

W. Szemplińska-Stupnicka, E. Tyrkiel

**BIFURKACJE, DRGANIA CHAOTYCZNE
I FRAKTALE W OSCYLATORZE
„DWUDOŁKOWYM”**

5/2001

W A R S Z A W A 2 0 0 1

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 24 września 2001 r.

Praca recenzowana



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 1,6 Ark. druk. 2,0
Oddano do drukarni w grudniu 2001 r.

ATOS - Poligrafia-Reklama, W-wa, ul. Jana Kazimierza 35/37

BIFURKACJE, DRGANIA CHAOTYCZNE I FRAKTALE W OSCYLATORZE „DWUDOŁKOWYM”

1. Wstęp

Prezentowany zeszyt jest drugą częścią cyklu prac na temat zjawisk chaotycznych w nieliniowych oscylatorach. Część I, zatytułowana „Bifurkacje, chaos i fraktale w dynamice wahadła” opublikowana została w pracach Instytutu Podstawowych Problemów Techniki [25]. Mając nadzieję, że Czytelnik zapoznał się z przedstawionym tam materiałem, w obecnym zeszycie nie powtarzamy wyjaśnień dotyczących podstawowych pojęć dynamiki nieliniowej, takich jak:

- bifurkacja siodłowo-węzłowa i bifurkacja podwojenia okresu;
- wykres bifurkacyjny;
- obszary przyciągania;
- dziwny atraktor;
- fraktale

i inne.

Ujęcie tematyki pozostaje bez zmian. Staramy się przedstawić materiał opierając się głównie na interpretacji geometrycznej, przy wykorzystaniu wyników obliczeń numerycznych i grafiki komputerowej. Zakres omówionych problemów jest znacznie szerszy niż w części I. Staramy się wyjaśnić i zilustrować takie zjawiska i pojęcia, jak:

- kryzys brzegowy atraktora chaotycznego;
- nieprzewidywalność ruchu układu po zniszczeniu atraktora chaotycznego;
- intermitencyjne przejście do chaosu;
- kryterium Mielnikowa;
- wykładniki Lapunowa.

Omawiany w pracy układ drgający posiada dwa minima energii potencjalnej i dlatego w skrócie został nazwany układem „dwudołkowym”. Model matematyczny tego układu pojawił się w 1979 r. jako jednomodalne równanie ruchu wybożonej belki [7]. Pierwsze wyniki eksperymentu fizycznego przedstawił Moon w 1980 r. [11]. W latach późniejszych ten sam model znalazł zastosowanie w wielu gałęziach fizyki. Okazało się przy tym, że jest to model tak bogaty w różne zjawiska

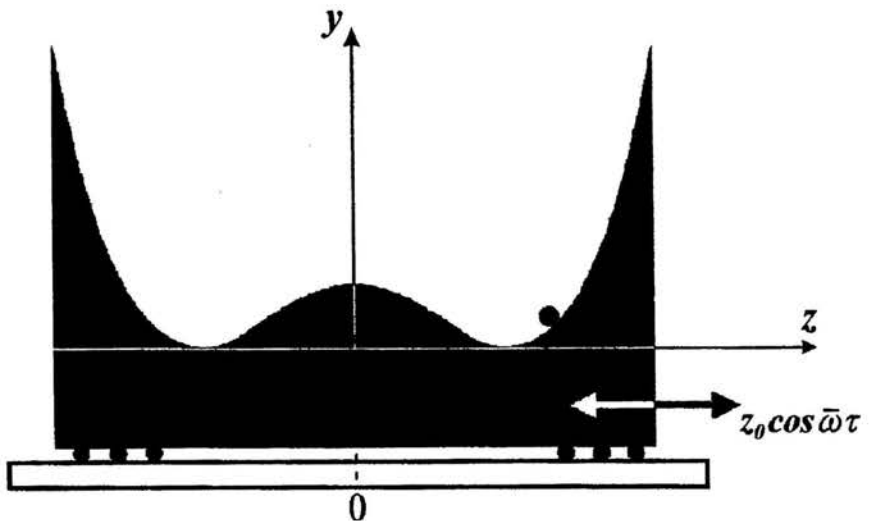
nieliniowe, że stał się archetypem wykorzystywanym w książkach-podręcznikach pisanych przez matematyków stosowanych [33].

Dla Czytelników pragnących pogłębić swoją wiedzę na temat układu „dwudołkowego”, jak również zapoznać się z bardziej zaawansowanymi problemami dynamiki nieliniowej, dołączamy spis pomocniczej literatury.

2. Model układu „dwudołkowego”

Spójrzmy na zachowanie się kulki, która porusza się po torze narysowanym na rys. 1. Tor ten ma pagórek, i obok dwa dołki. Na kulkę działa siła ciężkości (wzdłuż osi y), oraz siła oporu ruchu. Jasne jest, że jeżeli nie przyłożymy żadnej dodatkowej siły zewnętrznej, to kulka będzie dążyła do spoczynku na dnie jednego z dołków. Przyłożymy teraz do kulki poziomą (wzdłuż osi z) siłę oscylacyjną $A \cos \bar{\omega} \tau$. W najprostszym doświadczeniu możemy zamiast przykładania siły wprowadzić podstawę urządzenia w poziomy ruch oscylacyjny $z_0 \cos \bar{\omega} \tau$, jak na rys. 1. Musimy jednak pamiętać, by w trakcie naszego doświadczenia kulka nie odrywała się od powierzchni toru. Mamy tu niewątpliwie do czynienia z układem deterministycznym tłumionym z wymuszeniem okresowym. Jeśli tak, to ruch kulki powinien być całkowicie regularny, co więcej - również okresowy (periodyczny).

Łatwo przewidzieć, że pod wpływem siły okresowej o małej amplitudzie kulka będzie wykonywać drgania wokół swego położenia spoczynku, a więc ruch będzie ograniczony do jednego



Rys. 1. Model fizyczny układu „dwudołkowego”

dołka. Ale przy wzrastającej sile wymuszającej amplituda drgań kulki będzie rosła i tu dochodzimy do pytania: co się będzie działo, gdy kulka osiągnie wierzchołek toru ($z = 0$) i zacznie przeskakiwać do drugiego dołka? Skoro układ jest symetryczny względem $z = 0$, to kulka będzie miała taką samą tendencję do przeskakiwania przez wierzchołek toru, jeśli znajdzie się w tym drugim dołku. A zatem - czy kulka zacznie teraz ciągle przeskakiwać z prawego do lewego dołka i z powrotem? I czy będzie to ruch regularny, przewidywalny w czasie?

Pokażemy dalej, że właśnie ten ruch, związany z przeskakiwaniem kulki z dołka do dołka, może być *chaotyczny*; a ponadto, że ruch ten występuje w szerokim zakresie wartości amplitudy i częstości siły wymuszającej.

Omawiany układ drgający cechuje ogromna różnorodność zjawisk silnie nieliniowych. Ich przejawem jest m.in. możliwość występowania różnych rodzajów ruchu, zarówno regularnych, jak i chaotycznych. Aby to zbadać dokładnie, trzeba przeprowadzić obliczenia numeryczne. Trzeba więc sformułować model matematyczny układu, t.j. równanie ruchu kulki, i przeprowadzić jego numeryczną analizę (na przykład przy zastosowaniu pakietu programów dynamiki nieliniowej *Dynamics* [14]).

Nasz model fizyczny (rys. 1) wybraliśmy tak, by równanie ruchu miało formę równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu, równania mającego zastosowanie w wielu różnych gałęziach fizyki:

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + k \frac{dz}{d\tau} - \alpha z + \beta z^3 = A \cos \bar{\omega} \tau, \quad (1)$$

gdzie $\alpha, \beta > 0$ są stałymi współczynnikami, k reprezentuje współczynnik siły oporu (tłumienia wiskotycznego), $A, \bar{\omega}$ oznaczają odpowiednio amplitudę oraz częstość siły wymuszającej, $d/d\tau$ oznacza różniczkowanie względem czasu τ .

Po przekształceniach i zamianie zmiennych można to równanie sprowadzić do postaci bezwymiarowej (standardowej):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3 = F \cos \omega t, \quad (2)$$

gdzie:

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{2\alpha}}, \quad x = z \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad h = \frac{k}{\sqrt{2\alpha}}, \quad F = \frac{A}{2\alpha} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad \omega = \frac{\bar{\omega}}{\sqrt{2\alpha}}.$$

Wszystkie obliczenia przedstawione dalej wykonane są dla równania ruchu w formie równania (2).

Zastanówmy się teraz, jak dobrać kształt toru, po którym porusza się kulka, by siły potencjalne opisane były zależną w równaniu (2) zależnością:

$$-\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3\right).$$

Zauważmy, że kształt tego toru, czyli zależność współrzędnej pionowej y od współrzędnej poziomej x , $y = y(x)$, decyduje o zmianie energii potencjalnej V w funkcji x . Z kursu mechaniki ogólnej wiemy, że siła potencjalna wzdłuż osi x jest równa pochodnej energii potencjalnej względem x , ze znakiem minus. Możemy to zapisać następująco:

$$\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3\right) = -\frac{dV}{dx},$$

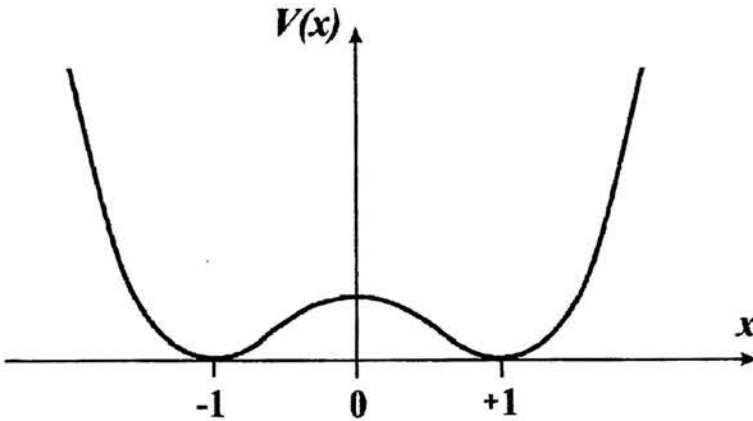
a stąd:
$$V(x) = \int \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3\right) dx + C = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + C, \quad (3)$$

gdzie C - stała dowolna. Jeśli przyjmiemy położenie osi układu tak, jak na rys. 1, to $C = \frac{1}{8}$.

Na rys. 2 przedstawiamy wykres energii potencjalnej V w funkcji x , a tym samym opisany analitycznie kształt toru kulki na rys. 1. Zauważmy, że energia potencjalna osiąga minimum przy

$$x = +1 \text{ oraz } x = -1,$$

a więc oba minima („dolki” potencjału) położone są symetrycznie właśnie w tych odległościach od szczytu - punktu odpowiadającego maksimum energii potencjalnej przy $x = 0$.



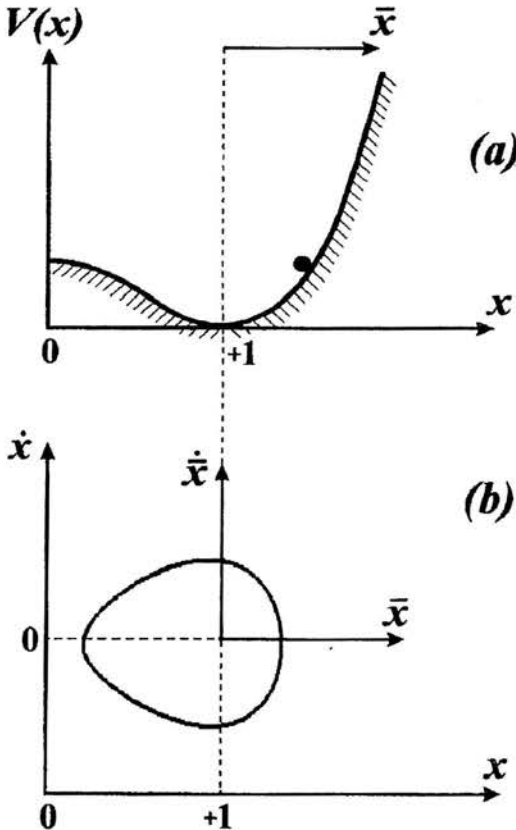
Rys. 2. Wykres energii potencjalnej kulki $V(x)$

3. Oscylacyjny ruch kulki wokół „dołka potencjału”

Najpierw spójrzmy na rys. 3, gdzie narysowana jest tylko prawa strona wykresu potencjału $V = V(x)$, t.j. tylko otoczenie prawego minimum energii potencjalnej. Wprowadzamy też dodatkowo współrzędną $\bar{x} = x - 1$, określającą odległość w poziomie od tego minimum. Równanie ruchu w nowej zmiennej \bar{x} przybiera postać:

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} + h\frac{d\bar{x}}{dt} + \bar{x} - \frac{3}{2}\bar{x}^2 + \frac{1}{2}\bar{x}^3 = F \cos\omega t. \quad (4)$$

Zatem częstość własna małych drgań kulki wokół położenia równowagi ($\bar{x} = 0$) jest równa 1.



