O PRZEKSZTAŁCENIU KWADRATOWEM

PRZEZ

STANISŁAWA RYCHLICKIEGO.

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, dnia 4 Listopada 1879 roku.)

TREŚĆ.

WSTĘP

Teoryi przekształcenia kwadratowego dotąd w żadnem nie znalazłem kompendyum, na żadnem się więc opierać nie mogłem. Pierwszy punkt wyjścia tej kwestyi jest praca Magnusa (Crelle z r. 1831); są także w pracy Jac de Bruno (*Théorie de l'élimination* 1859), pewne natrącania o teoryi przekształcenia kwadratowego. Przytacza ją dalej Salmon i Clebsch, ale każdy z nich ogranicza się tylko na kilku wyrazach. W ostatnim dopiero czasie, po ukończeniu pracy niniejszej, ogłosił p. Amigues w *Nouvelles Annales* (Septembre-Décembre 1877) pracę pod tytułem : « *Mémoire sur les transformations de second ordre dans les figures planes* », w której zupełną prawie teoryę przekształcenia kwadratowego podaje.

Materyał do pracy tej zawdzięczam profesorowi Rosanes. Stawiał on w seminaryum 1878 zadania dotyczące jednokładności, przekształcenia odwrotnego i kwadratowego; zadania te musieliśmy rozwiązywać i opracowane profesorowi Rosanes przedkładać. Zebrać to, co sam napisałem, było celem pracy niniejszej. Ile praca ta zawiera mej własności, niech czytelnik sam osądzi!

S. Rychlicki.

§ 1.

Podstawiając w funkcyi n zmiennych

$$x_1,\ x_2,\ldots x_n \quad f(x_1 x_2 \ldots x_n), \quad \text{zamiast} \quad x_i = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} y_k,$$

funkcya $f(x_1 x_2 \ldots x_n)$ stanie się funkcyą n zmiennych y, np. $\varphi(y_1 y_2 \ldots y_n)$, gdzie $\varphi(y_1 \ldots y_n)$ zależeć będzie od współczynników funkcyi $f(x_1 x_2 \ldots x_n)$ i podstawienia linijnego

$$x_i = \Sigma a_{ik}\, y_k;$$

operacyę tę nazywamy *przekształceniem* funkcyi f za pomocą pewnego podstawienia. W przypadkach szczególnych, gdzie $n = 2, 3$ albo $= 4$, funkcya f przedstawiać będzie figurę geometryczną i to odniesioną do układu spółrzędnych prostokątnych, trzylinijnych albo czteropłaszczyznowych. W tych samych przypadkach funkcya $\varphi(y_1 y_2 \ldots y_n)$ przedstawiać będzie figurę geometryczną, odmienną oczywiście od figury przez funkcyę f przedstawionej; dwie te figury jednak połączone są z sobą w pewien związek za pomocą owego podstawienia; związek ten nazwiemy *pokrewieństwem* a figurę jednę drugiej *pokrewną* lub *odpowiadającą* !

Mając więc dane równanie jakiegokolwiek miejsca geometrycznego otrzymujemy za pomocą danego podstawienia inne miejsce geometryczne; figura ta znajdować się będzie na tej samej płaszczyznie co i pierwsza, ale odniesiona do innego układu spółrzędnych oznaczonego właśnie owem podstawieniem. W tym więc przypadku przekształcenie funkcyi f byłoby tylko zmianą spółrzędnych. Związek ten jednakże inaczej jeszcze pojąć i tłomaczyć możemy! Zamiast bowiem uważać obie figury jako odniesione do różnych układów spółrzędnych na jednej płaszczyznie, możemy je widocznie odnieść do jednego układu spółrzędnych na dwóch płaszczyznach. W ten sposób badanie pokrewieństwa i związków figur geometrycznych przenosimy na pole daleko obszerniejsze, któremu znowu niezliczona liczba przypadków szczególnych odpowiada. Każdemu bowiem podstawieniu, czy ono jest linijnem czy też stopnia wyższego, odpowiada pewne przekształcenie, które znowu między sobą mogą mieć własności wspólne. W pracy niniejszej ograniczymy się tylko na trzech głównych przypadkach czyli raczej rodzajach przekształcenia, t. j. na jednokładności, przekształceniu odwrotnem i przekształceniu kwadratowem. Teoryę jednokładności i przekształcenia odwrotnego podamy tylko pobieżnie i w głównych zarysach, ponieważ teorye te w każdej większej książce podręcznej szczegółowo są opracowane, natomiast głównie zajmiemy się teoryą przekształcenia kwadratowego, która dotąd, o ile nam wiadomo, nigdzie szczegółowo nie została podaną.

§ 2.

Niech będą $x_1 x_2 x_3$ i $X_1 X_2 X_3$ spółrzędne (trzylinijne czyli jednorodne) dwóch punktów, p i P, znajdujących się na dwóch oddzielnych płaszczyznach e_x i E_X, tak że punkt $p(x_1 x_2 x_3)$ odn. $P(X_1 X_2 X_3)$ leżeć będzie na e_x odn. E_X; niech zachodzi dalej między x_i a X_i następujący związek :

$$\text{I} \quad \begin{cases} X_1 = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 = \Sigma \alpha_{1i} x_i, \\ X_2 = \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3 = \Sigma \alpha_{2i} x_i, \\ X_3 = \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} x_3 = \Sigma \alpha_{3i} x_i, \end{cases}$$

gdzie α_{ik} oznaczać mają stałe raz na zawsze dane, w takim razie podstawienie to linijne (I) wyznacza nam *przekształcenie linijne* czyli *jednokładność* (Homologie, Collineation). Rozwiązawszy bowiem układ I podług x_i, otrzymamy :

$$\text{II}\quad\begin{cases} Ax_1 = A_{11}X_1 + A_{21}X_2 + A_{31}X_3 = \Sigma A_{i1}X_i, \\ Ax_2 = A_{12}X_1 + A_{22}X_2 + A_{32}X_3 = \Sigma A_{i2}X_i, \\ Ax_3 = A_{13}X_1 + A_{23}X_2 + A_{33}X_3 = \Sigma A_{i3}X_i, \end{cases}$$

gdzie

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix},$$

oznacza wyznacznik współczynników układu I a A_{ik} minory odnośne tego wyznacznika. Jeżeli teraz $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = u_x = 0$ oznacza prostę na e_x, otrzymamy figurę jej pokrewną na E_x, skoro w $u_x = 0$ za x_i podstawimy wartości w układzie II wyznaczone. Wykonawszy mamy :

$$u_1\Sigma A_{i1}X_i + u_2\Sigma A_{i2}X_i + u_3\Sigma A_{i3}X_i = X_1\Sigma u_iA_{1i} + X_2\Sigma u_iA_{2i} + X_3\Sigma u_iA_{3i} = X_1U_1 + X_2U_2 + X_3U_3 = U_x = 0.$$

Równania te, które są tożsamościowe, oznaczają widocznie prostę na E_x ; prostej więc na e_x odpowiada prosta na E_x. W równaniu ostatniem oznaczają X_i spółrzędne bieżące a

$$\text{III}\quad\begin{cases} U_1 = A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 = \Sigma A_{1i}u_i, \\ U_2 = A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3 = \Sigma A_{2i}u_i, \\ U_3 = A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3 = \Sigma A_{3i}u_i. \end{cases}$$

Z układu III otrzymać możemy układ IV, gdzie u_i wyznaczone będą przez U_i; w ten sposób moglibyśmy się przekonać, że punktowi $u_x = 0$ na e_x odpowiadać będzie punkt $U_x = 0$ na E_x, gdzie znowu u_i i U_i będą spółrzędnemi bieżącemi. Dalej krzywej drugiego stopnia $u_x^2 = (u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)^2 = 0$ [1] na e_x odpowiada znowu krzywa $U_x^2 = 0$ na E_x, gdzie x_i i X_i są współrzędnemi bieżącemi.

Widzimy ztąd, że *jednej* prostej, *jednemu* punktowi, *jednej* krzywej i t. d., na e_x odpowiada na E_x *jedna* prosta, *jeden* punkt, *jedna* krzywa, czyli *jednemu* elementowi odpowiada także *jeden* element, t. j. przekształcenie to jest *jednowartościowem*.

