O RÓŻNICZKOWANIU I CAŁKOWANIU

FUNKCYI RZECZYWISTEJ

JEDNEJ

ZMIENNEJ RZECZYWISTEJ

PRZEZ

W. GOSIEWSKIEGO

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu dnia 13 września 1879 roku.)

Riemann w r. 1854, w swej rozprawie habilitacyjnej p. t. *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, podał zupełnie nową definicyę całki określonej i dał zarazem pierwszy w swym rodzaju przykład funkcyi przerywającej się nieskończoną liczbę razy w przedziale tak małym jak się podoba, a jednak nadającej się do całkowania w tym samym przedziale. Fakt ten zwrócił na się powszechną uwagę matematyków z tego mianowicie względu, że prawdziwość twierdzenia o istnieniu pochodnej oznaczonej dla każdej funkcyi ciągłej została przez to w swych podstawach zachwianą. Od czasu wszakże Riemanna w badaniach tego przedmiotu wcale naprzód nie postąpiono; bo zamiast szukać przyczyn ogólnych tego rodzaju osobliwości, ograniczono się tylko do poszukiwania coraz nowszych funkcyj nieciągłych i całkowalnych, lub też funkcyj ciągłych mających pochodne nieciągłe (Hankel, Schwartz, Weierstrass, Du Bois Reymond, Thomæ, Darboux, Dini, etc.).

Mniemam że w pracy niniejszej niedostatek ten uzupełniłem, to jest że kwestyę różniczkowania i całkowania funkcyi rzeczywistej jednej zmiennej rzeczywistej rozstrzygnąłem w całej ogólności.

I. — RÓŻNICZKOWANIE

§ 1.

Ilość zdążająca nieograniczenie ku zeru nazywa się *nieskończenie* małą.

Wartość bezwzględna nieskończenie małej jest nieoznaczoną; ona bowiem jest zawsze większą od zera i mniejszą od wszelkiej innej liczby oznaczonej : a oznaczoną mogłaby być tylko wtedy, gdyby była równą pierwszemu lub drugiej.

Znak nieskończenie małej jest, ogólnie mówiąc, także nie oznaczony; jeżeli jednak nieskończenie mała jest dowolną, to można o niej założyć, że w dążeniu swem do zera, zmienia się sposobem ciągłym, i tym sposobem zapewnić stałość czyli oznaczoność jej znaku.

§ 2.

Jeżeli każdej dowolnej wartości zmiennej x odpowiada wartość zmiennej y, to mówi się, że y jest funkcyą zmiennej x, i wyraża się to analitycznie, pisząc :

$$y = f(x).$$

Niech więc $f(x)$ oznacza funkcyę rzeczywistą zmiennej rzeczywistej x, ε i ε' niech będą liczbami dodatnemi mniejszemi od jedności, i δ nieskończenie małą dowolną zmieniającą się sposobem ciągłym.

Ponieważ na ε i ε' można wybrać wszelkie liczby dowolne zawarte między 0 i 1, to $f(x-\varepsilon'\delta)$ i $f(x+\varepsilon\delta)$ są któremikolwiek z wartości funkcyi odpowiadających przedziałowi zmiennej niezależnej ograniczonemu wartościami $x-\delta$ i $x+\delta$.

Otóż, różnica :

$$f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta)$$

jako funkcya ilości δ przy dowolnie wybranych ε i ε', może być tylko : albo nieskończenie małą, albo oznaczoną, albo nareszcie nieoznaczoną.

Jeżeli różnica $f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta)$ jest nieskończenie małą, funkcya $f(x)$ nazywa się *ciągłą* w punkcie x.

Jeżeli zaś ta różnica jest oznaczoną, to nie może jednocześnie zależyć ani od wartości bezwzględnej ilości δ, ani od ε i ε', jako od wielkości nieoznaczonych; lecz że może przytem zależy ćod znaku ilości δ, jako oznaczonego, to posiada wogóle *dwie tylko różnice wartości*, z których każda odpowiada innemu znakowi nieskończenie małej δ, i które odróżniają się między sobą samym tylko znakiem. Funkcya $f(x)$ nazywa się wtedy *przerwaną* lub *nieciągłą* w punkcie x.

W przypadku nareszcie trzecim, t. j. gdy różnica $f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta)$ jest nieoznaczoną, funkcya $f(x)$ nazywa się *nieoznaczoną* w punkcie x.

§ 3.

Jeżeli różnica $f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta)$ jest nieskończenie małą dla wszelkiej wartości zmiennej x, zawartej w przedziale od $x=a$ do $x=b$, $b>a$, i jeżeli prócz tego różnice

$$f(a+\varepsilon\delta)-f(a) \text{ i } f(b)-f(b-\varepsilon\delta),$$

są także nieskończenie małe przy δ dodatnem, to mówi się że funkcya $f(x)$ jest ciągłą w przedziale od $x=a$ do $x=b$.

Może się zdarzyć, że funkcya $f(x)$ zrywa swą ciągłość lub staje się nieoznaczoną w niektórych punktach przedziału $b-a$, i liczba tych punktów może być znowu skończoną lub nieskończenie wielką.

Nareszcie, funkcya $f(x)$ może być przerywaną lub nieoznaczoną we wszystkich punktach, to jest w całym przedziale od $x=a$ do $x=b$.

Wogóle, jeżeli granice wyrażeń:

$$f(x+\varepsilon\delta) \quad \text{i} \quad f(x-\varepsilon'\delta)$$

nazwiemy *znaczeniami* funkcyi $f(x)$, to według tego czy różnica

$$f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta),$$

w przedziale od $x=a$ do $x=b$, jest zawsze nieskończenie małą lub nie jest, funkcya $f(x)$ nazywać się będzie *jednoznaczną* albo *dwuznaczną*.

