający wierzchołek w punkcie D' §. 143 t. j. na trójkąt AD'E, a złączywszy punkt D z końcami podstawy A, E nowego trójkąta, otrzymamy żądany trójkąt ADE, bo ABC= AD'E zaś AD'E = ADE.

Uwaga. Gdyby w trzech ostatnich przypadkach dodany jeszcze był warunek, iżby podstawa nowego trójkąta wychodziła od innego punktu, a zresztą leżała w kierunku podstawy danego trójkąta, dosyćby było przenieść znalezioną podstawę od danego punktu w kierunku podstawy danego trójkąta. I tak niechby w ostatniém zagadnieniu podstawa żądanego trójkąta miała się poczynać w punkcie A', tedy wziąwszy znalezioną AE w cyrkiel i przeniósłszy w kierunku AC od A' do E', trójkąt A'DE' będzie żądanym.

§. 146.

Zagadnienie 13. *Dany trójkąt zamienić na trójkąt rownoramienny równy danemu co do powiérzchni.*

Rozwiązanie. Niech będzie trójkąt ABC *fig. 161,* który chcemy zamienić na równoramienny mający powiérzchnią równą z danym. W tém zagadnieniu mogą być dwa przypadki t. j. albo jest dana odległość wiérzchołka trójkąta równoramiennego a szukamy podstawy, albo téż dana jest jego podstawa a szuka się wysokości.

W piérwszym przypadku ze środka podstawy E danego trójkąta wyprowadziwszy prostopadłą, odcinamy na niéj od E do D odległość wiérzchołka daną. Z punktu B prowadzi się równoległą BD' do AC aż do przecięcia się z prostopadłą ED, a łącząc punkt D' z końcami podstawy A i C prostemi AD' i CD', zamienimy tym sposobem trójkąt ABC na równoramienny AD'C. Złączywszy nareszcie punkt D z A i C prostemi AD i CD i przez punkt D', poprowadziwszy proste D'F i D'G równoległe do piérwszych i punkt D połączywszy z punktami F i G, otrzymamy żądany trójkąt. Jest bowiem jak wyżéj ABC=AD'C, zaś według poprzedzającego zagadnienia trójkąt AD'C=FDG, a nawet widoczną jest rzeczą, że za trójkąt AD'F można wziąść trójkąt FDD', zaś za trójkąt D'GC, trójkąt DD'G, więc trójkąt AD'C=FDG.

W drugim przypadku, jeżeli podstawa mającego się znaleść trójkąta równoramiennego jest daną, zrobiwszy toż samo wykreślenie dla zamienienia trójkąta ABC na AD'C od punktu E t. j. od środka podstawy trójkąta danego odcina się w jednę i drugą stronę EF=EG= połowie podstawy danéj, punkta F i G złączywszy z punktem D' prostemi D'F, D'G, przez punkt A prowadzi się prosta równoległa do D'F, albo przez punkt C prosta równoległa do D'G, a każda z nich naznaczy na prostopadłéj z punktu E wyprowadzonéj punkt D, a proste AD i CD łączące tenże z punktami A i C, zamkną żądany trójkąt ADC; ostatnie bowiem równoległe albo jedna z nich wyznacza wysokość szukanego trójkąta.

Jeżeli ani jedno ani drugie nie jest daném ale ogólne żądanie zamienienia trójkąta jakiegokolwiek na równoramienny, wtedy przyjąwszy podstawę dowolną, szuka się wysokości. To uskutecznia się najłatwiéj w następujacy sposób:

Niech będzie do zamienienia trójkąt ABC *fig. 162*, którego wysokość BD; od punktu D ku C odcinamy DE=AD i prostą AE uważamy za podstawę szukanego trójkąta. Ponieważ powiérzchnia trójkąta $ABC=\frac{AC\times BD}{2}$, nazwawszy wysokość szukanego przez X, jego powiérzchnia będzie $\frac{AE\times X}{2}$, a następnie $\frac{AE\times X}{2}=\frac{AC\times BD}{2}$ czyli $AE\times X=AC\times BD$ skąd $AE:AC=BD:X$, z któréj proporcyi czytamy, że wysokość szukanego trójkąta jest czwartą geometrycznie proporcyjonalną do jego podstawy tudzież podstawy, i wysokości danego. Żeby ją więc wykreślić, bierze się $DF=AC$ i $DG=AE$. Punkta B i G łączy prostą BG a przez punkt F prowadzi się równoległą FH do BG, która naznaczy wysokość DH trójkąta szukanego. Łącząc nareszcie punkt H z punktami A i E, otrzymamy żądany trójkąt; gdyż w trójkącie HDF mamy $DG:DF=BD:HD$ czyli $AE:AC=BD:HD$ więc $HD=X$ jest wysokością trójkąta równoramiennego.

§. 147.

Zagadnienie 14. *Dany trójkąt zamienić na inny równoboczny równy danemu co do powiérzchni.*

Rozwiązanie. Niech danym trójkątem będzie ABC, ten według poprzedzającego zagadnienia zamieniony na trójkąt równoramienny, niech wyda trójkąt AHE *fig. 163.* Starajmy się teraz ten ostatni zamienić na trójkąt równoboczny równy mu co do powiérzchni. Na ten koniec z wiérzchołka kąta H spuśćmy prostopadłą HD. Na podstawie AE wystawmy trójkąt równoboczny AFE §. 31, *uwaga 3;* potém na wysokości HD jako na średnicy nakreślmy półokręgu, a wyprowadziwszy z punktu F prostopadłą do HD aż do przecięcia się z okręgiem w punkcie G i z punktu D jako ze środka koła promieniem DG zakreśliwszy łuk, ten naznaczy na wysokości HD punkt K, przez który poprowadziwszy równoległe od AF i FE aż do przecięcia się z przedłużoną podstawą AE w punktach L i M otrzymamy trójkąt LKM żądany; czego tak dowodzimy: trójkąt $LKM \backsim AFE$, przeto

$$LKM:AFE=\overline{KD}^2:\overline{FD}^2=\overline{DG}^2:\overline{FD}^2.$$

Lecz $\overline{DG}^2=HD\times FD$ §. 129, przeto

$$LKM:AFE=HD\times FD:\overline{FD}^2=HE:FD.$$

Ale trójkąt AFE z trójkątem AHE stoją na jednéjże podstawie, mają się więc do siebie jak ich wysokości t. j.

$$AFE : AHE = FD : HD$$

składając więc dwie ostatnie proporcyje, znajdziemy $LKM : AHE = HD : HD$. A jako $HD = HD$, tak téż trójkąt $LKM = AHE$, co było do okazania.

Uwaga. Ponieważ według §. 142 umiemy zamienić każdy wielokąt na trójkąt, ten zaś według teraźniejszego zagadnienia na trójkąt równoboczny, więc każdy wielokąt można zamienić na trójkąt równoboczny równy mu co do powiérzchni.

§. 148.

Często téż w praktyce wydarza się potrzeba zamienienia danego trójkąta na inny równy mu co do powiérzchni, ze zmianą kierunku jednego z jego boków. Abyśmy poznali jak sobie w tym przypadku postąpić mamy, weźmy chociaż jedno

ZAGADNIENIE 15. *Dany trójkąt zamienić na inny równy mu co do powiérzchni i w którymby kierunek jednego z jego boków był zmieniony.*

Rozwiązanie. Niech będzie trójkąt ABC *fig. 164* dany, i niech prosta CD wskazuje kierunek, w jakim np. bok nowego trójkąta zastępujący kierunek boku BC iść powinien. Przedłużywszy AB bok danego trójkąta aż do przecięcia się z danym kierunkiem w punkcie D, na prostéj AD jako na średnicy wykreśla się półokręgu, a wyprowadziwszy z punktu B prostopadłą do AD aż do przecięcia się z okręgiem w punkcie E, z punktu A jako ze środka koła promieniem AE zakreśla się łuk przecinający AD w punkcie F; nareszcie przez punkt F prosta FG równoległa do danego kierunku, zamknie nowy trójkąt AFG równy co do powiérzchni danemu ABC. Dowód rzetelności tego rozwiązania jest nader łatwy; albowiem według §. 122 mamy:

$$ABC : AFG = AC \times AB : AF \times AG = AC \times AB \times AF : \overline{AF}^2 \times AG$$

Lecz $\overline{AF}^2 = \overline{AE}^2 = AD \times AB$, przeto $ABC : AFG$

$$= AC \times AB \times AF : AD \times AB \times AG = AC \times AF : AD \times AG.$$

12.

Prosta FG jest równoległa do DC, przeto AC:AG=AD:AF, skąd AC×AF=AD×AG a zatém i trójkąt AFG=ABC.

§. 149.

Jak każdy wielokąt można zamienić na trójkąt, tak wzajemnie każdy trójkąt zamienić można na wielokąt. Nad tém atoli zagadnieniem nie będziemy się zatrzymywać, bo ciekawi znajdą w dziełach, szczególniéj praktyce poświęconych, tak te jako téż i poprzednio rozwiązane. Wszelako zobaczmy przynajmniéj, jak się zamienia trójkąt na trapez i to tylko w szczególnym przypadku, rozwiązując następujące

Zagadnienie *16. Dany trójkąt zamienić na trapez równy mu co do powiérzchni i któryby miał podstawę tęż samą jak trójkąt, jeden z boków nierównoległych w kierunku boku trójkąta, drugi zaś w kierunku danym.*

Rozwiązanie. Niechby potrzeba zamienić trójkąt ABC *fig. 165* na trapez równy mu co do powiérzchni i któregoby podstawą była prosta AC, jeden z boków nierównoległych iżby przyszedł w kierunku boku AB a drugi w kierunku danym oznaczonym np. przez prostą CK. W tém zagadnieniu cała rzecz chodzi o znalezienie na boku AB punktu D, przez któryby prowadzona równoległa do AC zamkła z częściami boków AB i CK trapez którego żądamy. Dla wynalezienia tego punktu poprowadźmy BE równoległą do danego kierunku CK, na AC jako na średnicy wykreślmy półokręgu i z punktu E wyprowadźmy EF prostopadłą do AC aż do przecięcia się z okręgiem koła; potém z punktu C jako ze środka koła promieniem CF zakreślmy łuk przecinający AC w punkcie G i nareszcie przez punkt G poprowadźmy GD równoległą do CK, ta naznaczy na AB punkt szukany D, przez który poprowadzona równoległa do AC aż do przecięcia się z kierunkiem CK w punkcie I, zamknie trapez ADIC żądany. Aby dowieść, że ten trapez równa się co do powiérzchni danemu trójkątowi ABC, kierunkową prostą przedłużmy aż do przecięcia się z przedłużonym bokiem AB w punkcie K, tedy naocznie widzimy, iż aby z trójkąta ABC przejść do trapezu ADIC, dosyć dowieść, że trójkąt $DKI = BKC$, bo na miejsce trójkąta DBH ma przyjść trójkąt HIC; figura zaś dokładnie wskazuje, iż odjąwszy od trójkąta AKC trójkąt BKC, pozostanie trójkąt ABC, odjąwszy zaś od tegoż samego trójkąta trójkąt DKI, pozostanie trapez ADIC; jeżeli więc rzeczone dwa trójkąty są równe co do powiérzchni, reszty pozostałe będą równe. Powiérzchnie trójkątów DKI i BKC jako mających kąt K spólny, mają się do siebie jak iloczyny z boków kąt ten obejmujących §. 122 t. j. $DKI : BKC = DK \times KI : BK \times KC$. Jeżeli więc dowiedziemy, że $DK \times KI = BK \times KC$, tém samém dowiedziemy równości rzeczonych trójkątów, a następnie równości trójkąta danego ABC i trapezu ADIC.

DI jest równoległa do AC, przeto $KC : KI = AK : DK$; lecz DG równoległa do KC, przeto także $AK : DK = AC : GC = AC : CF$, a następnie $KC : KI = AC : CF$. Drugi stósunek rozmnożywszy przez CF, będzie $KC : KI = AC \times CF : \overline{CF}^2$; ale $\overline{CF}^2 = AC \times CE$, przeto

$KC : KI = AC \times CF : AC \times CE = CF : CE = CG : CE = DI : LI$.

W trójkącie KDI, BL równoległa do KI, przeto

$DI : LI = DK : BK$, więc nareszcie $KC : KI = DK : BK$, skąd $DK \times KI = BK \times KC$, co potrzeba było dowieść.

§. 150.

Zdaje mi się, że tu także właściwe miejsce będzie powiedzieć nieco o dzieleniu figur prostokreślnych na części żądane i pod pewnemi warunkami; dla tego weźmiemy jeszcze kilka w tym przedmiocie zagadnień, ograniczając się tylko na trójkątach i czworokątach.

Co do trójkątów. Ponieważ proste dzielące wychodzić mogą z różnych punktów według potrzeby w praktyce zdarzającéj się, przeto zobaczmy niektóre zwyczajniejsze przypadki.

Zagadnienie 17. *Dany trójkąt podzielić na* n *części któreby się miały do siebie w stósunku jak $a : b : c : d : e$ i t. d. i żeby proste dzielące wychodziły z jednego z wiérzchołków trójkąta.*

Rozwiązanie. Niech będzie trójkąt ABC *fig. 166*, którego powiérzchnią podzielić chcemy na n części w stósunku danym, lecz tak, iżby proste dzielące wychodziły np. z wiérzchołka B. Dla uskutecznienia tego podziału, bok AC przeciwległy kątowi B, z którego dzielące proste wychodzić mają, dzielimy według §. 55 na n części tak, iżby się miały do siebie jak $a:b:c:d:e:$ i t. d.; potém punkta podziału łączymy z punktem B prostemi, a te podzielą trójkąt dany na n innych, które wszystkie mają wiérzchołek spólny w punkcie B, mają téż wysokości równe, a zatém ich powiérzchnie mają się do siebie jak podstawy czyli jak $a:b:c:d$ i t. d. i zagadnienie tym sposobem rozwiązane.

Gdyby potrzeba było podzielić trójkąt na n części równych, ogólne to zagadnienie w témby się tylko zmieniło, że w takim razie byłoby $a=b=c=d=e=$ i t. d.

Niechby np. potrzeba było podzielić trójkąt ABC na 5 części równych i gdzieby proste dzielące wychodziły z wierzchołka B, tedy bok AC dzieli się na 5 części równych i prowadzi się proste B1, B2, B3, B4, a tym sposobem wszystkie pięć tak utworzonych trójkątów są między sobą równe co do powiérzchni, mają bowiem wysokości równe i podstawy równe.

§. 151.

Zagadnienie 18. *Dany trójkąt podzielić na ilekolwiek części równych lecz tak, iżby proste dzielące wychodziły z punktu leżącego na jednym z boków danego trójkąta.*

Rozwiązanie. Niech będzie trójkąt ABC *fig. 167* do podzielenia np. na trzy części równe, lecz tak, iżby proste dzielące wychodziły z punktu D leżącego na boku AB. Na ten koniec zamieńmy trójkąt ABC na ADE według §. 143, a podzieliwszy podstawę AE na trzy równe części w punktach F, G, połączmy je z punktem D prostemi, tedy trójkąt ADE podzielony został tym sposobem na trzy części równe. Dwie z tych części ADF i FDG leżą tak w trójkącie ABC jako téż i ADE, przeto każda z nich jest trzecią częścią tak trójkąta ADE, jako téż i trójkąta ABC; ostatnia tylko część DGE leży w obu trójkątach, gdy część DGCB, któréj się tamta ma równać, leży jedynie w trójkącie ABC i dla tego nie tak widocznie jest trzecią częścią trójkąta ABC; ale zastanowiwszy się że za trójkąt DEC, można wziąść trójkąt BCD, dostrzeżemy, że trójkąt DGE równa się czworokątowi DGCB; co téż i stąd wnioskować można, iż kiedy trójkąt ADG$=\frac{2}{3}$ABC, czworokąt DGCB być musi $=\frac{1}{3}$ABC.

Zamierzmy sobie jeszcze podzielić trójkąt ABC *fig. 168* na siedm części równych pod tymże samym warunkiem, żeby proste dzielące wychodziły z punktu na boku AB leżącego. Zamieniwszy trójkąt ABC na ADE i podzieliwszy podstawę AE na siedm równych części, proste dzielące podzielą wprawdzie trójkąt ADE na żądaną liczbę części równych, ale nie trójkąt ABC i tylko części ADF, FDG, DGH i HDI są rzeczywiście żądanemi częściami, bo proste dzielące DF, DG, DH i DI wszystkie padają wewnątrz danego trójkąta ABC. Ale proste DK i DL jakkolwiek są dzielącemi dla trójkąta ADE, nie mogą być za takież uważane dla trójkąta ABC; przeto punkta K i L należy przenieść na bok BC. Ale jakimże sposobem? Oto poprowadziwszy DC, a potém z punktów K i L do niéj równoległe, te naznaczą na BC punkta M i N, przez które proste dzielące przechodzić powinny. Tym sposobem nic się innego rzeczywiście nie robi, jak tylko, że za część powiérzchni zewnątrz danego trójkąta leżącą, bierze się jéj równa wewnątrz będąca. I tak przy części IDK, bierze się trójkąt DCM za trójkąt DCK, przy części KDL, bierze się znowu trójkąt DCN za trójkąt DCL, co na figurze dokładnie widzieć można.

§. 152.

Zagadnienie 19. *Dany trójkąt podzielić na ilekolwiek części równych lecz tak, iżby proste dzielące wychodziły z punktu wewnątrz trójkąta leżącego.*

Rozwiązanie. Niechby potrzeba trójkąt ABC *fig. 169* podzielić np. na siedm części równych ale tak, żeby proste dzielące wychodziły z punktu D leżącego wewnątrz trójkąta ABC. Dla wykonania tego podziału, zamieniamy trójkąt ABC na EDF równy pierwszemu co do powiérzchni, a mający wiérzchołek w punkcie D, z którego proste dzielące wychodzić mają. Podstawę tego ostatniego trójkąta dzielimy na siedm części równych i prowadzimy proste dzielące, z których tylko DH, DI, DK i DL, będą rzeczywiście dzielącemi dla trójkąta ABC. Aby znaleść resztę tychże prostych, punkta G i E przenosimy na bok AB, za pomocą równoległych do AD, do N i B, punkta zaś M i F przenosimy na bok BC, za pomocą równoległych do DC, do O i B jak w poprzedzającém zagadnieniu widzieliśmy i tak przeniesione punkta łączymy z punktem D, a tym sposobem podział trójkąta ABC na żądaną liczbę części będzie ukończony. Każdy bowiem z trójkątów HDI, IDK i KDL jest $\frac{1}{7}$ trójkąta ABC, bo wszystkie mają równe podstawy i wysokości, czworokąt zaś DHAN równa się trójkątowi HDG będącemu także $\frac{1}{7}$ częścią trójkąta ABC i t. d.

Gdyby kierunek był dany, którędy jedna z prostych dzielących koniecznie ma przechodzić, natenczas zrobiwszy podział jak poprzednio, przesunęłoby się tylko każdą z części obracając je około punktu D i w razie potrzeby przenosząc punkta podziału na boki AB i BC.

§. 153.

Zagadnienie 20. *Dany trójkąt podzielić na ilekolwiek części równych prostemi do jednego z boków trójkąta równoległemi.*

Rozwiązanie. Niech danym trójkątem będzie ABC *fig. 170*, który chcemy podzielić np. na pięć części równych prostemi od boku AC równoległemi, tedy dla dokonania tego podziału, jeden z dwóch innych boków np. BC dzielimy na tyle części równych, na ile ma być trójkąt podzielony, jak tu na pięć w punktach D, E, F, G. Na boku BC jako na średnicy kreślimy półokręgu i z punktów D, E, F, G, wyprowadzamy prostopadłe do BC aż do przecięcia się z okręgiem w punktach d, e, f, g; z punktu B jako ze środka koła promieniami Bd, Be, Bf, Bg, kreślimy łuki przecinające BC w punktach d', e', f', g', a nakoniec przez te ostatnie punkta prowadzimy proste równoległe do AC, które podzielą trójkąt dany na części żądane.

Aby dowieść rzetelności takiego postępowania, uważmy, iż trójkąt $ABC \backsim mBd'$, zatém według §. 131 mamy

$$ABC : mBd' = \overline{BC}^2 : \overline{Bd'}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{Bd}^2;$$

a że $$\overline{Bd}^2 = BC \times BD \text{ §. 129},$$

zatém $$ABC : mBd' = \overline{BC}^2 : BC \times BD = BC : BD.$$

A jako $BD = \frac{1}{5}BC$, tak téż $mBd, = \frac{1}{5}ABC$.

Podobnież trójkąt

$$ABC : nBe' = \overline{BC}^2 : \overline{Be'}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{Be}^2 = \overline{BC}^2 : BC \times BE$$

$= BC : BE$. A że $BE = \frac{2}{5}BC$, więc téż trójkąt $nBe' = \frac{2}{5}ABC$. Ale trójkąt $mBd' = \frac{1}{5}ABC$, przeto trapez $mnd'e' = \frac{1}{5}ABC$.

Zupełnie tym samym sposobem dowiedziemy, że trójkąt $oBf' = \frac{3}{5}ABC$, zaś trójkąt $pBg' = \frac{4}{5}ABC$, skąd równość wszystkich pięciu części jest widoczna.

§. 154.

Zagadnienie 21. *Dany trójkąt podzielić dwiema prostemi na trzy części równe, ale tak, iżby te proste wychodziły z pewnego wewnątrz trójkąta leżącego punktu i były równoległe do dwóch boków danego trójkąta.*

Rozwiązanie. Niech trójkąt ABC *fig. 171* będzie dany do podzielenia na trzy części równe, ale tak, iżby dwie proste dzielące, wychodziły z wyznaczyć się mającego punktu D i były równoległe do boków AB i BC. Na ten koniec dla wyznaczenia punktu D robimy następujące wykreślenie: podstawę AC dzielimy na dwie równe części w punkcie E i prowadzimy prostą BE; a podzieliwszy AE lub EC na trzy równe części, na téjże prostéj np. na AE, wykreśla się półokręgu, a jeżeli $EF = \frac{1}{3}AE$, tedy z punktu F wyprowadza się prostopadła do AE aż do przecięcia się z okręgiem w punkcie G, potém z punktu E jako ze środka koła promieniem $= EG$ kreśli się łuk przecinający AE w punkcie H; przez punkt H prowadzi się równoległa do AB a ta naznaczy na BE punkt D szukany, z którego proste dzielące wychodzić mają. Gdyby się podobneż wykreślenie robiło na EC, przyślibyśmy do tegoż samego punktu D, zatém poprowadziwszy przez punkt D równoległą do BC aż do przecięcia się z AC w punkcie I, proste DH i DI podzielą trójkąt według żądania; pozostaje tylko dowieść, że tak jest w istocie, t. j. że tak trójkąt HDI jako też i każdy z trapezów ABDH i BCID jest trzecią częścią trójkąta ABC. Że trójkąt HDE jest równy $\frac{1}{3}$AEB, jako też trójkąt EDI $= \frac{1}{3}$BEC, jest jasną rzeczą z poprzedzającego zagadnienia. A że AEB $= \frac{1}{2}$ABC jako też BEC $= \frac{1}{2}$ABC, więc HDE $= \frac{1}{6}$ABC, a EDI $= \frac{1}{6}$ABC, a następnie trójkąt HDI $=$ HDE $+$ EDI $= \frac{2}{6}$ABC $= \frac{1}{3}$ABC. Kiedy HDE $= \frac{1}{6}$ABC a ABE $= \frac{1}{2}$ABC, więc trapez ABDH $= \frac{1}{2}$ABC $- \frac{1}{6}$ABC $= \frac{2}{6}$ABC $= \frac{1}{3}$ABC, a zatém i trapez BCID $= \frac{1}{3}$ABC, co należało dowieść.

§. 155.

Zagadnienie 22. *Dany trójkąt prostokątny podzielić na dwie części równe prostą prostopadłą do przeciwprostokątni.*

Rozwiązanie. Niech danym trójkątem do podzielenia będzie ABC *fig. 172* prostokątny przy A; dłuższy bok AC przyległy kątowi prostemu przedłużmy w kierunku AC i na przedłużeniu weźmy CD $= \frac{1}{2}$AC. Na prostéj AD wykreślmy półokręgu i z punktu C wyprowadźmy prostopadłą do średnicy AD aż do przecięcia się z okręgiem w punkcie E, z punktu C jako ze środka koła promieniem $=$CE zakreślmy łuk przecinający przeciwprostokątnią BC w punkcie F, a nareszcie z punktu F wyprowadźmy do BC prostopadłą FG, która podzieli trójkąt ABC na dwie równe części. Na dowiedzenie tego dość okazać, że trójkąt FGC jest $= \frac{1}{2}$ABC. Jakoż trójkąt ABC $\backsim$ GFC bo są równokątne, więc ABC : GFC $= \overline{AC}^2 : \overline{FC}^2 = \overline{AC}^2 : \overline{CE}^2 = \overline{AC}^2 :$ AC $\times$ CD $=$ AC : CD. Ale jako CD $= \frac{1}{2}$AC z wykreślenia, tak też GFC $= \frac{1}{2}$ABC, co należało dowieść.

Uwaga. Gdyby dany trójkąt był równoramienny t. j. gdyby było AB $=$ AC, natenczas prostopadła z wiérzchołka kąta prostego na przeciwprostokątnią spuszczona, podzieliłaby trójkąt dany na dwie równe części.

§. 156.

Co do czworokątów. Tu także może zachodzić warunek, iżby proste dzielące wychodziły albo z jednego z wiérzchołków kątów, albo z punktu leżącego na jednym z boków lub z punktu wewnątrz będącego. W każdym przypadku zamieniamy naprzód czworokąt na trójkąt równy mu co do powiérzchni według §. 142, potém ten trójkąt na inny mający swój wiérzchołek w punkcie, z którego proste dzielące wychodzić mają, daléj, uskuteczniamy podział na tym ostatnim trójkącie, a nareszcie proste dzielące wychodzące za czworokąt, przenosimy według §. 151 na boki czworokąta. Weźmy parę zagadnień.

Zagadnienie 23. *Dany czworokąt podzielić na pięć części równych tak, żeby proste dzielące wychodziły z jednego z jego wiérzchołków kątów.*

Rozwiązanie. Jeżeli danym do podzielenia na pięć części równych jest czworokąt ABCD *fig. 173*, tedy ten zamieniamy na trójkąt ABE równy mu co do powiérzchni; podstawę jego AE dzielimy na pięć części równych i prowadzimy proste BF, BG, BH i BI. Ponieważ proste BH i BI wychodzą zewnątrz czworokąta, przenosimy punkta H i I, za pomocą równoległych do BD, na bok CD do punktów K i L, a nareszcie prowadzimy proste BK i BL, przez co czworokąt zostanie podzielonym na pięć części równych. Dowód, że te części między sobą są równe i że każda jest $=\frac{1}{5}$ABCD jest nader łatwy i dlatego tu takowy pomijam.

W innych przypadkach postępowanie jest zupełnie toż samo, dla czego nie zatrzymując się nad niemi weźmy jeszcze

§. 157.

Zagadnienie 24. *Dany trapez podzielić prostemi równoległemi od jego boków równoległych na ilekolwiek części równych.*

Rozwiązanie. Niech będzie trapez ABCD *fig. 174* do podzielenia na cztéry np. części prostemi od AB równoległemi. Na większym z dwóch równoległych boków AB wykreślmy półokręgu, potém z pnnktu D poprowadźmy DE równoległą do BC, daléj z punktu B jako ze środka koła promieniem BE zakreślmy łuk EF czyli przenieśmy BE za cięciwę BF i z punktu F spuśćmy do AB prostopadłą FG.

Podzieliwszy teraz prostą AG na tyle części równych, na ile trapez dzielić chcemy, jak tu na cztéry części, w punktach H, I, K, z tych punktów wyprowadźmy prostopadłe do AB aż do przecięcia się z okręgiem w punktach L, M, N, a z punktu B jako ze środka koła promieniami BL, BM, BN zakreślmy łuki przecinające AB w punktach l, m, n; nareszcie z tych punktów prowadząc równoległe do BC, te naznaczą na AD punkta l' m' n', przez które proste dzielące $l'l''$, $m'm''$ i $n'n''$ przechodzić mają. Te rzeczywiście poprowadziwszy równolegle do AB, uskutecznimy żądany podział trapezu. Że tak jest w istocie, następnie dowodzimy. Przedłużywszy boki AD i BC aż do ich przecięcia się z sobą w punkcie R, ponieważ trójkąt $l'\mathrm{R}l'' \backsim \mathrm{DRC}$ przeto

$$l'\mathrm{R}l'':\mathrm{DRC}=\overline{l'l''}^2:\overline{\mathrm{CD}}^2=\overline{\mathrm{B}l}^2:\overline{\mathrm{BE}}^2=\overline{\mathrm{BL}}^2:\overline{\mathrm{BF}}^2$$
$$=\mathrm{AB}\times\mathrm{BH}:\mathrm{AB}\times\mathrm{BG}=\mathrm{BH}:\mathrm{BG}.$$

Z téj proporcyi wypada $l'\mathrm{R}l''-\mathrm{DRC}:\mathrm{DRC}=\mathrm{BH}-\mathrm{BG}:\mathrm{BG}$

czyli $$\mathrm{D}l'l''\mathrm{C}:\mathrm{DRC}=\mathrm{GE}:\mathrm{BG}.$$

Podobnież, ponieważ trójkąt $\mathrm{ARB}\backsim\mathrm{DRC}$, zatém

$$\mathrm{ARB}:\mathrm{DRC}=\overline{\mathrm{AB}}^2:\overline{\mathrm{CD}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2:\overline{\mathrm{BE}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2:\overline{\mathrm{BF}}^2$$
$$=\overline{\mathrm{AB}}^2:\mathrm{AB}\times\mathrm{BG}=\mathrm{AB}:\mathrm{BG}.$$

Z téj znowu proporcyi wypada

$$\mathrm{ARB}-\mathrm{DRC}:\mathrm{DRC}=\mathrm{AB}-\mathrm{BG}:\mathrm{BG}$$

czyli $$\mathrm{ABCD}:\mathrm{DRC}=\mathrm{AG}:\mathrm{BG}.$$

Łącząc tę proporcyją z powyżéj otrzymaną, wypada

$$\mathrm{ABCD}:\mathrm{D}l'l''\mathrm{C}=\mathrm{AG}:\mathrm{GE}.$$

A jako $\mathrm{GE}=\frac{1}{4}\mathrm{AG}$, tak téż $\mathrm{D}l'l''\mathrm{C}=\frac{1}{4}\mathrm{ABCD}$.

Porównywając następnie trójkąty $m'\mathrm{R}m''$ i DRC jako téż trójkąty ARB i CDR, znajdziemy znowu dwie proporcyje $\mathrm{D}m'm''\mathrm{C}:\mathrm{DRC}=\mathrm{GI}:\mathrm{BC}$, tudzież $\mathrm{ABCD}:\mathrm{DRC}=\mathrm{AG}:\mathrm{BG}$, które podobnież łącząc z sobą, znajdujemy

$$\mathrm{ABCD}:\mathrm{D}m'm''\mathrm{C}=\mathrm{AG}:\mathrm{GI}.$$

A jako $\mathrm{GI}=\frac{2}{4}\mathrm{AG}$, tak też być musi $\mathrm{D}m'm''\mathrm{C}=\frac{2}{4}\mathrm{ABCD}$.

Daléj znajdziemy przez podobneż dowodzenie, że trapez $\mathrm{D}n'n''\mathrm{C}=\frac{3}{4}\mathrm{ABCD}$, a zatém równość tych części jest widoczna.

Albo tak: mając trapez ABCD *fig. 174* do podzielenia np. na trzy równe części, przedłużamy jego boki nierównoległe aż do przecięcia się z sobą w punkcie R. Na boku RB jako na średnicy kreślimy półokręgu, a z punktu R promieniem RC łuk przecinający półokręgu w punkcie E′, z którego spuszczamy prostopadłą E′F′ do RB; a podzieliwszy odległość F′B na tyle części, na ile trapez dzielić mamy, jak tu na trzy, z punktów podziału G′ i H′ wyprowadzamy do RB prostopadłe G′I′ i H′K′ aż do przecięcia się z okręgiem. Nareszcie z punktu R jako ze środka koła promieniami RI′ i RK′, kreślimy łuki, które naznaczą na boku trapezu CB punkta L′, M′, przez które prowadzone proste L′N′ i M′P równoległe do AB, podzielą trapez na żądaną liczbę części równych. Dowód téj prawdy jest zupełnie podobny poprzedzającemu. Ale zobaczmy takowy chociaż dla jednéj części. Trójkąt N′RL′ DRC, przeto $N'RL':DRC = \overline{RL'}^2:\overline{RC}^2$

$$= \overline{RI'}^2:\overline{RE'}^2 = RB \times RG':RB \times RF' = RG:RF'.$$

Z téj proporcyi mamy $N'RL' - DRC:DRC = RG' - RF':RF'$

czyli $$N'DCL':DRC = F'G':RF'.$$

Podobnież, trójkąt $ARB:DRC = \overline{RB}^2:\overline{RC}^2$

$$= \overline{RB}^2:\overline{RE'}^2 = \overline{RB}^2:RB \times RF' = RB:RF'.$$

skąd znowu $ARB - DRC:DRC = RB - RF':RF'$

czyli $$ABCD:DRC = F'B:RF'.$$

Łącząc tę proporcyją z powyższą, znajdziemy

$$ABCD:N'DCL' = F'B:F'G'.$$

A że $F'G' = \frac{1}{3}F'B$, więc też $N'DCL' = \frac{1}{3}ABCD$.

Ponieważ dzielenie figur, szczególniéj w zastósowaniu jest przedmiotem bardzo ważnym, dla tego spodziewam się, że będę usprawiedliwiony, iż odstąpiwszy od ciągu prawd geometrycznych, przytoczyłem dość znaczną liczbę w tym przedmiocie zagadnień.

ROZDZIAŁ VIII.

Porównanie linii kołowéj jako téż powiérzchni koła, z figurami prostokreślnemi, a następnie wyprowadzenie stósunku okręgu koła do średnicy i powiérzchni koła.

---

§. 158.

Ponieważ do poznania każdéj prawdy przychodzimy jedynie drogą porównania, porównanie zaś zachodzić tylko może pomiędzy przedmiotami jednéjże natury, zdawałoby się więc, że pomiędzy liniją łamaną, jaką jest obwód wielokąta, a krzywą kołową czyli okręgiem koła, dwiema tak od siebie różnemi linijami, żadne porównanie miejsca mieć nie może. Atoli z paragrafów o wpisywaniu w koło i opisywaniu wielokątów na kole, łatwo się przekonać, że wpisawszy np. kwadrat lub sześciokąt w koło i podwajając ciągle liczbę jego boków, łamana linija stanowiąca obwód wielokąta bez końca zbliża się do okręgu koła; a skoro rzeczone podwajanie liczby boków posuniemy bardzo daleko, cięciwy wyrażające boki tegoż wielokąta, zmięszają się w końcu z liniją kołową tak, że obwód wielokąta i okrąg koła prawie za jedno i toż samo wziąść można. Mówimy tu *prawie*, gdyż ze wstępu wiadomo, iż najmniéjsza cząstka krzywéj, uważając ściśle, prostą być nie może. Wiemy podobnież, że opisawszy jakikolwiek wielokąt na kole np. także sześciokąt, można również ciągle podwajać liczbę boków i że przez takie podwajanie, obwód wielokąta opisanego zbliża się także bez końca do okręgu koła, ale się nigdy stać nim nie może. A kiedy tylko wielokąty foremne mogą być wpisane i na kole opisane, przeto stąd wypada, że tylko z takiemi wielokątami i to o bardzo wielkiéj liczbie boków porównać można okrąg koła.

Małe zastanowienie się, a nawet samo spojrzenie na dwa wielokąty, o jednakowéj liczbie boków, jeden wpisany a drugi na témże samém kole opisany, nasuwa nam tę prawdę, że obwód wpisanego koniecznie jest mniejszy od okręgu koła jako rzecz objęta od obejmującéj, obwód zaś opisanego wielokąta, większy niż tenże okrąg, jako rzecz obejmująca od objętéj; że również powiérzchnia wielokąta wpisanego jest mniéjszą, powiérzchnia zaś wielokąta opisanego jest większą od powiérzchni koła dla téjże saméj przyczyny. A że jak wyżéj powiedzieliśmy, przez ciągłe podwajanie liczby boków tak jednego jako i drugiego wielokąta, obwody ich zbliżają się nieskończenie do okręgu koła, którym jednak żaden z nich stać się nie może, zatém okrąg koła uważać można i rzeczywiście uważa się jako *granica*, do któréj się ciągle zbliża tak obwód wielokąta wpisanego jako téż i opisanego. Również powiérzchnia koła jest *granicą* powiérzchni wielokątów wpisanego i opisanego. Tych granic nigdy dosięgnąć a tym bardziéj przestąpić nie mogą. Z tego bardzo łatwo pojąć, że gdybyśmy znali obwody dwóch wielokątów, wpisanego i opisanego o bardzo wielkiéj liczbie boków, ponieważ same te obwody nie wieleby się między sobą różniły, bo każdy z nich zbliżył się tak do swéj granicy, że jéj prawie dosiągnął, środkujący obwód koła tym mniéjby się różnił od jednego z obwodów, że zatém albo jeden z obwodów wielokątów albo lepiéj ilość pośrednia pomiędzy temi obwodami wyrażać może w wielkiém przybliżeniu okrąg koła. Obrachowawszy zaś powiérzchnie dwóch rzeczonych wielokątów, powiérzchnia koła środkować będzie między niemi i podobnież w przybliżeniu, ale, jak zobaczymy, w przybliżeniu do prawdy takiém jak chcemy, otrzymana być może. Jak stósownie do tych uwag przyjdziemy do wymierzenia tak długości linii kołowéj jako téż i powiérzchni koła, zobaczymy z następujących zagadnień, które są tylko prostém zastósowaniem dotąd nabytych wiadomości.

§. 159.

Z §. 67 wiemy, że obwody dwóch wielokątów podobnych mają się do siebie jak którekolwiek ich boki odpowiadające albo jak proste jakkolwiek, byle jednymże sposobem w obu wielokątach poprowadzone, tudzież z §. 124 wiadomo, że powiérzchnia wielokąta foremnego, równa się iloczynowi z jego obwodu przez połowę prostopadłéj ze środka wielokąta na którykolwiek bok spuszczonéj; według zaś §. 125 *wniosek*, powiérzchnie takichże wielokątów mają się jak kwadraty z boków odpowiadających lub prostych jednakowo poprowadzonych. Uważając teraz dwa wielokąty o jednakowéj liczbie boków, jeden wpisany a drugi opisany na jednémże kole, a które według §. 104 są koniecznie foremne, wiémy że prostopadła spuszczona ze środkn wielokąta, a zatém i ze środka koła na bok wielokąta wpisanego, jest zarazem promieniem koła w tenże wielokąt wpisanego, prostopadła zaś z rzeczonego środka na bok wielokąta opisanego spuszczona, jest także promieniem tegoż koła, które téż uważać można jako koło wpisane w wielokąt opisany. W takim razie przytoczone prawdy wyrazimy następującym sposobem:

Obwody dwóch wielokątów foremnych o jednakowéj liczbie boków mają się do siebie w stósunku promieni kół w też wielokąty wpisanych.

Powiérzchnia wielokąta foremnego równa się iloczynowi z jego obwodu przez połowę promienia koła wpisanego w tenże wielokąt.

Powiérzchnie dwóch wielokątów foremnych o jednakowéj liczbie boków, mają się w stósunku kwadratów z promieni kół w też wielokąty wpisanych.

Dwie te prostopadłe albo raczéj promienie oznaczać będziemy w ciągu tego rozdziału przez r i R tak, że r wyraża promień koła wpisanego zaś R opisanego na wielokącie. Piérwszy promień prawie u wszystkich autorów nosi dotąd grecką nazwę *apothema* albo *promień mniéjszy*, drugi zaś zowią *promieniem większym*.

§. 160.

Zagadnienie 1. *Znając bok wielokąta wpisanego w koło i promień tegoż koła, znaleść powiérzchnią wielokąta.*

Rozwiązanie. Niech wiadomym bokiem wielokąta wpisanego będzie $AB = a$, tudzież wiadomym promieniem koła $SA = R$ *fig. 175*, ze środka koła S spuściwszy prostopadłą

SC do AB, jeżeli liczbę boków wielokąta oznaczymy ogólnie przez n, będzie jego obwód $= na$, jego zaś powiérzchnia, którą przez p oznaczmy, według §. wyżéj przywiedzionego, jest

$$p = na \times \tfrac{1}{2}\mathrm{SC} = na \times \tfrac{1}{2}r$$

Ale w trójkącie ASC prostokątnym przy C jest

$$\overline{\mathrm{SC}}^2 = \overline{\mathrm{AS}}^2 - (\tfrac{1}{2}\mathrm{AB})^2 \text{ czyli } r^2 = \mathrm{R}^2 - \tfrac{1}{4}a^2$$

skąd $r = \sqrt{\mathrm{R}^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{\sqrt{4\mathrm{R}^2 - a^2}}{2}$. Tę ważność położywszy w powyższém wyrażeniu powiérzchni wielokąta, znajdziemy

$$p = \frac{na\sqrt{4\mathrm{R}^2 - a^2}}{4}.$$

§. 161.

Zagadnienie 2. *Z wiadomego boku wielokąta wpisanego, znaleść bok wielokąta także wpisanego dwa razy więcéj boków niż piérwszy mającego.*

Rozwiązanie. Niech znowu $\mathrm{AB} = a$ będzie wiadomym bokiem wielokąta wpisanego *fig. 175*; ze środka koła spuściwszy prostopadłą SC na AB i tę przedłużywszy aż do okręgu w punkcie D i połączywszy punkt D z B lub A, będzie BD bokiem wielokąta wpisanego dwa razy więcéj boków mającego niż piérwszy, który znaleść potrzeba. Położywszy, jak w poprzedzającém zagadnieniu $\mathrm{AS} = \mathrm{R}$, $\mathrm{SC} = r$ a $\mathrm{BD} = a_1$ mamy w trójkącie CAD prostokątnym przy C $a_1{}^2 = \frac{1}{4}a^2 + \overline{\mathrm{CD}}^2$. Lecz ponieważ $\mathrm{CD} = \mathrm{SD} - \mathrm{SC} = \mathrm{R} - r$ skąd $\overline{\mathrm{CD}}^2 = \mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}r + r^2$ przeto $a_1{}^2 = \frac{1}{4}a^2 + \mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}r + r^2$ Ale z poprzedzającego zagadnienia jest $r^2 = \mathrm{R}^2 - \frac{1}{4}a^2$ zaś $r = \frac{\sqrt{4\mathrm{R}^2 - a}}{2}$, zatém włożywszy te ważności w ostatnie wyrażenie, znajdziemy $a_1{}^2 = \frac{1}{4}a^2 + \mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}\frac{\sqrt{4\mathrm{R}^2 - a^2}}{2} + \mathrm{R}^2 - \frac{1}{4}a^2$ $= 2\mathrm{R}^2 - \mathrm{R}\sqrt{4\mathrm{R}^2 - a^2}$ a następnie $a_1 = \sqrt{2\mathrm{R}^2 - \mathrm{R}\sqrt{4\mathrm{R}^2 - a^2}}$.

Używając tu wzoru §. 77 *Arytm.* na wyciąganie pierwiastka kwadratowego z ilości częścią wymiernéj a częścią niewymiernéj, znajdziemy jeszcze:

$$a_1 = \sqrt{R(R + \frac{a}{2})} - \sqrt{R(R - \frac{a}{2})}$$

Chcąc przeciwnie wyrazić a przez a_1, przy pomocy działań arytmetycznych znajdziemy $a = \frac{a_1}{R}\sqrt{4R^2 - a_1^2}$ tak np. szukając boku trójkąta wpisanego z boku sześciokąta wpisanego, ponieważ $a_1 = R$, znajdziemy zaraz $a = R\sqrt{3}$.

§. 162.

Zagadnienie 3. *Z wiadomego boku wielokąta wpisanego w koło i promienia tegoż koła, znaleść bok wielokąta opisanego na témże kole a podobnego piérwszemu.*

Rozwiązanie. Niech danym bokiem będzie $AB = a$ *fig. 175;* ze środka S spuściwszy do AB prostopadłą i tę przedłużywszy aż do przecięcia się z okręgiem w punkcie D, tudzież położywszy jak poprzednio $SA = R$, $SC = r$ i przez punkt D poprowadziwszy styczną aż do przecięcia się z przedłużonemi promieniami SA i SB w punktach A′ i B′, będzie A′B′ bokiem wielokąta opisanego podobnego wielokątowi którego bok dany. Ponieważ AC równoległa od A′D, przeto $A'D : AC = SD : SC$, czyli $A'D : \frac{1}{2}a = R : r$ skąd $A'D = \frac{\frac{1}{2}aR}{r} = \frac{aR}{2r}$. A że $r = \frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2}$ §. 160, zatém $A'D = \frac{aR}{\sqrt{4R^2 - a^2}}$, a następnie, położywszy bok opisanego wielokąta $A'B' = A$, ponieważ $2A'D = A'B'$ będzie

$$A = \frac{2aR}{\sqrt{4R^2 - a^2}} = \frac{aR}{\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a^2}}.$$

Wniosek. Obwód tego wielokąta będzie $= nA = \frac{naR}{\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a^2}}$; powiérzchnia zaś jego którą oznaczmy przez P będzie $P = \frac{naR}{\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a^2}} \times \frac{1}{2}R = \frac{naR^2}{2\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a^2}} = \frac{naR^2}{\sqrt{4R^2 - a^2}}$.

§. 163.

Znalazłszy z wiadomego boku wielokąta wpisanego tak obwody wielokątów wpisanego i opisanego, jako też umiejąc znaleść bok wielokąta wpisanego dwa razy więcéj boków mającego, a następnie tak jego obwód jako téż i powiérzchnią, z tego boku szukalibyśmy znowu boku wielokąta opisanego dwa razy więcéj boków niż poprzedzający mającego, potém jego obwodu i powiérzchni. Co do boku, ważność jego znajdziemy z ważności A kładąc tylko a_1 w miejsce a, bo R jako promień koła jest niezmiennym.

Oznaczywszy więc w ogólności przez a_n bok wielokąta wpisanego n boków mającego, tudzież przez a_{2n} bok wielokąta w toż samo koło wpisanego, lecz dwa razy więcéj boków mającego, a nareszcie przez A_n bok wielokąta opisanego n boków mającego, według poprzedzających zagadnień, jeżeli jeszcze położymy $R = 1$, będzie:

$$a_{2n} = \sqrt{1 + \frac{a_n}{2}} - \sqrt{1 - \frac{a_n}{2}}$$

$$A_n = \frac{a_n}{\sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4}}}$$

Otrzymawszy według tych wzorów boki wielokątów tak wpisanego jako i opisanego, mamy téż zaraz ich obwody. I tak poczynając rachunek od sześciokąta foremnego w koło wpisanego, ponieważ $a_n = 1$, będzie bok dwunastokąta czyli $a_{2n} = a_{12} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 0{\cdot}5176385902$

zaś $$A_6 = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1{\cdot}1547005383$$

a rachując obwody dalszych wielokątów, ale tylko na 10 cyfer dziesiętnych, znajdziemy:

Liczba boków	Ważność boku wielok. wpisan.	Obwód wielok. wpisanego.	Obwód wielok. opisan.
6	1·0000000000	6·0000000000	6·9282032298
12	0·5176385902	6·2116630824	6·4307872728
24	0·2610526410	6·2652633840	6·3195924744
48	0·1308063875	6·2787066000	6·2921787120
96	0·0654382301	6·2820700896	6·2854353984
192	0·0327234954	6·2829111168	6·2837519616
384	0·0163622953	6·2831213952	6·2833317120
768	0·0081812160	6·2831738880	6·2832264960 3,14158,314
1536	0·0040906166	6·2831870976	6·2832003072

3,141593 13 3,1416.

skąd naocznie i bez żadnego innego dowodu widzimy, że obwody dwóch wielokątów o jednakowéj liczbie boków, wpisanego i opisanego, coraz bardziéj zbliżają się do siebie i to tém prędzéj, im liczba boków jest większa. Gdybyśmy więc działanie podwajania liczby boków obu wielokątów, posunęli do nieskończoności, co jedynie myślą i rachunkiem uskutecznić możemy, wnieślibyśmy, iż też obwody są sobie w nieskończoności prawie równe. A że okrąg koła środkujący między temiż obwodami, chociaż nie mający ani mogący mieć spólnéj miary z prostą dowolną np. z promieniem lub średnicą swoją, jest jednakże zawarty pomiędzy dwie bardzo siebie bliskie granice, których stósunek do promienia koła jest wiadomy, przeto według tego co już raz na zawsze w §. 53 *uwaga* powiedzieliśmy, można wszystko co się dowiedzie o obwodach lub powiérzchniach dwóch rzeczonych wielokątów, przenieść bez obawy znacznego błędu, do okręgu koła; tym bowiem sposobem nic innego nie zrobimy, tylko uważać będziemy okrąg koła za wielokąt foremny wpisany lub opisany o nieskończonéj liczbie boków. Lecz w §. 67 *wniosek* dowiedliśmy, że obwody dwóch wielokątów podobnych mają się w stósunku dwóch prostych jednakowo w obu wielokątach poprowadzonych, przeto obwody dwóch wielokątów foremnych, wpisanego i opisanego, mają się w stósunku prostopadłych z ich spólnego środka na którekolwiek boki spuszczonych; te zaś prostopadłe są jak wiemy promieniami koła wpisanego i opisanego i kiedy obwody tych wielokątów zbliżają się bez końca do siebie, zbliżają się téż także i te prostopadłe bez końca. Te prostopadłe nazwaliśmy wyżej R i r; piérwsza jest promieniem koła opisanego a druga wpisanego; przeto proporcyja $O:o = R:r$ jest prawdziwa. Ale kiedy O zbliża się bez końca do o, r zbliża się także do R; w nieskończoności więc możemy za O położyć okrąg koła z promienia R, który oznaczmy przez C, a za o inny okrąg koła c z promienia r, tak że mieć będziemy proporcyją także prawdziwą $C:c = R:r$ z któréj czytamy, że *dwa okręgi kół różnych promieni, mają się do siebie w stósunku tychże promieni.*

Podzieliwszy piérwszy stósunek przez n gdzie n wyraża liczbę całkowitą, będzie $\frac{C}{n} : \frac{c}{n} = R : r = 2R : 2r = S : s$ oznaczając przez S i s średnice kół. Ponieważ $\frac{C}{n}$ i $\frac{c}{n}$ wyrażają pewne części okręgów kół, a takie części nazwaliśmy łukami i te łuki są *podobne* t. j. są miarami kątów równych, przeto z ostatniéj proporcyi czytamy także, iż *łuki mierzące kąty równe mają się do siebie jak promienie lub jak średnice kół do których łuki należą.*

W proporcyi $C : R = c : r$ rozmnożywszy następniki przez 2 i położywszy $2R = S$, $2r = s$, gdzie S i s znaczą średnice tychże kół, będzie

$$C : S = c : s.$$

Oznaczywszy przez C, C', C'', C''' . . . . . . okręgi kół różnych promieni, zaś przez S, S', S'', S''', ... średnice tychże kół, tedy na téjże saméj zasadzie mamy:

$$C : S = C' : S' = C'' : S'' = C''' : S''' = \text{i t. d.}$$

skąd się pokazuje, że stósunek okręgu do swéj średnicy, jest stósunkiem stałym i niezmiennym; dosyć więc znaleść stósunek jednego okręgu do swéj średnicy. Ten stósunek w całym obszarze Matematyki oznacza się przez π tak, że $C : S = \pi$ albo $C : 2r = \pi$, znacząc przez r promień koła C; skąd $C = 2\pi r$ to jest że *okrąg koła równa się zawsze iloczynowi z owego stałego stósunku przez średnicę lub przez podwójny promień.* Skoro więc znany jest promień koła, już tém samém znany będzie i okrąg koła, jeżeli stały stósunek π znajdziemy. Z ostatniego zrównania wypada też $r = \frac{C}{2\pi}$ t. j. znając okrąg koła i stósunek π, znamy też i promień tegoż koła.

Wniosek. W §. 124 dowiodło się, że powierzchnia wielokąta foremnego równa się iloczynowi z jego obwodu przez połowę prostopadłéj ze środka wielokąta na bok spuszczonéj; jeżeli więc uważać będziemy wielokąt o nieskończonéj liczbie boków, obwód jego przechodzi według powyższego na okrąg, prostopadła na promień tegóż koła, a powierzchnia wielokąta na powierzchnię koła, przeto w zrównaniu $P = O \times \frac{1}{2} r$ w przywiedzionym §. otrzymaném, położywszy C w miejsce O, a K w miejsce P, oznaczając przez K powierzchnię koła, będzie téż $K = C \times \frac{1}{2} r$ t. j. *powierzchnia koła równa się iloczynowi z jego okręgu przez połowę promienia.*

Położywszy tu wyżéj znalezioną ważność na C, otrzymamy

$$K = 2\pi r \times \tfrac{1}{2} r = \pi r^2$$

czyli, że *powierzchnia koła równa się wyżej wspomnionemu stósunkowi stałemu okręgu koła do średnicy rozmnożonemu przez kwadrat z promienia.*

Uważać tu potrzeba, że w dwóch wyrażeniach $C = 2\pi r$ i $K = \pi r^2$ dwie ilości C i K są liczbami oderwanemi wyrażającemi stósunek, piérwsza do *jednostki linijowéj* a druga do *jednostki powierzchni.* Piérwsza więc wyraża liczbę jednostek takich w jakich promień r jest dany, druga zaś wyraża liczbę kwadratów wystawionych a takiéjże jednostce. Oznaczywszy przez K′ powierzchnię innego koła a jego promień przez r', będzie téż $K' = \pi r'^2$

zatém $$K : K' = \pi r^2 : \pi r'^2 = r^2 : r'^2.$$

Rozmnożywszy drugi sósunek przez 4 i pisząc ostatnią proporcyją następnie $K : K' = (2r)^2 : (2r')^2$, tudzież kładąc $2r = s$ $2r' = s'$ gdzie s i s' wyrażają średnice kół, otrzymamy $K : K' = s^2 : s'^2$ t. j. *powierzchnie dwóch kół mają się do siebie w stósunku kwadratów z ich promieni, albo kwadratów z ich średnic.*

Ze zrównania $K = \pi r^2$ wypada także $r = \sqrt{\frac{K}{\pi}}$ skąd się pokazuje, że znając promień i stósunek π, znajdzie się powierzchnię koła; znając zaś powierzchnię koła, znajdzie się jego promień. Cały więc rachunek tak okręgu koła jako też i powierzchni jego, zależy jak widzimy od poznania stósunku π; zatrudnijmy się przeto obrachowaniem téj liczby stałéj.

§. 164.

Na obrachowanie stósunku okręgu koła do średnicy jest kilka elementarnych sposobów, nie mówiąc o sposobach na wyższéj Geometryi opartych. Nim przystąpimy do jego obrachowania, zobaczmy, w jakich on się granicach znajduje.

Obwód sześciokąta wpisanego jest $= 6r$ z powodu, że bok tego sześciokąta jest równy promieniowi. Opisawszy na témże kole kwadrat, bok jego jest równy średnicy czyli $2r$ a zatém obwód jego $= 8r$. A że okrąg koła jest zawsze większy niż obwód sześciokąta wpisanego a mniejszy niż obwód kwadratu opisanego, przeto oznaczywszy okrąg koła jak wyżéj przez C, jest $C > 6r$ jako też $C < 8r$.

Podzieliwszy dwie te nierówności każdą przez $2r$ mamy

$$\frac{C}{2r} > 3 \text{ jako też } \frac{C}{2r} < 4.$$

Ale $\frac{C}{2r} = \pi$ więc $\pi > 3$ „ „ $\pi < 4$

leży więc stósunek o którym mowa między dwiema całkowitemi liczbami 3 i 4. Jest zaś liczbą niewymierną z powodu, że wyraża stósunek linii krzywéj t. j. kołowéj do prostéj t. j. do średnicy, a dwie takie linije żadnego stósunku między sobą mieć nie mogą, jakó dwie ilości całkiem od siebie różne; rachując go przeto wychodzimy z téj zasady, że krzywa kołowa jest wielokątem o nieskończonéj liczbie boków nieskończenie małych. Takie boki nieskończenie małe zwykli Geometrowie nazywać *elementami* linii kołowéj. Jak więc tylko w nieskończoności uważać możemy okrąg koła za wielokąt foremny z nieskończenie małych boków złożony, tak też tylko w przypadku tym znaleść możemy stósunek okręgu koła do średnicy. A jako okrąg koła czyli granica wielokątów wpisanego i opisanego nigdy przejść zupełnie nie może na wielokąt, a wszelako zbliżyć się do niego może z taką dokładnością jak chcemy, tak też i stósunek tegóż okręgu do średnicy w żaden sposób zupełnie dokładnie otrzymanym być nie może; pomimo to jednak dokładność tę tak daleko posunąć można, iż rzeczony stósunek mniéj się od zupełnie dokładnego różnić będzie, niż wszelka ilość naznaczona jakkolwiek mała; a to jest jak wiemy cechą niewymierności.

Obrachowanie stósunku okręgu koła do średnicy czyli π.

§. 165.

Piérwszy sposób. Według §. 163 obrachowawszy obwody wielokątów wpisanych lub opisanych, których liczba boków powiększa się następnie dwa razy, wychodząc od pewnego wielokąta, który umiemy wpisać w koło i któregoby bok był znany, tudzież kładąc promień koła $= 1$, otrzymamy szereg obwodów wielokątów, z których każdy następny będzie bliższym okręgu koła a jego stósunek do średnicy będzie także znany. Wziąwszy potém jeden którykolwiek z obwodów wielokąta za okrąg koła, otrzymamy jego stósunek do średnicy tém więcéj do prawdziwego zbliżony, im dalszych wielokątów obwody brać będziemy. Tak tedy z przywiedzionego §, gdzie wyszliśmy od sześciokąta, biorąc obwód 12stokąta za okrąg koła mielibyśmy, stósownie do zrównania $\pi = C : 2r$,

$$\pi = 6{\cdot}216630824 : 2 = 3{\cdot}108315412 : 1$$

Z następnych wielokątów znajdziemy podobnież:

$$\pi = 6{\cdot}2652633840 : 2 = 3{\cdot}1326316920 : 1$$
$$\pi = 6{\cdot}2787066000 : 2 = 3{\cdot}1393533000 : 1$$
$$\pi = 6{\cdot}2820700896 : 2 = 3{\cdot}1410350448 : 1$$
$$\pi = 6{\cdot}2829111168 : 2 = 3{\cdot}1414555584 : 1$$
$$\pi = 6{\cdot}2831213952 : 2 = 3{\cdot}1415606976 : 1$$
$$\pi = 6{\cdot}2831738880 : 2 = 3{\cdot}1415869440 : 1$$
$$\pi = 6{\cdot}2831870976 : 2 = 3{\cdot}1415935488 : 1$$

Z obwodów zaś wielokątów opisanych znajdziemy:

$$\pi = 6{\cdot}4307872728 : 2 = 3{\cdot}2153936364 : 1$$
$$\pi = 6{\cdot}3195921744 : 2 = 3{\cdot}1597960872 : 1$$
$$\pi = 6{\cdot}2921787120 : 2 = 3{\cdot}1460893560 : 1$$
$$\pi = 6{\cdot}2854353984 : 2 = 3{\cdot}1427176992 : 1$$
$$\pi = 6{\cdot}2837519616 : 2 = 3{\cdot}1418759808 : 1$$
$$\pi = 6{\cdot}2833317120 : 2 = 3{\cdot}1416658560 : 1$$
$$\pi = 6{\cdot}2832264960 : 2 = 3{\cdot}1416132480 : 1$$
$$\pi = 6{\cdot}2832003072 : 2 = 3{\cdot}1416001536 : 1$$

Uważając więc obwód wielokąta wpisanego mającego 1536 boków za okrąg koła, mieć będziemy szukany stósunek

$$\pi = 3{\cdot}1415935488.$$

Jeżeli zaś obwód takiegoż wielokąta opisanego uważać będziemy za okrąg koła, na ten czas otrzymamy

$$\pi = 3 \cdot 1416001536.$$

Widzimy tu wyraźnie jak stósunek, π z następném podwajaniém boków zbliża się ciągle do pewnéj granicy stałéj i niezmiennéj; z dwóch bowiem wielokątów wpisanego i opisanego, stósunek ten przy wielokątach po 1536 boków mających, zgadza się już prawie w pięciu cyfrach dziesiętnych. A gdy okrąg koła, spólna obu wielokątów granica, znajduje się ciągle między niemi zawarty, więc stósunek π jest rzeczywiście większy od pierwszego a mniejszy od drugiego czyli

$$\pi > 3 \cdot 1415935488 \text{ tudzież } \pi < 3 \cdot 1416001536$$

można więc za zbliżony stósunek okręgu koła do średnicy wziąść z wszelką pewnością przynajmniéj te cyfry, w których się obwody dwóch tych wielokątów zgadzają; albo téż dokładniéj, jako dla ilości środkującéj między rzeczonemi obwodami, wziąść średnią arytmetyczną między ostatniemi wypadkami. Tak tedy znajdziemy $\pi = 3 \cdot 1415968512$ który stósunek porównany z otrzymanym sposobami jakie wyższa Matematyka podaje, zgadza się z nim w pięciu cyfrach dziesiętnych, która dokładność dla zwyczajnych, nawet dość delikatnych w praktyce wydarzających się rachunków, jest wystarczającą. W dalszym więc ciągu, gdy potrzebować będziemy tego stósunku, przyjmiemy stale $\pi = 3 \cdot 14159$.

Piérwszy Archimedes urodzony w Syrakuzie około r. 287 przed Chr. pracując nad obrachowaniem koła znalazł, że kiedy średnica $= 1$, okrąg koła jest mniejszy niż $3\frac{10}{70}$ a większy niż $3\frac{10}{71}$, jego więc stósunek okręgu koła do średnicy jest $= 22 : 7$ czyli $3 \cdot 14 \ldots\ldots$ t. j. w dwóch cyfrach dziesiętnych dokładny. Adryjan Metius około 1585 znalazł tenże stósunek $= 355 : 113$ czyli $\pi = 3 \cdot 141592 \ldots\ldots$ t. j. w sześciu cyfrach dziesiętnych dokładny a niezmiernie łatwy do zatrzymania w pamięci; każda bowiem z trzech piérwszych liczb nieparzystych 1, 3, 5 jest dwa razy powtórzoną 113355 i piérwsze trzy cyfry wyrażają długość średnicy a ostanie trzy długość okręgu koła.

§. 166.

Drugi sposób. Dowiodło się w §. 163, że powierzchnia koła $K = \pi r^2$; położywszy $r = 1$, będzie $K = \pi$ t. j. *stósunek okręgu koła do średnicy równa się powierzchni koła którego promień = 1*. Szukając przeto powierzchni dwóch wielokątów wpisanego i opisanego o jednakowéj liczbie boków, w przypuszczeniu że promień koła jest = 1, znajdziemy także nieco łatwiéj stósunek o który chodzi z następującego zagadnienia.

Zagadnienie. *Mając dane powierzchnie dwóch wielokątów wpisanego i opisanego na kole, o jednakowéj liczbie boków, znaleść powierzchnie dwóch innych wielokątów wpisanego i opisanego na témże samém kole o podwójnéj liczbie boków.*

Rozwiązanie. Niech będą ab i AB *fig*. 176 boki dwóch wielokątów wpisanego i opisanego o n liczbie boków, których powierzchnie są znane; poprowadziwszy cięciwę bC, ta będzie bokiem wielokąta wpisanego mającego $2n$ boków. Prowadząc w punktach a i b styczne aż do przecięcia się z AB w punktach A' i B', będzie A'B' bokiem wielokąta opisanego mającego także $2n$ boków. Oznaczywszy powierzchnie, dane przez p i P a szukane przez p' i P', ponieważ powierzchnia wielokąta którego bok ab jest

$$= n.aSb = 2n.DSb$$

a wielokąta opisanego którego bok AB, powierzchnia

$$= n\mathrm{ASB} = 2n.\mathrm{CSB};$$

tudzież, ponieważ powierzchnia wielokąta którego bok Cb, równa się $2n.\mathrm{CS}b$, a nareszcie powierzchnia wielokąta opisanego, którego bok A'B' równa się $2n.\mathrm{A'SB'}$, albo, z powodu że trójkąt $\mathrm{CSB'} = \mathrm{B'S}b$ §. 43, taż powierzchnia $= 2n.\mathrm{CS}b\mathrm{B'}$, przeto mamy

$$p = 2n.\mathrm{DS}b,\ \mathrm{P} = 2n.\mathrm{CSB},\ p' = 2n.\mathrm{CS}b,\ \mathrm{P'} = 2n.\mathrm{CS}b\mathrm{B'}$$

i widzimy, że powierzchnie tych cztérech wielokątów mają się w stósunku trzech trójkątów i czworokąta, skoro je po dwa łączyć będziemy; dosyć więc znaleść stósunek rzeczonych trójkątów i czworokąta, a tém samém mieć będziemy stósunki powierzchni wielokątów, z których rozwiązanie podanego zagadnienia wprost wypływa.

Dwa trójkąty CSB i CSb mają wysokości równe, gdyż mają wierzchołek w jednymże punkcie C i podstawy na prostéj SB, ich więc powierzchnie są w stósunku podstaw t. j.

CSB : CSb = SB : Sb. Lecz SB : Sb : SC : SD

bo CB równoległa do Db, przeto

CSB : CSb = SC : SD

Dwa trójkąty CSb i DSb mają także wysokości równe, mają się więc ich powierzchnie jak podstawy

to jest CSb : DSb = SC : SD

a następnie CSB : CSb = CSb = DSb

Położywszy w miejsce trójkątów same powierzchnie, których są częściami, będzie

$$P : p' = p' : p \text{ skąd } p' = \sqrt{P.p}$$

skąd czytamy, że *powierzchnia wielokąta wpisanego jest średnią geometrycznie proporcyjonalną między powierzchnią wpisanego i opisanego wielokąta, dwa razy mniéj boków mających.* Tym sposobem jedna część zagadnienia rozwiązana.

Aby znaleść P′, uważmy, iż w trójkącie CSB prosta SB′ dzieli kąt CSB na dwie równe części, przeto według §. 62

jest BB′ : B′C = SB : SC.

Oprócz tego trójkąty B′SB i B′SC mają téż samę wysokość SC, przeto

B′SB : B′SC = BB′ : B′C = SB : SC = Sb : SD = SC : SD,

Lecz wyżéj znaleźliśmy SC : SD = CSb : DSb, przeto też

B′SB : B′SC = CSb : DSb

skąd B′SB + B′SC : B′SC = CSb + DSb : DSb

Ale B′SB + B′SC = CSB zatém CSB : B′SC = CSb + DSb : DSb, albo mnożąc następniki przez 2 i bacząc iż 2B′SC = CSbB′,

będzie CSB : CSbB′ = CSb + DSb ; 2DSb;

albo kładąc same powierzchnie jako tenże sam stósunek względem siebie zachowujące,

$$P : P' = p' + p : 2p, \text{ a stąd } P' = \frac{2P.\,p}{p + p'} = \frac{2P.p}{p + \sqrt{P.p}}$$

Tak tedy z wiadomych powierzchni p i P, znaleźliśmy żądane powierzchnie p' i P'.

Po rozwiązaniu obecnego zagadnienia, przez następne ciągłe podwajanie boków wielokątów wpisanego i opisanego, w przypuszczeniu że promień koła jest $= 1$, możemy znaleść powierzchnię koła, która będzie żądanym stósunkiem okręgu koła do średnicy czyli π.

Najprościejszy przypadek, jaki się tu nasuwa jest, gdy p wyraża powierzchnię kwadratu w koło wpisanego a P powierzchnię kwadratu opisanego; skoro bowiem $r = 1$, natenczas $p = 2$, zaś $P = 4$. Będzie więc

$$p' = \sqrt{4.2} = 2\sqrt{2},\ P' = \frac{2.4.2}{2+2\sqrt{2}} = \frac{8}{1+\sqrt{2}} = \frac{8(1-\sqrt{2})}{1-2} = 8(\sqrt{2}-1)$$

i tym sposobem znalazło się powierzchnie ośmiokątów wpisanego i opisanego. Wykonawszy naznaczony rachunek, znajdziemy $p' = 2{\cdot}828427$, $P' = 3{\cdot}313709$. Postępując tymże samym sposobem, otrzymamy powierzchnie 16stokątów wpisanego i opisanego $p'' = \sqrt{P'.p'}$, $P'' = \dfrac{2P'.p'}{p'+p''}$ czyli $p'' = 3{\cdot}061467$, $P'' = 3{\cdot}182598$ i t. d. aż nareszcie przyjdziemy do powierzchni wielokątów wpisanego i opisanego nieskończenie mało różniących się od siebie; a wtedy wziąwszy jednę z nich lub dokładniéj średnią arytmetyczną między niemi za powierzchnię koła, ta według na początku zrobionéj uwagi, będzie szukanym stósunkiem okręgu koła do średnicy czyli π.

§. 167.

Trzeci sposób oparty na wielokątach *równoobwodowych* (isoperimetra). Tu mamy sposób czysto geometryczny podany przez J. Schwab w r. 1813 *) a wyłożony i ułatwiony przez Wilh. Matzka profesora w Pradze w czasowém piśmie Grunerta **). Ten jest następujący. Niech AB będzie bokiem wielokąta foremnego w koło wpisanego *fig. 177*, poprowadziwszy do niego prostopadle promień SC, tedy jak wiadomo promień ten dzieli kąt ASB, bok AB i łuk ACB na dwie

*) Elemens de Geometrie par J. Schwab. Nancy 1813.

