

Czesław Szymański
**PŁASKIE PŁYNIĘCIA STACJONARNE
OŚRODKA TYPU COULOMBA
Z UWZGLĘDNIENIEM
SIŁ BEZWŁADNOŚCI I SIŁ MASOWYCH**

25/1967

WARSZAWA



Na prawach rękopisu
Do użytku wewnętrznego

Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN
Nakład 150 egz. Arkuszy wyd. 2,1. Arkuszy druk. 2,5.
Cddano do drukarni w grudniu 1967 r. Druk ukończono
w styczniu 1968 r. Zam. 1117/o/67

W.D.N. Warszawa, ul. Śniadeckich 8

PLASKIE PŁYNIĘCIE STACJONARNE OŚRODKA TYPU COULOMBA
Z UWZGLĘDNIENIEM SIŁ BEZWŁADNOŚCI I SIŁ MASOWYCH

Czesław Szymański

1. Wstęp

Przedmiotem przedstawionej pracy jest analiza równań mechanicznych ośrodka jednorodnego i izotropowego typu Coulomba w przypadku, gdy proces deformacji ośrodka traktowany jest jako płaski sztywno-plastyczny proces dynamiczny. Pod pojęciem procesu dynamicznego rozumiemy tutaj taki proces deformacji, w którym przyspieszenia cząstek ośrodka są tak wysokie, że w równaniach ruchu należy uwzględnić człony inercyjne, w odróżnieniu od procesu quasistatycznego, gdzie te człony się pomija. W pracy rozpatrzony został przypadek procesu stacjonarnego. Jako równanie konstytutywne opisujące proces deformacji przyjęta została izotropowa zależność między tensorami naprężenia i prędkości odkształcenia w postaci quasi-liniowego związku między tymi tensorami /założenie współosiowości tych tensorów/. Ponadto założono, że w procesie płynięcia ośrodek jest nieściśliwy.

Model matematyczny, którego kinematyka opisana jest wyżej wymienionym równaniem konstytutywnym i warunkiem nieściśliwości, przyjęty był w pracach : A.J.Iszlińskiego /7/ oraz A.J.Jenike i R.T.Shielda /8/ i omawiany był w pracach : A.J.M.Spencera /14/, A.Dreschera, K.Kwaszczyńskiej, Z.Mroza /2/, L.S.Zagajnowa /17/ i J.Mandela /10/.

Analiza równań mechanicznych, opartych na teorii sztywno-plastycznego płynięcia materiałów typu Treski względnie Misesa, również dla przypadku płaskiego stanu odkształcenia i przy uwzględnieniu w równaniach ruchu sił bezwładności,

przeprowadzona została w pracy A.J.M.Spencera /13/. Rozwiązania konkretnych zagadnień brzegowych typu dynamicznego /niefalowego/, w oparciu o teorię ośrodka sztywno-plastycznego typu Treski względnie Misesa, podane zostały w cytowanej wyżej pracy Spencera /13/ i ostatnio w pracach J.Najara /11/ i W.Szczepińskiego /15/.

Dla ośrodków typu Coulomba analizy równań mechanicznych, przy podejściu dynamicznym do zagadnień mechaniki ośrodka, przeprowadzone zostały w pracach: S.S.Grigoriana /6/ i /5/ z warunkiem plastyczności Schleichera/dla ogólnego przypadku trójwymiarowego ruchu niestacjonarnego, L.S.Zagajnowa /17/ dla płaskiego ruchu stacjonarnego i w pracy G.A.Geniewa /4/ dla płaskiego ruchu stacjonarnego i niestacjonarnego ruchu jednowymiarowego /przy dużych założeniach upraszczających/.

Założenie procesu deformacji jako procesu sztywno-plastycznego względnie sprężysto-plastycznego płynięcia przy podejściu dynamicznym prowadzić może do znacznych odchyień w stosunku do rzeczywistego zachowania się ośrodka i wydaje się, że dla ośrodka ziarnistego bardziej realistyczny jest model matematyczny ciała sprężysto/lepkoplastycznego zaproponowany przez W.Olszaka i P.Perzynę /12/ dla gruntu.

Przyjęty w obecnej pracy model sztywno-plastycznego płynięcia dla ośrodka Coulomba stanowi pierwsze przybliżenie i pozwala w sposób stosunkowo prosty przeprowadzić analizę równań opartych na tym modelu i uwzględniających siły bezwładności w równaniach ruchu.

Wyrowadzone w pracy równania mają postać niezmienniczych zależności pomiędzy wielkościami niezmienniczymi, określającymi stan naprężenia i pole prędkości przemieszczeń i zapisane są w układzie współrzędnych krzywoliniowych nieortogonalnych, odpowiednio unormowanych do postaci naturalnej. Taka postać równań mechanicznych spotykana jest w pracach C.Caratkeodory'ego, E.Schmidta, H.Hencky'ego, H.Geiringer, Ł.M.Kaczanowa, J.Rychlewskiego i innych autorów przy zagad-

nieniach quasistatycznych teorii plastyczności i posługiwa-
niu się szczególnymi wyróżnionymi siatkami współrzędnych
krzywoliniowych. Podobny sposób zapisu równań mechanicznych,
w odniesieniu do układu współrzędnych krzywoliniowych nie-
ortogonalnych w postaci naturalnej stosuje P.P. Teodorescu
/15/ dla płaskich stanów teorii sprężystości oraz J. Zawidzki
/18/ dla płaskich stanów teorii sztywno-plastycznego płynię-
cia ośrodka izotropowego niejednorodnego.

Przyjęta w obecnej pracy metoda analizy i zapisu równań
jest efektywna przynajmniej dla założonego modelu kinematycz-
nego ośrodka. Pozwala ona w prosty sposób przejść od zapisu
równań w dowolnym układzie współrzędnych krzywoliniowych do
ich zapisu zarówno w niezmienniczych /dla ustalonego zagad-
nienia brzegowego/ siatkach współrzędnych jak siatka trajek-
torii naprężeń głównych, siatka trajektorii maksymalnych od-
kształceń postaciowych, siatka linii poślizgu Coulomba i
siatka charakterystyk, jak również do zapisu równań w konkret-
nym układzie linii współrzędnych z założoną parametryzacją.

Istotnym punktem pracy jest podanie metody badania typu
równań różniczkowych cząstkowych quasiliniowych i wyprowadza-
nia równań ich charakterystyk - metody zilustrowanej na przy-
kładzie równań różniczkowych wynikających z założonego mode-
lu mechanicznego ośrodka. W oparciu o wyprowadzone równania
różniczkowe modelu w odniesieniu do dowolnego układu współ-
rzędnych nieortogonalnych /w płaszczyźnie ruchu/, przyjętego
w postaci naturalnej, oraz na podstawie definicji charakterys-
tyk równań różniczkowych cząstkowych, podanej przez r. Couran-
ta i D. Hilberta /1/, wyprowadzenie równań charakterystyk
/kierunków charakterystycznych i odpowiednich związków róż-
niczkowych wzdłuż linii charakterystycznych w płaszczyźnie
zmiennych niezależnych/ sprowadza się do wykrycia prostych
zależności algebraicznych między kątami wzajemnego nachyle-
nia linii współrzędnych i kątami nachylenia kierunku główne-
go σ_1 względem linii współrzędnych. Wychodząc z innych przes-
łanek, podobną metodę wyprowadzania równań charakterystyk

podał J.Zawidzki /18/. Analizując równania różniczkowe płaskiego stanu quasistatycznego płynięcia stacjonarnego ośrodka plastycznego niejednorodnego, autor ten z góry założył postać związku między wzajemnym nachyleniem ψ linii współrzędnych i kątem nachylenia ϑ większego naprężenia głównego do jednej z linii współrzędnych w postaci zależności $\psi = 2\vartheta$ i przy tym związku wyprowadza kryteria pozwalające ustalić typ badanych równań różniczkowych oraz, w przypadku hiperboliczności układu, związki różniczkowe wzdłuż dwóch spośród trzech rodzin charakterystyk.

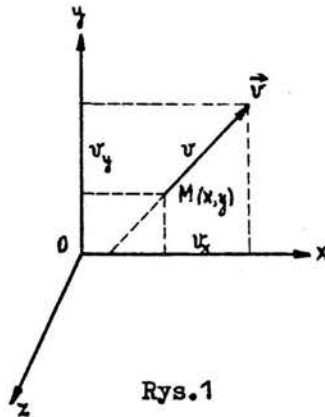
2.Sformułowanie równań

W pracy rozpatrzono ośrodek ciągły typu Coulomba w płaskim stanie płynięcia ustalonego przy uwzględnieniu w równaniach ruchu sił masowych i przyspieszenia. Przyjęto założenia nieściśliwości ośrodka i współosiowości dewiatorów naprężenia i prędkości odkształcenia. Matematyczne sformułowanie założeń i równań problemu możemy zapisać w postaci:

1/ Założenie ruchu płaskiego stacjonarnego

Jeśli płaszczyzna $x = \text{const}$ jest płaszczyzną ruchu, (x, y) są współrzędnymi kartezjańskimi w płaszczyźnie ruchu, to /rys.1/:

$$/1/ \quad \vec{v} = \vec{v}(x, y) \quad \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \right);$$



Rys.1

2/ Założenie nieściśliwości ośrodka:

$$/2/ \quad \rho = \text{const} \quad , \quad \text{div } \vec{v} = 0 \quad ;$$

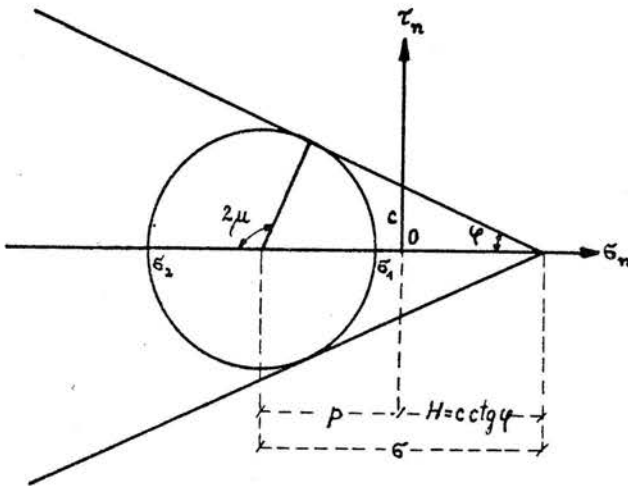
3/ Założenie współosiowości dewiatorów naprężenia i prędkości odkształcenia:

$$/3/ \quad \bar{D} = 2\bar{T} \quad ,$$

gdzie \bar{T} i \bar{D} dewiatory tensorów naprężenia T i prędkości odkształcenia D ;