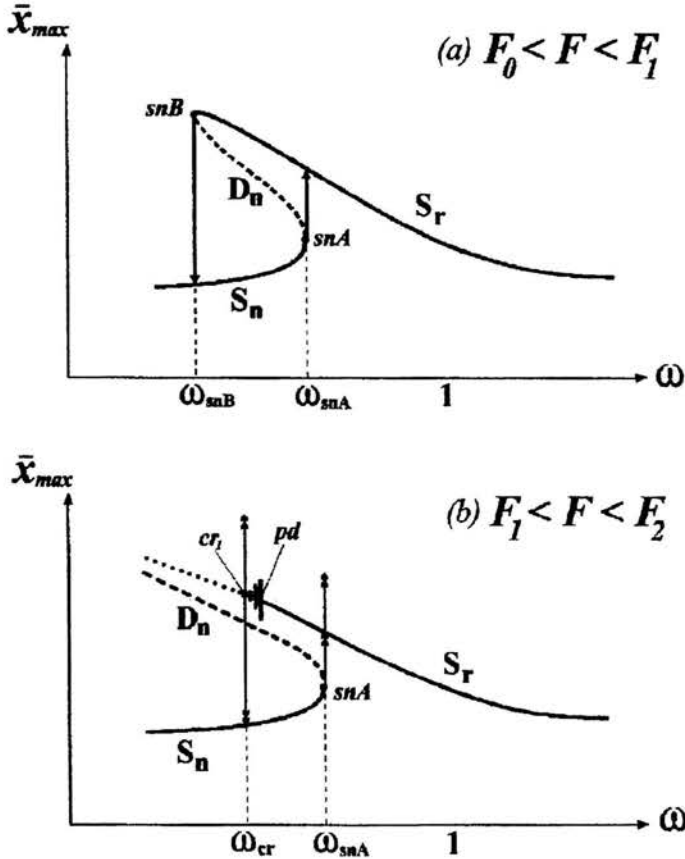
Rys. 3. Otoczenie prawego dołka potencjału; (a) krzywa energii potencjalnej; (b) portret fazowy ruchu T -periodycznego

Widzimy wyraźnie (rys. 3a), że ten dołek potencjału, w którym porusza się kulka, jest niesymetryczny względem $\bar{x} = 0$. Możemy więc spodziewać się, że i ruch kulki będzie niesymetryczny. I rzeczywiście, portret fazowy ruchu T -periodycznego, t.j. trajektoria tego ruchu w płaszczyźnie $\bar{x} - \dot{\bar{x}}$, jest niesymetryczny (rys. 3b).

Następnie rysujemy schematycznie wykres maksymalnego wychylenia \bar{x}_{\max} w funkcji częstości wymuszenia ω w pobliżu **głównego rezonansu**, t.j. w otoczeniu $\omega = 1$. Wykres ten wskazuje na tzw. „miękką charakterystykę” układu, przy której krzywe rezonansowe $\bar{x}_{\max} = \bar{x}_{\max}(\omega)$ są pochylone, podobnie jak w przypadku wahadła, w kierunku mniejszych częstości [25]. Widzimy też, że pomiędzy częstościami oznaczonymi ω_{snA} i ω_{snB} układ posiada dwa stabilne rozwiązania T -periodyczne (**atraktory** T -

periodyczne) oznaczone linią ciągłą - atraktor rezonansowy S_r i nierezonansowy S_n (rys. 4a).

Atraktory te znikają w punktach bifurkacji siłowo-węzłowych snA i snB . Widzimy tu pełną analogię do zjawisk występujących przy drganiach wahadła, z jednym wyjątkiem - oba atraktory S_r i S_n są w obecnym przypadku niesymetryczne ($S_i(\bar{x}) \neq S_i(-\bar{x})$, $i = r, n$).



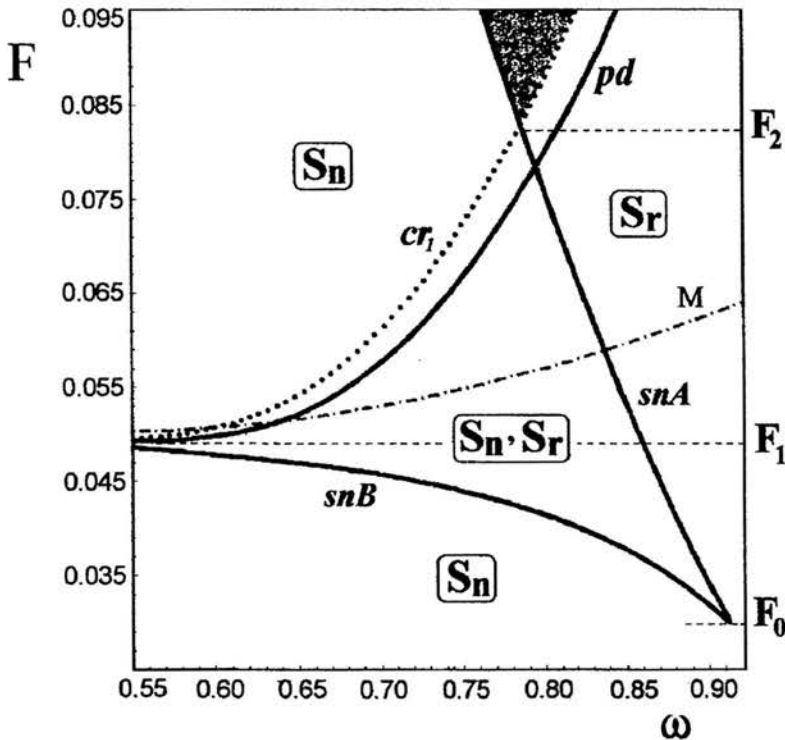
Rys. 4. Charakterystyki amplitudowo-częstościowe w otoczeniu głównego rezonansu;
 (a) mała amplituda wymuszenia F ; (b) większa amplituda wymuszenia F

Gdy zwiększymy nieco parametr amplitudy wymuszenia F , okaże się, że przy wierzchołku krzywej rezonansowej S_r pojawiają się nowe, nieregularne zjawiska (rys. 4b). Znika bifurkacja siłowo-węzłowa snB , a zamiast niej pojawia się cała kaskada bifurkacji podwojenia okresu (na rys. 4b jako pd zaznaczony jest początek tej kaskady). Dalej pojawia się wąski pas chaosu oscylacyjnego (atraktor chaotyczny), który ostatecznie znika poprzez mechanizm kryzysu - cr_1 . Jest to na razie rysunek schematyczny, zjawiska te zostaną omówione dokładnie w następnych rozdziałach.

Strzałki (w górę i w dół) zaznaczone na rys. 4b w punkcie kryzysu cr_1 informują nas o możliwych dalszych zachowaniach się układu po zniknięciu atraktora chaotycznego. Strzałka w dół wskazuje, że po kryzysie atraktora chaotycznego trajektoria ruchu układu zdąży do atraktora nierezonansowego S_n , a tym samym nie opuszcza danego „dołka potencjału”. A co oznacza symbolicznie zaznaczona strzałka do góry? W następnym rozdziale pokażemy, że po zniknięciu atraktora chaotycznego trajektoria ruchu układu może również przekroczyć barierę potencjału V_{max} (przy $x = 0$) i zacząć wykonywać drgania nierezonansowe w przeciwnym „dołku”.

Tak więc schematyczny rysunek 4b sygnalizuje nam, że przy dostatecznie dużej wartości amplitudy wymuszenia F regularnemu, T -periodycznemu ruchowi wewnątrz dołka potencjału mogą towarzyszyć zupełnie nieregularne zjawiska.

Aby zbadać, przy jakiej wartości F te nowe zjawiska się pojawiają, a następnie - dlaczego się pojawiają, zanalizujemy najpierw wykres ilustrujący obszary istnienia różnych atraktorów w płaszczyźnie parametrów wymuszenia (parametrów kontrolnych) $F - \omega$ - rys. 5.



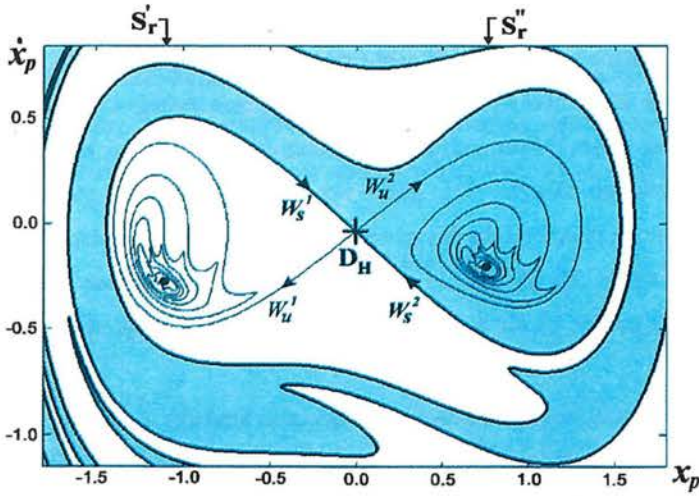
Rys. 5. Obszary istnienia różnych atraktorów w płaszczyźnie parametrów kontrolnych $F - \omega$

Widzimy, że krzywa rezonansowa ma charakter taki jak na rys. 4a tylko w stosunkowo wąskim zakresie amplitudy wymuszenia - od F_0 do F_1 , bo tylko w tym zakresie istnieją obie bifurkacje siodłowo-węzłowe snA i snB . W zakresie od F_1 do F_2 zakres częstości, w którym oba atraktory (S_r i S_n) współlistnieją, maleje, a pojawiające się linie oznaczone pd (początek kaskady bifurkacji podwojenia okresu) i cr_1 (kryzys atraktora chaotycznego) wskazują, że wykres rezonansowy ma charakter taki jak na rys. 4b. Na rys. 5 widzimy jeszcze jedną linię (M), linię, która nie oznacza granicy istnienia żadnego atraktora. Co oznacza linia M i jaką rolę odgrywa w zachowaniu się układu - na to pytanie odpowiada następnym rozdział poświęcony tzw. kryterium Mielnikowa.

