

**W. Szemplińska-Stupnicka
E. Tyrkiel**

**BIFURKACJE, CHAOS I FRAKTALE
W DYNAMICE WAHADŁA**

2/2001



WARSZAWA 2001

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 3 kwietnia 2001 r.

Praca recenzowana



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 1,5 Ark. druk. 2,0
Oddano do drukarni w maju 2001 r.

ATOS - Poligrafia-Reklama, W-wa, ul. Jana Kazimierza 35/37

Wanda SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA
Elżbieta TYRKIEL
Samodzielna Pracownia Dynamiki Stosowanej

BIFURKACJE, CHAOS I FRAKTALE W DYNAMICE WAHADŁA

Od Autora

Opracowanie materiału przedstawionego w tym zeszycie zostało poprzedzone bogatym doświadczeniem dydaktycznym, studiami literatury naukowej na temat zjawisk drgań chaotycznych w układach fizycznych oraz publikacjami serii oryginalnych prac naukowych w międzynarodowych czasopismach naukowych. Dodatkowym, ale bardzo istotnym doświadczeniem były seminaria, referaty lub krótkie serie wykładów, przedstawiane zarówno w IPPT PAN, jak i na wyższych uczelniach dla tych środowisk naukowych, których zainteresowanie zjawiskami drgań chaotycznych w prostych deterministycznych układach nie było poprzedzone systematycznymi studiami na ten temat. Ograniczony czas seminarium lub referatu na konferencji naukowej dawał tu bodźce do przemyślenia, jaką wybrać metodę referowania materiału tak, by trafił on do wyobraźni i przekonania słuchaczy w sposób prosty, a zarazem pobudził ich zainteresowanie i zachęcał do głębszego studiowania przedmiotu. Ten kierunek myślenia doprowadził do spostrzeżenia, że w tej nieuchwytniej matematycznie dziedzinie dobrą metodą jest przedstawienie zarówno zagadnień podstawowych, jak i zaawansowanych, przy maksymalnym wykorzystaniu interpretacji geometrycznej. Interpretacja ta posługuje się w dużej mierze rysunkami: zarówno wykresami schematycznymi, jak i graficzną interpretacją wyników obliczeń komputerowych.

Po wygłoszeniu referatów na temat własnych wyników w dziedzinie drgań chaotycznych na konferencjach krajowych, często padało pytanie o literaturę podstawową na te tematy. Chodziło oczywiście o książkę dostępną w Polsce, i to książkę nadającą się do wstępnego zapoznania się z przedmiotem. Najczęściej odpowiadałam wtedy, że najlepiej zacząć od książki F. Moona pt. *Chaotic vibrations, an introduction for applied scientists and engineers* [1], aczkolwiek zdawałam sobie sprawę, że książka ta nie jest powszechnie dostępna w Polsce. Poza tym jest ona dość obszerna, a przedstawiony materiał jest tak poszatkowany na dużą liczbę rozdziałów, że przestudiowanie jej wcale nie jest łatwe. Istnieje jednak pierwsza wersja tej książki o mniejszej objętości. Otóż, jak pisze prof. Moon we wstępie, bodźcem do napisania tej książki było zaproszenie Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN w roku 1984 do wygłoszenia 8 godzin wykładów na temat drgań chaotycznych, i że książka ta jest właśnie rozszerzeniem tematu tych wykładów. Tak więc, pierwszą, krótszą wersję książki F. Moona można znaleźć w zeszycie Prace IPPT 28/1985 pt. *Chaos w nieliniowej mechanice* [2], zawierającym prace przygotowane na konferencję szkoleniową pod tym samym tytułem, która odbyła się w Jabłonie w dniach 12-17 sierpnia 1984 r.

W latach późniejszych ukazały się polskie tłumaczenia niektórych książek opartych na materiale pełnych cykli wykładów, przeważnie na studiach doktoranckich. Wymienię tu przede wszystkim książkę H.G. Schustera pt. *Chaos deterministyczny* [3] oraz E. Otta pt. *Chaos w układach dynamicznych* [4], obie ukierunkowane na studia fizyczne. Warta uwagi jest książka J. Kudrewicza

pt. *Fraktale i chaos* [5]. Z powszechnym zainteresowaniem spotkała się książka popularno-naukowa I. Stewarta pod intrygującym tytułem *Czy Bóg gra w kości?* [6].

Przedstawione rozważania na temat książek dostępnych w Polsce zarówno na rynkach księgarskich, jak i w bibliotekach naukowych, jak również własne doświadczenia dydaktyczne doprowadziły do wniosku, że warto pokusić się o upowszechnienie wiedzy na temat drgań chaotycznych w deterministycznych prostych oscylatorach przez opracowanie publikacji ujmującej tematykę w zupełnie inny sposób niż klasyczne ujęcie podręcznikowe. Ten inny sposób polega m.in. na:

- skierowaniu uwagi czytelnika na jeden, a w dalszej kolejności na następne, dobrze znany deterministyczny model dysypatywnego układu drgającego o jednym stopniu swobody; model, który można sprowadzić do modelu fizycznego kulki poruszającej się po wyznaczonym torze pod działaniem znanych i ciągłych w opisie matematycznym sił. A ponieważ trudno o bardziej znany układ drgający zbadany doświadczalnie niż wahadło matematyczne poddane działaniu zewnętrznego periodycznego wymuszenia, przedstawiony zeszyt dotyczy właśnie tego układu;
- przypomnieniu najpierw własności układu liniowego, a dalej słabo nieliniowego, przez pryzmat wyników badań doświadczalnych i komputerowych, bez stosowania wzorów i przekształceń matematycznych. Następnie, w miarę zwiększania amplitudy wymuszenia i zbliżania się do zjawisk o charakterze chaotycznym, wyjaśnieniu i interpretowaniu pojawienia się takich zjawisk jak bifurkacje lokalne, granice obszarów przyciągania itd., również w interpretacji geometrycznej. Nie odrywamy tu uwagi czytelnika pokazując np. pełną klasyfikację różnych typów stateczności i niestateczności punktów równowagi (osobliwych), czy pełnej listy różnorodnych typów bifurkacji. Czytelnik obserwuje tylko te zjawiska, które się pojawiają w rozważanej dynamice wahadła;
- oddzieleniu od tekstu podstawowego tych fragmentów, które można ominąć przy pierwszym czytaniu. Fragmenty te (pisane mniejszą czcionką) zawierają rozszerzenie materiału, przedstawiając zarówno uwagi na temat tych problemów, które nie występują w dynamice wahadła, jak i pewne dodatkowe uwagi teoretyczne, odsyłając czytelnika do odnośnej literatury;
- ujęciu w ten prosty sposób również zaawansowanych problemów i najnowszych wyników dotyczących związku między teoretycznym pojęciem globalnej bifurkacji a fraktalną strukturą granic obszarów przyciągania, zjawiskiem chaosu przejściowego i wrażliwością na warunki początkowe;
- połączeniu w jedną całość koncepcji drgań chaotycznych i fraktali, poprzez pokazanie fraktalnej struktury dziwnego (chaotycznego) atraktora.

Część przedstawionych wyników została opublikowana w czasopismach *International Journal of Bifurcation and Chaos*, *Nonlinear Dynamics* oraz *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences* w latach 1997-2001, a część została wykonana dla potrzeb niniejszego opracowania. Wszystkie obliczenia komputerowe i graficzne opracowanie wyników wykonane zostały przez dr Elżbietę Tyrkiel, współautorkę niniejszej publikacji.

Wanda Szemplińska-Stupnicka

1. Wahadło matematyczne: równanie ruchu, drgania liniowe i nieliniowe

Przeprowadźmy doświadczenie posługując się wahadłem przedstawionym na rys. 1. Wahadło to składa się z ciężkiej, metalowej kulki o masie m , zawieszony na sztywnym i bardzo lekkim pręcie o długości l . Pręt ten osadzony jest na poziomej osi O . Tak więc kulka może poruszać się po okręgu w płaszczyźnie pionowej, a jej położenie możemy określić podając kąt odchylenia pręta od dolnego położenia - oznaczony jako x . Na układ działa siła ciężkości kulki mg , siły oporu ruchu P_t oraz moment sił zewnętrznych przyłożonych do osi obrotu $M(\tau)$. Tak zbudowany model mechaniczny stwarza dobre przybliżenie zarówno wahadła matematycznego, jak i urządzeń technicznych jakie widzimy w otaczającym nas świecie.

Zamiast przeprowadzania doświadczenia fizycznego dogodnie jest posłużyć się „doświadczeniem komputerowym”. Jak zobaczymy poniżej, podejście komputerowe daje nam możliwość zbadania również, bardzo istotnych w ogólnej analizie, rozwiązań niestacycznych, t.j. tych rozwiązań, których nie można zrealizować w żadnego typu doświadczeniu.

Aby zrealizować podejście komputerowe do zbadania dynamiki wahadła, musimy znać prawo rządzące ruchem, t.j. równanie ruchu wahadła. Równanie to znajdziemy bezpośrednio stosując do masy m , potraktowanej jako punkt materialny, drugie prawo Newtona:

$$m\bar{a} = \bar{F}, \quad (1)$$

gdzie \bar{a} - przyspieszenie liniowe, a \bar{F} - suma sił zewnętrznych.

W modelu wahadła przedstawionego na rys. 1 równanie ruchu przybiera postać:

$$ml \frac{d^2 x}{d\tau^2} = -mg \sin x - P_t + \frac{M(\tau)}{l}. \quad (2)$$

Założymy przy tym, że przyłożony moment sił zewnętrznych jest harmoniczną funkcją czasu:

$$M(\tau) = M_0 \cos \bar{\omega} \tau,$$

natomiast opór powietrza oraz inne opory ruchu są proporcjonalne do prędkości ruchu kulki:

$$P_t = \bar{h} \frac{dx}{d\tau}.$$

Aby zredukować liczbę niezależnych parametrów w równaniu ruchu, wprowadzimy bezwymiarowy czas t i bezwymiarową częstość wymuszenia ω , przyjmując je w postaci:

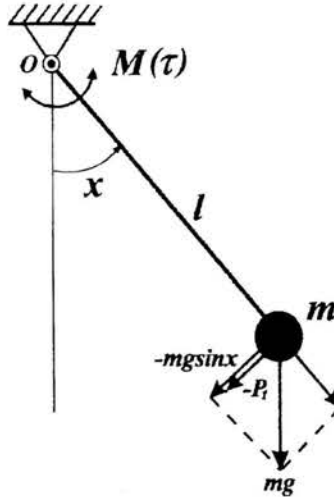
$$t = \tau \bar{\Omega}_0, \quad \omega = \frac{\bar{\omega}}{\bar{\Omega}_0},$$

gdzie wielkość $\bar{\Omega}_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ jest częstością własną małych drgań wahadła.

Wprowadzenie oznaczeń

$$h = \frac{\bar{h}}{ml\bar{\Omega}_0}, \quad F = \frac{M_0}{mgl},$$

pozwoli sprowadzić równanie (2) do postaci bezwymiarowej, w której częstość własna małych drgań wahadła zostanie zredukowana do wartości równej 1.



Rys. 1. Model wahadła matematycznego

Po przekształceniach równanie ruchu (1) przybiera formę równania różniczkowego drugiego rzędu z harmonicznym wymuszeniem zewnętrznym:

$$\ddot{x} + \Omega_0^2 \sin x + h\dot{x} = F \cos \omega t, \quad (3)$$

gdzie $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$, $\Omega_0^2 = 1$.

W równaniu tym współczynnik h jest współczynnikiem tłumienia, a F oraz ω reprezentują odpowiednio amplitudę i częstość siły wymuszającej.

