Stanisław Kosowski

EFEKTYWNE OKREŚLENIE PARAMETRÓW DYSYPACYJNYCH GAZU RELATYWISTYCZNEGO W RAMACH TEORII KINETYCZNEJ

12/1967

WARSZAWA

Efektywne określenie parametrów dysypacyjnych gazu relatywistycznego w ramach teorii kinetycznej

Stanisław Kosowski

Wstęp

W rozwoju gazodynamiki relatywistycznej zainteresowane są głównie takie dziedziny nauki jak fizyka jądrowa, fizyka plazmy i astrofizyka. Pierwsze kroki w teorii ośrodka relatywistycznego dokonane zostały w termodynanice i hydrodynamice cieczy idealnej. Trudności w sformułowaniu termodynamiki relatywistycznej związane były z brakiem równań, w których czas, obok współrzędnych przestrzennych, występowałby w charakterze równouprawnionej współrzędnej. Zasadniczy postęp w tym kierunku przyniosła praca Eckarta [8], która oprócz ogólnego sformułowania termodynamiki procesów nieodwracalnych w ramach fizyki klasycznej zawierała również jej uogólnienie w formaliźmie szczególnej teorii względności. Zaskakującym rezultatem pracy było odkrycie nowego efektu - przyspieszanie materii powoduje dodatkowy przepływ ciepła.

Rozwinięciem pracy Eckarta były obszerne prace Kluitenberga, De Groota, Mazura [10, 11, 12] . Pokazali oni m.in. że relacje Onsagera są niezmiennicze wobec transformacji Lorentza, zaś produkt entropii można zapisać w formie analogicznej do klasycznej. Oprócz wspomnianego podejścia fenomenologicznego rozwijane były równolegle i kinetyczne metody analizy ośrodka relatywistycznego. Najbardziej istotny wkład w rozwój teorii statystycznej wniósł Synge [20], znalazł on relatywistycznie niezmienniczą funkcję rozkładu cząstek w przestrzeni fazowej dla stanu równowagi termodynamicznej /analog rozkładu Maxwella-Boltzmanna/.

Dla rozwoju teorii kinetycznej najważniejszym krokiem było uzyskanie relatywistycznej formy równania Boltzmanna [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Formalne wyprowadzenie równań gazodynamiki relatywistycznej z uwzględnieniem procesów dyssypacyjnych z równania Boltzmanna, podobnie, jak swego czasu, w mechanice klasycznej, było potwierdzeniem relatywistycznej termodynamiki procesów nieodwracalnych [16, 23, 24]. Można było oczekiwać, że w ramach teorii kinetycznej zostaną rozwiązane dalsze istotne problemy dotyczące ośrodka relatywistycznego, w szczególności zaś, zostaną określone parametry dyssypacyjne ośrodka, a więc współczynniki lepkości i przewodnictwa. Jakkolwiek problem ostatni był podejmowany w kilku pracach [16, 23, 24, 19], to niestety w żadnym przypadku nie doczekał się pełnego efektywnego rozwiązania. Należy przypuszczać, że związane to było z trudnościami, jakie w konkretnych obliczeniach kryje w sobie zderzeniowy człon równania Boltzmanna. Uzupełnienie tej dość istotnej luki w teorii ośrodka relatywistycznego stało się celem niniejszej pracy. Podjęto w niej próbę określenia parametrów dyssypacyjnych ośrodka przy założeniu możliwie najprostszego modelu oddziaływań cząstek. W charakterze takiego modelu przyjęliśmy założenie o stałości różniczkowego przekroju czynnego rozpraszania cząstek w układzie środka masy x/.

W pracy rozważa się gaz elektrycznie obojętny, jednoskładnikowy, niezbyt gęsty, bez zewnętrznego pola sił, bez kreacji i anihilacji cząstek. Startując z relatywistycznej

x/ Założenie to jest fizycznie realne i tak np. dla nukleonów w obszarze energii 130 - 400 MeV całkowity przekrój rozpraszania cząstek w układzie środka masy jest w przybliżeniu stały i równy przekrojowi oddziaływań elastycznych /$\sigma \approx 23$mb/. W przypadku klasycznym założenie powyższe odpowiada dokładnie modelowi kul sprężystych.

formy równania Boltzmanna i stosując metodę momentów znaleziono równania będące relatywistycznym odpowiednikiem równań Navier-Stokesa oraz określono efektywnie współczynniki lepkości i przewodnictwa cieplnego. Problem rozwiązany jest od początku do końca baz żadnych przybliżeń. Na uwagę zasługuje fakt pojawienia się niezerowego śladu tensora naprężeń lepkich. Jest to efekt czysto relatywistyczny. Zbadano zachowanie graniczne współczynników transportu w obszarze klasycznym i ultrarelatywistycznym. Stwierdzono przy tym zupełną zgodność ze znanymi wynikami dla przypadku klasycznego i z rezultatami uzyskanymi dla przypadku ultrarelatywistycznego na innej drodze.

Składam podziękowanie prof.dr W.Fiszdonowi, promotorowi niniejszej pracy, za umożliwienie mi podjęcia tak interesującego tematu, w kierowanym przez niego Zakładzie, jak również za stworzenie sprzyjających warunków i rzeczowej atmosfery do pracy.

Chciałbym w tym miejscu serdecznie podziękować dr Ryszardowi Herczyńskiemu za stałą, troskliwą opiekę w czasie doktorantury, częste dyskusje, cenne uwagi i propozycje, szczególnie zaś za bardzo wnikliwe przeczytanie rękopisu i zwrócenie uwagi na dostrzeżone błędy i niejasności.

I. Założenia i pojęcia podstawowe

Zakładamy, że

a/ gaz jest elektrycznie obojętny, niezbyt gęsty[x/], jednoskładnikowy, złożony z cząstek o masie spoczynkowej m_0 ,

b/ w gazie nie zachodzą procesy kreacji i anihilacji cząstek,

c/ zaniedbujmy zewnętrzne pole sił,

d/ ośrodek znajduje się w stanie bliskim lokalnej równowagi termodynamicznej,

e/ rozważamy tylko postępowe stopnie swobody cząstek i te traktujemy klasycznie,

f/ zderzenia cząstek uważamy za sprężyste.

Z mikroskopowego punktu widzenia stan ośrodka określa niezmiennicza funkcja rozkładu cząstek w przestrzeni fazowej. Definicję funkcji rozkładu i dowód jej niezmienniczości wobec transformacji Lorentza podają w swych pracach Synge [20], Czernikow [3,4,6], Masłowa [15]. Podkreślimy tu tylko, że $f(\vec{p},\vec{x})$ podaje liczbę cząstek o pędzie $\vec{p}$ w punkcie czasoprzestrzeni $\vec{x}=(\vec{r},t)$, przypadającą na jednostkę objętości fazowej. Przy przejściu od jednego inercjalnego układu odniesienia $0(\vec{r},t)$ do innego $0^0(\vec{r}^0,t^0)$, poruszającego się względem 0 z prędkością $\vec{q}$, obowiązującą następujące reguły transformacyjne:

$$\vec{r}^0=\vec{r}+\frac{\gamma^L-1}{q^2}(\vec{q}\cdot\vec{r})\vec{q}-\gamma^L\vec{q}t \tag{1}$$

$$t^0=\gamma^L\left(t-\frac{\vec{q}\cdot\vec{r}}{c^2}\right)$$

$$\gamma^L=\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

---

x/ Prawdopodobieństwo zderzeń potrójnych jest znacznie mniejsze niż podwójnych.

c - prędkość światła.

Ustalamy, że

1/ wskaźniki łacińskie przebiegają wartości od 1 do 4, greckie od 1 do 3;

2/ obowiązuje reguła sumacyjna Einsteina;

3/ wskaźniki charakteryzujące wielkości tensorowe pisać będziemy u dołu;

4/ symbol, określający układ odniesienia, w którym brane są wielkości, piszemy u góry;

5/ stosujemy metrykę zespoloną /eliminując tym samym konieczność rozróżniania tensorów kowa - i kontra-wariantnych/;

6/ całkę wielokrotną oznaczać będziemy symbolem jednej całki uważając, że jest on rozciągnięty na wszystkie występujące w niej przyrosty elementarne;

7/ opuszczamy granice całkowania pamiętając, że obejmują one obszar danej zmiennej.

W oparciu o funkcję rozkładu możemy zdefiniować makroparametry ośrodka: gęstość liczbową N, prędkość makroskopową $\vec{q}$, tensor energii - pędu T_{lk} :

/2/
$$N = \int f\, d^3\vec{p}$$

/3/
$$\vec{q} = \frac{\int f \vec{V} d^3\vec{p}}{\int f\, d^3\vec{p}}$$

/4/
$$T_{lk} = c^2 \int p_l p_k \frac{d^3\vec{p}}{\varepsilon} = \begin{Vmatrix} P_{\alpha\beta} & \frac{i}{c} S_\alpha \\ \frac{i}{c} S_\beta & -\epsilon \end{Vmatrix}$$

gdzie:

$p_l = \left(\vec{p}, i\frac{\varepsilon}{c}\right)$ - czteropęd cząstki, $\varepsilon = m_0 c^2 \gamma$ - energia cząstki

$\gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}$, $\vec{p}$ - pęd cząstki, $\vec{V}$ - prędkość cząstki

$d^3\vec{p}$ - element objętości w przestrzeni pędów,

$i^2 = -1$, $P_{\alpha\beta}$ - gęstość tensora strumienia pędu,

S_α - gęstość strumienia energii, ε - gęstość energii.

Układ współrzędnych związany z elementem gazu, poruszającym się z prędkością makroskopową, nazwiemy układem własnym x/ i oznaczać będziemy symbolem 0^o.

Rozważania zarówno statystyczne /J.L.Synge [20]/, jak i kinetyczne /Czernikow [5] / prowadzą do stwierdzenia, że ośrodek w stanie równowagi termodynamicznej jest opisany przez funkcję f^o_M , która jest relatywistycznym analogiem funkcji Maxwella-Boltzmanna:

/5/

$$f^o_M = A e^{-B\varepsilon^o}$$

$$A = \frac{N^o_M \, x}{4\pi m_o^3 c^3 K_2(x)}$$

$$N^o_M = \int f^o_M \, d^3\vec{p}^o$$

$$x = m_o c^2 B$$

$$K_n(x) = \int_0^\infty e^{-x\,\mathrm{ch}\,\chi} \mathrm{ch}\, n\chi \, d\chi \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

B - moduł rozkładu kanonicznego

Temperaturę wprowadzamy wg następującej definicji:

/6/

$$kT^o \overset{df}{=} \frac{c^2}{3N^o_M} \int p^{o2} f^o_M \frac{d^3\vec{p}^o}{\varepsilon^o}$$

i definicję tę rozciągamy na stany bliskie równowagi termodynamicznej. Mamy więc natychmiast związek T^o z modułem rozkładu kanonicznego B :

/6'/

$$kT^o = \frac{1}{B}$$

---

x/ Istnieje również inny sposób określenia prędkości makroskopowej. Landau definiuje prędkość makroskopową żądając, aby w układzie własnym znikał średni pęd, a gęstość energii była taka, jak dla gazu idealnego.

Niektórzy autorzy [7] , [9] podejmują próbę uogólnienia definicji temperatury przez formalne zastąpienie w /6/ funkcji f^{o}_{M} pełną[x/] funkcją rozkładu f^{o}. W konkretnych rozważaniach żąda się jednak zawsze, by tak uogólniona temperatura pokrywała się z temperaturą określoną w myśl /6/. Żądanie to, znane niekiedy w literaturze pod nazwą postulatu Enskoga - Chapmana, prowadzi do pewnego ograniczenia na funkcję f^{o}:

/7/
$$\int p^{o2} f^{o}_{D} \frac{d^{3}\vec{p}^{o}}{\varepsilon^{o}} = 0$$

gdzie:

$$f^{o}_{D} = f^{o} - f^{o}_{M}$$

Jak się okaże z dalszych rozważań, w przypadku relatywistycznym ograniczenie takie prowadzi do sprzeczności. Definiując temperaturę wprost przez funkcję rozkładu dla stanu równowagi unikamy tym samym konieczności narzucania warunku /7/.

II. Relatywistyczne równanie Boltzmanna

Relatywistyczne równanie Boltzmanna ma postać następującą:

/1/
$$p_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = \delta f$$

gdzie:

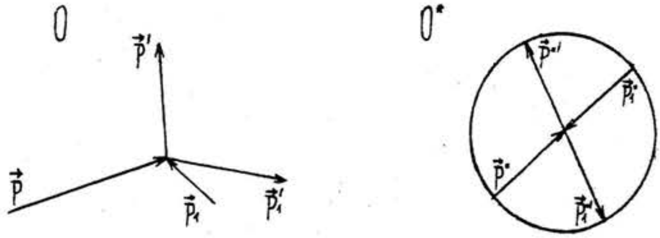
/2/
$$\delta f = \frac{2}{c^2} \int (f' f'_1 - f f_1) V^{*} \varepsilon^{*} \varepsilon^{*}_1 \, d\sigma^{*} \frac{d^{3}\vec{p}_1}{\varepsilon_1}$$

jest relatywistycznym członem zderzeniowym. Można dowieść, że równanie / II,1 / jest równoważne równaniu wyprowadzonemu przez Czernikowa [5] . Dla przejrzystego określenia wielkości występujących w równaniu Boltzmanna podajemy poniżej

---

x/ Tak będziemy nazywać funkcję rozkładu opisującą dowolny stan ośrodka, a więc nie tylko stan równowagi.

dwa rysunki, które ilustrują akt zderzenia cząstek w laboratoryjnym układzie odniesienia O i w układzie środka masy O* /układ, w którym znika całkowity pęd cząstek zderzających się/:



$\vec{p}, \vec{p}_1, \varepsilon, \varepsilon_1, \vec{p}', \vec{p}_1', \varepsilon', \varepsilon_1'$ - pędy i energie cząstek przed zderzeniem i po zderzeniu w układzie O,

odpowiednie wielkości ze znaczkiem " * " brane są w układzie środka masy, $\vec{V}^*$ - prędkość cząstki w układzie środka mas,

$d\sigma = \frac{d\sigma_{\vec{p}^*\vec{p}_1^*}}{d\Omega_{\vec{p}^{*\prime}}} d\Omega_{\vec{p}^{*\prime}}$ - różniczkowy przekrój czynny rozpraszania w układzie środka masy cząstki o pędzie $\vec{p}^*$ na cząstce o pędzie $\vec{p}_1^*$ w element kąta bryłowego $d\Omega_{\vec{p}^{*\prime}}$ o osi $\vec{p}^{*\prime}$

$f = f/\vec{p}, \vec{x}/$, $f_1 = f/\vec{p}\,, \vec{x}/$, $f' = f/\vec{p}'\,, \vec{x}/$, $f_1' = f/\vec{p}_1'\,, \vec{x}$

Trudności, jakie napotyka się przy wyprowadzeniu relatywistycznego równania Boltzmanna wiążą się głównie ze sprowadzeniem członu zderzeniowego do postaci boltzmanowskiej. Równanie /II,1/ jest jawnie relatywistycznie niezmiennicze. Formalnie różni się ono od postaci klasycznej jedynie czynnikiem $\frac{\varepsilon^*\varepsilon_1^*}{\varepsilon\varepsilon_1}$ występującym w członie zderzeniowym /należy poza tym pamiętać, że wszystkie wielkości w tym równaniu są relatywistyczne/. Okazuje się, że podobnie jak klasycznie [7] , człon zderzeniowy zachowuje pewne charakterystyczne własności. Podajemy najważniejsze z nich:

/3a/
$$\int \varphi f' f_1' W \frac{d^3\vec{p}}{\varepsilon}\frac{d^3\vec{p}_1}{\varepsilon_1} = \int \varphi' f f_1 W \frac{d^3\vec{p}}{\varepsilon}\frac{d^3\vec{p}_1}{\varepsilon_1}$$

/3b/ $$\int \varphi \, \delta f \frac{d^3\vec{p}}{\varepsilon} = \frac{1}{4}\int (\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi_1')\, \delta f \frac{d^3\vec{p}}{\varepsilon}$$

gdzie

/3c/ $$W = \frac{2}{c^2} V^* \varepsilon^* \varepsilon_1^* \, d\sigma^* \qquad d\sigma^* = \frac{d\sigma^*_{\vec{p}\vec{p}_1}}{d\Omega_{\vec{p}''}} d\Omega_{\vec{p}''}$$

f, φ są dowolnymi funkcjami pędu i czasoprzestrzeni, określenia φ_1 , φ' , φ_1' - analogiczne do określeń f_1 , f' , f_1' . Mnożąc / II,1 / przez φ i całkując po przestrzeni pędów dostajemy relatywistyczne równanie transportu wielkości φ :

/4/ $$\int \varphi \, p_m \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{d^3\vec{p}}{\varepsilon} = \int \varphi \, \delta f \frac{d^3\vec{p}}{\varepsilon}$$

III. Układ równań gazodynamiki relatywistycznej.

Uzyskanie równoważnego układu równań na makrowielkości wydaje się ważne z dwu względów, mianowicie ze względu na większą komunikatywność równań na bezpośrednie wielkości fizyczne /obserwable/, jak również ze względu na trudności związane z rozwiązaniem równania Boltzmanna. Formalnie układ taki zawarty jest w równaniu / II,4 /. Jak łatwo widać, własność członu zderzeniowego wyrażona w równaniu / II,3b / zabezpiecza spełnienie praw zachowania masy spoczynkowej /równanie ciągłości/, pędu i energii. Kładąc w równaniu / II,4 / kolejno $\varphi = 1$, $\varphi = p_l$ i korzystając z / II,3b / dostajemy odpowiednio równanie ciągłości i równania zachowania tensora energii pędu:

/1/ $$\frac{\partial N_k}{\partial x_k} = 0$$

/2/ $$\frac{\partial T_{lk}}{\partial x_k} = 0$$

gdzie

$N_k = N^0 u_k$ - jest tzw. czterowektorem prądu cząstek[x/].
Wielkości $\varphi = 1, p_l$, podobnie jak klasycznie, nazywać będziemy inwariantami zderzeniowymi φ_{inv}. Jeśli przyjąć, że stan ośrodka jest jednoznacznie określony przez 5 makroparametrów /np. N^0, T^0, $\vec{q}$ /, to tym samym układ /1/, /2/ stanowi zupełny układ równań. Problem sprowadza się więc do określenia tensora energii-pędu T_{lk} przez makroparametry. Okazuje się, że tensor energii-pędu znajduje się najłatwiej w układzie własnym. Znając T^0_{lk} możemy w prosty sposób uzyskać T_{lk}, stosując reguły transformacyjne dla tensorów:

