Zbigniew F. Baczyński

PODSTAWOWE RÓWNANIA TEORII OŚRODKÓW WIELOSKŁADNIKOWYCH MIKRONIEJEDNORODNYCH

13/1968

WARSZAWA

IPPT
PAN

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

D o   u ż y t k u   w e w n ę t r z n e g o

Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN

Nakład 200 egz. Ark. wyd. 0,4. Ark. druk. 0,6.
Oddano do drukarni w maju 1968 r.
Wydrukowano w czerwcu 1968 r. Nr zam. 460/0/68.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

PODSTAWOWE RÓWNANIA TEORII OŚRODKÓW WIELOSKŁADNIKOWYCH MIKRONIEJEDNORODNYCH

Zbigniew F. Baczyński

1. WSTĘP

Celem pracy jest wyprowadzenie równań dynamicznych dla ośrodków utworzonych z wielu materiałów /faz/ nazywanych też składnikami w ujęciu fenomenologicznym.

Fenomenologiczna koncepcja ośrodka wieloskładnikowego polega na przyjęciu, że ośrodek składa się z wielu różnych składników "wymieszanych" z sobą idealnie, tj. w taki sposób, że w każdym miejscu zajętym przez ośrodek zawierają się wszystkie jego składniki. Przyjęcie to jest uzasadnione interpretacją pojęć "cząstka" i "miejsce" w mechanice ośrodków ciągłych, które są pojęciami pierwotnymi teorii. W szczególności "cząstkę" ośrodka ciągłego interpretujemy jako zbiór mikroelementów /molekuł/, które w każdej chwili zajmują z jednej strony obszar makroskopowo tak mały by zjawiska i własności makroskopowe można było uważać za ciągłe, a obszar zajmowany przez cząstkę ciała za punkt geometryczny. Z drugiej strony jednak zbiór mikroelementów tworzących cząstkę musi zawierać tak dużą ich liczbę by można było do niego zastosować prawa fizyki statystycznej /dla ciał stałych krystalicznych obszar taki powinien być rzędu 10^{-5} cm^3/. Tak więc określenie: "miejsce zajęte przez kilka składników jednocześnie" należy interpretować jako niewielki obszar, w którym znajdują się jednocześnie wszystkie składniki.

Oznaczymy przez K liczbę wszystkich składników, z których składa się rozpatrywany ośrodek. Założymy następnie, że w pewnych przedziałach czasu mogą występować także części ośrodka złożone tylko z jednego składnika względnie kilku /niekoniecznie wszystkich/ wymieszanych ze sobą idealnie. Przyjęty w ten sposób model ośrodka opisuje również zjawiska wzajemnego "przenikania się" różnych składników /dyfuzję/, "zespalania się" składników oraz ich "segregację".

2. RÓWNANIA DYNAMIKI SPRĘŻYSTEGO CIAŁA PROSTEGO Z DODATKOWYMI STOPNIAMI SWOBODY

Punktem wyjścia do teorii ośrodka wieloskładnikowego są równania dynamiki dla ciała sprężystego prostego z wewnętrznymi stopniami swobody. Równania takie podane zostały między innymi w monografii C. Woźniaka [1].

Oznaczmy przez:

x^k, /k=1,2,3/, - współrzędne przestrzenne;

X^K, /K=1,2,3/, - współrzędne Lagrange'a, /$X^K \in B$/;

t, - czas, /$t \in T$/;

$\psi^\alpha/X^K,t/$, - zmienne dynamiczne, /α =1,2,..............,M/.

Poszukiwany układ M funkcji $\psi^\alpha/X^K,t/$ jest określony w przestrzeni bazowej B x T. Zmienne dynamiczne są podstawowymi niewiadomymi każdego zagadnienia dynamicznego tzn. gdy są one znane, wówczas wszystkie inne wielkości występujące w teorii można bez trudu wyliczyć przez działania algebraiczne i różniczkowanie.