Jeżeli dalej $a_x = 0$ i $b_x = 0$ oznaczają dwie proste na e_x, to $a_x + kb_x = 0$ oznacza pęk prostych przechodzących przez punkt przecięcia się $a_x = 0$ i $b_x = 0$. Toż samo oznacza i $a_x + \lambda b_x = 0$. W każdym razie jednak przyjmujemy, że k i λ są zmienne. Skoro jednak k i λ oznaczają dwie *stałe* wartości, natenczas mamy tylko cztery proste, $a_x = 0$, $b_x = 0$, $a_x + kb_x = 0$ i $a_x + \lambda b_x = 0$, które przez jeden punkt przechodzą. Wartość ich stosunku nieharmonicznego jest $\delta = k : \lambda$. Tym czterem prostym odpowiadają na E_x także cztery proste : $A_x = 0$, $B_x = 0$, $A_x + kB_x = 0$ i $A_x + \lambda B_x = 0$, gdzie A i B w tym samym stoi stosunku do a i b, jak U_i do u_i. Wartość ich stosunku nieharmo-

---

[1] $u_x^2 = 0$ oznacza symbolicznie : wynieś $u_x = 0$ do kwadratu a potem napisz zamiast $u_i . u_k$ tylko u_{ik}, oczywiście przytem $u_{ik} = u_{ki}$.

nicznego jest $\Delta = k : \lambda$, czyli $\delta = \Delta$ t. z. wartości stosunków nieharmonicznych czterech *prostych* lub *punktów* i ich odpowiadających są *zupełnie równe*.

Przypuśćmy nakoniec, że obie płaszczyzny e_x i E_X się pokrywają, t. j. że mamy jednę ale podwójną płaszczyznę, natenczas nasuwa się nam pytanie, czy zdarzyć się może, aby punkt x pokrył punkt X mu odpowiadający i aby prosta pokryła prostę jej odpowiadającą. Zdarzyć to się może tylko wtenczas, jeżeli spółrzędne x_i równać się będą proporcyonalnie spółrzędnym X_i, t. j. jeżeli $X_i = \rho x_i$ i $u_i = \sigma U_i$.

Mamy natenczas :

$$X_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = \rho x_1,$$

$$X_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = \rho x_2,$$

$$X_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 = \rho x_3,$$

czyli :

$$(\alpha_{11} - \rho)x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = 0,$$

$$\alpha_{21}x_1 + (\alpha_{22} - \rho)x_2 + \alpha_{23}x_3 = 0,$$

$$\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + (\alpha_{33} - \rho)x_3 = 0.$$

Rugując z tego wzoru x_1, x_2, x_3, otrzymamy szukany warunek pokrycia się dwóch pokrewnych punktów lub prostych w kształcie wyznacznika :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \rho & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \rho & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Wyznacznik ten jest równaniem trzeciego stopnia co do ρ, z czego wynika, że można trzy razy ρ tak wyznaczyć, aby punkt pokrył punkt mu odpowiadający; to samo wypowiedzieć można o prostych. Trzy więc punkta szczególne i trzy proste mamy, które się pokrywają z elementami im odpowiadającymi. Trzy te punkta tworzą *trójkąt*, trzy te proste tworzą *trójbok;* obie te figury zupełnie się *nakrywają* czyli owe trzy proste są linijami łączącemi te 3 punkta. Dowód pozostawiamy czytelnikowi, który go w każdej znajdzie książce (1).

Trzy więc są *główne cechy*, któremi się przekształcenie to jednokładnością zwane odznacza : przekształcenie to jest *jednowartościowe*, *wartości* stosunku nieharmonicznego czterech elementów i ich odpowiadających są *równe* i owe na końcu wzmiankowane trzy pary prostych i punktów, które *jeden* tworzą *trójkąt*.

§ 3.

Na podstawieniu linijnem opiera się także jeszcze inne pokrewieństwo figur, tak zwane *przekształcenie odwrotne;* nazwa ta pochodzi zapewne ztąd, że elementowi jednej klassy (punkt, linija) odpo-

---

(1) SALMON : *Kegelschnitte*, p. 537.

wiada element drugiej klassy (linija, punkt). Przekształcenie to odwrotne wyznaczają następne podstawienia linijne :

$$\text{I}\quad\begin{cases} U_1=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3, \\ U_2=\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\alpha_{23}x_3, \\ U_3=\alpha_{31}x_1+\alpha_{32}x_2+\alpha_{33}x_3, \end{cases}$$

zkąd :

$$\text{II}\quad\begin{cases} Ax_1=A_{11}U_1+A_{21}U_2+A_{31}U_3, \\ Ax_2=A_{12}U_1+A_{22}U_2+A_{32}U_3, \\ Ax_3=A_{13}U_1+A_{23}U_2+A_{33}U_3 \end{cases} \quad \text{i}$$

$$\text{III}\quad\begin{cases} u_1=\alpha_{11}X_1+\alpha_{21}X_2+\alpha_{31}X_3, \\ u_2=\alpha_{12}X_1+\alpha_{22}X_2+\alpha_{32}X_3, \\ u_3=\alpha_{13}X_1+\alpha_{23}X_2+\alpha_{33}X_3, \end{cases}$$

zkąd znowu podobny układ IV otrzymać możemy, gdzie X_i przez u_i wyznaczonem zostanie. Wszelkie ilości w tym § zachodzące mają to samo znaczenie co w § 2.

Z natury tego podstawienia wynika już, że punktowi x odpowiada prosta U leżąca na płaszczyznie E_x i odwrotnie.

To samo przekształcenie zawarte jest także w następnem równaniu :

$$f(xX)=a_{11}x_1X_1+a_{12}x_1X_2+a_{13}x_1X_3+a_{21}x_2X_1+a_{22}x_2X_2+$$

$$+a_{23}x_2X_3+a_{31}x_3X_1+a_{32}x_3X_2+a_{33}x_3X_3=$$

albo

$$=x_1f_1(X)+x_2f_2(X)+x_3f_3(X)$$

albo

$$=X_1f_1(x)+X_2f_2(x)+X_3f_3(x),$$

gdzie

$$f_i(X)=a_{i1}X_1+a_{i2}X_2+a_{i3}X_3,$$

$$f_i(x)=a_{1i}x_1+a_{2i}x_2+a_{3i}x_3.$$

Jeżeli bowiem $X_1\ X_2\ X_3$ oznaczają spółrzędne jakiegokolwiek punktu na E_x i wartości te w równanie powyższe podstawimy, otrzymamy : $\Sigma x_if_i(X)=0$, gdzie x_i oznaczają spółrzędne bieżące. Równanie zaś to oznacza prostę na e_x; punktowi więc X na E_x odpowiada prosta na e_x i odwrotnie. Jeżeli zaś punkt X przebiega prostę, to każdemu punktowi tej prostej odpowiadać będzie prosta na e_x; wszystkie zaś te proste przechodzić będą przez jeden punkt czyli tworzyć pęk prostych, punkt zaś ich przecięcia się odpowiada prostej, którą X przebiega.

Niech będą dalej dane dwa punkta na E_x : $X_1X_2X_3$ i $Y_1Y_2Y_3$, natenczas oznaczają dla pewnych i stałych wartości k i λ, X_i+kY_i i $X_i+\lambda Y_i$ spółrzędne dwóch innych punktów, które z X i Y na jednej prostej leżą. Wartość stosunku nieharmonicznego tych 4 punktów jest $\delta=k:\lambda$. Proste tym punktom odpowiadające otrzymamy, skoro te wartości w powyższe równanie za X podstawimy; równania tych czterech prostych będą :

$$\Sigma x_if_i(X)=0,\quad \Sigma x_if_i(Y)=0,$$

$$\Sigma x_if_i(X)+k\Sigma x_if_i(Y)=0 \quad \text{i} \quad \Sigma x_if_i(X)+\lambda\Sigma x_if_i(Y)=0.$$

Wartość ich stosunku nieharmonicznego jest $\Delta = k : \lambda$ t. z. wartości tych stosunków są równe.