/3/ $$T_{lk} = a_{lm} a_{kn} T^0_{mn}$$

gdzie

/4/ $$a_{lm} = \begin{Vmatrix} \delta_{\alpha\beta} + \frac{\gamma^L - 1}{q^2} q_\alpha q_\beta & -\frac{i}{c}\gamma^L q_\alpha \\ \frac{i}{c}\gamma^L q_\beta & \gamma^L \end{Vmatrix}$$

jest macierzą transformacji Lorentza, $\delta_{\alpha\beta}$ symbolem Kroneckera. Dla ośrodka w stanie lokalnej równowagi termodynamicznej /wtedy $f^0 = f^c_M$ / mamy natychmiast:

/5/ $$T^0_{lk} = \begin{Vmatrix} p_M \delta_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & -\epsilon_M \end{Vmatrix}$$

/6/ $$T_{lk} = (p_M + \epsilon_M) u_l u_k + p_M \delta_{lk}$$

gdzie

---

x/ Definicja u_k - patrz poniżej wzór /6'/

/6'/ $$U_l = \left\| \begin{matrix} \gamma^L \vec{q}/c \\ i\gamma^L \end{matrix} \right\|$$ jest czteroprędkością makroskopową,

p_M, ε_M - relatywistyczne maxwellowskie ciśnienie i gęstość energii /tzn. obliczone w oparciu o funkcję rozkładu f^o_M /:

/7/ $$p_M = 4\pi A\, m_0^4 c^5 \frac{K_2(x)}{x^2}$$

/8/ $$\varepsilon_M = 4\pi A\, m_0^4 c^5 \left[\frac{K_1(x)}{x} + \frac{3K_2(x)}{x^2} \right]$$

Wstawiając T_{lk} z /6/ do równania /2/ i dołączając równanie /1/ uzyskujemy tym samym pełny układ równań opisujący gaz idealny. Dla naszych dalszych rozważań korzystniejszy będzie zapis tego układu w nieco innej formie. W tym celu zapiszemy równanie transportu / II,4 / z funkcją f_M i z φ_{inv} w układzie własnym:

/9/[x] $$\int \varphi^o_{inv}\, p^o_m \frac{\partial f^o_M}{\partial x^o_m} \frac{d^3 p^o}{\varepsilon^o} = 0$$

Obliczmy następnie w tym układzie pochodną funkcji f^o_M :

/10/ $$\frac{\partial f^o_M}{\partial x^o_m} = f^o_M \left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x^o_m} - \varepsilon^o \frac{\partial B}{\partial x^o_m} - B \frac{\partial \varepsilon^o}{\partial x^o_m} \right)$$

Ponieważ

/11/ $$\varepsilon^o = \gamma^L (\varepsilon - \vec{p}\cdot\vec{q})$$

więc:

/12/ $$\frac{\partial \varepsilon^o}{\partial x_m} = \frac{\varepsilon}{c^2} \gamma^{L3} \vec{q}\cdot\frac{\partial \vec{q}}{\partial x_m} - \gamma^L \vec{p}\cdot\frac{\partial \vec{q}}{\partial x_m}$$

---

x/ Kładąc w / II,4 /, $f^o = f^o_M$ nie można położyć $\varphi^o \neq \varphi^o_{inv}$, gdyż dla f^o_M $p^o_m \frac{\partial f^o_M}{\partial x^o_m} = 0$ i wtedy każda wielkość φ^o byłaby zachowana.

Relacja /12/ jest słuszna w dowolnym laboratoryjnym układzie odniesienia 0 , a więc również w układzie laboratoryjnym pokrywającym się lokalnie z 0^0. Ale dla takiego układu $\vec{q}^0 = 0$, $\Gamma^{L0} = 1$. Uwzględniając to dostajemy natychmiast:

$$\frac{\partial f_M^0}{\partial x_m^0} = f_M^0 \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x_m^0} - \varepsilon^0 \frac{\partial B}{\partial x_m^0} + B p_\lambda^0 \frac{\partial q_\lambda^0}{\partial x_m^0} \right) \tag{/13/}$$

Kładąc w /9/ kolejno $\varphi_{inv}^0 = 1$, $\varphi_{inv}^0 = p_l$ i wykorzystując /13/ otrzymujemy odpowiednio równania: ciągłości, zachowania pędu i energii w układzie własnym elementu gazowego dla płynu idealnego w zmiennych A, B, $\vec{q}^0$:

$$P_M B \frac{\partial q_\lambda^0}{\partial x_\lambda^0} + \frac{N_M^0}{A} \frac{\partial A}{\partial t^0} - \epsilon_M \frac{\partial B}{\partial t^0} = 0 \tag{/14/}$$

$$\frac{P_M}{c^2} \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x_j^0} - \frac{1}{3} N_M^0 \overline{(p^{02})} \frac{\partial B}{\partial x_j^0} + \frac{1}{3c^2} N_M^0 B \overline{(p^{02})} \frac{\partial q_j^0}{\partial t^0} = 0 \tag{/15/}$$

$$\frac{c^2}{3} N_M^0 B \overline{(p^{02})} \frac{\partial q_\lambda^0}{\partial x_\lambda^0} + \epsilon_M \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t^0} - N_M^0 \overline{(\varepsilon^{02})} \frac{\partial B}{\partial t^0} = 0 \tag{/16/}$$

gdzie

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{N_M^0} \int \varphi f_M^0 d^3\vec{p}^0 \tag{/17/}$$

IV. Metoda efektywnego określenia tensora energii - pędu z uwzględnieniem procesów dyssypacyjnych.

Zakładamy, że ośrodek znajduje się w stanie bliskim lokalnej równowagi termodynamicznej. Możemy uznać, że stan ten jest wynikiem ewolucji stanu równowagi. Dla rozwiązania postawionego problemu zastosujemy metodę podobną do metody momentów Grada [9]. W tym celu bierzemy f^0 w następującej postaci:

$$f^0 = f_M^0 + f_D^0 = f_M^0 \left(1 + a_\alpha p_\alpha^0 + b_{\alpha\beta} p_\alpha^0 p_\beta^0 + c_{\alpha\beta\gamma} p_\alpha^0 p_\beta^0 p_\gamma^0 + \dots \right) \tag{/1/}$$

f_D^0 jest częścią funkcji rozkładu związaną z procesami dyssypacyjnymi. Konieczność uwzględnienia w rozwinięciu wyrazów w 3. potędze względem p_α^0 związana jest z tym, że zaproponowany rozkład zawiera najmniejszą liczbę wyrazów, przy której jest możliwe przybliżone określenie tensora naprężeń lepkich i strumienia ciepła. Warto podkreślić, że klasycznie powyższe rozwinięcie równoważne jest metodzie 13 momentów Grada [9] . Operowanie makroprędkością zdefiniowaną w / 1,3 / prowadzi do znikania prędkości makroskopowej w układzie własnym. Mamy więc warunek:

$$\int f^0 \vec{v}^0 d^3\vec{p}^0 = 0 \tag{/2/}$$

Jak zwykle zakładać będziemy, że tensory $b_{\alpha\beta}$ i $C_{\alpha\beta\gamma}$ są symetryczne. Są to w naszym przypadku jedyne ograniczenia na współczynniki rozwinięcia. Sens fizyczny parametrów rozwinięcia można w prosty sposób określić korzystając z definicji tensora energii-pędu w układzie własnym T_{ik}^0 . Jeśli równocześnie uwzględnić warunek /2/ i symetryczność tensorów $b_{\alpha\beta}$ i $C_{\alpha\beta\gamma}$, to po niezbyt skomplikowanych przeliczeniach dostaniemy:

$$f^0 = f_M^0 \left[1 + (a + b p^{0 2}) S_\alpha^0 p_\alpha^0 + (g \tau_{\alpha\beta}^0 + h \tau_{\gamma\gamma}^0 \delta_{\alpha\beta}) p_\alpha^0 p_\beta^0 \right] \tag{/3/}$$

gdzie x/:

$$\tau_{\gamma\sigma}^0 \overset{df}{=} p_M \delta_{\gamma\sigma} - p_{\gamma\sigma}^0 \tag{/4a/}$$

$$a = -5 m_0^2 c^2 \frac{K_3}{K_2} b \tag{/4b/}$$

$$b = \frac{-x^3 \left[\frac{2}{x} K_1 + K_0 \right]}{20 \pi A m_0^7 c^9 \left[\left(1 - \frac{32}{x^4}\right) K_1^2 - \left(\frac{2}{x} + \frac{32}{x^3}\right) K_0 K_1 - \left(1 + \frac{8}{x^2}\right) K_0^2 \right]} \tag{/4c/}$$

---

x/ W dalszych rozważaniach funkcje Mac Donalda $K_n/x/$ od pojedyńczego argumentu oznaczać będziemy K_n.

/4d/ $$g = -\frac{\chi^3}{8\pi A m_0^6 c^7 K_3}$$

/4e/ $$h = -\frac{1}{5} g$$

Mamy więc do określenia 9 wielkości: S_γ^0 /3/, $\tau_{\gamma\gamma}^0$ /6- gdyż tensor symetryczny/ w funkcji makroparametrów N_M^0, T^0, $\vec{q}$. W tym celu postąpimy podobnie jak przy znajdywaniu równania ciągłości i równań zachowania tensora energii-pędu. Mianowicie, kładąc w / II,4 / $\varphi = p_i^0 \cdot p_k^0$ i korzystając z niezmienniczości równania Boltzmanna oraz niezmienniczości $d^3\vec{p}/\varepsilon$ dostaniemy natychmiast:

/5/ $$\int p_i^0 p_k^0 p_m^0 \frac{\partial f^0}{\partial x_m} \frac{d^3\vec{p}^0}{\varepsilon^0} = \int p_i^0 p_k^0 \mathcal{J} f^0 \frac{d^3\vec{p}^0}{\varepsilon^0}$$

Jest to poszukiwany układ dziewięciu równań na określenie S_γ^0 i $\tau_{\gamma\gamma}^0$ /równanie 10.dla $l = 4$, $k = 4$ jest liniowo zależne z równaniami /5/ dla $l = k = \alpha = \beta$ i równaniem ciągłości / III,1 /.

Dla określenia S_γ^0 i $\tau_{\gamma\gamma}^0$, podobnie jak w metodzie 13 momentów Grada, zastosujemy następujący schemat iteracyjny [21] :

/6/ $$\int p_i^0 p_k^0 p_m^0 \frac{\partial f^{0(n-1)}}{\partial \lambda_m^0} \frac{d^3\vec{p}^0}{\varepsilon^0} = \int p_i^0 p_k^0 \mathcal{J} f^{0(n)} \frac{d^3\vec{p}^0}{\varepsilon^0}$$

gdzie:

/7/ $$f^{0(n)} = f_M^0 \left[1 + (a + b p^{02}) S_\alpha^{0(n)} p_\alpha^0 + \left(h \tau_{\gamma\gamma}^{0(n)} \delta_{\alpha\beta} + g \tau_{\alpha\beta}^{0(n)} \right) p_\alpha^0 p_\beta^0 \right]$$

Poziom równań Navier-Stokesa, czyli 1. przybliżenie dla S_γ^0 i $\tau_{\gamma\gamma}^0$ odpowiada przyjęciu po lewej stronie /6/ $f^{0(0)} = f_M^0$, a po prawej stronie /6/ przyjęciu $f^{0(1)} \cdot f_1^{0(1)}$ w formie zlinearyzowanej [21] / ponieważ interesuje nas tylko 1. przybliżenie, w dalszych rozważaniach indeks "/1/" oznaczający iterację będziemy opuszczać/:

$$/8/ \quad \left(f^{0} f_{1}^{0}\right)_{L} = f_{M}^{0} f_{M1}^{0}\left[1+\left(a+b p^{02}\right) p_{\alpha}^{0} S_{\alpha}^{0}+\left(a+b p_{1}^{02}\right) p_{1\alpha}^{0} S_{\alpha}^{0}+\left(g \tau_{\alpha\beta}^{0}+h \tau_{\gamma\gamma}^{0} \delta_{\alpha\beta}\right)\left(p_{\alpha}^{0} p_{\beta}^{0}+p_{1\alpha}^{0} p_{1\beta}^{0}\right)\right]$$

Pierwsze przybliżenie uzyskamy zatem z układu:

$$/9/ \quad \int p_{i}^{0} p_{k}^{0} p_{m}^{0} \frac{\partial f_{M}^{0}}{\partial x_{m}^{0}} \frac{d^{3} \vec{p}^{0}}{\varepsilon^{0}} = \int p_{i}^{0} p_{k}^{0} \delta_{L} f^{0} \frac{d^{3} \vec{p}^{0}}{\varepsilon^{0}}$$

gdzie $\delta_{L} f^{0}$ jest członem zderzeniowym zlinearyzowanym w sensie wyrażonym w /8/ :

$$/10/ \quad \delta_{L} f^{0} = \int W^{0}\left[\left(f^{0\prime} f_{1}^{0\prime}\right)_{L} - \left(f^{0} f_{1}^{0}\right)_{L}\right] \frac{d^{3} \vec{p}_{1}^{0}}{\varepsilon_{1}^{0}}$$

V. Tensor energii-pędu w układzie własnym.

Przystąpimy obecnie do efektywnego rozwiązania układu / IV, 9 /. Postępowanie podzielimy na dwie części. W części 1. określimy lewą stronę / IV, 9 /, w części 2. prawą stronę / IV, 9 / . W każdej z tych części wyróżnimy z kolei dwa przypadki: a/ $l=\gamma$, $k=\vartheta$ i b/ $l=4$, $k=\vartheta$. Rozróżnianie przypadków a/ i b/ wiąże się ideowo z charakterem wielkości tensorowych. Jak się okaże z dalszych rozważań przypadek a/, który można by nazwać przestrzennym pozwoli określić tensor naprężeń lepkich $\tau_{\gamma\vartheta}^{0}$, przypadek b/, który można by nazwać przestrzenno-czasowym pozwoli określić strumień ciepła S_{ϑ}^{0} .

1. Określenie lewej strony / IV, 9 /

a/ Przypadek $l=\gamma$, $k=\vartheta$.

Kładąc w / IV, 9 / $l=\gamma$, $k=\vartheta$ i korzystając z / III, 13 / dostaniemy:

$$/1/ \quad \int p_{\gamma}^{0} p_{\vartheta}^{0} p_{m}^{0} \frac{\partial f_{M}^{0}}{\partial x_{m}^{0}} \frac{d^{3} \vec{p}^{0}}{\varepsilon^{0}} = B N_{M}^{0} \overline{\left(\frac{p_{x}^{02} p_{y}^{02}}{\varepsilon^{0}}\right)}\left(\delta_{\gamma\vartheta} \delta_{\eta\lambda}+\delta_{\gamma\eta} \delta_{\vartheta\lambda}+\delta_{\gamma\lambda} \delta_{\vartheta\eta}\right) \frac{\partial q_{\lambda}^{0}}{\partial x_{\eta}^{0}} +$$
$$+ \frac{1}{3c^{2}} \frac{N_{M}^{0}}{A} \overline{\left(p^{02}\right)} \delta_{\gamma\vartheta} \frac{\partial A}{\partial t^{0}} - \frac{1}{3c^{2}} N_{M}^{0} \overline{\left(p^{02} \varepsilon^{0}\right)} \delta_{\gamma\vartheta} \frac{\partial B}{\partial t^{0}}$$

Kierując się analogią do przypadku klasycznego, chcemy uzyskać $\tau^{o}_{\gamma\vartheta}$ zależne tylko od pochodnych prędkości. Pochodne $\frac{\partial A}{\partial t^{o}}$ i $\frac{\partial B}{\partial t^{o}}$ możemy wyeliminować korzystając z równań ciągłości / III, 14 / i równania energii / III, 16 / dla cieczy idealnej. Do problemu eliminacji pochodnych z równań cieczy idealnej powrócimy jeszcze w dyskusji. Krok ten można traktować jako skorzystanie w danej iteracji z rezultatów poprzedniej iteracji. Procedura ta, znana klasycznie, stosowana jest również powszechnie w formaliźmie relatywistycznym. Rozwiązanie wskazanego układu równań ze względu na $\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t^{o}}$ i $\frac{\partial B}{\partial t^{o}}$ prowadzi do:

$$/2/ \qquad \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t^{o}} = \frac{B}{N^{o}_{M}} \frac{N^{o}_{M} p_{M} \overline{(\varepsilon^{o2})} - \frac{c^{2}}{3}\epsilon_{M} N^{o}_{M} \overline{(p^{o2})}}{\frac{\epsilon^{2}_{M}}{N^{o}_{M}} - N^{o}_{M}\overline{(\varepsilon^{o2})}} \frac{\partial q^{o}_{\lambda}}{\partial x^{o}_{\lambda}}$$

$$/3/ \qquad \frac{\partial B}{\partial t^{o}} = B \frac{\frac{1}{N^{o}_{M}}\epsilon_{M} p_{M} - \frac{c^{2}}{3} N^{o}_{M}\overline{(p^{o2})}}{\frac{1}{N^{o}_{M}}\epsilon^{2}_{M} - N^{o}_{M}\overline{(\varepsilon^{o2})}} \frac{\partial q^{o}_{\lambda}}{\partial x^{o}_{\lambda}}$$

Uwzględniając /2/, /3/ możemy zapisać lewą stronę / IV, 9 / dla $l = \gamma$, $k = \vartheta$ w postaci:

$$/4/ \quad \int p^{o}_{\gamma} p^{o}_{\vartheta} p^{o}_{m} \frac{\partial f^{o}_{M}}{\partial x^{o}_{m}} \frac{d^{3}p^{o}}{\varepsilon^{o}} = \overline{\left(\frac{p^{o2}_{x} p^{o2}_{y}}{\varepsilon^{o}}\right)} B N^{o}_{M} \left(\delta_{\gamma\vartheta}\delta_{\eta\lambda} + \delta_{\gamma\eta}\delta_{\vartheta\lambda} + \delta_{\gamma\lambda}\delta_{\vartheta\eta}\right) \frac{\partial q^{o}_{\lambda}}{\partial x^{o}_{\eta}} + \frac{B\overline{D}}{3}\delta_{\gamma\vartheta}\frac{\partial q^{o}_{\lambda}}{\partial x^{o}_{\lambda}}$$

gdzie

$$\overline{D} = \frac{1}{c^{2}\left(\frac{1}{N^{o}_{M}}\epsilon^{2}_{M} - N^{o}_{M}\overline{(\varepsilon^{o2})}\right)} \left[\overline{(p^{o2})}\left(N^{o}_{M}\overline{(\varepsilon^{o2})}p_{M} - \frac{c^{2}}{3}\epsilon_{M}N^{o}_{M}\overline{(p^{o2})}\right) - N^{o}_{M}\overline{(p^{o2}\varepsilon^{o})}\left(\frac{1}{N^{o}_{M}}\epsilon_{M}p_{M} - \frac{c^{2}}{3}N^{o}_{M}\overline{(p^{o2})}\right)\right]$$

