Wojciech Krzysztof Nowacki

ZASTOSOWANIE BILINIOWEJ TEORII PLASTYCZNOŚCI DO ZAGADNIEŃ PROPAGACJI FAL

12/1968

WARSZAWA

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

D o   u ż y t k u   w e w n ę t r z n e g o

Zakład Badania Drgań I P P T - P A N

Nakład 200 egz. Ark. wyd.1,3. Ark. druk. 2.
Oddano do drukarni w maju 1968 r.
Wydrukowano w czerwcu 1968 r.Nr zam. 466/0/68

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

ZASTOSOWANIE BILINIOWEJ TEORII PLASTYCZNOŚCI
DO ZAGADNIEŃ PROPAGACJI FAL PODŁUŻNO-POPRZECZNYCH
W PÓŁPRZESTRZENI

W.K.Nowacki

1. Wstęp

Aktualnymi problemami dynamicznej teorii plastyczności są problemy przestrzenne,jak również problemy propagacji fal w złożonym stanie napięcia,lecz zależne od jednej zmiennej przestrzennej. Zagadnienia te posiadają zasadnicze znaczenie praktyczne. Ich niezaawansowanie w literaturze związane jest przede wszystkim z trudnościami natury matematycznej i rachunkowej jak i również z trudnościami natury fizycznej. W zagadnieniach tych na poważne trudności natrafia stosowanie teorii deformacyjnej - nie można spełnić postulatu o pokrywaniu się kierunków głównych tensora naprężenia z kierunkami głównymi tensora odkształcenia.

W literaturze istnieje kilka rozwiązań dotyczących problemów propagacji fal w złożonym stanie napięcia /dla jednej zmiennej przestrzennej/. I tak w pracy [13] autorzy rozwiązali zagadnienie samopodobne propagacji fal poprzecznych

i podłużnych w odwracalnym ośrodku nieliniowo-sprężystym - - półprzestrzeń obciążona stałym w czasie i przestrzeni wymuszeniem kinematycznym. W pracy [3] rozwiązano zagadnienie propagacji fal w półprzestrzeni,wypełnionej ośrodkiem idealnie plastycznym,przy założeniu na jej powierzchni stałego napięcia normalnego i stycznego. Jest to również zagadnienie samopodobne. W pracach [14 i 15] ,opierając się na równaniach konstytutywnych dynamiki gruntów S.S.Grigoriana,przyjmując znaczne uproszczenia natury fizycznej,rozwiązano następujące zagadnienia: problem półprzestrzeni z zadanym na jej powierzchni skokowo stałym ciśnieniem normalnym i stycznym oraz problem półprzestrzeni z zadanym na powierzchni stałym w czasie ciśnienie normalnym,poruszającym się ze stałą prędkością.
Oba przedstawione zagadnienia są samopodobne. Ze względu na przyjęte tutaj obciążenia nie występowały w tych pracach zagadnienia formowania się frontów fal plastycznych,które powstają na skutek współdziałania fal poprzecznych i podłużnych. Na zagadnienia te położono nacisk w pracach [6 - 9] . Skonstruowano w nich rozwiązanie niesamopodobnego problemu propagacji fal w półprzestrzeni sprężysto-lepkoplastycznej przy zadanym monotonicznie rosnącym w czasie a następnie malejącym ciśnieniu normalnym i stycznym na powierzchni półprzestrzeni. W pracy [6] ograniczono się do problemu obciążenia. W pracy [7] rozważono również zagadnienie odciążenia. Niestety przyjęte tutaj równania konstytutywne ośrodka sprężysto-lepkoplastycznego nie całkują się w obszarach

odkształceń lepko-plastycznych. Aby rozwiązać efektywnie postawione zagadnienie trzeba odwołać się do obliczeń numerycznych i tą drogą przeanalizować wpływ poszczególnych parametrów na rozwiązania. W [8] zestawiono wyniki obliczeń numerycznych dla powyższych zagadnień i ich analizę dla różnych wariantów zmiany w czasie i różnego charakteru przyłożenia do powierzchni półprzestrzeni napięć normalnych i stycznych oraz przeprowadzono analizę wpływu wartości współczynnika lepkości na pole naprężeń. W pracach [6,7,8] przyjęto w celu uproszczenia obliczeń numerycznych model ciała bez wzmocnienia - model K.Hohenemsera i W.Pragera. W [9] uwzględniono wpływ wzmocnienia materiału na związki między polem naprężeń i odkształceń. Nie wprowadziło to zmian jakościowych w obrazie rozwiązań,natomiast wykazano tu znaczny wpływ ilościowy wzmocnienia,który jest istotny przy małych prędkościach odkształceń i dużych współczynnikach wzmocnienia materiału.

Celem niniejszej pracy jest rozwiązanie zagadnienia propagacji fal w półprzestrzeni obciążonej na powierzchni dowolnie zmiennym w czasie ciśnieniem normalnym i stycznym. Za punkt wyjścia przyjęto równania konstytutywne [1] . Są one uogólnieniem związków J.S.Koehlera i F.Seitza [10] na przypadek złożonego stanu napięcia,uwzględniają one ściśliwość plastyczną materiału. Równania te w jednoosiowym stanie odkształcenia,przechodzą w klasyczne związki teorii deformacyjnej. Zastosowanie teorii biliniowej w problemach złożonego stanu napięcia ma tę zaletę w stosunku do innych teorii plastyczności, że równania problemu całkują się zarówno w zakresie sprężystym jak i plastycznym. Jest to olbrzymią zaletą tej teorii, gdyż pozwala na efektywne skonstruowanie rozwiązania wielu zagadnień brzegowych, chociaż teoria ta posiada pewne uproszczenia natury fizycznej.

W pracy, w punkcie 2, przedstawiono równania wyjściowe problemu, omawiając w skrócie istotę tej teorii; w p. 3 podano rozwiązanie postawionego problemu brzegowego, dyskusję obszarów na płaszczyźnie fazowej - przedstawiono przypadki propagacji fal słabych i silnych nieciągłości; w p.4 podano kilka uwag dotyczących fali odciążenia.

2. Równania wyjściowe problemu

Rozważymy ruch ośrodka, opisanego modelem biliniowym, wypełniającego półprzestrzeń, na powierzchni której przyłożono napięcia normalne i styczne /rys.1/

/2.1/ $\sigma_{11}(0,t) = -|\sigma_0(t)|\,, \quad \sigma_{12}(0,t) = -|\tau_0(t)|\,,$

dowolnie zmienne w czasie.

Przyjęto w rozważaniach uogólnione w pracy [1] związki J.S.Koehlera i F.Seitza [10] na przypadek złożonego stanu napięcia, uwzględniając ściśliwość plastyczną materiału w taki sposób, aby związki między naprężeniami i odkształceniami dla ciała idealnie plastycznego były biliniowe. Związki te w strefie plastycznej, dla procesu aktywnego obciążenia dane są w postaci

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu_1} s_{ij} + \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1}\right)(s_{ij} - s_{ij}^{\circ}).$$

/2.2/ $$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{3K_1} \sigma_{ii} + \left(\frac{1}{3K_2} - \frac{1}{3K_1}\right)(\sigma_{ii} - \sigma_{ii}^{\circ}),$$

w zakresie sprężystym

/2.3/ $$e_{ij} = \frac{1}{2\mu_1} s_{ij}$$
$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{3K_1} \sigma_{ii}$$

e_{ij} i s_{ij} oraz ε_{ii} i σ_{ii} oznaczają odpowiednio dewiatory i pierwsze niezmienniki tensora odkształcenia i naprężenia; σ_{ij}° jest tensorem naprężeń początkowych, odpowiadających warunkowi płynięcia; μ_1 i K_1 są odpowiednio modułami odkształceń postaciowych i objętościowych; μ_2 i K_2 są stałymi materiałowymi w zakresie plastycznym

/2.4/ $$\mu_2 = \frac{E_2}{2(1+\nu_2)}, \quad 3K_2 = \frac{E_2}{1-2\nu_2}.$$

Równanie /2.2/$_2$ jest przedstawione graficznie na rys.3, przy czym stała K_2 jest modułem ściśliwości w strefie plastycznej. Współczynnik ν_2 określono w [1] dla przypadku prostego rozciągania. Oznaczając $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{(1)} + \varepsilon_1^{(2)}$ oraz $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^{(1)} + \varepsilon_2^{(2)}$, gdzie ε_1 jest odkształceniem podłużnym pręta a ε_2 - odkształceniem poprzecznym oraz $\varepsilon_1^{(1)}$ i $\varepsilon_2^{(1)}$ są odkształceniami odpowiadającymi punktowi płynięcia /rys.2/ otrzymamy z /2.2/

/2.5/ $$\varepsilon_1^{(2)} = \frac{1}{E_2}(\sigma - \sigma^{\circ}), \quad \varepsilon_2^{(2)} = -\frac{\nu_2}{E_2}(\sigma - \sigma^{\circ}).$$

Współczynnik ν_2 określono jako stosunek odkształcenia poprzecznego w strefie plastycznej do odkształcenia podłużnego w strefie plastycznej

/2.6/ $$\nu_2 = -\varepsilon_2^{(2)} / \varepsilon_1^{(1)}$$

Tak więc ν_2 w związkach /2.4/ jak również μ_2 odgrywa rolę współczynnika Poissona i modułu ścinania w strefie plastycznej. W próbach jednoosiowego rozciągania E_2 może być otrzymane z wykresu $\sigma - \varepsilon$ /rys.2/, K_2 z wykresu $\sigma_{ii} - \varepsilon_{ii}$ /rys.3/ a ν_2 określimy na podstawie /2.4/.

