W. K. Nowacki, B. Raniecki

UWAGI DOTYCZĄCE ROZWIĄZAŃ PEWNYCH ZAGADNIEŃ DYNAMICZNYCH TERMO-LEPKOSPRĘŻYSTOŚCI

28/1967

WARSZAWA

IPPT
PAN

Na prawach rękopisu

Do użytku wewnętrznego

Zakład Badania Drgań IPPT PAN. Nakład 150 egz.
Arkuszy wyd. 0,9. Arkuszy druk. 1,25. Oddano do drukarni w grudniu 1967 r. Druk ukończono w styczniu 1968 r. Zam. 1116/o/67

W.D.N. Warszawa, ul. Śniadeckich 8

Uwagi dotyczące rozwiązań pewnych zagadnień dynamicznych termo-lepkosprężystości

W.K. Nowacki B.Raniecki

I. Wstęp

W niniejszej pracy przedstawiono sposób otrzymania rozwiązania szczególnego podstawowych równań termosprężystości [1,2] oraz termo-lepkosprężystości dla pewnej dość szerokiej klasy zagadnień. Założono brak sił masowych, zródeł ciepła oraz jednorodne warunki początkowe dla pola temperatur i dla wielkości charakteryzujących stan odkształcenia.

Rozwiązanie szczególne dla ośrodka sprężystego uzyskano wykorzystując pewną metodę operatorową. Uzyskane rozwiązanie wyróżnia się swą prostotą, ze względu na to, że wyraża się poprzez całki z pola temperatury i jego gradientów. W ten sposób, na innej drodze w stosunku do ogólnie stosowanych metod, zaistniała możliwość sprowadzenia pewnych dynamicznych zagadnień termosprężystości do odpowiednich dynamicznych zagadnień teorii sprężystości. Ogólnie stosowane metody wymagają wielokrotnego całkowania oraz znajomości podstawowego rozwiązania. To ostatnie jednakże znane jest zaledwie dla niewielu konfiguracji ciała. Dlatego też otrzymane poniżej rozwiązanie szczególne, które uzyskano na drodze jednokrotnego całkowania po czasie posiada niewątpliwie pewne zalety w stosunku do ogólnych metod.

Następnie rozwiązanie szczególne dynamicznych zagadnień termo-lepkosprężystości otrzymano wykorzystując analogię sprężysto-lepkosprężystą. Wykonując jednostronną transformację Laplace'a na rezultatach uzyskanych dla ciał sprężystych przedstawiono rozwiązanie szczególne w przestrzeni transformat dla ośrodków opisanych wielomianowymi operatorami różniczkowymi [3]. Dla dwóch podstawowych modeli tj. dla modelu Maxwella i modelu Voigta obliczono retransformaty. Uzyskane w ten sposób rozwiązania szczególne podstawowych równań dla tych modeli wyróżniają się podobnie jak dla ośrodka sprężystego prostą formą /również niezależnie od konfiguracji ciała/ Jest to przede wszystkim istotne dla modelu Maxwella, w którym zaburzenia propagują się ze skończoną prędkością. W związku z tym uzyskane rozwiązanie szczególne dla tego modelu pozwala /podobnie jak dla ośrodka sprężystego/ na wypowiedzenie kilku ogólnych uwag dotyczących stanu odkształcenia w pewnym przedziale czasu.

2. Sprowadzenie dynamicznych zagadnień termosprężystości do zagadnień ze stałą temperaturą

Rozwiązanie podstawowych równań dynamicznej niesprzężonej termosprężystości bez sił objętościowych [1,2]

$$/2.1/ \quad \nabla^2 \vec{u} + \frac{\lambda+\mu}{\mu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} = \frac{\rho}{\mu} \ddot{\vec{u}} + \frac{3\lambda+2\mu}{\mu} \alpha \operatorname{grad} T$$

może być poszukiwane w postaci sumy dwóch funkcji

$$/2.2/ \quad \vec{u} = \vec{u}^{I} + \vec{u}^{II}$$

gdzie funkcja $\vec{u}^{I}$ spełnia niejednorodne równanie /2.1/, niezależnie od założonych warunków brzegowych i początkowych, natomiast funkcja $\vec{u}^{II}$ spełnia jednorodne równanie

$$/2.3/ \quad \nabla^2 \vec{u}^{II} + \frac{\lambda+\mu}{\mu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u}^{II} = \frac{\rho}{\mu} \ddot{\vec{u}}^{II}$$

z odpowiednio zmodyfikowanymi warunkami brzegowymi i początkowymi.