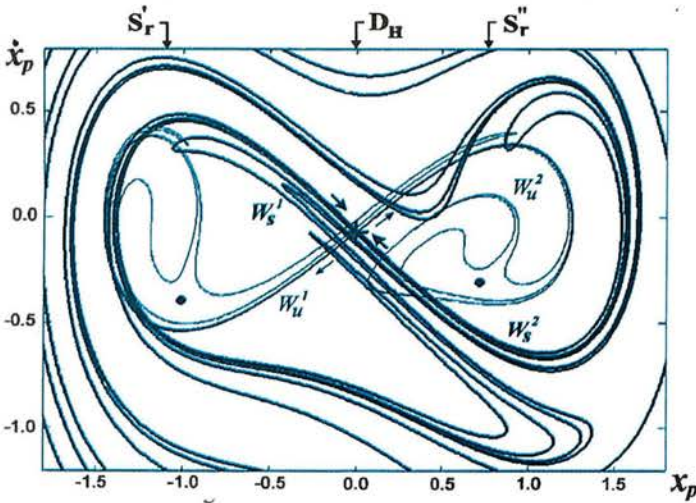
4. Kryterium Mielnikowa jako kryterium chaotyczności układu

Zwrócimy się teraz w kierunku obserwacji różnorodności siodła centralnego. Posłużymy się w tym celu metodą „odzworowania Poincarégo”, która rozwiązanie T -periodyczne przekształca w jeden punkt (patrz [25]). Siodło centralne reprezentuje niestabilne rozwiązanie T -periodyczne, które pojawia się przy wierzchołku energii potencjalnej układu. Dla uproszczenia rozważań wybieramy takie wartości parametrów F i ω , przy których w obu dołkach potencjału istnieje tylko atraktor rezonansowy S_r - na rys. 5 jest to obszar położony na prawo od linii bifurkacyjnej snA . Na rys. 6 przedstawiamy, na płaszczyźnie Poincarégo $x_p - \dot{x}_p$, atraktory rezonansowe w prawym i lewym dołku (punkty S_r' i S_r''), a także siodło centralne oznaczone D_H i jego różnorodności stateczne W_s i niestateczne W_u (rys. 6a). Pamiętamy, że różnorodności stateczne wyznaczają granice obszarów przyciągania różnych atraktorów. Różnorodności niestateczne natomiast dążą bezpośrednio do tych atraktorów (tu punktów S_r' , S_r''). I tak wszystkie trajektorie z obszaru oznaczonego kolorem białym dążą do lewego atraktora S_r' (czyli do ruchu periodycznego kulki w lewym dołku), a wszystkie trajektorie z obszaru niebieskiego - do prawego atraktora S_r'' . Granica obszarów przyciągania obu atraktorów jest tu gładką, ciągłą krzywą i nie mamy wątpliwości, która trajektoria dąży do którego atraktora.

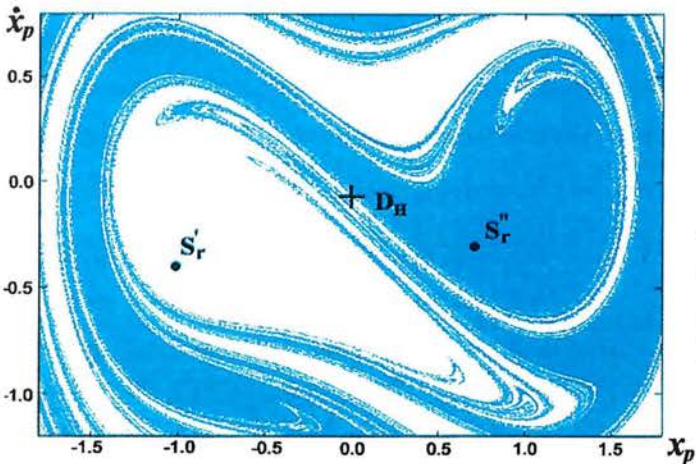
Taka klarowna sytuacja ma miejsce tylko dla wartości F , ω , które znajdują się poniżej linii M (rys. 5), czyli dla $F(\omega) < F_M(\omega)$. Co się dzieje z różnorodnościami, a więc i z granicami obszarów przyciągania, gdy przekroczymy linię bifurkacyjną M - to ilustrują rys. 6b, 6c. Tutaj oba typy różnorodności - stateczne i niestateczne - przecinają się (rys. 6b). Prowadząc obliczenia numeryczne możemy się przekonać, że liczba tych przecięć będzie stale rosła z upływem czasu obliczeń (w granicy dąży ona do nieskończoności). Co się dzieje teraz z granicami obszarów przyciągania współlistniejących atraktorów - przestają być one regularne i ciągłe, a stają się *fraktalne*.



(a) obszary przyciągania atraktorów rezonansowych S_r' (biały) i S_r'' (niebieski) oraz rozmaitości stateczne W_s^1, W_s^2 i niestateczne W_u^1, W_u^2 siódła centralnego D_H poniżej kryterium Mielnikowa; $F = 0.05, \omega = 1.0$



(b) rozmaitości stateczne W_s^1, W_s^2 i niestateczne W_u^1, W_u^2 siódła centralnego D_H powyżej kryterium Mielnikowa; $F = 0.10, \omega = 1.0$



(c) obszary przyciągania atraktorów rezonansowych S_r' i S_r'' powyżej kryterium Mielnikowa;

$F = 0.10, \omega = 1.0$

Przykład fraktalnych granic obszarów przyciągania przedstawiony jest na rys. 6c. Jeśli trajektoria ruchu wystartuje z warunków początkowych położonych w obszarze o strukturze fraktalnej, to ruch przejściowy będzie chaotyczny, a stan końcowy (to, czy kulka ostatecznie będzie wykonywać drgania periodyczne w prawym czy lewym dołku), jest nieprzewidywalny. Wspominaliśmy już o tym zjawisku w rozdziale 6 poprzedniego zeszytu [25], gdzie wprowadziliśmy pojęcie *globalnej bifurkacji homoklinicznej*. W naszym układzie odnośna globalna bifurkacja, zwana też *kryterium Mielnikowa* (odpowiadająca krzywej M na rys. 5) jest *bifurkacją homokliniczną siodła centralnego*. Po przekroczeniu tej granicy, t.j. dla $F(\omega) > F_M(\omega)$, nasz regularny dotąd układ staje się układem chaotycznym.

Zauważmy jednak, że układ nadal posiada regularne, periodyczne atraktory i dlatego przy wykonywaniu „eksperymentu” - czy to fizycznego, czy numerycznego - możemy w ogóle tej chaotyczności nie zauważyć. Jeśli bowiem trajektoria kulki rozpocznie się dostatecznie blisko któregoś z istniejących atraktorów, to i ruch przejściowy będzie regularny, i stan końcowy będzie przewidywalny.

Krytyczne parametry bifurkacji homoklinicznej siodła centralnego (bifurkacji Mielnikowa) można obliczyć analitycznie w sposób przybliżony, przy użyciu metody perturbacyjnej. Matematycznej analizie tego problemu poświęcono dużo miejsca w wielu książkach i artykułach. Po raz pierwszy wyprowadzenie analitycznego wzoru opisującego tę bifurkację opublikowano w książce [4]. Zależność krytycznych wartości amplitudy wymuszenia F od częstości ω i współczynnika tłumienia h przybiera postać:

$$F_M = \frac{h\sqrt{2}}{3\pi\omega} \cosh \frac{\pi\omega}{2}.$$

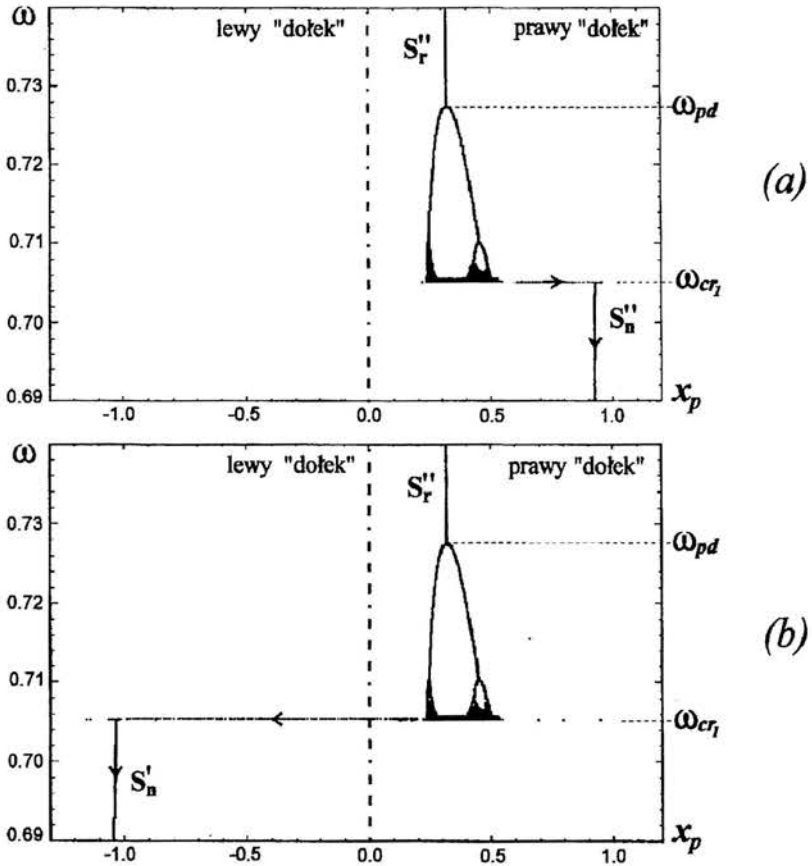
W obecnej pracy kryterium Mielnikowa wyznaczono zarówno za pomocą powyższego wzoru, jak i poprzez numeryczną analizę różności stabilnych i niestabilnych siodła centralnego. Wyniki różniły się tak nieznacznie, że na rys. 5 można je było przedstawić w postaci jednej linii M .

Powrócimy teraz do obszaru głównego rezonansu, t.j. do tego zakresu wartości ω , w którym istnieją dwa T -periodyczne atraktory (rezonansowy S_r i nierezonansowy S_n) w każdym z dołków potencjału. Zilustrujemy zagadnienie nieprzewidywalności stanu końcowego w sytuacji, gdy atraktory rezonansowe S_r^+ i S_r^- zostały już przekształcone (poprzez kaskadę podwojenia okresu) do oscylacyjnych atraktorów chaotycznych i znikają wzdłuż linii bifurkacyjnej oznaczonej cr_1 (rys. 5).

5. Nieprzewidywalność stanu końcowego ruchu układu

Wybermy parametry F , ω w zakresie, w którym współlistnieją wszystkie cztery atraktory (rezonansowe S_r^+ , S_r^- i nierezonansowe S_n^+ , S_n^-), t.j. w obszarze, który na rys. 5 ograniczony jest

liniami bifurkacyjnymi snA , snB i cr_1 , oraz przy wartości wymuszenia $F > F_M$. W obszarze tym wykres rezonansowy ma charakter taki, jak naszkicowany na rys. 4b. Tamten rysunek był jednak schematyczny, teraz sporządzamy *wykres bifurkacyjny*, śledząc przemiany atraktora rezonansowego S_r'' przy wartości $F \cong 0.062$ i zmniejszających się wartościach częstoty wymuszenia ω (rys. 7).



