

**Jerzy Rojek**

MODELOWANIE I SYMULACJA KOMPUTEROWA  
ZŁOŻONYCH ZAGADNIEŃ MECHANIKI NIELINIOWEJ  
METODAMI ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH I DYSKRETNYCH



INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK  
WARSZAWA 2007

ISBN 978-83-89687-21-0

ISSN 0208-5658

Redaktor Naczelny:

doc. dr hab. Zbigniew Kotulski

Recenzent:

prof. dr hab. inż. Jacek Tejchman

Praca wpłynęła do Redakcji 24 kwietnia 2007 r.

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 100 egz. Ark. druk.: 21,4

Oddano do druku w lipcu 2007 r.

---

Druk i oprawa: Drukarnia Braci Grodzickich, Piaseczno, ul. Geodetów 47a

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>1</b>
1.1	Modelowanie ciągle i dyskretne w mechanice materiałów . . . . .	1
1.1.1	Ciągle i dyskretne modele materiałów . . . . .	1
1.1.2	Numeryczne metody rozwiązywania zagadnień ciągłych . . .	3
1.1.3	Numeryczne metody rozwiązywania zagadnień dyskretnych .	6
1.1.4	Wady i zalety modeli ciągłych i dyskretnych . . . . .	10
1.1.5	Jawne i niejawne metody całkowania względem czasu . . . .	11
1.2	Cel i zakres pracy . . . . .	13
1.3	Plan pracy . . . . .	16
1.4	Stosowana notacja . . . . .	18
1.5	Przegląd literatury – rozwój badań i stan wiedzy . . . . .	20
1.5.1	Metoda elementów skończonych z jawnym całkowaniem równań ruchu . . . . .	20
1.5.2	Metoda elementów dyskretnych . . . . .	23
1.5.3	Integracja metody elementów skończonych i dyskretnych . .	24
<b>2</b>	<b>Sformułowanie metody elementów skończonych</b>	<b>27</b>
	Wstęp . . . . .	27
2.1	Definicja problemu ruchu ciała odkształcalnego . . . . .	27
2.2	Sformułowanie lokalne zagadnienia ruchu ciała odkształcalnego . . .	29
2.3	Sformułowanie słabe zagadnienia ruchu ciała odkształcalnego . . . .	29
2.4	Dyskretyzacja przestrzenna równań ruchu . . . . .	30
2.5	Dyskretne równania ruchu z uwzględnieniem tłumienia . . . . .	33
2.6	Wybrane elementy skończone . . . . .	33
2.6.1	Elementy bryłowe . . . . .	33
2.6.2	Element powłokowy bez obrotowych stopni swobody . . . . .	35
2.7	Dyskretyzacja równań ruchu po czasie . . . . .	37
2.7.1	Całkowanie niejawne równań ruchu . . . . .	37
2.7.2	Schemat jawny całkowania równań ruchu . . . . .	39

2.7.3	Stabilność schematu całkowania równań ruchu . . . . .	40
2.7.4	Wady i zalety jawnych metod całkowania równań ruchu . . .	41
	Podsumowanie . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Wybrane modele konstytutywne kontinuum</b>	<b>42</b>
	Wstęp . . . . .	42
3.1	Związki konstytutywne dla materiału sprężystego . . . . .	42
3.1.1	Hipospężyste modele konstytutywne . . . . .	42
3.1.2	Związki konstytutywne dla materiału hipersprężystego . . . .	43
3.2	Dekompozycja odkształceń sprężysto-plastycznych . . . . .	44
3.3	Model materiału hipospężysto-plastycznego z anizotropią właściwo- ści plastycznych . . . . .	45
3.4	Model materiału hipersprężysto-plastycznego . . . . .	49
3.5	Modele konstytutywne dla polimerów . . . . .	55
3.5.1	Model Arrudy-Boyce . . . . .	56
3.5.2	Model ściśliwy Leonova . . . . .	58
	Podsumowanie . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Ruch układu ciał odkształcalnych w zagadnieniu kontaktowym</b>	<b>62</b>
	Wstęp . . . . .	62
4.1	Sformułowanie zagadnienia kontaktowego z tarcieniem . . . . .	62
4.2	Zasada prac przygotowanych dla zagadnienia kontaktowego . . . . .	66
4.3	Dyskretyzacja przestrzenna zagadnienia kontaktowego . . . . .	67
4.4	Regularyzacja ograniczeń kontaktowych . . . . .	70
4.5	Obliczanie sił oddziaływania kontaktowego . . . . .	72
	Podsumowanie . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Sformułowanie metody elementów skończonych dla problemów z małą ściśliwością</b>	<b>74</b>
	Wstęp . . . . .	74
5.1	Sformułowanie mieszanej metody elementów skończonych . . . . .	75
5.1.1	Sformułowanie lokalne . . . . .	75
5.1.2	Sformułowanie słabe . . . . .	76
5.1.3	Równania metody elementów skończonych . . . . .	77

---

5.1.4	Całkowanie równań ruchu względem czasu . . . . .	78
5.2	Stabilizacja sformułowania mieszanego . . . . .	80
5.2.1	Stabilność i podstawowe metody stabilizacji . . . . .	80
5.2.2	Stabilizacja metodą cząstkowego kroku całkowania . . . . .	81
5.3	Przykłady numeryczne . . . . .	83
5.3.1	Uderzenie pręta cylindrycznego w sztywną płaszczyznę . . . . .	83
5.3.2	Zgniatanie poprzeczne walca . . . . .	88
5.3.3	Wyciskanie przeciwbieżne cylindra . . . . .	91
	Podsumowanie . . . . .	94
<b>6</b>	<b>Symulacja procesów tłoczenia blach</b>	<b>95</b>
	Wstęp . . . . .	95
6.1	Modelowanie procesu głębokiego tłoczenia blach . . . . .	96
6.2	Symulacja wielozabiegowego kształtowania części karoserii . . . . .	100
6.3	Symulacja tłoczenia blach spawanych . . . . .	104
6.3.1	Charakterystyka właściwości tłocznych blach spawanych . . . . .	104
6.3.2	Model MES blachy spawanej . . . . .	105
6.3.3	Wyznaczenie własności mechanicznych spoiny . . . . .	106
6.3.4	Symulacja tłoczenia wytłoczki z wykroju spawanego . . . . .	108
6.3.5	Numeryczna symulacja wytłaczania miseczki cylindrycznej z blachy spawanej . . . . .	110
6.4	Symulacja kształtowania blach pokrytych polimerem . . . . .	111
6.4.1	Opis zagadnienia technicznego . . . . .	111
6.4.2	Numeryczny model laminatu stal-polimer . . . . .	114
6.4.3	Symulacja jednoosiowego ściskania polimeru . . . . .	114
6.4.4	Symulacja tłoczenia puszki cylindrycznej . . . . .	115
	Podsumowanie . . . . .	117
<b>7</b>	<b>Sformułowanie metody elementów dyskretnych</b>	<b>119</b>
	Wstęp . . . . .	119
7.1	Równania ruchu swobodnego pojedynczego elementu dyskretnego . . . . .	120
7.2	Równania ruchu układu elementów dyskretnych . . . . .	121
7.3	Model oddziaływania kontaktowego elementów dyskretnych z tarciem bez kohezji . . . . .	124

7.4	Model oddziaływania kontaktowego z odpornością na rozciąganie . . .	127
7.5	Model oddziaływania momentowego pary elementów dyskretnych . . .	129
7.6	Tłumienie zewnętrzne . . . . .	131
7.7	Całkowanie równań ruchu . . . . .	132
7.8	Stabilność schematu całkowania . . . . .	134
	Podsumowanie . . . . .	135
<b>8</b>	<b>Zależności między mikro- i makroskopowymi wielkościami w metodzie elementów dyskretnych</b>	<b>136</b>
	Wstęp . . . . .	136
8.1	Sformułowanie problemu . . . . .	137
8.2	Wielkości mikroskopowe i makroskopowe . . . . .	139
8.3	Makroskopowe naprężenia w modelu dyskretnym . . . . .	141
	8.3.1 Tensor naprężenia dla pojedynczego elementu dyskretnego . . .	141
	8.3.2 Uśredniony tensor naprężenia . . . . .	143
8.4	Makroskopowe odkształcenia w modelu dyskretnym . . . . .	144
8.5	Makroskopowe właściwości materiału w metodzie elementów dyskretnych . . . . .	145
	Podsumowanie . . . . .	146
<b>9</b>	<b>Integracja metody elementów skończonych i metody elementów dyskretnych</b>	<b>147</b>
	Wstęp . . . . .	147
9.1	Zagadnienie kontaktowe w hybrydowym modelu elementów skończonych i dyskretnych . . . . .	148
9.2	Zintegrowany algorytm hybrydowej metody elementów skończonych i dyskretnych dla podobszarów rozłącznych . . . . .	150
9.3	Integracja metod elementów skończonych i elementów dyskretnych dla podobszarów sprzężonych . . . . .	151
	9.3.1 Sformułowanie problemu . . . . .	151
	9.3.2 Więzy kinematyczne sprzęgające podobszary MED i MES . . .	154
	9.3.3 Równania ruchu dla sprzężonego modelu MED/MES – metoda mnożników Lagrange’a . . . . .	156
	9.3.4 Równania ruchu dla sprzężonego modelu MED/MES – metoda funkcji kary . . . . .	158

---

9.4	Uproszczone sprzężenie obszarów MED i MES . . . . .	159
9.4.1	Sformułowanie uproszczonego modelu sprzężenia . . . . .	159
9.4.2	Równania ruchu dla uproszczonego modelu sprzężenia MED/MES – metoda mnożników Lagrange’a . . . . .	161
9.4.3	Równania ruchu dla uproszczonego modelu sprzężenia MED/MES – metoda funkcji kary . . . . .	162
9.5	Sprzężenie podobszarów MED i MES z podobszarem przejściowym MED/MES . . . . .	163
9.5.1	Sformułowanie problemu . . . . .	163
9.5.2	Więzy kinematyczne sprzęgające podobszary MED i MES . .	165
9.5.3	Równania ruchu dla sprzężonego modelu MED/MES – me- toda mnożników Lagrange’a . . . . .	166
9.5.4	Równania ruchu dla sprzężonego modelu MED/MES – me- toda funkcji kary . . . . .	168
9.5.5	Równania ruchu dla sprzężonego modelu MED/MES – me- toda funkcji kary z tłumieniem . . . . .	169
9.6	Implementacja zintegrowanej metody MED/MES . . . . .	170
	Podsumowanie . . . . .	171
<b>10</b>	<b>Numeryczny algorytm wykrywania kontaktu w zintegrowanym systemie MED/MES</b> . . . . .	<b>172</b>
	Wstęp . . . . .	172
10.1	Porządkowanie przestrzenne . . . . .	174
10.2	Algorytm wykrywania kontaktu . . . . .	177
10.2.1	Ogólna idea algorytmu . . . . .	177
10.2.2	Globalne poszukiwanie kontaktu . . . . .	179
10.2.3	Lokalne sprawdzenie istnienia kontaktu . . . . .	181
10.3	Implementacja komputerowa – aspekty programistyczne . . . . .	181
	Podsumowanie . . . . .	184
<b>11</b>	<b>Zagadnienia odbicia fal w zintegrowanych modelach metody elementów dyskretnych i skończonych</b> . . . . .	<b>186</b>
	Wstęp . . . . .	186
11.1	Odbicie fali na brzegu swobodnym i utwierdzonym . . . . .	187
11.2	Absorpcyjne warunki brzegowe . . . . .	191

11.3	Odbicie fali na powierzchni granicznej dwóch ośrodków . . . . .	193
11.4	Badanie różnych metod połączeń podobszarów dyskretyzowanych elementami dyskretnymi i skończonymi . . . . .	198
	Podsumowanie . . . . .	206
<b>12</b>	<b>Modelowanie procesu wytwarzania formy piaskowej w odlewaniu technologią traconego modelu</b>	<b>207</b>
	Wstęp . . . . .	207
12.1	Opis procesu odlewania technologią traconego modelu . . . . .	207
12.2	Główne założenia modelu numerycznego . . . . .	208
12.3	Określenie parametrów modelu elementów dyskretnych . . . . .	208
12.4	Eksperymentalne i numeryczne badanie ruchu piasku pod wpływem drgań . . . . .	212
12.5	Eksperymentalne i numeryczne badania odkształcania modelu w trakcie zasypywania i zagęszczania . . . . .	214
12.6	Symulacja zasypywania i zagęszczania piasku dla modelu trójwymiarowego . . . . .	215
	Podsumowanie . . . . .	217
<b>13</b>	<b>Modelowanie skał metodą elementów dyskretnych</b>	<b>219</b>
	Wstęp . . . . .	219
13.1	Podstawowe właściwości mechaniczne skał . . . . .	220
	13.1.1 Próba jednoosiowego ściskania . . . . .	220
	13.1.2 Próba ściskania poprzecznego . . . . .	223
13.2	Przygotowanie modelu próbki skalnej . . . . .	224
13.3	Bezwymiarowe zależności między parametrami mikro- i makroskopowymi . . . . .	227
13.4	Symulacja próby jednoosiowego ściskania . . . . .	229
13.5	Symulacja testu brazylijskiego . . . . .	237
	Podsumowanie . . . . .	240
<b>14</b>	<b>Modelowanie procesów mechanicznego urabiania skał</b>	<b>242</b>
	Wstęp . . . . .	242
14.1	Procesy urabiania skał i gruntów . . . . .	242
14.2	Zjawiska zachodzące w procesie skrawania skał . . . . .	243



---

14.3	Analityczne modele skrawania skał . . . . .	245
14.4	Główne założenia modelu numerycznego skrawania skał . . . . .	246
14.5	Wyznaczenie parametrów mikroskopowych dla skały . . . . .	247
14.6	Symulacja skrawania skały nożem płaskim . . . . .	248
14.7	Doświadczalna weryfikacja modelu skrawania skał . . . . .	251
14.8	Symulacja skrawania skały pojedynczym ostrzem głowicy urabiającej pogłębiarki . . . . .	253
	Podsumowanie . . . . .	258
<b>15</b>	<b>Sformułowanie metody elementów dyskretnych dla problemów termicz- nych</b>	<b>259</b>
	Wstęp . . . . .	259
15.1	Sformułowanie problemu przewodzenia ciepła dla ośrodka dyskretnego	259
15.2	Równanie bilansu ciepła . . . . .	260
15.3	Związki konstytutywne dla strumieni ciepła . . . . .	261
15.4	Warunki początkowe i brzegowe . . . . .	262
15.5	Całkowanie równania przepływu ciepła względem czasu . . . . .	264
15.6	Przykłady numeryczne . . . . .	264
	15.6.1 Wewnętrzna generacja ciepła w nieskończonej tarczy . . . . .	264
	15.6.2 Niestacjonarny przepływ ciepła w nieskończonej tarczy . . . . .	266
	15.6.3 Kwadratowa tarcza ze stałym dopływem ciepła . . . . .	267
	Podsumowanie . . . . .	268
<b>16</b>	<b>Termomechaniczna analiza procesów urabiania skał</b>	<b>270</b>
	Wstęp . . . . .	270
16.1	Efekty cieplne w skrawaniu skał . . . . .	270
16.2	Termomechaniczny model skrawania skał . . . . .	271
16.3	Model kontaktu termomechanicznego . . . . .	272
16.4	Równania metody elementów dyskretnych dla sprzężonego zagadnie- nia termomechanicznego . . . . .	274
16.5	Całkowanie równań ruchu dla zagadnienia sprzężonego . . . . .	274
16.6	Termomechaniczna analiza urabiania skały przy pogłębianiu . . . . .	275
	Podsumowanie . . . . .	278

---

<b>17 Modelowanie i symulacja zużycia narzędzi do urabiania skał</b>	<b>279</b>
Wstęp . . . . .	279
17.1 Podstawowe informacje o zużyciu . . . . .	279
17.2 Zużycie narzędzi do urabiania skał . . . . .	280
17.3 Kinetyka zużycia . . . . .	283
17.4 Algorytm numeryczny analizy zużycia . . . . .	284
17.5 Wyznaczanie parametrów modelu zużycia . . . . .	286
17.6 Termomechaniczna analiza urabiania skały przy pogłębianiu z uwzględnieniem zużycia . . . . .	287
Podsumowanie . . . . .	289
<b>Wnioski końcowe. Elementy oryginalne pracy</b>	<b>292</b>
<b>A Opis ruchu ośrodka ciągłego</b>	<b>298</b>
A.1 Podstawowe pojęcia w opisie ruchu ośrodka ciągłego . . . . .	298
A.2 Miary naprężenia . . . . .	302
<b>B Ruch ciała sztywnego</b>	<b>304</b>
B.1 Kinematyka ciała sztywnego . . . . .	304
B.2 Równania ruchu swobodnego ciała sztywnego . . . . .	305
<b>Bibliografia</b>	<b>307</b>
<b>Summary</b>	<b>327</b>
<b>Streszczenie</b>	<b>330</b>

# 1. Wstęp

## 1.1 Modelowanie ciągłe i dyskretne w mechanice materiałów

Rozpatrywane w niniejszej pracy metody numeryczne, metoda elementów skończonych (MES) i metoda elementów dyskretnych (MED), wykorzystują dwa różne podejścia w modelowaniu materiałów. Metoda elementów skończonych jest metodą dyskretyzacyjną, stosowaną w celu rozwiązania numerycznego modelu ciągłego, zaś metoda elementów dyskretnych jest otrzymana bezpośrednio poprzez opis matematyczny materiału jako ośrodka dyskretnego.

### 1.1.1 Ciągłe i dyskretne modele materiałów

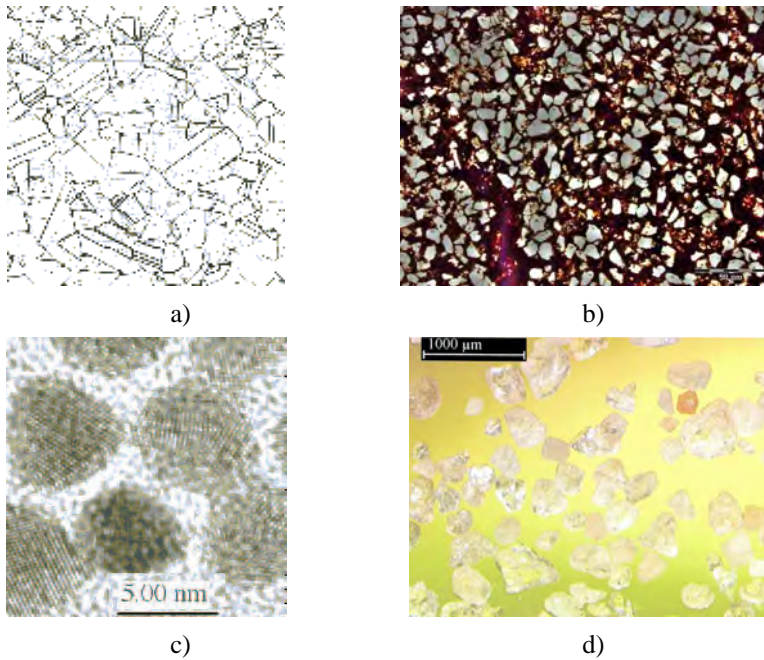
Budowa ciał stałych charakteryzuje się swoistą strukturą. W przypadku niektórych materiałów, np. skał, ich ziarnista struktura często jest widoczna gołym okiem, a w przypadku innych materiałów, np. metali, ich struktura (mikrostruktura) ujawnia się przy obserwacji pod mikroskopem. Rysunek 1.1a,b przedstawia przykładowe mikrostruktury metalu i skały obserwowane pod mikroskopem optycznym. Obecnie obserwacje można prowadzić w skali nano, a nawet na poziomie cząstek elementarnych. Na rys. 1.1c przedstawione są kryształy złota obserwowane pod mikroskopem elektronowym. W przypadku metali i skał ziarna, tworzące strukturę ciała, są ze sobą powiązane siłami kohezji, natomiast w przypadku materiałów sypkich, np. suchego piasku (rys. 1.1d), mamy do czynienia z ziarnami (cząstkami) nie powiązanymi ze sobą.

Ze względu na sposób traktowania struktury materiału fizyczne modele materiałów można ogólnie podzielić na:

- modele ciągłe (kontinuum),
- modele dyskretne.

Modele ciągłe pomijają nieciągłości lub pustki występujące w materiale oraz ziarnistą i molekularną strukturę materiału, uważając go za ośrodek ciągły w sensie makroskopowym. Zakłada się ponadto, że ciągłość ośrodka jest zachowana również pod obciążeniem.

W modelowaniu matematycznym ośrodka ciągłego ciało traktuje się jako obiekt geometryczny w przestrzeni euklidesowej, której punkty identyfikuje się z cząsteczkami materialnymi ciała [82, 181]. W stosunku do tak wyidealizowanego ciała definiuje się ciągłość w sensie matematycznym. Zakłada się ciągłość występujących



Rys. 1.1. Struktura materiału – a) mikrostruktura metalu obserwowana pod mikroskopem optycznym, b) mikrostruktura piaskowca obserwowana pod mikroskopem optycznym, c) kryształy złota obserwowane pod mikroskopem elektronowym, d) ziarna piasku.

w teorii funkcji z możliwym wyjątkiem na skończonej liczbie wewnętrznych powierzchni nieciągłości, oddzielających obszary ciągłe.

W przeciwieństwie do modeli ciągłych modele dyskretne uwzględniają nieciągłości materiału lub jego rozdrobnienie, traktując go jako ośrodek złożony z obiektów dyskretnych. Można budować modele dyskretne uwzględniając strukturę materiałów na różnych poziomach obserwacji. Obecnie coraz częściej przedmiotem zainteresowania jest struktura materiału jak również funkcjonalność elementów tej struktury w możliwie małej skali. Możliwość projektowania materiałów i struktur atomowych wzmacnia zainteresowanie tymi metodami mechaniki, które prowadzą do modelowania materiałów na poziomie nanostruktury lub na poziomie atomowym, jak np. nanomechanika i dynamika molekularna. W metodzie elementów dyskretnym materiał modeluje się jako zbiór elementów (cząstek) sztywnych oddziałujących między sobą poprzez siły kontaktu.

Przy przejściu od modelu fizycznego do matematycznego opisuje się odpowiednimi równaniami obowiązujące i założone prawa i zasady fizyki. W modelowaniu materiałów poddanych obciążeniom głównym zadaniem jest odpowiednie sformuło-

wanie związku konstytutywnego, charakteryzującego zachowanie się materiału. Konstruowanie ogólnych związków konstytutywnych jest zagadnieniem bardzo złożonym. W tworzeniu modeli konstytutywnych w mechanice kontinuum popularne jest podejście fenomenologiczne. Polega ono na znalezieniu możliwie zwartej formy zapisu zależności zaobserwowanych w eksperymentach przeprowadzanych w skali makroskopowej.

W modelach dyskretnych zachowanie makroskopowe materiału otrzymuje się poprzez przyjęcie odpowiednich modeli oddziaływania między obiektami modelu dyskretnego. Modelowanie na niższym poziomie pozwala na opracowanie modelu konstytutywnego dla poziomu bezpośrednio wyższego. Wykorzystywane jest to w modelowaniu wieloskalowym, w którym opisuje się zachowanie materiałów w wielu skalach. Model konstytutywny materiału w metodzie elementów dyskretnych można traktować jako dyskretny model mikromechaniczny, który zdefiniowany jest przez związki konstytutywne dla oddziaływania kontaktowego między elementami dyskretnymi.

### 1.1.2 Numeryczne metody rozwiązywania zagadnień ciągłych

Modele matematyczne, opisujące ośrodek ciągły, są najczęściej układami równań całkowych lub różniczkowych cząstkowych. Wynika to stąd, że w ośrodku ciągłym występujące zmienne są zależne od co najmniej jednej zmiennej przestrzennej oraz czasu (jeśli badany obiekt jest zmienny w czasie). Model matematyczny jest uzupełniony odpowiednimi warunkami brzegowymi i początkowymi. W rezultacie otrzymuje się do rozwiązania zagadnienie brzegowe lub brzegowo-początkowe.

Jedynie w prostych zagadnieniach możliwe jest ściśle rozwiązanie analityczne otrzymanego problemu matematycznego. Najczęściej rozwiązanie wymaga stosowania metod przybliżonych. W praktyce wykorzystuje się najczęściej przybliżone metody numeryczne. W wyniku model matematyczny przybiera postać, którą można nazwać modelem numerycznym danego obiektu.

Metody numeryczne oparte są na pewnej procedurze dyskretyzacyjnej, która transformuje problem ciągły (układ o nieskończonej liczbie stopni swobody) do problemu dyskretnego, w którym mamy do czynienia z układem równań o skończonej liczbie niewiadomych. W zagadnieniach brzegowo-początkowych lub brzegowych dla zagadnienia ciągłego przeprowadza się zwykle najpierw dyskretyzację przestrzenną, prowadzącą do dyskretnego zagadnienia początkowego, które rozwiązuje się, wprowadzając dyskretyzację czasową, umożliwiającą przybliżone całkowanie równań względem czasu.

Do numerycznych metod przybliżonego rozwiązywania ciągłych zagadnień brzegowo-początkowych zaliczamy metodę różnic skończonych – MRS [205], me-

tość elementów brzegowych – MEB [39], metodę elementów skończonych – MES [138, 137, 315, 22], różnorodne metody bezsiatkowe, jak np. metodę cząstek rozmytych (*ang.* SPH – smoothed particle hydrodynamics) [171], metodę punktów swobodnych [126], metodę punktów materialnych, zwaną również metodą „cząstki w komórce” (*ang.* material point method lub particle-in-cell-method) [295, 296].

Istotą metody różnic skończonych [205] jest zastąpienie pochodnych odpowiednimi ilorazami różnicowymi określonymi na dyskretnym zbiorze punktów. Metodę różnic skończonych początkowo stosowano do równań różniczkowych (sformułowanie lokalne), później rozszerzono zakres jej zastosowań na zagadnienia sformułowane w postaci wariacyjnej (sformułowanie globalne). W standardowym sformułowaniu MRS stosowano regularną (kwadratową, prostokątną lub sześcienną) siatkę węzłów. W zaawansowanych sformułowaniach stosuje się dowolną siatkę węzłów [170]. Ilorazy różnicowe można zbudować na dowolnie wygenerowanych punktach, dzięki temu to sformułowanie MRS można zaliczyć do metod bezsiatkowych [206]. Zaletą MRS jest prostota sformułowania i łatwość implementacji. Sformułowanie MRS dla dowolnych siatek pozwala wyeliminować problemy z dyskretyzacją skomplikowanych kształtów geometrycznych. W dalszym ciągu jedną z wad jest kłopotliwe zadanie warunków brzegowych typu von Neumanna. Metoda różnic skończonych jest szeroko stosowana w mechanice płynów. Jest również stosowana w mechanice ciał stałych, np. znany program do rozwiązywania zagadnień z geomechaniki FLAC [79] jest oparty na metodzie różnic skończonych.

W niniejszej pracy jako metoda dyskretyzacji zagadnienia ciągłego będzie stosowana metoda elementów skończonych. Ideą metody elementów skończonych jest podział rozpatrywanego obszaru ciągłego na skończoną liczbę podobszarów (elementów skończonych) połączonych ze sobą w punktach węzłowych oraz aproksymacja rozwiązania w obszarze elementów za pomocą funkcji interpolacyjnych (funkcji kształtu) i wartości w węzłach [138, 137, 315, 18]. Równania metody elementów skończonych otrzymuje się ze sformułowania całkowego (globalnego) zagadnienia, korzystając z zasady wariacyjnej lub z metody residuów (reszt) ważonych. W metodzie wariacyjnej wykorzystuje się słabe sformułowanie analityczne, np. równanie zasady prac przygotowanych lub definiuje się problem minimalizacji pewnego funkcjonału. Metoda residuów ważonych przekształca lokalne sformułowanie zagadnienia brzegowego w całkową postać słabą. Do przybliżonego rozwiązania zagadnienia minimalizacji stosuje się metodę Ritz’a, a do słabej postaci stosuje się metodę Galerkina. Metoda Galerkina jest metodą bardziej ogólną niż metoda Ritz’a, można ją stosować również wtedy, gdy nie możliwe jest zdefiniowanie zagadnienia minimalizacji i nie istnieje sformułowanie wariacyjne (słabą postać otrzymuje się wówczas z metody residuów ważonych). MES jest metodą stosunkowo najbardziej uniwersalną i wszechstronną. Do zalet MES na-

leży łatwość dyskretyzacji skomplikowanych kształtów, łatwość określenia warunków brzegowych i łatwość adaptacyjnego zagęszczania i rozrzedzenia siatki.

Metoda elementów brzegowych [39] polega na sprowadzeniu układu równań różniczkowych z zadanymi warunkami brzegowymi do układu równań całkowych, określonych na brzegu rozpatrywanego obszaru. W odróżnieniu od metody elementów skończonych i metody różnic skończonych, jej stosowanie nie wymaga dyskretyzacji wnętrza obszaru, a jedynie jego brzegu. Jest to główna zaleta tej metody. Metoda elementów brzegowych dobrze reprezentuje nieskończone obszary. Niestety jej wady, takie jak trudności w zastosowaniu do zagadnień nieliniowych i ośrodków niejednorodnych, ograniczają możliwości jej wykorzystania.

Jedną z niedogodności w stosowaniu metody elementów skończonych jest konieczność generacji odpowiedniej siatki elementów, co w przypadku skomplikowanych trójwymiarowych geometrii nie jest proste dla niektórych typów elementów. W analizie dużych deformacji siatka elementów ulega nadmiernym dystorsjom, co powoduje konieczność nieraz wielokrotnego przesiatkowania domeny obliczeniowej. Uniknięcie tych problemów to jeden z powodów rosnącej popularności metod bezsiatkowych. Istnieje wiele metod bezsiatkowych. Powyżej wspomniano o bezsiatkowej metodzie różnic skończonych [206]. Innymi metodami bezsiatkowymi jest metoda cząstek rozmytych (*ang.* SPH – smoothed particle hydrodynamics) [171], metoda punktów swobodnych [126], metoda punktów skończonych (*ang.* finite point method) [214] i bezsiatkowa metoda Galerkina (*ang.* element free Galerkin method) [24]. Wspólną cechą metod bezsiatkowych jest to, że lokalna aproksymacja poszukiwanej funkcji jest oparta jedynie na wartościach tej funkcji (lub wartościach działających na nią operatorów, np. pochodnych) w poszczególnych wybranych punktach obszaru. Ta aproksymacja nie wymaga istnienia jakiegokolwiek sztywnej struktury węzłów, ani określania jakichkolwiek połączeń między węzłami. Węzły mogą być generowane regularnie i równomiernie lub w sposób dowolny z możliwością lokalnego zagęszczania. Jedną z zalet metod bezsiatkowych jest łatwość lokalnego zagęszczania dyskretyzacji poprzez dodawanie punktów. W metodach bezsiatkowych stosunkowo łatwe jest również wprowadzenie nieciągłości materiału. Z tych powodów metoda cząstek rozmytych i metoda punktów swobodnych jest stosowana do symulacji zniszczenia materiału pod obciążeniem uderzeniowym. Metoda cząstek rozmytych została początkowo rozwinięta dla problemów dyskretnych w astrofizyce [66]. Później została zastosowana jako metoda dyskretyzacyjna do zagadnień ciągłych. Często zalicza się ją do szerokiej klasy metod cząstek materialnych. Niektóre z metod cząstek materialnych są oparte o model dyskretny i spełniają założenia pozwalające traktować je również jako szczególną odmianę metody elementów dyskretnych [171].

### 1.1.3 Numeryczne metody rozwiązywania zagadnień dyskretnych

W wyniku modelowania dyskretnego otrzymuje się bezpośrednio dyskretny przestrzennie model matematyczny, w którym zmienne są jedynie funkcjami czasu. W związku z tym rozwiązanie numeryczne tego zagadnienia uzyskuje się bez potrzeby stosowania przestrzennej procedury dyskretyzacyjnej, wprowadzając jedynie dyskretyzację czasową.

Typową metodą numeryczną, wykorzystującą bezpośrednio dyskretny model fizyczny, jest metoda elementów dyskretnych [57]. Terminem metoda elementów dyskretnych określa się klasę metod, w których materiał jest reprezentowany przez zbiór elementów/cząstek/bloków o skończonych rozmiarach, oddziałujących między sobą. Często metody elementów dyskretnych, zwłaszcza metody wykorzystujące elementy dyskretne o kształcie kuli, określa się jako metody cząstek (*ang.* *particle methods*)<sup>1</sup>. P. Cundall dla sformułowanej przez siebie metody elementów dyskretnych stosuje termin „distinct element method” [53].

Nie każdy model dyskretny można zaliczyć do metod elementów dyskretnych. Przyjmuje się [56], że algorytm metody elementów dyskretnych:

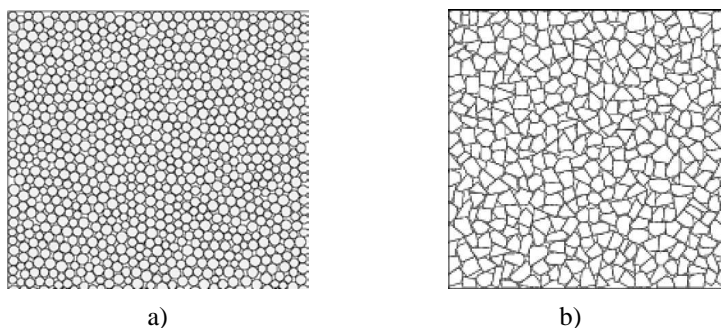
- musi opisywać skończone (duże) przemieszczenia i obroty elementów dyskretnych,
- musi pozwalać na rozdzielanie połączonych elementów,
- musi wykrywać automatycznie istniejące i powstające nowe pary kontaktujących się elementów dyskretnych.

Cząstki (elementy dyskretne) mogą być dowolnego kształtu – (i) w zagadnieniach dwuwymiarowych: walce o podstawie kołowej (rys. 1.2a) [57, 255] lub eliptycznej [282], graniastosłupy o podstawie będącej dowolnym wielobokiem (rys. 1.2b) [52, 59], (ii) w zagadnieniach trójwymiarowych: kule [53, 255, 167, 110], elipsoidy [288, 131] lub wielościany [54, 106]. Można też stosować elementy dyskretne o dowolnie nieregularnym kształcie zdefiniowane matematycznie lub utworzone przez połączenie na sztywno lub sprężysto cząstek sferycznych (rys. 1.3) [185, 198]. Stosowanie różnych kształtów jest uzasadnione tym, że cząstki (ziarna, bloki) w różnych materiałach mogą mieć nieregularny kształt i stosowanie elementów dyskretnych o kształtach zbliżonych do ziaren rzeczywistych umożliwia lepszą reprezentację ośrodka dyskretnego [185]. W [186] pokazano, że aczkolwiek podstawowe efekty występujące w ośrodku granularnym można uchwycić przy zastosowaniu elementów dyskretnych

---

<sup>1</sup>Termin metody cząstek obejmuje zazwyczaj również bezsiatkowe metody cząstek, np. metodę SPH, stosowane jako metody dyskretyzacyjne w rozwiązaniu numerycznym zagadnień ciągłych [171].





Rys. 1.2. Różne kształty elementów dyskretnych: a) walce, b) wieloboki.



Rys. 1.3. Tworzenie nieregularnych ziaren z cząstek sferycznych [185].

o kształcie sferycznym, to zastosowanie elementów o kształcie niesferycznym poprawiało zgodność ilościową z wynikami eksperymentalnymi. Zaletą walcowych i sferycznych elementów dyskretnych jest duża efektywność numeryczna osiągnięta dzięki łatwemu wykrywaniu kontaktu między cząstkami. Nieregularne cząstki wymagają bardziej skomplikowanego i kosztowniejszego obliczeniowo algorytmu wykrywania kontaktu [298, 297].

Rozmiary elementów dyskretnych zależą od poziomu modelowania. Metody elementów dyskretnych (cząstek) można stosować jako metodę modelowania na poziomie atomowym, mikroskopowym, mezoskopowym lub makroskopowym. Elementy dyskretne (cząstki, bloki) mogą reprezentować odrębne ciała materialne, jak np. atomy lub cząstki, ziarna materiału sypkiego lub rozdrobnionego, jak również mogą reprezentować ziarna struktury materiału lub pewien podobszar ośrodka ciągłego, będąc szczególnym rodzajem dyskretyzacji.

Metoda elementów dyskretnych traktuje najczęściej modelowany problem jako zagadnienie dynamiki. Ruch cząstek jest zgodny z zasadą dynamiki Newtona dla brył sztywnych – modelem matematycznym w metodzie elementów dyskretnych są równania różniczkowe zwyczajne, równania Newtona dla ruchu postępowego oraz równania Eulera, jeśli w danym sformułowaniu rozpatruje się ruch obrotowy. Modelowanie dyskretne można również stosować do rozwiązywania zagadnień statycznych [284].

W zależności od modelowanego problemu cząstki (elementy dyskretne) mogą oddziaływać między sobą różnego rodzaju siłami. Na poziomie makroskopowym mogą to być siły oddziaływania kontaktowego włącznie z siłami tarcia, siły spójności (kohezji lub adhezji) lub siły grawitacji (w symulacji zjawisk astrofizycznych). Na poziomie atomowym (molekularnym) mogą to być siły oddziaływania elektrostatycznego, siły jądrowe lub siły van der Waalsa.

Ważnym, a często jedynym mechanizmem oddziaływania między cząstkami, jest oddziaływanie przez kontakt przy zderzeniu cząstek. Ze względu na sposób traktowania kontaktu zderzających się cząstek metody elementów dyskretnych można podzielić na metody „sztywnego” (nieodkształcalnego) kontaktu (*ang.* hard contact) [144, 97] i metody „miękkiego” (odkształcalnego) kontaktu (*ang.* soft contact) [57, 289]. W metodach sztywnego kontaktu, zwanych również metodami sterowanymi zdarzeniami (*ang.* event driven method), na podstawie równań ruchu wyznacza się moment najwcześniejszego zderzenia pary cząstek. Dla tej pary wyznacza się prędkości cząstek po zderzeniu na podstawie zasady zachowania pędu i przy założonym współczynniku restytucji. Zakłada się nieodkształcalność kontaktujących się cząstek i zaniedbuje się czas zderzenia (przyjmuje się czas zderzenia równy zeru), dlatego metoda nadaje się do modelowania problemów, w których rzeczywisty czas zderzenia jest bardzo krótki. W metodzie kontaktu sztywnego nie określa się siły kontaktu. Standardowe metody sterowane zdarzeniami działają dobrze w przypadku małej liczby zderzeń, podczas gdy dla dużej liczby zderzeń, co ma miejsce przy dużym zagęszczeniu cząstek, rozwiązanie może tracić stateczność. Opracowano ulepszone sformułowania metody sztywnego kontaktu, które lepiej radzą sobie z problemami wielokrotnych zderzeń [81].

W metodach miękkiego kontaktu [57] dopuszcza się pewną penetrację elementów (ograniczenia kontaktowe są wprowadzone za pomocą funkcji kary), co można traktować jako efekt równoważny odkształceniu się cząstek wskutek zderzenia. W metodzie tej wprowadza się model dla oddziaływania kontaktowego, w kierunku normalnym jak i stycznym do płaszczyzny styku. Można również wprowadzić model dla momentu oddziaływania kontaktowego. W metodach kontaktu miękkiego zderzenie trwa pewien czas, zależny od modelu kontaktu [167]. Metody miękkiego kontaktu są dokładniejsze w rozpatrywaniu jednoczesnych zderzeń między wieloma cząstkami.

Oddziaływanie między elementami dyskretnymi/cząstkami może również występować bez zderzeń między cząstkami, jak np. w modelach rozpatrywanych w dynamice molekularnej (*ang.* MD – molecular dynamics) [98, 164]. Przedmiotem analizy w dynamice molekularnej jest ruch układu cząstek/atomów. Oddziaływanie między nimi określa się na podstawie przyjętego potencjału oddziaływania. Model matematyczny stanowią równania różniczkowe zwyczajne, opisujące ruch cząstek zgodnie z zasadą dynamiki Newtona. Dynamika molekularna stanowi standardowe narzędzie

dzie w badaniach zachowania się gazów, cieczy i ciał stałych na poziomie molekularnym. Łatwo jest dostosować tę metodę do badania układów dyskretnych makroskopowych [290]. Standardowo dynamika molekularna wykorzystywana jest do obliczeń parametrów materiałowych, takich jak współczynnik dyfuzji, ciepło właściwe i przewodność, a także do badania struktur krystalicznych i reakcji chemicznych. Możliwe jest również badanie właściwości mechanicznych materiałów polikrystalicznych [148]. W modelowaniu molekularnym można stosować również modelowanie statyczne. W pracy [284] badano przemieszczenia w strukturze pojedynczego kryształu na poziomie pojedynczego atomu, wykorzystując podejście dyskretne oparte na statyce molekularnej. W modelowaniu numerycznym dyskretną strukturę atomów zamieniono na siatkę pseudoelementów, reprezentujących oddziaływanie molekularne między atomami-węzłami.

W niniejszej pracy będzie stosowana i rozwijana metoda elementów dyskretnych oparta na modelu dyskretnym, wykorzystującym cząstki cylindryczne w zagadnieniach płaskich i kuliste w zagadnieniach trójwymiarowych. Metoda ta jest oparta na idei zaprezentowanej po raz pierwszy przez P. Cundalla w [57]. Metodę tę można wykorzystywać do modelowania na poziomie mikro-, mezo- lub makroskopowym. Metoda może być wykorzystana do modelowania materiałów granularnych i ośrodków rozdrobnionych, jak również do modelowania skał i gruntów. Cząstka może reprezentować rzeczywiste ziarno materiału lub pewien konglomerat ziarn, jak również reprezentować pewien przypisany jej obszar ośrodka ciągłego, stanowiąc szczególną metodę dyskretyzacji ośrodka. W modelu bada się ruch postępowy i obrotowy cząstek pod wpływem sił zewnętrznych oraz wzajemnego oddziaływania cząstek. Wzajemne oddziaływanie obejmuje siły kontaktowe w kierunku normalnym i stycznym do powierzchni styku oraz oddziaływanie o charakterze momentu. Siły kontaktowe uwzględniają siły sprężyste, siły tłumienia i tarcie, możliwe jest również wprowadzenie wiązań pochodzących od sił spójności. Przyjęcie odpowiedniego modelu oddziaływania kontaktowego pozwala uzyskać pożądane zachowanie makroskopowe materiału. Uwzględnienie możliwości zrywania wiązań między cząstkami umożliwia modelowanie powstawania i propagacji pęknięć w materiale. Jest to metoda o wszechstronnych możliwościach w zastosowaniu do modelowania problemów z występującymi nieciągłościami. Jest metodą powszechnie uznaną w modelowaniu skał, gruntów i materiałów granularnych.

Przykładem modeli dyskretnych nie zaliczanych do metod elementów dyskretnych są modele sieciowe (*ang.* lattice), w których ciało stałe modeluje się jako przestrzenną konstrukcję prętową lub belkową. Modele sieciowe umożliwiają analizę procesu pęknięcia na poziomie mikrostruktury [17, 33, 147], jak również są stosowane do modelowania materiałów rozdrobnionych [38].

Innym przykładem modelowania numerycznego, wykorzystującego modelowanie dyskretne, jest metoda sztywnych elementów skończonych [153], w której układ ciągły jest zastąpiony układem brył sztywnych połączonych ze sobą nieważkimi elementami sprężystymi i tłumiącymi. Równania opisujące ruch sztywnych elementów skończonych są oparte na równaniach dynamiki ciała sztywnego, dlatego ich postać matematyczna jest podobna do równań stosowanych w metodzie elementów dyskretnych, wykorzystującej elementy o dowolnym kształcie. W metodzie sztywnych elementów skończonych, w sformułowaniu przedstawionym w [153], nie rozpatrywano możliwości oddziaływania kontaktowego między elementami. W założeniu metoda miała służyć idealizacji większych części konstrukcji, których odkształcenia można było zaniedbać. Połączenia za pomocą elementów sprężystych z założenia były trwałe, nie przewidywano możliwości ich zerwania, dlatego metoda sztywnych elementów skończonych nie mogła być stosowana do symulacji odkształceń z nieciągłościami wywołanymi powstawaniem i propagacją szczelin.

#### 1.1.4 Wady i zalety modeli ciągłych i dyskretnych

Każdy z opisywanych modeli i każda z metod ma swoje zalety w modelowaniu wybranych zagadnień, jak również swoje ograniczenia. Standardowe modele ciągłe nie są odpowiednie do zagadnień, w których procesy zachodzą pod wpływem zjawisk występujących w małej skali. W modelowaniu zagadnień w małej skali dynamika molekularna wykorzystująca modele dyskretne jest naturalnym sposobem modelowania.

Duże trudności występują przy stosowaniu modelowania ciągłego w zagadnieniach z nieciągłościami, problemach lokalizacji odkształceń lub mechaniki pękania. Problemy, w których występuje osłabienie materiału, z matematycznego punktu widzenia są źle sformułowane (*ang.* ill-posed). Konieczne jest stosowanie różnorodnych metod regularyzacji, jak sformułowania nielokalne [227], sformułowania gradientowe [61], model ośrodka Cosserat [278] lub modele lepkoplastyczne [68].

Do rozwiązania problemów z nieciągłościami opracowano specjalne sformułowania metody elementów skończonych, np. [42]. W sformułowaniach uwzględniających silne nieciągłości, standardowa interpolacja, stosowana w metodzie elementów skończonych, jest wzbogacona o specjalne funkcje opisujące nieciągłe pola aproksymowanych zmiennych [60, 203]. Mimo dużych możliwości tych metod, do zagadnień z licznymi powierzchniami nieciągłościami, w których następuje rozdzielanie badanego obszaru ciągłego na wiele oddzielnych podobszarów, lepiej nadają się modele dyskretne, nie wymagające kłopotliwych założeń związanych z ciągłością stosowanych funkcji w obszarze opisywanym modelem. Możliwości modelowania dyskretnego są wykorzystywane w metodzie elementów dyskretnych. Metoda ta w naturalny sposób uwzględnia istniejące i powstające pod obciążeniem nieciągłości. Doskonale nadaje

się do modelowania materiałów granularnych, rozdrobnionych, gruntów i skał. W efektywny sposób modeluje problemy pękania.

Modele dyskretne prowadzą zazwyczaj do dużych modeli obliczeniowych, co stawia wysokie wymagania mocy obliczeniowej i pociąga za sobą długie czasy obliczeń. Ogranicza to w znacznym stopniu możliwości stosowania metody elementów dyskretnych. W niektórych przypadkach modelowanie ciągłe może być bardziej efektywne. Wielkość modelu obliczeniowego w metodzie elementów dyskretnych wynika z konieczności stosowania elementów o zbliżonych rozmiarach. W metodzie elementów skończonych w większości zagadnień można stosować siatki o zmiennej gęstości, co pozwala zoptymalizować wielkość modelu obliczeniowego.

Prostota sformułowania metody elementów dyskretnych, opierającej się na przyjęciu prostych kształtów elementów i prostych modeli oddziaływania kontaktowego, jest z jednej strony zaletą, jednak z drugiej strony może ograniczać możliwości uzyskania dokładnego rozwiązania, zwłaszcza jeśli chodzi o siły. Inną wadą metody elementów dyskretnych jest trudność wyznaczenia parametrów mikroskopowych dla zadanych własności makroskopowych.

Wobec wymienionych wad i zalet modelowania ciągłego i dyskretnego naturalnym jest dążenie do łączenia tych odmiennych podejść w celu wykorzystania zalet obydwu sposobów modelowania i badanie możliwości wzajemnego uzupełniania się. Wprowadzając pewne elementy modelowania dyskretnego do modeli ciągłych można poprawić możliwości modelowania nieciągłości. Takim przykładem jest wbudowanie dyskretnego elementu szczeliny do modelu metody elementów skończonych. Dyskretny model szczeliny może być reprezentowany poprzez element sprężysty lub kontaktowy o odpowiednich właściwościach. Próba połączenia zalet modelowania ciągłego i dyskretnego są niektóre metody bezsiatkowe, jak np. metoda cząstek rozmytych (SPH) i metoda punktów swobodnych oraz modelowanie wieloskalowe, w których na niskich poziomach stosowane są modele dyskretne, a na poziomach wyższych modele ciągłe.

Innym podejściem umożliwiającym wykorzystanie zalet modelowania ciągłego i dyskretnego jest integracja różnych podejść w jednym modelu numerycznym z możliwością ich równoczesnego wykorzystania w różnych podobszarach modelu.

W niniejszej pracy zostanie przedstawione sformułowanie unifikujące metodę elementów skończonych i metodę elementów dyskretnych.

### 1.1.5 Jawne i niejawne metody całkowania względem czasu

Model matematyczny dynamiki odkształcalnego ośrodka ciągłego po dyskretyzacji przestrzennej, np. za pomocą metody elementów skończonych, oraz model matematyczny ośrodka dyskretnego, np. otrzymany metodą elementów dyskretnych, stanowią

zagadnienie początkowe opisane przez układ równań różniczkowych zwyczajnych z odpowiednimi warunkami początkowymi. Rozwiązanie problemu wymaga całkowania tych równań względem czasu. W rozwiązaniu numerycznym stosuje się metody przybliżonego całkowania. Najczęściej stosowane metody przybliżonego całkowania zagadnień początkowych należą do klasy metod różnicowych [122]. Metody różnicowe wprowadzają dyskretyzację czasową – przybliżenia rozwiązania wyznaczone są jedynie w pewnych punktach (chwilach czasu) należących do przedziału rozwiązania.

Metody całkowania można podzielić na metody jawne (otwarte, ang. *explicit*) i niejawne (zamknięte, ang. *implicit*):

- metody jawne zakładają spełnienie równań ruchu na początku kroku czasowego i ekstrapolują rozwiązanie w czasie  $\Delta t$ ,
- metody niejawne próbują (zazwyczaj iteracyjnie) spełnić równanie ruchu na końcu kroku.

Zaletą metod jawnych (otwartych) jest niewielki koszt wyznaczenia nowego przybliżenia (w kolejnej chwili czasu). Kolejne wartości poszukiwanych funkcji uzyskuje się bezpośrednio poprzez rozwiązanie układu równań otrzymanych po zastosowaniu schematów różnicowych. Rozwiązanie jawne jest szczególnie łatwe jeśli zastosuje się diagonalizację macierzy mas. Wówczas układ równań MES rozpręga się i nie ma potrzeby kosztownego numerycznie odwracania macierzy dla wyznaczenia rozwiązania układu równań algebraicznych. Wadą tych metod jest warunkowa stabilność, ograniczająca długość kroku całkowania, co sprawia, że rozwiązanie wymaga stosowania dużej liczby kroków całkowania.

Zaletą metod niejawnych (zamkniętych) jest możliwość zbudowania algorytmu bezwarunkowo stabilnego. Koszt otrzymania nowego przybliżenia jest jednak znacznie większy. Rozwiązanie niejawne wymaga zazwyczaj zastosowania procedury iteracyjnej. Konieczność uzyskania zbieżności na kroku rozwiązania jest jedną z niedogodności schematów niejawnych, gdyż w wielu przypadkach, np. w zagadnieniach z kontaktem lub w problemach silnie nieliniowych, mogą wystąpić problemy ze zbieżnością rozwiązania iteracyjnego.

Do zalet metod jawnych należą małe wymagania wobec pamięci komputera, dzięki temu że nie buduje się macierzy sztywności układu. Złożoność obliczeniowa, zarówno czasowa jak i pamięciowa, jest liniowa w zależności od liczby stopni swobody, co w metodach niejawnych jest najczęściej niemożliwe. W przypadku dużych modeli zalety metod jawnych przeważają nad ich wadami i niedogodnościami, co sprawia, że są chętnie wykorzystywane w praktyce do analizy zagadnień inżynierskich, prowadzących do dużych modeli obliczeniowych.

Metoda elementów skończonych z jawnym całkowaniem równań ruchu jest popularnym narzędziem w wielu zastosowaniach praktycznych, jak np. analiza konstrukcji poddanych obciążeniom uderzeniowym, symulacja procesów tłoczenia blach i inne. Możliwości zostaną przedstawione w aplikacjach zawartych w niniejszej pracy. Jawne algorytmy całkowania są standardową metodą rozwiązania w metodzie elementów dyskretnych, która jest szeroko wykorzystywana w rozwiązywaniu zagadnień z geomechaniki.

## 1.2 Cel i zakres pracy

Celem niniejszej pracy jest opracowanie sformułowań teoretycznych i algorytmów numerycznych dla dwóch różnych metod numerycznych, wykorzystujących jawne całkowanie równań ruchu względem czasu:

- metody elementów skończonych,
- metody elementów dyskretnych,

ich implementacja w programie komputerowym oraz zastosowanie w analizie praktycznych problemów inżynierskich.

Rozpatrywane zagadnienia praktyczne należą do różnych dziedzin nowoczesnej techniki. Analizowane będą

- procesy technologiczne, takie jak
  - procesy przeróbki plastycznej objętościowej na zimno,
  - procesy tłoczenia blach,
  - procesy odlewania metali techniką traconego modelu,

oraz

- zagadnienia geotechniki, głównie procesy urabiania skał.

Dostępność dwu różnych metod numerycznych daje możliwość wyboru najbardziej odpowiedniego modelu dla rozpatrywanego zagadnienia. Metoda elementów skończonych zostanie zastosowana do badania dużych odkształceń metali w procesach przeróbki plastycznej, zaś metoda elementów dyskretnych zostanie wykorzystana do modelowania piasku w symulacji wytwarzania formy piaskowej oraz do modelowania skał w symulacji procesów urabiania skał.

Jednym z głównych celów niniejszej pracy jest również integracja metody elementów skończonych i metody elementów dyskretnych – opracowanie jednolitego algorytmu numerycznego dla obydwu metod oraz opracowanie zintegrowanego programu

MED/MES. Celem integracji jest umożliwienie jednoczesnego wykorzystania modelowania ciągłego i modelowania dyskretnego w różnych częściach lub różnych podobszarach tego samego modelu. Pozwoli to tworzyć optymalne modele numeryczne z modelowaniem dyskretnym w podobszarze, gdzie mogą wystąpić nieciągłości i dyskretyzacją za pomocą elementów skończonych tam, gdzie stosowanie elementów dyskretnych mogłoby być nieefektywne. Dzięki temu można w sposób efektywny zastosować obydwie metody, wykorzystując ich zalety i unikając ich wad. Przykładem modelu wykorzystującego zintegrowane modelowanie jest model skrawania skały, w którym narzędzie skrawające jest dyskretyzowane za pomocą elementów skończonych, część obszaru skały, podlegająca rozdrobnieniu, jest modelowana za pomocą elementów dyskretnych, a pozostała część, nie podlegająca rozdrobnieniu, za pomocą elementów skończonych.

Wspólny schemat całkowania w obydwu metodach numerycznych rozwijanych w niniejszej pracy ułatwia ich wspólną implementację w jednym programie numerycznym. Dzięki wspólnemu algorytmowi rozwiązania możliwe będzie stworzenie wspólnych procedur dla obydwu metod. Konieczne będzie również opracowanie specjalnych algorytmów. W celu umożliwienia modelowania różnych podobszarów tego samego materiału za pomocą różnych metod niezbędne będzie opracowanie specjalnych algorytmów sprzęgających, pozwalających na przeniesienie oddziaływania między obydwoma obszarami bez wprowadzania niepożądanych niefizycznych efektów odbicia fal na połączeniu podobszarów MES i MED.

Rozpatrywane zagadnienia mechaniki charakteryzują się dużymi zmianami geometrii badanych obiektów i nieliniowym zachowaniem materiałów. Badane są różnorodne materiały poddane złożonym procesom fizycznym. Rozpatrywane są metale i polimery poddane dużym odkształceniom, badane są przepływy materiału granularnego oraz deformacje i zniszczenie skał. W zagadnieniach tłoczenia blach rozpatruje się kształtowanie części z zastosowaniem nowoczesnych materiałów jakimi są:

- blachy spawane (*ang.* TWB – tailor welded blanks),
- blachy powlekane polimerem.

W celu modelowania nieliniowego zachowania się materiałów zostaną implementowane następujące modele konstytutywne:

- model dla dużych odkształceń sprężysto-plastycznych metali, izotropowy oraz z anizotropią plastyczną,
- sprężysto-lepkoplastyczny model dla dużych odkształceń polimerów,
- mikromechaniczne modele dla modelowania piasku i skał metodą elementów dyskretnych.



W celu zastosowania modelu elementów dyskretnych do modelowania skał zostanie opracowany sposób wyznaczania parametrów modelu mikroskopowego na podstawie wyników testów laboratoryjnych, próby jednoosiowego ściskania i próby brazylijskiej. Zostaną przedstawione metody wyznaczania uśrednionych wielkości makroskopowych takich, jak odkształcenia i naprężenia dla modelu dyskretnego w metodzie elementów dyskretnych.

Bardzo ważnym elementem opracowywanych algorytmów numerycznych zarówno w metodzie elementów skończonych, jak i w metodzie elementów dyskretnych jest algorytm analizy kontaktu. W dużych zagadnieniach analizowanych za pomocą metody elementów skończonych, takich jak symulacja tłoczenia blach czy analiza dużych problemów z geomechaniki metodą elementów dyskretnych, bardzo ważne jest efektywne i niezawodne wykrywanie kontaktu.

W niniejszej pracy zostanie opracowany własny algorytm, umożliwiający analizę zagadnień kontaktowych:

- między brzegami obszarów dyskretyzowanych elementami skończonymi,
- między elementami dyskretnymi,
- między elementami dyskretnymi a brzegiem obszaru dyskretyzowanego elementami skończonymi.

Rozpatrywane zagadnienia wymagają specjalnych sformułowań na poziomie ogólnym algorytmu oraz na poziomie elementów skończonych. Implementowany zostanie specjalny algorytm całkowania równań dla sformułowania mieszanej metody elementów skończonych, pozwalający uniknąć blokady objętościowej w problemach z małą ściśliwością oraz dający stabilne rozwiązanie dla elementów trójkątnych i czworobocznych z liniową interpolacją przemieszczenia i ciśnienia. Pozwoli to zwiększyć możliwości analizy dużych odkształceń sprężysto-plastycznych w problemach przeróbki plastycznej. W celu efektywnej analizy dużych odkształceń sprężysto-plastycznych w zagadnieniach kształtowania blach zostanie implementowany specjalny trójkątny element powłokowy bez obrotowych stopni swobody.

Modelowanie procesów urabiania skał wymagać będzie szeregu nowych i oryginalnych rozwiązań. W symulacji urabiania skał będzie badana interakcja skały i narzędzia urabiającego, rozpatrzony zostanie proces rozdrabniania skały pod wpływem narzędzia urabiającego, jak również będzie analizowany stan narzędzia, stan naprężeń oraz proces zużywania narzędzia w trakcie urabiania. Dla badania zużycia narzędzi urabiających zostanie opracowany specjalny algorytm, umożliwiający badanie ewolucji kształtu narzędzia. W opracowanym modelu uwzględnione będą efekty termiczne, zostanie uwzględniona generacja ciepła wskutek tarcia na powierzchni kontaktu na-

narzędzia i skały, będzie badany proces przepływu ciepła w skale i narzędziu. Wpływ temperatury narzędzia zostanie wzięty pod uwagę w ocenie wielkości jego zużycia.

Wszystkie algorytmy numeryczne zostały implementowane w programie numerycznym Simpack/Stampack rozwijanym przez autora od wielu lat we współpracy z Międzynarodowym Centrum Metod Numerycznych w Inżynierii w Barcelonie, CIMNE (*katal.* Centre Internacional de Mètodes Numèrics en l'Enginyeria, *ang.* International Center for Numerical Methods in Engineering).

### 1.3 Plan pracy

W rozdziale 1 przedstawiono motywację podjęcia niniejszej pracy badawczej oraz jej cel i zakres. Przedstawiono główne założenia modelowania ciągłego i dyskretnego w mechanice materiałów. Omówiono metody numeryczne służące do rozwiązania problemów sformułowanych w ramach obydwu podejść. Szczególną uwagę zwrócono na metodę elementów skończonych z jawnym całkowaniem równań ruchu oraz metodę elementów dyskretnych. Przedstawiono wady i zalety modeli ciągłych i dyskretnych oraz korzyści wynikające z ich integracji. Krótko omówiono główne cechy jawnego schematu całkowania, stosowanego w obydwu metodach numerycznych. Zawarty we Wstępie przegląd literatury ograniczono do pokazania rozwoju i stanu bieżącego rozpatrywanych metod numerycznych wraz z pracami nad ich integracją. Literatura dotycząca bardziej szczegółowych zagadnień jest przedstawiona w poszczególnych rozdziałach pracy.

W rozdziale 2 przedstawione jest sformułowanie metody elementów skończonych jako metody rozwiązania zagadnienia ruchu ciała odkształcalnego. Krótko opisano wybrane elementy skończone. Następnie omówione są schematy całkowania równań MES w czasie, ze szczególnym uwzględnieniem algorytmu jawnego, będącego podstawowym schematem rozwiązania stosowanym w niniejszej pracy. Rozdział 3 zawiera podstawowe sformułowania wybranych modeli konstytutywnych używanych w modelowaniu zagadnień praktycznych przedstawionych w niniejszej pracy. W rozdziale 4 sformułowanie metody elementów skończonych jest rozszerzone na zagadnienie kontaktowe.

W rozdziale 5 rozwinięto specjalne sformułowanie metody elementów skończonych dla problemów z małą ściśliwością, oparte na sformułowaniu mieszanym ze specjalnym algorytmem całkowania. Sformułowanie eliminuje szkodliwy efekt blokady objętościowej występujący w standardowym przemieszczeniowym sformułowaniu MES i niestabilność ciśnienia w standardowym sformułowaniu mieszanym MES. Poprawność sformułowania jest pokazana w praktycznych przykładach przeróbki plastycznej objętościowej na zimno. Wszechstronne możliwości rozwiniętego programu

numerycznego w zastosowaniu do symulacji złożonych procesów kształtowania blach ukazuje rozdział 6.

Rozdział 7 rozpoczyna część pracy poświęconą metodzie elementów dyskretnych oraz zintegrowanej metodzie elementów dyskretnych i skończonych. W rozdziale 7 przedstawiono podstawowe sformułowanie metody elementów dyskretnych obejmujące równania ruchu oraz model oddziaływania kontaktowego między elementami dyskretnymi. W rozdziale 8 przedstawiono teoretyczne zależności między wielkościami mikro- i makroskopowymi w modelach opartych na metodzie elementów dyskretnych.

Tematem rozdziału 9 jest integracja metody elementów skończonych i metody elementów dyskretnych będąca numeryczną realizacją hybrydowego modelowania dyskretno-ciągłego. W niniejszej pracy rozwinięto algorytm sprzężenia obydwu metod numerycznych, posiadający wszechstronne możliwości stosowania różnych metod w obszarach oddzielnych jak również w różnych częściach tego samego ośrodka. W integracji metody elementów skończonych i metody elementów dyskretnych wykorzystano wspólne elementy obydwu metod. Jednym ze wspólnych zadań realizowanych w obydwu modelach jest poszukiwanie i wyznaczanie oddziaływania kontaktowego. W rozdziale 10 opisano implementowany numeryczny algorytm poszukiwania kontaktu w zintegrowanym systemie metody elementów skończonych i metody elementów dyskretnych. Niezawodność i numeryczna efektywność algorytmu wykrywania kontaktu jest bardzo ważnym aspektem w analizie dużych problemów.

W rozdziale 11 badane są efekty falowe występujące w modelach metody elementów skończonych, metody elementów dyskretnych oraz w modelach hybrydowych metody elementów skończonych i metody elementów dyskretnych. Głównym przedmiotem badań są odbicia fal na wewnętrznej nieciągłości, występującej przy połączeniu obszarów modelowanych, za pomocą różnych metod.

Rozdział 12 ukazuje przykład zastosowania metody elementów dyskretnych do modelowania materiałów granularnych. Metoda elementów dyskretnych jest zastosowana do modelowania piasku w numerycznym modelu procesu wytwarzania formy w odlewaniu technologią traconego modelu. W modelu tym wykorzystano również hybrydowe modelowanie metodami elementów dyskretnych i skończonych.

Rozdziały 13–17 pokazują różnorodne możliwości wykorzystania metody elementów dyskretnych oraz hybrydowej metody elementów dyskretnych i skończonych w modelowaniu skał i zagadnień urabiania skał. Podstawowe zagadnienia związane z modelowaniem skał metodą elementów dyskretnych są tematem rozdziału 13. Przedstawiono w nim sposoby dyskretyzacji próbek skały i praktyczne wyznaczanie parametrów modelu dyskretnego poprzez symulację podstawowych prób laboratoryjnych, próby jednoosiowego ściskania oraz próby brazylijskiej. W rozdziale 14 wykorzy-

stano metodę elementów dyskretnych i hybrydową metodę elementów skończonych i dyskretnych do symulacji problemów mechanicznego urabiania skał. Pokazano możliwości metody elementów dyskretnych w modelowaniu zniszczenia skał, charakteryzującego się licznymi nieciągłościami.

W rozdziale 15 rozszerzono sformułowanie elementów dyskretnych na zagadnienie przepływu ciepła. W rozdziale 16 połączono algorytm analizy termicznej z algorytmem metody elementów dyskretnych dla zagadnień ruchu formułując algorytm metody elementów dyskretnych dla zagadnień termomechanicznych. Algorytm ten wykorzystano w modelowaniu procesu urabiania skał jako zagadnienia termomechanicznego, w którym efekty cieplne mają istotne znaczenie. Kolejnym rozszerzeniem rozwijanego modelu numerycznego jest wprowadzenie w rozdziale 17 zużycia jako dodatkowego efektu w mechanicznym i termomechanicznym modelu oddziaływania kontaktowego między skałą a narzędziem urabiającym. Rozwinięty algorytm numeryczny zastosowano do praktycznego przykładu skrawania skały.

Praca zawiera dwa dodatki prezentujące wybrane podstawowe równania i definicje dotyczące opisu ruchu ciała odkształcalnego (dodatek A) i bryły sztywnej (dodatek B).

## 1.4 Stosowana notacja

W pracy w zapisie równań zostanie wykorzystana notacja tensorowa oraz notacja algebraiczna (macierzowa). Notacja tensorowa zostanie zastosowana głównie w zapisie podstawowych równań praw fizyki. W wyprowadzeniu dyskretnych równań metody elementów skończonych oraz metody elementów dyskretnych notacja tensorowa zostanie zastąpiona notacją macierzową, wygodniejszą przy formułowaniu algorytmów numerycznych. Ze względu na zwartość zapisu notacja tensorowa zostanie zastosowana najczęściej w postaci absolutnej.

W stosowaniu notacji tensorowej i macierzowej zostaną przyjęte następujące zasady:

1. Wielkości skalarne oraz składowe tensorów i wektorów zostaną zapisane pochyłą czcionką normalną, np.  $\alpha, K, a_i, b_i, c_i, A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ijkl}, \sigma_{ij}$ .
2. Symbole tensorów i wektorów w notacji tensorowej zostaną zapisane pogrubioną czcionką pochyłą, np.  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\sigma}$ .
3. Symbole macierzy i wektorów w notacji macierzowej będą zapisane pogrubioną czcionką prostą, np.  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\sigma}$ . W notacji macierzowej niektóre tensory rzędu drugiego, np. tensory naprężenia czy odkształcenia, są odwzorowane przez wektory kolumnowe, a tensory czwartego rzędu, np. tensor konstytutywny, są odwzorowane przez macierze.

## 4. Iloczyn skalarny wektorów

$$\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (1.1)$$

jest równoważny następującemu wyrażeniu w notacji macierzowej:

$$\alpha = \mathbf{a}^T \mathbf{b}. \quad (1.2)$$

## 5. Iloczyn wektorowy

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (1.3)$$

w notacji macierzowej jest zastąpiony następującym wyrażeniem:

$$\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b}, \quad (1.4)$$

gdzie  $\tilde{\mathbf{a}}$  to antysymetryczna macierz stowarzyszona z wektorem  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}^T$ , zdefiniowana w następujący sposób:

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

## 6. Iloczyn tensorowy dwóch wektorów (diada) w niniejszej pracy zapisywany jest w następującej postaci:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} \mathbf{b}, \quad (\text{w notacji wskaźnikowej } A_{ij} = a_i b_j). \quad (1.6)$$

W notacji macierzowej można go zapisać jako:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T. \quad (1.7)$$

Analogicznie do równania (1.6) iloczyn zewnętrzny dwóch tensorów wyższego rzędu zapisuje się w następującej postaci:

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \mathbf{B}, \quad (\text{w notacji wskaźnikowej } D_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}). \quad (1.8)$$

## 7. Proste nasunięcie (iloczyn wewnętrzny) dwóch tensorów jest zapisywane jako:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad (\text{w notacji wskaźnikowej } C_{ij} = A_{ik} B_{kj}). \quad (1.9)$$

Równoważne wyrażenie w notacji macierzowej jest następujące

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{B}. \quad (1.10)$$

## 8. Pełne nasunięcie dwóch tensorów jest zapisywane jako:

$$\mathbf{B} = \mathbf{D} : \mathbf{A}, \quad (\text{w notacji wskaźnikowej } B_{ij} = D_{ijkl} : A_{kl}). \quad (1.11)$$

W notacji macierzowej operację kontrakcji dwóch tensorów wyraża się przez odpowiednio zdefiniowaną operację mnożenia macierzowego (wektorowego), np.

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{D} \bar{\mathbf{A}}, \quad (1.12)$$

gdzie  $\bar{\mathbf{A}}$  i  $\bar{\mathbf{B}}$  to wektory kolumnowe zawierające składowe tensorów drugiego rzędu  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$ , a  $\mathbf{D}$  to macierz zawierająca składowe tensora czwartego rzędu  $\mathbf{D}$ .

## 1.5 Przegląd literatury – rozwój badań i stan wiedzy

Zakres niniejszej pracy jest szeroki i obejmuje wiele zagadnień z dziedziny mechaniki i metod numerycznych. W pracy tej rozpatruje się dwie różne metody numeryczne: metodę elementów skończonych, opartą na jawnym całkowaniu równań ruchu względem czasu oraz metodę elementów dyskretnych, wykorzystującą walcowe i kuliste cząstki. Przegląd literatury zostanie ograniczony do problemów ogólnych związanych z wymienionymi metodami, włącznie z pracami nad ich integracją. Przedstawiony zostanie rozwój rozpatrywanych metod numerycznych i opartego na nich oprogramowania. Przegląd literatury dotyczącej bardziej szczegółowych zagadnień będzie dokonany w dalszych rozdziałach w ramach rozwiązywania rozpatrywanych zagadnień.

### 1.5.1 Metoda elementów skończonych z jawnym całkowaniem równań ruchu

Początki nieliniowego sformułowania metody elementów skończonych sięgają drugiej połowy lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku. Pierwszy nieliniowy program MES, MARC, pojawił się na rynku w roku 1969 i do dzisiaj jest jednym z programów o najszerszych możliwościach [194]. Zarówno MARC jak i inne najbardziej znane programy nieliniowe MES takie, jak ANSYS [7], ABAQUS [2], ADINA [1] wykorzystywały sformułowanie z niejawnym rozwiązaniem zarówno nieliniowego problemu statyki, jak i dynamiki.

Komercyjne programy MES z jawnym całkowaniem równań ruchu pojawiły się dopiero pod koniec lat osiemdziesiątych. Wyrosły one na bazie wcześniejszych prac badawczych nad algorytmami wykorzystującymi jawne algorytmy całkowania równań ruchu [23]. Jednymi z pierwszych prac w tej dziedzinie były prace Belytschki ze współautorami [20, 19, 25]. Sformułowania teoretyczne prezentowane w tych pracach zostały implementowane w programie numerycznym WHAMS [21].

Momentem przełomowym w rozwoju programów MES z jawnym całkowaniem równań ruchu było pojawienie się programu DYNA3D, którego pierwsza wersja powstała w Lawrence Livermore National Laboratory w roku 1976 [99]. Doświadczenia uzyskane podczas stosowania DYNA3D pokazały, że ze względu zarówno na efektywność, jak i dokładność rozwiązania wskazane jest stosowanie prostych liniowych sformułowań elementów. Elementy wyższego rzędu, obok znacznego kosztu obliczeniowego, wprowadzały nierealistyczny szum numeryczny z powodu stosowania diagonalnej macierzy mas w zagadnieniach propagacji fal [101]. Program DYNA3D był nieustannie rozszerzany, jego kolejne wersje zawierały nowe modele materiałów, nowe algorytmy analizy kontaktu oraz nowe opcje pozwalające modelować nowe zagadnienia.

Oryginalnym przeznaczeniem DYNA3D było modelowanie zjawisk związanych z zastosowaniami militarnymi, przede wszystkim symulacja obciążeń uderzeniowych pochodzących od wybuchów jądrowych i badanie odporności schronów podziemnych na obciążenia uderzeniowe. Z czasem znaczny wysiłek został włożony w rozwinięcie możliwości zastosowań cywilnych, takich jak np. numeryczne badanie wytrzymałości pojazdów na zderzenia (*ang.* crashworthiness) oraz symulacja procesów przeróbki plastycznej [102]. Jednym z głównych zastosowań stała się symulacja procesów kształtowania blach.

Do 1988 r. DYNA3D był programem ogólnie dostępnym (*ang.* public domain). W 1988 r. na jego bazie główny twórca programu J. Hallquist rozpoczął rozwijanie programu komercyjnego LS-DYNA, który jest do dzisiaj jednym z najważniejszych programów MES wykorzystujących jawny schemat rozwiązania [101]. Program DYNA3D jest w dalszym ciągu rozwijany w Lawrence Livermore National Laboratory i został wzbogacony o liczne nowe możliwości [70].

Ogólnie dostępna wersja programu DYNA3D stała się podstawą do rozwoju innych programów komercyjnych MES wykorzystujących jawne całkowanie względem czasu takich, jak PAM-CRASH/PAM-STAMP [221, 222], MSC Dytran [195], RADIOSS [234], które należą do najważniejszych programów na rynku oprogramowania inżynierskiego. Rozwój tych programów został zainicjowany w drugiej połowie lat osiemdziesiątych. Pierwszym krokiem w rozwoju programu PAM-CRASH firmy ESI była pomyślna analiza wytrzymałości uderzeniowej Volkswagena Polo w 1985 r. Pierwsza wersja programu RADIOSS pojawiła się w roku 1986.

Sukces rynkowy programów MES opartych na jawnym schemacie całkowania równań ruchu zachęcił niektórych producentów standardowego oprogramowania MES, opartego na niejawnym schemacie rozwiązania, do stworzenia wersji swojego oprogramowania wykorzystującego jawne schematy, w ten sposób powstał Dytran [195] i Abaqus Explicit [3], którego pierwsza wersja pojawiła się w roku 1991.

W 1990 r. w CIMNE w Barcelonie został zainicjowany rozwój oprogramowania Simpack/Stampack. Początkowo program zastosowano do obliczenia wytrzymałości uderzeniowej nadwozi autobusów. Następnym zastosowaniem była symulacja procesów tłoczenia blach. Autor prawie od samego początku, począwszy od roku 1993, brał udział w rozwoju oprogramowania będąc jednym z jego głównych autorów. Początkowo program był tworzony w języku Fortran 77, w drugiej połowie lat dziewięćdziesiątych oprogramowanie zostało całkowicie przeprogramowane na język Fortran 90/95, dzięki czemu możliwe było wprowadzenie wielu nowoczesnych elementów programowania, takich jak np. obiektowość. W programie zostało wprowadzonych wiele nowych sformułowań teoretycznych. Główny nacisk w tamtym okresie położono na rozwój możliwości symulacji wieloetapowych procesów kształtowania blach [253, 217]. Autor niniejszej pracy zaprojektował strukturę programu umożliwiającą

wszechstronne modyfikacje modelu w trakcie analizy, dzięki czemu możliwe jest modelowanie wieloetapowych procesów kształtowania, w których następują zmiany narzędzi (powierzchni kontaktowych), położenia blachy i warunków brzegowych kinematycznych i obciążeniowych. W celu efektywnego modelowania blachy w tłoczeniu blach został implementowany efektywny element powłokowy bez obrotowych stopni swobody. Specjalny model równoważnego modelu progów ciągowych został opracowany i zbadany przez autora [245]. Ponadto opracowano specjalny algorytm do symulacji okrawania wytłoczki i wycinania otworów. Stwierdzono, że w symulacji sprężynowania powrotnego następującego po usunięciu wytłoczki z prasy, zastosowanie sformułowania jawnego nie jest efektywne. Optymalne rozwiązanie daje połączenie modelu numerycznego jawnego w symulacji tłoczenia z niejawnym modelem numerycznym procesu sprężynowania powrotnego. W programie Stampack autor implementował niejawny algorytm analizy dla analizy sprężynowania powrotnego [250].

Równocześnie autor rozwijał możliwości programu w modelowaniu innych zagadnień, np. przeróbki plastycznej objętościowej. We współpracy z prof. O.C. Zienkiewiczem i prof. R.L. Taylorem wprowadzono specjalne algorytmy całkowania względem czasu stabilizujące liniowe elementy czworościenne [314]. Autor rozszerzył możliwości modelowania w programie procesów przeróbki plastycznej wprowadzając algorytm sprzężonej analizy termomechanicznej. Z jawnym rozwiązaniem równań ruchu dla zagadnienia dynamicznego zostało sprzężone rozwiązanie problemu termicznego, również wykorzystujące jawne całkowanie względem czasu [253, 262]. Dzięki implementacji wymienionych algorytmów program Stampack stał się jednym z niewielu programów, który jest w stanie analizować złożone problemy tłoczenia blach. Wyniki uzyskane za jego pomocą dorównywały, a nawet przewyższały dokładnością, wyniki uzyskane za pomocą innych uznanych programów komercyjnych [129, 94].

Obecnie programy metody elementów skończonych z jawnym całkowaniem równań ruchu są nie kwestionowanym narzędziem projektowania inżynierskiego w takich dziedzinach jak modelowanie konstrukcji poddanych obciążeniom uderzeniowym, zarówno konstrukcji budowlanych, jak i pojazdów mechanicznych oraz konstrukcji lotniczych. Inną ważną dziedziną zastosowań przemysłowych jest symulacja procesów przeróbki plastycznej, głównie procesów tłoczenia blach. W tej dziedzinie programy te są nie tylko efektywne, ale dają bardzo dokładne wyniki. Mimo, że obecnie wzrosły możliwości programów niejawnych w zastosowaniu do złożonych problemów tłoczenia blach, dzięki zweryfikowanej dokładności wyników, uzyskiwanych za pomocą programów jawnych, ich pozycja w zastosowaniu do tłoczenia jest na pewno niezagrażona.

Chociaż ogólne podstawy teoretyczne sformułowania jawnego metody elementów skończonych są już dokładnie zbadane, wciąż trwają prace badawcze nad ulepsze-



niem i rozwojem algorytmów numerycznych, wprowadzeniem nowych sformułowań elementów i nowych modeli konstytutywnych. Nowe wymagania pojawiają się w związku z wprowadzaniem nowych materiałów i nowych procesów technologicznych. W niniejszej pracy zostaną przedstawione oryginalne prace autora nad algorytmem stabilizującym liniowe elementy trójkątne i czworościenne w analizie procesów prawie nieściśliwych, zwiększające możliwości analizy przeróbki plastycznej objętościowej. Zostaną przedstawione algorytmy umożliwiające symulację złożonych wieloetapowych procesów kształtowania blach. Będzie też przedstawione modelowanie procesów kształtowania z nowoczesnych materiałów, blach spawanych laserowo oraz blach powlekanych polimerem.

### 1.5.2 Metoda elementów dyskretnych

Metoda elementów dyskretnych obejmuje klasę metod numerycznych opisujących dynamiczne zachowanie zbioru oddziałujących między sobą cząstek o skończonych rozmiarach o dowolnym kształcie.

Sformułowanie elementów dyskretnych<sup>2</sup> wykorzystujące cząstki walcowe (w 2D) lub sferyczne (w 3D) zostało po raz pierwszy zaproponowane przez Cundalla i Stracka [57]. Przedstawiony algorytm został implementowany w latach 1979-80 w programie BALL&TRUBALL, który był wykorzystywany głównie do modelowania materiałów granularnych. Rozwinięciem programu BALL&TRUBALL są komercyjne programy PFC2D i PFC3D (PFC = Particle Flow Code), których pierwsza wersja została wprowadzona na rynek w 1994 roku przez firmę Itasca, założoną przez P. Cundalla [124, 125].

Firma Itasca od 1980 r. rozwija również program elementów dyskretnych UDEC, wykorzystujący elementy o kształcie wieloboków (dla zagadnień płaskich) [52]. Rozwinięciem tego programu na zagadnienia trójwymiarowe przy zastosowaniu elementów wielościennych jest program 3DEC, który został wprowadzony na rynek w 1988 roku [54, 106]. W programach UDEC i 3DEC elementy dyskretne mogą być traktowane jako elementy sztywne lub odkształcalne.

Począwszy od roku 2000 autor pracował nad implementacją algorytmu metody elementów dyskretnych, wykorzystującej jako elementy dyskretne cząstki walcowe lub sferyczne w programie metody elementów skończonych Simpack/Stampack [255]. Dzięki wspólnemu algorytmowi całkowania równań ruchu względem czasu było możliwe opracowanie jednolitego oprogramowania metody elementów skończonych i elementów dyskretnych. Szczegóły implementacji są opisane w niniejszej pracy. Al-

---

<sup>2</sup>P. Cundall stosuje termin „distinct element method” w odniesieniu do swoich sformułowań metody elementów dyskretnych wykorzystujących elementy sferyczne jak również elementy o kształcie wieloboków i wielościannów.

gorytm jest podobny do zaproponowanego przez Cundalla i Stracka [57], niemniej jednak zawiera wiele oryginalnych rozszerzeń, jak np. możliwość modelowania zagadnień przewodnictwa ciepła i zagadnień sprzężonych termomechanicznych, model kontaktu termicznego, uwzględniającego generację i wymianę ciepła, model kontaktu uwzględniający zużycie z algorytmem zmiany kształtu wskutek zużycia, a ponadto algorytm metody elementów dyskretnych zawiera sprzężenie z metodą elementów skończonych, umożliwiające jednoczesne stosowanie zintegrowanego modelowania dyskretno-ciągłego. Szczegóły zintegrowanego algorytmu są przedstawione w niniejszej pracy.

Obecnie metoda elementów dyskretnych jest uznanym narzędziem w modelowaniu zagadnień z nieciągłościami o różnej skali, od skali atomowej do skali makroskopowej, praktyczne zastosowania obejmują modelowanie geomateriałów, tak kohezyjnych jak i niekohezyjnych, skał [117, 59], betonu [110] i materiałów granularnych [167]. Metody elementów dyskretnych wciąż są rozwijane. Wprowadzane są nowe możliwości modelowania. W [59] zaproponowano nowy dokładniejszy opis oddziaływania kontaktowego między elementami dyskretnymi oparty na modelach sprężysto-plastycznych z mechaniki kontinuum. Metoda elementów dyskretnych jest również wykorzystywana w modelowaniu wieloskalowym do wyznaczenia zachowania makroskopowego materiału [59, 145]. Bardzo burzliwy postęp można obserwować w rozwoju i zastosowaniach metod dynamiki molekularnej [236]. Obecny poziom rozwoju metod elementów dyskretnych i przegląd ich zastosowań można znaleźć w [48, 145]. W wielu ośrodkach badawczych pracuje się nad rozwojem programów opartych na algorytmach metod elementów dyskretnych. Wśród programów można wymienić SDEC [67], YADE [304], ELFEN [76] oraz DEMAT [14].

W Polsce prace nad rozwojem metody elementów dyskretnych są stosunkowo nieliczne. Należy wymienić udoskonalenia w opisie zjawiska zderzenia i oddziaływania kontaktowego w sformułowaniu metody elementów dyskretnych w pracy habilitacyjnej J. Leszczyńskiego [167].

### 1.5.3 Integracja metody elementów skończonych i dyskretnych

Możliwość wykorzystania w jednym modelu zalet różnych metod, a jednocześnie uniknięcia ich wad, jest motywacją do integracji różnych metod numerycznych, np. metody elementów skończonych i metody różnic skończonych [149, 150, 151], metody elementów skończonych i metody elementów brzegowych [287, 239, 275] oraz metody elementów skończonych i metody cząstek rozmytych (SPH) [266]. W modelach hybrydowych konkurujące ze sobą metody są traktowane jako metody wzajemnie uzupełniające się.

Integracja metody elementów skończonych i metody elementów dyskretnych jest aktualnym problemem badawczym [196, 232, 307]. Jest to szczególnie przypadek realizacji modelowania dyskretno-ciągłego. Połączenie dwóch różnych podejść umożliwia opracowanie optymalnego modelu, wykorzystującego zalety obydwu metod, dużą efektywność i dokładność metody elementów skończonych w modelowaniu odkształceń, które można uznać za ciągłe oraz naturalne uwzględnienie za pomocą metody elementów dyskretnych nieciągłości istniejących w badanej strukturze lub powstających w niej pod wpływem obciążenia.

Złożone modelowanie dyskretno-ciągłe jest obecnie przedmiotem wielu prac badawczych w dziedzinie modelowania wieloskalowego, łączącego modelowanie ciągłe z modelem dyskretnym opartym na sformułowaniach dynamiki molekularnej [303, 32]. Hybrydowe modele MED/MES mogą mieć również zastosowanie w tego typu modelowaniu, metoda elementów dyskretnych może być użyta do modelowania materiału w skali mikro- lub mezoskopowej, a metoda elementów skończonych umożliwia modelowanie materiału w skali makroskopowej.

Mimo wielu prac w dziedzinie integracji jest wciąż wiele do zrobienia. Jak dotychczas nie istnieje żaden komercyjny program umożliwiający jednoczesne stosowanie metody elementów dyskretnych i metody elementów skończonych. W publikowanych pracach w modelowaniu hybrydowym MED/MES najczęściej stosuje się dwa różne programy, np. w [232] w hybrydowym modelu tunelu zastosowano program metody elementów dyskretnych PFC2D i program metody elementów skończonych FLAC. Podobnie sprzężono programy metody elementów dyskretnych PFC3D i metody elementów skończonych FLAC w modelu hybrydowym w [307]. W [264] przedstawiono koncepcję modelowania hybrydowego MED/MES przy wykorzystaniu kodów numerycznych PFC2D i ANSYS.

Modelowanie dyskretno-ciągłe za pomocą oddzielnych programów MES i MED wiąże się z pewnymi ograniczeniami i jego realizacja jest kłopotliwa. W niniejszej pracy zostanie przedstawiony zintegrowany program MED/MES, w którym implementowano metodę elementów dyskretnych i metodę elementów skończonych. Stanowi to dużą zaletę przedstawianego algorytmu w stosunku do innych prac. W integracji wykorzystano wspólne cechy obydwu sformułowań, w tym m.in. wspólny algorytm rozwiązania oparty na jawnym całkowaniu równań ruchu.

Hybrydowe modelowanie metodą elementów skończonych i dyskretnych jest przedstawione w niedawno opublikowanej pracy [196], podsumowującej wcześniejsze prace, np. [197, 219]. W pracy tej stosuje się przejście od modelu ciągłego do dyskretnego, uwzględniające defragmentację materiału poddanego obciążeniom uderzeniowym. Początkowo stosuje się model ciągły i dyskretyzację elementami skończonymi, które przy zniszczeniu są rozłączane i traktowane jak elementy dyskretnie.

Stosowane są elementy dyskretne, odpowiadające kształtem elementom skończonym w dyskretyzacji początkowej – wieloboczne (w 2D) lub wielościenne (w 3D). Elementy dyskretne w sformułowaniu przedstawionym w [196] mogą być traktowane jako odkształcalne – wtedy są dyskretyzowane za pomocą elementów skończonych.

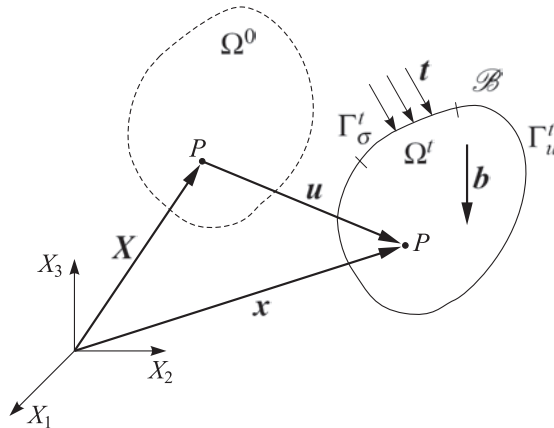
Koncepcja integracji w niniejszej pracy jest odmienna. Stosuje się metodę elementów dyskretnych wykorzystującą elementy cylindryczne (w 2D) lub sferyczne (w 3D). Wstępny etap prac nad sformułowaniem przedstawionym w niniejszej pracy przedstawiono w [216, 251]. W zawartym tam sformułowaniu modelowanie dyskretne i ciągłe było stosowane do oddzielnych części uwzględnionych w modelu. W niniejszej pracy zostanie zaprezentowane sformułowanie o znacznie szerszych możliwościach. Dzięki specjalnemu sprzężeniu podobszarów MED i MES, modelowanie dyskretne i ciągłe można zastosować do różnych podobszarów tej samej części. Metody sprzężenia zastosowane w niniejszej pracy oraz otrzymane równania dla zagadnienia sprzężonego charakteryzują się pewnym podobieństwem do metod i równań rozwiniętych w pracach [240, 248, 249], gdzie rozpatrywano układy złożone z części odkształcalnych i sztywnych. Części sztywne wprowadzały dodatkowe więzy kinematyczne, które były uwzględniane za pomocą metody mnożników Lagrange’a lub metody funkcji kary. Rozpatrywane obecnie układy charakteryzują się znacznie większą złożonością. Model składa się z licznego zbioru sztywnych elementów dyskretnych, które są połączone między sobą oraz z częściami dyskretyzowanymi za pomocą elementów skończonych. Możliwości wykorzystania rozwiniętego modelu sprzężonego są przedstawione szczegółowo w dalszej części niniejszej pracy.

## 2. Sformułowanie metody elementów skończonych

### Wstęp

Celem niniejszego rozdziału jest przedstawienie sformułowania metody elementów skończonych jako metody numerycznej dla rozwiązania nieliniowego zagadnienia ruchu ciała odkształcalnego. Przedstawione zostanie lokalne i wariacyjne sformułowanie problemu ruchu ciała odkształcalnego. Następnie zostanie wprowadzona przestrzenna procedura dyskretizacyjna. Podane zostaną najważniejsze założenia dla wybranych elementów skończonych stosowanych w niniejszej pracy. Jako następny etap rozwiązania problemu zostanie przedstawiona dyskretizacja czasowa i jawny schemat całkowanie równań MES względem czasu. Zaprezentowane sformułowania teoretyczne są podstawą algorytmów numerycznych implementowanych we własnym programie numerycznym.

### 2.1 Definicja problemu ruchu ciała odkształcalnego



Rys. 2.1. Ruch ciała odkształcalnego

Przedmiotem rozważań będzie ruch ciała stałego  $\mathcal{B}$  (rys. 2.1) podlegającego odkształceniu w przedziale czasu od 0 do  $T$ . Ruch rozpatrujemy w przestrzeni euklidesowej  $E^{n_{sd}}$ , gdzie  $n_{sd} = 2$  lub  $3$ , z wprowadzonym kartezjańskim układem współrzędnych o jednostkowych wektorach bazowych  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, \dots, n_{sd}$ . Ciało  $\mathcal{B}$  w pewnej chwili  $t \in [0, T]$  zajmuje obszar  $(\Omega^t \cup \Gamma^t) \subset E^{n_{sd}}$ , gdzie  $\Gamma^t = \partial\Omega^t$  jest brzegiem obszaru  $\Omega^t$ .

Ciało poddane jest działaniu sił objętościowych  $\mathbf{b}$  oraz powierzchniowych  $\mathbf{t}$  na części brzegu  $\Gamma_\sigma^t$ . Na części brzegu  $\Gamma_u^t$  zadane są kinematyczne warunki brzegowe. Zakłada się przy tym, że  $\Gamma_\sigma^t \cap \Gamma_u^t = \emptyset$  oraz  $\bar{\Gamma}_\sigma^t \cup \bar{\Gamma}_u^t = \Gamma^t$ , gdzie  $\bar{\Gamma}_\sigma^t$  i  $\bar{\Gamma}_u^t$  oznaczają domknięcia zbiorów  $\Gamma_\sigma^t$  i  $\Gamma_u^t$ .

Współrzędne punktów materialnych w konfiguracji ciała w chwili  $t = 0$  (materialnej) zostaną oznaczone  $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = X_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}^0, \quad (2.1)$$

a współrzędne punktów materialnych w konfiguracji ciała w chwili  $t \in (0, T]$  (odkształconej lub przestrzennej) zostaną oznaczone przez  $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}^t, \quad (2.2)$$

gdzie  $\bar{\Omega}^0 = \Omega^0 \cup \Gamma^0$  i  $\bar{\Omega}^t = \Omega^t \cup \Gamma^t$ .

Ruch ośrodka ciągłego można opisywać na wiele różnych sposobów [208, 22, 181]. Podstawy opisu ośrodka ciągłego poddanego dużym przemieszczeniom i odkształceniom oraz podstawowe pojęcia i definicje w zakresie potrzebnym do wprowadzenia dyskretnych równań metody elementów skończonych do zagadnień nieliniowych są podane w dodatku A. W niniejszym rozdziale zostanie przyjęty opis materialny z aktualną konfiguracją przestrzenną (odkształconą) jako konfiguracją odniesienia, zwany uaktualnionym opisem lagrangeowskim.

Aczkolwiek w opisie tym konfiguracją odniesienia jest konfiguracja odkształcona, to ruch opisuje się poprzez odwzorowanie  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ , pola przemieszczenia  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ , prędkości  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$  i przyspieszenia  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{X}, t)$  będące funkcją współrzędnych materialnych  $\mathbf{X}$  [22]. Przemieszczenie  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  jest zdefiniowane jako:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.3)$$

a prędkość  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$  i przyspieszenie  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{X}, t)$  są odpowiednimi pochodnymi materialnymi:

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} = \dot{\mathbf{v}} \quad (2.5)$$

Dla opisu procesów fizycznych charakteryzujących ciało w ruchu wprowadza się zmienne w czasie pola odpowiednich wielkości skalarnych, wektorowych i tensorowych zdefiniowanych w obszarze i na brzegu danego ciała. Podstawowe definicje są podane w dodatku A.

## 2.2 Sformułowanie lokalne zagadnienia ruchu ciała odkształcalnego

Opis matematyczny ruchu ciała odkształcalnego prowadzi do zagadnienia brzegowo-początkowego, którego sformułowanie lokalne (mocne) w konfiguracji odkształconej jest dane przez następujący układ równań, por. [181],

- zasada zachowania masy

$$\rho(\mathbf{X}, t)J(\mathbf{X}, t) = \rho_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega^0, \quad t \in [0, T] \quad (2.6)$$

- równania ruchu (równania Cauchy'ego)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a}, \quad \mathbf{x} \in \Omega^t, \quad t \in [0, T] \quad (2.7)$$

- naprężeniowe warunki brzegowe

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma^t, \quad t \in [0, T] \quad (2.8)$$

- przemieszczeniowe warunki brzegowe

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u^t, \quad t \in [0, T] \quad (2.9)$$

- warunki początkowe

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}^0, \quad t = 0, \quad (2.10)$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością masy,  $J$  jest wyznacznikiem tensora gradientu deformacji  $\mathbf{F}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  tensorem naprężeń Cauchy'ego,  $\mathbf{n}$  jest wektorem normalnym do powierzchni  $\Gamma_\sigma$  skierowanym na zewnątrz ciała  $\Omega$ .

Celem analizy jest wyznaczenie pola przemieszczenia  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  spełniającego układ równań (2.7)–(2.10). Układ równań (2.7)–(2.10) musi być uzupełniony odpowiednim równaniem konstytutywnym pozwalającym wyznaczyć  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t)$ . Stosowane w niniejszej pracy modele konstytutywne są przedstawione w rozdziale 3.

## 2.3 Sformułowanie słabe zagadnienia ruchu ciała odkształcalnego

Sformułowanie słabe równoważne równaniom (2.7)–(2.9) ma następującą postać, por. [23]:

$$\int_{\Omega^t} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = \int_{\Omega^t} \rho(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma^t} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma, \quad (2.11)$$

gdzie  $\mathbf{u}$  jest dowolnym kinematycznie dopuszczalnym polem przemieszczenia,  $\delta\mathbf{u}$  jest jego wariacją (zwaną polem wirtualnego lub przygotowanego przemieszczenia), a  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$  wariacją tensora małych odkształceń zdefiniowanego równaniem (A.14) przy przyjętej wariacji pola przemieszczeń  $\delta\mathbf{u}$ . Równanie (2.11) wyraża zasadę prac przygotowanych, która określa warunek równowagi dynamicznej jako warunek równości prac przygotowanych sił wewnętrznych i zewnętrznych. Warunki brzegowe (2.8) i (2.9) są uwzględnione w równaniu (2.11) – warunki brzegowe przemieszczeniowe (2.9) poprzez założenie kinematycznej dopuszczalności pola  $\delta\mathbf{u}$ , a warunki brzegowe naprężeniowe (2.8) poprzez włączenie pracy przygotowanej obciążenia na brzegu do zewnętrznej pracy przygotowanej.

## 2.4 Dyskretyzacja przestrzenna równań ruchu

Forma słaba równań ruchu (2.11) stanowi wygodną bazę teoretyczną dla rozwinięcia sformułowania metody elementów skończonych w wersji przemieszczeniowej [138, 137]. Równania ruchu w metodzie elementów skończonych są najczęściej otrzymywane w postaci semidyskretnej poprzez wprowadzenie dyskretyzacji przestrzennej w słabym sformułowaniu zagadnienia ruchu.

Wyprowadzenie równań MES zostanie przedstawione w notacji macierzowej. Równanie (2.11) w notacji macierzowej można zapisać w następujący sposób:

$$\int_{\Omega'} \delta\mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega'} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega'} \delta\mathbf{u}^T \rho \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma'_g} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0, \quad (2.12)$$

gdzie tensor naprężenia Cauchy'ego i tensor małych odkształceń są reprezentowane przez wektory  $\boldsymbol{\sigma}$  i  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , które mają następujące składowe:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{13} \ \sigma_{23}\}^T \quad (2.13)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{12} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{23}\}^T. \quad (2.14)$$

Dokonyjemy dyskretyzacji przestrzennej objętości  $\Omega$  dzieląc ją na  $n_{el}$  nie pokrywających się elementów

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{e=n_{el}} \Omega_e \quad (2.15)$$

Zakładamy, że kinematycznie dopuszczalne pole przemieszczenia może być interpolowane jako



$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{r}_e, \quad \mathbf{x} \in \Omega_e, \quad (2.16)$$

gdzie  $\mathbf{N}$  jest macierzą funkcji interpolacyjnych (funkcji kształtu), a  $\mathbf{r}_e$  jest wektorem uogólnionych parametrów węzłowych. W ogólnym przypadku uogólnione parametry węzłowe mogą mieć charakter przemieszczeń lub innych wielkości np. obrotów. Zakłada się, że funkcje kształtu zapewniają kinematyczną dopuszczalność pola przemieszczenia (włącznie z ciągłością) dla dowolnych wartości uogólnionych parametrów węzłowych. Wariacja pola przemieszczenia jest dana wyrażeniem

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \delta \mathbf{r}_e, \quad \mathbf{x} \in \Omega_e. \quad (2.17)$$

Związek między liniowymi odkształceniami  $\boldsymbol{\varepsilon}$  i przemieszczeniami w notacji algebraicznej można zapisać jako

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u}, \quad (2.18)$$

gdzie  $\mathbf{L}$  jest macierzą-operatorem zdefiniowaną w następujący sposób

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Wariacje liniowego odkształcenia przy uwzględnieniu równań (2.18), (2.16) i (2.17) można zapisać w następującej postaci:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{r}_e, \quad \mathbf{x} \in \Omega_e, \quad (2.20)$$

gdzie macierz-operator  $\mathbf{B}$  jest dana wzorem

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N}. \quad (2.21)$$

Wstawiając zależności (2.16)–(2.20) do równania (2.12) zasadę prac przygotowanych dla układu dyskretyzowanego można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{e=n_{el}} (\delta \mathbf{r}_e)^T \left( \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_e \right) \ddot{\mathbf{r}}_e + \sum_{e=1}^{e=n_{el}} (\delta \mathbf{r}_e)^T \left( \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e \right) \\ & - \sum_{e=1}^{e=n_{el}} (\delta \mathbf{r}_e)^T \left( \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{b} d\Omega_e \right) - \sum_{e=1}^{e=n_{el}} (\delta \mathbf{r}_e)^T \left( \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_\sigma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma_e \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Równanie (2.22) można zapisać w następującej postaci

$$(\delta \mathbf{r})^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{F}^{\text{int}} - \mathbf{F}^{\text{ext}}) = 0, \quad (2.23)$$

gdzie wprowadzono definicje globalnej macierzy mas  $\mathbf{M}$ , globalnych wektorów uogólnionych parametrów (przemieszczeń) węzłowych  $\mathbf{r}$  oraz węzłowych sił zewnętrznych i wewnętrznych,  $\mathbf{F}^{\text{int}}$  i  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ , które otrzymuje się poprzez złożenie macierzy mas  $\mathbf{m}_e$  oraz odpowiednich elementowych wektorów  $\mathbf{r}_e$ ,  $\mathbf{f}_e^{\text{int}}$  i  $\mathbf{f}_e^{\text{ext}}$ :

$$\mathbf{r} = \bigvee_{e=1}^{e_{nel}} \mathbf{r}_e, \quad \mathbf{F}^{\text{int}} = \bigvee_{e=1}^{e_{nel}} \mathbf{f}_e^{\text{int}}, \quad \mathbf{F}^{\text{ext}} = \bigvee_{e=1}^{e_{nel}} \mathbf{f}_e^{\text{ext}}, \quad \mathbf{M} = \bigvee_{e=1}^{e_{nel}} \mathbf{m}_e, \quad (2.24)$$

gdzie  $\bigvee$  jest standardowym operatorem agregacji globalnych wektorów i macierzy (zob. [119]), a elementowy wektor sił wewnętrznych  $\mathbf{f}_e^{\text{int}}$ , elementowy wektor sił zewnętrznych  $\mathbf{f}_e^{\text{ext}}$  oraz elementowa macierz mas  $\mathbf{m}_e$  są dane następującymi wzorami:

$$\mathbf{f}_e^{\text{int}} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{f}_e^{\text{ext}} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{b} d\Omega_e + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_\sigma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma_e, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{m}_e = \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_e. \quad (2.27)$$

Równanie skalarnie (2.23) musi być spełnione dla dowolnych wariacji przemieszczeń węzłowych  $\delta \mathbf{r}$ , skąd wynika, że musi być spełniony następujący układ równań

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{F}^{\text{int}} - \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{0}, \quad (2.28)$$

lub, w innej postaci

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}^{\text{ext}} - \mathbf{F}^{\text{int}}. \quad (2.29)$$

Równania (2.28) lub (2.29) są dyskretyzowanymi przestrzennie równaniami ruchu (lub równowagi dynamicznej) będącymi podstawowymi równaniami stosowanej w niniejszej pracy metody elementów skończonych.

## 2.5 Dyskretne równania ruchu z uwzględnieniem tłumienia

Tłumienie można uwzględnić jako część wewnętrznych sił węzłowych lub wprowadzić je jawnie do równań ruchu (2.29) przez dodanie członu  $\mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}$  reprezentującego siły tłumienia

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}^{\text{ext}} - \mathbf{F}^{\text{int}}. \quad (2.30)$$

Macierz tłumienia  $\mathbf{C}$  może być przyjęta jako proporcjonalna do macierzy bezwładności  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{C} = \beta \mathbf{M} \quad (2.31)$$

Jest to szczególny przypadek tłumienia Rayleigha

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M}, \quad (2.32)$$

gdzie  $\mathbf{K}$  jest macierzą sztywności. Tłumienie zdefiniowane równaniem (2.31) jest otrzymane z wyrażenia (2.32) przez przyjęcie  $\alpha = 0$ , co fizycznie oznacza, że wyższe postacie drgań są słabo tłumione [49]. Z drugiej strony przyjęcie  $\beta = 0$  i  $\alpha \neq 0$  powodowałoby silne tłumienie wyższych częstości drgań. Chociaż macierz sztywności w sformułowaniu jawnym nie jest obliczana, implementacja pełnego tłumienia Rayleigha jest możliwa przy zastosowaniu następującej formuły:

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{F}^{\text{int}}}{\partial \mathbf{r}} \approx \frac{\Delta \mathbf{F}^{\text{int}}}{\Delta \mathbf{r}}. \quad (2.33)$$

## 2.6 Wybrane elementy skończone

### 2.6.1 Elementy bryłowe

W niniejszej pracy obszar ośrodka ciągłego jest dyskretyzowany za pomocą prostych elementów skończonych. W zagadnieniach dwuwymiarowych: osiowosymetrycznych, płaskiego stanu odkształcenia oraz płaskiego stanu naprężenia są stosowane 3-węzłowe i 4-węzłowe izoparametryczne elementy trójkątne i czworokątne. W zagadnieniach trójwymiarowych są stosowane 4-węzłowe i 8-węzłowe elementy czworokątne i sześciokątne.

Interpolację przemieszczeń (2.16) można zapisać w następujący sposób

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{r}_e = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i, \quad (2.34)$$

gdzie  $N_i$  oraz  $\mathbf{u}_i$  są odpowiednio funkcją kształtu i przemieszczeniem  $i$ -tego węzła,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n$  jest liczbą węzłów. W 3-węzłowych elementach trójkątnych wykorzystuje się liniowe funkcje kształtu

$$N_1 = \xi, \quad N_2 = \eta, \quad N_3 = 1 - \xi - \eta, \quad (2.35)$$

gdzie  $\xi$  i  $\eta$  są współrzędnymi powierzchniowymi, por. [315]. Element ten będzie nazywany w tej pracy Tr1 (*ang.* triangle – trójkąt). W 4-węzłowych izoparametrycznych elementach czworokątnych pole przemieszczenia dyskretyzuje się za pomocą biliniowych funkcji kształtu [315]:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i), \quad (2.36)$$

gdzie  $\xi_i$  i  $\eta_i$  są współrzędnymi naturalnymi w  $i$ -tym węźle o wartości  $\pm 1$ . Element ten będzie nazywany w tej pracy Q1 (*ang.* quadrilateral – czworokąt).

W 4-węzłowych elementach czworościennych stosuje się liniowe funkcje kształtu:

$$N_1 = \xi, \quad N_2 = \eta, \quad N_3 = \zeta, \quad N_4 = 1 - \xi - \eta - \zeta, \quad (2.37)$$

gdzie  $\xi$ ,  $\eta$  i  $\zeta$  są współrzędnymi objętościowymi, por. [315]. Element ten będzie nazywany w tej pracy Te1 (*ang.* tetrahedron – czworościan). W 8-węzłowych izoparametrycznych elementach sześciociennych pole przemieszczenia jest interpolowane za pomocą trójliniowych funkcji kształtu o następującej postaci [315]:

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)(1 + \zeta \zeta_i), \quad (2.38)$$

gdzie  $\xi_i$ ,  $\eta_i$  i  $\zeta_i$  są współrzędnymi naturalnymi dla  $i$ -tego węzła, przyjmującymi wartości  $\pm 1$ . Element ten będzie nazywany w tej pracy H1 (*ang.* hexahedron – sześciocian).

Proste liniowe elementy skończone charakteryzują się dużą efektywnością w analizie nieliniowej. Wadą ich jest mniejsza dokładność od elementów z funkcjami kształtu wyższego stopnia, jednak pożądaną dokładność rozwiązania można uzyskać stosując odpowiednio gęstą dyskretyzację w miejscach występowania dużych gradientów odkształcenia i naprężenia. Przedstawione w tym rozdziale sformułowanie metody elementów skończonych nazywa się sformulowaniem przemieszczeniowym, w którym dyskretyzuje się pola przemieszczenia i jego pochodnych. Zagadnienia odkształcenia charakteryzującego się całkowitą lub dużą nieściśliwością wymagają stosowania sformułowania mieszanego (hybrydowego) elementów skończonych, w których dyskretyzuje się pola przemieszczeń oraz pola ciśnienia hydrostatycznego lub odkształcenia. Sformułowania te zostaną przedstawione w rozdziale 5.

### 2.6.2 Element powłokowy bez obrotowych stopni swobody

Standardowe elementy skończone stosowane w modelowaniu powłok mają zazwyczaj przemieszczeniowe i obrotowe stopnie swobody [43]. Stopnie swobody o charakterze obrotowym sprawiają spore trudności w analizie problemów z dużymi obrotami – konieczne jest stosowanie specjalnych sformułowań [300].

W niniejszej pracy przedstawione zostanie sformułowanie trójkątnego elementu powłokowego bez stopni obrotowych, zwanego BST (*ang.* Basic Shell Triangle), którego wersja liniowa została opracowana w [211], a implementacja w nieliniowym sformułowaniu dynamicznym z jawnym całkowaniem równań ruchu względem czasu została zrealizowana przy współudziale autora [209, 210, 218]. Element BST jest prostym i efektywnym obliczeniowo elementem skończonym, a jednocześnie dającym dokładne wyniki w w skomplikowanych problemach nieliniowych takich jak zagadnienia tłoczenia blach.

Element BST jest oparty na założeniu kinematycznym Kirchhoffa dla powłok, zgodnie z którym prędkość odkształcenia w dowolnym punkcie powłoki  $\dot{\mathbf{e}} = \{\dot{\epsilon}_{xx}, \dot{\epsilon}_{yy}, 2\dot{\epsilon}_{xy}\}^T$  można wyrazić poprzez parametry definiujące prędkość odkształcenia powierzchni środkowej, które jest rozłożone na stan odkształcenia membranowego  $\dot{\mathbf{e}}^m = \{\dot{\epsilon}_{xx}^m, \dot{\epsilon}_{yy}^m, 2\dot{\epsilon}_{xy}^m\}^T$  oraz stan odkształcenia zgięciowego  $\dot{\mathbf{k}} = \{\dot{\kappa}_{xx}, \dot{\kappa}_{yy}, 2\dot{\kappa}_{xy}\}^T$ :

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{e}}^m + z\dot{\mathbf{k}}, \quad (2.39)$$

gdzie  $z$  jest odległością rozpatrywanego punktu powłoki od jej powierzchni środkowej mierzoną wzdłuż osi  $z$  lokalnego układu kartezjańskiego  $\mathbf{x} = \{xyz\}$ , zdefiniowanego na powierzchni środkowej w ten sposób, że osie  $x$  i  $y$  są styczne do powierzchni środkowej powłoki.

Sformułowanie elementu BST wprowadza dyskretyzację powierzchni środkowej powłoki trójwęzłowymi elementami trójkątnymi ze standardowymi liniowymi funkcjami kształtu  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{x}^{(e)}, \quad \mathbf{x} \in A^{(e)}, \quad (2.40)$$

gdzie  $\mathbf{x}^{(e)}$  jest wektorem współrzędnych węzłowych elementu,  $A^{(e)}$  jest obszarem elementu. Pole prędkości  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  wewnątrz elementu może być wyrażone w podobny sposób poprzez prędkości węzłowe  $\mathbf{v}^{(e)}$ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{v}^{(e)}, \quad \mathbf{x} \in A^{(e)}. \quad (2.41)$$

Prędkości odkształcenia membranowego można wyrazić w zależności od prędkości węzłowych w następujący sposób:

$$\dot{\mathbf{e}}^m = \mathbf{B}_m\mathbf{v}^{(e)}. \quad (2.42)$$

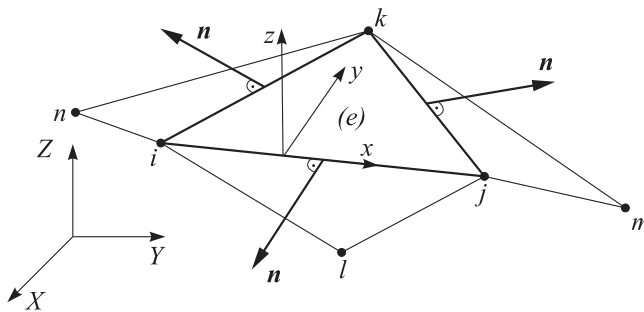
Liniowa interpolacja pola prędkości (2.41) daje stałą prędkość odkształcenia membranowego w elemencie. Macierz-operator  $\mathbf{B}_m$  jest tożsamy z macierzą dla elementu o stałym odkształceniu CST (*ang.* Constant Strain Triangle) [138]. Element powłokowy jest elementem mieszanym z niezależnym polem prędkości odkształcenia zgięciowego. Sformułowanie dla części zgięciowej wykorzystuje w sposób typowy dla metody objętości skończonych (*ang.* Finite Volume Method) [212] twierdzenie o dywergencji, z którego uzyskuje się następującą zależność dla prędkości odkształcenia zgięciowego

$$\int_{A^{(e)}} \dot{\kappa} \, dA = \int_{\Gamma^{(e)}} \mathbf{Q} \nabla v_z \, d\Gamma, \quad (2.43)$$

gdzie

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix}, \quad \nabla v_z = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_z}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad (2.44)$$

$v_z$  jest prędkością ugięcia powłoki (normalną do powierzchni środkowej),  $\Gamma^{(e)}$  jest brzegiem elementu,  $n_x$  i  $n_y$  są składowymi jednostkowego wektora normalnego do brzegu elementu wzdłuż osi lokalnych  $x$  i  $y$ , odpowiednio, por. rys. 2.2. Zastosowana



Rys. 2.2. Grupa sąsiadujących elementów definiująca element BST.

interpolacja pola prędkości odkształcenia zgięciowego  $\dot{\kappa}$  jest nieciągła na brzegach i stała wewnątrz elementu. Uwzględniając to założenie w równaniu (2.43) otrzymuje się

$$\dot{\kappa}^{(e)} = \frac{1}{A^{(e)}} \int_{\Gamma^{(e)}} \mathbf{Q} \nabla v_z \, d\Gamma. \quad (2.45)$$

Równanie (2.45) wyraża prędkości odkształcenia zgięciowego w funkcji gradientu prędkości ugięcia powłoki wzdłuż brzegów elementu. Całki wzdłuż brzegu elementu w równaniu (2.45) można obliczyć w sposób jawny przyjmując uśrednioną wartość gradientu prędkości wzdłuż brzegu elementu na podstawie wartości policzonych dla dwu sąsiadujących elementów. W wyniku tego uśrednienia prędkość odkształcenia zgięciowego w elemencie ( $e$ ) można przedstawić jako

$$\dot{\mathbf{k}}^{(e)} = \mathbf{B}_b \mathbf{v}^{(pe)}, \quad (2.46)$$

gdzie  $\mathbf{v}^{(pe)}$  jest wektorem prędkości węzłów grupy elementów pokazanych na rys. 2.2, składającej się z elementu ( $e$ ) i elementów sąsiednich

$$\mathbf{v}^{(pe)} = \{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \mathbf{v}_k \mathbf{v}_l \mathbf{v}_m \mathbf{v}_n\}^T. \quad (2.47)$$

Wstawiając wyrażenia (2.42) i (2.46) do równania (2.39) otrzymuje się prędkość odkształcenia w dowolnym punkcie powłoki w funkcji węzłowych prędkości przemieszczeniowych bez potrzeby stosowania węzłowych prędkości obrotowych. W ten sposób unika się wprowadzenia obrotowych stopni swobody.

## 2.7 Dyskretyzacja równań ruchu po czasie

Rozwiązanie zagadnienia dynamiki opisanego równaniem (2.30) z odpowiednimi warunkami początkowymi i brzegowymi polega na przeprowadzeniu całkowania tego równania względem czasu. Całkowanie względem czasu odbywa się w sposób przyrostowy, w którym odkształcone konfiguracje są wyznaczone dla kolejnych chwil  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots, T$ , gdzie  $t_1 = \Delta t_1$ ,  $t_n = t_{n-1} + \Delta t_n$ , a  $\Delta t_n$  jest długością kroku całkowania, a  $n$  jest numerem kroku całkowania.

### 2.7.1 Całkowanie niejawne równań ruchu

Schematy niejawne rozwiązania wykorzystują równanie (2.30) napisane dla nieznannej konfiguracji w chwili czasu  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ , dla której poszukuje się rozwiązania przy znanym rozwiązaniu w chwili  $t_n$ :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^{\text{ext}} - \mathbf{F}_{n+1}^{\text{int}}. \quad (2.48)$$

Po prawej stronie równania (2.48) znajduje się człon zależny od poszukiwanego rozwiązania  $\mathbf{r}_{n+1}$

$$\mathbf{F}_{n+1}^{\text{int}} = \mathbf{F}_{n+1}^{\text{int}}(\mathbf{r}_{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \quad (2.49)$$

Rozwiązanie równania (2.48) wymaga zastosowania odpowiedniej procedury iteracyjnej:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}_{n+1}^{(k+1)} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{F}_{n+1}^{\text{ext}} - \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{r}_{n+1}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}), \quad (2.50)$$

gdzie indeksy  $(k)$  i  $(k+1)$  określają kolejne iteracje.

