O SPOSOBIE

UKŁADANIA SIĘ ELEKTRYCZNOŚCI

NA DWÓCH ODOSOBNIONYCH (IZOLOWANYCH) PRZEWODNIKACH KULISTYCH, W TAKIEM ODDALENIU OD SIEBIE ZOSTAJĄCYCH, IŻ JEDEN Z NICH W DRUGIEM ELEKTRYCZNOŚĆ WZNIECIĆ, TO JEST NAŃ PRZEZ INFLUENCYĄ DZIAŁAĆ MOŻE

PODAŁ

Dr. WOJCIECH URBAŃSKI

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych, dnia 4 marca 1880 roku.)

Nie wchodząc tu bliżej w naturę podstawy zjawisk, elektrycznemi zwanych, oznacza się nazwą *elektryczności* nietylko ogół tychże, ale także samą podstawę owego stanu ciał, w którym one wspomniane zjawiska przedstawiają. Ponieważ elektryczność na dobrych przewodnikach naelektryzowanych okazuje się, jak wiadomo, na ich powierzchni, której każda cząsteczka elektryczne przyciąganie lub odpychanie objawia, wielkość takowej siły [1], od jakiejkolwiek cząsteczki powierzchni pochodzącej i w odległości $= 1$ czynnej, uważa się za miarę nagromadzonej tamże elektryczności, a ilorazem otrzymanym z dzielenia tej ilości przez wielkość powierzchni, wystawia się niejako *gęstość* elektryczności na tejże cząsteczce, od której to gęstości tak zwane *napięcie* elektryczne czyli *natężenie jej siły* zawisło. Przez takie zatrzymanie zwykłych pojęć z dawniejszej fizyki nie popadniemy w sprzeczność z dzisiejszemi wyobrażeniami o naturze zjawisk reszty walnych działaczów w przyrodzie, które się w ściśle równoważnikowych stosunkach nawzajem przeobrażają (metamorfozują), ani też z najwyższem prawem natury, *stateczność materyi i siły* (mimo wszystkich takowych metamorfoz) orzeka-

(1) Pod wyrazem siła nie rozumiemy coś samoistnego, byt swój poza rzeczami materyalnemi lub bez nich mającego, ani też ostateczną już przyczynę zjawiska, lecz uważamy ją za miarę wielkości ruchu, a mechanika analityczna nazywa ją spółczynnikiem różniczkowym drugiego rzędu z drogi i czasu w ruchu nie jednostajnie zmiennym.

jącem, a ułatwiamy sobie bardzo ujęcie wypadków rozlicznych doświadczeń w matematyczne wzory i torujemy drogę do wyprowadzania najogólniejszych praw za pomocą rozumowań analitycznych, jak się to z rozwiązania danego tu zagadnienia okaże.

Gdy odosobniony przewodnik ma postać kuli i przez udzielenie zostanie naelektryzowanym, natężenie elektryczne w każdem miejscu jego powierzchni jest zupełnie jednakie, jak gdyby był dokoła okryty cieniuchną warstewką, jednostajnie napełnioną jakimś fizycznym działaczem, którego najmniejsze cząsteczki w działaniu swojem stosują się do prawa, wzorem $f(u)=\frac{1}{u^2}$, orzeczonego, a mającą grubość wszędzie jednaką i równą różnicy promieni kul spółśrodkowych, których powierzchniami ogranicza się z wierzchu i ze spodu. W takim bowiem razie działania wszystkich pojedynczych cząstek w każdym punkcie przestrzeni, zamkniętej dolną powierzchnią owej warstewki, znoszą się zupełnie, jak to stan równowagi elektrycznej wymaga. Jeśli w zakres działalności tak naelektryzowanej kuli dostanie się druga kula metalowa, czy to elektryczna, czy w naturalnym jeszcze (nie elektrycznym) stanie zostająca, natychmiast dla powstałej influencyi nowy stan równowagi a tem samem inne ułożenie się elektryczności na obu kulach nastąpić musi. Mianowicie dokoła osi, idącej przez środki obydwóch kul, układ ten będzie symetryczny, a to wskutek tego, że w równych odstępach kątowych dokoła tejże osi gęstość elektryczna jest jednaka i zmienia się jedynie z obwodami kół, leżących na tych kulach prostopadle do wspomnianej osi. Dla oznaczenia więc miejsca jakiegoś punktu, w którym *gęstość elektryczności* znać chcemy, potrzeba tylko wynaleźć równoleżnik, na którym ten punkt leży, prowadząc od niego do środka kuli promień, który z liniją dośrodkową obu kul, t. j. z ich stałą osią kąt w mowie będący zamyka. Kąt ten zwykliśmy obliczać w ten sposób, iż jego wartość $=0$ odpowiada najbliższym, a wartość $=180°$ najodleglejszym dwu na tej osi leżącym punktom obydwóch kul.

Podanie sposobu wynalezienia gęstości elektrycznej w każdym punkcie powierzchni tak na jednej jak i na drugiej kuli, znając wielkość ich promieni i ilość elektryczności na nich, jest przedmiotem niniejszych wywodów analitycznych, których rozpoczęcie niechaj jeszcze poprzedzi ta uwaga, że na obu odosobnionych kulach obydwa gatunki elektryczności a nawet te obydwa gatunki na tej samej kuli znajdować się mogą, co w rachunku przeciwnemi znaczkami jakości oznaczać się będzie, rozumiejąc pod gęstością ujemną $-k$ gęstość elektryczności drugiego gatunku, przeciwną tej, którą za $+k$ przyjęto; *tudzież*, że na rozpraszanie się elektryczności w przestrzeń otaczającą żadnego tu względu mieć nie będziemy, jak gdyby izolowanie było najzupełniejszem; *nareszcie*, że wszystkie litery w następującym rachunku użyte oznaczają te same ilości, co i w mojem dawniej wydanem dziele: « *Vorträge über höhere Physik* ». Lemberg, 1857, do którego dla łatwiejszego orientowania się odsyłam szanownego czytelnika.

Głównym warunkiem ułożenia się elektryczności do równowagi jest takie rozpostarcie się jej na obydwóch danych kulach, iż wszelkie działania obecnych elektryczności w każdym wewnętrznym punkcie tak jednej jak i drugiej kuli dają ostatecznie wypadkowę $=0$. Lecz przyjąć wypadek całego działania $=0$, znaczy tyle, co funkcyę, przez Gaussa *Potencyałem* obecnych działaczów nazwaną, uznać za ilość *stałą*.

