Dr. ST. SAKS

ZARYS TEORJI CAŁKI

1930

DR STANISŁAW SAKS
DOCENT UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO

ZARYS
TEORJI CAŁKI

WYDAWNICTWO KASY IM. MIANOWSKIEGO
INSTYTUTU POPIERANIA NAUKI
WARSZAWA — 1930 — PAŁAC STASZICA

ZARYS TEORJI CAŁKI.

D[R] STANISŁAW SAKS
DOCENT UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO

ZARYS
TEORJI CAŁKI

WYDAWNICTWO KASY IM. MIANOWSKIEGO
INSTYTUTU POPIERANIA NAUKI
WARSZAWA — 1930 — PAŁAC STASZICA

DRUK. M. GARASIŃSKI, WARSZAWA, BRACKA 20.

PRZEDMOWA.

Spółczesna teorja funkcji rzeczywistych wyłoniła się w drugiej połowie ub. stulecia z luźnych badań z dziedziny podstaw Analizy i z dorywczych konstrukcji tworów analitycznych o dziwacznych i nieoczekiwanych własnościach. Nieufność, z jaką spotkał się ten kierunek zainteresowań, najlepiej maluje pogląd Poincaré'go: „*Niegdyś, kiedy wynajdywano nową funkcję, robiono to ze względu na jakiś praktyczny cel; dziś wynajduje się je umyślnie po to, by wystawić na szwank rozumowania naszych ojców, i nie wydobędzie się z nich nigdy nic ponadto*".

Pogląd ten nie był odosobniony. Hermite wyrażał się bardziej jeszcze dosadnie. „*Odwracam się ze wstrętem* — pisał w liście do Stieltjesa — *od tego, pożałowania godnego, trzęsawiska funkcji bez pochodnych*". W badaniach, wprowadzających w zakres rozważań funkcje nie-analityczne, wyłamujące się krnąbrnie z praw, które uważać chciano za ogólne, widziało się nieledwie-że przekorne szerzenie nieporządku i anarchji tam, gdzie poprzednie pokolenia zabiegały o ład i harmonję. A nawet i pierwsze próby zbudowania teorji pozytywnej przyjęte były raczej sceptycznie: obawiano się, czy zbyt pedantyczna skrupulatność w formułowaniu założeń nie zniszczy elegancji klasycznych metod i czy rozważania poświęcone szczegółom nie przesłonią przewodnich idei Analizy. Prawda, że pierwsze te badania nie wykraczały istotnie poza tradycyjny aparat, który — ustalony od czasów Cauchy'ego i Riemanna — z trudem naginał się do nowych problematów. Ale bądź-co-bądź otworzyć już zdołały furtkę do Analizy metodom teorji mnogości, a wielki autorytet Kamilla Jordana „*dał* — według słów Lebesgue'a[1]) —

[1]) Z przemówienia inauguracyjnego w Collège de France (przekład polski S. Dicksteina w „*Wiadom. Matemat.*", (1922), t. 26).

nowej szkole cenną zachętę, która szczodrze wynagrodziła jej zarzuty, jakim podlegała".

Baire, Borel, Lebesgue — oto nazwiska, które reprezentują teorję funkcji rzeczywistych już nietylko jako temat badań, lecz również — i jako metodę. Nazwiska te wskazują zarazem różne kierunki teorji. Imiona Baire'a i Borela związane są nazawsze z metodą rozbudowy — w pozaskończoną herarchję — klasy funkcji lub zbiorów elementarnych, przez poddawanie ich pewnym ustalonym i prostym operacjom. Kierunek ten jest już doskonale reprezentowany i w naszej literaturze podręcznikowej: wystarczy wspomnieć tu tylko monografje Wacława Sierpińskiego: „*Funkcje przedstawialne analitycznie*" oraz „*Topologja Ogólna*" (*Zarys teorji mnogości*. T. II). W naszym wykładzie temat ten pozostawiamy na uboczu.

Kierunek drugi, wyłaniając się bezpośrednio z badań nad podstawami teorji całki, ściślej się może jeszcze zbiega z nurtem Analizy poprzedniego stulecia. Uogólnienia dawnego procesu Cauchy-Riemanna podejmowane były wielokrotnie, istotny jednak postęp zawdzięczamy dopiero Lebesgue'owi. Lecz zasługi Lebesgue'a nie należy tu upatrywać tylko w zbudowaniu nowej, ogólniejszej definicji całki, w ścisłem związaniu jej z teorją miary. O priorytet tego uogólnienia toczyła się zresztą, przed niespełna dziesięciu laty, drażliwa nader polemika z Borelem. O wartości dzieła Lebesgue'a zdecydowała w pierwszym rzędzie jego teorja różniczkowalności, zbudowana równolegle z teorją całki. Dzięki temu jedynie, odkrycie Lebesgue'a znalazło tyle zastosowań w najróżnorodniejszych działach Analizy, a z punktu widzenia metodologicznego umożliwiło zbliżenie obydwu podstawowych idei całki — całki oznaczonej i funkcji pierwotnej — rozdzielonych, zdawałoby się, definitywnie z chwilą wyjścia poza całkowanie funkcji ciągłych.

Teorja Lebesgue'a stanowi temat tego podręcznika. Wyodrębniając ją od kierunku baire'owskiego, nie chcemy wszakże wznosić sztucznych przegród między ideami, które, z natury rzeczy, muszą się nawzajem przenikać. Przeciwnie, w końcowych rozdziałach tych wykładów znajdziemy jeszcze sposobność, by podkreślić, jak w dalszych swych etapach kierunek lebesgue'owski nawiązuje nietylko do wyników, lecz i do metod teorji Baire'a. Czyż zresztą pomysł całki Denjoy nie jest w istocie rzeczy śmiałem zastosowaniem idei, którą odnajdujemy u Baire'a? Gdy Baire przez kolejne stosowanie przejścia do granicy ciągów — czy szeregów — funkcji rozszerza klasę funkcji ciągłych, Denjoy buduje analogiczną pozaskończoną herarchię algorytmów całkowych, i wychodząc z algorytmu Lebesgue'a, wiąże kolejne szczeble herarchji przez stosowanie dwu uogólniających operacji, z których jedna odpowiada dokładnie całce niewłaściwej Cauchy'ego, druga zaś — całce niewłaściwej Harnacka i Jordana.

Dzisiaj, gdy — tracąc, być może, „świeżość pierwszej młodości" — teorja funkcji rzeczywistych przestała już być nauką „nową", zbyteczne jest omawianie, raz jeszcze, jej znaczenia. Wiemy, że pozwoliła wykryć regularność (istnienie granicy, pochodnej, stycznej) tam często, gdzie dawne metody nie pozwalały niczego oczekiwać. Wystarczy tu wspomnieć tylko, dla przykładu, o pospolitych już dziś twierdzeniach, związanych z zachowaniem się funkcji holomorficznych na brzegu — lub przy zbliżaniu się do brzegu — koła zbieżności. A liczne gałęzie Analizy — że wymienimy choćby analizę harmoniczną, równania całkowe, operacje funkcjonalne — bynajmniej nie straciły swych walorów estetycznych tam, gdzie przeniknąć je zdołały metody teorji funkcji rzeczywistych. Nauczyliśmy się conajwyżej podziwiać w rozumowaniach nietylko zręczny rachunek, lecz również i ogólność, która na drodze pozornej abstrakcji pozwala wyłuskać niejednokrotnie istotną treść problematu.

* * *

Celem uwag powyższych było wskazanie miejsca, jakie w teorji funkcji rzeczywistych zajmuje przedmiot tych wykładów. Na zakończenie — słów parę o budowie samego podręcznika. Wykład nosi charakter elementarny. Zakłada się jednak, iż czytelnik — który opanował oczywiście elementy Analizy (rachunek różniczkowy i całkowy) w zakresie zwykłego kursu uniwersyteckiego — obyty jest z podstawowemi metodami i znakowaniem teorji mnogości. Książka prof. Sierpińskiego „*Wstęp do teorji mnogości i topologji*" stanowi tu najzupełniej dostateczne przygotowanie. Paragrafy, wzgl. grupy paragrafów, które — luźniej związane z całością podręcznika — mogą być przy początkowem czytaniu pominięte, oznaczone zostały gwiazdką (*).

Pięć pierwszych rozdziałów obejmuje właściwą teorję Lebesgue'a, a więc temat, który należy już dziś do ogólnego wykształcenia matematycznego i wchodzi nawet w skład programu pewnych grup naszych egzaminów magisterskich. Uzupełnia tę część podręcznika rozdział VI, poświęcony zastosowaniu całki Lebesgue'a w podstawach ogólnej teorji rozwinięć ortogonalnych. Wiadomo, iż zastosowanie to — wiążące się ściśle z zupełnością przestrzeni funkcji o kwadracie sumowalnym — stanowiło jedno z pierwszych kryterjum wartości odkrycia Lebesgue'a, a twierdzenia Riesza i Fischera otworzyły nowej całce drogę do wielu zagadnień Analizy. Rzecz prosta, w jednym rozdziale nie może być mowy o głębszem ujęciu tematu, który stanowić winien przedmiot specjalnej monografji, przygotowywanej—o ile wiemy—przez osobę najbardziej tu kompetentną, bo przez prof. Hugo Steinhausa.

Cztery ostatnie rozdziały obejmują dalsze badania (teorje Perrona i Denjoy). Poprzedza je — w rozdz. VII — paragraf zawierający ogólny pogląd na rozwój idei całki. Nie chcąc rozszerzać zbytnio ram tego podręcznika, zmuszony byłem—niestety—zrezygnować z uwzględnienia teorji funkcji wielu zmiennych, która — pogłębiona ostatnio dzięki pracom Banacha, Radó i Tonelli'ego — prowadzi do nowych, nierozwiązanych dotąd, zagadnień.