Można stosować różne schematy iteracyjne w celu wyznaczenia rozwiązania. Zwykle niejawną procedurą rozwiązania wykorzystuje linearyzację wektora sił wewnętrznych wokół pewnego punktu, np. wokół stanu odkształcenia określonego poprzez  $\mathbf{r}_{n+1}^{(k)}$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{r}_{n+1}^{(k+1)}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k+1)}) &= \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{r}_{n+1}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}) + \frac{\partial \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{r}_{n+1}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)})}{\partial \mathbf{r}_{n+1}^{(k)}} \delta \mathbf{r}_{n+1}^{(k)} \\ &= \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{r}_{n+1}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}) + \mathbf{K}_{n+1}^{(k)} \delta \mathbf{r}_{n+1}^{(k)}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

gdzie

$$\mathbf{K}_{n+1}^{(k)} = \frac{\partial \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{r}_{n+1}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)})}{\partial \mathbf{r}_{n+1}^{(k)}}. \quad (2.52)$$

jest tzw. styczną macierzą sztywności. Przy uwzględnieniu równań (2.50) i (2.51) schemat iteracyjny Newtona–Raphsona można zapisać

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}_{n+1}^{(k+1)} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}_{n+1}^{(k+1)} + \mathbf{K}_{n+1}^{(k)} \delta \mathbf{r}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{F}_{n+1}^{\text{ext}} - \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{r}_{n+1}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}). \quad (2.53)$$

Z równania (2.53) wyznacza się iteracyjną poprawkę  $\delta \mathbf{r}_{n+1}^{(k)}$ , za pomocą której koryguje się rozwiązanie

$$\mathbf{r}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{r}_{n+1}^{(k)} + \delta \mathbf{r}_{n+1}^{(k)} \quad (2.54)$$

aż do uzyskania pożądanej zbieżności w równaniu (2.50).

Rozwiązanie równań (2.53) i (2.56) wymaga rozwiązania układu równań algebraicznych, co w przypadku symulacji dużych rzeczywistych problemów może wymagać bardzo długich czasów obliczeń. Niekiedy mogą się pojawić problemy ze zbieżnością procedury iteracyjnej. W symulacji zagadnień kontaktowych dodatkowym problemem jest zmiana aktywnych powierzchni kontaktu w trakcie iteracji. Tych wad nie mają procedury rozwiązania oparte na schematach jawnych.

Jeśli człony uwzględniające efekty inercyjne i lepkie w równaniu (2.30) są małe, można je zaniedbać otrzymując równanie równowagi quasi-statycznej. Równanie to zapisane dla nieznannej konfiguracji w chwili czasu  $t_{n+1}$  ma następującą postać:

$$\mathbf{F}_{n+1}^{\text{ext}} - \mathbf{F}_{n+1}^{\text{int}} = \mathbf{0}. \quad (2.55)$$



Warunek równowagi (2.55) jest podstawą niejawnego schematu rozwiązania zagadnienia quasi-statycznego. Podobnie jak w przypadku modelu dynamicznego niejawne rozwiązanie zagadnienia quasi-statycznego wymaga zastosowania procedury iteracyjnej, np. danej równaniem analogicznym do równania (2.53):

$$\mathbf{K}_{n+1}^{(k)} \delta \mathbf{r}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{F}_{n+1}^{\text{ext}} - \mathbf{F}_{n+1}^{\text{int}}(\mathbf{r}_{n+1}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}), \quad (2.56)$$

z którego wyznacza się iteracyjną poprawkę  $\delta \mathbf{r}_{n+1}^{(k)}$  służącą do otrzymania kolejnego przybliżenia rozwiązania zgodnie z równaniem (2.54). Iteracje prowadzi się do otrzymania rozwiązania spełniającego warunek (2.55) z pożądaną dokładnością.

### 2.7.2 Schemat jawny całkowania równań ruchu

Algorytmy jawnego całkowania wykorzystują postać dyskretnych równań ruchu (2.30) zapisanych dla znanej konfiguracji w chwili  $t_n$ :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}_n + \mathbf{C} \dot{\mathbf{r}}_n = \mathbf{F}_n^{\text{ext}} - \mathbf{F}_n^{\text{int}}. \quad (2.57)$$

Z równania (2.57) wyznacza się rozwiązanie dla następnej chwili  $t_{n+1} = t_n + \Delta t_{n+1}$ . Typowym algorytmem jawnego całkowania w czasie jest schemat różnic centralnych ze zmiennym krokiem całkowania:

$$\ddot{\mathbf{r}}_n = \mathbf{M}_D^{-1} (\mathbf{F}_n^{\text{ext}} - \mathbf{F}_n^{\text{int}} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{r}}_n), \quad \text{gdzie } \mathbf{M}_D = \text{diag } \mathbf{M}, \quad (2.58)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{n+1/2} = \dot{\mathbf{r}}_{n-1/2} + \ddot{\mathbf{r}}_n \Delta t_{n+1/2}, \quad \text{gdzie } \Delta t_{n+1/2} = \frac{1}{2}(\Delta t_n + \Delta t_{n+1}), \quad (2.59)$$

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \dot{\mathbf{r}}_{n+1/2} \Delta t_{n+1}. \quad (2.60)$$

Algorytm całkowania pozwala na stosowanie zmiennego kroku całkowania.

Model elementów skończonych może posiadać zarówno przemieszczeniowe, jak i obrotowe stopnie swobody. W przypadku obecności stopni swobody obydwu rodzajów konfiguracja odkształcona w chwili  $t_n$  jest określona przez przemieszczenia  $\mathbf{r}_n$  wszystkich węzłów oraz przez odpowiednie macierze obrotu określające położenie kątowe węzłów posiadających obrotowe stopnie swobody. W każdym kroku czasu oblicza się aktualne przyspieszenia i prędkości liniowe i kątowe, następnie przyrostowe przemieszczenia i obroty, które służą do uaktualnienia konfiguracji. Całkowanie równań ruchu obrotowego zostanie przedstawione dla metody elementów dyskretnych w rozdziale 7.

Macierz mas zdefiniowana równaniem (2.27) jest zwana macierzą konsystentną. Przy stosowaniu macierzy konsystentnej równania ruchu są sprzężone i całkowanie wymaga odwracania macierzy w każdym kroku całkowania. Zastąpienie macierzy

konsystentnej macierzą mas skupionych (diagonalną) daje bardzo duży wzrost efektywności rozwiązania – równania ruchu są rozprężone i nie ma potrzeby odwracania żadnej macierzy. Zastosowanie macierzy diagonalnej w niewielkim stopniu wpływa na rozwiązanie. Macierz konsystentna daje górne oszacowanie wartości własnych, macierz mas skupionych daje częstości drgań własnych, które są niższe niż częstości rzeczywiste [49]. Macierz mas skupionych może być otrzymana w różny sposób. Najprostszym sposobem jest równomierne rozłożenie masy elementu na definiujące go węzły – jest to sposób wystarczający dla prostych elementów, jak np. liniowy element trójkątny lub czworosienny.

### 2.7.3 Stabilność schematu całkowania równań ruchu

Schemat całkowania numerycznego równań ruchu względem czasu jest stabilny, jeśli przy dowolnych warunkach początkowych i braku obciążeń zewnętrznych, po dowolnie wielu krokach całkowania wszystkie przemieszczenia są ograniczone. Schemat jawny całkowania metodą różnic centralnych jest stabilny pod warunkiem, że krok całkowania  $\Delta t$  nie jest dłuższy niż pewien graniczny krok zwany krokiem krytycznym  $\Delta t_{cr}$

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{\max}}, \quad (2.61)$$

gdzie  $\omega_{\max}$  jest najwyższą częstością własną układu dyskretnego. Można dowieść, że najwyższa częstość układu dyskretnego elementów skończonych  $\omega_{\max}$  jest nie większa niż najwyższa z częstości drgań własnych pojedynczych elementów systemu  $\omega_{\max}^E$  [26]

$$\omega_{\max} \leq \omega_{\max}^E, \quad \text{gdzie} \quad \omega_{\max}^E = \max_{i,e} \omega_i^e, \quad i = 1, \dots, n_{dof}^e, \quad e = 1, \dots, n_E \quad (2.62)$$

$n_{dof}^e$  jest liczbą stopni swobody elementu, a  $n_E$  – liczbą elementów skończonych. Ograniczenie (2.62) pozwala oszacować najwyższą częstość całego układu wyznaczając częstości własne dla pojedynczych elementów. Dla prostych elementów wyrażenie na częstości własne można otrzymać w jawny sposób [119]. W innych przypadkach można ją oszacować za pomocą przybliżonych wzorów lub rozwiązać zagadnienie własne.

Równanie (2.61) jest prawdziwe przy założeniu zerowego tłumienia. Jeśli w układzie występuje tłumienie, krytyczny krok jest dany następującym wyrażeniem:

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{\max}} \left( \sqrt{1 + \xi^2} - \xi \right), \quad (2.63)$$

gdzie parametr  $\xi$ , określający wielkość tłumienia, stanowi stosunek wielkości występującego tłumienia do tłumienia krytycznego, dla drgań swobodnych o częstości  $\omega_{\max}$ .

### 2.7.4 Wady i zalety jawnych metod całkowania równań ruchu

Efektywność metod jawnych opiera się na możliwości użycia diagonalnej macierzy mas, dzięki czemu w kroku opisanym równaniem (2.58) nie ma potrzeby kosztownego numerycznie odwracania macierzy. W równaniach dyskretnych algorytmu jawnego zbędne jest konstruowanie globalnej macierzy sztywności, co zmniejsza zapotrzebowanie programów komputerowych na pamięć. Następną zaletą jawnego schematu całkowania względem czasu, zdefiniowanego równaniami (2.58)–(2.60), jest jego nieiteracyjny charakter, dzięki czemu nie występują problemy ze zbieżnością rozwiązania nieliniowego. Podstawową wadą metod jawnych jest ich warunkowa stabilność i spowodowane tym ograniczenie długości kroku całkowania, co prowadzi zazwyczaj do dużej liczby kroków potrzebnych do rozwiązania problemu. W przypadku dużych modeli numerycznych zalety metod jawnych najczęściej przeważają nad ich wadami, dzięki czemu programy oparte na jawnym całkowaniu równań ruchu chętnie są stosowane w analizie złożonych problemów inżynierskich, jak symulacja zderzeń pojazdów, czy symulacja tłoczenia blach.

### Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono podstawowe sformułowanie metody elementów skończonych wykorzystywane w niniejszej pracy. Przedstawiono sformułowanie teoretyczne zagadnienia ruchu ciała odkształcalnego. Wprowadzono równania opisujące zagadnienie ruchu w postaci lokalnej (silnej) i wariacyjnej (słabej). Przedstawiono procedurę dyskretyzacyjną prowadzącą do semidyskretnych równań ruchu w metodzie elementów skończonych. Przedstawiono podstawowe założenia elementów skończonych stosowanych w niniejszej pracy do dyskretyzacji obiektów trójwymiarowych oraz powłok. Do dyskretyzacji powłok w niniejszej pracy jest stosowany element BST posiadający tylko przemieszczeniowe stopnie swobody, co zapewnia dużą efektywność obliczeniową i czyni go odpowiednim do rozwiązywania dużych zagadnień. W końcowej części rozdziału omówiono jawne i niejawne schematy całkowania dyskretnych równań ruchu względem czasu. Szczególną uwagę zwrócono na cechy schematów jawnych, które są podstawą algorytmów numerycznych stosowanych w niniejszej pracy. Przedstawione sformułowania teoretyczne zostały implementowane we własnym programie numerycznym.

### 3. Wybrane modele konstytutywne kontinuum

#### Wstęp

Aczkolwiek wyprowadzone w rozdziale 2 równania ruchu nie wymagają żadnych założeń o związku konstytutywnym określającym naprężenia, analiza procesu deformacji ciała odkształcalnego wymaga uzupełnienia specyfikacji ruchu takiego ciała o odpowiednie związki konstytutywne. Ogólnie można stwierdzić, że związki konstytutywne wyrażają zależność między odkształceniem a naprężeniem, lub między ich prędkościami. W niniejszym rozdziale przedstawione są wybrane związki konstytutywne, wykorzystywane w modelowaniu zagadnień praktycznych przedstawionych w niniejszej pracy.

#### 3.1 Związki konstytutywne dla materiału sprężystego

Model materiału liniowo sprężystego opisuje z zadowalającą dokładnością zachowanie różnych materiałów, w tym skał i metali, w zakresie małych odkształceń. Wiele materiałów, np. elastomery, zachowuje się nieliniowo sprężyste w zakresie dużych odkształceń.

Można wyodrębnić dwie ogólne koncepcje sformułowania modeli materiału sprężystego:

- model hiposprężysty,
- model hipersprężysty.

Obydwa podejścia są również wykorzystane do opisu efektów sprężystych w implementowanych modelach materiału sprężysto-plastycznego.

##### 3.1.1 Hiposprężyste modele konstytutywne

Hiposprężysty związek konstytutywny w ogólności jest pewną funkcją określającą związek między dowolną obiektywną miarą prędkości naprężenia  $\dot{\sigma}$  a tensorem prędkości deformacji  $d$  zdefiniowanym przez równanie (A.23)<sub>2</sub>

$$\dot{\sigma} = f(\sigma, d). \quad (3.1)$$

Dla szerokiej klasy materiałów hiposprężystych można przyjąć zależność liniową:

$$\dot{\sigma} = \bar{C} : d, \quad (3.2)$$

gdzie  $\bar{\mathbf{C}}$  jest tensorem czwartego rzędu o składowych będących stycznymi modułami sprężystymi.

Możliwe są różne definicje obiektywnych pochodnych naprężenia. Jedną z możliwych definicji jest pochodna stosowana w sformułowaniu modelu hiposprężystego w niniejszej pracy pochodna Jaumanna-Zaremby  $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$  (np. [18, 267])

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (3.3)$$

Stosując pochodną Jaumanna-Zaremby  $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$  związek konstytutywny (3.2) może być zapisany jako

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^J : \mathbf{d}. \quad (3.4)$$

Dla materiału izotropowego tensor stycznych modułów sprężystych  $\mathbf{C}^J$  można wyrazić przez stałe Lamégo  $\lambda$  i  $\mu$

$$\mathbf{C}^J = \lambda \mathbf{1}\mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I}, \quad (3.5)$$

gdzie  $\mathbf{1}$  i  $\mathbf{I}$  są odpowiednio tensorami jednostkowymi drugiego i czwartego rzędu.

### 3.1.2 Związki konstytutywne dla materiału hipersprężystego

Materiałem hipersprężystym jest nazywany materiał posiadający pewien potencjał sprężysty, który jest gęstością energii wewnętrznej będącą skalarną funkcją wybranych tensora odkształcenia. Potencjał sprężysty może być wyrażony jako funkcja różnych miar odkształcenia, np. tensora odkształcenia Greena-Lagrange'a  $\mathbf{E}$ , tensora odkształcenia Almansiiego, albo tensora gradientu deformacji  $\mathbf{F}$ . Dla materiału hipersprężystego naprężenia otrzymuje się przez różniczkowanie potencjału sprężystego, w konfiguracji przestrzennej mamy

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3.6)$$

a w konfiguracji materialnej

$$\mathbf{S} = \rho_0 \frac{\partial \bar{\psi}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \quad \text{lub} \quad \mathbf{T} = \rho_0 \frac{\partial \tilde{\psi}(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}. \quad (3.7)$$

Wychodząc ze związków hipersprężystych (3.6) lub (3.7) uzyskuje się równanie dla materiału hiposprężystego (3.2). Odwrotne przekształcenie w ogólnym przypadku może być niemożliwe, ponieważ nie dla wszystkich materiałów istnieje potencjał sprężysty.

### 3.2 Dekompozycja odkształceń sprężysto-plastycznych

W klasycznej teorii plastyczności postuluje się addytywny rozkład wybranej miary odkształcenia sprężysto-plastycznego ośrodka ciągłego. Green i Naghdi postulowali addytywny rozkład tensora odkształcenia Greena-Lagranga na część sprężystą i plastyczną

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p. \quad (3.8)$$

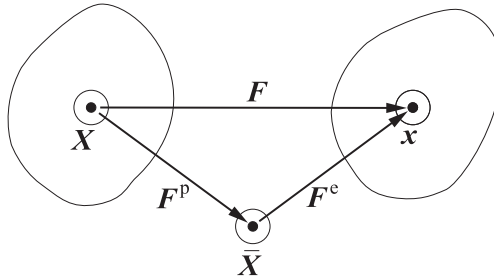
W modelach hiposprężysto-plastycznych postuluje się addytywny rozkład tensora prędkości deformacji  $\mathbf{d}$

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p. \quad (3.9)$$

W ślad za Lee [165] przyjmuje się obecnie zazwyczaj, że najbardziej ogólną formą dekompozycji odkształceń sprężysto-plastycznych na część sprężystą i plastyczną jest mультыplikatywny rozkład tensora gradientu deformacji

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{X}}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p. \quad (3.10)$$

Z fenomenologicznego punktu widzenia  $\mathbf{F}^{e-1}$  jest interpretowany jako tensor definiujący odkształcenie związane z odcieżeniem materiału – wprowadza się beznapięzeniową konfigurację odcieżoną (rys. 3.1). Odkształcenie definiujące przejście między



Rys. 3.1. Mультыplikatywny rozkład tensora gradientu deformacji.

konfiguracją odniesienia (materialną) i konfiguracją odcieżoną jest zdefiniowane przez plastyczny tensor deformacji  $\mathbf{F}^p$

$$\mathbf{F}^p = \mathbf{F}^{e-1} \cdot \mathbf{F}. \quad (3.11)$$

Konfiguracja odcieżona oznaczona przez  $\bar{\mathbf{X}}$  jest zdefiniowana lokalnie, tylko w pewnym otoczeniu rozpatrywanego punktu materialnego. Ponadto konfiguracja ta nie jest

zdefiniowana jednoznacznie, istnieje nieskończenie wiele takich konfiguracji różniących się między sobą o dowolny obrót ciała sztywnego.

### 3.3 Model materiału hiposprężysto-plastycznego z anizotropią właściwości plastycznych

W programie numerycznym implementowano model materiału hiposprężysto-plastycznego dla powłoki dyskretyzowanej elementem BST, opisanym w podrozdziale 2.6.2, z uwzględnieniem anizotropii właściwości plastycznych.

Model materiału hiposprężysto-plastycznego formułuje się zakładając hiposprężysty związek typu (3.2) dla części sprężystej tensora prędkości odkształcenia i uzupełniając odpowiednimi warunkami i prawami. Hiposprężysto-plastyczny model materiału jest zdefiniowany przez następujący ogólny układ równań:

- Addytywny rozkład tensora prędkości odkształcenia  $\mathbf{d}$  postulowany równaniem (3.9).
- Hiposprężyste równanie konstytutywne (założono pochodną Jaumanna)

$$\overset{\vee}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \mathbf{d}^e. \quad (3.12)$$

- Warunek uplastycznienia

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0, \quad (3.13)$$

gdzie  $\mathbf{q}$  oznacza wektor parametrów wewnętrznych.

- Prawo płynięcia

$$\mathbf{d}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (3.14)$$

jeśli  $\Phi = f$ , mamy do czynienia ze stowarzyszonym prawem płynięcia.

- Prawo umocnienia

$$\dot{\mathbf{q}} = -\dot{\gamma} \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}). \quad (3.15)$$

- Warunki obciążenia/odciążenia (warunki Kuhna-Tuckera)

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0, \quad \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (3.16)$$

z warunkiem konsystencji

$$\dot{\gamma} \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0. \quad (3.17)$$

W sformułowaniu omawianego modelu tensor prędkości deformacji  $\mathbf{d}$  jest tożsamy z tensorem  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  obliczanym z równania (2.39). Addytywny rozkład tensora prędkości deformacji na część sprężystą i plastyczną można zapisać w postaci<sup>1</sup>:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p. \quad (3.18)$$

Model jest sformułowany dla powłoki, dla której przyjęto hipotezę Kirchhoffa-Love'a. Pozwala to założyć, że w każdym punkcie powłoki panuje płaski stan naprężenia z trzema niezerowymi składowymi tensora naprężenia,  $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^T$ . Dla opisu deformacji powłoki przyjęto lokalny układ współrzędnych kartezjańskich  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}^T$ , którego osie  $x_1$  i  $x_2$  leżą w płaszczyźnie powłoki. Odpowiadający równaniu (3.12) hiposprężysty związek konstytutywny

$$\overset{\vee}{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{C}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \quad (3.19)$$

wiąże przyjętą pochodną obiektywną tensora naprężenia z trzema składowymi części sprężystej tensora prędkości deformacji  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \{\dot{\varepsilon}_{11}^e, \dot{\varepsilon}_{22}^e, 2\dot{\varepsilon}_{12}^e\}^T$ . Macierz  $\bar{\mathbf{C}}$  jest tensorem modułów sprężystych dla płaskiego stanu naprężenia uwzględniającym założenie o zerowych naprężeniach normalnych do powierzchni środkowej powłoki ( $\sigma_{33} = 0$ ).

W modelu przyjęto anizotropowy warunek uplastycznienia Hilla z r. 1948 [111] przy założeniu anizotropii normalnej. Założono, że w rozpatrywanych przykładach właściwości materiału powłoki w jej płaszczyźnie stycznej można uznać za niezależne od kierunku, natomiast są one znacząco różne od właściwości w kierunku poprzecznym (normalnym) do powierzchni powłoki. W modelu założono ponadto izotropowe wzmocnienie z efektywnym odkształceniem plastycznym  $\bar{\varepsilon}^p$  jako parametrem wewnętrznym ( $\mathbf{q} = \{\bar{\varepsilon}^p\}$ ).

Odpowiadające tym założeniom kryterium Hilla ma następującą postać [111]:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p) = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \frac{2\bar{R}}{1+\bar{R}}\sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{2(1+\bar{R})}{1+\bar{R}}\sigma_{12}^2} - \sigma_{pl}(\bar{\varepsilon}^p) = 0 \quad (3.20)$$

$\bar{R}$  jest średnim współczynnikiem Lankforda wyznaczonym według wzoru

$$\bar{R} = \frac{R_0 + 2R_{45} + R_{90}}{4} \quad (3.21)$$

$R_0$ ,  $R_{45}$  i  $R_{90}$  są współczynnikami Lankforda dla kierunków określonych kątami  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $90^\circ$  względem kierunku walcowania blachy. Dla materiału izotropowego, gdy  $\bar{R} = 1$ , warunek Hilla (3.20) jest tożsamy z warunkiem Hubera-Misesa.

<sup>1</sup>W dalszej części podrzdziału zostanie zastosowana notacja algebraiczna.



Naprężenie uplastyczniające  $\sigma_{pl}$  jest funkcją efektywnego odkształcenia plastycznego  $\bar{\varepsilon}^P$ . W implementowanym modelu funkcję tę można aproksymować przez:

- krzywą z liniowym umocnieniem

$$\sigma_{pl}(\bar{\varepsilon}^P) = \sigma_{Y0} + H\bar{\varepsilon}^P, \quad (3.22)$$

gdzie  $H$  jest modułem wzmocnienia;

- krzywą potęgową Ludwika-Nadaia

$$\sigma = K(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^P)^n, \quad (3.23)$$

gdzie  $K$ ,  $n$  i  $\varepsilon_0$  są stałymi materiałowymi;

- krzywą łamaną daną przez zbiór  $N$  punktów  $(\sigma_{pl_i}, \bar{\varepsilon}_i^P)$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Część plastyczną prędkości odkształcenia wyznacza się na podstawie stowarzyszonego prawa plastycznego płynięcia

$$\dot{\varepsilon}^P = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad (3.24)$$

gdzie  $\dot{\gamma}$  mnożnik plastycznego płynięcia, a  $f$  funkcja plastyczności określona równaniem (3.20), przy czym spełnione są warunki (3.16) i (3.17).

Prędkość odkształcenia wzdłuż grubości powłoki  $\dot{\varepsilon}_{33}$  nie wchodzi bezpośrednio do sformułowania. Można ją wyznaczyć w zależności od innych składowych, część sprężystą  $\dot{\varepsilon}_{33}^e$  ze związku

$$\dot{\varepsilon}_{33}^e = -\nu(\dot{\varepsilon}_{11}^e + \dot{\varepsilon}_{22}^e), \quad (3.25)$$

a część plastyczną  $\dot{\varepsilon}_{33}^P$  z warunku niezmienności objętości przy plastycznym płynięciu

$$\dot{\varepsilon}_{33}^P = -(\dot{\varepsilon}_{11}^P + \dot{\varepsilon}_{22}^P). \quad (3.26)$$

W symulacji tłoczenia blach można przyjąć, że odkształcenia sprężyste są pomijalnie małe w stosunku do występujących odkształceń plastycznych i zmianę grubości można wyliczać biorąc pod uwagę tylko warunek stałej objętości materiału (elementu).

Warunek uplastycznienia sformułowany przez Hilla w 1948 r. dobrze oddaje zachowanie materiału charakteryzującego się współczynnikami Lankforda większymi

od jedności i zawodzi w przypadku małych wartości tego współczynnika charakterystycznych np. dla aluminium. Aby usunąć wady warunku uplastycznienia Hill zaproponował kolejne udoskonalenia [113, 114, 115].

Jedną z trudności w implementacji numerycznej modelu hiposprężysto-plastycznego jest konieczność stosowania algorytmu całkowania naprężeń zachowującego obiektywność równania konstytutywnego. Uaktualnianie naprężeń wymaga całkowania w punkcie materialnym

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} dt, \quad (3.27)$$

przy czym należy uwzględnić definicję odpowiedniej pochodnej obiektywnej, np. (3.3) oraz różniczkowe równanie konstytutywne (3.2) dla wybranej pochodnej. Na podstawie równania (3.3) pochodna materialna, której należy użyć w równaniu (3.27) w notacji algebraicznej wyraża się w następujący sposób:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \overset{\vee}{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\sigma}, \quad (3.28)$$

gdzie  $\overset{\vee}{\boldsymbol{\sigma}}$  jest dane równaniem (3.19).

Istnieje wiele różnych algorytmów całkowania równania hipoplastycznego, które w przybliżeniu lub w pełni zachowują obiektywność [84]. Głównym problemem w tych algorytmach jest całkowanie obrotu naprężeń [121].

Ze względu na łatwość uaktualniania naprężeń w sformułowaniu modelu hiposprężysto-plastycznego dla elementu powłokowego wygodnie jest przyjąć współobrotowy (korotacyjny) układ współrzędny, obracający się zgodnie ze spinem  $\boldsymbol{\omega}$ . Pochodna Jaumanna  $\overset{\vee}{\boldsymbol{\sigma}}$  jest równoważna pochodnej względem czasu we współrzędnych korotacyjnych  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_R$ , por. [271]. Wobec tego całkowanie hiposprężystego równania konstytutywnego w układzie korotacyjnym może być przeprowadzone w uproszczony sposób:

$$\boldsymbol{\sigma}_{R_{n+1}} = \boldsymbol{\sigma}_{R_n} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_R dt, \quad (3.29)$$

gdzie wszystkie wielkości są wyrażone w układzie korotacyjnym. Stosując w równaniu (3.29) metodę punktu środkowego, naprężenia próbne w sprężystym predyktorze otrzymuje się z następującej zależności:

$$\boldsymbol{\sigma}_{R_{n+1}}^{TR} = \boldsymbol{\sigma}_{R_n} + (\bar{\mathbf{C}}\dot{\boldsymbol{\epsilon}})_{n+1/2} \Delta t_n. \quad (3.30)$$

Naprężenia próbne uzyskuje się, zakładając, że przyrost odkształcenia ma charakter sprężysty. Dla tak otrzymanych naprężeń próbnych sprawdza się warunek plastyczności

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{R_{n+1}}^{TR}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p) \leq 0 \quad (3.31)$$

biorąc funkcję plastyczności  $f$  daną równaniem (3.20). Jeśli warunek (3.31) jest spełniony przyjmuje się

$$\boldsymbol{\sigma}_{R_{n+1}} = \boldsymbol{\sigma}_{R_{n+1}}^{TR}, \quad (3.32)$$

w przeciwnym wypadku stosuje się do fazy plastycznego korektora, w którym sprowadza się naprężenia na powierzchnię plastyczności. W implementowanym algorytmie wykorzystano procedurę powrotu na powierzchnię plastyczności dla płaskiego stanu naprężenia rozwiniętą w [268].

### 3.4 Model materiału hipersprężysto-plastycznego

Kłopotliwego całkowania naprężeń można uniknąć w modelu sprężysto-plastycznym zakładając występowanie hipersprężystości. Algorytm numeryczny dla modelu hipersprężysto-plastycznego implementowany dla elementów bryłowych, przedstawionych w podrozdziale 2.6.1, jest oparty na sformułowaniu przedstawionym w [87, 88, 90, 89]. Sformułowanie to umożliwi analizę dużych sprężysto-plastycznych odkształceń materiału izotropowego przy założeniu, że część sprężysta odkształceń jest mała, co jest w pełni uzasadnione dla metali. Algorytm numeryczny został implementowany w postaci opracowanej w [87] dla materiałów ze wzmocnieniem liniowym i nieliniowym danym analitycznie oraz rozszerzony przez autora dla krzywej umocnienia danej przez zbiór punktów.

W opisie dużych odkształceń sprężysto-plastycznych w modelu zakłada się modyfikacyjny rozkład tensora gradientu deformacji  $\mathbf{F}$  na część sprężystą  $\mathbf{F}^e$  i plastyczną  $\mathbf{F}^p$ , dany równaniem (3.10), wprowadzający beznaprężeniową konfigurację pośrednią. Podstawowe związki modelu definiuje się w konfiguracji pośredniej, a następnie transformuje się je do konfiguracji odkształconej lub oryginalnej.

W konfiguracji pośredniej, analogicznie do równań (A.12) i (A.13), definiuje się odpowiednie tensory odkształcenia,  $\bar{\mathbf{E}}^e$ ,  $\bar{\mathbf{E}}^p$  i  $\bar{\mathbf{E}}$

$$\bar{\mathbf{E}}^e = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{I}), \quad \text{gdzie} \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{F}^{eT} \cdot \mathbf{F}^e, \quad (3.33)$$

$$\bar{\mathbf{E}}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{p-1}), \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{b}^{p-1} = \mathbf{F}^{p-T} \cdot \mathbf{F}^{p-1}, \quad (3.34)$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{b}^{p-1}) \quad (3.35)$$

spełniające addytywną zależność

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}^e + \bar{\mathbf{E}}^p. \quad (3.36)$$

Stosując do tensorów  $\bar{\mathbf{E}}^e$ ,  $\bar{\mathbf{E}}^p$  i  $\bar{\mathbf{E}}$  operację *pull-back* z konfiguracji pośredniej na konfigurację oryginalną otrzymuje się odpowiednie tensory Greena-Lagrange'a: sprężysty, plastyczny i całkowity

$$\mathbf{E}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^p - \mathbf{I}), \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{C}^p = \mathbf{F}^{pT} \cdot \mathbf{F}^p, \quad (3.37)$$

$$\mathbf{E}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{C}^p), \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad (3.38)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (3.39)$$

spełniające zależność

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p. \quad (3.40)$$

Z kolei operacja *push-forward* na konfiguracje odkształconą, zastosowana do tensorów  $\bar{\mathbf{E}}^e$ ,  $\bar{\mathbf{E}}^p$  i  $\bar{\mathbf{E}}$ , daje odpowiednie tensory Almansięgo: sprężysty, plastyczny i całkowity

$$\mathbf{e}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{e-1}), \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{b}^{e-1} = \mathbf{F}^{e-T} \cdot \mathbf{F}^{e-1}, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{e}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{b}^{e-1} - \mathbf{b}^{-1}), \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{b}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}, \quad (3.42)$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}), \quad (3.43)$$

również związane addytywną zależnością

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p. \quad (3.44)$$

Związki addytywne zachodzą również dla odpowiednich tensorów prędkości odkształcenia w konfiguracji oryginalnej, pośredniej i odkształconej:

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\mathbf{E}}^p, \quad (3.45)$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{D}}^e + \bar{\mathbf{D}}^p, \quad (3.46)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p. \quad (3.47)$$

Tensory prędkości odkształcenia w konfiguracji oryginalnej  $\dot{\mathbf{E}}$ ,  $\dot{\mathbf{E}}^e$ ,  $\dot{\mathbf{E}}^p$  uzyskuje się jako pochodne materialne tensorów Greena-Lagrange'a  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}^e$ ,  $\mathbf{E}^p$ . W konfiguracji

pośredniej i odkształconej tensorzy  $\bar{\mathbf{D}}, \bar{\mathbf{D}}^e$  i  $\bar{\mathbf{D}}^p$  oraz  $\mathbf{d}, \mathbf{d}^e$  i  $\mathbf{d}^p$  uzyskuje się poprzez zastosowanie pochodnej Lie do tensorów odkształcenia  $\bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{E}}^e$  i  $\bar{\mathbf{E}}^p$  oraz  $\mathbf{e}, \mathbf{e}^e$  i  $\mathbf{e}^p$ :

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathcal{L}_v(\bar{\mathbf{E}}), \quad \bar{\mathbf{D}}^e = \mathcal{L}_v(\bar{\mathbf{E}}^e), \quad \bar{\mathbf{D}}^p = \mathcal{L}_v(\bar{\mathbf{E}}^p), \quad (3.48)$$

$$\mathbf{d} = \mathcal{L}_v(\mathbf{e}), \quad \mathbf{d}^e = \mathcal{L}_v(\mathbf{e}^e), \quad \mathbf{d}^p = \mathcal{L}_v(\mathbf{e}^p). \quad (3.49)$$

Związki kinematyczne dla odkształceń i prędkości odkształceń na dowolnej z trzech rozpatrywanych konfiguracji mogą być zdefiniowane na tej konfiguracji lub też uzyskane przez odpowiednią operację *pull back* lub *push forward*, zastosowaną do związków kinematycznych, wyprowadzonych dla jednej z dwóch pozostałych konfiguracji.

Podstawowe zależności konstytutywne również formułuje się w konfiguracji pośredniej [87, 88]. Postuluje się istnienie funkcji energii swobodnej  $\bar{\Psi}$

$$\bar{\Psi} = \bar{\Psi}^e(\bar{\mathbf{E}}^e) + \bar{\Psi}^p(\bar{\mathbf{Q}}), \quad (3.50)$$

gdzie  $\bar{\Psi}^e$  i  $\bar{\Psi}^p$  są częściami sprężystą i plastyczną energii swobodnej, a  $\bar{\mathbf{Q}}$  jest to zbiór odpowiednich parametrów wewnętrznych. Wprowadza się potencjał plastycznego płynięcia  $\bar{G}(\bar{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{E}}^e), \bar{\mathbf{Q}})$  oraz warunek plastyczności  $\bar{F}(\bar{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{E}}^e), \bar{\mathbf{Q}})$ . Na podstawie nierówności Clausiusa-Duhema

$$\bar{\mathbf{S}}: \bar{\mathbf{D}} - \dot{\bar{\Psi}} \geq 0 \quad (3.51)$$

można otrzymać wyrażenie na naprężenia analogiczne do równania (3.7):

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{\partial \bar{\Psi}^e(\bar{\mathbf{E}}^e)}{\partial \bar{\mathbf{E}}^e}. \quad (3.52)$$

W ogólnym przypadku postuluje się niestowarzyszone prawo płynięcia w postaci

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\mathbf{S}}}. \quad (3.53)$$

Model uzupełniony jest poprzez warunki obciążenia-odciążenia oraz prawo ewolucji parametrów wewnętrznych.

Wszystkie zależności konstytutywne można przetransformować do konfiguracji oryginalnej lub odkształconej [87], w szczególności funkcję energii swobodnej można wyrazić w konfiguracji odkształconej jako

$$\psi = \psi^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{b}^{e^{-1}}) + \psi^p(\mathbf{q}, \mathbf{b}^{e^{-1}}), \quad (3.54)$$

gdzie  $\mathbf{q}$  to odpowiednie zmienne wewnętrzne, a  $\mathbf{b}^{e^{-1}}$  jest lewym tensorem Fingera danym równaniem (3.41)<sub>2</sub>. Dla funkcji energii swobodnej w postaci (3.54) otrzymuje się wyrażenie na tensor naprężenia Kirchhoffa

$$\boldsymbol{\tau} = \rho_0 \frac{\partial \psi^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{b}^{e^{-1}})}{\partial \mathbf{e}^e}. \quad (3.55)$$

Do konfiguracji odkształconej można przetransformować potencjał plastyczny  $\bar{G}$  i funkcję plastycznego płynięcia  $\bar{F}$

$$\bar{G}(\bar{\mathcal{S}}, \bar{\mathbf{Q}}) = g(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}, \mathbf{b}^{e^{-1}}), \quad (3.56)$$

$$\bar{F}(\bar{\mathcal{S}}, \bar{\mathbf{Q}}) = f(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}, \mathbf{b}^{e^{-1}}). \quad (3.57)$$

Prawo plastycznego płynięcia w konfiguracji odkształconej ma następującą postać

$$\mathbf{d}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}}. \quad (3.58)$$

Kompletny opis modelu konstytutywnego jest zawarty w [87], zaś obszernie omówienie jest zamieszczone w [88, 90].

#### *Uproszczenie modelu dla małych odkształceń sprężystych*

Dla małych odkształceń sprężystych sprężysty tensor Fingera  $\mathbf{b}^{e^{-1}}$  jest w przybliżeniu równy tensorowi jednostkowemu, dlatego można go opuścić w równaniach (3.54)–(3.57). Układ równań definiujących uproszczony model w konfiguracji odkształconej jest następujący:

- addytywna dekompozycja tensora Almansięgo

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p, \quad (3.59)$$

- funkcja energii swobodnej

$$\psi = \psi^e(\mathbf{e}^e) + \psi^p(\mathbf{q}), \quad (3.60)$$

- hipersprężyste równanie konstytutywne

$$\boldsymbol{\tau} = \rho_0 \frac{\partial \psi^e(\mathbf{e}^e)}{\partial \mathbf{e}^e}, \quad (3.61)$$

- warunek plastyczności

$$f(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) = 0, \quad (3.62)$$

- stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia

$$\mathbf{d}^p = \mathcal{L}_v \mathbf{e}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \quad (3.63)$$

- prawo umocnienia

$$\mathcal{L}_v \mathbf{q} = -\dot{\gamma} \mathbf{h}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}), \quad (3.64)$$

- warunki obciążenia/odciążenia

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0. \quad \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0. \quad (3.65)$$

W modelu hipersprężystym nie ma potrzeby połączania się różniczkową postacią związku konstytutywnego, a więc obiektywność jest zapewniona automatycznie.

Dzięki temu, że odkształcenia sprężyste są małe, funkcję sprężystej energii swobodnej przyjęto w postaci

$$\psi^e = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{e}^e)^2 + \mu (\mathbf{e}^e : \mathbf{e}^e) \quad (3.66)$$

gdzie  $\lambda$  i  $\mu$  są stałymi Lamégo. Przy tej postaci potencjału sprężystego tensor naprężeń Kirchhoffa  $\boldsymbol{\tau}$  otrzymuje się z następującej zależności

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \psi(\mathbf{e}^e)}{\partial \mathbf{e}^e} = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{e}^e) + 2\mu \mathbf{e}^e \quad (3.67)$$

Założono warunek uplastycznienia Hubera-Misesa z izotropowym wzmocnieniem ( $\mathbf{q} = \{\bar{\epsilon}^p\}$ ):

$$f(\boldsymbol{\tau}, \bar{\epsilon}^p) = \sqrt{\frac{3}{2} \operatorname{dev}(\boldsymbol{\tau}) : \operatorname{dev}(\boldsymbol{\tau})} - \sigma_{pl}(\bar{\epsilon}^p) = 0, \quad (3.68)$$

gdzie  $\bar{\epsilon}^p$  jest efektywnym odkształceniem plastycznym. Model implementowano z trzema alternatywnymi krzywymi umocnienia, (i) z krzywą z umocnieniem liniowym daną równaniem (3.22), (ii) z krzywą z umocnieniem nieliniowym daną równaniem (3.23) i (iii) z krzywą zdefiniowaną przez zbiór punktów.

Część plastyczna energii swobodnej  $\psi^p$  dana jest równaniem

$$\psi^p = \frac{1}{2} H(\bar{\epsilon}^p)^2 \quad (3.69)$$

dla krzywej umocnienia danej równaniem (3.22) lub równaniem

$$\psi^p = \frac{K}{n+1} (a + \bar{\epsilon}^p)^n, \quad (3.70)$$

jeśli krzywa umocnienia dana jest równaniem (3.23).

### Implementacja numeryczna modelu

Algorytm numeryczny dla przedstawionego sformułowania modelu konstytutywnego wyznacza naprężenia i uaktualnia wszystkie zmienne dla przyrostowej zmiany konfiguracji odkształconej od  $\Omega^n$  w chwili  $t_n$  do  $\Omega^{n+1}$  w chwili  $t_{n+1}$ . W konfiguracji  $\Omega^n$ , zdefiniowanej przez tensor deformacji  $\mathbf{F}_n$ , znane są zmienne definiujące stan odkształcenia  $\mathbf{b}_n^{e-1}$  i  $\mathbf{q}_n$ . Znajomość sprężystego tensora Fingera  $\mathbf{b}^{e-1}$  wystarczy do zdefiniowania sprężystej części odkształcenia danej rozkładem moltiplikatywnym (3.10). W wyniku rozwiązania równania ruchu otrzymuje się przyrostowe pole przemieszczeń  $\Delta \mathbf{u}$ . Celem algorytmu jest wyznaczenie nowego tensora deformacji  $\mathbf{F}_{n+1}$  oraz uaktualnienie zmiennych  $\mathbf{b}^{e-1}$  i  $\mathbf{q}$ , co pozwoli wyznaczyć naprężenia w nowej konfiguracji  $\Omega_{n+1}$ .

Pole przyrostowych przemieszczeń  $\Delta \mathbf{u}$  pozwala wyznaczyć gradient deformacji  $\mathbf{f}$  dla odkształcenia przyrostowego

$$\mathbf{f} = \mathbf{I} + \nabla \cdot \Delta \mathbf{u}, \quad (3.71)$$

kóry z kolei umożliwia wyznaczenie tensora gradientu deformacji  $\mathbf{F}_{n+1}$  dla nowej konfiguracji  $\Omega^{n+1}$ :

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{F}_n. \quad (3.72)$$

Algorytm numeryczny uaktualnienia zmiennych stanu dla nowej konfiguracji składa się z dwóch etapów – sprężystego predyktora i plastycznego korektora. Na etapie sprężystego predyktora zakłada się, że plastyczne deformacje są zamrożone, tzn. tensor gradientu deformacji plastycznej się nie zmienia ( $\mathbf{F}_{n+1}^p = \mathbf{F}_n^p$ ). Przy liczeniu próbnego tensora gradientu deformacji sprężystej  $\mathbf{F}_{n+1}^{eTR}$  korzysta się z następującej zależności

$$\mathbf{F}_{n+1}^{eTR} = \mathbf{F}_{n+1} \cdot \left( \mathbf{F}_{n+1}^p \right)^{-1} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{F}_n \cdot \left( \mathbf{F}_n^p \right)^{-1} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{F}_n^e \quad (3.73)$$

otrzymanej z równania opisującego rozkład moltiplikatywny tensora gradientu deformacji (3.10). Wyrażenie (3.73) wykorzystuje się do wyznaczenia próbnego sprężystego tensora Fingera:

$$\mathbf{b}_{n+1}^{e-1 TR} = \mathbf{f}^{-T} \cdot \mathbf{b}_n^{e-1} \cdot \mathbf{f}^{-1}, \quad (3.74)$$

a następnie próbnego sprężystego tensora Almansiego

$$\mathbf{e}_{n+1}^{e TR} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{I} - \mathbf{b}_{n+1}^{e-1 TR} \right), \quad (3.75)$$



co pozwala policzyć próbne naprężenia  $\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{TR}$  z równania (3.67).

Rzeczywiste naprężenia wyznacza się w drugim etapie algorytmu numerycznego, plastycznym korektorze. Warunek plastyczności  $f \leq 0$  jest sprawdzony i przeprowadza się korekcję jeśli  $f \geq 0$ . Ostateczną wartość sprężystego tensora Fingera wyznacza się z zależności [87, 88]:

$$\mathbf{b}_{n+1}^e{}^{-1} = \mathbf{b}_{n+1}^{e-1}{}^{TR} + 2\lambda \mathbf{n}_{n+1}. \quad (3.76)$$

Człon  $2\lambda \mathbf{n}_{n+1}$  jest obliczany korzystając z niejawnego algorytmu. Po obliczeniu rzeczywistej wartości sprężystego tensora Fingera  $\mathbf{b}_{n+1}^e{}^{-1}$  wyznacza się ostateczną wartość sprężystego tensora Almansiego

$$\mathbf{e}_{n+1}^e = \frac{1}{2} \left( \mathbf{I} - \mathbf{b}_{n+1}^{e-1} \right) \quad (3.77)$$

oraz naprężenia  $\boldsymbol{\tau}_{n+1}$  z równania (3.67).

### 3.5 Modele konstytutywne dla polimerów

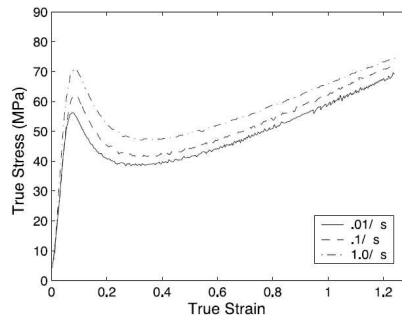
W niniejszej pracy analizowane jest kształtowanie opakowań z blachy stalowej pokrytej powłoką polimeru. Jako polimer stosuje się PET, czyli poli(tereftalan etylenu). W celu właściwej reprezentacji właściwości materiału implementowano specjalne modele sprężysto-lepkoplastyczne przeznaczone do modelowania polimerów.

Rysunek 3.2 przedstawia doświadczalne krzywe naprężenie–odkształcenie dla jednoosiowego ściskania PET dla różnych prędkości odkształcenia przy stałej temperaturze 25°C, zaczerpnięte z [69]. Widoczny jest wpływ prędkości odkształcenia na właściwości mechaniczne PET. Właściwości mechaniczne polimerów silnie zależą również od temperatury i ciśnienia (części kulistej tensora naprężenia) [292]. W niniejszej pracy założono, że zmiany temperatury w badanych procesach odkształcenia są stosunkowo niewielkie i temperatura jest traktowana jako zadany parametr.

PET jest semikrystalicznym polimerem o strukturze złożonej z frakcji amorficznej i krystalicznej. Własności polimeru zależą od stopnia krystalizacji. Wpływ temperatury uwidacznia się w przypadku polimeru amorficznego zwłaszcza przy przekraczaniu temperatury zeszklenia. Temperatura zeszklenia rozpatrywanego polimeru, amorficznego PET, wynosi ok. 80°C. Temperatura zeszklenia nie jest stała, zależy m.in. od ciśnienia hydrostatycznego. Procesy kształtowania opakowań z blachy powlekanej polimerem są projektowane w ten sposób, by proces odbywał się dla polimeru w stanie amorficznym poniżej temperatury zeszklenia.

Krzywe ściskania, przedstawione na rys. 3.2, są typowe dla polimeru amorficznego poniżej temperatury zeszklenia. Krzywe te posiadają wyraźną granicę plastyczności z

natychmiastowym osłabieniem, następnie występuje zakres stabilnego płynięcia oraz umocnienia materiału, związany z uporządkowaniem łańcuchów cząsteczek polimeru wzdłuż kierunku obciążenia.



Rys. 3.2. Doświadczalne krzywe naprężenie–odkształcenie dla jednoosiowego ściskania PET w temperaturze 25°C, według [69].

Istnieje wiele różnorodnych modeli konstytutywnych dla polimerów opartych na podejściu fenomenologicznym lub mikromechanicznym. Do najbardziej popularnych modeli fenomenologicznych należą modele zaproponowane przez Boyce i in. [36], Arrudę i Boyce [10], Arrudę i in. [11], ściśliwy model Leonova zaproponowany przez Tervoorta [280], oraz model sformułowany przez Bergströma i Boyce [29]. W niniejszej pracy zastosowano model Arrudy-Boyce [10] oraz ściśliwy model Leonova [280].

### 3.5.1 Model Arrudy-Boyce

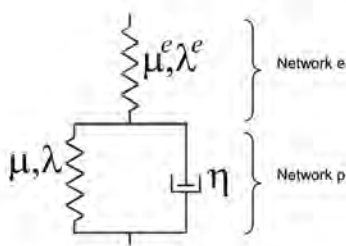
Złożone właściwości sprężysto-lepko-plastyczne polimerów reprezentuje się przez różnorodne złożone modele reologiczne, przedstawiane jako szeregowe i równoległe połączenia sprężyn i tłumików. Schemat reologiczny odpowiadający modelowi Arrudy-Boyce jest przedstawiony na rys. 3.3. Zbudowany jest on przez szeregowe połączenie sprężyny (e), reprezentującej zachowanie sprężyste, i elementu Kelvina-Voigta (p), reprezentującego własności reologiczne (plastyczne).

Opis dużych odkształceń niesprężystych wykorzystuje moltiplikatywny rozkład (3.10) tensora gradientu deformacji  $\mathbf{F}$  na część sprężystą  $\mathbf{F}^e$  i plastyczną  $\mathbf{F}^p$ .

Tensor naprężenia Cauchy'ego  $\boldsymbol{\sigma}$  jest wyznaczany z następującej zależności:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J^e} (2\mu^e \mathbf{E}^e + \lambda^e \text{tr}[\mathbf{E}^e] \mathbf{I}), \quad (3.78)$$

gdzie  $J^e = \det[\mathbf{F}^e]$ ,  $\mu^e$  i  $\lambda^e$  są stałymi Lamégo, a  $\mathbf{E}^e$  jest tensorem odkształcenia



Rys. 3.3. Schemat reologiczny modelu Arrudy-Boyce.

Hencky'ego, obliczanym przy wykorzystaniu rozkładu (3.10)

$$E^e = \ln[V^e] \quad (3.79)$$

$V^e$  jest lewym tensorem rozciągnięcia, otrzymanym przez rozkład polarny tensora  $F^e$ , por. równanie (A.6):

$$F^e = R^e \cdot U^e = V^e \cdot R^e. \quad (3.80)$$

Część plastyczna tensora prędkości deformacji jest dana następującym równaniem:

$$d^p = \frac{\dot{\gamma}^p}{\tau} \text{dev}[\sigma^*], \quad (3.81)$$

gdzie  $\tau$  jest zastępczym naprężeniem,

$$\tau = \sqrt{\text{dev}[\sigma^*] : \text{dev}[\sigma^*]}, \quad (3.82)$$

$\sigma^*$  jest naprężeniem sterującym plastycznym płynięciem:

$$\sigma^* = \sigma - \frac{1}{J^e} F^e \cdot \sigma^p \cdot F^{eT}, \quad (3.83)$$

gdzie  $\sigma^p$  jest naprężeniem w sprężynie modelującej umocnienie materiału. Prędkość plastycznego płynięcia

$$\dot{\gamma}^p = \dot{\gamma}_0 \exp \left[ \frac{-\Delta E^*}{k_B \theta} \left( 1 - \left( \frac{\tau}{s + \alpha_p p} \right)^{5/6} \right) \right] \quad (3.84)$$

$\Delta E^*$  – energia aktywacji plastycznego płynięcia dla stanu beznaprężeniowego,  $\dot{\gamma}_0$  – mnożnik prędkości plastycznego płynięcia,  $\alpha_p$  – parametr wrażliwości na ciśnienie,  $p$

– ciśnienie,  $s$  – wytrzymałość na ścinanie,  $k_B$  – stała Boltzmanna,  $\theta$  – temperatura bezwzględna. Osłabienie po uplastycznieniu jest uwzględnione przez przyjęcie równania ewolucji dla wytrzymałości na ścinanie  $s$

$$\dot{s} = h \left( 1 - \frac{s}{s_{ss}} \right) \dot{\gamma}^p, \quad s(0) = s_0, \quad (3.85)$$

$s_0$  – początkowa wytrzymałość na ścinanie,  $s_{ss}$  – końcowa wytrzymałość na ścinanie,  $h$  – moduł osłabienia. Naprężenia reprezentujące opór materiału w wyniku umocnienia przy dużych odkształceniach są wyznaczone przy zastosowaniu modelu nieliniowej sprężystości dla elastomerów [36, 10]:

$$\boldsymbol{\sigma}^p = \mu \operatorname{dev}[\mathbf{B}^p], \quad (3.86)$$

gdzie:

$$\mathbf{B}^p = \mathbf{F}^p \cdot \mathbf{F}^{pT} \quad (3.87)$$

$\mu$  jest modułem sprężystości nieliniowej obliczanym z następującego równania

$$\mu = \mu_R \left( \frac{\lambda_L}{3\lambda^p} \right) L^{-1} \left( \frac{\lambda^p}{\lambda_L} \right), \quad (3.88)$$

gdzie  $\mu_R$  i  $\lambda_L$  są stałymi materiałowymi,  $\mu_R$  ma charakter modułu, a  $\lambda_L$  jest pewnym charakterystycznym wydłużeniem zwanym blokującym (*ang.* locking),  $\lambda^p$  jest efektywnym (zastępczym) wydłużeniem

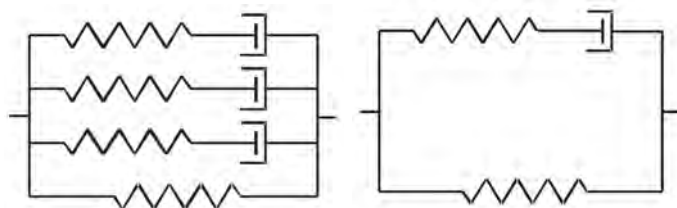
$$\lambda^p = \sqrt{\operatorname{tr}[\mathbf{B}^p]/3}, \quad (3.89)$$

a  $L(x)$  jest funkcją Langevina daną przez

$$L(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}. \quad (3.90)$$

### 3.5.2 Model ściśliwy Leonova

Uogólniony ściśliwy model Leonova jest zbudowany z pewnej liczby elementów Maxwella połączonych równolegle (rys. 3.4). Został on zaproponowany w [280] przez Tervoorta, który rozdzielił naprężenie w elemencie Maxwella na ciśnienie i część dewiatorową. Taki element został przez niego nazwany „elementem Leonova”, a cały model ściśliwym modelem Leonova. Wzmocnienie odkształceniowe materiału jest reprezentowane przez nieliniową sprężynę równoległą do elementów Leonova (rys.



Rys. 3.4. Schemat reologiczny modelu ściśliwego Leonova: a) z trzema elementami Leonova, b) z jednym elementem Leonova.

3.4). Uogólniony model Leonova może wymagać wyznaczenia wielu parametrów w zależności od liczby zastosowanych elementów Leonova. W wielu przypadkach wystarczy użyć jednego elementu Leonova z równoległą nieliniową sprężyną reprezentującą wzmocnienie odkształceniowe (rys. 3.4b). W takim przypadku tensor naprężenia Cauchy'ego  $\sigma$  można podzielić na naprężenie w elemencie Leonova  $\sigma^L$  i naprężenie reprezentujące wzmocnienie materiału  $\sigma^H$

$$\sigma = \sigma^L + \sigma^H \quad (3.91)$$

Do obliczenia naprężenia reprezentującego wzmocnienie materiału można stosować, podobnie jak w przypadku modelu Arrudy-Boyce, model wykorzystujący funkcję Langevina. Naprężenie w elemencie Leonova  $\sigma^L$  jest rozłożone z kolei na część spowodowaną odkształceniem objętościowym  $\sigma^v$  oraz część dewiatorową  $\sigma^d$

$$\sigma^L = \sigma^v + \sigma^d \quad (3.92)$$

Dewiator naprężenia  $\sigma^d$  jest naprężeniem sterującym płynięciem plastycznym, które jest opisane za pomocą nieniutonowskiego prawa

$$d^p = \frac{1}{2\eta} \sigma^d \quad (3.93)$$

z lepkością  $\eta$  obliczaną według równania

$$\eta = A\tau_0 \frac{(\tau_{eq}/\tau_0)}{\sinh(\tau_{eq}/\tau_0)}, \quad (3.94)$$

gdzie  $\tau_0$  jest stałą materiałową o charakterze naprężenia, a  $\tau_{eq}$  jest naprężeniem zastępczym

$$\tau_{eq} = \sqrt{\sigma^d : \sigma^d}. \quad (3.95)$$

Zmienna  $A$  jest obliczana z następującego równania:

$$A = A_0 \exp \left[ \frac{\Delta H}{RT} + \frac{\mu p}{\tau_0} - D \right], \quad (3.96)$$

gdzie  $A_0$  jest stałą materiałową,  $\Delta H$  – energią aktywacji,  $R$  – uniwersalną stałą gazową,  $\theta$  – absolutną temperaturą,  $p$  – ciśnieniem,  $\mu$  – parametrem wrażliwości na ciśnienie,  $D$  – parametrem osłabienia, którego zmiany określa następujące równanie ewolucji

$$\dot{D} = h \left( 1 - \frac{D}{D_\infty} \right) \dot{\gamma}_p \quad (3.97)$$

gdzie  $h$  jest modułem osłabienia,  $D_\infty$  – wartością graniczną parametru osłabienia,  $\dot{\gamma}_p$  – efektywną prędkością plastycznego płynięcia.

## Podsumowanie

W tym rozdziale przedstawiono sformułowania modeli konstytutywnych materiałów implementowanych przez autora w programie numerycznym i wykorzystywanych w modelowaniu zagadnień praktycznych. W pracy rozpatrywane są zagadnienia odkształcania metali, polimerów oraz skał. Przedstawione modele konstytutywne dla ośrodka ciągłego mogą być stosowane do opisu małych deformacji skał w zakresie sprężystym oraz dużych deformacji metali i polimerów w zakresie sprężystym i niesprężystym. W modelowaniu skał główny nacisk w tej pracy położono na wykorzystanie modelowania dyskretnego, dlatego nie wprowadzono zaawansowanych modeli konstytutywnych dla skał.

Na początku rozdziału omówiono zasady tworzenia modeli sprężystych w oparciu o założenie hipo- i hipersprężystości. Obydwie koncepcje są następnie wykorzystane w sformułowaniu modeli sprężysto-plastycznych. Założenie hiposprężystości wykorzystano w sformułowaniu modelu dla dużych odkształceń sprężysto-plastycznych metali, szczególnie kształtowanych blach. Model implementowano dla powłok dyskretyzowanych elementami BST. W modelu uwzględniono anizotropię normalną dla odkształceń plastycznych. Hipersprężystość założono w sformułowaniu modelu dla dużych odkształceń sprężysto-plastycznych metali. W opisie kinematyki dużych odkształceń wykorzystano moltiplikatywny rozkład tensora gradientu deformacji. Postać funkcji sprężystej energii swobodnej przyjęto zakładając, że część sprężysta odkształceń jest mała, co jest w pełni uzasadnione dla metali.

W końcowej części rozdziału przedstawiono sformułowania dwóch znanych z literatury modeli sprężysto-lepkoplastycznych dla polimerów, modelu Arrudy-Boyce i

ściśliwego modelu Leonova. Modele dobrze reprezentują właściwości reologiczne polimerów amorficznych poniżej temperatury zeszklenia. Będą one wykorzystywane do modelowania powłoki polimerowej blachy, nowoczesnego materiału stosowanego w przemyśle opakowań produktów spożywczych.

Poprawność implementacji i działania opisanych modeli konstytutywnych zostaną pokazane w przykładach zamieszczonych w następnych rozdziałach niniejszej pracy.

## 4. Ruch układu ciał odkształcalnych w zagadnieniu kontaktowym

### Wstęp

W wielu praktycznych zastosowaniach modelowanie warunków brzegowych wymaga uwzględnienia warunków kontaktu. Warunki kontaktu są dodatkowymi więzami w zagadnieniu ruchu ciała odkształcalnego. Zagadnienia kontaktowe są w dalszym ciągu istotnym przedmiotem badań, zarówno w dziedzinie sformułowań teoretycznych [265], jak i w dziedzinie numerycznych algorytmów [159, 302]. Celem obecnych prac badawczych nad zagadnieniami kontaktowymi jest formułowanie zaawansowanych modeli kontaktu uwzględniających różnorodne zjawiska fizyczne, jak tarcie, smarowanie, zużycie, generacja i wymiana ciepła, czy kohezja. Uwzględnienie fizycznej natury zjawisk w kontakcie prowadzi do modelowania kontaktu na poziomie mikroskopowym [272].

W niniejszej pracy sformułowano algorytm kontaktu pozwalający badać różne przypadki kontaktu, występujące w zintegrowanym modelu metody elementów skończonych i metody elementów dyskretnych. W zagadnieniu kontaktowym układu ciał odkształcalnych rozpatrywany będzie kontakt z tarciem. W metodzie elementów dyskretnych rozpatrywane będą bardziej złożone modele kontaktu, uwzględniające kohezję, generację i wymianę ciepła oraz zużycie.

W niniejszym rozdziale przedstawione uprzednio sformułowanie metody elementów skończonych zostanie rozszerzone na zagadnienie kontaktowe. Rozdział zawiera sformułowanie teoretyczne ciągłego zagadnienia kontaktowego, jego dyskretyzację oraz implementację w rozwijanym programie numerycznym.

### 4.1 Sformułowanie zagadnienia kontaktowego z tarciem

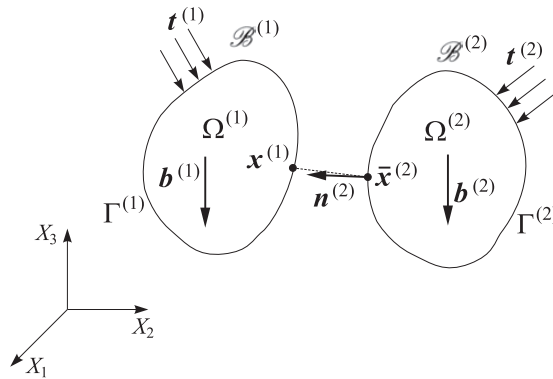
Rozpatrujemy układ składający się z dwóch<sup>1</sup> odkształcalnych ciał  $\mathcal{B}^{(1)}$  i  $\mathcal{B}^{(2)}$ , które mogą się ze sobą kontaktować<sup>2</sup> (rys. 4.1). Ciała podlegają odkształceniu w przedziale czasu  $[0, T]$ . Każde z dwóch ciał  $\mathcal{B}^{(a)}$ ,  $a = 1, 2$ , zajmuje w chwili  $t \in [0, T]$  obszar  $\bar{\Omega}^{(a)t}$  w przestrzeni euklidesowej  $E^{n_{sd}}$ , gdzie  $n_{sd} = 2$  lub  $3$ .  $\bar{\Omega}^{(a)t}$  jest domknięciem

---

<sup>1</sup>Dla uproszczenia ograniczam rozważania do układu dwóch ciał. Zagadnienie można łatwo uogólnić na kontakt wielu ciał.

<sup>2</sup>W prezentowanym sformułowaniu nie będzie rozpatrywane zagadnienie tzw. autokontaktu, w którym kontakt zachodzi między dwiema różnymi strefami brzegu tego samego ciała.





Rys. 4.1. Układ potencjalnie kontaktujących się ciał odkształcalnych.

zbioru otwartego  $\Omega^{(a)t}$ , którego brzeg  $\partial\Omega^{(a)t}$  oznaczmy przez  $\Gamma^{(a)t}$

$$\bar{\Omega}^{(a)t} = \Omega^{(a)t} \cup \Gamma^{(a)t}, \quad a = 1, 2. \quad (4.1)$$

Zakłada się, że w każdym punkcie brzegu ciała  $\Gamma^{(a)}$ ,  $a = 1, 2$ , można zdefiniować jednoznacznie jednostkowy wektor normalny do brzegu, skierowany na zewnątrz  $\mathbf{n}^{(a)}$ .

Położenie dowolnego punktu materialnego ciała  $\mathcal{B}^{(a)}$ ,  $a = 1, 2$ , rozpatrywane w inercyjnym kartezjańskim układzie odniesienia w konfiguracji materialnej, jest określone przez wektor  $\mathbf{X}^{(a)}$ , położenie punktu materialnego w konfiguracji odkształconej jest dane wektorem  $\mathbf{x}^{(a)}$ , a jego przemieszczenie – wektorem  $\mathbf{u}^{(a)}$

$$\mathbf{u}^{(a)}(\mathbf{X}^{(a)}, t) = \mathbf{x}^{(a)}(\mathbf{X}^{(a)}, t) - \mathbf{X}^{(a)}. \quad (4.2)$$

Zakłada się, że w początkowej chwili  $t = 0$  ciała  $\mathcal{B}^{(1)}$  i  $\mathcal{B}^{(2)}$  są rozłączne

$$\bar{\Omega}^{(1)0} \cap \bar{\Omega}^{(2)0} = \emptyset. \quad (4.3)$$

Kontakt mechaniczny zachodzi, gdy dwa ciała fizycznie oddziałują poprzez swoje powierzchnie brzegowe. Oznacza to, że zachodzi

$$\Gamma_c^t = \Gamma^{(1)t} \cap \Gamma^{(2)t} \neq \emptyset. \quad (4.4)$$

Wspólna część brzegów dwóch ciał  $\Gamma_c^t$  jest zwana powierzchnią kontaktu. Na części pozostałego brzegu  $\Gamma^{(a)t} \setminus \Gamma_c^t$ ,  $a = 1, 2$ , wyróżnimy część  $\Gamma_u^{(a)t}$ , na której są zadane przemieszczenia i  $\Gamma_\sigma^{(a)t}$ , podlegające zadanym obciążeniom. Podsumowując, brzeg  $\Gamma^{(a)t}$  składa się z części  $\Gamma_u^{(a)t}$ ,  $\Gamma_\sigma^{(a)t}$  i  $\Gamma_c^t$

$$\Gamma^{(a)t} = \bar{\Gamma}_u^{(a)t} \cup \bar{\Gamma}_\sigma^{(a)t} \cup \bar{\Gamma}_c^t. \quad (4.5)$$

Zakłada się ponadto, że części brzegu  $\Gamma_u^{(a)t}$ ,  $\Gamma_\sigma^{(a)t}$  i  $\Gamma_c^t$  są rozłączne

$$\Gamma_u^{(a)t} \cap \Gamma_\sigma^{(a)t} = \Gamma_\sigma^{(a)t} \cap \Gamma_c^t = \Gamma_u^{(a)t} \cap \Gamma_c^t = \emptyset. \quad (4.6)$$

Powierzchnia kontaktu zazwyczaj nie jest znana *a priori* – strefa kontaktu musi być znaleziona w każdej konfiguracji odkształconej. Do badania kontaktu wygodne jest wprowadzenie funkcji  $g$  określającej odstęp między dwoma ciałami mierzony od określonego punktu na powierzchni jednego z ciał

$$g(\mathbf{x}^{(1)}) = (\mathbf{x}^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)}) \cdot \mathbf{n}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}^{(2)}), \quad (4.7)$$

gdzie  $\mathbf{x}^{(1)} \in \Gamma^{(1)t}$  i

$$\bar{\mathbf{x}}^{(2)} \in \Gamma^{(2)t} : \quad \|\mathbf{x}^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)}\| = \min_{\mathbf{x}^{(2)} \in \Gamma^{(2)t}} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\|. \quad (4.8)$$

Definicja (4.8) określa, że punkt  $\bar{\mathbf{x}}^{(2)}$  jest punktem najbliższym położonym od rozpatrywanego punktu  $\mathbf{x}^{(1)}$  spośród wszystkich punktów powierzchni  $\Gamma^{(2)t}$ . Tak zdefiniowana funkcja musi być nieujemna

$$g(\mathbf{x}^{(1)}) \geq 0 \quad \text{dla} \quad \mathbf{x}^{(1)} \in \Gamma^{(1)t}, \quad (4.9)$$

w tym dla strefy kontaktu

$$g(\mathbf{x}^{(1)}) = 0 \quad \text{dla} \quad \mathbf{x}^{(1)} \in \Gamma_c^t, \quad (4.10)$$

a poza obszarem kontaktu

$$g(\mathbf{x}^{(1)}) > 0 \quad \text{dla} \quad \mathbf{x}^{(1)} \in \Gamma^{(1)t} - \Gamma_c^t. \quad (4.11)$$

W sformułowaniu ciągłym problemu kontaktu wystarczy ograniczyć penetrację punktów należących do brzegu jednego z ciał przez powierzchnię brzegową drugiego ciała, dlatego nie jest konieczne definiowanie funkcji  $g(\mathbf{x}^{(2)})$ .

Ograniczenia kontaktowe dotyczą również oddziaływania kontaktujących się ciał. Oddziaływanie  $\mathbf{t}_c$  jednego z ciał na drugie można rozłożyć na dwie składowe – normalną  $\mathbf{t}_n$  i styczną  $\mathbf{t}_s$  do powierzchni styku

$$\mathbf{t}_c = \mathbf{t}_n + \mathbf{t}_s = t_n \mathbf{n}^{(1)} + \mathbf{t}_s. \quad (4.12)$$

W standardowym sformułowaniu zagadnienia kontaktowego nie uwzględniającym sił adhezji (lub kohezji) oddziaływanie w kierunku normalnym do powierzchni styku ma

charakter nacisku. Przy przyjętym zwrocie wektora normalnego wartość nacisku jest niedodatnia w obszarze kontaktu

$$t_n \leq 0 \quad \text{dla} \quad \mathbf{x}^{(1)} \in \Gamma_c^t \quad (4.13)$$

i znika poza obszarem kontaktu

$$t_n = 0 \quad \text{dla} \quad \mathbf{x}^{(1)} \in \Gamma_u^{(1)t} - \Gamma_c^t. \quad (4.14)$$

Ograniczenia dla funkcji odstepu między ciałami i oddziaływania w kierunku normalnym można zebrać w następującej postaci [159, 302]:

$$g \geq 0, \quad t_n \leq 0, \quad t_n g = 0. \quad (4.15)$$

Warunki (4.15) są znane jako warunki Kuhna-Tuckera dla kontaktu w kierunku normalnym.

Oddziaływanie kontaktowe w kierunku stycznym  $\mathbf{t}_s$ , powodowane tarciem, przeciwdziała poślizgowi charakteryzowanemu przez względną prędkość w punkcie styku  $\mathbf{v}_s$ . Przyjmując  $g = 0$  i  $\dot{g} = 0$  prędkość poślizgu w punkcie  $\bar{\mathbf{x}}^{(2)}$  pokrywającym się z punktem  $\mathbf{x}^{(1)}$  jest dana równaniem

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}^{(2)}) - \mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}). \quad (4.16)$$

Zagadnienie tarcia można sformułować analogicznie do zagadnienia plastyczności z niestowarzyszonym prawem płynięcia [188]. Przy założonym modelu tarcia Coulomba zagadnienie tarcia można opisać przez następujący układ równań [160, 159, 265, 302]:

- funkcja poślizgu

$$\phi = \|\mathbf{t}_s\| - \mu |t_n|, \quad (4.17)$$

gdzie  $\mu$  oznacza współczynnik tarcia Coulomba,

- prawo poślizgu

$$\mathbf{v}_s = -\lambda \frac{\mathbf{t}_s}{\|\mathbf{t}_s\|}, \quad (4.18)$$

- warunki Kuhna-Tuckera określające warunki poślizgu, przylegania i wzajemnego wykluczania się przylegania i poślizgu

$$\phi \leq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \phi \lambda = 0. \quad (4.19)$$

Sformułowanie lokalne zagadnienia brzegowo-początkowego dla układu dwóch kontaktujących się ciał odkształcalnych  $\mathcal{B}^{(a)}$ ,  $a = 1, 2$ , dane jest przez układ równań (2.6)–(2.10), zapisanych dla układu dwóch ciał, uzupełniony o warunki kontaktu dane równaniami (4.15), (4.17)–(4.19):

$$\begin{aligned}
 \rho^{(a)}(\mathbf{X}^{(a)}, t) J(\mathbf{X}^{(a)}, t) &= \rho_0^{(a)}(\mathbf{X}^{(a)}), & \mathbf{X}^{(a)} &\in \Omega^{(a)0}, & t &\in [0, T], \\
 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(a)} + \rho^{(a)} \mathbf{b}^{(a)} &= \rho^{(a)} \mathbf{a}^{(a)}, & \mathbf{x}^{(a)} &\in \Omega^{(a)t}, & t &\in [0, T], \\
 \mathbf{n}^{(a)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(a)} &= \mathbf{t}^{(a)}, & \mathbf{x}^{(a)} &\in \Gamma_{\boldsymbol{\sigma}}^{(a)t}, & t &\in [0, T], \\
 \mathbf{u}^{(a)} &= \bar{\mathbf{u}}^{(a)}, & \mathbf{x}^{(a)} &\in \Gamma_u^{(a)t}, & t &\in [0, T], \\
 \mathbf{u}^{(a)} &= \mathbf{u}_0^{(a)}, \quad \mathbf{v}^{(a)} = \mathbf{v}_0^{(a)}, & \mathbf{X}^{(a)} &\in \bar{\Omega}^{(a)0}, & t &= 0, \\
 g &\geq 0, \quad t_n \leq 0, \quad t_n g = 0, & \mathbf{x}^{(1)} &\in \Gamma_c^t, & t &\in [0, T], \\
 \mathbf{v}_s &= -\lambda \frac{\mathbf{t}_s}{\|\mathbf{t}_s\|}, & \mathbf{x}^{(1)} &\in \Gamma_c^t, & t &\in [0, T], \\
 \phi &= \|\mathbf{t}_s\| - \mu |t_n| \leq 0, & \mathbf{x}^{(1)} &\in \Gamma_c^t, & t &\in [0, T], \\
 \lambda &\geq 0, \quad \phi \lambda = 0, & \mathbf{x}^{(1)} &\in \Gamma_c^t, & t &\in [0, T].
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

## 4.2 Zasada prac przygotowanych dla zagadnienia kontaktowego

Sformułowanie wariacyjne równoważne problemowi danemu układem równań i nierówności (4.20) ma postać dwóch sprzężonych nierówności wariacyjnych [279]. Gdy znana jest powierzchnia kontaktu  $\Gamma_c^t$  można napisać równanie wariacyjne, wyrażające zasadę prac przygotowanych dla układu dwóch ciał odkształcalnych, z uwzględnieniem pracy przygotowanej oddziaływania kontaktowego  $\delta W_c$  [159, 302]:

$$\begin{aligned}
 \sum_{a=1}^2 \left( \int_{\Omega^{(a)t}} \rho^{(a)} \ddot{\mathbf{u}}^{(a)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(a)} d\Omega + \int_{\Omega^{(a)t}} \boldsymbol{\sigma}^{(a)} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(a)} d\Omega - \int_{\Omega^{(a)t}} \rho \mathbf{b}^{(a)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(a)} d\Omega - \int_{\Gamma_s^{(a)t}} \mathbf{t}^{(a)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(a)} d\Gamma \right) \\
 - \underbrace{\sum_{a=1}^2 \left( \int_{\Gamma_c^t} \mathbf{t}_c^{(a)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(a)} d\Gamma \right)}_{\delta W_c} = 0,
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

gdzie  $\mathbf{t}_c^{(a)}$ ,  $a = 1, 2$ , są intensywnościami oddziaływania kontaktowego spełniającymi warunki kontaktowe, a  $\delta \mathbf{u}^{(a)}$ ,  $a = 1, 2$ , są wirtualnymi przemieszczeniami spełniającymi przemieszczeniowe warunki brzegowe.

Ostatni człon w równaniu (4.21), wyrażający pracę wirtualną sił kontaktu, można przekształcić w następujący sposób [159]:

$$\begin{aligned}
\delta W_c &= - \sum_{a=1}^2 \left( \int_{\Gamma_c^{(a)}} \mathbf{t}_c^{(a)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(a)} d\Gamma \right) = - \int_{\Gamma_c^{(1)}} \mathbf{t}_c^{(1)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(1)} d\Gamma - \int_{\Gamma_c^{(2)}} \mathbf{t}_c^{(2)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(2)} d\Gamma \\
&= - \int_{\Gamma_c^{(1)}} \mathbf{t}_c^{(1)} \cdot \left[ \delta \mathbf{u}^{(1)} \left( \mathbf{x}^{(1)} \right) - \delta \mathbf{u}^{(2)} \left( \bar{\mathbf{x}}^{(2)} \left( \mathbf{x}^{(1)} \right) \right) \right] d\Gamma \\
&= - \int_{\Gamma_c^{(1)}} (t_n \delta g + \mathbf{t}_s \delta \mathbf{u}_s) d\Gamma.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Równanie (4.21) wraz z dołączonymi warunkami kontaktowymi jest wygodną podstawą matematyczną dla budowania algorytmów numerycznych do analizy zagadnienia kontaktowego.

### 4.3 Dyskretyzacja przestrzenna zagadnienia kontaktowego

Wprowadzając dyskretyzację przestrzenną obszarów  $\Omega^{(1)}$  i  $\Omega^{(2)}$  zgodnie z równaniami (2.15) i (2.16), aproksymuje się powierzchnie brzegowe kontaktujących się ciał przez zbiór elementów skończonych, które mogą być krawędziami lub ścianami elementów skończonych dyskretyzujących wnętrza ciał:

$$\tilde{\Gamma}^{(a)} = \bigcup_{e=1}^{n_e^{(a)}} \Gamma_e^{(a)}, \tag{4.23}$$

gdzie  $\tilde{\Gamma}^{(a)}$  jest aproksymacją powierzchni  $\Gamma^{(a)}$ ,  $a = 1, 2$ , zaś  $n_e^{(a)}$  jest liczbą elementów użytych w aproksymacji. Powierzchnia ciała jest interpolowana za pomocą standardowych funkcji kształtu

$$\mathbf{x}^{(a)} = \sum_{i=1}^{n_{ns}} N_i(\mathbf{x}^{(a)}) \mathbf{x}_i^{(a)}, \quad \mathbf{x}^{(a)} \in \Gamma_e^{(a)}, \tag{4.24}$$

gdzie  $\Gamma_e^{(a)}$  jest powierzchnią pewnego elementu dyskretyzującego brzeg  $\Gamma^{(a)}$ ,  $a = 1, 2$ ,  $\mathbf{x}_i^{(a)}$  to współrzędne węzłów definiujących element skończony,  $N_i$  – funkcje kształtu,  $n_{ns}$  jest liczbą węzłów definiujących element skończony. W algorytmie implementowanym w niniejszej pracy powierzchnie kontaktowe są aproksymowane trójkątami lub czworokątami, a w zagadnieniach dwuwymiarowych dwuwęzłowymi segmentami liniowymi.

W sformułowaniu dyskretnym warunki kontaktowe określa się nieraz dla powierzchni aproksymowanych [160]. Najczęściej jednak warunki kontaktowe są określone tylko dla węzłów, co pozwala uniknąć całkowania po powierzchni kontaktu. Podejście to jest wykorzystywane w niniejszej pracy. Doświadczenie pokazuje, że przy

odpowiednio gęstej dyskretyzacji jest ono wystarczająco dokładne. Kontakt określa się badając położenie węzłów dyskretyzujących jedną z powierzchni względem aproksymacji drugiej powierzchni. W tym kontekście funkcja odstepu/penetracji (4.7) jest zdefiniowana dla danego węzła  $\mathbf{x}_s^{(1)}$

$$g(\mathbf{x}_s^{(1)}) = (\mathbf{x}_s^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)}) \cdot \mathbf{n}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}^{(2)}), \quad (4.25)$$

gdzie  $\mathbf{x}_s^{(1)} \in \mathcal{G}^{(1)}$  oraz

$$\bar{\mathbf{x}}^{(2)} \in \bar{\Gamma}^{(2)}: \quad \|\mathbf{x}_s^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)}\| = \min_{\mathbf{x}^{(2)} \in \bar{\Gamma}^{(2)}} \|\mathbf{x}_s^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\|, \quad (4.26)$$

gdzie  $\mathcal{G}^{(1)}$  jest skończonym zbiorem punktów dyskretyzujących powierzchnię  $\Gamma^{(1)}$ , a  $\bar{\mathbf{x}}^{(2)}$  jest najbliższym punktem na aproksymacji powierzchni  $\Gamma^{(2)}$ .

W sformułowaniu dyskretnym zagadnienia kontaktowego warunki (4.15) są zapisane dla każdego węzła ze zbioru  $\mathcal{G}^{(1)}$  w następującej postaci:

$$\bar{g}(\mathbf{x}_s^{(1)}) \geq 0, \quad F_n(\mathbf{x}_s^{(1)}) \leq 0, \quad F_n(\mathbf{x}_s^{(1)})\bar{g}(\mathbf{x}_s^{(1)}) = 0, \quad (4.27)$$

gdzie  $F_n(\mathbf{x}_s^{(1)})$  jest składową normalną całkowitej siły kontaktu  $\mathbf{F}_c^{(1)}$  działającej na węzeł  $\mathbf{x}_s^{(1)}$

$$\mathbf{F}_c^{(1)} = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_s = F_n \mathbf{n}^{(2)} + \mathbf{F}_s, \quad (4.28)$$

$\mathbf{F}_s$  – składowa styczna siły kontaktu,  $\mathbf{n}^{(2)}$  – jednostkowy wektor normalny do aproksymowanej powierzchni kontaktowej  $\Gamma^{(2)}$ . Siły kontaktu zastępują powierzchniowe oddziaływanie kontaktowe w pewnym otoczeniu węzła.

Spełnienie warunku (4.27)<sub>1</sub> w ogólnym przypadku nie wyklucza penetracji węzłów dyskretyzujących powierzchnię  $\Gamma^{(2)}$  przez aproksymację powierzchni  $\Gamma^{(1)}$ . W sformułowaniu dyskretnym warunek braku penetracji należy sprawdzić obustronnie, albo dopuścić pewną penetrację węzłów jednej z powierzchni.

W sformułowaniu dyskretnym zagadnienia kontaktowego warunki przylegania/poślizgu (4.17)–(4.19) są również określone dla węzłów:

$$\phi = \|\mathbf{F}_s\| - \mu |F_n|, \quad (4.29)$$

$$\mathbf{v}_s = -\lambda \frac{\mathbf{F}_s}{\|\mathbf{F}_s\|}, \quad (4.30)$$

$$\phi \leq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \phi \lambda = 0. \quad (4.31)$$

Całkowita praca przygotowania oddziaływania kontaktowego  $\delta W_c$  w sformułowaniu dyskretnym może być określona jako suma prac przygotowanych  $(\delta w_c)_i$  sił kontaktu w poszczególnych węzłach

$$\delta W_c = \sum_{i=1}^{n_c} (\delta w_c)_i \quad (4.32)$$

gdzie  $n_c$  jest liczbą węzłów znajdujących się w kontakcie w danej chwili.

Praca przygotowania sił kontaktu w jednym węźle  $\delta w_c$  może być wyznaczona z zależności analogicznej do równania (4.22)

$$\delta w_c = -\mathbf{F}_c^{(1)} \cdot (\delta \mathbf{u}^{(1)} - \delta \bar{\mathbf{u}}^{(2)}), \quad (4.33)$$

$\delta \mathbf{u}^{(1)}$  – przemieszczenia przygotowane badanego węzła, a  $\delta \bar{\mathbf{u}}^{(2)}$  – przemieszczenia przygotowane rzutu badanego węzła na aproksymowaną powierzchnię drugiego ciała.

Biorąc równanie (4.24) przemieszczenie przygotowane punktu  $\bar{\mathbf{x}}^{(2)}$  można zapisać w następującej postaci:

$$\delta \bar{\mathbf{u}}^{(2)} = \sum_{i=1}^{n_{ns}} N_i(\bar{\mathbf{x}}^{(2)}) \delta \mathbf{u}_i^{(2)} \quad (4.34)$$

Wstawiając (4.34) do (4.33) otrzymuje się

$$\delta w_c = \mathbf{F}_c^{(1)} \cdot \left( -\delta \mathbf{u}^{(1)} + \sum_{i=1}^{n_{ns}} N_i(\bar{\mathbf{x}}^{(2)}) \delta \mathbf{u}_i^{(2)} \right) \quad (4.35)$$

co można przedstawić jako

$$\delta w_c = \delta \mathbf{u}_c^T \mathbf{f}_c, \quad (4.36)$$

gdzie

$$\mathbf{u}_c = \{ \mathbf{u}^{(1)} \quad \mathbf{u}_1^{(2)} \quad \dots \quad \mathbf{u}_{n_{ns}}^{(2)} \}^T \quad (4.37)$$

$$\mathbf{f}_c = \{ -\mathbf{F}_c^{(1)} \quad N_1(\bar{\mathbf{x}}^{(2)}) \mathbf{F}_c^{(1)} \quad \dots \quad N_{n_{ns}}(\bar{\mathbf{x}}^{(2)}) \mathbf{F}_c^{(1)} \}^T. \quad (4.38)$$

Wstawiając zależności dyskretyzacyjne do równania (4.21), zasadę prac przygotowanych dla dyskretyzowanego zagadnienia kontaktowego można zapisać w następującej postaci, porównaj równanie (2.23):

$$(\delta \mathbf{r})^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{F}^{\text{int}} - \mathbf{F}^{\text{ext}} - \mathbf{F}^{\text{cont}}) = 0. \quad (4.39)$$

gdzie globalna macierz mas  $\mathbf{M}$ , globalne wektory uogólnionych przemieszczeń węzłowych  $\mathbf{r}$  oraz węzłowych sił zewnętrznych i wewnętrznych,  $\mathbf{F}^{\text{int}}$  i  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  są zdefiniowane równaniami (2.24)–(2.27), a globalny wektor sił oddziaływania kontaktowego otrzymany przez odpowiednią agregację wektorów oddziaływania kontaktowego związanych z kontaktem poszczególnych węzłów

$$\mathbf{F}^{\text{cont}} = \bigwedge_{i=1}^{n_{\text{nc}}} \mathbf{f}_i^c, \quad (4.40)$$

gdzie  $\mathbf{f}_i^c$  są dane równaniem (4.38),  $n_{\text{nc}}$  jest liczbą węzłów będących w kontakcie. Węzły znajdujące się w kontakcie są nieznanne *a priori* i muszą być wykrywane za pomocą procedury wykrywania kontaktu opisanej w rozdziale 10. Równanie (4.39) jest spełnione dla dowolnych przemieszczeń przygotowanych  $\delta\mathbf{r}$  spełniających kinematyczne warunki brzegowe, co daje nam następujący układ równań:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}^{\text{ext}} - \mathbf{F}^{\text{int}} + \mathbf{F}^{\text{cont}}. \quad (4.41)$$

Składowe wektora sił kontaktowych muszą spełniać warunki kontaktowe dane równaniami (4.27), (4.29) i (4.31).

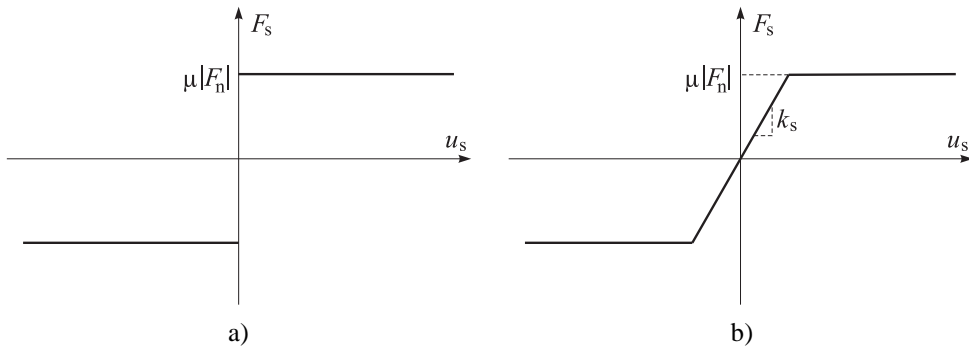
#### 4.4 Regularyzacja ograniczeń kontaktowych

Rozwiązanie zagadnienia ruchu opisanego równaniem (4.41) z ograniczeniami kontaktowymi (4.27), (4.29) i (4.31) może być uzyskane za pomocą następujących metod [159, 302]:

- nieoznaczonych mnożników (czynników) Lagrange’a,
- metody funkcji kary,
- rozszerzonej metody mnożników Lagrange’a (będącej kombinacją zwykłej metody mnożników Lagrange’a i metody funkcji kary).

W niniejszej pracy stosuje się metodę funkcji kary. W sformułowaniach jawnych metody elementów skończonych jest to metoda najczęściej stosowana ze względu na łatwość jej implementacji w jawnym schemacie rozwiązania równań ruchu. W metodzie funkcji kary ograniczenia kontaktu są spełnione tylko w sposób przybliżony, dopuszcza się nieznaczne naruszenie więzów. Metoda funkcji kary jest również metodą regularyzacji warunków kontaktowych, gdyż usuwa niejednoznaczność zależności oddziaływania kontaktowego od wielkości geometrycznych.





Rys. 4.2. Zależność siły tarcia od poślizgu: a) prawo Coulomba, b) regularyzowane prawo Coulomba.

Metoda funkcji kary dla kontaktu w kierunku normalnym sprowadza się do przyjęcia następującej zależności liniowej dla nacisku  $F_n$

$$F_n = k_n \bar{g}, \quad (4.42)$$

gdzie  $k_n$  jest parametrem kary. Warunek (4.27)<sub>2</sub> w dalszym ciągu obowiązuje, co oznacza, że zależność (4.42) jest określona tylko dla  $\bar{g} < 0$ . W ten sposób naruszone zostaje ograniczenie kinematyczne dla kontaktu w kierunku normalnym (4.27)<sub>1</sub>. Ujemny odstęp  $\bar{g}$ , który może wystąpić między kontaktującymi się ciałami, będzie nazwany penetracją. W interpretacji fizycznej metoda funkcji kary jest równoważna wstawieniu pomiędzy kontaktujące się ciała elementów sprężystych przeciwdziałających penetracji, parametr  $k_n$  jest sztywnością tych sprężyn.

Zastosowana regularyzacja ograniczeń kontaktowych (4.29)–(4.31) dla tarcia polega na dopuszczeniu poślizgu dla siły tarcia mniejszej od wartości granicznej. Może to być uzasadnione fizycznie jako uwzględnienie mikropoślizgów w obszarze kontaktów dla tarcia nierozwiniętego. Klasyczny model tarcia Coulomba można traktować jako analogię do modelu sztywno-idealnie plastycznego materiału, zaś regularyzowany model tarcia Coulomba można uznać jako analogiczny do sprężysto-plastycznego modelu materiału (rys. 4.2). Prędkość poślizgu  $\mathbf{v}_s$  może być rozłożona na część odwracalną (sprężystą)  $\mathbf{v}_s^{(el)}$  i nieodwracalną (plastyczną)  $\mathbf{v}_s^{(pl)}$

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_s^{(el)} + \mathbf{v}_s^{(pl)}. \quad (4.43)$$

Sprężysta część jest określana przy wykorzystaniu warunku

$$\mathbf{v}_s^{(el)} = \frac{\dot{\mathbf{F}}_s}{k_s} \quad \text{jeśli} \quad \phi < 0. \quad (4.44)$$

Widać z powyższego, że  $k_s$  spełnia rolę analogiczną do modułu Younga (rys. 4.2). Niesprężysta część prędkości poślizgu jest wyznaczona z wyrażenia (4.18), które teraz określa jedynie część niesprężystą prędkości poślizgu

$$\mathbf{v}_s^{(pl)} = \lambda \frac{\mathbf{F}_s}{\|\mathbf{F}_s\|} \quad \text{jeśli} \quad \phi = 0. \quad (4.45)$$

#### 4.5 Obliczanie sił oddziaływania kontaktowego

Dla węzłów, dla których stwierdza się istnienie kontaktu ( $\bar{g} < 0$ ), oblicza się składową normalną i styczną oddziaływania kontaktowego na podstawie związków przedstawionych w podrozdziale 4.4. Siłę oddziaływania w kierunku normalnym  $F_n$  oblicza się na podstawie równania (4.42). Wielkość penetracji węzłów naruszających ograniczenia kontaktowe zależy od wartości parametru kary  $k_n$ . Aby zminimalizować penetracje parametr kary powinien być możliwie duży, niemniej jednak zbyt duża wartość parametru kary może wpłynąć na zmniejszenie krytycznego kroku całkowania. Wartość parametru kary może być przyjęta na podstawie lokalnej sztywności kontaktujących się ciał, np. [103]. Parametr kary w implementowanym algorytmie kontaktu ustala się na podstawie kryterium stabilności dla układu masy  $m$  ze sprężyną o sztywności  $k_n$ . Masa jest masą skupioną w węźle będącym w kontakcie, a sztywność sprężyny reprezentuje parametr kary. Maksymalną wartość parametru kary ustala się tak by nie został zmniejszony krok całkowania całego układu dyskretnego  $\Delta t$ . Korzystając z równania (2.61) i uwzględniając częstość drgań własnych układu masy ze sprężyną

$$\omega = \sqrt{\frac{k_n}{m}}, \quad (4.46)$$

stabilny parametr kary jest dany przez nierówność

$$k_n \leq \frac{4m}{\Delta t^2}. \quad (4.47)$$

Przyjęty model jest ścisły dla przypadku kontaktu jednostronnego (kontaktu odkształcalnego ciała ze sztywną powierzchnią). Stanowi on również dobre oszacowanie dla kontaktu dwóch ciał odkształcalnych.

Analogia między modelem tarcia a modelem plastyczności pozwala nam zastosować algorytm wyznaczania siły tarcia analogiczny do wyznaczania naprężenia w materiale sprężysto-plastycznym. Schemat tego algorytmu jest przedstawiony poniżej.

(i) Obliczenie granicznej siły tarcia

$$F_s^{\max} = \mu |F_n|. \quad (4.48)$$

(ii) Obliczenie przyrostowego poślizgu

$$\Delta \mathbf{u}_{\text{slip}} = \mathbf{v}_s \Delta t. \quad (4.49)$$

(iii) Obliczenie próbnej siły tarcia

$$\mathbf{F}_s^* = \mathbf{F}_s^{\text{old}} + k_s \Delta \mathbf{u}_{\text{slip}}, \quad (4.50)$$

$$\mathbf{F}_s^{\text{trial}} = \mathbf{F}_s^* - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_s^*), \quad (4.51)$$

$\mathbf{F}_s^{\text{old}}$  jest siłą tarcia wyznaczoną w poprzednim kroku.

(iv) Obliczenie nowej siły tarcia

$$\mathbf{F}_s^{\text{new}} = \begin{cases} \mathbf{F}_s^{\text{trial}} & \text{dla } \|\mathbf{F}_s^{\text{trial}}\| \leq F_s^{\text{max}}, \\ F_s^{\text{max}} \frac{\mathbf{F}_s^{\text{old}}}{\|\mathbf{F}_s^{\text{old}}\|} & \text{dla } \|\mathbf{F}_s^{\text{trial}}\| > F_s^{\text{max}}. \end{cases} \quad (4.52)$$

## Podsumowanie

W niniejszym rozdziale zaprezentowano sformułowanie teoretyczne zagadnienia kontaktu z tarciami dla układu ciał odkształcalnych. Podano ograniczenia kontaktowe dla kontaktu bez tarcia oraz z tarciami. Przedstawiono sformułowanie lokalne i globalne zagadnienia kontaktowego. Sformułowanie globalne przedstawiono w postaci równania wyrażającego zasadę prac przygotowanych z dodatkowymi ograniczeniami. Przeprowadzono dyskretyzację przestrzenną typową dla metody elementów skończonych oraz dostosowano warunki kontaktowe do zagadnienia dyskretyzowanego. W rozwiązaniu numerycznym regularyzowano warunki kontaktowe stosując metodę funkcji kary. Przedstawiono algorytm numeryczny obliczania sił oddziaływania kontaktowego.

Przedstawione sformułowanie jest standardowym modelem kontaktu z tarciami stosowanym w modelowaniu metodą elementów skończonych. Bardziej zaawansowane modele kontaktu w metodzie elementów skończonych były tematem innych prac autora, np. [256, 257, 258]. Zagadnienie modelowania i analizy kontaktu przedstawiono stosunkowo obszernie, gdyż problem kontaktu jest ważnym elementem niniejszej pracy ze względu na przedstawione zastosowania praktyczne, np. tłoczenie blach, jak również ze względu na znaczenie modelowania kontaktu w metodzie elementów dyskretnych. W metodzie elementów dyskretnych model kontaktu zostanie rozszerzony na zagadnienie kontaktu z kohezją, wymiany ciepła oraz zużycia.

## 5. Sformułowanie metody elementów skończonych dla problemów z małą ściśliwością

### Wstęp

Nieściśliwość lub mała ściśliwość, występująca w procesach odkształcania niektórych materiałów, np. elastomerów, sprawia poważne trudności numeryczne w analizie metodą elementów skończonych. Mała ściśliwość jest również typowa dla sprężysto-plastycznego odkształcania metali przy małym ciśnieniu. Elementy skończone oparte na standardowym sformułowaniu przemieszczeniowym MES, przedstawionym w podrozdziale 2.4, ulegają tzw. blokadzie objętościowej (*ang.* volumetric locking), która przejawia się nadmierną sztywnością elementów na odkształcenia. Blokada objętościowa elementów przemieszczeniowych wynika z niemożności ścisłego opisanego przez funkcję kształtu elementu pola przemieszczeń, charakteryzującego się odkształceniem o niezmiennym objętości (izochorycznego) w całym elemencie [315, 119, 22].

Blokadę objętościową można wyeliminować stosując metodę elementów skończonych opartą na sformułowaniu mieszanym, w którym wprowadza się niezależną interpolację dla pola przemieszczenia i ciśnienia [315, 119]. Specjalne metody zredukowanego lub selektywnego całkowania w obszarze elementu [315, 119] dające poprawnie działające elementy czterowęzłowe czworokątne (dla zagadnień dwuwymiarowych) i ośmiowęzłowe sześciokątne (dla zagadnień trójwymiarowych) są równoważne odpowiednim elementom uzyskanym w wyniku zastosowania sformułowania mieszanego [119].

Niestety nie wszystkie kombinacje funkcji interpolacyjnych dla przemieszczeń i ciśnienia są dopuszczalne. W przypadku elementów z równym stopniem interpolacji przemieszczeń i ciśnienia, np. czterowęzłowych czworokątów Q1/P1 (z biliniową interpolacją przemieszczenia i ciśnienia), ośmiowęzłowych elementów sześciokątnych H1/P1 (z trójliniową interpolacją przemieszczenia i ciśnienia) oraz najprostszych elementów trójwęzłowych trójkątnych Tr1/P1 i czterowęzłowych czworościennych Te1/P1 z liniową interpolacją przemieszczeń i ciśnienia, pojawia się problem oscylacji ciśnienia, co jest traktowane jako niestabilność modelu numerycznego. Stabilność elementów opartych na sformułowaniu mieszanym określają warunki stabilności zwane warunkami Babuški-Brezziego [13, 119]. Aby wyeliminować нефizyczną oscylację ciśnienia w elementach nie spełniających warunków Babuški-Brezziego, konieczne jest zastosowanie specjalnych metod stabilizacji. W niniejszej pracy przedstawiona zostanie metoda stabilizacyjna zwana metodą kroku cząstkowego (*ang.* fractional step),

metodą prędkości cząstkowej (*ang.* fractional velocity) lub metodą CBS (*ang.* characteristics based split), która została wprowadzona do zagadnień mechaniki ciała stałego przy współudziale autora [314, 260]. Metoda ta, rozwinięta w mechanice płynów [312, 313], jest oparta na specjalnym algorytmie całkowania równań ruchu połączonym z ich dekompozycją.

W niniejszym rozdziale przedstawiono sformułowanie lokalne i słabe zagadnienia mechaniki ciała stałego, będące podstawą mieszane sformułowania metody elementów skończonych, otrzymanego za pomocą metody Galerkin. Przedstawiono całkowanie otrzymanych równań MES względem czasu. Następnie omówiono zagadnienie stabilności sformułowania mieszane i podstawowe metody stabilizacji. Przedstawiono metodę stabilizacji metodą cząstkowego kroku całkowania, którą zastosowano w niniejszej pracy w celu otrzymania poprawnie działających liniowych elementów trójkątnych (w zagadnieniu dwuwymiarowym) i czworobocznych (w zagadnieniach trójwymiarowych). Działanie metody jest pokazane w zastosowaniu do zagadnień dużych deformacji sprężysto-plastycznych metali, zachodzących przy obciążeniu uderzeniowym oraz w problemach przeróbki plastycznej na zimno.

## 5.1 Sformułowanie mieszane metody elementów skończonych

### 5.1.1 Sformułowanie lokalne

Rozpatrzmy zagadnienia brzegowo-początkowe odkształcania ciała stałego zdefiniowane przez układ równań (2.7)–(2.10). W celu uzyskania sformułowania mieszane wykorzystamy dekompozycję tensora naprężeń Cauchy’ego  $\sigma$  na część dewiatorową  $s$  i ciśnienie hydrostatyczne  $p$

$$\sigma = s - \mathbf{1}p. \quad (5.1)$$

Biorąc pod uwagę związki (5.1) i (A.16) równanie (2.7) można zapisać w postaci:

$$\nabla \cdot s - \nabla p + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \quad \mathbf{x} \in \Omega^t, t \in [0, T]. \quad (5.2)$$

Podobnie równanie (2.8) można zapisać uwzględniając rozkład (5.1) w postaci

$$\mathbf{n} \cdot (s - \mathbf{1}p) = \mathbf{t}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\sigma}^t, t \in [0, T]. \quad (5.3)$$

Wyrowadzając sformułowanie mieszane w mechanice płynów, równanie zachowania pędu (5.2) uzupełnia się równaniem zachowania masy. W mechanice ciała stałego analogiczne równanie można uzyskać biorąc związek konstytutywny dla ciśnienia, który w postaci przyrostowej można zapisać w następującej postaci:

$$\dot{p} = -K(\dot{\epsilon}_{\text{vol}} - \dot{\epsilon}_{\text{vol}}^p), \quad (5.4)$$

gdzie  $K$  jest modułem sztywności objętościowej, który można wyrazić za pomocą stałych Lamégo jako:

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad (5.5)$$

a  $\dot{\epsilon}_{\text{vol}}$  jest prędkością odkształcenia objętościowego

$$\dot{\epsilon}_{\text{vol}} = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (5.6)$$

$\dot{\epsilon}_{\text{vol}}^{\text{p}}$  jest częścią niesprężystą odkształcenia objętościowego. W przypadku modelu plastyczności z potencjałem płynięcia zależnym od drugiego niezmiennika naprężeń  $J_2$ , np. dla modelu przedstawionego w podrozdziale 3.4, zachodzi  $\dot{\epsilon}_{\text{vol}}^{\text{p}} = 0$  i równanie (5.4) upraszcza się

$$\frac{\dot{p}}{K} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (5.7)$$

Dla materiału nieściśliwego  $K \rightarrow \infty$  i równanie (5.7) można zapisać jako

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (5.8)$$

co wyraża warunek nieściśliwości.

Sformułowanie lokalne rozpatrywanego zagadnienia brzegowo-początkowego jest dane przez następujące równania:

- równanie zasady zachowania pędu (5.2),
- związek konstytutywny dla ciśnienia (5.7),
- naprężeniowe warunki brzegowe (5.3),
- przemieszczeniowe warunki brzegowe (2.9),
- warunki początkowe (2.10).

### 5.1.2 Sformułowanie słabe

Sformułowanie słabe będące podstawą mieszanego sformułowania elementów skończonych można otrzymać stosując metodę Galerkinia. Mnożąc równanie (5.2) przez kinematycznie dopuszczalne funkcje wagowe  $\mathbf{v}^*$ , całkując otrzymane wyrażenie w obszarze  $\Omega^t$ , a następnie całkując przez części otrzymuje się

$$\int_{\Omega^t} \mathbf{s} : \nabla \mathbf{v}^* \, d\Omega + \int_{\Omega^t} p \nabla \cdot \mathbf{v}^* \, d\Omega = - \int_{\Omega^t} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{v}^* \, d\Omega + \int_{\Omega^t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}^* \, d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma^t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}^* \, d\Gamma. \quad (5.9)$$

Mnożąc równanie (5.7) przez funkcję próbną  $\dot{p}^*$  i całkując po obszarze  $\Omega'$  otrzymuje się

$$\int_{\Omega'} \dot{p}^* \left( \frac{\dot{p}}{K} + \nabla \cdot \mathbf{v} \right) d\Omega = 0. \quad (5.10)$$

Równania (5.9) i (5.10) stanowią sformułowanie słabe stanowiące podstawę sformułowania mieszanej elementów skończonych dla zagadnienia lokalnego zdefiniowanego w podrozdziale 5.1.1.

### 5.1.3 Równania metody elementów skończonych

Do równań (5.9) i (5.10) wprowadzamy dyskretyzację przestrzenną typową dla elementów skończonych, aproksymując wektorowe pole prędkości<sup>1</sup>  $\mathbf{v}$  i pole ciśnienia  $p$  za pomocą zależności

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}_v \mathbf{v}, \quad (5.11)$$

$$p = \mathbf{N}_p \mathbf{p}, \quad (5.12)$$

gdzie  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{p}$  oznaczają wektory nieznanymi parametrów węzłowych, a  $\mathbf{N}_v$  i  $\mathbf{N}_p$  – macierze funkcji interpolacyjnych<sup>2</sup> spełniających kinematyczne warunki brzegowe. Zakładamy ponadto, że funkcje próbne  $\dot{\mathbf{v}}^*$  i  $\dot{p}^*$  można wyrazić za pomocą tych samych funkcji kształtu jako:

$$\dot{\mathbf{v}}^* = \mathbf{N}_v \delta \mathbf{v}, \quad (5.13)$$

$$\dot{p}^* = \mathbf{N}_p \delta \mathbf{p}. \quad (5.14)$$

Wprowadzając zależności (5.11), (5.12), (5.13) i (5.14) do równań (5.9) i (5.10) przy wykorzystaniu dowolności  $\delta \mathbf{v}$  i  $\delta \mathbf{p}$  otrzymuje się w zapisie macierzowym następujący układ równań, por. [315]:

$$\left( \int_{\Omega} \mathbf{N}_v^T \rho \mathbf{N}_v d\Omega \right) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{s} d\Omega + \left( \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \right) \mathbf{p} + \int_{\Omega} \mathbf{N}_v^T \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}_v^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma, \quad (5.15)$$

$$\left( \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{K} \mathbf{N}_p d\Omega \right) \frac{d\mathbf{p}}{dt} = - \left( \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \mathbf{m}^T \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{v}. \quad (5.16)$$

<sup>1</sup>Procedura dyskretyzacyjna zostanie przedstawiona w notacji macierzowej.

<sup>2</sup>Macierze funkcji  $\mathbf{N}_v$  i  $\mathbf{N}_p$  są macierzami globalnymi z odpowiednimi podmacierzami będącymi macierzami funkcji kształtu poszczególnych elementów.

Równania (5.15) i (5.16) stanowią układ równań sformułowania mieszanego metody elementów skończonych. Wprowadzając oznaczenia:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_v^T \rho \mathbf{N}_v d\Omega, \quad (5.17)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{K} \mathbf{N}_p d\Omega, \quad (5.18)$$

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega, \quad (5.19)$$

$$\mathbf{R}^v = \int_{\Omega} \mathbf{N}_v^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}_v^T \mathbf{g} d\Omega, \quad (5.20)$$

$$\mathbf{F}^v = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{s} d\Omega, \quad (5.21)$$

równania (5.15) i (5.16) można zapisać w następującej postaci:

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{F}^v + \mathbf{Q}\mathbf{p} + \mathbf{R}^v, \quad (5.22)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{Q}^T \mathbf{v}. \quad (5.23)$$

#### 5.1.4 Całkowanie równań ruchu względem czasu

Rozwiązanie równań (5.22)–(5.23) wymaga zastosowania wybranej procedury całkowania względem czasu. Zakładając, że znane jest rozwiązanie tego układu równań w pewnej chwili  $t_n \in [0, T]$  określone poprzez  $\mathbf{v}_n$  i  $p_n$ , poszukiwać będziemy rozwiązania  $\mathbf{v}_{n+1}$  i  $p_{n+1}$  w chwili  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ .

W tym celu zastąpimy występujące w równaniach (5.22)–(5.23) pochodne względem czasu wyrażeniami różnicowymi

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}, \quad (5.24)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}, \quad (5.25)$$

gdzie

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n, \quad (5.26)$$

$$\Delta p = p_{n+1} - p_n, \quad (5.27)$$

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n \quad (5.28)$$



i założymy, że równania różnicowe otrzymane po wstawieniu (5.24) i (5.25) do (5.22)–(5.23) są spełnione dokładnie przy członach po prawej stronie równania wziętych w pewnej chwili  $t_{n+\xi_i} = t_n + \xi_i \Delta t$ , gdzie  $\xi_i \in [0, 1]$ , co oznaczymy indeksem  $n + \xi_i$

$$\mathbf{M} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = -\mathbf{F}_{n+\xi_3}^v + (\mathbf{Qp})_{n+\xi_2} + \mathbf{R}_{n+\xi_3}^v, \quad (5.29)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = (\mathbf{Q}^T \mathbf{v})_{n+\xi_1}. \quad (5.30)$$

Współczynniki  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  zwane są parametrami niejawności schematu całkowania. Dla dowolnej zmiennej  $a$  oznaczają kombinację liniową wartości tej zmiennej na początku i na końcu kroku:

$$a_{n+\xi_i} = a_n(1 - \xi_i) + \xi_i a_{n+1}. \quad (5.31)$$

Przyjmując  $\xi_i = 0$  otrzymuje się jawną metodę całkowania Eulera,  $\xi_i = 0.5$  daje metodę trapezów, a przy  $\xi_i = 1$  mamy niejawną wsteczną metodę Eulera, por. [152].

Do całkowania równań (5.29) i (5.30) zastosowano nieiteracyjny algorytm oparty na jawnym schemacie całkowania równania (5.29), przyjmując  $\xi_2 = \xi_3 = 0$  i niejawnym całkowaniu równania (5.30), przyjmując  $\xi_1 = 1$ . Schemat zastosowanego algorytmu jest następujący:

- 1) Obliczenie prędkości w chwili  $t_{n+1}$  z równania (5.29)

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t \mathbf{M}^{-1} (-\mathbf{F}_n^v + \mathbf{Qp}_n + \mathbf{R}_n^v). \quad (5.32)$$

- 2) Obliczenie przemieszczeń dla chwili  $t_{n+1}$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_{n+1}). \quad (5.33)$$

- 3) Obliczenie ciśnienia  $\mathbf{p}_{n+1}$  z równania (5.30)

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_n + \Delta t \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{v}_{n+1}. \quad (5.34)$$

Rozwiązanie równań (5.32)–(5.34) jest szczególnie łatwe, jeśli zastosuje się diagonalizację macierzy  $\mathbf{M}$  i  $\tilde{\mathbf{M}}$ . Układy równań (5.32) i (5.34) rozprzęgają się wtedy i nie ma potrzeby kosztownego numerycznie odwracania macierzy dla wyznaczenia rozwiązania układu równań algebraicznych.

## 5.2 Stabilizacja sformułowania mieszanego

### 5.2.1 Stabilność i podstawowe metody stabilizacji

Sformułowanie mieszane daje poprawne wyniki dla wielu elementów, np. czterowęzłowych czworokątów Q1/P0 (z biliniową interpolacją przemieszczeń i stałym ciśnieniem) oraz ośmiowęzłowych elementów sześciociennych H1/P0 (z trójliniową interpolacją przemieszczeń i stałym ciśnieniem w elemencie) [119]. Niestety nie wszystkie kombinacje funkcji interpolacyjnych dla przemieszczeń i ciśnienia są dopuszczalne. W przypadku elementów z równym stopniem interpolacji przemieszczeń i ciśnienia, np. czterowęzłowych czworokątów Q1/P1 (z biliniową interpolacją przemieszczenia i ciśnienia), ośmiowęzłowych elementów sześciociennych H1/P1 (z trójliniową interpolacją przemieszczenia i ciśnienia) oraz najprostszymi elementami trójwęzłowymi trójkątnymi Tr1/P1 i czterowęzłowymi czworościennymi Te1/P1 z liniową interpolacją przemieszczeń i ciśnienia pojawia się problem oscylacji ciśnienia, co jest traktowane jako niestabilność modelu numerycznego. Stabilność elementów opartych na sformułowaniu mieszanym określają warunki stabilności zwane warunkami Babuški-Brezzi [13, 119], które można sprowadzić do prostego warunku [315, 22]:

$$n_{\text{dof}} \geq n_p, \quad (5.35)$$

gdzie  $n_{\text{dof}}$  jest liczbą niewiadomych w wektorze  $\mathbf{v}$ , a  $n_p$  – liczbą niewiadomych w wektorze  $\mathbf{p}$ . Liczby niewiadomych odnoszą się do całego układu dyskretnego, który tylko w szczególnym przypadku może być pojedynczym elementem.

Dla elementów opartych na sformułowaniu mieszanym nie spełniających warunków stabilności Babuški-Brezzi konieczne jest stosowanie specjalnych metod stabilizacji. Szczególnie ważne ze względów praktycznych jest stabilne sformułowanie dla prostych elementów, trójkątnych (2D) i czworościennych (3D). W praktycznych zastosowaniach mamy zazwyczaj do czynienia ze skomplikowanymi geometriami, mimo dużego postępu w automatycznej generacji siatek elementów skończonych, wciąż jest niemożliwa nawet przy zastosowaniu kodów komercyjnych, automatyczna dyskretyzacja skomplikowanych geometrii przy użyciu tylko elementów sześciociennych.

Metody stabilizacji często sprowadzają się do dodania stabilizujących członów do równania zasady zachowania masy. Brezzi i Pitkäranta [37] zaproponowali dodanie członu  $h\mathbf{K}_p$ , gdzie  $h$  jest wymiarem charakterystycznym elementu skończonego, a  $\mathbf{K}_p$  jest zdefiniowana wzorem

$$\mathbf{K}_p = \int_{\Omega} \nabla^T \mathbf{N}_p \nabla \mathbf{N}_p \, d\Omega. \quad (5.36)$$

Hughes i in. [120] uzyskał stabilizujący człon poprzez dodanie równania zasady zachowania pędu pomnożonego poprzez współczynnik zdefiniowany jako

$$\frac{\alpha h^2}{2\mu} \nabla \mathbf{N}_p, \quad (5.37)$$

gdzie  $\alpha$  jest dopasowującym parametrem,  $h$  – wymiarem charakterystycznym elementu skończonego, a  $\mu$  – lepkością. Ta procedura stabilizacyjna jest nazywana metodą GLS (*ang.* Galerkin Least Squares).

### 5.2.2 Stabilizacja metodą cząstkowego kroku całkowania

W niniejszej pracy zastosowano metodę stabilizacji zwaną metodą kroku cząstkowego, która jest oparta na specjalnym schemacie całkowania względem czasu równań metody elementów skończonych w sformułowaniu mieszanym. Rozpatrywane będzie zagadnienie brzegowo-początkowe dane przez równanie zasady zachowania pędu (5.2), związek konstytutywny dla ciśnienia (5.7), naprężeniowe warunki brzegowe (5.3), przemieszczeniowe warunki brzegowe (2.9) oraz warunki początkowe (2.10). Do równań (5.2) i (5.7) wprowadzimy dyskretyzację czasową zastępując pochodne względem czasu wyrażeniami różnicowymi. Rozwiązanie przyrostowe dla przyrostu od chwili  $t_n$  do chwili  $t_{n+1}$  będzie wyznaczone z następujących równań:

$$\rho \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \nabla \cdot \mathbf{s}_{n+\xi_3} - \nabla p_{n+\xi_2} + \rho \mathbf{b}_{n+\xi_3}, \quad (5.38)$$

$$\frac{1}{K} \frac{\Delta p}{\Delta t} = -\nabla \cdot \mathbf{v}_{n+\xi_1}. \quad (5.39)$$

W powyższych równaniach zostały wprowadzone trzy parametry niejawności,  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in [0, 1]$ . Wskaźniki  $n + \xi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  dla dowolnej zmiennej oznaczają kombinację liniową wartości tej zmiennej na początku i na końcu kroku analogiczną do określonej równaniem (5.31).

Podstawą stabilnego schematu całkowania równań (5.38) i (5.39) względem czasu jest następujący rozkład równania (5.38):

$$\rho \frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_n}{\Delta t} = \nabla \cdot \mathbf{s}_{n+\xi_3} + \rho \mathbf{b}_{n+\xi_3}, \quad (5.40)$$

$$\rho \frac{\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}^*}{\Delta t} = -\nabla p_{n+\xi_2}, \quad (5.41)$$

gdzie  $\mathbf{v}^*$  jest zwana prędkością cząstkową. Należy zwrócić uwagę, że równania (5.40) i (5.41) dają w sumie równanie (5.38).

W równaniu (5.39) zakładamy  $\xi_1 = 1$ , a następnie wstawiając równanie (5.41) otrzymujemy

$$\frac{1}{K} \frac{p_{n+1} - p_n}{\Delta t} = -\nabla \cdot \mathbf{v}^* + \frac{\Delta t}{\rho} \nabla^2 p_{n+\xi_2}. \quad (5.42)$$

Wprowadzając do równań (5.40), (5.41) i (5.42) dyskretyzację prędkości i ciśnień analogiczną do określonej równaniami (5.11) i (5.12), a następnie stosując standardową metodę Galerkinia otrzymuje się następujący układ równań macierzowych [46]:

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_n}{\Delta t} = \mathbf{R}_{n+\xi_3}^v - \mathbf{F}_{n+\xi_3}^v, \quad (5.43)$$

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}^*}{\Delta t} = \mathbf{Q} \mathbf{p}_{n+\xi_2}, \quad (5.44)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} \frac{\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_n}{\Delta t} = -\mathbf{Q}^T \mathbf{v}^* + \Delta t \mathbf{H} \mathbf{p}_{n+\xi_2}, \quad (5.45)$$

gdzie  $\mathbf{H}$  jest standardową macierzą dla dyskretnego operatora Laplace'a

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}_p^T \frac{1}{\rho_0} \nabla \mathbf{N}_p \, d\Omega. \quad (5.46)$$

Pozostałe wektory i macierze są zdefiniowane równaniami (5.17)–(5.21).