Oznaczywszy więc literami V_1 i V_2 potencyały elektryczności, odpowiednie pierwszej i drugiej kuli, a literami C_1 i C_2 dwie ilości stałe, których wartość później da się oznaczyć, dla każdego punktu wewnątrz pierwszej kuli leżącego, musi być

$$V_1+V_2=C_1, \tag{1}$$

a dla każdego, wewnątrz drugiej kuli położonego, tak samo

$$V_1+V_2=C_2, \tag{2}$$

gdyż punkta wewnętrzne jednej kuli są zarazem w obec kuli drugiej punktami zewnętrznemi.

Lecz według ustępu, *Eilfter Vortrag*, wspomnianego wyżej dzieła mego, potencyał w punkcie zewnątrz kuli o promieniu a w odległości r od jej środka leżącym, ma wartość

$$V = a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{k \sin\theta d\theta dw}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar.\cos\lambda}}, \tag{3}$$

a że dla punktów zewnętrznych $\frac{a}{r} < 1$ i dla tego

$$V = \frac{a^2}{r} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{k \sin\theta d\theta dw}{\sqrt{1 - \frac{2a}{r}\cos\lambda + \left(\frac{a}{r}\right)^2}},$$

trzymając się tej samej co tam metody, także

$$V = \frac{a^2}{r} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(1 + H_1 \frac{a}{r} + H_2 \frac{a^2}{r^2} + H_3 \frac{a^3}{r^3} + \ldots\right) k \sin\theta d\theta \tag{4}$$

czyli położywszy

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} H_n k \sin\theta d\theta dw = J_n,$$

nareszcie

$$V = \frac{a^2}{r}\left(J_0 + J_1 \frac{a}{r} + J_2 \frac{a^2}{r^2} + J_3 \frac{a^3}{r^3} + \ldots + J_n \frac{a^n}{r^n}\right). \tag{5$_a$}$$

Tym samym sposobem dla punktu wewnątrz tej kuli leżącego otrzymujemy

$$V = a\left(J_0 + J_1 \frac{r}{a} + J_2 \frac{r^2}{a^2} + J_3 \frac{r^3}{a^3} + \ldots + J_n \frac{r^n}{a^n}\right). \tag{5$_b$}$$

Chcąc więc rozwiązać dane zagadnienie, należy w znajomym, gęstość wystawiającym wzorze (obacz Eilfter Vortrag n° 24 i 25)

$$k_0 = \frac{1}{4\pi}\left(J_0 + 3J_1 + 5J_2 + 7J_3 + \ldots + (2n+1)J_n\right), \tag{6}$$

uwzględniwszy tę okoliczność, iż dla symetrycznego układania się elektryczności na obu kulach do koła stałej ich osi, gęstość k jest tylko funkcyą zmiennej ilości θ, a od kąta nachylenia w wcale nie zależy, zatem J_n także następującą formę

$$J_n = \int_0^{\pi} k \left[\int_0^{2\pi} H_n \, dw\right] \sin\theta d\theta, \tag{7}$$

mieć może, zamiast podwójnych całek $J_1, J_2 \ldots J_n$ położyć należycie oznaczone wartości im odpowiednie.

Ponieważ dla

$$H_n = [\lambda]_n,$$

tudzież dla

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos\lambda + \alpha^2}} = S[\lambda]_n \alpha^n,$$

i tak samo

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2}}=S[\psi]_n\alpha^n, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2}}=S[\theta]_n\alpha^n,$$

podług wzoru Leżandra (1).

$$\int_0^{2\pi} H_n dw=\int_0^{2\pi}[\lambda]_n dw=2\pi[\psi]_n[\theta]_n,$$

---

(1) Można łatwym sposobem wyprowadzić ten ważny wzór jak następuje: Wiadomo, że całka nieoznaczona

$$\int\frac{dx}{A+Bx+Cx^2}=\int\frac{dx}{A-\frac{B^2}{4C}+\left(\frac{B}{2\sqrt{C}}+x\sqrt{C}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{C}.\sqrt{A-\frac{B^2}{4C}}}\int\frac{\frac{dx.\sqrt{C}}{\sqrt{A-\frac{B^2}{4C}}}}{1+\left(\frac{\frac{B}{2\sqrt{C}}+x\sqrt{C}}{\sqrt{A-\frac{B^2}{4C}}}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4AC-B^2}}\text{ arc tang}\left(\frac{B+2Cx}{\sqrt{4AC-B^2}}\right),$$

a całka oznaczona

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{A+Bx+Cx^2}=\frac{2}{\sqrt{4AC-B^2}}\left(\frac{\pi}{2}-\text{arc tang}\frac{B}{+\sqrt{4AC-B^2}}\right).$$

Według tego wzoru rozwińmy wyraz $\int_0^{2\pi}\frac{d\mathfrak{D}}{A+B\sin\mathfrak{D}+C\cos\mathfrak{D}}$, kładąc $\text{tang}\frac{1}{2}\mathfrak{D}=t$, poczem $\frac{1}{2}\mathfrak{D}=\text{arc tang}t$,

zaś $d\mathfrak{D}=\frac{2dt}{1+t^2}$ będzie, a otrzymamy:

$$\int\frac{d\mathfrak{D}}{A+B\sin\mathfrak{D}+C\cos\mathfrak{D}}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{A+\frac{2Bt}{1+t^2}+C.\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int\frac{dt}{A(1+t^2)+2Bt+C(1-t^2)}$$

$$=2\int\frac{dt}{(A+C)+2Bt+(A-C)t^2}=2.\frac{2}{\sqrt{4(A^2-C^2)-4B^2}}\text{ arc tang}\left(\frac{2B+2(A-C)t}{\sqrt{4(A^2-C^2)-4B^2}}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{A^2-B^2-C^2}}.\text{arc tang}\left(\frac{B+(A-C)t}{\sqrt{A^2-B^2-C^2}}\right).$$

Że zaś nietylko dla $\mathfrak{D}=0$, lecz także dla $\mathfrak{D}=2\pi$, staje się $t=0$, więc całka powyższa kilka razy przez wyższą granicę ∞ przechodzić musi; zatem potrzeba nam wykonać całkowanie naprzód od $\mathfrak{D}=0$ do $\mathfrak{D}=\pi-\varepsilon$, potem znowu od $\mathfrak{D}=\pi+\varepsilon$ do $\mathfrak{D}=2\pi$ i wypadki tych obydwóch całkowań zsumować, wystawiając sobie przez ε ilość nieskończenie małą. Zrobiwszy to mamy

$$\int_0^{\pi-\varepsilon}\frac{d\mathfrak{D}}{A+B\sin\mathfrak{D}+C\cos\mathfrak{D}}=\frac{2}{\sqrt{A^2-B^2-C^2}}\left(\frac{\pi}{2}-\text{arc tang}\frac{B}{\sqrt{A^2-B^2-C^2}}\right),$$