4/ Warunek plastyczności Coulomba /por.rys.2/:

$$/4/ \quad \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \sin \varphi \left[-\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) + c \operatorname{ctg} \varphi \right]$$

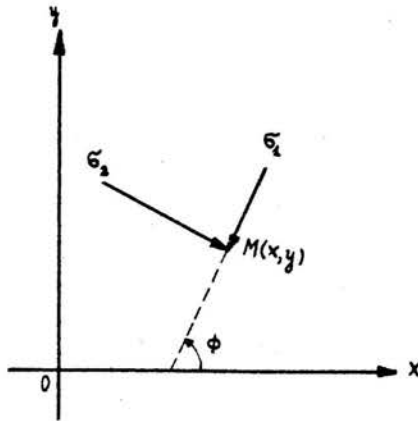


Rys.2

Z założeń 1/ - 4/ wynika, że stan odkształcenia określony jest przez dwie funkcje $v_x(x, y)$, $v_y(x, y)$:

$$/5/ \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} & , & \varepsilon_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} & ; & \gamma_{yz} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & , \\ \varepsilon_z \equiv 0 & , & \gamma_{yz} \equiv 0 & , & \gamma_{zx} \equiv 0 & , \end{cases}$$

zaś stan naprężenia można określić również przez dwie inne funkcje: przez tzw. "sprowadzone" naprężenie średnie $\sigma(x,y) = p + c \operatorname{ctg} \varphi$ i kąt nachylenia $\phi(x,y)$ naprężenia σ_1 z osią x-ów /rys.3/:



Rys. 3

$$/6/ \quad \begin{cases} \sigma_x = H - \sigma (1 - \sin \varphi \cos 2\phi) & , & \sigma_y = H - \sigma (1 + \sin \varphi \cos 2\phi) & , \\ \sigma_z = H - \sigma & , & \tau_{xy} = \sigma \sin \varphi \sin 2\phi & , & \tau_{yz} = 0 & , & \tau_{zx} = 0 & , \end{cases}$$

gdzie

$$/7/ \quad \begin{cases} \sigma = p + H & , & p = -\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) & , \\ H = c \operatorname{ctg} \varphi & . \end{cases}$$

Te cztery funkcje $v_x(x,y)$, $v_y(x,y)$, $\sigma(x,y)$ i $\phi(x,y)$ winny spełniać:

1° równania ruchu:

$$/8/ \quad \text{Div } T + \rho \vec{F} = \rho \vec{a} ,$$

gdzie \vec{F} - siła masowa, ρ - gęstość, \vec{a} - przyspieszenie,
2° warunek nieściśliwości:

$$/9/ \quad \text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 ,$$

3° warunek wynikający z założenia współosiowości dwiatórow \vec{D} , \vec{T} :

$$/10/ \quad \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\gamma_{xy}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

Uwzględniając, że przyspieszenie \vec{a} przy naszych założeniach wyraża się wzorem:

$$/11/ \quad \vec{a} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} ,$$

możemy układ równań /8/ - /10/ na podstawie /6/ i /5/ zapisać w postaci:

$$/12/ \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 - \sin \varphi \cos 2\phi) \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \sin \varphi \sin 2\phi \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \\ + 2\sigma \sin \varphi \left(\sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} - \cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \rho F_x \\ \sin \varphi \sin 2\phi \frac{\partial \sigma}{\partial x} - (1 + \sin \varphi \cos 2\phi) \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \\ + 2\sigma \sin \varphi \left(\cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = \rho F_y \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ \sin 2\phi \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) - \cos 2\phi \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = 0 \end{array} \right.$$

Wyznaczając z tych czterech równań cztery niewiadome funkcje $\zeta(x,y)$, $\phi(x,y)$, $v_x(x,y)$ i $v_y(x,y)$ otrzymamy na podstawie /6/ składowe tensora naprężenia T oraz bezpośrednio z równań /12/ składowe wektora prędkości \vec{v} /a w konsekwencji również składowe /5/ tensora prędkości odkształceń D /. Łatwo jest stwierdzić przy pomocy badania odpowiedniej formy czwartego stopnia typ równań /12/. Na ogół jest to typ hiperboliczny, może się jednak okazać, że dla pewnych postaci funkcji niewiadomych typ równań może przejść w postać paraboliczną. Częstokroć jednak zachodzi potrzeba zapisania równań w innym układzie współrzędnych krzywoliniowych ze względu na to, że warunki brzegowe zadane są wzdłuż brzegów krzywoliniowych, a ponadto łatwiej jest zbadać osobliwości równań w takich siatkach, na ogół krzywoliniowych, jak siatki naprężeń głównych, siatki trajektorii maksymalnych naprężeń stycznych, siatki linii poślizgu. Również ze względu na metodę całkowania równań typu hiperbolicznego czy parabolicznego zachodzi potrzeba zapisania równań w odniesieniu do siatki linii charakterystycznych, która na ogół, ale nie zawsze, pokrywa się z siatką linii poślizgu. Dlatego też celowe jest zapisanie równań problemu w dowolnym krzywoliniowym układzie współrzędnych, z których można otrzymać jako szczególne przypadki zapisy równań w określonych siatkach linii współrzędnych.

3. Równania problemu w dowolnym układzie współrzędnych krzywoliniowych w płaszczyźnie ruchu

Zapisane w układzie kartezjańskim w płaszczyźnie ruchu równania problemu w postaci /12/ przedstawiają zapis skalarne równań ruchu, warunku nieściśliwości ośrodka i warunku współosiowości dewiatorów naprężenia i prędkości odkształcenia przy założeniu, że ruch jest płaski i stacjonarny oraz że stan naprężenia jest ograniczony warunkiem granicznym Coulomba. Równania te, zapisane w postaci niezmienniczych związków niezależnych od układu współrzędnych, mają postać:

$$/13/ \quad \text{Div } T + \rho \vec{F} = \rho \vec{a}, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad \bar{D} = \lambda \bar{T}$$

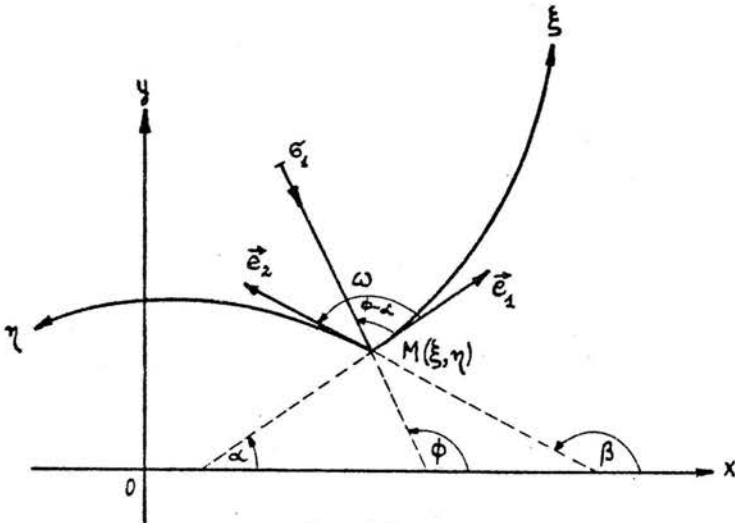
Założenia ruchu płaskiego i stacjonarnego ograniczają pole wektora prędkości warunkami:

$$/14/ \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \equiv 0, \quad v_z \equiv 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0.$$

jeśli oś z - ów ma kierunek normalny do płaszczyzny ruchu. Założenie, że stan naprężenia jest stanem granicznym Coulomba wyraża się związkiem:

$$/15/ \quad \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \sin \varphi \left[-\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + c \cotg \varphi \right].$$

Podamy obecnie zapis skalarny równań /13/ w dowolnym układzie współrzędnych krzywoliniowych, obranych w płaszczyźnie ruchu, wykorzystując założenia /14/ i /15/. Wprowadzamy współrzędne krzywoliniowe ξ, η /por.rys.4/ przez związki:



Rys.4

$$/16/ \quad \xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$$

[analogicznie jak w pracy EP.Teodorescu /16/], zaś oś $\zeta \equiv z$ obieramy w kierunku normalnym do płaszczyzny ruchu. Dla celów analizy układu równań problemu wydaje się celowe opisanie charakteru siatki linii współrzędnych przez ich krzywizny:

$$/17/ \quad \kappa_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial \Delta_1}, \quad \kappa_2 = \frac{\partial \beta}{\partial \Delta_2},$$

wyrażone jako funkcje długości łuków Δ_1, Δ_2 linii ξ, η oraz przez kąt ω między stycznymi do tych linii /rys.4/:

$$/18/ \quad \omega = \beta - \alpha,$$

traktowany jako funkcja Δ_1 i Δ_2 .

Jest to w pewnym sensie niezmienniczy opis siatki linii współrzędnych krzywoliniowych.

Tensor naprężenia określić można jednoznacznie przez dwie wielkości przy przyjętych założeniach: przez "sprowadzone" naprężenie średnie:

$$/19/ \quad \sigma = p + H,$$

gdzie /por.rys.2/:

$$/20/ \quad p = -\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad H = c \operatorname{ctg} \varphi$$

oraz przez nachylenie osi głównej do linii współrzędnych.