Do równań (5.43)–(5.45) można zastosować następujący jawny schemat rozwiązania:

- 1) obliczenie prędkości cząstkowej z równania (5.43)

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}_n + \Delta t \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{R}_n^v - \mathbf{F}_n^v), \quad (5.47)$$

- 2) obliczenie ciśnienia  $p_{n+1}$  z równania (5.45)

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_n - \Delta t \tilde{\mathbf{M}}^{-1} (\mathbf{Q}^T \mathbf{v}^* + \Delta t \mathbf{H} \mathbf{p}_n), \quad (5.48)$$

- 3) obliczenie prędkości końcowej z równania (5.44)

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}^* - \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{p}_{n+1}. \quad (5.49)$$

Po obliczeniu prędkości można wyznaczyć przemieszczenia punktów węzłowych z zależności

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_{n+1}). \quad (5.50)$$

W równaniu (5.47) założono  $\xi_3 = 0$ , a w równaniu (5.48) przyjęto  $\xi_2 = 0$ , co oznacza w pełni jawny schemat rozwiązywania układu równań (5.43)–(5.45). Rozwiązanie to charakteryzuje się wszystkimi zasadniczymi zaletami schematów jawnych, które zostały omówione wcześniej. Rozwiązanie jawne wprowadza również ograniczenie na krok całkowania  $\Delta t_{\text{crit}}$  dane równaniem (2.61), por. [119]. Rozwiązanie w pełni jawne jest możliwe dla problemów z małą ściśliwością. Dla problemów z idealną nieściśliwością należałoby zastosować schemat mieszany, w którym równania (5.44) i (5.45) rozwiązuje się za pomocą schematu niejawnego, przyjmując  $\xi_2 \neq 0$ .

Wyjaśnienie skuteczności powyższego algorytmu w eliminacji blokady objętościowej można otrzymać rozpatrując równanie zachowania masy dla pełnej nieściśliwości:

$$\mathbf{0} = -\mathbf{Q}^T \mathbf{v}^* + \Delta t \mathbf{H} \mathbf{p}_{n+\xi_2}. \quad (5.51)$$

Eliminując prędkość cząstkową  $\mathbf{v}^*$  z równań (5.44) i (5.51) dla  $\xi_3 = 1$  otrzymuje się następujące równanie:

$$-\mathbf{Q}^T \mathbf{v}_{n+1} + \Delta t (\mathbf{H} - \mathbf{Q}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}) \mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{0}. \quad (5.52)$$

Zastępuje ono standardowe równanie

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (5.53)$$

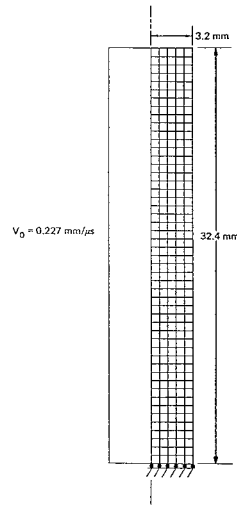
otrzymane z równania (5.23) ze standardowego sformułowania mieszanego. Można dowiedzieć [47], że występująca w równaniu (5.52) podmacierz  $\mathbf{Q}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q} - \mathbf{H}$  jest zawsze dodatnio określona, co zapewnia pożądaną stabilizację sformułowania mieszanego.

## 5.3 Przykłady numeryczne

### 5.3.1 Uderzenie pręta cylindrycznego w sztywną płaszczyznę

Jest to często używany przykład testowy dla weryfikacji programów do symulacji obciążeń dynamicznych, doskonale sprawdzający poprawność modelowania odkształcenia sprężysto-plastycznego materiału [100]. Miedziany pręt cylindryczny o promieniu 3.2 mm i długości 32.4 mm, poruszający się z prędkością 227 m/s,

uderza w sztywną płaszczyznę (rys. 5.1). Własności materiału są następujące: moduł Younga  $E = 117$  GPa, współczynnik Poissona  $\nu = 0.35$ , granica plastyczności  $\sigma_y = 0.4$  GPa, moduł wzmocnienia izotropowego  $H = 0.1$  GPa. Analizowano okres  $80 \mu\text{s}$  od chwili uderzenia, w którym to czasie osiągnięty zostaje stan quasi-statycznej równowagi. Przy modelowaniu oddziaływania pręta i sztywnej ściany założono kontakt bez możliwości oderwania.



Rys. 5.1. Uderzenie cylindrycznego pręta w sztywną płaszczyznę – definicja geometrii i warunków brzegowych.

Zagadnienie analizowano jako zagadnienie dwuwymiarowe osiowosymetryczne i pełne zagadnienie trójwymiarowe stosując różne sformułowania i różne elementy skończone.

Rysunek 5.2 przedstawia wyniki osiągnięte w dwuwymiarowej analizie osiowosymetrycznej za pomocą przemieszczeniowych elementów czworokątnych. Przedstawiono końcowy kształt pręta po  $80 \mu\text{s}$  od chwili uderzenia wraz z rozkładami ciśnienia oraz efektywnego odkształcenia plastycznego. Przedstawione rozwiązanie jest obarczone błędem z powodu blokady objętościowej.

Poprawne rozwiązanie uzyskane w dwuwymiarowej analizie osiowosymetrycznej za pomocą sformułowania mieszanego z elementami czworokątnymi Q1/P0 z biliniową interpolacją przemieszczeń i ciśnieniem stałym w elemencie pokazano na rys. 5.3. Rozwiązanie to będzie służyło do oceny poprawności rozwiązań uzyskanych za pomocą innych metod.

Efekt blokady objętościowej widoczny jest również w rozwiązaniu przedstawionym na rys. 5.4, uzyskany w analizie dwuwymiarowego zagadnienia osiowosymetrycznego za pomocą przemieszczeniowych elementów trójkątnych.

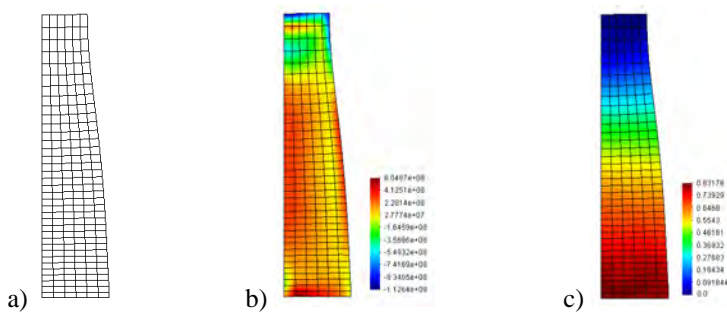
Zastosowanie sformułowania mieszanego z elementami trójkątnymi eliminuje szkodliwy efekt blokady objętościowej (rys. 5.5), ale uzyskany rozkład ciśnienia (rys. 5.5b) charakteryzuje się oscylacjami z powodu niestabilności sformułowania mieszanego dla elementów trójkątnych z liniową interpolacją przemieszczeń i ciśnienia. Dopiero zastosowanie stabilizacyjnej metody cząstkowego kroku całkowania w sformułowaniu mieszanym z elementami trójkątnymi daje poprawne rozwiązanie bez

efektów blokady objętościowej i z rozkładem ciśnienia bez oscylacji (rys. 5.6). Stabilizacja metodą cząstkowego kroku całkowania daje również poprawne wyniki dla elementów czworokątnych Q1/P1, co pokazuje rys. 5.7. Poprawność działania algorytmu stabilizacyjnego w zastosowaniu do sformułowania mieszanego z elementami czworociennymi z liniową interpolacją przemieszczenia i ciśnienia jest pokazana na rys. 5.8.

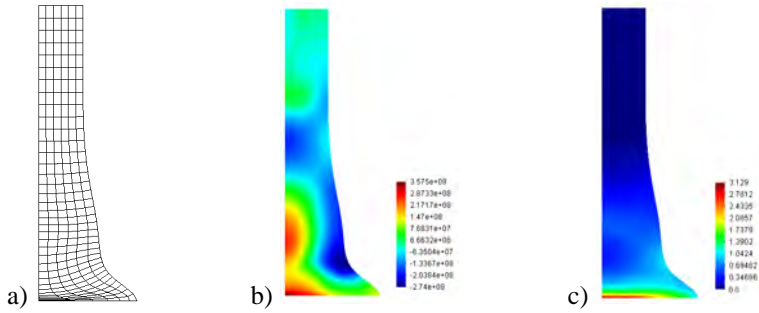
Zgodność rozkładów ciśnienia hydrostatycznego i efektywnego odkształcenia plastycznego otrzymanych przy zastosowaniu dyskretyzacji liniowymi trójkątami, czworokątami i czworoscianami w ramach stabilizowanego sformułowania mieszanego potwierdza skuteczność i poprawność metody stabilizacyjnej. Poprawność metody można stwierdzić poprzez ilościowe porównania dla wybranych parametrów geometrycznych, promienia podstawy w miejscu uderzenia i długości odkształconego cylindra, przedstawione w tabeli 5.1. Wyniki uzyskane przy zastosowaniu stabilizowanego sformułowania mieszanego są zgodne z wynikami uzyskanymi za pomocą elementów nie wykazujących blokady objętościowej w standardowym sformułowaniu mieszanym.

Tabela 5.1. Porównanie wyników dla różnych sformułowań

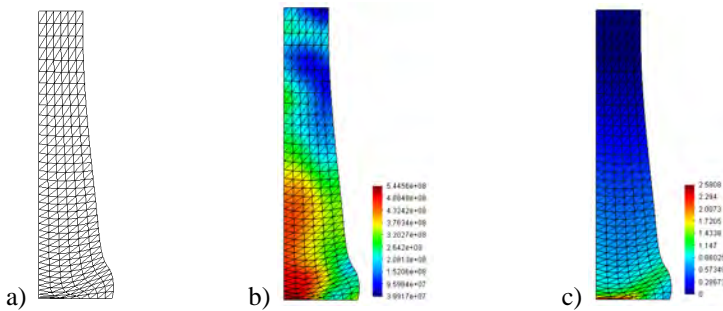
Typ elementu	Sformułowanie	Promień końcowy	Długość końcowa
4-węzł. czworokąt	Stand. mieszane	7.10	21.47
4-węzł. czworokąt	Miesz. stabilizowane	7.10	21.47
3-węzł. trójkąt	Miesz. stabilizowane	7.07	21.47
4-węzł. czworoscian	Miesz. stabilizowane	7.14	21.64



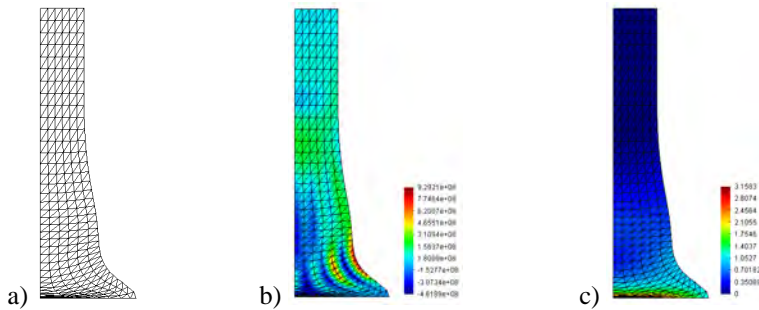
Rys. 5.2. Uderzenie pręta cylindrycznego – model dwuwymiarowy osiowosymetryczny, sformułowanie przemieszczeniowe, elementy czworokątne: a) odkształcona siatka elementów, b) rozkład ciśnienia, c) rozkład efektywnego odkształcenia plastycznego.



Rys. 5.3. Uderzenie pręta cylindrycznego – model dwuwymiarowy osiowosymetryczny, sformułowanie mieszane, elementy czworokątne: a) odształcona siatka elementów, b) rozkład ciśnienia, c) rozkład efektywnego odkształcenia plastycznego.

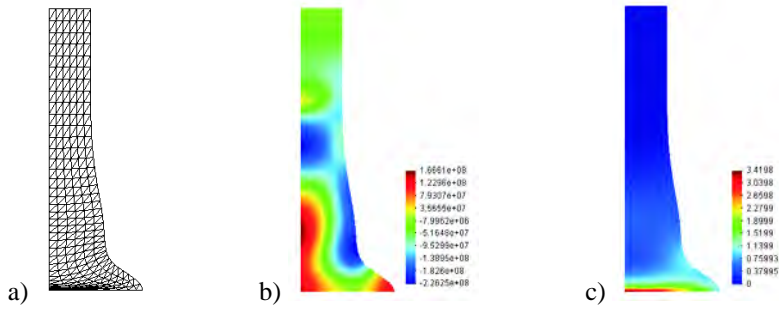


Rys. 5.4. Uderzenie pręta cylindrycznego – model dwuwymiarowy osiowosymetryczny, sformułowanie przemieszczeniowe, elementy trójkątne: a) odształcona siatka elementów, b) rozkład ciśnienia, c) rozkład efektywnego odkształcenia plastycznego.

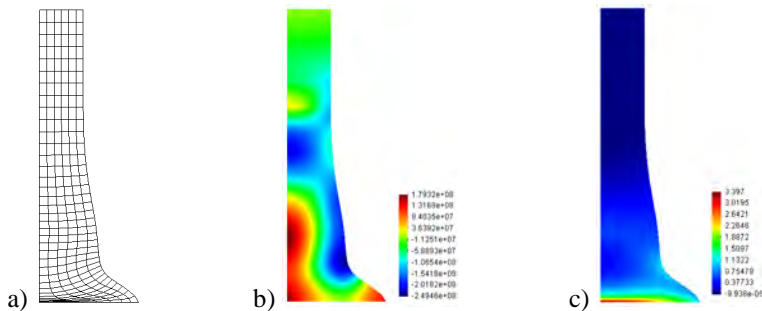


Rys. 5.5. Uderzenie pręta cylindrycznego – model dwuwymiarowy osiowosymetryczny, sformułowanie mieszane, elementy trójkątne: a) odształcona siatka elementów, b) rozkład ciśnienia, c) rozkład efektywnego odkształcenia plastycznego.

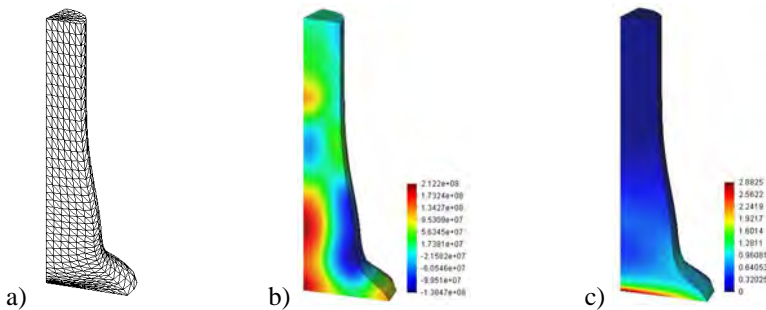




Rys. 5.6. Uderzenie pręta cylindrycznego – model dwuwymiarowy osiowosymetryczny, sformułowanie mieszane stabilizowane, elementy trójkątne: a) odkształcona siatka elementów, b) rozkład ciśnienia, c) rozkład efektywnego odkształcenia plastycznego.



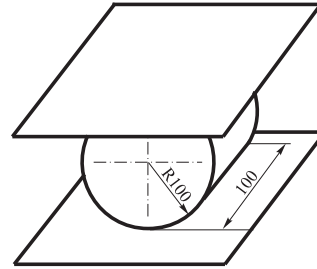
Rys. 5.7. Uderzenie pręta cylindrycznego – model dwuwymiarowy osiowosymetryczny, sformułowanie mieszane stabilizowane, elementy czworokątne: a) odkształcona siatka elementów, b) rozkład ciśnienia, c) rozkład efektywnego odkształcenia plastycznego.



Rys. 5.8. Uderzenie pręta cylindrycznego – model trójwymiarowy, sformułowanie mieszane stabilizowane, elementy czworokątne: a) odkształcona siatka elementów, b) rozkład ciśnienia, c) rozkład efektywnego odkształcenia plastycznego.

### 5.3.2 Zgniatanie poprzeczne walca

Przykład ten ma na celu zweryfikowanie rozwiniętej metody w zastosowaniu do prostego procesu przeróbki plastycznej na zimno. Walec stalowy o długości 100 mm oraz promieniu 100 mm jest zgniatany między dwiema płaskimi płytami równoległymi do jego osi (rys. 5.9), odległość między płytami na koniec procesu wynosi 100 mm. Własności materiału są następujące: moduł Younga  $E = 2.17 \cdot 10^5$  MPa, współczynnik Poissona  $\nu = 0.3$ , gęstość  $783 \text{ kg/m}^3$ , początkowa granica plastyczności  $\sigma_{Y0} = 170$  MPa, moduł wzmocnienia  $H = 30$  MPa. Tarcie na powierzchniach kontaktu materiału z płytami określone jest współczynnikami tarcia Coulomba  $\mu = 0.2$ .



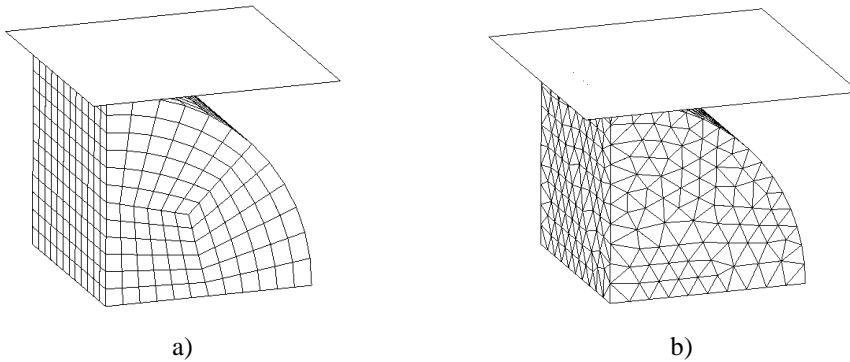
Rys. 5.9. Zgniatanie poprzeczne walca – definicja geometrii.

W modelowaniu wykorzystano symetrię i rozpatrywano ćwiartkę walca. Analizę przeprowadzono stosując następujące modele:

- dyskretyzacja elementami sześciennymi Q1/P0, opartymi na standardowym sformułowaniu mieszanym,
- dyskretyzacja elementami sześciennymi Q1/P1, opartymi na stabilizowanym sformułowaniu mieszanym,
- dyskretyzacja czworościennymi elementami liniowymi ze stabilizowanym sformułowaniem mieszanym (siatka zgrubna, 4090 elementów),
- dyskretyzacja czworościennymi elementami liniowymi ze stabilizowanym sformułowaniem mieszanym (siatka gęsta, 22186 elementów).

Początkowa siatka elementów skończonych sześciennych oraz początkowa zgrubna siatka elementów czworościennych są przedstawione odpowiednio na rys. 5.10a i b. Prędkość ruchu płyt wynosi 2 m/s, końcowa odległość płyt wynosi 100 mm.

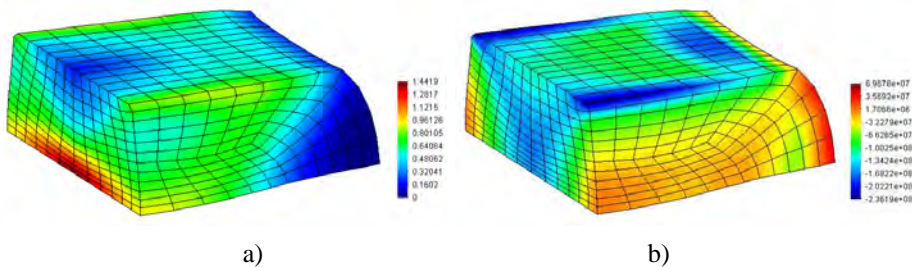
Wyniki analizy w postaci odkształconych siatek z rozkładem efektywnego odkształcenia plastycznego i ciśnienia hydrostatycznego dla sześciennych elementów Q1/P0, opartych na standardowym sformułowaniu mieszanym, przedstawiono na rys. 5.11. Wyniki te są wynikami uzyskanymi za pomocą poprawnie działającego sformułowania, stabilnego i pozbawionego wad blokady objętościowej, stanowiąc będą punkt



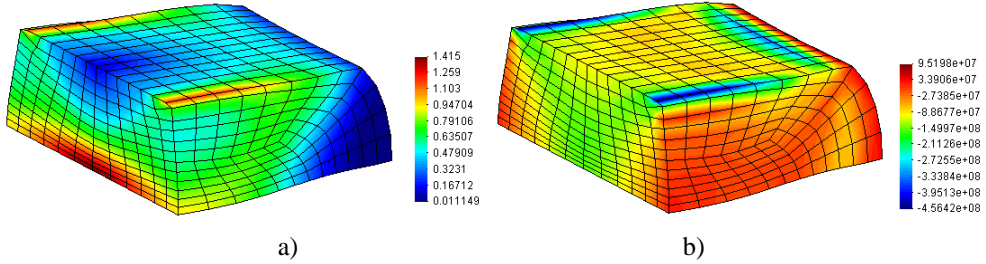
Rys. 5.10. Zgniatanie poprzeczne walca – model MES: a) siatka heksaedryczna, b) siatka tetradryczna.

odniesienia dla wyników uzyskanych za pomocą stabilizowanego sformułowania mieszane.

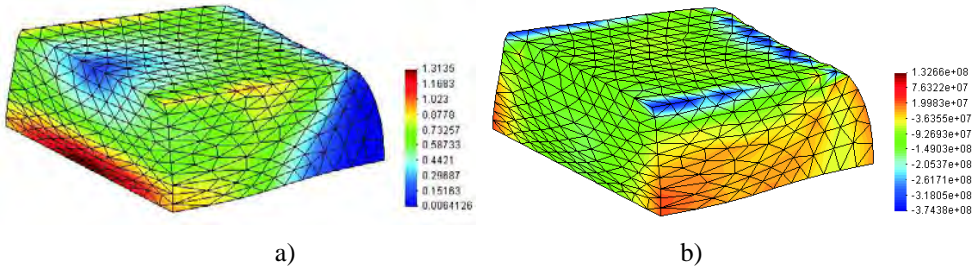
Wyniki uzyskane za pomocą stabilizowanego sformułowania dla różnych dyskretyzacji przedstawiono na rys. 5.12–5.14. Można zauważyć podobieństwo rozkładów efektywnego odkształcenia plastycznego i ciśnienia otrzymanych za pomocą stabilizowanego sformułowania z rozkładami na rys. 5.11, przyjętymi jako punkt odniesienia. Zbieżność rozwiązań można również dostrzec porównując rozkłady ciśnienia wzdłuż linii *ABCDEA*, zdefiniowanej na rys. 5.15a, pokazane na wykresie na rys. 5.15b.



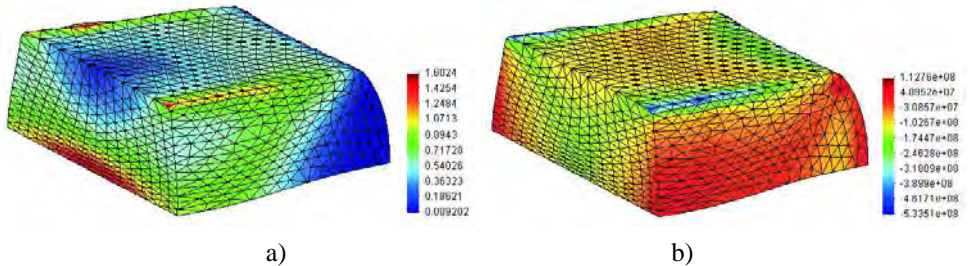
Rys. 5.11. Zgniatanie poprzeczne walca, sformułowanie mieszane z siatką elementów sześciennych Q1/P0, odkształcone siatki z rozkładem: a) efektywnego odkształcenia plastycznego, b) ciśnienia.



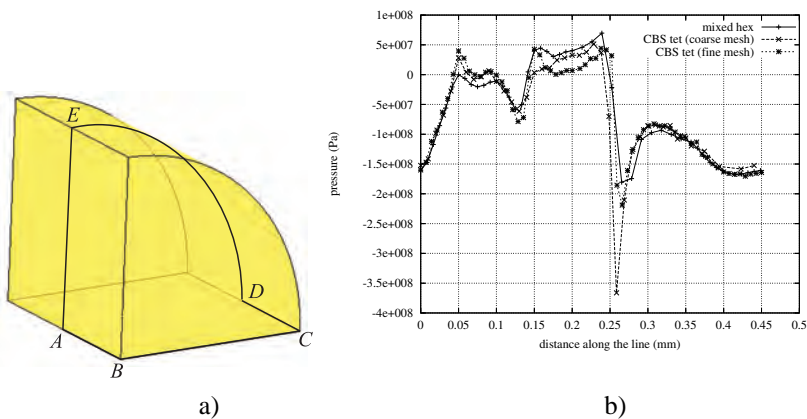
Rys. 5.12. Zgniatanie poprzeczne walca, stabilizowane sformułowanie mieszane z siatką elementów sześciennych Q1/P1, odkształcone siatki z rozkładem: a) efektywnego odkształcenia plastycznego, b) ciśnienia.



Rys. 5.13. Zgniatanie poprzeczne walca, stabilizowane sformułowanie mieszane ze zgrubną siatką elementów czworościennych (4090 elementów), odkształcone siatki z rozkładem: a) efektywnego odkształcenia plastycznego, b) ciśnienia.



Rys. 5.14. Zgniatanie poprzeczne walca, stabilizowane sformułowanie mieszane z gęstą siatką elementów czworościennych (22186 elementów), odkształcone siatki z rozkładem: a) efektywnego odkształcenia plastycznego, b) ciśnienia.



Rys. 5.15. Zgniatanie poprzeczne walca – porównanie rozkładu ciśnienia dla różnych sformułowań: a) definicja linii *ABCDEA*, b) rozkład ciśnień wzdłuż linii *ABCDEA*.

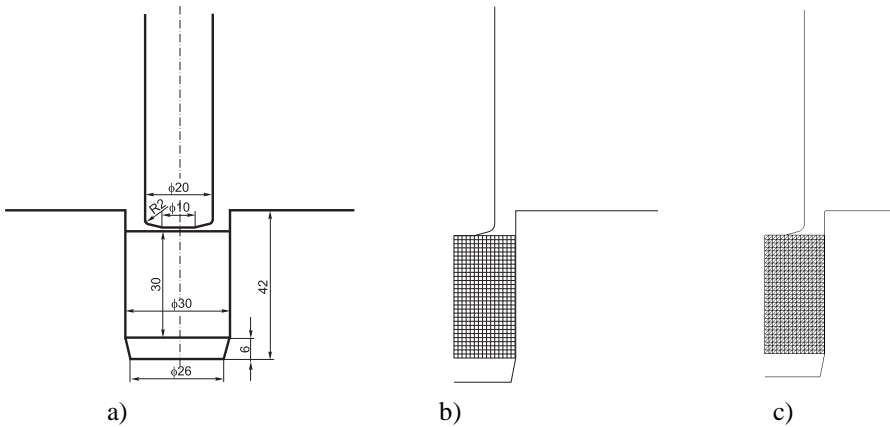
### 5.3.3 Wyciskanie przeciwbieżne cylindra

Przedmiotem analizy jest proces wyciskania na zimno naczyń cylindrycznego o średnicy zewnętrznej 30 mm i grubości ścianki 5 mm (rys. 5.16). Materiałem wyjściowym jest walec o długości 30 mm i średnicy 30 mm. Stempel o średnicy 20 mm ma zadany skok 28 mm. Własności materiału są następujące: moduł Younga  $E = 3.24 \cdot 10^5$  MPa, współczynnik Poissona  $\nu = 0.3$ , gęstość  $\rho = 8120$  kg/m<sup>3</sup>, początkowa granica plastyczności  $\sigma_{Y0} = 300$  MPa, moduł wzmocnienia  $H = 50$  MPa. Tarcie określone jest współczynnikiem tarcia Coulomba  $\mu = 0.1$ . W modelu procesu pominięto efekty cieplne. Definicja przykładu jest podobna do przykładu testowego komercyjnego programu MARC/AutoForge [182].

Osiowosymetryczną analizę przeprowadzono stosując stabilizowane sformułowanie mieszane z dyskretyzacją trójkątnymi elementami liniowymi oraz standardowe sformułowanie mieszane z dyskretyzacją biliniowymi elementami czworokątnymi Q1/P0. Początkowe siatki elementów skończonych są przedstawione na rys. 5.16b,c.

Uzyskane wyniki dla siatki czworokątów przedstawiono na rys. 5.17 w postaci odkształconej konfiguracji z rozkładem efektywnego odkształcenia plastycznego na różnych etapach formowania. W podobny sposób przedstawiono na rys. 5.18 wyniki analizy uzyskane dla siatki elementów trójkątnych.

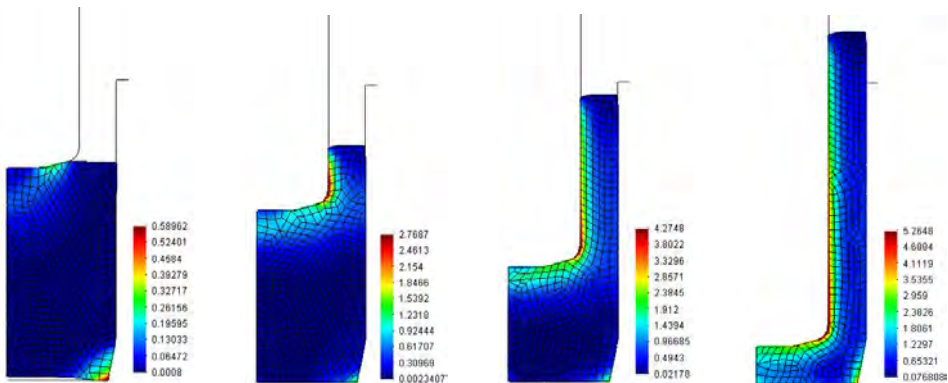
Uzyskane rozkłady efektywnego odkształcenia plastycznego (rys. 5.18 i 5.17) są zgodne z rozkładem otrzymanym z programu MARC/AutoForge [182] jak również odpowiadają znanemu rozkładowi umocnienia materiału naczyń wyciskanego przeciwbieżnie [72]. Rozkład odkształcenia plastycznego wskazuje na zwiększające



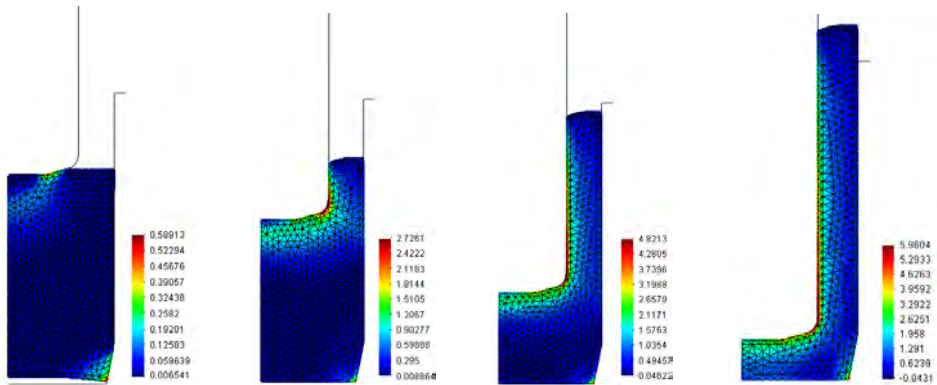
Rys. 5.16. Wyciskanie przeciwbieżne: a) definicja geometrii, b) początkowa siatka czworokątów, c) początkowa siatka trójkątów.

się umocnienie materiału wzdłuż wysokości w kierunku od obrzeża do dna osiągając maksimum w pobliżu przejścia ścianki w dno. W kierunku normalnym do bocznej ścianki naczynia występują znaczne różnice umocnienia – materiał leżący w pobliżu powierzchni wewnętrznej jest bardziej umocniony.

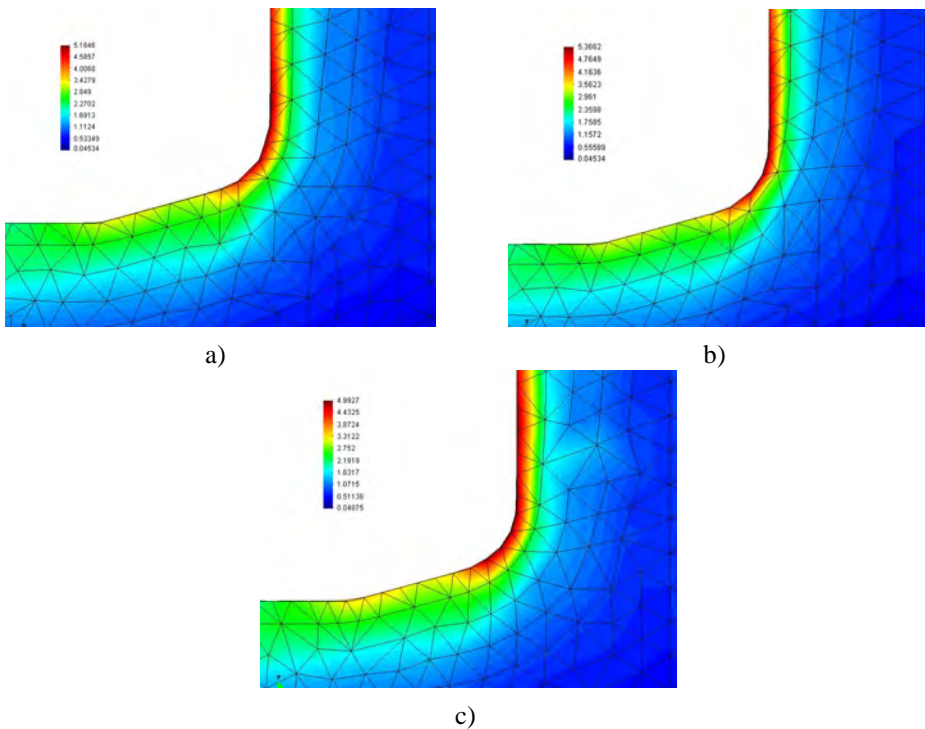
Analizę przeprowadzono stosując okresową zmianę siatki aby uniknąć zbytniego zniekształcenia elementów skończonych. Rysunek 5.19 przedstawia zmiany siatki na kolejnych etapach analizy. Na rys. 5.19a pokazano nową siatkę wygenerowaną na pewnym etapie analizy, ta sama siatka jest pokazana na rys. 5.19b po częściowym odkształceniu, w momencie generacji nowej siatki elementów skończonych, która jest pokazana na rys. 5.19c. Zmiana siatki elementów skończonych wymaga zmapowa-



Rys. 5.17. Wyciskanie przeciwbieżne – ewolucja kształtu z rozkładem efektywnego odkształcenia plastycznego (siatka czworokątna, standardowe sformułowanie mieszane).



Rys. 5.18. Wyciskanie przeciwbieżne – ewolucja kształtu z rozkładem efektywnego odkształcenia plastycznego (siatka trójkątna, stabilizowane sformułowanie mieszane).



Rys. 5.19. Wyciskanie przeciwbieżne – adaptacyjna zmiana siatki: a) początkowa siatka  $n$ , b) końcowa siatka  $n$ , c) początkowa siatka  $n + 1$ .

nia wszystkich zmiennych z węzłów i punktów całkowania starej siatki (rys. 5.19b) na węzły i punkty całkowania w nowej siatce (rys. 5.19c). W algorytmie przeniesie-

nia zmiennych między kolejnymi siatkami elementów skończonych implementowano algorytm SPR (*ang.* superconvergent patch recovery) [315]. Porównanie rys. 5.19b i 5.19c pokazuje poprawne działanie tego algorytmu, aczkolwiek można zaobserwować pewne rozmycie gradientów odkształcenia, nieuniknione gdy gęstą odkształconą siatkę zastępuje się nową równomierną siatką elementów skończonych.

## Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono sformułowanie metody elementów skończonych dla problemów z małą ściśliwością materiału sprawiających duże problemy numeryczne, objawiające się występowaniem blokady objętościowej w sformułowaniach przemieszczeniowym MES oraz niestabilnością ciśnienia hydrostatycznego w niektórych elementach skończonych opartych na sformułowaniu mieszanym MES. Rozwinięta metoda stabilizacji, zwana metodą kroku cząstkowego, prędkości cząstkowej lub metodą CBS, skutecznie eliminuje wady elementów mieszanych z jednakową interpolacją pól przemieszczenia i ciśnienia. Dzięki temu możliwe jest zastosowanie siatek trójkątnych i czworobocznych bardzo wygodnych w modelowaniu skomplikowanych geometrii.

W rozdziale tym przedstawiono też zastosowanie rozwiniętego algorytmu do symulacji prostych przykładów testowych przeróbki plastycznej na zimno. Wyniki symulacji numerycznych potwierdzają poprawność opracowanych sformułowań teoretycznych. Uzyskano dobre wyniki, co pozwala stwierdzić, że opracowany program numeryczny jest dobrym i efektywnym narzędziem dla tego typu zastosowań.

Porównanie wyników analizy metodą kroku cząstkowego z wynikami otrzymanymi za pomocą innej metody stabilizacyjnej, zwanej FIC (*ang.* Finite Increment Calculus), przedstawiono w pracy [254]. Wyniki otrzymywane za pomocą obydwu metod są w zasadzie porównywalne, a metoda kroku cząstkowego jest prostszą metodą.

W rozpatrywanych w niniejszej pracy modelach przeróbki plastycznej dla uproszczenia pominięto efekty termiczne. Rozszerzenie przedstawionego sformułowania na zagadnienia termomechaniczne przedstawiono w [241, 261].



## 6. Symulacja procesów tłoczenia blach

### Wstęp

Tłoczenie jest ważną metodą przeróbki plastycznej stosowaną do kształtowania części z blachy. Mimo wprowadzania nowych materiałów i rozwoju nowych technologii tłoczenie blach jest w dalszym ciągu podstawowym procesem technologicznym w produkcji części karoserii w przemyśle samochodowym oraz w wytwarzaniu wielu części metalowych w innych sektorach przemysłu. Programy MES, wykorzystujące jawne całkowanie równań ruchu względem czasu, stały się bardzo popularne w zastosowaniu do symulacji procesów kształtowania blach [107, 103, 253]. Analiza rzeczywistych części o bardzo skomplikowanej geometrii prowadzi do bardzo dużych modeli, które wymagają dużej mocy obliczeniowych i efektywnych algorytmów rozwiązania. Programy jawne charakteryzują się dużą efektywnością rozwiązania na pojedynczym kroku przyrostowym i małymi wymaganiami pamięci. Nieiteracyjny algorytm rozwiązania jest niezawodny w działaniu. Aczkolwiek z powodu warunkowej stabilności numerycznej jawnego schematu całkowania długość kroku całkowania jest ograniczona i konieczne jest stosowanie dużej liczby kroków całkowania, to jednak w przypadku dużych modeli obliczeniowych zalety tej metody przeważają nad jej wadami i to czyni tę metodę popularną w zastosowaniu do rzeczywistych procesów tłoczenia.

Rozwijany przy współudziale autora [213, 246, 210, 217, 209, 250, 253, 262, 218] i prezentowany w niniejszej pracy program Simpack/Stampack spełnia w pełni zaawansowane wymagania stawiane przez użytkowników przemysłowych [247] i jest z powodzeniem wykorzystywany do symulacji rzeczywistych procesów tłoczenia. W niniejszym rozdziale są zawarte przykładowe symulacje numeryczne pokazujące możliwości programu.

Konkurencja i coraz większe wymagania techniczne i ekonomiczne prowadzą do poszukiwania nowych rozwiązań technologicznych i nowych materiałów, które wymagają opracowania nowych modeli teoretycznych i implementowania ich w programie numerycznym. W niniejszym rozdziale przedstawiono praktyczne zastosowanie programu do modelowania i symulacji procesów kształtowania wykorzystujących dwa rodzaje nowoczesnych materiałów, tłoczenia blach spawanych (*ang.* TWB – tailor welded blanks) oraz wytwarzania puszek z blach pokrytych polimerem. Blachy spawane zostały stosunkowo niedawno wprowadzone do produkcji elementów karoserii samochodowych. Dają one możliwość zróżnicowania grubości i własności blachy,

dostosowując ją do rzeczywistych wymagań konstrukcyjnych. Pozwala to znacznie zmniejszyć masę karoserii oraz zmniejszyć zużycie materiału.

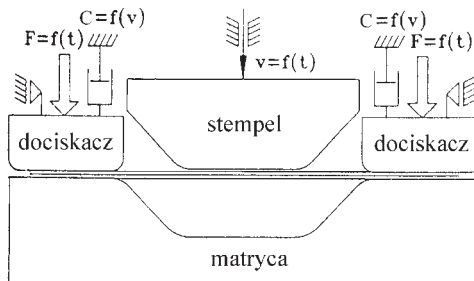
Blachy pokryte warstwą polimeru są nowym materiałem w produkcji opakowań. W niniejszym rozdziale przedstawiono najważniejsze aspekty praktyczne, związane z procesem produkcji i stosowaniem nowego materiału. Krótko opisano proces wytwarzania puszek i właściwości materiału istotne dla tego procesu. Omówiono właściwości mechaniczne laminatu stal-polimer, główną uwagę zwrócono na właściwości polimeru. Przedstawiono główne założenia i sformułowanie teoretyczne modelu numerycznego laminatu, szerzej omówiono model konstytutywny polimeru. Spośród różnorodnych modeli stosowanych do polimerów wybrano dwa alternatywne modele, model Arrudy-Boyce i ściśliwy model Leonova. W modelowaniu procesu wytwarzania puszek ważne jest uwzględnienie wrażliwości materiału na prędkość odkształcenia i temperaturę. Modele teoretyczne zostały implementowane przez autora w programie numerycznym. Artykuł przedstawia wyniki numeryczne wstępnych testów. Przeprowadzono symulację osiowego ściskania polimeru w celu wyznaczenia stałych materiałowych polimeru. Wyznaczone stałe materiałowe zostały wykorzystane w symulacji tłoczenia puszki cylindrycznej.

### 6.1 Modelowanie procesu głębokiego tłoczenia blach

Symulacja numeryczna pozwala przewidzieć zachowanie tłoczonej blachy w trakcie całego wieloetapowego procesu technologicznego. Do najbardziej interesujących możliwości analizy numerycznej w zastosowaniu do tłoczenia blach należą:

- kształt wytłoczki w czasie kształtowania i po sprężynowaniu powrotnym,
- rozkład odkształceń lokalnych w blasze,
- rozkład grubości blachy,
- lokalizacja odkształceń – możliwość pęknięcia blachy,
- stwierdzenie możliwego pofałdowania blachy,
- określenie obszarów zarysowanych poprzez progi ciąagowe,
- określenie wymaganej siły tłoczenia,
- określenie zużycia narzędzi.

Dzięki wynikom uzyskanym w symulacji można zoptymalizować projektowany proces technologiczny, skrócić cykl projektowania oraz zmniejszyć koszty związane z uruchomieniem produkcji.



Rys. 6.1. Typowy model głębokiego tłoczenia blachy

W typowym modelu procesu głębokiego tłoczenia (rys. 6.1) uwzględnia się kształtowaną blachę oraz tłocznik, składający się z matrycy, stempela i dociskacza. Narzędzia zasadniczo mogą być traktowane jako sztywne, choć w niektórych przypadkach gdy nacisk dociskacza jest nierównomierny, pożądane jest uwzględnienie w modelu jego odkształcalności. Osiągnięcie określonego kształtu przez wytłoczkę jest wymuszone poprzez oddziaływanie kontaktowe blachy z narzędziami, których kinematyka jest określona. Wzajemne przemieszczenie stempela i matrycy jest zadane według rzeczywistego procesu tłoczenia, przyjmując np. nieruchomą matrycę i zadając przemieszczenie stempela. Przy modelowaniu dociskacza są dwie możliwości: zadanie określonej szczeliny pomiędzy dociskaczem a matrycą lub pozostawienie swobody ruchu dociskacza przy zadanej sile dociskacza. W przypadku sterowania obciążeniem dociskacza w modelu dynamicznym konieczne jest wprowadzenie odpowiedniego tłumienia w celu eliminacji oscylacji i uzyskanie możliwie stałej wartości siły oddziaływania między blachą i dociskaczem. W przypadku sztywnego dociskacza można założyć, że jego ruch jest ograniczony do ruchu postępowego, albo też uwzględnić również możliwość jego obrotu na skutek nierównoważenia momentów sił oddziaływania z blachą i przyłożonych do dociskacza sił zewnętrznych.

Oddziaływanie kontaktowe między blachą a narzędziami odgrywa kluczową rolę w procesie tłoczenia [291, 310]. W trakcie procesu zmieniają się warunki geometryczne kontaktu. Algorytm kontaktu powinien efektywnie wykrywać kontakt oraz określać wartość sił oddziaływania kontaktowego w kierunku stycznym i normalnym. Algorytm analizy kontaktu implementowany przez autora w programie Stampack i przedstawiony w rozdziale 10 daje bardzo dobre wyniki również w symulacji tłoczenia. Algorytm ten umożliwia uwzględnienie zmiany grubości blachy, co ma duży wpływ na rozkład sił tarcia w obszarze styku między blachą a narzędziami.

Ze względu na sposób traktowania ruchu modele procesu tłoczenia można podzielić na quasi-statyczne i dynamiczne. W modelach dynamicznych uwzględnia się

efekty inercyjne, a w modelach quasi-statycznych zaniedbuje się je. Stosowanie modelu quasi-statycznego jest uzasadnione w przypadku stosunkowo wolnych procesów kształtowania.

W przypadku modelu dynamicznego ze względu na efektywność obliczeniową rozwiązanie wykorzystujące jawne całkowanie równań ruchu względem czasu według równań (2.58)–(2.60) zyskało dużą popularność w zastosowaniu do symulacji procesów tłoczenia. W przypadku modelu quasi-statycznego preferowane są niejawne metody rozwiązania zagadnienia nieliniowego, aczkolwiek możliwe jest również wykorzystanie jawnego schematu rozwiązania, np. [136]. Opracowano wiele schematów niejawnych dla rozwiązania równań nieliniowych zagadnienia quasi-statycznej równowagi. Jeden z możliwych schematów jest zdefiniowany równaniami (2.55) i (2.56).

Chociaż rozwiązania niejawne uznawane są za dokładniejsze niż rozwiązania jawne, porównanie różnych rozwiązań jawnych i niejawnych z wynikami eksperymentalnymi [129, 306] pokazuje, że rozwiązania jawne nie ustępują dokładnością rozwiązaniom niejawnym. W przypadku dużych zagadnień zalety metod jawnych, takie jak wysoka efektywność rozwiązania dla pojedynczego kroku, nieiteracyjny schemat rozwiązania oraz małe wymagania pamięci przeważają na wadami tych metod, jak np. warunkowa stabilność i sprawiają, że metody jawne dominują w komercyjnych programach do symulacji tłoczenia blach [222, 101].

Efektywność obliczeniowa metod jawnych w zastosowaniu do procesów tłoczenia blach może być zwiększona poprzez algorytmiczne skalowanie masy lub zwiększenie prędkości narzędzi w procesie kształtowania. Obydwie metody zwiększają efekty inercyjne. Wychodzi się z założenia, że w stosunkowo wolnych procesach kształtowania efekty inercyjne są tak małe, że nawet ich zwiększenie nie wprowadza dużych zmian do rozwiązania. Należy jednak pamiętać, że zwiększenie efektów inercyjnych, na skutek skalowania masy lub skalowania prędkości, jest dopuszczalne jedynie w pewnych granicach [45].

Zastosowanie przedstawionej powyżej metody zwiększenia efektywności rozwiązania jawnego poprzez algorytmiczne zwiększenie efektów inercyjnych jest niemożliwe w przypadku analizy sprężynowania powrotnego. Sprężynowanie powrotne jest odkształceniem wytłoczki pod wpływem naprężeń wewnętrznych, po usunięciu wytłoczki z prasy. W modelu niejawnym sprężynowanie powrotne jest traktowane jako tłumione drgania swobodne części, zob. [250]. Po usunięciu ograniczeń kontaktowych wytłoczka podlega drganiom pod wpływem nie zrównoważonych naprężeń wewnętrznych. Odpowiednio dobrane tłumienie doprowadza do zaniku drgań i osiągnięcia quasi-statycznej równowagi. Aby wytłumić drgania, odpowiadające najniższej (podstawowej) częstości drgań własnych, należy analizować przedział czasu co najmniej zbliżony do okresu podstawowych drgań własnych. Jeśli zastosowalibyśmy

skalowanie mas, to uzyskalibyśmy zwiększenie krytycznego kroku całkowania wyznaczanego z równania (2.61), ale jednocześnie nastąpiłoby wydłużenie okresu drgań podstawowych, w związku z czym liczba wymaganych kroków całkowania pozostałaby bez zmian. Ponieważ okres podstawowych drgań własnych może być znacznie dłuższy niż czas trwania operacji kształtowania, analiza sprężynowania powrotnego za pomocą metody dynamicznej jest często nieefektywna. Efektywnym rozwiązaniem jest zastosowanie modelu dynamicznego w analizie operacji kształtowania w połączeniu z modelem quasi-statycznym w analizie sprężynowania powrotnego [250].

Blacha w procesie tłoczenia poddana jest złożonemu procesowi odkształcania, charakteryzującemu się dużymi przemieszczeniami i dużymi odkształceniami. W modelu numerycznym blacha jest zdyskretyzowana elementami skończonymi bryłowymi lub powłokowymi [217, 91]. Elementy skończone użyte do dyskretyzacji blachy powinny dobrze modelować złożony stan odkształcenia blachy, a jednocześnie muszą się charakteryzować dużą efektywnością obliczeniową. Elementy powłokowe aczkolwiek oparte na uproszczonej kinematyce są efektywniejsze obliczeniowo i dominują w praktycznych zastosowaniach symulacji numerycznej procesów tłoczenia blach. Niemniej jednak zastosowanie elementów powłokowych nie zawsze jest możliwe. Użycie elementów bryłowych jest konieczne w przypadku operacji kształtowania, w których mamy pełny trójwymiarowy stan naprężenia w materiale, jak np. w operacji wyciągania, stanowiącej jeden z etapów w procesie wytwarzania puszek.

Oddanie skomplikowanych zmian kształtu blachy wymaga odpowiednio drobnej siatki elementów skończonych. Zastosowanie bardzo drobnej siatki elementów skończonych dla całej blachy i w trakcie całego procesu doprowadziłoby do modelu numerycznego o bardzo dużej liczbie niewiadomych, wymagającego długich czasów obliczeń. Opracowano efektywne algorytmy numeryczne, pozwalające na automatyczne zagęszczanie siatki tylko w obszarach o dużej krzywiznie i dużych gradientach odkształceń.

Bardzo drobna siatka elementów skończonych byłaby potrzebna dla oddania stanu odkształcenia blachy przechodzącej przez progi ciągowy. Ponieważ promienie krzywizny występujące w przekrojach progów ciągowych są zazwyczaj mniejsze niż promienie krzywizn innych części, wymiary elementów skończonych dla analizy odkształcenia blachy w progach ciągowych byłyby znacznie mniejsze od wymiarów wymaganych dla innych szczegółów geometrii. Dla rozwiązania tego problemu stosuje się model tzw. efektywnego progów ciągowy, w którym próg ciągowy jest reprezentowany przez linię leżącą na powierzchni narzędzi, z określoną wartością siły oporu progów ciągowy. Siłę tę rozkłada się na węzły elementów skończonych przecinających linię progów efektywny. W pewnych przypadkach jednak dokładność analizy uzyskana za pomocą modelu z efektywnymi progami ciągowymi może być nie wystarczająca i

wtedy konieczne jest dokładne modelowanie geometrii progów ciągowych [245].

Modelowanie odkształcenia materiału w procesie tłoczenia wymaga stosowania odpowiednich modeli konstytutywnych [217]. Wytworzona w trakcie walcowania tekstura materiału blachy sprawia, że własności blachy cechują się anizotropowością, która musi być uwzględniona w sformułowaniu teoretycznym.

W przykładach numerycznych przedstawionych w niniejszym rozdziale stosowano dyskretyzację elementami bryłowymi oraz powłokowymi. Jako element bryłowy stosowano czterowęzłowy element dla zagadnień osiowosymetrycznych z selektywnym całkowaniem naprężeń. Przy dyskretyzacji elementami bryłowymi stosowano izotropowy hipersprężysto-plastyczny model materiału przedstawiony w podrozdziale 3.4.

Przy dyskretyzacji elementami powłokowymi BST w symulacji procesów tłoczenia blach stosuje się model konstytutywny materiału sprężysto-plastycznego z izotropowymi własnościami sprężystymi i anizotropowymi właściwościami materiału w stanie plastycznym.

Element skończony stosowany w modelowaniu procesów tłoczenia musi być wystarczająco dokładny, a jednocześnie efektywny obliczeniowo. Kształtowane blachy można modelować za pomocą elementów bryłowych, niemniej jednak ze względu na efektywność obliczeniową częściej są stosowane elementy powłokowe.

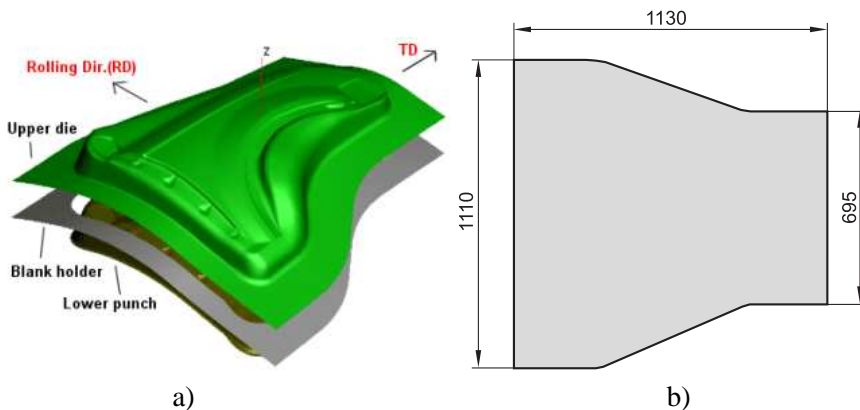
Element BST ma po trzy przemieszczeniowe stopnie swobody w węźle, co zapewnia dużą efektywność obliczeniową i czyni go odpowiednim do stosowania w dużych modelach przemysłowych procesów tłoczenia blach.

## 6.2 Symulacja wielozabiegowego kształtowania części karoserii

Rzeczywisty proces kształtowania części z blachy składa się zazwyczaj z wielu operacji, takich jak wytlaczenie, przetłaczanie, okrawanie kołnierza, wycinanie otworów, zaginanie krawędzi. W symulacji konieczne jest uwzględnienie następujących po sobie operacji, jak również sprężynowania powrotnego części, występującego między operacjami i po zakończeniu całego procesu wytwarzania.

Struktura programu numerycznego Stampack została przez autora zaprojektowana tak, by w sposób łatwy uwzględnić wielozabiegowy proces kształtowania, wprowadzając po każdej operacji dowolne modyfikacje, takie jak dodawanie i usuwanie dowolnych części modelu zdefiniowanych przez grupy elementów i pojedyncze elementy, zmiany warunków brzegowych kinematycznych i obciążeniowych, zmianę definicji warunków kontaktowych. Został opracowany również specjalny algorytm do usuwania części blachy przy okrawaniu i wycinaniu otworów [218]. Ponadto został opracowany moduł programu do niejawniej analizy sprężynowania powrotnego [250].

Możliwości programu autora w zakresie symulacji wielozabiegowego procesu kształtowania zostaną pokazane na przykładzie symulacji kształtowania błotnika samochodu osobowego, przykładu testowego prezentowanego na konferencji NUMI-SHEET 2002 [306]. Analizowany proces kształtowania składa się z następujących zabiegów (operacji): wytlaczania (ciągnięcia), okrawania, zaginania krawędzi, po których następuje analiza sprężynowania powrotnego.

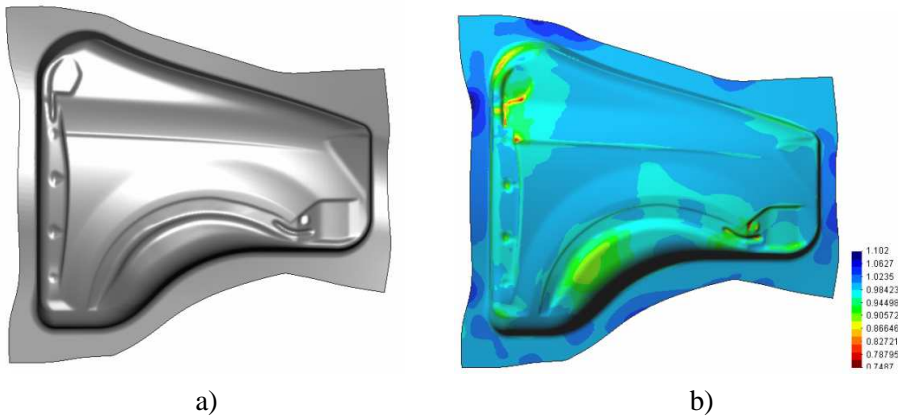


Rys. 6.2. Kształtowanie błotnika samochodowego: a) geometria narzędzi do operacji wytlaczania, b) kształt wykroju blachy.

Geometria narzędzi do operacji wytlaczania oraz kształt wykroju blachy są pokazane na rys. 6.2. Materiałem wsadowym jest blacha o grubości 0.7 mm ze stali o wysokiej wytrzymałości o następujących własnościach mechanicznych: moduł Younga  $E = 2.2188 \cdot 10^5$  MPa, współczynnik Poissona  $\nu = 0.3$ , o krzywej umocnienia danej równaniem (3.23) o następujących parametrach  $C = 627.5$  MPa,  $\epsilon_0 = 0.008155$  i  $n = 0.246$ . Własności anizotropowe blachy są zdefiniowane przez współczynniki Lankforda  $R_0 = 2.619$ ,  $R_{45} = 1.861$  i  $R_{90} = 2.166$ . Tarcie między blachą a narzędziami jest określone przez współczynnik tarcia Coulomba  $\mu = 0.147$ .

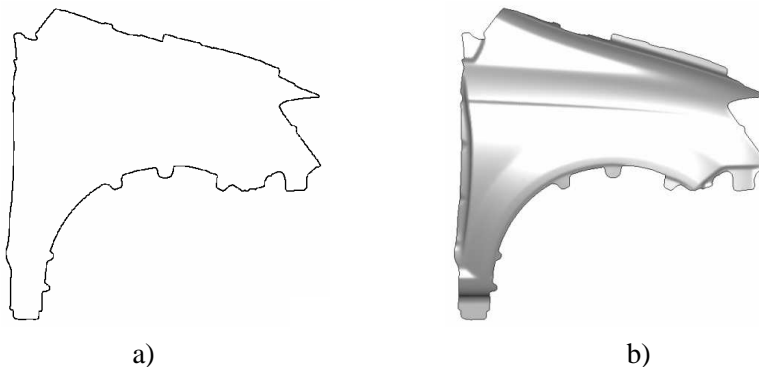
Blachę zdyskretyzowano za pomocą ponad 146 000 trójkątnych elementów powłokowych BST. Symulację wytlaczania prowadzono przyjmując prędkość ruchu stempla 10 m/s. Analiza wymagała około 83 000 kroków całkowania względem czasu. Czas obliczeń na komputerze PC z procesorem Xeon 3.4 GHz wyniósł 25 godz. 30 min. CPU. Otrzymany kształt wytłoczki oraz rozkład grubości blachy po operacji wytlaczania pokazano na rys. 6.3.

Następną operacją jest okrawanie kołnierza. Rzut linii cięcia na płaszczyznę normalną do kierunku ruchu narzędzi jest przedstawiony na rys. 6.4a. W symulacji okrawania nie symuluje się dokładnie procesu rozdzielania materiału, przeprowadza się



Rys. 6.3. Kształtowanie błotnika samochodowego – wytlaczanie: a) kształt części po operacji wytlaczania; b) rozkład grubości (znormalizowanej względem grubości początkowej).

jedynie rozdzielenie blachy wzdłuż linii cięcia oraz usuwa się zbędną część z modelu. W programie Stampack autor opracował specjalny algorytm rozdzielania materiału dokładnie wzdłuż dowolnie przebiegającej linii cięcia. Kształt części po usunięciu okrawanego materiału jest pokazany na rys. 6.4b.

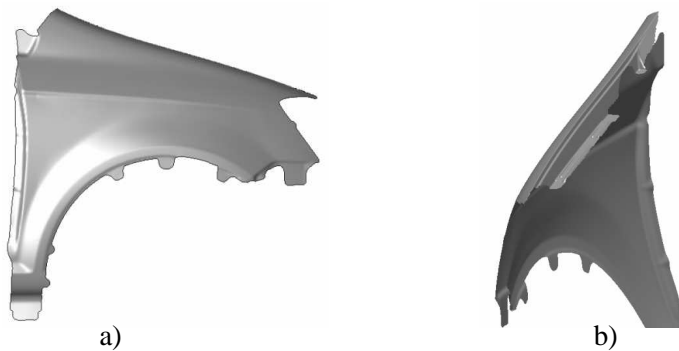


Rys. 6.4. Kształtowanie błotnika samochodowego – okrawanie: a) rzut linii cięcia na płaszczyznę normalną do kierunku ruchu narzędzi; b) kształt części po operacji okrawania.

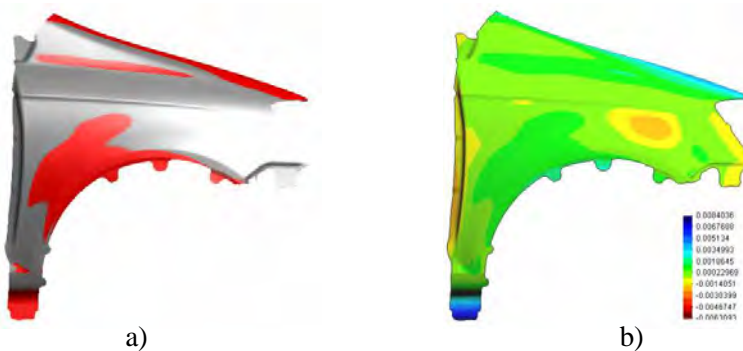
Ostatnią symulowaną operacją kształtowania jest zaginanie nadatku pozostałego po operacji cięcia. Materiał jest zaginany poprzez specjalne narzędzia zaginające. Podstawową trudnością w symulacji jest dobre oddanie zachowania materiału przy małym promieniu gięcia. Kształt części po operacji zaginania krawędzi jest pokazany na rys. 6.5a, zagięta krawędź jest pokazana wyraźniej na rys. 6.5b.



Po usunięciu części z tłoczni następuje sprężyste odkształcenie powrotne (sprężynowanie) części, prowadzące do zmiany jej geometrii. Sprężynowanie powrotne zależy od własności mechanicznych materiałów oraz od przebiegu procesu kształtowania. Celem projektowania jest zminimalizowanie efektu sprężynowania lub takie zaprojektowanie procesu kształtowania, aby tłoczona część po sprężynowaniu osiągnęła pożądany kształt wyrobu końcowego. Symulacja sprężynowania powrotnego została przeprowadzona przy zastosowaniu quasi-statycznego modelu niejawnego. Wyniki analizy sprężynowania powrotnego przedstawiono na rys. 6.6. Rysunek 6.6a przedstawia geometrię przed (kolorem szarym) i po sprężynowaniu (kolorem czerwonym). Na rys. 6.6b pokazano wyniki analizy sprężynowania powrotnego w postaci rozkładu przemieszczeń w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku.



Rys. 6.5. Kształtowanie błotnika samochodowego – zaginanie krawędzi: a) kształt części po operacji zaginania krawędzi; b) widok zagiętej krawędzi.



Rys. 6.6. Kształtowanie błotnika samochodowego – sprężynowanie powrotne: a) kształt części przed (kolor szary) i po sprężynowaniu powrotnym (kolor czerwony); b) rozkład przemieszczeń w kierunku osi  $z$  (normalnej do płaszczyzny rysunku).

### 6.3 Symulacja tłoczenia blach spawanych

W celu zmniejszenia masy pojazdu i efektywniejszego spełnienia wymagań wytrzymałościowych, w latach 90-tych ubiegłego wieku do produkcji elementów karoserii wprowadzono blachy spawane laserem składające się z komponentów o różnej grubości i różnych właściwościach wytrzymałościowych [285, 220].

#### 6.3.1 Charakterystyka właściwości tłocznych blach spawanych

Blacha spawana ze względu na zróżnicowanie właściwości lub grubości blach składowych, jak również oddziaływanie samej spoiny, odkształca się w sposób odmienny aniżeli materiał jednorodny [224]. Symulacja tłoczenia blach spawanych wymaga specjalnego modelu uwzględniającego właściwości spoiny [252, 225].

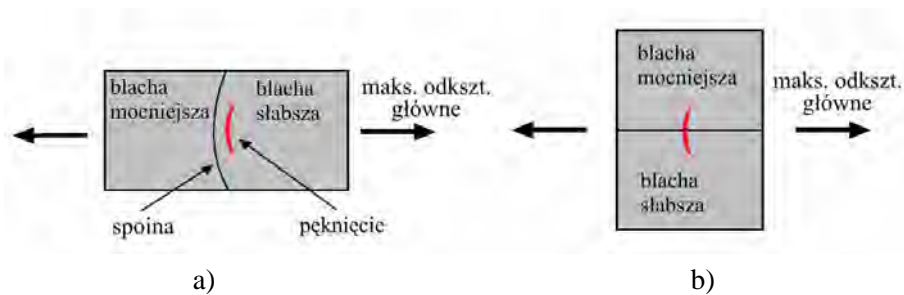
Materiał w strefie spoiny ma odmienną mikrostrukturę, co można łatwo zauważyć obserwując pod mikroskopem przekrój złącza spawanego. Na przekroju złącza spawanego pokazanego na rys. 6.7 można łatwo wyróżnić spoinę oraz strefy wpływu ciepła. Ze względu na przetopienie laserowe w obrębie spoiny materiał w strefie złącza



Rys. 6.7. Mikrofotografia strefy spawanego laserowo złącza.

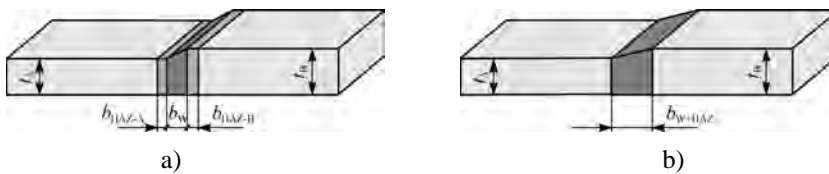
charakteryzuje się wyższą wytrzymałością i mniejszą odkształcalnością od materiału rodzimego [5]. Powoduje to zmniejszenie odkształcalności blachy w strefie spoiny w procesie tłoczenia. Innym efektem występującym w tłoczeniu blach o różnej grubości i różnych właściwościach mechanicznych jest przemieszczanie się spoiny w stronę mniej podatnego (grubszego lub bardziej wytrzymałego) materiału.

Tłoczność blachy spawanej zależy od orientacji spoiny względem kierunku maksymalnego odkształcenia głównego (rys. 6.8). Gdy maksymalne odkształcenie główne jest prostopadłe do spoiny, pękanie występuje w słabszym materiale równoległe do spoiny (rys. 6.8a). Jeśli spoina jest równoległa do kierunku maksymalnego odkształcenia głównego, ograniczona tłoczność spoiny jest czynnikiem decydującym i pękanie następuje prostopadłe do spoiny (rys. 6.8b). Przy dobrej jakości spoiny nie powinno nastąpić rozdzielanie materiału w samej spoinie w kierunku wzdłużnym [293].



Rys. 6.8. Pękanie blachy spawanej: a) wzdłuż spoiny, b) w poprzek spoiny.

### 6.3.2 Model MES blachy spawanej

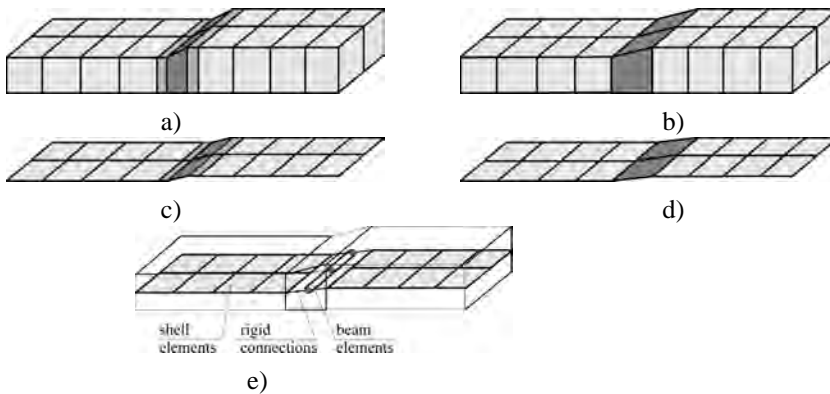


Rys. 6.9. Idealizacja geometrii blachy spawanej: a) model pięciostrefowy b) model trójstrefowy.

W prostym podejściu blachy spawane można analizować z pominięciem spoiny wprowadzając sztywne połączenia między składowymi blachami, niemniej jednak dokładniejsza analiza wymaga stosowania modelu blachy spawanej, uwzględniającego specyficzne własności i geometrię złącza spawanego. Idealizując geometrię blachy spawanej można wyodrębnić pięć stref, reprezentujących materiał rodzimy blach składowych, strefy wpływu ciepła oraz spoinę (rys. 6.9a). W uproszczonym podejściu spoinę oraz strefę wpływu ciepła można traktować łącznie (rys. 6.9b). Zasięg spoiny i stref wpływu ciepła można ustalić na podstawie obserwacji mikrostruktury złącza spawanego (rys. 6.7).

W dyskretyzacji blach spawanych można zastosować różne elementy skończone [252, 238]. Najprostsze podejście polega na dyskretyzacji uproszczonej geometrii z rys. 6.9a i 6.9b elementami bryłowymi, w wyniku czego otrzymuje się siatkę elementów skończonych przedstawioną na rys. 6.10a,b. Rozwiązanie to jest możliwe, aczkolwiek może być niezbyt praktyczne, gdyż elementy bryłowe nie są efektywne obliczeniowo w modelowaniu tłoczenia blach. W badaniach numerycznych przedstawionych w niniejszej pracy stosowano dwa inne modele. W pierwszym z nich stosuje się elementy powłokowe o różnej grubości i różnych własnościach mechanicznych według

wyróżnionych stref w modelu strefy połączenia (rys. 6.10c,d). Przedstawiony wcześniej trójkątny element BST jest używany w tym modelu. Element powłokowy strefy połączenia dobrze reprezentuje różne własności wyodrębnionych stref, ale przy stosunkowo małych wymiarach poprzecznych spoiny oraz stref wpływu ciepła wymaga to stosowania drobnej siatki elementów w tej strefie, co z kolei wpływa na zmniejszenie krytycznego kroku całkowania. Wysoką efektywność numeryczną przy wystarczającej dokładności można uzyskać reprezentując spoinę za pomocą elementów belkowych (rys. 6.10e). W tym przypadku krok całkowania nie jest uwarunkowany wymiarami poprzecznymi, decydujący o kroku całkowania wymiar (długość) elementu belkowego może być znacznie większy. Własności sprężysto-plastyczne spoiny i stref wpływu ciepła oraz ich działanie wzdłuż linii połączenia są dobrze reprezentowane przez elementy belkowe. Odształcenie spoiny w kierunku poprzecznym do linii połączenia jest zaniedbane w tym modelu. To uproszczenie jest uzasadnione tym, że przy dobrej jakości spoin nie obserwuje się problemów związanych z nadmiernym odkształceniem spoiny w kierunku poprzecznym [293].



Rys. 6.10. Różne modele MES blach łączonych: a) dyskretyzacja elementami bryłowymi modelu pięciostrefowego, b) dyskretyzacja elementami bryłowymi modelu trójstrefowego, c) dyskretyzacja elementami powłokowymi modelu pięciostrefowego, d) dyskretyzacja elementami powłokowymi modelu trójstrefowego, e) model powłokowo-belkowy.

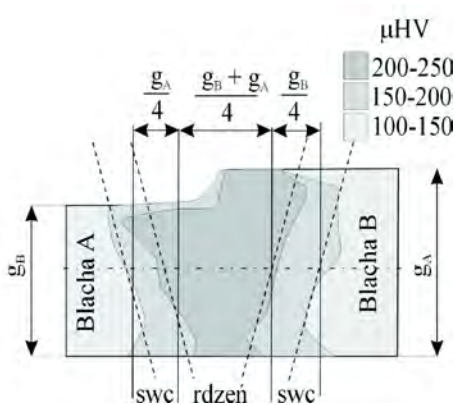
### 6.3.3 Wyznaczenie własności mechanicznych spoiny

Modelowanie blachy spawanej wymaga przyporządkowania odpowiednim strefom tego złącza własności mechanicznych. Jedną z możliwości jest określenie teoretyczne własności mechanicznych spoiny i strefy wpływu ciepła na podstawie termomechanicznej symulacji spawania blach [316]. Symulacja termomechaniczna procesu spawania uwzględniająca przemiany fazowe zachodzące w spoinie i strefie wpływu cie-

pła pozwala oszacować własności wytrzymałościowe złącza, jak również pozwala otrzymać rozkład naprężeń rezydualnych, które mogą być wprowadzone jako warunki początkowe w analizie tłoczenia blachy spawanej. Doświadczenie pokazuje, że naprężenia resztkowe po spawaniu są stosunkowo niewielkie w stosunku do naprężeń wywołanych odkształcaniem blachy przy tłoczeniu, dlatego można je zaniedbać nie wprowadzając zbyt dużego błędu. Własności wytrzymałościowe złącza można natomiast otrzymać alternatywnie na drodze doświadczalnej. Jednym ze sposobów jest przeprowadzenie specjalnych testów rozciągania dla próbek wyciętych z blachy spawanej [5]. Innym sposobem oszacowania własności wytrzymałościowych jest wykorzystanie zależności między twardością a wytrzymałością materiału – im wyższa twardość tym wyższa wytrzymałość materiału. W niniejszej pracy podobnie jak w pracach [225, 252] założono, że naprężenia uplastyczniające materiału są wprost proporcjonalne do jego twardości. Pozwala to wyznaczyć naprężenia uplastyczniające w spoinie  $\sigma_Y^{\text{spoina}}$  z zależności:

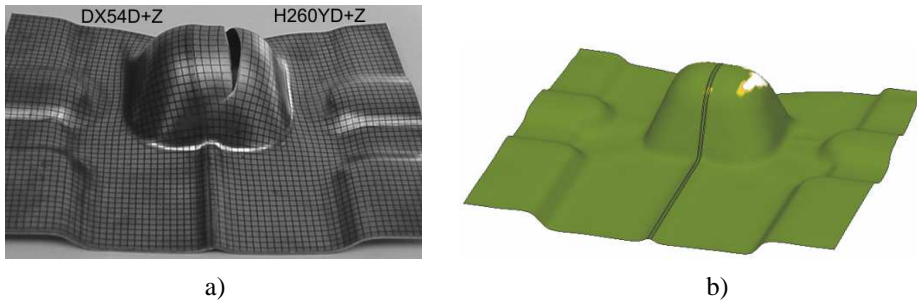
$$\sigma_Y^{\text{spoina}} = \sigma_Y^{\text{blacha}} \frac{\mu HV^{\text{spoina}}}{\mu HV^{\text{blacha}}} \quad (6.1)$$

przy znajomości naprężenia uplastyczniającego materiału rodzimego  $\sigma_Y^{\text{blacha}}$ , oraz mikrotwardości materiału rodzimego  $\mu HV^{\text{blacha}}$  oraz spoiny  $\mu HV^{\text{spoina}}$ . Spoina oraz strefa wpływu ciepła mają wyższą twardość niż materiał rodzimy (rys. 6.11). Pomiar mikrotwardości w przekroju złącza spawanego pozwalają również wyznaczyć geometrię spoiny oraz strefy wpływu ciepła.

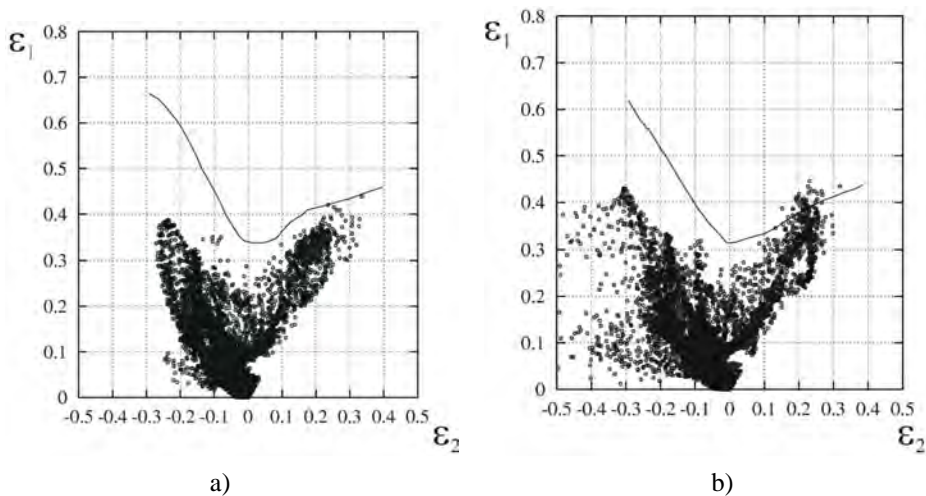


Rys. 6.11. Rozkład mikrotwardości na przekroju poprzecznym złącza blach grubości 1,2 i 1,5 mm ze stali w gatunkach DX54D+Z oraz H260YD+Z.

### 6.3.4 Symulacja tłoczenia wytłoczki z wykroju spawanego



Rys. 6.12. Tłoczenie blachy spawanej H260YD+Z/DX54D+Z: a) wytłoczka rzeczywista, b) kształt wytłoczki otrzymany w symulacji numerycznej.



Rys. 6.13. Rozkład odkształceń głównych na tle granicznej krzywej tłoczenia: a) dla blachy ze stali DX54D+Z, b) dla blachy ze stali H260YD+Z.

Przeprowadzono symulację kształtowania wytłoczki pokazanej na rys. 6.12a. Wykroj blachy użytej do tłoczenia ma kształt prostokąta o wymiarach  $140 \times 100$  mm, składa się z dwóch blach składowych ze stali DX54D+Z o grubości 1.5 mm oraz H260YD+Z o grubości 1.2 mm zespawanych wzdłuż osi symetrii równoległej do krótszego boku całego wykroju. Rysunek 6.12a pokazuje, że w próbach laboratoryjnych wykonanych w Politechnice Śląskiej w trakcie tłoczenia następowało pękanie cieńszej blachy.

Przeprowadzono symulację tłoczenia przyjmując model blachy spawanej, składający się w całości z elementów powłokowych, uwzględniający spoinę, strefy wpływu ciepła oraz materiał rodzimy jak pokazano na rys. 6.10c. Na podstawie prób rozciągania próbek blach stalowych oraz pomiarów twardości złącza spawanego wykonanych w Politechnice Śląskiej przyjęto następujące krzywe umocnienia oraz średnie współczynniki anizotropii:

- dla blachy DX54D+Z  
materiał rodzimy:  $\sigma = 519(\varepsilon + 0.022)^{0.206}$  MPa,  $R = 1.83$ ,  
strefa wpływu ciepła:  $\sigma = 723(\varepsilon + 0.043)^{0.306}$  MPa,  $R = 1.83$ ,
- dla blachy H260YD+Z  
materiał rodzimy:  $\sigma = 598(\varepsilon + 0.038)^{0.224}$  MPa,  $R = 1.56$ ,  
strefa wpływu ciepła:  $\sigma = 792(\varepsilon + 0.041)^{0.306}$  MPa,  $R = 1.56$ ,
- dla spoiny:  $\sigma = 896(\varepsilon + 0.052)^{0.351}$  MPa,  $R = 1.5$ .

Szerokość spoiny przyjęto 0.7 mm, grubość elementów powłokowych dyskretyzujących spoinę przyjęto jako średnią grubości blach składowych, 1.35 mm. Szerokość stref wpływu ciepła przyjęto 0.4 mm dla blachy DX54D+Z oraz 0.3 mm dla blachy H260YD+Z.

Wynik symulacji numerycznej w postaci kształtu końcowego blachy z zaznaczonym miejscem możliwego pęknięcia blachy pokazano na 6.12b. Miejsce pęknięcia wyznaczono na podstawie rozkładów odkształceń głównych w wytloczce, zestawionych z granicznymi krzywymi tłoczenia dla blach składowych (diagramy FLD – ang. forming limit diagrams) pokazanymi na rys. 6.13. Położenie części punktów, odpowiadających odkształceniom głównym dla blachy ze stali H260YD+Z powyżej granicznej krzywej tłoczenia, wskazuje na możliwość pęknięcia blachy w miejscu reprezentowanym przez te punkty. Miejsce pęknięcia wytloczki, zaznaczone na rys. 6.12b, odpowiada miejscu pęknięcia rzeczywistej wytloczki pokazanej na rys. 6.12a. Więcej wyników eksperymentalnych i numerycznych dla badanej wytloczki można znaleźć w [224, 252]. Zgodność wyników numerycznych z wynikami laboratoryjnymi potwierdza prawidłowość założeń przyjętych w modelowaniu blachy spawanej.

W badaniach laboratoryjnych zaobserwowano pewien rozrzut wyników. Dla tego samego wsadu w części prób występowało pęknięcie, a w części otrzymywano poprawną wytloczkę. Jest to przejaw losowości charakteryzującej pęknięcie blachy w procesach tłoczenia. Stochastyczny charakter procesu tłoczenia blach został uwzględniony w pracach [140, 139].

### 6.3.5 Numeryczna symulacja wytłaczania miseczki cylindrycznej z blachy spawanej

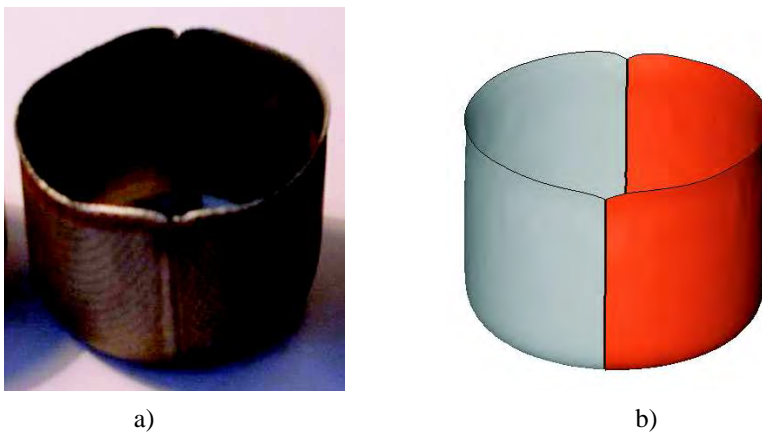
Przeprowadzono symulację numeryczną wytłaczania miseczki cylindrycznej z blachy spawanej. Wyniki numeryczne porównano z badaniami eksperymentalnymi przeprowadzonymi w Politechnice Śląskiej. Wykrojka o kształcie koła o średnicy 100 mm, wycięta jest z blachy spawanej w ten sposób, że spoina pokrywa się ze średnicą. Rozpatrywano wytłaczanie blach spawanych wykonanych z dwóch różnych materiałów, stali DC04 o grubości 1 mm oraz stali DX54D+Z o grubości 1.5 mm, jak również z jednakowych blach składowych z powyższych materiałów.

W obliczeniach numerycznych stosowano następujące krzywe umocnienia oraz współczynniki anizotropii:

- dla blachy DC04:  $\sigma = 524(\varepsilon + 0.022)^{0.219}$  MPa,  $R = 1.86$
- dla blachy DX54D+Z:  $\sigma = 519(\varepsilon + 0.022)^{0.206}$  MPa,  $R = 1.83$
- dla spoiny:  $\sigma = 740(\varepsilon + 0.024)^{0.354}$  MPa.

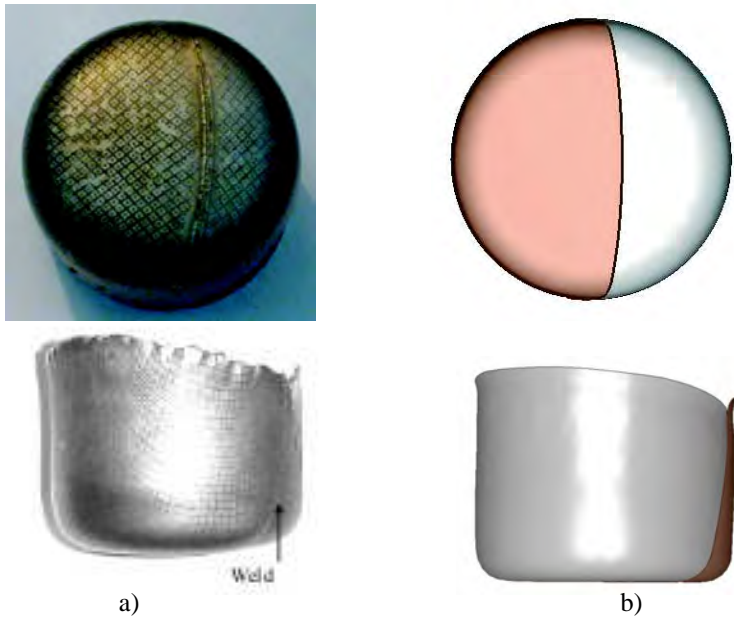
Spoinę modelowano za pomocą elementów belkowych o przekroju kwadratowym 1 mm × 1 mm.

Doświadczalne i numeryczne wyniki wytłaczania miseczki cylindrycznej z wykrojki spawanej z jednakowych blach składowych przedstawiono na rysunku 6.14. Kształt wytłoczki uzyskany w symulacji numerycznej zgadza się z kształtem wytłoczki rzeczywistej. Można łatwo zauważyć zmniejszoną podatność na odkształcenie wzdłuż spoiny.



Rys. 6.14. Wytłaczanie miseczki cylindrycznej z wykrojki spawanej z jednakowych blach składowych: a) wytłoczka doświadczalna, b) kształt wytłoczki z symulacji numerycznej.





Rys. 6.15. Wytłaczanie miseczki cylindrycznej z wykojki spawanej z różnych blach składowych: a) wytłoczka doświadczalna, b) kształt wytłoczki z symulacji numerycznej.

Rysunek 6.15 przedstawia eksperymentalne i numeryczne wyniki wytłaczania miseczki z blachy spawanej z dwóch różnych materiałów. W tym przypadku zarówno w rzeczywistej wytłoczce, jak i w symulacji numerycznej, można zaobserwować ograniczoną odkształcalność strefy spoiny oraz jej przemieszczenie w kierunku grubszej (mniej podatnej na odkształcenie) blachy składowej. Wyniki numeryczne zgadzają się bardzo dobrze z wynikami doświadczalnymi.

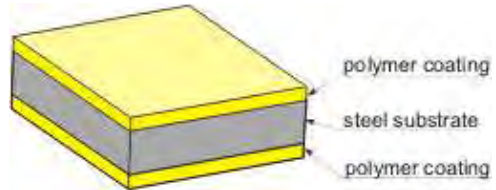
## 6.4 Symulacja kształtowania blach pokrytych polimerem

### 6.4.1 Opis zagadnienia technicznego

Ostatnie lata przyniosły duży postęp w technologii opakowań. Producenci puszek zmuszeni są do poszukiwania nowych materiałów i nowych technologii, aby sprostać konkurencji ze strony innych technologii. Jednym z nowych materiałów są blachy pokryte warstwą polimeru. Mają one duże perspektywy w produkcji puszek do aerozoli, napojów i innych produktów spożywczych (rys. 6.16). Blachy pokryte polimerem są wprowadzane na rynek przez firmę Corus, znanego producenta stali. Blachy te są nowoczesnym materiałem, łączącym zalety blach stalowych, takie jak łatwość kształtowania, dobre własności mechaniczne wyrobu, niski koszt, łatwy recykling z zaletami nowoczesnej powłoki polimerowej, takimi jak wysokie walory estetyczne, ochrona antykorozyjna, lekkość produktu przy jednoczesnej dużej sztywności oraz eliminacja dodatkowych operacji nakładania warstw ochronnych na puszkę.



Rys. 6.16. Puszki z blachy pokrytej polimerem.



Rys. 6.17. Struktura laminatu stal-polimer.

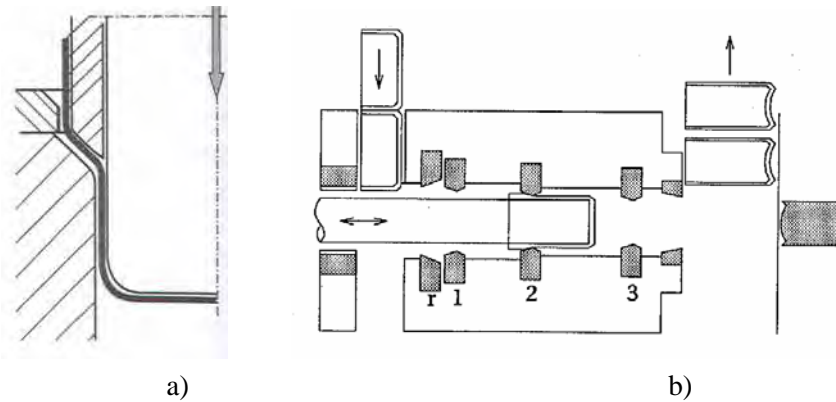
Blachę powlekaną polimerem można traktować jako laminat, składający się z podłoża stalowego o grubości 0.12–0.2 mm, pokrytego z obu stron warstwami polimeru o grubości 0.02–0.03 mm (rys. 6.17). Podłoże jest blachą stalową chromowaną lub cynowaną. Stosowanym polimerem jest PET, czyli poli(tereftalan etylenu). W produkcji laminatu bardzo ważnym problemem jest uzyskanie dobrej przyczepności warstwy polimeru do podłoża stalowego.

### Proces kształtowania

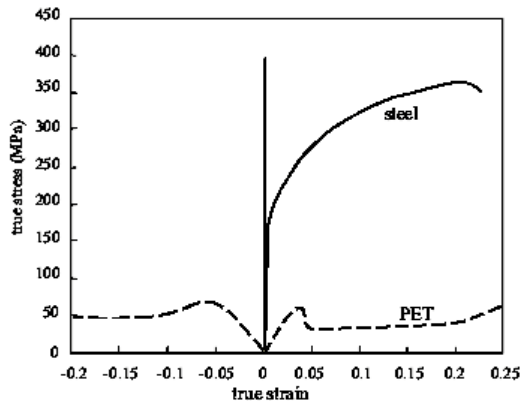
Puszki na produkty spożywcze, napoje i aerozole wytwarzane są najczęściej w wieloetapowym procesie kształtowania. Podstawowe procesy to proces głębokiego tłoczenia połączony z przetłaczaniem (*ang.* DRD – draw-redraw) oraz proces głębokiego tłoczenia połączony z przetłaczaniem i wyciąganiem (*ang.* DWI – draw and wall ironing) pokazane schematycznie na rys. 6.18. W procesie wyciągania (*ang.* ironing) uzyskuje się znaczne pocienienie ścianki puszki zazwyczaj w kilku etapach. Powłoka polimerowa zmienia właściwości technologiczne blachy. Pojawiają się nowe problemy, takie jak zapewnienie integralności powłoki polimeru oraz zachowanie przyczepności polimeru do stali w trakcie procesu kształtowania.

### Charakterystyka laminatu stal-polimer

Właściwości mechaniczne i technologiczne laminatu stal-polimer zależą od właściwości materiałów składowych i ich wzajemnego oddziaływania [237]. Polimery i metale różnią się znacznie właściwościami mechanicznymi (rys. 6.19). Polimery charakteryzują się zazwyczaj znacznie niższym modułem sprężystości i niższymi naprężeniami uplastyczniającymi niż metale. Z rys. 6.19 widać, że wydłużenie graniczne stali jest większe niż odkształcenie, przy którym następuje uplastycznienie polimeru (PET), jest jednak mniejsze od maksymalnego wydłużenia polimeru. Odkształcanie poli-



Rys. 6.18. Procesy kształtowania puszek: a) tłoczenie z przetłaczaniem (DRD - draw redraw), b) tłoczenie z przetłaczaniem i wyciąganiem (DWI - draw and wall ironing).



Rys. 6.19. Krzywe naprężenie–odkształcenie materiałów składowych laminatu.

meru pokrywającego podłoże stalowe jest odmienne od odkształcania swobodnego polimeru. PET na podłożu metalu można odkształcić znacznie bardziej niż swobodną folię polimeru, problem lokalizacji nie występuje dzięki adhezji pomiędzy polimerem i metalem. Przy pewnym poziomie odkształcenia niejednorodność odkształcania plastycznego uwidacznia się w mechanizmie odkształcania warstwy kontaktowej – w rezultacie wykształci się niejednorodny stan odkształcenia i naprężenia w pobliżu powierzchni styku metalu i polimeru. Może dojść do delaminacji lub rozerwania warstwy polimeru (w zależności od adhezji i własności polimeru). Zachowanie spójności między obydwoma materiałami jest niezbędne w prawidłowym procesie kształtowania laminatu.

### 6.4.2 Numeryczny model laminatu stal-polimer

Numeryczny model laminatu stal-polimer powinien uwzględniać istotne czynniki wpływające na własności technologiczne laminatu, w tym właściwości mechaniczne metalu i polimeru oraz zjawiska zachodzące w warstwie kontaktowej stal-polimer. Globalny model laminatu składać się będzie z trzech modeli lokalnych:

- model konstytutywny stali,
- model konstytutywny polimeru,
- model konstytutywny warstwy kontaktowej.

Właściwości mechaniczne polimeru silnie zależą od prędkości odkształcenia i temperatury, a naprężenie uplastyczniające zależy ponadto od ciśnienia (części kulistej tensora naprężenia) [292]. W niniejszej pracy założono, że zmiany temperatury są stosunkowo niewielkie i zastosowano uproszczony model, w którym temperatura jest danym parametrem. Bardziej zaawansowany model wymaga zastosowania sprzężonego termomechanicznego opisu problemu. Zmiany temperatury mają znaczenie głównie w operacji wyciągania, w niniejszej pracy ograniczymy się do pierwszej operacji kształtowania puszki – tłoczenia, w której zmiany temperatury są stosunkowo małe. Dlatego można założyć, że analiza izotermiczna jest wystarczająco dokładna.

Warstwa polimeru jest modelowana za pomocą modeli opisanych w podrozdziale 3.5, a odkształcanie stali jest opisywane za pomocą sprężysto-plastycznego modelu przedstawionego w podrozdziale 3.4. Warstwa kontaktowa polimer–metal jest modelowana przy założeniu doskonałej przyczepności obu materiałów. Założenie to jest słuszne, jeśli w procesie kształtowania nie następuje zerwanie więzów adhezyjnych w warstwie kontaktowej.

### 6.4.3 Symulacja jednoosiowego ściskania polimeru

Doświadczalne krzywe naprężenie–odkształcenie uzyskane w próbach jednoosiowego ściskania pokazane na rys. 3.2 zostaną wykorzystane do kalibracji modelu Arrudy-Boyce oraz ściśliwego modelu Leonova dla PET – polimeru stosowanego jako warstwa pokrywająca w blasze stosowanej do produkcji puszek. W celu wyznaczenia stałych materiałowych przeprowadzono analizę ściskania pojedynczego elementu. Model konstytutywny implementowano dla ośmiowęzłowego elementu bryłowego Q1/P0. Jest to element oparty na sformułowaniu mieszanym z liniową interpolacją pola przemieszczeń i stałym polem naprężenia w elemencie. W tym elemencie nie występuje zjawisko blokady objętościowej. Stałe materiałowe znaleziono metodą prób i błędów. Najpierw przeprowadzono analizę wrażliwości rozwiązania na zmiany poszcze-

gólnych parametrów, a następnie zmieniano je aby uzyskać zadowalającą aproksymację krzywych doświadczalnych. Wyznaczone stałe materiałowe dla modelu Arrudy-Boyce podano w tabeli 6.1, a dla ściśliwego modelu Leonova w tabeli 6.2.

Tabela 6.1. Stałe materiałowe dla modelu Arrudy-Boyce

$E$ (MPa)	$\nu$ –	$\Delta E^*$ (J)	$\dot{\gamma}_0$ $s^{-1}$	$s_0$ (MPa)	$s_{ss}$ (MPa)	$h$ (MPa)	$\alpha_p$ –	$\mu_R$ (MPa)	$\lambda_L$ –
$1.15 \cdot 10^3$	0.33	$3.23 \cdot 10^{-19}$	$10^{16}$	85	41	200	0.08	7	2.5

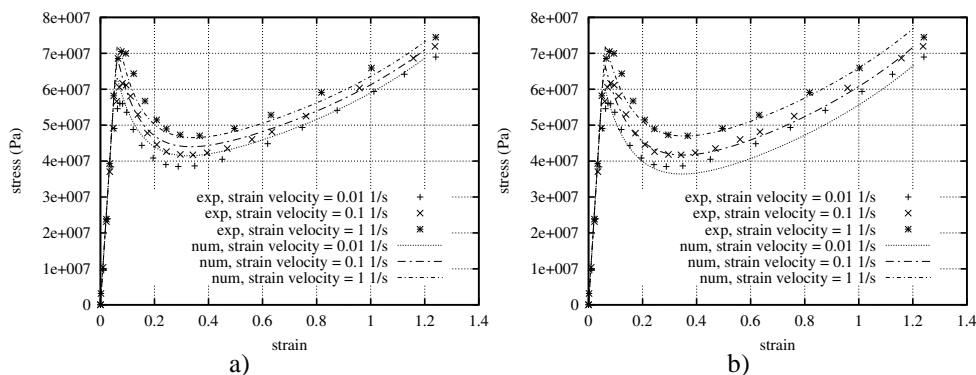
Tabela 6.2. Stałe materiałowe dla ściśliwego modelu Leonova

$E$ (MPa)	$\nu$ –	$\Delta H$ (J mol $^{-1}$ )	$A_0$ $s^{-1}$	$\tau_0$ (MPa)	$D_\infty$ –	$h$ –	$\mu$ –	$\mu_R$ (MPa)	$\lambda_L$ –
$1.158 \cdot 10^3$	0.33	$2.0 \cdot 10^5$	$4.1 \cdot 10^{-23}$	0.70	17.3	120	0.047	8.6	2.9

Aproksymacja krzywych doświadczalnych uzyskana w analizie numerycznej z użyciem wyznaczonych parametrów jest pokazana na rys. 6.20a i b w zestawieniu z krzywymi doświadczalnymi. Analizę przeprowadzono dla różnych prędkości odkształcenia. Można zaobserwować, że obydwa modele, model Arrudy-Boyce oraz ściśliwy model Leonova, pozwalają uzyskać podobny charakter krzywej naprężenie-odkształcenie oraz dobrze reprezentują zależność własności od prędkości odkształcenia.

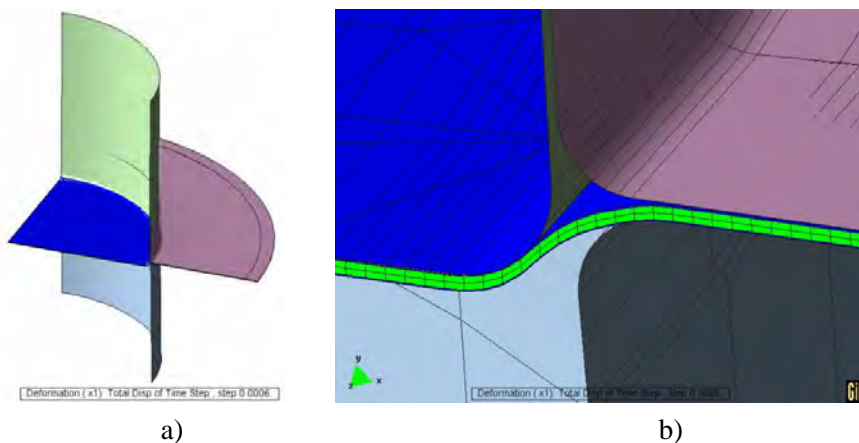
#### 6.4.4 Symulacja tłoczenia puszki cylindrycznej

Przeprowadzono symulację numeryczną pierwszego etapu wytwarzania puszki, tłoczenie wytłoczki cylindrycznej z wykrojki o średnicy 150 mm z blachy pokrytej polimerem. Stalowe podłoże o grubości 0.2 mm jest pokryte od strony wewnętrznej warstwą polimeru o grubości 0.02 mm, a od strony zewnętrznej warstwą polimeru o grubości 0.03 mm. Średnica stempla wynosi 79 mm, a jego promień – 1.4 mm. Matryca ma postać pierścienia o średnicy wewnętrznej 79.76 mm i promieniu 1.2 mm. Własności mechaniczne blachy są zdefiniowane przez granicę plastyczności  $\sigma_0 = 240$  MPa, wytrzymałość na rozciąganie  $R_m = 360$  MPa, parametr umocnienia  $n = 0.17$ , maksymalne wydłużenie  $A_m = 32\%$ .



Rys. 6.20. Numeryczne i doświadczalne krzywe naprężenie–odkształcenie: a) model Arrudy-Boyce, b) ściśliwy model Leonova.

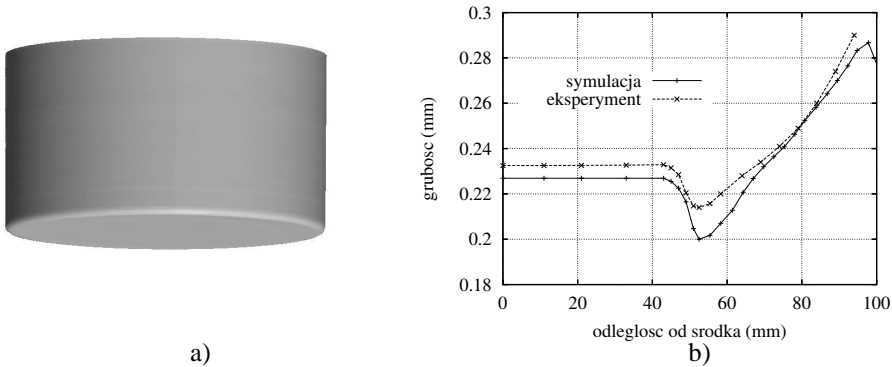
Polimer modelowano za pomocą modelu Arrudy-Boyce z parametrami podanymi w tabeli 6.1. Założono doskonałą przyczepność między stalą a polimerem. Współczynnik tarcia Coulomba ustalony w badaniach laboratoryjnych przeprowadzonych w IPU (Lyngby, Dania) wynosi 0.12. Siła dociskacza w procesie produkcyjnym wynosi 18 kN. Rysunek 6.21 pokazuje model MES. Analizę przeprowadzono dla ćwiartki geometrii. Warstwę stali i pokrycia polimerowego dyskretyzowano 8-węzłowymi elementami bryłowymi Q1/P0.



Rys. 6.21. Model MES głębokiego tłoczenia puszkii z blachy pokrytej polimerem.

Wyniki symulacji numerycznej są przedstawione na rys. 6.22. Rysunek 6.22a przedstawia kształt wytłoczki otrzymany w symulacji, a rys. 6.22b przedstawia roz-

kład grubości wzdłuż tworzącej otrzymany w symulacji zestawiony z grubością zmierzoną w badaniach procesu rzeczywistego. W symulacji otrzymano nieco większe pocienienie ścianki u podstawy oraz nieco większą wysokość wytloczki, co się wiąże z mniejszym pogrubieniem w górnej części puszkii. Różnice między wynikiem symulacji a pomiarami w eksperymencie mogą być spowodowane zbyt małą wartością przyjętego współczynnika tarcia.



Rys. 6.22. Symulacja tłoczenia puszkii: a) kształt wytloczki, b) rozkład grubości wzdłuż tworzącej

## Podsumowanie

W niniejszym rozdziale zostały przedstawione szerokie możliwości rozwijanego programu w zastosowaniu do symulacji rzeczywistych procesów kształtowania blach. Przedstawiono oryginalne sformułowania teoretyczne, rozwinięte przy współudziale i implementowane przez autora umożliwiające analizę dużych odkształceń sprężysto-plastycznych blach. Możliwości zastosowań przemysłowych zilustrowano na przykładzie wieloetapowego procesu kształtowania części karoserii. W niniejszym rozdziale pokazano również modelowanie nowoczesnych materiałów stosowanych w tłocznictwie, blach spawanych laserowo, używanych w produkcji elementów karoserii samochodowych oraz blach powlekanych polimerem, nowego materiału wprowadzanego do produkcji puszek. Dla blach spawanych omówiono sposób modelowania złącza spawanego. Dokładność modelu i jego efektywność numeryczną pokazano analizując wybrane przykłady testowe, które również były badane eksperymentalnie. Dla modelowania blachy powlekanej polimerem implementowano znane z literatury zaawansowane modele polimerów, model Arrudy-Boyce i ściśliwy model Leonova.

Model numeryczny kształtowania blach powlekanych polimerem został opracowany przez autora w ramach europejskiego projektu badawczego POLYCOAT. Część otrzymanych wyników została opublikowana w [244]. Praca nad modelowaniem blach

spawanych jest obecnie kontynuowana przez autora w ramach europejskiego projektu badawczego SIM-TWB.

Pokazane przykłady symulacji kształtowania blach pokazują poprawność i efektywność sformułowań teoretycznych, takich jak np. sformułowania elementów skończonych, modeli konstytutywnych i algorytmu analizy zagadnienia kontaktowego oraz dużą przydatność praktyczną programu.



## 7. Sformułowanie metody elementów dyskretnych

### Wstęp

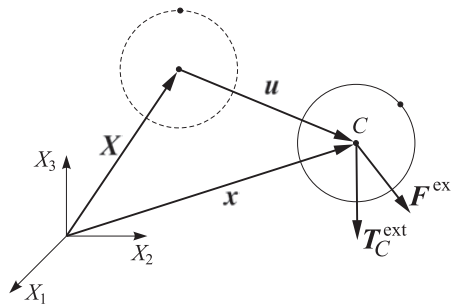
Niniejszy rozdział rozpoczyna część pracy poświęconą metodzie elementów dyskretnych oraz zintegrowanej metodzie elementów dyskretnych i skończonych. W metodzie elementów dyskretnych materiał jest modelowany jako zbiór sztywnych ciał, zwanych elementami dyskretnymi, oddziaływujących między sobą poprzez siły kontaktu zarówno w kierunku normalnym jak i stycznym do powierzchni styku. W oddziaływaniu kontaktowym można uwzględnić siły spójności (kohezji) między elementami oraz możliwość zerwania tych więzów. Metoda elementów dyskretnych doskonale nadaje się do modelowania materiałów charakteryzujących się istotnymi nieciągłościami mikrostruktury oraz nieciągłościami w postaci zniszczenia. Umożliwia symulację powstawania i propagacji pęknięć.

W niniejszym rozdziale przedstawiono sformułowanie teoretyczne metody elementów dyskretnych. W sformułowaniu metody elementów dyskretnych stosowanym w niniejszej pracy wykorzystuje się sztywne elementy o kształcie kuli (w zagadnieniu trójwymiarowym) lub walca (w zagadnieniu dwuwymiarowym). Algorytm metody elementów dyskretnych wykorzystujący sztywne elementy cylindryczne lub sferyczne po raz pierwszy został zaproponowany przez Cundalla [57, 55]. W niniejszej pracy wykorzystywany jest własny algorytm, implementowany w programie metody elementów skończonych Simpack, opartym na jawnym całkowaniu równań ruchu [255].

Metoda elementów dyskretnych jest w istocie podobna do metody sztywnych elementów skończonych [153], w której układ ciągły jest zastąpiony układem brył sztywnych połączonych ze sobą nieważkimi elementami sprężystymi i tłumiącymi. W opisie matematycznym otrzymuje się podobne równania ruchu jak w metodzie elementów dyskretnych. Występuje istotna różnica w koncepcji modelowania. Metoda sztywnych elementów skończonych w postaci przedstawionej [153] dążyła do zmniejszenia liczby stopni swobody w modelu numerycznym w porównaniu do metody elementów odkształcalnych i nie była stosowana do modelowania materiału na poziomie mikroskopowym. Nie formułowano zagadnienia kontaktowego dla układu brył sztywnych. Nie uwzględniano w niej możliwości zerwania połączeń między sztywnymi elementami skończonymi. Nie było możliwości modelowania powstawania i propagacji szczelin.

## 7.1 Równania ruchu swobodnego pojedynczego elementu dyskretnego

Rozpatrujemy dowolny ruch swobodny pojedynczego elementu dyskretnego będącego ciałem sztywnym o kształcie walca lub kuli (rys. 7.1). Opis ruchu dowolnego ciała sztywnego jest zamieszczony w dodatku B. Równania ruchu rozpatrywanego elementu dyskretnego są szczególnym przypadkiem ogólnych równań ruchu przedstawionych w dodatku B.



Rys. 7.1. Ruch sztywnej cząstki.

Ruch opisywany jest względem nieruchomego układu współrzędnych  $OX_1X_2X_3$ . Ogólne równanie ruchu dowolnego ciała sztywnego w postaci słabej dane jest równaniem (B.14). Jako punkt odniesienia (biegun) wybieramy punkt pokrywający się ze środkiem masy elementu dyskretnego  $C$ . Przy tym założeniu zasada prac przygotowanych dla rozpatrywanego ciała sztywnego wyraża się następującym równaniem:

$$(m\ddot{\mathbf{u}}_C - \mathbf{F}^{\text{ext}}) \cdot \delta\mathbf{u}_C + (\mathbf{J}_C \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathbf{T}_C^{\text{ext}}) \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} = 0, \quad (7.1)$$

gdzie  $\delta\mathbf{u}_C$  – przemieszczenie przygotowane środka masy,  $\delta\boldsymbol{\varphi}$  – elementarny (przygotowany) obrót,  $m$  – masa ciała sztywnego,  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  – wypadkowa sił zewnętrznych zdefiniowana równaniem (B.10),  $\mathbf{T}_C^{\text{ext}}$  – wypadkowy moment sił zewnętrznych względem bieguna  $C$  zdefiniowany równaniem (B.11),  $\mathbf{J}_C$  – tensor bezwładności zdefiniowany równaniem (B.13),  $\boldsymbol{\omega}$  – wektor prędkości obrotowej.

W rozpatrywanym zagadnieniu równanie (7.1) można jeszcze bardziej uprościć. W przypadku ciała sztywnego o kształcie kuli, jak również w przypadku dowolnego ciała sztywnego poruszającego się w płaszczyźnie, znika człon  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega}$ , dzięki czemu równanie (7.1) upraszcza się do postaci:

$$(m\ddot{\mathbf{u}}_C - \mathbf{F}^{\text{ext}}) \cdot \delta\mathbf{u}_C + (\mathbf{J}_C \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{T}_C^{\text{ext}}) \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} = 0. \quad (7.2)$$

Ponieważ wariacje  $\delta \mathbf{u}_C$  i  $\delta \boldsymbol{\varphi}$  są niezależne, spełnienie równania (7.2) wymaga spełnienia dwóch równań:

$$m\ddot{\mathbf{u}}_C = \mathbf{F}^{\text{ext}}, \quad (7.3)$$

$$\mathbf{J}_C \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{T}_C^{\text{ext}}, \quad (7.4)$$

które są szczególnym przypadkiem równań Newtona–Eulera (B.15)–(B.16). Równania (7.3) i (7.4) opisują odpowiednio ruch postępowy i ruch obrotowy ciała sztywnego o kształcie kuli (3D) lub walca (2D).

## 7.2 Równania ruchu układu elementów dyskretnych

W metodzie elementów dyskretnych mamy do czynienia z układem wielu elementów – ciał sztywnych, których ruch jest wynikiem obciążenia zewnętrznego i wzajemnego oddziaływania między sobą poprzez reakcje kontaktowe o charakterze sił jak również momentów skupionych. Dodatkowe ograniczenia kontaktowe między elementami dyskretnymi w implementowanym sformułowaniu są spełnione w przybliżeniu za pomocą metody funkcji kary.

Założymy, że ruch jest badany w nieruchomym układzie kartezjańskim  $X$ . Ruch obrotowy poszczególnych elementów dyskretnych jest opisywany względem układów inercyjnych, których początek pokrywający się ze środkiem masy poszczególnych elementów jest traktowany jako chwilowy biegun ruchu obrotowego. Wykorzystując równanie (B.14) zasadę prac przygotowanych dla układu  $N$  elementów o kształcie kuli (3D) lub walca (2D) można zapisać w następującej postaci:

$$\sum_{i=1}^N [(m_i \ddot{\mathbf{u}}_i - \mathbf{F}_i^{\text{ext}}) \cdot \delta \mathbf{u}_i + (\mathbf{J}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i - \mathbf{T}_i^{\text{ext}}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_i] + \delta W^c = 0, \quad (7.5)$$

gdzie  $\delta W^c$  jest pracą przygotowaną oddziaływań kontaktowych wszystkich par elementów w kontakcie, a  $m_i$ ,  $\mathbf{J}_i$ ,  $\mathbf{u}_i$ ,  $\boldsymbol{\omega}_i$ ,  $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$  i  $\mathbf{T}_i^{\text{ext}}$  są wprowadzonymi wcześniej wielkościami odnoszonymi się do  $i$ -tego elementu dyskretnego:  $m_i$  jest masą  $i$ -tego elementu dyskretnego<sup>1</sup>,  $\mathbf{J}_i$  – tensorem bezwładności względem układu centralnego (o początku pokrywającym się ze środkiem masy),  $\mathbf{u}_i$  – przemieszczeniem środka masy,  $\boldsymbol{\omega}_i$  – prędkością kątową,  $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$  – wypadkową siłą od obciążenia zewnętrznego (bez oddziaływania kontaktowego), a  $\mathbf{T}_i^{\text{ext}}$  – wypadkowym momentem od obciążenia zewnętrznego (bez oddziaływania kontaktowego).

<sup>1</sup>W dalszych rozważaniach zostanie opuszczony indeks  $C$  wskazujący na wybór bieguna dla opisu ruchu obrotowego.

Praca przygotowana oddziaływań kontaktowych  $\delta W^c$  jest sumą prac przygotowanych oddziaływania kontaktowego we wszystkich parach kontaktujących się elementów dyskretnych:

$$\delta W^c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{nc_i} \delta w_{ij}^c, \quad (7.6)$$

gdzie  $\delta w_{ij}^c$  jest pracą przygotowaną oddziaływania kontaktowego między  $i$ -tym i  $j$ -tym elementem, a  $nc_i$  liczbą elementów będących w kontakcie z  $i$ -tym elementem dyskretnym. Współczynnik  $1/2$  w równaniu (7.6) wynika z faktu, że przy zastosowanym sumowaniu każda para kontaktowa występuje dwukrotnie. Praca przygotowana oddziaływania kontaktowego między  $i$ -tym i  $j$ -tym elementem jest sumą prac przygotowanych sił i momentów oddziaływania kontaktowego:

$$\delta w_{ij}^c = \mathbf{F}_{ij}^c \cdot (\delta \mathbf{u}_j^c - \delta \mathbf{u}_i^c) + \mathbf{T}_{ij} \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi}_j - \delta \boldsymbol{\varphi}_i), \quad (7.7)$$

gdzie  $\mathbf{F}_{ij}^c$  – całkowita siła oddziaływania kontaktowego między  $i$ -tym a  $j$ -tym elementem dyskretnym,  $\delta \mathbf{u}_i^c$  – przemieszczenie przygotowane punktu należącego do  $i$ -tego elementu będącego w kontakcie z  $j$ -tym elementem,  $\delta \mathbf{u}_j^c$  – przemieszczenie przygotowane punktu należącego do  $j$ -tego elementu będącego w kontakcie z  $i$ -tym elementem,  $\delta \boldsymbol{\varphi}_i$  i  $\delta \boldsymbol{\varphi}_j$  – przygotowane obroty  $i$ -tego i  $j$ -tego elementu dyskretnego. W stosowanym sformułowaniu metody elementów dyskretnych zastosowano regularyzację ograniczeń kontaktowych za pomocą funkcji kary, w związku z tym przemieszczenia przygotowane nie muszą spełniać więzów geometrycznych dla kontaktu (więzy te są spełnione w sposób przybliżony).