Dla związków przeciwnych t. j. między prostą a punktem mamy równanie :

$$F(uU) = \Sigma A_{k\lambda} u_k U_\lambda, \quad \text{gdzie} \quad A_{k\lambda} = \frac{\partial A}{\partial a_{k\lambda}},$$

a

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Przypuściwszy nakoniec, że obie płaszczyzny się pokrywają, natenczas punkt X leżeć będzie na odpowiadającej mu prostej, jeżeli $X_i = \rho x_i$ a prosta u przechodzić będzie przez odpowiadający jej punkt, jeżeli $u_i = \sigma U_i$. Wartości te podstawiwszy w równanie $f(xX) = 0$ odnośnie $f(uU) = 0$, otrzymamy w pierwszym razie $f(xx) = 0$, a w drugim $f(UU) = 0$; ρ i σ możemy wyrugować. Ostatnie równania oznaczają, że wszystkie punkta, które przy nakrywaniu się płaszczyzn leżeć będą na odpowiadających im prostych, znajdują się na krzywej drugiego stopnia, $f(xx) = 0$ a wszystkie proste, które przechodzić będą przez punkta im odpowiadające, leżeć będą na krzywej $f(UU) = 0$ czyli że będą stycznemi krzywej $f(UU) = 0$. Obie te krzywe $f(xx) = 0$ i $f(UU) = 0$ są w ogólności od siebie różne i stykają się, jak łatwo można udowodnić, podwójnie.

Z tego, cośmy dotąd powiedzieli, wynika, że i w *przekształceniu odwrotnem* trzy główne znajdujemy *własności* : przekształcenie to jest także *jednowartościowem*, *wartości* stosunków nieharmonicznych czterech elementów i ich odpowiadających są równe, i nakoniec mamy przy nakrywaniu się płaszczyzn *całą krzywę* punktów, które na odpowiadających im prostych leżą i *całą krzywę* prostych, które, przez odpowiadające im punkta przechodzą.

§ 4.

W krótkości i pobieżnie tylko skreśliliśmy w dwóch poprzednich §§ teoryę jednokładności i przekształcenia odwrotnego.

Wypada nam teraz zająć się trzecim rodzajem przekształcenia, tak zwanem *przekształceniem kwadratowem*, którego teoryę obszerniej skreślić zamyślamy. Już sama nazwa wskazuje, że przekształcenie to polega na podstawieniu kwadratowem. Najprostszym wzorem takiego podstawienia jest wzór następujący, którego bardzo często używać będziemy z powodu jego prostoty i łatwości w użyciu :

$$A \left\{ \begin{aligned} x_1 &= X_2 X_3 \\ x_2 &= X_1 X_3 \\ x_3 &= X_1 X_2 \end{aligned} \right. \qquad \text{zkąd :} \qquad \left. \begin{aligned} X_1 &= x_2 x_3 \\ X_2 &= x_1 x_3 \\ X_3 &= x_1 x_2 \end{aligned} \right\} B$$

otrzymujemy nie uwzględniając stałego spółczynnika $X_1 X_2 X_3$, który zupełnie opuścić możemy.

Dwa te wzory A i B są także rozwiązaniem następujących równań :

$$C \left\{ \begin{aligned} & x_1 X_2 + x_2 X_3 + x_3 X_1 = 0 \quad \text{i} \\ & x_1 X_3 + x_2 X_1 + x_3 X_2 = 0 \end{aligned} \right.$$

We wzorach tych oznaczają x_i spółrzędne punktu x na płaszczyznie e_x a X_i spółrzędne punktu X na E_x. Równania C są tylko szczególnym przypadkiem następujących równań ogólnych, które dla tego właśnie na większą zasługują uwagę :

$$\text{I} \quad \begin{cases} f(xX)=\Sigma a_{k\lambda}x_kX_\lambda=x_1F_1(X)+x_2F_2(X)+x_3F_3(X)=0 \quad \text{i} \\ f'(xX)=\Sigma b_{k\lambda}x_kX_\lambda=x_1F'_1(X)+x_2F'_2(X)+x_3F'_3(X)=0, \end{cases}$$

gdzie $F_i(x)$ i $F'_i(x)$ to samo mają znaczenie, co w poprzednim § $f_i(x)$ a $a_{k\lambda} \pm a_{\lambda k}$ i $b_{k\lambda} \pm b_{\lambda k}$; funkcye oznaczone u góry kreską różnią się tem od nieoznaczonych, że składają się z spółczynników $b_{k\lambda}$ a nie $a_{k\lambda}$, zresztą innej różnicy nie mają.

Równania wzoru I możemy rozwiązać co do x_i i otrzymamy :

$$\text{II} \quad \begin{cases} \rho x_1=F_2(X).F'_3(X)-F_3(X).F'_2(X)=\Phi_1 \\ \rho x_2=F_3(X).F'_1(X)-F_1(X).F'_3(X)=\Phi_2 \\ \rho x_3=F_1(X).F'_2(X)-F_2(X).F'_1(X)=\Phi_3. \end{cases}$$

Równania wzoru tego (II) są drugiego stopnia co do X_i; zrównane zeru oznaczają trzy krzywe drugiego stopnia. Krzywe te przechodzą przez trzy punkta, czyli krzywe te mają trzy punkta wspólne dla tego, że każde z tych równań jest wypadkową dwóch innych : rozwiązawszy bowiem np. pierwsze i drugie co do

$$F_3(X):F'_3(X),$$

otrzymamy z pierwszego:

$$\frac{F_3(X)}{F'_3(X)}=\frac{F_2(X)}{F'_2(X)},$$

a z drugiego :

$$\frac{F_3(X)}{F'_3(X)}=\frac{F_1(X)}{F'_1(X)},$$

zkąd wypada :

$$\frac{F_2(X)}{F'_2(X)}=\frac{F_1(X)}{F'_1(X)},$$

czyli :

$$\frac{F_2(X).F'_1(X)-F_1(X).F'_2(X)}{F'_2(X).F'_1(X)}=0,$$

albo :

$$F_1(X).F'_2(X)-F_2(X).F'_1(X)=0=\Phi_3. \quad \textit{c. b. d. d.}$$

Mamy więc na płaszczyznie E_x trzy punkta, które nazwiemy *głównymi;* punkta te, które oznaczymy przez α_1, α_2, α_3 wielkiej są wagi, jak w dalszym ciągu pracy zobaczymy.

Równania wzoru I napisać można także pod następującym kształtem :

$$f(xX)=X_1f_1(x)+X_2f_2(x)+X_3f_3(x) \quad \text{i}$$

$$f'(xX)=X_1f'(x)+X_2f'_2(x)+X_3f'_3(x),$$

dz e $f_i(x)$ i $f'(x)$ to samo mają znaczenie co w poprzednim § $f_i(x)$; $f_i(x)$ różnią się tylko tem od kreskowanych $f'_i(x)$, że pierwsze mają współczynniki $a_{k\lambda}$, drugie zaś $b_{k\lambda}$. Rozwiązawszy te równania co do X_i otrzymujemy:

$$\text{III}\quad\begin{cases}\sigma X_1 = f_2(x).f'_3(x) - f_3(x).f'_2(x) = \varphi_1,\\ \sigma X_2 = f_3(x).f'_1(x) - f_1(x).f'_3(x) = \varphi_2,\\ \sigma X_3 = f_1(x).f'_2(x) - f_2(x).f'_1(x) = \varphi_3.\end{cases}$$

Równania tego układu (III) zrównane zeru mają widocznie to samo znaczenie, co równania układu II, gdyż każde z nich jest wypadkową dwóch drugich. Krzywe więc, które te trzy funkcye φ_i reprezentują, mają także trzy punkta wspólne $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Trzy te punkta *główne* leżą na płaszczyznie e_x.

To, cośmy tu powiedzieli o równaniach układu II i III, odnosi się także do równań układu A i B, które są tylko szczególnym przypadkiem układu II i III.

§ 5.