Przyjmijmy jako tę drugą wielkość kąt nachylenia φ /por.rys.3/ do osi x-ów.

$$/21/ \quad \phi = \phi(\lambda_1, \lambda_2),$$

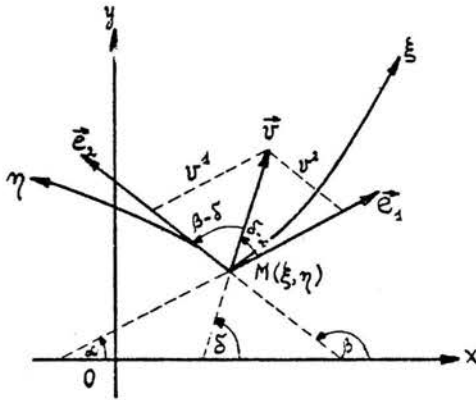
gdyż zawsze można przejść do kąta nachylenia ϕ_1 lub ϕ_2 do linii współrzędnych krzywoliniowych przez wzory /por.rys.4/:

$$/22/ \quad \begin{cases} \phi_1 = \phi - \alpha & \text{lub} & \phi_2 = \beta - \phi, \\ \phi_1 + \phi_2 = \omega = \beta - \alpha. \end{cases}$$

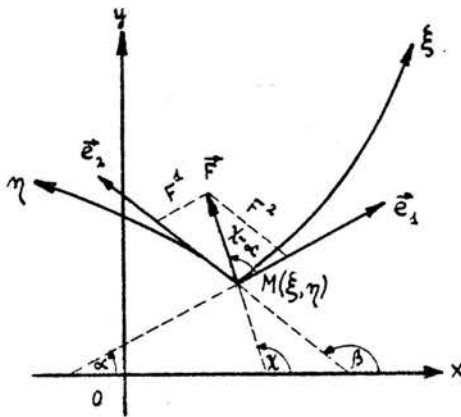
Występujące w równaniach wielkości tensorowe i wektorowe wyrażamy przez składowe fizyczne względem jednostkowych wektorów stycznych \vec{e}_1 i \vec{e}_2 do linii współrzędnych $\eta = \text{const}$ i $\xi = \text{const}$ odpowiednio. Odnośnie wektorów prędkości \vec{v} i siły masowej \vec{F} stosować będziemy dualny zapis: bądź określać będziemy te wektory przez dwie składowe fizyczne na osiach \vec{e}_1 i \vec{e}_2 bądź też przez ich moduły i kąty nachylenia względem linii współrzędnych lub osi x -ów. Mamy więc /por.rys.5 i 6/:

$$/23/ \quad \begin{cases} \vec{v} = v^1 \vec{e}_1 + v^2 \vec{e}_2 = v \left[\frac{\sin(\beta - \delta)}{\sin \omega} \vec{e}_1 + \frac{\sin(\delta - \alpha)}{\sin \omega} \vec{e}_2 \right] = \\ = v(\cos \delta \vec{i} + \sin \delta \vec{j}) = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \end{cases}$$

$$/24/ \quad \begin{cases} \vec{F} = F^1 \vec{e}_1 + F^2 \vec{e}_2 = F \left[\frac{\sin(\beta - \chi)}{\sin \omega} \vec{e}_1 + \frac{\sin(\chi - \alpha)}{\sin \omega} \vec{e}_2 \right] = \\ = F(\cos \chi \vec{i} + \sin \chi \vec{j}) = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} \end{cases}$$



Rys.5



Rys.6

Składowe wektora przyspieszenia $\vec{a} = a^1 \vec{e}_1 + a^2 \vec{e}_2$ wyrażamy poprzez operacje różniczkowania składowych wektora prędkości \vec{v} . Stosując wzory transformacyjne pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi i współrzędnymi kontrawariantnymi obiektów tensorowych i wektorowych przy przejściu od układu współrzędnych kartezjańskich do układu współrzędnych krzywoliniowych

wych, a następnie przechodząc do składowych fizycznych tych obiektów i zastępując operacje różniczkowania w kierunku

x i y przez operacje różniczkowania względem długości łuków Δ_1 i Δ_2 linii współrzędnych ξ i η , po szeregu żmudnych obliczeń dochodzimy do następujących wzorów na $\text{Div } T$, wektor przyspieszenia \vec{a} , siłę masową \vec{F} , $\text{div } \vec{v}$ i warunek współosiowości redukujący się przy naszych założeniach do jednego związku.

Fodamy wzory na wyżej wymienione obiekty tensorowe:

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 \text{Div } T &= (\text{Div } T)^1 \vec{e}_1 + (\text{Div } T)^2 \vec{e}_2 = \\
 &= \frac{1}{\sin^3 \omega} \left[\sin \omega \left(-[1 + \sin \varphi \cos 2(\beta - \phi)] \frac{\partial \sigma}{\partial \Delta_1} + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \left\{ \cos \omega + \sin \varphi \cos [2(\phi - \alpha) - \omega] \right\} \frac{\partial \sigma}{\partial \Delta_2} \right) \right] + \\
 &+ (1 - \cos \omega) \left(\left\{ \sigma \sin \varphi \cos 2(\beta - \phi) + (\sigma - H) \right\} \frac{\partial \omega}{\partial \Delta_1} + \right. \\
 &- \left. \left\{ \sigma \sin \varphi \cos [2(\phi - \alpha) - \omega] + (\sigma - H) \cos \omega \right\} \frac{\partial \omega}{\partial \Delta_2} \right) + \\
 &- 2\sigma \sin \omega \sin \varphi \left\{ \sin 2(\beta - \phi) \frac{\partial \phi}{\partial \Delta_1} + \sin [2(\phi - \alpha) - \omega] \frac{\partial \phi}{\partial \Delta_2} \right\} \vec{e}_1 + \\
 &+ \frac{1}{\sin^3 \omega} \left[\sin \omega \left(\left\{ \cos \omega + \sin \varphi \cos [2(\beta - \phi) - \omega] \right\} \frac{\partial \sigma}{\partial \Delta_1} + \right. \right. \\
 &- \left. \left. [1 + \sin \varphi \cos 2(\phi - \alpha)] \frac{\partial \sigma}{\partial \Delta_2} \right) \right] + \\
 &+ (1 - \cos \omega) \left(-\left\{ \sigma \sin \varphi \cos [2(\beta - \phi) - \omega] + (\sigma - H) \cos \omega \right\} \frac{\partial \omega}{\partial \Delta_1} + \right. \\
 &+ \left. \left\{ \sigma \sin \varphi \cos 2(\phi - \alpha) + (\sigma - H) \right\} \frac{\partial \omega}{\partial \Delta_2} \right) + \\
 &+ 2\sigma \sin \omega \sin \varphi \left\{ \sin [2(\beta - \phi) - \omega] \frac{\partial \phi}{\partial \Delta_1} + \sin 2(\phi - \alpha) \frac{\partial \phi}{\partial \Delta_2} \right\} \vec{e}_2.
 \end{aligned}
 \right\} 125/
 \end{aligned}$$

Przyspieszenie \vec{a} :

$$/26-1/ \left\{ \begin{aligned} \vec{a} = & \left\{ \left(v^1 \frac{\partial v^1}{\partial s_1} + v^2 \frac{\partial v^1}{\partial s_2} \right) - \frac{1}{\sin \omega} \left[v^1 \cos \omega \left(v^1 \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} + v^2 \frac{\partial \alpha}{\partial s_2} \right) + v^2 \left(v^1 \frac{\partial \beta}{\partial s_1} + v^2 \frac{\partial \beta}{\partial s_2} \right) \right] \right\} \vec{e}_1 + \\ & + \left\{ \left(v^1 \frac{\partial v^2}{\partial s_1} + v^2 \frac{\partial v^2}{\partial s_2} \right) + \frac{1}{\sin \omega} \left[v^1 \left(v^1 \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} + v^2 \frac{\partial \alpha}{\partial s_2} \right) + v^2 \cos \omega \left(v^1 \frac{\partial \beta}{\partial s_1} + v^2 \frac{\partial \beta}{\partial s_2} \right) \right] \right\} \vec{e}_2 \end{aligned} \right.$$

lub

$$/26-2/ \left\{ \begin{aligned} \vec{a} = & \frac{v}{\sin^2 \omega} \left[\left\{ \sin(\beta - \delta) \left[\sin(\beta - \delta) \frac{\partial v}{\partial s_1} + \sin(\delta - \alpha) \frac{\partial v}{\partial s_2} \right] + \right. \right. \\ & - v \cos(\beta - \delta) \left[\sin(\beta - \delta) \frac{\partial \delta}{\partial s_1} + \sin(\delta - \alpha) \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right] \left. \right\} \vec{e}_1 + \\ & + \left\{ \sin(\delta - \alpha) \left[\sin(\beta - \delta) \frac{\partial v}{\partial s_1} + \sin(\delta - \alpha) \frac{\partial v}{\partial s_2} \right] + \right. \\ & \left. + v \cos(\delta - \alpha) \left[\sin(\beta - \delta) \frac{\partial \delta}{\partial s_1} + \sin(\delta - \alpha) \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right] \right\} \vec{e}_2 \end{aligned} \right.$$

Siła masowa \vec{F} :

$$/27-1/ \vec{F} = F^1 \vec{e}_1 + F^2 \vec{e}_2 = \frac{1}{\sin \omega} \left[(\sin \beta F_x - \cos \beta F_y) \vec{e}_1 + (-\sin \alpha F_x + \cos \alpha F_y) \vec{e}_2 \right]$$

lub

$$/27-2/ \vec{F} = F^1 \vec{e}_1 + F^2 \vec{e}_2 = \frac{F}{\sin \omega} \left[\sin(\beta - \chi) \vec{e}_1 + \sin(\chi - \alpha) \vec{e}_2 \right].$$

Dalej $\operatorname{div} \vec{v}$:

$$/28-1/ \operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v^1}{\partial s_1} + \frac{\partial v^2}{\partial s_2} + \frac{1}{\sin \omega} \left[v^1 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s_2} - \cos \omega \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} \right) - v^2 \left(\frac{\partial \beta}{\partial s_1} - \cos \omega \frac{\partial \beta}{\partial s_2} \right) \right]$$

lub

$$/28-2/ \operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{\sin \omega} \left\{ \left[\sin(\beta - \delta) \frac{\partial v}{\partial s_1} + \sin(\delta - \alpha) \frac{\partial v}{\partial s_2} \right] + \right. \\ \left. - v \left[\cos(\beta - \delta) \frac{\partial \delta}{\partial s_1} - \cos(\delta - \alpha) \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right] \right\}.$$