Rys. 7. Wykres bifurkacyjny ilustrujący przemiany atraktora rezonansowego i nieprzewidywalność stanu końcowego; (a) $F = 0.0620$, (b) $F = 0.0621$

Na osi poziomej rejestrowana jest wartość przemieszczenia Poincarégo - \bar{x}_p . Od góry rysunku pojawia się jedna linia reprezentująca T -periodyczny atraktor S_r'' , t.j. atraktor w prawym dołku potencjału. Przy wartości $\omega = \omega_{pd}$ atraktor ten podlega bifurkacji podwojenia okresu i zostaje zastąpiony przez atraktor $2T$ -periodyczny, reprezentowany na wykresie bifurkacyjnym przez 2 linie. Przy dalszym zmniejszaniu ω pojawia się cała kaskada coraz częściej następujących po sobie

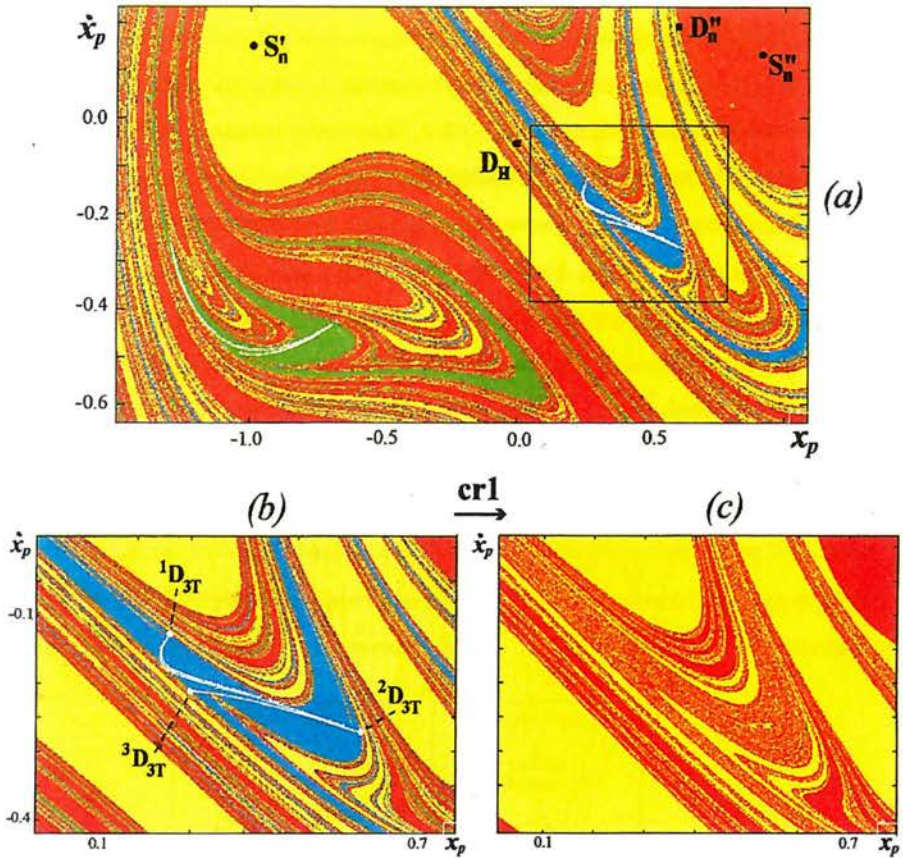
bifurkacji podwojenia okresu, aż wreszcie atraktor przestaje być periodyczny - zamienia się w chaotyczny atraktor oscylacyjny (na wykresie tuż przed ω_{cr1} widzimy obszar całkowicie zaciemniony). Ten atraktor również traci stateczność, zostaje zniszczony przy $\omega = \omega_{cr1}$ przez tzw. mechanizm kryzysu brzegowego.

Następnie - na górnym rysunku widzimy strzałkę poziomą skierowaną w prawo, w kierunku współistniejącego atraktora nierezonansowego S_n'' . W rezultacie trajektoria ruchu osiada na tym atraktorze, czyli kulka pozostaje w tym samym dołku potencjału. Na dolnym rysunku natomiast widzimy sytuację odwrotną - po zniknięciu chaotycznego atraktora oscylacyjnego kulka przeskakuje przez barierę potencjału V_{max} , i ostateczny wynik - to drgania T -periodyczne w przeciwnym dołku potencjału (atraktor S_n'). Oba przypadki różnią się bardzo nieznacznie wartościami parametru wymuszenia ($\Delta F = 0.0001$). Tak więc stan końcowy układu po zniknięciu chaotycznego atraktora oscylacyjnego jest nieprzewidywalny.

Wyjaśnienie przyczyn tej nieprzewidywalności znajdziemy na wykresie przedstawiającym obszary przyciągania na płaszczyźnie $x_p - \dot{x}_p$ (rys. 8). Tutaj też odpowiemy sobie na pytanie: co to jest kryzys brzegowy atraktora chaotycznego?

6. Kryzys brzegowy chaotycznego atraktora oscylacyjnego

Na rys. 8 zaznaczono punkty S_n' i S_n'' reprezentujące T -periodyczne atraktory nierezonansowe, odpowiednio w lewym i prawym dołku potencjału. W pobliżu środka rysunku widzimy siodło centralne D_H , leżące w pobliżu wierzchołka potencjału. Parametry F i ω dobrano tak, że atraktory rezonansowe S_r' i S_r'' przekształcone są już w chaotyczne atraktory oscylacyjne. Te chaotyczne atraktory widzimy w postaci białych linii (w rzeczywistości ich odwzorowanie Poincarégo składa się z wielu punktów), jeden w lewym, drugi w prawym dołku potencjału. Mamy więc 4 współistniejące atraktory i 4 obszary ich przyciągania, zaznaczone odpowiednio kolorami. Granice tych obszarów mają silnie fraktalną strukturę; efektem tej fraktalności jest silne wymieszanie się tych czterech kolorów. Zwróćmy teraz uwagę na obszar w pobliżu prawego atraktora chaotycznego. Obszar ten, zaznaczony prostokątem na rys. 8a, przedstawiony jest w powiększeniu na rys. 8b. Tu jeszcze wyraźniej widzimy silnie fraktalne granice obszarów przyciągania. Parametry układu są tak dobrane, że atraktory chaotyczne są tuż przed całkowitą utratą stateczności, czyli tuż przed kryzysem brzegowym - widzimy bowiem, że atraktor na rys 8b prawie „dotyka” granicy swego (niebieskiego) obszaru przyciągania. Na granicy tej widzimy 3 białe punkty, oznaczone symbolami



Rys. 8. Kryzys brzegowy chaotycznego atraktora oscylacyjnego i fraktalne granice obszarów przyciągania; $F = 0.075$, $\omega = 0.7601$

${}^i D_{3T}$, $i = 1, 2, 3$. Symbol D oznacza, że jest to siodło, a fakt, że jest tych punktów trzy oznacza, że jest to siodło o okresie $3T$.

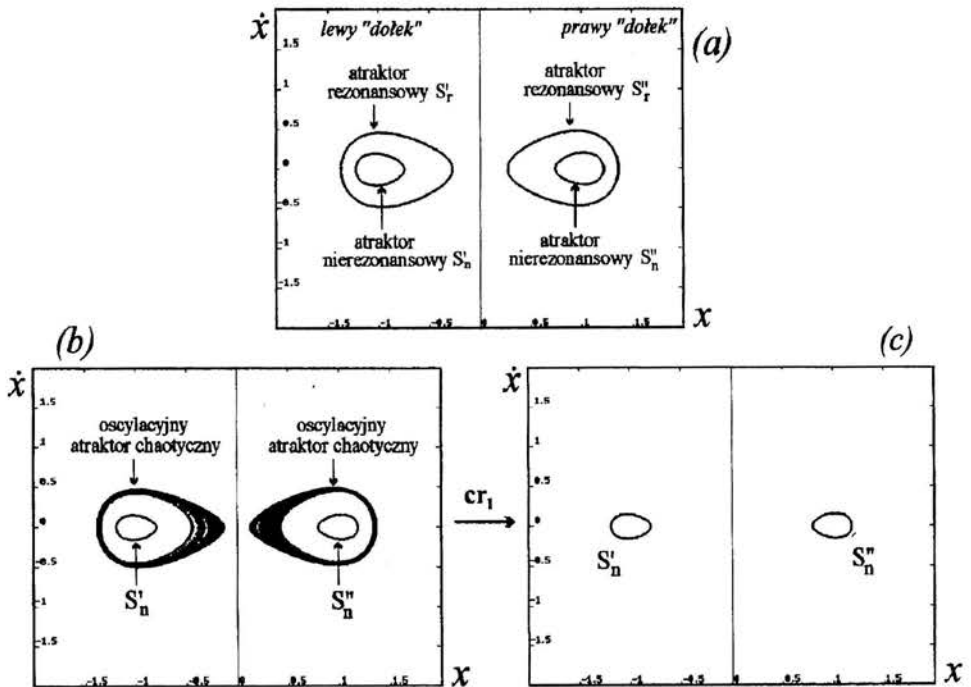
Pojęcie kryzysu atraktora chaotycznego pojawiło się w literaturze naukowej w roku 1983 [3]. *Kryzys atraktora chaotycznego* oznacza nagłą jego zmianę przy małej zmianie parametrów. *Kryzys brzegowy* to nagłe zniszczenie atraktora, które następuje wtedy, gdy atraktor „zderzy się” (w przestrzeni fazowej) z niestabilną orbitą okresową (siodłem), leżącą na brzegu jego obszaru przyciągania.

Rysunki 8a, 8b przedstawiają nasz atraktor chaotyczny tuż przed zderzeniem z siodłem $3T$ -okresowym, leżącym na brzegu jego obszaru przyciągania. Oznacza to, że mała zmiana parametrów wymuszenia F , ω spowoduje zniszczenie (zniknięcie) tego atraktora. Rysunek 8c przedstawia obszary przyciągania pozostałe po zniknięciu atraktora chaotycznego (dokładniej: jednoczesnym zni-

knęciu obu atraktorów chaotycznych w pobliżu prawego i lewego „dołka” potencjału). Zniknął więc kolor niebieski i zielony, pozostały kolory czerwony i żółty, t.j. obszary przyciągania T -periodycznych atraktorów nierezonansowych S_n^I i S_n^II . Zauważmy jednak, że w obszarze, w którym występował atraktor chaotyczny, obszary przyciągania mają silnie fraktalną strukturę. Oznacza to, że trajektoria ruchu, startująca z tego obszaru po zniknięciu atraktora chaotycznego, ma charakter *chaotycznego ruchu przejściowego*. Nie można więc przewidzieć, jaki będzie rezultat końcowy - czy trajektoria ta osiadnie na lewym, czy na prawym atraktorze nierezonansowym.

Na rys. 9 omawiane zjawiska zilustrowane są w formie *portretów fazowych* atraktorów, przedstawianych dotąd w formie odwzorowania Poincarégo. Najpierw widzimy cztery T -periodyczne atraktory oscylacyjne - S_r^I, S_r^II oraz S_n^I, S_n^II - w obu dołkach potencjału (rys. 9a); następnie - atraktory nierezonansowe S_n^I, S_n^II oraz chaotyczne atraktory oscylacyjne powstałe z atraktorów rezonansowych (rys. 9b); po kryzysie atraktorów chaotycznych pozostają tylko atraktory S_n^I, S_n^II (rys. 9c).

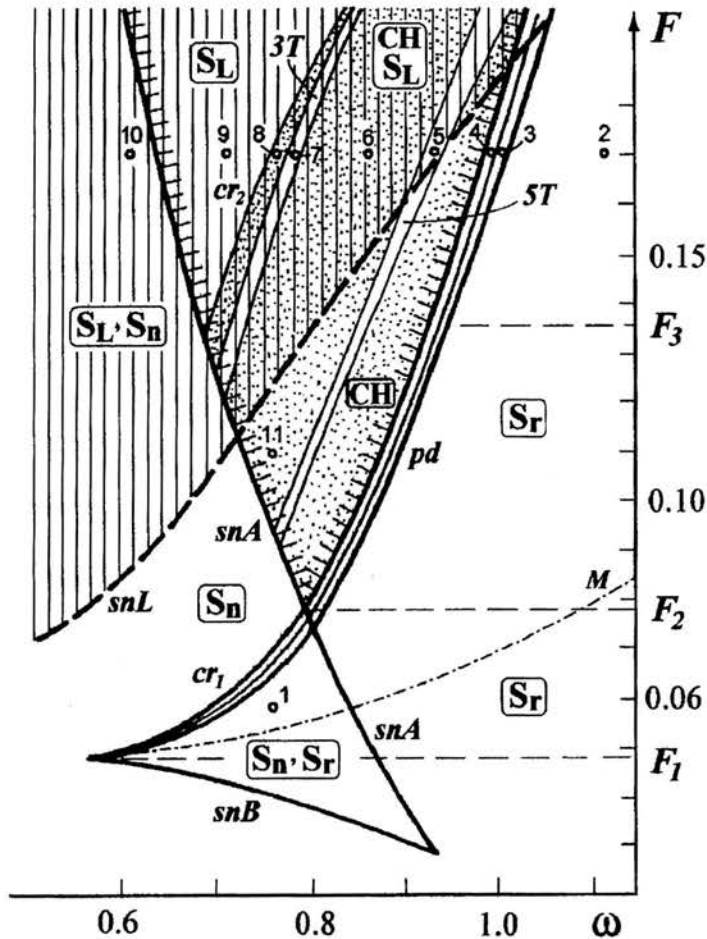
Powróćmy na chwilę do rys. 5. Widzimy, że w miarę zwiększania amplitudy siły wymuszającej F zakres częstości ω , w którym istnieją oba atraktory oscylacyjne - rezonansowy i nierezonansowy -



Rys. 9. Portrety fazowe atraktorów „jednodółkowych”; (a), (b) przed oraz (c) po kryzysie oscylacyjnych atraktorów chaotycznych

zmniejsza się. Zakres ten ograniczony jest z lewej strony linią kryzysu brzegowego cr_1 , z prawej zaś - linią bifurkacji siodłowo-węzłowej atraktora nierezonansowego snA , przy czym $\omega_{snA} > \omega_{cr_1}$. Przy $F = F_2$ obie te linie bifurkacyjne przecinają się, a dla $F > F_2$ mamy sytuację, przy której $\omega_{snA} < \omega_{cr_1}$. Zatem wewnątrz obszaru w kształcie litery V, w którym atraktor rezonansowy znika przy większej częstotliwości niż ta, przy której pojawia się atraktor nierezonansowy, mamy sytuację, w której nie istnieją żadne atraktory oscylacyjne reprezentujące ruch układu wewnątrz „dołka” potencjału. Jeśli tak, to domyślamy się, że musi istnieć jakaś forma ruchu (drżania ustalone kulki), przy której układ stale „przeskakuje” z jednego do drugiego dołka.