Noty bibljograficzne mają na celu ułatwienie czytelnikowi orjentacji w rozwoju teorji. Mogłem cytować zresztą tylko „źródła" publikowane. Winienem wszakże podkreślić, iż, jako słuchacz Uniwersytetu Warszawskiego, i później jeszcze, korzystałem wiele ze znakomitych wykładów i seminarjum, prowadzonych przez prof. Wacława Sierpińskiego. Wpływ tych wykładów odnajdzie czytelnik na wielu stronach tej książki.

Większą część rękopisu zechciał był przejrzeć prof. A. Zygmund, dzieląc się ze mną niejedną uwagą i spostrzeżeniem Za pomoc tę składam mu tu serdeczne podziękowanie.

Podręcznik obejmuje wykłady na Uniwersytecie Warszawskim z ub. r. ak. oraz z dwu semestrów r. ak. 1927/28. Uprzejma pomoc i ofiarność Kasy im. Mianowskiego umożliwiła mi oddanie tych wykładów do rąk szerszego grona czytelników. Niechże mi wolno tedy będzie złożyć tu Komitetowi Kasy wyrazy prawdziwej wdzięczności.

S. S.

TREŚĆ.

ROZDZIAŁ I.

Funkcje figury elementarnej.

ROZDZIAŁ II.

Miara Lebesgue'a. Zbiory mierzalne, funkcje mierzalne.

ROZDZIAŁ III.

Funkcje o wahaniu skończonem.

ROZDZIAŁ IV.

Całka Lebesgue'a (definicja opisowa).

ROZDZIAŁ V.

Całka Lebesgue'a (definicja geometryczna).

ROZDZIAŁ VI.

Układy ortogonalne funkcji.

ROZDZIAŁ VII.

Całka Perrona.

ROZDZIAŁ VIII.

Funkcje o wahaniu skończonem uogólnionem.

ROZDZIAŁ IX.

Twierdzenia o liczbach pochodnych.

ROZDZIAŁ X.

Całki Denjoy.

Errata.

str.	*wiersz*	*zamiast:*	*winno być:*
4	11 od góry	ciąg nieskończony	ciąg nieskończony elementów różnych
8	12 od dołu	(VI, VII, VIII)	(VII — X)
11	2 od góry	$F(R - R_0)$	$F(R_0 \dot{-} R)$
11	5 od dołu	$F(R_1 - R_2)$	$F(R_1 \dot{-} R_2)$
46	2 od dołu	*układ kwadratów*	*układ kwadratów rozłącznych*
69	3 od dołu	$F(R_0) \geqslant a \mid R_0 \mid$	$F(R_0) \geqslant a \mid E \mid$
75	11 od dołu	$\mid E_{p_0} \mid$	$\mid E_{p_0} \mid$
134	1 od góry	$\int_R f(x)$	$\int_R f(x)\, dx$
138	2 od dołu	n	n_i
141	10 od góry	$F'(x) \leqslant 0$	$F'(x) \geqslant 0$
144	10 od dołu	$\underline{\int_a^b} g\, d\overline{W} + \underline{\int_a^b} g\, d\overline{W}$	$\underline{\int_a^b} g\, d\overline{W} + \underline{\int_a^b} g\, d\underline{W}$
144	11 od dołu	$\overline{\int_s^b} g\, d\overline{W} + \overline{\int_a^b} g\, d\overline{W}$	$\overline{\int_a^b} g\, d\overline{W} + \overline{\int_a^b} g\, d\underline{W}$
264	5 od dołu	funkcja (ACG^*)	funkcją (VBG^*)
270	11 od dołu	$F(I - T) = 0$	$\mid F(I - T) \mid = 0$
279	1 od dołu	§ 3	§ 2
285	13 od góry	$0 \leqslant h \leqslant \frac{1}{n}$	$0 < h \leqslant \frac{1}{n}$
286	1 od góry	$(x_1 \leqslant x_2)$	$(x_1 < x_2)$
287	17 od góry	$0 \leqslant h \leqslant \frac{2}{n}$	$0 < h \leqslant \frac{2}{n}$
287	5 od dołu	$x_1 \leqslant x_2$	$x_1 < x_2$
303	11 od góry	$\mathfrak{M}(f_1; I) = \mathfrak{M}(f_1; I)$	$\mathfrak{M}(f_1; I') = \mathfrak{M}(f_1; I)$

ROZDZIAŁ I.

Funkcje figury elementarnej.

Funkcje zbioru. Uwagi wstępne.

§ 1. Przedmiotem niniejszego Zarysu będą obok funkcji, których argumentem jest liczba zmienna, lub ogólniej układ n-liczb (punkt przestrzeni n-wymiarowej), również i takie funkcje, w których rolę zmiennej niezależnej odgrywają pewne zbiory punktów. Charakter tych zbiorów — innemi słowy zakres ich zmienności — zostanie w § 5 bliżej sprecyzowany. Tymczasem zauważymy, iż funkcje takie były już, w wielu szczególnych i ważnych przypadkach, rozważane przez analizę klasyczną, jakkolwiek badanie ich w całej ogólności rozpoczyna się dopiero w związku z rozwojem teorji mnogości i tych działów analizy, które bezpośrednio się na teorji mnogości opierają.

Jeśli np. dana jest funkcja $f(x)$ całkowalna w każdym przedziale, wówczas przez przyporządkowanie każdemu przedziałowi I wartości całki funkcji $f(x)$ w tym przedziale, otrzymujemy pewną funkcję $F(I)$, która jest funkcją przedziału. Zupełnie analogicznie, rozważanie całek wielokrotnych funkcji $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-zmiennych prowadzi do funkcji zbiorów, położonych w przestrzeniach o wyższej liczbie wymiarów; argumentem I w stosunku do takiej funkcji $F(I)$ może być każdy zbiór, na którym całka ustalonej funkcji $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest określona [1]. Zwracamy na

[1]) Oczywiście, że zbiory, które mogą być w ten sposób uważane za wartości argumentu I funkcji $F(I)$, stanowią węższą lub szerszą klasę, zależnie od tego, jaką przyjmiemy definicję całki. Zawsze jednak, jakąkolwiek przyjęlibyśmy ze znanych dotąd definicji całki, jeśli funkcja $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ jest w pewnym obszarze całkowalna, wówczas całkowalna jest również w każdej kostce, zawartej w tym obszarze.

przykłady te uwagę, by podkreślić naturalny związek, jaki zachodzi między pojęciem całki (w jakimkolwiekbądź sensie) a funkcją zbioru. Można oczywiście podać wiele innych przykładów funkcji zbioru: geometrja elementarna rozważa np. długość odcinka lub pole wielokąta; zakresem zmienności argumentu dla tych funkcji (długość, pole) jest w pierwszym przypadku klasa odcinków, w drugim — klasa wielokątów. Zagadnienie rozszerzenia tych zakresów zmienności doprowadziło do stworzenia ogólniejszych teorji miary, uogólniających pojęcia długości, pola, objętości, określonych dla pewnej, dość wąskiej, klasy figur przez geometrję elementarną, na znacznie rozleglejsze kategorje zbiorów punktowych [1]).

Również elementarne rozważania fizyki niejednokrotnie kryją w sobie pojęcie funkcji zbioru. Jeśli np. w przestrzeni znajduje się pewne ciało C, wówczas, przyporządkowując każdej kostce I miarę masy tej części ciała C, która zawarta jest w I, otrzymamy pewną funkcję $F(I)$ kostki. Zdefinjowana w ten sposób funkcja posiada pewne własności, które znajdują również interpretację fizyczną; wychodząc z określenia pochodnej funkcji zbioru, (które podamy w § 1 rozdziału III), czytelnik z łatwością zauważy, iż pochodna rozważanej funkcji $F(I)$ w jakimś punkcie oznacza gęstość ciała C w tym punkcie.

Znakowanie, terminologja.

§ 2. Zanim przystąpimy do sprecyzowania pojęć, o których wspominaliśmy ogólnikowo w § poprzednim, ustalimy, dla uniknięcia nieporozumienia, sens kilku terminów i znaków, używanych powszechnie w teorji mnogości [2]).

Jeżeli A i B są dwoma zbiorami jakichkolwiek przedmiotów, wówczas $A \subset B$ oznacza, iż zbiór A zawiera się w B, t. j. iż każdy element zbioru A należy do B.

$A = B$ oznacza, iż zbiory A i B składają się z tych samych przedmiotów, t. j., iż jednocześnie $A \subset B$ i $B \subset A$.

Znak $a \in A$ oznacza, iż a jest elementem zbioru A.

Jeśli dana jest rodzina (zbiór) $\mathfrak{A}$ zbiorów, wówczas sumą zbiorów, należących do rodziny $\mathfrak{A}$ nazywać będziemy zbiór tych

---

[1]) p. rozdz. II, § 1.

[2]) Korzystać tu będziemy przeważnie z terminologji i znakowania, przyjętych w podręcznikach Sierpińskiego *(L. P.* i *T. O.)*.

wszystkich przedmiotów, z których każdy należy przynajmniej do jednego ze zbiorów rodziny $\mathfrak{A}$; sumę tę oznaczać będziemy znakiem $\Sigma\mathfrak{A}$. Iloczynem zbiorów, należących do $\mathfrak{A}$, będziemy nazywali zbiór tych wszystkich przedmiotów, które należą jednocześnie do wszystkich zbiorów rodziny $\mathfrak{A}$; iloczyn ten oznaczać będziemy przez $\Pi\mathfrak{A}$.

Może się oczywiście zdarzyć, iż niema wogóle takich przedmiotów, które należą jednocześnie do wszystkich zbiorów rozważanej rodziny. W przypadku tym iloczynem zbiorów rozważanej rodziny jest zbiór pusty. Przez zbiór pusty rozumiemy zbiór który nie zawiera żadnego przedmiotu[1]); oznaczać go będziemy często symbolem 0.

