STUDY • EINLEITUNG IN DIE THEORIE DER INVARIANTEN

T. N. W.

215

S. Dickstein

DIE WISSENSCHAFT

Sammlung von Einzeldarstellungen aus den Gebieten der Naturwissenschaft und der Technik

Herausgegeben von Prof. Dr. EILHARD WIEDEMANN

BAND 71

Einleitung in die Theorie der Invarianten linearer Transformationen auf Grund der Vektorenrechnung

Von

E. Study

Erster Teil

Braunschweig

Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges.

1923

Einleitung in die Theorie der Invarianten linearer Transformationen auf Grund der Vektorenrechnung

Von

E. Study

Erster Teil

Braunschweig
Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges.
1923

LIEBEN FREUNDEN

LILLY HAHN
HANS HAHN

IN TREUEM GEDENKEN

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung: Probleme und Methoden 1

§ 1. Grundbegriffe und Zeichen 11

§ 2. Die Fundamentalsätze der Algebra der Vektoren in spezieller Fassung 23

§ 3. Besondere Behandlung des Falles $n = 3$ 32

§ 4. Fortsetzung: Sphärische Trigonometrie 44

§ 5. Fortsetzung: Kollineationen und Korrelationen 52

§ 6. Weitere Beispiele: Lehrsätze von Desargues, Pascal und Brianchon 61

§ 7. Weiteres über Kegelschnitte (mit einem Anhang über elliptische Funktionen) 70

§ 8. Die allgemeinen linearen Transformationen 89

§ 9. Fortsetzung und Beispiele 101

§ 10. Invariante Darstellung der linearen Transformationen 111

§ 11. Die Zusammensetzung bilinearer Formen 119

§ 12. Erläuterungen. Invariantensysteme, an denen eine quadratische Form beteiligt ist 129

§ 13. Die Fundamentalsätze der Algebra der Vektoren in allgemeiner Fassung 141

§ 14. Fortsetzung und Zahlenbeispiel 152

§ 15. Verschiedenartige Ergänzungen. (Invarianten der Kollineationsgruppe. Die Sonderstellung der binären Formen. Darstellung bilinearer Formen mit Hilfe irrationaler Kovarianten) 161

§ 16. Beispiel: Ternäre bilineare Formen mit kontragredienten Veränderlichen 184

§ 17. Fortsetzung: Die zugehörigen kubischen Kovarianten . . . 192

Seite
§ 18. Fortsetzung: Besondere Fälle 198
§ 19. Ternäre bilineare Formen mit kogredienten Veränderlichen. Automorphe Transformationen quadratischer Formen 207
§ 20. Fortsetzung: Automorphe Transformationen ternärer quadratischer Formen 220
§ 21. Grenzfall: Bewegungen und Umlegungen in der Euklidischen Ebene. Grundbegriffe der ebenen Euklidischen Geometrie . 231
§ 22. Orthogonale und quasi-orthogonale Invarianten ternärer bilinearer Formen 245
§ 23. Das Formensystem von zwei ternären quadratischen Formen, nach Gordan. Transformation solcher Formenpaare auf Summen von Quadraten. Zusammenhang des Gordanschen Formensystems mit dem Formensystem des § 22 258
Nachwort 268

Einleitung.

Probleme und Methoden.

In der sogenannten Vektoranalysis, die bis vor kurzem wohl etwas unterschätzt wurde, neuerlich aber zu Ansehen gekommen ist, hat man den vergleichsweise elementaren Tatsachen der Algebra, von denen alle dahin gehörigen Überlegungen ausgehen, bis jetzt nur geringe Aufmerksamkeit geschenkt. Vielleicht hat man das rein Algebraische als gar zu einfach und selbstverständlich betrachtet, wie es ja leider auch sonst öfter geschehen ist (Analytische Geometrie, Theorie der Transformationsgruppen, Differentialgeometrie). Jedenfalls aber, und sehr begreiflicherweise, hatte man es eilig, zu Anwendungen zu kommen, besonders zu solchen theoretisch-physikalischer Natur. Wenn aber der Physiker und noch mehr der aufs „Praktische“ erpichte Techniker — denen beiden Mathematik nur ein Mittel bedeutet — nicht leicht gewillt sein werden, sich da den Kopf zu zerbrechen, wo nicht ein auf der Stelle greifbarer Nutzen winkt, muß der Mathematiker, wenn es ihm um seine Wissenschaft ernst ist, von ihrem Betrieb anderes und ziemlich viel mehr verlangen. Keinenfalls darf er sich allzu ängstlich auf Probleme einstellen, die ihm von außen her entgegengebracht werden, und wenn er zu bemerken glaubt, daß andere für seine eigenen Aufgaben nicht viel übrig haben werden, so darf er sich dadurch nicht abhalten lassen, den Dingen auf den Grund zu gehen. Wir Mathematiker haben gar keinen Anlaß, eine höhere Instanz anzuerkennen, viel eher sollten sich andere Wissenschaften an der unsrigen ein Muster nehmen. So wertvoll die Fortschritte sind, die die Physik in unseren Tagen gemacht hat — Fortschritte, die niemand mit größerer Freude begrüßen kann als der Schreiber dieser Zeilen —, so wird doch durch sie an der bezeichneten Sachlage gar nichts geändert. Zudem ist die mathematische Wertskala des Physikers ein gar zu eindimensionales Gebilde. Der Mathematiker wird unter allen Umständen vor Augen haben müssen, daß auch der Erfahrenste die Tragweite einer mathematischen Untersuchung nicht mit Sicherheit beurteilen kann. Die Physik aber darf nicht verwechselt werden mit ihrem augenblicklichen Entwicklungszustand. Wer weiß genau zu sagen, was physikalisch bedeutungsvoll ist? Vorgestern dachte noch niemand daran, daß Geometrie in einem Raume von vier Dimensionen den Physiker näher angehen könnte, gestern hatte man sich davon Vorstellungen gebildet, die heute schon nicht mehr für richtig gehalten werden, und was der morgende Tag bringen wird, kann man nicht wissen. Gleich der sogenannten Raumvorstellung ist „das physikalische Interesse" ein verschwommener Begriff, mit dessen Hilfe man kein Forschungsgebiet sachgemäß umgrenzen kann. Außerdem hat ohne Zweifel die Mathematik ihre eigenen, durch sie selbst bedingten Wachstumsgesetze. Wenn auch dem Fortschritt jederzeit viele Wege offen stehen, so muß es doch in einer Wissenschaft, in der immer eines sich auf dem anderen aufbaut, wenigstens im großen eine natürliche Ordnung geben, mögen wir sie zu gegebener Zeit erkennen oder nicht. Sicher gehen z. B. Abschnitte der Zahlenlehre der Algebra, und Teile der Algebra wiederum der Infinitesimalrechnung voraus. Den Forschungsreisen müssen überall und unbedingt genaue Aufnahmen folgen, und je höher man die schon gemachten Entdeckungen einschätzt, desto weniger Anlaß hat man, sich mit der Kenntnis einiger Berggipfel und Flußläufe zufrieden zu geben. Es bedarf dazu natürlich einer Charaktereigenschaft, die heutzutage schon recht selten geworden ist, der Geduld; man wird kaum davon absehen können, auf die Wege des Vordringens und die anzuwendenden Hilfsmittel immer neues Nachdenken zu verwenden, und dabei, meistens wohl sogar mehr als einmal, so ziemlich von vorn anzufangen. Die Geschichte lehrt, daß dieses das Verfahren ist, das den Dauerbestand der Wissenschaft hervorbringt, und daß sich dabei allmählich das herausstellt, was wir schließlich als die natürliche Ordnung der mathematischen Gegenstände betrachten dürfen.

Man wird mich wohl nicht mißverstehen. Ich denke nicht daran, den hochverdienten Forschern, die unsere Naturerkenntnis so außerordentlich gefördert haben, etwas am Zeuge zu flicken. Der Pionier muß das Recht haben, sich sein Gepäck auszuwählen, wie er will. Es ist aber etwas anderes, wenn man ein reiches Kulturgebiet der Verwahrlosung übergibt, ja beinahe von dessen Dasein nichts zu wissen scheint. Unser eigener mathematischer Garten ist streckenweise recht sehr verwildert; man glaubt, aus dem Garten des Nachbars die Äpfel der Hesperiden eingeführt zu haben und ist nicht selten schon beglückt, wenn man Kartoffeln erntet.

Mag man die Vektoranalysis um gewisser Anwendungen willen oder als selbständige Disziplin betreiben, immer handelt es sich dabei, wie gesagt, zunächst um Gegenstände der Algebra, und zwar um Invarianten gewisser Gruppen linearer Transformationen: Alle Bildungen, die man da betrachtet, sind Invarianten orthogonaler Transformationen oder Invarianten von Gruppen, die mit der Gruppe der orthogonalen Transformationen nahe verwandt sind. Nun besitzen wir seit mehr als 50 Jahren eine hochentwickelte Invariantentheorie der Gruppe aller linearen Transformationen, und seit 25 Jahren gibt es auch, in den Grundzügen wenigstens, eine Invariantentheorie jener anderen Gruppen, auf die soeben hingewiesen wurde[1]). Aber kein Schimmer von Licht scheint von da aus auf die heute so beliebte „Analysis des Vektoren“ gefallen zu sein. Vielmehr hat man die alten Probleme so bearbeitet, als ob sie noch nie zuvor behandelt worden wären, und man ist dabei weit hinter dem zurückgeblieben, was eigentlich längst als gesicherter Besitz der Wissenschaft hätte gelten dürfen. Die Frage nach allen möglichen algebraischen, insbesondere ganzen rationalen, Invarianten der betrachteten Gruppen wird in solchen Schriften, soweit meine Kenntnis reicht, nicht einmal aufgeworfen, und doch ist sie ohne Zweifel das Problem, das der Natur der Sache nach in den Mittelpunkt solcher Untersuchungen gestellt werden muß. In der Theorie der Differentialinvarianten wird man Vollständigkeit (die doch wohl auch dem Physiker wertvoll sein sollte) nicht erreichen, wenn man sie nicht schon im Rein-Algebraischen hat. Ja bei der Mehrzahl der Autoren merkt man überhaupt nichts davon, daß sie in einem Zeitalter leben, in dem die Gruppentheorie in hoher Blüte steht. Entsprechend wird uns das Rechnungsverfahren von H. Grassmann, das zu seiner Zeit gewiß einen Fortschritt bedeutet hat und schon um seiner Originalität willen Beachtung verdient, das aber längst in der überall tiefer dringenden Invariantentheorie aufgegangen ist, in der Gegenwart wieder als Gipfel des Erreichbaren und als eine Art von Allheilmittel angepriesen, das es ganz bestimmt nicht ist, während Algebraiker wie Aronhold und Clebsch, die, abweichend von ihrem Vorgänger von präzise gestellten Problemen ausgegangen waren und viel weiter gekommen sind, für dieselben Schriftsteller nicht existiert zu haben scheinen. Kurzum, man ist rückständig, und nicht wenig. Und selbst bei einem sonst kenntnisreichen Schriftsteller kann man z. B.

---

[1]) Verh. d. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch physische Klasse, 1897, S. 443 ff.

1*

folgendes lesen: „Es wird manchen entsetzt haben, von welcher Sintflut von Formeln und Indizes hier der leitende Gedanke überschwemmt wurde. Es ist gewiß bedauerlich, daß wir uns um das rein Formale so ausführlich bemühen und ihm einen solchen Platz einräumen müssen; aber es läßt sich nicht vermeiden". Was hier als ein im gegebenen Falle unvermeidlicher und wohl darum nicht sehr ernst genommener Übelstand hingestellt wird[1], die Mühsal des Lesens unübersichtlicher Formeln, bedeutet in Wirklichkeit viel mehr als einen bloßen Schönheitsfehler. Wir kommen darauf noch zurück. Keineswegs zu viel, sondern zu wenig Aufmerksamkeit hat das Formale erhalten, oder nicht die rechte Art von Aufmerksamkeit; eben darum konnte es sich zu einer Landplage entwickeln. Das ist nicht Formalismus, wenn man den Formalismus auf ein Minimum zu reduzieren sucht. Mathematik ist nicht die Kunst zu rechnen und auch nicht die Kunst, Rechnungen zu vermeiden. Es gehört aber zur Mathematik die Kunst, überflüssige Rechnungen zu vermeiden und die nötigen geschickt zu führen. In dieser Hinsicht hätte man von älteren Autoren lernen können.

Daß die schöne Theorie der Invarianten, die eine Zeitlang im Mittelpunkt vieler Interessen gestanden hat, dem größten Teile der jetzt wirkenden Mathematikergeneration fremd werden konnte, hat allerdings nicht nur historisch-zufällige Gründe, wie etwa den Wechsel geistiger Moden. Zerstreute Ergebnisse zu einem Gesamtbild zu vereinigen, und zwar zu einem erfreulichen, ist keine Tätigkeit, von der man erwarten darf, daß jeder sie auf eigene Hand unternimmt, oder daß, wer es versucht, immer Erfolg damit haben müßte. Die zunächst dazu berufen waren, haben aber eine solche in gewissem Maße künstlerische Arbeit nur zum kleinsten Teile vollbracht, und Forderungen didaktischer Art haben sie dabei nur wenig mitsprechen lassen. Auf der Höhe seines Schaffens, da seine Gedanken zur Reife kamen, ist Clebsch gestorben. Sein sonst treffliches Lehrbuch, die Theorie der binären Formen, ist allzu abstrakt gehalten, ist zu beschränkt in der Auswahl des Stoffs und behandelt größtenteils entlegene Probleme. So konnten sich Vorurteile bilden und befestigen wie dieses, daß die wichtigste Methode der Invariantentheorie, die sogenannte symbolische, gekünstelt und wenig leistungsfähig sei; eine Art von Geheimwissenschaft, die von Rechts wegen

---

[1]) Es heißt weiter noch: „Wenn der Blitz des Gedankens niederfährt (!), so wird der Holzstoß (?) von Formeln entzündet zu einem Feuer, das ringsum das Land erleuchtet."

verboten werden sollte (wie nach Ansicht mancher Laien die Mathematik überhaupt). Anderen wieder war es weniger um die Bewältigung eines konkreten Stoffs, als um den Nachweis der Lösbarkeit vieles umfassender Probleme zu tun. Es mag die Ansicht vieler gewesen sein, was ein nicht unverdienter Mathematiker mir sagte, als Hilberts berühmter Satz von der „Endlichkeit der Formensysteme" bekannt geworden war: „Wie schön, daß man sich nun nicht mehr mit Invarianten zu befassen braucht". Diesem Urteil liegt eine völlige Verkennung der Sachlage zugrunde. Nur von wenigen vollständigen Formensystemen kann man sagen, daß man sie wirklich kennt und einigermaßen beherrscht, und was man davon weiß, verdankt man fast ganz der symbolischen Methode.

Zwischen einer gestaltlosen und schwer auszunutzenden Allgemeinheit und einer verwirrenden Fülle von Einzelheiten hat man also im großen und ganzen noch keinen gangbaren Mittelweg zu finden gewußt. Aber was ist in solchem Falle „das Rechte"? Leicht mag es darüber so viele Meinungen geben als Autoren, und noch einige mehr. Endgültiges läßt sich, da die Wissenschaft zum Glück fortschreitet, auch in dieser Hinsicht gewiß nicht erreichen. Dennoch sollte ein Versuch zum besseren gemacht werden.

Dieses ist die Situation, oder wenigstens meine Ansicht davon, die mich veranlaßt hat, zur Abfassung der vorliegenden Schrift die Feder in die Hand zu nehmen. Ein systematisches Lehrbuch würde eben das voraussetzen, was erst herbeigeführt werden soll. Es würde wohl auch schon um seines unvermeidlichen Umfangs willen nicht viele Leser finden. Mehr Erfolg glaube ich mir versprechen zu dürfen von einer Einleitung oder Anleitung, in der mit Hinweisen auf das, was anderwärts zu finden ist oder überhaupt noch fehlt, ausgewählte Probleme nach Art einer akademischen Vorlesung oder besser noch eines Kolloquiums abgehandelt werden (wie ich es im Jahre 1921 tatsächlich gehalten habe). Kenntnisse, die unter Mathematikern nicht allgemein verbreitet sind, brauchen dann vom Leser nicht verlangt zu werden, und der Umfang des Ganzen kann in mäßigen Grenzen bleiben. Anmerkungen für Leser, die weitere Belehrung suchen, können für Fehlendes einige Entschädigung bieten. Sie sind hier durch kleinen Druck kenntlich gemacht. Daß sich darunter ziemlich viele Verweisungen auf meine eigenen Schriften finden, bitte ich mit Nachsicht zu beurteilen. Da ich sicher nie dazu kommen werde, meine besonders der Geometrie gewidmeten Untersuchungen im Zusammenhang darzustellen, das meiste davon aber gar nicht bekannt geworden ist (nicht einmal gewissen Berichterstattern der mathematischen Enzyklopädie), so wird man mir wohl einiges zugute halten.

Entsprechend der bezeichneten didaktischen Tendenz sind ausgeführte Beispiele eingestreut. Diese schließen sich im vorliegenden Bande noch an Aufgaben der ebenen Geometrie an; erst eine in Aussicht genommene Fortsetzung soll einen weiteren Ausblick nehmen. Im Mittelpunkte des Vorzutragenden steht jedoch die Algebra der Vektoren mit einer unbestimmten Zahl von Koordinaten, und in dieser Hinsicht hoffe ich hier schon eine gewisse Vollständigkeit erreicht zu haben. Es ist auch Sorge getragen, daß dieser besonderen Disziplin der Platz angewiesen werde, der ihr meines Erachtens zukommt, und ich erblicke darin gerade eine Hauptaufgabe der vorliegenden Schrift.

Bearbeiter der Vektoranalysis und verwandter Ideenbildungen methodischer Natur (Ausdehnungslehre, Matrizenkalkül, Quaternionen usw.) betrachten gerne ihren Stoff als eine Welt für sich. Ohne Zweifel ist hieran viel Berechtigtes. Eine solche Forderung und das verwandte Verlangen nach Reinheit der Methode enthalten einen heilsamen Zwang zur Vertiefung. Es kommen dabei nicht nur ästhetische Gesichtspunkte in Betracht. Um die Leistungsfähigkeit einer Methode zu ermessen, muß man sie eben auszunutzen suchen. Ungesund ist jedoch, wenn auch menschlich und verständlich, daß die Arbeitsteilung unter Mathematikern (und nicht nur unter diesen) sich fast immer nach Methoden, nicht nach Problemen vollzieht. Ungesund deshalb, weil eine Einengung des Gesichtskreises die gewöhnliche Folge davon ist. Man kennt dann und versteht einander nicht, die wertvollsten Gedanken können lange Zeit unfruchtbar bleiben, ganze Disziplinen können aus solchen rein persönlichen Ursachen ins Stocken geraten. Der geräuschvolle und nutzlose Streit um die Zeichen, der in der kleinen Welt der Vektorenrechnung sogar zu dem bedenklichen Mittel der Einsetzung einer Kommission geführt hat, scheint mir ein Symptom dieses Zustandes zu sein. Ich gehe auf diesen lehrreichen Fall noch etwas näher ein.

In einem geistvollen Werke über Ziel und Struktur der physikalischen Theorien[1]) hat Pierre Duhem der Psychologie der Forschertätigkeit eingehende Betrachtungen gewidmet. Mit unschädlicher Übertreibung klassifiziert er die Förderer der Wissen-

---

[1]) Deutsch von F. Adler. Mit einem Vorwort von Ernst Mach (1908).

schaft als umfassende aber schwache, und starke aber beschränkte Geister. Engländer sollen so gut wie immer zur ersten, Franzosen und Deutsche meistens zur zweiten Kategorie gehören, was durch lehrreiche Beispiele erläutert wird. Jedenfalls dient diese Unterscheidung der Klarheit, einerlei, wie viele unverfälschte Exemplare des einen oder anderen Typus zu finden sein mögen. Sie entspricht in der Hauptsache dem Gegensatz von intuitiver und logischer Veranlagung, wobei das Wünschenswerte die Vereinigung beider Begabungen, das Gewöhnliche Einseitigkeit oder allenfalls irgend eine Mittelbildung ist. Nehmen wir also diese Unterscheidung einmal wie sie ist, so kann es für einen Augenblick scheinen, als ob sich niemand um Rechnungssymbole viel zu kümmern brauchte. Den einen ist jedes Symbol gut genug, weil sie sich auch im wildesten Formelgestrüpp zurecht finden, die anderen brauchen vielleicht gar keine Symbole für spezielle Theorien, weil ihnen nur „das Prinzipielle" am Herzen liegt. Indessen richtet sich das Interesse, das wir an den Grundlagen unserer Wissenschaft nehmen, doch ganz nach dem, was darauf errichtet werden soll, und daß das Gebäude der Wissenschaft in allen seinen Teilen in immer bessere Ordnung gebracht werde, ist ganz gewiß auch eine Forderung von grundsätzlicher Bedeutung. Hier tritt nun der Formalismus in sein Recht, der den mehr logisch Veranlagten die erwünschte Übersicht bringt, den Intuitiven den Zwang zur Ordnung auferlegt. In den Formeln spiegelt sich die Struktur mathematischer Gedanken. Es ist nicht gleichgültig, ob sie mit Nebendingen überladen sind. Allgemein wird anerkannt, daß die Erfolge der Infinitesimalrechnung zum großen Teil erst durch eine glücklich gewählte Zeichensprache ermöglicht worden sind, und dasselbe gilt z. B. von der Determinantentheorie oder der Theorie der Transformationsgruppen. Das Wort Eleganz bezeichnet nur einigermaßen das, worauf es hier ankommt. Es ist ein ungeheures Mißverständnis, da durchaus nur Äußerlichkeiten sehen zu wollen, wo das innerste Wesen der Mathematik auf dem Spiele steht. Es handelt sich um Gesetzmäßigkeiten meistens gruppentheoretischer Art. Diese Gesetzmäßigkeiten sind da, wie alle Mathematik sind sie, gleich dem Tatsächlichen der äußeren Natur, unabhängig vom erkennenden Subjekt, dem nur sie aufzufinden und ihre formale Einordnung in einen historisch gegebenen Zusammenhang übrig bleibt. Es ist nicht objektiv, sondern gewalttätig, sich nicht darum kümmern zu wollen[1]). Die methodischen

[1]) Man lese auch, was H. Poincaré über die Eleganz gesagt hat. (Science et Méthode 1908, p. 25; Deutsche Ausgabe von H. Lindemann,

Unterschiede, die hier in Betracht kommen, sind nicht nur vergleichbar etwa dem Unterschied zwischen einer Mosaik und einem mit geeigneteren Mitteln fein ausgeführten Gemälde, sondern auch mit dem zwischen einer Lupe (die ja gewiß ein nützliches Instrument ist) und einem Mikroskop. Schwerlich ist es Zufall, daß man schlecht gebaute Formeln gewöhnlich da antrifft, wo auch Präzision für nebensächlich gehalten zu werden scheint[1]).

Ich wünsche, mich sehr deutlich auszudrücken. Ich verkenne keineswegs, daß sich nicht alles mit einem Male zustande bringen läßt, und daß es für die besprochenen Mängel, wie für viel schlimmere, Entschädigungen geben kann und öfter auch wirklich gibt. Es hat sich aber schon so manches, auf das eine spätere Zeit Gewicht gelegt hat, dem Blick der Forscher zunächst entzogen. Daher sollte man vorsichtig sein mit der Behauptung, daß irgend etwas „nicht geht“. Oder man sollte, in anderen Fällen, nicht so leicht zufriedengestellt sein unter dem Vorgeben, „die Hauptsache“, d. h. das, was man als Hauptsache hinstellt, sei ja getan. Man sollte vielmehr die Ansprüche an sich selbst immer so hoch schrauben wie möglich. Die Ausführung wird auch dann noch hinter der Absicht zurückbleiben. Das Darstellen ist eine schwere Kunst und Gründe zur Genügsamkeit sind wohlfeil. Auch in der Mathematik ist noch immer Unzufriedenheit die Mutter des Fortschritts gewesen.

Wenn also — um wieder zu den Zeichen zu kommen — diese gewiß niemals die Hauptsache in der Mathematik sein können, so sind sie doch bei weitem nicht so gleichgültig, wie es nicht wenige durch unbedachte Schriftstellerei zu verstehen geben. Wenn ein Genie wie L. Euler oder Faraday auch mit unvollkommenem Werkzeug Hervorragendes zu leisten vermochte, so folgt daraus ganz und gar nicht, daß feingeschliffene Instrumente entbehrlich sind. Zeichen auf dem Papier gehören außerdem zu der Sprache, durch die wir uns anderen verständlich zu machen suchen. Sie verdienen also eben dieselbe große Aufmerksamkeit wie, als Trägerin

---

Wissenschaft und Methode, S. 20). Wie dagegen rein expansive Geister über solche Dinge denken, hat uns der Physiker Boltzmann verraten, der zwar kein Engländer, wohl aber ein ganz waschechter Repräsentant des englischen Geistestypus war: Man solle die Eleganz den Schustern und Schneidern überlassen. Dergleichen haben wir neuerdings noch öfter gehört, und leider haben auch einige Mathematiker in diesem Chorus der Nicht-Sachverständigen ihre Stimme erklingen lassen.

[1]) Siehe z. B. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **25**, 96 u. ff., 1916.

unserer geistigen Kultur, die Sprache überhaupt, die ja auch nichts anderes ist als ein System von Zeichen. Das Urteil über eine besondere Zeichensprache aber wird ganz davon abhängen müssen, was sie leistet, wohin und wie weit wir mit einem solchen Hilfsmittel kommen mögen, ob sie uns wirklich die Ersparnis, nicht etwa an Arbeit, sondern an unfruchtbarer Arbeit gewährt, die allein ihr einen Platz in der Wissenschaft sichern kann.

Von dem Gewinn, den irgend ein neu einzuführendes Rechnungsverfahren etwa bringen mag, wird nun jeder die Mühe abziehen, die ihn die Aneignung der Methode kostet. Und Leser pflegen für neue Zeichen, zum Erstaunen des Autors, ein elendes Gedächtnis zu haben. Man wird also gut tun, darauf zu achten, daß die Differenz nicht am Ende gar negativ ausfällt. Wer ein ohnehin stark belastetes Gedächtnis willig anstrengen soll, dem muß vor allem jeder Zweifel darüber behoben werden, daß nicht etwa kindliche Freude an den Symbolen um der Symbole willen der Grund solcher Zumutung ist. Das Spiel irgendwelcher Zeichen auf dem Papier hat an sich schwerlich auch nur so viel Wert wie das Schachspiel, es kommt auf das und nur auf das an, was die Zeichen vertreten sollen. Also werden wir uns jedesmal fragen müssen: Lassen sich diese oder jene Gedanken nicht auch mit einem schon bewährten Apparat, ja vielleicht mit einem, der in viel weiterem Umfange brauchbar ist, nicht etwa nur ausdrücken — denn das wird immer möglich sein —, sondern ebensogut ausdrücken (ebenso vollständig, ebenso einfach usw.)?

Ganz gewiß hat nun keiner von denen, die uns mit einem wahren Platzregen von Symbolen zu überschütten lieben und dazu noch sprachbildnerische Talente durch Erfindung immer neuer Kunstworte für dieselben althergebrachten Dinge bemühen, sich irgend etwas derart vor Augen gestellt[1]). Entschuldigen läßt sich ja vieles inner-

[1]) Einer Zusammenstellung des Herrn R. Weitzenböck entnehme ich eine Liste von Ausdrücken, die für ternäre bilineare Formen oder ihre Koeffizientensysteme in Gebrauch genommen worden sind: Tensor 2. Stufe, Affinor, Dyadic, Tensortripel, komplette Dyade, asymmetrischer Tensor, Diatensor, vektorielle Homographie; wozu noch für spezielle Fälle die Namen kommen: Deviator, Antitensor, Axiator, Idemfaktor, Versor, Perversor usw. Das Wort Stufe hat bei Grassmann (1844) und in der gesamten geometrisch-invariantentheoretischen Literatur eine Bedeutung, die man hätte festhalten sollen. Wohin würden wir kommen, wenn jedem das Recht zugestanden werden müßte, sich, unbekümmert um seine Vorgänger, eine eigene Kunstsprache zu ersinnen und namentlich schon vorhandene Worte, ohne erkennbare Motivierung, in ganz neuem Sinne zu gebrauchen? Die vorhandenen Kunstausdrücke sind nicht tabu, aber sie sind auch kein herrenloses Gut!

halb gewisser Grenzen. Aber ein Anspruch auf Beachtung kann durchaus nur sachlich begründet werden. Unkenntnis oder Verständnislosigkeit gegenüber einer ganzen nach Ansicht der Kenner wertvollen Literatur rechtfertigt solchen Anspruch nicht. Zu bedenken ist auch noch dieses, daß eine unbedachte Vervielfältigung der Rechnungssymbole und Kunstausdrücke die Vergleichung der Behauptungen verschiedener Autoren erschweren muß. Die Leistung einer Übersetzungsarbeit, die desto mehr Geduld verlangt, je weniger sie wirklich fördert, wird mancher verweigern, und das Recht dazu kann ihm nicht abgesprochen werden.

Gewisse im Umlauf befindliche Werturteile dürften hiernach kaum aller Berechtigung entbehren. Aber ganz in der Ordnung sind sie wohl auch nicht. Kritik, die nicht nur die Betroffenen verärgern, sondern ihnen und anderen Nutzen bringen soll, muß von einer einleuchtenden Begründung begleitet sein. Summarische Schätzungen schießen oft über das Ziel hinaus und geben nie ein klares Bild, mögen sie nun anerkennend oder abfällig sein. Überhaupt liegt die Kritik in unserer Wissenschaft sehr im Argen. Während die öffentlich geübte Kritik, im großen und ganzen, von Wohlwollen förmlich strotzt, sich durch Namen einschüchtern läßt und nicht einmal gegenüber offenbarer Liederlichkeit Worte findet, werden unter der Hand eine Menge abfälliger Werturteile weitergegeben, und zwar auch von solchen, die zu ihrer Begründung gar nicht imstande sind. Man kann es ja verstehen, warum dieser auch in anderen Wissenschaften fühlbare Übelstand sich gerade in der Mathematik zu großen Dimensionen auswachsen konnte; doch sollten wir mehr Verantwortungsgefühl betätigen, als es leider so oft geschieht.

Was man in der algebraischen Vektorenrechnung gesucht hat, ein dem Stoffe möglichst angemessenes System von Zeichen, war längst da, und in einer viel zweckmäßigeren Gestalt als alles das, was sonst von verschiedenen Seiten vorgeschlagen worden ist[1]). Ich werde mich, mit geringen Änderungen (deren Motivierung man nicht vermissen wird!) der hergebrachten, durch die Sache selbst in allem wesentlichen eindeutig bestimmten Zeichensprache bedienen, die in der älteren Theorie der Invarianten linearer Transformationen ausgebildet worden ist. Eine besondere Vektorensymbolik, die nur zu leicht den Weg ins Freie versperren kann, erscheint mir als überflüssig, wo nicht schädlich. Jene „Welt für sich“ wird trotzdem zu ihrem vollen Rechte kommen.

[1]) Vgl. S. 97, 101, 257, 258.

Im Falle der gewöhnlichen analytischen Geometrie, die in allerlei Lehrbüchern abgehandelt wird, habe ich schwerer wiegende Einwände zu erheben. Ich denke nicht an die vielen für Anfänger bestimmten Schriften, deren einziger Daseinsgrund die Hoffnung irgend eines Verlegers auf Geldverdienst zu sein scheint. Auch will ich nicht weiter reden von der den Verfassern vielfach ganz unbemerkt untergelaufenen Verquickung der Mathematik mit Gegenständen der Erkenntnistheorie, die der Sache unmöglich zum Vorteil gereichen konnte. Über diese aus der ganz anders gearteten Geometrie der Alten übernommene Methodik habe ich mich an anderem Orte geäußert[1]). Auf das System von Erschleichungen, das aus der Einstellung fast aller Autoren auf das Reelle und „Anschauliche" entspringt und einen bedauerlichen Mangel an logischer Schulung erkennen läßt, soll ebenfalls nur kurz hingewiesen werden. Jedenfalls haben sich diese Schriftsteller nicht klar gemacht, daß eine analytische Geometrie doch vor allen Dingen analytische Geometrie sein soll, und daß sie den Unterbau abgeben muß nicht nur für Mechanik und für die heutige theoretische Physik — wozu sie allenfalls ausreicht —, sondern auch für die modernen Disziplinen der höheren algebraischen und Differentialgeometrie, die das Imaginäre gar nicht entbehren können, und daß überhaupt die Abfassung eines brauchbaren Lehrbuches zur Voraussetzung eine wissenschaftliche Erfahrung hat, die keinesfalls aus den schon vorhandenen Lehrbüchern geschöpft werden kann. Hier habe ich es besonders zu tun mit der Handhabung des Koordinatenapparats. Diesen finde ich meistens viel zu aufdringlich in den Vordergrund gerückt[2]). Der natürliche Zusammenhang der Probleme, ihr Wurzeln in gemeinsamem algebraischem Untergrund, wird dadurch verdeckt; von Fall zu Fall wird, wie aus einem entlegenen Steinbruch, von manchen Autoren herbeigeschleppt, was man an algebraischen Hilfsmitteln nötig zu haben glaubt. Allzuoft wird das Koordinatensystem hin und her geschoben und ohne triftigen Grund spezialisiert; manche Probleme werden auf diese Art un-

---

[1]) In den Schriften „Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume" (1913), und „Mathematik und Physik" (1923).

[2]) In diesem Punkte bin ich auch mit der „Koordinatengeometrie" von H. Beck nicht einverstanden. Im übrigen hat dieses Werk, von dem zurzeit der erste Band vorliegt (1919), mit dem hier Vorzutragenden allerlei Berührungspunkte; es ist aus demselben Gedankenkreise hervorgegangen. Der erste Wurf konnte wohl nicht ganz gelingen, zumal der Verfasser mit widrigen äußeren Umständen zu kämpfen hatte; eine zweite Auflage wird ohne Zweifel manches bessern.

vermerkt eingeschränkt. Ein sehr berühmter Mathematiker hat diese Methodik sogar als theoretisches Erfordernis hinstellen wollen, ich weiß nicht, ob ganz im Ernste; man soll, wie er sich ausdrückt, „invariant denken“, aber nicht „invariant rechnen“. In anderen Fällen wird ein zum Teil entgegengesetzter Mißgriff getan: Es wird schon über recht elementare Aufgaben eigentlich nur geredet. Das ist das Elend der idealistischen Denkart, daß sie überall vom Nächstliegenden und Konkreten nichts wissen will. Die Fiktion eines Wesens von ewigem Leben und unbegrenzter Geduld ist nicht ohne Nutzen, aber so beschaffen sind wir nun einmal nicht. Müssen wir uns oft genug mit einem bloßen Kochrezept bescheiden, so sollte das kein Grund sein, da zu verzichten, wo sich besseres leisten läßt. Über die Maßen dürftig ist zum Beispiel, was in allerlei Büchern über die Bestimmung eines Kegelschnittes aus gegebenen Punkten und Tangenten zu lesen steht. Wie soll doch die Lösung eines solchen individuellen algebraischen Problems durch eine nach Schema F auszuführende Rechnungsanweisung ersetzt werden können? Wäre man je nach der eigenen Vorschrift verfahren, so würde man gesehen haben, daß die Sache, in der Nähe betrachtet, ein ganz anderes Gesicht bekommt als es der mathematische Idealist sich träumen läßt.

Doch es mag nun des Kritisierens genug sein!

§ 1.

Grundbegriffe und Zeichen.

Ein System von n geordneten reellen oder (gewöhnlichen) komplexen Zahlen erhält je nach Umständen, nämlich je nach dem Gebrauch, den man davon machen will, verschiedene Namen, z. B. Punkt oder Vektor. Handelt es sich um reelle Zahlen, so heißt das System selbst reell. Es wird zweckmäßig durch ein einziges Zeichen dargestellt; z. B.

$$X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\},$$
$$Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}.$$

Ich werde mich hier, mit Rücksicht auf gewisse Anwendungen, zunächst nur der zweiten Terminologie bedienen. Vektoren können in üblicher Weise zu „Summen" zusammengesetzt werden nach der Regel

$$X + Y = \{X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \ldots, X_n + Y_n\};$$

ebenso können sie mit Zahlen (reellen oder gewöhnlichen komplexen Zahlen) „multipliziert" werden nach der Regel

$$c \,.\, X = \{cX_1, cX_2, \ldots, cX_n\};$$

z. B. für $c = -1$:

$$-X = \{-X_1, -X_2, \ldots, -X_n\}.$$

Der dem Werte $c = 0$ entsprechende Vektor heißt „der Vektor Null"; er wird im Zusammenhang der zu begründenden Vektorenrechnung nicht durch ein besonderes Zeichen, sondern durch das gewöhnliche Zeichen der Null dargestellt (was nicht zu Mißverständnissen führen wird):

$$0 = \{0, 0, \ldots, 0\}.$$

Es folgt hieraus, daß man jeden Vektor, wie man sagt, „additiv" oder „als lineares Aggregat" anderer Vektoren darstellen kann, z. B. $Z = X + (Z - X)$, und namentlich

$$X = X_1\{1, 0, \ldots, 0\} + X_2\{0, 1, 0, \ldots, 0\} + \cdots + X_n\{0, 0, \ldots, 1\}.$$

Die einzelnen Vektoren auf der rechten Seite einer solchen symbolischen Gleichung heißen Komponenten des zerlegten Vektors; bei der zweiten Zerlegung heißen die Zahlen $X_1 \dots X_n$ Koordinaten des Vektors X. Zwischen Komponenten und Koordinaten ist scharf zu unterscheiden (was nicht immer beachtet worden ist). Die Zahl c ist nicht dasselbe wie das System

$$c\{1, 0, \dots, 0\} = \{c, 0, \dots, 0\}.$$

Es ist hiernach klar, was eine symbolische Gleichung der Form

$$c_1 X^1 + c_2 X^2 + \cdots + c_m X^m = 0$$

zu bedeuten hat, in der die Zahlen $c_1 \dots c_m$ konstant und sogenannte Verhältnisgrößen (nicht alle Null) sind, und in der die Zeichen X^k (natürlich nicht Potenzen, was keinen Sinn hätte, sondern) irgend welche Vektoren

$$X^k = \{X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \dots, X_n^{(k)}\}$$

vertreten: die Vektoren $X^1, X^2, \dots X^m$ heißen dann linear-abhängig; wenn keine solche Gleichung besteht, werden sie linear-unabhängig genannt[1]). Die Bedingung dafür, daß m Vektoren $X^1 \dots X^m$ linear-unabhängig sind, besteht darin, daß die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} X_1^{(1)}, & X_2^{(1)}, & \dots, & X_n^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_1^{(m)}, & X_2^{(m)}, & \dots, & X_n^{(m)} \end{matrix} \right\|$$

den Rang m hat. Es gibt, bei vorgeschriebenem Werte der Zahl n, nicht mehr als n linear unabhängige Vektoren, und aus je n solchen, z. B. aus den Vektoren $\{1, 0, \dots, 0\}$, $\{0, 1, \dots, 0\}$, $\dots$, $\{0, 0, \dots, 1\}$ — speziellen sogenannten Einheitsvektoren[2]) — können alle Vektoren additiv zusammengesetzt werden. Jedes so benutzte System von n linear unabhängigen Vektoren heißt eine Basis der Vektorenmannigfaltigkeit. Vom Inbegriff aller Vektoren sagen wir, er bilde ein Gebiet n^{ter} Stufe[3]); da die Zahl n beliebig ist, so gibt es unendlich viele solcher Gebiete, entsprechend den Werten $n = 1, 2, \dots$ Im folgenden wird immer da, wo nicht das Gegenteil bemerkt ist, $n > 2$ angenommen.

Alle Vektoren eines Gebietes n^{ter} Stufe bilden ein „nach dem Unendlichen hin“ nicht abgeschlossenes Kontinuum „von $2n$ Dimen-

---

[1]) Wenn sich unter den Vektoren $X^1, X^2, \dots, X^m$ der Vektor Null befindet, so sind sie hiernach immer linear abhängig.

[2]) Der allgemeine Begriff des Einheitsvektors wird später erklärt.

[3]) Das Wort Stufe wird heutzutage in allerlei Bedeutungen gebraucht. Im Sinne des Textes hat es (1844) H. Grassmann eingeführt; es scheint mir richtig, daß es dabei bleibt.

sionen“ oder, wie man (nach dem italienischen Mathematiker C. Segre) besser sagt, „von n komplexen Dimensionen“. Darin ist enthalten das nur n-dimensionale Kontinuum der reellen Vektoren, nämlich derer, die ausschließlich reelle Koordinaten $X_1 \dots X_n$ haben.

Unter den Funktionen, die man aus den Koordinaten eines Vektors oder mehrerer Vektoren bilden kann, sind nun einige, die für Anwendungen eine besondere Bedeutung haben, und denen daher auch besondere Worte und andere Symbole zugeordnet zu werden pflegen. Es ist das zunächst eine bilineare Verbindung der Koordinaten von zwei (nicht notwendig verschiedenen) Vektoren X, Y:

$$X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \cdots + X_n Y_n.$$

Sie wird nach H. Grassmann (1844!) „das innere Produkt“, von späteren Autoren auch, im Anschluß an die auf das reelle Gebiet zugeschnittene Terminologie Hamiltons, „skalares Produkt“ der Vektoren X, Y genannt. Eine Menge von Zeichen sind dafür vorgeschlagen worden, z. B. $X.Y$, $X \times Y$, $X | Y$, $[X | Y]$, (XY), daneben natürlich auch das Summenzeichen $\sum X_i Y_i$ und neuerdings sogar $X_i Y_i$ oder ein ähnliches Zeichen, ohne besonderen Hinweis auf die vorzunehmende Summation (!). Ich werde mich von den im Vorwort angegebenen Gründen leiten lassen, kann aber die getroffene Wahl an dieser Stelle noch nicht genügend motivieren. An Stelle des früher von mir vorgeschlagenen und auch hier später wieder zu verwendenden Zeichens (XY) werde ich mich bis auf weiteres des Zeichens $(X | Y)$ bedienen, das von dem Grassmannschen Symbol $[X \; Y]$ nicht sehr verschieden ist[1]).

Wir schreiben also

$$(1) \qquad (X | Y) = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \cdots + X_n Y_n;$$

gelesen werden soll „X in Y“. Übrigens rechtfertigt sich das Wort Produkt (mit einem Zusatz) daraus, daß $(X | Y)$ sich für $n = 1$ auf das gewöhnliche Produkt $X_1 Y_1$ reduziert, und daß die zu seiner Bildung führende „innere Multiplikation“ mit der Addition der Vektoren durch das Distributionsgesetz verbunden ist:

$$(X | Y + Z) = (X | Y) + (X | Z).$$

Eine zweite nicht minder wichtige Verbindung der Koordinaten von Vektoren ist das — ebenfalls nach Grassmann — sogenannte äußere Produkt von n Vektoren, das wir durch das Zeichen

---

[1]) Das Zeichen (XY) wird im Falle $n = 2$ zweideutig. (In der zitierten Untersuchung vom Jahre 1897 war $n > 2$ vorausgesetzt worden.)

$(X^1 X^2 \dots X^n)$ darstellen wollen. Es ist die Determinante aus den Koordinaten der n Vektoren, also

$$(2) \qquad (X^1 X^2 \dots X^n) = |X_1^{(1)} X_2^{(2)} \dots X_n^{(n)}|.$$

Das Determinantenzeichen selbst wird hierfür nicht gebraucht, ebensowenig wie das Zeichen $\sum X_i Y_i$ für $(X \mid Y)$, weil es meistens nicht nötig und oft sogar unvorteilhaft ist, die einzelnen Koordinaten, aus denen sich eine solche Funktion zusammensetzt, in den Formeln sichtbar zu machen.

Mit diesen beiden Symbolen werden wir vorläufig auskommen. Ihre Bedeutung liegt darin, daß die durch sie bezeichneten Funktionen von 2 oder n Vektoren, Funktionen also von $2n$ oder n^2 gewöhnlichen Argumenten, eine Eigenschaft haben, die man durch das Wort Invarianz bezeichnet. Wir begegnen an dieser Stelle in unserem Zusammenhang zuerst diesem wichtigen Begriff und gehen daher näher auf die Sache ein. Das ist schon darum nötig, weil in der vorhandenen Literatur über gewisse Festsetzungen, terminologische und andere, keine Übereinstimmung herrscht, wir uns aber natürlich für einen eindeutigen Sprachgebrauch werden entscheiden müssen.

Wir wollen mit Hilfe eines auflösbaren Systems linearer Gleichungen dem Vektor X einen anderen $\underline{X}$ zuordnen. Solche Gleichungen schreibt man in üblicher Weise:

$$(3) \qquad c_{i1} X_1 + \cdots + c_{in} X_n = \underline{X}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Gleichbedeutend damit würde die Schreibart

$$(4) \qquad X_1 C_{1i} + \cdots + X_n C_{ni} = \underline{X}_i$$

sein (wo $c_{in} = C_{ni}$), die in unserem Zusammenhang sich öfter als noch etwas bequemer herausstellen wird, und daher hier gleich Erwähnung finden mag. Insofern man mit Hilfe dieser Gleichungen jedem Vektor X des Gebietes n^{ter} Stufe einen anderen zuordnen kann, also z. B. dem Vektor Y einen Vektor $\underline{Y}$, spricht man von einer Transformation, und zwar von einer linearen Transformation im Kontinuum der Vektoren X. Andere als solche gegenseitig-eindeutige lineare Zuordnungen werden wir überhaupt nicht betrachten.

Der Vektor $\underline{X}$ heißt „der Transformierte" des Vektors X, der hier als gegeben betrachtet wird. Wir schreiben $X \rightarrow \underline{X}$, oder noch deutlicher $X S \underline{X}$[1]).

---

[1]) Diese sehr zweckmäßige Bezeichnung von Transformationen ist von Hermann Wiener vorgeschlagen worden.

„X geht durch die Transformation S — mit der Koeffizientenmatrix (c_{ik}) oder (C_{ki}) — über in $\underline{X}$.“ Die Transformation S ist also zu unterscheiden von der Zuordnung, die aus einem gegebenen $\underline{X}$ das zugehörige X bestimmt, nämlich von der Zuordnung $\underline{X} \longrightarrow X$, die die Entgegengesetzte zur Transformation S heißt und der man das Zeichen S^{-1} zuordnen kann:

$$\underline{X}\, S^{-1} X.$$

Ist $X = \underline{X}$ für alle X, also $X_i = \underline{X}_i$, so gilt auch diese Zuordnung, die alle Vektoren in Ruhe läßt, noch als Transformation. Sie heißt die identische oder Einheitstransformation und wird durch das Zeichen E dargestellt. Offenbar hat man dann immer

$$X S \underline{X} S^{-1} X \quad \text{und} \quad \underline{X} S^{-1} X S \underline{X},$$

also auch $Y S^{-1} \underline{Y} S\, Y$, oder kürzer

$$S S^{-1} = E = S^{-1} S.$$

Die einzelne lineare Transformation ist durch das Wertsystem ihrer Koeffizienten, durch die n^2 Parameter c_{ik} oder C_{ki} bestimmt. Diese können im übrigen beliebig, immer aber nur so gewählt werden, daß die Determinante der Koeffizientenmatrix $\| c_{ki} \|$ oder $\| C_{ik} \|$ von Null verschieden ausfällt. Ferner bilden die linearen Transformationen in ihrer Gesamtheit eine Gruppe. Das heißt erstens: Führt man zwei solche Transformationen hintereinander aus, nach dem Schema $X \longrightarrow \underline{X} \longrightarrow \underline{\underline{X}}$ oder deutlicher $X S_1 \underline{X} S_2 \underline{\underline{X}}$, so erhält man wieder eine Transformation, die derselben Mannigfaltigkeit, Schar oder Menge von (hier linearen) Transformationen angehört; zweitens gehört die Entgegengesetzte zu einer unserer Transformationen wiederum zu der erklärten Schar von (linearen) Transformationen. Bezeichnen wir die zusammengesetzte Transformation mit S_3, und schreiben wir kurzweg

$$S_1 S_2 = S_3,$$

so werden die Parameter c''_{ik} von S_3 ohne weiteres aus den Parametern c_{ik} und c'_{ik} von S_1 und S_2 berechnet. Sie ergeben sich aus der bekannten Multiplikationsregel quadratischer Matrizen, nach dem Schema

$$\| c'_{ik} \| \cdot \| c_{ik} \| = \| \Sigma_j c'_{ij} c_{jk} \| = \| c''_{ik} \|$$

oder, was dasselbe aussagt, nach dem Schema

$$\| C_{ki} \| \cdot \| C'_{ki} \| = \| \Sigma_j C_{kj} C'_{ji} \| = \| C''_{ki} \|.$$

Hieraus aber folgt die entsprechende Regel für die zugehörigen Transformationsdeterminanten $| S_1 | = | c_{ik} | = | C_{ki} |$ usw.:

(5) $$| c'_{ik} | \cdot | c_{ik} | = | c''_{ik} |, \quad | C_{ki} | \cdot | C'_{ki} | = | C''_{ki} |.$$

Als selbstverständlich kann gelten, daß die erklärten linearen Transformationen (wie eindeutig umkehrbare Transformationen überhaupt) dem sogenannten Assoziationsgesetz der Multiplikation folgen; d. h. bedeuten jetzt S_1, S_2, S_3 irgend drei lineare Transformationen, so ist immer

$$(S_1 S_2) S_3 = S_1 (S_2 S_3),$$

so daß man also das einfachere Zeichen $S_1 S_2 S_3$ für diese Zusammensetzung von drei Transformationen gebrauchen darf. Dagegen ist natürlich nicht immer $S_1 S_2 = S_2 S_1$. Ist es im besonderen Falle doch so, so heißen die Transformationen S_1 und S_2 vertauschbar. Die identische Transformation ist mit allen anderen Transformationen vertauschbar, $ES = SE = S$, und ebenso jede lineare Transformation mit allen ihren Potenzen $S^2 = SS$ usw., zu denen man auch, als nullte Potenz, die identische rechnen kann, $E = S^0$, und ebenso auch die schon erklärte Transformation S^{-1} mit ihren Potenzen $S^{-2} = S^{-1} S^{-1}, \ldots$, sowie mit S^0, S^1, S^2 usf.

Alles dieses gilt für reelle wie komplexe Transformationen, d. h. es gilt, einerlei, ob man für die Parameter c_{ik} usw. komplexe Werte zulassen oder sie auf reelle Werte einschränken will. Es besteht aber zwischen diesen beiden Fällen, auch abgesehen von der Verschiedenheit der Parameterzahl, ein sehr wesentlicher Unterschied:

Die komplexen linearen Transformationen bilden in ihrer Gesamtheit ein Kontinuum (von „∞^{2n^2}“ Dimensionen, oder deutlicher „von ∞^{n^2} komplexen Dimensionen“).

Die reellen linearen Transformationen dagegen bilden ein Kontinuum (von ∞^{n^2} Dimensionen) nur dann, wenn die Stufenzahl n ungerade ist.

Im anderen Falle hat man es mit zwei völlig getrennten Scharen oder „Schichten“ von Transformationen zu tun, und die Transformationen der einen dieser Schichten, die durch positive Werte der Transformationsdeterminante gekennzeichnet wird, bilden für sich eine Gruppe.

Wir können, um diesen letzten Sachverhalt kurz zu bezeichnen, von einer geschichteten Gruppe mit einem Bestand von $2 . \infty^{n^2}$ Transformationen reden[1]).

Eines ausgeführten Beweises bedarf nur die Behauptung, daß bei geradem n und reellen Werten der Koeffizienten c_{ik} nicht mehr als zwei Kontinua von Transformationen vorhanden sind. Wir

[1]) Lies Terminus ist „Gemischte Gruppe“. Mir scheint der im Text vorgeschlagene Ausdruck bezeichnender zu sein.

werden aber diesen übrigens folgenreichen Satz[1]) weiterhin nicht gebrauchen — so mag es dem Leser überlassen bleiben, sich selber den Beweis zu suchen, der nur die einfachsten Hilfsmittel aus der Determinantentheorie erfordert. Lassen wir ihn als richtig gelten, so haben wir drei Typen von Gruppen gefunden, wovon zwei *kontinuierlich* sind und eine *geschichtet* ist. Zwischen den beiden ersten aber besteht noch der wesentliche Unterschied, daß die eine mit Hilfe von analytischen Abhängigkeiten beschrieben werden kann (Determinante $\neq 0$), die andere nicht (c_{ik} reell, Determinante > 0). Wir bezeichnen daher die erste dieser zwei Gruppen, und nur sie, als eine *analytische Gruppe*[2]).

Wir wenden uns jetzt nochmals zu den Gleichungen (4) und schreiben sie zusammenfassend so:

$$\sum X_i \{C_{i1}, \ldots, C_{in}\} = \{X_1, \ldots, X_n\} = \underline{X}. \tag{6}$$

Nichts hindert dann, den Vektor $\underline{X}$ als den gegebenen anzusehen. Wir haben dann diesen Vektor statt auf die Basis

$$\{1, 0, \ldots, 0\}, \ldots, \{0, 0, \ldots, 1\}$$

auf die in der Regel von ihr verschiedene Basis

$$\{C_{11} \ldots C_{1n}\}, \ldots, \{C_{n1} \ldots C_{nn}\}$$

bezogen. Fällt diese nicht gerade mit der ersten zusammen, ist also nicht immer $X = \underline{X}$, so spricht man von einer *Änderung des Koordinatensystems* (durch lineare Substitution).

Offenbar ist die eine Auffassung der Formeln (4) oder (6) so gut wie die andere, wir dürfen sie beide als gleichwertig gelten lassen. Damit ist jedoch nicht gesagt, daß sie sich überall beide in gleicher Weise empfehlen müßten. Handelt es sich um gewisse Anwendungen, besonders um solche in der theoretischen Physik, so wird man der *zweiten* Auffassung den Vorzug geben. Vektoren dienen dann zur Bezeichnung physikalisch bedeutungsvoller Größen, und dann ist es sachgemäß, sie ruhen zu lassen und, behufs Auf-

[1]) Näheres darüber findet man in einem Aufsatz über die Begriffe Links und Rechts, Archiv der Mathematik und Physik, III. Reihe, **21**, 201 ff. (1913).

[2]) Nach S. *Lie* heißt sie eine *kontinuierliche Gruppe*. Das scheint mir unlogisch, also ein entschiedener Mißgriff zu sein, wiewohl, soviel ich weiß, diese Terminologie sonst keinen Widerspruch gefunden hat. Die Kontinuität sichert nicht den analytischen Charakter, der doch auch von S. *Lie* gefordert wird. Niemand denkt jetzt noch daran, als stetige Funktionen nur solche zu bezeichnen, die differentiierbar sind.

findung ihrer vom besonderen Koordinatensystem unabhängigen Eigenschaften, nur ihre Koordinaten zu variieren. So konnte L. Euler die Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers vereinfachen, indem er sie auf ein speziell gewähltes, im bewegten Körper, nicht im Raume des (ruhend gedachten) Beobachters befindliches System von Koordinaten, oder also auf eine mit dem Körper fest verbundene Basis bezog, durch Einführung der Hauptträgheitsachsen.

Hier kommt es mir mehr auf die Klarstellung gewisser Grundbegriffe an, und auch auf die Einordnung des Vorzutragenden in die von S. Lie begründete allgemeine Theorie der Transformationsgruppen. Ich werde also in der Regel der ersten Auffassung den Vorzug geben, bei der die Basis

$$\{1, 0, \ldots, 0\} \ldots \{0, 0, \ldots, 1\}$$

ein-für-allemal beibehalten wird — was ja eine andere Deutung der Formeln nicht ausschließt. Einiges Gewicht möchte ich dabei auf den Umstand legen, daß sich in der vorzutragenden Theorie alles im Rahmen der in der Analysis üblich gewordenen Darstellungsformen vollziehen wird. Der Vektor wird definiert durch das System seiner Koordinaten $X_1 \ldots X_n$; er wird nicht etwa nur, wie es in vielen Schriften heißt, durch solche Koordinaten dargestellt. Dazu nämlich müßte er sich auf irgend eine andere Weise (präzise) definieren, also von anderen ebenso definierten Vektoren deutlich unterscheiden lassen. Physikalisch (mit Hilfe von Metermaßen, Uhren usw.) bestimmbare Größen, an die man hier vor allem denken wird, haben indessen diese Eigenschaft nicht: Das einzige wirklich Greifbare am Vektor sind seine (unter Umständen durch unendliche Prozesse erklärten) Koordinaten. Durch Hineintragen eines Fremden und Unbestimmbaren in die Mathematik wird deren Reinlichkeit zerstört.

Hier wollen wir nun noch nicht die Gruppe aller linearen Transformationen betrachten, sondern nur eine Untergruppe von ihr, die die sogenannten orthogonalen Transformationen umfaßt. Diese sind erklärt durch die Forderung, daß die Quadratsumme $(X \mid X) = \Sigma X_i^2$ bei der Transformation der Veränderlichen ihrem Werte nach immer (für alle X) ungeändert bleiben soll. Die Bedingungen hierfür sind zur Genüge bekannt, und es folgt sogleich die noch etwas umfassendere Beziehung $(\overline{X} \mid \overline{Y}) = (X \mid Y)$. Die Determinante einer solchen Transformation kann nur einen der Werte ± 1 haben. Ist sie $= 1$, so reden wir von eigentlichen, anderenfalls von uneigentlichen orthogonalen oder uneigentlich-orthogonalen Transformationen.

Die orthogonalen Transformationen bilden eine Gruppe γ, η von $2 \cdot \infty^{2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}}$ analytischen Transformationen, d. h. eine solche, die aus zwei Schichten mit je $\frac{n(n-1)}{2}$ (sogenannten wesentlichen) komplexen Parametern besteht, und von denen die eigentlichen für sich eine **analytische** Gruppe γ bilden.

Ähnlich bilden die reellen orthogonalen Transformationen eine Gruppe von $2 \cdot \infty^{\frac{n(n-1)}{2}}$ Transformationen, in der jede Schicht kontinuierlich ist, und von denen die eigentlichen eine **kontinuierliche** Gruppe bilden[1]).

Anders ausgedrückt:

Jede der beiden Schichten orthogonaler Transformationen hat einen einzigen „reellen Zug“ von $\frac{n(n-1)}{2}$ Dimensionen.

Der diesmal vorliegende Sachverhalt ist schon ziemlich viel verwickelter als im vorigen Falle. Die n^2 Koeffizienten sind jetzt durch eine Menge algebraischer, bei geeigneter Gruppierung auch analytischer, Gleichungen verbunden, und zwar derart, daß gerade $\frac{n(n-1)}{2}$ der Koeffizienten keiner Beschränkung mehr unterliegen. Es gegelingt aber nicht, diese Koeffizienten ein für allemal so zu wählen, daß man die übrigen, womöglich gar eindeutig, durch sie ausdrücken könnte. Aus diesem Grunde ist in unserem Satze nur von „wesentlichen“ Parametern die Rede, es wird nur die Dimensionenzahl (Zahl komplexer oder reeller Dimensionen) der zwei Transformationenschichten bezeichnet.

Nachzuweisen ist, erstens, daß die orthogonalen Transformationen im reellen wie im komplexen Gebiete nur zwei kontinuierliche Schichten bilden, zweitens, daß die Zahl der Parameter richtig angegeben ist. Beide Behauptungen sind besondere Fälle eines umfassenderen Lehrsatzes, der später entwickelt und begründet werden soll. Für unsere nächsten Überlegungen genügt es, den Unterschied der eigentlichen und uneigentlichen orthogonalen Transforma-

[1]) Nicht im Sinne von S. Lie, dessen Kunstsprache hier ein angemessenes Wort fehlt. Siehe die vorige Anmerkung.

tionen terminologisch festgelegt zu haben, der in der Möglichkeit des doppelten Vorzeichens im Gleichungssystem

$$(7)\qquad \begin{aligned} (X \mid Y) &= (\underline{X} \mid \underline{Y}), \\ (X^1 \ldots X^n) &= \pm(\underline{X}^1 \ldots \underline{X}^n) \end{aligned}$$

seinen Ausdruck findet.

Wir bezeichnen die beiden Ausdrücke links als *elementare Invarianten* der Gruppe γ der *eigentlichen* orthogonalen Transformationen und haben also eine „symmetrische“ elementare Invariante von je zwei Vektoren und eine „alternierende“ von je n Vektoren gefunden.

Klar ist, daß jede ganze rationale Funktion von irgendwelchen Invarianten dieser beiden *Typen* ebenfalls die Invarianteneigenschaft gegenüber eigentlichen orthogonalen Transformationen haben muß, d. h. daß sie, gebildet in den transformierten Veränderlichen, immer denselben Wert liefert. Und damit ergibt sich nun ein Problem.

Wir bezeichnen jetzt als *ganze rationale Invariante* irgendwelcher Vektoren, deren Koordinaten voneinander unabhängige Veränderliche sind, *gegenüber der Gruppe* γ, jede ganze rationale Funktion dieser Koordinaten, die nach Ausführung einer beliebigen eigentlichen orthogonalen Transformation ihren Wert reproduziert. Haben wir diese ganzen rationalen Invarianten etwa schon gefunden? Eine Untersuchung hierüber soll unser nächstes Thema bilden.

Zuvor aber soll noch eine terminologische Festsetzung getroffen werden. Es ist schleppend, von einem Vektor $\{X_1 \ldots X_n\}$ immer als von einem *System* von Zahlen, insbesondere von Veränderlichen zu reden. Der Vektor wird in unsere Untersuchung als Ganzes eingehen: daher ist es sachgemäß, den Vektor, wenn er variiert werden soll, als *eine* (nach H. *Grassmann* „extensive“) „Veränderliche“ zu bezeichnen.

Im Hinblick auf den Zustand eines beträchtlichen Teiles der geometrischen Literatur mögen sich vielleicht einige Leser darüber wundern, daß wir unsere Voraussetzungen so allgemein genommen haben. Genügt nicht die Beschränkung auf Vektoren mit reellen Koordinaten?

Eine erschöpfende Erörterung hierüber würde uns viel zu weit führen. Es mag aber auf folgendes hingewiesen werden. Zu unserem weiteren Programm gehört unter anderem auch die Untersuchung von Gruppen, die durch die Invarianz von Quadratsummen mit teils positiven, teils negativen Koeffizienten definiert sind. Diese Quadratsummen, und ebenso die zugehörigen Gruppen, gehen dann durch ganz einfache Substitutionen ineinander über, wenn man Vektoren mit komplexen Koordinaten zuläßt. Beschränkt man sich aber auf die Betrachtung reeller Vektoren, so *tritt an Stelle dieses Zusammenhanges eine bloße Analogie*, die dazu noch mehrfach durchbrochen ist. Es ist widersinnig, z. B. sagen zu wollen, die quadratische Form $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ gehe durch die Substitutionen $X_1 = Y_1$, $X_2 = i Y_2, \ldots, X_n = i Y_n$ in die quadratische Form $Y_1^2 - Y_2^2 - \cdots - Y_n^2$ über, wenn man es doch nur mit reellwertigen quadratischen Formen zu tun hat.

Die komplexen Größen lassen sich in der Algebra nirgends entbehren, und wenn sie einmal eingeführt werden müssen, so kann es nicht früh genug geschehen.

§ 2.

Die Fundamentalsätze der Algebra der Vektoren in spezieller Fassung.

Wir untersuchen jetzt ein System von beliebig vielen Vektoren in endlicher Zahl, die wir als unabhängige „Veränderliche" betrachten und, nach Bedürfnis, durch verschiedene Zeichen wie $X, Y, Z, \ldots, X^1 \ldots X^m$ darstellen (§ 1), und wir fragen nach allen ganzen rationalen Funktionen dieser Vektoren (d. h. ihrer Koordinaten), die gegenüber eigentlich-orthogonalen Transformationen die Invarianteneigenschaft haben, die also, bei Ausführung einer solchen Tranformation auf alle Vektoren zugleich, ihre Werte immer reproduzieren.

Diese Frage wird beantwortet durch einige Lehrsätze, die ich mir als Fundamentalsätze der Vektorenrechnung zu bezeichnen erlaube, wiewohl sie meines Wissens nicht in einem einzigen der zahlreichen Lehrbücher über diesen Gegenstand auch nur eine Erwähnung gefunden haben[1]).

Um hier und auch später schleppende Redewendungen zu vermeiden, heiße — wie schon in § 1 — ein für allemal γ die Gruppe der eigentlich-orthogonalen Transformationen eines Gebietes $n$ter Stufe, und γ, η ihre Erweiterung durch die Schar oder Schicht η der uneigentlich-orthogonalen Transformationen desselben Gebietes. Eine erste Behauptung ist dann:

I. Jede ganze rationale Invariante beliebig vieler Vektoren gegenüber der Gruppe γ ist eine ganze rationale Funktion gewisser „elementarer" Invarianten, nämlich Funktion von Invarianten der beiden Typen

$$(X \mid Y), \qquad (X_1 X_2 \ldots X_n)\,^{2)}.$$

[1]) Siehe die in der Einleitung zitierte Arbeit (Leipz. Ber. 1897). Auf die Sätze des Textes und Verwandtes beziehen sich noch zahlreiche Arbeiten von R. Weitzenböck in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie.

[2]) Von hier an setze ich da, wo keine Verwechslung zu befürchten ist, die Indizes der zu unterscheidenden Vektoren unten hin, wie ich es aus früheren Arbeiten gewöhnt bin.

Durch diesen Satz, dessen Begründung weiter unten folgt, wird die aufgeworfene Frage noch nicht vollständig beantwortet. Es kann nämlich sein, daß zwei verschiedene Funktionen von Invarianten der genannten Typen dieselbe Invariante darstellen, oder also, daß eine solche Funktion identisch den Wert Null hat, ohne daß man ihr das gleich anzusehen brauchte. Ein zweiter Lehrsatz handelt daher von Invarianten, die, identisch gleich Null, lediglich eine formale Existenz haben, und also, nachdem sie durch den Lehrsatz I unvermeidlicherweise eingeführt worden sind, hinterher irgendwie wieder beseitigt werden müssen.

II. Jede ganze rationale Invariante beliebig vieler Vektoren gegenüber der Gruppe γ, die identisch den Wert Null hat, läßt sich, nachdem sie gemäß der Vorschrift I dargestellt ist, mit Hilfe „trivialer" Umformungen als Summe von Gliedern schreiben, deren jedes entweder (mindestens) einen (identisch verschwindenden) Faktor des Typus

$$\begin{gathered} A = (X_1 X_2 \dots X_n) \cdot (X_0 \mid Y) + (-1)^n (X_2 X_3 \dots X_0) \cdot (X_1 \mid Y) \\ + (X_3 X_4 \cdots X_0 X_1) \cdot (X_2 \mid Y) + \cdots + (-1)^n (X_0 X_1 \cdots X_{n-1}) \cdot (X_n \mid Y) \end{gathered}$$

oder (mindestens) einen solchen des Typus

$$B = (X_1 \dots X_n) \cdot (Y_1 \dots Y_n) - |(X_1 \mid Y_1) \dots (X_n \mid Y_n)|$$

hat.

Daß die Ausdrücke der Form B tatsächlich immer den Wert Null haben, sagt der Multiplikationssatz der Determinanten, und ebenso wird das identische Verschwinden von A ohne weiteres als eine einfache Determinantenformel erkannt, die sich übrigens noch auf allerlei andere Arten schreiben läßt; z. B. kann man auch schreiben:

$$\begin{gathered} (X_1 X_2 \dots X_n) \cdot (X_0 \mid Y) = (X_0 X_2 \dots X_n) \cdot (X_1 \mid Y) \\ + (X_1 X_0 \cdots X_n) \cdot (X_2 \mid Y) + \cdots + (X_1 X_2 \cdots X_0) \cdot (X_n \mid Y). \end{gathered}$$

Man hat damit die lineare Abhängigkeit, die zwischen je $n+1$ Vektoren besteht, deren n voneinander unabhängig sind, und in der abgekürzten Gestalt derselben Formel

$$\begin{gathered} (X_1 X_2 \dots X_n) X = (X\, X_2 \dots X_n) X_1 \\ + (X_1 X \cdots X_n) X_2 + \cdots + (X_1 X_2 \cdots X) X_n \end{gathered}$$

hat man den Ausdruck irgend eines Vektors X durch eine Basis von irgendwelchen n linear unabhängigen Vektoren $X_1 \dots X_n$.

Der Satz II behauptet nun, daß man das identische Verschwinden einer ganzen rationalen Invariante der Gruppe γ immer durch „triviale" Umformungen sichtbar machen kann. Trivial aber nennen wir ein Hinzufügen von solchen ganzen rationalen Funktionen der Ausdrücke $(X \mid Y)$ usw., $(X_1 X_2 X_3 \ldots X_n) = -(X_2 X_1 X_3 \ldots X_n)$ usf., die sich auch dann noch gegenseitig zerstören, wenn man eben diese Ausdrücke durch irgendwelche Zahlen ersetzt. Wie das gemeint sein soll, sehen wir am besten an einem Beispiel, in dem wir die „triviale" Umgestaltung einer identisch verschwindenden Invariante wirklich ausführen. Gewiß hat die aus $2(n+1)$ Vektoren abgeleitete Determinante $|(X_0 \mid Y_0) \ldots (X_n \mid Y_n)|$ immer den Wert Null. Sie ist ja ein Produkt von zwei $(n+1)$-reihigen Determinanten, in deren jeder eine Zeile oder Spalte nur Nullen enthält. Eben dasselbe, sagt unser Satz II, muß sich nun, wenn auch auf umständlichere Art, auch so zeigen lassen, daß im Verlaufe der Rechnung die Verbindungen $(X \mid Y)$, $(X_1 \ldots X_n)$ niemals in ihre Bestandteile aufgelöst werden; vorausgesetzt, daß man schon weiß, daß alle Ausdrücke der Form A oder B immer den Wert Null haben. In der Tat ist identisch

$$
\begin{aligned}
&|(X_0 \mid Y_0) \ldots (X_n \mid Y_n)| \\
&= (X_0 \mid Y_0) . |(X_1 \mid Y_1) \ldots (X_n \mid Y_n)| - (X_1 \mid Y_0) . |(X_0 \mid Y_1) \ldots (X_n \mid Y_n)| \\
&\quad + (X_2 \mid Y_0) \cdot |(X_0 \mid Y_1)(X_1 \mid Y_2) \cdots (X_n \mid Y_n)| - + \cdots, \\
&= -(X_0 \mid Y_0) \cdot \{(X_1 X_2 \cdots X_n)(Y_1 \cdots Y_n) - |(X_1 \mid Y_1) \cdots (X_n \mid Y_n)|\} \\
&\quad + (X_1 \mid Y_0) \cdot \{(X_0 X_2 \cdots X_n)(Y_1 \cdots Y_n) - |(X_0 \mid Y_1) \cdots (X_n \mid Y_n)|\} \\
&\quad - + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
&\quad + \{(X_0 \mid Y_0)(X_1 X_2 \ldots X_n) - (X_1 \mid Y_0)(X_0 X_2 \ldots X_n) \\
&\quad + (X_2 \mid Y_0)(X_0 X_1 X_3 \cdots X_n) - + \cdots\} \cdot (Y_1 \cdots Y_n) \\
&= - (X_0 \mid Y_0) \cdot B_0 + (X_1 \mid Y_0) \cdot B_1 - + \cdots + A \cdot (Y_1 \cdots Y_n) = 0.
\end{aligned}
$$

Die Determinante, von der wir ausgegangen sind, ist also schließlich in die Form einer Summe gesetzt worden, in der jedes einzelne Glied einen Faktor der Form A und B hat, und es ist eben dadurch in Evidenz gesetzt, daß jene Determinante identisch gleich Null ist. Dieses aber wurde lediglich dadurch erreicht, daß der Determinante eine ganze rationale Funktion von elementaren Invarianten hinzugefügt wurde, die trivialerweise den Wert Null, die nämlich die Form $F - F$ hat. Es war das, in unserem Beispiel, die Funktion

$$
\begin{aligned}
&- (X_0 \mid Y_0) . (X_1 X_2 \ldots X_n) . (Y_1 \ldots Y_n) \\
&+ (X_1 \mid Y_0) . (X_0 X_2 \ldots X_n) . (Y_1 \ldots Y_n) \\
&- + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
&+ \{(X_0 \mid Y_0) . (X_1 X_2 \ldots X_n) - (X_1 \mid Y_0)(X_0 X_2 \ldots X_n) \\
&+ - \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \} (Y_1 \ldots Y_n),
\end{aligned}
$$

deren Glieder sich auch dann noch zerstören müssen, wenn die Zeichen $(X_0 | Y_0), \cdots, (X_1 X_2 \cdots X_n) = -(X_2 X_1 \cdots X_n) = \cdots, \cdots$ gar nicht Invarianten, sondern irgendwelche Zahlen bedeuten. Die Behauptung unseres Lehrsatzes II ist nun, daß man bei jeder identisch verschwindenden Invariante ganz ebenso zu Werke gehen kann[1]), wobei freilich noch dahinsteht, wie die anzuwendende „triviale“ Umformung gefunden werden soll.

Zu bemerken ist noch, daß es sich bei allen Überlegungen dieser Art nur um allseitig homogene Invarianten zu handeln braucht, d. h. um solche, die in den Koordinaten jedes einzelnen Vektors denselben Grad haben. Auch in den Anwendungen kommt es gewöhnlich nur auf solche homogene Invariantenbildungen an. Eine homogene Invariante der Gruppe γ, und zwar eine solche, die nicht zugleich auch ganze rationale Invariante der Gruppe γ, η ist, ist z. B. im Falle $n = 4$ der Ausdruck

$$\lambda (X | X') . (Y | Y') + \mu (X X' Y Y'),$$

wenn $\mu \neq 0$ ist.

Aus $B = 0$ folgt noch, daß man im Ausdruck einer (ganzen und rationalen) Invariante der Gruppe γ von alternierenden Invarianten in jedem Gliede höchstens eine zuzulassen braucht, und im Ausdruck einer Invariante der Gruppe γ, η überhaupt nur symmetrische (bilineare) elementare Invarianten. Jede ganze rationale Invariante von γ, die nicht auch ganze rationale Invariante von γ, η ist, erweist sich als Wurzel einer Gleichung zweiten Grades, deren Koeffizienten lediglich von Invarianten des symmetrischen Typus $(X | Y)$ abhängen, die also Invarianten von γ, η sind.

Schließlich stellt sich neben die Sätze I und II noch ein dritter Lehrsatz, der zwar von viel geringerer Bedeutung ist als jene beiden ersten Sätze, aber doch erwähnt werden soll, weil er die Antwort auf eine Frage enthält, die sich nunmehr von selbst aufdrängt, deren Nichtbeantwortung also ein gewisses Gefühl der Beunruhigung zurücklassen müßte:

III. Jede ganze rationale Invariante beliebig vieler Vektoren gegenüber der Gruppe γ, η, die identisch den Wert Null hat und als Funktion von Invarianten des Typus $(X | Y)$ dargestellt ist, läßt sich mit Hilfe trivialer

---

[1]) Gelegenheit zur weiteren Einübung solcher Rechnungen wird man in § 3 finden.

Umformungen als Summe von Gliedern schreiben, deren jedes einen identisch verschwindenden Faktor des Typus

$$C = |(X_0 \mid Y_0)(X_1 \mid Y_1) \ldots (X_n \mid Y_n)|$$

enthält.

Nachdem durch das Vorhergehende der Sinn der Sätze II und III klargestellt ist, kann man sie abkürzend auch so ausdrücken:

Jede Identität zwischen elementaren Invarianten der Gruppe γ (oder der Gruppe γ, η) ist eine Folge von Identitäten der Typen $A = 0$, $B = 0$ (oder $C = 0$).

Alle diese Sätze sind nun augenscheinlich richtig im Falle $n = 1$, wo es nur eine einzige eigentlich-orthogonale Transformation $X = X$ und eine einzige uneigentlich-orthogonale Transformation $-X = \bar{X}$ gibt. Es wird nämlich dann

$$(X \mid Y) = XY, \quad (X) = X;$$

A, B, C reduzieren sich auf Ausdrücke der Typen

$$A = X.X'Y - X'.XY,$$
$$B = X.Y - XY,$$
$$C = XY.X'Y' - XY'.X'Y,$$

denen man gleich ansieht, daß sie den Wert Null haben.

Man kann also versuchen, die Lehrsätze I, II, III durch das Verfahren der vollständigen Induktion zu erweisen. Im Falle des Satzes I soll das nunmehr ausgeführt werden.

Es werde, unter der Annahme $n > 1$, $n = m + 1$ gesetzt; die Koordinaten irgend eines Vektors X, die zuvor $X_1 \ldots X_n$ hießen, sollen nun durch die Zeichen X_0, X_1, ..., X_m dargestellt werden. γ^* sei sodann die Untergruppe von γ, die den Vektor

$$Q = \{1, 0, 0, \ldots, 0\},$$

und folglich alle Koordinaten X_0, Y_0, ... in Ruhe läßt, die den Index 0 tragen. Diese Gruppe wird dann alle Funktionen zu ganzen rationalen Invarianten haben, die ganz und rational von X_0, Y_0, ... und von Funktionen der Typen

$$[X \mid Y] = X_1 Y_1 + \cdots + X_m Y_m = (X \mid Y) - X_0 Y_0,$$
$$[X_1 X_2 \ldots X_m] = (Q X_1 X_2 \ldots X_m)\ ^{1)}$$

[1])

$$[X_1 X_2 \ldots X_m] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & X_1^{(1)} & \ldots & X_m^{(1)} \\ \vdots & & & \\ 0 & X_1^{(m)} & \ldots & X_m^{(m)} \end{vmatrix} = (Q X^{(1)} \ldots X^{(m)}),$$

wofür im Texte bequemer $(Q X_1 \ldots X_m)$ geschrieben ist.

abhängen, wo nun, zur Unterscheidung, links scharfe Klammern statt der runden gesetzt worden sind. Da der zu begründende Satz für den Fall eines Gebietes m^{ter} Stufe als schon bewiesen angenommen werden darf, so hat man in X_0, Y_0, ..., $[X \mid Y]$, ..., $[X_1 \dots X_m]$, ... bereits alle Typen von „elementaren" Invarianten der vorgelegten Vektoren gegenüber der Gruppe γ^*: Jede beliebige ganze rationale Invariante dieser Gruppe läßt sich aus ihnen rational und ganz zusammensetzen. Da aber jede ganze rationale Invariante von γ selbstverständlicherweise auch eine solche der Untergruppe γ^* von γ ist, so lassen sich die zu suchenden Invarianten von γ ebenfalls so ausdrücken.

Wenn nun das Zeichen $\sqrt{Q \mid Q}$ (in dem, unter der Wurzel, die Klammern weggelassen sind) die Einheit bedeutet, so lassen sich die gefundenen Invarianten auch so schreiben:

$$X_0 = \frac{(Q \mid X)}{\sqrt{Q \mid Q}}, \qquad Y_0 = \frac{(Q \mid Y)}{\sqrt{Q \mid Q}} \text{ usw.,}$$

$$[X \mid Y] = \frac{(Q \mid Q)(X \mid Y) - (Q \mid X)(Q \mid Y)}{(Q \mid Q)},$$

$$[X_1 \dots X_m] = \frac{(Q X_1 \dots X_m)}{\sqrt{Q \mid Q}}.$$

Es lassen sich also alle ganzen und rationalen Invarianten von γ durch die auf den rechten Seiten dieser Gleichungen vorkommenden Funktionen ganz und rational ausdrücken. Diese Ausdrücke behalten aber ihre Bedeutung, wenn man den Vektor Q nunmehr durch irgend einen Vektor R ersetzt, dessen „inneres Quadrat" $(R \mid R)$ von Null verschieden ist: Jeder „Einheitsvektor" der Form $\frac{R}{\sqrt{R \mid R}}$ läßt sich ja, durch eigentlich-orthogonale Transformationen, ohne weiteres in jeden anderen überführen[1]), und also läßt er sich auch in unseren Vektor Q überführen, oder dieser in jenen (und übrigens auch jeder reelle Einheitsvektor R durch reelle eigentlich-orthogonale Transformationen in den Vektor Q und umgekehrt). Schreiben wir hinterher wieder Q für R, so haben wir in den gefundenen Ausdrücken nach wie vor eine Form, in die sich jede ganze rationale Invariante von γ setzen läßt; nur ist an Stelle der Gruppe γ^* eine

[1]) Der Leser wolle diesen sehr nahe liegenden Hilfssatz zunächst einmal glauben, damit der Gedankengang nicht unterbrochen wird. Wir bringen einen Beweis am Schluß des Paragraphen.

andere (nämlich irgend eine „zu ihr konjugierte“ oder „mit ihr gleichberechtigte“) Untergruppe von γ getreten (die wir hinterher, da wir die ursprüngliche Gruppe γ^* nicht mehr brauchen, ebenfalls γ^* nennen können). Wir denken uns jetzt den gefundenen Ausdruck der zu untersuchenden Invariante $\mathfrak{J}$ von γ auf einen Generalnenner gebracht, so daß nach Multiplikation des Ausdruckes für $\mathfrak{J}$ mit diesem Nenner eine Gleichung der Form

$$\{\sqrt{Q \mid Q}\}^k \cdot \mathfrak{J} = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2 \cdot \sqrt{Q \mid Q}$$

entsteht, worin $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ beide ganze rationale Funktionen „elementarer“ Invarianten von γ^* bedeuten und die gemeinsame Form

$$\mathfrak{G}\{(Q \mid Q), (Q \mid X) \ldots, (Q X_1 \ldots X_m), \ldots, (X \mid Y), \ldots\}$$

haben. Ist dann $\mathfrak{J}$ nicht etwa identisch gleich Null, was hier vorausgesetzt werden darf, so kann außerdem noch angenommen werden, daß die Funktion $\mathfrak{G}_1$ nicht identisch gleich Null ist, da man ja sonst durch Division einen Faktor $\sqrt{Q \mid Q}$ wegschaffen und also $\mathfrak{G}_2$ und $k-1$ an Stelle von $\mathfrak{G}_1$ und k treten lassen könnte. Es darf dann weiter noch angenommen werden, daß die Invariante $\mathfrak{J}$ als Funktion der Koordinaten von X, Y, X_1, X_2, ... lauter r a t i o n a l e Zahlen als Koeffizienten hat, da im entgegengesetzten Falle $\mathfrak{J}$ als Summe von Bestandteilen würde dargestellt werden können, deren jeder einzelne, abgesehen von einem irrationalen Zahlenkoeffizienten, eben jene Eigenschaft hätte und ebenfalls noch eine ganze rationale Invariante von γ sein müßte.

L i e g e n n u n d i e h i e r m i t b e z e i c h n e t e n V o r a u s s e t z u n g e n v o r (d i e, w i e g e s a g t, k e i n e E i n s c h r ä n k u n g d e s P r o b l e m s n a c h s i c h z i e h e n), s o l ä ß t s i c h b e h a u p t e n, d a ß d i e F u n k t i o n $\mathfrak{G}_2$ i d e n t i s c h g l e i c h N u l l u n d d i e g a n z e Z a h l k g e r a d e s e i n m u ß.

In jedem anderen Falle würde sich nämlich entweder ein Widerspruch gegen die Voraussetzung $\mathfrak{G}_1 \neq 0$ ergeben, oder es würde folgen, daß die Wurzelgröße $\sqrt{Q \mid Q}$ sich rational ausdrücken ließe durch die Koordinaten von Q selbst und die Koordinaten der ganz beliebigen Vektoren X, Y, X_1, X_2, ..., was schon im Falle

$$Q = (1, 1, 0, \ldots, 0)$$

unmöglich ist. Die gefundene Gleichung hat also die besondere Form

$$(Q \mid Q)^\lambda \cdot \mathfrak{J} = \mathfrak{G}\{(Q \mid Q), (Q \mid X), \ldots (Q X_1 \ldots X_m), \ldots, (X \mid Y), \ldots\},$$

wo λ eine positive g a n z e Zahl ist. Ist $\mathfrak{J}$, was ebenfalls vorausgesetzt werden darf, eine allseitig-homogene Funktion der Koordinaten von X, Y usw., so muß die rechte Seite der angeführten Gleichung dieselben Gradzahlen aufweisen, wie die linke; in bezug auf die Koordinaten von Q aber muß $\mathfrak{G}$ dann homogen sein im Grade 2λ. Jetzt braucht man nur noch beiderseits den Differentiationsprozeß

$$\frac{\partial^2}{\partial Q_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial Q_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial Q_m^2}$$

anzuwenden, um eine Gleichung der Form

$$(Q \mid Q)^{\lambda-1} \cdot \mathfrak{J} = \mathfrak{G}^* \{(Q \mid Q), (Q \mid X), \ldots (Q X_1 \ldots X_m), \ldots, \\ (X \mid Y), \ldots (X X_1 \ldots X_m), \ldots \}$$

zu erhalten, in der nun unter den Argumenten der neu gebildeten Funktion $\mathfrak{G}^*$ auch die von Q nicht mehr abhängigen Determinanten $(X X_1 \ldots X_m)$ usw. auftreten können. Diese Funktion $\mathfrak{G}^*$ aber behält bei wiederholter Anwendung desselben Differentiationsprozesses ihre allgemeine Form bei, nur daß bei jedem Schritt der Grad ihrer beiden Seiten in bezug auf Q sich um zwei Einheiten erniedrigt. Nach λ-maliger Anwendung dieser Operation erhält man schließlich eine Gleichung der Form

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{F} \{(X \mid Y), \ldots, (X X_1 \ldots X_m), \ldots \},$$

in der Q nicht mehr vorkommt und die den behaupteten Lehrsatz darstellt.

Aus dieser Überlegung ergibt sich unter anderem noch, daß die Invariante $\mathfrak{J}$ als Funktion von Invarianten der Typen $(X \mid Y)$, $(X_1 \ldots X_m)$ rationale Koeffizienten haben muß, wenn sie als Funktion der Koordinaten X_k, Y_k usw. rationale Koeffizienten hat.

Auf ähnliche Art lassen sich auch die Sätze II, III begründen, worauf hier nicht weiter eingegangen werden soll. Übrigens sind diese Sätze völlig analog solchen aus der Invariantentheorie der Gruppe aller linearen Transformationen, und so verhält es sich auch mit ihrer Begründung [1]).

Nachzutragen bleibt noch der Beweis eines Hilfssatzes, den wir zuvor (S. 28) benutzt hatten und der in erweiterter Fassung so ausgesprochen werden kann:

„Jeder Einheitsvektor kann in jeden anderen (auf mannigfache Art) durch eigentliche orthogonale Transformationen übergeführt werden.“

---

[1]) Siehe des Verfassers Buch „Methoden zur Theorie der ternären Formen“ (= T. F.) 1889, II, § 6. Die dort angewendete Schlußweise erstreckt sich, wie unmittelbar ersichtlich ist, auf Gebiete n^{ter} Stufe. Vgl. z. B. noch R. Weitzenböck, Wiener Berichte 1913, S. 379.

Dies läßt sich leicht auf allerlei Weisen begründen. Ich benutze hier eine ganz elementare Überlegung. Es seien P und Q die beiden Einheitsvektoren, oder überhaupt zwei Vektoren, für die $(P|P) = (Q|Q)$ und $\neq 0$ ist. Ist dann auch $(P+Q|P+Q) \neq 0$, so hat man in der Formel

$$\frac{2(X|P+Q)}{(P+Q|P+Q)}(P+Q) - X = \underline{X}$$

eine durch P und Q eindeutig bestimmte spezielle (nämlich involutorische) orthogonale Transformation $X \longrightarrow \underline{X}$, da $(X|X) = (\underline{X}|\underline{X})$ folgt, und zwar ist das schon eine Transformation, die P in Q (und umgekehrt Q in P) überführt. Ist diese Transformation uneigentlich[1]), so braucht man nur — was immer möglich ist — einen dritten Vektor R einzuführen, so daß $(P|P) = (Q|Q) = (R|R)$ und $(P+R|P+R) \neq 0$, $(Q+R|Q+R) \neq 0$ wird, um durch Zusammensetzung zweier Transformationen des eben beschriebenen Typus eine eigentliche Transformation zu erhalten, die P (auf dem Umwege über R) in Q überführt. Ganz ebenso sieht man, daß in dem Ausnahmefall $(P+Q|P+Q) = 0$, in dem die zuvor angegebene Transformation nicht existiert, die Überführung von P in Q durch eigentlich-orthogonale Transformationen dennoch möglich ist.

Das Beweisverfahren, das die Sätze II und III liefert, enthält auch eine Methode, mit deren Hilfe man entscheiden kann, ob eine vorgelegte ganze rationale Funktion elementarer Invarianten identisch gleich Null ist oder nicht. Eben dasselbe kann man natürlich auch schon durch einfache Ausrechnung erreichen auf Grund des Satzes, daß ein wohlgeordnetes Polynom nur dann identisch den Wert Null haben kann, wenn alle seine Koeffizienten gleich Null sind. Aber rechnerisch brauchbar ist das eine Verfahren so wenig als das andere, und eine Vertiefung unserer theoretischen Einsicht wird durch keines von beiden erzielt.

Man hat nun in gewissen Reihenentwicklungen eine bessere Methode, die in allen Fällen zum Ziele führt. Die Auseinandersetzung dieser Methode würde also, bei einem ganz systematischen Fortschreiten, unsere nächste Aufgabe sein müssen. Indessen ist die Ordnung des Stoffes nach logischen Gesichtspunkten nicht immer auch das didaktisch Empfehlenswerte. Die zuerst sich darbietenden speziellen Aufgaben lassen sich auch so erledigen, daß man den Satz II zur Herstellung einiger kleiner Kunstgriffe ausnutzt, mit denen man auf bequemere Art zum Ziele kommt als mit jenen Reihenentwicklungen. Das Bedürfnis zum Auffahren schwereren Geschützes macht sich stark fühlbar erst bei einem Fortschritt zu verwickelteren Problemen, und so kann bei dem ersten Eindringen in den Stoff davon abgesehen werden.

---

[1]) Dies tritt dann ein, wenn die Stufenzahl n gerade ist.

Ehe wir in unseren allgemeinen Betrachtungen weiter schreiten, soll das Gesagte nun noch durch einige Ausführungen spezielleren Charakters erläutert werden.

§ 3.

Besondere Behandlung des Falles $n = 3$.

Ist die Stufenzahl gleich drei, so kommt dem Rechnen mit Vektoren eine gewisse Geschlossenheit zu, die schon im nächst höheren Falle fehlt. Die Invarianz des Ausdruckes $(X_1 \ldots X_n)$ zeigt nämlich, daß das System der Determinanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} X_1^{(1)}, & X_2^{(1)}, & \ldots & X_n^{(1)} \\ - & - & \ldots & - \\ - & - & \ldots & - \\ X_1^{(m)}, & X_2^{(m)}, & \ldots & X_n^{(m} \end{pmatrix} \quad (1 < m \leqq n)$$

mit dem System der Vektoren $X^1 \ldots X^m$ (oder $X_1 \ldots X_m$) gegenüber Transformationen der Gruppe γ (nicht auch γ, η) invariant verbunden ist, d. h. daß es einerlei sein muß, ob man erst aus $X_1 \ldots X_m$ die transformierten Vektoren $\underline{X}_1 \ldots \underline{X}_m$ ableitet und dann die entsprechende Matrix bildet, oder ob man zuerst die Matrix bildet und dann deren Determinanten der durch die gegebene Transformation bestimmten („induzierten") Transformation unterwirft. Aber nur im Falle $n = 3$, $m = 2$ erhält man auf diese Weise ein System von gerade n Determinanten, die mit den Koordinaten eines neuen Vektors identifiziert werden können.

Ist also $m = 2$ und $n = 3$, so handelt es sich um die Determinanten einer zweireihigen Matrix, die wir so ordnen:

$$Z_1 = X_2 Y_3 - X_3 Y_2, \; Z_2 = X_3 Y_1 - X_1 Y_3, \; Z_3 = X_1 Y_2 - Y_2 Y_1.$$

So erhalten wir also aus zwei Vektoren X, Y einen dritten Z, der ihr vektorielles Produkt genannt wird[1]). Dieses sogenannte Produkt ist also mit den Vektoren X und Y in dem soeben erklärten Sinne invariant-verbunden gegenüber Transformationen der

[1]) Gewöhnlich verbindet man mit dem System $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$, zunächst wenigstens, nicht den Begriff eines Vektors, sondern den einer „Ausdehnungsgröße zweiter Stufe" oder einer „Plangröße"; das Zeichen dafür bei Grassmann ist $[X\,Y]$, während der im Texte erklärte Vektor die Ergänzung dazu genannt und dem Zeichen $|[X\,Y]$ zugeordnet wird. Doch ist diese Unterscheidung, die in anderem Zusammenhange allerdings von Bedeutung ist, hier nebensächlich: solange man in der Theorie der Gruppe γ bleibt, würde sie nur die Einheitlichkeit des Ganzen stören.

Gruppe γ. Wir ersetzen das angeführte System von drei Definitionsgleichungen durch die eine symbolische Gleichung

$$(1) \qquad Z = \widetilde{X\,Y}\,[1]),$$

und bemerken noch, daß man dieselbe Forderung mit Hilfe eines unbestimmt bleibenden Vektors S auch in Form der folgenden Gleichung schreiben kann:

$$(2) \qquad (S|Z) = (S\,X\,Y) \quad \{S\}.$$

Das hinzugefügte Zeichen $\{S\}$ soll bedeuten, daß das Bestehen von (2) verlangt wird für alle S. Umgekehrt kann nach (1) oder (2) jeder Vektor Z in mannigfacher Weise als vektorielles Produkt von zwei Vektoren dargestellt werden. Besteht (1), so ist jede weitere Darstellung derart enthalten in der Formel $Z = \widetilde{X^* Y^*}$, wo

$$X^* = c_{11} X + c_{12} Y, \; Y^* = c_{21} X + c_{22} Y, \; c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} = 1.$$

Soll umgekehrt eine Substitution $Z = \widetilde{X\,Y}$ in einer der zuvor bestimmten Invarianten gemacht werden, so setzen wir einfach an Stelle des dann ausfallenden Zeichens die nun neu eintretenden. Man muß dann nur Sorge tragen, daß keine Mehrdeutigkeiten entstehen. Zum Beispiel findet sich ohne weiteres, daß die Substitution von

$$Z = \widetilde{X\,Y} \quad \text{und} \quad Z' = \widetilde{X'\,Y'}$$

in den Ausdruck $(Z|Z')$ dasselbe Ergebnis hat wie die Substitution $Z = \widetilde{X\,Y}$ in $(Z\,X'\,Y')$ und die Substitution $Z' = \widetilde{X'Y'}$ in $(X\,Y\,Z')$. In allen drei Fällen kann man schreiben:

$$(3) \qquad (X\,Y|X'\,Y') = (X|X')(Y|Y') - (X|Y')(Y|X').$$

Ebenso wird man, wenn nun wieder X, Y, Z irgend drei Vektoren sind, schreiben können:

$$(4) \qquad (X|Y\,Z) = (Y\,Z|X) = (X\,Y\,Z).$$

Das in (3) linker Hand vorkommende Zeichen ist nicht unentbehrlich, da es, wie die rechte Seite der Gleichung zeigt, durch eine Verbindung von Zeichen elementarer Invarianten ersetzt werden kann. Da aber gerade diese Verbindung bei Rechnungen häufig vorkommt, so ist es zuweilen bequem, ein besonderes Symbol dafür zu haben. Man hat dann unter anderem zu beachten, daß immer

$$(5) \qquad (Y\,Z|X\,S) + (Z\,X|Y\,S) + (X\,Y|Z\,S) = 0$$

---

[1]) Weniger empfehlenswert sind Zeichen wie $\widehat{X\,Y}$ (von mir früher gebraucht) und das von anderen angewendete Zeichen $X \times Y$, besonders im Hinblick auf Verallgemeinerungen ($n > 3$).

ist. Zur Bequemlichkeit setzen wir die Formeln (A) und (B) aus § 2 für den Fall $n = 3$ nochmals her. Man hat

$$\begin{aligned}(6\text{a})\qquad &(X_1 X_2 X_3)(X_0|Y) - (X_2 X_3 X_0)(X_1|Y)\\ &+ (X_3 X_0 X_1)(X_2|Y) - (X_0 X_1 X_2)(X_3|Y) = 0,\end{aligned}$$

oder, was dasselbe sagt,

$$\begin{aligned}(6\text{b})\qquad &(X_1 X_2 X_3).X\\ &= (X_2 X_3 X).X_1 + (X_3 X_1 X).X_2 + (X_1 X_2 X).X_3.\end{aligned}$$

Ferner ist

$$(7)\qquad (XYZ)(X'Y'Z') = |(X|X')(Y|Y')(Z|Z')|.$$

Als Beispiel für Rechnungen mit den angeführten Symbolen sei die Formel

$$(8)\qquad \begin{vmatrix}(XY|X'Y') & (XY|X'Z')\\ (XZ|X'Y') & (XZ|X'Z')\end{vmatrix} = (X|X').(XYZ).(X'Y'Z')$$

angeführt, die zeigt, daß die Determinante links in drei Faktoren zerlegt werden kann, die ihrerseits ganze rationale Invarianten der Gruppe γ sind; besonders der Spezialfall

$$(8\text{b})\qquad (XY|XY).(XZ|XZ) - (XY|XZ)^2 = (X|X).(XYZ)^2$$

dieser Formel ist von vielfältiger Anwendung. Ferner ergibt sich

$$(9)$$
$$\begin{aligned}&(XYZ).(Y'Z'|Y''Z'')\\ &= \begin{vmatrix}(XY'Z') & (YY'Z') & (ZY'Z')\\ (X|Y'') & (Y|Y'') & (Z|Y'')\\ (X|Z'') & (Y|Z'') & (Z|Z'')\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}(XY''Z'') & (YY''Z'') & (ZY''Z'')\\ (X|Y') & (Y|Y') & (Z|Y')\\ (X|Z') & (Y|Z') & (Z|Z')\end{vmatrix},\end{aligned}$$

und durch Substitution von $\overline{XY}$ und $\overline{X'Y'}$ an Stelle von X und Y in (XYZ):

$$\begin{aligned}(10)\qquad &(XY|X'Y'|Z)\\ &= (XX'Y')(Y|Z) - (YX'Y')(X|Z)\\ &= (XYY')(X'|Z) - (XYX')(Y'|Z).\end{aligned}$$

Der nach Analogie von (10) gebildete Ausdruck

$$\begin{aligned}(11)\qquad &(XY|X'Y'|X''Y'')\\ &= (XX'Y')(YX''Y'') - (YX'Y')(XX''Y'')\\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\\ &= (XY|X'X'')(Y'|Y'') - (XY|Y'X'')(X'|Y'')\\ &+ (XY|Y'Y'')(X'|X'') - (XY|X'Y'')(Y'|X'')\\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

ist alternierend in bezug auf die drei Paare von Vektoren XY, $X'Y'$, $X''Y''$ und außerdem in bezug auf die Vektoren eines jeden dieser Paare; d. h. er ändert sein Vorzeichen, wenn man zwei der Paare oder zwei der gepaarten Vektoren vertauscht. Augenscheinlich ist er eine Invariante gegenüber beliebigen linearen Transformationen von der Determinante Eins, denen man die Vektoren $X \ldots Y''$ unterwerfen mag. Dasselbe gilt von dem folgenden Ausdruck, dessen sachgemäße Herleitung der Leser sich selbst suchen möge:

$$
\begin{aligned}
&(QYZ)(RZX)(PXY) - (RYZ)(PZX)(QXY) \\
&= (XYZ).\{(RPX)(QYZ) - (QRY)(PZX)\} \\
&= (XYZ).\{(PQY)(RZX) - (RPZ)(QXY)\} \\
&= (XYZ).\{(QRZ)(PXY) - (PQX)(RYZ)\}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Beide Formeln, (1) und (12), werden wir weiterhin zu verwenden haben.

In der Euklidischen Geometrie bildet das Rechnen mit Vektoren einen Ausschnitt aus der von Möbius begründeten und von H. Grassmann weiter ausgebauten Punktrechnung. Ich gehe auch auf diesen Gegenstand noch in Kürze ein, aber nur so weit, als nötig ist, um zu zeigen, wie gewisse Unklarheiten, die üblichen Darstellungen anzuhaften pflegen, vermieden werden können.

Es handelt sich um dasselbe Bedenken, auf das schon auf S. 20 hingewiesen worden ist: „Punkte“, „Geraden“, „Ebenen“ usw. werden durch Koordinaten „dargestellt“, ohne daß gesagt würde, was ein solches Ding denn eigentlich ist. Wir haben ja, trotz gegenteiliger Versicherung gewisser Philosophen und ungeachtet der nicht abzuleugnenden Sicherheit der Anwendung solcher Begriffe in der Physik, es keineswegs „im Gemüte“, was für ein Sinn mit jenen Worten verbunden werden soll, und auf den höheren Schulen lernt man das auch nicht. Außerdem können, wie in der Einleitung ebenfalls schon angedeutet worden ist, Darlegungen nicht genügen, die nur auf das „Reelle“ zugeschnitten sind.

Wir betrachten auch hier der Einfachheit halber nur den Fall $n = 3$, der aber in dieser Hinsicht keine Sonderstellung einnimmt, vielmehr als typisch gelten darf.