Równania układu I są w prawdzie co do x_i i X_i formami kwadratowemi, dla x_i lub X_i z osobna formami stopnia pierwszego. Rozumiejąc więc pod x_i spółrzędne punktu x danego na e_x i wartości te w równania wzmiankowane podstawiając, otrzymamy z układu I równania dwóch prostych, których punkt przecięcia się X odpowiada dawnemu punktowi x. To samo tyczy się równań układu równań C. Widzimy więc, że *jednemu* punktowi na e_x *jeden* punkt na E_x odpowiada, zatem przekształcenie kwadratowe powinno być jednowartościowem. Jednakże rzecz się tak nie ma! Na każdej bowiem płaszczyznie mamy trzy punkta osobliwe, któreśmy nazwali *głównemi* albo *stałemi*, którym nie *jeden* punkt ale *niezliczona* liczba punktów prostej odpowiada. Dla punktu bowiem α_1 czyli $X_2 = X_3 = 0$ otrzymujemy z układu B:

$$x_1 x_3 = 0 \quad \text{i} \quad x_1 x_2 = 0 \quad \text{czyli} \quad x_1 = 0$$

t. z., punktowi α_1 na E_x odpowiada prosta x_1 czyli prosta $\beta_2\beta_3$ na e_x; tak samo odpowiada punktowi $\alpha_2(X_1 = X_3 = 0)$ odn. $\alpha_3(X_1 = X_2 = 0)$ prosta x_2 czyli $\beta_1\beta_3$ odn. x_3 czyli prosta $\beta_1\beta_2$. I odwrotnie: prostej $x_1 = 0$ odpowiada z układu A: $X_3X_2 = 0$ czyli $X_2 = 0$ i $X_3 = 0$ . . punkt α_1; tak samo odpowiada prostej $x_2 = 0$ punkt $X_1 = X_3 = 0$ czyli α_2 etc. I przeciwnie! Przekształcenie to więc nie jest *jednowartościowem!*

Punkt x niech przebiega prostę $l_x = l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3 = 0$; każdemu punktowi tej prostej odpowiadać będzie podług powyższego także punkt. Pytamy się oczywiście, czy te punkta X także na jakiej prostej znajdować się będą. By znaleźć miejsce geometryczne punktu X, dość wartości układu A lub II podstawić w równanie danego miejsca, tutaj w $l_x = 0$.

W pierwszym razie mamy:

$$l_1X_2X_3 + l_2X_1X_3 + l_3X_1X_2 = 0,$$

w drugim:

$$l_1\Phi_1 + l_2\Phi_2 + l_3\Phi_3 = 0.$$

Tak otrzymane równania są stopnia drugiego, reprezentują więc krzywe drugiego stopnia, czyli punkta X odpowiadające punktom x prostej $l_x = 0$ leżą na krzywej drugiego stopnia t. j. proste odpowiada krzywa drugiego stopnia. Czterem punktom jakiejkolwiek prostej L na e_x odpowiadają cztery punkta pewnej krzywej K_2, o *stosunku nieharmonicznym* tych 4ech punktów krzywej K_2 wcale mowy być nie może. Naturalnie co się powiedziało o płaszczyznie E_x, odnosi się także do płaszczyzny e_x.

Mając daną krzywę n^{go} stopnia, K_n:

$$l^n_x = (l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3)^n = 0,$$

otrzymamy krzywę jej odpowiadającą, podstawiając za x_i wartości układu A lub II.

Równanie tej krzywej będzie:

$$(l_1\Phi_1 + l_2\Phi_2 + l_3\Phi_3)^n = K_{2n} = 0, \text{ t z.}$$

krzywa ta będzie stopnia $2n^{go}$, bo już Φ_i jest stopnia 2^{go}.

Przypuśćmy teraz, że oddalenie obu płaszczyzn zmniejsza się i że w końcu redukuje się na zero, t.j., że obie płaszczyzny się pokrywają. Aby punkt x na e_x nakrył punkt mu odpowiadający X na E_x, potrzeba, aby $x_i = \rho X_i$.

Wartości te podstawiwszy w równania układu C lub I; równania te zamienią się w pierwszym razie na:

$$C' \begin{cases} x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0, \\ x_1x_3 + x_2x_1 + x_3x_2 = 0, \end{cases}$$

a w drugim na:

$$I' \begin{cases} f(xx) = \Sigma a_{k\lambda}x_kx_\lambda = 0, \\ f'(xx) = \Sigma b_{k\lambda}x_kx_\lambda = 0. \end{cases}$$

To znaczy: że w pierwszym razie, gdzie obie funkcye są sobie równe, mamy niezliczoną liczbę punktów, które pokrywają punkta im odpowiadające; punkta te leżą na krzywej stopnia 2^{go}: $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 0$; że w drugim razie i to w ogólniejszym, mamy dwie krzywe 2^{go} stopnia, dwie te krzywe przecinają się w 4ech punktach, a więc mamy cztery punkta x, które nakrywają odpowiadające im. W szczególnych zatem przypadkach liczba ta może się powiększyć.

Doszliśmy więc w badaniu naszem do następującego rezultatu: trzy są główne cechy, któremi się odznacza przekształcenie kwadratowe: przekształcenie to *nie jest jednowartościowem*, o *stosunku nieharmonicznym* czterech punktów prostej i ich odpowiadających mowy być nie może i przy nakrywaniu się płaszczyzn *liczba punktów* pokrywających się przewyższa 3. Własności te okazują zarazem, o ile się przekształcenie kwadratowe w cechach głównych różni od jednokładności i przekształcenia odwrotnego.

§ 6.

Widzieliśmy wyżej, że krzywej K_n odpowiadała krzywa K_{2n} a mianowicie, że krzywej stopnia 1^{go} t. j. linii prostej odpowiadała krzywa stopnia 2^{go}. Pytamy się teraz, czy zdarzyć się może, aby prostej odpowiadała także prosta. Niech będzie prosta dana $l_x = 0$, krzywa jej odpowiadająca daną będzie równaniem:

$$L = l_1\Phi_1 + l_2\Phi_2 + l_3\Phi_3 = 0,$$

albo:

$$L = \Phi_1 + k\Phi_2 + \lambda\Phi_3 = 0,$$

gdzie

$$k = \frac{l_2}{l_1}, \quad \lambda = \frac{l_3}{l_1}.$$

Równanie to pokazuje, że wszystkie krzywe 2go stopnia, które odpowiadają figurom znajdującym się na e_x, koniecznie przechodzić muszą przez owe trzy punkta wspólne krzywym Φ_i t. j. przez punkta $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, i przeciwnie, wszystkie krzywe odpowiadające figurom płaszczyzny E_x przechodzą przez punkta $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Równanie powyższe przedstawia nam pod każdym względem krzywę 2go stopnia; krzywa ta może jednak w 3ech przypadkach przekształcić się na dwie lub jednę podwójną prostę. Potrzeba bowiem tylko, aby wyznacznik równania L równał się zeru; wyznacznik ten będzie co do k i λ równaniem 3go stopnia, można więc trzy wartości stosunku k i λ wynaleźć a za każdym razem krzywa L zamieni się na dwie proste; oczywista, że dwie te proste także przez punkta $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ przechodzić muszą. Jeżeli dalej równanie krzywej L rozwiązane co do $\frac{X_1}{X_3} : \frac{X_2}{X_3}$ ma jeden tylko, t. j. podwójny pierwiastek, natenczas krzywa L przekształca się w *jednę*, ale *podwójną* prostę. Prostata odpowiada potem prostej $l_x = 0$.