W pracy [1] podano również inną postać równań /2.2/

$$/2.7/ \quad \begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1+p}{E_2}\left\{\left(1-\frac{E_2}{E_1}\frac{p-\nu_1}{1+p}\right)s_{ij} - \left(1-\frac{E_2}{E_1}\right)s^{\circ}_{ij}\right\}, \\ \varepsilon_{ii} &= \frac{1-2\nu_1}{E_1}\sigma_{ii} + \left(\frac{1}{E_2}-\frac{1}{E_1}\right)(1-2p)(\sigma_{ii}-\sigma^{\circ}_{ii}), \end{aligned}$$

wprowadzając współczynnik poprzecznego zwężenia plastycznego p zdefiniowany jako stosunek

$$/2.8/ \quad p = -\varepsilon_2^p / \varepsilon_1^p \quad ,$$

gdzie ε_1^p i ε_2^p są określone na podstawie /2.2/ dla jednoosiowego stanu naprężenia $\varepsilon_1^p = \left(\frac{1}{E_2}-\frac{1}{E_1}\right)(\sigma-\sigma^{\circ})$ i $\varepsilon_2^p = -\left(\frac{\nu_2}{E_2}-\frac{\nu_1}{E_1}\right)(\sigma-\sigma^{\circ})$

W pracy przyjęto warunek plastyczności Misesa

$$/2.9/ \quad J_2' = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = k_0^2$$

gdzie J_2' jest drugim niezmiennikiem dewiatora naprężeń.

Proces aktywnego obciążenia będzie miał miejsce wtedy gdy $dJ_2' \geqslant 0$. Podobnie jak to ma miejsce w innych teoriach plastyczności,przyjęto tutaj odciążenie sprężyste. W odciążeniu,związki /2.2/ przyjmują postać :

$$/2.10/ \quad \begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2\mu_1}s_{ij} + \left(\frac{1}{2\mu_2}-\frac{1}{2\mu_1}\right)\left(s_{ij}^{(max)}-s^{\circ}_{ij}\right), \\ \varepsilon_{ii} &= \frac{1}{3K_1}\sigma_{ii} + \left(\frac{1}{3K_2}-\frac{1}{3K_1}\right)\left(\sigma_{ii}^{(max)}-\sigma^{\circ}_{ii}\right), \end{aligned}$$

gdzie $\sigma_{ij}^{(max)}$ jest tensorem naprężeń na fali odciążenia.

Powyższe związki fizyczne należy uzupełnić równaniami równowagi dynamicznej

/2.11/ $\sigma_{ik,k} - \rho u_{i,tt} = 0,$

oraz związkami dla małych deformacji

/2.12/ $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right).$

Przy przyjętych warunkach brzegowych typu /2.1/ w półprzestrzeni propaguje się układ fal naprężenia, zależnych jedynie od dwóch zmiennych x, t:

$$u_1(x,t) = u_1\,,\quad u_2(x,t) = u_2\,,\quad u_3(x,t) = 0.$$

W związku z tym stan naprężeń i odkształceń spełnia następujące relacje

/2.13/ $\varepsilon_{11} = u_{1,1}\,;\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} u_{2,1}\,;\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0\,;$
$\sigma_{22} = \sigma_{33}\,;\ \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0,$

ponadto

/2.14/ $v_{1,1} = \varepsilon_{11,t}\,;\ v_{2,1} = 2\varepsilon_{12,t}$

gdzie oznaczono $v_1 = u_{1,t}$, $v_2 = u_{2,t}$

Mając na uwadze /2.13/ i /2.14/ równania rozważanego problemu przyjmą następującą postać:

/2.15/
$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{2\mu_2}\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right) - \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1}\right)\left(\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0\right)\\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2\mu_2}\sigma_{12} - \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1}\right)\sigma_{12}^0\\
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{3K_2}\left(\sigma_{11} + 2\sigma_{22}\right) - \left(\frac{1}{3K_2} - \frac{1}{3K_1}\right)\left(\sigma_{11}^0 + 2\sigma_{22}^0\right)
\end{aligned}\right\}$$

W procesie aktywnego obciążenia w strefie plastycznej

$(J_2' > k_0^2\,,\ dJ_2' \geq 0)$

/2.15/

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu_1}\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right) \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2\mu_1}\sigma_{12} \\ \varepsilon_{11} = \frac{1}{3K_1}\left(\sigma_{11} + 2\sigma_{22}\right) \end{cases}$$

w zakresie sprężystym $\left(J_2' \leqslant k_0^2\right)$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu_1}\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right) + \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1}\right)\left(\sigma_{11}^{(max)} - \sigma_{22}^{(max)} - \sigma_{11}^{\circ} + \sigma_{22}^{\circ}\right) \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2\mu_1}\sigma_{12} + \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1}\right)\left(\sigma_{12}^{(max)} - \sigma_{12}^{\circ}\right) \\ \varepsilon_{11} = \frac{1}{3K_1}\left(\sigma_{11} + 2\sigma_{22}\right) + \left(\frac{1}{3K_2} - \frac{1}{3K_1}\right)\left(\sigma_{11}^{(max)} + 2\sigma_{22}^{(max)} - \sigma_{11}^{\circ} - 2\sigma_{22}^{\circ}\right) \end{cases}$$

w procesie odciążania $\left(J_2' > k_0^2, dJ_2' < 0\right)$

oraz

/2.16/
$$\sigma_{11,1} - \varrho v_{1,t} = 0, \quad v_{1,1} = \varepsilon_{11,t};$$
$$\sigma_{12,1} - \varrho v_{2,t} = 0, \quad v_{2,1} = 2\varepsilon_{12,t}.$$

Warunek płynięcia /2.9/ będzie miał postać

/2.17/ $$J_2' = \frac{1}{3}\left[\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)^2 + 3\sigma_{12}^2\right] = k_0^2 .$$

Ponadto rozwiązujemy problem przy zerowych warunkach początkowych

/2.18/ $$u_1(x,0) = u_2(x,0) = 0, \quad u_{1,t}(x,0) = u_{2,t}(x,0) = 0.$$

3. Rozwiązanie problemu i analiza frontów fal obciążenia na płaszczyźnie x,t

Wyprowadzony układ równań /2.15/ i /2.16/ jest układem równań hiperbolicznych,mający następujące rodziny rzeczywistych charakterystyk:

w strefie odkształceń sprężystych oraz w strefie odciążenia

/3.1/ $x \mp a_{11}t = const$, $x \mp a_{12}t = const$,

w strefie odkształceń plastycznych

/3.2/ $x \mp a_{21}t = const$, $x \mp a_{22}t = const$,

gdzie prędkości fal sprężystych i plastycznych są określone następująco:

/3.3/ $$a_{11}^2 = \frac{3K_1 + 4\mu_1}{3\rho}; \quad a_{12}^2 = \frac{\mu_1}{\rho}; \quad a_{21}^2 = \frac{3K_2 + 4\mu_2}{3\rho}; \quad a_{22}^2 = \frac{\mu_2}{\rho}.$$

Przyjmując w biliniowej teorii plastyczności $E_1 > E_2$ oraz $K_1 \geqslant K_2$,będą spełnione nierówności $a_{11} > a_{12}$, $a_{21} > a_{22}$, $a_{11} > a_{21}$, $a_{12} > a_{22}$. Mogą natomiast zachodzić trzy przypadki: $a_{21} > a_{12}$, $a_{12} > a_{21}$ i $a_{12} = a_{21}$ które będziemy szczegółowo rozważali.

Układ równań /2.15/ i /2.16/ można zastąpić ekwiwalentnym układem równań wzdłuż charakterystyk:

$$\sigma_{11} \mp \rho a_{11} v_1 = const \quad \text{dla} \quad x \mp a_{11}t = const,$$
$$\sigma_{12} \mp \rho a_{12} v_2 = const \quad \text{dla} \quad x \mp a_{12}t = const,$$
$$\sigma_{11} \mp \rho a_{21} v_1 = const \quad \text{dla} \quad x \mp a_{21}t = const,$$
$$\sigma_{12} \mp \rho a_{22} v_2 = const \quad \text{dla} \quad x \mp a_{22}t = const.$$

Zaletą modelu biliniowego jest fakt całkowalności związków na charakterystykach w obszarze plastycznym,co pozwala na rozwiązanie szeregu problemów granicznych w złożonym stanie napięcia w postaci zamkniętej,bez uciekania się do niezmiernie uciążliwych obliczeń numerycznych.