Ein System von $n + 1$, hier also von vier Zahlen — die wieder nicht gerade reell zu sein brauchen — werde nunmehr, abweichend von der Erklärung in § 1, „Punkt mit Gewicht“, kürzer Massenpunkt genannt, und wiederum durch ein einheitliches Zeichen dargestellt,

$$x = \{x_0; x_1, x_2, x_3\}. \tag{13}$$

Die erste x_0 der vier Zahlen, der weiterhin eine besondere Bedeutung beigelegt werden wird, heiße Masse (oder Gewicht) des Massenpunktes.

Offenbar kann alles, was in § 1 über die Addition und lineare Abhängigkeit von Vektoren gesagt worden ist, auf den vorliegenden Fall übertragen werden. Nur hat man, um den Anschluß an das Vorhergehende zu erreichen, die Stufenzahl 3 durch 4 (allgemein n durch $n + 1$) zu ersetzen. Wir fügen nun aber weitere und von dem Früheren abweichende Erklärungen hinzu.

Abgesehen vom Massenpunkt Null, also vom Massenpunkt $\{0; 0, 0, 0\}$ gehört dann zu jedem Massenpunkt ein bestimmtes System von vier Verhältniszahlen:

$$\{x_0 : x_1 : x_2 : x_3\}, \tag{14}$$

das wir Punkt (Punkt schlechthin, ohne Masse oder Gewicht) nennen wollen. Je zwei zum selben „Punkt" gehörige Massenpunkte sind dann linear abhängig; die Gesamtheit aller Punkte aber (nicht auch die der Massenpunkte) bildet ein abgeschlossenes Kontinuum, das als projektives Kontinuum der vierten Stufe, oder als Punktkontinuum von drei komplexen Dimensionen bezeichnet wird. Irgend vier Verhältnisgrößen (14) heißen homogene Koordinaten[1]) des zugehörigen Punktes; ebenso heißen die vier Größen (13) Koordinaten des Massenpunktes, der zu ihnen gehört.

Ist ferner $x_0 \neq 0$, so nennen wir den durch (14) bezeichneten Punkt eigentlich, anderenfalls uneigentlich. Nennen wir Ebene den Inbegriff (die Menge) aller Punkte, deren homogene Koordinaten einer linearen und homogenen Gleichung mit konstanten Koeffizienten genügen, so bilden die uneigentlichen Punkte in ihrer Gesamtheit eine Ebene, die uneigentliche Ebene[2]).

---

[1]) Genauer: „spezielle" homogene Koordinaten. Wir betrachten aber nur solche.

[2]) Der ebenfalls übliche Ausdruck „unendlich ferne Ebene" ist nicht zu empfehlen. Die uneigentlichen Punkte des „absoluten Kegelschnittes", d. h. die durch die Gleichungen $x_0 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ gekennzeichneten Punkte, haben nämlich von einem eigentlichen Punkte überhaupt keine bestimmte Entfernung (im Sinne der Euklidischen Geometrie). Worte, die falsche Vorstellungen suggerieren, sollten vermieden werden. Noch schlimmer ist natürlich der „unendlich ferne Kugelkreis" (statt des

Handelt es sich nur um eigentliche Punkte, deren Betrachtung in vielen Fällen genügt, so bedeutet es keine Beschränkung, wenn von vornherein $x_0 = 1$ gesetzt wird. Die drei übrigen Koordinaten, oder, wenn man die genannte Festsetzung nicht treffen will, die Quotienten

$$\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}$$

heißen dann **Kartesische Koordinaten** des eigentlichen Punktes. Sie bestimmen einen der Annahme $n = 3$ entsprechenden **Vektor**

$$\{X_1, X_2, X_3\} = \left\{\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}\right\}. \tag{15}$$

Auf andere Art bestimmt außerdem auch jeder „uneigentliche Massenpunkt“

$$\{0; x_1, x_2, x_3\}$$

einen Vektor

$$\{X_1^*, X_2^*, X_3^*\} = \{x_1, x_2, x_3\}. \tag{16}$$

Alle hiermit beschriebenen Beziehungen bleiben ungestört, wenn die Massenpunkte einer beliebigen **affinen Transformation**[1]) $x \rightarrow \underline{x}$, nämlich irgend einer Transformation der Form

$$\begin{gathered} x_0 = \underline{x}_0, \\ c_{k0}\, x_0 + c_{k1}\, x_1 + c_{k2}\, x_2 + c_{k3}\, x_3 = \underline{x}_k, \\ \{k = 1, 2, 3;\ |c_{11}\ c_{22}\ c_{33}| \neq 0\} \end{gathered} \tag{17}$$

unterworfen werden; aus eigentlichen und uneigentlichen Massenpunkten gehen durch jede solche Transformation ebensolche hervor, die in denselben linearen Abhängigkeiten stehen wie die gegebenen Punkte: Diese Beziehungen sind **invariant** gegenüber der Gruppe aller affinen Transformationen, deren allgemeine Transformation [bei unbestimmtem n von $n(n + 1)$, hier also] von zwölf wesentlichen Parametern c_{ik} abhängt.

Ohne uns bei weiteren Untergruppen der Gruppe (17) aufzuhalten, spezialisieren wir nun die Transformationen (17) sogleich in der

---

absoluten Kegelschnittes). Was ist ein nicht „unendlich ferner“ Kugelkreis, und worin unterscheidet sich ein „Kugelkreis“ von einem sonstigen Kreise? Eine recht gedankenlose Wortbildung!

[1]) Das Wort **affine Transformation** wird — ohne Zusatz — neuerdings auch zur Bezeichnung der speziellen affinen Transformationen gebraucht, die den Punkt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ in Ruhe lassen. Auch das ist wieder eine Abweichung vom Herkommen, gegen die Einspruch erhoben werden muß.

Weise, daß die Gruppe der Euklidischen „Bewegungen" und „Umlegungen" entsteht. Wir fügen zu dem Bisherigen die Forderung, daß Gleichungen der Form (17) den Ausdruck des Entfernungsquadrats $\sum_1^3 \left(\frac{y_i}{y_0} - \frac{x_i}{x_0}\right)^2$ zweier Punkte x, y ungeändert lassen; wir verlangen mithin, daß die neun — oder n^2 — Parameter c_{k1}, c_{k2}, ... das Koeffizientensystem einer eigentlichen oder uneigentlichen orthogonalen Transformation bilden. Die so erhaltenen speziellen Transformationen bezeichnen wir eben durch die Worte Bewegung und Umlegung. Beide Arten von Transformationen zusammen bilden dann eine Gruppe, deren allgemeine Transformation nur noch von sechs — $\frac{n(n+1)}{2}$ — voneinander unabhängigen (sogenannten wesentlichen) Parametern abhängt. Die Lehre von solchen Eigenschaften von Punkten (oder Massenpunkten und „Figuren", d. h. von Systemen, die aus Punkten usw. zusammengesetzt sind — Kurven, Flächen usw.), die nicht zerstört werden durch irgendwelche Euklidische Bewegungen, bezeichnet man als Euklidische Geometrie.

Die durch (15) oder (16) erklärten Vektoren und ebenso alle Vektoren, die man durch Differenzen Kartesischer Punktkoordinaten wie folgt erklären kann:

$$\{X_1, X_2, X_3\} = \left\{\frac{y_1}{y_0} - \frac{x_1}{x_0}, \frac{y_2}{y_0} - \frac{x_2}{x_0}, \frac{y_3}{y_0} - \frac{x_3}{x_0}\right\}, \tag{18}$$

werden nun durch eine „verkürzte" Gruppe von Bewegungen und Umlegungen,

$$\begin{aligned} c_{11} X_1 + c_{12} X_2 + c_{13} X_3 &= \underline{X}_1, \\ c_{21} X_1 + c_{22} X_2 + c_{23} X_3 &= \underline{X}_2, \\ c_{31} X_1 + c_{32} X_2 + c_{33} X_3 &= \underline{X}_3, \end{aligned} \tag{19}$$

transformiert, aus deren Transformationsformeln die in der Gruppe aller Bewegungen und Umlegungen vorkommenden Parameter c_{k0} weggefallen sind. So entsteht eben die Gruppe γ, η, von der zuvor die Rede war. Ihre analytische Untergruppe γ bedeutet also nun, nach Ersetzung der Koordinaten von Vektoren X durch Kartesische Koordinaten eigentlicher Punkte x, die Gesamtheit aller Bewegungen (nunmehr „Drehungen"), die den Punkt

$$\{1 : 0 : 0 : 0\}$$

in Ruhe lassen, während die zweite Transformationenschicht η durch Zusammensetzung der Transformationen von γ mit der Spiegelung an eben diesem Punkte ($X_k' = - X_k$ oder $x_k' = - x_k$) erhalten wird.

Auf den hier in Kürze (und gewiß etwas fragmentarisch) beschriebenen gruppentheoretischen Tatsachen beruht die Möglichkeit der Anwendung der Vektorenrechnung in der Euklidischen Geometrie.

Zur Erläuterung des Gesagten soll vor allem auseinandergesetzt werden, wie Winkelgrößen in die Geometrie eingeführt werden können, ohne daß man sich auf das „Reelle“ festzulegen oder gar mit psychologischen Tatsachen, mit einer mathematisch überhaupt nicht faßbaren sogenannten Raumvorstellung oder Raumanschauung, herumzuschlagen braucht.

Ein Vektor X, sei er nun reell oder nicht, dessen inneres Quadrat nicht Null ist $\{(X|X) \neq 0\}$ — ein „nicht isotroper“ Vektor —, wird orientiert durch Entscheidung über den Wert der Wurzelgröße $X_0 = \sqrt{(X|X)} = \sqrt{X|X}$. Ein solcher „orientierter Vektor“ ist dann ein neues, von dem gewöhnlichen (nicht orientierten) Vektor wohl zu unterscheidendes Untersuchungsobjekt — eine „Figur“ [1]), die nicht, wie der Vektor selbst, ein System von drei Zahlenwerten X_1, X_2, X_3, sondern ein solches von vieren ist (ist!), X_0, X_1, X_2, X_3, zwischen denen eine quadratische Gleichung

$$X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = 0$$

besteht. Ist die vierte (hier erste) „Koordinate“ X_0 des orientierten Vektors von Null verschieden, so entspricht dem orientierten Vektor ein bestimmter Einheitsvektor

$$X^* = \left\{\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}, \frac{X_3}{X_0}\right\},$$

d. h. ein solcher, dessen Koordinaten X_1^*, X_2^*, X_3^* der Gleichung

$$(X^* | X^*) = 1$$

— der Gleichung der Einheitskugel — genügen.

Zunächst kann man nun die Orthogonalität von zwei orientierten oder nicht orientierten Vektoren X, Y erklären: Wir sagen, X und Y seien zueinander orthogonal oder senkrecht, wenn

$$(X | Y) = 0$$

---

[1]) Ist $(X | X) = 0$, so fallen die Begriffe Vektor und orientierter Vektor zusammen.

ist. Liegt ferner die zuvor genannte Voraussetzung vor, ist nämlich

$$(X|X) \neq 0, \quad (Y|Y) \neq 0,$$

so kann man nunmehr auch den Kosinus einer Winkel genannten transzendenten Funktion Θ_X^Y der Koordinaten der beiden orientierten Vektoren X und Y oder auch der zugehörigen Einheitsvektoren eindeutig erklären durch die Formel

$$(20) \qquad \boxed{\cos \Theta_X^Y = \left(\frac{X}{\sqrt{X|X}} \,\middle|\, \frac{Y}{\sqrt{Y|Y}}\right) = \frac{(X|Y)}{\sqrt{X|X}\,\sqrt{Y|Y}}}.$$

Der Winkel Θ_X^Y selbst ist damit bis auf das Vorzeichen und bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π (mod 2π) festgelegt.

Es seien nun X und Y zwei linear unabhängige (und daher immer von Null verschiedene) Vektoren. Dann ist jeder zu ihnen beiden orthogonale, von Null verschiedene Vektor (in dem hier allein betrachteten Falle $n = 3$) ein Vielfaches des Vektors $Z = \overline{XY}$. Da — nach Voraussetzung — $(X|Z) = 0$, $(Y|Z) = 0$ ist, so hat man

$$(XYZ)^2 = (XY|XY) . (Z|Z).$$

Man kann demnach eine Abhängigkeit zwischen zwei Wurzelgrößen erklären durch die Formel

$$(21) \qquad \boxed{\sqrt{XY|XY} \cdot \sqrt{Z|Z} = (XYZ)}.$$

Nunmehr wird, wenn $(Z|Z) \neq 0$ ist, durch Orientierung von Z auch der Sinus der Winkelgröße Θ_X^Y eindeutig erklärt:

$$(22) \qquad \boxed{\sin \Theta_X^Y = \frac{(XYZ)}{\sqrt{X|X}\,\sqrt{Y|Y}\,\sqrt{Z|Z}}}\ ^{1)}.$$

Durch (20) und (22) zusammen ist der Winkel Θ_X^Y bis auf Vielfache von 2π festgelegt[2]).

[1]) Ist $(Z|Z) = 0$, so wird die Formel (22) unbrauchbar. Es ist aber dann $(XY|XY) = 0$, und also nach Nr. (20) $\cos \Theta_X^Y = \pm 1$, also $\sin \Theta_X^Y = 0$.

[2]) So einfach diese Dinge sind, so viel Verkehrtes findet man darüber in der Literatur. Die doch unerläßliche Definitionsgleichung (21) pflegt zu fehlen, die Formel (22) fehlt dann ebenfalls, und die wichtige Folgerung (23) wird anscheinend aus (20) allein abgeleitet, d. h. sie wird erschlichen. Dazu kommt noch die Art, in der von ungenügend geschulten Schriftstellern mit der Anschauung gearbeitet wird.

Es folgt dann noch, daß für drei zu dem Vektor Z orthogonale und auf bestimmte Art orientierte Vektoren X, X', X'' — die den Bedingungen $(X \mid X) \neq 0$ usw. genügen — immer

$$\Theta_{X'}^{X''} + \Theta_{X''}^{X} + \Theta_{X}^{X'} = 0 \quad \{\mathrm{mod}\ 2\pi\} \tag{23}$$

ist. Der Leser möge sich durch ausschließliches Rechnen mit orthogonalen Invarianten von Vektoren deutlich machen, auf welchen Tatsachen der Algebra diese viel benutzte Kongruenz beruht. Ferner wolle er, mit dem gleichen Hilfsmittel, zu beweisen suchen, daß der kürzeste Weg (oder die kürzesten Wege) zwischen zwei reellen Punkten einer reellen Kugel immer auf einem Hauptkreis enthalten ist (oder auf Hauptkreisen enthalten sind); oder besser, er möge die noch etwas mehr aussagende Behauptung erweisen:

„Werden die Winkel zwischen drei von Null verschiedenen reellen Vektoren X, Y, Z so bestimmt, daß

$$0 \leqq \Theta_{Y}^{Z},\ \Theta_{Z}^{X},\ \Theta_{X}^{Y} \leqq \pi$$

ausfällt, so ist immer

$$\begin{aligned} 2\pi - \Theta_{Y}^{Z} - \Theta_{Z}^{X} - \Theta_{X}^{Y} &\geqq 0, \\ -\Theta_{Y}^{Z} + \Theta_{Z}^{X} + \Theta_{X}^{Y} &\geqq 0, \\ \Theta_{Y}^{Z} - \Theta_{Z}^{X} + \Theta_{X}^{Y} &\geqq 0, \\ \Theta_{Y}^{Z} + \Theta_{Z}^{X} - \Theta_{X}^{Y} &\geqq 0; \end{aligned} \tag{24}$$

und zwar kann in keiner dieser Ungleichungen das Gleichheitszeichen eintreten, es sei denn, daß zwischen den drei Vektoren mindestens eine lineare Abhängigkeit besteht." Man zeige also, daß im Falle eines Gleichheitszeichens immer $(X Y Z) = 0$ sein muß[1]).

Die durch die Formel (22) eingeführte Sinusfunktion ist ein Spezialfall einer durch v. Staudt eingeführten Funktion, die von irgend drei an die Einschränkung $(X \mid X) \neq 0$, $(Y \mid Y) \neq 0$, $(Z \mid Z) \neq 0$ gebundenen Vektoren X, Y, Z abhängt, und von ihm als „Sinus einer körperlichen Ecke" bezeichnet worden ist. Wir erklären sie durch die Definitionsgleichung

$$\boxed{Sin(X, Y, Z) = \frac{(X Y Z)}{\sqrt{X \mid X}\,\sqrt{Y \mid Y}\,\sqrt{Z \mid Z}}}, \tag{25}$$

und bezeichnen sie als „Sinus" des geordneten Tripels der orientierten Vektoren X, Y, Z oder der entsprechenden Einheitsvektoren.

[1]) Vgl. Math. Ann. **60**, 329, 333, 1905, wo ein umfassenderer Lehrsatz auf ähnliche Art bewiesen wird, und Amer. Journ. of Math. **19**, 101 ff., 1906.

Führen wir das hiermit erklärte neue Zeichen ein, so nehmen die Gleichungen (6) und (7) in dem besonderen Falle, in dem die Einführung zulässig ist, die folgende Gestalt an:

$$(26) \quad \begin{aligned} &Sin(X_1, X_2, X_3) . \cos \Theta^Y_{X_0} - Sin(X_2, X_3, X_0) . \cos \Theta^Y_{X_1} \\ &+ Sin(X_3, X_0, X_1) . \cos \Theta^Y_{X_2} - Sin(X_0, X_1, X_2) . \cos \Theta^Y_{X_3} = 0, \end{aligned}$$

$$(27) \quad \begin{aligned} &Sin(X, Y, Z) . Sin(X', Y', Z') \\ &- |\cos \Theta^{X'}_X \cos \Theta^{Y'}_Y \cos \Theta^{Z'}_Z| = 0. \end{aligned}$$

In vielen Fällen können diese Formeln die umfassenderen identischen Gleichungen (6) und (7) vertreten, besonders immer dann, wenn es sich um Eigenschaften reeller Vektoren handelt. So stecken in ihnen schon so ziemlich die gesamten Formeln der sphärischen Polygonometrie, wie im nächsten Paragraphen es noch im Falle der Trigonometrie ausgeführt werden soll. In unseren Grundgleichungen (6) und (7) selbst aber haben wir die Grundlage der sphärischen Geometrie überhaupt, deren Formeln alle, **ohne Ausnahme,** als wenn auch entlegene Folgerungen aus diesen zwei Formeln allein werden dargestellt werden können.

Ehe wir auf Einzelheiten eingehen, ist noch eine weitere grundsätzliche Bemerkung zu machen. Offenbar verdienen auch noch, unter anderen, die in den letzten Überlegungen eingeführten Wurzel- und Winkelgrößen die Bezeichnung durch das Wort Invarianten: Nichts hindert uns, festzusetzen, daß bei Ausführung einer beliebigen eigentlichen orthogonalen Transformation alle diese Größen ihre Werte behalten sollen, festzusetzen also, daß die anzuwendenden Transformationsgleichungen, die die Gleichungen $(\overline{X} | \overline{X}) = (X | X)$ usw. zur Folge haben, auch noch die entsprechenden Gleichungen

$$(28) \qquad \sqrt{\overline{X} | \overline{X}} = \sqrt{X | X}, \quad \sqrt{\overline{X}\,\overline{Y} | \overline{X}\,\overline{Y}} = \sqrt{X Y | X Y}$$

nach sich ziehen sollen. Wir sprechen also auch in diesen Fällen noch von Invarianten der Gruppe γ, und zwar von (ganzen) algebraischen Invarianten dieser Gruppe. Die durch Bildung gewisser Quotienten entstandenen Funktionen

$$\cos \Theta^Y_X, \ \sin \Theta^Y_X, \ Sin(X, Y, Z)$$

werden dann ebenfalls noch als (gebrochene, d. h. nicht „ganze“) algebraische Invarianten der Gruppe γ zu bezeichnen sein, die Funktionen Θ^Y_X selbst aber als transzendente Invarianten[1]).

[1]) Vgl. M. T. F., § 1 bis 4. Das dort Gesagte bezieht sich auf eine andere Gruppe, man wird aber ohne weiteres sehen, wie im vorliegenden Falle der allgemeine Begriff der algebraischen und transzendenten Invarianten zu gestalten ist.

Zu beachten ist hierbei, daß infolge des Verhaltens der Invarianten vom Typus (XYZ) und der Definitionsgleichung (21) die Bestimmungen (28) nur zur Hälfte auf den Fall ausgedehnt werden können, in dem die betrachteten Vektoren uneigentlichen orthogonalen Transformationen unterworfen werden sollen: Wir haben dann zu erklären, daß

$$(29) \qquad \sqrt{X \mid X} = \sqrt{\underline{X} \mid \underline{X}}, \quad \sqrt{XY \mid XY} = -\sqrt{\underline{X}\,\underline{Y} \mid \underline{X}\,\underline{Y}}$$

sein soll. Die zweite Wurzelgröße hat dann also gegenüber Transformationen der Schar η die Invarianteneigenschaft nicht, und ebensowenig haben sie die Funktionen

$$\sin \Theta_X^Y, \ \mathrm{Sin}(X, Y, Z), \ \Theta_X^Y.$$

Wir sprechen in diesem Falle, einem üblich gewordenen Sprachgebrauch folgend, von relativen Invarianten [im Gegensatz zu den zuvor betrachteten Invarianten, die dann absolute Invarianten heißen[1])]. Die zuletzt genannten Größen sind also „relative Invarianten" der Gruppe γ, η, aber absolute Invarianten (Invarianten schlechthin) der Gruppe γ.

Der Leser wird sich ohne weiteres deutlich machen, daß durch die Bestimmungen (28) und (29) unter umfassenderen Voraussetzungen eben das erreicht wird, was man in der — mit Hilfe der „Raumanschauung" beschriebenen — Elementargeometrie dadurch zu bewirken pflegt, daß man für die Punkte einer Kugelfläche einen sogenannten Umlaufssinn festsetzt. Dieser Umlaufssinn bestimmt ja das Vorzeichen gewisser Winkelgrößen und deren Verhalten gegenüber eigentlichen und uneigentlichen orthogonalen Transformationen genau in der Weise, wie wir es hier festgesetzt haben.

Wie schon angedeutet, unterliegt das übliche Verfahren dem Einwande, daß es von der logischen Struktur des genannten geometrischen Systems eine falsche Vorstellung gibt, insofern es Überflüssiges zum Beweise heranzieht, während wesentliche Tatsachen unter der Bildfläche und damit für die meisten auch unter der Schwelle des Bewußtwerdens gehalten werden. Hierin liegt schon meine Antwort auf eine Kritik, die vermutlich so mancher gegenüber dem Vorgetragenen in Bereitschaft haben wird. Es ist gewiß wahr, alles das gehört zum ABC und sollte heutzutage längst als selbstverständlich gelten dürfen. Je näher indessen der zu behandelnde Stoff an den Wurzeln der Wissenschaft liegt, und je leichter eine sachgemäße Darstellung zu finden ist, um so weniger ist es angebracht, auf sie

[1]) Diese Termini sind nicht ganz logisch gebildet, insofern sie anzudeuten scheinen, daß es sich in beiden Fällen um eine besondere Art von „Invarianten" handeln soll.

zu verzichten, desto größer ist der Schaden, den Oberflächlichkeit in unkritischen Köpfen anrichten kann (deren es ja auch unter Mathematikern eine Menge gibt).

Eine erschöpfende Parameterdarstellung der Gruppe der Euklidischen Bewegungen und Umlegungen nebst geeigneten Rechnungsmethoden (die sehr viel einfacher sind als das Operieren mit den überzähligen Parametern c_{ik}) liefern die sogenannten Biquaternionen: Math. Ann. **39**, 1891 und Ber. d. Berl. Math. Ges. 1913 (Kinematik). Vgl. auch Journal de Mathématiques (6. Ser.) **7**, 97, 1911 (Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers).

Die Umgestaltung dieser Formeln im Sinne der Invariantentheorie ist ein weiteres Problem. Wir kommen darauf noch zurück.

§ 4.

Fortsetzung: Sphärische Trigonometrie.

In der sphärischen Trigonometrie, die ursprünglich zu praktischen Zwecken entwickelt worden ist (solchen der Astronomie und Geodäsie), handelt es sich um ein System von sechs Zahlen, den „Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks“, die sämtlich reell und zwischen den Grenzen 0 und π enthalten sind. Zwischen diesen Zahlen bestehen mannigfaltige Gleichungen, transzendenter Natur, unter denen aber nur drei voneinander unabhängig sind, so daß man aus dreien der genannten Stücke die übrigen, wenn auch nicht immer eindeutig, berechnen kann. Dieses eben ist die Hauptaufgabe der sphärischen Trigonometrie. Die Formeln aber, deren man sich zur Lösung bedient, sind keineswegs an jene engen Voraussetzungen gebunden, namentlich auch nicht an die Annahme der Realität der zu untersuchenden Figuren, und also auch nicht an die Möglichkeit, sie durch Zeichnungen anschaulich zu machen. Vielmehr ist es klar, daß es sich hier um Tatsachen der Analysis handeln muß, die sich im Rahmen des Verfahrens der analytischen Geometrie so müssen darstellen lassen, daß man von vornherein eine Einsicht in ihren wirklichen Gültigkeitsbereich und auch in die logische Struktur des ganzen Formelsystems erhält. Hier soll gezeigt werden, daß unsere Identitäten A und B zwischen orthogonalen Invarianten für diesen Zweck vollkommen ausreichen; daß man also keinen Vorteil davon hat, weitere Hilfsmittel, besonders auch nicht einzeln hingeschriebene Koordinaten, in Erscheinung treten zu lassen. Später wird sich dann finden, daß eben durch diese Beschränkung in der Wahl der Hilfsmittel von selbst schon eine noch umfassendere Aufgabe gelöst ist, in der an Stelle der quadratischen Form $(X|X)$

$= X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ irgend eine nicht-singuläre quadratische Form von drei Veränderlichen tritt.

Wir verstehen unter λ, μ, ν die Zahlen 1, 2, 3 in irgend einer der Anordnungen (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2).

Es seien nun gegeben drei Vektoren Y_1, Y_2, Y_3, die nicht notwendig reell, aber linear-unabhängig und außerdem so beschaffen sind, daß

$$(Y_\lambda \mid Y_\lambda) \neq 0, \quad (Y_\mu Y_\nu \mid Y_\mu Y_\nu) \neq 0$$

ausfällt. (Hierdurch werden Grenzfälle ausgeschlossen, die sich übrigens, um den Preis einer umständlicheren Darlegung, ebenfalls in die Betrachtung würden einbeziehen lassen.) Zu je zweien der drei Vektoren sind dann andere Vektoren orthogonal, darunter solche, die wir vermöge der Gleichungen

$$(1) \qquad (Z_\lambda U) = \frac{(Y_\mu Y_\nu U)}{(Y_1 Y_2 Y_3)}$$

eindeutig bestimmen können. Diese drei Vektoren stehen dann zu den Vektoren Y_1, Y_2, Y_3 in einem vollkommenen Reziprozitätsverhältnis. Es findet sich nämlich sofort $(Y_\lambda \mid Z_\lambda) = 1$ und

$$(2) \qquad (Y_1 Y_2 Y_3)(Z_1 Z_2 Z_3) = 1,$$

so daß

$$(3) \qquad (Y_\lambda U) = \frac{(Z_\mu Z_\nu U)}{(Z_1 Z_2 Z_3)}$$

wird.

Wir orientieren nun alle sechs Vektoren durch beliebige aber bestimmte Verfügung über die Wurzelwerte

$$\sqrt{(Y_\lambda \mid Y_\lambda)} = \sqrt{Y_\lambda \mid Y_\lambda}, \quad \sqrt{(Z_\lambda \mid Z_\lambda)} = \sqrt{Z_\lambda \mid Z_\lambda},$$

und leiten von ihnen sechs Einheitsvektoren

$$\frac{Y_\lambda}{\sqrt{Y_\lambda \mid Y_\lambda}}, \quad \frac{Z_\lambda}{\sqrt{Z_\lambda \mid Z_\lambda}}$$

ab, solche nämlich, die der Gleichung der Einheitskugel $(X \mid X) = 1$ genügen. Dann lassen sich, nach § 3, sechs Winkelgrößen a_1, a_2, a_3 und α_1, α_2, α_3, bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π genau, durch die Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{aligned} \cos a_\lambda &= \frac{(Y_\mu \mid Y_\nu)}{\sqrt{Y_\mu \mid Y_\mu}\,\sqrt{Y_\nu \mid Y_\nu}}, \quad \sin a_\lambda = \frac{(Z_\lambda Y_\mu Y_\nu)}{\sqrt{Z_\lambda \mid Z_\lambda}\,\sqrt{Y_\mu \mid Y_\mu}\,\sqrt{Y_\nu \mid Y_\nu}} \\ \cos \alpha_\lambda &= \frac{(Z_\mu \mid Z_\nu)}{\sqrt{Z_\mu \mid Z_\mu}\,\sqrt{Z_\nu \mid Z_\nu}}, \quad \sin \alpha_\lambda = \frac{(Y_\lambda Z_\mu Z_\nu)}{\sqrt{Y_\lambda \mid Y_\lambda}\,\sqrt{Z_\mu \mid Z_\mu}\,\sqrt{Z_\nu \mid Z_\nu}} \end{aligned}$$

erklären, wobei man noch z. B. die Invariante $(Z_\lambda Y_\mu Y_\nu)$ durch den ihr gleichen Ausdruck $(Y_1 Y_2 Y_3) . (Z_\lambda | Z_\lambda)$ ersetzen kann. Hiermit sind sechs Winkelgrößen definiert, die wir als „Seiten" und „Winkel" (eigentlich Maßzahlen der Seiten und Winkel) des „sphärischen Dreiecks" Y_1, Y_2, Y_3 oder als Winkel und Seiten des Dreiecks Z_1, Z_2, Z_3 bezeichnen dürfen[1]).

Ganz unmittelbar erhält man jetzt schon die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie, nämlich die Gleichungen des sogenannten Kosinus- und Sinussatzes:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \cos a_\lambda &= \cos a_\mu . \cos a_\nu - \sin a_\mu . \sin a_\nu . \cos \alpha_\lambda, \\ \cos \alpha_\lambda &= \cos \alpha_\mu . \cos \alpha_\nu - \sin \alpha_\mu . \sin \alpha_\nu . \cos a_\lambda. \end{aligned}$$

$$(6) \qquad \frac{\sin a_1}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin a_2}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin a_3}{\sin \alpha_3} = \frac{[Y_1 Y_2 Y_3]}{[Z_1 Z_2 Z_3]},$$

wo

$$(7) \qquad \begin{aligned} [Y_1 Y_2 Y_3] &= \sin a_\mu . \sin a_\nu . \sin \alpha_\lambda = \frac{(Y_1 Y_2 Y_3)}{\sqrt{Y_1 | Y_1} \sqrt{Y_2 | Y_2} \sqrt{Y_3 | Y_3}}, \\ [Z_1 Z_2 Z_3] &= \sin \alpha_\mu . \sin \alpha_\nu . \sin a_\lambda = \frac{(Z_1 Z_2 Z_3)}{\sqrt{Z_1 | Z_1} \sqrt{Z_2 | Z_2} \sqrt{Z_3 | Z_3}} \end{aligned}$$

die sogenannten Sinus der zwei Dreiecke Y_1, Y_2, Y_3 und Z_1, Z_2, Z_3 bezeichnen, deren jeder mithin hier auf drei Arten als Produkt von drei gewöhnlichen Sinusfunktionen erscheint. (Vgl. S. 41, Nr. 25.)

Mit den Eliminationsergebnissen (5) und (6), ja schon mit den Formeln (5) allein, könnten wir nun unsere Untersuchung bereits als beendet erklären; denn aus den Formeln des Kosinussatzes lassen sich, wie schon Lagrange erkannt hat, alle weiteren in Gebrauch befindlichen Abhängigkeiten zwischen den Winkelgrößen a_1, a_2, a_3 und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ entwickeln[2]). Indessen zeigt sich (was Lagrange noch nicht wußte), daß diese weitere Entwicklung, wenn sie allein auf Grund der Formeln (5) ausgeführt wird, nicht ganz eindeutig ist; und es hat doch wohl noch Interesse, zuzusehen, zu welchen algebraischen Tatsachen die dann noch mögliche Spaltung der trigonometrischen Formeln in mehrere, nämlich zwei (analytisch) getrennte Formelsysteme in Beziehung steht.

[1]) In Elementarbüchern heißen die Maßzahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nicht Winkel, sondern Außenwinkel des Dreiecks X_1, X_2, X_3. Winkel werden dann die Zahlen $\pi - \alpha_1, \pi - \alpha_2, \pi - \alpha_3$ genannt.

[2]) Siehe des Verfassers Schrift: Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen („Trig."). Abh. d. Sächs. Ges. d. Wissensch. **20**, Nr. 2, 1893; auch W. Jakobsthal in der Enzyklopädie der Elementarmathematik **2**, 1905, 6. Abschnitt.

Die eben genannte Spaltung ergibt sich aus der Tatsache, daß bei Übergang von den Formeln (5), (6) zu den Delambreschen Gleichungen das eine oder andere von zwei Systemen von je zwölf Gleichungen gefunden wird[1]):

$$(8)\qquad \begin{aligned} &\frac{\sin\frac{a_\mu + a_\nu}{2}}{\sin\frac{a_\lambda}{2}} = \pm \frac{\cos\frac{\alpha_\mu - \alpha_\nu}{2}}{\cos\frac{\alpha_\lambda}{2}}, &\quad &\frac{\sin\frac{a_\mu - a_\nu}{2}}{\sin\frac{a_\lambda}{2}} = \pm \frac{\sin\frac{\alpha_\mu - \alpha_\nu}{2}}{\sin\frac{\alpha_\lambda}{2}}\\ &\frac{\cos\frac{a_\mu + a_\nu}{2}}{\cos\frac{a_\lambda}{2}} = \mp \frac{\cos\frac{\alpha_\mu + \alpha_\nu}{2}}{\cos\frac{\alpha_\lambda}{2}}, &\quad &\frac{\cos\frac{a_\mu - a_\nu}{2}}{\cos\frac{a_\lambda}{2}} = \pm \frac{\sin\frac{\alpha_\mu + \alpha_\nu}{2}}{\sin\frac{\alpha_\lambda}{2}}. \end{aligned}$$

Es werden hiernach, innerhalb des zuvor bezeichneten Spielraumes der Winkelgrößen a_λ, α_λ, zweierlei sphärische Dreiecke, Dreiecke „erster" und „zweiter" Art, zu unterscheiden sein, von denen für die ersten in allen zwölf Formeln (8) die oberen Vorzeichen und für die zweiten die unteren gelten. Von den ersten kommt man zu den zweiten, und umgekehrt, z. B. durch die Substitutionen $a_1' = a_1 + 2\pi$, $a_2' = a_2$, $a_3' = a_3$, $\alpha_1' = \alpha_1$, $\alpha_2' = \alpha_2$, $\alpha_3' = \alpha_3$. Entsprechend gibt es auch zwei Familien von Formeln in der sphärischen Trigonometrie: Solche, die — wie der Kosinus- und Sinussatz — für beide Arten von Dreiecken zugleich gelten, und solche, die nur für Dreiecke erster Art oder nur für Dreiecke zweiter Art richtig sind[2]). Offenbar bedeutet es keine wesentliche Beschränkung, wenn weiterhin nur noch die Dreiecke erster Art untersucht werden.

---

[1]) Trig. S. 124 u. ff. Bei Beschränkung der Untersuchung auf reelle Dreiecke mit Seiten und Winkeln zwischen 0 und π gelten die oberen Vorzeichen. Bei Gauß heißt es in der Theoria Motus, Nr. 54: „Quodsi quidem idea Trianguli sphaerici in maxima generalitate concipitur, ut nec latera nec anguli ullis limitibus restringantur, casus existere possunt, ubi in cunctis aequationibus praecedentibus signum mutare oportet".

[2]) Es gilt noch der weitere Satz, daß jede der beiden Mannigfaltigkeiten (Mengen) sphärischer Dreiecke ein Kontinuum bildet, daß also nicht mehr als zwei Familien von Formeln der sphärischen Trigonometrie zu unterscheiden sind. Die Richtigkeit des in der genannten Schrift (Trig.) geführten Beweises dieser Behauptung ist zu Unrecht bezweifelt worden. Vgl. Ber. der Sächs. Akad. (Math.-phys. Klasse) **47**, 553 u. ff., 1895.

Um auch goniometrische Funktionen der halben Seiten und Winkel bequem durch orthogonale Invarianten ausdrücken zu können, führen wir noch die Abkürzungen

$$(9)\qquad \begin{aligned} 2\,\mathfrak{Y}_\lambda^+ &= \sqrt{Y_\mu \mid Y_\mu}\,\sqrt{Y_\nu \mid Y_\nu} + (Y_\mu \mid Y_\nu),\\ 2\,\mathfrak{Y}_\lambda^- &= \sqrt{Y_\mu \mid Y_\mu}\,\sqrt{Y_\nu \mid Y_\nu} - (Y_\mu \mid Y_\nu) \end{aligned}$$

ein und erklären entsprechend die Zeichen $\mathfrak{Z}_\lambda^+$ und $\mathfrak{Z}_\lambda^-$. Wir können dann Abhängigkeiten zwischen zweimal drei weiteren Wurzelgrößen erklären durch die Formeln

$$(10)\qquad \begin{aligned} 2\sqrt{\mathfrak{Y}_\lambda^+}\,\sqrt{\mathfrak{Y}_\lambda^-} &= (Y_1\,Y_2\,Y_3)\cdot\sqrt{Z_\lambda \mid Z_\lambda},\\ 2\sqrt{\mathfrak{Z}_\lambda^+}\,\sqrt{\mathfrak{Z}_\lambda^-} &= (Z_1\,Z_2\,Z_3)\cdot\sqrt{Y_\lambda \mid Y_\lambda}, \end{aligned}$$

derart, daß z. B. die Mehrdeutigkeit der goniometrischen Funktionen $\cos\frac{a_\lambda}{2}$, $\sin\frac{a_\lambda}{2}$ genau der Mehrdeutigkeit der in ihren Ausdrücken

$$(11)\qquad \cos\frac{a_\lambda}{2} = \frac{\sqrt{\mathfrak{Y}_\lambda^+}}{\sqrt[4]{Y_\mu \mid Y_\mu}\sqrt[4]{Y_\nu \mid Y_\nu}},\quad \sin\frac{a_\lambda}{2} = \frac{\sqrt{\mathfrak{Y}_\lambda^-}}{\sqrt[4]{Y_\mu \mid Y_\mu}\sqrt[4]{Y_\nu \mid Y_\nu}}$$

vorkommenden Wurzelgrößen entspricht.

An sich sind nun z. B. die sechs Wurzelwerte $\sqrt{\mathfrak{Y}_\lambda^\pm}$, $\sqrt{\mathfrak{Z}_\lambda^\pm}$ jeder unter zwei Möglichkeiten willkürlich wählbar. Da wir uns aber in (8) für die Geltung der oberen Zeichen entschieden hatten, so ergibt sich zwischen diesen Wurzelgrößen noch eine weitere Abhängigkeit — ja es kann vorübergehend scheinen, als ergäben sich solcher Abhängigkeiten nicht weniger als vier. Definieren wir nämlich jetzt acht weitere Größen H_k, Z_k eindeutig durch die Gleichungen [1])

$$(12)\qquad \begin{aligned} \mathsf{H}_0 &= 4\,(Y_1\,Y_2\,Y_3)\cdot\sqrt{\mathfrak{Z}_1^-}\,\sqrt{\mathfrak{Z}_2^-}\,\sqrt{\mathfrak{Z}_3^-},\\ \mathsf{H}_1 &= 4\,(Y_1\,Y_2\,Y_3)\cdot\sqrt{\mathfrak{Z}_1^-}\,\sqrt{\mathfrak{Z}_2^+}\,\sqrt{\mathfrak{Z}_3^+},\\ \mathsf{H}_2 &= 4\,(Y_1\,Y_2\,Y_3)\cdot\sqrt{\mathfrak{Z}_1^+}\,\sqrt{\mathfrak{Z}_2^-}\,\sqrt{\mathfrak{Z}_3^+},\\ \mathsf{H}_3 &= 4\,(Y_1\,Y_2\,Y_3)\cdot\sqrt{\mathfrak{Z}_1^+}\,\sqrt{\mathfrak{Z}_2^+}\,\sqrt{\mathfrak{Z}_3^-}, \end{aligned}$$

usf.; — also z. B. Z_0 durch

$$\mathsf{Z}_0 = 4\,(Z_1\,Z_2\,Z_3)\cdot\sqrt{\mathfrak{Y}_1^-}\,\sqrt{\mathfrak{Y}_2^-}\,\sqrt{\mathfrak{Y}_3^-}\ —,$$

so erhalten wir aus (8), (10) und (11) die folgenden vier involutorischen (d. h. in gleicher Form auflösbaren) linearen Gleichungen:

$$(13)\qquad \boxed{\begin{aligned} 2\,\mathsf{Z}_0 &= -\mathsf{H}_0 + \mathsf{H}_1 + \mathsf{H}_2 + \mathsf{H}_3,\\ 2\,\mathsf{Z}_1 &= \mathsf{H}_0 - \mathsf{H}_1 + \mathsf{H}_2 + \mathsf{H}_3,\\ 2\,\mathsf{Z}_2 &= \mathsf{H}_0 + \mathsf{H}_1 - \mathsf{H}_2 + \mathsf{H}_3,\\ 2\,\mathsf{Z}_3 &= \mathsf{H}_0 + \mathsf{H}_1 + \mathsf{H}_2 - \mathsf{H}_3. \end{aligned}}$$

[1]) Wegen des Zahlenkoeffizienten in dieser Definition siehe den Lehrsatz auf S. 51.

Diese Gleichungen sagen nun aber, als Abhängigkeiten zwischen den Wurzelgrößen $\sqrt{\mathfrak{Y}_1^-}$, $\sqrt{\mathfrak{Z}_1^-}$, ... betrachtet, alle dasselbe aus. Man kann nämlich, wie die Gleichungen (10) zeigen, immer bei einer geraden Zahl der sechs Paare $\sqrt{\mathfrak{Y}_1^-}$, $\sqrt{\mathfrak{Y}_1^+}$ ... $\sqrt{\mathfrak{Z}_3^-}$, $\sqrt{\mathfrak{Z}_3^+}$ die Vorzeichen ändern, ohne die Form der Gleichungen (13) zu stören, nicht aber bei einer ungeraden Zahl. Die Gleichungen (13) lassen also gerade fünf, und zwar irgend fünf, der sechs Wurzelwerte willkürlich.

Von den durch die Gleichungen (13) verbundenen acht Größen können nur drei voneinander unabhängig sein. Ohne weiteres findet man die zwischen ihnen bestehende Relation:

$$(14)\quad \boxed{\begin{aligned} &(\mathbf{H}_2\mathbf{H}_3 + \mathbf{H}_0\mathbf{H}_1)(\mathbf{H}_3\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_0\mathbf{H}_2)(\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_0\mathbf{H}_3) \\ &= 4\,\mathbf{H}_0\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2\mathbf{H}_3 \,.\, \mathbf{Z}_0\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 \\ &= (\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_0\mathbf{Z}_1)(\mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_0\mathbf{Z}_2)(\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_0\mathbf{Z}_3). \end{aligned}}$$

Wir erklären jetzt zehn weitere Größen A_{00}, A_{11}, ..., A_{33} durch die folgenden Gleichungen:

$$(15)\quad \begin{aligned} \mathbf{H}_0^2 + \mathbf{H}_1^2 + \mathbf{H}_2^2 + \mathbf{H}_3^2 &= A_{00} = \mathbf{Z}_0^2 + \mathbf{Z}_1^2 + \mathbf{Z}_2^2 + \mathbf{Z}_3^2, \\ 2(\mathbf{H}_\mu\mathbf{H}_\nu + \mathbf{H}_0\mathbf{H}_\lambda) &= A_{\lambda\lambda} = 2(\mathbf{Z}_\mu\mathbf{Z}_\nu + \mathbf{Z}_0\mathbf{Z}_\lambda), \\ \mathbf{H}_0^2 + \mathbf{H}_\lambda^2 - \mathbf{H}_\mu^2 - \mathbf{H}_\nu^2 &= A_{\mu\nu} = 2(\mathbf{Z}_\mu\mathbf{Z}_\nu - \mathbf{Z}_0\mathbf{Z}_\lambda), \\ 2(\mathbf{H}_\mu\mathbf{H}_\nu - \mathbf{H}_0\mathbf{H}_\lambda) &= A_{\nu\mu} = \mathbf{Z}_0^2 + \mathbf{Z}_\lambda^2 - \mathbf{Z}_\mu^2 - \mathbf{Z}_\nu^2. \end{aligned}$$

Dann bilden, wenn $A_{00} \neq 0$ ist, und insbesondere also immer dann, wenn die vorgelegte Figur Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2, Z_3 reell ist, die neun Größen der Matrix

$$(16)\quad \boxed{\frac{1}{A_{00}}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}}$$

das Koeffizientensystem einer (eigentlichen) ternären orthogonalen Transformation.

Die bekannten Ausdrücke **Eulers** für dieses Koeffizientensystem werden erhalten, wenn man die zweimal vier Größen $\mathbf{H}_k$, $\mathbf{Z}_k$ — die hier nur die Bedeutung von Verhältnisgrößen haben — wie folgt durch ein System von vier anderen Verhältnisgrößen darstellt:

$$\begin{aligned} 2\,\mathbf{H}_0 &= \Xi_0 + \Xi_1 + \Xi_2 + \Xi_3, & 2\,\mathbf{Z}_0 &= \Xi_0 - \Xi_1 - \Xi_2 - \Xi_3, \\ 2\,\mathbf{H}_1 &= \Xi_0 + \Xi_1 - \Xi_2 - \Xi_3, & 2\,\mathbf{Z}_1 &= \Xi_0 - \Xi_1 + \Xi_2 + \Xi_3, \\ 2\,\mathbf{H}_2 &= \Xi_0 - \Xi_1 + \Xi_2 - \Xi_3, & 2\,\mathbf{Z}_2 &= \Xi_0 + \Xi_1 - \Xi_2 + \Xi_3, \\ 2\,\mathbf{H}_3 &= \Xi_0 - \Xi_1 - \Xi_2 + \Xi_3; & 2\,\mathbf{Z}_3 &= \Xi_0 + \Xi_1 + \Xi_2 - \Xi_3. \end{aligned}$$

Die Transformationskoeffizienten sind an die Beschränkung $A_{11} \neq 0$, $A_{22} \neq 0$, $A_{33} \neq 0$ gebunden (siehe Nr. 17); abgesehen hiervon können sie beliebig angenommen werden.

Die in einem Grenzfalle bestehende Gleichung $A_{00} = 0$, d. h. das Paar der hier miteinander äquivalenten Gleichungen

$$(Y_1 | Y_1)(Y_2 | Y_2)(Y_3 | Y_3) - (Y_2 | Y_3)(Y_3 | Y_1)(Y_1 | Y_2) = 0,$$
$$(Z_1 | Z_1)(Z_2 | Z_2)(Z_3 | Z_3) - (Z_2 | Z_3)(Z_3 | Z_1)(Z_1 | Z_2) = 0,$$

läßt sich einfach deuten. Bringt man nämlich je zwei einander nicht entsprechende Seiten der sphärischen Dreiecke zum Schnitt, so liegen die erhaltenen sechs Paare diametral gegenüberliegender Punkte der Einheitskugel auf einem sphärischen Kegelschnitt. (Vgl. § 5, S. 69, wo diese Punktpaare, oder vielmehr die sie ausschneidenden Durchmesser der Einheitskugel mit Ziffern 1 ... 6 bezeichnet sind.) Die angeführten Gleichungen sagen nun aus, daß dieser Kegelschnitt in zwei Hauptkreise zerfällt. [(135) = 0, (246) = 0.] Im reellen Gebiete können diese Gleichungen nicht bestehen, es sei denn, daß beide Dreiecke zusammenfallen (lauter rechte Seiten und Winkel haben).

Rechnet man die Ausdrücke (15) aus, so findet sich:

$$(17)\qquad \begin{aligned} A_{00} &= 8\,(Y_1\,Y_2\,Y_3)^2 . \{(Z_1 | Z_1)(Z_2 | Z_2)(Z_3 | Z_3) \\ &\qquad - (Z_2 | Z_3)(Z_3 | Z_1)(Z_1 | Z_2)\} \\ &= 8\,[Y_1\,Y_2\,Y_3]^2 \{1 - \cos\alpha_1 . \cos\alpha_2 . \cos\alpha_3\} \\ &= 8\,(Z_1 Z_2 Z_3)^2 . \{(Y_1 | Y_1)(Y_2 | Y_2)(Y_3 | Y_3) \\ &\qquad - (Y_2 | Y_3)(Y_3 | Y_1)(Y_1 | Y_2)\} \\ &= 8\,[Z_1 Z_2 Z_3]^2 \{1 - \cos a_1 . \cos a_2 . \cos a_3\}; \\ A_{\lambda\lambda} &= 8 \sqrt{Y_\mu | Y_\mu}\,\sqrt{Y_\nu | Y_\nu}\,\sqrt{Z_\mu | Z_\mu}\,\sqrt{Z_\nu | Z_\nu}, \\ A_{\mu\nu} &= 8\,(Y_\mu | Y_\nu)\,\sqrt{Z_\mu | Z_\mu}\,\sqrt{Z_\nu | Z_\nu}, \\ A_{\nu\mu} &= 8\,(Z_\mu | Z_\nu)\,\sqrt{Y_\mu | Y_\mu}\,\sqrt{Y_\nu | Y_\nu}; \end{aligned}$$

es ist also

$$(18)\qquad \boxed{\begin{aligned} \cos a_\lambda &= \frac{A_{\mu\nu}}{A_{\lambda\lambda}}, \quad \sin a_\lambda = \frac{4\sqrt{\mathsf{Z}_0\;\mathsf{Z}_1\;\mathsf{Z}_2\;\mathsf{Z}_3}}{A_{\lambda\lambda}}, \\ \cos \alpha_\lambda &= \frac{A_{\nu\mu}}{A_{\lambda\lambda}}, \quad \sin \alpha_\lambda = \frac{4\sqrt{\mathsf{H}_0\;\mathsf{H}_1\;\mathsf{H}_2\;\mathsf{H}_3}}{A_{\lambda\lambda}}, \end{aligned}}$$

wo die neu eingeführten Wurzelgrößen durch schon zuvor eingeführte Größen eindeutig zu erklären sind:

$$(19)\qquad \sqrt{\mathsf{H}_0\;\mathsf{H}_1\;\mathsf{H}_2\;\mathsf{H}_3} = \frac{2}{[Y_1\,Y_2\,Y_3]}, \quad \sqrt{\mathsf{Z}_0\;\mathsf{Z}_1\;\mathsf{Z}_2\;\mathsf{Z}_3} = \frac{2}{[Z_1\,Z_2\,Z_3]}.$$

Setzt man schließlich

$$(20)\qquad \begin{aligned} 2\,s_0 &= 2\,\pi - a_1 - a_2 - a_3, & 2\,\sigma_0 &= 2\,\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3, \\ 2\,s_1 &= \quad - a_1 + a_2 + a_3, & 2\,\sigma_1 &= \quad - \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ 2\,s_2 &= \quad a_1 - a_2 + a_3, & 2\,\sigma_2 &= \quad \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \\ 2\,s_3 &= \quad a_1 + a_2 - a_3, & 2\,\sigma_3 &= \quad \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \end{aligned}$$

so finden sich auch noch einfache Ausdrücke für die Größen $\sin s_k$, $\sin \sigma_k$, nämlich

$$(21)\qquad \boxed{\sin s_k = \frac{\mathsf{H}_k}{\sqrt{\mathsf{H}_0\,\mathsf{H}_1\,\mathsf{H}_2\,\mathsf{H}_3}},\quad \sin \sigma_k = \frac{\mathsf{Z}_k}{\sqrt{\mathsf{Z}_0\,\mathsf{Z}_1\,\mathsf{Z}_2\,\mathsf{Z}_3}}}\,.$$

Dagegen lassen sich den Formeln L'Huiliers, die die Größen $tg\,\frac{s_k}{2}$, $tg\,\frac{\sigma_k}{2}$ verbinden und zur zweiten Familie gehören, nicht mehr sonderlich einfache Gleichungen zwischen orthogonalen Invarianten gegenüberstellen [1]).

Ohne Beweis mag noch ein geometrischer Lehrsatz erwähnt werden:

Die Größen H_k lassen sich deuten als die Kotangenten der sphärischen Halbmesser der vier Paare von Kreisen, die die Seiten des sphärischen Dreiecks Y_1, Y_2, Y_3 oder des diametral gegenüberliegenden Dreiecks berühren; oder (was auf dasselbe hinauskommt) als die goniometrischen Tangenten der dazu korrelativen Winkelgrößen. Entsprechendes gilt von den Größen Z_k.

Die zuerst genannten Winkelgrößen lassen sich also, dem Vorzeichen nach und bis auf ganzzahlige Vielfache von π genau, so erklären, daß ihre Kotangenten identisch mit den Größen H_k werden.

Durch die Gleichungen (13) und (14) werden dann die Beziehungen erschöpft, die zwischen allen acht sphärischen Halbmessern bestehen.

Natürlich läßt sich die hier begonnene Untersuchung noch viel weiter fortsetzen. Man kann z. B. verlangen, die genannten acht Paare von Kreisen auch durch Gleichungen für einen auf der Einheitskugel veränderlichen Punkt X darzustellen.

Man setze zur Abkürzung

$$Y = \sqrt{Z_1\,|\,Z_1}\,.\,Y_1 + \sqrt{Z_2\,|\,Z_2}\,.\,Y_2 + \sqrt{Z_3\,|\,Z_3}\,.\,Y_3,$$
$$Z = \sqrt{Y_1\,|\,Y_1}\,.\,Z_1 + \sqrt{Y_2\,|\,Y_2}\,.\,Z_2 + \sqrt{Y_3\,|\,Y_3}\,.\,Z_3.$$

Dann werden die Gleichungen der zweimal vier Kreise (mit den Radien $arc\,tg\,\mathsf{H}_k$), die durch je drei unabhängige der acht Punkte

$$\pm\frac{Y_1}{\sqrt{Y_1\,|\,Y_1}},\quad \pm\frac{Y_2}{\sqrt{Y_2\,|\,Y_2}},\quad \pm\frac{Y_3}{\sqrt{Y_3\,|\,Y_3}}$$

gehen, zusammengefaßt in der Formel

$$(22)\qquad \sqrt{X\,|\,X} - (Z\,|\,X) = 0,$$

[1]) Trig. S. 144 u. ff. Identifiziert man, was statthaft ist, die dort mit Y_k, Z_k bezeichneten Verhältnisgrößen mit den hier bestimmter erklärten Größen H_k, Z_k, so wird

$$R = 2\sqrt{\mathsf{H}_0\,\mathsf{H}_1\,\mathsf{H}_2\,\mathsf{H}_3}\,\sqrt{\mathsf{Z}_0\,\mathsf{Z}_1\,\mathsf{Z}_2\,\mathsf{Z}_3}\,,$$

und es vereinfacht sich noch einiges. (Siehe ebenda, S. 172 u. ff., worauf im Text sogleich noch Bezug genommen wird.)

und ebenso werden die Gleichungen der zweimal vier Kreise mit den Radien *arc ctg* H_k, die die Seiten des sphärischen Dreiecks

$$\frac{Y_1}{\sqrt{Y_1 \mid Y_1}}, \quad \frac{Y_2}{\sqrt{Y_2 \mid Y_2}}, \quad \frac{Y_3}{\sqrt{Y_3 \mid Y_3}}$$

oder des diametral gegenüberliegenden Dreiecks berühren, zusammengefaßt in der Formel

$$(23) \qquad \sqrt{X \mid X} - \sqrt{(Y \mid Y) - 1} \,.\, (Z \mid X) = 0.$$

Ersetzt man $\sqrt{X \mid X}$ durch X_0 und betrachtet man $X_0 : X_1 : X_2 : X_3$ als homogene Punktkoordinaten im Euklidischen Raume, so hat man die Gleichungen der Ebenen vor sich, die die gesuchten Kreise ausschneiden.

Die durch die Formel (23) gelöste Aufgabe ist ein besonderer Fall des auf die Kugelfläche übertragenen Apollonischen Berührungsproblems. Dieses selbst gehört zu einer umfassenderen, und zwar nicht projektiven Gruppe von $2 \,.\, \infty^{2 \cdot 6}$ (im reellen Gebiete $2 \,.\, \infty^6$) Transformationen, kann aber in ähnlicher Weise behandelt werden, wie der hier aufgetretene Spezialfall. Die sachgemäße Lösung erfolgt auch im allgemeinen Falle durch ausschließliches Rechnen mit den Identitäten (A) und (B) oder doch mit solchen, die sich von ihnen nur nebensächlich unterscheiden (vgl. S. 153), wobei jedoch der Fall $n = 4$ in Betracht kommt. Eine Abhandlung darüber findet man in den Mathematischen Annalen (**49**, 498 u. ff., 1897), wo auch die gruppentheoretisch angemessenen konstruktiven Hilfsmittel entwickelt sind.

Vieles weitere über die Geometrie der Kreise (und Kugeln) findet man in dem reichhaltigen Werke des amerikanischen Mathematikers J. Coolidge: A Treatise on the Circle and the Sphere (Oxford 1916). Zwar ist dieses Buch, wohl mehr dem englischen als dem amerikanischen (und deutschen) Geschmack entsprechend, allzusehr mit elementargeometrischen Einzelheiten überladen, und es sind darin die invariantentheoretischen Grundlagen nicht reinlich herausgearbeitet (es fehlen die Fundamentalsätze). Indessen ertönt daraus das Geklapper der Koordinatenmühle doch nicht so aufdringlich, wie aus nicht wenigen anderen Büchern.

Zu den Aufgaben der elementaren sphärischen Trigonometrie gehört auch die Berechnung des Flächeninhalts eines sphärischen Dreiecks. Es kann scheinen, als ob man wenigstens bei Bildung dieses Begriffs und der Berechnung der zugehörigen Maßzahl sich an das übliche Verfahren halten müßte. Dem ist aber nicht so. Vielmehr existiert eine umfassendere analoge Begriffsbildung und eine entsprechende Formel auch im komplexen Gebiet. Einer Darlegung über diesen Punkt aber müßte eine Untersuchung über gewisse Doppelintegrale vorausgeschickt werden, und diese würde uns zu weit von unserem eigentlichen Gegenstande abziehen.

§ 5.

Fortsetzung: Kollineationen und Korrelationen.

Das in § 3 Vorgetragene soll durch einige Beispiele noch weiter erläutert werden. Diese sollen von der einfachsten Art sein, aber (abweichend von dem Beispiel des § 4) so gewählt werden, daß sie zugleich eine Überleitung zu unseren ferneren Darlegungen bilden.

Wieder sei $n = 3$; irgendwelche gegebene Vektoren $X, Y, Z, \ldots$ sollen nunmehr beliebigen linearen Transformationen von der Determinante Eins unterworfen werden. Wir haben dann eine Gruppe mit acht (komplexen) Parametern vor uns, von der die Gruppe γ (nicht auch γ, η) eine Untergruppe ist.

Vektoren, deren Koordinaten durch Determinanten wie

$$X_2 Y_3 - X_3 Y_2, \quad X_3 Y_1 - X_1 Y_3, \quad X_1 Y_2 - X_2 Y_1$$

aus den gegebenen abgeleitet sind, bezeichnen wir jetzt, abweichend von dem Früheren, durch Buchstaben $U, V, W, \ldots$ Wir bemerken dazu, daß jede Transformation unserer Gruppe, die die gegebenen Vektoren $X, Y, Z, \ldots$ in vorgeschriebener Weise transformiert ($X \to \underline{X}$, $Y \to \underline{Y}$ usw.), eine lineare Transformation der Vektoren $U, V, W, \ldots$ nach sich zieht ($U \to \underline{U}$, $V \to \underline{V}, \ldots$), die immer dann von der gegebenen Transformation verschieden sein wird, wenn diese nicht gerade orthogonal ist. Und zwar wird auch die neue Transformation — die **induzierte Transformation** — wieder die Determinante Eins haben.

Was wir eben mit den Vektoren $X, Y, Z, \ldots$ ausgeführt hatten, läßt sich nun auch unter Benutzung der neuen Transformation mit den Vektoren $U, V, W, \ldots$ vornehmen. Wir gelangen so nochmals zu weiteren Transformationen, deren Objekte Vektoren und Koordinaten wie

$$U_2 V_3 - U_3 V_2, \quad U_3 V_1 - U_1 V_3, \quad U_1 V_2 - U_2 V_1$$

sind. Diese Vektoren wollen wir (vorübergehend) bezeichnen mit Buchstaben wie $X', Y', Z', \ldots$ **Es zeigt sich nun sogleich, daß die zuletzt gefundene (induzierte) Transformation (der Vektoren $X', Y', Z', \ldots$) identisch ist mit der, die wir auf die Vektoren $X, Y, Z, \ldots$ ausgeübt hatten.**

Es hat sich mithin herausgestellt, daß die linearen Transformationen von der Determinante Eins paarweise zusammengehören. Solche gepaarte Transformationen wollen wir zueinander **kontragredient** nennen. Ferner ergibt sich aus dem Gesagten, daß wir gut daran tun werden, die ganze Mannigfaltigkeit der Vektoren **doppelt zu setzen**, oder sie, wie wir sagen wollen, „mit zwei **Schichten** zu überdecken“[1]. Was nach unserer bisherigen Terminologie ein bestimmter Vektor war, wird so in zwei Dinge gespalten: Jeder dieser

[1] S. Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, S. 224 u. ff.

unserer Vektoren, also jedes Tripel von Koordinaten, kann sowohl zur ersten als auch zur zweiten „Vektorenschicht“ gerechnet werden. Im ersten Falle bedienen wir uns eines der Zeichen X, Y, Z, ..., im zweiten eines der Zeichen U, V, W, ...; oder wir brauchen, wenn angedeutet werden soll, daß es sich um bestimmt gegebene (nicht veränderliche) Vektoren handeln soll, im ersten Falle die Buchstaben P, Q, R, ... und im anderen die Buchstaben A, B, C, ... Ein Vektor ist uns also nun nicht mehr durch das System seiner Koordinaten deutlich bezeichnet; es muß auch noch kenntlich gemacht werden, zu welcher von beiden Schichten er gehören soll. Die Gleichheit der Koordinaten oder, wie wir nun sagen wollen, das Übereinanderliegen oder Sich-Decken eines Vektors erster Schicht und eines solchen zweiter Schicht aber erweist sich nun sofort als eine nichtinvariante, also nebensächliche Tatsache, wenn wir festsetzen, daß die Vektoren erster Schicht alle der einen, die der zweiten alle der anderen von zwei kontragredienten Transformationen unterworfen werden sollen. So entsteht eine neue Gruppe, die wir die Gruppe Γ nennen wollen; ihre Operationen sind gepaarte (kontragrediente) lineare Transformationen von der Determinante Eins, und ihre Objekte sind irgendwelche Vektoren erster und zweiter Schicht. Invariant (gegenüber gepaarten Transformationen von der Determinante Eins, oder also gegenüber Transformationen der Gruppe Γ) sind auch jetzt noch alle Abhängigkeiten zwischen Vektoren aus verschiedenen Schichten, die durch die Zeichen

$$U = \overline{X\,Y}, \quad X = \overline{V\,W}$$

ausgedrückt werden können. Aus den Invarianten unserer Gruppe γ aber wird nunmehr eine Teilmenge herausgehoben, deren Individuen im gleichen Sinne des Wortes auch noch Invarianten der Gruppe Γ sind; insbesondere sind „elementare Invarianten“ der Gruppe Γ alle die und nur die elementaren Invarianten der Gruppe γ, die einem der drei Typen

$$(X\,Y\,Z), \quad (U \mid X) = (X \mid U), \quad (U\,V\,W)$$

angehören: Offenbar sind unter den elementaren Invarianten von γ die der Typen $(U\,Y\,Z)$, $(U\,V\,Z)$ — oder, was auf dasselbe hinausläuft, die der Typen $(X\,V\,W)$, $(X\,Y\,W)$ — nicht invariant, und die der Typen $(X \mid Y)$ und $(U \mid V)$ sind es auch nicht. Schreiben wir nunmehr $(U\,X)$ oder $(X\,U)$ an Stelle von $(U \mid X)$ oder $(X \mid U)$, so bestehen also für jedes Paar kontragredienter Transformationen von der Determinante Eins die Gleichungen

$$(X\,Y\,Z) = (\underline{X}\,\underline{Y}\,\underline{Z}), \quad (U\,X) = (\underline{U}\,\underline{X}), \quad (U\,V\,W) = (\underline{U}\,\underline{V}\,\underline{W}).$$

Auch von den Identitäten, die elementare Invarianten der Gruppe γ verbinden, bleiben nun nur noch einige übrig, insofern nur sie Invarianten der Gruppe Γ verbinden, nämlich:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= (X_1 X_2 X_3)(X_0 U) - + \cdots && = 0,\\
A_2 &= (U_1 U_2 U_3)(U_0 X) - + \cdots && = 0,\\
B &= (X_1 X_2 X_3)\,.\,(U_1 U_2 U_3) - |(X_1 U_1)\,(X_2 U_2)\,(X_3 U_3)| && = 0,\\
C &= |(X_1 U_1)(X_2 U_2)(X_3 U_3)(X_4 U_4)| && = 0;
\end{aligned}
$$

C kann dabei, wie früher, aus A_1, A_2 und B zusammengesetzt und also weggelassen werden. Zu A_1 und A_2 aber treten jetzt noch zwei neue Formeln, die Determinanten der Form $(X\,Y\,Z)$ oder $(U\,V\,W)$ verbinden und durch die Substitutionen $U = \overline{YZ}$ und $X = \overline{VW}$ erhalten werden. Diese nämlich können jetzt nicht mehr (wie im Falle der Gruppe γ) aus zuvor aufgezählten zusammengesetzt werden [1]).

Aus der Gesamtheit der früher behandelten Rechnungsoperationen scheidet sich also jetzt ein Teilbereich aus; ausschließlich mit Beziehungen, die ganz innerhalb dieses Teilbereichs verbleiben, werden wir es in den zu behandelnden Beispielen zu tun haben.

Einiges von dem, was die abzuleitenden Formeln ausdrücken, wollen wir außerdem auch noch in Worte fassen [2]), und dazu stellen wir noch einige weitere Definitionen auf [3]). Wir fassen den Inbegriff aller zueinander proportionalen Vektoren erster Schicht. also aller Vektoren der Form $cX\,\{X \neq 0,\ c \neq 0\}$ unter dem Worte Punkt zusammen und ebenso den Inbegriff aller untereinander proportionalen Vektoren zweiter Schicht, cU, unter dem Worte Gerade. Ist dann $(UX) = 0$, so ist auch immer $(cU,\ c'X) = 0$; wir sagen dann, der Punkt und die Gerade liegen vereinigt oder sie seien „in vereinigter Lage", oder „der Punkt liege auf der Geraden" oder er „gehöre ihr an", und „die Gerade liege auf dem Punkt"

---

1) Ohne weiteres klar ist nur, daß mindestens diese zwei weiteren Formeln hinzukommen. Vgl. aber M. T. F. S. 75.

2) Nur solche in Worte gefaßte Lehrsätze rechnen viele Autoren zur „Geometrie".

3) Daß die folgenden Erklärungen hier etwas trocken herauskommen, will ich nicht in Abrede stellen. Ich schreibe eben für Mathematiker, denen die projektive Geometrie, wenn auch in anderer Darstellungsform, schon geläufig ist. Da muß ich mich also kurz fassen, auch um den Preis der Trockenheit. Einen etwa zu erhebenden weiteren Einwand, ein System von drei Verhältnisgrößen $X_1 : X_2 ; X_3$ sei doch gar kein Punkt, sondern dieser werde nur so „dargestellt", könnte ich jedoch nicht als berechtigt anerkennen. Siehe die erste Anmerkung auf S. 56.

oder „gehöre ihm an". Ist A eine gegebene Gerade und X ein veränderlicher Punkt, so nennen wir die Gleichung $(AX) = 0$ die Gleichung der Geraden. Ebenso sprechen wir, wenn P ein gegebener Punkt und U eine veränderliche Gerade ist, von der Gleichung $(UP) = 0$ als der Gleichung des Punktes P[1]). Es folgt, daß zwei Gerade A, B, die voneinander verschieden sind, einen Punkt — gehörig zu den Vektoren $c.\overline{AB}$ — bestimmen, ihren Verbindungspunkt, dessen Gleichung $(ABU) = 0$ ist; und daß ebenso zwei verschiedene Punkte P, Q eine Gerade, ihre Verbindungsgerade $(PQX) = 0$ bestimmen. Wir sagen dementsprechend ferner, drei Punkte P, Q, R liegen auf (mindestens) einer Geraden, wenn $(PQR) = 0$ ist, und wir sagen, drei Gerade A, B, C liegen auf (mindestens) einem Punkt, wenn $(ABC) = 0$ ist[2]).

Alle diese Beziehungen werden durch Transformationen unserer Gruppe nicht gestört, sie sind gegenüber Γ invariant. Außerdem kann man auch noch die Begriffe Vektor erster Schicht und Vektor zweiter Schicht sowie Punkt und Gerade vertauschen, ohne daß an den gemachten Aussagen sich etwas änderte (sogenanntes Prinzip der Dualität).

Der Inbegriff aller Punkte bildet ein abgeschlossenes Kontinuum von zwei komplexen Dimensionen, und ebenso der Inbegriff aller Geraden. Jedes von beiden bestimmt das andere. Nennen wir das eine ein projektives Kontinuum (von zwei komplexen Dimensionen), so ist auch das andere ein solches. Beide Kontinua werden häufig, und so auch hier, unter dem Namen Ebene (genauer, zum Unterschied von anderen „Ebenen": „Ebene der projektiven Geometrie") zusammengefaßt.

Die Zuordnungen $X \longrightarrow \overline{X}$, $U \longrightarrow \overline{U}$, die durch irgend eine Transformation der Gruppe Γ bewirkt („induziert") werden, fassen

---

[1]) Die „Darstellung" einer Geraden oder eines Punktes durch eine Gleichung erscheint also hier nicht (wie in der gewöhnlichen analytischen Geometrie) als Lehrsatz, sondern als Definition.

[2]) Die übliche historisch entwickelte Terminologie unterscheidet hier: Ein Punkt „liegt auf" oder „liegt in" einer Geraden, eine Gerade dagegen „geht durch" einen Punkt (usw.). Diese Unterscheidung hat aber, rein mathematisch betrachtet (also unter Ausschaltung von Erkenntnistheorie und Physik), keinen rechten Sinn. Vgl. Veblen und Young, Projective Geometry (I, 1910; II, 1918). Dort wird schon, nach einem Vorschlag von F. Morley, die Wendung „A point is on a (straight) line" gebraucht. — Gründlich ändern wird sich das Überlieferte heute nicht mehr lassen. Ich werde mich später wieder der herkömmlichen Kunstsprache bedienen, so wie es auch die eben genannten Autoren getan haben.

wir zusammen unter dem Namen Kollineation (genauer: Kollineation der Ebene oder in der Ebene); die entsprechenden Paare von Zuordnungen $X \longrightarrow \underline{U}$, $U \longrightarrow \underline{X}$, die erhalten werden, wenn rechter Hand noch eine Vertauschung der Begriffe Punkt und Gerade hinzugenommen wird, heißen dann Korrelationen. Beide Arten von Zuordnungen bilden dann wieder eine Gruppe, nämlich eine „geschichtete" Gruppe von $2 \,.\, \infty^{2 \cdot 8}$ Transformationen, von der wir (mit geringer Erweiterung des ursprünglichen Sinnes des Wortes Projektivität) sagen wollen, daß sie von den projektiven Transformationen der Ebene gebildet wird. Ohne weiteres erkennt man, daß z. B. zu jeder gegebenen Kollineation drei Transformationen der Gruppe Γ gehören (durch deren jede sie „induziert" wird), und daß der Zusammensetzung zweier Transformationen von Γ die Zusammensetzung der zugeordneten Kollineationen entspricht: Die Kollineationsgruppe ist zur Gruppe Γ „dreideutig meromorph" (nicht umgekehrt Γ zur Kollineationsgruppe!).

Es gilt nun ein für die gesamte Geometrie („projektive Geometrie") in der Ebene grundlegender Satz:

Eine Kollineation wird eindeutig dadurch bestimmt, daß man irgend vier Punkten, deren keine drei in einer Geraden liegen, vier andere derart der Reihe nach zuordnet.

Wir wollen nicht nur die Existenz dieser Kollineation nachweisen, sondern auch ihren Ausdruck durch eine Formel finden. Wegen des nachgewiesenen Zusammenhanges der Kollineationsgruppe mit der Gruppe Γ werden wir in einer solchen Formel nicht irgendwelche Verbindungen der Koordinaten zu erwarten haben, sondern nur solche, die wir — als Invarianten von Γ (und insbesondere auch von γ) — schon kennen. Und in der Tat ist die hiermit präzisierte Aufgabe leicht; man kann ihre Lösung ohne weiteres hinschreiben[1]):

$$
\begin{aligned}
(1) \quad & \frac{(P_2 P_3 X)}{(P_2 P_3 P_0)} \cdot (\underline{P}_2 \underline{P}_3 \underline{P}_0) \,.\, \underline{P}_1 + \frac{(P_3 P_1 X)}{(P_3 P_1 P_0)} \cdot (\underline{P}_3 \underline{P}_1 \underline{P}_0) \,.\, \underline{P}_2 \\
& + \frac{(P_1 P_2 X)}{(P_1 P_2 P_0)} \cdot (\underline{P}_1 \underline{P}_2 \underline{P}_0) \,.\, \underline{P}_3 = (\underline{P}_1 \underline{P}_2 \underline{P}_3) \,.\, \underline{X}.
\end{aligned}
$$

Damit hat man sie als Zuordnung von Punkten ($X \longrightarrow \underline{X}$), und sogleich kann sie dann auch als Zuordnung von Geraden ($U \longrightarrow \underline{U}$) angegeben werden.

[1]) G. d. D. S. 245 oder H. Beck, Koordinatengeometrie, I, S. 176. Eine Anwendung davon bei H. Beck, „Fünfecke und Polarsysteme". Sitzungsber. d. Wiener Akademie, Math.-naturw. Klasse, Abt. IIa, **126**, 185.

In der Tat stellt die Formel (1) eine lineare Transformation dar (wenn auch nicht notwendig eine aus der Gruppe Γ), und man sieht ihr an, daß sie nicht nur den Punkten P_1, P_2, P_3 die Punkte $\underline{P}_1$, $\underline{P}_2$, $\underline{P}_3$ zuordnet, sondern — zufolge der Identität A — auch dem Punkt P_0 den Punkt $\underline{P}_0$ [1]). Um einzusehen, daß es eine weitere Kollineation derart nicht geben kann, genügt es zu bemerken, daß z. B. die Punkte $\{1, 1, 1\}$, $\{1, 0, 0\}$, $\{0, 1, 0\}$, $\{0, 0, 1\}$ nur bei der identischen Kollineation in Ruhe bleiben.

Wir berechnen noch die Diskriminante (Koeffizientendeterminante) Δ der Transformation (1) aus der Formel

$$\Delta . (XYZ) = (\underline{X}\,\underline{Y}\,\underline{Z}). \tag{2}$$

Mit Hilfe der Identität B finden wir dann:

$$\Delta = \frac{(\underline{P}_1\underline{P}_2\underline{P}_3).(\underline{P}_2\underline{P}_3\underline{P}_0).(\underline{P}_3\underline{P}_0\underline{P}_1).(\underline{P}_0\underline{P}_1\underline{P}_2)}{(P_1P_2P_3).(P_2P_3P_0).(P_3P_0P_1).(P_0P_1P_2)}; \tag{3}$$

man sieht, daß die dargestellte Kollineation zu existieren aufhört, wenn drei der Punkte P_k oder drei der Punkte $\underline{P}_k$ auf eine Gerade zu liegen kommen. Die zu der gefundenen Kollineation gehörigen linearen Transformationen von der Determinante Eins erhält man durch Ausziehen der dritten Wurzel aus Δ; aber man sieht nun auch, daß wir hier die Gruppe Γ eigentlich noch gar nicht hätten zu betrachten brauchen: nur wird durch (2) dann eine grundsätzliche Erweiterung unseres Invariantenbegriffs nahegelegt, die wir erst später ausführen wollen. Wie man eine Korrelation z. B. aus vier Punkten P_k und den zugeordneten Geraden $\underline{A}_k$ bestimmt, braucht wohl nicht noch ausdrücklich gesagt zu werden. Hätten wir nicht Punkte, sondern Vektoren einander zuordnen wollen, so hätten wir nur drei Paare benutzen dürfen; die entsprechende Formel lautet

$$(P_2P_3X).\underline{P}_1 + (P_3P_1X).\underline{P}_2 + (P_1P_2X).\underline{P}_3 = (P_1P_2P_3).\underline{X}. \tag{4}$$

Auch die Formel (1) verbindet (nicht nur Punkte, sondern auch schon) Vektoren. Sie verbindet sie aber, abweichend von der Formel (4), auf unsymmetrische Art. Es entsteht also die Frage: Wie ändert sich der durch (1) dargestellte Vektor $\underline{X}$, wenn man irgend zwei der vier Paare P_k, $\underline{P}_k$ miteinander vertauscht? Antwort: Gar nicht. Den Beweis überlassen wir dem Leser.

---

[1]) Ich bediene mich hier und auch sonst für die Punkte derselben Zeichen wie für die zugehörigen Vektoren, was ja wohl kein Mißverständnis hervorrufen wird.

Alles bisher Gesagte läßt sich, wie wohl ohne weiteres klar ist, fast wörtlich auf eine unbestimmte Stufenzahl n übertragen. Im Falle $n = 3$ aber kann man, statt eines Inbegriffs untereinander gleichbedeutender Ausdrücke, für den Vektor $\underline{X}$ auch einen einzigen Ausdruck angeben, in den die Paare P_k, $\underline{P}_k$ auf eine symmetrische oder doch nahezu symmetrische Art eingehen. In diesem Falle nämlich können wir z. B. die Vektoren und Punkte P_k auf drei Arten (I, II, III) auf Paare verteilen. Zu jedem Paar gehört dann ein bestimmter Vektor und Punkt („Diagonalvektor" und „Diagonalpunkt"); z. B. kann man der Paarung P_0, P_1; P_2, P_3 als „Diagonalpunkt" den Verbindungspunkt der Geraden $\overline{P_0 P_1}$, $\overline{P_2 P_3}$ zuordnen. Ein entsprechender Vektor, der ebenfalls eindeutig erklärt werden kann, ist[1])

$$(5)\qquad Q_{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &- (P_1 P_2 P_3) \cdot P_0 + (P_2 P_3 P_0) \cdot P_1 \\ &= (P_3 P_0 P_1) \cdot P_2 - (P_0 P_1 P_2) \cdot P_3 \end{aligned} \right\}.$$

Die nach dem Schema (4) gebildete Formel

$$(6)\qquad \begin{aligned} (Q_{\mathrm{II}}\, Q_{\mathrm{III}}\, X) \cdot Q_{\mathrm{I}} + (Q_{\mathrm{III}}\, Q_{\mathrm{I}}\, X) \cdot \underline{Q}_{\mathrm{II}} + (Q_{\mathrm{I}}\, Q_{\mathrm{II}}\, X) \cdot \underline{Q}_{\mathrm{III}} \\ = (Q_{\mathrm{I}}\, Q_{\mathrm{II}}\, Q_{\mathrm{III}}) \cdot \underline{X} \end{aligned}$$

leistet dann das Verlangte. Eine Rechnung, zu der der Leser alle Vorbereitungen hat, und die übrigens im nächsten Paragraphen aus anderem Anlaß noch ausgeführt werden wird, läßt erkennen, daß immer dann, wenn der Punkt X mit einem der vier Punkte P_k zusammenfällt, der zugeordnete Punkt $\underline{X}$ in den Punkt $\underline{P}_k$ übergeht.

In der vorausgehenden Darlegung habe ich mit Absicht die Grundbegriffe der (ebenen) projektiven Geometrie so erklärt, als ob es noch gar keine Literatur darüber gäbe. Es kommt mir darauf an, es greifbar zu machen, daß eine sogenannte axiomatische Begründung geometrischer Disziplinen entbehrt werden kann, wenn man, wie es sonst in Mathematik und Naturwissenschaften üblich ist, die abzuleitenden Ergebnisse als die Hauptsache ansieht, die dazu benutzten Denkoperationen (die Logik) aber als Mittel zum Zweck. Nach dieser Auffassung unterscheiden sich „geometrische" Lehrsätze nicht grundsätzlich von anderen der Mathematik, also z. B. nicht von solchen der Zahlentheorie oder der Funktionentheorie oder der Variationsrechnung: Sie haben, gleich diesen, nur das Rechnen mit natürlichen Zahlen zum Ausgangspunkt, alle Entwicklungen folgen dem Schema Definition oder Voraussetzung, Behauptung, Beweis. Die vorherrschende Meinung jedoch will es anders. Als ein treffliches Lehrbuch, das dieser Auffassung der Geometrie entspricht, nenne ich das schon erwähnte Werk von Veblen und Young.

[1]) Wegen des Zahlenfaktors $1/2$ siehe § 7.

Man wolle wohl beachten, daß, sofern in dem Gesagten eine Kritik des Üblichen liegt, diese sich nur auf die systematische und didaktische Seite des Gegenstandes bezieht, und daß ich es hier nirgends mit erkenntnistheoretischen Problemen zu tun haben will, sondern nur mit Mathematik. Die Wertschätzung der sogenannten Axiomatik, die ihr eine grundlegende Bedeutung zuschreibt, hat ihre Quelle teils im Historischen, teils in erkenntnistheoretischen Überlegungen, die schwerlich einwandfrei sind; und daß die axiomatische Begründung der Geometrie, die zudem noch für jede wohlumgrenzte geometrische Disziplin ein besonderes System von Postulaten oder Axiomen erfordern würde, ihre Schwierigkeiten hat, und daß diese um so größer erscheinen, je sorgfältiger man dabei zu Werke geht, wird kein Kenner in Abrede stellen[1]).

Weiterhin werde ich mich nun, ohne neue Erklärungen, die den Leser nur langweilen würden, der vorhandenen geometrischen Terminologie bedienen, mit einzelnen Abweichungen, wie sie mir von Fall zu Fall als angemessen erscheinen.

Hier werden auch noch einige Worte über die Zeichen am Platze sein. Die Zuordnung von Punkten zu Zeichen $P, Q, R, \ldots, X, Y, Z, \ldots$ und von Geraden zu $A, B, C, \ldots, U, V, W, \ldots$ entspricht in der Hauptsache der klassischen Überlieferung. Sie ist durchgeführt in den von H. Lindemann bearbeiteten und erweiterten Vorlesungen von Clebsch über Geometrie (I, 1: 1875; I, 2: 1896, in zweiter Auflage I, 1: 1906, I, 2: 1910; II, 1: 1891). Doch erscheint dort an Stelle des von mir (1889) eingeführten Zeichens (UX) ein Zeichen u_x, was dem Prinzip der Dualität nicht Rechnung trägt und zu unnützen typographischen Verwicklungen führt[2]).

Eine spätere Zeit ist hiervon abgewichen. Mehrfach hat man Festsetzungen wie die, daß Punkte durch kleine, Geraden durch große Lettern bezeichnet werden sollen, und Ähnliches, zu allgemeinem Gebrauch empfohlen. Auch ist der Vorschlag gemacht worden, die Buchstabenzeichen promiscue zu verwenden und die der einen Art (hier die zu Geraden gehörigen) durch Akzente auszuzeichnen. Alle solchen Forderungen sind nicht allgemein annehmbar. Z. B. werden Akzente schon zu so vielen anderen Zwecken benutzt, daß man sie nicht mehr für einen weiteren festlegen kann, und Ähnliches gilt in den anderen Fällen. Es muß dem einzelnen Schriftsteller das Recht zuerkannt werden, die Zeichen, zwar durchaus nicht nach Willkür, wohl aber nach eigenem begründetem Ermessen zu wählen. Ich bleibe im wesentlichen bei der Zeichensprache, die historisch den Vorrang hat, und mir zugleich als die brauchbarste erscheint.

---

[1]) Eine besondere Schwierigkeit wird in aller Axiomatik dadurch hervorgerufen, daß auch noch die logische Unabhängigkeit der einzelnen Postulate erwiesen werden muß. Geschieht das nicht, so weiß man nie genau, was Definition und was Lehrsatz ist.

Wegen der Überschätzung der Logik siehe meine Schrift „Denken und Darstellung" (1921).

[2]) Leider ist das genannte in der Anlage vortreffliche Werk mit allerlei Mängeln der Ausführung behaftet, so daß es, als Ganzes, nur mit Einschränkungen und nur kritisch geschulten Lesern empfohlen werden kann.

§ 6.

Weitere Beispiele: Lehrsätze von Desargues, Pascal und Brianchon.

Wir betrachten jetzt die Figur (den Inbegriff) von sechs Punkten in der Ebene (der Ebene der projektiven Geometrie). Sie sollen alle voneinander verschieden und auf zwei „Dreiecke" P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3 so verteilt sein, daß weder die drei ersten Punkte, noch auch die drei letzten einer Geraden angehören[1]). Die zweimal drei Punkte bestimmen dann zwei „Dreiseite" A_1, A_2, A_3 und B_1, B_2, B_3, wo z. B. $A_1 = \overline{P_2 P_3}$ ist, und genauer noch $(A_1 X) = (P_1 P_2 X)$ erklärt werden kann. Es folgt

$$(1) \qquad (A_1 A_2 A_3) = (P_1 P_2 P_3)^2, \quad (B_1 B_2 B_3) = (Q_1 Q_2 Q_3)^2;$$

es werden also weder die Geraden $A_1 A_2 A_3$, noch die Geraden $B_1 B_2 B_3$ auf demselben Punkt liegen. Die sechs Geraden A_k, B_k brauchen dann nicht alle voneinander verschieden zu sein, sie sind es aber in der Regel[2]), und wir wollen annehmen, daß sie es wirklich sind. Unter diesen Einschränkungen gilt der folgende Lehrsatz (Satz von Desargues oder „Satz von den perspektiven Dreiecken"):

Wenn die Verbindungsgeraden $\overline{P_1 Q_1}$, $\overline{P_2 Q_2}$, $\overline{P_3 Q_3}$ auf einem Punkt liegen, so liegen die Verbindungspunkte $\overline{A_1 B_1}$, $\overline{A_2 B_2}$, $\overline{A_3 B_3}$ auf einer Geraden, und umgekehrt.

---

[1]) Diese Einschränkungen und die dazu korrelativen fehlen in den mir bekannten Fassungen des Satzes von Desargues. Man kann sie auch tatsächlich weglassen, dann aber muß man sich anders ausdrücken, als es üblicherweise geschieht. [Man kann dann nicht einmal mehr behaupten, daß die Verbindungspunkte der (im weiteren Text erklärten) Paare von Geraden A_k, B_k immer auf einer durch sie bestimmten Geraden liegen.] Wer etwa einwenden wollte, das Richtige sei ja gemeint, würde wörtlich Recht und dennoch im Grunde Unrecht haben. Die Sitte, sich um Kleinigkeiten nicht zu kümmern, ist das Ei, aus dem mit unheimlicher Schnelligkeit sich ein wahrer Basilisk zu entwickeln pflegt. Sie ist der Infektionskeim, aus dem tatsächlich eine verheerende Krankheit entstanden ist, die den „schönen Leib der Geometrie" allenthalben mit Schwären überzogen hat. Principiis obsta!

Angemerkt zu werden verdient auch, daß der Lehrsatz von Desargues inhaltsleer wird, wenn der Verbindungspunkt der zwei Geraden $\overline{P_k Q_k}$ einer der sechs Punkte P_k, Q_k selbst ist.

[2]) Das heißt, die Konstantenzahl (2. 11) unserer Figur wird durch die Forderung, daß auch die Geraden A_k, B_k alle getrennt sein sollen, nicht verringert. Übrigens bilden die Desarguesschen Figuren ein Kontinuum, und alle, die hier nicht betrachtet werden sollen, erfüllen Mannigfaltigkeiten mit einer geringeren Zahl von (komplexen) Dimensionen.

Die zuletzt genannten drei Punkte werden nämlich dann einer Geraden angehören, wenn der Ausdruck $(A_1 B_1 \mid A_2 B_2 \mid A_3 B_3)$ gleich Null ist. Nach einer kleinen Zwischenrechnung, bei der die Identität A zu benutzen ist, findet sich nun

$$(2)\qquad \boxed{\begin{aligned}&(A_1 B_1 \mid A_2 B_2 \mid A_3 B_3)\\ &= (P_1 P_2 P_3)\cdot(Q_1 Q_2 Q_3)\cdot(P_1 Q_1 \mid P_2 Q_2 \mid P_3 Q_3).\end{aligned}}$$

Damit hat man schon den behaupteten Lehrsatz[1]).

Man kann auch so zu Werke gehen, daß man die eine Figur als Dreieck (P_1, P_2, P_3), die andere als Dreiseit (B_1, B_2, B_3) gibt. Setzt man dann

$$(P_2 P_3 X) = (A_1' X), \quad (B_2 B_3 U) = (Q_1' U) \text{ usw.},$$

so daß $A_k' = A_k$, aber $Q_k' = (Q_1 Q_2 Q_3)\cdot Q_k$ wird, so folgt

$$(3\,\text{a})\qquad \begin{aligned}&(P_1 Q_1' \mid P_2 Q_2' \mid P_3 Q_3')\\ &= (B_1 B_2 B_3)\cdot\{(B_1 P_2)(B_2 P_3)(B_3 P_1) - (B_1 P_3)(B_2 P_1)(B_3 P_2)\},\end{aligned}$$

$$(3\,\text{b})\qquad \begin{aligned}&(A_1' B_1 \mid A_2' B_2 \mid A_3' B_3)\\ &= (P_1 P_2 P_3)\cdot\{(B_1 P_2)(B_2 P_3)(B_3 P_1) - (B_1 P_3)(B_2 P_1)(P_3 P_2)\}.\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung $(P_1 P_2 P_3) \neq 0$, $(B_1 B_2 B_3) \neq 0$ sagt also das Verschwinden beider Ausdrücke (3) dasselbe aus, womit der Lehrsatz von Desargues nochmals begründet ist.

Wir haben hiermit für die sogenannte perspektive Lage unserer Dreiecke oder Dreiseite im ganzen vier verschiedene Kriterien gefunden, die (unter den bezeichneten Voraussetzungen) alle miteinander gleichbedeutend sein müssen. Die beiden ersten sind die der Formel (2):

$$(4)\qquad \boxed{\begin{aligned}&(P_1 Q_1 \mid P_2 Q_2 \mid P_3 Q_3) = 0,\\ &(A_1 B_1 \mid A_2 B_2 \mid A_3 B_3) = 0;\end{aligned}}$$

ihre Äquivalenz haben wir eben unter (2) schon nachgewiesen. Ebenso aber müssen mit ihnen und dann auch untereinander gleichbedeutend sein die nach dem Schema (3) gebildeten Kriterien

$$(5)\qquad \boxed{\begin{aligned}&(B_1 P_2)(B_2 P_3)(B_3 P_1) - (B_1 P_3)(B_2 P_1)(B_3 P_2) = 0,\\ &(A_1 Q_2)(A_2 Q_3)(A_3 Q_1) - (A_1 Q_3)(A_2 Q_1)(A_1 Q_2) = 0.\end{aligned}}$$

---

[1]) Man beachte, daß man einen nicht umkehrbaren Satz erhält, wenn man die Einschränkungen $(P_1 P_2 P_3) \neq 0$, $(Q_1 Q_2 Q_3) \neq 0$ fallen läßt. Siehe die Anmerkung auf S. 61.

In der Tat findet sich z. B.

$$\boxed{\begin{aligned}(B_1 P_2)(B_2 P_3)(B_3 P_1) - (B_1 P_3)(B_2 P_1)(B_3 P_2)\\ = (Q_1 Q_2 Q_3) \cdot (P_1 Q_1 \mid P_2 Q_2 \mid P_3 Q_3);\end{aligned}} \tag{6}$$

man hat nur in (3 a) auf die Definition der Vektoren B_k und Q'_k zurückzugehen. Die identische Gleichung (6) wird als Folge unserer Identitäten vom Typus A oder vielmehr A' leicht auch unmittelbar dargestellt:

$$\begin{aligned}
&(B_1 P_2)(B_2 P_3)(Q_1 Q_2 P_1) - (B_1 P_3)(Q_3 Q_1 P_1)(B_3 P_2)\\
&\quad = (B_2 P_3) \cdot \{(B_1 Q_1)(P_2 Q_2 P_1) + 0 + (B_1 P_1)(Q_1 Q_2 P_2)\}\\
&\quad - (B_3 P_2) \cdot \{0 + (B_1 Q_1)(Q_3 P_3 P_1) + (B_1 P_1)(Q_3 Q_1 P_3)\}\\
&\quad = (B_1 Q_1) \cdot \{(P_1 P_2 Q_2)(B_2 P_3) - (P_3 P_1 Q_3)(B_3 P_2)\}\\
&\quad + (B_1 P_1) \cdot \{(Q_1 Q_2 P_2)(Q_3 Q_1 P_3) - (Q_3 Q_1 P_3)(Q_1 Q_2 P_2)\}\\
&\quad = (Q_1 Q_2 Q_3) \cdot (P_1 Q_1 \mid P_2 Q_2 \mid P_3 Q_3) + 0.
\end{aligned}$$

Die Ableitung von Identitäten zwischen Invarianten liegt nicht immer so nahe wie im Beispiel unserer Formel (6). Besteht man nicht darauf, die Rolle der Grundformeln A, B in jedem Falle in Evidenz zu setzen, so gibt es öfter ein einfacheres Verfahren, das sich gründet auf einen Satz der Funktionentheorie:

Wenn eine ganze rationale Funktion F von irgendwelchen Veränderlichen für alle (komplexen!) Werte dieser Veränderlichen verschwindet, für die eine irreduzibele ganze rationale Funktion Φ den Wert Null hat, so ist F durch Φ teilbar, $F = \Phi . \Psi$. (Beweis: M. T. F., S. 202.)

In unserem Falle ist F der Ausdruck links in (6) und $\Phi = (P_1 Q_1 \mid P_2 Q_2 \mid P_3 Q_3)$, also (wegen der Invarianz beider Funktionen und ihrer Homogenität) $\Psi = \varrho . (Q_1 Q_2 Q_3)$. Es bleibt dann nur noch der Zahlenwert von ϱ zu bestimmen. Man findet $\varrho = 1$, wenn man etwa $Q_1 = P_2$, $Q_2 = P_3$, $Q_3 = P_1$ setzt.

In dem Satze von Desargues kommen im ganzen zehn Punkte und zehn Geraden vor, nämlich außer den genannten noch das Perspektivitätszentrum $P_0 = Q_0$ und die Perspektivitätsachse $A_0 = B_0$. Jeder der zehn Punkte liegt dann immer auf bestimmten dreien der zehn Geraden und ebenso jede der zehn Geraden auf dreien der zehn Punkte[1]). Dieselben Punkte und Geraden bilden auf zehn Arten eine Desarguessche Figur,

[1]) Außerdem kann es (sogar dreimal) noch vorkommen, daß einer der Punkte P mit einer Geraden B, oder einer der Punkte Q mit einer Geraden A vereinigt liegt.

insofern augenscheinlich jeder der zehn Punkte zusammen mit einer durch ihn bestimmten Geraden als Perspektivitätszentrum und -achse fungieren kann.

Die hiermit ausgesagte Gleichberechtigung der zehn Punkte und Geraden kann, wie bekannt, übersichtlich dadurch ausgedrückt werden, daß man den Punkten und Geraden Indizes zuordnet, nämlich etwa den Geraden Paare und den Punkten Tripel von Indizes, die aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 gebildet sind. Auf jeder der zehn Geraden $(\alpha\beta)$ liegen dann (immer) die drei Punkte $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha\beta\delta)$, $(\alpha\beta\varepsilon)$, und auf jedem Punkt $(\alpha\beta\gamma)$ die drei Geraden $(\beta\gamma)$, $(\gamma\alpha)$, $(\alpha\beta)$. (Die Figur des Desarguesschen Satzes kann samt dieser Indizesbezeichnung dadurch erhalten werden, daß man die zehn Verbindungsgeraden je zweier von fünf Ebenen im dreidimensionalen projektiven Kontinuum — dem sogenannten Raume — und die zehn Verbindungspunkte von je dreien in die Ebene projiziert.)

Eine genauere Untersuchung der Desarguesschen Figur würde sich vielleicht lohnen, müßte aber bei weitem den hier verfügbaren Raum überschreiten. Wenigstens erwähnt mag werden, daß die in § 4 abgehandelte Figur X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3, aus dem Mittelpunkt der Einheitskugel projiziert, eine im Sinne der projektiven Geometrie nicht spezialisierte Desarguessche Figur liefert. Anders ausgedrückt: Die Punkte $(\alpha\beta\gamma)$ und die ihnen zugeordneten Geraden $(\delta\varepsilon)$ sind Pole und Polaren in bezug auf einen durch die Desarguessche Figur eindeutig bestimmten Kegelschnitt[1]). Der hierin enthaltene Satz von den beiden „Höhenschnittpunkten" einander polar zugeordneter (nicht zusammenfallender!) sphärischer Dreiecke liefert in der Grenze auch noch den Satz vom Höhenschnittpunkt ebener Dreiecke.

Die folgende Auseinandersetzung bezieht sich auf die algebraische Bestimmung eines Kegelschnittes aus fünf gegebenen Figuren, von denen einige (0, 1, ... 5) Punkte und einige (5, 4, ... 0) Geraden (Tangenten) sind. Haben diese nicht gerade eine besondere Lage, so wird die zu suchende Figur, der Kegelschnitt, ein- oder mehrdeutig bestimmt und nicht spezialisiert sein, nämlich ebensowohl als Ort von Punkten wie als Ort von Geraden beschrieben werden können. Wir haben also im ganzen zwölf Aufgaben vor uns, da in jedem Falle eine Kurve zweiter Ordnung und eine Kurve zweiter Klasse zu suchen ist. Aber wegen der Vertauschbarkeit der Begriffe Punkt und Gerade sind nur sechs von diesen Aufgaben wirklich verschieden. und außerdem kann man noch nach bekannten Regeln, wenn z. B. die Kurve zweiter Ordnung gefunden ist, die Gleichung der Kurve zweiter Klasse herstellen. Die dann auszuführende (leichte) Rechnung wird man kaum sehr lohnend finden; so bleiben also in der Hauptsache nur drei wesentlich-verschiedene Aufgaben übrig.

Nicht ganz deckt sich hiermit, ohne genauere Vorschrift über die Art der Beantwortung, die Frage nach den Bedingungen, unter

[1]) Diese Kurve kann mit Hilfe der Formel (1) in § 5 gefunden werden.

denen sechs der gegebenen Punkte oder Geraden einem Kegelschnitt angehören. Diese Bedingungen müssen sich in jedem Falle schon dadurch ausdrücken lassen, daß man eine ganze rationale Funktion von Invarianten der Gruppe Γ, also von Invarianten der Typen

$$(XYZ),\ (XU),\ (UVW),$$

gleich Null setzt. Aber nur im einfachsten Falle (0, 6) oder (6, 0) wird man damit auch die Lösungen der zuerst genannten Aufgaben kennen: In den Fällen (1, 5) oder (5, 1) und (3, 3) erhält man so nur eine Zusammenfassung der in mehreren (zwei oder vier) Exemplaren vorhandenen Lösungen, deren Trennung dann noch ein weiteres durchaus nicht leicht zu bewältigendes Problem bildet, während umgekehrt die Zusammenfassung der einzeln gefundenen Lösungen natürlich ohne weiteres ausgeführt werden kann. Damit haben wir allerdings nur einen Fingerzeig, wie man die Sache nicht angreifen soll.

Die Kurve zweiter Ordnung durch fünf gegebene Punkte.

Soll die Aufgabe nicht trivial oder gar unbestimmt sein, so ist anzunehmen, daß keine drei der fünf Punkte auf einer Geraden liegen. Vier der fünf Punkte bestimmen dann ein Büschel von Kurven zweiter Ordnung, von denen man die in Geraden zerfallenden Kurven schon kennt, und aus diesem Büschel kann ohne weiteres die Kurve herausgesucht werden, die auch noch den letzten Punkt enthält. Oder man kann auch verlangen, daß vier Punkte aus zwei weiteren durch gleiche Würfe projiziert werden. Ich ziehe es vor, an den Satz von Pascal anzuknüpfen: Auch dieser stellt nämlich die Bedingung für sechs Punkte auf einer Kurve zweiter Ordnung reinlich dar. Hierauf und auf seiner konstruktiven Einfachheit beruht seine Bedeutung für die Theorie der Kegelschnitte.