Jeśli zbiory, należące do rodziny $\mathfrak{A}$, tworzą ciąg skończony $A_1, A_2, \ldots, A_m$, lub nieskończony $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots$, wówczas dla oznaczenia sumy tych zbiorów używać będziemy znaków

$$\sum_{n=1}^{m} A_n \quad \text{lub:} \quad A_1 + A_2 + \ldots + A_m,$$

$$\text{wzgl.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{lub:} \quad A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots;$$

analogicznie, iloczyn oznaczać będziemy przez

$$\prod_{n=1}^{m} A_n \quad \text{lub:} \quad A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m,$$

$$\text{wzgl.} \quad \prod_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{lub:} \quad A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times \ldots$$

Jeśli, dla każdego n, $A_n \subset A_{n+1}$, wzgl. $A_n \supset A_{n+1}$, wówczas ciąg zbiorów A_n nazywa się monotonicznym, wstępującym lub niemalejącym, wzgl. zstępującym lub nierosnącym. Sumę, wzgl. iloczyn, ciągu wstępującego, wzgl. zstępują-

[1]) Niektórzy matematycy uważają, iż nie może istnieć „zbiór, nie zawierający żadnego przedmiotu", a więc termin „zbiór pusty" nie ma sensu. Nie wchodzimy tu w dyskusję tych kwestji. Czytelnik zauważy z łatwością, iż pojęcie „zbioru pustego" może być usunięte ze wszystkich naszych, rozumowań w których występuje, przez zwykłe omówienie pewnych przypadków szczególnych.

cego, zbiorów A_n nazywamy również **granicą** tego ciągu, oznaczając przez $\lim\limits_n A_n$.

Dwa zbiory, których iloczyn jest pusty, t. j. które nie posiadają elementów wspólnych, nazywać będziemy **rozłącznemi**.

Różnicą dwu zbiorów A i B, nazywać będziemy zbiór tych wszystkich przedmiotów, które należą do A, ale nie należą do B; oznaczać ją będziemy symbolem $A - B$.

Zbiór A nazywa się **przeliczalny**, jeśli istnieje jednojednoznaczna odpowiedniość między elementami zbioru A a ciągiem liczb naturalnych $1, 2, \ldots, n \ldots$; lub, co jest równoważne. jeśli istnieje ciąg nieskończony $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$, taki, iż zbiór jego elementów jest identyczny ze zbiorem A.

§ **3.** Definicje ustalone w § poprzednim należą do t. zw abstrakcyjnej teorji mnogości, zajmującej się własnościami zbiorów, rozważanych w całej ogólności. Zbiory, któremi zajmować się będziemy w dalszym ciągu, będą przeważnie zbiorami **punktowemi** zawartemi w przestrzeni euklidesowej. Przez przestrzeń euklidesową n-wymiarową $\mathfrak{R}_n$ rozumieć będziemy zbiór wszystkich układów n-liczb $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, gdzie x_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ oznacza dowolną liczbę rzeczywistą. Każdy taki układ nazywać się będzie **punktem** w przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej. **Odległością** dwu punktów

$$a = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad b = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

położonych w tej przestrzeni nazywać będziemy liczbę nieujemną

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

którą oznaczać będziemy przez $\rho(a, b)$.

Jeżeli M jest dowolnym zbiorem, wówczas górny kres odległości dwuch dowolnych punktów tego zbioru t. j. górny kres liczb $\rho(a, b)$ dla $a, b \in M$, nazywać się będzie **średnicą** zbioru M; oznaczać ją będziemy przez $d(M)$. Jeśli $d(M)$ jest liczbą skończoną, wówczas zbiór M nazywa się **ograniczony**.

Wreszcie, jeżeli p jest pewnym ustalonym punktem, zaś M pewnym zbiorem, wówczas dolny kres wszystkich liczb $\rho(x, p)$, gdzie x jest dowolnym punktem zbioru M, nazywać się będzie odległością punktu p od zbioru M; odległość tę oznaczać będziemy przez $\rho(M, p)$.

Otoczeniem punktu a, o promieniu $r > 0$, nazywać będziemy zbiór wszystkich punktów x takich, iż $\rho(a, x) < r$. Punkt a nazywać się będzie punktem skupienia zbioru A, jeśli w każdem swem otoczeniu zawiera conajmniej dwa różne punkty zbioru A. Zbiór, złożony ze wszystkich punktów zbioru A oraz ze wszystkich jego punktów skupienia, nazywać będziemy domknięciem zbioru A i oznaczać przez $\bar{A}$.

Jeśli: $A = \bar{A}$, wówczas zbiór A nazywać się będzie zbiorem domkniętym; zbiory domknięte nazywać będziemy często zbiorami typu F (fermé).

Punkt a nazywa się punktem wewnętrznym zbioru A, jeśli istnieje takie otoczenie punktu a, które zawiera się w A. Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru nazywa się wnętrzem zbioru A; oznaczamy je przez $J(A)$.

Jeśli: $A = J(A)$, wówczas zbiór A nazywa się zbiorem otwartym; zbiory otwarte oznaczać będziemy ogólnie literą G (Gebiet).

Uzupełnieniem zbioru A, rozważanego w pewnej przestrzeni $\mathfrak{R}_n$, w stosunku do tej przestrzeni, nazywać będziemy różnicę $\mathfrak{R}_n - A$; oznaczać ją będziemy przez CA.

Z definicji zbiorów F (domkniętych) oraz G (otwartych) wynika natychmiast, iż każdy zbiór CF jest zbiorem G, oraz, iż odwrotnie, każdy zbiór CG jest zbiorem F.

Sumy i iloczyny skończonej liczby zbiorów domkniętych, wzgl. otwartych, są również zbiorami domkniętemi, wzgl. otwartemi. Suma ciągu (skończonego lub nieskończonego) zbiorów otwartych jest nadal zbiorem otwartym; iloczyn ciągu (skończonego lub nieskończonego) zbiorów domkniętych jest domknięty.

Natomiast iloczyn ciągu (nieskończonego) zbiorów otwartych może nie być otwarty; zbiory, które są iloczynami ciągu zbiorów otwartych, nazywać będziemy zbiorami G_δ; analogicznie, zbiory, które są sumami ciągu zbiorów domkniętych, nazywać będziemy zbiorami F_σ[1]). Między zbiorami G_δ i F_σ zachodzą analogiczne związki jak między zbiorami F i G; uzupełnienie zbioru F_σ jest pewnym zbiorem G_δ, i odwrotnie.

---

[1]) Znakowanie to wprowadzone zostało przez Hausdorffa (*M.* I)

§ 4. Będziemy opierali się w dalszym ciągu na następujących twierdzeniach teorji mnogości:

1. *Twierdzenie* Bolzano - Weierstrassa. *Każdy zbiór ograniczony nieskończony posiada punkty skupienia.*

2. *Twierdzenie* Cantora (Durchschnitssatz). *Jeżeli* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *jest ciągiem zstępującym zbiorów domkniętych i ograniczonych, wówczas istnieje punkt, należący do wszystkich zbiorów tego ciągu.*

3. *Twierdzenie* Borela-Lebesgue'a. *Jeżeli rodzina* Ω *zbiorów otwartych pokrywa zbiór domknięty i ograniczony* F *t. j. jeśli* $F \subset \Sigma\,\Omega$, *wówczas istnieje w* Ω *układ skończony zbiorów* $G_1, G_2, \ldots, G_n$, *również pokrywających łącznie zbiór* F, *t. j. takich, iż:*

$$F \subset \sum_{i=1}^{n} G_i.$$

Pomijamy tu dowody powyższych trzech twierdzeń; znajdzie je Czytelnik w każdym podręczniku teorji mnogości punktowych oraz w obszerniejszych kursach analizy elementarnej.

Przedział, figura elementarna.

§ 5. Przystąpimy obecnie do określenia pewnych klas elementarnych zbiorów punktowych.

Jeżeli $a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_n, b_n$ stanowi układ $2n$ liczb rzeczywistych takich, iż $a_i < b_i \mid i = 1, 2, \ldots, n \mid$, wówczas przedziałem $I = (a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_n, b_n)$ w przestrzeni $\mathfrak{R}_n$ nazywać będziemy zbiór wszystkich punktów $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, których spółrzędne czynią zadość warunkom: $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \mid i = 1, 2, \ldots, n \mid$. W szczególności, w przypadku $n = 1$ (prostej) przedział oznacza odcinek, w przypadku $n = 2$ (płaszczyzny) — prostokąt o bokach równoległych do osi spółrzędnych. Polem przedziału I nazywać się będzie iloczyn $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n)$, który oznaczać będziemy przez $|I|$. W przypadku, gdy $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \ldots = b_n - a_n$ przedział nazywa się kostką n-wymiarową, w szczególności dla $n = 2$ kwadratem; w przypadku $n = 1$ termin „kostka" pokrywa się— rzecz prosta — z terminem „przedział".

Zbiór, który jest pusty lub jest sumą skończonej liczby przedziałów, nazywać będziemy figurą elementarną. Widoczne jest, iż suma skończonej liczby figur elementarnych jest znowuż figurą elementarną, natomiast iloczyn, wzgl. różnica, dwu figur elementarnych może nie być figurą elementarną.

Wprowadzimy tu dwie operacje, analogiczne do operacji iloczynu i odejmowania zbiorów, posiadające ponadto jednak tę własność, iż wykonane na figurach elementarnych dają w wyniku zawsze znowuż figury elementarne. Jako symbole tych operacji przyjmiemy znaki $\dot{\times}$ oraz $\dot{-}$; definiujemy je, dla dwu dowolnych figur elementarnych A i B, przez związki:

$$A \dot{\times} B = \overline{J(A \times B)}.$$

$$A \dot{-} B = \overline{J(A - B)}.$$

Związek $A \dot{\times} B = 0$ wyraża, w szczególności, iż figury A i B nie mają wspólnych punktów wewnętrznych; w tym przypadku mówić się będzie, iż figury A i B *na siebie nie zachodzą*.