W ten sposób wszystkie funkcye rzeczywiste jednej zmiennej rzeczywistej rozdzielają się na dwie wielkie klassy: do klassy funkcyj jednoznacznych należą tylko ciągłe, a do klassy funkcyj dwuznacznych należą przerywane i nieoznaczone [1].

---

[1] Winienem w tem miejscu zwrócić uwagę na nader ważną okoliczność, dotyczącą możliwości rozwijania funkcyj w szeregi trygonometryczne.

Wiadomo jest powszechnie, że podstawę tej możliwości dla funkcyi rzeczywistej i peryodycznej $f(x)$ stanowi twierdzenie wyrażające się równaniem:

$$gr\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{\text{wst}\left(n+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{2\text{wst}\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,d\alpha\right]_{n=\infty}=\frac{1}{2}\,[f(x-0)+f(x+0)],$$

w którem

$$-\pi\leq x\leq\pi,\quad f(-\pi)=f(\pi),$$

i które ma mieć miejsce niezależnie od tego czy funkcya $f(x)$ jest w punkcie x ciągłą czy przerwaną. W tym ostatnim jednak przypadku twierdzenie to jest nieprawdziwe. Jeżeli bowiem funkcya $f(x)$ jest przerwaną w punkcie x, będzie:

$$gr\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{\text{wst}\left(n+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{2\text{wst}\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,d\alpha\right]_{n=\infty}=\frac{1}{\pi}\left[f(x-0)\int_{c}^{\infty}\frac{\text{wst}\,z}{z}\,dz+f(x+0)\int_{c'}^{\infty}\frac{\text{wst}\,z}{z}\,dz\right],$$

rozumiejąc przez c i c' stałe dowolne dodatne.

Jakoż, jeżeli funkcya $f(x)$ zrywa swą ciągłość w punkcie x, to oznaczając przez δ i δ' nieskończenie małe dodatne, pierwsza część uważanego równania wyrazi się właściwie w ten sposób:

$$\text{gr.}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{x-\delta} f(\alpha)\frac{\text{wst}\left(n+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{2\text{wst}\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_{x+\delta'}^{\pi} f(\alpha)\frac{\text{wst}\left(n+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{2\text{wst}\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,d\alpha\right]_{n=\infty}.$$

§ 4.

Jeżeli teraz w różnicy

$$f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta'),$$

założymy $\varepsilon=1$, $\varepsilon'=0$, i uważać będziemy stosunek

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta},$$

to oczywista, że o stosunku tym może być mowa w razie tylko jednoznaczności funkcyi $f(x)$. Dla funkcyj dwuznacznych w punkcie x stosunek ten jest zawsze albo nieskończenie wielki, albo nie oznaczony.

Stosunek $\dfrac{f(x+\delta)-(f(x)}{\delta}$ nazywa się pochodną funkcyi $f(x)$.

W rozważaniu pochodnej przedstawić się mogą trzy tylko następujące przypadki :

1° albo stosunek $\dfrac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$ zależy od nieskończenie małej δ, i wtedy pochodna funkcyi $f(x)$ jest nieoznaczoną wraz z δ;

A jeżeli teraz zamiast zmiennej α wprowadzimy zmienną β taką, ażeby dla całki pierwszej było $\alpha-x=-2\beta$ a dla całki drugiej $\alpha-x=2\beta$, to powyższe wyrażenie przyjmuje jeszcze postać następującą :

$$gr\left[\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2\beta)\frac{\text{wst}(2n+1)\beta}{\text{wst}\beta}\,d\beta+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\delta'}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2\beta)\frac{\text{wst}(2n+1)\beta}{\text{wst}\beta}\,d\beta\right]_{n=\infty}.$$

Otóż, za pomocą podstawienia $(2n+1)\beta=z$, wyrażenie to przechodzi na

$$gr\left[\frac{1}{\pi}\int_{\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)(\pi+x)} f\left(x-\frac{2z}{2n+1}\right)\frac{\text{wst}z}{z\left(\dfrac{\text{wst}\left(\frac{z}{2n+1}\right)}{\left(\frac{z}{2n+1}\right)}\right)}dz+\frac{1}{\pi}\int_{\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta'}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)(\pi-x)} f\left(x+\frac{2z}{2n+1}\right)\frac{\text{wst}z}{z\left(\dfrac{\text{wst}\left(\frac{z}{2n+1}\right)}{\left(\frac{z}{2n+1}\right)}\right)}dz\right]_{n=\infty},$$

czyli

$$\frac{f(x-0)}{\pi}\int_{gr\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta}^{\infty}\frac{\text{wst}z}{z}\,dz+\frac{f(x+0)}{\pi}\int_{gr\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta'}^{\infty}\frac{\text{wst}z}{z}\,dz.$$

Ponieważ nieskończenie małe δ i δ' nie mają żadnego związku ani pomiędzy sobą ani też z liczbą n, to należy wogóle położyć

$$gr\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta=c \quad \text{i} \quad gr\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta'=c',$$

c. b. d. d.

Ten wynik dowodzi oczywiście że szereg trygonometryczny przedstawia funkcyę $f(x)$ tylko w punktach *ciągłości*, i że w punktach *nieciągłości* staje się nieoznaczonym, podczas gdy funkcya $f(x)$ przyjmuje pierwszą albo drugą z dwóch wartości granicznych $f(x-0)$ i $f(x+0)$.