**) Archiv der Mathematik und Physik von Grunert B. IX. S. 79.

równe części. Poprowadziwszy cięciwy AC i BC, te będą między sobą równe, a poprowadziwszy znowu do nich prostopadle promienie SA′ i SB′ i złączywszy A′, B′ prostą A′B′, ta będzie równoległą do AB i $= \frac{1}{2}$AB, przeto A′B′ jest bokiem wielokąta foremnego w koło wpisanego dwa razy więcéj boków niż piérwszy mającego, obwód zaś jego będzie równy obwodowi piérwszego, ma bowiem wprawdzie dwa razy mniéjsze boki, lecz za to liczba ich jest dwa razy większa. Nazwawszy promień koła opisanego na piérwszym wielokącie t. j. promień SA = R, zaś promień koła wpisanego SD $= r$, tudzież promień koła opisanego na drugim wielokącie czyli SA′ = R′ a SD′ czyli promień koła wpisanego w tenże wielokąt przez r', tedy ponieważ CD′=D′D, więc $SD' = \frac{SC + SD}{2}$ bo $SD' + D'C = SC$, tudzież $SD' - D'C = SD' - DD' = SD$. A że położyliśmy $SA = SC = R$, $SD = r$, $SD' = r'$,

więc $$r' = \frac{R + r}{2}.$$

W trójkącie SA′C prostokątnym przy A′, A′D′ jest prostopadłą do SC, przeto SC : SA′ = SA′ : SD′ §. 63

czyli $R : R' = R' : r'$ skąd $R' = \sqrt{R.r'}$.

Niechże S, s i S′, s' oznaczają średnice tychże samych kół, do których promienie R, r i R′, r' należą, tedy mnożąc piérwsze z otrzymanych zrównań przez 2,

będzie $$2r' = \frac{2R + 2r}{2} \text{ czyli } s' = \frac{S + s}{2}.$$

Mnożąc podobnież drugie przez 2 będzie

$$2R' = 2\sqrt{R.r'} = \sqrt{4R.r'} = \sqrt{2R.2r'} \text{ czyli } S' = \sqrt{S.s'}.$$

Niechże teraz O wyraża obwód tak piérwszego jako i drugiego wielokąta, bo te są sobie równe, tedy dzieląc obie strony ostatnich zrównań przez O, znajdziemy:

$$\frac{s'}{O} = \frac{S + s}{2O} = \left(\frac{S}{O} + \frac{s}{O}\right) : 2$$

tudzież $$\frac{S'}{O} = \frac{\sqrt{S.s'}}{O} = \sqrt{\frac{S.s'}{O^2}} = \sqrt{\frac{S}{O} \cdot \frac{s}{O}}$$

z których zrównań widzimy, że $\frac{s'}{O}$ jest średnią arytmetyczną między $\frac{S}{O}$ i $\frac{s}{O}$, zaś $\frac{S'}{O}$ jest średnią geometryczną między $\frac{S}{O}$ i $\frac{s'}{O}$, stąd rachunek jest nadzwyczajnie łatwy, bo wychodząc od wielokąta, którego obwód znamy, szuka się tylko ciągle średniéj arytmetycznéj i średniéj geometrycznéj między dwiema znanemi liczbami. Takiemi wielokątami są kwadrat albo sześciokąt w koło wpisane. Wyjdźmy od sześciokąta. Ponieważ AB = R zaś O = 6R,

zatém $$\frac{S}{O} = \frac{2R}{6R} = \tfrac{1}{3} = 0{\cdot}3333\ \ldots.$$

A że AD = $\frac{1}{2}$ R, tudzież z trójkąta ASD jest $r^2 + \frac{1}{4}R^2 = R^2$ skąd $r = \frac{R}{2}\sqrt{3}$, więc $\frac{s}{O} = \frac{2r}{6R} = \frac{R\sqrt{3}}{6R} = \frac{1}{6}\sqrt{3}$.

Następnie znajdziemy: $\frac{s'}{O} = \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) : 2 = \frac{2+\sqrt{3}}{12}$

jako też $$\frac{S'}{O} = \sqrt{\tfrac{1}{3} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{12}} = \tfrac{1}{6}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Postępując tak daléj i rachując na dziesięć cyfer dziesiętnych dokładnie, znajdziemy:

Liczba boków wielokąta	$s:O$	$S:O$
6	0·2886751346	0.3333333333
12	0·3110042340	0.3219752754
24	0·3164897547	0·3192207323
48	0·3178552435	0·3185372563
96	0·3181962499	0·3183667075
192	0·3182819787	0·3183243387
384	0·3183031587	0·3183121777
768	0·3183076682	0·3183099231
1536	0.3183087956	0·3183093595

Widzimy tu wyraźnie, jak średnia arytmetyczna już przy 48kącie bardzo się mało różni od średniéj geometrycznéj i obeszłoby się już bez dalszego rachuuku, byle tylko trzecią część różnicy między temi średniemi odjąć od większéj albo $\frac{2}{3}$ téjże róznicy dodać do mniejszéj, otrzymamy bowiem

$$\frac{0{\cdot}3185372563 - 0{\cdot}3178552435}{3} = 0{\cdot}0002273376$$

zatém $\frac{S}{O} = 0{\cdot}3183109187$ albo $\frac{s}{O} = 0{\cdot}3183099187$

które z ostatniemi średniemi w poprzedzającéj tabliczce zgadzają się w pięciu cyfrach dziesiętnych. Wziąwszy teraz w miejsce obwodu wielokąta okrąg koła, t. j. położywszy C za O, będzie $\frac{S}{C} = 0{\cdot}3184109187 = \frac{1}{\pi}$ skąd $\pi = 3{\cdot}14158 \ldots.$

t. j. w czterech cyfrach dziesiętnych dokładnie. Ostatnie liczby rzeczonéj tabliczki dają także:

piérwsza $\pi = 3{\cdot}141603669$, druga $\pi = 3{\cdot}141597852$

t. j. prawie w pięciu cyfrach dokładnie czyli blisko tak, jak z 48miokąta otrzymaliśmy.

Uwaga. Można téż było wprost z wzorów $r' = \frac{R + r}{2}$ i $R' = \sqrt{R.r'}$ szukać różnych r i R, poczynając także od wielokąta, którego stósunek boku do promienia jest znany *np.* od kwadratu lub sześciokąta. Zacząwszy podobnie jak wyżéj od sześciokąta, znajdziemy

$r = 0{\cdot}8660254038$	$R = 1{\cdot}0000000000$
$0{\cdot}9330127019$	$0{\cdot}9659258263$
$0{\cdot}9494692641$	$0{\cdot}9576621969$
$0{\cdot}9535657305$	$0{\cdot}9556117686$
$0{\cdot}9545887496$	$0{\cdot}9551001221$
$0{\cdot}9548444359$	$0{\cdot}9549722705$
$0{\cdot}9549083532$	$0{\cdot}9549403113$
$0{\cdot}9549243322$	$0{\cdot}9549323207$

i t. d.

Zastanowiwszy się nad tém, że R jest promieniem koła opisanego na wielokącie, a r prostopadłą (apothema) ze środka na bok wielokąta spuszczoną, dostrzeżemy jak za każdém podwojeniem liczby boków wielokąta, ta prostopadła zbliża się ciągle do promienia. Przez to ostatnie postępowanie znajduje się naturalnie promień koła, którego okrąg jest 6, a przeto ponieważ $\pi = \frac{C}{2r}$, będzie z naszego rachunku $\pi = \frac{6}{2r}$ lub $\pi = \frac{6}{2R}$, albo dokładniéj $\pi = \frac{6}{\frac{2R + 2r}{2}} = \frac{6}{R+r}$.

Wziąwszy za R i r ostatnie liczby co dopiero otrzymane, znajdziemy $\pi = \frac{6}{1\cdot9098566529} = 3\cdot14159 \ldots\ldots$ jak wyżéj.

W nowszych czasach posuniono rachunek liczby π aż do 530 cyfer dziesiętnych *), z których piérwsze 20 są:

$$\pi = 3\cdot14159265358979323846.$$

Czasem bywa i dokładniejszy logarytm téj liczby potrzebny, przeto go tu kładę $\quad \log. \pi = 0\cdot497149872694.$
Ten atoli rachunek prowadzono nie żadnym z trzech tu wyłożonych elementarnych sposobów, ale przy pomocy sposobów, jakie wyższe części Matematyki podają.

§. 168.

W §. 163 znaleźliśmy dla powierzchni koła wyrażenie $K = C \times \frac{1}{2} r$, które nam wskazuje, że taż *powierzchnia równa się powierzchni trójkąta mającego za podstawę okrąg koła, rozumie się wyprostowany, a za wysokość promień tegoż koła;* albo: *równa się powierzchni prostokąta mającego za podstawę okrąg wyprostowany a za wysokość połowę promienia.*

Gdybyśmy więc umieli dokładnie znaleść długość okręgu koła dla danego promienia, moglibyśmy według §. 136 znaleść kwadrat równający się powierzchni koła. Lecz długość krzywéj kołowéj znaleźliśmy $C = 2\pi r$, która jak widzimy zależy od π; w poprzedzających zaś §§. przekonaliśmy się,

*) Professor Richter w Elblągu wyrachował ten stósunek w 333 cyfrach a Strehlke Dyrektor w Gdańsku siedm ostatnich cyfer poprawił i 65 dalszych dorachował. Zobacz *Archiv der Mathematik und Physik von* Grunert XXIII. *Theil S. 475.* Rutherford obrachował π w 440 cyfrach, a nareszcie Shanks w 530. Zobacz *„Nouvelles Annales de Mathematiques“* T. XIV. p. 210 albo *„Cosmos“* T. VII p. 335 23. Marca 1855.

że liczba π, nigdy z bezwzględną dokładnością otrzymaną być nie może, dla tego téż ani długość okręgu koła ani jego powierzchnia z geometryczną dokładnością znalezione być nie mogą; pomimo to jednak, rzeczone ilości tak bliskie prawdziwych otrzymane być mogą, iż różnice między niemi a prawdziwemi będą mniejsze niż wielkość naznaczona jakkolwiek mała.

Znalezienie długości okręgu koła a w ogólności długości każdéj krzywéj w jednostkach prostych, nazywa się *wyprostowaniem krzywéj* (rectificatio), znalezienie zaś powierzchni koła, albo każdéj figury krzywokreślnej, wyrażonéj w jednostkach powierzchni prostokreślnéj, nazywa się *kwadrowaniem koła* lub innych figur (quadratura), z powodu, że do mierzenia powiérzchni wzięliśmy za jednostkę kwadrat na jednostce długości wystawiony, i że szukając powiérzchni koła, szukamy rzeczywiście, ile razy taż powierzchnia jest większą niż kwadrat jednostkowy.

Wymiary koła, t. j. długość jego okręgu i wielkość pola krzywą kołową ograniczonego, zależą jak widzieliśmy jedynie od liczby π czyli od stósunku okręgu koła do swéj średnicy, więc znalezienie dokładne powierzchni koła, zależy od dokładności π. A że, jak to już wielokrotnie starałem się przekonać, π jest liczbą niewymierną, bo krzywa kołowa z prostą (swoją średnicą) jako całkiem różnéj natury linije, żadnego stósunku, a zatém i spólnéj miary mieć nie mogą, zatém tak okrąg koła jako téż i jego powierzchnia w żaden sposób z bezwzględną dokładnością obrachowane być nie mogą.

Pomimo takiéj oczywistości, kwadratura koła zajmowała wiele nawet niepospolitych głów; zrodziła wiele smieszności i zaciętych sporów naukowych; wywołała bardzo wiele pism i pisemek w tym przedmiocie; a przeszedłszy nawet w pośmiewisko, z powodu, że nie wszyscy rozumiejąc o co tu chodzi, sądzili, iż kwadratura koła zależy na znalezieniu *koła kwadratowego*, skończyło się na tém, że Geometrowie francuzcy i angielscy jąwszy się szczerze téj pracy i przekonawszy się dowodnie o niepodobieństwie znalezienia powierzchni prostokreślnéj równającéj się z matematyczną dokładnością powierzchni koła, a przy tém mając na względzie mały i prawie żaden pożytek z téj pracy, przez swój organ, Akademiją umiejętności w Paryżu, ogłosili w r. 1775, iż żadnego pisma tyczącego się kwadratury koła Akademija więcéj nie przyjmuje. Owocem usiłowań znalezienia stósunku okręgu koła do średnicy są liczne na ten cel podane wzory lub szeregi, przy pomocy których można bez trudności i z taką jak chcemy lub potrzebujemy dokładnością obrachować π. Kiedy więc można zawsze mieć stósunek okręgu koła do średnicy, a następnie okrąg i powierzchnią koła z taką jak chcemy dokładnością, na cóż się przyda próżny mozół i suszenie mózgu na sklejenie jakiejś lepianki pozornie schludnéj a w rzeczy saméj brudnéj i wiele smieszności mającej? Żadnemu téż już prawdziwie uczonemu nie przyjdzie do myśli szukać kwadratury koła, bo podobna manija zwykła się tylko rodzić w głowach płytkich, którym wszystkie nauki zdają się do nabycia bardzo łatwe i prawie żadnéj pracy nie wymagające; oddając się więc wszystkim na raz, dostają pewnego zawrotu głowy i gorączki, w któréj wszystko jasno widząc, usiłują te swoje marzenia innym zdrowym na umyśle narzucić, a wszelki opór z ich strony uważają za grubą niewiadomośc lub nieprzenikliwość.

§. 169.

Znalazłszy długość linii kołowéj tudzież powierzchnię koła, zatrudnijmy się teraz znalezieniem powierzchni części koła a mianowicie powierzchni wycinka, odcinka i pierścienia kołowego t. j. powierzchni zawartéj między dwoma okręgami kół spółśrodkowych.

Twierdzenie. *Powierzchnia wycinka kołowego równa się iloczynowi z wyprostowanego łuku, który nazwać można podstawą wycinka, przez połowę promienia koła w którém wycinek uważamy.*

Niech będzie wycinek ASB *fig. 178*, oznaczywszy jego powierzchnię przez W, mamy dowieść, że $W = AB \times \frac{1}{2}AS$. Rozumiem, że nie potrzeba dowodzić, iż powiérzchnia wycinka jest takąż samą częścią względem całéj powierzchni koła, jaką jest łuk AB służący mu za podstawę, względem całego okręgu koła, albo też jaką częścią jest kąt ASB względem cztérech kątów prostych (4R) przeto proporcyja

$$W:K = AB:C$$ jest prawdziwą,

zatrzymując z poprzednich §§. znaczenie C i K. Rozmnożywszy drugi stósunek przez $\frac{1}{2}$AS, będzie

$$W:K = AB \times \tfrac{1}{2}AS : C \times \tfrac{1}{2}AS$$

Ale ponieważ według §. 163 $K = C \times \frac{1}{2}AS$, więc też $W = AB \times \frac{1}{2}AS$, co było do dowiedzenia.

Z tego wyrażenia powierzchni wycinka kołowego czytamy jeszcze, że *taż powierzchnia równa się powierzchni trójkąta mającego za podstawę łuk* AB *wyprostowany*, *a za wysokość promień koła.*

Uwaga. Znalazłszy powierzchnię wycinka, skoro poprowadzimy cięciwę AB, widzimy wyraźnie, że powiérzchnia odcinka równa się różnicy między wycinkiem a trójkątem ASB. Oznaczając więc odcinek w ogólności przez O, będzie w każdym razie $O = W - \triangle ASB.$

Wyrażenie powierzchni odcinka zależące głównie od powierzchni trójkąta jest różne według różności *danych* do rachunku. Może być bowiem daném do obrachowania powiérzchni odcinka, *a)* promień koła i łuk wyrażony w stopniach; *b)* może być daną długość łuku wyrażona w linii prostéj, cięciwa i promień; *c)* może téż być danym kąt ASB i cięciwa AB; nareszcie *d)* może być daną cięciwa AB i część promienia do cięciwy prostopadłego, zawarta między cięciwą i łukiem, jak na figurze część CD, którą pospolicie *strzałką* (sagitta) nazywamy. Jak w każdym z tych przypadków obrachować tak powierzchnię wycinka jako też trójkąta, a następnie otrzymać wyrażenie powierzchni odcinka, potrzebne do tego są inne wiadomości, które w dalszym ciągu poznamy.

§. 170.

Definicyja. Dwa wycinki w kołach różnych promieni nazywają się *podobne,* skoro ich podstawy (łuki) mierzą też same lub równe kąty przy środku.

TWIERDZENIE. *Powierzchnie dwóch podobnych wycinków, mają się w stósunku kwadratów promieni kół do których należą.*

Niech będą dwa wycinki ASB i A'SB' *fig. 179,* piérwszy w kole, którego promień SA, a drugi w kole z promienia SA' i których podstawy (łuki) AB i A'B' mierzą tenże sam kąt ASB przy spólnym środku S, mamy dowieść, że piérwszy do drugiego jak kwadrat z SA do kwadratu z SA' czyli oznaczając piérwszy przez W a drugi przez w,

że $$W : w = \overline{SA}^2 : \overline{SA'}^2 .$$

Ponieważ według poprzedzającego twierdzenia jest
$$W = AB \times \tfrac{1}{2} SA, \text{ zaś } w = A'B' \times \tfrac{1}{2} SA',$$
zatém $W : w = AB \times \frac{1}{2} SA : A'B' \times \frac{1}{2} SA'$. Ale z §. 163 wiadomo, że $AB : A'B' = SA : SA'$, a mnożąc poprzedniki przez SA a następniki przez SA', tudzież piérwszy stósunek przez $\frac{1}{2}$, będzie $AB \times \frac{1}{2} SA : A'B' \times \frac{1}{2} SA' = \overline{SA}^2 : \overline{SA'}^2$

zatém $$W : w = \overline{SA}^2 : \overline{SA'}^2.$$

WNIOSEK. Z proporcyi $AB : A'B' = SA : SA'$ wypływa $\overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 = \overline{SA}^2 : \overline{SA'}^2$ przeto także $W : w = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2$ t. j. *powierzchnie wycinków kołowych mają się do siebie w stósunku kwadratów z promieni lub średnic, jak równie w stósunku kwadratów z swych podstaw czyli łuków.*

Uwaga 1. Różnica dwóch wycinków spółśrodkowych i podobnych, którą *trapezem kołowym* nazywamy, jak na figurze powierzchnia AA'B'B, zawarta między dwoma łukami spółśrodkowemi, może być także przez bardzo prosty wzór wyrażona. Poprowadziwszy bowiem w punktach A i A' styczne nieograniczonéj długości, wystawmy sobie łuk AB rozwiniony na piérwszą styczną t. j. weźmy AC = długości linijowéj łuku AB, a złączywszy punkt C z środkiem koła S, prosta ta przecina drugą styczną w punkcie C'; dwa trójkąty ASC i A'S'C' są podobne, przeto $AC : SA = A'C' : SA'$

czyli $AC:A'C'=SA:SA'$. A że $AB:A'B'=SA:SA'$, więc téż $AC:A'C'=AB:A'B'$. Ale z wykreślenia $AC=AB$, więc téż $A'C'=A'B'$ t. j. prosta $A'C'$ wyraża długość łuku $A'B'$. Powierzchnia trójkąta $ASC=AC\times\frac{1}{2}SA=$powierzchni wycinka ASB; podobnież powierzchnia trójkąta $A'SC'=A'C'\times\frac{1}{2}SA'$ $=$ powiérzchni wycinka $A'SB'$, przeto różnica powiérzchni trójkątów, czyli trapez prostokreślny $AA'CC'=$ powiérzchni trapezu kołowego $AA'B'B$. Lecz powierzchnia trapezu $AA'C'C=\frac{AC+A'C'}{2}\times AA'$ §. 123, zatém powierzchnia trapezu kołowego $AA'B'B=\frac{AB+A'B'}{2}\times AA'$ t. j. *równa się iloczynowi z połowy summy dwóch jego podstaw przez różnicę promieni*. Łatwo téż dowieść, że $\frac{AB+A'B'}{2}=A''B''$ czyli, że połowa summy dwóch rzeczonych podstaw równa się łukowi koła spółśrodkowego a przez środki AA' i BB' przechodzącego, tak jak $\frac{AC+A'C'}{2}=A''C''$.

Uwaga 2. Dwa okręgi kół spółśrodkowych ograniczają pewną część powierzchni większego koła, która się *pierścieniem* (annulus) zowie. Wyrażenie téj powiérzchni bardzo łatwo znaleść. Jeżeli bowiem C i c wyrażają okręgi, R i r promienie, a K i k powierzchnie tych kół, tedy ponieważ oczywiście powierzchnia pierścienia równa się różnicy powierzchni obu kół, zaś $K=C\times\frac{1}{2}R$ a $k=c\times\frac{1}{2}r$, oznaczywszy powierzchnię pierścienia przez $\boldsymbol{P}$, będzie $\boldsymbol{P}=K-k=\frac{1}{2}(CR-cr)$ albo równa się połowie różnicy dwóch prostokątów mających za wymiary C i R, c i r. Prościejsze znajdziemy wyrażenie tego pierścienia, biorąc powiérzchnie kół wyrażone przez π. Gdy bowiem $K=\pi R^2$, $k=\pi r^2$ zatém $\boldsymbol{P}=\pi(R^2-r^2)=\pi(R+r)(R-r)$ t. j. *powierzchnia pierścienia równa się powierzchni prostokąta mającego za dwa wymiary summę i różnicę promieni kół, rozmnożonéj przez stósunek okręgu koła do średnicy*. Albo jeszcze lepiéj: szukając do dwóch prostych $R+r$ i $R-r$ średniéj geometrycznie proporcyjonalnéj według §. 99, którą oznaczmy przez R′, ponieważ $R+r:R'=R':R-r$, skąd $R'^2=(R+r)(R-r)$, przeto powierzchnia pierścienia będzie $P=\pi R'^2$. Lecz $\pi R'^2$ wyraża powierzchnię koła, którego promień R′, zatém *powierzchnia pierścienia równa się powierzchni koła, którego promień jest średnią geometrycznie proporcyjonalną między summą i różnicą promieni kół spółśrodkowych tworzących pierścień.*

Albo: przedłużywszy promień AS do D i przez punkt G, w którym tenże promień spotyka okrąg mniéjszego koła, poprowadziwszy cięciwę większego koła EF styczną do okręgu koła mniejszego, ponieważ $AG=R+r$ zaś $GD=R-r$, a z §. 90 wiemy że $\overline{FG}^2=AG\times GD=(R+r)\ (R-r)$, więc FG jest to promień, który wyżéj przez R′ oznaczyliśmy, cięciwa zaś EF jest średnicą; przeto powiedzieć jeszcze możemy, że *powierzchnia pierścienia równa się powierzchni koła, którego średnica jest cięciwą większego, poprowadzona stycznie do mniéjszego koła.*

§. 171.

Znalazłszy w §§. poprzedzających stósunek okręgu koła do średnicy, czyli co na jedno wychodzi, wyprostowawszy chociaż tylko sposobem przybliżonym okrąg koła na liniją prostą, albo jeszcze wyraźniéj, znalazłszy, że gdy średnica jakiego koła jest $=1$, okrąg jego zamyka takich jednostek 3·14159 . . . albo gdy promień $=1$, że okrąg koła $=2\pi=6{\cdot}28318$ . . . łatwo z twierdzenia, że okręgi kół mają się w stósunku promieni lub średnic, znaleść okrąg każdego koła; jakże atoli znaleść długość jakiegokolwiek łuku koła?

Już w §. 81 widzieliśmy, że chcąc znaleść stósunek dwóch kątów albo raczéj wielkość jakiego kąta, potrzeba tylko znaleść jego stósunek do jednostki kątowéj t. j. do kąta prostego; a jeżeli kąt jaki jest wyrażony w stopniach, dosyć jest tę liczbę stopni podzielić przez 90, aby otrzymać żądany stósunek. Jeżeli zaś kąt jest wyrażony w stopniach, minutach i sekundach, wyraża się naprzód w sekundach, a potém dzieli przez $90\times60\times60=324000$. A że wszystko co się powiedziało o kątach, rozumie się także i o łukach będących ich miarami, przeto chcąc znaleść długość łuku, dosyć jest tenże łuk wyrażony w sekundach podzielić przez 324000, a wypadek będzie stósunkiem długości łuku do długości ćwiartki okręgu. Tym sposobem wyznaczona długość łuku nazywa się *miarą łuku kątową*. Można się téż atoli zapytać, jaka jest długość łuku, gdybyśmy go sobie wystawili na liniją prostą, wyprostowany czyli roztoczony? Taką miarę łuku nazywać będziemy *miarą podłużną*. Widzimy zatém, że jak okrąg koła ma podwójną miarę t. j. kątową $=360^0$ i podłużną $=2\pi r$, tak téż i każdy łuk, w téj podwójnéj miarze wyrażony być może, t. j. odnosząc go albo do ćwiartki okręgu, w którym razie wyrazimy go w stopniach, minutach i sekundach, czyli *w miarze kątowéj*, albo odnosząc go do promienia czyli szukając stósunku danego łuku wyprostowanego do promienia, a wtedy wyrazimy go *w miarze podłużnéj*. Z tego dwoistego uważania łuku, rodzą się nam dwa zadania następujące:

§. 172.

Zadanie 1. *Znając liczbę stopni, minut i sekund, czyli znając miarę kątową jakiego łuku koła, znaleść stósunek jego długości do promienia, czyli znaleść jego miarę podłużną.*

Zastanowiwszy się z uwagą nad tém, że π jest stósunkiem okręgu koła do średnicy, czyli co na jedno wychodzi *stósunkiem półokręgu do promienia*, łatwo dostrzeżemy, że $\frac{\pi}{2}$ jest *stósunkiem ćwiartki okręgu do promienia*. To dobrze pojąwszy, jasną jest rzeczą, że chcąc znaleść długość jakiego łuku o danéj liczbie stopni, w jednostkach promienia, dosyć jest stósunek tegoż łuku do ćwiartki koła rozmnożyć przez $\frac{\pi}{2}$. Oznaczywszy w ogólności liczbę stopni jaką dany łuk zamyka przez α, zaś długość łuku wyrażonego w jednostkach promienia przez a, tudzież wyraziwszy ćwiartkę okręgu w sekundach czyli przez 324000, będzie według tego co powiedziano

$$a = \frac{\alpha''}{324000''} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\alpha\pi}{648000}$$

albo oznaczywszy w ogólności stósunek danego łuku do ćwiartki okręgu czyli do 90^0 przez m, t. j. położywszy

$$\frac{\alpha^0}{90^0} = \frac{60\alpha}{5400} = \frac{60.60.\alpha}{324000}, = m$$

będzie $a = m. \frac{\pi}{2}$, a to jest miarą podłużną łuku.

Zadanie 2. *Znając stósunek wyprostowanego łuku do promienia, czyli znając jego miarę podłużną, znaleść liczbę stopni w tym łuku zawartych*, czyli *jego stósunek do ćwiartkiokręgu*, albo jeszcze wyraźniéj: *znaleść jego miarę kątową*.

Z ostatniego zrównania wypada $m = a : \frac{\pi}{2}$ co dowodzi, iż aby znaleść stósunek łuku do ćwiartki okręgu, potrzeba daną długość łuku a (t. j. liczbę oderwaną zamienioną na ułamek dziesiętny), podzielić przez $\frac{\pi}{2}$ wyrażone także w ułamku dziesiętnym, a otrzymany iloraz obrócić według Arytmetyki na stopnie, minuty i sekundy.

Kiedy promień koła jest $= 1$, wiemy już, że π wyraża półokręgu na liniją prostą roztoczonego, zatém $\frac{180}{\pi.}$ wyrażać będzie liczbę stopni łuku równającego się co do swéj długości promieniowi koła. Podobnie też $\frac{180.60}{\pi}$ i $\frac{180.60.60}{\pi}$ wyrażać będą liczbę minut albo sekund łuku równającego się co do swéj długości promieniowi.

Mieć zatém będziemy promień koła wyrażony w stopniach

$$R^0 = \frac{180^0}{\pi} = 57^0.2957795$$

wyrażony w minutach

$$R' = \frac{180^0.60}{\pi} = 3437'.7467708$$

wyrażony zaś w sekundach

$$R'' = \frac{180''.60.60}{\pi} = 206264''806247$$

albo ogólnie $R = 57^0 17' 44'' \cdot 806247.$

Uwaga. Dwa wzory $a = m.\frac{\pi}{2}$ i $m = a : \frac{\pi}{2}$ otrzymaliśmy w przypuszczeniu, że promień koła, do którego łuk należy, jest $= 1$. Jeżeli zaś promień nie jest jednością, czyli jeżeli nie jest $r = 1$, należy piérwszy wypadek rozmnożyć przez r, skąd się otrzyma $a = m.\frac{\pi}{2}.r$ albo $a = mr.\frac{\pi}{2}$; w drugim zatém razie trzeba wypadek podzielić przez r, przez co będzie $m = a : \frac{\pi r}{2}$ albo $m = \frac{a}{r} : \frac{\pi}{2}$. Zastósowanie tych wzorów do liczbowego rachunku zaraz zobaczymy:

§. 173.

ZAGADNIENIE 1. *Mając dany promień lub średnicę, znaleść długość okręgu koła i jego powiérzchnię, i wzajemnie.*

Niech długość danego promienia będzie 600 stóp, tedy z wzorów $C = 2\pi r$ i $K = \pi r^2$

mamy $C = 2.600.3 \cdot 14159 = 3769 \cdot 908$ stóp,

zaś $K = 3 \cdot 14159.600^2 = 1130972 \cdot 4$ stóp kwadratowych.

Niech nawzajem będzie okrąg koła 5400 mil (obwód równika ziemskiego), jakiż jest jego promień? (jak daleko do środka ziemi).

Z piérwszego zrównania mamy

$$r = \frac{C}{2\pi} = \frac{5400}{6.28318} = 859 \cdot 438 \text{ mil.}$$

Gdyby zaś powierzchnia koła była $= 77$ stóp kwadratowych, a pytano się o promień tegoż koła, tedy z drugiego z przytoczonych zrównań mamy

$r^2 = \frac{77}{\pi}$ skąd $r = \sqrt{\frac{77}{\pi}}$ albo według Arytmetyki

$$\log. r = \tfrac{1}{2}(\log. 77 - \log. \pi) = 0 \cdot 69467.$$

Temu logarytmowi odpowiada liczba 4·95 . . . zatém promień o który chodzi wynosi blisko 5 stóp.

§. 174.

Zagadnienie 2. *Znaleść powierzchnię wycinka kołowego, którego podstawą jest łuk mający 60°, promień zaś koła do którego należy ma 10 stóp długości.*

Rozwiązanie. Według §. 169 powierzchnia wycinka jest $W = Ł \times \frac{1}{2} r$ gdzie Ł znaczy podstawę wycinka t. j. łuk wyprostowany na liniją prostą, służący wycinkowi za podstawę. Z §. 172 *uwaga* mamy $Ł = mr.\frac{\pi}{2}$, gdzie m znaczy stósunek miary kątowéj łuku do ćwiartki okręgu. W naszym przeto przypadku jest $m = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$, przeto $Ł = \frac{2}{3}.r.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi r}{3}$. A że $\pi = 3{\cdot}14159$, a $r = 10$, więc $Ł = 10{\cdot}472$, a następnie powierzchnia wycinka $W = 10{\cdot}472 \times 5 = 52.36$ stóp kwadratowych.

Nawzajem: *powierzchnia pewnego wycinka kołowego równa się 52·36 stóp kwadratowych, a promień koła w którém się ten wycinek uważa, zamyka 10 stóp; wieleż stopni ma łuk służący temu wycinkowi za podstawę?*

Z wyrażenia powierzchni wycinka $W = Ł \times \frac{1}{2} r$, znajdziemy $Ł = \frac{2W}{r} = \frac{104{\cdot}72}{10} = 10{\cdot}472$. Zaś z §. 172 *uwaga* mamy $m = \frac{Ł}{r} : \frac{\pi}{2} = \frac{10{\cdot}472}{10} : \frac{3{\cdot}14159}{2} = 1{\cdot}0472 \times \frac{2}{3{\cdot}14159}$

$$= \frac{2{\cdot}0944}{3{\cdot}14159} = 0{\cdot}66666\ldots$$

t. j. $\frac{\text{dług. łuku Ł wyrażonego w stopniach}}{90} = 0{\cdot}66666\ldots$

przeto długość łuku Ł w stopniach $= 0{\cdot}66666\ldots \times 90$ $= 59^0.999\ldots$ czyli $= 60^0$.

§. 175.

Zagadnienie 3. *Pyta się kto, jak długi jest łuk mający $10^0\ 15'\ 36''$, gdy promień koła do którego należy jest $= 864$ stopy?*

Ponieważ długość czyli miara podłużna łuku $a = mr.\frac{\pi}{2}$ gdzie r i π są znane, przeto należy znaleść wprzód m.

W naszym przykładzie jest

$$m = \frac{10^0 15' 36''}{90^0} = \frac{10^0 26}{90^0} = \frac{615'.6}{5400'} = \frac{36936''}{324000''} = \frac{114}{1000} = 0{\cdot}114$$

przeto szukana długość łuku

$$a = 0{\cdot}114.864.\frac{3{\cdot}14159}{2} = 154{\cdot}717 \text{ stóp.}$$

Załóżmy sobie jeszcze znaleść długość łuku jednéj sekundy dla promienia r.

Tu widzimy, że tylko potrzeba obrachować iloczyn $\frac{m\pi}{2}$, ten zaś jest $= \frac{1}{324000} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{648000} = 0{\cdot}00000485$.

W ogólności więc dla jakiegokolwiek promienia, długość łuku jednéj sekundy jest $= 0{\cdot}00000485.r$. Wziąwszy $r = 1000000$ stop czyli prawie $41\frac{2}{3}$ mil, otrzymamy długość łuku 1 sekundy $= 4{\cdot}85$ stop. Wziąwszy zaś długość promienia 24000 stop czyli milę, znajdziemy też długość łuku jednéj sekundy $= 0{\cdot}1164$ stóp. Z powodu takiéj małości łuku jednéj sekundy, najczęściéj w praktycznych rachunkach, nie wymagających wielkiéj ścisłości, opuszczają się sekundy.

§. 176.

ZAGADNIENIE. 4. *Mając daną długość łuku, cięciwę i promień, znaleść powierzchnię odcinka kołowego.*

Rozwiązanie. Niech łuk AB $= a$ *fig. 178,* co do swéj długości będzie danym, tudzież cięciwa AB $= b$ i promień SA $= r$, potrzeba znaleść powierzchnię odcinka ACB.

Ponieważ według §. 169 *uwaga* powierzchnia odcinka O $=$ W $-$ $\triangle$ASB, przeto znalazłszy powierzchnię wycinka ASBC i trójkąta ASB, tym samym mieć będziemy i powierzchnię żądanego odcinka.

Powierzchnia wycinka W $= a \times \frac{1}{2}r$, §. 169.

W trójkącie ASB z wierzchołka S spuściwszy prostopadłą SD na AB, będzie powierzchnia

$$\triangle ASB = \tfrac{1}{2}AB \times DS = \tfrac{1}{2}b \times DS.$$

W trójkącie DSB prostokątnym przy D jest
$\overline{DS}^2 = \overline{SB}^2 - \overline{DB}^2 = r^2 - (\frac{1}{2}b)^2 = r^2 - \frac{1}{4}b^2$, przeto DS $= \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}b^2}$; powierzchnia więc $\triangle ASB = \frac{1}{2}b\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}b^2}$, a nareszcie szukana powierzchnia odcinka jest $O = a \times \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}b\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}b^2}$. W tém wyrażeniu wszystkie ilości są znane, a zatém z łatwością powierzchnia odcinka wyrachowaną być może.

Jeżeli w szczególnym przypadku cięciwa b jest bokiem sześciokąta w koło wpisanego, tedy ponieważ $b = r$, będzie powierzchnia trójkąta ASB $= \frac{1}{2}r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}r^2} = \frac{1}{2}r\sqrt{\frac{3}{4}r^2} = \frac{1}{4}r^2\sqrt{3}$.

Według §. 172 $a = mr\frac{\pi}{2}$, czyli, ponieważ w tym przypadku $m = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$, skąd $a = \frac{2}{3} . r . \frac{\pi}{2} = \frac{\pi r}{3}$, powierzchnia wycinka będzie $W = \frac{\pi r}{3} \times \frac{1}{2}r = \frac{\pi r^2}{6}$, przeto nareszcie powierzchnia odcinka, którego cięciwa równa się promieniowi, jest

$$O' = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{1}{4}r^2\sqrt{3} = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

Lecz $\frac{\pi}{3} = 1{\cdot}0471975$

zaś $\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{\cdot}8660254$

więc $\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{\cdot}1811721$

a powierzchnia odcinka będzie $O' = 0{\cdot}090586r^2$.

Powierzchnia koła z promienia r jest $K = \pi r^2 = 3{\cdot}141592r^2$, przeto stósunek znalezionego odcinka, mającego za cięciwę promień, do powierzchni koła jest

$$\frac{O'}{K} = \frac{0{\cdot}090586r^2}{3{\cdot}141592r^2} = \frac{0{\cdot}090586}{3{\cdot}141592} = 0{\cdot}028835.$$

§. 177.

Zagadnienie 5. *Mając daną cięciwę i strzałkę, znaleść powierzchnię odcinka.*

Rozwiązanie. Niech na poprzedzającéj figurze będą $AB = b$ i $DC = s$ dane, wyrachować potrzeba powierzchnię odcinka ACB. Już wiadomo, że powierzchnia odcinka jest różnicą między powierzchnią wycinka i powierzchnią trójkąta. W obecném zagadnieniu przekonamy się, że z wiadomościami, jakich dotąd nabyliśmy, nie jesteśmy go wstanie rozwiązać, albowiem tylko powierzchnię trójkąta znaleść możemy, powierzchni zaś wycinka nie znajdziemy wprzód, dopóki nie będziemy wiedzieć miary kątowéj łuku AB t. j. dopóki nie znajdziemy ile stopni zamyka łuk AB. Ten łuk mierzy kąt ASB, przeto na znalezienie liczby stopni w łuku AB, potrzeba umieć znajdować kąt w trójkącie skoro jego boki są dane, czego się dopiéro w dalszym ciągu nauczymy.

Dla znalezienia powierzchni trójkąta, następujący rachunek odbyć potrzeba:

Ponieważ $AB = b$ jest znane, potrzeba znaleść wysokość DS, a już tym sposobem mieć będziemy i powierzchnię. Lecz jakże znaleść DS? Widzimy iż $DS = SC - CD = r - s$, zaś $\overline{DS}^2 = \overline{AS}^2 - \overline{AD}^2 = r^2 - \frac{1}{4}b^2$, skąd $r^2 + s^2 - 2rs = r^2 - \frac{1}{4}b$ albo $s^2 - 2rs = -\frac{1}{4}b^2$, a stąd $r = \dfrac{\frac{1}{4}b^2 + s^2}{2s} = \dfrac{b^2 + 4s^2}{8s}$

Zneleźliśmy tym sposobem promień koła SC,

$$\text{zatém } DS = r - s = \frac{b^2 + 4s^2}{8s} - s = \frac{b^2 - 4s^2}{8s}.$$

Tak tedy do znalezienia powierzchni trójkąta ASB mamy wszystko gotowe i będzie $\triangle ASB = \frac{1}{2}b\left(\dfrac{b^2 - 4s^2}{8s}\right)$ skoro się więc nauczymy znaleść w trójkącie ASB kąt S, potrafimy rozwiązać i podane zagadnienie.

Z §. 129 *wniosek* 5. wiemy, że wykreśliwszy na trzech bokach trójkąta prostokątnego trzy wielokąty podobne, powierzchnia wielokąta wykreślonego na przeciwprostokątni równa się summie powierzchni dwóch innych wielokątów; gdybyśmy na tychże trzech bokach jako na średnicach wykreślili okręgi kół, dowiedziemy, że powierzchnia koła wykreślonego na przeciwprostokątni, równa się summie powierzchni kół wykreślonych na dwóch bokach przyległych kątowi prostemu.

Jakoż oznaczywszy przez R promień koła, wykreślonego na przeciwprostokątni, zaś przez r i r' promienie dwóch innych kół, mamy AC $=2$R, AB $=2r$ i BC $=2r'$; *fig. 180*, a z przywiedzionego wyżéj §. jest $(2R)^2=(2r)^2+(2r)^2$
albo $4R^2=4r^2+4r'^2$ czyli $R^2=r^2+r'^2$.
Mnożąc obie strony tego zrównania przez π będzie $\pi R^2=\pi r^2+\pi r'^2$. Aże πR^2, πr^2 i $\pi r'^2$ wyrażają powierzchnie kół wykreślonych na rzeczonych trzech bokach, przeto prawdą jest, że i t. d. W ostatniém zrównaniu mnożąc obie strony przez $\frac{1}{2}$, będzie $\frac{1}{2}\pi R^2=\frac{1}{2}\pi r^2+\frac{1}{2}\pi r'^2$ t. j. powierzchnia półkola wykreślonego na przeciwprostokątni równa się summie powierzchni dwóch innych półkolów.

Po obustronach tego ostatniego zrównania odjąwszy summę odcinków kołowych ABM$+$BCN, pozostanie z piérwszéj strony trójkąt ABC, a z drugiéj summa powierzchni APBA$+$BQCB, zatém summa tych ostatnich powierzchni równa się powierzchni trójkąta ABC.

Powierzchnie krzywokreślne takie jak APBA i BQCB ograniczone dwoma łukami kół, w jednęż stronę wklęsłości swoje mającemi zwrócone, znane są w Geometryi pod nazwiskiem *księżyców Hippokratesa,* (lunulae Hippocratis), on albowiem piérwszy miał nauczyć znalezienia ich powierzchni czyli jak się zwyczajnie mówi ich *kwadrowania.*

Ponieważ w poprzedzającém widzieliśmy, że tylko dwóch księżyców razem można znaleść powierzchnię, zachodzi pytanie, czyli mając jeden taki księżyc można także znaleść jego powierzchnię?

Na prostéj AB *fig. 181,* wykreśliwszy okrąg koła i poprowadziwszy średnicę CD prostopadłą do AB a z jéj końca D promieniem DA zakreśliwszy łuk AEB, otrzymamy księżyc ACBEA. Szukajmy jego powierzchni.

Łuk AEB jest cwiartką okręgu, bo kąt ADB jest prosty; powierzchnie kół wykreślonych promieniami SA i DA mają się do siebie jak 1 : 2, §. 129 *wniosek* 2. Powierzchnia półkola ACBA $=\frac{1}{2}\pi\overline{SA}^2$; powierzchnia wycinka

$$ADBEA=\frac{1}{4}\pi\overline{DA}^2,$$

przeto ACBA : ADBEA $= \frac{1}{2}\pi\overline{SA}^2 : \frac{1}{4}\pi\overline{DA}^2 = 2\overline{SA}^2 : \overline{DA}^2$.
Lecz $\overline{SA}^2 : \overline{DA}^2 = 1 : 2$ czyli $2\overline{SA}^2 : \overline{DA}^2 = 2 : 2 = 1 : 1$
przeto ACBA : ADBEA $= 1 : 1$ czyli ACBA $=$ ADBEA.
Odjąwszy od każdéj z dwóch tych ilości odcinek AEBA, pozostanie ACBEA $= \triangle$ADB i tym sposobem powierzchnia księżyca znaleziona jako liczba wymierna; podobne przeto księżyce kwadrowanemi być mogą.

CZĘŚĆ II.

Stereometryja (Solidometryja).

§. 178.

Zwróciwszy naszę uwagę na to, co dotąd w umiejętności Geometryją nazwanéj zrobiliśmy, dostrzeżemy, że wyszedłszy od najprostszych pojęć, mianowicie zaś od pojęcia linii prostéj i uważając naprzód wielkość dwóch lub więcéj prostych, potém ich wzajemne względem siebie położenie i własności z tego położenia wypadających kątów, przyszliśmy nareszcie do figur prostemi na płaszczyznie ograniczonych, a których własności i rozmiary jak równie własności i rozmiary linii kołowéj i koła były dalszym przedmiotem części Geometryi którąśmy *Planimetryją* nazwali. Ale we wstępie powiedzieliśmy, że miejsce na płaszczyznie, lub przestrzeń ze wszech stron ograniczona, nazywa się pospolicie figurą; widzimy zatém, iż nam pozostają figury w przestrzeni uważane, bo dotąd żadnéj o nich wzmianki nie uczyniliśmy; następnie więc zatrudnimy się figurami w przestrzeni, które ogólnie *ciałami* (solida), a tę część Geometryi, *Solidometryją* albo lepiéj *Stereometryją* nazywamy.

Aby miejsce na płaszczyznie ograniczyć, potrzebowaliśmy najmniéj trzech prostych §. 15. Chcąc przestrzeń ograniczyć, potrzebować do tego będziemy płaszczyzn, bo ta nie da się ani prostemi ani krzywemi linijami ograniczyć; wypada więc mówić naprzód o płaszczyznach. A że w porównywaniu i dochodzeniu własności figur w przestrzeni czyli ciał geometrycznych, wypada bardzo często prowadzić proste w rozmaitém względem płaszczyzn położeniu, przeto mówiąc o płaszczyznach, równocześnie mówić będziemy o prostych, różne względem płaszczyzn położenie mających; po czém ograniczać będziemy bądź po części bądź całkiem przestrzeń i zastanawiać się nad własnościami tak ograniczonéj, czyli raczéj mówić będziemy o ciałach geometrycznych.

ROZDZIAŁ I.

O płaszczyznie i prostéj różne względem piérwszéj położenie mającéj.

§. 179.

We wstępie powiedzieliśmy, że *płaszczyzna* (planum) jest to taka powierzchnia, na któréj poprowadziwszy przez którekolwiek dwa tamże obrane punkta prostą, ta całkiem na niéj leży, t. j. żaden jéj punkt nie znajduje się za płaszczyzną. To znamię płaszczyzny tak jest samo z siebie jasne, że chcąc go dowodzić, możebyśmy je przyćmili; zatém przestając na tém, co o płaszczyznie w rzeczonym wstępie powiedziano, uczynimy tylko ten wniosek, że *prosta mająca z płaszczyzną dwa punkta spólne, wszystkie jéj punkta leżą na téjże płaszczyznie. Prosta więc nie może byc w części na płaszczyznie a w części za płaszczyzną, t. j. nie może leżeć na dwóch różnych płaszczyznach.*

We wszystkich rysunkach jako téż i figurach, wystawiać będziemy na papierze lub tablicy płaszczyznę przez równoległobok i oznaczać dwiema głoskami na jego przekątni położonemi. Tak atoli narysowaną i ograniczoną płaszczyznę, wystawić sobie należy rozszerzoną do nieskończoności. Podzieli ona całą przestrzeń (spatium) na dwie nieograniczone części nazwane *okolicami* (regiones).

Drugie znamię płaszczyzny wskazaliśmy we wstępie, że *trzy punkta nie w jednym kierunku leżące, dokładnie wyznaczają płaszczyznę.* Znamię to możemy w następujący sposób dowieść.

Ponieważ przez jednę prostą można pomyślić nieskończoną liczbę płaszczyzn, tak jak przez punkt na płaszczyznie nieskończoną liczbę prostych, przeto jeżeli dane są trzy punkta A, B, C *fig. 182* jakkolwiek byle nie w jednym kierunku w przestrzeni położone, można sobie pomyślić jakąkolwiek płaszczyznę przez prostą AB łączącą dwa którekolwiek z danych punktów przechodzącą; tym sposobem dwa dane punkta A i B leżeć będą na téjże płaszczyznie. Wystawiwszy sobie teraz tę płaszczyznę materyjalną i obracając ją około prostéj AB jakby około osi, ta w obrocie swoim myślą, jeżeli tego potrzeba, rozszerzona, napotka trzeci punkt C i na nim się wstrzyma; przechodzić więc będzie przez trzy dane punkta i mieć położenie stałe, bo dalszego obrotu odbywać nie może nie opuściwszy punktu C. Trzy więc punkta A, B, C nie w jednym kierunku leżące znajdują się na jednéjże płaszczyznie, któréj nadają położenie stałe.

Że przez te trzy punkta więcéj płaszczyzn przechodzić nie może, albo téż przechodząc, że się z piérwszą mieszają czyli schodzą, łatwo się o tém przekonać. Gdyby bowiem punkta A, B, C leżały na dwóch różnych płaszczyznach, natenczas proste łączące też punkta, t. j. proste AB, AC, BC brane po dwie t. j. AB, AC; AB, BC; AC, BC leżeć by musiały całkiem na dwóch płaszczyznach, co według powyższego być nie może, przeto téż być nie może, iżby trzy punkta A, B, C leżały na dwóch różnych płaszczyznach, czyli żeby przez trzy punkta nie w jednym kierunku leżące więcéj jak jedna płaszczyzna przechodzić mogło.

§. 180.

Z tego dowodu wypada, że *przez dwie proste przecinające się,* jako téż i *dwie proste równoległe jedna tylko płaszczyzna przechodzić może;* w obu bowiem przypadkach dowód téj prawdy, sprowadza się do poprzedzającego. Bo wystawiwszy sobie w piérwszym przypadku przez jednę z prostych poprowadzoną płaszczyznę, punkt przecięcia się prostych, jak równie każdy punkt téj prostéj, przez którą płaszczyznę pomyśliliśmy, leżeć będzie na téjże płaszczyznie. A że dla naznaczenia kierunku prostéj dostateczne są dwa punkta, przeto obierając jeszcze na drugiéj prostéj trzeci punkt, sprowadzamy tym sposobem obecną prawdę do poprzedzającego §.

W drugim przypadku obrawszy na jednéj z równoległych dwa a na drugiéj trzeci punkt, przyjdziemy znowu w dowodzie do §. 179. Prawdy przeto albo twierdzenia, że przez prostą i punkt za nią dany, przez dwie proste przecinające się, dwie proste równoległe i trzy proste wzajemnie się przecinające czyli przez trzy boki trójkąta, prowadzić zawsze można płaszczyznę ale tylko jednę, są rzeczywiście wnioskami twierdzenia, że przez trzy punkta nie w jednym dane kierunku, zawsze poprowadzić można płaszczyznę ale tylko jednę.

Z tego też samego twierdzenia wypływają następujące prawdy jako proste wnioski.

a) *Przecięcie się dwóch płaszczyzn jest liniją prostą.* Gdyby bowiem trzy na tém przecięciu obrane punkta nie leżały w jednymże kierunku, dwie płaszczyzny mające te trzy punkta spólne, zejśćby się musiały, co się sprzeciwia wysłowieniu, że się *przecinają.*

b) Dwie płaszczyzny mające jeden punkt spólny, mają też nieskończoną liczbę innych punktów spólnych, które wszystkie leżą na prostéj z przecięcia się płaszczyzn wypadającéj.

c) *Przez punkt w przestrzeni nie można prowadzić więcéj jak jednę prostą równoległą do innéj danéj.* Przypuściwszy bowiem, że można przynajmniéj dwie réwnoległe poprowadzić, tedy jako proste przecinające się w tym danym punkcie, leżałyby na jednéj płaszczyznie, potém jako każda równoległa do danéj, leżałaby znowu każda z tą ostatnią na jednéjże płaszczyznie, więc przez punkt dany na płaszczyznie, możnaby poprowadzić więcéj niż jednę równoległą do prostéj danéj, co jak z §. 12 wiemy, jest niepodobném.

d) *Wszystkie równoległe, jakie pomyślić można przez każdy, albo niektóre punkta téjże saméj prostéj, leżą koniecznie na jednéjże płaszczyznie.* Przez dwa bowiem którekolwiek punkta téj prostéj poprowadziwszy dwie inne proste równoległe, te według powyższego leżą na jednéjże płaszczyznie; a że i wszystkie punkta piérwszéj prostéj leżą na téj płaszczyznie przez ostatnie dwie równoległe przechodzącéj, zatém równoległe przez każdy punkt piérwszéj prostéj leżą na téjże saméj płaszczyznie.

§. 181.

Dwie proste uważane na płaszczyznie, mogą tylko być między sobą równoległe lub się przecinać §. 4, w przestrzeni zaś też dwie proste mogą także być od siebie równoległe albo się przecinać i wtedy, leżą na jednéjże płaszczyznie, ale oprócz tego mogą się nie przecinać a wszelako nie być równoległemi, a w takim razie znajdują się na różnych płaszczyznach.

Kiedy prosta mająca dwa z płaszczyzną spólne punkta, całkiem na niéj leży, zatém taż prosta tylko trojakie położenie względem płaszczyzny mieć może, t. j. albo leżeć na płaszczyznie, albo od niéj być równoległą, albo téż mieć z płaszczyzną jeden tylko punkt spólny. W tym ostatnim przypadku mówimy, że *płaszczyzna przecina prostą*. Punkt spólny prostéj i płaszczyznie, zowiemy *punktem przecięcia się prostéj z płaszczyzną*. Samę prostą nazwiemy *prostopadłą do płaszczyzny*, jeżeli jest prostopadłą do każdéj prostéj na téjże płaszczyznie przez ów punkt spólny, który w tym przypadku *spodkiem prostopadłéj* nazwiemy, przechodzącéj. W każdym innym przypadku zwać będziemy rzeczoną prostą *pochyłą do płaszczyzny*.

Prosta jest równoległą do płaszczyzny, jeżeli obie jak najdaléj przedłużone, nigdzie się z sobą nie schodzą.

Dwie płaszczyzny są także równoległe, jeżeli bez granic rozszerzone, nigdzie się z sobą nie spotykają.

§. 182.

Jeżeli dwie płaszczyzny nie są równoległe, dostatecznie rozszerzone przetną się z sobą w prostéj, a wtedy mówimy, że też płaszczyzny czynią z sobą pewien kąt. Kąt ten dwóch płaszczyzn nazywamy *kątem dwuściennym* (dièdre). Płaszczyzny tworzące ten kąt nazywamy *ścianami kąta* (facies), spólne zaś przecięcie się tych płaszczyzn, które tu zastępuje wierzchołek kąta zowiemy *krawędzią* kąta dwuściennego, przez Eulera nazwane po łacinie *acies.* Francuzi nazywają tę krawędź *arête* a Niemcy *Kante.*

Jeżeli kąt dwuścienny jest tylko jeden przy téjże krawędzi, znaczymy go i wymawiamy dwiema głoskami na krawędzi położonemi; jeżeli zaś dwa lub więcéj kątów dwuściennych mają krawędź spólną, natenczas do przeczytania każdego z nich używa się czterech głosek, z których dwie środkowe kładą się na krawędzi, dwie zaś skrajne na ścianach kąta. Tak *np.* cztery kąty, jakie tworzą dwie płaszczyzny ABCD i EFGH przecinające się w prostéj LK *fig. 183,* przeczytamy każdy pojedynczo uważany LK, dla rozróżnienia zaś każdego z czterech, jak następuje: ALKH, ELKC, BLKG i FLKD. Jak się takie kąty mierzą, w dalszym ciągu zobaczymy.

§. 183.

W powyższym §. 181 powiedzieliśmy, że prosta wtedy jest do płaszczyzny prostopadła, gdy jest prostopadłą do każdéj prostéj na téjże płaszczyznie przez jéj spodek poprowadzonéj; ale ponieważ wiadomo, iż przez jeden punkt na płaszczyznie nieskończoną liczbę prostych prowadzić można, przeto chcąc dowieść prostopadłości jakiéj prostéj do płaszczyzny, potrzebaby dowodzić jéj prostopadłości do każdéj prostéj przez jéj spodek na téjże płaszczyznie przechodzącéj, t. j. prowadziéby potrzeba nieskończoną liczbę dowodów, czyli wyraźniéj mówiąc, nigdybyśmy tych dowodów skończyć nie mogli, a następnie nie moglibyśmy ostatecznie wyrzec o prostopadłości rzeczonéj prostéj do płaszczyzny. Dla tego, aby wskazać cechę, po któréj moglibyśmy poznać, że jaka prosta jest prostopadłą do płaszczyzny, obrać nam potrzeba inną drogę dowodu. Na ten koniec dosyć będzie dowieść następujące

Twierdzenie. *Jeżeli prosta jest prostopadłą do dwóch innych prostych, na pewnéj płaszczyznie przez jéj spodek przechodzących, a zatém tamże przecinających się, jest tém samém prostopadłą do każdéj innéj prostéj na téjże saméj płaszczyznie i przez tenże sam spodek poprowadzonéj.*

Niech prosta AS *fig. 184*, będzie prostopadłą do dwóch innych SB i SC na płaszczyznie PQ przez punkt S przecięcia się jéj z płaszczyzną poprowadzonych, potrzeba dowieść, że taż sama prosta AS jest téż prostopadłą do każdéj innéj prostéj na téjże saméj płaszczyznie przez punkt S poprowadzonéj. Jedną z tych prostych niech będzie SD. Na dowiedzenie tego twierdzenia, prostą AS przedłużmy na drugą stronę płaszczyzny aż do punktu A′, lecz tak, iżby A′S było = AS; potém na płaszczyznie PQ poprowadźmy jakkolwiek prostą KL, byle tylko trzy proste SB, SC i SD przecinała, jak na figurze w punktach E, F, G; a połączywszy punkt E z punktami A A′, ponieważ SE z założenia jest prostopadłą do prostéj AA′ i to z jéj środka S wyprowadzona, zatém dwie proste AE i A′E są sobie równe §. 42, gdyż one są dwiema pochyłemi jednakowo od spodku S prostopadłéj BS odległemi. Dla téj saméj przyczyny połączywszy punkt F z punktami A i A′, będzie AF = AF′. Dwa trójkąty AEF i A′EF, w których trzy boki jednego są równe trzem bokom drugiego każdy każdemu, bo AE = A′E; AF = A′F i EF spólne, przystają do siebie według §. 22. W ich przystaniu, ponieważ proste AG i A′G łączące punkt G z punktami A i A′ leżą na płaszczyznach tych trójkątów, a mianowicie prosta AG na płaszczyznie trójkąta AEF, prosta zaś A′G na płaszczyznie trójkąta A′EF, kiedy punkt A′ padnie na punkt A, prosta A′G padnie na prostą AG, i zupełnie się przykryją; jest więc tym sposobem AG = A′G; następnie zaś SG musi być prostopadłą do AA′, kiedy dwie piérwsze jako pochyłe i jednakowo od jéj spodku S odległe są sobie równe, według §. 42. A kiedy SG jest prostopadłą do AA′ więc wzajemnie A′A jest prostopadłą do SG czyli SD, co było do dowiedzenia.

Wniosek 1. Ponieważ prostéj SD nie naznaczaliśmy żadnego szczególnego położenia oprócz przechodzenia przez punkt S i znajdowania się na płaszczyznie PQ, zatém łatwo wnieść można, że ten dowód stósowanym być może do każdéj, z owéj nieskończonéj liczby wspomnianych prostych i że zatém cecha, po któréj poznaje się prostopadłość prostéj do płaszczyzny jest ta, iż *każda prosta prostopadła do dwóch innych w jéj spodku się przecinających, jest tém samém prostopadłą do płaszczyzny przez te dwie proste przechodzącéj, i wzajemnie ta płaszczyzna do niéj jest prostopadłą.*

Wniosek 2. Prosta prostopadła do płąszczyzny, jest tém samém prostopadłą do każdéj prostéj na téjże płaszczyznie przez jéj spodek poprowadzonéj.

§. 184.

Twierdzenie wzajemne. *Jeżeli prosta jaka jest prostopadłą do trzech innych prostych przez jeden którykolwiek jéj punkt przechodzących, trzy te proste leżą koniecznie na jednéjże płaszczyznie.*

Niech prosta AS będzie prostopadłą do trzech innych SB, SC, SD przez jedenże jéj punkt S *fig. 185* przechodzących, potrzeba dowieść, że trzy te proste leżą na jednéjże płaszczyznie. Przypuśćmy, że którakolwiek z tych trzech prostych *np.* SB nie leży na płaszczyznie przez dwie inne SC i SD przechodzącéj, tedy leżeć musi nad albo pod tąż płaszczyzną. W każdym razie wystawiwszy sobie przez dwie proste AS i SB przecinające się w punkcie S poprowadzoną płaszczyznę, co według §. 179 można, i dostatecznie rozszerzoną, ta musi koniecznie przeciąć płaszczyznę przez SC i SD przechodzącą. Tém spólném przecięciem niech będzie prosta SE, trzy więc proste AS, SB i SE leżą na jednéjże płaszczyznie; ale téż i trzy proste SC, SD i SE leżą również na jednéj a od tamtéj różnéj płaszczyznie. Według poprzedzającego twierdzenia AS będąc z założenia prostopadłą do SC i SD, jest téż prostopadłą i do SE. Ale również z założenia jest AS prostopadłą do SB, przeto z punktu S na jednéjże płaszczyznie możnaby wyprowadzić dwie prostopadłe SB i SE do AS, co według §. 28 jest niepodobném; równie więc jest niepodobném, iżby prosta SB nie leżała na płaszczyznie przez dwie inne SC, SD przechodzącéj; co należało dowieść.

Wniosek 1. Z obu razem poprzedzających twierdzeń wypływa, że wszystkie prostopadłe do jednéjże prostéj w przestrzeni, przez którykolwiek jéj punkt przechodzące, koniecznie leżą na jednéj i téjże saméj płaszczyznie, co w Geometryi wyrażamy zwyczajnie następującemi słowy: *miejscem geometryczném wszystkich prostopadłych do jednéjże prostéj przez którykolwiek jéj punkt przechodzących, jest płaszczyzna.*

Wniosek 2. Przez dany punkt S na prostéj AS, można zawsze poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do tejże prostéj ale tylko *jednę*. Przypuściwszy bowiem, że przez tenże punkt można poprowadzić przynajmniéj dwie płaszczyzny prostopadłe do AS, tedy przez prostą AS prowadząc trzecią różną od tamtych, ta koniecznie przetnie dwie piérwsze płaszczyzny, a mianowicie każdą w prostéj. Dwie te z przecięcia się płaszczyzn wypadające proste leżąc na dwóch różnych płaszczyznach i przechodząc przez punkt S, byłyby prostopadłe do AS, co według poprzedającego wniosku być nie może. Albo uważając rzeczone dwie proste jako leżące na jednéjże płaszczyznie z prostą AS t. j. na płaszczyznie trzeciéj, mielibyśmy dwie prostopadłe z jednegoż punktu S do téjże saméj prostéj wyprowadzone, co również jest niepodobném.

Wniosek 3. Przez punkt E dany za prostą AA′ *fig. 184* można także poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do téjże prostéj AA′, ale znowu tylko *jednę*, a to następującym sposobem. Według §. 179 przez prostą AA′ i punkt E poprowadźmy płaszczyznę, a na niéj z punktu E spuśćmy prostopadłą ES do AA′ §. 28, potém z punktu S na innéj przez AA′ przechodzący płaszczyznie, poprowadźmy drugą prostą SF prostopadłą do AA′, tedy prosta AA′ będzie prostopadłą do płaszczyzny ESF §. 183 i wzajemnie, płaszczyzna ESF będzie prostopadłą do prostéj AA′, a zatém płaszczyzną żądaną.

Że tylko jednę taką płaszczyznę przez punkt E poprowadzić można, łatwo okazać. Przypuściwszy bowiem, że przez punkt E przechodzi inna do AA′ prostopadła płaszczyzna, tedy pomyśliwszy przez dwie proste AS i SE trzecią płaszczyznę, ta przecięłaby dwie piérwsze do AA′ prostopadłe w dwóch prostych w punkcie E przecinających się a przecież prostopadłych do AA′, co jest niepodobném, bo z jednego punktu nie można spuścić dwóch prostopadłych do jednéjże prostéj, leżącéj z rzeczonym punktem na téjże saméj płaszczyznie.

Uwaga. Na początku widzieliśmy, że do prowadzenia albo wyznaczenia stałego położenia płaszczyzny, potrzebne są trzy warunki, mianowicie zaś, iżby przechodziła przez trzy nie w jednym kierunku dane punkta. Z poprzedzającego wniosku przekonywamy się, że toż położenie płaszczyzny tylko dwa warunki dostatecznie wyznaczają czyli ustalają. Temi warunkami są, iżby płaszczyzna *przechodziła* przez pewien na prostéj dany punkt i była do niéj *prostopadłą;* skąd się pokazuje, że prostopadłość zastępuje dwa warunki.

§. 185.

Twierdzenie. *Jeżeli prosta* AS *fig. 186 jest prostopadłą do płaszczyzny* PQ, *a na téj płaszczyznie poprowadzimy dowolnie prostą* BC, *potém ze spodka* S *prostopadłéj* AS *spuścimy do* BC *prostopadłą* SD *i punkta* A *i* D *połączymy prostą* AD, *prosta* BC *będzie prostopadłą do płaszczyzny* ASD *przez* AS *i* AD *przechodzącéj.*

Wziąwszy bowiem na BC dwa punkta E i F jednakowo od D odległe i te złączywszy z punktami S i A prostemi SE, SF i AE, AF, tedy dwa trójkąty ASE i ASF, prostokątne przy S, mając AS spólne i SE=SF §. 42 *c)*, przystają do siebie według §. 23, a w szczególności AE=AF, następnie zaś AD jest prostopadłą do BC. Prosta więc BC będąc prostopadłą do dwóch innych AD i DS przecinających się w jednym z ich punktów D, jest też prostopadłą do płaszczyzny przez też proste przechodzącéj t. j. do płaszczyzny ADS, co było do dowiedzenia.

Wniosek. Na téj zasadzie można bardzo łatwo z punktu danego za lub na płaszczyznie, poprowadzić prostą do niéj prostopadłą, t. j. z danego punktu spuścić albo wyprowadzić prostopadłą do płaszczyzny. I tak: aby z danego za płaszczyzną punktu spuścić prostopadłą do téjże płaszczyzny, dosyć będzie poprowadzić dowolnie na danéj płaszczyznie prostą BC, *fig. 186*, potém przez tę prostą, i punkt dany poprowadzić płaszczyznę, a na niéj z danego punktu A spuścić prostopadłą AD do BC, z jéj zaś spodka D, na danéj płaszczyznie wyprowadzić inną DS do BC prostopadłą. Nareszcie na płaszczyznie przez AD i DS przechodzącéj, spuścić z punktu A prostopadłą AS do DS, a ta będzie zarazem prostopadłą do płaszczyzny danéj według poprzedzającego twierdzenia.

Podobnież, aby z danego punktu S na płaszczyznie PQ wyprowadzić prostopadłą do téjże płaszczyzny, potrzeba naprzód na płaszczyznie PQ poprowadzić dowolnie prostą BC, i z danego punktu S spuścić do niéj prostopadłą SD; prowadząc potém przez BC płaszczyznę jakąkolwiek, byle różną od danéj, potrzeba na niéj z punktu D poprowadzić prostopadłą DA do BC; nareszcie na płaszczyznie tych dwóch prostych t. j. DS i DA do BC prostopadłych, wyprowadzić z punktu S prostopadłą do SD, a ta będzie zarazem prostopadłą do płaszczyzny PQ.

Uwaga. Nie od rzeczy tu będzie zwrócić uwagę, że w przestrzeni można zawsze poprowadzić prostopadłą do dwóch innych prostych nierównoległych, jak w powyższém twierdzeniu prosta SD jest tak do AS jako téż i do BC prostopadła. Ta téż prostopadła mierzy najkrótszą dwóch rzeczonych prostych odległość.

§. 186.

Twierdzenie. *Z punktu danego tak na płaszczyznie jako téż i za płaszczyzną nie można ani wyprowadzić ani spuścić więcéj prostopadłych do téjże płaszczyzny jak jednę.*

Niech danym na płaszczyznie punktem będzie S *fig. 187*, przypuśćmy, jeżeli można, iż z tegoż punktu dwie prostopadłe SA i SB do płaszczyzny PQ wyprowadzić można, tedy wystawiwszy sobie przez te dwie proste poprowadzoną płaszczyznę, ta przetnie nam płaszczyznę PQ np. w prostéj SC, do któréj tak AS jako i BS byłyby prostopadłe, co być nie może; więc i to być nie może, aby z tegoż samego na płaszczyznie punktu dwie lub więcéj prostopadłych wyprowadzić można.

Co do drugiego. Niech danym za płaszczyzną punktem będzie A, przypuśćmy znowu, jeżeli można, że z tego punktu oprócz AS można spuścić inną AD prostopadłą do płaszczyzny PQ. Pomyśliwszy przez AS i AD poprowadzoną płaszczyznę, ta przetnie płaszczyznę PQ w prostéj SD i w trójkącie ASD mielibyśmy kąty przy S i D proste, co również być nie może; niepodobném jest przeto z punktu za płaszczyzną spuścić dwie lub więcéj prostopadłych do téjże.

§. 187.

Definicyja. Z punktu danego za płaszczyzną poprowadziwszy różne proste spotykające tęż płaszczyznę w różnych punktach B, C, D, E, F, te proste oprócz prostopadłéj AS *fig. 188*, nazywają się *pochyłe* (obliquae) do płaszczyzny, a punkta ich spotkania się z płaszczyzną PQ nazywamy ich *spodkami.* Dwie którekolwiek pochyłe, których spodki są jednakowo odległe od spodku prostopadłéj, *nazywamy jednakowo oddalające się od prostopadłéj.*
Na zasadzie téj można dowieść następujące

Twierdzenie. *Z punktu wziętego za płaszczyzną poprowadziwszy do niéj prostopadłą tudzież różne pochyłe, będzie* a) *prostopadła krótsza niż każda z pochyłych,* b) *dwie pochyłe równo od prostopadłéj oddalające się są równe,* c) *z dwóch pochyłych ta jest dłuższa, która się więcéj od prostopadłéj oddala.*

Niech za płaszczyzną PQ będzie punkt A *fig. 188*, poprowadziwszy z niego AS prostopadłą, tudzież AB, AC, AD, AE i AF pochyłe do płaszczyzny PQ, i połączywszy punkta ich spotkania się z płaszczyzną ze spodkiem S prostopadłéj AS prostemi SB, SC, SD, SE i SF mamy:

Co do piérwszego. W trójkątach BAS, CAS, DAS, EAS i FAS prostokątnych przy S, każda przeciwprostokątnia AB, AC, AD, AE AF, jest dłuższą niż bok AS przyległy kątowi prostemu, zatém prostopadła AS jest krótszą niż każda pochyła.

