Jadwiga Krzyżowska

PORÓWNANIE PEWNYCH METOD PRZYBLIŻONYCH W DŁUGOFALOWYCH PROBLEMACH DYFRAKCJI

16/1968

WARSZAWA

Prace Zakładu Teorii Łączności
Praca Nr 59

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u
D o   u ż y t k u   w e w n ę t r z n e g o

Zakład Teorii Łączności I P P T PAN
Nakład 250 egz. Ark.wyd.0,4. Ark.druk. 1.
Oddano do drukarni w lipcu 1968 r.
Wydrukowano w sierpniu 1968 r. Nr zam. 614/c

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

PORÓWNANIE PEWNYCH METOD PRZYBLIŻONYCH W DŁUGOFALOWYCH PROBLEMACH DYFRAKCJI

Jadwiga Krzyżowska

S t r e s z c z e n i e

Analizuje się pewne metody przybliżone zastosowane do rozwiązywania problemów dyfrakcji dla zakresu długofalowego. Jako punkt wyjściowy przyjmuje się odpowiednie równania całkowe. Wykazano, że znajdując tutaj pewne interesujące nas wielkości metodą Galerkina w połączeniu z metodą perturbacji otrzymuje się takie same przybliżenia jak w metodzie perturbacji w połączeniu z metodą Levin-Schwinger.

1. Wstęp

Przy rozwiązywaniu długofalowych problemów dyfrakcji bardzo często dogodnym punktem wyjścia jest równanie całkowe. Występuje ono tutaj na ogół w postaci:

$$f(\underline{r}') = \int_S K(\underline{r}, \underline{r}')\, g(\underline{r})\, dS \qquad (1)$$

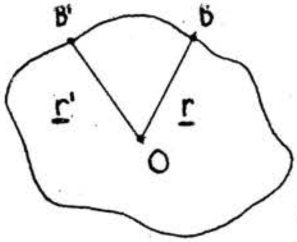
gdzie $f(\underline{r})$ jest znaną funkcją, określoną przez pole padające, $K(\underline{r}, \underline{r}')$ jądrem równania, $g(\underline{r})$ funkcją nieznaną, a S powierzchnią całkowania /rys. 1/.

Przykłady powyższego równania można znaleźć np. w pracach [2], [5].

Znając rozwiązanie równania (1) znajdujemy wyrażenie A:

$$A = \int_S f'(\underline{x})\, g(\underline{x})\, dS\,, \qquad (2)$$

$\left(\text{gdzie } f' = \int_S Kg'dS\right)$ które charakteryzuje wielkości interesujące nas w danym zagadnieniu dyfrakcji.



Rys. 1. Oznaczenia do równania (1).

Aby otrzymać efektywne wyniki numeryczne dla danego zjawiska dyfrakcji, trzeba posłużyć się metodami przybliżonymi rozwiązywania równania (1). Najważniejszymi z tych metod dla rozważanego zakresu długofalowego są: metoda perturbacji, metoda Galerkina, metoda Levin-Schwinger oraz metoda rozwijania w odpowiednie szeregi rozwiązań elementarnych. Tutaj zajmiemy się trzema pierwszymi z powyższych metod.

2. Krótka charakterystyka metody perturbacji, Galerkina i Levin-Schwinger

Rozwiązując równanie (1) dla zakresu długofalowego metodą perturbacji zakładamy dla funkcji f, K i g rozwinięcia:

$$\begin{aligned} f &= f_0 + kf_1 + k^2 f_2 + \dots\,, \\ K &= K_0 + kK_1 + k^2 K_2 + \dots\,, \\ g &= g_0 + kg_1 + k^2 g_2 + \dots\,, \end{aligned} \qquad (3)$$

gdzie $k = 2\pi/\lambda$, λ oznacza długość fali.

Wstawiając powyższe rozwinięcia do równania (1) i przyrównując do siebie współczynniki przy tych samych potęgach k otrzymujemy równania na kolejne składniki rozwinięcia nie - znanej funkcji g:

$$
\begin{aligned}
&\int_S K_0 g_0 dS = f_0, \\
&\int_S K_0 g_1 dS = f_1 - \int_S K_1 g_0 dS, \\
&\int_S K_0 g_2 dS = f_2 - \int_S K_1 g_1 dS - \int_S K_2 g_0 dS, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Zakłada się, że jedynym rozwiązaniem równania $\int_S K_0 h dS = 0$ jest $h = 0$.