Zakładamy, że funkcje $\psi^\alpha/X^K,t/$ przy nieskończenie małych przesunięciach ϵ^k i obrotach ϵ^{kl} przestrzeni odniesienia danych wzorami:

$$/1/ \qquad x^k \dashrightarrow x^k + \epsilon^k + \epsilon^{kl}x_l, \qquad \epsilon^{kl} = -\epsilon^{lk},$$

transformują się liniowo i wtedy

$$/2/ \qquad \psi^\alpha \dashrightarrow \psi^\alpha + \epsilon^k S_k^\alpha + \epsilon^{kl} S_{kl}^{\alpha\beta}\psi_\beta, \qquad /\alpha,\beta=1,2,.....,M/,$$

gdzie S_k^α i $S_{kl}^{\alpha\beta}$ są stałymi /niezależnymi od ϵ^k i ϵ^{kl}/ danymi dla każdego przypadku ciała z wewnętrznymi stopniami swobody. Stałe te charakteryzują własności transformacyjne zmiennych dynamicznych $\psi^\alpha/X^K,t/$.

Równania ruchu ciała sprężystego prostego mają postać:

$$/3/ \qquad t_{\alpha,K}^{K} + b_\alpha = \dot{m}_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha},$$

gdzie: $t_\alpha^K \overset{df}{=} -\dfrac{\partial L}{\partial \psi^\alpha_{,K}}$ jest uogólnionym tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa;

$m_\alpha \overset{df}{=} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^\alpha}$ jest uogólnionym pędem;

b_α - jest uogólnioną siłą zewnętrzną, a funkcja Lagrange'a zależy od współrzędnych materialnych, czasu, oraz od rozkładu zmiennych dynamicznych ψ^α w nieskończenie małym otoczeniu punktu $/X^K,t/$ przestrzeni bazowej, czyli

$$L = L/X^K, t;\ \psi^\alpha;\ \psi^\alpha_{,K};\ \dot{\psi}^\alpha/ \tag{4}$$

Funkcja ta określa własności dynamiczne sprężystego ciała prostego, które są własnościami lokalnymi ponieważ funkcja ta zależy tylko od jednego punktu przestrzeni bazowej B x T.

Silne prawa zachowania pędu, momentu pędu i energii mają postać:

$$S^\alpha_k \frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha} = 0,$$

$$S^{\alpha\beta}_{[kI]} / \frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha} \psi_\beta + \frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha_{,K}} \psi_{\beta,K} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^\alpha} \dot{\psi}_\beta / = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Równania te narzucają pewne dodatkowe ograniczenia na zmienne dynamiczne i zachodzą nawet wtedy gdy nie są spełnione równania ruchu.

Z niezmienniczości funkcjonału działania względem przestrzeni odniesienia wynikają całkowe prawa zachowania jako słabe prawa zachowania dla dowolnej części obszaru B^* i przedziału czasu T, które przyjmujemy w postaci:

$$\left[\int_{B^*} S^\alpha_k m_\alpha \, dB\right]_{t_o}^{t_1} = \int_{t_o}^{t_1} / \oint_{A^*} S^\alpha_k t_\alpha{}^K dA_K + \int_{B^*} S^\alpha_k b_\alpha \, dB / dt,$$

/6/

$$\left[\int_{B^*} S^{\alpha\beta}_{[kI]} m_\alpha \psi_\beta \, dB\right]_{t_o}^{t_1} = \int_{t_o}^{t_1} / \oint_{A^*} S^{\alpha\beta}_{[kI]} t_\alpha{}^K \psi_\beta \, dA_K +$$

$$+ \int_{B^*} S^{\alpha\beta}_{[kI]} b_\alpha \psi_\beta \, dB / dt,$$

$$/6/ \qquad \left[\int_{B^*} /m_\alpha \dot{\psi}^\alpha - L/dB\right]_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} /\oint_{A^*} t_\alpha{}^K \dot{\psi}^\alpha dA_K + \int_{B^*} b_\alpha \dot{\psi}^\alpha dB/dt$$

Wielkości występujące po lewych stronach równań /6/ stanowią kolejno: zmiany pędu, momentu pędu i energii, od chwili t_0 do chwili t_1. Wielkości po prawych stronach tych równań są kolejno: źródłami /przyczynami/ zmiany pędu, momentu pędu i energii. Powyższe słabe prawa zachowania zachodzą wtedy gdy są spełnione równania ruchu.