Warunek współosiowości dewiatorów \bar{D} i \bar{T} / $\bar{D} = \lambda \bar{T}$ /:

$$/29-1/ \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \cos [2\phi - (\alpha + \beta)] \frac{\partial v^1}{\partial s_1} + \cos 2(\phi - \beta) \frac{\partial v^2}{\partial s_1} + \right. \\ & \quad \left. + v^1 \sin [2\phi - (\alpha + \beta)] \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} + v^2 \sin 2(\phi - \beta) \frac{\partial \beta}{\partial s_1} \right\} + \\ & - \left\{ \cos [2\phi - (\alpha + \beta)] \frac{\partial v^2}{\partial s_2} + \cos 2(\phi - \alpha) \frac{\partial v^1}{\partial s_2} + \right. \\ & \quad \left. + v^2 \sin [2\phi - (\alpha + \beta)] \frac{\partial \beta}{\partial s_2} + v^1 \sin 2(\phi - \alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial s_2} \right\} = 0 \end{aligned} \right.$$

lub

$$/29-2/ \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \cos [2\phi - (\beta + \delta)] \frac{\partial v}{\partial s_1} + v \sin [2\phi - (\beta + \delta)] \frac{\partial \delta}{\partial s_1} \right\} + \\ & - \left\{ \cos [2\phi - (\alpha + \delta)] \frac{\partial v}{\partial s_2} + v \sin [2\phi - (\alpha + \delta)] \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

Zestawienie równań zagadnienia

Tak więc równania /13/ sprowadzają się do układu czterech równań skalarnych, zapisanych w układzie współrzędnych krzywoliniowych / ξ, η /, w postaci:

$$/30/ \left\{ \begin{aligned} & (\text{Div } T)^1 + \rho F^1 = \rho a^1 \\ & (\text{Div } T)^2 + \rho F^2 = \rho a^2 \\ & \text{div } \vec{v} = 0 \\ & \text{warunku współosiowości dewiatorów } \bar{D} \text{ i } \bar{T} \end{aligned} \right.$$

gdzie:

- $(\text{Div } T)^1$ i $(\text{Div } T)^2$ określone z wyrażenia /25/,
- a^1 i a^2 określone z wyrażenia /26-1/ lub /26-2/,
- F^1 i F^2 wyrażone wzorami /27-1/ lub /27-2/ ,
- $\text{div } \vec{v}$ wyrażone wzorami /28-1/ lub /28-2/ ,

warunek współosiowości dewiatorów $\overline{D} = \lambda \overline{T}$, wyrażony jednym równaniem skalarnym w postaci /29-1/ lub /29-2/.

4. Dalsza transformacja równań

Zauważyć należy, że przy naszych założeniach składowe fizyczne a^1 i a^2 wektora przyspieszenia \vec{a} dają się wyrazić przez pochodne współrzędnych wektora prędkości \vec{v} i nachyleń α i β linii współrzędnych ξ , η do osi x-ów,brane w jednym kierunku - w kierunku stycznym do odpowiadającej linii współrzędnej, a mianowicie:

a^1 przez pochodne w kierunku s_1 ,

a^2 przez pochodne w kierunku s_2 .

Jest to możliwe dla każdej siatki współrzędnych krzywoliniowych z wyjątkiem siatki trajektorii maksymalnych odkształceń postaciowych.

Jeśli

$$/31/ \quad \phi - \alpha \neq \frac{\pi}{4}, \quad \beta - \phi \neq \frac{\pi}{4},$$

to z warunku nieściśliwości /28-1/ lub /28-2/ oraz warunku współosiowości tensorów /29-1/ lub /29-2/ można wyrazić pochodne składowych prędkości $\partial v_k / \partial s_i$ lub $\partial v / \partial s_i$, $\partial \delta / \partial s_i$ oraz pochodne $\partial \alpha / \partial s_i$, $\partial \beta / \partial s_i$ /i,k=1,2/ odpowiednio przez pochodne w jednym kierunku. Po obliczeniach otrzymamy:

$$/32-1/ \quad \left\{ \begin{aligned} a^1 &= \left\{ v^4 + 2v^2 \left[\cos \omega + \sin \omega \operatorname{tg} 2(\phi - \alpha) \right] \right\} \frac{\partial v^4}{\partial s_1} + \\ &+ v^4 \left[\cos 2\omega + \sin 2\omega \operatorname{tg} 2(\phi - \alpha) \right] \frac{\partial v^2}{\partial s_1} - \frac{v^4}{\sin \omega} (v^4 \cos \omega + v^2) \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} + \\ &- \frac{v^2}{\sin \omega} \left\{ (v^4 + v^2 \cos \omega) + 2v^2 \sin^2 \omega \left[\cos \omega + \sin \omega \operatorname{tg} 2(\phi - \alpha) \right] \right\} \frac{\partial \beta}{\partial s_1}, \\ a^2 &= \left\{ v^2 + 2v^4 \left[\cos \omega - \sin \omega \operatorname{tg} 2(\phi - \beta) \right] \right\} \frac{\partial v^2}{\partial s_2} + \\ &+ v^4 \left[\cos 2\omega - \sin 2\omega \operatorname{tg} 2(\phi - \beta) \right] \frac{\partial v^4}{\partial s_2} + \frac{v^2}{\sin \omega} (v^2 \cos \omega + v^4) \frac{\partial \beta}{\partial s_2} + \\ &+ \frac{v^4}{\sin \omega} \left\{ (v^2 + v^4 \cos \omega) + 2v^4 \sin^2 \omega \left[\cos \omega - \sin \omega \operatorname{tg} 2(\phi - \beta) \right] \right\} \frac{\partial \alpha}{\partial s_2} \end{aligned} \right.$$

lub

$$/32-2/ \left\{ \begin{array}{l} \alpha^4 = v \left[\left[\cos 2(\delta - \alpha) + \sin 2(\delta - \alpha) \operatorname{tg} 2(\phi - \alpha) \right] \frac{\partial v}{\partial s_1} + \right. \\ \left. - \frac{v}{\sin \omega} \left(\cos \omega + \sin \omega \left\{ \sin 2(\delta - \alpha) + [1 - \cos 2(\delta - \alpha)] \operatorname{tg} 2(\phi - \alpha) \right\} \right) \frac{\partial \delta}{\partial s_1} \right], \\ \alpha^2 = v \left[\left[\cos 2(\beta - \delta) - \sin 2(\beta - \delta) \operatorname{tg} 2(\phi - \beta) \right] \frac{\partial v}{\partial s_2} + \right. \\ \left. + \frac{v}{\sin \omega} \left(\cos \omega + \sin \omega \left\{ \sin 2(\beta - \delta) - [1 - \cos 2(\beta - \delta)] \operatorname{tg} 2(\phi - \beta) \right\} \right) \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right]. \end{array} \right.$$

W każdej siatce współrzędnych z wyjątkiem siatki trajektorii maksymalnych odkształceń postaciowych, dla której nie są spełnione warunki /31/, równania problemu można zapisać w postaci /30/ z tym, że składowe przyspieszenia α^4 i α^2 należy zastąpić w tych równaniach wyrażeniami /32-1/ i /32-2/ zamiast wyrażen /26-1/ lub /26-2/. Równania problemu odniesione do siatki trajektorii maksymalnych odkształceń postaciowych, tj. gdy zachodzą warunki:

$$\phi - \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \beta - \phi = \frac{\pi}{4},$$

rozpatrzymy w dalszej części pracy.

5. Charakterystyki równań różniczkowych problemu

W tej części pracy rozpatrzmy zagadnienie istnienia charakterystyk układu /30/ równań różniczkowych problemu. Linia charakterystyczną problemu, zgodnie z definicją stosowaną w pracy R.Couranta i D.Hilberta /1/, będzie taka linia /rodzina linii/ w płaszczyźnie ruchu, wzdłuż której istnieje związek różniczkowy, będący kombinacją liniową równań problemu i zawierający pochodne funkcji niewiadomych tylko w kierunku tej linii. Z metody poszukiwania charakterystyk i odpowiednich związków różniczkowych wynika, że jedną parą związków różniczkowych będą równania ruchu zapisane w siatce linii poślizgu /linii spełniających warunek Coulomba/ tworzą-

cych jedną parę charakterystyk; drugą parę stanowić będą odpowiednie kombinacje warunków nieściśliwości i współsio-
 wości dewiatorów zapisane w siatce maksymalnych odkształceń
 postaciowych. W związku z tym zastanowimy się obecnie, przy
 jakiej siatce współrzędnych każde z równań ruchu zawierać
 będzie pochodne funkcji niewiadomych $\xi(\lambda_1, \lambda_2)$, $\phi(\lambda_1, \lambda_2)$
 tylko w jednym kierunku odpowiadającej linii współrzędnych.
 Potrzeba na to, aby składowe wektora $\text{Div } T$ wzdłuż linii
 współrzędnych zawierały pochodne tylko w jednym kierunku,
 a mianowicie $(\text{Div } T)^1$ - pochodne w kierunku λ_1 i
 $(\text{Div } T)^2$ - pochodne w kierunku λ_2 , bowiem przyspieszenia
 na ogół dają się tak wyrazić przez pochodne w kierunku odpo-
 wiednich linii współrzędnych. Z równania /25/ mamy:

$$\left. \begin{aligned}
 (\text{Div } T)^1 &= \frac{1}{\sin^2 \omega} \left[\sin \omega \left(-[1 + \sin \varphi \cos 2(\beta - \phi)] \frac{\partial \xi}{\partial \lambda_1} + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \left\{ \cos \omega + \sin \varphi \cos [2(\phi - \alpha) - \omega] \right\} \frac{\partial \xi}{\partial \lambda_2} \right) + \right. \\
 &+ (1 - \cos \omega) \left(\left\{ \xi \sin \varphi \cos 2(\phi - \beta) + (\xi - H) \right\} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda_1} + \right. \\
 &- \left. \left\{ \xi \sin \varphi \cos [2(\phi - \alpha) - \omega] + (\xi - H) \cos \omega \right\} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda_2} \right) + \\
 &\left. - 2\xi \sin \omega \sin \varphi \left\{ \sin 2(\beta - \phi) \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_1} + \sin [2(\phi - \alpha) - \omega] \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_2} \right\} \right], \\
 (\text{Div } T)^2 &= \frac{1}{\sin^2 \omega} \left[\sin \omega \left(\left\{ \cos \omega + \sin \varphi \cos [2(\beta - \phi) - \omega] \right\} \frac{\partial \xi}{\partial \lambda_1} + \right. \right. \\
 &- \left. \left. [1 + \sin \varphi \cos 2(\phi - \alpha)] \frac{\partial \xi}{\partial \lambda_2} \right) + \right. \\
 &+ (1 - \cos \omega) \left(-\left\{ \xi \sin \varphi \cos [2(\beta - \phi) - \omega] + (\xi - H) \cos \omega \right\} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda_1} + \right. \\
 &+ \left. \left\{ \xi \sin \varphi \cos 2(\phi - \alpha) + (\xi - H) \right\} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda_2} \right) + \\
 &\left. + 2\xi \sin \omega \sin \varphi \left\{ \sin [2(\beta - \phi) - \omega] \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_1} + \sin 2(\phi - \alpha) \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_2} \right\} \right].
 \end{aligned}
 \right\} /33/$$