2° albo stosunek $\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$ zależy tylko od samego znaku nieskończenie małej δ, i wtedy pochodna funkcyi $f(x)$ ma dwa różne i oznaczone znaczenia, odpowiadające dwom różnym znakom nieskończenie małej δ;

3° albo wreszcie stosunek $\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$ nie zależy wcale od ilości δ, i wtedy pochodna funkcyi $f(x)$ ma tylko jedno oznaczone znaczenie.

§ 5.

Przykłady osobliwości objętych przypadkami 2im i 3cim są tak często przytrafiające się, że zbytecznem byłoby powtarzanie ich tutaj dla wyjaśnienia kwestyi prostej zresztą przez się samą. Ponieważ jednak przykładu osobliwości objętej przypadkiem 1ym nigdzie dotąd nie pokazano, to sądzę, że takowy będzie tu nawet pożytecznym.

Szereg nieskończony

$$f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty} h^n \operatorname{dos} k^n x,$$

w którym h jest ułamkiem właściwym dodatnym i k liczbą większą od jedności, przedstawia funkcyę taką właśnie osobliwość posiadającą.

Szereg ten jest oczywiście zbieżny i oznaczony dla wszelkiej wartości zmiennej x. Aby się zaś przekonać, że funkcya którą przedstawia jest ciągłą, znajdujemy najprzód, wiadomym sposobem, różnicę

$$f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta)=-2\sum_{n=0}^{n=\infty} h^n \operatorname{wst} k^n\left(x+\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{2}\delta\right).\operatorname{wst}\frac{k^n(\varepsilon+\varepsilon')\delta}{2}.$$

Zakładamy następnie

$$gr(k^n\delta)_{n=\infty}=k^{grn}\delta=\lambda,$$

czyli

$$\delta=\frac{\lambda}{k^{grn}},$$

przez co natura nieskończenie małej δ ani się odmieni ani się uszczególni, jeśli tylko ilość λ będzie nieoznaczoną co do wartości bezwzględnej i stałą co do znaku.

Dla krótkości kładziemy jeszcze

$$\frac{k^n}{k^{grn}}=\rho_n, \quad \text{a więc} \quad k^n\delta=\rho_n\lambda,$$

gdzie ponieważ dla n skończonego jest $\rho_n=0$, a dla $n=grn$, $\rho_n=1$, to będzie odpowiednio, dla λ skończonego lub nieskończenie małego,

$$\rho_n\lambda=0 \quad \text{i} \quad gr(\rho_n\lambda)_{n=\infty}=\lambda.$$

Na mocy tych oznaczeń formuła poprzedzająca napisze się w ten sposób:

$$(1) \qquad f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta)=-2\sum_{n=0}^{n=\infty} h^n \operatorname{wst}\left(k^n x+\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{2}\rho_n\lambda\right).\operatorname{wst}\frac{(\varepsilon+\varepsilon')\rho_n\lambda}{2};$$

a z powodu że dla n skończonego

$$\text{wst}\,\frac{(\varepsilon+\varepsilon')\rho_n\lambda}{2}=0,$$

można w niej m pierwszych wyrazów opuścić, t. j. położyć

$$f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta)=-2h^m\sum_{n=0}^{n=\infty}h^n\text{wst}k^m\left(k^nx+\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{2}\rho_n\lambda\right)\text{ wst}\,\frac{k^m(\varepsilon+\varepsilon')\rho_n\lambda}{2}.$$

Otóż, ponieważ szereg nieskończony

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}h^n\,\text{wst}k^m\left(k^nx+\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{2}\rho_n\lambda\right).\text{wst}\,\frac{k^m(\varepsilon+\varepsilon')\rho_n\lambda}{2},$$

ma summę zawsze skończoną, to przez dobranie odpowiednio wielkiej liczby m, można uczynić różnicę

$$f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon\delta'),$$

mniejszą od wszelkiej wielkości danej. Różnica ta posiada zatem naturę nieskończenie małej, i funkcya przedstawiona szeregiem jest ciągłą.

Stosunek $\dfrac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$, czyli pochodna funkcyi $f(x)$, wyraża się na mocy formuły (1) i nowego oznaczenia ilości δ, szeregiem nieskończonym następującym :

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=-\sum_{n=0}^{n=\infty}(hk)^n\text{wst}\left(k^nx+\frac{\rho_n\lambda}{2}\right).\,\frac{\text{wst}\,\frac{\rho_n\lambda}{2}}{\left(\frac{\rho_n\lambda}{2}\right)}.$$

W przypadku kiedy $hk\geq 1$, wyrazy tego szeregu nietylko że nie maleją, ale dążą do zawierania w sobie ilości dowolnej λ, jako granicy ku której zmierza $\rho_n\lambda$. Pochodna zatem funkcyi ciągłej $f(x)$ zawiera w sobie parametr dowolny λ, a za pośrednictwem tego parametru zależy istotnie od nieskończenie małej δ (2).

---

(2) Podobną osobliwość przedstawia także funkcya wyrażająca się szeregiem nieskończonym

$$f(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\text{wst}.nx}{n};$$

albowiem jeżeli założymy

$$\rho_n=\frac{n}{gr n}\quad\text{i}\quad\delta=\frac{\lambda}{gr n},$$

to znajdziemy postępując drogą wskazaną wyżej,

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\text{dos}\left(nx+\frac{\rho_n\lambda}{2}\right).\,\frac{\text{wst}\left(\frac{\rho_n\lambda}{2}\right)}{\left(\frac{\rho_n\lambda}{2}\right)}.$$

Przeciwnie, gdyby w znalezionem wyrażeniu pochodnej założyć $hk < 1$, wyrazy szeregu dążące do posiadania parametru λ malałyby nieoznaczenie, a skutkiem tego wpływ tego parametru na pochodnę zniosłby się zupełnie.