Przypomnijmy teraz, że przy bardzo małych odchyleniach wahadła od dolnego położenia funkcję $\sin x$ można zastąpić przez jej pierwszy wyraz w rozwinięciu Taylora:

$$\sin x \cong x, \quad \text{gdzie } x - \text{bardzo małe,}$$

a tym samym nieliniowe równanie (2) staje się równaniem liniowym:

$$\ddot{x} + \Omega_0^2 x + h\dot{x} = F \cos \omega t. \quad (4)$$

Pamiętamy, że liniowe równania różniczkowe o stałych współczynnikach posiadają rozwiązania analityczne w zamkniętej formie, a zatem ich zbadanie nie sprawia trudności. Zanotujemy tu najważniejsze własności ruchu układu (4):

- przy $F = 0$ i $h = 0$, po odchyleniu od położenia równowagi $x = \dot{x} = 0$ układ wykonuje ruch drgający sinusoidalny z częstością Ω_0 , przy którym czas jednego „wahnięcia”, t.j. okres ruchu periodycznego, wynosi:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0};$$

- przy $F = 0$, ale przy małym tłumieniu ($h > 0$, małe), drgania te (drgania własne) stopniowo zanikają i po dłuższym okresie czasu układ powraca do stanu równowagi, t.j. do $x = \dot{x} = 0$;
- przy małym tłumieniu i $F > 0$, po zaniknięciu drgań własnych, układ wykonuje drgania harmoniczne o częstotliwości siły wymuszającej:

$$x(t) = a \cos(\omega t + \varphi),$$

gdzie a, φ - pewne stałe wyznaczone analitycznie. Przy **rezonansie**, t.j. gdy częstotliwość drgań układu ω jest bliska częstotliwości własnej, amplituda a osiąga największą wartość - rys. 2, krzywa ①.

W układzie liniowym obowiązuje zasada superpozycji, zgodnie z którą ogólne rozwiązanie nieautonomicznego równania (3) składa się z rozwiązania układu autonomicznego i całki szczególnej równania pełnego:

$$x(t) = A e^{-\frac{h}{2}t} \cos(\Omega_d t + \Theta) + a \cos(\omega t + \varphi),$$

gdzie stałe A i Θ zależą od warunków początkowych, a stałe a i φ są wyznaczone przez parametry układu:

$$a = a(\omega, F, h), \quad \varphi = \varphi(\omega, F, h).$$

Pierwszy człon rozwiązania reprezentuje tu drgania własne, a drugi człon - drgania wymuszone.

Przy nieco większych wartościach x , gdy funkcję $\sin x$ można aproksymować dwoma wyrazami szeregu Taylora, równanie (3) przybiera postać:

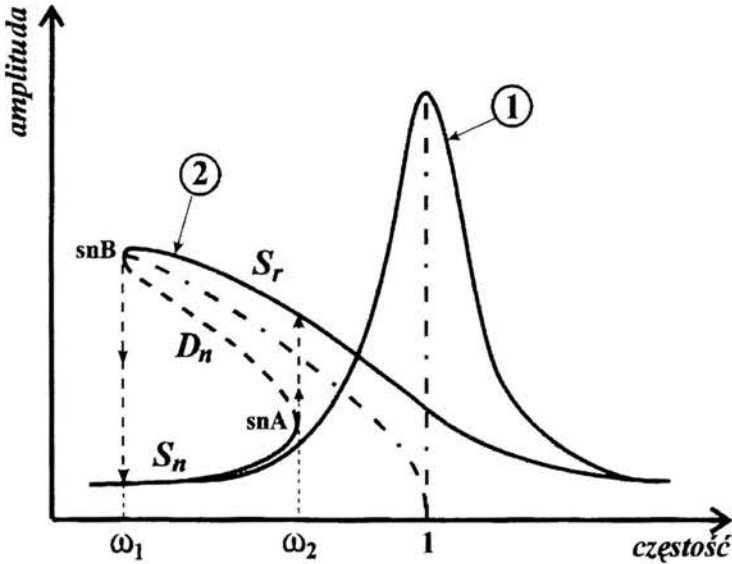
$$\ddot{x} + h\dot{x} + \Omega_0^2 x - \frac{1}{6} \Omega_0^2 x^3 = F \cos \omega t.$$

Układ staje się „slabo nieliniowy” i nie posiada już rozwiązań w postaci zamkniętej. W wielu książkach poświęconych drganiom nieliniowym układy takie badano za pomocą analitycznych metod przybliżonych (np. [7], [8]). W układzie tym, w pobliżu głównego rezonansu, drgania układu nadal są bliskie drganiom sinusoidalnym o częstotliwości wymuszenia. Pojawiają się jednak pierwsze efekty nieliniowości - krzywe rezonansowe, t.j. **krzywe amplitudowo-częstotściowe** zaczynają być pochylone w lewo, w kierunku mniejszych częstotliwości - rys. 2, krzywa ②. Widzimy tu, że w zakresie częstotliwości wymuszenia

$$\omega_1 < \omega < \omega_2,$$

każdej wartości częstotliwości odpowiadają aż trzy wartości amplitud. Jednak tylko dwie z nich, oznaczone linią ciągłą, mogą realizować się w układzie, t.j. możemy je obserwować w doświadczeniu zarówno komputerowym, jak i fizycznym. Natomiast część krzywej amplitudowo-

częstościowej oznaczona na rys. 2 linią przerywaną odpowiada „rozwiązaniu niestatecznemu”; rozwiązanie to nie może być zrealizowane w doświadczeniu.



Rys. 2. Krzywe rezonansowe układu liniowego (1) oraz słabo nieliniowego (2)

Obserwujemy tu więc nagle, skokowe zmiany typu drgań - przy zmniejszaniu częstości wymuszenia dla wartości ω_1 , a przy zwiększaniu częstości dla wartości ω_2 , następuje skok amplitudy drgań. W rzeczywistości skokowi temu towarzyszy, trwający pewien czas, nieustalony ruch przejściowy układu, po którym ustalają się drgania sinusoidalne z tą samą częstością, ale z amplitudą wyznaczoną przez nową gałąź rozwiązania statecznego.

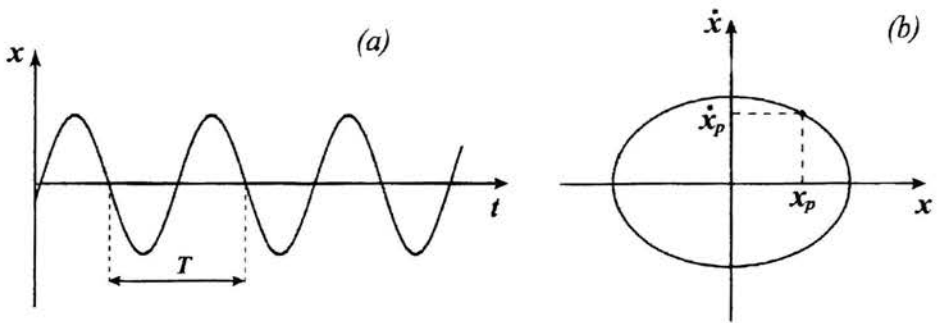
Warto przypomnieć, że w układzie nieliniowym zasada (liniowej) superpozycji nie obowiązuje, zatem drgań nieustalonych nie można już interpretować jako sumy drgań własnych i drgań wymuszonych. Dlatego wprowadzamy tu nazwę *ruch przejściowy*. Wprawdzie można uznać, że pojęcie drgań wymuszonych nadal obowiązuje, jednak przy ruchu układu silnie nieliniowego używany jest powszechnie termin „*ruch na atraktorze*”. Sens tego określenia omawiany będzie w dalszej części pracy.

Te i inne nagłe zmiany charakteru drgań w układach nieliniowych, określane terminem *bifurkacje*, grają bardzo ważną rolę w nieliniowej dynamice i są również przedmiotem analiz teoretycznych. W szczególności, zjawiska towarzyszące przechodzeniu przez punkty *snA* i *snB* określane są jako *bifurkacje siodłowo-węzłowe*.

Aby jasno przedstawić istotę „rozwiązań niestatecznych” oraz zjawisk bifurkacji, posłużymy się interpretacją geometryczną, która pozwoli sprowadzić rozwiązanie periodyczne do rozwiązania stałego w czasie.

2. Metoda mapy Poincarégo

Zacznijmy od różnych form graficznego przedstawienia rozwiązań periodycznych. Przyzwyczajeni jesteśmy do wykresów przebiegu wychyleń w funkcji czasu $x \equiv x(t)$ - rys. 3a. Na razie zakładamy, że okres badanych drgań jest równy okresowi wymuszenia $T = 2\pi/\omega$. Pełniejszy obraz otrzymamy obserwując trajektorie tego ruchu w przestrzeni stanów, t.j. trójwymiarowej przestrzeni o współrzędnych (x, \dot{x}, t) , lecz analiza obrazu trójwymiarowego jest bardzo niedogodna. Zamiast tego możemy obserwować rzut tej trajektorii na płaszczyznę $x - \dot{x}$, otrzymując w ten sposób *portret fazowy* - rys. 3b.

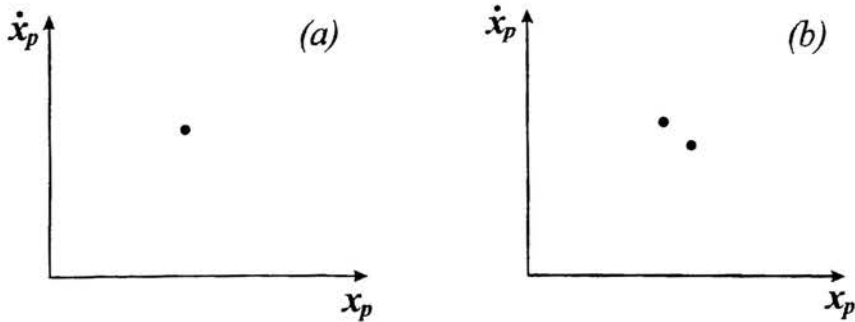


Rys. 3. Graficzna ilustracja ruchu periodycznego; (a) przebieg czasowy, (b) portret fazowy

Jeżeli rozwiązanie $x(t)$ jest sinusoidalne w czasie (jak na rys. 3a), to portret fazowy ma kształt elipsy - rys. 3b. Jeżeli interesuje nas przede wszystkim okres rozwiązania, to możemy jeszcze bardziej uprościć jego interpretację geometryczną, obserwując jedynie obraz uzyskany jakby „przez stroboskop”, t.j. notując wartości (x, \dot{x}) w odstępach czasu równych okresowi wymuszenia T . Tym samym, zamiast rozwiązań w czasie ciągłym, ograniczamy się do obserwacji ciągu czasowego wartości dyskretnych:

$$\begin{aligned} x(0), x(T), x(2T), \dots, x(nT) \\ \dot{x}(0), \dot{x}(T), \dot{x}(2T), \dots, \dot{x}(nT) \end{aligned} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

W rezultacie, zamiast pełnego portretu fazowego rozwiązania T -periodycznego, zaobserwujemy tylko jeden punkt. Punkt ten, którego współrzędne - wychylenie Poincarégo x_p oraz prędkość \dot{x}_p - zaznaczone są na rys. 3b, nazywamy *mapą Poincarégo* rozwiązania T -periodycznego (rys. 4a).



Rys. 4. Mapa Poincarégo rozwiązania: (a) T -periodycznego, (b) $2T$ -periodycznego

Przejdźmy teraz do rozwiązań periodycznych, których okres nie jest równy okresowi wymuszenia. Jeśli badane rozwiązanie ma okres $2T$, a my nadal obserwujemy wartości $x(t)$ i $\dot{x}(t)$ w odstępach czasu $1T$, to mapa Poincarégo będzie składać się z dwóch punktów (rys. 4b). Ogólniej, mapa Poincarégo rozwiązania o okresie nT będzie zawierała n punktów. Zwróćmy jednak uwagę, że mapa Poincarégo informuje nas tylko o okresie rozwiązania, lecz nie daje żadnych informacji, jak skomplikowany jest przebieg rozwiązania w czasie ciągłym.