Z zasady względności Galileusza /równania ruchu muszą mieć tą samą postać we wszystkich inercjalnych układach odniesienia/ wynika, że suma uogólnionych pędów powinna być pochodną pewnej dowolnej funkcji F_k tzn.

$$/7/ \qquad S_k^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^\alpha} = \dot{F}_k$$

Równanie /7/ i silne prawa zachowania stanowią warunki ograniczające postać Lagrange'anu.

3. RÓWNANIA DYNAMIKI OŚRODKA N-SKŁADNIKOWEGO

Z równań dynamicznych dla ciała sprężystego prostego z wewnętrznymi stopniami swobody do równań ośrodka wieloskładnikowego przechodzi się formalnie przez odpowiednią interpretację zmiennych dynamicznych.

Oznaczmy przez X_a, /a=I,II,.......,N/, cząstkę ośrodka należącą do składnika "a" i niech B_a będzie zbiorem tych cząstek. Przyporządkujmy cząstkom $X_a \in B_a$ w sposób jednoznaczny liczby $X^K \in B$, które będą współrzędnymi Lagrange'a cząstek X_a. Obszar B można interpretować jako pewien obszar w przestrzeni odniesienia, który w danej chwili $t \in T$ wypełniają idealnie "wymieszane" z sąbą cząstki X_a każdego ze składników B_a rozważanego ośrodka. Niech dalej ruch cząstek X_a poszczególnych składników "a" ośrodka wieloskładnikowego opisują funkcje

$$/8/ \qquad x^k = \psi_a^k/X^K,t/, \quad /a=I,II,.......,N/, \; X^K \in B, \; t \in T,$$

gdzie x^k są współrzędnymi miejsca zajętego przez cząstkę X^K składnika "a" w chwili t. Jak zwykle przyjmujemy, że φ_a^k są ciągłe i różniczkowalne wraz ze swymi pochodnymi odpowiednią liczbę razy oraz, że zachodzi warunek

/9/ $$\det \varphi^k_{a,K} \neq 0, \quad \text{dla każdego } t \in T$$

Funkcje $\varphi_a^k/X^K,t/$ przy nieskończenie małych przesunięciach i obrotach przestrzeni odniesienia transformują się zgodnie z wzorem

/10/ $$\varphi_a^k/X^K,t/ \longrightarrow \varphi_a^k/X^K,t/ + \epsilon^{kl}\varphi_{al}/X^K,t/ + \epsilon^k$$

Funkcje $\varphi_a^k/X^K,t/$ przyjmujemy jako zmienne dynamiczne ośrodka wieloskładnikowego. Tym samym możemy przyjąć, że

/11/ $$\varphi^\alpha = \sum_{a=1}^{N} \delta^\alpha_{k+3a-3}\, \varphi_a^k/X^K,t/$$

Liczba zmiennych dynamicznych wynosi więc M=3N, a liczba dodatkowych stopni swobody jest M-3.

Z porównania powyższego przekształcenia z ogólną transformacją zmiennych dynamicznych dla ciała sprężystego prostego można stwierdzić, że współczynniki transformacji zmiennych dynamicznych są:

/12/ $$S^{\alpha\beta}_{kl} = \sum_{a=1}^{N} \delta^\alpha_{k+3a-3}\, \delta^\beta_{l+3a-3}\,, \qquad S^\alpha_k = \sum_{a=1}^{N} \delta^\alpha_{k+3a-3}$$

Przedstawiając funkcję Lagrange'a w postaci

/13/ $$L = L/X^K,t;\ \varphi_a^k;\ \varphi^k_{a,K};\ \dot{\varphi}_a^k/,$$

oraz wprowadzając definicje uogólnionego naprężenia i uogólnionego pędu;

/14/ $$t_{ak}{}^K \overset{\mathrm{df}}{=} -\frac{\partial L}{\partial \varphi^k_{a,K}}, \quad \text{tj.} \quad t_{ak}{}^K = \delta^\alpha_{k+3a-3}\, t_\alpha{}^{\overset{*}{K}},$$

$$/14/ \qquad m_{ak} \stackrel{df}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^k_a}, \qquad \text{tj. } m_{ak} = \delta^{\alpha}_{k+3a-3}\, m_{\alpha},$$

dochodzimy do równań ruchu dla ośrodka wieloskładnikowego w postaci:

$$/15/ \qquad t_{ak}{}^{K}{}_{,K} + b_{ak} - \dot{m}_{ak} + \frac{\partial L}{\partial \psi^k_a} = 0,$$

gdzie $b_{ak} = \delta_{k+3a-3}\, b_{\alpha}$ są uogólnionymi składowymi sił objętościowych składników "a".