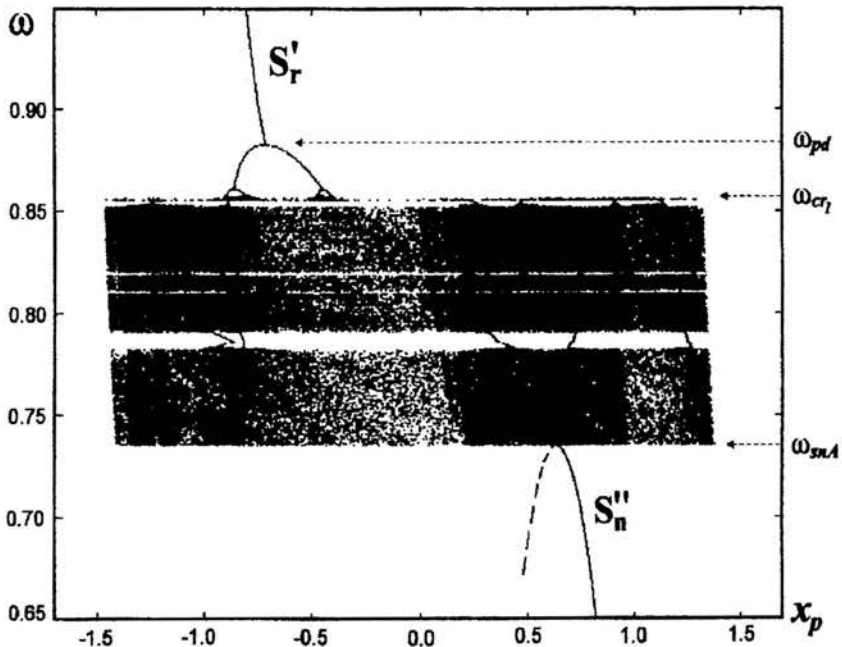
7. Trwały chaos „międzydołkowy”



Rys. 10. Obszary istnienia poszczególnych atraktorów w szerokim zakresie parametrów kontrolnych

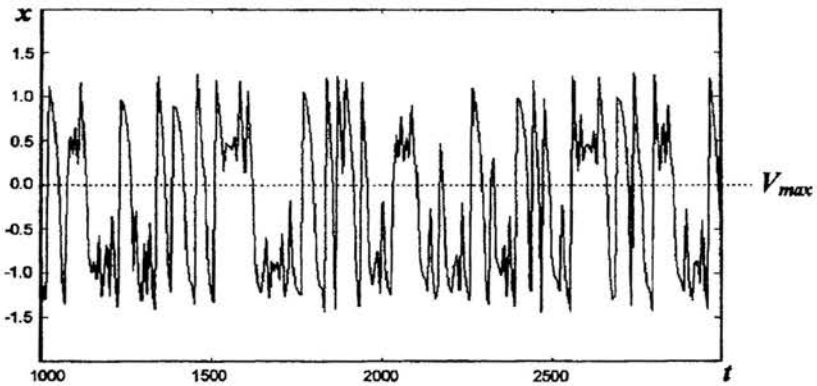
Przyjrzyjmy się najpierw obszarom istnienia różnych atraktorów w szerokim zakresie parametru F , obejmującym $F > F_2$. Wspomniany w poprzednim rozdziale obszar w kształcie litery V oznaczony jest symbolem CH . Pojawia się tu również nowy atraktor oznaczony S_L (rys. 10).

Najpierw przyjrzyjmy się ruchowi układu wewnątrz obszaru V, przed pojawieniem się atraktora S_L . Zaczynamy od wykresu bifurkacyjnego sporządzonego przy malejącej częstotliwości wymuszenia ω , dla $F = 0.11$ - rys. 11. Startujemy od częstotliwości $\omega > \omega_{cr1}$, a więc od T -periodycznego atraktora rezonansowego w lewym lub prawym dołku (tutaj S'_r). Przy zmniejszaniu ω , atraktor ten podlega kaskadzie bifurkacji podwojenia okresu i przekształca się, w małym zakresie wychylenia x_p , w chaotyczny atraktor oscylacyjny. Atraktor ten istnieje w bardzo wąskim obszarze częstotliwości ω i znika, a na wykresie pojawia się szeroki pas całkowicie zaciemniony, obejmujący oba dołki potencjału ($-1.5 < x_p < 1.5$). Wnioskujemy, że ruch układu polega na nieustannym przeskakiwaniu kulki przez barierę potencjału (czyli V_{max}), i że ruch ten nie jest periodyczny. Dopiero gdy, zmniejszając częstotliwość wymuszenia, dochodzimy do wartości ω_{snA} odpowiadającej bifurkacji siodłowo-węzłowej, z obszaru tego „wyłania się” T -periodyczny atraktor oscylacyjny S_n (na rys. 11 narysowano również linią przerywaną odpowiadającą mu gałąź niestateczną).

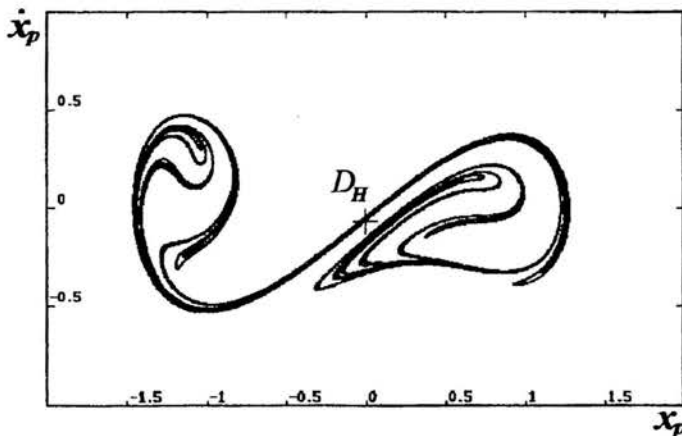


Rys. 11. Wykres bifurkacyjny dla $F = 0.11$

Próbkę przebiegu czasowego tego nieregularnego ruchu obejmującego oba „dołki” potencjału przedstawiono na rys. 12. Widzimy, że ruch układu polega na nieustannym przeskakiwaniu przez barierę potencjału, na przemian z wykonywaniem kilku oscylacji w każdym z dołków, ale wszystkie elementy tego ruchu wskazują na jego nieregularny, przypadkowy charakter. Odwzorowanie Poincarégo tego ruchu uzupełnia i potwierdza to wrażenie. Jest to atraktor o dużej liczbie punktów, przy czym liczba tych punktów stale rośnie ze wzrostem czasu obliczeń - rys. 13. Aby wykazać



Rys. 12. Przykład przebiegu czasowego ruchu układu na chaotycznym atraktorze „międzydołkowym”



Rys. 13. Odwzorowanie Poincarégo chaotycznego atraktora „międzydołkowego”

drogą eksperymentu numerycznego, że ruch ten jest ruchem chaotycznym, moglibyśmy:

- wykazać, że atraktor ten jest „dziwnym atraktorem”, tzn. że ma strukturę fraktalną;
- zbadać przebiegi czasowe $x = x(t)$ startujące z bardzo bliskich warunków początkowych.

W rozdziale 7 zeszytu [25] wspomnieliśmy jednak, że aby udowodnić matematycznie *wykładniczą wrażliwość* ruchu układu na warunki początkowe, należy obliczyć *wykładniki Lapunowa*.

8. Wykładniki Lapunowa

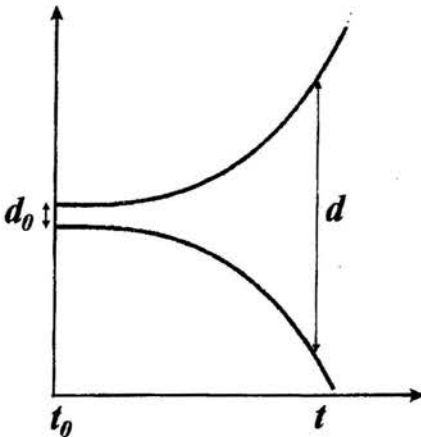
Wykładnicza wrażliwość na warunki początkowe oznacza, że dwie trajektorie, startujące z bardzo bliskich warunków początkowych, będą się oddalać od siebie z upływem czasu według funkcji wykładniczej. Zilustrowane to jest schematycznie na rys. 14. Zależność między odległością dwóch trajektorii d po czasie t i ich odległością d_0 w chwili początkowej t_0 zakładamy w postaci funkcji wykładniczej:

$$d(t) = d_0(t_0)e^{\lambda t}.$$

Wykładnik λ nazywamy *wykładnikiem Lapunowa*. Można go przedstawić w postaci:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{d}{d_0}. \quad (5)$$

Jeżeli $\lambda > 0$, to trajektorie oddalają się od siebie (jak na rys. 14); jeśli $\lambda < 0$, trajektorie są zbieżne. Matematyczne rozważania prowadzą do wniosku, że nasz układ posiada 3 wykładniki Lapunowa



Rys. 14. Schematyczna ilustracja wykładniczej wrażliwości na warunki początkowe

(przestrzeń fazowa układu jest trójwymiarowa), a ponieważ układ jest tłumiony (dysypacyjny), spełniony jest warunek:

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0.$$

Aby ruch był chaotyczny, wystarczy by jeden z wykładników Lapunowa był dodatni [12,15,33]. Jeśli $\lambda_1 > 0$, to dwa pozostałe wykładniki spełniają warunek: $\lambda_2 + \lambda_3 < 0$.

Tak więc trajektorie ruchu chaotycznego nie uciekają do nieskończoności; wręcz przeciwnie, mają charakter rekurencyjny: to rozchodzą się, to zbiegają ku sobie, pozostając stale na ograniczonym w przestrzeni fazowej atraktorze chaotycznym.

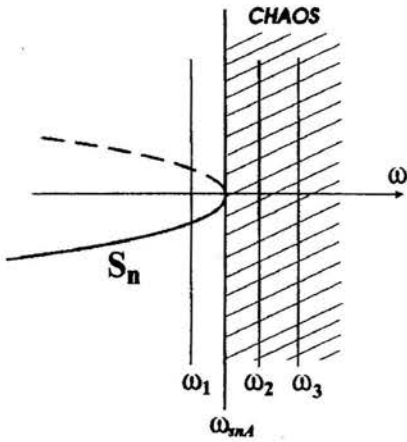
We wspomnianym już programie komputerowym *Dynamics* [14] zawarta jest procedura

obliczania największego wykładnika Lapunowa λ_1 . Łatwo więc wykazać, że w nieregularnym ruchu „międzydołkowym” scharakteryzowanym na rys. 12 i 13 największy wykładnik Lapunowa jest dodatni, a więc że jest to *chaos trwały*, a odwzorowanie Poincarégo na rys. 13 przedstawia *chaotyczny atraktor „międzydołkowy”*.