Wir benennen die sechs Punkte mit Ziffern 1 ... 6 und verbinden je zwei zyklisch aufeinander folgende durch die Geraden eines Sechsecks. Je zwei gegenüberliegende Seiten dieses Sechsecks haben dann die Verbindungspunkte

$$\begin{aligned} P &= (1\,2\,5).4 - (1\,2\,4).5, \\ Q &= (2\,3\,6).5 - (2\,3\,5).6, \\ R &= (3\,4\,1).6 - (3\,4\,6).1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} &(PQR) \\ &= (1\,2\,5).(2\,3\,6).\{(3\,4\,1).(4\,5\,6) - (3\,4\,6).(4\,5\,1)\} \\ &+ (2\,3\,5).(3\,4\,6).\{(1\,2\,5).(4\,6\,1) - (1\,2\,4).(5\,6\,1)\} \\ &= (1\,2\,5)(2\,3\,6)(4\,6\,1)(3\,4\,5) - (2\,3\,5)(3\,4\,6)(4\,5\,1)(2\,6\,1). \end{aligned}$$

Jeder der sechs Punkte kommt hier zweimal vor, $(P\,Q\,R)$ ist vom zweiten Grade in bezug auf seine Koordinaten, und damit ist die gestellte Aufgabe gelöst; man braucht nur $(P\,Q\,R) = 0$ zu setzen. Aber die gefundene Formel hat auch ein einfaches Bildungsgesetz, das klar zum Vorschein kommt, wenn man etwa die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 der Reihe nach durch die Zahlen 2, 3, 5, 6, 1, 4 ersetzt. So erhalten wir die Lösung unseres Problems in verbesserter Form; sie wird dargestellt durch das Verschwinden einer rationalen Invariante der Gruppe Γ, die wir so bezeichnen wollen[1]):

$$(7)\quad \boxed{\begin{aligned} &(1\,2\,3\,4\,5\,6)^2 \\ &= (1\,3\,5)\,(6\,1\,2)\,(2\,3\,4)\,(4\,5\,6) - (2\,4\,6)\,(1\,2\,3)\,(3\,4\,5)\,(5\,6\,1). \end{aligned}}$$

In der Tat sieht man sogleich, daß dieser Ausdruck den Wert Null annimmt, wenn zwei der sechs Punkte zusammenfallen. Er hat aber noch weitere bemerkenswerte Eigenschaften, von denen wir nur eine anführen: Die Invariante $(1\,2\,3\,4\,5\,6)^2$ ist alternierend. Das heißt, sie ändert (wie eine sechsreihige Determinante) ihr Vorzeichen, wenn man irgend zwei der sechs Punkte vertauscht. Da sie nun offenbar ihr Zeichen ändert, wenn man die Punkte 1 ... 6 zyklisch vertauscht, so genügt es zu zeigen, daß sie etwa bei Vertauschung der Punkte 1 und 2 ihr Vorzeichen ändert. In der Tat ist (zufolge der Identität A') die Summe

$$\begin{aligned} &(1\,2\,3\,4\,5\,6)^2 + (2\,1\,3\,4\,5\,6)^2 \\ &= (6\,1\,2)\,(4\,5\,6)\,.\,\{(1\,3\,5)\,(2\,3\,4) - (2\,3\,5)\,(1\,3\,4)\} \\ &\quad - (1\,2\,3)\,(3\,4\,5)\,.\,\{(2\,4\,6)\,(5\,6\,1) - (1\,4\,6)\,(5\,6\,2)\} \\ &= (6\,1\,2)\,(4\,5\,6)\,.\,(1\,2\,3)\,(3\,5\,4) - (1\,2\,3)\,(3\,4\,5)\,.\,(6\,1\,2)\,(5\,4\,6), \end{aligned}$$

also gleich Null[2]).

Die Gleichung der Kurve zweiter Ordnung durch fünf Punkte, deren höchstens drei in einer Geraden liegen, kann danach immer dadurch gefunden werden, daß man die quadratische Form

$$(8)\quad F = (1\,3\,5)\,(2\,3\,4)\,(1\,2\,X)\,(4\,5\,X) - (1\,2\,3)\,(3\,4\,5)\,(2\,4\,X)\,(1\,5\,X)$$

gleich Null setzt. Die Diskriminante $|F|$ dieser Form muß durch die sämtlichen Invarianten $(i\,k\,l)$ teilbar sein; sie kann sich daher von dem Produkt dieser zehn Invarianten höchstens um einen Zahlen-

---

[1]) Der Exponent soll andeuten, daß jeder Punkt zweimal vorkommt. Um das Bildungsgesetz unseres Ausdruckes deutlich zu machen, schreiben wir ihn nochmals auf:

$$(\mathbf{1\,3\,5})\,(6\,\mathbf{1}\,2)\,(2\,\mathbf{3}\,4)\,(4\,\mathbf{5}\,6) - (\mathbf{2\,4\,6})\,(1\,\mathbf{2}\,3)\,(3\,\mathbf{4}\,5)\,(5\,\mathbf{6}\,1).$$

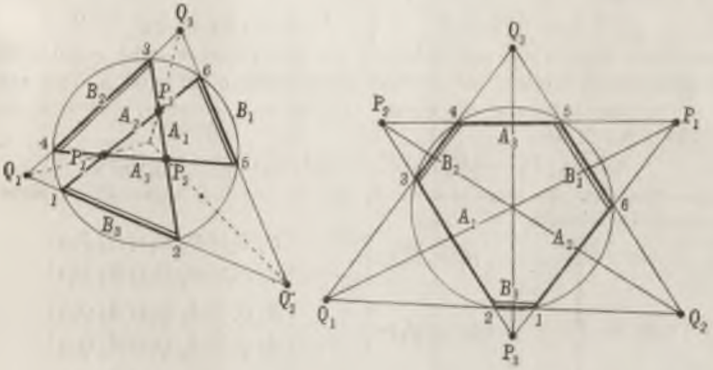
[2]) Siehe die Anmerkung am Schluß des Paragraphen.

faktor unterscheiden, der leicht mit Hilfe irgend eines Zahlenbeispiels bestimmt wird[1]). So findet man

$$(9) \qquad |F| = \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{l} (123)(124)(125)(134)(135) \\ .(145)(234)(235)(245)(345) \end{array} \right\}.$$

Die Figur des Pascalschen Sechsecks und die Figur des Desarguesschen Satzes hängen jede von elf komplexen Konstanten (von „2.11" Konstanten) ab, und zwar bestimmt, wenn man von Grenzfällen absieht, die erste die zweite auf 60, und die zweite die erste auf zehn Arten. Nehmen wir nämlich an, daß die sechs Punkte des Pascalschen Sechsecks auf einer irreduzibelen Kurve zweiter Ordnung liegen, so können wir sie auf 120 Arten zyklisch

Fig. 1.



ordnen und also auf 60 Arten durch ein Sechsseit $A_1 B_2 A_3 B_1 A_2 B_3$ verbinden; der Satz von Pascal sagt dann nichts anderes aus, als daß die Dreiseite $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ perspektive Lage haben, und ebenso die zugehörigen Dreiecke $P_1 P_2 P_3$ und $Q_1 Q_2 Q_3$ (Fig. 1).

Umgekehrt werden die sechs Punkte auf dem Kegelschnitt wiedergefunden, wenn man je zwei einander nicht entsprechende Geraden A_i, B_k verbindet. In einer nicht speziellen Desarguesschen Figur können aber, wie gesagt, zehn Paare perspektiver Dreiecke gefunden

[1]) Die Diskriminante $|F|$ ist die Koeffizientendeterminante von F. Daß sie hier Invariante der Gruppe Γ ist, zeigt die Formel (9) ohne weiteres. Wir werden aber später für die Diskriminante einer mit Vektoren eines Gebietes beliebiger Stufenzahl gebildeten quadratischen Form ein anderes Bildungsgesetz angeben, das ihre Invarianteneigenschaft in Evidenz setzt, so daß weitere Erörterungen erspart werden können.

werden[1]). Wir wollen noch zusehen, was aus unserer Invariante $(1\,2\,3\,4\,5\,6)^2$ wird, wenn man die Punkte $1 \ldots 6$ nach dem Schema

$$1 = \widehat{A_2 B_3}, \quad 2 = \widehat{B_3 A_1}, \quad 3 = \widehat{A_1 B_2}, \ldots$$

durch zweimal drei Geraden oder Punkte bestimmt und sie (wie zuvor) linearen Formen oder Vektoren zuordnet. Man findet nach leichter Rechnung:

$$\begin{aligned}(1\,2\,3\,4\,5\,6)^2 = &\left\{\begin{matrix}(A_2 A_3 B_1)(A_3 A_1 B_2)(A_1 A_2 B_3)\\ .(B_2 B_3 A_1)(B_3 B_1 A_2)(B_1 B_2 A_3)\end{matrix}\right\}\\ \text{(10)}\qquad .(A_1 B_1 \mid A_2 B_2 \mid A_3 B_3) &= (P_1 P_2 P_3)^4 . (Q_1 Q_2 Q_3)^4\\ &.(P_2 P_3 Q_1)(P_3 P_1 Q_2)(P_1 P_2 Q_3)\\ &.(Q_2 Q_3 P_1)(Q_3 Q_1 P_2)(Q_1 Q_2 P_3) . (P_1 Q_1 \mid P_2 Q_2 \mid P_3 Q_3).\end{aligned}$$

Auch schon ohne Hilfe dieser Formel sieht man, daß die Forderungen

$$(1\,2\,3\,4\,5\,6)^2 = 0 \quad \text{und} \quad (P_1 Q_1 \mid P_2 Q_2 \mid P_3 Q_3) = 0$$

nur dann äquivalent sein können, wenn die ersten acht voneinander verschiedenen Teiler des letzten Ausdrucks nicht gleich Null sind.

Bei der Ableitung der Formel (10) ist angenommen, daß z. B. dem Punkt 1 der Vektor

$$(B_3 P_3) P_1 - (B_3 P_1) P_3 = (A_2 Q_3) Q_1 - (A_2 Q_3) Q_2$$

zugeordnet ist. Es zeigt sich dann, daß die (nach § 3, Nr. 12 zu berechnenden) Invarianten

$$(1\,3\,5) = \left\{\begin{aligned} &= -(P_1 P_2 P_3) \cdot \left\{\begin{matrix}(B_1 P_1)(B_2 P_2)(B_3 P_3)\\ -(B_1 P_2)(B_2 P_3)(B_3 P_1)\end{matrix}\right\}\\ &= -(Q_1 Q_2 Q_3) \cdot \left\{\begin{matrix}(A_1 Q_1)(A_2 Q_2)(A_3 Q_3)\\ -(A_1 Q_3)(A_2 Q_1)(A_3 Q_2)\end{matrix}\right\}\\ &= -(P_1 P_2 P_3) \cdot (Q_1 Q_2 Q_3) \cdot \left\{\begin{matrix}(A_1 Q_1)(B_1 P_1)\\ -(A_3 Q_2)(B_2 P_3)\end{matrix}\right\}\end{aligned}\right.$$

$$(2\,4\,6) = \left\{\begin{aligned} &= -(P_1 P_2 P_3) \cdot \left\{\begin{matrix}(B_1 P_1)(B_2 P_2)(B_3 P_3)\\ -(B_1 P_3)(B_2 P_1)(B_3 P_2)\end{matrix}\right\}\\ &= -(Q_1 Q_2 Q_3) \cdot \left\{\begin{matrix}(A_1 Q_1)(A_2 Q_2)(A_3 Q_3)\\ -(A_1 Q_2)(A_2 Q_3)(A_3 Q_1)\end{matrix}\right\}\\ &= -(P_1 P_2 P_3) \cdot (Q_1 Q_2 Q_3) \cdot \left\{\begin{matrix}(A_1 Q_1)(B_1 P_1)\\ -(A_2 Q_3)(B_2 P_3)\end{matrix}\right\}\end{aligned}\right.$$

nur als Differenz

$$(1\,3\,5) - (2\,4\,6) = (P_1 P_2 P_3) . (Q_1 Q_2 Q_3) . (P_1 Q_1 \mid P_2 Q_2 \mid P_3 Q_3)$$

[1]) Weitere Literatur über die Figur des Satzes von Pascal findet man angeführt im Repertorium der Mathematik (2. Aufl., II, 1, 1910, S. 37) und in einem Enzyklopädieartikel desselben Verfassers — Dingeldey — (III, C, 1, Nr. 20—22).

in die Invariante $(1\,2\,3\,4\,5\,6)^2$ eingehen. Man sieht, daß im Falle perspektiver Dreiecke $\{(P_1 P_2 P_3) \neq 0,\ (Q_1 Q_2 Q_3) \neq 0!\}$ jede der Gleichungen

$$(1\,3\,5) = 0, \qquad (2\,4\,6) = 0$$

die andere nach sich zieht. Bestehen diese Gleichungen, so zerfällt die Kurve zweiter Ordnung durch die Punkte $1 \ldots 6$ in der Weise, daß ihr einer gerader Bestandteil die Punkte 1, 3, 5, der andere die Punkte 2, 4, 6 enthält. (Hieraus ergibt sich das auf S. 50 über die Gleichung $A_{00} = 0$ Gesagte.)

Die in der Literatur als Satz von Brianchon verzeichnete Tatsache ist für unsere Auffassung natürlich gar kein wirklich neuer Lehrsatz, sondern, nur mit anderen Worten gesetzt, nochmals der Satz von Pascal. Es darf indessen nicht übersehen werden, daß die projektive Geometrie sich auf einer von der unsrigen sehr verschiedenen Grundlage entwickelt hat, und daß die Paarung aller ihrer Figuren ursprünglich denn doch eine Entdeckung war.

Auf die Invariante $(1\,2\,3\,4\,5\,6)^2$ bezieht sich eine ganze Literatur. Zuerst scheint sie von Reiss gefunden worden zu sein (Math. Ann. **2**, 397, 1870); dann wurde sie wohl noch von einem Dutzend Autoren entdeckt, deren keiner jedoch meines Wissens Neues zutage gefördert hat. Insbesondere enthält der von einigen so genannte Satz von Güntsche nichts, das nicht längst bekannt gewesen wäre. (Reiss hat übrigens die Bedingung dafür, daß zehn Punkte auf einer Kurve dritter Ordnung liegen, mit Hilfe eines ähnlich gebildeten Ausdrucks dargestellt.)

Eine weitergehende Untersuchung enthält eine Arbeit des Verfassers [über das Pascalsche Sechseck und einen Satz von Hesse (Leipz. Ber. 1895, S. 532)]. Teilweise analoge Eigenschaften finden sich noch bei einer nur von zehn (fünf komplexen) Konstanten abhängigen Figur von sechs Punkten, deren je fünf den letzten eindeutig bestimmen. In dieser Figur werden nämlich je vier Punkte aus den beiden übrigen durch konjugiert-imaginäre Würfe projiziert (Math. Ann. **60**, 347, 348, 1915).

In unserer Darlegung über den Pascalschen Satz wurden die Punkte $1 \ldots 6$ als voneinander getrennt angenommen. Man kann sie aber auch gruppenweise zusammenrücken lassen und erhält dann die Lösungen einiger Aufgaben der Differentialgeometrie. Namentlich ergeben sich auf diesem Wege Begriff und analytische Darstellung der sogenannten Elemente zweiter Ordnung in der ebenen projektiven Geometrie [vier „natürliche Kontinua" solcher Elemente (Leipz. Ber. 1901, S. 338)]. Läßt man alle sechs Punkte zusammenrücken, so erhält man die Differentialgleichung der Kurven zweiter Ordnung (ebenda, S. 349) in projektiv-invarianter Form: Ist t der Parameter des Punktes 0, und bezeichnen die Zahlen $0 \ldots 5$ Differentiationsindizes, so lautet sie $\Psi(t) = 0$, wo

$$\begin{aligned}\Psi(t) = {} & 9 \cdot (0\,1\,2)^2 \cdot \{(0\,1\,5) + 10 \cdot (1\,2\,3) + 5 \cdot (0\,2\,4)\} \\ & - 45 \cdot (0\,1\,2) \cdot (0\,1\,3) \cdot \{2 \cdot (0\,2\,3) + (0\,1\,4)\} + 40 \cdot (0\,1\,3)^3\end{aligned}$$

ist. Liegt dann in der Ebene eine analytische Kurve $X = X(t)$ vor, die weder eine Gerade noch eine Kurve zweiter Ordnung ist, so kann man auf ihr einen **natürlichen Parameter** angeben, dargestellt durch die Integralinvariante

$$\int \frac{\sqrt[3]{\Psi(t)}}{(0\,1\,2)}\,dt;$$

Besonderheiten dieses Parameters auf der Kurve zeigen dann immer projektiv-invariante Besonderheiten des zugehörigen Kurvenpunktes an (ebenda, S. 349; s. auch Pick, Wiener Ber. **115**, 139ff., 1906).

Auf dem gleichen Grundgedanken beruhende Parameterdarstellungen, die aber zur Gruppe der affinen Transformationen gehören, sind vielfach benutzt worden von W. Blaschke und anderen.

Mit diesen etwas kümmerlichen Hinweisungen muß ich mich begnügen; der Stoff der projektiven Differentialgeometrie ist ein umfangreiches Kapitel für sich.

§ 7.

Fortsetzung: Weiteres über Kegelschnitte.

Bei der Behandlung der übrigen zuvor (auf S. 64) formulierten Aufgaben über Kegelschnitte finde ich es vorteilhaft, ihre Reihenfolge zu ändern. So kommen an den Anfang unserer Betrachtung zwei sehr einfache Lehrsätze:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß drei Punkte P, Q, R und drei Geraden A, B, C (diese als Tangenten) demselben Kegelschnitt angehören, läßt sich so schreiben:

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} \sqrt{AP} & \sqrt{AQ} & \sqrt{AR} \\ \sqrt{BP} & \sqrt{BQ} & \sqrt{BR} \\ \sqrt{CP} & \sqrt{CQ} & \sqrt{CR} \end{vmatrix} = 0.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Punkte P, Q und vier Geraden A, B, C, D demselben Kegelschnitt angehören, ist das Bestehen einer Gleichung der Form

$$(2)\qquad \begin{aligned} &(BCD)\sqrt{(AP)(AQ)} - (CDA)\sqrt{(BP)(BQ)} \\ &+ (DAB)\sqrt{(CP)(CQ)} - (ABC)\sqrt{(DP)(DQ)} = 0\,[1]. \end{aligned}$$

[1]) Die Vorzeichen in der Formel (2) sind an sich willkürlich. Warum sie so gewählt sind, wie geschehen, sieht man, wenn man $P = Q$ setzt.

Solcher Formeln, die ein geometrisches Interesse haben, lassen sich noch mehr bilden. Die nach Analogie von (1) aus vier Ebenen und vier Punkten gebildete Determinante sagt durch ihr Verschwinden aus: Es gibt eine Steinersche Fläche, die die vier Ebenen zu Doppelebenen hat

Natürlich sind in diesen Formulierungen Grenzfälle, in denen mehrere oder sogar unendlich viele „Kegelschnitte" — Örter von Punkten **und** Geraden — den gestellten Bedingungen genügen, nicht ausgeschlossen. Auch wird nicht unterschieden zwischen verschiedenen Arten des „Angehörens": Z. B. kann eine Kurve zweiter Ordnung aus zwei Geraden bestehen, sie kann (mindestens) einen Doppelpunkt haben. Dann gehört jede Gerade durch diesen Punkt (oder einen dieser Punkte) der Kurve an (wenn man will, als in der Regel „uneigentliche" Tangente).

Als zur Genüge bekannt darf hier angenommen werden, daß immer dann, wenn etwa drei Geraden A, B, C und zwei Punkte P, Q nicht unendlich vielen Kegelschnitten angehören, die algebraische Fassung des Problems ihrer Bestimmung von der Lösung einer Gleichung vierten Grades abhängt. Diese Gleichung, oder vielmehr eine solche Gleichung, sollen wir nun nach (1) in der Form

$$(3) \qquad \boxed{\begin{vmatrix} \sqrt{AP} & \sqrt{AQ} & \sqrt{AX} \\ \sqrt{BP} & \sqrt{BQ} & \sqrt{BX} \\ \sqrt{CP} & \sqrt{CQ} & \sqrt{CX} \end{vmatrix} = 0}$$

vor uns haben, die, in bezug auf die Veränderliche X, sogleich auch in rationale Gestalt gebracht werden kann. In der Tat sieht man sofort, daß die durch (3) dargestellte Kurve zweiter Ordnung vierdeutig bestimmt ist und durch die Punkte P und Q gehen muß. Daß eine solche Kurve dann mit jeder der Geraden A, B, C, bei nicht zu spezieller Lage der gegebenen Figuren, nicht zwei verschiedene Punkte gemein haben kann, sieht man, wenn man z. B. die Gleichung $(AX) = 0$ mit der Gleichung (3) zusammenstellt. Diese wird nämlich dann gleichbedeutend mit einer in X linearen Gleichung.

Grenzlagen der besprochenen Figuren gibt es mancherlei, sie können hier nicht wohl alle aufgezählt und erörtert werden. Die wichtigsten darunter sind aber die, die sich durch das Verschwinden

---

und durch die vier Punkte geht; und ebenso: Es gibt eine Fläche dritter Ordnung, die in den vier Punkten Doppelpunkte hat und von den vier Ebenen berührt wird.

Gleichungen der Form

$$|(A_1 P_1)^m \ldots (A_\mu P_\mu)^m| = 0$$

treten auf im Zusammenhang mit der Polarentheorie der Kurven, Flächen usw. der m^{ten} Ordnung.

Welches ist z. B. die Gleichung des Kreises, der ein gegebenes Dreieck zum Poldreieck hat?

einer einzelnen Invariante der Figuren A, B, C, P, Q kennzeichnen lassen und aus der Forderung entspringen, daß eine der Kurven zweiter Ordnung Nr. 3 ausartet, oder daß zwei dieser Kurven zusammenfallen.

Es wird wohl erlaubt sein, auch einmal einer späteren Darlegung etwas vorzugreifen. Ich stütze mich also auf den Satz, daß die Diskriminante einer in der Form

$$\sum_1^3 C_{ik}\cdot(A_i X)(A_k X) \tag{4}$$

dargestellten quadratischen Form der Ausdruck

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} \cdot (A_1 A_2 A_3)^2 \tag{5}$$

ist. Hiernach wird die Kurve zweiter Ordnung, die wir durch Festlegung der Wurzelwerte in den zwei ersten Vertikalreihen der Determinante (3) erhalten, dann reduzibel, wenn das Produkt

$$-4.\left\{\begin{array}{l} [\sqrt{BP}\quad \sqrt{CQ}-\sqrt{BQ}\quad \sqrt{CP}]^2 \\ \cdot[\sqrt{CP}\quad \sqrt{AQ}-\sqrt{CQ}\quad \sqrt{AP}]^2 \\ \cdot[\sqrt{AP}\quad \sqrt{BQ}-\sqrt{AQ}\quad \sqrt{BP}]^2 \end{array}\right\}.(ABC)^2 \tag{6}$$

den Wert Null annimmt. Ist nur einer der drei ersten Faktoren gleich Null, ist also z. B.

$$(BP)(CQ)-(BQ)(CP)=0,$$

so wird die Kurve (3) eine Doppelgerade und zugleich eine doppelt zählende Lösung unseres Problems, während die zwei weiteren Lösungen getrennt bleiben und nicht singulär sind. Ist aber $(ABC)=0$, so sind alle vier Lösungen in einem Paar voneinander verschiedener Geraden vereinigt. Außer diesen singulären Lösungen gibt es, wie man unschwer erkennt, auch noch Fälle, in denen Lösungen zusammenrücken, aber irreduzibel bleiben. Es sollte nur von denen die Rede sein, die sich schon durch eine einzelne Gleichung bezeichnen lassen. Diese ist dann irgend eine der Gleichungen $(AP)=0 \ldots (CQ)=0$.

In ähnlicher Weise läßt sich die Gleichung (2) behandeln. Sie liefert uns, im allgemeinen, dieselben Kegelschnitte nochmals, aber nun dargestellt als Örter von Geraden, als Kurven zweiter Klasse:

$$\boxed{\begin{array}{l} (ABC)^2.(UP)(UQ)-\left|\sqrt{(AP)(AQ)}.(BCU)\right. \\ \left.+\sqrt{(BP)(BQ)}.(CAU)+\sqrt{(CP)(CQ)}.(ABU)\right|^2=0. \end{array}} \tag{7}$$

Man wird vermuten, daß von den vier Kurven zweiter Ordnung Nr. (3) und den vier Kurven zweiter Klasse Nr. (7) immer zwei solche zusammengehören (demselben als Ort von Punkten und Geraden betrachteten Kegelschnitt entsprechen), für die entsprechende Wurzelgrößen wie

$$\sqrt{(AP)(AQ)} \quad \text{und} \quad \sqrt{AP}.\sqrt{AQ}$$

in allen drei Fällen einander gleich (oder entgegengesetzt gleich) sind. In der Tat kann das schon daraus erschlossen werden, daß das Vierseit A, B, C, U (bei nicht zu spezieller Lage dieser vier Geraden) bei einer Gruppe von 4! Kollineationen in Reihe bleibt. Bei anders beschaffener Abhängigkeit der genannten 2.3 Wurzelgrößen würde sich nämlich eine Vertauschung von A, B, C finden lassen, die zusammengehörige Kurven in nicht zusammengehörige überführte, während doch die bewirkte Zuordnung kollinear ist. Wir brauchen diesen Zusammenhang zwischen den Gleichungen (3) und (7) weiter nicht. Von einer rechnerischen Darlegung darüber, die schon nicht ganz kurz oder einfach ausfallen kann, darf daher wohl abgesehen werden.

Es bleibt uns nun noch eine von zwei zueinander korrelativen Aufgaben zu lösen, wobei die gegebenen Figuren vier Punkte und eine Gerade, oder vier Geraden und ein Punkt sind. Ich wähle das letzte dieser nur formal verschiedenen Probleme, da dann die nahe liegende Anwendung auf einen vielbehandelten Gegenstand, nämlich auf die Theorie der konfokalen sphärischen oder ebenen Kegelschnitte, nicht erst einen Wechsel der Bezeichnung erfordern wird. Um eben dieser Anwendung willen soll auch die Behandlung der vorliegenden besonderen Probleme auf eine etwas breitere Basis gestellt werden, als unbedingt nötig wäre.

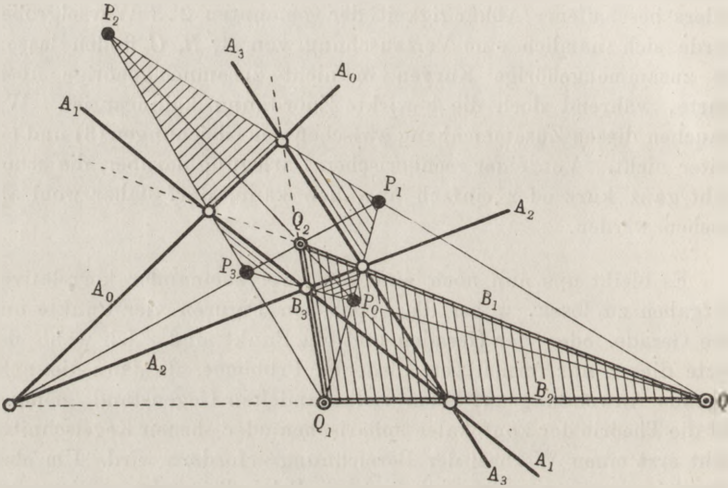
Das ebene Vierseit und sein assoziiertes Viereck.

Um das Folgende besser zu übersehen, erinnere man sich einer sehr bekannten Figur der ebenen projektiven Geometrie. Es seien drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte Q_1, Q_2, Q_3 und ihre Verbindungsgeraden B_1, B_2, B_3 gegeben, und außerdem noch eine Gerade A_0, die durch keinen der Punkte Q geht. Diese Gerade bestimmt dann, lediglich durch Konstruktion vierter harmonischer Punkte noch drei weitere, A_1, A_2, A_3, und außerdem vier Punkte P_0, P_1, P_2, P_3 (s. Fig. 2). Die vier Geraden der erhaltenen Figur können dann auch als gegeben angesehen werden, und ebenso die vier Punkte. Man hat vor sich ein ebenes Vierseit und sein assoziiertes Viereck, zwei Figuren, deren jede die andere durch zwei zueinander korrelative Konstruktionen eindeutig bestimmt[1]).

In allem Folgenden bedeutet der Index k eine der Zahlen 0, 1, 2, 3; die Indizes α, β, γ bedeuten die Zahlen 1, 2, 3 in irgend einer der **zyklischen** Anordnungen 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2.

Die Geraden B_α sind dann die „Diagonalen", die Punkte Q_α die „Diagonalpunkte" der ganzen Figur.

Fig. 2.



Die Geraden A_k und die Punkte P_k stehen in der Beziehung von „Harmonikale" und „harmonischem Pol" in bezug auf das Dreiseit B_1, B_2, B_3 oder Dreieck Q_1, Q_2, Q_3[2]).

Diese in geometrischer Kurzschrift angedeuteten geläufigen Tatsachen bilden nun einen Ausschnitt aus einem reichhaltigeren System algebraischer Abhängigkeiten, bei deren Darstellung man die Bezeichnungen so einrichten kann, daß die Reziprozität zwischen den sieben Geraden und Punkten

$$A_0, A_1, A_2, A_3; \quad B_1, B_2, B_3 \quad \text{und} \quad P_0, P_1, P_2, P_3; \quad Q_1, Q_2, Q_3$$

[1]) Vgl. G. Kohn, Sitzungsber. d. Wien. Akad. **93**, 2. Abteilung, 314 u. 349, 1886.

[2]) Es bilden z. B. A_0, P_0 zusammen mit dem Dreiseit oder Dreieck A_1, A_2, A_3, Q_1, Q_2, Q_3 die bekannte Figur der Sätze von Ceva und Menelaos.

zu vollkommenem Ausdruck kommt: An Stelle der Geraden und Punkte treten dann ihnen passend zugeordnete **Vektoren** erster und zweiter Schicht. Um nicht in einem schon etwas umfänglichen Formelsystem die Übersicht zu gefährden, stelle ich zuerst die weiterhin zu entwickelnden Definitionen und Lehrsätze so zusammen, daß immer gepaarte Formeln zusammenstehen. Der Leser wolle zunächst schnell darüber hinweglesen: Was Definition und was Lehrsatz ist, wird sogleich klar werden.

$$\begin{array}{ll}
\text{(8a)} & \text{(8b)} \\
2\mathfrak{X}_0 = -(A_1 A_2 A_3)(A_0 X), & 2\mathfrak{U}_0 = -(P_1 P_2 P_3)(P_0 U), \\
2\mathfrak{X}_1 = (A_2 A_3 A_0)(A_1 X), & 2\mathfrak{U}_1 = (P_2 P_3 P_0)(P_1 U), \\
2\mathfrak{X}_2 = -(A_3 A_0 A_1)(A_2 X), & 2\mathfrak{U}_2 = -(P_3 P_0 P_1)(P_2 U), \\
2\mathfrak{X}_3 = (A_0 A_1 A_2)(A_3 X). & 2\mathfrak{U}_3 = (P_0 P_1 P_2)(P_3 U).
\end{array}$$

$$\text{(9a)} \qquad \mathfrak{X}_0 + \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_3 = 0,$$

$$\text{(9b)} \qquad \mathfrak{U}_0 + \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2 + \mathfrak{U}_3 = 0.$$

$$\text{(10a)} \qquad \Xi_\alpha = (B_\alpha X) = \mathfrak{X}_0 + \mathfrak{X}_\alpha = -\mathfrak{X}_\beta - \mathfrak{X}_\gamma.$$

$$\text{(10b)} \qquad \Phi_\alpha = (Q_\alpha U) = \mathfrak{U}_0 + \mathfrak{U}_\alpha = -\mathfrak{U}_\beta - \mathfrak{U}_\gamma.$$

$$\begin{array}{ll}
\text{(11a)} & \text{(11b)} \\
2\mathfrak{X}_0 = \Xi_1 + \Xi_2 + \Xi_3, & 2\mathfrak{U}_0 = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3, \\
2\mathfrak{X}_1 = \Xi_1 - \Xi_2 - \Xi_3, & 2\mathfrak{U}_1 = \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3, \\
2\mathfrak{X}_2 = -\Xi_1 + \Xi_2 - \Xi_3, & 2\mathfrak{U}_2 = -\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3, \\
2\mathfrak{X}_3 = -\Xi_1 - \Xi_2 + \Xi_3. & 2\mathfrak{U}_3 = -\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3.
\end{array}$$

$$\text{(12a)} \quad 4(B_1 B_2 B_3) = (A_1 A_2 A_3)(A_2 A_3 A_0)(A_3 A_0 A_1)(A_0 A_1 A_2),$$

$$\text{(12b)} \quad 4(Q_1 Q_2 Q_3) = (P_1 P_2 P_3)(P_2 P_3 P_0)(P_3 P_0 P_1)(P_0 P_1 P_2).$$

$$\text{(13a)} \quad (B_1 B_2 B_3) . \Phi_\alpha = (B_1 B_2 B_3) . (Q_\alpha U) = (B_\beta B_\gamma U).$$

$$\text{(13b)} \quad (Q_1 Q_2 Q_3) . \Xi_\alpha = (Q_1 Q_2 Q_3) . (B_\alpha X) = (Q_\beta Q_\gamma X).$$

$$\text{(14)} \qquad (B_\alpha Q_\alpha) = 1; \quad (B_1 B_2 B_3)(Q_1 Q_2 Q_3) = 1.$$

$$\text{(15)} \quad \begin{array}{ll}
(A_1 A_2 A_3)(P_1 P_2 P_3) = 2, & (A_2 A_3 A_0)(P_2 P_3 P_0) = 2, \\
(A_3 A_0 A_1)(P_3 P_0 P_1) = 2, & (A_0 A_1 A_2)(P_0 P_1 P_2) = 2.
\end{array}$$

$$\text{(16)} \quad \begin{array}{l}
(\mathfrak{X}\mathfrak{U}) = \mathfrak{X}_0 \mathfrak{U}_0 + \mathfrak{X}_1 \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{X}_2 \mathfrak{U}_2 + \mathfrak{X}_3 \mathfrak{U}_3 \\
= (\Xi \Phi) = \Xi_1 \Phi_1 + \Xi_2 \Phi_2 + \Xi_3 \Phi_3 = (X U).
\end{array}$$

$$\text{(17a)} \qquad \mathfrak{X}_0^2 + \mathfrak{X}_1^2 + \mathfrak{X}_2^2 + \mathfrak{X}_3^2 = \Xi_1^2 + \Xi_2^2 + \Xi_3^2.$$

$$\text{(17b)} \qquad \mathfrak{U}_0^2 + \mathfrak{U}_1^2 + \mathfrak{U}_2^2 + \mathfrak{U}_3^2 = \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2.$$

Behufs Ableitung dieses Formelsystems, das, wie bemerkt, viel mehr aussagt als die zuvor in der Sprache der projektiven Geometrie gemachten Angaben, gehen wir aus von (irgend) vier Vektoren zweiter Schicht A_0, A_1, A_2, A_3, deren je drei linear-unabhängig sind. Die zu führenden Beweise sind so einfach, daß sie fast ganz unterdrückt werden können. Der Leser wird in ihnen keinerlei Schwierigkeit finden. Was sich aber nicht von selbst versteht, ist ihre Verkettung, zumal diese in den Formeln (8) ... (17) nicht zum Ausdruck kommen konnte. Es sind daher im nachfolgenden die einzelnen Fortschritte des Gedankens durch den Druck kenntlich gemacht.

Definition (8a). Hierzu ist zu bemerken, daß der anscheinend überflüssige Zahlenfaktor 2 besser nicht unterdrückt wird. Wollte man nämlich das tun, so würde man entweder keine Symmetrie zwischen den linearen Formen $(A_k X)$ und $(P_k U)$ erhalten, oder man würde (später, in Nr. 15) die Irrationalität $\sqrt{2}$ einführen müssen, deren Gebrauch sich hier vermeiden läßt.

Folgerung (9a).
Definition (10a).
Folgerungen (11a), (12a), (17a).
Definition (13a).
Folgerungen (14), (13b).
Definition (11b).
Folgerungen (9b), (10b), (16), (17b).

Die Formeln (16) enthalten die Zerlegung irgend eines Vektors X oder U in bezug auf das Vektorentripel Q_1, Q_2, Q_3 oder B_1, B_2, B_3:

$$U = \Phi_1 . B_1 + \Phi_2 . B_2 + \Phi_3 . B_3. \tag{16a}$$

$$X = \Xi_1 . Q_1 + \Xi_2 . Q_2 + \Xi_3 . Q_3. \tag{16b}$$

In den ersten dieser Formeln oder auch schon in (11a) ist dann noch enthalten die entsprechende Zerlegung der Vektoren A_k:

$$\begin{aligned} -(A_1 A_2 A_3) . A_0 &= B_1 + B_2 + B_3, \\ (A_2 A_3 A_0) . A_1 &= B_1 - B_2 - B_3, \\ -(A_3 A_0 A_1) . A_2 &= -B_1 + B_2 - B_3, \\ (A_0 A_1 A_2) . A_3 &= -B_1 - B_2 + B_3. \end{aligned} \tag{11a*}$$

Die analoge Formelgruppe

$$\begin{aligned} -(P_1 P_2 P_3) . P_0 &= Q_1 + Q_2 + Q_3, \\ (P_2 P_3 P_0) . P_1 &= Q_1 - Q_2 - Q_3, \\ -(P_3 P_0 P_1) . P_2 &= -Q_1 + Q_2 - Q_3, \\ (P_0 P_1 P_2) . P_3 &= -Q_1 - Q_2 + Q_3 \end{aligned} \tag{11b*}$$

aber setzt die noch fehlende Definition der Vektoren P_k voraus. Diese erbringen wir auf Grund einer nach Nr. (12a) und (14) nahe liegenden Vermutung.

Definition:

$$(18a)\quad \begin{aligned} -2.(A_1 A_2 A_3)^{-1}.P_0 &= Q_1 + Q_2 + Q_3, \\ 2.(A_2 A_3 A_0)^{-1}.P_1 &= Q_1 - Q_2 - Q_3, \\ -2.(A_3 A_0 A_1)^{-1}.P_2 &= -Q_1 + Q_2 - Q_3, \\ 2.(A_0 A_1 A_2)^{-1}.P_3 &= -Q_1 - Q_2 + Q_3. \end{aligned}$$

Folgerungen: (15), (12b), (8b) und (18b) — die zu (18a) korrelative Formelgruppe. — (In unserem System (8) ... (17) erschienen die Formeln (18a), (18b) darum nicht, weil sie sich dort umgekehrt als Folgerungen aus (15) und (11) darstellen.)

Hiermit ist das ganze System der behaupteten Invariantenbeziehungen begründet. Alle erklärten Vektoren hängen homogen ab von den Vektoren A_k, und zwar sind ihre Gradzahlen diese:

	(A_0)	(A_1)	(A_2)	(A_3)	
A_0	1	0	0	0	(usw.)
B_α	1	1	1	1	—
Q_α	-1	-1	-1	-1	—
P_0	-1	0	0	0	(usw.)

Natürlich kann man nun auch umgekehrt die Vektoren P_k als die gegebenen ansehen, unter Vertauschung der Gradzahlen 1 und -1.

Daß im Polarsystem des Kegelschnitts $\sum \Xi_\alpha^2 = 0$, $\sum \Phi_\alpha^2 = 0$ die Geraden A_k und die Punkte P_k einander zugeordnet sind, sieht man an den Formeln

$$(19)\quad \begin{aligned} (Q_1 A_0).Q_1 + (Q_2 A_0).Q_2 + (Q_3 A_0).Q_3 &= \frac{(P_1 P_2 P_3)}{(A_1 A_2 A_3)}\cdot P_0, \\ (B_1 P_0).B_1 + (B_2 P_0).B_2 + (B_3 P_0).B_3 &= \frac{(A_1 A_2 A_3)}{(P_1 P_2 P_3)}\cdot A_0. \end{aligned}$$

usw.

Will man nicht die vier Geraden A_k als gegeben ansehen, sondern nur eine von ihnen — A — und außerdem ein zugehöriges Diagonaldreiseit, so bestimme man zuerst (mit Hilfe der Identität A, S. 24) vier

Vektoren A', B'_1, B'_2, B'_3 so, daß $A' = B'_1 + B'_2 + B'_3$ wird. Setzt man dann, unter der Annahme $\varrho_0\, \varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3 \neq 0$,

$$(20)\qquad \begin{aligned} A_0 &= \varrho_0 \cdot (B'_1 + B'_2 + B'_3), \\ A_1 &= \varrho_1 \cdot (B'_1 - B'_2 - B'_3), \\ A_2 &= \varrho_2 \cdot (-B'_1 + B'_2 - B'_3), \\ A_3 &= \varrho_3 \cdot (-B'_1 - B'_2 + B'_3), \end{aligned}$$

so hat man damit, auf alle möglichen Arten, vier Vektoren A_k gefunden, die zu der gegebenen Figur gehören. Man erhält $A_0 = \varrho_0 \cdot A'$ und

$$B_\alpha = 4 \cdot \varrho_0\, \varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3 \cdot (B'_1\, B'_2\, B'_3) \cdot B'_\alpha.$$

Wir betrachten jetzt das Büschel von Kurven zweiter Klasse[1]) denen die vier Geraden A_k angehören. Die reduzibelen Kurven dieses Büschels sind

$$(A_0\, A_1\, U)(A_2\, A_3\, U) = 0, \quad (A_0\, A_2\, U)(A_3\, A_1\, U) = 0, \\ (A_0\, A_3\, U)(A_1\, A_2\, U) = 0.$$

Mit ihrer Hilfe lassen sich alle übrigen in der Form

$$(21)\qquad \sum e_\alpha (A_0\, A_\alpha\, U)(A_\beta\, A_\gamma\, U) = 0$$

darstellen, wobei wegen der Identität

$$(22)\qquad \begin{aligned} &(A_0\, A_1\, U)(A_2\, A_3\, U) + (A_0\, A_2\, U)(A_3\, A_1\, U) \\ &\quad + (A_0\, A_3\, U)(A_1\, A_2\, U) = 0 \end{aligned}$$

noch

$$(23)\qquad e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

angenommen werden darf. Nun ist

$$(A_0\, A_\alpha\, U) = -\frac{2\,(B_1\, B_2\, B_3)}{(A_\alpha\, A_\beta\, A_\gamma)(A_\beta\, A_\gamma\, A_0)} \cdot \{(Q_\beta\, U) - (Q_\gamma\, U)\},$$

$$(A_\beta\, A_\gamma\, U) = -\frac{2\,(B_1\, B_2\, B_3)}{(A_\gamma\, A_0\, A_\alpha)(A_0\, A_\alpha\, A_\beta)} \{(Q_\beta\, U) + (Q_\gamma\, U)\},$$

also nach Nr. (10b) und (12a):

$$(24)\qquad (A_0\, A_\alpha\, U)(A_\beta\, A_\gamma\, U) = (B_1\, B_2\, B_3) \cdot \{\Phi_\beta - \Phi_\gamma\} \cdot \{\Phi_\beta + \Phi_\gamma\}.$$

Demnach läßt sich die quadratische Form auf der linken Seite von (21) auch so schreiben:

$$(25)\qquad \begin{aligned} \sum e_\alpha (A_0\, A_\alpha\, U)(A_\beta\, A_\gamma\, U) &= -(B_1\, B_2\, B_3) \cdot \sum (e_\beta - e_\gamma)\, \Phi_\alpha^2 \\ &= -(B_1\, B_2\, B_3) \cdot \sum (e_\beta - e_\gamma)(\mathfrak{U}_0\, \mathfrak{U}_\alpha + \mathfrak{U}_\beta\, \mathfrak{U}_\gamma). \end{aligned}$$

---

[1]) Der übliche Kunstausdruck (statt Büschel) ist Schaar. Wozu zwei Worte, wenn eines genügt?

Wir wollen voraussetzen, daß die Gleichung (21) eine irreduzible Kurve zweiter Klasse darstellt, daß also

$$(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2) \neq 0 \tag{26}$$

ist. Dann gehört zu der Form (25) eine zweite, mit ihr gegenüber Transformationen der Gruppe Γ invariant verbundene, die an Stelle der Vektoren zweiter Schicht solche erster Schicht enthält und, gleich Null gesetzt, denselben Kegelschnitt als Ort von Punkten darstellt, die sogenannte reziproke Form[1]), die wir mit Hilfe unserer verschiedenen Sorten von Koordinaten auf mancherlei Art schreiben können:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{(B_1 B_2 B_3)}\sum\frac{\Xi_\alpha^2}{(e_\beta - e_\gamma)} &= \frac{\sum (e_\beta - e_\gamma)^2(\mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_\alpha + \mathfrak{X}_\beta\mathfrak{X}_\gamma)}{(B_1 B_2 B_3).(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)} \\
&= \frac{\sum\{(e_\beta - e_\gamma)^2\mathfrak{X}_\alpha^2 - 2(e_\gamma - e_\alpha)(e_\alpha - e_\beta)\mathfrak{X}_\beta\mathfrak{X}_\gamma\}}{(B_1 B_2 B_3).(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)} \\
&= -\frac{1}{(B_1 B_2 B_3).(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)} \\
&\quad .(-\sqrt{e_2 - e_3}\sqrt{\mathfrak{X}_1} - \sqrt{e_3 - e_1}\sqrt{\mathfrak{X}_2} - \sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{\mathfrak{X}_3}) \\
&\quad .(-\sqrt{e_2 - e_3}\sqrt{\mathfrak{X}_1} + \sqrt{e_3 - e_1}\sqrt{\mathfrak{X}_2} + \sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{\mathfrak{X}_3}) \\
&\quad .(\sqrt{e_2 - e_3}\sqrt{\mathfrak{X}_1} - \sqrt{e_3 - e_1}\sqrt{\mathfrak{X}_2} + \sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{\mathfrak{X}_3}) \\
&\quad .(\sqrt{e_2 - e_3}\sqrt{\mathfrak{X}_1} + \sqrt{e_3 - e_1}\sqrt{\mathfrak{X}_2} - \sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{\mathfrak{X}_3}).
\end{aligned} \tag{27}$$

Die letzte, irrationale, Gestalt unseres Ausdruckes ist eine unter vier auf gleiche Art gebildeten; sie ergibt sich aus der vorletzten und aus Nr. (9a) durch Elimination von $\mathfrak{X}_0$.

Nunmehr lassen sich die Kurven unseres Büschels finden, die durch einen vorgeschriebenen Punkt X (oder $\mathfrak{X}$ oder Ξ) gehen.

Wir erhalten sie durch Berechnung der Verhältniswerte

$$e_1 : e_2 : e_3 \quad \text{oder} \quad e_2 - e_3 : e_3 - e_1 : e_1 - e_2$$

aus den Gleichungen $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ und $(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)\Xi_1^2 + (e_1 - e_2)(e_2 - e_3)\Xi_2^2 + (e_2 - e_3)(e_3 - e_1)\Xi_3^2 = 0$, also durch

[1]) Dieser Begriff wird später erklärt werden. Das, worauf es hier ankommt, ist auch ohne solche Erklärung verständlich.

Auflösung einer quadratischen Gleichung. Setzen wir zur Abkürzung noch

$$
(28)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{R}(X) &= \sqrt{\mathfrak{X}_0}\,\sqrt{\mathfrak{X}_1}\,\sqrt{\mathfrak{X}_2}\,\sqrt{\mathfrak{X}_3} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{\left\{\begin{array}{c}(A_1 A_2 A_3)(A_2 A_3 A_0)(A_3 A_0 A_1)(A_0 A_1 A_2) \\ \cdot (A_0 X)(A_1 X)(A_2 X)(A_3 X)\end{array}\right\}}, \end{aligned}
$$

so wird

$$
(29)\qquad \boxed{\begin{aligned} & e_2 - e_3 : e_3 - e_1 : e_1 - e_2 \\ &= \Xi_1^2 : \mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2 - 2\mathfrak{R} : \mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_1 + 2\mathfrak{R} \\ &= \mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2 + 2\mathfrak{R} : \Xi_2^2 : \mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3 - 2\mathfrak{R} \\ &= \mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_1 - 2\mathfrak{R} : \mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3 + 2\mathfrak{R} : \Xi_3^2. \end{aligned}}
$$

Es haben sich also für die Größen $e_\alpha = -\frac{1}{3}\{(e_\gamma - e_\alpha) - (e_\alpha - e_\beta)\}$ drei Proportionen ergeben statt einer, die man wohl erwartet haben würde. Erst alle drei Proportionen zusammen stellen die erschöpfende Lösung unserer Aufgabe dar: Eines und sogar zwei dieser Systeme von Verhältnisgrößen können illusorisch werden, in der Form $0:0:0$ erscheinen, nicht aber alle drei zugleich. Ist z. B. $\Xi_1 = 0$, so folgt, daß entweder alle Elemente in der ersten Horizontalreihe des quadratischen Schemas (29) oder alle Elemente der ersten Vertikalreihe den Wert Null haben müssen. Eine der zwei dann rational bestimmbaren Lösungen ist die zerfallende Kurve $(A_0 A_1 U)(A_2 A_3 U) = 0$, während die andere noch irgend eine Kurve zweiter Klasse des betrachteten Büschels sein kann. Zu beachten ist noch, daß die durch (28) und (29) gelieferte Lösung auch noch in einigen der durch unsere Voraussetzungen ausgeschlossenen Grenzfälle brauchbar bleibt. Man sieht dem Ausdruck (28) an, wie die Fälle zu deuten sind, in denen die zwei Lösungen unserer Aufgabe zusammenfallen.

Aus (29) ergeben sich noch einige beachtenswerte Folgerungen. Wir können nämlich nunmehr noch weitere Wurzelgrößen erklären durch die Proportionen

$$
(30)\qquad \boxed{\begin{aligned} & \sqrt{e_2 - e_3} : \sqrt{e_3 - e_1} : \sqrt{e_1 - e_2} \\ &= \Xi_1 : \sqrt{\mathfrak{X}_1}\sqrt{\mathfrak{X}_2} - \sqrt{\mathfrak{X}_0}\sqrt{\mathfrak{X}_3} : \sqrt{\mathfrak{X}_3}\sqrt{\mathfrak{X}_1} + \sqrt{\mathfrak{X}_0}\sqrt{\mathfrak{X}_2} \\ &= \sqrt{\mathfrak{X}_1}\sqrt{\mathfrak{X}_2} + \sqrt{\mathfrak{X}_0}\sqrt{\mathfrak{X}_3} : \Xi_2 : \sqrt{\mathfrak{X}_2}\sqrt{\mathfrak{X}_3} - \sqrt{\mathfrak{X}_0}\sqrt{\mathfrak{X}_1} \\ &= \sqrt{\mathfrak{X}_3}\sqrt{\mathfrak{X}_1} - \sqrt{\mathfrak{X}_0}\sqrt{\mathfrak{X}_2} : \sqrt{\mathfrak{X}_2}\sqrt{\mathfrak{X}_3} + \sqrt{\mathfrak{X}_0}\sqrt{\mathfrak{X}_1} : \Xi_3. \end{aligned}}
$$

Diese Wurzelwerte genügen dann den Gleichungen

$$(31)\quad \boxed{\begin{array}{l} \quad * \quad - \sqrt{e_2 - e_3}\,\sqrt{\mathfrak{X}_1} - \sqrt{e_3 - e_1}\,\sqrt{\mathfrak{X}_2} - \sqrt{e_1 - e_2}\,\sqrt{\mathfrak{X}_3} = 0, \\ \sqrt{e_2 - e_3}\,\sqrt{\mathfrak{X}_0} \quad * \quad + \sqrt{e_1 - e_2}\,\sqrt{\mathfrak{X}_2} - \sqrt{e_3 - e_1}\,\sqrt{\mathfrak{X}_3} = 0, \\ \sqrt{e_3 - e_1}\,\sqrt{\mathfrak{X}_0} - \sqrt{e_1 - e_2}\,\sqrt{\mathfrak{X}_1} \quad * \quad + \sqrt{e_2 - e_3}\,\sqrt{\mathfrak{X}_3} = 0, \\ \sqrt{e_1 - e_2}\,\sqrt{\mathfrak{X}_0} + \sqrt{e_3 - e_1}\,\sqrt{\mathfrak{X}_1} - \sqrt{e_2 - e_3}\,\sqrt{\mathfrak{X}_2} \quad * \quad = 0. \end{array}}$$

[Siehe Nr. (27).] Ist Y ein Punkt, der ebenfalls dem Kegelschnitt $e_1 : e_2 : e_3$ angehört, so lassen sich die entsprechenden Wurzelwerte $\sqrt{\mathfrak{Y}_k}$ immer so wählen, daß die zu (31) oder (30) analogen Gleichungen zu denselben Verhältniszahlen $\sqrt{e_\mu - e_\nu}$ führen. Damit erhält man das weitere Gleichungssystem:

$$(32)\quad \boxed{\begin{array}{l} \sqrt{\mathfrak{X}_0}\,\sqrt{\mathfrak{Y}_0} + \sqrt{\mathfrak{X}_1}\,\sqrt{\mathfrak{Y}_1} + \sqrt{\mathfrak{X}_2}\,\sqrt{\mathfrak{Y}_2} + \sqrt{\mathfrak{X}_3}\,\sqrt{\mathfrak{Y}_3} = 0, \\ \sqrt{\mathfrak{X}_0}\,\sqrt{\mathfrak{Y}_1} - \sqrt{\mathfrak{X}_1}\,\sqrt{\mathfrak{Y}_0} + \sqrt{\mathfrak{X}_2}\,\sqrt{\mathfrak{Y}_3} - \sqrt{\mathfrak{X}_3}\,\sqrt{\mathfrak{Y}_2} = 0, \\ \sqrt{\mathfrak{X}_0}\,\sqrt{\mathfrak{Y}_2} - \sqrt{\mathfrak{X}_2}\,\sqrt{\mathfrak{Y}_0} + \sqrt{\mathfrak{X}_3}\,\sqrt{\mathfrak{Y}_1} - \sqrt{\mathfrak{X}_1}\,\sqrt{\mathfrak{Y}_3} = 0, \\ \sqrt{\mathfrak{X}_0}\,\sqrt{\mathfrak{Y}_3} - \sqrt{\mathfrak{X}_3}\,\sqrt{\mathfrak{Y}_0} + \sqrt{\mathfrak{X}_1}\,\sqrt{\mathfrak{Y}_2} - \sqrt{\mathfrak{X}_2}\,\sqrt{\mathfrak{Y}_1} = 0. \end{array}}$$

Zuerst nämlich kommt man zu den drei letzten Gleichungen unter (32) durch Elimination der Größen $\sqrt{e_\mu - e_\nu}$ aus den zweierlei Gleichungen (31); eine weitere Folge ist dann die erste Gleichung (32).

Die nunmehr gefundenen Gleichungen (32) liefern als besondere Fälle auf vier verschiedene Arten die Gleichungen (31), oder doch (unmittelbar) solche, die deren Struktur haben: Man lasse den Punkt Y auf irgend eine der Geraden A_k rücken. Wählt man z. B. die Gerade A_0, so erhält man aus (30) für die Verhältnisgrößen $\sqrt{\mathfrak{Y}_1} : \sqrt{\mathfrak{Y}_2} : \sqrt{\mathfrak{Y}_3}$ die Werte $\sqrt{e_2 - e_3} : \sqrt{e_3 - e_1} : \sqrt{e_1 - e_2}$, während $\sqrt{\mathfrak{Y}_0} = 0$ ist.

Gehören die Punkte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ demselben Kegelschnitt des Büschels (21) an, so hat der Schnittpunkt ihrer Tangenten (sofern er bestimmt ist) die überzähligen Koordinaten

$$(33)\qquad \boxed{\mathfrak{Z}_k = \sqrt{\mathfrak{X}_k}\,\sqrt{\mathfrak{Y}_k}} \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Hält man nämlich etwa den Punkt $\mathfrak{Y}$ fest, während $\mathfrak{X}$ variiert, so entsteht aus (31) durch die Substitution $\sqrt{\mathfrak{X}_k} = \mathfrak{Z}_k : \sqrt{\mathfrak{Y}_k}$ ein System von linearen Gleichungen für die Größe $\mathfrak{Z}_k$, und diese Gleichungen, unter denen zwei linear unabhängige sind, ziehen nach sich die Gleichung $\sum \mathfrak{Z}_k = 0$ (Nr. 32). Der Ort der Punkte $\mathfrak{Z}$ ist also, sofern er überhaupt bestimmt ist, eine Gerade. Diese ist Tangente des betrachteten Kegelschnittes, und zwar Tangente im Punkte $\mathfrak{Y}$, weil die Substitution der Werte $\mathfrak{Z}_\lambda = \sqrt{\mathfrak{X}_\lambda}\sqrt{\mathfrak{Y}_\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, 3)$ in den Ausdruck (27) ihn nur dann zum Verschwinden bringt, wenn $\sqrt{\mathfrak{X}_1} : \sqrt{\mathfrak{X}_2} : \sqrt{\mathfrak{X}_3} = \sqrt{\mathfrak{Y}_1} : \sqrt{\mathfrak{Y}_2} : \sqrt{\mathfrak{Y}_3}$ ist.

Interesse hat wohl, daß man das Gleichungssystem (32) oder ein von ihm nur ganz unwesentlich verschiedenes auch von der Gleichung (2) aus gewinnen kann. Nach dieser und der Definition (8 a) der Größen $\mathfrak{X}_k$ hat man nämlich, wenn (vorübergehend)

$$\mathfrak{x}_k = \sqrt{\mathfrak{X}_k},\ \mathfrak{y}_k = \sqrt{\mathfrak{Y}_k} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_0^2 + \mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_3^2 &= 0, \\ \mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0 + \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2 + \mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_3 &= 0, \\ \mathfrak{y}_0^2 + \mathfrak{y}_1^2 + \mathfrak{y}_2^2 + \mathfrak{y}_3^2 &= 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Es ist dann eine aus der Theorie der Flächen zweiter Ordnung geläufige, leicht aus den Gleichungen (34) abzuleitende Tatsache, daß außer diesen Gleichungen noch das eine oder das andere von zwei Gleichungstripeln

$$(\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_\alpha - \mathfrak{x}_\alpha\mathfrak{y}_0) \pm (\mathfrak{x}_\beta\mathfrak{y}_\gamma - \mathfrak{x}_\gamma\mathfrak{y}_\beta) = 0$$

bestehen muß. Da beide Systeme durch einen Vorzeichenwechsel von $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{y}_0$ ineinander übergehen und wir diese Wurzelwerte in unserer Gewalt haben, so können wir uns für die Geltung des oberen Zeichens entscheiden. Wir erhalten dann eben die Gleichungen (32).

Nimmt man noch einen dritten Punkt Z oder $\mathfrak{Z}$ desselben Kegelschnittes $e_1 : e_2 : e_3$ hinzu, so liefern die Gleichungen (31) auch noch den durch die Formel (1) ausgedrückten Lehrsatz: Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\mathfrak{X}_0} & \sqrt{\mathfrak{X}_1} & \sqrt{\mathfrak{X}_2} & \sqrt{\mathfrak{X}_3} \\ \sqrt{\mathfrak{Y}_0} & \sqrt{\mathfrak{Y}_1} & \sqrt{\mathfrak{Y}_2} & \sqrt{\mathfrak{Y}_2} \\ \sqrt{\mathfrak{Z}_0} & \sqrt{\mathfrak{Z}_1} & \sqrt{\mathfrak{Z}_2} & \sqrt{\mathfrak{Z}_3} \end{pmatrix}$$

hat höchstens (und in der Regel) den Rang 2.

Anhang: Einführung elliptischer Funktionen.

Die zuletzt vorgeführten algebraischen Formeln haben einen sehr einfachen Zusammenhang mit der Theorie der elliptischen Funktionen, der zwar dem Grundgedanken nach längst bekannt ist, in seiner feineren Ausgestaltung aber meines Wissens nicht, und hier jedenfalls in neuem Lichte erscheint. Wenn es nun auch der Zweck der vorliegenden Schrift verbietet, auf solche Dinge ausführlich einzugehen, so wird man es doch wohl für erlaubt halten, daß anhangsweise zur Sprache gebracht wird, worauf der erwähnte Zusammenhang beruht, schon darum, weil dadurch die angestellte algebraische Untersuchung erheblich an Interesse gewinnen muß.

Ich muß hier voraussetzen, daß dem Leser wenigstens in den Grundzügen die Gestaltung geläufig ist, die Weierstrass der Theorie der elliptischen Funktionen verliehen hat, und für die charakteristisch ist die zentrale Stellung der Funktionen $\wp u$, $\wp' u$ und σu[1]). Ich bediene mich der üblichen Bezeichnungen, ersetze jedoch die Funktionen $\mathfrak{S} u$, $\mathfrak{S}_1 u$, $\mathfrak{S}_2 u$, $\mathfrak{S}_3 u$ durch Funktionen $\Theta_0 u \ldots \Theta_3 u$, die wie folgt erklärt sind[2]):

$$\begin{gathered}\Theta_0 u = \sqrt[4]{e_2 - e_3}\,\sqrt[4]{e_3 - e_1}\,\sqrt[4]{e_1 - e_2}\,.\,\sigma u,\\ \Theta_1 u = \sqrt[4]{e_2 - e_3}\,.\,\mathfrak{S}_1 u, \quad \Theta_2 u = \sqrt[4]{e_3 - e_1}\,.\,\mathfrak{S}_2 u,\\ \Theta_3 u = \sqrt[4]{e_1 - e_2}\,.\,\mathfrak{S}_3 u.\end{gathered} \tag{35}$$

Hiernach wird

$$\Theta_\alpha = \Theta_\alpha(0) = \sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma}, \quad \Theta'(0) = \Theta_1\,.\,\Theta_2\,.\,\Theta_3. \tag{36}$$

Die Argumente solcher Θ-Funktionen werde ich hier — entsprechend den Bezeichnungen X, $\mathfrak{X}$, Ξ und Y, $\mathfrak{Y}$, H — durch Zeichen ξ, η darstellen. Es bestehen dann unter anderem die Gleichungen

$$\begin{aligned}\Theta_0^2\xi\,\Theta_0^2\eta + \Theta_1^2\xi\,\Theta_1^2\eta + \Theta_2^2\xi\,\Theta_2^2\eta + \Theta_3^2\xi\,\Theta_3^2\eta &= 0,\\ \Theta_0^2\xi\,\Theta_1^2\eta - \Theta_1^2\xi\,\Theta_0^2\eta + \Theta_2^2\xi\,\Theta_3^2\eta - \Theta_3^2\xi\,\Theta_2^2\eta &= 0,\\ \Theta_0^2\xi\,\Theta_2^2\eta - \Theta_2^2\xi\,\Theta_0^2\eta + \Theta_3^2\xi\,\Theta_1^2\eta - \Theta_1^2\xi\,\Theta_3^2\eta &= 0,\\ \Theta_0^2\xi\,\Theta_3^2\eta - \Theta_3^2\xi\,\Theta_0^2\eta + \Theta_1^2\xi\,\Theta_2^2\eta - \Theta_2^2\xi\,\Theta_1^2\eta &= 0.\end{aligned} \tag{37}$$

Vergleichen wir nun diese Formeln mit den unter (32) angegebenen, und bedenken wir, wie in diesen die Größen $\sqrt{\mathfrak{x}_k}$ vom Vektor $\mathfrak{X}$ abhängen, daß sie also proportional geändert werden können, so bieten sich uns die Substitutionen

$$\boxed{\sqrt{\mathfrak{x}_k} = \Theta_k^2\,\xi, \quad \sqrt{\mathfrak{y}_k} = \Theta_k^2\,\eta} \tag{38}$$

dar, die nach (33) die Erklärung weiterer Wurzelgrößen durch die Formel

$$\boxed{\sqrt{\mathfrak{z}_k} = \Theta_k\,\xi\,\Theta_k\,\eta} \tag{39}$$

nahelegen. Man berechnet dann ohne weiteres

$$\boxed{\begin{gathered}\Xi_\alpha = \Theta_\alpha^3\,.\,\Theta_\alpha(2\,\xi), \quad H_\alpha = \Theta_\alpha^3\,.\,\Theta_\alpha(2\,\eta),\\ Z_\alpha = \Theta_\alpha^2\,.\,\Theta_\alpha(\xi + \eta)\,\Theta_\alpha(\xi - \eta).\end{gathered}} \tag{40}$$

---

[1]) Siehe J. Tannery et J. Molk, Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. 1893—1902 (I, 1893; II, 1898). R. Fricke, Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen. I, 1916; II, 1922. (Band III, der die Anwendungen enthalten soll, ist noch nicht erschienen.)

[2]) Näheres darüber findet man in des Verfassers Trigonometrie, S. 188 u. f., 1893 und im American Journal of Mathematics **16**, 156, 1894.

Die letzte dieser Formeln, die die vorhergehenden umfaßt, erweist sich dann noch als eine unter vier (viermal drei) in gewissem Sinne gleichberechtigten:

$$
(41)\quad \boxed{\begin{aligned}
&\sqrt{\mathfrak{X}_0}\sqrt{\mathfrak{Y}_0} + \sqrt{\mathfrak{X}_\alpha}\sqrt{\mathfrak{Y}_\alpha} = -\sqrt{\mathfrak{X}_\beta}\sqrt{\mathfrak{Y}_\beta} - \sqrt{\mathfrak{X}_\gamma}\sqrt{\mathfrak{Y}_\gamma}\\
&\quad = Z_\alpha \qquad = \Theta_\alpha^2 . \Theta_\alpha(\xi+\eta)\,\Theta_\alpha(\xi-\eta),\\
&\sqrt{\mathfrak{X}_0}\sqrt{\mathfrak{Y}_\alpha} - \sqrt{\mathfrak{X}_\alpha}\sqrt{\mathfrak{Y}_\alpha} = -\sqrt{\mathfrak{X}_\beta}\sqrt{\mathfrak{Y}_\gamma} + \sqrt{\mathfrak{X}_\gamma}\sqrt{\mathfrak{Y}_\beta}\\
&\quad = \sqrt{\Xi_\alpha H_\alpha - Z_\alpha^2} \;= \Theta_\alpha^2 . \Theta_0(\xi+\eta)\,\Theta_0(\xi-\eta),\\
&\sqrt{\mathfrak{X}_\beta}\sqrt{\mathfrak{Y}_\gamma} + \sqrt{\mathfrak{X}_0}\sqrt{\mathfrak{Y}_\alpha} = \quad \sqrt{\mathfrak{X}_\gamma}\sqrt{\mathfrak{Y}_\beta} + \sqrt{\mathfrak{X}_\alpha}\sqrt{\mathfrak{Y}_0}\\
&\quad = \frac{\sqrt{e_\gamma - e_\alpha}}{\sqrt{e_\alpha - e_\beta}}\cdot Z_\gamma \quad = \Theta_\beta^2 . \Theta_\gamma(\xi+\eta)\,\Theta_\gamma(\xi-\eta),\\
&\sqrt{\mathfrak{X}_\beta}\sqrt{\mathfrak{Y}_\gamma} - \sqrt{\mathfrak{X}_\alpha}\sqrt{\mathfrak{Y}_0} = \quad \sqrt{\mathfrak{X}_\gamma}\sqrt{\mathfrak{Y}_\beta} - \sqrt{\mathfrak{X}_0}\sqrt{\mathfrak{Y}_\alpha}\\
&\quad = \frac{\sqrt{e_\alpha - e_\beta}}{\sqrt{e_\gamma - e_\alpha}}\cdot Z_\beta \quad = \Theta_\gamma^2 . \Theta_\beta(\xi+\gamma)\,\Theta_\beta(\xi-\gamma).
\end{aligned}}
$$

Die zweite dieser Formeln enthält zugleich die Erklärung einer bisher noch nicht vorgekommenen Wurzelgröße; alle vier sind, soweit sie algebraisch erklärte Größen verbinden, Folgen der Gleichungen (10 a), (31), (32), (33).

Aus der zweiten Formel und aus Nr. (40) folgt dann noch, daß man eine Wurzelgröße Z_0, die mit der Größe Z_α durch die Gleichung

$$
(42)\qquad Z_0^2 + \frac{Z_1^2}{e_2 - e_3} + \frac{Z_2^2}{e_3 - e_1} + \frac{Z_3^2}{e_1 - e_2} = 0
$$

verbunden ist, wie folgt eindeutig erklären kann:

$$
(43)\quad \boxed{\begin{aligned}
Z_0 = \sqrt{\frac{1}{2}\sum \frac{\Xi_\alpha H_\alpha}{e_\beta - e_\gamma}} = \sqrt{-\sum \frac{Z_\alpha^2}{e_\beta - e_\gamma}}\\
= \Theta_0(\xi+\gamma)\,\Theta_0(\xi-\eta).
\end{aligned}}
$$

Es folgt, wenn $\Xi_\alpha = H_\alpha = Z_\alpha$ wird,

$$
(44)\qquad \Xi_0 = 0, \quad H_0 = 0.
$$

Verwandten Inhaltes mit (43) sind die Erklärungen

$$
(45)\quad \boxed{\begin{aligned}
2\sqrt{\Re(X)} &= \Theta_1\Theta_2\Theta_3 . \Theta_0(2\xi),\\
2\sqrt{\Re(Y)} &= \Theta_1\Theta_2\Theta_3 . \Theta_0(2\eta).
\end{aligned}}
$$

Endlich ergibt sich noch

$$
(46)\quad \boxed{\begin{aligned}
\sqrt{\mathfrak{Z}_\beta}\sqrt{\mathfrak{Z}_\gamma} + \sqrt{\mathfrak{Z}_0}\sqrt{\mathfrak{Z}_\alpha} &= \Theta_\beta\Theta_\gamma . \Theta_\gamma(\xi+\eta)\,\Theta_\beta(\xi-\eta),\\
\sqrt{\mathfrak{Z}_\beta}\sqrt{\mathfrak{Z}_\gamma} - \sqrt{\mathfrak{Z}_0}\sqrt{\mathfrak{Z}_\alpha} &= \Theta_\beta\Theta_\gamma . \Theta_\beta(\xi+\eta)\,\Theta_\gamma(\xi-\eta),
\end{aligned}}
$$

worin, wie schon in Nr. (41), die entsprechend gebildeten Ausdrücke enthalten sind, in denen $\mathfrak{X}$ oder $\mathfrak{Y}$ an Stelle von $\mathfrak{Z}$ tritt. Außerdem folgt noch

$$\mathfrak{Z}_\beta \mathfrak{Z}_\gamma - \mathfrak{Z}_0 \mathfrak{Z}_\alpha = Z_\beta Z_\gamma, \tag{47}$$

was wieder eine auch durch algebraische Rechnung leicht abzuleitende Identität ist[1]).

Die entwickelten Formeln enthalten eine Darstellung der Verhältniskoordinaten Z_α oder $\mathfrak{Z}_k$ eines Punktes Z der Ebene durch eindeutige transzendente, nämlich elliptische, Funktionen zweier Parameter ξ, η oder zweier Parameter

$$x = \xi + \eta, \quad y = \xi - \eta, \tag{48}$$

die mithin ebenfalls als eine Art von Punktkoordinaten gelten können. Ausgezeichnet ist dabei ein bestimmter übrigens ganz beliebiger irreduzibler Kegelschnitt unseres Büschels, den wir dessen Hauptkegelschnitt nennen wollen, eben der, dessen Gleichung wir in verschiedenen Formen zuvor aufgestellt hatten [Nr. (21), (25), (27)]. Setzt man in Nr. (39) und Nr. (40) $\xi = \eta$, so erhält man die Punkte dieses Kegelschnittes, deren einer mit ξ und einer mit η bezeichnet worden ist. Der Punkt Z oder $\mathfrak{Z}$ ist dann, wie gesagt, der Schnittpunkt der Tangenten des Hauptkegelschnittes in den Punkten Ξ, H oder $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, denen die Parameter ξ und η zugehören. Läßt man also in unseren Formeln den Parameter ξ oder η variieren, während man den Parameter η oder ξ festhält, so gelangt man immer zu den Punkten einer Geraden, die dem Hauptkegelschnitt (als Tangente) angehört. Unter diesen Tangenten befinden sich dann die vier Basislinien A_k unseres Büschels, entsprechend Parameterwerten, die modd. $(2\,\omega_1,\ 2\,\omega_2,\ 2\,\omega_3)$ kongruent sind zu 0, ω_1, ω_2, ω_3, dem vollständigen System der halben Perioden, zu dem als imprimitive halbe Periode die Null zu rechnen ist. Im Koordinatensystem Z, Φ oder $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{U}$ erhalten dann nach Nr. (11) die Geraden A_k sehr einfach gebildete Koordinaten. Nutzt man die Willkür, die man in der Wahl der zugehörigen Vektoren hat, in zweckmäßiger Weise aus, setzt man nämlich

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\,.(A_0 X) &= X_1 + X_2 + X_3,\\ \sqrt{2}\,.(A_1 X) &= X_1 - X_2 - X_3,\\ \sqrt{2}\,.(A_2 X) &= -X_1 + X_2 - X_3,\\ \sqrt{2}\,.(A_3 X) &= -X_1 - X_2 + X_3,\end{aligned} \tag{49}$$

so fallen die X-Koordinaten mit den Ξ-Koordinaten zusammen, es wird $X_\alpha = \Xi_\alpha$, kürzer

$$\boxed{X = \Xi.} \tag{50}$$

---

[1]) Die aufgezählten Formeln bilden ein in gewissem Sinne vollständiges System. Eine Erweiterung davon würde sich ergeben, wenn wir auch noch die Wurzelgrößen $\sqrt[4]{\mathfrak{X}_k}$, $\sqrt[4]{\mathfrak{Y}_k}$ einführen wollten, die im Texte nur zu Produkten $\sqrt{\mathfrak{Z}_k}$ verbunden vorkommen.

Ersetzt man die Parameter ξ, η durch die Parameter x, y [Nr. (48)], schreibt man also die Gleichungen (38) bis (40) so:

$$\sqrt{\mathfrak{X}_k} = \Theta_k^2 \frac{x+y}{2}, \quad \sqrt{\mathfrak{Y}_k} = \Theta_k^2 \frac{x-y}{2}, \tag{51}$$

$$\sqrt{\mathfrak{Z}_k} = \Theta_k \frac{x+y}{2} \Theta_k \frac{x-y}{2}, \tag{52}$$

$$\begin{gathered} \Xi_\alpha = \Theta_\alpha^3 . \Theta_\alpha(x+y), \quad H_\alpha = \Theta_\alpha^3 . \Theta_\alpha(x-y), \\ Z_\alpha = \Theta_\alpha^2 . \Theta_\alpha x \, \Theta_\alpha y, \end{gathered} \tag{53}$$

und läßt man dann x oder y variieren, so wird der Ort der Punkte Z oder $\mathfrak{Z}$ ein Kegelschnitt unseres Büschels, dessen Gleichung im ersten Falle ist

$$\frac{Z_1^2}{\Theta_1^2 . \Theta_1^2 y} + \frac{Z_2^2}{\Theta_2^2 . \Theta_2^2 y} + \frac{Z_3^2}{\Theta_3^2 . \Theta_3^2 y} = 0, \tag{54, y}$$

und im zweiten

$$\frac{Z_1^2}{\Theta_1^2 . \Theta_1^2 x} + \frac{Z_2^2}{\Theta_2^2 . \Theta_2^2 x} + \frac{Z_3^2}{\Theta_3^2 . \Theta_3^2 x} = 0. \tag{54, x}$$

Sind x und y weder einer primitiven halben Periode kongruent, noch kongruent zur Null, noch auch zueinander kongruent, so haben wir in (54) die Punktgleichungen von zwei irreduzibelen Kegelschnitten unseres Büschels vor uns, die voneinander und vom Hauptkegelschnitt verschieden sind. Der durch (53) und (52) gegebene Punkt Z oder $\mathfrak{Z}$ ist dann einer der vier Schnittpunkte dieser beiden Kurven, und die zugehörigen Punkte Ξ oder $\mathfrak{X}$ und H oder $\mathfrak{Y}$ sind dann die Berührungspunkte der beiden Tangenten, die vom Punkte Z an den Hauptkegelschnitt gehen. Die genannten vier Punkte werden also hier einzeln dargestellt; aus irgend einem von ihnen ergeben sich die drei übrigen durch Addition einer der Perioden $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$ zu x und y, oder durch Vorzeichenwechsel von zweien der Z-Koordinaten, oder endlich durch je eine der drei Doppelvertauschungen der Größen $\mathfrak{Z}_0$, $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$, $\mathfrak{Z}_3$. Die Tangente im Punkte x an den Kegelschnitt (y) hat Koordinaten Φ, die man mit den Größen

$$\Phi_\alpha = \frac{\Theta_\alpha x}{\Theta_\alpha y} \tag{55, y}$$

identifizieren kann; und ebenso hat die Tangente im Punkte y an den Kegelschnitt (x) die Koordinaten

$$\Xi_\alpha = \frac{\Theta_\alpha y}{\Theta_\alpha x}. \tag{55, x}$$

Beide sind (wie bekannt) konjugiert in bezug auf alle Kegelschnitte unseres Büschels; es wird für ein beliebiges z

$$\sum \Theta_\alpha^2 . \Theta_\alpha^2 z . \Phi_\alpha \Xi_\alpha = 0, \tag{56}$$

die beiden Kegelschnitte (54) schneiden sich also rechtwinklig in bezug auf jede Nicht-Euklidische oder Euklidische Maßbestimmung, die man auf einen irreduziblen oder zerfallenden Kegelschnitt unseres Büschels von Kurven zweiter Klasse gründen kann.

Erinnern wir uns nun, daß Quotienten aus $\mathfrak{S}$- oder Θ-Funktionen zur Erklärung gewisser (als Gesamtheit zu den verdoppelten Perioden $4\,\omega_1$, $4\,\omega_2$, $4\,\omega_3$ gehöriger) Wurzelgrößen dienen,

$$\sqrt{\wp\, u - e_\gamma} = \frac{\mathfrak{S}_\alpha u}{\mathfrak{S}\, u} = \Theta_\beta\, \Theta_\gamma \cdot \frac{\Theta_\alpha u}{\Theta\, u},$$

so ergibt sich der Zusammenhang unserer Formeln mit den sogenannten elliptischen Koordinaten (Punktkoordinaten). Wir haben dazu nur neue Veränderliche einzuführen,

$$\wp\, x = \mu, \quad \wp\, y = \nu, \quad \wp\, z = \lambda. \tag{57}$$

Die Gleichung irgend eines Kegelschnittes unseres Büschels wird dann (in nunmehr mit Ψ zu bezeichnenden Φ-Koordinaten)

$$\boxed{\sum (\lambda - e_\alpha)(e_\beta - e_\gamma)\, \Psi_\alpha^2 = 0} \tag{58}$$

und in den dazu korrelativen Punktkoordinaten

$$\boxed{\sum \frac{Z_\alpha^2}{(\lambda - e_\alpha)(e_\beta - e_\gamma)} = 0} \tag{59}$$

Den Werten $\lambda = e_1, e_2, e_3$ und dem uneigentlichen Werte $\lambda = \infty$ entsprechen dann die drei zerfallenden Kegelschnitte unseres Büschels und der Hauptkegelschnitt. Durch ein Paar kontragredienter linearer Transformationen

$$\sqrt{e_\beta - e_\gamma}\, \Psi_\alpha = \underline{\Psi}_\alpha, \quad \frac{Z_\alpha}{\sqrt{e_\beta - e_\gamma}} = \underline{Z}_\alpha \tag{60}$$

erhält man endlich die Darstellung des betrachteten Kegelschnittbüschels in üblicher Form, wobei zu bedenken ist, daß unsere Annahme $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ nicht eine Spezialisierung, sondern eine Präzisierung des herkömmlichen Verfahrens bedeutet.

Stellen wir noch zwei Gleichungen vom Typus (59) zusammen, nämlich

$$\sum \frac{Z_\alpha^2}{(\mu - e_\alpha)(e_\beta - e_\gamma)} = 0, \quad \sum \frac{Z_\alpha^2}{(\nu - e_\alpha)(e_\beta - e_\gamma)} = 0, \tag{61}$$

so werden beide zugleich erfüllt durch die Annahme

$$Z_\alpha = \frac{\sqrt{\mu - e_\alpha}\, \sqrt{\nu - e_\alpha}}{(e_\gamma - e_\alpha)(e_\alpha - e_\beta)} = \frac{1}{\Theta_\beta^2 \cdot \Theta_\gamma^2} \cdot \frac{\Theta_\alpha x\, \Theta_\alpha y}{\Theta\, x\, \Theta\, y}, \tag{62}$$

und das ist, da es hier auf einen Proportionalitätsfaktor nicht ankommt, im wesentlichen wieder die Formel Nr. (53).

Mit Hilfe der Gleichung (51) erhalten wir schließlich eine Parameterdarstellung der Krümmungslinien auf einer „Mittelpunktsfläche" zweiter Ordnung, und ebenso, wenn wir neben $\underline{Z}_0$ oder $i\,\underline{Z}_0$ an Stelle der Koordinaten Z_a die Größen $\underline{Z}_a$ als Koordinaten einführen, eine Parameterdarstellung eines Büschels „konfokaler sphärischer Kegelschnitte", gelegen auf der „Einheitskugel"

$$\underline{Z}_1^2 + \underline{Z}_2^2 + \underline{Z}_3^2 = (i\,\underline{Z}_0)^2. \tag{63}$$

Schließlich sei noch auf die Kette algebraischer Abhängigkeiten kurz hingewiesen, die sich aus einer Zusammenstellung der Transformationenfolge

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
x'' = \dfrac{x'+y'}{2}\left(=\dfrac{x}{2}\right), & y'' = \dfrac{x'-y'}{2}\left(=\dfrac{y}{2}\right), \\
\left\{\begin{array}{l} x' = \dfrac{x+y}{2}, \\ x = x'+y', \end{array}\right. & \left.\begin{array}{l} y' = \dfrac{x-y}{2}, \\ y = x'-y', \end{array}\right\} \\
x_, = x + y\ (= 2x'), & y_, = x - y\ (= 2y') \\
\multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}
$$

mit den entsprechenden Funktionen

$$\ldots\ \underline{Z}_k' = \Theta_k x' \Theta_k y', \quad \underline{Z}_k = \Theta_k x \Theta_k y, \quad Z_{,k} = \Theta_k x_, \Theta_k y_,, \ \ldots$$

ergibt.

Hiermit wollen wir uns genügen lassen: Von einer Ausnutzung des entwickelten Apparates zur Ableitung geometrischer Lehrsätze über Büschel von Kegelschnitten (insbesondere konfokaler und „konzyklischer“ sphärischer Kegelschnitte) kann hier nicht die Rede sein[1]). Wer sich darum bemühen will, das Vorgetragene mit den ja in großer Zahl bekannten (sonst zum Teil mit wesentlich verschiedenen Mitteln abgeleiteten) Tatsachen in Verbindung zu bringen, wird finden, daß eben dieser Apparat sich vorzüglich dazu eignet, die tatsächlich vorhandenen Symmetrieeigenschaften der genannten Figuren zum Ausdruck zu bringen. In den im Zusammenhang mit elliptischen Koordinaten oder mit Hilfe der sogenannten synthetischen Methode[2]) gewöhnlich allein betrachteten reellen Kegelschnittbüscheln sind diese Symmetrien zum Teil verdeckt; aber auch ihren Besonderheiten wird sich unschwer Rechnung tragen lassen. Schließlich aber dürfte der Zusammenhang des algebraischen Stoffes mit einem nicht unwichtigen Kapitel der Funktionentheorie auch wohl an sich schon so viel Interesse haben, daß der unternommene Versuch, ihn zu einem möglichst vollkommenen Ausdruck zu bringen, keiner weiteren Rechtfertigung bedarf.

Ich wende mich zum Schluß noch einmal zurück zu den Aufgaben der ebenen projektiven Geometrie, von denen wir im vorliegenden Abschnitt ausgegangen sind. Es dürfte nämlich nützlich sein, sich vor Augen zu stellen, um wie vieles schwieriger die entsprechenden Probleme schon in einer Dimension mehr sind.

Die Zahl der Flächen zweiter Ordnung und Klasse, die durch m Punkte und $9-m$ Ebenen in nicht zu spezieller Lage bestimmt sind, haben

---

[1]) In einer leider ungedruckt gebliebenen Dissertation (von der die Bibliotheken zu Bonn und Berlin Abschriften besitzen) hat Frl. Ella Pönsgen die elliptischen Funktionen zum Studium der Evolutenfläche einer Mittelpunktsfläche zweiten Grades verwertet.

[2]) Siehe Reye, Geometrie der Lage 5. Aufl. **1**, 166, 204, 241, 248 u. ff.; 1909.

H. G. Zeuthen und Schubert, nach den Methoden der abzählenden Geometrie, entsprechend den Werten

$$m = 9, \quad 8, \quad 7, \quad 6, \quad 5, \quad 4, \quad 3, \quad 2, \quad 1, \quad 0$$

$$\text{gleich} \quad 1, \quad 3, \quad 9, \quad 17, \quad 21, \quad 21, \quad 17, \quad 9, \quad 3, \quad 1$$

gefunden[1]). Nun sind allerdings die von den genannten Autoren geführten Beweise nicht einwandfrei, doch können, soviel ich sehe, die angeführten Zahlen als zuverlässig gelten. Diese lassen aber keinen Zweifel, daß in mehreren Fällen die wirkliche Bestimmung der bezeichneten Flächen die Kräfte der heutigen Algebra bei weitem übersteigt. Und selbst im allereinfachsten Falle $m = 9$ oder $m = 0$ scheint eine ganz befriedigende Form der Lösung noch nicht gefunden zu sein: Eine zehnreihige Determinante, der man ihre Invarianteneigenschaft nicht ansieht, kann kaum als solche gelten. Auch ist mir unter den von Geometern angegebenen Konstruktionen einer Fläche zweiter Ordnung durch neun Punkte keine bekannt geworden, mit deren Hilfe man die Bedingung für zehn Punkte $0 \ldots 9$ auf einer solchen Fläche reinlich, d. h. ohne fremde Faktoren, darstellen könnte — wie es doch bei der entsprechenden Konstruktion eines Kegelschnittes in der Ebene zutrifft. Auch ist das Analogon zu unserem Ausdruck

$$(1\,3\,5)\,(6\,1\,2)\,(2\,3\,4)\,(4\,5\,6) - (2\,4\,6)\,(1\,2\,3)\,(3\,4\,5)\,(5\,6\,1)$$

(S. 66, Nr. 7), das sich vielleicht aus nur vier Produkten von je fünf Determinanten zusammensetzen mag, noch nicht bekannt, so wenig als das hier in Betracht kommende Analogon zum Pascalschen Satz.

§ 8.

Die allgemeinen linearen Transformationen.

Nachdem nunmehr die Formelsprache, deren wir uns weiterhin bedienen werden, durch einige allerdings sehr einfache Anwendungen erläutert worden ist, soll fortgefahren werden in der allgemeinen Theorie. Ich knüpfe zunächst an die in § 1 und 2 ausgeführte Untersuchung an.

Es muß ohne weiteres einleuchten, daß ein Teil der dort angestellten Betrachtung, ja das Wesentliche davon, gar nicht davon abhängen kann, ob man gerade lineare Transformationen untersucht, die die Quadratsumme

$$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

reproduzieren. Führen wir nämlich an Stelle der Koordinaten $X_1, \ldots, X_n$ usw. durch eine lineare Substitution von nicht verschwindender Determinante irgendwelche andere Systeme von n Zahlen ein,

---

[1]) H. Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie 1879, S. 105; H. G. Zeuthen, Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie, S. 352, 1914.

so wird an Stelle der Quadratsumme jede beliebige nicht singuläre quadratische Form treten können, nämlich irgend eine solche, deren Diskriminante (Koeffizientendeterminante) von Null verschieden ist. An Stelle der Gruppe γ, η tritt dann eine Gruppe von Transformationen der neuen Veränderlichen, von denen die neue quadratische Form reproduziert wird. Die Ausdrücke $(X \mid Y)$, $(X_1 \dots X_n)$ ändern dann ihre Form, sie behalten aber ihre Zahlenwerte, und in der neuen Gestalt werden sie Invarianten der neuen Gruppe sein. Was wir bisher ausgeführt hatten, ist also ein Spezialfall einer umfassenderen Theorie.

Mit dieser Einsicht sehen wir uns nun vor eine Reihe weiterer Fragen gestellt. Wird sich nicht auch diese Erweiterung unserer Überlegungen so darstellen lassen, daß die formelle Einfachheit, die dem Bisherigen doch gewiß innewohnt, erhalten bleibt? Wird es sich also nicht empfehlen, auch in der erweiterten Theorie an Stelle des Rechnens mit einzelnen Koordinaten ein systematisches Rechnen mit deren doch allein interessanten Funktionen, ihren Invarianten zu setzen? Dabei wird zu bedenken sein, daß eine quadratische Form, von der man von vornherein eine Darstellung durch eine Quadratsumme kennt, eben dadurch schon spezialisiert ist, wenn auch nur in arithmetischem Sinne: Die Herstellung der Quadratsumme verlangt ja in der Regel irrationale Operationen, die man nicht ohne Not als schon vollzogen wird annehmen wollen. Und schließlich wird auch die Frage zu stellen sein, in welchem Verhältnis denn die Invariantentheorie einer solchen Gruppe γ, η — die nun zu irgend einer nicht singulären quadratischen Form gehören mag — zur Invariantentheorie der Gruppe aller linearen Transformationen steht, die sich ja längst einer viel höheren Entwicklung rühmen darf, als das Rechnen mit Vektoren und orthogonalen Invarianten von solchen.

Einen Schritt in der zuletzt bezeichneten Richtung haben wir in § 5 schon getan, wo die Gruppe Γ der linearen Transformationen von der Determinante Eins eingeführt worden war. Wir wiederholen jetzt das dort Gesagte, indem wir nun den Stufenwert $n = 3$ durch eine beliebige Stufenzahl ersetzen, und nun auch unser Hauptaugenmerk auf die Γ umfassende Gruppe G aller linearen Transformationen richten, deren allgemeine Transformation von n^2 lediglich durch eine Ungleichung beschränkten komplexen Parametern abhängt.

Wir unterscheiden jetzt von vornherein zweierlei Vektoren, Vektoren erster Schicht, die, je nach Umständen, durch Zeichen X, Y, Z, ... oder P, Q, R, ... dargestellt werden sollen, und Vektoren zweiter Schicht, denen wir Zeichen U, V, W, ... oder

$A, B, C, \ldots$ zuordnen (S. 53 ff.). Die Gleichheit der Koordinaten eines Vektors X und eines Vektors U, ihr *Übereinanderliegen* oder *Sich-Überdecken*, wird in dem, was folgt, als ein ganz nebensächlicher Umstand zu gelten haben.

Wir unterwerfen nun z. B. die Vektoren erster Schicht einer linearen Transformation, deren Determinante also nach Voraussetzung von Null verschieden ist. Diese Transformation, in der wir den Vektoren erster Schicht $X, Y, \ldots$ wieder solche $\underline{X}, \underline{Y}, \ldots$ wollen entsprechen lassen ($X \longrightarrow \underline{X}$, $Y \longrightarrow \underline{Y}, \ldots$), schreiben wir so:

$$(1, \mathrm{I}) \qquad \boxed{X_1 C_{1k} + \cdots + X_n C_{nk} = \underline{X}_k \; (k = 1 \ldots n).}$$

Wir bemerken nun, daß durch diese Transformation eine zweite lineare Transformation, nämlich eine solche hervorgerufen (oder „bewirkt,“ oder „*induziert*“) wird, die den Vektoren der zweiten Schicht $U, V, \ldots$ andere $\underline{U}, \underline{V}, \ldots$ zuordnet ($U \longrightarrow \underline{U}$, $V \longrightarrow \underline{V} \cdots$).

Dies ergibt sich aus der Forderung, daß als Folge der Abhängigkeit (1, I) die Gleichung

$$(U X) = (\underline{U}\, \underline{X})$$

eine Identität werden soll, daß also, zufolge der gegebenen Zuordnung und der zu suchenden, der bilineare Ausdruck $(U X) = \Sigma\, U_i X_i$ eine Invariante (der beiden zusammengehörigen Transformationen) werden soll. Ohne weiteres erhalten wir dann den Zusammenhang zwischen den zweierlei Vektoren U und $\underline{U}$ zweiter Schicht in Gestalt der Gleichungen

$$(2, \mathrm{II}) \qquad \boxed{U_i = C_{i1} \underline{U}_1 + \cdots + C_{in} \underline{U}_n \; (i = 1 \ldots n).}$$

Zu den Systemen (1, I) und (2, II) linearer Gleichungen gehören als ihre Auflösungen:

$$(2, \mathrm{I}) \qquad \boxed{X_i = D_{i1} \underline{X}_1 + \cdots + D_{in} \underline{X}_n \; (i = 1 \ldots n)}$$

und

$$(1, \mathrm{II}) \qquad \boxed{U_1 D_{1k} + \cdots + U_n D_{nk} = \underline{U}_k \; (k = 1 \ldots n),}$$

wobei, wenn $|C|$ die gemeinsame Determinante der Gleichungen (1, I) und (2, II) und ebenso $|D|$ die gemeinsame Determinante der Gleichungen (2, I) und (1, II) bezeichnet,

$$D_{ik} = |C|^{-1} \cdot \frac{\partial |C|}{\partial C_{ik}}, \quad C_{ik} = |D|^{-1} \cdot \frac{\partial |D|}{\partial D_{ik}}$$

und

$$|C| \cdot |D| = 1$$

ist. Die Gleichungen (1) und (2) stellen dann zwei Paare (I, II) sogenannter kontragredienter Transformationen dar, in der Anordnung (I), (II) aber haben wir dieselben vier Zuordnungen nochmals als Paare reziproker Transformationen (1, 2) vor uns.

Lassen wir etwa die Formeln (1, I) und (1, II) — und dann auch die Formeln (2, I) und (2, II) — mit denselben Koeffizienten $C_{ik} = D_{ik}$ ausgestattet sein, so werden die dargestellten Transformationen zufolge des identischen Bestehens der Gleichung $(U X) = (\underline{U}\,\underline{X})$ orthogonal. **Nur** orthogonale lineare Transformationen fallen demnach mit den zu ihnen kontragredienten Transformationen zusammen; **nur** bei orthogonalen Transformationen also bleibt ein „Sich-Decken" zweier Vektoren erster und zweiter Schicht, d. h. das Bestehen einer Gleichung der Form

$$X = U$$

immer ungestört.

Nur im Falle orthogonaler Transformationen ist also

$$D_{ik} = C_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Hieraus folgt weiter:

Die bilinearen Ausdrücke $(X \mid Y)$ und $(U \mid V)$, die aus je zwei Vektoren derselben Schicht abgeleitet sind, und gegenüber orthogonalen Transformationen die Invarianteneigenschaft haben, haben sie nicht gegenüber anderen linearen Transformationen.

Ebenso haben die Determinanten, die aus Koordinaten einiger Vektoren erster Schicht und Koordinaten von Vektoren zweiter Schicht gebildet sind, nur gegenüber orthogonalen Transformationen die Invarianteneigenschaft. Es bestehen aber immerhin allgemein die Gleichungen

$$\begin{aligned} |C| \cdot (X_1 \ldots X_n) &= (\underline{X}_1 \ldots \underline{X}_n), \\ |D| \cdot (U_1 \ldots U_n) &= (\underline{U}_1 \ldots \underline{U}_n), \end{aligned} \tag{4}$$

die eine der Invarianteneigenschaft verwandte Tatsache ausdrücken. Man hat sich durch diese oder eine ähnliche Bemerkung veranlaßt gesehen, den Invariantenbegriff selbst zu erweitern. Man braucht dann das Wort Invariante in einem umfassenderen Sinne, als wir es bisher getan hatten: Allgemein werden dann solche Funktionen der Koordinaten der betrachteten Figuren (hier also der Koordinaten von Vektoren) Invarianten genannt, die sich nach Ausführung eines beliebigen Paares kontragredienter linearer Transformationen mit einem Faktor reproduzieren, der nur von den Transformationskoeffizienten abhängt. Ist dieser Faktor gleich Eins — wie im Falle der bilinearen Verbindung (UX) —, so spricht man dann von absoluten, andernfalls von relativen Invarianten. [Beispiele für diese: $(X_1 \ldots X_n)$, $(U_1 \ldots U_n)$.] Da man aber ganz ebenso gebildete Begriffe auch noch auf Untergruppen der Gruppe aller (paarweise zu kontragredienten geordneten) linearen Transformationen anwenden kann, so wird man zu voller Deutlichkeit von „Invarianz gegenüber der Gruppe G **aller** linearen Transformationen" (genauer: aller durch Kontragredienz gepaarten linearen Transformationen) zu reden haben. Handelt es sich, wie hier bis auf weiteres, ausschließlich um ganze rationale Funktionen, so ist der Quotient zweier einander zugeordneter Invarianten $\bar{J} : J$ für jede bestimmte Transformation (für jedes bestimmte Paar kontragredienter Transformationen) eine lediglich von den Transformationskoeffizienten abhängige eindeutig bestimmte Konstante.

Nach diesen Vorbereitungen wird der folgende Lehrsatz verständlich sein, bei dessen Abfassung wir die auch weiterhin noch festzuhaltende Annahme machen wollen, es sei die Stufenzahl $n > 2$.

Die einzigen (relativen oder absoluten) ganzen rationalen und allseitig-homogenen Invarianten beliebig vieler Vektoren erster **und** zweiter Schicht gegenüber der Gruppe G sind die Ausdrücke der Form

$$(X_1 \ldots X_n), \quad (XU), \quad (U_1 \ldots U_n), \quad (n > 2)$$

und die aus diesen „Typen elementarer Invarianten" zu bildenden ganzen rationalen und allseitig-homogenen Funktionen.

„Allseitig-homogen" heißt, wie zuvor, eine Funktion, die homogen ist in den Koordinaten jedes einzelnen der vorkommenden Vektoren. Offenbar genügt es, nach solchen Invarianten zu fragen [1]).

In diesem Lehrsatz, auf dessen Beweis [2]) hier nicht eingegangen werden kann, hat man offenbar ein Analogon zu dem Satze I des

[1]) Der Faktor, mit dem eine solche Invariante der Gruppe G reproduziert wird, ist immer eine Potenz der Determinante $|C|$, oder, was dasselbe sagt, eine Potenz von $|D|$ mit ganzzahligem Exponenten (der positiv, Null oder negativ sein kann). T. F. S. 32. Für Untergruppen von G gilt dies nicht allgemein. (Ein Beispiel wird später beigebracht werden.)

[2]) T. F. S. 45 u. ff. Daß dort der Beweis explizite nur für den Fall $n = 3$ geführt ist, ist nebensächlich. — Ich rate dem Leser, sich zunächst mit der Tragweite derartiger Lehrsätze vertraut zu machen — wozu eben die vorliegende Schrift eine Anleitung bieten soll — und dann erst nach ihrer Begründung zu fragen. (Vgl. § 6 und 7.)

§ 2. Aber auch die Sätze II und III haben in der Theorie der Gruppe G ihr vollkommenes Seitenstück[1]). Insbesondere treten jetzt an Stelle des Ausdrucks A in § 2 der Ausdruck

$$\begin{aligned} A_I^* &= (X_1 X_2 \ldots X_n)(U X_0) + (-1)^n (X_2 X_3 \ldots X_0)(U X_1) \\ &\quad + \cdots\cdots\cdots + (-1)^n (X_0 X_1 \ldots X_{n-1})(U X_n) \end{aligned}$$

und der dann „korrelative" A_{II}^*, der sich durch Vertauschung der Zeichen X und U ergibt, nebst zwei weiteren Ausdrücken, deren erster aus (A_I^*) dadurch hervorgeht, daß man die bilinearen Verbindungen $(U X_k)$ durch Determinanten

$$(Y_1 Y_2 \ldots Y_{n-1} X_k)$$

ersetzt, während an Stelle von B der Ausdruck

$$B^* = (X_1 \ldots X_n)(U_1 \ldots U_n) - |(U_1 X_1) \ldots (U_n X_n)|$$

zu setzen ist. An Stelle der zwei Typen identisch verschwindender Invarianten jenes Lehrsatzes II treten also hier ihrer fünf. Geht man umgekehrt von der Theorie der Gruppe G aus, so erhält man in gewissem Sinne nichts wirklich Neues: In der Theorie der Untergruppe γ von G fällt die Unterscheidung oder doch die Notwendigkeit einer Unterscheidung von Vektoren zweier Schichten weg. Die Folge davon ist dann, daß jene fünf Arten oder Typen von Identitäten sich zunächst auf drei reduzieren, und da von diesen noch eine sich als Folge der Identität $B = 0$ darstellt, so bleiben nur zwei wirklich verschiedene Formeln übrig, eben die, die wir in § 2 aufgestellt hatten.

Wir wenden uns jetzt zurück zu unseren linearen Transformationen (denen der Gruppe G) und bemerken, daß die Transformationen (1) auch aus beliebigen ganzen rationalen und homogenen Funktionen der Veränderlichen $X, Y, \ldots$ und $U, V, \ldots$ wieder solche hervorgehen lassen:

$$F(X, Y, \ldots, U, V, \ldots) = \underline{F}(\underline{X}, \underline{Y}, \ldots, \underline{U}, \underline{V}, \ldots). \tag{5}$$

Es besteht nun der folgende grundlegende Lehrsatz:

Um zu wissen, wie die Koeffizienten der transformierten algebraischen Form $\underline{F}$ mit denen der gegebenen Form F zusammenhängen, genügt es, diesen Zusammenhang in dem besonderen Falle ermittelt zu haben, wo die Form F, und folglich auch die Form $\underline{F}$, sich auf ein Produkt von Potenzen linearer Formen reduziert.