Warunkami $(\text{Div } T)^1$ zawierała pochodne w kierunku λ_1
 zaś aby $(\text{Div } T)^2$ - pochodne w kierunku λ_2 , są:

$$/34-1/ \quad \begin{cases} \cos \omega + \sin \varphi \cos [2(\phi - \alpha) - \omega] = 0, \\ \left\{ \sigma \sin \varphi \cos [2(\phi - \alpha) - \omega] + (\sigma - H) \cos \omega \right\} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda_2} = 0, \\ \sin [2(\phi - \alpha) - \omega] = 0, \end{cases}$$

oraz

$$/34-2/ \quad \begin{cases} \cos \omega + \sin \varphi \cos [2(\beta - \phi) - \omega] = 0, \\ \left\{ \sigma \sin \varphi \cos [2(\beta - \phi) - \omega] + (\sigma - H) \cos \omega \right\} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda_1} = 0, \\ \sin [2(\beta - \phi) - \omega] = 0, \end{cases}$$

skąd otrzymamy:

$$/35/ \quad \omega = 2\mu, \quad \phi - \alpha = \mu, \quad \beta - \phi = \mu,$$

gdzie $2\mu = \varphi + \frac{\pi}{2}$. Stwierdzamy, że

$$\phi - \alpha = \mu \neq \frac{\pi}{4}, \quad \beta - \phi = \mu \neq \frac{\pi}{4},$$

czyli spełniony jest warunek /31/. Widzimy więc, że siatka współrzędnych pokrywa się z liniami poślizgu. Jako linie poślizgu definiujemy te linie, wzdłuż których spełniony jest warunek Coulomba [por. rys.2/]. Zgodnie z definicją charakterystyk siatka ta tworzy jedną z dwu par charakterystyk równań różniczkowych. Ponieważ mamy co najwyżej dwie pary różnych charakterystyk rzeczywistych, poszukamy drugiej pary. Zbadamy kiedy dwa ostatnie z równań /30/ dadzą się przekształcić do postaci dwu równań, z których każde zawiera tylko pochodne w jednym kierunku odpowiedniej linii współrzędnych. Znowu dobierzemy odpowiednią siatkę linii współrzędnych. Rozpatrzmy parę równań /28-1/ i /29-1/, które przepiszemy w innej postaci:

$$/36-1/ \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\partial v^4}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{\sin \omega} \left(v^4 \cos \omega \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_1} + v^2 \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_1} \right) \right] + \\ & + \left[\frac{\partial v^2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{\sin \omega} \left(v^2 \cos \omega \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_2} + v^4 \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_2} \right) \right] = 0, \\ & \left\{ \cos [2\phi - (\alpha + \beta)] \frac{\partial v^4}{\partial \alpha_1} + \cos 2(\phi - \beta) \frac{\partial v^2}{\partial \alpha_1} + \right. \\ & + v^4 \sin [2\phi - (\alpha + \beta)] \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_1} + v^2 \sin 2(\phi - \beta) \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_1} \left. \right\} + \\ & - \left\{ \cos [2\phi - (\alpha + \beta)] \frac{\partial v^2}{\partial \alpha_2} + \cos 2(\phi - \alpha) \frac{\partial v^4}{\partial \alpha_2} + \right. \\ & + v^2 \sin [2\phi - (\alpha + \beta)] \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_2} + v^4 \sin 2(\phi - \alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_2} \left. \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

Układ tych równań możemy zastąpić równoważnym układem:

$$/36-2/ \left\{ \begin{aligned} & 2 \cos [2\phi - (\alpha + \beta)] \frac{\partial v^4}{\partial \alpha_1} + \cos 2(\beta - \phi) \frac{\partial v^2}{\partial \alpha_1} + \\ & - \frac{1}{\sin \omega} \left\{ v^4 \cos 2(\phi - \alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_1} + v^2 \left[\cos \omega \cos 2(\beta - \phi) + 2 \sin \omega \sin 2(\beta - \phi) \right] \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_1} \right\} + \\ & - \cos 2(\phi - \alpha) \frac{\partial v^4}{\partial \alpha_2} + \frac{\cos 2(\phi - \alpha)}{\sin \omega} \left(v^4 \cos \omega \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_2} + v^2 \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_2} \right) = 0, \\ & 2 \cos [2\phi - (\alpha + \beta)] \frac{\partial v^2}{\partial \alpha_2} + \cos 2(\phi - \alpha) \frac{\partial v^4}{\partial \alpha_2} + \\ & + \frac{1}{\sin \omega} \left\{ v^2 \cos 2(\beta - \phi) \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_2} + v^4 \left[\cos \omega \cos 2(\phi - \alpha) + 2 \sin \omega \sin 2(\phi - \alpha) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_2} \right\} + \\ & - \cos 2(\beta - \phi) \frac{\partial v^2}{\partial \alpha_2} - \frac{\cos 2(\beta - \phi)}{\sin \omega} \left(v^2 \cos \omega \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_2} + v^4 \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_2} \right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Aby układ równań /36-2/ zawierał pochodne funkcji niewiadomych, każde tylko w kierunku jednej odpowiedniej współrzędnej, potrzeba spełnienia warunków:

$$/37/ \quad \cos 2(\phi - \alpha) = 0, \quad \cos 2(\beta - \phi) = 0,$$

skąd wynikają zależności

$$/38/ \quad \phi - \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \beta - \phi = \frac{\pi}{4}, \quad \omega = \frac{\pi}{2}$$

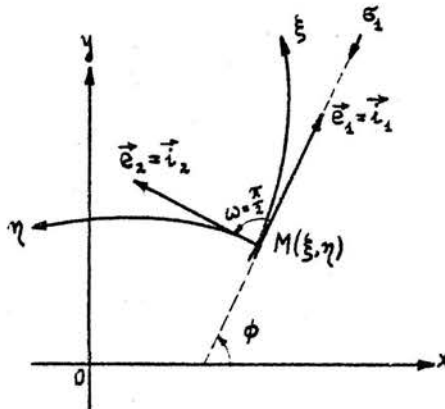
Zatem w tym przypadku otrzymujemy, że siatka linii współrzędnych ξ, η pokrywa się z siatką trajektorii maksymalnych odkształceń postaciowych /por.rys.9//siatką maksymalnych naprężeń stycznych/. Zgodnie z definicją charakterystyk siatka ta tworzy drugą z par charakterystyk równań różniczkowych problemu.

Rozpatrując parę równań /28-2/ i /29-2/ przy reprezentacji wektora \vec{v} przez jego moduł v i nachylenie δ , otrzymujemy ten sam wynik /38/. W przypadku przejścia od ośrodka Coulomba do ośrodka Treski / $\varphi = 0$, $\mu = \frac{\pi}{4}$ / układ analogicznych równań problemu wykazuje osobliwości, które wymagają odrębnej analizy. W tej pracy zajmować się tym nie będziemy.

5. Równania problemu zapisane w szczególnych wyróżnionych układach współrzędnych

Obecnie podamy zapis skalarny równań problemu w szczególnych układach linii współrzędnych.

1/Siatka trajektorii naprężeń głównych /siatka izostat/



Rys.7

W równaniach /30/ należy przyjąć /rys.7/:

$$/39/ \quad \alpha = \phi, \quad \beta = \phi + \frac{\pi}{2}, \quad \omega = \beta - \alpha = \frac{\pi}{2},$$

a ponadto wprowadzimy oznaczenia: $\vec{e}_1 \equiv \vec{t}_1$, $\vec{e}_2 \equiv \vec{t}_2$

- dla wektorów stycznych do tych trajektorii.

Podstawiając wartości /39/ do wyrażeń /25/ lub /33/ na $\text{Div } T$, do wzorów /32-1/ lub /32-2/ na składowe fizyczne przyspieszenia \vec{a} , do wzorów /28-1/ lub /28-2/ na $\text{div } \vec{v}$, do warunku współosiowości dewiatorów /29-1/ lub /29-2/ i do wyrażeń /27-1/ lub /27-2/ na siłę masową \vec{F} , sprowadzamy układ równań problemu /30/ do postaci:

$$/40-1/ \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_1} (1 - \sin \varphi) - 2\sigma \sin \varphi \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_2} + \rho \left[(v^1 \frac{\partial v^1}{\partial \lambda_1} - v^2 \frac{\partial v^2}{\partial \lambda_1}) - 2v^1 v^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} \right] = \\ & \quad = \rho (\cos \phi F_x + \sin \phi F_y), \\ & \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_2} (1 + \sin \varphi) - 2\sigma \sin \varphi \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_1} + \rho \left[(v^2 \frac{\partial v^2}{\partial \lambda_2} - v^1 \frac{\partial v^1}{\partial \lambda_2}) + 2v^1 v^2 \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_2} \right] = \\ & \quad = \rho (-\sin \phi F_x + \sin \phi F_y), \\ & \frac{\partial v^1}{\partial \lambda_1} - v^2 \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial v^2}{\partial \lambda_2} + v^1 \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_2} = 0, \\ & \frac{\partial v^2}{\partial \lambda_1} + v^1 \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial v^1}{\partial \lambda_2} - v^2 \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_2} = 0, \end{aligned} \right.$$

lub przy reprezentacji wektora \vec{v} przez parę $/v, \delta /$ - do postaci:

$$/40-2/ \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_1} (1 - \sin \varphi) - 2\sigma \sin \varphi \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_2} + \rho v \left[\cos 2(\delta - \phi) \frac{\partial v}{\partial \lambda_1} - v \sin 2(\delta - \phi) \frac{\partial \delta}{\partial \lambda_1} \right] = \rho F \cos(\lambda - \phi), \\ & \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_2} (1 + \sin \varphi) - 2\sigma \sin \varphi \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_1} - \rho v \left[\cos 2(\delta - \phi) \frac{\partial v}{\partial \lambda_2} - v \sin 2(\delta - \phi) \frac{\partial \delta}{\partial \lambda_2} \right] = \rho F \sin(\lambda - \phi), \\ & \cos(\delta - \phi) \frac{\partial v}{\partial \lambda_1} - v \sin(\delta - \phi) \frac{\partial \delta}{\partial \lambda_1} + \sin(\delta - \phi) \frac{\partial v}{\partial \lambda_2} + v \cos(\delta - \phi) \frac{\partial \delta}{\partial \lambda_2} = 0, \\ & \sin(\delta - \phi) \frac{\partial v}{\partial \lambda_1} + v \cos(\delta - \phi) \frac{\partial \delta}{\partial \lambda_1} + \cos(\delta - \phi) \frac{\partial v}{\partial \lambda_2} - v \sin(\delta - \phi) \frac{\partial \delta}{\partial \lambda_2} = 0. \end{aligned} \right.$$

$$/41/ \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \phi - \mu, \quad \beta = \phi + \mu, \quad \omega = \beta - \alpha = 2\mu, \\ \text{gdzie } \mu = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial s_k} \equiv 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial s_k} = \frac{\partial \beta}{\partial s_k} = \frac{\partial \phi}{\partial s_k}, \quad (k=1,2) \end{array} \right.$$