9. Intermitencyjne przejście do chaosu

Wróćmy na chwilę do rys. 10 oraz do wykresu bifurkacyjnego na rys. 11 i zastanówmy się, w jaki sposób układ przechodzi z drgań regularnych, T -periodycznych do chaosu i odwrotnie. W literaturze zagadnieniu temu, nazywanemu „drogą do chaosu”, poświęcone jest dużo miejsca. Pewne zjawiska towarzyszące tej drodze do chaosu (przy malejącej częstości ω) już zbadaliśmy: oba T -periodyczne atraktory rezonansowe (w prawym i lewym „dołku” potencjału) ulegają kaskadzie bifurkacji podwojenia okresu; kaskadzie, która kończy się całkowitą utratą stateczności atraktorów „jednodołkowych” (kryzysem cr_1) i w efekcie prowadzi do nieregularnego, chaotycznego ruchu obejmującego oba dołki potencjału.

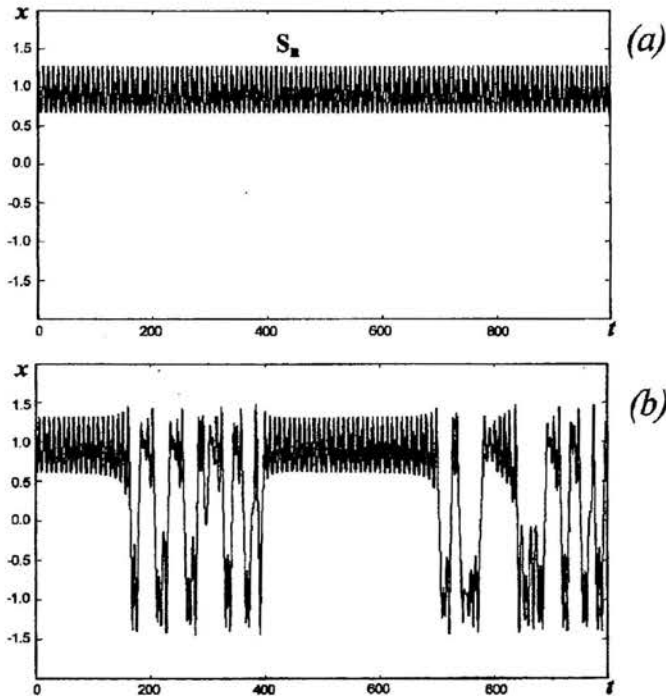
Przyjrzyjmy się teraz scenariuszowi przejścia do chaosu przy przeciwnej granicy jego obszaru (snA na rys. 10), przy zwiększającej się tym razem częstości ω . Tu nie obserwujemy żadnych przemian atraktora nierezonansowego S_n . Znika on bowiem nagle w bifurkacji siodłowo-węzłowej przy $\omega = \omega_{snA}$ i oba rysunki wskazują na to, że układ nagle przechodzi do ruchu chaotycznego. Stwierdzono jednak już dawno, że i tu występuje pewien stan przejściowy, ale odbywa się to wewnątrz obszaru zaliczanego już do obszaru chaotycznego [12, 15, 33]. Pamiętajmy, że wykładniki Lapunowa są parametrami uśrednionego czasu, przy bardzo długim czasie trwania obliczeń (patrz wzór (5)). Przyjrzyjmy się więc, jak wygląda przebieg czasowy $x = x(t)$ odpowiedzi układu w obszarze parametrów zaliczanych do chaosu, ale blisko dolnej granicy tego obszaru, t.j. przy częstościach niewiele większych od częstości odpowiadającej znikaniu atraktora S_n ($\omega > \omega_{snA}$). Na rys. 15 schematycznie rysujemy tę granicę chaosu jako $\omega = \omega_{snA}$ i wskazujemy częstości ω_1 , ω_2 i ω_3 , przy których badamy przebieg czasowy $x(t)$. Najpierw pokazujemy przebieg czasowy przy $\omega_1 < \omega_{snA}$ i, zgodnie z przewidywaniem, obserwujemy drgania T -periodyczne odpowiadające atraktorowi S_n (rys. 16a). Następnie przekraczamy próg bifurkacji siodłowo-węzłowej i obserwujemy dwa przebiegi czasowe przy częstościach ω_2 i ω_3 , nieco większych od ω_{snA} (rys.16b,c). Przy obu tych częstościach obserwujemy dziwne zjawisko: nadal występują tu długie odcinki czasu, w których ruch jest okresowy i dokładnie przypomina ruch na rys. 16a; ale to regularne zachowanie przerywane jest przez „wybuchy” o skończonym czasie trwania, w których



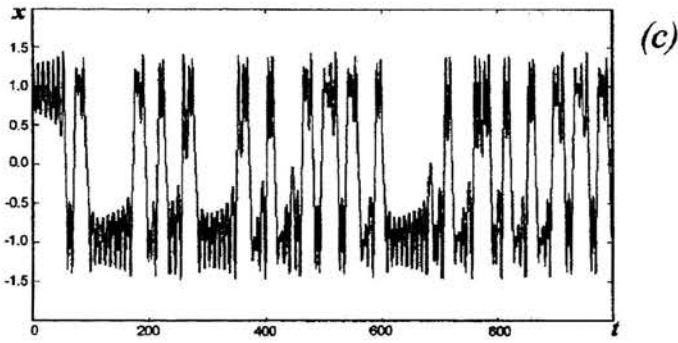
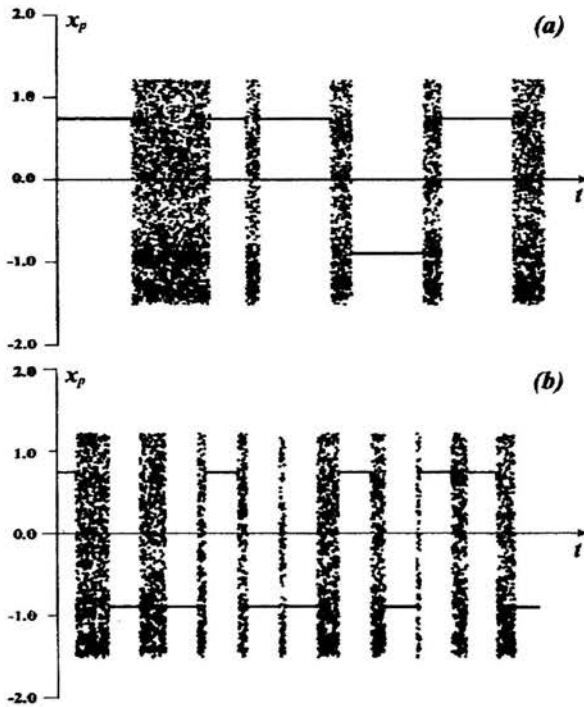
Rys. 15. Częstości próbnych przebiegów czasowych przy granicy intermitentnego przejścia do chaosu

zachowanie się układu jest chaotyczne. Przy tym, czasy trwania zarówno regularnych, jak i chaotycznych składowych tego przebiegu są nieprzewidywalne. Można jednak zauważyć, że w miarę oddalania się parametru ω od ω_{crit} w kierunku obszaru chaotycznego „wybuchy” chaosu w omawianym przebiegu czasowym stają się coraz częstsze i dłuższe, a czasy trwania ruchu okresowego coraz krótsze.

Aby zilustrować przebiegi czasowe w dłuższym czasie, zastosujemy i tutaj metodę odwzorowania Poincarégo. Na rys. 17a,b przedstawiony jest przebieg czasowy przemieszczenia Poincarégo $x_p(t)$. Teraz odcinki czasowe ruchu oscylacyjnego T -periodycznego odwzorowane są jako poziome linie, usytuowane w pobliżu $x_p = +1$ lub $x_p = -1$, a „wybuchy”



Rys. 16. Przebiegi czasowe ruchu układu przy intermitentnym przejściu do chaosu, dla częstości oznaczonych na rys. 15; (a) $\omega = \omega_1$; (b) $\omega = \omega_2$;

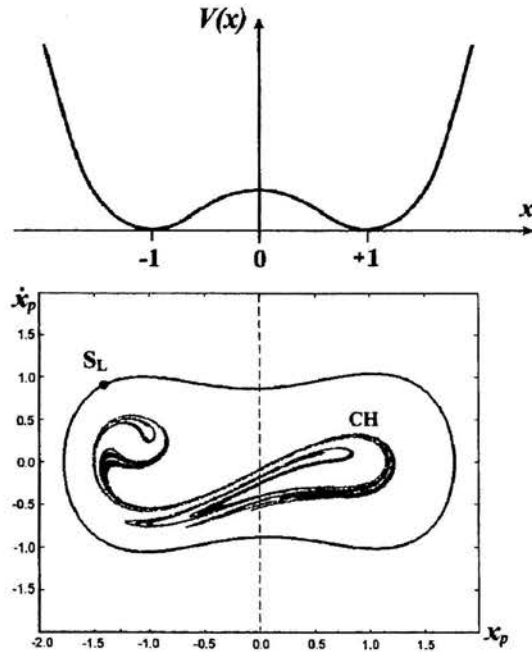
Rys. 16 - c.d. (c) $\omega = \omega_3$.Rys. 17. Ilustracja intermitencyjnego przejścia do chaosu za pomocą odwzorowania Poincarégo;
(a) $\omega = \omega_2$; (b) $\omega = \omega_3$;

chaosu międzydołkowego - jako zakropkowane, prawie zaczernione pasy pionowe, obejmujące oba „dołki” ($x_{p_{\max}} \cong +1.2$, $x_{p_{\min}} \cong -1.5$). Opiswane zjawisko jako jedna z możliwych „dróg do chaosu”, nosi nazwę *intermitencji*.

Przejdźmy teraz do zbadania nieznanego dotąd atraktora S_L .

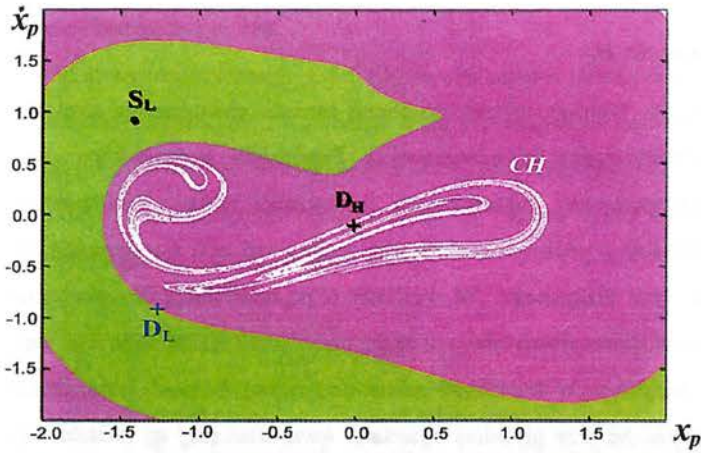
10. Duża Orbita i kryzys brzegowy chaotycznego atraktora „międzydołkowego”

Wybieramy parametry F i ω z obszaru, gdzie atraktor chaotyczny współlistnieje z atraktorem S_L i przedstawiamy oba atraktory na rys. 18. Na płaszczyźnie Poincarégo $x_p - \dot{x}_p$ widzimy „międzydołkowy” atraktor chaotyczny o kształcie podobnym do tego na rys. 13, oraz atraktor T -periodyczny S_L , dla którego oprócz odwzorowania Poincarégo (jeden punkt) rysujemy również pełny portret fazowy. Widzimy, że przy tak dużych wartościach amplitudy wymuszenia F nasz układ może wykonywać regularny T -periodyczny ruch drgający o wychyleniach większych od wychyleń podczas „międzydołkowego” ruchu chaotycznego. To tak, jakby układ „nie zwracał już uwagi” na istniejącą barierę potencjału (maksimum energii potencjalnej) między dwoma „dołkami”.