Co do drugiego. Jeżeli SB=SC=SD=SE=SF, rzeczone trójkąty prostokątne według §. 23 przystają do siebie a następnie $AB = AC = AD = AE = AF$, t. j. pochyłe jednakowo od prostopadłéj oddalające się, są między sobą równe.

Co do trzeciego. Niech będzie $SG > SC$, wziąwszy na SG, $SB = SC$ i poprowadziwszy proste AB, AG, ponieważ kąt ABS jest ostry, więc kąt jemu przyległy ABG jest rozwarty, a dla tego $AG > AB$. Ale $AB = AC$ według poprzedzającego, zatém $AG > AC$.

Wniosek 1. Kiedy prostopadła z jakiego punktu do płaszczyzny spuszczona jest najkrótszą między wszystkiemi prostemi, jakie z tegoż punktu i do téjże saméj płaszczyzny poprowadzić można, tedy ta prostopadła jest rzeczywiście stała i niezmienna, a jako taka, sama jedna służyć może za miarę odległości punktu od płaszczyzny.

Wniosek 2. Którykolwiek punkt A wzięty na prostopadłéj do płaszczyzny, jest jednakowo odległy od punktów téjże płaszczyzny, leżących na okręgu koła z jéj spodka, jako ze środka, jakimkolwiek promieniem zakreślonego.

Wniosek 3. Jeżeli prostopadłą AS przedłużymy na drugą stronę płaszczyzny PQ aż do punktu A', lecz tak, iżby było $A'S = AS$, natenczas punkta B, C, D, E, F . . będą także w równéj odległości od punktu A', a w ogólności którykolwiek punkt płaszczyzny PQ jest w równéj odległości tak od A jako i od A'; skąd własność płaszczyzny, iż *jeżeli ta dzieli jaką prostą do niéj prostopadłą na dwie równe części, każdy punkt płaszczyzny jest w równej odległości od końców prostéj.*

Uwaga. Każdy punkt A prostopadłéj SA można téż uważać jako środek koła, a pochyłe równe, jako jego promienie, bo którąkolwiek z nich można zakreślić rzeczony okrąg koła. Z tego powodu często nazywamy prostopadłą AS osią okręgu koła BCDEF na płaszczyznie PQ zakreślonego.

§. 188.

Poprzedzająca uwaga podaje nam nowy sposób spuszczenia prostopadłéj do płaszczyzny z danego za nią punktu. Przytwierdziwszy bowiem w danym punkcie A jakiéjkolwiek długości nitkę i tę dokładnie wyciągnąwszy, naznaczmy drugim jéj końcem na danéj płaszczyznie PQ trzy punkta np. B, D, E, przez które okrąg koła ma przechodzić, a znalazłszy środek S tegoż koła, według §. 93, ten będzie spodkiem szukanéj prostopadłéj, złączywszy go zatém z punktem danym A prostą SA, otrzymamy żądaną prostopadłą.

§. 189.

Wszystko co w poprzedzającém twierdzeniu i wnioskach powiedzieliśmy o płaszczyznie, zupełnie odpowiada temu co §. 42 dowiedziono o prostopadłéj i pochyłych. Następująca téż własność płaszczyzny, jest jeszcze odpowiednią własnościom prostopadłych i pochyłych na płaszczyznie.

Jeżeli do prostéj oznaczonéj długości poprowadzimy płaszczyznę prostopadłą, a mianowicie tak, iżby tęż prostą na dwie równe części przecinała, tedy *każdy punkt téj płaszczyzny jest w równéj odległości od końców prostéj*, jak to już w poprzedzającym §. *wniosek* 3. widzieliśmy; każdy zaś punkt *za płaszczyzną leżący*, znajduje się w nierównéj odległości od tychże końców. Albo, jak się zwyczajnie Geometrowie wyrażają: *miejscem geometryczném punktów jednakowo od obu końców pewnéj prostéj odległych, jest płaszczyzna do téjże prostéj prostopadła i dzieląca ją na dwie równe części.* Tę własność bardzo łatwo pojąć i dowieść, prowadząc przez prostą płaszczyznę jakąkolwiek, która koniecznie przetnie pierwszą w prostéj prostopadłéj do piérwszéj prostéj, a wtedy mamy do czynienia z dwiema prostopadłemi na płaszczyznie; wszystko zatém co się dowiodło w §. 42, ma tu swoje zastósowanie.

§. 190.

Twierdzenie. *Dwie proste prostopadłe do jednéjże płaszczyzny, są od siebie równoległe.*

Niech będą dwie proste K i L prostopadłe do płaszczyzny PQ; *fig. 189*, potrzeba dowieść, że te proste są od siebie równoległe. Cały nasz dowód zmierzać będzie do pokazania, że dwie te proste są na jednéjże płaszczyznie i prostopadłe do trzeciéj prostéj.

Na udowodnienie tego twierdzenia, przedłużmy obie proste aż do spotkania się z płaszczyzną PQ w punktach A i B. Te punkta złączmy prostą AB, a obrawszy na jednéj z prostych danych, np. na K punkt C w jakiéjkolwiek od płaszczyzny odległości, z punktu B na płaszczyźnie PQ wyprowadźmy BD prostopadłą do AB i równą AC, nareszcie poprowadźmy prostą BC. Dwa trójkąty ABC i ABD mają kąty przy A i B równe jako proste, piérwszy z założenia według §. 182, drugi z wykreślenia i boki te kąty obejmujące równe, bo AB jest spólny obu trójkątom, a BD = AC z wykreślenia, przeto według §. 23 przystają do siebie, a w szczególności AD = BC. Poprowadziwszy znowu prostą CD, dwa trójkąty ACD i BCD, w których trzy boki jednego równe są trzem bokom drugiego, każdy każdemu, przystają do siebie według §. 22; w szczególności więc kąt CBD = CAD. A że kąt CAD jest prosty §. 183, więc i kąt CBD jest także prosty, t. j. prosta BD jest prostopadłą do BC. Lecz taż prosta jest prostopadłą z wykreślenia do AB, jest przeto zarazem prostopadłą do płaszczyzny przez AB i BC przechodzącéj. Ale płaszczyzna przechodząca przez AB i CB przechodzi téż tak przez prostą AK jako i prostą BL, więc trzy proste AK, AB i BL leżą na jednéjże płaszczyznie. A kiedy BL z założenia jest prostopadłą do płaszczyzny PQ, przeto jest téż prostopadłą tak do AB jako i do BD. Dwie więc proste AK i BL, leżąc z trzecią AB na jednéjże płaszczyznie są oraz do niéj prostopadłe, zatém według §. 13 są od siebie równoległe, co było do dowiedzenia.

Wzajemnie: Z dwóch równoległych jeżeli jedna jest prostopadłą do płaszczyzny, druga także musi być prostopadłą do téjże płaszczyzny. Gdyby bowiem to nie było, możnaby np. z punktu B wyprowadzić inną prostą BM prostopadłą do płaszczyzny PQ; lecz tym sposobem dwie proste AK i BM prostopadłe do jednéjże płaszczyzny PQ, byłyby według poprzedzającego §. równoległe od siebie. A że BL z założenia jest równoległa od AK, więc przez punkt B możnaby poprowadzić dwie równoległe od prostéj AK, co według §. 180 *c)* być nie może, więc téż i to być nie może, iżby BL nie była prostopadłą do płaszczyzny PQ.

Uwaga. Twierdzenie to podaje nam nowy sposób wyprowadzenia z danego na płaszczyznie punktu prostopadłéj do téjże płaszczyzny. Spuściwszy bowiem z jakiegokolwiek innego punktu prostopadłą do danéj płaszczyzny, według §. 185 *wniosek*, jeżeli przez dany na płaszczyznie punkt, poprowadzimy równoległą do téj prostopadłéj, ta będzie prostopadłą żądaną według teraźniejszego twierdzenia.

Wniosek. Dwie proste równoległe od trzeciéj nie leżącéj z niemi na téjże saméj płaszczyznie, są także równoległe od siebie. Niech bowiem dwiema prostemi będą AB i EF równoległemi do trzeciéj CD *fig. 190*, która leży na innéj płaszczyznie; tedy przez którykolwiek punkt téj ostatniéj G, poprowadziwszy płaszczyznę do niéj prostopadłą §. 184 *wniosek 3*, i tę rozszérzywszy aż do przecięcia się z dwiema piérwszemi w punktach H i I, będzie tak AB jako téż i EF, stósownie do poprzedzającego twierdzenia, prostopadłą do téjże płaszczyzny GHI; a jako takie, są według tego twierdzenia równoległe od siebie.

§. 191.

Twierdzenie. *Jeżeli jaka prosta jest równoległą do innéj prostéj na pewnéj płaszczyznie poprowadzonéj, piérwsza prosta, równie jak płaszczyzna, na któréj druga leży, najdaléj przedłużone, nigdzie się zejść nie mogą, czyli stósownie do §. 181, prosta jest równoległą do płaszczyzny.*

Prostą daną niech będzie AB równoległa do innéj CD na płaszczyznie PQ poprowadzonéj *fig. 191.* Przez te dwie równoległe poprowadziwszy płaszczyznę, ta przetnie się z płaszczyzną PQ w prostéj CD. Gdyby więc prosta AB zejść się mogła gdziekolwiek z płaszczyzną PQ, tedy ponieważ dwie proste AB i CD leżą na jednéjże płaszczyznie przez AB przechodzącéj, a przecinającéj się z płaszczyzną PQ w prostéj CD, zejście to nie gdzieindziéj nastąpićby mogło, jak tylko w kierunku prostéj CD jako spólnego przecięcia się dwóch tych płaszczyzn, a zatém w jednym z punktów prostéj CD.

Ale proste AB i CD z założenia są od siebie równoległe, zejść się przeto w żaden sposób nie mogą, zatém i zejście się prostéj AB z płaszczyzną PQ jest niemożebne; jest więc prosta AB równoległą do płaszczyzny PQ.

Wniosek. Jak prosta CD równoległa do AB jest zarazem przecięciem się płaszczyzny przez AB i CD, przechodzącéj z płaszczyzną PQ, tak téż spólne przecięcie się każdéj przez AB przechodzącéj płaszczyzny z płaszczyzną PQ, jest równoległe do prostéj AB. Lecz przez prostą AB prowadzić można nieskończoną liczbę płaszczyzn przecinających się z płaszczyzną PQ, zatém jeżeli jaka prosta jest równoległą do płaszczyzny, można na téj płaszczyznie poprowadzić nieskończoną liczbę prostych do piérwszéj równoległych. Dosyć bowiem przez rzeczoną prostą prowadzić jakiekolwiek płaszczyzny przecinające się z daną, a te spólne przecięcia będą równoległemi do prostéj danéj a następnie i między sobą.

§. 192.

Twierdzenie. *Dwie płaszczyzny prostopadłe do jednéjże prostéj, są od siebie równoległe.*

Niech dwie płaszczyzny MN i PQ będą prostopadłe do jednéjże prostej AB *fig. 192*, trzeba dowieść, że są od siebie równoległe. Gdyby dwie takie płaszczyzny nie były równoległemi, rozszerzone dostatecznie, przecięłyby się z sobą w prostéj np. DE. Obrawszy na tém przecięciu się płaszczyzn gdziekolwiek punkt C i takowy połączywszy z punktami A i B, prostemi AC i BC, ponieważ prosta AC leży na płaszczyznie PQ, a prosta AB jest do téj ostatniéj z założenia prostopadła, zatém jest prostopadłą i do prostéj AC. Podobnież ta sama prosta AB będąc prostopadłą do płaszczyzny MN, jest téż prostopadłą do prostéj BC §. 183. W trójkącie zatém ACB kąty przy A i przy B byłyby proste, co w żaden sposób być nie może, i to więc być nie może, iżby się płaszczyzny zeszły z sobą czyli nie były od siebie równoległe.

Wniosek 1. Na mocy tego twierdzenia, można zawsze przez punkt dany w przestrzeni poprowadzić płaszczyznę równoległą do płaszczyzny danéj. Jeżeli bowiem danym punktem jest A i daną płaszczyzną MN, tedy z danego punktu A spuściwszy prostopadłą AB do płaszczyzny danéj MN, a potém przez tenże punkt A, poprowadziwszy inną płaszczyznę PQ prostopadłą do prostéj AB §. 184 *wniosek 2*, ta będzie płaszczyzną żądaną równoległą do danéj.

Wniosek 2. Z poprzedzającego twierdzenia można wprost wnioskować, że jeżeli z dwóch płaszczyzn równoległych, jedna jest prostopadłą do pewnéj prostéj, druga musi być także prostopadłą do téjże prostéj, inaczéj bowiem jakiekolwiek proste przez punkta A i B na tych płaszczyznach poprowadzone, nie byłyby wszystkie prostopadłemi do AB, a następnie znalazłyby się przynajmniéj dwie, jedna przez punkt A na płaszczyznie PQ, druga przez B na płaszczyznie MN poprowadzone, które dostatecznie przedłużone, zeszłyby się z sobą, a w takim razie i płaszczyzny zejśćby się musiały, co być nie może, bo są z założenia równoległe.

Wniosek 3. Dwie płaszczyzny równoległe do trzeciéj są téż równoległe między sobą. Bo poprowadziwszy prostą prostopadłą do téj trzeciéj płaszczyzny, każda z dwóch piérwszych będąc równoległą do trzeciéj, jest téż prostopadłą do téjże prostéj, a zatém jako prostopadłe do jednéjże prostéj, według teraźniéjszego twierdzenia są od siebie równoległe.

Wniosek 4. Prostopadła do dwóch płaszczyzn równoległych jest miarą ich odległości, jest ona bowiem najkrótszą ze wszystkich prostych jakie między dwiema płaszczyznami poprowadzić można.

Wniosek 5. Proste równoległe między dwiema płaszczyznami poprowadzone, są sobie równe. Wystawiwszy sobie bowiem przez którekolwiek dwie równoległe poprowadzoną płaszczyznę, ta przetnie dwie płaszczyzny równoległe, w prostych także równoległych i na téj trzeciéj płaszczyznie otrzymamy równoległobok, w którym boki przeciwległe są sobie równe.

§. 193.

Cechą równoległości dwóch płaszczyzn w każdym przypadku wystarczającą i pewną jest następujące

Twierdzenie. *Jeżeli przecięcia się dwóch płaszczyzn z dwiema innemi przecinającemi się są od siebie równoległe, każda inna płaszczyzna przecinająca dwie pierwsze, wyda przecięcia równoległe.*

Niech będą dwie płaszczyzny MN i PQ przecięte od dwóch innych AB*ba* i AC*ca* przecinających się w prostéj A*a* *fig. 193,* i niech przecięcia tych ostatnich z pierwszemi t. j. proste AB i *ab*, AC i *ac* będą równoległe, dowieść potrzeba, że każda inna płaszczyzua przetnie MN i PQ w prostych równoległych. Niech taką płaszczyzną będzie płaszczyzna BC*cb* przecinająca się z MN i PQ w prostych BC i *bc*. Dowód twierdzenia zależy na okazaniu, że te dwie proste są od siebie równoległe. Na dowiedzenie tego, weźmy *a*D = AB i *a*E = AC, a poprowadziwszy BD, DE i CE, mamy: z założenia AB równoległa do *a*D, a z wykreślenia AB = aD, przeto A*a*DB jest równoległobokiem, a następnie BD jest równa i równoległa od A*a*. Dla téj saméj przyczyny CE jest równa i równoległa od A*a*, przeto według §. 190 wniosek, BD jest równa i równoległa do CE, dwie zatém proste BC i DE są także równe i równoległe. Ale prosta BC leży na płaszczyznie B*bc*C, zatém prosta DE jest równoległa od téjże płaszczyzny według §. 191; jest téż taż sama prosta DE równoległa do *bc* przecięcia się płaszczyzny B*bc*C z płaszczyzną MN, bo obie te proste leżą na jednéjże płaszczyznie MN. Nareszcie dwie proste BC i *bc* będąc od trzeciéj DE równoległe, są téż i między sobą równoległe, co potrzeba było dowieść.

Wniosek 1. Skoro przecięcia się płaszczyzn MN i PQ z każdą inną płaszczyzną są od siebie równcległe, przeto te płaszczyzny jak najdaléj rozszérzone nigdzie się z sobą zejść nie mogą, są więc równoległemi i to jest najpewniejsza cecha téj ich własności.

Wniosek 2. Przecięcia się dwóch płaszczyzn równoległych z trzecią, są także między sobą równoległe.

Uwaga. Dwie atoli przecinające się płaszczyzny jak A*ab*B i A*ac*C mogą być przecięte w nieskończonéj liczbie prostych od siebie równoległych. Dosyć bowiem prowadzić płaszczyzny równoległe do spólnego przecięcia się A*a* tych dwóch płaszczyzn, jak są płaszczyzny DEFG, HIKL i t. d. *fig. 194,* a ich przecięcia się z dwiema pierwszemi t. j. DE, FG, HI, KL i t. d. będąc wszystkie równoległe od Aa będą téż między sobą równoległe.

§. 194.

Twierdzenie. *Kąty których ramiona są od siebie równoległe i rozchodzą się w tymże samym kierunku, chociaż leżą na różnych płaszczyznach, są sobie równe a płaszczyzny na których leżą od siebie równoległe.*

Niech będą dwa kąty A i *a* leżące na różnych płaszczyznach, których ramiona AB i *ab*, AC i *ac* *fig. 195* są od siebie równoległe i rozchodzą się w jednymże kierunku, potrzeba dowieść, że te kąty są sobie równe, tudzież że płaszczyzna przez AB i AC przechodząca jest równoległa do płaszczyzny przechodzącéj przez *ab* i *ac*. Na dowiedzenie tego, weźmy $ab = AB$ i $ac = AC$, a poprowadziwszy proste A*a*, B*b*, C*c* i BC, *bc* mamy: B*b* i C*c* będąc równe i równoległe od A*a*, są téż między sobą równe i równoległe, a następnie *bc* równa i równoległa od BC. Dwa więc trójkąty ABC i *abc* według §. 22 przystają do siebie, a w szczególności kąt $a = A$, co należało dowieść.

Co do drugiego. Że płaszczyzny BAC i *bac* są od siebie równoległe, wypływa wprost z poprzedzającego twierdzenia, bo przecięcia się ich AB, *ab* i AC, *ac* z dwiema innemi A*ab*B i A*ac*C są od siebie równoległe.

Wniosek 1. Jeżeli dwie płaszczyzny równoległe BAC i *bac* są przecięte od dwóch innych BA*ab* i CA*ac* w prostych AB, *ab* i AC, *ac*, przecięcia te czynią między sobą kąty równe.

Wniosek 2. Jeżeli trzy proste A*a*, B*b* i C*c* są między sobą równe i równoległe, tedy trójkąty zawarte między prostemi łączącemi końce pierwszych są sobie także równe i płaszczyzny tych trójkątów są od siebie równoległe.

Uwaga. Nie dodawszy w twierdzeniu wyrażenia, *rozchodzą się w tymże samym kierunku*, potrzebaby w témże twierdzeniu dodać, że takie kąty są sobie równe lub téż są *kątami spełniającemi się*. (Porównać §. 14).

Wniosek 3. Z tego téż twierdzenia wypływa, że dwie płaszczyzny równoległe BAC i *bac* przecięte od trzeciéj B*bc*C wydają przecięcia BC i *bc* równoległe.

Wniosek 4. Jeżeli dwie płaszczyzny MN i PR *fig. 196* przecinające się w prostéj MP przetniemy ilukolwiek płaszczyznami prostopadłemi do krawędzi MP, spólne przecięcia się każdéj z tych ostatnich płaszczyzn z dwiema pierwszemi t. j. AB, AC; A′B′, A′C′; A″B″, A″C″ schodzą się naturalnie na prostéj MP w jednymże punkcie, jak tu w A, A′ i A″. Że te spólne przecięcia są prostopadłe do MP, wypływa to z §. 192. Że AB równoległa od A′B′ i od A″B″, tudzież AC równoległa od A′C′ i A″C″, wypływa z poprzedzającego wniosku. Kąty przeto BAC, B′A′C′, B″A″C″ i t. d. są sobie równe według poprzedzającego §. Każde dwie proste AB i AC, A′B′ i A′C′, A″B″ i A″C″ i t. d. są prostopadłemi do spólnego przecięcia się dwóch płaszczyzn MN i PQ, z jednegoż punktu krawędzi na obu płaszczyznach wyprowadzonemi. A kiedy takie dwie proste zamykają zawsze tenże sam kąt, zatém kąt ten może nam posłużyć za miarę pochyłości płaszczyzn MN i PQ. Tym sposobem kąt dwuścienny §. 182 sprowadziliśmy do kąta linijowego, oraz wiemy, iż aby mieć kąt pochyłości dwóch płaszczyzn, dosyć jest z któregokolwiek punktu spólnéj im krawędzi wyprowadzić prostopadłe do téjże na obu płaszczyznach, a kąt linijowy między temi prostopadłemi zawarty, będzie miarą pochyłości dwóch płaszczyzn. Że ten stały kąt nie może być między prostemi w inny sposób prowadzonemi zawarty, wypływa stąd, że skoro płaszczyzny na sobie będą położone, a zatém czynić kąt zero, i kąt linijowy musi być także zero; dwie więc proste AB i AC koniecznie przypaść muszą na siebie, co inaczéj być nie może, tylko jeżeli mają jednakowe względem prostéj MP położenie, a zatém do niéj prostopadłe.

§. 195.

Twierdzenie. *Jeżeli dwie płaszczyzny przecinające się są prostopadłe do trzeciej, spólne ich przecięcie się, jest także prostopadłe do téjże płaszczyzny.*

Niech będą dwie płaszczyzny MN i RS przecinające się w prostéj AB *fig. 197*, każda prostopadła do trzeciéj płaszczyzny PQ, trzeba dowieść, że spólne ich przecięcie się AB jest prostopadłe do płaszczyzny PQ. Gdyby to spólne przecięcie nie było prostopadłe do płaszczyzny PQ, tedy z punktu A można by wyprowadzić inną prostą AC albo AD prostopadłą do płaszczyzny PQ. Lecz w takim przypadku prosta AC lub AD znajdowaćby się musiała tak na płaszczyznie MN jako téż i na płaszczyznie RS, t. j. musiałaby być spólném tych dwóch płaszczyzn przecięciem się. A że AB jest rzeczywiście tém przecięciem się płaszczyzn, więc te płaszczyzny przecinaćby się musiały w dwóch prostych, co jak wiemy być nie może, i to więc jest niepodobném, iżby spólne przecięcie się dwóch płaszczyzn do trzeciéj prostopadłych, nie było także prostopadłe do téjże płaszczyzny.

§. 196.

Twierdzenie. *Z jednegoż punktu spólnego przecięcia się dwóch płaszczyzn, wyprowadziwszy dwie prostopadłe do tychże płaszczyzn, kąt zawarty między prostopadłemi równa się kątowi, jaki czynią płaszczyzny między sobą.*

Niech będą dwie płaszczyzny MN i PQ przecinające się w prostéj MP *fig. 198*, z któregokolwiek punktu A tego spólnego przecięcia się wyprowadziwszy dwie prostopadłe AB i AC, piérwszą do płaszczyzny MN, a drugą do płaszczyzny PQ, potrzeba dowieść, że kąt zawarty między prostopadłemi t. j. kąt BAC równa się kątowi pochyłości tych dwóch płaszczyzn. Na ten koniec przez proste AB i AC poprowadźmy płaszczyznę, która naturalnie będzie prostopadłą do MP, według poprzedzającego §. Niech ta płaszczyzna przetnie piérwszą z dwóch płaszczyzn w prostéj AD a drugą w prostéj AE. Ponieważ prosta AB jest prostopadła do płaszczyzny MN, więc jest także prostopadłą do MA i AD, więc kąt BAD jest prosty. Podobnież prosta AC jest prostopadła do MA i AE, oraz kąt CAE jest także prosty; ponieważ nawzajem prosta MA czyli MP jest prostopadłą do AB, AC, AD i AE, więc według §. 184 *wniosek 1*, cztéry te proste leżą na jednéjże płaszczyznie. Od prostych kątów BAD i CAE, odjąwszy kąt obu spólny BAE, pozostanie kąt BAC = DAE. Lecz płaszczyzna, na któréj się znajdują proste AB, AC, AD i AE jest prostopadłą do MP, przeto téż tak AD jako i AE są prostopadłe do MP. Ale dwie proste AD i AE są prostopadłe na dwóch płaszczyznach MN i PQ z jednegoż punktu A do ich spólnego przecięcia się wyprowadzone, kąt zatém między niemi zawarty, mierzy pochyłość tych dwóch płaszczyzn według §. poprzedzającego *wniosek 3*, przeto kąt BAC równa się kątowi pochyłości tychże płaszczyzn.

Wniosek. Gdyby te dwie płaszczyzny schodziły się zupełnie z sobą, prostopadłe do nich AB i AC z jednegoż punktu obu płaszczyznom spólnego A wyprowadzone, zeszłyby się także z sobą, a zatém tak płaszczyzny między sobą, jako téż i proste do nich prostopadłe, czyniłyby kąt zero. Jeżeli płaszczyzny MN i PQ są do siebie prostopadłe i proste AB i AC czynić będą między sobą kąt prosty i wtedy AB prostopadła do płaszczyzny MN, leżeć będzie na płaszczyznie PQ, a nawzajem AC prostopadła do PQ, leżeć będzie na płaszczyznie MN. A że i kąt DAE w takim przypadku będzie prosty, więc AB zmiesza się z AD, a AC z AE. Tak tedy z kąta, jaki czynią dwie prostopadłe do dwóch płaszczyzn z jednego punktu wyprowadzone, wnosić można o kącie pochyłości tychże płaszczyzn.

§. 197.

Twierdzenie. *Z któregokolwiek punktu w przestrzeni spuściwszy dwie prostopadłe do dwóch płaszczyzn, kąt zawarty między prostopadłemi jest równy kątowi pochyłości płaszczyzn.*

Mogą tu być dwa przypadki: dany punkt może leżeć za płaszczyznami lub między płaszczyznami. W przypadku gdy punkt dany A *fig. 199*, leży za płaszczyznami, spuściwszy z niego dwie prostopadłe AB do MN i AC do MP, niech piérwsza spotyka płaszczyznę MN w punkcie B, a płaszczyznę MP w punkcie E, druga zaś płaszczyznę MN w punkcie C, a płaszczyznę MP w punkcie F, tedy poprowadziwszy przez dwie te prostopadłe płaszczyznę, ta będzie prostopadłą tak do piérwszéj jako i do drugiéj płaszczyzny, a następnie i do ich spólnego przecięcia się RM. Płaszczyzna ta przetnie płaszczyznę MN w prostéj DB a płaszczyznę MP w prostéj DE. Każda z tych prostych jest prostopadłą do RM, więc kąt BDE jest kątem pochyłości płaszczyzny MN do MP. Na téj trzeciéj płaszczyznie mamy czworokąt BCFE w którym kąty przy B i F są proste, zatém kąt AEF z kątem BCF czynią dwa kąty proste. Lecz kąt BCF z kątem ACB czynią także 2R, więc kąt $BEF=ACB$. Ale w trójkącie BDE prostokątnym przy B, jest $BEF+BDE=R$, tudzież w trójkącie ABC prostokątnym przy B, $ACB+A=R$, przeto $ACB+A=BEF+BDE$. A że $BEF=ACB$, więc $A=BDE$ t. j. kąt prostopadłych jest równy kątowi pochyłości płaszczyzn. Kąty te są zawarte między jednoimiennemi kierunkami tak płaszczyzn jako i prostopadłych.

Można téż to twierdzenie dowieść według §. 45, uważając kąt pochyłości płaszczyzn jako kąt linijowy, jak jest rzeczywiście, t. j. kąt BDE i punkt A za jego ramionami.

Jeżeli tu obie płaszczyzny rozszerzymy nieograniczenie, te przeciąwszy się w krawędzi spólnéj RM, uczynią dwa kąty różne nazwane także kątami przyległemi, zupełnie tak jak dwie proste przecinające się; co więc w rzeczonym §. o prostopadłych było dowiedzioném, toż samo ma i tu miejsce.

W przypadku drugim, gdy punkt dany znajduje się między płaszczyznami, kąt prostopadłych jest spełnieniem kąta pochyłości tych płaszczyzn. Niech bowiem będą dwie płaszczyzny MN i MP przecinające się w prostéj MQ *fig. 200*, niech téż danym punktem w przestrzeni będzie A, tedy spuściwszy z tego punktu AB prostopadłą do płaszczyzny MN, tudzież AC do płaszczyzny MP, potém przez dwie te prostopadłe prowadząc płaszczyznę, ta będzie do obu piérwszych, a zatém i do ich spólnego przecięcia się MQ prostopadłą. Niech ta płaszczyzna przecina piérwszą w prostéj BD, a drugą w prostéj CD, tedy DB jest prostopadła do MQ na płaszczyznie MN i DC także prostopadłe do tegoż spólnego przecięcia się MQ na płaszczyznie MP; przeto kąt BDC jest kątem pochyłości dwóch tych płaszczyzn. W czworokącie ABDC kąty przy B i C są proste, zątém $D+A=180$ t. j. kąt jaki prostopadłe czynią między sobą, jest spełnieniem kąta pochyłości płaszczyzn do których prostopadłe spuszczone były.

Uwaga. Jeżeli w obecnym przypadku równie jak to uczyniliśmy w §. 45 mieć będziemy wzgląd na kierunki tak prostopadłych jako téż i przecięć téj trzeciéj płaszczyzny z dwiema pierwszémi, łatwo się przekonać, że kąt prostopadłych zawarty między jednoimiennemi ich kierunkami, równa się kątowi pochyłości płaszczyzn zawartemu także między takiemiż kierunkami płaszczyzn. Biorąc bowiem punkt A za początek, z którego dwie prostopadłe wychodzą, te czynią dwa kąty spełniające się; ale téż i płaszczyzny MN i MP, dostatecznie rozszérzone czynią również dwa kąty spełniające się. A jeżeli punkt D na obu płaszczyznach znajdujący się, weźmiemy znowu za początek, widzimy, że DB i DC są różnemi kierunkami, przeto kąt BDC równa się kątowi prostopadłych B'AC zawartemu między różnemi kierunkami.

§. 198.

Twierdzenie. *Dwie proste przecięte trzema płaszczyznami równoległemi, podzielone są przez też płaszczyzny na części proporcyjonalne.*

Niech będą dwie proste AB i CD *fig. 201* jakiekolwiek i niech je przecinają trzy płaszczyzny równoległe MN, PQ i RS, piérwszą w punktach E, I, F, drugą w punktach G, K, H; potrzeba dowieść, iż części tych prostych zawarte między trzema rzeczonemi płaszczyznami, są między sobą proporcyjonalne. Na ten koniec połączmy punkta E i H prostą EH, która niech spotyka płaszczyznę PQ w punkcie L, poprowadziwszy IL i LK, a nareszcie EG i FH, ponieważ płaszczyzny PQ i RS są równoległe, spólne ich przecięcia się z trzecią przez EF i EH przechodzącą t. j. IL i FH są także równoległe §. 193 *wniosek 2*, przeto w płaskim trójkącie EFH jest EI:IF=EL:LH. Dla téj saméj przyczyny spólne przecięcia się EG i LK są także równoległe, a w trójkącie EHG jest również EL:LH=GK:KH, zatém EI:IF=GK:KH, co było do dowiedzenia.

Uwaga. Gdyby proste AB i CD były na jednéjże płaszczyznie, w takim przypadku trzy punkta I, L, K, leżałyby na jednéjże prostéj równoległéj do EG i FH a wtedy twierdzenie obecne byłoby twierdzeniem dowiedzioném w §. 53 albo w szczególnym przypadku, byłoby wnioskiem 5 §. 192.

§. 199.

Twierdzenie. *Dwie proste w przestrzeni ani równoległe ani się przecinające, leżą na dwóch płaszczyznach równoległych.*

Niech dwie proste AB i CD *fig. 202*, mają położenie w twierdzeniu wyrażone. Obrawszy na piérwszéj którykolwiek punkt E i poprowadziwszy przez niego prostą GH równoległą od drugiéj, jako téż przez punkt F obrany na drugiéj prostą IK równoległą od piérwszéj, kąty HEB i DFK są sobie równe §. 194, a płaszczyzny na których leżą od siebie równoległe. Pomyśliwszy więc tak przez proste AB i GH jako téż przez CD i IK płaszczyzny MN i PQ, proste AB i CD leżą na tychże płaszczyznach równoległych, piérwsza na MN a druga na PQ.

Uwaga 1. Że dwie te płaszczyzny równoległe są *jedynemi,* na których proste AB i CD umieścić można, przekonywamy się z tego, że płaszczyzna przechodząca przez AB koniecznie przechodzić także musi przez GH i że przez dwie te proste więcéj jak jedna płaszczyzna przechodzić nie może §. 180, a tą jest płaszczyzna MN; podobnież płaszczyzna przechodząca przez CD i IK inną być nie może, jak płaszczyzną PQ. Każde więc dwie proste nie będące na jednéjże płaszczyznie, leżą na dwóch płaszczyznach równoległych ale *jedynych* i dla tego taki skład dwóch płaszczyzn, nazywamy w Geometryi *płaszczyznami równoległemi dwóch prostych.*

Wniosek. Z dowodu powyższego twierdzenia wypływa, że przez każdą z dwóch prostych nie będących na jednéjże płaszczyznie poprowadzić można płaszczyznę równoległą do drugiéj, ale tylko *jednę.*

Uwaga 2. Z §. 185 *wniosek* wiadomo, że w przestrzeni można poprowadzić prostą prostopadłą do każdéj z dwóch innych prostych jakkolwiek położonych i że ta prostopadła do obu jest téż najkrótszą ich odległością. Ta prostopadła jest zarazem prostopadłą do płaszczyzn równoległych dwóch rzeczonych prostych. Bo przypuściwszy, że FL jest ową spólną prostopadłą tak do AB jako téż i CD, poprowadźmy przez punkt F prostą IK równoległą do AB, ta całkiem leżeć będzie na płaszczyznie PQ. Lecz z przypuszczenia FL jest prostopadłą do CD, więc téż jest również prostopadłą do IK, a następnie prostopadłą do płaszczyzny PQ przez dwie te proste przechodzącéj §. 182, przeto jest téż prostopadłą i do płaszczyzny MN równoległéj do PQ §. 192. Ale taka prostopadła spólnie do dwóch płaszczyzn mierzy ich najkrótszą odległość, zatém taż prostopadła mierzy również najkrótszą odległość dwóch prostych AB i CD.

§. 200.

Twierdzenie. *Dwie proste na różnych leżące płaszczyznach, mają zawsze spólną prostopadłą, ale tylko jednę.*

Umieściwszy dwie proste AB i CD *fig. 203* według poprzedzającego §. na dwóch równoległych płaszczyznach, poprowadźmy przez piérwszą AB płaszczyznę ABEF prostopadłą do płaszczyzny MN, przecięcie się téj płaszczyzny z płaszczyzną MN, t. j. prosta EF będąc równoległą do AB, nie może zarazem być równoległą do CD, bo inaczéj AB i CD byłyby równoległemi, co się sprzeciwia założeniu, zatém prosta EF, a następnie i płaszczyzna ABEF przecina prostą CD w pewnym punkcie G. Podobnież prowadząc przez CD płaszczyznę CDIH prostopadłą do PQ, ta przetnie prostą AB w pewnym punkcie K. Dwie te płaszczyzny przechodząc piérwsza przez AB i punkt G, druga przez CD i punkt K, przecinać się koniecznie muszą w prostéj GK, która jest zarazem prostopadłą tak do płaszczyzny MN jako téż i do płaszczyzny PQ, a następnie według §. 183 prostopadłą tak do AB jako téż i CD.

Że dwóch podobnych prostych być nie może, przekonać się najłatwiéj można stąd, że prosta prostopadła do dwóch innych AB i CD, powinna przechodzić naprzód przez pewien punkt prostéj CD i być prostopadłą do płaszczyzny PQ, zatém znajdować się powinna na płaszczyznie prostopadłéj CDIH. Dla téjże saméj przyczyny znajdować się téż powinna na płaszczyznie ABEF. A kiedy razem znajdować się powinna tak na piérwszéj jako i drugiéj płaszczyznie, więc inaczéj być nie może, tylko być musi spólném tych płaszczyzn przecięciem się. A że dwie płaszczyzny tylko w jednéj prostéj przecinać się mogą, zatém dwie w twierdzeniu wyrażone proste, jednę tylko mają prostopadłą spólną. Tę to prostopadłą nazywamy *najkrótszą odległością* dwóch prostych w przestrzeni.

§. 201.

Na zasadzie tego twierdzenia rozwiązać można następujące

Zagadnienie. *Mając dane dwie proste w przestrzeni leżące na różnych płaszczyznach poprowadzić prostą, spólnie do obu prostopadłą.*

Rozwiązanie. Niech dwiema prostemi danemi będą AB i CD *fig. 204* leżące na różnych płaszczyznach. Przez punkt E obrany gdziekolwiek na piérwszéj prostéj, poprowadźmy EF równoległą do drugiéj prostéj CD, a przez proste AB i EF poprowadźmy płaszczyznę MN, która będzie równoległa do CD §. 191. Potém z punktu G obranego także gdziekolwiek na prostéj drugiéj CD, poprowadźmy GH prostopadłą do płaszczyzny MN. Jeżeli przez proste CD i GH poprowadzimy płaszczyznę GHIK, ta będzie prostopadłą do płaszczyzny MN i przetnie prostą AB w pewnym punkcie L, z którego na téj nowéj płaszczyznie poprowadziwszy LO równoległą do GH, ta będzie prostą żądaną. Albowiem LO będąc równoległą do GH, prostopadłéj do płaszczyzny MN, jest téż prostopadłą do téjże płaszczyzny MN, a zatém jest prostopadłą tak do LH jako i do LB. Ale LH jest równoległa do CD, zatém LO jest także prostopadłą do CD, co było do okazania.

§. 202.

Definicyja. Jeżeli z punktu danego w przestrzeni spuścimy prostopadłą do płaszczyzny jakiéjkolwiek, punkt spotkania się téj prostopadłéj z płaszczyzną czyli spodek prostopadłéj nazywać będziemy *rzutem* (projectio) tego punktu na płaszczyznę. Jeżeli na prostéj danéj w przestrzeni obierzemy dwa jakiekolwiek punkta i z tych spuścimy prostopadłe do pewnéj płaszczyzny, a przez rzuty tych punktów poprowadzimy prostą na téjże płaszczyznie, tę nazwiemy *rzutem prostéj* w przestrzeni na płaszczyznę daną. W przypadku, że długość prostéj w przestrzeni jest ograniczona, spuściwszy z jéj końców prostopadłe do pewnéj płaszczyzny, prosta między rzutami końców prostéj w przestrzeni zawarta będzie rzutem także ograniczonym co do długości prostéj danéj.

Z każdego punktu prostéj LM w przestrzeni, jak na *fig.* 205 z punktów A, B, C, D, E . . . spuściwszy prostopadłe A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e* . . . do płaszczyzny PQ, wszystkie te prostopadłe leżą na jednéjże płaszczyznie, a spodki ich czyli rzuty punktów A, B, C . ., leżą na jednéj prostéj będącéj spólném przecięciem się płaszczyzny przez prostą w przestrzeni, prostopadłéj do płaszczyzny PQ. Pomyśliwszy bowiem przez prostą w przestrzeni i jednę z prostopadłych np. A*a* płaszczyznę, ta będzie prostopadłą do płaszczyzny PQ i przetnie ją w prostéj RS; skoro teraz z innego punktu np. z punktu C spuścimy prostopadłą C*c*, ta leżeć będzie na téj nowéj płaszczyznie i nie gdzieindziéj spotka płaszczyznę PQ, tylko na spólném tych płaszczyzn przecięciu się RS. Albo: każde dwie równoległe z prostą w przestrzeni leżą na jednéjże płaszczyznie, wszystkie przeto prostopadłe z różnych punktów prostéj AE do płaszczyzny PQ spuszczone, leżą na jednéj i téjże saméj płaszczyznie, przez tęż prostą przechodzącéj, a do danéj płaszczyzny prostopadłéj, rzut zaś prostéj na płaszczyznę PQ, jest spólném przecięciem się tych dwóch płaszczyzn.

Płaszczyznę przez prostą w przestrzeni przechodzącą a prostopadłą do innéj płaszczyzny, nazywamy w Geometryi *płaszczyzną rzucającą* (planum proijciens). Spólne przecięcie się obu, czyli rzut prostéj w przestrzeni danéj na płaszczyznę daną, nazywamy *śladem* (vestigium, trace), piérwszéj, na płaszczyznie drugiéj.

§. 203.

Twierdzenie. *Kąt jaki czyni prosta pochyła do płaszczyzny z swoim rzutem na téjże płaszczyznie, jest najmniejszym z kątów, jakie taż prosta czyni z każdą inną prostą na téjże płaszczyznie przez spodek pochyłéj poprowadzoną.*

Niech będzie prosta w przestrzeni AB pochyła do płaszczyzny PQ *fig. 206*, a punkt A jéj spodkiem czyli punktem przecięcia się jéj z płaszczyzną PQ. Z któregokolwiek jéj punktu B spuściwszy prostopadłą BC do płaszczyzny PQ, a przez prostą daną AB i przez tęż prostopadłą poprowadziwszy płaszczyznę, ta przetnie płaszczyznę PQ w prostéj AL, która według poprzedzającego §. jest rzutem prostéj AB na płaszczyznę PQ. Potrzeba teraz dowieść, że kąt BAC jest najmniéjszym ze wszystkich, jakie prosta AB czynić może z różnemi prostemi przez punkt A na płaszczyznie PQ poprowadzonemi. Na ten koniec poprowadźmy przez punkt A jakąkolwiek inną prostą AD na płaszczyznie PQ; jeżeli dowiedziemy, że kąt BAD jest większy niż kąt BAL, dowiedziemy toż samo o każdym innym kącie.

Na prostéj AD weźmy AC'=AC i poprowadźmy prostą BC', tedy dwa trójkąty BAC i BAC' mają bok AB spólny, AC=AC' z wykreślenia, lecz trzecie boki są nierówne, bo według §. 187 BC<BC', zatém i kąt BAD leżący naprzeciwko większego boku BC' jest większy od kąta BAC przeciwległego bokowi mniejszemu BC. A że toż samo dowiedzie się o każdym innym kącie, więc kąt BAC, jaki pochyła czyni z swoim rzutem, jest kątem najmniejszym, co należało dowieść.

Wniosek 1. Ponieważ ze wszystkich kątów, jakie prosta w przestrzeni czynić może z różnemi prostemi przez jéj spodek na pewnéj płaszczyznie poprowadzonemi, najmniéjszy jest kąt, jaki taż prosta czyni z swym rzutem, przeto dla jednéjże prostéj ten kąt jest stałym i dla tego nazywać go będziemy *kątem pochyłości prostéj do płaszczyzny*.

Uwaga. Poprowadziwszy z drugiéj strony owéj płaszczyzny prostopadłéj do PQ i na téj ostatniéj płaszczyznie prostą, AD' tak iżby kąt LAD' był równy kątowi LAD, a potém wziąwszy AC''=AC' i poprowadziwszy prostą BC'', ta będzie równa prostéj BC' a dla tego i kąt BAC'' czyli BAD'=BAD. Lecz że każdy z nich jest większy od kąta BAL, więc stąd wniesiemy, że prosta w przestrzeni nie może z trzema prostemi na pewnéj płaszczyznie poprowadzonemi czynić kątów równych tylko w tenczas, gdy jest prostopadła do téjże płaszczyzny.

Wniosek 2. Z poprzedzającego twierdzenia łatwo wniesiemy, że proste równoległe w przestrzeni są jednakowo pochylone do téjże saméj płaszczyzny. Z którychkolwiek bowiem ich punktów spuściwszy prostopadłe do téj płaszczyzny, te według §. 190 będą od siebie równoległe, więc kąty między prostemi danemi i prostopadłemi zawarte, będą równe. A że te kąty są dopełnieniami kątów pochyłości tych prostych do płaszczyzny, zatém proste są jednakowo do płaszczyzny pochylone. Twierdząc zaś, że proste jednakowo do jednéjże płaszczyzny pochylone są od siebie równoległe, twierdzilibyśmy oczywiście fałszywie; być bowiem może nieskończona liczba prostych jednakowo do płaszczyzny pochylonych, chociaż nie będą między sobą równoległemi.

§. 204.

Jak w §. 202 otrzymaliśmy rzut prostéj na płaszczyznie danéj prowadząc przez tęż prostą płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny danéj, tak téż otrzymać można rzut jakiejkolwiek figury danéj w przestrzeni na płaszczyznie danéj. Niechby np. dany był w przestrzeni trójkąt ABC *fig. 207*, leżący na płaszczyznie PQ, a chcieliśmy zrobić jego rzut na daną płaszczyznę MN jakkolwiek do płaszczyzny PQ pochyloną, tedy dosyć jest z wiérzchołków trójkąta spuścić prostopadłe A*a*, B*b* i C*c* do płaszczyzny MN i punkta *a*, *b*, *c*, w których spotykają płaszczyznę MN, złączyć prostemi, a te zamkną trójkąt *abc*, który będzie rzutem trójkąta ABC na płaszczyznę MN. Albo: przez każdy z trzech boków trójkąta ABC prowadząc płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny MN, spólne tych trzech płaszczyzn przecięcia się z płaszczyzną MN przetną się wzajemnie i zamkną trójkąt *abc*.

Co tu powiedziano o trójkącie, zastósować można do każdéj innéj figury prostokreślnéj.

Chcąc zaś zrobić rzut figury krzywokreślnéj, drugiego sposobu użyć nie można, bo punkta linii krzywéj płaskiéj leżą w prawdzie na jednéjże płaszczyznie, ale robiąc ich rzuty na inną daną płaszczyznę, każdy z tych punktów leżeć będzie na osobnéj płaszczyznie prostopadłéj do płaszczyzny danéj. Dla tego chcąc zrobić rzut linii krzywéj na daną płaszczyznę, należy z każdego jéj punktu spuścić prostopadłą do danéj płaszczyzny i przez spodki tych prostopadłych czyli przez rzuty tych punktów zakreślić krzywą, która będzie rzutem krzywéj w przestrzeni. Tym samym sposobem robi się rzut krzywéj *podwójnie krzywéj* t. j. takiéj, któréj punkta są na różnych płaszczyznach.

ROZDZIAŁ II.

Kąty bryłowe trójścienne i wielościenne.

§. 205.

W §. 182 widzieliśmy, że dwie płaszczyzny przecinają się w prostéj. Płaszczyzny te podzieliły całą nieograniczoną przestrzeń na cztéry także nieograniczone części, które *kątami dwuściennemi* nazwaliśmy. Jeżeli teraz przez którykolwiek punkt krawędzi obu płaszczyznom spólnéj poprowadzimy trzecią w jakimkolwiek kierunku, byle różnym od kierunku każdéj z dwóch piérwszych, trzecia ta płaszczyzna podzieli każdy z owych cztérech kątów dwuściennych na dwie części również nieograniczone i téj saméj natury jak piérwsze. Tak na *fig. 208* dwie płaszczyzny ABCD i EFGH przecinają się w prostéj PQ i czynią kąty dwuściennne APQH, BPQG, APQG i BPQD. Jeżeli przez punkt O spólnéj im krawędzi PQ poprowadzimy trzecią płaszczyznę IKLM przecinającą piérwszą w prostéj RS, drugą zaś w prostéj TU, płaszczyzna ta podzieli każdy z powyższych cztérech kątów dwuściennych na dwie części i utworzy z dwiema piérwszemi płaszczyznami ośm przestrzeni czyli okolic nieograniczonych, z których każda zawarta jest między trzema płaszczyznami przecinającemi się w jednym punkcie; te bowiem trzy płaszczyzny jeden tylko punkt O mają spólny, gdyż on leży na każdéj z nich. Te ośm przestrzeni nazywać będziemy *kątami trójściennemi* albo lepiej *trójścianami* zwyczajnie, lubo mylnie, kątami *bryłowemi* (ang. solidus, po francuzku trièdre); każda bowiem przestrzeń leży między trzema ścianami, punkt zaś O wszystkim trzem płaszczyznom spólny nazwiemy wierzchołkiem trójścianu. Trzy więc płaszczyzny przecinając się w jednym punkcie, dzielą całą nieograniczoną przestrzeń na ośm części czyli trójścianów. Z tych cztéry są nad płaszczyzną IKLM, a cztéry pod tąż płaszczyzną.

Piérwsze są: OAEM, OBFK, OBEI i OAFL
drugie zaś ODHM, OCGK, OCHI i ODGL.

Te kąty są takie, że po dwa, jeden nad a drugi pod płaszczyzną IKLM są sobie równe. Tak w obecnym przypadku

trójścian OAEM = OCGK

— OBFK = ODHM

— OBEI = ODGL

— OAFL = OCHI

jak się późniéj o tém przekonamy, mówiąc o równości kątów trójściennych.

W przypadku, gdy te trzy płaszczyzny są do siebie prostopadłe, jak na *fig. 209*, kąty trójścienne wszystkie są między sobą równe i dzielą przestrzeń na ośm okolic zupełnie sobie równych. W takim razie kąty trójścienne nazwiemy *prostemi*. Spólne przecięcie się każdych dwóch płaszczyzn stósownie do §. 195 jest prostopadłe do trzeciéj płaszczyzny, zatém każde spólne przecięcie się dwóch płaszczyzn będąc prostopadłe do trzeciéj, która przechodzi przez dwa inne spólne przecięcia, jest także prostopadłe do każdéj z tych prostych; przeto trzy te spólne przecięcia są wzajemnie do siebie prostopadłe. Na przywiedzionéj figurze spólne przecięcia się są xx', yy' i zz' i na téj figurze można jeszcze wyraźniéj rozróżnić ośm kątów trójściennych; są one bowiem nad płaszczyzną xx' następujące

$$Oxyz,\ Oxy'z,\ Ox'yz \text{ i } Ox'y'z$$

a zaś pod rzeczoną płaszczyzną

$$Oxyz',\ Oxy'z',\ Ox'yz' \text{ i } Ox'y'z'.$$

Spólne przecięcie xx' jest prostopadłe tak do yy' jako téż i do zz' i nawzajem yy' jest prostopadłe do xx' i do zz', a zz' prostopadłe do xx' i yy'. Jakkolwiek trzy te płaszczyzny będą do siebie nachylone, kąt $Oxyz$ czyta się zwyczajnie xyz, $Oxy'z$ czyta się się $xy'z$ i t. d. wymawiając tylko trzy głoski na trzech przecięciach w jedną okolicę przestrzeni zwróconych leżące. Linijowe kąty xOy, xOz i yOz, nazywać będziemy *kątami płaskiemi*.

Jeżeli więcéj niż trzy jakiekolwiek płaszczyzny przecinają się w jednym punkcie, te zajmują w jednym kierunku nieograniczoną przestrzeń, którą ogólnie nazywamy *kątem* *wielościennym* (angulus polyëder) i od liczby płaszczyzn czyli ścian, przybiéra nazwy dwuścienny, trójścienny, czworościenny, pięcio-, sześcio- i t. d. ścienny.

W tém co następuje uważać tylko będziemy kąty bryłowe *wypukłe* t. j. takie w których przedłużywszy którąkolwiek ścianę, cały kąt bryłowy leży z jednéj strony téj płaszczyzny.

§. 206.

Twierdzenie. *Wewnątrz kąta bryłowego trójściennego czyli trójścianu wziąwszy gdziekolwiek punkt i z tegoż punktu spuściwszy prostopadłe do scian tego kąta, a potém przez każde dwie prostopadłe pomyśliwszy płaszczyznę, te trzy płaszczyzny zamkną kąt bryłowy trójścienny, którego kąty pochyłości płaszczyzn czyli kąty dwuścienne są spełnieniami kątów płaskich danego kąta bryłowego; i wzajemnie kąty dwuścienne drugiego, są spełnieniami kątów płaskich piérwszego kąta trójściennego.*

Niech będzie kąt trójścienny O trzema płaszczyznami AOB, AOC i BOC zawarty *fig. 210*, obrawszy wewnątrz jego gdziekolwiek punkt *o* i z tego spuściwszy prostopadłe *oa* na płaszczyznę BOC, *ob* na płaszczyznę AOC i *oc* na płaszczyznę AOB, i przez te prostopadłe prowadząc płaszczyzny, te będą prostopadłe każda do dwóch innych. Tak płaszczyzna przez *ob* i *oc* jest prostopadłą, tak do płaszczyzny AOB jako téż i płaszczyzny AOC, a zatém i do ich spólnego przecięcia się AO. Lecz rzeczona płaszczyzna przecina dwie drugie w prostych A*b* i A*c*, te przeto również są prostopadłe do OA. Podobnież płaszczyzna przez *oa* i *oc* jest prostopadłą do OB, jako téż spólne jéj przecięcia się B*a* i B*c*; a nareszcie płaszczyzna przez *oa* i *ob*, tudzież spólne jéj przecięcia się C*a* i C*b*, prostopadłe do OC. Ponieważ OA jest prostopadłą tak do A*b* jako téż i do A*c*, więc jest także prostopadłą i do płaszczyzny *boc* czyli do ściany *boc* kąta bryłowego *o*; dla téjże saméj przyczyny OB jest prostopadłą do ściany *aoc*, a OC prostopadła do ściany *aob*. Stąd wnieść możemy że kąt bryłowy O jest tém samém względem kąta *o*, czém ten ostatni względem piérwszego.

W czworokącie OAcB kąty przy A i B są proste według powyższego, więc kąt AcB z kątem AOB czynią dwa kąty proste, jest więc jeden drugiego spełnieniem. Ale kąt AcB jest kątem pochyłości ścian *boc* i *aoc* czyli kątem dwuściennym *aocb* kąta bryłowego *o*, kąt zaś AOB jest kątem płaskim kąta bryłowego O i te kąty są sobie przeciwległe, zatém kąt płaski kąta bryłowego O z kątem dwuściennym kąta *o* piérwszemu przeciwległym, są kątami spełniającemi się do 180 stopni. Tym samym sposobem dowodzi się, że kąt AOC jest spełnieniem kąta *aobc* a kąt BOC spełnieniem kąta *boac*. Wzajemnie: w czworokącie np. A*boc* kąty przy *b* i *c* są proste, zatém kąt płaski *boc* kąta bryłowego *o* z kątem pochyłości płaszczyzny AOC do płaszczyzny AOB t. j. z kątem *b*A*c* czynią 180°, są więc spełnieniem jeden drugiego. Toż samo dowiedzie się i o dwóch innych kątach. Zatém kąty płaskie trójściennego kąta O są spełnieniami kątów ściennych kąta bryłowego *o* przeciwległych piérwszym, a kąty płaskie bryłowego kąta *o*, są spełnieniami kątów ściennych kąta O tamtym przeciwległych. Z tego powodu dwa trójścienne kąty O i *o* nazywają się *spełniającemi* (supplementarii).

Twierdzenie to uważać można za zasadnicze w teoryi kątów trójściennych.

Uwaga. Cała nauka o związku kątów ściennych z kątami płaskiemi kąt bryłowy trójścienny składającemi, stanowi osobną część Geometryi nazwaną *Trygonometryją w przestrzeni* albo zwyczajniéj *Trygonometryją sferyczną.*

§. 207.

Twierdzenie. *W każdym kącie bryłowym trójściennym summa dwóch którychkolwiek kątów płaskich jest zawsze większa niż kąt trzeci, tudzież każdy kąt płaski jest większy niż różnica dwóch innych.*

Chcąc z trzech kątów płaskich AOB, BOC i COD *fig. 211* złożyć kąt bryłowy, wystawić sobie możemy, że płaszczyznę AOB obracamy około prostéj OB a płaszczyznę COD około prostéj OC, jakoby około osi dopóty, dopóki płaszczyzny te nie spotkają się z sobą albo raczéj dopóki proste OA i OD nie zejdą się w jednę krawędź będącą spólném przecięciem się tych dwóch płaszczyzn. Gdyby kąty AOB i COD razem wzięte równały się kątowi BOC, proste OA i OD zeszłyby się na płaszczyznie kąta BOC np. w prostéj OE, a dwie płaszczyzny AOB i COD zmieszałyby się z płaszczyzną BOC i nieotrzymalibyśmy żadnego bryłowego kąta. W przypadku zaś, gdyby summa kątów AOB i COD była mniéjszą niż kąt BOC, prosta OA przypadałaby na płaszczyznie BOC np. w położeniu OA′, a prosta CD w położeniu CD′ t. j. dwie te proste wcaleby się z sobą nie zeszły, a zatém tym mniéj zamknęłyby jaką przestrzeń. Z tego składania kąta bryłowego trójściennego widzimy jasno, iż aby z trzech płaskich kątów można złożyć kąt bryłowy, koniecznym jest warunkiem, iżby płaszczyzny AOB i COD zeszły się z sobą nad płaszczyzną BOC lub pod tąż płaszczyzną, gdybyśmy pierwsze dwie płaszczyzny w przeciwnym kierunku obracali. A że ten warunek nie ma miejsca tylko w tenczas, gdy summa dwóch kątów płaskich AOB i COD jest większa niż trzeci BOC, zatém jest dowiedzioném, iż summa dwóch którychkolwiek kątów płaskich kąt bryłowy trójścienny składających, jest większa niż trzeci.

Albo tak: Ponieważ tylko w przypadku, gdy jeden z kątów jest większy niż każdy z dwóch innych, dowód może miéć miejsce, zatém niech w kącie bryłowym trójściennym O *fig. 212*, będzie kąt AOC największy, tedy chcąc dowieść, że wszelako ten kąt jest mniejszy niż summa kątów AOB i BOC, poprowadźmy jakkolwiek prostą AC przecinającą krawędzie OA i OC w punktach A i C, potém na płaszczyznie kąta największego poprowadźmy prostą OB′ tak, iżby kąt AOB′ był równy kątowi AOB; niech ta prosta przecina prostą AC w punkcie B′; na krawędzi OB weźmy OB=OB′ i poprowadźmy proste BA i BC. Dwa trójkąty AOB i AOB′ są sobie równe według §. 23, bo AO spólne, BO=B′O z wykreślenia i kąt AOB=AOB′ także z wykreślenia; przeto AB=AB′. Lecz w trójkącie ABC jest

$AC < AB + BC$ czyli $AB' + B'C < AB + BC$ skąd $B'C < BC$; więc ponieważ trójkąty BOC i B'OC mają bok CO spólny, $OB = OB'$, zatém kąt $B'OC < BOC$, gdyż piérwszy leży naprzeciwko boku mniejszego. Do dwóch ilości nierównych dodawszy równe, summy otrzymamy nierówne t. j.

$$B'OC + B'OA < BOC + AOB \text{ czyli } AOC < AOB + BOC.$$

Co do drugiego. Przypuściwszy że $BOC > AOB$, ponieważ $AOB + AOC > BOC$ według poprzedzającego, więc odjąwszy od dwóch tych ilości nierównych tęż samę ilość AOB, będzie $AOC > BOC - AOB$ t. j. którykolwiek z trzech kątów płaskich kąta trójściennego jest zawsze większy niż różnica dwóch innych, co potrzeba było dowieść.

§. 208.

TWIERDZENIE. *W kącie bryłowym trójściennym summa trzech kątów płaskich kąt bryłowy składających, jest mniejsza niż cztéry kąty proste.*

Niech będzie kąt bryłowy O złożony z trzech kątów płaskich AOB, AOC i BOC *fig. 213*, potrzeba dowieść, że $AOB + AOC + BOC < 4R$. Na ten koniec poprowadźmy jakąkolwiek płaszczyznę DEF przecinającą wszystkie trzy krawędzie w punktach D, E, F, przy których powstają trzy kąty bryłowe trójścienne. Tak przy punkcie D powstaje kąt bryłowy zawarty trzema kątami płaskiemi ODE, ODF i FDE; przy punkcie E kąt bryłowy złożony z trzech kątów płaskich OED, OEF i DEF, a nareszcie przy punkcie F, kąt bryłowy trójścienny zawarty kątami płaskiemi OFE, OFD i DFE. Ponieważ według poprzedzającego §.

w kącie bryłowym D jest $ODE + ODF > FDE$

„ „ „ E „ $OED + OEF > DEF$

„ „ „ F „ $OFE + OFD > DFE$

zaś $FDE + DEF + DFE = 2R$, zatém

$$ODE + OED + OEF + OFE + ODF + OFD > 2R$$

A że w trójkącie DOE . . . . $ODE + OED = 2R - DOE$

„ „ „ „ EOF . . . . $OEF + OFE = 2R - EOF$

„ „ „ „ DOF . . . . $ODF + OFD = 2R - DOF$

t. j. ODE + OED + OEF + OFE + ODE + OFD = 6R — (DOE + EOF + DOF)

zatém 6R — (DOE + EOF + DOF > 2R, a nareszcie DOE + EOF + DOF < 4R co było do dowiedzenia.

WNIOSEK. Z tego twierdzenia wprost wypływa, że summa kątów ściennych w kącie bryłowym trójściennym t. j. summa trzech kątów pochyłości ścian kąta bryłowego, jest mniejsza niż 6R a większa niż 2R. Oznaczywszy bowiem przez α, β, γ, kąty płaskie kąt bryłowy O składające, a przez a, b, c, kąty ścienne piérwszym przeciwległe, według §. 206 mamy $a = 2R - \alpha$, $b = 2R - \beta$, $c = 2R - \gamma$, zatém $a + b + c = 6R - (\alpha + \beta + \gamma)$. A że w poprzedzającém twierdzeniu dowiedliśmy, iż $\alpha + \beta + \gamma < 4R$, co znaczy, że summa $\alpha + \beta + \gamma$ przypada zawsze między 0 i 4R, zatém summa $a + b + c$ przypada też zawsze między 6R i 2R t. j. w każdym razie jest większa niż 2R, a mniéjsza niż 6R. Że summa kątów ściennych nigdy nie może przestąpić a nawet dosięgnąć granicy 6R, pokazuje się stąd, że summa $\alpha + \beta + \gamma$ nigdy nie może stać się $= 0$, bo w takim razie i kąt bryłowy znika; że zaś nie może być nigdy ~~większa~~ mniejsza, a nawet równa 2R, widzimy oczywiście; bo gdyby $\alpha + \beta + \gamma$ czyniło 4R, a tylko w tym razie być by mogło $a + b + c = 2R$, trzy kąty płaskie α, β, γ, rozpostarłyby się na jednę płaszczyznę około punktu O, więcby znowu nie mogły zamykać kąta bryłowego.

Z tego rozumowania wynika, że summa $a + b + c$ może przybierać wszystkie ważności ale tylko między 2R i 6R przypadające.

Jeżeli kąty płaskie α, β, γ są proste, wtedy téż i kąty ścienne a, b, c, są proste, jak z §. 205 wiemy.

§. 209.

TWIERDZENIE. *W kącie bryłowym trójściennym naprzeciwko kątów płaskich równych, leżą kąty ścienne równe i odwrotnie.*

Niech będzie kąt bryłowy trójścienny O *fig. 214,* w którym kąt płaski AOB = BOC, potrzeba dowieść, że kąt pochyłości płaszczyzny AOB do płaszczyzny AOC jest równy kątowi pochyłości płaszczyzny BOC do téjże płaszczyzny AOC. Na dowiedzenie tego z któregokolwiek punktu B krawędzi OB spuśćmy prostopadłą BD na płaszczyznę AOC, a z jéj spodka D na płaszczyznie AOC spuśćmy prostopadłe DA i DC do krawędzi OA i OC; punkta A i C połączywszy z punktem B prostemi AB i BC, te według §. 185 *wniosek* będą prostopadłemi, piérwsza do OA druga do OC, a kąty BAD i BCD będą owemi kątami pochyłości czyli ściennemi, których równości dowieść potrzeba. Dwa trójkąty AOB i BOC prostokątne przy A i C, mają przeciwprostokątnię OB spólną, kąt AOB=BOC z założenia, przeto AB=BC. Dwa znowu trójkąty ABD i BCD prostokątne przy D mają bok BD przyległy kątowi prostemu spólny i przeciwprostokątnie AB i BC równe z poprzedzającego dowodu, są przeto sobie równe i przystają do siebie, a z przystania wnosimy, że kąty leżące naprzeciwko boków równych, są sobie równe t. j. kąt BAD=BCD, co było do dowiedzenia.

Odwrotnie: Jeżeli kąty pochyłości płaszczyzn AOB i BOC do płaszczyzny AOC są sobie równe, kąty płaskie AOB i BOC im przeciwległe także sobie są równe. Obrawszy podobnież gdziekolwiek punkt B na krawędzi OB i z niego spuściwszy prostopadłą BD do płaszczyzny AOC, potém z jéj spodka D prostopadłe DA i DC do krawędzi OA i OC, a nareszcie poprowadziwszy proste AB i BC, kąty BAD i BCD są kątami pochyłości rzeczonych płaszczyzn z założenia równe, dowieść potrzeba, że kąt AOB=BOC. Trójkąty BAD i BCD prostokątne przy D mające bok BD spólny i oprócz tego kąty przy A i C równe przystają do siebie, a w szczególności AB=BC. Dwa téż trójkąty AOB i BOC prostokątne przy A i C mając przeciwprostokątnią OB spólną i bok AB=BC przystają do siebie, a z przystania wnosimy, że kąt AOB przeciwległy bokowi AB jest równy kątowi BOC przeciwległemu bokowi BC, a równemu AB, co było do dowiedzenia.

Wniosek. Poprowadziwszy prostą OD, ponieważ z przystania trójkątów AOB i BOC wypada że też i OA=OC, a z przystania trójkątów ABD i BCD, że AD=DC, zatém dwa trójkąty AOD i DOC, w których trzy boki jednego równe są trzem bokom drugiego, każdy każdemu, przystają do siebie, a w szczególności kąt AOD=DOC. Jeżeli więc przez prostopadłą BD i krawędź OB wystawimy sobie poprowadzoną płaszczyznę, ta będzie prostopadłą do płaszczyzny AOC, i podzieli kąt płaski AOC na dwie części równe a kąt bryłowy O na dwa inne mające po kącie ściennym prostym i złożone każdy z trzech kątów płaskich równych, przeto rzeczona płaszczyzna podzieli kąt bryłowy O na dwie części równe. Płaszczyznę taką nazwaćby można *równodzielącą* kąt bryłowy trójścienny.

Równość kątów bryłowych trójściennych.

§. 210.

Składając kąt bryłowy trójścienny z trzech kątów płaskich w §. 207, widzieliśmy, że mając trzy kąty płaskie AOB, BOC i COD *fig. 211*, rozpostarte na płaszczyznie i chcąc z nich złożyć kąt bryłowy, obracaliśmy płaszczyznę AOB około prostéj OB, zaś płaszczyznę DOC około prostéj OC, dopóty, aż się obie zeszły nad płaszczyzną BOC tak, że proste OA i OB zeszły się w jednę krawędź. Lecz ten sam kąt bryłowy moglibyśmy otrzymać obracając też same płaszczyzny i około tychże samych prostych, lecz w przeciwnym kierunku, a wtedy proste OA i OD zejdą się także w jednę krawędź, lecz pod płaszczyzną BOC. Tym sposobem otrzymamy dwa kąty bryłowe złożone z tychże samych kątów płaskich i mających też same kąty ścienne. Atoli wystawiwszy sobie te dwa kąty położone przy sobie tak, aby na jednéjże płaszczyznie były położone ścianami BOC, łatwo dostrzeżemy, iż kąt płaski AOB leżeć będzie w piérwszym z lewéj, w drugim zaś kącie bryłowym z prawéj strony; toż samo rozumié się o kącie płaskim DOC, kładąc więc dwa te kąty na sobie tak, aby wiérzchołki O padły na siebie i ściana BOC przystała do ściany BOC, co się da uskutecznić, bo te ściany są równe jako też same, ściana DOC drugiego nie może przystać do ściany AOB piérwszego bo nie są równe, więc i te kąty bryłowe nie mogą przystać do siebie. W trójkątach prostokréślnych widzieliśmy, iż takowe jakiekolwiek miały położenie, skoro trzy boki jednego równe były trzem bokom drugiego każdy każdemu, były sobie równe i przystały do siebie. W kątach zaś bryłowych trójściennych złożonych z kątów płaskich równych napotykamy niepodobieństwo ich przystania do siebie, chociażbyśmy którykolwiek z nich dowolnie odwracali, lubo o ich równości jesteśmy przekonani. Jakież więc kąty bryłowe trójścienne przystać będą mogły do siebie? Odpowiédź na to jest bardzo łatwa i zapewne bez namysłu, mając przed oczami powyższe dwa kąty bryłowe, każdy odpowie: że *dwa kąty bryłowe trójścienne złożone z kątów płaskich równych i w tymże samym porządku w obu ułożonych są sobie równe i przystają do siebie.* To jest piérwsze twierdzenie o równości i przystawaniu kątów bryłowych odpowiadające twierdzeniu §. 22.

W drugim przypadku dwa kąty bryłowe równe t. j. z równych kątów płaskich złożone ale w przeciwnym porządku w obu ułożonych, nazwiemy *kątami bryłowemi symmetrycznemi.* Takie dwa kąty najłatwiéj otrzymamy, przedłużając krawędzie jednego w przeciwnym kierunku. Z trzech więc kątów płaskich można téż złożyć dwa kąty bryłowe równe ale nieprzystające do siebie.