W wielu dalszych rozważaniach posługiwać się będziemy pewnemi układami kostek (kwadratów) w przestrzeni.

Nazywać mianowicie będziemy *siatką kwadratową o krawędzi* ε w przestrzeni $\mathfrak{R}_n$ każdy układ niezachodzących na siebie kostek o krawędzi ε, pokrywających łącznie przestrzeń $\mathfrak{R}_n$.

Ciąg siatek $\{\mathfrak{P}_n\}$ nazywać będziemy *regularnym*, jeśli 1° każda kostka siatki $\mathfrak{P}_{n+1}$ $(n > 0)$ zawiera się w jednej z kostek siatki $\mathfrak{P}_n$, i jeśli 2° długość krawędzi siatki $\mathfrak{P}_n$ dąży do zera, gdy $n \to \infty$.

Jeśli dana jest kostka K, wówczas przez *siatkę kwadratową* o krawędzi ε na tej kostce rozumieć będziemy każdy układ kostek o krawędziach równych ε, złożony z kostek, zawartych w K, niezachodzących na siebie i pokrywających łącznie K.

Analogicznie, jak poprzednio dla siatek, pokrywających przestrzeń, określa się *ciąg regularny siatek na kostce* K.

Zauważymy wreszcie, iż każda siatka kwadratowa, pokrywająca przestrzeń, składa się z przeliczalnej mnogości kostek; każda natomiast siatka kwadratowa, pokrywająca kostkę, zawiera zawsze tylko skończoną liczbę kostek.

Funkcja figury elementarnej.

§ 6. Jeśli każdej figurze elementarnej R, wzgl. przedziałowi I, w pewnej przestrzeni $\mathfrak{R}_n$ przyporządkowana została jednoznacznie pewna liczba skończona[1]) $F(R)$, wzgl. $F(I)$, wówczas $F(R)$, wzgl. $F(I)$, nazywać się będzie **funkcją figury elementarnej**, wzgl. **przedziału**, w tej przestrzeni. Zamiast w całej przestrzeni, rozważa się niekiedy tylko figury elementarne (przedziały) zawarte w pewnej figurze elementarnej R_0, w przedziale I_0, wzgl. w jakimś zbiorze otwartym G. Będziemy mówili wówczas o funkcji F określonej w R_0, I_0, wzgl. w G.

Funkcje ciągłe.

§ 7. Funkcja F figury elementarnej lub przedziału, nazywać się będzie **ciągłą** w pewnym przedziale I_0, w którym jest określona, jeśli, oznaczając przez I dowolny przedział, zawarty w I_0, wartość $F(I)$ dąży do 0, gdy pole I dąży do zera (t. j. jeśli każdemu $\varepsilon > 0$ odpowiada takie $\eta > 0$, iż, dla każdego przedziału $I \subset I_0$, $|I| < \eta$ pociąga za sobą $|F(I)| < \varepsilon$). Jeśli funkcja $F(R)$ jest określona w całej przestrzeni, wówczas zdanie, iż $F(R)$ jest ciągła w całej przestrzeni, oznacza, iż funkcja ta jest ciągła w każdym przedziale tej przestrzeni.

Nazywać będziemy **oscylacją** funkcji F w przedziale I_0 górny kres wartości $|F(I)|$ dla przedziałów $I \subset I_0$; oscylację tę oznaczać będziemy przez $O(F; I_0)$, lub wprost przez $O(I_0)$, jeśli funkcja F jest ustalona.

Oscylacja $O(I)$ funkcji F jest znów pewną funkcją przedziału; ciągłość jej jest oczywiście równoważna ciągłości funkcji F.

Z terminów tych korzystać będziemy obszernie w rozdz. dalszych (VII—XI) (~~VI, VII, VIII~~) tego wykładu.

Funkcje addytywne.

§ 8. Funkcja figury elementarnej $F(R)$ nazywa się **addytywną**, jeśli dla każdych dwu niezachodzących na siebie figur elementarnych R_1, R_2 ma miejsce związek:

$$F(R_1 + R_2) = F(R_1) + F(R_2).\text{[2])} \tag{1}$$

[1]) Jako wartości funkcji **przedziału**, wzgl. **figury elementarnej** przyjmujemy w dalszym ciągu zawsze liczby skończone, natomiast funkcje **punktu** (por. rozdz. II, §§ 9—11) będą mogły przyjmować również wartości nieskończone.

[2]) Z definicji tej wynika w szczególności, iż wartość każdej funkcji addytywnej na zbiorze pustym jest zerem.

Niekiedy za punkt wyjścia wykładu teorji funkcji przyjmuje się funkcje addytywne przedziału, t. j. funkcje $F(I)$, których argumentem jest przedział i które związek (1) spełniać mają w przypadku, gdy $R_1, R_2, R_1 + R_2$ są przedziałami. Jednakże widoczne jest, iż każda funkcja addytywna przedziału daje się natychmiast — i to w sposób jednoznaczny — rozszerzyć na funkcję addytywną figury elementarnej. Przykładem takiego rozszerzenia funkcji addytywnej przedziału na funkcję dowolnej figury elementarnej, może być rozszerzenie pojęcia p o l a, które — zgodnie z definicją § 5 — jest pewną funkcją addytywną przedziału. Rozbijamy w tym celu figurę elementarną na skończoną liczbę niezachodzących na siebie przedziałów i sumę ich pól, która, rzecz prosta, nie zależy od sposobu, w jaki rozbicie zostało dokonane, nazywamy p o l e m rozważanej figury elementarnej.

Jak zaznaczyliśmy już w § 6, rozważamy naogół funkcje figury elementarnej, a więc w szczególności funkcje addytywne, określone bądź dla wszystkich figur elementarnych jakiejś przestrzeni, bądź też dla wszystkich figur zawartych w jakimś zbiorze otwartym, wzgl. w jakiejś figurze elementarnej. W każdym z tych trzech przypadków zakres rozważanych figur elementarnych, t. j. zakres zmienności argumentu rozważanej funkcji, spełnia dwa następujące warunki:

(1) jeśli jakaś figura elementarna R należy do rozważanego zakresu, wówczas należy doń każda figura elementarna $R' \subset R$;

(2) jeśli dwie figury elementarne R_1, R_2 należą do rozważanego zakresu, wówczas należy doń również figura $R_1 + R_2$.

Możnaby było (i niekiedy byłaby nawet ogólność ta dogodna) rozważać jako dopuszczalny zakres dowolnej funkcji addytywnej każdą klasę figur elementarnych, spełniających warunki (1), (2). Wszystkie twierdzenia tego rozdziału (i następnych), jak również i ich dowody pozostałyby nadal w mocy.

Wahania funkcji addytywnych.

§ 9. Niech $F(R)$ oznacza funkcję addytywną figury elementarnej i niech R_0 będzie dowolną figurą elementarną, należącą do zakresu, w którym funkcja F jest określona.

Nazywać będziemy odp. g ó r n y m i d o l n y m w a h a n i e m funkcji F na figurze R_0, górny, wzgl. dolny, kres wartości, jakie funkcja ta przyjmuje na figurach elementarnych $R \subset R_0$. Wahania te (które mogą być nieskończone) oznaczać będziemy odpowiednio przez

$$\overline{W}(F; R_0), \quad \underline{W}(F; R_0).$$

Ponieważ na zbiorze pustym F znika, przeto:

$$\overline{W}(F;R_0) \geqslant 0 \geqslant \underline{W}(F;R_0).$$

Wahaniem bezwzględnem funkcji F na R_0 nazywać się będzie liczba, widocznie nieujemna:

$$\overline{W}(F;R_0) + |\underline{W}(F;R_0)| = \overline{W}(F;R_0) - \underline{W}(F;R_0),$$

którą oznaczać będziemy przez $W(F;R_0)$.

Funkcja $F(R)$ dla której $W(F;R_0)$ jest liczbą skończoną, nazywać się będzie funkcją o wahaniu skończonem na R_0. Widoczne jest, iż jeśli funkcja F jest o wahaniu skończonem na R_0, wówczas jest również o wahaniu skończonem na każdej figurze elementarnej $R_1 \subset R_0$, ponieważ wówczas:

$$\overline{W}(F;R_1) \leqslant \overline{W}(F;R_0), \quad \underline{W}(F;R_1) \geqslant \underline{W}(F;R_0), \quad W(F;R_1) \leqslant W(F;R_0).$$

Widoczne jest również, że suma, różnica — i ogólniej każda kombinacja linjowa $a_1 F_1 + a_2 F_2$ — dwu funkcji F_1, F_2, addytywnych, o wahaniu skończonem, jest również funkcją o wahaniu skończonem.

Wprowadzimy tu jeszcze wyraźnie pewne rozróżnienie terminologiczne między wyrażeniami: wahanie funkcji F *na* pewnej figurze elementarnej R_0 i wahanie funkcji F *w* pewnej figurze elementarnej R_0. Pierwsze z tych wyrażeń oznacza, zgodnie z naszą definicją wprost liczbę $W(F;R_0)$; drugie—oznaczać będzie funkcję addytywną $W(F;R)$, określoną dla figur elementarnych $R \subset R_0$. Analogiczne rozróżnienie stosować będziemy do wahań względnych oraz odchyleń (p. niż. § 12) funkcji addytywnej.

Rozkład kanoniczny Jordana.

§ 10. Z definicji funkcji addytywnej o wahaniu skończonem wynika, iż każda taka funkcja posiada skończone obydwa wahania względne (górne i dolne). Odwrotnie, łatwo zauważyć, iż, jeśli jedno z tych dwu wahań jest skończone, wówczas skończone jest i drugie, a więc skończone jest również wahanie bezwzględne. W samej rzeczy, jeśli np.

$$\overline{W}(F;R_0) < +\infty$$

wówczas skończony musi być również, dla $R \subset R_0$, kres dolny liczb

$$F(R) = F(R_0) - F(\overset{(R_0 \dot{-} R)}{\cancel{R - R_0}}) \geqslant F(R_0) - \overline{W}(F; R_0),$$

a więc:

$$\underline{W}(F; R_0) \geqslant F(R_0) - \overline{W}(F; R_0) > -\infty,$$

c. b. d. d.