W zależności od charakteru zmiany w czasie naprężeń $\sigma_0(t)$ i $\tau_0(t)$,przyłożonych do powierzchni półprzestrzeni,mogą propagować się w głąb półprzestrzeni fale słabej i silnej nieciągłości. Fale silnej nieciągłości mogą się propagować tylko w przypadku nieciągłych funkcji $\sigma_0(t)$ i $\tau_0(t)$. Model biliniowy przy założeniu $E_1 \geqslant E_2$, $K_1 \geqslant K_2$ nie dopuszcza do powstania fal uderzeniowych. W pierwszej kolejności rozważymy przypadki powstawania fal plastycznych obciążenia, słabej nieciągłości.

3.1 Fale słabej nieciągłości

Założymy, że funkcje $\sigma_0(t)$ i $\tau_0(t)$ są funkcjami ciągłymi, przy czym $\sigma_0(0) = 0$ i $\tau_0(0) = 0$. Obraz falowy na płaszczyźnie fazowej x,t jest następujący. Wraz ze wzrostem naprężeń $\sigma_0(t)$ i $\tau_0(t)$ na brzegu, w głąb półprzestrzeni propagują się dwa nieoddziaływujące ze sobą układy fal Riemanna z prędkościami a_{11} i a_{12} /rys.4/. Rozwiązania analityczne w poszczególnych obszarach płaszczyzny fazowej są następujące:

Obszar I

/3.5/ $\sigma_{11} = -\sigma_0\left(t - \frac{x}{a_{11}}\right),\ \sigma_{22} = -\nu_0\sigma_0\left(t - \frac{x}{a_{11}}\right),\ \sigma_{12} = v_2 = 0,\ v_1 = \frac{1}{\rho a_1}\sigma_0\left(t - \frac{x}{a_{11}}\right).$

Obszar II

/3.6/ $\sigma_{11} = -\sigma_0\left(t - \frac{x}{a_{11}}\right),\ \sigma_{22} = \nu_0\sigma_{11},\ \sigma_{12} = -\tau_0\left(t - \frac{x}{a_{12}}\right),\ v_1 = -\frac{1}{\rho a_{11}}\sigma_{11},\ v_2 = -\frac{1}{\rho a_{12}}\sigma_{12}.$

Następnie począwszy od pewnej chwili $t = t_s$, w które to obciążenia brzegu półprzestrzeni spełniają warunek /2.17/ tzn

/3.7/ $$(1-\nu_0)^2\sigma_0^2(t_s) + 3\tau_0^2(t_s) = 3k_0^2,$$

przy czym ze związków fizychnych /2.15/ w zakresie sprężystym wynika, że $\sigma_{22} = \nu_0\sigma_{11}$, gdzie $\nu_0 = \dfrac{3K_1 - 2\mu_1}{3K_1 + 4\mu_1}$, zacznie rozprzeniać się front fali plastycznej obciążenia. W zależności od stosunku prędkości a_{12} i a_{21} będziemy mieli różny obraz rozwiązania na płaszczyźnie x,t. Rozważymy kolejno trzy przypadki.

Przypadek I $a_{21} > a_{12}$

W tym przypadku /rys.4/, począwszy od chwili $t=t_s$ zaczyna rozprzestrzeniać się front fali plastycznej $x=\varphi(t)$,ze zmienną prękością. Na fali plastycznej $x=\varphi(t)$ powinien być spełniony warunek /2.17/. Problem określenia fali będzie postawiony jednoznacznie wówczas, gdy prędkość fali plastycznej $c=\varphi'(t)$ będzie ograniczona w przedziale

/3.8/ $$a_{12} \leqslant c \leqslant a_{21}$$

Na kształt fali plastycznej $x=\varphi(t)$ będą miały wpływ jedynie gradienty naprężeń normalnych $\frac{d\sigma_0}{dt}$ dla $t > t_s$ oraz stycznych $\frac{d\tau_0}{dt}$ dla $t < t_s$ /rys.5/. Natomiast nie będą miały wpływu na jej kształt gradienty naprężeń normalnych dla $t < t_s$ i stycznych dla $t > t_s$.

Prędkość początkową fali obciążenia można określić identycznie jak to miało miejsce przy fali obciążenia w analogicznym problemie brzegowym dla modelu ciała sprężysto-lepkoplastycznego [6,7] . Można też określić początkową prędkość fali plastycznej w podobny sposób jak w pracy W.L. Bidermana [2] ,odpowiednio go modyfikując. W niniejszej pracy określimy prędkość początkową fali obciążenia w znacznie prostszy sposób. Założymy, że dany jest front fali plastycznej $x=\varphi(t)$. Z dowolnego punktu obszaru V poprowadzimy charakterystykę dodatnią i ujemną do przeciecia się z falą

$x=\varphi(t)$. Związki /3.4/ na tych charakterystykach mają postać

$$/3.9/\quad \sigma_{11}(x,t)=\sigma_{11}^{*}(t_M)-\rho a_{21}v_1(x,t)+\rho a_{21}v_1^{*}(t_M),$$
$$\sigma_{11}(x,t)=\sigma_{11}^{*}(t_N)+\rho a_{21}v_1(x,t)-\rho a_{21}v_1^{*}(t_N),$$

tutaj oraz w dalszym ciągu gwiazdką będziemy oznaczali wartości na fali $x=\varphi(t)$. Z powyższych związków otrzymamy

$$/3.10/\quad 2\sigma_{11}(x,t)=\sigma_{11}^{*}(t_M)+\sigma_{11}^{*}(t_N)+\rho a_{21}\left[v_1^{*}(t_M)-v_1^{*}(t_N)\right],$$

a następnie różniczkując /3.10/ względem czasu będziemy mieli

$$/3.11/\quad 2\frac{\partial\sigma}{\partial t}=\frac{d\sigma_{11}^{*}}{dt_M}\frac{\partial t_M}{\partial t}+\frac{d\sigma^{*}}{dt_N}\frac{\partial t_N}{\partial t}+\rho a_{21}\left[\frac{dv_1^{*}}{dt_M}\frac{\partial t_M}{\partial t}-\frac{dv_1^{*}}{dt_N}\frac{\partial t_N}{\partial t}\right].$$

Pochodne $\frac{\partial t_M}{\partial t}$ i $\frac{\partial t_N}{\partial t}$ obliczymy odpowiednio z charakterystyki $x=x_M-a_{21}/t-t_M/$ i $x=x_N+a_{21}/t-t_N/$, przy czym $x_M=\varphi(t_M)$ i $x_N=\varphi(t_N)$:

$$/3.12/\quad \frac{\partial t_M}{\partial t}=\frac{a_{21}}{a_{21}+\varphi'(t_M)}\;,\qquad \frac{\partial t_N}{\partial t}=\frac{a_{21}}{a_{21}-\varphi'(t_N)}\;.$$

Wstawiając /3.12/ do /3.11/ i dokonując przejścia granicznego $t_M\rightarrow t_N\rightarrow t_s$ otrzymamy

$$/3.13/\quad 2\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial t}\Big|_{x=c}=\sigma_{11}^{*\prime}(t_s^{+})\left[\frac{a_{21}}{a_{21}+\varphi'}+\frac{a_{21}}{a_{21}-\varphi'}\right]+\rho a_{21}v^{*\prime}(t_s^{+})\left[\frac{a_{21}}{a_{21}+\varphi'}-\frac{a_{21}}{a_{21}-\varphi'}\right]=$$
$$=-2\sigma_0'(t_s^{+}).$$

Wykorzystując ponadto związek na ujemnej charakterystyce sprężystej odpowiadającej fali podłużnej, który po zróżniczkowaniu daje

$$/3.14/\quad v^{*\prime}(t_s^{-})=-\frac{1}{\rho a_{11}}\sigma_{11}^{*\prime}(t_s^{-})$$

oraz warunek plastyczności /3.5/, z którego wyznaczymy σ_{11}^{*} a następnie $\sigma_{11}^{*\prime}(t_s)$:

$$/3.15/ \quad \sigma_{11}^{*'}(t_s) = \frac{3\tau_0(t_s)\,\tau_0'(t_s^-)\left(1-\frac{\varphi'(t_s)}{a_{12}}\right)}{\left[3k_0^2 - 3\tau_0^2(t_0)\right]^{1/2}}$$

przy czym wykorzystano fakt,że $\varphi(t_s)=0$

Ze związków /3.14/ i /3.15/ możemy już wyznaczyć poszukiwaną prędkość początkową fali plastycznej $c_0 = \varphi'(t_s)$. Po licznych przekształceniach otrzymamy wzór na prędkość początkową

$$/3.16/ \quad c_0 = \varphi'(t_s) = \frac{(a_{12}-a_{11})a_{21}^2}{2(a_{21}^2 - Sa_{12}a_{11})} + \left[\left(\frac{a_{21}^2(a_{12}-a_{11})}{2(a_{21}^2 - Sa_{12}a_{11})}\right)^2 + \frac{a_{21}^2 a_{12} a_{11}(1-S)}{a_{21} - Sa_{12}a_{11}}\right]^{1/2},$$

gdzie oznaczono

$$/3.17/ \quad S = \frac{(1-\nu_0)^2\sigma_0'(t_s^+)\sigma_0(t_s)}{3\tau_0'(t_s^-)\tau_0(t_s)} ,$$

$\sigma_0'(t_s^+)$ i $\tau_0'(t_s^-)$ są odpowiednio napięciami brzegowymi odpowiednio dla czasu $t > t_s$ i $t < t_s$.