W tym momencie nasuwa się pytanie: czy jest możliwe, by w tak prostym, deterministycznym, tłumionym układzie, jakim jest rozpatrywane wahadło wymuszone siłą periodyczną, pojawiły się drgania nieperiodyczne, których mapa Poincarégo nie będzie zawierać skończonej liczby punktów, lecz przeciwnie, by liczba tych punktów rosła (teoretycznie) do nieskończoności, w miarę jak czas obliczeń $t \rightarrow \infty$? Odpowiedź brzmi: tak. W dalszych rozważaniach zobaczymy, że mapa Poincarégo mająca tę własność reprezentuje drgania chaotyczne.

Metoda mapy Poincarégo, która sprowadza rozwiązanie T -periodyczne do rozwiązania stałego w płaszczyźnie fazowej $x_p - \dot{x}_p$, jest bardzo dogodna do wyjaśnienia pojęcia stateczności rozwiązań.

3. Stateczne i niestateczne rozwiązania periodyczne (atraktory i siodła)

Fizyczny sens pojęcia „rozwiązanie niestateczne” łatwo uchwycić, jeżeli rozpatrzmy rzeczywiste rozwiązanie stałe, np. rozwiązanie reprezentujące położenie równowagi wahadła tłumionego, na które nie działa siła zewnętrzna, t.j. jeżeli $F = 0$ w równaniu (3). Rozwiązanie to, mające spełniać warunki $\dot{x} = 0$, $x = const$, otrzymamy z warunku:

$$\sin x = 0.$$

Warunek ten jest spełniony dla dwóch położenia wahadła:

- 1) $x = 0$ - reprezentuje dolne położenie równowagi (pozycja wisząca), przy którym energia potencjalna układu osiąga minimum;
- 2) $x = \pm \pi$ - reprezentuje górne położenie wahadła (pozycja odwrócona), przy którym energia potencjalna układu osiąga maksimum.

W oparciu o codzienne doświadczenie nie mamy wątpliwości, że równowagi wahadła w położeniu odwróconym nie da się zrealizować doświadczalnie, i to jest zasadnicza fenomenologiczna cecha rozwiązania niestatecznego. Oczywiście, wszelkie prawa mechaniki i teorii stateczności ruchu potwierdzają ten wniosek, t.j. wykazują, że rozwiązanie reprezentujące odwrócone położenie wahadła jest niestateczne.

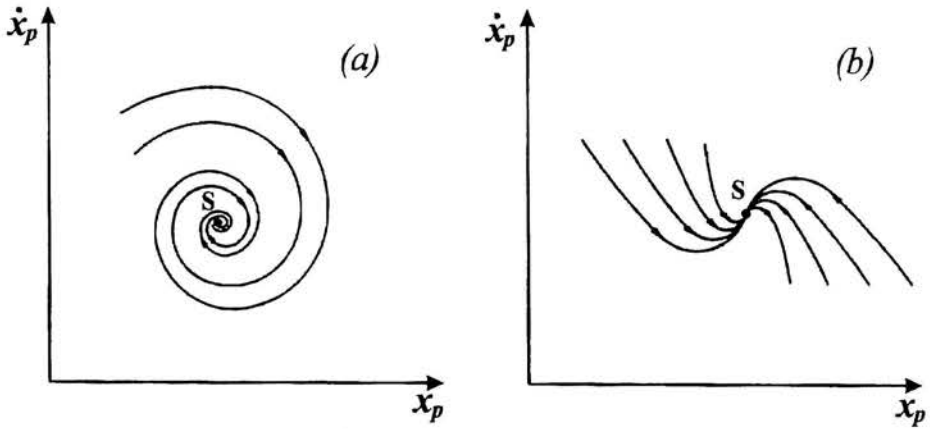
Sformułujmy teraz warunki stateczności i niestateczności rozwiązania T -periodycznego reprezentowanego przez punkt S w płaszczyźnie fazowej $x_p - \dot{x}_p$ (rys. 5), rozpatrując zachowanie się trajektorii ruchu startującego przy $t = 0$ z punktów w pobliżu punktu S . Na rys. 5a i 5b wszystkie trajektorie startujące w pobliżu punktu S z biegiem czasu dążą do tego punktu. Można więc powiedzieć, że punkt S *przyciąga* wszystkie trajektorie ze swego otoczenia. Skoro punkt S reprezentuje rozwiązanie periodyczne, to można sformułować to „przyciąganie” następująco: jeżeli do rozwiązania periodycznego dodamy dowolne (małe) zaburzenie początkowe $\delta(t_0)$, to zaburzenie to będzie malało z upływem czasu ($\delta(t) \rightarrow 0$ gdy $t \rightarrow \infty$).

Punkt S na rys. 5a i 5b, reprezentujący rozwiązanie $x = x(t)$, który spełnia wymienione warunki, jest **rozwiązaniem statecznym asymptotycznie** i nazywany jest **atraktorem**.

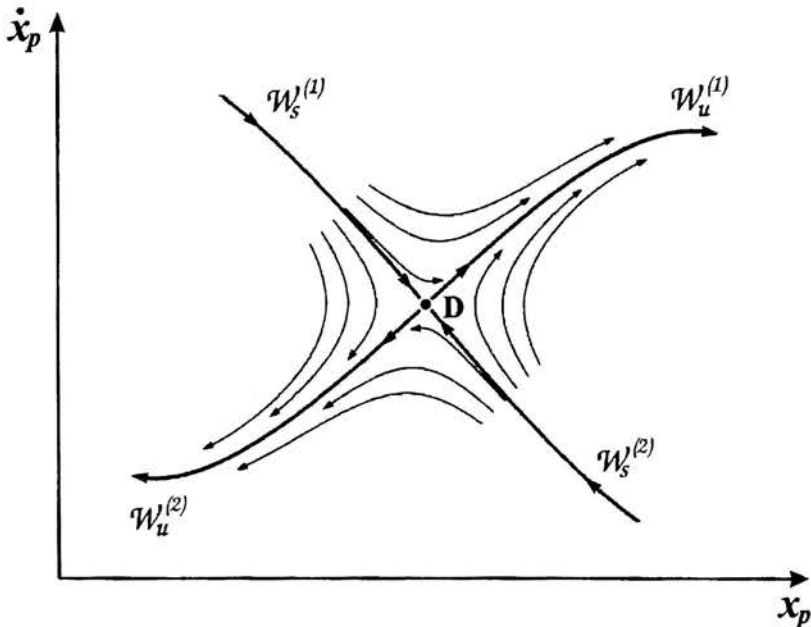
Zupełnie inaczej przebiega trajektoria w pobliżu punktu D przedstawionego na rys. 6. W tym przypadku trajektorie startujące w pobliżu punktu D oddalają się od niego. Taki punkt, reprezentujący rozwiązanie periodyczne, jest **rozwiązaniem niestatecznym** i nazywany jest **siodłem**.

Widzimy tu pewne szczególne linie, które zdają się przecinać w punkcie D ; jedna para, oznaczona $W_s^{(1)}$, $W_s^{(2)}$, dąży z czasem do punktu D , a druga para, oznaczona $W_u^{(1)}$, $W_u^{(2)}$, ucieka bezpośrednio z tego punktu przy $t \rightarrow \infty$. Te szczególne linie to **rozmaitości punktu siodłowego D** ; $W_s^{(1)}$, $W_s^{(2)}$ reprezentują **rozmaitości stateczne**, podczas gdy $W_u^{(1)}$, $W_u^{(2)}$ - **rozmaitości niestateczne**.

Pełną klasyfikację statecznych i niestatecznych punktów równowagi (lub punktów osobliwych) wraz z analizą matematyczną znaleźć można w licznych książkach na temat drgań nieliniowych lub równań różniczkowych zwyczajnych, np. *Drgania nieliniowe w układach fizycznych* [8], *Drgania i fale* [9], *Równania różniczkowe zwyczajne* [10] rozdz. 8. Matematyczna analiza rozmaitości przedstawiona jest np. w książce *Wstęp do teorii gładkich układów dynamicznych* [11].

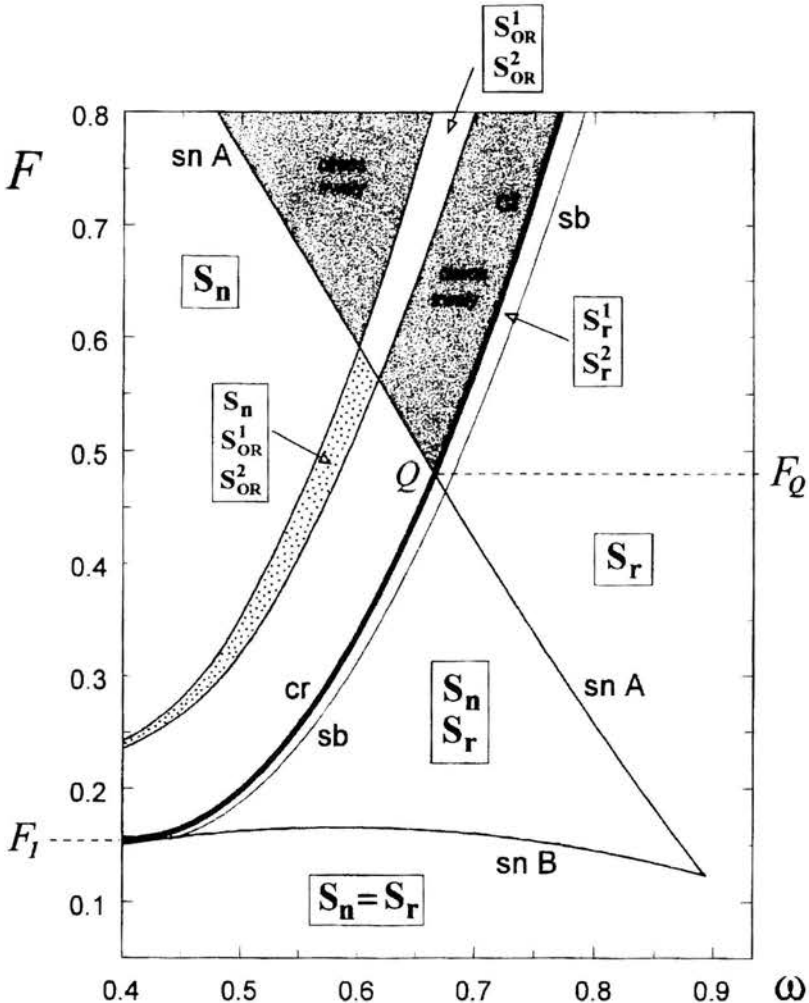


Rys. 5. Przykłady statecznych rozwiązań T -periodycznych - **atraktorów**; (a) „ognisko” (b) „węzeł”



Rys. 6. Przykład niestatecznego rozwiązania T -periodycznego - **siodła**; $W_s^{(1,2)}$, $W_u^{(1,2)}$ reprezentują odpowiednio *stateczne i niestateczne rozmaitości* siodła D.

Zwróćmy uwagę, że rozmaitości stateczne $W_s^{(1)}$, $W_s^{(2)}$ na rys. 6 rozgraniczają dwa obszary - po jednej ich stronie wszystkie trajektorie uciekają w prawo, po drugiej - w lewo. Tu nasuwa się pytanie - czy trajektorie te nie dążą do jakichś dwóch różnych atraktorów? W tym momencie warto wrócić do rys. 2, krzywa ②. Tu właśnie w zakresie częstości $\omega_1 - \omega_2$ układ posiada dwa rozwiązania stateczne (dwa atraktory) - S_r i S_n , oraz jedno rozwiązanie niestateczne typu siodło - D_n .