---

[1]) T. F. S. 67 u. ff.

In der Tat, nehmen wir an, es sei:

$$F = (AX)^{\mu_1}.(BY)^{\mu_2} \ldots (PU)^{\nu_1}.(QV)^{\nu_2} \ldots,$$

so wird $\underline{F}$ die Form

$$\underline{F} = (\underline{A}\,\underline{X})^{\mu_1}.(\underline{B}\,\underline{Y})^{\mu_2} \ldots (\underline{P}\,\underline{U})^{\nu_1}.(\underline{Q}\,\underline{V})^{\nu_2} \ldots$$

haben müssen. In diesem besonderen Falle aber hat man nach (1)

$$(1^*)\qquad \begin{aligned} A_1 D_{1i} + \cdots + A_n D_{ni} &= \underline{A}_i, \text{ usw.,} \\ P_1 C_{1i} + \cdots + P_n C_{ni} &= \underline{P}_i, \text{ usf.} \end{aligned}$$

Umgekehrt wird nach (2):

$$(2^*)\qquad \begin{aligned} A_i &= C_{i1}\underline{A}_1 + \cdots + C_{in}\underline{A}_n, \text{ usw.,} \\ P_i &= D_{i1}\underline{P}_1 + \cdots + D_{in}\underline{P}_n, \text{ usf.} \end{aligned}$$

Somit ergeben sich die Koeffizienten von $\underline{F}$, wenn die von F bekannt sind, und umgekehrt, einfach durch Ausmultiplizieren und Ordnen.

Damit aber hat man den Zusammenhang zwischen den Formen F und $\underline{F}$ auch schon im allgemeinen Falle, in dem diese Formen nicht gerade Produkte von Potenzen linearer Formen sind.

Es wird nämlich die Gleichung (5) ja eine Identität vermöge der Substitutionen, denen wir die Veränderlichen $X, Y, \ldots, U, V, \ldots$ unterworfen haben. Setzen wir also rechts für die Koordinaten $\underline{X}_i, \underline{Y}_i, \ldots, \underline{U}_i, \underline{V}_i \ldots$ aus (1) ihre Werte ein, so müssen beiderseits die Koeffizienten entsprechender Produkte der Koordinaten $X_i, Y_i, \ldots, U_i, V_i, \ldots$, nachdem wir alles gehörig geordnet und so auf seinen einfachsten Ausdruck gebracht haben, dieselben werden. Wären nun die so bestimmten linearen Abhängigkeiten zwischen den Koeffizienten von F und denen von $\underline{F}$ nicht schon durch die Abhängigkeiten bestimmt, die wir im besonderen Falle gefunden hatten, so würde das heißen, daß die Koeffizienten der speziellen Form F linearen Gleichungen genügen müßten, die aber tatsächlich nicht bestehen. Die Koeffizienten der speziellen Form sind ja nichts anderes als Produkte von irgendwelchen Systemen homogener Größen

$$A_i, B_k, \ldots, \; P_l, Q_m, \ldots$$

(mit den Gradzahlen

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \nu_1, \nu_2, \ldots)$$

zwischen denen keine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten bestehen kann, außer der trivialen, in der alle Koeffizienten Null sind.

Wir können überhaupt, überall wo es sich um **lineare** Funktionen der Koeffizienten einer algebraischen Form F handelt, uns zu ihrer Bezeichnung einer Fiktion bedienen. Wir können so mit der Form F umgehen, als ob sie ein Produkt von Potenzen linearer Formen und also nach dem Schema (5) dargestellt wäre. Dieses Schema dient demnach als **Zeichen** („Symbol") irgend einer Form F mit vorgeschriebenen Ordnungszahlen

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \nu_1, \nu_2, \ldots;$$

man schreibt demgemäß „symbolisch"

$$F = (A X)^{\mu_1} (B Y)^{\mu_2} \ldots (P U)^{\nu_1} (Q V)^{\nu_2} \ldots$$

Wir haben hiermit den Grundgedanken der von Aronhold erfundenen und von anderen, besonders von Clebsch und Gordan weiter ausgebildeten symbolischen Rechnungsmethode.

Es handele sich etwa um eine bilineare Form mit Veränderlichen der zwei Schichten:

$$F = \Sigma X_i F_{ik} U_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Diese Form ist bereits vollkommen deutlich bezeichnet, wenn wir an Stelle jedes Koeffizienten F_{ik} das Produkt $A_i \,.\, P_k$ setzen und die Bestimmung treffen, daß erstens überhaupt nur lineare Funktionen, $\Sigma \Phi_{ik} \,.\, A_i P_k = \Sigma A_i \Phi_{ik} P_k$ {also z. B. $\Sigma A_i X_i U_k P_k = \Sigma X_i A_i P_k U_k$} solcher Produkte betrachtet werden sollen, und daß zweitens jedes Produkt $A_i \,.\, P_k$ hinterher durch den vorgeschriebenen Koeffizienten F_{ik} ersetzt werden soll. Um z. B. zu wissen, was aus F wird, wenn man vermöge der Transformationsformeln (2) neue Veränderliche $\underline{X}, \underline{U}$ einführt, braucht man dann nur die Ausdrücke (1*) zu bilden und in dem ausgerechneten und geordneten Produkt

$$(\underline{X}\,\underline{A})(\underline{P}\,\underline{U}) = \sum_i \underline{X}_i \underline{A}_i \,.\, \sum_k \underline{P}_k \underline{U}_k = \sum_{i,k} \underline{X}_i \,.\, (\underline{A}_i \underline{P}_k) \,.\, \underline{U}_k$$

$$= \sum_{i,k} \underline{X}_i \cdot \{\Sigma_\alpha A_\alpha D_{\alpha i} \cdot \Sigma_\beta P_\beta C_{\beta k}\} \underline{U}_k = \sum_{i,k} \underline{X}_i \{\sum_{\alpha,\beta} D_{\alpha i} C_{\beta k} \cdot (A_\alpha \cdot P_\beta)\} \underline{U}_k$$

die Produkte $A_\alpha \,.\, P_\beta$ durch die entsprechenden Werte $F_{\alpha\beta}$ zu ersetzen. Die transformierte Form ist mithin

$$\sum_{i,k,\alpha,\beta} \underline{X}_i (D_{\alpha i} C_{\beta k} F_{\alpha\beta}) \underline{U}_k .$$

Man kann also die symbolisch geschriebenen Formeln jederzeit ausrechnen. Die ausgerechneten Formeln aber entbehren, wie schon das angeführte (noch sehr einfache) Beispiel zeigt, der Übersichtlichkeit. Sie sind belastet mit den hier i, k, α, β genannten

Indizes, die auf die einzelnen Koordinaten und Transformationskoeffizienten hinweisen, also Beziehungen zum Ausdruck bringen, auf die es bei dem Rechnen mit Invarianten gar nicht ankommen kann. Die Lenkung der Aufmerksamkeit auf Nebendinge und die damit verbundene Ermüdung zu vermeiden, ist aber wichtig genug. So beruhte der Fortschritt, den Leibniz in die Differentialrechnung gebracht hat, ganz wesentlich darauf, daß seine Formeln eben nur das enthielten, was wirklich gebraucht wurde. — Ich fasse nunmehr zusammen:

Die Form F wird „symbolisch" als Produkt linearer Formen „dargestellt",

$$F = \Sigma X_i F_{ik} U_k = \Sigma X_i \,.\, A_i P_k \,.\, U_k = (XA)(PV).$$

Die Produkte $A_i P_k$ „bedeuten" dann die Werte F_{ik}.

Hat man es nicht gerade mit einer bilinearen Form, sondern mit einer algebraischen Form allgemeiner Art zu tun (siehe oben), so benutzt man statt der $2n$ Symbole A_i, P_i deren eine größere Zahl; wir setzen dann, wie gesagt, „symbolisch"

$$F = (AX)^{\mu_1}(BY)^{\mu_2} \ldots (PU)^{\nu_1}(QV)^{\nu_2} \ldots \tag{6}$$

In diesem Falle erlangen erst Produkte der Form

$$A_{i_1}^{\alpha_1} A_{i_2}^{\alpha_2} \ldots B_{k_1}^{\beta_1} B_{k_2}^{\beta_2} \ldots P_{l_1}^{\pi_1} P_{l_2}^{\pi_2} \ldots Q_{m_1}^{\varphi_1} Q_{m_2}^{\varphi_2} \ldots,$$

wo

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots &= \mu_1, & \pi_1 + \pi_2 + \cdots &= \nu_1, \\ \beta_1 + \beta_2 + \cdots &= \mu_2, & \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots &= \nu_2, \\ \cdots\cdots&\cdots, & \cdots\cdots&\cdots, \end{aligned}$$

sein muß, die Bedeutung von Zahlenwerten. Jedes solche Produkt bedeutet einen Koeffizienten der Form F, der ohne Benutzung der symbolischen Bezeichnung, zum Entsetzen des Druckers (und vernünftiger Leser), etwa so zu benennen sein würde:

$$F_{(i_1)^{\alpha_1}(i_2)^{\alpha_2} \ldots (k_1)^{\beta_1}(k_2)^{\beta_2} \ldots (l_1)^{\pi_1}(l_2)^{\pi_2} \ldots (m_1)^{\varphi_1}(m_2)^{\varphi_2} \ldots}\ [1]).$$

Solche verwirrenden Bilder also ersparen wir uns durch die symbolische Bezeichnung (6). Vor allem haben wir nunmehr die einfache Regel:

Um eine Form F einer Transformation der Gruppe G, d. h. einem Paar kontragredienter linearer Transformationen zu entwerfen, transformiere man ihre Symbole

[1]) Die Literatur ist voll von Formeln, die nicht sehr viel besser, und zwar nur darum nicht ganz so schlimm aussehen, weil man meistens lediglich viel speziellere Objekte untersucht.

$A, B, \ldots$ wie Veränderliche zweiter Schicht, und ihre Symbole $P, Q, \ldots$ wie Veränderliche erster Schicht.

Natürlich bezieht sich die eingeführte symbolische Bezeichnung auf die in der Geometrie allgemein übliche Schreibart algebraischer Formen, bei der ihre Koeffizienten mit Polynomialfaktoren versehen sind; z. B. ist

$$(A\,X)^2 = A_1^2\,X_1^2 + \cdots + 2\,A_1\,A_2\,X_1\,X_2 + \cdots;$$

„Koeffizienten" einer quadratischen Form

$$F = A_{1\,1}\,X_1^2 + \cdots + 2\,A_{1\,2}\,X_1\,X_2 + \cdots$$

heißen demnach für uns die Zahlen $A_{1\,1}, \ldots, A_{1\,2}, \ldots,$ nicht aber die Zahlen $A_{1\,1}, \ldots, 2\,A_{1\,2}, \ldots,$ soweit sie von jenen verschieden sind [1]).

Statt des schleppenden Ausdruckes Koeffizientensystem einer algebraischen Form werden wir uns weiterhin des Wortes Kern der Form bedienen. Der Kern einer linearen Form ist dann ein Vektor. Oft kommt es überhaupt nur auf diesen Kern an. Es wäre aber verfehlt, die Veränderlichen darum überhaupt weglassen zu wollen — besonders in den grundlegenden Definitionen (wie es in der Ausdehnungslehre von H. Grassmann und in vielen Schriften über Vektorenrechnung tatsächlich geschieht). Es wäre das gerade so verfehlt, wie wenn jemand an Stelle von $\sin x$ einfach $\sin$ schreiben wollte, was ja in einigen Fällen genügen kann (z. B. $\sin^2 + \cos^2 = 1$).

Der eingeführte Invariantenbegriff ist verschiedener Erweiterungen fähig. Vor allem:

Unter einer allseitig-homogenen algebraischen Invariante (der Gruppe G oder einer ihrer Untergruppen) verstehen wir die Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten allseitig-homogene ganze rationale Invarianten sind, mit Gradzahlen, die für jede einzelne an der Bildung der Koeffizienten beteiligte Form F eine arithmetische Reihe bilden [2]).

Unter dieser Voraussetzung nämlich wird man aus der angenommenen Gleichung

$$J_0 \,.\, J^n + J_1 \,.\, J^{n-1} + \cdots + J_n \,.\, J^0 = 0$$

eine der Form

$$J_0 \,.\, |C|^{\nu_0} \,.\, \underline{J}^n + J_1 \,.\, |C|^{\nu_1} \,.\, \underline{J}^{n-1} + \cdots + J_n \,.\, |C|^{\nu_n}\, \underline{J}^0 = 0$$

---

[1]) Das braucht nicht überall angebracht zu sein. So hat man bei gewissen Untersuchungen der Zahlentheorie die gerade entgegengesetzte Festsetzung zweckdienlicher gefunden.

[2]) Eine solche ist auch 0, 0, . 0, ... Man sollte übrigens heute wohl eher sagen „Eine arithmetische Folge".

erhalten, in der die Exponenten $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n$ eine arithmetische Reihe bilden. Ist das der Fall, so kann man den Wurzeln $J_{(k)}$ der ersten Gleichung die Wurzeln $\underline{J}_{(k)}$ der zweiten einzeln so zuordnen, daß für je zwei zusammengehörige Wurzeln eine Gleichung der Form

$$|C|^{\mu} . J_{(k)} = \underline{J}_{(k)}$$

besteht, und zwar für alle Wurzelpaare dieselbe Gleichung, in der μ eine rationale Zahl bedeutet; derart, daß durch Substitution von $\underline{J}_{(k)}$ in die zweite Gleichung diese die Form

$$|C|^{\varrho} . \{J_0 . J^n + J_1 . J^{n-1} + \cdots + J_n . J^0\} = 0$$

annimmt. Da $|C|$ nach Voraussetzung nicht Null ist, so kann dann der erste Faktor links unterdrückt werden. Sind dann $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ die Gradzahlen von $J_0 \ldots J_n$ in bezug auf die Form F, so gibt es eine Zahl σ, so daß

$$\mu_0 + \sigma n = \mu_1 + \sigma (n - 1) = \cdots$$

wird, und diese Zahl $\sigma = \mu_1 - \mu_0 = \mu_2 - \mu_1 = \cdots$ heißt dann der Grad der algebraischen Invariante J in bezug auf dieselbe Grundform F.

Was unter einer irrationalen algebraischen Invariante zu verstehen ist, ist hiernach klar. Beispiele, die unter diesen Begriff fallen, haben wir schon in ziemlicher Menge kennen gelernt (§ 4 und 7).

Dem Begriff der ganzen rationalen Invariante ist untergeordnet der Begriff der ganzen rationalen Kovariante. Darunter verstehen wir eine ganze rationale Invariante, die wenigstens einige der Veränderlichen $X, Y, \ldots, U, V, \ldots$ wirklich enthält. Unter diesen Begriff fällt also auch jede der gegebenen Grundformen selbst. Insbesondere gehören dahin die sogenannten identischen Kovarianten, die nur von den Veränderlichen, nicht auch noch von den Kernen solcher Formen abhängen, die außer diesen Veränderlichen (Vektoren) gegeben sind. Identische Kovarianten sind also alle Invarianten der Typen

$$(X_1 \ldots X_n), \quad (X U), \quad (U_1 \ldots U_n),$$

und die ganzen rationalen Funktionen von ihnen.

Sind dies Begriffsbildungen, deren Motivierung ohne weiteres einleuchten muß[1]), so bedarf doch wohl einer kurzen Rechtfertigung der Begriff der algebraischen Kovariante, so wie er hier ge-

[1]) Ich meine, daß es auch klar sein wird, warum wir die gegebenen Grundformen unter den Begriff der Kovarianten fallen lassen, nicht sie davon ausschließen (wie es gelegentlich schon geschehen ist).

faßt werden soll. Unter einer solchen wollen wir ausschließlich eine algebraische Invariante verstehen, in der die Veränderlichen, nämlich mindestens eine von ihnen, wirklich vorkommen, und zwar diese (ihre Koordinaten) als ganze rationale Funktionen. Es sind das also algebraische Invarianten, in denen, wenn sie irrational sind, die Irrationalität nur in den Koeffizienten sitzt[1]). Nach dieser Definition ist also z. B. der Ausdruck (3) in § 7 (S. 71) nur eine irrationale Invariante der beteiligten linearen Formen oder ihrer Kerne, der Vektoren A, B, C, P, Q, X. Dagegen ist der Ausdruck (7) ebenda (S. 72) eine irrationale Kovariante der Vektoren A, B, C, P, Q: die Veränderliche U, d. h. das System ihrer Koordinaten, tritt in ihr nur in Gestalt ganzer rationaler Funktionen auf. Die hier angeführte terminologische Beschränkung scheint mir gerechtfertigt zu sein durch das Bedürfnis der analytischen Geometrie, in der man eben die zu untersuchenden Gebilde als „geometrische Örter" aufzufassen und vorzugsweise durch Gleichungen (zwischen Veränderlichen X, U, ... und Verbindungen von solchen) darzustellen pflegt, in denen die Veränderlichen ganz und rational vorkommen.

Immer lohnt es sich jedoch nicht, die algebraische Gleichung wirklich aufzustellen, deren Wurzel eine irgendwie gefundene irrationale Invariante oder Kovariante ist. Schon bei ziemlich einfacher Sachlage können diese Gleichungen so verwickelt ausfallen, daß man nichts mehr an ihnen sieht. (Vgl. § 7, Nr. 1.) Doch werden wir in einigen Fällen derartige Gleichungen bilden.

In der älteren Literatur finden sich außer den Terminis Invariante und Kovariante noch weitere, wie Kontravariante, Konkomitante, Zwischenform. Das hat lediglich historische Gründe. Man interessierte sich zunächst für den Fall $n = 3$, wo z. B. kubische Formen $(A\,X)^3$ die ebenen Kurven dritter Ordnung lieferten. Mit den Invarianten kam man dabei nicht aus, und ebensowenig mit den zuerst allein so genannten Kovarianten, die ebenfalls die Veränderliche X enthielten. Weitere Bildungen, solche mit Veränderlichen U, nannte man dann Kontravarianten, und als auch diese sich als unzureichend erwiesen und man sich zur Betrachtung von Formen mit Veränderlichen X und U genötigt sah, sprach man von Zwischenformen. Ich fasse alles das unter den Begriff der Kovariante: Es würde ja völlig unmöglich sein, eine so ins einzelne gehende Terminologie auch bei größeren Werten der Stufenzahl noch durchzuführen. Übrigens ist der Terminus Zwischenform ein offenbares Verlegenheitsprodukt.

Neuerdings hat sich eine Bezeichnungsweise eingebürgert, die den Unterschied der zweierlei Veränderlichen und Symbole dadurch zum Ausdruck bringt, daß bei der einen Art die Indizes der Koordinaten oben, bei der anderen unten hingesetzt werden. Dieses Verfahren hat also zur Voraussetzung, daß die Koordinaten und Koeffizienten einzeln sichtbar gemacht

[1]) T. F. S. 11.

werden, und damit stellt es sich geradezu in Gegensatz zum Geiste der Invariantentheorie, die das Zufällige und Willkürliche in den Hintergrund zu drängen sucht, um dafür das, worauf es ankommt, die invarianten Zusammenhänge, in desto helleres Licht zu rücken. Man braucht ja jene Indizes in der Regel überhaupt nicht. In der Anwendung auf Formen mit mehreren Veränderlichen läßt das genannte Verfahren die Unübersichtlichkeit der explizite geschriebenen Ausdrücke in ihrem ganzen Umfange bestehen[1]).

Einen Vorläufer der symbolischen Bezeichnung bilden H. Grassmanns sogenannte Lückenprodukte. Diese haben heute kaum historisches Interesse, wiewohl man sie noch ganz neuerdings in die Vektoranalysis hineinzubringen versucht hat. Sie eignen sich in keiner Weise als Grundlage einer umfassenden Rechnungsmethode.

§ 9.

Fortsetzung und Beispiele.

Zur Erläuterung des in § 8 Gesagten und zur Einleitung des Folgenden sollen nun zunächst wieder Beispiele — solche einfachster Art — betrachtet werden.

Es seien irgend zwei quadratische Formen gegeben, eine mit einer Veränderlichen X und einem Kern $\|A_{ik}\|$, ihrem Koeffizientensystem, und eine mit einer Veränderlichen U und dem Kern $\|P_{ik}\|$, d. h. mit Koeffizienten P_{ik}. Es sei also jetzt („symbolisch")

$$\begin{aligned} \Sigma X_i A_{ik} X_k &= (X A)(A X) = (A X)^2, \\ \Sigma U_i P_{ik} U_k &= (U P)(P U) = (P U)^2. \end{aligned}$$

[1]) Vgl. H. Weyl, Raum, Zeit, Materie (1918), S. 6, 7. Z. B. hat dieser Autor auf S. 31 an Stelle unseres Zeichens

$$(A X)(B Y)(P U)$$

das Zeichen

$$\sum_{i,k,l} a^{l}_{ik}\, \xi^i \eta^k \zeta_l.$$

Eigentlich hätte es sogar heißen sollen

$$\sum_{i,k,l} a_{ik}{}^{l}\, \xi^i \eta^k \zeta_l.$$

Es ist zu bedauern, daß der Urheber dieser wahrhaft unglücklichen Neuerung, der Physiker A. Einstein, von mathematischer Seite nicht besser beraten worden ist. Da man sich in den einfachsten Fällen ja zur Not noch damit abfinden kann, so wird sie aus der physikalischen Literatur, wenn überhaupt, nicht so leicht mehr auszurotten sein.

Statt von Kernen algebraischer Formen sprechen Autoren wie Einstein, Weyl u. a. von Tensoren. Dieses Wort hat indessen Sinn nur in dem einzigen Falle einer bilinearen Form mit kontragredienten Veränderlichen.

Wegen des im gleichen Zusammenhange auf eine sonst nicht übliche Art gebräuchlichen Wortes Stufe siehe Einleitung, S. 9.

so daß das Produkt $A_i A_k$ zur Bezeichnung des Koeffizienten A_{ik} und das Produkt $P_i P_k$ zur Bezeichnung des Koeffizienten P_{ik} dient. Es sei also

$$A_i A_k = A_{ik}, \quad P_i P_k = P_{ik},$$

und demzufolge

$$\Sigma A_{ik} P_{ik} = (\Sigma A_i P_i)^2 = (A P)^2.$$

Dieser symbolische Ausdruck bedeutet nun sicherlich eine Invariante gegenüber beliebigen linearen Transformationen, wenn die beiden vorgelegten Formen Quadrate linearer Formen sind, wenn also die A_i und P_k nicht nur Symbole, sondern zugleich auch Koeffizienten wirklicher linearer Formen $(A X)$ und $(U P)$ vorstellen. Denn dann ist $(A P) = (\underline{A}\,\underline{P})$, und also selbstverständlicherweise

$$(1) \qquad (A P)^2 = (\underline{A}\,\underline{P})^2.$$

Hieraus aber kann geschlossen werden, daß ganz allgemein $\Sigma A_{ik} P_{ik} = \Sigma \underline{A}_{ik} \underline{P}_{ik}$ sein muß. Denkt man sich nämlich in dem Ausdruck $(\underline{A}\,\underline{P})^2$ die in § 8 angegebenen Substitutionen (1*) gemacht und alle Glieder mit denselben Produkten $A_i A_k P_i P_k$ gesammelt und auf dieselbe Seite der Gleichung gestellt, so erhält man ein System von $\frac{n(n+1)}{2}$ trivialen Gleichungen der Form $0 = 0$: Alle Koeffizienten der genannten Produkte sind einzeln Null, da diese Produkte eben linear-unabhängig sind. Setzen wir aber an Stelle dieser Produkte nunmehr die entsprechenden Produkte $A_{ik} P_{ik}$, unter Aufhebung der genannten Einschränkung, so treten an Stelle der Produkte $\underline{A}_i \underline{A}_k \underline{P}_i \underline{P}_k$ die Produkte $\underline{A}_{ik} \underline{P}_{ik}$: Die Gleichung (1), nach den angegebenen Regeln gedeutet, bleibt nach wie vor richtig.

$(A P)^2$ ist daher der symbolische Ausdruck einer (absoluten) Invariante der Gruppe G.

Die zur Begründung dieser Behauptung benutzte Schlußweise aber ist typisch für alle ähnlichen Fälle. Sind z. B. an Stelle zweier quadratischen Formen ihrer $2 \cdot n$ gegeben, $(A^{(i)} X)^2$ und $(U P^{(k)})^2$, so erhält man ganz ebenso

$$|D|^2 \cdot (A^{(1)} \ldots A^{(n)})^2 = (\underline{A}^{(1)} \ldots \underline{A}^{(n)})^2,$$
$$|C|^2 \cdot (P^{(1)} \ldots P^{(n)})^2 = (\underline{P}^{(1)} \ldots \underline{P}^{(n)})^2.$$

Diese Ausdrücke, die homogen sind vom zweiten Grade in den **Symbolen** von je n quadratischen Formen, aber linear in deren **Koeffizienten**, erweisen sich als (relative) Invarianten. weil $(U^{(1)} \ldots U^{(n)})$ und $(X^{(1)} \ldots X^{(n)})$ solche sind.

Bis hierher haben wir Funktionen betrachtet, und insbesondere Invarianten, die linear sind im Kern, d. h. in den Koeffizienten einer jeden der beteiligten Formen. Aber diese Beschränkung ist nicht wesentlich für die Methode. Jede ganze rationale und homogene Funktion höheren Grades ist nämlich Spezialfall einer homogenen Funktion, die zwar von den Kernen (von den Koeffizienten) einer größeren Zahl von Formen, dafür aber von diesen linear abhängt, und wenn die erste eine Invariante der Gruppe G war, so ist es auch die zweite, und umgekehrt. Man kann die zweite Form unmittelbar als Glied einer Polynomialentwicklung erhalten, oder auch, was meistens bequemer ist, man kann sie stufenweise herstellen durch einen Differentiationsprozeß, den sogenannten Evektantenprozeß[1]. Sei z. B. irgend eine ganze Funktion m^{ten} Grades des Kernes (der Koeffizienten) von F gegeben. Dann setze man $F = \Phi + \lambda \Psi$, entwickele nach Potenzen von λ und suche den Faktor von $m \cdot \lambda$. Dieser ist dann eine Funktion $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades des Kernes von Φ und ersten Grades des Kernes von Ψ. Setzt man hinterher $\Psi = \Phi$, so erhält man wieder die gegebene Funktion.

Die neue Funktion, die durch die gegebene eindeutig bestimmt ist, und sie auch umgekehrt wieder bestimmt, heißt Evektante von F; der Prozeß, durch den sie entsteht, kann kurz so bezeichnet werden:

$$\frac{1}{m}\,\Psi\,\frac{\partial}{\partial\Phi}.$$

Durch Wiederholung dieses Verfahrens, wobei an Stelle der Zahl m der Reihe nach die Zahlen $m-1$, $m-2 \ldots 2, 1$ treten, erhält man schließlich eine Funktion, die statt des Kernes von F die Kerne von m verschiedenen Funktionen $\Psi_1 \ldots \Psi_m$ enthält, aber von dem Kern einer jeden von ihnen nur noch linear abhängt. Setzt man hinterher $\Psi_1 = \Psi_2 = \cdots = \Psi_m$, so erhält man wieder die vorgelegte Funktion. Wenn aber diese eine Invariante war, so ist es sicher auch die abgeleitete, von $\Psi_1 \ldots \Psi_m$ abhängige Funktion; denn aus $F = \Phi + \lambda \Psi$ folgt ja $\underline{F} = \underline{\Phi} + \lambda \underline{\Psi}$.

In der Praxis des Rechnens gestaltet sich die Sache so, daß man an Stelle einer symbolischen Darstellung irgend einer algebraischen Form schon von vornherein deren mehrere benutzt, und zwar so viele, als der Grad der zu bildenden Funktion angibt. Da die Formen $\Psi_1 \ldots \Psi_m$ schließlich alle mit der Form F identi-

[1]) Diese Operation ist nicht wesentlich verschieden von dem in der projektiven Geometrie üblichen Prozeß der Polarenbildung; sie wird daher von einigen Autoren auch als Polarenprozeß bezeichnet.

fiziert werden sollen, so dürfen in dem Ausdruck der zu bildenden Invariante die einzelnen Symbolsysteme beliebig vertauscht werden, ohne daß die dargestellte Funktion sich ändert.

Schreiben wir also jetzt z. B.

$$F = (A^{(1)} X)^2 = \cdots = (A^{(n)} X)^2,$$

so ist

$$\frac{1}{n!} (A^{(1)} A^{(2)} \ldots A^{(n)})^2$$

Ausdruck (symbolischer Ausdruck) einer (relativen) Invariante der Form F, die dadurch berechnet werden kann, daß man erst das Determinantenquadrat ausmultipliziert, dann durch Umordnung der entstehenden Summe gleichnamige Symbole $A_i^{(k)}$, $A_j^{(k)}$ nebeneinander schreibt und schließlich ihre Produkte für alle Werte des Index (k) durch die entsprechenden Koeffizienten von F, also durch die Werte A_{ij} ersetzt.

Die ausgerechneten („unsymbolischen") Ausdrücke von Invarianten sind fast immer wenig übersichtlich. In dem vorliegenden besonders einfachen Falle aber und noch unter gewissen umfassenderen Voraussetzungen hat jedoch die erklärte Funktion der Koeffizienten A_{ij} ein einfaches Bildungsgesetz: Sie ist nichts anderes als die Determinante aus den Größen A_{ij} [1]). Um Wiederholungen zu vermeiden, führen wir nur den Beweis eines gleichartigen Satzes aus, der sich auf eine bilineare Form des Typus

$$F = \Sigma X_i C_{ik} U_k$$

bezieht. Wir gehen den umgekehrten Weg, beginnen mit der Koeffizientendeterminante oder Diskriminante

$$|C| = |C_{11} \ldots C_{nn}|$$

von F und erweisen ihre Invarianteneigenschaft, indem wir sie in symbolische Form setzen.

---

[1]) Wenn hier (wie üblich) die Determinante $|A_{ij}|$ als „unsymbolischer" Ausdruck bezeichnet wird, so ist das cum grano salis zu verstehen: Auch eine Determinante ist ja nichts Fertiges, sondern nur eine Rechnungsanweisung, ein Symbol. Ich erwähne das, weil von Mathematikern, die selbst unvermeidlicherweise mit Determinanten rechneten, eine Zeitlang die Parole ausgegeben wurde, „Symbole" sollten in der Mathematik vermieden werden.

Zu diesem Zwecke führen wir neben der symbolischen Darstellung von F

$$F = (X\,C)(\Gamma\,U)$$

noch die symbolischen Ausdrücke von n Formen $\Psi_1 \ldots \Psi_n$ ein,

$$\Psi_k = (X\,C^k)(\Gamma^k\,U)$$

$(k = 1 \ldots n)$, die hinterher sämtlich mit F zusammenfallen sollen und daher auch von vornherein mit F identifiziert werden können:

$$F = \Psi_1 = \Psi_2 = \cdots = \Psi_n.$$

Wir verfahren nun so, daß wir in der ersten Zeile der Determinante $|C|$ Symbole von Ψ_1, in der zweiten Symbole von Ψ_2 benutzen usf., wodurch jede Mehrdeutigkeit des zu berechnenden Determinantenausdruckes vermieden wird. Wir setzen also in der i^{ten} Zeile

$$C_{ik} = C_i^i\,\Gamma_k^i,$$

und erhalten

$$|C| = \begin{vmatrix} C_{11} & \ldots & C_{1n} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ C_{n1} & \ldots & C_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1^1\,\Gamma_1^1 & \ldots & C_1^1\,\Gamma_n^1 \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ C_n^n\,\Gamma_1^n & \ldots & C_n^n\,\Gamma_n^n \end{vmatrix}$$

$$= C_1^1 \ldots C_n^n \cdot \begin{vmatrix} \Gamma_1^1 & \ldots & \Gamma_n^1 \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \Gamma_1^n & \ldots & \Gamma_n^n \end{vmatrix}.$$

Vertauscht man hier irgend zwei der oberen Indizes, d. h. vertauscht man irgend zwei der zu F gehörigen symbolischen Darstellungen, so ändert sich nichts. Man kann also den Ausdruck für $|C|$ durch das arithmetische Mittel aus allen den Ausdrücken ersetzen, die sich ergeben, wenn man die oberen Indizes in alle möglichen verschiedenen Anordnungen bringt. So erhält man ohne weiteres

$$|C| = \frac{1}{n!} \cdot \begin{vmatrix} C_1^1 & \ldots & C_n^1 \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ C_1^n & \cdots & C_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Gamma_1^1 & \ldots & \Gamma_n^1 \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \Gamma_1^n & \cdots & \Gamma_n^n \end{vmatrix},$$

oder also kürzer

$$|C| = \frac{1}{n!}(C^1 \ldots C^n)(\Gamma^1 \ldots \Gamma^n),$$

oder endlich, wenn die zur Unterscheidung von $\Psi_1 \ldots \Psi_n$ dienenden Indizes schließlich unten angebracht werden,

$$\boxed{|C| = \frac{1}{n!}(C_1 \ldots C_n)(\Gamma_1 \ldots \Gamma_n)}. \tag{2}$$

Bezeichnet man die analog gebildeten Diskriminanten (Koeffizientendeterminanten) von Formen der Typen $\Sigma X_i A_{ik} Y_k$ und $\Sigma U_i P_{ik} V_k$ entsprechend mit $|A|$ und $|P|$, so ergeben sich unmittelbar die Formeln

$$\boxed{\begin{gathered} |D^*|^2 . |A| = |\underline{A}|, \\ |C| = |\underline{C}|, \\ |C^*|^2 . |P| = |\underline{P}|, \end{gathered}} \tag{3}$$

in denen nun unter $|C^*|$ und $|D^*|$ die Diskriminanten (Koeffizientendeterminanten) irgend eines Paares kontragredienter linearer Transformationen zu verstehen sind, denen die Formen

$$\Sigma X_i A_{ik} Y_k, \quad \Sigma X_i C_{ik} U_k, \quad \Sigma U_i P_{ik} V_k$$

der Reihe nach unterworfen werden sollen. Die Diskriminanten $|A|$, $|C|$, $|P|$ sind also Invarianten der Gruppe G, und zwar sind $|A|$ und $|P|$ nur relative Invarianten dieser Gruppe, während $|C|$ eine absolute Invariante ist. Augenscheinlich läßt sich die Invarianteneigenschaft des Ausdrucks rechts in Nr. (2) auch dann noch begründen, wenn er als Definitionsgleichung einer n-fach linearen Funktion der Kerne (Koeffizientensysteme) von n verschiedenen Formen

$$(X C_1)(\Gamma_1 U), \ldots, \quad (X C_n)(\Gamma_n U)$$

aufgefaßt wird. Diese Funktion entsteht dann aus der ursprünglichen Funktion $|C|$ durch n-malige Anwendung des Evektantenprozesses. Sie hat ein noch genau ebenso durchsichtiges symbolisches Bildungsgesetz wie $|C|$ selbst, während ihr natürlich ohne weiteres hinzuschreibender unsymbolischer Ausdruck schon verwickelter ist. Unsere Betrachtung hat uns also gegenüber dem, was in elementaren Lehrbüchern zu finden ist, immerhin schon einiges Neue gelehrt. Die angestellte Rechnung aber, die in diesem einfachen Falle ausführlich dargelegt worden ist, führt noch weiter, sie ist typisch für eine ganze Reihe ähnlicher Umformungen. Von diesen wollen wir nun noch die wichtigste in ihrem ganz analog abzuleitenden Ergebnis hierher setzen. Es handelt sich dabei darum, in eine sogenannte geränderte Determinante die symbolische Bezeichnung einzuführen. Wir finden wie oben:

$$
(4)\quad \boxed{\begin{aligned} -\begin{vmatrix} 0 & X_1 & \ldots & X_n \\ U_1 & C_{11} & \ldots & C_{1n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ U_n & C_{n1} & \ldots & C_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & X_1 & \ldots & X_n \\ U_1 & C_1^1 \Gamma_1^1 & \ldots & C_1^1 \Gamma_n^1 \\ & & & \\ U_n & C_n^n \Gamma_1^n & \ldots & C_n^n \Gamma_n^n \end{vmatrix} \\ = \frac{1}{(n-1)!}(C_1 \ldots C_{n-1} U)(\Gamma_1 \ldots \Gamma_{n-1} X). \end{aligned}}
$$

Also auch dieser Ausdruck ist wieder eine Invariante — und zwar eine absolute Invariante — der Gruppe G; er ist nämlich eine Invariante („simultane Invariante"), gebildet aus den Kernen der nunmehr in anderen Veränderlichen Y, V geschriebenen Form F, $F = (Y C)(\Gamma V)$, und den Kernen der in Y und V linearen Formen $(Y U)$, $(X V)$, und zwar ist er nichts anderes als das n-fache einer Evektante von $|C|$, entsprechend der besonderen Annahme

$$\Phi = (Y C)(\Gamma V), \quad \Psi = (Y U) (X V).$$

Der Ausdruck (4) ist nun wieder eine bilineare Form von derselben Art, wie die ursprüngliche Form F; dieser Ausdruck kann also auch „symbolisch" bezeichnet werden; unter Einführung neuer Zeichen, versteht sich, die ein Mißverständnis ausschließen. Wir können auch auf ihn die symbolische Bezeichnung anwenden, könnten ihn also etwa $(U \Delta)(D X)$ nennen. Für die Anwendungen, die wir weiterhin daran zu knüpfen gedenken, ist es aber besser, einen Faktor $|C|^{-1}$ in die Bezeichnung aufzunehmen, natürlich unter der Einschränkung

$$(5)\qquad |C| \neq 0.$$

Wir erhalten so aus (4) die bilineare Form [1]):

$$(6)\qquad \boxed{(U \Delta)(D X) = \frac{(C_1 \ldots C_{n-1} U)(\Gamma_1 \ldots \Gamma_{n-1} X)}{(n-1)!\,|C|}}$$

Wir behaupten nun, daß diese Form $(U \Delta)(D X)$ zu $(X C)(\Gamma U)$ in umkehrbarer Beziehung steht, d. h. wir behaupten, daß, wenn die Diskriminante der Form (6) mit

$$|D| = |\Delta_i D_k|$$

[1]) Wegen der zugehörigen Terminologie siehe § 10.

bezeichnet wird, die Definitionsgleichung (6) die völlig analog gebildete Gleichung

$$\text{(7)} \qquad \boxed{(X\,C)(\Gamma\,U) = \frac{(\Delta_1 \ldots \Delta_{n-1}\,X)(D_1 \ldots D_{n-1}\,U)}{(n-1)!\,|D|}}$$

nach sich zieht. Dieses rechtfertigt den Ausdruck „zu F reziproke Form" für die Kovariante (7) — nicht (4).

Zum Beweise bemerken wir zunächst, daß zwischen den beiden Determinanten oder Diskriminanten $|C|$ und $|D|$ die Beziehung

$$\text{(8)} \qquad \boxed{|C|.|D| = 1}$$

besteht.

Wir erhalten dieses Resultat ganz unmittelbar, da die Matrix der Koeffizienten der Form (4) die Adjungierte zur Matrix der Koeffizienten von F ist. Die Koeffizientendeterminante der Form (4) hat also den Wert $|C|^{n-1}$, und die Determinante von (6) hat daher den Wert $|C|^{-n}.|C|^{n-1} = |C|^{-1}$ [1]). Ferner folgt unmittelbar

$$\text{(9)} \qquad \frac{1}{n}(C\,\Delta)(D\,\Gamma) = 1.$$

Weiter findet sich dann noch

$$\text{(10)} \qquad \boxed{\begin{aligned}(X\,C)(\Gamma\,D)(\Delta\,U) &= (X\,U),\\ (U\,\Gamma)(C\,\Delta)(D\,X) &= (U\,X).\end{aligned}}$$

Diese beiden Funktionen von X und U sind also einander gleich.

In der Tat erhält man, wenn man wohl darauf achtet, daß nur Ausdrücke gebildet werden dürfen, die in jedem der äquivalenten Symbolpaare $C_i\,\Gamma_k$ linear sind.

$$\begin{aligned}
&(X\,C)(\Gamma\,D)(\Delta\,U)\\
&= \frac{1}{n}\left\{(X\,C_1)(\Gamma_1\,D)(\Delta\,U) + \cdots + (X\,C_n)(\Gamma_n\,D)(\Delta\,U)\right\}\\
&= \frac{|C|^{-1}}{n.(n-1)!}.\left\{\begin{aligned}&(X\,C_1)(\Gamma_1 \ldots \Gamma_n)(U\,C_2 \ldots C_n) + \cdots\\ &\cdots + (X\,C_n)(\Gamma_1 \ldots \Gamma_n)(C_1 \ldots C_{n-1}\,U)\end{aligned}\right\}\\
&= \frac{(\Gamma_1 \ldots \Gamma_n)}{n!\,|C|}.\left\{\begin{aligned}&(X\,C_1)(U\,C_2 \ldots C_n) + \cdots\\ &\cdots + (X\,C_n)(C_1 \ldots C_{n-1}\,U)\end{aligned}\right\}\\
&= \frac{(\Gamma_1 \ldots \Gamma_n)(C_1 \ldots C_n)}{n!\,|C|}\cdot(X\,U) = (X\,U).
\end{aligned}$$

[1]) Durch eine etwas andere Anordnung der folgenden Überlegungen ergibt sich die Formel (8) auch ohne daß man den Kreis der symbolischen Rechnungen zu verlassen braucht. Der Leser möge sich das selbst klarzumachen suchen.

Die gleiche Rechnung zeigt nunmehr, wenn vorübergehend

$$(X\,C^*)(\Gamma^*\,U) = \frac{(\varDelta_1 \ldots \varDelta_{n-1}\,X)(D_1 \ldots D_{n-1}\,U)}{(n-1)!\,|D|}$$

gesetzt wird, daß auch — nach Analogie der Formeln (10) —

$$(X\,C^*)(\Gamma^*\,D)(\varDelta\,U) = (X\,U)$$

sein muß. Es folgt also, daß für alle X und alle U

$$(X\,C^*)(\Gamma^*\,D)(\varDelta^*\,U) = (X\,C)(\Gamma\,D)(\varDelta\,U)$$

ist. Setzen wir nunmehr

$$(Y\,V) = (Y\,D)(\varDelta\,U),$$

verlangen wir nämlich, daß bei gegebenem U diese Gleichung für alle Y bestehen soll, so gibt es, zufolge unserer Voraussetzung $|D| \neq 0$ zu jedem Vektor V auch einen entsprechenden Vektor U. Die vorletzte Gleichung reduziert sich also auf

$$(X\,C^*)(\Gamma^*\,V) = (X\,C)(\Gamma\,V)$$

und diese Gleichung besteht nunmehr für alle X und für alle V, womit die behauptete Reziprozität zwischen den Formen $(X\,C)(\Gamma\,U)$ und $(U\varDelta)(D\,X)$ erwiesen, und zwar durch ein auch in viel verwickelteren Fällen anwendbares Verfahren, nämlich durch „symbolische Rechnung", erwiesen ist [1]).

Durch dasselbe Verfahren ergibt sich, wenn wir jetzt statt einer bilinearen Form wieder eine quadratische Form betrachten, eine entsprechende Reihe von Formeln, die wir einfach zusammenstellen können, da irgend eine neue Wendung zu ihrer Ableitung nicht erforderlich ist. Es sei also jetzt gegeben die quadratische Form $\Sigma\,X_i\,L_{ik}\,X_k$, in symbolischer Berechnung

(11) $$(L\,X)^2 = (L_1\,X)^2 = \ldots = (L_n\,X)^2 \;{}^{2)}.$$

[1]) Der Einwand, daß man auch mit einfacheren Mitteln zum Ziele kommt, müßte abgelehnt werden. Denn dasselbe gilt in besonderen Fällen so ziemlich von jeder weitreichenden Methode. Es scheint mir richtig, die zu erklärende Methode schon an solchen Beispielen, und gerade an solchen einzuüben.

[2]) Daß hier ein anderes Symbol, L statt A, benutzt wird, ist nicht eine Nachlässigkeit, wie der Leser vermuten könnte. Wir werden weiterhin mehrere quadratische Formen zu betrachten haben, unter denen dann einer — die immer mit $(L\,X)^2$ bezeichnet wird — eine Sonderstellung zufällt.

Ihre Diskriminante heiße $|L|$, und sie werde gleich von vornherein als von Null verschieden vorausgesetzt. Man hat dann, ähnlich wie unter Nr. 2:

$$(12) \qquad |L| = |L_{ik}| = \frac{1}{n!}(L_1 \ldots L_n)^2.$$

Eine zweite mit der ersten invariant verbundene Form, die wieder zu jener in umkehrbarer Beziehung steht, aber statt einer Veränderlichen erster Schicht X eine solche zweiter Schicht U enthält, und mit

$$(13) \qquad (U\varLambda)^2 = (U\varLambda_1)^2 = \ldots = (U\varLambda_n)^2$$

bezeichnet werden soll, und überdies der Ausdruck der Polare $(U\varLambda)(V\varLambda)$ dieser Form ergibt sich, wenn man den nach Analogie von (4) gebildeten Ausdruck

$$(14) \qquad -\begin{vmatrix} 0 & V_1 & \ldots & V_n \\ U_1 & L_{11} & \ldots & L_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ U_n & L_{n1} & \ldots & L_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{(n-1)!}(L_1 \ldots L_{n-1}U)(L_1 \ldots L_{n-1}V)$$

mit $|L|$ dividiert. Wir erklären:

$$(15) \qquad \boxed{(U\varLambda)(\varLambda V) = \frac{(L_1 \ldots L_{n-1}U)(L_1 \ldots L_{n-1}V)}{(n-1)!\,|L|}}.$$

Es folgt dann

$$(16) \qquad |L|.|\varLambda| = 1$$

$$(17) \qquad (XL)(L\varLambda)(\varLambda U) = (XU),$$

$$(18) \qquad (XL)(LY) = \frac{(\varLambda_1 \ldots \varLambda_{n-1}X)(\varLambda_1 \ldots \varLambda_{n-1}Y)}{(n-1)!\,|\varLambda|},$$

alles, wie zuvor.

Offenbar hätten wir ganz ebenso überhaupt Formen mit zwei gleichartigen Veränderlichen, also alle nicht singulären Formen vom Typus $(XA)(BY)$ behandeln können. Auch wird die Bemerkung nicht überflüssig sein, daß solche Bildungen wie

$$(C_1 \ldots C_n)(\varGamma_1 \ldots \varGamma_n) \quad \text{oder} \quad (A_1 \ldots A_n)(B_1 \ldots B_n)$$

noch eine weitere Invarianteneigenschaft haben. Wir können ja auch die Veränderlichen X und U, oder X und Y, linearen Transformationen unterwerfen, die ganz unabhängig voneinander sind. Die genannten Ausdrücke werden dann, nach Ausführung eines Paares solcher Transformationen, mit einem Faktor reproduziert, der das Produkt der beiden Transformationsdeterminanten ist.

§ 10.

Invariante Darstellung der linearen Transformationen.

Wir wenden uns jetzt zurück zu den linearen Transformationen, und bemerken, daß uns die in § 9 entwickelten Formeln zu einer Darstellung dieser Transformationen verhelfen, die viel vollkommener ist als die, die wir bisher zur Verfügung hatten. Wir können nämlich jetzt die linearen Transformationen in eine eindeutig-umkehrbare Beziehung zu gewissen bilinearen Formen setzen, mit denen sich noch bequemer rechnen läßt, als mit den Transformationen selbst. Zur Erleichterung der Übersicht setzen wir die früher aufgestellten Formeln nochmals her und stellen gleich die bilinearen Formen daneben, die wir ihnen entsprechen lassen wollen. Wie bisher schon, sollen immer die Veränderlichen X, U als die ursprünglich gegebenen, die Veränderlichen $\underline{X}$, $\underline{U}$ als die neu eingeführten gelten. Pfeile zeigen an, welche Art von Veränderlichen in jeder Formel die unabhängige sein soll. Die hier zuerst eingeführten Vektoren $\underline{V}$ und $\underline{Y}$, V und Y, dienen der Zusammenfassung von je n unserer früheren Formeln in einen einzigen Ausdruck, der eben die bilineare Form ist, die wir der einzelnen Zuordnung von Vektoren $\underline{X}$ und $\underline{U}$ zu Vektoren X und U oder umgekehrt entsprechen lassen wollen:

$$
\begin{array}{llll}
(1,\mathrm{I}) & \sum^i X_i C_{ik} = \underline{X}_k; & \sum^{i,k} X_i C_{ik} \underline{V}_k; & \rightarrow \\
(1,\mathrm{II}) & \sum^i U_i D_{ik} = \underline{U}_k; & \sum^{i,k} U_i D_{ik} \underline{Y}_k; & \rightarrow \\
(2,\mathrm{I}) & X_i = \sum^k D_{ik} \underline{X}_k; & \sum^{i,k} V_i D_{ik} \underline{X}_k; & \leftarrow \\
(2,\mathrm{II}) & U_i = \sum^k C_{ik} \underline{U}_k; & \sum^{i,k} Y_i C_{ik} \underline{U}_k. & \leftarrow
\end{array}
$$

Dabei ist, wie früher (S. 91):

$$|C| \cdot D_{ik} = \frac{\partial |C|}{\partial C_{ik}}, \quad |D| \cdot C_{ik} = \frac{\partial |D|}{\partial D_{ik}}, \quad |C| \cdot |D| = 1,$$

also

$$\sum^k C_{ik} D_{ik} = 1 \qquad (k = 1 \ldots n),$$

$$\sum^k C_{ik} D_{jk} = 0 \qquad (i \neq j),$$

und ebenso

$$\sum^k C_{ki} D_{ki} = 1 \qquad (k = 1 \ldots n),$$

$$\sum^k C_{ki} D_{kj} = 0 \qquad (i \neq j).$$

Diese zwei Systeme von je n^2 Gleichungen aber haben wir schon zusammenfassen gelernt: Sie sagen nichts anderes aus als die viel einfacher gebauten Gleichungen (10) in § 9 (S. 108); wir haben nur nötig, die bilinearen Formen (1, I) und (1, II) mit $(XC)(\underline{V}\Gamma)$ und $(U\Delta)(D\underline{Y})$ zu identifizieren.

Setzen wir also

$$\boxed{C_{ik} = C_i\Gamma_k, \quad D_{ik} = \Delta_i D_k}, \tag{3}$$

so können wir die Formeln (1) und (2) so abkürzen:

$$
\begin{array}{llll}
(4, \mathrm{I}) & (XC)\Gamma = \underline{X}; & (XC)(\Gamma\underline{V}); & \rightarrow \\
(4, \mathrm{II}) & (U\Delta)D = \underline{U}; & (U\Delta)(D\underline{Y}); & \rightarrow \\
(5, \mathrm{I}) & X = \Delta(D\underline{X}); & (V\Delta)(D\underline{X}); & \leftarrow \\
(5, \mathrm{II}) & U = C(\Gamma\underline{U}); & (CY)(\Gamma\underline{U}). & \leftarrow
\end{array}
$$

Zueinander kontragredient sind also zunächst die beiden linearen Transformationen, die durch die Formen $(XC\overrightarrow{)(}\Gamma\underline{V})$ und $(U\Delta\overrightarrow{)(}D\underline{Y})$ repräsentiert werden; zueinander reziprok sind die beiden Transformationen, die zu $(XC\overrightarrow{)(}\Gamma\underline{V})$ und $(V\Delta\overleftarrow{)(}D\underline{X})$ gehören; kontragredient sind aber überhaupt die beiden Transformationen (4) und die beiden Nr. (5); und zueinander reziprok sind ebenso die beiden Transformationen (I) und die beiden Transformationen (II); hat man aus (4, I) $\underline{X}$ bestimmt, so liefert (5, I) das zu $\underline{X}$ gehörige X. Als Folge der angeführten Gleichungen ist noch:

$$(UX) = (\underline{U}\,\underline{X}).$$

Wir bedenken nun zweierlei. Erstens können wir das, was wir soeben durch besondere Zeichen, nämlich Pfeile, ausgedrückt hatten, auch auf eine einfachere Art zum Ausdruck bringen, indem wir immer dann, wenn der Pfeil von rechts nach links läuft, die beiden Faktoren des zu bildenden symbolischen Produkts umstellen. Wir bilden damit einen neuen Begriff, den der geordneten bilinearen Form, in deren Ausdruck die Reihenfolge der symbolischen Faktoren, d. i. die Reihenfolge der Veränderlichen, nicht mehr gleichgültig ist, wie sie es für unsere früheren Betrachtungen allerdings war. Zweitens können wir bemerken, daß ja eine lineare Transformation in rein formaler Hinsicht, d. h. abgesehen von der Bedeutung der Veränderlichen, durch ihre Koeffizientenmatrix bestimmt ist und die entsprechende bilineare Form durch ihren Kern, d. h. wieder durch dieselbe Matrix, und daß es, um z. B. die Transformation (2, I) anwenden zu können, nicht gerade nötig ist, daß ihre unabhängige

Veränderliche $\underline{X}$ vorher aus X mit Hilfe der Formel (1, I) abgeleitet worden war. Indem wir diese beiden Gedanken verbinden, gelangen wir zu einer für die Rechnung bequemeren Darstellung der durch die Formeln (1) und (2) ausgedrückten Zuordnungen. Wir setzen jetzt fest, daß in einer bilinearen Form, die als **Symbol** einer linearen Transformation benutzt werden soll, immer die an erster Stelle stehende Veränderliche die unabhängige (und dann der **Kern** dieser in der zweiten Veränderlichen linearen Form die abhängige Veränderliche) sein soll.

Gleichzeitig ändern wir dann auch teilweise die Bezeichnung der Veränderlichen, was statthaft ist, solange es nur auf die darzustellenden Transformationen, nicht auf ihre Objekte ankommt, die ja diese oder jene Vektoren sein können. Die folgenden Formeln werden dann immer noch genau dieselben Transformationen darstellen, wie die Formeln (1) und (2), oder (4) und (5), nur daß jetzt in Nr. (7) das $\underline{X}$ und $\underline{U}$ genannt wird, was vorher [in Nr. (2) und Nr. (5)] X und U hieß, und umgekehrt.

$$
\begin{array}{llll}
(6,\mathrm{I}) & \sum^{i} \overrightarrow{X_i C_{ik}} = \underline{X}_k; & (XC)\Gamma = \underline{X}; & (XC)(\Gamma V); \\
(6,\mathrm{II}) & \sum^{i} \overrightarrow{U_i D_{ik}} = \underline{U}_k; & (U\Delta)D = \underline{U}; & (U\Delta)(DY); \\
(7,\mathrm{I}) & \sum^{i} \overrightarrow{D_{ki} X_i} = \underline{X}_k; & (XD)\Delta = \underline{X}; & (XD)(\Delta V); \\
(7,\mathrm{II}) & \sum^{i} \overrightarrow{C_{ki} U_i} = \underline{U}_k; & (U\Gamma)C = \underline{U}; & (U\Gamma)(CY).
\end{array}
$$

Daß die Transformationen (6, I) und (7, I), sowie die Transformationen (6, II) und (7, II) zueinander reziprok sind, wird jetzt durch die symbolischen Gleichungen

$$(XC)(\Gamma D)\Delta = X, \quad (U\Delta)(D\Gamma)C = U,$$

oder also durch die Forderung ausgedrückt, daß für alle X und V, sowie U und Y,

$$
(8) \qquad \begin{aligned} (XC)(\Gamma D)(\Delta V) &= (XV), \\ (U\Delta)(D\Gamma)(CY) &= (UY). \end{aligned}
$$

Ebendasselbe wird aber auch durch die Formeln

$$(XD)(\Delta C)\Gamma = X, \quad (U\Gamma)(C\Delta)D = U,$$

oder durch die wiederum identisch zu erfüllenden Gleichungen

$$
(9) \qquad \begin{aligned} (XD)(\Delta C)(\Gamma V) &= (XV), \\ (U\Gamma)(C\Delta)(DY) &= (UY) \end{aligned}
$$

ausgesagt. Obwohl alle diese Gleichungen insofern dieselbe Forderung ausdrücken, als eine jede von ihnen Folge jeder anderen ist, so haben sie doch auch eine verschiedene Bedeutung, da die an erster

Stelle links stehende unabhängige Veränderliche X oder U der ersten oder zweiten Vektorenschicht angehört, und auch dann, wenn sie zur selben Schicht gehört, doch zuerst zwei verschiedenen Transformationen unterworfen werden soll.

Mit Hilfe der eingeführten Zeichen ergibt sich nun eine sehr einfache Darstellung der Zuordnung von zwei algebraischen Formen, deren Veränderliche in einer linearen Transformation und ihrer Reziproken, oder in einem Paar von kontragredienten Transformationen derart und ihren Reziproken, einander entsprechen. Es werde sogleich der allgemeinste Fall betrachtet, mit dem wir es hier zu tun haben. Die gegebene Form, deren Veränderliche $X, \ldots$ und $U, \ldots$ den zueinander kontragredienten Transformationen (1) oder (6) unterliegen sollen [1]), heiße

$$F = (AX)^{\mu} \ldots (PU)^{\nu} \ldots,$$

und die ihr zugeordnete Form

$$\underline{F} = (\underline{A}\,\underline{X})^{\mu} \ldots (\underline{P}\,\underline{U})^{\nu} \ldots$$

Da die Symbole A wie Vektoren U und die Symbole P wie Vektoren X zu transformieren sind, so erhält man die einfache Regel

$$\text{(10}\qquad \boxed{\{(A\varDelta)(D\underline{X})\}^{\mu} \ldots \{(PC)(\varGamma\underline{U})\}^{\nu} \ldots = \underline{F}.}$$

Umgekehrt wird

$$\text{(11)}\qquad \boxed{F = \{(\underline{A}\varGamma)(CX)\}^{\mu} \ldots \{(\underline{P}D)(\varDelta U)\}^{\nu} \ldots}$$

Natürlich muß man hier in jedem Produkt $(A\varDelta)(D\underline{X})$, wenn es auf eine höhere als die erste Potenz erhoben oder mit anderen Produkten derart multipliziert werden soll, bevor dies geschieht, sich den Kern von $(U\varDelta)(DX)$ eingeführt denken, und Entsprechendes gilt von den Produkten $(PC)(\varGamma\underline{U})$: Andernfalls würden Mehrdeutigkeiten entstehen. Ist z. B. $F = (AX)^2$, und $(U\varDelta)(DX)$ gleichbedeutend mit $(U\varDelta')(D'X)$, so steht $\{(A\varDelta)(D\underline{X})\}^2$ zur Abkürzung für das Produkt $(A\varDelta)(D\underline{X})(A\varDelta')(D'\underline{X}) = (A\varDelta)(A\varDelta')(D\underline{X})(D'\underline{X})$, das minder übersichtlich ist.

[1]) So also, daß

$$(XC)\varGamma = \underline{X}, \ldots$$

und

$$(U\varDelta)D = \underline{U}, \ldots$$

wird.

Wenden wir das Gesagte an auf bilineare Formen, deren wir nach ihrem Verhalten gegenüber Transformationen der Gruppe G drei „Gattungen“ zu unterscheiden haben, so erhalten wir die Gegenüberstellungen:

$$
\begin{aligned}
&F = (AX)(BY), \quad && \underline{F} = \{(A\Delta)(D\underline{X})\}\,\{(B\Delta)(D\underline{Y})\},\\
(12) \qquad &F = (AX)(QV), \quad && \underline{F} = \ (A\Delta)(D\underline{X})\ \ (QC)(\Gamma \underline{V}),\\
&F = (PU)(QV), \quad && \underline{F} = \{(PC)(\Gamma \underline{U})\}\,\{(QC)(\Gamma \underline{V})\}.
\end{aligned}
$$

Was wir hier über den Zusammenhang von bilinearen Formen mit kontragredienten Veränderlichen und linearen Transformationen gesagt haben, läßt sich sinngemäß auf Formen mit kogredienten Veränderlichen übertragen. Auch diese bestimmen ja, wenn ihre Diskriminanten nicht Null sind, lineare Transformationen, nur solche, die (im Gegensatz zu den bisher betrachteten) beide Schichten von Vektoren miteinander vertauschen, und sie sind umgekehrt durch diese Transformationen bestimmt; und auch diese Transformationen lassen sich auf zwei Arten zu Paaren anordnen, als *kontragrediente* und als *reziproke* Transformationen.

Durch Hinzufügung dieser neuen Transformationen entsteht eine *Erweiterung* der Gruppe G, für die indessen ein besonderes Zeichen hier entbehrt werden kann[1]).

Ohne eine besondere Erläuterung wird jetzt die folgende zu den Formeln (6, 7) vollkommen analoge Zusammenstellung verständlich sein:

$$
\begin{aligned}
&(13,\mathrm{I}) && \textstyle\sum' \overrightarrow{X_i A_{ik}} = \underline{U}_k; \quad && (XA)B = \underline{U}; \quad && (XA)(BY);\\
&(13,\mathrm{II}) && \textstyle\sum' \overrightarrow{U_i P_{ik}} = \underline{X}_k; \quad && (UP)Q = \underline{X}; \quad && (UP)(QV);\\
&(14,\mathrm{I}) && \textstyle\sum' \overrightarrow{P_{ki} U_i} = \underline{X}_k; \quad && (UQ)P = \underline{X}; \quad && (UQ)(PV);\\
&(14,\mathrm{II}) && \textstyle\sum' \overrightarrow{A_{ki} X_i} = \underline{U}_k; \quad && (XB)A = \underline{U}; \quad && (XB)(AY).
\end{aligned}
$$

Wenn dann

$$
P_{ik} = \frac{1}{|A|} \cdot \frac{\partial |A|}{\partial A_{ik}}, \quad A_{ik} = \frac{1}{|P|} \cdot \frac{\partial |P|}{\partial P_{ik}}, \quad |A| \cdot |P| = 1
$$

ist, so stellen auch hier die durch das Zeichen I, II gepaarten Formeln *reziproke* Transformationen dar, während die Paarungen (13) und

---

[1]) Achtet man nur auf die Verhältnisse der Vektorkoordinaten, so kommt man zu der üblichen Unterscheidung von *kollinearen* und *korrelativen Transformationen*.

(14) kontragrediente Transformationen bezeichnen. Man hat dann, ähnlich wie zuvor [Nr. (8, 9)]:

$$(XA)(BQ)P = X, \quad (UP)(QB)A = U,$$

oder

$$(15) \qquad \begin{aligned} (XA)(BQ)(PV) &= (XV), \\ (UP)(QB)(AY) &= (UY), \end{aligned}$$

für alle X, V, U, Y und ebenso

$$(UQ)(PA)B = U, \quad (BX)(AP)Q = X,$$

oder

$$(16) \qquad \begin{aligned} (UQ)(PA)(BY) &= (UY), \\ (BX)(AP)(VQ) &= (XV), \end{aligned}$$

für alle U, Y, X, V.

Wenn es sich um die Zuordnung bilinearer Formen zu linearen Transformationen handelt, sind also auch hier geordnete bilineare Formen zu benutzen, und es sind vier, nicht nur drei Arten oder Typen solcher Formen zu unterscheiden, die auf die beschriebene Weise gepaart werden können. In den zu (10) und (11) oder (12) analogen Formeln sind natürlich jetzt, da über die Zeichen A, B, P, Q schon verfügt ist, zur Darstellung der Formen F andere Zeichen (etwa A_1, B_1, P_1, Q_1) zu wählen.

Formen mit kogredienten Veränderlichen, die in solcher Beziehung zueinander stehen wie $(XA)(BY)$ und $(XB)(AY)$ oder $(UP)(QV)$ und $(UQ)(PV)$, also solche, die zu transponierten Matrizes $\| A_{ik} \|$, $\| A_{ki} \|$ oder $\| P_{ik} \|$, $\| P_{ki} \|$ gehören, werden in der Literatur der bilinearen Formen gewöhnlich zueinander konjugiert genannt (nach Frobenius). Da aber dieses überhaupt viel zu oft verwendete Wort in ähnlichem Zusammenhang noch eine zweite ebenfalls vielfach übliche Bedeutung hat[1]), so ziehe ich eine andere übrigens auch schon in Gebrauch gekommene Terminologie vor und nenne die eine Form die Transponierte der anderen. Ähnlich soll als Transponierte zu $(XC)(\Gamma V)$ die (geordnete) Form $(U\Gamma)(CY)$ gelten, wiewohl in beiden die Veränderlichen auf verschiedene Art bezeichnet

---

[1]) Allgemein heißen Formen

$$(AX)^\mu \ldots (VP)^\nu \ldots, \quad (UQ)^\mu \ldots (BY)^\nu \ldots,$$

deren Veränderliche X und U usw. V und Y usw. einander paarweise zugeordnet sind (nach Rosanes u. a.) zueinander konjugiert, wenn die bilineare Invariante

$$(AQ)^\mu \ldots (BP)^\nu \ldots$$

den Wert Null hat.

sind (was hier nebensächlich ist und nur der größeren Deutlichkeit dient). Ordnen wir jeder der betrachteten Formen ein einzelnes Buchstabenzeichen zu, setzen wir also etwa

$$T = (XC)(\Gamma V), \qquad \mathrm{T} = (U\varDelta)(DY),$$
$$S = (XA)(BY), \qquad \Sigma = (UP)(QV),$$

so sind die zugehörigen transponierten Formen

$$T' = (U\Gamma)(CY), \qquad \mathrm{T}' = (XD)(\varDelta V),$$
$$S' = (XB)(AY), \qquad \Sigma' = (UQ)(PV).$$

In gleicher Weise wie hier werden wir überhaupt den Akzent zur Bezeichnung der Operation des Transponierens verwenden. (Nach Frobenius.)

Ist $S = S'$ oder $\Sigma = \Sigma'$, so heißt die Form S oder Σ symmetrisch, ist $S = -S'$ oder $\Sigma = -\Sigma'$, so heißt S oder Σ alternierend. Im ersten Falle bleibt sie nämlich als Funktion von X und Y (nicht auch als „geordnete Form") bei Vertauschung von X und Y ungeändert, während sie im zweiten bei derselben Operation ihr Vorzeichen wechselt. Jede symmetrische Form ist Polare einer quadratischen Form, und umgekehrt ist eine Polare wie $(XL)(LY)$ symmetrisch. Jede beliebige bilineare Form mit kogredienten Veränderlichen kann auf eine einzige Weise als Summe einer symmetrischen und einer alternierenden Form dargestellt werden,

$$S = S_0 + S_1, \qquad \Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1, \tag{17}$$

wo

$$S_0 = \frac{S + S'}{2}, \quad S_1 = \frac{S - S'}{2}, \quad \Sigma_0 = \frac{\Sigma + \Sigma'}{2}, \quad \Sigma_1 = \frac{\Sigma - \Sigma'}{2};$$

wobei man natürlich auch die Null als „symmetrische" oder „alternierende" Form gelten lassen muß. Die Kerne von S_0 und S_1, deren erster identisch ist mit dem Kern einer bestimmten quadratischen Form, hängen dann vom Kern von S linear ab. Die ausgeführte Zerlegung von S in zwei Bestandteile von besonderen Eigenschaften aber ist, gegenüber Transformationen der Gruppe G, ein invarianter Prozeß. Das heißt, es ist einerlei, ob man erst die Zerlegung vornimmt und dann auf S_0 und S_1 eine bestimmte lineare Transformation anwendet, oder ob man umgekehrt verfährt, also erst die transformierte Form $\underline{S}$ zerlegt. Umgekehrt ist die Summe einer symmetrischen Form S_0 und einer alternierenden S_1 irgend eine bilineare Form, ohne besondere Eigenschaften. Der Kern einer symmetrischen Form enthält so viele linear-unabhängige (und überhaupt ganz unabhängige) Konstanten wie die entsprechende quadratische Form, nämlich $\frac{n(n+1)}{2}$, während die Konstantenzahl einer alternierenden Form $\frac{n(n-1)}{2}$ ist.

Wollte man in ähnlicher Weise mit einer Form wie T (oder T) verfahren, so würde man kein mit T (T) invariant verbundenes Ergebnis erhalten. Diese Operation ausführen zu wollen, hätte also in vorliegendem Zusammenhang (im Rahmen der Invariantentheorie der Gruppe G) keinen Sinn. Wohl aber gibt es auch für solche Formen eine Zerlegung in Bestandteile mit einfacheren Eigenschaften, deren Ergebnis mit ihnen invariant verbunden ist. Man kann nämlich setzen

$$(18)\quad \begin{aligned} (XC)(\Gamma V) &= \left\{(XC)(\Gamma V) - \frac{1}{n}(C\Gamma).(XV)\right\} + \frac{1}{n}(C\Gamma).(XV), \\ (U\varDelta)(DY) &= \left\{(U\varDelta)(DY) - \frac{1}{n}(D\varDelta).(UY)\right\} + \frac{1}{n}(D\varDelta).(UY). \end{aligned}$$

Der erste Summand hängt dann nur noch von $n^2 - 1$ unabhängigen Konstanten ab. Er ist eine bilineare sogenannte Normalform, gekennzeichnet dadurch, daß er der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial V_1} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial X_n \partial V_n} = 0$$

oder der entsprechenden Gleichung für U und Y genügt[1]). Die häufig vorkommende Invariante $(C\Gamma)$ $\{$oder $(D\varDelta)\}$ hat ebenfalls einen besonderen Namen erhalten. Man nennt sie die Spur von $(XC)(\Gamma V)$ $\{$oder $(U\varDelta)(DX)\}$[2]). Der unsymbolische Ausdruck für die Spur ist $\Sigma\, C_{ii}$ (oder $\Sigma\, D_{ii}$).

Natürlich erstrecken sich die letzten Erklärungen auf bilineare Formen überhaupt, nicht nur auf solche, deren Diskriminanten von Null verschieden sind, und die also, nach unserer Terminologie, mit Transformationen, d. h. umkehrbaren Zuordnungen $X \longrightarrow U$ und $U \longrightarrow X$ verbunden sind.

[1]) Wegen des allgemeinen Begriffs der Normalform (in Veränderlichen X, U) siehe T. F., II, § 3 und § 11.

[2]) Für die Operation, die zur Bildung der Spur führt, hat man neuerdings ein wunderliches Wort, Verjüngung, eingeführt. Dieses ist aber ganz überflüssig, da der ältere Ausdruck Faltung, der überdies diesen Prozeß als besonderen Fall einer in weiterem Umfang anwendbaren Operation kennzeichnet, schon ganz deutlich ist. Ich bestreite auch hier den Autoren das Recht zu willkürlicher Vervielfältigung der Terminologie.

§ 11.

Die Zusammensetzung bilinearer Formen.

Die symbolische Bezeichnung, die fiktive Zerlegung auch unzerlegbarer Formen in Faktoren, erfüllt die Forderung vollkommener Deutlichkeit. Die Veränderlichen in einer bilinearen Form wurden einzeln bezeichnet, so daß wir die Transformierte irgend einer Form

$$(AX)^{\mu_1}(BY)^{\mu_2}\ldots(UP)^{\nu_1}(VQ)^{\nu_2}\ldots,$$

in der ja viele Veränderliche vorkommen können, sofort hinschreiben konnten. Handelt es sich aber nur um die Forderung, mehrere lineare Transformationen nacheinander auszuführen, so kommt man oft mit einer viel einfacheren Symbolik aus. Offenbar genügt es nämlich dann, jeder bilinearen Form ein einzelnes Buchstabenzeichen zuzuordnen (wie wir es am Schlusse des vorigen Paragraphen getan hatten), und dann diese Zeichen, die zugleich auch als Zeichen linearer Transformationen dienen, nach Art eines Produktes nebeneinander zu stellen, mit der Maßgabe jedoch, daß bei einem solchen tatsächlich Produkt genannten Aggregat von Zeichen, die Reihenfolge dieser Zeichen, oder also der Faktoren des Produktes, nicht gleichgültig ist für das Ergebnis. Gleichgültig dagegen wird jetzt, in gewissem Grade, die Benennung der Veränderlichen.

Es ist jetzt z. B. einerlei, ob wir z. B. die Form $(XC)(\Gamma V)$ oder die Form $(XC)(\Gamma U)$ einer linearen Transformation zuordnen wollen. Es kommt indessen doch nicht nur auf den Kern an, der beide Male derselbe ist. Denn nicht gleichgültig ist hinwieder die Verteilung der Veränderlichen auf die zwei Schichten von Vektoren, wenn wir nämlich darauf achten wollen, Transformationen nur so zusammenzusetzen, oder nur solche „Produkte“ bilinearer Formen zu bilden, daß alle eingeführten Verbindungen von Transformationen oder Formen die Invarianteneigenschaft erhalten in bezug auf Transformationen der Gruppe G. Ferner muß die Deutlichkeit gewahrt bleiben, soweit sie hier noch nötig ist. Man wird also nicht auf den Gedanken verfallen, auch noch in einer Form wie $(XA)(BY)$ das Zeichen Y durch X ersetzen zu wollen, wodurch eine lediglich quadratische Form zustande kommen würde.

Was wir nun vorzutragen haben werden, ist so elementarer Natur, daß dieses alles recht wohl unter ausschließlichem Gebrauch von Summen- und Produktzeichen bequem dargestellt werden kann, also ohne Verwendung der symbolischen Schreibweise. Und in der

Tat sind die älteren Autoren alle in dieser Weise zu Werke gegangen. Für sie aber war das Rechnen mit bilinearen Formen Selbstzweck, während es für uns auch Mittel zu anderen Zwecken ist, für die eine so einfache Symbolik nicht mehr ausreicht. Es muß daher für uns überall klar sein, wie der Übergang von den einfachen Buchstabensymbolen zu der im engeren Sinne sogenannten symbolischen Bezeichnung herzustellen ist. Deshalb knüpfen wir an die vorhergehenden Darlegungen an, gehen also von *symbolischen* Produkten wie $(XC)(\Gamma V)$ usw. aus, deren Bedeutung ja nunmehr dem Leser geläufig genug sein wird.

Bei einem wesentlichen Teile des Vorzutragenden ist die Einschränkung, daß die zu gebrauchenden Zeichen zu *nicht singulären* Formen, d. h. zu Formen von nicht verschwindenden Diskriminanten gehören sollen, weder nötig, noch erwünscht oder auch nur allgemein zulässig. Wir lassen daher diese Voraussetzung zunächst fallen.

Wir geben zunächst die Erklärung: *Von einer Zusammensetzung oder von dem (symbolischen) „Produkt" zweier geordneter bilinearer Formen (mit bestimmter Reihenfolge der Faktoren) wird nur dann gesprochen, wenn die zweite Veränderliche des ersten Faktors kontragredient ist zur ersten Veränderlichen des zweiten Faktors.*

Unterscheiden wir also die schon zuvor aufgetretenen vier Arten bilinearer Formen durch ein- für allemal festzuhaltende Zeichen

$$(1)\qquad \begin{aligned} T &= (XC)(\Gamma V), & \mathbf{T} &= (U\varDelta)(DY), \\ S &= (XA)(BY), & \Sigma &= (UP)(QV), \end{aligned}$$

wobei wir immer die erste Veränderliche, je nach ihrer Zugehörigkeit zur ersten oder zweiten Schicht, mit X oder U, und die zweite Veränderliche mit Y oder V bezeichnen, so sollen „Produkte" nur nach folgendem Schema gebildet werden:

(2)

$\rightarrow$	S_2	T_2	$\mathbf{T}_2$	Σ_2
S_1	—	—	S_3	T_3
T_1	S_3	T_3	—	—
$\mathbf{T}_1$	—	—	$\mathbf{T}_3$	$\boldsymbol{\Sigma}_3$
$\boldsymbol{\Sigma}_1$	$\mathbf{T}_3$	$\boldsymbol{\Sigma}_3$	—	—

(*Zulässige Produkte*).

Formal ausführbare Verbindungen, wie $S_1 S_2$, $S_1 T_2$ (die an und für sich auch noch „Produkte" genannt werden können), kommen also nicht vor, da sie kein (gegenüber G) invariantes Ergebnis haben würden. Das Produkt $S_1 \mathsf{T}_2$ aber ist eine bilineare Form von der Art oder vom Typus S und wird mit S_3 bezeichnet. Ist also etwa

$$S_1 = (XA_1)(B_1 Y), \quad \mathsf{T}_2 = (U\varDelta_2)(D_2 Y),$$

so ist der Sinn des Zeichens

$$S_3 = S_1 \mathsf{T}_2$$

erklärt durch die Formel

$$S_3 = (XA_1)(B_1 \varDelta_2)(D_2 Y).$$

Allgemein gilt für den Fall, daß die betrachteten Formen Transformationen entsprechen (oder „Symbole“ solcher Transformationen sind):

Lineare Transformationen werden zusammengesetzt, indem man die ihnen entsprechenden bilinearen Formen in gleicher Reihenfolge zusammensetzt oder miteinander „multipliziert“.

Zugleich mit jeder der aufgezählten Produktbildungen $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}$ ist immer auch die andere $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ zulässig, und beide Produkte von je drei Faktoren haben dasselbe Ergebnis:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}.$$

(Assoziationsgesetz der Multiplikation.)

Ferner ist, wenn $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, sowie $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ gleichartig sind (zum selben Typus T oder T, S oder Σ gehören) immer

$$(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2)\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{B} + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2) = \mathfrak{A}\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}\mathfrak{B}_2.$$

(Distributionsgesetze der Multiplikation.)

Dagegen sind die Produkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ nicht immer zugleich zulässig, und wenn sie es sind, so ist nicht immer

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A};$$

tritt dies jedoch in einem besonderen Falle ein, so heißen die Formen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ vertauschbar. Nach der getroffenen Festsetzung müssen sie dann beide zum Typus T oder beide zum Typus T gehören. Ferner gilt, wenn, wie in § 10, ein Akzent den Übergang von einer gegebenen bilinearen Form zur transponierten bezeichnet, die Gleichung

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})' = \mathfrak{B}'\mathfrak{A}'; \tag{3}$$

es ist also z. B. auch

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})' = \mathfrak{C}'\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'.$$

Außerdem gilt

$$(\mathfrak{A}')' = \mathfrak{A}.$$

Zu den Formen des Typus $T(\mathsf{T})$ gehört eine ausgezeichnete bilineare Form, die mit $E(H)$ bezeichnet und eine „Einheitsform“ genannt werden soll. Es gibt also zwei Einheitsformen,

$$\mathsf{E} = (XV), \quad \mathsf{H} = (UY), \tag{4}$$

die zwar nur durch die Bezeichnung und Stellung der Veränderlichen unterschieden sind, und für $X = Y$, $U = V$ dieselben Zahlenwerte haben werden, aber auf verschiedene Weise in Rechnungen eingehen. Es ist

$$\boxed{\begin{aligned} ET = TE = T, &\quad \mathsf{HT} = \mathsf{TH} = \mathsf{T}, \\ ES = SH = S, &\quad \mathsf{H}\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}\mathsf{H} = \boldsymbol{\Sigma}, \end{aligned}} \tag{5}$$

wie immer auch $T, \mathsf{T}, S, \boldsymbol{\Sigma}$ gewählt sein mögen; insbesondere ist

$$EE = E, \quad \mathsf{HH} = \mathsf{H}, \tag{6}$$

während die Zusammenstellungen (Produkte) $\mathsf{E\,H}$ und $\mathsf{H\,E}$ nicht in unserer Tabelle stehen. Natürlich ist auch

$$E' = \mathsf{H}, \quad \mathsf{H}' = E.$$

E ist nach Nr. 5 mit jeder Form T, H mit jeder Form T vertauschbar.

Allgemein dient, wenn in einem (symbolischen) Produkt von geordneten Formen T oder T derselbe Faktor $n$mal hintereinander vorkommt, zur Bezeichnung dieses Sachverhalts das gewöhnliche Zeichen der Potenzbildung. Ein solches Produkt heißt also T^n oder T^n. Seine Faktoren sind selbstverständlicherweise vertauschbar, es ist also immer

$$T^\mu T^\nu = T^\nu T^\mu = T^{\mu+\nu},$$
$$\mathsf{T}^\mu \mathsf{T}^\nu = \mathsf{T}^\nu \mathsf{T}^\mu = \mathsf{T}^{\mu+\nu}.$$

Die Folge der „Potenzen“ $T = T^1, T^2, T^3, \ldots$ läßt sich immer um einen Schritt nach rückwärts fortsetzen, man kann eine (symbolische) „nullte Potenz“ erklären durch die Formel

$$T^0 = E, \quad \mathsf{T}^0 = \mathsf{H}. \tag{7}$$

Ist aber die Diskriminante $|T|$ oder $|\mathsf{T}|$ von Null verschieden, so kann man auch noch zu „Potenzen“ mit negativen Exponenten übergehen und insbesondere T^{-1} und T^{-1} erklären durch die symbolischen Gleichungen

(8) $$TT^{-1} = T^{-1}T = E, \quad \mathsf{T}\mathsf{T}^{-1} = \mathsf{T}^{-1}\mathsf{T} = \mathsf{H},$$

von denen eine die andere nach sich zieht. Namentlich ist

$$E^{-1} = E^0 = E^1, \quad \mathsf{H}^{-1} = \mathsf{H}^0 = \mathsf{H}^1.$$

Wenn z. B.

$$T = (XC)(\Gamma V)$$

gesetzt wird, so folgt

$$T^{-1} = \frac{(\Gamma_1 \ldots \Gamma_{n-1} X)(C_1 \ldots C_{n-1} V)}{(n-1)!\,|T|}$$
$$= (-1)^{n+1} \frac{(X\Gamma_1 \ldots \Gamma_{n-1})(C_1 \ldots C_{n-1} V)}{(n-1)!\,|T|},$$

mit dieser, nicht der umgekehrten Anordnung der beiden Faktoren im Zähler des Ausdrucks. Dieses ist also wieder eine geordnete Form vom Typus T, nicht T; allgemein wird jetzt für beliebige ganzzahlige Werte von μ und ν

$$T^\mu T^\nu = T^\nu T^\mu = T^{\mu+\nu}.$$

Sind die Formen T_1 und T_2 oder T_1 und T_2 vertauschbar, und ist $|T_2| \neq 0$, $|\mathsf{T}_2| \neq 0$, so wird auch

(9) $$T_1 T_2^{-1} = T_2^{-1} T_1, \quad \mathsf{T}_1 \mathsf{T}_2^{-1} = \mathsf{T}_2^{-1} \mathsf{T}_1,$$

und man kann dann diesen Umstand durch Gebrauch des gewöhnlichen Zeichens der Division

$$\frac{T_1}{T_2}, \quad \frac{\mathsf{T}_1}{\mathsf{T}_2}$$

zum Ausdruck bringen. Die Formel (9) ergibt sich, ohne jede Rechnung, aus dem Zusammenhang der Formen mit linearen Transformationen, wenn man den Fall, daß T_1 und T_1 keiner Transformation entsprechen, als Grenzfall auffaßt und behandelt.

Hatten wir es mit Formen S oder Σ zu tun, so hat es hier im allgemeinen keinen Sinn, von Potenzen einer solchen Form reden zu wollen, d. h., formal zu bildende „Potenzen“ etwa von S sind gegenüber G ebensowenig mit S invariant-verbunden, wie Produkte der Form $S_i S_k$ mit ihren Faktoren überhaupt. Wenn aber die Form S oder Σ nicht-singulär ist, so gehört gleichwohl zu ihr eine Form, auf die die Potenzbezeichnung anwendbar ist, nämlich ihre Reziproke, die dann eben nicht wieder eine Form des Typus S oder Σ, sondern eine Form vom Typus Σ oder S ist. Wir erklären die Zeichen S^{-1} und Σ^{-1} durch die Gleichungen (symbolischen Gleichungen)

$$(10) \qquad \begin{aligned} SS^{-1} &= E, \quad & S^{-1}S &= \mathsf{H}; \\ \Sigma\Sigma^{-1} &= \mathsf{H}, \quad & \Sigma^{-1}\Sigma &= E, \end{aligned}$$

von denen wiederum jedesmal eine die andere nach sich zieht; so daß, z. B., wenn

$$S = (XA)(BY)$$

gesetzt wird,

$$S^{-1} = (-1)^{n+1} \frac{(UB_1 \ldots B_{n-1})(A_1 \ldots A_{n-1} V)}{(n-1)!\,|S|}$$

wird. Natürlich ist auch, wenn S^{-1} und Σ^{-1} überhaupt gebildet werden können, $(S^{-1})^{-1} = S$, $(\Sigma^{-1})^{-1} = \Sigma$. Es folgt dann, wenn (wie zuvor) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ irgendwelche nach der Regel (2) zusammensetzbare, nun aber nicht-singuläre Formen bezeichnen,

$$(11) \qquad (\mathfrak{A}\mathfrak{B})^{-1} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1},$$

und außerdem ergibt sich noch, daß — wieder unter der Voraussetzung $|\mathfrak{A}| \neq 0$ —

$$(12) \qquad (\mathfrak{A}')^{-1} = (\mathfrak{A}^{-1})'$$

ist. Diese Form repräsentiert nun, wie wir schon wissen, die zur Transformation $\mathfrak{A}$ kontragrediente Transformation. Sie wird mithin, als bilineare Form, die zu $\mathfrak{A}$ kontragrediente Form zu nennen sein. Bezeichnen wir sie einfacher mit $\mathbf{A}$ und brauchen wir entsprechend die Zeichen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{\Gamma}$, so sehen wir aus (3) und (12), daß jede der symbolischen Gleichungen

$$(13) \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}, \quad \mathbf{AB} = \mathbf{\Gamma}$$

die andere zur Folge hat. Dies ist nur eine andere Form der nach dem Früheren selbstverständlichen Aussage, daß mit der Zusammensetzung von zwei linearen Transformationen die in derselben Aufeinanderfolge zu bewirkende Zusammensetzung der kontragredienten Transformationen invariant-verbunden ist.

Die doppelte Schreibart (12) der kontragredienten Transformation zu $\mathfrak{A}$ ist noch immer ein wenig unbequem. Wir können aber festsetzen, daß kontragrediente Transformationen oder Formen eben durch die Zeichen T und $\mathbf{T}$, S und $\mathbf{\Sigma}$ dargestellt werden sollen.

Tun wir das, setzen wir also nunmehr

$$\boxed{\begin{aligned} T &= (XC)(\Gamma V), & \mathrm{T} &= (U\varDelta)(DY), \\ S &= (XA)(BV), & \boldsymbol{\Sigma} &= (UP)(QV), \end{aligned}} \tag{14}$$

mit der besonderen Bestimmung, daß

$$(U\varDelta)(DY) = \frac{(C_1 \dots C_{n-1} U)(\Gamma_1 \dots \Gamma_{n-1} Y)}{(n-1)!\,|T|}$$

und also

$$(XC)(\Gamma V) = \frac{(\varDelta_1 \dots \varDelta_{n-1} X)(D_1 \dots D_{n-1} V)}{(n-1)!\,|\mathrm{T}|}$$

sowie

$$|T| \cdot |\mathrm{T}| = 1,$$

ferner

$$(UP)(QV) = \frac{(A_1 \dots A_{n-1} U)(B_1 \dots B_{n-1} V)}{(n-1)!\,|S|}$$

und daher

$$(XA)(BY) = \frac{(P_1 \dots P_{n-1} X)(Q_1 \dots Q_{n-1} Y)}{(n-1)!\,|\boldsymbol{\Sigma}|}$$

sowie

$$|S| \cdot |\varSigma| = 1$$

werden soll, so wird

$$\begin{aligned} (T')^{-1} &= \mathrm{T}, & (\mathrm{T}')^{-1} &= T, \\ (S')^{-1} &= \boldsymbol{\Sigma}, & (\varSigma')^{-1} &= S, \end{aligned} \tag{15}$$

oder, was dasselbe aussagt,

$$\begin{aligned} T' &= \mathrm{T}^{-1}, & \mathrm{T}' &= T^{-1}, \\ S' &= \boldsymbol{\Sigma}^{-1}, & \boldsymbol{\Sigma}' &= S^{-1}, \end{aligned} \tag{16}$$

so daß bei Rechnungen mit Formen, die Transformationen entsprechen, das Zeichen (′) ganz entbehrt werden kann. Die Tafel (10) wird dann zu ergänzen sein durch die folgende

$$\boxed{\begin{aligned} T^{-1} &= (XD)(\varDelta V), & \mathrm{T}^{-1} &= (U\Gamma)(CY), \\ S^{-1} &= (UQ)(PV), & \varSigma^{-1} &= (XB)(AY). \end{aligned}} \tag{17}$$

Mit Hilfe der eingeführten Zeichen läßt sich unter anderem sehr bequem die Forderung ausdrücken, daß irgend eine unserer Transformationen $\mathfrak{A}$ einer anderen $\mathfrak{B}$ unterworfen werden soll. Ist z. B. $\mathfrak{A}$ eine Transformation vom Typus T, die eine Zuordnung von Vektoren $X \to \underline{X}$ bestimmt, und $\mathfrak{B}$ eine ebensolche Transformation, die den Vektoren X und $\underline{X}$ andere zuordnet nach dem Schema $X \to X'$, $\underline{X} \to \underline{X}'$, so ist $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ die Transformierte von $\mathfrak{A}$

vermöge $\mathfrak{B}$; sie ordnet dem Vektor X' unmittelbar den Vektor $\underline{X}'$ zu, $X' \rightarrow \underline{X}'$. In den anderen Fällen, die übrigens genau so zu behandeln sind, sehen die Formeln zum Teil anders aus, weshalb wir sie zu bequemem Gebrauch in einer Tabelle zusammenstellen. Das Objekt, der Operandus, die zu transformierende Transformation $\mathfrak{A}$, wird mit einem der Zeichen S^*, T^*, T^*, Σ^* verbunden. Die transformierenden Transformationen, die Operatoren, werden zweckmäßig nach dem Schema (14) zu Paaren kontragredienter Transformationen, $\mathfrak{T} = (T, \mathsf{T})$, $\mathfrak{S} = (S, \Sigma)$ zusammengefaßt. Sie werden also zu einer „Transformation der Gruppe G“, oder ihrer Erweiterung (S. 115) zusammengefaßt. Die transformierte Transformation, d. h. ihr Symbol, ist dann der folgenden Tabelle zu entnehmen:

(18)

$\mathfrak{A}$	S^*	T^*	T^*	Σ^*
$\mathfrak{T} = (T, \mathsf{T})$	$T^{-1} S^* \mathsf{T} = \underline{S}^*$	$T^{-1} T^* T = \underline{T}^*$	$\mathsf{T}^{-1} \mathsf{T}^* \mathsf{T} = \underline{\mathsf{T}}^*$	$\mathsf{T}^{-1} \Sigma^* T = \underline{\Sigma}^*$
$\mathfrak{S} = (S, \Sigma)$	$S^{-1} S^* \Sigma = \underline{\Sigma}^*$	$S^{-1} T^* S = \underline{\mathsf{T}}^*$	$\Sigma^{-1} \mathsf{T}^* \Sigma = \underline{T}^*$	$\Sigma^{-1} \Sigma^* S = \underline{S}^*$ [1]

Insbesondere folgt aus (5) und (10), daß die beiden Einheitsformen von den Transformationspaaren $\mathfrak{T}$ in Ruhe gelassen und von den Transformationspaaren $\mathfrak{S}$ vertauscht werden:

$$T^{-1} E T = E, \quad \mathsf{T}^{-1} \mathsf{H} \mathsf{T} = \mathsf{H}, \tag{19}$$
$$S^{-1} E S = \mathsf{H}, \quad \Sigma^{-1} \mathsf{H} \Sigma = E;$$

was natürlich auch von vornherein klar ist, da E und H die Bedeutung

$$X = \underline{X} \quad \text{und} \quad U = \underline{U}$$

haben.

[1]) Lineare Transformationen oder bilineare Formen, die einander durch Transformationen von G zugeordnet werden können, also S^* und $\underline{S}^*$, T^* und $\underline{T}^*$, T^* und $\underline{\mathsf{T}}^*$, Σ^* und $\underline{\Sigma}^*$, heißen nach Frobenius zueinander ähnlich. Ich kann auch diese Terminologie nicht annehmen, da das Wort ähnlich in der Geometrie, auf die das Rechnen mit bilinearen Formen unmittelbare Anwendung findet, von altersher eine andere Bedeutung hat. Noch weniger kann ich mich damit einverstanden erklären, daß Frobenius und andere das Wort äquivalent, das in der Gruppentheorie nirgends zu entbehren ist, für einen ganz speziellen Zweck festlegen wollen. Wir sagen, daß S und S^* usw. äquivalent sind gegenüber Transformationen von G, oder daß sie, in der Theorie der Gruppe G miteinander gleichberechtigt sind.

In allen Fällen hat das Bestehen einer Gleichung der Form $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3$ das Bestehen der entsprechenden Gleichung $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3$ zur Folge. Aber offenbar ist es nicht nötig, daß die zu transformierenden Formen S^*, T^*, T^*, $\mathbf{\Sigma}^*$ zu Transformationen (in unserem Sinne) gehören. Auch wenn diese Formen singulär sind, liefern die Formeln (18) andere, die wir als die Transformierten von jenen vermöge $\mathfrak{S}$ oder Σ erklären können. Und dieser Begriff der Transformation einer bilinearen Form ordnet sich dann dem viel umfassenderen Begriff der Transformation einer beliebigen Form durch ein Paar kontragredienter Transformationen der Gruppe G unter.

Das Rechnen mit bilinearen Formen, von dem wir später verschiedene Anwendungen kennen lernen werden, geht in seinen Anfängen auf Cayley zurück. Es erscheint in der älteren Literatur und in einem Teile der neueren als ein Rechnen mit Matrizen. Man kann nämlich das „Produkt" von zwei quadratischen Matrizen $\|C^1_{ik}\|$ und $\|C^2_{kj}\|$ als eine neue Matrix $\left\|\sum^k C^1_{ik} C^2_{ik}\right\|$ erklären, und dann läuft die Multiplikation der Matrizen parallel mit der Multiplikation der bilinearen Formen $\Sigma X_i C^1_{ik} V_k$ und $\Sigma X_k C^2_{kj} V_j$ oder $(XC_1)(\Gamma_1 V)$ und $(X C_2)(\Gamma_2 V)$, wie sie im Texte erklärt worden ist. Frobenius hat diesem Zweige formalen Rechnens eine hohe Ausbildung gegeben. Die wichtigste Schrift über diesen Gegenstand ist ohne Zweifel seine Arbeit aus dem Jahre 1878 (Journal für Mathematik, Band 84). Siehe auch das treffliche Referat von A. Loewy in Pascals Repertorium der höheren Analysis (Deutsche Ausgabe, 2. Aufl., 1910; I, Kap. II, § 6). Bei den Rechnungen mit höheren komplexen Zahlen handelt es sich um verschiedenartige Ausschnitte aus dem Rechnen mit Matrizen oder bilinearen Formen, worauf in Schriften von Mathematikern englischer Zunge durch den Ausdruck Universal Algebra hingewiesen wird. (Vgl. Loewy, a. a. O., § 7, und E. Cartan, Artikel Nombres complexes [I, 5, 1908] der französischen Enzyklopädie, Nr. 21—37). Mir scheint dieses Wort zu anspruchsvoll, denn die „universelle" Algebra ist ja selbst wieder ein Ausschnitt aus der Algebra.

Aus dem, was eben über die Leistung von Frobenius gesagt wurde, folgt nicht, daß man seine Theorie mit Haut und Haaren hinunterschlucken müßte. Ich kann es nicht als einen glücklichen Umstand betrachten, daß man einen solchen Stoff so ganz wie ein Ding für sich behandelt und gar keine Rücksicht darauf genommen hat, daß in der projektiven Geometrie wie in der Invariantentheorie der linearen Transformationen zahlreiche (und zum Teil viel umfassendere) Begriffsbildungen nächstverwandten Inhalts schon vorhanden waren. Schon die grundlegenden Definitionen sind rein formaler Natur, die Frage nach allen möglichen Invarianten bilinearer Formen (gegenüber der Gruppe G) taucht in dieser Literatur, soweit meine Kenntnis reicht, nirgends auf. Überhaupt fehlt die Gliederung des Stoffes nach gruppentheoretischen Gesichtspunkten, und daher auch die grundsätzliche Unterscheidung von zwei Arten von Veränderlichen X und U, deren Bedeutung von Vertretern der projektiven Geometrie längst erkannt und gewürdigt worden war. Ja, es scheint beinahe' daß man sich mit Absicht um diese Dinge nicht gekümmert hat. So bedeuten für Frobenius und seine Schule die vier bilinearen Formen

$$\Sigma X_i V_i, \quad \Sigma U_i Y_i, \quad \Sigma X_i Y_i, \quad \Sigma U_i V_i$$

alle dasselbe — daß sie alle zur selben Koeffizientenmatrix, der „Einheitsmatrix", gehören, also formal einander gleichen, ist der entscheidende Gesichtspunkt. Dieselben Veränderlichen werden bald diesen, bald jenen Transformationen unterworfen, und so kommt eine gruppentheoretische Gliederung des Stoffes nicht zustande: Der Geometer, der ein Bedürfnis, und zwar ein sehr lebhaftes, nach besserer Ordnung hat, mag zusehen, wie er sich zurechtfindet. Ich kann also die Unterscheidung, die hier durch Einführung zweier Einheitsformen

$$\mathsf{E} = \Sigma X_i V_i = (X V), \quad \mathsf{H} = \Sigma U_i Y_i = (U Y)$$

zum Ausdruck gebracht worden ist, und die anderen Unterscheidungen, die damit zusammenhängen, durchaus nicht als etwas Nebensächliches ansehen, mögen andere dazu sagen, was sie wollen. (Eine formale Übereinstimmung hat auch sonst schon gelegentlich zum Zusammenwerfen wesentlich verschiedener Begriffe geführt. S. darüber A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen, 1903, S. 266.)

Als jedenfalls nicht ganz unwesentlich erscheint mir noch ein anderer Punkt, in dem ich ebenfalls von meinen nächsten Vorgängern abweiche, mich aber wiederum in Übereinstimmung mit dem halte, was in der Geometrie und besonders in der Theorie der Transformationsgruppen als nützlich befunden worden ist. Wenn wir eine Transformation ausführten, so ließen wir z. B. aus einem Vektor X einen neuen Vektor $\overline{X}$ entstehen. Abweichend hiervon arbeiten Frobenius u. a. vorzugsweise mit dem Begriffe der Substitution. In der hier angewendeten Sprache würde der Unterschied so zu kennzeichnen sein, daß im zweiten Falle der Vektor derselbe bleibt, aber einem anderen System von Zahlen zugeordnet wird. Oder, in der Sprache der Geometrie: Während im ersten Falle das Koordinatensystem dasselbe bleibt und die untersuchten Figuren geändert werden, bleiben im zweiten umgekehrt die Figuren ungeändert, es wird aber ein neues Koordinatensystem eingeführt. Beides läuft, wie schon früher bemerkt worden war (S. 19), im wesentlichen auf dasselbe hinaus, und jede dieser Auffassungen hat ihre Berechtigung. In den Formeln bedingt übrigens die verschiedene Auffassung gewisse Unterschiede, was weiterhin zu beachten sein wird, damit nicht Widersprüche vermutet werden können, wo keine sind. Zum Beispiel heißt das, was hier durch das Zeichen $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ dargestellt wird, bei Frobenius und anderen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}$.

Daß es nicht gleichgültig ist, von welcher Seite her man den Ausgangspunkt nehmen soll, erkennt man, wenn man sich unserer Grunddefinition, der des Vektors erinnert. Für uns war der Vektor auf sehr einfache Art definiert: Als ein bestimmtes System von Zahlen. Wie aber sieht seine Definition im anderen Falle aus?! Hierzu kommt dann noch ein anderes. Ein Ellipsoid z. B. und ein zweischaliges Hyperboloid sind kollineare (projektiv-äquivalente) Figuren, aber schlechthin äquivalent sind sie darum nicht. Also müßten einer systematischen Ausführung jener zweiten Auffassung eigentlich ziemlich umfangreiche gruppentheoretische

Erörterungen vorhergehen, während es didaktisch richtiger scheint, die Bedeutung des Gruppenbegriffes zugleich mit der Behandlung solcher Beispiele ins Licht treten zu lassen.

Übrigens wird man nicht übersehen dürfen, daß das Gesagte sich auf die systematische Ordnung des Stoffes, und zwar zunächst auf die Theorie der Gruppe G aller linearen Transformationen bezieht. Diese ist, im Vergleich zur Gruppe der orthogonalen Transformationen, die umfassendere, und sie hat daher das engere Invariantensystem. Handelt es sich nur um orthogonale Transformationen und um Invarianten dieser Gruppe, so würden die vorhin als Beispiel angeführten vier Formen in der Tat nicht als wesentlich verschieden gelten können, da dann eben die Unterscheidung zweier „Schichten" von Vektoren entbehrlich wird. In diesem Zusammenhange wird man also sehr wohl auch solche Formen wie $\Sigma X_i A_{ik} Y_k$ und $\Sigma X_k B_{kj} Y_j$ in einem „Produkt" $\Sigma X_i A_{ik} B_{kj} Y_j$ sinnvoll verbinden können. Bei Frobenius aber wird nicht gesagt, daß es sich dann um orthogonale Invarianten handeln soll, es ergibt sich das nur aus dem Zusammenhang: Der Gruppenbegriff als klassifikatorisches Prinzip (zuerst von F. Klein betont in seinem „Erlanger Programm", 1871) ist dieser Schule fremd, ebenso wie so ziemlich die gesamte Geometrie.