$$\int_{\pi+\varepsilon}^{2\pi}\frac{d\mathfrak{D}}{A+B\sin\mathfrak{D}+C\cos\mathfrak{D}}=\frac{2}{\sqrt{A^2-B^2-C^2}}\left(\text{arc tang}\frac{B}{\sqrt{A^2-B^2-C^2}}+\frac{\pi}{2}\right),$$

a zatme

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\mathfrak{D}}{A+B\sin\mathfrak{D}+C\cos\mathfrak{D}}=\frac{2\pi}{\sqrt{A^2-B^2-C^2}}.$$

więc także

$$(8)\qquad J_n = 2\pi[\psi]_n \cdot \int_0^\pi k[\theta]_n \sin\theta d\theta,$$

a wskutek tego

$$(9)\qquad k_0 = \frac{1}{2} S(2n+1).[\psi]_n . \int_0^\pi k[\theta]_n \sin\theta d\theta,$$

czyli kładąc

$$\frac{2n+1}{2}\int_0^\pi k[\theta]_n \sin\theta d\theta = A_n,$$

$$(10)\qquad k_0 = SA_n[\psi]_n = A_0 + A_1[\psi]_1 + A_2[\psi]_2 + \ldots + A_n[\psi]_n,$$

Z tego zaś wynika najprzód, że

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\mathfrak{D}}{A + B\sin\mathfrak{D} + C\cos\mathfrak{D}},$$

tudzież, biorąc ilości B i C w znaczeniu $\frac{1}{4}$ obrotu, także

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\mathfrak{D}}{A + (B\sin\mathfrak{D} + C\cos\mathfrak{D})\sqrt{-1}}.$$

Mając te wyrazy, niechaj będą współrzędne sferyczne jednego punktu, równolegle odpowiednio do osi x, y, z

$$\cos\psi, \quad \sin\psi\cos v, \quad \sin\psi\sin v,$$

a drugiego punktu tak samo

$$\rho\cos\theta, \quad \rho\sin\theta\cos w, \quad \rho\sin\theta\sin w.$$

Odległość u tych dwóch punktów od siebie wynajduje się z równania

$$u^2 = (\cos\psi - \rho\cos\theta)^2 + (\sin\psi\cos v - \rho\sin\theta\cos w)^2 + (\sin\psi\sin v - \rho\sin\theta\sin w)^2,$$

które po wykonaniu działań wskazanych, z przyczyny, iż także

$$u^2 = 1 - 2\rho\cos\lambda + \rho^2,$$

bezpośrednio do znajomego wzoru trygonometrycznego

$$\cos\lambda = \cos\psi\cos\theta + \sin\psi\sin\theta\cos(w - v)$$

prowadzi.

Wartość ułamku $\frac{1}{u}$ da się łatwo zamienić na całkę oznaczoną, gdyż według powyższych rozwinięć

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho\cos\lambda + \rho^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\mathfrak{D}}{\cos\psi - \rho\cos\theta + [(\sin\psi\cos v - \rho\sin\theta\cos w)\sin\mathfrak{D} + (\sin\psi\sin v - \rho\sin\theta\sin w)\cos\mathfrak{D}]\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\mathfrak{D}}{\cos\psi + \sqrt{-1}.\sin\psi\cos(\mathfrak{D} - v) - \rho\sqrt{-1}\,(\cos\theta + \sin\theta\cos(\mathfrak{D} - w))}.$$

uwzględniwszy zaś jeszcze, że ilości *nawiasowe* niczem innem nie są, jak tylko współczynnikami w rozwiniętym ułamku następującym

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2}}=1+L_1\alpha+L_2\alpha^2+L_3\alpha^3+\ldots+L_n\alpha^n,$$

zatem ogólnie rzecz biorąc

$$[\psi]_n=L_n,$$

Z tego wypada, iż

$$H_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{[\cos\theta+\sqrt{-1}.\sin\theta\cos(\mathfrak{D}-w)]^n d\mathfrak{D}}{[\cos\psi+\sqrt{-1}.\sin\psi\cos(\mathfrak{D}-v)]^{n+1}}=[\lambda]_n.$$

Skoro stanie się $\psi=0$, wartość kąta $\lambda=\theta$, a

$$H'_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta+\sqrt{-1}.\sin\theta\cos(\mathfrak{D}-w)\right)^n.d\mathfrak{D}=[\theta]_n,$$

gdy zaś $\theta=0$, kąt $\lambda=\psi$, a

$$H''_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\cos\psi+\sqrt{-1}.\sin\psi\cos(\mathfrak{D}-v)\right]^{-(n+1)}d\mathfrak{D}=[\psi]_n.$$

Obydwa ostatnie wyrazy można jak wiadomo rozwinąć w szeregi dostaw wielokrotnych łuków; co uczyniwszy otrzymuje się, ze względu na

$$[\cos\theta+\sqrt{-1}.\sin\theta\cos(\mathfrak{D}-w)]^n=T_0+T_1\cos(\mathfrak{D}-w)+T_2\cos2(\mathfrak{D}-w)+T_3\cos3(\mathfrak{D}-w)+\ldots$$

bezpośrednio

$$[\theta]_n=T_0+\frac{1}{2\pi}T_1\int_0^{2\pi}\cos(\mathfrak{D}-w)d\mathfrak{D}+\frac{1}{2\pi}T_2\int_0^{2\pi}\cos2(\mathfrak{D}-w)d\mathfrak{D}+\ldots+\frac{1}{2\pi}T_m\int_0^{2\pi}\cos m(\mathfrak{D}-w)d\mathfrak{D},$$

a że całka nieoznaczona

$$\int\cos m(\mathfrak{D}-w)d\mathfrak{D}=\frac{1}{m}\sin m(\mathfrak{D}-w),$$

całka więc oznaczona

$$\int_0^{2\pi}\cos m(\mathfrak{D}-w)d\mathfrak{D}=\frac{1}{m}\sin m(2\pi-w)+\frac{1}{m}\sin mw$$

$$=\frac{1}{m}(\sin 2m\pi.\cos mw-\cos 2m\pi.\sin mw)+\frac{1}{m}\sin mw=0,$$

oczywiście także

$$[\theta]_n=T_0.$$

W skutek tego mamy właściwie

$$\left(\cos\theta+\sqrt{-1}.\sin\theta.\cos(\mathfrak{D}-w)\right)^n=[\theta]_n+T_1\cos(\mathfrak{D}-w)+T_2\cos2(\mathfrak{D}-w)+\ldots$$

tudzież tak samo

$$\left(\cos\psi+\sqrt{-1}.\sin\psi.\cos(\mathfrak{D}-v)\right)^{-(n+1)}=[\psi]_n+T'_1\cos(\mathfrak{D}-v)+T'_2\cos2(\mathfrak{D}-v)+\ldots$$