Tak więc funkcya dana posiada pochodnę oznaczoną lub nieoznaczoną, stosownie do tego czy $hk < 1$, czy też $hk \geqq 1$.

W przypuszczeniu że λ jest nieskończenie małe, mamy ogólnie

$$\rho_n\lambda = 0, \quad \frac{\mathrm{wst}\left(\frac{\rho_n\lambda}{2}\right)}{\left(\frac{\rho_n\lambda}{2}\right)} = 1,$$

i formuła poprzedzająca przechodzi na następującą :

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} = -\sum_{n=0}^{n=\infty} (hk)^n \mathrm{wst} k^n x,$$

którą otrzymać również można przez zastosowanie zwykłych prawideł różniczkowania do szeregu danego.

Godnem jest także uwagi, że jeżeli k jest liczbą całkowitą i x wyraża się formułą $\frac{p\pi}{k^q}$, w której p pierwsze względem k a q całkowite, ostatni szereg przyjmuje wartość skończoną i oznaczoną. I rzeczywiście, ponieważ dla $n \geqq q$, $k^n x = k^{n-q} p\pi$ jest zawsze wielokrotnością π, a skutkiem tego

$$\mathrm{wst} k^n x = \mathrm{wst} k^{n-q} p\pi = 0,$$

to szereg ucina się na wyrazie q^{ym} włącznie, i posiada summę skończoną i oznaczoną

$$-\sum_{n=0}^{n=q-1} (hk)^n \mathrm{wst} k^{n-q} p\pi.$$

Odpowiedni wynik dla λ skończonego ma postać

$$-\sum_{n=0}^{n=q-1} (hk)^n \mathrm{wst} k^{n-q} p\pi - (hk)^q \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^{k^n p} (hk)^n \frac{1-\mathrm{dos} k^q \rho_n\lambda}{k^2 \rho_n\lambda},$$

to jest zawiera w sobie parametr dowolny λ, co stwierdza prawie dotykalnie zależność znalezionej pochodnej od nieskończenie małej δ.

Weierstrass (3) usiłował także podobną funkcyę zróżniczkować; lecz że w sposobie postępowania opuścił z uwagi konieczną tu dowolność ilości δ, otrzymał tylko wynik szczególny, który z tego powodu prawdziwej istoty rzeczy wyjaśnić nie mógł (4).

---

(3) Crelle, *Journal*, t. 78, Du Bois Reymond. *Versuch einer classification der willkürlichen Functionen*. Str. 29.

(4) Weierstrass szuka pochodnej w punkcie x_0 funkcyi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \mathrm{dos} a^n x\pi,$$

w której b jest liczbą mniejszą od jedności, a jest liczbą nieparzystą większą od jedności, π zaś jest stosunkiem okręgu koła do średnicy.

§ 6.

W poszukiwaniu funkcyj mających pochodne nieoznaczone, nie potrzeba iść tak daleko jakby to zdawało się wynikać z przykładu poprzedzającego. Jakoż, mamy np.

$$gr\left(\frac{\mathrm{wst}mx}{m}\right)_{m=\infty}=0,$$

dla każdej wartości x; a jeżeli założymy $gr(m\delta)_{m=\infty}=\lambda$, będziemy mieli, również dla każdej wartości x:

$$gr\left(\frac{\mathrm{wst}(mx+m\delta)-\mathrm{wst}mx}{m\delta}\right)_{m=\infty}=\frac{\mathrm{wst}\lambda}{\lambda}\,gr.(\mathrm{dos}mx)_{m=\infty}+\frac{1-\mathrm{dos}\lambda}{\lambda}\,gr(\mathrm{wst}mx)_{m=\infty}.$$

Ponieważ wyraz $gr\left(\frac{\mathrm{wst}mx}{m}\right)_{m=\infty}$, jako równy zeru, może być dodany do funkcyi jakiejkolwiek bez sprowadzenia zmiany jej wartości, to dodając go do funkcyi mającej pochodnę jednoznaczną, wartość tej funkcyi pozostanie tą samą, podczas kiedy pochodna jej stanie się nieoznaczoną. Tym sposobem możemy przekształcić każdą funkcyę mającą pochodnę oznaczoną, na tę samą funkcyę mającą pochodnę nieoznaczoną.

II. — CAŁKOWANIE

Kiedy już znany jest warunek różniczkowalności i wszelkie osobliwości różniczkowaniu towarzyszące są także znane i uporządkowane, to należy się spodziewać że zadanie znalezienia warunku całkowalności powinno się dać również w zupełności rozwiązać.

Tak też i jest w istocie, jak to zaraz zobaczymy.

Dla znalezienia tej pochodnej WEIERSTRASS wprowadza następujące oznaczenia :

1°
$$x_{m+1}=a^m x_0-\alpha_m,$$

gdzie m jest liczbą całkowitą dodatną i nieograniczenie rosnącą, a α_m jest najbliższą całkowitą liczby $a^m x_0$;

2°
$$x'=\frac{\alpha_m-1}{a^m},\qquad x''=\frac{\alpha_m+1}{a^m},$$

a zatem także

$$x'-x_0=-\frac{1+x_{m+1}}{a^m},\qquad x''-x_0=\frac{1-x_{m+1}}{a^m}$$

Ponieważ według oznaczenia 1° jest zawsze

$$-\frac{1}{2}\leq x_{m+1}\leq+\frac{1}{2},$$

to wynika oczywiście że różnica $x'-x_0$ jest stale odjemną a różnica $x''-x_0$ jest stale dodatną, i że z powiększaniem się liczby m wartości bezwzględne obydwóch maleją nieograniczenie. Różnice te odpowiadają właśnie naszej nieskończenie malej δ.

