Zbigniew Wesołowski

DEFORMACJA KLINA I DEFORMACJA STOŻKA W NIELINIOWEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

9/1968

WARSZAWA

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

D o   u ż y t k u   w e w n ę t r z n e g o

Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN

Nakład 120 egz. Ark. wyd. 0,5. Ark. druk. 1 .
Oddano do drukarni w marcu 1968 r.
Wydrukowano w kwietniu 1968 r. Nr zam. 310/0

Warszawska Drukarnia Naukowa , Warszawa ,
ul.Śniadeckich 8

Deformacja klina i deformacja stożka w nieliniowej teorii sprężystości

Z. Wesołowski /Warszawa/

W nieliniowej teorii sprężystości znanych jest dotychczas zaledwie kilka ścisłych rozwiązań /por. [1] i [2]/. Spowodowane to jest faktem, że równania nieliniowej teorii sprężystości są znacznie bardziej złożone niż teorii liniowej. Ta złożonośc ogranicza w istotny sposób możliwość uzyskania rozwiązań ogólnych.

Praktycznie biorąc istnieje szansa rozwiązania zagadnienia nieliniowego jeśli sprowadza się ono do jednego równania różniczkowego zwyczajnego. Należy podkreślić, że nawet w przypadku, gdy poszukiwane funkcje są funkcjami jednej tylko zmiennej na ogół otrzymuje nie jedno równanie, a układ równań różniczkowych zwyczajnych, co wobec nieliniowości uniemożliwia rozwiązanie.

W niniejszej pracy przeprowadzono obliczenia dla dwóch odkształceń, dla których zagadnienie sprowadza się do rozwiązania jednego równania różniczkowego zwyczajnego.

1. Podstawowe zależności

Przed przystąpieniem do obliczeń konkretnych przypadków podamy tutaj za pracę [1] podstawowe zależności dotycząco nieliniowej teorii sprężystości. Wprowadźmy dwa na ogół różne układy współrzędnych: układ $\{x^i\}$ z tensorem metrycznym g_{ij} oraz układ $\{X^\alpha\}$ z tensorem metrycznym $g_{\alpha\beta}$. Współrzędne typowego punktu P rozważanego ciała w stanie naturalnym w układzie $\{X^\alpha\}$ oznaczmy przez X^α. Współrzędne tego samego punktu w stanie odkształconym w układzie $\{x^i\}$ oznaczymy przez x^i

$$x^i = x^i (X^\alpha). \tag{1.1}$$

Cząstkowe pochodne funkcji $x^i(X^\alpha)$ względem X^α

$$F^i{}_\alpha = \partial x^i / \partial X^\alpha , \tag{1.2}$$

nazywamy gradientem odkształcenia. Lewy tensor Cauchy - Greena zdefiniowany jest przez związek

$$B^{ij} = F^i{}_\alpha F^i{}_\beta g^{\alpha\beta} , \tag{1.3}$$

a jego niezmienniki przez związki

$$\begin{aligned} I_1 &= B^i{}_i , \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left[I_1^2 - \left(B^2\right)^i{}_i \right] , \\ I_3 &= \det B^i{}_j , \end{aligned} \tag{1.4}$$

przy czym

$$\left(B^2 \right)^{ij} = B^{ir} B^{js} g_{rs} \tag{1.5}$$

Jeśli deformacja jest izochoryczna

/1.5/ $$I_3 = 1 \quad .$$

Dla rozważanych dalej izotropowych nieściśliwych materiałów sprężystych tensor naprężenia τ^{ij} określony jest związkiem

/1.7/ $$\tau^{ij} = \chi_1 B^{ij} + \chi_2 \left(B^2\right)^{ij} + p\, g^{ij} ,$$

gdzie p jest dowolną funkcją skalarową, a χ_1 i χ_2 funkcjami niezmienników I_1 i I_2. Funkcje te są funkcjami materiałowymi, charakterystycznymi dla danego materiału. Równania równowagi są

/1.8/ $$\nabla_i \tau^{ij} = 0 ,$$

gdzie ∇_i oznacza różniczkowanie kowariantne w układzie $\{x^i\}$. Obciążenia brzegowe t^i odniesione do jednostki powierzchni w stanie odkształconym określone są związkami

/1.9/ $$t^i = \tau^{ij} n_j ,$$

gdzie n_j jest jednostkową normalną do powierzchni ciała w stanie odkształconym.