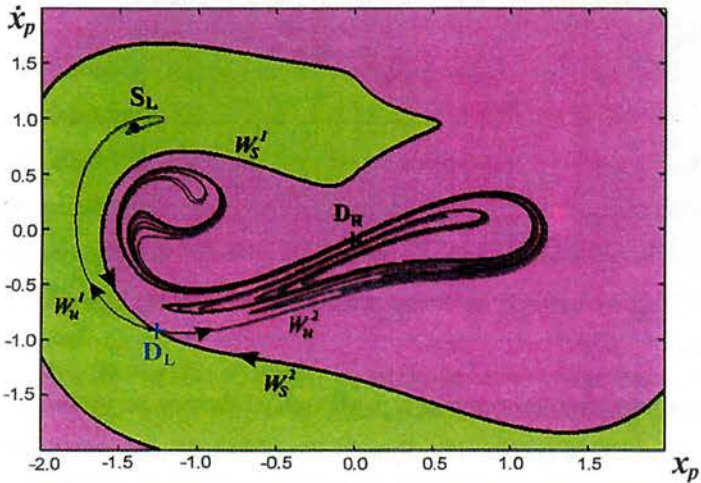
Rys. 18. Krzywa energii potencjalnej oraz dwa współlistniejące atraktory „międzydołkowe” - Duża Orbita S_L i atraktor chaotyczny CH

Popatrzmy teraz na obszary przyciągania tych dwóch współlistniejących atraktorów - rys. 19a. Atraktor S_L , nazywany też „Dużą Orbitą”, reprezentowany tu jest przez jeden punkt, a jego obszar przyciągania oznaczony jest kolorem zielonym. Chaotyczny atraktor „międzydołkowy” CH ma kolor biały, a jego obszar przyciągania - kolor różowy. Dla naszych dalszych rozważań istotne jest, że na granicy tych obszarów przyciągania leży punkt D_L , reprezentujący niestateczne rozwiązanie (siodło) T -periodyczne.



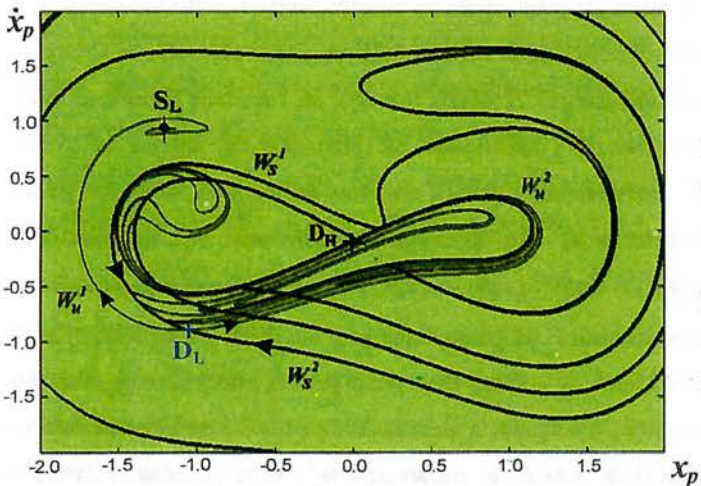
(a) obszary przyciągania atraktorów „międzydołkowych” - Dużej Orbitsy S_L (zielony) oraz atraktora chaotycznego (różowy); atraktor chaotyczny CH oznaczony jest kolorem białym.

$$F = 0.144, \omega = 0.730$$



(b) obszary przyciągania atraktorów „międzydołkowych” oraz rozmaitości staceczne W_s^1, W_s^2 i niestaceczne W_u^1, W_u^2 siódła D_L przed bifurkacją homokliniczną tego siódła;

$$F = 0.144, \omega = 0.730$$



(c) obszar przyciągania Dużej Orbitsy S_L (zielony) oraz rozmaitości staceczne W_s^1, W_s^2 i niestaceczne W_u^1, W_u^2 siódła D_L po bifurkacji homoklinicznej tego siódła (t.j. po kryzysie atraktora chaotycznego CH);

$$F = 0.144, \omega = 0.689$$

Rys. 19.

Bifurkacja homokliniczna siodła D_L

Wróćmy na chwilę do rys. 10. Widzimy na nim, że obszar istnienia chaotycznego atraktora „międzydołkowego” kończy się nagle wzdłuż linii oznaczonej cr_2 . Pamiętajmy, że rysunek ten został uzyskany na drodze symulacji komputerowej. Pokażemy teraz, że scenariusz znikania tego atraktora jest tu zupełnie inny, niż (omówiony w poprzednim rozdziale) wzdłuż linii snd , a mianowicie, że obserwujemy tu scenariusz *kryzysu brzegowego*. W rozdziale 6 postugiwalismy się pierwotną definicją kryzysu jako zderzenia atraktora chaotycznego z orbitą niestateczną leżącą na brzegu jego obszaru przyciągania (orbitę tę nazywa się w literaturze *siodłem niszczącym*). W latach późniejszych pokazano, że to „zderzenie” zachodzi przy globalnej *bifurkacji homoklinicznej* tej niestatecznej orbity. W naszym przypadku tą orbitą na brzegu (siodłem niszczącym) jest siodło D_L .

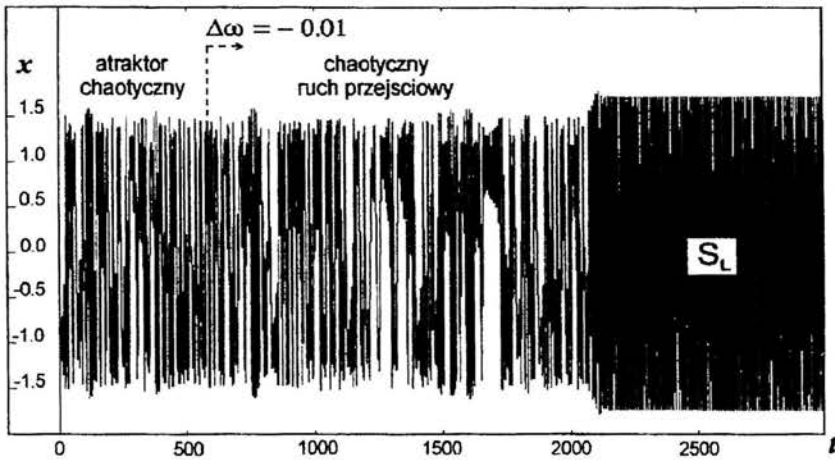
Pamiętamy, że globalna bifurkacja homokliniczna danego siodła zachodzi wtedy, gdy rozmaitości stateczne i niestateczne tego siodła stają się do siebie styczne, a następnie przecinają się wiele razy (nieskończenie wiele przy $t \rightarrow \infty$) [25]. Wyznaczając numerycznie rozmaitości siodła D_L można znaleźć krytyczne wartości parametrów F, ω , przy których stają się one styczne. Obliczenia te wskazują, że istotnie bifurkacja homokliniczna siodła D_L zachodzi przy wartościach parametrów F, ω odpowiadających linii cr_2 , linii wyznaczonej na drodze symulacji komputerowej jako granica istnienia atraktora chaotycznego.

Zjawisko kryzysu brzegowego atraktora chaotycznego w powiązaniu z bifurkacją homokliniczną siodła niszczącego D_L zilustrowane jest na rys.19a -19c. Rysunki 19a i 19b wykonane zostały dla tych samych parametrów F, ω przed kryzysem atraktora chaotycznego ($F = 0.144, \omega = 0.730$); przedstawiają one zarówno obszary przyciągania współistniejących atraktorów - Dużej Orbity S_L (obszar zielony) oraz atraktora chaotycznego CH (obszar różowy), jak i strukturę rozmaitości siodła D_L . Widzimy, że rozmaitości stateczne i niestateczne nie przecinają się, ani nie są styczne. Rozmaitości stateczne W_s^1, W_s^2 pokrywają się z granicą obszarów przyciągania, która jest gładką, ciągłą krzywą. Rozmaitość niestateczna W_u^1 dąży do atraktora periodycznego S_L ; natomiast druga rozmaitość niestateczna W_u^2 , dążąc do atraktora chaotycznego, przybiera strukturę tego atraktora.

Rysunek 19c odpowiada parametrom F, ω po przekroczeniu bifurkacji homoklinicznej siodła D_L ($F = 0.144, \omega = 0.689$). Widzimy, że atraktor chaotyczny już nie istnieje; został zniszczony wraz ze swoim (różowym) obszarem przyciągania, a rozmaitości stateczne i rozmaitość niestateczna W_u^2 siodła D_L przecinają się. Jednak rozmaitość niestateczna W_u^2 , która poprzednio dążyła do atraktora chaotycznego, nadal wygląda niemal identycznie jak ten chaotyczny atraktor, zaznaczony

kolorem białym na rys. 19a.

Sprawa geometrycznego podobieństwa obu struktur (atraktora chaotycznego i dążącej do niego rozmaitości niestatecznej), rozważana ściśle w kategoriach matematycznych, jest poza zakresem obecnego opracowania. W naszych badaniach komputerowych fakt ten prowadzi do wniosku, że po bifurkacji homoklinicznej ruch przejściowy może mieć charakter *przejściowego ruchu chaotycznego*. Zjawisko to ilustruje rys. 20.



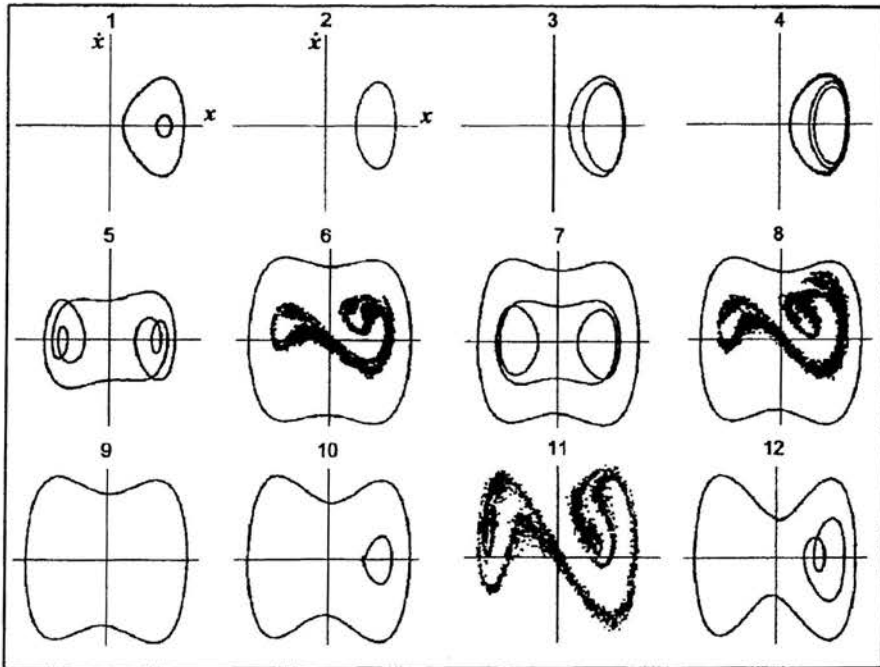
Rys. 20. Przykład przejściowego przebiegu czasowego po utracie stateczności chaotycznego atraktora „międzydółkowego”, wywołanej małą zmianą częstotliwości wymuszenia $\Delta\omega$

Widzimy tu przebieg czasowy ruchu układu $x = x(t)$ w pobliżu granicy utraty stateczności atraktora chaotycznego. Najpierw ruch odbywa się na atraktorze chaotycznym ($0 < t < 500$), następnie wprowadzamy nagłą, małą zmianę częstotliwości wymuszenia ($\Delta\omega \cong -0.01$) tak, by układ znalazł się poza granicą kryzysu tego atraktora. Nadal jednak widzimy przez pewien, dość długi czas ten sam typ ruchu chaotycznego. Jest to chaos przejściowy, gdyż atraktor chaotyczny został już zniszczony. Przy $t \cong 2000$ chaos przejściowy nagle znika, i ruch układu stabilizuje się na jedynym istniejącym atraktorze układu, t.j. na T -periodycznej Dużej Orbitcie S_L .