Z zasady względności Galileusza i silnych praw zachowania wynika, że:

$$/16/ \qquad \begin{aligned} L &= \tfrac{1}{2} P^{ab}/X^K/\, \dot{\psi}^k_a\, \dot{\psi}_{bk} - \epsilon/X^K;\ \psi^k_a;\ \psi^k_{a,K}/, \\ \epsilon &= \epsilon/X^K;\ \psi^k_a - \psi^k_b;\ \psi^k_{a,K}\, \psi_{bk,L};\ \epsilon_{klm}\, \psi^k_{a,K}\, \psi^l_{b,L}\, \psi^m_{c,M}/ \end{aligned}$$

Własności ośrodka wieloskładnikowego jako układu dynamicznego są więc określone energią wewnętrzną oraz funkcjami $P^{ab}/X^K/$ charakteryzującymi "rozkład masy" tego ośrodka. Pierwszą część funkcji Lagrange'a można traktować jako energię kinetyczną ośrodka wieloskładnikowego.

Słabe prawa zachowania dla ciała sprężystego wieloskładnikowego mają postać:

$$/17/ \qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_{B^*}\sum_a P^{ab}\,\dot{\psi}_{bk}\, dB = \oint_{A^*}\sum_a t_{ak}{}^{K}\, dA_K + \int_{B^*}\sum_a b_{ak}\, dB, \\ &\frac{d}{dt}\int_{B^*} P^{ab}\,\dot{\psi}_{b[k}\,\psi_{al]}\, dB = \int_{A^*} t_{a[k}{}^{K}\,\psi^a_{l]}\, dA_K + \int_{B^*} b_{a[k}\,\psi^a_{l]}\, dB, \\ &\frac{d}{dt}\int_{B^*} /\tfrac{1}{2}P^{ab}\,\dot{\psi}^k_a\,\dot{\psi}_{bk} + \epsilon/dB = \oint_{A^*} /t^{aK}_k\,\dot{\psi}^k_a\, dA_K + \int_{B^*} b^a_k\,\dot{\psi}^k_a\, dB \end{aligned}$$

4. ZLINEARYZOWANA TEORIA OŚRODKA WIELOSKŁADNIKOWEGO MIKRONIEJEDNORODNEGO. ZAGADNIENIE STATYCZNE.

Przyjmiemy obecnie, że ruch cząstek X_a poszczególnych składników "a" ośrodka wieloskładnikowego opisują funkcje

/18/ $$x^k = \delta^k_K X^K + u^k_a/X^K/,$$

gdzie u^k_a jest wektorem przemieszczenia składników "a". Wtedy energia sprężysta ma postać:

/19/ $$\sigma = \sigma\left[X^K;\ /x^k_a - x^k_b/\ x_{ck,K};\ x^k_{a,K}\ x_{bk,L};\ ;\ \epsilon_{klm}\ x^k_{a,K}\ x^l_{b,L}\ x^m_{c,M};\right]$$

Jeśli wyrażenie powyższe rozwiniemy w szereg względem wektora przemieszczenia $u^k_a/X^K/$ i zachowamy w tym rozwinięciu człony liniowe to okaże się, że

/20/ $$\sigma = \sigma/X^K;{}'e_{abK};{}'e_{abKL};{}'e_{abK,L};/$$

czyli, że energia sprężysta ośrodka wieloskładnikowego zależy od współrzędnych Lagrange'a i pewnych miar odkształcenia. Te miary odkształcenia definiuje się przez przemieszczenia i ich pochodne w następujący sposób:

/21/ $$\begin{aligned} {}'e_{abK} &\overset{df}{=} u_{aK} - u_{bK}\,, \\ {}'e_{abKL} &\overset{df}{=} u_{aL,K} + u_{bK,L}\,, \\ {}'e_{abK,L} &\overset{df}{=} \epsilon_{NMK}\, u^N_{b,L} + \epsilon_{NLM}\, u^N_{a,K} + \epsilon_{NKL}\, u^N_{c,M} \end{aligned}$$