Die Art, wie sich die Invariantentheorie der orthogonalen Transformationen in die Invariantentheorie der Gruppe G einordnet, soll nun Gegenstand unserer ferneren Untersuchung sein.

§ 12.

Erläuterungen.
Invariantensysteme, an denen eine quadratische Form beteiligt ist.

Wir setzen zunächst die in § 10 und § 11 angestellte Untersuchung noch ein wenig fort.

Wir haben gesehen, daß zu jeder linearen Transformation, deren Objekte Vektoren erster (oder zweiter) Schicht sind, eine andere gehört, deren Objekte Vektoren zweiter (oder erster) Schicht sind: die zu ihr kontragrediente Transformation. So gehören zu Transformationen oder, was auf dasselbe hinauskommt, zu bilinearen Formen der vier Typen

$$(1)\qquad S, \quad T, \quad \mathrm{T}, \quad \Sigma$$

als kontragredient die Transformationen und Formen

$$(2)\qquad (S')^{-1}, \quad (T')^{-1}, \quad (\mathrm{T}')^{-1}, \quad (\Sigma')^{-1},$$

die sich wieder auf die vier Typen, aber in der umgekehrten Folge

$$(3)\qquad (\Sigma), \quad (\mathrm{T}), \quad (T), \quad (S)$$

verteilen. Nehmen wir an, daß die in (2) und (3) übereinandergestellten Zeichen gleichbedeutend sein sollen, so werden, wie gesagt, die unter (1) aufgeführten Zeichen der Reihe nach gleichbedeutend mit

$$(\boldsymbol{\Sigma}')^{-1}, \quad (\mathsf{T}')^{-1}, \quad (T')^{-1}, \quad (S')^{-1}. \tag{4}$$

Werden zwei Transformationen oder Formen der vier Typen in der durch die Tafel (2) auf S. 120 näher bezeichneten Art zusammengesetzt, so werden die zu ihnen kontragredienten Transformationen in derselben Reihenfolge zusammengesetzt.

Ebenso nun wie die Veränderlichen

$$X, Y, \ldots, U, V, \ldots$$

erster und zweiter Schicht verhalten sich die ihnen entsprechenden Symbole

$$P, Q, \ldots, \quad A, B, \ldots \quad (\S\ 5, \text{S. } 56;\ \S\ 8, \text{S. } 97).$$

Wir erhalten also, wenn sich in der früher beschriebenen Weise (§ 10, Nr. 10, S. 114) Formen, in denen sich die Veränderlichen kontragredient entsprechen, solche wie

$$(A\,X)^{\mu} \ldots (P\,V)^{\nu} \ldots, \tag{5}$$

$$(Q\,U)^{\mu} \ldots (B\,Y)^{\nu} \ldots \tag{6}$$

unseren Transformationen unterwerfen, neue Paare entsprechender Transformationen, die sich auf entsprechende Weise zusammensetzen und deren Objekte eben die Kerne (Koeffizientensysteme) der einander gegenübergestellten algebraischen Formen sind. Wir sagen, diese Paare von Transformationen — die wir in einfachen Fällen schon betrachtet haben — seien durch die Paare S, $\boldsymbol{\Sigma}$ und T, T induziert[1]), und bemerken, daß im allereinfachsten Falle, wo es nämlich nur ein A und ein Q gibt und die Ordnungszahl m überdies die Einheit ist, sich dieser Begriff auf den Begriff eines Paares kontragredienter Transformationen reduziert.

So erhalten wir nun eine unendliche Menge neuer linearer Transformationen, die sich ersichtlich zu Gruppen zusammenschließen, derart, daß jedesmal die Zusammensetzung von Paaren kontragredienter Transformationen S, Σ oder T, T die Zusammensetzung der entsprechenden Paare induzierter Transformationen nach sich zieht. Grundsätzlich würde nichts im Wege stehen, die Koeffizientensysteme solcher Formen wie (5) und (6) als „Vektoren erster und zweiter Schicht", nun aber in Gebieten höherer Stufe, als eine „Welt für sich" zu behandeln, und für jedes dieser Gebiete die Ent-

[1]) Dieser Terminus rührt her von dem amerikanischen Mathematiker F. Franklin.

wicklung einer besonderen Invariantentheorie der induzierten Gruppe zu verlangen. In einzelnen Fällen kann es ganz angemessen sein, diesen Gedanken wirklich auszuführen. So werden wir z. B. sehen, daß unsere Theorie der orthogonalen Invarianten im Falle $n = 3$ gar nichts anderes ist, als die Invariantentheorie einer solchen induzierten Gruppe, und wenn es uns nicht an Raum fehlte, würden wir noch zeigen können, daß es sich in den Fällen $n = 4$ und $n = 6$ nicht viel anders verhält.

Aber eine derartige Auswahl und Systematisierung des zu behandelnden Stoffes würde immer nur eine Menge von Ausschnitten aus einer viel umfassenderen Theorie darstellen, die besser den Absichten entspricht, die die Begründer der Invariantentheorie von Anfang an verfolgt haben. Anstatt von vielerlei „induzierten" Transformationen und von besonderen „induzierten Gruppen" zu reden, können wir auch, mit leichten Änderungen der bisher von uns angewendeten Wortprägungen, den Inbegriff aller jener Transformationen als eine einzige „Transformation" und den Inbegriff aller zugehörigen Gruppen als eine einzige „Gruppe" bezeichnen, und die Unterscheidungen, auf die es nach wie vor ankommen muß, an den Objekten zum Ausdruck bringen. Diese Objekte sind dann die Kerne irgendwelcher algebraischer Formen.

Wir wollen jetzt diese im Grunde auch bisher schon von uns befolgte Darstellungsform durch Einführung geeigneter Zeichen noch anschaulicher gestalten.

Anstatt zu sagen: Wir haben, im Bilde der entsprechenden bilinearen Formen

$$T = (X\,C)(\Gamma\,U), \quad \mathsf{T} = (U\Delta)(D\,X)$$

zwei verschiedene „kontragrediente Transformationen"

$$(C\,X)\,\Gamma = \underline{X}, \quad (U\Delta)\,D = \underline{U}$$

vor uns, können wir — hoffentlich ohne begründeten Anlaß zu Mißverständnissen zu geben — uns auch so ausdrücken: Wir haben beide Male dieselbe, nun also mit einem besonderen Zeichen $\mathfrak{T}$ zu verbindende „Transformation" vor uns; nur ist sie das eine Mal angewendet auf Vektoren X der ersten Schicht und das andere Mal auf Vektoren U der zweiten Schicht. Entsprechend erscheinen dann auch die Kerne irgendwelcher algebraischer Formen (Nr. 5, 6) immer als Objekte derselben Transformation $\mathfrak{T}$, wie kaum mehr ausgeführt zu werden braucht. Geht man dann von einer Art von Objekten, etwa von Vektoren X erster Schicht, zu einer anderen über, z. B. zu

Vektoren zweiter Schicht, oder zu Kernen quadratischer Formen $(UP)^2$ usw., so hat man die von Plücker als Wechsel des Raumelementes bezeichnete Operation vorgenommen [1]).

Offenbar ist die eine Ausdrucksweise ebenso deutlich wie die andere, und es muß auf die Umstände ankommen, ob man dieser oder jener den Vorzug geben will. Die Berechtigung unserer jetzigen Darstellungsform aber leuchtet daraus hervor, daß man sehr wohl einen Vektor zweiter Schicht unter ausschließlicher Benutzung von Vektoren erster Schicht erklären kann, und daß für irgendwelche algebraische Formen Entsprechendes gilt. Es ist ja ein Vektor U zweiter Schicht gar nichts anderes als der Kern einer linearen Form (UY), deren Veränderliche ein Vektor Y der ersten Schicht ist, usw.

Nimmt man das Wort lineare Transformation in dem umfassenderen Sinne, von dem soeben die Rede war, so können solche Transformationen $\mathfrak{S}$ (repräsentiert durch Paare kontragredienter Formen S, Σ) und $\mathfrak{T}$ (repräsentiert durch Paare T, T) unter allen Umständen zusammengesetzt werden, und als Ergebnis oder Produkt dieser Zusammensetzung erhält man eine dritte lineare Transformation nach je einem der Schemata [2])

$$\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{T}_3, \quad \mathfrak{S}_1 \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{S}_3,$$
$$\mathfrak{T}_1 \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_3, \quad \mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_3.$$

Die entsprechenden Formeln für die Zusammensetzung der zugehörigen Paare von bilinearen Formen aber sind der Reihe nach:

$$\{S_1 \Sigma_2 = T_3, \quad \Sigma_1 S_2 = \mathsf{T}_3\}, \quad \{S_1 \mathsf{T}_2 = S_3, \quad \Sigma_1 T_2 = \Sigma_3\},$$
$$\{T_1 S_2 = S_3, \quad \mathsf{T}_1 \Sigma_2 = \Sigma_3\}, \quad \{T_1 T_2 = T_3, \quad \mathsf{T}_1 \mathsf{T}_2 = \mathsf{T}_3\}.$$

Vgl. § 11, Nr. 2. Die Bedingung der Vertauschbarkeit zweier Transformationen $\mathfrak{S}$ oder $\mathfrak{T}$, d. i. die Unabhängigkeit ihres „Produkts" von der Reihenfolge der Faktoren, drückt sich in diesen Symbolen immer in gleicher Weise aus: $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_2 \mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_1$. Verschiedene Formeln (Formelpaare) aber erhalten wir in den nunmehr zu unterscheidenden drei (statt

---

1) Bekanntlich hat Plücker in die projektive Geometrie des „gewöhnlichen" Raumes die gerade Linie als Raumelement eingeführt: Dieses war der Ursprung des projektiven Zweiges der heutigen Liniengeometrie. Ich sage des projektiven Zweiges, da es doch (was vielen unbekannt zu sein scheint) noch andere Arten von Liniengeometrie gibt.

2) Die hier zwiefach auftretenden Zeichen $\mathfrak{S}_3$ und $\mathfrak{T}_3$ haben natürlich jedesmal eine andere Bedeutung; sie bezeichnen nur die Art oder den „Typus" der resultierenden Transformation.

vier) Fällen, wenn wir zu den Symbolpaaren S, Σ und T, T übergehen. So gehören die folgenden Formeln zusammen:

$$\boxed{\begin{array}{c} \underline{\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{T}_3,} \\ S_1\Sigma_2 = S_2\Sigma_1 = T_3, \quad \Sigma_1 S_2 = \Sigma_2 S_1 = \mathsf{T}_3; \\ \underline{\mathfrak{S}_1\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_2\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_3,} \\ S_1\mathsf{T}_2 = T_2 S_1 = S_3, \quad \Sigma_1 T_2 = \mathsf{T}_2\Sigma_1 = \Sigma_3; \\ \underline{\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_3,} \\ T_1 T_2 = T_2 T_1 = T_3, \quad \mathsf{T}_1\mathsf{T}_2 = \mathsf{T}_2\mathsf{T}_1 = \mathsf{T}_3. \end{array}} \tag{7}$$

Man kann z. B. auch sagen, es enthalte jede der symbolischen Gleichungen

$$S\mathsf{T} = TS, \quad \Sigma T = \mathsf{T}\Sigma$$

den Ausdruck der Bedingung dafür, daß eine Transformation $\mathfrak{T}$ eine bilineare Form vom Typus S oder Σ „in Ruhe läßt". Jede von beiden Gleichungen zieht die andere nach sich, und die zu $\mathfrak{T}$ gehörigen Formen T, T haben die Eigenschaft, daß jede von der anderen linear abhängt — also wie bei kontragredienten orthogonalen Transformationen, bei denen freilich T und T überdies zusammenfallen. Genau wird dieser Sachverhalt durch die Formeln

$$\boxed{\mathsf{T} = S^{-1}TS = \Sigma T \Sigma^{-1}, \quad T = \Sigma^{-1}\mathsf{T}\Sigma = S\mathsf{T}S^{-1}} \tag{8}$$

ausgedrückt. Sind die Formen S und Σ symmetrisch ($S = S'$, $\Sigma = \Sigma'$), gehören sie als Polaren zu reziproken quadratischen Formen, so sind sie nicht nur zueinander reziprok, sondern zugleich auch kontragredient. An Stelle von (8) wird man dann besser die Formeln

$$\boxed{\mathsf{T} = \Sigma T S, \quad T = S\mathsf{T}\Sigma} \tag{8*}$$

setzen.

Wenden wir uns jetzt wieder zur Betrachtung beliebiger algebraischer Formen eines Gebietes $n$ter Stufe, so liefert uns die schon besprochene Tatsache, daß gegenüber Transformationen $\mathfrak{T}$ der Gruppe G sich die Symbole solcher Formen genau so verhalten wie Symbole von Vektoren, unmittelbar die beiden Fundamentalsätze der symbolischen Methode:

I. Jede ganze und rationale — relative oder absolute — Invariante der Gruppe G läßt sich „symbolisch" darstellen als ganze rationale Funktion von Faktoren der Typen

$$(A_1 A_2 \ldots A_n), \quad (AP), \quad (P_1 P_2 \ldots P_n).$$

II. Wenn eine solche Invariante identisch gleich Null ist (wenn sie also nur eine formale Existenz hat), so läßt sich dieser Umstand durch triviale Umgestaltungen ihres Ausdruckes in Evidenz setzen mit Hilfe der zwischen den Invarianten von Vektoren beider Schichten bestehenden Identitäten (in denen dann an Stelle der Vektoren Symbole der zu untersuchenden Formen treten).

Vgl. § 2, Sätze I, II (S. 23 und 24). Ferner Lehrsätze auf S. 93 und 94[1]).

Als Beispiel hierzu führen wir die Lösung der folgenden Aufgabe an:

Es sei vorgelegt eine quadratische Form $(LX)^2$ — oder $(UA)^2$ — und eine unbegrenzte Zahl linearer Formen mit Veränderlichen beider Schichten. Es soll womöglich ein sogenanntes vollständiges Invariantensystem dieser Formen gegenüber der Gruppe G ermittelt werden, und zwar ein möglichst kleines System von Invarianten, die ganz und rational von den Kernen (den Koeffizienten) jener Formen abhängen und die Eigenschaft haben, daß sich alle ganzen rationalen Invarianten des vorgelegten Systems durch sie ausdrücken lassen.

Die Kerne der gegebenen linearen Formen sind, wie gesagt, ebensoviele Vektoren, was wir auch durch die Bezeichnung (Gebrauch der Zeichen U und X) zum Ausdruck bringen. In dem zu suchenden System müssen also alle Invarianten der Typen

$$(9) \qquad (U_1 \dots U_n), \quad (UX), \quad (X_1 \dots X_n)$$

vorhanden sein („identische Kovarianten", vgl. S. 99). Die übrigen Invarianten unseres Systems müssen, wenn $(LX)^2$ die gegebene quadratische Form ist, auch Symbole L enthalten, deren jedes dann in einem symbolischen Produkt zweimal und nur in Faktoren der Typen $(A_1 \dots A_n)$ und (AP) vorkommt. Läßt man jede der linearen Formen nur im ersten Grade auftreten — was ja, wie wir gesehen haben, genügt —, so werden jedenfalls in unserem System alle Invarianten des Typus

$$(10) \qquad (LX)(LY)$$

---

[1]) Hierzu kommt noch ein dritter Lehrsatz, der dem Satze III auf S. 26 analog ist und sich auf die Erweiterung der Gruppe G durch lineare Transformationen des Typus $\mathfrak{S}$ bezieht.

vorhanden sein. Dazu kommen dann noch $2(n-1)$ Invariantentypen, die wir als Invarianten erster und zweiter Reihe unterscheiden wollen:

$$(11,\mathrm{I})\quad \begin{aligned} &(L_1 X_1)\ (L_1 U_2 U_3 \ldots U_n),\\ &(L_1 X_1)(L_2 X_2)\ (L_1 L_2 U_3 \ldots U_n)\\ &= \frac{1}{2\,!}\,|(L_1 X_1)(L_2 X_2)|\,(L_1 L_2 U_3 \ldots U_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &(L_1 X_1)\ldots(L_{n-1} X_{n-1})(L_1 \ldots L_{n-1} U_n)\\ &= \frac{1}{(n-1)!}\,|(L_1 X_1)\ldots(L_{n-1} X_{n-1})|\,(L_1 \ldots L_{n-1} U_n), \end{aligned}$$

$$(11,\mathrm{II})\quad \begin{aligned} &(L_1 U_2 \ldots U_n)(L_1 V_2 \ldots V_n),\\ &\frac{1}{2\,!}(L_1 L_2 U_3 \ldots U_n)(L_1 L_2 V_3 \ldots V_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{1}{(n-1)!}(L_1 \ldots L_{n-1} U_n)(L_1 \ldots L_{n-1} V_n), \end{aligned}$$

und schließlich die Diskriminante der Form $(L X)^2$ oder $(LX)(LY)$:

$$(12)\qquad |L| = \frac{1}{n\,!}(L_1 L_2 \ldots L_n)^2.$$

Wir behaupten, daß mit den $2n+3$ Typen (9) ... (12) ein vollständiges und kleinstes System von ganzen rationalen Invarianten der vorgelegten Grundformen gefunden ist.

Das heißt, sind die gegebenen Vektoren $U_1 \ldots U_\mu$ und $X_1 \ldots X_\nu$, so bilde man mit Hilfe der Ausdrücke (9) ... (12) alle Invarianten, die kombinatorisch möglich sind — mit Einschluß derer, die sich durch Spezialisierungen wie $Y = X$, $V = U$ ergeben — also z. B.

$$(L X_i)^2,\quad (L X_i)(L X_k),\quad (i, k = 1, \ldots \nu)$$

usw. Damit hat man dann ein vollständiges und kleinstes System von ganzen rationalen Invarianten der Grundformen

$$(L X)^2,\quad (U_i X),\quad (U X_k).$$

Daß keine dieser Invarianten identisch gleich Null und auch keine entbehrlich ist — wenn nämlich nur rationale und ganze Funktionen zugelassen werden — wird man sich ohne weiteres klarmachen. Es bleibt also nur noch zu begründen, daß jede ganze und rationale Invariante der vorgelegten Formen sich rational und ganz durch Invarianten der Typen (9) bis (12) ausdrücken läßt. Auch dieses ist nur noch zu erweisen für solche Invarianten unseres Systems, die Symbole L enthalten. Jedes symbolische Produkt dieser Art gehört aber entweder von vornherein zu den aufgezählten, oder es enthält doch zum mindesten einen symbolischen Faktor eines der auch schon unter (11) auftretenden Typen,

$$(L_1 L_2 U_3 \ldots U_n), \ldots, (L_1 L_2 \ldots L_n).$$

Tritt der letzte dieser Faktoren auf, so wissen wir schon, daß die Invariante reduzibel ist: Sie hat dann den (nicht nur fiktiven oder symbolischen, sondern wirklichen) Faktor $|L|$. Aber auch alle anderen Formen dieser Art lassen sich durch die aufgezählten ausdrücken.

Zunächst nämlich ist

$$\begin{aligned}
&(L_1 L_2 U_3 \ldots U_n)(L_1 V_2 V_3 \ldots V_n)(L_2 X)\\
&= \tfrac{1}{2}(L_1 L_2 U_3 \ldots U_n)\{(L_1 V_2 V_3 \ldots V_n)(L_2 X)\\
&\qquad - (L_2 V_2 V_3 \ldots V_n)(L_1 X)\}\\
&= \tfrac{1}{2}(L_1 L_2 U_3 \ldots U_n)\cdot\{(L_1 L_2 V_3 V_4 \ldots V_n).(V_2 X)\\
&\qquad - (L_1 L_2 V_2 V_4 \ldots V_n).(V_3 X) + - \cdots\};
\end{aligned}$$

das Doppelte dieser Form ist also eine Summe von Produkten aus Invarianten des Typus (VX) und solchen des Typus (11, II). Tritt an Stelle des Faktors $(L_2 X)$ ein solcher des Typus $(L_2 W_2 W_3 \ldots W_n)$, so erhält man ohne weiteres eine entsprechende Reduktion.

Zweitens erhält man durch die Substitution $U_3 = L_3$ und Multiplikation mit $(L_3 Y)$:

$$\begin{aligned}
&(L_1 L_2 L_3 U_4 \ldots U_n)(L_1 V_2 \ldots V_n)(L_2 X)(L_3 Y)\\
&= \tfrac{1}{2}(L_1 L_2 L_3 U_4 \ldots U_n)\\
&\quad \cdot\{(L_1 L_2 V_3 V_4 \ldots V_n)(L_3 Y).(V_2 X)\\
&\quad - (L_1 L_2 V_2 V_4 \ldots V_n)(L_3 Y).(V_3 X) \pm \cdots\}.
\end{aligned}$$

Also sind auch diese Formen Summen von Produkten, von denen jedesmal der eine Faktor zum Typus (VX) gehört. Aber auch der andere Faktor läßt sich in die verlangte Form setzen. Denn es ist z. B.:

$$\begin{aligned}
&(L_1 L_2 L_3 U_4 \ldots U_n)(L_1 L_2 V_3 \ldots V_n)(L_3 Y)\\
&= \tfrac{1}{3}(L_1 L_2 L_3 U_4 \ldots U_n)\\
&\quad \cdot\{(L_2 L_3 V_3 V_4 \ldots V_n)(L_1 Y)\\
&\quad + (L_3 L_1 V_3 V_4 \ldots V_n)(L_2 Y)\\
&\quad + (L_1 L_2 V_3 V_4 \ldots V_n)(L_3 Y)\}\\
&= \tfrac{1}{3}(L_1 L_2 L_3 U_4 \ldots U_n)\\
&\quad \cdot\{(L_1 L_2 L_3 V_4 \ldots V_n).(V_3 Y) \mp \cdots\}.
\end{aligned}$$

In dieser Weise kann man fortfahren. Es ergibt sich, daß alle Invarianten mit symbolischen Faktoren des Typus

$$(L_1 L_2 \dots L_k U_{k+1} \dots U_n)$$

sich rational und ganz durch solche ausdrücken lassen, die den in unserer Tabelle aufgezählten Typen angehören.

Es interessiert uns nun hier besonders der Fall, in dem die vorgelegte Form $(L X)^2$ nicht singulär, also ihre Diskriminante von Null verschieden ist. Unter dieser Voraussetzung aber läßt sich noch eine wesentliche Vereinfachung unseres Formensystems erreichen.

Von den aufgezählten Invarianten lassen sich die zweiter Reihe (Nr. 11, II) rational ausdrücken durch die Invariante $|L|$ und durch Invarianten vom Typus der letzten Form der zweiten Reihe

$$(13)\qquad (U M)(V M) = \frac{1}{(n-1)!}(L_1 \dots L_{n-1} U)(L_1 \dots L_{n-1} V),$$

so zwar, daß in den Nennern der zu bildenden Ausdrücke nur Potenzen der Invariante $|L|$ auftreten.

Wir behaupten nämlich, daß die folgenden Gleichungen Identitäten sind:

$$(14)\qquad \begin{aligned}
&\frac{|L|}{(n-2)!}\cdot(L_1 \dots L_{n-2} U_{n-1} U_n)(L_1 \dots L_{n-2} V_{n-1} V_n) \\
&\qquad = |(U_{n-1} M)(V_{n-1} M) \quad (U_n M)(V_n M)|\,^{1)}, \\
&\frac{|L|^2}{(n-3)!}\cdot\begin{cases}(L_1 \dots L_{n-3} U_{n-2} U_{n-1} U_n)\\(L_1 \dots L_{n-3} V_{n-2} V_{n-1} V_n)\end{cases} \\
&\qquad = |(U_{n-2} M)(V_{n-2} M) \dots (U_n M)(V_n M)|, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{|L|^{n-3}}{2!}\cdot(L_1 L_2 U_3 \dots U_n)(L_1 L_2 V_3 \dots V_n) \\
&\qquad = |(U_3 M)(V_3 M) \dots (U_n M)(V_n M)|, \\
&|L|^{n-2}\cdot(L_1 U_2 \dots U_n)(L_1 V_2 \dots V_n) \\
&\qquad = |(U_2 M)(V_2 M) \dots (U_n M)(V_n M)|.
\end{aligned}$$

---

[1]) Die zweireihige Determinante auf der rechten Seite der Gleichung enthält in jedem ihrer Argumente $(U M)(V M)$ die Symbole M schon im zweiten Grade. Es hat also bereits jedes dieser Elemente schon eine reale Bedeutung, und es ist daher nicht nötig, die Symbole M in den miteinander zu multiplizierenden Gliedern mit Indizes zu versehen. Ebenso in den folgenden Formeln.

Es genügt, den Beweis hierfür unter der Annahme zu führen, daß die vorgelegte Form $(LX)^2$ nicht singulär ist. Dann aber können wir die schon nachgewiesene Reziprozität zwischen den Formen $(LX)(LY)$ und

$$(UA)(VA) = |L|^{-1}.(UM)(VM)$$

benutzen und erhalten

$$\begin{aligned}
&(L_1 U_2 \ldots U_n)(L_1 V_2 \ldots V_n) \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{|A|}\cdot(\overbrace{A_2 \ldots A_n} U_2 \ldots U_n)(\overbrace{A_2 \ldots A_n} V_2 \ldots V_n) \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{1}{|A|}\cdot|(U_2 A_2) \ldots (U_n A_n)|.|(V_2 A_2) \ldots (V_n A_n)| \\
&= \frac{1}{|A|}\cdot(U_2 A_2) \ldots (U_n A_n).|(V_2 A_2) \ldots (V_n A_n)| \\
&= \frac{1}{|A|}\cdot|(U_2 A_2)(V_2 A_2) \ldots (U_n A_n)(V_n A_n)| \\
&= \frac{1}{|A|}\cdot\frac{1}{|L|^{n-1}}\cdot|(U_2 M_2)(V_2 M_2) \ldots (U_n M_n)(V_n M_n)| \\
&= \frac{1}{|L|^{n-2}}\cdot|(U_2 M)(V_2 M) \ldots (U_n M)(V_n M)|.
\end{aligned}$$

Damit haben wir die letzte unter den Formeln (14). Hieraus ergibt sich dann die vorhergehende Formel, wenn man $U_2 = V_2 = L_2$ setzt. Es wird nämlich, nach der vierten der soeben abgeleiteten Identitäten,

$$\begin{aligned}
&|A|.(L_1 L_2 U_3 \ldots U_n)(L_1 L_2 V_3 \ldots V_m) \\
&= \begin{vmatrix}
(L_2 A_2)^2 & (L_2 A_3)(V_3 A_3) \ldots (L_2 A_n)(V_n A_n) \\
(U_3 A_2)(L_2 A_2) & (U_3 A_3)(V_3 A_3) \ldots (U_3 A_n)(V_n A_n) \\
\vdots & \vdots \\
(U_n A_2)(L_2 A_2) & (U_n A_3)(V_3 A_3) \ldots (U_n A_n)(V_n A_n)
\end{vmatrix} \\
&= \{n-(n-2)\}.\begin{vmatrix}
(U_3 A_3)(V_3 A_3) \ldots (U_3 A_n)(V_n A_n) \\
\vdots \\
(U_n A_3)(V_3 A_3) \ldots (U_n A_n)(V_n A_n)
\end{vmatrix} \\
&= \frac{2.1}{|L|^{n-2}}\cdot|(U_3 M)(V_3 M) \ldots (U_n M)(V_n M)|,
\end{aligned}$$

was eben die vorletzte Formel unter (12) ist. In dieser Weise kann man fortfahren.

Wenn wir also nicht nach **ganzen** rationalen Invarianten fragen, sondern auch gewisse nur-**rationale** Invarianten zulassen, und zwar lediglich solche, in deren Nennern Potenzen der Invariante $|L|$ auftreten, so können wir das gefundene Invariantensystem durch ein minder umfangreiches System ersetzen. Es bleiben dann außer $|L|$ und den Invariantentypen

$$\boxed{(X_1 \ldots X_n),\ (UX),\ (U_1 \ldots U_n),\ (LX)(LY),\ (UM)(VM)}$$

nur die Invarianten (11, I) unserer ersten Reihe übrig.

Durch die $n+5$ Typen von Invarianten des so beschriebenen „reduzierten Systems" läßt sich dann jede ganze rationale Invariante der vorgelegten Formen rational darstellen, und zwar derart, daß in ihrem Nenner höchstens eine Potenz der Invariante $|L|$ der gegebenen quadratischen Form auftritt.

Da wir die Koordinaten der Vektoren X und U nicht ebenfalls in den Nennern zugelassen haben, so ergibt sich eine ganz gleichartige Vereinfachung, also **ein „reduziertes" Invariantensystem** überhaupt für jedes System algebraischer Formen, unter denen eine **nicht singuläre** quadratische Form vorkommt.

Daß aber für die $n+5$ beibehaltenen Invariantentypen eine weitere Reduktionsmöglichkeit nicht besteht, sehen wir, wenn wir die Form $(LX)^2$ mit der speziellen Form $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ identifizieren. Schreibt man nämlich die Invarianten erster Reihe in Determinantenform,

$$|(L_1 X_1) L_1\ U_2 \ldots U_n|,$$
$$|(L_1 X_1) L_1\ (L_2 X_2) L_2\ U_3 \ldots U_n|$$

usf., so kann man ohne weiteres ganz allgemein zu den unsymbolischen Ausdrücken derselben Invarianten übergehen. Abgesehen von der Invariante $|L|$ der quadratischen Form, die im vorliegenden Falle den Wert Eins hat, erhält man dann in etwas anderer Anordnung und Bezeichnung die $n+4$ Ausdrücke

$$(X|Y),\quad (UX),\quad (U|V),$$
$$(X_1 \ldots X_n),\quad (X_1 X_2 \ldots U_n),\ \ldots,\quad (U_1 U_2 \ldots U_n),$$

und von diesen Funktionen der X, Y, U, V kann offenbar keine durch die übrigen ganz und rational ausgedrückt werden. Die gefundenen $n+5$ Formen bilden also ein kleinstes System von ganzen und rationalen Invarianten, durch die alle Invarianten der gegebenen Grundformen rational ausgedrückt werden können, wenn man in den auftretenden Nennern lediglich Potenzen von $|L|$ zuläßt.

Das Ergebnis, zu dem wir hier gelangt sind, läßt sich noch etwas besser formulieren. Die Koeffizienten der vorgelegten Formen bestimmen einen Integritätsbereich, der alle ganzen und rationalen Funktionen dieser Koeffizienten umfaßt[1]) und als der natürliche Integritätsbereich der gegebenen Kerne bezeichnet werden darf. Dieser Integritätsbereich kann nun dadurch erweitert werden, daß man auch noch die Potenzen von $|A| = |L|^{-1}$ zuläßt. Wir können dann sagen:

Im natürlichen Integritätsbereich der vorgelegten Formen bilden die aufgezählten $2n + 5$ Typen von Invarianten der Gruppe G ein vollständiges, und zwar kleinstes System von Invariantentypen.

Wenn aber die Invariante $|L|$ von Null verschieden ist, so läßt dieses System in dem durch Hinzufügung von $|L|^{-1}$ erweiterten Integritätsbereich noch eine Reduktion zu. Dann bilden nämlich schon die $n + 4$ Typen von Invarianten,

$$(15) \qquad (LX)(LY), \quad (UX), \quad (UA)(VA),$$

$$(X_1 X_2 \ldots X_n),$$

$$(L_1 X_1) \ldots (L_{n-1} X_{n-1})(L_1 \ldots L_{n-1} U_n),$$

$$(L_1 X_1) \ldots (L_{n-2} X_{n-2})(L_1 \ldots L_{n-2} U_{n-1} U_n),$$

$$(16) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(L_1 X_1)(L_2 X_2)(L_1 L_2 U_3 \ldots U_n),$$

$$(L_1 X_1)(L_1 U_2 \ldots U_n),$$

$$(U_1 U_2 \ldots U_n)$$

zusammen mit der Invariante $|L|$ ein vollständiges und kleinstes System — das „reduzierte System" — von Invarianten der gegebenen Grundformen.

Bemerkt sei noch, daß im Falle

$$(LX)^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

die Reduktionsformeln (14) in die Formelgruppe übergehen, die man als Multiplikationstheorem der Matrizen zusammenzufassen pflegt.

---

[1]) Dabei können die Koeffizienten dieser Funktionen rationale Zahlen sein oder auch einem anderen vorgeschriebenen Rationalitätsbereich entnommen werden. Nur darf dieser natürlich die hier als veränderlich betrachteten Koeffizienten der vorgelegten Formen nicht umfassen.

Der erste Teil unseres letzten Satzes (die Behauptung über die $2n+5$ Typen) enthält ein Beispiel zu dem von Hilbert zuerst allgemein bewiesenen Satze von der Endlichkeit der Invariantensysteme gegebener Grundformen gegenüber der Gruppe G: Nimmt man außer der vorgelegten quadratischen Form nur noch lineare Grundformen als gegeben an, so kennt man ein kleinstes System von ganzen und rationalen Invarianten, durch die sich alle übrigen rational und ganz ausdrücken lassen. Es ist das einer der wichtigsten unter den Fällen, in denen sich ein solches System wirklich aufstellen läßt.

Zu dem Satze von der Endlichkeit der Formensysteme gehört als Ergänzung unter anderem, von dem hier nicht die Rede sein soll, der Satz von der Endlichkeit der Invariantentypen in Systemen, die eine beliebig große Zahl von Formen mit gegebenen Ordnungszahlen $(\mu, \nu, \ldots)$ enthalten; und auch dazu liefert unsere Untersuchung ein Beispiel. Die genannte Behauptung ist von Peano bereits im Jahre 1882 für binäre Formen ($n = 2$) erwiesen worden, zu einer Zeit also, da man eine Einsicht in die Endlichkeit beliebiger Formensysteme noch nicht besaß. Gegenwärtig liefert seine sehr einfache Beweisführung ohne weiteres auch diesen Lehrsatz in voller Allgemeinheit.

Übrigens kommt in unserem Falle (wie in anderen) alles darauf an, daß man nicht nur die gesuchten Invarianten wirklich angeben, sondern auch die zwischen ihnen bestehenden Abhängigkeiten übersehen kann.

Aus der ausgedehnten Literatur, die sich auf die schwierige Frage nach der Endlichkeit der Invariantensysteme bezieht, führe ich nur die folgenden Schriften an:

D. Hilbert, Math. Ann. **42**, 313, 1893.

G. Peano, Atti dell' Accademia delle Science di Torino **17**, 580, 1882.

E. Noether, Math. Ann. **77**, 93, 1915.

§ 13.

Die Fundamentalsätze der Algebra der Vektoren in allgemeiner Fassung.

Wir haben nunmehr fast alle Vorbereitungen beisammen, die nötig sind, um die in § 2 behandelte Aufgabe durch ein umfassenderes Problem zu ersetzen, in dem an Stelle der quadratischen Form

$$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

irgend eine nicht singuläre quadratische Form $(LX)^2$ tritt. Ganz beliebig aber wollen wir diese quadratische Form zunächst doch noch nicht sein lassen. Es haftet nämlich unseren letzten Ergebnissen ein gewisser Mangel an Symmetrie an, der daher rührt, daß wir von den zwei im Grunde gleichberechtigten quadratischen Formen $(LX)^2$, $(U\Lambda)^2$ die eine ausgezeichnet hatten. Dies veranlaßt uns, die zuletzt ausgeführte Untersuchung aus einem etwas abgeänderten Gesichtspunkte nochmals aufzunehmen und zugleich ihr Ergebnis noch etwas zu ergänzen. Wir erhalten nämlich eine vollkommen symmetrische Fassung unseres letzten Lehrsatzes, wenn wir jetzt die weitere Annahme hinzufügen, daß die Diskriminante der quadratischen Form $(LX)^2$ und folglich auch die der reziproken Form $(UA)^2$ den numerischen Wert Eins hat. In diesem Falle bedeutet natürlich die Zulassung dieser Invariante in den Nennern rationaler Funktionen keine Erweiterung des vorgelegten Integritätsbereiches.

Was die erwähnte Einschränkung für weitere Folgen hat, wird zu erörtern sein; jedenfalls dürfen wir sie einmal machen, um so zu einer in gewisser Hinsicht wenigstens einfacheren Formulierung zu gelangen. Aber natürlich werden wir dann an Stelle der Gruppe G, deren allgemeine Transformation von n^2 unabhängigen Parametern abhängt, ihre Untergruppe treten lassen müssen, deren Transformationen die Determinante der vorgelegten quadratischen Form nicht ändern und also nur noch $n^2 - 1$ voneinander unabhängige Parameter enthalten. Diese Gruppe besteht aus zwei getrennten analytischen Scharen von Transformationen: Wir bezeichnen sie dementsprechend mit Γ, H. Die Transformationen von Γ, die für sich eine Gruppe bilden, haben die Determinante 1, die Transformationen der Schar H haben die Determinante -1.

Es ist also zunächst die Frage nach den ganzen und rationalen Invarianten des vorgelegten Formensystems in bezug auf die Gruppe Γ und nach ihrem Verhältnis zu den bisher betrachteten Invarianten der Gruppe G zu stellen.

Da wir $|L| = 1$ gesetzt haben, so bleiben von unseren Invarianten der Gruppe G noch $n + 4$ Typen übrig, von denen sicher keiner entbehrlich ist, und diese sind selbstverständlicherweise alle noch Invarianten, und zwar sämtlich absolute Invarianten der Gruppe Γ.

Wir behaupten nun zunächst, daß die Gruppe Γ überhaupt nur absolute Invarianten hat, und daß insbesondere die ganzen rationalen Invarianten des betreffenden Systems sich alle durch die Invarianten der gefundenen $n + 4$ Typen rational und ganz ausdrücken lassen.

Zunächst darf wie bisher angenommen werden, daß irgend eine zu untersuchende Invariante $\mathfrak{J}$ unseres Systems in bezug auf die Gruppe Γ homogen (und überdies auch linear) ist in den Koordinaten jedes einzelnen der vorkommenden Vektoren X_i, U_k. Aus jeder Transformation von Γ erhalten wir sodann eine solche der Gruppe G, wenn wir sie mit einer Transformation der eingliedrigen Gruppe

$$\varrho \,.\, X = \underline{X}, \quad \varrho^{-1} \,.\, U = \underline{U} \qquad \{\varrho \neq 0\}$$

zusammensetzen. Alle Transformationen von G entstehen auf diese Weise (und zwar jede von ihnen auf n Arten) aus Transformationen von Γ. Angewendet auf Symbole der quadratischen Formen $(L X)^2$, $(U \Lambda)^2$ hat die genannte Operation die Wirkung

$$\varrho^{-1} . L = \underline{L}, \quad \varrho . \Lambda = \underline{\Lambda}.$$

Jede Invariante $\mathfrak{J}$ von Γ erweist sich damit als eine Summe, deren Glieder (wenn ihrer mehrere sind) sich darin voneinander unterscheiden, daß sie bei der ausgeführten Transformation verschiedene Potenzen von ϱ als Faktoren annehmen. Jeder der so unterschiedenen Summanden ist dann eine (in der Regel nur relative) Invariante der Gruppe G und folglich auf die zuvor beschriebene Art darstellbar.

Man sieht, daß man keineswegs alle ganzen und rationalen Invarianten der Gruppe Γ durch Spezialisierung von solchen der Gruppe G erhält, daß dieses aber allerdings für jene $n + 4$ Invarianten zutrifft, durch die sich im System

$$(L X)^2, \quad (U_i X), \quad (U X_k)$$

alle übrigen ausdrücken lassen[1]).

In der Formulierung unseres Ergebnisses wollen wir sodann gleich noch einige weitere Verbesserungen anbringen. Wir wollen erstens dem Umstande Rechnung tragen, daß alle unsere Invarianten, soweit sie überhaupt von der Form $(L X)^2$ abhängen, sich auf zwei Weisen müssen schreiben lassen, einmal mit Symbolen L, dann auch mit Symbolen Λ. Zweitens wollen wir das in § 2 schon angeführte System von möglichst einfachen Zeichen nunmehr in einem weiteren Umfange gebrauchen; wir wollen nämlich diese Zeichen nochmals, dabei aber so erklären, daß sie im Falle

$$(L X)^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

die früher angegebene Bedeutung erlangen.

---

1) Zum Beispiel ist im Falle $n = 4$

$$\mathfrak{J} = (L X)(L X') . (L Y)(L Y') + (X X' Y Y')$$

eine Invariante der Gruppe Γ, die sich aus zwei ganzen und rationalen Invarianten der Gruppe G zusammensetzt, ohne selbst eine ganze rationale Invariante dieser Gruppe zu sein. In der Tat liefert die zu G gehörige Transformation $\varrho X = \underline{X}$ (usw.), $\varrho^{-1} L = \underline{L}$, den Ausdruck

$$J^* = (L X)(L X') . (L Y)(L Y') + \varrho^4 . (X X' Y Y'),$$

der ebenfalls eine Invariante von Γ, in der Regel aber von $\mathfrak{J}$ verschieden ist. Dagegen ist der im Falle $\sqrt{|L|} = 1$, $\varrho = \sqrt[4]{1}$ mit J^* zusammenfallende Ausdruck

$$(L X)(L X') . (L Y)(L Y') + \sqrt{|L|} . (X X' Y Y'),$$

in einem weiteren Sinne noch Invariante von G. Ist $|L|$ nicht gerade das Quadrat eines rationalen Ausdruckes, so ist er eine irrationale algebraische Invariante der Gruppe G. Vgl. S. 99.

So erhalten wir an Stelle des letzten Satzes in § 12 schließlich den folgenden Lehrsatz, der zugleich die Definition der verallgemeinerten Zeichen $(X|Y)$, $(U|V)$ usw. enthält:

Zur Gruppe Γ der linearen Transformationen von der Determinante Eins eines Gebietes n^{ter} Stufe gehören nur absolute Invarianten.

Insbesondere gibt es im System einer quadratischen Form $(LX)^2$ $\{$oder $(UA)^2\}$ von der Diskriminante Eins und einer unbegrenzten Zahl von linearen Formen, die veränderlichen Vektoren beider Schichten entsprechen, ein vollständiges und zugleich kleinstes System von ganzen und rationalen Invarianten der Gruppe Γ, die sich auf die in den folgenden Tafeln (1), (2) aufgezählten $n+4$ Typen verteilen:

$$(1) \qquad \boxed{\begin{gathered} (X|Y) = (LX)(LY) \\ = \frac{1}{(n-1)!}(XA_2 \dots A_n)(YA_2 \dots A_n), \\ (UX), \\ (U|V) = (UA)(VA) \\ = \frac{1}{(n-1)!}(UL_2 \dots L_n)(VL_2 \dots L_n) \end{gathered}}$$

$$(2) \qquad \boxed{\begin{gathered} (X_1 X_2 \dots X_n), \\ (X_1 \dots X_{n-1} U_n) = (X_1 \dots X_{n-1} A_n)(U_n A_n) \\ = (L_1 X_1) \dots (L_{n-1} X_{n-1})(L_1 \dots L_{n-1} U_n), \\ (X_1 \dots X_{n-2} U_{n-1} U_n) \\ = (X_1 \dots X_{n-2} A_{n-1} A_n)(U_{n-1} A_{n-1})(U_n A_n) \\ = (L_1 X_1) \dots (L_{n-2} X_{n-2})(L_1 \dots L_{n-2} U_{n-1} U_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (X_1 X_2 U_3 \dots U_n) \\ = (X_1 X_2 A_3 \dots A_n)(U_3 A_3) \dots (U_n A_n) \\ = (L_1 X_1)(L_2 X_2)(L_1 L_2 U_3 \dots U_n), \\ (X_1 U_2 \dots U_n) \\ = (X_1 A_2 \dots A_n)(U_2 A_2) \dots (U_n A_n) \\ = (L_1 X_1)(L_1 U_2 \dots U_n), \\ (U_1 U_2 \dots U_n). \end{gathered}}$$

Die unter (1) aufgezählten Typen „elementarer Invarianten" von Γ sind auch absolute Invarianten gegenüber Transformationen der Gruppe Γ, H, die Typen (2) aber nehmen bei Transformationen von H den Faktor -1 an.

Sei insbesondere

$$(L X)^2 = X_1^2 + \cdots + X_\mu^2 - X_{\mu+1}^2 - \cdots - X_n^2,$$

wo wegen $|L| = 1$ die Differenz $n - \mu$ eine gerade Zahl sein muß, so wird

$$(U A)^2 = U_1^2 + \cdots + U_\mu^2 - U_{\mu+1}^2 - \cdots - U_n^2,$$

und, nach der Definition unter (2),

$$(X_1 \ldots X_\nu U_{\nu+1} \ldots U_n)$$

$$= \begin{vmatrix} X_{11} & \ldots & X_{1\mu} & X_{1,\mu+1} & \ldots & X_{1,n} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ X_{\nu 1} & \ldots & X_{\nu\mu} & X_{\nu,\mu+1} & \ldots & X_{\nu,n} \\ U_{\nu+1,1} & \ldots & U_{\nu+1,\mu} & -U_{\nu+1,\mu+1} & \ldots & -U_{\nu+1,n} \\ \cdot & \ldots & \cdot & & & \\ U_{n1} & \ldots & U_{n\mu} & -U_{n,\mu+1} & \ldots & -U_{n,n} \end{vmatrix}$$

(3)

$$= \begin{vmatrix} X_{11} & \ldots & X_{1\mu} & -X_{1,\mu+1} & \ldots & -X_{1n} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ X_{\nu 1} & \ldots & X_{\nu\mu} & -X_{\nu,\mu+1} & \ldots & -X_{\nu n} \\ U_{\nu+1,1} & \ldots & U_{\nu+1,\mu} & U_{\nu+1,\mu+1} & \ldots & U_{\nu+1,n} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ U_{n1} & \ldots & U_{n\mu} & U_{n,\mu+1} & \ldots & U_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$\{\mu \equiv n \pmod{2}\}.$$

Da allgemein die unter (2) einander gleichgesetzten Invarianten sich höchstens um Zahlenfaktoren würden unterscheiden können, so genügt dieser Spezialfall schon, um die Gleichheit der zwei Ausdrücke für $(X_1 \ldots X_\nu U_{\nu+1} \ldots U_n)$ zu begründen. Aber natürlich kann man dasselbe auch durch symbolische Rechnung erweisen. Es ist z. B.

$$(A X_2 \ldots X_n)(A U)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} (L_2 \ldots L_n X_2 \ldots X_n)(U L_2 \ldots L_n)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \left| (L_2 X_2) \ldots (L_n X_n) \right| (U L_2 \ldots L_n)$$

$$= (L X_2) \ldots (L_n X_n)(U L_2 \ldots L_n),$$

was, abgesehen von der Bezeichnung, die zweite Formel unter (2) ist; usw.

Mit der zuletzt behandelten Aufgabe muß nun ohne Zweifel eine andere im engsten Zusammenhange stehen: Die Aufgabe nämlich, alle ganzen und rationalen Invarianten der Formen $(U_i X)$, $(U X_k)$ gegenüber der Gruppe der automorphen linearen Transformationen des Formenpaares $(LX)^2$, $(U\Lambda)^2$ zu finden. Und es fragt sich nunmehr, welches dieser Zusammenhang ist. Es fällt also jetzt die Grundform $(L X)^2$ und was direkt von ihr abhängt weg, dafür aber werden die nach wie vor gegebenen linearen Formen nur noch solchen linearen Transformationen unterworfen, die die eine und folglich auch die andere der Formen $(L X)^2$, $(U \Lambda)^2$ reproduzieren.

Ist $\mathfrak{T}$ Zeichen für eine solche „automorphe" Transformation der beiden quadratischen Formen, und $\mathfrak{S}$ Zeichen für die mit $(L X)^2$, $(U \Lambda)^2$ verbundene („korrelative") lineare Transformation, so ist nach § 12

$$\mathfrak{S}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}\mathfrak{S}, \tag{4}$$

oder deutlicher

$$S\mathrm{T} = TS, \quad \Sigma T = \mathrm{T}\Sigma, \tag{5}$$

wofür man auch schreiben kann

$$T^{-1} S \mathrm{T} = S, \quad \mathrm{T}^{-1} \Sigma T = \Sigma, \tag{6}$$

und nach Formel (9), § 8:

$$S \mathrm{T} \Sigma = T, \quad \Sigma T S = \mathrm{T}. \tag{7}$$

Hier stehen die Zeichen

$$\begin{matrix} T \{= (\mathrm{T}')^{-1} = (\mathrm{T}^{-1})'\} \\ \mathrm{T} \{= (T')^{-1} = (T^{-1})'\} \end{matrix} \tag{a}$$

als Abkürzungen für die zueinander kontragredienten Transformationen

$$\boxed{(XC)\Gamma = \underline{X}, \quad (U\Delta)D = \underline{U}} \tag{a}$$

und ebenso sind, da nach Voraussetzung

$$S = S', \quad \Sigma = \Sigma'$$

ist,

$$S\{= \Sigma^{-1}\}, \quad \Sigma\{= S^{-1}\} \tag{b}$$

Abkürzungen für die zueinander kontragredienten und zugleich reziproken Transformationen

$$\boxed{(XL)L = \underline{U}, \quad (U\Lambda)\Lambda = \underline{X}.} \tag{b}$$

Wir schreiben die Formeln (5) ... (7) auch noch ausführlich, und erhalten dann

$$(5') \quad \begin{aligned} &(XL)(L\Delta)(DY) = (XC)(\Gamma L)(LY), && \{X, Y\} \\ &(UA)(AC)(\Gamma V) = (U\Delta)(DA)(AV), && \{U, V\} \end{aligned}$$

$$(6') \quad \begin{aligned} &(XD)(\Delta L)(L\Delta')(D'Y) = (XL)(LY), && \{X, Y\} \\ &(U\Gamma)(CA)(AC')(V\Gamma') = (UA)(AV), && \{U, V\} \end{aligned}$$

$$(6'') \quad \begin{aligned} &(XC)(\Gamma L)(L\Gamma')(C'Y) = (XL)(LY), && \{X, Y\} \\ &(U\Delta)(DA)(AD')(\Delta'V') = (UA)(AV), && \{U, V\} \end{aligned}$$

$$(7') \quad \begin{aligned} &(XL)(L\Delta)(DA)(AV) = (XC)(\Gamma V), && \{X, V\} \\ &(UA)(AC)(\Gamma L)(LY) = (U\Delta)(DY), && \{U, Y\} \end{aligned}$$

Die in { } beigefügten Zeichen sollen andeuten, daß es sich um Gleichungen handelt, die identisch für alle vorkommenden Vektoren X, Y, U, V erfüllt sein sollen. Jede dieser identischen Gleichungen zieht dann alle übrigen nach sich, wenn — wie vorausgesetzt — die geordneten Formen

$$(a) \qquad (XC)(\Gamma V), \quad (U\Delta)(DY)$$

Symbole kontragredienter Transformationen sind. Mit Hilfe der unter (1) eingeführten Zeichen aber lassen sich dieselben Gleichungen noch einfacher schreiben. So erhalten wir schließlich die Formeln

$$(5^*) \quad \boxed{\begin{aligned} &(X|\Delta)(DY) = (XC)(\Gamma|Y), && \{X, Y\} \\ &(U|C)(\Gamma V) = (U\Delta)(D|V), && \{U, V\} \end{aligned}}$$

$$(6^*) \quad \boxed{\begin{aligned} &(XD)(\Delta|\Delta')(D'Y) = (X|Y), && \{X, Y\} \\ &(U\Gamma)(C|C')(\Gamma'V) = (U|V), && \{U, V\} \\ &(XC)(\Gamma|\Gamma')(C'Y) = (X|Y), && \{X, Y\} \\ &(U\Delta)(D|D')(\Delta'V) = (U|V), && \{U, V\} \end{aligned}}$$

$$(7^*) \quad \boxed{\begin{aligned} &(X|\Delta)(D|V) = (CX)(\Gamma V), && \{X, V\} \\ &(U|C)(\Gamma|Y) = (U\Delta)(DY), && \{U, Y\} \end{aligned}},$$

deren jede nach wie vor eine Folge von jeder anderen ist. Insbesondere zeigen die Formeln (7*), was wir, unter einer umfassenderen Voraussetzung, schon früher bemerkt hatten: Sind die kontragredienten Transformationen mit den Symbolen (a) automorphe Transformationen des Formenpaares $(LX)^2$, $(UA)^2$, so sind die Koeffizienten einer jeden von ihnen lineare Funktionen der Koeffizienten der anderen, wie schon im Spezialfall der orthogonalen Transformationen. Ferner ergibt sich:

Die automorphen linearen Transformationen der Formen $(L\,X)^2$, $(U\,A)^2$ umfassen zwei getrennte analytische (und also im komplexen Gebiet immer kontinuierliche) Transformationenschichten, derart, daß die einzelne Transformation einer jeden Schicht von $\frac{n\,(n-1)}{2}$ wesentlichen Parametern abhängt. Beide ‚Schichten' unterscheiden sich durch den Wert der Transformationsdeterminante, der entweder 1 oder -1 sein muß.

Zunächst folgt nämlich aus (5′) oder (5*), daß die Diskriminanten der kontragredienten Formen (a) einander gleich sein müssen, $|C| = |D|$; also ist, nach Nr. (8) S. 108 $|C| = |D| = \pm 1$. Daß beide Möglichkeiten tatsächlich vorliegen, sieht man am Spezialfall der orthogonalen Transformationen. Und daß die Transformationen einer jeden von beiden Arten ein einziges analytisches Kontinuum bilden, kann ebenfalls durch den Hinweis auf diesen geläufigen Sonderfall erschlossen werden, da sich jedes Formenpaar $(L\,X)^2$, $(U\,A)^2$ durch lineare Transformationen in das Formenpaar ΣX_i^2, ΣU_i^2 überführen läßt, und dabei die automorphen Transformationen des ersten Paares in die des zweiten übergehen müssen. Zugleich findet man auf diese Art auch die angegebene Zahl der wesentlichen Parameter in den Transformationen (a), d. h. die Dimensionenzahl der beiden von ihnen erfüllten analytischen Mannigfaltigkeiten [1]).

[1]) Ohne auf die Frage nach einer erschöpfenden Parameterdarstellung der orthogonalen Transformationen näher einzugehen, kann man etwa so schließen: Zunächst kann man schon durch eine eigentliche orthogonale Transformation jeden Vektor, der der Bedingung $(X \mid X) \neq 0$ genügt, in einen solchen überführen, der zu dem Vektor $X_1 = \{1, 0, 0, \ldots\}$ proportional ist. (Vgl. S. 30). Hierauf jeden Vektor, der den Bedingungen $(X_1 \mid Y) = 0$, $(Y \mid Y) \neq 0$ genügt, durch eine eigentliche orthogonale Transformation von $n-1$ Veränderlichen in einen Vektor, der zu dem Vektor $X_2 = \{0, 1, 0, \ldots\}$ proportional ist, usw. Man hat dann nur noch diskrete eigentlich-orthogonale Transformationen zu untersuchen, solche nämlich der besonderen Form $\pm X_k = \underline{X}_k$, und diese lassen sich alle durch Transformationen der Form

$$\begin{gathered} X_1 = \underline{X}_1, \ldots X_{i-1} = \underline{X}_{i-1}, \\ \cos\Phi \,.\, X_i + \sin\Phi \,.\, X_{i+1} = \underline{X}_i, \\ -\sin\Phi \,.\, X_i + \cos\Phi \,.\, X_{i+1} = \underline{X}_{i+1}, \\ X_{i+2} = \underline{X}_{i+2}, \ldots X_n = \underline{X}_n \end{gathered}$$

kontinuierlich erzeugen. Zugleich ergibt sich die Zahl der wesentlichen Parameter unserer Gruppe,

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n\,(n-1)}{2}.$$

Wir unterscheiden jetzt die Transformationen unserer zwei Schichten, die natürlich zusammen eine Gruppe γ, η bilden, als eigentliche und uneigentliche automorphe Transformationen der Formen $(LX)^2$, $(U\Lambda)^2$, entsprechend der schon bei den orthogonalen Transformationen getroffenen Unterscheidung. Die eigentlichen Transformationen — die der Schicht γ — bilden dann für sich eine Gruppe, und zwar eine Untergruppe der zuvor betrachteten Gruppe Γ, während die Transformationenschicht η in H enthalten ist.

Nunmehr können wir schließen, daß die unter (1) und (2) zusammengestellten Invarianten der Gruppe Γ, in einem anderen Sinne, auch Invarianten der Gruppe γ sind, auf die es uns jetzt zunächst ankommt. Der Unterschied ist der, daß wir vorher bei unseren Transformationen die quadratischen Formen $(LX)^2$, $(U\Lambda)^2$ hatten mitgehen heißen; wir hatten ja, ganz wie bei beliebigen Formen,

$$(8) \qquad (L\Lambda)D = \underline{L}, \quad (C\Lambda)\Gamma = \underline{\Lambda}$$

zu setzen, um die Ausdrücke (1) und (2) als Invarianten der Gruppe Γ zu erkennen. [Vgl. Nr. (3), S. 106]. D. h., nach Ausführung einer linearen Transformation $\mathfrak{T}$ von Γ konnten wir ein Paar quadratischer Formen mit anderen Koeffizienten erhalten. Nunmehr aber treten an Stelle der Formeln (8) die einfacheren

$$(9) \qquad \boxed{(L\Lambda)D = L, \quad (C\Lambda)\Gamma = \Lambda,}$$

oder, nach Umständen, die wegen der Paarung der Symbole L und Λ damit hier gleichbedeutenden

$$(L\Lambda)D = -L, \quad (C\Lambda)\Gamma = -\Lambda.$$

Unsere jetzige Voraussetzung ist ja, daß die quadratischen Formen $(LX)^2$, $(U\Lambda)^2$ ganz in Ruhe bleiben, daß sie, geschrieben in Veränderlichen $\underline{X}$ und $\underline{U}$ denselben Kern (dieselben Koeffizienten) erhalten.

Das hiermit gewonnene Ergebnis läßt sich noch einfacher ausdrücken. Wir nehmen jetzt, nachdem wir den Begriff der Gruppe γ gebildet haben, die Formen $(LX)^2$, $(U\Lambda)^2$ schon von vornherein nicht mehr in den Bereich der zu transformierenden algebraischen Formen auf, fragen also nur nach solchen ganzen und rationalen Funktionen der Koordinaten der Vektoren X und U, die sich nach Ausführung der Transformationen (a) mit einem Faktor reproduzieren.

In den Koeffizienten dieser Funktionen aber lassen wir die Koeffizienten von $(LX)^2$ und $(U\varLambda)^2$ nach wie vor zu, nur daß wir sie jetzt als Konstanten behandeln. In diesem Sinne ist dann die folgende Behauptung zu verstehen, deren begrifflicher Inhalt durchaus nicht mit früher aufgestellten, ähnlich klingenden Lehrsätzen verwechselt werden darf:

I. Die unter (1) und (2) zusammengestellten Ausdrücke bilden ein vollständiges und kleinstes System von ganzen und rationalen (dazu notwendig absoluten) Invarianten beliebig vieler Vektoren X, U gegenüber der Gruppe γ der eigentlichen automorphen Transformationen der quadratischen Formen $(LX)^2$, $(U\varLambda)^2$.

Die Ausdrücke (1) sind dann auch noch absolute Invarianten der Gruppe γ, η, während die Ausdrücke (2) bei den Transformationen von η alle den Faktor -1 annehmen. Wenn aber die quadratische Form $(LX)^2$ $\{$oder $(U\varLambda)^2\}$ eine Summe von Quadraten wird, so reduzieren sich die Ausdrücke (1), (2) auf die, die wir in § 2 behandelt hatten, und umgekehrt entspricht jedem solchen System, in dem einige der Vektoren mit X, einige mit U bezeichnet sind, wieder ein System von Ausdrücken (1, 2), das aus jenem eben durch Transformationen von $\varGamma$ hervorgeht. Hiermit haben wir nicht nur die gesuchte Erweiterung des Satzes I in § 2, sondern es ist außerdem auch noch klargestellt, in welcher Beziehung der Satz I zur Invariantentheorie der umfassenderen Gruppen $\varGamma$, H und G steht. Wir haben zuerst ein vollständiges und kleinstes System von (zum Teil nur relativen) Invarianten der Gruppe G im System der quadratischen Form $(LX)^2$ und beliebig vieler linearer Formen gebildet. Durch Erweiterung des betrachteten Integritätsbereiches, nämlich durch Hinzufügung von $|L|^{-1}$, konnten wir sodann dieses System noch vereinfachen, wir konnten zum reduzierten System von Invarianten derselben Grundformen übergehen, unter die nun auch die zu $(LX)^2$ reziproke Form $(U\varLambda)^2$ aufgenommen werden konnte. Aus diesem reduzierten System erhielten wir sodann ein ebenfalls vollständiges und kleinstes System von Invarianten, wieder von denselben Grundformen, gegenüber der Gruppe $\varGamma$, H durch die Spezialisierung $|L| = 1$. Und aus diesem letzten System endlich ergab sich das in dem Lehrsatze I beschriebene System von Invarianten der Gruppe γ, η dadurch, daß aus der Mannigfaltigkeit der veränderlichen Formen die beiden quadratischen Formen $(LX)^2$ und $(U\varLambda)^2$ weggelassen wurden. Ferner aber ergibt sich auch noch das folgende sehr wesentliche Resultat:

Die in § 2 ermittelten Identitäten zwischen elementaren orthogonalen Invarianten finden sich vollständig und im wesentlichen unverändert im System der Invarianten

$$(10) \qquad (X|Y), \quad (UX), \quad (U|V),$$

$(X_1 \dots X_n), \dots, (X_1 \dots X_i U_{i+1} \dots U_n), \dots, (U_1 \dots U_n)$ der durch die quadratischen Formen $(LX)^2$, $(U\Lambda)^2$ bestimmten Gruppe γ, η wieder.

Alles was man nämlich zu tun hat, um aus irgend einer jener Formeln die entsprechende umfassendere Formel zu erhalten, besteht darin, daß man an Stelle einiger Zeichen X oder Y Zeichen U oder V setzt, und dann, wo die Verbindung $(U|X)$ auftritt, (UX) dafür schreibt[1]). Aus jeder richtigen Identität geht auf diese Art wieder eine richtige Identität hervor, und ebenso gilt das Umgekehrte. Insbesondere verhalten sich auch die Invarianten

$$(11) \qquad (X_1 \dots X_i U_{i+1} \dots U_n)$$

ganz wie Determinantensymbole. Sie sind ja Determinanten (S. 135) und wechseln demnach ihre Vorzeichen, wenn man zwei der vorkommenden Zeichen X_i, X_k oder U_i, U_k oder auch zwei Zeichen wie X_i, U_k vertauscht: Alles das geht aus unseren Formeln (1) und (2) unmittelbar hervor.

Es gelten also auch die Sätze II und III des § 2 mit der einzigen Änderung, daß an Stelle aller einzelnen Zeichen X und Y, die Vektoren erster Schicht bedeuten, nach Belieben die Zeichen U und V von Vektoren zweiter Schicht substituiert werden können. Den so entstehenden neuen Zeichen, die unter (10) und (11) aufgezählt sind, ist dann die unter (1) und (2) angegebene Bedeutung beizulegen.

Natürlich beruht diese Leichtigkeit des Operierens lediglich darauf, daß wir von vornherein die anzuwendenden Zeichen sorg-

---

[1]) Eine solche Änderung der Bezeichnung ist offenbar entbehrlich, sobald $n > 2$ ist; wir hätten unter dieser Voraussetzung ebensogut die Zeichen $(X|Y)$ und $(U|V)$ durch (XY) und (UV), oder umgekehrt (UX) durch $(U|X)$ ersetzen können. Im Falle $n = 2$ aber würde dann, wie schon bemerkt, eine Mehrdeutigkeit entstehen. Aber auch im allgemeinen Falle kann die im Texte benutzte Bezeichnungsart der größeren Deutlichkeit dienen, indem sie daran erinnert, wie die Invariantentheorie der Gruppe γ zur Invariantentheorie der Gruppe Γ in Beziehung gebracht werden kann. Ist dieses einmal klargestellt, so mag man die Vertikalstriche wieder weglassen. Wir behalten sie indessen bis auf weiteres noch bei.

faltig, und zwar mit Rücksicht auf eine möglichst einfache Fassung dieses unseres Hauptergebnisses gewählt hatten.

Im Grunde haben wir es also in der Theorie der automorphen Transformationen der quadratischen Formen $(LX)^2$, $(U\Lambda)^2$, ganz wie in der spezielleren Theorie der orthogonalen Transformationen, nur mit zwei Invariantentypen,

$$(X \mid Y) \quad \text{und} \quad (X_1 \ldots X_n),$$

zu tun.

Hierin liegt ein wesentlicher Unterschied zwischen der Invariantentheorie der Gruppe γ, η und der zuvor betrachteten Gruppe Γ, H. In der Theorie der Gruppe Γ, H ist es keineswegs überflüssig, alle Vektoren zweimal zu setzen, ihre Mannigfaltigkeit, wie wir uns ausgedrückt hatten, mit zwei Schichten zu überdecken, trotzdem daß auch in diesem Falle die Vektoren beider Schichten in bestimmter Weise gepaart sind,

$$(LX)L = U, \quad (U\Lambda)\Lambda = X.$$

Denn so gepaarte Vektoren werden durch die Transformationen von Γ, H auf verschiedene Arten untereinander vertauscht, es entsteht durch Anwendung einer Transformation von Γ, H eine neue Paarung,

$$(\underline{L}\,\underline{X})\underline{L} = \underline{U}, \quad (\underline{U}\,\underline{\Lambda})\underline{\Lambda} = \underline{X}.$$

Ganz anders als die hier betrachteten gepaarten quadratischen Formen $(LX)^2$, $(U\Lambda)^2$ verhalten sich singuläre quadratische Formen (die mit verschwindenden Diskriminanten), auf deren Theorie wir hier nicht eingehen können.

§ 14.

Fortsetzung und Zahlenbeispiel.

Die im vorigen Paragraphen geschilderte einfache Gestaltung unserer Theorie war insofern etwas teuer erkauft, als zur Überführung einer nicht singulären quadratischen Form in eine solche von der Determinante Eins in der Regel das Ausziehen einer n^{ten} Wurzel nötig ist, also eine irrationale Operation, die im Falle einer reellen Form zudem nicht einmal immer auf reellem Wege ausgeführt werden kann. Es ist aber nicht schwer, diesen Übelstand zu vermeiden; nur muß man dann auf eine vollkommene Symmetrie der Formeln verzichten.

Um auch jetzt wieder zu möglichst einfachen Ausdrucksformen zu gelangen, werden wir neben einigen der bisher benutzten Zeichen noch andere verwenden, die wir von jenen durch Gebrauch **fetter Klammern** unterscheiden. Als quadratische Grundform wollen wir eine solche mit Veränderlichen zweiter Schicht benutzen, die wir mit $(UA)^2$ bezeichnen. In den zu betrachtenden Integritätsbereich nehmen wir, als reine Konstanten, alle Koeffizienten von $(UA)^2$, und dazu noch den reziproken Wert der Invariante $|A|$ auf. Dann lassen sich unsere Hauptsätze I, II, III im übrigen ganz unverändert auf den Fall einer beliebigen von Null verschiedenen Diskriminante übertragen, wenn wir an Stelle der Invariantentypen des § 13 die folgenden $n+4$ Ausdrücke treten lassen:

$$(1)\qquad \boxed{\boldsymbol{(}X_1 \ldots X_n\boldsymbol{)} = (X_1 \ldots X_n), \quad \boldsymbol{(}X \mid Y\boldsymbol{)} = (LX)(LY),}$$

(wobei

$$(LX)(LY) = \frac{(XA_2 \ldots A_n)(YA_2 \ldots A_n)}{(n-1)!\,|A|}$$

zu setzen ist. $(UA)^2$ und $(LX)^2$ sind dann reziproke Formen, es ist also

$$|L| \cdot |A| = 1.)$$

$$(2)\quad \boxed{\boldsymbol{(}U_1 \ldots U_n\boldsymbol{)} = |A| \cdot (U_1 \ldots U_n), \quad \boldsymbol{(}U \mid V\boldsymbol{)} = (UA)(VA),^{1)}}$$

$$(3)\qquad \boxed{\boldsymbol{(}UX\boldsymbol{)} = (UX),}$$

$$(4)\quad \boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{(}X_1 \ldots X_{n-1} U_n\boldsymbol{)} = (X_1 \ldots X_{n-1} A_n)(U_n A_n), \\ \qquad\qquad \boldsymbol{(}X_1 \ldots X_{n-2} U_{n-1} U_n\boldsymbol{)} \\ = (X_1 \ldots X_{n-2} A_{n-1} A_n)(U_{n-1} A_{n-1})(U_n A_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad \boldsymbol{(}X_1 U_2 \ldots U_n\boldsymbol{)} \\ = (X_1 A_2 \ldots A_n)(UA_2) \ldots (UA_n). \end{array}}$$

Wir haben diesmal unter (1) und (2) alle elementaren Invarianten der Gruppe γ, η der automorphen Transformationen von $(UA)^2$ zusammengestellt, die *nur* von Vektoren erster Schicht oder *nur* von solchen zweiter Schicht abhängen; die Formeln (3) und (4) enthalten die übrigen elementaren Invarianten, die also, in denen Vektoren erster und zweiter Schicht zusammen vorkommen.

---

[1]) Man beachte den Faktor $|A|$ in der ersten dieser Formeln.

Man hat dann noch die Reduktionsformeln

$$(L_1 X_1) \ldots (L_{n-1} X_{n-1}) (L_1 \ldots L_{n-1} U_n)$$
$$= |A|^{-1} . (X_1 \ldots X_{n-1} U_n),$$
$$(L_1 X_1) \ldots (L_{n-2} X_{n-2}) . (L_1 \ldots L_{n-2} U_{n-1} U_n)$$
$$= |A|^{-1} . (X_1 \ldots X_{n-2} U_{n-1} U_n), \text{ usw.}$$

Zwischen den Invarianten der beiden unter (1) aufgeführten Arten bestehen dann die identischen Gleichungen

$$\text{(A)} \quad \boxed{\begin{gathered}(X_1 X_2 \ldots X_n) . (X_0 \mid Y) + (-1)^n (X_2 \ldots X_n X_0)(X_1 \mid Y) \\ + \cdots + (-1)^n (X_0 \ldots X_{n-1}) . (X_n \mid Y) = 0,\end{gathered}}$$

$$\text{(B)} \quad \boxed{\begin{gathered}(X_1 \ldots X_n) . (Y_1 \ldots Y_n) \\ - |A| \cdot |(X_1 \mid Y_1) \ldots (X_n \mid Y_n)| = 0,\end{gathered}}$$

von denen sich nur die zweite von der entsprechenden Identität des § 2 durch das Auftreten des Faktors $|A|$ rechter Hand unterscheidet. Aus den Formeln (A) und (B) entstehen dann, wie früher, überhaupt alle identischen Relationen, die zwischen Invarianten von Vektoren erster Schicht stattfinden. Die Ausdrücke (2 bis 4), die außerdem Vektoren zweiter Schicht oder nur solche enthalten, entstehen aber aus den Ausdrücken (1) durch Substitutionen der Form

$$X = (U A) A;$$

man kann also alle Relationen, die zwischen den Ausdrücken (1) bis (4) bestehen, mechanisch aus den Formeln (A) und (B) und ihren Folgerungen dadurch erhalten, daß man in den linker Hand eingeführten Symbolen an Stelle der Zeichen X, Y Zeichen U, V substituiert. Hiermit ist die Übertragung der Lehrsätze unseres § 2 auf den vorliegenden Fall bereits vollzogen. Sie brauchen nicht erst noch besonders formuliert zu werden. Substituiert man z. B. in (B) $Y_k = (U_k A_k) A_k$, so hebt sich beiderseits der Faktor $|A|$ heraus, und man erhält wieder das Multiplikationstheorem der Determinanten,

$$(X_1 \ldots X_n) . (U_1 \ldots U_n) - |(X_1 U_1) \ldots (X_n U_n)| = 0,$$

auf dem eben das Bestehen der Identität (B) beruht.

Wir erläutern das Vorgetragene durch ein für Anwendungen besonders wichtiges Zahlenbeispiel, indem wir (nunmehr unter Zählung der Indizes von 0 bis 3)

$$(5) \qquad (U A)^2 = U_0^2 - U_1^2 - U_2^2 - U_3^2$$

und also

$$(6) \qquad (L X)^2 = X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2$$

setzen[1]). Ein vollständiges und kleinstes System von Typen elementarer Invarianten der Gruppe γ, η, die aus den eigentlichen automorphen Transformationen der Formen (5) und (6) besteht, wird dann von den folgenden Ausdrücken gebildet:

$$
\begin{aligned}
(X \mid Y) &= X_0 Y_0 - X_1 Y_1 - X_2 Y_2 - X_3 Y_3,\\
(U X) &= U_0 X_0 + U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3,\\
(U \mid V) &= U_0 V_0 - U_1 V_1 - U_2 V_2 - U_3 V_3;\\
(X_\alpha X_\beta X_\gamma X_\delta) &= \quad (X_\alpha X_\beta X_\gamma X_\delta),\\
(U_\alpha U_\beta U_\gamma U_\delta) &= -(U_\alpha U_\beta U_\gamma U_\delta);
\end{aligned}
$$

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
(X Y Z W) &= \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_0 & Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ W_0 & -W_1 & -W_2 & -W_3 \end{vmatrix},\\
(X Y V W) &= \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ V_0 & -V_1 & -V_2 & -V_3 \\ W_0 & -W_1 & -W_2 & -W_3 \end{vmatrix},\\
(X U V W) &= \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ U_0 & -U_1 & -U_2 & -U_3 \\ V_0 & -V_1 & -V_2 & -V_3 \\ W_0 & -W_1 & -W_2 & -W_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Die Zusammenfassung aller zwischen diesen Ausdrücken bestehenden nicht weiter zu reduzierenden Identitäten in nur zwei Formeln wird dann mit Hilfe der hier eingeführten Zeichen, die alle reellen Invarianten auch in reeller Form darstellen, auf die einfachste Weise erreicht: Man hat, wenn nun Vektoren erster oder zweiter Schicht einfach mit Ziffern bezeichnet werden, ganz allgemein

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
&(2\,3\,4\,5).(1 \mid 0) + (3\,4\,5\,1).(2 \mid 0)\\
&+ (4\,5\,1\,2).(3 \mid 0) + (5\,1\,2\,3).(4 \mid 0)\\
&+ (1\,2\,3\,4).(5 \mid 0) = 0,\\
&(1\,2\,3\,4).(1'\,2'\,3'\,4')\\
&+ |(1 \mid 1') \ldots (4 \mid 4')| = 0
\end{aligned}
$$
[2]).

Nur ziehen wir der Folgerichtigkeit halber es auch hier noch vor, die bilineare Invariante eines Vektors erster Schicht und eines

[1]) Ich lasse hier die Indizes von 0 bis 3 laufen, um nicht bei gelegentlicher Darlegung der Beziehung unserer Theorie zur Theorie der Biquaternionen die Bezeichnungen ändern zu müssen.

[2]) Man beachte das +-Zeichen in der zweiten dieser Formeln.

solchen zweiter Schicht nicht durch das Zeichen $(U \mid X)$, sondern, wie zuvor, durch das Zeichen $(U X)$ darzustellen. Z. B. ist identisch

$$(X Y Z W).(X' U' V' W') + \left| \begin{array}{c:ccc} (X \mid X') & (X U') & (X V') & (X W') \\ (Y \mid X') & (Y U') & (Y V') & (Y W') \\ (Z \mid X') & (Z U') & (Z V') & (Z W') \\ \hdashline (W X') & (W \mid U') & (W \mid V') & (W \mid W') \end{array} \right| = 0,$$

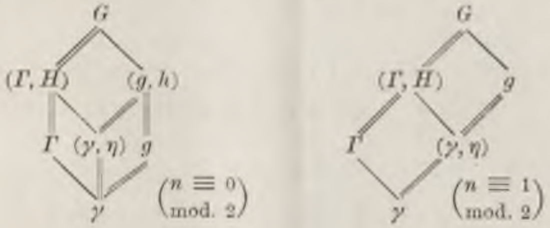
$$(X Y V W).(X' Y' V' W') + \left| \begin{array}{cc:cc} (X \mid X') & (X \mid Y') & (X V') & (X W') \\ (Y \mid X') & (Y \mid Y') & (Y V') & (Y W') \\ \hdashline (V X') & (V Y') & (V \mid V') & (V \mid W') \\ (W X') & (W Y') & (W \mid V') & (W \mid W') \end{array} \right| = 0.$$

Aus dem Vorgetragenen ist zu ersehen, daß zwar keineswegs alle Invarianten der Gruppe γ, η, wohl aber, unter anderen, die unter (1) bis (4) aufgezählten elementaren Invarianten dieser Gruppe in einem weiteren Sinne des Wortes auch noch Invarianten (nämlich absolute oder relative Invarianten) einer umfassenderen Gruppe sind, die dadurch erhalten wird, daß man die Gruppe γ, η mit der eingliedrigen Gruppe

$$\varrho . X = \underline{X}, \quad \varrho^{-1} . U = \underline{U} \qquad \{\varrho \neq 0\}$$

zusammensetzt, die etwa als Gruppe der Streckungen bezeichnet werden soll. Die so erhaltene neue Gruppe, deren Transformationen von einem Parameter mehr abhängen als die der Gruppe γ, η, soll Gruppe der hemiautomorphen Transformationen der quadratischen Formen $(L X)^2$, $(U \Lambda)^2$ oder $(X \mid X)$, $(U \mid U)$ genannt werden. Sie umfaßt, wenn die Stufenzahl n gerade ist, gleich ihrer Untergruppe γ, η selbst, zwei getrennte Schichten von (komplexen) Transformationen, bei ungeraden Werten von n aber nur eine einzige Transformationenschicht. Unter ihren Transformationen sind zwei Transformationen der Gruppe γ, η enthalten: Außer der identischen Transformation „die Diametralspiegelung“ $-X = \underline{X}$, $-U = \underline{U}$, die bei geraden Werten von n zur Gruppe γ, bei ungeraden Werten von n zur Schar η gehört. Man kann bei ungeraden Werten der Stufenzahl (im komplexen Gebiete) durch hemiautomorphe Transformationen unserer quadratischen Formen hindurch von eigentlichen automorphen Transformationen zu uneigentlich-automorphen kontinuierlich übergehen, bei geraden Werten der Stufenzahl aber nicht.

Bedienen wir uns, je nach Umständen, des Zeichens g, h oder des Zeichens g für die soeben besprochene Gruppe, so kann das gegenseitige Verhältnis der uns hier näher angehenden Gruppen durch die folgenden Schemata verdeutlicht werden:



Ein Doppelstrich zwischen zwei Gruppensymbolen deutet an, daß die umfaßte Gruppe in der umfassenden invariant enthalten ist[1]).

Wir wollen nun die elementaren Invarianten der Gruppe g, h oder g, die ja schon aus dem Vorhergehenden abgelesen werden können, nochmals unmittelbar bestimmen.

Daß die zueinander reziproken Formen $(L\,X)^2$ oder $(X\,|\,X)$ und $(U\,\varDelta)^2$ oder $(U\,|\,U)$ (und dann auch ihre Polaren) nach Ausführung einer geeigneten Transformation der Gruppe G mit einem Faktor reproduziert werden sollen, der von den transformierten Veränderlichen X und U nicht abhängt, läßt sich, unter anderem, ausdrücken durch Gleichungen, die den Gleichungen (6) in § 13 analog sind und sie umfassen.

Wir gehen aus von den für jedes Paar reziproker bilinearer Formen geltenden Identitäten

$$(9)\qquad \begin{aligned} &(X\,C)(\Gamma\,D)(\varDelta\,U) = (X\,U),\\ &(X\,D)(\varDelta\,C)(\Gamma\,U) = (X\,U),\\ &(X\,L)(L\,\varDelta)(\varDelta\,U) = (X\,U), \end{aligned}$$

und drücken dann, daß die Form $(L\,X)^2$ bei einer der zu betrachtenden Transformationen in ein Multiplum ihrer selbst übergeführt werden soll, etwa so aus:

$$(\mathrm{a})\qquad (X\,C)(\Gamma\,L)(L\,\Gamma')(C'\,Y) = J.(X\,L)(L\,Y).$$

---

[1]) Sind $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ zwei Transformationen irgend zweier Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{g}$, von denen $\mathfrak{g}$ als (echte) Untergruppe in $\mathfrak{G}$ steckt, und ist, bei jeder Wahl von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ aus diesen Gruppen, $\mathfrak{T}^* = \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{T}\mathfrak{S}$ immer wieder eine Transformation von $\mathfrak{g}$, so sagt man, $\mathfrak{g}$ sei eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$, oder die Gruppe $\mathfrak{g}$ sei in $\mathfrak{G}$ invariant enthalten.

Schreiben wir in dieser Gleichung, die ja für alle X und alle Y bestehen soll, $\underline{X}$ und $\underline{Y}$ an Stelle von X und Y, und substituieren wir dann

$$(X D)\Delta = \underline{X}, \quad \Delta'(D' Y) = \underline{Y} \ (\longleftarrow),$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}(X D)(\Delta C)(L \Gamma) \quad (L \Gamma')(C' \Delta')(D' Y) \\ = J.(X D)(\Delta L) \quad (L \Delta')(D' Y)\end{aligned}$$

und also nach (9):

$$\text{(b)} \qquad (X D)(\Delta L)(L \Delta')(D' Y) = J^{-1}.(X L)(L Y).$$

Zu den Gleichungen (a) und (b) sind dann korrelativ (reziprok) ebenfalls identische Gleichungen derselben Form

$$\text{(c)} \qquad (U \Gamma)(C \Lambda)(\Lambda C')(\Gamma' V') = J.(U \Lambda)(\Lambda V)$$

und

$$\text{(d)} \qquad (U \Delta)(D \Lambda)(\Lambda D')(\Delta' V) = J^{-1}.(U \Lambda)(\Lambda V).$$

Daß nämlich die in (a) und (c) auftretenden Proportionalitätsfaktoren denselben Wert haben müssen, erkennt man, wenn man $X = Y = \Lambda$ und $U = V = L$ setzt. Wir sehen also, daß — unter anderen — jede einzelne der vier Gleichungen (a), (b), (c), (d) oder also jede der identisch zu erfüllenden Gleichungen

$$\text{(10)} \qquad \boxed{\begin{aligned}(X C)\,(\Gamma | \Gamma')\,(C' Y) &= J \quad .(X | Y),\\ (X D)\,(\Delta | \Delta')(D' Y) &= J^{-1}.(X | Y),\\ (U \Gamma)\,(C | C')\,(\Gamma' V) &= J \quad .(U | V),\\ (U \Delta)\,(D | D')\,(\Delta' V) &= J^{-1}.(U | V)\end{aligned}}$$

die übrigen nach sich zieht und charakteristisch ist für die hemiautomorphen Transformationen des Formenpaares $(X | X)$, $(U | U)$. Die auftretenden Proportionalitätsfaktoren sind simultane Invarianten der Formen $(X C)(\Delta U)$ und $(L X)^2$; sie haben die zueinander reziproken Werte

$$\text{(11)} \qquad \boxed{\begin{aligned}J \ &= \frac{1}{n}(C | C')(\Gamma | \Gamma'),\\ J^{-1} &= \frac{1}{n}(D | D')(\Delta | \Delta').\end{aligned}}$$

Läßt man die betrachteten Transformationen sich auf Streckungen reduzieren [Nr. (8)], setzt man also

(12) $\quad (XC)(\Gamma U) = \varrho\,.(XU),\ (DX)(U\varDelta) = \varrho^{-1}.(XU),$

so folgt

$$J = \varrho^2.$$

Nun zieht die Substitution

$$(XC)\Gamma = \underline{X} \quad (\leftarrow)$$

die Gleichung

$$|C|.(X_1 \dots X_n) = (\underline{X}_1 \dots \underline{X}_n)$$

und nach (10) auch die Gleichung

$$J.(X|Y) = (\underline{X}|\underline{Y})$$

nach sich. Andererseits ist

$$\begin{aligned}&(\underline{X}_1 \dots \underline{X}_n).(\underline{Y}_1 \dots \underline{Y}_n) : |(\underline{X}_1|\underline{Y}_1) \dots (\underline{X}_n|\underline{Y}_n)|\\ &= (X_1 \dots X_n).(Y_1 \dots Y_n) : |(X_1|Y_1) \dots (X_n|Y_n)|\end{aligned}$$

(B, S. 154). Hieraus folgt, daß

(13) $$\boxed{J^n = |C|^2}$$

sein muß.

Es sei nun zuerst

$$\underline{n \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2).}$$

Dann ist entweder $J^{n/2} = |C|$ oder $J^{n/2} = -|C|$. Im ersten Falle nennen wir die Transformationen

$$(XC)\Gamma = \underline{X},\ (U\varDelta)D = \underline{U} \quad (\rightarrow)$$

eigentlich, im zweiten uneigentlich. Wir erhalten zwei analytische Transformationsscharen, die schon erklärten Schichten g und h. In beiden Fällen läßt sich eine sonst irrationale Wurzelgröße, eine Potenz der Transformationsdeterminante mit gebrochenem Exponenten, rational erklären, nämlich entsprechend der getroffenen Unterscheidung:

(14) $\quad \{|C|\}^{\frac{2}{n}} = J = J_e, \quad \{-|C|\}^{\frac{2}{n}} = J = J_u.$

Potenzen von J_e und J_u mit ganzzahligen Exponenten liefern dann die Faktoren, mit denen die Ausdrücke (1) bis (4) bei Ausführung der kontragredienten Transformationen

$$(XC)\Gamma = \underline{X}, \quad (U\varDelta)D = \underline{U}$$

reproduziert werden; die Formeln (a) bis (d) liefern das Gleichungssystem

$$
(15)\quad \boxed{\begin{array}{c}
(U X) = (\underline{U}\,\underline{X}),\\
J.(X \mid Y) = (\underline{X} \mid \underline{Y}),\quad J^{-1}.(U \mid V) = (\underline{U} \mid \underline{V});\\
\pm J^{n/2} \quad .(X_1 \ldots X_{n-1} X_n) = (\underline{X}_1 \ldots \underline{X}_{n-1} \underline{X}_n),\\
\pm J^{n/2-1} .(X_1 \ldots X_{n-1} U_n) = (\underline{X}_1 \ldots \underline{X}_{n-1} \underline{U}_n),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\pm J^{1-n/2} . (X_1 U_2 \ldots U_n) = (\underline{X}_1 \underline{U}_2 \ldots \underline{U}_n),\\
\pm J^{-n/2} \; . (U_1 U_2 \ldots U_n) = (\underline{U}_1 \underline{U}_2 \ldots \underline{U}_n).
\end{array}}
$$

Dabei gelten die oberen Zeichen, wenn es sich um eine eigentliche, die unteren, wenn es sich um eine uneigentliche Transformation handelt. Zwei Typen absoluter Invarianten der Gruppe g finden sich also schon unter diesen elementaren Invarianten $(U X)$ und $(X_1 \ldots X_{n/2} U_1 \ldots U_{n/2})$.

Es sei jetzt zweitens

$$\underline{n \equiv 1 \pmod{2}.}$$

Es gibt dann nur eine Schar von hemiautomorphen Transformationen der quadratischen Formen $(L X)^2$, $(U \Lambda)^2$, und diese bilden die analytische Gruppe g. Wir können dann eine rationale Invariante (der Gruppe G) durch die Formel

$$
(16)\qquad J^{\frac{1}{2}} = |C|^{\frac{1}{n}} = \frac{|C|}{J^{\frac{n-1}{2}}} = K
$$

erklären Dieses K ist eine Funktion ersten Grades der Koeffizienten von $(X C)\,(U \Gamma)$ (während J_e und J_u vom zweiten Grade sind). An Stelle der Formeln (15) treten nunmehr die folgenden:

$$
(17)\quad \boxed{\begin{array}{c}
(U X) = (\underline{U}\,\underline{X}),\\
K^2 . (X \mid Y) = (\underline{X} \mid \underline{Y}),\; K^{-2}.(U \mid V) = (\underline{U} \mid \underline{V});\\
K^{n} \quad .(X_1 \ldots X_{n-1} X_n) = (\underline{X}_1 \ldots \underline{X}_{n-1} \underline{X}_n),\\
K^{n-2}.(X_1 \ldots X_{n-1} U_n) = (\underline{X}_1 \ldots \underline{X}_{n-1} \underline{U}_n),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
K^{2-n} . (X_1 U_2 \ldots U_n) = (\underline{X}_1 \underline{U}_2 \ldots \underline{U}_n),\\
K^{-n} \; . (U_1 U_2 \ldots U_n) = (\underline{U}_1 \underline{U}_2 \ldots \underline{U}_n).
\end{array}}
$$

Die ersten drei dieser Invarianten nehmen also Potenzen von K mit geraden Exponenten als Faktoren an, die übrigen, die die Gestalt von Determinanten haben, Potenzen mit ungeraden Exponenten; und hierauf beruht es, daß im Falle der Untergruppe γ, η, dann nämlich, wenn

$$J_e = 1, \quad J_u = 1 \qquad (n \equiv 0, \text{ mod. } 2)$$

und

$$K = 1 \text{ oder } K = -1 \quad (n \equiv 1, \text{ mod. } 2)$$

ist, die Gleichungen (15) und (17) der Form nach übereinstimmen.

Man kann sich die Formeln (15) und (17) leicht merken, wenn man bedenkt, daß die Gruppe g ja die Streckungsgruppe[1])

$$J^{1/2} . X = \varrho . X = \underline{X}, \quad J^{-1/2} . U = \varrho^{-1} . U = \underline{U} \ (n \equiv 0, \text{ mod. } 2)$$

oder

$$K . X = \varrho . X = \underline{X}, \quad K^{-1} . U = \varrho^{-1} . U = \underline{U} \ (n \equiv 1, \text{ mod. } 2)$$

enthält, und daß daraus schon sich die Faktoren ergeben, mit denen die aufgezählten elementaren Invarianten reproduziert werden.

Der Leser möge sich im einzelnen deutlich machen, worin sich die Invariantentheorien der besprochenen Gruppen voneinander unterscheiden; denn nur die elementaren Invarianten, aus denen sich alle Invarianten zusammensetzen lassen, sind für alle diese Gruppen dieselben.

§ 15.

Verschiedenartige Ergänzungen.

Irrationale Kovarianten von bilinearen Formen und von Paaren quadratischer Formen.

Auf die Beziehungen des Vorgetragenen zur projektiven Geometrie sind wir schon früher (§ 5 bis 7) etwas eingegangen. Jetzt soll dieser Stoff nochmals aufgenommen werden, besonders mit Rücksicht darauf, daß in dem weitaus größten Teile der Literatur nicht sowohl die Theorie der hier betrachteten Gruppen, als vielmehr eben die projektive Geometrie im Vordergrunde steht. Ohne Zweifel beruht

[1]) Die Streckungsgruppe ist eine sogenannte ausgezeichnete Untergruppe nicht nur von g, sondern auch noch von G, d. h. alle ihre Transformationen sind mit denen der Gruppe G vertauschbar.

ein großer Teil des Interesses, das das zuvor Gesagte etwa haben mag, auf der Möglichkeit seiner Anwendung in der projektiven Geometrie.

„Invarianten" der Kollineationsgruppe $\mathfrak{G}$.

Wie bemerkt, unterscheidet sich die Invariantentheorie der Gruppe Γ, H (oder irgend einer anderen Untergruppe von G mit $n^2 - 1$ wesentlichen Parametern) gar nicht von der Invariantentheorie der Gruppe G selbst, soweit es sich nur um „elementare" Invarianten handelt, nämlich um die ganzen und rationalen Invarianten, aus denen sich alle solchen als rationale ganze Funktionen zusammensetzen lassen. Diese elementaren Invarianten aber sind homogene Funktionen aller an ihrer Bildung beteiligten Kerne (Vektoren usw.). Sie ändern sich also nur um Zahlenfaktoren, wenn man alle diese Kerne multiplikatorischen Änderungen unterwirft, und zwar jeden einer anderen, z. B. im Falle von Vektoren

$$(1)\qquad \begin{aligned} \sigma_1 X_1 &= \underline{X}_1, \ldots, \sigma_m X_m = \underline{X}_m, \ldots, \\ \tau_1 U_1 &= \underline{U}_1, \ldots, \tau_m U_m = \underline{U}_m, \ldots \end{aligned}$$

Es liegt dann der Gedanke nahe, überhaupt nur noch auf die Verhältnisse der Koordinaten der zu betrachtenden Vektoren usw. zu achten und die linearen Transformationen ebenfalls nur noch als Transformationen von Verhältnisgrößen zu behandeln.

Dieses ist im wesentlichen der Standpunkt, den, ausgehend von Problemen der zu ihrer Zeit vorliegenden Geometrie, die Begründer der Invariantentheorie solchen Problemen gegenüber eingenommen haben und den auch die meisten ihrer Nachfolger einnehmen. Statt von „Vektoren erster Schicht" spricht man in diesem Zusammenhange gewöhnlich von Punkten (vgl. § 1 und 3): Ein Punkt ist eben ein System von n Verhältnisgrößen

$$X_1 : X_2 : \ldots : X_n;$$

der Inbegriff aller Punkte ist das projektive Punktkontinuum (von n^{ter} Stufe oder von $n - 1$ „komplexen Dimensionen"), dem (im Gegensatz zum Kontinuum der Vektoren) der Charakter der Abgeschlossenheit zukommt. Die Koeffizienten einer linearen Transformation werden dann ebenfalls als Verhältnisgrößen zu betrachten sein, was man vielfach dadurch zum Ausdruck bringt, daß man an Stelle der Gleichungen (1, I) — S. 111 — Gleichungen mit einem Proportionalitätsfaktor treten läßt, der willkürlich bleibt, auf den es in diesem Zusammenhange aber nicht ankommt:

$$(2)\qquad X_1 C_{1i} + \cdots + X_n C_{ni} = \sigma \,.\, \underline{X}_i \quad (\sigma \neq 0).$$

Entsprechendes gilt von Vektoren zweiter Schicht; an Stelle der Gleichungen (1, II) — S. 111 — läßt man Gleichungen der Form

$$(3) \qquad U_1 D_{1i} + \cdots + U_n D_{ni} = \tau . \underline{U}_i \quad (\tau \neq 0)$$

treten. Die Verhältnisgrößen

$$U_1 : U_2 : \cdots : U_n$$

können dann einfach als Koeffizienten linearer Gleichungen

$$(U X) = U_1 X_1 + \cdots + U_n X_n = 0$$

aufgefaßt werden, deren Veränderliche den Gleichungen (2) unterworfen werden. Man spricht von ihnen als den Koordinaten eines „Punktes" (zweiter Schicht, nach unserer Terminologie) im Falle $n = 2$, einer „Geraden" im Falle $n = 3$, einer „Ebene" im Falle $n = 4$ usw.: Allgemein heißen die genannten Verhältnisgrößen Koordinaten eines kurzweg mit U zu bezeichnenden „Gebietes $(n - 1)^{\text{ter}}$ Stufe" oder einer „linearen Mannigfaltigkeit" von $n - 2$ (komplexen) Dimensionen. Die Gleichungen (2) und (3), deren Zusammenbestehen die „vereinigte Lage" von U und X nicht stört, die nämlich bewirken, daß das Bestehen der Gleichung $(U X) = 0$ das Bestehen der Gleichung $(\underline{U}\,\underline{X}) = 0$ zur Folge hat, bilden die Gruppe aller Kollineationen[1]) des Gebietes n^{ter} Stufe (eben des projektiven Kontinuums).

Wir werden diese aus der Geometrie wohlbekannte Gruppe, entsprechend dem hier angewendeten System von Bezeichnungen, kurzweg die Gruppe $\mathfrak{G}$ nennen. Sind dann T_1 und T_2 zwei Transformationen der Gruppe G[2]), so daß $T_1 T_2 = T_3$ wird, und sind $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ die entsprechenden Transformationen von $\mathfrak{G}$, so folgt $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_3$, während der umgekehrte Schluß natürlich nicht gezogen werden kann. Nach der in der Gruppentheorie üblichen Terminologie sagen wir: Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist meromorph zur Gruppe G (sowie zu den zuvor genannten invarianten Untergruppen Γ; Γ, H usw. der Gruppe G).

Kommt es auf die Gruppe $\mathfrak{G}$ an, so liegt kein dringender Grund mehr vor, die Transformationsgleichungen (3) gerade so zu schreiben, wie hier geschehen, so nämlich, daß in die Definition der Koeffi-

---

[1]) Nach der Terminologie von S. Lie: „Die allgemeine projektive Gruppe". Unsere Gruppe G ist nach derselben Terminologie „die allgemeine lineare homogene Gruppe", Γ heißt „die spezielle lineare homogene Gruppe".

[2]) Ich brauche also hier die Zeichen etwas anders als zuvor. T_1 und T_2 sind jetzt das, was vorher $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ hieß.

zienten D_{ki} ein gemeinsamer Nenner $|C|$ aufgenommen wird. Gleichungen der Form

$$U_1 D_{1i}^* + \cdots + U_n D_{ni}^* = \tau^* . U_i, \tag{3*}$$

wo nunmehr

$$D_{ik}^* = \frac{\partial |C|}{\partial C_{ik}} \quad \text{(vgl. S. 91)},$$

würden dasselbe leisten, allerdings unter Zerstörung der vollkommenen Symmetrie zwischen den Transformationsformeln für X und U: Man bleibt dann im Bereich der ganzen Funktionen, auch in den Transformationsformeln. Oder man kann zur Darstellung der Transformationen von $\mathfrak{G}$ überhaupt nur Transformationen der Gruppe Γ benutzen — lineare Transformationen also von der Determinante Eins[1]). Der gegenüber unseren bisherigen Betrachtungen eingetretenen Verschiebung des Interesses entspricht dann eine Verschiebung des Invariantenbegriffs:

Als Invarianten der Gruppe $\mathfrak{G}$ erklären wir die allseitig-homogenen Invarianten der Gruppe G[2]) (oder, was hier auf dasselbe hinauskommt, der Gruppe Γ oder der Gruppe Γ, H usw.). Die Werte dieser Invarianten haben dann für die Theorie der Gruppe $\mathfrak{G}$ keine Bedeutung, außer in dem Falle, wo sie gleich Null sind: Bedeutungsvoll werden erst die Quotienten solcher Invarianten, aus denen sich bei linearen Transformationen die etwa vortretenden Faktoren wieder wegheben. Entsprechend hat man dann solche Quotienten — die homogen und vom Grade Null sein müssen in den Koordinaten aller auftretenden X, U usf. — als absolute Invarianten (der Gruppe $\mathfrak{G}$) bezeichnet[3]).

Der Unterschied dieser üblichen Begriffe gegenüber denen, die in der vorliegenden Untersuchung angewendet worden sind, mag durch ein Beispiel verdeutlicht werden. Wir setzen etwa $n = 3$ und stellen dann die Transformationen von $\mathfrak{G}$ so dar:

$$X_1 C_{1i} + X_2 C_{2i} + X_3 C_{3i} = X_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$U_1 \frac{\partial |C|}{\partial C_{1i}} + U_2 \frac{\partial |C|}{\partial C_{2i}} + U_3 \frac{\partial |C|}{\partial C_{3i}} = U_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Es folgt dann (abweichend von unseren früheren Formeln):

$$|C| . (XYZ) = (XYZ),$$
$$|C| . (UX) \quad = (UX),$$
$$|C|^2 . (UVW) = (UVW)^{4)}.$$

---

1) Verlangt man, daß reelle Transformationen von $\mathfrak{G}$ auch reell dargestellt werden sollen — was sachgemäß ist —, so muß bei geraden Werten der Stufenzahl n an Stelle der Gruppe Γ die Gruppe Γ, H treten.

2) T. F., S. 4. — 3) T. F., S. 10. — 4) T. F., S. 33.

(XYZ), (UX), (UVW) sind die verschiedenen Typen „elementarer“ Invarianten der Gruppe $\mathfrak{G}$. Ihre Werte sind, wie gesagt, in der Regel bedeutungslos, da sie durch Transformationen der Form (1) beliebig geändert werden können. Wohl aber stellen die Gleichungen

$$(XYZ) = 0, \quad (UX) = 0, \quad (UVW) = 0$$

Beziehungen dar, die durch Transformationen von $\mathfrak{G}$ nicht zerstört werden können. Absolute Invarianten im Sinne der Theorie der Gruppe $\mathfrak{G}$ sind rationale Ausdrücke, im einfachsten Falle solche wie

$$\frac{(UX)(VY)}{(UY)(VX)}, \quad \frac{(XYZ)(VZ')}{(XYZ')(VZ)}$$

(sogenannte Doppelverhältnisse). Für die Gruppe G dagegen war schon (UX) eine „absolute“ Invariante, und ebenso das Produkt $(UVW)(XYZ)$.