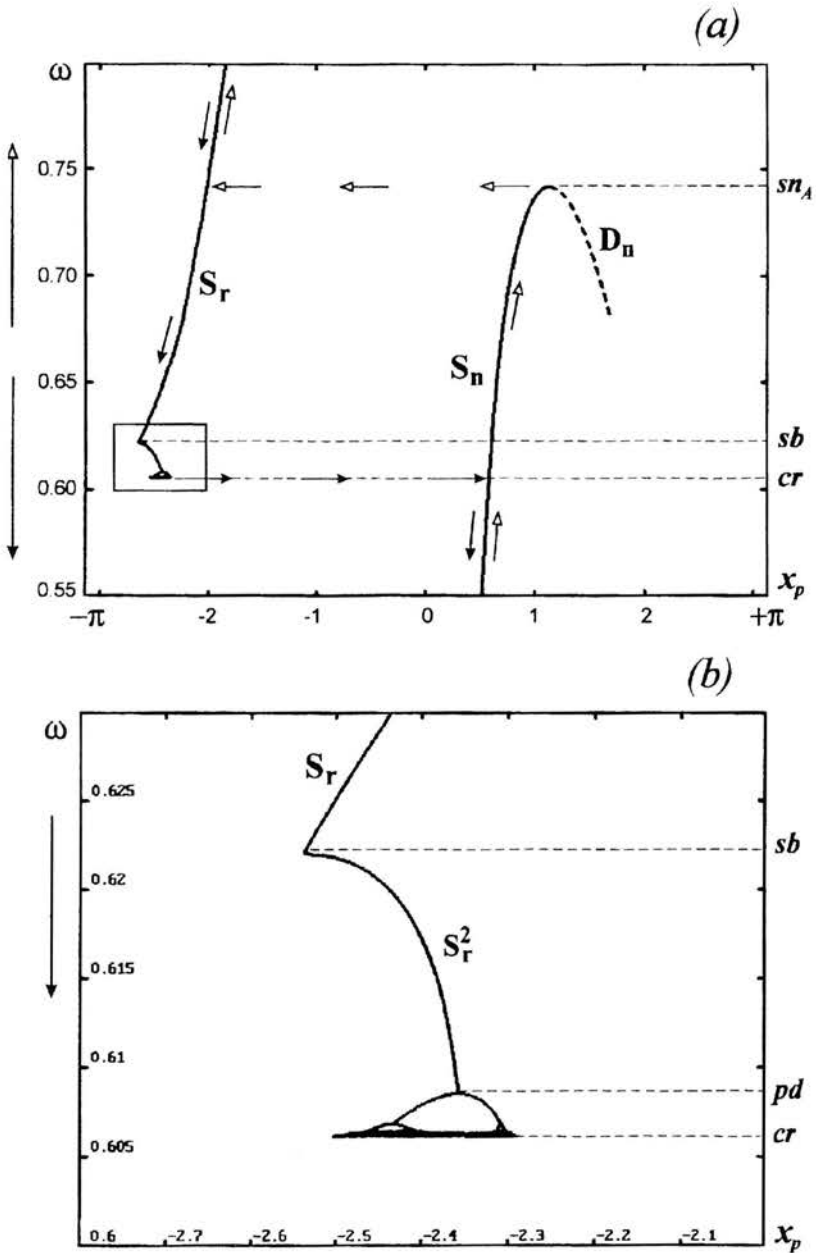
Rys. 7. Obszary istnienia różnych atraktorów (oznaczonych literą S) na płaszczyźnie parametrów kontrolnych $F - \omega$, $h = 0.1$

Zanim zajmiemy się dalszą analizą roli, jaką odgrywają różnorodności stateczne punktu siodłowego w sytuacji współistnienia różnych atraktorów, musimy poznać obszary istnienia tych atraktorów układu (3) na płaszczyźnie parametrów kontrolnych $F - \omega$ - rys. 7. Z rysunku tego odczytujemy, że bifurkacje siodłowo-węzłowe **snA** i **snB** (patrz rys. 2) wyznaczają granice istnienia atraktorów S_n i S_r , tylko w małym zakresie parametru wymuszenia F ($0.12 < F < 0.15$). Przy $F > F_1$ ($F_1 \approx 0.15$) oba atraktory, rezonansowy S_r i nierezonansowy S_n , nadal współistnieją w pewnym zakresie częstości aż do wartości amplitudy wymuszenia $F = F_Q$ ($F_Q \approx 0.48$), ale „znikanie” atraktora S_r zachodzi tu w inny sposób, poprzez bifurkację oznaczoną **sb** i graniczną linię **cr**.

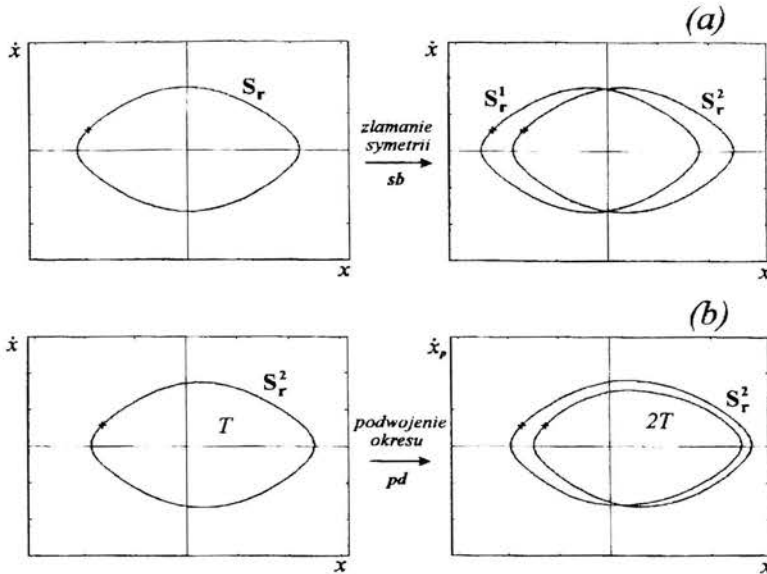
4. Bifurkacje

Przyjrzyjmy się teraz zachowaniu się układu przy $F > F_1$, ale nadal przy $F < F_Q$. Aby odpowiedzieć na pytanie, jakim nagłym zmianom, t.j. bifurkacjom, podlegają atraktory S_r i S_n w tym zakresie parametrów, sporządzamy metodą komputerową **wykres bifurkacyjny** przy $F = 0.35 = \text{const}$, przyjmując jako *parametr bifurkacyjny* częstość wymuszenia ω - rys. 8. Posługujemy się tu znowu metodą mapy Poincarégo, w której rozwiązanie T -periodyczne przy zmiennej częstości ω i stałym F widzimy jako pojedynczą linię. Klasyczny wykres bifurkacyjny ilustruje przemiany tylko jednego wybranego atraktora w funkcji wybranego parametru bifurkacyjnego. My pokazujemy tu na jednym rysunku dwa wykresy bifurkacyjne - jeden w funkcji malejących wartości ω , drugi w funkcji rosnących wartości ω .

Pierwszy wykres bifurkacyjny zaczynamy od atraktora S_r dla $\omega = 0.8$. Przy zmniejszaniu ω (kierunek oznaczony strzałkami pełnymi) występuje najpierw **bifurkacja złamania symetrii** - **sb**. Polega ona na tym, że atraktor symetryczny S_r traci stateczność, t.j. znika i zostaje zastąpiony przez parę atraktorów S_r^1 i S_r^2 , niesymetrycznych względem $x = 0$ (rys. 9a). Ponieważ nasz wykres bifurkacyjny śledzi przemiany tylko jednego atraktora, na rys. 8a widzimy tylko jeden z atraktorów niesymetrycznych, oznaczony jako S_r^2 . Przy dalszym zmniejszaniu ω dochodzimy do nowej bifurkacji - **bifurkacji podwojenia okresu** - **pd**: T -periodyczny niesymetryczny atraktor traci stateczność i zostaje zastąpiony przez atraktor o okresie $2T$ (rys. 9b), reprezentowany przez 2 linie na wykresie bifurkacyjnym. Widzimy to dokładniej na powiększonym fragmencie wykresu bifurkacyjnego, oznaczonym prostokątem - rys. 8b. Ta bifurkacja zapoczątkowuje **kaskadę bifurkacji podwojenia okresu**, które zachodzą coraz częściej, t.j. różnice między częstościami kolejnych bifurkacji są coraz mniejsze. Dlatego zwykle jesteśmy w stanie zaobserwować nie więcej



Rys. 8. Wykres bifurkacyjny, $F = 0.35$; (a) przy zmniejszaniu oraz zwiększaniu parametru bifurkacyjnego ω , (b) powiększony fragment wykresu oznaczony prostokątem na rys. 8a, przy zmniejszaniu parametru ω



Rys. 9. Ilustracja bifurkacji złamania symetrii (a) oraz bifurkacji podwojenia okresu (b) na płaszczyźnie fazowej

niż 2-3 kolejne bifurkacje tego typu, a dalej ruch oscylacyjny układu staje się chaotyczny. Na powiększonym fragmencie wykresu bifurkacyjnego (rys. 8b) występuje on w formie wąskiego zaczernionego paska, obejmującego mały zakres wychyleń x ($-2.50 < x < -2.28$). Jest to tzw. chaos oscylacyjny, który można wprawdzie zaobserwować i zbadać przy użyciu metod komputerowych, lecz praktycznie nie jest on wykrywany w doświadczeniach fizycznych. Symbol cr na rys. 7 i 8a jest skrótem od słowa „kryzys” (*crisis*) i odnosi się do scenariusza znikania tego atraktora chaotycznego [15]. Zjawisko chaosu oscylacyjnego i scenariusz kryzysu tego atraktora rozważane będą szerzej w następnym zeszytcie.

Droga do chaosu („route to chaos”) poprzez kaskadę bifurkacji podwojenia okresu obserwowana była w wielu układach fizycznych, a jej podstawy matematyczne opracowane zostały przez Feigenbauma; stąd też często nazywana jest *Feigenbaum cascade of period doubling bifurcations*. Problem ten omawiany jest szczegółowo w kilku książkach poświęconych dynamice nieliniowej, np. [1, 4, 12].