Jeżeli rozkład temperatury T spełnia jednorodne równanie przewodnictwa Fouriera, które zapiszemy w następującej postaci

$$/2.4/ \quad \frac{a_1^2}{k} D_1 T - a_1^2 \nabla^2 T = 0$$

gdzie k jest współczynnikiem dyfuzyjności ciepła, $a_1 = \left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)^{1/2}$ jest prędkością propagacji fal podłużnych oraz $D_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ to analogicznie do metody Goodiera [4] dla quasistatycznych zagadnień, szczególnie rozwiązanie $\vec{u}^{I}$ /przy niżej przedstawionych warunkach/ można otrzymać w drodze bezpośredniego całkowania.

Rozwiązanie $\vec{u}^{I}$ równania /2.1/ będziemy poszukiwali w postaci

/2.5/ $$\vec{u}^{I} = \operatorname{grad} \bar{\Phi}$$

Podstawiając /2.5/ do /2.I/ otrzymamy

/2.6/ $$\frac{2\mu+\lambda}{\alpha a_1^2(3\lambda+2\mu)}\left(D_2 - a_1^2\nabla^2\right)\bar{\Phi} + T = 0$$

gdzie $D_2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

Stosując do obu stron równania /2.6/ kolejno operatory $-\frac{a_1^2}{k}D_1$ i D_2 oraz dodając otrzymane równania z wykorzystaniem /2.4/ otrzymujemy

/2.7/ $$\left(D_2 - a_1^2\nabla^2\right)\left[D_2\bar{\Phi} - \frac{a_1^2}{k}D_1\bar{\Phi} + \alpha a_1^2\,\frac{3\lambda+2\mu}{2\mu+\lambda}T\right] = 0$$

Zatem rozwiązanie szczególne ostatniego równania można otrzymać przyjmując

/2.8/ $$\frac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial t^2} - \frac{a_1^2}{k}\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial t} = -\alpha a_1^2\,\frac{3\lambda+2\mu}{2\mu+\lambda}T(Q,t)$$

skąd

/2.9/ $$\bar{\Phi} = \frac{k}{a_1^2}\left(1-e^{\frac{a_1^2 t}{k}}\right)\bar{\Phi}_1 + \frac{3\lambda+2\mu}{2\mu+\lambda}\alpha k\int_0^t\left[1-e^{\frac{a_1^2(t-\eta)}{k}}\right]T\,d\eta + \bar{\Phi}_2$$

Drogą bezpośredniego podstawienia funkcji /2.9/ do równania /2.6/ otrzymamy, że na to aby /2.9/ było całką szczególną równania /2.6/ funkcje Φ_1 i Φ_2 powinny spełniać następujące równania :

$$\nabla^2 \Phi_1 - \frac{a_1^2}{k} \Phi_1 = - \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\alpha a_1^2}{k} T(Q,0)$$

/2.I0/
$$\nabla^2 \Phi_2 = \frac{1}{k} \Phi_1$$

W przypadku jednorodnych warunków początkowych dla T możemy podstawić $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$,wówczas

/2.II/
$$\Phi = \frac{3\lambda + 2\mu}{2\mu + \lambda} \alpha k \int_0^t \left[1 - \exp\left(\frac{a_1^2 (t-\eta)}{k} \right) \right] T(Q,\eta) d\eta$$

Zatem przy jednorodnych warunkach początkowych dla $\vec{u}$ oraz przy powyższych założeniach odnośnie T mamy następujące ogóne rozwiązanie zagadnienia początkowego dla równań dynamicznej teorii termosprężystości:

/2.I2/
$$\vec{u} = \operatorname{grad} \Phi = \frac{3\lambda + 2\mu}{2\mu + \lambda} \alpha k \int_0^t \left[1 - \exp\left(\frac{a_1^2 (t-\eta)}{k} \right) \right] \operatorname{grad} T d\eta$$

oraz dla odkształceń

/2.I3/
$$\varepsilon_{ij} = \frac{3\lambda + 2\mu}{2\mu + \lambda} \alpha k \int_0^t \left[1 - \exp\left(\frac{a_1^2 (t-\eta)}{k} \right) \right] T_{;ij}(x^n, \eta) d\eta = \varepsilon_{ij}^{I}$$

gdzie $;$ oznaczono pochodną kowariantną.