Mając określoną prędkość początkową fali plastycznej c_0 , oraz żądając spełnienia na fali $x=\varphi(t)$ warunku /2.17/, znajdziemy rozwiązanie w tym obszarze [12] ,łącznie z określeniem całego frontu fali $x=\varphi(t)$.

Z analizy wzoru /3.16/ możemy zauważyć,że gdy: $\tau_0'(t_s) \neq 0$, $\tau_0(t_s) \neq 0$ to jeżeli $\sigma_0'(t_s^+) \to 0$ lub $\sigma_0(t_s) \to 0$ to $c_0 = a_{12}$; jeżeli $\sigma_0'(t_s^+) \to \infty$ to $c_0 = a_{21}$; gdy $\sigma_0'(t_s^+) \neq 0$ $\sigma_0(t_s) \neq 0$ to jeżeli $\tau_0'(t_s^-) \to 0$ lub $\tau_0(t_s) \to 0$ to $c_0 = a_{21}$, jeżeli $\tau_0'(t_s^-) \to \infty$ to $c_0 = a_{12}$.

Widać stąd,że fala plastyczna leży między charakterystykami $x = a_{12}/t-t_s/$ i $x = a_{21}/t-t_s/$. W pewnej chwili

$t = t_k$ fala plastyczna przecina charakterystykę $x = a_{12}t$ - punkt O_2 na rys.4. Może się też zdarzyć taki przypadek, przy szczególnie dobranych obciążeniach zewnętrznych $\sigma_0(t)$ i $\tau_0(t)$, że fala $x=\varphi(t)$ nie przetnie się z charakterystyką $x = a_{12}t$ lecz będzie dążyła asymptotycznie do jekiejś charakterystyki $x = a_{12}/t - t^*/$, $/ 0 < t^* < t_s/$. Oczywiście fakt ten wyniknie dopiero z rozwiązania konkretnego problemu. W przypadkach granicznych, znikania jednej ze składowych napięć brzegowych $\sigma_0(t)$ lub $\tau_0(t)$, fala plastyczna przechodzi w linię prostą, pokrywającą się odpowiednio z charakterystyką $x = a_{11}/t - t_s/$ gdy $\tau_0(t) \equiv 0$, co odpowiada problemom jednowymiarowym.

Obszar III

Zakładając, że znamy już front fali plastycznej $x=\varphi(t)$ możemy na nim określić parametry rozwiązania, mianowicie:

$$\sigma_{12}[\varphi(t),t] = \sigma_{12}^*(t) = -\tau_0\left(t - \frac{\varphi(t)}{a_{12}}\right),\ \sigma_{11}[\varphi(t),t] = \sigma_{11}^*(t) = -\frac{1}{1-\nu_0}\left\{3k_0^2 - 3\tau_0^2\left(t - \frac{\varphi(t)}{a_{12}}\right)\right\}^{1/2}.$$

Rozwiązanie w obszarze III przyjmie postać:

$$/3.13/ \quad \sigma_{11} = \sigma_{11}^*\left(t - \frac{x}{a_{11}}\right),\ \sigma_{22} = \nu_0 \sigma_{11}^*\left(t - \frac{x}{a_{11}}\right),\ \sigma_{12} = -\tau_0\left(t - \frac{x}{a_{12}}\right),$$
$$v_1 = -\frac{1}{\rho a_{11}} \sigma_{11}^*\left(t - \frac{x}{a_{11}}\right),\ v_2 = \frac{1}{\rho a_{12}} \tau_0\left(t - \frac{x}{a_{12}}\right).$$

Obszar IV

$$/3.14/ \quad \sigma_{11} = \sigma_{11}^*\left(t - \frac{x}{a_{11}}\right),\ \sigma_{22} = \nu_0 \sigma_{11},\ \sigma_{12} = v_2 = 0,\ v_1 = -\frac{1}{\rho a_{11}} \sigma_{11}^*\left(t - \frac{x}{a_{11}}\right).$$

Fala plastyczna $x=\varphi(t)$ w punkcie (x_k, t_k) przechodzi w charakterystykę $x = x_k + a_{11}/t - t_k/$. Na jej froncie mamy naprężenie $\sigma_{11} = -\frac{\sqrt{3}}{1-\nu_0} k_0 = -\sigma_p$.

Obszar VI

Obszar ten jest obszarem stałych naprężeń

/3.15/ $\sigma_{11} = -\sigma_p$, $\sigma_{22} = \nu_0 \sigma_{11}$, $\sigma_{12} = v_2 \equiv 0$, $v_1 = -\frac{1}{\rho a_{11}} \sigma_{11}$.

W pozostałych obszarach płaszczyzny fazowej x,t /rys.4/ łatwo można określić rozwiązanie w oparciu o związki wzdłuż charakterystyk /3.4/. W obszarach IX i XI jest $\sigma_{12} = v_2 \equiv 0$. Można wykazać, że przy monotonicznym wzroście naprężeń $\sigma_0(t)$ i $\tau_0(t)$ nad krzywoliniową falą plastyczną $x = \varphi(t)$ nie może powstać obszar stałych naprężeń.

Przypadek II $a_{12} < a_{21}$

W przypadku tym obraz rozwiązania ulegnie znacznemu uproszczeniu w stosunku do przypadku poprzedniego. Rozwiązania w obszarach I i II /rys.6/ są identyczne jak poprzednio i określone są wzorami /3.6/ i /3.7/. Wzdłuż charakterystyki $x = a_{11}(t - t_s)$ jest $\sigma_{11} = -\sigma_0(t_s)$, ponieważ zaburzenia wywołane naprężeniami $\tau_0(t_s)$ rozchodzą się wolniej, z prędkością a_{12}, zatem wzdłuż charakterystyki $x = a_{12}(t - t_s)$ będzie osiągnięty stan plastyczny materiału, tzn będzie spełniony warunek /3.5/. Stąd wynika, że charakterystyka $x = a_{12}(t - t_s)$ będzie falą plastyczną.

Obszar III

$\sigma_{11} = -\sigma_0(t_s)$, $\sigma_{22} = \nu_0 \sigma_{11}$, $v_1 = \frac{1}{\rho a_{11}} \sigma_0(t_s)$, $\sigma_{12} = -\tau_0\left(t - \frac{x}{a_{12}}\right)$, $v_2 = \frac{1}{\rho a_{12}} \sigma_{12}\left(t - \frac{x}{a_{12}}\right)$.

Obszar IV

$\sigma_{11} = -\sigma_0(t_s)$, $\sigma_{22} = \nu_0 \sigma_{11}$, $v_1 = \frac{1}{\rho a_{11}} \sigma_0(t_s)$, $\sigma_{12} = v_2 \equiv 0$.

Obszar V

$$\sigma_{11}=-\sigma_0(t_s),\ \sigma_{12}=-\tau_0(t_s),\ v_1=\frac{1}{\rho a_{21}}\sigma_0(t_s),\ v_2=\frac{1}{\rho a_{12}}\tau_0(t_s).$$

Obszar VI

$$\sigma_{11}=-\sigma_0\left(t-\frac{x}{a_{21}}\right),\ \sigma_{12}=-\tau_0(t_s),\ v_1=\frac{1}{\rho a_{21}}\sigma_0\left(t-\frac{x}{a_{21}}\right),\ v_2=\frac{1}{\rho a_{22}}\tau_0(t_s).$$

Obszar VII

$$\sigma_{11}=-\sigma_0\left(t-\frac{x}{a_{21}}\right),\ \sigma_{12}=-\tau_0\left(t-\frac{x}{a_{22}}\right);\ v_1=\frac{1}{\rho a_{21}}\sigma_0\left(t-\frac{x}{a_{21}}\right),\ v_2=\frac{1}{\rho a_{22}}\tau_0\left(t-\frac{x}{a_{22}}\right.$$

Przypadek III $\quad a_{12} = a_{21}$

Przypadek ten różni się od poprzedniego tylko tym,że znika obszar stałych naprężeń,ograniczony charakterystykami $x = a_{12}/t - t_s/$ i $x = a_{21}/t - t_s/$,obie te charakterystyki pokrawają się,tworząc falę plastyczną obciążenia,wzdłuż której są stałe naprężenia $\sigma_{11}=-\sigma_0(t_s)$ i $\sigma_{12}=-\tau_0(t_s)$ spełniające warunek /3.5/ /rys.7/. Przypadek ten również otrzymamy prosto z 1-go wariantu /przedstawionego na rys.4/ w przejściu granicznym $a_{21} \rightarrow a_{12}$. Tutaj krzywoliniowa fala plastyczna $x=\varphi(t)$ pokryje się z charakterystyką $x=a_{12}/t-t_s$

3.2 Fale silnej nieciągłości

Przejdziemy obecnie do przypadków fal z silnymi nieciągłościami. Będziemy zakładali,że obydwa naprężenia $\sigma_0(t)$ i $\tau_0(t)$ są przyłożone w sposób nagły,następnie rosną w czasie. Można tutaj wyróżnić dwa zasadnicze przypadki: pierwszy przypadek,kiedy naprężenie $\sigma_0(0)$ samo nie powoduje uplastycznienia materiału,tzn $|\sigma_0(0)| < \sigma_p$; drugi przypadek,gdy naprężenie $\sigma_0(0)$ powoduje uplastycznienie, tzn $|\sigma_0(0)| \geq \sigma_p$. Zostały tutaj wybrane przypadki charakterystyczne, pominięto natomiast warianty nie wnoszące nowych cech jakościowych.