Zgodnie z zasadami akcji i reakcji siły i momenty, z jakimi oddziałują na siebie kontaktujące się elementy, są równe co do wartości i przeciwnie zwrócone. Biorąc to pod uwagę równanie (7.7) można zapisać w postaci:

$$\delta w_{ij}^c = -\mathbf{F}_{ij}^c \cdot \delta \mathbf{u}_i^c - \mathbf{F}_{ji}^c \cdot \delta \mathbf{u}_j^c - \mathbf{T}_{ij} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_i - \mathbf{T}_{ji} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_j. \quad (7.8)$$

Na podstawie równania (B.1) równanie (7.8) można przekształcić do postaci

$$\delta w_{ij}^c = -\mathbf{F}_{ij}^c \cdot (\delta \mathbf{u}_i + \delta \boldsymbol{\varphi}_i \times \mathbf{s}_i^c) - \mathbf{F}_{ji}^c \cdot (\delta \mathbf{u}_j + \delta \boldsymbol{\varphi}_j \times \mathbf{s}_j^c) - \mathbf{T}_{ij} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_i - \mathbf{T}_{ji} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_j. \quad (7.9)$$

Korzystając z jawnej postaci wyrażenia na pracę przygotowaną oddziaływania kontaktowego (7.9) oraz własności iloczynu mieszanego wektorów zasadę prac przygotowanych dla układu elementów dyskretnych (7.5) można zapisać w następującej postaci

$$\sum_{i=1}^N \left[ \left( m_i \ddot{\mathbf{u}}_i - \mathbf{F}_i^{\text{ext}} - \sum_{j=1}^{nc_i} \mathbf{F}_{ij}^c \right) \cdot \delta \mathbf{u}_i + \left( \mathbf{J}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i - \mathbf{T}_i^{\text{ext}} - \sum_{j=1}^{nc_i} \mathbf{T}_{ij} - \sum_{j=1}^{nc_i} \mathbf{s}^c \times \mathbf{F}_{ij}^c \right) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_i \right] = 0. \quad (7.10)$$

Wprowadzając wypadkowe siły i momenty działające na  $i$ -ty element

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j=1}^{nc_i} \mathbf{F}_{ij}^c = \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \mathbf{F}_i^{\text{cont}}, \quad (7.11)$$

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{T}_i^{\text{ext}} + \sum_{j=1}^{nc_i} \mathbf{T}_{ij} + \sum_{j=1}^{nc_i} \mathbf{s}_j^c \times \mathbf{F}_{ij}^c = \mathbf{T}_i^{\text{ext}} + \mathbf{T}_i^{\text{cont}}, \quad (7.12)$$

równanie (7.10) można zapisać w postaci

$$\sum_{i=1}^N [(m_i \ddot{\mathbf{u}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \delta \mathbf{u}_i + (\mathbf{J}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i - \mathbf{T}_i) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_i] = 0. \quad (7.13)$$

Równanie (7.13) zostanie zapisane w notacji algebraicznej

$$\delta \mathbf{r}^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{R}) + \delta \boldsymbol{\Phi}^T (\mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\Omega}} - \mathbf{T}) = 0, \quad (7.14)$$

gdzie  $\mathbf{r}$  jest wektorem zawierającym przemieszczenia środków mas elementów dyskretnych,  $\delta \mathbf{r}$  – wektorem przemieszczeń przygotowanych,  $\delta \boldsymbol{\Phi}$  – wektorem obrotów przygotowanych,  $\boldsymbol{\Omega}$  – wektorem prędkości obrotowych,  $\mathbf{M}$  – macierzą mas elementów dyskretnych,  $\mathbf{J}$  – macierzą składowych tensora bezwładności,  $\mathbf{R}$  – wektorem sił wypadkowych,  $\mathbf{T}$  – wektorem wypadkowych momentów względem środków mas elementów,

$$\mathbf{r} = \{\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_N\}^T, \quad (7.15)$$

$$\delta \mathbf{r} = \{\delta \mathbf{u}_1 \dots \delta \mathbf{u}_N\}^T, \quad (7.16)$$

$$\delta \boldsymbol{\Phi} = \{\delta \boldsymbol{\varphi}_1 \dots \delta \boldsymbol{\varphi}_N\}^T, \quad (7.17)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \{\boldsymbol{\omega}_1 \dots \boldsymbol{\omega}_N\}^T, \quad (7.18)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 \mathbf{1}_{3 \times 3} & & & \\ & \ddots & & \\ & & & m_N \mathbf{1}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (7.19)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & \mathbf{J}_N \end{bmatrix}, \quad (7.20)$$

$$\mathbf{R} = \{\mathbf{F}_1 \dots \mathbf{F}_N\}^T, \quad (7.21)$$

$$\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_1 \dots \mathbf{T}_N\}^T. \quad (7.22)$$

Ponieważ równanie (7.14) musi być spełnione dla dowolnych przemieszczeń i obrotów przygotowanych, otrzymuje się następujący układ równań opisujących ruch układu elementów dyskretnych o kształcie kuli (3D) lub walca (2D)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{R}, \quad (7.23)$$

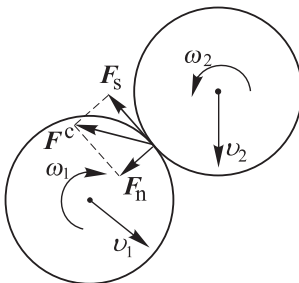
$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{T}. \quad (7.24)$$

### 7.3 Model oddziaływania kontaktowego elementów dyskretnych z tarcieniem bez kohezji

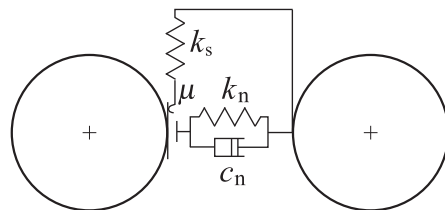
Siły i momenty oddziaływania kontaktowego są liczone zgodnie z zastosowanym modelem konstytutywnym kontaktu. W opisywanym sformułowaniu metody elementów dyskretnych dostępne są następujące modele oddziaływania kontaktowego:

- model oddziaływania kontaktowego z tarcieniem bez kohezji,
- model oddziaływania kontaktowego z odpornością na rozciąganie (z kohezją).

W obydwu modelach możliwe jest uwzględnienie tłumienia oraz włączenie oddziaływania momentowego. W niniejszym podrozdziale zostanie przedstawiony model oddziaływania kontaktowego z tarcieniem bez kohezji oraz bez uwzględnienia oddziaływania momentowego.



Rys. 7.2. Rozkład siły kontaktu na składowe normalną i styczną.



Rys. 7.3. Model oddziaływania kontaktowego pomiędzy cząstkami.

Siłę oddziaływania kontaktowego  $F_{ij}^c$  między dwoma elementami dyskretnymi  $i$ -tym i  $j$ -tym można rozłożyć na składową normalną i styczną do powierzchni styku, odpowiednio  $(F_n)_{ij}$  i  $(F_s)_{ij}$  (rys. 7.2)

$$\mathbf{F}_{ij}^c = (\mathbf{F}_n)_{ij} + (\mathbf{F}_s)_{ij} = (F_n)_{ij}\mathbf{n}_j + (\mathbf{F}_s)_{ij}, \quad (7.25)$$

gdzie  $\mathbf{n}_i$  jest jednostkowym wektorem prostopadłym do powierzchni styku rozpatrywanych cząstek, skierowany na zewnątrz cząstki  $i$ -tej. W dalszych rozważaniach dla uproszczenia oznaczeń opuszczone zostaną indeksy  $i$  oraz  $j$ . Siły oddziaływania kontaktowego w kierunku normalnym i stycznym,  $F_n$  i  $F_s$ , są wyznaczone na podstawie przyjętego modelu kontaktu pomiędzy elementami dyskretnymi.

Schemat reologiczny modelu oddziaływania kontaktowego z tarciem bez kohezji jest pokazany na rys. 7.3. Model ten zdefiniowany jest poprzez stałe moduły sztywności w kierunku normalnym  $k_n$  i stycznym  $k_s$ , współczynnik tarcia Coulomba  $\mu$  i współczynnik tłumienia wiskotycznego dla oddziaływania kontaktowego  $c_n$ .

Zgodnie z przyjętym modelem siła oddziaływania kontaktowego w kierunku normalnym  $F_n$  jest sumą składowej sprężystej  $F_n^e$  i siły tłumienia  $F_n^d$

$$F_n = F_n^e + F_n^d. \quad (7.26)$$

Część sprężysta  $F_n^e$  jest proporcjonalna do modułu sztywności w kierunku normalnym  $k_n$  i do penetracji (przenikania) powierzchni zewnętrznych rozpatrywanych cząstek  $g$  w miejscu styku

$$F_n^e = k_n g. \quad (7.27)$$

Dla cząstek o kształcie kuli lub walca wzajemną penetrację można wyznaczyć z równania

$$g = d - r_i - r_j, \quad (7.28)$$

gdzie  $d$  jest odległością środków cząstek, a  $r_i$  i  $r_j$  są ich promieniami. W rozpatrywanym modelu wyklucza się siły kohezji, więc oddziaływanie kontaktowe może zachodzić tylko przy ściskaniu w kierunku normalnym (jeśli  $g < 0$ ). Jeśli  $g \geq 0$ , oddziaływanie kontaktowe nie występuje ( $F_n^e = 0$ ). Przyjęty model oddziaływania jest identyczny z przedstawionym w podrozdziale 4.4 modelem kontaktu ciał odkształcalnych z regularyzacją za pomocą funkcji kary.

Włączenie tłumienia do modelu oddziaływania kontaktowego ma na celu zapewnienie rozpraszania energii kinetycznej zderzających się cząstek i zmniejszenie występujących w układzie drgań. W opisywanym modelu założono działanie sił tłumiących dla kontaktu w kierunku normalnym. Przyjęto, że tłumienie w oddziaływaniu kontaktowym ma charakter wiskotyczny (lepkościowy) i jest proporcjonalne do względnej prędkości cząstek w kierunku prostopadłym do powierzchni styku  $v_{rn}$

$$F_n^d = c_n v_{rn}, \quad (7.29)$$

przy czym prędkość  $v_{rn}$  wyznacza się w następujący sposób

$$v_{rn} = \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}_i. \quad (7.30)$$

gdzie  $\mathbf{v}_r$  jest względną prędkością w punkcie styku:

$$\mathbf{v}_r = (\mathbf{v}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{r}_j^c) - (\mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i^c), \quad (7.31)$$

$\mathbf{v}_i$  i  $\mathbf{v}_j$  są prędkościami liniowymi środków mas cząstek,  $\boldsymbol{\omega}_i$  i  $\boldsymbol{\omega}_j$  są prędkościami kątowymi cząstek, a  $\mathbf{r}_i^c$  i  $\mathbf{r}_j^c$  są wektorami łączącymi środki mas z punktami kontaktu.

Wielkość tłumienia może być określona poprzez odniesienie do tłumienia krytycznego. Współczynnik tłumienia  $c_n$ , występujący w równaniu (7.29), można zdefiniować jako proporcjonalny do współczynnika  $c_{cr}$ , wyznaczającego tłumienie krytyczne

$$c_n = \alpha^c c_{cr}, \quad (7.32)$$

z parametrem  $\alpha^c \geq 0$ , będącym współczynnikiem proporcjonalności. Dla układu dwóch elementów dyskretnych o masach  $m_i$  i  $m_j$  połączonych sprężyną o sztywności  $k_n$  tłumienie krytyczne jest określone współczynnikiem  $c_{cr}$  danym następującą zależnością, por. [277],

$$c_{cr} = 2 \sqrt{\frac{m_i m_j k_n}{m_i + m_j}}. \quad (7.33)$$

Tłumienie zależne od prędkości względnej kontaktujących się cząstek, dane równaniem (7.29), rozprasza energię zderzających się cząstek, a nie wyhamowuje cząstek swobodnych.

Oddziaływanie kontaktowe w kierunku stycznym w omawianym modelu jest związane z występowaniem tarcia przeciwdziałającego poślizgowi w miejscu styku. Poślizg jest charakteryzowany poprzez składową styczną  $\mathbf{v}_{rs}$  względnej prędkości stykających się punktów dwóch cząstek  $\mathbf{v}_r$ :

$$\mathbf{v}_{rs} = \mathbf{v}_r - (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i. \quad (7.34)$$

Dla siły oddziaływania stycznego między elementami dyskretnymi  $\mathbf{F}_s$  przyjęto regularyzowany model tarcia Coulomba przedstawiony w podrozdziale 4.4 dla kontaktu pomiędzy ciałami odkształcalnymi. W modelu tym wymagane jest spełnienie następujących warunków:

$$\phi = \|\mathbf{F}_s\| - \mu |F_n| \leq 0, \quad (7.35)$$



$$\dot{\mathbf{F}}_s = k_s \left( \mathbf{v}_{rs} - \lambda \frac{\mathbf{F}_s}{\|\mathbf{F}_s\|} \right), \quad (7.36)$$

$$\lambda \geq 0, \quad \phi \lambda = 0, \quad (7.37)$$

gdzie  $\mu$  jest współczynnikiem tarcia Coulomba,  $k_s$  jest parametrem kary, który może być interpretowany jako sztywność oporu przylegania. Algorytm numeryczny dla wyznaczenia siły  $\mathbf{F}_s$  zgodnie z warunkami (7.35)–(7.37) jest podobny do algorytmu opisanego równaniami (4.48)–(4.52).

Przedstawiony model oddziaływania kontaktowego jest stosunkowo najprostszym modelem stosowanym w metodzie elementów dyskretnych. Możliwe jest wykorzystanie innych modeli, jak np. model Hertza dla oddziaływania w kierunku normalnym i bardziej skomplikowane modele tarcia [65, 104, 105]. Bardziej rozbudowane modele dają większe możliwości modelowania, lecz niedogodnością w ich stosowaniu jest konieczność wyznaczenia większej liczby parametrów.

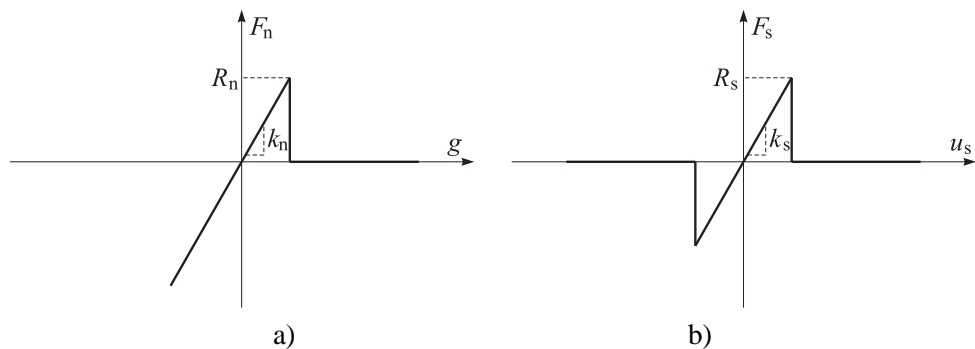
#### 7.4 Model oddziaływania kontaktowego z odpornością na rozciąganie

Modelowanie materiału skalnego lub innych materiałów charakteryzujących się spójnością wymaga uwzględnienia możliwości przenoszenia naprężeń (sił) rozciągających w modelu oddziaływania kontaktowego elementów dyskretnych. W wielu innych zastosowaniach sformułowanie zagadnienia kontaktowego wymaga również wprowadzenia odporności na rozciąganie [256, 31], która może mieć ograniczoną wartość i może zostać zniszczona przy pewnym obciążeniu.

Odporność na rozciąganie obejmuje dwa zjawiska, adhezję (przyleganie) i kohezję (spójność). W prezentowanym modelu obydwie te zjawiska fizyczne traktowane są jednolicie. Ogólne i ściśle matematycznie sformułowanie zagadnienia kontaktu z adhezją zostało podane w [256]. W niniejszej pracy model kontaktu z odpornością zostanie wprowadzony w prosty sposób poprzez rozszerzenie standardowego modelu kontaktu regularyzowanego za pomocą funkcji kary na zakres naprężeń kontaktowych rozciągających. Oznacza to, że wyrażenie na siłę kontaktową w kierunku normalnym (7.27) jest również ważne dla  $g > 0$ . Przy czynnym wiązaniu kohezyjnym liniowa zależność opisuje oddziaływanie w kierunku normalnym i stycznym:

$$F_n^c = k_n g, \quad \mathbf{F}_s = k_s \mathbf{u}_s, \quad (7.38)$$

gdzie:  $F_n^c$  – siła oddziaływania kontaktowego w kierunku normalnym,  $\mathbf{F}_s$  – siła oddziaływania kontaktowego w kierunku stycznym,  $k_n$  – sztywność połączenia kontaktowego w kierunku normalnym,  $k_s$  – sztywność połączenia kontaktowego w kierunku



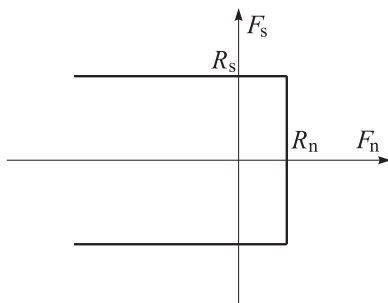
Rys. 7.4. Sprężysto idealnie kruchy model kontaktu: a) siła kontaktu w kierunku normalnym, b) siła kontaktu w kierunku stycznym.

stycznym,  $g$  – względne przemieszczenie w kierunku normalnym w miejscu styku,  $u_s$  – względne przemieszczenie w kierunku stycznym.

Przy pewnym poziomie obciążenia rozciągającego lub ścinającego może nastąpić osłabienie wiązań prowadzące do częściowego lub całkowitego odspojenia. Zależności dla oddziaływania kontaktowego w kierunku normalnym i stycznym w implementowanym modelu są pokazane na rys. 7.4. W modelu tym następuje natychmiastowe zerwanie wiązania i natychmiastowy spadek siły do zera w momencie przekroczenia granicznej wytrzymałości połączenia przez którąkolwiek z sił obliczonych według równań (7.38). Taki model nazywany jest sprężysto-idealnie kruchym. Kryterium odspojenia można zapisać w następujący sposób:

$$F_n^e \leq R_n, \quad \|F_s\| \leq R_s, \quad (7.39)$$

gdzie:  $R_n$  – wytrzymałość połączenia kontaktowego w kierunku normalnym,  $R_s$  – wytrzymałość połączenia kontaktowego w kierunku stycznym. Powierzchnia zniszczenia (odspojenia) zgodna z warunkami (7.39) jest pokazana na rys. 7.5.



Rys. 7.5. Powierzchnia zniszczenia dla sprężysto-idealnie kruchego modelu oddziaływania kontaktowego.

W przypadku braku spójności (po zerwaniu wiązań) model kontaktu uwzględnia standardowe oddziaływanie kontaktowe – ściskające w kierunku normalnym oraz tarcie w kierunku stycznym zgodnie z regularyzowanym modelem tarcia Coulomba. Model oddziaływania kontaktowego po zerwaniu wiązań jest całkowicie zgodny z modelem oddziaływania kontaktowego bez kohezji przedstawionym w podrozdziale 7.3.

Opisany model jest najprostszym modelem oddziaływania kontaktowego ze spójnością. Możliwe jest stosowanie bardziej skomplikowanych modeli, np. uszkodzenie idealnie kruche można zastąpić stopniową degradacją sztywności i wytrzymałości połączenia charakteryzującą model sprężysty z uszkodzeniem (*ang.* elastic damage model) [216, 110] lub model wykorzystujący sformułowanie sprężysto-plastyczne z osłabieniem [216, 31, 59]. W pracy [59] wprowadza się modele sprężysto-plastyczne do modelowania oddziaływania w warstwie kontaktowej między wielokątnymi elementami dyskretnymi w przekonaniu, że wprowadzenie na poziom mikroskopowy modeli sprawdzonych w mechanice kontinuum musi dać co najmniej tak dobre wyniki jak w ich oryginalnym sformułowaniu. Doświadczenia autora [216] wskazują jednak, że stosowanie bardziej skomplikowanych modeli na poziomie mikroskopowym aczkolwiek daje poprawne wyniki, nie wprowadza nowych jakościowo zachowań makroskopowych materiału. Z tego powodu w niniejszej pracy ograniczymy się do modelu kontaktu sprężysto-idealnie kruchego. Różne kombinacje wartości parametrów tego modelu dają możliwość modelowania różnych zachowań makroskopowych materiałów, typowych zarówno dla materiałów kruchych, jak i podatnych. Możliwości te zostaną przedstawione w dalszej części pracy.

## 7.5 Model oddziaływania momentowego pary elementów dyskretnych

Moment oddziaływania kontaktowego charakteryzuje przeciwdziałanie względnemu obrotowi kontaktujących się elementów dyskretnych. W ogólnym przypadku moment może działać w przypadku połączenia kohezijnego, jak również w przypadku kontaktu bez kohezji. W niniejszej pracy ograniczymy się do przypadku kontaktu z tarcie bez kohezji.

Moment oddziaływania kontaktowego  $T_{ij}^c$  między dwoma elementami dyskretnymi  $i$ -tym i  $j$ -tym można rozłożyć na składową normalną i styczną do powierzchni styku, odpowiednio  $(T_n)_{ij}$  i  $(T_s)_{ij}$

$$T_{ij}^c = (T_n)_{ij} + (T_s)_{ij} = (T_n)_{ij} \mathbf{n}_j + (T_s)_{ij}, \quad (7.40)$$

gdzie  $\mathbf{n}_i$  jest jednostkowym wektorem prostopadłym do powierzchni styku rozpatrywanych cząstek, skierowanym na zewnątrz cząstki  $i$ -tej. W dalszych rozważaniach dla uproszczenia oznaczeń opuszczone zostaną indeksy  $i$  oraz  $j$ .

Moment przeciwdziałania względnemu ruchowi obrotowemu charakteryzowanemu względną prędkością obrotową  $\omega_r$

$$\omega_r = \omega_i - \omega_j, \quad (7.41)$$

którą można również rozłożyć na składową normalną i styczną do płaszczyzny styku,  $\omega_{rn}$  i  $\omega_{rs}$

$$\omega_r = \omega_{rn} + \omega_{rs} = \omega_{rn} \cdot \mathbf{n}_i + \omega_{rs}. \quad (7.42)$$

Składową normalną można wyznaczyć przez rzutowanie wektora  $\omega_r$  na jednostkowy wektor normalny  $\mathbf{n}_i$ ,

$$\omega_{rn} = \omega_r \cdot \mathbf{n}_i, \quad (7.43)$$

wtedy składową styczną otrzymuje się na podstawie równania (7.42) jako

$$\omega_{rs} = \omega_r - \omega_{rn} \mathbf{n}_i. \quad (7.44)$$

Model momentowego oddziaływania kontaktowego można sformułować analogicznie do modelu tarcia poślizgowego. Dla oporu przeciwdziałającego względnemu obrotowi wokół osi normalnej do powierzchni styku można zapisać następujące warunki Kuhna-Tuckera określające warunki poślizgu, przylegania i wzajemnego wykluczania się przylegania i poślizgu:

$$\phi_n \leq 0, \quad \lambda_n \geq 0, \quad \phi_n \lambda_n = 0, \quad (7.45)$$

gdzie  $\lambda_n$  jest określona przez niestowarzyszone prawo poślizgu:

$$\omega_{rn} = \lambda_n \frac{\mathbf{T}_n}{\|\mathbf{T}_n\|}, \quad (7.46)$$

a  $\phi_n$  jest dane równaniem

$$\phi_n = \|\mathbf{T}_n\| - a_n |F_n|, \quad (7.47)$$

$a_n$  jest współczynnikiem o wymiarze długości charakteryzującym wielkość granicznego momentu tarcia wokół osi normalnej do powierzchni styku. Założono przy tym, że moment ten jest proporcjonalny do normalnej siły kontaktu  $F_n$ .

Analogicznie można zapisać warunki Kuhna-Tuckera dla oporu przeciwdziałającego względnemu obrotowi wokół osi leżącej w powierzchni styku

$$\phi_s \leq 0, \quad \lambda_s \geq 0, \quad \phi_s \lambda_s = 0, \quad (7.48)$$

gdzie  $\lambda_s$  jest określona przez niestowarzyszone prawo poślizgu:

$$\boldsymbol{\omega}_{rs} = \lambda_s \frac{\mathbf{T}_s}{\|\mathbf{T}_s\|}, \quad (7.49)$$

a  $\phi_s$  jest dane równaniem

$$\phi_s = \|\mathbf{T}_s\| - a_s |F_n|, \quad (7.50)$$

$a_s$  jest współczynnikiem o wymiarze długości charakteryzującym wielkość granicznego momentu oporu przeciwdziałającemu względnemu obrotowi wokół osi leżącej w płaszczyźnie styku. Podobnie jak dla obrotu wokół osi normalnej założono, że moment oporu jest proporcjonalny do normalnej siły kontaktu  $F_n$ . Jest to założenie zgodne z modelem tarcia tocznego stosowanego w praktyce inżynierskiej.

Implementacja numeryczna modelu oddziaływania kontaktowego wymaga regularyzacji warunków kontaktu danych przez (7.45)–(7.47) i (7.48)–(7.50). Regularyzacja polega na wprowadzeniu współczynników kary  $k_n^{\text{rot}}$  i  $k_s^{\text{rot}}$  do praw poślizgu (7.46) i (7.49)

$$\dot{\mathbf{T}}_n = k_n^{\text{rot}} \left( \boldsymbol{\omega}_{rn} - \lambda_n \frac{\mathbf{T}_n}{\|\mathbf{T}_n\|} \right), \quad (7.51)$$

$$\dot{\mathbf{T}}_s = k_s^{\text{rot}} \left( \boldsymbol{\omega}_{rs} - \lambda_s \frac{\mathbf{T}_s}{\|\mathbf{T}_s\|} \right). \quad (7.52)$$

Po regularyzacji modele oddziaływania kontaktowego są analogiczne do sprężysto-plastycznego modelu materiału z niestowarzyszonym prawem płynięcia, a współczynniki kary spełniają rolę modułów sprężystości.

## 7.6 Tłumienie zewnętrzne

Opisane wcześniej tłumienie uwzględnione w modelu oddziaływania kontaktowego można traktować jako tłumienie własne (wewnętrzne) materiału. Oprócz tego w modelu można zdefiniować tłumienie, mające charakter tłumienia zewnętrznego, reprezentujące opór ośrodka, w którym poruszają się cząstki – elementy dyskretne. Tłumienie to rozprasza energię kinetyczną wszystkich cząstek, bez względu na to, czy znajdują się w kontakcie z innymi cząstkami lub obiektami.

W równaniach ruchu z dodanym tłumieniem całkowite siły i momenty działające na pojedynczy element dyskretne zdefiniowane równaniami (7.11) i (7.12) są rozszerzone

o człony wynikające z tłumienia,  $\mathbf{F}_i^{\text{damp}}$  i  $\mathbf{T}_i^{\text{damp}}$

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \mathbf{F}_i^{\text{cont}} + \mathbf{F}_i^{\text{damp}}, \quad (7.53)$$

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{T}_i^{\text{ext}} + \mathbf{T}_i^{\text{cont}} + \mathbf{T}_i^{\text{damp}}. \quad (7.54)$$

W przyjętym modelu wprowadzono tłumienie zewnętrzne, zarówno wiskotyczne (lepkościowe) jak i niewiskotyczne (nielepkościowe). Człony uwzględniające tłumienie są dane następującymi wyrażeniami:

- dla tłumienia wiskotycznego

$$\mathbf{F}_i^{\text{damp}} = -\alpha^{\text{vt}} m_i \mathbf{v}_i, \quad (7.55)$$

$$\mathbf{T}_i^{\text{damp}} = -\alpha^{\text{vr}} J_i \boldsymbol{\omega}_i; \quad (7.56)$$

- dla tłumienia niewiskotycznego

$$\mathbf{F}_i^{\text{damp}} = -\alpha^{\text{nvt}} \|\mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \mathbf{F}_i^{\text{cont}}\| \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}, \quad (7.57)$$

$$\mathbf{T}_i^{\text{damp}} = -\alpha^{\text{nvr}} \|\mathbf{T}_i^{\text{ext}} + \mathbf{T}_i^{\text{cont}}\| \frac{\boldsymbol{\omega}_i}{\|\boldsymbol{\omega}_i\|}, \quad (7.58)$$

gdzie  $\alpha^{\text{vt}}$ ,  $\alpha^{\text{vr}}$ ,  $\alpha^{\text{nvt}}$  i  $\alpha^{\text{nvr}}$  są odpowiednimi współczynnikami tłumienia. Na podstawie równań (7.55)–(7.58) można zauważyć, że zarówno tłumienie wiskotyczne, jak i niewiskotyczne przeciwdziałają ruchowi cząstek, siły tłumienia są skierowane w kierunku przeciwnym do prędkości cząstek. Różnica między przyjętymi w modelu rodzajami tłumienia jest w określeniu wielkości oporu. Tłumienie wiskotyczne jest proporcjonalne do prędkości cząstek, natomiast tłumienie niewiskotyczne jest wyznaczone jako ułamek działającej na cząstkę wypadkowej siły i wypadkowego momentu. Dysypowana energia nie zależy w tym przypadku od prędkości.

Założenie odpowiedniej wielkości tłumienia jest bardzo istotne do uzyskania quasi-statycznego zachowania się materiału, reprezentowanego przez zbiór cząstek.

## 7.7 Całkowanie równań ruchu

Równania ruchu (7.23) i (7.24) są całkowane w czasie przy zastosowaniu jawnego algorytmu różnic centralnych. Operacja całkowania równania ruchu postępowego (7.23)

w kroku  $n$ -tym wykonywana jest według następującego schematu:

$$\ddot{\mathbf{r}}_n = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{R}_n, \quad (7.59)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{n+1/2} = \dot{\mathbf{r}}_{n-1/2} + \ddot{\mathbf{r}}_n\Delta t, \quad (7.60)$$

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \dot{\mathbf{r}}_{n+1/2}\Delta t. \quad (7.61)$$

Dwa pierwsze kroki w schemacie całkowania równania ruchu obrotowego (7.24) są analogiczne do równań (7.59) i (7.60):

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_n = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{T}_n, \quad (7.62)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{n+1/2} = \boldsymbol{\Omega}_{n-1/2} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_n\Delta t. \quad (7.63)$$

Dla płaskiego ruchu obrotowego całkowity kąt obrotu  $\varphi_i$  dla  $i$ -tego elementu może być wyznaczony w sposób analogiczny jak wektor przemieszczenia:

$$(\varphi_i)_{n+1} = (\varphi_i)_n + (\boldsymbol{\omega}_i)_{n+1/2}\Delta t. \quad (7.64)$$

W przypadku ruchu trójwymiarowego, położenie kątowe nie może być zdefiniowane żadnym wektorem, gdyż prędkość kątowna  $\boldsymbol{\omega}_i$  w ogólnym przypadku nie może być całkowana, por. [9]. Położenie kątowe ruchomego układu współrzędnych  $\mathbf{x}_i$  związanego z ciałem sztywnym względem nieruchomego układu odniesienia  $\mathbf{X}$  można określić za pomocą macierzy obrotu  $\boldsymbol{\Lambda}_i$

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\Lambda}_i\mathbf{x}_i. \quad (7.65)$$

Macierz obrotu  $\boldsymbol{\Lambda}_i$  może być uaktualniana według następującego algorytmu, por. [9, 28]:

$$\Delta\boldsymbol{\varphi}_i = (\boldsymbol{\omega}_i)_{n+1/2}\Delta t, \quad (7.66)$$

$$\Delta\boldsymbol{\Lambda}_i = \cos\|\Delta\boldsymbol{\varphi}_i\|\mathbf{1} + \frac{\sin\|\Delta\boldsymbol{\varphi}_i\|}{\|\Delta\boldsymbol{\varphi}_i\|}\widetilde{\Delta\boldsymbol{\varphi}_i} + \frac{1 - \cos\|\Delta\boldsymbol{\varphi}_i\|}{\|\Delta\boldsymbol{\varphi}_i\|^2}\Delta\boldsymbol{\varphi}_i\Delta\boldsymbol{\varphi}_i^T, \quad (7.67)$$

$$(\boldsymbol{\Lambda}_i)_{n+1} = \Delta\boldsymbol{\Lambda}_i(\boldsymbol{\Lambda}_i)_n, \quad (7.68)$$

gdzie  $\Delta\boldsymbol{\varphi} = \{\Delta\varphi_x \Delta\varphi_y \Delta\varphi_z\}^T$  oznacza wektor przyrostowego (małego) obrotu,  $\Delta\boldsymbol{\Lambda}$  jest macierzą przyrostowego obrotu, a  $\widetilde{\Delta\boldsymbol{\varphi}}$  jest antysymetryczną macierzą służącą do zapisu iloczynu wektorowego w notacji macierzowej, zdefiniowaną równaniem (1.5).

Należy podkreślić, że znajomość całkowitego obrotu cząstki kulistej lub cylindrycznej zazwyczaj nie jest potrzebna; dla wyznaczenia sił i momentów oddziaływania kontaktowego wystarcza znajomość prędkości obrotowej.

## 7.8 Stabilność schematu całkowania

Niedogodnością w stosowaniu jawnych schematów całkowania równań ruchu względem czasu jest ich warunkowa stabilność numeryczna omówiona w rozdziale 2.7.3. Ograniczenia i równania (2.61), (2.62) i (2.63) obowiązują również w przypadku przedstawionego schematu całkowania równań metody elementów dyskretnych. Zgodnie z (2.61) długość kroku całkowania  $\Delta t$  jest ograniczona przez wielkość kroku krytycznego  $\Delta t_{cr}$ , który zależy od najwyższej częstości drgań własnych systemu dyskretnego  $\omega_{max}$ .

Dokładne wyznaczenie najwyższej częstości własnej  $\omega_{max}$  wymagałoby rozwiązania zagadnienia drgań własnych całego systemu mas (cząstek), połączonych sprężynami o sztywności określonej dla kontaktu między cząstkami. Sprężyny występowałyby tylko między stykającymi się cząstkami. W podejściu przybliżonym zagadnienie drgań własnych może być zdefiniowane oddzielnie dla każdej cząstki

$$\mathbf{m}_i \ddot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{k}_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}, \quad (7.69)$$

gdzie

$$\mathbf{r}_i = \{(u_x)_i, (u_y)_i, (u_z)_i, (\theta_x)_i, (\theta_y)_i, (\theta_z)_i\}^T, \quad (7.70)$$

$\mathbf{m}_i$  jest diagonalną macierzą mas (bezwładności)

$$\mathbf{m}_i = \text{diag}(m_i, m_i, m_i, I_i, I_i, I_i), \quad (7.71)$$

a  $\mathbf{k}_i$  są macierzami sztywności uwzględniającymi sprężystość kontaktów ze wszystkimi stykającymi się cząstkami sąsiednimi. Równanie (7.70) definiuje wektory  $\mathbf{m}_i$  i  $\mathbf{r}_i$  dla cząstki kulistej w przestrzeni trójwymiarowej. Dla cząstki walcowej w zagadnieniu płaskim odpowiednie wektory są zdefiniowane jako:

$$\mathbf{m}_i = \text{diag}(m_i, m_i, I_i), \quad \mathbf{r}_i = \{(u_x)_i, (u_y)_i, (\theta_z)_i\}^T. \quad (7.72)$$

Równanie (7.69) prowadzi do następującego zagadnienia własnego

$$\mathbf{k}_i \mathbf{r}_i = \lambda_j \mathbf{m}_i \mathbf{r}_i, \quad (7.73)$$

gdzie wartości własne  $\lambda_j$  ( $j = 1, \dots, 6$  w zagadnieniu przestrzennym, i  $j = 1, 2, 3$  w zagadnieniu płaskim) są kwadratami częstości własnych drgań swobodnych:

$$\lambda_j = \omega_j^2. \quad (7.74)$$

W zagadnieniu przestrzennym, 3 z 6 częstości  $\omega_j$  odpowiadają drganiom liniowym, a 3 pozostałe drganiom obrotowym.



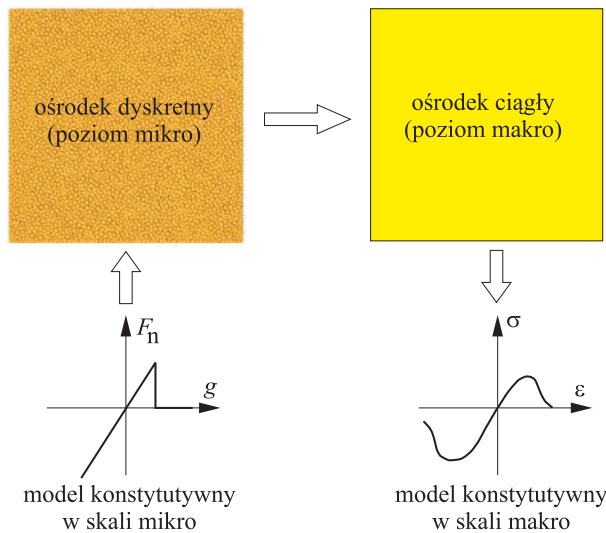
## Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono sformułowanie metody elementów dyskretnych o kształcie walca (2D) lub kuli (3D). Przedstawiono równania ruchu pojedynczego elementu oraz układu elementów oddziałujących między sobą siłami kontaktu. Ruch cząstek/elementów dyskretnych jest opisany za pomocą równań dynamiki ciała sztywnego. Równania ruchu są całkowane w czasie za pomocą jawnego schematu całkowania zapewniającego wysoką efektywność numeryczną rozwiązania na poszczególnych krokach czasowych. Schemat całkowania jest identyczny jak schemat całkowania równań ruchu w metodzie elementów skończonych, co umożliwia wspólną implementację i integrację metod elementów skończonych i dyskretnych. Podobieństwo sformułowań teoretycznych występuje również w przypadku modelowania kontaktu. Model oddziaływania między elementami dyskretnymi jest podobny do modelu kontaktu między ciałami odkształcalnymi. W metodzie elementów dyskretnych implementowano model oddziaływania kontaktowego z tarcie bez kohezji oraz model z kohezją. Pierwszy z modeli jest wykorzystywany w niniejszej pracy do modelowania materiałów granularnych, a drugi w modelowaniu skał, które będzie tematem następnego rozdziału.

# 8. Zależności między mikro- i makroskopowymi wielkościami w metodzie elementów dyskretnych

## Wstęp

Modelowanie za pomocą metody elementów dyskretnych można traktować jako modelowanie materiału na poziomie niższym od makroskopowego, w zależności od wymiarów elementów w skali mezo-, mikro- lub nanoskopowej. Określone właściwości makroskopowe materiału modelowanego za pomocą elementów dyskretnych są uzyskane przez przyjęcie odpowiedniego modelu oddziaływania kontaktowego pomiędzy elementami dyskretnymi. Przeniesienie odpowiedzi materiału w skali mikro na odpowiedź w skali makro oraz określenie zależności makroskopowej odpowiedzi materiału od parametrów definiujących stan materiału w niższej skali są bardzo ważnymi aspektami modelowania dyskretnego w niższej skali oraz modelowania wieloskalowego. Ze skalą makroskopową zazwyczaj związany jest model ciągły materiału, dlatego zależności między wielkościami mikroskopowymi i makroskopowymi można traktować jako przejście między modelem dyskretnym i ciągłym (rys. 8.1).



Rys. 8.1. Przejście od skali mikroskopowej do skali makroskopowej (od modelu ośrodka dyskretnego do modelu ośrodka ciągłego).

Celem niniejszego rozdziału jest przedstawienie możliwości porównania wyników zastosowanego modelowania mikroskopowego z opisem makroskopowym oraz sposobu wyznaczenia efektywnych własności makroskopowych materiału modelowanego za pomocą metody elementów dyskretnych. Przejście na poziom makroskopowy umożliwi zweryfikowanie modelu mikroskopowego poprzez porównanie zmiennych makroskopowych obliczonych z wartościami zmierzonymi w badaniach laboratoryjnych.

Wyznaczenie efektywnych wielkości i własności makroskopowych materiałów niejednorodnych może być dokonane za pomocą różnych analitycznych i numerycznych metod homogenizacji i uśredniania [190, 235, 146, 161]. Z powodu założonej w modelu sztywności kul (walców) trudno jest bezpośrednio zastosować w metodzie elementów dyskretnych metody matematycznej teorii homogenizacji [279] rozwinięte dla materiałów porowatych lub kompozytowych. W niniejszym rozdziale wykorzystane zostaną znane z teorii homogenizacji metody uśredniania oraz koncepcja reprezentatywnego elementu objętościowego. Pozwoli to wprowadzić ośrodek ciągły równoważny dyskretnemu ośrodkowi modelowanemu za pomocą metody elementów dyskretnych.

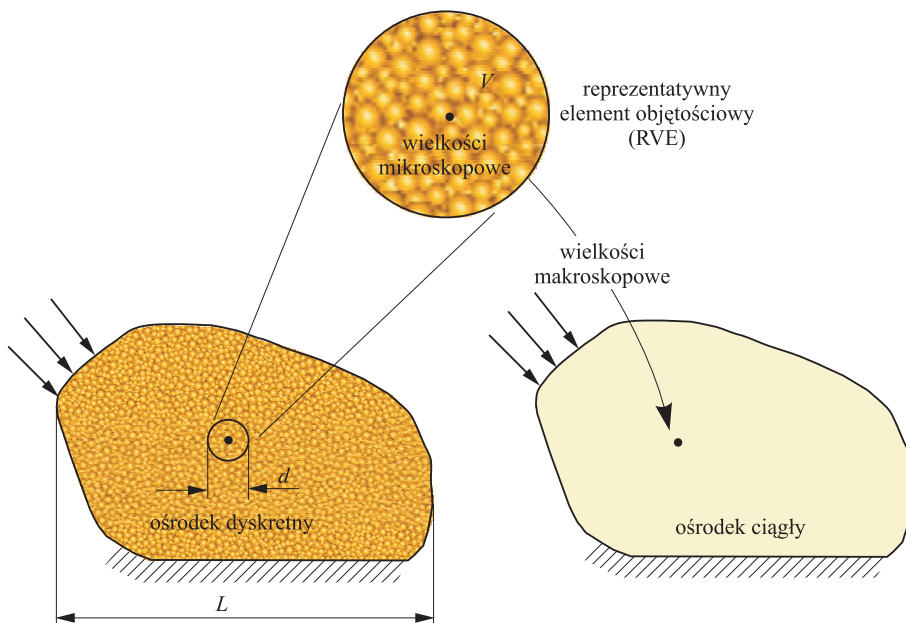
## 8.1 Sformułowanie problemu

Rozpatrzmy zbiór elementów dyskretnych zajmujących objętość  $\Omega$  ograniczoną powierzchnią  $\Gamma$  (rys. 8.2), odkształcający się quasi-statycznie pod wpływem przyłożonego obciążenia i przy zadanych warunkach brzegowych<sup>1</sup>. Przyjmujemy, że elementy dyskretne oddziałują między sobą przez siły w kierunku normalnym i stycznym, z możliwością występowania sił spójności. Oddziaływanie między elementami dyskretnymi jest opisane jednym z przedstawionych wcześniej modeli kontaktu. Model elementów dyskretnych stanowi model w skali mikroskopowej.

Założymy, że można zdefiniować ośrodek ciągły, zajmujący tę samą objętość  $\Omega$ , równoważny rozpatrywanemu ośrodkowi dyskretnemu. Z ośrodkiem ciągłym zwiążemy makroskopowy model materiału. Ciało  $\Omega$  można uważać za ciągłe względem pewnej wielkości fizycznej  $Q$  wtedy, gdy wielkość ta może być zdefiniowana w każdym punkcie  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Ciągłe pola makroskopowych wielkości mogą być wprowadzone przy zastosowaniu znanych metod uśredniania, wykorzystujących koncepcję repre-

---

<sup>1</sup>Przez quasi-statyczne odkształcanie rozumiemy powolny proces deformacji, w którym efekty inercyjne są pomijalnie małe i z dużą dokładnością można przyjąć stan równowagi. Otrzymuje się wyrażenia na naprężenia makroskopowe przy tych identycznych założeniach jak w mechanice ośrodka ciągłego. W dynamice molekularnej, jak również w niektórych pracach z metody elementów dyskretnych [161], wprowadza się naprężenia makroskopowe dla układu w ruchu, tzw. naprężenia wiralne, niemniej jednak sens fizyczny tej miary nie jest tożsamy z mechanicznym naprężeniem z mechaniki kontinuum [311].



Rys. 8.2. Przejście od skali mikro- do skali makroskopowej (od modelu dyskretnego do ciągłego) poprzez uśrednianie na reprezentatywnym elemencie objętościowym.

zentatywnego elementu objętościowego (*ang.* RVE – representative volume element)<sup>2</sup> [44, 200]. Metoda ta polega na przyjęciu dla każdego punktu  $x \in \Omega$  otaczającego go reprezentatywnego elementu objętościowego o objętości  $V$ , w której zostanie uśredniona dana wielkość  $Q$  według wyrażenia:

$$\bar{Q} = \langle Q \rangle = \frac{1}{V} \int_V Q \, dV. \quad (8.1)$$

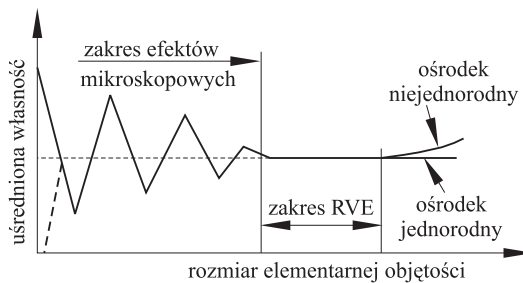
Otrzymana w ten sposób średnia  $\langle Q \rangle$  zostanie przypisana rozpatrywanemu punktowi  $x$ . Jeśli założymy, że wielkość  $Q$  jest stała dla każdego elementu dyskretnego i dla  $p$ -tego elementu wynosi  $Q^p$ , całkę w wyrażeniu (8.1) można zastąpić poprzez odpowiednią sumę

$$\bar{Q} = \langle Q \rangle = \frac{1}{V} \sum_{p \in V} V_p Q_p. \quad (8.2)$$

Idea przejścia od ośrodka dyskretnego do ośrodka ciągłego została schematycznie przedstawiona na rys. 8.2.

<sup>2</sup>Czasem metody te zaliczane są do metod homogenizacji, jednak należy podkreślić, że nie są to metody oparte na matematycznej teorii homogenizacji.

Rozmiar reprezentatywnego elementu objętościowego powinien być na tyle duży, by nie występowały fluktuacje typowe dla niższej skali (rys. 8.3). Z kolei nie po-



Rys. 8.3. Określenie rozmiaru reprezentatywnego elementu objętościowego.

winien być zbyt duży, aby uzyskane wielkości makroskopowe można było traktować jako wielkości lokalne (jeśli pole danej wielkości nie jest jednorodne). Rozmiar reprezentatywnego elementu objętościowego powinien być również znacznie mniejszy od wymiarów makroskopowych ciała  $\Omega$  ( $d \ll L$ ). Kształt reprezentatywnego elementu może być dowolny – równanie (8.1) jest słuszne dla dowolnego kształtu. W metodach homogenizacyjnych, wymagających rozwiązania zagadnienia brzegowego, przyjmuje się zazwyczaj element kwadratowy (2D) lub sześcienny (3D), dla którego łatwiej zadać odpowiednie warunki brzegowe. W naszym przypadku zostanie przyjęty reprezentatywny element objętościowy o kształcie walca (2D) lub kuli (3D) ze środkiem pokrywającym się z rozpatrywanym punktem  $\mathbf{x}$ . Specjalnego traktowania wymagają punkty leżące na brzegu i w jego pobliżu, dla których reprezentatywne elementy wychodzą poza obszar ciała  $\Omega$ .

## 8.2 Wielkości mikroskopowe i makroskopowe

W poprzednim rozdziale zostały wprowadzone dwie skale – mikroskopowa i makroskopowa. W skali mikroskopowej mamy do czynienia z układem elementów dyskretnych, charakteryzowanym pewnym zbiorem parametrów mikroskopowych oraz mikroskopowych zmiennych stanu, zdefiniowanych w punktach charakterystycznych dla mikrostruktury. W skali makroskopowej mamy do czynienia z równoważnym ośrodkiem ciągłym, charakteryzowanym przez pola zmiennych makroskopowych uzyskanych przez procedurę uśredniającą.

Parametry mikroskopowe zależą po części od wyboru modelu materiału w skali mikroskopowej. W niniejszym rozdziale zostanie założony sprężysto-idealnie kruchy model oddziaływania między elementami dyskretnymi z kohezją i tarciem opisany w podrozdziale 7.4.

Wielkości mikroskopowe można podzielić na następujące grupy:

- parametry geometryczne i fizyczne
  - $r$  – promień kuli (3D) lub walca (2D), rozmiar elementów dyskretnych
  - $\rho$  – gęstość masy
  - $n$  – porowatość (stopień upakowania),
- parametry konstytutywne
  - $k_n$  – sztywność kontaktu w kierunku normalnym
  - $k_s$  – sztywność kontaktu w kierunku stycznym
  - $R_n$  – wytrzymałość wiązania kohezyjnego w kierunku normalnym
  - $R_s$  – wytrzymałość wiązania kohezyjnego w kierunku stycznym
  - $\mu$  – współczynnik tarcia Coulomba,
- zmienne stanu
  - $g$  – przemieszczenie względne w kierunku normalnym
  - $u_s$  – przemieszczenie względne w kierunku stycznym
  - $F_n$  – siła oddziaływania kontaktowego w kierunku normalnym
  - $F_s$  – siła oddziaływania kontaktowego w kierunku stycznym  
kohezja (istnienie lub brak kohezji).

Stan makroskopowy można opisać za pomocą następujących wielkości:

- parametry geometryczne i fizyczne
  - $L$  – wymiar charakterystyczny rozpatrywanego obiektu (w przypadku skał występuje efekt skali, a więc parametr ten może mieć znaczenie w opisie makroskopowym materiału)
  - $\bar{\rho}$  – uśredniona gęstość masy,
- parametry konstytutywne
  - $C$  – tensor własności konstytutywnych
  - alternatywnie własności konstytutywne mogą być określone przez inne parametry, np.
  - $E$  – moduł Younga
  - $\nu$  – współczynnik Poissona
  - $\sigma_c$  – wytrzymałość na jednoosiowe ściskanie
  - $\sigma_t$  – wytrzymałość na jednoosiowe rozciąganie
  - $\tau$  – wytrzymałość na ścinanie,

- zmienne stanu

$\boldsymbol{\varepsilon}$  – wybrany tensor odkształcenia

$\boldsymbol{\sigma}$  – tensor naprężenia sprzężony energetycznie z tensorem odkształcenia  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

Zestaw parametrów opisujących makroskopowe właściwości konstytutywne jak i zmiennych stanu zależy od wyboru modelu konstytutywnego. Powyżej podano tylko najważniejsze parametry. Pominięto parametry opisujące tłumienie wewnętrzne materiału, zakładając, że będą rozpatrywane jedynie stany quasi-statyczne, przy czym tłumienie będzie parametrem pomocniczym pozwalającym wyeliminować efekty dynamiczne.

### 8.3 Makroskopowe naprężenia w modelu dyskretnym

#### 8.3.1 Tensor naprężenia dla pojedynczego elementu dyskretnego

Uśredniony makroskopowy tensor naprężenia zostanie wyprowadzony w sposób podobny do zastosowanego w [154, 161]. W pierwszym kroku zostanie policzony uśredniony tensor naprężenia  $\boldsymbol{\sigma}_p$  dla pojedynczej cząstki (elementu dyskretnego) o kształcie kuli (3D) lub walca (2D) o objętości  $V_p$  i brzegu  $S_p$ , będącej w kontakcie z  $n_{pc}$  sąsiednimi cząstkami. W tym celu zostanie wykorzystane wyrażenie (8.1) dla transponowanego tensora naprężenia  $\boldsymbol{\sigma}_p^T$

$$\boldsymbol{\sigma}_p^T = \frac{1}{V_p} \int_{V_p} \boldsymbol{\sigma}^T dV \quad (8.3)$$

Wprowadzając tensor jednostkowy  $\mathbf{I} = \nabla \mathbf{x}$  można napisać następującą tożsamość (por. [161]):

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \nabla \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T = \nabla \cdot (\mathbf{x} \boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{x} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}). \quad (8.4)$$

Wstawiając tożsamość (8.4) do równania (8.3) otrzymuje się

$$\boldsymbol{\sigma}_p^T = \frac{1}{V_p} \left( \int_{V_p} \nabla \cdot (\mathbf{x} \boldsymbol{\sigma}) dV - \int_{V_p} \mathbf{x} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV \right). \quad (8.5)$$

Przy założeniu równowagi statycznej i braku obciążenia masowego zgodnie z równaniem (2.7) druga całka w równaniu (8.5) jest równa zeru:

$$\boldsymbol{\sigma}_p^T = \frac{1}{V_p} \int_{V_p} \nabla \cdot (\mathbf{x} \boldsymbol{\sigma}) dV. \quad (8.6)$$

Stosując do równania (8.6) twierdzenie Gaussa można przekształcić całkę objętościową na całkę powierzchniową

$$\boldsymbol{\sigma}_p^T = \frac{1}{V_p} \int_{S_p} (\mathbf{x} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (8.7)$$

gdzie  $\mathbf{n}$  jest skierowanym na zewnątrz jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni  $S_p$ . Wykorzystując następnie definicję wektora naprężenia  $\mathbf{t}$  zgodnie z równaniem (A.28) otrzymuje się

$$\boldsymbol{\sigma}_p^T = \frac{1}{V_p} \int_{S_p} \mathbf{x} \mathbf{t} dS. \quad (8.8)$$

Biorąc pod uwagę, że obciążenie powierzchniowe jest zbiorem  $n_{pc}$  sił skupionych  $\mathbf{F}_c$  działających na małą powierzchnię  $\delta S_c$ , całkę w równaniu (8.8) można zapisać w postaci sumy

$$\boldsymbol{\sigma}_p^T = \frac{1}{V_p} \sum_{c=1}^{n_{pc}} \mathbf{x}_c \frac{\mathbf{F}^c}{\delta S_c} \delta S_c = \frac{1}{V_p} \sum_{c=1}^{n_{pc}} \mathbf{x}_c \mathbf{F}^c. \quad (8.9)$$

Transponując równanie (8.9) otrzymuje się wyrażenie na tensor naprężenia  $\boldsymbol{\sigma}_p$

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \frac{1}{V_p} \sum_{c=1}^{n_{pc}} \mathbf{F}^c \mathbf{x}_c. \quad (8.10)$$

Wyrażając wektor położenia punktu kontaktu  $\mathbf{x}_c$  jako sumę wektora położenia środka masy rozpatrywanej cząstki (elementu dyskretnego)  $\mathbf{x}_p$  oraz promienia-wektora łączącego środek masy z punktem kontaktu  $\mathbf{s}_p^c$

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{x}_p + \mathbf{s}_p^c \quad (8.11)$$

otrzymuje się

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \frac{1}{V_p} \left( \sum_{c=1}^{n_{pc}} \mathbf{F}^c \right) \mathbf{x}_p + \frac{1}{V_p} \sum_{c=1}^{n_{pc}} \mathbf{F}^c \mathbf{s}_p^c. \quad (8.12)$$

Przy założeniu równowagi statycznej pierwsza suma znika

$$\sum_{c=1}^{n_{pc}} \mathbf{F}^c = \mathbf{0} \quad (8.13)$$



co daje ostatecznie następujące wyrażenie na średni tensor naprężenia dla pojedynczego elementu dyskretnego przy założeniu quasi-statycznej równowagi i braku obciążenia masowego

$$\sigma_p = \frac{1}{V_p} \sum_{c=1}^{n_{pc}} \mathbf{F}^c \mathbf{s}_p^c. \quad (8.14)$$

Pełne wyrażenie na tensor naprężenia przy uwzględnieniu ruchu elementów można uzyskać podstawiając do drugiej całki w równaniu (8.5) wyrażenie  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$  wyznaczone z równania (2.7) [161]. Otrzymane wyrażenie (8.14) jest częścią pełnego wyrażenia definiującego tensor naprężenia. Stanowi ono wystarczająco dobre przybliżenie tensora naprężenia w stanach quasi-statycznej równowagi oraz w procesach stosunkowo wolnych, w których energia kinetyczna jest stosunkowo mała w porównaniu do energii odkształcenia [175].

Identyczne wyrażenie na tensor naprężenia dla pojedynczego elementu dyskretnego można otrzymać stosując alternatywne metody, np. budując odpowiedni potencjał [175].

W wyprowadzeniu wyrażenia na tensor zaniedbano oddziaływania momentowe w kontakcie. Włączenie tych oddziaływań jest możliwe, ich wprowadzenie wymaga stosowania sformułowania Cosserat w opisie wielkości makroskopowych [62, 71].

Założenie dotyczące równowagi i braku oddziaływań momentowych ma jeszcze jedną konsekwencję dla otrzymanego według (8.14) tensora średniego naprężenia – przy spełnieniu tych założeń byłby on symetryczny. W praktyce, w modelu dynamicznym równowaga jest spełniona tylko w przybliżeniu, w zależności od zastosowanego tłumienia.

### 8.3.2 Uśredniony tensor naprężenia

Po wyznaczeniu naprężeń dla pojedynczych elementów  $\sigma_p$  wybiera się pewien obszar reprezentatywny REV (*ang.* representative volume) o objętości  $V$ , w obszarze którego dokonamy kolejnego uśrednienia w sposób określony równaniem (8.2). Wstawiając wyrażenie (8.14) do równania (8.2) otrzymuje się

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \sum_{p \in V} \sum_{c=1}^{n_{pc}} \mathbf{F}^c \mathbf{s}_p^c. \quad (8.15)$$

W wyrażeniu (8.15) przeprowadza się sumowanie po wszystkich elementach dyskretnych (cząstkach), których środki mas leżą w obszarze uśredniania  $V$ . Nie uwzględnia się przy tym, czy cząstka leży całkowicie wewnątrz obszaru czy też częściowo leży

poza obszarem. Gdyby uwzględnić przy uśrednianiu tylko część objętości cząstki  $\bar{V}_p$  leżącą wewnątrz obszaru  $V$ , otrzymalibyśmy

$$\bar{\sigma} = \langle \sigma \rangle = \frac{1}{V} \sum_{p \in V} \bar{V}_p \frac{1}{V_p} \sum_{c=1}^{n_{pc}} F^c s_p^c. \quad (8.16)$$

#### 8.4 Makroskopowe odkształcenia w modelu dyskretnym

Jako makroskopowa miara odkształcenia przyjęty zostanie symetryczny tensor odkształcenia  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , zdefiniowany równaniem (A.14), sprzężony energetycznie z tensorem Cauchy'ego. Podobny wybór został dokonany w [235]. Możliwe jest przyjęcie innych miar np. tensora gradientu deformacji [16].

Podobnie jak dla naprężeń przyjęty zostaje pewien obszar o objętości  $V$ , dla którego zostanie przeprowadzone uśrednianie wybranej miary odkształcenia. Stosując równanie (8.1) do uśrednienia tensora małych odkształceń  $\boldsymbol{\varepsilon}$  w obszarze o objętości  $V$ , otrzymuje się

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (8.17)$$

Wstawiając równanie (A.14) do równania (8.17) wyrażenie na uśredniony tensor odkształcenia można zapisać w postaci:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right] dV = \frac{1}{V} \int_V \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) dV. \quad (8.18)$$

Za pomocą twierdzenia Gaussa całkę objętościową w równaniu (8.18) można zamienić na całkę powierzchniową. Dla jednego elementu tensora  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}$  mamy

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV = \frac{1}{V} \int_S \frac{1}{2} (u_i n_j + u_j n_i) dS, \quad (8.19)$$

gdzie  $n_i$  jest składową jednostkowego wektora normalnego do powierzchni brzegowej obszaru uśredniania  $S$ . Łącznie wyrażenie na uśredniony tensor odkształcenia można zapisać w postaci:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{V} \int_V \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) dV = \frac{1}{V} \int_S \frac{1}{2} (\mathbf{u} \mathbf{n} + \mathbf{n} \mathbf{u}) dS. \quad (8.20)$$

Całkę powierzchniową w równaniu (8.20) można wyznaczyć w sposób przybliżony poprzez sumę po wszystkich elementach przecinających powierzchnię brzegową  $S$ :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{V} \int_S \frac{1}{2} (\mathbf{u} \mathbf{n} + \mathbf{n} \mathbf{u}) dS = \frac{1}{2V} \sum_{k=1}^{n_s} (\mathbf{u}_k \mathbf{n}_k + \mathbf{n}_k \mathbf{u}_k) S_k, \quad (8.21)$$

gdzie  $n_s$  jest liczbą elementów dyskretnych przecinających powierzchnię brzegową,  $S_k$  jest częścią powierzchni  $S$  związaną z  $k$ -tym elementem, przecinającym powierzchnię brzegową, proporcjonalną do pola powierzchni przecięcia i przeskalowaną tak, by

$$\sum_{k=1}^{n_s} S_k = S, \quad (8.22)$$

$\mathbf{n}_k$  jest wektorem normalnym do powierzchni brzegowej,  $\mathbf{u}_k$  – wektorem przemieszczenia punktu powierzchni brzegowej w środku powierzchni  $S_k$ .

W homogenizacji często stosuje się warunek Mandelstana–Hilla [112], który mówi, że uśredniona praca na poziomie mikroskopowym jest równa iloczynowi sprzężonych energetycznie uśrednionego naprężenia i odkształcenia. Dla naszego przypadku można napisać ten warunek w następującej postaci:

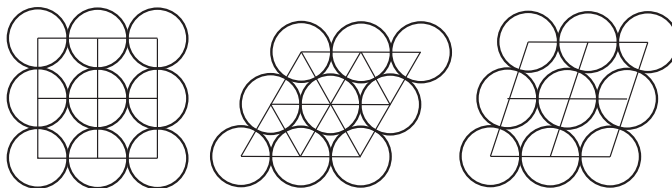
$$\frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^{nc_i} \mathbf{F}_{ij}^c \cdot \delta \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{nc_i} \mathbf{s}^c \times \mathbf{F}_{ij}^c \cdot \delta \boldsymbol{\phi}_i \right) = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \langle \delta \boldsymbol{\epsilon} \rangle. \quad (8.23)$$

## 8.5 Makroskopowe właściwości materiału w metodzie elementów dyskretnych

Makroskopowy związek konstytutywny, czyli zależność między makroskopowym naprężeniem  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  a makroskopowym odkształceniem  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (8.24)$$

wyznacza tensor efektywnych własności konstytutywnych  $\bar{\mathbf{C}}$ . Makroskopowe związki konstytutywne w zakresie sprężystym dla prostych regularnych konfiguracji elementów dyskretnych, jak na przykład przedstawione na rys. 8.4, można uzyskać teoretycznie [175]. W przypadku losowej konfiguracji elementów dyskretnych o zróżnicowanych rozmiarach w warunkach nieliniowego zachowania materiału, konieczne jest



Rys. 8.4. Regularne konfiguracje cylindrycznych elementów dyskretnych (według [175]).

zastosowanie metod opartych na numerycznej symulacji. Z powodu założonej w modelu sztywności kul (wałców) nie ma możliwości bezpośredniego porównania z wynikami uzyskanymi w matematycznej teorii homogenizacji dla materiałów porowatych lub kompozytowych [279].

W [189] zaproponowano metodę numerycznego wyznaczania stycznego tensora konstytutywnego  $\mathbf{C}$  w oparciu o przybliżoną przyrostową postać równania (8.24):

$$\Delta \bar{\sigma} = \bar{\mathbf{C}} : \Delta \bar{\epsilon} \quad (8.25)$$

Alternatywnym sposobem stosowanym w [146] jest kondensacja macierzy sztywności otrzymanej dla reprezentatywnego elementu objętościowego, w trakcie której kondensacji podlegają elementy macierzy odpowiadające zależnym stopniom swobody.

Znajomość efektywnego tensora konstytutywnego  $\bar{\mathbf{C}}$  jest niezbędna w wieloskalowej analizie, gdy na poziomie makroskopowym obliczamy macierz sztywności. W podejściu stosowanym w niniejszej pracy nie wprowadzamy tak rozumianej analizy wieloskalowej, w związku z tym nie występuje konieczność wyznaczania efektywnego tensora konstytutywnego. Konstytutywne własności makroskopowe zostaną zdefiniowane przez zbiór podstawowych stałych materiałowych:  $E$  – moduł Younga,  $\nu$  – współczynnik Poissona,  $\sigma_c$  – wytrzymałość na ściskanie,  $\sigma_t$  – wytrzymałość na rozciąganie.

## Podsumowanie

Model materiału w metodzie elementów dyskretnych posiada cechy modelu mezo- lub mikromechanicznego. W niniejszym rozdziale przedstawiono metody przejścia z niższego poziomu na poziom makroskopowy, umożliwiające wyznaczenie makroskopowych tensorów odkształcenia, naprężenia oraz tensora konstytutywnego. Przejście od skali mikroskopowej do skali makroskopowej zostało dokonane przez zastosowanie uśredniania po obszarze reprezentatywnego elementu objętościowego. Wyznaczenie wielkości uśrednionych umożliwia porównanie wyników modelowania w skali mikroskopowej z wartościami mierzalnymi w skali makroskopowej. Procedura uśredniająca została wprowadzona do programu numerycznego. Jej działanie zostanie przedstawione w rozdziałach pokazujących przykłady symulacji metodą elementów dyskretnych.

## 9. Integracja metody elementów skończonych i metody elementów dyskretnych

### Wstęp

W wielu przypadkach optymalnym rozwiązaniem w modelowaniu numerycznym jest integracja metod modelowania ciągłego i dyskretnego w taki sposób, by w części modelu wykorzystywana była metoda elementów skończonych (MES), a w pozostałej części metoda elementów dyskretnych (MED).

W hybrydowych modelach można w różny sposób wykorzystywać uzupełniające się metody modelowania:

1. Różne metody stosowane są w oddzielnych obszarach, do modelowania różnych materiałów, oddzielne obszary mogą oddziaływać między sobą poprzez kontakt.
2. Różne metody stosowane są w różnych częściach tego samego ośrodka, do modelowania tego samego materiału podlegającego różnym procesom.

W niniejszej pracy opracowano algorytm umożliwiający oba wymienione powyżej sposoby łączenia metody elementów dyskretnych i skończonych. Prace autora nad integracją obydwu metod zostały zapoczątkowane w [251, 216], gdzie przedstawiono wykorzystanie metod elementów dyskretnych i elementów skończonych do modelowania różnych ośrodków, oddziałujących między sobą kontaktowo. Niniejsza praca pokazuje znacznie większe możliwości stosowania zintegrowanej metody elementów skończonych i dyskretnych, zwłaszcza w odniesieniu do podobszarów sprzężonych, będących częścią tego samego ośrodka. W tym przypadku można dostrzec podobieństwo idei oraz stosowanych metod sprzężenia do metod przedstawionych w pracy doktorskiej autora [240] oraz w artykułach [248, 249], gdzie model konstrukcji składał się z części odkształcalnych, dyskretyzowanych elementami skończonymi, oraz części sztywnych. Części sztywne wprowadzają do całego układu dodatkowe związki kinematyczne. Podobnie, w przypadku sprzężenia podobszarów dyskretyzowanych za pomocą elementów skończonych i modelowanych za pomocą elementów dyskretnych, zakłada się dodatkowe związki kinematyczne na wspólnym brzegu obydwu podobszarów. Dodatkowe związki kinematyczne uwzględnia się w równaniach ruchu za pomocą metody mnożników Lagrange'a lub metody funkcji kary. W efekcie otrzymuje się sprzężony układ równań ruchu elementów skończonych i dyskretnych.

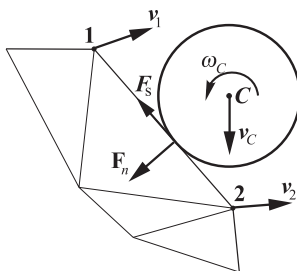
Przy stosowaniu różnych metod w różnych podobszarach tego samego ciała baczna uwaga należy zwrócić na zjawiska zachodzące na połączeniu. Wprowadzona dość ar-

bitralnie granica pomiędzy podobszarami nie może zakłócać procesów zachodzących w całym ciele, np. w zagadnieniu dynamicznym nie powinna stanowić przeszkody, powodującej nierzeczywiste odbicia fal.

W hybrydowym modelu możemy mieć do czynienia ze znaczną różnicą wymiarów charakteryzujących modele dyskretne, rozmiary elementów skończonych mogą być znacznie większe od rozmiarów elementów dyskretnych. W tym przypadku fale o wysokiej częstotliwości drgań nie mogłyby przeniknąć z obszaru MED do obszaru MES, granica między tymi obszarami stanowiłaby sztuczną barierę powodującą fałszywe odbicia takich fal. Jednak fale o niskiej częstotliwości drgań powinny być transmitowane przez granicę bez zakłóceń. Obszar dyskretyzowany elementami skończonymi powinien zapewnić odpowiednią oporność falową dla fal o niskiej częstotliwości drgań, natomiast sposób połączenia obszarów MED i MES powinien być taki, by fale o wysokiej częstotliwości ulegały tłumieniu i rozproszeniu. Dla polepszenia własności tłumiących i rozpraszających, oprócz zwykłego połączenia obszarów MED i MES poprzez dobrze dopasowane brzegi, implementowano również algorytm połączenia z częściowym zachodzeniem obszarów i stopniowym przejściem między różnymi modelami.

### 9.1 Zagadnienie kontaktowe w hybrydowym modelu elementów skończonych i dyskretnych

W przypadku modelu, w którym stosuje się metody elementów skończonych i elementów dyskretnych w podobszarach rozłącznych, reprezentujących różne materiały, oddziaływanie między tymi podobszarami może następować przez kontakt między elementami dyskretnymi i brzegiem obszaru dyskretyzowanego elementami skończonymi (rys. 9.1). W ogólnym przypadku model oddziaływania kontaktowego między elementem dyskretnym i brzegiem obszaru dyskretyzowanego elementami skończonymi może uwzględniać kohezję/adhezję, tłumienie, tarcie, zużycie, generację i wy-



Rys. 9.1. Kontakt między elementem dyskretnym a brzegiem obszaru dyskretyzowanego elementami skończonymi.

mianę ciepła. W niniejszym rozdziale przedstawimy krótko model kontaktu z tarciem bez kohezji analogiczny do modelu oddziaływania kontaktowego elementów dyskretnych przedstawionego w podrozdziale 7.3.

Względna prędkość w punkcie styku jest obliczana zgodnie z następującą zależnością:

$$\mathbf{v}_r = (\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{r}) - \sum_{i=1}^{n_n} \mathbf{v}_i N_i \quad (9.1)$$

gdzie  $\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{r}$  jest prędkością elementu dyskretnego w punkcie styku,  $\sum \mathbf{v}_i N_i$  jest prędkością punktu należącego do brzegu obszaru dyskretyzowanego elementami skończonymi w miejscu styku z elementem dyskretnym, wyrażoną za pomocą prędkości węzłowych  $\mathbf{v}_i$  i odpowiednich funkcji kształtu  $N_i$ ,  $n_n$  jest liczbą węzłów elementu skończonego dyskretyzującego brzeg podobzaru MES. Prędkość względna  $\mathbf{v}_r$  może być rozłożona na składowe w kierunku normalnym i stycznym,  $\mathbf{v}_{rn}$  i  $\mathbf{v}_{rs}$ .

Analogicznie jak w przypadku kontaktu między dwoma elementami dyskretnymi lub dwoma ciałami odkształcalnymi, siłę kontaktu między elementem dyskretnym i brzegiem obszaru ciągłego  $\mathbf{F}$  można rozłożyć na składową normalną  $F_n$  i styczną  $F_s$ , które wyznaczamy stosując odpowiednie konstytutywne modele oddziaływania kontaktowego. Składowa normalna siły kontaktu  $F_n$  jest wypadkową siły sprężystej  $F_n^e$  i siły tłumienia  $F_n^d$

$$F_n = F_n^e + F_n^d. \quad (9.2)$$

Składowa sprężysta normalnej siły kontaktu  $F_n^e$  jest proporcjonalna do sztywności kontaktu w kierunku normalnym  $k_n$  i penetracji cząstki-elementu dyskretnego przez brzeg obszaru dyskretyzowanego elementami skończonymi  $g$

$$F_n^e = k_n g. \quad (9.3)$$

Penetracja  $g$  jest wyznaczana z zależności

$$g = d - r, \quad (9.4)$$

gdzie  $d$  jest odległością środka elementu dyskretnego od brzegu, a  $r$  jest promieniem elementu dyskretnego. W implementowanym modelu zakłada się tłumienie typu lepkiego

$$F_n^d = c_n v_{rn} \quad (9.5)$$

gdzie  $c_n$  jest współczynnikiem tłumienia  $v_{rn}$  jest składową normalną względną prędkości w punkcie styku. Siłę styczną  $F_s$  wyznacza się według regularyzowanego modelu tarcia Coulomba przedstawionego w podrozdziale 7.3.

Wyznaczona w opisany sposób siła  $\mathbf{F}$  jest siłą oddziaływania na element dyskretny. Reakcję oddziałującą na brzeg podobszaru MES rozkłada się na węzły elementu skończonego według wartości funkcji kształtu  $N_i$  w punkcie kontaktu

$$\mathbf{F}_i = -\mathbf{F}N_i, \quad i = 1, \dots, n_n. \quad (9.6)$$

W oddziaływaniu kontaktowym między elementem dyskretnym a brzegiem podobszaru dyskretyzowanego elementami skończonymi można w łatwy sposób uwzględnić opór toczenia adaptując model oddziaływania momentowego przedstawiony w podrozdziale 7.5.

## 9.2 Zintegrowany algorytm hybrydowej metody elementów skończonych i dyskretnych dla podobszarów rozłącznych

Procesy mechaniczne w obszarze modelowanym metodą elementów skończonych są opisane równaniem ruchu (2.29), a w obszarze modelowanym metodą elementów dyskretnych – równaniami (7.23) i (7.24). Zintegrowany algorytm hybrydowej metody elementów skończonych i dyskretnych w podobszarach rozłącznych łączy rozwiązania dla obydwu podobszarów, uwzględniając oddziaływanie kontaktowe między elementami dyskretnymi i brzegiem podobszaru dyskretyzowanego elementami skończonymi. Układ rozwiązywanych równań można zapisać w następującej postaci:

$$\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{r}}_F = \mathbf{F}_F^{\text{ext}} - \mathbf{F}_F^{\text{int}} + \mathbf{F}_{F-D}, \quad (9.7)$$

$$\mathbf{M}_D \ddot{\mathbf{r}}_D = \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_{D-F}, \quad (9.8)$$

$$\mathbf{J}_D \dot{\mathbf{\Omega}}_D = \mathbf{T}_D + \mathbf{T}_{D-F}. \quad (9.9)$$

W równaniach (9.7)–(9.9) wprowadzono indeksy „F” dla oznaczenia wielkości związanych z podobszarem dyskretyzowanym elementami skończonymi oraz indeksy „D” – dla wielkości związanych z obszarem reprezentowanym przez elementy dyskretne,  $\mathbf{F}_{D-F}$  i  $\mathbf{T}_{D-F}$  są wektorem zawierającym siły i momenty oddziaływania kontaktowego na elementy dyskretne będące w kontakcie z brzegiem podobszaru MES, zaś reakcje oddziaływania kontaktowego na brzeg podobszaru MES rozłożone zgodnie z równaniem (9.6) są zawarte w wektorze  $\mathbf{F}_{F-D}$ . Równania (9.7)–(9.9) są uzupełnione odpowiednimi warunkami początkowymi.

Struktura równań ruchu w metodzie elementów skończonych i dyskretnych oraz schematy ich całkowania są podobne. Ułatwia to opracowanie jednolitego algorytmu rozwiązania. Opracowany schemat rozwiązania dla kroku  $n$  jest następujący:

1. Obliczenie sił obciążenia zewnętrznego i wewnętrznych dla podobszaru MES,  $(\mathbf{F}_F^{\text{ext}})_n$ ,  $(\mathbf{F}_F^{\text{int}})_n$ .



2. Obliczenie obciążenia (sił i momentów) dla podobszaru MED  $(\mathbf{F}_D)_n$  i  $(\mathbf{T}_D)_n$ .
3. Obliczenie oddziaływania kontaktowego między elementami dyskretnymi i brzeżem podobszaru MES  $(\mathbf{F}_{D-F})_n$ ,  $(\mathbf{T}_{D-F})_n$  i  $(\mathbf{F}_{F-D})_n$ .
4. Wyznaczenie kroku całkowania

$$\Delta t_{n+1} = \min[(\Delta t_F^{cr})_{n+1}, (\Delta t_D^{cr})_{n+1}], \quad (9.10)$$

gdzie  $(\Delta t_F^{cr})_{n+1}$  i  $(\Delta t_D^{cr})_{n+1}$  są krytycznymi krokami całkowania dla podobszarów MES i MED,

$$\Delta t_{n+1/2} = \frac{1}{2}(\Delta t_n + \Delta t_{n+1}). \quad (9.11)$$

5. Całkowanie względem czasu równań ruchu w podobszarze MES

$$(\ddot{\mathbf{r}}_F)_n = \mathbf{M}_F^{-1} [(\mathbf{F}_F^{\text{ext}})_n - (\mathbf{F}_F^{\text{int}})_n + (\mathbf{F}_{F-D})_n], \quad (9.12)$$

$$(\dot{\mathbf{r}}_F)_{n+1/2} = (\dot{\mathbf{r}}_F)_{n-1/2} + (\ddot{\mathbf{r}}_F)_n \Delta t_{n+1/2}, \quad (9.13)$$

$$(\mathbf{r}_F)_{n+1} = (\mathbf{r}_F)_n + (\dot{\mathbf{r}}_F)_{n+1/2} \Delta t_{n+1}. \quad (9.14)$$

6. Całkowanie względem czasu równań ruchu w podobszarze MED

$$(\ddot{\mathbf{r}}_D)_n = \mathbf{M}_D^{-1} [(\mathbf{F}_D)_n + (\mathbf{F}_{D-F})_n], \quad (9.15)$$

$$(\dot{\mathbf{r}}_D)_{n+1/2} = (\dot{\mathbf{r}}_D)_{n-1/2} + (\ddot{\mathbf{r}}_D)_n \Delta t_{n+1/2}, \quad (9.16)$$

$$(\mathbf{r}_D)_{n+1} = (\mathbf{r}_D)_n + (\dot{\mathbf{r}}_D)_{n+1/2} \Delta t_{n+1}, \quad (9.17)$$

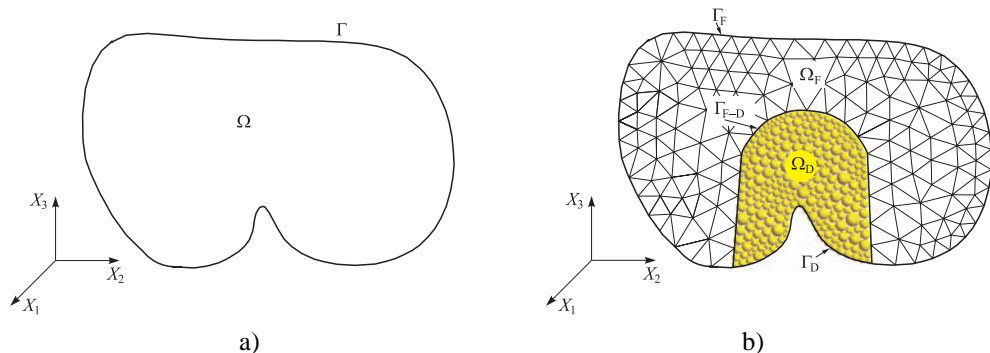
$$(\dot{\boldsymbol{\Omega}}_D)_n = \mathbf{J}_D^{-1} [(\mathbf{T}_D)_n + (\mathbf{T}_{D-F})_n], \quad (9.18)$$

$$(\boldsymbol{\Omega}_D)_{n+1/2} = (\boldsymbol{\Omega}_D)_{n-1/2} + (\dot{\boldsymbol{\Omega}}_D)_n \Delta t_{n+1/2}. \quad (9.19)$$

### 9.3 Integracja metod elementów skończonych i elementów dyskretnych dla podobszarów sprzężonych

#### 9.3.1 Sformułowanie problemu

Rozpatrywany będzie ruch ciała odkształcalnego zajmującego obszar  $\Omega$  z brzegiem  $\Gamma$  (rys. 9.2a). W obszarze  $\Omega$  zostaną wyodrębnione rozłączne podobszary  $\Omega_F$ , w którym



Rys. 9.2. Integracja MED i MES: a) rozpatrywane ciało odkształcalne, b) hybrydowy model MED/MES.

ciało będziemy rozpatrywać jako ośrodek ciągły, oraz  $\Omega_D$ , w którym ciało będziemy traktować jako ośrodek dyskretny (rys. 9.2b):

$$\Omega = \Omega_F \cup \Omega_D, \quad (9.20)$$

przy czym

$$\Omega_F \cap \Omega_D = \emptyset. \quad (9.21)$$

Brzegi podobszarów  $\Omega_D$  i  $\Omega_F$  zostaną oznaczone odpowiednio  $\Gamma_D$  i  $\Gamma_F$ . Podobszary  $\Omega_F$  i  $\Omega_D$  stykają się na powierzchni  $\Gamma_{F-D} = \Gamma_F \cap \Gamma_D$ . Część wspólna brzegów  $\Gamma_D$  i  $\Gamma_F$  nie należy do brzegu  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \Gamma_F \cup \Gamma_D \setminus \Gamma_{F-D}. \quad (9.22)$$

Podobszar  $\Omega_F$  zostanie zdyskretyzowany za pomocą  $n_{fe}$  elementów skończonych:

$$\Omega_F = \bigcup_{e=1}^{e=n_{fe}} \Omega_e. \quad (9.23)$$

Analogicznie do równania (2.16) wprowadzamy interpolację pola przemieszczenia  $\mathbf{u}_F$

$$\mathbf{u}_F(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{r}_e(t), \quad \mathbf{x} \in \Omega_e. \quad (9.24)$$

poprzez macierz funkcji kształtu  $\mathbf{N}$  oraz wektor uogólnionych przemieszczeń elementów  $\mathbf{r}_e$ . Różniczkowanie względem czasu wyrażenia (9.24) daje odpowiednie aproksymacje pola prędkości i przyspieszenia,  $\dot{\mathbf{u}}_F$  i  $\ddot{\mathbf{u}}_F$ . Stosując standardową agregację

(2.24) otrzymuje się globalne wektory uogólnionych przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń węzłowych dla obszaru MES, odpowiednio  $\mathbf{r}_F$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_F$  i  $\ddot{\mathbf{r}}_F$ .

W podobszarze  $\Omega_D$  zostanie wprowadzony gęsto upakowany zbiór elementów dyskretnych  $D = \{d_i\}$ ,  $i = 1, n_{de}$  będących kulami (w zagadnieniu trójwymiarowym) lub kołami (w zagadnieniu dwuwymiarowym). Suma obszarów zajmowanych przez elementy dyskretne  $\tilde{\Omega}_D$  jest podzbiorem zbioru  $\Omega_D$

$$\tilde{\Omega}_D = \bigcup_{i=1}^{i=n_{de}} d_i \subset \Omega_D. \quad (9.25)$$

Obszary zajmowane przez elementy dyskretne mogą się ze sobą stykać, ale nie przecinają się

$$(\forall 1 \leq i, j \leq n_{de}, i \neq j) d_i \cap d_j = \emptyset. \quad (9.26)$$

Ograniczenie (9.26) może być naruszone przy obciążeniu działającym na elementy. Dla elementów stykających się zakładamy możliwość wprowadzenia wiązań kohezyjnych.

Konfiguracja i ruch w podobszarze modelowania dyskretnego jest opisany przez globalny wektor przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń układu elementów dyskretnych  $\mathbf{r}_D$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_D$  i  $\ddot{\mathbf{r}}_D$  oraz globalne wektory prędkości i przyspieszeń kątowych  $\boldsymbol{\Omega}_D$  i  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_D$ :

$$\mathbf{r}_D = \{\mathbf{u}_{d_1} \dots \mathbf{u}_{d_{n_{de}}}\}^T, \quad \dot{\mathbf{r}}_D = \{\dot{\mathbf{u}}_{d_1} \dots \dot{\mathbf{u}}_{d_{n_{de}}}\}^T, \quad \ddot{\mathbf{r}}_D = \{\ddot{\mathbf{u}}_{d_1} \dots \ddot{\mathbf{u}}_{d_{n_{de}}}\}^T, \quad (9.27)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_D = \{\boldsymbol{\omega}_{d_1} \dots \boldsymbol{\omega}_{d_{n_{de}}}\}^T, \quad \dot{\boldsymbol{\Omega}}_D = \{\dot{\boldsymbol{\omega}}_{d_1} \dots \dot{\boldsymbol{\omega}}_{d_{n_{de}}}\}^T. \quad (9.28)$$

Podobszary MES i MED są ze sobą sprężone poprzez dodatkowe więzy kinematyczne nałożone na elementy dyskretne stykające się z brzegiem  $\Gamma_{D,F}$ . Elementy te tworzą podzbiór  $D_{D,F}$

$$D_{D,F} = \{d_i : g_i = 0\}, \quad (9.29)$$

gdzie  $g_i$  jest odległością brzegu elementu dyskretnego od brzegu  $\Gamma_{D,F}$

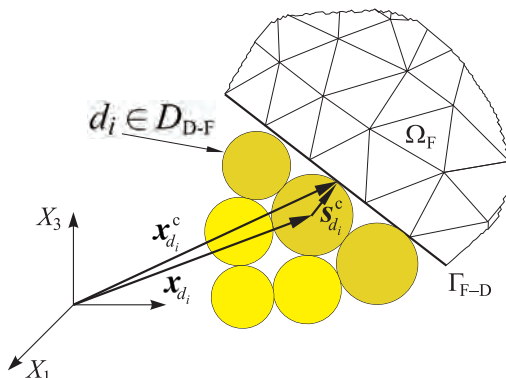
$$g_i = \min_{\mathbf{x} \in \Gamma_{D,F}} \|\mathbf{x}_{d_i} - \mathbf{x}\| - r_i, \quad (9.30)$$

gdzie  $\mathbf{x}_{d_i}$  – współrzędne środka masy elementu dyskretnego,  $r_i$  – jego promień. Przy idealnym połączeniu dwa różne obszary powinny być idealnie dopasowane, jednak nieraz to wymaganie przy stosowaniu dyskretyzacji MED i MES może być trudne do spełnienia, dlatego dopuszcza się pewną niedokładność na styku podobszarów

$$D_{D,F} = \{d_i : g_i \leq \varepsilon\}, \quad (9.31)$$

gdzie  $\varepsilon$  jest założoną tolerancją.

### 9.3.2 Więzy kinematyczne sprzęgające podobszary MED i MES



Rys. 9.3. Zależności kinematyczne w sprzężeniu podobszarów MED i MES.

Sprzężenie podobszarów dyskretyzowanych elementami skończonymi i modelowanych elementami dyskretnymi jest zapewnione przez dodatkowe kinematyczne ograniczenia (więzy) wynikające z założenia, że punkty elementów dyskretnych stykające się z brzegiem podobszarem MES  $\mathbf{x}_{d_i}^c$  są związane kinematycznie z punktem styku należącym do zdyskretyzowanego brzegu podobszaru ciągłego  $\mathbf{x}_F^c$  (rys. 9.3):

$$\chi_i = \mathbf{x}_{d_i}^c - \mathbf{x}_F^c = \mathbf{0}, \quad \forall d_i \in D_{D-F}, \mathbf{x}_F^c \in \Gamma_{F-D}. \quad (9.32)$$

Równanie więzów (9.32) może być w równoważny sposób zapisane dla przemieszczeń

$$\chi_i = \mathbf{u}_{d_i}^c - \mathbf{u}_F^c = \mathbf{0}. \quad (9.33)$$

Wykorzystując równania (B.1) i (9.24) oraz własności iloczynu wektorowego otrzymuje się wariację równania więzów (9.33) w następującej postaci:

$$\delta \chi_i = \delta \mathbf{u}_{d_i} - \mathbf{s}_{d_i}^c \times \delta \boldsymbol{\varphi}_{d_i} - \sum_{j=1}^{n_w} N_j(\mathbf{x}_F^c) \delta \mathbf{u}_{Fj} = \mathbf{0}, \quad (9.34)$$

gdzie  $\delta \mathbf{u}_{d_i}$  i  $\delta \mathbf{u}_{Fj}$  są przemieszczeniami przygotowanymi (wariacjami) odpowiednio środków masy elementów dyskretnych  $d_i \in D_{D-F}$  i węzłów elementów dyskretyzujących brzeg  $\Gamma_{D-F}$ ,  $N_j$  – funkcjami interpolacyjnymi dla punktu styku,  $\delta \boldsymbol{\varphi}_{d_i}$  – wektorami elementarnymi (przygotowanymi) obrotów, a  $\mathbf{s}_{d_i}^c$  – wektorami łączącymi środki mas elementów dyskretnych z punktem styku z brzegiem podobszaru MES.

Wstawiając do równania (9.33) interpolację pola przemieszczeń (9.24), a następnie różniczkując otrzymane równanie względem czasu otrzymuje się dodatkowe związki

kinematyczne dla prędkości i przyspieszeń:

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_i = \dot{\mathbf{u}}_{d_i} - \mathbf{s}_{d_i}^c \times \boldsymbol{\omega}_{d_i} - \sum_{j=1}^{n_w} N_j(\mathbf{x}_F^c) \dot{\mathbf{u}}_{Fj} = \mathbf{0}, \quad (9.35)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\chi}}_i = \ddot{\mathbf{u}}_{d_i} - \dot{\mathbf{s}}_{d_i}^c \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_{d_i} + \boldsymbol{\omega}_{d_i} \times (\boldsymbol{\omega}_{d_i} \times \mathbf{s}_{d_i}^c) - \sum_{j=1}^{n_w} N_j(\mathbf{x}_F^c) \ddot{\mathbf{u}}_{Fj} = \mathbf{0}, \quad (9.36)$$

gdzie  $\dot{\mathbf{u}}_{d_i}$  są prędkościami środków masy elementów dyskretnych  $d_i \in D_{D-F}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{d_i}$  – prędkościami kątowymi,  $\dot{\mathbf{u}}_{Fj}$  – prędkościami węzłów elementów dyskretyzujących brzeg  $\Gamma_{D-F}$ . Zależności (9.35) i (9.36) można również otrzymać bezpośrednio przy wykorzystaniu zależności kinematycznych dla ruchu ciała sztywnego (B.2) i (B.3).

Związki (9.34)–(9.36) można zapisać w notacji macierzowej w następującej postaci:

$$\delta \boldsymbol{\chi}_i = \delta \mathbf{u}_{d_i} - \tilde{\mathbf{s}}_{d_i}^c \delta \boldsymbol{\varphi}_{d_i} - \mathbf{N}^e(\mathbf{x}_F^c) \delta \mathbf{r}_F^e = \mathbf{0}, \quad (9.37)$$

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_i = \dot{\mathbf{u}}_{d_i} - \tilde{\mathbf{s}}_{d_i}^c \boldsymbol{\omega}_{d_i} - \mathbf{N}^e(\mathbf{x}_F^c) \dot{\mathbf{r}}_F^e = \mathbf{0}, \quad (9.38)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\chi}}_i = \ddot{\mathbf{u}}_{d_i} - \dot{\tilde{\mathbf{s}}}_{d_i}^c \dot{\boldsymbol{\omega}}_{d_i} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{d_i} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{d_i} \mathbf{s}_{d_i}^c - \mathbf{N}^e(\mathbf{x}_F^c) \ddot{\mathbf{r}}_F^e = \mathbf{0}, \quad (9.39)$$

gdzie  $\tilde{\mathbf{s}}_{d_i}^c$  i  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{d_i}$  są antysymetrycznymi macierzami stowarzyszonymi z wektorami  $\mathbf{s}_{d_i}^c$  i  $\boldsymbol{\omega}_{d_i}$ , służącymi do zapisu iloczynu wektorowego w notacji macierzowej, zdefiniowanymi równaniem (1.5).

Równania więzów (9.33) można zapisać łącznie dla wszystkich elementów dyskretnych związanych ograniczeniami:

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{0}, \quad (9.40)$$

gdzie  $\boldsymbol{\chi} = \{\boldsymbol{\chi}_1 \dots \boldsymbol{\chi}_{n_{dc}}\}^T$ ,  $n_{dc}$  jest liczbą elementów dyskretnych związanych dodatkowymi zależnościami. Podobnie dodatkowe ograniczenia kinematyczne (9.37)–(9.39) można zapisać globalnie:

$$\delta \boldsymbol{\chi} = \mathbf{0}, \quad \dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{0}, \quad \ddot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{0}, \quad (9.41)$$

gdzie  $\delta \boldsymbol{\chi} = \{\delta \boldsymbol{\chi}_1 \dots \delta \boldsymbol{\chi}_{n_{dc}}\}^T$ ,  $\dot{\boldsymbol{\chi}} = \{\dot{\boldsymbol{\chi}}_1 \dots \dot{\boldsymbol{\chi}}_{n_{dc}}\}^T$ ,  $\ddot{\boldsymbol{\chi}} = \{\ddot{\boldsymbol{\chi}}_1 \dots \ddot{\boldsymbol{\chi}}_{n_{dc}}\}^T$ . W celu jawnego zapisu związków (9.41) przy uwzględnieniu wyrażeń (9.37)–(9.39) w wektorach globalnych przemieszczeń  $\mathbf{r}_D$  wyodrębnimy podwektor  $\mathbf{r}_{DC}$  zawierający przemieszczenia  $\mathbf{u}_{d_i}$  elementów związanych dodatkowymi ograniczeniami ( $d_i \in D_{D-F}$ ), oraz podwektor  $\mathbf{r}_{DU}$  zawierający przemieszczenia  $\mathbf{u}_{d_i}$  elementów nie związanych dodatkowymi ograniczeniami ( $d_i \notin D_{D-F}$ ). W ten sam sposób zostaną podzielone globalne wektory prędkości i przyspieszeń  $\dot{\mathbf{r}}_D$  i  $\ddot{\mathbf{r}}_D$ :

$$\mathbf{r}_D = \{\mathbf{r}_{DU}, \mathbf{r}_{DC}\}^T, \quad \dot{\mathbf{r}}_D = \{\dot{\mathbf{r}}_{DU}, \dot{\mathbf{r}}_{DC}\}^T, \quad \ddot{\mathbf{r}}_D = \{\ddot{\mathbf{r}}_{DU}, \ddot{\mathbf{r}}_{DC}\}^T. \quad (9.42)$$

Analogicznie dla wielkości opisujących ruch obrotowy wyróżniamy wielkości związane dodatkowymi ograniczeniami, oznaczone indeksami „DC”, oraz niezwiązane dodatkowymi ograniczeniami (niezależne), oznaczone indeksami „DU”:

$$\delta \Phi_D = \{\delta \Phi_{DU}, \delta \Phi_{DC}\}^T, \quad \Omega_D = \{\Omega_{DU}, \Omega_{DC}\}^T, \quad \dot{\Omega}_D = \{\dot{\Omega}_{DU}, \dot{\Omega}_{DC}\}^T. \quad (9.43)$$

Wprowadzając odpowiednie globalne wektory i macierze, związki (9.41) można zapisać w postaci:

$$\delta \chi = \delta r_{DC} - \tilde{S} \delta \Phi_{DC} - N \delta r_F = 0, \quad (9.44)$$

$$\dot{\chi} = \dot{r}_{DC} - \tilde{S} \Omega_{DC} - N \dot{r}_F = 0, \quad (9.45)$$

$$\ddot{\chi} = \ddot{r}_{DC} - \tilde{S} \dot{\Omega}_{DC} + \Pi_{DC} - N \ddot{r}_F = 0, \quad (9.46)$$

gdzie macierz globalna  $\tilde{S}$  jest otrzymana przez agregację macierzy  $\tilde{s}_{d_i}^c$ , wektor  $\Pi_{DC}$  otrzymuje się przez agregację wektorów  $\tilde{\omega}_{d_i} \tilde{\omega}_{d_i} s_{d_i}^c$ , a macierz  $N$  zawiera funkcje kształtu.

### 9.3.3 Równania ruchu dla sprzężonego modelu MED/MES – metoda mnożników Lagrange’a

Do rozwiązania układu równań z dodatkowymi ograniczeniami można zastosować alternatywnie:

- metodę mnożników Lagrange’a,
- metodę funkcji kary,
- metodę rozszerzonych mnożników Lagrange’a (*ang.* augmented Lagrange multipliers method).

W niniejszej pracy zostaną wykorzystane dwie z tych metod: metoda mnożników Lagrange’a oraz metoda funkcji kary.

Zasada prac przygotowanych dla sprzężonego układu MED/MES z więzami (9.40), uwzględnionymi za pomocą metody mnożników Lagrange’a, jest dana następującym równaniem:

$$\delta r_F^T (M_F \ddot{r}_F + F_F^{\text{int}} - F_F^{\text{ext}}) + \delta r_D^T (M_D \ddot{r}_D - F_D) + \delta \Phi_D^T (J_D \dot{\Omega}_D - T_D) + \delta \chi^T \lambda = 0, \quad (9.47)$$

gdzie  $\lambda$  jest wektorem nieznanych mnożników Lagrange’a, mających fizyczną interpretację sił więzów,  $\delta r_F$  i  $\delta r_D$  są kinematycznie dopuszczalnymi przemieszczeniami przygotowanymi, a  $\delta \Phi_D$  są przygotowanymi obrotami elementarnymi. Człon  $\delta \chi^T \lambda$

wyraża pracę przygotowaną więzów. Uwzględniając w równaniu (9.47) podział wektorów globalnych określony równaniami (9.42) i (9.43) oraz postać wariacji więzów (9.44) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} & \delta \mathbf{r}_F^T (\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{r}}_F + \mathbf{F}_F^{\text{int}} - \mathbf{F}_F^{\text{ext}}) + \delta \mathbf{r}_{DU}^T (\mathbf{M}_{DU} \ddot{\mathbf{r}}_{DU} - \mathbf{F}_{DU}) + \delta \mathbf{r}_{DC}^T (\mathbf{M}_{DC} \ddot{\mathbf{r}}_{DC} - \mathbf{F}_{DC}) \\ & + \delta \Phi_{DC}^T (\mathbf{J}_{DC} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{DC} - \mathbf{T}_{DC}) + \delta \Phi_{DU}^T (\mathbf{J}_{DU} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{DU} - \mathbf{T}_{DU}) \\ & - \delta \mathbf{r}_F^T \mathbf{N}^T \boldsymbol{\lambda} + \delta \mathbf{r}_{DC}^T \boldsymbol{\lambda} - \delta \Phi_{DC}^T \tilde{\mathbf{S}}^T \boldsymbol{\lambda} = 0. \end{aligned} \quad (9.48)$$

Równanie (9.48) można zapisać w postaci następującego równania macierzowego:

$$\begin{pmatrix} \delta \mathbf{r}_F \\ \delta \mathbf{r}_{DU} \\ \delta \mathbf{r}_{DC} \\ \delta \Phi_{DU} \\ \delta \Phi_{DC} \end{pmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} \mathbf{M}_F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{N}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{DU} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{DC} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{DU} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{DC} & -\tilde{\mathbf{S}}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_F \\ \ddot{\mathbf{r}}_{DU} \\ \ddot{\mathbf{r}}_{DC} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{DU} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{DC} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{F}_F^{\text{ext}} - \mathbf{F}_F^{\text{int}} \\ \mathbf{F}_{DU} \\ \mathbf{F}_{DC} \\ \mathbf{T}_{DU} \\ \mathbf{T}_{DC} \end{pmatrix} \right) = 0. \quad (9.49)$$

Ponieważ równanie (9.49) musi być spełnione dla dowolnej wariacji, wyrażenie w nawiasie musi być równe zero. Po uzupełnieniu dodatkowymi ograniczeniami dla przyspieszeń (9.46) otrzymuje się następujący układ równań dla układu sprzężonego:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{N}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{DU} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{DC} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{DU} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{DC} & -\tilde{\mathbf{S}}^T \\ -\mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{S}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_F \\ \ddot{\mathbf{r}}_{DU} \\ \ddot{\mathbf{r}}_{DC} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{DU} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{DC} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_F^{\text{ext}} - \mathbf{F}_F^{\text{int}} \\ \mathbf{F}_{DU} \\ \mathbf{F}_{DC} \\ \mathbf{T}_{DU} \\ \mathbf{T}_{DC} \\ -\boldsymbol{\Pi}_{DC} \end{pmatrix}. \quad (9.50)$$

Równanie (9.50) zawiera niewiadome typu kinematycznego i niewiadome o charakterze sił, czyli mnożniki Lagrange'a. Równania te mogą być rozwiązywane bezpośrednio względem tych niewiadomych poprzez zastosowanie odpowiedniej procedury całkowania. Alternatywny sposób wykorzystuje eliminację mnożników Lagrange'a  $\boldsymbol{\lambda}$  oraz zmiennych zależnych  $\mathbf{r}_{DC}$  i  $\boldsymbol{\Omega}_{DC}$  przed procesem całkowania. Po wykonaniu odpowiednich przekształceń algebraicznych z (9.72) można otrzymać następujący układ równań:

$$\begin{aligned} & \left[ \mathbf{M}_F + \mathbf{N}^T \mathbf{M}_{DC} \mathbf{N} - \mathbf{N}^T \mathbf{M}_{DC} \tilde{\mathbf{S}} (\mathbf{J}_{DC} + \tilde{\mathbf{S}}^T \mathbf{M}_{DC} \tilde{\mathbf{S}})^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^T \mathbf{M}_{DC} \mathbf{N} \right] \ddot{\mathbf{r}}_F = \mathbf{F}_F^{\text{ext}} - \mathbf{F}_F^{\text{int}} + \mathbf{N}^T \mathbf{F}_{DC} \\ & + \mathbf{N}^T \mathbf{M}_{DC} \boldsymbol{\Pi}_{DC} - \mathbf{N}^T \mathbf{M}_{DC} \tilde{\mathbf{S}} (\mathbf{J}_{DC} + \tilde{\mathbf{S}}^T \mathbf{M}_{DC} \tilde{\mathbf{S}})^{-1} (\mathbf{T}_{DC} + \tilde{\mathbf{S}}^T \mathbf{F}_{DC} + \tilde{\mathbf{S}}^T \mathbf{M}_{DC} \boldsymbol{\Pi}_{DC}), \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{DU} \ddot{\mathbf{r}}_{DU} = \mathbf{F}_{DU}, \quad (9.51)$$

$$\mathbf{J}_{DU} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{DU} = \mathbf{T}_{DU},$$

który może być całkowany względem czasu za pomocą jawnego schematu całkowania łączącego równania (2.58)–(2.60) i (7.59)–(7.66).

### 9.3.4 Równania ruchu dla sprzężonego modelu MED/MES – metoda funkcji kary

Zasada prac przygotowanych dla sprzężonego układu MED/MES z więzami (9.40), uwzględnionymi za pomocą metody funkcji kary, jest dana następującym równaniem:

$$\delta \mathbf{r}_F^T (\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{r}}_F + \mathbf{F}_F^{\text{int}} - \mathbf{F}_F^{\text{ext}}) + \delta \mathbf{r}_D^T (\mathbf{M}_D \ddot{\mathbf{r}}_D - \mathbf{F}_D) + \delta \boldsymbol{\Phi}_D^T (\mathbf{J}_D \dot{\boldsymbol{\Omega}}_D - \mathbf{T}_D) + \delta \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} = 0, \quad (9.52)$$

gdzie  $\mathbf{k}_{DF}$  jest diagonalną macierzą, której elementy  $k_{DF_i}$  są wartościami dyskretnej funkcji kary. Metoda funkcji kary, w przeciwieństwie do metody mnożników Lagrange'a, zapewnia spełnienie równania więzów tylko w przybliżeniu. Równanie więzów jest spełnione dokładnie dla wartości funkcji kary  $k_{DF} \rightarrow \infty$ , niemniej jednak wartość funkcji kary musi być ograniczona ze względu na jej wpływ na krytyczny krok całkowania. Podobnie jak w przypadku ograniczeń kontaktowych maksymalną wartość parametru kary dla więzów sprzęgających ustala się na podstawie nierówności (4.47). Uwzględniając w równaniu (9.52) podział wektorów globalnych określony równaniami (9.42) i (9.43) oraz postać wariacji więzów (9.44) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} & \delta \mathbf{r}_F^T (\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{r}}_F + \mathbf{F}_F^{\text{int}} - \mathbf{F}_F^{\text{ext}}) + \delta \mathbf{r}_{DU}^T (\mathbf{M}_{DU} \ddot{\mathbf{r}}_{DU} - \mathbf{F}_{DU}) + \delta \mathbf{r}_{DC}^T (\mathbf{M}_{DC} \ddot{\mathbf{r}}_{DC} - \mathbf{F}_{DC}) \\ & + \delta \boldsymbol{\Phi}_{DC}^T (\mathbf{J}_{DC} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{DC} - \mathbf{T}_{DC}) + \delta \boldsymbol{\Phi}_{DU}^T (\mathbf{J}_{DU} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{DU} - \mathbf{T}_{DU}) \\ & - \delta \mathbf{r}_F^T \mathbf{N}^T \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} + \delta \mathbf{r}_{DC}^T \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} - \delta \boldsymbol{\Phi}_{DC}^T \tilde{\mathbf{S}}^T \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} = 0. \end{aligned} \quad (9.53)$$

Równanie (9.53) można zapisać w postaci następującego równania macierzowego:



$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \mathbf{r}_F \\ \delta \mathbf{r}_{DU} \\ \delta \mathbf{r}_{DC} \\ \delta \Phi_{DU} \\ \delta \Phi_{DC} \end{array} \right\}^T \left( \left[ \begin{array}{ccccc} \mathbf{M}_F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{DU} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{DC} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{DU} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{DC} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\mathbf{r}}_F \\ \ddot{\mathbf{r}}_{DU} \\ \ddot{\mathbf{r}}_{DC} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{DU} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{DC} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_F^{\text{ext}} - \mathbf{F}_F^{\text{int}} + \mathbf{N}^T \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} \\ \mathbf{F}_{DU} \\ \mathbf{F}_{DC} - \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} \\ \mathbf{T}_{DU} \\ \mathbf{T}_{DC} + \tilde{\mathbf{S}}^T \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} \end{array} \right\} \right) = 0. \quad (9.54)$$

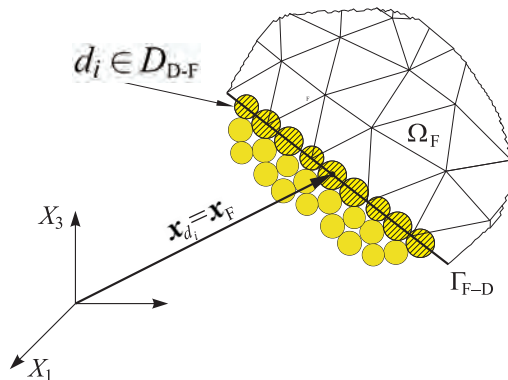
Ponieważ równanie (9.54) musi być spełnione dla dowolnych kinematycznie dopuszczalnych wariacji (bez uwzględnienia równań sprzęgających więzów) wyrażenie w nawiasie musi być równe zero, co daje następujące równanie:

$$\left[ \begin{array}{ccccc} \mathbf{M}_F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{DU} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{DC} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{DU} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{DC} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\mathbf{r}}_F \\ \ddot{\mathbf{r}}_{DU} \\ \ddot{\mathbf{r}}_{DC} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{DU} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{DC} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_F^{\text{ext}} - \mathbf{F}_F^{\text{int}} + \mathbf{N}^T \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} \\ \mathbf{F}_{DU} \\ \mathbf{F}_{DC} - \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} \\ \mathbf{T}_{DU} \\ \mathbf{T}_{DC} + \tilde{\mathbf{S}}^T \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} \end{array} \right\}. \quad (9.55)$$

Równanie (9.55) może być całkowane względem czasu za pomocą jawnego schematu całkowania łączącego równania (2.58)–(2.60) i (7.59)–(7.66).

## 9.4 Uprozczone sprzężenie obszarów MED i MES

### 9.4.1 Sformułowanie uproszczonego modelu sprzężenia



Rys. 9.4. Uprozczone sprzężenie podobszarów MED i MES.

W podrozdziale 9.3.1 założono, że zgodnie z równaniami (9.21) i (9.25) elementy dyskretne mogą się co najwyżej stykać z brzegiem podobszaru dyskretyzowanego elementami skończonymi. Sprzęgające więzy kinematyczne nałożono na punkty należące do elementów dyskretnych, stykające się z brzegiem  $\Gamma_{D-F}$ . Otrzymane równania, zwłaszcza w postaci zredukowanej (9.51), mają dość skomplikowaną postać. W implementacji numerycznej wykorzystano uproszczone sformułowanie oparte na założeniu, że środki elementów dyskretnych mogą leżeć na brzegu  $\Gamma_{F-D}$  (rys. 9.4). Dopuszcza się tym samym pewną penetrację elementów dyskretnych w obszarze  $\Omega_F$ , jednak przy małych rozmiarach elementów dyskretnych w porównaniu do rozmiarów elementów skończonych wprowadzany jest stosunkowo mały błąd.

Podzbiór  $D_{D-F}$  zawierający elementy dyskretne, dla których zostaną określone dodatkowe warunki kinematyczne, można określić w następujący sposób:

$$D_{D-F} = \{d_i : e_i = 0\}, \quad (9.56)$$

gdzie  $e_i$  jest odległością środka masy elementu dyskretnego od brzegu  $\Gamma_{D-F}$

$$e_i = \min_{\mathbf{x} \in \Gamma_{D-F}} \|\mathbf{x}_{d_i} - \mathbf{x}\|, \quad (9.57)$$

gdzie  $\mathbf{x}_{d_i}$  – współrzędne środka masy elementu dyskretnego. W praktyce odległość środków masy elementów dyskretnych od brzegu będzie sprawdzana przy założeniu tolerancji  $\varepsilon$

$$D_{D-F} = \{d_i : e_i \leq \varepsilon\}. \quad (9.58)$$

Dodatkowe kinematyczne ograniczenia (więzy), sprzęgające podobszary MES i MED, wynikają z założenia, że środki elementów dyskretnych leżące na brzegu podobszaru MES  $\mathbf{x}_{d_i}$  są związane kinematycznie z pokrywającym się punktem, należącym do dyskretyzowanego brzegu podobszaru ciągłego  $\mathbf{x}_F$ :

$$\boldsymbol{\chi}_i = \mathbf{x}_{d_i} - \mathbf{x}_F = \mathbf{u}_{d_i} - \mathbf{u}_F(\mathbf{x}_F) = \mathbf{0}, \quad \forall d_i \in D_{D-F}, \mathbf{x}_F \in \Gamma_{F-D}, \quad (9.59)$$

$$\delta \boldsymbol{\chi}_i = \delta \mathbf{u}_{d_i} - \sum_{j=1}^{n_w} N_j(\mathbf{x}_F) \delta \mathbf{u}_{Fj} = \mathbf{0}, \quad (9.60)$$

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_i = \dot{\mathbf{u}}_{d_i} - \sum_{j=1}^{n_w} N_j(\mathbf{x}_F) \dot{\mathbf{u}}_{Fj} = \mathbf{0}, \quad (9.61)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\chi}}_i = \ddot{\mathbf{u}}_{d_i} - \sum_{j=1}^{n_w} N_j(\mathbf{x}_F) \ddot{\mathbf{u}}_{Fj} = \mathbf{0}. \quad (9.62)$$

Związki kinematyczne (9.59)–(9.62) można zapisać w postaci macierzowej:

$$\boldsymbol{\chi}_i = \mathbf{u}_{d_i} - \mathbf{N}^e(\mathbf{x}_F^c) \mathbf{r}_F^e = \mathbf{0}, \quad (9.63)$$

$$\delta \boldsymbol{\chi}_i = \delta \mathbf{u}_{d_i} - \mathbf{N}^e(\mathbf{x}_F^c) \delta \mathbf{r}_F^e = \mathbf{0}, \quad (9.64)$$

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_i = \dot{\mathbf{u}}_{d_i} - \mathbf{N}^e(\mathbf{x}_F^c) \dot{\mathbf{r}}_F^e = \mathbf{0}, \quad (9.65)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\chi}}_i = \ddot{\mathbf{u}}_{d_i} - \mathbf{N}^e(\mathbf{x}_F^c) \ddot{\mathbf{r}}_F^e = \mathbf{0}. \quad (9.66)$$

Zależności (9.63)–(9.66) można zapisać łącznie dla wszystkich elementów dyskretnych ze zbioru  $D_{D-F}$  w postaci

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{r}_{DC} - \mathbf{N} \mathbf{r}_F = \mathbf{0}, \quad (9.67)$$

$$\delta \boldsymbol{\chi} = \delta \mathbf{r}_{DC} - \mathbf{N} \delta \mathbf{r}_F = \mathbf{0}, \quad (9.68)$$

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_i = \dot{\mathbf{r}}_{DC} - \mathbf{N} \dot{\mathbf{r}}_F = \mathbf{0}, \quad (9.69)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\chi}}_i = \ddot{\mathbf{r}}_{DC} - \mathbf{N} \ddot{\mathbf{r}}_F = \mathbf{0}. \quad (9.70)$$

#### 9.4.2 Równania ruchu dla uproszczonego modelu sprzężenia MED/MES – metoda mnożników Lagrange’a

Zasadę prac przygotowanych dla sprzężonego układu MED/MES z więzami (9.67), uwzględnionymi za pomocą metody mnożników Lagrange’a, można zapisać identycznie jak w równaniu (9.47). Po uwzględnieniu podziału wektorów globalnych określonego równaniami (9.42) i (9.43) oraz postaci wariacji równania więzów (9.68) otrzymuje się równanie:

$$\begin{aligned} & \delta \mathbf{r}_F^T (\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{r}}_F + \mathbf{F}_F^{\text{int}} - \mathbf{F}_F^{\text{ext}}) + \delta \mathbf{r}_{DU}^T (\mathbf{M}_{DU} \ddot{\mathbf{r}}_{DU} - \mathbf{F}_{DU}) + \delta \mathbf{r}_{DC}^T (\mathbf{M}_{DC} \ddot{\mathbf{r}}_{DC} - \mathbf{F}_{DC}) \\ & + \delta \boldsymbol{\Phi}_{DC}^T (\mathbf{J}_D \dot{\boldsymbol{\Omega}}_D - \mathbf{T}_D) - \delta \mathbf{r}_F^T \mathbf{N}^T \boldsymbol{\lambda} + \delta \mathbf{r}_{DC}^T \boldsymbol{\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (9.71)$$

równoważne następującemu układowi równań:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{N}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{DU} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{DC} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_F \\ \ddot{\mathbf{r}}_{DU} \\ \ddot{\mathbf{r}}_{DC} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_D \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_F^{\text{ext}} - \mathbf{F}_F^{\text{int}} \\ \mathbf{F}_{DU} \\ \mathbf{F}_{DC} \\ \mathbf{T}_D \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (9.72)$$

Równania (9.72) mogą być rozwiązywane bezpośrednio względem tych niewiadomych poprzez zastosowanie odpowiedniej procedury całkowania. Bardzo wygodnym

sposobem rozwiązywania jest eliminacja mnożników Lagrange'a  $\boldsymbol{\lambda}$  oraz zmiennych zależnych  $\mathbf{r}_{DC}$  przed procesem całkowania. Otrzymuje się w ten sposób następujący zredukowany układ równań:

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_F + \mathbf{N}^T \mathbf{M}_{DC} \mathbf{N}) \ddot{\mathbf{r}}_F &= \mathbf{F}_F^{\text{ext}} - \mathbf{F}_F^{\text{int}} + \mathbf{N}^T \mathbf{F}_{DC}, \\ \mathbf{M}_{DU} \ddot{\mathbf{r}}_{DU} &= \mathbf{F}_{DU}, \\ \mathbf{J}_D \dot{\boldsymbol{\Omega}}_D &= \mathbf{T}_D. \end{aligned} \quad (9.73)$$

k który może być całkowany względem czasu za pomocą jawnego schematu całkowania, łączącego równania (2.58)–(2.60) i (7.59)–(7.66).

### 9.4.3 Równania ruchu dla uproszczonego modelu sprzężenia MED/MES – metoda funkcji kary

Zasadę prac przygotowanych dla sprzężonego układu MED/MES z więzami (9.67), uwzględnionymi za pomocą metody funkcji kary, można zapisać identycznie jak w równaniu (9.52). Po uwzględnieniu podziału wektorów globalnych określonego równaniami (9.42) i (9.43) oraz postaci wariacji równania więzów (9.68) otrzymuje się równanie:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_F^T (\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{r}}_F + \mathbf{F}_F^{\text{int}} - \mathbf{F}_F^{\text{ext}}) + \delta \mathbf{r}_{DU}^T (\mathbf{M}_{DU} \ddot{\mathbf{r}}_{DU} - \mathbf{F}_{DU}) + \delta \mathbf{r}_{DC}^T (\mathbf{M}_{DC} \ddot{\mathbf{r}}_{DC} - \mathbf{F}_{DC}) \\ + \delta \Phi_D^T (\mathbf{J}_D \dot{\boldsymbol{\Omega}}_D - \mathbf{T}_D) - \delta \mathbf{r}_F^T \mathbf{N}^T \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} + \delta \mathbf{r}_{DC}^T \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} = 0. \end{aligned} \quad (9.74)$$

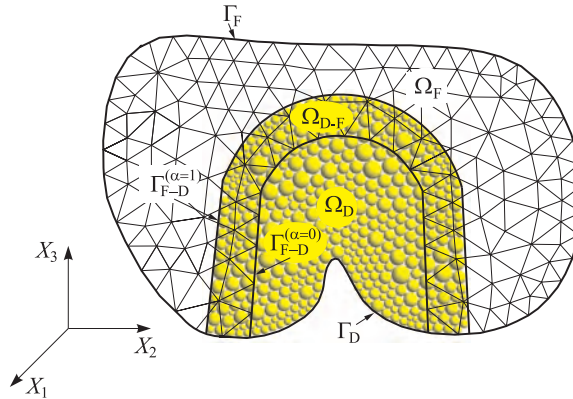
Na podstawie spełnienia równania (9.74) dla dowolnych, kinematycznie dopuszczalnych (bez uwzględnienia równań sprzęgających więzów) przemieszczeń przygotowanych, otrzymuje się następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{DU} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{DC} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_F \\ \ddot{\mathbf{r}}_{DU} \\ \ddot{\mathbf{r}}_{DC} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_F^{\text{ext}} - \mathbf{F}_F^{\text{int}} + \mathbf{N}^T \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} \\ \mathbf{F}_{DU} \\ \mathbf{F}_{DC} - \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} \\ \mathbf{T}_D \end{Bmatrix}. \quad (9.75)$$

Równanie (9.75) może być całkowane względem czasu za pomocą jawnego schematu całkowania łączącego równania (2.58)–(2.60) i (7.59)–(7.66).

## 9.5 Sprzężenie podobszarów MED i MES z podobszarem przejściowym MED/MES

### 9.5.1 Sformułowanie problemu



Rys. 9.5. Hybrydowy model MED/MES z podobszarem przejściowym.