Dla problemów trójwymiarowych i dla części problemów dwuwymiarowych rozwinięcie funkcji g będzie przedstawiało szereg potęgowy względem parametru k. Natomiast dla tych problemów dwuwymiarowych, dla których funkcja K jest re - prezentowana przez funkcję Hankela, nie będą to już szeregi czysto potęgowe, lecz szeregi, które oprócz wydzielonego przy każdym składniku czynnika k^n zawierają w pozostałym członie funkcję lnk. Składniki powyższych szeregów tworzą ciąg asymptotyczny dla $k \to 0$.

W metodzie Galerkina rozwiązujemy równanie całkowe (1) aproksymując funkcję g funkcją $G = \sum_{n=0}^{M} c_n G_n$, gdzie funkcje G_n zakładamy, a współczynniki c_n, niezależne od współrzędnych układu, znajdujemy z równań Galerkina:

$$\int\limits_{S'} fG_n dS' = \iint\limits_{S'S} KGG_n dSdS' , \qquad n = 0, 1, \dots M. \quad (5)$$

Błąd, otrzymany tutaj przez aproksymację wyrażenia (2) wyrażeniem

$$\widetilde{A} = \int\limits_{S} f' G dS,$$

w bardzo dużym stopniu zależy od doboru funkcji G_n. Łącząc metodę Galerkina z metodą perturbacji otrzymujemy wskazówki co do właściwego doboru tych funkcji [3]. Mianowicie , jeżeli funkcje G_n dobierzemy w ten sposób, że

$$G_n = a_n g_n , \qquad n = 0, 1, \dots M, \quad (6)$$

gdzie a_n oznacza współczynniki niezależne od współrzędnych układu, to wtedy w rozwinięciach

$$A = A_0 + kA_1 + k^2 A_2 + \dots , \quad (7)$$

$$\widetilde{A} = \widetilde{A}_0 + k\widetilde{A}_1 + k^2 \widetilde{A}_2 + \dots \quad (8)$$

2M + 2 pierwszych składników będzie równych sobie.

W metodzie Levin-Schwinger wielkość A określamy wstawiając rozwiązanie przybliżone równania (1) $\widetilde{g}$ w wyrażenie stacjonarne:

$$A = \frac{\int\limits_{S} f' g dS \int\limits_{S} f g' dS}{\iint\limits_{SS'} g' K g dS' dS} , \quad (9)$$

$$A = \frac{\left[\int\limits_S fgdS\right]^2}{\iint\limits_{SS'} gKgdS'dS} \quad \text{dla } f = f'. \qquad (9')$$

Zastępująo w wyrażeniu $(9')$ funkoję g funkoją $G = \sum\limits_{n=0}^{N} c_n G_n$ i szukająo współozynników c_n z warunku stacjonarności tak otrzymanego wyrażenia otrzymujemy na te współozynniki u - kład równań równoważny układowi (5) [3]. Wtedy

$$\widetilde{A}_s = \frac{\left[\int\limits_S fGdS\right]^2}{\iint\limits_{SS'} GKGdS'dS} = \int\limits_S fGdS = \widetilde{A}.$$

W dalszej ozęśoi praoy zostanie wykazane, że jeżeli w wyrażeniu stacjonarnym $(9')$ podstawimy zamiast funkoji g funkoję $\widetilde{g}$ określoną metodą perturbaoji:

$$\widetilde{g} = g_0 + kg_1 + k^2 g_2 + \ldots + k^M g_M ,$$

to wtedy w rozwinięciu

$$\widetilde{A}_s = \widetilde{A}_{s0} + k\widetilde{A}_{s1} + k^2\widetilde{A}_{s2} + \ldots \qquad (10)$$

i w rozwinięciu (7) $2M + 2$ pierwszych wyrazów będzie równych sobie.

3. Metoda perturbacji w połączeniu z metodą Levin-Schwinger

Zostanie obecnie przeanalizowany sposób poszukiwania wyrażenia $A = (f, g)$ za pomocą metody perturbacji w połą- czeniu z metodą Levin-Schwinger. Będziemy posługiwali się oznaczeniami:

$$\int_S KgdS = Lg , \qquad \int_{\Omega} h_1 h_2 d\Omega = (h_1 h_2) .$$

Znajdujemy wyrażenie

$$\tilde{A}_g = \frac{(f,\tilde{g})^2}{(\tilde{g},L\tilde{g})} \tag{11}$$

przy założeniach:

1/ $$f = Lg ,$$

2/
$$\begin{aligned} f &= f_0 + kf_1 + k^2 f_2 + \ldots , \\ L &= L_0 + kL_1 + k^2 L_2 + \ldots , \\ g &= g_0 + kg_1 + k^2 g_2 + \ldots , \\ \tilde{g} &= \tilde{g}_0 + k\tilde{g}_1 + k^2 \tilde{g}_2 + \ldots , \end{aligned} \tag{12}$$