Udowodniono w pracy, że powyższe miary odkształcenia dadzą się wyrazić przez miary następujące:

/22/
I..... $e_{aKL} = u_{aK,L} + u_{aL,K}$,

II.... $e_{abK} = u_{aK} - u_{bK}$,

III... $e_{abK,L} = u_{aK,L} - u_{bK,L}$, gdzie e_{aKL} jest klasyczną miarą odkształcenia dla tej samej fazy, e_{abK} jest różnicą przemieszczeń dla różnych faz, a $e_{abK,L}$ jest różnicą gradientów dla różnych faz. Wobec tego energia sprężysta zależy teraz od tych miar, czyli

/23/ $$-c = -c/X^K;\ e_{aKL};\ e_{abK};\ e_{abK,L};/$$

Tworząc następnie z powyższych miar jednorodną kwadratową funkcję przemieszczeń otrzymamy ostatecznie wyrażenie na energię sprężystą ośrodka wieloskładnikowego

/24/ $$\begin{aligned}-c = {} & \frac{1}{2} A^{abKLMN} e_{aKL} e_{bMN} + \frac{1}{2} B^{abcdKL} e_{abK} e_{cdL} + \\ & + \frac{1}{2} C^{abcdKLMN} e_{abK,L} e_{cdM,N} + \frac{1}{2} D^{abcdKLM} e_{aKL} e_{bcM} + \\ & + \frac{1}{2} E^{abcKLMN} e_{aKL} e_{bcM,N} + \frac{1}{2} F^{abcdKLM} e_{abK} e_{cdL,M}\end{aligned}$$

gdzie stałe A, B, C, D, E, F są tensorami sztywności sprężystej ośrodka wieloskładnikowego.

Uogólnione naprężenie jakie wywołuje w ośrodku wieloskładnikowym obecność składnika "a" wyraża się wzorem

/25/ $$t_{aL}{}^K \stackrel{df}{=} \frac{\partial e}{\partial u^L_{a,K}},$$

Jeśli we wzorze /25/ wyrazimy energię sprężystą ośrodka przez wprowadzone miary odkształcenia, to otrzymamy uogólnione prawo Hooka dla ciała wieloskładnikowego mikroniejednorodnego,

/26/ $$t_{aKL} \stackrel{df}{=} \boxed{A_{aKLbMN}\, e_{bMN}} + B_{aKLcdM}\, e_{cdM} + C_{aKLcdMN}\, e_{cdM,N}$$

Naprężenie całkowite w dowolnym przekroju ciała wieloskładnikowego jest sumą naprężeń wywołanych obecnością wszystkich składników tj.

/27/ $$t_L{}^K \stackrel{df}{=} \sum_a^N t_{aL}{}^K$$

Jeśli przyjąć, że ciało utworzone jest tylko z jednego składnika to stan naprężenia wyraża się przez klasyczną miarę odkształcenia dla ciała jednoskładnikowego, zaś pozostałe miary odkształcenia znikają. Jest wtedy

/28/
$$t_{KL} \stackrel{df}{=} A_{KLMN}\, e_{MN}$$

Przy założeniu, że przemieszczenia wszystkich składników ośrodka w danym miejscu są te same tzn., że $u_{aK} = u_{bK}$, wtedy /II/ i /III/ miara odkształcenia znika i otrzymujemy następujący związek fizyczny:

/29/
$$t_{aKL} \stackrel{df}{=} A_{aKLMN}\, e_{MN}$$

Wtedy A_{aKLMN} jest tensorem sztywności fazowej dla składników "a". Sposoby wyznaczania tensorów sztywności fazowej były tematem prac między innymi E. Krönera [2] i C. Eimera [3].

Dalszym i oddzielnym zagadnieniem będzie wyznaczanie następnych tensorów sztywności dla danych rzeczywistych struktur ciał wieloskładnikowych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE:

[1] C. Woźniak, Dynamika ciała odkształcalnego, PWN, /w druku/.

[2] E. Kröner, Elastic moduli of perfectly disordered composite materials, J. Mech. Phys. Sol., 5, 15, /1967/.

[3] C. Eimer, Stresses in multi-phase media, 4, 19, /1967/.