O zasadzie logarytmów naturalnych.

W niniejszym szkicu usiłowałem zapełnić pewną lukę, która odczuwać się daje przy wykładzie teorji logarytmów; mianowicie chodziło mi o to, aby, wychodząc z konkretnego zagadnienia kinematycznego, doprowadzić ucznia do pojęcia o zasadzie logarytmów naturalnych tudzież wykazać, w jaki sposób możnaby obliczyć z żądaną dokładnością wartość tej zasady. Droga, jaką w tym celu obrałem, wydaje mi się prostsza i odpowiedniejsza od tej, którą zazwyczaj spotykamy w podręcznikach; ta okoliczność ośmieliła mnie do wystąpienia w omawianej sprawie.

Punkt M porusza się po torze PQ (fig. 1) w ten sposób, że jego prędkość w każdym położeniu jest licz-

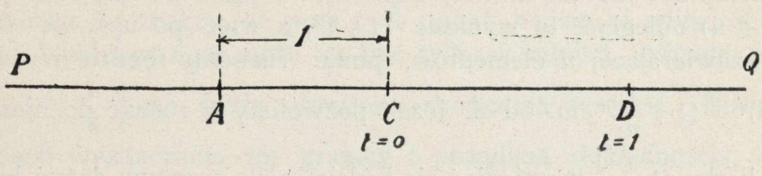

Fig. 1

bowo równa odległości od pewnego początkowego punktu toru A. Znaleźć położenie punktu w czasie dowolnym t. Obieramy za początkowy moment, od którego będziemy liczyli czas, ten, w którym punkt ruchomy znajdował się w C w odległości $= 1$ od A, za dodatni kierunek ruchu będziemy uważaii kierunek od P ku Q, wreszcie odległość i czas mierzyć będziemy w układzie „cm. sek.“.

Przedewszystkim zastanówmy się nad tym, gdzie znajdować się będzie punkt po upływie 1 sek. od początkowego momentu. W tym celu dzielimy tę właśnie sekundę na bardzo wielką liczbę n równych części θ ($\theta = \frac{1}{n}$ sek.) — nazwijmy je elementami czasu — i uważamy ruch punktu w ciągu każdego takiego elementu za jednostajny, odbywający się z prędkością, jaką posiada punkt w początkowym momencie tego elementu. Taki ruch, składający się z n ruchów jednostajnych ze skokami prędkości na granicy dwuch sąsiednich elementów, różnić się będzie od rzeczywistego; ale w miarę zwiększania n różnica między niemi będzie coraz mniejsza: skoro n rosnąć będzie nieskończenie i jednocześnie θ dążyć będzie nieograniczenie do zera, wówczas w granicy obydwa ruchy będą identyczne.

W ciągu 1-go elementu punkt, poruszając się z prędkością $1 \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$ (prędkość w $C = 1 \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$, gdyż $AC = 1$ cm.) przebiegnie drogę $= \theta$ cm., a więc w końcu tegoż elementu odległość punktu od A będzie $= 1 + \theta$ i prędkość również $= 1 + \theta$.

W ciągu 2-go elementu punkt przebiegnie drogę $= (1+\theta)\theta$, a więc w końcu 2-go elementu okaże się od A w odległości $= 1 + \theta + (1+\theta)\theta = (1+\theta)^2$.

W ciągu 3-go elementu przebiegnie drogę $= (1+\theta)^2\theta$, a więc po upływie 3-ch elementów odległość od A będzie $= (1+\theta)^2 + (1+\theta)^2\theta = (1+\theta)^3$.

Rozumując w dalszym ciągu, jak wyżej, dowiedziemy, że w końcu 4-go elementu odległość od A będzie $= (1+\theta)^4$ i t. d., co ogólnie bardzo łatwo uzasadnić metodą indukcji zupełnej, — w ogóle po upływie k elementów ($k \leqslant n$) odległość ta wyniesie $(1+\theta)^k$, a więc po upływie całej sekundy, zawierającej n elementów, punkt ruchomy będzie w odległości $= (1+\theta)^n = (1 + \frac{1}{n})^n$ cm. od A. Jeżeli pozwolimy n rosnąć do nieskończoności, liczba $(1 + \frac{1}{n})^n$ zmieniać się będzie; o ile przytym dążyć będzie do pewnej skończonej granicy, — nazwijmy ją, jak to przyjęto ogólnie, literą e, — w takim razie będziemy mogli powiedzieć, że punkt nasz M, poruszający się z prędkością, liczbowo równą odległości od pewnego punktu toru A, po upływie 1 sekundy od początkowej chwili, — obranej tak, że przy $t=0$ odległość $=1$, znajdować się będzie od A w odległości $= e = \lim\limits_{n=\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.