Ostatnią nierówność napisać można również w postaci:

$$F(R_0) \leqslant \overline{W}(F; R_0) + \underline{W}(F; R_0).$$

Zastępując funkcję F przez $-F$, otrzymujemy stąd nierówność przeciwną:

$$F(R_0) \geqslant \overline{W}(F; R_0) + \underline{W}(F; R_0),$$

a więc ostatecznie równość:

$$F(R_0) = \overline{W}(F; R_0) + \underline{W}(F; R_0). \tag{1}$$

Każda funkcja addytywna jest tedy na każdej figurze elementarnej, na której jest o wahaniu skończonem, sumą swych dwuch wahań względnych.

Rozkład funkcji, określony przez równanie (1), nazwiemy pierwszym rozkładem kanonicznym funkcji addytywnej o wahaniu skończonem albo rozkładem Jordana.

Funkcje monotoniczne.

§ 11. Funkcję addytywną, która przyjmuje stale wartości nieujemne, wzgl. stale wartości niedodatnie, nazywać będziemy funkcją monotoniczną. Funkcję monotoniczną nieujemną nazywać będziemy również funkcją niemalejącą, ponieważ dla każdej takiej funkcji

$$R_1 \supset R_2 \tag{1}$$

pociąga za sobą

$$F(R_1) = F(R_1 \dot{-} R_2) + F(R_2) \geqslant F(R_2).$$

Analogicznie, funkcja monotoniczna nieujemna nazywać się będzie również funkcją nierosnącą, ponieważ dla każdej takiej funkcji związek (1) pociąga za sobą

$$F(R_1) \leqslant F(R_2).$$

Każda funkcja monotoniczna jest funkcją o wahaniu skończonem. Istotnie, dla każdej funkcji $F(R)$ monotonicznej, nieujemnej zachodzą związki:

$$\overline{W}(F; R) = W(F; R) = F(R),$$

$$\underline{W}(F; R) = 0.$$

Analogiczne związki mają miejsce dla funkcji monotonicznej niedodatniej.

Skoro każda funkcja monotoniczna jest o wahaniu skończonem, przeto (§ 9) każda różnica dwu funkcji monotonicznych jest również funkcją o wahaniu skończonem. Twierdzenie to można odwrócić: w samej rzeczy, jeśli funkcja addytywna $F(R)$ jest o wahaniu skończonem na figurze elementarnej R_0, wówczas obydwa jej wahania $\underline{W}(R)$, $\overline{W}(R)$ [1]) są pewnemi funkcjami addytywnemi, monotonicznemi. Rozkład Jordana (§ 10)

$$F(R) = \overline{W}(R) - [-\underline{W}(R)]$$

pozwala tedy przedstawić każdą funkcję o wahaniu skończonem jako różnicę dwu funkcji monotonicznych niemalejących. Otrzymujemy tedy następujące twierdzenie (Jordana):

Twierdzenie I. Na to, aby funkcja addytywna figury elementarnej była o wahaniu skończonem, trzeba i wystarcza, aby była różnicą dwu funkcji monotonicznych niemalejących.

Odchylenia funkcji, funkcje bezwzględnie ciągłe.

§ 12. Wprowadzimy obok wahań funkcji jeszcze trzy inne liczby, które nazwiemy odchyleniami funkcji.

Niech $F(R)$ będzie dowolną funkcją addytywną i R_0 figurą elementarną należącą do zakresu zmienności jej argumentu. Oznaczymy, dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$, przez $\overline{E}_\varepsilon(F; R_0)$ kres górny wartości, jakie funkcja $F(R)$ przyjmuje na figurach $R \subset R_0$, o polu $< \varepsilon$. Tak określona liczba $\overline{E}_\varepsilon$ maleje wraz z ε; granicę

$$\overline{E}(F; R_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{E}_\varepsilon(F; R_0)$$

---

[1]) W przypadku, gdy niema obawy nieporozumienia, gdy np. funkcja F jest ustalona, będziemy opuszczali symbol tej funkcji w znakach $W(F; R)$.

nazywać będziemy **odchyleniem górnem** funkcji $F(R)$ na figurze R_0.

Analogicznie definiujemy liczby $\underline{E}_\varepsilon(F; R_0)$, których granica

$$\underline{E}(F; R_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \underline{E}_\varepsilon(F; R_0)$$

nazywać się będzie **odchyleniem dolnem** funkcji F na R_0. Liczbę

$$E(F; R_0) = \overline{E}(F; R_0) + |\underline{E}(F; R_0)| = \overline{E} - \underline{E}$$

nazwiemy wreszcie **odchyleniem bezwzględnem** funkcji[1]).

Między odchyleniami a wahaniami funkcji zachodzą związki oczywiste

$$0 \leqslant \overline{E} \leqslant \overline{W}; \quad 0 \geqslant \underline{E} \geqslant \underline{W}$$

$$0 \leqslant E \leqslant W.$$

W szczególności, wynika z nich, iż, dla funkcji o wahaniu skończonem, skończone są również wszystkie trzy odchylenia, i, jak łatwo zauważyć, są również pewnemi funkcjami addytywnemi.

Również odwrotnie, jeśli którekolwiek z odchyleń funkcji addytywnej jest skończone na pewnej figurze R_0, wówczas funkcja jest o wahaniu skończonem na tej figurze. W samej rzeczy, jeśli np. $\overline{E}(R_0) < +\infty$, wówczas skończona jest również dla pewnego $\varepsilon > 0$ liczba $\overline{E}_\varepsilon(R_0)$. Podzielmy R_0 na skończoną liczbę przedziałów $I_1, \ldots, I_n$ o polu $< \varepsilon$ każdy. Mamy wówczas dla każdego $k = 1, 2, \ldots n$: $\overline{W}(I_k) \leqslant \overline{E}_\varepsilon(R_0) < +\infty$, a więc liczba

$$\overline{W}(R_0) = \sum_{k=1}^{n} \overline{W}(I_k)$$

jest skończona. Stąd zaś (§ 10) wynika już, iż funkcja F jest o wahaniu skończonem.

Jeśli odchylenie bezwzględne funkcji F na R_0 równe jest zeru, wówczas funkcja F nazywa się **bezwzględnie ciągłą**

---

[1]) Innemi słowy, odchylenie górne (dolne) na R_0 jest granicą górną (dolną) wartości $F(R)$, gdy pole figury $R \subset R_0$ dąży do zera.

na R_0. Jest wówczas oczywiście bezwzględnie ciągła również i na każdej figurze elementarnej $R_1 \subset R_0$.

Funkcja $F(R)$ nazywa się bezwzględnie ciągła w całej przestrzeni, jeśli jest ciągła bezwzględnie w każdej figurze elementarnej przestrzeni.

Z rozważań tego § wynika, iż każda funkcja bezwzględnie ciągła, jako posiadająca odchylenia równe zeru, a więc skończone, jest funkcją o wahaniu skończonem. Nie każda jednak funkcja o wahaniu skończonem jest bezwzględnie ciągła. Klasa funkcji bezwzględnie ciągłych stanowi tedy pewną pod-klasę klasy funkcji o wahaniu skończonem, istotnie od klasy tej węższą.

Czytelnik zauważy z łatwością, iż definicję funkcji bezwzględnie ciągłej otrzymać można, zastępując w podanej w § 7 definicji ciągłości zwykłej termin „przedział" przez termin „figura elementarna". Modyfikacja ta jest istotna: klasa funkcji addytywnych bezwzględnie ciągłych jest istotnie węższa od klasy funkcji addytywnych i ciągłych w sensie zwykłym.

Można łatwo podać przykłady funkcji addytywnych, ciągłych, o wahaniu skończonem, figury elementarnej na płaszczyźnie, które nie są bezwzględnie ciągłe.

Niech w tym celu K_0 oznacza kwadrat o wierzchołkach przeciwległych $(0, 0)$, $(1, 1)$, l zaś przekątnię kwadratu, łączącą te wierzchołki. Dla dowolnego prostokąta $I \subset K_0$ przez $F(I)$ oznaczymy długość odcinka prostej l zawartego w I. Tak określoną funkcję przedziału rozszerzamy następnie na dowolne figury elementarne $R \subset K_0$, i otrzymujemy w ten sposób funkcję addytywną, ciągłą, nieujemną, (a więc o wahaniu skończonem), na K_0; funkcja ta jednak nie jest bezwzględnie ciągła, ponieważ, jak łatwo zauważyć:

$$E(F; K_0) = \overline{E}(F; K_0) = \sqrt{2} > 0.$$

Konstrukcja analogicznego przykładu na linji prostej jest już bardziej skomplikowana (p. rozdz. III, § 8).

Ze związku:

$$E(kF_1 + lF_2; R) \leqslant |k| . E(F_1; R) + |l| . E(F_2; R),$$

gdzie F_1, F_2 są dwiema funkcjami addytywnemi, l, k, spółczynnikami stałemi, wynika, iż każda kombinacja linjowa — a więc w szczególności suma i różnica — dwu funkcji bezwzględnie ciągłych jest bezwzględnie ciągła.

Funkcje osobliwe. Rozkład kanoniczny Lebesgue'a.

§ 13. Sumę odchyleń względnych funkcji addytywnej $F(R)$ o wahaniu skończonem nazwiemy funkcją osobliwości danej funkcji; oznaczać ją będziemy przez $S(F; R)$, lub — gdy nie będzie nieporozumienia — wprost przez $S(R)$. Funkcja $S(R)$ jest oczywiście funkcją addytywną, o wahaniu skończonem.