Uwaga. Kąt bryłowy trójścienny mający dwa kąty płaskie równe, na podobieństwo trójkąta równoramiennego, nazwać można *kątem równościennym* (po francuzku isoèdre). Dwa takie kąty bryłowe symmetryczne przystają do siebie, bo położywszy jeden na drugim tak, iżby trzecie ściany przystały do siebie, dwie inne ściany czyli to leżą w tymże samym czyli w przeciwnym porządku jako sobie równe, w każdym razie przystaną do siebie, bo oprócz równości czynią z trzecią kąty ścienne równe §. poprzedzający.

§. 211.

Twierdzenie. *Dwa kąty bryłowe trójścienne mające po jednéj ścianie równéj i po dwa kąty ścienne przy téjże ścianie leżące równe i jednako położone przystają do siebie.*

Niech będą dwa kąty bryłowe O i O′ *fig. 215*, mające kąty płaskie AOC i A′O′C równe, tudzież kąt ścienny OA = O′A i kąt OC = O′C′ czyli wyraźniéj, kąt pochyłości płaszczyzny AOB do AOC równy takiemuż kątowi płaszczyzny A′O′B′ do A′O′C i kąt płaszczyzny BOC z płaszczyzną AOC równy kątowi płaszczyzny B′O′C′ z płaszczyzną A′O′C′, potrzeba dowieść, że te dwa kąty przystają do siebie. Przeniósłszy myślą kąt O′ na O i ułożywszy tak iżby wiérzchołek O′ padł na O, a ściana A′O′C′ przystała do ściany AOC, ponieważ te kąty płaskie z założenia są sobie równe, zatém krawędź O′A′ pójdzie po krawędzi OA a krawędź O′C, po OC. Z powodu, że kąt O′A′ = OA, ściana A′O′B′ weźmie położenie ściany AOB i dla téj saméj przyczyny ściana B′O′C′ weźmie położenie ściany BOC. Dwie więc płaszczyzny A′O′B′ i B′O′C dostatecznie rozszérzone, przetną się w téjże saméj prostéj w któréj się płaszczyzny AOB i BOC przecinają t. j. w prostéj OB, a dlatego krawędź O′B′ pójdzie po krawędzi OB, a następnie kąty płaskie A′O′B′ i AOB, B′O′C′ i BOC przystaną do siebie, zatém i kąt bryłowy O′ przystanie do takiegoż kąta O, a tém samém są sobie równe.

§. 212.

Twierdzenie. *Dwa kąty bryłowe trójścienne są sobie równe i przystać mogą do siebie, jeżeli mają po dwa kąty płaskie równe i po kącie ściennym między płaszczyznami tychże kątów zawartym równym, a kąty płaskie są jednakowo w obu ułożone.*

Niech będą dwa kąty bryłowe O i O′ *fig. 215* takie, że kąt AOC = A′O′C′, kąt AOB = A′O′B i kąt ścienny OB = O′A′ czyli kąt pochyłości płaszczyzny AOB do AOC równy kątowi pochyłości płaszczyzny A′O′B′ do A′O′C; potrzeba dowieść, że te kąty przystają do siebie a następnie są sobie równe, t. j. że i trzecie kąty płaskie BOC i B′O′C′ są sobie równe. Na dowiedzenie tego, połóżmy również kąt O' na O tak, iżby punkt O' padł na O, a kąt płaski $A'O'C$ przystał do kąta AOC. Ponieważ kąt ścienny $O'A' = OA$, zatém ściana $A'O'B'$ weźmie położenie ściany AOB, a z powodu równości kątów płaskich AOB i $A'O'B'$, krawędź $O'B'$ weźmie płożenie krawędzi OB. A że przez dwie proste przecinające się jedna tylko płaszczyzna przechodzić może §. 180, zaś dwie proste $O'C'$ i $O'B$ leżą całkiem na prostych OC i OB czyli czynią z niemi jedne i też same krawędzie, zatém i kąt płaski $B'O'C' = BOC$ t. j. dwa założone kąty bryłowe we wszystkich swych częściach przystają do siebie.

§. 213.

TWIERDZENIE. *Dwa kąty bryłowe trójścienne, w których trzy kąty ścienne jednego są równe trzem takimże kątom drugiego i jednakowo położone, są sobie równe i przystają do siebie.*

Dwóch kątów bryłowych trójściennych O i O', oznaczmy kąty płaskie przez α, β, γ i α', β', γ', kąty zaś ścienne im przeciwległe przez a, b, c i a', b', c'. Do każdego z tych kątów bryłowych pomyślmy sobie kąt trójścienny spełniający §. 206, tedy ściany jednego z tych kątów będą równe ścianom drugiego każda każdéj jako spełnienia kątów a, b, c i a', b', c', gdyż z założenia $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$. Jeżeli bowiem kąty płaskie tych spełniających kątów bryłowych oznaczymy przez A, B, C i A', B', C', ponieważ $A + a = 180°$ i $A' + a' = 180°$, zatém $A + a = A' + a'$ a następnie $A = A'$ bo z założenia $a = a'$. Dla téjże saméj przyczyny jest $B = B'$ i $C = C'$ Dwa więc kąty spełniające przystają do siebie, a z przystania wniesiemy, że ich kąty ścienne leżące naprzeciwko kątów płaskich równych są sobie równe. Oznaczywszy takowe w piérwszym przez g, h, k, a w drugim przez g', h', k', będzie $g = g'$, $h = h'$ i $k = k'$. A że znowu z własności kątów spełniających wyżéj dowiedzionéj wypada, że $g + \alpha = 180$ i $g' + \alpha' = 180$, skąd $g + \alpha = g' + \alpha'$, zatém $\alpha = \alpha'$. Podobnie též znajdziemy, że $\beta = \beta'$ i $\gamma = \gamma'$ czyli że dwa kąty bryłowe trójścienne mające kąty ścienne równe i w tymże samym porządku ułożone są sobie we wszystkich swych częściach równe i przystają do siebie.

Uwaga. Kąt bryłowy trójścienny jest więc dokładnie oznaczonym, skoro znamy sześć jego elementów t. j. trzy kąty płaskie i trzy kąty ścienne. Łącząc te sześć elementów po dwa zą pośrednictwem trójściennego kąta spełniającego, otrzymamy sześć różnych połączeń.

Chociaż pominęliśmy twierdzenie, że w kątach bryłowych trójściennych na przeciwko kątów płaskich równych leżą kąty ścienne równe i odwrotnie, wszelako w przypadku przystania do siebie dwóch takich kątów łatwo to twierdzenie wyprowadzić jako prosty wniosek, bo to jest koniecznym warunkiem ich przystania.

§. 214.

Powiedziawszy w §. 205, co nazywamy kątem bryłowym wielościennym, nie wiele mamy do powiedzenia o takich kątach, oprócz że przez dwie którekolwiek lecz nie na jednéj ścianie leżące krawędzie poprowadzona płaszczyzna, dzieli kąt bryłowy na dwa inne, każdy z mniejszéj liczby kątów płaskich złożone; że prowadząc przez każde dwie do dwóch przyległych ścian należące krawędzie płaszczyzny, podzielić można każdy kąt bryłowy wielościenny, na same kąty trójścienne; że nareszcie summa kątów płaskich w wiérzchołku kąta bryłowego wielościennego, jest zawsze mniejsza niż 4R.

To ostatnie twierdzenie jakkolwiek samo z siebie oczywiste, jeżeli kąt bryłowy ma być rzeczywistym, sądzę za potrzebne dowiéść, chociażby tylko dla torowania uczącym się drogi do innych dowodów.

Niechże więc *fig. 216* będzie kąt bryłowy wielościenny O; na dowiedzenie, że summa kątów płaskich przy jego wiérzchołku jest mniejsza niż 4R, poprowadźmy jakokolwiek płaszczyznę wszelako z warunkiem, iżby wszystkie krawędzie danego kąta przecinała jak tu np. w punktach A, B, C, D, E, F. Taż sama płaszczyzna przetnie téż każdą ścianę w prostéj, które zamkną pewien wielokąt ABCDEF..... Na płaszczyznie tego wielokąta obrawszy gdziekolwiek punkt S i takowy połączywszy ze wszystkiemi wiérzchołkami wielokąta, przy każdym takim wiérzchołku otrzymamy kąt bryłowy trójścienny, w którym dwa kąty płaskie należą do ścian kąta bryłowego, zaś trzeci do wielokąta. A że według §. 207 każde dwa kąty płaskie do ścian kąta bryłowego należące są większe niż trzeci, t. j. niż kąt do wielokąta należący, więc summa wszystkich kątów płaskich przy wiérzchołkach A, B, C, D i t. d. leżących a do ścian kąta bryłowego należących jest większa, niż summa wszystkich kątów wewnętrznych wielokąta. Każdéj ściany, jako trójkąta prostokréślnego, summa trzech kątów czyni 2R, tych zaś trójkątów jest tyle, ile wielokąt ma boków, przeto i liczba kątów prostych będzie równa tyle razy powtórzonym dwom kątom prostym, ile wielokąt ma boków; przeto summa kątów w wiérzchołku kąta bryłowego uzupełnia summę wszystkich kątów płaskich do ścian jego należących do tyle razy wziętych dwóch kątów prostych, ile wielokąt ma boków. Podobnież snmma kątów przy S uzupełnia summę kątów wewnętrznych wielokąta do tyle razy wziętych dwóch kątów prostych, ile wielokąt ma boków; ta więc ostatnia summa jest względnie summy wewnętrznych kątów wielokąta, czém summa kątów płaskich przy wiérzchołku, względem summy kątów płaskich przy wiérzchołkach A, B, C, D..... leżących, a do ścian kąta bryłowego należących. Ale ponieważ ta ostatnia summa jest większa, niż summa kątów wielokąta, przeto summa uzupełniająca tamtę, mniejsza być musi od summy tę tu uzupełniającéj. A kiedy ostatnia uzupełniająca summa jest $=4R$, zatém summa kątów płaskich przy wiérzchołku kąta bryłowego jest mniejsza niż 4R, co chcieliśmy dowiéść.

Dwa kąty wielościenne podobnież jak dwa trójściany wtedy tylko do siebie przystać mogą, gdy mają kąty płaskie równe i jednakowo w obu ułożone i oprócz tego kąty ścienne równe. Lub téż, jeżeli każdy z nich może być rozebranym na tęż samę liczbę trójścianów równych i podobnie w obu kątach ułożonych.

§. 215.

Kończąc rzecz o kątach bryłowych, wypada nam jeszcze wspomnieć, chociaż tylko pokrótce, jak się mierzy wielkość kąta bryłowego? Wiemy już, iż aby wymierzać ilości ciągłe czyli geometryczne, potrzeba w każdym gatunku ilości obrać jednostkę tegoż samego gatunku, a wszelako łatwą do pojęcia i stałą. Jakoż chcąc wymierzać kąty linijowe, obraliśmy za jednostkę kąt prosty, bo się przekonaliśmy, że ten jest zawsze stałym i niezmiennym, oraz do wykréślenia łatwym a pojęcie jego żadnéj nie stawia trudności. Chcąc zatém wymierzać wielkość kątów bryłowych, postąpić nam należy tymże samym sposobem, obiérając za jednostkę do tego wymiaru także kąt bryłowy. Ale jakiż kąt za taką jednostkę obierzemy? Rozważywszy wszystko co dotąd o kątach bryłowych powiedzieliśmy, dostrzeżemy, że w §. 207 pokazaliśmy, iż skoro się trzy płaszczyzny przecinają, tak że każda z nich jest prostopadłą do dwóch innych, dzielą przestrzeń nieograniczoną na ośm okolić czyli części zupełnie między sobą równych; będąc zaś te płaszczyzny wzajemnie do siebie prostopadłemi, czynią ośm kątów bryłowych trójściennych między sobą równych. Każdy z tych kątów bryłowych zawarty jest trzema prostemi kątami płaskiemi, i ma wszystkie trzy kąty ścienne czyli kąty pochyłości ścian proste, z tego powodu takie trójścienne kąty bryłowe nazywać będziemy prostemi. W każdym innym przypadku t. j. gdy się trzy płaszczyzny w inny sposób przecinają, kąt bryłowy nie będzie miał tych własności, iżby jego kąty płaskie były proste równie jak kąty ścienne; dlatego téż kąt bryłowy trójścienny prosty jest stałym i niezmiennym, oraz łatwym do pojęcia; słuszną więc jest rzeczą taki kąt obrać za jednostkę do mierzenia innych kątów bryłowych. Mówiąc zatém o wielkości jakiego kąta bryłowego, rozumieć będziemy stósunek przestrzeni między jego ścianami zawartéj, do przestrzeni zawartéj między trzema ścianami kąta bryłowego prostego.

Jeżeli trzy płaszczyzny przecinają się wzajemnie jakokolwiek, w każdym razie dzielą przestrzeń nieograniczoną na ośm okolic nierównych, jak poprzednio między sobą; summa atoli tych okolic czyli kątów bryłowych trójściennych równa się zawsze ośmiu kątom bryłowym trójściennym prostym. Każde dwa kąty bryłowe nad lub pod płaszczyzną poziomą, a po jednéjże stronie jednéj z dwóch drugich płaszczyzn w summę wzięte, czynią dwa kąty bryłowe proste i z tego powodu nazwaćby je można *przyległemi* na podobieństwo kątów linijowych. Co tu powiedzieliśmy o dwóch kątach nad lub pod płaszczyzną poziomą, rozumié się także o każdéj z trzech płaszczyzn, bo każdą z nich uczynić można poziomą. Zastanowiwszy się nad tém, iż im jeden z dwóch przyległych kątów bryłowych jest mniejszy, tém drugi będzie większy od kąta prostego, tudzież, że również kąty ścienne przy téjże saméj krawędzi leżące, a do tych kątów bryłowych należące, w miarę zmieniania się obu kątów bryłowych zmieniać się będą, t. j. jeden maleć a drugi róść będzie, łatwo pojmiemy, że skoro kąty bryłowe ze stanu równości t. j. gdy są kątami prostemi, przechodzą do stanu nierówności, kąty téż ścienne z takiegoż stanu przechodzą do kątów pochyłości nierównych jako przyległe; że przeto stósunek jednego z tych kątów nierównych do kąta prostego, koniecznie równym być musi stósunkowi zmiennego kąta pochyłości do kąta linijowego prostego.

To dobrze zrozumiawszy, niech trzy płaszczyzny MN, PQ i RS *fig. 217*, przecinają się w punkcie O; kąt ścienny przy krawędzi Ox czyli kąt pochyłości płaszczyzny RS do płaszczyzny MN oznaczmy przez c; takiż kąt przy krawędzi Oy czyli kąt pochyłości płaszczyzn PQ i MN oznaczmy przez b, a nareszcie kąt przy krawędzi Oz czyli kąt pochyłości płaszczyzn PQ i RS oznaczmy przez a; tedy uważając cztéry kąty nad płaszczyzną MN, według tego co poprzedziło, mamy: summa dwóch kątów bryłowych xyz i $x'yz$ t. j. summa kątów po jednéj stronie płaszczyzny PQ jest tém względem dwóch kątów bryłowych prostych, czém kąt ścienny c względem kąta prostego linijowego czyli 90^0. Oznaczywszy przeto kąt bryłowy prosty przez K, będzie

$$(xyz + x'yz) : 2K = c : 90 \quad \text{skąd} \quad xyz + x'yz = \frac{2c}{90}K$$

Podobnież znajdziemy . . . . . . $xyz + xy'z = \frac{2b}{90}K$

$$xyz + xyz' = \frac{2a}{90}K$$

A że $xyz + x'yz + xy'z + xyz' = 4K$, zatém dodawszy trzy ostatnie zrównania otrzymamy

$$2xyz + 4K = \frac{2(a+b+c)}{90}K$$

skąd $$xyz = \frac{a+b+c}{90}K - 2K$$

albo $$xyz = \frac{(a+b+c) - 180}{90}K.$$

Wielkość przeto kąta bryłowego trójściennego mierzy się przewyżką trzech jego kątów ściennych nad dwa kąty proste, t. j. że kąt bryłowy trójścienny taką jest częścią kąta bryłowego prostego, jaką częścią jest przewyżka trzech jego kątów pochyłości względem kąta prostego czyli względem 90°. Tak np. gdyby trzy kąty ścienne kąta bryłowego trójściennego były 88°, 62° i 45°, tedy wielkość takiego kąta bryłowego byłaby $= \frac{195 - 180}{90} K = \frac{1}{6} K$ t. j. ten kąt bryłowy co do wielkości swojéj byłby $\frac{1}{6}$ kąta bryłowego prostego. Gdyby zaś trzy kąty ścienne były $a = 95°$, $b = 130°$, $c = 145°$, wtedy wielkość kąta bryłowego będzie $= \frac{360° - 180}{90} K = 2K$ t. j. kąt bryłowy równałby się dwom kątom bryłowym prostym i t. d.

ROZDZIAŁ III.

O ciałach graniastych (polyëdra).

§. 216.

Ze wstępu wiemy, że ciało geometryczne jest to przestrzeń ze wszech stron ograniczona. Że ta przestrzeń ogranicza się powiérzchniami, które ponieważ być mogą płaskie lub krzywe, powstają nam téż ciała *graniaste* lub *okrągłe*, do czego przydać możemy ciała *mieszane* t. j. przestrzeń ograniczoną po części powiérzchniami płaskiemi a po części krzywemi.

W tym rozdziale mówić jedynie będziemy o ciałach płaskiemi powiérzchniami ograniczonych.

Aby miejsce na płaszczyznie ograniczyć, potrzebowaliśmy najmniéj trzech prostych, skąd otrzymaliśmy figurę najprostszą lecz zarazem najważniéjszą nazwaną *trójkątem*. Aby przestrzeń ze wszech stron ograniczyć, potrzeba najmniéj *cztérech płaszczyzn* z warunkiem jednakże, iżby każda z nich trzy inne przecinała; widzieliśmy bowiem, że chociaż nie cztéry ale jakakolwiek liczba płaszczyzn przecina się ale tak, że wszystkie mają jeden punkt spólny, nie zamykają jednak ze wszech stron przestrzeni, ale owszem w jednym kierunku otwartą i do nieskończoności ciągnąca się, a którą *kątem wielościennym* nazwaliśmy.

Skoro jakakolwiek liczba płaszczyzn przecina się z sobą, te inaczéj przecinać się nie mogą tylko, że albo jeden punkt mają spólny, albo że spólne przecięcia się każdych dwóch są od siebie równoległe, albo nareszcie, rozmaicie są do siebie nachylone. W piérwszym przypadku nie zamkną, jak już powiedzieliśmy, przestrzeni, dopóki ze strony otwartéj nie przetniemy wszystkich jedną jeszcze płaszczyzną, skąd otrzymamy ciała nazwane *ostrosłupowemi* albo krócéj *ostrosłupami* (pyramides). W drugim przypadku inaczéj przestrzeni nie zamkniemy, dopóki wszystkich płaszczyzn z dwóch otwartych stron dwiema innemi płaszczyznami nie przetniemy; z czego otrzymamy *ciała graniasto-słupowe* (prisma), lubo tę nazwę dajemy ciałom, w których dwie zamykające płaszczyzny są od siebie równoległe. W trzecim nareszcie przypadku można zawsze zamknąć przestrzeń rozszérzając tylko niektóre z płaszczyzn dostatecznie, skąd otrzymamy ciała nazwane *wielościanami* (polyedra). Ciała wszystkich trzech gatunków mogą być *wypukłe* (convexa), albo *wklęsłe* (concava)

W obecném dziełku jako elementarném, mówić będziemy jedynie o ciałach wypukłych, które łatwo poznamy, bo przedłużywszy albo raczéj rozszérzywszy którąkolwiek z płaszczyzn ograniczających we wszystkich kierunkach, całe takie ciało znajduje się całkiem z jednéj strony tak rozszérzonéj płaszczyzny. Z trzeciego gatunku zatrudnią nas tylko ciała tak nazwane *foremne*, jak to w dalszym ciągu zobaczymy. Zacznijmy od graniastosłupów.

Graniastosłupy (prisma).

§. 217.

Jeżeli układ płaszczyzn przecinających się tak, że spólne przecięcia się każdych dwóch są od siebie równoległe, przetniemy dwiema płaszczyznami do siebie równoległemi, otrzymamy ze wszech stron ograniczoną przestrzeń, a zatém ciało geometryczne, które *graniastosłupem* nazywamy. Dwie ostatnie płaszczyzny przeciąwszy się z piérwszemi, z każdą naturalnie w prostéj, wydadzą dwa wielokąty zupełnie sobie równe, które *podstawami* graniastosłupa nazywać będziemy, jednę *górną* a drugą *dólną*. Wszystkie inne płaszczyzny przeciąwszy się z dwiema podstawami, wydadzą tyle równoległoboków, ile jest płaszczyzn, a zatém tyle, ile każda z podstaw ma boków; dlatego téż otrzymać jeszcze można graniastosłup, nakréśliwszy na jakiéjkolwiek płaszczyźnie wielokąt prostokréślny i ze wszystkich jego wiérzchołków kątów poprowadziwszy zewnątrz i z jednéjże strony téj płaszczyzny proste równoległe od siebie i równe, a potém łącząc ich końce prostemi; przez co otrzymamy wielokąt równy nakréślonemu, a proste równoległe wraz z bokami dwóch rzeczonych wielokątów równych zamkną równoległoboki, które wystawiwszy sobie jako płaszczyzny, zamkną przestrzeń całkiem ze wszech stron ograniczoną.

Wszystkie ograniczające równoległoboki nazywać będziemy *ścianami bocznemi* (facies laterales). Spólne przecięcia się ścian bocznych tak tu, jako téż i w innych ciałach nazwiemy również *krawędziami*. *Wysokością* graniastosłupa nazwiemy prostopadłą z któregokolwiek punktu płaszczyzny jednéj, na płaszczyznę drugiéj podstawy spuszczoną.

Z tego opisania graniastosłupa łatwo dostrzegamy, że ściany boczne formują z podstawami przy każdym wiérzchołku kąty trójścienne, w których zawsze dwa kąty płaskie należą do ścian bocznych a trzeci do jednéj z podstaw.

Sądzę że téż nie potrzebuję dowodzić, jako oczywistéj prawdy, że przeciąwszy gdziekolwiek graniastosłup płaszczyzną równoległą do dwóch podstaw, przecięcie to jest wielokątem zupełnie równym każdéj z podstaw. Skąd wypływa, że graniastosłup można jeszcze otrzymać ruchem jednéj z jego podstaw równolegle do piérwszego jéj położenia wzdłuż któréjkolwiek krawędzi, pomyśliwszy sobie tylko, że ta podstawa w swym ruchu pozostawia w każdém położeniu ślad swéj bytności. W tym ruchu to jest uwagi godném, że graniastosłup przechodzi przez wszystkie stany swéj wielkości począwszy od zero, aż do nieskończoności; aby więc mieć ograniczoną wielkość graniastosłupa, dosyć poprowadzić w stósownéj odległości płaszczyznę równoległą do podstawy.

Każda płaszczyzna nie równolegle, lecz pod jakiémkolwiek nachyleniu do podstawy poprowadzona, dzieli graniastosłup na dwa inne, które zwyczajnie nazywamy *graniastosłupami ukośnie ściętemi* (prisma oblique truncatum), jak przecięcie *abcde*, *fig. 218*.

Graniastosłupy przybiérają nazwy od liczby ścian bocznych, albo co na jedno wychodzi, od liczby boków wielokąta służącego za podstawę. Tak więc są graniastosłupy trójścienne (prismata triangularia), czworościenne (quadrangularia), pięciościenne (pentagonalia) i w ogólności wielościenne (polygonalia), według tego jak podstawa jest trójkątem, czworokątem, pięciokątem...... wielokątem.

Prostym graniastosłupem nazwiemy ten, którego boczne krawędzie są prostopadłe do podstaw. W tym przypadku, ponieważ wszystkie te krawędzie są sobie równe, przeto każda jest téż wysokością graniastosłupa, ściany zaś boczne są prostokątami. Każdy inny graniastosłup nazywać będziemy *ukośnym*.

Nazywamy jeszcze *graniastosłupem foremnym* każdy graniastosłup prosty, którego podstawy są wielokątami foremnemi. W takim graniastosłupie wszystkie ściany boczne są prostokątami sobie równemi.

W jakimkolwiek graniastosłupie poprowadziwszy przez dwie nie na jednéj ścianie leżące krawędzie płaszczyznę, ta naturalnie będzie równoległobokiem i nazywać ją będziemy *płaszczyzną przekątną* (planum diagonale). Dwie takie płaszczyzny przecinają się w prostéj równoległéj do każdéj z krawędzi graniastosłupa. Na *fig. 218* widzimy dwie takie płaszczyzny AFHC i BDIG przecinające się w prostéj LM.

Nareszcie każdy graniastosłup rozebrany być może na graniastosłupy trójścienne przez płaszczyzny przekątne. Tak na *fig. 218* widzimy graniastosłup pięciościenny rozebrany przez płaszczyzny przekątne na trzy trójścienne ABCFGH, ADCFIH i ADEFIK.

Tak w graniastosłupach jako téż i w innych ciałach geometrycznych zwrócimy szczególniéj naszę uwagę na ich *objętość* (volumen) i powiérzchnię (superficies), a oprócz tego gdzie potrzeba albo sama umiejętność wymagać będzie, wskażemy szczególne ich własności.

Objętością ciała nazywać będziemy wielkość przestrzeni przez ciało zajętéj; *powiérzchnią* zaś wielkość pola zajętego przez wszystkie ciało ograniczające powiérzchnie, bądź one są płaskie, bądź krzywe.

§. 218.

Twierdzenie. *Dwa graniastosłupy mające po kącie trójściennym równym zawartym trzema wielokątami równemi każdy każdemu i jednakowo w obu ułożonemi, są sobie równe i przystają we wszystkich częściach do siebie.*

Niech będą dwa graniastosłupy ABCDEFGH i *abcdefgh* *fig. 219*, mające kąty trójścienne A i *a* równe i zawarte trzema wielokątami każdy każdemu równemi tak, że ABCD = *abcd*, ADHE = *adhe* i ABFE = *abfe*; potrzeba dowieść, że przystają do siebie, a następnie, że sobie są równe.

Pomyślmy graniastosłup *a b c d e f g h* przeniesiony na ABCDEFGH i ułożony tak, iżby podstawa *abcd* przystała do podstawy ABCD, co być może, bo z założenia są sobie równe, tedy dla równości ścian, kąty płaskie składające trójściany A i *a*, są sobie równe każy każdemu; skąd wypływa, że kąty ścienne czyli kąty pochyłości tychże ścian są sobie równe, każdy każdemu §. 210, więc ściany *adhe* i *abfe* wezmą położenie ścian ADHE i ABFE i do nich przystaną, bo sobie także z założenia są równe; punkta przeto *e*, *f*, *h* padną na E, F, H, a następnie i podstawa górna *efgh* weźmie położenie podstawy EFGH i do niéj przystanie, albowiem są sobie równe jako równe podstawom dólnym, a z założenia równym; więc nareszcie i wszystkie inne boczne ściany czyli równoległoboki przystaną do odpowiadających sobie; zatém i dwa rzeczone graniastosłupy we wszystkich swych częściach przystaną do siebie, a następnie są sobie równe.

Wniosek. Dwa graniastosłupy proste mające podstawy i wysokości równe, są sobie równe. Położywszy bowiem podstawę jednego na podstawie drugiego tak, iżby wierzchołki odpowiadających kątów padły na siebie, ponieważ boczne krawędzie w obu graniastosłupach są prostopadłe do podstaw, muszą więc koniecznie wziąść położenie jedne drugich; a że téż są i między sobą równe, zatém i wierzchołki górnych podstaw padną jedne na drugie, a następnie i dwa graniastosłupy we wszystkich częściach przystaną do siebie, przeto sobie są równe.

§. 219.

Twierdzenie. *Każdy graniastosłup ukośny zamienić można na prosty równy mu co do objętości.*

Niech będzie graniastosłup ABCDEFGH *fig. 220* ukośny, potrzeba okazać, iż go można zamienić na prosty równy mu co do objętości. W tym celu przez końce którejkolwiek krawędzi bocznéj *np.* przez końce B i F, krawędzi BF, poprowadźmy dwie płaszczyzny prostopadłe do téjże krawędzi, te płaszczyzny przetną inne krawędzie przedłużone gdzie potrzeba, w punktach *np.* *a*, *c*, *d*, *e*, *g*, *h*. Ponieważ według definicyi wszystkie krawędzie graniastosłupa ukośnego są od siebie równoległe, a dwie nowe płaszczyzny są z wykreślenia prostopadłemi do jednéj z nich t. j. do BF, są więc równoległemi od siebie i prostopadłemi i do wszystkich; figura przeto $aBcdeFgh$, jest graniastosłupem prostym. Oba graniastosłupy mają część zawartą między płaszczyznami ABCD i $eFgh$ spólną; chcąc więc dowieść, że sobie są równe, dosyć będzie okazać, że ciało zawarte między płaszczyznami ABCD, $aBcd$ jest równe ciału zawartemu między płaszczyznami EFGH i $eFgh$, t. j. że bryła $FH = BD$. Dwie krawędzie AE i ae są równe trzeciéj BF i od niéj równoległe, stósownie do definicyi graniastosłupa, zatém $AE = ae$, a następnie $Aa = Ee$. A że téż $AB = EF$ i $aB = eF$, więc dwa trójkąty czyli dwie ściany AaB EeF są sobie równe i przystają do siebie. Zupełnie tym samym sposobem dowiedzie się, że $Cc = Gg$ i $Dd = Hh$, tudzież że kąty ABa i CBc są równe kątom EFe i GFg. Skoro więc ciało $eFghEFGH$ wystawimy sobie przeniesione na ciało $aBcdABCD$ i ułożone w ten sposób, żeby punkt F padł na punkt B, a wielokąt $eFgh$ przystał do wielokątą $aBcd$, ponieważ kąt $eFE = aBA$, krawędź FE pójdzie po krawędzi BA; a że sobie są równe, więc punkt E padnie na A, bo téż i $eE = aA$. Podobnież punkt G padnie na C, a płaszczyzna czyli wielokąt EFGH przystanie do wielokąta ABCD. Lecz $Hh = Dd$ i $Gg = Cc$, przeto wszystkie płaszczyzny ograniczające dwa te ciała i wszystkie krawędzie przystają zupełnie do siebie, więc rzeczone ciała są sobie równe we wszystkich swych częściach. Dodawszy teraz spólną obu graniastosłupom część $ABCDeFgh$ do ciała $aBcdaABCDA$, otrzymamy graniastosłup prosty ah; dodawszy zaś tęż samę część do ciała $eFgheEFGHE$, otrzymamy graniastosłup ukośny BH, przeto dwa te graniastosłupy są sobie równe.

§. 220.

Jeżeli w graniastosłupie podstawy są także równoległobokami, taki graniastosłup nazywać będziemy *równoległościanem* (parallelipipedum); składa on się bowiem z sześciu równoległobocznych ścian po dwie od siebie równoległych i równych, jak się zaraz okaże.

Że przeciwległe ściany równoległościanu są sobie równe, łatwo jest dowieść; albowiem chcąc okazać, że ściana ABFE = DCGH, *fig. 221*, uważmy, że AB = CD i BF = CG, tudzież kąt ABF = DCG, przeto równoległoboki ABFE i DCGH według §. 24 *uwaga 3*, przystają do siebie, a tém samém są sobie równe. Oprócz równości, są jeszcze te ściany od siebie równoległe: gdy bowiem kąt ABF = DCG, a ramiona ich są od siebie równoległe, zatém płaszczyzny ABFE i DCGH są od siebie równoległe stósownie do §. 198. Z téj własności wypada, że przeciąwszy równoległościan w jakimkolwiek kierunku płaszczyzną, przecięcie to zawsze jest równoległobokiem stósownie do §. 193. Kiedy równoległościan jest ciałem zawartém sześciu równoległobokami, zatém którekolwiek dwie przeciwległe ściany wziąść można za jego podstawy. Łatwo téż jest wystawić równoległościan, skoro mamy dane trzy proste mające być krawędziami równoległościanu w jednym punkcie schodzącemi się i czyniącemi z sobą kąty płaskie dane; dosyć bowiem przez koniec każdéj prostéj poprowadzić płaszczyznę równoległą do płaszczyzny przez dwie inne proste przechodzącéj, te dostatecznie rozszerzone, zamkną równoległościan, którego trzy proste dane będą trzema krawędziami w jednym punkcie schodzącemi się.

Równoległościan nazwiemy *prostym*, jeżeli boczne jego krawędzie są prostopadłe do podstaw; nazwiemy go zaś *prostokątnym*, jeżeli oprócz prostopadłości krawędzi, podstawy są prostokątami. W tym drugim przypadku t. j. w równoległościanie prostokątnym, wszystkie ściany, kiedy w piérwszym, tylko ściany boczne, są prostokątami.

Równoległościan prostokątny mający za podstawę kwadrat a wysokość równą bokowi tegoż kwadratu, nazywać będziemy *sześcianem* (cubus). Sześcian przeto jest graniastosłupem mającym sześć ścian kwadratowych między sobą równych. Ciało to jest bardzo ważném, stósunek bowiem jego do innych ciał jest zupełnie ten sam jak kwadratu do powierzchni figur na płaszczyznie uważanych.

Ponieważ w równoległościanie jest tylko sześć par krawędzi przeciwległych §. 223, zatém też nie więcéj nad sześć płaszczyzn przekątnych w każdym równoległościanie poprowadzić można. A że znowu każda taka płaszczyzna, będąc równoległobokiem, ma dwie proste przekątne, które też przekątnemi równoległościanu zowiemy, wypadałoby stąd, iż w równoległościanie dwanaście prostych przekątnych poprowadzić można. Lecz zastanowiwszy się, że każda z prostych przekątnych należy do trzech płaszczyzn przekątnych, jak *np.* AG, *fig. 221,* jest przekątną równoległoboków ABGH, ADGF i AEGC, przekonamy się, iż tylko cztéry różne przekątnie w równoległościanie poprowadzić można t. j. AG, BH, CE i DF; końce ich nazywają się wierzchołkami równoległościanu sobie przeciwległemi. Równoległościan ma na powierzchni swojéj dwanaście przekątni t. j. na każdéj ścianie dwie, w środku téjże ściany przecinające się na połowę.

§. 221.

Twierdzenie. *Cztery przekątnie równoległościanu przecinają się w jednym punkcie będącym środkiem prostéj łączącéj środki dwóch ścian przeciwległych.*

Niech na poprzedzającéj figurze 221, AG i CE będą dwie z tych przekątni, ponieweż obie są przekątniami równoległoboku ACGE, zatém według §. 51 *wnios. 2* przecinają się wzajemnie na dwie równe części; punkt przecięcia się ich oznaczmy głoską O. Uważmy znowu dwie przekątnie AG i DF, z tych każda jest przekątnią tegoż samego równoległoboku ADGF, przeto punkt O będący środkiem przekątni AG i CE, jest też środkiem przekątni DF. Tymże samym sposobem okaże się, że tenże punkt O jest środkiem przekątni BH i DF, jest przeto punkt O spólném przecięciem się wszystkich czterech przekątni i środkiem każdéj.

Połączywszy środki którychkolwiek dwóch przeciwległych płaszczyzn *np.* I i K prostą IK, ta jest równa i równoległa każdéj krawędzi bocznéj, a będąc poprowadzona przez środki dwóch przeciwległych boków BD i FH równoległoboku BFHD, przechodzić musi przez jego środek O, oraz podzielona jest w tymże punkcie na dwie części równe. Toż samo rozumie się o prostéj LM łączącéj środki ścian ADHE i BCGF, tudzież o prostéj NP łączącéj środki ścian ABFE i DCGH.

Uwaga 1. Punkt O będący środkiem każdéj przekątni równoległościanu, jako téż środkiem każdéj prostéj łączącéj środki dwóch ścian przeciwległych, nazywać będziemy *środkiem równoległościanu.*

Uwaga 2. W równoległościanie prostokątnym każda z czterech przekątnych płaszczyzn jest prostokątem, a cztery jego przekątnie są sobie równe.

§. 222.

Twierdzenie. *W równoległościanie prostokątnym kwadrat z jego przekątni równa się summie kwadratów wystawionych na trzech jego krawędziach w jednym punkcie schodzących się.*

Niech *fig. 222;* wystawia nam równoległościan prostokątny, poprowadziwszy prostą AG, jednę z jego przekątni, mamy dowieść że $\overline{AG}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2$. Na ten koniec poprowadźmy przekątnią AC prostokąta ABCD. W trójkącie AGC prostokątnym przy C jest $\overline{AG}^2 = \overline{GC}^2 + \overline{AC}^2$; w trójkącie ABC również prostokątnym przy D jest $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$, tudzież $GC = AE$, wstawiwszy więc te ważności, znajdziemy

$$\overline{AG}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2$$

co było do dowiedzenia.

Uwaga. Ponieważ dla każdéj z czterech przekątni toż samo twierdzenie ma miejsce t. j. że kwadrat z każdéj równa się $\overline{AE}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2$, przeto naturalny wniosek wypada, że w równoległościanie prostokątnym, cztéry przekątnie są sobie równe.

§. 223.

Twierdzenie. *Dwa równoległościany prostokątne mające równe podstawy i wysokości, są sobie równe co do objętości; mające równe podstawy, mają się do siebie jak wysokości, mające równe wysokości, mają się do siebie jak podstawy, a* *nareszcie mające tak podstawy jako i wysokości różne, mają się do siebie jak iloczyny z podstaw przez wysokości.*

Piérwsza część tego twierdzenia nie potrzebuje żadnego dowodu, gdyż z §. 218 *wniosek* wprost wypływa, iż dwa równoległościany prostokątne o równych podstawach i wysokościach są sobie równe.

Co do drugiego. Tu mogą być dwa przypadki, albo wysokości równoległościanów są spółmierne, albo niespółmierne. W przypadku spółmierności, oznaczywszy objętość jednego z nich przez R a drugiego przez r, wysokości zaś przez W i w, przypuśćmy, iż wysokość piérwszego zamyka m takich części jakich wysokość drugiego zamyka n, przez co będzie $W : w = m : n$. A jeżeli tak w jednym jako i drugim równoległościanie przez punkta podziałów na ich wysokościach zrobione, poprowadzimy płaszczyzny do podstaw równoległe, piérwszy podzieli się na m, drugi zaś na n równoległościanów mających tak podstawy jako i wysokości równe, a zatém równych, a dla tego będzie $R : r = m : n$ następnie zaś $R : r = W : w$.

W przypadku niespółmierności, dowód jest zupełnie podobny do tego, jakiego w §. 116 użyliśmy i sądzę, że nie stawi żadnéj trudności, dla czego bez obawy niezrozumiałości, tu go pomijam tym więcéj, że w §. 53 *uwaga 1,* dałem dokładne, ile mi się zdaje, pojęcie przejścia ze spółmierności do niespółmierności.

Co do trzeciego. Niech będą dwa równoległościany ABCDEFGH i BKLMFNOP *fig. 223* prostokątne, mające wysokości równe a podstawy nierówne, trzeba dowieść, że objętości takich równoległościanów są w stósunku ich podstaw. Na dowiedzenie tego, oba równoległościany postawmy na jednéjże płaszczyznie obok siebie tak, iżby się jedną krawędzią *np.* BF z sobą schodziły, co zawsze być może, bo krawędzie w obu są prostopadłe do podstaw, tudzież iżby ściana BKNF drugiego, przypadła na przedłużeniu ściany ABFE piérwszego równoległościanu. W takiém ich położeniu wystawmy sobie ścianę CDHG piérwszego, jako téż ścianę BKLM drugiego przedłużone aż do przecięcia się piérwszéj z przedłużoną ścianą KLON w prostéj RS, drugiéj zaś z tą nową ścianą w prostéj CR; tym sposobem otrzymamy trzeci równoległościan BKRCFNSG mający równą wysokość z danemi. Tak równoległościan piérwszy jako i trzeci wystawić sobie można jako stojące na téjże saméj podstawie BFGC, według więc poprzedzającego twierdzenia, objętości ich mają się do siebie jak wysokości t. j. jak AB : BK, czyli oznaczywszy objętości tych trzech równoległościanów przez R, r i ϱ, będzie $R : \varrho = AB : BK$. Podobnież równoległościany r i ϱ uważać można jako stojące na jednéjże podstawie BFNK, a ich wysokości są BM i BC, przeto $\varrho : r = BC : BM$. Dwie te proporcyje mnożąc przez siebie i upraszczając, otrzymamy $R : r = AB \times BC : BK \times BM$. A że iloczyny $AB \times BC$ i $BK \times BM$ wyrażają powierzchnie podstaw równoległościanów R i r, więc prawdą jest, że dwa rownoległościany prostokątne mające równe wysokości mają się do siebie jak podstawy.

Co do czwartego. Niech znowu *fig.* 224 będą dwa równoległościany prostokątne ABCDEFGH i *abcdefgh* mające tak wysokości jako i podstawy różne. Aby dowieść, że ich objętości są w stósunku iloczynów z podstaw przez wysokości, na krawędzi *np.* *ae* drugiego, odetnijmy $am = AE$ t. j. wysokość piérwszego i przez punkt m poprowadźmy płaszczyznę równoległą od *abcd;* ta odetnie równoległościan *abcdmnop* mający wysokość równą z piérwszym a podstawę równą z drugim. Oznaczając więc jak w poprzedzającém objętości tych trzech równoległościanów przez R, r i ϱ, stósownie do dwóch poprzedzających przypadków, będzie

$$R : \varrho = AB \times BC : ab \times bc$$

tudzież $$\varrho : r = am : ae = AE : ae$$

Mnożąc te dwie proporcyje przez siebie i upraszczając, otrzymamy $$R : r = AB \times BC \times AE : ab \times bc \times ae.$$

Oznaczywszy powierzchnie podstaw danych równoległoboków przez P i p a wysokości przez W i w, ponieważ

$$P = AB \times BC,\ p = ab \times bc,\ W = AE,\ w = ae$$

zatém $$R : r = P \times W : p \times w.$$

Uwaga. Ponieważ $BC = AD$ i $bc = ad$, zatém $R : r = AB \times AD \times AE : ab \times ad \times ae$ t. j. *objętości dwóch równoległościanów prostokątnych, mają się do siebie w stósunku iloczynów z trzech krawędzi każdego, w jednymże punkcie schodzących się*. Trzy te krawędzie nazywamy zwyczajnie trzema *wymiarami* równoległościanu, a w szczególności AB długością, AD szerokością albo grubością, AE wysokością albo głębokością zowiemy.

Wniosek. Ta ostatnia własność równoległościanów prostokątnych jest ogólną, z niéj przeto łatwo wyprowadzić wszystkie w tém twierdzeniu dowiedzione. I tak przypuściwszy, że $P = p$ i $W = w$, mamy $R : r = 1 : 1$ skąd $R = r$ t j. równoległościany mające równe podstawy i wysokości, są sobie równe co do objętości. Położywszy *powtóre* $P = p$ będzie $R : r = W : w$, czyli że równoległościany o równych podstawach mają się do siebie w stósunku wysokości. Jeżeli przypuścimy, że po trzecie $W = w$, otrzymamy z powyższéj proporcyi $R : r = P : p$ t. j. że równoległościany prostokątne o równych wysokościach, mają się do siebie jak podstawy. Połóżmy nareszcie $R = r$, tedy znajdziemy $P \times W = p \times w$ albo $P : p = w : W$, która proporcyja nas uczy, że podstawy dwóch równoległościanów równych, mają się w odwrotnym stosunku ich wysokości i wzajemnie wysokości mają się w odwrotnym stósunku podstaw.

§. 224.

Szukajmy teraz objętości czyli bryłowatości równoległościanu prostokątnego. Tu napotykamy znowu nowy gatunek ilości geometrycznych; dla tego zupełnie tak jak przy linijach, kątach i powierzchniach postąpiliśmy, i tu postąpić wypada, t. j. potrzeba do wymierzania tego gatunku ilości, obrać za jednostkę także ciało geometryczne ale takie, iżby tak do pojęcia jako też i zmysłowego wystawienia sobie było łatwém. Takiém ciałém jest niezaprzeczenie *sześcian;* z nim przeto potrzeba będzie porównać wszystkie ciała których objętość chcieć będziemy mierzyć. Zacznijmy więc od porównania sześcianu z ciałém jemu najpodobniéjszém t. j. z równoległościanem prostokątnym.

Ponieważ z §. 220 wiemy, że sześcian jest także równoległościanem prostokątnym mającym wszystkie ściany między sobą równe t. j. kwadraty, przeto dwa te ciała można z sobą porównać w powyższy sposób, szukając ich stósunku między sobą. Oznaczywszy objętość równoległościanu przez R, jego podstawę przez P a wysokość przez W, zaś objętość, podstawę i wysokość sześcianu przez S, p i w, według poprzedzającego §. będzie $R : S = P \times W : p \times w$. Lecz kiedy ściany sześcianu są wszystkie kwadratami sobie równemi, zatém i krawędzie jego są także między sobą równe. Wziąwszy więc bok kwadratu podstawy równy *jednostce długości*, powiérzchnia podstawy t. j. p będzie $= 1 \times 1$, a że i $w = 1$, zatém będzie $p \times w = 1 \times 1 \times 1 = 1$, a ostatnia proporcyja przechodzi na

$$R : S = P \times W : 1$$

skąd

$$R = P \times W \times S$$

Jeżeli teraz taki sześcian przyjmiemy za *jednostkę* do mierzenia objętości ciał, t. j. położymy $S = 1$, znajdziemy $R = P \times W$ t. j. *że objętość równoległościanu prostokątnego, równa się iloczynowi z jego podstawy przez wysokość; albo według uwagi w poprzedzającym §., równa się iloczynowi z trzech jego krawędzi w jednym punkcie schodzących się.*

Uwaga 1. Znaleść objętość równoległościanu i w ogólności jakiegokolwiek ciała, nic innego znaczyć nie będzie, jak to z powyższego zrównania widzimy, jak tylko podać, wiele razy objętość tegoż ciała jest większą od objętości sześcianu wziętego za miarę, czyli sześcianu wystawionego na kwadracie z jednostki długości.

Uwaga 2. Trzy w jednym punkcie schodzące się krawędzie równoległościanu prostokątnego, a wyrażające jego długość, szerokość i wysokość, oznaczywszy przez a, b, c, czyli co jest jedno, trzy rzeczone krawędzie przemierzywszy obraną jednostką długości, a, b, c, wyrażać rzeczywiście będą stósunki bezwzględnych długości tych krawędzi do jednostki obranéj, wyrażać przeto będą liczby: iloczyn téż tych trzech liczb abc, będzie liczbą wyrażającą stósunek objętości równoległościanu do jednostki, ale do jednostki bryłowéj t. j. do objętości sześcianu którego każda krawędź jest równa owéj jednostce, którą krawędzie równoległościanu mierzyliśmy. Jednostka długości jest zupełnie dowolną. Jeżeli jest calem, stopą, łokciem, sążniem, milą i t. d. bryłowatość czyli objętość równoległościanu otrzymana z rozmnożenia rzeczonych trzech liczb przez siebie, wyrażać będzie liczbę cali, stóp, łokci, sążni, mil i t. d. sześciennych.

Uwaga 3. Sześcian jest sam równoległościanem, przeto objętość jego równa się podobnież iloczynowi z liczb wyrażających długości trzech jego w jednym punkcie schodzących się krawędzi. Ale krawędzie w sześcianie wszystkie sobie są równe, zatém objętość sześcianu równa się liczbie, wyrażającéj długość jego krawędzi, podniesionéj do potęgi trzeciéj. Gdy bowiem $a = b = c$, zatém $abc = aaa = a^3$. To nam teraz jasno tłómaczy używane w Arytmetyce wyrażenie *podnieść liczbę do sześcianu.* Mając przeto jaki sześcian i chcąc poznać jego objętość, dosyć jest zmierzyć jakąkolwiek miarą długość któréjbądź krawędzi i liczbę tych miar podnieść do potęgi 3ciéj. Nie od rzeczy téż tu będzie wspomnieć, że mając sześcian, którego krawędź $= a$ a zatém objętość $= a^3$, gdybyśmy chcieli znaleść krawędź sześcianu dwa razy większą objętość mającego, tedy oznaczywszy krawędź szukanego sześcianu przez x, objętość jego będzie x^3, a według warunku $x^3 = 2a^3$ skąd $x = a\sqrt[3]{2}$. Ale $\sqrt[3]{2}$ jest liczbą niewymierną, więc za pomocą rachunku nie można znaleść dokładnie krawędzi sześcianu dwa razy większego od danego; wszelako można się tak zbliżyć do prawdziwéj ważności, jak tylko chcemy.

Wszystkie zagadnienia geometryczne dotąd rozwiązane, rozwiązywaliśmy za pomocą przecięcia się prostych, lub prostéj z liniją kołową, lub nareszcie przecięcia sią dwóch okręgów kół. A że dwie proste tylko w jednym, prosta z okręgiem koła, jak równie dwa okręgi, tylko się w dwóch punktach przeciąć mogą, dla tego téż rzeczone zagadnienia roz wiązywane rachunkiem, prowadziły tylko do zrównań piérwszego lub drugiego stopnia. Chcąc powyższe zagadnienie rozwiązać geometrycznie t. j. za pomocą wykreślenia, ponieważ nas zaprowadziło do zrównania 3go stopnia, już go nie możemy rozwiązać za pomocą prostéj i okręgu koła lub dwóch okręgów, ale użyć potrzeba linij krzywych, któreby się w więcéj niż dwóch punktach przeciąć mogły; dla tego téż geometryczne rozwiązanie rzeczonego zagadnienia, należy do Geometryi wyższéj.

§. 225.

Prawdę w poprzedzającym §. dowiedzioną, że objętość równoległościanu prostokątnego jest równa iloczynowi z trzech jego krawędzi w jednym punkcie schodzących się, można też naocznie tak okazać. Niech będzie równoległościan prostokątny ABCDEFGH *fig. 225* i niech trzema jego wymiarami czyli krawędziami w punkcie A schodzącemi się będą AB, AD i AE. Wziąwszy jakąkolwiek jednostkę długości np. cal, przemierzmy te trzy krawędzie i niech AB zamyka 4 cale, AD 2, a AE 5 cali. Naznaczywszy na każdéj z rzeczonych krawędzi te podziały i na podstawie równoległościanu poprowadziwszy prostą *an* równoległą do AB, tudzież proste 11, 22, 33, 44, równolegle do AD, cała podstawa podzieli się tym sposobem na 8 kwadratów równych. Jeżeli teraz w odległości DE = 1 cal, poprowadzimy płaszczyznę równoległą do podstawy, a z wiérzchołków kątów każdego kwadratu wyprowadzimy proste prostopadłe do podstawy, albo lepiéj, jeżeli przez punkta podziałów 1, 2, 3, poprowadzimy płaszczyzny równoległe do płaszczyzny ADHE, te z piérwszą płaszczyzną przez *h* poprowadzoną, tudzież z podstawą równoległościanu, zamkną 8 sześcianów takich jak *abc*D*efgh* między sobą równych które stanowić będą nie jako piérwszą warstwę jednostkowych sześcianów w równoległościanie zawartych. A prowadząc przez inne podziały na krawędzi AE wyznaczone płaszczyzny równoległe do podstawy, otrzymamy tyle warstw mających każda po 8 sześcianów, ile podziałów ma wysokość AE równoległościanu; przeto ponieważ bezpośrednio na podstawie stoi sześcianów 8, a takich warstw jest 5, więc wszystkich sześcianów jest 8. 5 = 40 = 4. 2. 5, jak wyżéj dowiedliśmy.

§. 226.

Przejdźmy teraz do innych równoległościanów. Najpodobniejszym do prostokątnego, jest równoległościan prosty; chcąc zatém znaleść objętość tego ostatniego, porównajmy go z piérwszym dowodząc następujące

Twierdzenie. *Każdy równoległościan prosty zamienić można na prostokątny równy mu co do objętości.*

Niech równoległościanem prostym będzie ABCDEFGH *fig. 226*, mającym za podstawy dolną i górną równoległoboki AC i EG. Jeżeli z punktów A i B spuścimy prostopadłe do DC, otrzymamy prostokąt AK równy co do powiérzchni równoległobokowi AC. Przez proste AE i AI jako téż BF i BK poprowadziwszy płaszczyzny, te będą prostopadłe do obu podstaw i przetną się z podstawą górną w prostych EL i FM, zamykając tym sposobem dwa graniastosłupy trójścienne ADIEHL i BCKFGM według §. 218 sobie równe. Od całkowitéj bryły odciąwszy graniastosłup BCKFGM, pozostaje się równoległościan prosty AG; od téjże saméj bryły, odciąwszy graniastosłup ADIEHL, pozostaje równoległościan prostokątny AM; dla tego dwa te równoległościany są sobie równe co do objętości t. j. równoległościan prosty równa się prostokątnemu mającemu z nim wysokość tęż samą i podstawy równe co do powiérzchni.

Wniosek. Ponieważ objętość równoległościanu prostokątnego otrzymuje się, mnożąc powiérzchnię jego podstawy przez wysokość, zatém i objętość równoległościanu prostego dojdzie się, mnożąc powiérzchnię jego podstawy przez wysokość, obu bowiem tych równoległościanów podstawy są równoważne co do powiérzchni.

19

§. 227.

Twierdzenie. *Każdy równoległościan ukośny zamienić można na prosty mający z nim tęż samę wysokość a podstawy równoważne czyli równe co do powiérzchni.*

Niech ABCDEFGH *fig.* 227 będzie równoległościanem ukośnym, którego dolną podstawą jest równoległobok ABCD. Z punktu A, B, C, D, wystawiwszy prostopadłe do płaszczyzny podstawy i te przedłużywszy aż do spotkania się z płaszczyzną podstawy górnéj w punktach E', F', G', H' i te ostatnie punkta połączywszy prostemi E'F', F'G', G'H' i H'E', otrzymamy równoległobok E'F'G'H' równy co do powiérzchni równoległobokowi ABCD. A jeżeli przez proste AB i E'F', DC i H'G', AD i H'E', BC i G'F' poprowadzimy płaszczyzny, te zamkną równoległościan ABCDE'F'G'H' prosty, który według §. 226 równa się co do objętości ukośnemu ABCDEFGH.

Wniosek. Z trzech ostatnich twierdzeń wypływa, że każdy równoległościan zamienić można na prostokątny mający z nim tęż samę wysokość a podstawę równą co do powiérzchni podstawie prostokątnego, albowiem równoległościan ukośny zamienić można na prosty według teraźniejszego, ten zaś według poprzedzającego twierdzenia na prostokątny. A kiedy objętość równoległościanu prostokątnego równa się iloczynowi z powiérzchni jego podstawy przez wysokość, zatém łatwo wniesiemy, iż *objętość każdego równoległościanu równa się także iloczynowi z powiérzchni jego podstawy przez wysokość.*

W §. 223 nazwaliśmy długość, szerokość i wysokość równoległościanu prostokątnego trzema jego wymiarami; nazwa ta i tu ma miejsce z tą tylko różnicą, że ta długość trzech krawędzi w jednym punkcie schodzących się, tych wymiarów zastąpić nie mogą, pamiętając co nazwaliśmy wysokością jakiegokolwiek graniastosłupa, tudzież że wymiarami równoległoboku są, którykolwiek jego bok i prostopadła z któregokolwiek punktu boku przeciwległego na piérwszy spuszczona.

Z tych téż twierdzeń wypływa, że objętość dwóch jakichkolwiek równoległościanów są w stósunku iloczynów z powiérzchni ich podstaw przez wysokości. Jeżeli zaś mają wysokości równe, a podstawy różne, są do siebie w stósunku powiérzchni tychże podstaw; a nareszcie mające podstawy równe co do powiérzchni, mają się do siebie jak wysokości.

§. 228.

TWIERDZENIE. *Dwa równoległościany stojące na téjże saméj podstawie i mające podstawy górne na jednéjże płaszczyznie, a zatém wysokości równe, są sobie równe co do objętości.*

Niech ABCDEFGH i ABCDE'F'G'H' będą dwa równoległościany jakiekolwiek, stojące na téjże saméj podstawie ABCD i mające oba tęż samę wysokość, dla czego górne ich podstawy przypadają na jednéjże płaszczyznie równoległéj do podstawy; trzeba dowieść że dwa te równoległościany są sobie równe co do objętości. Co do położenia dwóch tych równoległościanów, dwa tylko przypadki być mogą, t. j. albo wyższe podstawy obu przypadają pomiędzy temiż samemi równoległemi albo nie, dowód téż ich równości w każdym z tych przypadków jest różny.

Co do piérwszego. Niech będą dwa równoległościany wyrażone na *fig. 228.* Przedłużywszy krawędzie EF i HG, cała figura albo raczéj cała bryła składa się z dwóch graniastosłupów trójściennych AEE'DHH' i BFF'CGG'. Te graniastosłupy są sobie równe co do objętości według §. 218, mają bowiem po kącie trójściennym równym t. j. $A = B$ i te kąty zawarte są każdy trzema wielokątami sobie równemi, a mianowicie: $ADHE = BCGF$, $ADH'E' = BCG'F'$ i $AEE' = BFF'$. Skoro zaś od całéj bryły odetniemy drugi graniastosłup t. j. BFF'CGG', pozostanie się równoległościan ABCDEFGH; a odcinając graniastosłup piérwszy, to jest AEE'DHH', pozostaje się równoległościan ABCDE'F'G'H', więc na mocy pewnika, że od dwóch ilości równych odejmując równe, reszty pozostałe są także równe, dwa założone równoległościany są sobie równe co do objętości.

Co do drugiego. Jeżeli górne podstawy padają w różne strony i chociaż na téjże samćj płaszczyznie ale nie między temiż samemi równoległemi, jak są równoległościany ABCDEFGH i ABCDE'F'G'H' na *fig. 229*, tedy przedłużywszy krawędzie GF i HE aż do przecięcia się z krawędziami także przedłużonemi G'H 'i F'E' w punktach I, K, L, M, co być koniecznie musi, bo te krawędzie jako proste leżą na jednéjże płaszczyznie, otrzymamy równoległobok IKLM = ABCD co łatwo dowieść. A skoro przez AD i IK, AB i KL, DC i IM, a nareszcie BC i LM poprowadzimy płaszczyzny, te zamkną nowy równoległościan ABCDIKLM, który z dwoma danemi ma tęż samę podstawę i wysokość. Ten trzeci równoległościan z piérwszym ABCDEFGH, znajduje się w piérwszym przypadku t. j. górne ich podstawy przypadają między temiż samemi równoległemi HK i GL, przeto stojąc na téjże saméj podstawie, objętości ich są równe. Podobnież ten sam trzeci równoległościan z drugim ABCDE'F'G'H', znajdują się w tymże samym przypadku, bo górne ich podstawy przypadają pomiędzy téż same równoległe IG' i KF', są więc także sobie równe co do objętości. Dwa zatém założone równoległościany będąc równe trzeciemu, są téż i między sobą równe; co należało dowieść.

Wniosek. Ponieważ objętość prostego równoległościanu dochodzi się, mnożąc powiérzchnią jego podstawy przez wysokość, §. poprzedzający, więc tu słusznie wnieść możemy, że téż i *objętość jakiegokolwiek równoległościanu równa się iloczynowi z jego podstawy przez wysokość.*

Każdy także równoległościan ukośny równa się prostokątnemu co do objętości, skoro mają równe podstawy i wysokości. Również dwa jakiekolwiek równoległościany są sobie równe co do objętości, jeżeli mają podstawy i wysokości równe; każdy bowiem z nich zamienić można na prosty równy co do objętości według §. 219 lub §. 227, mające z piérwszemi téż same wysokości, dla czego i podstawy muszą sobie być równe, a prostokątne równoległościany mające równe podstawy i wysokości są sobie równe co do objętości. Stósunek téż objętości dwóch jakichkolwiek równoległościanów o równych wysokościach, jest równy stósunkowi ich podstaw; o równych podstawach równa się stósunkowi ich wysokości, a nareszcie o różnych podstawach i wysokościach, równa się stósunkowi iloczynów z podstaw przez wysokości, z powodu, że każdy z nich równa się równoległościanowi prostokątnemu mającemu z nim podstawę i wysokość równe.

§. 229.

Twierdzenie. *W jakimkolwiek równoległościanie poprowadziwszy płaszczyznę przekątną, ta podzieli równoległościan na dwa graniastosłupy trójścienne, równe sobie co do objętości.*

Niech naprzód danym będzie równoległościan prostokątny ABCDEEGH *fig. 230*; poprowadziwszy płaszczyznę przekątną ACGE, ta podzieli równoległościan na dwa graniastosłupy trójścienne ABCEFG i ACDEGH, potrzeba dowieść, że te dwa graniastosłupy są sobie równe co do objętości t. j. że ABCEFG = ACDEGH. Przekątnia AC dzieli dolną podstawę równoległościanu na dwa trójkąty ABC i ACD równe i przystające do siebie, jak równie przekątnia EG dzieli górną podstawę EFGH także na dwa trójkąty sobie równe i przystające do siebie, zatém w dwóch graniastosłupach trójściennych ABCEFG i ACDEGH, kąty trójścienne B i D złożone są z trzech wielokątów sobie równych i przystających do siebie, tudzież jednakowo ułożonych, bo ABC = ADC, BCGF = ADHE i ABFE = CDHG jako ściany przeciwległe w równoległościanie. Wystawiwszy sobie przeto graniastosłup ABCEFG przeniesiony na ACDEGH i ułożony tak, iżby punkt B padł na D a bok BC na DA, punkt téż C padnie na A i podstawa ABC przystanie do podstawy ADC; boczna płaszczyzna BCGF przystanie do ADHE i druga ABFE do CDHG, a dlatego dwa te graniastosłupy są sobie zupełnie równe co do objętości według §. 218, przeto każdy z nich jest połową równoległościanu danego.

Niech powtóre ABCDEFGH *fig. 231* będzie równoległościan ukośny; poprowadziwszy płaszczyznę przekątną

AEGC, potrzeba i tu dowieść, że dwa graniastosłupy trójścienne ABCEFG i ACDEGH, na które też płaszczyzna dzieli równoległościan dany, są sobie równe co do objętości. Według §. 219 zamieniwszy ten równoległościan na prosty AMNOEPQR i przedłużywszy przekątną płaszczyznę aż do przecięcia się z podstawą AMNO tego drugiego równoległościanu, widzimy, że też płaszczyzna dzieli równie prosty równoległościan na dwa graniastosłupy trójścienne ANOEQR i AMNEPQ, które według poprzedzającego są sobie równe co do objętości; według zaś wspmnionego §. 219, każdy z nich jest równy odpowiadającemu sobie ukośnemu graniastosłupowi, a mianowicie ANOEQR=ABCEFG, AMNEPQ=ACDEGH; przeto też ABCEFG=ACDEGH, a następnie każdy z tych graniastosłupów jest połową równoległościanu. Tak tedy dowiedliśmy, *że płaszczyzna przekątna dzieli każdy równoległościan na dwa graniastosłupy równe sobie co do objętości.*

Uwaga. Podstawa każdego z tych graniastosłupów jest połową podstawy równoległościanu, przeto co dopiéro dowiedzione twierdzenie, możnaby też wysłowić: *graniastosłup trójścienny jest połową równoległościanu mającego dwa razy większą podstawę a wysokość równą wysokości graniastosłupa.*

Wniosek 1. Oznaczywszy podstawę równoległościanu przez P, a wysokość przez W, jest objętość jednego z graniastosłupów trójściennych, na które się równoległościan rozkłada $=\frac{P\times W}{2}=\frac{P}{2}\times W$. A że $\frac{P}{2}$ jest powiérzchnią trójkąta służącego za podstawę graniastosłupowi w mowie będącemu, zatém przynajmniéj o graniastosłupie trójściennym wiemy z pewnością, że jego objętość równa się powiérzchni podstawy rozmnożonéj przez wysokość.

Wniosek 2. Dwa graniastosłupy trójścienne mające równe podstawy i wysokości są sobie równe co do objętości; mające równe podstawy a wysokości różne, są do siebie w stósunku tychże wysokości; mające równe wysokości a podstawy różne, są w stósunku podstaw; a nareszcie mające tak podstawy jako i wysokości różne, są w stósunku iloczynów z podstaw przez wysokości. Uważając bowiem każdy z nich jako połowę równoległościanu o téjże saméj wysokości a dwa razy większéj podstawie, stósunek między połowami jest tenże sam jaki między całościami, a ten ostatni jest dowiedziony w §. 228.

Wniosek 3. Ponieważ z §. 220 wiemy, że każdy równoległościan jest graniastosłupem, zatém słusznie wnieśćbyśmy mogli, że tak jak równoległościanu, objętość każdego graniastosłupa równa się iloczynowi z powiérzchni jego podstawy przez wysokość.

Albo téż: według wniosku 1 objętość trójściennego graniastosłupa równa się iloczynowi z jego podstawy przez wysokość, a z §. 217 wiemy, że każdy graniastosłup wielościenny można rozebrać na trójścienne za pomocą płaszczyzn przekątnych, przeto objętość wielościennego równać się będzie summie pojedynczych trójściennych. A gdy wszystkie mają jednakową wysokość, więc téż objętość równać się będzie summie podstaw graniastosłupów trójściennych rozmnożonéj przez spólną wysokość. Lecz summa podstaw pojedynczych graniastosłupów, stanowi powiérzchnię podstawy graniastosłupa wielościennego, zatém objętość tegoż równa się iloczynowi z powiérzchni jego podstawy przez wysokość.

Wniosek 4. Z §. 219 wiémy, że każdy graniastosłup ukośny zamienić można na prosty równy mu co do objętości, mający za wysokość jednę z krawędzi, a za podstawę przecięcie prostopadłe do téjże, zatém *objętość graniastosłupa jakiegokolwiek, równa się iloczynowi z przecięcia prostopadłego do jednéj z krawędzi przez długość téjże krawędzi.*

§. 230.

Przystąpmy do wyznaczenia powiérzchni graniastosłupów w ogólności.

Definicyja. *Powiérzchnią graniastosłupa nazywamy summę powiérzchni wszystkich jego ścian tak bocznych jako téż i dwóch podstaw.*

Ponieważ wszystkie ściany boczne w graniastosłupie są równoległobokami, przeto obrachowawszy powiérzchnię każdego, summa ich będzie powiérzchnią boczną tegoż graniastosłupa, do któréj dodawszy powiérzchnie dwóch jego podstaw obrachowanych według §. 124, otrzymamy całkowitą powierzchnię graniastosłupa. Atoli w graniastosłupach możemy daleko łatwiéj znaleść powiérzchnię boczną nie rachując powiérzchni każdéj ściany. Na ten koniec dowiedźmy następujące

Twierdzenie. *Powiérzchnia boczna jakiegokolwiek graniastosłupa, równa się iloczynowi jednéj z jego krawędzi, przez obwód przecięcia prostopadłego do téjże, a zatém i do wszystkich krawędzi.*

Niech będzie graniastosłup ABCDEFGHIK *fig. 232;* przeciąwszy go płaszczyzną prostopadłą do krawędzi AF, ta zarazem będzie prostopadłą i do innych krawędzi. Przecięcia się téj płaszczyzny z bocznemi ścianami t. j. proste LM, MN, NO, OP i PL będą także prostopadłemi do krawędzi. Wziąwszy w równoległobokach bocznych krawędzie AF, BG, DI, . . . za podstawy, piérwsze proste prostopadłe do tych krawędzi będą ich wysokościami. Powiérzchnia np. ściany $ABGE = AG \times LM$, powiérzchnia ściany $BCHG = BG \times MN$ i t. d. A że $AF = BG =$ i t. d., zatém powiérzchnia boczna graniastosłupa danego równa się

$$AF\ (LM + MN + NO + OP + PL).$$

Ale summa w nawiasie stanowi obwód przecięcia, przeto prawdą jest, że powiérzchnia boczna graniastosłupa równa się iloczynowi z jego krawędzi któréjkolwiek przez obwód przecięcia prostopadłego do téjże krawędzi.

Wniosek 1. Ponieważ w każdym graniastosłupie prostym, przecięcie prostopadłe do krawędzi jest równe podstawie, zatém powiérzchnia boczna graniastosłupa prostego równa się iloczynowi z obwodu jego podstawy przez krawędź czyli wysokość.

W graniastosłupie foremnym chcąc znaléść całkowitą jego powiérzchnię, uważmy, że ponieważ jego podstawy są wielokątami foremnemi, tych zaś powiérzchnia znajduje się mnożąc obwód każdego przez połowę prostopadłéj, ze środka wielokąta na bok spuszczonéj (apothema), zatém potrzeba rozmnożyć obwód podstawy przez summę z wysokości graniastosłupa czyli krawędzi i prostopadłéj ze środka podstawy na bok téjże spuszczonéj.

Wniosek 2. W ukośnym graniastosłupie obrawszy którąkolwiek z bocznych jego ścian za stałą, jeżeli jéj przyległą obracać będziemy około spólnéj im krawędzi dopóki nie weźmie położenia piérwszéj, potém następną ścianę około krawędzi spólnéj téj ostatniéj i poprzedzającéj ścianie aż weźmie położenie dwóch poprzedzających i t. d. aż do ostatniéj ściany, rozpostrzemy tym sposobem całą powiérzchnię boczną graniastosłupa na jednę płaszczyznę i otrzymamy figurę mającą każde dwa przeciwległe boki równoległe, t. j. otrzymamy równoległobok mający za podstawę obwód podstawy graniastosłupa a za bok przyległy, krawędź tegoż graniastosłupa. Z takiego rozpostarcia powiérzchni wniesiemy, że *powiérzchnia boczna graniastosłupa ukośnego, równa się powiérzchni równoległoboku mającego za podstawę obwód podstawy graniastosłupa, a wysokość równą wysokości tegoż graniastosłupa.*

Tym sposobem rozpościérając powiérzchnię boczną graniastosłupa prostego, otrzymamy prostokąt mający za podstawę obwód podstawy graniastosłupa, a za wysokość krawędź boczną tegoż. *Powiérzchnia przeto boczna graniastosłupa prostego, równa się powiérzchni prostokąta mającego podstawę równą obwodowi podstawy graniastosłupa, a wysokośc równą krawędzi bocznéj tegoż graniastosłupa.*

Tę ostatnią prawdę wniéść mogliśmy z samego wyrażenia powiérzchni bocznéj graniastosłupa prostego. Oznaczywszy bowiem długość obwodu jego podstawy przez O a krawędź czyli wysokość przez K, gdzie O i K wyrażają stósunki do obranéj jednostki długości czyli liczby, wyrażenie powiérzchni bocznéj graniastosłupa prostego według poprzedzającego jest $O \times K$. Ale iloczyn dwóch liczb w znaczeniu geometrycznėm wyraża powiérzchnię prostokąta mającego za dwa przyległe boki proste przez też dwie liczby oznaczone zatém i t. d.