Również i tutaj w zależności od stosunku prędkości a_{12} i a_{21} będzie inny obraz rozwiązania na płaszczyźnie fazowej.

Przypadek I $a_{21} > a_{12}$

a/ Założymy, że naprężenie normalne na brzegu półprzestrzeni w chwili początkowej jest $|\sigma_0(0)| < \sigma_p$ tzn samo nie powoduje uplastycznienia materiału. Obraz rozwiązania jest następujący /rys.8/ ;w niezaburzoną półprzestrzeń propaguje się front fali silnej nieciągłości $x = a_{11}t$ na którego froncie są nieciągłe naprężenia normalne $\sigma_{11} = -\sigma_0(0)$. Następnie za tym frontem zaczyna propagować się front fali plastycznej, który dla czasu $t < t_k$ pokrywa się z charakterystyką o równaniu $x = a_{12}t$, która jest zarazem falą silnej nieciągłości dla naprężeń ścinających, natomiast dla naprężeń normalnych σ_{11} jest falą słabej nieciągłości. Na jej froncie powinien być spełniony warunek płynięcia /2.17/, z którego wyliczymy wartość naprężeń stycznych σ_{12} . Na froncie fali plastycznej dla $0 \leq t < t_k$ naprężenie normalne jest

$\sigma_{11}(x,t)|_{x=a_{12}t} = -\sigma_0(t - \frac{x}{a_{21}})$, zatem z /2.17/ mamy

$$\sigma_{12}(x,t)\Big|_{x=a_{12}t} = -\left\{k_0^2 - \frac{1}{3}\left[(1-\nu_0)\,\sigma_0\left(t-\frac{x}{a_{21}}\right)\right]^2\right\}^{1/2} \qquad /3.16/$$

W miarę wzrostu czasu, naprężenie σ_{12} na fali plastycznej $x = a_{12}t$ maleje, osiągając dla czasu $t = t_k$ wartość zerową. W tym punkcie $(x = x_k,\ t = t_k)$ fala plastyczna silnej nieciągłości kończy się,przechodząc w falę słabej nieciągłości, pokrywającą się z charakterystyką $x = x_k + a_{11}/t - t_k/$ na której jest $\sigma_{11} = -\sigma_p$. W obszarze I mamy $\sigma_{11} = -\sigma_o\left(t - \frac{x}{a_{11}}\right)$, $v_1 = -\frac{1}{\varrho a_{11}}\sigma_{11}$, $\sigma_{12} = v_2 \equiv 0$. Obszar II jest obszarem stałych naprężeń $\sigma_{11} = -\sigma_p$, $v_1 = \frac{\sigma_p}{\varrho a_{11}}$, $\sigma_{12} = v_2 \equiv 0$. W obszarze III,IV i V propagują się fale Riemanna naprężeń σ_{11} . W obszarze III $\sigma_{12} \equiv 0$. W obszarach IV i V propagują się fale Riemanna naprężeń stycznych. Na charakterystyce $x = a_{22}t$ jest przenoszone początkowe naprężenie styczne $\sigma_{12} = -\tau_o(0)$.

Przypadek ten można bardzo łatwo otrzymać,dokonując przejścia granicznego dla fali słabej nieciągłości /rys.4/. Dokonując przejścia granicznego np. dla $t^* \to 0$ $/t^* \geq t_s/$ fala plastyczna $x = \varphi(t)$ przejdzie w charakterystykę $x = a_{12}t$.

b/ Założymy z kolei,że naprężenie normalne na brzegu półprzestrzeni w chwili początkowej samo powoduje uplastycznienie materiału,tzn że $|\sigma_o(0)| > \sigma_p$. W przypadku tym /rys.9/ fala plastyczna silnej nieciągłości pokryje się z charakterystyką $x = a_{11}t$ na której będzie $\sigma_{11} = -\sigma_p$. Za nią będzie propagować się fala silnej nieciągłości o równaniu $x = a_{21}t$ z naprężeniem na jej froncie równym $\sigma_{11} = -\sigma_o(0)$. Obszar I będzie obszarem stałych naprężeń, równych $-\sigma_p$. Naprężenie styczne w obszarze I i II będzie równe zeru. Za tymi dwoma frontami fal silnych nieciągłości będzie propagował się trzeci front fali silnej nieciągłości z prędkością a_{22} - nieciągłość naprężeń stycznych σ_{12} , natomiast nie będzie nieciągłości σ_{11} . Skok naprężeń na fali $x = a_{22}t$ będzie równy $\sigma_{12} = -\tau_0(0)$. W obszarze III będą propagowały się fale Riemanna zarówno naprężeń normalnych jak i stycznych.

<u>Przypadek II</u> $a_{12} > a_{21}$

a/ Założymy tutaj w pierwszym rzędzie, identycznie jak poprzednio, że naprężenie normalne na brzegu półprzestrzeni w chwili początkowej jest $|\sigma_0(0)| < \sigma_p$. W przypadku tym w niezaburzoną półprzestrzeń propaguje się front fali silnej nieciągłości z prędkością a_{11} /rys.10/ niosąc na swym fronci naprężenie $\sigma_{11} = -\sigma_0(0)$. Obszar I i II jest obszarem stałych naprężeń normalnych $\sigma_{11} = -\sigma_0(0)$. Z prędkością a_{12} propaguje się front fali plastycznej, na którym naprężenia są następujące: $\sigma_{11} = -\sigma_0(0)$, $\sigma_{12} = \sigma_{12}^* = -\left\{k_0^2 - \frac{1}{3}(1-\nu_0)^2\sigma_0^2(0)\right\}^{1/2}$. Front ten jest frontem fali silnej nieciągłości naprężeń ścinających, natomiast frontem fali słabej nieciągłości naprężeń normalnych. W obszarach II i III jest $\sigma_{12}(x,t) = \sigma_{12}^*$. W obszarze III i IV mamy $\sigma_{11}(x,t) = -\sigma_0\left(t - \frac{x}{a_{21}}\right)$, natomiast naprężenie styczne w obszarze IV jest postaci $\sigma_{12}(x,t) = -\tau_0\left(t - \frac{x}{a_{22}}\right)$.

b/ Przyjęcie warunku $|\sigma_0(0)| > \sigma_p$, przy którym uplastycznienie materiału powoduje samo naprężenie normalne, bez udziału naprężeń stycznych, prowadzi do obrazu podobnego jak w przypadku Ib. Fala plastyczna silnej nieciągłości pokrywa się z charakterystyką $x = a_{11}t$ /rys.11/, na jej froncie jest $\sigma_{11} = -\sigma_p$. Obszar I jest obszarem stałych naprężeń $\sigma_{11} = -\sigma_p$. Następnie w półprzestrzeń propaguje się front fali silnej nieciągłości $x = a_{21}t$ z naprężeniem równym $\sigma_{11} = -\sigma_0(0)$. Następnie z prędkością a_{22} propaguje się fala silnej nieciągłości naprężeń stycznych. Skok naprężeń σ_{12} na jej froncie wynosi $\sigma_{12} = -\tau_0(0)$. W obszarze II i III mamy $\sigma(x,t) = -\sigma_0\left(t - \frac{x}{a_{21}}\right)$. W obszarze III naprężenie styczne jest $\sigma_{12} = -\tau_0\left(t - \frac{x}{a_{22}}\right)$.

Przypadek III $a_{12} = a_{21}$

Przypadek ten można bardzo łatwo otrzymać z obu powyżej przedstawionych,dokonując przejścia granicznego $a_{12} \to a_{21}$, nie będzie on tutaj dyskutowany szczegółowo.

We wszystkich rozpatrywanych przypadkach,zakładając znikanie jednej ze składowych naprężeń powierzchniowych, można wykonać przejścia graniczne do znanych jednowymiarowych zagadnień propagacji fal w prętach.