Oczywistą jest rzeczą że natura ich pozostanie w swej mocy jeżeli zamiast oznaczenia 2° przyjmiemy następujące :

$$x'=\frac{\alpha_m-r}{a^m},\qquad x''=\frac{\alpha_m+r}{a^m},$$

byleby tylko było

$$\frac{1}{2}\leq r\leq 1;$$

albowiem różnice

$$x'-x_0=-\frac{r+x_{m+1}}{a^m},\qquad x''-x_0=\frac{r-x_{m+1}}{a_m}$$

będą i w tym także przypadku zachowywać stale swe znaki i nieograniczenie maleć gdy m rośnie bez granic.

§ 1.

« Weźmy pomiędzy a i b szereg wartości rosnących $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ od a aż do b, i oznaczmy
» dla krótkości $x_1 - a$ przez δ_1, $x_2 - x_1$ przez $\delta_2, \ldots$, $b - x_{n-1}$ przez δ_n; niech będą prócz tego ε_i
» liczbami dodatnemi mniejszemi od jedności. Summa

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \ldots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$

» zależy oczywiście od wyboru przedziałów δ_i i ułamków ε_i. Jeżeli ona, niezależnie od tego wy-
» boru, posiada własność zdążania nieoznaczonego ku pewnej stałej granicy A, gdy δ_i wszystkie
» jednocześnie zmierzają ku zeru granica ta nazywa się całką określoną funkcyi $f(x)$ », w przedziale od $x = a$ do $x = b$.

Tę wyborną definicyę całki określonej podał był Riemann jeszcze w r. 1854 ([5]). Lecz przyznać należy że ani on sam ani też nikt po nim nie otrzymał z niej wszystkich pożytków jakie tu osiągnąć się dają.

Ponieważ granica summy S nie zależy od wyboru ułamków ε_i, to zakładając $\varepsilon_i = 0$ i zastępując δ_i znakiem dx, cały szereg S można będzie wyrazić jednym znakiem summowania :

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Otóż, oznaczoność całki wymaga nadto, aby jej wartość A nie zależała od tego, które z dwóch znaczeń

$$gr\, f(x + \varepsilon\delta) \text{ i } gr\, f(x - \varepsilon'\delta)$$

funkcyi $f(x)$ znajduje się pod znakiem całkowania. Warunkiem przeto jedynym całkowalności funkcyi $f(x)$, w przedziale od $x = a$ do $x = b$, jest równanie :

$$gr \int_a^b [f(x + \varepsilon\delta) - f(x - \varepsilon'\delta)] dx = 0.$$

Z równania tego wynika bezpośrednio, że wszystkie funkcye jednoznaczne są całkowalne, i że funkcye nie całkowalne należą tylko do dwuznacznych.

§ 2.

Ażeby teraz w klassie funkcyj dwuznacznych oddzielić całkowalne od niecałkowalnych, rozdzielimy je najprzód na takie, których własność całkowalności od granic całkowania zależy, i których nie zależy. Niecałkowalnemi kategoryi pierwszej będą oczywiście :

1° funkcye dla których różnica

$$f(x + \varepsilon\delta) - f(x - \varepsilon'\delta),$$

Otóż, Weierstrass otrzymał wartość pochodnej w założeniu $r = 1$; a że wartości r, jako zawartych między $\frac{1}{2}$ i 1, jest nieskończenie wiele, zatem wynik Weierstrassa jest tylko jednym z pomiędzy nieskończenie wielu możliwych, odpowiadających wszystkim wartościom r zawartym między $\frac{1}{2}$ i 1.

([5]) *Gesamm. math. Werke. Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.* Str. 225.

jest różną od zera i zachowuje znak stały w całym przedziale całkowania;

2° funkcye dla których element pierwszej części równania warunkowego, t. j.

$$[f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta)]\delta,$$

staje się w przedziale całkowania przynajmniej raz jeden nieoznaczonym lub nieskończenie wielkim, byleby tylko te elementy nieoznaczone lub nieskończenie wielkie nie znosiły się wzajemnie w przedziale całkowania.

Dla funkcyj zaś kategoryi drugiej można w równaniu warunkowem granicę niższą a zastąpić zmienną x i wyższą b zmienną $x+\delta$, skutkiem czego równanie to przybierze postać prostszą :

$$\mathrm{gr.}[f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta)]\delta=0.$$

§ 3.

Ażeby dać wyobrażenie o stosowaniu tego twierdzenia, wskażemy na kilka ciekawych przypadków. Pierwszy z nich przedstawia funkcya Riemanna [6], kształtu

$$f(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(nx)}{n^s},$$

gdzie s jest liczbą dodatną, a znak (nx) jest nadmiarem liczby nx nad jej najbliższą całkowitą.

Funkcya ta posiada zatem tę osobliwość, że dla każdej wartości

$$x=\frac{p}{2q},$$

gdzie p nieparzyste i pierwsze względem q, mamy zawsze

$$f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta)=-\frac{1}{q^s}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(2n+1)^s}\qquad \delta>0,$$

dla każdej zaś innej wartości x jest

$$f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta)=0\ [7].$$

([6]) *Gesamm. math. Werke.* Ibidem str. 228.