Uwaga. Z §. 220 wiemy, że każdy równoległościan jest oraz graniastosłupem, zatém co się powiedziało o powiérzchni tych ostatnich, w całéj zupełności stósuje się i do piérwszych. W sześcianie wszystkie ściany są sobie równe, zatém jego powiérzchnia równa się 6 razy wziętéj powiérzchni jednéj ściany. A że ściany są kwadratami, zatém oznaczywszy długość boku kwadratu, czyli co na jedno wychodzi, długość któréjkolwiek krawędzi (wszystkie bowiem między sobą są równe) przez a, powiérzchnia ściany będzie $=a^2$ a powiérzchnia sześcianu $=6a^2$.

Ostrosłupy (pyramides).

§. 231.

W §. 216 powiedzieliśmy, że jeżeli ilekolwiek płaszczyzn przecinających się z sobą tak, iż jeden punkt mają spólny, przetniemy inną płaszczyzną ze strony otwartéj, ta z piérwszemi zamknie zupełnie przestrzeń czyli ciało geometryczne *ostrosłupem* albo *piramidą* (pyramis) nazwane. Płaszczyzny schodzące się w jednym punkcie, a wzajemnemi przecięciami się ograniczone, nazwiemy i tu *ścianami bocznemi*, punkt wszystkim spólny *wiérzchołkiem* (vertex), płaszczyznę przecinającą wszystkie inne, albo raczéj wielokąt wypadający z przecięcia się ścian bocznych z tąż płaszczyzną, *podstawą* (basis), prostopadłą z wiérzchołka ostrosłupa na płaszczyznę podstawy spuszczoną, *wysokością*, a nareszcie, każde przecięcie się dwóch płaszczyzn bądź to bocznych, bądź bocznéj z podstawą, nazwiemy *krawędzią* ostrosłupa. Z tego opisania ostrosłupa wypada, że boczne ściany jego są trójkątami, wszystkie bowiem krawędzie schodzą się w wiérzchołku; tudzież że każdy kąt wielościenny przecięty płaszczyzną ze strony otwartéj, stanowi ostrosłup.

Otrzymać téż można ostrosłup następującym sposobem: na płaszczyznie nakréśliwszy jakikolwiek wielokąt i za tąż płaszczyzną obrawszy gdziekolwiek punkt, złączmy go z wiérzchołkami wielokąta prostemi; tedy pomyśliwszy sobie tym sposobem otrzymane trójkąty jako płaszczyzny, mieć będziemy ostrosłup.

Ostrosłupy równie jak graniastosłupy przybiérają nazwę od liczby ścian bocznych; a że liczba tych ostatnich jest równa liczbie boków wielokąta, służącego za podstawę ostrosłupowi, zatém nazywać będziemy *ostrosłupem trójściennym*, którego podstawa jest trójkątem, *czworościennym*, jeżeli taż podstawa jest *czworokątem*, *pięciościennym*, *sześciościennym* i w ogólności *wielościennym*. Ostrosłup trójścienny, tak jak trójkąt między figurami płaskiemi, jest między ciałami geometrycznemi najprostszém, ma bowiem najmniéj płaszczyzn czyli ścian ograniczających a potrzebnych do zamknięcia przestrzeni. Taki ostrosłup nosi jeszcze nazwę *czworościanu* (tetraëdrum), rzeczywiście bowiem ma cztéry ściany t. j. trzy boczne a czwartą zamykającą przestrzeń. Każda z nich jest trójkątem, a dlatego każdą można wziąść za podstawę ostrosłupa trójściennego a wiérzchołek jego będzie punkt przeciwległy podstawie w którym się trzy inne ściany przecinają. Jak trójkąt jest podstawą całéj Geometryi płaskiéj czyli Planimetryi, tak téż i czworościan możnaby wziąść za podstawę Stereometryi. A że tu nie tym sposobem postąpiliśmy, zacząwszy naukę o ciałach od graniastosłupów, to jedynie uczyniliśmy dla tego, że objętość czworościanu tylko za pomocą graniastosłupa trójściennego znaléść można; tę atoli raz znalazłszy, wszystkie inne ciała graniaste uważać można jako z czworościanów złożone. Jestto zupełnie ten sam przypadek jak z powiérzchnią trójkąta, którą dopiéro przy pomocy równoległoboku znaleźliśmy, lecz tę znalazłszy, widzieliśmy, że każdy wielokąt uważać można jako z samych trójkątów złożony.

Jeżeli podstawą ostrosłupa jest wielokąt foremny, prosta łącząca wiérzchołek ze środkiem podstawy nazywa się *osią* ostrosłupa. Jeżeli oś jest prostopadła do podstawy, ostrosłup nazywać będziemy *prostym* albo *foremnym*. W takim ostrosłupie wszystkie ściany boczne są trójkątami równoramiennemi przystającemi do siebie, a zatém i równemi między sobą; z czego wypada, że także krawędzie boczne wszystkie między sobą, tudzież wszystkie z wiérzchołka ostrosłupa na boki jego podstawy spuszczone prostopadłe są sobie równe.

§. 232.

Twierdzenie. *Przeciąwszy gdziekolwiek ostrosłup płaszczyzną równoległą do podstawy, przecięcie to będzie wielokątem podobnym podstawie.*

Przeciąwszy ostrosłup np. sześciościenny SABCDEF *fig. 233*, płaszczyzną równoległą od podstawy, niech tém przecięciem będzie sześciokąt *abcdef*, potrzeba dowiéść że jest wielokątem podobnym podstawie.— Że jest wielokątem o takiéjże liczbie boków jak podstawa, to nie potrzebuje dowodu; w obecnym zatém przypadku przecięcie jest sześciokątem dla tego, że i podstawa ostrosłupa jest sześciokątem. Że zaś jest sześciokątem a w ogólności wielokątem podobnym podstawie, tak się dowodzi: dwie płaszczyzny równoległe, t. j. płaszczyzna podstawy i przecinająca, są z wykréślenia równoległe, zatém przecięte przez każdą inną płaszczyznę, wydają téż przecięcia równoległe według §. 194 *wnios. 3*, a dla tego proste AB i *ab*, BC i *bc*, CD i *cd*, DE i *de*, EF i *ef*, FA i *fa* są od siebie równoległe. Uważając teraz trójkąty czyli ściany boczne, mamy:

w trójkącie	ASB	. . .	$SB:Sb = AB:ab$
„ „	BSC	. . .	$SB:Sb = BC:bc = SC:Sc$
„ „	CSD	. . .	$SC:Sc = DC:dc = SD:Sd$
„ „	DSE	. . .	$SD:Sd = DE:de = SE:Se$
„ „	ESF	. . .	$SE:Se = EF:ef = SF:Sf$
„ „	ASF	. . .	$SF:Sf = AF:af = SA:Sa.$

Z tych proporcyj widzimy, że wszystkie stósunki je składające są sobie równe, przeto

$$AB:ab = BC:bc = CD:cd = DE:de = EF:ef = AF:af$$

boki więc tych dwóch wielokątów są proporcyjonalne. A że i kąt $FAB = fab$, bo ich ramiona są równoległe i rozchodzą się w jednęż stronę, i podobnież kąt $ABC = abc$, $BCD = bcd$

i t. d. zatém według §. 65 dwa te wielokąty są podobne, co należało dowiéść.

Wniosek. Z proporcyi

$SB : Sb = AB : ab$ wypada $\overline{SB}^2 : \overline{Sb}^2 = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$.

Z podobieństwa zaś tych wielokątów, stósownie do §. 125

jest $ABCDEF : abcdef = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$

zatém $ABCDEF : abcdef = \overline{SB}^2 : \overline{Sb}^2$.

Lecz spuściwszy z wiérzchołka S do podstawy prostopadłą SP, która płaszczyznę przecinającą przeszywa w punkcie p, tedy przez tęż prostopadłą i przez krawędź BS poprowadziwszy płaszczyznę i na téj złączywszy punkta B i P, b i p, proste BP i bp, wyrażać będą spólne przecięcia się dwóch płaszczyzn równoległych z tą ostatnią, a zatém są od siebie równoległe, a dlatego $SB : Sb = SP : Sp$,

tudzież $\overline{SB}^2 : \overline{Sb}^2 = \overline{SP}^2 : \overline{Sp}^2$

a następnie $ABCDEF : abcdef = \overline{SP}^2 : \overline{Sp}^2$.

Ponieważ SP i Sp wyrażają odległości dwóch przecięć ABCDEF i *abcdef* od wiérzchołka S, zatém z ostatniéj proporcyi czytamy, że *powiérzchnie tychże przecięć są w stósunku kwadratów odległości ich od wiérzchołka.*

Definicyja. W jakimkolwiek ostrosłupie poprowadziwszy płaszczyznę równoległą od podstawy w jakiéjkolwiek odległości, ciało zawarte między płaszczyznami bocznemi, podstawą i tém przecięciem, nazywa się *ostrosłupem ściętym* (pyramis truncata). W takim ostrosłupie wszystkie ściany boczne są trapezami równemi lub nierównemi, według tego jak podstawa jest wielokątem foremnym lub nieforemnym, tudzież, czyli prostopadła ze środka górnéj na podstawę dólną spuszczona, pada w środek wielokąta foremnego za dólną podstawę służącego lub nie.

§. 233.

Twierdzenie. *W dwóch ostrosłupach mających podstawy równe co do powierzchni i wysokości równe, przeciąwszy oba w téjże saméj odległości od wiérzchołka, albo co na jedno wychodzi, w téjże saméj wysokości od podstawy płaszczyzną równoległą od téjże, powiérzchnie tych przecięć będą także równe.*

Niech będą dwa ostrosłupy, jeden pięciościenny SABCDE, a drugi trójścienny S'A'B'C' *fig. 234*, takie, że ABCDE=A'B'C' i wysokości obu są także równe. Wystawiwszy sobie oba te ostrosłupy postawione na jednéjże płaszczyznie, niech prosta PR wyraża spólną ich wysokość. Przeciąwszy oba w tém położeniu stojące ostrosłupy płaszczyzną równoległą od płaszczyzny, na któréj stoją w odległości od téjże np. RQ, albo w odległości od wiérzchołków PQ, otrzymamy w piérwszym przecięcie *abcde*, a w drugim *a'b'c'*. Ponieważ według poprzedzającego twierdzenia te przecięcia są wielokątami podobnemi podstawom,

zatém $\mathrm{ABCDE} : abcde = \overline{\mathrm{PR}}^2 : \overline{\mathrm{PQ}}^2$,

tudzież $\mathrm{A'B'C'} : a'b'c' = \overline{\mathrm{PR}}^2 : \overline{\mathrm{PQ}}^2$

przeto $\mathrm{ABCDE} : abcde = \mathrm{A'B'C'} ; a'b'c'$

albo $\mathrm{ABCDE} : \mathrm{A'B'C'} = abcde : a'b'c'$.

A że z założenia ABCDE=A'B'C', więc téż $abcde = a'b'c$, co było do dowiedzenia.

Uwaga. Gdyby podstawy tych ostrosłupów oprócz równości co do powiérzchni czyli równoważności, były przystającemi do siebie, przecięcia téż ich w téjże saméj wysokości, takiemiż byćby musiały, bo inaczéj nie mogłyby być podobnemi swym podstawom i równemi między sobą nie przystając do siebie.

§. 234.

TWIERDZENIE. *Dwa ostrosłupy trójścienne czyli dwa czworościany mające podstawy i wysokości równe, są sobie równe co do objętości.*

To twierdzenie trojakim sposobem dowieść można.

A najprzód: W §. poprzedzającym dowiedliśmy, że w dwóch ostrosłupach o równych podstawach i wysokościach, przecięcia przez płaszczyzny równoległe w jednakowéj odległości od wiérzchołka, albo w jednakowéj wysokości od podstawy, są sobie równe co do powierzchni; wystawiwszy sobie przeto wysokość tych ostrosłupów podzieloną na nieskończoną liczbę części, które dlatego będą nieskończenie małe, skoro przez te podziały poprowadzimy płaszczyzny równoległe do podstawy, każdy z ostrosłupów podzielony zostanie na nieskończoną liczbę warstw, ale także nieskończenie cienkich. Te warstwy uważać można bez znacznego błędu za graniastosłupy trójścienne, które wszystkie w jednym, będą równe odpowiednim graniastosłupom w drugim ostrosłupie, bo mają podstawy i wysokości równe. A że liczba graniastosłupów w jednym jest równa liczbie takichże graniastosłupów w drugim ostrosłupie, zatém summa piérwszych jest równa summie drugich, a następnie ostrosłup piérwszy równy drugiemu co do objętości.

Jeżeli ten sposób dowodzenia zdaje się komuś niedokładny, z powodu, iż rzeczone warstwy ściśle mówiąc nie są graniastosłupami, dlatego służyć może następujący

Drugi dowód. Jeżeli te ostrosłupy nie są równe, koniecznie jeden z nich jest większy. Oznaczmy objętość piérwszego t. j. większego przez O a drugiego przez o, różnicę zaś między niemi δ tak że $O - o = \delta$. Tę różnicę δ, jakakolwiek ona jest, wystawić sobie możemy jako graniastosłup mający za podstawę trójkąt ABC, a za wysokość pewną część wysokości spólnéj PR *fig. 235*, np. Rx, bo z §. 217 wiemy, że graniastosłup na pewnéj podstawie wystawiony, przechodzić może przez wszystkie stopnie swéj wielkości od od 0 do ∞. Pokażmy teraz, że to zrównanie jest fałszywe. Na ten koniec wysokość tych ostrosłupów PR podzielmy na ilekolwiek części równych, lecz tak, iżby te części były mniejsze niż Rx. Niechże te części będą Ra', aa', $a'a''$, a''P. Przez punkta a, a', a'' .... poprowadziwszy płaszczyzny równoległe do podstaw ostrosłupów, otrzymamy odpowiednie przecięcia między sobą równe co do powiérzchni, tak że DEF$=$D'E'F', GHI$=$G'H'I', KLM,$=$K'L'M i t. d. §. poprzedzający. Jeżeli teraz z punktów A, F, I, M, . . . poprowadzimy proste Af, Fh, IK, Ml, . . . równoległe do krawędzi SC aż do przecięcia się z przedłużonemi DF, GI, KM . . . i z równoległą Sl, tudzież z punktów f, h, k, l, proste fe, hg, ki, lm równoległe od AB aż do przecięcia się z DE, GH, KL . . . wystawimy tym sposobem szereg graniastosłupów trójściennych ABCfeD, DEFhgG, GHIkiK i t. d. które nazwiemy opisanemi na ostrosłupie. Summa tych graniastosłupów, którą oznaczmy przez G, jest większą niż ostrosłup, jako rzecz obejmująca od objętéj t. j. G$>$O. Przechodząc do drugiego ostrosłupa, z punktów F', I', M', poprowadźmy proste F'g', I'i', M'l' . . . równoległe od krawędzi S'C', a z punktów g', i', l' . . . proste $g'h'$, $i'k'$, $l'm'$ . . . równoległe od A'B' aż do przecięcia się z B'C', D'E', G'H' i K'L' w punktach h', k', l', m' . . . tym sposobem wystawimy znowu szereg graniastosłupów trójściennych $g'h'$C'D'E'F', $i'k'$D'G'H'I' . . . . które wszystkie leżą wewnątrz ostrosłupa S'A'B'C' i które z tego powodu nazywać będziemy *wpisanemi* w tenże ostrosłup. Tych summa będzie mniejszą niż ostrosłup jako rzecz objęta od obejmującéj; czyli oznaczywszy tę summę przez g, będzie $g < o$. Przypatrzywszy się z uwagą tym graniastosłupom, dostrzeżemy, że drugi w piérwszym jest równy piérwszemu w drugim ostrosłupie, trzeci w piérwszym jest równy drugiemu graniastosłupowi w drugim ostrosłupie i t. d., tak że każdy graniastosłup piérwszego ma sobie odpowiedni w drugim ostrosłupie, wyjąwszy graniastosłup piérwszy ostrosłupa piérwszego. Oprócz tego te odpowiednie graniastosłupy są między sobą równe jako mające równe podstawy i wysokości, przeto różnica między summą piérwszych a summą drugich jest graniastosłup ABCfeD to jest G$-g=$gran. ABCfeD. Lecz ten graniastosłup jest mniejszy niż graniastosłup δ t. j. ABCfeD$<\delta$, bo mają podstawy równe, a wysokość piérwszego jest mniejsza od wysokości drugiego, gdyż z wykreślenia R$a<$Rx, a dlatego G$-g<\delta$. Ale że O$-o=\delta$ tudzież G$>$O a $g<o$, skąd G$-g>$O$-o$, byćby powinno G$-g>\delta$. Z tego widzimy, że dowiedziona nierówność G$-g<\delta$ sprzeciwia się przypuszczonéj G$-g>\delta$, a zatém utrzymać się nie może i jest fałszywą, skąd wniesiemy, że O$=o$. Podobny dowód, jakiego już w Planimetryi użyliśmy, nazywa się *przywiedzeniem do niedorzeczności* (deductio ad absurdum).

Trzeci dowód. Podzieliwszy wysokość spólną obu ostrosłupom PR na nieskończoną liczbę części równych i tak na podstawach ostrosłupów jako téż i na każdém z przecięć wystawiwszy graniastosłupy opisane sposobem jak wyżéj, a potém na każdém z przecięć wystawiwszy graniastosłupy wpisane również sposobem wyżéj w drugim ostrosłupie użytym, tudzież przypatrzywszy się uważnie tym graniastosłupom, bez trudności dostrzeżemy, że każdy następny opisany, równy jest poprzedzającemu graniastosłupowi wpisanemu, tak że idąc od wiérzchołka, piérwszy opisany równa się wpisanemu znajdującemu się pod nim; drugi opisany równa się wpisanemu będącemu pod nim i t. d. aż nareszcie ostatni czyli piérwszy na podstawie ABC opisany, nie ma pod sobą wpisanego, któremuby był równy. Różnica przeto między summą opisanych a wpisanych graniastosłupów, równa się graniastosłupowi mającemu za podstawę ABC, a wysokość dowolną, lecz nieskończenie małą, bo wysokość PR podzieliliśmy wprawdzie na równe, lecz dowolnéj wielkości części. Zatrzymawszy znaczenie O, *o*, a summę graniastosłupów opisanych w piérwszym ostrosłupie oznaczywszy przez G, wpisanych zaś przez *g*, mamy oczywiście $O < G$ i $o > g$. Zrobiwszy toż samo wykreślenie w drugim ostrosłupie i summę opisanych graniastosłupów oznaczywszy przez G' a wpisanych przez *g'*, mamy podobnież $O < G'$ i $o > g'$. Z dwóch nierówności $O < G$ i $o > g'$ wypływa $O - o < G - g'$, albo $O - o < G - g$, gdyż $g = g'$, bo odpowiednie graniastosłupy są sobie równe i liczba ich jest taż sama w jednym jak i drugim ostrosłupie. Ale różnica $G - g$ zależy od naszéj woli, bo ona się równa graniastosłupowi na podstawie ABC o dowolnéj a zatém i nieskończenie małéj wysokości wystawionemu, a dla tego ta różnica jest, albo być może, nieskończenie małą, a nawet taką, że ją zawsze jeszcze mniéjszą uczynić można, dzieląc tylko wysokość jeszcze na mniéjsze części. A kiedy w każdym razie $O - o$ jest mniéjsze niż $G - g$, zatém wnieść możemy że tu żadnéj stałéj różnicy naznaczyć nie można, tak iżbyśmy jéj już mniejszą uczynić nie mogli i z tego powodu uważać ją musimy za niknącą, a w tym przypadku być musi $O-o=0$ czyli $O=o$. Tak tedy trzema sposobami dowiedliśmy, że *dwa ostrosłupy trójścienne czyli dwa czworościany mające równe podstawy i wysokości, są sobie równe co do objętości.*

Uwaga. Ponieważ to twierdzenie o czworościanie jest bardzo ważne, z powodu jak już wspomniałem, że czworościan użytym być może do znalezienia objętości innych ciał graniastych, przeto osądziłem za potrzebne przekonać uczących się jak najdobitniéj o téj prawdzie, dla czego spodziewam się, iż o zbytek lub rozwlekłość pomówiony nie będę.

Co do przystania dwóch czworościanów, to w dwóch głównych przypadkach być może: 1. Jeżeli dwa czworościany mają po kącie dwuściennym równym, zawartym dwiema ścianami równemi, każda każdéj i jednakowo położonemi. 2. Jeżeli mają po kącie trójściennym równym, zawartym trzema ścianami równemi i jednakowo położonemi (porównaj §. 218). Ponieważ dowód w obu przypadkach jest bardzo łatwy, dla tego pomijając go, przechodzę zaraz do znalezienia objętości czworościanu.

§. 235.

Aby znaleść objętość czworościanu, potrzeba nam jeszcze dowieść następujące

Twierdzenie. *Ostrosłup trójścienny albo czworościan, jest trzecią częścią graniastosłupa trójściennego o téjże saméj podstawie i wysokości.*

Niech będzie czworościan SABC *fig. 236*, z wierzchołka S poprowadziwszy proste SD i SE piérwszą do AB a drugą do BC równoległe i im równe, a potem złączywszy D i E, otrzymamy trójkąt $SDE=ABC$; a łącząc jeszcze A i D, C i E prostemi AD, CE, tudzież przez proste AD i BS, CE i BS, AD i CE pomyśliwszy płaszczyzny, te z płaszczyznami ABC i SDE zamkną graniastosłup trójścienny ABCDSE. Jeżeli teraz przez trzy punkta C, S, D przesuniemy płaszczyznę, czyli jak się często wyrażamy, *zrobimy przekrój*, z łatwością dostrzeżemy, iż cały graniastosłup podzieli się tym sposobem na trzy ostrosłupy czyli czworościany, a mianowicie piérwszy dany SABC, dwa zaś inne SACD i SCDE. Trzy te czworościany są sobie równe co do objętości; albowiem dwa ostatnie mając podstawy ACD i CDE równe, jako połowy tegoż samego równoległoboku ACED i wierzchołek spólny w punkcie S, mają téż i wysokości równe; zatém według poprzedzającego twierdzenia są sobie równe co do objętości. Z §. 231 wiemy, iż w czworościanie każdą z czterech jego ścian wziąść można za podstawę, więc w czworościanie *np.* SCDE biorąc ścianę SDE za podstawę, jego wierzchołek będzie w punkcie C; ale SDE = ABC, tudzież wysokość tak tego jako i danego czworościanu SABC jest taż sama, równająca się odległości ich podstaw; przeto dwa te czworościany, a następnie i wszystkie trzy, są sobie równe co do objętości; którykolwiek więc z nich, a zatém i SABC jest trzecią częścią graniastosłupa trójściennego mającego z nim tęż samę podstawę i wysokość, co mieliśmy dowieść.

Wniosek 1. Z tego twierdzenia wprost wypływa, że *każdy graniastosłup trójścienny rozebranym być może przez płaszczyzny przekątne na trzy ostrosłupy trójścienne czyli czworościany o téjże saméj podstawie i wysokości.*

Wniosek 2. Ponieważ objętość graniastosłupa jakiegokolwiek, a zatém i trójściennego, równa się iloczynowi z jego podstawy przez wysokość, więc téż *objętość czworościanu*, jako trzeciéj części ostatniego graniastosłupa o téjże saméj podstawie i wysokości, *równa się trzeciéj części iloczynu z jego podstawy przez wysokość*, albo *iloczynowi z podstawy przez trzecią część wysokości*, albo nareszcie, *iloczynowi z trzeciéj części podstawy przez wysokość.*

Wniosek 3. Każdy równoległościan jest dwa razy większy od graniastosłupa trójściennego mającego z nim tęż samę wysokość a podstawę równą połowie podstawy równoległościanu, przeto *objętość czworościanu jest szóstą częścią równoległościanu mającego dwa razy większą podstawę a wysokość tęż samę.*

Z czego znowu wypada, że każdy równoległościan rozebranym być może na sześć czworościanów równych między sobą co do objętości, a mających tak wysokości jako i podstawy równe. Te ostatnie są połowami podstawy równoległościanu, wysokość zaś równa wysokości tegoż.

Podobnież każdy graniastosłup rozebranym być może na graniastosłupy trójścienne, zatém każdy ostrosłup jest trzecią częścią graniastosłupa mającego z nim téż samę podstawę i wysokość. Z tego téż twierdzenia wniesiemy, że objętość każdego graniastosłupa równa się iloczynowi z powierzchni jego podstawy przez wysokość.

Wniosek 4. Ostrosłup wielościenny rozebranym być może za pomocą płaszczyzn przekątnych na same czworościany; a że objętość każdego z ostatnich równa się iloczynowi z podstawy przez trzecią część wysokości, zatém summa wszystkich czyli *objętość ostrosłupa wielościennego równa się iloczynowi z powierzchni jego podstawy przez trzecią część wysokości.*

Wniosek 5. Objętości dwóch ostrosłupów jakichkolwiek, mają się do siebie jak iloczyny z podstaw przez wysokości; mające podstawy równe, objętości ich są w stósunku wysokości; a mające wysokości równe, też objętości są w stósunku ich podstaw. Jeżeli bowiem objętość, podstawę i wysokość piérwszego oznaczymy przez O, P, W, a drugiego przez o, p, w, tedy według poprzedzającego wniosku jest $O = P \times \frac{1}{3}W$, $o = p \times \frac{1}{3}w$, zatém co do piérwszego mamy:

$$O : o = P \times \tfrac{1}{3}W : p \times \tfrac{1}{3}w = P.W : p.w.$$

przypuściwszy że $P = p$, będzie co do 2go: $O : o = W : w$; położywszy zaś $W = w$, znajdziemy co do 3go $O : o = P : p$. Gdyby było $P = p$ i $W = w$, mielibyśmy $O = o$ t. j. *Ostrosłupy jakiekolwiek mające równe podstawy i wysokości, są sobie równe co do objętości.* Mogą więc podstawy dwóch ostrosłupów o równych wysokościach być wielokątami różnego nazwiska, byle tylko co do powierzchni były równe, objętości ich będą także równe.

§. 236.

Twierdzenie. *Objętość ostrosłupa ściętego równolegle do jego podstawy, równa się trzem ostrosłupom mającym wysokość równą piérwszemu, podstawy zaś jeden dólną, drugi górną podstawę ostrosłupa ściętego a trzeci średnią geometrycznie proporcyjonalną między dwiema piérwszemi.*

Mając dwa ostrosłupy, jeden wielościenny a drugi trójścienny, takie iżby ich podstawy co do powiérzchni i wysokości były równe, jeżeli je przetniemy płaszczyzną równoległą do podstaw w téjże saméj wysokości, przecięcia stąd otrzymane są sobie jak wiemy równe co do powiérzchni; ta więc płaszczyzna odcina od obu ostrosłupów części zawarte między ich wiérzchołkami a płaszczyzną odcinającą równe; są to bowiem ostrosłupy mające rzeczone przecięcia za podstawy, a za spólną wysokość odległość płaszczyzny przecinającéj od wierzchołka. Ponieważ zaś całe ostrosłupy według §. 234 są sobie równe, więc i pozostałe części, t. j. ostrosłupy ścięte, będą sobie równe; z tego powodu na dowiedzenie założonego twierdzenia, dosyć będzie uważać ostrosłup ścięty trójścienny.

Niechże będzie trójścienny ostrosłup ścięty ABCDEF *fig. 237*; przez trzy punkta A, E, C przesuńmy płaszczyznę, czyli przekrójmy ten ostrosłup, tedy widzimy, iż tym sposobem odkroimy od całego, czworościan EABC mający podstawę ABC, a wysokość spólną z ostrosłupem ściętym, gdyż płaszczyzna DEF jest równoległa do podstawy. Po odcięciu tego czworościanu, pozostaje ostrosłup czworościenny EACFD mający wierzchołek w punkcie E, a za podstawę czworokąt ACFD. Przez trzy punkta D, E, C, przekroiwszy znowu ten pozostały ostrosłup, podzielimy go na dwa czworościany ECDF i EACD, mające wierzchołek spólny w punkcie E, a zatém wysokości równe, za podstawy zaś, piérwszy ma trójkąt CDF a drugi ACD. Ostrosłup ECDF uważać można jako stojący na podstawie DEF a wiérzchołek w punkcie C mający; będzie on przeto drugim czworościanem, z których się składa ostrosłup ścięty, bo wysokość jego jest równa wysokości, a podstawa jest górną podstawą danego ostrosłupa ściętego. Chodzi już tylko o ostatni t. j. trzeci czworościan, żeby dowieść, iż tenże ma za podstawę średnią geometrycznie proporcyjonalną między dwiema piérwszemi, a wysokość jak dwa pierwsze. Na ten koniec z punktu E na płaszczyznie BCFE poprowadźmy prostą EG równoległą do krawędzi CF, tedy pomyśliwszy sobie inny czworościan mający za podstawę trójkąt ACD a wiérzchołek w punkcie G t. j. czworościan GACD, ten jest równy czworościanowi EACD, bo mają tęż samę podstawę a wiérzchołki E i G na prostéj równoległéj do płaszczyzny podstawy, a zatém i wysokości mają równe, a następnie są sobie równe co do objętości tak, że jeden za drugi wziąść można. Ale czworościan GACD uważanym być może jako stojący na podstawie AGC, a wiérzchołek mający w punkcie E, zatém wysokość jego równa się wysokości ostrosłupa ściętego. Naostatek mamy jeszcze dowieść, że podstawa AGC tego ostatniego czworościanu jest średnią geometrycznie proporcyjonalną między ABC i DEF. Dwa trójkąty ACG i DEF mające po kącie równym $C = F$ i po boku równym $CG = EF$, według §. 122 dostarczają proporcyi $ACG : DEF = AC : DF$. Dwa znowu trójkąty ACG i ABC mające wiérzchołek w jednymże punkcie A, dają proporcyją $ABC : ACG = BC : CG = BC : EF$. Ale trójkąt $ABC \backsim DEF$ zatém

$$AC : DF = BC : EF.$$

Z trzech tych proporcyi widzimy, że

$$ABC : ACG = ACG : DEF$$

t. j. trzeci czworościan EACD równy jest innemu czworościanowi mającemu wysokość równą wysokości ostrosłupa ściętego, a podstawę będącą średnią geometrycznie proporcyjonalną między podstawami dwóch piérwszych czworościanów.

Tak dowiódłszy założonego twierdzenia dla ostrosłupa ściętego trójściennego, stósownie do tego co wyżéj powiedzieliśmy wniesiemy, że *każdy ostrosłup ścięty równa się co do objętości trzem ostrosłupom, z których dwa mają podsta-*

wy, jeden dolną drugi górną ostrosłupa ściętego, trzeci zaś średnią geometrycznie proporcyjonalną między dwiema piérwszemi, a wysokość każdego równa się wysokości ostrosłupa ściętego. Oznaczywszy więc powiérzchnią podstawy dolnéj przez P, górnéj przez p a wysokość ostrosłupa ściętego przez W, jego zaś objętość przez O, będzie według powyższego

$$O = P \times \tfrac{1}{3} W + p \times \tfrac{1}{3} W + \sqrt{Pp} \cdot \tfrac{1}{3} W = \tfrac{1}{3} W (P + p + \sqrt{Pp})$$

bo $\sqrt{Pp}$ jest średnią geometrycznie proporcyjonalną między P i p.

Można téż dowieść to twierdzenie analitycznie to jest sposobem rachunkowym, uważając je w kształcie następującego zagadnienia: *mając dane powiérzchnie obu podstaw ostrosłupa ściętego, tudzież ich odległość czyli wysokość tegoż ostrosłupa, znaleść jego objętość.*

Rozwiązanie. Wystawiwszy sobie ostrosłup dokończony przez przedłużenie jego ścian aż do ich spotkania się z sobą, jeżeli znajdziemy objętość tak dokończonego, tudzież objętość uzupełniającego ostrosłupa, którego podstawą jest podstawa wyższa ostrosłupa ściętego, różnica tych objętości będzie objętością szukaną. Dla znalezienia objętości dwóch rzeczonych ostrosłupów, potrzebne są ich wysokości których nie znamy, a zatém te najprzód znaleść potrzeba. Niech dolna podstawa ostrosłupa ściętego będzie P górna p a ich odległość W; z wiérzchołka dokończonego ostrosłupa spuściwszy prostopadłą do podstawy, część jéj zawarta między podstawami jest znana i $=$W, lecz część od wiérzchołka aż do górnéj podstawy nie jest znana, starać nam się więc potrzeba też wynaleść. Oznaczmy ją przez x, tedy wysokość całkowitego t. j. dokończonego ostrosłupa będzie $= W + x$, wysokość zaś uzupełniającege $= x$; objętość zatém piérwszego będzie $= P \times \frac{1}{3}(W + x)$, drugiego $= p \times \frac{1}{3} x$, a objętość ściętego $= P \times \frac{1}{3}(W + x) - p \times \frac{1}{3} x$. Szukajmyż więc x. Ponieważ $W + x$ i x wyrażają odległości od wiérzchołka dwóch przecięć P i p, zatém według §. 232 *wniosek* mamy $P : p = (W + x)^2 : x^2$, a na mocy własności proporcyi geometrycznéj §. 98 *Arytm.* mamy $\sqrt{P} : \sqrt{p} = W + x : x$; tudzież według tegoż samego §.

$$\sqrt{P}-\sqrt{p}:\sqrt{p}=W:x \quad \text{skąd} \quad x=\frac{W\sqrt{p}}{\sqrt{P}-\sqrt{p}},$$

przeto
$$W+x=W+\frac{W\sqrt{p}}{\sqrt{P}-\sqrt{p}}=\frac{W\sqrt{P}}{\sqrt{P}-\sqrt{p}}.$$

Znalazłszy wysokości obu ostrosłupów wyrażone przez ilości dane, mamy teraz

objęt. całkowitego ostrosłup. $=P\times\frac{1}{3}\frac{W\sqrt{P}}{\sqrt{P}-\sqrt{p}}=\frac{1}{3}W.\frac{P\sqrt{P}}{\sqrt{P}-\sqrt{p}}$

objęt. uzupełniającego ostros. $=p\times\frac{1}{3}\frac{W\sqrt{p}}{\sqrt{P}-\sqrt{p}}=\frac{1}{3}W.\frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{P}-\sqrt{p}}$

a zatém objętość ściętego ostrosłupa $=\frac{1}{3}W\left(\frac{P\sqrt{P}-p\sqrt{p}}{\sqrt{P}-\sqrt{p}}\right).$

Rozmnożywszy licznika i mianowika przez $\sqrt{P}+\sqrt{p}$ i oznaczając objętość ostrosłupa ściętego przez OS, będzie

$$\begin{aligned} OS &= \tfrac{1}{3}W\left\{\frac{P^2-p^2+\sqrt{Pp}\,(P-p)}{P-p}\right\} \\ &= \tfrac{1}{3}W\left\{\frac{(P+p)(P-p)+\sqrt{Pp}\,(P-p)}{P-p}\right\} \\ &= \tfrac{1}{3}W(P+p+\sqrt{Pp}) \end{aligned}$$

t. j. zupełnie tak, jak sposobem geometrycznym znaleźliśmy, a twierdzenie które poprzednio dowiedliśmy, okazuje się tu jako wniosek z wypadku zagadnienie rozwiązującego, bo

$$\tfrac{1}{3}W(P+p+\sqrt{Pp})=P.\tfrac{1}{3}W+p.\tfrac{1}{3}W+\sqrt{Pp}.\tfrac{1}{3}W.$$

§. 237.

Twierdzenie. *Objętość graniastosłupa trójściennego ściętego płaszczyzną pochyłą do podstawy, równa się objętości trzech czworościanów mających tęż samę podstawę t. j. podstawę graniastosłupa, a wysokości, prostopadłe z trzech wiérzchołków górnéj podstawy pochyłéj, na płaszczyznę podstawy dólnéj spuszczone.*

Niech będzie graniastosłup trójścienny ABCDEF *fig.* 238 ścięty płaszczyzną DEF, pochyłą do podstawy; potrzeba dowiéść, iż objętość jego równa się trzem czworościanom czyli ostrosłupom mającym za spólną podstawę trójkąt ABC t. j. podstawę graniastosłupa danego, a za wysokości, trzy prostopadłe z punktów D, E, F, na płaszczyznę podstawy spuszczone. Na ten koniec przekrójmy ten graniastosłup przez trzy punkta A, E, C, a odkroimy tym sposobem jeden z czworościanów EABC, mający za podstawę trójkąt ABC a za wysokość, prostopadłą z E na płaszczyznę podstawy spuszczoną. Pozostały ostrosłup czworościenny EACFD, przekrójmy znowu przez trzy punkta D, E, C, a podzielimy go na dwa trójścienne EACD i ECDF mające podstawy, piérwszy ACD drugi CDF a wiérzchołek spólny w E. Lecz piérwszy jest równy czworościanowi BADC mającemu tęż samę podstawę a wiérzchołok w punkcie B, mają bowiem oba wiérzchołki na prostéj BE równoległéj od płaszczyzny podstawy a zatém i wysokości równe. Ale ten ostatni uważanym być może jako stojący na podstawie ABC, a wiérzchołek w punkcie D mający, jest więc drugim czworościanem w twierdzeniu wyrażonym, bo wysokością jego jest prostopadła z D na płaszczyznę ABC spuszczona. Trzeci nareszcie ECDF równa się czworościanowi BCDF mającemu tęż samę podstawę CDF a wiérzchołek B; kiedy więc ich wiérzchołki E i B są na prostéj równoległéj do podstawy, przeto mają i wysokości równe. Ale trójkąt CDF $=$ ACF, bo stoją na jednéjże podstawie CF a wiérzchołki ich D i A są na prostéj AD równoległéj do CF, zatém czworościan BCDF $=$ BACF. Lecz poprowadziwszy prostą AF, ten ostatni czworościan uważać można jako stojący na podstawie ABC a wiérzchołek w punkcie F mający i dla tego wysokość jego jest prostopadła z F na płaszczyznę podstawy ABC, spuszczona, jest on więc trzecim czworościanem, z których uważać można złożony graniastosłup dany. Tak tedy

$$\text{graniastosłup } ABCDEF = EABC + EACD + ECDF$$
$$= EABC + DABC + FABC.$$

Oznaczywszy trzy prostopadłe z E, D, F na płaszczyznę podstawy ABC graniastosłupa danego spuszczone przez p, p', p'', powiérzchnią podstawy ABC przez P, a nareszcie objętość graniastosłupa w mowie będącego przez G, będzie:

$$G=P\times\tfrac{1}{3}p+P\times\tfrac{1}{3}p'+P\times\tfrac{1}{3}p''=\tfrac{1}{3}P(p+p'+p'')=P(\frac{p+p'+p''}{3})$$

t. j. *objętość jakiegokolwiek graniastosłupa pochyło płaszczyzną do podstawy ściętego, równa się iloczynowi z powiérzchni jego podstawy przez trzecią część summy prostopadłych z trzech wiérzchołków wyższéj na płaszczyznę dólnéj podstawy spuszczonych*, co potrzeba było dowieść.

Uwaga 1. Jeżeli graniastosłup jest prosty, czyli, jeżeli trzy jego krawędzie boczne są prostopadłe do płaszczyzny podstawy, rzeczone trzy prostopadłe mieszają się z temiż krawędziami, a w takim przypadku *objętość graniastosłupa prostego pochyło do płaszczyzny podstawy ściętego, równa się iloczynowi z jego podstawy przez trzecią część summy trzech jego krawędzi bocznych.*

Uwaga 2. Graniastosłup ukośnie do podstawy ścięty jest tém między graniastosłupami, czém trapez między figurami prostokréślnemi płaskiemi, bo jako każdy wielokąt podzielony być może na trapezy z pozostałym trójkątem, tak też każde ciało graniaste podzieloném być może na graniastosłupy skośnie ścięte z pozostałym ostrosłupem.

§. 238.

Szukajmy teraz powiérzchni jakiegokolwiek ostrosłupa. Ponieważ w ostrosłupie wszystkie ściany boczne są trójkątami, przeto summa powiérzchni tych ścian t. j. trójkątów, będzie powiérzchnią boczną ostrosłupa; do któréj dodawszy jeszcze powiérzchnią podstawy, mieć będziemy powiérzchnią całkowitą ostrosłupa.

W przypadku gdy ostrosłup jest prosty albo foremny, wszystkie ściany boczne są trójkątami do siebie przystającemi, a zatém równemi: znalazłszy przeto powiérzchnię jednéj ściany i tę wziąwszy tyle razy, ile ostrosłup ma ścian czyli wiele wielokąt służący ostrosłupowi za podstawę ma boków, mieć będziemy powiérzchnię boczną ostrosłupa prostego. Ale ściany boczne są trójkątami równoramiennemi, a wysokość każdego jest prostopadła z wiérzchołka ostrosłupa na bok podstawy spuszczona, którą *długością bocznéj ściany ostrosłupa* (apothema pyramidis) nazwać można, przeto ponieważ i boki podstawy są między sobą równe, *powiérzchnia boczna takiego ostrosłupa równa się iloczynowi z obwodu jego podstawy przez połowę długości ściany* albo *równa się trójkątowi mającemu za podstawę obwód podstawy ostrosłupa, a za wysokość długość jego ściany.*

Powiérzchnia podstawy, jako wielokąta foremnego równa się iloczynowi z jego obwodu przez połowę prostopadłéj ze środka wielokąta na bok jego spuszczonéj (apothema polygoni regularis), zatém *całkowita powiérzchnia ostrosłupa rostegop, równa się iloczynowi z obwodu jego podstawy przez połowę summy długości ściany i prostopadłéj ze środka podstawy na bok spuszczonéj.*

Postępując jak w §. 230 *wniosek 2,* moglibyśmy boczną powiérzchnią ostrosłupa rozpostrzéć na płaszczyznę, skądbyśmy otrzymali wycinek wielokątny.

§. 239.

Co się tyczy ostrosłupa ściętego, w tym ściany boczne są trapezami, przeto tak jak w ostrosłupie jakimkolwiek, obrachować potrzeba powiérzchnię każdéj ściany osobno, a ich summa będzie powiérzchnią boczną ostrosłupa ściętego, do któréj dodawszy powiérzchnie dwóch podstaw, otrzymamy całkowitą powiérzchnię ostrosłupa równolegle do podstawy ściętego.

Jeżeli zaś ostrosłup ścięty jest prosty, podstawy jego są wielokątami foremnemi a ściany boczne są trapezami do siebie przystającemi, a zatém sobie równemi, przeto powiérzchnia boczna takiego ostrosłupa, równa się powiérzchni jednego trapezu przez liczbę boków podstawy.

Aby znaléść powiérzchnią jednéj ściany, uważmy, że na *fig. 239* powiérzchnia np. ściany

$$\mathrm{AEKF} = \frac{\mathrm{AE} + \mathrm{FK}}{2} . \mathrm{RS} = ae \times \mathrm{RS} \quad \S.\ 123.$$

A że i tu $ae = ab = bc = cd = de$, jako też długość każdéj ściany równa się RS, zatém summa powiérzchni wszystkich trapezów, czyli powiérzchnia boczna ostrosłupa ściętego prostego $= abcde \times RS$ t. j. *równa się iloczynowi z obwodu przecięcia równoległego do podstaw, a przez środek którejkolwiek, a zatém i wszystkich krawędzi bocznych, przechodzącego, przez długość krawędzi, czyli raczéj przez długość prostéj łączącéj środki dwóch odpowiednich boków dólnéj i górnéj podstawy.* Chcąc mieć całkowitą powiérzchnią tego ostrosłupa, dodać jeszcze potrzeba do powyższego iloczynu

$$ABCDE \times \tfrac{1}{2}OR + FGHIK \times \tfrac{1}{2}oS.$$

Oznaczywszy obwody dwóch podstaw przez P i p, można téż całkowitą powiérzchnię tego ostrosłupa następnie wyrazić

$$P\left(\frac{RS + OR}{2}\right) + p\left(\frac{RS + oS}{2}\right),$$

co każdy łatwo dostrzeże.

Wielościany (polyedra).

§. 240.

Jeżeli ilukolwiek płaszczyznami i w jakikolwiek sposób ograniczymy przestrzeń, otrzymamy stąd ciało geometryczne, które w ogólności *wielościanem* (polyedrum) nazywać będziemy. Według téj definicyi ciała graniaste, o których dotąd mówiliśmy, są także wielościanami, ale noszą osobne nazwy, jak to widzieliśmy.

Płaszczyzny wielościan ograniczające zowią się i tu *ścianami,* spólne przecięcia się z sobą każdych dwóch ścian *krawędziami,* punkta zaś zejścia się tych krawędzi *wiérzchołkami,* zwyczajnie *kątami bryłowemi* wielościanu.

Roztrząsnąwszy w poprzedzających §§. dwa gatunki ciał graniastych, t. j. graniastosłupy i ostrosłupy, pozostają nam jeszcze właściwe wielościany; gdy zaś ich liczba być może nieskończona, z powodu nieskończonéj rozmaitości sposobów ograniczania czyli zamykania przestrzeni powiérzchniami płaskiemi i ponieważ Geometrowie dzielą tę nieskończoną liczbę wielościanów na *wypukłe* (convexa) i *wklęsłe* (concava); gdy nareszcie te ostatnie w zastósowaniu bardzo szczupłego są użytku, przeto tylko piérwsze zajmą naszę uwagę. Cechy, po których poznać możemy wielościany wypukłe są: 1° rozszérzywszy którąkolwiek ścianę takiego wielościanu, ten znajduje się całkiem z jednéj strony téj płaszczyzny. 2°. Prosta w każdym kierunku poprowadzona, nie w więcéj jak w dwóch punktach spotykać może powiérzchnią wielościanu wypukłego, a nareszcie 3°. Wszystkie płaszczyzny przekątne przypadają wewnątrz takiego wielościanu.

Ale i wielościanów wypukłych jest nieskończona rozmaitość, a wszystkie noszą nazwę *wielościanów Eulerowskich* z powodu iż ten wielki Geometra najwięcéj się niemi zatrudniał. Najznajomsze są Archimedesa i Pitagorejskie albo Platońskie. Wielościanami Archimedesa nazywamy pospolicie takie, w których każda ściana jest wielokątem foremnym, Pitagorejskiemi zaś, wielościany, w których oprócz foremności, ściany te są przystającemi do siebie, jako téż pochyłości każdych dwóch ścian, albo co na jedno wychodzi, kąty dwuścienne między sobą równe. Te wielościany nazywają się zwyczajnie foremnemi, mają one, jeszcze raz powtarzam, wszystkie ściany równe i przystające do siebie, kąty ścienne równe, krawędze wszystkie równe, jako téż pochyłości każdych dwóch ścian między sobą równe. Foremne wielościany są tém między wielościanami, czém wielokąty foremne między wielokątami. W elementarnéj Geometryi mówi się zwyczajnie tylko o tych ostatnich, dla tego téż z pomiędzy nieskończonéj liczby wielościanów wypukłych zajmiemy się tylko foremnemi.

Ponieważ to są wielościany wypukłe, zatém wszystkie wiérzchołki są na powiérzchni wielościanu czyli wyraźniéj mówiąc wszystkie kąty ścienne są wyskakujące. Z uwagi, że summa kątów płaskich kąt wielościenny składających, zawsze musi być mniéjsza niż 360° §. 214, wypada, że takich wielościanów nie wielka jest liczba. Składając bowiem kąty bryłowe z kątów płaskich do foremnych wielokątów należących, użyjmy najprzód kątów trójkąta foremnego, czyli równobocznego. Ponieważ kąt takiego trójkąta $= 60°$, a do złożenia kąta bryłowego potrzeba najmniéj trzech kątów płaskich, zobaczmy zatém, wiele kątów tegoż trójkąta można wziąść najwięcéj, aby złożyć kąt bryłowy? Trzy kąty trójkąta foremnego czynią $3.60 = 180^0$; cztéry takie kąty czynią $4.60 = 240^0$; pięć kątów trójkąta równobocznego czynią $5.60 = 300^0$; nareszcie sześć podobnych kątów czynią $6.60^0 = 360^0$. Stąd się pokazuje że tylko *trzy* wielościany foremne złożyć można z trójkątów foremnych równych i przystających do siebie.

Kiedy z sześciu kątów trójkąta równobocznego nie można już złożyć kąta bryłowego, z powodu, że ich summa czyni 360^0 i wszystkie kąty płaskie rozpościerają się na jednę płaszczyznę, przeto z porządku przystępujemy do czworokąta foremnego czyli do kwadratu. Ponieważ w tym każdy kąt jest $= 90^0$ t. j. jest kątem prostym, przeto jeden tylko wielościan ograniczyć możemy kwadratami biorąc do złożenia kąta bryłowego trzy kąty płaskie proste; summa bowiem ich uczyni tylko 270^0. Gdybyśmy ich zaś wzięli cztéry, jużbyśmy tę summę otrzymali 360^0, zatém z kwadratów jeden tylko wielościan otrzymać można.

Kąt pięciokąta foremnego $= 108^0$, przeto trzy takie kąty płaskie można wziąść do złożenia kąta ściennego, ale cztéry kąty pięciokąta foremnego, już czynią więcéj niż 360^0 i dla tego z pięciokątów foremnych jeden tylko wielościan mieć można.

Kąt sześciokąta foremnego $= 120^0$, trzy przeto takie kąty koniecznie potrzebne do złożenia kąta bryłowego czynią razem $3.120 = 360^0$, a zatém z tych kątów nie można składać kątów bryłowych, a następnie nie można ograniczyć przestrzeni sześciokątami foremnemi, nie można téż z tego powodu złożyć żadnego wielościanu. Przekonywamy się więc, że z wielokątów foremnych nie więcéj tylko *pięć* wielościanów foremnych złożyć można, t. j. trzy z trójkątów, jeden z kwadratów i jeden z pięciokątów.

§. 241.

Pokazawszy, iż z trójkątów foremnych tylko trojakim sposobem składać można kąty bryłowe, t. j. biorąc kątów płaskich po trzy, cztéry i pięć do złożenia kąta bryłowego, że z kwadratów tylko w jeden sposób t. j. biorąc po trzy kąty płaskie, składać można kąty bryłowe, a nareszcie z pięciokątów także jednym tylko sposobem otrzymać można kąty bryłowe, biorąc kątów płaskich pięciokąta foremnego po trzy na jeden kąt bryłowy, wypada nam teraz okazać, że tym sposobem postępując złożymy rzeczywiście wielościany, czyli że tak trójkątami trojakim sposobem, jako téż kwadratami w jeden i pięciokątami także w jeden sposób ograniczymy zupełnie przestrzeń.

Co do piérwszego. Niech będzie trójkąt równoboczny ABC, *fig. 240*, ze środka jego O wystawmy prostopadłą OD do płaszczyzny trójkąta ABC, dając jéj długość taką, iżby AD było równe AB, a potém przez każdy z boków trójkąta ABC i przez punkt D poprowadziwszy płaszczyzny, te przetną się dwie a dwie i zamkną przestrzeń, którą *Czworościanem* (tetraëdrum) nazywamy. Ma ten czworościan 4 ściany trójkątne, 4 kąty bryłowe, każdy z trzech kątów płaskich złożony, i 6 krawędzi między sobą równych.

Co do drugiego. Niech ABCD *fig. 241*, będzie kwadratem wystawionym na boku trójkąta równobocznego, z jakich chcemy składać wielościan. Poprowadziwszy dwie przekątnie AC i BD, te przetną się w środku kwadratu O; z tego środka wystawiwszy prostopadłą z jednéj i drugiéj strony płaszczyzny kwadratu t. j. OE i OF, nadając im długość równą połowie przekątni, t. j. tak, iżby było $OE=OF=AO$, jeżeli przez każdy bok kwadratu i przez punkt E, a potém przez też boki kwadratu i punkt F poprowadzimy płaszczyzny, te przeciąwszy się po dwie, zamkną przestrzeń którą *Ośmiościanem* (octaëdrum) nazywamy. Ośmiościan ma ośm ścian trójkątnych, 6 kątów bryłowych, każdy z cztérech płaskich złożony i 12 krawędzi między sobą równych.

Ośmiościan najłatwiéj można złożyć, wystawiwszy dwa ostrosłupy czworościenne foremne i równe, dając im za wysokość połowę przekątni kwadratu ich podstaw, a potém składając te ostrosłupy z sobą tak, aby podstawy do siebie przystały, a wiérzchołki ostrosłupów przypadły z przeciwnych stron płaszczyzny podstaw.

Co do trzeciego. Mając składać wielościan z trójkątów foremnych, tak iżby każdy kąt bryłowy był zawarty pięcią kątami płaskiemi trójkąta równobocznego, narysujmy na płaszczyznie pięciokąt foremny, któregoby bok był równy bokowi trójkąta z jakich chcemy ten wielościan złożyć. Ze środka O *fig.* 242 tego pięciokąta, wystawmy prostopadłą OM, nadając jéj długość taką, iżby było AM=AB t. j równe bokowi trójkąta z jakich chcemy składać ten wielościan, a przez każdy z boków pięciokąta i przez punkt M prowadząc płaszczyzny, te przetną się po dwie i złożą kąt pięciościenny M z pięciu kątów płaskich AMB, BMC, CMD, DME i EMA, w którym każde dwie ściany będą jednakowo do siebie pochylone; przy każdym zaś wiérzchołku pieciokąta będzie kąt trójścienny złożony z trzech kątów płaskich t. j. z dwóch trójkąta równobocznego a trzeciego do pięciokąta foremnego należącego, a dla tego wszystkie te ostatnie kąty są sobie równe według §. 213. Jeżeli teraz A'B'C' jest trójkątem równobocznym i takim, że A'B'=AB t. j. trójkątem z jakich chcemy składać wielościan, dosyć przy jego wiérzchołkach A', B', C', wystawić kąty pięciościenne równe już złożonemu M, przez co otrzymamy powiérzchnią wypukłą z dziesięciu ścian trójkątnych złożoną. Jeżeli drugą zupełnie równą powiérzchnią złożymy i potém obie ich obwodami połączymy z sobą tak, iżby dwuścienne kąty téj tu schodziły się z kątami trójściennemi drugiéj, zamkniemy tym sposobem przestrzeń zupełnie i otrzymamy wielościan noszący nazwę od liczby swych ścian *Dwudziestościanu* (icosaëdrum). Druga połowa jest na figurze kropkowaną. Ma ten wielościan 20 ścian trójkątnych, 12 kątów bryłowych pięciościennych i 30 krawędzi między sobą równych.

Co do czwartego. Narysowawszy na płaszczyznie kwadrat, z jakich chcemy albo mamy złożyć wielościan, z wiérzchołków jego wyprowadzamy w jednąż stronę prostopadłe do płaszczyzny kwadratu, dając im długość równą i równą boliczonych pięciu ciałach foremnych znalazłszy pochyłość dwóch którychkolwiek ścian, już tém samém mamy pochyłości wszystkich, albowiem według definicyi ciał foremnych, pochyłości te są między sobą równe.

Co do powiérzchni wielościanu, ta równa się summie powiérzchni jego ścian. A że w ciałach foremnych te ściany są sobie równe, zatém znalazłszy powiérzchnią jédnéj ściany i wziąwszy ją tyle razy, ile wielościan ma ścian, mieć będziemy powiérzchnią żądaną.

Zobaczmyż więc jak znaleść powiérzchnią jednéj ściany w każdém z pięciu ciał foremnych.

Te ściany są wielokątami foremnemi t. j. albo trójkątami równobocznemi, albo kwadratami, albo nareszcie pięciokątami foremnemi, ich przeto powiérzchnie według §§. 123 i 124 łatwo obrachowanemi być mogą. Atoli pokażemy tu prędszy a może i łatwiejszy sposób znalezienia powiérzchni trójkąta równobocznego z wiadomego jego boku, który zarazem jest krawędzią czworościanu, ośmiościanu i dwudziestościanu.

Niech będzie trójkąt równoboczny ABC *fig. 245*, CD prostopadła do AB. Powiérzchnia jego równa się jak wiadomo $\frac{AB \times CD}{2}$. Lecz CD pada na środek boku AB §. 40 *co do drugiego wniosek 2*, przeto $DB = \frac{1}{2} AB$. W trójkącie CDB prostokątnym przy D jest
$\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{DB}^2 = \overline{AB}^2 - \frac{1}{4}\overline{AB}^2 = \frac{3}{4}\overline{AB}^2$ gdyż $BC = AB$, skąd $CD = \frac{AB}{2}\sqrt{3}$, a następnie powiérzchnia trójkąta ABC $= \frac{\overline{AB}^2}{4}\sqrt{3}$. Przemierzywszy jakąkolwiek jednostką bok AB czyli krawędź jednego z trzech wspomnionych ciał i znalazłszy, iż takich jednostek zamyka a, mieć będziemy powiérzchnią jednéj ściany $= \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$. Z tego wyrażenia powiérzchni jednéj ściany, znajdziemy zaraz powiérzchnią

$$\textit{Czworościanu} = 4. \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$$

Ośmiościanu $= 8.\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}$

Dwudziestościanu $= 20.\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 5a^2\sqrt{3}.$

Jeżeli krawędź sześcianu oznaczymy ogólnie przez a, powiérzchnia każdéj jego ściany będzie $= a^2$, a powiérzchnia całego sześcianu $= 6a^2$.

Aby znaleść powiérzchnią pięciokąta foremnego t. j. jednéj ściany dwunastościanu foremnego, wiemy, że powiérzchnia ta $=$ 5ASB *fig. 246*. Powiérzchnia trójkąta ASB $= \frac{AB \times SC}{2}$, skąd powiérzchnia pięciokąta $= \frac{5}{2}\, AB \times SC$. Ponieważ AB jest krawędzią dwunastościanu, przeto zawsze może być znaną, bo ją zmierzyć można; chodzi więc tylko o znalezienie prostopadłéj SC. Ta prostopadła może być wyrażona przez krawędź, lecz że sposobem rachunkowym prędzéj i łatwiéj do tego dojdziemy niż geometrycznym, przeto sądzę, że mi nie będzie poczytaném za niestósowne, że piérwszego użyję, zwłaszcza iż cały rachunek oparty jest na twierdzeniach geometrycznych i Arytmetyce zwyczajnéj. Połóżmy AB $= a$, promień koła opisanego na pięciokącie SA $=$ R, prostopadłą SC oznaczmy przez r, a nareszcie łuk AB podzieliwszy w punkcie D na dwie równe części i poprowadziwszy cięciwę AD, ta będzie bokiem dziesięciokąta foremnego w toż koło wpisanego, który oznaczmy przez d; średnica DE $=$ 2R.

Według §. 107, d jest większym odcinkiem promienia R podzielonego na skrajne i średnią; przeto mniejszy odcinek jest $= R - d$ i według tegoż twierdzenia mamy

$$R : d = d : R - d \qquad \text{skąd } d^2 = R^2 - Rd$$

Uważając w tém zrównaniu d jako ilość nieznaną i rozwiązawszy je znanym sposobem, znajdziemy

$$d = -\tfrac{1}{2}R \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}R^2 + R^2} = -\tfrac{1}{2}R \pm \sqrt{\tfrac{5}{4}R^2} = -\tfrac{1}{2}R \pm \tfrac{1}{2}R\sqrt{5}$$

Wziąwszy na d tylko ważność dodatną, będzie $d = R\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$.

Ponieważ SC $= R -$ CD $= R - x$, kładąc CD $= x$, zaś kowi kwadratu; końce tych prostopadłych połączywszy prostemi i przez każde dwie równoległe przesunąwszy płaszczyznę, ograniczymy tym sposobem zupełnie przestrzeń samemi kwadratami. Tak złożony wielościan będzie znanym nam już *Sześcianem* (hexaëdrum); ma on bowiem 6 kwadratowych ścian, 8 kątów bryłowych, każdy z trzech kątów płaskich prostych złożony i 12 krawędzi między sobą równych *fig. 243.*

Co do piątego nakoniec. Niech ABCDE *fig. 244*, będzie pięciokątem foremnym, z jakich chcemy złożyć wielościan. Przy każdym jego wiérzchołku złożywszy kąt trójścienny z trzech kątów płaskich między sobą równych i równych kątowi pięciokąta np. kątowi ABC, tak iżby wzajemne pochyłości trzech jego ścian były także równe, na każdéj z pięciu krawędzi do tych kątów bryłowych należącéj, a nie leżącéj na płaszczyznie danego pięciokąta, odetnijmy, od wiérzchołka poczynając, bok pięciokąta danego jak na figurze $AF = BG = CI = DK = EM = AB$; dopełniwszy potém na każdym boku tegoż pięciokąta innego pięciokąta równego piérwszemu, otrzymamy tym sposobem połowę powiérzchni wypukłéj wielościanu, który chcemy złożyć. Jeżeli zupełnie tym samym sposobem złożymy drugą połowę tamtéj we wszystkiém równą, a potém te połówki przyłożymy albo raczéj połączymy z sobą tak iżby ich wklęsłości przypadały wewnątrz, zamkniemy przez takie ich złożenie przestrzeń, którą od liczby ścian *Dwunastościanem* (dodecaëdrum) nazywamy. Ma bowiem rzeczywiście ten wielościan 12 ścian pięciokątnych, 20 kątów bryłowych każdy z trzech kątów płaskich równych złożony i 30 krawędzi między sobą równych. Połowę powiérzchni dwunastościanu widzimy na *fig. 244*, druga zaś połowa jest kropkowaną.

W przeszłym §. powiedzieliśmy, że te pięć ciał nazywają się Pitagorejskiemi, gdyż Pitagorejczykowie w swéj symbolicznéj nauce porównywali czworościan z ogniem, sześcian z ziemią, ośmiościan z powietrzem, dwudziestościan z wodą, a dwunastościan z całym światem.

Aby te pięć ciał foremnych każdy sobie mógł zrobić z tektury i tym sposobem łatwiéj i jaśniej pojął sposób ich składania, dołączam tu siatki, jakie na tekturze zrysować potrzeba, aby po ich wycięciu można złożyć każdy z rzeczonych wielościanów.

Fig. A. jest siatką do czworościanu.
Fig. B. „ „ „ ośmiościanu.
Fig. C. „ „ „ dwudziestościanu.
Fig. D. „ „ „ sześcianu.
Fig. E. „ „ „ dwunastościanu.

Ponarzynawszy wszystkie linije spólne dwom trójkątom, kwadratom lub pięciokątom i wyciąwszy miejsca między figurami, które są nie potrzebne, każdy z wielościanów zamknie się najdokładniéj. Spoiwszy potém ściany sobie przyległe papierem gumą arabską pociągnionym i nareszcie oblepiwszy czystym papierem powiérzchnie, mieć będziemy dokładne modele pięciu ciał foremnych.

§. 242.

Złożywszy i przekonawszy się, że ani mniéj ani więcéj jak pięć ciał jest foremnych, wypada nam teraz przystąpić do obrachowania wielościanów w ogólności, a w szczególności do obrachowania tych pięciu ciał foremnych.

Zupełne obrachowanie wielościanu, zależy na podaniu pochyłości każdych jego dwóch ścian, jego całkowitéj powiérzchni i nareszcie objętości.

Co się tyczy pochyłości każdych dwóch ścian, tego bez znajomości pomocniczéj nauki, Trygonometryi, znaleść nie możemy; za pomocą bowiem geometrycznego wykreślenia, nie znajdzie się nigdy wypadek zupełnie dokładny, gdyż ta dokładność od wielu warunków zawisła, którym zadość uczynić nie podobna; prócz tego, chociaż przez wykreślenie znajdziemy kąt, wszelako o wielkości jego dopiéro wtedy sądzić możemy, gdy go mieć będziemy wyrażony w liczbach. Dla tego stósując Trygonometryją do różnych zadań Geometryi, pokażemy w dalszym ciągu, jak łatwym sposobem to zadanie rozwiązać możemy. Tu czynię tylko tę uwagę, iż w wy-odległość tegoż punktu od wiérzchołków jego kątów, tak téż w każdym wielościanie foremnym pomyślić sobie można zamkniętą kulę i każdy taki wielościan zamknięty w kuli tak, że powiérzchnia piérwszéj dotyka każdą ścianę wielościanu w jéj środku, a powiérzchnia drugiéj przechodzi przez wszystkie wiérzchołki kątów wielościanu; promieniem przeto piérwszéj będzie odległość wspomnionego wyżéj punktu od ścian, a promieniem drugiéj odległość tegoż punktu od wiérzchołków kątów wielościanu. Piérwszą kulę nazywać będziemy *wpisaną*, drugą zaś *opisaną* na wielościanie. Taki punkt wewnątrz wielościanu foremnego znajdujący się, nazwiemy *środkiem wielościanu*. Środek ten wielościanu jest zarazem środkiem kuli tak wpisanéj jako i opisanéj na wielościanie. Jeżeli przez każdą krawędź i ten środek pomyślimy sobie przesunione płaszczyzny, te przez wzajemne przecięcie się z sobą, podzielą wielościan na tyle ostrosłupów, ile wielościan ma ścian, mających za podstawy ściany wielościanu, a za wysokości odległości środka od ścian. A że wyżéj wspomnieliśmy, że te odległości są równe, zatém wszystkie rzeczone ostrosłupy będą także równe, jako mające podstawy i wysokości równe. Objętość przeto wielościanu foremnego równa się iloczynowi z summy wszystkich podstaw przez trzecią część spólnéj wysokości. Ale summa podstaw stanowi powiérzchnią wielościanu, zatém objętość tegoż równa się iloczynowi z powiérzchni wielościanu przez $\frac{1}{3}$ promienia kuli wpisanéj. Aby więc obrachować objętość wielościanów, o jakich tu mowa t. j. foremnych, chodzić tylko będzie o to, jak znaleść promień kuli wpisanéj, w każdym z pięciu rzeczonych wielościanów.

§. 244.

Jakkolwiek dotąd nic jeszcze nie mówiliśmy o kuli, wszelako możemy tu dać jéj pojęcie, gdyż one jest tak łatwém jak pojęcie krzywéj kołowéj.

Definicyja. *Powiérzchnia kuli jest to powiérzchnia krzywa zamknięta, mająca wewnątrz punkt jednakowo od każdego jéj punktu odległy, który z tego powodu jéj* środkiem *zowiemy.* Rzeczona stała odległość tego punktu od każdego punktu powiérzchni krzywéj, nazywa się *promieniem kuli,* a prosta przez tenże punkt przechodząca i kończąca się z obu stron na powiérzchni krzywéj, nazywa się *średnicą kuli.*

Twierdzenie. *W każdy wielościan foremny można wpisać i na nim opisać kulę.*

Niech będzie wielościan foremny ograniczony trójkątami, a zatém czworościan lub ośmiościan lub nareszcie dwudziestościan, których środki oznaczmy przez A, B, C, D i t. d. *fig. 247.* Środkiem tego wielościanu niech będzie punkt S. Z punktów A i C spuściwszy prostopadłe Aa i Ca do spólnéj krawędzi RT i przez te prostopadłe poprowadziwszy płaszczyznę, która tak do obu ścian A i C jako téż i do spólnego ich przecięcia się RT będzie prostopadła, złączmy potém punkta a i S prostą aS; tedy w dwóch trójkątach prostokątnych SAa i SCa, przeciwprostokątnia Sa jest spólna, bok Aa = Ca, bo to są prostopadłe (apothema) ze środków trójkątów foremnych równych na ich boki spuszczone, zatém trzecie boki są sobie także równe t. j. SA=SC jako téż kąt AaS=CaS; prosta więc Sa dzieli kąt pochyłości dwóch ścian AaC na dwie równe części. Zupełnie podobnym sposobem dowiedziemy że SB=SA, SD=SC i t. d. skąd wniesiemy, że SB=SA=SC=SD= i t. d. Jeżeli więc wewnątrz wielościanu pomyślimy sobie kulę mającą środek w S, a za promień prostą SA, powiérzchnia jéj dotknie wszystkie ściany wielościanu w ich środkach t. j. w punktach A, B, C, D, i t. d. i będzie kulą wpisaną w wielościan.

Co do drugiego. Ponieważ płaszczyzna SAC jest prostopadła do krawędzi RT, więc i prosta Sa na niéj leżąca jest także prostopadła do téjże krawędzi; połączywszy punkta R i S, T i S prostemi RS, TS, trzy proste RS, TS i aS leżą na jednéjże płaszczyznie SRT. Dwie pochyłe RS i TS względem prostopadłéj Sa, są sobie równe według §. 42 *b)*; podobnież i dla téj saméj przyczyny pochyłe RS i QS, RS i MS są także równe; a zatém SR=ST=SQ=SM= i t. d. Jeżeli przeto wystawimy sobie znowu kulę za środek punkt w trójkącie DAE jest $\overline{AD}^2 = DE \times DC$ §. 129, czyli $d^2 = 2Rx$ skąd $x = \frac{d^2}{2R} = \frac{R^2(\sqrt{5}-1)^2}{8R} = \frac{R(3-\sqrt{5})}{4}$, gdy wyżéj znalezioną ważność na d tu położymy, zatém

$$r = R - x = R - \frac{R(3-\sqrt{5})}{4} = \frac{R(1+\sqrt{5})}{4}$$

Ale według §. 90, $\overline{AC}^2 = CE \times CD = (2R - x)x$

$$= \frac{R(5+\sqrt{5})}{4} \cdot \frac{R(3-\sqrt{5})}{4} = \frac{R^2}{16}(5+\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) = \frac{R^2(5-\sqrt{5})}{8};$$

a że $AC = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} a$, więc $\overline{AC}^2 = \frac{1}{4} a^2$, a następnie

$$\tfrac{1}{4} a^2 = \frac{R^2(5-\sqrt{5})}{8} \text{ czyli } a^2 = \frac{R^2(5-\sqrt{5})}{2}.$$

Ponieważ powiedzieliśmy, iż a zawsze być może znaném, zatém z tego ostatniego zrównania znajdziemy $R = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}$.