Rozpatrywany będzie ruch ciała odkształcalnego zajmującego obszar  $\Omega$  (rys. 9.5), z wyodrębnionymi podobszarami  $\Omega_F$ , w którym ciało będziemy rozpatrywać jako ośrodek ciągły, oraz  $\Omega_D$ , w których ciało będziemy traktować jako ośrodek dyskretny:

$$\Omega = \Omega_F \cup \Omega_D. \quad (9.76)$$

W przeciwieństwie do założeń przyjętych w podrozdziale 9.3.1 podobszary  $\Omega_F$  i  $\Omega_D$  nie są rozłączne. Podobszar wspólny

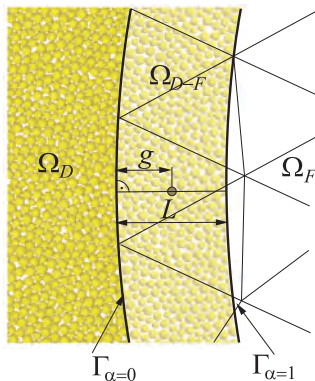
$$\Omega_{D-F} = \Omega_F \cap \Omega_D \neq \emptyset \quad (9.77)$$

jest podobszarem, w którym stosuje się modelowanie dyskretno-ciągłe o zmiennym udziale obydwu modeli, zapewniające stopniowe przejście między obydwo modelami, podobnie jak w algorytmie sprzężenia modelu ciągłego i dyskretnego w [303]. Praca przygotowana  $\delta W$  w całym obszarze  $\Omega$  zostanie zapisana jako liniowa kombinacja pracy przygotowanej modelu ciągłego  $\delta W_F$  i pracy przygotowanej modelu dyskretnego  $\delta W_D$

$$\delta W = \alpha \delta W_F + (1 - \alpha) \delta W_D, \quad (9.78)$$

gdzie funkcja  $\alpha$  jest zdefiniowana w następujący sposób

$$\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \mathbf{x} \in \Omega_D \setminus \Omega_{D-F}, \\ \frac{g(\mathbf{x})}{L(\mathbf{x})} & \text{dla } \mathbf{x} \in \Omega_{D-F}, \\ 1 & \text{dla } \mathbf{x} \in \Omega_F \setminus \Omega_{D-F}. \end{cases} \quad (9.79)$$



Rys. 9.6. Parametry definiujące funkcję skalującą  $\alpha$ .

W obszarze modelowania dyskretno-ciągłego  $\Omega_{D-F}$  funkcja  $\alpha$  zmienia się liniowo od zera na powierzchni  $\Gamma_{D-F}^{(\alpha=0)}$  do jedności na powierzchni  $\Gamma_{D-F}^{(\alpha=1)}$  (rys. 9.6). Powierzchnia  $\Gamma_{D-F}^{(\alpha=0)}$  rozdziela podobszar modelowania dyskretno-ciągłego od podobszaru modelowania dyskretnego:

$$\Gamma_{D-F}^{(\alpha=0)} = \Gamma_F \cap \Omega_D. \quad (9.80)$$

Powierzchnia  $\Gamma_{D-F}^{(\alpha=1)}$  rozdziela podobszar modelowania dyskretno-ciągłego od podobszaru modelowania ciągłego:

$$\Gamma_{D-F}^{(\alpha=1)} = \Gamma_D \cap \Omega_F. \quad (9.81)$$

Definicja parametrów  $g(\mathbf{x})$  i  $L(\mathbf{x})$  definiujących wartość funkcji  $\alpha(\mathbf{x})$  w podobszarze modelowania dyskretno-ciągłego dla problemu dwuwymiarowego jest pokazana graficznie na rys. 9.6. Parametr  $g(\mathbf{x})$  jest najmniejszą odległością punktu  $\mathbf{x}$  od powierzchni  $\Gamma^{(\alpha=0)}$ :

$$g(\mathbf{x}) = \|\bar{\mathbf{x}}^{(0)} - \mathbf{x}\|, \quad (9.82)$$

gdzie

$$\mathbf{x} \in \Omega_{D-F}, \bar{\mathbf{x}}^{(0)} \in \Gamma_{D-F}^{(\alpha=0)} : \quad \|\bar{\mathbf{x}}^{(0)} - \mathbf{x}\| = \min_{\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_{D-F}^{(\alpha=0)}} \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|. \quad (9.83)$$

Parametr  $L(\mathbf{x})$  jest długością odcinka prostej, pokrywającej się z wektorem  $\bar{\mathbf{x}}^{(0)} - \mathbf{x}$ , zawartego w podobszarze  $\Omega_{D-F}$ .

W podobszarze  $\Omega_F$  przeprowadzamy dyskretyzację za pomocą elementów skończonych zgodnie z równaniami (9.23)–(9.24), aproksymując pola przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia,  $\mathbf{u}_F, \dot{\mathbf{u}}_F$  i  $\ddot{\mathbf{u}}_F$ , poprzez funkcje kształtu  $\mathbf{N}$  i wektory uogólnionych przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń węzłowych  $\mathbf{r}_F, \dot{\mathbf{r}}_F$  i  $\ddot{\mathbf{r}}_F$ . W podobszarze  $\Omega_D$  stosujemy model oparty na metodzie elementów dyskretnych. Obszar zajmowany przez zbiór elementów dyskretnych  $D = \{d_i\}, i = 1, n_{de}$  jest podzbiorem zbioru  $\Omega_D$

$$\tilde{\Omega}_D = \bigcup_{i=1}^{i=n_{de}} d_i \subset \Omega_D. \quad (9.84)$$

Konfiguracja i ruch układu elementów dyskretnych są opisane przez wektory przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń  $\mathbf{r}_D, \dot{\mathbf{r}}_D$  i  $\ddot{\mathbf{r}}_D$  oraz wektory prędkości i przyspieszeń kątowych  $\Omega_D$  i  $\dot{\Omega}_D$ .

W części wspólnej podobszarów  $\Omega_D$  i  $\Omega_F$ , w podobszarze  $\Omega_{D-F}$ , stosowane jest zarówno modelowanie za pomocą elementów skończonych jak i za pomocą elementów dyskretnych. Podobszar  $\Omega_{D-F}$  zapewnia stopniowe przejście między obydwojma sposobami modelowania.

### 9.5.2 Więzy kinematyczne sprzęgające podobszary MED i MES

Podobszary dyskretyzowane elementami skończonymi i modelowane elementami dyskretnymi są ze sobą sprzężone w podobszarze  $\Omega_{D-F}$ . Sprzężenie podobszarów MES i MED jest zapewnione przez dodatkowe kinematyczne ograniczenia (więzy), wynikające z założenia, że elementy dyskretne leżące w podobszarze  $\Omega_{D-F}$ , tworzące podzbiór

$$D_{D-F} = \{d_i : \mathbf{x}_{d_i} \in \Omega_{D-F}\} \quad (9.85)$$

są związane kinematycznie ze zdyskretyzowanym podobszarem ciągłym

$$\chi_i = \mathbf{x}_{d_i} - \mathbf{x}_F = \mathbf{u}_{d_i} - \mathbf{u}_F(\mathbf{x}_F) = \mathbf{0}, \quad \forall d_i \in D_{D-F}, \mathbf{x}_F \in \Omega_{D-F}, \quad (9.86)$$

$$\delta \chi_i = \delta \mathbf{u}_{d_i} - \sum_{j=1}^{n_w} N_j(\mathbf{x}_F) \delta \mathbf{u}_{Fj} = \mathbf{0}, \quad (9.87)$$

$$\dot{\chi}_i = \dot{\mathbf{u}}_{d_i} - \sum_{j=1}^{n_w} N_j(\mathbf{x}_F) \dot{\mathbf{u}}_{Fj} = \mathbf{0}, \quad (9.88)$$

$$\ddot{\chi}_i = \ddot{\mathbf{u}}_{d_i} - \sum_{j=1}^{n_w} N_j(\mathbf{x}_F) \ddot{\mathbf{u}}_{Fj} = \mathbf{0}. \quad (9.89)$$

Zależności między przemieszczeniami przygotowanymi, prędkością i przyspieszeniem elementu dyskretnego a odpowiednimi wielkościami węzłowymi ograniczającego go elementu skończonego można zapisać w notacji macierzowej w postaci:

$$\chi_i = \mathbf{u}_{d_i} - \mathbf{N}^e(\mathbf{x}_F^c) \mathbf{r}_F^e = \mathbf{0}, \quad (9.90)$$

$$\delta \chi_i = \delta \mathbf{u}_{d_i} - \mathbf{N}^e(\mathbf{x}_F^c) \delta \mathbf{r}_F^e = \mathbf{0}, \quad (9.91)$$

$$\dot{\chi}_i = \dot{\mathbf{u}}_{d_i} - \mathbf{N}^e(\mathbf{x}_F^c) \dot{\mathbf{r}}_F^e = \mathbf{0}, \quad (9.92)$$

$$\ddot{\chi}_i = \ddot{\mathbf{u}}_{d_i} - \mathbf{N}^e(\mathbf{x}_F^c) \ddot{\mathbf{r}}_F^e = \mathbf{0}. \quad (9.93)$$

Różnica między związkami kinematycznymi (9.90)–(9.93) a stosowanymi poprzednio związkami (9.63)–(9.66) polega na tym, że w (9.90)–(9.93) elementy skończone dyskretyzują obszar  $\Omega_F$ , a w (9.63)–(9.66) elementy skończone były częścią dyskretyzacji brzegu  $\Gamma_F$ .

Zależności (9.90)–(9.93) można zapisać łącznie dla wszystkich elementów dyskretnych ze zbioru  $D_{D,F}$  w postaci

$$\chi = \mathbf{r}_{DC} - \mathbf{N} \mathbf{r}_F = \mathbf{0}, \quad (9.94)$$

$$\delta \chi = \delta \mathbf{r}_{DC} - \mathbf{N} \delta \mathbf{r}_F = \mathbf{0}, \quad (9.95)$$

$$\dot{\chi}_i = \dot{\mathbf{r}}_{DC} - \mathbf{N} \dot{\mathbf{r}}_F = \mathbf{0}, \quad (9.96)$$

$$\ddot{\chi}_i = \ddot{\mathbf{r}}_{DC} - \mathbf{N} \ddot{\mathbf{r}}_F = \mathbf{0}. \quad (9.97)$$

Dodatkowe ograniczenia kinematyczne, sprzęgające podobszary MED i MES, zostaną wprowadzone do układu równań opisującego układ sprzężony za pomocą dwóch alternatywnych metod:

- metody mnożników Lagrange'a,
- metody funkcji kary.

### 9.5.3 Równania ruchu dla sprzężonego modelu MED/MES – metoda mnożników Lagrange'a

Zasada prac przygotowanych dla sprzężonego układu MED/MES z więzami (9.94), uwzględnionymi za pomocą metody mnożników Lagrange'a przy założeniu (9.78),



jest dana następującym równaniem:

$$\delta \mathbf{r}_F^T (\bar{\mathbf{M}}_F \ddot{\mathbf{r}}_F + \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{int}} - \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{ext}}) + \delta \mathbf{r}_D^T (\bar{\mathbf{M}}_D \ddot{\mathbf{r}}_D - \bar{\mathbf{F}}_D) + \delta \Phi_D^T (\bar{\mathbf{J}}_D \dot{\Omega}_D - \bar{\mathbf{T}}_D) + \delta \chi^T \boldsymbol{\lambda} = 0, \quad (9.98)$$

gdzie globalne macierze  $\bar{\mathbf{M}}_F$ ,  $\bar{\mathbf{M}}_D$  i  $\bar{\mathbf{J}}_D$  oraz globalne wektory  $\bar{\mathbf{F}}_F^{\text{int}}$ ,  $\bar{\mathbf{F}}_F^{\text{ext}}$ ,  $\bar{\mathbf{F}}_D$  i  $\bar{\mathbf{T}}_D$  są uzyskane przez złożenie odpowiednich macierzy mas i wektorów elementowych (MES i MED), uwzględniających wkład MES i MED do całkowitej pracy przygotowanej zgodnie z założeniem (9.78):

$$\bar{\mathbf{f}}_e^{\text{int}} = \int_{\Omega_e} \alpha \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e, \quad (9.99)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_e^{\text{ext}} = \int_{\Omega_e} \alpha \mathbf{N}^T \boldsymbol{\rho} \mathbf{b} d\Omega_e + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_\sigma} \alpha \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma_e, \quad (9.100)$$

$$\bar{\mathbf{m}}_e = \int_{\Omega_e} \alpha \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_e, \quad (9.101)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_{d_i} = (1 - \alpha) \mathbf{f}_{d_i}, \quad (9.102)$$

$$\bar{\mathbf{m}}_{d_i} = (1 - \alpha) \mathbf{m}_{d_i}, \quad (9.103)$$

$$\bar{\mathbf{J}}_{d_i} = (1 - \alpha) \mathbf{J}_{d_i}, \quad (9.104)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{d_i} = (1 - \alpha) \mathbf{T}_{d_i}. \quad (9.105)$$

Uwzględniając w równaniu (9.98) podział wektorów globalnych określony równaniami (9.42) i (9.43) oraz postać wariacji równania więzów (9.95), otrzymuje się równanie:

$$\delta \mathbf{r}_F^T (\bar{\mathbf{M}}_F \ddot{\mathbf{r}}_F + \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{int}} - \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{ext}}) + \delta \mathbf{r}_{DU}^T (\bar{\mathbf{M}}_{DU} \ddot{\mathbf{r}}_{DU} - \bar{\mathbf{F}}_{DU}) + \delta \mathbf{r}_{DC}^T (\bar{\mathbf{M}}_{DC} \ddot{\mathbf{r}}_{DC} - \bar{\mathbf{F}}_{DC}) + \delta \Phi_D^T (\bar{\mathbf{J}}_D \dot{\Omega}_D - \bar{\mathbf{T}}_D) - \delta \mathbf{r}_F^T \mathbf{N}^T \boldsymbol{\lambda} + \delta \mathbf{r}_{DC}^T \boldsymbol{\lambda} = 0, \quad (9.106)$$

które inaczej można zapisać jako:

$$\left\{ \begin{array}{c} \delta \mathbf{r}_F \\ \delta \mathbf{r}_{DU} \\ \delta \mathbf{r}_{DC} \\ \delta \Phi_D^T \end{array} \right\}^T \left( \left[ \begin{array}{ccccc} \bar{\mathbf{M}}_F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{N}^T \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}_{DU} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}_{DC} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{J}}_D & \mathbf{0} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\mathbf{r}}_F \\ \ddot{\mathbf{r}}_{DU} \\ \ddot{\mathbf{r}}_{DC} \\ \dot{\Omega}_D \\ \boldsymbol{\lambda} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{ext}} - \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{int}} \\ \bar{\mathbf{F}}_{DU} \\ \bar{\mathbf{F}}_{DC} \\ \bar{\mathbf{T}}_D \end{array} \right\} \right) = 0. \quad (9.107)$$

Ponieważ równanie (9.107) musi być spełnione dla dowolnej wariacji, wyrażenie w nawiasie musi być równe zero. Po uzupełnieniu dodatkowymi ograniczeniami dla przyspieszeń (9.97) otrzymuje się następujący układ równań dla układu sprzężonego:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{N}^T \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}_{DU} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}_{DC} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{J}}_D & \mathbf{0} \\ -\mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_F \\ \ddot{\mathbf{r}}_{DU} \\ \ddot{\mathbf{r}}_{DC} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_D \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{ext}} - \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{int}} \\ \bar{\mathbf{F}}_{DU} \\ \bar{\mathbf{F}}_{DC} \\ \bar{\mathbf{T}}_D \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (9.108)$$

Podobnie jak w przypadku równania (9.72) zastosowany zostanie schemat rozwiązania równania (9.108), wykorzystujący eliminację mnożników Lagrange'a  $\boldsymbol{\lambda}$  oraz zmiennych zależnych  $\mathbf{r}_{DC}$  przed procesem całkowania. Przeprowadzając odpowiednie przekształcenia algebraiczne otrzymuje się równanie analogiczne do równania (9.51):

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{M}}_F + \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{M}}_{DC} \mathbf{N}) \ddot{\mathbf{r}}_F &= \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{ext}} - \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{int}} + \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{F}}_{DC}, \\ \bar{\mathbf{M}}_{DU} \ddot{\mathbf{r}}_{DU} &= \bar{\mathbf{F}}_{DU}, \end{aligned} \quad (9.109)$$

$$\bar{\mathbf{J}}_D \dot{\boldsymbol{\Omega}}_D = \bar{\mathbf{T}}_D,$$

do którego można zastosować całkowanie według schematu jawnego, łączącego równania (2.58)–(2.60) i (7.59)–(7.66).

### 9.5.4 Równania ruchu dla sprzężonego modelu MED/MES – metoda funkcji kary

Zasada prac przygotowanych dla sprzężonego układu MED/MES z więzami (9.94), uwzględnionymi za pomocą metody funkcji kary, jest dana następującym równaniem:

$$\delta \mathbf{r}_F^T \left( \bar{\mathbf{M}}_F \ddot{\mathbf{r}}_F + \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{int}} - \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{ext}} \right) + \delta \mathbf{r}_D^T \left( \bar{\mathbf{M}}_D \ddot{\mathbf{r}}_D - \bar{\mathbf{F}}_D \right) + \delta \boldsymbol{\Phi}_D^T \left( \bar{\mathbf{J}}_D \dot{\boldsymbol{\Omega}}_D - \bar{\mathbf{T}}_D \right) + \delta \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} = 0, \quad (9.110)$$

gdzie  $\mathbf{k}_{DF}$  jest diagonalną macierzą, której elementy są wartościami dyskretnej funkcji kary, a globalne macierze  $\bar{\mathbf{M}}_F$ ,  $\bar{\mathbf{M}}_D$  i  $\bar{\mathbf{J}}_D$  oraz globalne wektory  $\bar{\mathbf{F}}_F^{\text{int}}$ ,  $\bar{\mathbf{F}}_F^{\text{ext}}$ ,  $\bar{\mathbf{F}}_D$  i  $\bar{\mathbf{T}}_D$  są uzyskane przez złożenie odpowiednich macierzy mas i wektorów elementowych (MES i MED), uwzględniających wkład MES i MED do całkowitej pracy przygotowanej zgodnie z założeniem (9.78), danych równaniami (9.99)–(9.105). Po uwzględnieniu

podziału wektorów globalnych określonego równaniami (9.42) i (9.43) oraz postaci wariacji równania więzów (9.95) otrzymuje się równanie:

$$\begin{aligned} & \delta \mathbf{r}_F^T \left( \bar{\mathbf{M}}_F \ddot{\mathbf{r}}_F + \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{int}} - \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{ext}} \right) + \delta \mathbf{r}_{DU}^T \left( \bar{\mathbf{M}}_{DU} \ddot{\mathbf{r}}_{DU} - \bar{\mathbf{F}}_{DU} \right) + \delta \mathbf{r}_{DC}^T \left( \bar{\mathbf{M}}_{DC} \ddot{\mathbf{r}}_{DC} - \bar{\mathbf{F}}_{DC} \right) \\ & + \delta \Phi_D^T \left( \bar{\mathbf{J}}_D \dot{\boldsymbol{\Omega}}_D - \bar{\mathbf{T}}_D \right) - \delta \mathbf{r}_F^T \mathbf{N}^T \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} + \delta \mathbf{r}_{DC}^T \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} = 0, \end{aligned} \quad (9.111)$$

które można zapisać w następującej postaci macierzowej:

$$\left\{ \begin{array}{c} \delta \mathbf{r}_F \\ \delta \mathbf{r}_{DU} \\ \delta \mathbf{r}_{DC} \\ \delta \Phi_D^T \end{array} \right\}^T \left( \left[ \begin{array}{cccc} \bar{\mathbf{M}}_F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}_{DU} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}_{DC} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{J}}_D \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\mathbf{r}}_F \\ \ddot{\mathbf{r}}_{DU} \\ \ddot{\mathbf{r}}_{DC} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_D \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{ext}} - \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{int}} + \mathbf{N}^T \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} \\ \bar{\mathbf{F}}_{DU} \\ \bar{\mathbf{F}}_{DC} - \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} \\ \bar{\mathbf{T}}_D \end{array} \right\} \right) = 0. \quad (9.112)$$

Ponieważ równanie (9.112) musi być spełnione dla dowolnych kinematycznie dopuszczalnych wariacji (bez uwzględnienia równań sprzęgających więzów) wyrażenie w nawiasie musi być równe zeru, co daje następujące równanie:

$$\left[ \begin{array}{cccc} \bar{\mathbf{M}}_F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}_{DU} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}_{DC} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{J}}_D \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\mathbf{r}}_F \\ \ddot{\mathbf{r}}_{DU} \\ \ddot{\mathbf{r}}_{DC} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_D \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{ext}} - \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{int}} + \mathbf{N}^T \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} \\ \bar{\mathbf{F}}_{DU} \\ \bar{\mathbf{F}}_{DC} - \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} \\ \bar{\mathbf{T}}_D \end{array} \right\}. \quad (9.113)$$

Równanie (9.55) może być całkowane względem czasu za pomocą jawnego schematu całkowania, łączącego równania (2.58)–(2.60) i (7.59)–(7.66).

### 9.5.5 Równania ruchu dla sprzężonego modelu MED/MES – metoda funkcji kary z tłumieniem

W metodzie funkcji kary jednocześnie z siłami korygującymi naruszenie równania więzów o charakterze sprężystym można wprowadzić siły o charakterze tłumiącym, przeciwdziałające naruszeniu ograniczeń prędkościowych (9.96), działające tylko na połączeniu i nie tłumiące ruchu, który nie powoduje zmiany w spełnieniu ograniczeń kinematycznych. Dla sprzężonego układu MED/MES z więzami (9.94) można napisać zasadę prac przygotowanych w następującej postaci:

$$\begin{aligned} & \delta \mathbf{r}_F^T \left( \bar{\mathbf{M}}_F \ddot{\mathbf{r}}_F + \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{int}} - \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{ext}} \right) + \delta \mathbf{r}_D^T \left( \bar{\mathbf{M}}_D \ddot{\mathbf{r}}_D - \bar{\mathbf{F}}_D \right) + \delta \Phi_D^T \left( \bar{\mathbf{J}}_D \dot{\boldsymbol{\Omega}}_D - \bar{\mathbf{T}}_D \right) \\ & + \delta \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} + \delta \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{C}_{DF} \dot{\boldsymbol{\chi}} = 0, \end{aligned} \quad (9.114)$$

gdzie  $\mathbf{C}_{DF}$  jest diagonalną macierzą, której elementy są wartościami współczynników tłumienia. Po uwzględnieniu podziału wektorów globalnych, określonego równaniami (9.42) i (9.43), oraz postaci wariacji równania więzów (9.95), otrzymuje się równanie:

$$\delta \mathbf{r}_F^T (\bar{\mathbf{M}}_F \ddot{\mathbf{r}}_F + \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{int}} - \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{ext}}) + \delta \mathbf{r}_{DU}^T (\bar{\mathbf{M}}_{DU} \ddot{\mathbf{r}}_{DU} - \bar{\mathbf{F}}_{DU}) + \delta \mathbf{r}_{DC}^T (\bar{\mathbf{M}}_{DC} \ddot{\mathbf{r}}_{DC} - \bar{\mathbf{F}}_{DC}) \\ + \delta \Phi_D^T (\bar{\mathbf{J}}_D \dot{\boldsymbol{\Omega}}_D - \bar{\mathbf{T}}_D) - \delta \mathbf{r}_F^T \mathbf{N}^T (\mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} + \mathbf{C}_{DF} \dot{\boldsymbol{\chi}}) + \delta \mathbf{r}_{DC}^T (\mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} + \mathbf{C}_{DF} \dot{\boldsymbol{\chi}}) = 0. \quad (9.115)$$

Na podstawie spełnienia równania (9.115) dla dowolnych kinematycznie dopuszczalnych (bez uwzględnienia równań sprzęgających więzów) przemieszczeń przygotowanych otrzymuje się następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}_{DU} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}_{DC} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{J}}_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_F \\ \ddot{\mathbf{r}}_{DU} \\ \ddot{\mathbf{r}}_{DC} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{ext}} - \bar{\mathbf{F}}_F^{\text{int}} + \mathbf{N}^T (\mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} + \mathbf{C}_{DF} \dot{\boldsymbol{\chi}}) \\ \bar{\mathbf{F}}_{DU} \\ \bar{\mathbf{F}}_{DC} - \mathbf{k}_{DF} \boldsymbol{\chi} - \mathbf{C}_{DF} \dot{\boldsymbol{\chi}} \\ \bar{\mathbf{T}}_D \end{Bmatrix}. \quad (9.116)$$

W podobny sposób tłumienie może być wprowadzone do równań (9.52) i (9.74).

## 9.6 Implementacja zintegrowanej metody MED/MES

Algorytm numeryczny zintegrowanej metody elementów skończonych i dyskretnych został implementowany w programie numerycznym Simpack/Stampack [253, 262, 255, 216, 251]. Otrzymano program numeryczny umożliwiający stosowanie hybrydowych modeli w różnorodny sposób łączących metodę elementów dyskretnych z metodą elementów skończonych.

W implementacji wykorzystano wspólne cechy obydwu sformułowań:

- podobna postać równań ruchu,
- algorytm całkowania równań ruchu względem czasu,
- algorytm wykrywania kontaktu,
- modele konstytutywne dla zagadnienia kontaktu.

Uniwersalny algorytm analizy kontaktu jest jednym z ważnych elementów zintegrowanego programu. Zastosowany algorytm wykrywania kontaktu zostanie przedstawiony w rozdziale 10. Algorytm kontaktu umożliwia sprzężenie metod elementów skończonych i dyskretnych w przypadku ich stosowania w oddzielnych obszarach, do modelowania różnych materiałów. Gdy obie metody są stosowane w różnych częściach tego samego ośrodka do modelowania tego samego materiału, podlegającego

różnym procesom, sprzężenie jest uzyskane przez dodatkowe więzy kinematyczne. W programie numerycznym zostały wykorzystane różne sposoby uwzględnienia więzów kinematycznych.

## Podsumowanie

Motywacją pracy przedstawionej w niniejszym rozdziale było nowatorskie modelowanie dyskretno-ciągłego. Dzięki zastosowaniu zintegrowanej metody elementów skończonych i dyskretnych stworzono model numeryczny, w którym pewne części są dyskretyzowane elementami skończonymi, a inne są modelowane poprzez elementy dyskretny. Metoda elementów dyskretnych może być wykorzystana tych częściach, w których modelowanie za pomocą elementów skończonych jest trudne i nieefektywne, np. dla zagadnień z nieciągłościami. W ten sposób można wykorzystać zalety obydwu metod, otrzymując dokładny model fizyczny i efektywny model numeryczny.

W niniejszym rozdziale przedstawiono różne sposoby integracji MED/MES. Algorytmy integrujące zostały implementowane w programie numerycznym, który w jednolity sposób realizuje algorytmy metody elementów skończonych i dyskretnych. Stanowi to dużą zaletę w stosunku do innych prac, w których wykorzystywano dwa różne programy numeryczne [264, 307]. Oryginalnym elementem niniejszej pracy są algorytmy sprzęgające podobszary modelowane za pomocą elementów dyskretnych z podobszarami dyskretyzowanymi za pomocą elementów skończonych. Sprzężenie jest uzyskane przez dodatkowe więzy kinematyczne, nałożone na elementy dyskretny. Spełnienie ograniczeń kinematycznych jest zapewnione przy użyciu metody mnożników Lagrange'a lub z wykorzystaniem metody funkcji kary. Zaproponowanie różnych metod sprzężenia ma na celu zbadanie poprawności działania różnych algorytmów. Algorytmy sprzęgające powinny umożliwić przeniesienie oddziaływania między obydwoma obszarami bez wprowadzania niepożądanych, niefizycznych efektów odbicia fal na połączeniu podobszarów MES i MED. Weryfikacja działania algorytmów sprzęgających będzie przedstawiona w rozdziale 11.

# 10. Numeryczny algorytm wykrywania kontaktu w zintegrowanym systemie MED/MES

## Wstęp

Zagadnienie kontaktowe jest ważnym problemem rozpatrywanym w ramach obydwu metod: metody elementów skończonych i metody elementów dyskretnych, jak również w przypadku ich integracji. W zintegrowanym sformułowaniu metody elementów skończonych i metody elementów dyskretnych możemy mieć następujące przypadki kontaktu:

- kontakt między ciałem odkształcalnym i ciałem sztywnym,
- kontakt między dwoma ciałami odkształcalnymi,
- kontakt między elementami dyskretnymi,
- kontakt między elementami dyskretnymi i ciałem odkształcalnym.

W algorytmie numerycznym rozpatruje się kontakt dla układu dyskretnego. W przypadku ciał odkształcalnych i sztywnych w zagadnieniu kontaktu rozpatruje się brzeg dyskretyzowany elementami powierzchniowymi. W implementowanym algorytmie w zagadnieniu dwuwymiarowym brzeg jest dyskretyzowany dwuwęzłowymi segmentami liniowymi, a w zagadnieniu trójwymiarowym powierzchnia kontaktowa jest aproksymowana elementami trójkątnymi lub czworokątnymi. W implementowanym sformułowaniu metody elementów dyskretnych zakłada się, że elementy dyskretne mają kształt cylindra (2D) lub kuli (3D).

Ogólnie można określić dwa podstawowe zadania wykonywane w algorytmie kontaktu:

### 1. Wykrywanie kontaktu

Warunki kontaktu nie są znane *a priori*, w związku z tym kontakt między obiektami i strefa kontaktu muszą być wyznaczone w każdym kroku rozwiązania.

### 2. Obliczanie sił kontaktu

Jeśli kontakt jest wykryty, siły oddziaływania kontaktowego są przyłożone w miejscu styku, a wielkości sił są określane zgodnie z przyjętym modelem konstytutywnym kontaktu.

Algorytmy obliczania oddziaływania kontaktowego zostały przedstawione w rozdziałach 4 i 7. Niniejszy rozdział jest poświęcony algorytmowi wykrywania kontaktu.

W przypadku obiektów dyskretyzowanych elementami skończonymi procedura wykrywania kontaktu wyznacza aktualną strefę kontaktu między brzegami obszarów dyskretyzowanych, zaś w przypadku modeli wykorzystujących elementy dyskretne poszukuje się pary elementów dyskretnych będące aktualnie w kontakcie. W modelach zintegrowanych ciągle-dyskretnych wyznacza się ponadto kontakt między elementami dyskretnymi oraz brzegiem obszarów dyskretyzowanych elementami skończonymi.

Istnienie kontaktu określa się na podstawie zachodzącej wzajemnej penetracji między kontaktującymi się obiektami. W przypadku kontaktu między dwiema powierzchniami dyskretyzowanymi elementami skończonymi warunki kontaktu bada się w poszczególnych węzłach. Zazwyczaj jedna z powierzchni jest przyjęta jako powierzchnia *slave*, druga jako *master*. W algorytmie kontaktu bada się penetrację węzłów dyskretyzujących powierzchnię *slave* przez aproksymację powierzchni *master*. Aby wykluczyć penetrację badanych powierzchni, konieczne jest również badanie penetracji węzłów dyskretyzujących powierzchnię *master* przez aproksymację powierzchni *slave*.

W przypadku kontaktu między elementami dyskretnymi, w sformułowaniu stosowanym w niniejszej pracy, mamy do czynienia z badaniem wzajemnej penetracji walców lub kul. W modelu hybrydowym, w którym sprzężenie między obszarami dyskretyzowanymi elementami skończonymi i elementami dyskretnymi jest zapewnione przez oddziaływanie kontaktowe, bada się penetrację elementów dyskretnych (walców lub kul) przez powierzchnię dyskretyzowaną elementami skończonymi (odcinkami prostymi w zagadnieniu płaskim lub elementami trójkątnymi lub czworokątnymi w modelu trójwymiarowym). Problem ten można traktować jako uogólnienie wykrywania kontaktu między węzłem a powierzchnią – w przypadku elementu dyskretnego węzeł utożsamiany ze środkiem elementu ma przypisany skończony wymiar – promień. Z podobnym przypadkiem możemy mieć do czynienia również w analizie kontaktu między ciałami odkształcalnymi, gdy jedno z ciał jest traktowane jako powłoka. Dokładne sprawdzenie warunków kontaktu dla powłoki wymaga uwzględnienia jej grubości. Wykrywanie kontaktu można sprowadzić do problemu wykrywania penetracji kuli/walca o środku w węźle dyskretyzującym powierzchnię środkową powłoki i promieniu równym połowie grubości powłoki.

Podsumowując, rozpatrywane przypadki kontaktu w zintegrowanym systemie metody elementów skończonych i dyskretnych można podzielić na dwie grupy:

- kontakt kuli lub walca o promieniu  $r \geq 0$  z aproksymowaną powierzchnią,
- kontakt dwóch kuli lub walców o danych promieniach  $r_1, r_2 > 0$ .

Za najważniejsze wymagania stawiane algorytmom wykrywania kontaktu można uznać efektywność numeryczną i niezawodność. Koszt obliczeniowy związany z wykrywaniem kontaktu może być w wielu przypadkach bardzo duży, zwłaszcza w analizie metodą elementów dyskretnych, gdzie operacje poszukiwania kontaktu zajmują

około 90% całego czasu obliczeniowego. Dążenie do wysokiej efektywności algorytmu skłania do przyjęcia założeń upraszczających, które mogą pogorszyć niezawodność algorytmu, przez co rozumiemy możliwość niewykrycia kontaktu w pewnych sytuacjach. Niektóre algorytmy posiadają tzw. „strefę martwą” (*ang.* dead zone), w której zawodzi algorytm kontaktu. Może to wystąpić przy skomplikowanej geometrii i nieregularnej dyskretyzacji. Duże trudności w wykrywaniu kontaktu sprawiają ostre krawędzie i naroża. Dobry algorytm wykrywania kontaktu powinien być efektywny obliczeniowo, a jednocześnie powinien niezawodnie wykrywać kontakt między badanymi obiektami.

W zintegrowanym programie metody elementów skończonych i metody elementów dyskretnych został opracowany przez autora uniwersalny algorytm wykrywania kontaktu, pozwalający badać penetrację między powierzchniami dyskretyzowanymi elementami skończonymi, pomiędzy elementami dyskretnymi oraz pomiędzy elementami dyskretnymi i brzegiem obszarów dyskretyzowanych elementami skończonymi. Algorytm ten opiera się na sortowaniu przestrzennym obiektów, poprzedzającym właściwe sprawdzanie kontaktu. Ogólne założenia oraz niektóre szczegóły tego algorytmu zostaną przedstawione poniżej.

## 10.1 Porządkowanie przestrzenne

Proste podejście do wykrywania kontaktu między wieloma obiektami (węzłami, elementami skończonymi, elementami dyskretnymi), polegające na sprawdzeniu możliwości kontaktu każdego obiektu ze wszystkimi obiektami, byłoby bardzo nieefektywne. Złożoność obliczeniowa takiego algorytmu jest rzędu  $n^2$ , gdzie  $n$  jest liczbą badanych obiektów. Działanie takiego algorytmu dla dużych wartości  $n$  byłoby praktycznie niemożliwe. Opracowano różne metody bardziej efektywnego poszukiwania kontaktu. Przegląd metod wykrywania kontaktu, stosowanych w metodzie elementów dyskretnych oraz w metodzie elementów skończonych, można znaleźć w [298] i [162]. Cechą wspólną tych metod jest przestrzenne posortowanie (uporządkowanie) obiektów, poprzedzające właściwe sprawdzenie kontaktu, por. [298]. Posortowanie zbioru umożliwia łatwe zidentyfikowanie znajdujących się w pobliżu elementów – sprawdzenie możliwości kontaktu ogranicza się tylko do tak znalezionej sąsiedztwa.

Jako najczęściej stosowane metody porządkowania przestrzennego obiektów można wymienić:

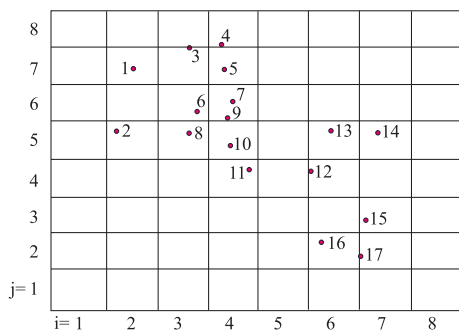
- równomierny podział obszaru obliczeniowego (w języku angielskim używa się różnych terminów dla tej metody, np. grid method, bins) (Löhner [163]),
- adaptacyjny podział obszaru obliczeniowego z wykorzystaniem struktur drzew dwójkowych (binarnych) (Knuth [142], Bonet [34]),



- adaptacyjny podział obszaru obliczeniowego z wykorzystaniem struktur drzew czwórkowych (*ang.* quad-tree) w zagadnieniu 2D i ósemkowych (*ang.* octree) w zagadnieniu 3D (Knuth [142], Samet [263]),
- adaptacyjny podział obszaru obliczeniowego z wykorzystaniem struktur stosów (Williams [298]).

Poniżej przedstawione zostaną główne zasady sortowania przestrzennego w wybranych metodach na przykładzie sortowania zbioru punktów.

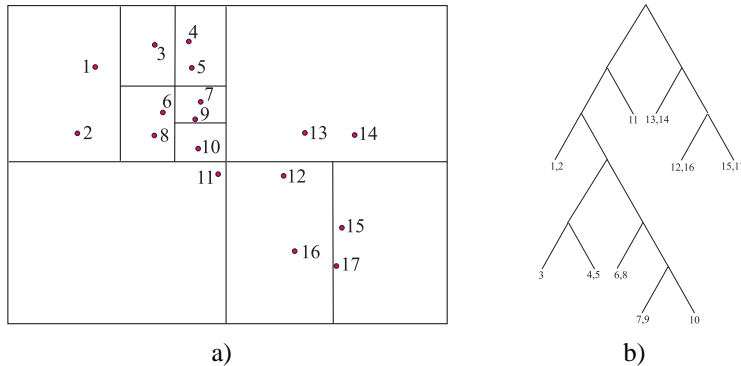
### Równomierny podział obszaru obliczeniowego



Rys. 10.1. Równomierny podział obszaru obliczeniowego.

Przestrzeń fizyczną zajmowaną przez zbiór punktów dzieli się na równe komórki prostokątne (w zagadnieniu płaskim) lub na prostopadłościenne (w zagadnieniu trójwymiarowym), np. [163]. Na rys. 10.1 pokazano podział obszaru dwuwymiarowego na komórki prostokątne. Każda komórka jest identyfikowana dwoma (w zagadnieniu dwuwymiarowym) lub trzema (w zagadnieniu trójwymiarowym) liczbami całkowitymi. Następnie poszczególnym komórkom przyporządkowywane są leżące w jej obszarze punkty. Po uporządkowaniu łatwo zidentyfikować leżące w pobliżu siebie punkty, biorąc punkty z komórki zawierającej dany punkt i punkty z komórek sąsiednich. Efektywność tej metody zależy od doboru optymalnego rozmiaru komórek i optymalnej liczby obiektów przypadających na pojedynczą komórkę. Metoda działa dobrze w przypadku równomiernego rozłożenia obiektów w przestrzeni. Dla nierównomiernego rozkładu przestrzennego obiektów bardziej efektywne mogą być metody oparte na adaptacyjnym podziale przestrzeni.

### Adaptacyjny podział obszaru obliczeniowego z wykorzystaniem struktur drzew binarnych

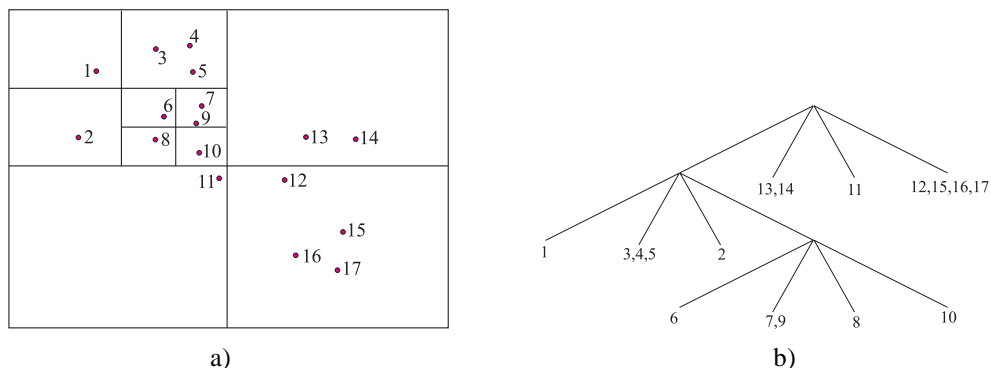


Rys. 10.2. Porządkowanie przestrzenne z wykorzystaniem struktur drzew dwójkowych: a) adaptacyjny podział obszaru obliczeniowego, b) drzewo dwójkowe.

Przestrzeń zawierająca sortowane obiekty dzielona jest rekurencyjnie na prostokątne (lub prostopadłościowe w 3D) podobszary zawierające co najwyżej 2 obiekty (rys. 10.2a). Jeśli liczba obiektów przekracza 2, dany podobszar dzielony jest na 2 mniejsze podobszary. Podział dokonywany jest na ogół naprzemiennie równoległe do osi  $x$ ,  $y$  i  $z$ , por. [34]. Przestrzeń fizyczna wraz z obiektami może być przedstawiona w postaci drzewa binarnego (rys. 10.2b). Struktura drzewa binarnego pozwala na łatwe zidentyfikowanie obiektów leżących w dowolnym podobszarze poprzez przejście drzewa z góry na dół. Złożoność obliczeniowa takiego poszukiwania jest rzędu  $N \log_2 N$ . Struktury danych oparte na drzewach binarnych są efektywnym narzędziem uporządkowania przestrzennego dla nierównomiernie rozłożonych obiektów.

### Adaptacyjny podział obszaru obliczeniowego z wykorzystaniem struktur drzew czwórkowych i ósemkowych

Inna efektywna metoda porządkowania nierównomiernie rozmieszczonych w przestrzeni obiektów wykorzystuje struktury drzew czwórkowych (dla zagadnień płaskich) i ósemkowych (dla zagadnień trójwymiarowych). Główna idea porządkowania z wykorzystaniem struktury drzew czwórkowych jest przedstawiona na rys. 10.3. W tej metodzie dwuwymiarowa przestrzeń fizyczna obejmująca porządkowane obiekty jest dzielona rekurencyjnie na prostokątne podobszary, zawierające co najwyżej 4 obiekty (rys. 10.3a). Jeśli liczba obiektów przekracza 4, dany obszar jest dzielony na cztery równe podobszary i obiekty są przyporządkowane nowym podobszynom. Podział kończy się, gdy w danym podobszarze jest nie więcej niż 4 obiekty. Podzielona w ten



Rys. 10.3. Porządkowanie przestrzenne z wykorzystaniem struktur drzew czwórkowych: a) adaptacyjny podział obszaru obliczeniowego, b) drzewo czwórkowe.

sposób przestrzeń wraz z przyporządkowanymi obiektami jest reprezentowana przez strukturę drzewa czwórkowego (rys. 10.3b). Struktura drzewa czwórkowego pozwala łatwo zidentyfikować obiekty leżące w danym podobzdarze przeszukując strukturę drzewa z góry w dół. Złożoność obliczeniowa poszukiwania tą metodą jest rzędu  $N \log_4 N$ .

Przyjmując jako zasadę rekurencyjny podział przestrzeni trójwymiarowej na podobzary zawierające co najwyżej osiem obiektów, otrzymuje się metodę porządkowania z wykorzystaniem struktury drzewa ósemkowego. Jeśli liczba obiektów w danym podobzdarze przekracza 8, dzieli się go na 8 podobzdarów, którym przyporządkowuje się obiekty leżące w dzielonym podobzdarze. Podział kończy się w momencie uzyskania podobzdarów z dostatecznie małą (nie większą niż 8) liczbą obiektów. Tak podzieloną przestrzeń z przyporządkowanymi obiektami reprezentuje się za pomocą struktury drzewa ósemkowego. Obiekty leżące w danym podobzdarze identyfikuje się przeszukując strukturę drzewa z góry w dół. Złożoność obliczeniowa poszukiwania za pomocą tej metody jest rzędu  $N \log_8 N$ .

## 10.2 Algorytm wykrywania kontaktu

### 10.2.1 Ogólna idea algorytmu

Opracowany algorytm kontaktu uwzględnia wszystkie zidentyfikowane w rozdziale 10 przypadki kontaktu występujące w zintegrowanym programie metody elementów skończonych i dyskretnych, dające się sprowadzić do dwóch ogólnych przypadków:

- kontakt kuli lub walca o promieniu  $r \geq 0$  z aproksymowaną powierzchnią,
- kontakt dwóch kuli lub walców o danych promieniach  $r_1, r_2 > 0$ .

Biorąc pod uwagę stosowaną dyskretyzację powierzchni, algorytm wykrywania kontaktu identyfikuje następujące kontaktujące się pary obiektów:

- w zagadnieniu płaskim
  - (walec o promieniu  $r \geq 0$ )–(odcinek prostej),
  - (walec o promieniu  $r_1 > 0$ )–(walec o promieniu  $r_2 > 0$ );
- w zagadnieniu trójwymiarowym
  - (kula o promieniu  $r \geq 0$ )–(trójkątny lub czworokątny element powierzchni),
  - (kula o promieniu  $r_1 > 0$ )–(kula o promieniu  $r_2 > 0$ ).

Identyfikacja sąsiednich obiektów w implementowanym algorytmie wykorzystuje dwie alternatywne metody sortowania przestrzennego: równomierny podział przestrzeni i adaptacyjny podział przestrzeni z wykorzystaniem struktur drzew czwórkowych (2D) i ósemkowych (3D). Sortowanie przestrzenne w każdym kroku byłoby kosztowne numerycznie. Opracowany algorytm wykrywania kontaktu zakłada, że zmiany konfiguracji w jednym kroku całkowania są stosunkowo niewielkie. Pozwala to założyć, że lista potencjalnie kontaktujących się par obiektów może być utrzymywana przez pewien czas i wykorzystywana w wykrywaniu aktualnie kontaktujących się obiektów.

Opracowany algorytm wykrywania kontaktu może być przedstawiony jako dwu-etapowy (dwupoziomowy):

#### *Etap I. Globalne poszukiwanie kontaktu*

Obiekty (elementy dyskretne, węzły, elementy powierzchniowe) są sortowane przestrzennie za pomocą jednej z dostępnych metod sortowania (implementowano sortowanie za pomocą równomiernego lub adaptacyjnego podziału przestrzeni). Następnie tworzona jest lista obiektów potencjalnie kontaktujących się. Każdemu obiektowi przypisuje się pewne otoczenie i obiekty znajdujące się w tym otoczeniu traktuje się jako mogące być w kontakcie z rozpatrywanym obiektem. Ponieważ wybór potencjalnie kontaktujących się obiektów następuje spośród wszystkich obiektów etap ten nazywa się *globalnym poszukiwaniem kontaktu*. Globalne poszukiwanie kontaktu i aktualizacja listy potencjalnie kontaktujących się obiektów są przeprowadzane co pewną liczbę kroków całkowania, określoną na podstawie monitorowania zmian konfiguracji obiektów.

#### *Etap II. Lokalne sprawdzenie kontaktu*

W każdym kroku całkowania względem czasu przeprowadza się sprawdzenie kryterium kontaktu dla wszystkich par znajdujących się na liście par potencjalnie kontak-

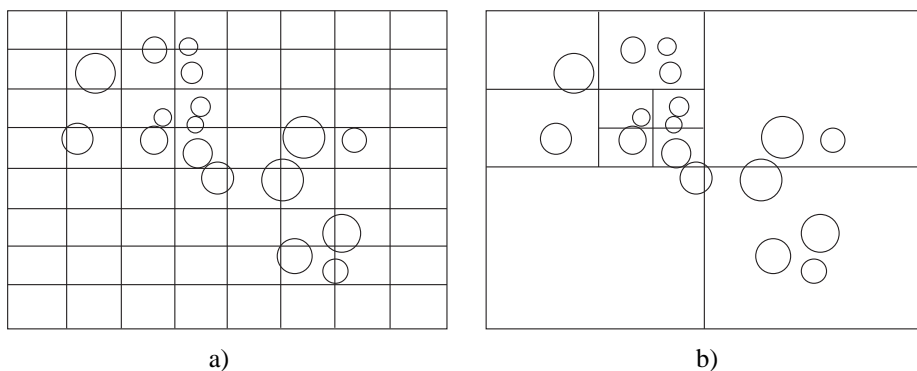
tujących się obiektów. Ponieważ sprawdzenie to przeprowadza się tylko dla obiektów, które znajdują się w sąsiedztwie, etap ten nazywa się *lokalnym poszukiwaniem kontaktu*.

### 10.2.2 Globalne poszukiwanie kontaktu

Wśród obiektów, dla których poszukuje się kontaktu, wyróżnimosy obiekty typu *master* oraz obiekty typu *slave*. Obiektami typu *master* mogą być elementy skończone dyskretyzujące powierzchnię kontaktu lub elementy dyskretne o kształcie kuli lub walca. Jako obiekty typu *slave* mogą występować węzły siatki dyskretyzującej brzeg obszaru dyskretyzowanego elementami skończonymi lub elementy dyskretne. W przypadku poszukiwania kontaktu między elementami dyskretnymi ten sam zbiór elementów dyskretnych stanowi jednocześnie zbiór elementów typu *master* i *slave*. Na etapie globalnego poszukiwania kontaktu identyfikuje się pary potencjalnie kontaktujących się obiektów typu *master* z obiektami typu *slave*. Przez potencjalnie kontaktujące się obiekty rozumiemy obiekty których odstęp nie przekracza pewnej małej odległości. Globalne poszukiwanie przeprowadza się według następującego schematu:

1. Sortowanie przestrzenne obiektów typu *master*. W podzielonym adaptacyjnie lub równomiernie obszarze obliczeniowym algorytm uporządkowania przestrzennego (rys. 10.4) przypisuje danemu obiektowi komórki, które mogą się przecinać z objętością zajmowaną przez dany obiekt.
2. Dla każdego obiektu typu *slave* identyfikuje się znajdujące się w jego otoczeniu obiekty typu *master*, wykorzystując informacje zapisane przy sortowaniu przestrzennym obiektów typu *master*.
3. Dla każdej zidentyfikowanej pary obiektów *master-slave* sprawdza się warunek odległości z założoną tolerancją  $c_{tol}$  (rys. 10.5a). Jeśli ten warunek jest spełniony para obiektów jest dodawana do listy potencjalnie kontaktujących się obiektów.

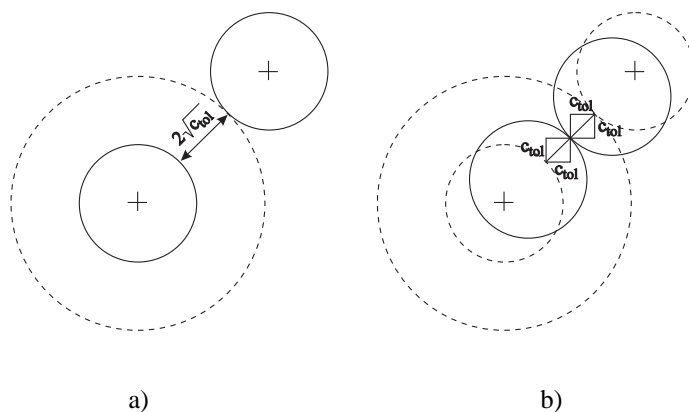
Wielkość parametru  $c_{tol}$  ma wpływ na długość listy par potencjalnie kontaktujących się obiektów i częstość jej aktualizacji. Im większy parametr  $c_{tol}$ , tym dłuższa lista potencjalnie kontaktujących się obiektów i mniejsza częstotliwość jej aktualizacji, i odwrotnie – im mniejszy parametr  $c_{tol}$ , tym krótsza lista potencjalnie kontaktujących się obiektów i większa częstotliwość jej aktualizacji. Dłuższa lista par potencjalnie kontaktujących się obiektów wpływa negatywnie na czas lokalnego poszukiwania kontaktu, większa częstotliwość aktualizacji listy zwiększa czas poświęcony na globalne poszukiwanie kontaktu. Konieczne jest przyjęcie takiej wartości parametru  $c_{tol}$ , która zminimalizuje łączny czas globalnego i lokalnego poszukiwania kontaktu. Na podstawie wielu analizowanych przykładów w naszych obliczeniach metodą elementów



Rys. 10.4. Sortowanie przestrzenne obiektów typu *master* z wykorzystaniem a) równomiernego podziału obszaru obliczeniowego, b) adaptacyjnego podziału obszaru obliczeniowego.

dyskretnych przyjmowano na ogół  $c_{tol} = (0.1 \div 0.5)r$ , gdzie  $r$  jest przeciętną wartością promienia elementów dyskretnych.

Częstość globalnego poszukiwania kontaktu (aktualizacji listy par potencjalnie kontaktujących się obiektów) jest ustalana na podstawie monitorowania maksymalnego składowego przemieszczenia elementów dyskretnych, akumulowanego od ostatniej aktualizacji listy. Jeśli akumulowane przemieszczenie wzdłuż dowolnej osi współrzędnych przekroczy wielkość parametru  $c_{tol}$  (rys. 10.5b), wtedy przeprowadza się globalne poszukiwanie kontaktu i aktualizuje się listę par potencjalnie kontaktujących się obiektów.



Rys. 10.5. Sprawdzanie par potencjalnie kontaktujących się obiektów: a) graniczny odstęp w globalnym poszukiwaniu kontaktu b) maksymalne przemieszczenie pomiędzy kolejnymi uaktualnieniami listy par potencjalnie kontaktujących się obiektów.

### 10.2.3 Lokalne sprawdzenie istnienia kontaktu

Lokalne sprawdzenie istnienia kontaktu odbywa się dla par obiektów typu *master-slave* znajdujących się na liście par potencjalnie kontaktujących się. W przypadku braku adhezji kontakt między obiektami zachodzi, jeśli jest stwierdzona wzajemna penetracja. Penetrację tę sprawdza się przez prosty warunek

$$g \leq 0, \quad (10.1)$$

gdzie  $g$  jest zdefiniowane równaniem (4.25) dla pary obiektów (element skończony, węzeł), równaniem (7.28) dla pary elementów dyskretnych lub równaniem (9.4) dla pary (element skończony, element dyskretny).

Jeśli wiązania kohezyjne są aktywne, oddziaływanie między obiektami może zachodzić również jeśli  $g > 0$ . Warunek (10.1) jest zastąpiony przez

$$g \leq g_{max}, \quad (10.2)$$

gdzie  $g_{max}$  jest maksymalnym (granicznym) odstępem między obiektami odpowiadającym całkowitemu zerwaniu więzów kohezyjnych, który musi być obliczony dla danego modelu konstytutywnego i przyjętych parametrów modelu.

Obliczenie funkcji  $g$  dla pary elementów dyskretnych według równania (7.28) jest bardzo proste. Podobnie łatwo wyznaczyć  $g$  dla pary (element skończony, węzeł) lub (element skończony, węzeł), gdy element skończony jest dwuwęzłowym segmentem w zagadnieniu płaskim lub trójkątem w zagadnieniu przestrzennym. Trudniejsze jest wyznaczenie odległości  $g$  w przypadku stosowania elementu czworokątnego. Cztery węzły nie muszą leżeć w jednej płaszczyźnie. Dla wyznaczenia  $g$  według wyrażenia (4.25) konieczne jest iteracyjne rozwiązanie zagadnienia minimalizacji zdefiniowanego równaniem (4.26).

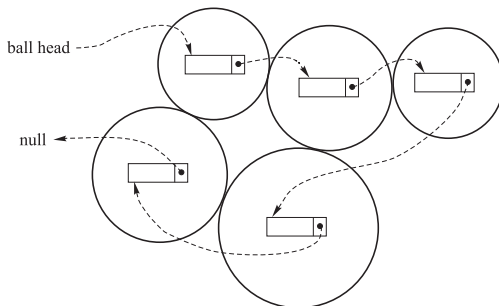
## 10.3 Implementacja komputerowa – aspekty programistyczne

Implementacja komputerowa algorytmu wykrywania kontaktu wykorzystuje dynamiczne struktury danych, pozwalające efektywnie reprezentować zmieniające się warunki kontaktu. Struktura danych w programie numerycznym Simpack/Stampack wykorzystuje takie struktury danych jak:

- dynamicznie alokowane wektory,
- listy z dowiązaniem (listy powiązane, ang. linked list),

- struktury drzew: binarnych, czwórkowych (*ang.* quadtree), ósemkowych (*ang.* octree).

Dynamiczna lista reprezentująca zbiór elementów dyskretnych jest przedstawiona schematycznie na rys. 10.6. Program numeryczny jest kodowany w języku programo-



Rys. 10.6. Schemat listy elementów dyskretnych.

wania Fortran 90. Struktura danych dla pojedynczego elementu dyskretnego wykorzystywana jako pojedynczy obiekt listy z dowiązaniem jest zdefiniowana w następujący sposób:

```

TYPE ball
  INTEGER (kind=4) :: &
    lnode, &      ! node label
    matno        ! material ID
  REAL (kind=8) :: &
    radius, &    ! ball radius
    mass         ! ball mass
  TYPE (ball), POINTER :: next
END TYPE ball

```

Lista z dowiązaniem pozwala na łatwe dodawanie i usuwanie tworzących ją obiektów. Struktura danych pojedynczego elementu dyskretnego zawiera informacje o etykiecie węzła, promieniu i masie elementu dyskretnego, numer identyfikacyjny materiału oraz wskaźnik do następnego obiektu–elementu w liście.

Lista zawierająca pary potencjalnie kontaktujących się elementów dyskretnych jest utworzona z obiektów o następującej strukturze:

```

TYPE contact
  TYPE (ball), POINTER :: c_ball1, & ! 1st ball in the contact pair
                        c_ball2    ! 2nd ball in the contact pair

```



```

INTEGER (kind=4) :: &
  bflag, &      ! contact bond flag, 0 - no bond, 1 - bond is active
  broken       ! contact bond broken flag, 1 - broken, 0 - otherwise
REAL (kind=8) :: &
  fn, &        ! normal contact force
  ft(3), &     ! tangential contact force
  gap0, &      ! initial gap/penetration
  r01(3), &    ! vector center of b1 to contact point at t=0
  r02(3), &    ! vector center of b2 to contact point at t=0
TYPE (contact), POINTER :: &
  c_b1clist, & ! next cont. around 1st ball
  c_b2clist &  ! next cont. around 2nd ball
  next        ! pointer to next contact in global list
END TYPE contact

```

Dwie listy, lista elementów dyskretnych i lista par potencjalnie kontaktujących się elementów dyskretnych, są ze sobą powiązane, wskaźniki `c_ball1` i `c_ball2` z obiektu definiującego parę kontaktu wskazują na obiekty z listy elementów dyskretnych. Powiązanie w przeciwnym kierunku jest stworzone przez wskaźniki `b_clist`, które są dodane do struktury obiektu–elementu dyskretnego, wskaźnik ten wskazuje na obiekt z listy kontaktujących się par, który jest początkiem lokalnej listy par kontaktów, w których występuje dany element dyskretny. Zmodyfikowana struktura obiektu listy elementów dyskretnych jest pokazana poniżej, dodano jeszcze jeden parametr określający wielkość zużycia, wykorzystany w modelu kontaktu ze zużyciem.

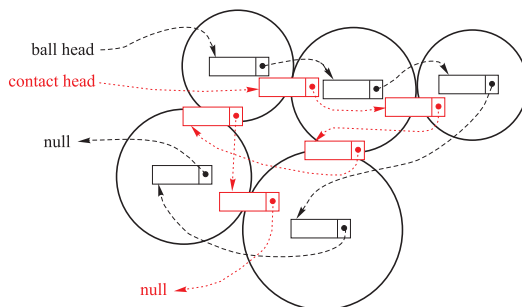
```

TYPE ball
  INTEGER (kind=4) :: &
    lnode, &      ! node label
    matno        ! material ID
  REAL (kind=8) :: &
    radius, &    ! ball radius
    mass, &      ! ball mass
    wear, &      ! wear thickness
  TYPE (contact), POINTER :: b_clist ! header of contacts around ball
  TYPE (ball), POINTER :: next
END TYPE ball

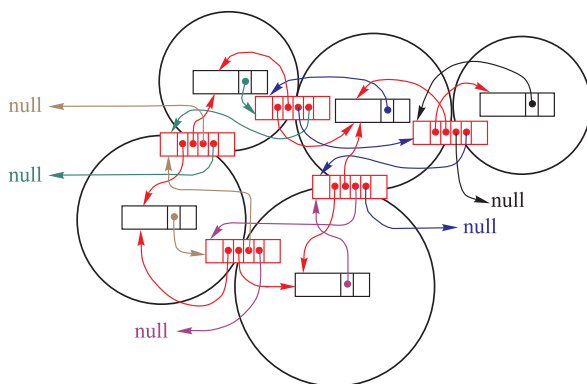
```

Powiązane listy elementów dyskretnych oraz par potencjalnie kontaktujących się elementów są przedstawione schematycznie na rys. 10.7. Powiązania między listami oraz listy par kontaktów dla każdego elementu dyskretnego są przedstawione na rys. 10.8.

Przedstawiona struktura bazy danych algorytmu metody elementów dyskretnych pozwala efektywnie weryfikować aktualnie kontaktujące się elementy, dodawać i eli-



Rys. 10.7. Schemat globalnej listy elementów dyskretnych oraz par kontaktowych.



Rys. 10.8. Schemat lokalnej listy kontaktów.

minować elementy dyskretne. Eliminacja elementów dyskretnych jest wykorzystywana na przykład w analizie zużycia, cząstki–elementy dyskretne są usuwane ze zużywanej powierzchni jeśli akumulowane zużycie (reprezentujące głębokość zużytego materiału) przekroczy rozmiar (średnicę) elementu dyskretnego. Eliminacja i dodawanie obiektów do listy par potencjalnie kontaktujących się obiektów następuje każdorazowo gdy stwierdza się odpowiednio niemożliwość lub możliwość kontaktu między dwoma elementami tworzącymi parę.

## Podsumowanie

W tym rozdziale opisano implementowany numeryczny algorytm poszukiwania kontaktu, obejmujący wszystkie możliwe przypadki zagadnienia kontaktowego w zintegrowanym systemie metody elementów skończonych i metody elementów dyskretnych. Algorytm kontaktu jest bardzo ważną częścią rozwiniętego systemu numerycznego.

Zagadnienie kontaktowe występuje we wszystkich problemach praktycznych analizowanych w niniejszej pracy: w symulacji tłoczenia przedstawionej w rozdziale 6 występuje kontakt między blachą oraz elementami tłoczników, w symulacji przeróbki plastycznej objętościowej w rozdziale 5 występuje kontakt między przerabianym materiałem a narzędziami, we wszystkich przykładach praktycznych w rozdziałach 11–17, w których stosuje się model elementów dyskretnych, występuje kontakt między elementami dyskretnymi, a w niektórych przypadkach również kontakt między elementami dyskretnymi i brzegiem obszarów dyskretyzowanych elementami skończonymi. Podstawowymi wymaganiami stawianymi algorytmom poszukiwania kontaktu jest niezawodność i numeryczna efektywność algorytmu.

W niniejszym rozdziale opisano główne założenia i niektóre szczegóły implementacji komputerowej algorytmu wykrywania kontaktu rozwiniętego w niniejszej pracy. Opracowany algorytm wykorzystuje dwuetapową procedurę poszukiwania kontaktu. W pierwszym etapie, zwanym globalnym poszukiwaniem kontaktu, tworzy się listę potencjalnie kontaktujących się par. Poszukiwanie globalne poprzedzone jest przestrzennym uporządkowaniem obiektów. W algorytmie zastosowano uporządkowanie za pomocą równomiernego i adaptacyjnego podziału obszaru obliczeniowego. Metoda wykorzystująca podział równomierny jest głównie przeznaczona dla obiektów równomiernie rozłożonych w przestrzeni. W przypadku nierównomiernego rozkładu przestrzennego obiektów bardziej efektywne są metody oparte na adaptacyjnym podziale przestrzeni. Poszukiwanie globalne, najbardziej czasochłonna część algorytmu, przeprowadzane jest co pewną liczbę kroków całkowania. Na każdym kroku wykonywany jest etap drugi algorytmu, poszukiwanie lokalne, sprowadzające się do dokładnego sprawdzenia kontaktu par znajdujących się na liście utworzonej w poszukiwaniu globalnym.

Opisany algorytm implementowano w rozwiniętym programie numerycznym przy wykorzystaniu zaawansowanych struktur programistycznych, wykorzystujących listy z dowiązaniem, struktury drzew binarnych, czwórkowych i ósemkowych. Niezawodność i numeryczna efektywność kontaktu została uwidoczniła w praktycznych przykładach, w których poszukiwano kontaktu nawet dla około 200 000 obiektów w problemach zajmujących nawet około jednego miliona kroków całkowania.

# 11. Zagadnienia odbicia fal w zintegrowanych modelach metody elementów dyskretnych i skończonych

## Wstęp

Propagacja fal naprężeń jest typowym zjawiskiem obserwowanym w rozwiązaniu dynamicznego problemu mechaniki modelowanego zarówno za pomocą metody elementów dyskretnych, jak i metody elementów skończonych opartej na jawnym całkowaniu równań ruchu. Rozchodzeniu fal towarzyszą typowe efekty falowe jak interferencja, rozpraszanie, częściowe lub całkowite odbicia na brzegach lub na granicy ośrodków, załamanie na granicy ośrodków, ugięcie (dyfrakcja) na napotykanym przeszkodach.

Przy modelowaniu różnorodnych problemów często jest konieczne wprowadzenie nie istniejących brzegów, żeby ograniczyć modelowany obszar, np. w zagadnieniach z geomechaniki lub elektromagnetyzmu, rozpatruje się zagadnienie w ograniczonym obszarze choć w rzeczywistości mamy do czynienia z ośrodkiem nieskończonym (o rozmiarach znacznie większych od lokalnie rozpatrywanego obszaru). Sztuczny brzeg zakłóca rozchodzenie się fal powodując nierzeczywiste odbicia. Problem ten należy rozwiązać wprowadzając specjalne absorpcyjne warunki brzegowe – zapewniające pochłanianie energii fal wychodzących z obszaru.

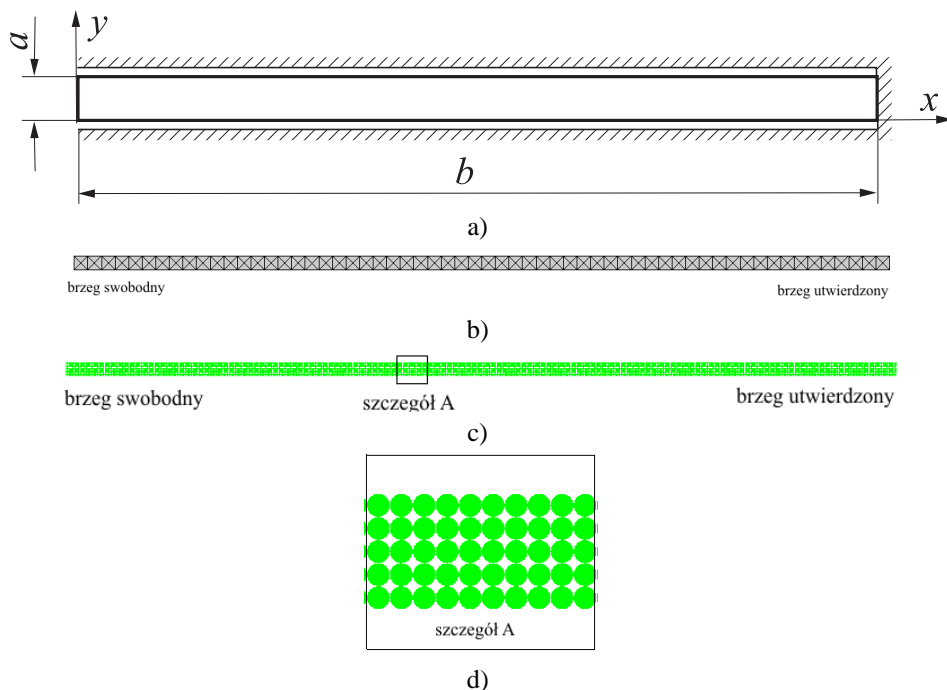
Częściowe odbicie fali następuje również na powierzchni nieciągłości własności materiału, np. na granicy dwóch różnych ośrodków charakteryzujących się różnymi opornościami (impedancjami) falowymi. W modelowaniu hybrydowym dyskretno-ciągłym na połączeniu obszaru ciągłego i dyskretnego również występuje nierzeczywista nieciągłość, która może powodować odbicia fal. Konieczna jest eliminacja lub minimalizacja tego zjawiska.

W niniejszym rozdziale będą badane efekty falowe występujące w modelach metody elementów skończonych, metody elementów dyskretnych oraz w modelach hybrydowych metody elementów skończonych i metody elementów dyskretnych. Będą badane odbicia fal na brzegu obszaru oraz na wewnętrznej nieciągłości na połączeniu obszarów modelowanych za pomocą różnych metod. Będą przedstawione sposoby eliminacji odbicia fali na sztucznej granicy obszaru poprzez odpowiednio zdefiniowane warunki brzegowe. Następnie będą badane możliwości zminimalizowania odbicia na granicy obszarów MES i MED przy wykorzystaniu różnych metod połączenia. Jest to

jedno z najważniejszych problemów w stosowaniu hybrydowych modeli MES i MED oraz istotny rozdział niniejszej pracy.

## 11.1 Odbicie fali na brzegu swobodnym i utwierdzonym

Badanie odbicia fali na brzegach oraz na nieciągłościach wewnętrznych zostanie przeprowadzone na dwuwymiarowym obszarze prostokątnym o wymiarach  $a = 1$  mm i  $b = 60$  mm przedstawionym na rys. 11.1a. Lewy krótszy brzeg ( $x = 0$ ) jest swobodny a prawy krótszy brzeg ( $x = b$ ) jest utwierdzony. Dłuższe boki mają zablokowany ruch w kierunku  $y$ . W zagadnieniu założono płaski stan naprężenia. Przyjęto sprężysty model materiału charakteryzowany przez moduł Younga  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Pa i współczynnik Poissona  $\nu = 0.3$ . Gęstość materiału wynosi  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>. Rozpatrywane będą dwa różne modele numeryczne – wykorzystujące metodę elementów skończonych (rys. 11.1b) oraz metodę elementów dyskretnych (rys. 11.1c). W modelu MES przeprowadzono dyskretyzację trójkątnymi elementami o stałym odkształceniu stosując siatkę przedstawioną na rys. 11.1b. W modelu elementów dyskretnych przyjęto regularną konfigurację elementów dyskretnych przedstawioną na rys. 11.1d.



Rys. 11.1. Propagacja fali: a) definicja geometrii, b) dyskretyzacja elementami skończonymi, c) dyskretyzacja elementami dyskretnymi, d) szczegół dyskretyzacji elementami dyskretnymi.

Na brzegu swobodnym wzbudzony zostaje pojedynczy impuls fali podłużnej przez zadanie początkowego przemieszczenia w kierunku  $x$  zgodnie z równaniem:

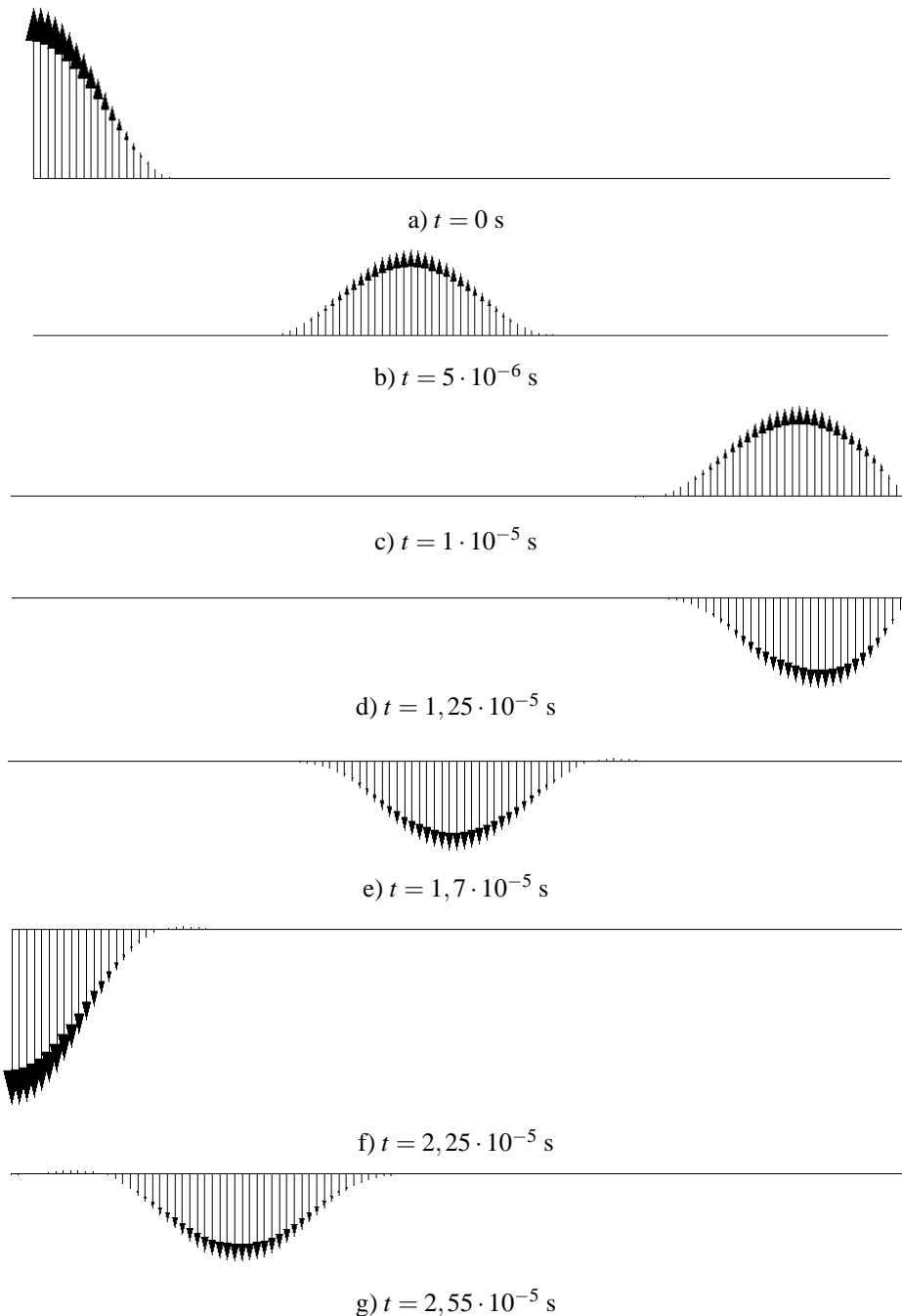
$$u_x^0 = A \left( \cos \frac{2\pi x}{L} + 1 \right) \quad (11.1)$$

w obszarze  $0 \leq x \leq L/2$ , przyjmując  $A = 0.01$  mm i  $L = 20$  mm. Rozkład przemieszczenia początkowego wzdłuż osi  $x$  pokazano na rys. 11.2a. Wzbudzony impuls falowy o długości  $\lambda = L$  przebiega wzdłuż pręta (rys. 11.2b,c) z prędkością  $c$  zależną od własności sprężystych i bezwładności ośrodka

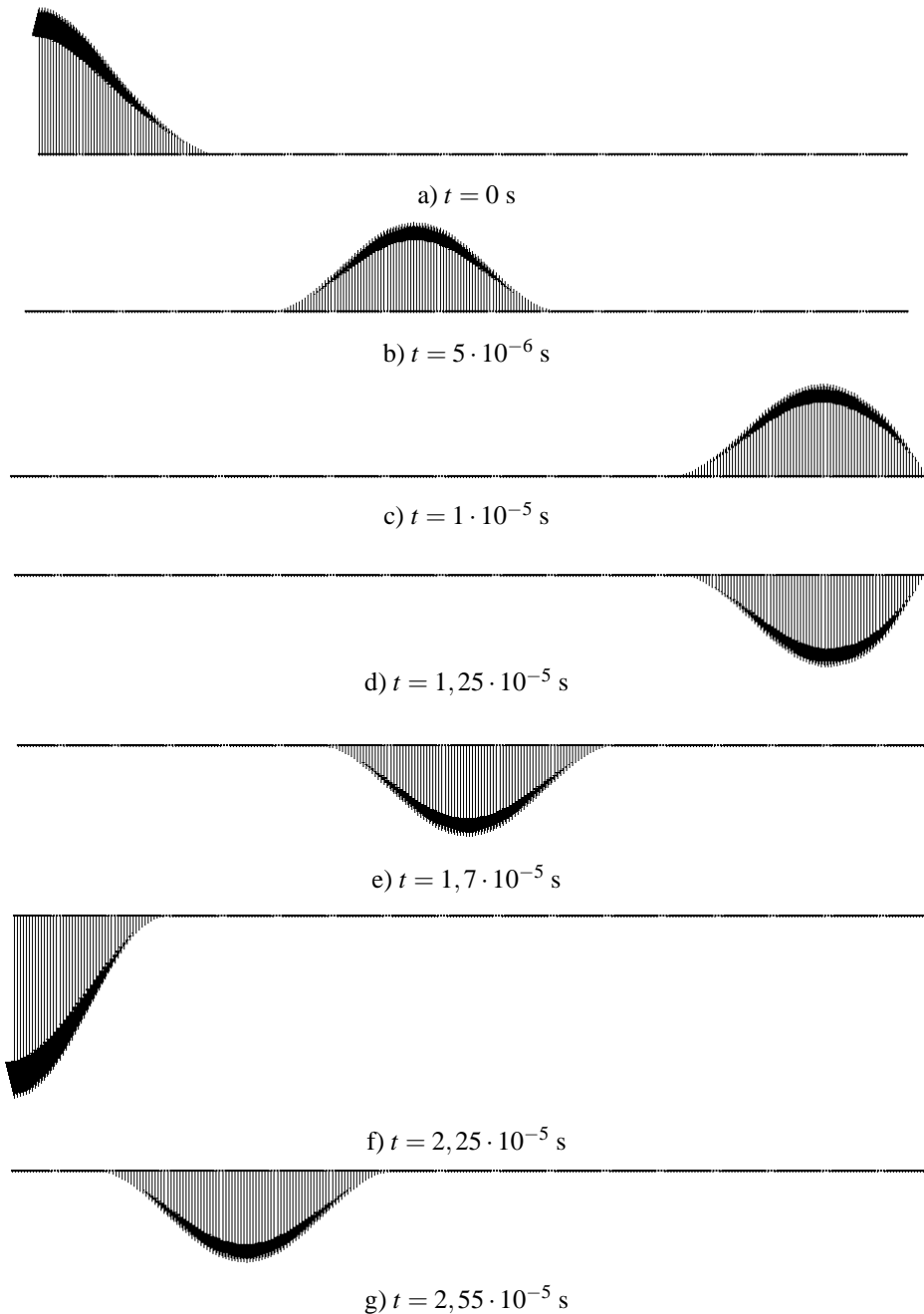
$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad (11.2)$$

gdzie  $K$  jest modułem sprężystości objętościowej, a  $\rho$  jest gęstością ośrodka. Impuls falowy przemieszcza się w kierunku utwierdzonego brzegu. Na utwierdzonym brzegu następuje odbicie fali – reakcja utwierdzenia generuje impuls biegnący w kierunku przeciwnym do impulsu padającego (rys. 11.2d,e). Impuls ten jest przesunięty w fazie o  $\pi$  względem impulsu padającego. Na swobodnym końcu również następuje odbicie (rys. 11.2f,g), w tym przypadku następuje odbicie bez zmiany fazy.

Podobny problem rozchodzenia się fali rozpatrywano stosując metodę elementów dyskretnych. W modelu elementów dyskretnych przedstawionym na rys. 11.1c,d zastosowano elementy dyskretne o promieniu  $r = 0.1$  mm. Uwzględniając porowatość dla przyjętej konfiguracji elementów dyskretnych  $n = 0.2146$ , przyjęto gęstość materiału szkieletu  $\rho_{sz} = \rho / (1 - n) = 9930$  kg/m<sup>3</sup>. Dla oddziaływania między elementami dyskretnymi założono kontakt z kohezją bez możliwości zerwania wiązań kohezyjnych. Sztywność oddziaływania kontaktowego dobrano tak, by uzyskać prędkość rozchodzenia się fali tę samą jak w modelu ciągłym, uzyskano to dla  $k_n = 2.2 \cdot 10^{11}$  N/m. Analogicznie jak w modelu MES wzbudzono pojedynczy impuls podłużny przez zadanie przemieszczenia początkowego w kierunku osi  $x$  zgodnie z wyrażeniem (11.1), w obszarze  $0 \leq x \leq L/2$ . Podobnie jak w modelu MES wzbudzony impuls rozchodzi się wzdłuż osi  $x$  (rys. 11.3), odbija się na utwierdzonym brzegu ze zmianą fazy i przemieszcza się w stronę brzegu swobodnego, na którym odbija się bez zmiany fazy. Otrzymany przebieg zjawisk falowych w modelu dyskretnym MED jest identyczny jak w modelu MES opartym na modelowaniu ciągłym, co pozwala nam przyjąć, że dla rozpatrywanego zjawiska są to modele równoważne.



Rys. 11.2. Przemieszczanie się podłużnego impulsu falowego wzdłuż pręta dyskretyzowanego elementami skończonymi z lewym końcem swobodnym a prawym utwierdzonym – profil fali.

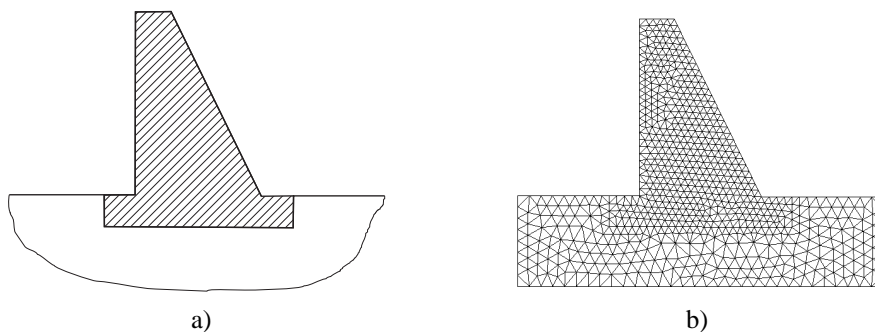


Rys. 11.3. Przemieszczanie się podłużnego impulsu falowego wzdłuż pręta dyskretyzowanego elementami dyskretnymi z lewym końcem swobodnym a prawym utwierdzonym – profil fali.



## 11.2 Absorpcyjne warunki brzegowe

Przy modelowaniu różnorodnych problemów z geomechaniki mamy do czynienia z ośrodkami, które w analizowanej skali są najlepiej reprezentowane jako ośrodki nieograniczone. Przykładowo przyjmuje się, że konstrukcje podziemne znajdujące się na dużej głębokości są otoczone nieskończonym ośrodkiem, a konstrukcje powierzchniowe znajdują się na nieskończonej półprzestrzeni (rys. 11.4a). Ze względu na możliwości obliczeniowe przy budowaniu modeli numerycznych rozpatruje się jedynie ograniczony obszar, obejmujący z pewnym zapasem analizowany obiekt (rys. 11.4b).



Rys. 11.4. Przykład zagadnienia z geomechaniki: a) model fizyczny z nieograniczonym obszarem, b) model numeryczny z obszarem ograniczonym.

Tak wprowadzony sztuczny brzeg w analizie dynamicznej zakłóca rozchodzenie się fal, powodując nierzeczywiste odbicia. Problem ten należy rozwiązać wprowadzając specjalne absorpcyjne warunki brzegowe – zapewniające pochłanianie energii fal wychodzących z obszaru. Dużą efektywność pochłaniania energii zapewniają tzw. konsystentne warunki brzegowe, zaproponowane w [176]. Mogą one być wprowadzone przy zastosowaniu metody elementów brzegowych [301]. Wadą konsystentnych warunków brzegowych jest możliwość ich stosowania jedynie w metodach analizy dynamicznej w dziedzinie częstotliwości.

W wielu przypadkach wystarczająco dobre pochłanianie energii wychodzących fal zapewniają lepkie warunki brzegowe zaproponowane w [177] dla metod analizy dynamicznej w dziedzinie czasu. Porównanie efektywności lepkich i konsystentnych warunków brzegowych zamieszczone jest w [155]. Lepkie warunki brzegowe [177] sprowadzają się do określenia rozłożonego na brzegu obciążenia w kierunku normalnym i stycznym,  $t_n$  i  $t_s$ , danych za pomocą zależności o typowej dla lepkości postaci

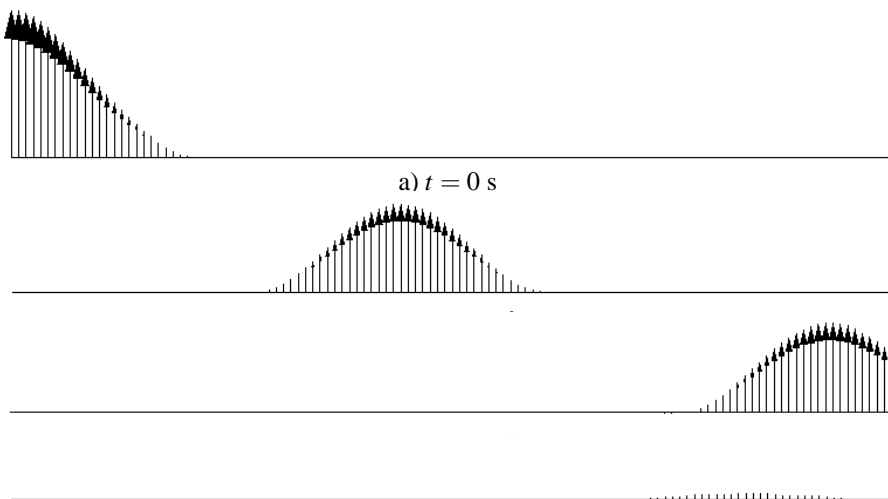
$$t_n = -\rho c_p v_n, \quad (11.3)$$

$$t_s = -\rho c_s v_s, \quad (11.4)$$

gdzie:  $\rho$  – gęstość masy,  $v_n$  i  $v_s$  – normalna i styczna składowa prędkości na brzegu,  $c_p$  i  $c_s$  – prędkość rozchodzenia się fali dylatacyjnej i ścinania. Obciążenie odpowiadające absorpcyjnym warunkom brzegowym dane zależnościami (11.3) i (11.4), może być zadane jednocześnie z obciążeniem innego rodzaju, np. z obciążeniem zapewniającym równowagę statyczną rozpatrywanego modelu.

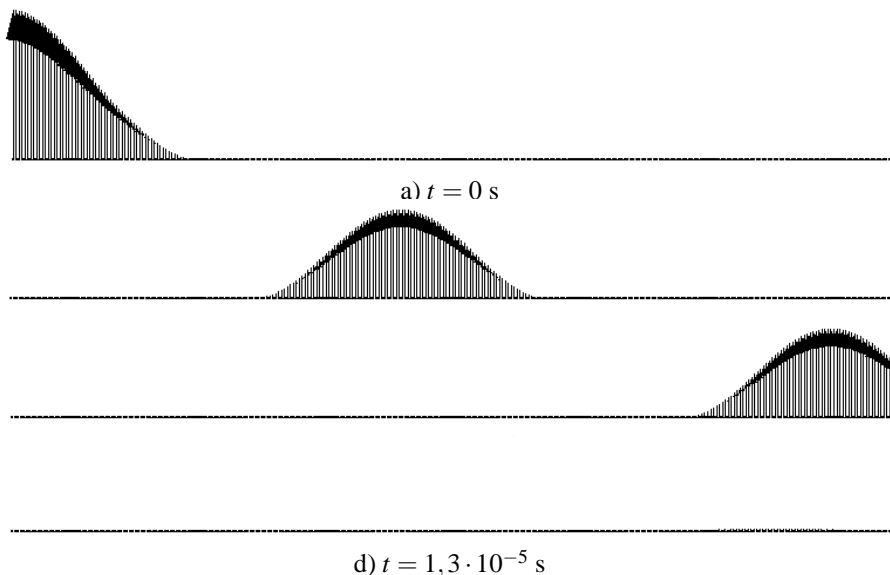
Lepkie absorpcyjne warunki brzegowe zostały implementowane w zintegrowanym programie MED/MES prezentowanym w niniejszej pracy. Efektywność ich działania zostanie pokazana dla zdefiniowanego w podrozdziale 11.1 przykładu, którego geometria jest pokazana na rys. 11.1a. W definicji problemu zastąpiono utwierdzenie krótszego brzegu po prawej stronie wprowadzeniem tamże absorpcyjnych warunków brzegowych. Tak jak poprzednio wzbudzony jest pojedynczy impuls falowy przez zadanie początkowych przemieszczeń według zależności (11.1) w obszarze  $0 \leq x \leq L/2$ , przyjmując  $A = 0.01$  mm i  $L = 20$  mm (rys. 11.5a). Zagadnienie rozwiązano numerycznie stosując wprowadzone poprzednio modele MES i MED.

Rysunek 11.5 przedstawia wyniki analizy dla modelu MES. Wzbudzony impuls falowy przemieszcza się od brzegu swobodnego w kierunku brzegu z absorpcyjnymi warunkami brzegowymi (rys. 11.5b). Po dojściu do tego brzegu (rys. 11.5c) energia jest pochłaniana i wskutek tego nie następuje odbicie (rys. 11.5d). Można jedynie zaobserwować nieznaczne odbicie wskutek niedoskonałości tłumienia, energia fali odbitej jest jednak nieznaczna w porównaniu do energii fali padającej.



Rys. 11.5. Przemieszczanie się podłużnego impulsu falowego wzdłuż pręta dyskretyzowanego elementami skończonymi z lewym końcem swobodnym oraz z warunkiem absorpcji na prawym brzegu – profil fali.

Profil rozchodzącego się zaburzenia otrzymany w analizie metodą elementów dyskretnych przedstawiono na rys. 11.6. Również w tym przypadku można zaobserwować efektywne tłumienie fali na brzegu, na którym zadano warunki absorpcyjne (rys. 11.6c). Odbicie praktycznie nie występuje (rys. 11.6d).



Rys. 11.6. Przemieszczanie się podłużnego impulsu falowego wzdłuż pręta dyskretyzowanego elementami dyskretnymi z lewym końcem swobodnym oraz z warunkiem absorpcji na prawym brzegu – profil fali.

### 11.3 Odbicie fali na powierzchni granicznej dwóch ośrodków

Powierzchnia graniczna dwóch ośrodków może stanowić powierzchnię nieciągłości własności związanych z rozchodzeniem się fal. Własności ośrodka wpływające na rozchodzenie się fal określone są w zwięzły sposób za pomocą impedancji (oporności) falowej  $z$  [128]:

$$z = \frac{\sigma}{c}, \quad (11.5)$$

gdzie:  $\sigma$  – naprężenie wywołane w danym punkcie ośrodka przez falę naprężeniową,  $c$  – prędkość fali sprężystej. W przypadku pomijalnego tłumienia ośrodka oporność falową można wyrazić jako iloczyn prędkości fali i gęstości:

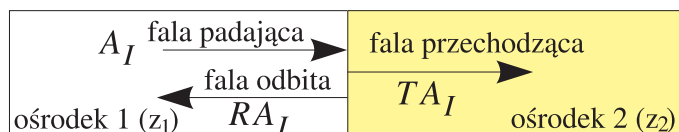
$$z = c\rho. \quad (11.6)$$

Przy uwzględnieniu zależności (11.2) wyrażenie (11.6) dla fali podłużnej można przedstawić w postaci

$$z = \sqrt{K\rho}. \quad (11.7)$$

Na granicy ośrodków różniących się opornościami falowymi, fala może ulegać załamaniu oraz częściowemu lub całkowitemu odbiciu. Załamanie występuje dla fali padającej pod pewnym kątem. W przypadku dużego kąta padania fala ulega całkowitemu odbiciu. Zwykle jednak na granicy dwóch ośrodków fala ulega załamaniu i częściowemu odbiciu.

W przykładzie numerycznym będziemy rozpatrywali falę padającą prostopadle do powierzchni granicznej między dwoma ośrodkami o oporności falowej  $z_1$  i  $z_2$  jak pokazano schematycznie na rys. 11.7. W tym przypadku nie mamy do czynienia z załamaniem fali, występuje natomiast częściowe odbicie. Fala padająca prostopadle na granicę dwóch warstw ulega rozbięciu na falę odbitą i przechodzącą (rys. 11.7).



Rys. 11.7. Częściowe odbicie fali na granicy dwóch ośrodków.

Ilość energii związanej z odbiciem lub przejściem do drugiego ośrodka jest uzależniona od oporności falowej ośrodków. Energia fali jest proporcjonalna do jej amplitudy. Prawo transmisji energii fali z ośrodka o oporności  $z_1$  do ośrodka o oporności  $z_2$  można wyrazić za pomocą następujących zależności [6, 95, 50]:

$$A_R = A_I R, \quad (11.8)$$

$$A_T = A_I T, \quad (11.9)$$

gdzie:  $A_I$  – amplituda fali padającej ( $I$ , ang. *incident*),  $A_R$  – amplituda fali odbitej ( $R$ , ang. *reflected*),  $A_T$  – amplituda fali przechodzącej ( $T$ , ang. *transmitted*),  $R$  – współczynnik odbicia fali,  $T$  – współczynnik transmisji (przepuszczalności) fali. Współczynniki odbicia i transmisji wyrażają się następującymi wzorami [50]:

$$R = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}, \quad (11.10)$$

$$T = \frac{2z_1}{z_1 + z_2}. \quad (11.11)$$

Współczynnik odbicia fali  $R$  przyjmuje wartości od  $-1$  do  $+1$ , a współczynnik transmisji  $T$  wartości od  $0$  do  $+2$ . Jako amplitudy charakteryzujące poszczególne fale można wziąć amplitudy przemieszczenia cząstki ośrodka, amplitudę prędkości cząstki ośrodka lub amplitudę wzbudzonego przez falę naprężenia. W przypadku stosowania amplitudy naprężenia współczynnik odbicia wyraża się wzorem [50]:

$$R = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2}. \quad (11.12)$$

Powyższe rozważania zostaną zilustrowane przykładem numerycznym. Rozpatrzmy podobny problem jak zdefiniowany w rozdziale 11.1. Rozpatrzmy propagację impulsu fali podłużnej wzdłuż osi  $x$  w obszarze prostokątnym o szerokości  $1$  mm i długości  $60$  mm. Obecnie założymy, że obszar będzie się składał z dwóch równych podobszarów złączonych w płaszczyźnie  $x = 30$  mm. Dla podobszaru po lewej stronie przyjęto własności sprężyste materiału dane przez moduł Younga  $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$  Pa i współczynnik Poissona  $\nu_1 = 0.3$ . Dla podobszaru po prawej stronie przyjęto własności sprężyste materiału dane przez moduł Younga  $E_2 = 1 \cdot 10^{11}$  Pa i współczynnik Poissona  $\nu_2 = 0.3$ . Gęstość materiału w obydwu podobszarach jest taka sama i wynosi  $\rho_1 = \rho_2 = 7800$  kg/m<sup>3</sup>. Zgodnie ze wzorem (11.7) impedancja falowa ośrodka 1 wynosi:

$$z_1 = \sqrt{K_1 \rho_1} = \sqrt{\frac{E_1}{3(1-2\nu_1)} \rho_1} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 7800}{3(1-2 \cdot 0.3)} \frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}^2}} \approx 3,606 \cdot 10^7 \frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}^2},$$

a dla ośrodka 2:

$$z_2 = \sqrt{K_2 \rho_2} = \sqrt{\frac{E_2}{3(1-2\nu_2)} \rho_2} = \sqrt{\frac{1 \cdot 10^{11} \cdot 7800}{3(1-2 \cdot 0.3)} \frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}^2}} \approx 2,550 \cdot 10^7 \frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}^2}.$$

Teoretyczne współczynniki odbicia i przepuszczalności zgodnie ze wzorami (11.10) i (11.11) są następujące:

$$R = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} = \frac{3,606 - 2,550}{3,606 + 2,550} = 0,171,$$

$$T = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} = \frac{2 \cdot 3,606}{3,606 + 2,550} = 1,171.$$

Rozpatrywane będą dwa różne modele numeryczne – model MES (rys. 11.8), wykorzystujący metodę elementów skończonych dla dyskretyzacji obydwu ośrodków oraz hybrydowy model MED/MES (rys. 11.9), wykorzystujący metodę elementów

dyskretnych w ośrodku 1 oraz metodę elementów skończonych w ośrodku 2. W modelu MES przeprowadzono dyskretyzację trójkątnymi elementami o stałym odkształceniu.

Wyniki symulacji numerycznej dla modelu MES przedstawiono na rys. 11.8. Rysunki 11.8b i c przedstawiają profil przemieszczającego się impulsu falowego od brzegu swobodnego do powierzchni granicznej w połowie długości badanego obszaru. Rysunek 11.8c przedstawia profil impulsu przechodzącego powierzchnie graniczną między dwoma ośrodkami. Na rys. 11.8d widać już impuls odbity i przechodzący. Wyznaczone współczynniki odbicia i przepuszczalności na podstawie wyników numerycznych zgodnie ze wzorami (11.8) i (11.9) są następujące:

$$R = \frac{A_R}{A_I} = \frac{1,71 \cdot 10^{-6}}{1 \cdot 10^{-5}} = 0,171, \quad T = \frac{A_T}{A_I} = \frac{1,173 \cdot 10^{-5}}{1 \cdot 10^{-5}} = 1,173.$$



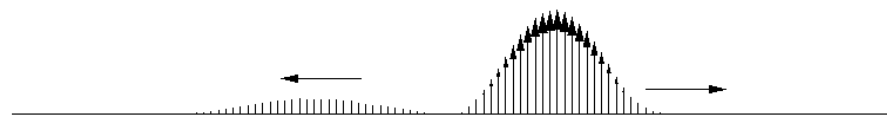
a) dyskretyzacja elementami skończonymi



b)  $t = 0$  s



c)  $t = 5 \cdot 10^{-6}$  s



d)  $t = 7,5 \cdot 10^{-6}$  s

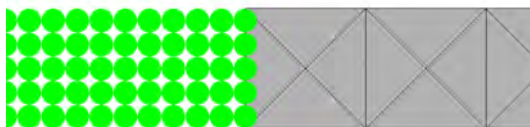


e)  $t = 1,1 \cdot 10^{-5}$  s

Rys. 11.8. Przemieszczanie się podłużnego impulsu falowego wzdłuż pręta dyskretyzowanego elementami dyskretnymi z odbiciem na nieciągłości sztywności materiału – profil fali.



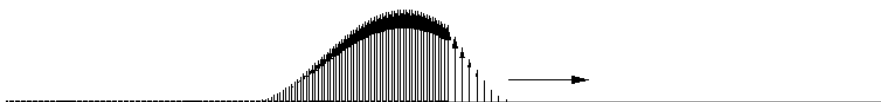
a) zintegrowany model elementów dyskretnych i skończonych



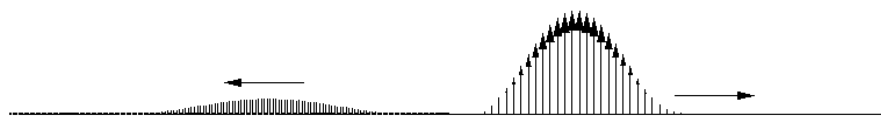
b) połączenie podobszarów dyskretyzowanych za pomocą elementów dyskretnych i skończonych



c)  $t = 0$  s



d)  $t = 5 \cdot 10^{-6}$  s



e)  $t = 8 \cdot 10^{-6}$  s



f)  $t = 1,1 \cdot 10^{-5}$  s

Rys. 11.9. Przemieszczanie się podłużnego impulsu falowego wzdłuż pręta dyskretyzowanego elementami dyskretnymi i skończonymi z odbiciem na powierzchni nieciągłości (nieciągłość dyskretyzacji i sztywności) – profil fali.

Otrzymane wartości numeryczne współczynników odbicia i przepuszczalności, 0,171 i 1,173, odpowiednio, zgadzają się bardzo dobrze z przewidywanymi wartościami teoretycznymi, 0,171 i 1,171, odpowiednio.

Rysunek 11.9a przedstawia hybrydowy model MED/MES, w którym zastosowano metodę elementów dyskretnych w ośrodku 1, a metodę elementów skończonych za-

stosowano w ośrodku 2. Granicę obydwu podobszarów przedstawiono na rys. 11.9b. Połączenie uzyskano za pomocą metody nieokreślonych mnożników Lagrange'a stosując uproszczone sformułowanie opisane w podrozdziale 9.4.2. Przyjęto identyczne parametry modelu elementów dyskretnych jak wyznaczone w podrozdziale 11.1 dla przykładu przedstawionego na rys. 11.3. Uzyskano wtedy potwierdzenie, że propagacja fali w modelu metody elementów dyskretnych była identyczna jak w modelu metody elementów skończonych. Oznaczało to, że impedancja falowa modelu elementów dyskretnych jest właściwie dobrana.

Na brzegu swobodnym wzbudzono impuls fali podłużnej (rys. 11.9c), który przemieszcza się w kierunku granicy z ośrodkiem 2. Na granicy ośrodka 1 i 2 (rys. 11.9d) następuje częściowe odbicie i rozdzielenie fali padającej na część odbitą i część przepuszczoną (rys. 11.9e). Otrzymane numerycznie wartości współczynników odbicia i przepuszczalności

$$R = \frac{A_R}{A_I} = \frac{1,74 \cdot 10^{-6}}{1 \cdot 10^{-5}} = 0,174, \quad T = \frac{A_T}{A_I} = \frac{1,175 \cdot 10^{-5}}{1 \cdot 10^{-5}} = 1,175$$

zgadzają się dobrze z przewidywanymi wartościami teoretycznymi, 0,171 i 1,171, odpowiednio.

Przykład ilustrujący częściowe odbicie na połączeniu podobszarów MES i MED o różnych własnościach pokazuje możliwe niepożądane efekty falowe na połączeniu podobszarów MES i MED w przypadku, gdy impedancja obydwu obszarów jest źle dobrana.

#### 11.4 Badanie różnych metod połączeń podobszarów dyskretyzowanych elementami dyskretnymi i skończonymi

W przypadku stosowania różnych metod modelowania (MES i MED) w obszarze jednorodnym parametry powinny być tak dobrane by dawały jednakową impedancję w wyodrębnionych podobszarach. Jeśli ten warunek jest spełniony, to na granicy między obszarami MES i MED nie powinno następować odbicie fal, jeśli dyskretyzacja w obydwu podobszarach jest wystarczająco gęsta w stosunku do długości fali. W [155] pokazano, że dla właściwej reprezentacji propagacji fali, wymiar charakterystyczny elementu,  $\Delta l$ , musi być mniejszy niż 0.1–1/8 długości fali  $\lambda$  odpowiadającej najwyższej częstotliwości drgań o istotnej energii, występujących w badanej fali złożonej:

$$\Delta l \leq \frac{\lambda}{10}. \quad (11.13)$$

Charakterystyczny wymiar dyskretnego modelu MES, 1 mm, spełnia warunek (11.13) w stosunku do długości badanego impulsu  $\lambda = 20$  mm. Warunek ten jest również



spełniony przez wymiar charakterystyczny w obszarze modelowanym przez elementy dyskretne. Odległość między elementami dyskretnymi wynosi 0.2 mm.

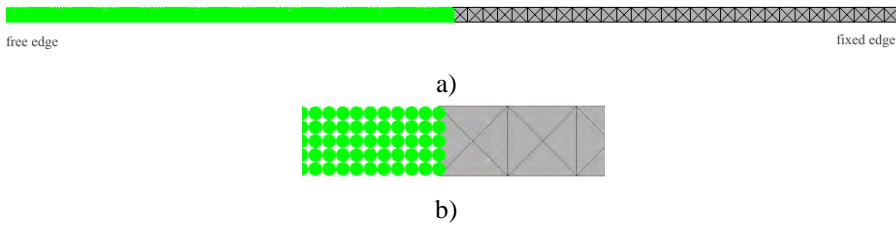
Możliwe nierzeczywiste odbicia mogą być spowodowane niedoskonałościami metody połączenia dwóch różnych podobszarów. Celem testów numerycznych przedstawionych poniżej jest sprawdzenie działania różnych metod połączenia w przypadku, gdy mamy odpowiednio dobraną impedancję i wystarczająco gęstą dyskretyzację dla badanej długości fali. Przeprowadzono próby dla czterech różnych połączeń:

- metoda mnożników Lagrange'a bez zachodzenia na siebie obszarów (sformułowanie uproszczone przedstawione w podrozdziale 9.4.2),
- metoda funkcji kary bez zachodzenia na siebie obszarów (sformułowanie uproszczone przedstawione w podrozdziale 9.4.3),
- metoda mnożników Lagrange'a z zachodzeniem na siebie obszarów (sformułowanie przedstawione w podrozdziale 9.5.3),
- metoda funkcji kary z zachodzeniem na siebie obszarów (sformułowanie przedstawione w podrozdziale 9.5.4).

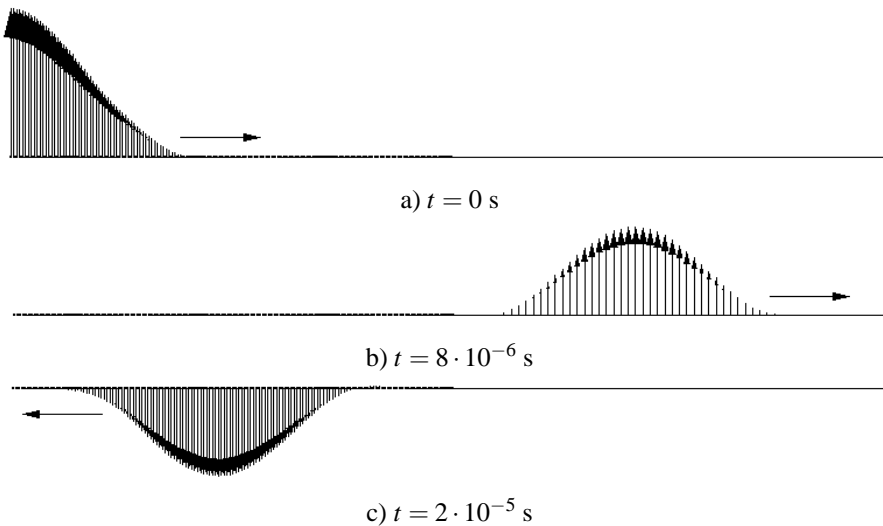
W testach badano propagację fali w obszarze jednorodnym o własnościach danych przez moduł Younga  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Pa, współczynnik Poissona  $\nu = 0.3$  i gęstość materiału  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>. W badanym obszarze wyodrębniono dwa równe podobszary, w których zastosowano dwa różne modele (rys. 11.10). W jednej połowie obszaru zastosowano metodę elementów dyskretnych a w drugiej połowie metodę elementów skończonych. W metodzie elementów dyskretnych zastosowano wyznaczone wcześniej parametry zapewniające impedancję odpowiadającą impedancji modelu ciągłego. Dla więzów sprzęgających podobszary MES i MED założono taką samą wartość funkcji kary jak dla oddziaływania kontaktowego między elementami dyskretnymi, spodziewając się, że będzie to w najmniejszym stopniu zmieniać własności falowe.

Rysunki 11.11 i 11.12 przedstawiają odpowiednio wyniki uzyskane za pomocą metody mnożników Lagrange'a i funkcji kary dla modelu bez zachodzenia na siebie podobszarów MES i MED. Można zaobserwować brak odbić fali na powierzchni granicznej, co świadczy o poprawności działania obydwu metod sprzężenia obszarów MES i MED.

Rysunek 11.13 przedstawia model hybrydowy MED/MES z obszarem przejściowym (z zachodzącymi na siebie podobszarami MES i MED). Strefa przejściowa ma szerokość (mierzoną w kierunku rozchodzeni fali) 5 mm. W tym pasie udział sztywności MES i MED zmienia się liniowo w ten sposób, że następuje stopniowe przejście od jednego do drugiego sposobu modelowania. Rysunki 11.14 i 11.15 przedstawiają



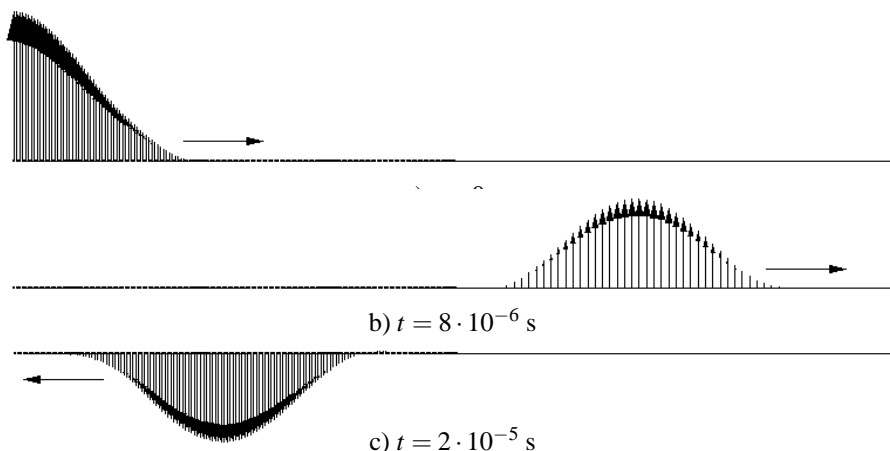
Rys. 11.10. Badanie propagacji fali: a) hybrydowy model MED/MES, b) połączenie podobszarów MED i MES.



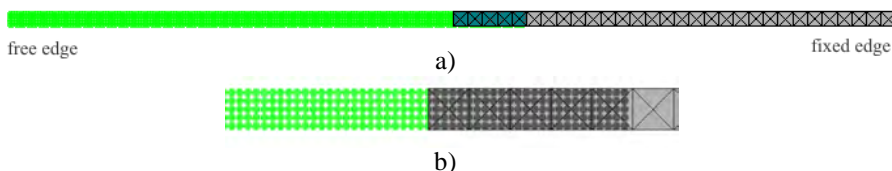
Rys. 11.11. Przemieszczanie się podłużnego impulsu falowego wzdłuż pręta dyskretyzowanego elementami dyskretnymi i skończonymi przy połączeniu podobszarów MES i MED za pomocą metody mnożników Lagrange'a bez zachodzenia na siebie podobszarów.

wyniki uzyskane dla tego modelu odpowiednio za pomocą metody mnożników Lagrange'a i funkcji kary.

W rozwiązaniach przedstawionych na rysunkach 11.14 i 11.15 nie widać odbić fali przy przejściach z jednego obszaru do drugiego. Świadczy to o poprawności działania tych algorytmów, ale nie dostarcza argumentów za stosowaniem algorytmów, które są bardziej skomplikowane w stosunku do poprzednio testowanych (bez zachodzenia podobszarów na siebie), które również dawały poprawne wyniki. Zalety algorytmów sprzęgania z zachodzącymi na siebie podobszarami będą widoczne w następnych testach, w których będziemy badać krótsze fale.

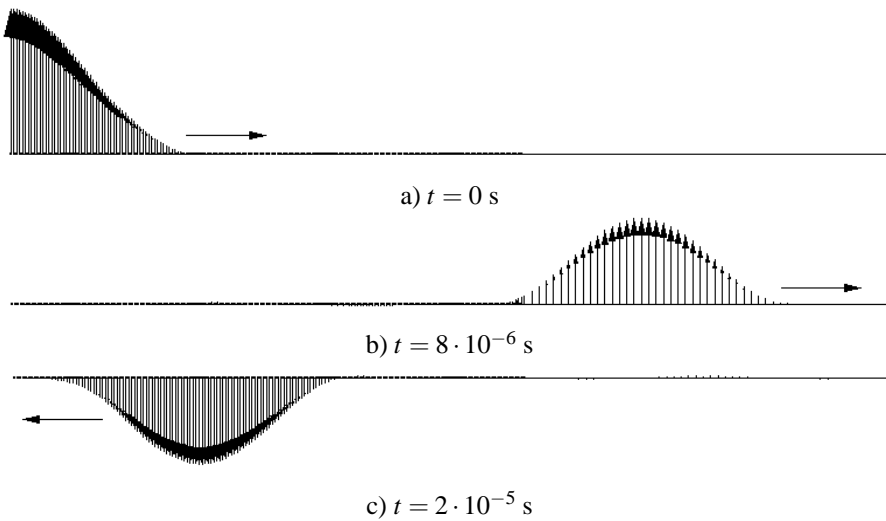


Rys. 11.12. Przemieszczanie się podłużnego impulsu falowego wzdłuż pręta dyskretyzowanego elementami dyskretnymi i skończonymi przy połączeniu podobszarów MES i MED za pomocą metody funkcji kary bez zachodzenia na siebie podobszarów.

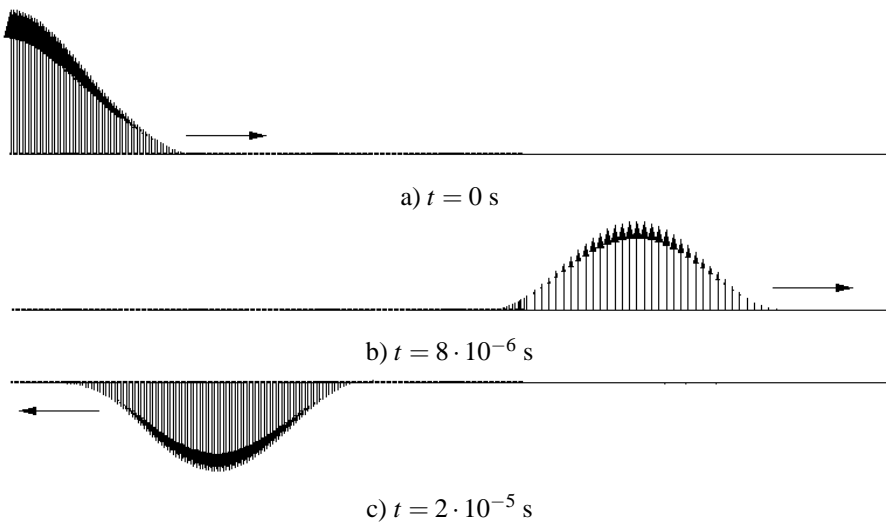


Rys. 11.13. Badanie propagacji fali: a) hybrydowy model MED/MES z obszarem przejściowym, b) powiększenie strefy połączenia.

W dotychczasowych testach numerycznych w obu podobszarach, MED i MES, dyskretyzacja była wystarczająco gęsta w stosunku do długości badanej fali. W założeniach zintegrowanego systemu MED/MES jest możliwość stosowania go w modelach wieloskalowych, w których metodę elementów dyskretnych wykorzystuje się do modelowania wybranych podobszarów w skali mezo lub mikro, natomiast pozostały obszar jest modelowany w skali makroskopowej za pomocą metody elementów skończonych. W tego typu modelach w obszarze modelowanym za pomocą metody elementów dyskretnych możemy mieć do czynienia z drganiami o tak wysokiej częstotliwości, że odpowiadająca jej długość fali będzie krótka w stosunku do rozmiaru elementów skończonych w obszarze MES. Wtedy drgania te nie będą mogły być odwzorowane w obszarze MES. Obszar MES powinien natomiast zapewnić odpowiednią impedancję dla fal o niskiej częstotliwości – te fale powinny przenikać z obszaru MED do MES. Metoda sprzężenia obydwu obszarów powinna z kolei zapewniać rozpraszanie fal o wysokiej częstotliwości wychodzących z podobszarów MED tak, aby nie występowały nierzeczywiste odbicia na granicy podobszarów MED/MES.



Rys. 11.14. Przemieszczanie się podłużnego impulsu falowego wzdłuż pręta dyskretyzowanego elementami dyskretnymi i skończonymi przy połączeniu zachodzących na siebie podobszarów MES i MED za pomocą metody mnożników Lagrange'a.