Wykorzystując prawo Duhamel'a - Neumann'a

/2.14/ $$\sigma_{ij} = \lambda g_{ij}\Theta + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda+2\mu)g_{ij}\alpha T$$

gdzie $\Theta = g^{ij}\varepsilon_{ij}$, g^{ij} - tensor metryczny,

otrzymamy następujące rozwiązanie w naprężeniach.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{I} = -\lambda\frac{3\lambda+2\mu}{2\mu+\lambda}\alpha\frac{a_1^2}{k}g_{ij}\int_0^t \exp\left(\frac{a_1^2(t-\eta)}{k}\right)T(Q,\eta)d\eta +$$

/2.15/ $$+2\mu\frac{3\lambda+2\mu}{2\mu+\lambda}\alpha k\int_0^t\left[1-\exp\left(\frac{a_1^2(t-\eta)}{k}\right)\right]T_{;ij}(x^m,\eta)d\eta -$$

$$-(3\lambda+2\mu)g_{ij}\alpha T.$$

Względna zmiana objętości w danym punkcie ciała wynosi

/2.16/ $$\Theta = g^{ij}\varepsilon_{ij} = -\frac{3\lambda+2\mu}{2\mu+\lambda}\frac{\alpha a_1^2}{k}\int_0^t\exp\left(\frac{a_1^2(t-\eta)}{k}\right)T(Q,\eta)d\eta.$$

Równanie to otrzymano wykorzystując równanie przewodnictwa /2.4/ oraz $T(Q,0)=0$.

Całkowanie po czasie w wyżej przedstawionym rozwiązaniu można z łatwością wykonać biorąc pod uwagę, że ogólne rozwiązanie równania przewodnictwa /2.4/ z warunkami

$$M(P)\frac{\partial T}{\partial n} + N(P)(T - T_0) = 0$$

/2.17/ $$T(Q,0) = 0$$

/gdzie P jest punktem powierzchni ciała/ może być przedstawione w postaci

/2.18/ $$T(Q,t) = T_0 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(Q) e^{-k\alpha_n^2 t}$$

/2.19/ $$a_n = \frac{T_0 \int_D \varphi_n(Q) dV(Q)}{\int_D \varphi_n^2(Q) dV(Q)}$$

gdzie $\varphi_n(Q)$ i α_n^2 są funkcjami własnymi i wartościami własnymi odpowiedniego zagadnienia na wartości własne.

Poniżej podamy dwie uwagi dotyczące rozwiązania ogólnych równań, przy powyższych założeniach oraz przy założeniu jednorodnych warunków początkowych. Uwagi te będą odnosiły się do przedzału czasu $0 < t < t^*$ gdzie $t^* = \frac{r_Q}{a_1}$ - czas nadejścia do danego punktu ciała Q pierwszej fali niosącej oddziaływanie brzegu, r_Q -odległość między punktem Q oraz najbliżej położonym punktem powierzchni ciała.

Z powyższych rozważań wynika, że:

1° pole wektorowe przemieszczenia jest polem potencjalnym, zatem w każdym punkcie ciało doznaje czystego odkształcenia.

2° jeżeli temperatura w każdym punkcie powierzchni ciała $T(P,t) \geq 0$ to w każdym punkcie wnętrza ciała w przedziale czasu $0 < t < t^*$ względna zmiana objętości Θ jest zawsze mniejsza od zera. Jest to niewątpliwie charakterystyczny efekt dynamicznej rozszerzalności cieplnej ciała.

Należy podkreślić,że podobną do wyżej przedstawionej metodę uzyskania rozwiązania szczególnego $\vec{u}^{I}$ zastosowali dla zagadnienia jednowymiarowego A.Singh i P.Puri w pracy [II] .