Na drugim wykresie bifurkacyjnym (rys. 8a), sporządzonym przy zwiększaniu parametru ω (kierunek oznaczony strzałkami pustymi), zaczynamy obserwacje od atraktora nierezonansowego

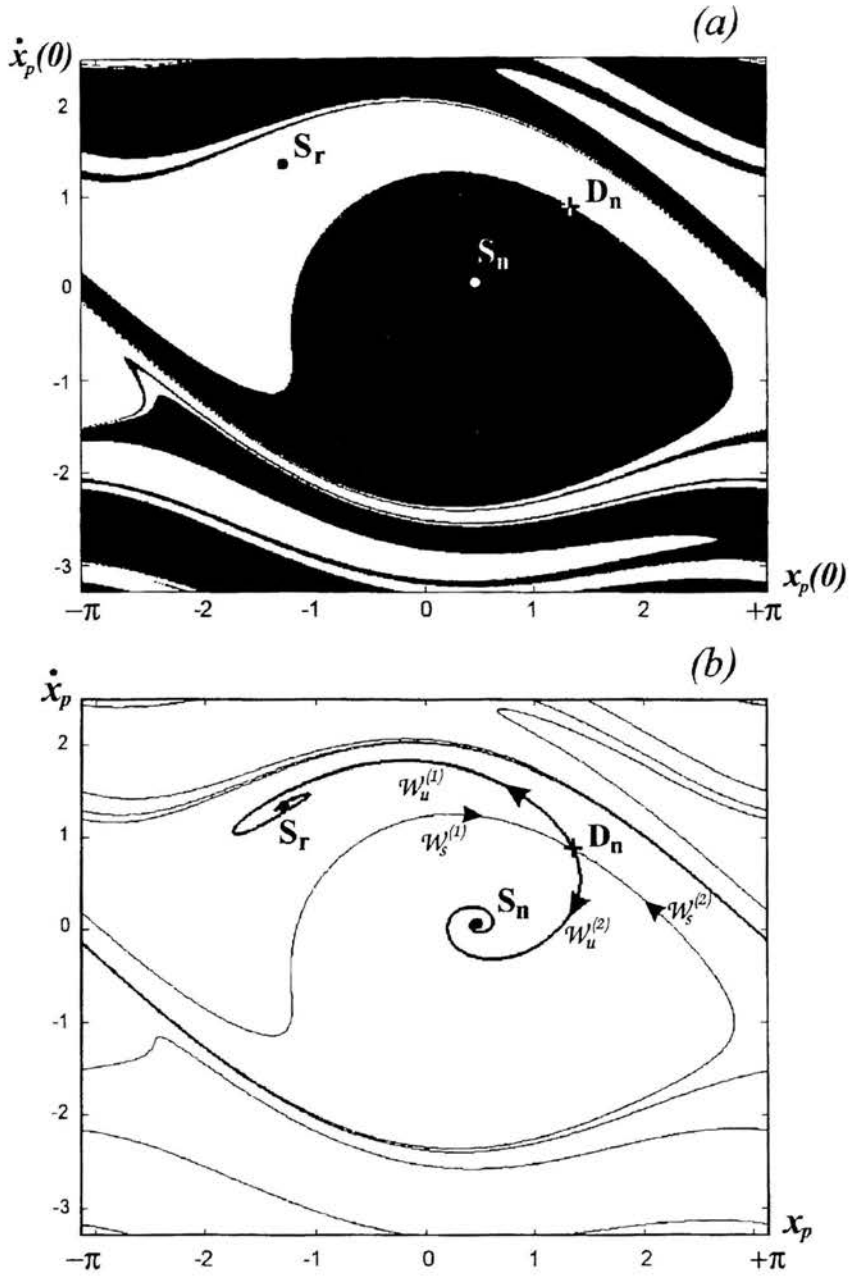
S_n . Atraktor ten istnieje aż do bifurkacji siodłowo-węzłowej **snA** przy $\omega = \omega_{snA} \approx 0.74$. Część tej bifurkacji ω_{snA} jest większa od częstotliwości kryzysu **cr** atraktora rezonansowego ω_{cr} , $\omega_{snA} > \omega_{cr}$, a więc w zakresie częstotliwości $\omega_{cr} < \omega < \omega_{snA}$ istnieją oba atraktory. Oczywiście, w układzie realizuje się zawsze tylko jeden z nich, i to zależnie od warunków początkowych.

5. Obszary przyciągania współistniejących atraktorów

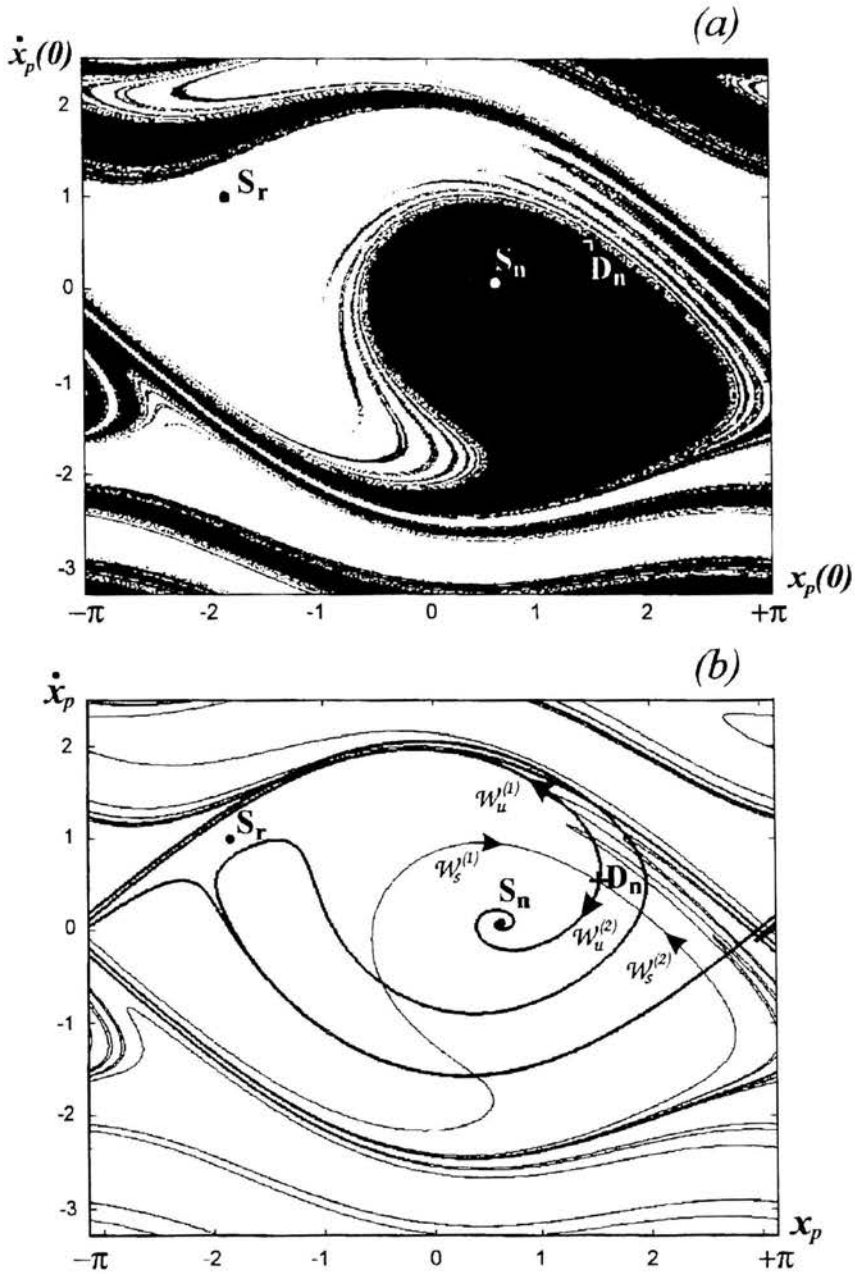
Dochodzimy tu do zagadnienia *obszarów przyciągania współistniejących atraktorów*. *Obszar przyciągania atraktora S jest to zbiór warunków początkowych $x_p(0), \dot{x}_p(0)$, które prowadzą do tego atraktora*. Zbadajmy te obszary przyciągania drogą symulacji komputerowej - najpierw przy parametrach $F = 0.20$, $\omega = 0.75$. Na rys. 10a obszar przyciągania atraktora nierezonansowego S_n zaznaczony jest kolorem czarnym, a atraktora rezonansowego S_r - kolorem białym. Wszystkie trajektorie startujące z warunków początkowych obszaru czarnego dążą do atraktora S_n , a z obszaru białego - do atraktora S_r . Widzimy, że oba obszary rozdzielone są gładką, jednowymiarową linią, i że linie te przechodzą przez siodło D_n . Rozmaitości tego punktu siodłowego - stateczna $W_s^{(1)}$, $W_s^{(2)}$ i niestateczna $W_u^{(1)}$, $W_u^{(2)}$ - narysowane są na osobnym rysunku (rys. 10b) w tej samej skali. Widzimy, że rozmaitości stateczne siodła D_n pokrywają się z granicami obszarów przyciągania atraktorów S_n i S_r . *Stateczne rozmaitości punktu siodłowego wyznaczają granice obszarów przyciągania współistniejących atraktorów*.

Obszary przyciągania uzyskane metodą symulacji komputerowej przy parametrach wymuszenia $F = 0.27$, $\omega = 0.73$ przedstawione są na rys. 11a. Różnią się one zasadniczo od tych przedstawionych poprzednio na rys. 10a. Teraz oba obszary - czarny i biały - nie są już rozdzielone gładką, jednowymiarową linią. Wręcz przeciwnie, przy dokładniejszej obserwacji zobaczylibyśmy, że czarne „palce” obszaru przyciągania atraktora S_n wchodzące teraz w obszar biały składają się z bardzo wielu kropek. O takich granicach obszarów przyciągania będziemy mówić, że są *fraktalne*, ale na razie podchodzimy do tego terminu tylko intuicyjnie.

Spójrzmy teraz na rys. 11b, na którym przedstawiono rozmaitości punktu siodłowego D_n . Tutaj rozmaitości stateczne i niestateczne przecinają się, a liczba tych przecięć wzrastałaby w miarę upływu czasu obliczeń (dążąc do nieskończoności przy $t \rightarrow \infty$). Ten wynik, nawet bez obliczeń obszarów przyciągania, sugeruje, że granica tych obszarów musiała ulec zasadniczej zmianie, czyli *bifurkacji*.



Rys. 10. $F = 0.20$, $\omega = 0.75$; (a) obszary przyciągania atraktorów S_n (czarny) i S_r (biały);
 (b) stateczne (linie cienkie) i niestateczne (linie grube) rozmaitości siodła D_n



Rys. 11. $F = 0.27$, $\omega = 0.73$; (a) obszary przyciągania atraktorów S_n (czarny) i S_r (biały);
 (b) stateczne (linie cienkie) i niestateczne (linie grube) rozmaitości siodła D_n

6. Globalna bifurkacja homokliniczna

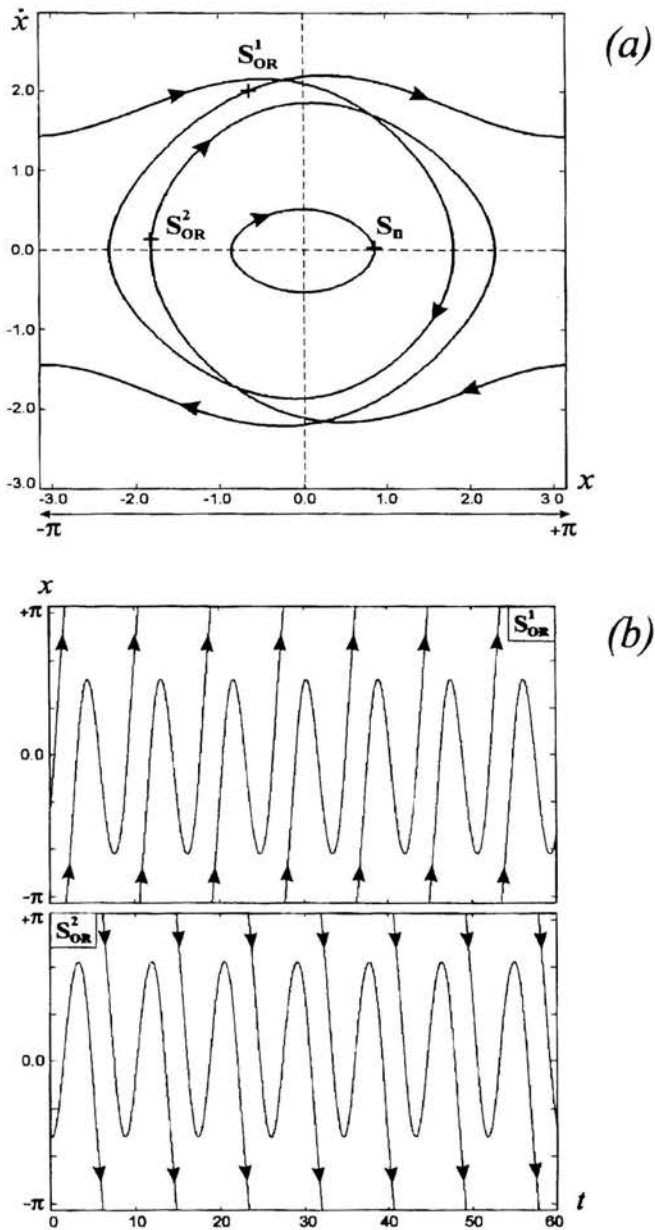
W ten sposób dochodzimy do pojęcia *globalnej bifurkacji homoklinicznej* punktu siodłowego. Jeżeli przyjmiemy, że parametr p_c jest krytycznym parametrem bifurkacyjnym, to dla $p < p_c$ rozmaitości stateczne i niestateczne punktu siodłowego nie przecinają się, dla $p = p_c$ stają się styczne, a dla $p > p_c$ przecinają się, przy czym jedno przecięcie pociąga za sobą *nieskończoną liczbę przecięć* przy $t \rightarrow \infty$.