3. Deformacja klina

Rozważmy deformację, która w ustalonym walcowym układzie współrzędnych opisana jest związkami

$$r = R\,\alpha(\theta),$$

/3.1/
$$\vartheta = \beta(\theta),$$
$$z = \lambda Z,$$

gdzie α oraz β są pewnymi funkcjami, a λ ustalonym parametrem. Jak wynika z /3.1/ płaszczyzny Z = const przechodzą w płaszczyzny z = const, a linie proste θ = const w linie proste ϑ = const. Okręgi R = const nie przechodzą przy tym w okręgi r = const, lecz doznają pewnego zniekształcenia opisanego funkcją $\alpha(\theta)$. Celem dalszych rozważań jest takie określenie funkcji α i β, że deformacja jest możliwa.

Oznaczając $x^i = (r, \vartheta, z)$, $X^\alpha = (R, \theta, Z)$ mamy

/3.2/
$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

/3.3/
$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obliczając teraz w oparciu o /3.1/ gradient odkształcenia F^i otrzymujemy

/3.4/
$$F^i{}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & R\alpha' & 0 \\ 0 & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

gdzie prim oznacza różniczkowanie względem θ. W oparciu o /1.3/, /1.4/ oraz /3.2/, /3.3/ możemy teraz wyznaczyć tensor B^{ij} oraz $(B^2)^{ij}$

$$B^{ij} = \begin{bmatrix} \alpha^2+\alpha'^2 & \frac{1}{R}\alpha'\beta' & 0 \\ \frac{1}{R}\alpha'\beta' & \frac{1}{R^2}\beta'^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

$$(B^2)^{ij} = \begin{bmatrix} (\alpha^2+\alpha'^2)^2+\alpha^2\alpha'^2\beta'^2 & \frac{1}{R}\alpha'\beta'(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2) & 0 \\ \frac{1}{R}\alpha'\beta'(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2) & \frac{1}{R^2}(\alpha'^2\beta'^2+\alpha^2\beta'^4) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^4 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Zgodnie z /1.4/ pierwsze dwa niezmienniki tensora B^{ij} są

$$\begin{aligned} I_1 &= \alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2+\lambda^2 , \\ I_2 &= \alpha^4\beta'^2+\lambda^2(I_1-\lambda^2) . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dla rozpatrywanego tutaj materiału nieściśliwego zgodnie z /1.6/ trzeci niezmiennik I_3 jest równy jedności obliczając ten niezmiennik i przyrównując go do jedności otrzymujemy

$$\lambda^4\alpha^4\beta'^2 = 1 , \tag{3.8}$$

stąd wynika

$$\beta' = \frac{1}{\alpha^2\lambda} \quad \text{lub} \quad \beta' = -\frac{1}{\alpha^2\lambda} . \tag{3.9}$$

Warunek nieściśliwości jest więc spełniony jeśli zachodzi $/3.9/_1$ lub $/3.9/_2$. Dalsze rozważania ograniczymy do przypadku, kiedy zachodzi w $/3.9/_1$. Podstawiając /3.9/ do /3.5/ – /3.7/ otrzymujemy

$$
/3.10/ \qquad B^{ij} = \begin{bmatrix} \alpha^2+\beta'^2 & \frac{1}{R}\frac{\alpha'}{\alpha^2\lambda} & 0 \\ \frac{1}{R}\frac{\alpha'}{\alpha^2\lambda} & \frac{1}{\alpha^2\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},
$$

$$
/3.11/ \qquad (B^2)^{ij} = \begin{bmatrix} (\alpha^2+\alpha'^2)^2+\frac{\alpha'^2}{\alpha^2\lambda^2} & \frac{1}{R}\left(\frac{\alpha'}{\lambda}+\frac{\alpha'^3}{\alpha^2\lambda}+\frac{\alpha'}{\alpha^4\lambda^3}\right) & 0 \\ \frac{1}{R}\left(\frac{\alpha'}{\lambda}+\frac{\alpha'^3}{\alpha^2\lambda}+\frac{\alpha'}{\alpha^4\lambda^3}\right) & \frac{1}{R^2}\left(\frac{\alpha'^2}{\alpha^4\lambda^2}+\frac{1}{\alpha^6\lambda^4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^4 \end{bmatrix},
$$