Wykorzystując wyżej przedstawiony sposób,rozwiązanie wielu jednowymiarowych zagadnień dynamicznych można sprowadzić do obliczenia skończonej ilości całek z temperatury i jej pochodnych. W ten sposób można otrzymać syntetyczne ujęcie wielu wcześniej rozpatrywanych zagadnień,które będą wynikały z nich jako przypadki szczególne [6 - I2] .

Przypadek półprzestrzeni,nieograniczonego ośrodka z pustką kulistą oraz nieograniczonej płyty na sprężystym podłożu rozważono szczegółowo w pracy [I3] .

3. Rozwiązanie szczególne równań termo-lepkosprężystości

Przedstawmy równanie stanu dla ciała lepkosprężystego układem równań [3] :

$$P_1(D)\, s_{ij} = Q_1(D)\, e_{ij}$$

/3.I/

$$s = 3K(e - 3\alpha T)$$

gdzie s_{ij} i e_{ij} są odpowiednio dewiatorami tensora naprężeń σ_{ij} i odkształceń ε_{ij} , a $P_1(D)$ i $Q_1(D)$ są odpowiedniego rzędu operatorami różniczkowymi.

we wzorach /3.I/ w celu uzyskania prostych formuł przyjęto, że ośrodek zachowuje się przy wszechstronnym ściskaniu jako ciało sprężyste.

Jeżeli na związkach /3.I/ wykonać jednostronną transformację Laplace'a i założyć, że w ciele nie występują przemieszczenia i naprężenia w czasie $t \leq 0$ to otrzymamy

$$\bar{s}_{ij} = 2\bar{\mu}(p) e_{ij}$$

/3.2/

$$\bar{s} = 3K(\bar{e} - 3\alpha\bar{T})$$

Z /3.I/ i /3.2/ wynika, że operatory będące uogólnieniem stałych Lame'go po wykonaniu transformacji przyjmują postać [3] :

/3.3/
$$\bar{\mu}(p) = \frac{Q_1(p)}{2P_1(p)} \quad , \quad \bar{\lambda}(p) = K - \frac{2}{3}\bar{\mu}(p).$$

W celu znalezienia rozwiązania szczególnego podstawowych równań termo-lepkosprężystości, bez sił masowych oraz źródeł ciepła, przy założeniu jednorodnych warunków początkowych dla pola temperatur oraz stanu odkształcenia dokonamy jednostronnej transformacji Laplace'a na odpowiednich rozwiązaniach szczególnych termosprężystości /2.I2/, /2.I5/ oraz /2.I6/.

Po wykonaniu transformacji, na podstawie analogii sprężysto-lepkosprężystej [5], rozwiązania szczególne w przestrzeni transformat przyjmą postać:

$$\vec{\bar{u}}^{I}=\frac{3\bar{\lambda}(p)+2\bar{\mu}(p)}{2\bar{\mu}(p)+\bar{\lambda}(p)}\alpha k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p-\frac{\bar{a}_1^2(p)}{k}}\right)\operatorname{grad}\bar{\bar{T}}(x^m,p)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^{I}=2\bar{\mu}(p)\frac{3\bar{\lambda}(p)+2\bar{\mu}(p)}{2\bar{\mu}(p)+\bar{\lambda}(p)}\alpha k\left[\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p-\frac{\bar{a}_1^2(p)}{k}}\right)\bar{\bar{T}}_{;ij}(x^m,p)\right]-$$

$$-\bar{\lambda}(p)\frac{3\bar{\lambda}(p)+2\bar{\mu}(p)}{2\bar{\mu}(p)+\bar{\lambda}(p)}\alpha\frac{\bar{a}_1^2(p)}{k}g_{ij}\left[\frac{1}{p-\frac{\bar{a}_1^2(p)}{k}}\bar{\bar{T}}(x^m,p)\right]-$$

$$-\left[3\bar{\lambda}(p)+2\bar{\mu}(p)\right]g_{ij}\,\alpha\bar{\bar{T}}(x^m,p)$$