([7]) Z równania $x=\frac{p}{2q}$ mamy $qx=\frac{p}{2}$; a że p jest całkowitą nieparzystą, więc także $(qx)=\left(\frac{p}{2}\right)=\pm\frac{1}{2}$, ogólnie

$$(\overline{2n+1}.qx)=\left(\frac{\overline{2n+1}.p}{2}\right)=\pm\frac{1}{2}:$$

albowiem nie wiemy czy liczba $\frac{\overline{2n+1}.p}{2}$ jest bliższą całkowitej $\frac{\overline{2n+1}.p+1}{2}$ czy też całkowitej $\frac{\overline{2n+1}.p-1}{2}$.

Aby tę wątpliwość rozstrzygnąć dodajemy najprzód do wartości $x=\frac{p}{2q}$ ilość $\varepsilon\delta$ i odejmujemy drugi raz ilość $\varepsilon'\delta$.

Warunek przeto całkowalności sprowadza się tu do równania

$$gr\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{\delta}\right)}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(2n+1)^s}\right)=0,$$

któremu staje się zawsze zadość; albowiem ilość $\frac{1}{\delta}$ jest nieskończonością dowolną, a summa $\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(2n+1)^s}$ nie jest dowolną nawet i wtedy gdy się staje nieskończonością, t. . gdy $s \leq 1$.

Całką określoną od $x=0$ do $x=x$ uważanej teraz funkcyi jest :

$$\int_0^x f(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(nx)^2}{n^{s+1}},$$

szereg zbieżny i jednoznaczny dla wszelkiej wartości x ([8]).

Wtedy, jeżeli δ jest dodatne, będzie odpowiednio :

$$(\overline{2n+1}.q.\overline{x+\varepsilon\delta}) = \left(\frac{\overline{2n+1}.p}{2}+\overline{2n+1}.q\varepsilon\delta\right) = -\frac{1}{2}+\overline{2n+1}.q\varepsilon\delta = -\frac{1}{2},$$

$$(\overline{2n+1}.q.\overline{x-\varepsilon'\delta}) = \left(\frac{\overline{2n+1}.p}{2}-\overline{2n+1}.q\varepsilon'\delta\right) = +\frac{1}{2}-\overline{2n+1}.q\varepsilon'\delta = +\frac{1}{2},$$

a zatem także

$$(\overline{2n+1}.q.\overline{x+\varepsilon\delta})-(\overline{2n+1}.q.\overline{x-\varepsilon'\delta}) = -1.$$

Podobna osobliwość, przy tej samej wartości x, miejsca mieć nie może dla innych skaźników oprócz kształtu $\overline{2n+1}.q$; a że ona miejsca mieć także nie może dla żadnego skaźnika przy x wymiernych nieprzywiedlnych z mianownikami nieparzystemi i przy x niewymiernych, to mamy wogóle :

1° przy x wymiernych nieprzywiedlnych z mianownikami parzystemi $2q$:

$$f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta) = -\frac{1}{q^s}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(2n+1)^s}, \qquad \delta>0,$$

2° przy x pozostałych :

$$f(x-\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta) = 0.$$

([8]) Jeżeli λ oznacza liczbę całkowitą, to z samego określenia znaku (y) wynika bezpośrednio : $\int_\lambda^{\lambda+1}(y)dy = 0.$ Oznaczając zatem przez m całkowitą najbliższą liczby y, mieć będziemy, niezależnie od tego czy $m<y$, czy też $m>y$,

$$\int_0^y (y)dy = \int_m^y (y)dy = \int_0^{(y)} y\,dy = \frac{1}{2}(y)^2.$$

Ponieważ więc

$$\int_0^x (nx)dx = \frac{1}{n}\int_0^{nx}(y)dy,$$

to oczywiście :

$$\int_0^x (nx)dx = \frac{1}{2n}(nx)^2$$

§ 4.

Za drugi przykład weźmiemy funkcyę

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{k^n(k^n x - \mathrm{E}(k^n x))^s},$$

gdzie k jest całkowite i większe od jedności, s stałe mniejsze od jedności, a znak E $(k^n x)$ jest najbliższą całkowitą liczby $k^n x$ w niej się mieszczącą.

Ta funkcya przedstawia znowu taką osobliwość, że dla każdej wartości

$$x = \frac{p}{k^q},$$

gdzie p pierwsze względem k a q całkowite, jest zawsze

$$f(x+\varepsilon\delta) - f(x-\varepsilon'\delta) = \frac{(\varepsilon\delta)^{-s}}{k^{(q-1)(s+1)}(k^{s+1}-1)} - \frac{1}{k^{q-1}(k-1)}, \quad \delta > 0,$$

dla każdej zaś innej wartości x:

$$f(x+\varepsilon\delta) - f(x-\varepsilon\delta) = 0 \ (^9).$$

Warunek całkowalności sprowadza się w tym razie do równania

$$\mathrm{gr.}(\delta)^{1-s} = 0,$$

któremu staje się zadość, albowiem jest $s < 1$.