Prosta $l_x = 0$ znajdowała się na płaszczyznie e_x; krzywa $L = 0$ odpowiadająca prostej $l_x = 0$ leży na płaszczyznie E_x. Idąc teraz drogą odwrotną szukamy do krzywej $L = 0$ figury jej odpowiadającej na e_x; podług ogólnego prawidła figura ta będzie krzywą 4go stopnia, równanie jej zaś będzie :

$$L' = l_1\Phi_1(\varphi) + l_2\Phi_2(\varphi) + l_3\Phi_3(\varphi) = 0.$$

Równanie to, które oznacza : podstawić w Φ_i zamiast X_i wartości układu III φ_i, jest rzeczywiście stopnia 4go. Tymczasem wiemy, że prosta $l_x = 0$ była tą figurą, której $L = 0$ odpowiadała; idąc więc drogą odwrotną, musielibyśmy znowu trafić na $l_x = 0$ a nie na krzywą $L' = 0$ stopnia 4go. Sprzeczność ta da się jednakże wytłomaczyć; prosta $l_x = 0$ i krzywa $L' = 0$ nie są wprawdzie tożsamościowe, ale krzywa $L' = 0$ zawiera w sobie prostę $l_x = 0$. Zrozumiemy to na przykładzie ogólnym. Niech będzie dana na płaszczyznie e_x krzywa K_n, natenczas odpowiada jej na płaszczyznie E_x krzywa K_{2n}. Krzywa K_n przecina oczywiście każdą z linij głównych czyli fundamentalnych $\beta_2\beta_3$, $\beta_3\beta_1$, $\beta_1\beta_2$ w n punktach, całej zaś linii $\beta_2\beta_3$, etc. odpowiada tylko, jak wiemy z § 5, jeden punkt α_1 etc. a więc K_{2n} przechodzić musi n razy przez każdy z punktów α_1, α_2, α_3. Jeżeli dalej owe n punktów krzywej K_n na linijach fundamentalnych $\beta_2\beta_3$, etc., leżą odosobnione, natenczas i gałęzie krzywej K_{2n} odosobnione być muszą. Krzywa K_n przechodzi przez jeden z punktów β_1, β_2, β_3, w takim razie krzywa K_{2n} będzie miała gałęź stałą przechodzącą przez *jakikolwiek* punkt prostej $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$, odpowiadający punktowi β_1, β_2, β_3, pozostanie więc jeszcze krzywa $(2n-1)$go stopnia a ta przechodzi już tylko po $(n-1)$ razy przez prostę $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$. (1).

Zastosujmy rozumowanie to do przypadku linii prostej. Prostej K_1 przecinającej linije fundamentalne : $\beta_2\beta_3$, $\beta_3\beta_1$, $\beta_1\beta_2$, odpowiada krzywa K_2, która przechodzi przez punkta α_1, α_2, α_3, jako odpowiadające owym linijom fundamentalnym. Krzywej K_2 odpowiada krzywa 4go stopnia K_4; krzywa ta dzieli się na dwie gałęzie, jedna z nich przecina linije $\beta_2\beta_3$, $\beta_3\beta_1$, $\beta_1\beta_2$ po razie i jest tą samą co K_1, druga gałęź przecina te same linije po 3 razy. W ten sposób usunęliśmy sprzeczność, jaka się nam przy niniejszem badaniu okazała.

§ 7.

Nie od rzeczy będzie na tem miejscu wspomnieć o wyznaczniku funkcyjnym owych trzech form kwadratowych, które przedstawiają trzy krzywe 2go stopnia mające trzy punkta wspólne. Wy-

(1) CLEBSCH, *Geometrya analityczna.*

znacznik bowiem funkcyjny układu III zostaje w szczególnym związku z rezultatem podstawienia wartości tego układu w jakiekolwiek x_i układu II.

Wykonanie tego podstawienia i obrachowania wyznacznika funkcyjnego układu III przedstawia tu, chcąc w zwykły i prosty postępować sposób, niezmierne trudności, w sztuczny zaś sposób, o którym wiemy że istnieje, dotąd nam się nie powiodło zadawalniającego rezultatu otrzymać. Ograniczymy się więc tylko na układach A i B i na przykładzie, który tyle nie przedstawia trudności.

Podstawiając w układzie A wartości układu B, otrzymamy :

$$x_i = x_i . x_1 x_2 x_3 = x_i . \mathrm{M}.$$

t. z. x_i równa się x_i pomnożonemu przez stały czynnik $x_1x_2x_3$ i odwrotnie $X_i = X_iX_1X_2X_3$. Wyznacznik zaś funkcyjny układu B, otrzymujemy różniczkując każde X_i podług x_1, x_2, x_3, i z tych 9 wartości układając wyznacznik; wyznacznik ten będzie :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_3 \\ x_2 & 0 & x_1 \\ x_3 & x_1 & 0 \end{vmatrix} = 2x_1x_2x_3.$$

Widzimy ztąd, że wyznacznik ten różni się od owego czynnika M stałym czynnikiem liczbowym (tutaj 2), dalej, że czynnik ten będący stopnia trzeciego składa się z trzech funkcyj stopnia pierwszego (tutaj $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$), które to funkcye są równaniami wyżej wspomnianych trzech lini głównych $\beta_2\beta_3$, $\beta_3\beta_1$, $\beta_1\beta_2$.

To samo powiedzieć możemy o układzie B i wyznaczniku funkcyjnym układu A. Na potwierdzenie powyższych zdań podajemy przykład niniejszy : niech będą dane dwie zresztą ogólne funkcye stopnia drugiego o trzech wyrazach :

$$a_1x_2X_3 + a_2x_3X_1 + a_3x_1X_2 = 0,$$

$$b_1x_3X_2 + b_2x_1X_3 + b_3x_2X_1 = 0.$$

Równania te rozwiązując podług x_i i X_i otrzymamy :

$$\mathrm{A}\begin{cases} x_1 = a_1b_1X_3X_2 - a_2b_3X_1^2, \\ x_2 = a_2b_2X_1X_3 - a_3b_1X_2^2, \\ x_3 = a_3b_3X_1X_2 - a_1b_2X_3^2 \end{cases} \text{ i}$$

$$\mathrm{B}\begin{cases} X_1 = a_3b_2x_1^2 - a_1b_1x_2x_3, \\ X_2 = b_3a_1x_2^2 - a_2b_2x_1x_3, \\ X_3 = b_1a_2x_3^2 - a_3b_3x_1x_2. \end{cases}$$

Podstawiając wartości układu B np. w x_1 układu A, otrzymamy :

$$x_1 = x_1 \left\{ \begin{array}{l} 3a_1b_1a_2b_2a_3b_3x_1x_2x_3 \\ - \; a_3^2b_2^2a_2b_3x_1^3 \\ - \; a_1^2b_3^2a_3b_1x_2^3 \\ - \; a_2^2b_1^2a_1b_2x_3^3 \end{array} \right\} = x_1\mathrm{M}'.$$

Wyznacznik zaś funkcyjny układu B równa się :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2a_3b_2x_1, & -a_1b_1x_3, & -a_1b_1x_2 \\ -a_2b_2x_3, & 2a_1b_3x_2, & -a_2b_2x_1 \\ -a_3b_3x_2, & -a_3b_3x_1, & 2a_2b_1x_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left\{\begin{aligned} & 3a_1b_1a_2b_2a_3b_3x_1x_2x_3 \\ & - a_3^2b_2^2a_2b_3x_1^3 \\ & - a_1^2b_3^2a_3b_1x_2^3 \\ & - a_2^2b_1^2a_1b_2x_3^3 \end{aligned}\right\}$$

czyli $= 2M'$.

Nakoniec *ogólnie* udowodnimy, że wyznacznik ten składa się z trzech funkcyj linijnych.

Równania nasze ogólne układu I w § 4, symbolicznie i tak pisać możemy : (1)

$$f(xX) = a_x\alpha_X = b_x\beta_X = c_x\gamma_X ,$$

$$f'(xX) = a'_x\alpha'_X = b'_x\beta'_X = c'_x\gamma'_X .$$

Rozwiązawszy je mamy :

$$x_i = (aa')_i\alpha_X\,\alpha'_X = (bb')_i\beta_X\,\beta'_X - (cc')_i\gamma_X\,\gamma'_X ,$$

a

$$X_i = (\alpha\alpha')_i a_x a'_x = (\beta\beta')_i b_x b'_x = (\gamma\gamma')_i c_x c'_x .$$