3/ Jedynym rozwiązaniem równania

$L_0 h = 0$ jest $h = 0$,

4/
$$\begin{aligned}
\tilde{g}_0 &= g_0 , \\
\tilde{g}_1 &= g_1 , \\
&\vdots \\
\tilde{g}_M &= g_M , \\
\tilde{g}_{M+1} &= 0 , \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{13}$$

5/
$$\left(h_1, L_p h_2\right) = \left(h_2, L_p h_1\right)$$

Pytamy się teraz, ile składników rozwinięcia (10) tak znalezionego wyrażenia $\tilde{A}_s$:

$$\tilde{A}_s = \frac{(f,\tilde{g})^2}{(\tilde{g},L\tilde{g})} = \left[\frac{(f,\tilde{g})^2}{(\tilde{g},L\tilde{g})}\right]_0 + k\left[\frac{(f,\tilde{g})^2}{(\tilde{g},L\tilde{g})}\right]_1 + k^2 \ldots \tag{14}$$

będzie równych składnikom rozwinięcia (7) wyrażenia ścisłego A:

$$A = (f,g) = \left[(f,g)\right]_0 + k\left[(f,g)\right]_1 + k^2\left[(f,g)\right]_2 + \ldots \tag{15}$$

Jest to równoważne pytaniu, ile składników rozwinięcia wielkości:

$$(f,\tilde{g})^2 = \left[(f,\tilde{g})^2\right]_0 + k\left[(f,\tilde{g})^2\right]_1 + k^2\left[(f,\tilde{g})^2\right]_2 + \ldots \tag{16}$$

jest równych składnikom rozwinięcia wielkości:

$$(f,g)(\tilde{g},L\tilde{g}) = \left[(f,g)(\tilde{g},L\tilde{g})\right]_0 + k\left[(f,g)(\tilde{g},L\tilde{g})\right]_1 + \\ + k^2\left[(f,g)(\tilde{g},L\tilde{g})\right]_2 + \ldots \tag{17}$$

Ponieważ ze względu na założenie (12)

$$(f,\tilde{g}) = a_0 + ka_1 + k^2a_2 + \ldots ,$$

gdzie

$$a_n = \sum_{r=0}^{n}\left(\tilde{g}_r, f_{n-r}\right),$$

więc w szeregu (16)

$$\left[(f,\tilde{g})^2\right]_n = \sum_{p=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-p}\left(\tilde{g}_r, f_{n-p-r}\right)\sum_{t=0}^{p}\sum_{s=0}^{p-t}\left(\tilde{g}_t, L_{p-t-s}g_s\right).$$

Dla wyrażenia $(\tilde{g},L\tilde{g})$ otrzymujemy rozwinięcie:

$$(\tilde{g},L\tilde{g}) = b_0 + kb_1 + k^2b_2 + \ldots ,$$

gdzie

$$b_n = \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-r}\left(\tilde{g}_r, L_{n-r-s}g_s\right)$$

i wobec tego w szeregu (17)

$$\left[(f,g)(\tilde{g},L\tilde{g})\right]_n = \sum_{p=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-p}\left(g_r, f_{n-p-r}\right)\sum_{t=0}^{p}\sum_{s=0}^{p-t}\left(\tilde{g}_t, L_{p-t-s}\tilde{g}_s\right).$$

Pytamy się, dla jakich N zachodzi równość

$$\left[(f,\tilde{g})^2\right]_N = \left[(\tilde{g},L\tilde{g})(f,g)\right]_N ,$$

czyli dla jakich N

$$\left[\left(f,\tilde g\right)^2\right]_N - \left[\left(\tilde g, L\tilde g\right)\left(f,g\right)\right]_N = 0.$$

Badamy więc wyrażenie

$$\left[\sum_{p=0}^{N}\ \sum_{r=0}^{N-p}\left(\tilde g_r - g_r, f_{N-p-r}\right)\right]\left[\sum_{t=0}^{p}\ \sum_{s=0}^{p-t}\left(L_{p-t-s}\tilde g_t,\ \tilde g_s - g_s\right)\right]. \quad (18)$$

Dla $N = 0,1 \ldots 2M+1$ i dla $p = 0,1 \ldots M$ mamy $p-t \leqslant M$ i ze względu na założenie (13) występująca w drugim czynniku wyrażenia (18) różnica $\tilde g_s - g_s$ równa jest zeru.