Dla poszczególnych wielkości średnich otrzymujemy:

$$\overline{\left(\frac{p^{o2}_{x} p^{o2}_{y}}{\varepsilon^{o}}\right)} = \frac{4\pi A m^{6}_{o} c^{5} K_{3}}{N^{o}_{M} x^{3}} \qquad \epsilon_{M} = 4\pi A m^{4}_{o} c^{5}\left[\frac{K_{1}}{x} + \frac{3K_{2}}{x^{2}}\right]$$

$$/5/ \qquad \overline{(\varepsilon^{o2})} = \frac{4\pi A m^{5}_{o} c^{7}}{N^{o}_{M}}\left[\frac{3}{x^{2}}K_{3} + \frac{1}{x}K_{2}\right] \qquad \overline{(p^{o2})} = \frac{12\pi A m^{5}_{o} c^{5}}{N^{o}_{M}}\frac{K_{3}}{x^{2}}$$

$$p_M = 4\pi A\, m_0^4 c^5 \frac{K_2}{\chi^2}$$

$$\overline{(p^{o2}\varepsilon^o)} = \frac{4\pi A}{N_M^o} m_0^6 c^7 \left[\frac{15}{\chi^3} K_3 + \frac{3}{\chi^2} K_2\right]$$

Związki te dają:

/6/
$$\overline{D} = 4\pi A\, m_0^6 c^5 \frac{1}{\chi^3} \frac{T_1}{T_2}$$

gdzie

/7/
$$T_1 = 3\left[\left(-1 - \frac{12}{\chi^2} - \frac{4}{\chi^4} + \frac{160}{\chi^6}\right)K_1^3 + \left(-\frac{4}{\chi} + \frac{16}{\chi^3} + \frac{240}{\chi^5}\right)K_1^2 K_0 + \left(1 + \frac{19}{\chi^2} + \frac{120}{\chi^4}\right)K_1 K_0^2 + \left(\frac{5}{\chi} + \frac{20}{\chi^3}\right)K_0^3\right]$$

i

/8/
$$T_2 = \left(1 + \frac{2}{\chi^2} - \frac{12}{\chi^4}\right)K_1^2 + \left(-\frac{1}{\chi} - \frac{12}{\chi^3}\right)K_0 K_1 + \left(-1 - \frac{3}{\chi^2}\right)K_0^2$$

Ostatecznie więc lewa strona równania / IV, 9 / dla $l = \gamma$, $k = \vartheta$ ma postać następującą:

/9/
$$\int p_\gamma^o p_\vartheta^o p_m^o \frac{\partial f_M^o}{\partial x_m^o} \frac{d^3 p^o}{\varepsilon^o} = 4\pi A\, m_0^6 c^5 \frac{K_3}{\chi^3} B\left(\delta_{\gamma\vartheta}\delta_{\eta\lambda} + \delta_{\gamma\eta}\delta_{\vartheta\lambda} + \delta_{\gamma\lambda}\delta_{\vartheta\eta}\right)\frac{\partial q_\lambda^o}{\partial x_\eta^o} +$$
$$+ \frac{4}{3}\pi A\, m_0^6 c^5 \frac{B}{\chi^3} \frac{T_1}{T_2} \delta_{\gamma\vartheta} \frac{\partial q_\lambda^o}{\partial x_\lambda^o}$$

Przeprowadzając analogiczną procedurę w przypadku klasycznym otrzymamy:

/10/
$$\int V_\gamma^o V_\vartheta^o D^o f_M^{oc}\, d^3\vec{V}^o = \frac{p_M}{m_0} \overline{\overline{\frac{\partial q_\gamma^o}{\partial x_\vartheta^o}}}$$

gdzie

$$D^o = \frac{\partial}{\partial t^o} + \vec{V}^o \frac{\partial}{\partial \vec{r}^o} \qquad f_M^{oc} = A^c e^{-\frac{mV^{o2}}{2}B} \qquad A^c = N\left(\frac{mB}{2\pi}\right)^{3/2}$$

/11/
$$\overline{\overline{\frac{\partial q^o_\gamma}{\partial x^o_\vartheta}}} = \frac{\partial q^o_\gamma}{\partial x^o_\vartheta} + \frac{\partial q^o_\vartheta}{\partial x^o_\gamma} - \frac{2}{3}\delta_{\gamma\vartheta}\frac{\partial q^o_\lambda}{\partial x^o_\lambda}$$

Pamiętając, że w przypadku klasycznym:

/12/
$$\frac{\partial}{\partial x^o_\vartheta} = \frac{\partial}{\partial x_\vartheta} \qquad \frac{\partial q^o_\gamma}{\partial x^o_\vartheta} = \frac{\partial q_\gamma}{\partial x_\vartheta}$$

możemy wynik /10/ zidentyfikować z rezultatem 1. przybliżenia w metodzie Grada 13 momentów [21] /p.str.28 lewa strona pierwszego wzoru 12-10 przy $T_{ij} = 0$, $q_i = 0$/.

b. Przypadek $l = 4$, $k = \vartheta$.

Przeprowadzając podobne obliczenia dla $l = 4$, $k = \vartheta$ dostaniemy:

/13/
$$\int p^o_4 p^o_\vartheta p^o_m \frac{\partial f^o_M}{\partial x^o_m}\frac{d^3 p^o}{\varepsilon^o} = \frac{i}{c}\left[\frac{1}{3A}\frac{\partial A}{\partial x^o_\vartheta}N^o_M\overline{(p^{o2})} - \frac{1}{3}N^o_M\overline{(p^{o2}\varepsilon^o)}\frac{\partial B}{\partial x^o_\vartheta}\right] + \frac{i}{c}\frac{N^o_M}{3c^2}\overline{(p^{o2}\varepsilon^o)}\frac{\partial q^o_\vartheta}{\partial t^o}$$

Pochodną $\frac{\partial q^o_\vartheta}{\partial t^o}$ możemy wyeliminować korzystając z równania pędu gazu idealnego / III,15/. Zauważmy, że

/14/
$$\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x^o_\vartheta} = \frac{1}{N^o_M X}\left[3N^o_M\frac{\partial X}{\partial x^o_\vartheta} + X\frac{\partial N^o_M}{\partial x^o_\vartheta} + N^o_M X\frac{\partial X}{\partial x^o_\vartheta}\frac{K_1}{K_2}\right]$$

możemy ostatecznie napisać

/15/
$$\int p^o_4 p^o_\vartheta p^o_m \frac{\partial f^{oo}_M}{\partial x^o_m}\frac{d^3 p^o}{\varepsilon^o} = \frac{i}{c}\frac{m_o^2 c^2}{X^2}\left[3N^o_M\frac{\partial X}{\partial x^o_\vartheta} + X\frac{\partial N^o_M}{\partial x^o_\vartheta} + N^o_M X\frac{K_1}{K_2}\frac{\partial X}{\partial x^o_\vartheta}\right]\left[\frac{4}{X} + \frac{K_1}{K_2} - \frac{1 + \frac{5}{X}\frac{K_3}{K_2}}{\frac{4}{X} + \frac{K_1}{K_2}}\right]$$

Klasycznie procedura ta prowadzi do:

/16/
$$\int \frac{1}{2}mv^{o2}V^o_\alpha D^o f^{oc}_M d^3\vec{V}^o = \frac{5}{2}\frac{k}{m_o}p_M\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}$$

czyli znów uzyskujemy wynik identyczny z rezultatem pierwszego przybliżenia w metodzie 13 momentów Grada [21] /str.28, lewa strona drugiego wzoru 12 - 10 przy $\tau_{ij} = 0$, $q_i = 0$/.

2. Określenie prawej strony równania / IV,9 /.
Na podstawie praw zachowania pędu i energii przy zderzeniu cząstek mamy:

/17/ $$f_M^0 f_{M1}^0 = f_M^{0\prime} f_{M1}^{0\prime}$$

/18/ $$f_M^0 f_{M1}^0 \left(\vec{p}^{\,0} + \vec{p}_1^{\,0}\right) = f_M^{0\prime} f_{M1}^{0\prime} \left(\vec{p}^{\,0\prime} + \vec{p}_1^{\,0\prime}\right)$$

Stąd wynikają natychmiast równości:

/19/ $$\int \varphi f_M^0 f_{M1}^0 W^0 \frac{d^3\vec{p}^{\,0}}{\varepsilon^0} \frac{d^3\vec{p}_1^{\,0}}{\varepsilon_1^0} = \int \varphi f_M^{0\prime} f_{M1}^{0\prime} W^0 \frac{d^3\vec{p}^{\,0}}{\varepsilon^0} \frac{d^3\vec{p}_1^{\,0}}{\varepsilon_1^0}$$

/20/ $$\int \varphi f_M^0 f_{M1}^0 \left(\vec{p}^{\,0} + \vec{p}_1^{\,0}\right) W^0 \frac{d^3\vec{p}^{\,0}}{\varepsilon^0} \frac{d^3\vec{p}_1^{\,0}}{\varepsilon_1^0} = \int \varphi f_M^{0\prime} f_{M1}^{0\prime} \left(\vec{p}^{\,0\prime} + \vec{p}_1^{\,0\prime}\right) W^0 \frac{d^3\vec{p}^{\,0}}{\varepsilon^0} \frac{d^3\vec{p}_1^{\,0}}{\varepsilon_1^0}$$

Równości te bardzo istotnie upraszczają obliczenia, gdyż w miejsce prawej strony / IV,9 / możemy napisać

/21/ $$\int p_i^0 p_k^0 \delta_L f^0 \frac{d^3\vec{p}^{\,0}}{\varepsilon^0} = \int p_i^0 p_k^0 \delta_{LN} f^0 \frac{d^3\vec{p}^{\,0}}{\varepsilon^0}$$

gdzie:

/22/ $$\delta_{LN} f^0 = \int W^0 \left[\left(f^{0\prime} f_1^{0\prime}\right)_{LN} - \left(f^0 f_1^0\right)_{LN} \right] \frac{d^3\vec{p}_1^{\,0}}{\varepsilon_1^0}$$

/23/ $$\left(f^0 f_1^0\right)_{LN} = f_M^0 f_{M1}^0 \left[b S_\alpha^0 \left(p^{02} p_\alpha^0 + p_1^{02} p_{1\alpha}^0\right) + \left(g \tau_{\alpha\beta}^0 + h \tau_{\nu\nu}^0 \delta_{\alpha\beta}\right)\left(p_\alpha^0 p_\beta^0 + p_{1\alpha}^0 p_{1\beta}^0\right)\right]$$

Z kolei własność / II,3a / członu zderzeniowego pozwala zapisać prawą stronę / IV,9 / w formie bardzo dogodnej do obliczeń:

/24/ $$\int p_i^0 p_k^0 \mathcal{J}_L f^0 \frac{d^3\vec{p}^0}{\varepsilon^0} = \frac{1}{c^2}\int \left(p_i^{0\prime} p_k^{0\prime} - p_i^0 p_k^0\right)\left(f^0 f_1^0\right)_{LN} \frac{d^3\vec{p}^0}{\varepsilon^0}$$

Wielkości $p_i^{0\prime}$, V^*, ε^*, ε_1^* wyrażamy przez parametry $\vec{p}^0$, $\vec{p}_1^0$, ε^0, ε_1^0, $\vec{l}^{*\prime} = \frac{\vec{p}^{*\prime}}{|\vec{p}^{*\prime}|}$, które jednoznacznie określają akt zderzenia

$$\vec{p}^{0\prime} = \vec{p}^{*\prime} + \frac{\gamma_\Sigma - 1}{V_\Sigma^2}\vec{V}_\Sigma\left(\vec{V}_\Sigma \cdot \vec{p}^{*\prime}\right) + \gamma_\Sigma \vec{V}_\Sigma \frac{\varepsilon^{*\prime}}{c^2}$$

/25/ $$\varepsilon^{0\prime} = \gamma_\Sigma \varepsilon^{*\prime}\left(1 + \frac{\vec{V}_\Sigma \cdot \vec{V}^{*\prime}}{c^2}\right) \qquad V^* = \frac{c}{\varepsilon^*}\left(\varepsilon^{*2} - m_0^2 c^4\right)^{1/2}$$

$$\varepsilon^* = \gamma_\Sigma \varepsilon^0\left(1 - \frac{\vec{V}_\Sigma \vec{V}^0}{c^2}\right) \qquad \varepsilon_1^* = \gamma_\Sigma \varepsilon_1^0\left(1 - \frac{\vec{V}_\Sigma \vec{V}_1^0}{c^2}\right)$$

gdzie $\vec{V}_\Sigma$ jest prędkością układu środka masy:

/26/ $$\vec{V}_\Sigma = \frac{\vec{p}^0 + \vec{p}_1^0}{\varepsilon^0 + \varepsilon_1^0}c^2 \qquad \gamma_\Sigma = \left(1 - \frac{V_\Sigma^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Ponieważ w układzie środka masy:

/27/ $$p^{*\prime} = p^* \qquad \varepsilon^{*\prime} = \varepsilon^* \quad {}^{+/}$$

więc korzystając ze związków transformacyjnych dla czteropędu, otrzymujemy $\vec{p}^{0\prime}$, $\varepsilon^{0\prime}$ w poszukiwanej postaci jawnej zależności od parametrów zderzenia $\vec{p}^0$, $\vec{p}_1^0$, $\vec{l}^{*\prime}$:

/28/ $$\vec{p}^{0\prime} = p^* \vec{l}^{*\prime} + \frac{\gamma_\Sigma - 1}{V_\Sigma^2}\vec{V}_\Sigma\left(\vec{V}_\Sigma \cdot \vec{l}^{*\prime}\right)p^* + \gamma_\Sigma \vec{V}_\Sigma \frac{\varepsilon^*}{c^2}$$
$$\varepsilon^{0\prime} = \gamma_\Sigma \varepsilon^*\left(1 + \frac{\vec{V}_\Sigma V^* \vec{l}^{*\prime}}{c^2}\right)$$

---

x/ równość energii zachodzi tylko w przypadku cząstek zderzających się o równych masach.

Wykorzystując związki /25/ po prostych przekształceniach dostaniemy:

/29/
$$V^{*}\mathcal{E}^{*} = c\left[\frac{1}{2}\left(\mathcal{E}^{0}\mathcal{E}_{1}^{0} - p^{0}p_{1}^{0}c^{2}\vec{l}^{0}\cdot\vec{l}_{1}^{0} - m_{0}^{2}c^{4}\right)\right]^{1/2}$$

/30/
$$\mathcal{E}_{1}^{*} = \left[\frac{1}{2}\left(\mathcal{E}^{0}\mathcal{E}_{1}^{0} - p^{0}p_{1}^{0}c^{2}\vec{l}^{0}\cdot\vec{l}_{1}^{0} + m_{0}^{2}c^{4}\right)\right]^{1/2}$$

gdzie $\vec{l}^{0}$, $\vec{l}_{1}^{0}$ są jednostkowymi wektorami odpowiednio w kierunkach $\vec{p}^{0}$, $\vec{p}_{1}^{0}$. Przyjmiemy jako hipotezę roboczą, że różniczkowy przekrój czynny w układzie środka masy jest stały:

/31/ x/
$$\frac{d\sigma_{\vec{p}^{*}\vec{p}_{1}^{*}}}{d\Omega_{\vec{p}^{*\prime}}} = \mathrm{const} = R_{0}^{2}$$

Całkowanie po przestrzeniach kątów i energii

a. Przypadek $l = \gamma$, $k = \vartheta$

Na podstawie /28/ mamy:

$$p_{\gamma}^{0\prime}p_{\vartheta}^{0\prime} = p^{*2}l_{\gamma}^{*\prime}l_{\vartheta}^{*\prime} + \frac{\gamma_{\varepsilon}-1}{V_{\varepsilon}^{2}}V_{\varepsilon\vartheta}p^{*2}\left(\vec{V}_{\varepsilon}\cdot\vec{l}^{*\prime}\right)l_{\gamma}^{*\prime} + \frac{\gamma_{\varepsilon}-1}{V_{\varepsilon}^{2}}V_{\varepsilon\gamma}p^{*2}\left(\vec{V}_{\varepsilon}\cdot\vec{l}^{*\prime}\right)l_{\vartheta}^{*\prime} + \gamma_{\varepsilon}\frac{V_{\varepsilon\vartheta}}{c^{2}}p^{*}\mathcal{E}^{*}l_{\gamma}^{*\prime} +$$
$$+\gamma_{\varepsilon}\frac{V_{\varepsilon\gamma}}{c^{2}}\mathcal{E}^{*}p^{*}l_{\vartheta}^{*\prime} + \frac{(\gamma_{\varepsilon}-1)^{2}}{V_{\varepsilon}^{4}}V_{\varepsilon\gamma}V_{\varepsilon\vartheta}p^{*2}\left(\vec{V}_{\varepsilon}\cdot\vec{l}^{*\prime}\right)^{2} + 2\frac{\gamma_{\varepsilon}(\gamma_{\varepsilon}-1)}{V_{\varepsilon}^{2}}\frac{\mathcal{E}^{*}p^{*}}{c^{2}}V_{\varepsilon\gamma}V_{\varepsilon\vartheta}\left(\vec{V}_{\varepsilon}\cdot\vec{l}^{*\prime}\right) + \gamma_{\varepsilon}^{2}\frac{\mathcal{E}^{*2}}{c^{2}}V_{\varepsilon\gamma}V_{\varepsilon\vartheta}$$

W wyrażeniu /24/ od $\vec{l}^{*\prime}$ zależy tylko $p_{l}^{0\prime}p_{k}^{0\prime}$. Całkując /32/ po przestrzeni kierunków $\vec{l}^{*\prime}$ dostajemy:

/33/
$$\int p_{\gamma}^{0\prime}p_{\vartheta}^{0\prime}\,d\Omega_{\vec{l}^{*\prime}} = \frac{4}{3}\pi p^{*2}\delta_{\gamma\vartheta} + \frac{16}{3}\pi p^{*2}\frac{\gamma_{\varepsilon}^{2}}{c^{2}}V_{\varepsilon\vartheta} - 4\pi m_{0}^{2}\gamma_{\varepsilon}^{2}V_{\varepsilon\gamma}V_{\varepsilon\vartheta}$$

Dalej mamy:

---

x/ R_0 można interpretować jako promień cząstki w jej układzie własnym /promień własny/.