nareszcie

$$(11)\qquad k_0 = A_0L_0 + A_1L_1 + A_2L_2 + \ldots + A_nL_n.$$

Wzór (8), z przyczyny, że

$$\int_0^\pi k\,[\theta]_n \sin\theta d\theta = \frac{2A_n}{2n+1},$$

staje się prostszym, dając:

$$(12)\qquad J_n = \frac{4\pi A_n L_n}{2n+1},$$

a potencyałowe wyrazy (5_a) i (5_b) przyjmują postać:

$$(13_a)\qquad V = \frac{4\pi a^2}{r}\left(A_0L_0 + \frac{1}{3}A_1L_1\frac{a}{r} + \frac{1}{5}A_2L_2\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{7}A_3L_3\frac{a^3}{r^3} + \ldots\right),$$

$$(13_b)\qquad V = 4\pi a\left(A_0L_0 + \frac{1}{3}A_1L_1\frac{r}{a} + \frac{1}{5}A_2L_2\frac{r^2}{a^2} + \frac{1}{7}A_3L_3.\frac{r^3}{a^3} + \ldots\right).$$

Nie potrzebujemy tu oznaczać wszystkich ilości $A_0, A_1, A_2 \ldots$ gdy poszedłszy za przykładem Poissona, położymy

$$(14)\qquad A_0L_0 + \frac{1}{3}A_1L_1x + \frac{1}{5}A_2L_2x^2 + \frac{1}{7}A_3L_3x^3 + \ldots = F(\psi, x),$$

i uwzględnimy, iż dla punktów leżących na stałej osi obu kul, $\psi = 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2}} = 1 + L_1\alpha + L_2\alpha^2 + L_3\alpha^3 + \ldots = \frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots$$

zatem $L_n = 1$, a

$$(15)\qquad F(0, x) = A_0 + \frac{1}{3}A_1x + \frac{1}{5}A_2x^2 + \frac{1}{7}A_3x^3 + \ldots = f(x)$$

---

a nareszcie

$$[\lambda]_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{[\cos\theta + \sqrt{-1}.\sin\theta.\cos(\mathfrak{D}-w)]^n}{[\cos\psi + \sqrt{-1}.\sin\psi.\cos(\mathfrak{D}-v)]^{n+1}}.d\mathfrak{D}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\mathfrak{D}\Big([\theta]_n + T_1\cos(\mathfrak{D}-w) + T_2\cos 2(\mathfrak{D}-w) + \ldots\Big)\Big([\psi]_n + T'_1\cos(\mathfrak{D}-v) + T'_2\cos 2(\mathfrak{D}-v) + \ldots\Big)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big([\theta]_n.[\psi]_n + \ldots Z\cos m(\mathfrak{D}-w)\cos m'(\mathfrak{D}-v)\Big)d\mathfrak{D}.$$

Jeżeli tylko m różni się wartością swoją od m', odpadną tu wszystkie wyrazy z wyjątkiem pierwszego (o czem nietrudno się przekonać, zamieniwszy iloczyny dostaw na ich summy) i otrzyma się bezpośrednio wzór Leżandra (Legendre)

$$\int_0^{2\pi}[\lambda]_n dw = 2\pi.[\theta]_n.[\psi]_n.$$

okazuje się. Różniczkując więc równanie (14), będzie najprzód

$$\frac{dF(\psi, x)}{dx} = \frac{1}{3} A_1L_1 + \frac{2}{5} A_2L_2x + \frac{3}{7} A_3L_3x^2 + \ldots$$

a wskutek tego

(16) $$F(\psi, x) + 2x . \frac{dF(\psi, x)}{dx} = A_0L_0 + A_1L_1x + A_2L_2x^2 + \ldots$$

ze względu zaś na wyraz pod n° 11

(17) $$k_0 = F(\psi, x) + 2x . \frac{dF(\psi, x)}{dx},$$

jeżeli po wykonaniu różniczkowania położymy $x = 1$;

czyli

(18) $$k_0 = F(\psi, 1) + 2F'(\psi, 1).$$

Teraz aby dojść do rozwiązania danego zagadnienia wypada oznaczyć najprzód $f(x)$ a potem $F(\psi, x)$. Rozróżniwszy więc ilości, odnoszące się do obu kul przydanemi im skaźnikami, otrzymamy dla tychże kul następujące wyrazy:

(19) $$V_1 = \frac{4\pi a_1^2}{r_1} . F\left(\psi, \frac{a_1}{r_1}\right)$$

(20) $$V_2 = \frac{4\pi a_2^2}{r_2} . F\left(\psi', \frac{r_2}{a_2}\right)$$

względem potencyałowego punktu zewnętrznego,

tudzież

(21) $$V_1 = 4\pi a_1 . F\left(\psi, \frac{r_1}{a_1}\right)$$

(22) $$V_2 = 4\pi a_2\, F\left(\psi', \frac{r_2}{a_2}\right)$$

względem potencyałowego punktu wewnętrznego.

Gdy każdy punkt w obu kulach jest względnie punktem zewnętrznym i zarazem także wewnętrznym, obydwa zasadnicze równania (1) i (2) przypuszczonej równowagi elektrycznej przechodzą w następujące ogólne wyrazy:

(23) $$a_1F\left(\psi, \frac{r_1}{a_1}\right) + \frac{a_2^2}{r_2}\, F\left(\psi', \frac{a_2}{r_2}\right) = C_1 \qquad \text{(dla punktów } m_1\text{)},$$

(24) $$\frac{a_1^2}{r_1}\, F\left(\psi, \frac{a_1}{r_1}\right) + a_2F\left(\psi', \frac{r_2}{a_2}\right) = C_2 \qquad \text{(dla punktów } m_2\text{)},$$

między któremi istnieje zawisłość, wyrażona w równaniach

$$r_1 \cos\psi + r_2 \cos\psi' = b \qquad \text{i} \qquad r_1 \sin\psi = r_2 \sin\psi',$$

czyli $r_1 + r_1 = b$, w razie $\psi = 0$, gdzie b oznacza wzajemną odległość obydwóch środków kul.

Z przyczyny przyjętej równowagi elektrycznej, ułamki w obu równaniach (23) i (24) tylko właściwemi być mogą, oczem też z rysunku łatwo wykreślić się dającego, nie trudno się przekonać.