/3.4/

$$\bar{\Theta}^{I}=-\frac{3\bar{\lambda}(p)+2\bar{\mu}(p)}{\bar{\lambda}(p)+2\bar{\mu}(p)}\,\frac{\alpha\bar{a}_1^2(p)}{k}\left[\frac{1}{p-\frac{\bar{a}_1^2(p)}{k}}\bar{\bar{T}}(x^m,p)\right]$$

$$\left(\operatorname{Re}p>\frac{a_1^2}{k}\right)\quad;\quad\bar{a}_1^2(p)=\frac{\bar{\lambda}(p)+2\bar{\mu}(p)}{\rho}\,.$$

Oznaczmy

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2\bar{\mu}+\bar{\lambda}}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p-\frac{\bar{a}_1^2}{k}}\right)\right\}=f_1(t),$$

/3.5/

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-\frac{\bar{a}_1^2}{k}}\right\}=f_2(t),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\bar{\lambda}}{p-\frac{\bar{a}_1^2}{k}}\right\}=f_3(t),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2\bar{\mu}}{2\bar{\mu}+\bar{\lambda}}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p-\frac{\bar{a}_1^2}{k}}\right)\right\}=f_4(t).$$

Rozwiązania szczególne przyjmują następującą postać ogólną:

/3.6/$_a$ $\vec{u}^{I}=3\bar{K}\alpha k\, f_1(t)*\operatorname{grad}T(x^m,t)$

$$\sigma_{ij}^{I} = -3K\frac{\alpha}{\rho k} g_{ij} f_3(t) * T(x^m,t) - 3K\alpha g_{ij} T(x^m,t) +$$

$$+ 3K\alpha k f_4(t) * T_{,ij}(x^m,t)$$

/3.6/$_{b,c}$

$$\Theta^{I} = -\frac{3K\alpha}{\rho k} f_2(t) * T(x^m,t)$$

przy czym gwiazdką oznaczono operację splotu.

Poniżej przedstawimy dokładną postać rozwiązania dla ośrodka Voigta i Maxwella.

a/ Model Voigta

Dla tego modelu funkcje $\bar{\mu}(p)$ i $\bar{\lambda}(p)$ przyjmują postać

/3.7/

$$\bar{\mu}(p) = \eta p + \mu$$

$$\bar{\lambda}(p) = K - \frac{2}{3}\bar{\mu}(p)$$

gdzie η oznacza współczynnik lepkości.

Podstawiając /3.7/ do /3.5/ po wykonaniu retransformacji Laplace'a otrzymamy:

/3.8/

$$f_1(t) = \frac{1}{\rho a_1^2}\left(1 - e^{-At}\right)$$

$$f_3(t) = \frac{2\eta\rho}{4\eta - 3\rho}\left[\delta(t) - (A+B)e^{-At}\right]$$

$$f_4(t) = 2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2\left[1 - (1 - \lambda^* A)e^{-At}\right]$$

przy czym oznaczono przez $\lambda^* = \eta/\mu$ - czas opóźnienia, $a_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$ - prędkość propagacji fal poprzecznych oraz

$$A = \frac{3a_1^2}{4\lambda^* a_2^2 - 3k}\;, \quad B = \frac{3K}{2\eta} - \frac{1}{\lambda^*}.$$

Wstawiając /3.8/ do /3.6/ ostateczna postać rozwiązań szczegółowych przyjmie formę:

$$\vec{u}^{I} = \frac{3K\alpha k}{\rho a_1^2}\int_0^t \left[1 - e^{-A(t-\tau)}\right] \operatorname{grad} T(x^m, \tau)\, d\tau$$

/3.10/
$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{I} = {} & \frac{6K\alpha\rho g_{ij}}{4\eta - 3\rho k}(A+B)\int_0^t \exp[-A(t-\tau)]\, T(x^m, \tau)\, d\tau + \\ & + \frac{6K\alpha k a_2^2}{a_1^2}\int_0^t \{1 - (1 - \lambda^* A)\exp[-A(t-\tau)]\, T_{,ij}(x^m, \tau)\, d\tau - \\ & - 3K\alpha g_{ij}\, T(x^m, t)\, \frac{6\eta - 3\rho k}{4\eta - 3\rho k}. \end{aligned}$$

Obliczając granicę wyrażeń /3.9/ i /3.10/ przy $\lambda^* \to 0$ otrzymamy odpowiednie rozwiązania szczególne dla ośrodka sprężystego /2.12/ i /2.15/.

b/ Model Maxwella

W ośrodku Maxwella funkcje $\bar{\mu}(p)$ i $\bar{\lambda}(p)$ są określone następująco

/3.11/
$$\bar{\mu}(p) = \frac{\mu p}{p + 1/\lambda^*}\;, \quad \bar{\lambda}(p) = K - \frac{2}{3}\bar{\mu}(p)$$

gdzie $\lambda^* = \eta/\mu$ -oznacza czas relaksacji, η -współczynnik lepkości.