/34a/ $$c^2 p^{*2} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^o \varepsilon^o_1 - m_o^2 c^4 - p^o p^o_1 c^2 \vec{l}^o \cdot \vec{l}^o_1\right)$$

/34b/ $$\gamma_\Sigma^2 = \frac{\left(\varepsilon^o + \varepsilon^o_1\right)^2}{2\left(m_o^2 c^4 + \varepsilon^o \varepsilon^o_1 - p^o p^o_1 c^2 \vec{l}^o \cdot \vec{l}^o_1\right)}$$

/34c/ $$V_{\Sigma r} V_{\Sigma s} = \frac{c^4}{\left(\varepsilon^o + \varepsilon^o_1\right)^2}\left(p^{o2} l^o_r l^o_s + p^o p^o_1 l^o_r l^o_{1s} + p^o p^o_1 l^o_s l^o_{1r} + p_1^{o2} l^o_{1r} l^o_{1s}\right)$$

Elementarne przekształcenia z uwzględnieniem /29/, /30/, /33/, /34/ pozwalają /24/ zapisać w postaci:

$$\int p^o_r p^o_s \, \delta_I \, f^o \frac{d^3 p^o}{\varepsilon^o} = \frac{R_o^2}{c} \int f^o_M f^o_{M1} \frac{p^{o2} p_1^{o2}}{\varepsilon^o \varepsilon^o_1}\left[2\int A^{(1)}_{rs} \, d\Omega_{T^o_1} + 2\int A^{(3)}_{rs} \, d\Omega_{T^o_1} + \int A^{(2)}_{rs} \, d\Omega_{T^o_1}\right] dp^o dp^o_1$$

gdzie:

/36 $$A^{(1)}_{rs} = \int K^{(1)}_{rs} F D \, d\Omega_{T^o} \qquad A^{(2)}_{rs} = \int K^{(2)}_{rs} F^A D \, d\Omega_{T^o}$$

$$A^{(3)}_{rs} = \int K^{(3)}_{rs} F D \, d\Omega_{T^o}$$

$$F = b p^{o2} S^o_\alpha p^o_\alpha + \left(g \tau^o_{\alpha\beta} + h \tau^o_{\nu\nu} \delta_{\alpha\beta}\right) p^o_\alpha p^o_\beta$$

$$F^A = b S^o_\alpha \left(p^{o2} p^o_\alpha + p_1^{o2} p^o_{1\alpha}\right) + \left(g \tau^o_{\alpha\beta} + h \tau^o_{\nu\nu} \delta_{\alpha\beta}\right)\left(p^o_\alpha p^o_\beta + p^o_{1\alpha} p^o_{1\beta}\right)$$

$$K^{(1)}_{rs} = \frac{2}{3c^2} \pi \delta_{rs} D^{(1)} - \frac{2}{3} \pi m_o^2 c^4 D^{(2)} \left(p^{o2} l^o_r l^o_s + p^o p^o_1 l^o_r l^o_{1s} + p^o p^o_1 l^o_s l^o_{1r} + p_1^{o2} l^o_{1r} l^o_{1s}\right)$$

$$K^{(2)}_{rs} = -4\pi p^{o2} l^o_r l^o_s \qquad K^{(3)}_{rs} = \frac{4}{3}\pi \left(p^{o2} l^o_r l^o_s + p^o p^o_1 l^o_r l^o_{1s} + p^o p^o_1 l^o_s l^o_{1r} + p_1^{o2} l^o_{1r} l^o_{1s}\right)$$

$$D = \left[\left(\varepsilon^{\circ} \varepsilon_1^{\circ} - p_1^{\circ} p^{\circ} c^2 \vec{l}^{\circ} \cdot \vec{l}_1^{\circ} \right)^2 - \left(m_0^2 c^4 \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$D^{(1)} = \varepsilon^{\circ} \varepsilon_1^{\circ} - p^{\circ} p_1^{\circ} c^2 \vec{l}^{\circ} \cdot \vec{l}_1^{\circ} - m_0^2 c^4 \qquad D^{(2)} = \left[\varepsilon^{\circ} \varepsilon_1^{\circ} - p_1^{\circ} p^{\circ} \vec{l}^{\circ} \cdot \vec{l}_1^{\circ} c^2 + m_0^2 c^4 \right]^{-1}$$

Zauważmy, że $K^{(1)}_{\gamma\vartheta}$, $K^{(3)}_{\gamma\vartheta}$ są symetryczne względem zmiennych $\vec{p}^{\circ}$, $\vec{p}_1^{\circ}$, zaś $K^{(2)}_{\gamma\vartheta}$ niesymetryczne. Obliczenie całek $A_{\gamma\vartheta}$ w układzie współrzędnych o dowolnie skierowanych osiach byłoby zbyt uciążliwe. Znacznie prościej można je wykonać w specjalnym układzie współrzędnych $\tilde{O}$, w którym oś $\tilde{z} \parallel \vec{l}_1^{\circ}$. Całki $A_{\gamma\vartheta}$ w układzie o dowolnie skierowanych osiach odzyskamy stosując reguły transformacji tensorów wobec obrotu układu współrzędnych. Mianowicie:

$$A_{\gamma\vartheta} = d_{\gamma\lambda} d_{\vartheta\eta} \tilde{A}_{\lambda\eta} \tag{37}$$

gdzie $d_{\gamma\lambda}$ są elementami macierzy transformacyjnej, reprezentującej obrót układu O° do pokrycia z $\tilde{O}$:

$$d_{\gamma\lambda} = \left\| \begin{matrix} -\cos\vartheta_1 \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1 \\ -\cos\vartheta_1 \sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 & \sin\vartheta_1 \sin\varphi_1 \\ \sin\vartheta_1 & 0 & \cos\vartheta_1 \end{matrix} \right\| \tag{38}$$

ϑ_1 , φ_1 są kątami biegunowym i azymutalnym kierunku $\vec{l}_1^{\circ}$ w układzie O°. Całki występujące przy całkowaniu $A_{\gamma\vartheta}$ po przestrzeni kątów $\vec{l}_1^{\circ}$ są elementarne, niemniej jednak ze względu na ich ilość obliczenia należą do wyjątkowo żmudnych. Rezultat jest następujący:

$$\int A^{(1)}_{\gamma\vartheta} \, d\Omega_{l_1^{\circ}} = \frac{8\pi^2}{3c^2} p^{\circ 2} E \left(\frac{g}{3} + h \right) \tau^{\circ}_{\nu\nu} \delta_{\gamma\vartheta} - \tag{39}$$

$$-\frac{8}{9}\pi^2 m_0^2 c^4 \Big\{ \left(p^{o4} H + 2p^{o3} p_1^o I\right)\left[\frac{1}{5} g\left(2\tau^o_{rs} + \tau^o_{\nu\nu}\delta_{rs}\right) + h\tau^o_{\nu\nu}\delta_{rs}\right] +$$

$$+ p^{o2} p_1^{o2}\left[\frac{1}{5} g\left(H_3 - H_1\right)\left(\tau^o_{\mu\mu}\delta_{rs} + 2\tau^o_{rs}\right) + \left(gH_1 + hH\right)\tau^o_{\nu\nu}\delta_{rs}\right]\Big\}$$

/40/

$$\int A^{(2)}_{rs}\, d\Omega_{\tau_1} = -\frac{16}{3}\pi^2 p^{o4} E^A \left[\frac{1}{5} g\left(2\tau^o_{rs} + \tau^o_{\nu\nu}\delta_{rs}\right) + h\tau^o_{\nu\nu}\delta_{rs}\right] -$$

$$-\frac{16}{3}\pi^2 p^{o2} p_1^{o2}\left[\frac{1}{5} g\left(E_3^A - E_1^A\right)\left(\tau^o_{\mu\mu}\delta_{rs} + 2\tau^o_{rs}\right) + \left(gE_1^A + hE^A\right)\tau^o_{\nu\nu}\delta_{rs}\right]$$

/41/

$$\int A^{(3)}_{rs}\, d\Omega_{\tau_1} = \frac{16}{9}\pi^2 \Big\{ \left(p^{o4} E^A + 2p^{o3} p_1^o I^A\right)\left[\frac{1}{5} g\left(2\tau^o_{rs} + \tau^o_{\nu\nu}\delta_{rs}\right) + h\tau^o_{\nu\nu}\delta_{rs}\right] +$$

$$+ p^{o2} p_1^{o2}\left[\frac{1}{5} g\left(E_3^A - E_1^A\right)\left(\tau^o_{\mu\mu}\delta_{rs} + 2\tau^o_{rs}\right) + \left(gE_1^A + hE^A\right)\tau^o_{\nu\nu}\delta_{rs}\right]\Big\}$$

/42/

$$E_\alpha = \int \left(\tilde{l}^o_\alpha\right)^2 \tilde{D}^{(1)} \tilde{D}\, d\Omega_{\tilde{\tau}_0} \qquad E^A_\alpha = \int \left(\tilde{l}^o_\alpha\right)^2 \tilde{D}\, d\Omega_{\tilde{\tau}_0}$$

$$H_\alpha = \int \left(\tilde{l}^o_\alpha\right)^2 \tilde{D}^{(2)} \tilde{D}\, d\Omega_{\tilde{\tau}_0}$$

$$E = \delta_{\alpha\alpha} E_\alpha \qquad E^A = \delta_{\alpha\alpha} E^A_\alpha$$

$$H = \delta_{\alpha\alpha} H_\alpha$$

$$I = \int \cos\tilde{\vartheta}\, \tilde{D}^{(2)} \tilde{D}\, d\Omega_{\tilde{\tau}_0} \qquad I^A = \int \cos\tilde{\vartheta}\, \tilde{D}\, d\Omega_{\tilde{\tau}_0}$$

Znaczek " $\sim$ " przy wielkościach przypomina, że są one brane w układzie $\tilde{O}$; kąty $\tilde{\vartheta}$, $\tilde{\varphi}$ określają kierunek w układzie $\tilde{O}$. Warto podkreślić, że podobnie jak klasycznie wszystkie całki związane ze strumieniem energii znikają.
Zauważając, że:

$$h = -\frac{1}{5} g \quad , \qquad E_1 = E_2 \quad , \qquad H_1 = H_2 \quad , \qquad E_1^A = E_2^A$$

po prostych przeliczeniach dostaniemy:

$$2\int A_{\nu\sigma}^{(1)} d\Omega_{\tau_1} + \int A_{\nu\sigma}^{(2)} d\Omega_{\tau_1} + 2\int A_{\nu\sigma}^{(3)} d\Omega_{\tau_1} =$$

/43/

$$= \frac{32}{45} g \pi^3 p^{\circ 2} \tau_{\nu\sigma}^{\circ} \Big\{ -m_o^2 c^4 \int \tilde{D} \tilde{D}^{(2)} \left(2p^{\circ 2} + 4p^{\circ} p_1^{\circ} \cos\tilde{\vartheta} - p_1^{\circ 2} + 3p_1^{\circ 2} \cos^2\tilde{\vartheta}\right) \sin\tilde{\vartheta}\, d\tilde{\vartheta} +$$

$$+ \int \tilde{D} \left(-2p^{\circ 2} + 8p^{\circ} p_1^{\circ} \cos\tilde{\vartheta} + p_1^{\circ 2} - 3p_1^{\circ 2} \cos^2\tilde{\vartheta}\right) \sin\tilde{\vartheta}\, d\tilde{\vartheta} \Big\} +$$

$$+ \frac{32}{45c^2} \pi^3 g p^{\circ 2} \tau_{\mu\mu}^{\circ} \delta_{\nu\sigma} \Big\{ \cdot 2 \int \tilde{D}^{(1)} \tilde{D} \sin\tilde{\vartheta}\, d\tilde{\vartheta} - m_o^2 c^6 p_1^{\circ 2} \int \tilde{D}^{(2)} \tilde{D} \sin^3\tilde{\vartheta}\, d\tilde{\vartheta} - p_1^{\circ 2} c^2 \int \sin^3\tilde{\vartheta}\, \tilde{D}\, d\tilde{\vartheta} \Big\}$$

Wyrażenia zawarte w /43/ całkują się prosto przez podstawienie

/44/
$$Z = \varepsilon^{\circ} \varepsilon_1^{\circ} - p^{\circ} p_1^{\circ} c^2 \cos\tilde{\vartheta}$$

Jeśli ponadto w miejsce p° , p_1° wprowadzić nowe zmienne:

/45/
$$p^{\circ} = mc\,\mathrm{sh}\chi \qquad\qquad p_1^{\circ} = mc\,\mathrm{sh}\chi_1$$

to poszczególne całki wyrażą się następująco:

/46/
$$\int_0^{\pi} \tilde{D} \tilde{D}^{(2)} \cos^2\tilde{\vartheta} \sin\tilde{\vartheta}\, d\tilde{\vartheta} = \frac{(\mathrm{ch}\chi\, \mathrm{ch}\chi_1 + 1)^2}{\mathrm{sh}^3\chi\, \mathrm{sh}^3\chi_1} \left(\Lambda^A - \Lambda^E\right) -$$

$$\frac{\mathrm{ch}\chi\, \mathrm{ch}\chi_1 + 1}{\mathrm{sh}^3\chi\, \mathrm{sh}^3\chi_1} \left(\Lambda^B - \Lambda^E\right) + \frac{1}{\mathrm{sh}^3\chi\, \mathrm{sh}^3\chi_1} \left(\frac{1}{3}\Lambda^C + \frac{1}{2}\Lambda^B - \frac{1}{2}\Lambda^E\right)$$

$$\int_0^\pi \tilde{D}\tilde{D}^{(2)} \cos\tilde{\vartheta} \sin\tilde{\vartheta}\, d\tilde{\vartheta} = \frac{ch\chi\, ch\chi_1 + 1}{sh^2\chi\, sh^2\chi_1}\left(\Lambda^A - \Lambda^E\right) - \frac{1}{2\, sh^2\chi\, sh^2\chi_1}\left(\Lambda^B - \Lambda^E\right)$$

$$\int_0^\pi \tilde{D}\tilde{D}^{(2)} \sin\tilde{\vartheta}\, d\tilde{\vartheta} = \frac{1}{sh\chi\, sh\chi_1}\left(\Lambda^A - \Lambda^E\right)$$

$$\int_0^\pi \tilde{D} \sin\tilde{\vartheta}\, d\tilde{\vartheta} = \frac{m_0^2 c^4}{2\, sh\chi\, sh\chi_1}\left(\Lambda^B - \Lambda^E\right)$$

$$\int_0^\pi \tilde{D} \cos\tilde{\vartheta} \sin\tilde{\vartheta}\, d\tilde{\vartheta} = \frac{m_0^2 c^4\, ch\chi\, ch\chi_1}{2\, sh^2\chi\, sh^2\chi_1}\left(\Lambda^B - \Lambda^E\right) - \frac{m_0^2 c^4}{3\, sh^2\chi\, sh^2\chi_1}\Lambda^C$$

$$\int_0^\pi \tilde{D} \cos^2\tilde{\vartheta} \sin\tilde{\vartheta}\, d\tilde{\vartheta} = m_0^2 c^4\left(\frac{ch^2\chi\, ch^2\chi_1}{2\, sh^3\chi\, sh^3\chi_1} + \frac{1}{8\, sh^3\chi\, sh^3\chi_1}\right)\left(\Lambda^B - \Lambda^E\right) + \frac{m_0^2 c^4}{sh^3\chi\, sh^3\chi_1}\left(\frac{\Lambda^D}{4} - \frac{2}{3} ch\chi\, ch\chi_1 \Lambda^C\right)$$

$$\int_0^\pi \tilde{D}^{(1)}\tilde{D} \sin\tilde{\vartheta}\, d\tilde{\vartheta} = \frac{(m_0^2 c^4)^2}{sh\chi\, sh\chi_1}\left(\frac{1}{3}\Lambda^C + \frac{1}{2}\Lambda^B - \frac{1}{2}\Lambda^E\right)$$

gdzie

$$\Lambda^A = sh(\chi+\chi_1) - sh|\chi-\chi_1| \qquad \Lambda^B = ch(\chi+\chi_1)\, sh(\chi+\chi_1) - ch(\chi-\chi_1)\, sh|\chi-\chi_1|$$

/40'/

$$\Lambda^C = sh^3(\chi+\chi_1) - sh^3|\chi-\chi_1| \qquad \Lambda^D = ch(\chi+\chi_1)\, sh^3(\chi+\chi_1) - ch(\chi-\chi_1)\, sh^3|\chi-\chi_1|$$

$$\Lambda^E = \chi + \chi_1 - \ln\left[sh|\chi-\chi_1| + ch(\chi-\chi_1)\right]$$

Przed przystąpieniem do całkowania po przestrzeniach energii /teraz po zmiennych χ, χ_1 / przekształcamy prawą strone / IV,9 / do postaci:

/41'/ $$\int p^0_\gamma p^0_\vartheta \delta_L f^0 \frac{d^3 p^0}{\varepsilon^0} = R_0^2 A^2 m_0^{10} c^{11}\ \frac{32}{45}\pi^3 g\left[\tau^0_{\gamma\vartheta}\left(X'' - X'\right) + \tau^0_{\mu\mu}\delta_{\gamma\vartheta} X'''\right]$$

gdzie:

$$\chi^{I}=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x\,ch\chi}\,e^{-x\,ch\chi_1}\,sh^4\chi\,sh^2\chi_1\left[\int_0^\pi\tilde{D}\tilde{D}^{(2)}\left(2sh^2\chi+4sh\chi\,sh\chi_1\cos\tilde{\vartheta}-sh^2\chi_1+3sh^2\chi_1\cos^2\tilde{\vartheta}\right)\sin\tilde{\vartheta}\,d\tilde{\vartheta}\right]d\chi\,d\chi_1$$

42'/ $$\chi^{II}=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x\,ch\chi}\,e^{-x\,ch\chi_1}\,sh^4\chi\,sh^2\chi_1\,\frac{1}{m_0^2c^4}\left[\int_0^\pi\tilde{D}\left(-2sh^2\chi+8sh\chi\,sh\chi_1\cos\tilde{\vartheta}+sh^2\chi_1-3sh^2\chi_1\cos^2\tilde{\vartheta}\right)\sin\tilde{\vartheta}\,d\tilde{\vartheta}\right]d\chi\,d\chi_1$$

$$\chi^{III}=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x\,ch\chi}\,e^{-x\,ch\chi_1}\,sh^4\chi\,sh^2\chi_1\left[\frac{2}{(m_0^2c^4)^2}\int_0^\pi\tilde{D}\tilde{D}^{(1)}\sin\tilde{\vartheta}\,d\tilde{\vartheta}-sh^2\chi_1\int_0^\pi\tilde{D}\tilde{D}^{(2)}\sin^3\tilde{\vartheta}\,d\tilde{\vartheta}-\frac{sh^2\chi_1}{m_0^2c^4}\int_0^\pi\tilde{D}\sin^3\tilde{\vartheta}\,d\tilde{\vartheta}\right]d\chi\,d\chi_1$$