Funkcya też $F(\psi, x)$ w razie gdy $\psi = 0$, zamienia się na $F(0, x) = f(x)$; gdy zaś $\psi = \pi$, na $F(\pi, x) = f(-x)$; albowiem w tym ostatnim przypadku

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2}} = \frac{1}{1+\alpha} = 1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\ldots,$$

zatem

$$L_1 = L_2 = L_3 = \ldots = 1,$$

a

$$F(\pi, x) = A_0 - \frac{1}{3}A_1 x + \frac{1}{5}A_2 x^2 - \frac{1}{7}A_3 x^3 + \ldots = f(-x).$$

W skutek tego powyższe równania stają się prostszemi i zamieniają się na następujące:

$$a_1 f_1\left(\frac{r_1}{a_1}\right) + \frac{a_2^2}{r_2} f_2\left(\frac{a_2}{r}\right) = C_1, \tag{25}$$

$$\frac{a_1^2}{r_1} f_1\left(\frac{a_1}{r_1}\right) + a_2 f_2\left(\frac{r_2}{a_2}\right) = C_2. \tag{26}$$

Rozwiązanie tych dwóch szczególniejszych równań prowadzi także do oznaczenia wartości obydwóch funkcyj, które tamtym równaniom ogólniejszym zadość czynią. Uskutecznić zaś to można, za pomocą zwyczajnej metody eliminacyi z uwzględnieniem, że r_2 jak to rysunkiem łatwo okazać, inne jest w równaniu (25) a zupełnie inne w (26); tudzież, że $r_1 + r_2 = b$. Po wydzieleniu więc r_2 z tamtego a r_1 z tego równania, otrzymuje się

$$a_1 f_1\left(\frac{r_1}{a_1}\right) + \frac{a_2^2}{b-r_1} f_2\left(\frac{a_2}{b-r_1}\right) = C \tag{27}$$

$$\frac{a_1^2}{b-r_2} f_1\left(\frac{a_1}{b-r_2}\right) + a_2 f_2\left(\frac{r_2}{a_2}\right) = C_2. \tag{28}$$

Widocznem tu jest, że r_1 przybierać może wszystkie możliwe wartości między $+a_1$ i $-a_1$, zaś r_2 tak samo wszystkie możliwe wartości między $+a_2$ i $-a_2$. Dla eliminowania więc funkcyi f_2, położmy $\frac{r_2}{a_2} = \frac{a_2}{b-r_1}$ w równaniu (28) i pomnóżmy je przez $\frac{a_2}{b-r_1}$, a będzie

$$\frac{a_1^2 a_2}{(b-r_1)(b-r_2)} \cdot f_1\left(\frac{a_1}{b-r_2}\right) + \frac{a_2^2}{b-r_1} f_2\left(\frac{a_2}{b-r_1}\right) = \frac{a_2 C_2}{b-r_1}, \tag{29}$$

odejmując zaś to ostatnie od (27)

$$a_1 f_1\left(\frac{r_1}{a_1}\right) - \frac{a_1^2 a_2}{(b-r_1)(b-r_2)} \cdot f_1\left(\frac{a_1}{b-r_2}\right) = C_1 - \frac{a_2 C_2}{b-r_1}, \tag{30}$$

czyli dla tego, że

$$b - r_2 = b - \frac{a_2^2}{b-r_1} = \frac{b^2 - a_2^2 - br_1}{b-r_1},$$

także

$$a_1 f_1\left(\frac{r_1}{a_1}\right) - \frac{a_1^2 a_2}{b^2 - a_2^2 - br_1} \cdot f_1\left(\frac{a_1(b-r_1)}{b^2 - a_2^2 - br_1}\right) = C_1 - \frac{a_2 C_2}{b-r_1}, \tag{31}$$

Kładąc zaś $\frac{r_1}{a_1}=x$, a $b^2-a_2^2=a_1 h$ nareszcie

$$f_1(x)-\frac{a_2}{h-bx}.f_1\left(\frac{b-a_1x}{h-bx}\right)=\frac{C_1}{a_1}-\frac{a_2C_2}{a_1(b-a_1x)}\ . \tag{32}$$

Według metody rozwijania wyrazów w szeregi, używanej w teoryi równań różnicowych, można najprzód wynaleźć funkcyję, która zadosyć uczyni równaniu

$$f_1(x)-\frac{a_2}{h-bx}f_1\left(\frac{b-a_1x}{h-bx}\right)=\frac{C_1}{a_1}, \tag{33}$$

potem funkcyję, która ma się tak samo względem równania

$$f_1(x)-\frac{a_2}{h-bx}.f_1\left(\frac{b-a_1x}{h-bx}\right)=-\frac{a_2C_2}{a_1(b-a_1x)}, \tag{34}$$

a nareszcie przez zsumowanie tych obydwóch otrzymać ową funkcyję, która uczyni zadość równaniu (32).

Rozwijając funkcyje równania (33) w szereg rosnących potęg głoski a_2 otrzyma się

$$f_1(x)=\frac{C_1}{a_1}\left[1+a_2\varphi_1(x)+a_2^2\varphi_2(x)+a_2^3\varphi_3(x)+\ldots+a_2^n\varphi_n(x)+\ldots\right],$$

$$f_1\left(\frac{b-a_1x}{h-bx}\right)=\frac{C_1}{a_1}\left[1+a_2\varphi_1\left(\frac{b-a_1x}{h-bx}\right)+a_2^2\varphi_2\left(\frac{b-a_1x}{h-bx}\right)+\ldots+\right],$$

zatem dla

$$\frac{C_1}{a_1}\left[1+a_2\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\ldots\right]-\frac{a_2}{h-bx}.\frac{C_1}{a_1}\left[1+a_2\varphi_1\left(\frac{b-a_1x}{h-bx}\right)+\ldots\right]=\frac{C_1}{a_1},$$

także

$$1+\left(\varphi_1(x)-\frac{1}{h-bx}\right)a_2+\left[\varphi_2(x)-\frac{1}{h-bx}.\varphi_1\left(\frac{b-a_1x}{h-bx}\right)\right]a_2^2+\ldots=1,$$

zkąd bezpośrednio wypadnie

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{h-bx},\quad \varphi_2(x)=\frac{1}{h-bx}.\varphi_1\left(\frac{b-a_1x}{h-bx}\right), \text{ i t. d.}$$

$$\varphi_{n+1}(x)=\frac{1}{h-bx}.\varphi_n\left(\frac{b-a_1x}{h-bx}\right). \tag{35}$$