Podstawiając związki /3.11/ do równań /3.5/ oraz wykonując retransformację Laplace'a otrzymamy:

$$f_1(t) = -\frac{1}{\rho\lambda^* k}\left\{\frac{1}{p_1 p_2} + e^{p_1 t}\left[\frac{\lambda^* p_1 + 1}{p_1(p_1-p_2)}\right] - e^{p_1 t}\left[\frac{\lambda^* p_2 + 1}{p_2(p_1-p_2)}\right]\right\}$$

$$f_2(t) = \frac{1}{\lambda^*(p_1-p_2)}\left[(1+\lambda^* p_1)e^{p_1 t} - (1+\lambda^* p_2)e^{p_2 t}\right]$$

/3.I2/
$$f_3(t) = \frac{1}{\lambda^*(p_1-p_2)}\left\{\left[K+p_1\lambda^*(K-\tfrac{2}{3}\mu)\right]e^{p_1 t} - \left[K+p_2\lambda^*(K+\tfrac{2}{3}\mu)\right]e^{p_2 t}\right\}$$

$$f_4(t) = -\frac{2\mu}{\rho k(p_1-p_2)}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right)$$

gdzie

$$p_{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2}{k} - \frac{1}{\lambda^*}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a_1^2}{k} - \frac{1}{\lambda^*}\right)^2 + \frac{K}{\rho k\lambda^*}}$$

Uwzględniając w wyrażeniach /3.6/ wzory /3.I2/ otrzymamy rozwiązanie szczególne w następującej postaci:

/3.I3/
$$\vec{u}^I = 3\alpha k\int_0^t \operatorname{grad} T(x^m,\tau)\,d\tau - \frac{3K\alpha}{\rho\lambda^*(p_1-p_2)}\int_0^t\left[(\lambda^*+\frac{1}{p_1})e^{p_1(t-\tau)} - (\lambda^*+\frac{1}{p_2})e^{p_2(t-\tau)}\right]\operatorname{grad} T(x^m,\tau)\,d\tau$$

/3.I4/
$$\sigma_{ij}^I = -\frac{3K\alpha g_{ij}}{\rho k\lambda^*(p_1-p_2)}\int_0^t\left\{\left[K+p_1\lambda^*(K-\tfrac{2}{3}\mu)\right]e^{p_1(t-\tau)} - \left[K+p_2\lambda^*(K-\tfrac{2}{3}\mu)\right]e^{p_2(t-\tau)}\right\}T(x^m,\tau)\,d\tau - 3K\alpha g_{ij}T(x^m,t) - \frac{6K\alpha\mu}{\rho(p_1-p_2)}\int_0^t\left[e^{p_1(t-\tau)} - e^{p_2(t-\tau)}\right]T_{,ij}(x^m,\tau)\,d\tau$$

/3.I5/
$$\Theta^I = -\frac{3K\alpha}{\rho k\lambda^*(p_1-p_2)}\int_0^t\left[(1+\lambda^* p_1)e^{p_1(t-\tau)} - (1+\lambda^* p_2)e^{p_2(t-\tau)}\right]T(x^m,\tau)\,d\tau$$

Łatwo można sprawdzić, że podobnie jak w modelu Voigta, dokonując przejścia granicznego w /3.I3/ - /3.I5/ przy $\lambda^{*} \to \infty$ otrzymujemy odpowiednie wyrażenia rozwiązań szczególnych dla ośrodka sprężystego /2.I2/,/2.I5/ i /2.I6/.

Ponieważ zaburzenia w ośrodku Maxwella propagują się ze skończoną prędkością, to wzory /3.I3/ do /3.I5/ przedstawiają ogólne rozwiązanie zagadnienia początkowego dla równań równowagi dynamicznej w tym ośrodku /przy założeniach omówionych we wstępie/. Są one także rozwiązaniem ogólnym dla ośrodka nieograniczonego.