Wykażmy, że granica $(1 + \frac{1}{n})^n$ przy $n = \infty$ istnieje.

Ponieważ punkt ruchomy M w każdym momencie gdzieś na swym torze znajdować się musi, przytym w jednym tylko zupełnie określonym punkcie, – co wynika z natury takiego zjawiska, jak ruch, — więc o ile okaże się, że przy $t=1$ sek. odległość jego od A nie jest nieskończenie wielka, dowiedziemy tym samym słuszności naszego twierdzenia.

Aby wykazać, że $(1+\frac{1}{n})^n$ przy $n=\infty$ nie może rosnąć do nieskończoności, zobaczmy, gdzie punkt znajdował się przy $t=-1$ sek.; niech odległość jego od A będzie wówczas $=x$; dzieląc sekundę od momentu $t=-1$ do $t=0$ na n równych części i rozumując, jak wyżej, przekonamy się, że po upływie 1 sekundy od $t=-1$, odległość punktu od A byłaby $x.(1+\frac{1}{n})^n$; w granicy przy $n=\infty$ odległość równać się będzie $x.\lim\limits_{n=\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ (x od n nie zależy), co $=1$ (gdyż przy $t=0$ odległość punktu $AC=1$), stąd $x=\frac{1}{\lim\limits_{n=\infty}(1+\frac{1}{n})^n}$. Otóż gdybyśmy przypuścili, że $\lim\limits_{n=\infty}(1+\frac{1}{n})$ jest nieskończenie wielka, w takim razie otrzymalibyśmy $x=0$, to znaczy, że punkt nasz przy $t=-1$ byłby w początkowym punkcie A toru, co jest niemożliwe, jak to niebawem okażemy. Istotnie, gdyby punkt ruchomy mógł być w A, musiałby mieć tam prędkość $=0$ i przyspieszenie $=0$ [1]); nie posiadając zaś ani prędkości ani przyśpieszenia, byłby, oczywiście, pozbawiony ruchu: nie mógłby się nigdy ruszyć z A i wogóle ruch jego byłby niemożliwy. Tak więc $\lim(1+\frac{1}{n})^n$ przy $n=\infty$ nie może być nieskończenie wielka, to znaczy, ze przy $t=1$ punkt będzie w odległości skończonej od A; ponieważ zaś może on być tylko w jednym, jedynym punkcie, więc $\lim\limits_{n=\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ ma ściśle określoną skończoną wartość. Niżej podamy sposób wyznaczania tej granicy z pożądaną dokładnością, obecnie wracamy do naszego zagadnienia i wykażemy, że w dowolnym czasie t odległość pnnktu ruchomego od $A=e^t$. Przypuśćmy, że twierdzenie to jest słuszne dla $t=k$, gdzie k jest liczbą całkowitą; wykażemy, że słuszne będzie i dla $t=k+1$, oraz dla $t=k-1$; dzieląc sekundę od $t=k$ do $t=k+1$ na n części równych i rozumując, jak poprzednio, przekonamy się że przy $t=k+1$ odległość od A będzie $e^k.\lim\limits_{n=\infty}(1+\frac{1}{n})=e^{k+1}$; w drugim

---

[1]) Będąc w dowolnej odległości a od A punkt posiada prędkość $=a$, przebiega więc w elemencie czasu drogę $a\theta$ i wtedy ma prędkość $=a+a\theta$, przyrost więc prędkości w czasie θ wynosi $a\theta$, a więc przyśpieszenie $=a$, to znaczy, że prędkość i przyśpieszenie (oczywiście, liczbowo) są ciągle równe.

zaś wypadku oznaczamy odległość przy $t=k-1$ przez y i stosując rozumowanie powyższe przekonamy się, że $y\,.\lim\limits_{n=\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e^k$, skąd $y=e^{k-1}$. Ponieważ zaś przy $t=1$ twierdzenie nasze, jak wykazaliśmy, jest słuszne, więc stąd wynika, że dla wszelkich całkowitych wartości t odległość punktu od A będzie e^t.