4. Uwagi dotyczące fali odciążenia

Ze szczegółowej analizy sposobów odciążenia brzegu półprzestrzeni wynika,że mogą zaisnieć dwa różne przypadki jednoznacznego określenia fali odciążenia /dla różnych wartości stosunku prędkości a_{12} i a_{21}/

1° fala plastyczna leży między charakterystykami

$x = a_{11}/t - t_0/$ i $x = a_{21}/t - t_0/$,

2° fala plastyczna leży między charakterystykami

$x = a_{12}/t - t_0/$ i $x = a_{22}/t - t_0/$.

Pierwszy przypadek będzie miał miejsce wówczas,gdy zmieni znak gradient obciążenia normalnego $\frac{d\sigma_o(t)}{dt}$ /rys.12a/ przy niezmienionym znaku gradientu obciążenia stycznego $\frac{d\tau_o(t)}{dt}$, lub też przy jego jednoczesnej zmianie. Fakt ten tłumaczy się tym, że naprężenia normalne w strefie odciążenia rozchodzą się z prędkością większą niż naprężenia ścinające, zatem o powstaniu fali odciążenia będzie decydowała zmiana gradientu obciążenia normalnego $\sigma_o(t)$. Jak wykażemy, w przypadku tym, prędkość początkowa fali odciążenia będzie zależna jedynie od gradientów naprężenia normalnego $\frac{d\sigma_o(t)}{dt}$ dla $t = t_o^+$ i $t = t_o^-$. Drugi przypadek będzie miał miejsce wówczas, gdy przy monotonicznym wzroście naprężeń normalnych $\sigma_o(t)$, ulega zmianie znak gradientu naprężenia stycznego $\frac{d\tau_o(t)}{dt}$ /rys.12b/. Również w tym przypadku prędkość początkowa będzie zależna tylko od gradientów jednego naprężenia - - naprężenia stycznego $\frac{d\tau_o(t)}{dt}$ dla $t = t_o^+$ i $t = t_o^-$.

Przejdziemy kolejno do omówienia obydwóch przypadków. Kształt fali odciążenia określimy w podobny sposób jak to uczyniono przy określeniu fali plastycznej. Założymy, że dany jest front fali odciążenia $x = \psi_1(t)$ /rys.12a/. Z dowolnego punktu $P_1/x,t/$ prowadzimy charakterystykę ujemną i dodatnią do przecięcia się z falą odciążenia $x = \psi_1(t)$. Wykorzystując związki na charakterystykach w obszarze odciążenia, różniczkując je względem czasu, obliczając pochodne $\frac{\partial t_M}{\partial t}$ i $\frac{\partial t_N}{\partial t}$ identycznie jak w /3.12/, dokonując przejścia granicznego $t_M \to t_N \to t_o$ otrzymamy

$$/4.1/\quad 2\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t}\bigg|_{x=0} = \sigma_{11}^{*\prime}(t_0)\left[\frac{a_{11}}{a_{11}+\psi_1'(t_0)}+\frac{a_{11}}{a_{11}-\psi_1'(t_0)}\right]+\rho a_{11} v_1^{*\prime}(t_0)\left[\frac{a_{11}}{a_{11}+\psi_1'(t_0)}-\frac{a_{11}}{a_{11}-\psi_1'(t_0)}\right]= -2\sigma_0'(t_0^+).$$

Przyjmując,że w obszarze pod falą odciążenia $x=\psi_1(t)$ są fale Riemanna,pochodna naprężenia wzdłuż fali odciążenia będzie równa $\sigma_{11}^{*\prime}=-\sigma_0'(t_0^-)\left(1-\frac{\psi_1'(t_0)}{a_{11}}\right)$ a pochodna prędkości $v_1^{*\prime}(t_0)=\frac{1}{\rho a_{21}}\sigma_{11}'(t_0)$. Z /4.1/ po przekształceniach otrzymamy wyrażenie na prędkość początkową fali odciążenia

$$/4.2/\quad \psi_1'(t_0)=\left\{\frac{a_{11}^2 a_{21}^2\left[\sigma_0'(t_0^+)-\sigma_0'(t_0^-)\right]}{\sigma_0'(t_0^+)a_{21}^2-\sigma_0'(t_0^-)a_{11}^2}\right\}^{1/2}$$

gdzie przez $\sigma_0'(t_0^+)$ i $\sigma_0'(t_0^-)$ oznaczono gradienty obciążenia normalnego $\sigma_0(t)$ odpowiednio dla $t = t_0^+$ i $t = t_0^-$.

Wzór /4.2/ jest identyczny w formie jak w przypadku fali odciążenia w zagadnieniu jednowymiarowym [2] . Jak widać prędkość początkowa fali odciążenia będzie zależeć jedynie od $\sigma_0'(t_0^+)$ i $\sigma_0'(t_0^-)$,nie będzie zależeć natomiast od zmian naprężeń stycznych. Z analizy /4.2/ wynika,że jeżeli $\sigma_0'(t_0^+)\neq 0$ to gdy $\sigma_0'(t_0^-)\to 0$ wówczas $\psi_1'(t_0)=a_{11}$,gdy $\sigma_0'(t_0^+)\to\infty$ to $\psi_1'(t_0)=a_{11}$ oraz jeżeli $\sigma_0'(t_0^-)\neq 0$ to gdy $\sigma_0'(t_0^-)\neq 0$ lub $\sigma_0'(t_0^-)\to\infty$ wówczas $\psi_1'(t_0)=a_{21}$. Fala odciążenia jest zatem ograniczona między charakterystykami $x = a_{11}/t - t_0/$ i $x = a_{21}/t - t_0/$. Znając prędkość początkową fali odciążenia $\psi_1'(t_0)$ możemy już określić cały jej front [12] . Naprężenia ścinające σ_{12} na fali odciążenia określimy już bezpośrednio z obszaru pod falą,w oparciu o związki na charakterystykach /3.4/. Po określeniu składowych tensora naprężenia na fali odciążenia należy sprawdzić czy jest spełniony warunek

/4.3/ $dJ_2' < 0$

O ile warunek ten zostanie spełniony, będzie to oznaczać, że rzeczywiście fala $x = \psi_1(t)$ jest falą odciążenia.

W przypadku drugim przedstawionym na rys.12b, kształt fali odciążenia wyznaczymy identycznie jak poprzednio, lecz korzystając ze związków na charakterystykach poprzecznych. Przeprowadzając identyczne rozważania otrzymamy dla prędkości początkowej fali odciążenia $x = \psi_2(t)$ wyrażenie

/4.4/ $$\psi_2'(t_0) = \left\{ \frac{a_{22} a_{12} [\tau_0'(t_0^+) - \tau_0'(t_0^-)]}{\tau_0'(t_0^+) a_{22}^2 - \tau_0'(t_0^-) a_{12}^2} \right\}^{1/2}.$$

W przypadku tym prędkość początkowa fali odciążenia będzie zależeć jedynie od gradientów naprężenia stycznego $\tau_0'(t_0^+)$ i $\tau_0'(t_0^-)$. Dokonując przejść granicznych, identycznie jak we wzorze /4.2/ przekonamy się, że fala odciążenia $x = \psi_2(t)$ leży między charakterystykami $x = a_{12}/t - t_0/$ i $x = a_{22} \cdot /t - t_0/$. Określenie całej fali odciążenia $x = \psi_2(t)$ nie przedstawia również tutaj trudności. Znacznej komplikacji, w porównaniu z poprzednio rozważanym problemem, ulega sprawa wyznaczenia pozostałych składowych tensora naprężenia na fali odciążenia. Naprężeń σ_{11} nie można określić tutaj bezpośrednio z obszaru pod falą odciążenia, ze związków na charakterystykach. Należy tutaj rozwiązać w obszarze nad falą $x = \psi_2(t)$ problem Goursata dla naprężeń normalnych σ_{11}, mając na fali $x = \psi_2(t)$ związek

$$\sigma_{11}[\psi_2(t),t] + \rho a_{21} v_1[\psi_2(t),t] = \mathrm{const}, \tag{4.5}$$

i na brzegu $x = 0$ warunek $\sigma_{11}(0,t) = -\sigma_0(t)$. W przypadku prostoliniowej fali odciążenia $x = \psi_2(t)$ problem ten jest rozwiązany w [11] /por.również [12] /. W tym przypadku powinien być także spełniony na fali odciążenia warunek /4.3/.