Augenscheinlich ist die Invariantentheorie der Gruppe $\mathfrak{G}$ schon durch die — inhaltsreichere — Theorie der Gruppen G, Γ usw. mitgegeben. Hieraus darf man aber nicht etwa den Schluß ziehen wollen, daß man es in Untersuchungen über die Kollineationsgruppe — also in der projektiven Geometrie — mit einer Art von Verstümmelung einer umfassenderen algebraischen Theorie zu tun hat (wie es wirklich die Ansicht einiger Mathematiker zu sein scheint). Es ist viel mehr als ein historischer Zufall, daß man gerade den durch Kollineationen nicht zerstörbaren Eigenschaften so viel Aufmerksamkeit geschenkt hat, wie es tatsächlich der Fall gewesen ist[1]). Außerdem ist zu bedenken, daß die feineren Unterscheidungen, die die Betrachtung der Gruppen G, Γ usw. nötig macht, doch nachträglich leicht hinzugefügt werden konnten, wenn man eine Invariantentheorie der Gruppe $\mathfrak{G}$ erst einmal hatte. Und schließlich darf auch das nicht übersehen werden, daß die Gruppen G, Γ usw. eines Gebietes n^{ter} Stufe, also, sagen wir deutlicher, die Gruppen G_{n^2}, Γ_{n^2-1} usf., selbst nichts anderes sind als Untergruppen der Kollineationsgruppe $\mathfrak{G}_{n(n+2)}$, die zu einem Gebiete einer um eine Einheit vermehrten Stufenzahl gehört. Man erkennt das ohne weiteres, wenn

[1]) Man kennt Eigenschaften der projektiven Kontinua und der zugehörigen Gruppen $\mathfrak{G}$, die diesen Mannigfaltigkeiten und Gruppen eine Sonderstellung in der Theorie der Funktionen von mehreren Veränderlichen anweisen, und anderes derart hat man vermutet. Die wichtigste hierher gehörige Tatsache ist, daß die Gruppe $\mathfrak{G}$ (abweichend von G) einfach ist, und zwar im ursprünglichen strengen Sinne des Wortes; d. h. daß sie keine (echte) invariante Untergruppe hat außer der identischen Transformation. Auf diese Gruppe von Fragen, um die sich S. Lie besondere Verdienste erworben hat, kann hier nicht eingegangen werden.

man den betrachteten Wertsystemen $\{X_1 \ldots X_n\}, \ldots \{U_1 \ldots U_n\}, \ldots$ neue „Koordinaten“ $X_0, \ldots, U_0, \ldots$ hinzufügt, die der identischen Transformation unterworfen werden. Aus der Gruppe G_{n^2} entsteht dadurch eine Gruppe G'_{n^2}, deren Objekte die Systeme $\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}, \ldots, \{U_0, U_1, \ldots, U_n\}$ sind, und die man wegen der Einfachheit ihres Zusammenhanges mit G_{n^2} als nur unwesentlich von G_{n^2} verschieden ansehen kann. Ja man wird sich kaum der Einsicht verschließen können, daß diese Gruppe G'_{n^2}, oder also G_{n^2}, bei weitem nicht die interessanteste der Untergruppen von $\mathfrak{G}_{n(n+2)}$ ist.

Die Sonderstellung des Falles $n = 2$[1].

Im Falle $n = 2$ sind die Ausdrücke der Form

$$(UY) = U_1 Y_1 + U_2 Y_2,$$

wenn man sie als Funktionen von Y_1 und Y_2 betrachtet, nur in der Art der Bezeichnung verschieden von Determinanten der Form

$$(XY) = X_1 Y_2 - X_2 Y_1.$$

Daher fällt im Gebiete zweiter Stufe die Nötigung, Vektoren — oder Punkte — zweier „Schichten“ zu betrachten, überhaupt fort[2].

Substitutionen der Form

$$U_1 = -X_2^*, \quad U_2 = X_1^*$$

bewirken dann, daß „kontragrediente“ Transformationen

$$X_1 C_{11} + X_2 C_{21} = \underline{X}_1, \quad U_1 D_{11} + U_2 D_{21} = \underline{U}_1,$$
$$X_1 C_{12} + X_2 C_{22} = \underline{X}_2, \quad U_1 D_{12} + U_2 D_{22} = \underline{U}_2$$

zueinander proportionale Koeffizienten erhalten. Es ist ja

$$D_{ik} = \frac{1}{|C|} \cdot \frac{\partial |C|}{\partial C_{ik}},$$

also folgt

$$|C|^{-1} \cdot \{X_1^* C_{11} + X_2^* C_{21}\} = \underline{X}_1^*,$$
$$|C|^{-1} \cdot \{X_1^* C_{12} + X_2^* C_{22}\} = \underline{X}_2^*.$$

Verbindet man diese Bemerkung mit dem zuvor Gesagten, wonach — unter entsprechender Änderung des Invariantenbegriffs — der Faktor $|C|^{-1}$ auch weggelassen werden kann, so sieht man, daß

---

[1]) Bis hierher war vorausgesetzt worden, daß die Stufenzahl > 2 ist (s. S. 93).

[2]) Unter Umständen kann aber diese Unterscheidung vorteilhaft sein; vgl. Göttinger Nachrichten 1912, S. 2.

die Unterscheidung zweier Arten von Invarianten $(U\,X)$ und $(X\,|\,Y)$, $(U\,|\,V)$ hier überflüssig ist; und zwar sind es dann die Invarianten des ersten Typus, die unbeschadet einer sachgemäßen Darstellung der Theorie entbehrt werden können.

Im binären Gebiete ($n = 2$) wird man also, unter Änderung der Bezeichnung, lineare Formen auch so darstellen können:

$$(p\,x) = p_1 x_2 - p_2 x_1, \quad (q\,x) = q_1 x_2 - q_2 x_1, \ldots;$$

Formen mit mehreren Veränderlichen (x, y, ...) und solche mit höheren Ordnungszahlen (μ, ν, ...) erscheinen dann als Produkte symbolischer Potenzen linearer Formen $(p\,x)$, $(q\,x)$, ...:

$$(p\,x)^\mu (q\,y)^\nu \ldots$$

Die linearen Transformationen unserer Gruppe G (G_4) werden bei Gebrauch dieser Bezeichnungsweise gleichlautend für die Veränderlichen (x, y, ...) und die Kerne der zugehörigen linearen Formen (p, q, ...), also gleichlautend für Veränderliche und Symbole:

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} x_1 c'_{11} + x_2 c'_{21} &= \underline{x}_1, & p_1 c'_{11} + p_2 c'_{21} &= \underline{p}_1, \\ x_1 c'_{12} + x_2 c'_{22} &= \underline{x}_2, & p_1 c'_{12} + p_2 c'_{22} &= \underline{p}_2 \end{aligned}$$ [1])

usw. Es gibt also dann nur noch einen „Typus" von „elementaren" Invarianten linearer Formen, die drei Ausdrücke

$$\begin{aligned} (x\,y) &= x_1 y_2 - x_2 y_1, \\ (p\,y) &= p_1 y_2 - p_2 y_1, \\ (p\,q) &= p_1 q_2 - p_2 q_1 \end{aligned}$$

haben alle dieselbe Form; und es gibt dann auch nur noch einen „Typus" von nicht weiter zerlegbaren Relationen zwischen solchen Invarianten

$$\text{(5)} \qquad \boxed{(q\,r)(p\,s) + (r\,p)(q\,s) + (p\,q)(r\,s) = 0.}$$

Und alle diese „Invarianten" sind nunmehr relative Invarianten der Gruppe $G\,(G_4)$, in dem früher (S. 93) erkärten Sinne: Jede nimmt, bei beliebiger linearer Transformation, eine Potenz der Transformationsdeterminante mit positivem ganzzahligem Exponenten als Faktor an, im einfachsten Falle die erste Potenz:

$$|c|\cdot(x\,y) = (\underline{x}\,\underline{y}), \quad |c|\cdot(p\,x) = (\underline{p}\,\underline{x}), \quad |c|\cdot(p\,q) = (\underline{p}\,\underline{q}).$$

Setzt man $|c| = \pm 1$, so erhält man, wie früher, eine Gruppe Γ, H (Γ_3, H_3) als Untergruppe von $G\,(G_4)$, usw.

---

[1]) Wegen der Akzente, mit denen die Koeffizienten c'_{ik} versehen sind, siehe die Formeln Nr. (7).

Es ist also klar, daß alles, was wir unter mechanischer Anwendung der für eine beliebige Stufenzahl entwickelten Theorie auf den Fall $n=2$ erhalten können, sich in diesem Falle wird einfacher ausdrücken lassen. Insbesondere vereinfacht sich auch das Rechnen mit bilinearen Formen: Ist die Unterscheidung zueinander kontragredienter Transformationen überflüssig, so ist es auch die entsprechende Unterscheidung bilinearer Formen. Wir brauchen nur noch eine Art bilinearer Formen zu betrachten, die sich, wenn ihre Diskriminanten nicht Null sind, paarweise als zueinander „reziproke" Formen anordnen lassen.

Wir betrachten zuerst eine einzelne, und zwar eine „geordnete" bilineare Form, und wir fassen sie sogleich als Symbol einer Zuordnung $x \longrightarrow \underline{x}$ auf (vgl. S. 113). Wir ordnen also einander zu:

$$\boxed{(x c)\gamma = \underline{x}, \quad (x c)(\gamma y),} \tag{6}$$

oder, ausgeschrieben:

$$\begin{matrix} x_1 c_{21} - x_2 c_{11} = \underline{x}_1, & \quad -x_1 c_{22} y_1 + x_1 c_{21} y_2 \\ x_1 c_{22} - x_2 c_{12} = \underline{x}_2; & \quad x_2 c_{12} y_1 - x_2 c_{11} y_2. \end{matrix} \tag{7}$$

Die bewirkte Zuordnung ist dann eine Transformation, d. h. die beiden linearen Gleichungen unter (7) sind nach x_1, x_2 auflösbar, wenn die Diskriminante der bilinearen Form $(x c)(\gamma y)$,

$$|c| = \tfrac{1}{2}(c c')(\gamma \gamma') = c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}, \tag{8}$$

von Null verschieden ist. Dies trifft insbesondere zu, wenn die bilineare Form die „identische Kovariante" $(x y)$ ist, wenn also (für alle x, y)

$$(x c)(\gamma y) = (x y),$$

mithin

$$c_{11} = 0, \quad c_{12} = -1, \quad c_{21} = 1, \quad c_{22} = 0$$

ist. Allgemein ist, wenn $|c| \neq 0$,

$$|c| . x = -(\underline{x} \gamma) c;$$

die zu (7) reziproke Transformation und die entsprechende bilineare Form wird:

$$\begin{matrix} -x_1 c_{12} + x_2 c_{11} = |c| . \underline{x}_1, \\ -x_1 c_{22} + x_2 c_{21} = |c| . \underline{x}_2; \end{matrix} \quad \frac{1}{|c|} \left\{ \begin{matrix} x_1 c_{22} y_1 - x_1 c_{12} y_2 \\ -x_2 c_{21} y_1 + x_2 c_{11} y_2 \end{matrix} \right\}. \tag{9}$$

Die Zusammensetzung oder symbolische Multiplikation zweier bilinearer Formen wird, wie früher, so zu erklären sein, daß sie der

Zusammensetzung der entsprechenden Transformationen parallel läuft. Setzen wir

$$T_1 = (x c_1)(\gamma_1 y), \quad T_2 = (x c_2)(\gamma_2 y)\,[1],$$

so wird die zusammengesetzte Form $T_1 T_2$ zu erklären sein durch die Formel

$$T_3 = T_1 T_2 = (x c_1)(\gamma_1 c_2)(\gamma_2 y). \tag{10}$$

Das hat zur Folge, daß, wenn

$$E = (x y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 \tag{11}$$

die (hier einzige) Einheitsform bedeutet, allgemein

$$E T = T E = T$$

wird, und außerdem

$$|T_1| . |T_2| = |T_3|.$$

Erklären wir schließlich die zu

$$T = (x c)(\gamma y)$$

gehörige „transponierte" Form durch

$$T' = (x \gamma)(c y),$$

so wird, wenn $|c| \neq 0$,

$$T T' = -|c| . E = T' T.$$

Also ist

$$T^{-1} = -\frac{1}{|c|} \cdot T'$$

die Lösung der symbolischen Gleichungen $T T^{-1} = T^{-1} T = E$. Wir haben also hier, im Falle $n = 2$, die Besonderheit, daß

$$\begin{aligned} T &= -|c| . (T')^{-1} \,\{= (x c)(\gamma y)\}, \\ T' &= -|c| . (T)^{-1} \,\{= (x \gamma)(c y)\} \end{aligned} \tag{12}$$

ist.

Die Theorie der binären Formen hat bis jetzt, wie natürlich, das gründlichste Studium erfahren — ein so gründliches, daß manche Autoren in ihr stecken geblieben sind. Das Hauptwerk darüber ist Clebschs Theorie der binären algebraischen Formen (1872, vergriffen). Einige der wichtigsten Ergebnisse sollen im zweiten Teile der vorliegenden Schrift zum Vortrag kommen. Es sollen dann auch Beispiele von Formen betrachtet werden, die neben Veränderlichen eines oder zweier binärer Gebiete ($n = 2$) solche eines ternären oder quaternären Gebietes ($n = 3, 4$) enthalten. Wir werden dann, wie schon hier, die Gebiete verschiedener Stufenzahlen durch den zu benutzenden Letternsatz unterscheiden.

---

[1] $(x c_k) = x_1 c_{k2} - x_2 c_{k1}$, $(\gamma_k y) = \gamma_{k1} y_2 - \gamma_{k2} y_1$.

Darstellung bilinearer Formen mit Hilfe irrationaler Kovarianten.

Die folgende Ergänzung zu dem über bilineare Formen schon Gesagten soll der Vorbereitung weiterer Entwicklungen dienen. Das zunächst Darzulegende bezieht sich auf ein berühmtes Problem, das sich bei vielerlei Untersuchungen dargeboten hat, nämlich auf die Überführung bilinearer Formen in eine möglichst einfache Gestalt mit Hilfe linearer Transformationen, oder auf die Einführung sogenannter kanonischer Koordinaten, wie sie zum Beispiel bei Lösung des Hauptachsenproblems der Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung ausgeführt zu werden pflegt.

Freilich kann hier von einer Klasse von Problemen, die den Gegenstand zahlreicher und umfänglicher, zum großen Teil auch schwieriger Untersuchungen gebildet haben, nur ein sehr kleiner Ausschnitt zur Sprache kommen. Indessen gehören die beiden speziellen Aufgaben, die uns nun beschäftigen sollen, doch zu den wichtigsten ihrer Art. Sie werden auf eine von dem sonst Üblichen ganz verschiedene Weise, und vor allem soweit als überhaupt möglich, durch ausschließliches Operieren mit Invarianten behandelt werden.

Wir behaupten zunächst:

I. Unter den bilinearen Formen

$$F_0 = (XU),\quad F_1 = (XA)(PU),\quad F_2 = (XA)(PA')(P'U)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

oder also unter den symbolischen Potenzen der geordneten Form

$$T = (XA)(PU)$$

sind höchstens die n ersten linear-unabhängig. Es besteht nämlich immer eine Gleichung der Form

$$\boxed{T^n - J_1 T^{n-1} + - \cdots + (-1)^n . J_n . T^0 = 0,} \tag{1}$$

deren Koeffizienten absolute Invarianten der Gruppe G (G_{n^2}) sind.

In der Tat erhält man eine solche Gleichung durch Entwicklung der Determinante

$$\begin{vmatrix} (XA^1) & \ldots & (XA^n) & (XU) \\ (P^1A^1) & \ldots & (P^1A^n) & (P^1U) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (P^nA^1) & \ldots & (P^nA^n) & (P^nU) \end{vmatrix}\,[1],$$

die infolge unserer Identität (C) den Wert Null hat.

[1]) Hier stehen obere Indices an Stelle von Akzenten.

Man würde auch die Invarianten J_1, J_2, ... mit Hilfe dieser Determinante berechnen können. Da diese aber ein nicht sehr übersichtliches Bildungsgesetz hat, so schlagen wir einen anderen Weg ein.

Wir überzeugen uns zunächst an dem Beispiel

$$X_1 C_{11} U_1 + \cdots + X_n C_{nn} U_n,$$

daß tatsächlich in der Regel niedere Potenzen von T als die n^{te} nicht durch die vorhergehenden ausdrückbar sein können. Wird dann T so gewählt, daß $T^0 \ldots T^{n-1}$ wirklich linear-unabhängig sind, so wird das auch noch für Formen $T + \varrho E$ der Fall sein, die zu T hinreichend benachbart sind. Wenn wir also in (1) T durch $T + \varrho E$[1]) ersetzen und nach Potenzen von ϱ entwickeln, so muß die so erhaltene neue Gleichung für alle Werte von ϱ richtig sein. Bilden wir den Koeffizienten von ϱ, so erhalten wir

$$\left.\begin{array}{l} n\,.\,T^{n-1} - (n-1)J_1\,.\,T^{n-2} + - \cdots + (-1)^{n-1}\,.\,J_{n-1}\,.\,T^0 \\ -J_1'\,.\,T^{n-1} + \qquad J_2'\,.\,T^{n-2} - + \cdots + (-1)^n \quad .\,J_n' \quad .\,T^0 \end{array}\right\} = 0.$$

Es ist also

$$J_{n-1} = J_n', \quad J_{n-2} = \tfrac{1}{2} J_{n-1}', \ldots, J_1 = \frac{1}{n-1} J_2', \quad 1 = \frac{1}{n} J_1'.$$

In unserer Determinante hat nun T^n den Koeffizienten $n!$ und $(XU) = T^0$ den Koeffizienten

$$(-1)^n (A^1 \ldots A^n)(P^1 \ldots P^n) = (-1)^n . n! \, |T|.$$

Daher ist

$$J_n = |T| = \frac{1}{n!} (A^1 \ldots A^n)\,(P^1 \ldots P^n).$$

Bilden wir zunächst $|T + \varrho T_0|$, wo $T_0 = (X\Omega)(\Phi U)$, und setzen wir nachher $(X\Omega)\,(\Phi U) = (XU)$, so ergibt sich J_n':

$$J_n' = \frac{1}{(n-1)!} \cdot (\Omega A^2 \ldots A^n)(\Phi P^2 \ldots P^n)$$

$$= \frac{n-(n-1)}{(n-1)!} \cdot |(A^2 P^2) \ldots (A^n P^n)|,$$

wofür wir bequem auch

$$J_n' = \frac{1}{(n-1)!} \cdot (A^2 \ldots A^n \,|\, P^2 \ldots P^n)$$

schreiben können. Weiter folgt dann

$$J_{n-1}' = \frac{n-(n-2)}{(n-2)!} \cdot (\Omega A^3 \ldots A^n \,|\, \Phi P^3 \ldots P^n)$$

$$= \frac{2}{(n-2)!} |(A^3 P^3) \ldots (A^n P^n)| = \frac{2}{(n-2)!} (A^3 \ldots A^n \,|\, P^3 \ldots P^n), \text{ usw.}$$

---

[1]) Weiterhin steht öfter **E** an Stelle von E.

Also erhalten wir schließlich

$$(2)\quad \boxed{\begin{aligned} &J_1 = (A\,P), \quad J_2 = \frac{1}{2!}(A^1 A^2 \,|\, P^1 P^2), \\ &J_3 = \frac{1}{3!}(A^1 A^2 A^3 \,|\, P^1 P^2 P^3), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &J_n = \frac{1}{n!}(A^1 \ldots A^n)(P^1 \ldots P^n). \end{aligned}}$$

Eben dieselben Invarianten entstehen nun offenbar auch noch auf andere Art. Es gilt der Satz:

II. Die Koeffizienten in der identischen Gleichung

$$T^n - J_1 . T^{n-1} + - \ldots + (-1)^n . J_n . T^0 = 0$$

sind dieselben wie in der Entwicklung

$$(3)\quad |\Lambda E - T| = \Lambda^n - J_1 . \Lambda^{n-1} + - \cdots + (-1)^n . J_n . \Lambda^0.$$

In der Tat liefert die Rechnung in diesem Falle ganz unmittelbar die Ausdrücke (2).

Der hiermit gefundene Zusammenhang zwischen der identischen Gleichung (1) und dem Ausdruck (3) ist die wohl folgenreichste Tatsache in der Theorie der bilinearen Formen, und eine der wichtigsten spezielleren Tatsachen der Invariantentheorie überhaupt. Man hat daher an dieser Stelle eine besondere Terminologie eingeführt. Die Gleichung (1) heißt nach Cayley, der den bezeichneten Sachverhalt gefunden hat, die Cayleysche Gleichung. Der Ausdruck (3), betrachtet als Funktion des Parameters Λ, heißt charakteristische Funktion der bilinearen Form F oder T. Und die hiernach zu bildende Gleichung

$$(4)\quad \Lambda^n - J_1 \Lambda^{n-1} + - \cdots + (-1)^n J_n \Lambda^0 = 0$$

wird charakteristische Gleichung von F oder T genannt. Sie bleibt natürlich ungeändert, wenn man T durch die transponierte Form $T' = (U\,P)(A\,X)$ ersetzt.

Wir denken uns jetzt die Gleichung (4) aufgelöst, und bezeichnen ihre Wurzeln (latent roots bei Mathematikern englischer Zunge) mit $\Lambda_1 \ldots \Lambda_n$. Unmittelbar ergibt sich dann, daß die Gleichung (1) in die Form

$$(5)\quad \boxed{(T - \Lambda_1 \mathsf{E}) \ldots (T - \Lambda_n \mathsf{E}) = 0}$$

gesetzt werden kann. Hieraus folgt zunächst, daß die bilinearen Formen $T - A_k \mathsf{E}$ sämtlich singulär, d. h. Formen von verschwindender Diskriminante sind: Sie sind, nach einer ebenfalls üblich gewordenen Terminologie (von Null verschiedene) sogenannte Teiler der Null immer dann, wenn die vorgelegte Form T nicht etwa ein Vielfaches von $\mathsf{E} = (X\,U)$ ist[1]). Auch die Potenzen und Produkte dieser Formen haben natürlich die Diskriminante Null. Wir betrachten eines dieser Produkte, das mit T_1 bezeichnet werden soll,

$$T_1 = (T - A_2\,\mathsf{E}) \ldots (T - A_n\,\mathsf{E})$$

und bemerken, daß zufolge des Bestehens der Identität (5) das symbolische Quadrat von T_1 ein Multiplum von T_1 selbst sein muß. In der Tat ist, wenn Σ' eine Summation anzeigt, bei der der Index 1 ausgelassen werden soll,

$$\begin{aligned} & T_1^2 - (A_1 - A_2) \ldots (A_1 - A_n) . T_1 = \\ & = \{ T_1 - (A_1 - A_2) \ldots (A_1 - A_n) . \mathsf{E} \} T_1 = \\ & = \left\{ \begin{array}{l} T^{n-1} \quad - \Sigma' A_k . T^{n-2} \quad + - \cdots \\ - A_1^{n-1} . \mathsf{E} + \Sigma' A_k . A_1^{n-2} . \mathsf{E} - + \cdots \end{array} \right\} T_1 = \\ & = \{ \cdots \} \cdot (T - A_1\,\mathsf{E})\, T_1 = 0. \end{aligned}$$

Demzufolge kann man, wenn die Wurzelgrößen $A_1 \ldots A_n$ alle voneinander verschieden sind, in dem durch $T^0, T^1, \ldots T^{n-1}$ bestimmten linearen System vertauschbarer bilinearer Formen n Formen (irrationale Kovarianten von T) angeben, die den symbolischen Gleichungen

$$\boxed{\mathsf{E}_i^2 = \mathsf{E}_i, \quad \mathsf{E}_i \mathsf{E}_k = 0} \tag{6}$$

genügen. Z. B. wird

$$\boxed{\mathsf{E}_1 = \frac{(T - A_2\,\mathsf{E}) \ldots (T - A_n\,\mathsf{E})}{(A_1 - A_2) \ \ldots (A_1 - A_n)}}. \tag{7}$$

Und durch diese Formen lassen sich dann auch wieder die symbolischen Potenzen $T^0, T^1, \ldots$ ausdrücken:

$$\begin{aligned} T^0 &= \quad \mathsf{E}_1 + \cdots + \quad \mathsf{E}_n, \\ T^1 &= A_1\,\mathsf{E}_1 + \cdots + A_n\,\mathsf{E}_n, \\ T^2 &= A_1^2\,\mathsf{E}_1 + \cdots + A_n^2\,\mathsf{E}_n, \\ & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned} \tag{8}$$

[1]) Das Wort Teiler der Null wird gewöhnlich auf die Null selbst nicht angewendet.

Die gefundenen Kovarianten $\mathsf{E}_1 \ldots \mathsf{E}_n$ haben nun noch weitere bemerkenswerte Eigenschaften. Vor allem ändern sie sich nicht, wenn man T durch

$$T^* = C_{n-1} T^0 + C_{n-2} . T^1 + \cdots + C_0 . T^{n-1}$$

ersetzt, solange nur keine zwei der Ausdrücke

$$A_k^* = C_{n-1} . A_k^0 + C_{n-2} . A_k^1 + \cdots + C_0 . A_k^{n-1}$$

einander gleich werden. (Die Formen E_k sind sogenannte Kombinanten in dem durch $T^0 \ldots T^{n-1}$ bestimmten linearen System.) Sodann aber bestehen die Lehrsätze:

III. Jede der irrationalen Kovarianten $\mathsf{E}_1 \ldots \mathsf{E}_n$ ist Produkt von zwei (nicht nur symbolischen, sondern realen) linearen Formen (die **nicht** Kovarianten von F oder T sind):

$$\boxed{\mathsf{E}_k = (X A_k) . (P_k U)} \,. \tag{9}$$

IV. Diese linearen Formen genügen den Gleichungen

$$\boxed{(A_k P_k) = 1 \quad (A_i P_k) = 0} \; \{i \neq k\}. \tag{10}$$

V. Die linearen Invarianten („Ringe“)

$$R_0 = n, \quad R_1 = (A P), \quad R_2 = (A^1 P)(A P^1), \quad \ldots$$

der symbolischen Potenzen T^0, T^1, T^2, ... sind identisch mit den entsprechenden Potenzsummen, die man aus den Wurzelgrößen $A_1 \ldots A_n$ bilden kann:

$$\boxed{R_m = A_1^m + \cdots + A_n^m} \,. \tag{11}$$

Man kann versuchen, den Satz V unabhängig von den beiden vorhergehenden zu beweisen. Für kleine Werte der Zahl k erweist er sich ja sofort als richtig. Man findet z. B.

$$\begin{aligned} &R_1 = J_1, \quad R_2 = J_1^2 - 2 J_2, \\ &R_3 = J_1^3 - 3 J_1 J_2 + 3 J_3, \\ &R_4 = J_1^4 - 4 J_1^2 J_2 + 4 J_1 J_3 + 2 J_2^2 - 4 J_4, \end{aligned} \tag{12}$$

was eben die bekannten Ausdrücke der einfachsten Potenzsummen sind.

Aber das Bildungsgesetz der Invarianten J_1, J_2, ... scheint auch nicht sehr geeignet, einen allgemeinen Beweis des Satzes V auf einfache Art zu liefern. Wir lassen es deshalb bei der Reihenfolge III, IV, V.

Der Satz III ist nun leicht zu begründen, wenn es sich um eine Form T handelt, deren Potenzen $T^0 \ldots T^{n-1}$ linear-unabhängig sind[1]). Die Formen $\mathsf{E}_1 \ldots \mathsf{E}_n$ sind dann sicher linear-unabhängig, und es ist insbesondere keine von ihnen identisch gleich Null. Man kann daher, wenn vorläufig (bis auf weiteres nur symbolisch) $\mathsf{E}_k = (X A_k)(P_k U)$ gesetzt wird, Vektoren X_k und U_k so wählen, daß die Vektoren

$$(X_k A_k) P_k = P'_k, \quad A_k (P_k U_k) = A'_k$$

von Null verschieden ausfallen.

Diese Vektoren stehen dann nach (6) in der Beziehung $(A'_k P'_k) \neq 0$, $(A'_i P'_k) = 0 \; \{i \neq k\}$. Hieraus folgt $(P'_1 \ldots P'_n)(A'_1 \ldots A'_n) \neq 0$. Die Vektoren P'_k und ebenso die Vektoren A'_k sind also linear-unabhängig. Variiert man nun etwa den Vektor X_k, so erhält man zum Beispiel an Stelle von P'_1 weitere Vektoren P''_1, die alle den Gleichungen $(A'_2 P''_1) = 0 \ldots (A'_n P''_1) = 0$ genügen, und die also alle von P'_1 linear-abhängig sind. Das heißt, das Verhältnis $(X A_1)(P_1 U) : (Y A_1)(P_1 U)$ ist nur abhängig von X und Y, nicht auch von U (soweit es nämlich bestimmt ist). Mit anderen Worten, die bilineare Form $(X A_1)(P_1 U)$ ist zum Beispiel durch die lineare Form $(P'_1 U)$ teilbar. Die einzelnen Bestandteile der hiermit als Produkt $(X A_k) . (P_k U)$ erwiesenen Form E_k sind natürlich nur bis auf Faktoren ϱ_k, ϱ_k^{-1} bestimmt. [Die linearen Formen $(X A_k)$, $(P_k U)$ sind nicht Kovarianten der Grundform. Vielmehr haben diese Eigenschaft nur ihre Produkte $(X A_k) . (P_k U)$]. Hiermit ist der Satz III unter der Voraussetzung erwiesen, daß $T^0 \ldots T^{n-1}$ linear-unabhängig sind.

Zu dem Satz IV kommen wir nun, wenn wir von unseren Formen E_k die Kovarianten

$$(U_1 \ldots U_{n-2} A_k A'_k) . (P_k P'_k X_2 \ldots X_n)$$

bilden. Diese sind nach dem soeben Gesagten identisch gleich Null, und daher sind auch die Invarianten $J_2 \ldots J_n$, gebildet für eine der Kovarianten E_k von T, alle gleich Null. Die charakteristische Gleichung der Form E_k ist daher

$$\mathsf{E}_k^n - (A_k P_k) . \mathsf{E}_k^{n-1} = 0. \tag{13}$$

Und da diese Gleichung identisch sein muß mit der anderen

$$\mathsf{E}_k^{n-2} . \{ \mathsf{E}_k^2 - \mathsf{E}_k \} = 0,$$

so folgt $(A_k P_k) = 1$. Diese Gleichung muß nun aber immer gelten, solange nur die Formen E_k existieren und eindeutig bestimmt

[1]) Es wird sich alsbald ergeben, daß diese Annahme keine neue Einschränkung bedeutet, daß sie vielmehr Folge der Voraussetzung $A_i \neq A_k$ ist.

sind, so lange mithin, als die Wurzelgrößen $\varDelta_1 \ldots \varDelta_n$ voneinander verschieden sind, da Grenzwert einer Konstanten eben nur diese Konstante sein kann.

Nunmehr ergibt sich sofort der Satz V, und damit ohne weiteres auch:

VI. Die linearen Transformationen

$$(X \varDelta_k) = \underline{X}_k, \quad (P_k U) = \underline{U}_k$$

sind zueinander kontragredient; sie führen die Formen E und T zugleich in die Formen

$$(14) \qquad \begin{array}{r} \underline{X}_1 \underline{U}_1 + \cdots + \quad \underline{X}_n \underline{U}_n, \\ \varDelta_1 \underline{X}_1 \underline{U}_1 + \cdots + \varDelta_n \underline{X}_n \underline{U}_n \end{array}$$

über.

Diese Überführung ist, nach dem Gesagten, im wesentlichen nur auf eine Art möglich. (Unbestimmt bleiben die Faktoren ϱ_k, ϱ_k^{-1} und die Anordnung der n Produkte $\underline{X}_k \underline{U}_k$.) Zu unserer Ableitung aber haben wir nur die einzige Voraussetzung $\varDelta_i \neq \varDelta_k$ nötig gehabt:

VII. Die Herstellung des Formenpaares (14) ist immer dann möglich, und zwar im wesentlichen auch nur auf eine Art, wenn die charakteristische Gleichung der Form F oder T keine mehrfachen Wurzeln hat. Die Potenzen $T^0 \ldots T^{n-1}$ sind dann immer linear unabhängig.

Umkehrbar ist dieser letzte Satz offenbar nicht.

Bemerkt seien noch die Gleichungen

$$(15) \qquad (P_k A)(P A_k) = \varDelta_k,$$

und die umfassenderen,

$$(16) \qquad \boxed{(P_k A) P = \varDelta_k . P_k, \quad A (P A_k) = \varDelta_k . A_k,}$$

von denen etwa die erste, mit größerer Annäherung an eine sonst übliche Betrachtungsart, ebenfalls den Ausgangspunkt unserer Untersuchung hätte bilden können.

Tritt zu der Voraussetzung $\varDelta_i \neq \varDelta_k$ noch die weitere $J_n \neq 0$, so kann man auch Potenzen von T mit negativ-ganzzahligen Exponenten nach der Regel (8) bilden, und ebenso Potenzen mit irrationalen Exponenten definieren. Die Gleichung (1) liefert dann ohne weiteres die zu T reziproke Form.

Auf die hiermit gelöste Aufgabe lassen sich einige andere zurückführen, von denen die wohl wichtigsten sich auf den Fall einer bilinearen Form mit kogredienten Veränderlichen und auf die Zusammenstellung von zwei symmetrischen Formen beziehen. Hier soll nur die zweite Anwendung des Vorgetragenen behandelt werden.

Es sei also jetzt gegeben ein Paar symmetrischer Formen:

$$S_0 = (XL)(LY), \quad S_1 = (X\Lambda)(\Lambda Y),$$

und es werde vorausgesetzt, erstens $|S_0| \neq 0$, so daß die zu S_0 reziproke Form $\Sigma_0 = (U\Lambda)(\Lambda V)$ existiert; zweitens, daß die Gleichung

$$|\Lambda S_0 - S_1| = 0 \tag{17}$$

keine mehrfach zählende Wurzel hat. Es folgt dann

$$\Lambda S_0 - S_1 = (\Lambda \mathsf{E} - S_1 \Sigma_0) S_0 = S_0 (\Lambda \mathsf{H} - \Sigma_0 S_1).$$

Setzen wir demnach

$$T = S_1 \Sigma_0, \quad \mathsf{T} = \Sigma_0 S_1, \tag{18}$$

so werden die charakteristischen Gleichungen der Formen T und T, die in der Beziehung $T' = \mathsf{T}$, $\mathsf{T}' = T$ stehen, nicht nur dieselben Wurzeln haben, sondern auch dieselben Wurzeln wie die Gleichung (17).

Wir können also z. B. auf T die zuvor angestellte Überlegung anwenden. Diese liefert uns dann, wenn H_k für E'_k geschrieben wird,

$$\begin{aligned} S_0 &= \begin{cases} = \mathsf{E}_1 S_0 + \cdots + \mathsf{E}_n S_0 \\ = S_0 \mathsf{H}_1 + \cdots + S_0 \mathsf{H}_n, \end{cases} \\ S_1 &= \begin{cases} = \Lambda_1 \mathsf{E}_1 S_0 + \cdots + \Lambda_n \mathsf{E}_n S_0 \\ = \Lambda_1 S_0 \mathsf{H}_1 + \cdots + \Lambda_n S_0 \mathsf{H}_n. \end{cases} \end{aligned} \tag{19}$$

Es ist nun, nach Nr. (18), auch für $m = 2, 3, \ldots$ noch

$$T^m S_0 \{= S_m\} = S_0 \mathsf{T}^m,$$

und folglich

$$\mathsf{E}_k S_0 = S_0 \mathsf{H}_k.$$

Diese bilineare Form ist also symmetrisch. Außerdem ist sie ein Produkt linearer Formen. Man kann daher, nach geeigneter Wahl von n linearer Formen,

$$\boxed{\mathsf{E}_k S_0 = (XA_k).(A_k Y) = S_0 \mathsf{H}_k} \tag{20}$$

setzen, wodurch der genannte Sachverhalt erschöpfend zum Ausdruck kommt. Ersetzen wir schließlich noch die beiden Veränderlichen X und Y durch eine einzige, so erhalten wir den folgenden nur in der Form etwas spezialisierten Lehrsatz:

VIII. Es seien gegeben zwei quadratische Formen:

$$S_0 = (LZ)^2, \quad S_1 = (AZ)^2.$$

Es werde ferner vorausgesetzt, daß die Diskriminante $|S_0|$ der ersten Form von Null verschieden ist — so daß die zu ihr reziproke Form $\Sigma_0 = (AU)^2$ existiert — und daß außerdem die Gleichung

$$|\Lambda S_0 - S_1| = 0$$

n verschiedene Wurzeln $\Lambda_1 \ldots \Lambda_n$ hat.

Dann sind unter den quadratischen Formen

$$(21) \qquad \begin{array}{l} S_0, \quad S_1, \quad S_2 = S_1 \Sigma_0 S_1, \quad S_3 = S_1 \Sigma_0 S_1 \Sigma_0 S_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

die n ersten, $S_0 \ldots S_{n-1}$, voneinander linear-unabhängig, die übrigen von ihnen linear-abhängig. Es besteht nämlich, wenn

$$(22) \qquad |\Lambda S_0 - S_1| = J_0 . \Lambda^n - J_1 . \Lambda^{n-1} + - \cdots + (-1)^n . J_n . \Lambda^0$$

gesetzt wird, für alle Werte der ganzen Zahl m, die $\geqq n$ sind, die Gleichung

$$(23) \qquad \boxed{J_0 . S_m - J_1 . S_{m-1} + - \cdots + (-1)^n . J_n . S_{m-n} = 0.}$$

In dem linearen System der Formen $S_0 \ldots S_{n-1}$ gibt es dann n (in der Regel irrationale) ebenfalls von einander linear-unabhängige quadratische Kovarianten von S_0 und S_1, die Quadrate linearer Formen $(A_1 X) \ldots (A_n X)$ sind, und mit deren Hilfe sich die Formen $S_0, S_1, \ldots$ so darstellen lassen:

$$(24) \qquad \begin{array}{l} S_0 = \quad (A_1 Z)^2 + \cdots + \quad (A_n Z)^2, \\ S_1 = \Lambda_1 (A_1 Z)^2 + \cdots + \Lambda_n (A_n Z)^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_m = \Lambda_1^m (A_1 Z)^2 + \cdots + \Lambda_n^m (A_n Z)^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Der Ausdruck z. B. von $(A_1 Z)^2$ ist

$$(25) \qquad \boxed{(A_1 Z)^2 = \frac{(S_1 - \Lambda_2 S_0)\Sigma_0 (S_1 - \Lambda_3 S_0)\Sigma_0 \ldots \Sigma_0 (S_1 - \Lambda_n S_0)}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)(\Lambda_1 - \Lambda_3) \ldots (\Lambda_1 - \Lambda_n)}}$$

Die linearen Formen $(A_k Z) = \sqrt{(A_k Z)^2}$ sind, wenn entsprechend jedem Werte von k $(= 1 \ldots n)$ ein bestimmter Wurzelwert gewählt wird, ebenfalls linear-unabhängig.

Natürlich sind diese linearen Formen ebenfalls (irrationale) Kovarianten der Grundformen S_0 und S_1; sie sind Wurzeln einer Gleichung $2n$ten Grades von spezieller Struktur.

Wir übergehen ihre naheliegende Kombinateneigenschaft (vgl. S. 174), fügen aber einige andere Ergänzungen hinzu.

IX. Die Koeffizienten J_0, — J_1, ... der Gleichung (22) sind (relative) ganze rationale Invarianten, gehörig zur Gruppe G ($G_{n,2}$). Und zwar ist

$$J_0 = \frac{1}{n!} \cdot (L^1 L^2 \ldots L^{n-1} L^n)^2 = |S_0|,$$

$$J_1 = \frac{1}{1!(n-1)!} \cdot (L^1 L^2 \ldots L^{n-1} A^n)^2 = |S_0| \cdot (A A)^2,$$

$$J_2 = \frac{1}{2!(n-2)!} \cdot (L^1 L^2 \ldots A^{n-1} A^n)^2$$

$$= \left\{\frac{1}{2!}\right\}^2 \cdot |S_0| \cdot (A^{n-1} A^n \,|\, A^{n-1} A^n)^2$$

$$= \frac{1}{2!} \cdot |S_0| \cdot \begin{vmatrix} (A^1 A^1)^2, & (A^1 A^1)(A^1 A^2) \\ (A^2 A^1)(A^2 A^2), & (A^2 A^2)^2 \end{vmatrix},$$

(26) $$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$J_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!\,1!} (L^1 A^2 \ldots A^{n-1} A^n)^2$$

$$= \left\{\frac{1}{(n-1)!}\right\}^2 \cdot |S_0| \cdot (A^2 \ldots A^n \,|\, A^2 \ldots A^n)^2$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \cdot |S_0| \cdot |(A^2 A^2)^2 \ldots (A^n A^n)^2|,$$

$$J_n = \frac{1}{n!} (A^1 A^2 \ldots A^n)^2$$

$$= \left\{\frac{1}{n!}\right\}^2 \cdot |S_0| \cdot (A^1 \ldots A^n \,|\, A^1 \ldots A^n)$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot |S_0| \cdot |(A^1 A^1)^2 \ldots (A^n A^n)^2|.$$

Die leicht in Form von Determinantensummen zu bildenden „unsymbolischen" Ausdrücke für die Invarianten $J_0 \ldots J_n$ sind in diesem Falle übersichtlicher als die mehrgestaltigen Formen der Invariantensymbolik; sie haben aber den Nachteil, daß man ihnen ihre Invarianteneigenschaft nicht ansieht, und auch sonst leisten sie nicht ganz dasselbe.

X. Die Vektoren $A_1 \dots A_n$ genügen den Gleichungen

$$(27)\qquad \begin{gathered} J_0 = \frac{1}{n!}(L_1 \dots L_n)^2 = (A_1 \dots A_n)^2, \\ (A_k A)^2 = 1, \quad (A_i A)(A A_k) = 0 \quad \{i \neq k\}. \end{gathered}$$

Zu einem inhaltsreicheren Gleichungssystem gelangen wir, wenn wir neben die Vektoren zweiter Schicht $A_1 \dots A_n$ die, wie wir sagen wollen, zu ihnen komplementären Vektoren erster Schicht $P_1 \dots P_n$ stellen, die mit ihnen durch die Gleichungen

$$(28)\qquad \begin{gathered} (P_1 W) = \frac{(W A_2 \dots A_n)}{(A_1 A_2 \dots A_n)}, \dots, (P_n W) = \frac{(A_1 \dots A_{n-1} W)}{(A_1 \dots A_{n-1} A_n)}, \\ (A_1 Z) = \frac{(Z P_2 \dots P_n)}{(P_1 P_2 \dots P_n)}, \dots, (A_n Z) = \frac{(P_1 \dots P_{n-1} Z)}{(P_1 \dots P_{n-1} P_n)}, \end{gathered}$$

und daher auch durch die Gleichungen

$$(29)\qquad \begin{gathered} (A_k P_k) = 1, \quad (A_i P_k) = 0 \quad \{i \neq k\}, \\ (A_1 \dots A_n) \cdot (P_1 \dots P_n) = 1 \end{gathered}$$

verbunden sind. Es tritt dann neben die erste der Gleichungen

$$(30)\qquad \boxed{(L Z)^2 = \Sigma (A_k Z)^2, \quad (A W)^2 = \Sigma (P_k W)^2,}$$

die wir schon hatten, die zweite, und es folgt weiter

$$(31)\qquad \boxed{(A_k A)(A W) = (P_k W), \quad (P_k L)(L Z) = (A_k Z);}$$

es ist also

$$(32)\qquad \begin{aligned} (P_k L) L &= \qquad A_k, \ (P_k L)^2 = 1, \quad (P_i L)(P_k L) = 0, \\ (P_k A) A &= A_k \,.\, A_k, \ (P_k A)^2 = A_k, \ (P_i A)(P_k A) = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Es wird hiernach verständlich sein, was mit dem folgenden Satz gemeint ist:

XI. Die Vektoren $A_1 \dots A_n$ bilden ein System zueinander quasi-orthogonaler Einheitsvektoren in bezug auf die quadratische Form $\Sigma_0 = (A U)^2$, und die zu ihnen komplementären Vektoren $P_1 \dots P_n$ bilden ein ebensolches System in bezug auf die zu Σ_0 reziproke Form $S_0 = (L X)^2$. Alle diese Vektoren zusammen bestimmen ein gemeinsames Polpolytop für die quadratischen Formen $S_0, S_1, S_2, \dots$

Die zuletzt vorgeführten Sätze vereinfachen sich, wenn wir (zum Beispiel) die weitere Annahme hinzufügen, daß die zueinander reziproken Formen S_0, Σ_0 die Determinante Eins haben. Es braucht dann zwischen den vier Formen S_0, Σ_0, E und H in bezug auf das Verfahren der symbolischen Multiplikation nicht unterschieden zu werden (S. 152). Die Formel (25) kann dann einfach so geschrieben werden

$$(25^*) \qquad (A_1 Z)^2 = \frac{(S_1 - A_2 S_0) \ldots (S_1 - A_n S_0)}{(A_1 - A_2) \ldots (A_1 - A_n)}.$$

Sie gleicht dann auch äußerlich noch der Formel (7). Entsprechendes gilt von den übrigen Formeln unseres Systems. Der Unterschied aber bleibt bestehen, daß im vorliegenden Falle die linearen Formen $(A_k Z)$ und $(P_k Z)$ Kovarianten der Grundformen S_0, S_1 sind. Das vereinfachte Formelsystem ist invariant nur noch gegenüber der Gruppe Γ, H, und es wird invariant nur noch gegenüber Γ, wenn man die weitere Bestimmung

$$(29^*) \qquad (A_1 \ldots A_n) = 1 = (P_1 \ldots P_n)$$

hinzufügt. Hält man dann noch die Formen S_0, Σ_0 fest, so bewegt man sich im System der Invarianten und Kovarianten einer einzelnen Grundform $S = S_1$ gegenüber der Gruppe γ. Tritt die weitere Annahme

$$(LZ)^2 = (ZZ) = Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$$

hinzu, so werden die Transformationen von γ orthogonal, es gehen also dann die linearen Formen $(A_k Z)$ aus den Koordinaten $Z_1 \ldots Z_n$ durch eine eigentlich orthogonale Transformation hervor. (Hauptachsenproblem.)

Eine einfachste Anwendung unserer Überlegungen liefert den auf quadratische Formen mit reellen Kernen und Veränderlichen bezüglichen vielbenutzten Lehrsatz:

XII. Wenn die quadratischen Formen S_0 und S_1 reell sind und S_0 überdies definit ist, so hat die Gleichung

$$|A S_0 - S_1| = 0$$

nur reelle Wurzeln.

Da in jeder Nähe einer Form S_1 andere Formen derart liegen, für die die genannte Gleichung nur verschiedene Wurzeln hat, so genügt es, den Beweis unter dieser letzten Vorraussetzung zu führen.

Zunächst folgt nun, daß die Wurzeln $A_1 \ldots A_n$ entweder reell oder paarweise konjugiert-imaginär sein müssen, und daß für die Quadrate der Formen $(A_k Z)$ das gleiche gilt. Außerdem sollen diese Quadrate, soweit sie reell sind, alle das gleiche Vorzeichen haben. Wäre es nun möglich, daß z. B. $(A_1 Z)^2$ und $(A_2 Z)^2$ konjugiert-imaginär wären, so müßte für die Wurzelgrößen $(A_1 Z)$ und $(A_2 Z)$ nach geeigneter Wahl der Vorzeichen dasselbe gelten. Dann aber wäre $(A_1 Z)^2 + (A_2 Z)^2$ Differenz der Quadrate zweier reeller linearer Formen, wider die Vorraussetzung.

Die zuletzt behandelten Aufgaben gehören zu den einfachsten einer Klasse von Problemen, deren Theorie unter dem Namen einer Lehre von den Elementarteilern eine vielfältige Bearbeitung erfahren hat. Es handelt sich dabei hauptsächlich um die Frage nach der Äquivalenz von Paaren oder Büscheln quadratischer oder bilinearer Formen (mit kontragredienten oder kogredienten Veränderlichen) gegenüber Transformationen der Gruppen G und $\mathfrak{G}$, und damit um Probleme, deren mehrere ein erhebliches geometrisches und sonstiges Interesse haben.

Die Theorie der Elementarteiler ist von Weierstrass ersonnen worden, der nur in dem scharfsinnigen englischen Zahlentheoretiker Stephen Smith in gewisser Hinsicht einen Vorgänger gehabt zu haben scheint. Andere, wie namentlich Kronecker und Frobenius haben wesentliches dazu beigetragen. Eine lesbare Einführung in diesen Gedankenkreis findet man in der Höheren Algebra von Bôcher (deutsch von H. Beck, 1910), eine vollständigere Darlegung in der Theorie der Elementarteiler unseres leider früh verstorbenen Landsmannes P. Muth (1899).

Diese Theorie, zu deren Hervorbringung die Aufbietung bedeutenden Scharfsinns nötig war, stellt heute wohl, im Gebiete der Invariantentheorie, den am weitesten getriebenen Vorstoß in sonst größtenteils noch unzugängliche Lande dar, und viele ihrer Ergebnisse sind auch durch hohe Schönheit ausgezeichnet. Bei aller Anerkennung aber, die man solchen Leistungen gewiß nicht versagen wird, soll doch nicht verhehlt werden, daß sie im ganzen noch recht weit davon entfernt zu sein scheinen, das hervorgebracht zu haben, was man als einen Dauerzustand der Wissenschaft betrachten darf. Es hängt das natürlich mit den großen Schwierigkeiten zusammen, die zunächst zu überwinden waren.

Das vorliegende Buch soll vor allem auch jüngeren Mathematikern eine Anregung zu eigener Forschung bieten. Daher wird es mir erlaubt sein, zu sagen, in welcher Richtung ich einen Fortschritt für möglich und erwünscht halte.

Vor allem ist das Programm der Invariantentheorie noch gar nicht wirklich durchgeführt worden. Man hat unmittelbar Äquivalenzprobleme in Angriff genommen, und hat dabei nicht unterschieden zwischen dem, was mit den gegebenen Grundformen invariant verbunden ist und was nicht. Daß aber durch eine solche Trennung, die einen grundsätzlichen Charakter hat, sowohl eine Vereinfachung herkömmlicher Überlegungen als auch eine vertiefte Einsicht erreicht werden kann, hoffe ich schon durch die vorgeführten beiden Beispiele gezeigt zu haben. Es muß als störend empfunden werden, wenn das stückweise hergestellt wird, was sich mit einem Schlage leisten läßt. Und überhaupt wird sich schwer leugnen lassen, daß es nicht dem Wesen der Sache entspricht, wenn in Beweisen Voraussetzungen nicht-invarianter Natur (über Hauptunterdeterminanten und dergleichen) herangezogen werden, und daß demzufolge so mancher Beweisführung der Charakter des Gekünstelten anhaftet.

Ob man sich bei solchen Überlegungen der symbolischen Methode bedienen soll oder nicht, ist bei dieser speziellen Gruppe von Problemen an sich nicht sehr wesentlich. Tut man es aber nicht, so geht erstens die Einordnung solcher spezieller Resultate in einen umfassenderen Gedankenkreis verloren, zu dessen sachgemäßer Bearbeitung die Invariantensymbolik keinesfalls entbehrt werden kann, d. h. es werden damit allerlei Anwendungen erschwert, und zweitens entsteht dann immer von neuem die Gefahr künstlicher Beweisführungen, weil man es unsymbolischen Ausdrücken gewöhnlich nicht ansieht, ob sie die Invarianteneigenschaft haben oder nicht. Tatsache ist ja wohl auch, daß die Begründer und Förderer der besprochenen Theorie die symbolische Rechnungsweise nicht oder nur ungenügend gekannt haben. Es handelt sich hier schwerlich um eine bloße Geschmackssache.

Auf das Beispiel einer bilinearen Form des Typus $F = (XA)(PU)$ lassen sich, wie gesagt, mehrere gerade der für die Geometrie wichtigsten Probleme der besprochenen Art zurückführen, und zwar gilt das auch noch für eine ausgedehnte Klasse der im Texte nicht erörterten Grenzfälle. Alle Grenzfälle aber einer Form des Typus $(XA)(PU)$ lassen sich auf ähnliche Art behandeln, wie es hier gezeigt worden ist. (Teilweise dargelegt in den Wiener Monatsheften vom Jahre 1900; Rekurrierende Reihen und bilineare Formen, §§ 6 bis 9. Vgl. auch J. Wellstein, Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, Bd. V, 1901, S. 229, wo freilich zuvor schon Erreichtes wieder aufgegeben ist. Dort auch weitere Literatur). Es gibt immer ein System von Kovarianten, die ähnliche Eigenschaften haben, wie die im Texte besprochenen Kovarianten $\mathsf{E}_1 \ldots \mathsf{E}_n$. Sind solche Kovarianten einmal hergestellt, so ist damit das Problem der Reduktion der Form F auf sogenannte kanonische Koordinaten sehr vereinfacht; denn dann hat man eine Reihe unter sich ganz gleichartiger Probleme von elementarem Charakter vor sich: Die einzelnen Koordinatenpaare X_k, U_k sind auf Gruppen verteilt, Produkte $X_i\, U_k$ mit Koordinaten aus verschiedenen Gruppen kommen in dem reduzierten Ausdruck der Form F nicht mehr vor.

Freilich lassen nicht alle von den genannten Mathematikern behandelten Aufgaben unmittelbar eine derartige Reduktion zu. Unter anderem wird der auch für die Geometrie wichtige Fall der Büschel singulärer quadratischer Formen eine besondere Behandlung verlangen. —

Die letzten Abschnitte des vorliegenden Buches sind ausgeführten Beispielen zu dem Inhalte der Paragraphen 10 bis 15 gewidmet. Sie beziehen sich alle auf die Theorie der ternären bilinearen Formen. Wegen des kleinen Wertes der Stufenzahl $n = 3$ braucht dabei die Theorie der Elementarteiler, die hier anhangsweise besprochen worden ist, nicht herangezogen zu werden. Sie würde in diesem einfachen Falle auch noch keinen nennenswerten Nutzen bieten. Es soll aber versucht werden, in anderer Richtung eine gewisse Vollständigkeit zu erreichen.

§ 16.

Beispiel: Ternäre bilineare Formen mit kontragredienten Veränderlichen.

Wir betrachten jetzt wieder ein Gebiet dritter Stufe, und in ihm zunächst eine bilineare Form des Typus

$$F = (XA)(PU) = \Sigma X_i A_{ik} U_k,$$

fragen aber nunmehr nach der Gesamtheit ihrer zur Gruppe $G(G_9)$ gehörigen ganzen und rationalen Invarianten und Kovarianten, unter denen wir solche Invarianten verstehen wollen, in denen etwa neben dem Kern von F auch noch zwei Vektoren X und U vorkommen[1]). Es wird ein System von einigen wenigen, und ihrer Zahl nach nicht mehr zu verringernden Invarianten und Kovarianten derart aufgestellt werden, durch die sich alle übrigen ganz und rational ausdrücken lassen — also ein kleinstes System solcher Invarianten und Kovarianten.

Von vornherein ist klar, daß diese alle sich mit Hilfe von (nur symbolischen oder realen) Faktoren der Typen

$$\begin{gathered} (AA'A''), \qquad (AP), \qquad (PP'P''), \\ (UX), \\ (UAA'), \qquad (XA), \qquad (PU), \qquad (PP'X) \end{gathered}$$

werden darstellen lassen.

Einen wichtigen Bestandteil des zu suchenden Systems kennen wir nunmehr schon.

Zunächst haben wir drei unabhängige Invarianten (Ringe) R_1, R_2, R_3, die der Folge

$$\begin{aligned} R_0 = 3, \quad R_1 = (AP), \quad R_2 = (AP')(A'P), \\ R_3 = (AP')(A'P'')(A''P), \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

[1]) Es soll nämlich im zweiten Teile dieses Buches gezeigt werden, daß auf die hiermit bezeichnete Aufgabe sich die umfassendere zurückführen läßt, die simultanen Invarianten von F und beliebig vielen Vektoren $X_1, X_2, \ldots, U_1, U_2, \ldots$ zu bilden.

Das bezeichnete Problem ist schon frühzeitig gelöst worden, von Clebsch und Gordan [Über biternäre Formen mit kontragredienten Variabeln. Math. Ann. **1**, 359 u. ff. (1869)]. Übrigens wird das Wort biternär besser für solche Formen aufgespart, deren Veränderliche zwei unabhängig voneinander zu transformierenden ternären Gebieten angehören.

zu entnehmen sind. Diese aber werden besser ersetzt durch die Invarianten J_1, J_2, J_3, die mit ihnen durch die Gleichungen

$$(2)\qquad \begin{gathered} J_1 = R_1, \quad J_2 = \tfrac{1}{2}\{R_1{}^2 - R_2\}, \\ J_3 = \tfrac{1}{6}\{R_1{}^3 - 3R_1R_2 + 2R_3\}, \end{gathered}$$

oder durch die Gleichungen

$$(3)\qquad \begin{gathered} R_1 = J_1, \quad R_2 = J_1{}^2 - 2J_2, \\ R_3 = J_1{}^3 - 3J_1J_2 + 3J_3 \end{gathered}$$

verbunden sind.

$$(4)\qquad J_3 = \tfrac{1}{6}(AA'A'')(PP'P'')$$

ist dann die Diskriminante der gegebenen bilinearen Form.

Von Kovarianten haben wir zunächst zu verzeichnen die bilinearen Formen

$$(5)\qquad \begin{gathered} F_0 = (XU), \qquad F_1 = (XA)(PU), \\ F_2 = (XA)(PA')(P'U), \end{gathered}$$

aus denen sich die analog gebildeten Formen F_3, F_4 ... mit Hilfe der Rekursionsformel

$$(6)\qquad F_m - J_1 . F_{m-1} + J_2 . F_{m-2} - J_3 . F_{m-3} = 0 \; \{m \geqq 3\}$$

zusammensetzen lassen. Durch F_0, F_1, F_2 läßt sich auch die quadratische Kovariante $\frac{1}{2}(XPP')(AA'U)$ von $F = F_1$ ausdrücken:

$$(7)\qquad \tfrac{1}{2}(XPP')(AA'U) = F_2 - J_1 . F_1 + J_2 . F_0.$$

[Ist $J_3 \neq 0$, läßt sich also die Folge F_0, F_1, F_2, ... auch über den Index Null hinaus fortsetzen, so ist die Gleichung (7) eine Folge von (6):

$$(8)\qquad \begin{aligned} F_{-1} &= J_3^{-1} . \tfrac{1}{2}(XPP')(AA'U) \\ &= J_3^{-1} . \{F_2 - J_1 . F_1 + J_2 . F_0\}; \end{aligned}$$

(7) gilt aber auch in allen anderen Fällen.]

Hiermit ist die Frage nach allen ganzen und rationalen Invarianten der Grundform F schon erledigt. Da nämlich nach (6) auch

$$(9)\qquad R_m - J_1 . R_{m-1} + J_2 . R_{m-2} - J_3 . R_{m-3} = 0$$

sein muß, sobald $m \geqq 3$ ist, und R_1, R_2, R_3 durch J_1, J_2, J_3 ausdrückbar sind, so haben wir keine weiteren Invarianten ohne Determinantenfaktor zu bilden. Invarianten mit einem Determinantenfaktor $(AA'A'')$ oder $(PP'P'')$ aber brauchen überhaupt nicht gebildet zu werden, da sich sofort

$$(10)\qquad \begin{gathered} (AA'A'')(PU)(P'V)(P''W) = J_3 . (UVW), \\ (PP'P'')(AX)(A'Y)(A''Z) = J_3 . (XYZ) \end{gathered}$$

findet. Auch brauchen wegen der Identität (B) in den zu bildenden symbolischen Produkten Determinantenfaktoren des Typus $(PP'X)$ nicht mit solchen des kontragredienten Typus verbunden zu werden: In jedem solchen Falle würden wir nach Ausmultiplizieren der beiden Determinanten ein Aggregat von Formen mit schon betrachteten symbolischen Faktoren erhalten, wie wir es an dem Beispiel (7) gesehen haben. Formen mit Faktoren $(PP'X)$ oder $(AA'U)$ aber liefern wirklich Neues, und zwar erhalten wir nun daraus zwei weitere Formen:

$$(11) \quad \boxed{\begin{aligned} (SX)^3 &= (A''P)(P'P''X)(AX)(A'X) \\ (\Sigma U)^3 &= (P''A)(A'A''U)(PU)(P'U)\text{[1]}, \end{aligned}}$$

die auf Grund der Identität (B) mit schon aufgestellten Formen durch eine identische Relation verbunden sind:

$$(12) \quad \boxed{\begin{aligned} (SX)^3 . (\Sigma U)^3 = \begin{vmatrix} F_0 & F_1 & F_2 \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ F_2 & F_3 & F_4 \end{vmatrix} = \\ = \{(J_1^2 - J_2) . F_2 - (J_1 J_2 - J_3) . F_1 + J_1 J_3 . F_0\} \\ . (F_0 F_2 - F_1^2) + \\ + \{J_1 . F_2 - J_2 . F_1 + J_3 . F_0\} (2 F_1 F_2 - F_0 F_3) - F_2^3. \end{aligned}}$$

Die gefundenen Invarianten und Kovarianten

$$J_1,\ J_2,\ J_3,\ F_0,\ F_1,\ F_2,\ (SX)^3,\ (\Sigma U)^3$$

sind durch diese einzige identische Relation — (12) — verbunden. Sie bilden ein zur Gruppe G gehöriges vollständiges (und zugleich kleinstes) „Formensystem" der Grundform F: Alle ganzen und rationalen Invarianten

[1]) Bei dem Rechnen mit den Abkürzungen $(SX)^3$ und $(\Sigma U)^3$ ist es nötig, zu beachten, daß die Symbole S und Σ sich nicht (wie Symbole von Grundformen) schlechthin kontragredient zu den Symbolen X und U verhalten. Da nämlich $(P'P''X)$ bei linearer Transformation die Transformationsdeterminante als Faktor annimmt, und $(A'A''U)$ ihren reziproken Wert, so tun das gleiche auch die entsprechenden Kovarianten $(SX)^3$ und $(\Sigma U)^3$. Man wird also dem einzelnen Symbol S — das immer dreimal auftritt — bei Ausführung einer linearen Transformation noch eine dritte Wurzel aus der Transformationsdeterminante als Faktor hinzuzufügen haben, und ebenso dem einzelnen Symbol Σ den reziproken Wert dieser dritten Wurzel. Aus $(SX)^3$ und $(U\Sigma)^3$ hebt sich dann die Irrationalität wieder weg.

und Kovarianten dieser Form (Kovarianten mit Veränderlichen X oder U, oder X und U) lassen sich rational und ganz durch sie ausdrücken.

Daß zwischen den genannten Größen eine weitere identische Relation nicht bestehen kann, sieht man an dem Beispiel:

$$F = X_1 C_{11} U_1 + X_2 C_{22} U_2 + X_3 C_{33} U_3, \tag{13}$$

auf das wir alsbald noch näher einzugehen haben werden.

Es bleiben nun noch Kovarianten zu betrachten, die einen der Faktoren $(A A' U)$, $(P P' X)$ enthalten: Sind diese alle durch Formen des aufgestellten Systems ganz und rational ausdrückbar, so ist unser Satz erwiesen.

Wir nehmen an, es handele sich etwa um den Faktor $(A A' U)$. Wenn dann das zu bildende symbolische Produkt nicht ohne weiteres zerfallen soll, so muß noch ein Faktor $(A'' P)$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, ein Faktor $(A'' P')$ vorhanden sein. So kommen wir aber, außer zur Kovariante $(\Sigma U)^3$, nur noch zu Formen, die, wenn sie wieder nicht zerfallen sollen, die Faktorengruppe $(A A' U)$ $(A'' P)$ $(A''' P')$, oder die Faktorengruppe $(A A' U)(A'' P)(A''' P'')$ enthalten müssen. Nun ist aber — was auch immer V und W bedeuten mögen —

$$\begin{aligned}&(A A' U)(A'' P)(A''' P')(P'' V)(P''' W)\\ = {}&\tfrac{1}{2}(\underline{A A'} U)(A'' A''' \,|\, \underline{P P'})(P'' V)(P''' W),\end{aligned}$$

und dieses wird nach Nr. (7)

$$\begin{aligned}&= (A A'' A''')(A' P)(P' U)(P'' V)(P''' W) -\\ &- J_1 . (A A'' A''')(P U)(P'' V)(P''' W) +\\ &+ J_2 . (A'' A''' U)(P'' V)(P''' W).\end{aligned}$$

Diese Form aber setzt sich nach Nr. (10) aus Teilen zusammen, deren jeder mindestens einen der Faktoren J_1, J_2, J_3 hat.

Im zweiten Falle erhält man ähnlich

$$\begin{aligned}&(A A' U)(A'' P)(A''' P'')(P' V)(P''' W)\\ &= \tfrac{1}{2}(\underline{A A'} U)(A'' V \,|\, \underline{P P'})(A''' P'')(P''' W)\\ &= (A A'' V)(A' P)(P' U)(A''' P'')(P''' W)\\ &\qquad - J_1 . * + J_2 . *\\ &= (A A' V)(A'' P)(A''' P')(P'' U)(P''' W)\\ &\qquad - J_1 \cdot * + J_2 \cdot *.\end{aligned}$$

Hier ist der erste Summand soeben als durch Formen unseres Systems ausdrückbar erwiesen worden, die beiden anderen enthalten die Faktoren J_1 und J_2.

Will man die begonnene Reduktion wirklich durchführen — was für unseren augenblicklichen Zweck ja nicht nötig ist —, so erhält man, z. B. im ersten Falle

$$(A\,A'\,U)(A''P)(A'''\,P')(P''\,V)(P'''\,W) = J_2 . (A V W)(P A')(P' U) + \\ + (J_3 - J_1 J_2) . (A\,V\,W)(P\,U) - (J_1 J_3 - J_2^2) . (U\,V\,W).$$

Wir bilden jetzt die charakteristische Gleichung unserer Form,

$$\boxed{\Lambda^3 - J_1 . \Lambda^2 + J_2 . \Lambda^1 - J_3 . \Lambda^0 = 0,} \tag{14}$$

und bezeichnen ihre Wurzeln mit Λ_1, Λ_2, Λ_3, so daß (mindestens für $m = 0, 1, 2, \ldots$)

$$R_m = \Lambda_1^m + \Lambda_2^m + \Lambda_3^m \tag{15}$$

wird. Wird dann

$$\Pi = (\Lambda_2 - \Lambda_3)(\Lambda_3 - \Lambda_1)(\Lambda_1 - \Lambda_2) \tag{16}$$

gesetzt, so ist Π^2 die Diskriminante der charakteristischen Gleichung:

$$\Pi^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 \\ \Lambda_1^2 & \Lambda_2^2 & \Lambda_3^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} R_0 & R_1 & R_2 \\ R_1 & R_2 & R_3 \\ R_2 & R_3 & R_4 \end{vmatrix} = \tag{17}$$

$$= \tfrac{1}{3}\{4(J_1^2 - 3J_2)(J_2^2 - 3J_1J_3) - (J_1J_2 - 9J_3)^2\}$$

$$= \tfrac{1}{27}\{4(J_1^2 - 3J_2)^3 - (2J_1^3 - 9J_1J_2 + 27J_3)^2\}$$

$$= -4J_1^3J_3 + J_1^2J_2^2 + 18J_1J_2J_3 - 4J_2^3 - 27J_3^2 \text{ [1]}.$$

Wenn wir, behufs Bildung symbolischer Potenzen, das Zeichen F durch die Zeichen T und T ersetzen, und dann mit diesen den Begriff g e o r d n e t e r bilinearer Formen verbinden,

$$T = (X\Lambda)(PU), \qquad \mathsf{T} = (UP)(\Lambda X), \tag{18}$$

so daß $\mathsf{T} = T'$ und $T = \mathsf{T}'$ wird, so erhalten wir die Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned}(T - \Lambda_1 \mathsf{E})(T - \Lambda_2 \mathsf{E})(T - \Lambda_3 \mathsf{E}) &= 0,\\ (\mathsf{T} - \Lambda_1 \mathsf{H})(\mathsf{T} - \Lambda_2 \mathsf{H})(\mathsf{T} - \Lambda_3 \mathsf{H}) &= 0;\end{aligned}} \tag{19}$$

und, wenn — für $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2$ — unter der Voraussetzung $\Pi^2 \neq 0$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathsf{E}_\alpha &= (X\Lambda_\alpha)(P_\alpha U) = \frac{(T - \Lambda_\beta \mathsf{E})(T - \Lambda_\gamma \mathsf{E})}{(\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta)(\Lambda_\alpha - \Lambda_\gamma)},\\ \mathsf{H}_\alpha &= (UP_\alpha)(\Lambda_\alpha X) = \frac{(\mathsf{T} - \Lambda_\beta \mathsf{H})(\mathsf{T} - \Lambda_\gamma \mathsf{H})}{(\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta)(\Lambda_\alpha - \Lambda_\gamma)}\end{aligned}} \tag{20}$$

[1]) Siehe die Anmerkung am Schluß des Paragraphen.

gesetzt wird, so erhalten wir die Darstellung von T^0, T^1, ... und T^0, T^1, ... durch diese den Gleichungen

$$(21)\qquad \begin{aligned} \mathsf{E}_\alpha^2 &= \mathsf{E}_\alpha, \quad \mathsf{E}_\beta \mathsf{E}_\gamma = \mathsf{E}_\gamma \mathsf{E}_\beta = 0, \\ \mathsf{H}_\alpha^2 &= \mathsf{H}_\alpha, \quad \mathsf{H}_\beta \mathsf{H}_\gamma = \mathsf{H}_\gamma \mathsf{H}_\beta = 0 \end{aligned}$$

genügenden Formen („Einheitsformen"):

$$(22)\qquad \boxed{\begin{aligned} T^m &= A_1^m \mathsf{E}_1 + A_2^m \mathsf{E}_2 + A_3^m \mathsf{E}_3, \\ \mathsf{T}^m &= A_1^m \mathsf{H}_1 + A_2^m \mathsf{H}_2 + A_3^m \mathsf{H}_3, \end{aligned} \quad \{m = 0, 1, 2, \cdots\}.}$$

Ferner erhält man, wie zuvor für einen beliebigen Wert der Stufenzahl nachgewiesen worden ist, die Zerlegung der Formen E_α, H_α in lineare Faktoren:

$$(23)\qquad \mathsf{E}_\alpha = (X A_\alpha) . (P_\alpha U), \quad \mathsf{H}_\alpha = (U P_\alpha) . (A_\alpha X),$$

und die zwischen diesen stattfindenden Gleichungen

$$(24)\qquad (A_\alpha P_\alpha) = 1, \quad (A_\beta P_\gamma) = 0$$

und

$$(25)\qquad (A_1 A_2 A_3) . (P_1 P_2 P_3) = 1,$$

$$(26)\qquad \begin{aligned} (P_\beta P_\gamma X) &= (P_1 P_2 P_3) . (A_\alpha X), \\ (A_\beta A_\gamma U) &= (A_1 A_2 A_3) . (P_\alpha U), \end{aligned}$$

$$(27)\qquad (P_\alpha A) P = A_\alpha . P_\alpha, \quad A(P A_\alpha) = A_\alpha . A_\alpha .$$

Wir berechnen hiernach ohne Mühe die Ausdrücke der Kovarianten $(S X)^3$ und $(\Sigma U)^3$ durch die linearen Formen $(A_\alpha X)$ und $(P_\alpha U)$. Es findet sich z. B.:

$$\begin{aligned} -(S X)^3 &= (P' A)(P P'' X)(A' X)(A'' X) = \\ &= \Sigma A_\alpha . (P_\alpha A)(P P'' X)(A_\alpha X)(A'' X) \\ &= \Sigma A_\alpha^2 . (P_\alpha A_\alpha)(P_\alpha P X)(A_\alpha X)(A X) \\ &= \Sigma A_\beta^2 A_\gamma . (P_\beta P_\gamma X)(A_\beta X)(A_\gamma X) \\ &= \Sigma A_\beta^2 A_\gamma . (P_\alpha P_\beta P_\gamma)(A_\alpha X)(A_\beta X)(A_\gamma X), \end{aligned}$$

und also

$$(28)\qquad \boxed{\begin{aligned} (S X)^3 &= \Pi . (P_1 P_2 P_3)(A_1 X)(A_2 X)(A_3 X), \\ (\Sigma U)^3 &= \Pi . (A_1 A_2 A_3)(P_1 U)(P_2 U)(P_3 U). \end{aligned}}$$

Hieraus erhält man wieder die Identität (12), da

$$
\begin{aligned}
&(SX)^3 . (\Sigma U)^3 \\
&= (P_1 P_2 P_3) . \begin{vmatrix} (A_1 X), & (A_2 X), & (A_3 X) \\ A_1 (A_1 X), & A_2 (A_2 X), & A_3 (A_3 X) \\ A_1^2 (A_1 X), & A_2^2 (A_2 X), & A_3^2 (A_3 X) \end{vmatrix} \\
&. (A_1 A_2 A_3) . \begin{vmatrix} (P_1 U), & (P_2 U), & (P_3 U) \\ A_1 (P_1 U), & A_2 (P_2 U), & A_3 (P_3 U) \\ A_1^2 (P_1 U), & A_2^2 (P_2 U), & A_3^2 (P_3 U) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} F_0 & F_1 & F_2 \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ F_2 & F_3 & F_4 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

wird. Eine geringe Vereinfachung kann man in diesen Formeln noch dadurch erzielen, daß man die in gewissem Maße willkürlichen Formen $(A_\alpha X)$, $(P_\alpha U)$ durch die Annahme

$$(A_1 A_2 A_3) = 1 = (P_1 P_2 P_3)$$

spezialisiert. Es ist aber zu bedenken, daß die so vereinfachten Formeln nur noch bei Transformationen der Gruppe $\Gamma (\Gamma_8)$ ihre Form bewahren.

Aus dem Gesagten geht noch hervor, daß im Falle $\Pi^2 \neq 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung für die Äquivalenz zweier Formen F und $\underline{F}$ in bezug auf die Gruppe G (und dann auch schon in bezug auf die Gruppe Γ) darin besteht, daß das System der Invarianten A_α mit dem System der Invarianten $\underline{A}_\alpha$ übereinstimmt. In rationaler Form wird dann diese Äquivalenzbedingung so ausdrückbar sein:

$$J_1 = \underline{J}_1, \quad J_2 = \underline{J}_2, \quad J_3 = \underline{J}_3. \tag{29}$$

Im Falle der zu G gehörigen Kollineationsgruppe $\mathfrak{G}$ $(\mathfrak{G}_8)$ tritt an Stelle dieser Bedingung die Forderung der Vereinbarkeit der Gleichungen

$$\varrho . J_1 = \underline{J}_1, \quad \varrho^2 . J_2 = \underline{J}_2, \quad \varrho^3 . J_3 = \underline{J}_3.$$

Äquivalenz der beiden Kollineationen $(XA)(PU) = 0$ und $(X\underline{A})(\underline{P}U) = 0$ besteht also, unter der Voraussetzung $\Pi^2 \neq 0$, immer dann, wenn die Verhältniswerte

$$J_2 : J_1^2, \quad J_3 : J_1^3, \quad J_3^2 : J_2^3, \tag{30}$$

gebildet für die Formen F und $\underline{F}$, dieselben sind.

Erläuterung zu dem Ausdruck für Π^2, Nr. 17.

Eine weitere Gestalt, die man der Invariante Π^2 erteilen kann, ist noch

$$\Pi^2 = \tfrac{1}{3}\left\{\begin{array}{l} (J_1^3 - 4J_1J_2 + 9J_3).(J_1J_2 - 9J_3) \\ -(J_1^2 - 3J_2).(J_1^2J_2 + 3J_1J_3 - 4J_2^2). \end{array}\right\}$$

Der erste der im Texte angegebenen Ausdrücke von Π^2 ist die bekannte Formel, die die Diskriminante einer binären kubischen Form als Diskriminante ihrer Hesseschen Kovariante gibt. Setzt man nämlich, zu homogenen Veränderlichen übergehend,

$$(\alpha\xi)^3 = (\alpha_1\xi_2 - \alpha_2\xi_1)^3 = \xi_2^3 - J_1\xi_2^2\xi_1 + J_2\xi_2\xi_1^2 - J_3\xi_1^3,$$

so ist die „Hessesche Kovariante" von $(\alpha\xi)^3$ definiert als die Form

$$(\delta\xi)^2 = \tfrac{1}{2}(\alpha\alpha')^2(\alpha\xi)(\alpha'\xi),$$

und die Ausrechnung hiervon gibt

$$-\tfrac{1}{9}\{(J_1^2 - 3J_2)\xi_2^2 - (J_1J_2 - 9J_3)\xi_2\xi_1 + (J_2^2 - 3J_1J_3)\xi_1^2\};$$

ihre mit 2 multiplizierte Diskriminante liefert dann die Diskriminante der kubischen Form und damit, abgesehen von einem Zahlenfaktor, den im Texte angegebenen Ausdruck.

Auf den nächsten Ausdruck für Π^2 kommt man, wenn man unter ε eine primitive dritte Einheitswurzel versteht und die auch sonst in der Theorie der kubischen Gleichungen gebräuchlichen Wurzelfunktionen

$$U = A_1 + \varepsilon A_2 + \varepsilon^2 A_3, \quad V = A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \varepsilon A_3$$

einführt. Es wird dann nämlich

$$\begin{aligned}\Pi^2 &= -\tfrac{1}{27}\{(U-V)(U-\varepsilon V)(U-\varepsilon^2 V)\}^2 \\ &= -\tfrac{1}{27}(U^3 - V^3)^2 = -\tfrac{1}{27}\{(U^3+V^3)^2 - 4(UV)^3\}\end{aligned}$$

und

$$UV = J_1^2 - 3J_2, \quad U^3 + V^3 = 2J_1^3 - 9J_1J_2 + 27J_3.$$

Von diesen beiden Ausdrücken ist der erste, wie wir gesehen haben, abgesehen von dem Zahlenfaktor $-\frac{1}{9}$, der erste Koeffizient („das Leitglied") der quadratischen Kovariante von $(\alpha\xi)^3$. Aber auch der zweite Ausdruck hat eine ähnliche Bedeutung. Er ist, abgesehen von einem Zahlenfaktor $-\frac{1}{27}$, der erste Koeffizient (das Leitglied) der kubischen Kovariante

$$\begin{aligned}2(\alpha\delta)(\alpha\xi)^2(\delta\xi) &= -(\alpha\alpha')^2(\alpha\alpha'')(\alpha'\xi)(\alpha''\xi)^2 \\ &= -\tfrac{1}{27}\{2J_1^3 - 9J_1J_2 + 27J_3\}\xi_2^3 + \cdots\end{aligned}$$

Beide Ausdrücke sind Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$3J_0\frac{\partial\Phi}{\partial J_1} + 2J_1\frac{\partial\Phi}{\partial J_2} + J_2\frac{\partial\Phi}{\partial J_3} = 0. \quad \{J_0 = 1\}.$$

Sie sind sogenannte Semiinvarianten von $(\alpha\xi)^3$, nämlich Invarianten der Gruppe

$$\begin{aligned} J_1 + 3K &= J_1', \\ J_2 + 2K.J_1 + 3K^2 &= J_2', \\ J_3 + K.J_2 + K^2.J_2 + K^3 &= J_3', \end{aligned}$$

die durch die Gruppe $\xi_1 = \xi_1'$, $\xi_2 + K\xi_1 = \xi_2'$ oder

$$A_1 + K = A_1', \quad A_2 + K = A_2', \quad A_3 + K = A_3'$$

induziert wird. Jede ganze rationale Invariante dieser letzten Gruppe, die von J_1, J_2, J_3 rational abhängt, ist eine ganze rationale Funktion von $U.V$ und $U^3 + V^3$, und ebenso jede ganze rationale Funktion $\Phi(J_1, J_2, J_3)$, die der angeführten Differentialgleichung genügt (wie z. B. Π^2).

§ 17.

Fortsetzung: Die Kovarianten $(SX)^3$ und $(\Sigma U)^3$.

Die von uns E_1, E_2, E_3 und H_1, H_2, H_3 genannten bilinearen Formen unterscheiden sich voneinander nur so, wie die Formen T und T, nämlich durch die Anordnung der in ihnen vorkommenden Veränderlichen X und U. Nennen wir sie in ihrer Eigenschaft als Funktionen von X und U nunmehr Θ_1, Θ_2, Θ_3, so werden diese Formen, irrationale Kovarianten nullten Grades der Grundform F, zunächst nur von dem linearen System der Formen F_0, F_1, F_2, ... abhängen (S. 174). Sie bleiben bestimmt und behalten ihre Werte, wenn man F ersetzt durch F^*, wo

$$F^* = C_2.F_0 + C_1 F_1 + C_0.F_2$$

ist, solange nur keine zwei der Werte

$$A_a^* = C_2.A_a^0 + C_1.A_a^1 + C_0.A_a^2$$

einander gleich sind. Da jeder Faktor des symbolischen Produkts

$$(T^* - A_1^*\mathsf{E})(T^* - A_2^*\mathsf{E})(T^* - A_3^*\mathsf{E})$$

durch den entsprechenden Faktor $T - A_a\mathsf{E}$ teilbar ist, so ist das angeführte Produkt identisch gleich Null, A_1^*, A_2^* und A_3^* sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung, die zu der Form F^* gehört. Die den Koeffizienten C_2, C_1, C_0 aufzuerlegende Bedingung aber ist das Nichtverschwinden des Differenzenproduktes

$$\Pi^* = (A_2^* - A_3^*)(A_3^* - A_1^*)(A_1^* - A_2^*),$$

oder das Nichtverschwinden des ersten Faktors in dem Produkt

$$(1) \qquad \begin{aligned} \Pi^* = \{\, & C_1^3 + 2C_0C_1^2.J_1 + \\ & + C_0^2C_1.(J_1^2 + J_2) + C_0^3.(J_1J_2 - J_3)\,\}.\Pi. \end{aligned}$$

Dieselbe Kombinanteneigenschaft müssen dann auch die Formen $(SX)^3$ und $(\Sigma U)^3$ haben. Diese nehmen ja — nach Nr. (28) in § 16 — bei Ersetzung von F durch F^* ebendenselben Faktor an wie die Invariante Π. Außerdem sehen wir noch, daß die linearen Faktoren Θ_1, Θ_2 und Θ_3, in den Formen $(S^* X)^3$ und $(\Sigma^* U)^3$ wiederkehren.

Dies alles veranlaßt uns nunmehr, den Zusammenhang zwischen den Formen Θ_1, Θ_2, Θ_3 und $(SX)^3$, $(\Sigma U)^3$ noch genauer zu untersuchen. Es wird sich zunächst ergeben:

Die Gleichung dritten Grades, deren Wurzeln die irrationalen Kovarianten $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ sind, läßt sich so schreiben, daß in ihren Koeffizienten nur Kovarianten der Formen $(SX)^3$, $(\Sigma U)^3$ erscheinen.

Zum Beweise knüpfen wir an die Formeln Nr. (12) und Nr. (28) in § 16 an. Danach ist

$$(2) \qquad (SX)^3 . (\Sigma U)^3 = \begin{vmatrix} F_0 & F_1 & F_2 \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ F_2 & F_3 & F_4 \end{vmatrix} = \Pi^2 . \Theta_1 . \Theta_2 . \Theta_3 .$$

Wir führen nun das Operationszeichen

$$\Omega = \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial U_1} + \frac{\partial^2}{\partial X_2 \partial U_2} + \frac{\partial^2}{\partial X_3 \partial U_3}$$

ein, das augenscheinlich einen invarianten Prozeß darstellt (aus Invarianten immer wieder solche hervorgehen läßt), und erhalten mit seiner Hilfe aus dem Produkt $(S, \Sigma)_0 = (SX)^3 . (\Sigma U)^3$, der „nullten Überschiebung" von $(SX)^3$ und $(\Sigma U)^3$, der Reihe nach die „erste, zweite und dritte Überschiebung" von $(SX)^3$ und $(\Sigma U)^3$:

$$(S, \Sigma)_1 = \tfrac{1}{9} \Omega (S, \Sigma)_0 ,$$
$$(S, \Sigma)_2 = \tfrac{1}{4} \Omega (S, \Sigma)_1 ,$$
$$(S, \Sigma)_3 = \tfrac{1}{1} \Omega (S, \Sigma)_2 \text{ [1]}.$$

Berücksichtigen wir dann noch, daß

$$\Omega (F_i . F_k) = R_i . F_k + R_k . F_i + 2 F_{i+k}$$

---

[1]) Man sagt auch, $(S, \Sigma)_0$, $(S, \Sigma)_1$, $(S, \Sigma)_2$, $(S, \Sigma)_3$ entstehe aus dem Produkt $(SX)^3 . (\Sigma U)^3$ durch null-, ein-, zwei- dreimalige Faltung.

wird, so erhalten wir die folgenden Formeln:

$$(S, \Sigma)_1 = (S\Sigma)(SX)^2(\Sigma U)^2$$

$$(3) \qquad = \frac{1}{9}\left\{\begin{vmatrix} R_0 & R_1 & R_2 \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ F_2 & F_3 & F_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_0 & F_1 & F_2 \\ R_1 & R_2 & R_3 \\ F_2 & F_3 & F_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_0 & F_1 & F_2 \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ R_2 & R_3 & R_4 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{9}\Pi^2 \cdot \{\Theta_2\Theta_3 + \Theta_3\Theta_1 + \Theta_1\Theta_2\},$$

$$(S, \Sigma)_2 = (S\Sigma)^2(SX)(\Sigma U)$$

$$(4) \qquad = \frac{1}{18}\left\{\begin{vmatrix} F_0 & F_1 & F_2 \\ R_1 & R_2 & R_3 \\ R_2 & R_3 & R_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_0 & R_1 & R_2 \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ R_2 & R_3 & R_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_0 & R_1 & R_2 \\ R_1 & R_2 & R_3 \\ F_2 & F_3 & F_4 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{18}\Pi^2 . (\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) = \frac{1}{18}\Pi^2 . (XU),$$

$$(5) \qquad (S, \Sigma)_3 = (S\Sigma)^3 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} R_0 & R_1 & R_2 \\ R_1 & R_2 & R_3 \\ R_2 & R_3 & R_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\Pi^2.$$

Durch Zusammenfassung der Formeln (2) bis (5) ergibt sich dann die gesuchte kubische Gleichung für Θ_1, Θ_2, Θ_3 in doppelter Gestalt:

$$(6) \qquad \boxed{\begin{array}{c} \frac{1}{6}\begin{vmatrix} R_0\Theta - F_0, & R_1\Theta - F_1, & R_2\Theta - F_2 \\ R_1\Theta - F_1, & R_2\Theta - F_2, & R_3\Theta - F_3 \\ R_2\Theta - F_2, & R_3\Theta - F_3, & R_4\Theta - F_4 \end{vmatrix} \\ = (S, \Sigma)_3 . \Theta^3 - 3(S, \Sigma)_2 . \Theta^2 + \\ + \frac{3}{2}(S, \Sigma)_1 . \Theta^1 - \frac{1}{6}(S, \Sigma)_0 . \Theta^0 = 0, \end{array}}$$

wobei, wie gesagt,

$$(7) \qquad (S, \Sigma)_0 = (SX)^3 . (\Sigma U)^3$$

und

$$(8) \qquad \boxed{(S, \Sigma)_2 = \frac{1}{3}(S, \Sigma)_3 . (XU) = \frac{1}{18}\Pi^2 . (XU)}$$

ist.

Hiermit haben wir den behaupteten Satz, der uns die Formen $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ als irrationale Kovarianten nullten Grades der beiden Formen $(SX)^3$, $(\Sigma U)^3$ kennen lehrt.

Es liegt nun aber noch ein anderer Gedanke nahe:

Die Kovarianten $(SX)^3$ und $(\Sigma U)^3$ müssen jede schon durch die andere bestimmt sein, jede von ihnen muß sich als rationale Kovariante der anderen darstellen lassen.

Es lohnt sich wohl, auch das noch auszuführen. Da aber die dabei anzustellenden Rechnungen hier schon etwas länger sind, und auch Raum für allerlei anderes bleiben muß, so soll die Ableitung diesmal nur skizziert werden: Die genauere Ausführung der folgenden Entwicklung wird ja auch dem einen oder anderen Leser eine nützliche Übung bieten.

Es kommen einige Ergebnisse aus der Lehre von den ternären kubischen Formen zur Verwendung. Da auf diese umfangreiche und verwickelte Theorie selbst hier nicht näher eingegangen werden kann, so geben wir zunächst die zum Verständnis des Folgenden nötigen Erklärungen.

Eine ternäre kubische Form $(AX)^3 = (BX)^3 = (CX)^3 = \cdots$[1]) hat, unter anderen, eine Kovariante, die ebenfalls kubisch ist in X, und die man ihre Hessesche Kovariante nennt:

$$(HX)^3 = \tfrac{1}{6}(ABC)^2(AX)(BX)(CX).$$

Außer dieser haben wir in unserem Falle $\{(AX)^3 = (SX)^3\}$ noch zu betrachten zwei Invarianten derselben Grundform, die wir so bezeichnen wollen:

$$\begin{aligned} G_4 &= \tfrac{1}{24}(ABC)(ABD)(ACD)(BCD),\\ G_6 &= \tfrac{1}{6}(ABC)(ABD)(ACE)(BCF)(DEF)^2\\ &= (ABC)(ABH)(ACH)(BCH)\,^{2}). \end{aligned}$$

[1]) Statt das Symbol A zu akzentuieren, verwenden wir hier andere Buchstaben.

[2]) G_4 und G_6 sind die einzigen unabhängigen ganzen und rationalen Invarianten der Form $(AX)^3$. Näheres bei Gordan, Math. Ann. **1**, 90 ff., 1869, und bei Clebsch und Gordan, ebenda **6**, 436 ff., 1873, sowie in der weiteren Literatur, die in der Mathematischen Enzyklopädie **3** (2), 488 ff. angegeben ist.

Die im Texte neu eingeführten Zeichen G_4 und G_6 sind nachgebildet den in der Theorie der elliptischen Funktionen üblichen Weierstrassschen Zeichen g_2 und g_3, die Invarianten binärer Formen vierter Ordnung $(ax)^4 = (bx)^4 = \cdots$ darstellen,

$$g_2 = \tfrac{1}{2}(aa')^4, \quad g_3 = \tfrac{1}{6}(ab)^2(ac)^2(bc)^2,$$

und vorzuziehen sind den von Clebsch für dieselben Invarianten gebrauchten Zeichen $\frac{1}{2}i\,(= g_2)$ und $\frac{1}{6}j\,(= g_3)$. Auf die hier berührte Theorie der binären biquadratischen Formen soll im zweiten Teile dieser Schrift eingegangen werden.

Bei allen hier gebrauchten Abkürzungen g_2, g_3, G_4, G_6 sind die Definitionen so eingerichtet, daß die ausgerechneten (übrigens zum Teil schon recht verwickelten) Ausdrücke dieser Invarianten frei werden von überflüssigen Zahlenkoeffizienten.

Wir berechnen zuerst die Hessesche Kovariante von $(SX)^3$, die bei dieser sehr stark spezialisierten Form bis auf einen von X freien Faktor mit $(SX)^3$ selbst übereinstimmt[1]):

$$(9)\quad (HX)^3 = \tfrac{1}{6}(SS'S'')^2(SX)(S'X)(S''X) = \frac{1}{2^2 \cdot 3^3} \cdot \Pi^2 \cdot (SX)^3.$$

Für die beiden Invarianten G_4 und G_6 erhält man sodann die Werte

$$(10)\quad G_4 = \tfrac{1}{24}(S'S''S''')(S''S'''S)(S'''SS')(SS'S'') = \frac{1}{2^4 \cdot 3^4} \cdot \Pi^4,$$

$$G_6 = (SS'S'')(SS'H)(SS''H)(S'S''H) = \frac{1}{2^3 \cdot 3^6} \cdot \Pi^6,$$

woraus

$$(11)\quad \Pi^2 = \tfrac{9}{2} \cdot \frac{G_6}{G_4}$$

und

$$(12)\quad G_6^2 - 64\, G_4^3 = 0$$

folgt[2]).

Hat man so weit gerechnet, so kann man sich die fernere Überlegung durch die naheliegende Bemerkung abkürzen, daß in der letzten der zu bildenden Gleichungen

$$(13)\quad \tfrac{1}{6}(SS'S'')(SS'U)(SS''U)(S'S''U) = \tfrac{1}{54} \cdot \Pi^3 \cdot (\Sigma U)^3$$

Übrigens heißen G_4 und G_6 bei Cayley, von dem der angeführte Grundsatz herrührt, S und $-T$. Bei Clebsch und Gordan heißen dieselben Invarianten erst $\frac{1}{4}S$ und T (Math. Ann. **1**, 1867), später $\frac{1}{24}S$ und $\frac{1}{6}T$ (Math. Ann. **6**, 1873), so daß also in der Literatur über diesen Gegenstand jedes der Zeichen S, T nicht weniger als drei verschiedene, und zwar leicht zu verwechselnde Bedeutungen hat!

Wegen des Zusammenhangs, der zwischen g_2, g_3 und G_4, G_6 besteht, siehe die Anmerkung am Schluß des Paragraphen.

[1]) Dieses ist Bedingung dafür, daß eine ternäre kubische Form in drei lineare Faktoren zerlegt werden kann, wie es eben bei $(SX)^3$ zutrifft.

[2]) Der Ausdruck $R = G_6^2 - 64\,G_4^3$ heißt Diskriminante der kubischen Form $(AX)^3$. Die Gleichung $R = 0$ ist nämlich Bedingung für das Vorkommen von (mindestens) einer mehrfach zählenden Lösung X einer Gleichung der Form $(AX)^3 = 0$; d. h. in der Sprache der Geometrie, $R = 0$ ist Doppelpunktsbedingung der ebenen Kurve $(AX)^3 = 0$. Hierdurch ist allerdings die „Diskriminante" der Form $(AX)^3$ nur bis auf einen Zahlenfaktor festgelegt, über den im Ausdruck R in bestimmter Weise verfügt ist.

Die spezielle Kurve $(AX)^3 = (SX)^3 = 0$ hat, wie wir wissen, sogar drei (unter der Annahme $\Pi^2 \neq 0$ von einander getrennte) Doppelpunkte.

nur noch der Zahlenkoeffizient fraglich bleibt. Man erhält den unter (13) angegebenen Wert durch die Substitution $U = S'''$. Damit haben wir das gesuchte Ergebnis. Es ist

$$\boxed{(\Sigma U)^3 = 2 \cdot \frac{G_4}{G_6} \cdot (SS'S'')(SS'U)(SS''U)(S'S''U).} \tag{14}$$

In der Anmerkung auf S. 196 wurde hingewiesen auf einen Zusammenhang, der zwischen den dort erwähnten Invarianten g_2 und g_3 einer binären Form $(a\,x)^4$ und den Invarianten G_4 und G_6 einer ternären Form $(A\,X)^3$ stattfindet.

Dieser Zusammenhang, den anhangsweise zu besprechen wohl nützlich sein wird, hat, wenigstens historisch, seine Wurzel in einem bekannten Lehrsatze von Salmon. Nach diesem sind die Tangentenquadrupel, die man von irgend einem Punkte einer doppelpunktfreien ebenen Kurve dritter Ordnung $(A\,X)^3 = 0$ an diese Kurve legen kann (abgesehen von der Tangente des Punktes selbst), alle zueinander projektiv. Denken wir uns diese Tangentenquadrupel, im Büschel der Geraden durch einen solchen Punkt, zusammengefaßt als Nullstellen einer binären Form vierter Ordnung $(a\,x)^4$, so hat diese keine mehrfache Nullstelle, und also eine von Null verschiedene Diskriminante:

$$r = \tfrac{1}{16} \cdot (g_2^3 - 27\,g_3^2). \tag{15}$$

Die Form $(a\,x)^4$ hat dann eine absolute Invariante (gegenüber der Gruppe der linearen Transformationen des betrachteten binären Gebietes), und diese Invariante steht zu der analog gebildeten, absoluten Invariante der ternären Form $(A\,X)^3$ oder der ebenen Kurve $(A\,X)^3 = 0$ in der Beziehung

$$\boxed{\frac{G_6^2}{G_4^3} = 27 \cdot 64 \cdot \frac{g_3^2}{g_2^3}.} \tag{16}$$

Man erkennt das, wenn man für $(a\,x)^4$ und $(A\mathrm{X})^3$ die von Weierstrass eingeführten „Normalformen“ benutzt, nämlich, unter spezieller Koordinatenwahl,

$$(a x)^4 = \{4\,x_2^3 - g_2 x_2 x_1^2 - g_3 x_1^3\}\,x_1, \tag{17}$$

$$(A\,X)^3 = X_1\,X_3^2 - \{4\,X_2^3 - g_2\,X_2\,X_1^2 - g_3\,X_1^3\} \tag{18}$$

setzt. Es wird dann

$$27\,G_4 = 4\,g_2, \quad 27\,G_6 = 64\,g_3. \tag{19}$$

Für die Diskriminante

$$R = G_6^2 - 64\,G_4^3 \tag{20}$$

der kubischen Form $(AX)^3$ ergibt sich noch die Gleichung

$$3^9 . R = -2^{16} . r \qquad \text{(siehe Nr. 15).} \tag{21}$$

Die Diskriminanten R und r sind also immer zugleich von Null verschieden oder Null.

Trifft für zwei Formen $(a\,x)^4$ und $(b\,x)^4$ oder für zwei Formen $(A\,X)^3$ und $(B\,X)^3$ das erste zu, so sind sie (gegenüber den beiden Gruppen G_4,

G_9 des binären und ternären Gebietes) dann miteinander äquivalent, wenn auch die zugehörigen absoluten Invarianten (Nr. 16) gleiche Werte haben; und auch nur dann sind die entsprechenden geometrischen Figuren $(a\,x)^4 = 0$, $(b\,x)^4 = 0$ und $(A\,X)^3 = 0$, $(B\,X)^3 = 0$ zueinander projektiv (im zweiten Falle kollinear).

Wegen der hier ausgeschlossenen Grenzfälle muß auf die Theorie der binären Formen vierter Ordnung verwiesen werden, die im zweiten Teil dieses Buches zur Sprache kommen soll, und — wegen der Kurven dritter Ordnung — auf einen Aufsatz von Dingeldey [Math. Annalen **31**, 157 u. ff. (1888)], sowie auf die in der Mathematischen Enzyklopädie **3** (2), 490 angegebene Literatur.

§ 18.

Fortsetzung: Besondere Fälle [1]).

Unsere bisherigen Überlegungen ruhen zum großen Teil auf der Voraussetzung $\Pi^2 \neq 0$, die einen sogenannten allgemeinen Fall kennzeichnet. Insbesondere folgt aus dieser Annahme (die weiterhin mit **Ia)** bezeichnet werden soll), daß unter den symbolischen Potenzen von T drei linear-unabhängige Formen vorkommen, T^0, T^1, T^2. Wir lassen die genannte Einschränkung nunmehr fallen; es soll versucht werden, eine erschöpfende Aufzählung aller vorliegenden Möglichkeiten zu bieten.

Die nächste Annahme, die man machen wird, ist dann die, daß die charakteristische Gleichung von T (oder F) eine einfache Wurzel $\mathbf{\Lambda}$ und eine Doppelwurzel $\mathbf{M}$ hat, so daß $\Pi^2 = 0$,

$$(1) \qquad \boxed{(T-\mathbf{\Lambda E})(T-\mathbf{ME})^2 = 0} \qquad \{\mathbf{\Lambda} \neq \mathbf{M}\}$$

und

$$(2) \qquad J_1 = \mathbf{\Lambda} + 2\mathbf{M}, \quad J_2 = 2\mathbf{\Lambda M} + \mathbf{M}^2, \quad J_3 = \mathbf{\Lambda M}^2$$

wird. Es folgt dann, unter anderem,

$$(3) \qquad \begin{aligned} J_1^2 - 3J_2 &= (\mathbf{\Lambda}-\mathbf{M})^2, \\ J_1^3 - 4J_1J_2 + 9J_3 &= \mathbf{\Lambda}(\mathbf{\Lambda}-\mathbf{M})^2, \\ J_1J_2 - 9J_3 &= 2\mathbf{M}(\mathbf{\Lambda}-\mathbf{M})^2, \\ J_1^4 - 5J_1^2J_2 + 6J_1J_3 + 4J_2^2 &= \mathbf{\Lambda}^2(\mathbf{\Lambda}-\mathbf{M})^2, \\ J_1^2J_2 + 3J_1J_3 - 4J_2^2 &= 2\mathbf{\Lambda M}(\mathbf{\Lambda}-\mathbf{M})^2, \\ J_2^2 - 3J_1J_3 &= \mathbf{M}^2(\mathbf{\Lambda}-\mathbf{M})^2, \end{aligned}$$

woraus sich noch

$$(4) \qquad 2J_1^3 - 9J_1J_2 + 27J_3 = 2(\mathbf{\Lambda}-\mathbf{M})^3$$

[1]) In diesem Paragraphen sind die E, Λ, M versehentlich zu dick gedruckt worden.

ergibt (vgl. S. 188, Nr. 17). Die Wurzelgrößen $\boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{M}$ erhalten rationale Werte

$$(5)\qquad \begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda} &= \frac{J_1^3 - 4J_1J_2 + 9J_3}{J_1^2 - 3J_2}, \\ \mathbf{M} &= \tfrac{1}{2}\frac{J_1J_2 - 9J_3}{J_1^2 - 3J_2}. \end{aligned} \qquad \{J_1^2 - 3J_2 \neq 0.\}$$

An Stelle der Formen $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ benutzen wir jetzt die aus ihnen durch einen Grenzübergang hervorgehenden bilinearen Formen

$$(6)\qquad \begin{aligned} \mathbf{E}_1^* &= \operatorname{Lim} \mathbf{E}_1 &&= \frac{(T - \mathbf{M}\mathbf{E})^2}{(\mathbf{M} - \boldsymbol{\Lambda})^2} \\ \mathbf{E}_2^* &= \operatorname{Lim}(\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3) &&= \mathbf{E} - \mathbf{E}_1^* \\ \mathbf{E}_3^* &= \operatorname{Lim}(\boldsymbol{\Lambda}_2 - \boldsymbol{\Lambda}_3)(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_3) &&= \frac{(T - \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{E})(T - \mathbf{M}\mathbf{E})}{\mathbf{M} - \boldsymbol{\Lambda}}, \end{aligned}$$

die hinterher auch wieder $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ genannt werden sollen. Die beiden ersten dieser neuen Bildungen haben dann, in bezug auf den Kern der Grundform F, den Grad Null, die dritte aber hat den Grad Eins.