Jeżeli t nie jest całkowite, lecz wymierne, możemy przedstawić je pod postacią $r+\frac{p}{q}$, gdzie r jest liczba całkowita i $q>p$. W czasie $t=r$ odległość na zasadzie powyższego $=e^r$; dzielimy sekundę od $t=r$ do $t=r+1$ na taką liczbę n elementów θ, która byłaby wielokrotnością q; w takim razie $^1/_q$ część sekundy zawierać będzie całkowitą liczbę elementów, np. m, jeżeli $n=mq$; po upływie $\frac{p}{q}$ sekund czyli pm elementów od momentu $t=r$ odległość punktu ruchomego od A będzie $e^r.(1+\theta)^{pm}=$ $=e^r(1+\theta)^{\frac{pn}{q}}=e^r.\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}^{\frac{p}{q}}$; w granicy przy rzeczywistym ruchu odległość ta wyniesie $e^r.\left[\lim\limits_{n=\infty}(1+\frac{1}{n})^n\right]^{\frac{p}{q}}=e^r.e^{\frac{p}{q}}=e^{r+\frac{p}{q}}$.

Słuszność więc twierdzenia o zależności odległości punktu od czasu (odległość $s=e^t$) została uzasadniona dla wszelkich wymiernych wartości t. Traktując liczby niewymierne jako granice pewnych ciągów liczb wymiernych i mając dla każdej liczby wymiernej twierdzenie uzasadnione, możemy ogólnie powiedzieć, że *dla każdej rzeczywistej wartości czasu t odległość punktu od A przedstawi się jako e^t* i odwrotnie: *każdemu położeniu punktu na torze w odległości dodatniej s od A*[1]) *odpowiada pewien oznaczony moment czasu t taki, iż $e^t=s$*; że taki moment będzie, przytym tylko jeden, wynika z następujących rozważań:

a) kierunku ruchu punkt zmienić nie może, gdyż w takim razie nie byłoby wykonane zasadnicze żądanie, aby liczbowo prędkość=odległości, albowiem zmiana kierunku musiałaby wywołać zatrzymanie się punktu w pewnym miejscu, co jest niemożliwe; z tego wynika, że w każdym punkcie toru (oczywiście pod warunkiem $s>0$) punkt ruchomy może znajdować się tylko raz jeden.

---

[1]) Poruszając się w kierunku dodatnim punkt nie może znajdować się w odległości ujemnej od A, gdyż mając być przy $t=0$ w odległości $=1$, musiałby przejść przedtym przez A, co jest niemożliwe.

b) z biegiem czasu prędkość punktu ruchomego rośnie jednocześnie z oddalaniem się jego od A; to zwiększanie się prędkości i odległości jest ciągłe, a wobec rosnącego ciągle przyśpieszenia, które liczbowo=prędkości, drogi, które przebiega punkt w tych samych okresach czasu, stale rosną; stąd wynika, że punkt ruchomy po pewnym czasie przybędzie do każdego punktu toru ($s > 0$), jakkolwiek daleko leżącego od A, przytym raz tylko jeden.

W zależności $s = e^t$ czas t jest logarytmem odległości s przy zasadzie $e = \lim_{n=\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$, czyli t. zw. logarytmem naturalnym. Ostatnie twierdzenie w związku z poprzedniemi wynikami głosi, że każda dodatnia liczba rzeczywista ma jeden rzeczywisty logarytm naturalny; jest on większy lub mniejszy od zera zależnie od tego czy liczba jest większa lub mniejsza od 1; logarytm $1 = 0$.

Nic łatwiejszego, jak, korzystając z dotychczasowych rozważań, wykazać wszystkie ogólne własności logarytmów. Tak np. jeżeli punkt znajdzie się w odległości $s = s_1 . s_2 . s_3 \ldots\ldots s_n$, której wartość liczebna = iloczynowi dowolnej liczby czynników i jeżeli do odległości s_1 mógłby dojść w czasie t_1, do odległości s_2 w czasie t_2 i t. d., wówczas $s = e^{t_1} . e^{t_2} \ldots\ldots e^{t_n} = e^{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}$ czyli $\log s = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$, mamy więc twierdzenie o logarytmie iloczynu. Wykazanie innych własności, dotyczących logarytmów ilorazu, potęgi, pierwiastka, nie przedstawia zgoła żadnych trudności.