Dla $N = 0,1 \ldots 2M+1$ i dla $p = M+1, M+2 \ldots 2M+1$ mamy $N-p \leqslant M$ i ze względu na założenie (13) występująca w pierwszym czynniku wyrażenia (18) różnica $\tilde g_r - g_r$ równa jest zeru. Wobec tego wyrażenie (18) jest równe zeru dla $N = 0,1 \ldots 2M+1$.

Widzimy więc, że jeżeli dla szeregu:

$$g = g_0 + kg_1 + k^2 g_2 + \ldots$$

zachodzą równości (13), to wtedy w rozwinięciach (14) i (15) $2M+2$ pierwszych wyrazów będzie równych sobie. Jak już wcześniej zaznaczono, takie samo przybliżenie dla zakresu długofalowego otrzymuje się dobierając w metodzie Galerkina funkcje G_n w ten sposób, by zachodziły równości (6) i wstawiając znalezioną za pomocą równań Galerkina funkcję G bezpośrednio do wyrażenia $\tilde A = (f,G)$.

Porównajmy obecnie ilość pracy, jaką musimy wykonać, aby otrzymać dla zakresu długofalowego dane przybliżenie wielkości A obiema opisanymi powyżej drogami.

Stosując metodę Galerkina w połączeniu z metodą perturbacji mamy do wykonania następujące obliczenia:

1/ znalezienie z równań (4) funkcji g_n dla n = 0,1... ... M z dokładnością do współczynnika stałego,

2/ znalezienie z układu M równań Galerkina (5) współczynników c_n szeregu $G = \sum_{n=0}^{M} c_n G_n$,

3/ obliczenie wyrażenia $\widetilde{A} = (f,G)$.

Stosując metodę perturbacji w połączeniu z metodą Levin-Schwinger w celu otrzymania dla zakresu długofalowego tego samego przybliżenia wielkości A co drogą poprzednią mamy do wykonania następujące obliczenia:

1/ znalezienie z równań (4) funkcji g_n dla n = 0,1...M,

2/ dla tak znalezionej funkcji $\widetilde{g}$ obliczenie wielkości $\widetilde{A}$ z wyrażenia stacjonarnego $\widetilde{A}_S = (f,\widetilde{g})^2 /(\widetilde{g},L\widetilde{g})$

Widzimy więc, że całki, które musimy obliczyć w obu drogach, są takie same. Między pierwszą a drugą drogą różnica w obliczeniach polega w zasadzie jedynie na tym, że oprócz wspólnych do obliczenia całek w pierwszym przypadku rozwiązujemy M równań algebraicznych, w drugim zaś rozwijamy w szereg względem potęg k wielkość $\widetilde{A}_S = (f,\widetilde{g})^2/ (\widetilde{g},L\widetilde{g})$.

L I T E R A T U R A

1. K. B o c h e n e k, Metody analizy pól elektromagnetycznych, PWN, Warszawa 1961.
2. F. B o r g n i s, Ch. P a p a s, Randwertprobleme der Mikrowellenphysik, Springer - Verlag, 1955.
3. D.S. J o n e s, A Critique of the Variational Method in Scattering Problems, IRE Transactions on Antennas and Propagation, July 1956.
4. J. K r z y ż o w s k a, Convergence of Perturbation Series in Diffraction Problems, Prace Zakładu Teorii Łączności, Nr 38, Warszawa, 1967.
5. H. L e v i n e, J. S c h w i n g e r, On the Theory of Diffraction by an Aperture in an Infinite Plane Screen. I.Physical Review, October 15, 1948.
6. B. N o b l e, Integral Equation Perturbation Methods in Low-Frequency Diffraction.Electromagnetic Waves, Madison 1962, 323 - 360.

СРАВНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ
В ДЛИННОВОЛНОВЫХ ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ

Резюме

Анализируются некоторые приближенные методы, применяемые к решению задач дифракции для длинноволнового диапазона. За исходную точку принимаются соответствующие интегральные уравнения.

В частности, исследуется применение метода Галеркина в соединении с методом пертурбации и метода пертурбации в соединении с методом Левина-Швингера. Показано, что находя здесь некоторые интересующие нас величины двумя вышеуказанными методами, получаются такие же самые приближения.

COMPARISON OF SOME OF APPROXIMATION METHODS
IN LONG-WAVE DIFFRACTION PROBLEMS

Summary

Some approximation methods in long-wave diffraction problems are considered. As a starting point appropriate integral equations are taken here. In particular an examination of application of Galerkin's method in connexion with perturbation method and perturbation method in connexion with Lewin-Schwinger method is presented. It has been demonstrated, that finding some pertinent quantities in this two ways the same approximation is obtained.