Wir bezeichnen nun mit

Ib)

die weitere Voraussetzung, daß die Kovariante $\mathbf{E}_3^*$, oder also unser nunmehriges $\mathbf{E}_3$, nicht identisch gleich Null ist. Wir haben dann nach wie vor drei linear unabhängige Potenzen von T. Es folgt

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\mathbf{E}_1^2 = \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 = 0, \quad \mathbf{E}_1\mathbf{E}_3 = 0, \\ &\mathbf{E}_2^2 = \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{E}_2\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{E}_3^2 = 0 \end{aligned}$$

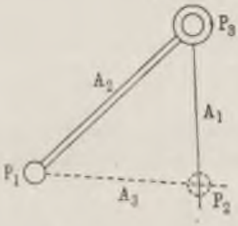
und

$$(8)\qquad \begin{aligned} T^0 &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \\ T^1 &= \boldsymbol{\Lambda}\,.\,\mathbf{E}_1 + \mathbf{M}\,.\,\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3, \\ T^2 &= \boldsymbol{\Lambda}^2.\,\mathbf{E}_1 + \mathbf{M}^2.\,\mathbf{E}_2 + 2\,\mathbf{M}\,\mathbf{E}_3, \\ T^3 &= \boldsymbol{\Lambda}^3.\,\mathbf{E}_1 + \mathbf{M}^3.\,\mathbf{E}_2 + 3\,\mathbf{M}^2\mathbf{E}_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$\mathbf{E}_1$ kann (nach wie vor) als Produkt von zwei linearen Formen dargestellt werden, $\mathbf{E}_1 = (XA_1).(P_1U)$, deren Invariante (A_1P_1) den numerischen Wert Eins hat. $\mathbf{E}_3$ ist ebenso ein Produkt linearer Formen, $\mathbf{E}_3 = (XA_2).(P_3U)$, deren Invariante (A_2P_3) aber nun den Wert Null hat.

Da $\mathsf{E}_1 \mathsf{E}_2 = \mathsf{E}_3 \mathsf{E}_1 = 0$ ist, so sind dann auch die Invarianten $(A_2 P_1)$ und $(A_1 P_3)$ gleich Null. Man kann dann die Figur der vier linearen Formen zu einer Figur von sechs Formen ergänzen, die in denselben gegenseitigen Beziehungen stehen wie im Falle **Ia)**, nämlich

Fig. 3.



$$(A_\alpha P_\alpha) = 1,$$
$$(A_\beta P_\gamma) = 0,$$
$$(A_1 A_2 A_3) \cdot (P_1 P_2 P_3) = 1.$$

Da nunmehr $\mathsf{E}_1 + \mathsf{E}_2 = \mathsf{E}$ werden muß (Nr. 6), so erhält man

$$\text{(9)} \qquad \boxed{\begin{aligned} \mathsf{E}_1 &= (XA_1) \cdot (P_1 U), \\ \mathsf{E}_2 &= (XA_2) \cdot (P_2 U) + (XA_3) \cdot (P_3 U), \\ \mathsf{E}_3 &= (XA_2) \cdot (P_3 U), \end{aligned}}$$

womit die Gleichungen (7) erfüllt sind.

Die Unbestimmtheit der Vektoren A_α, P_α, die im Falle **Ia)** durch die Gleichungen der Gruppe

$$\varrho_\alpha A_\alpha = A_\alpha^*, \qquad \varrho_\alpha P_\alpha = P_\alpha^*$$

auszudrücken war, wird jetzt durch ein höheres Maß von Unbestimmtheit ersetzt. Sie wird dargestellt durch die Gruppe aller linearen Transformationen, die das Bestehen der Gleichungen (9) nicht stören:

$$\text{(10)} \qquad \begin{aligned} \varrho \cdot A_1 &= A_1^*, & \varrho^{-1} \cdot P_1 &= P_1^*, \\ \sigma \cdot A_2 &= A_2^*, & \sigma^{-1} \cdot P_2 - \tau \cdot P_3 &= P_2^*, \\ \sigma \cdot A_3 + \tau \cdot A_2 &= A_3^*, & \sigma^{-1} \cdot P_3 &= P_3^*. \end{aligned}$$
$$(\varrho, \sigma \neq 0).$$

Nach (8) und (9) hat man also

$$\text{(11)} \qquad \boxed{\begin{aligned} (XA)(PU) = \mathsf{\Lambda} \cdot (XA_1) \cdot (P_1 U) \\ + \mathsf{M} \cdot \{(XA_2) \cdot (P_2 U) + (XA_3) \cdot (P_3 U)\} + (XA_2) \cdot (P_3 U). \end{aligned}}$$

Die beiden kubischen Kovarianten werden hiernach

$$\text{(12)} \qquad \boxed{\begin{aligned} (SX)^3 &= \mathsf{\Lambda} \cdot (\mathsf{M} - \mathsf{\Lambda}) \cdot (P_1 P_2 P_3) \cdot (A_1 X) \cdot (A_2 X)^2, \\ (\Sigma U)^3 &= \mathsf{\Lambda} \cdot (\mathsf{M} - \mathsf{\Lambda}) \cdot (A_1 A_2 A_3) \cdot (P_1 U) \cdot (P_3 U)^2. \end{aligned}}$$

Die im Falle **Ia)** festgestellte Reziprozität zwischen diesen Formen besteht hier nicht mehr. Die Invarianten G_4 und G_6 haben hier den Wert Null, und ebenso verhält es sich in den nunmehr zu besprechenden weiteren Grenzfällen.

Ic)

Unsere Voraussetzung sei nunmehr, daß erstens die charakteristische Gleichung von F oder T eine dreifache Wurzel $\mathbf{\Lambda}_1 = \mathbf{\Lambda}_2 = \mathbf{\Lambda}_3 = \mathbf{\Lambda}$ hat, daß sie also

$$(13) \qquad (T - \mathbf{\Lambda}\mathbf{E})^3 = 0$$

lautet, und daß zweitens T^0, T^1, T^2 noch linear-unabhängig sind. Wir haben dann

$$J_1 = 3\mathbf{\Lambda}, \qquad J_2 = 3\mathbf{\Lambda}^2, \qquad J_3 = \mathbf{\Lambda}^3.$$

Die Formen

$$(14) \qquad \mathbf{E}_0 = (T - \mathbf{\Lambda}\mathbf{E})^0, \quad \mathbf{E}_1 = (T - \mathbf{\Lambda}\mathbf{E})^1, \quad \mathbf{E}_2 = (T - \mathbf{\Lambda}\mathbf{E})^2$$

genügen dann den Gleichungen

$$(15) \qquad \begin{array}{lll} \mathbf{E}_0^2 = \mathbf{E}_0, & \mathbf{E}_0\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1, & \mathbf{E}_0\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2, \\ \mathbf{E}_1^2 = \mathbf{E}_2, & \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 = 0, & \mathbf{E}_2^2 = 0. \end{array}$$

und liefern

$$(16) \qquad \begin{aligned} T^0 &= \mathbf{E}_0, \\ T^1 &= \mathbf{\Lambda} \,.\, \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1, \\ T^2 &= \mathbf{\Lambda}^2 . \mathbf{E}_0 + 2\mathbf{\Lambda} \,.\, \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \\ T^3 &= \mathbf{\Lambda}^3 . \mathbf{E}_0 + 3\mathbf{\Lambda}^2 . \mathbf{E}_1 + 3\mathbf{\Lambda} . \mathbf{E}_2. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Eine ähnliche Überlegung wie die soeben unter **Ib)** angestellte, führt dann zu der Einsicht, daß man:

$$(17) \qquad \boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= (XA_1).(P_1U) + (XA_2).(P_2U) + (XA_3).(P_3U), \\ \mathbf{E}_1 &= (XA_1).(P_2U) + (XA_2).(P_3U), \\ \mathbf{E}_2 &= (XA_1).(P_3U) \end{aligned}}$$

setzen kann, wobei zwischen den linearen Formen $(X A_k)$, $(P_k U)$ die schon mehrfach angeführten Beziehungen bestehen. An Stelle von (11) erhält man also die folgende Darstellung von T:

$$\boxed{\begin{gathered}(XA)(PU) = \mathbf{\Lambda}.(XU) + \\ + (XA_1).(P_2U) + (XA_2).(P_3U).\end{gathered}} \tag{18}$$

Fig. 4.

Grad und Art der Unbestimmtheit der Vektoren A_k, P_k werden jetzt bezeichnet durch die Gruppe

$$\begin{aligned}
\varrho\;\;\; . A_1 &= A_1^*, \\
\varrho\;\;\; .(A_2 + \lambda A_1) &= A_2^*, \\
\varrho\;\;\; .(A_3 + \lambda A_2 + \mu A_1) &= A_3^*, \\
\varrho^{-1}.(P_1 - \lambda P_2 + \nu P_3) &= P_1^*, \\
\varrho^{-1}.(P_2 - \lambda P_3) &= P_2^*, \\
\varrho^{-1}. P_3 &= P_3^*. \\
\{\varrho \neq 0, \quad \mu + \nu &= \lambda^2\}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Die kubischen Kovarianten der Form F werden jetzt Potenzen linearer Formen. Man erhält

$$\boxed{\begin{aligned}(SX)^3 &= (P_1 P_2 P_3).(A_1 X)^3, \\ (\Sigma U)^3 &= (A_1 A_2 A_3).(P_3 U)^3.\end{aligned}} \tag{20}$$

IIa)

Unter **Ib)** war die Möglichkeit ausgeschlossen worden, daß die mit $\mathbf{E}_3$ bezeichnete Form identisch gleich Null ist. Tritt dies ein, ist also bereits

$$\boxed{(T - \mathbf{\Lambda E})(T - \mathbf{ME}) = 0} \quad (\mathbf{\Lambda} \neq \mathbf{M}), \tag{21}$$

so sind die Formen E_1, E_2 ebenso bestimmt wie zuvor unter **I b)**, und wie unter (8) erhält man

$$\begin{aligned} T^0 &= \mathsf{E}_1 + \mathsf{E}_2, \\ T^1 &= \mathsf{\Lambda}\,.\,\mathsf{E}_1 + \mathsf{M}\,.\,\mathsf{E}_2, \\ T^2 &= \mathsf{\Lambda}^2.\,\mathsf{E}_1 + \mathsf{M}^2.\,\mathsf{E}_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{22}$$

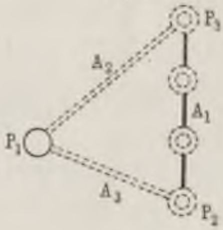
also insbesondere

$$\boxed{\begin{gathered}(XA)\,(PU) = \mathsf{\Lambda}.(XA_1).(P_1U) \\ + \mathsf{M}.\{(XA_2).(P_2U) + (XA_3).(P_3U)\}.\end{gathered}} \tag{23}$$

Es folgt aber jetzt

$$\boxed{(SX)^3 = 0, \qquad (\Sigma U)^3 = 0.} \tag{24}$$

Fig. 5.



Umgekehrt ist das Bestehen einer jeden dieser identischen Gleichungen eine Form der Bedingung dafür, daß unter den Potenzen T^0, T^1, ... **höchstens** zwei linear unabhängige sind. Grad und Art der Unbestimmtheit der Vektoren A_k, P_k sind jetzt gegeben durch die Gruppe

$$\begin{aligned} \varrho\,.\,A_1 &= A_1^*, & \varrho^{-1}.\,P_1 &= P_1^*, \\ \sigma\cdot\{\lambda_{22}A_2 + \lambda_{23}A_3\} &= A_2^*, & \sigma^{-1}\cdot\{\ \lambda_{33}P_2 - \lambda_{32}P_3\} &= P_2^*, \\ \sigma\cdot\{\lambda_{32}A_2 + \lambda_{33}A_3\} &= A_3^*, & \sigma^{-1}\cdot\{-\lambda_{23}P_2 + \lambda_{22}P_3\} &= P_3^*. \end{aligned} \tag{25}$$

$$\{\varrho \neq 0, \quad \sigma \neq 0, \quad \lambda_{22}\lambda_{33} - \lambda_{23}\lambda_{32} = 1\}.$$

II b)

Im Falle einer dreifachen Wurzel der charakteristischen Gleichung von F liegen außer der unter **I c)** beschriebenen Möglichkeit noch zwei weitere vor, deren erste darin besteht, daß die unter **I c)** mit E_2 bezeichnete bilineare Form identisch verschwindet, E_1 aber nicht. Man hat dann neben (13) schon die Gleichung

$$\boxed{(T - \mathsf{\Lambda}\,\mathsf{E})^2 = 0.} \tag{26}$$

Man kommt zu dem jetzt vorliegenden Fall auch von **Ib)** aus, wenn man $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}$ werden läßt. Man erhält, wenn (wie unter **Ic)**

$$(27) \qquad \mathbf{E}_0 = (T - \mathbf{\Lambda}\,\mathbf{E})^0, \qquad \mathbf{E}_1 = (T - \mathbf{\Lambda}\,\mathbf{E})^1$$

gesetzt wird

$$(28) \qquad \begin{aligned} T^0 &= \mathbf{E}_0, \\ T^1 &= \mathbf{\Lambda}\,.\,\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1, \\ T^2 &= \mathbf{\Lambda}^2.\,\mathbf{E}_0 + 2\,\mathbf{\Lambda}\,.\,\mathbf{E}_1, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{E}_1$ können in die Form

$$(29) \qquad \boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= (X A_1).(P_1 U) + (X A_2).(P_2 U) + (X A_3).(P_3 U), \\ \mathbf{E}_1 &= (X A_2).(P_3 U) \end{aligned}}$$

übergeführt werden (vgl. Nr. 17), so daß

$$(30) \qquad \boxed{(X A)(P U) = \mathbf{\Lambda}.(X U) + (X A_2).(P_3 U)}$$

wird. Die Unbestimmtheit der Vektoren A_k, P_k ist gegeben durch die Gruppe

$$(31) \qquad \begin{aligned} \varrho.(A_1 + \lambda A_2) &= A_1^*, \\ \sigma.A_2 &= A_2^*, \\ \sigma.(-\mu A_1 + \alpha A_2 + A_3) &= A_3^*, \\ \varrho^{-1}.(P_1 + \mu P_3) &= P_1^*, \\ \sigma^{-1}.(-\lambda P_1 + P_2 + \beta P_3) &= P_2^*, \\ \sigma^{-1}.P_3 &= P_3^*. \\ \{\varrho, \sigma \neq 0,\ \ \lambda\mu + \alpha + \beta &= 0\}. \end{aligned}$$

Schließlich ist noch übrig der triviale Fall

III.

$$(32) \qquad \boxed{T - \mathbf{\Lambda}\,\mathbf{E} = 0, \qquad T = \mathbf{\Lambda}(X U),}$$

in dem alle Potenzen von T von einer einzigen, $T^0 = \mathbf{E}$, linear abhängig sind. Natürlich muß dann $\mathbf{\Lambda}$ von Null verschieden sein, wenn T nicht das Koeffizientensystem Null haben, also nicht nur der Form nach existieren soll.

Die aufgezählten Fälle bilden eine vollständige Disjunktion. Jede der aufgezählten „Familien" von Formen $F = (XA)(PU)$ umfaßt unendlich viele Formen, und zwar sind die zugehörigen Konstantenzahlen, wie man leicht ermittelt, die in der folgenden Tabelle zuerst angeführten Zahlen:

Ia	Ib	Ic	IIa	IIb	III
9	8	7	6	5	1
3	2	1	2	1	1

In der zweiten Zeile dieser Tafel steht die Zahl der unabhängigen absoluten Invarianten der aufgezählten Formen.

Wie in dem sogenannten allgemeinen Falle **Ia)** (dem höchster Dimensionenzahl) entscheidet man leicht über die Äquivalenz der angeführten Formen gegenüber Transformationen der Gruppen G, Γ, $\mathfrak{G}$. Namentlich ist für Äquivalenz zweier bilinearer Formen $(XA)(PU)$ und $(XB)(QU)$ gegenüber G notwendig und hinreichend ihre Zugehörigkeit zu derselben Familie **Ia)** ... **III**, verbunden mit Gleichheit der entsprechenden Invarianten.

Eine besonders wichtige Familie linearer Transformationen vom Typus $\mathfrak{T}$ bilden die periodischen, die also, die nach wiederholter Anwendung die identische Transformation ($\mathfrak{E}$) hervorbringen. Sie alle lassen sich (auch für eine unbestimmte Stufenzahl) leicht aufzählen und klassifizieren. Wir behandeln kurz den einfachsten Fall, weil wir es mit diesem später noch zu tun haben werden.

Involutorisch heißt eine lineare Transformation, die von der identischen Transformation verschieden ist, aber bei zweimaliger Anwendung die identische Transformation liefert. Die involutorischen linearen Transformationen eines ternären Gebietes gehören notwendig zu bilinearen Formen, deren kubische Kovariante identisch gleich Null ist. Damit ist unsere Familie **I** bilinearer Formen ausgeschlossen, und da auch die Familien **II b)** und **II c)** keine involutorischen Transformationen liefern, so gehören diese alle zum Typus **IIa)**, und zwar müssen nach Formel (22) die Wurzeln $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}$ der charakteristischen Gleichung entweder die Werte 1, — 1, — 1 oder die Werte — 1, 1, 1 haben. Die involutorischen linearen Transformationen eines Gebietes dritter Stufe können daher erschöpfend als eigentliche und uneigentliche Transformationen derart klassifiziert werden, je nachdem die Transformationsdiskriminante

(Determinante) den Wert 1 oder den Wert — 1 hat. Jede von beiden Arten bildet eine Klasse untereinander äquivalenter Transformationen gegenüber der Gruppe G. Dagegen gibt es, wie man sofort sieht, in der Ebene (der projektiven Geometrie) nur eine einzige Klasse involutorischer Kollineationen, die äquivalent sind gegenüber der Gruppe $\mathfrak{G}$ aller Kollineationen. Entsprechend verhalten sich die bilinearen Formen, die als Symbole der involutorischen Transformationen dienen.

Da beide Klassen spezieller bilinearer Formen vom Typus $(XA)(PU)$ oder $(XC)(\Gamma U)$ durch einen Vorzeichenwechsel ineinander übergehen, so können sie zusammen behandelt werden. Wir lassen im folgenden die oberen Vorzeichen den eigentlichen, die unteren den uneigentlichen Transformationen oder Formen entsprechen. Für beide Klassen ist dann, nach der Definition unserer Transformationen,

$$(33) \qquad T \neq \mathsf{E}, \quad T^2 - \mathsf{E} = 0; \qquad \mathsf{T} \neq \mathsf{H}, \quad \mathsf{T}^2 - \mathsf{H} = 0.$$

Es ist also, da $J \neq 0$,

$$T = T^{-1}, \quad \mathsf{T} = \mathsf{T}^{-1},$$

und

$$\mathsf{T} = T', \qquad T = \mathsf{T}'.$$

Ferner ist für beide Klassen,

$$(SX)^3 = 0, \quad (\Sigma U)^3 = 0. \quad |X, U|.$$

Weiter hat man

$$(34) \qquad J_1 = \mp 1, \quad J_2 = 0, \quad J_3 = \pm 1.$$

Ferner sind, wenn P einen Vektor erster Schicht und A einen Vektor zweiter Schicht bezeichnet und (AP) von Null verschieden ist, bei übrigens völlig beliebigen A und P die folgenden bilinearen Formen Symbole kontragredienter involutorischer Transformationen T, T:

$$(35) \qquad \boxed{\begin{aligned} &(XC)(\Gamma V) = (XD)(\varDelta V) = \\ &= \pm \frac{2(XA).(PV) - (AP).(XV)}{(AP)}, \\ &(U\Gamma)(CY) = (U\varDelta)(DY) = \\ &= \pm \frac{2(UP).(AY) - (AP).(UY)}{(AP)}, \end{aligned}}$$

und zwar kann jede Transformation T oder T im wesentlichen auf eine Weise so dargestellt werden. „Im wesentlichen“ heißt natürlich, daß proportionale Änderungen der Koordinaten von A oder P nicht in Betracht kommen. Auf einen ausgeführten Beweis darf wohl verzichtet werden, da der Leser ihn leicht selbst finden wird.

Aus allem Gesagten folgt noch, daß für beide Arten involutorischer Transformationen

$$(36) \qquad \begin{array}{ll} |T+\mathbf{E}| = 0, & |\mathbf{T}+\mathbf{H}| = 0, \\ |T-\mathbf{E}| = 0, & |\mathbf{T}-\mathbf{H}| = 0 \end{array}$$

ist. Die hier angeführten Formeln (35) und (36) werden wir später zu verwenden haben.

Ein anderes hierher gehöriges und ebenfalls sehr einfaches Ergebnis ist:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Kollineation $(XC)(\Gamma U) = 0$ in der Ebene perspektiv ist, besteht in dem identischen Verschwinden ihrer kubischen Kovarianten. Die charakteristische Gleichung der Form $(XC)(\Gamma U)$ hat dann mindestens eine Doppelwurzel, und zwar tritt der Fall der dreifachen Wurzel dann ein, wenn es sich um eine sogenannte projektive Schiebung handelt.

Die Klassifikation der Formen $(XA)(PU)$ oder $(XC)(\Gamma U)$, zu der wir hier gekommen sind, stimmt, wie es zu verlangen ist, überein mit der, die aus der Theorie der Elementarteiler abgeleitet zu werden pflegt. Wir verweisen hier insbesondere auf die Einführung in die höhere Algebra von M. Bôcher (Deutsch von H. Beck, 1910), wo die einzelnen Familien genau so bezeichnet sind wie hier. Man findet dort (S. 313) daneben die sogenannte Charakteristikenbezeichnung derselben Familien zusammengestellt in der Tabelle

	a	b	c
I . .	[111]	[(11)1]	[(111)]
II . .	[21]	[(21)]	
III . .	[3]		

§ 19.

Ternäre bilineare Formen mit kogredienten Veränderlichen. Automorphe Transformationen quadratischer Formen.

Halten wir an unserer bisherigen Annahme $n = 3$ fest, betrachten wir aber nunmehr eine bilineare Form des Typus

$$F = (XA)(BY),$$

oder eine Form von kontragredientem Typus, so haben wir ein von dem vorigen völlig verschiedenes Problem vor uns, wenn auch hier die Frage nach einem „vollständigen Formensystem" von F (nach Invarianten des Kernes von F und zweier Vektoren X und U gegenüber der Gruppe G) gestellt werden soll. Unsere nunmehrige Aufgabe aber ist einfacher als die soeben behandelte, sie läßt sich im Augenblick erledigen. Setzen wir nämlich $(LZ)^2 = (AZ)(BZ)$, also

(1) $$(XL)(LY) = \tfrac{1}{2}\{(XA)(BY) + (XB)(AY)\},$$

und

(2) $$(QU) = -\tfrac{1}{2}(ABU),$$

so haben wir in der Formel

(3) $$(XA)(BY) = (XL)(LY) + (XQY)$$

eine invariante Zerlegung der Form F vor uns (vgl. S. 117), derzufolge sogar in einem System, das außer dem Kern von F noch beliebig viele Vektoren $X_1 \ldots X_\mu$, $U_1 \ldots U_\nu$ umfaßt, sich ein vollständiges und kleinstes System ganzer rationaler Invarianten sogleich hinschreiben läßt. Man hat nämlich nur den genannten Vektoren die Kerne der beiden Formen

$$(QU), \quad (LZ)^2$$

hinzuzufügen. Da die erste von diesen selbst linear, die zweite aber eine quadratische Form ist, so ist damit die vorgelegte Aufgabe auf eine schon erledigte zurückgeführt (S. 134 bis 140). Namentlich wird jede ganze rationale Invariante des Kernes von F und der Vektoren X und U eine ganze rationale Funktion der Formen

(4) $$\boxed{\begin{gathered}(XU), \quad (QU), \quad (LX)^2,\\ (XL)(LQ)(QU), \quad (LQ)^2, \quad (\Phi U)^2 = \tfrac{1}{2}(LL'U)^2,\\ (XQ\Phi)(\Phi U), \quad (\Phi QX)^2,\\ J = \tfrac{1}{3}(L\Phi)^2 = \tfrac{1}{6}(LL'L'')^2.\end{gathered}}$$

Fragt man, wie es sachgemäß ist, nach allseitig-homogenen Invarianten und Kovarianten, so muß eine ganze rationale Funktion der Formen (4), wenn sie eine Invariante oder Kovariante der Form F sein soll, in bezug auf die Kerne von $(LX)^2$ und (QU) in allen ihren Gliedern denselben Gesamtgrad aufweisen. Zum Beispiel ist

$$(XQ\Phi)(\Phi U) + J.(XU)$$

eine allseitig-homogene Kovariante von F, wiewohl sie im System der Kerne von $(\Phi U)^2$, (QU) nicht homogen ist, und also im System allseitig-homogener Invarianten des Kernes von $(\Phi U)^2$ und der Vektoren Q, X, U nicht vorkommt.

Die Beispiele der Kovariante $\frac{1}{2}(AA'U)(BB'V)$ und der Invariante (Diskriminante von F) $\frac{1}{6}(AA'A'')(BB'B'')$ mögen zeigen, wie man aus F und anderen Formen abgeleitete Invariantenbildungen durch solche ersetzen kann, in denen die Formen (4) und einfache Derivate von ihnen vorkommen.

Man erhält der Reihe nach die Umformungen:

$$\begin{aligned}(AA'U)(BB'V) &= (LA'U)(LB'V) + (\overparen{AU}\,Q\,\overparen{BV}) = \\ &= (LAU)(LBV) - (AQ)(BUV) - (UQ)(ABV) = \\ &= \{(LL'U)(LL'V) - (LQ)(LUV)\} - \\ &- (LQ)(LUV) + 2.(UQ).(VQ);\end{aligned}$$

damit hat man die Formel

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}(UAA')(BB'V) = \\ &= (U\Phi)(\Phi V) + (UQ).(QV) - (LQ)(LUV).\end{aligned} \tag{5}$$

Ebenso ergibt sich schließlich

$$\tfrac{1}{6}(AA'A'')(BB'B'') = J + (LQ)^2. \tag{6}$$

Es kann zweckmäßig sein, an Stelle der Formen (4) andere zu benutzen, die dasselbe leisten, was auf mannigfache Art ausführbar ist. So zeigen die Gleichungen (5) und (6), daß man an Stelle von $(\Phi U)^2$ und J auch $\frac{1}{2}(AA'U)(BB'U)$ und $\frac{1}{6}(AA'A'')(BB'B'')$ einführen kann.

An das Formensystem (4) ließe sich nun eine Untersuchung knüpfen, ähnlich der, die wir in den Paragraphen 16 bis 18 angestellt hatten, und deren Ziel die Lösung des zur Gruppe G gehörigen Äquivalenzproblems für Formen des Typus $(XA)(BY)$ sein würde. Ich wünsche indessen den Leser nicht zu ermüden und werde daher die angestellten Betrachtungen in einer anderen Richtung fortsetzen. Es soll gezeigt werden, wie man, ausgehend von der Zerlegung (3) der bilinearen Form F in eine symmetrische und eine alternierende bilineare Form unter gewissen Voraussetzungen zu einer Darstellung aller automorphen linearen Transformationen einer ternären quadratischen Form gelangen kann. Ein Teil der hierzu nötigen Überlegungen ist unabhängig von der Stufenzahl des betrachteten Gebietes; daher lassen wir die Annahme $n = 3$ zunächst wieder fallen.

Es sei also die Stufenzahl n bis auf weiteres wieder beliebig, und es soll, wie früher (S. 126), ein Paar kontragredienter linearer

Transformationen T, T [1]) durch ein einziges Zeichen $\mathfrak{T} = (T, \mathsf{T})$ zusammengefaßt werden. Man hat dann

$$(7)\qquad \begin{aligned} T' &= \mathsf{T}^{-1}, \quad T T^{-1} = T^{-1} T = E, \\ \mathsf{T}' &= T^{-1}, \quad \mathsf{T}\mathsf{T}^{-1} = \mathsf{T}^{-1}\mathsf{T} = \mathsf{H} \end{aligned}$$

(S. 125, 126). Ferner sollen auch die kontragredienten Transformationen S, Σ, deren jede beide Schichten von Vektoren vertauscht, durch ein gemeinsames Zeichen $\mathfrak{S} = (S, \Sigma)$ zusammengefaßt werden [1]), so daß

$$(8)\qquad \begin{aligned} S' &= \Sigma^{-1}, \quad S S^{-1} = \Sigma^{-1}\Sigma = E, \\ \Sigma' &= S^{-1}, \quad \Sigma\Sigma^{-1} = S^{-1} S = \mathsf{H}. \end{aligned}$$

Die Bedingung dafür, daß $\mathfrak{S}$ bei $\mathfrak{T}$ in Ruhe bleibt (oder umgekehrt $\mathfrak{T}$ bei $\mathfrak{S}$) ist dann

$$(9)\qquad \mathfrak{S}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}\mathfrak{S},$$

das heißt

$$(10)\qquad S\mathsf{T} = TS, \quad \Sigma T = \mathsf{T}\Sigma.$$

(Nr. 18, S. 126). Eine Transformation $\mathfrak{T}$, die die Bedingung (9) erfüllt, ist nun augenscheinlich $\mathfrak{S}^2$, dargestellt durch das folgende Paar kontragredienter Transformationen

$$(11)\qquad T = S\Sigma, \quad \mathsf{T} = \Sigma S\text{ [2]}.$$

In der Tat stehen diese beiden Transformationen in der unter (7) angegebenen Beziehung; denn es ist

$$T' = \Sigma' S' = S^{-1}\Sigma^{-1},$$

also

$$(T')^{-1} = \Sigma S = \mathsf{T}, \text{ usw.},$$

während die Selbstverständlichkeit

$$\mathfrak{S}^{-2}\mathfrak{S}\mathfrak{S}^2 = \mathfrak{S} \text{ oder } \mathfrak{S}\mathfrak{S}^2 = \mathfrak{S}^2\mathfrak{S}$$

durch die Formeln übersetzt wird

$$S.\Sigma S = S\Sigma.S, \quad \Sigma.S\Sigma = \Sigma S.\Sigma.$$

[1]) In der früher (S. 125) angewandten deutlicheren Bezeichnungsart ist

$$\begin{aligned} T &= (XC)(\Gamma V), & \mathsf{T}^{-1} &= (U\Gamma)(CY), \\ T^{-1} &= (XD)(\Delta V), & \mathsf{T} &= (U\Delta)(DY), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} S &= (XA)(BY), & \Sigma^{-1} &= (XB)(AY), \\ S^{-1} &= (UQ)(PV), & \Sigma &= (UP)(QV). \end{aligned}$$

[2]) Ausführlich:

$$S\Sigma = (XA)(BP)(QV), \quad \Sigma S = (UP)(QA)(BY).$$

Es werde nun S in eine symmetrische Form $S_0 = \frac{1}{2}(S + S')$, und eine alternierende Form $S_1 = \frac{1}{2}(S - S')$ zerlegt,

$$S = S_0 + S_1, \quad S' = S_0 - S_1. \tag{12}$$

Da die Zerlegung invariant ist, nicht nur gegenüber der Gruppe G, sondern auch noch gegenüber der zugehörigen erweiterten Gruppe, die auch lineare Transformationen mit Vertauschung der beiden Schichten umfaßt, so folgt nunmehr, unter der Voraussetzung, daß die gemeinsame Diskriminante $|S| = |S'|$ von S und S' von Null verschieden ist, also unter der Voraussetzung

$$\{|S_0 + S_1| = |S_0 - S_1|\} \neq 0, \tag{13}$$

daß die (nach Nr. 13) der Gruppe Γ angehörige Transformation ($X \longrightarrow \underline{X}$, $Y \longrightarrow \underline{Y}$), deren Symbol

$$T = (S_0 + S_1)(S_0 - S_1)^{-1}$$

ist, nicht nur die bilineare Form $S_0 + S_1$, sondern auch ihre einzelnen Bestandteile S_0 und S_1 in Ruhe läßt.

T ist also eine automorphe lineare Transformation aller Formen des Büschels $\lambda S_0 + \mu S_1$, und insbesondere eine automorphe Transformation von S_0; und zwar ist T eine eigentliche automorphe Transformation von S_0, wenn als „eigentlich“ eine automorphe Transformation von der Diskriminante Eins erklärt wird. Außerdem folgt noch, daß die zu T kontragrediente Transformation, die zu dem Symbol

$$\mathsf{T} = (S_0 - S_1)^{-1}(S_0 + S_1)$$

gehört, die auf Seite 107 erklärte Kovariante von S_0 und also, wenn $|S_0| \neq 0$ ist, auch die zu S_0 kontragrediente Form Σ_0 in Ruhe lassen muß.

Es besteht also nicht nur die Gleichung $S\mathsf{T} = TS$ (Nr. 10), die sich auf die triviale Identität

$$(S_0 + S_1) . (S_0 - S_1)^{-1}(S_0 + S_1) = (S_0 + S_1)(S_0 - S_1)^{-1} . (S_0 + S_1)$$

reduziert, sondern es bestehen auch die inhaltsreicheren Gleichungen

$$S_0 \mathsf{T} = T S_0, \quad S_1 \mathsf{T} = T S_1, \tag{14}$$

deren erste,

$$S_0 (S_0 - S_1)^{-1}(S_0 + S_1) = (S_0 + S_1)(S_0 - S_1)^{-1} S_0$$

gleichbedeutend ist mit

$$T^{-1} S_0 \mathsf{T} = S_0 \tag{15}$$

oder mit der Gleichung

$$(S_0 - S_1)(S_0 + S_1)^{-1} . S_0 . (S_0 - S_1)^{-1}(S_0 + S_1) = S_0.$$

Diese Formeln kann man, beiläufig bemerkt, leicht verifizieren, wenn man annimmt, daß außer (13) auch die Ungleichung $|S_0| \neq 0$ stattfindet. Es erweisen sich dann nämlich als gleichbedeutend mit der Gleichung (14), der Reihe nach, die Gleichungen

$$\begin{gathered}\{E - S_1 S_0^{-1}\}^{-1}(S_0 + S_1) = (S_0 + S_1)\{\mathsf{H} - S_0^{-1} S_1\}^{-1},\\ (S_0 + S_1)\{\mathsf{H} - S_0^{-1} S_1\} = \{E - S_1 S_0^{-1}\}(S_0 + S_1),\\ (S_0 + S_1) S_0^{-1} S_1 = S_1 S_0^{-1}(S_0 + S_1),\\ \{E + S_1 S_0^{-1}\} S_1 = S_1\{\mathsf{H} + S_0^{-1} S_1\},\\ S_1 S_0^{-1} . S_1 = S_1 . S_0^{-1} S_1,\end{gathered}$$

deren letzte eine triviale Identität ist [1]).

Es erhebt sich nunmehr die Frage: Läßt sich jede eigentliche automorphe lineare Transformation einer symmetrischen bilinearen Form S_0 oder (was dasselbe ist) einer quadratischen Form, auf die gefundene Art darstellen? Oder, wenn nicht, unter welchen Bedingungen ist die Darstellung möglich? Und wie wird dann eine so darstellbare Transformation $\mathfrak{T}$, d. h., das zugehörige Formenpaar T, T in die Gestalt

$$\boxed{\begin{aligned} T &= (S_0 + S_1)\quad(S_0 - S_1)^{-1},\\ \mathsf{T} &= (S_0 - S_1)^{-1}(S_0 + S_1)\end{aligned}} \tag{16}$$

gesetzt werden können?

Um hierauf eine Antwort zu finden, wird man versuchen müssen, die Gleichungen (16), wenn T oder, was auf dasselbe hinausläuft, T gegeben ist, nach S_1 aufzulösen. Das aber ist, wenn überhaupt ausführbar, eine leichte Sache. Unter der Annahme (13), also unter der Voraussetzung der Darstellbarkeit von T und T durch die Formeln (16), folgt nämlich

$$\begin{aligned} T(S_0 - S_1) &= S_0 + S_1,\\ (S_0 - S_1)\mathsf{T} &= S_0 + S_1,\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} (T - E) S_0 &= (T + E) S_1,\\ S_0(\mathsf{T} - \mathsf{H}) &= S_1(\mathsf{T} + \mathsf{H});\end{aligned}$$

[1]) Durch Umkehrung der Reihenfolge der Rechnung und einen Grenzübergang läßt sich das Bestehen der Gleichungen (14) auch allgemein begründen. Aber auf eine solche Überlegung würde man nicht leicht verfallen, wenn man die Gleichungen (14) nicht schon kennte. Diese Art der Beweisführung wäre also ein sogenannter Mausefallenbeweis.

es folgt also, wenn $|T+E| \neq 0$ ist,

(17)
$$\boxed{S_1 = \frac{T-E}{T+E} S_0,}$$

und, wenn $|\mathsf{T}+\mathsf{H}| \neq 0$ ist, ebenso

(18)
$$\boxed{S_1 = S_0 \frac{\mathsf{T}-\mathsf{H}}{\mathsf{T}+\mathsf{H}}.}$$

(Vgl. S. 123.) Es ist nun aber, immer unter der Annahme (13)

$$\begin{gathered} T + E = (S_0 + S_1)(S_0 - S_1)^{-1} + E = \\ = \{(S_0 + S_1) + (S_0 - S_1)\}(S_0 - S_1)^{-1} = 2\, S_0 (S_0 - S_1)^{-1}, \\ \mathsf{T} + \mathsf{H} = \mathsf{H} + (S_0 - S_1)^{-1}(S_0 + S_1) = \\ = (S_0 - S_1)^{-1}\{(S_0 - S_1) + (S_0 + S_1)\} = 2 (S_0 - S_1)^{-1} S_0, \end{gathered}$$

und also

(19)
$$|T+E| = \frac{2^n \cdot |S_0|}{|S_0 \pm S_1|} = |\mathsf{T}+\mathsf{H}|.$$

Wenn $|S_0| \neq 0$ ist, so existieren mithin beide Darstellungen der alternierenden Form S_1, wenn überhaupt, immer zugleich.

Aus dem Gesagten kann noch geschlossen werden, daß im Falle einer uneigentlichen automorphen Transformation von S_0 immer

$$|T+E| = 0, \quad |\mathsf{T}+\mathsf{H}| = 0$$

ist. Wäre nämlich z. B. $|T+E| \neq 0$, so könnten wir eine Form S_1 durch die Gleichung (17) erklären. Zugleich hätten wir, nach (14), $S_0 = T\, S_0\, T'$. Diese letzte Gleichung kann nun aber auch in der Form

$$\frac{T-E}{T+E} S_0 + S_0 \frac{T'-\mathsf{H}}{T'+\mathsf{H}} = 0,$$

d. h.

$$S_1 + S'_1 = 0$$

geschrieben werden, woraus wieder

$$T = (S_0 + S_1)(S_0 - S_1)^{-1},$$

also $|T| = 1$ folgt, im Widerspruch zu der Annahme, daß T eine uneigentliche Transformation sein sollte.

Dem Vorgetragenen entnehmen wir den Lehrsatz:

I. Ist $S_0 \{= (XL)(LY)\}$ eine nicht-singuläre symmetrische bilineare Form und $T \{= (XC)(\Gamma V)\}$ das Symbol einer eigentlich-automorphen Transformation $\{X \to X, \ Y \to \underline{Y}\}$ von S_0, so kann T immer dann, und nur dann, wenn

$$|T + E| \neq 0$$

ist, mit Hilfe einer geordneten (und übrigens nicht notwendig von Null verschiedenen) alternierenden Form S_1 in die Gestalt

$$T = (S_0 + S_1)(S_0 - S_1)^{-1}$$

übergeführt werden, und zwar auf eine einzige Weise. Es ist dann nämlich

$$S_1 = \frac{T - E}{T + E} S_0.$$

Umgekehrt liefert jede geordnete alternierende Form S_1 (mit Einschluß der Null), für die

$$\{|S_0 + S_1| = |S_0 - S_1|\} \neq 0$$

ist, und nur eine solche, eine Form T, die als Symbol einer eigentlich-automorphen Transformation von S_0 betrachtet werden kann[1]).

Ist nämlich $T = (XC)(\Gamma V)$ und

$$(XC)\Gamma = \underline{X}, \quad (YC)\Gamma = \underline{Y},$$

so folgt

$$(XL)(LY) = (\underline{X}L)(L\underline{Y}),$$

und es ist überdies

$$|T| = 1.$$

Es ist aber durch das Vorhergehende auch schon der folgende inhaltsreichere Satz erwiesen, der der Unterscheidung zweier Schichten von Vektoren Rechnung trägt:

II. Es seien

$$S_0 = (XL)(LY), \quad \Sigma_0 = (UA)(AV)$$

[1]) S. Frobenius, Journ. f. Math., **84**, 37, 1878, Lehrsätze I und III. Der hier zugrunde liegende Gedanke rührt, soviel ich weiß, von Cayley her, der ihn indessen fehlerhaft abgefaßt hat. Erst Frobenius hat die Sache in Ordnung gebracht. Der von diesem Autor sehr betonte weitere Lehrsatz jedoch, daß die durch $|T + E| = 0$ ausgeschlossenen eigentlichen Transformationen Grenzfälle von solchen sind, für die $|T + E| \neq 0$ ist, scheint mir trivial zu sein. Auch wird, nach meinem Dafürhalten, die Frage nach einer brauchbaren Parameterdarstellung der automorphen Transformationen T durch die von Frobenius (in § 11 der zitierten Arbeit) angestellte Untersuchung ihrer Beantwortung nicht näher gebracht.

zwei zueinander kontragrediente symmetrische (und also auch reziproke) Formen, so daß

(a) $$S_0' = S_0,\ \Sigma_0' = \Sigma_0,\ S_0\Sigma_0 = E,\ \Sigma_0 S_0 = \mathsf{H}.$$

Es sei ferner $\mathfrak{T} = (T, \mathsf{T})$ ein Paar kontragredienter eigentlich-automorpher Transformationen des Formenpaars $\mathfrak{S}_0 = (S_0, \Sigma_0)$, entsprechend den Symbolen

$$T = (XC)(\Gamma V),\quad \mathsf{T} = (U\Delta)(DY),$$

so daß

(b) $$T' = \mathsf{T}^{-1},\quad \mathsf{T}' = T^{-1},\quad |T| = 1 = |\mathsf{T}|$$

und

(c) $$T^{-1} S_0 \mathsf{T} = S_0,\quad \mathsf{T}^{-1}\Sigma_0 T = \Sigma_0$$

ist, und daß demnach die geordneten Formen T und T durch $\mathfrak{S}_0$ gepaart werden:

(c*) $$\mathsf{T} = \Sigma_0 T S_0,\quad T = S_0 \mathsf{T} \Sigma_0.$$

Entsprechende Invarianten (der Gruppe G) von T und T sind dann einander gleich, und insbesondere ist

(d) $$|T + E| = |\mathsf{T} + \mathsf{H}|.$$

Ist nun diese Invariante von Null verschieden, so lassen sich zwei ebenfalls durch $\mathfrak{S}_0$ {nach der Regel

(e) $$\Sigma_1 = \Sigma_0 S_1 \Sigma_0,\quad S_1 = S_0 \Sigma_1 S_0\}$$

gepaarte alternierende Formen[1])

(f) $$S_1 = \frac{T - E}{T + E} S_0 = S_0 \frac{\mathsf{T} - \mathsf{H}}{\mathsf{T} + \mathsf{H}},$$
$$\Sigma_1 = \frac{\mathsf{T} - \mathsf{H}}{\mathsf{T} + \mathsf{H}} \Sigma_0 = \Sigma_0 \frac{T - E}{T + E}$$

finden, deren Invariante

(g) $$\frac{|S_0 \pm S_1|}{|S_0|} = |E \pm S_1 \Sigma_0| = |E \pm S_0 \Sigma_1| =$$
$$= \frac{|\Sigma_0 \pm \Sigma_1|}{|\Sigma_0|} = |\mathsf{H} \pm \Sigma_1 S_0| = |\mathsf{H} \pm \Sigma_0 S_1|$$

den Wert

$$\frac{2^n}{|T + E|} = \frac{2^n}{|\mathsf{T} + \mathsf{H}|}$$

hat und also von Null verschieden ist.

[1]) Siehe die Bemerkung am Ende des Lehrsatzes.

Mit Hilfe dieser geordneten Formen S_1, Σ_1 lassen sich dann T und T wie folgt ausdrücken:

$$
\text{(h)}\qquad
\begin{aligned}
T &= \begin{cases} = (S_0 + S_1)(S_0 - S_1)^{-1} \\[4pt] = \dfrac{E + S_1 \Sigma_0}{E - S_1 \Sigma_0} = \dfrac{E + S_0 \Sigma_1}{E - S_0 \Sigma_1} \\[4pt] = (\Sigma_0 - \Sigma_1)^{-1}(\Sigma_0 + \Sigma_1), \end{cases} \\
\mathsf{T} &= \begin{cases} = (\Sigma_0 + \Sigma_1)(\Sigma_0 - \Sigma_1)^{-1} \\[4pt] = \dfrac{\mathsf{H} + \Sigma_1 S_0}{\mathsf{H} - \Sigma_1 S_0} = \dfrac{\mathsf{H} + \Sigma_0 S_1}{\mathsf{H} - \Sigma_0 S_1} \\[4pt] = (S_0 - S_1)^{-1}(S_0 + S_1). \end{cases}
\end{aligned}
$$

Umgekehrt kann man die eine oder andere der Formen S_1, Σ_1 willkürlich annehmen, so jedoch, daß die entsprechende Invariante $|S_0 + S_1|$, $|\Sigma_0 + \Sigma_1|$ nicht verschwindet. Dadurch sind dann T und T so bestimmt, daß alle hier aufgezählten symbolischen Gleichungen erfüllt werden.

Wie zuvor, muß zu den alternierenden Formen hier auch die Null gerechnet werden, die der Annahme $\mathfrak{T} = \mathfrak{E}$, d. h. $T = E$, $\mathsf{T} = \mathsf{H}$ entspricht.

Zur weiteren Verdeutlichung soll schließlich der Satz II noch in eine andere Form gegossen werden, die ebenfalls Interesse haben dürfte:

III. Es sei $\mathfrak{T} = (T, \mathsf{T})$ ein Paar kontragredienter eigentlich-automorpher Transformationen des Paares $\mathfrak{S}_0 = (S_0, \Sigma_0)$ reziproker symmetrischer Formen, so daß die Beziehungen (a), (b), (c) bestehen, und außerdem die Invariante

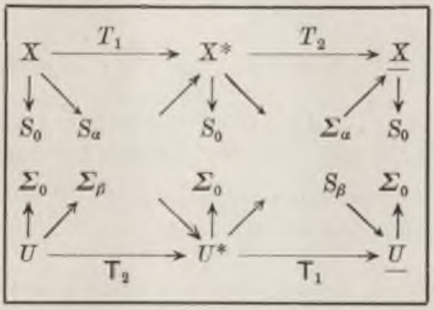
$$|T + E| = |\mathsf{T} + \mathsf{H}|$$

von Null verschieden ist. Es mögen ferner durch $\mathfrak{T}$ den Vektoren X und U die Vektoren $\underline{X}$ und $\underline{U}$ zugeordnet werden, und es seien überdies X und U so gewählt, daß sie (und also auch $\underline{X}$ und $\underline{U}$) einander in der Transformation entsprechen, die zu $\mathfrak{S}_0$ gehört. Ist dann X^* das arithmetische Mittel der Vektoren X und $\underline{X}$, U^* das arithmetische Mittel von U und $\underline{U}$,

$$(\alpha)\qquad X^* = \frac{X + \underline{X}}{2}, \qquad U^* = \frac{U + \underline{U}}{2},$$

so sind sämtliche durch die folgende Figur dargestellten Zuordnungen umkehrbar, sie sind also (lineare) Transformationen:

(β)



Wie die benutzten Zeichen es andeuten, sind dann

$$\mathfrak{S}_\alpha = (S_\alpha, \Sigma_\alpha), \quad \mathfrak{S}_\beta = (S_\beta, \Sigma_\beta),$$
$$\mathfrak{T}_1 = (T_1, \mathsf{T}_1), \quad \mathfrak{T}_2 = (T_2, \mathsf{T}_2)$$

Paare kontragredienter Transformationen, und

$$S_\alpha, \Sigma_\beta, \qquad S_\beta, \Sigma_\alpha,$$
$$T_1, \mathsf{T}_2, \qquad T_2, \mathsf{T}_1$$

werden durch die Transformationen

$$\mathfrak{S}_0 = (S_0, \Sigma_0)$$

gepaart. Ferner ist, wie die Figur es ebenfalls erkennen läßt,

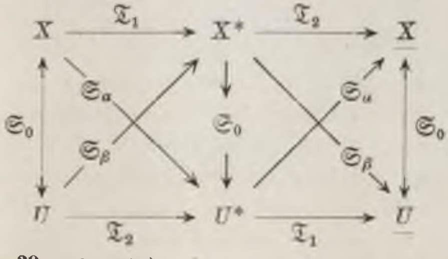
$$\mathfrak{T} = \mathfrak{S}_\alpha^2 = \mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{S}_\beta^2,$$

oder ausführlicher:

$$(\gamma) \qquad \boxed{\begin{aligned} T &= S_\alpha \Sigma_\alpha = T_1 T_2 = T_2 T_1 = S_\beta \Sigma_\beta, \\ \mathsf{T} &= \Sigma_\beta S_\beta = \mathsf{T}_2 \mathsf{T}_1 = \mathsf{T}_1 \mathsf{T}_2 = \Sigma_\alpha S_\alpha. \end{aligned}} \;[1]$$

---

[1] Man kann übrigens das Schema des Textes durch ein einfacheres, aber auch schon vollkommen deutliches ersetzen:



(S. Math. Ann. **39**, 508, 1891).

Wird dann

$$
(\delta) \qquad
\begin{aligned}
S_1 &= \frac{T-E}{T+E}\, S_0 = S_0 \frac{\mathsf{T}-\mathsf{H}}{\mathsf{T}+\mathsf{H}}, \\
\Sigma_1 &= \frac{\mathsf{T}-\mathsf{H}}{\mathsf{T}+\mathsf{H}}\, \Sigma_0 = \Sigma_0 \frac{T-E}{T+E}
\end{aligned}
$$

gesetzt, so sind S_1 und Σ_1 zwei durch $\mathfrak{S}_0 = (S_0, \Sigma_0)$ gepaarte alternierende Formen, die der Einschränkung

$$\left\{ \frac{|S_0 + S_1|}{|S_0|} = \frac{|\Sigma_0 + \Sigma_1|}{|\Sigma_0|} \right\} \neq 0$$

unterliegen, von denen aber die eine sonst beliebig angenommen werden darf.

Von den Kernen dieser Formen hängen dann die folgenden linearen Transformationen oder geordneten bilinearen Formen **linear** ab:

$$
(\varepsilon) \qquad
\boxed{
\begin{aligned}
T_1^{-1} &= E - S_1 \Sigma_0, & T_2 &= E + S_1 \Sigma_0, \\
S_\alpha^{-1} &= \Sigma_0 - \Sigma_1, & \Sigma_\alpha &= \Sigma_0 + \Sigma_1, \\
\Sigma_\beta^{-1} &= S_0 - S_1, & S_\beta &= S_0 + S_1, \\
\mathsf{T}_2^{-1} &= \mathsf{H} - \Sigma_1 S_0, & \mathsf{T}_1 &= \mathsf{H} + \Sigma_1 S_0.
\end{aligned}
}
$$

Durch **Elimination** der mittleren Veränderlichen in den durch die Transformationen oder Formen bewirkten Zuordnungen entsteht dann das Paar kontragredienter Transformationen $\mathfrak{T} = (T, \mathsf{T})$ nach dem Schema

$$
\begin{aligned}
&X \leftarrow X^* \rightarrow X, && \{T = T_1 T_2\}, \\
&X \leftarrow U^* \rightarrow X, && \{T = S_\alpha \Sigma_\alpha\}, \\
&U \leftarrow X^* \rightarrow U, && \{\mathsf{T} = \Sigma_\alpha S_\beta\}, \\
&U \leftarrow U^* \rightarrow U, && \{\mathsf{T} = \mathsf{T}_2 \mathsf{T}_1\}.
\end{aligned}
$$

Ist die Stufenzahl n ungerade, so liefern die aufgestellten Formeln auch eine entsprechende Darstellung uneigentlich-automorpher Transformationen des Paares (S_0, Σ_0). $-T$ und $-\mathsf{T}$ sind nämlich dann ein Paar solcher Transformationen, die mit T und T invariant verbunden sind. Ist dagegen die Stufenzahl gerade, so sind $-T$ und $-\mathsf{T}$ wieder eigentlich-automorphe Transformationen von (S_0, Σ_0), und man erhält daher noch ein zweites System von

Formeln, das zur Darstellung eigentlicher Transformationen dienen kann, das nun aber unter der Voraussetzung

$$|T-E| \neq 0$$

existiert. Ist zugleich

$$(20) \qquad |T+E| \neq 0, \quad |T-E| \neq 0$$

(was bei geraden Werten von n, und nur bei solchen, möglich ist), so existieren zwei alternierende Formen S_2 und Σ_2, die zu $-T$ und $-\mathsf{T}$ in derselben Beziehung stehen wie S_1 und Σ_1 zu T und T, und zwar sind dann die Diskriminanten von S_1 und Σ_1, S_2 und Σ_2 von Null verschieden. Da nunmehr

$$(21) \qquad \begin{aligned} S_2 &= \frac{T+E}{T-E}\, S_0 = S_0\, \frac{\mathsf{T}+\mathsf{H}}{\mathsf{T}-\mathsf{H}}, \\ \Sigma_2 &= \frac{\mathsf{T}+\mathsf{H}}{\mathsf{T}-\mathsf{H}}\, \Sigma_0 = \Sigma_0\, \frac{T-E}{T+E} \end{aligned}$$

sein soll, so findet sich nach kurzer Rechnung

$$(22) \qquad S_2 = \Sigma_1^{-1}, \quad \Sigma_2 = S_1^{-1}.$$

Zum Beispiel befriedigt dann die alternierende Form $S_2 = \Sigma_1^{-1} = S_0 S_1^{-1} S_0 = S_0 \Sigma_2 S_0$ die Gleichung

$$(S_0 + S_2)(S_0 - S_2)^{-1} + (S_0 + S_1)(S_0 - S_1)^{-1} = 0.$$

In der Tat erhält man als gleichbedeutend mit dieser letzten Gleichung der Reihe nach die Gleichungen

$$\begin{aligned} &(E + S_0 \Sigma_2) S_0 . \{(E - S_0 \Sigma_2) S_0\}^{-1} + \\ &+ (E + S_1 \Sigma_0) S_0 . \{(E - S_1 \Sigma_0) S_0\}^{-1} = 0, \\ &(E + S_1 \Sigma_2)(E - S_0 \Sigma_2)^{-1} + (E + S_1 \Sigma_0)(E - S_1 \Sigma_0)^{-1} = 0, \\ &(E + S_1 \Sigma_2)(E - S_0 \Sigma_2)^{-1} + (E - S_1 \Sigma_0)^{-1}(E + S_1 \Sigma_0) = 0, \\ &(E - S_1 \Sigma_0)(E + S_1 \Sigma_2) + (E + S_1 \Sigma_0)(E - S_0 \Sigma_2) = 0, \\ &\{E - S_1 \Sigma_0 + S_1 \Sigma_2 - E\} + \{E + S_1 \Sigma_0 - S_1 \Sigma_2 - E\} = 0, \end{aligned}$$

und dieses ist eine Identität, aus der dann die vorausgehenden Formeln wieder abgeleitet werden können.

Läßt man die Vektoren X^{**} und U^{**} in derselben Beziehung zu $-T$ und $-\mathsf{T}$ stehen, wie X^* und U^* zu T und T, so ist immer

$$(23) \qquad (U^* X^{**}) = 0, \quad (U^{**} X^*) = 0.$$

Das Vorgetragene enthält vor allen Dingen die Feststellung, daß man in einem sogenannten allgemeinen Fall, der durch die Ungleichung

$$|T+E| \neq 0$$

genau bezeichnet ist, den Kern von T (oder T) durch $\frac{n(n-1)}{2}$ unabhängige Parameter rational darstellen kann, eben durch die Koeffizienten der alternierenden Form S_1 (oder Σ_1). Wichtig ist dabei, daß für Formen T, die von E hinreichend wenig verschieden sind, die Diskriminante $|T+E|$ sicher von Null verschieden ausfällt. Dies ergibt sich nämlich daraus, daß für $T=E$ die Beziehung $|T+E| = 2^n$ besteht. Cayleys Darstellung eigentlich-automorpher Transformationen von (S_0, Σ_0) ist also brauchbar zur erschöpfenden Darstellung einer Umgebung der identischen Transformation, und daher auch zur Darstellung sogenannter infinitesimaler Transformationen.

Wir berühren hiermit einen weiteren wichtigen Gegenstand, der im zweiten Teil dieses Buches zusammen mit den Differentialgleichungen der Invarianten abgehandelt werden soll. Bei dieser Gelegenheit sollen dann auch die speziellen infinitesimalen Transformationen zur Sprache kommen, die in der Hydrodynamik eine gewisse Rolle spielen.

§ 20.

Fortsetzung: Automorphe Transformationen ternärer quadratischer Formen.

Die im vorigen Paragraphen abgeleitete symbolische Rechnung soll nunmehr im Falle $n=3$ in dem Sinne weitergeführt werden, daß wir die Formen T und T mit Hilfe der Formen des auf S. 208, Nr. 4 aufgestellten vollständigen Formensystems ausdrücken.

Wir setzen also nunmehr $\boldsymbol{n}=\mathbf{3}$, und dementsprechend (§ 19, Nr. 1, 2)

$$(1)\qquad \begin{aligned} S &= S_0 + S_1 = (XL)(LY) + (XQY), \\ S' &= S_0 - S_1 = (XL)(LY) - (XQY). \end{aligned}$$

Wir erhalten dann, wenn $|S_0+S_1| = |S_0 - S_1|$ nicht Null ist,

$$(2)\qquad \begin{aligned} (S_0+S_1)^{-1} &= \frac{\frac{1}{2}(UBB')(AA'V)}{|S_0+S_1|} \\ &= \frac{(U\Phi)(\Phi V) + (UQ).(QV) - (LQ)(ULV)}{J+(LQ)^2} \end{aligned}$$

(§ 19, Nr. 5 und 6), wobei, wenn auch $J \neq 0$ ist, und, wie früher, $\Sigma_0 = (U A)(A V)$ die zu S_0 kontragrediente (und zugleich reziproke) Form bedeutet,

$$(U\Phi)(\Phi V) = J.(U A)(A V) \tag{3}$$

ist. Wir kennen damit natürlich auch schon die Form $(S_0 - S_1)^{-1}$ und können also nunmehr die Formeln T und T berechnen (Formel h in § 19).

$$\begin{aligned}
&T = (S_0 + S_1)(S_0 - S_1)^{-1} = \\
&= \{J + (L Q)^2\}^{-1}.\{(J - (L Q)^2).(X V) + \\
&+ 2.(X L)(L Q).(Q V) + 2(X Q \Phi)(\Phi V)\}, \\
&\mathsf{T} = (S_0 - S_1)^{-1}(S_0 + S_1) = \\
&= \{J + (L Q)^2\}^{-1}.\{(J - (L Q)^2).(U Y) + \\
&+ 2(U Q).(Q L)(L Y) + 2(U\Phi)(\Phi Q Y)\}
\end{aligned} \tag{4}$$

Hiermit ist die zunächst gestellte Aufgabe schon gelöst. Es besteht aber, in dem besonderen Falle, mit dem wir es jetzt zu tun haben, der weitere (für $n > 3$ nicht mehr gültige) Satz:

Die mit Hilfe alternierender Formen nicht darstellbaren eigentlichen Transformationen (T, T) einer symmetrischen nicht singulären Form S_0 sind sämtlich involutorisch, und sie bilden die Gesamtheit der eigentlichen involutorischen Transformationen von S_0.

Da es sich nämlich um eigentliche Transformationen handelt, so ist $|T| = 1$. Ferner ist dann $-T$, da n ungerade, eine uneigentliche Transformation, und also ist $|T - E| = 0$ (S. 207). Drittens ist nach Voraussetzung $|T + E| = 0$. Da $n = 3$ sein soll, so kennen wir damit die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von T, sie haben die Werte

$$1, \quad -1, \quad -1,$$

womit die erste unserer Behauptungen erwiesen ist.

Die involutorischen, eigentlich-automorphen Transformationen von S_0 lassen sich nun leicht unmittelbar bestimmen. Wir haben dazu nur in den Formeln (35), S. 206 das obere Vorzeichen zu wählen und die dort P und A genannten Vektoren erster und zweiter Schicht in die Beziehung von Pol und Polare in bezug auf S_0 zu setzen. Wir machen also die Substitution

$$A = (PL)\,L,$$

und erhalten

$$(5)\qquad \begin{aligned} T &= \frac{-(LP)^2.(XV) + 2\,(XL)(LP).(PV)}{(LP)^2}, \\ \mathsf{T} &= \frac{-(LP)^2.(UV) + 2\,(UP).(PL)(LY)}{(LP)^2}. \end{aligned}$$

Vergleichen wir jetzt diese Formeln mit den zuvor abgeleiteten, so erkennen wir, daß sie zu einem inhaltsreicheren Formelpaar zusammengefaßt werden können, das nunmehr alle eigentlich-automorphen Transformationen von S_0 darstellt. Wir haben nur

$$(6)\qquad (QU) = \frac{(PU)}{P_0}$$

zu setzen, wo nun also

$$(7)\qquad P_0 : P_1 : P_2 : P_3$$

ein System von vier homogenen Parametern darstellt.

Wir wollen zunächst das Ergebnis dieser Überlegung unter der vereinfachenden Annahme $J = 1$ anführen. Wir können dann die Form $(\Phi\, U)^2$ durch die Form $(A\,U)^2$ ersetzen, die nun ebenfalls als die gegebene Grundform betrachtet werden kann. Wir erhalten ein Formelpaar, das zwar nicht mehr dem ursprünglich gegebenen Rationalitäts- und Integritätsbereich angehört, und dessen Struktur nur noch bei Transformationen der Gruppe Γ erhalten bleibt, das aber dafür Symmetrieeigenschaften aufweist, die den Formeln (4) und (5) fehlen, und das übrigens ja diese Formeln sofort zu reproduzieren erlaubt. Eine weitere — rein formale — Vereinfachung erhalten wir noch, wenn wir die früher (§ 13) erklärten Zeichen einführen, und überdies die formale Unterscheidung von Invarianten der Typen

$$(X \mid Y),\quad (UX),\quad (U \mid V),$$

die nun wohl ihren Dienst getan hat, nicht mehr mitschleppen, sondern an Stelle des ersten und dritten dieser Zeichen die noch etwas einfacheren und ebenso deutlichen Symbole

$$(8)\qquad (XY)\,\{= (XL)(LY)\},\quad (UV)\,\{= (UA)(AV)\}$$

benutzen.

Wir erhalten dann die Gleichungen[1])

$$
(9)\quad \boxed{\begin{aligned}
&\{P_0^2+(PP)\}.T=\{P_0^2+(PP)\}.(XC)(\Gamma V)=\\
&=\{P_0^2-(PP)\}.(XV)+2(XP).(PV)+2P_0.(XPV),\\
&\{P_0^2+(PP)\}.\mathrm{T}=\{P_0^2+(PP)\}.(U\Delta)(DY)=\\
&=\{P_0^2-(PP)\}.(UY)+2(UP).(PY)+2P_0.(UPY),
\end{aligned}}
$$

in denen natürlich

$$
(10)\qquad P_0^2+(PP)\neq 0
$$

anzunehmen ist.

Diese Formeln stellen also die Gesamtheit aller automorphen linearen Transformationen der zueinander kontragredienten symmetrischen Formen (8) dar, und sie bringen außerdem die durch eben diese Formen vermittelte Symmetrie zwischen den kontragredienten Formen T und T zu vollkommenem Ausdruck.

Setzen wir erstens wie früher,

$$
(XC)\Gamma=\underline{X},\quad (U\Delta)D=\underline{U},
$$

so folgt nach kurzer Rechnung

$$
(XX')=(XC)(\Gamma\Gamma')(C'X')=(\underline{X}\,\underline{X}'),
$$

und ebenso

$$
(UU')=(U\Delta)(DD')(\Delta'U')=(\underline{U}\,\underline{U}').
$$

Aber diese Formeln brauchen zweitens gar nicht jede für sich abgeleitet zu werden, sondern die eine folgt aus der anderen, einfach dadurch, daß man in Nr. (9) zugleich die Zeichen X und U, V und Y vertauscht. Und man kann drittens auch nur V und Y oder U und X vertauschen, und hat dann schon die („korrelativen") linearen Transformationen von der Determinante Eins hergestellt, die aus den Formen (XX'), (UU') die Formen $(\underline{U}\,\underline{U}')$, $(\underline{X}\,\underline{X}')$ hervorgehen lassen. Diese zweite Formelgruppe hat also, in unserer Bezeichnung, genau dieselbe Struktur wie die erste.

Die einzelnen Bestandteile der Ausdrücke (9) lassen sich leicht mit Hilfe der Symbole T, T darstellen. Ist nämlich, wie früher, R

[1]) In der Hauptsache findet sich dieses Ergebnis schon in der Koordinatengeometrie von H. Beck (1, 264, 278, 1919). Doch läßt die dort gegebene Herleitung wie auch die Formulierung selbst noch einiges zu wünschen übrig. Siehe den weiteren Text. (Überflüssig ist der von Beck mit a bezeichnete Parameter).

die lineare Invariante von T oder T, $R = (C\Gamma) = (\varDelta D)$, so ergibt sich

$$(11) \qquad R = \frac{3P_0^2 - (PP)}{P_0^2 + (PP)}.$$

Die charakteristische Funktion von T oder T ist

$$(12) \qquad \varLambda^3 - R\varLambda^2 + R\varLambda - 1 = (\varLambda - 1)\{\varLambda^2 - (R-1)\varLambda + 1\}.$$

Daher ist

$$T^3 - RT^2 + RT^1 - T^0 = 0$$

oder

$$(T+E)^3 - (R+3)(T+E)^2 + \\ + (3R+3)(T+E)^1 - 2(R+1)(T+E)^0 = 0,$$

also

$$(13) \qquad |T+E| = 2(R+1) = \frac{8P_0^2}{P_0^2 + (PP)}.$$

Ist dieser Ausdruck $\neq 0$, also die Transformation nicht involutorisch, so erhält man

$$(14) \qquad \begin{aligned} \frac{R-1}{2}\cdot E &= \frac{P_0^2 - (PP)}{P_0^2 + (PP)}\cdot (XV), \\ \frac{T-(R-1)E+T^{-1}}{2} &= \frac{2(XP).(PV)}{P_0^2 + (PP)}, \\ \frac{R+1}{2}\cdot\frac{T-E}{T+E} = \frac{T-T^{-1}}{2} &= \frac{2P_0.(XPV)}{P_0^2 + (PP)}, \end{aligned}$$

was die gesuchten Ausdrücke sind. Man entnimmt daraus auch im involutorischen Falle ($R = -1$) die Verhältnisgrößen P_k.

Die zweite und die dritte Formel unter (14) lassen sich, nach den früher entwickelten Regeln, auch so schreiben:

$$(15) \qquad \frac{T-(R-1)E+T^{-1}}{R-3} = -\frac{(XP).(PV)}{(PP)},$$

$$(16) \qquad \left.\begin{aligned} \frac{T-E}{T+E}S_0 &= \frac{T-T^{-1}}{R+1}S_0 \\ S_0\frac{\mathsf{T}-\mathsf{H}}{\mathsf{T}+\mathsf{H}} &= S_0\frac{\mathsf{T}-\mathsf{T}^{-1}}{R+1} \end{aligned}\right\} = \frac{(XPY)}{P_0}.$$

Der letzten Formel entnimmt man, wenn $R \neq -1$, unmittelbar den Quotienten $(UQ) = P_0^{-1}.(UP)$.

Die einfache Struktur der Ausdrücke für die automorphen Transformationen (T, T) der betrachteten symmetrischen oder quadratischen Formen kommt **allgemein** nur der vorgeführten Gestaltung zu, deren Wesen darin besteht, daß T und T aus Invarianten der Gruppe Γ zusammengesetzt werden. Wenn man das Koordinatensystem spezialisiert, und dann mit explizite geschriebenen Koordinaten rechnet, so werden die angeführten Symmetrieeigenschaften in der Regel verdeckt. Es wird nicht überflüssig sein, dies dadurch zu erläutern, daß wir neben die Formeln (9) in zwei ohnehin wichtigen Fällen ausgerechnete Formeln stellen. Wir wollen annehmen, es seien die zwei Formenpaare

$$\begin{aligned} S_0 &= (XY) = X_1 Y_1 \pm X_2 Y_2 \pm X_3 Y_3, \\ \Sigma_0 &= (UV) = U_1 V_1 \pm U_2 V_2 \pm U_3 V_3 \end{aligned} \tag{17}$$

vorgelegt, wobei entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen Geltung haben. Es wird dann

$$(XP) = X_1 P_1 \pm X_2 P_2 \pm X_3 P_3,\ (PV) = P_1 V_1 + P_2 V_2 + P_3 V_3,$$
$$(XPV) =$$
$$= (X_2 P_3 - X_3 P_2) V_1 \pm (X_3 P_1 - X_1 P_3) V_2 \pm (X_1 P_2 - X_2 P_1) V_3,$$

aber

$$(UP) = U_1 P_1 + U_2 P_2 + U_3 P_3,\ (PY) = P_1 Y_1 \pm P_2 Y_2 \pm P_3 Y_3,$$
$$(UPY) =$$
$$= \pm (U_2 P_3 - U_3 P_2) Y_1 \pm (U_3 P_1 \mp U_1 P_3) Y_2 + (U_1 P_2 \mp U_2 P_1) Y_3,$$

so daß also bei Annahme der unteren Vorzeichen (im Falle reeller indefiniter quadratischer Formen) die hervorgehobene Symmetrie bereits unkenntlich wird.

Substituiert man die angegebenen Werte, so erhält man als Ausdruck der Transformation T oder $(XC)\Gamma = \underline{X}$ Gleichungen der Form [1])

$$\mathfrak{C}_{k1} X_1 + \mathfrak{C}_{k2} X_2 + \mathfrak{C}_{k3} X_3 = \mathfrak{C}_{00} \underline{X}_k \quad (k = 1, 2, 3),$$

wo

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{00} &= P_0^2 + P_1^2 \pm P_2^2 \pm P_3^2, \\ \mathfrak{C}_{11} &= P_0^2 + P_1^2 \mp P_2^2 \mp P_3^2, \\ \mathfrak{C}_{22} &= P_0^2 - P_1^2 \pm P_2^2 \mp P_3^2, \\ \mathfrak{C}_{33} &= P_0^2 - P_1^2 \mp P_2^2 \pm P_3^2, \end{aligned} \tag{18}$$
$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{23} &= 2(\pm P_2 P_3 \pm P_0 P_1), & \mathfrak{C}_{32} &= 2(\pm P_2 P_3 \mp P_0 P_1), \\ \mathfrak{C}_{31} &= 2(P_3 P_1 \pm P_0 P_2), & \mathfrak{C}_{13} &= 2(\pm P_3 P_1 - P_0 P_2), \\ \mathfrak{C}_{12} &= 2(\pm P_1 P_2 + P_0 P_3), & \mathfrak{C}_{21} &= 2(P_1 P_2 \mp P_0 P_3), \end{aligned}$$

[1]) Die Beziehung der hier angewendeten Bezeichnung zu der früher (S. 111, 112) gebrauchten ist also gegeben durch

$$C_{ik} = \frac{\mathfrak{C}_{ki}}{\mathfrak{C}_{00}}, \qquad D_{ik} = \frac{\mathfrak{D}_{ki}}{\mathfrak{D}_{00}}.$$

und als Ausdruck der Transformation T oder $(U\varDelta)\,D = U$ Gleichungen der Form

$$\mathfrak{D}_{k1} U_1 + \mathfrak{D}_{k2} U_2 + \mathfrak{D}_{k3} U_3 = \mathfrak{D}_{00} \underline{U_k} \quad (k = 1,\,2,\,3),$$

wo $\mathfrak{D}_{ii} = \mathfrak{C}_{ii}$ und

$$\text{(19)}\quad \begin{aligned} \mathfrak{D}_{23} &= 2(\pm P_2 P_3 \pm P_0 P_1), & \mathfrak{D}_{32} &= 2(\pm P_2 P_3 \mp P_0 P_1), \\ \mathfrak{D}_{31} &= 2(\pm P_3 P_1 + P_0 P_2), & \mathfrak{D}_{13} &= 2(P_3 P_1 \mp P_0 P_2), \\ \mathfrak{D}_{12} &= 2(P_1 P_2 \pm P_0 P_3), & \mathfrak{D}_{21} &= 2(\pm P_1 P_2 - P_0 P_3). \end{aligned}$$

Im Falle der oberen Vorzeichen ist allgemein $\mathfrak{D}_{ik} = \mathfrak{C}_{ik}$, und man hat vor sich die Ausdrücke Eulers für die Koeffizienten einer eigentlichen ternären orthogonalen Transformation.

Mit Hilfe der Parameter $P_0 : P_1 : P_2 : P_3$ lassen sich nun auch zwei der Transformationenpaare (T, T) zu einem dritten zusammensetzen, und zwar **immer auf formal-gleiche Weise** für alle Paare kontragredienter Formen

$$S_0 = (XY), \quad \Sigma_0 = (UV).$$

Dies wird nämlich geleistet durch die Gleichungen

$$\text{(20)}\quad \boxed{\begin{aligned} P_0 P_0' - (P P') &= P_0'' \\ P_0 (P' U) + P_0' (P U) + (P P' U) &= (P'' U), \end{aligned}}$$

denen zufolge

$$\text{(21)}\quad \boxed{\{P_0^2 + (PP)\} \cdot \{P_0'^2 + (P'P')\} = P_0''^2 + (P''P'')}$$

wird. Hier bedeuten die Zeichen P_k $(k = 0,\,1,\,2,\,3)$ die Parameter der zuerst auszuführenden Transformation (T_1, T_1), P_k' sind die Parameter der Transformationen eines zweiten Paares (T_2, T_2), und schließlich sind P_k'' die Parameter der zusammengesetzten Transformationen $(T_3, \mathsf{T}_3) = (T_1 T_2, \mathsf{T}_1 \mathsf{T}_2)$.

Man gelangt zu den Formeln (20) am bequemsten, wenn man von den bekannten Quaternionenformeln für die Zusammensetzung von zwei eigentlichen ternären orthogonalen Transformationen ausgeht, die hier unter (21) angeführt werden (entsprechend den oberen Vorzeichen):

$$\text{(22)}\quad \begin{aligned} P_0 P_0' - P_1 P_1' \mp P_2 P_2' \mp P_3 P_3' &= P_0'', \\ P_0 P_1' + P_1 P_0' + P_2 P_3' - P_3 P_2' &= P_1'', \\ P_0 P_2' \mp P_1 P_3' + P_2 P_0' \pm P_3 P_1' &= P_2'', \\ P_0 P_3' \pm P_1 P_2' \mp P_2 P_1' + P_3 P_0' &= P_3''. \end{aligned}$$

Offenbar lassen sich diese Formeln zu den Formeln (20) zusammenfassen. Da aber diese Formeln (20) nur noch Invarianten (solche der Gruppe Γ) verbinden, so müssen sie unter der Voraussetzung $|T| = 1$ allgemein gelten, was man natürlich auch, von den Formeln (20) selbst ausgehend, durch eine besondere Rechnung feststellen kann. Wählen wir also z. B. in den Formeln (17) die unteren Vorzeichen [was die Wahl der unteren Zeichen in (18) und (19) nach sich zieht], so haben wir damit schon die Zusammensetzung eigentlich-automorpher Transformationen der Formen

$$S_0 = X_1 Y_1 - X_2 Y_2 - X_3 Y_3, \quad \Sigma_0 = U_1 V_1 - U_2 V_2 - U_3 V_3$$

geleistet: Es ergeben sich, aus (20), nunmehr die Formeln (22) mit dem System der unteren Vorzeichen.

Wenden wir jetzt die in § 16 und § 17 entwickelte Theorie auf den vorliegenden Fall an, so erhält sie eine besondere Gestalt, was darin begründet ist, daß nunmehr die charakteristische Funktion von F, T oder T im arithmetischen Sinne reduzibel wird (Nr. 12). Wir betrachten der Kürze halber nur den Fall $(PP) \neq 0$, und wollen außerdem zunächst annehmen, daß auch noch $P_0 \neq 0$ ist. Wir finden dann:

$$(23) \qquad A_1 = 1, \; A_2 = \frac{P_0 + \sqrt{-(PP)}}{P_0 - \sqrt{-(PP)}}, \; A_3 = \frac{P_0 - \sqrt{-(PP)}}{P_0 + \sqrt{-(PP)}},$$

$$(24) \qquad J_1 = J_2 = \frac{3P_0^2 - (PP)}{P_0^2 + (PP)} = R, \quad J_3 = 1,$$

$$(25) \qquad \Pi = -16 \cdot \frac{P_0 (PP) . \sqrt{-(PP)}}{\{P_0^2 + (PP)\}^2},$$

$$(26) \qquad \begin{aligned} \mathsf{E}_1 &= \frac{(XP).(PU)}{(PP)}, \\ \mathsf{E}_2 &= \frac{-(XP\,|\,PU) - \sqrt{-(PP)}.(XPU)}{2(PP)}, \\ \mathsf{E}_3 &= \frac{-(XP\,|\,PU) + \sqrt{-(PP)}.(XPU)}{2(PP)}, \end{aligned}$$

$$(27) \qquad \begin{aligned} (SX)^3 &= -8 \cdot \frac{P_0 . (PX).(PX\,|\,PX)}{\{P_0^2 + (PP)\}^2}, \\ (\Sigma U)^3 &= 8 \cdot \frac{P_0 . (PU).(PU\,|\,PU)}{\{P_0^2 + (PP)\}^2}. \end{aligned}$$

15*

Um diese Formeln richtig aufzufassen, wolle man beachten, daß sich in den Ausdrücken für E_2 und E_3 aus Zählern und Nennern ein Faktor P_0 weggehoben hat. Die so gekürzten Ausdrücke E_2 und E_3 hängen, wie auch schon E_1, gar nicht von P_0 ab. Das erklärt es, daß sie auch im involutorischen Grenzfall, der der Annahme $\Lambda_2 = \Lambda_3 = -1$ entspricht, völlig bestimmt bleiben. Von den drei singulären Formen E_1, E_2, E_3 ist die erste, die hier rational-bestimmt ist, schon als Produkt linearer Formen dargestellt, den beiden anderen ist ihre Zerlegbarkeit in lineare Faktoren nicht anzusehen. Indessen läßt sich auch ihre Zerlegung, die natürlich nicht willkürfrei sein kann, mühelos ausführen.

Wir nehmen zu diesem Zweck einen Vektor Q so an, daß $(Q\,Q) \neq 0$ und $(P\,Q) = 0$ ausfällt, im übrigen aber beliebig. In dem durch die Vektoren Q und $\overline{P\,Q}$ bestimmten Büschel linearer Formen $(P_*\,Z) = (P\,Q\,Z) + \varrho\,.(Q\,Z)$ suchen wir uns sodann zwei linear-unabhängige heraus, die der Forderung $(P_*\,P_*) = 0$ genügen. Zwei solche sind

$$(28)\qquad \begin{aligned}(P_2\,Z) &= (P\,Q\,Z) + \sqrt{-(P\,P)}\,.(Q\,Z),\\ (P_3\,Z) &= (P\,Q\,Z) - \sqrt{-(P\,P)}\,.(Q\,Z).\end{aligned}$$

Mit ihrer Hilfe lassen sich dann die singulären Formen E_1, E_2, E_3 so als Produkte schreiben:

$$(29)\qquad \begin{aligned}\mathsf{E}_1 &= \frac{(X\,P_2\,P_3)\,.\,(P_2\,P_3\,U)}{(P_2\,P_3\,|\,P_2\,P_3)} = \frac{(X\,P_2\,P_3)\,.\,(P_3\,P_2\,U)}{4\,.\,(P\,P)^2\,.\,(Q\,Q)^2},\\ \mathsf{E}_2 &= \frac{(X\,P_2)\,.\,(P_3\,U)}{(P_2\,P_3)} = \frac{(X\,P_2)\,.\,(P_3\,U)}{2\,.\,(P\,P)\,.\,(Q\,Q)},\\ \mathsf{E}_3 &= \frac{(X\,P_3)\,.\,(P_2\,U)}{(P_3\,P_2)} = \frac{(X\,P_3)\,.\,(P_2\,U)}{2\,.\,(P\,P)\,.\,(Q\,Q)}.\end{aligned}$$

Durch die dargelegten Entwicklungen ist die kleine Theorie der „Drehungen“ um einen festen Punkt des gewöhnlichen Euklidischen Raumes auf eine den Forderungen der Invariantentheorie entsprechende Basis gestellt: Sie ist derart verallgemeinert, daß an Stelle der quadratischen Form $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ irgend eine nicht-singuläre quadratische Form $(X\,X)$ tritt.

Bezeichnen wir jetzt als (eigentlichen) Punkt irgend ein Multiplum des Vektors X (s. S. 55), so stellt die Gleichung $(X\,X) = 0$ einen vom Punkte $\{0,\,0,\,0\}$ ausgehenden irreduzibelen Kegel zweiten Grades dar, der bei den betrachteten Transformationen in Ruhe bleibt. Diese selbst aber können sinnvoll **Drehungen** genannt werden: Bei fast jeder von ihnen bleiben alle (∞^2) Punkte einer durch den Punkt $\{0, 0, 0\}$ — das **Drehungszentrum** — gehenden bestimmten Geraden, der zugehörigen **Drehungsachse**, in Ruhe — alle Punkte nämlich, deren Kartesische Koordinaten die Form $\{\sigma P_1, \sigma P_2, \sigma P_3\}$ haben. (Eine evidente Ausnahme bildet nur die identische Transformation.)

Außer dieser dem Vektor P entsprechenden Geraden bleiben bei den nicht identischen automorphen eigentlichen Transformationen von $(X X)$ noch zwei weitere Geraden in Ruhe, diese aber nicht punktweise; sie gehören zu den Vektoren P_2 und P_3 und liegen auf dem genannten Kegel in der Polarebene von P.

Erinnern wir uns jetzt der in § 3 aufgestellten Formeln für den Winkel Θ_X^Y von zwei zu dem Vektor P senkrechten orientierten Vektoren,

$$\cos \Theta_X^Y = \frac{(X Y)}{\sqrt{XX}\sqrt{YY}}, \quad \sin \Theta_X^Y = \frac{(P X Y)}{\sqrt{PP}\sqrt{XX}\sqrt{YY}} \quad \begin{vmatrix}(P X) = 0\\ (P Y) = 0\end{vmatrix},$$

so gelangen wir zum Ausdruck einer mit der betrachteten Transformation invariant-verbundenen Winkelgröße, die als **Winkel der** ausgeführten Drehung zu bezeichnen ist, und im Falle $(X X) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ in die bereits in Elementarbüchern als Drehungswinkel bezeichnete transzendente Funktion übergeht. Wir haben dazu nur nötig, den Vektor Y mit dem transformierten Vektor $\overline{X}$ zu identifizieren, und — was zulässig ist — zu erklären, daß $\sqrt{X X} = \sqrt{\overline{X}\,\overline{X}}$ sein soll. Bezeichnen wir dann den zu suchenden Winkel — also den „**Winkel der Drehung**“ (T, T) — mit 2ϑ (an Stelle des Θ der vorigen Formel), so finden wir

$$\cos 2\vartheta = \frac{(X \overline{X})}{\sqrt{XX}\sqrt{\overline{X}\,\overline{X}}} \qquad = \frac{(X C)(\Gamma X)}{(X X)},$$

$$\sin 2\vartheta = \frac{(P X \overline{X})}{\sqrt{PP}\sqrt{XX}\sqrt{\overline{X}\,\overline{X}}} = \frac{(X C)(\Gamma P X)}{\sqrt{PP}\,.\,(X X)},$$

und also

$$\cos 2\vartheta = \frac{R-1}{2} = \frac{P_0^2 - (P P)}{P_0^2 + (P P)}$$

$$\sin 2\vartheta = \frac{1}{2}\sqrt{(R-1)(R-3)} = -\frac{2 P_0 \sqrt{PP}}{P_0^2 + (P P)},$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\vartheta = -\frac{P_0}{\sqrt{PP}}.} \tag{30}$$

Neben der Winkelgröße ϑ, oder (unter Umständen zweckmäßig) an ihrer Statt kann man auch eine andere benutzen, die aus ihr durch die Substitution $\vartheta = i\,\vartheta^*$ hervorgeht. Setzen wir gleichzeitig $\sqrt{PP} = i\sqrt{-(PP)}$, $\sqrt{XX} = i\sqrt{-(XX)}$ usw., so erhalten wir

$$\boxed{ctg\,h\,\vartheta^* = -\frac{P_0}{\sqrt{-(PP)}}.} \tag{31}$$

Es besteht dann der Satz, daß bei Drehungen um dieselbe (orientierte) Achse (P) die Winkelgrößen $2\,\vartheta$, $2\,\vartheta^*$ sich nach bekannter Regel addieren:

$$\vartheta + \vartheta' \equiv \vartheta'' \pmod{\pi}, \quad \vartheta^* + \vartheta^{*\prime} \equiv \vartheta^{*\prime\prime} \pmod{i\,\pi}. \tag{32}$$

Alles dies gilt für das komplexe Gebiet und beliebige Formen (XX) von der Determinante Eins. Handelt es sich aber um reelle Formen, so wird man einen Unterschied machen zwischen dem definiten und dem indefiniten Fall. Es genügt dann, bei der ersten Annahme vorauszusetzen, daß (XX) unter Verwendung reeller Koordinaten in die Form $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ übergeführt werden kann, daß (XX) also positiv-definit ist, bei der zweiten, daß (XX) ebenso in die Form $X_1^2 - X_2^2 - X_3^2$ gesetzt werden kann. Im indefiniten Fall wird dann durch den Kegel $(XX) = 0$ die Menge der Vektoren X in ein „zugängliches Gebiet“ $(XX) > 0$ und ein „unzugängliches Gebiet“ $(XX) < 0$ zerlegt, und es gibt demnach dann schon im Reellen drei verschiedene Arten von Drehungsachsen (P), die durch die Beziehungen

$$(PP) > 0, \quad (PP) = 0, \quad (PP) < 0 \tag{33}$$

gekennzeichnet sind. Bei Beschränkung auf reelle Figuren kann man dann etwa zwischen „eigentlichen Drehungen“ $\{(PP) > 0\}$, „Grenzdrehungen“ $\{(PP) = 0\}$, und „uneigentlichen Drehungen“ $\{(PP) < 0\}$ unterscheiden; nur die identische Transformation gehört allen drei Familien zugleich an. Für die Drehungen der ersten und zweiten Art ist dann ϑ, für die der zweiten und dritten Art ϑ^* reeller Werte fähig. Bei den hier sonst nicht weiter betrachteten Grenzdrehungen bleibt nur die Drehungsachse in Ruhe, und zwar punktweise.

Die besprochenen „Drehungen“ fallen unter einen umfassenderen Begriff, den ich in der Euklidischen wie in der Nicht-Euklidischen Geometrie, als Bewegung bezeichne; entsprechend fallen die uneigentlich-automorphen Transformationen $\{-T, -\mathsf{T}\}$ unserer quadratischen Formen (XX) unter den Begriff der „Umlegung“. Im vorliegenden Falle sind ihre Eigenschaften (besonders ihre Kennzeichnung als „Drehspiegelungen") aus dem Vorgetragenen ohne weiteres abzulesen.

Da man (bekanntlich) die Quaternionentheorie aus der Theorie der automorphen Transformationen der ternären Form $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ ableiten kann, so ist durch das Vorgetragene auch für die Quaternionentheorie eine Basis geschaffen, die von der besonderen Gestalt der Form $(X X)$ unabhängig ist. An Stelle der Norm $P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2$ einer Quaternion tritt dann der Ausdruck $P_0^2 + (P P)$. Dieser aber ist selbst noch eine stark spezialisierte quaternäre quadratische Form. Im zweiten Teil dieses Buches soll gezeigt werden, daß man auch diese Beschränkung noch aufheben kann.

§ 21.

Grenzfall: Bewegungen und Umlegungen in der Euklidischen Ebene.

Die im vorigen Paragraphen entwickelte Theorie läßt sich ausdehnen auf die eigentlich-automorphen Transformationen einer ternären symmetrischen bilinearen oder quadratischen Form vom Range 2, also einer solchen, deren Invariante Null, deren quadratische Kovariante aber nicht identisch gleich Null (und dann also das Quadrat einer linearen Form) ist. Wegen der geometrischen Anwendungen wollen wir annehmen, daß die quadratische Form Vektoren zweiter Schicht als Veränderliche enthält. Sie soll nach wie vor $(A U)^2$ heißen, die genannte lineare Form wollen wir (ΩX) nennen, so daß

$$\frac{1}{2}(A A' X)^2 = (\Omega X)^2 \tag{1}$$

und

$$(\Omega A)(U A) = 0 \quad \{U\} \tag{2}$$

wird.

Man sieht sofort, daß man statt eines Kontinuums eigentlich- (oder uneigentlich-) automorpher Transformationen von $(A U)^2$ jetzt deren zwei erhalten muß; denn aus $(U A)^2 = (\underline{U} A)^2$ folgt nur $(\Omega X)^2 = (\Omega \underline{X})^2$, d. h. es bestehen die beiden Möglichkeiten

$$\text{(3 a)} \quad \boxed{(\Omega X) = (\Omega \underline{X}),} \qquad \text{(3 b)} \quad \boxed{-(\Omega X) = (\Omega \underline{X}),}$$

die wir zunächst als (eigentliche, uneigentliche) positiv-automorphe und negativ-automorphe Transformationen von $(U A)(V A)$ unterscheiden wollen.

Eigentliche Transformationen beider Arten, ja sogar alle, wie wir sehen werden, entstehen nun aus den in § 20 untersuchten Transformationen T, T durch einen Grenzübergang. Da bei diesem die Reziprozität von $(X X)$ und $(U U)$ zerstört wird, so heben wir die angeführte Vereinfachung nun wieder auf. Dies geschieht, wenn jetzt auch im Falle $|\mathit{\Delta}| \neq 0$ das Zeichen Ω gebraucht wird, durch die Substitutionen

$$
(4) \qquad \begin{aligned} (U U) &= |\mathit{\Delta}|^{-1/3} . (\mathit{\Delta}\, U)^2, \\ (X X) &= |\mathit{\Delta}|^{-2/3} . (\Omega\, X)^2, \end{aligned} \qquad (P U) = |\mathit{\Delta}|^{1/3} . (P_* U).
$$

Schreiben wir dann für P_* schließlich wieder P, so erhalten wir die folgenden Formeln, die sich von den bisher benutzten nur wenig unterscheiden:

$$
(5\,\mathrm{a}) \qquad \boxed{\begin{aligned} &\{P_0^2 + (\Omega\, P)^2\} \cdot T = \{P_0^2 + (\Omega\, P)^2\} \cdot (X\, C)(\Gamma\, V) \\ &= \{P_0^2 - (\Omega\, P)^2\} \cdot (X\, V) + 2\,(X\, \Omega)(\Omega\, P) . (P\, V) + \\ &\qquad + 2\, P_0 . (X\, P\, \mathit{\Delta})(\mathit{\Delta}\, V), \\ &\{P_0^2 + (\Omega\, P)^2\} \cdot \mathsf{T} = \{P_0^2 + (\Omega\, P)^2\} \cdot (U\, \mathit{\Delta})(D\, Y) \\ &= \{P_0^2 - (\Omega\, P)^2\} \cdot (U\, Y) + 2\,(U\, P) . (P\, \Omega)(\Omega\, Y) + \\ &\qquad + 2\, P_0 . (U\, \mathit{\Delta})(\mathit{\Delta}\, P\, Y). \end{aligned}}
$$

Eine zweite etwas abweichend gebaute Formelgruppe erhalten wir, wenn wir statt des Vektors erster Schicht P einen Vektor zweiter Schicht A einführen, der mit ihm durch die Gleichungen

$$
(^*) \qquad P = |\mathit{\Delta}|^{-1/2} . (A\, \mathit{\Delta})\, \mathit{\Delta}, \quad A = |\mathit{\Delta}|^{1/2} . (P\, \Omega)\, \Omega
$$

verbunden ist. Setzen wir dann noch

$$
(^*) \qquad P_0 = |\mathit{\Delta}|^{1/2} . A_0,
$$

so entstehen die Gleichungen

$$
(5\,\mathrm{b}) \qquad \boxed{\begin{aligned} &\{A_0^2 . |\mathit{\Delta}| + (A\, \mathit{\Delta})^2\} . T = \{A_0^2 . |\mathit{\Delta}| + (A\, \mathit{\Delta})^2\} . (X\, C)(\Gamma\, V) \\ &= \{A_0^2 . |\mathit{\Delta}| - (A\, \mathit{\Delta})^2\} . (X\, V) + 2\,(X\, A) . (A\, \mathit{\Delta})(\mathit{\Delta}\, V) + \\ &\qquad + 2\, A_0 . (X\, \Omega)(\Omega\, A\, V), \\ &\{A_0^2 . |\mathit{\Delta}| + (A\, \mathit{\Delta})^2\} . \mathsf{T} = \{A_0^2 . |\mathit{\Delta}| + (A\, \mathit{\Delta})^2\} . (U\, \mathit{\Delta})(D\, Y) \\ &= \{A_0^2 . |\mathit{\Delta}| - (A\, \mathit{\Delta})^2\} . (U\, Y) + 2\,(U\, \mathit{\Delta})(\mathit{\Delta}\, A) . (A\, Y) + \\ &\qquad + 2\, A_0 . (U\, A\, \Omega)(\Omega\, Y), \end{aligned}}
$$

in denen an Stelle der Parameter

$$
P_0 : P_1 : P_2 : P_3
$$

die Parameter

$$
A_0 : A_1 : A_2 : A_3
$$

getreten sind. Beide Formelpaare stellen auf Grund des Zusammenhanges (*) dasselbe Paar kontragredienter Transformationen T, T

dar. An Stelle des einen Systems (Nr. 20, § 20) bilinearer Gleichungen aber erhalten wir jetzt deren **acht**, von denen vier die folgenden sind [1]):

$$
(6)\quad \boxed{\begin{aligned}
&P_0 \,.\, P'_0 - (P\,\Omega)(\Omega\,P') = P''_0,\\
&P_0 \,.\, (P'\,U) + P'_0 \,.\, (P\,U) + (P\,P'\,\Delta)\,(\Delta\,U) = (P''\,U);\\[4pt]
&|\Delta| \,.\, A_0 \,.\, A'_0 - (A\,\Delta)(\Delta\,A') = P''_0,\\
&A_0 \,.\, (A'\,\Delta)\,(\Delta\,U) + A'_0 \,.\, (A\,\Delta)\,(\Delta\,U) + (A\,A'\,U) = (P''\,U);\\[4pt]
&P_0 \,.\, A'_0 - (P\,A') = A''_0,\\
&P_0 \,.\, (A'\,X) + A'_0 \,.\, (P\,\Omega)\,(\Omega\,X) - (A'\,\Delta)\,(\Delta\,P\,X) = (A''\,X);\\[4pt]
&A_0 \,.\, P'_0 - (A\,P') = A''_0,\\
&A_0 \,.\, (P'\,\Omega)\,(\Omega\,X) + P'_0 \,.\, (A\,X) + (A\,\Delta)\,(\Delta\,P'\,X) = (A''\,X).
\end{aligned}}
$$

Hieraus folgt schließlich noch (§ 20, Nr. 21):

$$
(7)\quad \boxed{\begin{aligned}
&\{P_0^2+(\Omega P)^2\}\cdot\{P_0'^2+(\Omega P')^2\} = P_0''^2+(\Omega P'')^2;\\
&\{|\Delta|\,.\,A_0^2+(\Delta A)^2\}\cdot\{|\Delta|\,.\,A_0'^2+(\Delta A')^2\} = P_0''^2+(\Omega P'')^2;\\
&\{P_0^2+(\Omega P)^2\}\cdot\{|\Delta|\,.\,A_0'^2+(\Delta A')^2\} = |\Delta|\,.\,A_0''^2+(\Delta A'')^2;\\
&\{|\Delta|\,.\,A_0^2+(\Delta\Omega)^2\}\ \{P_0'^2+(\Omega P')^2\} = |\Delta|\,.\,A_0''^2+(\Delta A'')^2.
\end{aligned}}
$$

Solange also die Voraussetzung $|\Delta| \neq 0$ besteht und demnach zwischen den Verhältnisgrößen P_k, P'_k, P''_k und A_k, A'_k, A''_k der Zusammenhang (*) angenommen wird, sagen alle diese in der Form verschiedenen Gleichungssysteme dasselbe aus. Insofern hat also ihre Vielfältigkeit nur ein untergeordnetes Interesse. Das ändert sich jedoch bei dem Grenzübergang $|\Delta| \to 0$.

Dann wird nämlich, in der Grenze, der Zusammenhang (*) zerstört, während die Gleichungen (5 a) und (5 b) ihre Bedeutung bewahren, und auch in der Grenze $|\Delta| = 0$ noch in der gleichen Beziehung zu den Gleichungen (6) und (7) stehen wie vorher, vorausgesetzt nur, daß nunmehr die Größen P_k und A_k als voneinander

[1]) Man kann auch, nach Anweisung der Formeln (*), auf den rechten Seiten der Gleichungen (6) die Parameter P''_k durch die Parameter A''_k ersetzen, und umgekehrt. Das würde sich aber, im Hinblick auf den alsbald auszuführenden Grenzübergang, als zwecklos herausstellen. Die weiteren vier Gleichungen sind daher gar nicht erst angeführt worden.

unabhängige Parametersysteme behandelt werden[1]). Es ist dabei zu bedenken, daß (ΩX), das zuvor nur in der quadratischen Verbindung $(\Omega X)^2$ eine reale Bedeutung hatte, nun eine selbständige Existenz bekommt, woran weiterhin durch Gebrauch der Bezeichnung $(X\Omega).(\Omega Y)$ an Stelle von $(X\Omega)(\Omega Y)$ erinnert werden soll. Wir gelangen nunmehr zu dem Lehrsatz:

Im Grenzfall $|\Delta| = 0$ stellen, **solange die lineare Form** (ΩX) **nicht identisch gleich Null ist,** die Formeln (5 a) **die Gesamtheit der eigentlichen positiv-automorphen Transformationen** der quadratischen Form $(U\Delta)^2$ dar, und die Formeln (5 b) **die Gesamtheit der eigentlichen negativ-automorphen Transformationen**[2]). Ferner liefern die Gleichungen (6) auch in diesem Grenzfalle noch die Regeln für die Zusammensetzung solcher Transformationen (oder Transformationenpaare T, T), die zusammen eine geschichtete Gruppe (von $2 . \infty^{2 \cdot 3}$ Transformationen) bilden.

Zunächst ziehen nämlich die Gleichungen (5 a) und (5 b) auch jetzt noch die Gleichungen

$$(\Omega X)^2 = (\Omega \underline{X})^2, \quad (U\Delta)^2 = (\underline{U}\Delta)^2$$

nach sich; im Falle (a) aber folgt überdies

$$(\Omega X) = (\Omega \underline{X}),$$

während sich im Falle (b)

$$-(\Omega X) = (\Omega \underline{X})$$

ergibt. Ferner wird die Gruppeneigenschaft der gefundenen Transformationen durch die Formeln (6) in Evidenz gesetzt, die zusammen mit den Formeln (7) zeigen, wie aus zwei solchen Transformationen immer eine dritte gebildet werden kann, nach dem Schema

$$\mathfrak{T}_a . \mathfrak{T}'_a = \mathfrak{T}''_a, \quad \mathfrak{T}_b . \mathfrak{T}'_b = \mathfrak{T}''_a, \quad \mathfrak{T}_a . \mathfrak{T}'_b = \mathfrak{T}''_b, \quad \mathfrak{T}_b . \mathfrak{T}'_a = \mathfrak{T}''_b.$$

Wir haben also eine aus zwei Schichten bestehende Gruppe mit Systemen von je drei wesentlichen komplexen Parametern vor uns,

---

[1]) Selbstverständlich sind dann auch die Größen P''_k in der ersten Formelgruppe unter (6) und (7) nicht identisch mit denen der zweiten Gruppe und die Größen A''_k der dritten Gruppe nicht identisch mit denen der vierten.