Przechodzimy do wykazania sposobu wyznaczenia wartości e. W tym celu zastosujemy metodę graficzną. Obieramy sobie osie spółrzędnych— poziomą oś czasu OT (fig. 2) i pionową oś prędkości OV, poczym graficznie przedstawimy prawo ruchu punktu w ciągu sekundy od $t = 0$ do $t = 1 = Of$ w przypuszczeniu, że sekunda ta podzielona została na pewną liczbę n równych części ($Oa = ab = bc = cd .. = ef = \theta$) i że w ciągu każdego takiego elementu θ ruch punktu jest jednostajny.

W ciągu 1-go elementu prędkość $= 1 = Oh = ar$; w ciągu 2-go $= 1 + \theta = aa' = bs$; graficznie łatwo wykreślić odpowiedniej długości odcinek odkładając n elementów w kierunku ujemnym osi czasu: $Ok = kl = \ldots. = pq = \theta$ i łącząc koniec ostatniego q z h prostą do przecięcia z aa' w punkcie a'; tak samo łącząc koniec p przedostatniego elementu z a' do przecięcia z następną rzędną bb', otrzymamy w przecięciu b'; dalej łącząc koniec 3-go od końca elementu n z b' otrzymamy w przecięciu z następną rzędną punkt c' i t. d., wreszcie łącząc koniec 1-go k z końcem przedostatniej rzędnej e' otrzymamy w przecięciu z ostatnią punkt f; oczywiście $Oh = 1$, $aa' = 1 + \theta$, $bb' = (1 + \theta)^2$, $cc' = (1 + \theta)^3, \ldots. ee' = (1 + \theta)^{n-1}$, będą prędkości w początkach kolejnych elementów, pola zaś prostokątów $Ohra$, $aa'sb$, $bb'tc, \ldots.$

ee'wf liczbowo przedstawiać będą drogi, jakie punkt przebiegnie w ciągu tych elementów czasu. Łącząc punkty *h*, *a'*, *b'*, *c'*, *d'*,...*f'* kolejno prostolinjowemi odcinkami, otrzymamy łamaną *ha'b'c'*...*e'f'*, która w sposób przybliżony przedstawi nam graficznie prawo zmian prędkości punktu w czasie od $t=o$ do $t=1$ sec.; w granicy przy $\theta=0$ łamana ta, jak również linja *hra'sb't*...*ve'w* zamienią się na krzywą logarytmiczną *EhF* (fig. 3) której część *hF* odpowiada czasowi od $t=0$ do $t=1=Of$. Ponieważ *ff'* (fig. 2)