W niniejszym punkcie podano jedynie pewne uwagi ogólne dotyczące fali odciążenia, wyznaczenia jej prędkości początkowej oraz jej kształtu. Przedyskutowano jej położenia na płaszczyźnie fazowej (x,t) w zależności od zmian napięć powierzchniowych $\sigma_0(t)$ i $\tau_0(t)$

5. Uwagi końcowe

W pracy przedstawiono rozwiązanie kilku wariantów zmian naprężeń normalnych $\sigma_0(t)$ i stycznych $\tau_0(t)$ przyłożonych do brzegu półprzestrzeni. Nie wyczerpują one jednak wszystkich możliwych przypadków. Należałoby rozważyć przypadki ciśnień $\sigma_0(t)$ i $\tau_0(t)$ przyłożonych nagle do brzegu półprzestrzeni i następnie malejących w czasie. Przypadki te można rozwiązać po uprzedniej analizie powstania fali odciążenia. Interesującym wydaje się być rozszerzenie powyższych zagadnień na problemy odbić i dyfrakcji. Celowe jest również porównanie uzyskanych wyników z istniejącymi już rozwiązaniami /np. rozwiązaniami [5,7-9] / przez odpowiedni dobór parametrów fizycznych w modelu biliniowym. Pozwoli to na pewną weryfikację biliniowej teorii plastyczności [1] . Zagadnienia te będą między innymi tematem dalszych badań.

Pragnę podziękować Dr B.Ranieckiemu za cenne uwagi i dyskusje.

Spis publikacji

[1.] H.R.Aggrarwal,A.M.Soldate,J.F.Hook,J.Miklovitz, Bilinear theories in plasticity and an application to two-dimensional wave propagation,Journ.Appl.Mech.,June 1964.

[2.] В.Л.Бидерман, расчеты на ударную нагрузку. Основы современных методов на прочность в машиностроении. Сб.под ред. С.Д.Понамарева,Машгиз,1952.

[3.] H.H.Bleich,I.Nelson,Plane waves in an elastic-plastic half-space due to combined surface pressure and shear, Journ. Appl.Mech.,March 1966.

[4.] R.J.Clifton, An analysis of combined longitudinal and torsional plastic waves in a thin-walled tube,Report No 5,Brown University,Providence,May 1966.

[5.] J.T.Fong, Elastic-plastic wave in a half-space of a linearly work-hardening material for coupled shear loadings, Report No 161,Stanford University,May 1966.

[6.] S.Kaliski,W.K.Nowacki,E.Włodarczyk, Plane biwaves in an elastic-viscoplastic semi-space,Proc.Vibr.Probl.,2,8, 1967.

[7.] S.Kaliski,W.K.Nowacki,E.Włodarczyk, Propagation of plane loading and unloading biwaves in an elastic-viscoplastic semi-infinite body, Proc.Vibr.Probl.,3,8,1967.

[8.] S.Kaliski,W.K.Nowacki,E.Włodarczyk, Propagation of plane loading and unloading biwaves in an elastic-viscoplastic semi-infinite body,Part II,Numerical analysis,Proc.Vibr. Probl.,3,8,1967.

[9.] S.Kaliski,W.K.Nowacki,E.Włodarczyk, The influence of strain hardening in the problem of propagation of plane loading and unloading biwaves in an elastic-viscoplastic semi-infinite body, Proc.Vibr.Probl.,4,8,1967.

[10.] J.S.Koehler,F.Seitz, On the propagation of the plastic deformation produced by an expanding cylinder, NDRC-AOR, Report No A-139.

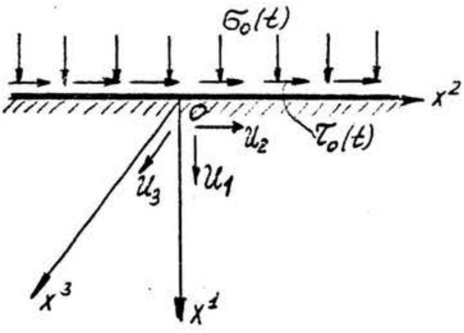
[11.] Н.Ф.Лебедев, О распространении волны разгрузки в случае линеиного упрочнения, ПММ,5,15,1951.

[12.] Х.А.Рахматулин,Ю.А.Демьянов, Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках,Москва 1961.

[13.] Х.А.Рахматулин,В.С.Анциферов, Распространение сжимающе-сдвигающих возмущений в нелинейно-упругой среде, ПММ,3,28,

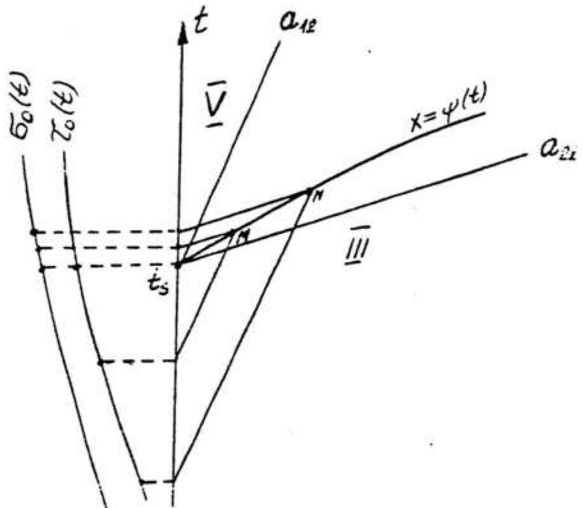
[14.] А.М.Скобеев, О плоской упруго-пластической волне,ПММ,3,29.

[15.] А.М.Скобеев, О некоторых плоских задачах динамики грунта, Инженерный журнал,I,1966.



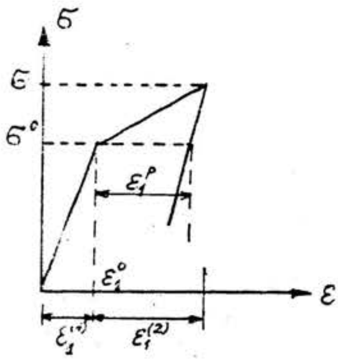
$\sigma_0(t)$
x^2
O
u_2
$\tau_0(t)$
u_3
u_1
x^3
x^1

Rys. 1

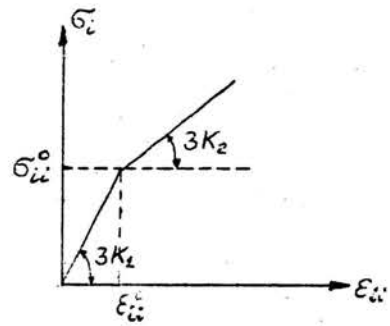


t
a_{12}
$\overline{V}$
$\sigma_0(t)$
$\tau_0(t)$
$x=\psi(t)$
a_{21}
N
M
$\overline{III}$
t_s