Całką tej funkcyi w przedziale od $x=0$ do $x=x$ jest:

$$\int_0^x f(x)dx = \frac{1}{1-s} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\mathrm{E}(k^n x) + (k^n x - \mathrm{E}(k^n x))^{1-s}}{k^{2n}},$$

---

(9) Funkcyę zadaną przedstawić także można w ten sposób:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=q-1} \frac{1}{k^n(k^n x - \mathrm{E}(k^n x))^s} + \frac{1}{k^q} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{k^n(k^{q+n}x - \mathrm{E}(k^{q+n}x))^s}.$$

Zakładając teraz $x = \frac{p}{k^q} + \varepsilon\delta$ i $x = \frac{p}{k^q} - \varepsilon'\delta$, $\delta > 0$, wyrazy objęte pierwszym znakiem summowania będą dla obydwóch podstawień jednakowymi. Z przyczyny jednak że dla podstawienia pierwszego jest $k^{q+n}x - \mathrm{E}(k^{q+n}x) = k^{q+n}\varepsilon\delta$, a dla podstawienia drugiego $k^{q+n}x - \mathrm{E}(k^{q+n}x) = 1 - k^{q+n}\varepsilon'\delta = 1$, otrzymuje się bez trudności

$$f(x+\varepsilon\delta) - f(x-\varepsilon'\delta) = \frac{(\varepsilon\delta)^{1-s}}{k^{(q-1)(s+1)}(k^{s+1}-1)} - \frac{1}{k^{q-1}(k-1)}.$$

Dla każdej innej wartości x będzie znowu oczywiście

$$f(x+\varepsilon\delta) - f(x-\varepsilon'\delta) = 0.$$

szereg zbieżny i jednoznaczny dla każdej wartości x ([10]).

Jeżeli $s=\frac{1}{2}$ i $k=2$, szereg ten, podzielony przez 2, przedstawia znaną funkcyę Schwartza ([11]).

§ 5.

Jeżelibyśmy teraz chcieli znaleźć warunki całkowalności funkcyi zadanej przez szereg nieskończony

$$f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n \operatorname{wst} k^n x,$$

którego współczynniki c_n są nieoznaczone, a k większe od jedności, to stosując powyższe twierdzenie, znajdujemy najprzód:

$$[f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta)]\delta = 2\delta\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n \operatorname{dos} k^n\left(x+\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{2}\delta\right).\operatorname{wst}\frac{k^n(\varepsilon+\varepsilon')\delta}{2}.$$

Zakładając następnie, podobnie jak w § 5 rozdziału poprzedzającego,

$$\rho_n=\frac{k^n}{k^{g r n}},\qquad \delta=\frac{\lambda}{k^{g r n}},$$

([10]) Całka $\int_0^y \frac{dy}{(y-\mathrm{E}(y))^s}$ może się oczywiście wyrazić w ten sposób:

$$\int_0^y \frac{dy}{(y-\mathrm{E}(y))^s}=\int_0^{1-0}\frac{dy}{(y-\mathrm{E}(y))^s}+\int_{1+0}^{2-0}\frac{dy}{(y-\mathrm{E}(y))^s}+\int_{2+0}^{3-0}\frac{dy}{(y-\mathrm{E}(y))^s}+\ldots+\int_{\mathrm{E}(y)+0}^{y}\frac{dy}{(y-\mathrm{E}(y))^s},$$

W każdej z tych $\mathrm{E}(y)+1$ całek liczba $\mathrm{E}(y)$ pozostaje stałą, a mianowicie: w całce pierwszej jest ona równa zeru, w całce drugiej równa jedności, w całce trzeciej równa dwójce, i t. d. aż nareszcie w całce $\mathrm{E}(y)+1$ równa $\mathrm{E}(y)$. Na tej zasadzie mamy:

$$\int_0^{1-0}\frac{dy}{(y-\mathrm{E}(y))^s}=\int_{1+0}^{2-0}\frac{dy}{(y-\mathrm{E}(y))^s}=\int_{2+0}^{3-0}\frac{dy}{(y-\mathrm{E}(y))^s}=\ldots=\int_{\mathrm{E}(y)-1+0}^{\mathrm{E}(y)-0}\frac{dy}{(y-\mathrm{E}(y))^s}=\frac{1}{s-1},$$

$$\int_{\mathrm{E}(y)+0}^{y}\frac{dy}{(y-\mathrm{E}(y))^s}=\frac{(y-\mathrm{E}(y))^{1-s}}{1-s};$$

a więc

$$\int_0^y\frac{dy}{(y-\mathrm{E}(y))^s}=\frac{\mathrm{E}(y)+(y-\mathrm{E}(y))^{1-s}}{1-s}.$$

Jeżeli teraz weźmiemy pod uwagę że

$$\int_0^x\frac{dx}{(k^n x-\mathrm{E}(k^n x))^s}=\frac{1}{k^n}\int_0^{k^n x}\frac{dy}{(y-\mathrm{E}(y))^s},$$

to oczywiście

$$\int_0^x\frac{dx}{(k^n x-\mathrm{E}(k^n x))^s}=\frac{\mathrm{E}(k^n x)+(k^n x-\mathrm{E}(k^n x))^{1-s}}{k^n(1-s)}.$$

([11]) *Archives des Sciences physiques et naturelles* Nr 189, str. 33.

otrzymamy łatwo:

$$f[(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta)]\delta=2\lambda\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{c_n}{k^n}\rho_n\,\mathrm{dos}\left[k^n x+\frac{\rho_n\lambda(\varepsilon-\varepsilon')}{2}\right].\mathrm{wst}\frac{\rho_n\lambda(\varepsilon+\varepsilon')}{2};$$

a ponieważ dla n skończonego jest $\rho_n=0$, to będzie także, dla m całkowitego i dotatnego jakiegokolwiek:

$$[f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta)]\delta=2\lambda\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{c_{m+n}}{k^{m+n}}\rho_{m+n}\mathrm{dos}\left[k^{m+n}x+\frac{\rho_{m+n}\lambda(\varepsilon-\varepsilon')}{2}\right].\mathrm{wst}\frac{\rho_{m+n}\lambda(\varepsilon+\varepsilon')}{2}.$$