Odsyłając Czytelników do bogatej literatury na temat globalnych bifurkacji, np. [11-14,16,17], ograniczymy się tutaj do najistotniejszych dla nas wniosków:

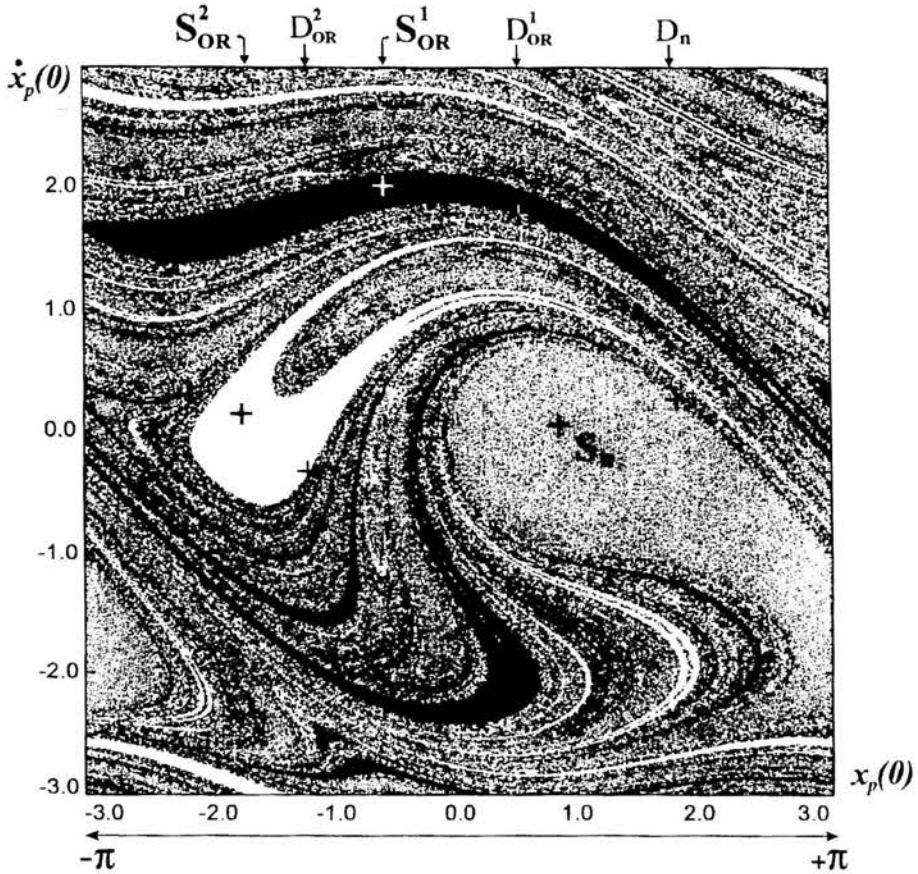
- po przekroczeniu bifurkacji globalnej odpowiedniego punktu siodłowego, granice obszarów przyciągania współistniejących atraktorów stają się fraktalne i układ staje się chaotyczny, t.j. wykładniczo wrażliwy na warunki początkowe;
- bifurkacje globalne nie są jednak warunkiem wystarczającym dla pojawienia się w układzie *chaosu trwałego*; w naszym przykładzie ten chaos trwały, czyli *atraktor chaotyczny* pojawia się dopiero przy amplitudach wymuszenia $F > F_Q$, w obszarze parametrów F, ω w kształcie litery V (obszar oznaczony kolorem szarym na rys. 7);
- bifurkacje globalne zapewniają jedynie wystąpienie w układzie *chaosu przejściowego*.

Dla ilustracji wrażliwości na warunki początkowe i chaosu przejściowego wybieramy inny przykład, przy którym nasz układ (wahadło) posiada 3 współistniejące atraktory [18]. Taka sytuacja pojawia się w obszarze wąskiego paska parametrów $F - \omega$ (obszar zakropkowany na rys. 7). Pojawia się tutaj dodatkowo zupełnie nowy rodzaj ruchu periodycznego wahadła, ruchu będącego superpozycją ruchu obrotowego (rotacji) i oscylacyjnego. Ze względu na symetrię przestrzeni fazowej odpowiada mu para atraktorów różniących się kierunkiem rotacji (przeciwnie lub zgodnie z ruchem wskazówek zegara) - S_{OR}^1, S_{OR}^2 . Tak więc nawet poza obszarem trwałego chaosu wahadło przekracza już barierę potencjału wykonując pełne obroty. Jest to jednak nadal ruch periodyczny o okresie wymuszenia $T = 2\pi/\omega$.

Najpierw pokazujemy portrety fazowe 3 współistniejących atraktorów S_n, S_{OR}^1, S_{OR}^2 (rys. 12a) oraz przebiegi czasowe *atraktorów oscylacyjno-rotacyjnych* (rys. 12b). Następnie przedstawiamy obszary przyciągania tych atraktorów w płaszczyźnie $x_p(0) - \dot{x}_p(0)$ - rys. 13. Widzimy, że obszary te są silnie „wymieszane”, to znaczy mają silnie fraktalną strukturę. W tym przykładzie nie udowodnimy fraktalności tych obszarów poprzez pokazanie, że układ przekroczył próg



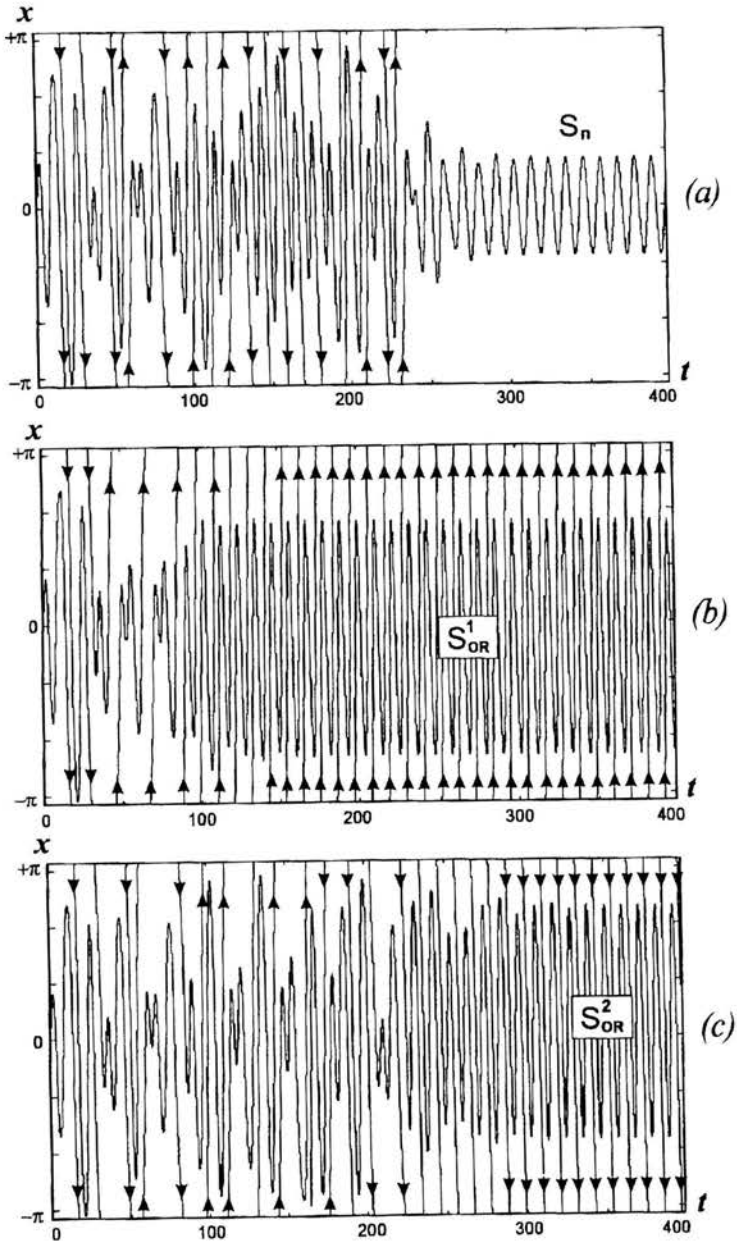
Rys. 12. (a) portrety fazowe trzech współistniejących atraktorów S_n , S_{OR}^1 , S_{OR}^2 przy $F = 0.50$, $\omega = 0.58$; (b) przebiegi czasowe atraktorów oscylacyjno-rotacyjnych S_{OR}^1 , S_{OR}^2 .



Rys. 13. Obszary przyciągania trzech współistniejących atraktorów (szary - S_n , czarny - S_{OR}^1 , biały - S_{OR}^2); $F = 0.50$, $\omega = 0.58$

odpowiedniej bifurkacji globalnej, lecz skupiamy się na obserwacji wrażliwości układu na warunki początkowe.

Wybieramy warunki początkowe z prostokąta położonego w pobliżu $x_p(0), \dot{x}_p(0) = 0$ (rys. 13) i badamy przebiegi wychyleń w czasie $x = x(t)$ przy bardzo bliskich sobie wartościach warunków początkowych. Trzy wybrane przykłady rezultatów tych badań przedstawione są na rys. 14. W każdym z nich, w pierwszym etapie ruch układu jest wyraźnie nieregularny i można go interpretować jako przypadkową kombinację ruchu oscylacyjnego i obrotu wahadła w obu kierunkach. W fazie końcowej układ wykazuje już ruch periodyczny na jednym z trzech współistniejących atraktorów.



Rys. 14. Trzy przebiegi czasowe ruchu układu przy bardzo bliskich wartościach warunków początkowych, $F = 0.50$, $\omega = 0.58$ (strzałki wskazują kierunki obrotów wahadła);
 (a) $x(0) = -0.220$, $\dot{x}(0) = 0.010$, (b) $x(0) = -0.218$, $\dot{x}(0) = 0.010$, (c) $x(0) = -0.220$, $\dot{x}(0) = 0.000$

Na podstawie tych badań można powiedzieć, że:

- układ jest wrażliwy na warunki początkowe, gdyż przebiegi czasowe $x = x(t)$ startujące z bardzo bliskich warunków początkowych są zupełnie różne i mogą prowadzić do różnych atraktorów;
- czas trwania ruchu przejściowego jest nieprzewidywalny; przy tym samym współczynniku tłumienia i bardzo bliskich warunkach początkowych możemy otrzymać zupełnie różne czasy trwania tego ruchu;
- ruch przejściowy ma charakter „ruchu trwałego”, t.j. przez pewien czas nie wykazuje on ani wygasania, ani wzrastania wychyleń w czasie, a przejście do ruchu na atraktorze następuje nagle.