Przyjąwszy tedy, że

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{A_n+B_nx},$$

a więc

$$\varphi_{n+1}(x)=\frac{1}{A_{n+1}+B_{n+1}x}, \tag{36}$$

tudzież

$$\varphi_n\left(\frac{b-a_1x}{h-bx}\right)=\frac{1}{A_n+B_n\left(\frac{b-a_1x}{h-bx}\right)}=\frac{h-bx}{hA_n+bB_n-(bA_n+a_1B_n)x},$$

będzie po podstawieniu w (35) z uwzględnieniem wzoru (36)

$$\frac{1}{A_{n+1}+B_{n+1}x}=\frac{1}{hA_n+bB_n-(bA_n+a_1B_n)x},$$

zkąd

$$A_{n+1}=hA_n+bB_n,\qquad B_{n+1}=-bA_n-a_1B_n,$$

zatem

$$A_{n+2}=hA_{n+1}+bB_{n+1}=hA_{n+1}+b(-bA_n-a_1B_n)=hA_{n+1}-b^2A_n-a_1bB_n,$$

a ze względu na

$$bB_n=A_{n+1}-hA_n,$$

także

$$A_{n+2}=hA_{n+1}-b^2A_n-a_1(A_{n+1}-hA_n)=hA_{n+1}-b^2A_n-a_1A_{n+1}+a_1hA_n,$$

czyli

$$A_{n+2}-(h-a_1)A_{n+1}+(b^2-a_1h)A_n=0,$$

a że wyżej

$$b^2-a_2^2=a_1h,$$

położyliśmy, ostatecznie

(36) $$A_{n+2}-(h-a_1)A_{n+1}+a_2^2A_n=0.$$

Wyraz ten ostatni wskazuje, że szereg otrzymany jest szeregiem zwrotnym, mającym za swą *funkcyję ułamkową rodzącą* wyraz kształtu $\frac{\alpha+\beta z}{L+Mz+Nz^2}$ mianowicie postęp geometryczny, bo można rozłożyć ową funkcyję na *ułamki częściowe*, których mianowniki będą dwumianami, szykującemi się w geometrycznym postępie. Uważając zaś wyraz (36) z innego stanowiska, nietrudno w nim dopatrzyć *linijowego równania różniczkowego*, które jak wiadomo ma tę własność, iż każde dwa wypadki jego rozwiązania sumowane, dają znowu nowe rozwiązanie, t. j. że, gdy

dla $A_n=\varpi(n)$, $\varpi(n+2)-(h-a_1)\varpi(n+1)+a_2^2\,\varpi(n)=0$,

tudzież dla $A_n=\varpi'(n)$, $\varpi'(n+2)-(h-a_1)\varpi'(n+1)+a_2^2\varpi'(n)=0$,

także dla $\varpi(n)+\varpi'(n)=\varpi''(n)$

zawsze być musi, $\varpi''(n+2)-(h-a_1)\varpi''(n+1)+a_2^2\varpi''(n)=0$.

Kładąc przeto $A_n=\alpha^n$, będzie $\alpha^{n+2}-(h-a_1)\alpha^{n+1}+a_2^2\alpha^n=0$,

i zarazem także $\alpha^2-(h-a_1)\alpha+a_2^2=0$.

Nietylko więc każdy z pierwiastków tego równania

$$\alpha=\frac{h-a_1}{2}+\sqrt{\left(\frac{h-a_1}{2}\right)^2-a_2^2}\quad\text{i}\quad\beta=\frac{h-a_1}{2}-\sqrt{\left(\frac{h-a_1}{2}\right)^2-a_2^2},$$

ale także ich suma $\alpha+\alpha'$ czyni zadość powyższemu równaniu (36).

Położywszy zaś całkiem ogólnie $A_n=P\alpha^n+Q\beta^n$, rozumiejąc pod P i Q pierwiastki równania (36) i uwzględniwszy, że

$$B_n=\frac{1}{b}(A_{n+1}-hA_n),$$

otrzymuje się także

$$B_n = \frac{1}{b}\left(P\alpha^{n+1} + Q\beta^{n+1} - h(P\alpha^n + Q\beta^n)\right) = P\left(\frac{\alpha - h}{b}\right)\alpha^n + Q\left(\frac{\beta - h}{b}\right)\beta^n,$$

a

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{P\alpha^n + Q\beta^n + \left[P\left(\frac{\alpha - h}{b}\right)\alpha^n + Q\left(\frac{\beta - h}{b}\right)\beta^n\right]x},$$

czyli

$$\varphi_n(x) = \frac{b}{b(P\alpha^n + Q\beta^n) + [P(\alpha - h)\alpha^n + Q(\beta - h)\beta^n]x} = \frac{b}{P[b + (\alpha - h)x]\alpha^n + Q[b + (\beta - h)x]\beta^n}. \tag{37}$$

Lecz ponieważ $\psi_0 = 1$, więc dla $n = 0$, wypada z tego ostatniego równania *najprzód*, że

$$\varphi_0(x) = \frac{b}{b(P + Q) + [P(\alpha - h) + Q(\beta - h)]x} = 1, \tag{38}$$

a *następnie*, że $P + Q = 1$, zaś $P(\alpha - h) + Q(\beta - h) = 0$ być musi. Atoli $P(\beta - h) + Q(\beta - h) = 1$,

zatem
$$P = \frac{\beta - h}{\beta - \alpha} = \frac{h - \beta}{\alpha - \beta}, \qquad Q = \frac{h - \alpha}{\beta - \alpha},$$

a wprowadziwszy te wartości do (37),

$$\varphi_n(x) = \frac{b(\alpha - \beta)}{(h - \beta)\left(b - (h - \alpha)x\right)\alpha^n - (h - \alpha)\left(b - (h - \beta)x\right)\beta^n}.$$

Mając wzgląd na to, że $h - a_1$ przedstawia sumę obydwóch pierwiastków, zaś a_2^2 iloczyn tychże; zatem $\alpha + \beta = h - a_1$, tudzież $\alpha\beta = a_2^2$, z czego znowu $h = a_1 + \alpha + \beta$, $(h - \alpha)(h - \beta) = h^2 - (\alpha + \beta)h + \alpha\beta = h^2 - (h - a_1)h + a_2^2 = a_1 h + a_2^2 = b^2$, okazuje się nareszcie

$$\varphi_n(x) = \frac{b(\alpha - \beta)}{[(a_1 + \alpha)b - b^2 x]\alpha^n - [(a_1 + \beta)b - b^2 x]\beta^n} = \frac{\alpha - \beta}{(a_1 + \alpha - bx)\alpha^n - (a_1 + \beta - bx)\beta^n}, \tag{39}$$

a

$$f_1(x) = \frac{C_1}{a_1} S a_2^n \varphi_n(x) = \frac{C_1}{a_1}(\alpha - \beta) S \frac{a_2^n}{(a_1 + \alpha - bx)\alpha^n - (a_1 + \beta - bx)\beta^n}. \tag{40}$$