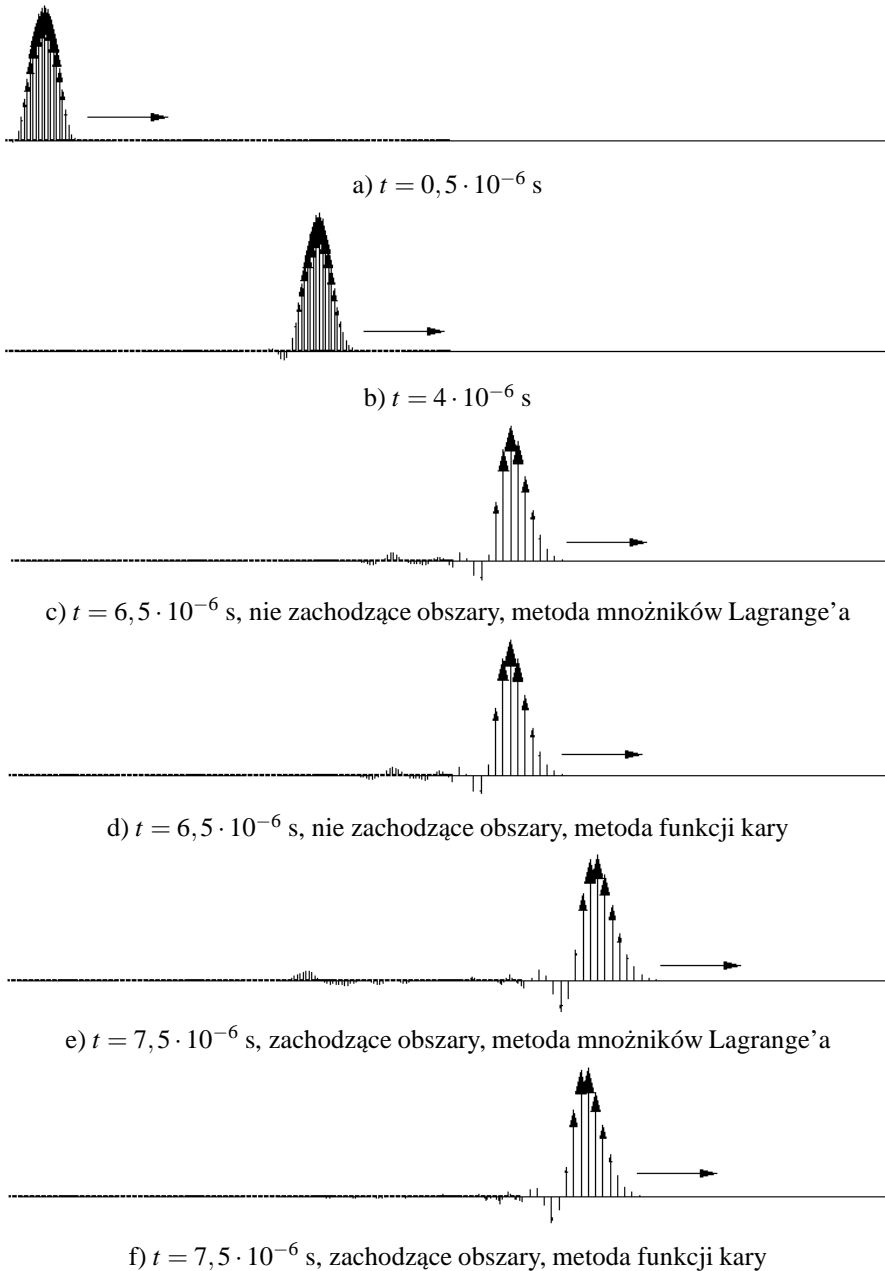
Rys. 11.15. Przemieszczanie się podłużnego impulsu falowego wzdłuż pręta dyskretyzowanego elementami dyskretnymi i skończonymi przy połączeniu zachodzących na siebie podobszarów MES i MED za pomocą metody funkcji kary.

W celu zbadania efektów falowych dla fal o wyższej częstotliwości posłużono się poprzednio stosowanymi modelami hybrydowymi MED/MES. Na brzegu swobodnym został wzbudzony impuls fali podłużnej o długości  $\lambda = 4$  mm (rys. 11.16a). Dyskretyzacja w obszarze MED (odległość między elementami dyskretnymi wynosi 0.2 mm) spełnia warunek (11.13), natomiast w tym przypadku warunek ten nie jest spełniony przez rozmiary elementów skończonych. Zbadano propagację wzbudzonego impulsu wzdłuż osi  $x$  (rys. 11.16b) i przejście tego impulsu przez granicę podobszarów MED/MES dla czterech różnych połączeń:

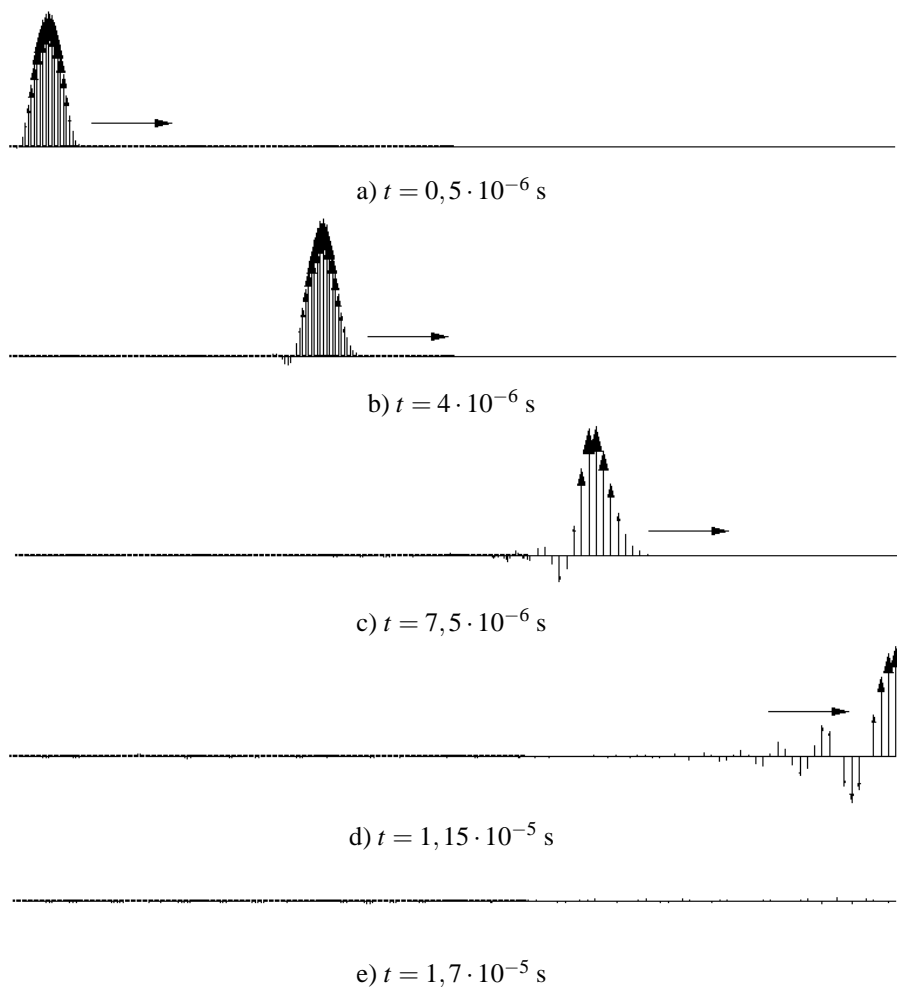
- metoda mnożników Lagrange’a bez zachodzenia na siebie obszarów (rys. 11.16c),
- metoda funkcji kary bez zachodzenia na siebie obszarów (rys. 11.16d),
- metoda mnożników Lagrange’a z zachodzeniem na siebie obszarów (rys. 11.16e),
- metoda funkcji kary z zachodzeniem na siebie obszarów (rys. 11.16f).

Można zauważyć (rys. 11.16b), że impuls dochodzący do połączenia podobszarów MED i MES składa się z podstawowej częstotliwości i z drgań o wyższej częstotliwości. Może to się wiązać z niezbyt dokładną reprezentacją fali w badanym modelu dyskretnym. Przy przemieszczaniu się impuls ulega pewnemu rozproszeniu. Przykład ten pozwala nam zbadać zachowanie się połączenia przy przejściu fal o różnej częstotliwości. Fala odpowiadająca podstawowej częstotliwości drgań przechodzi przez połączenie we wszystkich badanych sposobach sprzężenia (rys. 11.16c–f). W większości badanych przypadków pojawiają się odbicia fal, odpowiadających drganiom o wyższej częstotliwości (rys. 11.16c–e). Jedynie w przypadku zachodzących na siebie podobszarów, sprzężonych za pomocą funkcji kary, odbicia te są minimalne (rys. 11.16f). Jest to najbardziej pożądane zachowanie się sprzężenia podobszarów MED/MES. Pozwala to przypuszczać, że metoda ta wykazuje najlepsze właściwości rozpraszające (absorpcyjne) dla drgań o wyższej częstotliwości, przepuszczając jednocześnie fale o niższej częstotliwości.

W następnym przykładzie zbadamy przejście impulsu przez połączenie zachodzących na siebie podobszarów MED i MES sprzężonych za pomocą funkcji kary z dodatkowym tłumieniem w obszarze przejściowym z MED do MES, według sformułowania przedstawionego w podrozdziale 9.5.5. Na prawym brzegu całego obszaru zamiast utwierdzenia wprowadzono absorpcyjne warunki brzegowe (rys. 11.17a). Można zaobserwować rozproszenie drgań o wyższej częstotliwości w obszarze przejściowym (rys. 11.17c) – tłumienie wzmacnia ten efekt. Fale o niższej częstotliwości przechodzą do obszaru MES, przemieszczają się w kierunku prawego brzegu, na którym są całkowicie pochłaniane (rys. 11.17d,e). Przykład ten pokazuje poprawnie działający hybrydowy model MED/MES z tłumieniem drgań o wyższej częstotliwości na granicy podobszarów MED i MES oraz pochłanianiem energii na sztucznym brzegu z wprowadzonymi absorpcyjnymi warunkami brzegowymi.



Rys. 11.16. Przemieszczanie się podłużnego impulsu falowego wzdłuż pręta dyskretyzowanego elementami dyskretnymi i skończonymi przy połączeniu zachodzących na siebie podobszarów MES i MED za pomocą metody funkcji kary.



Rys. 11.17. Przemieszczanie się podłużnego impulsu falowego wzdłuż pręta dyskretyzowanego elementami dyskretnymi i skończonymi przy połączeniu zachodzących na siebie podobszarów MES i MED za pomocą metody funkcji kary, tłumienie dodane w obszarze połączenia, na prawym końcu warunek absorpcji.

Z punktu widzenia hybrydowego modelowania MED/MES głównym osiągnięciem w powyższym rozdziale jest zbadanie przejścia fali przez połączenie obszarów MED i MES. Celem przeprowadzonych badań było określenie optymalnej metody sprzężenia, pozwalającej na przepuszczenie fal o niskiej częstotliwości z obszaru MED do obszaru MES i zapewniającej dysypację fal o wysokiej częstotliwości, tym samym wyeliminowanie nierzeczywistego odbicia fal, o długości zbyt małej dla ich właści-

wej reprezentacji w obszarze dyskretyzowanym MES. W zintegrowanym programie MED/MES implementowano cztery metody sprzężenia obszarów MED i MES:

- metoda mnożników Lagrange'a bez zachodzenia na siebie obszarów,
- metoda funkcji kary bez zachodzenia na siebie obszarów,
- metoda mnożników Lagrange'a z zachodzeniem na siebie obszarów,
- metoda funkcji kary z zachodzeniem na siebie obszarów.

Testy numeryczne pokazały, że przepuszczalność fal o niskiej częstotliwości jest poprawnie modelowana we wszystkich metodach sprzężenia. Najlepsze właściwości tłumiące dla fal o wysokiej częstotliwości wykazuje metoda sprzężenia za pomocą funkcji kary z zachodzeniem na siebie obszarów MED i MES. Właściwości te można jeszcze poprawić przez wprowadzenie tłumienia w obszarze przejściowym.

Powyższy rozdział pokazuje poprawne działanie jednego z ważniejszych elementów w hybrydowym modelu MED/MES.

## **Podsumowanie**

W powyższym rozdziale rozpatrywano zagadnienia związane z propagacją fal w problemach modelowanych za pomocą metody elementów dyskretnych, metody elementów skończonych oraz w sprzężonych modelach MED/MES. Szczególną uwagę zwrócono na odbicia fal na brzegach i na granicy podobszarów o różnych modelach dyskretnych. Analiza przykładów testowych pokazała, że stosowane modele MED i MES poprawnie przedstawiają zagadnienie propagacji fali i odbicia na brzegu swobodnym i utwierdzonym.

Rozwiązano problem pochłaniania energii drgań na sztucznym brzegu, stosowanym dla ograniczenia analizowanego obszaru. W tym celu implementowano absorpcyjne warunki brzegowe, oparte na lepkiem modelu zaproponowanym w [177]. Wykonane testy numeryczne pokazały efektywność tego sformułowania zarówno na brzegu obszaru modelowanego elementami skończonymi, jak i na brzegu obszaru modelowanego elementami dyskretnymi. Absorpcyjne warunki brzegowe zapewniają pochłanianie energii fal wychodzących na zewnątrz obszaru.

Przeprowadzono badania efektów falowych na powierzchni nieciągłości występującej między ośrodkami o różnej oporności falowej. Uzyskano jakościowo i ilościowo poprawne modelowanie przejścia fali przez powierzchnię nieciągłości. Uzyskane numerycznie wartości współczynnika odbicia i przepuszczalności są zgodne z przewidywanymi teoretycznie.



## 12. Modelowanie procesu wytwarzania formy piaskowej w odlewaniu technologią traconego modelu

### Wstęp

Rozdział ten przedstawia przykład wykorzystania metody elementów dyskretnych do modelowania materiałów granularnych. Jest to jedno z najbardziej typowych zastosowań metody elementów dyskretnych [57, 41, 81, 167, 199, 15, 282, 298]. W niniejszym rozdziale modelowanie materiałów granularnych pokazano na praktycznym przykładzie procesu wytwarzania piaskowej formy w odlewaniu metodą traconego modelu. W rozpatrywanym procesie następuje zasypywanie piaskiem modelu styropianowego umieszczonego w skrzynce oraz zagęszczanie piasku przez wibrację. W modelowaniu zostaną również wykorzystane możliwości stosowania modeli hybrydowych. Razem z elementami dyskretnymi reprezentującymi piasek do dyskretyzacji zasypywanego modelu zostaną zastosowane elementy skończone.

### 12.1 Opis procesu odlewania technologią traconego modelu

Odlewanie metodą traconego modelu, zwaną również metodą zgazowywanego modelu, metodą wypalanych modeli lub metodą pełnej formy (*ang.* LFC – lost foam casting lub EPC – expendable pattern casting), jest technologią, w której stosuje się jednorazowy model ze spienionego polistyrenu (styropianu), pozostający w formie piaskowej w trakcie zalewania [223]. Model jest wytapiany i zgazowywany przez ciekły metal. Metal wypełnia wnękę formy, zastępując model i odwzorowując jego kształt. Metoda ta ma liczne zalety w porównaniu z innymi technologiami odlewniczymi. Do zalet należy m.in. możliwość uzyskania odlewu o dużej dokładności wykonania, brak potrzeby stosowania obróbki mechanicznej odlewu, wyeliminowanie rdzeni, możliwość wykonania odlewów o skomplikowanych kształtach. Metoda traconego modelu daje tym samym dużą swobodę projektantowi, niedostępną w innych technologiach odlewniczych. Z drugiej jednak strony metoda ta stwarza również pewne trudności, do których zaliczają się problemy związane z wytworzeniem odpowiedniej formy piaskowej.

Proces wytwarzania formy rozpoczyna się od umieszczenia modelu na warstwie piasku. Model jest zasypywany do całkowitego pokrycia suchym, sytkim piaskiem. Piasek w celu zagęszczenia poddaje się wibracji. Po zagęszczeniu piasku forma może być zalewana metalem.

Zagęszczanie formy piaskowej poprzez wibrację jest jednym z ważniejszych etapów procesu odlewania metodą traconego modelu i może mieć zasadniczy wpływ na jakość odlewu. Wibracja ma zapewnić odpowiednią i równomierną gęstość piasku oraz doprowadzić do wypełnienia przez piasek wszystkich wnęk wokół modelu. Dodatkowym problemem, który może wystąpić w trakcie wytwarzania formy piaskowej, jest możliwość odkształcenia się modelu styropianowego, prowadząca do defektów kształtu odlewu. Nie istnieją ścisłe reguły dobrania odpowiednich parametrów i sposobu wibracji, dlatego proces wibracji ustala się metodą prób i błędów.

## 12.2 Główne założenia modelu numerycznego

Celem opracowanego modelu matematycznego jest symulacja procesu zasypywania formy piaskiem oraz zagęszczania piasku poprzez wibrację. Zjawiskami fizycznymi, z którymi mamy do czynienia, jest przepływ materiału sypkiego (piasku) wokół sztywnych lub odkształcalnych obiektów (model, skrzynka) pod wpływem sił ciężkości oraz drgań skrzynki.

Spośród różnych możliwości modelowania, włącznie z modelami ciągłymi, wydaje się, że model numeryczny zbudowany w oparciu o metodę elementów dyskretnych stanowi najlepsze narzędzie do badania zagęszczania piasku. W trakcie tego procesu drgania podłoża wzbudzają ruch cząstek, poprawiający ich upakowanie, co daje w efekcie wzrost gęstości. Trudno byłoby uwzględnić efekt poprawy upakowania ziaren piasku stosując sformułowanie w oparciu o mechanikę ośrodka ciągłego.

Opracowany algorytm metody elementów dyskretnych daje możliwość stosowania cząstek o różnych wymiarach, co pozwala uwzględnić rozkład wielkości ziaren piasku, aczkolwiek nie pretenduje się do reprezentacji pojedynczych ziaren piasku poprzez cząstki modelu numerycznego. Testy numeryczne pokazują, że model składający się z cząstek znacznie większych niż ziarna piasku oddaje dobrze makroskopowe cechy ruchu materiału sypkiego. W modelowaniu numerycznym dąży się do stosowania możliwie dużej liczby elementów o jak najmniejszych wymiarach, jednak zbyt duży model może prowadzić do bardzo długich czasów obliczeń.

Integracja metody elementów dyskretnych i metody elementów skończonych pozwala zastosować model hybrydowy, w którym zostanie uwzględniony styropianowy model dyskretyzowany elementami skończonymi. Dzięki temu możliwe będzie badanie odkształcania modelu w trakcie zasypywania piaskiem oraz w trakcie zagęszczania piasku przez wibrację.

## 12.3 Określenie parametrów modelu elementów dyskretnych

Jako główny parametr makroskopowy, charakteryzujący piasek w warunkach zagęszczania przez wibrację, można uznać kąt naturalnego usypu [180]. Kąt naturalnego

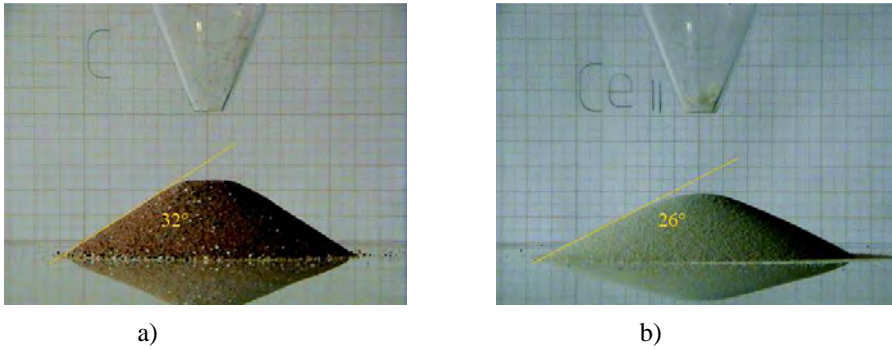
usypu zależy od wzajemnej ruchliwości cząstek (ziarn), która jest uwarunkowana siłami spójności i oporami tarcia. W produkcji formy w technologii odlewania metodą traconego modelu stosuje się suchy sypki piasek, co uzasadnia pominięcie sił spójności (kohezji) w modelowaniu oddziaływania między elementami dyskretnymi. Uwzględniony będzie opór tarcia poślizgowego i tocznego. Porównanie wyników doświadczalnych i numerycznych dla testu, wyznaczającego kąt naturalnego usypu, pozwoli dobrać parametry tarcia poślizgowego i tocznego dające pożądane zachowanie makroskopowe zbioru elementów dyskretnych modelujących piasek.

Testy numeryczne wykazały, że najistotniejszymi parametrami mikroskopowymi mającymi wpływ na wielkość kąta naturalnego usypu są współczynniki rozwiniętego tarcia poślizgowego i tocznego. Można zaniedbać wpływ parametrów funkcji kary, charakteryzujących sprężystą część oddziaływania między cząstkami. W ruchu zdominowanym przez siły ciężkości, z którym mamy do czynienia w badanym zagadnieniu, współczynniki te nie mają znaczącego wpływu na ruch makroskopowy. Wielkość tłumienia dla oddziaływania kontaktowego dobrano tak, by uzyskać quasi-statyczną konfigurację końcową. Oddziaływanie sprężyste i tłumienie ma wpływ na przemieszczenia piasku poddanego wibracji. Parametry funkcji kary i współczynniki tłumienia będą dokładniej badane w testach numerycznych przedstawionych w podrozdziale 12.1.

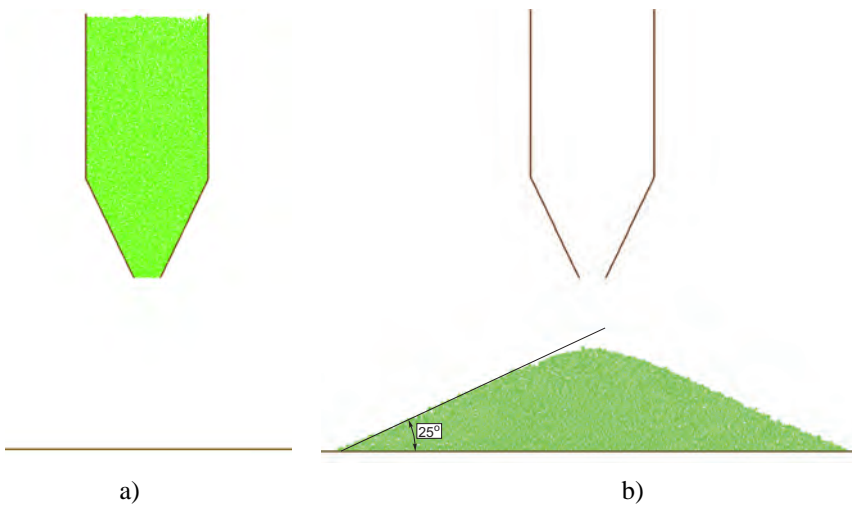
Przeprowadzono proste badania doświadczalne, mające na celu wyznaczenie kąta naturalnego usypu dla różnych rodzajów piasku, stosowanych w różnych odlewniach do produkcji form w procesach odlewania metodą traconego modelu (rys. 12.1). Otrzymano wartości kąta usypu w zakresie od  $25^\circ$  do  $36^\circ$ , przy czym najniższa wartość  $25 - 26^\circ$  charakteryzuje sztuczny materiał sypki Cerabead o regularnym kształcie ziarn.

W celu weryfikacji modelu numerycznego przeprowadzono symulacje tych testów, stosując model dwuwymiarowy (rys. 12.2). Piasek był reprezentowany przez zbiór 10700 elementów walcowych o promieniu od 0.3 do 1.35 mm; przyjęty rozmiar cząstek w modelu numerycznym jest około czterokrotnie większy od rzeczywistego rozmiaru ziaren piasku. Rozkład wielkości cząstek przyjęto zgodnie z rzeczywistym rozkładem wielkości ziaren piasku, uzyskanym w analizie sitowej.

W modelowaniu oddziaływania kontaktowego elementów dyskretnych założono model z tarciami bez kohezji, opisany w rozdziale 7.3, połączony z modelem tarcia tocznego opisanego równaniami (7.48)–(7.50) z regularyzacją daną równaniem (7.52). Uwzględnienie oporu toczenia pozwala uzyskać bardziej realistyczny model materiału sypkiego [156]. W modelu uwzględniono tłumienie oddziaływania kontaktowego, dane równaniem (7.29), oraz wprowadzono minimalne tłumienie niewiskotyczne, zdefiniowane równaniami (7.57) i (7.58).



Rys. 12.1. Doświadczalne wyznaczenie kąta naturalnego usypu piasku: a) piasek rzeczywisty, b) piasek sztuczny.



Rys. 12.2. Numeryczne wyznaczenie kąta naturalnego usypu piasku: a) konfiguracja początkowa, b) konfiguracja końcowa.

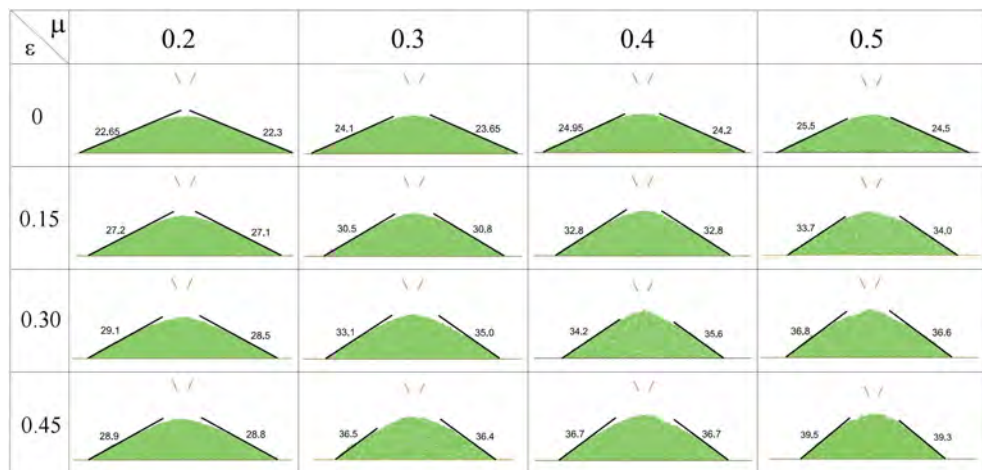
Zbiór parametrów definiujących model elementów dyskretnych jest następujący: gęstość  $\rho$ , sztywność kontaktu między cząstkami  $k_n$  i  $k_s$ , współczynnik tarcia Coulomba  $\mu$ , współczynnik tłumienia kontaktu  $\xi$ , parametry definiujące kontakt między cząstkami a powierzchniami innych obiektów – sztywność  $k_n^p$  i  $k_s^p$ , współczynnik tarcia Coulomba  $\mu^p$ , współczynnik tłumienia w kontakcie między cząstkami a powierzchniami  $\xi^p$ , parametry definiujące tarcie toczne między cząsteczkami oraz między cząsteczkami i powierzchniami sztywnymi,  $a_s$  i  $k_s^{\text{rot}}$ , współczynniki tłumienia zewnętrznego  $\alpha^{\text{nvt}}$  i  $\alpha^{\text{nvr}}$ . W modelu tarcia tocznego założono, że współczynnik  $a_s$  można wyrazić poprzez bezwymiarowy współczynnik  $\varepsilon$  i promień mniejszego z kontaktujących się elementów  $r$  jako

$$a_s = \varepsilon r. \quad (12.1)$$

Końcowym wynikiem symulacji była pryzma piasku o danym kącie usypu (rys. 12.2b). Badając wpływ różnych parametrów modelu na wielkość kąta usypu stwierdzono, że największe znaczenie mają współczynniki tarcia poślizgowego i tocznego między elementami dyskretnymi. Obliczenia przeprowadzono dla szerokiego przedziału wartości współczynników  $\mu$  i  $\varepsilon$  przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów podanych w tabeli 12.1. Założono, że parametry określające opór toczenia po powierzchni są równe parametrom definiującym tarcie toczne między elementami dyskretnymi.

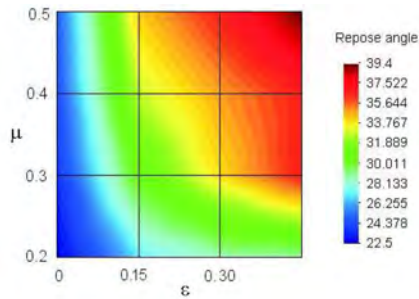
Tabela 12.1. Parametry modelu do wyznaczania kąta naturalnego usypu piasku.

$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$k_n$ N/m	$k_s$ N/m	$\xi$	$k_n^p$ N/m	$k_s^p$ N/m	$\mu^p$	$\xi^p$	$\alpha^{nvt}$	$\alpha^{nvr}$
2400	$7 \cdot 10^4$	$7 \cdot 10^4$	1.0	$2 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$	0.35	0.95	0.03	0.3



Rys. 12.3. Konfiguracja pryzmy piasku przy różnych wartościach współczynników tarcia poślizgowego i tocznego.

Zmieniając współczynnik tarcia poślizgowego  $\mu$  w zakresie 0.2–0.5, oraz współczynnik charakteryzujący tarcie toczne  $\varepsilon$  w zakresie 0–0.45 uzyskano kąty naturalnego usypu w zakresie od 22° do 39° (rys. 12.3). Zależność kąta naturalnego usypu piasku od współczynników tarcia poślizgowego i tocznego pokazano graficznie na rys. 12.4.

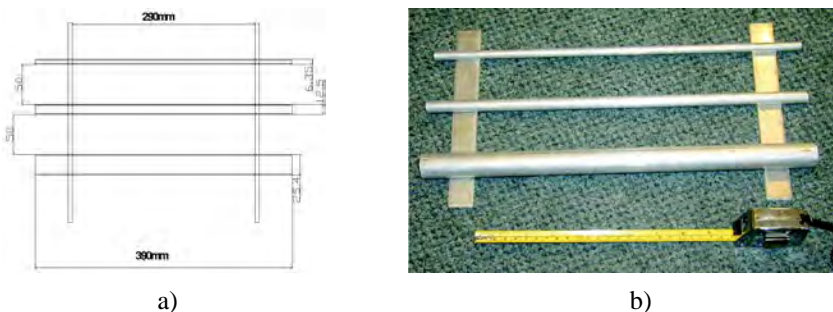


Rys. 12.4. Zależność kąta naturalnego usypu piasku od współczynników tarcia poślizgowego i tocznego.

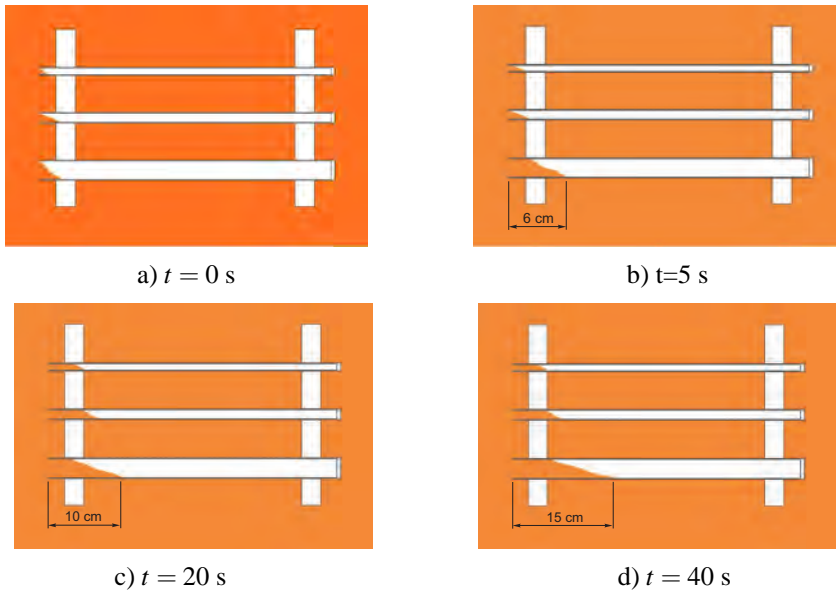
## 12.4 Eksperymentalne i numeryczne badanie ruchu piasku pod wpływem drgań

Przeprowadzono symulację numeryczną przemieszczania się piasku w poziomych rurach (rys. 12.5) umieszczonych w skrzynce odlewniczej i zasypanych piaskiem pod wpływem drgań skrzynki w kierunku pionowym, o częstotliwości 50 Hz i amplitudzie przyspieszenia 150% przyspieszenia grawitacyjnego. Wyniki badań doświadczalnych przedstawia rys. 12.6.

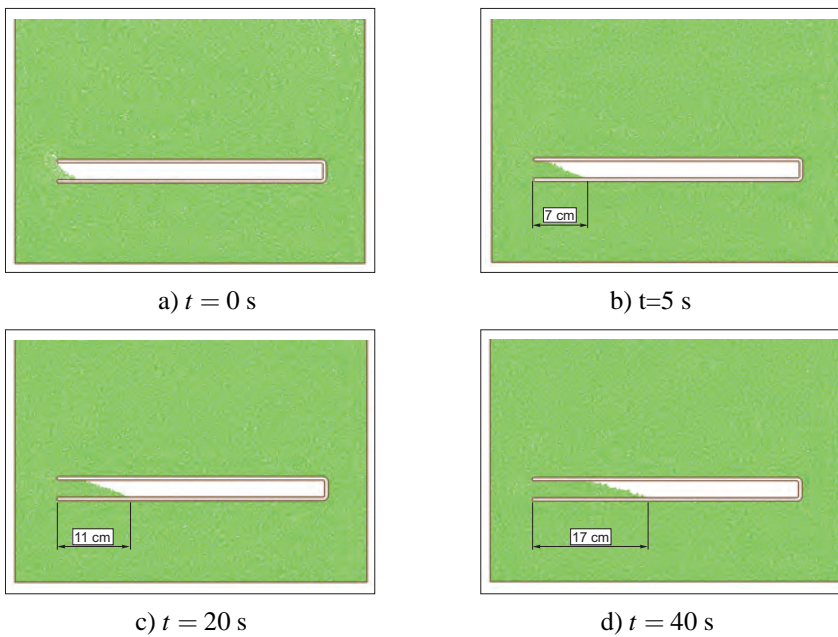
W analizie numerycznej badano ruch piasku jedynie w rurze o największej średnicy. Wykorzystano model dwuwymiarowy, w którym zastosowano 64 000 cząstek walcowych o różnej średnicy (rozkład wielkości ziaren przyjęto proporcjonalnie do wyników analizy sitowej piasku rzeczywistego). Wyniki analizy numerycznej są pokazane na rys. 12.7. Przykład ten wykorzystano do wyznaczenia wielkości tłumienia i sprężystego oddziaływania między cząstkami. Współczynniki tłumienia i funkcji kary dobierano tak, by uzyskać zgodność wyników numerycznych z wynikami doświadczalnymi. Zgodność tę można zauważyć porównując rysunki 12.6 i 12.7.



Rys. 12.5. Zestaw rur stosowanych w eksperymencie: a) definicja geometrii, b) widok rur.



Rys. 12.6. Ruch piasku w rurach poziomych wzbudzony przez wibrację – doświadczenie.

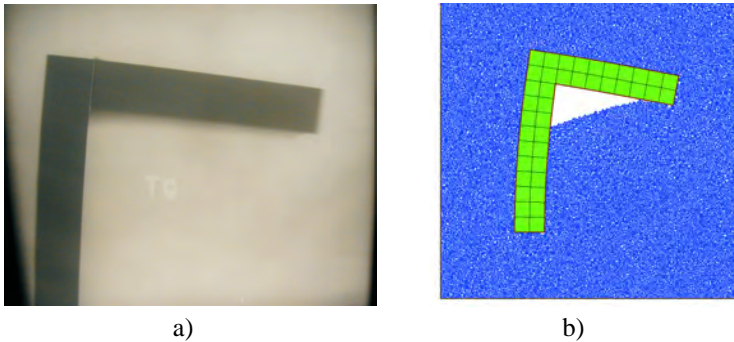


Rys. 12.7. Ruch piasku w rurach poziomych wzbudzony przez wibrację – wyniki numeryczne.

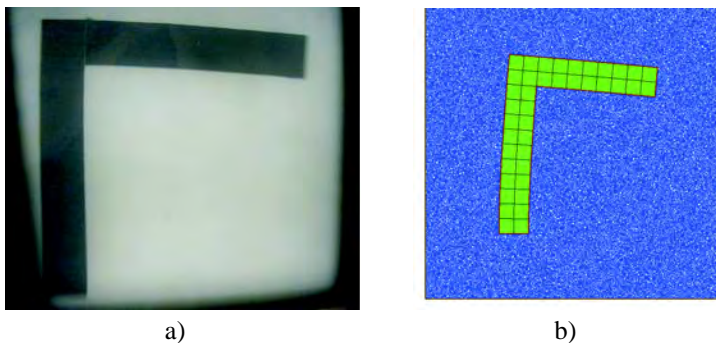
Symulacja przepływu piasku poddanego wibracji ujawnia jedną z głównych wad metody elementów dyskretnych – długi czas obliczeń dla dużych modeli analizowanych w długim przedziale czasu. Analiza ruchu 64 000 cząstek w czasie 40 s wymagała około 750 tys. kroków całkowania, co zajęło około 60 godz. CPU na komputerze z procesorem Xeon 3.4 GHz.

## 12.5 Eksperymentalne i numeryczne badania odkształcania modelu w trakcie zasypywania i zagęszczania

Przeprowadzono badania doświadczalne i numeryczne odkształcania modelu styropianowego w procesie produkcji formy piaskowej. W badaniach wykorzystano model części o bardzo prostej geometrii, w kształcie odwróconej litery L. Kształt i ustawienie modelu miały ułatwić wystąpienie dużych odkształceń w trakcie zasypywania go piaskiem (rys. 12.8a). Podczas wibracji piasek wypełnia wnękę pod poziomą półką i wyrównuje nieco naciski na model zmniejszając jego odkształcenie (rys. 12.9a).



Rys. 12.8. Odształcony model po zasypyaniu piaskiem: a) doświadczenie, b) symulacja.



Rys. 12.9. Odształcony model po wibracji: a) doświadczenie, b) symulacja numeryczna.



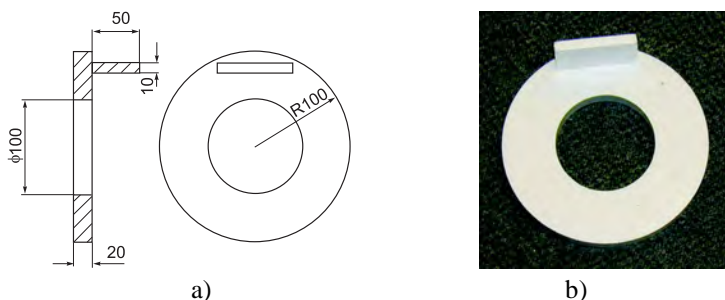
Podobne odkształcenie modelu otrzymuje się w przeprowadzonej symulacji numerycznej. Wyniki numeryczne są przedstawione na rys. 12.8b i 12.9b. Na rys. 12.8b przedstawiony jest odkształcony model z niezapełnioną piaskiem wnęką pod poziomą półką, a rys. 12.9b pokazuje kształt modelu i wypełnienie formy piaskiem po wibracji. Wskutek drgań piasek przemieścił się, wypełniając przestrzeń wokół modelu i zmniejszając jego odkształcenie. Rysunki 12.8 i 12.9 pokazują bardzo dobrą zgodność między wynikami analizy numerycznej i wynikami badań doświadczalnych.

Analiza numeryczna była przeprowadzona przy użyciu modelu łączącego metodę elementów dyskretnych i metodę elementów skończonych. Model styropianowy został zdyskretyzowany czworokątnymi elementami, modelującymi płaski stan odkształcenia. Gęstość styropianu wynosi  $\rho = 12 \text{ kg/m}^3$ , styropian jest traktowany jako materiał liniowo sprężysty, charakteryzowany przez moduł Younga  $E = 6.4 \text{ MPa}$  i współczynnik Poissona  $\nu = 0.35$ .

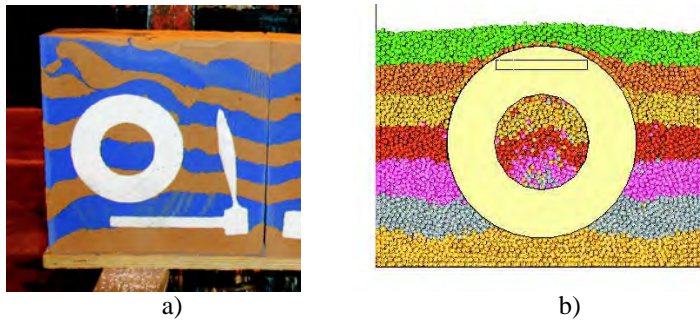
## 12.6 Symulacja zasypywania i zagęszczania piasku dla modelu trójwymiarowego

Badano doświadczalnie i numerycznie zasypywanie trójwymiarowego modelu o kształcie pierścienia z poziomą półką, pokazanego na rys. 12.10. Piasek dodawano do skrzynki odlewniczej warstwami, a między sypaniem kolejnych warstw skrzynkę poddawano wibracji. Dla zaznaczenia warstw stosowano odpowiednio zabarwiony piasek. Na rys. 12.11a pokazano przekrój rzeczywistej formy piaskowej z widocznymi warstwami piasku. W analizie numerycznej uzyskano podobne ułożenie warstw piasku, co jest widoczne na rys. 12.11b.

Przykład ten wykorzystano do zbadania efektywności numerycznej opracowanego algorytmu wykrywania kontaktu przedstawionego w podrozdziale 10.2. W przykładzie badano kontakt między dużą liczbą elementów dyskretnych – każdą warstwę piasku modelowano za pomocą 25 tysięcy cząstek, w końcowym etapie model liczył 175



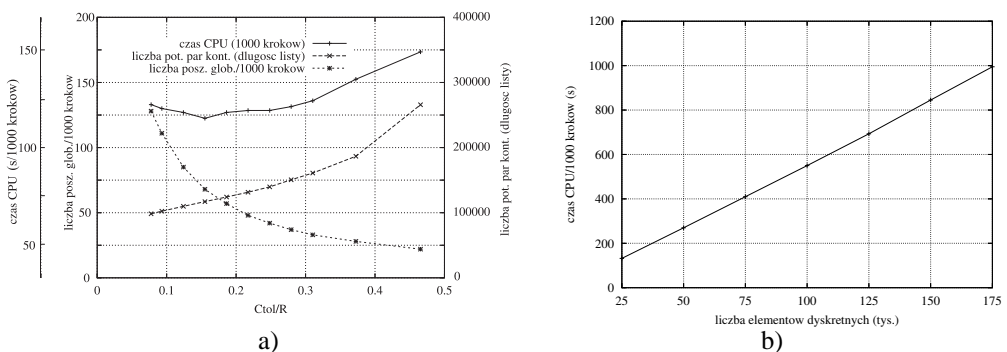
Rys. 12.10. Trójwymiarowy model: a) definicja geometrii, b) styropianowy model.



Rys. 12.11. Przekrój przez formę z widocznymi warstwami piasku: a) doświadczenie, b) symulacja numeryczna.

tysięcy cząstek. Jako miarę efektywności przyjęto czas CPU 1000 kroków całkowania w końcowej fazie wibracyjnego zagęszczania pierwszej warstwy piasku. Efektywność dwuetapowego algorytmu zależy od częstotliwości przeprowadzania i efektywności globalnego poszukiwania kontaktu oraz efektywności lokalnego wykrywania kontaktu. Obydwa czynniki zależą od doboru wprowadzonego w podrozdziale 10.2.2 parametru  $c_{tol}$ . Parametr ten stanowi kryterium dla uznania dwóch elementów jako potencjalnie kontaktujących się i umieszczenia ich na liście par obiektów sprawdzanych w etapie lokalnego wykrywania kontaktu. Im większa wartość parametru  $c_{tol}$ , tym dłuższa lista potencjalnie kontaktujących się par elementów i można oczekiwać dłuższego czasu wymaganego dla lokalnego sprawdzenia kontaktu. Z drugiej strony większa wartość  $c_{tol}$  pozwala zmniejszyć częstotliwość globalnego poszukiwania kontaktu. Można oczekiwać, że istnieje pewna optymalna wartość  $c_{tol}$ , dla której czas wykrywania kontaktu jest najmniejszy.

Na rys. 12.12a zilustrowano wpływ  $c_{tol}$  na efektywność wykrywania kontaktu. Badania przeprowadzono w zakresie  $c_{tol} = 0.075R - 0.47R$ , gdzie  $R = 29$  mm jest śred-



Rys. 12.12. Efektywność numeryczna algorytmu wykrywania kontaktu: a) wpływ parametru  $c_{tol}$ , b) zależność czasu obliczeń od liczby elementów.

nim promieniem elementów dyskretnych stosowanych w modelu. Jedna z krzywych pokazuje zmianę liczby globalnego poszukiwania kontaktu (odwrotnie proporcjonalną do częstotliwości) przypadającą na badane 1000 kroków całkowania. Druga z krzywych pokazuje zmianę długości listy potencjalnie kontaktujących się par elementów. Trzecia krzywa pokazuje czas CPU dla badanych 1000 kroków całkowania. Widać, że początkowo ze wzrostem parametru  $c_{tol}$ , czas CPU maleje dzięki temu, że zmniejsza się liczba globalnego poszukiwania kontaktu. Jednocześnie jednak wydłuża się lista potencjalnie kontaktujących się elementów, co powoduje, że od pewnej wartości  $c_{tol}$  czas CPU zaczyna rosnąć. Minimalną wartość czasu CPU uzyskano dla  $c_{tol} = 0.155R$ .

Na rys. 12.12b pokazano zmianę czasu CPU wraz ze wzrostem liczby elementów dyskretnych. Czasy CPU określano dla 1000 kroków całkowania w fazie wibracyjnego zagęszczania piasku po zasypaniu modelu kolejnymi warstwami piasku. Dzięki temu zbadano zmianę czasu wykrywania kontaktu dla liczby elementów rosnącej od 25 do 175 tysięcy co 25 tysięcy. Uzyskano prawie liniową zmianę czasu CPU, co świadczy jest, że opracowany algorytm wykrywania kontaktu jest rzędu  $N$ . Pozwala to spodziewać się dobrej efektywności numerycznej tego algorytmu również w jeszcze większych modelach.

Mimo efektywnego algorytmu numerycznego ogólny czas obliczeń jest długi. Dla pełnego modelu liczącego 175 tysięcy elementów analiza przedziału czasu 3 s wymaga około 170 tys. kroków i zajmuje około 48 godz. CPU komputera z procesorem Xeon 3.4 GHz.

## Podsumowanie

W tym rozdziale pokazano, że metoda elementów dyskretnych jest bardzo dobrym narzędziem do modelowania przepływów materiałów granulanych. Analiza procesu wytwarzania formy piaskowej w odlewaniu technologią traconego modelu może być wykorzystana do bardziej racjonalnego projektowania procesu wytwarzania formy piaskowej. Numeryczna symulacja pozwala przewidzieć możliwość wystąpienia defektów formy, polegających na niedostatecznym zagęszczeniu piasku i złym wypełnieniu piaskiem wnęk wokół modelu.

Przedstawione przykłady pokazują również możliwości stosowania modeli hybrydowych. Razem z elementami dyskretnymi, reprezentującymi piasek, zastosowano metodę elementów skończonych do dyskretyzacji zasypywanego modelu styropianowego. Dało to możliwość badania deformacji modelu w trakcie zasypywania i zagęszczania przez wibrację. Wyniki analizy numerycznej przedstawione w niniejszym rozdziale są porównane z wynikami badań doświadczalnych. Można zaobserwować dobrą zgodność porównywanych wyników.

Zastosowanie modelowania w praktyce do wyznaczenia optymalnych parametrów procesu produkcji form, np. kierunku, częstotliwości, amplitudy i czasu drgań wymaga dalszych prac badawczych. Istotnym ograniczeniem jest również czas obliczeń. Aczkolwiek algorytm numeryczny charakteryzuje się dużą efektywnością obliczeniową, analiza procesu zagęszczania piasku jest długotrwała, co w chwili obecnej ogranicza zastosowanie metody do stosunkowo prostych geometrii. W przyszłości planowane są prace nad wprowadzeniem obliczeń równoległych.

Więcej wyników numerycznych uzyskanych przez autora można znaleźć w [259]. Wyniki prac nad modelowaniem procesu wytwarzania formy piaskowej zostały również opublikowane w języku polskim w [242, 243]. Praca została wykonana częściowo w ramach europejskiego projektu badawczego GRD1-2000-25243: Shortening Lead Times and Improving Quality by Innovative Upgrading of the Lost Foam Process.

# 13. Modelowanie skał metodą elementów dyskretnych

## Wstęp

Metoda elementów dyskretnych jest powszechnie uznawana jako doskonale nadająca się do modelowania skał [57, 41, 199, 298]. Model materiału skalnego zbudowany za pomocą elementów dyskretnych można traktować jako fizycznie zgodny ze strukturą polikrystaliczną i ziarnistą, charakteryzującą rzeczywiste skały. W prosty sposób można również uwzględnić nieciągłości istniejące i powstające w trakcie odkształcania skały.

Zasadniczym problemem w modelowaniu materiału jest dokładne oddanie właściwości makroskopowych materiału. Model materiału w metodzie elementów dyskretnych jest zdefiniowany przez zbiór parametrów mikroskopowych (por. rozdział 8.2), których nie można wyznaczyć w sposób bezpośredni za pomocą pomiarów, ani za pomocą rozważań teoretycznych. Metody homogenizacji i uśredniania przedstawione w rozdziale 8 pozwalają znaleźć przejście od modelu mikroskopowego do makroskopowego dla zakresu liniowego, podczas gdy zachowanie się skał w trakcie odkształcania charakteryzuje się występowaniem efektów nieliniowych.

W niniejszym rozdziale zostaną zbadane makroskopowe własności materiału modelowanego za pomocą metody elementów dyskretnych na podstawie symulacji dwóch podstawowych testów laboratoryjnych stosowanych do wyznaczania właściwości skał: próby jednoosiowego ściskania oraz próby poprzecznego ściskania (próby brazylijskiej). Wyniki doświadczalne zostały użyczone przez laboratorium zakładów Sandvik Mining and Construction (dawniej Voest-Alpine Bergtechnik) w Zeltweg (Austria).

Nieznane parametry dowolnego modelu numerycznego mogą być wyznaczone za pomocą metod analizy odwrotnej, która najczęściej jest formułowana jako problem optymalizacji [226, 96, 40, 166]. Przedstawienie różnych metod identyfikacji parametrów modeli materiałów można znaleźć np. w [192]. W niniejszej pracy do wyznaczenia parametrów modelu mikroskopowego (elementów dyskretnych), przy zadanych własnościach makroskopowych, zostaną wykorzystane bezwymiarowe zależności między parametrami mikroskopowymi i makroskopowymi zaproponowane na podstawie analizy wymiarowej w [117]. Postać tych zależności zostanie ustalona na podstawie symulacji próby jednoosiowego ściskania dla pewnego przedziału warto-

ści parametrów mikroskopowych. Zależności te zostaną zastosowane w celu dobrania parametrów mikroskopowych do modelu skały o zadanych właściwościach mechanicznych. Dla przyjętych parametrów mikroskopowych zostaną przeprowadzone sprawdzające symulacje próby jednoosiowego ściskania oraz próby brazylijskiej.

W niniejszym rozdziale zostaną również zastosowane i zweryfikowane algorytmy obliczenia naprężeń makroskopowych w modelu metody elementów dyskretnych, przedstawione w rozdziale 8.

### 13.1 Podstawowe właściwości mechaniczne skał

W niniejszym rozdziale będzie rozpatrywane modelowanie skały zwięzłej, będącej zbiorem minerałów o mniej więcej jednakowym śladzie i podobnej budowie geologicznej. Skałę zwięzłą charakteryzują drobne, na ogół niewidoczne spękania, duża spójność, mała porowatość, mała ściśliwość oraz stosunkowo nieduża anizotropia.

W praktyce stosuje się wiele wielkości, charakteryzujących własności mechaniczne skał, często związanych z konkretnymi badaniami laboratoryjnymi próbek materiału skalnego. Do najważniejszych metod badania doświadczalnego skał należą:

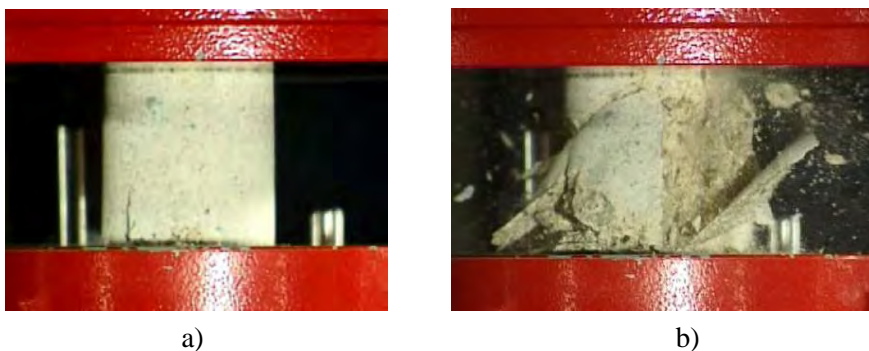
- próba jednoosiowego ściskania,
- próba poprzecznego ściskania (test brazylijski),
- próba trójosiowego ściskania,
- badanie wytrzymałości skał na ścinanie.

W niniejszej pracy będą badane właściwości skał wyznaczone na podstawie próby jednoosiowego ściskania oraz próby brazylijskiej. Testy te należą do testów zalecanych do oceny podatności skał na mechaniczne urabianie [201]. Procesy mechanicznego urabiania skał będą badane w dalszej części pracy.

#### 13.1.1 Próba jednoosiowego ściskania

Próba jednoosiowego ściskania polega na obciążeniu próbki skały zwięzłej, w kształcie prostopadłościanu lub walca, siłą ściskającą wzdłuż osi podłużnej prostopadłościanu lub tworzącej walca, równomiernie wzrastającą aż do osiągnięcia siły niszczącej próbkę. Rysunek 13.1 przedstawia próbkę walcową umieszczoną między płytami prasy wytrzymałościowej i poddaną próbie jednoosiowego ściskania.

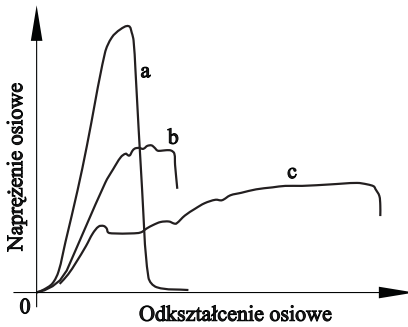
Normy zazwyczaj zalecają stosowanie próbek w kształcie walca, np. [230]. W przypadku trudności z odwierceniem próbek w kształcie walca dopuszcza się próbki prostopadłościenne. Zalecana średnica próbek walcowych wynosi od 42 do 54 mm [230]. Badania wytrzymałości na ściskanie wykonuje się dla próbek o smukłości (stosunku wysokości próbki  $h$  do średnicy jej podstawy  $d$ ), od 1 do 3. Normy zalecają



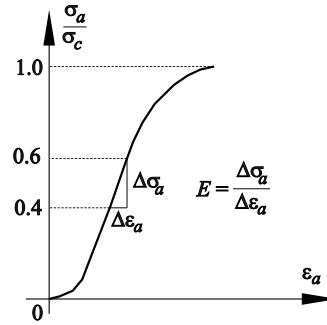
Rys. 13.1. Próba jednoosiowego ściskania: a) przed zniszczeniem próbki, b) podczas niszczenia próbki (zdjęcia uzyskane przez Sandvik Mining and Construction w Zeltweg, Austria).

zazwyczaj, aby smukłość próbki wynosiła co najmniej 2. ISRM [123] rekomenduje próbki o smukłości 2.5 – 3, a polska norma PN-G-04303 [230], podobnie jak norma ASTM D2938 [12], zaleca próbkę o smukłości 2. Niemniej jednak niektóre normy zalecają lub dopuszczają stosowanie próbek o równej wysokości i średnicy (o smukłości 1), np. norma DIN 52105 [83], polska norma dla materiałów kamiennych PN-EN 1926 [228] lub norma ÖNORM B 3124 [204]. Jeśli stosunek długości do średnicy próbki jest różny od 2, ASTM [12] określa współczynnik korygujący, który trzeba zastosować do wartości wytrzymałości wyznaczonej w próbie. Wytrzymałość na ściskanie zwykle wzrasta wraz ze zmniejszaniem się wysokości próbki  $h$  [281]. Polska norma PN-G-04303 [230], w przypadku badania próbek o smukłości równej 1, zaleca pomnożenie obliczonego wyniku przez 8/9. Próba przedstawiona na rys. 13.1 jest wykonana dla próbki o równej wysokości i średnicy.

Jedynym powodem stosowania smukłych próbek jest możliwość wytworzenia stanu jednoosiowego ściskania w środkowej części próbki. Przy próbkach o smukłości mniejszej od 2 w dużej części próbki występuje trójosiowy stan naprężenia wskutek nierównomiernego rozkładu sił kontaktu z powodu tarcia między próbka a płytami maszyny wytrzymałościowej. Polerowanie powierzchni próbki i stosowanie odpowiednich smarów może zmniejszyć tarcie i jego wpływ na niejednorodność naprężenia w próbce. Stosowanie próbek o równej wysokości i średnicy w zastosowaniu do skał poddanych urabianiu mechanicznemu może być uzasadnione tym, że tak wyznaczona wytrzymałość na ściskanie stanowi lepszy parametr dla określenia podatności skał na urabianie mechaniczne lub skrawanie, gdyż występujący w takiej próbce stan naprężenia jest bardziej zbliżony do stanu naprężenia w skale pod naciskiem narzędzia skrawającego [93].



Rys. 13.2. Typowe krzywe naprężenie-odkształcenie dla jednoosiowego ściskania dla skał: a) kruchych (piaskowiec), b) półkruchych (zlepniec kwarcytowy), c) podatnych (wapień).



Rys. 13.3. Wyznaczanie modułu Younga z krzywej naprężenie-odkształcenie dla jednoosiowego ściskania.

Bezpośrednim wynikiem próby jednoosiowego ściskania jest zależność między siłą ściskającą a zmianą odległości płyt maszyny wytrzymałościowej. Po przeskalowaniu tej krzywej, dzieląc siłę przez przekrój oraz wyliczając średnie odkształcenie osiowe na podstawie przemieszczenia płyt, otrzymuje się charakterystykę naprężenie-odkształcenie. Należy pamiętać, że nie można tak otrzymanej krzywej traktować jako cechy materiałowej. Jest ona funkcją właściwości skał, jak również geometrii i rozmiaru próbki oraz metody doświadczalnej i cech maszyny wytrzymałościowej [118].

Przebieg krzywych naprężenie-odkształcenie i wielkość wyróżnionych faz pozwala zakwalifikować skały jako kruche, półkruche lub podatne. Typowe krzywe odkształcenia dla różnych typów skał przedstawiono na rys. 13.2, biorąc jako przykładowe krzywe dla piaskowca, zlepieńca kwarcytowego i wapienia. Skały kruche cechuje duża wytrzymałość na ściskanie, stosunkowo mały zakres odkształceń niesprężystych i małe odkształcenia odpowiadające zniszczeniu. W stanie pozniszczeniowym w przypadku skał kruchych następuje zazwyczaj nagły spadek wytrzymałości prawie do zera. Skały półkruche wykazują mniej cech sprężystych, charakteryzują się większą odkształcalnością. Stosunek odkształceń trwałych do sprężystych wzrasta. Skały podatne są w dużym stopniu odkształcalne, odkształcenie jest głównie trwałe i nieodwracalne.

Charakterystyki naprężenie-odkształcenie pozwalają wyznaczyć podstawowe właściwości skały moduł Younga  $E$  oraz wytrzymałość na ściskanie  $\sigma_c$ . Jeśli w próbie jednoosiowego ściskania mierzone są odkształcenia w kierunku poprzecznym, można określić współczynnik Poissona  $\nu$ . Wytrzymałość na ściskanie oblicza się według wzoru:

$$\sigma_c = \frac{P_{\max}}{A}, \quad (13.1)$$



w którym  $P_{\max}$  – wartość siły, przy której nastąpiło zgniecenie próbki,  $A$  – powierzchnia przekroju poprzecznego próbki.

Stałe sprężyste, moduł Younga  $E$  oraz współczynnik Poissona  $\nu$ , według zaleceń ISRM [123], można wyznaczyć jako:

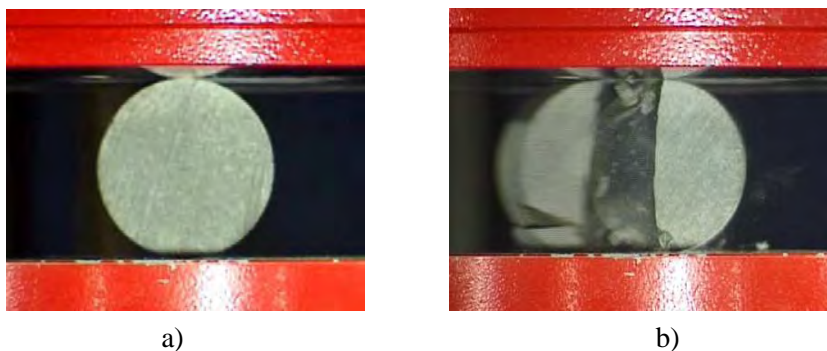
- parametry styczne w punkcie odpowiadającym określönemu poziomowi naprężeń względem doraźnej wytrzymałości na ściskanie  $\sigma_c$  np. dla  $0.5\sigma_c$ ,
- jako wartości średnie obliczone dla części charakterystyki naprężeniowo–odkształceniowej, którą można w przybliżeniu uznać za liniową,
- jako parametry sieczne mierzone od zerowego poziomu naprężenia do poziomu ustalonego względem wytrzymałości na ściskanie  $\sigma_c$ , zazwyczaj dla  $0.5\sigma_c$ .

W niniejszej pracy stałe sprężyste wyznaczano jako parametry styczne w punkcie odpowiadającym  $0.5$  wytrzymałości na ściskanie  $\sigma_c$  stosując przy tym przybliżenie różnicowe zaproponowane w [127]:

$$E = \frac{\Delta\sigma_a}{\Delta\varepsilon_a} = \frac{0.6\sigma_c - 0.4\sigma_c}{\varepsilon_a(0.6\sigma_c) - \varepsilon_a(0.4\sigma_c)}, \quad \nu = -\frac{\Delta\varepsilon_r}{\Delta\varepsilon_a} = -\frac{\varepsilon_r(0.6\sigma_c) - \varepsilon_r(0.4\sigma_c)}{\varepsilon_a(0.6\sigma_c) - \varepsilon_a(0.4\sigma_c)}, \quad (13.2)$$

gdzie  $\varepsilon_a$  jest odkształceniem osiowym (podłużnym), a  $\varepsilon_r$  jest odkształceniem promieniowym (poprzecznym). Metoda ta jest przedstawiona graficznie na rys. 13.3.

### 13.1.2 Próba ściskania poprzecznego



Rys. 13.4. Próba ściskania poprzecznego (próba brazylijska): a) przed zniszczeniem próbki, b) po zniszczeniu próbki (zdjęcia użyte przez Sandvik Mining and Construction w Zeltweg, Austria).

Próba ściskania poprzecznego, zwana próbą brazylijską lub próbą rozciągania pośredniego, służy do wyznaczania wytrzymałości skał na rozciąganie. Polega ona na ściskaniu i rozłupywaniu wzdłuż średnicy płaskich próbek walcowych (rys. 13.4). Warunki wykonywania próby brazylijskiej są określone m.in. w zaleceniach ISRM [80], normie ASTM D3967 [58] i polskiej normie PN-G-04302 [229]. Zalecenia zawarte w cytowanych normach są podobne. Zgodnie z polską normą próbka skalna stosowana w próbie brazylijskiej jest płaskim krążkiem o średnicy  $d = 42 - 54$  mm i grubości (wysokości)  $h$  równej połowie średnicy  $d$  ( $h/d = 0.5$ ).

Metoda wykorzystuje fakt, że w próbce walcowej, ściskanej wzdłuż średnicy, wytwarza się niejednorodny dwuosiowy stan naprężenia, który w części środkowej charakteryzuje się naprężeniem głównym ściskającym w kierunku zgodnym z kierunkiem przyłożenia siły oraz prostopadłym do niego naprężeniem głównym rozciągającym, trzy razy mniejszym od naprężenia ściskającego. Skała ulega pęknięciu, gdy naprężenie rozciągające osiąga wartość wytrzymałości na rozciąganie.

Naprężenie rozciągające prostopadłe do średnicy w przybliżeniu wynosi

$$\sigma_{xx} = \frac{2P}{\pi hd}, \quad (13.3)$$

gdzie  $P$  to wielkość siły ściskającej. Podstawiając do wzoru (13.3)  $P = P_f$ , gdzie  $P_f$  jest siłą powodującą zniszczenie próbki, wyznacza się wytrzymałość na rozciąganie  $\sigma_t$ .

Znajomość wytrzymałości na jednoosiowe ściskanie oraz wytrzymałości na rozciąganie pozwala określić kruchość skały. Stosunek wytrzymałości na ściskanie do wytrzymałości na rozciąganie jest często stosowanym parametrem do określenia kruchości [92]. Dla typowych kruchych skał parametr ten ma wartość ponad 15, a typowe podatne skały charakteryzują się wartościami poniżej 9.

## 13.2 Przygotowanie modelu próbki skalnej

Pierwszym krokiem w analizie metodą elementów dyskretnych jest zastąpienie modelowanego ośrodka zbiorem elementów dyskretnych. W metodzie elementów dyskretnych przyjmuje się zazwyczaj nieuporządkowaną losową konfigurację elementów dyskretnych o zróżnicowanym rozmiarze, co pozwala uniknąć regularnej struktury elementów dyskretnych i daje model charakteryzujący się izotropią. Zbiór elementów dyskretnych powinien jak najlepiej wypełniać przestrzeń. Stopień wypełnienia przestrzeni, charakteryzowany porowatością, ma istotny wpływ na własności mechaniczne modelu [35, 117].

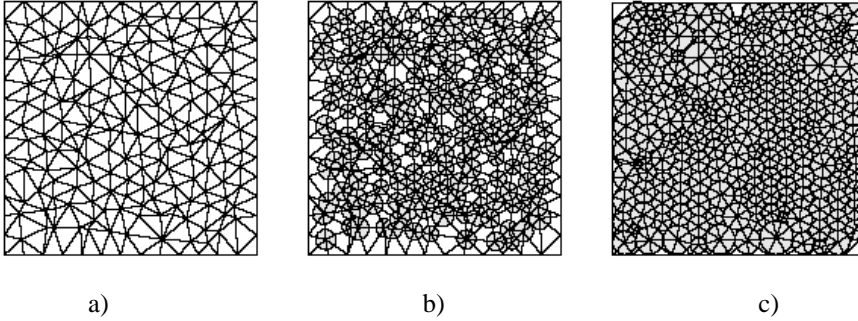
Wypełnienie obszaru dwuwymiarowego kołami lub przestrzeni trójwymiarowej kulami o różnej średnicy jest dość trudnym zadaniem – trudniejszym niż wygenerowanie siatki elementów skończonych i może być czasochłonne. Istnieją różne algorytmy generowania zbioru cylindrycznych (2D) lub kulistych (3D) cząstek (elementów dyskretnych) wypełniających modelowany obszar. Ogólnie można je podzielić na algorytmy zwane geometrycznymi i dynamicznymi.

W algorytmach geometrycznych nowe cząstki są generowane biorąc przy wzięciu pod uwagę położenia i rozmiarów istniejących już cząstek. W algorytmie zaproponowanym w [74] cząstki o losowym rozmiarze są generowane w losowych położeniach tak, by nie występowało naruszenie obszaru zajmowanego przez inne cząstki. W metodzie opracowanej w [173] cząstki o losowym rozmiarze są umieszczane tak by były w kontakcie z cząstkami wygenerowanymi wcześniej. W [75] zastosowano metodę postępującego brzegu (*ang.* *advancing front method*) dla generacji upakowanego zbioru elementów dyskretnych. Istnieją algorytmy geometryczne, które generują cylindry lub kule korzystając z pomocniczej siatki elementów skończonych. Algorytm zaproponowany w [51] wykorzystuje triangulację Delaunaya dla losowo wygenerowanych punktów w dyskretyzowanym obszarze. W trójkąty wpisuje się koła (w 3D w czworosciany wpisywane są kule), a następnie wypełnia się pustą przestrzeń kołami (kulami w 3D) o środkach w wierzchołkach trójkątów (czworoscianów w 3D). Omówione algorytmy są bardzo efektywne, jednak zbiory tak wygenerowanych cylindrów lub kul nie są dostatecznie gęsto spakowane dla modelowania skał.

W algorytmach dynamicznych luźna konfiguracja elementów jest modyfikowana tak, by otrzymać gęste upakowanie przy zastosowaniu metod opartych na rozwiązaniu zagadnienia dynamicznego. Najprostszym algorytmem tego rodzaju jest metoda osadzania cząstek pod wpływem grawitacji, polegająca na generowaniu swobodnych cząstek w polu grawitacyjnym. Pod działaniem siły ciężkości luźno wygenerowane cząstki opadają wypełniając stopniowo modelowany obszar. Brzeg modelowanego obszaru stanowi ograniczenie kontaktowe dla opadających cząstek. Wadą tej metody jest czasochłonność oraz nierównomierność wypełnienia spowodowana różnicą obciążenia cząstek. Konieczna jest procedura relaksacyjna polegająca na usunięciu obciążenia i umożliwieniu akomodacji cząstek w warunkach braku obciążenia zewnętrznego.

Lepsze wyniki daje algorytm „fill and expand”, polegający na wypełnieniu przestrzeni cząstkami o mniejszym rozmiarze w stosunku do oczekiwanego rozmiaru końcowego, a następnie stopniowym zwiększaniu ich rozmiarów, w trakcie którego ich pozycja ulega zmianie pod wpływem wzajemnego oddziaływania kontaktowego. Metoda ta jest wielokrotnie szybsza niż metoda grawitacyjnego osadzania cząstek. Metoda ta jest standardową metodą generacji modelu w programie PFC2D i PFC3D [124], wykorzystywaną np. w [108]. Wadą metod dynamicznych jest konieczność prowadzenia kosztownej czasowo analizy dynamicznej.

W przykładach numerycznych w niniejszej pracy stosowano metodę osadzania grawitacyjnego cząstek oraz nową metodę, opartą na rozwiązaniu zagadnienia optymalizacyjnego, zaproponowaną w [215]. Idea tej metody jest przedstawiona graficznie na rys. 13.5. Korzystając z pomocniczej nieregularnej siatki (rys. 13.5a), genero-



Rys. 13.5. Generacja cząstek walcowych metodą zaproponowaną w [215]: a) pomocnicza siatka, b) luźna konfiguracja początkowa, c) gęsto upakowana konfiguracja końcowa.

wana jest luźna konfiguracja cząstek o środkach pokrywających się z węzłami siatki (rys. 13.5b). Główną ideą algorytmu zaproponowanego w [215] jest uzyskanie gęsto upakowanej konfiguracji cząstek (rys. 13.5c) poprzez rozwiązanie problemu optymalizacji z funkcją celu zdefiniowaną jako

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_c} e_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{n_b} \sum_{j=1}^{n_k} b_{ij}^2 \quad (13.4)$$

z ograniczeniami

$$e_{ij} \geq 0, \quad b_{ij} \geq 0, \quad (13.5)$$

gdzie  $n$  jest liczbą cząstek,  $n_c$  jest liczbą krawędzi siatki pomocniczej, wychodzącej z węzła będącego środkiem cząstki  $i$ ,  $n_b$  jest liczbą cząstek tworzących brzeg ośrodka dyskretnego,  $n_k$  jest liczbą krawędzi powierzchni ograniczającej modelowany obszar, na które można rzutować prostopadle cząstkę leżącą w pobliżu brzegu;  $e_{ij}$  jest odstępem między powierzchniami dwóch cząstek leżących na wspólnej krawędzi zdefiniowanym przez następujące równanie

$$e_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| - r_i - r_j, \quad (13.6)$$

gdzie  $\mathbf{x}_i$  i  $\mathbf{x}_j$  są wektorami położenia środków cząstek,  $r_i$  i  $r_j$  są promieniami cząstek,  $b_{ij}$  jest odległością powierzchni cząstki od brzegu

$$b_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_{ij}\| - r_i, \quad (13.7)$$

gdzie  $\bar{x}_{ij}$  jest rzutem prostopadłym węzła  $i$  na segment  $j$  dyskretyzujący brzeg.

Zmiennymi decyzyjnymi są położenia środków cząstek  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}^T$  oraz ich promienie  $\{r_1, \dots, r_n\}^T$ . Problem minimalizacji funkcji  $\Phi$ , zdefiniowanej równaniem (13.4) z ograniczeniami (13.5), jest rozwiązywany w [215] za pomocą iteracyjnego algorytmu Levenberga-Marquardta [168, 183].

Po znalezieniu konfiguracji końcowej zgodnie z opisaną powyżej procedurą w modelu materiału skalnego lub innego materiału spoiстого dla pary cząstek  $i$  i  $j$  stykających się ze sobą, dla których zachodzi

$$e_{ij} = 0 \quad (13.8)$$

zakłada się istnienie wiązania kohezyjnego. W praktyce jednak ściśle zastosowanie warunku (13.8) dałoby niezbyt gęstą sieć powiązań między cząstkami i dlatego przyjmuje się pewną tolerancję dla przyjęcia wiązania kohezyjnego między cząstkami

$$e_{ij} \leq e_{\text{tol}} \quad (13.9)$$

W niniejszej pracy przyjmowano  $e_{\text{tol}} = (0.02 - 0.1)r_{\text{min}}$ , gdzie  $r_{\text{min}}$  promień najmniejszej cząstki w modelu. Założona tolerancja musi być uwzględniona w późniejszej analizie przy liczeniu odstepu/penetracji elementów dyskretnych. Dla kontaktujących się par, dla których przyjęto istnienie wiązania kohezyjnego, równanie (7.28) jest zmodyfikowane w następujący sposób:

$$g = d - r_1 - r_2 - e_{12}, \quad (13.10)$$

gdzie  $e_{12}$  jest początkowym odstępem między cząstkami 1 i 2. Zmodyfikowane równanie (13.10) w niniejszej pracy jest również stosowane przy  $e_{12} < 0$ , tzn. gdy istnieje początkowa penetracja. Jest to możliwe przy innych metodach przygotowania próbek, np. przy stosowaniu metody osadzania grawitacyjnego. Stosując wtedy wyrażenie zmodyfikowane (13.10) można wyeliminować początkowe naprężenia w próbce. Jest to proste i efektywne rozwiązanie problemu, który sprawia sporo kłopotów w analizie metodą elementów dyskretnych, por. [35, 117].

### 13.3 Bezwymiarowe zależności między parametrami mikro- i makroskopowymi

Określone właściwości makroskopowe materiału modelowanego za pomocą elementów dyskretnych są uzyskane przez przyjęcie właściwego modelu oddziaływania kontaktowego pomiędzy elementami dyskretnymi wraz z odpowiednio dobranymi parametrami definiującymi ten model. Modelowanie skał wymaga przyjęcia modelu

kontaktu uwzględniającego siły spójności. W niniejszej pracy jest stosowany model sprężysto-idealnie kruchy, przedstawiony w rozdziale 7.4. Model oddziaływania kontaktowego można uważać za model mikroskopowy materiału. Parametry definiujące model oddziaływania kontaktowego wraz z innymi parametrami charakteryzującymi model elementów dyskretnych nazywane będą parametrami mikroskopowymi.

Dla dobrania parametrów mikroskopowych zostanie wykorzystana koncepcja bezwymiarowych zależności między parametrami mikro- i makroskopowymi przedstawiona w [117]. Na wstępie zostanie przyjęty zbiór parametrów mikroskopowych definiujących model mikroskopowy (porównaj podrozdział 8.2):  $\{k_n, k_s, R_n, R_s, \alpha^{nvt}, \alpha^{nvr}, \mu, r, n, \rho, L, V\}$ . Wśród parametrów uwzględniono parametry charakteryzujące tłumienie niewiskotyczne (taki typ tłumienia będzie stosowany w modelu)  $\alpha^{nvt}$  i  $\alpha^{nvr}$  oraz prędkość obciążania  $V$ . Spośród podanych parametrów mikroskopowych można wyodrębnić parametry mające wpływ na własności sprężyste materiału, charakteryzujące początkowy okres odkształcania  $\{k_n, k_s, r, n, \alpha^{nvt}, \alpha^{nvr}, \rho, L, V\}$ .

Poszukiwane będą zależności określające związek między parametrami mikroskopowymi i własnościami makroskopowymi, takimi jak moduł Younga  $E$ , współczynnik Poissona  $\nu$ , wytrzymałość na ściskanie  $\sigma_c$  oraz wytrzymałość na rozciąganie  $\sigma_t$ . Wykorzystane zostanie znane z analizy wymiarowej twierdzenie  $\pi$  Buckinghama [158], które mówi, że każdą fizycznie znaczącą zależność funkcyjną dla  $n$  zmiennych  $\Psi(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$  można w sposób równoważny wyrazić poprzez funkcję  $n - r$  bezwymiarowych parametrów  $\Phi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-r})$ , gdzie  $r$  jest liczbą wymiarów podstawowych, a  $n - r$  jest maksymalną liczbą niezależnych parametrów. W naszym przypadku  $r = 3$  (m, kg, s).

Na podstawie twierdzenia Buckinghama można przyjąć [117], że odpowiedź materiału w zakresie sprężystym jest zależna od 6 bezwymiarowych parametrów  $\{k_s/k_n, n, r/L, \alpha^{nvt}, \alpha^{nvr}, V/\sqrt{k_n/\rho}\}$ , a zniszczenie próbki jest funkcją 9 bezwymiarowych parametrów  $\{k_n r/R_n, R_s/R_n, k_s/k_n, n, r/L, \mu, \alpha^{nvt}, \alpha^{nvr}, V/\sqrt{k_n/\rho}\}$ .

Ponieważ będzie analizowany problem quasi-statyczny<sup>1</sup>, z listy parametrów można usunąć  $V/\sqrt{k_n/\rho}$  oraz współczynniki tłumienia  $\alpha^{nvt}$  i  $\alpha^{nvr}$ . Zakładając, że wielkość elementów dyskretnych  $r$  jest mała w stosunku do wymiarów próbki  $L$  ( $r \ll L$ ), można zaniedbać wpływ parametru  $r/L$ . Jest to założenie analogiczne do przyjmowanych w teorii homogenizacji, por. podrozdział 8.1. W ten sposób można przyjąć, że makroskopowe własności modelowanego materiału są określone następującymi ogólnymi zależnościami [117]:

<sup>1</sup>Aby warunek quasi-statyczności był spełniony obciążenie musi być realizowane z małą prędkością. Czas jego wprowadzenia musi być dłuższy od podstawowego okresu drgań swobodnych. Tłumienie musi być dobrane tak, by było zbliżone do tłumienia krytycznego.

$$E = k_n \Phi_E \left( \frac{k_s}{k_n}, n \right), \quad (13.11)$$

$$v = \Phi_v \left( \frac{k_s}{k_n}, n \right), \quad (13.12)$$

$$\sigma_c = \frac{R_n}{r} \Phi_c \left( \frac{k_n r}{R_n}, \frac{R_s}{R_n}, \frac{k_s}{k_n}, n \right). \quad (13.13)$$

Porowatość  $n$  występująca w zależnościach (13.11)–(13.13) zależy od rozkładu rozmiarów elementów dyskretnych, który, posługując się terminami technicznymi stosowanymi do materiałów rozdrobionych, można określić jako granulację lub uziarnienie. W [305] uznano, że lepszą miarą granulacji jest stosunek  $r_{\min}/r_{\max}$ , określający stosunek wielkości najmniejszego i największego elementu dyskretnego. W [305] zachowano również wpływ wielkości elementów dyskretnych, stosując odwrotność parametru  $r/L$ . W ten sposób zamiast zależności (13.11)–(13.13) w [305] zaproponowano:

$$E = k_n \Phi'_E \left( \frac{k_s}{k_n}, \frac{L}{r}, \frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right), \quad (13.14)$$

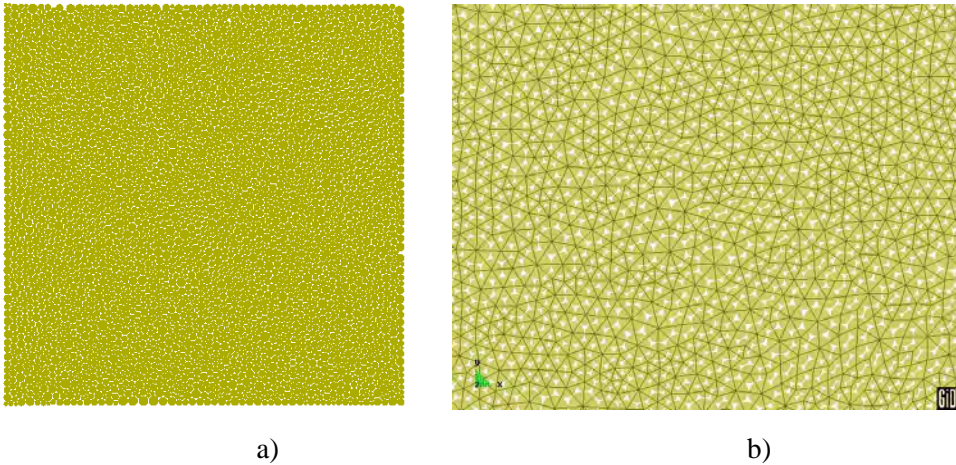
$$v = \Phi'_v \left( \frac{k_s}{k_n}, \frac{L}{r}, \frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right), \quad (13.15)$$

$$\sigma_c = \frac{R_n}{r} \Phi'_c \left( \frac{k_n r}{R_n}, \frac{R_s}{R_n}, \frac{k_s}{k_n}, \frac{L}{r}, \frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right). \quad (13.16)$$

W niniejszej pracy zakres badania własności ograniczono do materiału o ustalonym rozkładzie wielkości elementów dyskretnych, dlatego ta zmiana nie wpływa na przedstawione poniżej wyniki. Postać zależności bezwymiarowych (13.11)–(13.13) zostanie ustalona na podstawie symulacji numerycznych próby jednoosiowego ściskania dla szerokiego zakresu wartości parametrów  $k_n$ ,  $k_s$ ,  $R_n$  i  $R_s$ . Celem będzie określenie wpływu parametrów mikromechanicznych w modelu elementów dyskretnych na zachowanie makroskopowe otrzymywane w modelu.

### 13.4 Symulacja próby jednoosiowego ściskania

Próba jednoosiowego ściskania standardowych próbek materiału skalnego o stosunku wysokości do średnicy 2 : 1 była z powodzeniem symulowana za pomocą metody elementów dyskretnych w [283]. W niniejszej pracy zostanie przeprowadzona symulacja



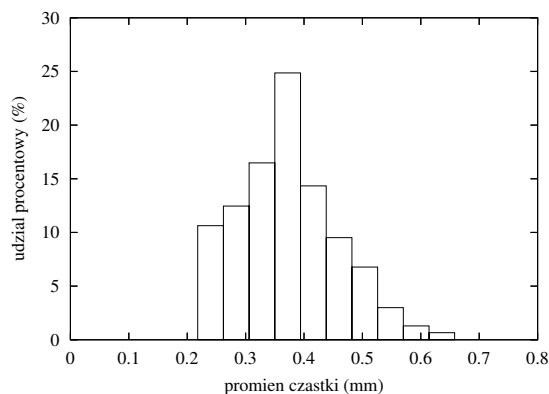
Rys. 13.6. Model próbki skalnej do symulacji próby jednoosiowego ściskania: a) obszar modelowany za pomocą elementów dyskretnych, b) powiększenie fragmentu modelu z zaznaczonymi aktywnymi wiązaniami między elementami.

próby ściskania próbki o wysokości równej średnicy i wynoszącej 50 mm, zgodnie z procedurą stosowaną w laboratorium zakładów Sandvik Mining and Construction w Zeltweg (Austria) [93], które dostarczyło wyniki eksperymentalne.

W symulacji numerycznej zastosowano dwuwymiarowy model, odpowiadający płaskiemu stanowi naprężenia. Rysunek 13.6a przedstawia model próbki o wymiarach  $50 \times 50$  mm składający się z 4979 elementów dyskretnych, o rozmiarach charakteryzowanych w promieniu z przedziału od 0.262 do 0.653 mm. Granulacja (uziarnienie) zbioru cząstek pokazana jest na rys. 13.7. Średni promień cząstek wynosi 0.37 mm. Rysunek 13.6b pokazuje fragment próbki w powiększeniu z zaznaczonymi istniejącymi wiązaniami kohezyjnymi między elementami. Można zauważyć, że zbiór cząstek jest gęsto upakowany – współczynnik porowatości  $n_p$  wynosi 0.097. Przy założonej gęstości objętościowej skały  $\rho' = 2580 \text{ kg/m}^3$ , gęstość materiału skały wynosi  $\rho = \rho' / (1 - n) = 2580 / (1 - 0.097) \text{ kg/m}^3 = 2857 \text{ kg/m}^3$ . Przyjęta gęstość odpowiada gęstości piaskowca badanego doświadczalnie i numerycznie w dalszej części pracy.

Próbkę umieszczono między dwiema równoległymi sztywnymi płytami i poddano ściskaniu, przy wymuszonym ruchu płyt w kierunku pionowym, ze stałą prędkością 0.125 m/s, którą ustalono jako wystarczająco niską, żeby proces ściskania można było traktować jako quasi-statyczny. Ściskanie prowadzono do zniszczenia próbki i kontynuowano symulację w zakresie pokrytycznym (pozniszczeniowym). Dla przeprowadzonych analiz wyznaczano krzywe naprężenie–odkształcenie. Naprężenie wyznaczano na podstawie siły ściskającej otrzymanej przez zsumowanie wszystkich sił od-



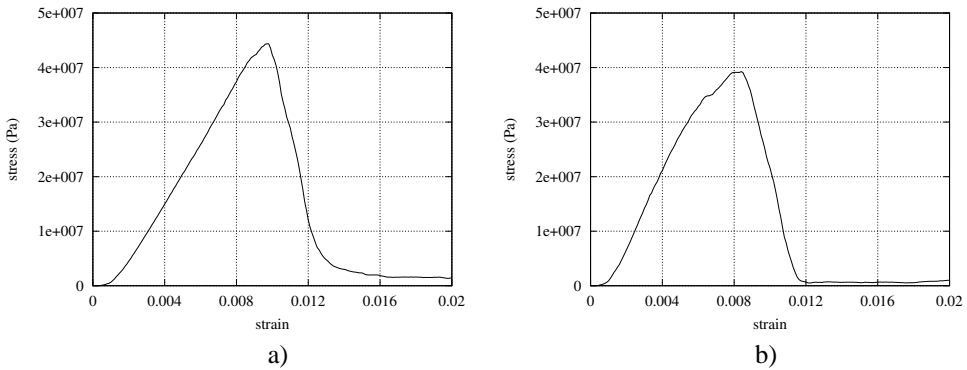


Rys. 13.7. Rozkład wielkości cząstek.

działywania kontaktowego w kierunku normalnym między jedną z płyt i cząstkami próbki.

Przeprowadzono szereg symulacji badając wpływ parametrów mikroskopowych na postać zniszczenia materiału. W pracy [117] stwierdzono, że stosunek parametrów określających oddziaływanie między cząstkami w kierunku normalnym i stycznym ma decydujący wpływ na stopień kruchości modelowanej próbki skalnej. Rysunek 13.8 przedstawia krzywe ściskania uzyskane przy różnym stosunku sztywności oddziaływania kontaktowego w kierunku normalnym i stycznym,  $k_s/k_n = 0.2$  i  $k_s/k_n = 1.75$  oraz założonym jednakowym parametrze  $k_n = 200$  MPa. Pozostałe parametry mikroskopowe były następujące: wytrzymałość wiązania między cząstkami w kierunku normalnym i stycznym  $R_n = R_s = 25$  kN/m, współczynnik tarcia Coulomba między cząstkami  $\mu = 0.839$ , oraz współczynnik tłumienia nielepkiego  $\alpha^{nv} = 0.2$ . Krzywa ściskania uzyskana przy małym stosunku  $k_s/k_n$ , pokazana na rys. 13.8a, charakteryzuje zachowanie materiału bardziej kruchego niż materiał reprezentowany krzywą z rys. 13.8b.

Fizyczna interpretacja tego faktu jest przedstawiona na rys. 13.9 i 13.10 prezentujących ewolucję zniszczenia próbki w obydwu rozpatrywanych modelach. Ciemnym kolorem zaznaczono cząstki, w których wystąpiło zerwanie co najmniej jednego wiązania kohezynego. Rysunek 13.9 pokazuje typowe kruche zniszczenie materiału, natomiast rys. 13.10 – zniszczenia półkruche (bardziej ciągliwe). Porównanie obydwu modeli potwierdza fizyczne obserwacje, że makroskopowe kruche zniszczenie otrzymuje się przy występowaniu mikropęknięć spowodowanych rozciąganiem, natomiast przy występowaniu mikropęknięć spowodowanych ścinaniem otrzymuje się własności makroskopowe odpowiadające materiałom podatnym. Przy małej sztywności w kierunku stycznym w stosunku do sztywności w kierunku normalnym, przy

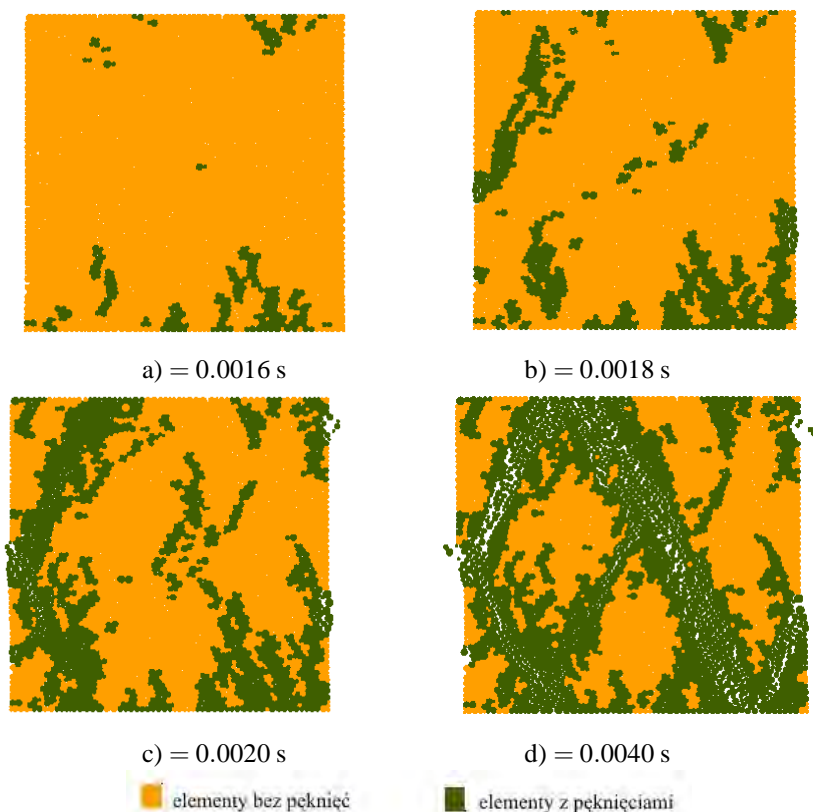


Rys. 13.8. Zależność naprężenia od odkształcenia w symulacji próby jednoosiowego ściskania: a)  $k_s/k_n = 0.2$  b)  $k_s/k_n = 1.75$ .

niewiele różniących się przemieszczeniach względnych w kierunku stycznym i normalnym, otrzymuje się większe siły w kierunku normalnym. Przy założeniu takiej samej wytrzymałości wiązania w obydwu kierunkach w modelu pokazanym na rys. 13.9 występują mikropęknięcia spowodowane rozciąganiem. Odwrotnie na rys. 13.10 – pojawiające się pęknięcia powstają wskutek przekroczenia wytrzymałości na ścinanie.

Zmieniając stosunek  $k_s/k_n$  w zakresie od 0.1 do 2 przeprowadzono symulacje próby ściskania w celu uzyskania zależności (13.11)–(13.13) dla danej próbki, czyli dla ustalonego  $n$ . Obliczenia wykonano dla trzech wartości współczynnika  $k_n$ :  $2 \cdot 10^8$ ,  $5 \cdot 10^9$  i  $1.5 \cdot 10^{10}$  Pa.

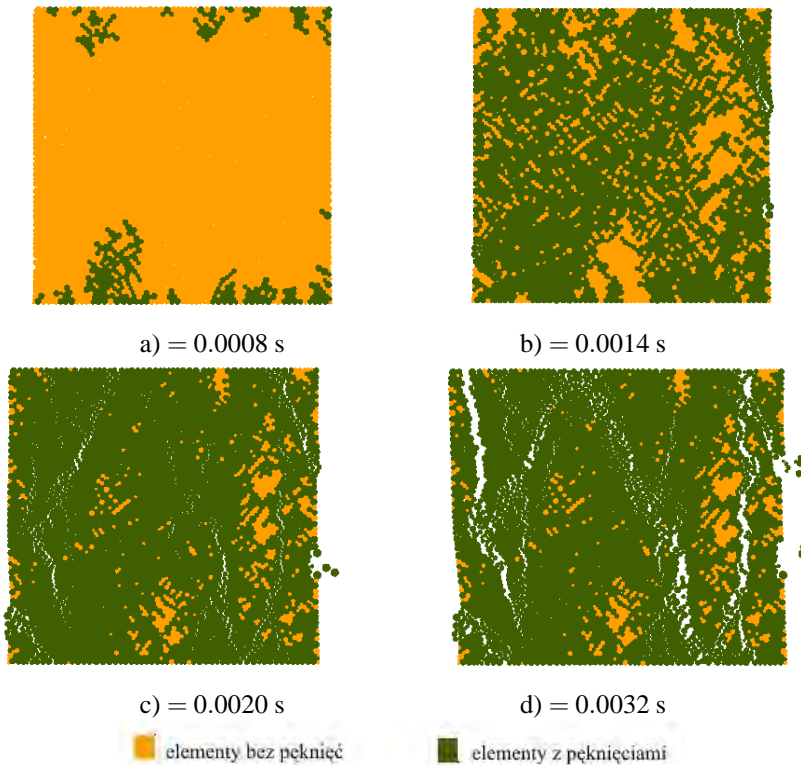
Otrzymane zależności są pokazane na rys. 13.11 i 13.12. Rysunek 13.11 przedstawia zależności określające stałe sprężyste  $E$  i  $\nu$ , odpowiadające równaniom (13.11) i (13.12), zaś rys. 13.12 przedstawia zależność określającą wytrzymałość na ściskanie  $\sigma_c$ , odpowiadającą równaniu (13.13). Idealne spełnienie założeń będących podstawą zależności (13.11)–(13.13) oznaczałoby, że na wykresach na rys. 13.11 i 13.12 wykresy dla różnych wartości  $k_n$  pokrywałyby się. Widzimy, że szczególnie w zależnościach dla stałych sprężystych przedstawionych na rys. 13.11, założenie to jest spełnione tylko w przybliżeniu. Można to wytłumaczyć tym, że oprócz  $k_s/k_n$  i  $n$  inne parametry mają również wpływ na wartość modułów sprężystych  $E$  i  $\nu$ . Przy ustalaniu parametrów mikroskopowych dla zależności (13.11) i (13.12) założono, że dotyczą one właściwości materiału przed wystąpieniem jakichkolwiek zniszczeń wiązań kohezyjnych między elementami dyskretnymi. Tymczasem sposób wyznaczania modułu Younga  $E$  i współczynnika Poissona  $\nu$  zgodnie z procedurą określoną równaniami (13.2) oznacza, że do wyznaczenia wartości  $E$  i  $\nu$ , wykorzystywany jest poziom



Rys. 13.9. Ewolucja zniszczenia próbki w symulacji próby jednoosiowego ściskania dla  $k_s/k_n = 0.2$ .

obciążenia, w którym może występować dość znaczne uszkodzenie materiału na skutek zerwania niektórych wiązań między elementami, co można zaobserwować na rys. 13.9b,c i 13.10b. Uszkodzenia, które występują przed zniszczeniem, zmieniają nachylenie krzywej naprężenie–odkształcenie, oznacza to, że również zależności określające własności sprężyste należałoby badać przy uwzględnieniu parametrów decydujących o zerwaniu wiązań kohezyjnych. Sformułowanie bezwymiarowych zależności dla własności sprężystych wymaga dalszych prac. Rysunek 13.12 pokazuje, że zależności (13.13) przy stałych parametrach  $k_n R/R_n$ ,  $R_s/R_n$  i  $n$  dla różnych  $k_n$  dość dobrze się zgadzają. Oznacza to, że zbiór parametrów wpływających na zniszczenie, został dobrze zidentyfikowany.

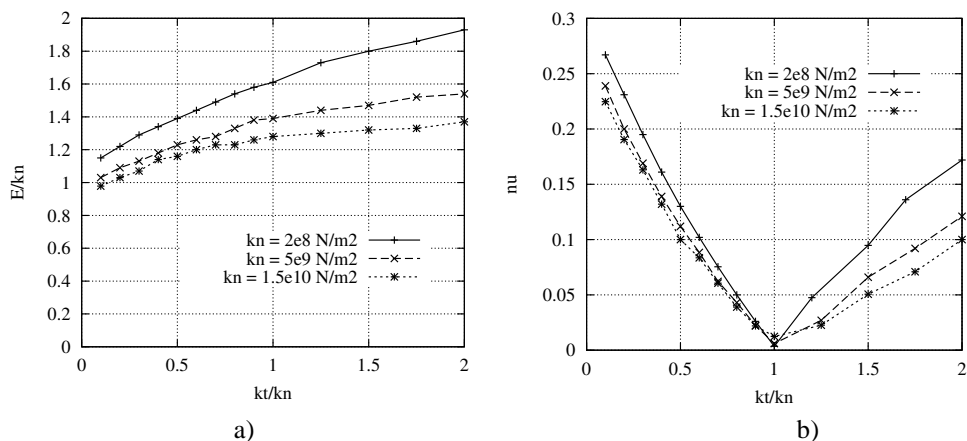
Otrzymane zależności bezwymiarowe zostaną wykorzystane w analizie odwrotnej w celu przybliżonego określenia parametrów mikroskopowych zapewniających uzy-



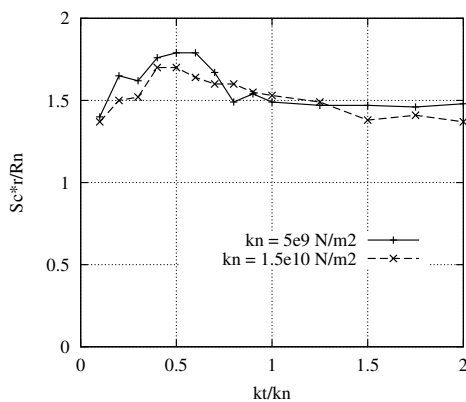
Rys. 13.10. Evolucja zniszczenia próbki w symulacji próby jednoosiowego ściskania dla  $k_s/k_n = 1.75$ .

skanie zadanych własności makroskopowych modelowanego materiału skały. W tym przypadku rozpatrywany był model piaskowca badanego w laboratorium firmy Sandvik w Zeltweg, charakteryzującego się następującymi średnimi parametrami: moduł Younga  $E = 18690$  Pa, współczynnik Poissona  $\nu = 0.18$ , wytrzymałość na ściskanie  $\sigma_c = 127$  MPa, wyznaczone w próbie jednoosiowego ściskania oraz wytrzymałość na rozciąganie wyznaczona w próbie brazylijskiej  $\sigma_t = 12.3$  MPa.

Dla wyznaczenia parametrów modelu wykorzystano symulacje próby jednoosiowego ściskania oraz próby brazylijskiej. Jako pierwszą przeprowadzono próbę jednoosiowego ściskania. Posłużono się próbką materiału przedstawioną na rys. 13.6. Wykorzystując zależności przedstawione na rys. 13.11 i 13.12, dobrano wstępnie parametry mikroskopowe  $k_n$ ,  $k_s$  oraz  $R_n$ , tak aby uzyskać oczekiwane wartości parametrów makroskopowych  $E$ ,  $\nu$  oraz  $\sigma_c$ . Wartości parametrów mikroskopowych poprawiono za pomocą kilku próbnych analiz. Następnie przeprowadzono symulacje



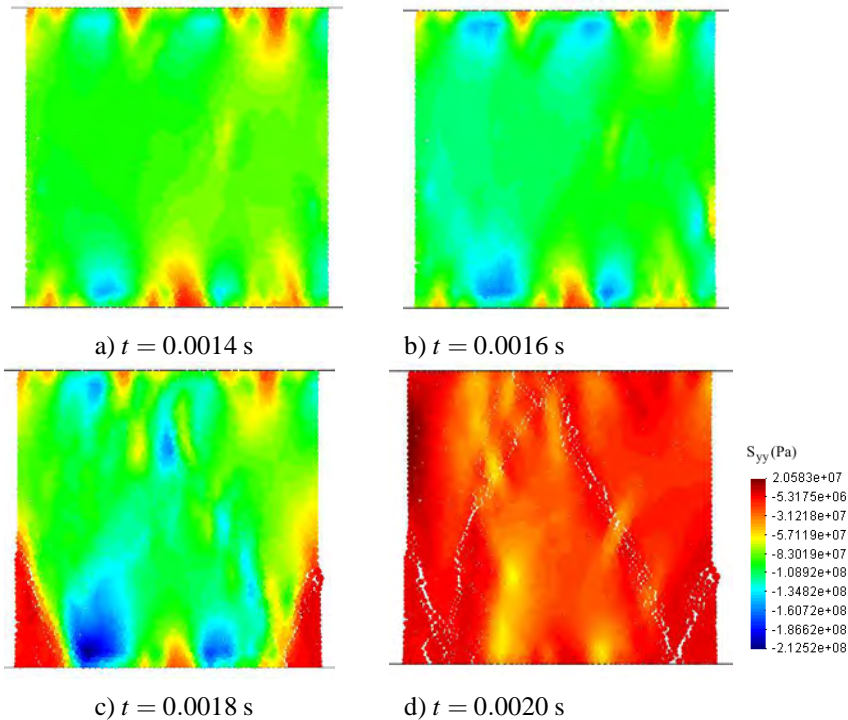
Rys. 13.11. Bezwymiarowe zależności między parametrami mikro- i makroskopowymi określające stałe sprężyste: a) zależność dla modułu Younga, b) zależność dla współczynnika Poissona.



Rys. 13.12. Bezwymiarowa zależność między parametrami mikro- i makroskopowymi określająca wytrzymałość na ściskanie.

próby brazylijskiej i sprawdzono wytrzymałość na rozciąganie. Aby zmniejszyć różnicę między otrzymaną wartością a wartością rzeczywistą skorygowano nieznacznie parametry mikroskopowe, sprawdzając, czy nie spowodowano zbyt dużej zmiany wytrzymałości na ściskanie. W ten sposób ustalono zbiór parametrów mikroskopowych:  $k_n = 1.61129 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ ,  $k_s = 0.2k_n = 0.3222 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ ,  $\mu = 0.8$ ,  $R_n = R_s = 2.9 \cdot 10^4 \text{ N/m}$ .

Wyniki symulacji próby jednoosiowego ściskania dla podanych parametrów mikroskopowych są przedstawione na rys. 13.13 dla kolejnych faz zniszczenia próbki wraz z rozkładem naprężenia w kierunku obciążenia. Naprężenia obliczano zgodnie z opisanym w rozdziale 8 algorytmem uśredniania na reprezentatywnym elemencie

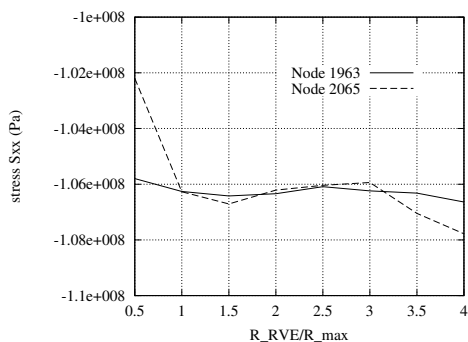


Rys. 13.13. Ewolucja zniszczenia próbki wraz z rozkładem naprężenia w kierunku obciążenia w symulacji próby jednoosiowego ściskania.

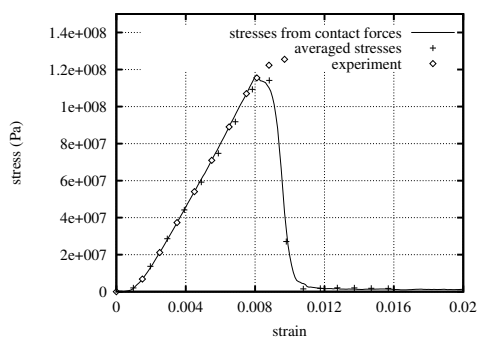
objętościowym. Rysunek 13.13 przedstawia wyniki uzyskane dla elementu objętościowego o promieniu  $2.5r_{\max}$ , gdzie  $r_{\max}$  jest promieniem największego elementu dyskretnego w modelu próbki. Zależność wyniku uśredniania od rozmiaru reprezentatywnego elementu objętościowego jest pokazana na rys. 13.14. Można zauważyć, że dla reprezentatywnego elementu objętościowego o promieniu  $2.5r_{\max}$  naprężenia w dwóch blisko siebie położonych punktach w środku próbki są zbliżone do siebie oraz są zawarte w przedziale, w którym wartości naprężeń zmieniają się w niewielkim stopniu. Można uznać, że tak wyznaczone naprężenia uśrednione są dobrą miarą makroskopową stanu naprężenia w analizowanym modelu dyskretnym.

Na rys. 13.15 porównano numeryczne i doświadczalne krzywe naprężenie–odkształcenie. W reprezentacji wyników numerycznych wykorzystano naprężenia makroskopowe obliczone za pomocą metody uśredniania oraz średnie naprężenia wyliczone na podstawie wypadkowej siły kontaktu między próbką a jedną z płyt ściskających. Obydwa sposoby dają niemal identyczne naprężenia. Krzywe otrzymane w analizie wykazują dużą zgodność w części liniowej z krzywą eksperymentalną. Oznacza

to, że w modelu elementów dyskretnych uzyskano dokładną wartość modułu Younga  $E$ . Moduł Younga wyznaczony zgodnie z formułą (13.2)<sub>1</sub> wynosi  $E = 18650$  MPa, a współczynnik Poissona wyznaczony zgodnie z wyrażeniem (13.2)<sub>2</sub> wynosi  $\nu = 0.19$ . We wzorach (13.2) odkształcenie osiowe obliczano na podstawie zmiany odległości płyt ściskających próbkę (założono, że jest ona równa zmianie wysokości próbki), a odkształcenie poprzeczne wyznaczano w połowie wysokości próbki. Wyznaczona na podstawie krzywej numerycznej przedstawionej na rys. 13.15 wytrzymałość na ściskanie  $\sigma_c$  wynosi 116 MPa. W próbie laboratoryjnej wyznaczono krzywą jedynie w zakresie przedniszczeniowym. W analizie numerycznej otrzymano kompletną krzywą naprężenie–odkształcenie o przebiegu typowym dla zniszczenia kruchego obserwowanego w badaniach doświadczalnych.



Rys. 13.14. Zależność naprężeń uśrednionych od wielkości reprezentatywnego elementu objętościowego.

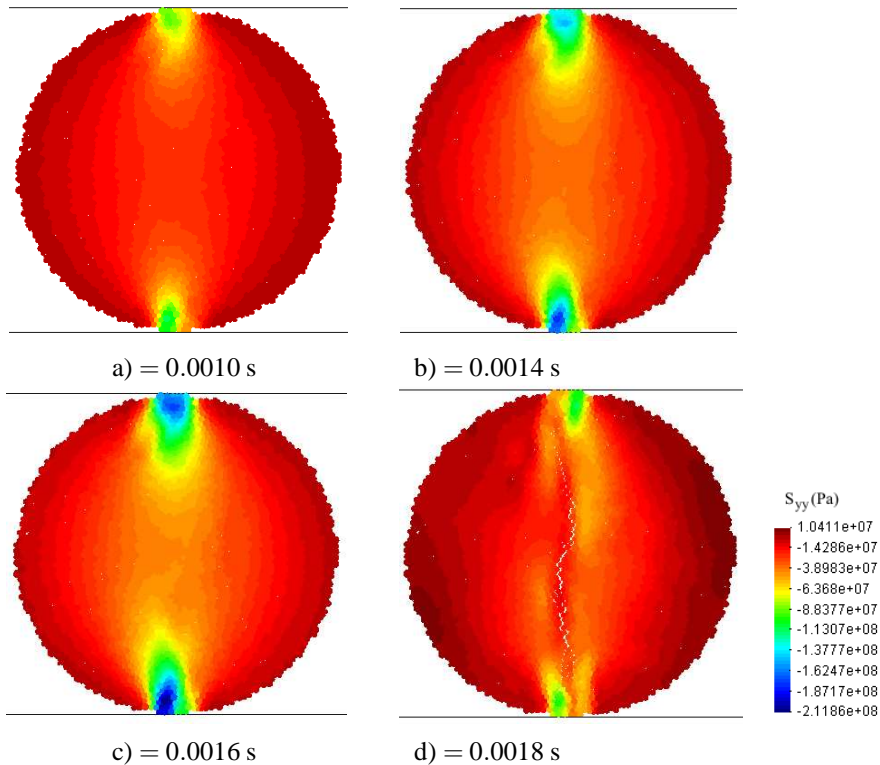


Rys. 13.15. Krzywe nsprężenie–odkształcenie dla próby ściskania.

## 13.5 Symulacja testu brazylijskiego

Zakładając parametry mikroskopowe ustalone w próbie jednoosiowego ściskania przeprowadzono symulację próby poprzecznego ściskania (próby brazylijskiej) zgodnie z procedurą opisaną w rozdziale 13.1.2. Cylindryczną próbkę do symulacji próby brazylijskiej otrzymano z próbki stosowanej w symulacji próby jednoosiowego ściskania poprzez usunięcie elementów dyskretnych, których środki wykraczały poza okrąg o średnicy 50 mm.

Próbkę umieszczono między dwiema płytami równoległymi do jej osi i poddano ściskaniu poprzez wymuszony ruch płyt ze stałą prędkością 12.5 m/s. Ściskanie prowadzono do zniszczenia próbki oraz analizowano zachowanie próbki po zniszczeniu. Ewolucję zniszczenia próbki oraz ewolucję rozkładu naprężeń w próbce w kierunku równoległym i prostopadłym do kierunku ściskania przedstawiono odpowiednio na rys. 13.16 i 13.17. Rozkład naprężeń w próbce w zakresie przedniszczeniowym,

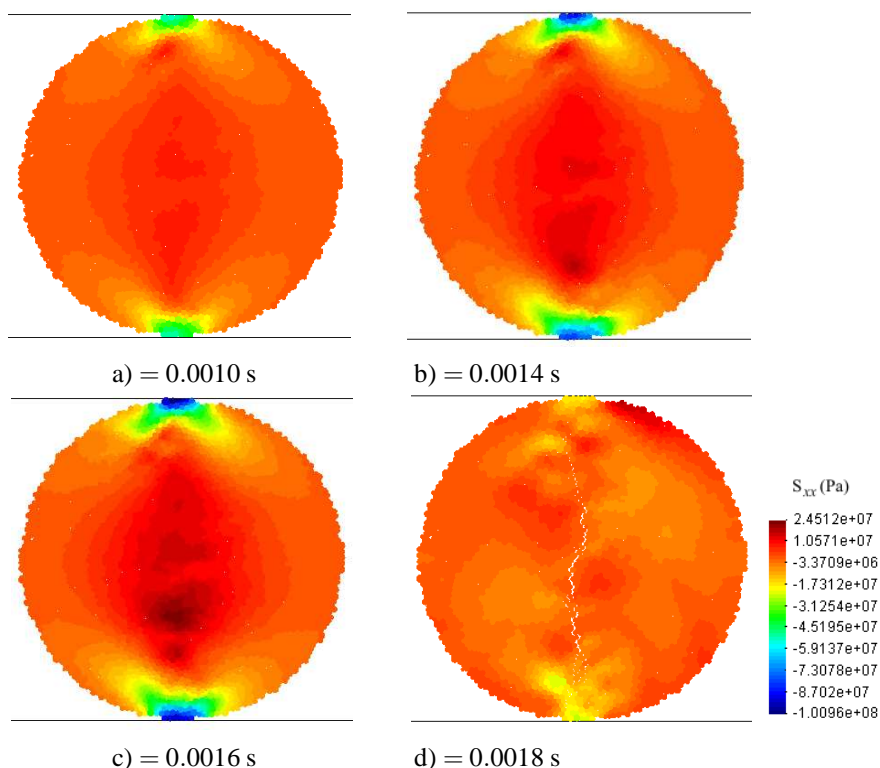


Rys. 13.16. Ewolucja zniszczenia próbki wraz z rozkładem naprężenia w kierunku obciążenia w symulacji próby brazylijskiej.

przedstawiony na rys. 13.16a-c i 13.17a-c, jest zgodny z teoretycznym rozkładem naprężeń w trakcie próby poprzecznego ściskania [308]. Postać zniszczenia otrzymana w analizie metodą elementów dyskretnych, przedstawiona na rys. 13.16d i 13.17d, jest zgodna ze zniszczeniem obserwowanym w próbach laboratoryjnych, pokazanym na rys. 13.4b.

Naprężenia przedstawione na rys. 13.16 i 13.17 obliczono zgodnie z opisanym w rozdziale 8 algorytmem uśredniania, stosując reprezentatywny element objętościowy o promieniu  $2.5r_{\max}$ , gdzie  $r_{\max}$  jest promieniem największego elementu dyskretnego w modelu próbki. Rysunek 13.18 przedstawia zależność wyniku uśredniania od rozmiaru reprezentatywnego elementu objętościowego dla trzech blisko siebie położonych punktów w miejscu występowania maksymalnych naprężeń w kierunku prostopadłym do kierunku obciążenia. Można zauważyć, że dla reprezentatywnego elementu objętościowego o promieniu równym co najmniej  $2.5r_{\max}$  naprężenia w badanych punktach są zbliżone. Pozwala to uznać, że tak wyznaczone naprężenia są dobrą miarą makroskopową stanu naprężenia w rozpatrywanym modelu dyskretnym.



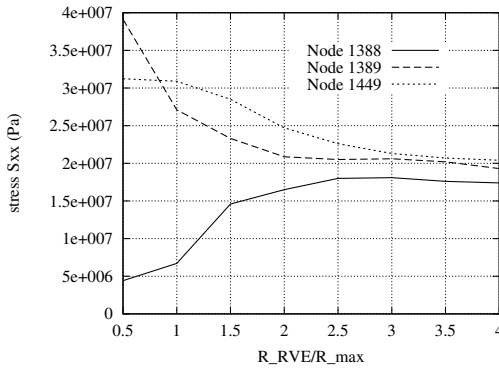


Rys. 13.17. Ewolucja zniszczenia próbki w symulacji próby brazylijskiej wraz z rozkładem naprężenia w kierunku normalnym do kierunku obciążenia.

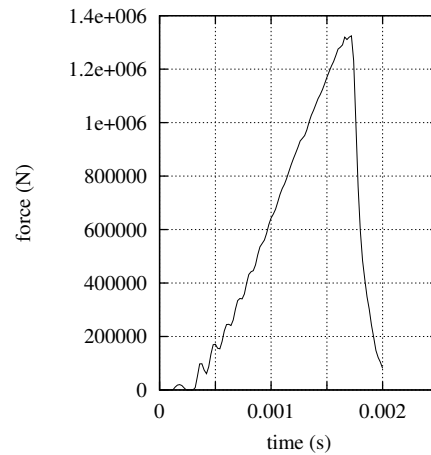
Rysunek 13.19 przedstawia zmianę siły ściskającej w czasie. W początkowym okresie można obserwować pewne oscylacje siły, wynikające ze stosowania dynamicznego modelowania próby. Następnie następuje prawie liniowy wzrost siły niemal do samego zniszczenia. Zniszczenie następuje bardzo szybko od momentu inicjacji pęknięcia, po osiągnięciu maksymalnej wartości siły następuje bardzo szybki jej spadek praktycznie aż do zera. W modelu dobrze oddany został kruchy charakter zniszczenia próbki piaskowca, obserwowany w warunkach laboratoryjnych.

Wartość siły ściskającej odpowiadająca zniszczeniu,  $P_f = 1.319$  MN, odczytana z wykresu na rys. 13.19, pozwala wyznaczyć wytrzymałość skały na rozciąganie  $\sigma_t$ . Zgodnie z równaniem (13.3) otrzymuje się

$$\sigma_t = \frac{2P_f}{\pi h d} = \frac{2 \cdot 1.319 \cdot 10^6 \text{ N}}{\pi \cdot 1 \cdot 0.05 \text{ m}^2} = 16.8 \text{ MPa.}$$



Rys. 13.18. Zależność naprężeń uśrednionych od wielkości reprezentatywnego elementu objętościowego w symulacji próby brazylijskiej.



Rys. 13.19. Zależność siły od czasu w próbie brazylijskiej.

Uzyskana numerycznie wartość jest nieco wyższa od średniej wartości 12.3 MPa wyznaczonej w laboratorium. Wyznaczenie parametrów mikroskopowych, zapewniających dokładną zgodność parametrów makroskopowych wyznaczonych w różnych próbach, jest trudnym zadaniem. W niniejszej pracy uzyskane numeryczne wartości wytrzymałości na ściskanie i na rozciąganie,  $\sigma_c = 116$  MPa i  $\sigma_t = 16.8$  MPa uznano za dobre przybliżenie eksperymentalnych wartości  $\sigma_c = 127$  MPa i  $\sigma_t = 12.3$  MPa. Dobór parametrów modelu elementów dyskretnych wymaga dalszych badań, w których pomocne mogą być metody analizy odwrotnej, oparte na technikach optymalizacyjnych [192, 226, 96, 40, 166]. Zagadnienie dopasowania wyników symulacji numerycznych do różnych prób laboratoryjnych można potraktować jako zagadnienie optymalizacji wielokryterialnej z przypisanymi wagami dla funkcji celu zdefiniowanych dla poszczególnych prób.

## Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono modelowanie numeryczne skał metodą elementów dyskretnych. Przeprowadzono identyfikację mikroskopowych parametrów modelu dla zadanych własności makroskopowych skały wyznaczonych w dwóch podstawowych testach laboratoryjnych, w próbie jednoosiowego ściskania oraz próbie poprzecznego ściskania (próbie brazylijskiej). Przy doborze parametrów modelu elementów dyskretnych wykorzystano bezwymiarowe zależności między parametrami mikroskopowymi i właściwościami makroskopowymi, zaproponowane w ogólnej postaci

na podstawie analizy wymiarowej. Postać tych zależności w formie wykresów została otrzymana na podstawie symulacji próby jednoosiowego ściskania dla pewnego przedziału wartości parametrów mikroskopowych. Uzyskane wyniki eksperymentów numerycznych pokazały, że dla własności sprężystych materiału obserwuje się pewne rozbieżności, spowodowane prawdopodobnie głównie wpływem progresywnego uszkodzenia zaniedbanego w rozważaniach teoretycznych. Bardziej dokładne sformułowanie problemu wymaga dalszych badań. Zależności między parametrami mikroskopowymi i makroskopowymi posłużyły do dobrania wstępnych wartości parametrów mikroskopowych dla zadanych właściwości makroskopowych. Parametry te następnie skorygowano w próbach numerycznych. Uzyskane parametry pozwalają z dużą dokładnością modelować skały o danych własnościach mechanicznych. Pokazały to przeprowadzone symulacje próby jednoosiowego ściskania oraz próby brazylijskiej dla badanego doświadczalnie piaskowca. Uzyskano dobrą zgodność z wynikami eksperymentalnymi, zarówno pod względem wyznaczonych parametrów jak i postaci zniszczenia skały. Przeprowadzone analizy numeryczne zostały wykorzystane do sprawdzenia algorytmów obliczenia naprężeń makroskopowych przedstawionych w rozdziale 8. Uzyskane algorytmy pokazują poprawność tych algorytmów.

Część wyników przedstawionych w niniejszym rozdziale została uzyskana w ramach projektu europejskiego TUNCONSTRUCT: Technology Innovation in Underground Construction.

# 14. Modelowanie procesów mechanicznego urabiania skał

## Wstęp

Metoda elementów dyskretnych jest doskonałym narzędziem do modelowania różnych procesów urabiania skał [117]. Modele skrawania skał wykorzystujące metodę elementów skończonych, np. [231], napotykać na trudności w modelowaniu nieciągłości powstających przy odspajaniu wióra. Zastosowanie specjalnych procedur, np. eliminacja zniszczonych elementów, pozwala modelować zjawisko propagacji pęknięcia, niemniej jednak doświadczenia autora w stosowaniu obydwu metod numerycznych, dają podstawy do stwierdzenia, że metoda elementów dyskretnych pozwala znacznie łatwiej niż metoda elementów skończonych modelować procesy charakteryzujące się występowaniem wielu pęknięć trudnych do określenia *a priori*, tak jak to ma miejsce w procesach skrawania skał.

W niniejszym rozdziale przedstawione zostaną założenia numerycznego modelowania procesów urabiania skał i praktyczne wykorzystanie modelu do symulacji wybranych przykładów mechanicznego urabiania skał. W dalszej części niniejszej pracy model zostanie rozszerzony poprzez uwzględnienie efektów cieplnych w procesach urabiania (skrawania) skał oraz efektów zużycia narzędzi urabiających.

## 14.1 Procesy urabiania skał i gruntów

Urabianie skał i gruntów obejmuje szeroki zakres prac w górnictwie podziemnym i odkrywkowym oraz w budownictwie naziemnym i podziemnym, związanych z odspojeniem (oddzieleniem) kawałków skały od calizny i ich rozdrabnianiu, odspojeniem warstwy gruntu, przemieszczaniem i ładowaniem urobku. Urabianie skał zwięzłych w górnictwie i budownictwie podziemnym odbywa się mechanicznie za pomocą specjalistycznych maszyn jak wrębiarki, głowice urabiające [133], hydraulicznie, z użyciem materiałów wybuchowych lub innych niemechanicznych metod [141]. Urabianie skał luźnych w warunkach górnictwa odkrywkowego odbywa się za pomocą różnego rodzaju koparek i ładowarek. W robotach ziemnych w budownictwie urabianie gruntu wykonuje się za pomocą takich maszyn jak koparka, ładowarka, spycharka, zrywarka (rys. 14.1a), równiarka i inne.

W niniejszym rozdziale rozwinięty zintegrowany system metody elementów skończonych i metody elementów dyskretnych zostanie zastosowany do modelowania problemów mechanicznego urabiania skał zwięzłych, w których następuje skrawanie

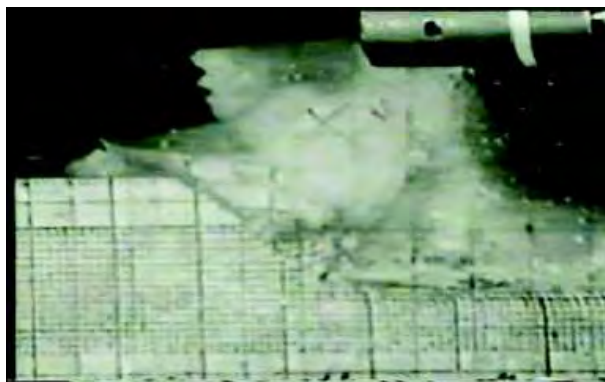


Rys. 14.1. Narzędzia do urabiania skał: a) zrywak, b) głowica urabiająca pogłębiarki.

skały. Przedstawiona zostanie symulacja skrawania skały za pomocą noża płaskiego oraz symulacja urabiania skały pod wodą przez głowicę pogłębiarki (rys. 14.1b).

## 14.2 Zjawiska zachodzące w procesie skrawania skał

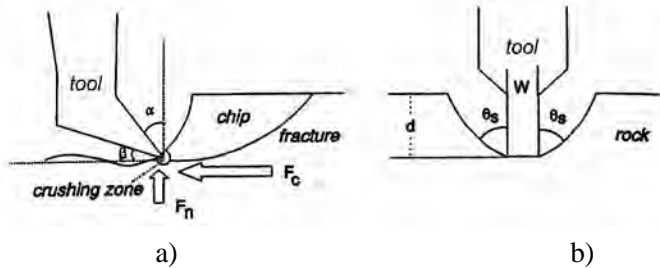
Rysunek 14.2 przedstawia laboratoryjny test skrawania skały. Głównym zjawiskiem zachodzącym w procesie skrawania jest formowanie i odpajanie się odłamków skalnych (elementów wióra).



Rys. 14.2. Laboratoryjna próba skrawania skały.

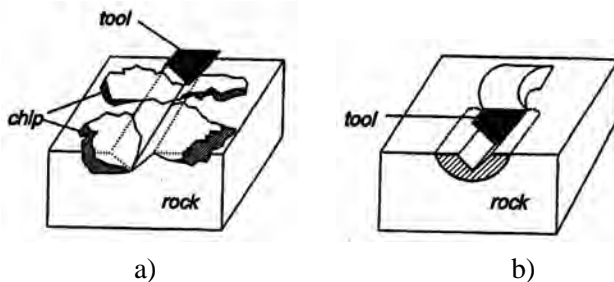
Rysunek 14.3 przedstawia schematycznie skrawanie skały nożem płaskym. Przebieg procesu skrawania skał zależy od rodzaju skał i ich właściwości mechanicznych,

geometrii i ustawienia ostrza, oraz prędkości skrawania [133]. Ustawienie noża względem skały i względem kierunku skrawania określone jest przez kąt natarcia  $\alpha$  i kąt przyłożenia  $\beta$ , kąt ostrza jest parametrem charakteryzującym geometrię narzędzia.



Rys. 14.3. Skrawanie skały nożem płaskim: a) widok równoległy do kierunku skrawania, b) widok prostopadły do kierunku skrawania;  $\alpha$  – kąt natarcia,  $\beta$  – kąt przyłożenia,  $\theta_s$  – kąt boczny wykruszania skały.

Tworzenie się wióra jest zainicjowane w strefie zmiążdżenia w pobliżu ostrza narzędzia skrawającego (rys. 14.3). Strefa zmiążdżenia tworzy się wskutek znacznych nacisków w miejscu kontaktu ostrza ze skałą. Wywołane tym naciskiem naprężenia ściskające prznoszą oddziaływanie narzędzia na dalszą część skały. Na granicy strefy zmiążdżenia powstają mikropęknięcia. Wskutek zwiększenia nacisku, wywołanego ruchem noża, pęknięcia propagują do powierzchni swobodnej, prowadząc do odspojenia wióra. Odspojenie wióra następuje poprzez oderwanie lub ścinanie. Dla skał kruchych typowym mechanizmem odspajania wióra jest odrywanie (rys. 14.4a), a w skrawaniu materiałów podatnych występuje wiór ciągły (rys. 14.4b). Występowanie wióra ciągłego ma niekorzystny wpływ na zużywanie się noży skrawających.



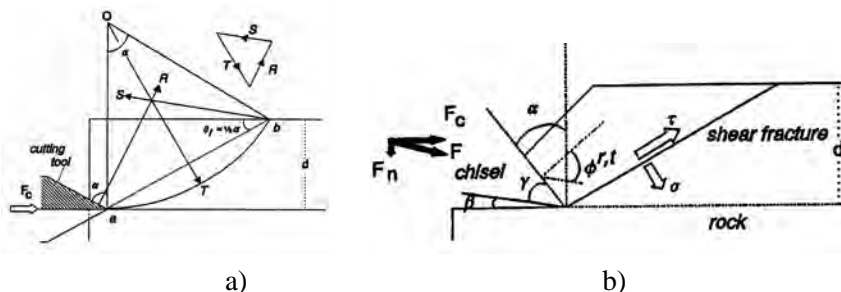
Rys. 14.4. Mechanizmy skrawania: a) z wiórem odrywającym, b) z wiórem ciągłym.

### 14.3 Analityczne modele skrawania skał

Proste modele analityczne zostały zaproponowane dla opisu skrawania skał [294]. Jednym z wcześniejszych modeli jest zaproponowany przez Evansa [73] model skrawania za pomocą noża klinowego. W modelu założono, że pęknięcie i odspojenie następuje pod wpływem naprężeń rozciągających a linia odspojenia ma kształt łuku koła (rys. 14.5a). Siła skrawania otrzymana przy tych założeniach dana jest następującym wzorem:

$$F_c = \frac{2\sigma_t dw \sin \frac{1}{2}(90 - \alpha)}{1 - \sin \frac{1}{2}(90 - \alpha)}, \quad (14.1)$$

gdzie  $\sigma_t$  jest wytrzymałością na rozciąganie,  $d$  jest głębokością skrawania,  $w$  jest szerokością noża, a  $\alpha$  jest kątem natarcia.



Rys. 14.5. Modele skrawania skał: a) Evansa, b) Nishimatsu.

Innym prostym modelem skrawania skały jest model zaproponowany przez Nishimatsu [202], który założył, że odspojenie wióra następuje wskutek ścinania wzdłuż płaszczyzny jak pokazano na rys. 14.5b. Otrzymana siła skrawania  $F$  jest określona następującym wzorem:

$$F = \frac{2\tau_u dw \cos \phi}{(n+1)(1 - \sin(\phi^{rt} + \phi - \alpha))}, \quad (14.2)$$

gdzie  $\tau_u$  jest wytrzymałością na ścinanie,  $d$  jest głębokością skrawania,  $w$  jest szerokością noża,  $\phi^{rt}$  jest kątem tarcia skały o powierzchnię noża,  $\phi$  jest kątem tarcia wewnętrznego skały,  $\alpha$  jest kątem natarcia, a  $n$  jest współczynnikiem rozkładu naprężenia otrzymanym z badań doświadczalnych. W przypadku nieznaności potrzebnych parametrów, Nishimatsu wyznaczał je z następujących zależności:

$$\tau_u = \frac{\sigma_t \sigma_c}{2\sqrt{\sigma_t(\sigma_c - 3\sigma_t)}}, \quad (14.3)$$

$$\tan \phi = \frac{\sigma_c^2 - 4\sigma_t^2}{4\sigma_c\sigma_t}. \quad (14.4)$$

#### 14.4 Główne założenia modelu numerycznego skrawania skał

W modelu skrawania skał rozpatrywany będzie układ mechaniczny składający się z narzędzia skrawającego oraz fragmentu skały. Badany będzie przebieg procesu skrawania z uwzględnieniem następujących zjawisk:

- oddziaływanie kontaktowe narzędzia urabiającego ze skałą,
- inicjacja i propagacja pęknięć skały.

Skała będzie modelowana w dwojaki sposób:

- cały rozpatrywany fragment skały modelowany za pomocą metody elementów dyskretnych,
- część skały oddziałująca z narzędziem i podlegająca zniszczeniu modelowana za pomocą metody elementów dyskretnych, a część bardziej oddalona od trajektorii narzędzia modelowana za pomocą metody elementów skończonych; odydwa podobszary będą połączone ze sobą więzami kinematycznymi opisanymi w rozdziale 9.

W niniejszym rozdziale nie będą uwzględnione efekty cieplne i efekty zużycia narzędzia, efekty te będą rozpatrywane w następnych rozdziałach pracy.

Skały zwięzłe będą modelowane za pomocą sprężysto-idealnie kruchego modelu oddziaływania między elementami dyskretnymi. Parametry modelu elementów dyskretnych zostaną ustalone przy wykorzystaniu metod i wyników przedstawionych w rozdziale 13. Uwzględnienie kohezji w modelu elementów dyskretnych wraz z możliwością zerwania wiązań kohezyjnych umożliwi symulację inicjacji i propagacji pęknięcia skały.

Narzędzie urabiające modelowane jest w jeden z następujących sposobów:

- ciało odkształcalne dyskretyzowane za pomocą elementów skończonych,
- ciało sztywne dyskretyzowane za pomocą elementów skończonych,
- ciało sztywne dyskretyzowane za pomocą elementów dyskretnych.

Model ciała odkształcalnego, zastosowany do narzędzia, umożliwi badanie rozkładu naprężeń w narzędziu, a w przypadku uwzględnienia efektów cieplnych również badanie rozkładu temperatury. Model ciała sztywnego zaniedbuje rozkład naprężeń, umożliwia jedynie ewentualne badanie rozkładu temperatury.



W modelu oddziaływania między narzędziem a skałą uwzględnia się naciski w kierunku normalnym, jak i oddziaływanie w kierunku stycznym. Oddziaływanie w kierunku stycznym jest opisane za pomocą modelu tarcia Coulomba. Generacja ciepła wskutek tarcia jest rozważana w termomechanicznym modelu skrawania skały prezentowanym w dalszej części pracy. Model oddziaływania między narzędziem a skałą zostanie również wzbogacony o uwzględnienie efektów zużycia narzędzi.

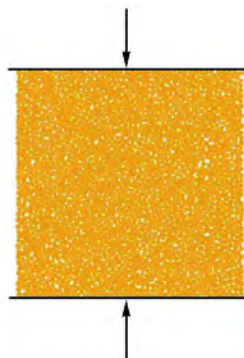
## 14.5 Wyznaczenie parametrów mikroskopowych dla skały

Symulacji skrawania skały za pomocą metody elementów dyskretnych wymaga uprzedniego wyznaczenia parametrów mikroskopowych, które zapewnią odpowiednie makroskopowe właściwości skały. Zbiór parametrów mikroskopowych można wyznaczyć przeprowadzając symulację podstawowych testów laboratoryjnych (próby jednoosiowego ściskania i próby rozciągania) i stosując metody przedstawione w rozdziale 13.

Przedmiotem badań był piaskowiec o następujących własnościach mechanicznych: moduł Younga  $E = 14$  GPa, wytrzymałość na jednoosiowe ściskanie  $\sigma_c = 60$  MPa.



Rys. 14.6. Zniszczenie próbki skały w próbie jednoosiowego ściskania.

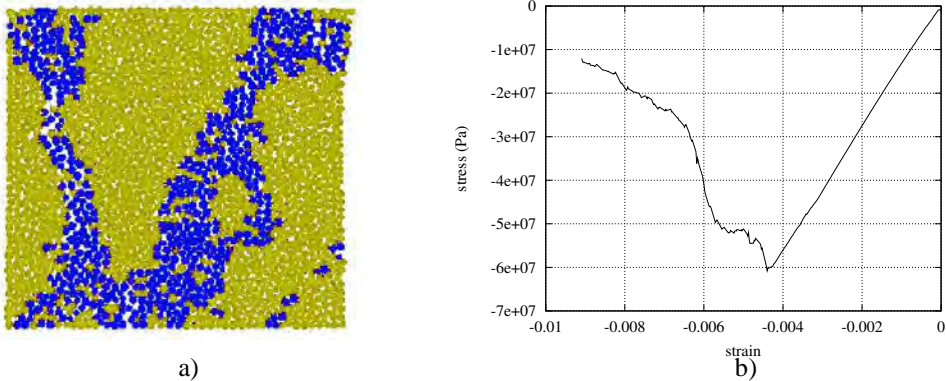


Rys. 14.7. Numeryczny model próby jednoosiowego ściskania.

Zniszczenie próbki skały w teście pokazano na rys. 14.6. Dla badania numerycznego przygotowano próbkę  $109 \times 109$  mm (rys. 14.7) składającą się z 2100 walców o losowo generowanym promieniu 1–1.5 mm. Upakowanie próbki charakteryzuje się porowatością 13%.

Metodą iteracyjnego poprawiania wyników ustalono następujący zestaw parametrów mikroskopowych dla modelu sprężysto-idealnie kruchego: sztywność kontaktu w kierunku normalnym i stycznym  $k_n = k_s = 20$  GPa, współczynnik tarcia Coulomba

$\mu = 0.839$  oraz wytrzymałość wiązania na obciążenie w kierunku normalnym i stycznym, odpowiednio  $R_n = 0.1 \text{ MN/m}$  i  $R_s = 1 \text{ MN/m}$ . Tłumienie nielepkie określone jest przez współczynniki tłumienia  $\alpha^{\text{nvt}} = \alpha^{\text{nvr}} = 0.2$ .



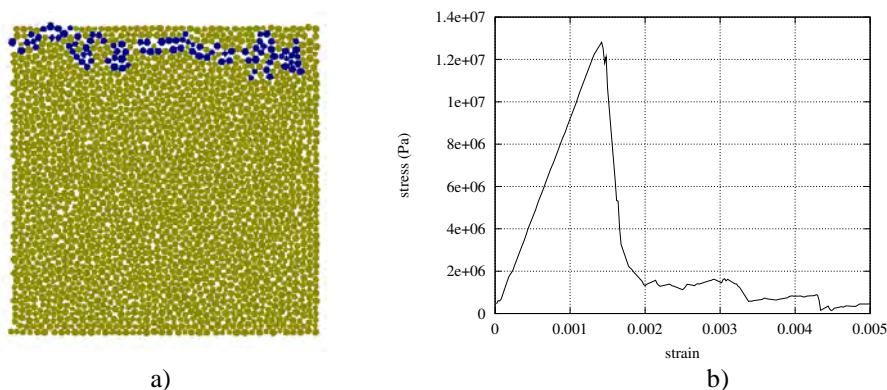
Rys. 14.8. Symulacja próby jednoosiowego ściskania: a) zniszczenie próbki, b) krzywa naprężenie–odkształcenie.

Wyniki symulacji dla tych parametrów pokazano na rys. 14.8. Rysunek 14.8a przedstawia zniszczenie próbki. Cząstki z zerwanymi wiązaniami są oznaczone innym kolorem. Porównanie rysunków 14.8a i 13.1 pokazuje, że zniszczenie otrzymane w symulacji numerycznej jest podobne do zniszczenia obserwowanego w próbie laboratoryjnej. Krzywa naprężenie–odkształcenie pokazana na rys. 14.8b odpowiada pożądanym własnościom mechanicznym.

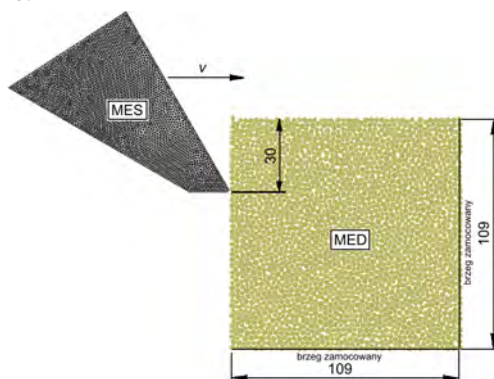
W rozdziale 13 wyznaczano wytrzymałość skały na rozciąganie za pomocą testu pośredniego rozciągania (próby brazylijskiej), natomiast w niniejszym rozdziale wytrzymałość skały na rozciąganie zostanie wyznaczona w symulacji próby bezpośredniego rozciągania. Wyniki tej symulacji dla parametrów ustalonych w próbie ściskania pokazano na rys. 14.9. Rysunek 14.9a przedstawia zniszczenie próbki z pęknięciem w kierunku prostopadłym do kierunku obciążenia (cząstki z zerwanymi wiązaniami są oznaczone innym kolorem). Krzywa naprężenie–odkształcenie jest pokazana na rys. 14.9b. Maksymalne naprężenie,  $\sigma_t = 12.7 \text{ MPa}$ , jest wytrzymałością na rozciąganie.

## 14.6 Symulacja skrawania skały nożem płaskim

Próbka o wymiarach  $109 \times 109 \text{ mm}$ , reprezentująca piaskowiec, modelowana 2100 elementami dyskretnymi o promieniach 1–1.5 mm z parametrami wyznaczonymi w rozdziale 14.5, została użyta w symulacji skrawania za pomocą noża płaskiego modelowanego za pomocą 6800 trójkątnych elementów skończonych. System nóż–skała



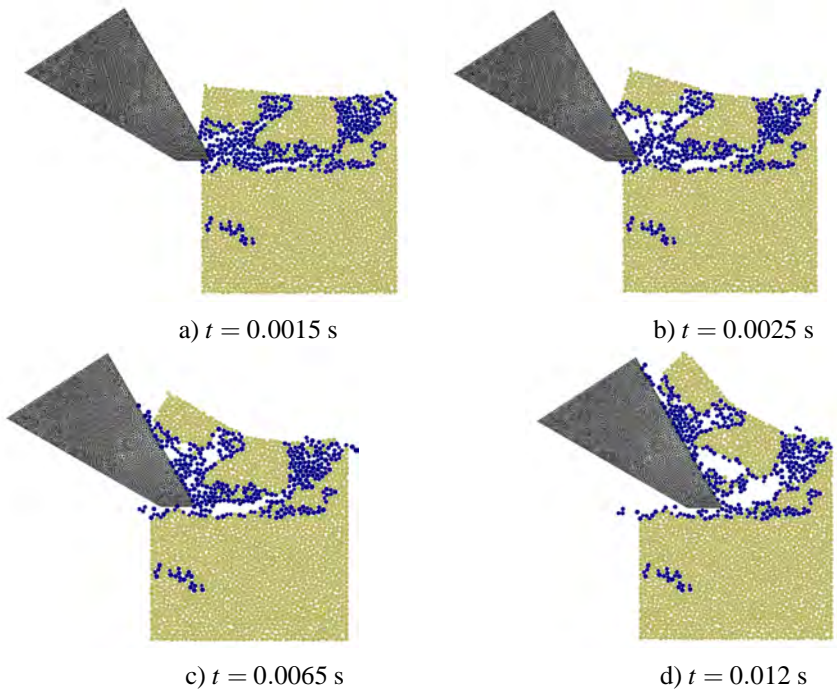
Rys. 14.9. Symulacja próby bezpośredniego rozciągania: a) zniszczenie próbki, b) krzywa naprężenie–odkształcenie.



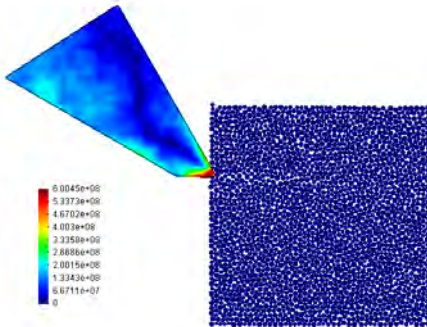
Rys. 14.10. Skrawanie skały nożem płaskim – hybrydowy model MES i MED.

jest pokazany na rys. 14.10. Kąt natarcia wynosi  $30^\circ$ , a głębokość skrawania 30 mm. Oddziaływanie narzędzia ze skałą jest modelowane za pomocą kontaktu z tarcieniem, z założoną sztywnością w kierunku normalnym i stycznym  $k_n^{rt} = k_s^{rt} = 20$  GPa. Wartość współczynnika tarcia Coulomba  $\mu^{rt}$  dla oddziaływania narzędzia ze skałą przyjęto 0.4 na podstawie danych z literatury dla pary poślizgowej stal/piaskowiec w warunkach tarcia suchego [85].

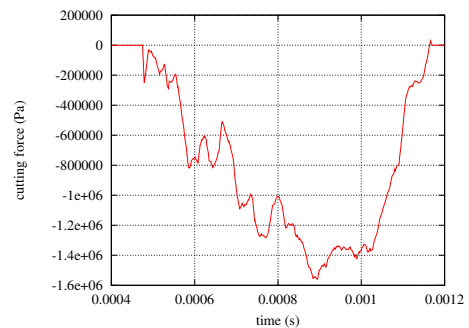
Spężysto-plastyczne właściwości materiału narzędzia są zdefiniowane przez następujące parametry: moduł Younga  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa, współczynnik Poissona  $\nu = 0.3$ , naprężenie uplastyczniające  $\sigma_y = 600$  MPa oraz moduł wzmocnienia 300 MPa. Skrawanie odbywało się ze stałą zadaną prędkością noża 4 m/s. Przebieg procesu skrawania z mechanizmem zniszczenia skały jest przedstawiony na rys. 14.11. Otrzymany w analizie numerycznej mechanizm tworzenia się wióra jest typowy dla skrawania skały kruchej.



Rys. 14.11. Przebieg procesu skrawania skały nożem płaskim.



Rys. 14.12. Rozkład naprężeń zastępczych w nożu.



Rys. 14.13. Przebieg czasowy siły skrawania.

Modelowanie noża jako ciała odkształcalnego pozwala otrzymać rozkład naprężeń (rys. 14.12). Suma wszystkich sił oddziaływania kontaktowego w kierunku poziomym w analizowanym czasie daje przebieg czasowy siły skrawania (rys. 14.13).

Wartość siły skrawania otrzymana w analizie numerycznej zostanie porównana z wartościami siły skrawania uzyskanymi z wzorów analitycznych (14.1) i (14.2). Dla danych własności wytrzymałościowych skały ( $\sigma_t = 12.7$  MPa) i parametrów skrawa-

nia (głębokość skrawania  $d = 0.03$  m i kąt natarcia  $\alpha = 30^\circ$ ) z równania (14.1) otrzymuje się siłę skrawania przewidywaną przez model Evansa

$$F_c = \frac{2 \cdot 12.7 \cdot 10^6 \cdot 0.03 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ}{1 - \sin 30^\circ} \text{ N} = 0.762 \cdot 10^6 \text{ N}.$$

W przebiegu czasowym siły skrawania uzyskanym numerycznie mamy kilka cykli odpowiadających odpajaniu kolejnych odłamków wióra, co można zobaczyć porównując rys. 14.11 i 14.13. Obliczona wartość teoretyczna,  $0.762 \cdot 10^6$  N, zgadza się dość dobrze z wartością maksymalną pierwszego cyklu, ok.  $0.8 \cdot 10^6$  N, odpowiadającą odpojeniu drugiego odłamka wióra (dla chwili  $t = 0.0065$  s).

W celu wyznaczenia siły skrawania według modelu Nishimatsu policzone zostaną najpierw wytrzymałość na ścinanie  $\tau_u$  ze wzoru (14.3) i kąt tarcia wewnętrzznego  $\phi$  ze wzoru (14.4)

$$\tau_u = \frac{12.7 \cdot 60}{2\sqrt{12.7(60 - 3 \cdot 12.7)}} \text{ MPa} = 22.8 \text{ MPa}, \quad \phi = \arctan \frac{60^2 - 4 \cdot 12.7^2}{4 \cdot 60 \cdot 12.7} = 16^\circ.$$

Po wstawieniu danych do wzoru (14.2) otrzymuje się siłę skrawania dla modelu Nishimatsu o wartości

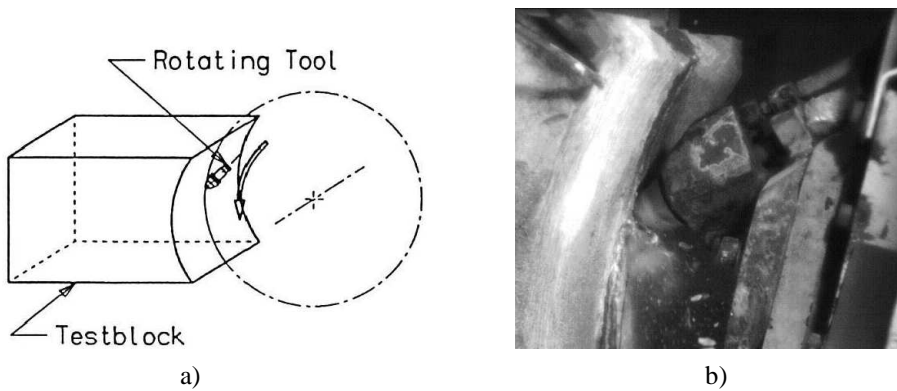
$$F = \frac{2 \cdot 22.8 \cdot 10^6 \cdot 0.03 \cdot 1 \cdot \cos 16^\circ}{(1 + 1)(1 - \sin(17^\circ + 16^\circ - 30^\circ))} \text{ N} = 0.69 \cdot 10^6 \text{ N}.$$

Wartość ta podobnie jak w przypadku modelu Evansa zgadza się dość dobrze z wartościami numerycznymi siły skrawania odpowiadającymi odpajaniu odłamków wióra w początkowej fazie skrawania.

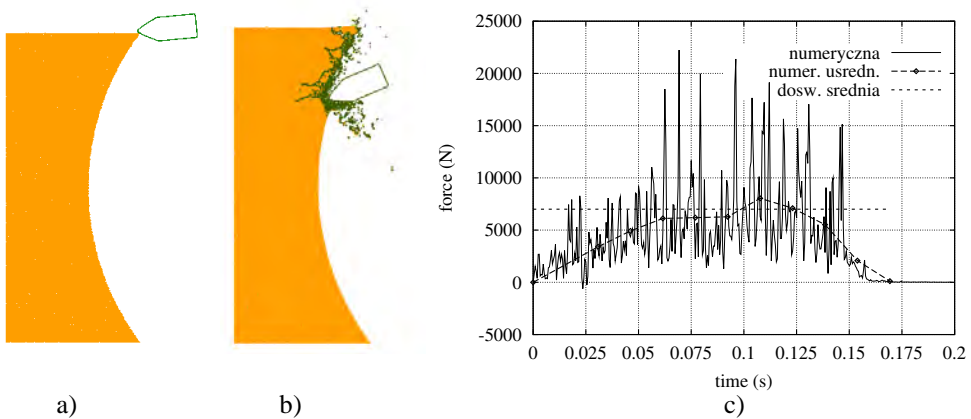
## 14.7 Doświadczalna weryfikacja modelu skrawania skał

Eksperymentalna weryfikacja modelu skrawania skał została przeprowadzona poprzez porównanie wyników symulacji skrawania pojedynczym nożem głowicy urabiającej kombajnu chodnikowego (*ang.* roadheader) z wynikami doświadczalnego badania skrawania przeprowadzonego w laboratorium Sandvik Mining and Construction w Zeltweg (Austria). Schemat stanowiska badawczego jest przedstawiony na rys. 14.14a. Blok skalny jest urabiany za pomocą stożkowego noża zamocowanego do głowicy obrotowej. Przeprowadzono badanie skrawania piaskowca o wytrzymałości na ściskanie  $\sigma_c = 127$  MPa i wytrzymałości na rozciąganie  $\sigma_t = 12$  MPa. Przebieg skrawania jest przedstawiony na rys. 14.14b. Widoczne jest typowe dla skrawania skał kruchych odłupywanie elementów wióra.

Model numeryczny wykorzystywany do symulacji przedstawionego testu skrawania jest pokazany na rys. 14.15a. Blok skalny jest modelowany za pomocą 30 750



Rys. 14.14. Doświadczalne badanie skrawania skał: a) schemat stanowiska do badania skrawania skał, b) przebieg próby skrawania (schemat i zdjęcie użyte przez Sandvik Mining and Construction GmbH, Zeltweg, Austria).



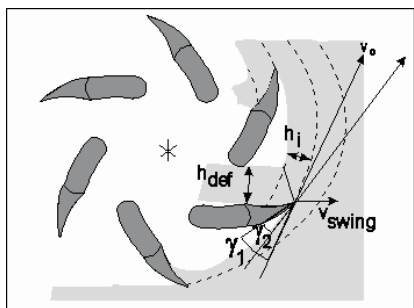
Rys. 14.15. Numeryczna symulacja testu skrawania skały: a) numeryczny model, b) postać zniszczenia skały w trakcie skrawania, c) przebieg czasowy siły skrawania.

elementów dyskretnych o promieniu  $r = 1 - 1.5$  mm. Parametry mikroskopowe dla skały o danych właściwościach mechanicznych badano w podrozdziale 13.4. Korzystając z otrzymanych tam wyników oraz posługując się odpowiednimi parametrami bezwymiarowymi omówionymi w podrozdziale 13.3 dla modelu elementów dyskretnych przyjęto następujący zbiór parametrów mikroskopowych:  $k_n = 1.61129 \cdot 10^{10}$  Pa,  $k_s = 0.2k_n = 0.3222 \cdot 10^{10}$  Pa,  $\mu = 0.8$ ,  $R_n = R_s = 1 \cdot 10^5$  N/m. Narzędzie skrawające traktowano jako sztywne, co pozwoliło uwzględnić w modelu jedynie jego powierzchnię. W modelu oddziaływania kontaktowego między skałą a narzędziem

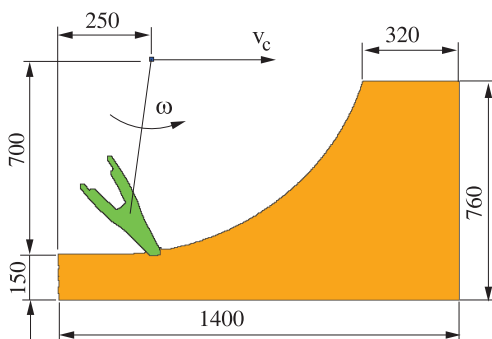
przyjęto  $k_n = k_s = 5 \cdot 10^{10}$  Pa i  $\mu = 0.5$ . Tłumienie w modelu zostało uwzględnione w oddziaływaniu kontaktowym przy założeniu jego wartości jako 0.9 tłumienia krytycznego oraz dodatkowo jako niewiskotyczne tłumienie zdefiniowane współczynnikami  $\alpha^{nvt} = \alpha^{nvr} = 0.2$ .

Rysunek 14.15b przedstawia otrzymaną w symulacji numerycznej postać zniszczenia skały w trakcie skrawania. Można zauważyć, że uzyskano postać zniszczenia zgodną z obserwowaną w doświadczeniu. Rysunek 14.15c pokazuje przebieg czasowy siły skrawania otrzymany w analizie numerycznej. Wartość siły pokazana na rysunku odpowiada szerokości skały równej odległości między kolejnymi przejściami narzędzia skrawającego w doświadczeniu. Na wykresie widoczne są bardzo duże skoki siły typowe dla skrawania skał kruchych. Gwałtowne spadki wartości siły skrawania zachodzą w trakcie odłupywania się odłamków wióra. Przebieg czasowy siły skrawania otrzymany w analizie skrawania jest zgodny z przebiegiem czasowym siły skrawania rejestrowanym w próbie doświadczalnej. Niestety doświadczalne przebiegi czasowe nie zostały udostępnione do publikacji. Dla potrzeb publikacji została udostępniona jedynie wartość średnia, wynosząca około 7000 N. Jak pokazano na rysunku 14.15c uśredniona wartość siły skrawania, otrzymana w analizie numerycznej, dość dobrze zgadza się ze średnią wartością siły skrawania wyznaczoną w doświadczeniu.

## 14.8 Symulacja skrawania skały pojedynczym ostrzem głowicy urabiającej pogłębiarki



Rys. 14.16. Schemat pracy głowicy urabiającej pogłębiarki



Rys. 14.17. Model skrawania skały pojedynczym ostrzem głowicy urabiającej pogłębiarki

Pogłębiarki (*ang.* dredgers) należą do maszyn urabiających skały za pomocą głowic wielonarzędziowych. Głowica urabiająca pogłębiarki jest pokazana na rys. 14.1b. Rysunek 14.16 przedstawia schemat pracy głowicy urabiającej. Trajektoria noża wynika ze złożenia ruchu postępowego oraz ruchu obrotowego głowicy.

Symulacja procesu urabiania przy uwzględnieniu całej głowicy wymagałaby zbyt dużego modelu obliczeniowego. W niniejszej pracy przeprowadzono symulację skrawania skały pojedynczym ostrzem głowicy urabiającej pogłębiarki stosując model przedstawiony na rys. 14.17. Obszar urabianej skały jest modelowany za pomocą ściśle upakowanych 92000 elementów dyskretnych o losowo generowanych wymiarach (o promieniach w przedziale 1–1.5 mm). Ponieważ cechy geometryczne zbioru elementów dyskretnych są takie same jak dla próbki skalnej badanej w podrozdziale 14.5, przyjęto takie same jak wyznaczone tam parametry modelu mikromechanicznego dla piaskowca.

Nóż urabiający, traktowany jako ciało sztywne, zdyskretyzowano za pomocą 9400 elementów dyskretnych o promieniu 0.7 mm. Oddziaływanie kontaktowe między narzędziem a skałą jest modelowane przy założeniu sztywności kontaktu w kierunku normalnym i stycznym  $k_n^r = k_s^r = 50$  GPa. Wartość współczynnika tarcia Coulomba  $\mu^r$  dla oddziaływania narzędzia ze skałą przyjęto 0.34 na podstawie danych z literatury dla pary poślizgowej stal/piaskowiec przy chłodzeniu wodą [85].

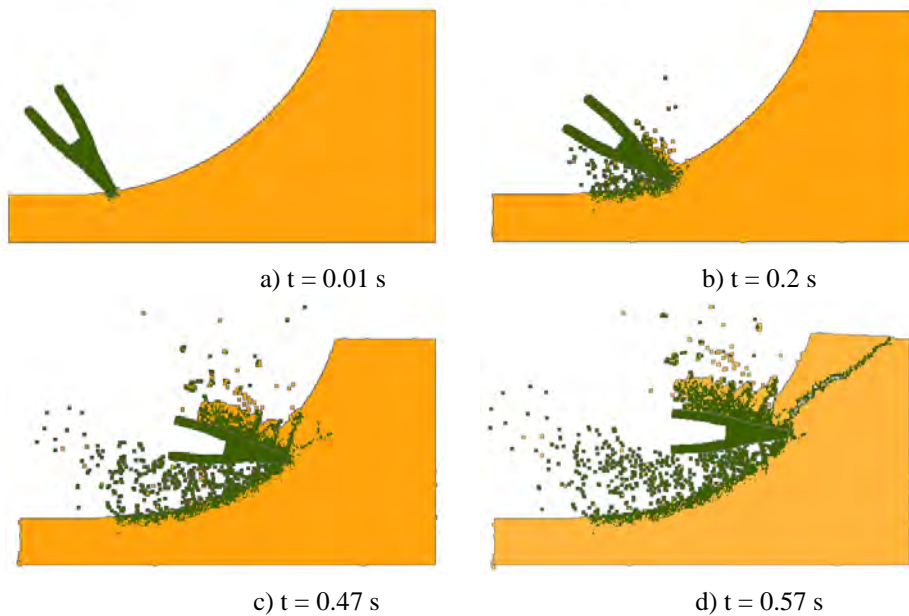
Prędkość liniowa głowicy urabiającej wynosi 0.2 m/s, a prędkość obrotowa  $1.6204$  s<sup>-1</sup>, co przy odległości ostrza skrawającego od osi obrotu głowicy 0.7 m daje prędkość skrawania 1.134 m/s.

Rysunek 14.18 przedstawia wyniki symulacji w postaci przebiegu zniszczenia skały przy skrawaniu. Pokazane jest formowanie się i odrywanie odłamków wióra przy przejściu noża.

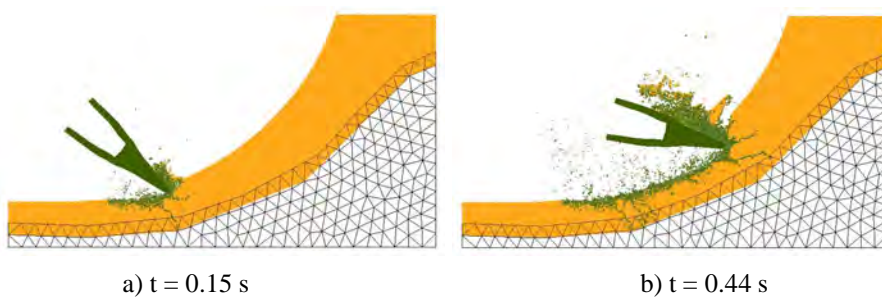
Symulacja skrawania w czasie 0.13 s wymagała około 550 000 kroków całkowania i zajmowała około 30 godz. CPU na komputerze z procesorem Xeon 3.4 GHz.

Do tego samego problemu zastosowano hybrydowy model oparty na zintegrowanej metodzie elementów dyskretnych i elementów skończonych. Poprzednio stosowany model został zmodyfikowany poprzez zastąpienie elementami skończonymi elementów dyskretnych w podobszarze, w którym nie występują pęknięcia (14.19). Pozwoliło to zmniejszyć liczbę elementów dyskretnych z 92 000 do 48 000. Podobszary MES i MED zostały sprzężone za pomocą przedstawionych uprzednio algorytmów sprzęgających, wykorzystujących metodę funkcji kary lub metodę mnożników Lagrange'a. Obydwie metody zostały sprawdzone w tym przypadku i obydwie dały poprawne wyniki. Zniszczenie skrawanej skały, otrzymane za pomocą modelu hybrydowego, pokazane jest na rys. 14.19.

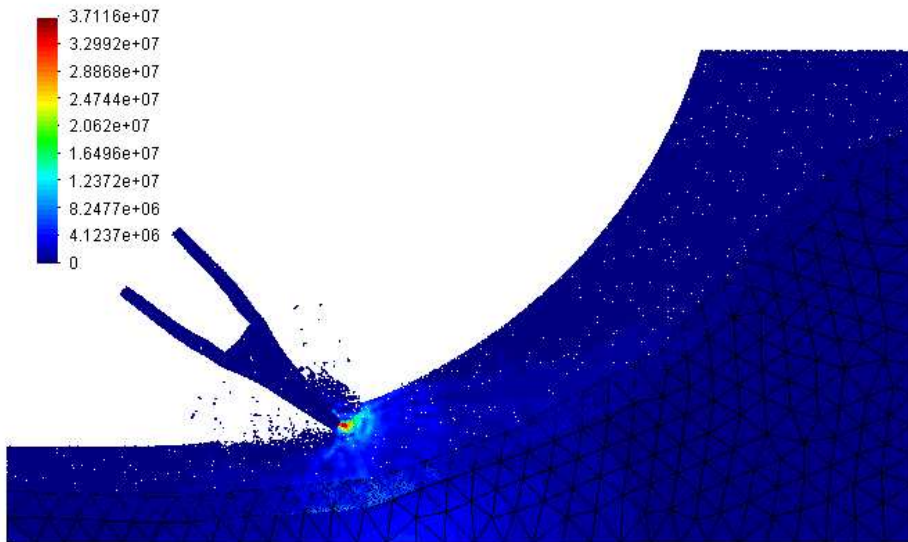
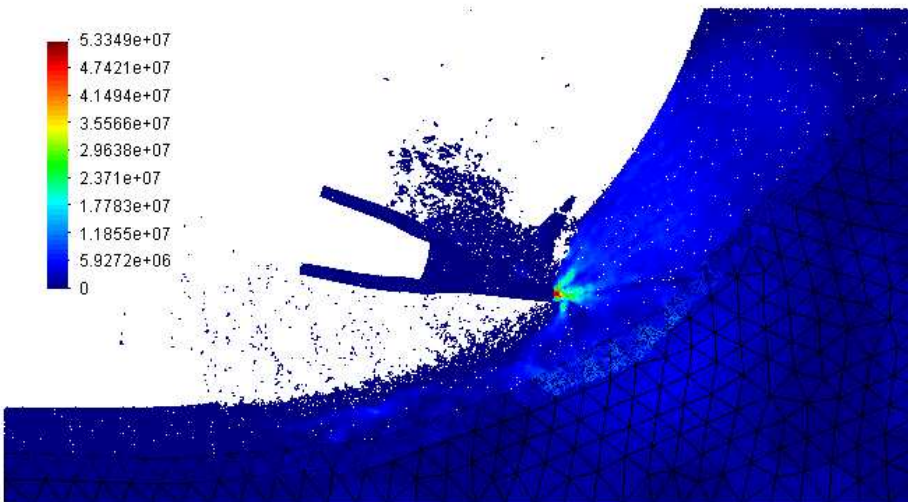




Rys. 14.18. Symulacja skrawania skały pojedynczym ostrzem głowicy urabiającej pogłębiarki – model MED.



Rys. 14.19. Symulacja skrawania skały pojedynczym ostrzem głowicy urabiającej pogłębiarki – hybrydowy model MED/MES (sprężenia za pomocą algorytmu opartego na metodzie funkcji kary).

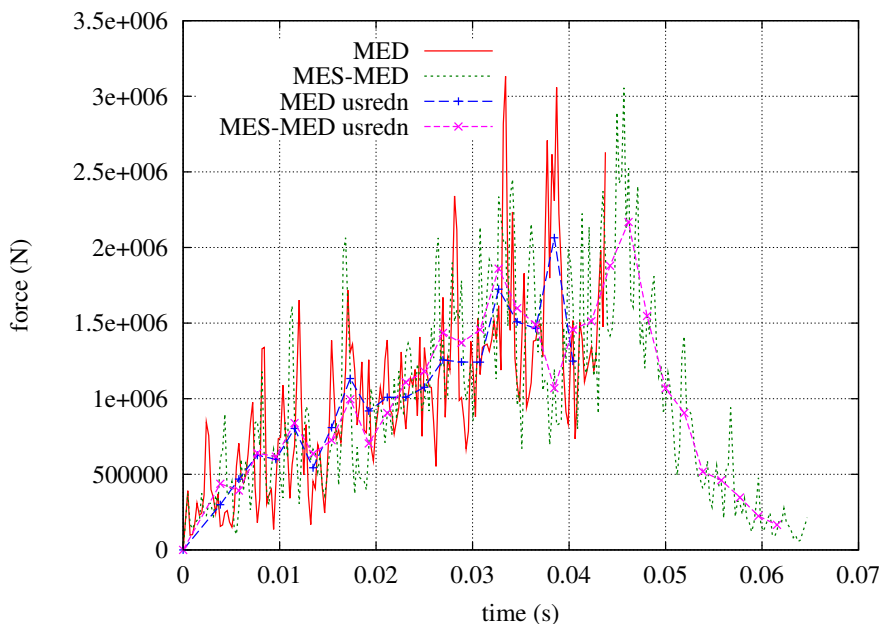
a)  $t = 0.14$  sb)  $t = 0.42$  s

Rys. 14.20. Symulacja skrawania skały pojedynczym ostrzem głowicy urabiającej pogłębiarki – rozkład naprężeń zastępczych w hybrydowym modelu MED/MES (sprężenia za pomocą algorytmu opartego na metodzie mnożników Lagrange'a).

Rysunek 14.20 przedstawia rozkład naprężeń zastępczych w dwóch chwilach czasu w hybrydowym modelu skrawania skały. Naprężenia w podobszarze skały, w którym

stosowano model dyskretny, określone są za pomocą procedury uśredniającej opisanej w rozdziale 8. Narzędzie jest traktowane jako ciało sztywne, a więc kolor nie ma żadnego znaczenia fizycznego. Rozkład naprężeń charakteryzuje się znaczną koncentracją naprężeń w pobliżu ostrza narzędzia zgodnie z opisem procesu skrawania w rozdziale 14.2. Porównanie naprężeń w podobszarach, w których stosowane są różne modele pokazuje, że pola naprężeń wyznaczone w odmienny sposób są zgodne, potwierdza to poprawność stosowanych metod numerycznych oraz poprawność ich sprzężenia.

Rysunek 14.21 przedstawia porównanie przebiegów czasowych siły skrawania uzyskanych w symulacji przy wykorzystaniu modelu elementów dyskretnych oraz przy wykorzystaniu modelu hybrydowego. Dla obydwu modeli zamieszczono krzywe o różnym poziomie filtracji. Widać, że w obu przypadkach otrzymuje się przebiegi czasowe o podobnych oscylacjach i zbliżonych amplitudach. Uśrednione przebiegi czasowe wykazują bardzo dużą zgodność. Potwierdza to zgodność wyników uzyskiwanych za pomocą obydwu modeli. Zastąpienie części obszaru obliczeniowego w modelu elementów dyskretnych podobszarem dyskretyzowanym elementami skończonymi nie zmienia zasadniczo wyników, a wpływa na zwiększenie efektywności obliczeń. Symulacja przejścia narzędzia wymagająca około 550 tys. kroków zajmo-



Rys. 14.21. Przebieg czasowy siły skrawania.

wała około 16 godz. CPU na komputerze z procesorem Xeon 3.4 GHz. Jest to prawie dwa razy krócej niż analiza z użyciem modelu zbudowanego tylko z elementów dyskretnych.

## Podsumowanie

W tym rozdziale opracowano modele numeryczne skrawania skał wykorzystując metodę elementów dyskretnych oraz hybrydową metodę elementów dyskretnych i elementów skończonych. Metodę elementów dyskretnych zastosowano w modelowaniu skały podlegającej zniszczeniu w procesie urabiania. Metoda elementów skończonych pozwala w łatwy sposób symulować proces odspajania wióra i dezintegrację skały przy skrawaniu. W modelowaniu skały wykorzystano metody dobierania parametrów modelu elementów dyskretnych na podstawie symulacji próby jednoosiowego ściskania i próby rozciągania.

W modelowaniu skrawania skały wykorzystano różne możliwości modelowania hybrydowego łączącego metody elementów dyskretnych i elementów skończonych. W jednym z przykładów narzędzie było traktowane jako ciało odkształcalne i zastosowano w jego dyskretyzacji metodę elementów skończonych. Umożliwiło to wyznaczenie naprężeń w narzędziu pod wpływem oddziaływania ze skałą. W innym przykładzie metodę elementów skończonych zastosowano do dyskretyzacji części skały nie ulegającej zniszczeniu. Pozwoliło to zwiększyć efektywność obliczeniową modelu. W przykładzie tym zweryfikowano algorytmy sprzężenia obydwu metod rozwinięte w rozdziale 9.

Symulacja numeryczna skrawania skał pozwala oszacować wielkość siły skrawania. W przykładzie skrawania skały nożem płaskim porównano siłę otrzymaną w symulacji numerycznej z siłą obliczoną na podstawie prostych modeli teoretycznych. Analiza numeryczna daje wartości siły skrawania zbliżone do przewidywań teoretycznych.

Część wyników przedstawionych w niniejszym rozdziale została uzyskana w ramach projektu europejskiego TUNCONSTRUCT: Technology Innovation in Underground Construction. Wyniki doświadczalne zostały udostępnione przez Sandvik Mining and Construction w Zeltweg (Austria).

Prace nad weryfikacją poprawności modelu skrawania są kontynuowane w ramach projektu TUNCONSTRUCT. We współpracy z Sandvik Mining and Construction przewidywane jest porównanie sił skrawania otrzymanych w symulacji numerycznej i laboratoryjnych testach skrawania. W ramach projektu są również prowadzone prace nad rozwojem trójwymiarowego modelu numerycznego.

# 15. Sformułowanie metody elementów dyskretnych dla problemów termicznych

## Wstęp

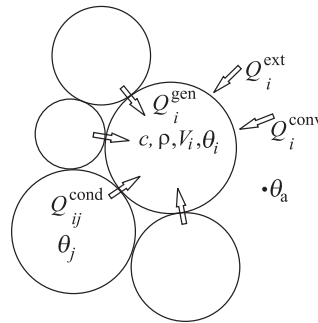
W niniejszym rozdziale sformułowanie elementów dyskretnych zostanie rozszerzone na zagadnienia przepływu ciepła. Równanie przewodzenia ciepła zostanie zastosowane do materiału modelowanego przez zbiór kontaktujących się między sobą elementów dyskretnych. W dalszej części pracy algorytm analizy termicznej zostanie połączony z algorytmem metody elementów dyskretnych dla zagadnień ruchu, dzięki czemu możliwa będzie analiza sprzężonych zagadnień termomechanicznych. Analiza termomechaniczna zostanie wykorzystana w symulacji procesów urabiania skał, co jest główną motywacją rozwijania w niniejszej pracy termicznego i termomechanicznego sformułowania metody elementów dyskretnych. W literaturze można znaleźć jedynie nieliczne prace pokazujące możliwości metody elementów dyskretnych w zagadnieniach termicznych i termomechanicznych [130, 157].

### 15.1 Sformułowanie problemu przewodzenia ciepła dla ośrodka dyskretnego

Rozpatrywany będzie problem nieustalonego przewodzenia ciepła w ośrodku dyskretnym będącym zbiorem elementów dyskretnych o kształcie walca w zagadnieniu dwuwymiarowym lub kuli w zagadnieniu trójwymiarowym. Podstawowym założeniem upraszczającym, przyjętym w modelu dyskretnym przewodzenia ciepła, jest założenie, że różnica temperatury wewnątrz elementu dyskretnego jest niewielka i można przyjąć, że temperatura w całej objętości elementu dyskretnego jest stała. Jest to uzasadnione przy niewielkich rozmiarach elementu dyskretnego i często jest wykorzystywane w praktyce w modelu ciała o skupionej pojemności cieplnej [276]. Inne przyjęte założenia są następujące:

- wymiana ciepła między sąsiadującymi elementami dyskretnymi odbywa się na powierzchni styku (tylko w przypadku istnienia kontaktu),
- wymiana ciepła z otoczeniem może się odbywać poprzez konwekcję (dla cząstek swobodnych lub znajdujących się na powierzchni obszaru modelowanego elementami dyskretnymi),
- uwzględnia się możliwość istnienia wewnętrznych i zewnętrznych źródeł ciepła.

## 15.2 Równanie bilansu ciepła



Rys. 15.1. Schemat problemu przewodnictwa ciepła dla elementu dyskretnego.

Do opisu zagadnienia przewodzenia ciepła w rozpatrywanym ośrodku zostanie wykorzystane równanie bilansu ciepła. Dla pojedynczego elementu dyskretnego (rys. 15.1) można napisać równanie bilansu ciepła w następującej postaci:

$$\rho V_i c \dot{\theta}_i = Q_i, \quad (15.1)$$

gdzie  $\rho$  – gęstość,  $V_i$  – objętość elementu dyskretnego,  $c$  – ciepło właściwe,  $\theta_i$  – temperatura elementu dyskretnego.  $Q_i$  jest sumą wszystkich strumieni ciepła dla rozpatrywanego elementu (rys. 15.1):

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n_c} Q_{ij}^{\text{cond}} + Q_i^{\text{ext}} + Q_i^{\text{gen}} + Q_i^{\text{conv}}, \quad (15.2)$$

gdzie:  $Q_{ij}^{\text{cond}}$  – strumień ciepła przejmowanego/oddawanego między kontaktującymi się elementami dyskretnymi  $i$  i  $j$ ,  $n_c$  – liczba elementów dyskretnych kontaktujących się z  $i$ -tym elementem,  $Q_i^{\text{ext}}$  – zadany strumień ciepła dostarczonego z zewnątrz,  $Q_i^{\text{gen}}$  – strumień ciepła generowanego przez wewnętrzne źródło ciepła,  $Q_i^{\text{conv}}$  – strumień wymiany ciepła z otoczeniem.

Równania bilansu ciepła (15.1) dla wszystkich  $N$  cząstek można zapisać łącznie w postaci macierzowej

$$\mathbf{C}\dot{\Theta} = \mathbf{Q}, \quad (15.3)$$

gdzie  $\mathbf{C}$  jest diagonalną macierzą skupionych pojemności cieplnych,  $\Theta$  – wektorem temperatur,  $\mathbf{Q}$  – wektorem strumieni ciepła

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} m_1 c & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & m_N c \end{bmatrix}, \quad \Theta = \{\theta_1 \dots \theta_N\}^T, \quad \mathbf{Q} = \{Q_1 \dots Q_N\}^T. \quad (15.4)$$

### 15.3 Związki konstytutywne dla strumieni ciepła

Strumień ciepła  $Q_{ij}^{\text{cond}}$  wymianianego między elementami dyskretnymi  $i$  oraz  $j$  można przyjąć jako proporcjonalny do różnicy temperatur między kontaktującymi się elementami

$$Q_{ij}^{\text{cond}} = -\bar{h}^{\text{cond}}(\theta_i - \theta_j), \quad (15.5)$$

gdzie:  $n_c$  – liczba elementów dyskretnych kontaktujących się z  $i$ -tym elementem,  $\bar{h}^{\text{cond}}$  – współczynnik przejmowania ciepła między elementami dyskretnymi. Na styku dwóch cząstek założono skok temperatury, co należy traktować jako makroskopowo obserwowaną różnicę temperatur mierzoną w pewnej małej odległości od powierzchni styku. Jest to uproszczenie przyjmowane zwykle w numerycznym modelu kontaktu termicznego [302]. Tłumaczy się to tym, że kontaktujące się powierzchnie zazwyczaj nie przylegają do siebie idealnie, lecz stykają się wierzchołkami nierówności. Wolna przestrzeń jest zazwyczaj wypełniona płynem o mniejszej przewodności cieplnej niż przewodność cieplna stykających się ciał. W wyniku tego w cienkiej warstwie obejmującej powierzchnię kontaktu powstaje zazwyczaj znaczny gradient temperatury. Traktując tę warstwę jako bardzo cienką, zastępujemy ją powierzchnią. Dla strumienia ciepła przepływającego przez tę powierzchnię przyjmuje się związek konstytutywny dany równaniem (15.5).

Związek (15.5) można traktować jako dyskretny model przewodzenia ciepła charakteryzowany przez współczynnik przejmowania ciepła  $\bar{h}^{\text{cond}}$ . Wymiana ciepła między kontaktującymi się elementami dyskretnymi modeluje przewodzenie ciepła przez ciało stałe. Wartość współczynnika  $\bar{h}^{\text{cond}}$  powinna być tak dobrana, aby makroskopowy przepływ ciepła w ośrodku dyskretnym był równoważny przepływowi ciepła opisanego równaniami przewodzenia ciepła dla ośrodka ciągłego. Postulując równoważność opisu dyskretnego i ciągłego można wyznaczyć parametry modelu dyskretnego.

Jako związek konstytutywny dla gęstości strumienia ciepła  $q$  w ciele stałym stosuje się zwykle prawo Fouriera

$$q = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (15.6)$$

gdzie:  $\lambda$  – współczynnik przewodzenia ciepła,  $x$  – kierunek przewodzenia ciepła. Stosując równanie Fouriera (15.6) dla przepływu między dwoma elementami o środkach oddalonych o  $d$ , strumień ciepła między kontaktującymi się elementami dyskretnymi można w przybliżeniu zapisać w postaci:

$$Q_{ij}^{\text{cond}} = -\lambda \frac{\bar{A}}{d}(\theta_i - \theta_j), \quad (15.7)$$

gdzie  $\bar{A}$  jest pewną fikcyjną powierzchnią wymiany ciepła.

Porównując równania (15.5) oraz (15.7) można uzyskać oszacowanie współczynnika przejmowania ciepła między elementami dyskretnymi  $\bar{h}^{\text{cond}}$  w zależności od współczynnika przewodzenia ciepła

$$\bar{h}^{\text{cond}} \approx \lambda \frac{\bar{A}}{d}. \quad (15.8)$$

Dla regularnej konfiguracji elementów dyskretnych przedstawionej na rys. 8.4a można przyjąć:  $\bar{A} = 2r \cdot 1\text{m}$  oraz  $d = 2r$ , gdzie  $r$  jest promieniem cząstek (elementów dyskretnych). Po uwzględnieniu tego w równaniu (15.8) otrzymuje się:

$$\bar{h}^{\text{cond}} \approx \lambda \cdot 1\text{m}. \quad (15.9)$$

Dla regularnej konfiguracji elementów dyskretnych przedstawionej na rys. 8.4b można przyjąć:  $d = 2r$  oraz  $\bar{A} = 2r/\sqrt{3} \cdot 1\text{m}$ , gdzie  $r$  jest promieniem cząstek (elementów dyskretnych). Po uwzględnieniu tego w równaniu (15.8) otrzymuje się:

$$\bar{h}^{\text{cond}} \approx \lambda/\sqrt{3} \cdot 1\text{m}. \quad (15.10)$$

Wyznaczanie współczynnika przejmowania ciepła między elementami dyskretnymi  $\bar{h}^{\text{cond}}$  jest rozpatrywane w prezentowanych w niniejszym rozdziale przykładów numerycznych.

Strumienie wymiany ciepła z otoczeniem poprzez konwekcję określa się za pomocą równania

$$Q_i^{\text{conv}} = -A_i h^{\text{conv}} (\theta_i - \theta_a), \quad (15.11)$$

gdzie:  $h^{\text{conv}}$  – współczynnik przejmowania ciepła, nazywany również współczynnikiem wnikania ciepła,  $\theta_a$  – temperatura otaczającego czynnika (płynu),  $A_i$  – powierzchnia wymiany ciepła z otoczeniem związana z  $i$ -tym elementem (część powierzchni ciała proporcjonalna do rozmiaru  $i$ -tego elementu). Współczynnik przejmowania ciepła  $h^{\text{conv}}$ , określający intensywność konwekcyjnej wymiany ciepła, jest zależny od rodzaju otaczającego płynu, od prędkości i kierunku przepływu płynu względem powierzchni ciała, może on być również funkcją temperatury powierzchni ciała [299]. W zagadnieniach i przykładach przedstawionych w niniejszej pracy stosowano stałą wartość współczynnika  $h^{\text{conv}}$ .

## 15.4 Warunki początkowe i brzegowe

Zagadnienie nieustalonego przewodzenia ciepła opisane równaniem (15.3) wymagają zadania odpowiednich warunków początkowych i brzegowych. Warunki początkowe



są wartościami temperatury w chwili początkowej  $t_0 = 0$

$$\Theta(0) = \Theta_0. \quad (15.12)$$

Warunki brzegowe dla zagadnienia nieustalonego przepływu ciepła opisywanego układem równań mogą być określone dla temperatur lub dla strumieni ciepła.

Warunek brzegowy dla temperatury można zapisać

$$\theta_i(t) = \bar{\theta}_i(t), \quad (15.13)$$

gdzie  $\bar{\theta}_i(t)$  jest znaną temperaturą  $i$ -tego elementu dyskretnego leżącego na brzegu modelowanego ośrodka dyskretnego. Warunek brzegowy dla temperatury określa się jako warunek brzegowy I rodzaju.

Warunki brzegowe dla strumienia ciepła mogą być określone w różny sposób:

- Zadany punktowy strumień ciepła (warunek II rodzaju)

$$Q_i^{\text{ext}}(t) = \bar{Q}_i(t), \quad (15.14)$$

gdzie  $\bar{Q}_i(t)$  jest znaną funkcją czasu. Szczególnym przypadkiem jest zerowy całkowity strumień ciepła odpowiadający izolowanej cieplnie powierzchni zewnętrznej (adiabaticzne warunki brzegowe)

$$Q_i^{\text{ext}}(t) = 0. \quad (15.15)$$

- Konwekcyjna wymiana ciepła z otoczeniem (warunek III rodzaju) określona przez strumień  $Q_i^{\text{conv}}$  zdefiniowany równaniem (15.11).

Zastosowanie warunków brzegowych na powierzchni ciała modelowanego elementami dyskretnymi wymaga wykrycia elementów znajdujących się na powierzchni. W modelach materiałów granularnych, jak również w modelach skał podlegających zniszczeniu, następuje zmiana geometrii z możliwością zmiany brzegu obszaru. Definicja warunków brzegowych, np. wymiany ciepła z otoczeniem, musi uwzględniać taki przypadek. W związku z tym wykrywanie zewnętrznych (brzegowych) elementów dyskretnych musi być elementem algorytmu rozwiązania na każdym kroku. W rozwijanym algorytmie numerycznym implementowano algorytm wykrywania elementów leżących na brzegu oparty na podobnych zasadach jak prezentowany w pracach [63, 64].

## 15.5 Całkowanie równania przepływu ciepła względem czasu

Równanie przepływu ciepła (15.3) jest całkowane za pomocą jawnej metody Eulera

$$\Theta^{n+1} = \Theta^{n+1} + \frac{\Delta t}{C} Q^n. \quad (15.16)$$

Podobnie jak jawny schemat całkowania równań ruchu w metodzie elementów skończonych i dyskretnych, jawny schemat całkowania równania przepływu ciepła według równania (15.16) jest stabilny warunkowo:

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr}. \quad (15.17)$$

Czas krytyczny dla tego schematu można oszacować wyrażeniem na czas krytyczny dla jednowymiarowego przepływu ciepła [119]

$$\Delta t_{cr} \approx \frac{l_{min}}{2a}, \quad (15.18)$$

gdzie  $l_{min}$  jest minimalną odległością między środkami elementów dyskretnych,  $a$  – jest dyfuzyjnością cieplną zdefiniowaną w następujący sposób

$$a = \frac{\lambda}{\rho c}, \quad (15.19)$$

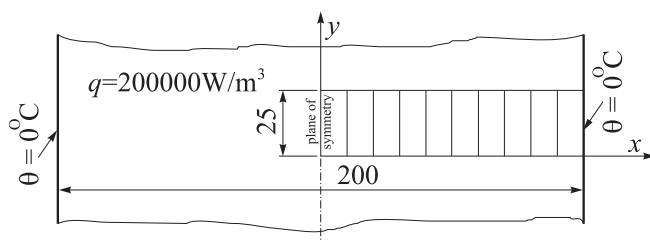
gdzie gęstość masy  $\rho$ , ciepło właściwe  $c$  i współczynnik przewodnictwa cieplnego  $\lambda$  są parametrami materiału modelowanego elementami dyskretnymi.

## 15.6 Przykłady numeryczne

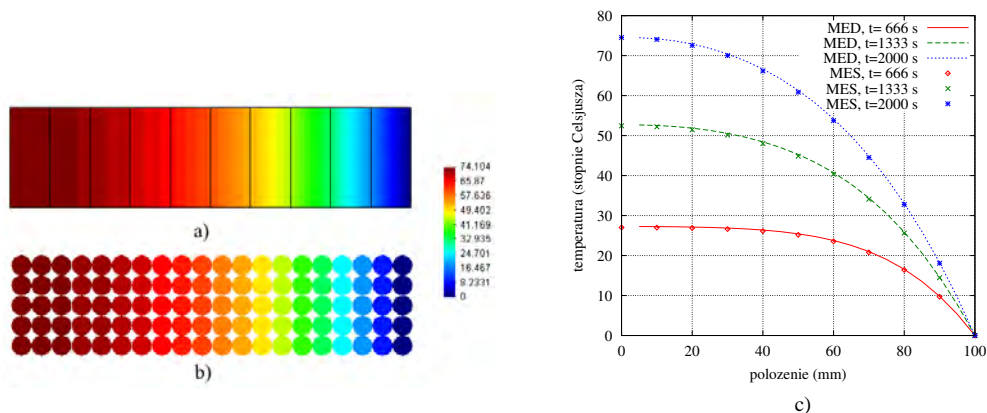
### 15.6.1 Wewnętrzna generacja ciepła w nieskończonej tarczy

Nieskończona tarcza o grubości 200 mm (rys. 15.2) początkowo znajduje się w temperaturze 0°C. Począwszy od chwili  $t = 0$  ciepło jest generowane wewnątrz całej objętości tarczy z natężeniem  $q = 200000 \text{ W/m}^3$ . Zewnętrzne powierzchnie tarczy (nieskończone płaszczyzny) są utrzymywane ciągle w temperaturze 0°C. Własności materiału są następujące: ciepło właściwe  $c = 1970 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ , współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda = 5.2 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$ , gęstość  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ . Przyjęte własności cieplne materiału odpowiadają własnościom piaskowca. Analizę przeprowadzono za pomocą metody elementów skończonych oraz metody elementów dyskretnych. W modelu numerycznym (rys. 15.2) rozważano pasmo tarczy o szerokości 25 mm oraz wykorzystano symetrię względem płaszczyzny środkowej tarczy. W modelu elementów skończonych modelowany obszar zdyskretyzowano za pomocą 10 elementów czworokątnych. Wyniki symulacji w postaci rozkładu temperatury w chwili  $t = 2000 \text{ s}$  dla modelu MES pokazano na rys. 15.3a.

W modelu elementów dyskretnych zastosowano 100 elementów dyskretnych ułożonych regularnie w węzłach siatki kwadratowej (rys. 15.3b). Przy założonej gęstości objętościowej skały  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ , gęstość materiału skały w porowatym modelu elementów dyskretnych wynosi  $\rho_m = \rho/(1-n) = 2500/(1-0.2146) \text{ kg/m}^3 = 3183 \text{ kg/m}^3$ . Współczynnik przejmowania ciepła między elementami dyskretnymi  $\bar{h}^{\text{cond}}$  przyjęto zgodnie z równaniem (15.9):  $\bar{h}^{\text{cond}} = \lambda \cdot 1\text{m} = 5.2 \text{ W/K}$ . Uzyskany dla modelu elementów dyskretnych rozkład temperatury w chwili  $t = 2000 \text{ s}$  przedstawiony jest na rys. 15.3b. Jest on praktycznie identyczny jak uzyskany w modelu MES. Ewolucja pola temperatury dla obydwu modeli jest przedstawiona na rys. 15.3c. Można zaobserwować doskonałą zgodność porównywanych wyników.



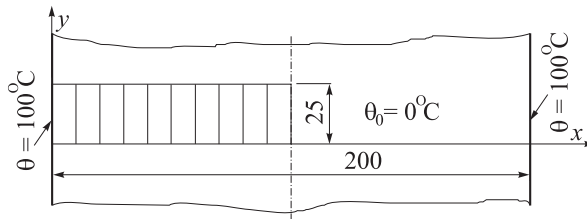
Rys. 15.2. Wewnętrzna generacja ciepła w nieskończonej tarczy – model elementów skończonych.



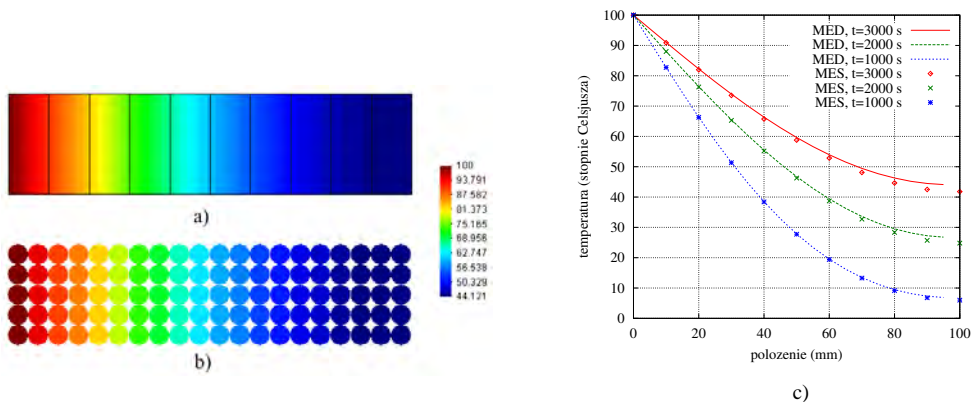
Rys. 15.3. Wewnętrzna generacja ciepła w nieskończonej tarczy: a) rozkład temperatury w modelu MES w chwili  $t=2000 \text{ s}$ , b) rozkład temperatury w modelu MED w chwili  $t=2000 \text{ s}$ , c) ewolucja rozkładu temperatury w modelach MES i MED.

### 15.6.2 Niestacjonarny przepływ ciepła w nieskończonej tarczy

Nieskończona tarcza o grubości 200 mm (rys. 15.4) początkowo znajduje się w temperaturze  $0^{\circ}\text{C}$  w chwili czasu  $t = 0^+$ , temperatura na obydwu płaszczyznach brzegowych tarczy wzrasta do  $100^{\circ}\text{C}$  i jest utrzymywana stałe w tej wysokości. Własności cieplne materiału tarczy są identyczne jak w przykładzie opisanym w rozdziale 15.6.1, ciepło właściwe  $c = 1970 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ , współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda = 5.2 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ , gęstość  $\rho = 2500 \text{ kg}/\text{m}^3$ . W modelu numerycznym (rys. 15.4) modelowano pasmo tarczy o szerokości 25 mm oraz wykorzystano symetrię względem płaszczyzny środkowej tarczy. Zagadnienie niestacjonarnego przepływu ciepła analizowano stosując model elementów skończonych oraz model elementów dyskretnych. W modelu elementów skończonych rozpatrywany obszar zdyskretyzowano za pomocą 10 elementów czworokątnych (rys. 15.4). W modelu elementów dyskretnych podobnie jak



Rys. 15.4. Niestacjonarny przepływ ciepła w nieskończonej tarczy – model elementów skończonych.



Rys. 15.5. Niestacjonarny przepływ ciepła w nieskończonej tarczy: a) rozkład temperatury w modelu MES w chwili  $t = 3000 \text{ s}$ , b) rozkład temperatury w modelu MED w chwili  $t = 3000 \text{ s}$ , c) ewolucja rozkładu temperatury w modelach MES i MED.

poprzednio zastosowano 100 elementów dyskretnych ułożonych regularnie w węzłach siatki kwadratowej (rys. 15.5b). Według tych samych założeń przyjęto gęstość materiału skały  $\rho_m = 3183 \text{ kg/m}^3$  oraz współczynnik przejmowania ciepła między elementami dyskretnymi  $\bar{h}^{\text{cond}} = 5.2 \text{ W/K}$ .

Porównanie rozkładu temperatur w chwili  $t = 3000 \text{ s}$  uzyskanych za pomocą analizy MES i MED jest pokazane na rys. 15.5a i b. Można zauważyć bardzo dobrą zgodność wyników uzyskanych różnymi metodami. Porównanie ewolucji rozkładu temperatury w obydwu modelach dla różnych chwil czasu pokazano na rys. 15.5c. Zaobserwować można dużą zgodność porównywanych wyników.

### 15.6.3 Kwadratowa tarcza ze stałym dopływem ciepła

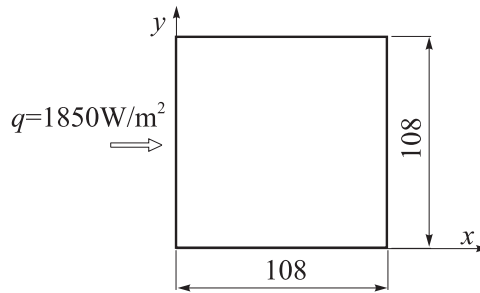
W przykładach przedstawionych w rozdziałach 15.6.1 i 15.6.2 stosowano modele wykorzystujące regularną konfigurację elementów dyskretnych. W niniejszym rozdziale przyjmiemy geometrię odpowiadającą geometrii próbki skalnej rozpatrywanej w rozdziale 14.5. W modelu zagadnienia przepływu ciepła metodą elementów dyskretnych wykorzystamy stosowany w rozdziale 14.5 model elementów dyskretnych charakteryzujący się nieregularnym losowym upakowaniem.

Kwadratowa tarcza (rys. 15.6) o wymiarach  $108 \times 108 \text{ mm}$  i grubości  $10 \text{ mm}$ , znajdująca się początkowo w temperaturze zerowej, jest poddana stałemu dopływowi ciepła równomiernie rozłożonemu na jednej z płaszczyzn bocznych. Gęstość dopływającego strumienia ciepła wynosi  $1850 \text{ W/m}^2$ . Pozostałe boki i powierzchnie tarczy są izolowane. Własności termiczne materiału odpowiadają własnościom piaskowca i są takie same jak w przykładach przedstawionych w rozdziałach 15.6.1 i 15.6.2, ciepło właściwe  $c = 1970 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ , współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda = 5.2 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$ , gęstość  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ .

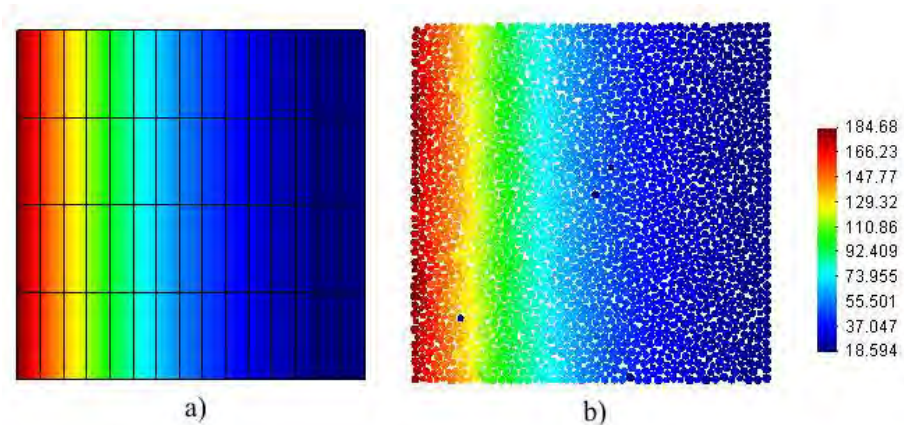
Obliczenia przeprowadzono stosując modele elementów skończonych i elementów dyskretnych. W modelu elementów skończonych zastosowano strukturalną siatkę elementów czworokątnych. Siatka elementów skończonych wraz z rozkładem temperatury w chwili  $t = 2000 \text{ s}$  jest przedstawiona na rys. 15.7a. Model elementów dyskretnych wraz z rozkładem temperatury jest przedstawiony na rys. 15.7b. W analizie metodą elementów dyskretnych przyjęto gęstość materiału  $\rho_m = \rho / (1 - n) = 2500 / (1 - 0.13) \text{ kg/m}^3 = 2870 \text{ kg/m}^3$ . W obliczeniach sprawdzono wartości współczynnika przejmowania ciepła między elementami dyskretnymi z zakresu wyznaczonego przez równania (15.9) i (15.10). Wyniki przedstawione na rys. 15.7b uzyskano dla współczynnika wyznaczonego z równania (15.9),  $\bar{h}^{\text{cond}} = \lambda \cdot 1\text{m} = 5.2 \text{ W/K}$ .

Ewolucja rozkładu temperatury otrzymana w analizie metodami elementów skończonych i dyskretnych jest przedstawiona na rys. 15.8. Można zaobserwować dużą

zgodność porównywanych wyników. Można uznać, że dla danego modelu elementów dyskretnych przyjęta wartość współczynnika przejmowania ciepła między elementami dyskretnymi dobrze reprezentuje makroskopowe własności cieplne materiału skały traktowanej jako ośrodek ciągły. Wyznaczone własności cieplne dla modelu dyskretnego próbki skalnej zostaną wykorzystane w termomechanicznej symulacji procesu skrawania w rozdziale 16.



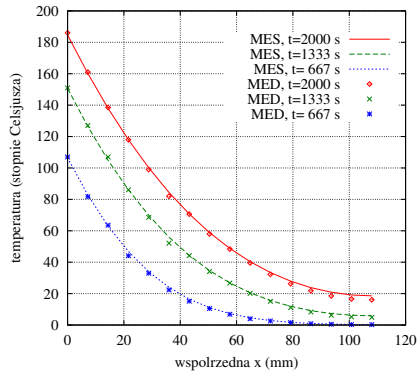
Rys. 15.6. Kwadratowa tarcza ze stałym dopływem ciepła.



Rys. 15.7. Kwadratowa tarcza ze stałym dopływem ciepła – rozkład temperatury w chwili  $t = 2000$  s: a) w modelu MES, b) w modelu MED.

## Podsumowanie

W tym rozdziale pokazano, że metoda elementów dyskretnych może być z powodzeniem wykorzystana również do zagadnień przepływu ciepła. Przedstawiono sformułowanie modelu dyskretnego oparte na zasadzie bilansu ciepła dla pojedynczego



Rys. 15.8. Kwadratowa tarcza ze stałym dopływem ciepła – rozkład temperatury wzdłuż osi  $x$ . Porównanie wyników MES i MED.

elementu oraz wyprowadzono równania przepływu ciepła dla układu elementów dyskretnych. Rozwiązanie zagadnienia cieplnego w czasie otrzymano przy wykorzystaniu jawnego schematu całkowania.

Poprawność działania modelu elementów dyskretnych w zagadnieniach przepływu ciepła zweryfikowano porównując wyniki uzyskane za pomocą metody elementów dyskretnych z wynikami uzyskanymi za pomocą metody elementów skończonych. Porównania pokazują dużą zgodność porównywanych wyników. W modelowaniu metodą elementów dyskretnych zastosowano zarówno regularne, jak i nieregularne konfiguracje elementów dyskretnych. Przykłady testowe pozwoliły również zweryfikować metodę wyznaczania parametrów modelu dyskretnego dającymi zadane własności cieplne materiału. Dla zadanego współczynnika przewodzenia ciepła materiału wyznaczono współczynnik przejmowania ciepła między elementami dyskretnymi. Stwierdzono, że oszacowanie współczynnika przejmowania ciepła dla regularnych konfiguracji elementów dyskretnych stanowi dobre przybliżenie dla nieregularnych konfiguracji elementów dyskretnych. Rozwinięte w niniejszym rozdziale sformułowanie elementów dyskretnych dla zagadnień przepływu ciepła, w dalszej części pracy zostanie wykorzystane w modelowaniu sprzężonych zagadnień termomechanicznych za pomocą metody elementów dyskretnych.

# 16. Termomechaniczna analiza procesów urabiania skał

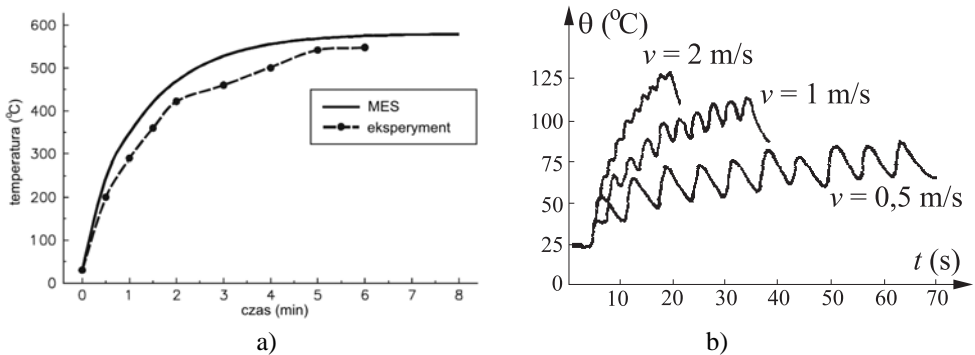
## Wstęp

Procesy urabiania i skrawania skał można rozpatrywać jako sprzężone zagadnienie termomechaniczne, w którym procesom mechanicznym towarzyszą efekty cieplne, a zjawiska termiczne mają wpływ na właściwości i procesy mechaniczne. W niniejszym rozdziale metoda elementów dyskretnych zostanie zastosowana do numerycznego modelowania zagadnienia termomechanicznego. Do rozwijanego algorytmu zostanie wprowadzono możliwość analizy sprzężonej łączącej algorytm analizy dynamicznej przedstawiony w rozdziałach 7 i 14 z algorytmem analizy termicznej przedstawionym w rozdziale 15.

Termomechaniczna analiza procesu urabiania skał w dalszej części niniejszej pracy umożliwi uwzględnienie temperatury jako istotnego czynnika wpływającego na zużycie narzędzi urabiających.

### 16.1 Efekty cieplne w skrawaniu skał

W skrawaniu skał występują istotne dla wytrzymałości i trwałości narzędzi efekty cieplne. W trakcie skrawania, na skutek ciepła generowanego przy tarcia narzędzia



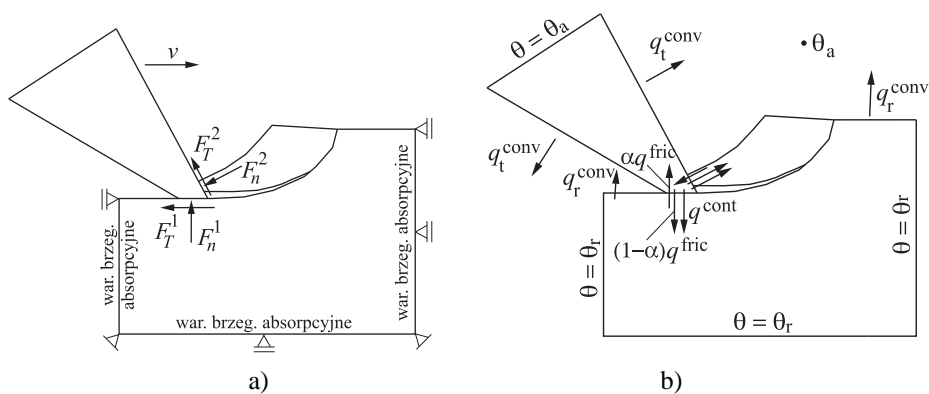
Rys. 16.1. Przebiegi czasowe temperatury na ostrzu noża skrawającego: a) typowy przebieg czasowy temperatur dla ciągłego urabiania skał [174], b) typowy przebieg czasowy temperatur dla cyklicznego strugania skał – wpływ prędkości skrawania na temperaturę ostrza [133].



skrawającego o skałę, następuje znaczny wzrost temperatury ostrza [132, 133, 207]. W typowym przebiegu czasowym temperatury na ostrzu noża (rys. 16.1a) można wyróżnić początkowy okres wzrostu temperatury, w którym ciepło pochłaniane przez narzędzie jest większe od ciepła odprowadzanego, aż do osiągnięcia pewnej temperatury, w przybliżeniu ustalonej, w którym proces absorpcji ciepła jest w równowadze z procesem odprowadzania ciepła na skutek przewodzenia i wymiany z otoczeniem [174]. W skrawaniu cyklicznym przebieg czasowy temperatury charakteryzuje się oscylacjami. Typowe przebiegi czasowe temperatury na ostrzu noża przy skrawaniu cyklicznym pokazano na rys. 16.1b. Wzrost temperatury narzędzia skrawającego zależy od różnych czynników, takich jak własności termiczne materiału narzędzia i skały, parametry procesu skrawania, w tym prędkość i siły skrawania, wymiana ciepła z otoczeniem, naturalna, jak również wymuszona przez zastosowanie dodatkowego chłodzenia. Zależność temperatury od prędkości skrawania pokazano na rys. 16.1b. Wraz ze wzrostem prędkości skrawania zwiększa się przyrost temperatury [133, 174].

## 16.2 Termomechaniczny model skrawania skał

Termomechaniczny model skrawania skał jest pokazany schematycznie na rys. 16.2 z rozdzieleniem zjawisk opisywanych w sformułowaniu problemu mechanicznego oraz uwzględnianych w zagadnieniu termicznym. Zagadnienie mechaniczne i zagadnienie termiczne sprzężone są poprzez zjawisko generacji ciepła. Ciepło generowane na skutek tarcia narzędzia o skałę jest wyznaczane w rozwiązaniu problemu mechanicznego i traktowane jako źródło ciepła w zagadnieniu termicznym.



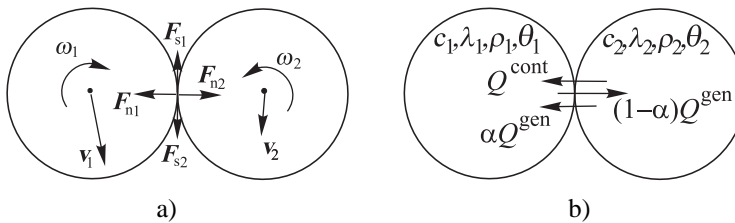
Rys. 16.2. Termomechaniczny model skrawania skał: a) schemat problemu mechanicznego, b) schemat problemu termicznego.

Generowane ciepło jest absorbowane i przewodzone przez narzędzie i skałę. Przebieg zjawisk cieplnych zależy od własności termicznych materiału narzędzia i skały. W modelu problemu termicznego dla procesu skrawania ciał uwzględniona zostanie również wymiana ciepła z otoczeniem oraz wymiana ciepła w kontakcie między ostrzem skrawającym i skałą.

Sprężenie w rozpatrywanym zagadnieniu termomechanicznym jest dwustronne – rozwiązanie zagadnienia termicznego ma wpływ na proces mechaniczny. Pod wpływem temperatury zmieniają się własności mechaniczne materiału narzędzia oraz powstają odkształcenia i naprężenia spowodowane rozszerzalnością cieplną.

Model numeryczny skrawania skał jako zagadnienia termomechanicznego zostanie stworzony w oparciu o przedstawione we wcześniejszych rozdziałach sformułowanie metody elementów dyskretnych. W analizie zagadnienia mechanicznego należy uwzględnić dodatkowo generację ciepła w zagadnieniu kontaktowym. Zagadnienie termiczne w ujęciu modelowania dyskretnego jest opisane za pomocą równania przepływu ciepła przedstawionego w rozdziale 15.

### 16.3 Model kontaktu termomechanicznego



Rys. 16.3. Kontakt termomechaniczny między dwoma elementami dyskretnymi: a) schemat problemu mechanicznego, b) schemat problemu termicznego.

Model kontaktu w zagadnieniu termomechanicznym uwzględnia oddziaływanie mechaniczne między kontaktującymi się obiektami, generację ciepła na skutek tarcia oraz wymianę ciepła na skutek różnicy temperatur między powierzchniami stykających się ciał. Oddziaływanie mechaniczne jest opisane w podrozdziale 7.3. Dysypacja energii na skutek tarcia jest określona równaniem

$$\dot{D} = F_s v_s^{\text{ir}}, \quad (16.1)$$

gdzie  $F_s$  jest siłą tarcia, a  $v_s^{\text{ir}}$  nieodwracalną częścią względnej prędkości poślizgu. Ciepło przejęte przez kontaktujące się ciała jest częścią dysypowanej energii

$$Q^{\text{gen}} = \chi \dot{D}, \quad \text{gdzie } \chi \leq 1. \quad (16.2)$$

Strumień ciepła  $Q^{\text{gen}}$  generowany wskutek tarcia jest pochłonięty przez kontaktujące się ciała:

$$Q^{\text{gen}} = Q_1^{\text{gen}} + Q_2^{\text{gen}}, \quad (16.3)$$

gdzie  $Q_1^{\text{gen}}$  i  $Q_2^{\text{gen}}$  są to strumienie ciepła pochłonięte przez poszczególne ciała. Podział strumienia  $Q^{\text{gen}}$  na strumienie  $Q_1^{\text{gen}}$  i  $Q_2^{\text{gen}}$  można zapisać wprowadzając współczynnik podziału ciepła  $\alpha$

$$Q_1^{\text{gen}} = \alpha Q^{\text{gen}}, \quad Q_2^{\text{gen}} = (1 - \alpha) Q^{\text{gen}}. \quad (16.4)$$

Współczynnik podziału ciepła  $\alpha$  określa się zazwyczaj przyjmując warunek, że w obszarze rzeczywistego kontaktu (styku) dwóch ciał temperatura na obu stykających się powierzchniach powinna być jednakowa [4, 78]. Dokładne rozwiązanie tak postawionego problemu dla pary ciał poruszających się względem siebie prowadzi do rozbudowanego wyrażenia na współczynnik podziału ciepła [4]. Pokazuje ono, że podział generowanego ciepła zależy od różnicy aktywności cieplnej (efuzyjności cieplnej) obydwu materiałów  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \sqrt{\rho c \lambda}, \quad (16.5)$$

gdzie:  $\rho$  – gęstość masy,  $c$  – ciepło właściwe,  $\lambda$  – współczynnik przewodnictwa cieplnego. Efuzyjność cieplna zwana również inercją cieplną jest parametrem charakteryzującym odpowiadź (opór) materiału na wprowadzone zaburzenie (źródło ciepła) do układu cieplnego.

W zastosowaniach praktycznych można przyjąć uproszczone założenie, że podział ciepła generowanego wskutek tarcia jest proporcjonalny do efuzyjności cieplnej kontaktujących się ciał:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \sqrt{\frac{\rho_1 c_1 \lambda_1}{\rho_2 c_2 \lambda_2}}. \quad (16.6)$$

Wykorzystując wyrażenie (16.6) z równań (16.4) i (16.3) otrzymuje się wyrażenie na współczynnik podziału ciepła [191]

$$\alpha = \frac{1}{1 + \sqrt{\rho_2 c_2 \lambda_2 / \rho_1 c_1 \lambda_1}}. \quad (16.7)$$

W modelu numerycznym niespełnione jest założenie o równości temperatur w miejscu styku dwóch ciał. Pomiędzy kontaktującymi się ciałami następuje przepływ ciepła proporcjonalny do różnicy temperatur, określony równaniem (16.8).

Strumienie wymiany ciepła w kontakcie z innym ciałem określa się za pomocą równania

$$Q^{\text{cont}} = -Ah^{\text{cont}}(\theta_i - \theta_c), \quad (16.8)$$

gdzie:  $h^{\text{cont}}$  – współczynnik wymiany ciepła w kontakcie,  $\theta^c$  – temperatura kontaktującego się ciała w miejscu styku z  $i$ -tym elementem,  $A$  – powierzchnia wymiany ciepła z otoczeniem związana z  $i$ -tym elementem (część powierzchni ciała proporcjonalna do rozmiaru  $i$ -tego elementu). Fizyczne uzasadnienie założonego skoku temperatury w warstwie kontaktowej podano w podrozdziale 15.3.

#### 16.4 Równania metody elementów dyskretnych dla sprzężonego zagadnienia termomechanicznego

Równania ruchu układu elementów dyskretnych (7.23) i (7.24) sprzężone z równaniem przewodnictwa cieplnego dla modelu dyskretnego (15.3)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{R}, \quad (16.9)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{T}, \quad (16.10)$$

$$\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{Q}, \quad (16.11)$$

wraz z odpowiednimi warunkami początkowymi i brzegowymi stanowią układ równań opisujących zagadnienia termomechaniczne w ujęciu metody elementów dyskretnych. Równania (16.9)–(16.10) są sprzężone z równaniami (16.11) poprzez uwzględnienie następujących efektów sprzęgających:

- generacja ciepła na skutek tarcia w kontakcie między elementami dyskretnymi,
- dylatacja cieplna i wywołane nią naprężenia.

#### 16.5 Całkowanie równań ruchu dla zagadnienia sprzężonego

Układ równań (16.9)–(16.11) opisujący zagadnienie termomechaniczne jest rozwiązywany poprzez naprzemienne (*ang.* staggered) całkowanie w czasie. Rozwiązanie dla  $n$ -tego kroku całkowania odbywa się w następujący sposób:

- równania ruchu (16.9) i (16.10) są całkowane w czasie za pomocą jawnego schematu różnic centralnych danego równaniami (7.59)–(7.66) przy założeniu stałej

temperatury; w rozwiązaniu problemu mechanicznego uwzględnione są dodatkowe oddziaływania między cząstkami wynikające z rozszerzalności cieplnej oraz obliczany jest strumień ciepła, generowanego na skutek tarcia w kontakcie, według równania (16.2).

- (ii) Równanie przepływu ciepła (16.11) jest całkowane za pomocą jawnej metody Eulera wyrażonej przez równanie (15.16); problem termiczny jest rozwiązywany dla niezmienniej konfiguracji geometrycznej modelu; strumień ciepła generowanego na skutek tarcia obliczony w etapie (i) jest uwzględniony jako jedno ze źródeł ciepła; temperatura cząstek wyznaczona w rozwiązaniu zagadnienia cieplnego jest z kolei przekazana do rozwiązania zagadnienia mechanicznego w następnym kroku.

Schemat całkowania zagadnienia termomechanicznego jest warunkowo stabilny. Krok całkowania jest ograniczony krokiem krytycznym  $\Delta t_{cr}$ :

$$\Delta t_{cr} = \min(\Delta t_{cr}^{mech}, \Delta t_{cr}^{term}), \quad (16.12)$$

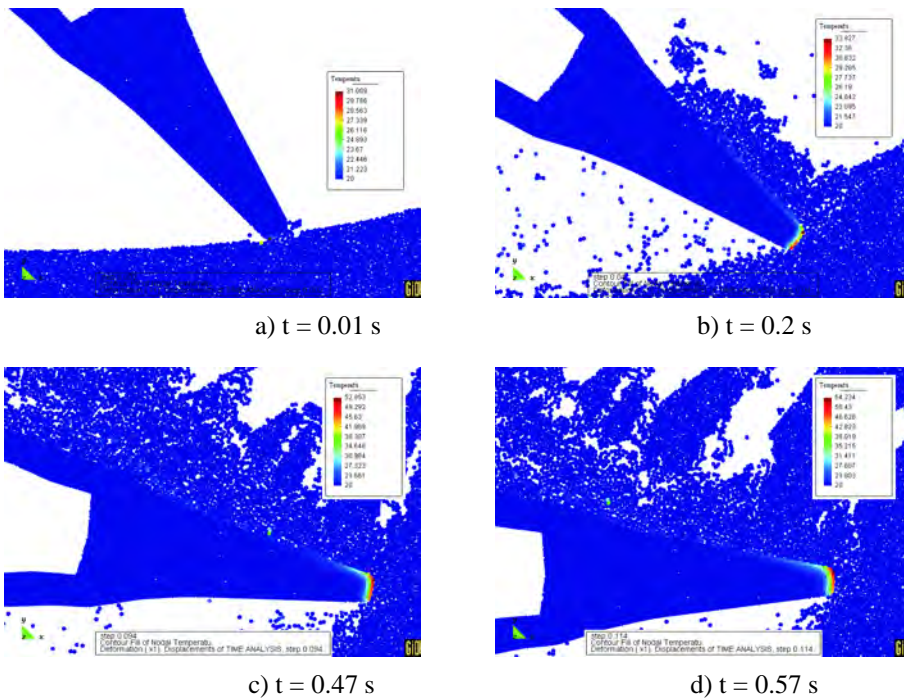
gdzie  $\Delta t_{cr}^{mech}$  jest krokiem krytycznym dla rozwiązania zagadnienia mechanicznego określonym równaniem (2.61), a  $\Delta t_{cr}^{term}$  jest krokiem krytycznym dla rozwiązania zagadnienia przepływu ciepła określonym równaniem (15.18).

## 16.6 Termomechaniczna analiza urabiania skały przy pogłębianiu

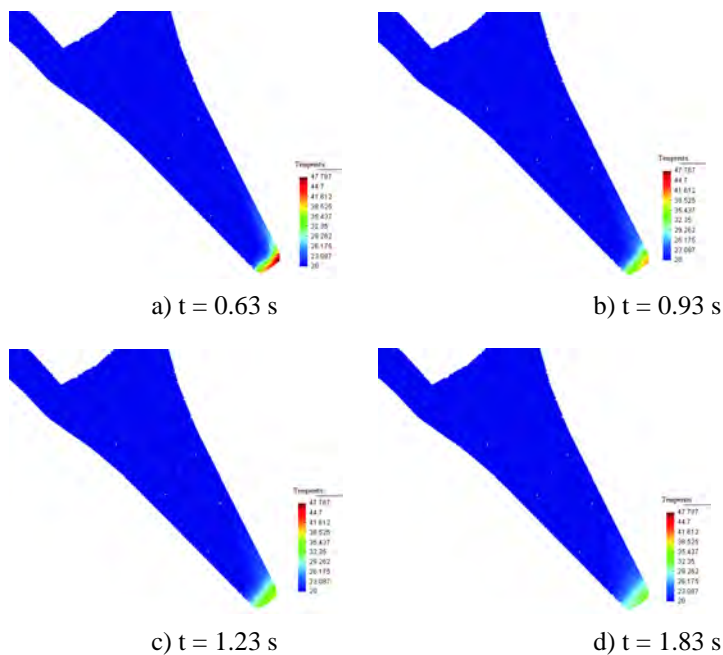
Proces skrawania skały pojedynczym ostrzem głowicy urabiającej pogłębiarki zdefiniowany w rozdziale 14.8 został rozpatrzony jako proces termomechaniczny. Zastosowano taki sam jak poprzednio model geometryczny wraz z przyjętymi uprzednio parametrami definiującymi własności mechaniczne. W analizie badano przebieg kilku cykli składających się z dwóch etapów, skrawania oraz fazy swobodnego ruchu narzędzia w wodzie. Dla etapu skrawania prowadzono analizę termomechaniczną badano mechaniczne zniszczenie skały oraz generację i przepływ ciepła w układzie składającym się ze skały i narzędzia zanurzonych w wodzie, działającej jako ośrodek chłodzący. Dla etapu swobodnego ruchu narzędzia prowadzono analizę termiczną w celu wyznaczenia zmian temperatury narzędzia chłodzonego wodą.

Wyniki analizy są pokazane na rys. 16.4–16.6. Rysunek 16.4 przedstawia ostrze noża w trakcie skrawania wraz z rozkładem temperatury. Widać zniszczenie typowe dla kruchej skały podobne do przedstawianego wcześniej w rozdziale 14.8. Na rys. 16.4 zaprezentowano również wzrost temperatury narzędzia. Najwyższa temperatura występuje na powierzchni ostrza w miejscu, gdzie są największe naciski przy kruszeniu skały. Rozkład temperatury narzędzia skrawającego w fazie swobodnego ruchu pokazany jest na rys. 16.5. Zmiany w rozkładzie temperatury w tej fazie są wywołane

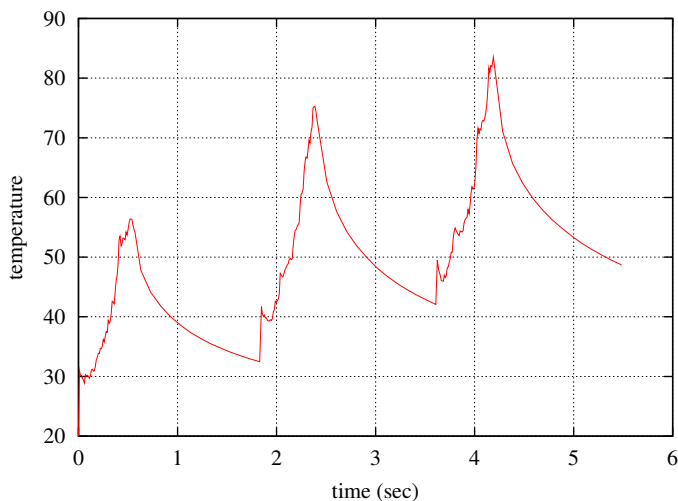
chłodzeniem wodą i rozplywem ciepła w narzędziu. Rysunek 16.6 pokazuje cykliczne zmiany temperatury na ostrzu, charakteryzujące się wzrostem temperatury w trakcie skrawania oraz spadkiem temperatury w czasie ruchu swobodnego przy chłodzeniu wodą. Charakter uzyskanych w analizie zmian temperatury jest zgodny z przebiegiem czasowym temperatury w ostrzu w rzeczywistym procesie urabiania, przedstawionym na rys. 16.1. Rysunek 16.6 pokazuje zmiany temperatury w trakcie początkowych cykli. Maksymalne temperatury w poszczególnych cyklach rosną. W analizowanym czasie nie osiągnięto jeszcze stanu quasi-stacjonarnego, w którym ilości ciepła generowanego i odprowadzanego w czasie jednego cyklu równoważą się. Wymagałoby to wydłużenia analizowanego przedziału czasu.



Rys. 16.4. Termomechaniczna analiza skrawania skały pojedynczym ostrzem głowicy urabiającej pogłębiarki – rozkład temperatury w różnych chwilach pierwszego cyklu skrawania.



Rys. 16.5. Termomechaniczna analiza skrawania skały pojedynczym ostrzem głowicy urabiającej pogłębiarki – rozkład temperatury w różnych chwilach chłodzenia po pierwszym przejściu ostrza.



Rys. 16.6. Termomechaniczna analiza skrawania skały pojedynczym ostrzem głowicy urabiającej pogłębiarki – zmiana temperatury narzędzia w czasie trzech cykli skrawania i chłodzenia.

## Podsumowanie

Metodę elementów dyskretnych wykorzystano do modelowania sprzężonego problemu termomechanicznego. Algorytm analizy termomechanicznej oparty został na sprzężeniu wcześniej rozwiniętych modeli dyskretnych dla problemu mechanicznego oraz problemu termicznego. Rozwiązanie sprzężonego układu równań jest zrealizowane za pomocą naprzemiennego schematu całkowania równań ruchu i równania przewodnictwa ciepła.

Opracowany algorytm został zastosowany do symulacji problemu skrawania skał jako zagadnienia termomechanicznego. Przeprowadzono symulację kilku cykli skrawania skały pojedynczym ostrzem pogłębiarki. Każdy cykl składał się z etapu skrawania i ruchu swobodnego narzędzia. W trakcie całego cyklu narzędzie było poddane chłodzeniu wodą. Uzyskana zmiana temperatury zgadza się z przebiegiem czasowym temperatury narzędzia skrawającego w cyklicznym skrawaniu skały. Uwzględnienie efektów cieplnych w procesie skrawania stwarza możliwość dokładniejsze modelowanie zużycia narzędzia skrawającego.



# 17. Modelowanie i symulacja zużycia narzędzi do urabiania skał

## Wstęp

W niniejszym rozdziale rozpatruje się zużycie ściernie narzędzi do urabiania skał. Zużycie jest to proces stopniowego ubytku materiału z warstw wierzchnich ciała stałego pod wpływem różnorodnych czynników. Zmiana kształtu narzędzia na skutek ubytku materiału z powierzchni wpływa negatywnie na efektywność procesów urabiania skał.

W niniejszym rozdziale rozpatruje się zużycie narzędzi jako jeden z efektów uwzględnianych w symulacji skrawania (urabiania) skał. Celem jest prognozowanie intensywności oraz formy zmiany geometrii narzędzi. Przedstawione we wcześniejszych rozdziałach sformułowanie metody elementów dyskretnych zostało wzbogacone o model zużycia. Zużycie ściernie rozpatruje się jako jeden z efektów towarzyszących tarcia między narzędziem a urabianą skałą, zależny w dużym stopniu od efektów termicznych. Wzrost temperatury narzędzia wskutek absorpcji generowanego przez tarcie ciepła prowadzi do przyspieszonego ubytku masy narzędzia. Zastosowanie termomechanicznego sformułowania metody elementów dyskretnych umożliwi uwzględnienie efektów termicznych w modelowaniu zużycia.

## 17.1 Podstawowe informacje o zużyciu

Ze względu na mechanizm zużycia można wyróżnić następujące grupy procesów zużycia: zużycie ściernie (abrazyjne), zużycie adhezyjne, zużycie zmęczeniowe, zużycie chemiczne i elektrochemiczne (korozyjne), zużycie kawitacyjne oraz inne rodzaje zużycia [86].

Zużycie ściernie (abrazyjne) występuje w obszarze tarcia między dwoma ciałami pod wpływem wystających nierówności powierzchni trącej twardszego materiału lub znajdujących się w obszarze tarcia luźnych lub utwierdzonych cząstek ścierniwa. Wśród mechanizmów zużycia ściernego można wyróżnić m.in. mikroskrawanie, bruzdowanie, odrywanie nierówności, rysowanie.

Zużycie adhezyjne jest związane z adhezją powierzchni trących, występuje w mikroobszarach plastycznego odkształcenia warstwy wierzchniej, a zwłaszcza najwyższych wierzchołków chropowatości. Powstają wówczas lokalne połączenia adhezyjne trących powierzchni. Zużycie następuje przy niszczeniu tych połączeń, któremu towarzyszy odrywanie cząstek materiału.

Zużycie zmęczeniowe jest rodzajem zużycia, w którym miejscowa utrata spójności i związane z nią ubytki materiału są spowodowane zmęczeniem materiału w wyniku cyklicznego oddziaływania naprężeń kontaktowych w warstwach wierzchnich kontaktujących się elementów. Zmęczeniowe mikropęknięcia powierzchniowe przechodzą następnie w makropęknięcia, a w końcowym efekcie następuje odrywanie od powierzchni kawałków metalu. Szczególnymi rodzajami zużycia zmęczeniowego są zużycie przez łuszczenie (*ang.* spalling) oraz gruzełkowe (*ang.* pitting).

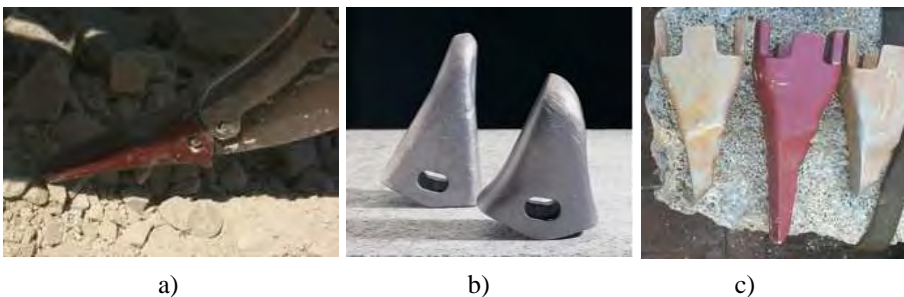
Zużycie chemiczne występuje wskutek reakcji chemicznych zachodzących między współpracującymi materiałami lub wskutek reakcji (np. utleniania) między zużywanym materiałem a otoczeniem, w którym zachodzi proces tarcia.

Procesy zużycia są bardzo skomplikowane, zależą od wielu czynników, często mamy do czynienia z jednoczesnym występowaniem różnych mechanizmów zużycia.

## 17.2 Zużycie narzędzi do urabiania skał

W trakcie pracy narzędzia do urabiania skał i gruntów ulegają czasami bardzo szybkiemu zużyciu. Rysunek rys. 17.1 przedstawia przykładowe narzędzia, zęby zrywaka i noże głowicy urabiającej pogłębiarki – nowe oraz w zaawansowanym stadium zużycia. Zużycie narzędzi ma bardzo niekorzystny wpływ na efektywność procesu urabiania [178, 179].

Rozważając zużywanie się narzędzi do urabiania skał rozpatruje się system trybologiczny składający się z narzędzia urabiającego (skrawającego) oraz skały zwięzłej lub luźnej. Między skałą zwięzłą a narzędziem dodatkowo mogą występować odłamki skruszonej skały. W takim systemie mogą występować różne mechanizmy zużycia. W procesie urabiania możemy mieć do czynienia z obciążeniem uderzeniowym narzędzia prowadzącym do zużycia zmęczeniowego. W oddziaływaniu narzędzi i skały występuje intensywne tarcie, które może powodować zużycie ściernie lub adhezyjne.



Rys. 17.1. Zużycie narzędzi do urabiania skał: a) zrywak z nowym zębem, b) zęby zrywaka o różnej postaci zużycia, c) nowy i zużyte noże głowicy urabiającej pogłębiarki.

Zużycie ściernie występuje zwłaszcza gdy skała charakteryzuje się dużą twardością oraz dużą zawartością kwarcu (dwutlenku krzemu  $\text{SiO}_2$ ). Przy dużych siłach tarcia ciepło generowane może spowodować duży wzrost temperatury narzędzia, nawet do ok. 550–800°C [286]. Przy tak wysokich temperaturach może wystąpić duży spadek twardości narzędzia i zwiększone zużycie o charakterze zużycia adhezyjnego.

Na zużywanie się narzędzi w procesach urabiania/skrawania skał ma wpływ wiele czynników, do najważniejszych można zaliczyć [286]:

### 1. Własności skał

- własności mechaniczne (wytrzymałość, twardość, odporność na pękanie),
- własności ściernie,
- struktura, nieciągłości, kształt ziaren,
- własności termiczne.

### 2. Charakterystyka narzędzi

- własności mechaniczne narzędzi (wytrzymałość, twardość),
- zależność własności mechanicznych od temperatury,
- własności termiczne,
- geometria narzędzia.

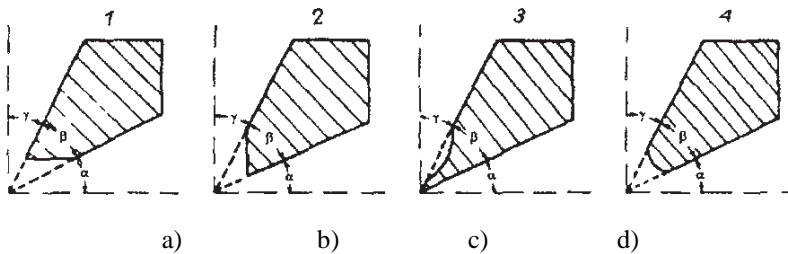
### 3. Parametry procesu urabiania/skrawania

- ustawienie narzędzi względem skały (głębokość skrawania, kąty przyłożenia i ataku),
- prędkość ruchu narzędzia (skrawania),
- siły skrawania,
- generacja ciepła, chłodzenie.

Jednym z ważniejszych czynników wpływających na zużycie jest stosunek twardości narzędzia i skały. W celu zmniejszenia zużycia, narzędzia do urabiania wykonuje się z materiałów o możliwie dużej twardości. W wielu przypadkach są to specjalne gatunki stali. Często stalowe narzędzia posiadają ostrza w postaci wkładek z twardszych materiałów, takich jak węgliki spiekane lub diament [30]. Narzędzia wykonane z takich materiałów charakteryzują się większą odpornością na zużycie i większą efektywnością – pozwalają na stosowanie wyższych parametrów procesu urabiania, np. wyższych prędkości skrawania skały. Materiały o wysokiej twardości charakteryzują się zazwyczaj większą kruchością. Dodatkową wadą specjalnych materiałów jest ich

wysoka cena zwiększająca koszt narzędzia. W praktyce stosowanie specjalnych materiałów w konstrukcji tych narzędzi ogranicza się do urabiania skał o dużej twardości i wysokiej abrazyjności lub do zastosowań wymagających bardzo dużej efektywności urabiania.

Zużycie narzędzi urabiających przejawia się często znacznymi zmianami kształtu. Zmiana kształtu zależy od warunków urabiania/skrawania. Różne formy zużycia ostrza klinowego noża urabiającego pokazano na rys. 17.2 [133]. Koncentracja zużycia może następować na powierzchni przyłożenia (rys. 17.2a), powierzchni natarcia (rys. 17.2b,c) lub łącznie na powierzchni natarcia i przyłożenia (rys. 17.2d). Opisane



Rys. 17.2. Formy zużycia ostrza klinowego [133].

formy zmiany kształtu można zaobserwować na rzeczywistych narzędziach przedstawionych na rys. 17.1b i c. W przypadku zęba zrywaka przedstawionego po lewej stronie na rys. 17.1b zużycie występuje łącznie na powierzchni natarcia i przyłożenia, natomiast w przypadku zęba po prawej stronie rys. 17.1b oraz w przypadku noży głowicy urabiającej pogłębiarki na rys. 17.1c zużycie następuje na powierzchni przyłożenia.

Zużycie powierzchni przyłożenia wraz z zaokrągleniem krawędzi skrawającej jest dominujące w procesie skrawania skał kruchych [133]. Ma to związek z mechanizmem formowania wióra, który ma charakter odrywany, odpryskowy. W efekcie powierzchnia natarcia ostrza jest jedynie cyklicznie poddawana obciążeniu, natomiast na powierzchni przyłożenia występuje ciągły proces tarcia ostrza o powierzchnię obrobioną skały w obecności dużych nacisków powierzchniowych na skutek sprężynowania powrotnego obrobionej powierzchni. W przypadku skrawania skał podatnych lub urabiania gruntów może występować w sposób dominujący zużycie powierzchni natarcia [178].

### 17.3 Kinetyka zużycia

Zużycie jest bardzo złożonym procesem fizycznym, co powoduje, że prognozowanie intensywności zużywania jest zagadnieniem trudnym. Jako miarę prędkości zużycia przyjmuje się zazwyczaj prędkość ubytku masy lub objętości. Równania opisujące kinetykę zużycia można podzielić na dwie grupy: równania teoretyczne i równania empiryczne [187, 269, 109, 233].

Równania empiryczne stanowią formuły analityczne opisujące wyniki badań doświadczalnych. Opisują one prędkość zużycia z dobrą dokładnością w zakresie warunków odpowiadających opisywanym doświadczeniom. Zakres stosowania tych formuł jest jednak najczęściej ograniczony do konkretnych materiałów i określonych warunków współpracy [187, 269].

Równania teoretyczne wykorzystują podstawy zjawisk fizycznych zachodzących przy zużyciu. Podstawą wielu modeli teoretycznych zużycia są modele budowane w ramach mechaniki kontaktu [8, 273, 193], mechaniki zniszczenia [274, 116], jak również w oparciu o modele zjawisk na poziomie atomowym [309].

Równania teoretyczne opisujące zużycie mają często postać rozbudowanych funkcji o wielu parametrach. Prostota i stosunkowo dobra dokładność w szerokim zakresie mechanizmów zużycia jest zaletą fenomenologicznej formuły Archarda [8]. Model zużycia Archarda zakłada, że prędkość zużycia mierzonego jako grubość warstwy usuniętego materiału  $\dot{w}$  jest proporcjonalna do nacisków normalnych  $t_n$  oraz prędkości poślizgu  $v_s$  i odwrotnie proporcjonalna do twardości zużywanej powierzchni

$$\dot{w} = k \frac{t_n v_s}{H}, \quad (17.1)$$

gdzie  $H$  jest pewną miarą twardości (w jednostkach ciśnienia), a  $k$  jest wyznaczoną doświadczalnie bezwymiarową stałą zużycia. Równanie Archarda zostało wyprowadzone początkowo dla zużycia adhezyjnego [8], niemniej jednak podobne równanie można zastosować do opisu zużycia ściernego [233]. Wprowadzając do równania (17.1) pewien model tarcia, np. model Coulomba

$$t_s = \mu t_n, \quad (17.2)$$

gdzie  $\mu$  jest współczynnikiem tarcia, prędkość zużywania można uzależnić od mocy dysypacji sił tarcia  $\dot{D}$ :

$$\dot{w} = \frac{k t_s v_s}{\mu H} = \bar{k} \frac{\dot{D}}{H}, \quad (17.3)$$

gdzie  $\dot{D} = t_s v_s$  oraz  $\bar{k} = k/\mu$ .