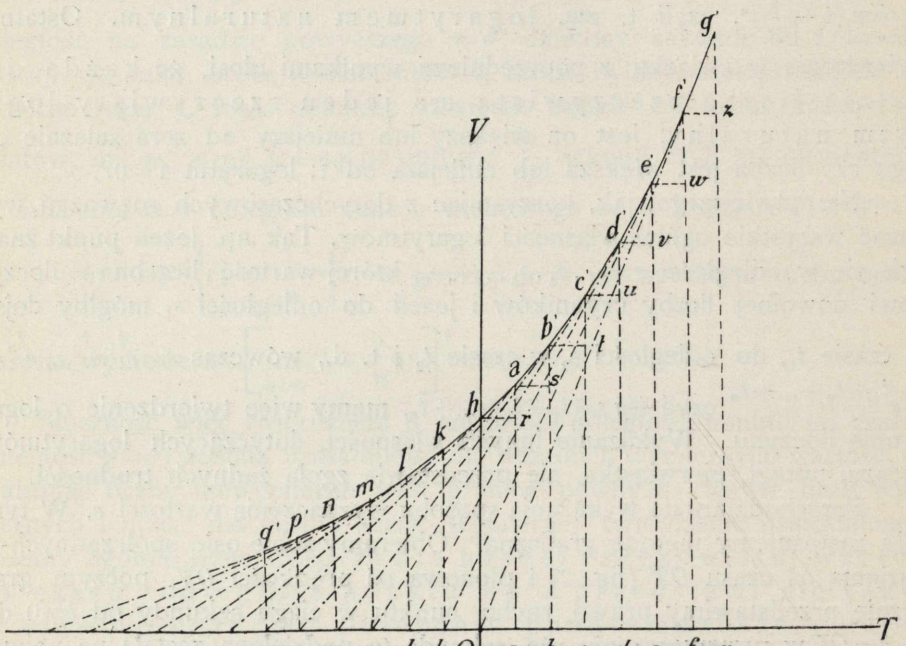

Fig. 2

$=(1+\theta)^n$, więc *fF* (fig. 3) $=\lim\limits_{n=\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$; pole figury *OhFf* (fig. 3) liczbowo jest=drodze, jaką przebiegł punkt w ciągu pierwszej sekundy; ponieważ zaś w końcu 1-ej sekundy odległość punktu od *A* (fig. 1)$=e$, w początkowej zaś chwili$=1$, więc oczywiście droga w czasie od $t=0$ do $t=1$ będzie $=e-1$ czyli że pole figury $OhFf=e-1$ jednostek.

Wracając na chwilę do łamanej $ha'b'c'...f'$ (fig. 2), twierdzimy przedewszystkim, że każdy następny jej odcinek tworzy większy kąt z osią czasu OT, niż poprzednie; istotnie weźmy pod uwagę trzy kolejne rzędne, np. $(1+\theta)^k$, $(1+\theta)^{k+1}$, $(1+\theta)^{k+2}$, gdzie $k+2 \leqslant n$; odcinek łamanej, łączący końce dwuch pierwszych rzędnych, niech tworzy z osią czasu kąt α, odcinek następny—kąt β; oczywiście $tg\alpha = \frac{(1+\theta)^{k+1}-(1+\theta)^k}{\theta} = (1+\theta)^k$,

$tg\beta = \frac{(1+\theta)^{k+2}-(1+\theta)^{k+1}}{\theta} = (1+\theta)^{k+1}$, ponieważ zaś $(1+\theta)^{k+1} > (1+\theta)^k$, więc $\beta > \alpha$, co było do dowiedzenia.