[2]) Natürlich müssen die Faktoren von T und T von Null verschieden bleiben.

und diese Gruppe jedenfalls wird durch unsere Formeln lückenlos dargestellt. Daß aber die Hauptschicht dieser Gruppe, die analytische Gruppe unserer eigentlichen Transformationen, die positiv-automorphen linearen Transformationen von $(A\,U)^2$ erschöpft, geht daraus hervor, daß das sicher für eine Umgebung der identischen Transformation zutrifft. Man erschließt das ebenso wie in dem in § 19 abgehandelten Fall.

Ein zweiter mit elementaren Mitteln zu führender Beweis ergibt sich weiterhin aus den Gleichungen (10 a) und (10 b).

Sogleich sieht man auch noch, daß die Gleichungen $P_0 = 0$, $A_0 = 0$ nach wie vor involutorische Transformationen kennzeichnen, und zwar alle solchen in der genannten Gruppe. Es tritt aber jetzt auch eine neue Erscheinung auf: Die Gleichung $(\Omega P) = 0$ bezeichnet jetzt eine nur noch von zwei wesentlichen komplexen Parametern abhängige analytische, und zwar invariante Untergruppe der Gruppe (a), und ebenso bilden diese Transformationen zusammen mit den involutorischen Transformationen von (a) noch eine (geschichtete) invariante Untergruppe. Ferner lassen sich den Gleichungen (14) in § 20 zum Teil analoge Gleichungen an die Seite stellen.

Man kann diese auch, in allen Fällen, zur Bestimmung der Verhältnisgrößen P_k oder A_k verwerten (wiewohl nicht mehr auf ganz so einfache Weise wie dort), wenn eine durch (5 a) oder (5 b) darstellbare Transformation (T, T) vorliegt. Nur ist zu bedenken, daß, namentlich im Falle (b), etliche unserer Formeln (14) bis (16) illusorisch werden. Man hat im Falle (b) immer

$$|T + E| = 0, \quad R = -1; \tag{8}$$

daher fehlt im Falle (b) ein Seitenstück zu den Formeln (16) in § 20 [1]), und auch im Falle (a) wird man nun nicht mehr so schnell wie unter der Voraussetzung $|A| \neq 0$ durch Rechnung feststellen können, daß die gefundenen Transformationen die automorphen linearen Transformationen von $(U\,A)^2$ erschöpfen. [Die früher (S. 215) zum Beweis benutzten Formeln

$$\frac{T - E}{T + E} S_0 = S_1, \quad \frac{\mathsf{T} - \mathsf{H}}{\mathsf{T} + \mathsf{H}} \Sigma_0 = \Sigma_1$$

---

[1]) Das Bestehen der Gleichungen (8) zieht hier darum nicht den involutorischen Charakter der dargestellten Transformationen nach sich, weil im Falle $|A| = 0$, $A_0 \neq 0$ die Transformationen (5 b) nur singuläre quadratische Formen in Ruhe lassen.

liefern jetzt, wenn der Fall (a) angenommen und

$$(X\Omega).(\Omega Y) = S_0^*, \quad (UA)(VA) = \Sigma_0^*$$

gesetzt wird, nur

$$\frac{T-E}{T+E} S_0^* = 0, \quad \frac{\mathsf{T}-\mathsf{H}}{\mathsf{T}+\mathsf{H}} \Sigma_0^* = -\frac{(\Omega P).(\Omega U V)}{P_0},$$

im Falle (b) aber liefern sie überhaupt nichts Brauchbares.]

Besonderes Interesse hat der Spezialfall, in dem $(AU)^2$ und (ΩX) die Form

$$(9) \qquad \boxed{(AU)^2 = U_2^2 + U_3^2, \qquad (\Omega X) = X_1}$$

haben. Man erhält dann aus (5 a) und (5 b) eine Formelgruppe, die zur Darstellung der Bewegungen und Umlegungen in einer mit gewöhnlichen rechtwinkligen Koordinaten verbundenen Euklidischen Ebene dient; die Formen T, T entsprechen dann den folgenden Transformationen, die als erschöpfende Darstellung der Bewegungen und Umlegungen leicht zu erkennen sind:

(10a)

$$\begin{array}{lllr}
(P_0^2+P_1^2)X_1 & * & * & = N.\underline{X}_1, \\
2(P_1P_2-P_0P_3)X_1 + & (P_0^2-P_1^2)X_2 + & 2P_0P_1.X_3 & = N.\underline{X}_2 \\
2(P_3P_1+P_0P_2)X_1 - & 2P_0P_1.X_2 + & (P_0^2-P_1^2)X_3 & = N.\underline{X}_3;
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllr}
(P_0^2+P_1^2)U_1 + & 2(P_1P_2+P_0P_3)U_2 + & 2(P_3P_1-P_0P_2)U_3 & = N.\underline{U}_1, \\
* & (P_0^2-P_1^2).U_2 + & 2P_0P_1.U_3 & = N.\underline{U}_2, \\
* & -2P_0P_1.U_2 + & (P_0^2-P_1^2)U_3 & = N.\underline{U}_3,
\end{array}$$

$$\{N = P_0^2 + P_1^2\}.$$

(10b)

$$\begin{array}{lllr}
-(A_2^2+A_3^2)X_1 & * & * & = N.X_1, \\
2(A_1A_2-A_0A_3)X_1 + & (A_2^2-A_3^2)X_2 + & 2A_2A_3.X_3 & = N.X_2, \\
2(A_3A_1+A_0A_2)X_1 + & 2A_2A_3.X_2 - & (A_2^2-A_3^2).X_3 & = N.X_3,
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllr}
-(A_2^2+A_3^2)U_1 + & 2(A_1A_2+A_0A_3)U_2 + & 2(A_3A_1-A_0A_2)U_3 & = N.\underline{U}_1, \\
* \quad + & (A_2^2-A_3^2)U_2 + & 2A_2A_3.U_3 & = N.\underline{U}_2, \\
* \quad + & 2A_2A_3.U_2 - & (A_2^2-A_3^2)U_3 & = N.U_3;
\end{array}$$

$$\{N = A_2^2 + A_3^2\}.$$

Die Formeln für die Zusammensetzung der Parameter aber werden nun diese:

$$
(11) \qquad
\begin{array}{rrrrl}
P_0 P_0' & - P_1 P_1' & * & * & = P_0'', \\
P_0 P_1' & + P_1 P_0' & * & * & = P_1'', \\
P_0 P_2' & - P_1 P_3' & + P_2 P_0' & + P_3 P_1' & = P_2'', \\
P_0 P_3' & + P_1 P_2' & - P_2 P_1' & + P_3 P_0' & = P_3''; \\
\hline
* & * & - A_2 A_2' & - A_3 A_3' & = P_0'', \\
* & * & A_2 A_3' & - A_3 A_2' & = P_1'', \\
A_0 A_2' & - A_1 A_3' & + A_2 A_0' & + A_3 A_1' & = P_2'', \\
A_0 A_3' & + A_1 A_2' & - A_2 A_1' & + A_3 A_0' & = P_3''; \\
\hline
P_0 A_0' & - P_1 A_1' & - P_2 A_2' & - P_3 A_3' & = A_0'', \\
P_0 A_1' & + P_1 A_0' & + P_2 A_3' & - P_3 A_2' & = A_1'', \\
P_0 A_2' & - P_1 A_3' & * & * & = A_2'', \\
P_0 A_3' & + P_1 A_2' & * & * & = A_3''; \\
\hline
A_0 P_0' & - A_1 P_1' & - A_2 P_2' & - A_3 P_3' & = A_0'', \\
A_0 P_1' & + A_1 P_0' & + A_2 P_3' & - A_3 P_2' & = A_1'', \\
* & * & A_2 P_0' & + A_3 P_1' & = A_2'', \\
* & * & - A_2 P_1' & + A_3 P_0' & = A_3''.
\end{array}
$$

Sie haben in allen Fällen zur Folge, daß $N . N' = N''$ wird.

Die erste Formelgruppe unter (11) ist das Multiplikationstheorem eines Systems komplexer Zahlen, einer Ausartung der Quaternionen Hamiltons, die auf ähnliche Art wie die Quaternionen selbst, auch mit Hilfe einer quadratischen Tafel beschrieben werden kann. Setzt man der Reihe nach

$$
\begin{aligned}
P &= \{1, 0, 0, 0\} = e_0, \\
P &= \{0, 1, 0, 0\} = e_1, \\
P &= \{0, 0, 1, 0\} = e_2, \\
P &= \{0, 0, 0, 1\} = e_3,
\end{aligned}
$$

so entsteht die Multiplikationstafel:

(12)

e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	0	0
e_3	e_2	0	0

$(\longrightarrow)$

Die entwickelten Formeln finden, wie angedeutet, ihre wichtigste Anwendung in der Euklidischen Geometrie der Ebene. Man achtet dann nur auf die Verhältnisse der Koordinaten eines Vektors X oder U, deren Systeme dann als Punkte oder Geraden bezeichnet werden. Setzt man in dem Spezialfall (9)

$$x = \frac{X_2}{X_1}, \quad y = \frac{X_3}{X_1}, \qquad (X_1 \neq 0),$$

so werden x und y rechtwinklige Kartesische Koordinaten eines Punktes. Die Transformationsgleichungen (10a) lassen dann aus jeder Figur eine zu ihr „kongruente“, die Formeln (10b) eine zu ihr „symmetrische“ („symmetrisch-gleiche“) Figur hervorgehen. Wir unterscheiden sie dann durch den Gebrauch der vorhin schon eingeführten Worte **Bewegung** und **Umlegung** [1]).

Wir wollen an diesem Beispiel noch kurz auseinandersetzen, wie sich die Grundbegriffe der analytischen Geometrie rein-algebraisch und ohne Gebrauch spezieller Voraussetzungen über das Koordinatensystem entwickeln lassen. Wir machen also jetzt nicht die durch die Gleichungen (9) bezeichnete Annahme. Doch soll, lediglich der Kürze zuliebe, die Form $(U\,A)^2$ hier als semipositiv gelten, und es sollen auch nur reelle Figuren — ausschließlich Punkte und gerade Linien mit reellen Koordinatenverhältnissen — betrachtet werden [2]).

---

[1]) Math. Ann. **39**, 441 ff. (1891), insbesondere S. 557 bis 564. Dort finden sich schon die Formeln (10a), (10b) und (11), abgesehen von den hier verbesserten Buchstabenzeichen.

[2]) Diese hier also nebensächliche Einschränkung ist für die meisten Darstellungen der elementaren analytischen Geometrie wesentlich. Kann man sich um das Imaginäre doch nicht herumdrücken, so tut man dann vielfach so, als wären die erforderlichen Begriffe auch für das komplexe Gebiet erklärt. Ein anderer Mangel vieler Lehrbücher der „analytischen“ Geometrie besteht darin, daß ihren Lesern, d. h. Anfängern, Kenntnis eines verwickelten Systems sogenannter Axiome zugemutet wird. Man opfert damit die Wissenschaftlichkeit Rücksichten, die man, schwerlich mit Recht, für pädagogisch hält. Sind jene Axiome mit ihren wichtigsten Folgerungen irgendwo einwandfrei dargestellt, dann sicherlich nicht in Schulbüchern. Alle Autoren verfahren so, die von „Anwendungen der Analysis auf Geometrie“ reden. Was man dann unter Geometrie verstehen soll, muß doch zuerst einmal da und auch fest begründet sein. Aber auch im besten Falle kann die Überzeugung von der Widerspruchsfreiheit eines solchen Systems nicht ohne Hilfe der Analysis gewonnen werden.

Einen allerdings noch nicht ganz befriedigend ausgefallenen Versuch, mit diesem System von Erschleichungen zu brechen, bedeutet die Koordinatengeometrie von H. Beck.

Wir unterscheiden (wie üblich) zweierlei Punkte und gerade Linien. Uneigentlich wird die Gerade Ω genannt, alle anderen ∞^2 Geraden heißen eigentliche Geraden. Uneigentliche Punkte sind dann die ∞^1 Punkte, die mit der Geraden Ω vereinigt liegen. $\{(\Omega X) = 0\}$. Von der eigentlichen Geraden U unterscheiden wir eine andere Figur, die durch drei Größen $\{U_1, U_2, U_3\}$ definiert (definiert!) ist, die der Gleichung $(U A)^2 = 1$ genügen. Wir nennen sie orientierte Gerade oder Speer. Zu jeder eigentlichen Geraden gehören also zwei orientierte Geraden oder Speere $\frac{U}{\sqrt{(U A)^2}}$, entsprechend den beiden Werten von $\sqrt{(U A)^2}$. Der Übergang von einer Geraden zu einer der beiden entsprechenden orientierten Geraden ist nur in besonderen Fällen eine rational-ausführbare Operation.

Es besteht nun, wie ohne weiteres abzuleiten, identisch (für alle U, V, U', V') die Gleichung

$$\boxed{\begin{vmatrix} (A U)(A U') & (A U)(A V') \\ (A V)(A U') & (A V)(A V') \end{vmatrix} = (\Omega U V).(\Omega U' V').} \tag{13}$$

Daher kann man erstens eine Wurzelgröße eindeutig durch die Formel

$$\boxed{\sqrt{(A U)^2 . (A V)^2 - \{(A U)(A V)\}^2} = (\Omega U V)} \tag{14}$$

erklären. Zweitens kann, wenn $(\Omega U V) = 0$ ist, eine Abhängigkeit zwischen zwei Wurzelgrößen durch die eine oder andere Formel

$$\boxed{\sqrt{(A U)^2} . \sqrt{(A V)^2} = \pm (A U)(A V)} \tag{15}$$

erklärt werden. Eigentliche Geraden, die der Bedingung $(\Omega U V) = 0$ genügen, nennen wir nun parallel. Es folgt, daß nach Orientierung einer Geraden die Orientierung jeder zu ihr parallelen Geraden rational-ausführbar ist. Ist das obere Vorzeichen in (15) gewählt worden, so heißen die Speere

$$\frac{U}{\sqrt{(U A)^2}}, \quad \frac{V}{\sqrt{(V A)^2}}$$

syntaktisch, andernfalls antitaktisch. Drittens kann es sein, daß für zwei eigentliche Geraden $(U\Lambda)(\Lambda V) = 0$ ist. Man kann dann wieder eine Abhängigkeit zwischen Wurzelgrößen erklären durch die eine oder andere der Formeln

$$(16)\quad \boxed{\sqrt{(\Lambda U)^2}\,.\,\sqrt{(\Lambda V)^2} = \pm\sqrt{(\Lambda U)^2\,.\,(\Lambda V)^2} = \pm(\Omega U V).}$$

Wir sagen, die Geraden U, V seien zueinander orthogonal (senkrecht); ferner nennen wir den Speer $\frac{V}{\sqrt{(\Lambda V)^2}}$ normal zu dem Speer $\frac{U}{\sqrt{(\Lambda U)^2}}$, wenn in (16) das obere Vorzeichen gilt[1]). Wenn also eine Gerade orientiert ist, so verlangt die Orientierung auch der zu ihr senkrechten Geraden nicht die Einführung einer neuen Wurzelgröße.

Wir definieren jetzt Begriffe „Winkel“ und „Entfernung“.

Der Winkel Θ_U^V von zwei orientierten Geraden oder Speeren, die in eine bestimmte Reihenfolge U, V gesetzt sind, wird bis auf Vielfache von 2π genau erklärt durch die Formeln

$$(17)\quad \boxed{\cos\Theta_U^V = \frac{(U\Lambda)(\Lambda V)}{\sqrt{(\Lambda U)^2}\,.\,\sqrt{(\Lambda V)^2}},\quad \sin\Theta_U^V = \frac{(\Omega U V)}{\sqrt{(\Lambda U)^2}\,.\,\sqrt{(\Lambda V)^2}}.}$$

Hieraus folgt — immer auf Grund algebraischer Tatsachen — der Lehrsatz von der Winkelsumme im Dreieck (Summe der Außenwinkel), der erst durch Einführung des Begriffes Speer seine einfachste Form und wahre Allgemeinheit erhält:

$$(18)\quad \boxed{\Theta_V^W + \Theta_W^U + \Theta_U^V = 0 \pmod{2\pi}.}$$

[1]) Wenn also der Speer V normal ist zu dem Speer U, so ist der Speer U normal zu der Umkehrung von V, d. h. zu dem Speer $-V$. Die Unterscheidung der hier durch die Worte orthogonal und normal bezeichneten Begriffe liegt z. B. der Evolutentheorie der ebenen Kurven zugrunde. Die einfachen algebraischen Tatsachen, die man in einer solchen Theorie doch wirklich benutzt, sollten reinlich herausgearbeitet werden. — Man beweise etwa noch mit Hilfe der Identität (13) und der zugehörigen Definitionen (15), (16) (also ohne Gebrauch von Winkelgrößen!): Wenn U, V, W drei Speere sind, und V normal ist zu U, und W zu V, so sind U und W antitaktisch.

Sodann heiße Entfernung zweier eigentlicher Punkte X, Y der Ausdruck

$$\boxed{\mathsf{E}_X^Y = \frac{\sqrt{(A\,X\,Y)^2}}{(\Omega\,X).(\Omega\,Y)}.} \tag{19}$$

Man sieht, daß durch Entscheidung über den Wurzelwert im Zähler dieses Ausdrucks die Verbindungslinie der Punkte X, Y orientiert, in einen Speer verwandelt wird. Liegt umgekehrt eine orientierte Gerade U vor, so läßt sich die Entfernung von irgend zwei Punkten X, Y auf ihr eindeutig erklären,

$$\boxed{\mathsf{E}_X^Y = \frac{(U\,A)(A\,X\,Y)}{\sqrt{(A\,U)^2}.(\Omega\,X).(\Omega\,Y)},} \tag{20}$$

was wieder eine Folge der Identität (13) ist, und die unter der Voraussetzung $(U\,X) = 0$, $(U\,Y) = 0$ mögliche Erklärung einer Abhängigkeit von zwei Wurzelgrößen einschließt:

$$\boxed{\sqrt{(A\,U)^2}.\sqrt{(A\,X\,Y)^2} = (U\,A)(A\,X\,Y).} \tag{21}$$

Es ergibt sich noch, daß für irgend drei Punkte auf demselben Speer

$$\boxed{\mathsf{E}_Y^Z + \mathsf{E}_Z^X + \mathsf{E}_X^Y = 0} \tag{22}$$

ist.

Zu diesen Definitionen und Lehrsätzen ist schließlich sachgemäßerweise die Bestimmung zu fügen, daß bei Ausführung irgendwelcher eigentlicher negativ-automorpher (und folglich auch beliebiger positiv-automorpher) Transformationen von $(A\,U)^2$ die Wurzelgrößen der Form $\sqrt{(A\,U)^2}$ — oder $\sqrt{(A\,X\,Y)^2}$ — mitgenommen werden sollen; d. h. daß aus $U \rightarrow \underline{U}$ immer $\sqrt{(A\,U)^2} = \sqrt{(A\,\underline{U})^2}$ folgen soll. Es ergibt sich dann:

$$\boxed{\mathsf{E}_X^Y = \mathsf{E}_{\underline{X}}^{\underline{Y}}, \quad \Theta_U^V = +\Theta_{\underline{U}}^{\underline{V}} \text{ (mod. } 2\,\pi).} \tag{23}$$

Die Entfernungen bleiben also bei Bewegungen und Umlegungen erhalten, während die Winkelgrößen nur (transzendente) Bewegungsinvarianten sind, bei Umlegungen aber, abgesehen von ihrer additiven Unbestimmtheit, das Vorzeichen wechseln, oder, wie wir sagen dürfen, „umgelegt“ werden.

Offenbar kann man in dieser Weise fortfahren, und den gesamten Gedankeninhalt der ebenen Euklidischen Geometrie als Ausschnitt aus einer Invariantentheorie der Bewegungsgruppe erweisen. Z. B. wird dann noch der Abstand eines Punktes X von einem Speer durch die Formel

$$(24) \qquad \boxed{\mathsf{E}_U^X = \frac{(UX)}{\sqrt{(\varDelta U)^2 . (\Omega X)}} = -\mathsf{E}_X^U,}$$

der Dreiecksinhalt durch die Formel

$$(25) \qquad \boxed{\frac{1}{2} \frac{(XYZ)}{(\Omega X) . (\Omega Y) . (\Omega Z)}}$$

zu erklären sein [1]).

Wir wollen schließlich die entwickelten Begriffe noch auf die Bewegungen und Umlegungen selbst anwenden, die ja als Objekte anderer Bewegungen und Umlegungen ebenfalls gewisse Invarianteneigenschaften haben müssen.

Unter den Bewegungen unterscheiden wir die Schiebungen $\{(\Omega P) = 0\}$, die für sich eine Gruppe bilden und zu denen also die identische Transformation gehört, von den übrigen Bewegungen, bei deren jeder ein bestimmter eigentlicher Punkt $\{P\}$ in Ruhe bleibt. Diese letzten können als Drehungen um diesen Punkt P bezeichnet werden. Bedeutet U eine orientierte Gerade durch P, so wird der Winkel $2\vartheta = \Theta_U^{\overline{U}}$ unabhängig von U. Er heißt Drehungswinkel und ist bis auf Vielfache von 2π bestimmt durch die Formel

$$(26) \qquad \boxed{tg\,\vartheta = -\frac{(\Omega P)}{P_0}}$$

(vgl. S. 229, Nr. 30). Bei einer Schiebung, die nicht gerade die identische Transformation ist, bleibt kein eigentlicher Punkt in Ruhe. Es ist aber nun $\left(\mathsf{E}_{\overline{X}}^X\right)^2$ unabhängig von der Lage des Punktes X,

[1]) Siehe die Abhandlung: Über Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie, Leipziger Berichte 1896, S. 649 und R. Weitzenböck, Über Bewegungsinvarianten, III. Sitzber. der Wiener Akademie, Math.-Naturw. Klasse, Bd. CXXII, 1913, S. 1577.

und einander zugeordnete Geraden durch X und $\underline{X}$ sind zueinander parallel. Daher kann man sie zugleich orientieren auf Grund der unter der Voraussetzung $(\Omega P) = 0$ möglichen Erklärung

$$\boxed{\sqrt{(A P X)^2} \cdot (\Omega Y) = \sqrt{(A P Y)^2} \cdot (\Omega X).} \tag{27}$$

Setzt man also $2\vartheta^* = \mathsf{E}^{X}_{\underline{X}}$, so ergibt sich, als Seitenstück zu (26), ein — notwendigerweise — mit einer Irrationalität behafteter Ausdruck

$$\boxed{\begin{aligned} \vartheta^* &= \lim_{\vartheta \to 0} . \mathsf{E}^{X}_{P} . tg\,\vartheta = \lim_{\vartheta \to 0} \mathsf{E}^{Y}_{P} . tg\,\vartheta = \\ &= -\frac{\sqrt{(A P X)^2}}{P_0 . (\Omega X)} = -\frac{\sqrt{(A P Y)^2}}{P_0 . (\Omega Y)} \end{aligned} \;\left|\begin{matrix} (\Omega X) \neq 0 \\ (\Omega Y) \neq 0 \end{matrix}\right|} \tag{28}$$

[1)] bezieht sich auf den Ausdruck $\sqrt{(A P Y)^2}$.

Im Falle einer Umlegung liegen die Mitten zwischen den eigentlichen Punkten X, $\underline{X}$ auf der Geraden A, der „Umlegungsachse“, die dadurch gekennzeichnet ist, daß für ihre Punkte die Umlegung mit einer Schiebung übereinstimmt. Man kann daher von der Schiebungsgröße 2η einer Umlegung reden: Wir definieren sie als die Entfernung $\mathsf{E}^{X}_{\underline{X}} . \{(A X) = 0\}$. Wir erhalten dann nach zweckmäßiger Festsetzung über die Bezeichnung einer Wurzelgröße

$$\boxed{\eta = -\frac{A_0}{\sqrt{(A A)^2}}.} \tag{29}$$

Stimmen zwei Drehungen, die nicht Schiebungen sind, im Werte von $tg\,\vartheta$ überein, so sind sie kongruent, stimmen sie nur im Werte

[1)] Der Quotient $(A P X)^2 : (\Omega X)^2$ ist also hier nur scheinbar abhängig von X; er enthält auch der Form nach keine Abhängigkeit von X mehr, wenn man für die Koordinaten von Y bestimmte Zahlenwerte wählt, z. B. wenn man $Y = \{1, 0, 0\}$ setzt. Man erhält dann $(A P X)^2 : (\Omega X)^2 = (A_2 P_3 - A_3 P_2)^2 : \Omega_1{}^2$, und insbesondere im Falle der Annahme (9): $(A P X)^2 : (\Omega X)^2 = P_2{}^2 + P_3{}^2$. Es gibt aber keine Zahlenwerte der Größen Y_k, die immer, d. h. in der Theorie jeder unserer Formen $(A U)^2$, brauchbar wären; die Annahme $(\Omega Y) \neq 0$ bedeutet nicht nur eine (wenn auch geringe, so doch) unnötige Einschränkung, sondern sie läßt auch der Wahl des Punktes Y noch einen großen Spielraum. Die in der Formel (28) enthaltene Willkür läßt sich verschleiern, aber auf keine Art wirklich vermeiden.

von $tg^2\vartheta$ überein, so sind sie zueinander symmetrisch. Schiebungen und Umlegungen, die kongruent sind, sind dagegen immer auch zueinander symmetrisch. Das Kriterium dafür ist Gleichheit der zugehörigen Werte von η^2.

Es hat sich hier ergeben, daß man als Grenzfall der Drehungen um einen festen Punkt des Euklidischen (oder übrigens auch des Nicht-Euklidischen) Raumes mit der Geraden (X) als Raumelement nicht etwa nur die Gruppe der Bewegungen in der Euklidischen Ebene, sondern die geschichtete Gruppe erhält, die aus den Bewegungen und Umlegungen in dieser Ebene besteht.

Von Autoren, die sich mit der Euklidischen Geometrie in ihrer Eigenschaft als Grenzfall der Nicht-Euklidischen beschäftigt haben, ist dieser Sachverhalt nicht richtig aufgefaßt worden. Soweit das Reelle in Frage kommt, kann man sich aber das Gesagte auch ganz leicht anschaulich klar machen. Man betrachte die Gruppe der automorphen Bewegungen (und Umlegungen) einer Kugelfläche, die eine bestimmte Ebene in einem vorgeschriebenen Punkte berührt. Man projiziere diese Gruppe aus dem Mittelpunkte der Kugel in die Ebene, wodurch in dieser aus den Bewegungen (wie auch aus den Umlegungen) auf der Kugel die Bewegungen der sogenannten elliptischen Geometrie hervorgehen (die eine analytische, auch im Reellen nicht geschichtete Gruppe bilden). Man lasse dann den Mittelpunkt der Kugel ins Unendliche rücken, halte aber dabei einmal die Spur einer Drehungsachse, ein anderes Mal die Spur einer Drehungsebene in der gegebenen Ebene fest. Man überlege sich, was das eine und das andere Mal z. B. aus einer eingliedrigen Drehungsgruppe (und ihrer Erweiterung durch Umlegungen) wird.

Ganz anders verhält sich, beiläufig bemerkt, die Gruppe der Euklidischen Bewegungen und Umlegungen im dreidimensionalen Raume zur entsprechenden Gruppe elliptischer Bewegungen und Umlegungen. Inwiefern und warum? Von welcher Eigenschaft der Dimensionenzahl hängt dieses verschiedenartige Verhalten ab? Inwiefern ändert sich der Sachverhalt, wenn man die sphärische und elliptische Geometrie durch die pseudosphärische und hyperbolische ersetzt?

Das in § 20 unter der Voraussetzung $\underline{n = 3}$ behandelte Problem einer (erschöpfenden) Darstellung der automorphen Transformationen einer nichtsingulären quadratischen Form durch Parameter mit bilinearer Zusammensetzung scheint bei beliebigen Werten der Stufenzahl n beträchtliche Schwierigkeiten zu bieten. Eine befriedigende Lösung hat es bis jetzt nur unter einer starken Einschränkung gefunden, dann nämlich, wenn man es mit Summen von Quadraten zu tun hat. Doch habe ich es (in einer bis jetzt nicht veröffentlichten Untersuchung) auch noch für den Fall $\underline{n = 4}$ vollständig erledigt.

Siehe R. Lipschitz, Untersuchungen über die Summen von Quadraten, 1886. Referate darüber, mit verbesserter Darstellung bei E. Cartan, in der französischen Enzyklopädie **1**, 463 und H. Rothe, in der deutschen Enzyklopädie **3** (1), 1410 u. ff.

Wegen des Euklidischen Grenzfalles für $n = 4$ siehe die auf S. 217 zitierte Abhandlung. Siehe ferner den Aufsatz: Grundlagen und Ziele der analytischen Kinematik. (Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, 12. Jahrgang, 1913, S. 216.) In dieser letzten Abhandlung finden sich zur Rechnung sehr bequeme Formeln der Quaternionentheorie, die sich formal fast unverändert auch auf den Nicht-Euklidischen Raum erstrecken ($\varepsilon^2 = \pm 1$ statt $\varepsilon^2 = 0$). Vgl. auch Geometrie der Dynamen, 1903, § 21.

§ 22.

Orthogonale und quasi-orthogonale Invarianten ternärer bilinearer Formen.

Handelt es sich darum, die ganzen rationalen Invarianten irgendwelcher Vektoren und sonstiger Kerne ternärer algebraischer Formen gegenüber der Gruppe der orthogonalen Transformationen zu bestimmen, so erhalten wir, entsprechend der kleineren Parameterzahl der jetzt betrachteten Gruppe, viel umfangreichere Invariantensysteme. Aber da die beiden Arten von Vektoren X und U oder von Symbolen P und A sich nun algebraisch ganz gleich verhalten, so gehen durch einen einfachen Wechsel der gebrauchten Zeichen solche Invarianten gruppenweise ineinander über. Wir kommen also jetzt auf den schon in § 2 betrachteten Sachverhalt zurück: Wir können von der durch die Zeichen

$$(XY), \quad (XV), \quad (UV)$$

ausgedrückten Unterscheidung nun wieder absehen, und müssen dann natürlich auch von der absehen, die wir mit Hilfe der Zeichen

$$(XYZ), \quad (XYW), \quad (XVW), \quad (UVW)$$

dargestellt hatten. Aber die in § 12 angestellte Untersuchung zeigt uns ja auch, daß diese Vereinfachung keineswegs an die Voraussetzung gebunden ist, daß wir es mit orthogonalen Transformationen zu tun haben, mit solchen also, die gerade die reziproken Formen

$$(LX)^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2, \quad (\varLambda U)^2 = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2$$

in Ruhe lassen, sondern daß in der Theorie irgend eines Paars zueinander reziproker Formen von der Determinante Eins genau dieselbe große Vereinfachung stattfindet. So konnten wir in der Theorie der Gruppe γ der automorphen Transformationen von $(LX)^2$ und $(\varLambda U)^2$ diese Formen selbst schon durch die einfachen Zeichen

$$(XX), \quad (UU)$$

darstellen, deren Bedeutung dann eben die von $(LX)^2$ und $(\varLambda U)^2$ ist, und wir konnten den Übergang von einer Invariante der eingangs aufgezählten Typen zu den übrigen derselben Gruppe genau so wie in dem genannten Spezialfall durch einfache Änderungen der Zeichen, z. B. durch Ersetzung von X durch U oder umgekehrt, bewerkstelligen, wodurch eben wir die Substitutionen

$$(XL)L = U, \quad (UA)A = X$$

auf eine einfachere Weise dargestellt hatten.

In summa: Wir haben es jetzt nur noch mit zwei wesentlich verschiedenen Typen elementarer Invarianten

$$(XY) \quad \text{und} \quad (XYZ)$$

zu tun, ganz so, wie in der spezielleren Theorie der orthogonalen Invarianten, wo wir nur an Stelle des Zeichens (XY), aus den früher angegebenen Gründen, das andere $(X \mid Y)$ benutzt hatten.

Zu der hiermit gegebenen Vereinfachung unserer Theorie gegenüber der allgemeinen Theorie der ternären Formen — einer Vereinfachung, die schon beträchtlich ist — kommen nun noch weitere Vereinfachungen, und das alles zusammen bewirkt, daß die formale Gestaltung der Invariantentheorie unserer Gruppe γ (γ_3) sich der Theorie der binären Formen nähert, mit der sie in der Tat auch nahe zusammenhängt (vgl. S. 256). Was hiermit angedeutet ist, gehört jedoch zu den Gegenständen, die erst im zweiten Teile der vorliegenden Schrift abgehandelt werden können.

Daß eine so vage Andeutung, wie sie hier zunächst nur gemacht werden konnte, nicht recht verständlich sein kann, weiß ich sehr wohl. Sie dient auch nur dem einzigen Zweck, daran die weitere Bemerkung knüpfen zu können, daß das nunmehr zu formulierende Problem, in dem an Stelle von zwei Veränderlichen X und Y (oder X und U) nur eine einzige Z vorkommt, nicht so speziell ist, wie es aussieht; daß es nicht etwa, wie es zunächst wohl scheinen muß, mit einer willkürlichen Einschränkung behaftet und also von zu geringer Tragweite ist.

Es sei vorgelegt ein System algebraischer Formen $\mathfrak{F}^{(1)}$, $\mathfrak{F}^{(2)}, \ldots$ (mit frei veränderlichen Kernen). Wir erweitern dann das System der Kerne dieser Formen durch Hinzufügung des Kernes **einer** linearen Form, oder also durch Hinzufügung **eines** Vektors Z. Unter einem vollständigen Formensystem der gegebenen Formen verstehen wir dann ein System solcher Invarianten des erweiterten Systems, durch die sich alle Invarianten dieses Systems ganz und rational ausdrücken lassen. Es werde verlangt, im Falle einer bilinearen Form $\mathfrak{F} = (XA)(BY)$ ein **kleinstes** System derart, d. h. ein System von möglichst wenigen solchen Invarianten zu bilden.

Wir haben nun bereits zwei Zerlegungen bilinearer Formen in solche von einfacheren Eigenschaften kennen gelernt (S. 117, 118), und diese müssen hier, in der Theorie der Untergruppe γ_3 der Gruppe Γ_8, beide mit den gegebenen Formen invariant verbunden sein. Es sei, wie soeben,

$$\mathfrak{F}(X, Y) = (XA)(BY);$$

dann ist

$$(1)\qquad \mathfrak{F}(X, Y) = \left\{\begin{array}{l} \quad\frac{1}{2}\{(XA)(BY) + (XB)(AY)\} \\ + \frac{1}{2}\{(XA)(BY) - (XB)(AY)\}\end{array}\right\}$$

die eine invariante Zerlegung,

$$(2)\qquad \mathfrak{F}(X, V) = \{(XA)(BV) - \tfrac{1}{3}(XV).(AB)\} + \tfrac{1}{3}(XV).(AB)$$

ist die andere.

Der Unterschied von Vektoren erster und zweiter Schicht, Y und V, kommt hier, wie gesagt, nicht in Betracht. So können wir die Zerlegungen (1) und (2) überlagern, und wir erhalten dann eine dritte und weitergehende Zerlegung der bilinearen Form $\mathfrak{F}(X, Y)$:

$$(3)\qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\text{I}} + \mathfrak{F}_{\text{II}} + \mathfrak{F}_{\text{III}}\,^{1}).$$

Die Bedeutung der einzelnen Summanden in dieser Formel ist:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{F}_{\text{I}} &= (XD)(DY) \\ &= \tfrac{1}{2}\{(XA)(BY) + (XB)(AY)\} - \tfrac{1}{3}(XY).(AB), \end{aligned}$$

$$(5)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{F}_{\text{II}} &= (XQY) \\ &= \tfrac{1}{2}\{(XA)(BY) - (XB)(AY)\} = \tfrac{1}{2}(AB \mid XY), \end{aligned}$$

$$(6)\qquad \mathfrak{F}_{\text{III}} = \tfrac{1}{3}(XY).(AB) = \tfrac{1}{3}R.(XY).$$

Bei Gebrauch der hier neu eingeführten Zeichen wird also

$$(7)\qquad \boxed{(XA)(BY) = (XD)(DY) + (XQY) + \tfrac{1}{3}R.(XY).}$$

Die erste der bilinearen Formen rechts in dieser Gleichung hängt dann nur von vier Konstanten linear ab, da aus (4)

$$(8)\qquad \boxed{(DD) = 0}$$

[1]) Diese Reihenentwicklung ist ein sehr einfacher Fall der zur Gruppe γ_3 überhaupt gehörigen Reihenentwicklungen.

folgt. Die zweite Form hängt von drei Konstanten linear ab, nämlich von denen des Vektors Q, oder von dem Kern der linearen Form

(9) $$\boxed{(Q Z) = -\tfrac{1}{2}(A B Z).}$$

Die dritte Form endlich ist ein Multiplum der identischen Kovariante $(X Y)$, und enthält mithin als Parameter nur eine Konstante. Setzt man nach der Anweisung (7) aus drei solchen speziellen Formen eine bilineare Form $\mathfrak{F}(X, Y)$ zusammen, so entsteht wieder die allgemeine Form derart. Außerdem ist klar, daß eine noch weitergehende Zerlegung einer bilinearen Form in mit ihr linearverbundene Kovarianten in der Theorie der Gruppe γ_3 nicht möglich ist.

Wir werden es weiterhin mit solchen Formen $\mathfrak{F}$ besonders zu tun haben, von deren Elementarkovarianten $\mathfrak{F}_{I}$, $\mathfrak{F}_{II}$, $\mathfrak{F}_{III}$ die zweite identisch verschwindet. Diese sind dann, wie schon ihre Komponenten $\mathfrak{F}_{I}$ und $\mathfrak{F}_{III}$, Polaren quadratischer Formen. Brauchen wir für sie ein besonderes Zeichen,

(10) $$\boxed{(Z C)(C Z) = (Z D)(D Z) + \tfrac{1}{3} R.(Z Z),}$$

so wird also auch

(11) $$(X A)(B Y) = (X C)(C Y) + (X Q Y).$$

Die gestellte Aufgabe ist hiermit zurückgeführt auf die andere, das zur Gruppe γ_3 gehörige Formensystem einer quadratischen Form $(C Z)^2$ oder $(D Z)^2$ und einer linearen Form $(Q Z)$ zu finden.

Das hier genannte System aber kann man ohne weiteres bilden, sobald man das der quadratischen Form $(C Z)^2$ oder $(D Z)^2$ schon hat: Die dann noch fehlenden Invarianten und Kovarianten werden gefunden, wenn man, auf alle möglichen Arten, Faktoren $(C Z)$ oder $(D Z)$ durch Faktoren $(C Q)$ oder $(D Q)$ und Faktoren $(C Q Z)$ oder $(D Q Z)$ ersetzt, Überflüssiges wegläßt, und schließlich die Formen $(Q Z)$ und $(Q Q)$ hinzufügt, die zusammen mit $(Z Z)$ offenbar das vollständige Formensystem von $(Q Z)$ bilden.

Also kommt es schließlich auf das System einer quadratischen Form $(C Z)^2$ oder $(D Z)^2$ an.

Die Lösung der so reduzierten Aufgabe aber können wir ohne weiteres hinschreiben. Wir haben nämlich, in allen wesentlichen Stücken, einen Spezialfall der in § 16 schon gelösten Aufgabe vor uns. Es würde nur das dort Gesagte zu wiederholen sein: Der ganze Unterschied besteht darin, daß wir es jetzt nur noch mit Kovarianten zu tun haben, die eine einzige Veränderliche Z enthalten. Diese Möglichkeit einer Übertragung der Ergebnisse der §§ 16 und 17 auf unseren Fall wird auch weiterhin im Auge zu behalten sein.

Wir bilden zunächst das System der Invarianten und Kovarianten (solcher mit Z) der spezielleren Form $(DZ)^2$, und erhalten:

$$(12)\qquad \boxed{\begin{array}{c} (D_0 Z)^2 = (ZZ) \\ (D_1 Z)^2 = (DZ)^2, \quad (D_2 Z)^2 = (DD')(DZ)(D'Z), \\ G_2 = -\tfrac{1}{2}(DD')^2, \quad G_3 = \tfrac{1}{3}(DD')(DD'')(D'D''), \\ (TZ)^3 = (DD'')(DD'Z)(D'Z)(D''Z). \end{array}}$$

Diese sechs Formen bilden also ein vollständiges, und zwar kleinstes Formensystem der Grundform $(DZ)^2$. Alle anderen aus Faktoren (DD') und (DZ) zusammensetzbaren symbolischen Produkte müssen sich durch die Formen des Systems (12) ganz und rational ausdrücken lassen, und ebenso die Polaren solcher Formen durch die Polaren der Formen (12).

Dies gilt insbesondere von den symbolischen Potenzen der bilinearen Form $(XD)(DY)$, also von den bilinearen Formen

$\mathfrak{D}_0 = (XY)$, $\mathfrak{D}_1 = (XD)(DY)$, $\mathfrak{D}_2 = (XD)(DD')(D'Y)$ usw.,

denen die genannten symbolischen Potenzen gleich sind. So wird

$$(13)\qquad \boxed{\mathfrak{D}_3 - * + G_2 . \mathfrak{D}_1 - G_3 . \mathfrak{D}_0 = 0.}$$

Wir berechnen mit Hilfe dieser Formel $\mathfrak{D}_4$, $\mathfrak{D}_5, \ldots,$ und das Quadrat der Form $(TZ)^3$, oder, noch etwas allgemeiner, das Produkt $(TX)^3 . (TY)^3$, als Spezialfall der Identität Nr. 12 in § 16:

$$(TX)^3 . (TY)^3 = \begin{vmatrix} \mathfrak{D}_0 & \mathfrak{D}_1 & \mathfrak{D}_2 \\ \mathfrak{D}_1 & \mathfrak{D}_2 & \mathfrak{D}_3 \\ \mathfrak{D}_2 & \mathfrak{D}_3 & \mathfrak{D}_4 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left\{\begin{array}{l} G_2 . (\mathfrak{D}_0 \mathfrak{D}_2^2 + \mathfrak{D}_1^2 \mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_0 \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_3) \\ + G_3 . (\mathfrak{D}_0^2 \mathfrak{D}_3 - 3\,\mathfrak{D}_0 \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_1^3) + \mathfrak{D}_2^3 \end{array}\right\};$$

wir finden also

$$(14)$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} (TX)^3 . (TY)^3 + \mathfrak{D}_2^3 + 2\,\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 (G_2 \mathfrak{D}_1 - G_3 \mathfrak{D}_0) \\ + (\mathfrak{D}_0 \mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_1^2)(G_2 \mathfrak{D}_2 - G_3 \mathfrak{D}_1) + \mathfrak{D}_0 (G_2 \mathfrak{D}_2 - G_3 \mathfrak{D}_1)^2 \end{array}\right\} = 0.}$$

Setzen wir hier $X = Y = Z$, so erhalten wir die einzige algebraische Abhängigkeit, die zwischen den Formen unseres Systems (12) besteht.

Ferner findet sich, unter anderem,

$$\tag{15} \tfrac{1}{2}(D\,D'\,Z)^2 = (D_2\,Z)^2 + G_2 . (Z\,Z),$$

$$\tag{16} \tfrac{1}{6}(D\,D'\,D'')^2 = G_3,$$

$$\tag{17} (T\,D)(T\,Z)^2(D\,Z) = 0, \quad (T\,D)^2(T\,Z) = 0.$$

Die Invarianten und Kovarianten der Form $(C\,Z)^2$ aber lassen sich leicht auf die der etwas spezielleren Form $(D\,Z)^2$ zurückführen.

Wir erhalten durch symbolisches Potenzieren von $\mathfrak{C}_1 = (X\,A)(B\,Y)$:

$$\tag{18} \begin{aligned} \mathfrak{C}_1 &= \mathfrak{D}_1 + \tfrac{1}{3} R . \mathfrak{D}_0, \\ \mathfrak{C}_2 &= \mathfrak{D}_2 + \tfrac{2}{3} R . \mathfrak{D}_1 + \tfrac{1}{9} R^2 . \mathfrak{D}_0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Es ist also

$$\tag{19} \boxed{\begin{aligned} (C_1\,Z)^2 &= (D_1\,Z)^2 + \tfrac{1}{3} R . (Z\,Z), \\ (C_2\,Z)^2 &= (C\,C')(C\,Z)(C'\,Z) = \\ &= (D_2\,Z)^2 + \tfrac{2}{3} R . (D_1\,Z)^2 + \tfrac{1}{9} R^2 . (Z\,Z) \end{aligned}}$$

usw. Hiermit hat man die Werte der in § 16 mit R_1, R_2, R_3 bezeichneten Invarianten

$$\tag{20} \boxed{\begin{aligned} R_1 &= (C_1\,C_1) = (C\,C) = R, \\ R_2 &= (C_2\,C_2) = (C\,C')^2 = -2\,G_2 + \tfrac{1}{3} R^2, \\ R_3 &= (C_3\,C_3) = (C\,C')(C\,C'')(C'\,C'') = \\ &= 3\,G_3 - 2\,R\,G_2 + \tfrac{1}{9} R^3 \end{aligned}}$$

und die Koeffizienten J_1, J_2, J_3 der Identität

$$\tag{21} (C_3\,Z)^2 - J_1\,(C_2\,Z)^2 + J_2\,(C_1\,Z)^2 - J_3\,(Z\,Z) = 0:$$

$$\tag{22} \boxed{\begin{aligned} J_1 = (C\,C) = R, \quad J_2 = \tfrac{1}{2}(C\,C' \mid C\,C') = G_2 + \tfrac{1}{3} R^2, \\ J_3 = \tfrac{1}{6}(C\,C'\,C'')^2 = G_3 + \tfrac{1}{3} R . G_2 + \tfrac{1}{27} R^3. \end{aligned}}$$

Sodann erhält man nach § 16, Nr. 7:

$$\text{(23)} \qquad \boxed{\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(C\,C'\,Z)^2 &= (C_2\,Z)^2 - J_1 \,.\, (C_1\,Z)^2 + J_2 \,.\, (Z\,Z) \\ &= (D_2\,Z)^2 - \tfrac{1}{3}R \,.\, (D_1\,Z)^2 + \{G_2 + \tfrac{1}{9}R^2\} \cdot (Z\,Z), \end{aligned}}$$

und schließlich

$$\text{(24)} \qquad \boxed{(C\,C'')(C\,C'\,Z)(C'\,Z)(C''\,Z) = (T\,Z)^3.}$$

Die letzte Kovariante hat im Büschel $(D\,Z)^2$, $(Z\,Z)$ die Kombinanteneigenschaft, sie hängt nicht ab vom Werte von R. Dasselbe gilt dann natürlich auch von allen Formen, die von ihr allein abhängen, insbesondere von der Invariante $6\,(T\,T')^3$, die nach § 17, Nr. 5 mit der Diskriminante der charakteristischen Funktion

$$\varLambda^3 - J_1\,\varLambda^2 + J_2\,\varLambda - J_3$$

der Form $\mathfrak{C}$ oder $(C\,Z)^2$ zusammenfällt:

$$\text{(25)} \qquad \boxed{\varPi^2(\mathfrak{C}) = 6\,(T\,T')^3 = -4\,G_2^3 - 27\,G_3^2.}$$

Ohne weiteres kann man nun auch ein vollständiges, und zwar kleinstes System von Invarianten der Formen $(D\,X)^2$ oder $(C\,X)^2$ und beliebig vieler Vektoren angeben. Es wird genügen, nur noch das System von Invarianten und Kovarianten der gegebenen Form $\mathfrak{F}(X,\,Y) = (X\,A)(B\,Y)$ zu bilden. Zu den symbolischen Faktoren, die im System der Form $(D\,X)^2$ auftreten, kommen dann noch die Faktoren $(D\,Q)$, $(Q\,Z)$, $(T\,Q)$, $(D\,Q\,Z)$ und die Invarianten R und $(Q\,Q)$. Faktoren $(T\,Q\,Z)$ kommen hier nicht vor, da $(T\,Z)^3$ schon einen Determinantenfaktor enthält.

Die folgende Tafel, in der die Gradzahlen der einzelnen Formen angemerkt sind, gibt eine bequeme Übersicht über das ganze System. Die unterstrichenen Formen sind die, die mit Symbolen D und Q geschrieben, einen Determinantenfaktor enthalten. Ihre Produkte zu zweien lassen sich ausdrücken durch die übrigen Formen des Systems, wie wir es im Falle des Produktes $(T\,X)^3 \,.\, (T\,Y)^3$ schon gesehen haben. Die Formen der zweiten und vierten Reihe in unserer Tafel sind nur Invarianten (natürlich absolute Invarianten) der Gruppe γ (sie sind, in der Sprache der Geometrie ausgedrückt, ausschließlich Bewegungsinvarianten). Ihre Quadrate und zweigliedrigen Produkte aber, und ebenso die Formen der ersten und dritten Reihe, sind Invarianten der Gruppe γ, η. (Sie sind Umlegungsinvarianten.)

(26)

Invarianten.

$$[1]\, R. \quad [2]\, G_2, (QQ). \quad [3]\, G_3, (D_1 Q)^2. \quad [4]\, (D_2 Q)^2. \quad [6]\, (\underline{TQ})^3.$$

Lineare Kovarianten.

$$[1]\, (QZ). \quad [2]\, (D_1 Q)(D_1 Z). \quad [3]\, (D_2 Q)(D_2 Z),$$
$$\underline{(D_1 Q)(D_1 Q Z)}. \quad [4]\, \underline{(D_2 Q)(D_2 Q Z)}. \quad [5]\, \underline{(TQ)^2 (TZ)}.$$

Quadratische Kovarianten.

$$[0]\, (ZZ). \quad [1]\, (D_1 Z)^2. \quad [2]\, (D_2 Z)^2,$$
$$\underline{(D_1 Z)(D_1 Q Z)}. \quad [3]\, \underline{(D_2 Z)(D_2 Q Z)}. \quad [4]\, \underline{(TQ)(TZ)^2}.$$

Kubische Kovariante.

$$[3]\, (\underline{TZ})^3.$$

Zwischen diesen Formen bestehen, außer den genannten, natürlich noch zahlreiche weitere Abhängigkeiten. Es gibt im ternären Gebiet ja überhaupt nur drei linear-unabhängige lineare Formen; daher muß zwischen je vieren der sechs linearen Kovarianten eine lineare Abhängigkeit bestehen, deren Koeffizienten Invarianten unseres Systems sind, usw.

Es ist leicht, das Formelsystem (19) ... (25) so zu erweitern, daß auch noch die Form (QZ) in den Ausdruck der zu untersuchenden Grundform aufgenommen wird. Einige der so entstehenden Formeln werden gelegentlich gebraucht; sie werden deshalb hier noch angeführt. Wir setzen, wie zuvor schon,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1(X, Y) &= (XC)(CY) + (XQY) \\ &= \{(XD)(DY) + \tfrac{1}{3} R . (XY)\} + (XQY), \end{aligned} \tag{27}$$

und benutzen bei Bildung der folgenden Ausdrücke die Formeln (19) ... (25). Die symbolischen Potenzen von $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$ usw. sollen $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, ... und die zugehörigen Invarianten (Ringe) sollen $\mathfrak{R}_0\,(=3)$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$, ... genannt werden. Die lineare Abhängigkeit zwischen den Formen $\mathfrak{F}_0$ usf. heiße entsprechend

$$\mathfrak{F}_3 - \mathfrak{J}_1 \cdot \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{J}_2 \cdot \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{J}_3 \cdot \mathfrak{F}_0 = 0.$$

Man berechnet dann

$$\mathfrak{F}_2 = \left\{\begin{array}{l} \quad (X C_2)(C_2 Y) \;+ (X C_1)(C_1 Q Y) \\ -(X Q C_1)(C_1 Y) + \frac{2}{3} R . (X Q Y) \\ + (X Q) . (Q Y) \quad - (Q Q) . (X Y) \end{array}\right\},$$

und ebenso noch $\mathfrak{F}_3$. Es folgt dann

$$\mathfrak{R}_1 = R_1 = R, \quad \mathfrak{R}_2 = R_2 - 2(Q Q),$$
$$\mathfrak{R}_3 = R_3 + 3(C Q)^2 - 3 R . (Q Q),$$

und

$$\mathfrak{J}_1 = (A B) = J_1 = R,$$
$$\mathfrak{J}_2 = \tfrac{1}{2}(A A' \mid B B') = J_2 + (Q Q),$$
$$\mathfrak{J}_3 = \tfrac{1}{6}(A A' A'')(B B' B'') = J_3 + (C Q)^2,$$

also

$$(28) \quad \begin{array}{l} \mathfrak{J}_1 = R, \quad \mathfrak{J}_2 = \{G_2 + (Q Q)\} + \frac{1}{3} R^2, \\ \mathfrak{J}_3 = \{G_3 + (D Q)^2\} + \frac{1}{3} R \cdot \{G_2 + (Q Q)\} + \frac{1}{27} R^3. \end{array}$$

Hieraus folgt dann

$$(29) \quad \boxed{\Pi^2(\mathfrak{F}) = -4\,\{G_2 + (Q Q)\}^3 - 27\,\{G_3 + (D Q)^2\}^2.}$$

Die bis hierher geführte Untersuchung würde sich noch viel weiter fortsetzen lassen. Wollten wir insbesondere auch die Spezialfälle der Form $\mathfrak{F}$ systematisch untersuchen, so würde sich finden, daß über die Äquivalenz zweier derartiger Formen gegenüber der Gruppe γ_3 ausnahmslos mit Hilfe der Formen unseres Systems (aber keineswegs mit Hilfe von Invarianten allein) entschieden werden kann. Doch darf es hier wohl bei dem Gesagten sein Bewenden haben, nachdem in § 18 ein gleichartiges, wenn auch einfacheres Problem eingehend behandelt worden ist.

Wir wollen jedoch unsere Untersuchung noch auf den Fall anwenden, in dem die vorgelegte Form $(A X)(B Y)$ oder $(A X)(B U)$ als Symbol einer automorphen linearen Transformation der quadratischen Form $(Z Z)$ dienen kann.

Zur Erleichterung einer Vergleichung mit früher abgeleiteten Formeln schreiben wir jetzt $(X C)(\Gamma U)$ an Stelle von $(X A)(B U)$ oder $(X A)(B Y)$, was ja, nach dem Vorgetragenen, hier belanglos ist. Dementsprechend substituieren wir

$$(30) \quad (X C)(\Gamma U) = \frac{2(X P).(P U) + 2 P_0 .(X P U) + \{P_0^2 - (P P)\} \cdot (X U)}{P_0^2 + (P P)}$$

(vgl. Nr. 9, S. 223).

Es findet sich dann

(31)

$$(Z D_1)(D_1 Z) = 2 \cdot \frac{(Z P).(P Z) - \frac{1}{3}(P P)\cdot(Z Z)}{P_0^2 + (P P)},$$

$$(Z D_2)(D_2 Z) = \frac{4}{3} \cdot \frac{(P P)\{(Z P).(P Z) + \frac{1}{3}(P P).(Z Z)\}}{\{P_0^2 + (P P)\}^2},$$

$$(Q Z) = 2 \cdot \frac{P_0 . (P Z)}{P_0^2 + (P P)} \text{ [1])}, \qquad R = \frac{3 P_0^2 - (P P)}{P_0^2 + (P P)},$$

$$G_2 = -\frac{4}{3} \cdot \frac{(P P)^2}{\{P_0^2 + (P P)\}^2}, \quad G_3 = \frac{16}{27} \cdot \frac{(P P)^3}{\{P_0^2 + (P P)\}^3}.$$

Hieraus sieht man, daß aus (30) immer

$$\Pi^2 = -4\, G_2^3 - 27\, G_3^2 = 0$$

folgt, daß aber überdies nun auch die Formen $(D_0 Z)^2$, $(D_1 Z)^2$, $(D_2 Z)^2$ linear-abhängig sind, daß also schon

(32) $$(T Z)^3 = 0$$

sein muß. Es sind dann noch drei Fälle zu unterscheiden. Ist $(P Z)$ identisch gleich Null, so liegt die identische Transformation vor, und es ist schon $(D_1 Z)^2$ identisch gleich Null. Ist nur $(P P) = 0$, so wird erst $(D_2 Z)^2$ identisch gleich Null, während im Falle $(P P) \neq 0$ keine von beiden Formen identisch Null sein kann. Die beiden ersten Annahmen erschöpfen die Fälle, in denen $G_2 = 0$, $G_3 = 0$ ist. Schließen wir sie aus, so sind beide Invarianten nicht Null. Wir können dann durch die rationale Invariante

(33) $$K = -\frac{3}{2} \frac{G_3}{G_2} = \frac{2}{3} \frac{(P P)}{P_0^2 + (P P)}$$

alle Invarianten unseres Systems ganz und rational ausdrücken:

(34)
$$R = 3(1 - 2K), \quad G_2 = -3K^2, \quad G_2 = 2K^3,$$
$$(Q Q) = 3K(2 - 3K),$$
$$(D_1 Q)^2 = 6K^2(2 - 3K), \quad (D_2 Q)^2 = 12K^3(2 - 3K).$$

Die zwischen $(D_0 Z)^2$, $(D_1 Z)^2$ und $(D_2 Z)^2$ bestehende Abhängigkeit nimmt jetzt die Form

(35) $$\mathfrak{D}_2 - K . \mathfrak{D}_1 - 2K^2 . \mathfrak{D}_0 = 0$$

[1]) Früher (S. 220—222) war das Zeichen Q in anderer Bedeutung gebraucht worden.

an. Die Invariante K ist notwendig von Null verschieden. Ausgezeichnet sind die Werte

$$K = \tfrac{2}{3}, \quad K = \tfrac{1}{2}. \tag{36}$$

Der erste liefert die involutorischen Transformationen der Gruppe $\gamma_8 \{P_0 = 0\}$, der zweite die Transformationen von der Periode drei $\{3\,P_0^2 - (P\,P) = 0\}$.

Es ist leicht, den durch die Gleichung (32) ausgedrückten Lehrsatz umzukehren:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine ternäre bilineare Form von der Diskriminante 1 (oder -1) zu einer automorphen linearen Transformation der quadratischen Form $(Z\,Z)$ gehört, besteht in dem identischen Verschwinden ihrer kubischen Kovariante $(T\,Z)^3$.

Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit der anderen, daß unter den quadratischen Kovarianten $\mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2, \ldots$ höchstens zwei (nämlich $\mathfrak{D}_0$ und $\mathfrak{D}_1$) linear-unabhängig sind. Und sie ist, in der Sprache der Geometrie ausgedrückt, auch gleichbedeutend mit der, daß die Kurve (oder der Kegel) $(D_1\,Z)^2 = 0$ die Kurve (oder den Kegel) $(Z\,Z) = 0$ doppelt berührt. Es wird dann

$$\frac{(D_1\,Z)^2 + K.(Z\,Z)}{2} = \left\{\frac{(P\,Z)}{\sqrt{P_0^2 + (P\,P)}}\right\}^2$$

das Quadrat einer linearen Form, die nur dann identisch verschwindet, wenn die vorgelegte automorphe Transformation von $(Z\,Z)$ mit der identischen Transformation zusammenfällt.

Es ist vorhin angedeutet worden, daß zwischen der vorgetragenen Theorie und der Theorie der binären Formen vierter Ordnung ein Zusammenhang besteht. Tatsächlich lassen sich alle Hauptergebnisse unserer Untersuchung, und noch manche andere, ohne jede Rechnung aus Ergebnissen ablesen, die nun schon seit rund fünfzig Jahren der wissenschaftlichen Welt bequem zugänglich sind. (Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, 1872, §§ 40 bis 51, 60.) Freilich ist das, worauf ich hier verweise, nicht gerade mühelos gewonnen worden. Es wird sich sogar der umgekehrte Weg, der von den ternären Formen zu binären führt, eher empfehlen, weil man gerade bei solcher Ordnung des Stoffes zu einer beträchtlichen Vereinfachung der Theorie der binären Formen vierter Ordnung, und überhaupt der binären Formen mit nur geraden Ordnungszahlen, gelangt.

Der Grundgedanke der Methode, die hier in Betracht kommt, kann summarisch gekennzeichnet werden durch die Benutzung quadratischer (statt linearer) binärer Formen zur symbolischen Darstellung von Formen mit geraden Ordnungszahlen. Zwischen den Kernen ternärer linearer Formen oder also zwischen Vektoren X, Y, Z, ... und den Kernen binärer quadratischer Formen $(\xi\tau)^2$, $(\eta\tau)^2$, $(\zeta\tau)^2$, ... wird zunächst ein Zusammenhang hergestellt, der in den Gleichungen

$$(37)\quad \boxed{(XY) = \tfrac{1}{2}(\xi\eta)^2, \ldots, \quad (XYZ) = \tfrac{1}{2}(\xi\eta)(\xi\zeta)(\eta\zeta), \ldots}$$

Ausdruck findet. Dadurch werden allen Invarianten der Gruppen γ_3 und γ_3, η_3 eines ternären Gebietes solche der Gruppen Γ_3 und Γ_3, H_3 eines binären Gebietes eindeutig umkehrbar zugeordnet, und zwar so, daß den Kernen beliebiger ternärer algebraischer Formen im binären Gebiet spezielle Formen mit geraden Ordnungszahlen, und umgekehrt beliebigen binären Formen mit geraden Ordnungszahlen spezialisierte ternäre Formen entsprechen.

Dieses hier nur in großen Zügen beschriebene Verfahren kann betrachtet werden als Ausführung eines Gedankens, den, allerdings noch in recht unvollkommener Form, schon O. Hesse vorgetragen hat, und den dann auch spätere Autoren mit Erfolg verwendet haben, freilich ohne der Sache genügend auf den Grund zu gehen.

Meine eigene Untersuchung darüber habe ich, allerdings noch nicht ganz in ihrer heutigen und endgültigen Gestalt, im Jahre 1885 oder 1886 P. Gordan mitgeteilt, und sie ist von ihm gelegentlich erwähnt worden. (Vorlesungen über Invariantentheorie 1887, herausgegeben von G. Kerschensteiner, S. 155.)

Abgesehen von einigen Andeutungen ist eine Veröffentlichung darüber seither unterblieben, weil ich mich bald genug davon überzeugen mußte, daß bei der weit überwiegenden Mehrzahl der Fachgenossen jedes Interesse für diese Art von Problemen zu vermissen war.

Da der zweite Teil dieses Buches noch wird auf sich warten lassen, so mag vielleicht einstweilen das Folgende solchen Lesern willkommen sein, die mit der Theorie der binären Formen, wenigstens derer von der vierten Ordnung, vertraut sind.

Der Reihenentwicklung (1) läuft parallel eine wohlbekannte Entwicklung (Clebsch, S. 23; $m = 2$, $n = 2$):

$$(x a)^2 (b y)^2 = (x d)^2 (d y)^2 + 2(x y) \cdot (x q)(q y) + \tfrac{1}{3}(x y)^2 \cdot (a b)^2,$$

wo

$$(d z)^4 = (a z)^2 (b z)^2, \quad (q z)^2 = -\tfrac{1}{2}(a b)(a z)(b z).$$

Damit erhält man, nach Nr. (37), die Invarianten und Kovarianten von $(x a)^2 (b y)^2$ aus denen von $(XA)(BY)$[1].

[1]) Nämlich zunächst die elementaren Invarianten (solche mit nur einer Veränderlichen z), die zur Gruppe Γ_3 des binären Gebietes gehören; womit dann aber auch schon die Invarianten der Gruppen Γ_3, H_3 und G_4 gefunden sind.

Insbesondere vollzieht sich der Übergang von dem Formensystem der Form $(D\,Z)^2$ zu dem einer binären Form vierter Ordnung $(d\,z)^4$ durch die Substitutionen

$$
\begin{aligned}
(Z\,Z) &= 0, (D_1\,Z)^2 = \tfrac{1}{4}(d\,z)^4 = \tfrac{1}{4}f,\\
(D_2\,Z)^2 &= \tfrac{1}{8}(d\,d')^2(d\,z)^2(d'\,z)^2 = \tfrac{1}{4}h,\\
G_2 &= -\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}(d\,d')^4 = -\tfrac{1}{4}g_2,\\
G_3 &= \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{8}(d\,d')^2(d\,d'')^2(d'\,d'')^2 = \tfrac{1}{4}g_3,\\
(T\,Z)^3 &= \tfrac{1}{16}(d\,d'')^2.(d'\,d'')(d'\,z)(d''\,z).(d\,z)^2(d'\,z)^2\\
&= \tfrac{1}{16}(d\,d'')(d'\,d'')^2(d\,z)^3(d'\,z)^2(d''\,z) = \tfrac{1}{16}t.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Daraus folgt unter anderem

$$-\{4\,G_2^3 + 27\,G_3^2\} = \tfrac{1}{16}\{g_2^3 - 27\,g_3^2\}, \tag{39}$$

wo rechts die von Weierstrass mit G bezeichnete Diskriminante von $(d\,z)^4$ erscheint. Als Spezialfall der Formel (14) erhält man die Identität, auf der die Theorie der irrationalen Kovarianten der binären Form $f = (d\,x)^4$ beruht:

$$t^2 + 4\,h^3 - g_2.h\,f^2 + g_3.f^3 = 0\,[1]. \tag{40}$$

Die im Texte befolgte direkte Methode zur Bestimmung des zur Gruppe γ_3 gehörigen Formensystems von $(X\,A)(B\,Y)$ ist nun auch schon 25 Jahre alt. (Leipziger Berichte 1897, S. 459.) Anderen Autoren, die sich mit dem gleichen Thema beschäftigt haben, ist sie jedoch unbekannt geblieben, oder sie ist von ihnen nicht gewürdigt worden.

Das letzte gilt von R. Weitzenböck, der die Zerlegung des besprochenen Problems in einfachere Aufgaben nicht verwertet hat, und sich an ihrer Statt recht verwickelter und darum auch nicht mitgeteilter Rechnungen bedient. (Math. Zeitschr. **10**, 80, 1921.) Seine Lösung gibt keine klare Einsicht in die Struktur des gesuchten Invariantensystems; auch ist sie unvollständig, da eine überzählige Kovariante nicht beseitigt ist.

Eine ältere Arbeit von G. Rabinovitch (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 36, 1913, p. 99) kann ich, bei rein sachlicher Betrachtung, leider nur als Erläuterung zu dem würdigen, was in der Einleitung über Mißbrauch von Symbolen gesagt worden ist. Schon ihr erster Satz „Le but de cet article est de préciser la notion des invariants" läßt vermuten, daß es dem Verfasser an den nötigsten Kenntnissen gebricht, und Mängel seiner weiteren Darlegung bestätigen das vollauf. Indessen dürfte in diesem Falle wie in manchem ähnlichen das Wort More sinn'd against than sinning billig Anwendung finden.

Rabinovitch stützt sich auf ein Werk von C. Burali-Forti und R. Marcolongo (Analyse vectorielle génerale. I. Transformations lineaires 1912). Nach Ansicht dieser Autoren setzt der Vektorenkalkül (oder doch seine Erweiterung, „der geometrische Kalkül") den Mathematiker in den Stand, „di poter risolvere direttamente una qualsiasi (?) questione di geometria, di meccanica, di fisica, sotto forma assoluta, cioè indipendente da qualsiasi sistema di riferimento. Gli ordinari invarianti, covarianti, ecc., provengono dalle coordinate e soltando da

[1]) Siehe American Journal of Mathematics **17**, 1894, S. 187.

queste; essi spariscono del tutto nel calcolo assoluto". (Elementi di Calcolo Vettoriale, 2⁰ ed., 1920 oder 1921, S. 97.)

Was uns hier, und in verwandten Äußerungen auch anderer Autoren, so eindringlich empfohlen wird, ist ein regelrechter Anachronismus.

Das Ideal einer analytischen Geometrie ohne Koordinaten stammt bekanntlich von Leibniz. H. Grassmann hat es in seinen älteren Schriften (denen aus den Jahren 1844 und 1846), zu verwirklichen getrachtet, ist aber später wieder davon abgekommen. Die weitere Entwicklung hat sich dann gerade in der Richtung der Invariantentheorie vollzogen, die die Begriffe Funktion, Transformation, Gruppe und Invariante als Grundbegriffe an den Anfang der Geometrie bringt, und an Stelle eines unsicheren Tastens nach brauchbaren Begriffsbildungen ein systematisches Vorgehen setzt, das die Gewähr einer gewissen Vollständigkeit der Ergebnisse bietet. Diese Entwicklung, die das Wesentliche in den Gedanken von Leibniz und Grassmann reinlich herausgeschält, das Übertriebene daran aber abgestreift hat, soll nun gar keinen Fortschritt bedeuten und demgemäß rückgängig gemacht werden.

In Wirklichkeit beruht alles, was ein solcher „absoluter Kalkül" zu leisten vermag, auf dem, was er mit der heutigen Invariantentheorie der linearen Transformationen gemein hat, und nicht auf dem, was ihn von ihr unterscheidet. Dieser Unterschied aber kommt zustande durch Einführung neuer Zeichen, und keineswegs solcher, die Verbesserungen bedeuten. Beispielsweise sieht im Falle $n = 3$ das „äußere Produkt" von drei Vektoren, das Determinantensymbol $(X\,Y\,Z)$ oder $[X\,Y\,Z]$ so aus:

$$X(Y \wedge Z)!$$

Keinesfalls können sich diese Autoren klar gemacht haben, wie weit sie auf algebraischem Gebiete hinter dem Gedankeninhalt der heutigen Invariantentheorie zurückgeblieben sind.

Daß es eine von Koordinaten freie Geometrie geben könne, ist übrigens auch schon ein Irrtum. Die so etwas für möglich halten, haben das Fundament ihres Lehrgebäudes nicht sorgfältig genug untersucht. Punkte, Geraden, Ebenen und ihre Beziehungen, woher haben wir sie? Die Natur hat sie uns nicht als „reine Anschauung" in die Wiege gelegt. Also müssen wir sie definieren. Da x_1, x_2, x_3 verboten sein sollen, so brauchen wir Axiome. Und um uns die logische Möglichkeit (Widerspruchsfreiheit) dieser Axiome klar zu machen, brauchen wir x_1, x_2, x_3!

Daß die axiomatische Begründung geometrischer Systeme auch bei folgerechtem Verfahren ernstlichen Bedenken unterliegt, habe ich bei mehreren Gelegenheiten zu zeigen versucht. Siehe namentlich meine kürzlich erschienene Schrift über Mathematik und Physik (1923, Sammlung Vieweg).

§ 23.

Das Formensystem von zwei ternären quadratischen Formen.

Das Verfahren, dessen wir uns in den vorausgehenden Darlegungen bedient haben, ist die von P. Gordan, E. Stroh und anderen zu hoher Ausbildung gebrachte Methode der sogenannten

Reduzenten. Die einzelnen Invarianten und Kovarianten werden, in geeigneter Anordnung, der Reihe nach gebildet und nach Bedürfnis symbolisch bezeichnet. Es werden dann Gruppen symbolischer Faktoren gesucht, die bewirken, daß jede mit ihnen behaftete Form sich durch vorher aufgezählte Formen ausdrücken läßt. Diese Faktorengruppen sind eben die Reduzenten. So ist, im Beispiel des § 22, $(C\,C'\,C'')$ ein Reduzent, $(C\,C')(C'\,C'')(C''\,C''')$ ist ein anderer, $(T\,Q\,Z)$ ein dritter usw. Bringt man, wie in den Beispielen der §§ 16, 19, 20, 22, es schließlich dahin, daß in jedem symbolischen Produkt eine Faktorengruppe als Reduzent erkannt wird, so hat man ein vollständiges, allerdings dann noch nicht notwendig von überzähligen Formen befreites System von Invarianten und Kovarianten gefunden.

Dieses Verfahren soll nun noch durch ein mit dem Vorhergehenden nahe zusammenhängendes Beispiel erläutert werden, das aber nun wieder in die Theorie der Gruppe G_9 gehört. Die folgende Auseinandersetzung rührt im wesentlichen von Gordan her [1]). Die vorzutragende verbesserte Darstellung verdanke ich in der Hauptsache einem meiner Schüler, Herrn E. A. Weiss, der mir auch bei der Korrektur dieses Buches freundliche Hilfe geleistet hat.

Das Formensystem von zwei ternären quadratischen Formen.

Die Bezeichnungen sind gewählt mit Rücksicht auf das Vorhergehende. Von den zu untersuchenden Grundformen wird (wegen des Euklidischen Grenzfalls der Gruppe γ_3) angenommen, daß die eine, $(\varLambda\,U)^2$, als Veränderliche einen Vektor zweiter Schicht enthält und bei den anderen, $(\varGamma\,U)^2$, soll zunächst die gleiche Annahme gemacht werden.

Die Aufgabe sei, ein vollständiges, und zwar kleinstes System von Invarianten der Kerne von $(\varLambda\,U)^2$ und $(\varGamma\,U)^2$, sowie zweier Vektoren X und U, in bezug auf die Gruppe G_9 zu bilden [2]). Anders ausgedrückt: Es handele sich um das System der zu G_9 gehörigen Invarianten **und Kovarianten** der Kerne von $(U\,\varLambda)^2$ und $(U\,\varGamma)^2$.

---

[1]) Sie wird mitgeteilt bei A. Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, bearbeitet und herausgegeben von F. Lindemann (I, 1, 1875), S. 288 bis 291.

[2]) Die Frage: Warum gerade dieser zwei Vektoren? wird im zweiten Teile dieses Buches beantwortet werden.

Jedenfalls gehören nun zu diesem System die identische Kovariante

$$\boxed{(UX) = (XU)} \tag{1}$$

und die beiden Grundformen

$$\boxed{(\Lambda U)^2, \quad (\Gamma U)^2.} \tag{2}$$

Ferner gehören dazu vier (in den Veränderlichen) quadratische Kovarianten,

$$\boxed{(LX)^2 = \tfrac{1}{2}(\Lambda \Lambda' X)^2, \quad (CX)^2 = \tfrac{1}{2}(\Gamma \Gamma' X)^2,} \tag{3}$$

$$\boxed{(\Lambda \Gamma X)^2, \quad (L C U)^2,} \tag{4}$$

sodann die bilinearen Formen

$$\boxed{(C\Lambda)(CX)(\Lambda U), \quad (\Gamma L)(LU)(\Gamma X),} \tag{5}$$

und die vier Invarianten

$$\boxed{\tfrac{1}{3}(L\Lambda)^2, \quad (\Lambda C)^2, \quad (L\Gamma)^2, \quad \tfrac{1}{3}(C\Gamma)^2,} \tag{6}$$

alles Formen, von denen sicher keine entbehrlich sein kann. Reduzenten haben wir dann bereits in den Faktoren

(a) $(\underline{\Lambda \Lambda' X})$, $(\underline{L L' U})$; $(\underline{\Gamma \Gamma' X})$, $(\underline{C C' U})$; $(\underline{L \Lambda})$, $(\underline{C \Gamma})$.

Z. B. ist

$$(\underline{X \Lambda \Lambda'})(\Lambda V)(\Lambda' W) = (XL)(LVW), \tag{7}$$

$$(\underline{U L L'})(LY)(L'Z) = \tfrac{1}{3}(L\Lambda)^2 . (U\Lambda)(\Lambda Y Z), \tag{8}$$

$$(XL)(\underline{L\Lambda})(\Lambda U) = \tfrac{1}{3}(L\Lambda)^2 . (XU). \tag{9}$$

In jedes symbolische Produkt, das einen der angeführten Faktoren hat, kann man also entweder Symbole einer der Kovarianten $(LX)^2$, $(CX)^2$ einführen, oder man kann darin einen der realen Faktoren $\frac{1}{3}(L\Lambda)^2$, $\frac{1}{3}(C\Gamma)^2$ zur Erscheinung bringen.

Man braucht also weiterhin nur noch auf solche symbolische Produkte Rücksicht zu nehmen, die sich aus den Faktoren

(b) (ΛU), (LX); (ΛC), $(L\Gamma)$; (ΓU), (CX); $(\Lambda \Gamma X)$, (LCU)

zusammensetzen lassen; wobei natürlich die unter (1)...(6) schon angeführten symbolischen Quadrate und Produkte auszulassen sind.

Aus Faktoren des Typus (b) setzen sich nun einige weitere Kovarianten zusammen, die zu den Ordnungszahlen (1, 2) oder (2, 1) gehören, nämlich

$$\boxed{(\Lambda\Gamma X)(\Lambda U)(\Gamma U), \quad (LCU)(LX)(CX),} \tag{10}$$

$$\boxed{\begin{matrix}(C\Lambda)(CX)(\Lambda\Gamma X)(\Gamma U), & (L\Gamma)(LX)(\Gamma\Lambda X)(\Lambda U), \\ (\Gamma L)(\Gamma U)(LCU)(CX), & (\Lambda C)(\Lambda U)(CLU)(LX).\end{matrix}} \tag{11}$$

Ebenso ergeben sich zwei Kovarianten dritter Ordnung und Klasse:

$$\boxed{\begin{matrix}(\Lambda C)(\Gamma L)(\Lambda\Gamma X)(CX)(LX), \\ (L\Gamma)(C\Lambda)(LCU)(\Gamma U)(\Lambda U).\end{matrix}} \tag{12}$$

Wir behaupten, daß mit den 21 Invarianten und Kovarianten (1)...(6), (10), (11), (12) bereits ein vollständiges, und zwar kleinstes Formensystem der gegebenen Formen $(\Lambda U)^2$, $(\Gamma U)^2$ gefunden ist.

Jedenfalls können die Formen (12), wegen ihrer Ordnungszahlen, nicht durch vorher aufgezählte Formen ganz und rational ausgedrückt werden, und aus gleichem Grunde auch die Formen (10), (11) nicht. Die Formen (11) aber können auch nicht mit Hilfe der Formen (10) und früher genannter Formen darstellbar sein, da anderenfalls die Grundformen $(\Lambda U)^2$, $(\Gamma U)^2$ lineare Invarianten (solche ersten Grades) haben müßten. Ebenso sieht man sogleich, daß auch unter den vier Formen (11) selbst keine entbehrlich ist.

Wenn also die aufgezählten Invarianten und Kovarianten überhaupt ein vollständiges System bilden, so bilden sie auch schon ein nicht weiter reduzierbares System; eines besonderen Nachweises bedarf nur noch der erste Punkt. Wir müssen noch zeigen, daß in jedem symbolischen Produkt von Faktoren des Typus (b), das nicht ohne weiteres als Reduzent zu erkennen ist, das also nicht zu einer der schon gebildeten Invarianten oder Kovarianten führt, gleichwohl ein als Reduzent zu bewertender symbolischer Faktor oder eine Faktorengruppe derart auftreten muß.

Reduzenten sind nun zunächst die Faktorenpaare

$$(\underline{C\Lambda)\,\Lambda C'}), \quad (\underline{\Lambda C)(C\Lambda'}); \quad (\underline{L\Gamma)(\Gamma L'}), \quad (\underline{\Gamma L)(L\Gamma'}). \tag{c}$$

Wir haben nämlich, z. B. wegen der aus (8) — nach Vertauschung der beiden Grundformen — hervorgehenden Identität

$$\begin{aligned}&(C\Delta)\{(CY)(\Delta C')-(C\Delta)(YC')\}(C'Z)\\ &=-(C\Delta)(CC'\,|\,\Delta Y)(C'Z)=-(Y\Delta\Gamma)(\Delta\Gamma Z)\end{aligned}$$

die Reduktionsformel

$$\begin{aligned}&(YC)\underline{(C\Delta)(\Delta C')}(C'Z)\\ &=(C\Delta)^2.(YC)(CZ)-(Y\Delta\Gamma)(\Delta\Gamma Z).\end{aligned}\tag{13}$$

Es läßt sich also jedes symbolische Produkt mit einem der Faktorenpaare (c) in eine Summe zerlegen, in der jeder Summand eine der gefundenen Invarianten als realen Faktor hat, oder in der Symbole der Formen $(\Delta\Gamma X)^2$ oder $(LCU)^2$ auftreten. Da nun Produkte aus Faktoren (b), die unmittelbar eine der schon aufgezählten Formen liefern, nicht mehr betrachtet zu werden brauchen, so bleiben hiernach nur noch solche Produkte von Faktoren (b) übrig, die mindestens einen der Determinantenfaktoren

$$\underline{(\Delta\Gamma X)},\quad \underline{(LCU)}\tag{d}$$

enthalten. Diese Faktoren werden jetzt als Reduzenten zu erweisen sein. Für ihre Quadrate steht das schon fest.

Wir untersuchen nun zunächst die Produkte von je zwei Faktoren des Typus (d). Jedes solche Produkt erweist sich als Reduzent. Denn es ist erstens

$$\begin{aligned}&\underline{(\Delta\Gamma X)(LCU)}\,(\Delta V)(\Gamma W)(LY)(CZ)\\ &=\begin{vmatrix}\frac{1}{3}(L\Delta)^2.(YV), & (ZC)(C\Delta)(\Delta V), & (U\Delta)(\Delta V)\\ (YL)(L\Gamma)(\Gamma W), & \frac{1}{3}(C\Gamma)^2.(ZW), & (U\Gamma)(\Gamma W)\\ (YL)(LX), & (ZC)(CX), & (UX)\end{vmatrix},\end{aligned}\tag{14}$$

zweitens, z. B.

$$\begin{aligned}&\underline{(\Delta\Gamma Y)(\Delta\Gamma' Z)}\,(\Gamma V)(\Gamma' W)=\\ &=(\Delta\Gamma Y)\{(\Gamma\Gamma' Z)(\Delta V)+(\Delta\Gamma Z)(\Gamma' V)+\\ &\qquad+(\Delta\Gamma'\Gamma)(ZV)\}(\Gamma' W)=\\ &=(YC)(C\Delta)(\Delta W).(ZV)+(ZC)(C\Delta)(\Delta V).(YW)+\\ &\qquad+(Y\Delta\Gamma)(\Delta\Gamma Z).(V\Gamma)(\Gamma W)-\\ &-(YC)(CZ).(V\Delta)(\Delta W)-(C\Delta)^2.(YW)(ZV).\end{aligned}\tag{15}$$

Drittens aber müssen Produkte mit einem der Faktorenpaare

$$\underline{(\Delta\Gamma Y)(\Delta'\Gamma' Z)},\quad \underline{(LCV)(L'C'W)},\tag{e}$$

wenn sie nicht ohne weiteres in reale Faktoren zerfallen sollen, wenigstens zwei der angeführten Symbole in anderen Klammerfaktoren verbunden enthalten. Im Beispiele des ersten Faktorenpaares muß dann also eine der Faktorengruppen

$$(\Delta\Gamma Y)(\Delta'\Gamma' Z)(\underline{\Delta\Delta' X}), \quad (\Delta\Gamma Y)(\Delta'\Gamma' Z)(\underline{\Gamma\Gamma' X}),$$
$$(\Delta\Gamma Y)(\underline{\Delta'\Gamma' Z})(\underline{\Delta\Gamma' X}), \quad (\Delta\Gamma Y)(\underline{\Delta'\Gamma' Z})(\underline{\Gamma\Delta' X}),$$
$$(\Delta\Gamma Y)(\Delta'\Gamma' Z)\underline{(C\Delta)(C\Delta')},$$
$$(\Delta\Gamma Y)(\Delta'\Gamma' Z)\underline{(L\Gamma)(L\Gamma')}$$

vorkommen, die nach Nr. (7), (13) und (15) alle Reduzenten sind.

Jetzt sind also nur noch solche Produkte zu bilden, die nicht mehr als einen der Faktoren (d) enthalten. Solche sind die Kovarianten (10), (11) und (12). Was dann noch fehlt, sind nur symbolische Produkte der Form

$$(\Delta\Gamma X)\underline{(C\Delta)(C\Delta')}(U\Delta'), \quad (\Delta\Gamma X)\underline{(L\Gamma)(L\Gamma')}(U\Gamma)$$

und ihre Gegenstücke mit Faktoren $(L\,C\,U)$. Diese aber enthalten alle Reduzenten vom Typus (c).

Hiermit sind also schließlich auch die Faktoren (d) als Reduzenten erwiesen.

An das hier Vorgetragene würde sich nun noch vieles anschließen lassen. Dann würde von den zahlreichen Abhängigkeiten die Rede sein, die zwischen den Formen unseres Systems bestehen, und von der Einkleidung eines durch Formeln Ausgedrückten in eine in Worte gefaßte Sprache, die Sprache der projektiven Geometrie. Aber dieser wohl kaum zu erschöpfende Stoff ist zu umfangreich für ein der Einführung dienendes Lehrbuch. Die geometrischen Fragen, um die es sich hier handelt, sind ja auch bekannt genug — der Leser muß sich schließlich auch selbst weiterhelfen können. Es soll daher nur noch an einem einzelnen Beispiel gezeigt werden, wie sich die hierher gehörigen Entwicklungen gestalten, wenn man von dem Gordanschen Formensystem ausgehen will. Ich behandle der Kürze halber auch hier nur den einfachsten Fall, der der sogenannte allgemeine ist. Grenzfälle können in ähnlicher Weise erledigt werden wie in dem Beispiel des § 18.

Transformation zweier ternärer quadratischer Formen auf Summen von Quadraten.

Wir nehmen jetzt, im speziellen Falle, die in § 15 behandelte Aufgabe noch einmal auf. Es handele sich darum, die ternären quadratischen Formen $(L\,X)^2$ und $(C\,X)^2$ zugleich auf Summen von

Quadraten linearer Formen zu bringen. (Hauptachsenproblem der Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung, projektiv verallgemeinert.)

Wir setzen

$$(16)\quad J_0 = \tfrac{1}{3}(L\Lambda)^2,\quad J_1 = (\Lambda C)^2,\quad J_2 = (L\Gamma)^2,\quad J_3 = \tfrac{1}{3}(C\Gamma)^2.$$

Zu der Voraussetzung, daß die Gleichung

$$(17)\qquad J_0 \cdot \Lambda^3 - J_1 \cdot \Lambda^2 + J_2 \cdot \Lambda - J_3 = 0$$

lauter getrennte Wurzeln haben soll, zu der Annahme also, daß die Diskriminante der Gleichung (17), hier der Ausdruck

$$(18)\qquad \begin{aligned} J_0^4 \cdot \Pi^2 &= \tfrac{1}{3}\{4\,(J_1^2 - 3\,J_0 J_2)\cdot(J_2^2 - J_1 J_3) - \\ &- (J_1 J_2 - 9\,J_0 J_3)^2\} = \tfrac{1}{27}\{4\,(J_1^2 - 3\,J_0 J_2)^3 - \\ &- (2\,J_1^3 - 9\,J_0 J_1 J_2 + 27\,J_0^2 J_3)^2\}, \end{aligned}$$

von Null verschieden sei, wollen wir hier der Kürze halber noch die weitere fügen, daß $J_0 \neq 0$ ist, wodurch nur ein leicht zu erledigender Grenzfall ausgeschlossen wird.

Verlangen wir dann, daß zugleich

$$(19)\qquad \begin{aligned} (L X)^2 &= \quad (A_1 X)^2 + \quad (A_2 X)^2 + \quad (A_3 X)^2, \\ (C X)^2 &= \Lambda_1 (A_1 X)^2 + \Lambda_2 (A_2 X)^2 + \Lambda_3 (A_3 X)^2 \end{aligned}$$

werde, so brauchen wir zur Berechnung der linearen Formen $(A_\alpha X)$, d. h. zunächst ihrer Quadrate, noch eine dritte Gleichung, die uns jetzt die quadratische Kovariante der Form

$$(20)\qquad (\Phi U)^2 = (L C U)^2 = (\Lambda_2 + \Lambda_3)(A_2 A_3 U)^2 + \cdots$$

liefert. Man findet mühelos (nach Nr. 13):

$$(21)\qquad \tfrac{1}{2}(\Phi \Phi' X)^2 = J_2 \cdot (L X)^2 + J_1 \cdot (C X)^2 - (\Lambda \Gamma X)^2,$$

während aus (20) folgt

$$(22)\qquad \begin{aligned} &\tfrac{1}{2}(\Phi \Phi' X)^2 = \\ &= (A_1 A_2 A_3)^2 \cdot \{(\Lambda_3 + \Lambda_1)(\Lambda_1 + \Lambda_2)\cdot(A_1 X)^2 + \cdots\}. \end{aligned}$$

Das System der drei Gleichungen (19) und (20) aber läßt sich in eine bequemere Form bringen. Da nämlich

$$(23)\qquad J_0 = \tfrac{1}{6}(L L' L'')^2 = (A_1 A_2 A_3)^2$$

ist, so erhält man

$$(24)\qquad \begin{aligned} (L X)^2 = \Sigma (A_\alpha X)^2,\quad (C X)^2 = \Sigma \Lambda_\alpha \cdot (A_\alpha X)^2, \\ J_1 \cdot (C X)^2 - (\Lambda \Gamma X)^2 = J_0 \cdot \Sigma \Lambda_\alpha^2 \cdot (A_\alpha X)^2. \end{aligned}$$

So erhält man schließlich

$$
(25)\quad \boxed{\begin{aligned}
&(A_\alpha X)^2 = \\
&= \frac{-(\Lambda \Gamma X)^2 + J_0 . \{\Lambda_\alpha . (C X)^2 + \Lambda_\beta \Lambda_\gamma . (L X)^2\}}{J_0 . (\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta)(\Lambda_\alpha - \Lambda_\gamma)} \\
&= \frac{\left\{\begin{array}{l} -(\Lambda \Gamma X)^2 + \Lambda_\alpha . J_0 . (C X)^2 + \\ + \{J_2 - \Lambda_\alpha . J_1 + \Lambda_\alpha^2 . J_0\} . (L X)^2 \end{array}\right\}}{J_2 - 2 \Lambda_\alpha . J_1 + 3 \Lambda_\alpha^2 . J_0},
\end{aligned}}
$$

wobei noch, nach Nr. (13),

$$
(26)\quad -(\Lambda \Gamma X)^2 = (X C)(C \Lambda)(\Lambda C')(C' X) - J_1 . (X C)(C X)
$$

ist [1]).

Unter der Annahme $J_0 = 1$ kommt man auch von hier aus zu der in § 15 (S. 181) schon abgeleiteten Formel

$$
(27)\quad (A_\alpha X)^2 = \frac{(C_2 X)^2 - (\Lambda_\beta + \Lambda_\gamma)(C_1 X)^2 + \Lambda_\beta \Lambda_\gamma . (C_0 X)^2}{(\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta)(\Lambda_\alpha - \Lambda_\gamma)}.
$$

Es wird nämlich jetzt

$$
(28)\quad \begin{gathered} (\Gamma U)^2 = \tfrac{1}{2}(C C' U)^2, \\ J_1 = (C C), \quad J_2 = (\Gamma \Gamma), \quad J_3 = (C \Gamma)^2. \end{gathered}
$$

Die Formen $(C_0 X)^2$ usw. haben natürlich die Bedeutung

$$
(C_0 X)^2 = (X X), \quad (C_1 X)^2 = (C X)^2, \text{ usw.}
$$

Müssen wir uns auch in den Anwendungen des Vorgetragenen Beschränkungen auferlegen, so müßte doch in der Sache selbst eine fühlbare Lücke bleiben, wenn nicht die Beziehung des Gordanschen Formensystems zu der im vorigen Paragraphen enthaltenen Untersuchung dargelegt würde. Wie wir es soeben schon im Beispiel der Transformation zweier quadratischer Formen getan hatten, so können wir ja nun allgemein unsere jetzigen Formeln durch die Annahme $J_0 = 1$ spezialisieren. Wir erhalten dann ein System von nur noch 20 Formen, Invarianten der Gruppe Γ_8. Diese sind in der folgenden Tafel zusammengestellt. Wir nehmen jetzt, wie schon in dem behandelten Beispiel, eine quadratische Form $(C X)^2$ mit einer Veränderlichen erster Schicht als Grundform und bezeichnen ihre quadratische Kovariante mit $(\Gamma U)^2$,

$$
(\Gamma U)^2 = \tfrac{1}{2}(C C' U)^2.
$$

---

[1]) Der zweite Ausdruck wird auch im Grenzfall $J_0 = 0$ nicht ganz unbrauchbar. Er liefert dann aber nur zwei der Quadrate $(A_\alpha X)^2$.

Unsere Invarianten und Kovarianton ordnen wir jetzt nach Gradzahlen in bezug auf den Kern von $(C\,X)^2$. Dann ergibt sich die Tafel

I.

$$(0)\qquad (L\,X)^2,\quad (X\,U),\quad (\Lambda\,U)^2.$$

$$(1)\quad \begin{cases} J_1 = (C\,\Lambda)^2;\quad (C\,X)^2,\quad (C\,\Lambda)(C\,X)(\Lambda\,U),\quad (L\,C\,U)^2,\\ (C\,X)(L\,X)(C\,L\,U),\quad (C\,\Lambda)(L\,X)(\Lambda\,U)(C\,L\,U). \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} J_2 = (L\,\Gamma)^2;\quad (\Lambda\,\Gamma\,X)^2,\quad (L\,\Gamma)(L\,X)(\Gamma\,U),\quad (\Gamma\,U)^2,\\ (L\,\Gamma)(L\,X)(\Gamma\,\Lambda\,X)(\Lambda\,U),\quad (\Gamma\,\Lambda\,X)(\Gamma\,U)(\Lambda\,U). \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} J_3 = \tfrac{1}{3}(C\,\Gamma)^2;\quad (C\,\Lambda)(L\,\Gamma)(C\,X)(L\,X)(\Gamma\,\Lambda\,X),\\ (C\,\Lambda)(C\,X)(\Gamma\,\Lambda\,X)(\Gamma\,U),\quad (L\,\Gamma)(C\,X)(\Gamma\,U)(L\,C\,U),\\ (L\,\Gamma)(C\,\Lambda)(\Gamma\,U)(\Lambda\,U)(L\,C\,U). \end{cases}$$

Dieses also ist ein vollständiges (und kleinstes) System von Invarianten und Kovarianten der Kerne von $(L\,X)^2$ oder $(\Lambda\,U)^2$ und $(C\,X)^2$ gegenüber Transformationen der Gruppe Γ_8.

Andererseits hatten wir im vorigen Paragraphen ein ganz ähnliches System von Invarianten und Kovarianten des Kernes von $(C\,X)^2$ gefunden, das sich aber auf die Gruppe γ_3 der eigentlich-automorphen Transformationen des Formenpaars $(\Lambda\,U)^2$, $(L\,X)^2$ bezog. Nur hatten wir dieses System damals als System von elementaren Invarianten und Kovarianten einer bilinearen Form $(X\,A)(B\,Y)$ betrachtet und demgemäß geordnet. Wir ersetzen jetzt die Zeichen Q und Z durch X und U, und ordnen auch dieses System nunmehr nach Gradzahlen in bezug auf den Kern von $(C\,X)^2$. So gelangen wir zu der Tafel

II.

$$(0)\qquad (X\,X),\quad (X\,U),\quad (U\,U).$$

$$(1)\quad \begin{matrix} J_1 = (C\,C);\quad (C_1\,X)^2,\quad (C_1\,X)(C_1\,U),\quad (C_1\,U)^2,\\ (C_1\,X)(C_1\,X\,U),\quad (C_1\,X\,U)(C_1\,U). \end{matrix}$$

$$(2)\quad \begin{matrix} J_2 = \tfrac{1}{2}(C\,C'|C\,C');\quad (C_2\,X)^2,\quad (C_2\,X)(C_2\,U),\quad (C_2\,U)^2,\\ (C_2\,X)(C_2\,X\,U),\quad (C_2\,X\,U)(C_2\,U). \end{matrix}$$

$$(3)\quad \begin{matrix} J_3 = \tfrac{1}{6}(C\,C'\,C'')^2;\quad (T\,X)^3 = (C\,C'')(C\,C'\,X)(C'\,X)(C''\,X),\\ (T\,X)^2(T\,U),\quad (T\,X)(T\,U)^2,\quad (T\,U)^3. \end{matrix}$$

In den Tafeln I und II entsprechen sich nun die Grad- und Ordnungszahlen genau. Es ist klar, daß wir aus I ein mit II äquivalentes System erhalten müssen, wenn wir das Paar der Grundformen $(L\,X)^2$, $(U\,A)^2$ mit den Formen $(X\,X)$, $(U\,U)$ der Tafel II zusammenfallen lassen. Und überdies werden dann eine Anzahl von Formen der Tafel I mit den entsprechenden Formen der Tafel II ganz identisch. Diese Formen sind in beiden Tafeln unterstrichen. Um die in den übrigen Fällen vorhandenen Beziehungen zwischen den Formen der Tafeln I und II zu ermitteln, wird man zunächst die Teile, aus denen sich die Polare $(T\,X)^2(T\,U)$ oder $\{(T\,U)^2(T\,X)\}$ zusammensetzt, durch Formen des Systems II ausdrücken. Man findet leicht

III.

$$3\,(C\,C'')(C\,C'\,U)(C'\,X)(C''\,X) = 3\,(T\,X)^2\,(T\,U) +$$
$$+ J_1\,.(C_2\,X)(C_2\,X\,U) - \{J_1^2 - 2\,J_2\}\,.(C_1\,X)(C_1\,X\,U),$$
$$3\,(C\,C'')(C\,C'\,X)(C'\,U)(C''\,X) = 3\,(T\,X)^2(T\,U) +$$
$$+ J_1\,.(C_2\,X)(C_2\,X\,U) - \{J_1^2 + J_2\}\,.(C_1\,X)(C_1\,X\,U),$$
$$3\,(C\,C'')(C\,C'\,X)(C'\,X)(C''\,U) = 3\,(T\,X)^2(T\,U)$$
$$- 2\,J_1\,.(C_2\,X)(C_2\,X\,U) + \{2\,J_1^2 - J_2\}\,.(C_1\,X)(C_1\,X\,U).$$

Nach dieser Vorbereitung wird man ohne sonderliche Mühe die noch zu untersuchenden Formen des Systems I durch die des Systems II darstellen (und umgekehrt):

IV.

$$(L\,C\,U)^2 = (C\,U \mid C\,U) = J_1\,.(U\,U) - (C\,U)^2,$$
$$(\Gamma\,U)^2 = \tfrac{1}{2}\,(C\,C'\,U)^2 = (C_2\,U)^2 - J_1\,.(C_1\,U)^2 + J_2\,.(U\,U),$$
$$(L\,\Gamma)(L\,X)(\Gamma\,U) = (C_2\,X)(C_2\,U) - J_1\,.(C_1\,X)(C_1\,U) + J_2\,.(X\,U),$$
$$(A\,\Gamma\,X)^2 = (\Gamma\,X \mid \Gamma\,X) = -(C_2\,X)^2 + J_1\,.(C_1\,X)^2,$$
$$(L\,\Gamma)(L\,X)(\Gamma\,A\,X)(A\,U) = -(C_2X)(C_2X\,U) + J_1\,.(C_1\,X)(C_1X\,U),$$
$$(\Gamma\,A\,X)(\Gamma\,U)(A\,U) = -(C_2\,X\,U)(C_2\,U) + J_1\,.(C_1\,X\,U)(C_1\,U),$$
$$(C\,A)(C\,X)(\Gamma\,A\,X)(\Gamma\,U) = (T\,X)^2(T\,U) +$$
$$+ \tfrac{1}{3}\,J_1\,.(C_2\,X)(C_2\,X\,U) - \tfrac{1}{3}\,\{J_1^2 - 2\,J_2\}\,.(C_1\,X)(C_1\,X\,U),$$
$$(L\,\Gamma)(C\,X)(\Gamma\,U)(L\,C\,U) = (T\,X)(T\,U)^2 +$$
$$+ \tfrac{2}{3}\,J_1\,.(C_2\,X\,U)(C_2\,U) - \tfrac{1}{3}\,\{2\,J_1^2 - J_2\}\,.(C_1\,X\,U)(C_1\,U).$$

Schließlich kann man auch noch die Invarianten und Kovarianten des Kernes von $(C\,X)^2$ durch solche der speziellen Form $(D\,X)^2$, die sich aus der Entwicklung

$$(C\,X)^2 = (D\,X)^2 + \tfrac{1}{3}\,R\,.(X\,X)$$

ergibt, und durch die Invariante $R = (C\,C) = J_1$ ausdrücken (§ 22). Das System von $(C\,X)^2$ oder $(D\,X)^2$ aber ist, wie wir gesehen haben, bekannt, wenn ein System dieser Formen gefunden ist, in dem nur noch eine einzige Veränderliche Z vorkommt. Es ist also äquivalent mit dem in § 22 gefundenen System von nur sieben oder sechs Formen. —

Daß bei Übergang von der Gruppe G_9 oder Γ_8 zur Gruppe γ_3 nur die eine Invariante J_0 in Wegfall kommt, ist eine Besonderheit unseres Beispiels. Schon bei dem System der Invarianten des Kernes von $(A\,U)^2$ und zweier Vektoren X und Y,

$$J_0, \quad (A\,X\,Y)^2, \quad (L\,X)^2, \quad (L\,X)(L\,Y), \quad (L\,Y)^2,$$

verhält es sich anders, da

$$J_0 . (A\,X\,Y)^2 = (L\,X)^2 . (L\,Y)^2 - \{(L\,X)(L\,Y)\}^2$$

ist.

Zur Abfassung dieses Buches bin ich, wenn auch durch sanften Widerspruch gegen etliche Ketzereien, von meinem Freunde und früheren Bonner Kollegen Hans Hahn angeregt worden. Besonderen Dank schulde ich der Verlagshandlung dafür, daß sie in dieser schwierigen Zeit die Drucklegung gewagt hat.

Wenn es möglich sein wird, auch den zweiten Teil noch herauszubringen (dem ein überreicher Stoff vorbehalten bleibt), so soll ihm ein Namen- und Sachregister beigefügt werden.