Podstawiając wartości /41/ do wyrażenia /33/ na $\text{Div } T$, do wzorów /32-1/ lub /32-2/ na składowe przyspieszenia \vec{a} oraz do wzorów /27-1/ lub /27-2/ na składowe siły masowej \vec{F} , wreszcie do wyrażań /28-1/ lub /28-2/ na $\text{div } \vec{v}$ i do warunków współosiowości dewiatów /29-1/ lub /29-2/ i zestawiając na tej podstawie równania problemu /30/, otrzymamy układ czterech równań skalarnych w postaci:

$$/42-1/ \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s_1} - 2\sigma \text{ctg } 2\mu \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \right) + \rho \left\{ \left(v^4 + \frac{2v^2}{\cos 2\mu} \right) \left(\frac{\partial v^4}{\partial s_1} - v^4 \text{ctg } 2\mu \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \right) + \right. \\ \left. + v^2 \left[\frac{\partial v^2}{\partial s_1} - \frac{v^2(1+\sin^2 2\mu)}{\sin 2\mu \cos 2\mu} \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \right] \right\} = \frac{\rho}{\sin 2\mu} \left[\sin(\phi + \mu) F_x - \cos(\phi + \mu) F_y \right], \\ \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s_2} + 2\sigma \text{ctg } 2\mu \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \right) + \rho \left\{ \left(v^2 + \frac{2v^4}{\cos 2\mu} \right) \left(\frac{\partial v^2}{\partial s_2} + v^2 \text{ctg } 2\mu \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \right) + \right. \\ \left. + v^4 \left[\frac{\partial v^4}{\partial s_2} + \frac{v^4(1+\sin^2 2\mu)}{\sin 2\mu \cos 2\mu} \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \right] \right\} = \frac{\rho}{\sin 2\mu} \left[-\sin(\phi - \mu) F_x + \cos(\phi - \mu) F_y \right], \\ \left[\frac{\partial v^4}{\partial s_1} - \frac{1}{\sin 2\mu} \left(v^4 \cos 2\mu + v^2 \right) \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \right] + \left[\frac{\partial v^2}{\partial s_2} + \frac{1}{\sin 2\mu} \left(v^2 \cos 2\mu + v^4 \right) \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \right] = 0, \\ \left[\frac{\partial v^4}{\partial s_1} + \cos 2\mu \frac{\partial v^4}{\partial s_1} - v^2 \sin 2\mu \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \right] - \left[\frac{\partial v^2}{\partial s_2} + \cos 2\mu \frac{\partial v^2}{\partial s_2} + v^4 \sin 2\mu \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \right] = 0 \end{array} \right.$$

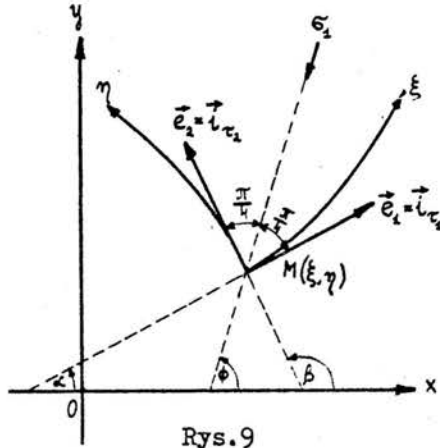
lub przy reprezentacji wektora \vec{v} przez parę $/v, \delta/$:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial \delta}{\partial s_1} - 2\delta \operatorname{ctg} 2\mu \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \right) + \varrho \frac{v}{\cos 2\mu} \left\{ \cos 2(\delta - \phi) \frac{\partial v}{\partial s_1} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{v}{\sin 2\mu} \left[1 + \sin 2\mu \sin 2(\delta - \phi) \right] \frac{\partial \delta}{\partial s_1} \right\} = \varrho \frac{F}{\sin 2\mu} \sin [(\phi - \mu) - \chi], \\
 & \left(\frac{\partial \delta}{\partial s_2} + 2\delta \operatorname{ctg} 2\mu \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \right) + \varrho \frac{v}{\cos 2\mu} \left\{ \cos 2(\delta - \phi) \frac{\partial v}{\partial s_2} + \right. \\
 /42-2/ & \quad \left. + \frac{v}{\sin 2\mu} \left[1 - \sin 2\mu \sin 2(\delta - \phi) \right] \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right\} = \varrho \frac{F}{\sin 2\mu} \sin [\chi - (\phi - \mu)], \\
 & \left\{ \sin [(\delta - \phi) - \mu] \frac{\partial v}{\partial s_1} + v \cos [(\delta - \phi) - \mu] \frac{\partial \delta}{\partial s_1} \right\} - \left\{ \sin [(\delta - \phi) + \mu] \frac{\partial v}{\partial s_2} + \right. \\
 & \quad \left. + v \cos [(\delta - \phi) + \mu] \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right\} = 0, \\
 & \left\{ \cos [(\delta - \phi) + \mu] \frac{\partial v}{\partial s_1} - v \sin [(\delta - \phi) + \mu] \frac{\partial \delta}{\partial s_1} \right\} - \left\{ \cos [(\delta - \phi) - \mu] \frac{\partial v}{\partial s_2} + \right. \\
 & \quad \left. - v \sin [(\delta - \phi) - \mu] \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Dwa pierwsze z równań /42-1/ lub /42-2/ zawierają pochodne funkcji niewiadomych, każde tylko w jednym kierunku odpowiadającej linii poślizgu. Dwa pozostałe z tych równań zawierają pochodne wielkości określających wektor prędkości, każde w obu kierunkach. Oznacza to, że linie poślizgu stanowią jedną z par charakterystyk spośród czterech linii charakterystycznych równań problemu. Oczywiście spełnione są tu warunki /31/, które uzasadniały przyjęcie do obliczeń składowych przyspieszenia wzorów /32-1/ lub /32-2/. Mamy bowiem:

$$/43/ \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha - \mu = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \neq \frac{\pi}{4}, \\ \beta - \phi = \mu = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \neq \frac{\pi}{4} \end{array} \right. \quad \text{dla } \varphi \neq 0.$$

3/ Siatka trajektorii maksymalnych odkształceń postaciowych / a jednocześnie maksymalnych naprężeń stycznych/



Rys.9

Dla tej siatki współrzędnych mamy /rys.9/:

$$/44/ \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \phi - \frac{\pi}{4}, \quad \beta = \phi + \frac{\pi}{4}, \quad \omega = \beta - \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial s_k} = \frac{\partial \beta}{\partial s_k} = \frac{\partial \phi}{\partial s_k}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial s_k} \equiv 0 \quad (k=1,2) \\ \vec{e}_1 \equiv \vec{i}\tau_1, \quad \vec{e}_2 \equiv \vec{i}\tau_2 \end{array} \right.$$

W tym przypadku nie jest spełniony warunek /31/ gdyż

$$/45/ \quad \phi - \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \beta - \phi = \frac{\pi}{4}$$

i nie możemy tutaj stosować wzorów /32-1/ i /32-2/, pozwalających wyrazić przyspieszenia przez pochodne w kierunku odpowiadającej trajektorii. W tym przypadku na podstawie warunku nieściśliwości składowe wektora przyspieszenia Q_1 i Q_2 dają się wyrazić przez pochodne składowych v^1 i v^2 wektora prędkości/lub modułu v i nachylenia δ / w kierunku stowarzyszonej trajektorii z daną, tj.

α^1 przez pochodne w kierunku s_2 ,

α^2 przez pochodne w kierunku s_1 .

Wobec tego w obliczaniu wyrażenia na składowe α^1 , α^2 wektora przyspieszenia korzystamy ze wzorów /26-1/ lub /26-2/ otrzymując:

$$/46-1/ \quad \begin{cases} \alpha^1 = \left[v^1 \left(\frac{\partial v^1}{\partial s_2} - v^2 \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \right) + v^2 \left(\frac{\partial v^1}{\partial s_2} - v^2 \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \right) \right] , \\ \alpha^2 = \left[v^2 \left(\frac{\partial v^2}{\partial s_2} + v^1 \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \right) + v^1 \left(\frac{\partial v^2}{\partial s_1} + v^1 \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \right) \right] , \end{cases}$$

lub

$$/46-2/ \quad \begin{cases} \alpha^1 = v \sin \left[(\delta - \phi) - \frac{\pi}{4} \right] \left\{ \sin \left[(\delta - \phi) - \frac{\pi}{4} \right] \frac{\partial v}{\partial s_1} + v \cos \left[(\delta - \phi) - \frac{\pi}{4} \right] \frac{\partial \delta}{\partial s_1} \right\} + \\ + v \sin \left[(\delta - \phi) + \frac{\pi}{4} \right] \left\{ \cos \left[(\delta - \phi) + \frac{\pi}{4} \right] \frac{\partial v}{\partial s_2} - v \sin \left[(\delta - \phi) + \frac{\pi}{4} \right] \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right\} , \\ \alpha^2 = -v \sin \left[(\delta - \phi) - \frac{\pi}{4} \right] \left\{ \cos \left[(\delta - \phi) - \frac{\pi}{4} \right] \frac{\partial v}{\partial s_1} - v \sin \left[(\delta - \phi) - \frac{\pi}{4} \right] \frac{\partial \delta}{\partial s_1} \right\} + \\ + v \sin \left[(\delta - \phi) + \frac{\pi}{4} \right] \left\{ \sin \left[(\delta - \phi) + \frac{\pi}{4} \right] \frac{\partial v}{\partial s_2} + v \cos \left[(\delta - \phi) + \frac{\pi}{4} \right] \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right\} , \end{cases}$$