Tę ważność włożywszyw znalezionéj wyżéj na r, będzie

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{a}{2}\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

$$= \frac{a}{2}\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})^2}{2(5-\sqrt{5})}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}$$

Rozmnożywszy pod pierwiastkiem licznika i mianownika przez $5+\sqrt{5}$, a potém podzieliwszy także licznika i mianownika przez $\sqrt{5}$, lub co na jedno wychodzi, rozmnożywszy zaraz licznika i mianownika przez $\sqrt{5}+1$, otrzymamy nareszcie

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}$$

Znalazłszy tym sposobem prostopadłą r wyrażoną przez krawędź a, i położywszy jéj ważność za SC w wyrażeniu powiérzchni pięciokąta na początku przywiedzioném, będzie powiérzchnia pięciokąta foremnego

$$= \frac{5}{2} a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}} = \frac{5}{4} a^2 \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}},$$

a następnie powiérzchnia

$$Dwunastościanu = 12 \,.\, \frac{5}{4} a^2 \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}} = 15a^2 \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}$$

§. 243.

Pozostaje nam więc jeszcze mówić o objętości wielościanów. Jak powiérzchnią każdego wielokąta znajdowaliśmy dzieląc go przekątniami na trójkąty, lub téż obierając gdziekolwiek na powiérzchni wielokąta punkt i ten łącząc ze wszystkiemi wiérzchołkami wielokąta, przez co także podzieli się wielokąt na tyle trójkątów ile wielokąt ma boków, tak téż objętość każdego wielościanu znajdzie się dzieląc go na czworościany, co zawsze można, albo płaszczyznami przekątnemi, albo też obrawszy wewnątrz wielościanu punkt i przez ten, tudzież przez każdą jego krawędź prowadząc płaszczyzny; te w ostatnim razie podzielą wielościan na tyle ostrosłupów, ile wielościan ma ścian. Te ostrosłupy mają za podstawy ściany wielościanu, a wiérzchołek spólny w obranym wewnątrz punkcie. Jeżeli ściany wielościanu nie są trójkątami, ostrosłupy rzeczone będą w ogólności wielościennemi; ale że te mogą być podzielone na same trójścienne, zatém każdy wielościan uważanym być może jako złożony z samych czworościanów, wiérzchołek spólny wewnątrz wielościanu mających.

Każde z pięciu foremnych ciał ma swe ściany równe, więc téż każde z nich uważaném być może jako złożone z ostrosłupów mających podstawy równe.

Jako każdy wielokąt foremny ma wewnątrz punkt równo oddalony tak od boków, jako téż i od wiérzchołków kątów jego, §. 103 *wniosek 1,* który środkiem wielokąta nazwaliśmy, tak również każdy wielościan foremny ma wewnątrz siebie punkt równo oddalony od wszystkich ścian wielościanu i od wszystkich wiérzchołków kątów wielościennych. Innemi słowy mówiąc: jako w każdy wielokąt foremny można wpisać i na nim opisać koło, tak że promieniem piérwszego jest odległość rzeczonego punktu od boków, drugiego zaś kąta pochyłości dwóch którychkolwiek ścian kąta trójściennego. Kiedy tak jest, zobaczmyż, jak przy pomocy wykreślenia takowy kąt otrzymać możemy.

§. 246.

Zagadnienie. *W kącie trójściennym mając wiadome kąty płaskie tenże kąt składające, znaleść kąty dwuścienne czyli kąty pochyłości każdych dwóch ścian przyległych.*

Dla rozwiązania tego zagadnienia, dosyć będzie pokazać, jak się znajduje jeden z tychże kątów. Na ten koniec niech będzie kąt trójścienny S składający się z trzech znanych kątów płaskich ASB, ASC i BSC *fig. 248.* Zamierzmy sobie znaleść kąt pochyłości ściany ASB do ściany BSC. Przez toż samo wykreślenie znajdziemy tu i drugi kąt t. j. pochyłość ściany ASC do BSC.

Na krawędzi AS obrawszy gdziekolwiek punkt A i z niego wystawiwszy sobie spuszczoną na płaszczyznę BSC prostopadłą AO, a z jéj spodka O prostopadłe OD i OE, piérwszą do BS a drugą do CS, skoro punkt A złączymy z D i E, otrzymamy trójkąty prostokątne AOD i AOE, w których kąty przy D i E są kątami pochyłości ścian ASB i ASC do BSC.

Rozłóżmyż teraz kąty płaskie ASB i ASC na płaszczyznę kąta BSC obracając piérwszą ścianę około krawędzi BS a drugą około CS, *fig. 249*, tedy ponieważ tak OD jako téż i AD są prostopadłemi do BS, skoro płaszczyzna ASB weźmie położenie płaszczyzny BSC, prosta AD nie przestanie być prostopadłą do BS, a zatém jedna z dwóch tych prostopadłych będzie przedłużeniem drugiéj, gdyż obie przez tenże sam punkt D przechodzą. AD t. j. odległość punktu D od A jest przeciwprostokątnią, zaś AO i DO nie przestają być przyległemi bokami kątowi prostemu.

Z tych poprzednich uwag, wykreślenie kąta pochyłości następującym uskuteczni się sposobem.

Wykreśliwszy na płaszczyznie obok siebie trzy kąty płaskie, umieszczając w środku ten, do którego ściany znaleść chcemy pochyłość dwóch innych ścian, bierze się SA=SA', gdyż w złożeniu kąta trójściennego dwie te proste schodzą się w jedną krawędź. Z punktów A i A′ spuszczają się dwie prostopadłe, piérwsza do BS a druga do CS i przedłużają aż do ich wzajemnego przecięcia się w punkcie O. Z punktu O wyprowadzają się dwie prostopadłe, piérwsza do AO, druga do A′O. Z punktu D otwartością cyrkla = DA zakreśla się łuk przecinający piérwszą prostopadłą w punkcte A_1 i podobnież z punktu E otwartością cyrkla = EA′ kreśli się łuk przecinający drugą w punkcie A'_1. Te ostatnie punkta złączywszy z D i E t. j. A_1 z D, A'_1 z E prostemi A_1D i A'_1E, mieć będziemy kąty pochyłości szukane, t. j. kąt A_1DO jaki ściana BSA czyni z BSC i kąt A'_1EO jaki ściana ASC czyni z BSC. O dokładności rysunku zapewnić się można doświadczając, czyli długości dwóch znalezionych prostopadłych A_1O i A'_1O są sobie równe, gdyż tak być powinno; składając bowiem napowrót kąt trójścienny i podnosząc płaszczyzny trójkątów prostokątnych A_1DO i A'_1EO, obracając je około DO i EO, końce tych prostopadłych A_1 i A'_1 zejść się powinny z punktami A i A′ na ramionach dwóch kątów płaskich naznaczonemi w jeden punkt A *fig. 248*.

§. 247.

Tak mając znaleziony kąt pochyłości dwóch przyległych ścian każdego z pięciu wielościanów foremnych, łatwo już również za pomocą wykreślenia, znaleść promień kuli wpisanéj i opisanéj na wielościanie; wykreśliwszy bowiem kąt QaC *fig. 250* równy znalezionemu kątowi pochyłości dwóch przyległych ścian, weźmy na ramionach jego $aA = aC =$ prostopadłéj ze środka ściany wielościanu na jéj bok spuszczonéj (apothema), albo raczéj = promieniowi koła wpisanego w wielokąt, jakiemi wielościan jest ograniczony, a zatém w trójkąt lub pięciokąt; z punktów A i C wyprowadziwszy prostopadłe do Aa i Ca, te przetną się w punkcie S, który będzie środkiem kuli wpisanéj, zaś SA = SC jéj promieniem. Przedłużywszy aA i na tém przedłużeniu wziąwszy AQ=promieniowi koła opisanego na rzeczonym trójkącie lub pięcio-

S, a za promień prostą SR mającą, jéj powiérzchnia przejdzie przez wszystkie wiérzchołki wielościanu tak, że te wiérzchołki znajdować się będą na powiérzchni kuli, a cały wielościan ogarniony zostanie tąż powiérzchnią kuli, którą dla tego nazywamy *na wielościanie opisaną.*

Dowiódłszy że w każdy wielościan foremny można wpisać i na nim opisać kulę, połączmy teraz wszystkie wiérzchołki wielościanu ze środkiem kuli wpisanéj, tedy cały wielościan podzieli się na ostrosłupy jak wspomniałem, mające za podstawy ściany wielościanu, a wiérzchołek w środku rzeczonéj kuli. Tak np. przez połączenie punktów P, Q, R ze środkiem S, otrzymujemy ostrosłup SPQR mający za podstawę ścianę PQR, a za wysokość BS; obrachowawszy zatém objętość tego ostrosłupa, i wypadek wziąwszy tyle razy ile wielościan ma ścian, otrzymamy objętość tego wielościanu. Ale jakże znaleść wysokość rzeczonego ostrosłupa czyli promień kuli wpisanéj w wielościan? Zadanie to jakkolwiek jest łatwém do rozwiązania, w wykonaniu ma téż same trudności dla jakich w §. 242 kąta pochyłości nie szukaliśmy; dokładność bowiem trygonometrycznego rachunku całkiem nie zależy od wykreślenia i może nam dostarczyć wypadków pewnych; z tego powodu dosyć tu będzie pokazać możność znalezienia tego promienia teoretycznie, a ostateczne wykonanie zostawić do Trygonometryi.

W trójkącie SA*a* jest bok A*a* znanym, bo się w §. 242 nauczyliśmy otrzymać takowy w liczbach, kąt S*a*A jest znanym skoro kąt pochyłości A*a*C dwóch przyległych ścian naprzód obrachujemy, więc téż stósownie do powyższego i kąt S*a*A jako połowa piérwszego będzie znanym. Z dwóch danych elementów trójkąta prostokątnego, między któremi przynajmniéj jeden jest bokiem, Trygonometryja uczy wyrachować resztę elementów z taką dokładnością, z jaką tylko rachunek dać je może, zatém przy pomocy téjże Trygonometryi, możemy znaleść wysokość BS = AS w liczbach. Mając już powierzchnią każdego z pięciu wielościanów foremnych znalezioną poprzednio w liczbach, dosyć będzie takową rozmnożyć przez $\frac{1}{3}$ znalezionego promienia kuli wpisanéj, aby otrzymać objętość każdego z tych wielościanów także w liczbach.

§. 245.

Za pomocą geometrycznego wykreślenia, możnaby następującym sposobem znaleść naprzód kąt pochyłości dwóch przyległych ścian wielościanu, a potém promień kuli wpisanéj.

Przypatrzywszy się z uwagą czworościanowi, ośmiościanowi, dwunastościanowi i dwudziestościanowi, dostrzeżemy bez trudności, iż w piérwszym, każdy kąt bryłowy składa się z trzech płaskich równych między sobą, a każdy zamyka 60^0. W ośmiościanie każdy takiż kąt składa się z czterech kątów płaskich także równych i każdy $=60^0$, jeżeli atoli przez dwie krawędzie, nie na jednéjże ścianie leżące, poprowadzimy płaszczyznę, ta czworościenny kąt podzieli na dwa inne trójścienne, mające po dwa kąty równe i każdy $=60^0$, trzeci zaś kąt jest spólny obu i jest kątem prostym $=90^0$. W każdym z tych kątów dwie ściany równe zamykają kąt pochyłości, który jest kątem pochyłości każdych dwóch ścian w tymże ośmiościanie, skoro więc ten znajdziemy, już tém samém znajdziemy kąt, o który nam chodziło.

W dwudziestościanie można także płaszczyzną przekątną podzielić kąt pięciościenny na dwa inne t. j. trójścienny i czworościenny; w piérwszym dwa kąty płaskie są sobie równe każdy $=60^0$, a trzeci będzie kątem pięciokąta foremnego, a zatém znanym, bo się równa $\frac{1}{5}.6R=\frac{1}{5}.6.90^0=108^0$. Piérwsze dwie ściany tego kąta trójściennego tworzą między sobą kąt dwuścienny będący kątem pochyłości każdych dwóch ścian w dwudziestościanie, skoro go więc znajdziemy, mieć będziemy tym sposobem i tu kąt AaC.

W dwunastościanie każdy jego kąt jest trójściennym złożonym z trzech płaskich między sobą równych a każdy $=108^0$; każde téż dwie przyległe ściany zamykają kąt pochyłości o jakim tu mowa. Znalezienie przeto kąta pochyłości dwóch ścian w każdym z czterech wielościanów foremnych, sprowadza się w każdym przypadku do znalezienia

Wniosek 1. Każda płaszczyzna równoległa od podstawy jakiegokolwiek ostrosłupa, odcina od niego inny ostrosłup podobny całemu byle tylko tak płaszczyzna przecinająca jako i podstawa znajdowały się z jednéjże strony wierzchołka.

Wniosek 2. W dwóch czworościanach, a w ogólności w dwóch ostrosłupach podobnych, ich wysokości są proporcyjonalne krawędziom. Dowód téj prawdy jest bardzo łatwy na zasadzie §. 232.

Po tych ogólnych uwagach, dowiedźmyż dwóch głównych wyżéj wspomnianych twierdzeń podobieństwa czworościanów.

§. 249.

Twierdzenie. *Dwa czworościany mające po dwie ściany podobne każda każdéj, jednakowo do siebie nachylone i podobnież w obu położone, są podobne.*

Niech będą dwa czworościany SABC i *sabc fig. 251*, takie, że ściana SAB $\backsim$ *sab*, SAC $\backsim$ *sac* i kąt dwuścienny SA równy takiemuż kątowi *sa* czyli BAC $=$ *bac* i obie ściany tak w jednym jako i w drugim czworościanie są jednakowo położone, potrzeba dowieść, że te dwa czworościany są podobne t. j. że wszystkie krawędzie mają proporcyjonalne i dwa inne kąty dwuścienne czyli pochyłości sobie równe. Na krawędzi SA weźmy Sa' $=$ *sa* i przez a' poprowadźmy płaszczyznę równoległą do ABC, tedy trójkąt S$a'b'$ będąc podobny trójkątowi SAB, jest téż podobny trójkątowi *sab*; a że z wykreślenia Sa' $=$ *sa*, zatém S$a'b'$ $=$ *sab*. Dla téjże saméj przyczyny S$a'c'$ $=$ *sac*, przeto, ponieważ oprócz tego kąt dwuścienny Sa' równy takiemuż kątowi *sa*, wniesiemy, że czworościan S$a'b'c'$ $=$ *sabc*. Ale czworościan S$a'b'c$ jest podobny czworościanowi SABC, więc téż ten ostatni jest podobny czworościanowi *sabc*, co było do dowiedzenia.

Z definicyi podobieństwa czworościanów wypływa także, że *dwa czworościany mające po kącie trójściennym równym, zawartym trzema ścianami podobnemi każda każdéj i podobnie ułożonemi, są podobne.* Kiedy bowiem ściany są podobne, krawędzie są proporcyjonalne a następnie czworościany są podobne.

§. 250.

Twierdzenie. *Dwa czworościany mające po jednéj ścianie podobnéj i kąty dwuścienne przyległe téjże ścianie równe, każdy każdemu i podobnie ułożone, są podobne.*

Niech bowiem będą dwa czworościany SABC, *sabc fig. 251* takie, że $SAB \backsim sab$ i kąty dwuścienne przyległe téj ścianie równe t. j. kąt $SA = sa$, $SB = sb$, $AB = ab$. Wziąwszy jak w poprzedzającém twierdzeniu $Sa' = sa$ i przez punkt a' poprowadziwszy płaszczyznę równoległą od ABC, czworościan $Sa'b'c'$ jest podobny czworościanowi SABC stósownie do ostatniego twierdzenia, jego więc kąty dwuścienne są równe takimże kątom tego ostatniego czworościanu każdy każdemu t. j. $Sa' = SA$, $Sb' = SB$, $a'b' = AB$. Według założenia jest kąt dwuścienny $SA = sa$, $SB = sb$, $AB = ab$, więc kąt $Sa' = sa$, $Sb' = sb$, $a'b' = ab$. A że ściana $SAB \backsim sab$, a następnie podobna ścianie $Sa'b'$, a z wykréślenia $Sa' = sa$, czworościan $Sa'b'c' = sabc$. Lecz piérwszy jest podobny czworościanowi SABC, więc i czworościan $sabc \backsim SABC$, co należało dowiéść.

Można téż jeszcze twierdzić, iż *dwa czworościany, w których kąty dwuścienne jednego są równe takimże kątom drugiego, każdy każdemu i jednako w obu ułożone, są podobne*; bo według §. 213 w dwóch kątach trójściennych naprzeciwko równych kątów ściennych, leżą kąty płaskie równe; przeto odpowiednie ściany tych dwóch czworościanów są trójkątami podobnemi, a następnie ich boki czyli krawędzie czworościanów proporcyjonalne, a zatém czworościany podobne. W tém atoli twierdzeniu jeden warunek jest zbyteczny, bo dwa kąty pochyłości w każdym kącie trójściennym wystarczają do wyznaczenia położenia czwartéj ściany, skoro trzy ściany złożymy w kąt trójścienny.

§. 251.

Już wyżéj w §. 248 powiedzieliśmy, które wielościany nazywać będziemy *podobnemi*, zatém łatwo nam będzie po kącie, SQ będzie promieniem kuli opisanéj na wielościanie. Tym tedy sposobem przygotowaliśmy wszystko potrzebne do znalezienia objętości wielościanów foremnych; wszelako ponieważ nam chodziło o wielkość ich objętości, o wielkościach zaś jedynie tylko przez porównanie sądzić możemy, wszystko zatém co w trzech ostatnich §§. w tym względzie powiedzieliśmy, dowiodło nam tylko możności znalezienia tych objętości, a nawet geometrycznego ich wykreślenia, rzeczywiste zaś obrachowanie zostawiamy na późniéj; chociażbyśmy sobie i tu poniekąd poradzić mogli obrawszy jednostkę długości i przy pomocy podziałki rachując długość promienia SA w liczbach.

Mówiąc o wielościanach foremnych, mało albo wcale nic nie mówiliśmy o sześcianie z tego powodu, że jego objętość już w §. 224 znaleźliśmy i nie potrzebujemy uważać go za złożony z ostrosłupów; wszystko jednakże co się powiedziało o wielościanach, zupełnie zastósować można i do sześcianu.

§. 248.

Kończąc rozdział o ciałach graniastych, pozostaje nam jeszcze do mówienia o *podobieństwie wielościanów.* Do tego co w §. 56 o podobieństwie powiedziano, tu nie wiele przydać można. Jak w §. 65 widzieliśmy iż wielokąty podobne można było rozebrać na jednakową liczbę trójkątów podobnych i podobnie ułożonych, tak i tu ustanowić możemy cechę podobieństwa wielościanów, iż takiemi *są te, które rozebrać można na jednakową liczbę czworościanów podobnych i podobnie ułożonych.* Jak więc cechy podobieństwa dwóch trójkątów wystarczyły nam do wyrzeczenia o podobieństwie wielokątów, tak też i cechy podobieństwa czworościanów wystarczą nam do poznania czyli dwa wielościany są podobne lub nie; naszą przeto rzeczą będzie ustanowić cechy podobieństwa czworościanów.

Każdy czworościan tak dokładnie jest wyznaczony przez sześć swoich krawędzi, jak trójkąt przez trzy swoje boki; a jako dwa trójkąty są podobne skoro ich trzy boki są między sobą proporcyjonalne §. 56, tak téż *dwa czworościany będą podobnemi, jeżeli ich krawędzie są proporcyjonalne i jednymże sposobem w obu ułożone.*

Z tego wprost wynika, że dwa czworościany podobne mają ściany podobne każda każdéj i podobnie ułożone, tudzież tak kąty dwuścienne, czyli pochyłości jako téż i kąty trójścienne równe także każdy każdemu; że dwa czworościany podobne trzeciemu są i między sobą podobne; a z tego co wyżéj powiedziano, wypada znowu, że dwa wielościany podobne trzeciemu są podobne między sobą.

To co w figurach płaskich nazwaliśmy bokami odpowiedniemi (latera homologa), i tu ma swe zastósowanie. A tak nazywać będziemy *punktami odpowiedniemi* dwóch wielościanów podobnych, odpowiednie punkta ich ścian, tudzież punkta połączone z odpowiedniemi ścianami za pomocą czworościanów podobnych i podobnie ułożonych.

Prostemi odpowiedniemi w dwóch wielościanach nazwiemy te które wyznaczają po dwa punkta w każdym tak, iżby te punkta w jednym, były odpowiedniemi w drugim wielościanie.

Przecięciami odpowiedniemi nazywają się te, które przechodzą przez trzy odpowiednie punkta w każdym wielościanie.

Dwa nakoniec wiélościany podobne są równe, jeżeli mają po jednéj odpowiedniéj krawędzi równéj, albo ogólniéj, po jednéj odpowiedniéj prostéj równéj.

Twierdzenie o czworościanach odpowiednie twierdzeniu §. 54 jest: że *w każdym czworościanie poprowadziwszy płaszczyznę równoległą od jednéj z cztérech jego ścian, ta odetnie od całego, czworościan podobny temuż;* gdyż stósownie do §. 232 krawędzie jednego są proporcyjonalne krawędziom drugiego czworościanu. Koniecznym tu atoli warunkiem podobieństwa jest ten, żeby obie płaszczyzny równoległe znajdowały się z jednéjże strony wiérzchołka sobie przeciwległego.

tém co się dotąd o czworościanach powiedziało, dowiéść następujące

Twierdzenie. *Dwa wielościany podobne mają odpowiednie ściany podobne, a kąty ścienne jak również kąty wielościenne (bryłowe) odpowiednie równe każdy każdemu.*

Rozebrawszy bowiem każdy z tych wielościanów na czworościany, ponieważ liczba tych ostatnich tak w jednym jako i drugim wielościanie będzie taż sama i odpowiednie sobie będą podobne, tedy ściany wielościanów będąc albo ścianami odpowiedniemi czworościanów podobnych, lub téż zbiorem ścian odpowiednich czworościanów podobnych, są podobne.

Podobnież odpowiednie kąty dwuścienne wielościanów, będą także albo kątami dwuściennemi czworościanów podobnych, albo téż zbiorem dwuściennych kątów czworościanów podobnych, przeto są sobie równe każdy każdemu.

Nareszcie odpowiednie kąty wielościenne, jako także zbiory kątów dwuściennych równych każdy każdemu, są także w obu wielościanach równe każdy każdemu.

Wzajemnie: *dwa wielościany są podobne, skoro ściany ich są podobne każda każdéj i jednakowo do siebie nachylone.* To odwrotne twierdzenie dowodzi się łatwo, rozbiérając każdy z wielościanów na czworościany i dowodząc ich między sobą podobiéństwa, a potém wnioskując na mocy definicyi o podobieństwie wielościanów. W przypadku wielościanów o jakich tu mówimy t. j. wypukłych, to wzajemne twierdzenie zamyka za wiele warunków.

Wniosek. Odpowiednie krawędzie, przekątnie i w ogólności wszystkie proste odpowiednie dwóch wielościanów podobnych, są proporcyjonalne; te albowiem proste uważać można jako krawędzie czworościanów podobnych przyległych jedne drugim, a ta ich przyległość łączy wszystkie proporcyje między sobą jakie między rzeczonemi prostemi wyprowadzić możemy.

§. 352.

Twierdzenie. *Objętości dwóch czworościanów podobnych mają się do siebie jak trzecie potęgi z odpowiednich krawędzi.*

Niech będą dwa czworościany SABC i *sabc fig. 251* podobne, mamy dowiéść, że ich objętości są w stósunku trzecich potęg którychkolwiek odpowiednich krawędzi. Na dowiedzenie tego na większéj krawędzi SA weźmy $Sa' = sa$ i poprowadźmy przez punkt a' płaszczyznę równoległą do ABC, ta jak wiadomo odetnie czworościan $Sa'b'c' = sabc$. Z wspólnego wiérzchołka S spuściwszy prostopadłą SO do podstawy ABC, ta spotka płaszczyznę $a'b'c'$ w punkcie o; według §. 232 jest $ABC : a'b'c' = \overline{SO}^2 : \overline{So}^2$ czyli $ABC : abc = \overline{SO}^2 : \overline{so}^2$, bo wysokości czworościanów $Sa'b'c'$ i $sabc$ równych są równe. Ale z tegoż samego twierdzenia wypada, że $SA : Sa' = AB : a'b'$, tudzież $SA : Sa' = SO : So$ czyli $AB : ab = SO : so$, z własności zaś proporcyj wypada $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 = \overline{SO}^2 : \overline{so}^2$ zatém $ABC : abc = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$. Lecz $SA : Sa' = AB : a'b'$, więc też $SO : So' = AB : a'b'$ czyli $SO : so = AB : ab$.

Dwie proporcyje $ABC : abc = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$ i $SO : so = AB : ab$ mnożąc przez siebie i piérwszy stósunek dzieląc przez 3, będzie $ABC \times \frac{1}{3}SO : abc \times \frac{1}{3}so = \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3$. Ale $ABC \times \frac{1}{3}SO$, wyraża objętość piérwszego, zaś $abc \times \frac{1}{3}so$ objętość drugiego czworościanu, przeto prawdą jest, że objętości dwóch czworościanów podobnych mają się w stósunku trzecich potęg krawędzi odpowiednich.

Z tego twierdzenia można zaraz wyprowadzić wniosek, że objętości dwóch wielościanów podobnych, są w stósunku trzecich potęg ich krawędzi odpowiednich. Jeżeli bowiem objętości dwóch wielościanów oznaczymy przez W i w, czworościany składające piérwszy oznaczymy przez C, C′, C″, C‴...... a czworościany składające drugi a odpowiednie piérwszym przez c, c', c'', c'''..... nareszcie jeżeli krawędzie piérwszych czworościanów oznaczymy przez K, K′, K″, K‴...... a im odpowiednie drugich k, k', k'', k'''...... tedy według teraźniejszego twierdzenia mamy proporcyje

$$C : c = K^3 : k^3$$
$$C' : c' = K'^3 : k'^3$$
$$C'' : c'' = K''^3 : k''^3$$

i t. d.

A że wszystkie proste jednymże sposobem w dwóch czworościanach, albo ogólnie wielościanach prowadzone są proporcyjonalne §. 248

zatém $K:k = K':k' = K'':k'' =$ i t. d.

skąd $K^3:k^3 = K'^3:k'^3 = K''^3:k''^3 =$ i t. d.

przeto $C:c = C':c' = C'':c'' = C''':c''' =$ i t. d.

a następnie $C + C' + C'' + C''' + \ldots : c + c' + c'' + c''' + \ldots$

$= C:c = C':c' = C'':c'' =$ i t. d.

Lecz $C + C' + C'' + \ldots = W$, $c + c' + c'' + \ldots = w$,

zatém $W:w = C:c = C':c' = C'':c'' =$ i t. d.

lub nareszcie $W:w = K^3:k^3 = K'^3:k'^3 = K''^3:k''^3 =$ i t. d.

ROZDZIAŁ IV.

Ciała okrągłe (rotunda).

§. 253.

Wszystkie w ogólności ciała ograniczone bąć całkiem bąć tylko po części powiérzchniami krzywemi a po części płaskiemi, nazywamy *okrągłemi.* Ponieważ zaś powiérzchni krzywych tak jak linij krzywych wielka jest rozmaitość i liczba ich nieskończona, z tego powodu i ciał okrągłych jest téż nieskończona liczba. A jako w I. części Geometryi mówiliśmy jedynie o linii krzywéj kołowéj, tak téż z pomiędzy niezliczonego mnóstwa ciał okrągłych, mówić tu tylko będziemy o *trzech* i to nie w całéj ogólności, ale tylko w jednym szczególnym przypadku, t. j. zastanowimy się nad *walcem kołowym prostym*, *ostrokręgiem także kołowym prostym* i *kulą.* Ta ostatnia, jako z ciał najznajomsza, nie stawia żadnéj trudności, iżbyśmy jéj w całéj ogólności nie mieli uważać.

Mówiąc o tych trzech ciałach, uważać naprzód będziemy, jakim sposobem każde z nich powstaje, co zwyczajnie nazywamy *rodzeniem się jego* (generatio); dalej mówić będziemy o powiérzchni, a nareszcie o objętości.

O W a l c u.

§. 254.

Nakréśliwszy na płaszczyznie okrąg koła lub inną krzywą, jeżeli prosta pod jakiémkolwiek nachyleniem do téj płaszczyzny ślizgać się będzie po krzywéj nakréślonéj równolegle do piérwszego swego położenia, tedy wystawiwszy sobie, że ta prosta w całym ciągu swego ruchu, zostawia ślad swéj bytności, zakréśli powiérzchnią krzywą, którą *walcową* nazywamy. Prostą ślizgającą się zwać będziemy *rodzącą,* a rzeczony okrąg koła i w ogólności każdą krzywą na płaszczyznie nakreśloną, *kierownicą.*

Jeżeli tę powiérzchnią przetniemy gdziekolwiek płaszczyzną równoległą od płaszczyzny, na któréj kierownica została nakréśloną, przecięcie to będzie zupełnie równém kierownicy.

Niech bowiem ABCDEF *fig. 252* będzie okręgiem koła mającego służyć za kierownicę, którego środek S, tudzież niech rodząca Aa ślizgając się po tym okręgu równolegle do swego piérwszego położenia zajmuje następnie położenia Bb Cc, Dd i t. d.; niech przecięciem przez płaszczyznę równoległą do piérwszéj będzie figura *abcdef*, potrzeba dowiéść, że ta figura jest okręgiem koła zupełnie równym piérwszemu.

Ze środka S wyprowadźmy prostą równoległą do rodzącéj w którémkolwiek jéj położeniu, niech ta prosta spotyka płaszczyznę przecinającą w punkcie s. Połączywszy punkt S z punktami A, B, C, D, E, F, tudzież punkt s z punktami a, b, c, d, e, f, tak dowodzimy.

Dwie proste Aa i Ss równoległe zawarte między płaszczyznami równoległemi są sobie równe, przeto i dwie proste SA i sa łączące końce piérwszych są sobie równe i równoległe. Dla téj saméj przyczyny sb=SB, sc=SC, sd=SD i t. d. Aże SA=SB=SC= i t. d. zatém i sa=sb=sc= i t. d. przeto figura *abcdef*, jest okręgiem koła a punkt s jego środkiem, co należało dowiéść.

W razie, że kierownica jest krzywą zamkniętą, dwie płaszczyzny równoległe wraz z powiérzchnią krzywą którąśmy walcową nazwali, ograniczają zewsząd przestrzeń, którą *walcem* (cylinder) nazywamy. Ten walec różne przybiéra nazwy stósownie do krzywéj, która służy za kierownicę rodzącéj; gdy atoli przedsięwzięliśmy mówić tylko o walcu kołowym, przeto takim nazywać będziemy walec, którego kierownicą jest okrąg koła.

Dwie płaszczyzny zamykające przestrzeń czyli dwa koła, nazywamy *podstawami* walca dólną i górną.

Prostą łączącą środki dwóch podstaw S i *s* nazywamy *osią walca* (axis). Od położenia osi względem płaszczyzny podstawy, przybiéra także walec nazwę ukośnego lub prostego t. j. jeżeli oś jest prostopadła do podstawy walca, nazywa się *prostym,* przeciwnie *ukośnym.* My tu tylko o piérwszym mówić będziemy.

Prostopadła z któregokolwiek punktu górnéj na płaszczyznę dólnéj podstawy spuszczona, nazywa się *wysokością walca.* W prostym walcu oś jest wysokością. Często jeszcze odróżniają Geometrowie jeden gatunek walca, t. j. jeżeli w walcu prostym wysokość jest równa średnicy jego podstawy, nazywają go w tenczas *walcem równobocznym* (cylinder aequilaterus) Z uwagi, że przecinając walec kołowy płaszczyzną równoległą do podstawy, każde takie przecięcie jest kołem, możnaby sobie jeszcze wystawić walec zrodzony ruchem koła, za podstawę uważanego, równolegle do płaszczyzny podstawy, a zatém i do piérwszego swego położenia, lecz tak, iżby środek jego znajdował się ciągle na prostéj którą wyżéj osią nazwaliśmy.

Walec prosty oprócz dwóch powyższych może jeszcze być zrodzony następującym sposobem. Uważając cztéry boki prostokąta jako proste stale z sobą połączone, jeżeli około jednego z nich obracać będziemy trzy inne ciągle w pierwiastkowym związku między sobą zostające, natenczas bok przeciwległy zakréśli powiérzchnię boczną i będzie prostą rodzącą powiérzchni walca kołowego prostego, dwa zaś przyległe bokowi około którego się obrót odbywa, zakréślą dwa koła t. j. dwie podstawy walca. Bok około którego trzy inne obracamy, będzie osią walca. Ponieważ bok rodzący powiérzchnią boczną walca jest w obrocie swym ciągle równoległym do osi, zatém przeciąwszy walec płaszczyzną przez jego oś przechodzącą, płaszczyzna ta przetnie powiérzchnią boczną walca w dwóch prostych rodzących a podstawy w średnicach tych kół; figura więc z tego przecięcia wypadająca będzie podwójnym prostokątem pierwiastkowego czyli obracanego. A że w obrocie każdy punkt prostéj rodzącéj powiérzchnią krzywą zakreśla okrąg koła, przeto bez wszelkiego innego dowodu wniéść możemy, że każde przecięcie kołowego walca równoległe do podstawy, jest kołem równém podstawie. Prostą rodzącą w każdém jéj położeniu nazywamy także *bokiem walca* (latus) lub *krawędzią*.

§. 255.

Walec z kształtu swego najpodobniejszym jest do graniastosłupa wielościennego mającego za podstawę wielokąt foremny; chcąc więc znaléść tak powiérzchnią, jako téż i objętość jego, porównać go musimy z takim graniastosłupem; już się bowiem nie raz przekonaliśmy, że do poznania jakiéj prawdy przychodzimy jedynie przez porównanie. Kiedy tak jest, wpiszmyż i opiszmy na podstawie walca foremne wielokąty o jednakowéj liczbie boków. Wystawiwszy na tych wielokątach graniastosłupy równéj z walcem wysokości, pierwszy nazwiemy wpisanym a drugi opisanym na walcu. Powierzchnia boczna pierwszego będzie naturalnie mniejszą, powierzchnia zaś drugiego większą od powierzchni krzywéj walca, pierwsza bowiem jest objętą a druga obejmuje powierzchnią walca. Lecz podwajając ciągle liczbę boków wielokątów wpisanego i opisanego i za każdém podwojeniem pomyśliwszy sobie nowe graniastosłupy na tych nowych wielokątach wystawione, dając każdemu z nich wysokość równą wysokości walca, powierzchnie boczne dwóch rzeczonych graniastosłupów zbliżają się nieskończenie do siebie tak, że jako między obwodami ich podstaw różnica może być mniejszą od każdéj ilości jakkolwiek małéj, tak téż i różnica między ich powierzchniami bocznemi mniejsza być może niż wszelka naznaczona ilość jakkolwiek mała. A że powierzchnia krzywa walca środkuje między temi dwiema i jest ich granicą, do której się ciągle zbliżają za powiększeniem liczby ścian obu graniastosłupów, nie mogąc jéj jednak dosięgnąć a tém mniéj przekroczyć, zatem różnica między powierzchnią boczną walca a takąż powierzchnią jednego z rzeczonych graniastosłupów będzie jeszcze mniejszą; na mocy więc rozumowań użytych przy powierzchni koła wniesiemy, że *powierzchnia boczna walca, równa się takiéjże powierzchni graniastosłupa wpisanego lub opisanego o nieskończonéj liczbie ścian.* Ale boczna powierzchnia graniastosłupa prostego według §. 230 *wniosek 1.* równa się iloczynowi z obwodu jego podstawy przez wysokość czyli krawędź jego, zatém, ponieważ w miejsce obwodu podstawy graniastosłupa przychodzi okrąg podstawy walca czyli okrąg koła jako nieskończenie mało, a zatém tak dobrze jak nic, różniący się od pierwszego, *powierzchnia boczna czyli krzywa walca prostego kołowego równa się iloczynowi z okręgu koła służącego mu za podstawę, przez wysokość tegoż walca.*

Oznaczywszy powiérzchnią krzywą walca prostego kołowego przez P, promień jego podstawy przez R, a nareszcie wysokość przez W, ponieważ okrąg koła którego promień R jest $=2\pi R$, zatém $P=2\pi R\times W$, gdzie jak wiadomo $2\pi R$ wyraża długość okręgu koła w linii prostéj. Chcąc mieć całkowitą powierzchnią walca t. j. tak krzywéj jego powierzchni jako téż i dwóch podstaw, tedy, ponieważ powierzchnia każdéj z podstaw $=\pi R^2$, do powyższego iloczynu dodać jeszcze potrzeba $2\pi R^2$. Jeżeli więc oznaczymy całkowitą powierzchnią walca przez $\boldsymbol{P}$, będzie

$$\boldsymbol{P}=2\pi RW+2\pi R^2=2\pi R(W+R)$$

z którego wzoru czytamy, *iż się znajdzie całkowitą powierzchnią walca, mnożąc długość okręgu koła podstawy przez summę z jego wysokości i promienia podstawy:* można téż także powiedzieć, iż *ta powierzchnia równa się prostokątowi mającemu za dwa boki przyległe, okrąg podstawy i summę wysokości i promienia podstawy walca.*

Wniosek 1. Ponieważ w równobocznym walcu jest $W=2R$, zatém jego powierzchnia krzywa $=4\pi R^2$ t. j. równa się cztéry razy wziętéj powierzchni jego podstawy. Całkowita zaś powierzchnia walca równobocznego $=6\pi R^2$ t. j. równa się sześć razy wziętéj powiérzchni jego podstawy.

Wniosek 2. Jako powierzchnią boczną graniastosłupa w przytoczonym wyżéj §. *wniosek 2,* rozpostarliśmy na płaszczyznę, tak téż i powiérzchnią krzywą walca prostego kołowego rozpostrzeć możemy. Z tego rozpostarcia otrzymamy prostokąt mający za podstawę długość okręgu koła podstawy walca, a za wysokość wysokość tegoż, co téż i z wyrażenia téj powierzchni wnieść było można.

Uwaga. Ponieważ tak krzywa powierzchnia walca jako téż i całkowita zależy jak widzimy od długości okręgu podstawy, a tę długość tylko w przybliżeniu otrzymać możemy, zatém i powiérzchnia walca wyżéj wynaleziona jest tylko przybliżoną, to atoli przybliżenie jak wiemy tak blisko prawdy dotyka, iż bez żadnéj obawy za samą prawdę wziętém być może.

§. 256.

Twierdzenie. *W którymkolwiek punkcie okręgu podstawy walca poprowadziwszy styczną do tegoż okręgu, tudzież rodzącą czyli krawędź walca, a potém przez te dwie proste płaszczyznę, ta tylko w téj rodzącéj dotykać się będzie powierzchni krzywéj walca, wszystkie zaś inne jéj punkta leżeć będą za walcem.*

Przez punkt A *fig. 253* na okręgu podstawy walca obrany, poprowadźmy styczną MP i rodzącą czyli krawędź walca A*a,* jeżeli przez te dwie proste przesuniemy płaszczyznę MN, dowieść potrzeba, iż ta oprócz punktów leżących na rodzącéj A*a* nic spólnego nie ma z powierzchnią walcową.

Na dowiedzenie tego przez oś walca S*s* i przez rodzącą A*a* przesuńmy płaszczyznę, ta przetnie podstawy walca w promieniach SA i *sa* równych i równoległych. Powierzchnią walcową przetnijmy gdziekolwiek płaszczyzną równoległą od podstaw walca, ta jak wiemy przetnie walec w kole którego promieniem jest $\sigma\alpha$ spólne przecięcie się téjże płaszczyzny z pierwszą, płaszczyznę zaś MN przetnie w prostéj KO. Według §. 194 *wniosek 3*, tak spólne przecięcia SA, sa, $\sigma\alpha$, jako téż MP, LN, KO są od siebie równoległe, więc kąty SAP, saN i $\sigma\alpha$O są sobie równe. A że kąt SAP jest prosty z założenia, więc i kąt $\sigma\alpha$O jest także prosty t. j. prosta KO jest styczną do okręgu koła z promienia $\sigma\alpha$, a następnie dotyka się go, a zatém i walca w jednym tylko punkcie α. Podobnież okazalibyśmy, że wszystkie proste równoległe od MP a na płaszczyznie MN poprowadzone, w jednym się tylko punkcie dotykają powierzchni walca, tudzież że te wszystkie punkta leżą na rodzącéj Aα; wniesiemy przeto, że płaszczyzna przez styczną do okręgu podstawy i rodzącą poprowadzona, jedynie w téj rodzącéj dotyka powierzchnią walca.

§. 257.

Jak powierzchnią krzywą i całkowitą walca znaleźliśmy przez porównanie go z graniastosłupem mającym za podstawy wielokąty foremne, tak téż i objętość jego znajdziemy, uważając walec jako granicę, do któréj się bez końca zbliżają objętości graniastosłupów, wpisanego i opisanego na walcu, foremne wielokąty za podstawy mających; ciągle bowiem objętość piérwszego będzie mniéjszą, drugiego zaś większą niż objętość walca. Ale kiedy stósownie do tego co wyżéj o powiérzchni walca powiedzieliśmy, objętości dwóch tych graniastosłupów tak nieskończenie zbliżają się do siebie za coraz dalszém powiększaniem liczby ich ścian, że różnica ich stać się może mniejszą niż wszelka naznaczona jakkolwiek mała ilość, zatém różnica objętości walca jako środkującego między niemi, a jednego z tych graniastosłupów będzie tém bardziéj mniéjszą niż piérwsza. Lecz piérwsza różnica może być uczyniona mniéjszą niż wszelka jak najmniéjsza ilość, druga zatém będąc jeszcze mniéjszą, jest prawie żadną, czyli że objętość walca równa się objętości graniastosłupa wpisanego lub na nim opisanego i równą z walcem wysokość mającego, a którego liczba ścian jest nieskończenie wielka. Według §. 229 *wniosek 3*, objętość graniastosłupa równa się iloczynowi z powierzchni jego podstawy przez wysokość, zatém i *objętość walca równa się także iloczynowi z powierzchni jego podstawy przez wysokość.* Oznaczywszy jak wyżéj promień podstawy walca przez R, powierzchnia téj podstawy jest $=\pi R^2$, a oznaczywszy wysokość walca przez W, będzie objętość tegoż walca $=\pi R^2 \times W$.

Wniosek 1. Ponieważ w równobocznym walcu $W=2R$, zatém jego objętość $=2\pi R^3$, a położywszy $R=\frac{S}{2}$, oznaczając przez S średnicę podstawy, wyrażenie objętości walca równobocznego będzie $=\frac{\pi S^3}{4}$.

Wniosek 2. Walce mają się do siebie w złożonym stósunku z wysokości i kwadratów promieni lub średnic swych podstaw. Oznaczywszy bowiem objętości dwóch walców przez $\mathbf{W}$ i $\mathbf{w}$, wysokości jak piérwéj przez W i w, a promienie ich podstaw przez R i r, średnice zaś tychże podstaw przez S i s, ponieważ według poprzedzającego $\mathbf{W}=\pi R^2 W$, $\mathbf{w}=\pi r^2 w$, zatém $\mathbf{W}:\mathbf{w}=\pi R^2 W:\pi r^2 w=R^2 W:r^2 w$. A że $R=\frac{S}{2}$, $r=\frac{s}{2}$ zatém $\mathbf{W}:\mathbf{w}=\frac{S^2}{4}W:\frac{s^2}{4}w=S^2 W:s^2 w$.

Jeżeli $\mathbf{W}=\mathbf{w}$, tedy $R^2 W=r^2 w$ albo $S^2 W=s^2 w$, skąd $W:w=r^2:R^2$ albo $W:w=s^2:S^2$ t. j. *w walcach równych, wysokości mają się w odwrotnym stósunku kwadratów z promieni lub średnic ich podstaw.*

Jeżeli $R=r$ albo co jest jedno $S=s$, tedy $\mathbf{W}:\mathbf{w}=W:w$ czyli, *walce o równych podstawach mają się jak wysokości.*

Nareszcie położywszy $W=w$ będzie $\mathbf{W}:\mathbf{w}=R^2:r^2 =S^2:s^2$ t. j. *walce o równych wysokościach, mają się jak kwadraty z promieni lub średnic ich podstaw.*

§. 258.

Podobnemi walcami nazwiemy te, których osi są proporcyjonalne promieniom lub średnicom ich podstaw i są pod jednakowym kątem do tychże podstaw nachylone. Z tego wypada, że wszystkie walce równoboczne są podobne; jeżeli bowiem osi dwóch walców oznaczymy przez O i o, średnice ich podstaw S i s, ponieważ $O = S$ i $o = s$ według §. 254, zatém $O:o = S:s = R:r$, więc według definicyi walce te są podobne, bo ich osi są proporcyjonalne promieniom ich podstaw.

Podobne walce są w stósunku sześcianów odpowiednich ich wymiarów t. j. ich wysokości albo średnic lub promieni ich podstaw, lub nareszcie osi. Ponieważ bowiem według poprzedzającego §. jest $\mathfrak{W}:\mathfrak{w} = R^2W:r^2w = S^2W:s^2w$, ze środka zatém górnéj podstawy spuściwszy prostopadłą tak w jednym jako i drugim walcu na podstawę dolną, ta będzie wysokością każdego i trójkąty zawarte między osiami prostopadłemi, co dopiéro spuszczonemi i częściami promieni, są podobne jako równokątne, zatém $O:o = W:w$ a z powodu, że walce są podobne, jest téż $O:o = R:r = S:s$, zatém

$$W:w = R:r = S:s.$$

Mnożąc tę proporcyją przez $R^2:r^2 = R^2:r^2$ albo przez $S^2:s^2 = S^2:s^2$ znajdziemy:

$$R^2W:r^2w = R^3:r^3 \text{ albo } S^2W:s^2w = S^3:s^3$$

czyli $\mathfrak{W}:\mathfrak{w} = R^3:r^3 = S^3:s^3 = W^3:w^3 = O^3:o^3$ stósownie do własności proporcyi geometrycznéj.

O Ostrokręgu.

§. 259.

Jeżeli na płaszczyznie nakreślimy okrąg koła i gdziekolwiek za płaszczyzną obierzemy punkt i takowy złączymy z którymkolwiek punktem nakreślonego okręgu, tedy wystawiwszy sobie, że ta prosta, przechodząc zawsze przez obrany punkt, ślizga się po okręgu koła aż dopóki nie powróci do piérwszego swego położenia i zostawia ciągle ślad swéj bytności w każdém położeniu, prosta ta tym sposobem ruch odbywająca, zrodzi powierzchnią krzywą, którą *powierzchnią ostrokręgową* (superficies conica) nazywamy, przestrzeń zaś tąż powiérzchnią krzywą i naprzód nakreśloném kołem ograniczoną, *ostrokręgiem kołowym* (conus) nazwiemy.

Prostą ruchem swoim powierzchnię krzywą tworzącą i tu nazywamy *rodzącą*; okrąg koła po którym się slizga, *kie-*

rownicą, a samo koło *podstawą* (basis); punkt przez który rodząca ciągle przechodzi, *wiérzchołkiem ostrokręgu* (vertex). Rodzącą w każdem jéj położeniu nazywamy jeszcze *bokiem ostrokręgu* (latus) lub *krawędzią* (acies). Prostą łączącą wiérzchołek ze środkiem nakreślonego koła, zowiemy *osią ostrokręgu* (axis). Jeżeli oś jest prostopadła do podstawy, taki ostrokrąg nazwiemy *prostym* (rectus), w przeciwnym razie *ukośnym* (obliquus).

Uwaga 1. Ponieważ za kierownicę użyliśmy okrąg koła, dla tego powierzchnią przez rodzącą utworzoną nazywamy *ostrokręgową kołową*, a ostrokrąg powyżéj opisany *kołowym*. Gdybyśmy za kierownicę użyli inną krzywą, otrzymalibyśmy i w tym przypadku powierzchnią i ostrokrąg ale już nie kołowy; nazwa zaś jego zależałaby od kierownicy.

Uwaga 2. Prostą rodzącą uważaliśmy tu jako mającą pewną długość t. j. jako odległość punktu za płaszczyzną obranego od każdego punktu okręgu koła; atoli gdybyśmy ją uważali jako prostą nieograniczoną i do nieskończoności w obu kierunkach ciągnącą się, natenczas łatwo pojmiemy, że ta prosta w ruchu jakiśmy jéj wskazali, zrodzi dwie powiérzchnie zupełnie sobie podobne, a punktem, który wiérzchołkiem nazwaliśmy, od siebie oddzielone. Dwie te powierzchnie jako przez jednę i tęż samę prostą zrodzone, uważać należy za jednę z dwóch części złożoną, które *powłokami*, po francuzku *nappes*, powiérzchni ostrokręgowéj nazywamy. Tak rzeczywiście uważał Apoloniusz tę powierzchnią na 200 lat przed Chryst. pisząc o przecięciach ostrokręgowych.

§. 260.

Twierdzenie. *Przeciąwszy ostrokrąg kołowy płaszczyzną równoległą do podstawy, przecięcie to będzie kołem.*

Niech z przecięcia ostrokręgu kołowego równolegle do podstawy wypadająca figura będzie *abcdef fig. 254,* potrzeba dowieść, iż ta figura jest kołem. Poprowadziwszy oś ostrokręgu OS, tudzież promienie SA, SB, SC, SD i t. d. przesuńmy przez oś i przez każdy z poprowadzonych promieni płaszczyzny, te przetną płaszczyznę piérwszą w prostych *sa*, *sb*, *sc*, *sd*, i t. d. równoległych do SA, SB, SC, SD i t. d. powierzchnią zaś krzywą w prostych OA, OB, OC, OD i t. d. W trójkącie SAO, *sa* jest równoległą do podstawy SA, przeto według §. 53 jest $SO : so = SA : sa$. Podobnież w trójkącie SBO, *sb* jest równoległą od SB,

zatém $SO : so = SB : sb$. Z trójkąta SCO mamy

również $SO : so = SC : sc$. Z następnych trójkątów znajdziemy też $SO : so = SD : sd$,

$SO : so = SE : se$,

$SO : so = SF : sf$.

Zatém $SA : sa = SB : sb = SC : sc = SD : sd = SE : se = SF : sf$,

A że $SA = SB = SC = SD = SE = SF$,

więc też $sa = sb = sc = sd = se = sf$,

figura przeto *abcdef* jest kołem.

Płaszczyzna przez styczną do okręgu podstawy i rodzącą, albo krawędź w tymże punkcie poprowadzona, dotyka się powierzchni ostrokręgowéj w téj tylko rodzącéj. Dowód zupełnie ten sam jak §. 256.

Z wiérzchołka ostrokręgu O spuściwszy prostopadłą OG na płaszczyznę podstawy, ta będzie jego *wysokością;* niech ta prostopadła spotyka płaszczyznę przecinającą w punkcie *g*; przesunąwszy znowu przez oś OS i przez tę prostopadłą płaszczyznę, ta przetnie płaszczyznę podstawy w prostéj SG, płaszczyznę zaś przecinającą w prostéj *sg*. W trójkącie SOG. prosta *sg* jest równoległą od podstawy SG, zatém $SO : sO = OG : Og$, przeto również $SA : sa = OG : Og$, a następnie $\overline{SA}^2 : \overline{sa}^2 = \overline{OG}^2 : \overline{Og}^2$. Ale SA i *sa* są promienie dwóch kół, powierzchnie zaś tych kół mają się do siebie jak kwadraty z promieni §. 163, przeto *powierzchnie dwóch przecięć ostrokręgu kołowego mają się do siebie w stósunku kwadratów z odległości ich od wiérzchołka*; albowiem OG i O*g* wyrażają odległości przecięć ABCDEF i *abcdef*.

§. 261.

Prosty ostrokrąg, o jakim tu mówić przedsięwzięliśmy, można sobie jeszcze wystawić jako zrodzony przez obrót trójkąta prostokątnego około jednego z boków przyległych kątowi prostemu. W tym obrocie przeciwprostokątnia zrodzi powiérzchnią krzywą ostrokręgu i zastępuje miejsce powyższéj rodzącéj, zaś drugi bok przyległy kątowi prostemu zrodzi koło czyli podstawę ostrokręgu. Bok około którego odbywa się obrót zastępuje miejsce osi. Ponieważ w obrocie trójkąta wskazanym sposobem każdy punkt przeciwprostokątni opisuje okrąg koła, którego promień jest prostopadły do osi, a następnie płaszczyzna tego okręgu równoległa do podstawy, zatém z tego rodzenia się ostrokręgu wprost wnieść można, że każde przecięcie ostrokręgu prostego prostopadłe do jego osi jest kołem. Każda płaszczyzna przez oś poprowadzona, przecina powierzchnią krzywą w dwóch rodzących sobie równych, (są to bowiem dwie pochyłe jednakowo od spodka prostopadłéj odległe), podstawy zaś w średnicy; wszystkie zatém takie przecięcia są trójkątami równoramiennemi i sobie równemi. Wzajemnie jeżeli wszystkie boki ostrokręgu są między sobą równe, ostrokrąg będzie prostym.

Uwaga. W tym drugim sposobie rodzenia się powierzchni ostrokręgu, otrzymujemy tylko jednę jego część, chyba gdybyśmy sobie pomyślili przeciwprostokątnią nieograniczenie przedłużoną w obu kierunkach.

Jeżeli przeciwprostokątnia jest dwa razy większa od boku kreślącego podstawę, czyli co jest jedno, jeżeli każdy bok ostrokręgu równa się średnicy jego podstawy, taki ostrokrąg nazwiemy *równobocznym*.

Euklides nazywa jeszcze *ostrokręgiem prostokątnym* (conus orthogonius) taki, którego kąt przy wiérzchołku zawarty między dwoma przeciwległemi bokami jest prosty, lub co na jedno wychodzi, którego oś równa się promieniowi podstawy.

Jeżeli oś jest większa od promienia podstawy, daje mu Euklides nazwę *ostrokątnego* (conus oxygonius), bo rzeczywiście kąt jego przy wiérzchołku między dwoma przeciwległemi bokami ostrokręgu zawarty jest ostry.

Nareszcie daje nazwę *ostrokręgu rozwartokątnego* (conus amblygonius), takiemu ostrokręgowi, w którym oś jest mniejsza od promienia, bo téż kąt przy jego wiérzchołku jest rozwarty.

§. 262.

Dla znalezienia powierzchni krzywéj ostrokręgu kołowego prostego, porównać znowu należy ostrokrąg z ciałem geometryczném najpodobniejszém. Takiém ciałem, jak to każdy łatwo dostrzeże, jest ostrosłup prosty foremny §. 231. Wpisawszy więc i opisawszy na podstawie ostrokręgu dwa wielokąty foremne i przez każdy bok tak wpisanego jako i opisanego wielokąta, tudzież przez wiérzchołek ostrokręgu poprowadziwszy płaszczyzny, te wraz z wielokątami zamkną ostrosłupy, z których piérwszy wpisanym a drugi na ostrokręgu opisanym nazwiemy.

Bez mego nadmienienia każdy pojmie, że piérwszego powierzchnia boczna jest mniejszą a drugiego większą niż powierzchnia krzywa ostrokręgu. Lecz skoro liczbę boków tak jednego jako i drugiego wielokąta ciągle podwajać i za każdém podwojeniem wystawiać będziemy nowe ostrosłupy, tych powierzchnie boczne coraz mniéj różnić się od siebie będą tak jak obwody ich podstaw coraz bardziéj zbliżają się do siebie. Wystawiwszy sobie oba wielokąty o nieskończonéj lecz zawsze równéj liczbie boków i na nich wystawione ostrosłupy, ich powierzchnie boczne mniéj się od siebie będą różnić niż wszelka ilość naznaczona jakkolwiek mała. A że powierzchnia krzywa ostrokręgu jest obu tych powierzchni granicą, zatém równa się taż powierzchnia bocznéj powierzchni jednego z ostrosłupów; obie bowiem można w nieskończoności wziąść za równe, tém więc bardziéj powierzchnią między niemi środkującą można bez obawy błędu wziąść za jednę z nich; już się albowiem przekonaliśmy nie raz, iż skoro różnica między dwiema ilościami jest taka że jéj wielkości naznaczyć nie można tak, iżby jéj już mniéjszą uczynić nie można, taką różnicę za żadną uważać należy.

Z całego tego rozumowania wniesiemy, że powierzchnia krzywa ostrokręgu kołowego prostego, równa się powierzchni bocznéj ostrosłupa foremnego prostego o nieskończonéj liczbie ścian. Ale ta ostatnia według §. 238 równa się iloczynowi z obwodu podstawy ostrosłupa przez połowę długości ściany, czyli prostopadłéj z wiérzchołka ostrosłupa na bok podstawy spuszczonéj (apothema), która w ostrosłupie o nieskończonéj liczbie ścian miesza się z krawędzią, a krawędź ostrosłupa przechodzi na bok ostrokręgu, zatém *powiérzchnia krzywa ostrokręgu kołowego prostego, równa się iloczynowi z okręgu podstawy przez połowę boku ostrokręgu.*

Oznaczywszy promień podstawy przez R, a bok ostrokręgu K, tedy okrąg jego podstawy jest $=2\pi R$ a powierzchnia jego krzywa $=2\pi R\times\frac{1}{2}K=\pi RK$, całkowita zaś powierzchnia ostrokręgu prostego $=\pi RK+\pi R^2=\pi R\,(K+R)$. Jeżeli wysokość ostrokręgu prostego oznaczymy przez W, ponieważ $K=\sqrt{W^2+R^2}$, powierzchnia jego krzywa będzie

$$=\pi R\sqrt{W^2+R^2},$$ całkowita zaś powiérzchnia $$=\pi R(R+\sqrt{W^2+R^2}).$$

W ostrokręgu równobocznym jest $K=2R$, zatém powierzchnia krzywa takiego ostrokręgu $=\pi R\times 2R=2\pi R^2$ t. j. równa się dwa razy wziętéj powiérzchni podstawy, a całko wita powierzchnia $=3\pi R^2$.

Z wyrażenia powierzchni krzywéj ostrokręgu prostego t. j. z wzoru $2\pi R\times\frac{1}{2}K$ czytamy jeszcze, że ta powierzchnia równa się trójkątowi mającemu za podstawę okrąg podstawy ostrokręgu, a za wysokość bok tegoż ostrokręgu.

Wystawiwszy sobie ostrokrąg prosty jako ostrosłup o nieskończonéj liczbie ścian, możemy zupełnie bok jak powierzchnią boczną tego ostrosłupa według §. 238 rozpostrzeć powierzchnią krzywą ostrokręgu prostego na płaszczyznę. Z takiego rozpostarcia otrzymamy tę powierzchnią jako wycinek kołowy, którego łuk będzie równy okręgowi podstawy, którego promień równa się krawędzi ostrokręgu, a kąt przy środku będzie mniéjszy od cztérech kątów prostych.

Uwaga. Dwie powierzchnie krzywe t. j. walca prostego i ostrokręgu prostego, które mogą być rozpostarte na jednę płaszczyznę, są tylko szczególnym przypadkiem pewnego rodzaju powierzchni, ktore *rozwijalnemi* nazywamy. Francuzi nazywają je *surfaces developables.*

§. 363.

Na mocy tegoż samego porównania z foremnym ostrosłupem i rozumowania, znajdziemy bardzo łatwo objętość ostrokręgu kołowego prostego. Uważając go bowiem jako granicę między ostrosłupem wpisanym a opisanym, jak w poprzedzającym §., wniesiemy, że lubo objętość ostrokręgu jest większą niż objętość ostrosłupa wpisanego, a mniéjszą niż ostrosłupa opisanego, wszelako ponieważ objętości rzeczonych dwóch ostrosłupów za każdém podwojeniem liczby ich ścian zbliżyć się do siebie mogą tak, że różnica ich mniéjszą być może niż wszelka naznaczona jakkolwiek mała ilość, zatém różnica objętości ostrokręgu i jednego z tych ostrosłupów będąc jeszcze mniéjszą, jako ilość środkująca, prawie za żadną uważana być może, że zatém objętość ostrokręgu równa się objętości ostrosłupa wpisanego lub na nim opisanego o nieskończonéj liczbie ścian. Ale objętość tego ostatniego równa się iloczynowi z jego podstawy przez trzecią część wysokości, zatém i *objętość piérwszego równa się iloczynowi z podstawy, do któréj się tamta bez końca zbliża, przez trzecią część wysokości*, czyli wyraźniéj mówiąc, *objętość ostrokręgu prostego kołowego równa się powierzchni koła będącego jego podstawą, rozmnożonéj przez trzecią część wysokości jego.*

Oznaczywszy jak poprzednio promień podstawy przez R a wysokość przez W, objętość ostrokręgu będzie $=\pi R^2 \times \frac{1}{3} W = \frac{\pi S^2 W}{12}$, kładąc $R = \frac{S}{2}$, gdzie S wyraża średnicę podstawy. Jeżeli znowu przez K oznaczymy bok ostrokręgu prostego, tedy ponieważ $W = \sqrt{K^2 - R^2}$, objętość jego będzie $= \frac{1}{3}\pi R^2 \sqrt{K^2 - R^2}$.

W ostrokręgu równobocznym jest $K = 2R$, przeto $W = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$, a następnie jego objętość

$$= \tfrac{1}{3}\pi R^2 \times R\sqrt{3} = \pi R^3 \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi R^3}{\sqrt{3}} = \frac{\pi S^3}{8\sqrt{3}}.$$

Gdyby wysokość ostrokręgu prostego równała się średnicy jego podstawy, czyli gdyby było $W = 2R$, objętość jego będzie $\tfrac{1}{3}\pi R^2 \times 2R = \tfrac{2}{3}\pi R^3 = \frac{\pi S^3}{12}$.

A że $K = \sqrt{W^2 + R^2} = \sqrt{4R^2 + R^2} = R\sqrt{5}$,

skąd $R = \frac{K}{\sqrt{5}}$ zaś $R^3 = \frac{K^3}{5\sqrt{5}}$,

zatém objętość ostrokręgu prostego, którego wysokość równa jest średnicy jego podstawy, jest $= \frac{2\pi K^3}{15\sqrt{5}}$.

Wniosek 1. Ponieważ objętość walca mającego za podstawę koło z promienia R, a za wysokość W, według §. 263 jest $= \pi R^2 \times W$, objętość zaś ostrokręgu też same wymiary mającego, według powyższego $= \pi R^2 \times \tfrac{1}{3}W$, zatém wniesiemy, że objętość ostrokręgu jest trzecią częścią objętości walca mającege z nim tęż samę podstawę i wysokość.

Wniosek 2. Z nauki o proporcyjach wiemy, iż ponieważ między równie wielokrotnemi częściami, taki sam zachodzi stósunek jaki pomiędzy całościami, a każdy ostrokrąg jest trzecią częścią walca o równéj podstawie i wysokości, przeto też same wnioski jak w §. 264 *wniosek* 2, dla ostrokręgów łatwo wyprowadzić możemy.

§. 264.

Definicyja. *Podobnemi ostrokręgami* nazywamy te których osi są proporcyjonalne średnicom podstaw i jednakowo do tychże podstaw, pochylone.

Według tego proste ostrokręgi których wysokości są równe średnicom podstaw są podobne.

Także ostrokręgi równoboczne są podobne, tu bowiem $K = S$ a $W = \sqrt{K^2 - R^2} = \frac{S\sqrt{3}}{2}$. Oznaczywszy w drugim także równobocznym ostrokręgu bok jego przez *k* a promień podstawy przez r, średnicę zaś przez s, będzie też

$$w = \sqrt{k^2 - r^2} = \frac{s\sqrt{3}}{2}, \text{ skąd } W:w = \frac{S\sqrt{3}}{2} : \frac{s\sqrt{3}}{2} = S:s, \text{ zatém}$$

stósownie do definicyi, ostrokręgi te są podobne, bo i osi W i w są prostopadłe do podstaw.

TWIERDZENIE. *Ostrokręgi podobne mają się do siebie w stósunku sześcianów odpowiednich wymiarów.*

Objętości dwóch ostrokręgów oznaczywszy przez O i o, promienie ich podstaw przez R i r, a wysokości przez W i w, mamy $O = \frac{1}{3}\pi R^2 \times W$, $o = \frac{1}{3}\pi r^2 \times w$; zatém $O:o = \frac{1}{3}\pi R^2 W : \frac{1}{3}\pi r^2 w = R^2 W : r^2 w$. Ale spuściwszy prostopadłe W i w, *fig.* 255 z wierzchołków ostrokręgów na podstawy, będzie w trójkątach prostokątnych, oznaczając osi ostrokręgów przez A i a, $A:a = W:w$; lecz także $W:w = K:k = R:r$, bo ostrokręgi z założenia są podobne, skąd $RW^2 : r^2 w = R^3 : r^3$

$$\text{zatém } O:o = R^3 : r^3 = \frac{S^3}{8} : \frac{s^3}{8} = S^3 : s^3 = K^3 : k^3 = A^3 : a^3,$$

$$\text{bo } R^3 : r^3 = K^3 : k^3 = W^3 : w^3 = A^3 : a^3.$$

§. 265.

Do ostrokręgów należy także *ostrokrąg ścięty* (conus truncatus); weźmy przeto pod uwagę jego powierzchnią i objętość.

W jakiéjkolwiek odległości od wierzchołka przeciąwszy ostrokrąg płaszczyzną równoległą do podstawy, przecięcie to jak wiadomo jest kołem. Część ostrokręgu między podstawą i tém przecięciem zawarta, albo raczéj przestrzeń z boku powierzchnią krzywą ostrokręgową a z dwóch stron kołami różnych promieni ograniczona, nazywa się *ostrokręgiem ściętym.* Aby mieć powierzchnią krzywą ostrokręgu ściętego, dosyć jest porównać go z ostrosłupem ściętym §. 239. Oznaczywszy promień podstawy niższéj przez R, a wyższéj przez r, zaś bok czyli krawędź tego ostrokręgu przez K, stósownie do tego co w przytoczonym §. znaleźliśmy, będzie krzywa powierzchnia ostrokręgu ściętego

$$= \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} K = 2\pi K\left(\frac{R+r}{2}\right); \text{ albo, położywszy } \frac{R+r}{2} = \varrho, \text{ bę-}$$

dzie powierzchnia krzywa ostrokręgu ściętego $=2\pi\varrho.K$ t. j. *równa się iloczynowi z okręgu koła średniego między podstawą dolną i górną, czyli okręgu koła którego promień jest średnim arytmetycznym między promieniami obu podstaw, przez krawędź tegoż ostrokręgu.*

Z wyrażenia powierzchni krzywéj ostrokręgu ściętego $\frac{2\pi R + 2\pi r}{2}K$ czytamy jeszcze, że taż powierzchnia równa się powierzchni trapezu mającego za dwa boki równoległe, długości okręgów dwóch podstaw ostrokręgu, a za wysokość krawędź tegoż ostrokręgu. Drugie wyrażenie powierzchni w mowie będącéj, t. j. wyrażenie $2\pi\varrho.K$ wyprowadza się téż łatwo z własności trapezu, a $2\pi\varrho$ wyrażać będzie długość prostéj dzielącéj dwa nierównoległe boki każdy na dwie równe części.

Chcąc mieć całkowitą powierzchnię ostrokręgu ściętego, tedy do powyższego potrzeba dodać $\pi R^2 + \pi r^2 = \pi(R^2 + r^2)$, zatém całkowita powierzchnia ostrokręgn ściętego

$$=\pi\{K(R+r)+(R^2+r^2)\}.$$

Uwaga. Jako powierzchnią krzywą całkowitego ostrokręgu rozwinąć można na jednę płaszczyznę, tak téż i powierzchnią krzywą ostrokręgu ściętego, która jest tamtéj częścią. Rozumiem, że nawet nie potrzebuję rysować figury, bo ją sobie każdy łatwo zrysuje, aby pokazać, że figura z rozwinięcia ostrokręgu ściętego jest *trapezem kołowym* jak ją w §. 170 *uwaga 1* nazwaliśmy. Dwa równoległe boki tego trapezu zastępują dwa spółśrodkowe łuki, których promienie są: bok czyli krawędź całkowitego i krawędź płaszczyzną odciętego ostrokręgu, dwa zaś inne boki nierównoległe lecz równe, są każdy krawędzią ostrokręgu ściętego. Oznaczywszy krawędź całkowitego ostrokręgu K, krawędź odciętego k, a krawędź ściętego $\varkappa$, mamy naprzód $\varkappa = K - k$; potém, powierzchnia wycinka koła z promienia K którego łuk $=2\pi R$, jest $= 2\pi R \times \frac{1}{2}K = \pi RK$, powierzchnia takiegoż wycinka z promienia k, którego łuk $=2\pi r$, jest $=2\pi r \times \frac{1}{2}k = \pi rk$.

A że powierzchnia trapezu kołowego równa się różnicy między temi wycinkami, zatém powierzchnia krzywa ostrokręgu ściętego $= \pi RK - \pi rk = \pi\ (RK - rk)$.

Ale $RK - rk = (R + r)(K - k) = 2\varrho.\varkappa$, bo $K : k = 2R\pi : 2r\pi$ czyli $K : k = R : r$, skąd $Kr = kR$,

zatém powierzchnia krzywa ostrokręgu prostego ściętego $= 2\pi\varrho\varkappa$, jak wyżéj inną drogą znalezliśmy.

§. 266.

Przystąpmy teraz do znalezienia objętości ostrokręgu kołowego prostego płaszczyzną równolegle do podstawy ściętego.