$$
/3.12/ \qquad I_1 = \lambda^2+\alpha^2+\alpha'^2+\frac{1}{\alpha^2\lambda^2}, \quad I_2 = \frac{1}{\lambda^2}+\lambda^2(I_1-\lambda^2).
$$

Jak wynika z /3.12/ niezmienniki I_1, I_2 są jedynie funkcjami kąta ϑ, nie są natomiast funkcjami promienia r. Fakt ten istotnie upraszcza dalsze obliczenia.

Przejdziemy teraz do wyznaczenia naprężeń τ^{ij}. Zgodnie z /1.7/ jest

$$\tau^{11} = \chi_1(\alpha^2 + \alpha'^2) + \chi_2(\alpha^4 + \alpha'^4 + 2\alpha^2\alpha'^2 + \lambda^{-2}\alpha^{-2}\alpha'^2) + p,$$

$$r^2\tau^{22} = \chi_1\lambda^{-2}\alpha^{-2} + \chi_2(\lambda^{-2}\alpha^{-2}\alpha'^2 + \lambda^{-4}\alpha^{-4}) + p,$$

/3.13/

$$\tau^{33} = \chi_1\lambda^2 + \chi_2\lambda^4 + p,$$

$$r\tau^{12} = \chi_1\lambda^{-1}\alpha^{-1}\alpha' + \chi_2(\lambda^{-1}\alpha\alpha' + \lambda^{-1}\alpha^{-1}\alpha'^3 + \lambda^{-3}\alpha^{-3}\alpha'),$$

$$\tau^{23} = \tau^{31} = 0 .$$

W walcowym układzie współrzędnych równania równowagi /1.8/ są

$$\frac{\partial}{\partial r}\tau^{11} + \frac{\partial}{\partial \vartheta}\tau^{21} + \frac{1}{r}(\tau^{11} - r^2\tau^{22}) = 0,$$

/3.14/

$$\frac{\partial}{\partial r}\tau^{12} + \frac{\partial}{\partial \vartheta}\tau^{22} + \frac{3}{r}\tau^{12} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\tau^{33} = 0 .$$

Zgodnie z /3.1/ i /3.9/ należy przy tym pamiętać, że $d/dr = \alpha^{-1}\ d/dR$, $d/d\vartheta = \frac{1}{\beta'}\ d/d\Theta = \lambda\alpha^2\ d/d\Theta$

Podstawiając do powyższych równań /3.13/ i uwzględniając /3.12/ otrzymujemy

$$\frac{\partial \rho}{\partial R} = -L_1(R,\theta),$$

/3.15/

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = -L_2(R,\theta),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial Z} = 0 ,$$

gdzie

/3.16/ $$R L_1(R,\theta) = \chi_1(\alpha^2 - \lambda^{-2}\alpha^{-2} + \alpha\alpha'') +$$
$$+ \chi_2(\alpha^4 - \lambda^{-4}\alpha^{-4} - 3\lambda^{-2}\alpha'^2 + 3\alpha^2\alpha'^2 + \alpha^3\alpha'' + 3\alpha\alpha'^2\alpha'') +$$
$$+ 2\alpha'^2(\alpha^2 + \alpha\alpha'' - \lambda^{-2}\alpha^{-2})\left(\frac{\partial \chi_1}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial \chi_1}{\partial I_2}\right) +$$
$$+ 2\alpha'^2(\alpha^2 + \alpha\alpha'' - \lambda^{-2}\alpha^{-2})(\alpha^2 + \alpha'^2 + \lambda^{-2}\alpha^{-2})\left(\frac{\partial \chi_2}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial \chi_2}{\partial I_2}\right).$$