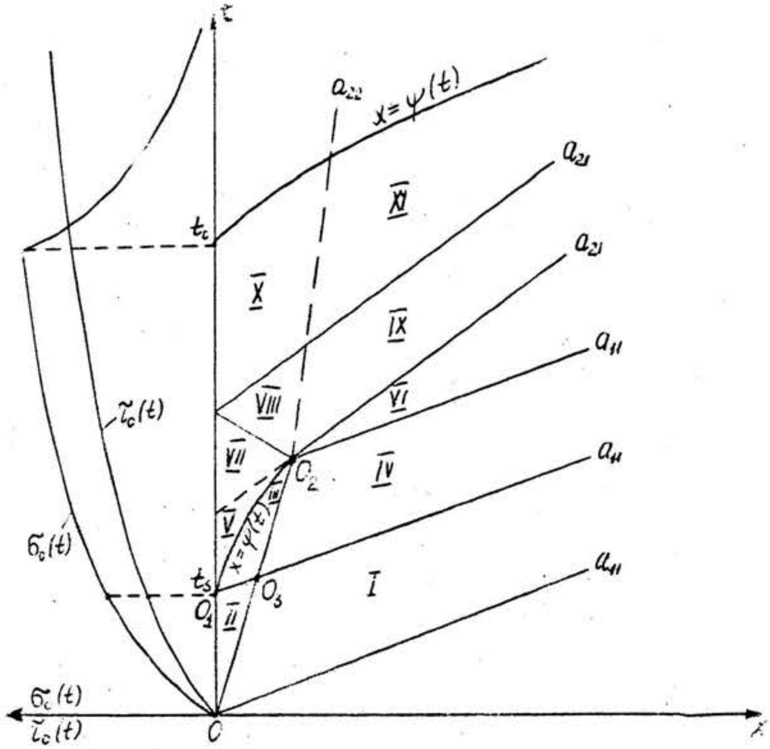
Rys. 5



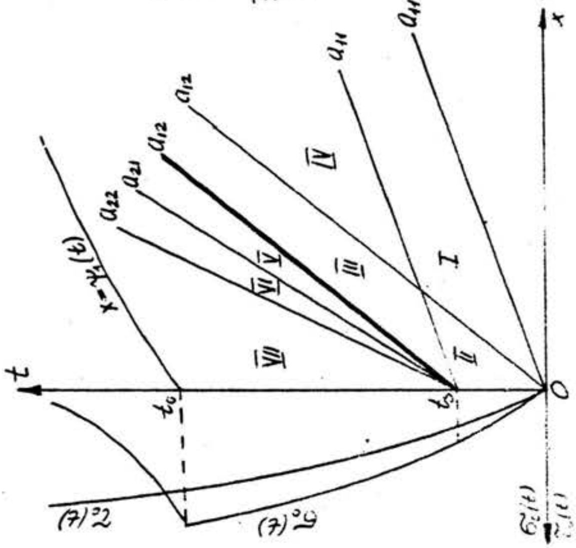
Rys. 2



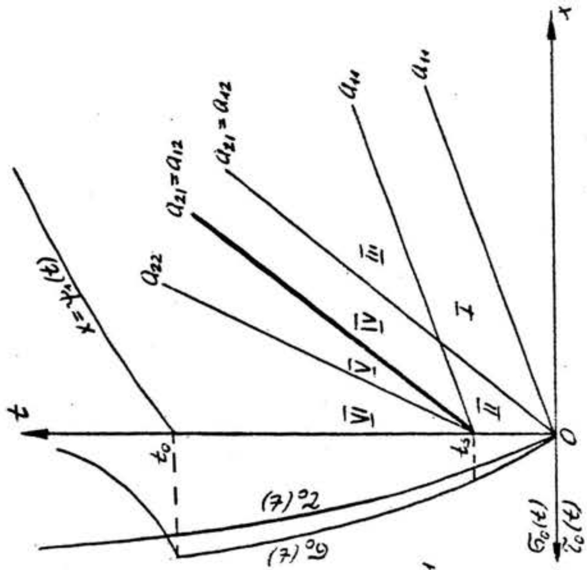
Rys. 3



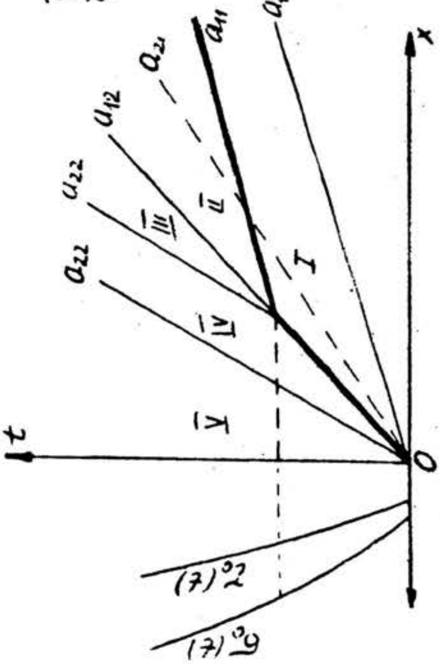
Rys. 4


a_{11}
a_{11}
a_{12}
a_{12}
a_{21}
a_{22}
$x=\psi_1(t)$
t
t_0
t_3
O
x
$\sigma_0(t)$
$\tau_0(t)$
I
II
III
IV
V
VI
VII

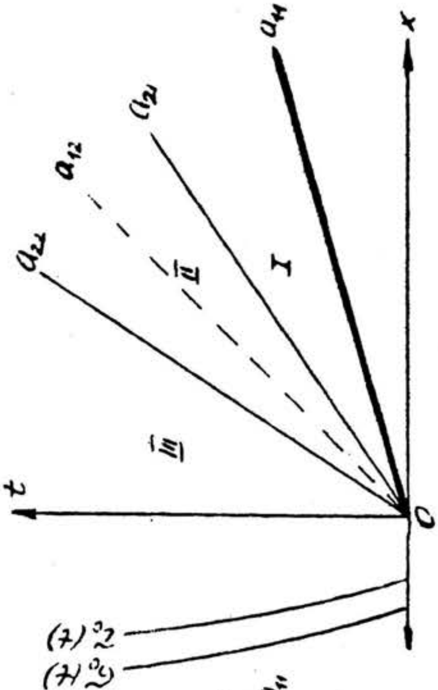
Rys. 6


a_{11}
a_{11}
$a_{21}=a_{12}$
$a_{21}=a_{12}$
a_{22}
$x=\psi_1(t)$
t
t_0
t_3
O
x
$\sigma_0(t)$
$\tau_0(t)$
I
II
III
IV
V
VI

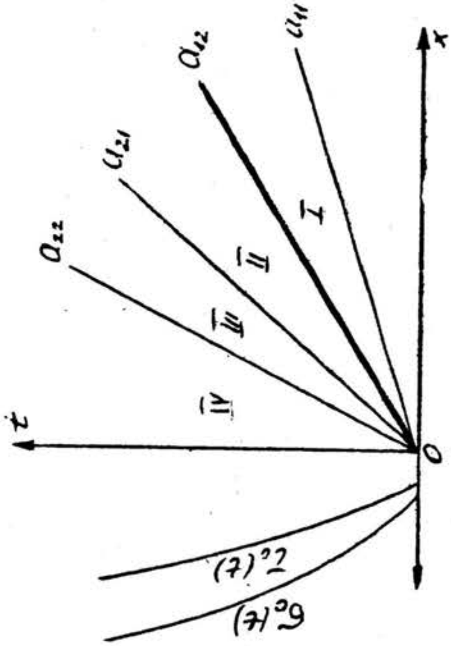
Rys. 7



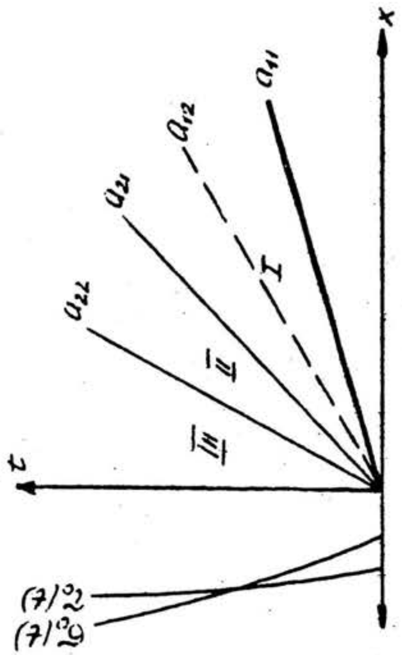
Rys 8



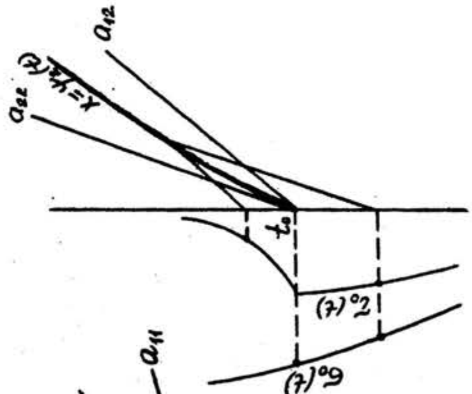
Rys. 9



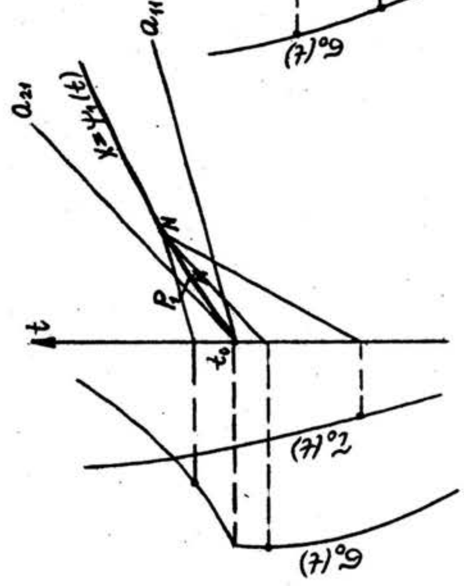
Rys 10



Rys. 11



Rys. 12b



Rys. 12a

Prace Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN
wydane w 1968 r.

1. T. W i e r z b i c k i, Viscoplastic flow of rotationally symmetric shells with particular application to dynamic loadings
2. Z. K o z ł o w s k i, Ultradźwiękowe pomiary w ośrodkach gazowych na częstotliwościach rzędu 1 MHz
3. J. K a s p e r k i e w i c z, On the possibility of experimental investigation of shrinkage in concrete
4. A. S z a d k o w s k i, O ruchu częściowo bezinercyjnego zachowawczego układu mechanicznego
5. A. T a r n o g r o d z k i, E. Ł u c z y w e k, Badania doświadczalne opływu naddźwiękowego ciał o dwu prostopadłych płaszczyznach symetrii
6. W.J. P r o s n a k, M.E. K l o n o w s k a, O dwu odmianach metody Pohlhausena i ich zastosowaniu do przepływu w sąsiedztwie punktu spiętrzenia
7. A. M u s z y ń s k a, O ograniczoności rozwiązań pewnego układu równań różniczkowych zwyczajnych
8. S. Z a h o r s k i, Kinematics and statics of small superposed deformations
9. Z. W e s o ł o w s k i, Deformacja klina i deformacja stożka w nieliniowej teprii sprężystości
10. P. P e r z y n a, W. W o j n o, Thermodynamics of a rate sensitive plastic material
11. L. F i l i p c z y ń s k i, The near field distribution on the axis of a vibrating piston.