Wyznacznik zaś funkcyjny układu X_i równa się albo :

$$\Delta = (a_1a'_x + a'_1a_x)(b_2b'_x + b'_2b_x)(c_3c'_x + c'_3c_x) . \begin{vmatrix} (\alpha\alpha')_1 & (\beta\beta')_1 & (\gamma\gamma')_1 \\ (\alpha\alpha')_2 & (\beta\beta')_2 & (\gamma\gamma')_2 \\ (\alpha\alpha')_3 & (\beta\beta')_3 & (\gamma\gamma')_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1a'_x + a'_1a_x)(b_2b'_x + b'_2b_x)(c_3c'_x + c'_3c_x)[(\alpha\alpha')(\beta\beta')(\gamma\gamma')],$$

albo też :

$$\Delta = (\alpha\alpha')_1(\beta\beta')_2(\gamma\gamma')_3 \begin{vmatrix} a_1a'_x + a'_1a_x, & a_2a'_x + a'_2a_x, & a_3a'_x + a'_3a_x \\ b_1b'_x + b'_1b_x, & b_2b'_x + b'_2b_x, & b_3b'_x + b'_3b_x \\ c_1c'_x + c'_1c_x, & c_2c'_x + c'_2c_x, & c_3c'_x + c'_3c_x \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha\alpha')_1(\beta\beta')_2(\gamma\gamma')_3 . \Phi .$$

(1) Symbol $a_x\alpha_X = \ldots$ oznacza : wymnóż $a_x\alpha_X = \ldots$ i postaw $a_k\alpha_\lambda = b_k\beta_\lambda = \ldots a_{k\lambda}$, $a'_k\alpha'_\lambda = b'_k\beta'_\lambda = \ldots b_{k\lambda}$. Symbol :

$$(aa')_i = a_{i+1}a'_{i+2} - a_{i+2}a'_{i+1}, \quad \text{gdzie } a_4 = a_1, \; a_5 = a_2.$$

Z tego wynika :

$$(a_1a'_x+a'_1a_x)(b_2b'_x+b'_2b_x)(c_3c'_x+c'_3c_x)\{(\alpha\alpha')(\beta\beta')(\gamma\gamma')\}$$

$$=(\alpha\alpha')_1(\beta\beta')_2(\gamma\gamma')_3.\Phi$$

czyli

$$\{(\alpha\alpha')(\beta\beta')(\gamma\gamma')\}=\rho(\alpha\alpha')_1(\beta\beta')_2(\gamma\gamma')_3$$

a więc :

$$\Delta=\rho.(\alpha\alpha')_1(a_1a'_x+a'_1a_x).(\beta\beta')_2(b_2b'_x+b'_2b_x).(\gamma\gamma')_3(c_3c'_x+c'_3c_x).$$

Każdy z tych czynników jest symbolicznym, można go więc bez naruszenia owego podziału zupełnie przez $a_{k\lambda}$ i $b_{k\lambda}$ wyrazić, gdyż właśnie pod $a_{k\lambda}$ rozumiemy $a_k\alpha_\lambda=b_k\beta_\lambda=c_k\gamma_\lambda$; tak samo i $b_{k\lambda}=a'_k\alpha'_\lambda=b'_k\beta'_\lambda=c'_k\gamma'_\lambda$; współczynnik zaś ρ oznacza liczbę.

W ten sposób dowiedliśmy, że wyznacznik ten składa się z trzech funkcyj linijnych; każda z nich oznacza jednę z trzech prostych głównych. Wyznacznik bowiem funkcyjny przedstawia krzywę stopnia 3go, którą krzywą Jacobiego nazywamy; skoro zaś te 3 krzywe stopnia 2go, których wyznacznik funkcyjny jest krzywą Jacobiego, mają *trzy punkta wspólne*, krzywa Jacobiego przekształca się w trzy proste łączące te punkta; przypadek ten ma właśnie miejsce w niniejszem przekształceniu, wyznacznik więc ten zawsze się na trzy czynniki linijne rozłożyć musi.

§ 8.

Jeżeli w ogólnych wzorach układu I szczególne wartości za $a_{k\lambda}$ i $b_{k\lambda}$ podstawim, to główne cechy charakterystyczne dla naszego przekształcenia o tyle się tylko zmienić mogą, o ile charakteru przekształcenia tego nie zatrą. Głównie trzy mamy przypadki szczególne, które nas następnie zająć mają : obie formy układu I mają być 1° *symetrycznemi*, 2° *znakozmiennemi* a 3° jedna ma być *symetryczna*, druga *znakozmienna*. Zadaniem naszem będzie poznać, o ile się zmienią własności charakterystyczne w podanych przypadkach a zwłaszcza przy nakrywaniu się obydwóch płaszczyzn.

1° Jeżeli obie formy :

$$f(xX)=\Sigma a_{k\lambda}x_kX_\lambda=0,$$

$$f'(xX)=\Sigma b_{k\lambda}x_kX_\lambda=0,$$

mają być *symetrycznemi*, natenczas musi $a_{k\lambda}=a_{\lambda k}$ i $b_{k\lambda}=b_{\lambda k}$. Obie formy oznaczają wtedy równania biegunowych odniesionych do dwóch krzywych :

$$f(xx)=\Sigma a_{k\lambda}x_kx_\lambda=0 \text{ i } f'(xx)=\Sigma b_{k\lambda}x_kx_\lambda=0.$$

Biegun ich wspólny jest punktem x, a punkt ich przecięcia się jest szukanym X odpowiadającym punktowi x.

Przy nakrywaniu się płaszczyzn punkta x i X tworzą punkta sprzężone. Punkt X bowiem jest punktem przecięcia się obydwóch biegunowych punktu x, leży więc na nich razem a zatem jego biegunowe przechodzić muszą przez punkt x, czyli x leży na obydwóch biegunowych punktu X t. z. x i X są sprzężone. Dalej drugą własnością tego przypadku jest nakrywanie się obydwóch trójkątów spółrzędnych. Równania jego trzech boków zawarte były w wyznaczniku funkcyjnym, o którym wyżej wspomnieliśmy. Ponieważ obie formy są symetryczne, pisać je możemy symbolicznie w ten sposób

$$\Sigma a_{k\lambda}x_kX_\lambda=a_xa_X=b_xb_X=c_xc_X=0,$$

$$\Sigma b_{k\lambda}x_kX_\lambda=a'_xa'_X=b'_xb'_X=c'_xc'_X=0,$$

a ztąd :

$$x_i = (aa')_i a_x a'_x = (bb')_i b_x b'_x = (cc')_i c_x c'_x ,$$

$$X_i = (aa')_i a_x a'_x = (bb')_i b_x b'_x = (cc')_i c_x c'_x .$$

Spółczynniki obydwóch układów są zupełnie sobie równe a więc i spółczynniki wyznaczników funkcyjnych obydwóch układów będą równe, czyli równania boków obydwóch trójkątów będą równe to znaczy że jedne i te same proste będą przedstawiały, zczego wynika, że oba trójkąty muszą się nakrywać t. j. α_1, α_2, α_3, nakryje β_1, β_2, β_3. Dalej ponieważ punktowi β_1 odpowiada prosta $\alpha_2\alpha_3$, która jest tożsamościową z $\beta_2\beta_3$, ta prosta dalej jest biegunową punktu β_1, trójkąt więc ten spółrzędny podwójny tworzy 3 pary punktów sprzężonych, bo każdy bok jest biegunową wierzchołka przeciwległego, a wierzchołek biegunem boku przeciwległego.

Równania tych trzech boków odpowiednio biegunowych niech będą $A_x = 0$, $B_x = 0$ i $C_x = 0$.

Wprowadźmy teraz nowe spółrzędne $\xi_1\xi_2\xi_3$, w ten sposób, że :

$$\xi_1 = A_x,$$

$$\xi_2 = B_x,$$

$$\xi_3 = C_x,$$

kąd mamy :

$$x_1 = P_\xi,$$

$$x_2 = Q_\xi,$$

$$x_3 = R_\xi.$$

Podstawiając wartości te w układ $X_i = (aa')_i a_x a'$, otrzymamy równania trzech krzywych, odniesionych do trójkąta biegunowego; równania takie zawierają tylko kwadraty spółrzędnych, czyli będzie :

$$X_1 = p_1\xi_1^2 + p_2\xi_2^2 + p_3\xi_3^2,$$

$$X_2 = q_1\xi_1^2 + q_2\xi_2^2 + q_3\xi_3^2,$$

$$X_3 = r_1\xi_1^2 + r_2\xi_2^2 + r_3\xi_3^2.$$

Wyznacznik zaś funkcyjny tego układu będzie :

$$= \Delta \begin{vmatrix} 2p_1\xi_1, & 2p_2\xi_2, & 2p_3\xi_3 \\ 2q_1\xi_1, & 2q_2\xi_2, & 2q_3\xi_3 \\ 2r_1\xi_1, & 2r_2\xi_2, & 2r_3\xi_3 \end{vmatrix} = 8(pqr)\xi_1\xi_2\xi_3,$$

czyli równy iloczynowi boków trójkąta pomnożonemu przez czynnik $8(pqr)$, jak to można było przewidzieć.