Funkcja addytywna $F(R)$, która na każdej figurze elementarnej jest identyczna ze swoją funkcją osobliwości t. j. spełnia warunek

$$F(R) = S(F; R),$$

nazywać się będzie *funkcją osobliwą* (w sensie *Lebesgue'a*). Jak wynika z tej definicji, funkcja bezwzględnie ciągła jest wtedy i tylko wtedy osobliwa, gdy jest tożsamościowo zerem.

Pokażemy w tym §, że każda funkcja o wahaniu skończonem jest sumą pewnej funkcji bezwzględnie ciągłej i funkcji osobliwej.

W tym celu udowodnić należy uprzednio parę drobnych twierdzeń pomocniczych.

Twierdzenie 2. Odchylenie górne (dolne) wahania górnego (dolnego) funkcji addytywnej o wahaniu skończonem, jest identyczne z odchyleniem górnem (dolnem) funkcji danej, t. j.:

$$\overline{E}(\overline{W}; R) = \overline{E}(F; R)$$

$$\underline{E}(\underline{W}; R) = \underline{E}(F; R).$$

Dowód: Niech, R_0 będzie dowolną figurą elementarną, ε liczbą dodatnią. Istnieje takie

(1) $$R' \subset R_0, \quad |R'| < \varepsilon$$

iż:

(2) $$\overline{W}(F; R') > \overline{E}(\overline{W}; R_0) - \varepsilon.$$

Istnieje z kolei takie

(3) $$R'' \subset R',$$

iż:

$$F(R'') > \overline{W}(F; R') - \varepsilon.$$

Stąd, oraz z (1), (2) i (3):

$$\overline{E}_\varepsilon(F; R_0) \geqslant F(R'') > \overline{E}(\overline{W}; R_0) - 2\varepsilon,$$

a więc:

(4) $$\overline{E}(F; R_0) \geqslant \overline{E}(\overline{W}; R_0).$$

Ponieważ zaś stale:

$$F(R) \leqslant \overline{W}(R),$$

zatem również

$$\bar{E}(F;R) \leqslant \bar{E}(\bar{W};R),$$

skąd z uwagi na (4) otrzymujemy równość:

$$\bar{E}(F;R_0) = \bar{E}(\bar{W};R_0).$$

T w i e r d z e n i e 3. Na to, aby funkcja addytywna o wahaniu skończonem była bezwzględnie ciągła, konieczne jest i wystarcza, aby bezwzględnie ciągłe były obydwa jej wahania względne.

D o w ó d: Jeśli funkcja $F(R)$ jest bezwzględnie ciągła, wówczas znikają jej obydwa odchylenia, a więc — na zasadzie twierdzenia poprzedniego — znikają temsamem również i odchylenia jej wahań, które są tedy ciągłe bezwzględnie.

Odwrotnie, jeśli bezwzględnie ciągłe są wahania względne funkcji, wówczas bezwzględnie ciągła jest również sama funkcja, jako iż — w myśl twierdzenia § 10 — jest sumą swych wahań.

T w i e r d z e n i e 4. Na to, aby funkcja addytywna o wahaniu skończonem była osobliwa, konieczne jest i wvstarcza, abv osobliwe były jej obydwa wahania względne.

D o w ó d: Niech $F(R)$ będzie funkcją osobliwą, R_0 dowolną figurą elementarną. Dla każdego $R \subseteq R_0$:

$$\bar{E}(\bar{W};R_0) = \bar{E}(F;R_0) \geqslant \bar{E}(F;R) \geqslant S(F;R) = F(R);$$

ponieważ zaś $\bar{W}(R_0)$ jest górnym kresem wartości $F(R)$ dla $R \subseteq R_0$, przeto z powyższej nierówności otrzymujemy:

$$\bar{E}(\bar{W};R_0) \geqslant \bar{W}(R_0),$$

a więc:

$$\bar{E}(\bar{W};R_0) = \bar{W}(R_0),$$

skąd:

$$S(\bar{W};R_0) = \bar{E}(\bar{W};R_0) = \bar{W}(R_0).$$

Ponieważ zaś R_0 jest dowolną figurą elementarną, równość ta oznacza tedy, iż $W(R)$ jest funkcją osobliwą.

Odwrotnie, jeśli obydwa wahania — górne i dolne funkcji $F(R)$ — są osobliwe, wówczas na zasadzie twierdzenia 2 mamy na każdej figurze elementarnej:

$$F(R) = \bar{W}(R) + \underline{W}(R) = \bar{E}(\bar{W};R) + \underline{E}(\underline{W};R) =$$

$$= \bar{E}(F;R) + \underline{E}(F;R) = S(F;R),$$

a więc funkcja $F(R)$ jest osobliwa.

Twierdzenie 5. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby funkcja addytywna $F(R)$ o wahaniu skończonem była osobliwa, jest każdy z dwu warunków następujących:

(A) *dla każdej figury elementarnej R i każdego $\varepsilon > 0$ istnieje figura elementarna R', taka, iż:*

$$R' \subset R, \quad |R'| < \varepsilon,$$
$$|F(R \dot{-} R')| < \varepsilon;$$

(B) *dla każdej figury elementarnej R i każdego $\varepsilon > 0$ istnieje figura elementarna R', taka, iż:*

$$R' \subset R, \quad |R'| < \varepsilon,$$
$$W(R \dot{-} R') < \varepsilon.$$

Dowód: Wystarczy oczywiście udowodnić dostateczność warunku (A) i konieczność warunku (B).

1⁰ Zakładamy, iż warunek (A) jest spełniony. Dla każdego $\varepsilon > 0$ oraz dla każdych dwu figur elementarnych $R \subset R_0$ istnieje tedy figura elementarna R' taka, iż:

$$R' \subset R \subset R_0, \quad |R'| < \varepsilon, \quad |F(R \dot{-} R')| < \varepsilon.$$

Przeto:

$$F(R) < F(R') + \varepsilon < \overline{E}_\varepsilon(F; R_0) + \varepsilon.$$

Ponieważ zaś $\overline{W}(R_0)$ jest kresem górnym liczb $F(R)$, gdy $R \subset R_0$, zatem:

$$\overline{W}(R_0) < \overline{E}_\varepsilon(F; R_0) + \varepsilon,$$

a więc, ponieważ ε jest dowolną liczbą dodatnią i $\overline{W}(R_0) \geq \overline{E}(F; R_0)$,

$$\overline{W}(R_0) = \overline{E}(F; R_0).$$

Zupełnie analogicznie:

$$\underline{W}(R_0) = \underline{E}(F; R_0),$$

a więc na każdej figurze elementarnej

$$F(R_0) = \overline{W}(R_0) + \underline{W}(R_0) = \overline{E}(R_0) + \underline{E}(R_0) = S(R_0).$$

$F(R)$ jest tedy funkcją osobliwą.

2^0 Zakładamy z kolei, iż funkcja $F(R)$ jest osobliwa. Obydwa wahania jej są tedy (tw. 4) również osobliwe. Zatem, dla każdej figury elementarnej R_0,

$$\overline{W}(R_0) = \overline{E}(\overline{W}; R_0), \quad \underline{W}(R_0) = \underline{E}(\underline{W}; R_0),$$

a więc dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją takie figury elementarne $R_1, R_2 \subset R_0$, iż:

$$|R_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \overline{W}(R_0) < \overline{W}(R_1) + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|R_2| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \underline{W}(R_0) > \underline{W}(R_2) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Stąd, kładąc $R' = R_1 + R_2$:

$$W(R_0) = \overline{W}(R_0) - \underline{W}(R_0) < \overline{W}(R_1) - \underline{W}(R_2) + \varepsilon$$

$$\leqslant \overline{W}(R') - \underline{W}(R') + \varepsilon$$

$$\leqslant W(R') + \varepsilon,$$

a więc:

$$W(R_0 \dot{-} R') < \varepsilon,$$

gdzie $R' = R_1 + R_2 \subset R_0$ i $|R'| \leqslant |R_1| + |R_2| < \varepsilon$.

Warunek (B) jest tedy spełniony.

T w i e r d z e n i e 6. Kombinacja linjowa o stałych spółczynnikach dwu funkcji osobliwych, jest funkcją osobliwą.

D o w ó d: Wystarczy oczywiście udowodnić, iż suma dwu funkcji osobliwych F_1, F_2 jest również osobliwa.

Niech: $F = F_1 + F_2$, i niech W, W_1, W_2 oznaczają odp. wahania bezwzględne funkcji F, F_1, F_2.

Niech R_0 będzie dowolną figurą elementarną, ε — liczbą dodatnią. Na zasadzie twierdzenia poprzedniego istnieją tedy dwie figury elementarne R_1, R_2 takie, iż

$$R_1, R_2 \subset R_0, \quad |R_1|, \ |R_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$W_i(R_0 \dot{-} R_i) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (i = 1, 2)\,.$$

Kładąc tedy: $R' = R_1 + R_2$, otrzymujemy:

$$R' \subset R_0, \quad |R'| < \varepsilon$$

$$W(R_0 \dot{-} R') \leqslant W_1(R_0 \dot{-} R_1) + W_2(R_0 \dot{-} R_2) < \varepsilon.$$

Funkcja F spełnia zatem warunek (B) twierdzenia poprzedniego i jest temsamem osobliwa.

T w i e r d z e n i e 7. Odchylenia oraz funkcja osobliwości dowolnej funkcji addytywnej o wahaniu skończonem są funkcjami osobliwemi.