/3.17/ $$\lambda\alpha^2 L_2(R,\theta) = 2\chi_2(\alpha\alpha'\lambda^{-1} + \alpha'\alpha''\lambda^{-1} - 3\alpha'\alpha^{-3}\lambda^{-3}) +$$
$$+ \frac{2\alpha'}{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial \chi_1}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial \chi_1}{\partial I_2}\right)(\alpha^2 + \alpha\alpha'' - \lambda^{-2}\alpha^{-2}) +$$
$$+ \frac{2\alpha'}{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial \chi_2}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial \chi_2}{\partial I_2}\right)(\alpha^2 + \alpha\alpha'' - \lambda^{-2}\alpha^{-2})(\alpha'^2 + \lambda^{-2}\alpha^{-2}).$$

Z równania /3.15/$_3$ wynika, że p nie zależy od Z, $p = p\left(R,\theta\right)$. Koniecznym warunkiem istnienia funkcji p jest więc

$$\frac{\partial L_1}{\partial \theta} = \frac{\partial L_2}{\partial R}, \tag{/3.18/}$$

co wobec niezależności $L_2(\theta)$ od R prowadzi do wniosku że $L_1\left(R\,,\,\theta\right)$ nie zależy od θ. Zgodnie z /3.15/$_1$ warunkiem równowagi jest więc

$$\begin{aligned}
&\chi_1\left(\alpha^2-\lambda^{-2}\alpha^{-2}+\alpha\alpha''\right)+\chi_2\left(\alpha^4-\lambda^{-4}\alpha^{-4}+3\alpha^2\alpha'^2+\right.\\
&\qquad\left.-3\lambda^{-2}\alpha'^2+\alpha^3\alpha''+3\alpha\alpha'^2\alpha''+\lambda^{-2}\alpha^{-1}\alpha''\right)+\\
&+2\alpha'^2\left(\frac{\partial\chi_2}{\partial I_1}+\lambda^2\frac{\partial\chi_2}{\partial I_2}\right)\left(\alpha^2+\alpha\alpha''-\lambda^{-2}\alpha^{-2}\right)\left(\alpha^2+\alpha'^2+\lambda^{-2}\alpha^{-2}\right)+\\
&+2\alpha'^2\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial I_1}+\lambda^2\frac{\partial\chi_1}{\partial I_2}\right)\left(\alpha^2+\alpha\alpha''-\lambda^{-2}\alpha^{-2}\right)=H,
\end{aligned} \tag{/3.19/}$$

gdzie H jest dowolną stałą. Związek ten stanowi nieliniowe zwyczajne równanie różniczkowe pozwalające wyznaczyć funkcję $\alpha(\theta)$. Rozwiązanie równania /3.19/ możliwe jest jednak dopiero po podaniu funkcji $\chi_1\left(I_1, I_2\right)$ oraz $\chi_2\left(I_1, I_2\right)$.

Dalsze rozważania ograniczamy do materiału, gdzie χ_1 jest stałą materiałową, a χ_2 jest równe zeru /neohookean /

$$\chi_1 \doteq C\,, \quad \chi_2 = 0. \tag{/3.20/}$$

Dla tego materiału /3.19/ redukuje się do

/3.21/ $$\alpha^{2} + \alpha\alpha'' - \frac{1}{\lambda^2\alpha^2} = \frac{H}{C'}$$

Oznaczając

/3.22/ $$\alpha'(\theta) = \varkappa(\alpha(\theta)) ,$$

mamy

/3.23/ $$\alpha'' = \varkappa \frac{d\varkappa}{d\alpha} .$$

Równanie /3.21/ można więc przedstawić w następującej postaci

/3.24/ $$\varkappa \frac{d\varkappa}{d\alpha} = \frac{H}{\alpha C'} - \alpha + \frac{1}{\lambda^2\alpha^3} ,$$

skąd wynika

/3.25/ $$\frac{1}{2}\varkappa^2 = \frac{H}{C'} \ln\alpha - \frac{1}{2}\left(\alpha^2 + \frac{1}{\lambda^2\alpha^2}\right) + D$$

gdzie D jest stałą całkowania. Ponowne całkowanie prowadzi do

/3.26/ $$\theta = \int_1^{\alpha} \left(\frac{H}{C}\ln\alpha^2 - \alpha^2 - \frac{1}{\lambda^2\alpha^2}\right)^{-1/2} d\alpha + E$$

gdzie E jest stałą całkowania. W ten sposób określona została dwuparametrowa rodzina deformacji możliwych w materiale /3.20/.