Ponadto na podstawie wzorów /3.I4/,/3.I5/ można wyciągnąć następujące wnioski natury fizycznej, które w zasadzie pokrywają się z wypowiedzianymi wnioskami dotyczącymi ośrodka sprężystego /por. punkt 2 /.

I° Efekty dynamicznej rozszerzalności cieplnej ośrodka Maxwella powodują, że względna zmiana objętości Θ jest zawsze mniejsza od zera w przedziale czasu $0 < t < \frac{r_0}{a_1}$ jeżeli tylko temperatura w każdym punkcie powierzchni ciała jest większa od zera /z własności równania przewodnictwa wynika, że również wówczas temperatura w każdym punkcie wnętrza ciała będzie większa od zera.

2° Jeżeli temperatura w każdym punkcie powierzchni ciała jest większa od zera oraz ponadto $\operatorname{grad}\operatorname{grad} T > 0$ w rozważanym punkcie wnętrza ciała to $\sigma_{ij} < 0$ dla $0 < t < \frac{r_Q}{a_1}$

Podobnych wniosków nie można było wyciągnąć w przypadku modelu Voigta, ze względu na to, że równania ruchu dla tego modelu są typu parabolicznego.

W celu znalezienia rozwiązania ogólnego, do funkcji określonych wzorami /3.9/, /3.IO/ oraz /3.I3/ i /3.I5/ należy dodać jeszcze funkcje $\vec{u}^{\,II}$ i σ_{ij}^{II}, spełniające jednorodne równania podstawowe lepkosprężystości z odpowiednio zmodyfikowanymi warunkami brzegowymi. Zatem przedstawiono tu sposób sprowadzenia rozwiązania pewnych zagadnień termo-lepkosprężystości do rozwiązania odpowiednich zagadnień dynamicznej teorii lepkosprężystości.

Opierając się na powyższym sposobie postępowania, w pracy [I4], przedstawiono w możliwie najogólniejszej postaci rozwiązanie zagadnienia propagacji jednowymiarowych fal termo-lepkosprężystości w półprzestrzeni dla modelu Voigta i Maxwella /przy założeniach omówionych we wstępie/.

Spis publikacji

I. W.Nowacki, Thermoelasticity,Pergamon Press,Oxford,1963.

2. B.A.Boley,J.H.Weiner, Theory of thermal stresses,New York,1960.

3. W.Nowacki, Theorie du fluage,Eyrolles,Paris,1965.

4. J.N.Goodier, Integration of thermoelastic equations, Phil. Mag.,23/1967/.

5. H.Hilton, An extension of Alfrey's elastic-viscoelastic analogy to viscoelastic thermal stress problems, Rep. No TSVE-TR-2,Dep.Aero.Eng.University of Illinois,1963.

6. В.И.Даниловская, Температурные напряжения в упругом полупространстве возникающие вследствие внезапного нагрева его границы,ПММ,3,14,1950.

7. В.И.Даниловская, Об одной динамической задаче термоупругости,ПММ,3,16,1952.

8. T.Mura, Thermal strains and stresses in transient state, Proc.Second Japan Nat.Congr.Appl.Mech.,1952.

9. E.Sternberg,J.G.Chakravorthy, On inertia effects in a transient thermoelastic problem, Trans.ASME,4,26,1959.

IO. E.Sternberg,J.G.Chakravorthy,Thermal shock in an elastic body with a spherical cavity,Quart.Appl.Math.,2,17,1959.

II. A.Singh,P.Puri, Dynamic thermal stress in an infinite slab,Arch.Mech.Stos.,I,15,1963.

I2. Y.T.Tsui, Problem in dynamic thermoelasticity,J.Acoust. Soc.Am.,I,30,1966.

I3. W.K.Nowacki,B.Raniecki,Note on the propagation of thermoelastic /non coupled/ waves, Proc.Vibr.Probl., 2,8,1967.

I4. W.K.Nowacki,B.Raniecki,Uwagi dotyczące rozwiązań pewnych zagadnień dynamicznych termo-lepkosprężystości,Arch. Mech.Stos.,20,1968,w druku.