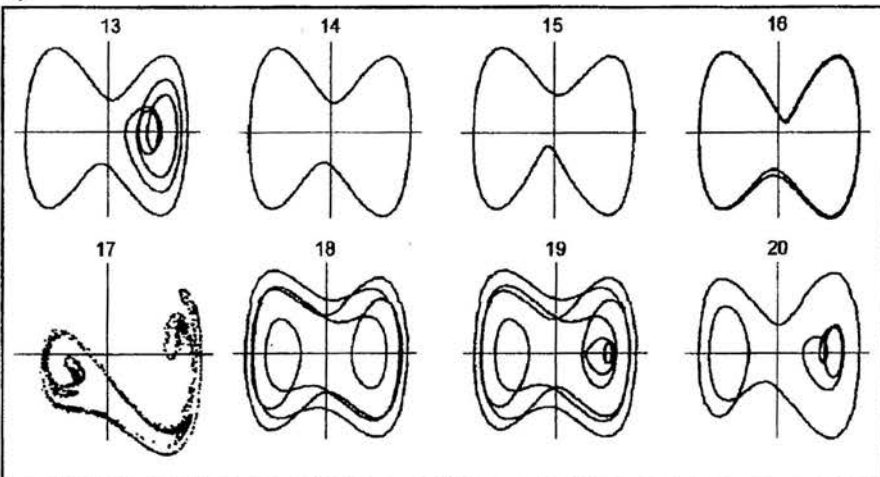
Omawiany układ drgający, nazywany tu „układem dwudółkowym”, charakteryzuje się ogromną różnorodnością zjawisk bifurkacyjnych i chaotycznych. Omówiliśmy kilka z nich, ale tylko w wąskim zakresie parametrów wymuszenia F , ω objętych wykresem przedstawionym na rys. 10. Warto zatem spojrzeć na zbiór różnorodnych możliwych atraktorów tego układu w nieco szerszym zakresie częstotliwości wymuszenia.

11. Różnorodne typy atraktorów układu „dwudołkowego”

Atraktory układu w malejącym zakresie częstości od $\omega = 1.0$ do $\omega = 0.30$ przedstawiamy na zbiorczym rysunku (rys. 21). Dla większej jasności, atraktory periodyczne przedstawione tu są w postaci pełnych portretów fazowych, a atraktory chaotyczne - w postaci ich odwzorowań Poncarégo. Atraktory oznaczone punktami 1, 2,, 11 występują przy wartościach F , ω oznaczonych tymi samymi liczbami na rys. 10. Punkt 1 odpowiada małym wartościom F , gdyż ilustruje on współistnienie T -periodycznych atraktorów rezonansowych i nierezonansowych ($F = 0.06$, $\omega = 0.74$); punkt 11 odpowiada obszarowi w którym istnieje tylko atraktor chaotyczny ($F = 0.1$, $\omega = 0.74$). Pozostałe atraktory znajdujemy przy większej wartości $F = 0.17$. I tak w punkcie 2 otrzymujemy atraktor rezonansowy, punkty 3 i 4 ilustrują jego dwie kolejne bifurkacje podwojenia okresu. Punkt 5 przedstawia portret fazowy w „oknie periodycznym” wewnątrz obszaru chaosu międzydołkowego; jest to również ruch „międzydołkowy”, w którym oscylacje i przeskoki przez barierę potencjału są tak zsynchronizowane, że w efekcie powstaje ruch periodyczny o okresie $5T$. Następnie w punkcie 6 widzimy już dwa współistniejące atraktory: międzydołkowy atraktor chaotyczny oraz T -periodyczną Dużą Orbitę. Przy dalszym zmniejszaniu częstości znajdujemy się znowu w „oknie periodycznym” chaosu międzydołkowego. W punkcie 7 obserwujemy ruch o okresie $3T$, współistniejący z Dużą Orbitą. W punkcie 8 znów widzimy chaotyczny atraktor międzydołkowy i Dużą Orbitę, dalej (punkt 9) jest już tylko Duża Orbita. Punkt 10 leży już poza linią bifurkacji siodłowo-węzłowej atraktora oscylacyjnego S_n , a więc Duża Orbita współistnieje tu z T -periodycznym atraktorem nierezonansowym. Dalsze punkty 12-20 leżą już poza obszarem głównego rezonansu i przedstawiają one kolejno: Dużą Orbitę i atraktor S_n po jego pierwszej (punkt 12) i po drugiej (punkt 13) bifurkacji podwojenia okresu. Punkty 14-15 obejmują obszar częstości, w którym znów istnieje tylko Duża Orbita. Przy dalszym zmniejszaniu częstości ω atraktor ten najpierw staje się niesymetryczny, a następnie ulega bifurkacji podwojenia okresu (punkt 16, $\omega \cong 0.405$). W efekcie następującej po tym kaskady bifurkacji podwojenia okresu z Dużej Orbitsy powstaje chaotyczny atraktor „międzydołkowy” (punkt 17, $\omega \cong 0.400$). Atraktor ten szybko zostaje zniszczony, a na jego miejscu pojawia się para periodycznych atraktorów międzydołkowych o okresach będących wielokrotnością okresu T (punkty 18 i 19). Po sekwencji dalszych bifurkacji, w układzie współistnieją znów dwa atraktory: międzydołkowy i jednodółkowy, lecz również subharmoniczne (punkt 20, $\omega \cong 0.30$).



a)



b)

Rys. 21. Różnorodne typy atraktorów układu „dwudółkowego”
(punkty 1 - 11 oznaczone są na rys. 10)

Literatura

- [1] *Chaos w nieliniowej mechanice*. Praca IPPT 28/1985, praca zbiorowa pod red. W. Szemplińskiej-Stupnickiej, Warszawa 1985.
- [2] *Drgania i Fale*. Praca zbiorowa pod red. S. Kaliskiego. PWN, Warszawa 1986.
- [3] Grebogi, C., Ott, E. and Yorke, J.A., Crises, sudden changes in chaotic attractors and transient chaos, *Physica D*7, 181-200, 1983.
- [4] Guckenheimer, J. and Holmes, P.J., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [5] Gutowski, R., *Równania różniczkowe zwyczajne*. WNT, Warszawa 1971.
- [6] Hayashi, Ch., *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. Princeton University Press, Princeton, N.J. 1964, 1985 (wydanie polskie: *Drgania nieliniowe w układach fizycznych*, WNT, Warszawa 1968).
- [7] Holmes, P.J., A nonlinear oscillator with a strange attractor. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, **A292**(1394), 419-448, 1979.
- [8] Kudrewicz, J., *Fraktale i chaos*. WNT, Warszawa 1993.
- [9] Mandelbrodt, B., *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman, San Francisco 1982.
- [10] McDonald, S.W., Grebogi, C., Ott, E. and Yorke, J.A., Fractal basin boundaries, *Physica D*17, 125-153, 1985.
- [11] Moon, F.C., Experiments on chaotic motion of a forced nonlinear oscillator - strange attractors. *ASME J. of Applied Mechanics*, **47**, 638-644, 1980.
- [12] Moon, F.C., *Chaotic Vibrations, An Introduction for Applied Scientists and Engineers*. John Wiley & Sons, New York, 1987.
- [13] Moon, F.C. and Holmes, P.J., A magnetoelastic strange attractor. *J. Sound and Vibration*, **65**(2), 275-296, 1979.
- [14] Nusse, H.E. and Yorke, J.A. *Dynamics: Numerical Explorations*. 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1998.
- [15] Ott, E., *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge 1993 (wydanie polskie: *Chaos w układach dynamicznych*, WNT, Warszawa 1997).
- [16] Stewart, I., *Does God Play Dice? The New Mathematics of Chaos*. Penguin Books, London 1990 (wydanie polskie: *Czy Bóg gra w kości? Nowa matematyka chaosu*, PWN, Warszawa 1994).
- [17] Szemplińska-Stupnicka, W., *The Behavior of Nonlinear Vibrating Systems; vol. I - Fundamental Concepts and Methods: Applications to Single-Degree-of-Freedom Systems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
- [18] Szemplińska-Stupnicka, W. and Rudowski, J., Steady-states in the twin-well potential oscillator: Computer simulations and approximate analytical studies. *CHAOS, Int. J. Nonlinear Science*, **3**(3), 375-385, 1993.

- [19] Szemplińska-Stupnicka, W. and Janicki, K.L., Basin boundary bifurcations and boundary crisis in the twin-well Duffing oscillator: scenarios related to the saddle of the large resonant orbit. *Int. J. Bifurcation and Chaos* 7(1), 129-146, 1997.
- [20] Szemplińska-Stupnicka, W. and Tyrkiel, E., Sequences of global bifurcations and the related outcomes after crisis of the resonant attractor in a nonlinear oscillator. *Int. J. Bifurcation and Chaos* 7(11), 2437-2457, 1997.
- [21] Szemplińska-Stupnicka, W., Zubrzycki, A. and Tyrkiel, E., Properties of chaotic and regular boundary crisis in dissipative driven nonlinear oscillators, *Nonlinear Dynamics*, 19, 19-36, 1999.
- [22] Szemplińska-Stupnicka, W., Tyrkiel, E. and Zubrzycki, A., The global bifurcations that lead to transient tumbling chaos in a parametrically driven pendulum, *Int. J. Bifurcation and Chaos* 10(9), 2161-2175, 2000.
- [23] Szemplińska-Stupnicka, W., Tyrkiel, E. and Zubrzycki, A., On the stability „in the large” and unsafe initial disturbances in a nonlinear oscillator, *Computer Assisted Mech. Engng. Sci.*, 8, 155-168, 2001.
- [24] Szemplińska-Stupnicka, W. and Tyrkiel, E., The oscillation-rotation attractors in a forced pendulum and their peculiar properties, to be published in *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2001.
- [25] Szemplińska-Stupnicka, W. i Tyrkiel, E., Bifurkacje, chaos i fraktale w dynamice wahadła. Praca IPPT 2/2001, Warszawa, 2001.
- [26] Szlenk, W., *Wstęp do teorii gładkich układów dynamicznych*. PWN, Warszawa 1982.
- [27] *The Science of Fractal Images*. Praca zbiorowa pod red. H.O. Peitgen i D. Saupe. Springer-Verlag, New York 1988.
- [28] Thompson, J.M.T. and Stewart, H.B., *Nonlinear Dynamics and Chaos*. John Wiley & Sons, Chichester 1986.
- [29] Thompson, J.M.T., Stewart, H.B. and Ueda, Y., Safe, explosive and dangerous bifurcations in dissipative dynamical systems, *Phys. Rev.*, E 49 (2), 1019-1027, 1994.
- [30] Tyrkiel, E., Szemplińska-Stupnicka, W. and Zubrzycki, A., On the boundary crises of chaotic attractors in nonlinear oscillators, *Computer Assisted Mech. Engng. Sci.*, 7, 743-755, 2000.
- [31] Ueda, Y., Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffing's equation, *J. Stat. Phys.*, 20(2), 181-196, 1979.
- [32] Ueda, Y., Steady motions exhibited by Duffing's equation: a picture book of regular and chaotic motions, in *New Approaches to Nonlinear Problems in Dynamics*, ed. P.J. Holmes, SIAM, Philadelphia, 1980, pp. 331-322.
- [33] Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, New York, 1990.

Spis treści

1. Wstęp	3
2. Model układu „dwudołkowego”	4
3. Oscylacyjny ruch kulki wokół „dołka” potencjału	7
4. Kryterium Mielnikowa jako kryterium chaotyczności układu	10
5. Nieprzewidywalność stanu końcowego ruchu układu	12
6. Kryzys brzegowy chaotycznego atraktora oscylacyjnego	14
7. Trwały chaos międzydołkowy	17
8. Wykładniki Lapunowa	20
9. Intermitencyjne przejście do chaosu	21
10. Duża Orbita i kryzys brzegowy chaotycznego atraktora „międzydołkowego”	24
11. Różnorodne typy atraktorów układu „dwudołkowego”	28
Literatura	30