Jeśli H = 0 ogólnym rozwiązaniem /3.26/ jest

$$\alpha(\theta) = \sqrt{\nu^2 \cos^2(\theta+\theta_0) + \frac{1}{\nu^2\lambda^2}\sin^2(\theta+\theta_0)}, \tag{3.27}$$

gdzie θ_0 oraz ν są dowolnymi stałymi. Deformacja /3.27/ jest deformacją jednorodną. Jest więc możliwa w każdym materiale izotropowym.

W przypadku $H \neq 0$ funkcja $\alpha(\theta)$ nie da się wyrazić przez funkcje elementarne. W celu pokazania jakiemu odkształceniu odpowiada /3.26/ w przypadku $H \neq 0$ wykonano odpowiednie obliczenia numeryczne dla $H = C$, $D = 4$, $E = 0$, $\lambda = 1$. Na rys. 1 pokazano obliczoną dla tych wartości funkcję $\nu = \left(D + H \ln\alpha^2/C - \alpha^2 - \lambda^{-2}\alpha^{-2}\right)^{-1/2}$ oraz jej całkę, która jest poszukiwaną funkcją $\alpha(\theta)$.

4. Deformacja stożka

Istnienie deformacji /3.1/ sugeruje, że podobna deformacja jest również możliwa, jeśli walcowy układ współrzędnych zastąpić kulistym. Wykażemy, że tak jest w rzeczywistości.

Rozważamy deformację, która w ustalonym kulistym układzie współrzędnych opisana jest związkami

$$
\begin{aligned}
r &= R\alpha(\theta),\\
\vartheta &= \beta(\theta),\\
\varphi &= \Phi,
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

gdzie α oraz β są pewnymi funkcjami. Celem dalszych rozważań jest takie określenie funkcji α i β że deformacja jest możliwa.

Oznaczając $x^i = (r, \vartheta, \varphi)$, $X^{\alpha} = (R,\ \theta,\ \Phi)$ mamy

$$
g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2\sin^2\vartheta \end{bmatrix},
\tag{4.2}
$$

$$
g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2\sin^2\theta \end{bmatrix}, \quad g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R^2\sin^2\theta \end{bmatrix}.
\tag{4.3}
$$

Obliczając teraz w oparciu o /4.1/ gradient odkształcenia $F^i{}_{\alpha}$ /1.2/ otrzymujemy

$$
F^i{}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha & R\alpha' & 0 \\ 0 & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
\tag{4.4}
$$

gdzie prim oznacza różniczkowanie względem θ.

W oparciu o /1.3/, /1.4/, /4.2/ i /4.3/ możemy teraz wyznaczyć tensory B^{ij} i $B^{ir} B^{js} g_{rs} = (B^2)^{ij}$

/4.5/ $$B^{ij} = \begin{bmatrix} \alpha^2 + \alpha'^2 & \frac{1}{R}\alpha'\beta' & 0 \\ \frac{1}{R}\alpha'\beta' & \frac{1}{R^2}\beta'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R^2\sin^2\theta \end{bmatrix},$$

/4.6/ $$(B^2)^{ij} = \begin{bmatrix} (\alpha^2+\alpha'^2)^2 + \alpha^2\alpha'^2\beta'^2 & \frac{1}{R}\alpha'\beta'(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2) & 0 \\ \frac{1}{R}\alpha'\beta'(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2) & \frac{1}{R^2}\beta'^2(\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha^2}{R^2}\frac{\sin^2\beta}{\sin^4\theta} \end{bmatrix}$$

Zgodnie z /1.4/ pierwsze dwa niezmienniki tensora B^{ij} są

/4.7/ $$I_1 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha^2\beta'^2 + \alpha^2\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\theta},$$
$$I_2 = \alpha^4\beta'^2 + \alpha^2(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2)\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\theta}.$$

Niezmienniki te są więc tylko funkcjami kąta θ.