Kreślenie figur geometrycznych tutaj zachodzących nie przedstawia wiele trudności; polega bowiem onotylko na wyprowadzeniu biegunowych lub oznaczeniu biegunów.

§ 9.

2° Obie formy:

$$\Sigma a_{k\lambda} x_k X_\lambda = 0 \text{ i } \Sigma b_{k\lambda} x_k X_\lambda = 0,$$

niech będą znakozmienne, natenczas musi być $a_{k\lambda} = - a_{\lambda k}$, czyli $a_{k\lambda} + a_{\lambda k} = 0$, a więc $a_{ii} = 0$.

To samo odnosi się do $b_{k\lambda}$. Formy te będą miały tylko po 6 wyrazów:

$$\text{I} \quad x_1(a_{12}X_2 + a_{13}X_3) + x_2(a_{21}X_1 + a_{23}X_3) + x_3(a_{31}X_1 + a_{32}X_2) = 0,$$

$$\text{II} \quad x_1(b_{12}X_2 + b_{13}X_3) + x_2(b_{21}X_1 + b_{23}X_3) + x_3(b_{31}X_1 + b_{32}X_2) = 0,$$

z czego np.

$$\rho x_1 = X_1^2(a_{21}b_{31} - b_{21}a_{31}) + X_1X_2(a_{21}b_{32} - a_{32}b_{21}) + X_1X_3(a_{23}b_{31} - a_{31}b_{23}).$$

Podobnie x_2, x_3 i t. d.

Gdy obie płaszczyzny nakrywają się, t. j. dla $x_i = X_i$, otrzymujemy:

$$\Sigma a_{k\lambda} x_k x_\lambda = \Sigma b_{k\lambda} x_k x_\lambda \equiv 0,$$

obie formy równają się tożsamościowo zeru.

Wypadek ten dwojako tłomaczyć możemy, albo nie ma żadnego elementu, któryby nakrył element mu odpowiadający, albo też wszystkie punkta x leżą na punktach X. Oczywiście że tylko ostatnie tłomaczenie przyjętem być może; boć główne cechy powinny być zachowane, mówiliśmy zaś, że przynajmniej 4 punkta mają tę własność, że się nakrywają z punktami im odpowiadającemi. Z tej własności, że wszystkie punkta x nakrywają się z punktami czyli elementami im odpowiadającemi, wynika dalej, że punkt β_1, któremu odpowiada prosta $\alpha_2\alpha_3$, na tej prostej β_1 leżeć powinien, tak samo β_2 na $\alpha_1\alpha_3$, a β_3 na $\alpha_1\alpha_2$. Jeden trójkąt byłby wpisany w drugi. Jednakże tak nie jest! Formy bowiem, na których ten przypadek się zasadza, tak pisać możemy:

$$\text{I} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{31} & a_{12} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{II} = \begin{vmatrix} b_{23} & b_{31} & b_{12} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Pierwszy wyznacznik oznacza, że trzy punkta $(x_1x_2x_3)$, $(X_1X_1X_3)$, $(a_{23}a_{31}a_{12})$ leżą na jednej linii, to samo wyraża drugi wyznacznik o punktach $(x_1x_2x_3)$, $(X_1X_2X_3)$, $(b_{33}b_{31}b_{12})$. Ponieważ zaś $a_{k\lambda}$ i $b_{k\lambda}$ są stałe, dwa te punkta, które dla skrócenia nazwiemy a i b są także stałe. Rzecz więc tak się ma! Mamy dwa punkta stałe, a i b; punkt X otrzymamy, skoro wyszukamy proste odpowiadające punktowi x, punkt ich przecięcia się X jest szukanym. Proste te przechodzą jednakże podług powyższego przez punkt x i punkta a i b, przecinają się więc w punkcie x, a więc x musi sam sobie odpowiadać. Zgadza to się z rezultatem powyżej wypowiedzianym. Otrzymujemy więc figurę następującą : jedna prosta odpowiadająca punktowi x przechodzi przez a, druga przez b, punkt przecięcia się jest punkt x sam, a więc x odpowiada sobie sam. Punktowi a odpowiada zaś *prosta ab*, a punktowi b *prosta* także ab, a więc a i b są dwoma punktami z owych trzech stałych i głównych. A gdzie trzeci? Trzeciego nie ma! Dwa punkta bowiem złączyły się w jeden a owe trzy krzywe, które miały mieć trzy punkta wspólne, mają tylko dwa punkta wspólne : w jednym wszystkie trzy się stykają a przez drugi przechodzą wspólnie. Wniosek ten potwierdza także budowa ich równań, które tylko jedną spółrzędnę mają w kwadracie i dwa jeszcze wyrazy. Trójkąt więc spółrzędny, którego równanie zawiera wspomniany wyznacznik funkcyjny, składa się tylko z jednej prostej ab; stosownie do tego równanie wyznacznika funkcyjnego powinno być funkcyją linijną wyniesioną do 3^{ej} potęgi ,o czem ławto się możemy przekonać. Nazwawszy

Fig. 1.

$$(a_{21}b_{31} - a_{31}b_{21}) = a,$$

$$(a_{21}b_{32} - a_{32}b_{21}) = b,$$

$$(a_{23}b_{31} - a_{31}b_{23}) = c,$$

otrzymamy I i II rozwiązując :

$$\rho x_1 = aX_1^2 + bX_1X_2 + cX_3X_1,$$

$$\rho x_2 = bX_2^2 + aX_1X_2 + cX_2X_3.$$

$$\rho x_3 = cX_3^2 + aX_3X_1 + cX_3X_2,$$

jako równania trzech krzywych, które stykają się w jednym punkcie a przez drugi wspólnie przechodzą. Wyznacznik funkcyjny tego układu równa się :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2X_1a + bX_2 + cX_3, & bX_1, & cX_1 \\ aX_2, & aX_1 + 2bX_2 + cX_3, & cX_2 \\ aX_3, & bX_3, & aX_1 + bX_2 + 2cX_3 \end{vmatrix}$$

$= 2\{aX_1 + bX_2 + cX_3\}^3$ to znaczy prosta potrójnie liczona, *c. b. d.*

§ 10.

3° Jeżeli jedna z danych form jest symetryczną :

$$\text{I} \quad \Sigma a_{k\lambda} x_k X_\lambda = 0, \text{ gdzie } a_{k\lambda} = a_{\lambda k},$$

a druga znakozmienną :

$$\text{II} \quad \begin{vmatrix} b_{23} & b_{31} & b_{12} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ gdzie } b_{k\lambda} + b_{\lambda k} = 0,$$

i obie płaszczyzny nakrywają się, natenczas punktowi x odpowiada punkt X, który będzie punktem przecięcia się biegunowej punktu x odniesionej do krzywej $\Sigma a_{k\lambda} x_k x_\lambda = 0$ i prostej łączącej punkt x z punktem b $(b_{23} b_{31} b_{12})$, jak to z obydwóch równań I i II widzimy. Liczba punktów zaś, które w tym przypadku samym sobie odpowiadają, jest niezliczenie wielką, wszystkie te punkta znajdują się na krzywej $\Sigma a_{k\lambda}x_k x_\lambda = 0$. Bo dla $x = X$, pierwsze równanie zamieni się na $\Sigma a_{k\lambda}x_k x_\lambda = 0$, a drugie daje tożsamościowo zero : $0 \equiv 0$. To znaczy : mamy całą krzywę $\Sigma a_{k\lambda}x_k x_\lambda = 0$ punktów, które sobie samym odpowiadają. Zupełnie to jest naturalnem : biegunowa bowiem takiego punktu x przechodzi przez ten sam punkt x czyli jest styczną w tym punkcie do krzywej $\Sigma a_{k\lambda}x_k x_\lambda = 0$, punkt więc przecięcia się jej z prostą bx jest sam punkt x to znaczy że x odpowiada sobie sam.