D o w ó d: Niech $\bar{E}(R)$ oznacza odchylenie górne funkcji addytywnej $F(R)$ o wahaniu skończonem; niech R_0 będzie dowolną figurą elementarną, ε — liczbą dodatnią. Dla każdej figury elementarnej $R' \subset R_0$ takiej, iż

$$|R'| < \varepsilon,$$

mamy:

$$\bar{E}_\varepsilon(R_0) \geqslant F(R') + \bar{E}(R_0 \dot{-} R'). \tag{5}$$

R' ustalić można tak, aby:

$$F(R') > \bar{E}_\varepsilon(R_0) - \varepsilon.$$

Stąd oraz z (5):

$$\bar{E}(R_0 \dot{-} R') < \varepsilon.$$

Funkcja $\bar{E}(R)$ spełnia przeto warunek (A) twierdzenia 5, a więc jest osobliwa.

Podobnie zupełnie dowodzi się, iż odchylenie dolne rozważanej funkcji jest funkcją osobliwą. Stąd zaś już — na zasadzie twierdzenia poprzedniego — wynika, iż osobliwemi są odchylenie bezwzględne $E(R) = \bar{E}(R) - \underline{E}(R)$, oraz funkcja osobliwości $S(R) = \bar{E}(R) + \underline{E}(R)$.

T w i e r d z e n i e 8. Dla każdych dwu funkcji monotonicznych nieujemnych F_1 i F_2 mamy:

$$E(F_1 + F_2; R) = E(F_1; R) + E(F_2; R). \tag{6}$$

Dowód: Niech $F = F_1 + F_2$. Ze względu na nieujemność obydwu funkcji F_1, F_2 mamy dla każdych dwu figur elementarnych R_1, R_2:

$$F(R_1 + R_2) \geqslant F_1(R_1) + F_2(R_2),$$

a więc dla każdej figury elementarnej R i każdego $\varepsilon > 0$:

$$\bar{E}_{2\varepsilon}(F; R) \geqslant \bar{E}_\varepsilon(F_1; R) + \bar{E}_\varepsilon(F_2; R),$$

a więc również, skoro $\varepsilon \to 0$:

$$\bar{E}(F; R) \geqslant \bar{E}(F_1; R) + \bar{E}(F_2; R). \tag{7}$$

Skądinąd, dla każdych dwu funkcji addytywnych F_1, F_2 ma miejsce związek:

$$\bar{E}(F_1 + F_2; R) \leqslant \bar{E}(F_1; R) + \bar{E}(F_2; R),$$

zatem żądana równość (6) wynika z nierówności (7).

Twierdzenie 9. Każda funkcja addytywna o wahaniu skończonem jest sumą swej funkcji osobliwości oraz pewnej funkcji bezwzględnie ciągłej. Rozkład taki jest jedynym sposobem przedstawienia funkcji jako sumy funkcji osobliwej oraz funkcji bezwzględnie ciągłej.

Dowód: Niech $F(R)$ będzie funkcją o wahaniu skończonem i niech $\overline{W}(R)$, $\underline{W}(R)$, $\bar{E}(R)$, $\underline{E}(R)$ oznaczają odp. jej wahania i odchylenia. Połóżmy:

$$\bar{\Phi}(R) = \overline{W}(R) - \bar{E}(R). \tag{8}$$

Ponieważ stale $\overline{W}(R) \geqslant \bar{E}(R)$, przeto $\bar{\Phi}(R)$ jest funkcją monotoniczną, nieujemną i na zasadzie twierdzenia poprzedniego

$$E(\overline{W}; R) = E(\Phi; R) + E(\bar{E}; R). \tag{9}$$

Ale (tw. tw. 2, 7):

$$E(\overline{W}; R) = \bar{E}(F; R) = \bar{E}(\bar{E}; R) = E(\bar{E}; R),$$

zatem z (9):

$$E(\bar{\Phi}; R) = 0,$$

a więc funkcja $\bar{\Phi}$ jest bezwzględnie ciągła.

Podobnie, kładąc:

$$\underline{\Phi}(R) = \underline{W}(R) - \underline{E}(R), \tag{10}$$

stwierdzamy, iż $\underline{\Phi}(R)$ jest funkcją bezwzględnie ciągłą.

Niech teraz: $\Phi(R) = \overline{\Phi}(R) + \underline{\Phi}(R)$; funkcja Φ jest tedy bezwzględnie ciągła i równości (8) i (10), przez dodanie ich stronami, dają:

$$\begin{aligned} F(R) &= \overline{W}(R) + \underline{W}(R) = \Phi(R) + \overline{E}(R) + \underline{E}(R) \\ &= \Phi(R) + S(R), \end{aligned} \tag{11}$$

co stanowi żądany rozkład funkcji $F(R)$.

Jest to jedyny rozkład funkcji na sumę funkcji bezwzględnie ciągłej i osobliwej. W samej rzeczy, załóżmy, iż ma miejsce inny jeszcze taki rozkład:

$$F(R) = \Phi_1(R) + S_1(R); \tag{12}$$

odejmując tę równość od (11), otrzymujemy:

$$\Phi(R) - \Phi_1(R) = S_1(R) - S(R),$$

$\Phi - \Phi_1$ jest funkcją bezwzględnie ciągłą, zaś $S_1 - S$ (tw. tw. 7, 6) funkcją osobliwą. Równość ta może być tedy spełniona jedynie w przypadku, gdy obie jej strony tożsamościowo znikają. Rozkład (12) jest tedy identyczny z rozkładem (11), c. b. d. d.

Rozkład funkcji addytywnej o wahaniu skończonem na sumę funkcji bezwzględnie ciągłej i funkcji osobliwej (która jest — w myśl ostatniego twierdzenia — zarazem funkcją osobliwości funkcji danej) nazywać będziemy **drugim rozkładem kanonicznym** funkcji albo **rozkładem Lebesgue'a**.

Definicję funkcji osobliwości funkcji o wahaniu skończonem zawdzięczamy Lebesgue'owi [1]), termin: **funkcja osobliwa** (f. singulière) wprowadził de la Vallée-Poussin, który przez rozważanie ogólnych funkcji zbioru pogłębił i wyjaśnił właściwy sens rozkładu Lebesgue'a dla teorji całki [2]). Obydwaj wymienieni Autorowe posługują się zresztą dla wyprowadzenia rozkładu kanonicznego rozwiniętą już uprzednio tą teorją.

W wykładzie naszym nadaliśmy charakter elementarny definicjom funkcji osobliwej i funkcji osobliwości, oraz uzasadnieniu rozkładu kanonicznego funkcji,

---

[1]) Lebesgue, *Intégration des fonctions discontinues, Ann. Éc. Norm.* 1910.

[2]) Por. de la Vallée-Poussin. (*l. c.* p. 94).

zamierzając z kolei oprzeć się na tym rozkładzie w rozważaniach dalszych, tyczących się całki.

Jako prosty przykład funkcji ciągłej monotonicznej i osobliwej służyć może — w dziedzinie funkcji figury elementarnej na płaszczyźnie — funkcja, którą podaliśmy na końcu § 12 jako przykład funkcji monotonicznej, nie będącej funkcją bezwzględnie ciągłą.

Analogiczny przykład na linji prostej (lub — co jest równoważne — w dziedzinie funkcji ciągłych jednej zmiennej rzeczywistej) podany będzie w rozdz. III (§ 8).

Funkcje jednej zmiennej rzeczywistej.

§ 14. Najważniejsze z twierdzeń i definicji tego rozdziału podane były początkowo w innej nieco formie; odnosiły się mianowicie nie do funkcji addytywnych przedziału (lub—co jest równoważne — figury elementarnej), lecz do funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.

Można jednak łatwo ustalić między funkcjami jednej zmiennej rzeczywistej a funkcjami addytywnemi przedziału linjowego pewną odpowiedniość, która czyni równoznacznem rozważanie tych dwu klas funkcji.

Niech mianowicie $f(x)$ będzie dowolną funkcją rzeczywistą, określoną w przedziale I_0 i przyjmującą tylko wartości skończone. Nazwiemy p r z y r o s t e m funkcji $f(x)$ na dowolnym przedziale $I = (a, b)$, zawartym w I_0, różnicę: $f(b) - f(a)$. Określone w ten sposób wyrażenie jest pewną funkcją addytywną przedziału linjowego $I \subset I_0$, przyporządkowaną jednoznacznie funkcji $f(x)$. Odwrotnie, skoro dana jest dowolna funkcja addytywna przedziału, $F(I)$, wówczas określona jest temsamem, z dokładnością do stałej addytywnej, funkcja $f(x)$, której przyrosty na przedziałach I pokrywają się z wartościami odpowiedniemi funkcji $F(I)$.

Łatwo zauważyć, iż funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziałe I_0 w sensie zwykłej definicji C a u c h y'ego, wtedy i tylko wtedy, jeśli przyrost jej jest funkcją ciągłą przedziału w sensie definicji, którą podaliśmy wyżej w § 7. Podobnież stwierdzamy natychmiast, iż o s c y l a c j a przyrostu funkcji $f(x)$ w jakimś przedziale I pokrywa się z różnicą kresów—górnego i dolnego—funkcji $f(x)$ w przedziale I. Liczbę tę będziemy nazywali również o s c y l a c j ą funkcji $f(x)$ w I; podobnie, jak oscylację funkcji przedziału, oznaczać się ją będzie przez $O[f; I]$.

Przyjmiemy dalej następujące definicje: przez w a h a n i e g ó r n e, d o l n e, b e z w z g l ę d n e, o d c h y l e n i e g ó r n e i t. d.

na jakimś przedziale I funkcji zmiennej rzeczywistej $f(x)$ rozumieć będziemy odp. wahanie górne, dolne, bezwzględne, odchylenie górne i t. d. przyrostu funkcji $f(x)$ na tym przedziale. Dla oznaczenia tych liczb używać będziemy symboli analogicznych do tych, które ustalone zostały dla funkcji addytywnych, t. j. $\overline{W}(f; I)$, $\underline{W}(f; I)$, $W(f; I)$, $\overline{E}(f; I)$ i t. d.