Prędkość zużycia zależy w dużym stopniu od temperatury – w wysokiej temperaturze następuje spadek twardości materiału prowadzący do zwiększonego zużycia. Wpływ temperatury na prędkość zużycia może być uwzględniony przez prostą adaptację równania Archarda (17.1). Podobnie jak w [191, 134] można uwzględnić zmianę twardości  $H$  wraz ze wzrostem temperatury  $\theta$

$$H = H(\theta). \quad (17.4)$$

Uwzględniając zależność (17.4) w równaniu (17.1) otrzymuje się

$$\dot{w} = k \frac{t_n v_s}{H(\theta)}, \quad (17.5)$$

a na podstawie równań (17.4) i (17.3) mamy

$$\dot{w} = \bar{k} \frac{t_s v_s}{H(\theta)} = \bar{k} \frac{\dot{D}}{H(\theta)}. \quad (17.6)$$

W [191] zależność (17.4) traktowana jest nie tylko jako funkcja określająca zmianę twardości, ale jako współczynnik charakteryzujący prędkość oraz mechanizm zużycia. Funkcja  $H = H(\theta)$  jest skalowana tak by uzyskać zgodność prędkości zużycia z danymi doświadczalnymi uzyskanymi dla różnych temperatur.

#### 17.4 Algorytm numeryczny analizy zużycia

Celem opracowywanego algorytmu numerycznego jest badanie intensywności zużycia oraz ewolucji kształtu wskutek zużycia narzędzi do urabiania skał. W analizie numerycznej zużycie jest zazwyczaj traktowane jako rozszerzenie sformułowania zagadnienia kontaktowego przez uwzględnienie kumulacji zużycia na współpracujących w kontakcie powierzchniach [191, 135, 143]. Zazwyczaj jako metoda numeryczna stosowana jest metoda elementów skończonych [191, 135, 143], ale w analizie zużycia z powodzeniem stosowane są modele dyskretne, oparte np. na metodach dynamiki molekularnej [309], jak również wykorzystujące metodę elementów dyskretnych [77]. Metody dyskretne wprowadzają nowe możliwości w symulacji ubytku masy spowodowanego zużyciem.

W niniejszej pracy przedmiotem modelowania jest proces zużycia narzędzi do urabiania/skrawania skał. Badany system składa się z narzędzia oraz ze zwięzłej lub luźnej skały. W poprzednich rozdziałach zostało przedstawione modelowanie urabiania skał przy zastosowaniu metody elementów dyskretnych lub zintegrowanej metody elementów dyskretnych i skończonych. W modelowaniu zużycia, podobnie jak poprzednio, skała będzie modelowana za pomocą metody elementów dyskretnych z uwzględnieniem sił kohezji dla skał zwięzłych i bez uwzględnienia kohezji dla skał luźnych.

Narzędzie może być traktowane jako ciało odkształcalne lub jako ciało sztywne modelowane elementami skończonymi lub elementami dyskretnymi. Głównym modelowanym zjawiskiem będzie wzajemne oddziaływanie narzędzia i skały prowadzące z jednej strony do zniszczenia skały a z drugiej strony wywołujące zużycie narzędzia. W modelu, w zależności od potrzeb, można uwzględnić efekty cieplne, takie jak generacja ciepła wskutek tarcia, przewodzenie ciepła przez materiał narzędzia i skały oraz wymiana ciepła z otoczeniem. Analiza termiczna będzie prowadzona w przypadku występowania wysokich temperatur mogących mieć wpływ na intensywność zużycia.

Zużycie w modelu jest uwzględnione poprzez obliczanie skumulowanego zużycia na powierzchni narzędzia według równania

$$w = \int \dot{w} dt. \quad (17.7)$$

Całkowanie w czasie dane równaniem (17.7) jest wprowadzone do modelu oddziaływania kontaktowego między narzędziem a skałą. Prędkość zużycia  $\dot{w}$  jest obliczana według równań (17.1) lub (17.5).

Zużycie ma wpływ na przebieg zjawisk mechanicznych i termicznych, zmieniona geometria narzędzia zmienia warunki odspajania wióra, któremu towarzyszy większe tarcie, powodujące zwiększone nagrzewanie narzędzia [207].

W analizie zużycia występują zjawiska zachodzące w czasie z różną prędkością. Można wyróżnić trzy skale czasu dla zjawisk mechanicznych, dla zjawisk cieplnych (na proces wzrostu temperatury może przypadać wiele cykli procesu mechanicznego) oraz dla zjawisk zużycia które zachodzą w dłuższym czasie niż pojedyncze cykle skrawania lub czas osiągnięcia ustalonego rozkładu temperatur. Analiza zużycia w czasie rzeczywistym byłaby niemożliwa, dlatego w analizie zostanie wprowadzone skalowanie mające na celu algorytmiczne „przyspieszenie” procesu zużycia.

Rozkład skumulowanego zużycia na powierzchni stanowi informację o ewolucji kształtu narzędzia. W implementowanym algorytmie ewolucja kształtu narzędzia następuje automatycznie. Elementy dyskretne (cząstki materiału) są usuwane z powierzchni narzędzia jeśli skumulowane zużycie dla danej cząstki przekracza jej średnicę. Cząstki są usuwane w dowolnym momencie – zmiana kształtu narzędzia następuje w sposób stopniowy w trakcie całej symulacji. Dla uzyskania zmiany kształtu, odpowiadającej rzeczywistym stopniom zużycia narzędzi do urabiania, należy przeprowadzić symulację wielu cykli pracy.

Implementowany algorytm analizy zużycia ma możliwość uwzględnienia wpływu temperatury na prędkość zużycia. Ciepło generowane wskutek tarcia jest obliczane w trakcie rozwiązania problemu mechanicznego. Z rozwiązaniem problemu mechanicznego jest sprzężona analiza termiczna procesu absorpcji i przewodzenia ciepła przez

narzędzie i skałę. W wyniku otrzymuje się rozkład temperatur w narzędziu i skale. Temperatura wpływa na twardość narzędzia zgodnie z równaniem (17.4), a w dalszej kolejności na prędkość zużycia zgodnie z równaniem (17.5). Jeśli zużycie następuje w ustalonych warunkach pracy przy niewiele zmieniającej się temperaturze można przyjąć równanie na prędkość zużycia (17.1) ze stałą twardością.

## 17.5 Wyznaczanie parametrów modelu zużycia

Określenie ilościowe zużycia według równania (17.1) lub (17.5) wymaga znajomości parametrów modelu, tzn. współczynnika zużycia  $k$  oraz zależnej od temperatury  $\theta$  twardości  $H = H(\theta)$ .

W prezentowanym w niniejszym rozdziale przykładzie numerycznym jest analizowane zużycie noża głowicy urabiającej pogłębiarki. Twardość materiału noża według informacji dostarczonej przez producenta narzędzia podana jest w tabeli 17.1 w skali Brinella. Można zaobserwować, że twardość badanej stali zmniejsza się znacznie w temperaturach powyżej 300°C.

Tabela 17.1. Zależność twardości Brinella od temperatury

Temperatura	0°C	200°C	300°C	400°C	500°C	600°C
HB (N/mm <sup>2</sup> )	515	509	498	457	375	247

Współczynnik zużycia  $k$  charakteryzuje własności ściernie (odporność na zużycie) pary współpracujących materiałów. Zależy on od bardzo wielu czynników charakteryzujących oba materiały. Nie ma możliwości określenia prostej zależności współczynnika  $k$  od tych czynników, dlatego jedynym sposobem jego wyznaczenia są odpowiednie badania doświadczalne.

Typową metodą doświadczalną do pomiaru współczynnika zużycia jest badanie za pomocą urządzenia typu „trzcień na tarczy” (*ang.* pin-on-disk). W badaniu tym mierzy się zużycie trzcienia (próbki) z badanego materiału wskutek współpracy z obracającą się tarczą (przeciwpróbka) z materiału ścierającego. Współczynnik zużycia dla badanego materiału noża głowicy urabiającej pogłębiarki został wyznaczony na stanowisku badawczym, w którym rolę trzcienia spełniał sam nóż, a blok skalny spełniał rolę przeciwpróbki (rys. 17.3). Badania wykonane były w laboratorium ZFS w Stuttgarcie. Tarcie noża o skałę następowało przy posuwisto-zwrotnym ruchu noża względem nieruchomego bloku skalnego. W próbie rejestrowane były siły działające na nóż, temperatura oraz mierzone były zmiany geometrii. W wyniku badania oszacowano wielkość współczynnika zużycia noża  $k$  we współpracy z badanym piaskowcem jako zawarty w przedziale 0.005-0.01.



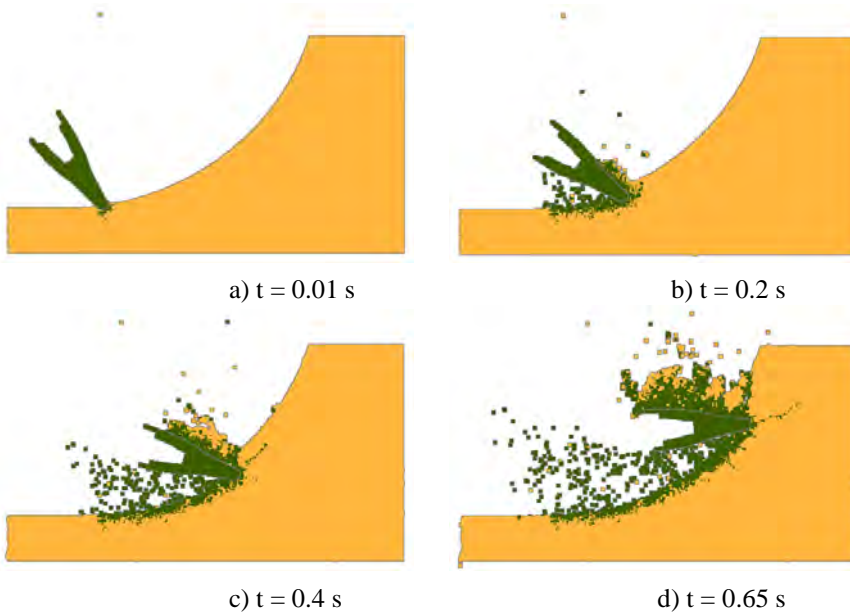


Rys. 17.3. Stanowisko do laboratoryjnych badań odporności na zużycie w ZFS (Zentrum Fertigungstechnik Stuttgart).

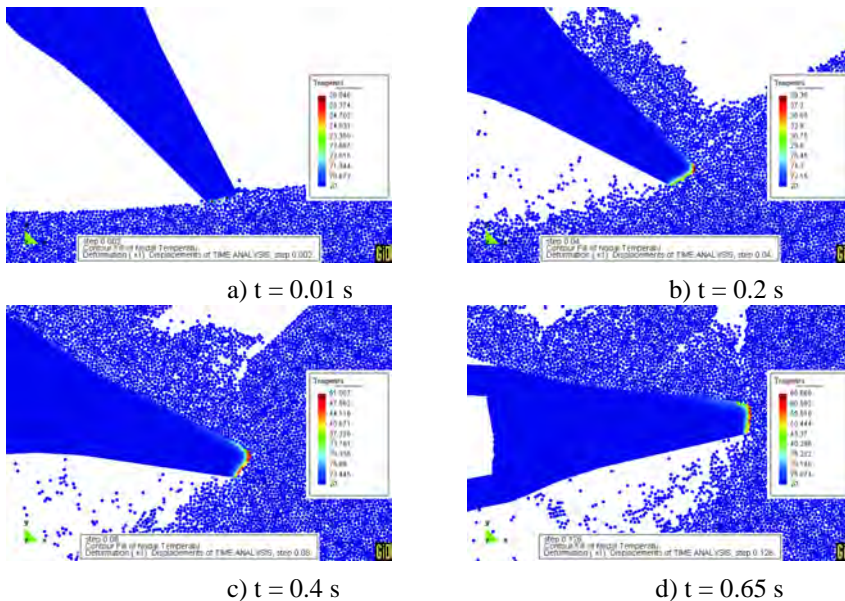
### **17.6 Termomechaniczna analiza urabiania skały przy pogłębianiu z uwzględnieniem zużycia**

Model urabiania skał za pomocą pojedynczego ostrza głowicy urabiającej pogłębiarki, wykorzystywany w rozdziałach 14.8 i 16.6, zostanie obecnie rozszerzony o uwzględnienie zużycia narzędzi. Zastosowano ten sam model skały jak poprzednio, sztywne narzędzie jest modelowane za pomocą 9400 elementów dyskretnych o równym promieniu 0.7 mm. Parametry oddziaływania kontaktowego między narzędziem a skałą przyjęto jak w rozdziałach 14.8 i 16.6. Dodatkowo przyjęto współczynnik zużycia według badań opisanych w rozdziale 17.3 oraz zależną od temperatury twardość według tabeli 17.1. Zużycie zostało algorytmicznie przeskalowane 20000 razy. Przyjęto podobne jak poprzednio parametry modelu termicznego oraz parametry procesu skrawania.

Proces skrawania był analizowany jako proces termomechaniczny, w części cyklu w fazie skrawania narzędzie było nagrzewane, a w następnej części, w fazie swobodnego ruchu w wodzie, narzędzie było chłodzone przez oddawanie ciepła wodzie. Chłodzenie wodą odbywało się również w trakcie skrawania.

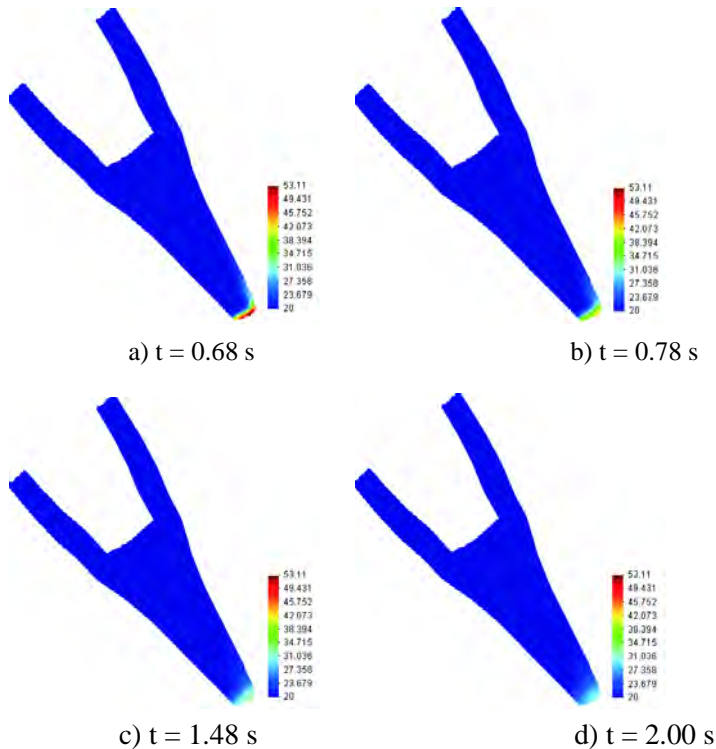


Rys. 17.4. Termomechaniczna analiza urabiania skały przy pogłębieniu z uwzględnieniem zużycia – postać zniszczenia skały.



Rys. 17.5. Termomechaniczna analiza urabiania skały przy pogłębieniu z uwzględnieniem zużycia – rozkład temperatury w różnych chwilach pierwszego cyklu pracy w fazie skrawania.

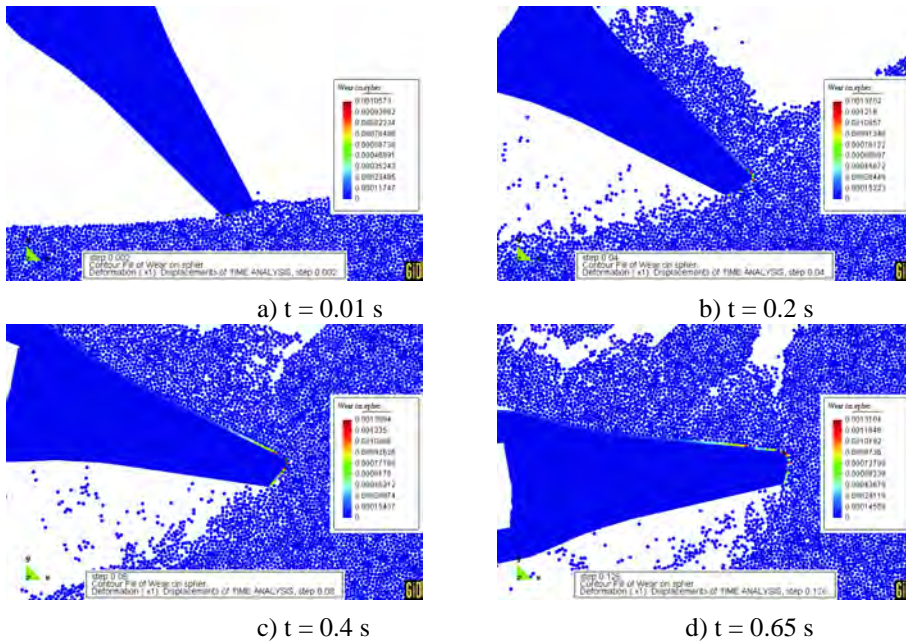
Wyniki analizy numerycznej są przedstawione na rys. 17.4–17.8. Postać zniszczenia skały przy odspajaniu odłamków wióra pokazana jest na rys. 17.4. Rozkład temperatury w różnych chwilach pierwszego cyklu pracy w fazie skrawania pokazany jest na rys. 17.5, a zmiana temperatury wskutek chłodzenia wodą w fazie swobodnego ruchu jest widoczna na rys. 17.6. Rysunek 17.7 pokazuje skumulowane zużycie na powierzchni narzędzia w różnych chwilach w pierwszym cyklu pracy w fazie skrawania. Ewolucja kształtu narzędzia wskutek zużycia jest zaprezentowana na rys. 17.8.



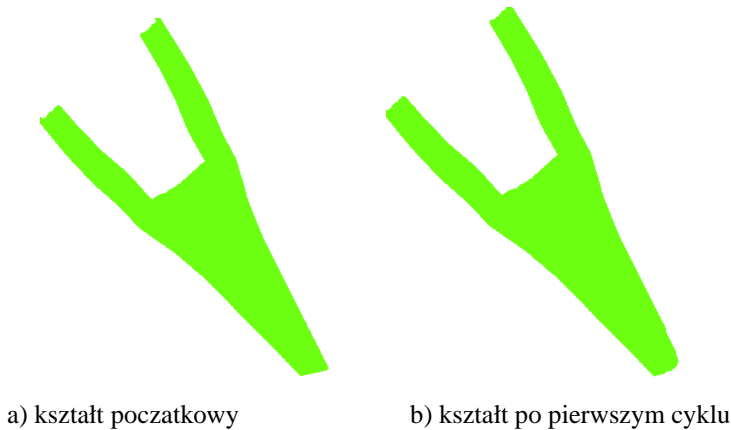
Rys. 17.6. Termomechaniczna analiza urabiania skały przy pogłębianiu z uwzględnieniem zużycia – rozkład temperatury w nożu w różnych chwilach pierwszego cyklu w fazie chłodzenia w czasie swobodnego ruchu w wodzie.

## Podsumowanie

W niniejszym rozdziale rozszerzono sformułowanie metody elementów dyskretnych o możliwość modelowania zużycia narzędzi do urabiania/skrawania skał. Opracowany algorytm pozwala na określenie rozkładu zużycia na powierzchni narzędzia oraz ba-



Rys. 17.7. Termomechaniczna analiza urabiania skały przy pogłębianiu z uwzględnieniem zużycia – skumulowane zużycie na powierzchni narzędzia w różnych chwilach pierwszego cyklu pracy.



Rys. 17.8. Termomechaniczna analiza urabiania skały przy pogłębianiu z uwzględnieniem zużycia – ewolucja kształtu narzędzia wskutek zużycia.

danie zmiany kształtu narzędzia wskutek zużycia. Przedstawiono zastosowanie opracowanego algorytmu do praktycznego przykładu badania zużycia noża głowicy ura-

biającej pogłębiarki. Problemy zużycia należą do najtrudniejszych problemów w projektowaniu i eksploatacji elementów maszyn. Nawet badania laboratoryjne nie mogą być w prosty sposób przeniesione na prognozowanie zużycia w rzeczywistych warunkach pracy. Dlatego uzyskane wyniki numeryczne należy traktować jako pomocny element w ogólnym zrozumieniu problemu zużycia, bardzo ważnego zagadnienia w projektowaniu i eksploatacji narzędzi do urabiania skał.

## **Wnioski końcowe. Elementy oryginalne pracy**

Głównym osiągnięciem pracy jest jednolite sformułowanie i numeryczna implementacja dwóch metod numerycznych, metody elementów skończonych i metody elementów dyskretnych, wykorzystujących dwa różne podejścia w modelowaniu materiałów: modelowanie ciągłe (MES) i modelowanie dyskretne (MED). W pracy pokazano wszechstronne możliwości obydwu metod, przedstawiając ich wady i zalety.

Metoda elementów skończonych ma wszechstronne możliwości w modelowaniu materiałów charakteryzujących się nieliniowym zachowaniem przy dużych odkształceniach i przemieszczeniach. Najlepiej nadaje się do zagadnień, w których nie występują nieciągłości materiału oraz nieciągłości pól przemieszczeń i odkształceń. Uwzględnienie nieciągłości w metodzie elementów skończonych jest kłopotliwe i wymaga stosowania specjalnych sformułowań.

Metoda elementów dyskretnych w łatwy sposób uwzględnia nieciągłości istniejące lub powstające w materiale pod wpływem obciążeń. Doskonale nadaje się do modelowania materiałów rozdrobnionych i skał. Niedogodnością w stosowaniu metody elementów dyskretnych jest kłopotliwa procedura dobrania odpowiednich parametrów modelu oddziaływania między elementami dyskretnymi, aby otrzymać pożądane właściwości makroskopowe. W pracy przedstawiono procedurę doboru parametrów modelu w oparciu bezwymiarowe zależności między parametrami mikro- i makroskopowymi. Inną wadą metody elementów dyskretnych jest bardzo długi czas obliczeń. Jednym z celów rozwiniętego w niniejszej pracy hybrydowego modelowania wykorzystującego metodę elementów dyskretnych i skończonych jest umożliwienie efektywniejszego modelowania i skrócenie czasu obliczeń.

W niniejszej pracy wykorzystano sformułowanie metody elementów skończonych z jawnym schematem całkowania równań ruchu względem czasu. Główną zaletą schematu jawnego jest nieiteracyjny charakter rozwiązania, brak potrzeby rozwiązywania układu równań oraz małe zapotrzebowanie na pamięć. Wadą jest warunkowa stabilność rozwiązania ograniczająca krok całkowania. W przypadku dużych zagadnień zalety przeważają nad wadami, dlatego jest to bardzo popularna metoda w zastosowaniu do złożonych problemów rzeczywistych, takich jak przedstawione w niniejszej pracy problemy tłoczenia blach.

Jawny schemat całkowania równań ruchu pozwolił na jednolite ujęcie w jednym algorytmie dwóch metod modelowania – metody elementów skończonych i metody elementów dyskretnych. Unifikacja obydwu metod należy do najważniejszych elementów oryginalnych pracy. Dostępność obydwu metod pozwala na stworzenie opty-

malnego modelu numerycznego, w którym pewne części mogą być dyskretyzowane elementami skończonymi, a inne mogą być reprezentowane poprzez elementy dyskretne. Metoda elementów dyskretnych może być zastosowana do tych części, w których modelowanie za pomocą elementów skończonych jest trudne i nieefektywne, np. dla materiałów i zagadnień z nieciągłościami. W ten sposób obydwie metody traktowane są jako wzajemnie uzupełniające się.

Sprzężenie metody elementów skończonych i metody elementów dyskretnych następuje poprzez oddziaływanie kontaktowe elementów dyskretnych z brzegiem obszaru dyskretyzowanego elementami skończonymi lub przez nałożenie specjalnych więzów kinematycznych pomiędzy brzegami podobszarów dyskretyzowanych elementami skończonymi i elementami dyskretnymi. Algorytmy sprzęgające są bardzo ważnym elementem zintegrowanej metody elementów skończonych i dyskretnych. Poprawność działania sprzężenia zbadano w zagadnieniach propagacji fali, sprawdzając czy połączenie dwóch różnych obszarów nie powoduje niefizycznego odbicia fali.

Dla zintegrowanego algorytmu metody elementów skończonych i dyskretnych opracowano uniwersalny algorytm poszukiwania kontaktu obejmujący wszystkie przypadki kontaktu między ciałami odkształcalnymi, między elementami dyskretnymi oraz między elementami dyskretnymi i brzegiem ciała odkształcalnego. Algorytm cechuje się niezawodnością i dużą efektywnością obliczeniową.

Obecnie nie istnieje żaden komercyjny program numeryczny łączący obydwie metody w ujęciu prezentowanym w pracy. Programy komercyjne oferują możliwość modelowania jedynie elementami dyskretnymi lub elementami skończonymi. W przypadku dysponowania tylko takimi programami stosowanie modeli hybrydowych dyskretno-ciągłych jest możliwe, ale realizacja jest bardzo kłopotliwa.

Elementy oryginalne występują również w sformułowaniach teoretycznych obydwu rozwijanych metod. W ramach metody elementów skończonych opracowano specjalne sformułowanie eliminujące blokadę objętościową w zagadnieniach charakteryzujących się małą ściśliwością. Dzięki temu dostępne są poprawnie działające liniowe elementy trójkątne i czworokątne, pozwalające łatwiej dyskretyzować skomplikowane geometrie występujące w praktycznych zagadnieniach.

W sformułowaniu metody elementów dyskretnych implementowano niestandardowe dla tej metody algorytmy analizy termicznej i termomechanicznej. Opracowano i implementowano algorytm kontaktu z tarciami i zużyciem uwzględniający efekty cieplne.

W części przedstawiającej aplikacje opracowanych algorytmów numerycznych przedstawiono oryginalne zaawansowane modele złożonych zagadnień inżynierskich. Metodę elementów skończonych zastosowano do symulacji procesów kształtowania na zimno metali, w tym zarówno przeróbki plastycznej objętościowej jak i zagadnień

tłoczenia blach. Opracowany algorytm umożliwia symulacje dowolnie skomplikowanych części i procesów. Zostało to potwierdzone przez analizę wybranych przykładów przeróbki plastycznej objętościowej oraz kształtowania blach. Możliwości modelowania tłoczenia blach pokazano na przykładzie symulacji wieloetapowego procesu kształtowania blach, obejmującego tłoczenie, okrawanie, zawijanie brzegu i sprężynowanie powrotne. Przedstawiono modelowanie nowoczesnych materiałów stosowanych w tłocznictwie, jakimi są blachy spawane laserowo oraz blachy powlekane polimerem, nowoczesny materiał w przemyśle opakowań. Wymagało to opracowania zaawansowanych modeli konstytutywnych. Dla modelowania polimerów implementowano modele Arrudy-Boyce oraz ściśliwy model Leonova.

Metodę elementów dyskretnych zastosowano do modelowania materiałów sypkich oraz skał. Modelowanie ośrodków sypkich przedstawiono na przykładzie zagadnienia wytwarzania formy piaskowej w technologii odlewania metodą traconego modelu. Parametry modelu dla piasku dobrano na podstawie kąta naturalnego usypu.

Parametry modelu elementów dyskretnych dla skał dobierano na podstawie symulacji laboratoryjnych prób wytrzymałościowych, próby jednoosiowego ściskania i próby brazylijskiej. W symulacji numerycznej uzyskano mechanizm zniszczenia skał zgodny z obserwowanym w eksperymentach. Celem analizy jest ustalenie parametrów modelu oddziaływania kontaktowego (mikroskopowych) zapewniających pożądane zachowanie makroskopowe materiału. Analiza wymiarowa wskazuje na możliwość otrzymania bezwymiarowych zależności między parametrami mikroskopowymi i makroskopowymi. Przeprowadzenie symulacji dla pewnego zakresu parametrów mikroskopowych pozwala otrzymać tego typu zależności ułatwiające ustalenie parametrów mikroskopowych. Stosunkowo łatwo jest przeprowadzić kalibrację modelu dla jednej próby wytrzymałościowej, np. próby ściskania. Trudniejsze jest uzyskanie zgodności z dwoma lub więcej rodzajami testów. W niniejszej pracy znaleziono rozwiązanie w sposób przybliżony zgodne z wynikami próby ściskania i próby brazylijskiej.

Jako zastosowanie praktyczne modelu w mechanice skał pokazano symulacje procesów urabiania skał. Procesy te modelowano bardzo wszechstronnie uwzględniając efekty cieplne: generację ciepła wskutek tarcia oraz przewodzenie ciepła w narzędziu i skale, oraz uwzględniając zużycie ściernie narzędzi skrawających.

Zagadnienia geotechniczne wykorzystano do przedstawienia możliwości unifikacji i integracji obydwu metod numerycznych. W symulacji procesu wytwarzania formy piaskowej metoda elementów dyskretnych została wykorzystana do modelowania materiału sypkiego, a metoda elementów skończonych została wykorzystana do dyskretyzacji odkształcalnego modelu ze styropianu. W modelu urabiania skał, metodę elementów dyskretnych zastosowano do modelowania skały podlegającej rozdrobnieniu, a metodę elementów skończonych zastosowano w obszarze, gdzie materiał skały nie



ulega zniszczeniu.

Symulacja praktycznych problemów inżynierskich ilustruje możliwości opracowanych modeli teoretycznych i algorytmów numerycznych implementowanych w programie komputerowym. Należy jednak podkreślić, że w trakcie pracy badawczej nie poszukiwano zastosowań dla algorytmów numerycznych, ale przeciwnie, praktyczne problemy z różnych dziedzin techniki stwarzały zapotrzebowanie na opracowanie zaawansowanych sformułowań teoretycznych i nowych algorytmów numerycznych.

Podsumowując, jako elementy oryginalne można wymienić:

- Jednolite sformułowanie dwu różnych metod numerycznych:
  - metody elementów skończonych,
  - metody elementów dyskretnych,wykorzystujące schemat rozwiązania oparty na jawnym całkowaniu równań ruchu, umożliwiające hybrydowe dyskretno-ciągłe modelowanie zagadnień mechaniki.
- Algorytmy sprzężenia podobszarów dyskretyzowanych elementami skończonymi i reprezentowanych przez elementy dyskretne.
- Niezawodny i efektywny algorytm wykrywania kontaktu dla zintegrowanego algorytmu metody elementów skończonych i dyskretnych.
- Specjalne sformułowanie metody elementów skończonych dla problemów z małą ściśliwością.
- Implementacja algorytmów numerycznych dla złożonych modeli konstytutywnych:
  - sprężysto-plastyczne modele dla dużych odkształceń metali,
  - sprężysto-lepkoplastyczne modele dla polimerów.
- Sformułowanie i implementacja metody elementów dyskretnych dla zagadnień termicznych i termomechanicznych.
- Opracowanie i implementacja algorytmu analizy zużycia narzędzi do urabiania skał.
- Rozwinięcie własnego programu numerycznego o dużych możliwościach analizy złożonych problemów rzeczywistych, o możliwościach porównywalnych z programami komercyjnymi, a pod niektórymi względami przewyższającego inne programy:

- efektywny schemat rozwiązania,
- bogata biblioteka elementów skończonych z elementami dyskretnymi jako specjalny typ elementów,
- różnorodne modele konstytutywne,
- możliwość analizy różnorodnych problemów fizycznych:
  - \* analiza zagadnienia dynamiki,
  - \* analiza termiczna,
  - \* sprzężona analiza termomechaniczna,
- możliwość zadawania różnorodnych warunków brzegowych i więzów kinematycznych,
- efektywny algorytm analizy zagadnienia kontaktowego,
- adaptacyjna zmiana siatki,
- możliwość dowolnej zmiany modelu w trakcie obliczeń:
  - \* usuwanie i dodawanie elementów,
  - \* zmiana warunków brzegowych,
  - \* zmiana procedury rozwiązującej.
- Analiza złożonych zagadnień techniki wymagających stosowania zaawansowanych metod modelowania za pomocą własnego programu numerycznego
  - symulacja nowoczesnych i skomplikowanych problemów tłoczenia blach:
    - \* symulacja wieloetapowego kształtowania,
    - \* symulacja tłoczenia blach spawanych,
    - \* symulacja tłoczenia blach pokrytych polimerem, nowoczesnego materiału w przemyśle opakowań,
  - symulacja przeróbki plastycznej objętościowej na zimno,
  - symulacja procesu wytwarzania formy piaskowej w technologii odlewania metodą traconego modelu,
  - symulacja procesów urabiania skał z uwzględnieniem efektów cieplnych oraz zużycia narzędzi urabiających.

Przedstawiona tematyka ma przed sobą bardzo dobre perspektywy rozwoju. Metoda elementów dyskretnych ma bardzo duże możliwości zastosowań praktycznych. W najbliższym czasie autor planuje wykorzystanie rozwiniętego oprogramowania MED/MES do symulacji zagadnień urabiania skał przy drażeniu tuneli we współpracy z Sandvik Mining and Construction. Przewidywane jest szersze wykorzystanie

modelowania trójwymiarowego, co spowoduje konieczność zwiększenia efektywności obliczeniowej. Planowane są prace nad ulepszeniem algorytmów, jak również wykorzystanie innych możliwości skrócenia czasu obliczeń, m.in. zastosowanie obliczeń współbieżnych.

Rozwinięcia wymaga również zagadnienie określenia zależności między modelem mikromechanicznym a charakterystyką makroskopową materiału. W dalszych pracach autor planuje wprowadzenie nowych modeli oddziaływania kontaktowego między elementami, m.in. modele uwzględniające lepkość, uszkodzenie, plastyczność z osłabieniem. Spodziewane jest dzięki temu rozszerzenie zakresu modelowanych materiałów. Istnieje również potrzeba uwzględnienia anizotropii własności materiałowych.

Dyskretne modelowanie fizyczne oraz hybrydowe modelowanie dyskretno-ciągłe jest obecnie przedmiotem wielu prac badawczych w dziedzinie modelowania materiałów w mikro- i nanoskali oraz w modelowaniu wieloskalowym. Wiele jest publikacji, w których łączy się modelowanie ciągłe z modelem dyskretnym opartym na sformułowaniach dynamiki molekularnej. Metoda modelowania dyskretnego przedstawiona w niniejszej pracy może być łatwo rozszerzona na podobne zastosowania.

# A. Opis ruchu ośrodka ciągłego

## A.1 Podstawowe pojęcia w opisie ruchu ośrodka ciągłego

W niniejszym dodatku zostaną przedstawione podstawy opisu ośrodka ciągłego podanego dużym przemieszczeniom i odkształceniom. Zaprezentowane zostaną podstawowe pojęcia i definicje w zakresie potrzebnym do wprowadzenia dyskretnych równań metody elementów skończonych do zagadnień nieliniowych w rozdziale 2. Przedstawione zostanie lokalne i wariacyjne sformułowanie zagadnienia ruchu ciała odkształcalnego. Wprowadzone zostaną definicje podstawowych tensorów opisujących stan odkształcenia i naprężenia, oraz podstawowe pojęcia stosowane w modelowaniu konstytutywnym ośrodka ciągłego.

Zagadnienie ruchu ciała odkształcalnego zostało sformułowane w podrozdziale 2.1. Ruch ośrodka ciągłego można opisywać na wiele różnych sposobów [208]. Podstawowymi sposobami opisu są opis materialny zwany lagrangeowskim oraz opis przestrzenny zwany eulerowskim. W opisie materialnym śledzi się zmianę parametrów fizycznych poszczególnych cząstek, konfiguracja materialna jest konfiguracją odniesienia. Ruch ciała jest zdefiniowany przez odwzorowanie

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(X, t), \quad (\text{A.1})$$

gdzie  $X$  – współrzędne materialne,  $\mathbf{x}$  – współrzędne przestrzenne. Opis przestrzenny posługuje się konfiguracją aktualną (przestrzenną) ciała  $\Omega^t$ , rozpatrując przebieg zjawisk w ustalonym punkcie przestrzeni. Wszystkie zjawiska opisuje się za pomocą współrzędnych przestrzennych. Ruch ciała jest zdefiniowany przez odwzorowanie

$$X = X(\mathbf{x}, t). \quad (\text{A.2})$$

Istnieją inne możliwości wyboru sposobu opisu ruchu. Jako konfigurację odniesienia dla opisu ruchu można wybrać dowolną konfigurację, zastosowanie opisu materialnego z aktualną konfiguracją przestrzenną jako konfiguracją odniesienia prowadzi do uaktualnionego opisu lagrangeowskiego. Połączenie koncepcji opisu materialnego i przestrzennego prowadzi do uogólnionego opisu lagrangeowsko-eulerowskiego (*ang. Arbitrary Lagrangian-Eulerian description*) [172, 27], w którym bada się zjawiska w punktach ruchomej konfiguracji odniesienia.

Dla opisu procesów fizycznych charakteryzujących ciało w ruchu wprowadza się zmienne w czasie pola odpowiednich wielkości skalarnych, wektorowych i tensoro-

wych zdefiniowanych w obszarze i na brzegu danego ciała. Ruch ciała jest charakteryzowany przez pola przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia.

Pole przemieszczenia  $\mathbf{u}$  może być zdefiniowane w konfiguracji  $\Omega^0$  (opis materialny)

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (\text{A.3})$$

lub w konfiguracji odkształconej  $\Omega^t$  (opis przestrzenny)

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (\text{A.4})$$

Stan odkształcenia jest opisywany za pomocą różnych miar odkształcenia. Jednym z podstawowych tensorów opisujących stan deformacji jest gradient deformacji  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (\text{A.5})$$

Korzystając z rozkładu biegunowego tensor  $\mathbf{F}$  można przedstawić w postaci

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}, \quad (\text{A.6})$$

gdzie  $\mathbf{R}$  jest tensorem obrotu, a  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{V}$  są tensorami symetrycznymi określonymi przez gradient deformacji

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T, \quad (\text{A.8})$$

Wstawiając (A.4) do (A.5) otrzymuje się gradient deformacji  $\mathbf{F}$  wyrażony przez gradient przemieszczenia

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (\text{A.9})$$

Za pomocą gradientu deformacji  $\mathbf{F}$  definiuje się prawy i lewy tensor odkształcenia Cauchy'ego-Greena, odpowiednio  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{b}$ ,

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T, \quad (\text{A.10})$$

oraz tensor odkształcenia Cauchy'ego (zwany również tensorem odkształcenia Fin-gera)  $\mathbf{c}$

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}^{-1T} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{b}^{-1}. \quad (\text{A.11})$$

Odształcenie może być mierzone za pomocą tensora odształcenia Greena-Lagrange'a  $E$  zdefiniowanego w konfiguracji materialnej

$$E = \frac{1}{2} (C - I) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) \right]. \quad (\text{A.12})$$

Tensor odształcenia Almansiego  $e$  jest miarą odształcenia zdefiniowaną w konfiguracji odształconej

$$e = \frac{1}{2} (I - c) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T - \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right]. \quad (\text{A.13})$$

Jeśli gradienty pola przemieszczenia  $(\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x})$  są małe, można opuścić ostatni składnik w (A.13), otrzymując tensor małych odształceń w opisie przestrzennym  $\epsilon$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right]. \quad (\text{A.14})$$

Można pokazać (np. [267]), że tensory odształcenia Greena-Lagrange'a i Almansiego są związane następującą zależnością

$$E = F^T \cdot e \cdot F. \quad (\text{A.15})$$

W opisie lagrangeowskim jest stosowane materialne pole prędkości  $V(\mathbf{X}, t)$  i materialne pole przyspieszenia  $A(\mathbf{X}, t)$

$$V(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}, \quad (\text{A.16})$$

$$A(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial V(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2}. \quad (\text{A.17})$$

Przestrzenne pola prędkości i przyspieszenia są związane z odpowiednimi polami lagrangeowskimi następującymi zależnościami [267]:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = V(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X}=\mathbf{x}-\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}, \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X}=\mathbf{x}-\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}. \quad (\text{A.19})$$

Można pokazać [267], że przestrzenne pole przyspieszenia jest materialną pochodną przestrzennego pola prędkości

$$\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t). \quad (\text{A.20})$$

Pochodną materialną względem czasu wielkości przestrzennej jest pochodna czasowa wyznaczona dla ustalonej cząstki ciała (a nie dla ustalonego położenia w przestrzeni). Materialną pochodną oznacza się najczęściej przez kropkę nad symbolem zmiennej różniczkowanej, np.  $\dot{\mathbf{v}}$ . Z drugiej strony przestrzenne przyspieszenie może być wyrażone przez przestrzenną prędkość w następujący sposób

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (\text{A.21})$$

gdzie tensor  $\mathbf{L}$  jest przestrzennym gradientem prędkości

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \quad (\text{A.22})$$

Pierwszy człon w wyrażeniu (A.21) jest pochodną lokalną, a drugi człon jest jest składową konwekcyjną.

Często stosuje się również rozkład gradientu prędkości na część symetryczną  $\mathbf{d}$ , tensor prędkości deformacji oraz na część antysymetryczną  $\boldsymbol{\omega}$ , tensor chwilowej prędkości obrotowej (spin)

$$\mathbf{L} = \mathbf{d} + \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T). \quad (\text{A.23})$$

Tensor prędkości deformacji  $\mathbf{d}$  nie jest pochodną czasową żadnego tensora odkształcenia. Można otrzymać następujący związek między pochodną materialną tensora odkształcenia Greena-Lagrange'a  $\dot{\mathbf{E}}$ , i tensorem prędkości deformacji  $\mathbf{d}$  [181]:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \quad (\text{A.24})$$

Wykorzystując (A.15) w (A.24)<sub>2</sub> otrzymuje się

$$\mathbf{d} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}] \right\} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \quad (\text{A.25})$$

Powyższe wyrażenie jest nazywane pochodną Lie tensora odkształcenia Almansiego  $\mathbf{e}$

$$\mathbf{d} = \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{e}. \quad (\text{A.26})$$

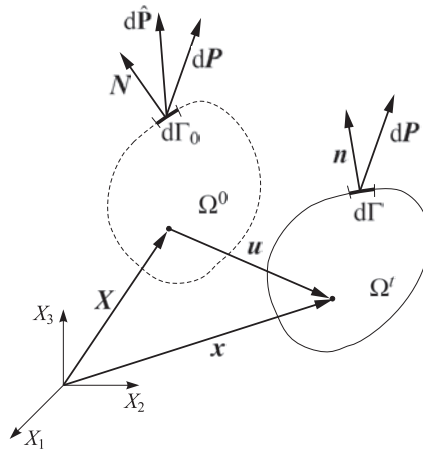
Pochodna Lie przestrzennego tensora  $\mathbf{a}$  względem pola prędkości  $\mathbf{v}$  może być zdefiniowana jako (por. [184])

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{a} = \phi_* \frac{\partial}{\partial t} (\phi^* \mathbf{a}), \quad (\text{A.27})$$

gdzie  $\phi^*$  i  $\phi_*$  oznaczają odpowiednio operacje „pull-back” i „push-forward”.

## A.2 Miary naprężenia

Rozpatrzmy element  $d\Gamma$  powierzchni odkształcanego ciała w odkształconej konfiguracji  $\Omega'$  (rys. A.1). Wektor siły  $d\mathbf{P}$  działającej na element powierzchni  $d\Gamma$  można zapisać



Rys. A.1. Wektory sił wykorzystywane w definicji miar naprężenia.

w następujący sposób [181]

$$d\mathbf{P} = \mathbf{t} d\Gamma = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Gamma, \quad (\text{A.28})$$

gdzie  $\mathbf{t}$  jest zwane wektorem naprężenia,  $\mathbf{n}$  jest wektorem normalnym do powierzchni, a  $\boldsymbol{\sigma}$  jest tensorem naprężenia Cauchy'ego. Mnożąc tensor naprężenia Cauchy'ego  $\boldsymbol{\sigma}$  przez stosunek gęstości w konfiguracji nieodkształconej i odkształconej  $\rho_0/\rho$  otrzymuje się tensor naprężenia Kirchhoffa  $\boldsymbol{\tau}$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\rho_0}{\rho} \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{A.29})$$

Można pokazać, że stosunek gęstości  $\rho_0/\rho$  jest równy wyznacznikowi  $J$  tensora gradientu deformacji  $\mathbf{F}$

$$J = \det \mathbf{F} = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (\text{A.30})$$

Tensory naprężenia Cauchy'ego i Kirchhoffa są tensorami określonymi w konfiguracji przestrzennej. Do najczęściej używanych tensorów naprężenia w konfiguracji materialnej należą pierwszy i drugi tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa. Pierwszy tensor



naprężenia Pioli-Kirchhoffa  $\mathbf{T}$  (zwany również nominalnym) definiuje się odnosząc wektor siły  $d\mathbf{P}$  do elementarnej nieodkształconej powierzchni  $d\Gamma_0$  (rys. A.1)

$$d\mathbf{P} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} d\Gamma_0, \quad (\text{A.31})$$

gdzie  $\mathbf{N}$  jest jednostkowym wektorem normalnym w konfiguracji materialnej. Niekiedy pierwszy tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa jest zdefiniowany jako transpozycja tensora zdefiniowanego równaniem (A.31), np. [18], gdyż zamiast równania (A.31) wprowadza się jego definicję za pomocą równania

$$d\mathbf{P} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} d\Gamma_0. \quad (\text{A.32})$$

Zastosowanie transformacji  $\mathbf{F}^{-1}$  do wektora  $d\mathbf{P}$  daje wektor siły powierzchniowej  $d\hat{\mathbf{P}}$

$$d\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{P}, \quad (\text{A.33})$$

który umożliwia wprowadzenie drugiego tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa  $\mathbf{S}$

$$d\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{S} d\Gamma_0. \quad (\text{A.34})$$

Łatwo można otrzymać związek między pierwszym i drugim tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa oraz tensorem naprężenia Cauchy'ego, por. [181]

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T, \quad \mathbf{T} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T, \quad (\text{A.35})$$

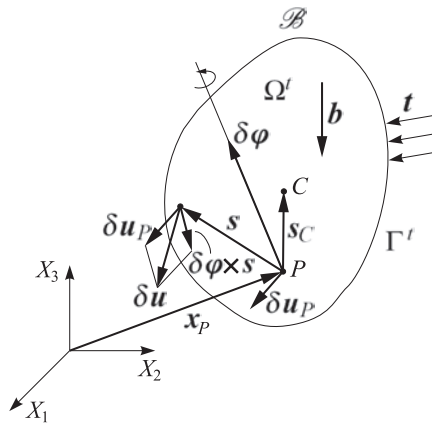
$$\mathbf{T} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}, \quad (\text{A.36})$$

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T, \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T. \quad (\text{A.37})$$

## B. Ruch ciała sztywnego

W niniejszym dodatku zostaną przedstawione podstawy opisu ruchu ciała sztywnego. Zaprezentowane zostaną podstawowe założenia, definicje oraz równania dla kinematyki i dynamiki bryły sztywnej. Zawarte w dodatku równania są wykorzystane w sformułowaniu metody elementów dyskretnych przedstawionym w rozdziale 7.

### B.1 Kinematyka ciała sztywnego



Rys. B.1. Ruch ciała sztywnego

Rozpatrujemy dowolny ruch ciała sztywnego  $\mathcal{B}$  w przestrzeni euklidesowej z wprowadzonym kartezjańskim układem współrzędnych  $OX_1X_2X_3$  (rys. B.1). Załóżmy, że w pewnej chwili  $t$  ciało zajmuje obszar  $\bar{\Omega}^t$ , gdzie  $\bar{\Omega}^t$  jest domknięciem zbioru  $\Omega^t$  ograniczonego brzegiem  $\Gamma^t$ . Każdy ruch ciała sztywnego można traktować jako złożenie ruchu postępowego dowolnego punktu odniesienia  $P \in \mathcal{B}$  oraz obrotu względem pewnej osi przechodzącej przez ten punkt [169, 270]. Zgodnie z tą zasadą przemieszczenie przygotowane  $\delta \mathbf{u}$  dowolnego punktu ciała sztywnego można przedstawić jako złożenie przemieszczenia przygotowanego dowolnie obranego punktu  $P$  ( $P \in \mathcal{B}$ )  $\delta \mathbf{u}_P$  oraz elementarnego obrotu  $\delta \boldsymbol{\varphi}$  wokół osi przechodzącej przez obrany punkt  $P$ :

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_P + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{s}, \quad (\text{B.1})$$

gdzie  $\mathbf{s}$  jest poprowadzonym z punktu  $P$  promieniem-wektorem rozpatrywanego punktu ciała sztywnego. Podobnie prędkość dowolnego punktu ciała sztywnego jest

równa sumie prędkości obranego bieguna  $P$  oraz prędkości w chwilowym ruchu obrotowym ciała wokół osi chwilowej przechodzącej przez biegun  $P$

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_P + \dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{u}}_P + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}. \quad (\text{B.2})$$

Prędkość kątowna  $\boldsymbol{\omega}$  nie zależy od wyboru bieguna  $P$ . Różniczkując zależność (B.2) względem czasu otrzymuje się wyrażenie na przyspieszenie rozpatrywanego punktu

$$\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{u}}_P + \ddot{\mathbf{s}} = \ddot{\mathbf{u}}_P + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{s} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}). \quad (\text{B.3})$$

## B.2 Równania ruchu swobodnego ciała sztywnego

Dla otrzymania równań ruchu ciała sztywnego można wykorzystać warunek równowagi dynamicznej wyrażony przez zasadę prac przygotowanych. Analogicznie do równania (2.11) można napisać:

$$\int_{\Omega'} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega'} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma'} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma + \delta W^{\text{int}} = 0, \quad (\text{B.4})$$

gdzie  $\delta W^{\text{int}}$  – praca przygotowana sił wewnętrznymi,  $\rho$  – gęstość,  $\mathbf{b}$  – zadane obciążenie objętościowe,  $\mathbf{t}$  – zadane obciążenie powierzchniowe. Uwzględniając zerową pracę sił wewnętrznymi w ciele sztywnym i wstawiając zależności (B.1) i (B.3) do równania (B.4) otrzymuje się

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega'} \rho (\ddot{\mathbf{u}}_P + \ddot{\mathbf{s}}) \cdot (\delta \mathbf{u}_P + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{s}) \, d\Omega - \int_{\Omega'} \rho \mathbf{b} \cdot (\delta \mathbf{u}_P + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{s}) \, d\Omega \\ & - \int_{\Gamma'} \mathbf{t} \cdot (\delta \mathbf{u}_P + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{s}) \, d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Wykorzystując własności iloczynu mieszanego wektorów, równanie (B.5) można przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{\Omega'} \rho (\ddot{\mathbf{u}}_P + \ddot{\mathbf{s}}) \, d\Omega - \int_{\Omega'} \rho \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma'} \mathbf{t} \, d\Gamma \right] \cdot \delta \mathbf{u}_P \\ & + \left[ \int_{\Omega'} \rho \mathbf{s} \times (\ddot{\mathbf{u}}_P + \ddot{\mathbf{s}}) \, d\Omega - \int_{\Omega'} \rho \mathbf{s} \times \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma'} \mathbf{s} \times \mathbf{t} \, d\Gamma \right] \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Wprowadzając następujące zależności:

$$\int_{\Omega'} \rho \, d\Omega = m, \quad (\text{B.7})$$

$$\int_{\Omega'} \mathbf{s} \rho \, d\Omega = s_C m, \quad (\text{B.8})$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_P + \ddot{\mathbf{s}}_C = \ddot{\mathbf{u}}_C, \quad (\text{B.9})$$

$$\int_{\Omega'} \rho \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma'} \mathbf{t} \, d\Gamma = \mathbf{F}, \quad (\text{B.10})$$

$$\int_{\Omega'} \rho \mathbf{s} \times \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma'} \mathbf{s} \times \mathbf{t} \, d\Gamma = \mathbf{T}_P, \quad (\text{B.11})$$

$$\ddot{\mathbf{s}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{s} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}), \quad (\text{B.12})$$

$$\int_{\Omega'} \rho (s^2 \mathbf{I} - \mathbf{s}\mathbf{s}) \, d\Omega = \mathbf{J}_P, \quad (\text{B.13})$$

gdzie  $m$  – masa ciała sztywnego,  $\mathbf{s}_C$  – wektor łączący punkt odniesienia  $P$  ze środkiem masy  $C$ ,  $\mathbf{F}$  – wypadkowa sił zewnętrznych,  $\mathbf{T}_P$  – wypadkowy moment sił zewnętrznych względem bieguna  $P$ ,  $\mathbf{I}$  – jednostkowy tensor drugiego rzędu,  $\mathbf{J}_P$  – tensor bezwładności, równanie (B.6) można zapisać w następującej postaci:

$$(m\ddot{\mathbf{u}}_C - \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{u}_P + (\mathbf{s}_C \times \ddot{\mathbf{u}}_P m + \mathbf{J}_P \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_P \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathbf{T}_P) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} = 0. \quad (\text{B.14})$$

Ponieważ wariacje  $\delta \mathbf{u}_P$  i  $\delta \boldsymbol{\varphi}$  są niezależne, spełnienie równania (B.14) wymaga spełnienia dwóch równań:

$$m\ddot{\mathbf{u}}_C = \mathbf{F}, \quad (\text{B.15})$$

$$\mathbf{s}_C \times \ddot{\mathbf{u}}_P m + \mathbf{J}_P \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_P \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{T}_P. \quad (\text{B.16})$$

Równania (B.15) i (B.16) nazywane są równaniami Newtona-Eulera, równanie (B.15) opisuje ruch postępowy, a równanie (B.16) – ruch obrotowy.

## Bibliografia

- [1] ADINA System 8.3. *Users Manual*. ADINA R&D Inc., 2005.
- [2] ABAQUS. *Example manual. Version 5.6*. Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., 1996.
- [3] ABAQUS/Explicit. *User's Manual*. ABAQUS, Inc., Pawtucket, RI, 2003.
- [4] H.A. Abdel-Aal. On heat partition among dry sliding anisotropic solids. *The Annals of University Dunarea de Jos of Galati, Fascicle VIII, Tribology*, str. 73–78, 2004.
- [5] K. Abdullah, P.M. Wild, J.J. Jeswiet, A. Ghasemipoor. Tensile testing for weld deformation properties in similar gage tailor welded blanks using the rule of mixtures. *Journal of Materials Processing Technology*, 112:91–97, 2001.
- [6] J.D. Achenbach. *Wave propagation in elastic solids*. Wyd. NHPC, Amsterdam, London, 1973.
- [7] ANSYS. *Theory Reference 10.0*. Ansys Inc., 2006.
- [8] J.F. Archard. Contact and rubbing of flat surfaces. *J. Appl. Phys.*, 24(8):981–988, 1953.
- [9] J. Argyris. An excursion into large rotations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 32:85–155, 1982.
- [10] E.M. Arruda, M.C. Boyce. Evolution of plastic anisotropy in amorphous polymers during finite straining. *plast*, 9:697–720, 1993.
- [11] E.M. Arruda, M.C. Boyce, R. Jayachandran. Effects of strain rate, temperature and thermomechanical coupling on the finite strain deformation of glassy polymers. *Mechanics of Materials*, 19:193–212, 1995.
- [12] ASTM. *D2938-95 Standard Test Method for Unconfined Compressive Strength of Intact Rock Core Specimens*. ASTM International, 2002.
- [13] I. Babuška. The finite element method with Lagrange multipliers. *Numer. Math.*, 20:179–192, 1973.
- [14] R. Balevicius, R. Kacianauskas, A. Dziugys, A. Maknickas, K. Vislavicius. DEMMAT code for numerical simulation of multi-particle systems dynamics. *Information Technology and Control*, 34:71–78, 2005.
- [15] R. Balevičius, R. Kačianauskas, Z. Mróz, I. Sielamowicz. Discrete element method applied to multiobjective optimization of discharge flow parameters in hoppers. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 31:163–175, 2006.
- [16] J.P. Bardet, J. Proubet. Application of micromechanics to incrementally nonlinear constitutive equations for granular media. In J. Biarez, R. Gourves, editors, *Powders and Grains. Proceedings of the International Conference on Micromechanics of Granular Media, Clermont-Ferrand, 4-8 September 1989*, str. 265–270, Rotterdam, 1989. Balkema.

- [17] M. Basista, editor. *Micromechanical and Lattice Modelling of Brittle Damage*. IPPT PAN, Warszawa, 2002.
- [18] K.J. Bathe. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, 1982.
- [19] T. Belytschko, R.L. Chiappetta, H.D. Bartel. Efficient large scale non-linear transient analysis by finite elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 10:579–596, 1976.
- [20] T. Belytschko, B.J. Hsieh. Non-linear transient finite element analysis with convected co-ordinates. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 7:255–271, 1973.
- [21] T. Belytschko, J. Kenedy. WHAMS-3D, An Explicit 3D Finite Element Program. Technical report, Willow Springs Illinois: KBS2 Inc., 1986.
- [22] T. Belytschko, W.K. Liu, B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley, 2000.
- [23] T. Belytschko, W.K. Liu, B. Moran. Related books and a brief history of nonlinear finite elements. In *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley, 2000.
- [24] T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu. Element-free Galerkin method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 37:229–256, 1994.
- [25] T. Belytschko, L. Schwer, M.J. Klein. Large displacement transient analysis of space frames. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 11:65–84, 1977.
- [26] T. Belytschko, P. Smolinski, W.K. Liu. Stability of multi-time step partitioned integrators for the first order finite element systems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 49:281–297, 1985.
- [27] D.J. Benson. An efficient, accurate simple ALE method for nonlinear finite element solutions. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 72:205–350, 1989.
- [28] D.J. Benson, J.O. Hallquist. A simple rigid body algorithm for structural dynamics programs. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 12:723–749, 1986.
- [29] J.S. Bergström, M.C. Boyce. Constitutive modelling of the large strain time-dependent behavior of elastomers. *J. Mech. Phys. Solids*, 46:931–954, 1998.
- [30] U. Beste. *On the Nature of Cemented Carbide Wear in Rock Drilling*. Acta Universitatis Upsalensis, Uppsala, 2004.
- [31] M. Białas. *Modelowanie rozwoju uszkodzeń w warstwach kontaktowych materiałów*. IPPT PAN, Warszawa, 2003. Rozprawa doktorska.
- [32] X. Blanc, C. Le Bris, F. Legoll. Analysis of a variational method coupling discrete and continuum mechanics. In *XXI ICTAM, Warsaw, Poland, 15-21 August, 2004*.
- [33] J.E. Bolander, N. Sukumar. Irregular lattice model for quasistatic crack propagation. *Phys. Review B*, 71, 2005.
- [34] J. Bonet, J. Peraire. An alternate digital tree algorithm for geometric searching and intersection problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 31:1–17, 1991.

- [35] D. Boutt, B. McPherson. The role of particle packing in modeling rock mechanical behavior using discrete elements. 2002.
- [36] M.C. Boyce, D.M. Parks, A.S. Argon. Large inelastic deformation of glassy polymers. Part I: Rate dependent constitutive model. *Mechanics of Materials*, 7:15–33, 1988.
- [37] F. Brezzi, J. Pitkäranta. On the stabilization of finite element approximations of the Stokes problem. In W. Hackbusch, editor, *Efficient Solution of Elliptic Problems, Notes on Numerical Fluid Mechanics*, str. 11–19. Vieweg, Wiesbaden, 1984.
- [38] M. Budhu, S. Ramakrishnan, G. Frantziskonis. A lattice type model for particulate media. *Int. J. Num. and Anal. Meth. Geomechanics*, 23:647–671, 1999.
- [39] T. Burczyński. *Metoda elementów brzegowych w mechanice*. WNT, 1995.
- [40] T. Burczyński, E. Majchrzak, W. Kuś, P. Orantek, M. Dziewoński. Evolutionary computation in inverse problems. In T. Burczyński, A. Osyczka, editors, *Evolutionary Methods in Mechanics*, str. 33–46. Kluwer, Dordrecht, 2004.
- [41] C.S. Campbell. Rapid granular flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2:57–92, 1990.
- [42] M. Cervera, M. Chiumenti, C. Agelet de Saracibar. Softening, localization and stabilization: capture of discontinuous solutions in J2 plasticity. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 28:373–393, 2004.
- [43] D. Chapelle, K.J. Bathe. *The Finite Element Analysis of Shells – Fundamentals*. Springer, 2003.
- [44] R. Christensen. *Mechanics of composite materials*. John Wiley, New York, 1979.
- [45] W.J. Chung, J.W. Cho, T. Belytschko. A Study on Dynamic Effects of Dynamic Explicit FEM in Sheet Metal Forming Analysis. In *Proc. of the 3rd International Conference on Numerical Simulation of 3-D Sheet Forming Processes, Numisheet 96*, str. 414–426, Dearborn, Michigan, USA, September 29 – October 3, 1996, 1996.
- [46] R. Codina. Stabilization of incompressibility and convection through orthogonal subscales in finite element methods. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 190:1579–1599, 2000.
- [47] R. Codina, M. Vazquez, O.C. Zienkiewicz. A fractional step method for compressible flows: boundary conditions and incompressible limit. In *Proc. IX International Conference on Finite Elements in Fluids*, Venezia, 1995.
- [48] B.K. Cook, R.P. Jensen, editors. *Discrete element methods: numerical modeling of discontinua. Proceedings of the Third International Conference on Discrete Element Methods, Santa Fe, New Mexico*. 2002.
- [49] R.D. Cook, D.S. Malkus, M.E. Plesha. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. Wiley, third edition, 1989.
- [50] F.C. Crawford. *Fale*. PWN, Warszawa, 1972.

- [51] L. Cui, C. O'Sullivan. Analysis of a triangulation based approach for specimen generation for discrete element simulations. *Granular Matter*, 5:135–145, 2003.
- [52] P.A. Cundall. *UDEC: a generalized distinct element program for modeling jointed rock*. Report PCAR-1-80, US Army, European Research Office, London, 1980.
- [53] P.A. Cundall. Distinct element models of rock and soil structure. In *Analytical and computational models in engineering and rock mechanics*. Allen&Unwin, London, 1987.
- [54] P.A. Cundall. Formulation of a three-dimensional distinct element method – Part I: A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 25:107–116, 1988.
- [55] P.A. Cundall. Formulation of a Three Dimensional Distinct Element Model — Part I. A Scheme to Detect and Represent Contacts in a System of Many Polyhedral Blocks. *Int. J. Rock Mech., Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, 25(3):107–116, 1988.
- [56] P.A. Cundall, R. Hart. Numerical modeling of discontinua. *J. Eng. Comp.*, 9:101–113, 1992.
- [57] P.A. Cundall, O.D.L. Strack. A discrete numerical method for granular assemblies. *Geotechnique*, 29:47–65, 1979.
- [58] ASTM D3967-95a. *Standard test method for splitting tensile strength of intact rock core specimens*. 1996.
- [59] G.A. D'Addetta, E. Ramm. Discrete modelling of geomaterials. In P.A. Vermeer, W. Ehlers, H.J. Hermann, E. Ramm, editors, *Continuous and Discontinuous Modelling of Cohesive Frictional Materials – Proc. of CDM 2004*, Balkema, 2004.
- [60] C. Daux, N. Moes, J. Dolbow, N. Sukumar, T. Belytschko. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 48:1741–1760, 2000.
- [61] R. de Borst, H.-B. Mühlhaus. Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 35:521–539, 1992.
- [62] S. Diebels, W. Ehlers. Homogenization method for granular assemblies. In W.A. Wall et. al, editor, *Trends in computational structural mechanics*, str. 79–88. CIMNE, Barcelona, 2001.
- [63] G.A. Dilts. Moving least-squares particle hydrodynamics II: conservation and boundaries. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 48:1503–1524, 2000.
- [64] G.A. Dilts. Some recent developments for moving-least-squares particle methods. In *First M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, June 12-14, 2001.
- [65] E. Dintwa. *Development of accurate contact force models for use with Discrete Element Method (DEM) modelling of bulk fruit handling processes*. PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 2006.



- [66] K. Dolag, M. Bartelmann, H. Lesch. SPH simulations of magnetic fields in galaxy clusters. *Astron. Astrophys.*, 348:351–363, 1999.
- [67] F.V. Donzé. *SDEC (Spherical Discrete Element Code), Version 2.00*. www.geonum.com, 2000.
- [68] W. Dornowski, P. Perzyna. Localization phenomena in thermo-viscoplastic flow processes under cyclic dynamic loadings. *Comput. Assisted Mech. Engng. Sci.*, 7:117–160, 2000.
- [69] R.B. Dupaix, M.C. Boyce. Finite strain behavior of poly(ethylene terephthalate) (PET) and poly(ethylene terephthalate)-glycol. *Polymer*, 46:4827–4838, 2005.
- [70] DYNA3D. A Nonlinear, Explicit, Three-Dimensional Finite Element Code for Solid and Structural Mechanics User Manual. Technical report, Lawrence Livermore National Laboratory, 1999.
- [71] W. Ehlers, E. Ramm, S. Diebels, G.A. D’Addetta. From particle ensembles to Cosserat continua: Homogenization of contact forces towards stresses and couple stresses. *Int. J. Solids & Structures*, 2003.
- [72] S. Erbel, K. Kuczyński, Z. Marciniak. *Obróbka plastyczna*. PWN, 1981.
- [73] I. Evans. The force required for pointed attack picks. *Int. J. Min. Engng.*, 2:63–71, 1965.
- [74] J.W. Evans. Random and cooperative sequential adsorption. *Rev. Mod. Phys.*, 65:1281–1304, 1993.
- [75] Y.T. Feng, K. Han, D.R.J. Owen. An advancing front packing of polygons, ellipses and spheres. In B.K. Cook, R.P. Jensen, editors, *Discrete element methods: numerical modeling of discontinua. Proceedings of the Third International Conference on Discrete Element Methods, Santa Fe, New Mexico*, str. 93–98, 2002.
- [76] Y.T. Feng, K. Han, D.R.J. Owen. Some computational issues on numerical simulation of particulate systems. In *WCCM V – 5th World Congress on Computational Mechanics*, Wiedeń, Austria, July 7–12, 2002.
- [77] N. Fillot, I. Iordanoff, Y. Berthier. Simulation of Wear Through Mass Balance in a Dry Contact. *Transactions of the ASME, Journal of Tribology*, 127:230–237, 2005.
- [78] F.D. Fischer, W. Daves, E.A. Werner. On the temperature in the wheel–rail rolling contact. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 26:999–1006, 2003.
- [79] FLAC. *Fast Lagrangian Analysis of Continua*. Itasca, Minneapolis Minnesota, 1995.
- [80] International Society for Rock Mechanics. Commission on Standardization of Laboratory and Field Tests. Suggested methods for determining tensile strength of rock materials. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 15:99–103, 1978.
- [81] J. Fortin, O. Millet, G. de Saxcé. Numerical simulation of granular materials by an improved discrete element method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 62:639–663, 2004.

- [82] Y.C. Fung. *Podstawy mechaniki ciała stałego*. PWN, 1969.
- [83] Deutsches Institut für Normung e.V. *DIN 52105, Prüfung von Naturstein, Druckversuch*. Beuth Verlag GmbH, Berlin, 1983.
- [84] M.S. Gadala, J. Wang. Computational implementation of stress integration in fe analysis of elasto-plastic large deformation problems. *Finite elem. anal. des.*, 35:379–396, 2000.
- [85] E.S. Gaffney. *Rock/Steel Dynamic Friction Measurements*. System, Science, and Software Report No. SSS-R-75-2686, Defense Nuclear Agency Contract No. DNA 001-75-C-0183, 1975.
- [86] K.H. Zum Gahr. *Microstructure and wear of materials*. Amsterdam, 1987.
- [87] C. García Garino. *A Numerical Model for the Analysis of Large Elasto-plastic Deformations of Solids*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1993. (in Spanish).
- [88] C. García Garino, J. Oliver. A numerical model for elastoplastic large strain problems. In D.R.J. Owen et al., editor, *Computational Plasticity*, 1992.
- [89] C. García Garino, J. Oliver. Simulation of sheet metal forming processes using a frictional finite strain elastoplastic model. In Ch. Hirsch et al., editor, *Numerical Methods in Engineering 92*. Elsevier, 1992.
- [90] C. García Garino, J. Oliver. Use of a large strain elastoplastic model for simulation of metal forming processes. In J.L. Chenot, R. Wood, O.C. Zienkiewicz, editors, *NUMIFORM '92*, Balkema, 1992.
- [91] C. Garcia Garino, J. Rojek, E. Oñate. Simulation of sheet metal stamping processes using a solid finite strain model. In *Proc. Fourth Pan American Congress of Applied Mechanics*, str. 97–102, 1995.
- [92] K. Gehring. Rock testing procedures at VA's geotechnical laboratory in Zeltweg. Technical report, Voest Alpine Zeltweg, Austria, TZU 41, 1987.
- [93] K. Gehring, U. Restner. *Comments on Rock Testing*. VOEST-ALPINE Bergtechnik, Zeltweg, 2005.
- [94] J.C. Gelin, P. Picart, editors. *Proceedings of the 4th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes Numisheet'99*. Besancon, France, 13–17.09. 1999.
- [95] K.F. Graff. *Wave motion in solids*. Clarendon Press, Oxford, 1975.
- [96] I. Grešovnik. *A General Purpose Computational Shell for Solving Inverse and Optimization Problems*. PhD thesis, University of Wales Swansea, 2000.
- [97] P.K. Haff, B.T. Werner. Collisional interaction of a small number of confined inelastic grains. In T. Ariman, T. N. Veziroglu, editors, *Colloidal and Interfacial Phenomena*, str. 483–501. Hemisphere Publishing, 1987.

- [98] J.M. Haile. *Molecular Dynamics Simulation: Elementary Methods*. Wiley, 1992.
- [99] J.O. Hallquist. Preliminary User's Manuals for DYNA3D and DYNAP (Nonlinear Dynamic Analysis of Solids in Three Dimensions). Technical report, Lawrence Livermore National Laboratory, 1976.
- [100] J.O. Hallquist. NIKE2D – A Vectorized Implicit, Finite Deformation Finite Element Code for Analyzing the Static and Dynamic Response of 2-D Solids with Interactive Rezoning and Graphics. Technical report, Lawrence Livermore National Laboratory, 1986.
- [101] J.O. Hallquist. LS-DYNA. Theoretical Manual. Technical report, Livermore Software Technology Corporation, 1998.
- [102] J.O. Hallquist, D.J. Benson. DYNA3D User's Manual (Nonlinear Dynamic Analysis of Solids in Three Dimensions). Technical report, Lawrence Livermore National Laboratory, 1987.
- [103] J.O. Hallquist, K. Schweizerhof. Explicit integration schemes and contact formulations for thin sheet metal forming. *VDI Berichte*, 894:405–440, 1991.
- [104] K. Han, D. Peric, A.J.L. Crook, D.R.J. Owen. A combined finite/discrete element simulation of shot peening processes – Part I: studies on 2D interaction laws. *Eng. Comput.*, 17(5):593–620, 2000.
- [105] K. Han, D. Peric, D.R.J. Owen, J. Yu. A combined finite/discrete element simulation of shot peening processes – Part II: 3D interaction laws. *Eng. Comput.*, 17(6):680–702, 2000.
- [106] R. Hart, P.A. Cundall, J. Lemos. Formulation of a three-dimensional distinct element method – Part II: Mechanical calculations for motion and interaction of a system composed of many polyhedral blocks. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 25:117–126, 1988.
- [107] E. Haug, E. di Pasquale, A.K. Pickett, D. Ulrich. *Industrial sheet metal forming simulation using explicit finite element methods*. Zurich, 1991. VDI Berichte 894.
- [108] J.F. Hazzard, P.F. Young, S.C. Maxwell. Micromechanical modeling of cracking and failure in brittle rocks. *Journal of Geophysics Research*, 105.
- [109] M. Hebdá, A. Wachal. *Trybologia*. WNT, 1980.
- [110] S. Hentz, L. Daudeville, F.V. Donzé. Identification and validation of a discrete element model for concrete. *ASCE J. Eng. Mech.*, 130:709–719, 2004.
- [111] R. Hill. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proc. Roy. Soc. London*, str. 281–297, 1948.
- [112] R. Hill. Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles. *J. Mech. Phys. Solids*, 11:357–372, 1963.
- [113] R. Hill. Theoretical plasticity of textured aggregates. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 85, 1979.

- [114] R. Hill. Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals. *J. Mech. Phys. Solids*, 38:405–417, 1990.
- [115] R. Hill. A user-friendly theory of orthotropic plasticity in sheet metals. *Int. J. Mech. Sci.*, 15:19–25, 1993.
- [116] E. Hornbogen. The role of fracture toughness in the wear of metals. *Wear*, 33:251–224, 1975.
- [117] H. Huang. *Discrete Element Modeling of Tool-Rock Interaction*. PhD thesis, University of Minnesota, 1999.
- [118] J.A. Hudson, E.T. Brown, C. Fairhurst. Shape of the complete stress-strain curve for rock. In *Proc. 13th Symp. Rock Mechanics*, Univ. of Illinois Urbana, 1971.
- [119] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Analysis*. Prentice-Hall, 1987.
- [120] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, M. Balestra. A new finite element formulation for fluid dynamics, V. Circumventing the Babuška–Brezzi condition: a stable Petrov–Galerkin formulation of the Stokes problem accomodating equal order interpolation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 59:85–99, 1986.
- [121] T.J.R. Hughes, J. Winget. Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 15:1862–1867, 1980.
- [122] J. i M. Jankowscy. *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*. WNT, 1999.
- [123] ISRM. Draft ISRM suggested method for the complete stress-strain curve for intact rock in uniaxial compression. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 36:279–289, 1999.
- [124] Itasca. *PFC2D 2.00 Particle flow code in two dimensions*. Itasca Consulting Group, Minneapolis, Minnesota, 1998.
- [125] Itasca. *Particle flow code, PFC3D, release 2.0*. Itasca Consulting Group, Minneapolis, Minnesota, 1999.
- [126] K. Jach. *Komputerowe modelowanie dynamicznych oddziaływań ciał metodą punktów swobodnych*. PWN, Warszawa, 2001.
- [127] L. Jacobsson. Forsmark site investigation Borehole KFM07A. Uniaxial compression test of intact rock. Technical report, SP Swedish National Testing and Research Institute, 2005.
- [128] J. Jamrozik, Z. Makojnik, M. Patyk. *Geofizyka. Metody sejsmiczne*. WG, Warszawa, 1978.
- [129] J.K.Lee, G.L.Kinzel, R.H. Wagoner, editors. *Proc. of the 3rd International Conference: Numerical Simulation of 3-D Sheet Metal Forming Processes*. Dearborn, Michigan, 1996.

- [130] J.B. Johnson, M.A. Hopkins, J.W. Weatherly. A Discrete Element Model of the Micro-mechanical Processes that Control Snow Deformation. *AGU Fall Meeting Abstracts*, 2002.
- [131] S. Johnson, J.R. Williams, B. Cook. Contact detection algorithm for an ellipsoid using equivalent contact spheres. In *VII International Conference on Computational Plasticity COMPLAS 2003*, Barcelona, 2003.
- [132] J. Jonak. Analiza wybranych zjawisk termicznych towarzyszących skrawaniu skał. *Archives of Mining Sciences*, 43:487–500, 1998.
- [133] J. Jonak. *Urabianie skał głowicami wielonarzędziowymi*. Wydawnictwo Naukowe Śląsk, Katowice, 2001.
- [134] J.H. Kang, I.W. Park, J.S. Jae, S.S. Kang. A study on a die wear model considering thermal softening: (I) Construction of the wear model. *Journal of Materials Processing Technology*, 96:53–58, 1999.
- [135] J.H. Kang, I.W. Park, J.S. Jae, S.S. Kang. A study on a die wear model considering thermal softening: (II) Application of the suggested wear model. *Journal of Materials Processing Technology*, 96:183–188, 1999.
- [136] M. Kawka, A. Makinouchi. Simulation of sheet metal forming processes: Theoretical aspects of the ITAS3D system. *RIKEN Review*, (14):13–14, 2001.
- [137] M. Kleiber. *Metoda Elementów Skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*. PWN, 1985.
- [138] M. Kleiber. *Wprowadzenie do Metody Elementów Skończonych*. PWN, 1989.
- [139] M. Kleiber, J. Knabel, J. Rojek. Response surface method for probabilistic assessment of metal forming failures. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 60:1421–1441, 2004.
- [140] M. Kleiber, J. Rojek, R. Stocki. Reliability assessment for sheet metal forming operations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 191:4511–4532, 2002.
- [141] A. Klich, P. Gospodarczyk, A. Kalukiewicz, K. Kotwica, K. Krauze, K. Pawlik, J. Reś. *Niekonwencjonalne techniki urabianie skał*. Wydawnictwo Naukowe Śląsk, Katowice, 1998.
- [142] D.N. Knuth. *The Art of Computer Programming*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1973.
- [143] A. Kocańda. Wykorzystanie symulacji komputerowej w ocenie intensywności zużycia ściernego matrycy. In *Materiały 9. Konferencji Informatyka w Technologii Metali KomPlasTech 2002*, str. 151–156, Szczawnica, 2002.
- [144] L. Kondic. Dynamics of spherical particles on a surface: collision-induced sliding and other effects. *Physical Review E*, 60:751–770, 1999.

- [145] H. Konietzky, editor. *Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods. Proc. 1st Int. PFC Symposium*. Balkema, Gelsenkirchen, Germany, 6–8 November 2002, 2002.
- [146] V. Kouznetsova. *Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials*. PhD thesis, Technische Universiteit of Eindhoven, 2002.
- [147] J. Kozicki, J. Tejchman. Lattice type fracture model for brittle materials. In *35th Solid Mechanics Conference*, str. 215–216, Kraków, 2006.
- [148] A.M. Krivtsov, M. Wiercigroch. Molecular dynamics simulation of mechanical properties for polycrystal materials. *Mater. Phys. Mech.*, 3:45–51, 2001.
- [149] J. Krok, J. Orkisz. On a Possibility of Analysis of Structure by Combined FEM/FDM Method. In *Proc. of 7-th Polish Conf. On Comp. Mech.*, Gdynia, 1985.
- [150] J. Krok, J. Orkisz, M. Stanuszek. A Unique System NAFDEM-FLEX for Combined Meshless FD/FEM Nonlinear Analysis of Boundary – Value Problems Including Membrane and Cable Structures. In *2nd European Conference on Computational Mechanics ECCM-2001*, Cracow, 26-29 June, 2001.
- [151] J. Krok, J. Orkisz, M. Stanuszek. A System NAFDEM for Adaptive Combined Meshless FD and FE Analysis of Boundary Value Problems. In *Proc. CMM-2005 – Computer Methods in Mechanics*, Częstochowa, June 21-24, 2005.
- [152] A. Krupowicz. *Metody numeryczne zagadnień początkowych równań różniczkowych zwyczajnych*. PWN, 1986.
- [153] J. Kruszewski, S. Sawiak, E. Wittbrodt. *Metoda sztywnych elementów skończonych w dynamice konstrukcji*. WNT, 1999.
- [154] N.P. Kruyt, L. Rothenburg. Micromechanical definition of strain tensor for granular materials. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 118:706–711, 1996.
- [155] R.L. Kuhlemeyer, J. Lysmer. Finite element method accuracy for wave propagation problems. *J. Soil Mech. & Foundations, Div. ASCE*, 99(SM5):421–427, 1973.
- [156] M.R. Kuhn, K. Bagi. Contact rolling and deformation in granular media. *Int. J. Solids and Structures*, 41:5793–5820, 2004.
- [157] Y.W. Kwon, C. Kim. Micromechanical model for thermal analysis of particulate and fibrous composites. *Journal of Thermal Stresses*, 21:21–39, 1998.
- [158] H.L. Langhaar. *Dimensional Analysis and Theory of Models*. Wiley, 1951.
- [159] T.A. Laursen. *Computational Contact and Impact Mechanics: Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis*. Springer, Berlin, 2002.
- [160] T.A. Laursen, J.C. Simo. A Continuum-based Finite Element Formulation for the Implicit Solution of Multibody, Large Deformation Frictional Contact Problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 36:3451–3485, 1993.

- [161] M. Lätzel. *From microscopic simulations towards a macroscopic description of granular media*. PhD thesis, University of Stuttgart, 2003.
- [162] R. Löhner. *Applied CFD techniques. An Introduction based on Finite Element Methods*. Wiley, 2001.
- [163] R. Löhner, K. Morgan. An unstructured multigrid method for elliptic problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 24:101–115, 1987.
- [164] A.R. Leach. *Molecular Modelling. Principles and Applications*. Addison Wesley Longman, 1996.
- [165] S.C. Lee, C.H. Yoo. A novel shell element including in-plane torque effect. *Comput. Struct.*, 28:505–522, 1988.
- [166] M. Lefik, B.A. Schrefler. Artificial neural network for parameter identifications for an elasto-plastic model of superconducting cable under cyclic loading. *Comput. Struct.*, 80:1699–1713, 2002.
- [167] J.S. Leszczyński. *Dyskretny model dynamiki zderzeń ziaren w przepływach materiałów granulowanych*. Wydawnictwa Politechniki Częstochowskiej, 2005.
- [168] K. Levenberg. A method for the solution of certain problems in least squares. *Quart. Appl. Math.*, 2:164–168, 1944.
- [169] J. Leyko. *Mechanika ogólna*. PWN, Warszawa, 1978.
- [170] T. Liszka, J. Orkisz. The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics. *Comput. Struct.*, 11:83–95, 1980.
- [171] G.R. Liu, M.B. Liu. *Smoothed Particle Hydrodynamics. A Meshfree Particle Method*. World Scientific, 2003.
- [172] W.K. Liu, H. Chang, T. Belytschko. An arbitrary Lagrangian and Eulerian Petrov–Galerkin finite elements for nonlinear continua. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 68:259–310, 1988.
- [173] R. Löhner, E. Oñate. A general advancing front technique for filling space with arbitrary objects. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 61:1977–1991, 2004.
- [174] J.P. Loui, U.M. Rao Karanam. Heat transfer simulation in drag–pick cutting of rocks. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 20:263–270, 2005.
- [175] S. Luding. Micro-Macro Transition for anisotropic, aperiodic, granular materials. (in preparation).
- [176] J. Lysmer, G.Waas. Shear waves in plane infinite structures. *ASCE J. Eng. Mech.*, 98(EM1):85–105, 1972.
- [177] J. Lysmer, R.L. Kuhlemeyer. Finite dynamic model for infinite media. *J. Eng. Mech.*, 95(EM4):859–877, 1969.

- [178] J. Maciejewski, A. Jarzębowski, W. Trąmpczyński, J. Cendrowski, K. Sokołowski. Analiza procesu urabiania gruntów spoistych przy uwzględnieniu efektów zużycia narzędzi. In *Geotechnika i Budownictwo Specjalne. XXVII Zimowa Szkoła Mechaniki Górniczej, Zakopane 2004*, str. 431–442. Wydawnictwo Katedry Geomechaniki, Budownictwa i Geotechniki AGH, Kraków, 2004.
- [179] J. Maciejewski, W. Trąmpczyński, K. Sokołowski. Modelowanie procesu urabiania ośrodka spoistego łożką koparki z uwzględnieniem zużycia zębów. In *XVIII Konferencja "Problemy Rozwoju Maszyn Roboczych", 17-20 styczeń, Zakopane 2005, Czasopismo Techniczne z.1-M/2005*, str. 275–284, 2005.
- [180] J. Malczewski. *Mechanika materiałów sypkich*. Oficyna Wyd. Politechniki Warszawskiej, 1994.
- [181] L.E. Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, 1969.
- [182] MARC/AutoForge. *User's Guide*. 1995.
- [183] D. Marquardt. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM J. Appl. Math.*, 11:431–441, 1963.
- [184] J.E. Marsden, T.S. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer, Berlin, 1999.
- [185] T. Matsushima, H. Saomoto, M. Matsumoto, K. Toda, Y. Yamada. Discrete element simulation of an assembly of irregularly-shaped grains: quantitative comparison with experiments. In *16th ASCE Engineering Mechanics Conference, University of Washington, Seattle, July 16-18, 2003*.
- [186] H.G. Matuttis, S. Luding, H.J. Herrmann. Discrete element simulations of dense packings and heaps made of spherical and non-spherical particles. *Powder Technology*, 109:278–292, 2000.
- [187] H.C. Meng, K.C. Ludema. Wear models and predictive equations: their form and content. *Wear*, 181–183:443–457, 1995.
- [188] R. Michałowski, Z. Mróz. Associated and non-associated sliding rules in contact friction. *Archives of Mechanics*, 30(3):259–276, 1978.
- [189] C. Miehe. Numerical computation of algorithmic (consistent) tangent moduli in large-strain computational elasticity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 134:223–240, 1996.
- [190] C. Miehe, J. Schröder, M. Becker. Computational homogenization analysis in finite elasticity: Material and structural instabilities on the micro- and macro-scales of periodic composites and their interaction. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 191:4971–5005, 2002.
- [191] J.F. Molinari, M. Ortiz, R. Radovitzky, E.A. Repetto. Finite-element modeling of dry sliding wear in metals. *Eng. Comput.*, 18(3/4):592–609, 2001.



- [192] Z. Mróz, G. Stavroulakis, editors. *Parameter Identification of Materials and Structures*. CISM International Centre for Mechanical Sciences, 2005.
- [193] Z. Mróz, S. Stupkiewicz. An Anisotropic Friction and Wear Model. *Int. J. Solids and Structures*, 31:1113–1131, 1993.
- [194] MSC. Marc 2005. *User's Manual*. MSC Software Corp., 2005.
- [195] MSC-DYTRAN. *User's Manual*. McNeal-Schwendler Corporation, Los Angeles, 1999. URL: <http://www.mssoftware.com>.
- [196] A. Munjiza. *The Combined Finite–Discrete Element Method*. Wiley, 2004.
- [197] A. Munjiza, D.R.J. Owen, N. Bicanic. A combined finite/discrete element method in transient dynamics of fracturing solids. *Eng. Comput.*, 12:145–174, 1995.
- [198] G.G.W. Mustoe, M. Miyata, M. Nakagawa. Discrete element methods for mechanical analysis of systems of general shaped bodies. In *Proceedings of the 5th International Conference on Computational Structures Technology, Leuven, Belgium, 2000*.
- [199] G. Mustoe(ed.). *Eng. Comput.*, 9(2), 1992. Special issue.
- [200] S. Nemat-Nasser, M. Hori. *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*. North Holland, Amsterdam, 1993.
- [201] B. Nilsen, L. Ozdemir. Recent developments in site investigation and testing for hard rock tbn projects. In *Rapid Excavation and Tunneling Conference (RETC)*, 1999.
- [202] Y. Nishimatsu. The mechanics of rock cutting. *Int. J. Rock Mech. Mining Sci.*, 9:261–270, 1972.
- [203] J. Oliver, M. Cervera, O. Manzoli. Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach. *International Journal of Plasticity*, 15:1–34, 1999.
- [204] ONORM. B 3124-1 *Prüfung von Naturstein; mechanische Gesteinseigenschaften; einaxiale Zylinderdruckfestigkeit*. 1981.
- [205] J. Orkisz. Finite difference method. In M. Kleiber, editor, *Handbook of Computational Solid Mechanics. Survey and Comparison of Contemporary Methods*. Springer-Verlag, 1998.
- [206] J. Orkisz. Recent advances in meshless finite difference methods. In *Proc. CMM-2005 – Computer Methods in Mechanics*, Częstochowa, June 21-24, 2005.
- [207] A. Ortega, D.A. Glowka. *Studies of the Frictional Heating of Polycrystalline Diamond Compact Drag Tools During Rock Cutting*. Sandia Report SAND80-2677, 1982.
- [208] J. Ostrowska-Maciejewska. *Podstawy mechaniki ośrodków ciągłych*. PWN, Warszawa, 1982.

- [209] E. Oñate, P. Cendoya, J. Rojek, J. Miquel. A simple thin shell triangle with translational degrees of freedom for sheet stamping analysis. In *3rd International Conference on Numerical Simulation of 3-D Sheet Forming Processes, Numisheet 96*, str. 102–111, Dearborn, Michigan, USA, September 29 – October 3, 1996, 1996.
- [210] E. Oñate, P. Cendoya, J. Rojek, J. Miquel. A simple thin shell triangle with translational degrees of freedom only. In S.N. Atluri, G. Yagawa, editors, *Advances in Computational Engineering Science*, str. 308–313. Tech Science Press, USA, 1997.
- [211] E. Oñate, M. Cervera. Derivation of thin plate bending elements with one degree of freedom per node. A simple three node triangle. *Eng. Comput.*, 10:543–61, 1993.
- [212] E. Oñate, M. Cervera, O.C. Zienkiewicz. *A Finite Volume Format for Structural Mechanics*. Publication CIMNE No. 15, Barcelona, 1992.
- [213] E. Oñate, C. Garcia Garino, S. Botello, F. Flores, C. Agelet de Saracibar, J. Rojek, J. Oliver, W. Sosnowski, A. Heege, A. Neubert, G. Ouzunidis. NUMISTAMP: A Research project for assesment of finite element models for stamping processes. In *Proc. Numisheet 93 - 2nd International Conference: Numerical Simulation of 3-D Sheet Metal Forming Processes*, Isehara, Japan, 1993.
- [214] E. Oñate, S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 39:3839–3866, 1996.
- [215] E. Oñate, C. Labra. High density sphere packing for discrete element method simulations. (*sent for publication*), 2006.
- [216] E. Oñate, J. Rojek. Combination of discrete element and finite element methods for dynamic analysis of geomechanics problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 193:3087–3128, 2004.
- [217] E. Oñate, J. Rojek, C. García Garino. NUMISTAMP: a research project for assesment of finite element models for stamping processes. *Journal of Materials Processing Technology*, 50(1-4):17–38, 1995.
- [218] E. Oñate, F. Zarate, J. Rojek, G. Duffett, L. Neamtu. Advances in rotation free shell elements for sheet stamping analysis. In J.C. Gelin, P. Picart, editors, *Proceedings of the 4th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes Numisheet'99*, str. 157–164, 13–17.09. 1999, Besancon, France, 1999.
- [219] D.R.J. Owen, Y.T. Feng. Parallelised finite/discrete element simulation of multi-fracturing solids and discrete systems. *Eng. Comput.*, 18:557–576, 2001.
- [220] R.J. Pallet, R.J. Lark. The use of tailored blanks the manufacture of construction components. *Journal of Materials Processing Technology*, 117:249–254, 2001.
- [221] PAM-CRASH. *Theory Manual*. ESI Inc., 1997.
- [222] PAM-STAMP. *User's Manual*. ESI Inc., 2000.

- [223] M. Perzyk, S. Waszkiewicz, M. Kaczorowski, A. Jopkiewicz. *Odlewnictwo*. WNT, 2000.
- [224] A. Piela, J. Rojek. Experimental study and modelling of tailor welded blanks. In D.Y. Yang, S.I. Oh, H. Huh, Y.H. Kim, editors, *Proceedings of the 5th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes Numi-sheet 2002*, Jeju Island, Korea, 21–25.10. 2002, 2002.
- [225] A. Piela, J. Rojek. Validation of the results of numerical simulation of deep drawing of tailor welded blanks. *Archives of Metallurgy*, 48:37–51, 2003.
- [226] M. Pietrzyk, Z. Kędzierski, J.G. Lenard. Inverse analysis applied to the evaluation of rheological and micorstructure parameters in hot forming of steels. In J. Huetink, F.P.T. Baaijens, editors, *Proc. NUMIFORM'98*, str. 163–168. Enschede, 1998.
- [227] G. Pijaudier-Cabot, Z.P. Bařzant. Nonlocal damage theory. *J. Eng. Mech.*, 113:1512–1533, 1987.
- [228] Polska Norma PN-EN 1926. *Metody badań kamienia naturalnego – Oznaczanie wytrzymałości na ściskanie*. Polski Komitet Normalizacyjny, 2001.
- [229] Polska Norma PN-G-04302. *Skąły zwięzłe – Oznaczanie wytrzymałości na rozciąganie metodą poprzecznego ściskania*. Polski Komitet Normalizacyjny, 1997.
- [230] Polska Norma PN-G-04303. *Skąły zwięzłe – Oznaczanie wytrzymałości na ściskanie z użyciem próbek foremnych*. Polski Komitet Normalizacyjny, 1997.
- [231] J. Podgórski, J. Jonak. *Numeryczne badania procesu skrawania skął izotropowych*. Lubelskie Towarzystwo Naukowe, Lublin, 2004.
- [232] D.O. Potyondy, P.A. Cundall. A bonded-particle model for rock. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 41:1329–1364, 2004.
- [233] E. Rabinowicz. *Friction and wear of materials*. John Wiley & Sons, 1995.
- [234] RADIOSS. *Theory Manual 2000*. MECALOG SOPHIA, 2000.
- [235] E. Ramm, G.A. D'Addetta, M. Leukart. Interrelations between continuum and discontinuum models for geomaterials. In *VII International Conference on Computational Plasticity COMPLAS 2003*, Barcelona, 2003.
- [236] D.C. Rapaport. *The Art of Molecular Dynamics Simulation*. Cambridge University Press, 2004.
- [237] R. Rastogi. *Aspects of plastic deformation of PET–steel laminates*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2003.
- [238] S.D. Raymond, P.M. Wild, C.J. Bayley. On modeling of the weld line in finite element analyses of tailor-welded blank forming operations. *Journal of Materials Processing Technology*, 147:28–37, 2004.

- [239] D.C. Rizos, Z. Wang. Coupled BEM/FEM solutions for direct time domain soil–structure interaction analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26:877–888, 2002.
- [240] J. Rojek. Numeryczna analiza nieliniowych zagadnień mechaniki konstrukcji złożonych z części odkształcalnych i sztywnych: zastosowanie do analizy kabin ciągników. *Praca doktorska*. IPPT PAN, Warszawa, 1992.
- [241] J. Rojek. Symulacja procesów obróbki plastycznej przy zastosowaniu programu MES opartego na jawnym całkowaniu w czasie. In *Materiały VII Konferencji Zastosowanie Komputerów w Zakładach Przetwórstwa Metali KomPlasTech 2000*, Krynica–Czarny Potok, 2000.
- [242] J. Rojek. Numeryczne modelowanie i symulacja procesu wytwarzania formy piaskowej w odlewaniu metodą traconego modelu. *Informatyka w Technologii Materiałów*, 3:113–125, 2003.
- [243] J. Rojek. Symulacja numeryczna wytwarzania formy piaskowej w procesie odlewania metodą traconego modelu. *Przegląd Mechaniczny*, LXII(12):12–15, 2003.
- [244] J. Rojek. Modelowanie blach pokrytych warstwą polimeru w procesach wytwarzania puszek. *Informatyka w Technologii Materiałów*, 5:1–16, 2005.
- [245] J. Rojek, E.B. Las Casas, R.N. Borges, E. Oñate. Equivalent drawbeads: computer modelling and experiments. In J.C. Gelin, P. Picart, editors, *Proceedings of the 4th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes Numisheet'99*, str. 249–254, Besancon, France, 1999.
- [246] J. Rojek, C. García Garino, E. Oñate. Advanced finite element models for analysis of industrial sheet forming processes. In *Recent Developments in Sheet Metal Forming Technology. Proc. 18th Biennial Congress of IDDRG*, Lisbon, Portugal, 1994.
- [247] J. Rojek, J. Jovicevic, E. Oñate. Industrial applications of sheet stamping simulation using new finite element models. *Journal of Materials Processing Technology*, 60:243–247, 1996.
- [248] J. Rojek, M. Kleiber. Nonlinear dynamic FE analysis of structures consisting of rigid and deformable parts. Part I — Formulation. *Int. J. Struct. Eng. and Mech.*, 2(4):313–326, 1994.
- [249] J. Rojek, M. Kleiber. Nonlinear dynamic FE analysis of structures consisting of rigid and deformable parts. Part II — Computer Implementation and Test Examples. *Int. J. Struct. Eng. and Mech.*, 2(4):327–343, 1994.
- [250] J. Rojek, E. Oñate. Sheet springback analysis using a simple shell triangle with translational degrees of freedom only. *International Journal of Forming Processes*, 1(3):275–296, 1998.
- [251] J. Rojek, E. Oñate. Unified DEM/FEM approach to geomechanics problems. In *Proceedings of Computational Mechanics WCCM VI in conjunction with APCOM'04*, Beijing, China, Sept. 5–10, 2004.

- [252] J. Rojek, E. Oñate, A. Piela, L. Neamtu. Numerical modelling and simulation of tailor welded blanks. In D.Y. Yang, S.I. Oh, H. Huh, Y.H. Kim, editors, *Proceedings of the 5th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes Numisheet 2002*, Jeju Island, Korea, 21–25.10. 2002, 2002.
- [253] J. Rojek, E. Oñate, E. Postek. Application of explicit FE codes to simulation of sheet and bulk metal forming processes. *Journal of Materials Processing Technology*, 80-81:620–627, 1998.
- [254] J. Rojek, E. Oñate, R.L. Taylor. CBS-based stabilization in explicit solid dynamics. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 66:1547–1568, 2006.
- [255] J. Rojek, E. Oñate, F. Zarate, J. Miquel. Modelling of rock, soil and granular materials using spherical elements. In *2nd European Conference on Computational Mechanics ECCM-2001*, Cracow, 26-29 June, 2001.
- [256] J. Rojek, J.J. Telega. Numerical Simulation of Bone–Implant Systems Using a More Realistic Model of Contact Interfaces with Adhesion. *J. Theor. Appl. Mech.*, 37:659–686, 1999.
- [257] J. Rojek, J.J. Telega. Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics. Part I – General developments. *J. Theor. Appl. Mech.*, 39:655–677, 2001.
- [258] J. Rojek, J.J. Telega, S. Stupkiewicz. Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics. Part II – Numerical implementation and application to implanted knee joints. *J. Theor. Appl. Mech.*, 39:679–706, 2001.
- [259] J. Rojek, F. Zarate, C. Agelet de Saracibar, Ch. Gilbourne, P. Verdot. Discrete element modelling and simulation of sand mould manufacture for the lost foam process. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 62:1421–1441, 2005.
- [260] J. Rojek, O.C. Zienkiewicz. Eliminacja blokady objętościowej w liniowych elementach trójkątnych i czworokątnych. *Informatyka w Technologii Materiałów*, 1:73–89, 2001.
- [261] J. Rojek, O.C. Zienkiewicz, E. Oñate, R.L. Taylor. Simulation of metal forming using new formulation of triangular and tetrahedral elements. In *8th Int. Conf. on Metal Forming 2000*, Kraków, Poland, 2000. Balkema.
- [262] J. Rojek, O.C. Zienkiewicz, E. Oñate, E. Postek. Advances in FE explicit formulation for simulation of metalforming processes. *Journal of Materials Processing Technology*, 119(1-3):41–47, 2001.
- [263] H. Samet. The quad-tree and related hierarchical data structures. *Comput. Surveys*, 16(2):187–285, 1984.
- [264] M. Seyferth, A. Henk. Coupling of PFC2D and ANSYS – concepts to combine the best of two worlds for improved geodynamics models. In H. Konietzky, editor, *Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods. Proc. 1st Int. PFC Symposium*, str. 283–290, Gelsenkirchen, Germany, 6–8 November 2002, 2002. Balkema.

- [265] M. Shillor, M. Sofonea, J.J. Telega. *Models and Analysis of Quasistatic Contact. Variational Methods*, Lect. Notes Phys. 655. Springer, 2004.
- [266] R.A. Shivarama. *Hamilton's equations with Euler parameters for hybrid particle-finite element simulation of hypervelocity impact*. PhD thesis, The University of Texas at Austin, 2002.
- [267] J.C. Simo, T.J.R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer, Berlin, 1999.
- [268] J.C. Simo, R.L. Taylor. A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 22:649–670, 1986.
- [269] L. Sitnik. *Kinetyka zużycia*. PWN, Warszawa, 1998.
- [270] B. Skalmierski. *Mechanics*. PWN–Elsevier, 1991.
- [271] G.M. Stanley. *Continuum–Based Shell Elements*. PhD thesis, Division of Applied Mechanics, Stanford University, Stanford, California, 1985.
- [272] S. Stupkiewicz. *Micromechanics of contact and interphase layers*. IPPT PAN, 2005. Praca habilitacyjna.
- [273] S. Stupkiewicz, Z. Mróz. A model of third body abrasive friction and wear in hot metal forming. *Wear*, 231:124–138, 1999.
- [274] N.P. Suh. The delamination theory of wear. *Wear*, 25:111–124, 1973.
- [275] G. Swoboda, W. Mertz, G. Beer. Rheological analysis of tunnel excavations by means of coupled finite element (FEM)-boundary element (BEM) analysis. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 11:115–129, 1987.
- [276] J. Taler, P. Duda. *Rozwiązywanie prostych i odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła*. WNT, 2003.
- [277] L.M. Taylor, D.S. Preece. Simulation of blasting induced rock motion. *Eng. Comput.*, 9(2):243–252, 1992.
- [278] J. Tejchman, W. Wu. Numerical study on shear band patterning in a Cosserat continuum. *Acta Mechanica*, 99:61–74, 1993.
- [279] J.J. Telega. *Metody wariacyjne i analiza wypukła w zagadnieniach kontaktowych i homogenizacji*. IPPT PAN, 1990. Praca habilitacyjna.
- [280] T.A. Tervoort. *Constitutive modelling of polymer glasses: finite, nonlinear viscoelastic behaviour of polycarbonate*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 1996.
- [281] K. Thuro, R.J. Plinninger, S. Zach, S. Schutz. Scale effects in rock strength properties. Part 1: Unconfined compressive test and Brazilian test. In *Rock Mechanics – a Challenge for Society*, str. 169–174, 2001.
- [282] J.M. Ting, M. Khwaja, L.R. Meachum, J.D. Rowell. An ellipse-based discrete element model for granular materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 17:603–623, 1993.

- [283] K. Tomiczek. Symulacja próby jednoosiowego ściskania próbki ziarnistego materiału skalnego. *Prace Naukowe Instytutu Geotechniki i Hydrotechniki Politechniki Wrocławskiej, Seria Konferencje*, nr 40, 2001.
- [284] P. Traczykowski. *Wykorzystanie statyki molekularnej do modelowania procesów deformacji kryształów półprzewodnikowych*. IPPT PAN, 2006. Praca doktorska.
- [285] ULSAB. *Program Phase 2 Final Report*. Porsche Engineering Services, 1998.
- [286] P.N.W. Verhoef. *Wear of rock cutting tools*. Balkema, Rotterdamd, 1997.
- [287] O. von Estorff, M. Firuziaan. Coupled BEM/FEM approach for nonlinear soil/structure interaction. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24:715–725, 2000.
- [288] L. Vu-Quoc, X. Zhang, O.R. Walton. A 3-D discrete element model for dry granular flows of ellipsoidal particles. *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*, 187:483–528, 2000.
- [289] O.R. Walton. Particle dynamics calculations of shear flow. In J.T. Jenkins, M. Satake, editors, *Mechanics of Granular Materials: New Models and Constitutive Relations*, str. 327–338. Elsevier, 1983.
- [290] O.R. Walton. Application of molecular dynamics to macroscopic particles. *International Journal of Engineering Science*, 22:1097–1107, 1984.
- [291] S.P. Wang, E. Nakamachi. Nonlinear contact and friction modeling in dynamic explicit finite element analysis. In *Proc. of the 3rd International Conference on Numerical Simulation of 3-D Sheet Forming Processes, Numisheet 96*, str. 9–16, Dearborn, Michigan, USA, September 29 – October 3, 1996, 1996.
- [292] I.M. Ward, D.W. Hadley. *Mechanical Properties of Solid Polymers*. Wiley, 1993.
- [293] Tailor Welded Blank Guidelines Group. *Tailor Welded Blank Acceptance Guidelines*. 1997.
- [294] B.N. Whittaker, R.N. Singh, G. Sun. *Rock fracture mechanics*. Amsterdam, 1987.
- [295] Z. Więckowski. A particle-in-cell solution to the silo discharging problem. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 45:1203–1225, 1999.
- [296] Z. Więckowski. The material point method in large strain engineering problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 193:4417–4438, 2004.
- [297] J.R. Williams, R. O'Connor. A linear complexity intersection algorithm for discrete element simulation of arbitrary geometries. *Engineering Computations*, 12(4):185–201, 1995.
- [298] J.R. Williams, R. O'Connor. Discrete Element Simulation and the Contact Problem. *Archives Comp. Meth. Engng*, 6(4):279–304, 1999.
- [299] S. Wiśniewski, T. Wiśniewski. *Wymiana ciepła*. WNT, 2000.

- [300] K. Wisniewski. *Finite rotations of shells and beams. Extended equations and numerical models*. IPPT PAN, 1997. Praca habilitacyjna.
- [301] J.P. Wolf. *Dynamic Soil-Structure Interaction*. Prentice-Hall, 1985.
- [302] P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. Springer, Berlin, 2002.
- [303] S.P. Xiao, T. Belytschko. A bridging domain method for coupling continua with molecular dynamics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 193:1645–1669, 2004.
- [304] YADE. *Yet Another Dynamic Engine*. <http://yade.berlios.de/>.
- [305] B. Yang, Y. Jiao, S. Lei. A study on the effects of microparameters on macroproperties for specimens created by bonded particles. *Eng. Comput.*, 23(6):607–631, 2006.
- [306] D.Y. Yang, S.I. Oh, H. Huh, Y.H. Kim, editors. *Proceedings of the 5th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes Numisheet 2002*. Jeju Island, Korea, 21–25.10. 2002.
- [307] R.P. Young, D.S. Collins, J. Hazzard, A. Heath, W.S. Pettitt, C. Baker, D. Billaux, P. Cundall, D. Potyondy, F. Dedecker, C. Svemar, P. Lebon. An Innovative 3-D Numerical Modelling Procedure for Simulating Repository-Scale Excavations in Rock – SAFETI. In *Proceedings of the Euradwaste'04 Conference on Radioactive Waste Management Community Policy and Research Initiatives*, Luxembourg, 2004.
- [308] Y. Yua, J. Yinb, Z. Zhong. Shape effects in the Brazilian tensile strength test and a 3D FEM correction. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 43:623–627, 2006.
- [309] L. Zhang, H. Tanaka. Towards a Deeper Understanding of Wear and Friction on the Atomic Scale – a Molecular Dynamic Analysis. *Wear*, 211:44–53, 1997.
- [310] Z.H. Zhong. *Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems*. Oxford University Press, 1993.
- [311] M. Zhou. A new look at the atomic level virial stress: on continuum-molecular system equivalence. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 459:2347–2392, 2003.
- [312] O.C. Zienkiewicz, R. Codina. A general algorithm for compressible and incompressible flow – Part I. The split, characteristic based scheme. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 20:869–885, 1995.
- [313] O.C. Zienkiewicz, K. Morgan, B.V.K. Satya Sai, R. Codina, M. Vazquez. A general algorithm for compressible and incompressible flow – Part II. Tests on the explicit form. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 20:887–913, 1995.
- [314] O.C. Zienkiewicz, J. Rojek, R.L. Taylor, M. Pastor. Triangles and tetrahedra in explicit dynamic codes for solids. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 43:565–583, 1998.
- [315] O.C. Zienkiewicz, R.C. Taylor. *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann, London, fifth edition, 2000.
- [316] Z. Zimniak, A. Piela. Finite element analysis of a tailored blanks stamping process. *Journal of Materials Processing Technology*, 106:254–260, 2000.



## **Modelling and simulation of complex problems of nonlinear mechanics using the finite and discrete element methods**

### **Summary**

This thesis presents a unified formulation and computer implementation of two numerical methods, the finite element method (FEM) and the discrete element method (DEM), based on two different approaches to material modelling, namely continuous modelling and discrete modelling, respectively. Comprehensive capabilities of the two methods are extensively presented. Both advantages and disadvantages of the methods are discussed.

FEM provides an efficient solution to problems involving linear and nonlinear continuous material behaviour in domains of finite dimensions. However, taking into account discontinuities requires special FE formulations.

In the discrete element method, material is represented by a collection of discrete elements interacting with each other with contact forces. The elements are treated as rigid, and their deformation is localized at contact points. Discrete elements can have arbitrary shapes. In this work, cylindrical (in 2D) or spherical (in 3D) elements are employed. In this model all kinds of discontinuities are treated in a simple way. The discrete element method is a suitable tool to model granular materials as well as soils and rocks.

A contact model for the discrete element interaction can be regarded as a micromechanical model. The required macroscopic behaviour is obtained by taking adequate constitutive models for contact interaction. The procedure to obtain unidimensional relationships between micro- and macroscopic constitutive parameters has been presented in the thesis. Also, averaging procedures to obtain macroscopic stresses and strains for discrete element models have been developed.

In both the discrete element and finite element formulations presented in this thesis the solution scheme is based on the explicit time integration scheme. Explicit time integration of equations of motion is characterized with an efficient non-iterative solution at a single step. Using the diagonal lumped mass matrix in the explicit dynamic finite element formulation leads to a decoupled system of algebraic equations which is then solved without necessity for any matrix inversion. The explicit time integration scheme is conditionally stable which limits the time step length and usually leads to large number of time steps.

Efficient solution scheme and small memory requirements made explicit FE codes very popular in solving large industrial problems, one of the main applications being simulation of metal forming processes. This thesis includes examples of advanced

bulk and sheet metal forming simulations. Formulation of the finite element method presented in this thesis have various original elements. One of the most important developments is a special stabilized formulation for mixed finite element formulation. The stabilization is obtained by employing the fractional step (or CBS) method, a special time integration scheme combined with a split of equations of motion. This algorithm allows us to use linear triangular and tetrahedral elements free of volumetric locking and giving stable pressure solutions for problems with small compressibility.

The finite element code developed has been applied to an analysis of real industrial problems of sheet forming involving several operations: deep drawing, trimming, and flanging with subsequent springback. The material models implemented in the program allow us to analyse forming of advanced materials, like tailor welded blanks and polymer coated metal sheets. The Arruda–Boyce and compressible Leonov models have been implemented for polymer modelling.

One of the most serious drawbacks of the discrete element method is a necessity to use large numbers of elements, which is prohibitive in models involving large domains. In such cases numerical methods based on continuous models, like the finite element method, are more efficient. In many cases combining the discrete and finite element methods allows us to create an optimal model taking advantages of each method and avoiding their disadvantages. The common solution algorithm allowed us to develop a framework for the coupled DEM/FEM formulation. Integration of the two different numerical methods is one of the most important results of the thesis. Different methods can be applied simultaneously in different parts of the model. Different models can be used for different materials or can be applied in different subdomains of the same material undergoing different physical processes. Discrete elements can be used in the areas where a discontinuous deformation, like fracturing, occurs. In the other parts which can be assumed continuous, more efficient would be the finite element modelling. Thus, the two methods can be treated as complementary.

The coupling of the finite element and discrete element methods is provided by the contact interaction between the discrete elements and boundary of the finite element subdomains or by an imposition of special kinematical constraints for the interfacial discrete and finite elements. The constraints can be imposed by the Lagrange multipliers or the penalty method. The coupling algorithms are a very important part of hybrid DEM/FEM models. The interface between the FEM and DEM subdomains can introduce an artificial internal boundary causing unrealistic wave reflections. The correct performance of the coupling method in the presence of wave propagation has been demonstrated in different numerical benchmarks.

A numerical efficiency of the discrete element method depends on the efficiency of the contact detection algorithm. A special contact algorithm for the coupled

DEM/FEM formulation has been developed. Contact search is performed at two phases. In the first phase, a global search is carried out. A list of potential contacting objects is created. This search is performed at certain intervals. In the second stage, called a local search, contact conditions for the pairs of objects on the list created in the global search are verified. The developed algorithm implemented in the DEM/FEM code demonstrated its efficiency and robustness.

The discrete element method has been applied to modelling of granular materials and rocks. The possibilities of modelling granular materials have been shown by the simulation of manufacturing of a sand mould in the lost foam casting process. In the application to granular material, the repose angle has been taken as the main macroscopic property. Microscopic parameters yielding an adequate repose angle have been determined by simulation of emptying of a hopper. The repose angle as a function of translational and rotational friction has been studied.

The discrete element models of rocks have been calibrated by performing simulations of the unconfined compression and Brazilian tests. The numerical simulations have shown that material failure and basic mechanical properties are properly reproduced by the discrete element model. The use of the elastic perfectly brittle contact model for the discrete element interaction allows us to study initiation and propagation of fractures in rocks under loading. Force–displacement characteristics typical for brittle rocks have been obtained in numerical simulations. The failure mechanism reproduced in simulations agrees very well with that observed in the laboratory.

After establishing model parameters, the discrete element method and the combined discrete/finite element method have been applied to rock cutting problems. The numerical model of rock cutting has been validated using theoretical formulas and experimental values of the cutting force. Numerical results show a good agreement with results of the laboratory test of rock cutting with a single pick of a roadheader cutterhead.

The rock cutting simulations have been extended to take into account thermal effects and wear of rock cutting tools. Rock cutting process has been analysed as a thermomechanical coupled problem. An evolution of tool shape due to abrasive wear has been studied. The influence of temperature on wear processes has been taken into account. These capabilities demonstrated an advanced level of the software development achieved in this work. Simulations of numerous engineering problems presented in the thesis show practical importance of the work presented in the thesis.

## **Modelowanie i symulacja komputerowa złożonych zagadnień mechaniki nieliniowej metodami elementów skończonych i dyskretnych**

### **Streszczenie**

Niniejsza rozprawa przedstawia jednolite sformułowanie i numeryczną implementację dwóch metod numerycznych, metody elementów skończonych (MES) i metody elementów dyskretnych (MED), wykorzystujących dwa różne podejścia w modelowaniu materiałów: modelowanie ciągłe i modelowanie dyskretne. Schemat rozwiązania w obydwu metodach wykorzystywanych w pracy opiera się na jawnym całkowaniu równań ruchu względem czasu. W pracy pokazano wszechstronne możliwości obydwu metod, przedstawiając ich wady i zalety.

Metoda elementów skończonych ma wszechstronne możliwości w modelowaniu materiałów charakteryzujących się nieliniowym zachowaniem przy dużych odkształceniach i przemieszczeniach. Kłopotliwe i wymagające stosowania specjalnych sformułowań jest uwzględnienie nieciągłości w metodzie elementów skończonych. Innym zagadnieniem sprawiającym duże problemy numeryczne jest nieściślność materiału, powodująca błędne rozwiązania objawiające się występowaniem blokady objętościowej lub niestabilnością ciśnienia hydrostatycznego w niektórych elementach skończonych. Przedstawiona w pracy metoda stabilizacji, zwana metodą kroku cząstkowego (lub inaczej metodą prędkości cząstkowej lub metodą CBS) skutecznie eliminuje wady elementów mieszanych z jednakową interpolacją pól przemieszczenia i ciśnienia. Dzięki temu możliwe jest zastosowanie siatek trójkątnych i czworościennej bardzo wygodnych w modelowaniu skomplikowanych geometrii.

W metodzie elementów dyskretnych materiał jest modelowany jako zbiór sztywnych ciał, zwanych elementami dyskretnymi, oddziaływujących między sobą poprzez siły kontaktu. Model oddziaływania kontaktowego można traktować jako model mikromechaniczny materiału. W pracy przedstawiono procedurę doboru parametrów modelu w oparciu o bezwymiarowe zależności między parametrami mikro- i makroskopowymi. Metoda elementów dyskretnych doskonale nadaje się do modelowania materiałów charakteryzujących się istotnymi nieciągłościami mikrostruktury oraz nieciągłościami w postaci zniszczenia.

Główną wadą metody elementów dyskretnych jest bardzo długi czas obliczeń. Dzięki rozwiniętemu w pracy połączeniu metody elementów skończonych i dyskretnych osiągnięto możliwość efektywniejszego modelowania i skrócenia czasu obliczeń. Integracja metody elementów skończonych i metody elementów dyskretnych jest jednym z nowatorskich elementów pracy.

W pracy przedstawiono praktyczne wykorzystanie opracowanych algorytmów numerycznych do rozwiązania skomplikowanych zagadnień inżynierskich. Metodę elementów skończonych zastosowano do symulacji procesów kształtowania na zimno metali, w tym zarówno przeróbki plastycznej objętościowej jak i zagadnień tłoczenia blach. Przedstawiono modelowanie nowoczesnych materiałów stosowanych w tłocznictwie jakimi są blachy spawane (tailor welded blanks) oraz blachy powlekane polimerem nowoczesny materiał w przemyśle opakowań, co wymagało opracowanie zaawansowanych modeli konstytutywnych.

Metodę elementów dyskretnych zastosowano do modelowania materiałów sypkich oraz skał. Modelowanie ośrodków sypkich przedstawiono na przykładzie zagadnienia wytwarzania formy piaskowej w technologii odlewania metodą traconego modelu. Jako zastosowanie praktyczne modelu w mechanice skał pokazano symulacje procesów urabiania skał. Urabianie skał modelowano bardzo wszechstronnie uwzględniając efekty cieplne: generację ciepła wskutek tarcia oraz przewodzenie ciepła w narzędziu i skale oraz uwzględniając zużycie ściernie narzędzi skrawających.

Zagadnienia geotechniczne wykorzystano do przedstawienia możliwości unifikacji i integracji obydwu metod numerycznych. W symulacji procesu wytwarzania formy piaskowej metoda elementów dyskretnych została wykorzystana do modelowania materiału sypkiego, a metoda elementów skończonych została wykorzystana do dyskretyzacji odkształcalnego modelu ze styropianu. W modelu urabiania skał, metodę elementów dyskretnych zastosowano do modelowania skały podlegającej rozdrobnieniu, a metodę elementów skończonych zastosowano w obszarze gdzie materiał skały nie ulega zniszczeniu.

Symulacja praktycznych problemów inżynierskich ilustruje możliwości opracowanych modeli teoretycznych i algorytmów numerycznych implementowanych w programie komputerowym.