Aby pozbyć się modułu $|\chi-\chi_1|$ występującego w wyrażeniach /42'/ rozbijamy całkowanie w następujący sposób:

/43'/ $$\int_0^\infty d\chi_1\int_0^\infty J(\chi,\chi_1)\,d\chi = J_A+J_B \qquad J_A=\int_0^\infty d\chi_1\int_0^{\chi_1}J(\chi,\chi_1)\,d\chi \qquad J_B=\int_0^\infty d\chi_1\int_{\chi_1}^\infty J(\chi,\chi_1)\,d\chi$$

gdzie $J(\chi,\chi_1)$ reprezentuje funkcje podcałkowe w wyrażeniach χ . Okazuje się, że we wszystkich całkach z indeksem "A" $sh\chi_1$ zawsze występuje w potędze nieparzystej, zaś w całkach typu "B" w potędze nieparzystej zawsze występuje $sh\chi$ x/. W całkach typu "B" proste podstawienie $ch\chi=y$ pozwala na elementarne wycałkowanie po χ Drugie całkowanie po zmiennej χ_1 prowadzi do funkcji Bessela $K_n(x)$ /n = 0, 1, 2, 3, 4/. W całkach typu "A" dokonujemy zmiany granic całkowania w myśl reguły:

/44'/ $$\int_0^\infty d\chi_1\int_0^{\chi_1}J(\chi,\chi_1)\,d\chi=\int_0^\infty d\chi\int_\chi^\infty J(\chi,\chi_1)\,d\chi_1$$

co umożliwia efektywne wykonanie całkowań, podobnie jak w "B" . Zauważmy, że gdy $J(\chi,\chi_1)$ jest funkcją symetryczną w zmiennych χ,χ_1 to:

---

x/ Jest to konsekwencją występowania w wyrażeniach podcałkowych modułu $|\chi-\chi_1|$

/45'/ $$\int_0^\infty\int_0^\infty J(\chi,\chi_1)\,d\chi\,d\chi_1 = 2\int_0^\infty d\chi_1\int_{\chi_1}^\infty J(\chi,\chi_1)\,d\chi$$

Ponieważ wyrażenia $DD^{(1)}$, D , $DD^{(2)}$ są funkcjami symetrycznymi w zmiennych χ , χ_1 , fakt ten w przypadkach, kiedy całe wyrażenia podcałkowe jest symetryczne, znacznie upraszcza obliczenia. Całki występujące w χ' , χ'' , χ''' w przeważającej ilości nie są stablicowane. Wyniki obliczeń są następujące:

/46'/ $$\chi''-\chi' = -\frac{980}{\chi^6}K_4(2\chi) - \left(\frac{320}{\chi^5} + \frac{3060}{\chi^7}\right)K_3(2\chi) - \left(\frac{100}{\chi^4} + \frac{1740}{\chi^6} + \frac{5760}{\chi^8}\right)K_2(2\chi) -$$
$$-\left(\frac{156}{\chi^5} + \frac{4080}{\chi^7} + \frac{1440}{\chi^9}\right)K_1(2\chi) - \left(-\frac{100}{\chi^4} + \frac{2679}{4\chi^6} + \frac{1440}{\chi^8}\right)K_0(2\chi)$$

$$\chi''' = 2\left[\frac{210}{\chi^6}K_4(2\chi) + \left(\frac{45}{\chi^5} + \frac{570}{\chi^7}\right)K_3(2\chi) + \left(\frac{3}{\chi^4} + \frac{276}{\chi^6} + \frac{672}{\chi^8}\right)K_2(2\chi) +\right.$$
$$\left.+\left(\frac{48}{\chi^5} + \frac{456}{\chi^7}\right)K_1(2\chi) + \left(\frac{-3}{\chi^4} + \frac{375}{4\chi^6}\right)K_0(2\chi)\right]$$

Posługując się wzorem rekurencyjnym

/47/ $$K_{n+1}(x) - K_{n-1}(x) = \frac{2n K_n(x)}{x}$$

możemy uzyskane rezultaty wyrazić przez funkcje Bessela pierwszego i zerowego rzędu

/48/ $$\chi''-\chi' = -\left(\frac{576}{\chi^5} + \frac{13440}{\chi^7} + \frac{19200}{\chi^9}\right)K_1(2\chi) - \left(\frac{16119}{4\chi^6} + \frac{19200}{\chi^8}\right)K_0(2\chi)$$

$$\chi''' = 2\left[\left(\frac{96}{\chi^5} + \frac{2232}{\chi^7} + \frac{3072}{\chi^9}\right)K_1(2\chi) + \left(\frac{2679}{4\chi^6} + \frac{3072}{\chi^8}\right)K_0(2\chi)\right]$$

Ostatecznie prawa strona równania transportu na określenie tensora naprężeń lepkich wyraża się następująco:

/49/ $$\int p^0_\gamma p^0_\vartheta \delta_L f^0 \frac{d^3 p^0}{\varepsilon^0} = - \frac{\pi R_0^2 m_d N_M^0}{c\chi\, 45\, K_2(\chi) K_3(\chi)} \left(\alpha_A \tau^0_{\gamma\vartheta} + \beta_A \tau^0_{\mu\mu} \delta_{\gamma\vartheta} \right)$$

gdzie

/50/ $$\alpha_A = \left(X^{II} - X^{I} \right) \chi^5 \qquad \beta_A = X^{III} \chi^5$$

b. Przypadek $l = 4$, $k = \vartheta$.

Na podstawie /28/ mamy:

$$p_4^{0\prime} p_\vartheta^{0\prime} = \frac{i}{c} \gamma_\Sigma \Big[\varepsilon^* p^* l_\vartheta^{*\prime} + \frac{\gamma_\Sigma - 1}{V_\Sigma^2} p^* \varepsilon^* (\vec{V}_\Sigma \cdot \vec{l}^{*\prime}) + \gamma_\Sigma V_{\Sigma\vartheta} \frac{\varepsilon^{*2}}{c^2} + p^{*2} (\vec{V}_\Sigma \cdot \vec{l}^{*\prime}) l_\vartheta^{*\prime} +$$

/51/

$$+ p^{*2} \frac{\gamma_\Sigma - 1}{V_\Sigma^2} V_{\Sigma\vartheta} (\vec{V}_\Sigma \cdot \vec{l}^{*\prime})^2 + \gamma_\Sigma V_{\Sigma\vartheta} \frac{p^* \varepsilon^*}{c^2} (\vec{V}_\Sigma \cdot \vec{l}^{*\prime}) \Big]$$

Wykonanie całkowania po przestrzeni kątów $\vec{l}^{*\prime}$ daje:

/52/ $$\int p_4^{0\prime} p_\vartheta^{0\prime} d\Omega_{l^{*\prime}} = \frac{i}{c} \frac{4\pi}{3} \gamma_\Sigma^2 V_{\Sigma\vartheta} \left(3 \frac{\varepsilon^{*2}}{c^2} + p^{*2} \right)$$

Wykorzystując określenie prędkości $\vec{V}_\Sigma$ i związki /29/, /30/, /34/, /52/ uzyskamy / IV, 9 / w postaci:

$$\int p_4^0 p_\vartheta^0 \delta_L f^0 \frac{d^3 p^0}{\varepsilon^0} = \frac{i}{c} \frac{8}{3} \pi \frac{R_0^2}{c} \int \frac{\varepsilon^0 + \varepsilon_1^0}{\varepsilon^0 \varepsilon_1^0} f_M^0 f_{M1}^0 p^{02} p_1^{02} \left[\int B_\vartheta^{(1)} d\Omega_{l_1} \right] dp^0 dp_1^0 -$$

/53/

$$- \frac{i}{c} \frac{4}{3} \pi \frac{R_0^2}{c} m_d^2 c^4 \int \frac{\varepsilon^0 + \varepsilon_1^0}{\varepsilon^0 \varepsilon_1^0} f_M^0 f_{M1}^0 p^{02} p_1^{02} \left[\int B_\vartheta^{(2)} d\Omega_{l_1} \right] dp^0 dp_1^0 -$$

$$- \frac{i}{c} \frac{4\pi R_0^2}{c} \int \frac{p^0}{\varepsilon_1^0} f_M^0 f_{M1}^0 p^{02} p_1^{02} \left[\int B_\vartheta^{(3)} d\Omega_{l_1} \right] dp^0 dp_1^0$$

gdzie

$$B^{(1)}_{\vartheta} = \int K^{s}_{\vartheta} D F d\Omega_{r} \qquad B^{(2)}_{\vartheta} = \int K^{s}_{\vartheta} D D^{(2)} F d\Omega_{r}$$

/54/

$$B^{(3)}_{\vartheta} = \int l^{o}_{\vartheta} D F^{A} d\Omega_{r} \qquad K^{s}_{\vartheta} = p^{o} l^{o}_{\vartheta} + p^{o}_{1} l^{o}_{1\vartheta}$$

Całki B_{ϑ} , podobnie jak poprzednio, wykonujemy w specjalnym kładzie $\tilde{O}$ .Korzystając częściowo z uzyskanych poprzednio rezultatów otrzymamy:

$$\int B^{(1)}_{\vartheta} d\Omega_{r_1} = \frac{4}{3}\pi p^{o4} b E^{A} S^{o}_{\vartheta} + p^{o3} p^{o}_{1} \frac{4}{3}\pi b I^{A} S^{o}_{\vartheta}$$

/55/

$$\int B^{(2)}_{\vartheta} d\Omega_{r_1} = \frac{4}{3}\pi b H p^{o4} S^{o}_{\vartheta} + \frac{4}{3}\pi b I p^{o3} p^{o}_{1} S^{o}_{\vartheta}$$

$$\int B^{(3)}_{\vartheta} d\Omega_{r_1} = \frac{4}{3}\pi b E^{A} p^{o3} S^{o}_{\vartheta} + \frac{4}{3}\pi b I^{A} p^{o3}_{1} S^{o}_{\vartheta}$$

Tym razem znikają wszystkie wyrazy związane z tensorem naprężeń $\tau^{o}_{r\vartheta}$. Wykonując efektywnie całki po przestrzeni $\vec{\Gamma}$ możemy wyniki przedstawić w postaci:

$$\int B^{(1)}_{\vartheta} d\Omega_{r_1} = \frac{4}{3}\pi^{2} b m_{o}^{6} c^{8} S^{o}_{\vartheta} \Big[\frac{1}{sh\chi_1} (\Lambda^{B} - \Lambda^{E}) + \frac{ch\chi ch\chi_1}{sh^{2}\chi sh\chi_1} (\Lambda^{B} - \Lambda^{E}) -$$

/56/

$$- \frac{2}{3 sh^{2}\chi sh\chi_1} \Lambda^{C} \Big] sh^{3}\chi$$

$$\int B^{(2)}_{\vartheta} d\Omega_{r_1} = \frac{8}{3}\pi^{2} b m_{o}^{4} c^{4} sh^{3}\chi S^{o}_{\vartheta} \Big[\frac{1}{sh\chi_1} (\Lambda^{A} - \Lambda^{E}) + \frac{ch\chi ch\chi_1 + 1}{sh^{2}\chi sh\chi_1} (\Lambda^{A} - \Lambda^{E}) - \frac{1}{2 sh^{2}\chi sh\chi_1} (\Lambda^{B} - \Lambda^{E}) \Big]$$

$$\int B^{(3)}_{\vartheta} d\Omega_{r_1} = \frac{8}{3}\pi^{2} b m_{o}^{5} c^{7} S^{o}_{\vartheta} \Big[\frac{sh^{2}\chi}{2 sh\chi_1} (\Lambda^{B} - \Lambda^{E}) + \frac{ch\chi ch\chi_1 sh\chi_1}{2 sh^{2}\chi} (\Lambda^{B} - \Lambda^{E}) - \frac{sh\chi_1}{3 sh^{2}\chi} \Lambda^{C} \Big]$$

Jeśli postępować podobnie jak w p. A, dostaniemy:

/57/

$$\int p^{o}_{1} p^{o}_{\vartheta} d_{1} f^{o} \frac{d^{3}\vec{p}}{\varepsilon^{o}} = \frac{i}{c} \frac{32}{9} \pi^{3} \frac{R_{o}^{2}}{c} A^{2} m_{o}^{11} c^{12} b S^{o}_{\vartheta} Y$$

gdzie:

$$/58/ \quad Y = -\left(\frac{115}{4x^4} + \frac{55}{4x^6} + \frac{2655}{2x^8}\right)K_3(2x) - \left(\frac{15}{2x^3} + \frac{467}{4x^5} + \frac{2895}{2x^7} + \frac{10680}{x^9}\right)K_2(2x) - \left(-\frac{145}{4x^4} + \frac{51}{4x^6} + \frac{8220}{x^8}\right)K_1(2x) + \left(\frac{15}{2x^3} + \frac{767}{4x^5} - \frac{1824}{x^7} - \frac{5040}{x^9}\right)K_0(2x) + \left(\frac{-35}{2x^5} + \frac{105}{2x^7}\right)K_4(2x) + \frac{315}{4x^6}K_5(2x)$$

Korzystając z /47/ uzyskamy Y w znacznie prostszej formie:

$$/59/ \quad Y = -\left(\frac{192}{x^6} + \frac{7680}{x^8} + \frac{13440}{x^{10}}\right)K_1(2x) - \left(\frac{2424}{x^7} + \frac{13440}{x^9}\right)K_0(2x)$$

Ostatecznie więc postać prawej strony równania transportu dla $l = 4$, $k = \mathcal{J}$ jest następująca:

$$/60/ \quad \int p_4^0 p_{\mathcal{J}}^0 \delta_L f^0 \frac{d^3p^0}{\varepsilon^0} = \frac{i}{c}\,\frac{2}{45}\,\frac{\pi R_0^2 m_0}{c}\,\frac{N_M^0 x^4 Y}{\left(1+\frac{8}{x^2}\right)K_0^2 + \left(\frac{2}{x} + \frac{32}{x^3}\right)K_0K_1 - \left(1 - \frac{32}{x^4}\right)K_1^2}\,\mathcal{S}_{\mathcal{J}}^0$$

<u>Tensor naprężeń lepkich, strumień ciepła i tensor energii-pędu w układzie własnym.</u> Porównując /9/ i /49/ stronami dostajemy:

$$/61/ \quad \alpha_A \tau^0_{\gamma\mathcal{J}} + \beta_A \tau^0_{\mu\mu}\delta_{\gamma\mathcal{J}} = -\frac{45mcK_3}{\pi R_0^2}\left[K_3\frac{\partial q^0_\lambda}{\partial x^0_\eta}\left(\delta_{\gamma\mathcal{J}}\delta_{\eta\lambda} + \delta_{\gamma\eta}\delta_{\mathcal{J}\lambda} + \delta_{\gamma\lambda}\delta_{\mathcal{J}\eta}\right) + \frac{1}{3}\frac{\partial q^0_\lambda}{\partial x^0_\lambda}\delta_{\gamma\mathcal{J}}\frac{T_1}{T_2}\right]$$

Stąd można wyliczyć

$$/62/ \quad \tau^0_{\gamma\mathcal{J}} = \mu_1 \overline{\overline{\frac{\partial q^0_\gamma}{\partial x^0_{\mathcal{J}}}}} + \mu_2 \frac{\partial q^0_\lambda}{\partial x^0_\lambda}\delta_{\gamma\mathcal{J}} \qquad /63/ \quad \tau^0_{\mu\mu} = 3\mu_2 \frac{\partial q^0_\lambda}{\partial x^0_\lambda}$$

gdzie:

$$/64/ \quad \mu_1 = -\frac{45mcK_3^2}{\pi R_0^2 \alpha_A} \qquad \mu_2 = -\frac{15mcK_3}{\pi R_0^2}\,\frac{5K_3 + \frac{T_1}{T_2}}{\alpha_A + 3\beta_A}$$

W ramach naszej teorii uzyskaliśmy więc niezerowy ślad tensora naprężeń lepkich. Tym samym warunek / 1,7 / nie może być spełniony. Wynika stąd, że w przypadku relatywistycznym nie można skonstruować rozwiązań normalnych /rozwiązania normalne są to takie rozwiązania, dla których pokrywają się makroparametry obliczone w oparciu o funkcje rozkładu f^0 i $f^{\cdot}_M$ /. Z kolei przez porównanie /15/ i /60/ uzyskujemy:

/65/
$$J^0_\gamma = -k_T \frac{\partial T^0}{\partial X^0_\gamma} + k_N \frac{\partial \ln N^0_M}{\partial X^0_\gamma}$$

gdzie:

$$k_N = -\frac{15 m_0 c^3 X}{128 \pi R_0^2} \frac{W_1 W_2}{W_3} \qquad k_T = -\frac{15 c k X^2}{128 \pi R_0^2}\left(3 + X\frac{K_1}{K_2}\right)\frac{W_1 W_2}{W_3}$$

/66/
$$W_1 = \frac{\left(1+\frac{2}{X^2}-\frac{16}{X^4}\right)K_1^2 - \left(\frac{1}{X}+\frac{16}{X^3}\right)K_0K_1 - \left(1+\frac{4}{X^2}\right)K_0^2}{2\left(\frac{1}{X}+\frac{8}{X^3}\right)K_1^2 + \left(1+\frac{16}{X^2}\right)K_0K_1 + \frac{4}{X}K_0^2}$$

$$W_2 = \left(1+\frac{8}{X^2}\right)K_0^2 + \left(\frac{2}{X}+\frac{32}{X^3}\right)K_0K_1 - \left(1-\frac{32}{X^4}\right)K_1^2$$

$$W_3 = \left(1+\frac{40}{X^2}+\frac{70}{X^4}\right)K_1(2X) + \left(\frac{303}{24X}+\frac{70}{X^3}\right)K_0(2X)$$

Strumień ciepła możemy wyrazić również poprzez gradient jednej wielkości termodynamicznej A :

/67/
$$J^0_\gamma = k_N \frac{\partial \ln A}{\partial X^0_\gamma}$$

Wykresy zależności współczynników transportu μ_1 , μ_2 , k_T , k_N od temperatury zostały sporządzone w oparciu o obliczenia numeryczne i są przedstawione na rys. 1, 2, 3, 4. Wartości współczynników podaje tabela 1.

