O warunku prostopadłości dwuch prostych.

Początki gieometrji analitycznej w postaci t. zw. przedstawień graficznych zdobywają sobie powoli prawo obywatelstwa w szkole. Im wcześniej uda się je wprowadzić, tym lepiej. Wczesnemu jednak wprowadzeniu staje nieraz na przeszkodzie brak wiadomości z trygonometrji, nie jest bowiem wskazane poprzestawanie na wykreślaniu krzywych z danego równania sposobem zwykłym, t. j. przez układanie tabliczki wartości spółrzędnych pewnej grupy punktów. Należałoby pogłębić trochę wiadomości ucznia, co ułatwiłoby samo kreślenie, a uczeń poznałby pewne zależności i prawa, które w myśli jego utrwaliłyby związek między dwiema dziedzinami nauki i wpłynęłyby niezawodnie na urozmaicenie zadań. Rzecz jasna, że wypadłoby zachować pewną ostrożność i nie przesadzać w podawaniu twierdzeń. Jedną z zależności, które warto w klasie omówić, jest prostopadłość prostych. Podam tu sposób całkiem elementarny, który, moim zdaniem, posiada pewną wartość.

Niech będą dane dwie proste $y=m_1x$; $y=m_2x$. Mamy dowieść, że gdy dwie te proste są prostopadłe, to musi być $m_1m_2=-1$, i odwrotnie.

Jeżeli proste są prostopadłe, to jedna leży w kącie I i III, druga w II i IV. Na jednej z prostych obierzmy dowolny punkt C (x_1, y_1) i poprowadźmy CM prostopadle do osi X-ów. Niech prostopadła przecina drugą prostą w punkcie D (x_1, y_2). Z $\triangle COD$ mamy: $OM^2=CM.MD$, z danych zaś równań wynika, że

$$|y_1| \cdot |y_2| = |m_1m_2| x_1^2.$$

Lecz $|y_1|=CM$; $|y_2|=DM$; $|x_1|=OM$, a więc $CM.MD=x_1^2|m_1m_2|$, czyli $|m_1m_2|=1$. Zważywszy, że spółczynniki kątowe muszą być różnych znaków, mamy ostatecznie $m_1m_2=-1$.

Dowód twierdzenia odwrotnego da się przeprowadzić z równą łatwością. Jeżeli $m_1m_2=-1$, to $|m_1m_2|=1$, jak również $|y_1y_2|=x_1^2$, czyli $CM.MD=OM^2$. Stąd, na zasadzie odwrócenia znanego twierdzenia, dochodzimy do wniosku, że dane proste są do siebie prostopadłe. *L. Z.*