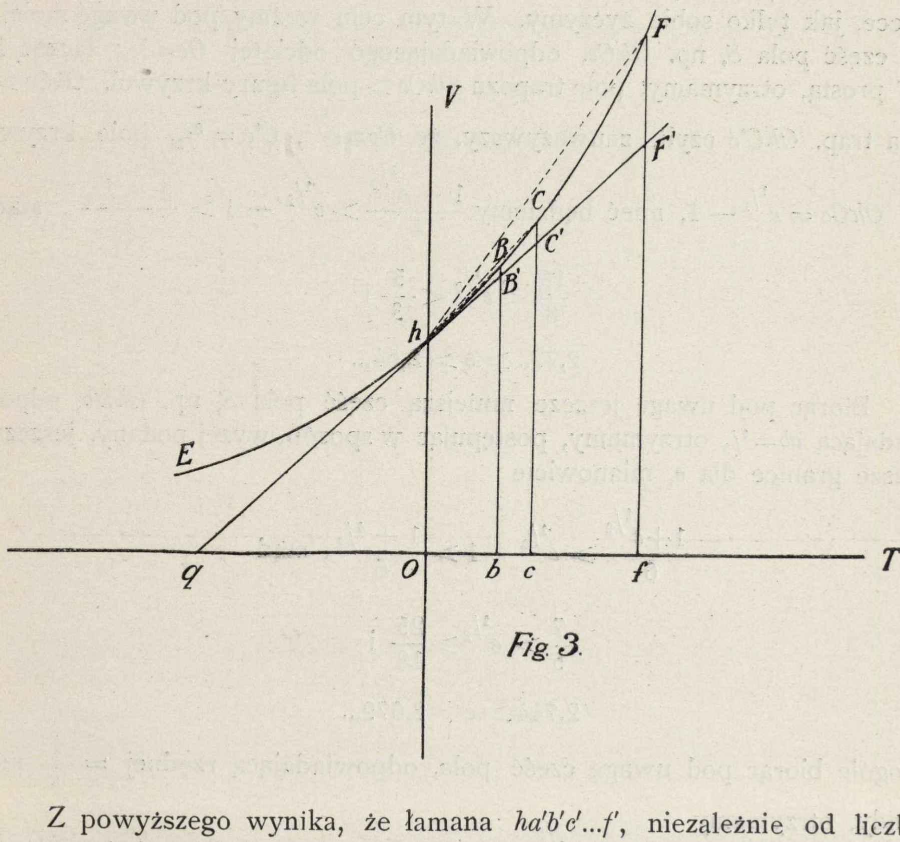

Fig. 3.

Z powyższego wynika, że łamana $ha'b'c'...f'$, niezależnie od liczby tworzących ją odcinków, jest wypukła ku osi odciętych, a stąd wniosek, że taki sam charakter posiada i krzywa logarytmiczna EhF (fig. 3).

Łączymy h z F prostą i w h prowadzimy styczną, tworzącą oczywiście kąt 45^0 z osią T (gdyż jego $tg = \frac{(1+\theta)-1}{\theta} = 1$ niezależnie od wartości θ). Z poprzedniej uwagi o kształcie krzywej wynika, że pole trapezu $OhFf >$ pola S figury $OhFf$ — ograniczonej z jednej strony krzywą i $S >$ pola trapezu $OhF'f$. Pole trapezu $OhFf = \frac{(Oh+Ff)Of}{2} = \frac{(1+e).1}{2} = \frac{e+1}{2}$, pole $S = e - 1$, jak to wykazaliśmy wyżej, wreszcie pole $OhF'f = \frac{(Oh+F'f)^{1)}Of}{2} = \frac{(1+2).1}{2} = {}^3/_2$, stąd $\frac{e+1}{2} > e - 1 > {}^3/_2$, co daje nam

$$3 > e > 2{,}5.$$

Granice, między któremi znajduje się wartość e, możemy zbliżyć tak dalece, jak tylko sobie życzymy. W tym celu weźmy pod uwagę mniejszą część pola S, np. $OhCc$, odpowiadającego odciętej $Oc = {}^1/_2$; łącząc h i C prostą, otrzymamy: pole trapezu $OhCc >$ pola figury krzywol. $OhCc >$ pola trap. $OhC'c$ czyli, zauważywszy, że $Cc = e^{1/2}$, $C'c = {}^3/_2$, pole krzyw. fig. $OhCc = e^{1/2} - 1$, mieć będziemy $\frac{1+e^{1/2}}{4} > e^{1/2} - 1 > \frac{1+{}^3/_2}{4}$, stąd

$$\frac{13}{8} < e^{1/2} < \frac{5}{3} \text{ i}$$

$$2{,}77.. > e > 2{,}64...$$

Biorąc pod uwagę jeszcze mniejszą część pola S, np. $OhBb$, odpowiadającą $ob = {}^1/_3$ otrzymamy, postępując w sposób, wyżej podany, jeszcze bliższe granice dla e, mianowicie

$$\frac{1+e^{1/3}}{6} > e^{1/3} - 1 > \frac{1+{}^4/_3}{6}, \text{ stąd}$$

$$\frac{7}{5} > e^{1/3} > \frac{25}{18} \text{ i}$$

$$2{,}744 > e > 2{,}679...$$

Wogóle biorąc pod uwagę część pola, odpowiadającą rzędnej $= \frac{1}{k}$ sekundy, otrzymamy

$$\frac{1+e^{1/k}}{2k} > e^{1/k} - 1 > \frac{2+{}^1/_k}{2k}, \text{ stąd}$$

---

[1]) $F'f : Oh = 2 : 1$, gdyż $Of = qO = 1$.

$$\frac{2k+1}{2k-1} > e^{1/k} > \frac{2k+1}{2k^2} + 1 \text{ i}$$

$$\left(\frac{2k+1}{2k-1}\right)^k > e > \left(\frac{2k+1}{2k^2} + 1\right)^k$$

Np. przy $k=8$ $2{,}722... > e > 2{,}711...$

przy $k=16$ $2{,}719... > e > 2{,}717...$

Z. Arlitewicz.