7. Chaotyczny ruch trwały (dziwny atraktor, atraktor chaotyczny)

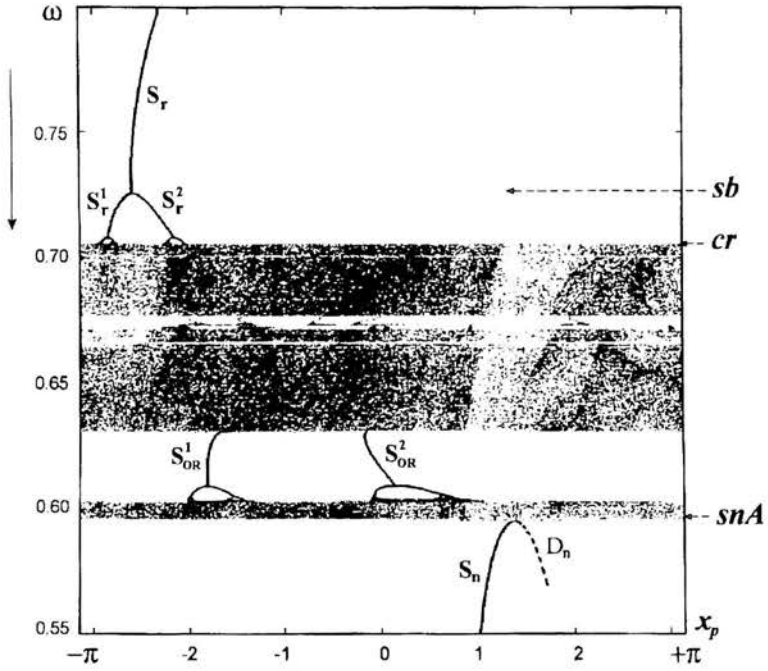
Omówimy teraz *chaotyczny ruch trwały*, który występuje w obszarze w kształcie litery V, ograniczonym liniami bifurkacji siodłowo-węzłowej **snA** i kryzysu **cr** (obszar zaznaczony kolorem szarym na rys. 7), w zakresie parametrów wymuszenia:

$$F > F_Q, \quad \omega_{snA} < \omega < \omega_{cr},$$

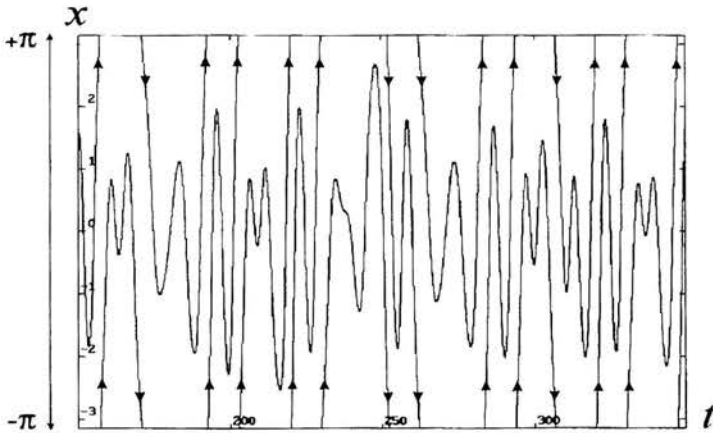
gdzie układ nie posiada żadnego atraktora periodycznego.

Przyjrzyjmy się najpierw wykresom bifurkacyjnym przy $F > F_Q$ ($F = 0.6$), przy zmniejszaniu parametru ω - rys. 15. Wykres rozpoczynamy od wartości $\omega = 0.80$, przy której T -periodyczny atraktor rezonansowy S_r jest jedynym atraktorem. Podobnie jak na rys. 8 widzimy, że ten symetryczny atraktor ulega najpierw bifurkacji złamania symetrii (**sb**). Potem następuje, ledwo widoczna na rysunku w przyjętej skali, kaskada bifurkacji podwojenia okresu, i ostatecznie kryzys (**cr**) oznaczający koniec istnienia tego atraktora.

Dalej, przy $\omega < \omega_{cr}$ na wykresie pojawia się obszar całkowicie zaciemniony i obejmujący cały zakres ruchu wahadła od $-\pi$ do $+\pi$. Wynika z tego, że istniejący tu atraktor nie jest periodyczny, oraz że nie ogranicza się do ruchu oscylacyjnego, lecz obejmuje również pełne obroty wahadła. W obszarze tym widzimy jednak „okno periodyczne”, w którym istnieją dwa T -periodyczne atraktory oscylacyjno-obrotowe S_{OR}^1, S_{OR}^2 - takie same jak te zilustrowane na rys. 12a,b. Przy częstotliwości odpowiadającej bifurkacji siodłowo-węzłowej **snA**, z obszaru zaciemnionego wyłania się T -periodyczny oscylacyjny atraktor nierezonansowy S_n . Przy tych parametrach układu nie występuje zjawisko histerezy: taki sam wykres otrzymujemy przy zwiększaniu parametru bifurkacyjnego ω .



Rys. 15. Wykres bifurkacyjny przy $F = 0.6$, obejmujący wszystkie współistniejące atraktory



Rys. 16. Przebieg czasowy wychYLENIA przy chaosie trwałym, $F = 0.6$, $\omega = 0.69$; strzałki wskazują kierunki obrotów wahadła

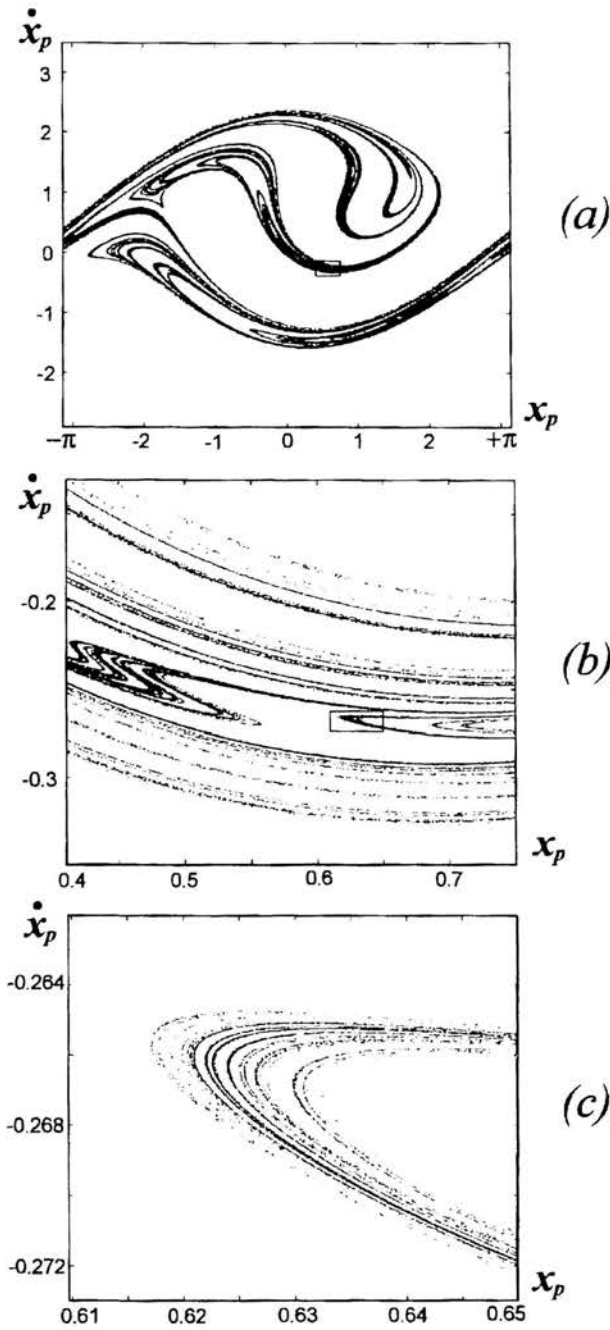
Omawiany wykres bifurkacyjny pokazuje jednocześnie oba współistniejące niesymetryczne atraktory S_r^1 , S_r^2 oraz oba atraktory oscylacyjno-obrotowe S_{OR}^1 , S_{OR}^2 . Został uzyskany poprzez superpozycję trzech klasycznych wykresów bifurkacyjnych ilustrujących przebieg poszczególnych atraktorów.

Skoncentrujemy teraz uwagę na charakterze ruchu w tym „zaciemnionym” na wykresie bifurkacyjnym (rys. 15) obszarze parametru ω . Rysunek 16 pokazuje wycinek przebiegu czasowego $x = x(t)$ przy $F = 0.6$, $\omega = 0.69$. Podobnie jak fragmenty przebiegu czasowego na rys.14, ruch ten wygląda jak nieregularna kombinacja ruchu oscylacyjnego i obrotowego, przy zmieniających się kierunkach obrotów. W obecnym przypadku charakter tego ruchu jest trwały, t.j. utrzymujący się w dowolnie długim czasie, jest więc ruchem na atraktorze.

Następnie znajdujemy mapę Poincarégo tego przebiegu czasowego i badamy jego strukturę (rys. 17a). W trakcie obliczeń łatwo zauważyć, że liczba punktów tego atraktora na płaszczyźnie $x_p - \dot{x}_p$ stale rośnie ze wzrostem czasu obliczeń. Ponadto punkty te mają wyraźnie zorganizowaną strukturę, zdają się układać wzdłuż pewnych, prawie równoległych linii.

Przyjrzyjmy się bliżej tej strukturze badając powiększenia pewnego fragmentu atraktora. Używamy tu terminu „powiększenie”, ale nie chodzi tu o powiększenie typu fotograficznego, przy którym liczba i wielkość ziaren pierwotnego materiału fotograficznego pozostaje niezmienną. Wybieramy mały obszar z rys. 17a (oznaczony jako prostokąt w pobliżu $x_p \approx \dot{x}_p \approx 0.1$), w którym punkty zdają się ze sobą zlewać, i wykonujemy obliczenia od początku kontynuując je tak długo, by otrzymać wyraźny obraz wewnętrznej struktury tego fragmentu atraktora. Na rys. 17b widzimy znowu bardzo dużą i stale rosnącą liczbę punktów poukładanych wzdłuż prawie równoległych linii. Chcąc zajrzeć jeszcze głębiej w strukturę badanego atraktora chaotycznego wykonujemy jeszcze jedno, dalsze „powiększenie” tego fragmentu z rys. 17b, w którym punkty są tak silnie zagęszczone, że zdają się zajmować pewną powierzchnię. I znowu, na rys. 17c, widzimy tę samą, powtarzającą się zorganizowaną strukturę, t.j. dużą liczbę punktów ułożonych wzdłuż prawie równoległych linii.