Zupełnie na téj saméj drodze, na któréj znaleźliśmy jego powierzchnią, znajdziemy téż i objętość, t. j. porównywając go z ostrosłupem foremnym ściętym. Uważając znowu ostrokrąg ścięty jako ostrosłup ścięty o nieskończonéj liczbie ścian, powiemy, że objętość pierwszego równa się objętości ostatniego, skoro obwód podstawy tego, zbliża się nieskończenie do okręgu podstawy tamtego. A że objętość ostrosłupa ściętego prostego równa się $\frac{1}{3}W(P + p + \sqrt{Pp})$ §. 236, gdzie P i p są powierzchniami obu podstaw, a W wysokością ostrosłupa ściętego, zatém wziąwszy za P i p ich granice t. j. πR^2 i πr^2, do których się bez końca zbliżają, gdy w tymże czasie objętość ostrosłupa ściętego nieskończenie się także zbliża do objętości ostrokręgu ściętego, otrzymamy objętość ostrokręgu ściętego $= \frac{1}{3}W(\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi^2 R^2 r^2})$

$$= \tfrac{1}{3}\pi W(R^2 + r^2 + Rr) = \pi R^2.\tfrac{1}{3}W + \pi r.^2\tfrac{1}{3}W + \pi Rr.\tfrac{1}{3}W.$$

Ponieważ πRr jest średnią geometrycznie proporcyjonalną między πR^2 i πr^2, zatém z tego ostatniego wyrażenia czytamy to twierdzenie, że *objętość ostrokręgu ściętego, równa się trzem ostrokręgom mającym też samę wysokość* W, *równą wysokości ostrokręgu ściętego, a podstawą piérwszego jest dolna, podstawą drugiego górna, trzeciego zaś średnia geometrycznie proporcyjonalna między temi podstawami ostrokręgu ściętego;* zupełnie zgodnie z §. 236, gdzie geometrycznie zostało dowiedzionóm, że ostrosłup ścięty składa się z trzech ostrosłupów o téjże saméj wysokości a podstawy i t. d.

Wyrażenie objętości ostrokręgu ściętego można jeszcze znaleść następującym sposobem:

ponieważ $R^2+r^2+Rr=(R+r)^2-Rr$

tudzież $R^2+r^2+Rr=(R-r)^2+3Rr$,

zatém objętość jego $O=\frac{1}{3}\pi W\{(R+r)^2-Rr\}$

jako też $O=\frac{1}{3}\pi W\{(R-r)^2+3Rr\}$.

Mnożąc piérwsze z tych wyrażeń przez 3 i dodając do drugiego znajdziemy

$$4O=\tfrac{1}{3}\pi W\{3(R+r)^2+(R-r)^2\}$$
$$=\pi W(R+r)^2+\tfrac{1}{3}\pi W(R-r)^2$$

albo $O=\frac{1}{4}\pi W(R+r)^2+\frac{1}{12}\pi W(R-r)^2$.

Ponieważ $\pi(R+r)^2W$ jest objętością walca, którego promień podstawy $R+r$ a wysokość W, zaś $\pi(R-r)^2W$ jest objętością walca, którego promień podstawy $R-r$ a wysokość W, przeto położywszy

$$\pi(R+r)^2W=\mathfrak{W}_{R+r}$$
$$\pi(R-r)^2W=\mathfrak{W}_{R-r}$$

znajdziemy objętość ostrokręgu ściętego

$$O=\tfrac{1}{4}\mathfrak{W}_{R+r}+\tfrac{1}{12}\mathfrak{W}_{R-r}$$

z którego wyrażenia nawet tablicę łatwo ułożyć można dla ułatwienia obrachowania objętości takich ostrokręgów, dość często w praktyce wydarzających się *).

O Kuli.

§. 267.

Powierzchnie dwóch okrągłych ciał, któreśmy dotąd roztrząsnęli t. j. walca i ostrokręgu kołowego prostego, mogły być dwojakim sposobem zrodzone, mianowicie zaś za pomocą ruchu prostéj pod pewnemi warunkami, lub za pomocą obrotu prostokąta i trójkąta prostokątnego. Ze sposobu ich rodzenia się wypadła téż ich własność, iż mogły być na jednę płaszczyznę rozpostarte czyli rozwinione, dla czego policzyliśmy je do rodzaju powierzchni rozwijalnych. Z powodu drugiego sposobu rodzenia się tych powierzchni t. j. przez obrót pewnéj figury płaskiéj około prostéj stałéj, którąśmy osią obrotu nazwali, policzymy rzeczone dwie powierzchnie

*) Ostatnie wyrażenie objętości ostrokręgu ściętego podał Prof. Grunert w Archiv. der Mathematik und Physik, 22. Th. S. 343.

do innego rodzaju powierzchni krzywych, które *obrotowemi* (tornatae) Geometrowie, a Francuzi *surfaces de Revolution* nazywają. Do tego samego rodzaju powierzchni należy trzecie ciało okrągłe, o którém tu mówić mamy t. j. *kula.*

Jeżeli pólkole ACB *fig. 256* obracać się będzie około swéj średnicy AB jako około osi, a wystawimy sobie, że toż półkole w każdém swém położeniu pozostawia ślad swéj bytności, tedy powróciwszy w obrocie swoim do pierwszego swego położenia, półokręgu ACB zrodzi powierzchnię krzywą którą *powierzchnią kuli* (sphaera), przestrzeń zaś tąż powierzchnią ograniczoną, *kulą* (globus) nazywamy. A jakkolwiek zatrzymano nazwę *sphaera* tak dla wyrażenia powierzchni jako i samego ciała, należy wszelako zawsze pamiętać, używając i polskiego wyrazu *Kula* w obu znaczeniach, że to są dwie rzeczy czyli dwie ilości geometryczne zupełnie od siebie różne, iżby czasem nie wziąść jednéj za drugą.

W obrocie półkola około AB, żaden punkt półokręgu nie zmienia swéj względem środka S odległości; a że wszystkie są jednakowo od niego odległe, zatém każdy punkt powierzchni kuli przez półokręgu zrodzonéj, jest téż w równéj odległości od punktu S. Z tego sposobu rodzenia się kuli, można dać następującą dobitniejszą, niż w §. 244, jéj definicyją. *Kula jest to przestrzeń ograniczona powierzchnią krzywą, któréj każdy punkt jest w jednakowéj odległości od pewnego wewnątrz niéj znajdującego się punktu.* Punkt od którego wszystkie punkta powierzchni kuli jednakowo są odległe, nazywa się jéj *środkiem* (centrum), a stała odległość każdego punktu od środka, *promieniem kuli* (radius). Każda przeto prosta łącząca środek kuli z którymkolwiek punktem jéj powierzchni nazywa się i jest jéj promieniem.

Prosta przez środek kuli przechodząca i w obu kierunkach na powierzchni kuli kończąca się, zowie się *średnicą kuli* (diameter). Jak wszystkie promienie między sobą, tak téż i średnice są między sobą równe, bo każda z nich równa się podwójnemu promieniowi.

Z téj definicyi łatwo wnieść, że kule których promienie są równe, są sobie także równe.

Jak pomiędzy linijami krzywemi okrąg koła, tak pomiędzy powierzchniami krzywemi, albo pomiędzy ciałami okrągłemi, kula jest najprostszą i najznajomszą, tak, że trudno znaleść człowieka, któryby nie miał wyobrażenia koła i kuli, a dlatego starać się będziemy nieco obszerniéj o tém ciele niż o dwóch piérwszych pomówić.

§. 268.

Twierdzenie. *Każde przecięcie kuli w jakimkolwiek kierunku jest kołem.*

W obrocie półkola około średnicy, jak wyżéj widzieliśmy, każdy punkt półokręgu zakreśla okrąg koła, którego promień jest prostopadły do średnicy, około któréj się obrót odbywa, czyli do osi; każde przeto do osi prostopadłe przecięcie kuli jest kołem. A że kula zrodzoną być może obrotem półkola około któréjkolwiek średnicy koła, czyli, ponieważ za oś obrotu wziąść można każdą ze średnic, a tych jest nieskończona liczba, przeto w każdym kierunku znajdzie się średnica kuli, około któréj wystawić sobie można obrót półkola, a następnie w każdym kierunku poprowadzić można płaszczyznę prostopadłą do średnicy przecinającą kulę, przecięcie zaś to według powyższego będzie kołem.

Albo tak: Niech, *fig.* 257, ABCDEF będzie przecięciem kuli, któréj środek S, z tego środka spuściwszy prostopadłą do płaszczyzny przecinającéj, niech ją spotyka w punkcie s. Przez tę prostopadłą i przez punkta A, B, C, D, E, F poprowadziwszy płaszczyzny, te przetną piérwszą płaszczyznę w prostych sA, sB, sC, sD, sE, sF. Poprowadziwszy jeszcze proste SA, SB, SC i t. d., trójkąty prostokątne AsS, BsS, CsS, i t. d., mają bok Ss spólny, tudzież $SA = SB = SC =$ i t. d., zatém przystają do siebie, a następnie i trzecie ich boki są sobie równe t. j. $sA = sB = sC =$ i t. d.; punkta przeto A, B, C, D, E, F i t. d. są jednakowo odległe od punktu s, zatém figura ABCDEF jest kołem.

Wniosek. Z trójkąta np. AsS wypada $As = \sqrt{AS^2 - Ss^2}$, albo położywszy $As = \varrho$, $AS = r$, $Ss = d$, $\varrho = \sqrt{r^2 - d^2}$. Ponieważ r jest promieniem kuli, d odległością płaszczyzny przecinającéj od środka kuli, a ϱ promieniem koła z przecięcia wypadającego, zatém z wyrażenia tego promienia czytamy, że im d będzie większe t. j. im daléj od środka kuli przetniemy ją płaszczyzną, tém koło z tego przecięcia wypadające będzie mniejsze. Położywszy $d = r$ wypadnie $\varrho = 0$ czyli wyrażając słowy, przeciąwszy kulę płaszczyzną w odległości od jéj środka równającéj się promieniowi kuli, koło z tego przecięcia wypadające zamienia się w punkt i płaszczyzna przecinająca w tym przypadku, ten tylko jeden punkt ma spólny z kulą. Taką płaszczyznę, która tylko jeden punkt ma spólny z kulą, nazywamy *styczną*. Płaszczyzna styczna jest prostopadłą do promienia kuli do punktu dotknięcia się płaszczyzny poprowadzonego. Gdy bowiem wszystkie inne punkta płaszczyzny są za powiérzchnią kuli, zatém ich odległości od środka kuli są większe niż punktu dotknięcia, promień przeto do tego punktu poprowadzony, będąc najkrótszą odległością środka kuli od płaszczyzny, musi być do niéj prostopadły, a nawzajem płaszczyzna styczna prostopadła do promienia. Wzajemnie: każda płaszczyzna prostopadła do promienia kuli a w końcu jego poprowadzona, jest styczną do kuli. Położywszy zaś $d = 0$, znajdziemy $\varrho = r$ t. j. przecinając kulę płaszczyzną przez jéj środek przechodzącą, z przecięcia tego wypada koło, którego promień jest równy promieniowi kuli.

Jak przez jeden punkt nieskończoną liczbę płaszczyzn prowadzić można, tak téż nieskończona liczba być może przecięć przez środek kuli przechodzących, których wszystkich promienie będą między sobą równe jako równające się każdy promieniowi kuli. Wszystkie przeto przecięcia kuli przez jéj środek przechodzące, są kołami równemi między sobą. Z powodu, że to są koła największe, jakie z przecięcia kuli otrzymać można, dla rozróżnienia ich od innych, których także nieskończona liczba być może, dano im nazwę *kół wielkich* (circuli maximi), kiedy ostatnie nazwano *kołami małemi.*

Z tego łatwo uczynić wniosek, że każde koło wielkie dzieli kulę na dwie równe części nazwane *półkulami* (hemisphaerium), tudzież że dwa wielkie koła przecinają się zawsze w średnicy kuli; dzielą się przeto wzajemnie na połowę.

§. 269.

Biegunem (polus) bądź wielkiego bądź małego koła, nazywamy punkt na powierzchni kuli, w którym prostopadła do płaszczyzny tegoż koła z jego środka wyprowadzona, spotyka powierzchnią kuli. A że prostopadła jako prosta spotyka powierzchnią kuli w dwóch punktach, zatém każde koło z przecięcia kuli wypadające, ma dwa bieguny na powierzchni kuli i na średnicy prostopadłéj do płaszczyzny koła leżące. Jeżeli do téjże saméj średnicy poprowadzimy ilekolwiek prostopadłych płaszczyzn, z tych każda przetnie kulę w kole, którego biegunami będą końce średnicy; z czego widzimy, iż też same punkta są biegunami nieskończonéj liczby kół prostopadłych do średnicy przez te bieguny przechodzącéj albo równoległych od siebie. W takim razie średnica przybiera nazwę *osi.*

Osią koła wielkiego jest średnica kuli prostopadła do jego płaszczyzny, a jéj końce są biegunami.

Jeżeli przez oś poprowadzimy ilekolwiek płaszczyzn, te przetną kulę w kołach wielkich, których płaszczyzny będą prostopadłe do wszystkich kół prostopadłych do osi. Pierwsze koła wielkie nazywamy zwyczajnie *południkami* (meridiani) drugie zaś, z powodu że są równoległe od siebie, *równoleżnikami* (paralleli).

Niech, *fig.* 258, ABCD będzie przecięcie kuli, a zatém koło którego środek *s*; wyprowadziwszy z tego środka prostopadłą do płaszczyzny koła, ta przejdzie przez środek kuli i spotka jéj powierzchnią w dwóch punktach P i *p*, które będą biegunami tego koła i wszystkich do niego równoległych, a średnica P*p* będzie ich osią. Jeżeli przez tęż oś poprowadzimy południki, te przetną płaszczyznę koła ABCD w prostych, które będą średnicami tegoż koła tak, że sA, sB, sC, sD będą jego promieniami, a zatém między sobą równe. Poprowadziwszy cięciwy AP, BP, CP, DP, w trójkątach AsP, BsP, CsP, DsP prostokątnych przy s, bok sP jest spólny, tudzież $sA = sB = sC = sD$, zatém także $AP = BP = CP = DP$. A że cięciwom równym w témże samém lub w kołach równych odpowiadają łuki równe, zatém łuki AP, BP, CP, DP są sobie równe. Toż samo okazalibyśmy dla łuków Ap, Bp, Cp, Dp. Bieguny przeto mają tę własność, że każdy z nich jest w jednakowéj odległości od każdego punktu okręgu koła, którego są biegunami.

Przeciąwszy tęż samę kulę przez środek, lecz płaszczyzną równołegłą do piérwszego przecięcia, otrzymamy koło wielkie RQ. Płaszczyzny południków będąc do tego koła prostopadłe, przecinają go w średnicach kuli. Ponieważ kąt PSQ jest prosty, a miarą jego jest łuk PQ, zatém ten łuk równa się ćwiartce okręgu, przeto każdy z biegunów jest o 90^0 odległy od każdego punktu okręgu koła wielkiego którego są biegunami.

Ponieważ wszystkie południki przechodząc przez oś, są prostopadłe do każdego z kół prostopadłych do osi, zatém spólném przecięciem się południków jest oś, wszystkie zaś ich okręgi przecinają się w biegunach P i p. Oprócz tego łuki tych południków jak AP, BP i t. d. RP, QP i t. d. są prostopadłe do łuków równoleżników AB, BC i t. d. RQ, gdyż płaszczyzny na których te łuki leżą, są do siebie prostopadłe.

Ta uwaga podaje nam łatwy sposób znalezienia na powierzchni kuli bieguna danego koła; poprowadziwszy bowiem na powierzchni kuli, z którychkolwiek dwóch punktów okręgu koła danego dwa łuki prostopadłe do jego płaszczyzny, punkta ich wzajemnego przecięcia się z sobą będą biegunami szukanemi. Jeżeli chodzi o bieguny wielkiego koła, tedy te można téż znaléść prowadząc z któregokolwiek punktu okręgu danego koła łuk prostopadły do płaszczyzny jego i odcinając na nim, poczynając od okręgu, łuk $= 90^0$, a koniec jego będzie jednym z biegunów. Nawzajem gdyby dany był na powiérzchni kuli biegun wielkiego koła, a żądano wynaléść okrąg tegoż koła, potrzebaby z danego bieguna, otwartością cyrkla równą cięciwie łuku 90^0, zakreślić na powierzchni kuli okrąg koła, a ten będzie okręgiem koła szukanego*). Z tego wynika, że płaszczyzna wielkiego koła przechodzącego przez bieguny innego wielkiego koła, jest prostopadłą do płaszczyzny tego ostatniego; nawzajem: jeżeli dwa koła wielkie są do siebie prostopadłe, okrąg jednego przechodzi przez bieguny drugiego koła.

§. 270.

Twierdzenie. *Każda płaszczyzna przez punkt dotknięcia się płaszczyzny stycznéj poprowadzona, przecina kulę w wielkiém lub małém kole, płaszczyznę zaś styczną w prostéj, która jest styczną do okręgu tegoż koła.*

Gdyby prosta z przecięcia się dwóch płaszczyzn wypadająca była cięciwą nie styczną do okręgu koła, t. j. miała dwa punkta z nim spólne, tedy, ponieważ taż prosta leży na płaszczyznie stycznéj a okrąg koła na powierzchni kuli, płaszczyzna styczna musiałaby mieć także przynajmniéj dwa punkta spólne z kulą, co według definicyi téj płaszczyzny w żaden sposób być nie może, więc i t. d.

Wniosek. Jeżeli przez oś kuli poprowadzimy dwa jakiekolwiek południki, te przetną płaszczyznę styczną w dwóch prostych stycznych do tychże południków, a zatém prostopadłych do osi, a powiérzchnią kuli w dwóch okręgach kół wielkich.

Ponieważ oba południki przecinają się w osi czyli średnicy kuli, a kąt jaki powyższe styczne do południków czynią między sobą mierzy kąt ich pochyłości, poprowadziwszy przeto przez środek kuli płaszczyznę równoległą do płaszczyzny stycznéj, ta przetnie oba południki w dwóch promieniach także prostopadłych do osi, a zatém równoległych do

*) Do kreślenia okręgów na powierzchni kuli są cyrkle, nazywające się sferycznemi. Przy ich pomocy można na powierzchni kuli równie wygodnie jak zwyczajnemi na płaszczyznie kréślić okręgi kół.

owych stycznych; kąt więc zawarty między stycznemi równa się kątowi między promieniami. A że miarą kąta między promieniami jest łuk koła wielkiego zawarty między południkami, zatém miarą pochyłości dwóch południków jest łuk koła wielkiego do tych południków prostopadłego zawarty między temiż południkami.

§. 271.

Definicyje. Część powierzchni kuli zawarta między dwiema płaszczyznami równoległemi, nazywa się *pasem sferycznym* (zona sphaerica), a płaszczyzny, jego *podstawami*.

Jeżeli jedna z płaszczyzn staje się styczną kuli, natenczas pas nazywa się *czaszką sferyczną*, po francusku *la calotte sphérique*. Taka czaszka ma tylko jednę podstawę.

Część powierzchni kuli zawartą między dwoma południkami, nazwał Jan Sniadecki *taśmą śpiczastą*, Francuzi nazywają taką część powiérzchni kuli *le fuseau* *).

Odcinkiem kulistym (segmentum sphaericum) nazywamy część kuli między dwiema równoległemi płaszczyznami zawartą. Te płaszczyzny są jego podstawami równie jak pasu, który z boku ten odcinek ogranicza. W przypadku, że jedna z płaszczyzn jest styczną, odcinek kuli nazywa się o *jednéj podstawie* i ta część kuli nazywa się właściwie *odcinkiem*, piérwszéj zaś dajemy w polskim języku nazwę *kloca kulistego.*

Wysokością pasu lub odcinka jest odległość dwóch jego podstaw od siebie, albo co na jedno wychodzi, prostopadła z któregokolwiek punktu jednéj, na płaszczyznę drugiéj podstawy spuszczona.

Część kuli ograniczoną dwiema płaszczyznami południków i dwukątem nazywamy *klinem kulistym*, po francuzku *onglet sphérique.*

---

*) Możeby nie zła była nazwa na tę część powierzchni kuli, *dwukąt sferyczny.* Gdy bowiem dwiema prostemi nie można ograniczyć miejsca na płaszczyznie, a tém mniéj w przestrzeni, zatém zdaje mi się, iż ta nazwa cechowałaby rzeczywiście figurę dwukątną, a zatém i dwuboczną, któréj bokami są krzywe; przymiotnik zaś *sferyczny* odróżni dwukąt na powierzchni kuli od podobnegoż dwukąta na innéj powierzchni krzywéj.

Trójkątem sferycznym (triangulum sphaericum) nazywać będziemy miejsce na powierzchni kuli trzema łukami kół wielkich ograniczone.

Wielokątem sferycznym (polygonum sphaericum), nazwiemy miejsce na powiérzchni kuli ilukolwiek łukami kół wielkich ograniczone.

Z wiérzchołka trójścianu jako ze środka wystawiwszy sobie zakreśloną kulę jakimkolwiek promieniem, powiérzchnia jéj przetnie ściany tego trójścianu w łukach kół wielkich przecinających się wzajemnie na krawędziach trójścianu. Trzy te łuki ograniczą pewną część powierzchni kuli którąśmy wyżéj trójkątem sferycznym nazwali.

Tym samym sposobem postąpiwszy z kątem wielościennym wypukłym §. 204 t. j. wystawiwszy sobie z jego wiérzchołka zakréśloną kulę dowolnego promienia, jéj powiérzchnia przetnie każdą ścianę w łuku koła wielkiego, które przetną się po dwa na krawędziach kąta i ograniczą część powierzchni kuli wyżéj wielokątem sferycznym nazwaną.

Z tego co się w §. 204 o kątach bryłowych wielościennych wypukłych powiedziało, łatwo wniéść, że tak trójkąt jako i wielokąt sferyczny koniecznie znajdować się musi na jednéj półkuli, którą wyznacza którakolwiek ściana wielościanu rozszérzona na wszystkie strony; przechodząc bowiem przez środek kuli, podzieli ją na dwa półkula, a rzeczony wielokąt leżeć będzie całkiem na jednéj z nich.

Łuki kół wielkich, w których powierzchnia kuli z wiérzchołka trójścianu jako ze środka zakreślona przecina jego ściany, są oczywiście miarami kątów płaskich trójścian składających, kąty zaś dwuścienne czyli kąty pochyłości każdych dwóch ścian są według §. 270 równe kątom jakie czynią między sobą styczne do tych łuków w punktach ich przecięcia się z sobą poprowadzone; a że zamiast tych ostatnich kątów wziąść można kąty jakie czynią między sobą łuki, zatém w każdym trójkącie sferycznym łuki, które *bokami* zwać będziemy, są miarami kątów płaskich kąt trójścienny składających, kąty zaś są miarami pochyłości ścian.

Ponieważ tak trójkąt jako i wielokąt sferyczny leży całkiem na jednéj półkuli, więc boki jego muszą być każdy mniejszy niż półkole czyli 180^0 i takie téż tu jedynie trójkąty uważać będziemy.

§. 272.

Rozszérzywszy wszystkie trzy ściany kąt trójścienny składające na wszystkie strony, wiemy z §. 205, że podzielą całą przestrzeń na ośm części, czyli że powstanie stąd ośm kątów trójściennych. A że te tak rozszérzone płaszczyzny przecinają powiérzchnią kuli w łukach kół wielkich, przeto i powiérzchnią kuli podzielą także na ośm trójkątów sferycznych. Wszystkie zatém twierdzenia o kątach trójściennych w rozdziale II. dowiedzione tu w całéj obszerności mają swoje zastósowanie, kładąc tylko wszędzie zamiast kątów płaskich boki, a zamiast kątów dwuściennych czyli pochyłości, kąty trójkąta sferycznego, który uważać można za podstawę kąta trójściennego wiérzchołek w środku kuli mającego. A tak:

1°. *W każdym trójkącie sferycznym summa dwóch którychkolwiek jego boków jest większa od boku trzeciego;* bo summa dwóch którychkolwiek kątów płaskich jest większa od trzeciego kąta §. 207, a łuki składające boki trójkąta sferycznego zakreślone będąc jednymże promieniem, służą za miary tym kątom.

2°. *Summa trzech boków trójkąta sferycznego jest zawsze mniejsza niż okrąg koła czyli niż 4R;* bo summa kątów płaskich kąt trójścienny składających jest mniejsza niż 4R, §. 208. Również summa wszystkich boków wielokąta sferycznego mniejsza jest niż 4R, §. 214.

3°. Z §. 214 wiemy, że w kącie trójściennym summa trzech jego kątów ściennych czyli kątów pochyłości, jest zawsze większa niż 2R a mniejsza niż 6R, i że ta summa przejść może przez wszystkie wielkości począwszy od 2R aż do 6R, a dlatego *trójkąty sferyczne mogą być nietylko ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne, jak prostokreślne, ale téż być mogą o jednym, dwóch lub trzech kątach prostych zgodnie z §. 205.*

4°. *W trójkącie sferycznym naprzeciwko boków równych leżą kąty równe i odwrotnie, §. 209* i t. d.

§. 273.

Definicyja. Mając dany na powierzchni kuli trójkąt ABC *fig. 259*, jeżeli z wiérzchołków jego A, B, C, otwartością cyrkla równą cięciwie 90° wziętych na okręgu koła wielkiego, zakreślimy łuki, te przetną się wzajemnie w punktach A', B', C' i ograniczą inny trójkąt A'B'C', który zowie się *biegunowym* piérwszego.

Własności trójkąta biegunowego. Przedłużywszy boki trójkąta ABC aż do przecięcia się z bokami trójkąta biegunowego w punktach D, E, F, G, H, I, ponieważ punkt A jest biegunem łuku B'C', zatém AF = 90° i AG = 90°, a łuk GF jest miarą kąta A. Punkt A' leży na przecięciu się dwóch łuków B'A' z punktu C i C'A' z punktu B zakreślonych, zatém ten punkt A' jest w równéj odległości tak od B jako i od C, i od każdego 90°, jest zatém biegunem łuku BC, a następnie A'E = 90°, A'H = 90°. Podobnież okazać można, że punkt B' jest biegunem łuku AC, a punkt C' biegunem łuku AB i że B'D = 90°, B'G = 90°, C'F = 90°, C'I = 90°, a nareszcie, że HI jest miarą kąta B a DE miarą kąta C; będzie więc można wziąść za kąt A, łuk FG, kąt B za HI, a kąt C za łuk DE. Oznaczywszy w trójkącie ABC boki przeciwległe przez a, b, c, zaś w trójkącie A'B'C' przez a', b', c',

ponieważ $B'C' = B'G + C'F - FG$

zatém $a' = 90^\circ + 90^\circ - A = 180^\circ - A$

i podobnież $b' = 180^\circ - B$, $c' = 180^\circ - C$.

Ponieważ A', B', C' są biegunami boków trójkąta ABC, zatém miarą kąta A' jest łuk HE, a dlatego

$$A' = HE = BH + CE - BC = 90^\circ + 90^\circ - BC$$

czyli $A' = 180^\circ - a$ i podobnież $B' = 180^\circ - b$, $C' = 180^\circ - c$. Zbierając pod jeden rzut oka te zrównania i pisząc je następnie

$$A + a' = 180^\circ \qquad A' + a = 180^\circ$$
$$B + b' = 180^\circ \qquad B' + b = 180^\circ$$
$$C + c' = 180^\circ \qquad C' + c = 180^\circ$$

dostrzeżemy téj własności trójkąta biegunowego, że naprzód, *dany trójkąt jest nawzajem biegunowym drugiego* t. j. oba trójkąty są w takim z sobą związku, że jeden drugiego jest biegunowym— powtóre, że *boki jednego z nich z przeciwległemi kątami drugiego, spełniają się do dwóch kątów prostych czyli do 180°*; dlatego też te trójkąty nazywają jeszcze *spełniającemi się* (trianguli supplementarii). Porównawszy własność trójkątów biegunowych z trójściennemi kątami *spełniającemi się* §. 206, dostrzeżemy zupełne ich podobieństwo i te ostatnie z tamtych wprost wyprowadzonemi być mogły.

Wniosek. Ponieważ

$$A+B+C+a'+b'+c'=3.180^{\circ}=3.2R=6R,$$

więc skoro tylko trójkąt ABC istnieje, trójkąt też A'B'C' istnieć musi, a w poprzedzającym §. 2° pokazaliśmy, że

$$a'+b'+c'<4R,$$

zatém $A+B+C>2R$; a kiedy $a'+b'+c'$ zawsze jest różne a mianowicie większe niż zero, to też $A+B+C$ musi być zawsze mniejsze niż 6R, zgodnie z §. 208 *wniosek* t. j. *summa trzech kątów trójkąta sferycznego zawsze jest mniejsza niż 6R, a większa niż 2R.* Ta summa może się zbliżyć do każdéj z tych granic tak jak chcemy i dla tego to trzy kąty trójkąta sferycznego mogą być wszystkie trzy ostre, proste lub nawet rozwarte, jak to już wyżéj wspomnieliśmy.

Jeżeli w trójkącie sferycznym dwa kąty są proste, dwa boki im przeciwległe są równe i każdy $=90^{\circ}$, taki przeto trójkąt jest równoramiennym, a wiérzchołek trzeciego jego kąta jest biegunem boku trzeciego. Jeżeli zaś w trójkącie sferycznym każdy jego kąt jest prostym, każdy z trzech jego boków jest ćwiartką okręgu koła, a sam trójkąt będzie $\frac{1}{8}$ częścią powierzchni kuli. (Porównaj §§. 205 i 215).

§. 274.

Twierdzenie. *Dwa trójkąty sferyczne na jednéjże kuli lub na dwóch kulach równych są równe,*

1° *jeżeli mają po boku równym i po dwa kąty tym bokom przyległe także równe i podobnie położone,* albo też *jeże-*

li mają po dwa boki równe każdy każdemu i podobnie ułożone z kątem między niemi zawartym równym.

2⁰ *jeżeli mają po trzy boki równe każdy każdemu i podobnie ułożone,* albo *trzy kąty w jednym równe trzem kątom w drugim trójkącie i podobnie ułożone.*

3⁰ mogą téż trójkąty być równe, *jeżeli mają po dwa boki równe każdy każdemu i podobnie ułożone, tudzież po kącie jednemu z nich przeciwległym,* albo, *jeżeli mają po dwa kąty równe każdy każdemu i podobnie ułożone, tudzież po boku jednemu z nich przeciwległym.*

W trzecim przypadku powiedzieliśmy że tylko *mogą*, bo rzeczywiście ten przypadek ma wiele warunków czyli zastrzeżeń.

Jak widzimy, zamyka to twierdzenie sześć różnych przypadków, które jednak powiązane są z sobą po dwa, na mocy własności trójkąta biegunowego.

Dla dowiedzenia tego twierdzenia, najprościéj a razem najłatwiéj postąpimy wracając do równości kątów trójściennych §. 211, 212, 213; a położywszy na sobie w każdym przypadku kąty trójścienne przy środku téjże saméj lub przy środkach kul równych tym trójkątom odpowiadające, dostrzeżemy, iż za przystaniem kątów trójściennych, czego już w przytoczonych §§. dowiedliśmy, i trójkąty sferyczne przystają.

Uwaga 1. Przestrzeń ograniczoną z trzech stron płaszczyznami w jednym punkcie schodzącemi się a z czwartéj trójkątem sferycznym, nazywamy *czworościanem sferycznym* (tetraëdrum sphaericum). Skoro trójkąty sferyczne przystają do siebie, tém samém i czworościany sferyczne przystają. Część zaś kuli czyli przestrzeń ograniczoną z boku płaszczyznami w jednym punkcie (w środku kuli) schodzącemi się i wielokątem sferycznym zamkniętą, nazywamy *ostrosłupem sferycznym* (pyramis sphaerica).

Uwaga 2. Są przypadki, gdzie dwa trójkąty sferyczne mają wszystkie elementa między sobą równe, ale nie jednakowo ułożone, w takim razie mówimy, że dwa takie trójkąty są *symetryczne*, odpowiadają one bowiem dwom kątom tró.j-ściennym symetrycznym §. 210. W przypadku atoli trójkątów sferycznych *równoramiennych* t. j. takich, że dwa boki w każdym są między sobą równe i równe dwom odpowiadającym bokom w drugim trójkącie, oprócz symetryczności są sobie równe i przystają do siebie, bo odpowiadają kątom trójściennym równościennym §. 210, które też, jak już wiemy, przystają do siebie.

§. 275.

Twierdzenie. *Dwa trójkąty sferyczne symetryczne są sobie równe co do powiérzchni.*

Niech dwa trójkąty ABC i A'B'C' *fig. 260* będą symetryczne, mamy dowieść, iż są równoważne czyli równe sobie co do powiérzchni. Na ten koniec przez trzy punkta A, B, C, poprowadźmy płaszczyznę, która przetnie kulę w kole małém, niech punkt P będzie jednym z biegunów tego koła, leżącym z téjże saméj strony środka kuli jak koło małe, zatém AP = BP = CP §. 269. Na powiérzchni trójkąta A'B'C' przy punkcie A' poprowadźmy łuk czyniący z bokiem A'B' kąt równy kątowi PAB, a odciąwszy na tym łuku A'P' = AP będzie kąt P'A'B' = PAB; nareszcie przez punkta P' i B', P' i C' poprowadziwszy łuki kół wielkich, mamy: w dwóch trójkątach ABP i A'B'P' kąt PAB = P'A'B' z wykreślenia, tudzież AP = A'P' także z wykreślenia, zaś AB = A'B' z założenia, zatém według poprzedzającego §. będąc równoramiennemi, przystają do siebie. Dla téj saméj przyczyny trójkąty APC i A'P'C' przystają do siebie, bo kąt PAC = P'A'C', gdyż z założenia BAC = B'A'C', a z wykreślenia PAB = P'A'B' i do tego są równoramienne, gdyż PA = PC i P'A' = P'C'. Nareszcie zupełnie z tego samego powodu trójkąty PCB i P'C'B' przystają do siebie. Ale ABC = ACP + BAP — BCP zaś A'B'C' = A'C'P' + B'A'P' — B'C'P', zatém ABC = A'B'C'.

Uwaga. Punkt P' przez powyższe wykreślenie wyznaczony, jest też biegunem małego koła przez punkta A', B', C' przechodzącego.

§. 276.

Twierdzenie. *Najkrótszą odległością dwóch punktów na powiérzchni kuli, jest mniejszy łuk koła wielkiego przez też punkta przechodzącego.*

Aby to twierdzenie dowieść sposobem najwłaściwszym, poprzedźmy go inném przybraném z planimetryi, że *łuk koła wykreślonego na jakiejkolwiek cięciwie mniejszym promieniem, zamyka więcéj stopni i jest zarazem dłuższy niż łuk innego koła na téjże saméj cięciwie, promieniem większym zakreślony.*

Niech na prostéj AB *fig. 261* jako na cięciwie wykreślone będą dwa łuki AMB i AM'B, piérwszy promieniem SA, drugi promieniem S'A, gdzie S'A $>$ SA. Samo spojrzenie na figurę przekonywa nas dostatecznie o rzetelności założonego twierdzenia, albowiem droga od A do B po łuku AM'B jest zamknięta drogą po łuku AMB, łuk więc AMB musi być większy niż łuk AM'B jako rzecz obejmująca od objętéj.

Że téż łuk AMB więcéj zajmuje stopni z całego swego okręgu niż łuk AM'B z swego, jest także oczywistém; gdy bowiem kąt ASB $>$ AS'B, a te kąty są mierzone łukami AMB i AM'B, więc téż pierwszy więcéj zajmuje stopni niż drugi.

Po tém przygotowaniu bardzo łatwo jest dowieść założonego twierdzenia. Gdy bowiem na powierzchni kuli tylko po okręgu koła bądź to wielkiego, bądź małego, lub téż po obwodzie wielokąta sferycznego postępować można, zatém wystawiwszy sobie przez dane dwa punkta łuk koła wielkiego, małego i część wielokąta sferycznego przechodzące, tedy najprzód w tym ostatnim przypadku część rzeczonego wielokąta z łukiem koła wielkiego kończące się w punktach danych, zamykają wielokąt sferyczny, w którym każdy bok jest mniejszy, niż summa wszystkich innych; zatém bok należący do koła wielkiego jest mniejszy niż summa wszystkich innych stanowiących część obwodu wielokąta sferycznego, bądź to łukami kół wielkich, bądź łukami kol małych zawartego. W przypadku piérwszym t. j. gdy przez dwa dane punkta przechodzi łuk koła małego, wiemy z §. 268, że promień takiego koła jest zawsze mniejszy niż promień kuli, a zatém i koła wielkiego; a dlatego, ponieważ łatwo sobie wystawić tak łuk koła wielkiego, jako i małego na téjże samćj cięciwie (na prostéj dwa dane punkta łączącéj), chociaż nie na jednéjże płaszczyznie wykreślone, według twierdzenia przygotowawczego, łuk należący do mniéjszego promienia jest dłuższy, niż łuk do większego promienia należący; zatém łuk koła wielkiego jest krótszy, niż łuk koła małego, przez dane dwa punkta na powiérzchni kuli przechodzących, co należało dowieść.

§. 277.

Podzieliwszy pół okręgu koła wielkiego, na ilekolwiek części równych, a przez punkta podziałów i bieguny tegoż koła poprowadziwszy płaszczyzny, te przeciąwszy się wzajemnie w osi przez bieguny przechodzącéj, przetną powiérzchnią kuli w południkach i podzielą całą jéj powiérzchnią na dwarazy tyle dwukątów czyli taśm śpiczastych, na ile części podzieliliśmy półkole, albo podzielą te południki tak powiérzchnią kuli, jako téż i okrąg wielkiego koła na jednakową liczbę części. Ponieważ miarą kąta pochyłości dwóch południków czyli kąta dwukąta, jest łuk koła wielkiego, między temiż południkami zawarty, §. 270 *wniosek*, przeto kiedy miary kątów dwukątów są sobie równe, i kąty w biegunie są między sobą równe, a następnie wszystkie dwukąty są także między sobą równe; jeden zatém z tych dwukątów taką jest częścią całej powiérzchni kuli, jaką częścią jest jego kąt w biegunie względem 4R.

Wziąwszy trójkt sferyczny o trzech kątach prostych, który jak w §. 273 *wniosek* widzieliśmy jest $\frac{1}{8}$ powiérzchni kuli, *za jednostkę* do mierzenia powiérzchni wielokątów sferycznych, będziemy mogli wystawić całą powiérzchnią kuli przez 8. Oznaczywszy powiérzchnią dwukąta przez D, a kąt jego przez A, według poprzedzającego będzie

$$\frac{D}{8} = \frac{A}{4}, \text{ skąd } D = 2A$$

t. j. *powiérzchnia dwukąta równa się dwarazy wziętemu jego kątowi*. Używając tego wyrażenia pamiętać potrzeba, iż w nim są dwie jednostki t. j. D odniesioném jest do trójkąta sferycznego o trzech kątach prostych na téjże saméj kuli, na któréj D uważamy nakreślonego, zaś A ma za jednostkę kąt prosty, tak że téż można napisać $\frac{D}{1} = \frac{2A}{90}$. Tak np. gdyby kąt A był równy 30°, tedy według proporcyi będzie

$$\frac{D}{8} = \frac{30}{360} = \frac{1}{12}, \text{ skąd } D = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Albo $D = \frac{2.30^0}{90} = \frac{2}{3}$ t. j. powiérzchnia takiego dwukąta jest $\frac{2}{3}$ powiérzchni trójkata sferycznego o trzech kątach prostych czyli $\frac{1}{12}$ całéj powiérzchni kuli.

§. 278.

Szukajmy teraz powiérzchni trójkąta sferycznego. Poprowadziwszy płaszczyznę przez środek kuli, podzielimy ją na dwa półkola wiérzchnie i spodnie. Przez tenże środek kuli poprowadźmy jeszcze dwie inne płaszczyzny, które przetną kulę w kołach wielkich ACA'A i BCB'B *fig. 262*. Dwa te koła wielkie z piérwszém przecinają się w punktach A, A' i B, B', same zaś z sobą w punktach C i C'. Przez to wzajemne przecięcie się ograniczają na półkulu wiérzchniém trójkąt ABC, a na spodniém trójkąt A'B'C'.

Ponieważ ACA' $= 180^0$, i CA'C' $= 180^0$, więc AC = A'C'.
Podobnież BCB' $= 180^0$, i CB'C' $= 180^0$, zatém BC = B'C'.
Nareszcie ABA' $= 180^0$, i BA'B' $= 180^0$, zatém AB = A'B'.
Trójkąty więc ABC i A'B'C' mające wszystkie boki i wszystkie kąty między sobą równe, są symetryczne, a jako takie mają powiérzchnie równe §. 275. Przypatrzywszy się z uwagą, bez trudności dostrzeżemy, że półkuli wiérzchnie składa się z dwukąta ABA'A, dwukąta BAB'B zmniejszonego trójkątem ABC i z dwukąta CB'C'A'C zmniejszonego trójkątem A'B'C', czyli jemu równym ABC. Według poprzedzającego §. powiérzchnia piérwszego dwukąta jest = 2A, drugiego 2B, a trzeciego 2C; powiérzchnia zaś kuli, biorąc za jednostkę

powierzchnią trójkąta sferycznego o trzech kątach prostych wyraża się, jak z §. 273 *wniosek* wiemy, przez 8, zatém powierzchnia połowy kuli wyrazi się przez 4. Będzie więc według tego co poprzedziło, jeżeli powierzchnią trójkąta ABC oznaczymy przez S,

$$2A+2B-S+2C-S=4$$

czyli $$2(A+B+C)-2S=4$$

albo $$A+B+C-S=2$$

skąd $$S=A+B+C-2$$

Ponieważ A, B, C, wyrażają kąty trójkąta sferycznego, zaś 2 znaczy dwa kąty proste czyli 180^0, zatém powierzchnia tegoż trójkąta wyrazi się, $S=A+B+C-180$. A że z przywiedzionego co dopiéro §. wiemy,

że $$A+B+C>180,$$

zatém $$A+B+C-180$$

wyraża nadmiar trzech kątów trójkąta sferycznego nad dwa kąty proste. Ten nadmiar nazywamy pospolicie *przepełnieniem sferyczném* (excessus) i z tego powodu mówimy, że *powierzchnia trójkąta sferycznego równa się przepełnieniu sferycznemu.* (Porównaj §. 215).

Uwaga. Każdemu uczącemu się a myślącemu, wyda się wyrażenie powierzchni trójkąta sferycznego bardzo rażącą sprzecznością. Jak to, zapyta się nie jeden, ilość wyrażająca powierzchnię ma się równać ilości kątowéj? to nie podobna, lub téż całe rozumowanie jest fałszywém. Bliższe atoli zastanowienie się przekona każdego, iż tu chodziło tylko o krótkość wyrażenia się, a istotę jego zostawiono przewodnikom do wytłómaczenia. Wyraziwszy już wyżéj powierzchnią dwukąta przez ilość kątową t. j. przez dwa razy wzięty jego kąt, i wytłómaczywszy tamże prawdziwe znaczenie tego wyrażenia, łatwo nam będzie wytłómaczyć i ostatnie. Wszakże oznaczywszy przez A i B kąty dwóch dwukątów, a ich powierzchnie przez D i D' ponieważ $D=2A$ a $D'=2B$, zatém $\frac{D}{D'}=\frac{A}{B}$, z czego widzimy, że lubo A i B, wyrażają ilości kątowe, wszelako ich stósunek $\frac{A}{B}$ wyraża rzeczywiście liczbę oderwaną, a przeto do żadnego gatunku ilości nie przyczepioną. Dwóch trójkątów sferycznych powierzchnie oznaczywszy przez S i S', a ich kąty przez A, B, C, i A' B', C', powierzchnie ich mieć się będą do siebie jako przepełnienie sferyczne w jednym do takiegoż przepełnienia w drugim czyli $\frac{S}{S'} = \frac{A+B+C-180}{A'+B'+C'-180}$ t. j. stósunek ich powierzchni równa się także liczbie oderwanéj. Porównywając trójkąt sferyczny, którego powierzchnia S z takimże trójkątem o trzech kątach prostych, mielibyśmy

$$\frac{S}{1} = \frac{A+B+C-180}{3.\ 90-180} = \frac{A+B+C-180}{90},$$ to jest powierzchnia S ma się tak do powierzchni trójkąta o trzech kątach prostych, jak przepełnienie pierwszego do kąta prostego, skąd się pokazuje, że w wyrażeniu powyższém powierzchni trójkąta sferycznego dwie są jednostki, powierzchni i kątowa, jak o tém w poprzednim §. ostrzegałem. Z całéj téj uwagi wyciągniemy sobie ten wniosek, że wyrażenie *powierzchnia trójkąta sferycznego równa się jego przepełnieniu sferycznemu* nic innego nie znaczy, tylko że rzeczona powierzchnia taką jest częścią trójkąta jednostkowego czyli o trzech kątach prostych, jaką jest częścią przepełnienie sferyczne względem kąta prostego czyli 90°. Niechby np. był trójkąt sferyczny w którym

$$A = 95^{0}30'25'', B = 45^{0}\ 12'\ 45'',\ C = 39^{0}\ 51'\ 20''$$

zatém $A+B+C-180 = 34'\ 30'' = 2070'' = 34'{\cdot}5 = 0^{0}{\cdot}575$

więc przepełnienie sferyczne a zatém i powierzchnia trójkąta czyli

$$S = \frac{0^{0}{\cdot}575}{90} = \frac{34'{\cdot}5}{90{\cdot}60} = \frac{2070''}{90.60.60} = \frac{23}{3600} = 0{\cdot}0063888\ \ldots$$

to jest powierzchnia tego trójkąta jest $\frac{23}{3600}$ części czyli 0·0063888 . . . części trójkąta jednostkowego, całéj zaś powierzchni kuli danego trójkąta powierzchnia jest blisko 0·0008 częścią, rozumie się, że tu promień kuli jest uważany za 1.

Wniosek. *Powierzchnia wielokąta sferycznego równa się summie jego kątów zmniejszonéj iloczynem z dwóch kątów prostych przez liczbę jego boków mniéj dwa.* Z któregokolwiek bowiem wierzchołka kąta wielokąta poprowadziwszy do wszystkich innych wierzchołków łuki przekątne, podzieli się tym sposobem ten wielokąt na tyle trójkątów sferycznych, ile wielokąt ma boków mniéj dwa. A że powierzchnia każdego z tych trójkątów ma za miarę przewyżkę summy trzech jego kątów nad dwa kąty proste, czyli przepełnienie sferyczne, albo jeszcze, summę trzech swych kątów mniéj 2R; tudzież ponieważ jest widoczną rzeczą, iż summa wszystkich kątów trójkątów, na które wielokąt rozłożonym został, równa się summie kątów wielokąta, zatém prawdą jest, że i t. d.

Oznaczmy przez K summę kątów wielokąta sferycznego, którego liczba boków jest n, tedy odnosząc jego powierzchnią do trójkąta o trzech kątach prostych a jego kąty do kąta prostego jako jednostki, powierzchnia jego będzie

$$=K-2(n-2)=K-2n+4.$$

§. 279.

Twierdzenie. *Powierzchnia kuli równa się cztéry razy wziętéj powierzchni wielkiego jéj koła.*

Niech będzie półkole M'ABCDN' *fig. 263*, którego środkiem jest punkt S; wpiszmy w toż półkole i opiszmy na niém połowę wielokąta foremnego o parzystéj liczbie boków; piérwsza niech będzie MABCDN, a druga M'A'B'C'D'N'. Wystawiwszy sobie, że tak obie połowy wielokątów jako téż i półokręgu obraca się około średnicy M'N' jako około osi aż dopóki nie powrócą do pierwotnego swego położenia, łatwo dostrzeżemy, iż nam się przez ten obrót zrodzą trzy różne powierzchnie krzywe, t. j. dwie zrodzone przez dwie połowy wielokątów wpisanego i opisanego, trzecia zaś przez półokręgu koła. Dwie pierwsze będą złożonemi każda z powierzchni ostrokręgów uciętych a zakończone z wierzchu i spodu dwiema płaszczyznami kół, trzecia zaś jak już wiemy będzie powierzchnią kuli. Obrachujmy całkowite powierzchnie zrodzone przez każdy z wielokątów. Z punktów B i B′ spuściwszy prostopadłe B*b* i B′*b*′ na oś obrotu M′N′, nie trudno dostrzedz, iż w obrocie wielokątów około osi, boki ich AB i A′B′ zakreślają każdy powierzchnią krzywą ostrokręgu uciętego, których podstawy są: pierwszego dolna, koło z promienia *b*B, a górna koło z promienia MA; drugiego zaś dolna, koło z promienia *b*′B′, a górna koło z promienia M′A′. Z punktów E i E′ które są środkami boków AB i A′B′ spuściwszy prostopadłe E*e* i E′*e*′ na M′N′, wedlug §. 265 będzie powierzchnia krzywa pierwszego ostrokręgu uciętego t. j. powierzchnia zrodzona.

przez bok $\quad AB \ldots\ldots = 2\pi . Ee . AB,$

zaś przez bok $\quad A'B' \ldots\ldots = 2\pi . E'e' . A'B'$

Ale z punktów A i A′ spuściwszy jeszcze prostopadłe A*m* i A′*m*′ na *b*B i *b*′B′ i poprowadziwszy promień SE′ prostopadły do AB i A′B′, który z tego powodu przecina każdy z tych boków na dwie równe części, dwa trójkąty A*m*B i E*e*S są podobne, gdyż boki jednego są prostopadłe do boków drugiego trójkąta, zatém

$$AB : Am = SE : Ee \text{ skąd } AB.Ee = Am.SE = Mb . SE.$$

Dla téjże saméj przyczyny trójkąt $A'm'B' \backsim E'e'S$,

przeto $\quad A'B' : A'm' = SE' : E'e'$

skąd $\quad A'B'.E'e' = A'm'.SE' = M'b'.SE'.$

Położywszy te ważności w powyższych wyrażeniach, mieć będziemy powierzchnią krzywą zrodzoną

przez bok $\quad AB \ldots = 2\pi.Mb . SE = 2\pi.SE. Mb.$

" $\quad$ " $\quad A'B' \ldots = 2\pi.M'b'.SE' = 2\pi SE'.M'b'.$

Zupełnie przez podobne rozumowanie znajdziemy, że powiérzchnia krzywa zrodzona

przez bok $\quad BC \ldots\ldots = 2\pi.SE.bc,$ bo $SF = SE$

" $\quad$ " $\quad B'C' \ldots\ldots = 2\pi.SE'.b'c'$

" $\quad$ " $\quad CD \ldots\ldots = 2\pi SE.cN,$ bo $SG = SE$

" $\quad$ " $\quad C'D' \ldots\ldots = 2\pi.SE.c'N'.$

Dodawszy powierzchnie krzywe utworzone przez boki AB, BC, CD i t. d. w jednę a powierzchnie zrodzone przez

A'B', B'C', C'D' i t. d. w drugą sumę, znajdziemy powierzchnią krzywą zrodzoną

przez ABCD . . . $= 2\pi.SE(Mb + bc + cN) = 2\pi.SE.MN$

„ A'B'C'D' . . $= 2\pi.SE'(M'b' + b'c' + c'N') = 2\pi.SE'.M'N'$.

Dodawszy do pierwszéj z tych powierzchni

$$2\pi.\overline{MA}^2 = \pi\overline{MA}^2 + \pi\overline{ND}^2,$$

co wyraża powierzchnie dwóch kół z promienia MA i NO=MA, do drugiéj zaś $2\pi.\overline{M'A'}^2 = \pi\overline{M'A'}^2 + \pi\overline{N'D'}^2$, bo $M'A' = N'D'$ będzie powierzchnia zrodzona przez obrót połowy wielokąta

$$\text{wpisanego} = 2\pi.SE.MN + 2\pi.\overline{MA}^2 = 2\pi(SE.MN + \overline{MA}^2)$$

powierzchnia zaś zrodzona przez połowę wielokąta opisanego

$$= 2\pi.SE'.MN + 2\pi.\overline{M'A'}^2 = 2\pi(SE.'M'N' + \overline{M'A'}^2).$$

Podwajając liczbę boków obu wielokątów do nieskończoności, wiemy, że obwody ich zbliżają się nieskończenie do siebie, co inaczéj być nie może, tylko że każdy w szczególności bok wpisanego, zbliża się nieskończenie do odpowiadającego boku wielokąta opisanego, a w takim razie i prostopadłe ze środka obu wielokątów na ich boki spuszczone, t. j. prostopadłe SE i SE' nieskończenie zbliżają się do równości; czyli raczéj SE' zostaje stałą i niezmienną a SE bez końca rosnąc ma za granicę swego wzrostu SE', któréj jednak nigdy dosięgnąć a tém mniéj przewyższyć nie może. Zupełnie toż samo rozumowanie względem MN i M'N', że MN rosnąc żbliża się bez końca do M'N'. Oprócz tego za każdém podwojeniem liczby boków obu wielokątów, tak MA jako i M'A' maleją, a malejąc mają za granice każda punkt czyli zero geometryczne. A kiedy ilości, przez które są wyrażone obie powierzchnie, zbliżają się bez końca do siebie, a w nieskończoności stają się sobie równe, przeto tém bardziéj środkująca między niemi powierzchnia kuli przez półokręgu zrodzona, równa będzie jednéj lub drugiéj. Położywszy promień koła rodzącego, a zatém i promień kuli $SE = r$, będzie $M'N' = 2r$, oraz według tego co powiedzieliśmy, $SE = SE' = r$ $MN = 2r$. Położywszy te ważności w powyższe wyrażenia obu powierzchni, znajdziemy powierzchnią zrodzoną przez

MABCDN . . . . . . $=2\pi(r.2r+\overline{MA}^2)=4\pi r^2+2\pi.\overline{MA}^2$
M'A'B'C'D'N' . . . . $=2\pi(r.2r+\overline{M'A'}^2)=4\pi r^2+2\pi.\overline{M'A'}^2$.
Ale według powyższego rozumowania w przypadku gdy liczba boków każdego z wielokątów stanie się nieskończenie wielka, każda z prostych MA i M'A' zamienia się na punkt czyli zero, zatem $2\pi.\overline{MA}^2=0$ i $2\pi.\overline{M'A'}^2=0$, a w takim razie obie powierzchnie stają się sobie równemi, więc tém bardziéj i sprawiedliwiéj wnieść możemy, że środkująca powierzchnia kuli jest każdéj z nich równa

Powierzchnia zatém kuli $=4\pi r^2$.

A że πr^2 wyraża powierzchnią koła z promienia r §. 163 *wniosek*, zatém prawdą jest, że powierzchnia kuli równa się cztéry razy wziętéj powierzchni koła wielkiego.

Wniosek. Ponieważ $4\pi r^2=2\pi r.2r$ a $2\pi r$, wyraża okrąg koła wielkiego, zaś $2r$ średnicę kuli, zatém *powierzchnia kuli równa się téż iloczynowi z okręgu koła wielkiego przez jéj średnicę.*

Uwaga. Nie od rzeczy tu będzie zwrócić uwagę uczących się, że wyrażenie powierzchni krzywéj zrodzonéj przez obrót połowy wielokąta opisanego t. j. wyrażenie wyżéj otrzymane powierzchnia zrodzona przez A'B'C'D' . . . = 2π.SE'.M'N' przechodząc według powyższego na $2\pi.r.2r=4\pi r^2$ uczy nas, iż *jakakolwiek będzie liczba boków wielokąta opisanego, zawsze powierzchnia krzywa przez jego połowę w obrocie około osi zrodzona, równa się powierzchni kuli, nie rachując atoli do niéj dwóch powierzchni płaskich t. j. koła górnego i dolnego.*

§. 280.

W poprzedzającym §. widzieliśmy, iż powierzchnia krzywa zrodzona przez bok AB równa się 2π. SE. Mb, a powierzchnia zrodzona przez A'B' równa się 2π. SE'. M'b'. Lecz skoro liczba boków obu wielokątów będzie nieskończenie wielka, dwie te powierzchnie stają się prawie między sobą równe, więc tém bardziéj powierzchnia krzywa zrodzona przez łuk AE'B jako między temi bokami środkujący, będzie tém bardziéj równa jednéj z tych powierzchni. A że w przypadku nieskończonéj liczby boków wielokątów, $SE = SE'$ a $Mb = M'b'$, zatém powierzchnia krzywa zrodzona przez rzeczony łuk $= 2\pi . r . Mb$. Ale taką powierzchnię nazwaliśmy pasem sferycznym, zaś Mb jego wysokością §. 271, zatém *powierzchnia pasa sferycznego równa się iloczynowi z okręgu koła wielkiego przez jego wysokość.*

Przeciąwszy kulę dwiema płaszczyznami od siebie równoległemi jednę przez środek kuli przechodzącą, a drugą w odległości od tegoż środka $Ss = d$ *fig.* 264, tedy

$$sA = SA - d = r - d.$$

Położywszy $r - d = h$, gdzie jak widzimy, h wyraża wysokość czaszki BAC, aby znaleść jéj powierzchnią, dosyć jest od powierzchni połowy kuli odjąć powierzchnią pasa zawartego między dwiema poprowadzonemi płaszczyznami. Ale według powyższego powierzchnia pasa, którego wysokość d jest $= 2\pi r . d$, zaś powierzchnia połowy kuli $= 2\pi r^2$, zatém powierzchnia czaszki $BAC = 2\pi r^2 - 2\pi r d = 2\pi r (r - d) = 2\pi r h$ t. j. *powierzchnia czaszki równa się także iloczynowi z okręgu koła wielkiego przez jéj wysokość.*

Kiedy tak powierzchnia pasa sferycznego jako i czaszki równa się iloczynowi z okręgu koła wielkiego przez wysokość pasa lub czaszki, zatém jeżeli średnicę kuli podzielimy na ilekolwiek części równych, a przez punkta podziału poprowadzimy płaszczyzny prostopadłe do téjże średnicy, a przeto równoległe do siebie, te podzielą całą powierzchnią kuli na tyleż pasów wraz z dwiema czaszkami między sobą równych co do powierzchni.

§. 281.

Znalazłszy wyrażenie powierzchni kuli, możemy teraz w miejsce podanych w §. 277 i 278 wyrażeń powierzchni dwukąta sferycznego i powierzchni trójkąta sferycznego dać inne. I tak: powierzchnią dwukąta znalezliśmy $D = 2A$ a to z proporcyi $D : 8 = A : 4$. w któréj 8 wyrażało powierzchnię kuli a 4 znaczyło 4R i dla tego to ostrzegałem tamże, iż w tém wyrażeniu są dwie jednostki t. j. jednostka powierzchni i jednostka kątowa. Tę proporcyją możemy teraz tak napisać $D : 4\pi r^2 = A^0 : 360^0$, jeżeli przez r rozumiemy promień kuli, na któréj dwukąt D uważamy. Z téj proporcyi wypada $D = \frac{A}{360} . 4\pi r^2 = \frac{A}{90} \pi r^2$. Zastanowiwszy się nad tém wyrażeniem, dostrzeżemy zaraz, że πr^3 jest czwartą częścią powierzchni kuli czyli jest powierzchnią dwukąta o kącie prostym, zaś $\frac{A}{90}$ jest rzeczywiście liczbą oderwaną pokazującą, jaką jest częścią dwukąt D, którego kąt A, względem pierwszego, który téż *dwukątem prostokątnym* nazwać można. Biorąc dwukąt prostokątny za jednostkę powierzchni a kąt prosty czyli 90^0 za jednostkę kątową, mielibyśmy $D = A$. Nic łatwiejszego, jak sobie zdać sprawę z wyrażenia $D = A$; podzieliwszy bowiem dwukąt prostokątny na ilekolwiek części równych przez prowadzenie kół wielkich, kąt jego podzieli się także na tyleż części równych; jaką więc częścią będzie kąt jednego z tych dwukątów względem kąta prostego, taką téż częścią będzie powierzchnia jego względem powierzchni dwukąta prostego. Oznaczając powierzchnią dwukąta prostego przez D' będzie $\frac{D}{D'} = \frac{A}{90}$, a biorąc D' za jednostkę powierzchni, zaś 90 za jednostkę kątową, będzie $\frac{D}{1} = \frac{A}{1}$ czyli $D = A$. Z tego téż jeszcze widzimy, że powierzchnia dwukąta prostokątnego równa się powierzchni koła wielkiego kuli. Ponieważ $D = \frac{A}{90} . \pi r^2 = \frac{2A}{90} . \frac{\pi r^2}{2}$, gdzie czynnik $\frac{\pi r^2}{2} = \frac{4\pi r^2}{8}$ t. j. równa się ósméj części powierzchni kuli, przeto wziąwszy tu $\frac{\pi r^2}{2}$ czyli powierzchnią trójkąta sferycznego o trzech kątach prostych za jednostkę powierzchni, a kąt prosty znowu za jednostkę kątową, otrzymamy $D = 2A$

t. j. wyrażenie §. 277. Z tego wszystkiego wniesiemy, że wyrażenie powiérzchni dwukąta sferycznego D, którego kąt A, może być $D = A$ lub $D = 2A$. W obu wyrażeniach jednostką kątową jest kąt prosty, jednostką atoli powiérzchni w piérwszém, jest dwukąt sferyczny prostokątny, a w drugiém trójkąt sferyczny o trzech kątach prostych.

Co do powiérzchni trójkąta sferycznego, tę znaleźliśmy równą przepełnieniu sferycznemu; które wyrażenie nic innego nie znaczyło tylko, że powiérzchnia trójkąta sferycznego jest taką częścią powiérzchni trójkąta sferycznego o trzech kątach prostych, jaką częścią jest przepełnienie jego sferyczne względem kąta prostego. Oznaczając zawsze przez S powiérzchnią trójkąta sferycznego ABC, wyrażenie w przywiedzionym wyżéj §. znalezione $S = A + B + C - 180$ wyraźniéj tak powinno być napisane $\frac{S}{1} = \frac{A + B + C - 180}{90}$. Jeżeli teraz w miejsce 1 położymy $\frac{1}{2}\pi r^2$ t. j. powiérzchnią trójkąta jednostkowego, będzie $\frac{S}{\frac{1}{2}\pi r^2} = \frac{A + B + C - 180}{90}$

$$\text{skąd} \quad S = \frac{A + B + C - 180}{2.90}\pi r^2 = \frac{A + B + C - 180}{180}\pi r^2.$$

W tém wyrażeniu powiérzchni trójkąta sferycznego jasno widzimy, iż czynnik $\frac{A + B + C - 180}{180}$ wyraża stósunek przepełnienia sferycznego do dwóch kątów prostych i jest rzeczywiście liczbą oderwaną wskazującą, jaką częścią jest powiérzchnia trójkąta sferycznego względem takiegoż trójkąta o trzech kątach prostych; bo $\frac{1}{2}\pi r^2$ wyraża powiérzchnią tego ostatniego trójkąta.

W użyciu powyższego wzoru potrzeba tylko następującą uwagę mieć na baczności: przepełnienie sferyczne

$$A + B + C - 180$$

może być w stopniach, minutach i sekundach, lub w minutach i sekundach, lub nareszcie w samych tylko sekundach, w każdym jednak przypadku przepełnienie to możemy dowolnie wyrazić w stopniach, minutach lub sekundach. Jeżeli przepełnienie wyrażamy w stopniach, tedy przez stósunek $\frac{A+B+C-180}{180}$ potrzeba rozmnożyć πr^2, a iloczyn będzie powiérzchnią trójkąta sferycznego. Jeżeli zaś przepełnienie wyrażamy w minutach, potrzeba téż 180 obrócić na minuty a stósunek przepełnienia będzie

$$\frac{A+B+C-180}{180.60}=\frac{A+B+C-180}{10800};$$

przez ten stósunek rozmnożywszy πr^2, mieć będziemy powiérzchnią trójkąta sferycznego. Jeżeli nakoniec przepełnienie wyrażamy w sekundach, potrzeba téż i 180 obrócić na sekundy, a stósunek przepełnienia będzie

$$\frac{A+B+C-180}{180.60.60}=\frac{A+B+C-180}{648000},$$

przez który rozmnożywszy πr^2, otrzymamy żądaną powiérzchnią trójkąta sferycznego. Za przykład tego postępowania wziąść można podany w §. 278. Ale jako trójkąt sferyczny o trzech kątach prostych jest połową dwukąta sferycznego prostokątnego, tak téż używając w przywiedzionym §. podanego wyrażenia, potrzeba za πr^2 wziąść $\frac{1}{2}\pi r^2$, kiedy za $\frac{A+B+C-180}{180}$ bierze się $\frac{A+B+C-180}{90.}$.

§. 282.

Przystąpmyż nareszcie do znalezienia objętości kuli. Jak w dochodzeniu każdéj prawdy najpewniejsza, a zatém najbezpieczniejsza jest droga porównywania, jak to już wielokrotnie wspomniałem, tak i tu taż sama droga zaprowadzić nas może do pewnego wypadku. Kula swym kształtem najpodobniejszą jest do wielościanu foremnego o nieskończonéj liczbie ścian, przeto jak znaleźliśmy objętość wielościanów foremnych, tak téż i objętość kuli znaléść możemy.

Na ten koniec wystawiwszy sobie przez którykolwiek punkt powiérzchni kuli poprowadzoną nieskończoną liczbę południków, te podzielą nam całą powiérzchnią kuli, jak wiemy, na nieskończoną liczbę bardzo wązkich dwukątów; jeżeli potém do wspólnéj średnicy, w któréj się wszystkie co dopiéro poprowadzone południki przecinają, poprowadzimy znowu nieskończoną liczbę płaszczyzn prostopadłych, które jak także wiemy, przetną powierzchnią kuli w nieskończonéj liczbie równoleżników, przez wzajemne przecięcie się okręgów południków, z okręgami równoleżników, cała powiérzchnia kuli podzieloną zostanie na same nieskończenie małe czworokąty sferyczne, a przy biegunach równoleżników, na trójkąty sferyczne również nieskończenie małe. Dla téj nieskończonéj małości tak czworokątów, jako i trójkątów, uważane będą być mogły tak piérwsze, jako i drugie, za płaskie czyli prostokreślne. Pomyśliwszy sobie daléj przez każdy bok, tak czworokąta jako i trójkąta, tudzież przez środek kuli, poprowadzone płaszczyzny, te przez wzajemne przecięcie się z sobą, podzielą całą kulę na ostrosłupy sferyczne czworościenne i trójścienne. Podstawy tych ostrosłupów, można bez znacznego błędu, jako już wspomniałem, uważać jako płaskie. Ze środka kuli wystawiwszy sobie na każdą podstawę spuszczoną prostopadłą, ta spotka ją w jéj środku i będzie wysokością ostrosłupa. Ta wysokość, jak nie trudno dostrzédz, będzie oraz promieniem kuli, gdyż wszystkie podstawy leżą na jéj powierzchni. A że objętość każdego takiego ostrosłupa, według §. 235 *wniosek 4*, równa się iloczynowi z powierzchni jego podstawy przez trzecią część wysokości, zatém kiedy wysokości wszystkich ostrosłupów są sobie równe i równe promieniowi kuli, summa objętości wszystkich ostrosłupów, równa się iloczynowi z summy powierzchni ich podstaw przez trzecią część wspólnéj ich wysokości. Ale summa powierzchni podstaw ostrosłupów równa się powierzchni kuli, zatém *objętość kuli równa się iloczynowi z jéj powierzchni przez trzecią część promienia.*

Wniosek. Nazwawszy promień kuli r, jéj powierzchnia $= 4\pi r^2$ §. 279, zatém objętość kuli będzie

$$= 4\pi r^2 \times \tfrac{1}{3} r = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Uwaga. Prostszego i bardziéj przekonywającego dowodu nad powyższy nie znam, nie przeczę jednak, że nie jest ścisły geometryczny; żądający przeto ściślejszego dowodu, zechcą poprzedzić go rozwiązaniem następującego zagadnienia.

§. 283.

Zagadnienie. *Przez wierzchołek którykolwiek, jakiegokolwiek danego trójkąta prostokreślnego poprowadziwszy w jakimkolwiek kierunku prostą nieograniczonéj długości i około niéj jako około osi obracając trójkąt dany dopóki nie powróci do piérwszego swego położenia, znaléść objętość ciała zrodzonego, przez obrót tegoż trójkąta.*

Niech ABC *fig. 265* będzie trójkątem danym, niech przez wierzchołek jego C poprowadzoną będzie prosta PQ nieograniczonéj długości, obracając ten trójkąt około PQ, ale tak, iżby kąt BCQ, lub ACQ był w całym obrocie stałym i niezmiennym, mamy znaleść objętość ciała zrodzonego przez tenże trójkąt.