Tym sposobem warunek całkowalności funkcyi zadanej sprowadza się do równania:

$$gr\left\{\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{c_{m+n}}{k^{m+n}}\rho_{m+n}\mathrm{dos}\left[k^{m+n}x+\frac{\rho_{m+n}\lambda(\varepsilon-\varepsilon')}{2}\right].\mathrm{wst}\frac{\rho_{m+n}\lambda(\varepsilon+\varepsilon')}{2}\right\}_{m=\infty}=0,$$

któremu, z przyczyny nieoznaczoności czynników

$$gr\left\{\rho_{m+n}\mathrm{dos}\left[k^{m+n}x+\frac{\rho_{m+n}\lambda(\varepsilon-\varepsilon')}{2}\right].\mathrm{wst}\frac{\rho_{m+n}\lambda(\varepsilon+\varepsilon')}{2}\right\}_{m=\infty},$$

staje się zadość jeżeli jest:

$$gr\left\{\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{c_{m+n}}{k^{m+n}}\right)\right\}_{m=\infty}=0,$$

rozumiejąc przez $\left(\frac{c_{m+n}}{k^{m+n}}\right)$ wartość bezwzględną ilości $\frac{c_{m+n}}{k^{m+n}}$.

Podobnie postępując znaleźlibyśmy łatwo, że funkcye dane przez szeregi:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}c_n\mathrm{wst}.n^s x,\quad \sum_{n=0}^{n=\infty}c_n\,\mathrm{dos}n^s x,\quad s\geq 1,\ \text{ i }\sum_{n=0}^{n=\infty}c_n\mathrm{wst}.n!x,\quad \sum_{n=0}^{n=\infty}c_n\mathrm{dos}n!x,\quad n!=1.2.3\ldots n,\quad 0!=0,$$

można zawsze całkować, jeśli tylko wyrażenia im odpowiednie

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{c_{m+n}}{(m+n)^s}\right)\ \text{ i }\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{c_{m+n}}{(m+n)!}\right)$$

dążą do zera gdy m nieograniczenie rośnie.

Całki funkcyj w paragrafie niniejszym przytoczonych mają tę osobliwość, że pochodne ich zawierają w sobie parametr nieoznaczony, i zamieniają się na funkcye zadane dopiero wtedy gdy wartość tego parametru jest zerem.

§ 6.

Co się zaś tyczy funkcyj których własność całkowalności od granic całkowania zależy, to ciekawy przykład funkcyi niecałkowalnej od $x=0$ do $x=x$, i całkowalnej od $x=a$ do $x=x$, przedstawia szereg niejednostajnie zbieżny w sąsiedztwie $x=0$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}[n^2xe^{-n^2x^2}-(n+1)^2xe^{-(n+1)^2x^2}],$$

którego summa równą jest xe^{-x^2}.

Oznaczając przez $S_m(x)$ summę pierwszych m jego wyrazów a przez $R_m(x)$ resztę, mamy

$$R_m(x) = xe^{-x^2} - S_m(x) = (m+1)^2 xe^{-(m+1)^2 x^2}.$$

Ponieważ możliwość istnienia całki $\int_0^x f(x)dx$ zależy tu oczywiście od możliwości istnienia całki $gr\left[\int_0^x R_m(x)dx\right]_{m=\infty}$, to należy przedewszystkiem zbadać czy element pierwszej części równania warunkowego całki ostatniej, t. j.

$$gr\Big[R_m(x+\varepsilon\delta) - R_m(x-\varepsilon'\delta)\Big]_{m=\infty}^{\delta},$$

staje się w przedziale całkowania przynajmniej raz jeden nieoznaczonym lub nieskończenie wielkim, czy też się nie staje. Otóż, zakładając $gr(\overline{m+1}.\delta)_{m=\infty} = \lambda$, łatwo jest zauważyć że element ten dla wartości $x = gr\left(\frac{c}{m+1}\right)_{m=\infty}$ ma postać

$$\lambda\left[(c+\varepsilon\lambda)e^{-(c+\varepsilon\lambda)^2} - (c-\varepsilon'\lambda)e^{-(c-\varepsilon'\lambda)^2}\right],$$

a więc z powodu że λ, ε i ε' są nieoznaczonemi, staje się istotnie nieoznaczonym gdy c ma wartość skończoną. Szereg zatem $f(x)$ od $x=0$ do $x=x$ całkowanym być nie może, podczas gdy od $x=a$ do $x=x$ jest całkowalnym; albowiem jeżeli a i x mają ten sam znak, to szereg jest jednostajnie zbieżny w przedziale całkowania, a jeżeli a i x mają znaki przeciwne, to elementy nieoznaczone pierwszej części równania warunkowego znoszą się wzajemnie, z powodu że szereg przedstawia funkcyę nieparzystą.

Przeciwnie, funkcya dana przez szereg:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[e^{-n^2x^2} - e^{-(n+1)^2x^2}\right] = e^{-x^2},$$

który także jest niejednostajnie zbieżny w sąsiedztwie $x=0$, jest jednak całkowalną od $x=0$ do $x=x$, i tem bardziej od $x=a$ do $x=x$, czego łatwo jest dowieść, pokazując że w pierwszej części równania warunkowego elementów nieoznaczonych lub nieskończenie wielkich nie ma.

Warszawa dnia 25 sierpnia 1879 roku.