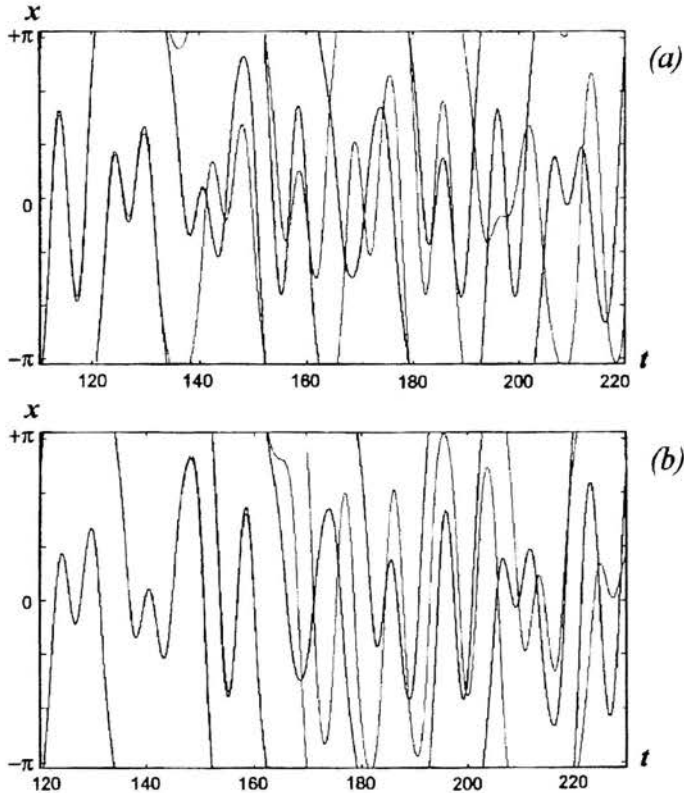
Atraktor, którego mapa Poincarégo zawiera nieprzeliczalną liczbę punktów (w realizacji numerycznej jest to oczywiście liczba skończona) tak zorganizowanych, że w miarę „powiększania” obrazu wciąż widzimy tę samą „strukturę zanurzoną w strukturze”, należy do kategorii obiektów geometrycznych *samopodobnych* o wymiarze niecałkowitym (ułamkowym), t.j. jest *fraktalem*. W dynamice nieliniowej, atraktor mający strukturę fraktalną określamy terminem *dziwny atraktor*. W literaturze często spotykamy określenie, że dziwny atraktor ma strukturę zbliżoną do struktury *zbioru Cantora* [1,4,5].



Rys. 17. Mapa Poincarégo atraktora chaotycznego; (a) cały atraktor; (b), (c) - kolejne powiększenia fragmentów atraktora

Pozostaje pytanie zasadnicze: czy *dziwny atraktor* na rys. 17c jest również *atraktorem chaotycznym*, tzn. czy ruch na nim jest wykładniczo wrażliwy na warunki początkowe. Badania oscylatorów z wymuszeniem periodycznym pozwalają odpowiedzieć twierdząco na to pytanie, tzn. w tej klasie układów dziwność atraktora pociąga za sobą jego chaotyczność. Gdybyśmy bez badania struktury geometrycznej atraktora chcieli zbadać tę sprawę, to należałoby obliczyć *wykładniki Lapunowa* układu. Jeżeli największy wykładnik Lapunowa jest dodatni, to układ jest wykładniczo wrażliwy na warunki początkowe.

Omówienie wykładników Lapunowa odkładamy jednak do dalszych rozważań, a obecnie ograniczamy się do zilustrowania wrażliwości na warunki początkowe poprzez pokazanie przebiegów czasowych $x = x(t)$ przy dwóch bardzo bliskich wartościach $x(0)$ i $\dot{x}(0)$, oraz przy dwóch różnych wielkościach kroku całkowania - rys. 18a,b.



Rys. 18. Ilustracja wrażliwości przebiegu wychyleń w czasie na warunki początkowe: (a) linia czarna - $x(0) = 0.606$, $\dot{x}(0) = -0.242$, linia szara - $x(0) = 0.610$, $\dot{x}(0) = -0.242$; (b) linia czarna - $lkc = 100$, linia szara - $lkc = 300$ (lkc - liczba kroków na cykl).

Widzimy, że przy bardzo małej różnicy warunków początkowych ($\Delta x = 0.004, \Delta \dot{x} = 0.000$) przebiegi czasowe $x \equiv x(t)$ początkowo się pokrywają, lecz przy dłuższym czasie obliczeń krzywe się rozbiegają, przy czym ta rozbieżność ma charakter nagły (rys. 18a). Podobną sytuację obserwujemy na rys. 18b, ilustrującym przebiegi czasowe przy zastosowaniu różnych wielkości kroku całkowania w procedurze numerycznej. Jeżeli przyjąć, że każdy kolejny krok całkowania wprowadza pewne warunki początkowe dla kroku następnego, to oba wykresy (rys. 18a i 18b) ilustrują tę samą cechę odpowiedzi układu - wrażliwość na warunki początkowe.

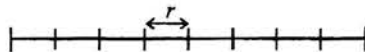
Wrażliwość trajektorii ruchu na warunki początkowe, a w konsekwencji - *nieprzewidywalność tego ruchu w dłuższym czasie*, stanowi istotę ruchu chaotycznego.

8. Fraktale - geometryczne obiekty samopodobne

Przy omawianiu obszarów przyciągania różnych atraktorów oraz struktury geometrycznej wielokrotnie używaliśmy terminu *fraktale* bez prób matematycznej definicji i tylko w kontekście zjawisk dynamiki nieliniowej. Termin ten pojawił się w matematyce niezależnie od dynamiki nieliniowej; został wprowadzony przez B. Mandelbrodta [20,21] i dotyczył obiektów geometrycznych, które mają *strukturę samopodobną* i *wymiar ułamkowy (fractal)*. Dla ilustracji tych pojęć przypomnijmy, że w geometrii euklidesowej znamy jedynie obiekty o wymiarach całkowitych 0, 1, 2, 3 (punkt ma wymiar 0, linia - wymiar 1, powierzchnia - wymiar 2 i objętość - wymiar 3).

Pojęcie wymiaru można rozszerzyć stosując następującą procedurę: rozpatrzmy odcinek linii o długości 1 i podzielmy go na N równych części. Jeden element tego podziału ma długość r , a całkowitą długość odcinka możemy wyrazić jako:

$$Nr^1 = 1$$



Analogicznie dla kwadratu o powierzchni 1 mamy zależność:

$$Nr^2 = 1,$$

a dla kostki (sześcianu) o objętości 1:

$$Nr^3 = 1.$$

Uogólniając takie postępowanie na inne obiekty geometryczne i stosując podziały na bardzo małe elementy ($r \rightarrow 0$) możemy napisać:

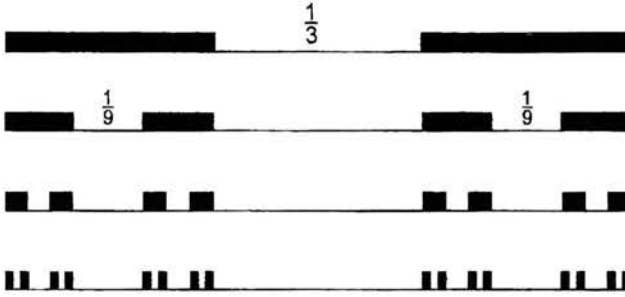
$$Nr^D = 1,$$

a stąd:

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N(r)}{\ln(1/r)}. \quad (6)$$

Tak przyjęte pojęcie wymiaru zakłada więc, że nasz obiekt geometryczny ma cechy *samopodobieństwa*, t.j. jego struktura jest niezmienna, niezależnie od skali obserwacji.

Wyjaśnimy to na przykładzie wspomnianego wcześniej *zbioru Cantora* (rys. 19). Domknięty odcinek $[0, 1]$ podzielmy na 3 równe części i usuńmy środkowy odcinek $(1/3, 2/3)$, pozostawiając jego punkty brzegowe. Następnie zróbmy to samo z pozostałymi dwoma odcinkami, pozostawiając cztery mniejsze odcinki itd. W granicy otrzymamy zbiór Cantora. Ma on nieprzeliczalną liczbę punktów i nie jest nigdzie gęsty (tzn. żaden punkt zbioru Cantora nie posiada otoczenia w całości należącego do tego zbioru).



Rys. 19. Cztery pierwsze iteracje zbioru Cantora

W trakcie opisanej procedury prowadzącej do zbioru Cantora w każdej skali (czyli niezależnie od wielkości r) widzimy tę samą strukturę - odcinek podzielony na 3 części z usuniętą częścią środkową ($N = 2$ i $r = 1/3$ na rys. 19). Wymiar tego zbioru obliczymy podstawiając w równaniu (6) $N = 2$ i $r = 1/3$:

$$D = \frac{\ln 2}{\ln 3} \cong 0.63.$$

O strukturze tego zbioru możemy powiedzieć, że „zajmuje więcej miejsca niż punkt, ale mniej niż linia”: $0 < D < 1$.

Literatura

- [1] F.C. Moon, *Chaotic Vibrations, An Introduction for Applied Scientists and Engineers*. John Wiley & Sons, Chichester 1987.
- [2] *Chaos w nieliniowej mechanice*. Praca IPPT 28/1985, praca zbiorowa pod red. W. Szemplińskiej-Stupnickiej, Warszawa 1985.
- [3] H.G. Schuster, *Deterministic Chaos: an Introduction*. Physik-Verlag, Weinheim 1984 (wydanie polskie: *Chaos deterministyczny*, PWN, Warszawa 1993).
- [4] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge 1993 (wydanie polskie: *Chaos w układach dynamicznych*, WNT, Warszawa 1997).
- [5] J. Kudrewicz, *Fraktale i chaos*. WNT, Warszawa 1993.
- [6] I. Stewart, *Does God Play Dice? The New Mathematics of Chaos*. Penguin Books, London 1990 (wydanie polskie: *Czy Bóg gra w kości? Nowa matematyka chaosu*, PWN, Warszawa 1994).
- [7] W Szemplińska-Stupnicka, *The Behavior of Nonlinear Vibrating Systems; vol. I - Fundamental Concepts and Methods: Applications to Single-Degree-of-Freedom Systems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
- [8] Ch. Hayashi, *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. Princeton University Press, Princeton, N.J. 1964, 1985 (wydanie polskie: *Drgania nieliniowe w układach fizycznych*, WNT, Warszawa 1968).
- [9] *Drgania i Fale*. Praca zbiorowa pod red. S. Kaliskiego. PWN, Warszawa 1986.
- [10] R. Gutowski, *Równania różniczkowe zwyczajne*. WNT, Warszawa 1971.
- [11] W. Szlenk, *Wstęp do teorii gładkich układów dynamicznych*. PWN, Warszawa 1982.
- [12] J.M.T. Thompson, H.B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos*. John Wiley & Sons, Chichester 1986.
- [13] S. Wiggins, *Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods*. Springer-Verlag, New York 1988.
- [14] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [15] E. Tyrkiel, W. Szemplińska-Stupnicka and A. Zubrzycki, On the boundary crises of chaotic attractors in nonlinear oscillators, *Computer Assisted Mech. Engng. Sci.*, **7**, 743-755, 2000.
- [16] W. Szemplińska-Stupnicka, E. Tyrkiel and A. Zubrzycki, The global bifurcations that lead to transient tumbling chaos in a parametrically driven pendulum, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **10**(9), 2161-2175, 2000.
- [17] W. Szemplińska-Stupnicka, E. Tyrkiel and A. Zubrzycki, On the stability „in the large” and unsafe initial disturbances in a nonlinear oscillator, *Computer Assisted Mech. Engng. Sci.*, **8**, 155-168, 2001.
- [18] W. Szemplińska-Stupnicka and E. Tyrkiel, The oscillation-rotation attractors in a forced pendulum and their peculiar properties, to be published in *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2001.
- [19] W. Szemplińska-Stupnicka and E. Tyrkiel, Common features of the onset of structurally stable chaos in nonlinear oscillators: a phenomenological approach, to be published in *Nonlinear Dynamics*, 2001.
- [20] B. Mandelbrodt, *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman, San Francisco 1982.
- [21] *The Science of Fractal Images*. Praca zbiorowa pod red. H.O. Peitgen i D. Saupe. Springer-Verlag, New York 1988.

Spis treści

Od Autora	3
1. Wahadło matematyczne: równanie ruchu, drgania liniowe i nieliniowe	5
2. Metoda mapy Poincarégo	9
3. Stateczne i niestateczne rozwiązania periodyczne (atraktory i siodła)	10
4. Bifurkacje	14
5. Obszary przyciągania współistniejących atraktorów	17
6. Globalna bifurkacja homokliniczna	20
7. Chaotyczny ruch trwały (dziwny atraktor, atraktor chaotyczny)	24
8. Fraktale - geometryczne obiekty samopodobne	29
Literatura	31