Podstawiając wartości /44/ do wyrażenia /33/ na $\text{Div } \bar{T}$, przyjmując wyrażenia /46-1/ lub /46-2/ na składowe przyspieszenia $\bar{\alpha}$, dalej obliczając na podstawie /44/: wyrażenia /27-1/ lub /27-2/ na składowe siły \bar{F} , wyrażenia /28-1/ lub /28-2/ na $\text{div } \bar{v}$ i wreszcie wprowadzając wartości /44/ do warunku współosiowości tensorów \bar{D} i \bar{T} danego równaniem /29-1/ lub /29-2/, możemy równania różniczkowe problemu zapisać w postaci /po pewnych przekształceniach dwu ostatnich równań /30/ / :

$$\left. \begin{aligned}
 & \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial s_1} + 2\sigma \sin \varphi \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \right) - \sin \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial s_2} \right] + \varrho v^2 \left(\frac{\partial v^1}{\partial s_2} - v^2 \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \right) = \\
 & \quad = \varrho \left[\cos \left(\phi - \frac{\pi}{4} \right) F_x + \sin \left(\phi - \frac{\pi}{4} \right) F_y \right], \\
 & \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial s_2} - 2\sigma \sin \varphi \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \right) - \sin \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial s_1} \right] + \varrho v^1 \left(\frac{\partial v^2}{\partial s_1} + v^1 \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \right) = \\
 & \quad = \varrho \left[\cos \left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) F_x + \sin \left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) F_y \right], \\
 & \frac{\partial v^1}{\partial s_1} - v^2 \frac{\partial \phi}{\partial s_1} = 0, \\
 & \frac{\partial v^2}{\partial s_2} + v^1 \frac{\partial \phi}{\partial s_2} = 0
 \end{aligned} \right\} /47-1/$$

lub przy reprezentacji wektora \vec{v} przez parę $/v, \delta/$ w postaci:

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial s_1} + 2\sigma \sin \varphi \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \right) - \sin \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial s_2} \right] + \varrho v \sin \left[\delta - \left(\phi - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left\{ \cos \left[\delta - \left(\phi - \frac{\pi}{4} \right) \right] \frac{\partial v}{\partial s_1} + \right. \\
 & \quad \left. - v \sin \left[\delta - \left(\phi - \frac{\pi}{4} \right) \right] \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right\} = \varrho F \cos \left[\chi - \left(\phi - \frac{\pi}{4} \right) \right], \\
 & \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial s_2} - 2\sigma \sin \varphi \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \right) - \sin \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial s_1} \right] + \varrho v \sin \left[\left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) - \delta \right] \left\{ \cos \left[\left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) - \delta \right] \frac{\partial v}{\partial s_2} + \right. \\
 & \quad \left. + v \sin \left[\left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) - \delta \right] \frac{\partial \delta}{\partial s_1} \right\} = \varrho F \cos \left[\left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) - \chi \right], \\
 & \cos \left[\delta - \left(\phi - \frac{\pi}{4} \right) \right] \frac{\partial v}{\partial s_1} - v \sin \left[\delta - \left(\phi - \frac{\pi}{4} \right) \right] \frac{\partial \delta}{\partial s_2} = 0, \\
 & \cos \left[\left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) - \delta \right] \frac{\partial v}{\partial s_2} + v \sin \left[\left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) - \delta \right] \frac{\partial \delta}{\partial s_1} = 0
 \end{aligned}$$

/47-2/

Dwa ostatnie z równań /47-1/ względnie /47-2/ stanowią kombinacje liniowe warunku nieściśliwości /28-1/ lub /28-2/ i warunku współosiowości dewiatorów D i T /29-1/ lub

/29-2/ odpowiadające układowi równań /36-2/, podanemu w § 5. Zauważmy że w trzecim i czwartym z równań /47-1/ lub /47-2/ występują tylko pochodne w jednym kierunku odpowiadającej trajektorii, zaś dwa pierwsze z tych równań zawierają pochodne funkcji niewiadomych w obu kierunkach. Wynika stąd, że trajektorie maksymalnych naprężeń stycznych tworzą jedną z par charakterystyk układu równań różniczkowych problemu tzw. "kinematyczne charakterystyki" równań.

Poprzednio stwierdziliśmy, że drugą z par spośród czterech linii charakterystycznych tworzą linie poślizgu. A zatem układ równań różniczkowych /30/ posiada dwie pary różnych charakterystyk, którymi są linie poślizgu Coulomba i trajektorie maksymalnych odkształceń postaciowych. Ponieważ mamy układ czterech równań różniczkowych problemu, odpowiednia forma charakterystyczna jest formą czwartego stopnia, przeto układ posiada co najwyżej cztery rodziny różnych linii charakterystycznych. Stwierdziliśmy, że jedną parę tworzą linie poślizgu, zaś drugą parę trajektorie maksymalnych odkształceń postaciowych. Są to więc jedyne możliwe cztery rodziny linii charakterystycznych, na ogół różnych, z wyjątkiem pewnych szczególnych przypadków gdy na funkcje niewiadome narzucone są pewne specjalne postaci zależności funkcyjnych od zmiennych niezależnych.

Stwierdzamy, że dwa ostatnie z równań /47-1/ mają postać identyczną ze związkami Geiringer dla kinematycznych charakterystyk w zagadnieniu statycznym /t.j.przy pominięciu przyspieszeń/.

4/ Siatka współrzędnych biegunowych $/r, \theta/$

W tym układzie współrzędnych mamy /por.rys.10/:

$$/48/ \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \theta, \quad \beta = \theta + \frac{\pi}{2}, \quad \omega = \frac{\pi}{2}, \\ \phi = \theta + \psi, \quad \vec{e}_1 \equiv \vec{t}_r, \quad \vec{e}_2 \equiv \vec{t}_\theta, \end{array} \right.$$

/48/

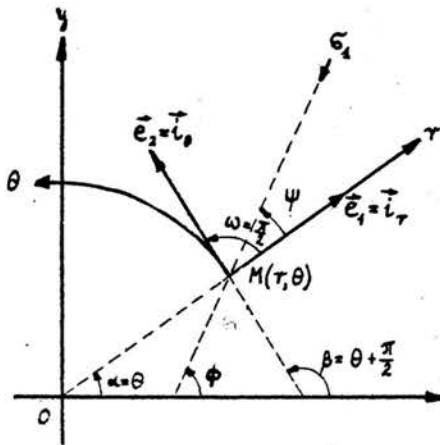
$$v^1 = v_r = v \cos(\delta - \theta), \quad v^2 = v_\theta = v \sin(\delta - \theta),$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_2} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{r},$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial(\theta + \frac{\pi}{2})}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \lambda_2} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\theta + \frac{\pi}{2})}{\partial \theta} = \frac{1}{r},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial(\theta + \psi)}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_2} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + 1 \right).$$



Rys.10

Zauważmy, że tutaj, w odróżnieniu od siatek linii współrzędnych rozpatrywanych poprzednio, mamy z góry określoną geometrię linii współrzędnych, niezależnie od warunków brzegowych zagadnienia, a ponadto ustalone położenie i orientację siatki względem układu x, y /t.zw. "praukładu" w rozpatrywanym problemie/.

Podstawiając /48/ do wyrażenia /25/ lub /33/ na składowe Div T, do wzorów /26-1/ lub /26-2/ na przyspieszenie \vec{a} do wzorów /27-1/ lub /27-2/ na siłę masową \vec{F} , dalej do wyrażzeń /28-1/ lub /28-2/ na $\text{div } \vec{v}$ oraz do warunkówspółosiowości dewiatorów /29-1/ lub /29-2/, możemy układ /30/ równań problemu zapisać w postaci czterech równań skalarnych, znanych w literaturze przy posługiwaniu się współrzędnymi biegunowymi:

$$\begin{aligned}
 & (1 - \sin \varphi \cos 2\psi) \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \sin 2\psi \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \\
 & + 2\sigma \sin \varphi \left[\sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cos 2\psi \left(\frac{d\psi}{d\theta} + 1 \right) \right] + \\
 & + \rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) = \rho \left[(\cos \theta F_x + \sin \theta F_y) + \frac{v_\theta^2}{r} \right], \\
 /49-1/ \quad & \sin \varphi \sin 2\psi \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{1}{r} (1 + \sin \varphi \cos 2\psi) \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \\
 & + 2\sigma \sin \varphi \left[\cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \sin 2\psi \left(\frac{d\psi}{d\theta} + 1 \right) \right] + \\
 & - \rho \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) = \rho \left[(\sin \theta F_x - \cos \theta F_y) + \frac{v_\theta v_r}{r} \right], \\
 & \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0, \\
 & \sin 2\psi \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) - \cos 2\psi \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) = \sin 2\psi \frac{v_r}{r} - \cos 2\psi \frac{v_\theta}{r}
 \end{aligned}$$

lub przy reprezentacji wektora prędkości \vec{v} przez jego moduł v i nachyleniu δ do osi x -ów:

$$\begin{aligned}
 & (1 - \sin \varphi \cos 2\psi) \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \sin 2\psi \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \\
 & + 2\sigma \sin \varphi \left[\sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cos 2\psi \left(\frac{d\psi}{d\theta} + 1 \right) \right] + \\
 & + \frac{\rho v}{2} \left\{ \left[1 + \cos 2(\delta - \theta) \right] \frac{\partial v}{\partial r} - v \sin 2(\delta - \theta) \frac{\partial \delta}{\partial r} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{r} \sin 2(\delta - \theta) \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \left[1 - \cos 2(\delta - \theta) \right] \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \right\} = \rho F \cos(\chi - \theta) \\
 /49-2/ \quad & \sin \varphi \sin 2\psi \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{1}{r} (1 + \sin \varphi \cos 2\psi) \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \\
 & + 2\sigma \sin \varphi \left[\cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \sin 2\psi \left(\frac{d\psi}{d\theta} + 1 \right) \right] +
 \end{aligned}$$