W oparciu o uzyskane rezultaty możemy ostatecznie przedstawić tensor energii-pędu w układzie własnym T^0_{ik} . W tym celu rozbijmy T^0_{ik} na część maxwellowską T^{M0}_{ik} i dyssypacyjną $T^{\mathcal{D}0}_{ik}$:

/68/
$$T^{0}_{lk} = T^{M0}_{lk} + T^{D0}_{lk}$$

gdzie

/69/
$$T^{M0}_{lk} = c^2 \int p^0_l p^0_k f^0_M \frac{d^3 p^0}{\varepsilon^0} = \begin{Vmatrix} P_M \delta_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & -\varepsilon_M \end{Vmatrix}$$

/70/
$$T^{D0}_{lk} = c^2 \int p^0_l p^0_k f^0_D \frac{d^3 p^0}{\varepsilon^0} = \begin{Vmatrix} P^{D0}_{\alpha\beta} & \frac{i}{c} S^0_\alpha \\ \frac{i}{c} S^0_\beta & -\varepsilon^0_D \end{Vmatrix}$$

Dla pełnego określenia tensora T^{D0}_{lk} pozostała jeszcze do znalezienia wielkość ε^{D0}. Jak już wspominaliśmy, równanie transportu / IV,9 / dla $l = 4$, $k = 4$ nie wnosi nic nowego /jest liniowo zależne z równaniami transportu dla $l = k = \alpha$ i z równaniem ciągłości / III,14 / /. Gęstość energii można jednak określić wprost z definicji:

/71/
$$\varepsilon^0_D = \int \varepsilon^0 f^0_D d^3 p^0 = \varepsilon^0 - \varepsilon^0_M$$

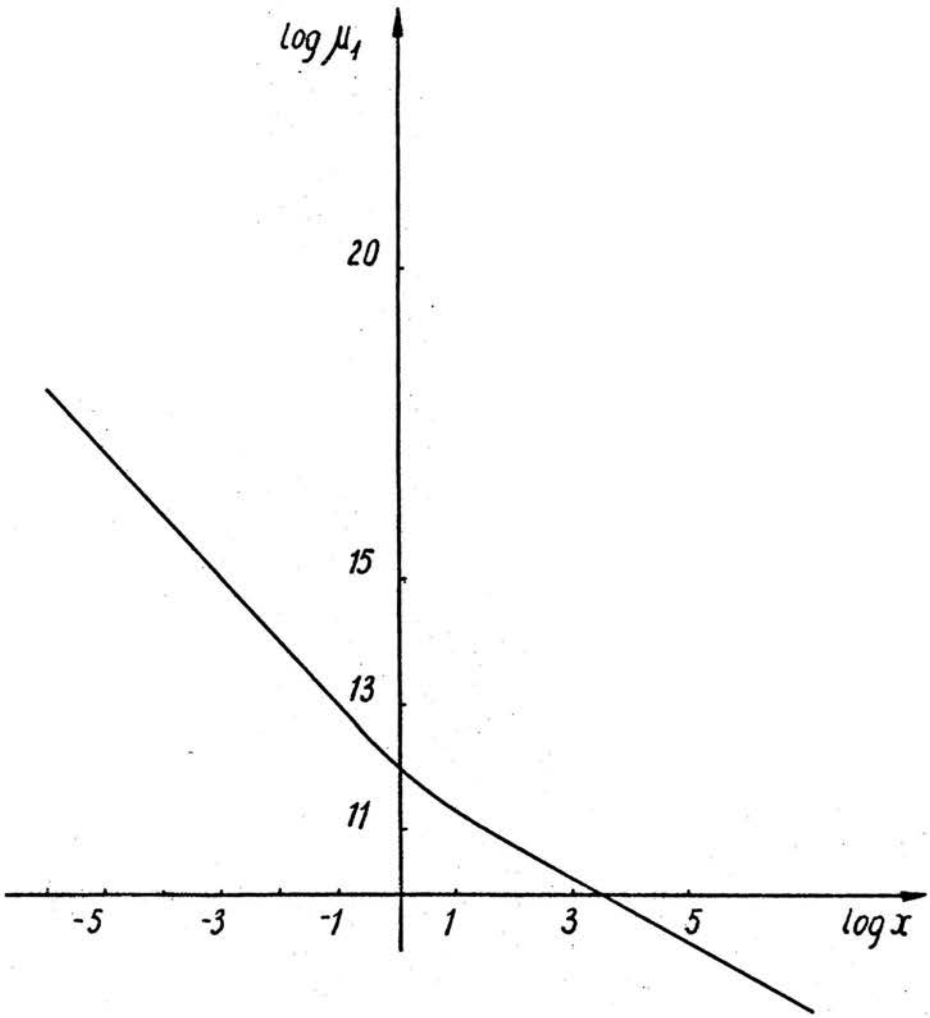
Staje się możliwe dzięki temu, że ε^{D0} jest zupełnie określona, jeśli znane są S^0_α i $T^0_{\gamma\gamma}$. Bez trudu znajdujemy

/72/
$$\varepsilon^0_D = \lambda_A \frac{\partial q^0_\lambda}{\partial X^0_\lambda}$$

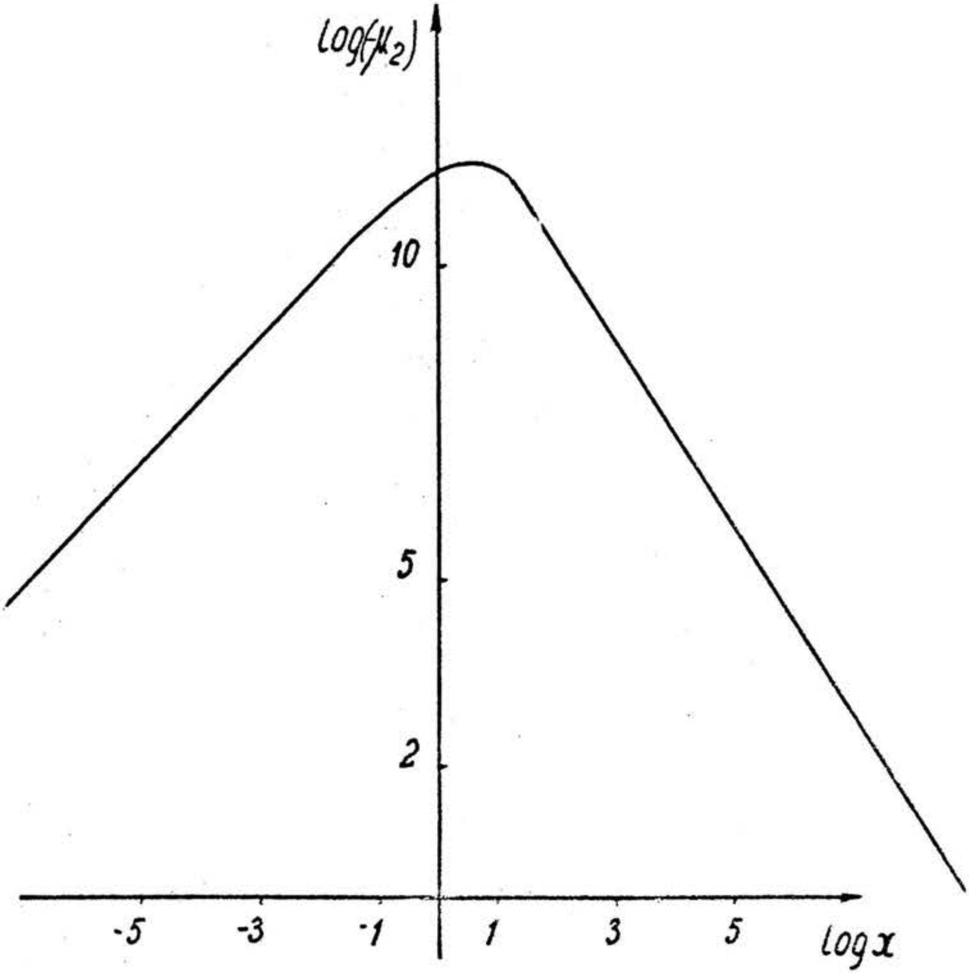
gdzie

/73/
$$\lambda_A = -\frac{3}{5} \mu_2 X \left[\frac{5}{X} + \frac{K_2}{K_3} \right]$$

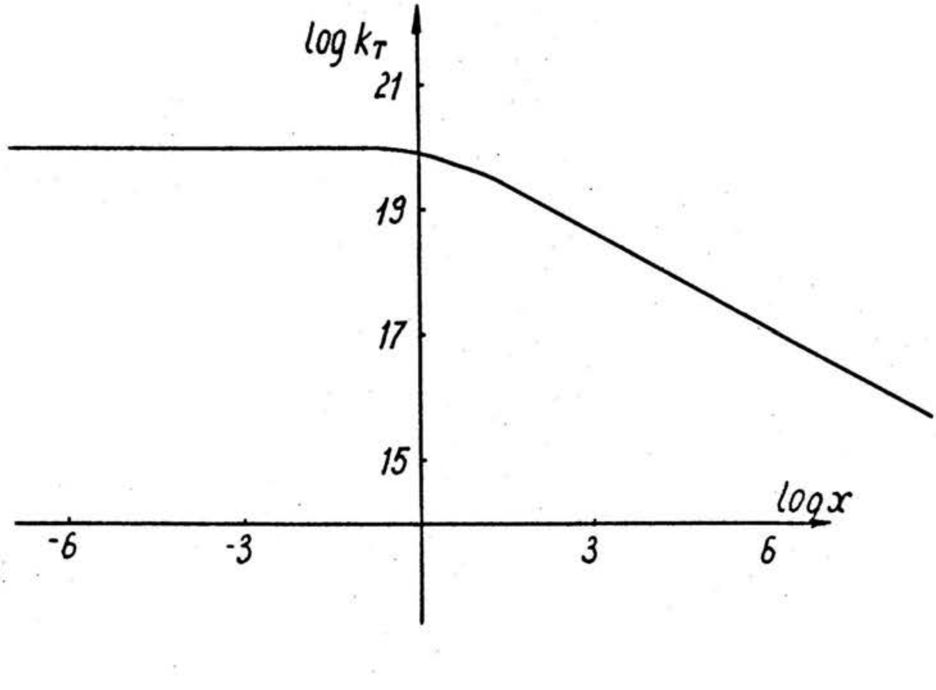
Tym samym, na mocy /68/, tensor energii-pędu w układzie własnym został w pełni efektywnie określony.



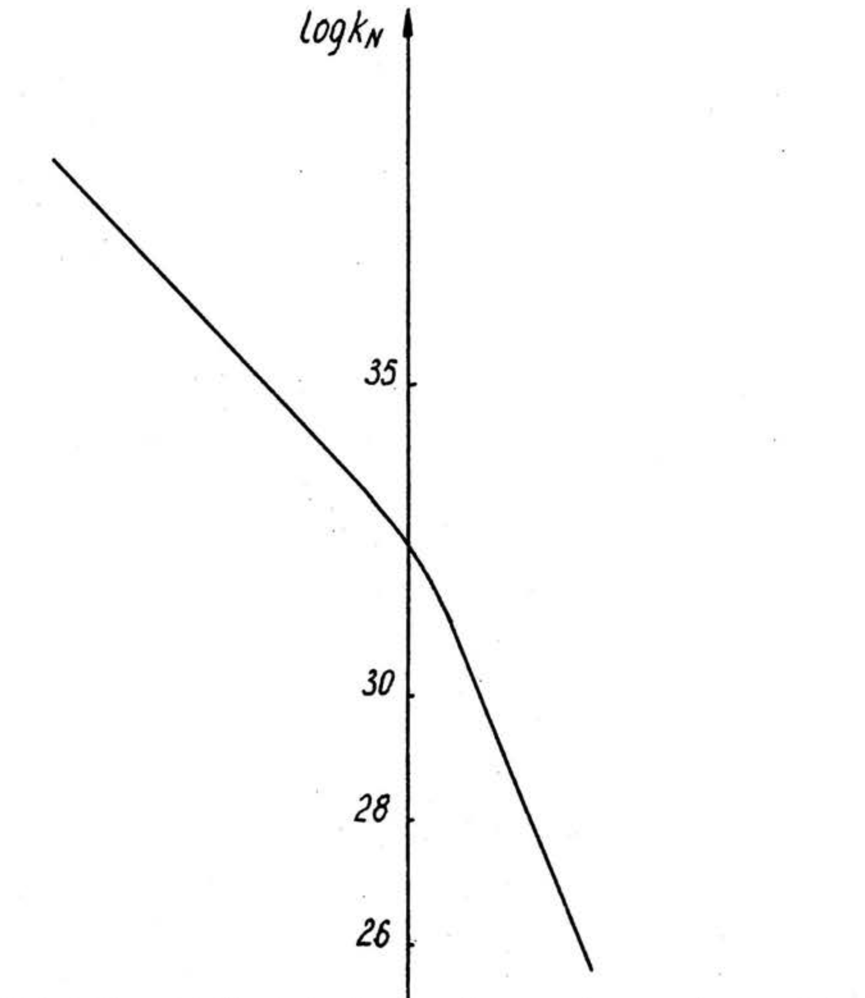
Rys.1



Rys.2



Rys.3



Rys.4

Tabela I

x	μ_1	$-\mu_2$	K_H	k_-
10^{-10}	1.133255×10^{22}	7.869823×10	3.637579×10^{42}	1.002220×10^{20}
10^{-8}	1.133255×10^{20}	7.869823×10^{3}	3.637579×10^{40}	1.002220×10^{20}
10^{-6}	1.133255×10^{18}	7.869823×10^{5}	3.637579×10^{38}	1.002220×10^{20}
10^{-5}	1.133255×10^{17}	7.869823×10^{6}	3.637579×10^{37}	1.002220×10^{20}
10^{-4}	1.133254×10^{16}	7.869820×10^{7}	3.637578×10^{36}	1.002220×10^{20}
10^{-3}	1.133239×10^{15}	7.869600×10^{8}	3.637555×10^{35}	1.002214×10^{20}
10^{-2}	1.132263×10^{14}	7.855664×10^{9}	3.636068×10^{34}	1.001820×10^{20}
2×10^{-2}	5.666185×10^{13}	1.567854×10^{10}	1.818491×10^{34}	1.002122×10^{20}
4×10^{-2}	2.833360×10^{13}	3.109851×10^{10}	9.089280×10^{33}	1.001972×10^{20}
6×10^{-2}	1.889306×10^{13}	4.614012×10^{10}	6.056343×10^{33}	1.001778×10^{20}
8×10^{-2}	1.417000×10^{13}	6.072057×10^{10}	4.537676×10^{33}	1.001228×10^{20}
10^{-1}	1.133748×10^{13}	7.481308×10^{10}	3.625881×10^{33}	1.000642×10^{20}
2×10^{-1}	5.677338×10^{12}	1.377025×10^{11}	1.796666×10^{33}	9.963958×10^{19}
3×10^{-1}	3.793520×10^{12}	1.888591×10^{11}	1.180784×10^{33}	9.896987×10^{19}
4×10^{-1}	2.853965×10^{12}	2.304627×10^{11}	8.692522×10^{32}	9.811607×10^{19}
6×10^{-1}	1.917641×10^{12}	2.928242×10^{11}	5.524553×10^{32}	9.597446×10^{19}
8×10^{-1}	1.452730×10^{12}	3.369209×10^{11}	3.912114×10^{32}	9.351458×10^{19}
1	1.175622×10^{12}	3.699426×10^{11}	2.936596×10^{32}	9.089965×10^{19}
2	6.283695×10^{11}	4.532737×10^{11}	1.040544×10^{32}	7.840604×10^{19}
3	4.483898×10^{11}	4.583102×10^{11}	5.045478×10^{31}	6.892392×10^{19}
4	3.587372×10^{11}	4.941134×10^{11}	2.869472×10^{31}	6.187281×10^{19}
6	2.675627×10^{11}	4.400978×10^{11}	1.231977×10^{31}	5.271850×10^{19}
10	1.908665×10^{11}	3.604016×10^{11}	3.990642×10^{30}	4.276989×10^{19}
14	1.552611×10^{11}	2.709435×10^{11}	1.858401×10^{30}	3.733399×10^{19}
16	1.434085×10^{11}	2.561564×10^{11}	1.423548×10^{30}	3.682992×10^{19}
10^{2}	5.312655×10^{10}	2.155713×10^{10}	1.761628×10^{28}	1.619334×10^{19}
10^{3}	1.656726×10^{10}	6.816823×10^{8}	5.570631×10^{25}	5.119411×10^{18}
10^{4}	5.231654×10^{9}	2.155782×10^{7}	1.762437×10^{23}	1.619192×10^{18}
10^{6}	5.230843×10^{8}	2.155764×10^{4}	1.762444×10^{18}	1.619123×10^{17}
10^{8}	5.230835×10^{7}	2.155741×10	1.762311×10^{13}	1.619113×10^{16}
10^{10}	5.230835×10^{6}	2.155741×10^{-2}	1.762311×10^{8}	1.619113×10^{15}

VI. Zachowanie asymptotyczne.

Wydaje się interesujące sprawdzić, czy jest zachowana korespondencja ogólnych rezultatów z rezultatami dla przypadków klasycznego i ultrarelatywistycznego. W tym celu zbadamy zachowanie asymptotyczne pewnych wyrażeń i równań, występujących w przedstawianej teorii.

1. Przejście do przypadku klasycznego.

W przypadku klasycznym mamy $x \gg 1$. Jednym z takich wyrażeń jest zaproponowana postać funkcji rozkładu f^0 / IV,3 /. Dla $x \gg 1$ odpowiednie współczynniki w rozwinięciu, a więc a, b, g, h powinny przejść klasycznie. Korzystamy ze znanej postaci asymptotycznego rozwinięcia funkcji Mac Donalda dla $x \gg 1$ [22]:

$$/1/ \qquad K_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}\left[1 + \frac{4n^2-1^2}{1!\,8x} + \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)}{2!\,(8x)^2} + \cdots\right]$$

Można łatwo sprawdzić, że[x/]:

$$/2/ \qquad \left[\left(1-\frac{32}{x^4}\right)K_1^2 - \left(\frac{2}{x}+\frac{32}{x^3}\right)K_0K_1 - \left(1+\frac{8}{x^2}\right)\right]_c = -\frac{1}{x}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}\right)^2$$

Uwzględniając zachowanie się ostatniego wyrażenia i zaniedbując małe wyższych rzędów dostajemy po prostych przeliczeniach:

$$/3/ \qquad a_c = -\frac{1}{m_0 R T p_M} \qquad b_c = \frac{1}{5 m_0^3 R^2 T^2 p_M} \qquad g_c = \frac{-1}{2 m_0^2 p_M R T} \qquad h_c = -\frac{1}{5} g_c$$

gdzie: $R = \frac{k}{m_0}$ - stała gazowa,
co pokrywa się z wyrażeniami klasycznymi [21] .

---

x/ Znaczek "c" przy wielkości przypomina, że jest to wartość graniczna wielkości w obszarze klasycznym.