Postępując tym samym sposobem w równaniu (34), otrzymuje się tak samo

$$f_1(x) = -\frac{a_2 C_2}{a_1}\left[\frac{1}{b - a_1 x} + a_2\varphi_1 x + a_2^2\varphi_2 x + \ldots\ a_2^n\varphi_n(x) + \ldots\right],$$

gdzie

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{h - bx}\varphi_n\left(\frac{b - a_1 x}{h - bx}\right),$$

a ze względu na

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{b - a_1 x},$$

także

$$\varphi_0(x) = \frac{b}{b(P + Q) + [P(\alpha - h) + Q(\beta - h)]x} = \frac{1}{b - a_1 x},$$

zatem

$$P+Q=b, \quad P(\alpha-h)+Q(\beta-h)=-a_1 b,$$

$$P=b\left(\frac{h-a_1-\beta}{\alpha-\beta}\right)=\frac{b\alpha}{\alpha+\beta}, \quad Q=\frac{b(h-a_1-\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{b\beta}{\beta-\alpha},$$

dla tych zaś ostatnich wartości

$$\varphi_n(x)=\frac{b}{P[b-(h-\alpha)x]\alpha^n+Q[b-(h-\beta)x]\beta^n}=\frac{\alpha-\beta}{[b-(h-\alpha)x]\alpha^{n+1}-[b-(h-\beta)x]\beta^{n+1}}$$

$$=\frac{\alpha-\beta}{[b-(a_1+\beta)x]\alpha^{n+1}-[b-(a_1+\alpha)x]\beta^{n+1}}.$$

a nareszcie

$$f_1(x)=-\frac{C_2}{a_1}(\alpha-\beta)S\frac{a_2^{n+1}}{[b-(a_1+\beta)x]\alpha^{n+1}-[b-(a_1+\alpha)x]\beta^{n+1}}. \tag{41}$$

Funkcya przeto, urzeczywistniająca równanie (32), będąc według tego, co wyżej powiedziano, sumą obydwóch funkcyj (40) i (41), ma następującą postać ([1])

$$f_1(x)=\frac{C_1}{a_1}(\alpha-\beta)S\frac{a_2^n}{[a_1+\alpha-bx]\alpha^n-[a_1+\beta-bx]\beta^n} \tag{42}$$

$$-\frac{C_2}{a_1}(\alpha-\beta)S\frac{a_2^{n+1}}{[b-(a_1+\beta)x]\alpha^{n+1}-[b-(a_1+\alpha)x]\beta^{n+1}}$$

([1]) Przeprowadzone tu rozwiązanie równania (32) byłoby jeszcze ogólniejszem, gdyby równanie

$$f(x)-\frac{a_2}{h-bx}f\left(\frac{b-a_1x}{h-bx}\right)=0, \tag{I}$$

rozwinięte i do wyrazu (42) dodane zostało, co według metody Poissona tak się uskutecznia:

Kładąc w (I)

$$f(x)=\frac{F_1(x)}{1+mx}, \tag{II}$$

otrzymuje się

$$\frac{F_1(x)}{1+mx}=\frac{a_2}{h-bx}\cdot\frac{F_1\left(\frac{b-a_1x}{h-bx}\right)}{1+m\left(\frac{b-a_1x}{h-bx}\right)}=\frac{a_2}{h-bx+m(b-a_1x)}F_1\left(\frac{b-a_1x}{h-bx}\right),$$

czyli

$$\frac{F_1(x)}{1+mx}=\frac{a_2}{h+bm-(b+a_1m)x}F_1\left(\frac{b-a_1x}{h-bx}\right),$$

a dla $b+a_1m=-m(h+bm)$, to jest $bm^2+(a_1+h)m+b=0$, wyrażając pierwiastki tego równania głoskami m i μ, ponieważ $m+\mu=-\left(\frac{a_1+h}{b}\right)$, $\mu m=1$, także

$$\frac{F_1(x)}{1+mx}=\frac{a_2}{(h+bm)(1+mx)}.F_1\left(\frac{b-a_1x}{h-bx}\right),$$

zatem

$$F_1(x)=\frac{a_2}{h+bm}F_1\left(\frac{b-a_1x}{h-bx}\right), \tag{III}$$

Tą samą drogą dojdziemy też do funkcyi $f_2(x)$, mianowicie do wyrazu :

$$(43) \qquad f_2(x) = \frac{C_2}{a_2}(\alpha_1 - \beta_1) S \frac{a_1^n}{(a_2 + \alpha_1 - bx)\alpha_1^n - (a_2 + \beta_1 - bx)\beta_1^n}$$

$$- \frac{C_1}{a_2}(\alpha_1 - \beta_1) S \frac{a_1^{n+1}}{[b - (a_2 + \beta_1)x]\alpha_1^{n+1} - [b - (a_2 + \alpha_1)x]\beta_1^{n+1}},$$

który ze względu na równania :

$$\alpha^2 - (h - a_1)\alpha + a_2^2 = 0, \qquad \alpha_1^2 - (h_1 - a_2)\alpha_1 + \alpha_1^2 = 0,$$

tudzież na tę okoliczność, że dla

$$h = \frac{b^2 - a_2^2}{a_1} \quad \text{i} \quad h_1 = \frac{b^2 - a_1^2}{a_2},$$

także

$$\alpha_1^2 a_2^2 - (b^2 - a_1^2 - a_2^2)a_2\alpha_1 + a_1^2 a_2^2 = 0,$$

$$\alpha^2 a_1^2 - (b^2 - a_1^2 - a_2^2)a_1\alpha + a_1^2 a_2^2 = 0,$$

---

przypuściwszy zaś, że

$$F_1(x) = F\left(\frac{1 + mx}{1 + \mu x}\right),$$

oczywiście także

$$F_1(x) = \frac{a_2}{h + bm} F\left(\frac{1 + m\left(\frac{b - a_1 x}{h - bx}\right)}{1 + \mu\left(\frac{b - a_1 x}{h - bx}\right)}\right) = \frac{a_2}{h + bm} F\left(\frac{h - bx + m(b - a_1 x)}{h - bx + \mu(b - a_1 x)}\right)$$

$$= \frac{a_2}{h + bm} F\left(\frac{h + mb - (b + a_1 m)x}{h + \mu b - (b + a_1\mu)x}\right),$$

a kładąc jeszcze

$$b + a_1 m = -m(h + bm), \qquad b + a_1\mu = -\mu(h + b\mu),$$

nareszcie

$$F_1(x) = \frac{a_2}{h + bm} F\left(\frac{(h + mb)(1 + mx)}{(h + \mu b)(1 + \mu x)}\right).$$