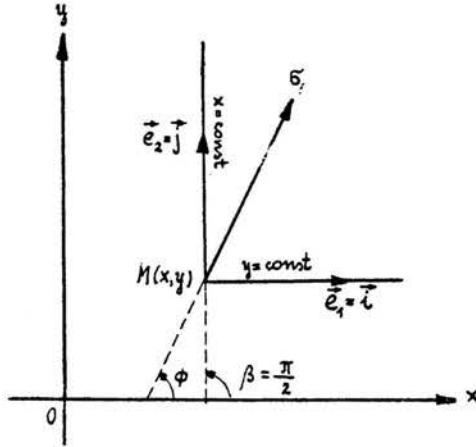
$$\left. \begin{aligned}
 /49-2/ \quad & -\frac{\rho v}{2} \left\{ \sin 2(\delta-\theta) \frac{\partial v}{\partial r} + v [1 + \cos 2(\delta-\theta)] \frac{\partial \delta}{\partial r} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{r} [1 - \cos 2(\delta-\theta)] \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \sin 2(\delta-\theta) \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \right\} = -g F \sin(\chi-\theta), \\
 & \left[\cos(\delta-\theta) \frac{\partial v}{\partial r} - v \sin(\delta-\theta) \frac{\partial \delta}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \left[\sin(\delta-\theta) \frac{\partial v}{\partial \theta} + v \cos(\delta-\theta) \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \right] = 0, \\
 & \sin[2\psi - (\delta-\theta)] \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \right) - \cos[2\psi - (\delta-\theta)] \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + v \frac{\partial \delta}{\partial r} \right) = 0.
 \end{aligned}
 \right\}$$

Przy wyprowadzaniu równań /49-1/ i /49-2/ posługiwaliśmy się wzorami /26-1/ lub /26-2/ dla składowych wektora przyspieszenia $\vec{\alpha}$, aczkolwiek mogliśmy korzystać ze wzorów transformacyjnych /32-1/ lub /32-2/ pozwalających wyrazić składowe α^1 i α^2 przez pochodne składowych wektora prędkości w jednym kierunku każda / α^1 przez pochodne w kierunku linii r , α^2 przez pochodne w kierunku linii θ /. Jest to możliwe, gdyż warunki /31/ są na ogół spełnione:

$$/50/ \quad \phi - \alpha = (\theta + \psi) - \theta = \psi \neq \frac{\pi}{4}, \quad \beta - \phi = (\theta + \frac{\pi}{2}) - (\theta + \psi) = \frac{\pi}{2} - \psi \neq \frac{\pi}{4}.$$

Nierówności we wzorach /50/ na ogół są spełnione, z wyjątkiem specjalnych rozwiązań na funkcje $\psi(r, \theta)$, a mianowicie gdy $\psi \equiv \frac{\pi}{4}$, kiedy to linie współrzędnych r, θ stają się trajektoriami maksymalnych odkształceń postaciowych. Każde z równań /50-1/ lub /50-2/ zawiera pochodne funkcji niewiadomych w obu kierunkach linii współrzędnych biegunowych. Oznacza to, że współrzędne te na ogół nie mogą służyć za siatkę linii charakterystycznych z wyjątkiem pewnych szczególnych przypadków. Tych szczególnych przypadków w pracy tej rozpatrywać nie będziemy.

5/ Siatka współrzędnych kartezjańskich /x,y/



Rys.11

Dla tej siatki należy przyjąć w równaniu /30/ /por.rys.11/:

$$/51/ \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \omega = \frac{\pi}{2}, \quad \vec{e}_1 = \vec{i}, \quad \vec{e}_2 = \vec{j} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad v^1 = v_x, \quad v^2 = v_y, \quad \bar{v}_x = v \cos \delta, \quad \bar{v}_y = v \sin \delta \end{array} \right.$$

Podstawiając te wyrażenia do równań problemu /30/ i wymienionych tam wzorów otrzymamy:

$$/52-1/ \left\{ \begin{array}{l} (1 - \sin \varphi \cos 2\varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \sin \varphi \sin 2\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \\ + 2\sigma \sin \varphi \left(\sin 2\varphi \frac{\partial \phi}{\partial x} - \cos 2\varphi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = \rho F_x, \\ \sin \varphi \sin 2\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial x} - (1 + \sin \varphi \cos 2\varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \\ + 2\sigma \sin \varphi \left(\cos 2\varphi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = -\rho F_y, \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ \sin 2\phi \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) - \cos 2\phi \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

lub przy reprezentacji wektora \vec{v} przez parę $v, \delta /$

$$\left. \begin{aligned} & \left[(1 - \sin \varphi \cos 2\phi) \frac{\partial \delta}{\partial x} - \sin \varphi \sin 2\phi \frac{\partial \delta}{\partial y} + 2\delta \sin \varphi \left(\sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} - \cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] + \\ & + \frac{\rho}{2} v \left[(1 + \cos 2\delta) \frac{\partial v}{\partial x} - v \sin 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial x} + \sin 2\delta \frac{\partial v}{\partial y} - v (1 - \cos 2\delta) \frac{\partial \delta}{\partial y} \right] = \rho F \cos \chi, \\ /52-2/ \quad & \left[\sin \varphi \sin 2\phi \frac{\partial \delta}{\partial x} - (1 + \sin \varphi \cos 2\phi) \frac{\partial \delta}{\partial y} + 2\delta \sin \varphi \left(\cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] + \\ & - \frac{\rho}{2} v \left[\sin 2\delta \frac{\partial v}{\partial x} + v (1 + \cos 2\delta) \frac{\partial \delta}{\partial x} + (1 - \cos 2\delta) \frac{\partial v}{\partial y} + v \sin 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial y} \right] = -\rho F \sin \chi, \\ & \left(\cos \delta \frac{\partial v}{\partial x} - v \sin \delta \frac{\partial \delta}{\partial x} \right) + \left(\sin \delta \frac{\partial v}{\partial y} + v \cos \delta \frac{\partial \delta}{\partial y} \right) = 0, \\ & \sin (2\phi - \delta) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial \delta}{\partial y} \right) - \cos (2\phi - \delta) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \delta}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \right\}$$

Równania /52-1/ mają postać znanych związków zapisanych w układzie kartezjańskim. Natomiast w reprezentacji /52-2/ są rzadziej spotykane. W literaturze równania te wyprowadza się na elementarnej drodze przez bezpośrednie podstawienie wyrażeń na składowe tensora naprężenia, określone przez dwie funkcje δ i ϕ [por. wzór /6/], i wyrażeń na przyspieszenie, wyrażone przez dwie składowe wektora prędkości v_x, v_y , do równań ruchu a następnie do warunku nieściśliwości i współosiowości dewiatorów naprężenia i prędkości odkształcenia. Otrzymuje się tę samą postać równań.

7. Zakończenie

Koncepcja wykonania pracy została zasugerowana przez Doc.Z.Mroza. Autor wyraża swoje podziękowanie Doc.Z.Mrozowi za rady i wskazówki udzielone przy opracowywaniu tematu pracy.

Literatura

1. R.Courant, D.Hilbert - "Partial Differential Equations", Vol.II, New York, London, 1962,
2. A.Drescher, K.Kwaszczyńska, Z.Mróz - "Statics and kinematics of the granular medium in the case of wedge indentation", Arch.Mech,Stos., 1, 19/1967/,
3. D.C.Drucker, W.Frager - "Soil mechanics and plastic analysis or limit design", Quart.Appl.Math., 10 /1952/, 157 - 165.
4. Г.А. Генев - "Вопросы динамики сплошной среды", Москва 1958.
5. С.С.Григорян - "Об основных представлениях динамики грунтов" - ПММ, 14 /1960/, в. 6.
6. С.С. Григорян - "О некоторых упрощениях в описании движения мягких грунтов", ПММ, 27 /1963/, в. 2.
7. А.Д.Ишминский - "О плоском движении песка", Укр. матем. з., 1954, т.6, № 4.
8. A.W.Jenike, R.T.Shield - "On the plastic flow of Coulomb solids beyond original failure", J.Appl.Mech., 27 /1959/, 599 - 602.

9. G.De Josselin De Jong - "Statics and Kinematics in the Faible Zone of a Granular Material", Waltman, Delft, 1959,
10. J.Mandel - "Sur les equations d'écoulement des sols ideaux en deformation plane et le concept du double glissement", J.Mech.Phys.Solids", 14 /1966/, 303 - 308,
11. J.Najar - "Inertia effects in the problem of compression of a perfectly plastic layer between two rigid plates", Arch.Mech.Stos. 1, 19 /1967/,
12. W.Olszak, P.Perzyna - "The constitutive equations for elastic/viscoplastic soils", IUTAM Conference in Grenoble, 1964,
13. A.J.M.Spencer - "The dynamic plane deformation of an ideal plastic-rigid solid", J.Mech.Phys.Solids 8 /1960/, 4, 262 - 279,
14. A.J.M.Spencer - "A theory of the kinematics of ideal soils under plane strain conditions", J.Mech.Phys.Solids, 12 /1964/, 5, 337 - 351,
15. W.Szczepiński - "Dynamic expansion of an rotating solid cylinder of mild steel", Arch.Mech.Stos. 1, 19 /1967/, 75 - 88,
16. P.P.Teodorescu - "Le problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnees curvilignes arbitraires", Bull.Acad.Polon.Sci., Sér. sci techn. 10, 7 /1962/, 269 /403/ - 299 /433/,
17. Л.С. Загайнов - "Об уравнениях плоского установившегося движения сыпучей среды", Инж. з. МТТ, 2 /1967/, 168 - 195.

18. J.Zawidzki - "Płaskie stany ośrodków plastycznych w nieortogonalnych układach współrzędnych krzywoliniowych, Rozpr.Inż., 15, 4, 1967 /w druku/.

Spis treści

1. Wstęp	str. 1
2. Sformułowanie równań	str. 4
3. Równania problemu w dowolnym układzie współrzędnych krzywoliniowych w płaszczyźnie ruchu.....	str. 8
4. Dalsza transformacja równań	str. 16
5. Charakterystyki równań różniczkowych problemu .	str. 17
6. Równania problemu zapisane w szczególnych wyróżnionych układach współrzędnych.....	str. 21
7. Zakończenie	str. 35
Literatura	str. 35