Dokonamy teraz granicznego przejścia z równaniem transportu / IV,9 / na określenie tensora naprężeń lepkich $\tau^{o}_{\gamma\vartheta}$ i strumienia ciepła S^{o}_{ϑ} .

A. Przypadek $l = \gamma$, $k = \vartheta$

Lewa strona równania / IV,9 /. Proste rachunki dają:

$$/4/ \qquad T_{1c} = \frac{15}{2X^2}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2X}}\, e^{-X}\right)^3 \qquad\qquad T_{2c} = -\frac{3}{2X^2}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2X}}\, e^{-X}\right)^2$$

Zaniedbując małe wyższych rzędów w równaniu / V,9 / otrzymamy:

$$/5/ \qquad \left[\int p^{o}_{\gamma} p^{o}_{\vartheta} p^{o}_{m} \frac{\partial f^{o}_{M}}{\partial X^{o}_{m}} \frac{d^3 \vec{p}^{o}}{\varepsilon^{o}}\right]_c = \frac{m_o}{c^2} kNT \,\overline{\overline{\frac{\partial q^{o}_{\gamma}}{\partial X^{o}_{\vartheta}}}}$$

Zauważając, że w przypadku klasycznym:

$$\frac{\partial q^{o}_{\gamma}}{\partial X^{o}_{\vartheta}} = \frac{\partial q_{\gamma}}{\partial X_{\vartheta}}$$

możemy znów stwierdzić, że otrzymaliśmy rezultat klasyczny [21] /str.28, lewa strona pierwszego wzpru 12-10 przy τ_{ij} =0, q_i = 0 /

Prawa strona równania / IV,9 /.

Mamy natychmiast:

$$/6/ \qquad \alpha_{Ac} = -576\sqrt{\frac{\pi}{4X}}\, e^{-2X} \qquad\qquad \beta_{Ac} = 192\sqrt{\frac{\pi}{4X}}\, e^{-2X}$$

Podstawienie tych wielkości w równaniu / V,49 / z równoczesnym zaniedbaniem małych wyższych rzędów daje:

$$/7/ \qquad \left[\int p^{o}_{\gamma} p^{o}_{\vartheta} \delta_L f^{o} \frac{d^3 \vec{p}^{o}}{\varepsilon^{o}}\right]_c = -\frac{64}{15}\frac{\pi R^2}{c^2}\frac{1}{\sqrt{\pi R T}}\left(-3\tau^{o}_{\gamma\vartheta} + \tau^{o}_{\mu\mu}\delta_{\gamma\vartheta}\right)$$

co pokrywa się z wynikiem klasycznym [21] /str.28, prawa strona pierwszego wzoru 12 - 10 przy $\tau^{o}_{ii} = 0$ /. Zachowaliśmy tu dla formalności wyraz z $\tau^{o}_{\mu\mu}$. Okazuje się, że w rozpatrywanym przybliżeniu, które gwarantuje dokładnie przypadek klasyczny, ślad tensora naprężeń lepkich staje się nieokreśny. Mamy bowiem:

$$\alpha_{Ac} + 3\beta_{Ac} = 0 \qquad 5K_3(x)_c + \frac{T_{1c}}{T_{2c}} = 0 \tag{8}$$

co w myśl / V,63/ prowadzi do nieokreśloności śladu $\tau^{o}_{\nu\nu}$ /klasycznie żąda się, by $\tau^{o}_{\nu\nu} = 0$/.

Interesujące może się okazać znalezienie wyższych przybliżeń dla tensora naprężeń lepkich i jego śladu w obszarze klasycznym. Zachowując w wyrażeniach $K_3(x)$, T_1, T_2, β, α, wyrazy o rząd wielkości mniejsze niż poprzednio otrzymamy:

$$\tau^{o}_{\gamma\delta} = \frac{5}{64}\left(1 + \frac{401}{256x}\right)\frac{m_o}{\pi R_o^2}\sqrt{\pi R T^o}\,\overline{\overline{\frac{\partial q^o_\gamma}{\partial x^o_\delta}}} \tag{9}$$

$$\tau^{o}_{\mu\mu} = 0 \tag{10}$$

Drugie przybliżenie w obszarze klasycznym przynosi więc ślad $\tau^{o}_{\nu\nu}$ równy 0. Okazuje się, że dopiero w czwartym przybliżeniu ślad tensora naprężeń lepkich staje się niezerowy. Zachowując mianowicie, w rozwinięciach asymptotycznych funkcji Mac Donalda, wyrazy z dokładnością do $1/x^4$ otrzymamy:

$$5K_3 T_2 + T_1 \approx \frac{14835}{(64x^2)^2}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}\right)^3 \tag{11}$$

W pierwszym, drugim i trzecim przybliżeniu wyrażenie to było równe 0. Uwzględniając /11/ dostajemy natychmiast:

$$\mu_2 = -\frac{4945mc}{1536\pi R_o^2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}\,\frac{1}{x} \tag{12}$$

Współczynnik drugiej lepkości w odniesieniu do współczynnika pierwszej lepkości dla $x \gg 1$ maleje jak $1/x$. Tym samym, wyraz w tensorze naprężeń lepkich związany z drugą lepkością możemy w obszarze klasycznym pomijać.

B. Przypadek $l = 4$, $k = \vartheta$. Lewa strona równania / IV, 9 /. Można sprawdzić, że:

$$\frac{K_1}{K_2} = 1 - \frac{3}{2x} + \frac{15}{8x^2} - \frac{15}{8x^3} + \cdots$$

$$\frac{K_3}{K_2} = 1 + \frac{5}{2x} + \frac{15}{8x^2} - \frac{15}{8x^3} + \cdots$$

/13/
$$\frac{1 + \frac{5K_3}{xK_2}}{\frac{4}{x} + \frac{K_1}{K_2}} = 1 + \frac{5}{2x} + \frac{35}{8x^2} - \frac{35}{8x^3} + \cdots$$

$$\frac{K_1^2}{K_2^2} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{75}{8x^3} + \cdots$$

$$\frac{\frac{5K_3K_1}{xK_2^2} + \frac{K_1}{K_2}}{\frac{4}{x} + \frac{K_1}{K_2}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2} - \frac{65}{8x^3} + \cdots$$

Jeśli w / V, 15 / zachować wyrazy z dokładnością do $1/x^2$ otrzymamy 0. Zachowanie wyrazów z dokładnością o stopień wyższą daje:

/14/
$$\left[\int p_4^0 p_\vartheta^0 p_m^0 \frac{\partial f_M^{(0)}}{\partial x_m^0} \frac{d^3p}{\varepsilon^0}\right]_c = \frac{1}{c^3}\, \frac{5}{2}\, k p_M \frac{\partial T}{\partial x_\vartheta}$$

Wynik ten pokrywa się z klasycznym [21]/strona 28, lewa strona drugiego wzoru 12-10 przy $\tau_{ij} = 0$, $q_i = 0$/. Jeśli zachować wyrazy z jeszcze wyższą dokładnością, otrzymamy:

/15/ $$\int p_i^0 p_\vartheta^0 p_m^0 \frac{\partial f_M^0}{\partial x_m^0} \frac{d^3 \bar{p}^0}{\varepsilon^0} \approx -\frac{i}{c} \frac{m_0^2 c^2}{x^2} \frac{5N^0}{2x}\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)\frac{\partial x}{\partial x_\vartheta^0} + \frac{1}{N^0}\frac{\partial N^0}{\partial x_\vartheta^0}\right]$$

Prawa strona równania / IV, 9 /.
Na podstawie / V, 59 / mamy:

/16/ $$y_c = -\frac{192}{x^6}\sqrt{\frac{\pi}{4x}}\, e^{-2x}$$

Po wykorzystaniu /2/ równość / V, 60 / daje natychmiast:

/17/ $$\left[\int p_i^0 p_\vartheta^0 \delta_L f^0 \frac{d^3 \bar{p}^0}{\varepsilon^0}\right]_c = -\frac{i}{c^3}\frac{128}{15}\pi R_0^2 p_M \frac{1}{\sqrt{\pi R T}} S_\vartheta^0$$

co potwierdza zbieżność z przypadkiem klasycznym [21] /strona 28, prawa strona drugiego wzoru 12-10/.
W wyższym przybliżeniu znajdujemy:

$$y \approx -\frac{6}{x^6}\left(16+\frac{205}{x}\right)\sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{-2x}$$

/18/

$$\left(1+\frac{8}{x^2}\right)K_0^2 + \left(\frac{2}{x}+\frac{32}{x^3}\right)K_0 K_1 - \left(1-\frac{32}{x^4}\right)K_1^2 \approx \left(\frac{1}{x}+\frac{31}{4x^2}\right)\left(\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}\right)^2$$

Związki te dają:

/19/ $$\int p_i^0 p_\vartheta^0 \delta_L f^0 \frac{d^3 \bar{p}^0}{\varepsilon^0} \approx -\frac{i}{c}\frac{8}{15}\frac{\pi R_0^2}{c x} m_0 N_M^0 \sqrt{\frac{x}{\pi}}\left(16+\frac{81}{x}\right) S_\vartheta^0$$

Porównując /15/ i /19/ otrzymamy ostatecznie:

/20/ $$S_\vartheta^0 = \frac{15}{4}\frac{c^2}{x^2}\mu\left[\left(1-\frac{73}{16x}\right)\frac{\partial x}{\partial x_\vartheta^0} + \frac{1}{N^0}\frac{\partial N^0}{\partial x_\vartheta^0}\right]$$

Okazuje się, że już w tym przybliżeniu strumień ciepła jest proporcjonalny do kombinacji gradientów temperatury i gęstości. Reasumując rezultaty zawarte w p.p. A i B możemy stwierdzić, że równanie transportu / IV,9 / na określenie tensora naprężeń lepkich i strumienia ciepła przechodzi w klasyczne. Tym samym przechodzą w klasyczne wyrażenia określające tensor naprężeń lepkich / V,62 / i strumień ciepła / V,65 /:

$$\tau^{0c}_{\gamma\delta} = \mu \frac{\partial \overline{\overline{q^0_\gamma}}}{\partial x^0_\delta} \qquad /21/$$

$$S^{0c}_\delta = -\frac{15}{4}\mu R \frac{\partial T}{\partial x_\delta} \qquad /22/$$

gdzie:

$$\mu_c = \frac{5m_0\sqrt{\pi R T}}{64\pi R_0^2} \qquad /23/$$

2. Przejście do przypadku ultrarelatywistycznego.

W obszarze ultrarelatywistycznym mamy $\chi \ll 1$. Przy przejściach granicznych korzystamy ze znanej postaci przedstawienia funkcji Mac Donalda dla $\chi \ll 1$:

$$K_n(\chi) = \frac{1}{2}(n-1)!\left(\frac{2}{\chi}\right)^n + \dots \qquad n>0, \quad K_0(\chi) = -0.5772 - \ln\frac{\chi}{2} + \dots \qquad /24/$$

Na współczynniki rozwinięcia funkcji f^0 dostajemy:x/

$$a_u = -\frac{1}{2k^2T^{02}N^0_M} \qquad b_u = \frac{c^2}{40k^4T^{04}N^0_M} \qquad g_u = -\frac{c^2}{8k^3T^{03}N^0_M} \qquad h_u = -\frac{g_u}{5} \qquad /25/$$

Zajmiemy się teraz asymptotycznym zachowaniem równania transportu / IV,9 /

A. $l = \gamma$, $k = \delta$. Lewa strona równania / IV,9 /

Bez trudu można sprawdzić, że:

---

x/ Znaczek "u" przy wielkości przypomina, że jest to wartość wielkości w obszarze ultrarelatywistycznym.

/26/ $$T_{1u} = \frac{480}{X^9} \qquad T_{2u} = -\frac{12}{X^6} \qquad \frac{T_{1u}}{T_{2u}} = -\frac{40}{X^3}$$

W takim razie w miejsce / V,9 / otrzymamy:

/27/ $$\left[\int p^o_r p^o_\vartheta p^o_m \frac{\partial f^o_M}{\partial X^o_m} \frac{d^3 p^o}{\varepsilon^o}\right]_u = \frac{4}{c^4} k^2 T^{o2} N^o_M \overline{\overline{\frac{\partial q^o_r}{\partial X^o_\vartheta}}}$$

Prawa strona równania / IV,9 /.
Zachowanie graniczne α_A , β_A jest następujące:

/28/ $$\alpha_{Au} = -\frac{3600}{X^5} \qquad \beta_{Au} = \frac{3072}{X^5}$$

Uwzględniając to w / V,49 / dostaniemy natychmiast:

/29/ $$\left[\int p^o_r p^o_\vartheta \delta_L f^o \frac{d^3 p^o}{\varepsilon^o}\right]_u = \frac{8}{15} \frac{\pi R_o^2 k T^o N^o_M}{c^3} \left(25 \tau^o_{r\vartheta} - 8 \tau^o_{\mu\mu} \delta_{r\vartheta}\right)$$

B. $l = 4$, $k = 9$. Lewa strona równania / IV,9 /
Proste rachunki prowadzą do:

/30/ $$\int p^o_4 p^o_\vartheta p^o_m \frac{\partial f^o_M}{\partial X^o_m} \frac{d^3 p^o}{\varepsilon^o} = -\frac{i}{c} \frac{m_o^2 c^2}{X^3} \left[3 N^o_M \frac{\partial X}{\partial X^o_\vartheta} + X \frac{\partial N^o}{\partial X^o_\vartheta}\right]$$

Prawa strona równania / IV,9 /
Zaniedbując małe wyższych rzędów otrzymamy:

/31/ $$Y_u = -\frac{6720}{X^{11}}$$

/32/ $$\left[\int p^o_4 p^o_\vartheta \delta_L f^o \frac{d^3 p^o}{\varepsilon^o}\right]_u = -\frac{i}{c} \frac{28}{3} \frac{\pi R_o^2 k T^o N^o_M}{c^3} S^o_\vartheta$$

Porównując /27/ i /29/ oraz dokonując zwężenia dostajemy natychmiast:

/33/
$$\tau^{0v}_{\vartheta\vartheta} = \frac{3}{10}\frac{kT^0}{\pi R_0^2 c}\overline{\overline{\frac{\partial q^0_\vartheta}{\partial x^0_\vartheta}}}$$

/34/
$$\tau^{0v}_{\mu\mu} = 0$$

Nietrudno sprawdzić, że w następnym przybliżeniu uzyskamy:

/35/
$$\mu_2 \approx -\frac{5}{24}\frac{m_0 c}{\pi R_0^2}X$$

Podobnie z przyrównania /30/ i /32/ otrzymamy:

/36/
$$S^{0v}_{\vartheta} = \frac{3}{28}\frac{ckT^0}{\pi R_0^2}\left[-\frac{3}{T^0}\frac{\partial T^0}{\partial x^0_\vartheta} + \frac{1}{N^0_M}\frac{\partial N^0_M}{\partial x^0_\vartheta}\right]$$

Warto podkreślić, że przypadek ultrarelatywistyczny liczony był oddzielnie inną metodą. Uzyskane wyniki są identyczne. Z jednej strony więc przypadek ogólny jest zbieżny do klasycznego, z drugiej do ultrarelatywistycznego. Tym samym jest to dobre potwierdzenie poprawności obliczeń. Przypadek ultrarelatywistyczny, ze względu na proste wyniki, jest szczególnie łatwy do interpretacji. Tensor naprężeń lepkich jest wprost proporcjonalny do temperatury, zaś strumień ciepła proporcjonalny do kombinacji gradientów temperatury i gęstości. Pewną osobliwością jest tutaj stałość współczynnika przewodnictwa cieplnego przy gradiencie temperatury, jak również fakt, że część strumienia ciepła związana z gradientem gęstości skierowana jest w kierunku rosnącej gęstości. Interesujący wydaje się również fakt zerowania się śladu tensora naprężeń lepkich. Wykresy zależności współczynników transportu μ_1, μ_2, k_T, k_N od temperatury, sporządzone w oparciu o obliczenia numeryczne, potwierdzają znalezione powyżej zachowanie graniczne tych współczynników zarówno w obszarze klasycznym jak i ultrarelatywistycznym.

VII. Tensor energii-pędu w układzie laboratoryjnym. Szczególną prostotę wyników zawdzięczamy użyciu układu własnego. Ponieważ w równaniach gazodynamiki stoi explicite tensor energii-pędu w układzie obserwacji, musimy dokonać transformacji tensora T^{0}_{mn} do układu obserwacji. Dla prostoty rachunków tensor energii-pędu T_{lk} rozbijemy na część maxwellowską i dyssypacyjną:

/1/ $$T_{lk} = T^{M}_{lk} + T^{D}_{lk}$$

gdzie

/2/ $$T^{M}_{lk} = a_{lm} a_{kn} T^{M0}_{mn} = (p_M + \epsilon_M) u_l u_k + p_M \delta_{lk}$$

/3/ $$T^{D}_{lk} = a_{lm} a_{kn} T^{D0}_{mn} = a_{l\alpha} a_{k\beta} T^{D0}_{\alpha\beta} + a_{l4} a_{k\beta} T^{D0}_{4\beta} + a_{l\alpha} a_{k4} T^{D0}_{\alpha 4} + a_{l4} a_{k4} T^{D0}_{44}$$

Z kolei T^{D0}_{mn} przedstawimy w postaci:

/4/ $$T^{D0}_{mn} = \begin{Vmatrix} P^{D0}_{\alpha\beta} & \frac{i}{c} S^{0}_{\alpha} \\ \frac{i}{c} S^{0}_{\beta} & -\epsilon^{D0} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\tau^{0}_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & \frac{i}{c} S^{0}_{\alpha} \\ \frac{i}{c} S^{0}_{\beta} & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon^{D0} \end{Vmatrix}$$

Korzystając z /3/ i /4/ oraz z / V,62 /, / V,65 / i / V,72 / możemy zapisać / T^{D}_{lk} / w prostej, przejrzystej fizycznie formie:

/5/ $$T^{D}_{lk} = p^{D}_{lk} + \frac{1}{c}(u_k S_l + u_l S_k) + u_l u_k \epsilon^{D}$$

gdzie:

/6/ $$p^{D}_{lk} = -\tau_{lk} = -c\mu_1\left[\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + u_r\frac{\partial}{\partial x_r}(u_l u_k) - \frac{2}{3}\frac{\partial u_r}{\partial x_r}(\delta_{lk} + u_l u_k)\right] - c\mu_2(\delta_{lk} + u_l u_k)\frac{\partial u_r}{\partial x_r}$$

/7/ $$S_l = k_N(\delta_{lm} + u_l u_m)\frac{\partial A_A}{\partial x_m} \qquad A_A = \ln A$$

/8/ $$\epsilon^{D} = c\lambda_A\frac{\partial u_r}{\partial x_r}$$

Tensorowy charakter tych wielkości jest oczywisty. Ponieważ w układzie własnym:

/9/ $$p^{Do}_{mn}u^{o}_{n} = p^{Do}_{\alpha\beta}u^{o}_{\beta} = -\tau^{o}_{\alpha\beta}u^{o}_{\beta} = 0$$

/10/ $$S^{o}_{l}u^{o}_{l} = S^{o}_{\alpha}u^{o}_{\alpha} = 0$$

/11/ $$p^{Do}_{kk} = -\tau^{o}_{\alpha\alpha} \neq 0$$

więc i w każdym innym układzie odniesienia zachodzą związki:

/12/ $$p^{D}_{lk}u_k = -\tau_{lk}u_k = 0$$

/13/ $$S_l u_l = 0$$

/14/ $$p^{D}_{kk} = -\tau_{kk} \neq 0$$

Oznacza to, że tensory p^{D}_{lk} i S_l są ortogonalne do czasopodobnej czteroprędkości u_l, zaś ślad tensora napięć dyssypacyjnych jest niezerowy.

