O pewnym zadaniu z elementarnej teorji liczb.

Znaleźć liczbę boków wielokątów, w których liczba przekątnych jest kwadratem zupełnym.

Podajemy tu rozwiązanie tego ciekawego zagadnienia.

Niech n będzie liczbą boków wielokąta; liczba jego przekątnych jest, jak wiadomo, $\frac{n(n-3)}{2}$. Należy rozważyć 2 przypadki: 1^0 gdy n jest liczbą parzystą, 2^0 gdy n jest nieparzyste.

1^0 Niech będzie $n=2m$; wtedy $\frac{n(n-3)}{2}=m(2m-3)$.

Liczba ta ma być kwadratem zupełnym. Zastosujmy metodę, której używał Euler do rozwiązania równania $y^2=ax^2+bx+c$, jeżeli $\sqrt{ax^2+bx+c}$ miał być liczbą wymierną. Dla przypadku, gdy $\sqrt{b^2-4ac}$ jest liczbą wymierną, Euler zakłada

$$a(x-x_1)(x-x_2)=\frac{m^2}{n^2}(x-x_2)^2,$$ przyczym $\frac{m}{n}$ jest ułamkiem nieskracalnym.

Załóżmy więc, że $m(2m-3)=\frac{p^2}{q^2}(2m-3)^2$.

Stąd $m=\frac{3p^2}{2p^2-q^2}$; $m(2m-3)=\frac{9p^2q^2}{(2p^2-q^2)^2}$.

Powinniśmy tak dobrać p i q, żeby $\frac{9p^2q^2}{(2p^2-q^2)^2}$ było liczbą całkowitą, co jest możliwe tylko w takim razie, jeżeli $2p^2-q^2=\pm 1$.

Nie możemy przypuścić, że $2p^2-q^2=\pm 3$, gdyż p^2 i q^2 nie mogą jednocześnie dzielić się przez 3, gdyby zaś jedna z nich dzieliła się przez 3, to i druga musiałaby się dzielić. Jeżeli zaś przypuścimy, że ani p, ani q nie dzielą się przez 3, to $2p^2-q^2$ nie może być podzielone przez 3, gdyż kwadrat liczby pierwszej względem 3 ma zawsze kształt $3t+1$. Liczby p i q nie mogą też być niewymiernościami drugiego stopnia, bo w takim razie p^2q^2 nie byłoby kwadratem zupełnym wobec nieskracalności ułamka $\frac{p}{q}$. Prócz tego widzieliśmy, że

$$3p^2=m(2p^2-q^2),\ \text{gdzie } m \text{ jest całkowite.}$$

Ponieważ $2p^2-q^2$ nie dzieli się przez p^2, zatym m jest podzielne przez p^2. Załóżmy $m=m'p^2$. W takim razie $3p^2=m'p^2(2p^2-q^2)$, czyli $m'(2p^2-q^2)=3$. Lecz, jak widzieliśmy, $2p^2-q^2$ nie dzieli się przez 3, zatym m' musi dzielić się przez 3, a nawet więcej: $m'=3$, bo inaczej 1 byłoby podzielne przez liczbę całkowitą. Wynika stąd, że $2p^2-q^2$ może się równać tylko ± 1.

Możnaby jeszcze wyjść z założenia, że $m(2m-3)=\frac{p_1^2}{q_1^2}m^2$, ale to istoty rzeczy nie zmienia.

Z drugiej strony, ponieważ $m>o$, więc możemy mieć tylko równanie

$$q^2-2p^2=-1.$$

Stosując do tego równania metodę Lagrange'a, rozwijamy $\sqrt{2}$ na ułamek ciągły i bierzemy kolejne redukty nieparzyste, przyczym na q kładziemy liczniki reduktów, na p zaś mianowniki. Te redukty dają ostateczne rozwiązanie zagadnienia. Dla przykładu obrachujmy kilka pierwiastków. Wiadomo, że

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2\ldots}}}$$

Pierwszy redukt $\frac{1}{1}$ daje $m=3$, $n=6$; trzeci redukt $\frac{7}{5}$ daje $m=75$, $n=150$; piąty redukt $\frac{41}{29}$ daje $m=2523$, $n=5046$ i t. d.

2°. Załóżmy teraz $n=2m+1$, czyli $\frac{n(n-3)}{2}=(2m+1)(m-1)$, Niech będzie $(2m+1)(m-1)=\frac{p^2}{q^2}(m-1)^2$, czyli $m=\frac{p^2+q^2}{p^2-2q^2}$

a $(2m+1)(m-1)=\frac{9p^2q^2}{(p^2-2q^2)^2}$.

Rozważania, podobne do poprzednich, prowadzą nas do rozwiązania równania $p^2-2q^2=+1$ w liczbach całkowitych. Teraz w rozwinięciu $\sqrt{2}$ na ułamek ciągły musimy brać redukty parzyste. Np. drugi redukt $\frac{3}{2}$ daje $m=13$, $n=27$; czwarty redukt $\frac{17}{12}$ daje $m=433$, $n=867$ i t. d.

Zważywszy, że w obu wypadkach $\frac{n(n-3)}{2}=\frac{9p^2q^2}{(p^2-2q^2)^2}$, możemy, wychodząc z tego wzoru, powiedzieć, że liczbę m znajdziemy albo z równania kwadratowego $m(2m-3)=\frac{9p^2q^2}{(p^2-2q^2)^2}$ albo też z równania $(2m+1)(m-1)=$ $=\frac{9p^2q^2}{(p^2-2q^2)^2}$, zależnie od tego, czy w powyższym ułamku ciągłym będziemy brali redukty nieparzyste czy też parzyste. *L. Zarzecki.*