Dla rozpatrywanego tutaj materiału nieściśliwego zgodnie z /1.5/ trzeci niezmiennik jest równy jedności. Obliczając ten niezmiennik i przyrównując go do jedności otrzymujemy warunek nieściśliwości

/4.8/ $$\alpha^6 \beta'^2 \sin^2\beta = \sin^2\theta$$

W stosunku do 3.8. zachodzi tu ta różnica, że /4.8/ jest równaniem różniczkowym ze względu na β .
Ograniczymy się dalej do przypadku, kiedy każda z wielkości w /4.8/ jest dodatnią. W tym przypadku po wyciągnięciu pierwiastka z obu stron /4.8/ otrzymujemy

/4.9/ $$\alpha = \left(\frac{\sin^2\theta}{\beta' \sin\beta}\right)^{1/3}.$$

Deformacja jest więc izochoryczna jeśli zmianie kąta towarzyszy określona przez /4.3/ i /4.1/ zmiana promienia r.

Zgodnie z /1.7/ naprężenia τ^{ij} są

/4.10/ $$\begin{aligned}
\tau^{11} &= \chi_1(\alpha^2+\alpha'^2) + \chi_2(\alpha^4+\alpha'^4+2\alpha^2\alpha'^2+\alpha^2\alpha'^2\beta'^2)+p, \\
r^2\tau^{22} &= \chi_1\alpha^2\beta'^2+\chi_2\alpha^2\beta'^2(\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2)+p, \\
r^2\tau^{33}\sin^2\vartheta &= \chi_1\alpha^2\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\theta}+\chi_2\alpha^4\frac{\sin^4\beta}{\sin^4\theta}+p, \\
r\tau^{12} &= \chi_1\alpha\alpha'\beta'+\chi_2\alpha\alpha'\beta'(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2), \\
\tau^{23} &= \tau^{31} = 0 .
\end{aligned}$$

a równanie równowagi /1.8/ w rozpatrywanym kulistym układzie współrzędnych są

$$\frac{\partial}{\partial r}\tau^{11}+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\tau^{21}+\frac{1}{r}\left(2\tau^{11}-r^2\tau^{22}-r^2\tau^{33}\sin^2\vartheta\right)+\tau^{21}\operatorname{ctg}\vartheta=0,$$

/4.11/ $$\frac{\partial}{\partial r}\tau^{12}+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\tau^{22}+\frac{2}{r}\tau^{12}+\left(\tau^{22}-\tau^{33}\sin^2\vartheta\right)\operatorname{ctg}\vartheta=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\tau^{33}=0,$$

przy czym zgodnie z /4.1/ $\frac{d}{dr}=\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dR}$, $\frac{d}{d\vartheta}=\frac{1}{\beta'}\frac{d}{d\theta}$, $\frac{d}{d\varphi}=\frac{d}{d\Phi}$.

Dla oszczędności miejsca ograniczymy dalsze rozważania do neohookeanu /por. /3.20//. Dla tego materiału /4.11/ redukuje się do

$$\frac{\partial p}{\partial R}+\frac{1}{R}\chi_1\Big(2\alpha^2+3\alpha'^2+\alpha\alpha''-\alpha\beta'^2+$$

/4.12/ $$+\frac{\alpha\alpha'\beta''}{\beta'}-\alpha^2\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\theta}+\alpha\alpha'\beta'\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\Big)=0,$$

$$\frac{1}{\beta'}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\chi_1\left(\alpha\alpha'\beta'+2\alpha\alpha'^2+2\alpha\beta'\alpha'+\alpha\beta'^2\operatorname{ctg}\beta-\alpha^2\frac{\sin\beta\cos\beta}{\sin^2\theta}\right)=0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial Z}=0.$$

Jak wynika z $/4.12/_3$ funkcja p nie zależy od Z, $p=p(R,\theta)$

Wobec tego, że /4.12/$_2$ nie zależy od R jest $\partial^2 p/\partial R \partial \theta = 0$.
Warunkiem istnienia p jest więc