Dla rozwiązania tego zagadnienia przedłużmy bok AB trójkąta danego, aż do spotkania się z osią obrotu PQ, w punkcie D; z punktów A i B spuściwszy prostopadłe AE i BF na oś obrotu; bez trudności widzimy, że obracając trójkąt CAD około PQ, ciało przez niego zrodzone składać się będzie z dwóch ostrokręgów prostych: t. j. ostrokręgu zrodzonego przez trójkąt AEC i ostrokręgu zrodzonego przez trójkąt AED. Te ostrokręgi mają za spólną podstawę koło z promienia AE, a wysokość piérwszego jest CE, a drugiego DE; objętość przeto piérwszego $=\pi\overline{AE}^2.\frac{1}{3}CE$, a drugiego $=\pi\overline{AE}^2.\frac{1}{3}DE$. Objętość przeto ciała zrodzonego przez trójkąt ACD

$$=\tfrac{1}{3}\pi.\overline{AE}^2(CE+DE)=\pi\overline{AE}^2.\tfrac{1}{3}CD.$$

Ale w obrocie tym trójkąt CBD rodzi również ciało z dwóch prostych ostrokręgów złożone t. j. ostrokręgu zrodzonego przez trójkąt CBF i ostrokręgu zrodzonego przez trójkąt BFD. Te ostrokręgi mają za spólną podstawę koło z promienia BF, a wysokość piérwszego jest CF, a drugiego FD. Objętość piérwszego ostrokręgu $=\pi\overline{BF}^2.\frac{1}{3}CF$, objętość zaś drugiego

$$=\pi\overline{BF}^2.\tfrac{1}{3}FD\,;$$

przeto objętość ciała zrodzonego przez trójkąt CBD

$$=\tfrac{1}{3}\pi\overline{BF}^2(CF+DF)=\overline{BF}^2.\tfrac{1}{3}CD.$$

A że objętość ciała zrodzonego przez trójkąt ABC jest różnicą między ciałem zrodzoném przez trójkąt ACD, a ciałem zrodzoném przez trójkąt CBD, zatém objętość ciała zrodzonego przez obrót trójkąta ABC

$$= \pi\overline{AE}^2.\tfrac{1}{3}CD - \pi\overline{BF}^2.\tfrac{1}{3}CD = \tfrac{1}{3}\pi CD(\overline{AE}^2 - \overline{BF}^2)$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi CD(AE + BF)(AE - BF)$$

Z punktu B poprowadziwszy równoległą do PQ, aż do przecięcia się jéj z prostopadłą AE w punkcie G, będzie

$$AG = AE - GE = AE - BF,$$

a następnie objętość ciała zrodzonego przez trójkąt ABC

$$= \tfrac{1}{3}\pi.CD.AG(AE + BF).$$

Figura AEFB jest trapezem, którego dwa boki AE i BF są równoległe; podzieliwszy przeto jeden z dwóch pozostałych np. AB na dwie części równe w punkcie H, i z tego punktu poprowadziwszy HI równoległą do AE i BF, a zatém prostopadłą do PQ, wiemy z §. 123, że $HI = \frac{AE + BF}{2}$, skąd $AE + BF = 2HI$, przeto objętość ciała zrodzonego przez trójkąt $ABC = \tfrac{1}{3}\pi.CD.AG.2HI = \tfrac{2}{3}\pi CD.AG.HI$.

Z wierzchołka C spuściwszy prostopadłą CK na AB, trójkąt $CKD \sim AGB$ bo są równokątne, zatém $AB : AG = CD : CK$, skąd

$$CD.AG = AB.CK$$

a objętość ciała zrodzonego przez trójkąt ABC

$$= \tfrac{2}{3}\pi AB.CK.HI = 2\pi.HI.AB.\tfrac{1}{3}CK.$$

Ale iloczyn $2\pi HI.AB$, wyraża powiérzchnią krzywą ostrokręgu ściętego przez bok AB zrodzoną, przeto *objętość ciała zrodzonego przez obrót trójkąta około osi przez jeden z jego wierzchołków poprowadzonéj*, *równa się iloczynowi z powierzchni zrodzonéj przez bok przeciwległy kątowi przez który oś obrotu przechodzi, przez trzecią część wysokości tegoż trójkąta*, *uważając bok rodzący powierzchnią krzywą za podstawę.*

Ponieważ $AB.CK = 2ABC$ t. j. ten iloczyn równa się dwarazy wziętéj powierzchni trójkąta ABC, zatém objętość tyle razy rzeczonego ciała przez trójkąt ABC zrodzonego

$$= ABC.\tfrac{4}{3}\pi.HI = ABC.\tfrac{2}{3}.2\pi HI,$$

t. j. *objętość ta równa się iloczynowi z powierzchni trójkąta,* *rozmnożonéj przez $\frac{2}{3}$ okręgu koła z promienia równającego się prostopadłéj na oś obrotu, ze środka podstawy trójkąta spuszczonéj.*

W przypadku, że trójkąt ABC jest równoramienny, t. j. że $AC = BC$, prostopadła z jego wierzchołka C pada na środek boku AB *fig. 266*, a powierzchnia trójkąta $ABC = AB.\frac{1}{2}HC$ którą ważność położywszy w ostatniém wyrażeniu, znajdziemy objętość ciała zrodzonego przez obrót trójkąta równoramiennego

$$= AB.\tfrac{1}{2}HC.\tfrac{4}{3}.\pi HI = \tfrac{2}{3}\pi AB.HC.HI.$$

Ale trójkąt $ABG \backsim CHI$, bo boki jednego są prostopadłe do boków drugiego, zaś z podobieństwa ich mamy $AB : BG = HC : HI$, skąd $AB.HI = BG.HC = EF.HC$. Włożywszy tę ważność w ostatnie wyrażenie, będzie objętość ciała zrodzonego przez trójkąt równoramienny

$$= \tfrac{2}{3}\pi HC.EF.HC = \tfrac{2}{3}\pi.\overline{HC}^2.EF = \pi\overline{HC}^2.\frac{2EF}{3}$$

t. j. ta *objętość równa się iloczynowi z powierzchni koła z promienia równającego się wysokości trójkąta, przez $\frac{2}{3}$ rzutu jego podstawy na oś obrotu*, §. 208.

W dwóch poprzedzających przypadkach braliśmy położenie osi takie, że podstawa trójkąta przedłużona spotykała też oś w pewnym punkcie; lecz to nie jest koniecznym warunkiém okazanéj prawdy. Weźmy bowiem położenie osi równoległe do podstawy, jak nam *fig. 267* przedstawia, tedy z punktów A, B, spuściwszy prostopadłe AE i BF na oś obrotu i wystawiwszy sobie, że cała figura CABF obraca się około PQ, w tym obrocie prostokąt ABFE zrodzi walec, którego objętość $= \pi\overline{AE}^2.EF = \pi\overline{HC}^2.EF$, gdzie HC jest wysokością trójkąta ABC. Trójkąt ACE zrodzi ostrokrąg, którego objętość $= \pi\overline{AE}^2.\frac{1}{3}CE = \pi HC^2.\frac{1}{3}CE$. Podobnież trójkąt BCF zrodzi ostrokrąg którego objętość

$$= \pi\overline{BF}^2.\tfrac{1}{3}CF = \pi\overline{HC}^2\tfrac{1}{3}.CF.$$

A że $ABC = ABFE + ACE - BCF$, zatém i objętość ciała zrodzonego przez trójkąt ABC jest $= \pi\overline{HC}^2.EF + \pi\overline{HC}^2.\frac{1}{3}CE - \pi\overline{HC}^2.\frac{1}{3}CF$

$= \pi\overline{HC}^2(EF + \frac{1}{3}CE - \frac{1}{3}CF) = \pi\overline{HC}^2[EF + \frac{1}{3}(CE - CF)]$

$= \pi\overline{HC}^2[EF - \frac{1}{3}(CF - CE)] = \pi\overline{HC}^2(EF - \frac{1}{3}EF) = \pi HC^2.\frac{2}{3}EF$

jak w poprzedzającym przypadku.

Uwaga. Lubo do naszego zamiaru tylko drugi przypadek jest nam potrzebny, rozwiązaliśmy atoli to zagadnienie w każdym innym przypadku dla pokazania, jak sobie w podobnych zdarzeniach radzić można.

§. 284.

Po takiém przygotowaniu, w piszmy w półkole i na niém opiszmy połowę wielokątów foremnych i podobnych ABCDEFG i A'B'C'D'E'F'G' *fig. 268*, a prowadziwszy promienie SA, SB, SC i t. d. i te przedłużywszy aż do boków wielokąta opisanego t. j. do A', B', C' i t. d. ponieważ środek koła S jest oraz środkiem obu wielokątów, zatém nie tylko

$$SA = SB = SC = \text{ i t. d.}$$

ale téż SA' = SB' = SC' = i t. d., tudzież SH = SI = SK = i t. d. §. 103 *wniosek 1.* Jeżeli teraz wszystkie te trzy figury obracać będziemy około średnicy AG, jako około osi, dwa wielokąty zrodzą każdy powierzchnię krzywą złożoną z dwóch ostrokręgów prostych zwyczajnych i samych ostrokręgów uciętych, a półokręgu zrodzi powierzchnię kuli; każdy więc z wielokątów ograniczy pewną przestrzeń, czyli zrodzi ciało ograniczone powierzchniami krzywemi, a półkole zrodzi kulę. Obrachujmy objętość ciał zrodzonych przez połowy wielokątów. Na piérwszy rzut oka widzimy, że każde z tych ciał złożone jest z tylu ciał zrodzonych przez trójkąty równoramienne równe, ile połowa wielokąta ma boków, zatém obrachowanie objętości, każdego według poprzedzającego §. jest nader łatwém.

I tak: objętość ciała zrodzonego

przez trójkąt ASB jest $= \frac{2}{3}\pi.\overline{HS}^2.Ab$

„ „ BSC „ . . . . $= \frac{2}{3}\pi\overline{SI}^2.bc = \frac{2}{3}\pi.\overline{HS}^2.bc$

„ „ CSD „ . . . . $= \frac{2}{3}\pi\overline{SK}^2.cS = \frac{2}{3}\pi.\overline{HS}^2.cS$

„ „ DSE „ . . . . $= \frac{2}{3}\pi\overline{SL}^2.Se = \frac{2}{3}\pi.\overline{HS}^2.Se$

„ „ ESF „ . . . . $= \frac{2}{3}\pi\overline{SM}^2.ef = \frac{2}{3}\pi.\overline{HS}^2.ef$

„ „ FSG „ . . . . $= \frac{2}{3}\pi\overline{SN}^2.fG = \frac{2}{3}\pi.\overline{HS}^2.fG$

objętość przeto ciała zrodzonego przez ABCDEFG jest

$$= \tfrac{2}{3}\pi\overline{SH}^2(Ab + bc + cS + Se + ef + fG) = \tfrac{2}{3}\pi.\overline{SH}^2.AG.$$

Na mocy zupełnie podobnego rozumowania znajdziemy, że objętość ciała zrodzonego przez obrót połowy wielokąta

$$A'B'C'D'E'F'G' \text{ jest } = \tfrac{2}{3}\pi.\overline{SH'}^2.A'G'.$$

Aby teraz zrobić wniosek na objętość ciała zrodzonego przez obrót półkola, czyli na objętość kuli, uważmy tylko, że ta przypada pomiędzy dwie znalezione objętości, które, skoro ciągle podwajać będziemy liczbę boków obu wielokątów, coraz bardziéj a bardziéj zbliżają się do siebie, gdyż SH ciągle dążyć będzie do SH′ a AG do A′G′. Pomyśliwszy sobie liczbę boków wielokątów nieskończenie wielką, w takim razie, jak to już mieliśmy sposobność przekonać się dowodnie, SH stanie się równe SH′, zaś AG $=$ A′G′ i objętości obu ciał wyżéj znalezione zrównają się z sobą; a przypuściwszy nawet między niemi różnicę, ta koniecznie jest téj natury, iż się wyznaczyć nie da, mogąc być mniejszą niż wszelka jakkolwiek mała ilość. Kiedy więc przy nieskończonéj liczbie boków wielokątów, objętości ciał przez też wielokąty zrodzonych, są sobie prawie równe, więc bez żadnego prawie błędu wnieść możemy, że objętośći ciała między niem środkującego czyli objętość kuli, równa się objętości jednego z nich. Tak tedy przez ściśle geometryczne rozumowanie i dowodzenie znajdujemy, że

objętość kuli $= \frac{2}{3}\pi\overline{SH'}^2.AG.$

Położywszy promień kuli $= r$, będzie

$$SH' = SH = r,\ AG = A'G' = 2r,$$

a objętość kuli $=\frac{2}{3}\pi r^2.2r=4\pi r^2.\frac{1}{3}r=\frac{4}{3}\pi r^3$
t. j. *objętość kuli równa się iloczynowi z jéj powierzchni przez* $\frac{1}{3}$ *promienia téjże kuli*, jak w §. 282 znaleźliśmy.

§. 285.

Definicyja. Część kuli zrodzona przez obrót wycinka kołowego nazywa się *wycinkiem kulistym* (sector sphaericus).

Aby znaleść objętość takiego wycinka kulistego, uważmy np. wycinek kołowy BSD *fig. 268*; ten w obrocie około AG zrodzi ciało, którego objętość według poprzedzającego przypada pomiędzy $\frac{2}{3}\pi\overline{HS}^2.bS$ i $\frac{2}{3}\pi\overline{H'S}^2.b'S$; w razie atoli, że liczba boków obu wielokątów staje się nieskończenie wielką, dwie te objętości stają się prawie sobie równe, bo HS=H'S, $bS=b'S$, a tém bardziéj objętość wycinka kulistego, równa się któréjkolwiek z nich; przeto położywszy i tu $H'S=r$, będzie objętość wycinka kulistego $=\frac{2}{3}\pi r^2.bS=2\pi r.bS.\frac{1}{3}r$. Lecz $2\pi r.bS$ jest powierzchnią pasa sferycznego przez łuk BCD zrodzonego §. 280, zatém *objętość wycinka kulistego równa się iloczynowi z jego powierzchni przez trzecią część promienia kuli.*

§. 286.

Od objętości połowy kuli, któréj promień r, odjąwszy objętość wycinka kulistego zrodzonego przez wycinek kołowy BSE *fig. 269*, pozostanie się jak widzimy ostrokrąg mający za podstawę czaszkę sferyczną ACB. Ostrokrąg ten właściwiéj nazwaćby należało wycinkiem kulistym niż poprzedzający; atoli ponieważ ostatnia nazwa we wszystkich dziełach tak naszych, jako i obcych nadawana jest bez różnicy tak piérwszemu, jako i drugiemu, zatém zachowamy dla piérwszego tęż samę nazwę, a ostatni nazywać raczéj będziemy *ostrokręgiem sferycznym*, dając przez przymiotnik *sferyczny* poznać, iż podstawa ostrokręgu nie jest płaską, ale częścią powierzchni kuli.

Szukajmyż więc wyrażenia objętości ostrokręgu sferycznego. Według tego co dopiéro powiedzieliśmy, objętość ta jest $=\frac{2}{3}\pi r^3-\frac{2}{3}\pi r^2.SD=\frac{2}{3}\pi r^2(r-SD)=\frac{2}{3}\pi r^2 CD=2\pi r.CD.\frac{1}{3}r$. A że $2\pi r.CD$ jest wyrażeniem powierzchni czaszki służącéj za podstawę ostrokręgowi, zatém *objętość ostrokręgu sferycznego równa się iloczynowi z powierzchni jego podstawy przez trzecią część promienia kuli.*

§. 287.

Część kuli ograniczona czaszką sferyczną i płaszczyzną, nazywa się właściwie odcinkiem kulistym, jak to już w §. 271 wspomniałem. Aby znaleść jego objętość, dosyć będzie od objętości ostrokręgu sferycznego, odjąć objętość ostrokręgu zwyczajnego, którego podstawą jest podstawa odcinka a wysokością odległość téjże podstawy od środka kuli. Zatém objętość odcinka kulistego ACBA jest

$$= \tfrac{2}{3}\pi r^2 . CD - \pi AD^2 . \tfrac{1}{3} DS = \frac{\pi}{3}\left\{ 2r^2 CD - AD^2 . DS \right\}$$

$$= \frac{\pi}{3}\left\{ 2r^2 CD - \overline{AD}^2 (r - CD) \right\}.$$

Ale według §. 90 $\overline{AD}^2 = DF.CD = (CF - CD)CD = (2r - CD)CD$ położywszy więc $CD = w$, będzie objętość odcinka

$$S = \frac{\pi}{3}\left\{ 2r^2 w - (2r - w)(r - w)w \right\} = \pi w \left\{ rw - \tfrac{1}{3}w^2 \right\}.$$

Położywszy promień podstawy odcinka $AD = \varrho$ jest

$\varrho^2 = w(2r - w)$ §. 90, skąd $r = \dfrac{\varrho^2 + w^2}{2w}$, zatém $rw = \dfrac{\varrho^2 + w^2}{2}$

zaś $rw - \tfrac{1}{3}w^2 = \dfrac{\varrho^2}{2} + \dfrac{w^2}{2} - \dfrac{w^2}{3} = \dfrac{\varrho^2}{2} + \dfrac{w^2}{6}$ a następnie

$$S = \pi w \left(\frac{\varrho^2}{2} + \frac{w^2}{6}\right) = \tfrac{1}{2}\pi\varrho^2 w + \tfrac{1}{6}\pi w^3 = \tfrac{1}{2}\pi\varrho^2 w + \tfrac{4}{24}\pi w^3$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi\varrho^2 w + \tfrac{4}{3}\pi\left(\frac{w}{2}\right)^3$$

t. j. *objętość odcinka kulistego o jednéj podstawie, składa się z summy objętości dwóch ciał, a mianowicie z połowy objętości walca mającego podstawę i wysokość równe podstawie i wysokości odcinka i z objętości kuli z promienia równającego się połowie wysokości odcinka.*

§. 288.

Znalazłszy objętość odcinka kulistego, łatwo teraz znaleść objętość odcinka o dwóch podstawach czyli *kloca kulistego*. Na *fig.* 269, skoro kulę przetniemy jeszcze inną płaszczyzną A'B' do pierwszéj równoległą, otrzymamy kloc kulisty zawarty między dwoma kołami A'B' i AB i pasem sferycznym przez łuk B'B zrodzonym.

Dla znalezienia objętości tego kloca, którą przez K, a promień podstawy A'B' przez ϱ', wysokość odcinka o podstawie A'B' przez w'; a wysokość kloca przez w oznaczymy, uważmy tylko iż, oznaczając jeszcze objętość odcinka kulistego o podstawie A'B przez S', objętość o którą chodzi, jest różnicą między S' i S, ponieważ zaś $S' = \pi w' \left(\frac{\varrho'^2}{2} + \frac{w'^2}{6}\right)$ stósownie do poprzedzającego §. więc

$$K = S' - S = \pi w' \left(\frac{\varrho'^2}{2} + \frac{w'^2}{6}\right) - \pi w \left(\frac{\varrho^2}{2} + \frac{w^2}{6}\right) =$$

$$\pi \left\{ \frac{(w' - w)(\varrho'^2 + \varrho^2 - w'w)}{2} + \frac{w'^3 - w^3}{6} \right\}.$$

Ale z Arytmetyki §. 11 wiadomo, że

$$w'^3 - w^3 = (w' - w)(w'^2 + w^2 + w'w)$$

zatém $K = \pi (w' - w) \left\{ \frac{\varrho'^2 + \varrho^2}{2} + \frac{(w' - w)^2}{6} \right\}$.

Ponieważ wysokość kloca nazwaliśmy w, zatém $w' - w = w$

a następnie $K = \pi w \left(\frac{\varrho'^2 + \varrho^2}{2} + \frac{w^2}{6}\right) = \frac{1}{2}\pi\varrho'^2 w + \frac{1}{2}\pi\varrho^2 w + \frac{\pi w^3}{6}$

$$= \frac{1}{2}\pi\varrho'^2 w + \frac{1}{2}\pi\varrho^2 w + \frac{4}{24}\pi w^3 = \frac{1}{2}(\pi\varrho'^2 w + \pi\varrho^2 w) + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{w}{2}\right)^3,$$

skąd się pokazuje, że *objętość kloca kulistego równa się połowie summy objętości dwóch walców mających wysokość równą wysokości kloca, a za podstawy jeden dolną a drugi górną podstawę kloca, powiększonéj objętością kuli z promienia równającego się połowie wysokości kloca.*

§. 289.

Pozostaje nam jeszcze znaleść objętość klina kulistego §. 271.

Poprowadziwszy dwie do siebie prostopadłe płaszczyzny południków, tę podzielą całą objętość kuli na cztery kliny kuliste między sobą równe, a których podstawami są dwukąty prostokątne §. 281. Objętość takiego klina kulistego prostokątnego, jest oczywiście czwartą częścią objętości kuli czyli $\frac{1}{3}\pi r^3$, jeżeli przez r jéj promień oznaczymy. Kąt rzeczonéj podstawy podzieliwszy na ilekolwiek części równych i przez te podziały poprowadziwszy płaszczyzny tyluż południków, te podzielą klin prostokątny na tyle mniejszych klinów między sobą równych, na ile części kąt dwukąta podstawy był podzielony; każdego zatém z tych ostatnich klinów objętość taką częścią będzie objętości klina prostokątnego, jaką częścią jest kąt dwukąta służącego mu za podstawę względem kąta prostego czyli 90°. Oznaczywszy przeto objętość klina kulistego przez $\mathbf{K}$, a kąt jego podstawy przez A, objętość zaś klina prostokątnego przez $\mathbf{K}'$, będzie

$$\mathbf{K} : \mathbf{K}' = \mathrm{A} : 90 \text{ skąd } \mathbf{K} = \frac{\mathrm{A}}{90} \cdot \mathrm{K}'$$

Ale $$\mathbf{K}' = \tfrac{1}{3}\pi r^3, \text{ zatém } \mathbf{K} = \frac{\mathrm{A}}{90} \cdot \tfrac{1}{3}\pi r^3 = \frac{\mathrm{A}}{90}\pi r^2 \cdot \tfrac{1}{3} r$$

A że $\frac{\mathrm{A}}{90}\pi r^2$ wyraża powierzchnię dwukąta służącego za podstawę klinowi §. 281, zatém *objętośc klina kulistego równa się iloczynowi z powierzchni jego podstawy t. j. z powierzchni dwukąta służącego mu za podstawę przez trzecią część promienia kuli.*

§. 290.

Twierdzenie. *Powierzchnie dwóch kul różnych promieni są w stósunku kwadratów tychże promieni lub średnic, a ich objętości w stósunku sześcianów tychże samych wymiarów.*

Powierzchnie dwóch kul oznaczmy przez P i p, ich promienie przez R i r, a objętości przez K i k, tedy, ponieważ według §. 279 jest

$$P = 4\pi R^2, \text{ a } p = 4\pi r^2$$

zaś według §. 282 $K = \frac{4}{3}\pi R^3$, a $k = \frac{4}{3}\pi r^3$

zatém $P : p = 4\pi R^2 : 4\pi r^2 = R^2 : r^2$

$$K : k = \tfrac{4}{3}\pi R^3 : \tfrac{4}{3}\pi r^3 = R^3 : r^3.$$

Położywszy $R = \frac{S}{2}$ a $r = \frac{s}{2}$, gdzie S i s wyrażają średnice tych kul, będzie $P : p = \frac{S^2}{4} : \frac{s^2}{4} = S^2 : s^2$

tudzież $K : k = \frac{S^3}{8} : \frac{s^3}{8} = S^3 : s^3$

co należało dowieść.

Wniosek. Z §. 169 wiemy, co są wycinki koła podobne; jeżeli takie wycinki obracają się około osi, tedy ich łuki rodzą powierzchnie pasów sferycznych, a same wycinki rodzą wycinki kuliste. Tak pasy sferyczne jako i wycinki kuliste przez takie wycinki kołowe zrodzone, nazywają się także *podobnemi*. Że powierzchnie pasów sferycznych podobnych, są w stósunku kwadratów z promieni lub średnic, lub nareszcie ich wysokości, a wycinki kuliste w stósunku sześcianów z tychże samych wymiarów, sądzę iż nie potrzebuję dowodzić, bo ten dowód każdy łatwo znajdzie wyraziwszy tylko tak powierzchnie pasów jako téż i objętości wycinków według §§. 280 i 285.

Zakończenie rozdziału o ciałach okrągłych.

§. 291.

Dla łatwiejszego dostrzeżenia stósunku trzech ciał okrągłych, mianowicie zaś stósunku ich objętości, zbierzmy tu pod jeden widok to co w poprzednich §§. o tych objętościach dowiedliśmy.

Niech r będzie promieniem kuli, tudzież promieniem tak podstawy walca jako téż i ostrokręgu, niech oprócz tego w będzie wysokością tych dwóch ostatnich ciał lecz tak, że

$w=2r$ t. j. wysokość tak walca jako i ostrokręgu niech będzie równa średnicy kuli, tedy te trzy ciała będą względem siebie tak jak nam je *fig. 270* przedstawia. Z tych piérwsze t. j. walec możemy tu nazwać opisanym na kuli a ostrokrąg wpisany w kulę, lubo ta nazwa nie zupełnie mu przystoi, gdyż nie cały ostrokrąg objęty jest kulą. Z takiemi wymiarami objętości każdego z tych trzech ciał są jak następuje, oznaczając je przez W, O, K,

objętość walca $=2\pi r^3$
„ ostrokręgu $=\frac{2}{3}\pi r^3$
„ kuli $=\frac{4}{3}\pi r^3$

przeto $W:O:K=2:\frac{2}{3}:\frac{4}{3}=1:\frac{1}{3}:\frac{2}{3}=\frac{3}{3}:\frac{1}{3}:\frac{2}{3}=3:1:2$
albo $O:K:W=1:2:3$

z czego widzimy, iż w takim przypadku objętość kuli jest 2 razy, a objętość walca 3 razy większa od objętości ostrokręgu.

Jeżeli ostrokrąg jest ścięty płaszczyzną równoległą do podstawy, a promień wyższéj jego podstawy oznaczymy przez r', a wysokość przez w objętość ostrokręgu ściętego będzie $=\frac{1}{3}\pi w(r^2+r'^2+rr')$.

Oznaczywszy promień podstawy odcinka przez ϱ a wysokość przez w,
objętość jego jest $=\frac{1}{2}\pi r^2 w+\frac{1}{6}\pi w^3$.

Jeżeli r jest promieniem kuli a w wysokością czaszki, natenczas objętość ostrokręgu sferycznego mającego tęż czaszkę za podstawę jest $=\frac{2}{3}\pi r^2 w$.

Nakoniec niech ϱ będzie promieniem dolnéj a ϱ' promieniem podstawy górnéj kloca kulistego, zaś w jego wysokością czyli odległością podstaw, tedy

objętość tegoż kloca $=\pi\left(\frac{\varrho^2+\varrho'^2}{2}w+\frac{1}{6}w^3\right)=\pi w\left(\frac{\varrho^2+\varrho'^2}{2}+\frac{w^2}{6}\right)$

§. 292.

Opisawszy na okręgu koła kwadrat ABCD i trójkąt foremny czyli równoboczny LMN *fig. 271* tak, iżby podstawy tak kwadratu AB jako i trójkąta LM były stycznemi do okręgu koła w jednymże punkcie E, a potém obracając tak półkole jako téż prostokąt BCFE i trójkąt ENM około osi NE, w tym obrocie trzy te figury zrodzą nam trzy ciała t. j. kulę, walec i ostrokrąg, których stósunek jest dosyć ciekawy i dla tego tu jeszcze podać go przedsięwziąłem.

Samo spojrzenie na figurę przekonywa nas, że $AB = EF = 2r$, jeżeli przez r promień tego tu koła rozumiemy. W §. 161 położywszy $a_1 = r$, będzie a_1 bokiem sześciokąta foremnego w koło wpisanego, zatém a bokiem trójkąta foremnego w toż koło wpisanego. Ale z wzoru $a_1 = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}$ w tymże §. otrzymanego, przez proste arytmetyczne działanie znajdziemy

$$a = \frac{a_1}{r}\sqrt{4r^2 - a_1{}^2}$$

skoro więc położymy $a_1 = r$ znajdziemy, $a = r\sqrt{3}$, a to jest ważnością boku trójkąta foremnego w koło wpisanego. Kładąc teraz w §. 162 $r\sqrt{3}$ za a, otrzymamy $A = 2r\sqrt{3}$, a to znowu jest ważnością boku trójkąta na kole opisanego, z któréj widzimy, iż bok trójkąta na kole opisanego jest dwa razy większy od boku trójkąta w toż koło wpisanego. W obecnym przeto przypadku jest $NL = LM = 2r\sqrt{3}$,
zaś $\overline{NE}^2 = \overline{LN}^2 - \overline{LE}^2 = \overline{LN}^2 - (\frac{1}{2}LM)^2 = 9r^2$ skąd $NE = 3r$.
Mając już przygotowane potrzebne ilości, porachujmy tak powierzchnie jako i objętości tych trzech ciał, a znajdziemy

Powierzchnią kuli . . . . $= 4\pi r^2$
Objętość kuli . . . . $= \frac{4}{3}\pi r^3$
Powierzchnią boczną czyli krzywą walca . . $= 4\pi r^2$
„ całkowitą tegoż walca . . . . . $= 6\pi r^2$
Objętość walca . . . . $= 2\pi r^3$
Powierzchnią boczną czyli krzywą ostrokręgu $= 6\pi r^2$

A że powierzchnia podstawy tego ostrokręgu $= \pi \,.\, (\frac{1}{2}LM)^2$
$= \pi\,(r\sqrt{3})^2 = \pi 3r^2$, zatém

całkowita powierzchnia tegoż ostrokręgu . . $= 9\pi r^2$
objętość tegoż samego ostrokręgu $= 3\pi r^2 \times \frac{1}{3} \,.\, 3r = 3\pi r^3$.

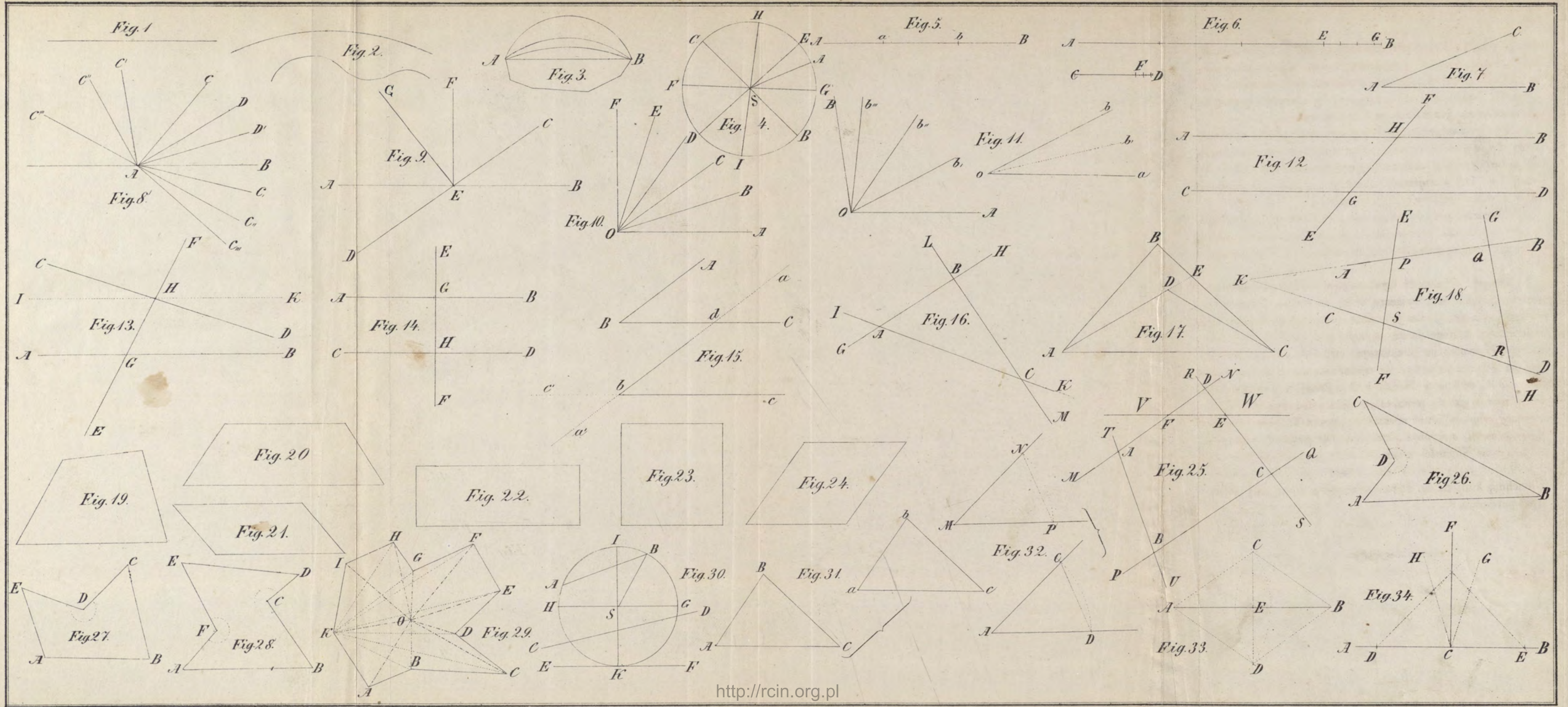
Porównywając więc kulę z walcem na niéj opisanym, widzimy, że jéj powierzchnia równa się powierzchni bocznéj walca. a całkowitéj powierzchni walca jest $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ częściami, objętość kuli jest téż $\frac{2}{3}$ częściami walca na niéj opisanego, jak to już z poprzedzającego §. wiemy, skąd wniesiemy, że objętości dwóch tych ciał mają się do siebie w tymże samym stósunku jak całkowite ich powierzchnie.

Porównywając następnie kulę z ostrokręgiem, dostrzeżemy, że powierzchnia kuli jest $\frac{2}{3}$ częściami powierzchni bocznéj ostrokręgu a $\frac{4}{9}$ całkowitéj jego powierzchni. Ale i objętość kuli jest $\frac{4}{9}$ częściami ostrokręgu, przeto i tu objętości są w stósunku całkowitych powierzchni.

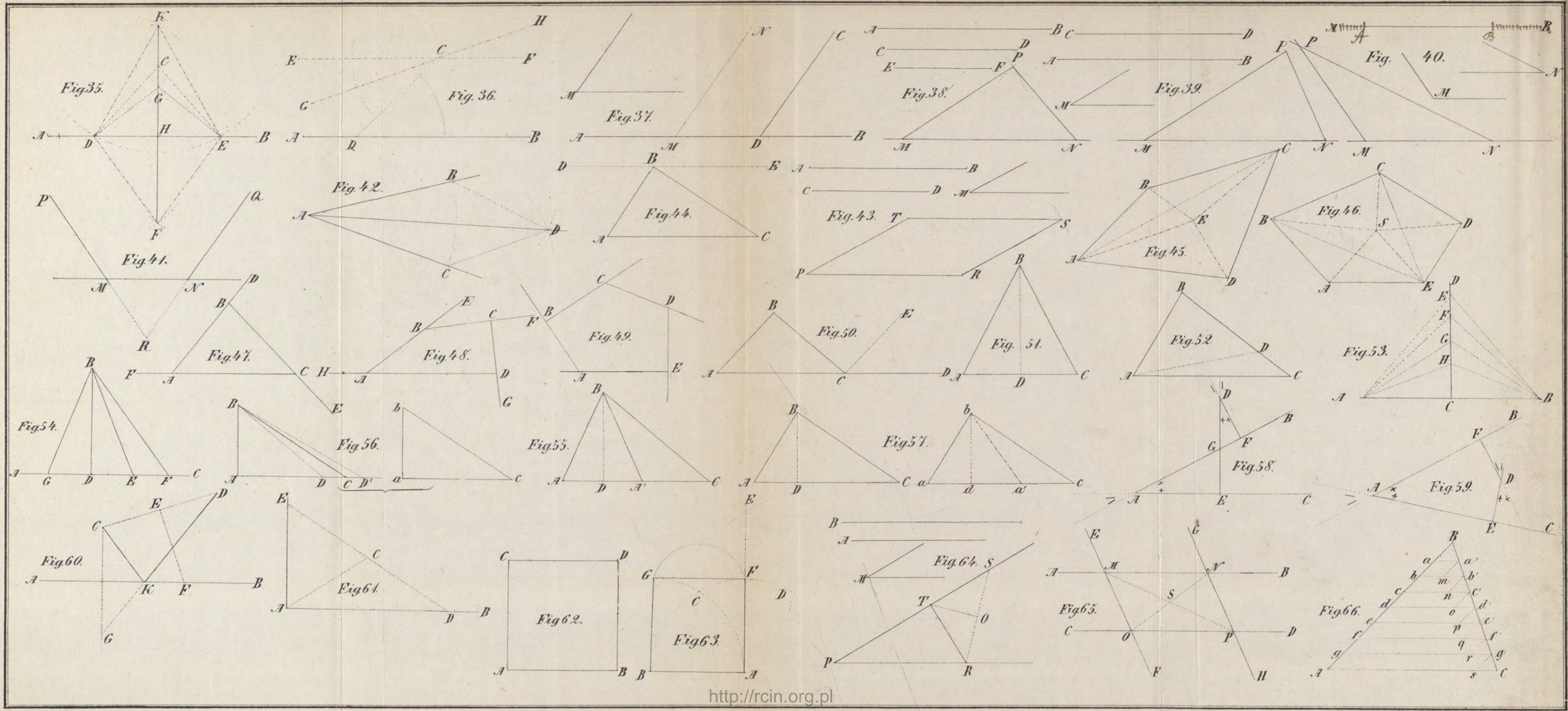
Nareszcie porównywając walec z ostrokręgiem, przekonamy się, że tak boczne jako i całkowite powierzchnie są w tymże samym stósunku jak ich objętości t. j. w stósunku 2:3.

Uwaga. Własność tegoż samego stósunku objętości i powierzchni nie jest wyłączną tylko dla walca i ostrokręgu na kuli opisanych, ale jest własnością ogólną dla każdego wielościanu, którego ściany są stycznemi do kuli. Albowiem każdy taki wielościan rozebranym być może, jak to już wiemy, na tyle ostrosłupów, ile wielościan ma ścian mających wierzchołek spólny w środku kuli wpisanéj i wysokości równe i równające się promieniowi téjże kuli wpisanéj. Oznaczywszy więc objętość wielościanu przez W, jego powierzchnią przez P, a promień kuli wpisanéj przez r, według §. 244, będzie objętość walca $W = P \times \frac{1}{3}r$, a objętość kuli $K = 4\pi r^2 \times \frac{1}{3}r$, zatém $W : K = P : 4\pi r^2$. Ale $4\pi r^2$ jest powierzchnią kuli, zatém stósunek objętości równa się stósunkowi powierzchni.

Tablica I.

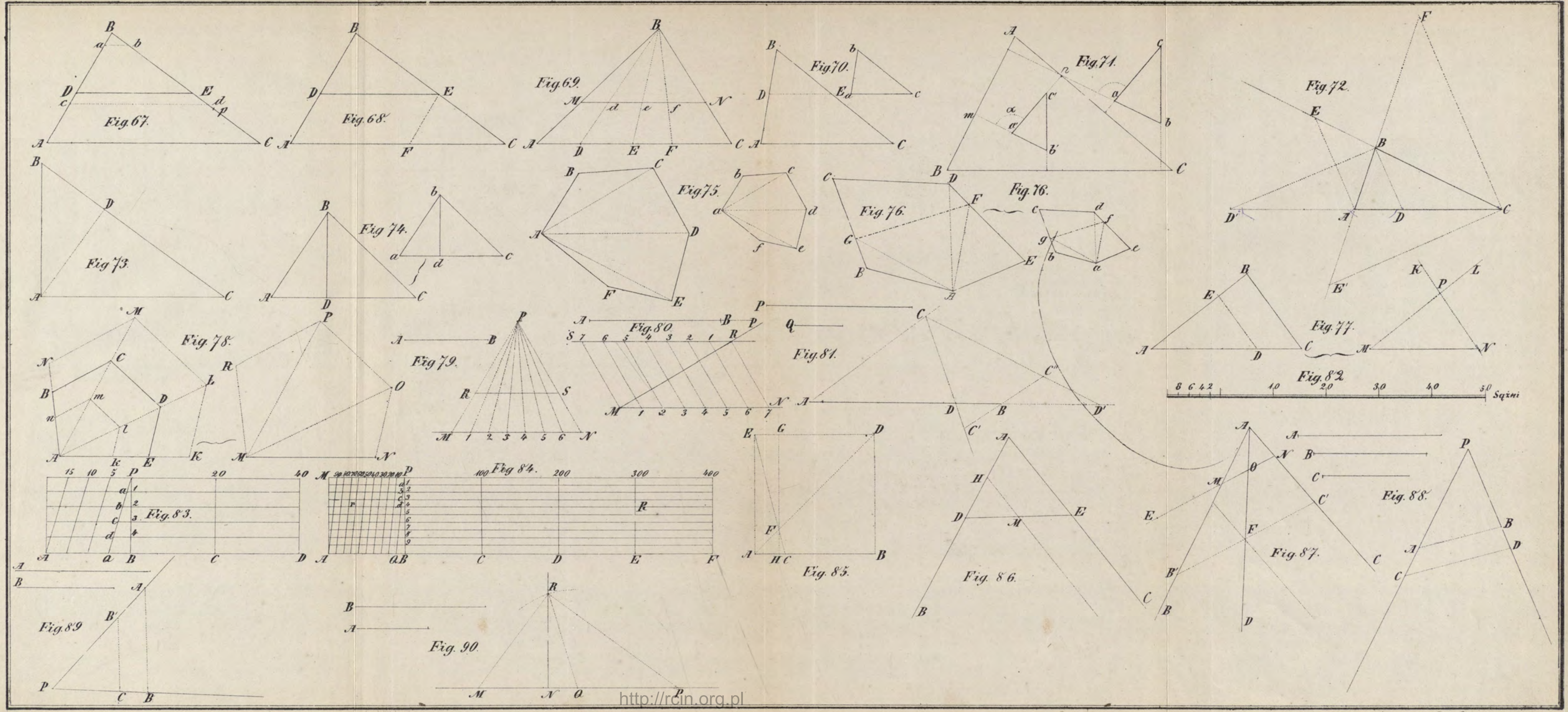


Lit. Czasu w Krakowie

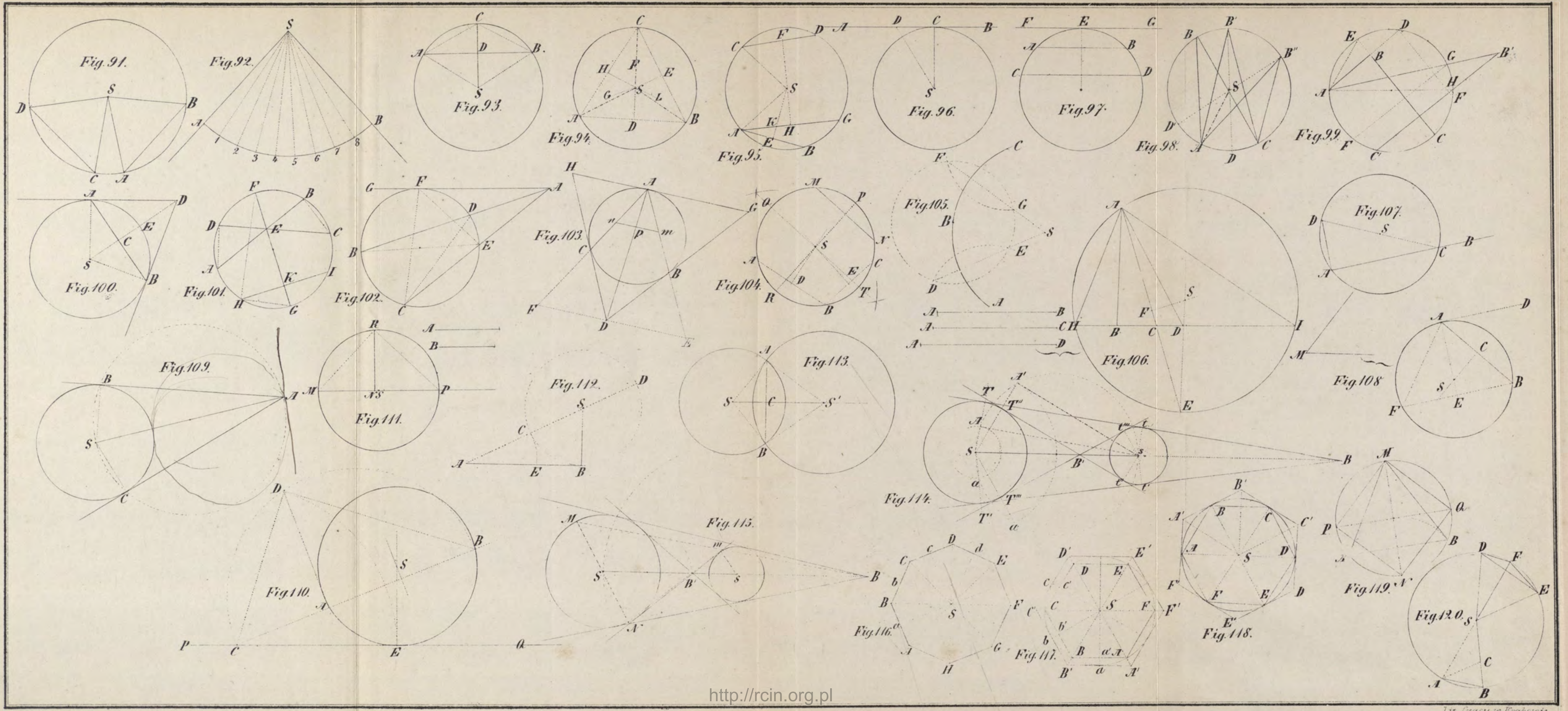


Lit. Czasu w Krakowie.

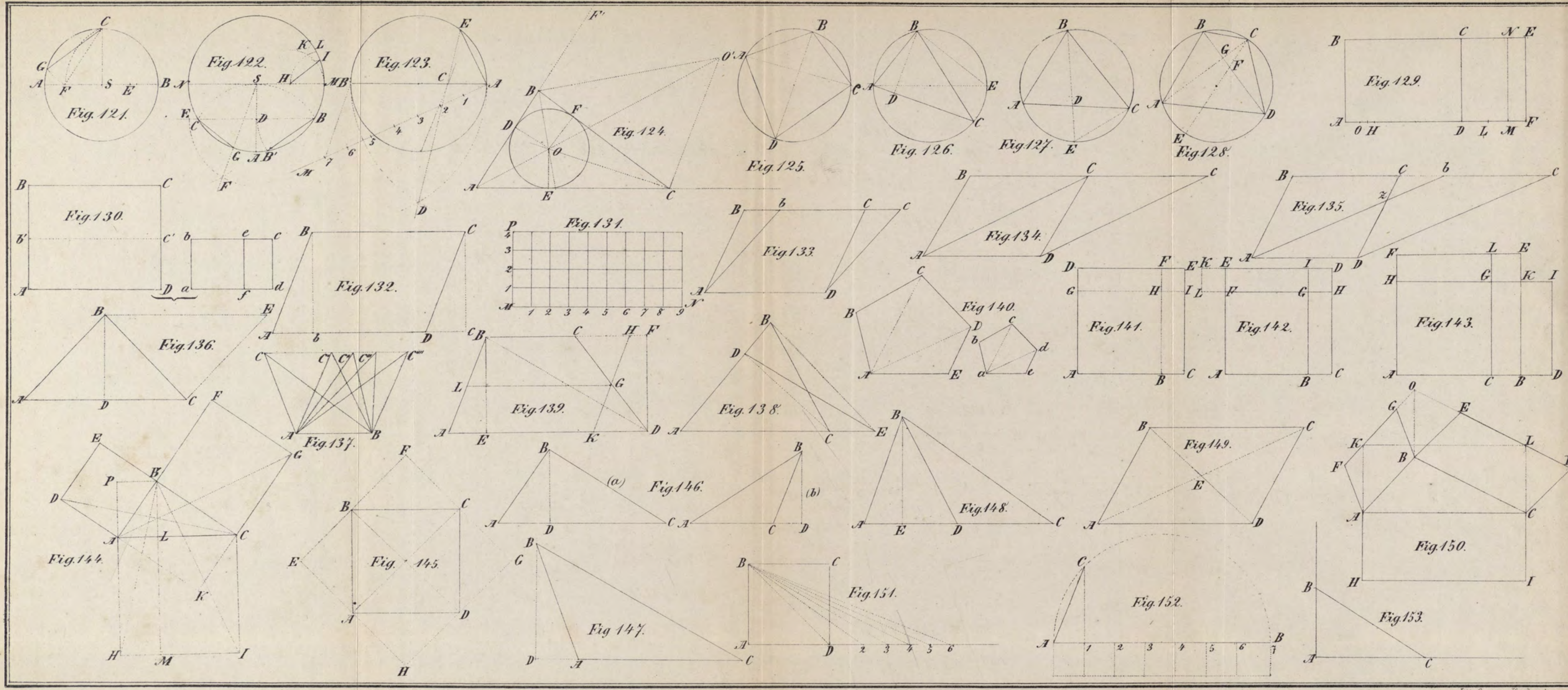
ED: AC = BH : AH
AB: Ac = BH : AH
Ac = '



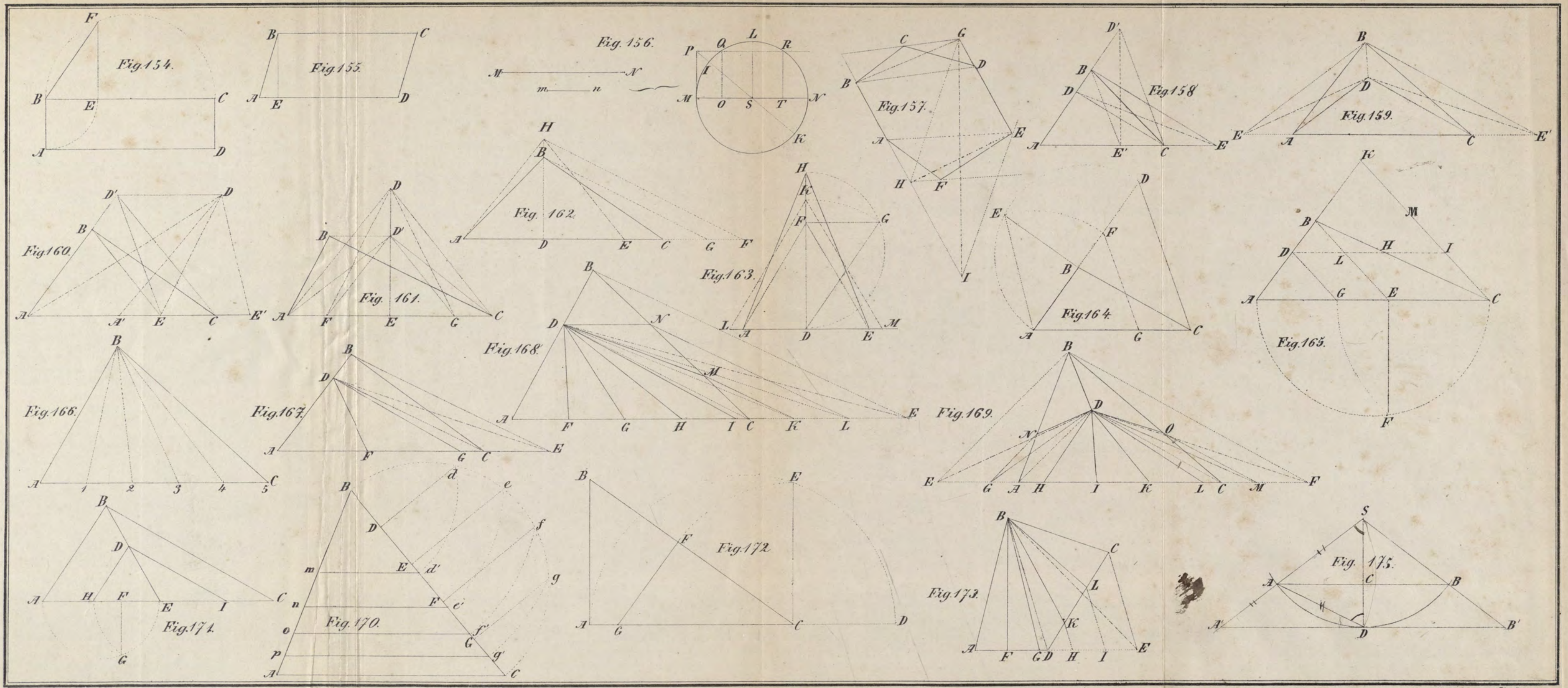
Lit. Czasu w Krakowie.



Lit. Czasu w Krakowie.



Lit. Czasu w Krakowie.



Lit. Czasu w Krakowie.

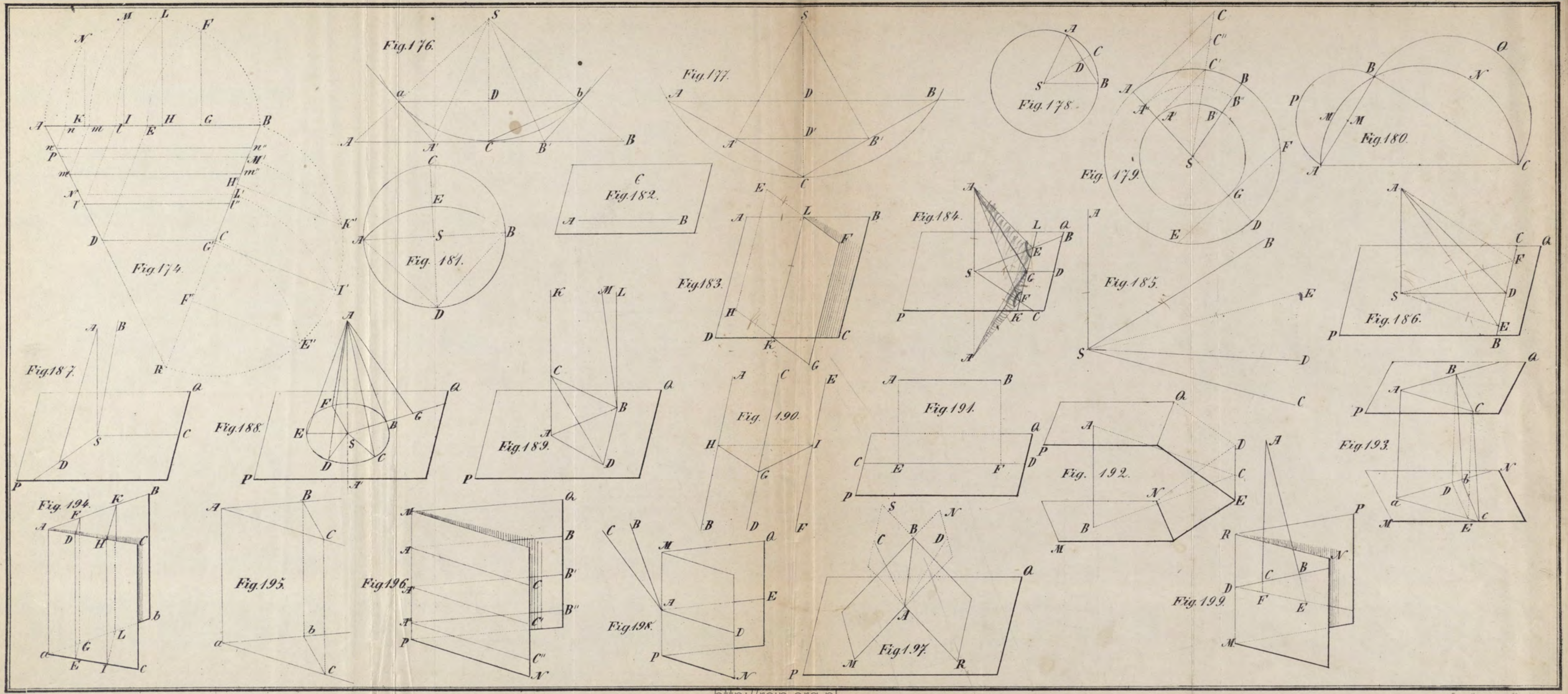
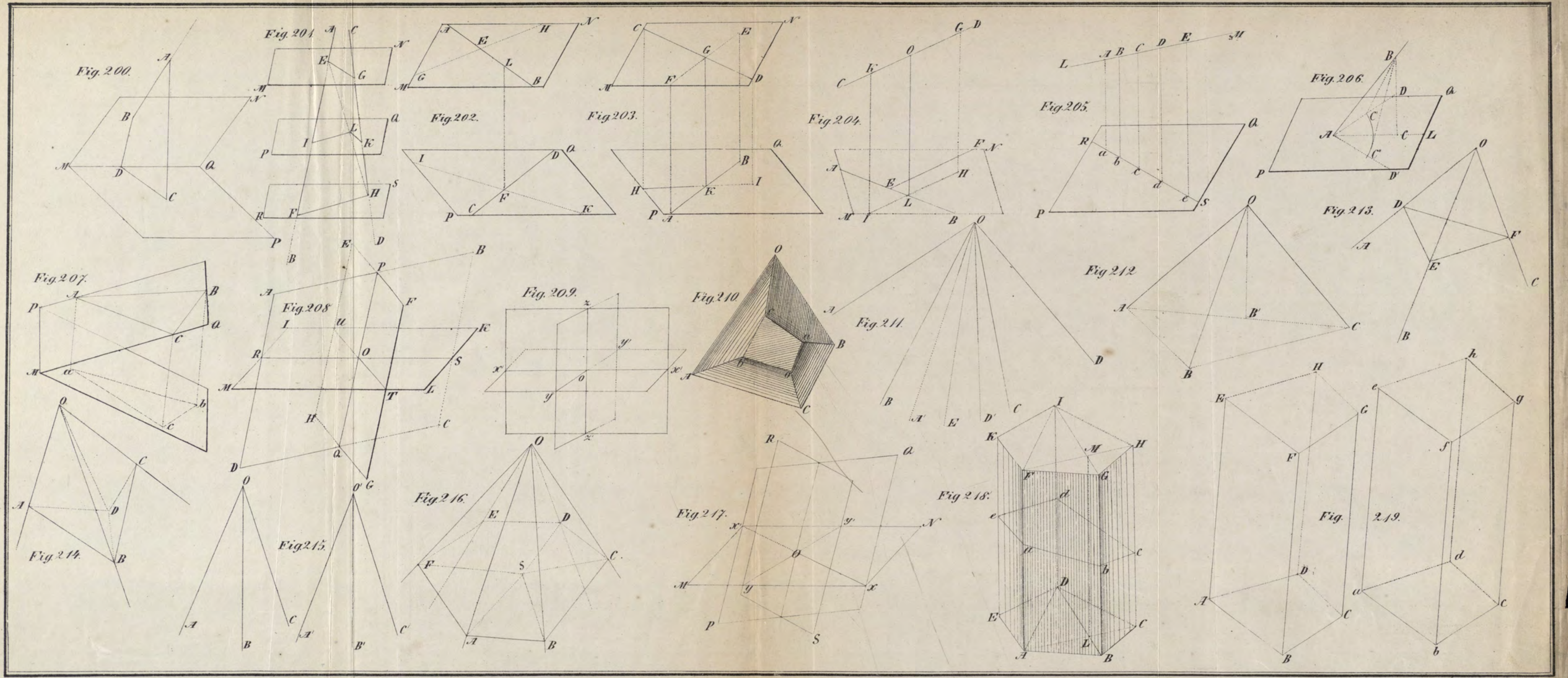
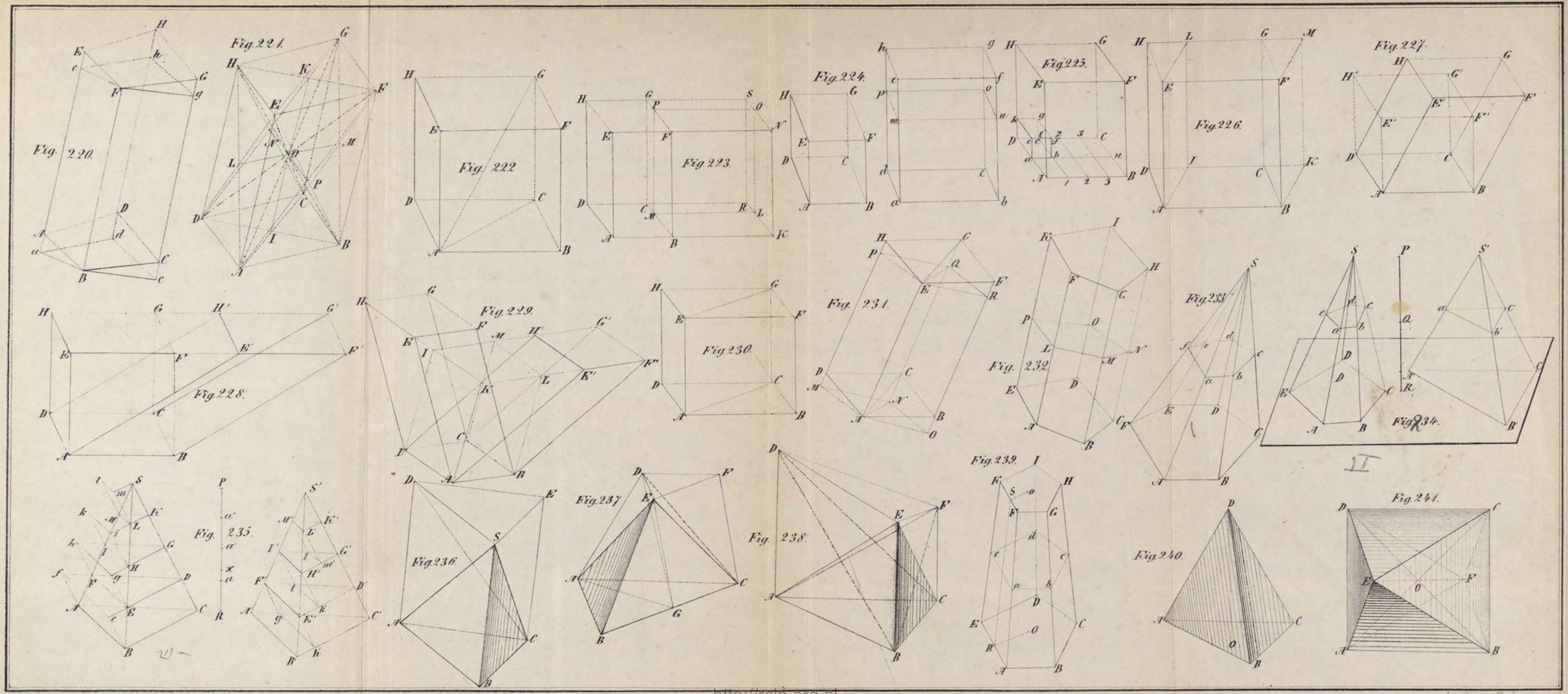


Fig.174.
Fig.176.
Fig.177.
Fig.178.
Fig.179.
Fig.180.
Fig. 181.
Fig.182.
Fig.183.
Fig.184.
Fig.185.
Fig.186.
Fig.187.
Fig.188.
Fig.189.
Fig. 190.
Fig.191.
Fig. 192.
Fig.193.
Fig. 194.
Fig.195.
Fig.196.
Fig.197.
Fig.198.
Fig.199.



Lit. Czasu w Krakowie



Lit. Ciasu w Krakowie.

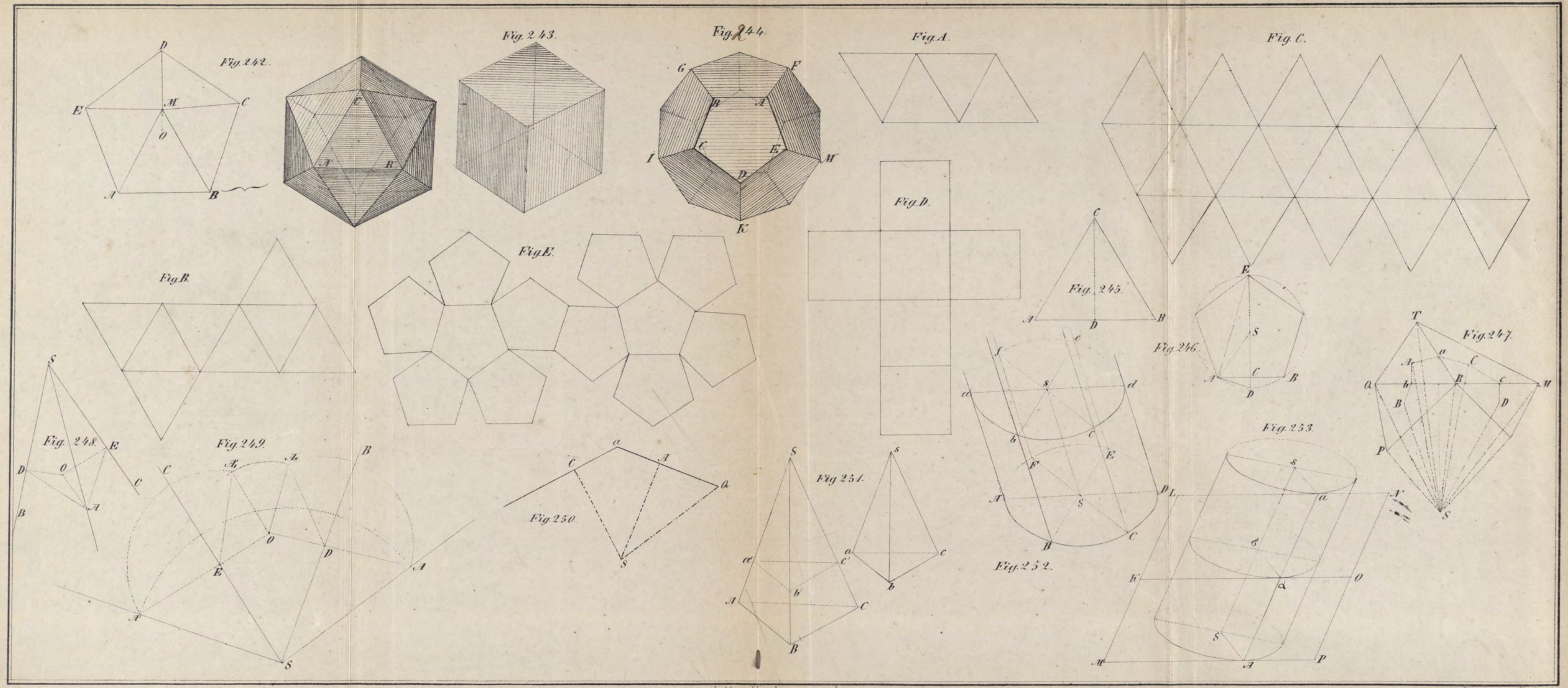


Fig. 242.
Fig. 243.
Fig. 244.
Fig. A.
Fig. C.
Fig. B.
Fig. E.
Fig. D.
Fig. 245.
Fig. 246.
Fig. 247.
Fig. 248.
Fig. 249.
Fig. 250.
Fig. 251.
Fig. 252.
Fig. 253.

Tablica XI.

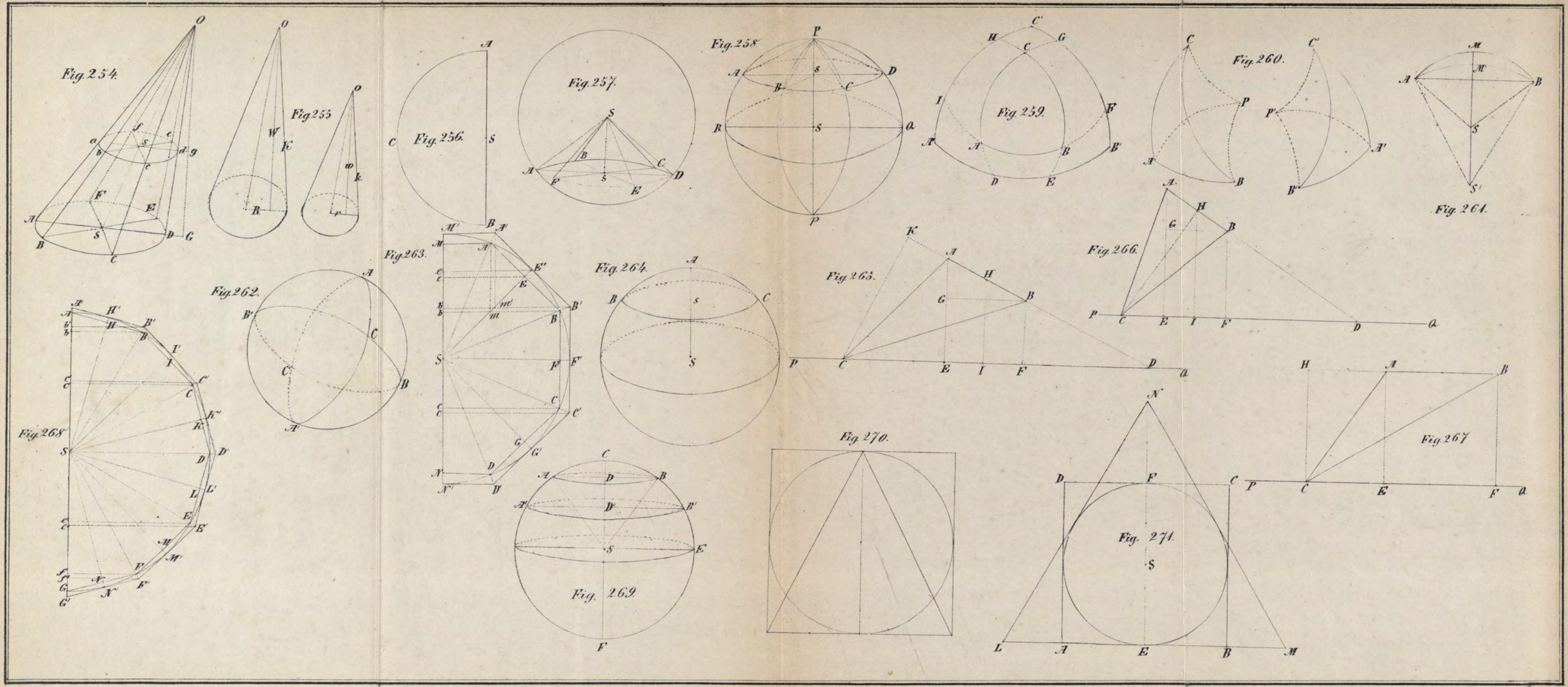


Fig. 254.
Fig. 255
Fig. 256.
Fig. 257.
Fig. 258
Fig. 259.
Fig. 260.
Fig. 261.
Fig. 262.
Fig. 263.
Fig. 264.
Fig. 265.
Fig. 266.
Fig. 267
Fig. 268
Fig. 269.
Fig. 270.
Fig. 271.