Z tego równania widać, że funkcyja w mowie będąca jakąś potęgą być musi. Kładę więc

$$F_1(x) = F\left(\frac{1 + mx}{1 + \mu x}\right) = \left(\frac{1 + mx}{1 + \mu x}\right)^n,$$

wskutek czego

$$\left(\frac{1 + mx}{1 + \mu x}\right)^n = \frac{a_2}{h + bm}\left(\frac{h + bm}{h + b\mu}\right)^n \left(\frac{1 + mx}{1 + \mu x}\right)^n,$$

to jest

$$1 = \frac{a_2}{h + bm}\left(\frac{h + bm}{h + b\mu}\right)^n.$$

Dla niezależności pierwiastków m, μ od innych ilości, tudzież dla tego, że

$$(h + bm)(h + \mu b) = h^2 + (\mu + m)bh + m\mu b^2 = h^2 - (a_1 + h)h + b^2 = b^2 - a_1 h = a_2^2,$$

jest

$$h + \mu b = \frac{a_2^2}{h + bm},$$

a więc

$$1 = \frac{a_2}{h + bm}\left(\frac{h + bm}{a_2}\right)^{2n} = \left(\frac{h - bm}{a_2}\right)^{2n-1},$$

i dla tego też bezpośrednio

$$a_2\alpha_1 = a_1\alpha, \quad a_2\beta_1 = a_1\beta,$$

a ztąd nareszcie

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{a_2}\alpha, \quad \beta_1 = \frac{a_1}{a_2}\beta,$$

wypada, po wykonanem podstawieniu i należytem uproszczeniu postać następującą przybiera:

$$(44) \qquad f_2(x) = \frac{a_1 C_2}{a_2}(\alpha - \beta) S \frac{a_2^n}{(a_2^2 + a_1\alpha - a_2 bx)\alpha^n - (a_2^2 + a_1\beta - a_2 bx)\beta^n}$$

$$- \frac{a_1 C_1}{a_2}(\alpha - \beta) S \frac{a_2^{n+1}}{[a_2 b - (a_2^2 + a_1\beta)x]\alpha^{n+1} - [a_2 b - (a_2^2 + a_1\alpha)x]\beta^{n+1}}.$$

Teraz nietrudno oznaczyć ową ogólną funkcyję, podaną pod liczbą (14), rozwiniętą w szereg rosnących potęg zmiennej x, gdy się najprzód każdy wyraz sumy S, mający postać $\frac{1}{p - qx}$, podług wzoru

$$\frac{1}{p - qx} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{qx}{p} + \frac{q^2x^2}{p^2} + \frac{q^3x^3}{p^3} + \ldots\right),$$

należycie rozwinie i uwzględni, że

$$\frac{1}{p}\left(L_0 + L_1\frac{qx}{p} + L_2\frac{q^2x^2}{p^2} + \ldots\right) = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2qx}{p}\cos\psi + \frac{q^2x^2}{p^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p^2 - 2pqx\cos\psi + q^2x^2}}.$$

---

co tylko wtedy być może, jeśli $2n - 1 = 0$ czyli $n = \frac{1}{2}$. Ze względu na to

$$F_1(x) = \sqrt{\frac{1 + mx}{1 + \mu x}}, \quad \text{zatem [obacz (II)]}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1 + mx)(1 + \mu x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (m + \mu)x + m\mu x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_1 + h}{b}\right)x + x^2}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b - (a_1 + h)x + bx^2}},$$

a całkiem ogólnie rzecz biorąc, nareszcie

$$(IV) \qquad f(x) = \frac{L}{\sqrt{b - (a_1 + h)x + bx^2}},$$

gdzie L znowu może być funkcyą ilości x, która nie zmieni się, gdy zamiast x położymy $\frac{1 + mx}{1 + \mu x}$.

Wyrażenie ostatnie (IV), otrzymane dla funkcyi $f(x)$ należałoby dodać do powyższego rozwiązania, aby ono ogólniejszem się stało. W zagadnieniu jednak naszem należy położyć $L = 0$, unikając tak zwanych ilości *urojonych* które są mu zupełnie obce, a któreby w przeciwnym razie okazać się musiały, gdyż według przypuszczenia $\frac{r}{a} = x$ dla $a = r$, $x = 1$, a funkcyja

$$f(x) = \frac{L}{\sqrt{b - h - a_1 + b}} = \frac{L}{\sqrt{\frac{a_2^2 - (a_1 - b)^2}{a_1}}},$$

zawiera zatem w sobie wartość urojoną.

Funkcyja ta ostatecznie tak się wyraża :

$$(45)\, F(\psi, x) = \frac{C_1}{a_1}(\alpha-\beta)S \frac{a_2^n}{\sqrt{[(a_1+\alpha)\alpha^n-(a_1+\beta)\beta^n]^2+2[(a_1+\alpha)\alpha^n-(\alpha+\beta)\beta^n]b(\alpha^n-\beta^n)x\cos\psi+b^2(\alpha^n-\beta^n)^2x^2}}$$

$$-\frac{C_2}{a_1}(\alpha-\beta)S\frac{a_2^{n+1}}{\sqrt{b^2(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})^2-2b(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})[(a_1+\beta)\alpha^{n+1}-(a_1+\alpha)\beta^{n+1}]x\cos\psi+[(a_1+\beta)\alpha^{n+1}-(a_1+\alpha)\beta^{n+1}]^2x^2}}$$

Po tych analitycznych wywodach, mając formułki na wszystkie ilości do rozwiązania danego zagadnienia niezbędnie potrzebne, pozostaje tylko jeszcze, bliżej określić wartość ilości stałych C_1, C_2, co bez trudności uskutecznić można. Gdy się bowiem ilość elektryczności na jednej kuli przez E_1 a na drugiej przez E_2 wyrazi, mamy

$$E_1 = a_1^2\int_0^\pi\int_0^{2\pi} k\sin\theta d\theta dw = 2\pi a_1^2\int_0^\pi k\sin\theta d\theta,$$

a ze względu na

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^\pi k[\theta]\sin\theta d\theta,$$

tudzież na

$$A_0 = \frac{1}{2}\int_0^\pi k\sin\theta d\theta = f(0),$$

czyli

$$\int_0^\pi k\sin\theta d\theta = 2f(0),$$

także

$$E_1 = 4\pi a_1^2 f(0),$$

zatem

$$f(0) = \frac{E_1}{4\pi a_1^2},$$

położywszy zaś w (42) $x=0$, nareszcie i to bezpośrednio

$$(46)\qquad E_1 = 4\pi a_1^2\left[\frac{C_1}{a_1}(\alpha-\beta)S\frac{a_2^n}{(a+\alpha)\alpha^n-(a_1+\beta)\beta_n} - \frac{C_2}{a_1}(\alpha-\beta)S\frac{a_2^{n+1}}{b(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}\right],$$

to jest

$$E_1 = \mathfrak{A}_1 C_1 - \mathfrak{B}_1 C_2,$$

i również tak samo

$$E_2 = \mathfrak{A}_{11} C_2 - \mathfrak{B}_{11} C_1,$$

z których to dwóch ostatnich równań obie *ilości stałe* C_1 i C_2 bez trudności oznaczyć się dadzą, skoro tylko ilości E_1, E_2 liczbami są wyrażone i współczynniki $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_{11}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_{11}$ należycie obliczone zostaną.

D W. URBAŃSKI.