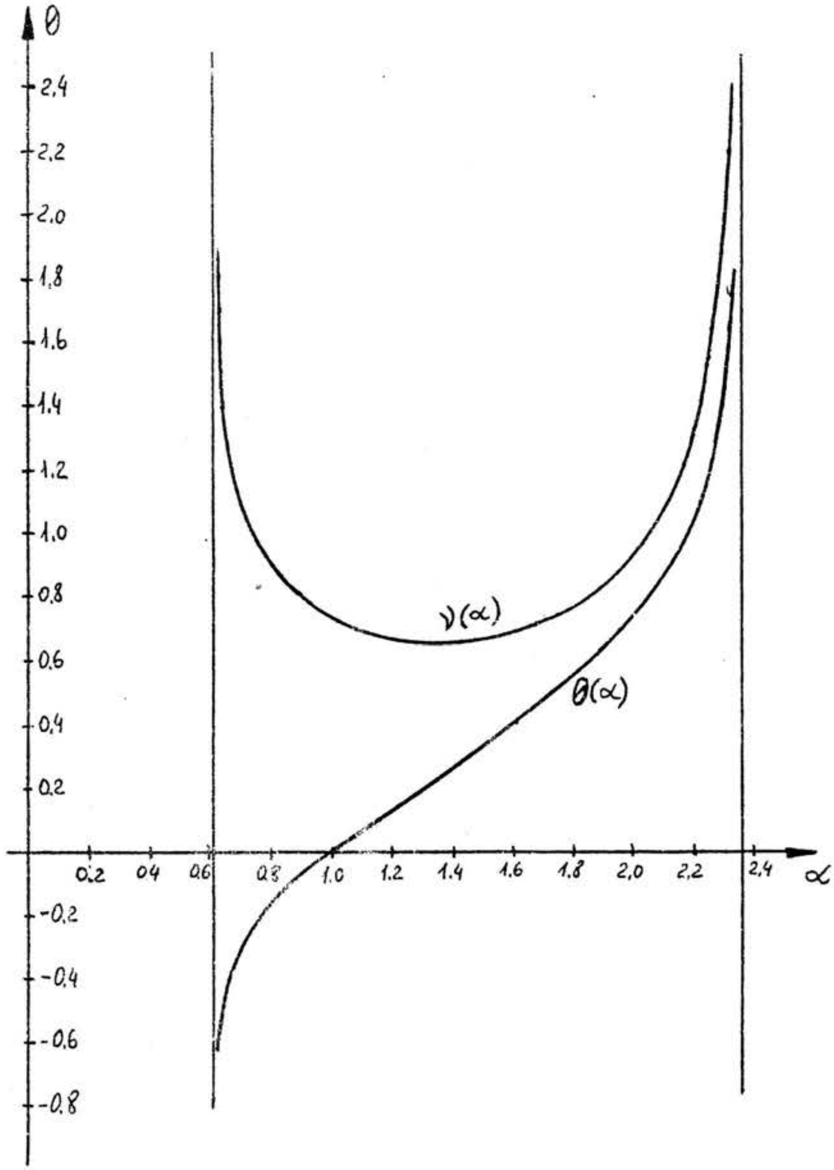
$$2\alpha + 3\alpha' + \alpha\alpha'' - \alpha\beta'^2 + \frac{\alpha\alpha'\beta''}{\beta'} - \alpha^2 \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\theta} + \alpha\alpha'\beta' \operatorname{ctg}\beta = \text{const.} \qquad /4.13/$$

Po podstawieniu do powyższego /4.9/ otrzymujemy jedno zwyczajne równanie różniczkowe na funkcję $\beta(\theta)$. Równanie to jest jednak bardzo skomplikowane i nie udało się znaleźć analitycznego rozwiązania tego równania. Rozwiązanie numeryczne można znaleźć w sposób podobny jak w części trzeciej dla odkształcenia płaskiego.

Literatura

[1] . C.Truesdell, W.Noll, Non-linear Field Theories of Mechanics, Flügge's Encyclopedia of Physics, Berlin 1960.

[2] . A.E.Green, W.Zerna, Theoretical Elasticity, Oxford 1954 .


θ
2,4
2,2
2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
-0,2
-0,4
-0,6
-0,8
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
2,2
2,4
α
ν(α)
θ(α)