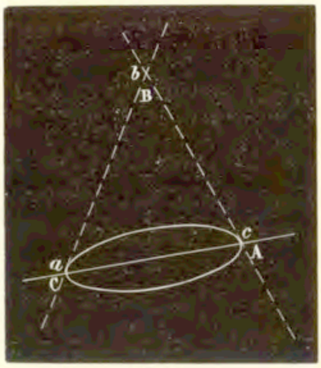

Fig. 2.

Jaki zachodzi dalej stosunek między obu trójkątami fundamentalnemi?

Jeżeli ac oznacza daną krzywę $\Sigma a_{k\lambda}x_k x_\lambda = 0$, b zaś stały punkt $b(b_{23}b_{31}b_{12})$, natenczas stały punkt b i punkta a i c przecięcia się jego biegunowej z krzywą tworzą trójkąt fundamentalny na jednej płaszczyznie. Biegunowa więc i styczne punktu b tworzą jego boki. Że punkta a, b, c tworzą trójkąt spółrzędny wynika z tego, że im nie punkta, ale proste odpowiadają, jak przy trójkącie fondamentalnym być powinno. Zważając bowiem, że X jest punktem przecięcia się biegunowej punktu x i prostej łączącej punkt x z punktem b, otrzymamy podług tego samego wykreślenia dla a, b, c nie trzy punkta, ale trzy proste. I tak : punktowi b odpowiada bok ac, punktowi a bok ab, punktowi c bok bc. Z tego wynika dalej, że te same boki i te same punkta tworzą trójkąt fundamentalny na drugiej płaszczyznie, który nazwiemy ABC, ale zachodzi przytem pewna różnica.

Wiemy, że punktowi α_1 opowiada bok $\beta_2\beta_3$ i t. d. czyli bok mu przeciwległy. Zastosujmy to do tego przypadku. Natenczas będzie $b = B$, $a = C$, $c = A$ a punktowi b odpowiada bok AC, punktowi a bok BC, punktowi c bok AB. Oba więc trójkąty tak na sobie leżą, jak powyższa wskazuje figura.

Wykreślenia podane tutaj nie przedstawiają żadnych trudności, gdyż polegają tylko nakreśleniu biegunowych i linij prostych.

§ 11.

Teorya przekształcenia kwadratowego zasadzała się, jak widzielismy, na trzech funkcyach kwadratowych przedstawiających trzy krzywe, które miały trzy punkta wspólne. Równania ich były :

$$\rho x_1 = F_2(X)F'_3(X) - F_3(X)F'_2(X) = \Phi_1,$$
$$\rho x_2 = F_3(X)F'_1(X) - F_1(X)F'_3(X) = \Phi_2,$$
$$\rho x_3 = F_1(X)F'_2(X) - F_2(X).F'_1(X) = \Phi_3.$$

Trzy takie funkcye mają tę własność, że

$$\Sigma M_i\Phi_i = M_1\Phi_1 + M_2\Phi_2 + M_3\Phi_3 \equiv 0, \text{ i}$$
$$\Sigma N_i\Phi_i = N_1\Phi_1 + N_2\Phi_2 + N_3\Phi_3 \equiv 0,$$

gdzie M_i i N_i oznaczają dwa razy po trzy funkcye linijne, które możemy łatwo znaleźć. Mamy bowiem ([1]) :

$$\Sigma M_i\Phi_i \equiv \begin{vmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ F'_1 & F'_2 & F'_3 \end{vmatrix} \equiv 0;$$

([1]) Zamiast $F_i(x)$ stale pisać będziemy F_i, a zamiast $f_i(x)$ stale f_i.

wyznacznik ten będzie natenczas tożsamościowo zerem, skoro dwa rzędy zupełnie sobie będą równe, czyli dla $M_i = F_i$ lub dla $M_i = F'_i$. Tak samo i

$$\Sigma N_i \Phi_i = \begin{vmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ F'_1 & F'_2 & F'_3 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

tożsamościowo będzie zerem dla $N_i = F_i$ i $N_i = F'_i$.

Temi dwa razy po trzy funkcyami linijnemi, które powyższą mają własność, są właśnie owe F_i i F'_i. I przeciwnie, skoro trzy funkcye kwadratowe mają tę własność, że :

$$\Sigma M_i \Phi_i \equiv 0 \text{ i } \Sigma N_i \Phi_i \equiv 0,$$

natenczas trzy krzywe przedstawione przez owe trzy funkcye mają trzy punkta wspólne. W przedstawieniu niniejszem wyszliśmy z dwóch form podwójnych :

$$\Sigma a_{k\lambda} x_k X_\lambda = 0 \text{ i } \Sigma b_{k\lambda} x_k X_\lambda = 0,$$

z których otrzymaliśmy Φ_i i φ_i w § 4.

Teraz przeciwnie wyjdziemy z trzech form kwadratowych Φ_i, mających tę własność, że krzywe przez nie przedstawione mają trzy punkta wspólne a dojdziemy do owych form podwójnych

$$\Sigma a_{k\lambda} x_k X_\lambda \quad \text{i} \quad \Sigma b_{k\lambda} x_k X_\lambda.$$

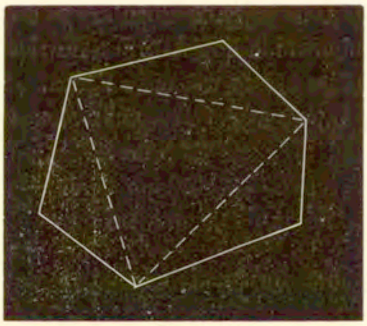

Fig. 3.

Mamy więc dane trzy krzywe stopnia 2^{go} Φ_1, Φ_2, Φ_3, mające trzy punkta wspólne; trzy krzywe stopnia drugiego przecinają się zazwyczaj w 12 punktach, ponieważ zaś dwa punkta mają wspólne, przecinają się więc tylko w sześciu punktach. Te sześć punktów tworzą sześciobok, w który wpisany jest trójkąt powstały przez połączenie owych trzech punktów wspólnych, w ten sposób, że do każdego boku jego przytykają dwa boki sześcioboku. Niech będą równania boków sześcioboku

$$M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3,$$

a równania boków trójkąta : S_1, S_2, S_3; natenczas możemy równanie każdej z krzywych Φ_i wyrazić dwa razy przez dwa z boków S_1, S_2, S_3 i dwa razy po dwa z boków M_i i N_i; i tak :

$$\Phi_1 = M_2 S_1 + N_2 S_2 = 0 \quad \text{i}$$

$$\Phi_1 = M_3 S_1 + N_3 S_2 = 0,$$

Rugując z tych równań S_1 i S_2 otrzymamy :

$$\Phi_1 = M_2 N_3 - N_2 M_3,$$

tak samo :

$$\Phi_2 = M_3 N_1 - N_3 M_1,$$

$$\Phi_3 = M_1 N_2 - N_1 M_2,$$

Summa $$\Sigma M_i \Phi_i \equiv 0 \quad \text{i} \quad \Sigma N_i \Phi_i \equiv 0,$$

ponieważ Φ_i mają trzy punkta wspólne. Równając teraz : $\Phi_i = x_i$, ponieważ M_i i N_i mają mieć X_i jako spółrzędne bieżące, otrzymamy :

$$x_1 = M_2N_3 - N_2M_3,$$

$$x_2 = M_3N_1 - N_3M_1,$$

$$x_3 = M_1N_2 - N_1M_2,$$

czyli :

$$x_1M_1 + x_2M_2 + x_3M_3 \equiv 0 \quad \text{i}$$

$$x_1N_1 + x_2N_2 + x_3N_3 \equiv 0.$$

Dwa te ostatnie równania są formami kwadratowemi podwójnemi; skład ich jest zupełnie podobny do owych form kwadratowych, z których wyszliśmy, t. j. do

$$\Sigma a_{k\lambda} x_k X_\lambda = 0 \quad \text{i}$$

$$\Sigma b_{k\lambda} x_k X_\lambda = 0.$$