VIII. Porównanie z pracami innych autorów.

Szczególnie pożyteczne powinno się okazać porównanie z pracą Landaua. Praca Landaua zajmuje w teorii ośrodka relatywistycznego szczególną pozycję. Tę szczególność zawdzięcza oryginalnej definicji prędkości makroskopowej. Mianowicie - Landau określa ją tak, aby w układzie własnym znikał strumień energii /gęstość pędu/, a energia wyrażała się przez parametry termodynamiczne jak dla cieczy idealnej x/. Konsekwencją tego jest pewna modyfikacja równania ciągłości:

/1/ $$\frac{\partial N_i}{\partial x_i} = 0 \qquad N_i = N^0 u_i^L + \nu_i$$

Prawo /1/ wyraża zachowanie strumienia masy /łącznie z masą energii kinetycznej/, u_i^L - jest czteroprędkością makroskopową zdefiniowaną wg Landaua, ν_i - czterowektorem związanym ze strumieniem ciepła. Landau znajduje tensor energii-pędu T_{ik}^L i czterowektor ν_i z prawa wzrostu entropii. Okazuje się, że jeśli w naszych rezultatach położyć $T_{\nu\nu}^0 = 0$, to istnieje doskonała korespondencja między jego i naszymi rezultatami. Ponieważ u nas:

/2/ $$N_i = N^0 u_i$$

mamy natychmiast relację między prędkością Landaua i naszą:

/3/ $$u_i^L = u_i - \frac{\nu_i}{N^0}$$

Jeśli zachować poziom naszych rozważań ogólnych, tj. zaniedbać pochodne wyższych rzędów niż pierwszy, jak również potęgi pochodnych wyższe niż pierwsza, to dostaniemy:

---

x/ W ramach naszej teorii żądanie odnośnie energii jest nie do spełnienia, gdyż $\varepsilon^{\nu 0} \sim T_{\nu\nu}^0 \neq 0$

$$\frac{\partial u_i^L}{\partial x_k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \tag{4}$$

$$u_i^L u_k^L = u_i u_k - u_i \frac{\nu_k}{N^0} - \frac{\nu_i}{N^0} u_k \tag{5}$$

$$T_{ik}^{ML} = (p_M + \epsilon_M) u_i u_k + p_M \delta_{ik} - (p_M + \epsilon_M)\left(u_i \frac{\nu_k}{N^0} + \frac{\nu_i}{N^0} u_k\right) \tag{6}$$

gdzie T_{ik}^{ML} oznacza tensor energii-pędu cieczy idealnej z prędkością wg Landaua. Jeśli wykorzystać /3/ do wyrażenia tensora energii-pędu T_{ik}^{DL} - tensora związanego z procesami dyssypacyjnymi wg Landaua [13] , to możemy natychmiast stwierdzić równoważność tensorów energii-pędu Landaua i naszego. Pociąga to za sobą równoważność układów równań opisujących ruch ośrodka. Drobna różnica tkwi w tym, że u Landaua występuje dodatkowy wyraz w tensorze energii-pędu $-\xi \frac{\partial u_r}{\partial x_r} \delta_{ik}$ Jego obecność w tensorze Landaua związana jest z prostym faktem, że Landau w swych pół-fenomenologicznych rozważaniach dopuszcza dowolne ciecze rzeczywiste /a więc i z niezerowym drugim współczynnikiem lepkości/, podczas gdy nasze rozważania obejmują jedynie gazy jednoatomowe doskonałe x/. W porównaniu rezultatów Landaua i naszych można posunąć się jeszcze dalej. Można łatwo dowieść, że:

$$\frac{\mu^L}{T} = k(1 + \ln A) \tag{7}$$

---

x/ W rozważaniach dotyczących porównania przyjmujemy $\tau_{\nu\nu}^0 = 0$, a co za tym idzie $N_D^i = \epsilon_D^0 = 0$. Landau przyjmuje bowiem, że w układzie własnym gęstość energii jest taka, jak cieczy idealnej, czyli $\epsilon_D^0 = 0$. Klasycznie dla gazu jednoatomowego doskonałego $\tau_{\nu\nu}^0 = 0$. Widocznie Landau przenosi tę własność śladu również na przypadek relatywistyczny.

gdzie $\mu^L = \frac{W - T^0 \sigma^0}{N^0}$ jest relatywistycznym potencjałem substancji,

$W = p_M + \epsilon_M$ entalpią jednostki objętości, σ^0-entropią, co pociąga za sobą natychmiast

/8/
$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\mu^L}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k} A_A$$

Tym samym identyfikujemy ν_i ze strumieniem ciepła S_i. Jeśli więc zaniedbać $\tau^0_{\nu\nu}$, to zbieżność rezultatów jest zupełna. Równoważność rezultatów pozwala tym samym w prosty sposób wyznaczyć nieokreślone współczynniki fenomenologiczne w równaniach Landaua.

Próby uzyskania tensora naprężeń lepkich w postaci Landaua na gruncie teorii kinetycznej podjęli w swej pracy G.M.Zasławski i S.S.Moisiejew [23]. Stosując metodę momentów Grada uzyskali tensor lepkości pokrywający się z tensorem Landaua z dokładnością do zaniedbywanego przez nich współczynnika drugiej lepkości. W innej pracy Zasławski [24] uzyskał również strumień ciepła w formie Landaua. Z innych prac na uwagę zasługuje praca Masłowej [16]. Autorka znalazła postać tensora energii-pędu dla ośrodka z procesami dyssypacyjnymi rozwijając metodę Enskoga - Chapmana w formaliźmie relatywistycznym; nie znajduje jednak efektywnie postaci dyssypacyjnej części funkcji rozkładu, pozostawiając tym samym nieokreślone współczynniki transportu. W pracach Zasławskiego i Moisiejewa parametry dyssypacyjne są określone z dokładnością do pewnej charakterystycznej, bliżej nieokreślonej funkcji τ, grającej rolę charakterystycznego czasu zderzeń i reprezentującej człon zderzeniowy. Z dokładnością do charakterystycznego czasu zderzeń określił tensor energii-pędu również Marle [19], zastępując równanie Boltzmanna modelem B.G.K.x/. Jak widać żaden z autorów nie podejmuje

x/ Skrót od nazwisk autorów: Bhatnager P.L., Gross E.P., Krook N. /Phys.Rev.94, 511, /1954/ /.

próby pełnego rozwiązania zagadnienia, która wiąże się nierozłącznie z trudnościami, jakie kryje w sobie prawa strona równania Boltzmanna. Warto tutaj wspomnieć, że rezultaty Marle są ideowo najbliższe naszym rezultatom, w szczególności zaś rezultatowi niezerowego śladu tensora naprężeń lepkich. Przy porównaniu wyników naszej pracy z innymi narzuca się w sposób oczywisty problem dość dowolnej eliminacji pochodnych makrowielkości z równań cieczy idealnej, czyli zastępowania w tensorze energii-pędu gradientów jednych wielkości gradientami innych wielkości. Problem ten występował również w przypadku klasycznym. O ile jednak klasycznie tensor naprężeń lepkich $\tau_{\gamma\gamma}$ dał się wyrazić tylko przez pochodne prędkości, zaś strumień ciepła tylko przez gradient temperatury, o tyle w przypadku relatywistycznym staje się to niemożliwe. W naszej pracy kierowaliśmy się analogią klasyczną, co niewątpliwie wpłynęło na fakt, że postać tensora energii-pędu w układzie własnym jest możliwie najbardziej zbliżona do postaci klasycznej; postać $\overset{o}{\tau}_{\gamma\gamma}$ jest w swej formie identyczna, zaś $\overset{o}{S}_{\gamma}$ wyraża się poprzez gradient jednej wielkości termodynamicznej $\dot{A}$, podczas, gdy klasycznie poprzez gradient temperatury.

Dyskusja

Na czoło rozważań wysuwa się problem niezerowego śladu $\overset{o}{\tau}_{\nu\nu} \neq 0$ i konsekwencje z tym związane. Fakt pojawienia się w układzie własnym niezerowego śladu $\overset{o}{\tau}_{\nu\nu}$, równoważny niezerowemu współczynnikowi drugiej lepkości, jest efektem czysto relatywistycznym[x/]. Klasycznie druga lepkość mogła wystąpić dla cieczy ściśliwych rzeczywistych /np. gazy gęste, gazy z wewnętrznymi stopniami swobody, ciecze, w których może zachodzić przebudowa quasi-struktury/.

Podstawową konsekwencją niezerowego śladu jest to, że:

[x/] Fakt ten jest niezależny od modelu oddziaływań cząstek; za niezerowość śladu odpowiedzialna jest tylko lewa strona równania /IV,9/.

/9/ $$N^0 = N^0_M + N^0_D \qquad \varepsilon^0 = \varepsilon^0_M + \varepsilon^0_D$$

gdzie:

/10/ $$N^0_D = \frac{2}{15}\, g\, \overline{(p^{o2})}\, N^0_M\, \tau^0_{\nu\nu} \qquad \varepsilon^0_D = \frac{2}{5}\frac{m_0^3 c^4}{\chi}\, g\, N^0_M \left(1 + \frac{5}{\chi}\frac{K_3}{K_2}\right)\tau^0_{\nu\nu}$$

podczas gdy przy $\tau^0_{\nu\nu} = 0$: $N^0 = N^0_M$, $\varepsilon^0 = \varepsilon^0_M$.
Stan ośrodka opisany jest nadal przez pięć makroparametrów: N^0_M , T^0 , $\vec{q}$, jednak równania gazodynamiki, w porównaniu ze znanymi ujęciami, modyfikują się w ten sposób, że w równaniu ciągłości pojawia się dodatkowy czterowektor prądu $N^D_l = N^{D0} u_l$, a w równaniach zachowania tensora energii-pędu dodatkowa gęstość energii ε^{D0} /obydwie dodatkowe wielkości są proporcjonalne do śladu $\tau^0_{\nu\nu}$ /. Z obliczeń numerycznych wynika, że współczynnik drugiej lepkości jest w całym obszarze temperatur ujemny[x/], posiada minimum i przyjmuje w jego otoczeniu wartości co do bezwzględnej wielkości rzędu współczynnika pierszej lepkości, zaś w obszarze klasycznym i ultrarelatywistycznym przyjmuje wartości o rząd mniejsze od współczynnika pierwszej lepkości. Wynikiem zasługującym również na uwagę jest fakt, że w obszarze klasycznym pojawia się efekt Eckarta /strumień ciepła proporcjonalny do kombinacji gradientów temperatury i gęstości/, wartość jednak współczynnika przewodnictwa związanego z gradientem gęstości jest, w odniesieniu do wartości współczynnika przewodnictwa związanego z gradientem temperatury, do zaniedbania. Zauważmy jednak, że niezerowość śladu $\tau^0_{\nu\nu}$ i współczynnika k_N wynika dopiero z wyższych przybliżeń; jeśli ograniczyć się do przybliżenia gwarantującego dokładnie przypadek klasyczny, to otrzymamy ślad $\tau^0_{\nu\nu}$ nieokreślony, a współczynnik

---

x/ Jest to tym samym czynnik zmniejszający efekty dyssypacyjne.

$k_N = 0$.

Do ciekawszych rezultatów należałoby zaliczyć również prostą zależność współczynników transportu od temperatury w przypadku ultrarelatywistycznym. Przedstawiona metoda /którą możemy nazwać metodą czternastu momentów ze względu na brak postulatu Ensko a - Chapmana / pozwala w prosty sposób znajdywać wyższe przybliżenia. I tak, kładąc po lewej stronie równania transportu f^0 z określonymi z pierwszego przybliżenia $\tau^0_{\gamma\gamma}$, $\tau^0_{\mu\nu}$ i S^0_{γ} uzyskamy poziom, odpowiadający w przypadku klasycznym równaniom Burnetta.

Trudno przewidzieć, czy sposób obliczenia prawej strony równania transportu można przenieść na dowolny model oddziaływania cząstek. Wydaje się raczej, że wybrany przez nas model oddziaływania cząstek należy do nielicznych, przy których jest możliwe analityczne rozwiązanie problemu w sposób precyzyjny od początku do końca. Z przykrością należy jednak stwierdzić, że nawet najprostszy model /jak nasz, w którym przyjęliśmy stałość różniczkowego przekroju czynnego/ przynosi w praktycznym liczeniu olbrzymie trudności rachunkowe.

Literatura

1. S.T. Belaev, G.U. Budker DAN SSSR, 107, 807, /1956/
2. N.A. Černikov DAN, 112, nr 6, 1030, /1957/
3. N.A. Černikov DAN, 114, nr 3, 530 /1957/
4. N.A. Černikov DAN, 133, nr 2, 333, /1960/
5. N.A. Černikov DAN , 133, nr 1, 84, /1960/
6. N.A. Černikov Naucnye Doklady Vyssej Skoly Fiziko-Matem. Nauki nr 1, 168, /1959/
7. S. Čepmen, T. Kauling Matematiceskaja teorija neodnorodnych gazov, Moskva /1960/
8. C. Eckart Phys. Rev. 58 /1940/, 919
9. H. Grad Commun. on pure a appl. Mathem. 2, 331, /1949/
10. G.A. Kluitenberg, S.R. De Groot, P. Mazur Physica, Amsterdam, 19, /1953/, 689
11. G.A. Kluitenberg, S.R. De Groot. P.Mazur Physica, Amsterdam, 19, /1953/, 1079
12. G.A. Kluitenberg, S.R. De Groot Physica, Amsterdam, 20, /1954/, 199
13. L. Landau, E. Lifszic Mechanika ośrodków ciągłych, Warszawa, 1958
14. N.B. Maslova Vestnik L.G.U., nr 19, 1962
15. N.B. Maslova Vestnik L.G.U., nr 7, 1963
16. N.B. Maslova Vestnik L.G.U., nr 19, 1963
17. S.S. Moiseev Žurnal Eksper. i Teoret. Fiziki 37, 553, /1959/
18. W. Pauli Theory of Relativity, Pergamon Press, 1958
19. M.Ch. Marle Comptes rendus, 260, nr 25 /1965/, 6539
20. I.L. Synge The relativistic gas, Amsterdam, 1957
21. S.A. Schaaf, P,L. Chambre Flow of rarefied gases, Princeton, New Jersey, 1961
22. G.N. Watson A treatise on the theory of Bessel functions, Cambrigde, 1952
23. G.M. Zaslavskij, S.S. Moiseev Žurnal Techn.Fiz. XXXIII, nr 7, 1963
24. G.M. Zaslavskij Žurnal Techn.Fiz. XXXIII, nr 7, 1963.

Summary

The effective determination of dissipative parameters of a relativistic gas in the frame of the kinetic theory

The relativistic invariant of Boltzmann equation was obtained by Černikov [2-6]. It was shown further that from this equation it is possible to derive a set of equations of relativistic gasdynamics [16, 23, 24]. However, the next step in this direction, namely the effective determination of dissipative parameters was not yet done in spite of the fact that this problem has been treated by several autors [16, 23, 24, 19]. This is probably due to the difficulties connected with the right hand side of the Boltzmann equation.

The main aim of the work was to obtain the formulas of the dissipative parameters assuming a simple model of particles interactions. It was assumed that the effective differential crossection of particles interactions in the centre of mass system is constant.

We consider a homogenous, electrically neutral gas without creations and annihilations of particles. Starting from relativistic Boltzmann equation and using the method of moments we found the set of equations which corresponds to Navier-Stokes equations. An interesting result of the theory is that the trace of viscous-stress tensor is not identically zero. Further the asymptotic behaviour of transport coefficients were found, both for classical and ultrarelativistic regions.

In Chapter I the basic notations are introdeced. The laws of the space-time coordinate transformations from one inertial system to another one are described by /1/. Using the invariant distribution function in the state of equilibrium [20] the following macroparameters are defined: numerical density N, velocity $\vec{q}$, energy-momentum tensor

T_{ik} , and temperature T^{o} /formulae /2/, /3/, /4/ and /6/ /.

In Chapter II the known form of the relativistic Boltzmann equation and the corresponding basic properties of the collision term are given.

In Chapter III the set of relativistic gas dynamics equations /1-2/ together with the appropriate formulae in the system of reference for wchich the macrovelocity of gas element vanishes /rest-system/ /14-16/ are derived.

The method of the effective determination of energy-momentum tensor is described in Chapter IV. A method analogous to Grad method [9,21] is employed. The distribution function is developed in the series form /1/ . For determining the energy-momentum tensor we start from the system /5/ . Further we use the iterative method described by /6-7/. The first approximation is given by /9-10/.

To solve effectively the last system of equations we have to calculate the appropriate integrals in /IV,9/; this is done in the following Chapter V. After rather complicated calculations we got for the left hand side /for 1,k=1,2,3/ the formula /9/ and for 1=4, k=1,2,3 the formula /15/; the calculations for the right hand side of /IV,9/ are still more complicated. The calculations are performed on the pages 21-31; the final formulas are /49/ and /60/. Comparing the results of left and right hand sides we get finally the expressions for dissipative parameters /62-66/. The values of transport coefficients were numerically calculated and are shown graphicaly on pages 34-37 and in the table /page 38 /.

The asymptotic behaviour of the previous formulae are considered in Chapter VI first for classical region and then for the ultrarelativistic region. The results are in full agreement with those obtained by direct methods.

The transformations of the energy-momentum tensor to the laboratory coordinate system are given in Chapter VII.

Comparison with the results of other authors /first of all with the Landau results in Landau-Lifschitz, Mechanics of continuum media/ is given in Chapter VIII.

A short discussion of the results closes the paper.

Spis treści.