Jeśli wahania funkcji $f(x)$ są skończone, funkcja $f(x)$ nazywa się funkcją o wahaniu skończonem, jeśli odchylenia jej w jakimś przedziale znikają, wówczas nazywa się ciągłą bezwzględnie w tym przedziale. Widoczne jest, iż, zgodnie z tą definicją, funkcja $f(x)$ jest wtedy i tylko wtedy funkcją o wahaniu skończonem, wzgl. ciągłą bezwzględnie, w jakimś przedziale, gdy jej przyrost jest funkcją przedziału o wahaniu skończonem, wzgl. ciągłą bezwzględnie, w tym przedziale.

Jak zaznaczyliśmy na początku tego §, definicje funkcji o wahaniu skończonem oraz funkcji bezwzględnie ciągłej ustalone były pierwotnie dla funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, później zaś uogólnione zostały na funkcje addytywne przedziału (figury elementarnej) w przestrzeni o dowolnej ilości wymiarów.

Pojęcie funkcji o wahaniu skończonem wprowadzone zostało do Analizy przez C. Jordana, w jego znakomitym wykładzie „*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*" [1])

Funkcje bezwzględnie ciągłe zostały w istocie wyróżnione po raz pierwszy jeszcze przez Lebesgue'a, który w odsyłaczu, u dołu str. 129, swych „*Leçons sur l'intégration*" (1904), zauważył, iż własność, którą posługujemy się dziś celem określenia funkcji ciągłej bezwzględnie, stanowi warunek konieczny i dostateczny na to, aby funkcja była całką nieoznaczoną w sensie ustalonej przez Lebesgue'a definicji. Termin „funkcja bezwzględnie ciągła" został wprowadzony dopiero nieco później przez G. Vitali'ego[2]).

Zauważyliśmy już wyżej (§ § 9, 12), iż każda kombinacja linjowa dwu funkcji addytywnych o wahaniu skończonem, resp. ciągłych bezwzględnie, jest funkcją o wahaniu skończonem, resp. ciągłą bezwzględnie. Uwaga ta zachowuje się oczywiście dla funkcji zmiennej rzeczywistej, nadto jednak możemy ją rozszerzyć w tym przypadku łatwo na iloczyn dwu takich funkcji.

Niech, w tym celu, $F(x)$ i $G(x)$ będą dwiema funkcjami o wahaniu skończonem w przedziale (a, b). Jak łatwo zauważyć, każda funkcja o wahaniu skończonem w jakimś przedziale jest

---

[1]) Ostatnie wydanie tego dzieła (t. I) ukazało się w r. 1909.

[2]) Vitali, *Atti Accad. Torino*, t. 40, (1905), p. 1021.

ograniczona w tym przedziale, i istnieje temsamem liczba skończona M, ograniczająca z góry wartości bezwzględne funkcji $F(x)$ i $G(x)$ jednocześnie.

Niech teraz

$$H(x) = F(x) . G(x)$$

i niech W, W_1, W_2 oznaczają odp. wahania bezwzględne funkcji H, F, G na (a, b) oraz E, E_1, E_2 odchylenia bezwzględne tych trzech funkcji na tym samym przedziale.

Mamy dla każdego układu niezachodzących na siebie przedziałów (a_i, b_i) zawartych w (a, b):

$$\sum_i [H(b_i) - H(a_i)] = \sum_i [F(b_i) F(a_i) - G(b_i) G(a_i)]$$
$$\leqslant M \left[\sum_i |F(b_i) - F(a_i)| + \sum_i |G(b_i) - G(a_i)| \right],$$

skąd:

$$W \leqslant M . (W_1 + W_2),$$

$$E \leqslant M . (E_1 + E_2).$$

Z dwu tych nierówności wynika natychmiast, iż jeśli *funkcje* $F(x)$ i $G(x)$ *są o wahaniu skończonem, resp. bezwzględnie ciągłe, wówczas iloczyn ich jest również funkcją o wahaniu skończonem, resp. funkcją bezwzględnie ciągłą.*

Na zakończenie tego § podamy jeszcze pewne proste, ale często pożyteczne twierdzenie, orzekające, iż *każda funkcja zmiennej rzeczywistej o wahaniu skończonem posiada tylko conajwyżej przeliczalną mnogość punktów nieciągłości*[1]). Ze względu na twierdzenie Jordana (§ 11) o pierwszym rozkładzie kanonicznym funkcji o wahaniu skończonem, wystarczy udowodnić wymienione twierdzenie tylko dla funkcji monotonicznej niemalejącej.

Niech tedy H oznacza mnogość punktów nieciągłości funkcji monotonicznej niemalejącej $F(x)$. Oznaczając, jak zwykle, przez $F(a-0)$, $F(a+0)$ odp. granice lewostronną i prawostronną funkcji

---

[1]) Twierdzenie to możnaby — rozmaitemi zresztą sposobami — rozszerzyć na funkcje addytywne przedziału w przestrzeni dowolnej; pomijamy te — łatwe dość — uogólnienia, ponieważ nie będą nam w dalszym ciągu tego wykładu potrzebne; czytelnik znajdzie je np. w podręczniku Hahna (*R. F.*).

$F(x)$ w punkcie a, możemy każdemu punktowi $a \epsilon H$ przyporządkować liczbę wymierną $r(a)$ taką, iż:

$$F(a-0) < r(a) < F(a+0).$$

Łatwo zauważyć, ze względu na monotoniczny charakter funkcji $F(x)$, iż dwum różnym punktom $a, b \epsilon H$ odpowiadają wówczas dwie różne liczby wymierne $r(a), r(b)$. Ponieważ zaś zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny, przeto temsamem przeliczalna jest mnogość H, co należało uzasadnić.

ROZDZIAŁ II.

Miara Lebesgue'a. Zbiory mierzalne, funkcje mierzalne.

Uwagi wstępne.

§ 1. Uważajmy dowolną przestrzeń euklidesową, — dla ustalenia terminologji — płaszczyznę. Geometrja elementarna przyporządkowuje jednoznacznie pewnej klasie zbiorów o prostej strukturze określone liczby, które nazywa „polami“ tych zbiorów. „Pole“ jest tedy pewną funkcją zbioru, określoną w zakresie „figur geometrji elementarnej“. Zakres ten nie jest w zwykłych wykładach geometrji elementarnej całkiem wyraźnie sprecyzowany, obejmując, w każdym razie, zawsze wielokąty i, ogólniej, części płaszczyzny, ograniczone przez skończoną liczbę linji wielokątnych; należą doń tedy, w szczególności, zbiory, które w rozdziale poprzednim nazwaliśmy figurami elementarnemi. Pole, które przyporządkowaliśmy tam każdej figurze elementarnej, pokrywa się z jej polem, rozumianem w sensie geometrji zwykłej.

Poza temi zbiorami, geometrja elementarna, przy pomocy dodatkowych definicji, przyporządkowuje p o l a jeszcze i innym figurom (kołu, elipsie i t. d.). Dopiero jednak badaniom ogólnym, należącym do zakresu ogólnej teorji mnogości, zawdzięczamy rozszerzenie, w sposób systematyczny, pojęcia pola na bardziej rozległe klasy zbiorów. Jest uwagi godne, iż badania te, z których wyłoniły się spółczesne teorje m i a r y z b i o r ó w, rozwinęły się nietyle z zagadnień natury geometrycznej, ile w związku z potrzebami Analizy, a — przedewszystkiem — z dążeniem do uogólnienia i sprecyzowania pojęcia całki oznaczonej [1]).

---

[1]) Znajduje to swój wyraz niejednokrotnie w terminologji: du B o i s - R e y m o n d nazywa zbiorami c a ł k o w a l n e m i zbiory, które nazywamy dziś zbiorami miary zero według J o r d a n a.

W rozwoju swym teorje miary ulegały pewnym modyfikacjom równolegle do zmieniających się wymagań teorji funkcji. Dla nas, w wykładzie tym, najważniejszą rolę odgrywać będzie teorja zbudowana przez Lebesgue'a — i jej poświęcony będzie niniejszy rozdział. Należy jednak zaznaczyć, iż dla Lebesgue'owskiej teorji miary przygotowały już grunt właściwy dawniejsze teorje, związane z nazwiskami Cantora, Stolza, Harnacka, du Bois-Reymonda, Peano, Jordana i in., dziś już wszakże posiadające znaczenie raczej tylko historyczne. W szczególności, na rozwój pomysłów Lebesgue'a wpłynęły w sposób decydujący idee Jordana.

Dla wyjaśnienia postępu dokonanego przez Lebesgue'a zatrzymamy się chwilę w celu zestawienia teorji lebesgue'owskiej z teorją Jordana.

Sposób, w jaki geometrja elementarna określa pole (objętość) figur nieprostolinjowych, polega, jak wiadomo, na aproksymowaniu ich przez pewne — ad hoc zbudowane — ciągi figur, których pola (objętości) zostały zdefinjowane już wcześniej. Metodę tę podejmują również ogólne teorje miary, usuwając z niej jednak pewną dowolność i sztuczność w wyborze sposobów aproksymacji, przez ustalenie jednego, a właściwie dwu, sposobów aproksymacji dla wszystkich zbiorów jednocześnie. Dwa te sposoby aproksymacji w ogólnej teorji miary zbiorów odpowiadają dwum, znanym i stosowanym w geometrji elementarnej, metodom przybliżania figur (brył) krzywolinjowych (krzywopowierzchniowych): od wnętrza przez pewne figury wpisane, i od zewnątrz— przez figury opisane. W przypadkach, rozważanych w geometrji elementarnej, dwie te metody dają w rezultacie te same wartości na pole (wzgl. objętość), które obliczamy. Zgodność ta znika wszakże z chwilą, gdy przechodzimy do zbiorów dowolnych: stąd konieczność — w teorjach ogólnych — rozróżniania dwu „miar", zwanych najczęściej miarą „zewnętrzną" i „wewnętrzną".

W teorji miary Peano-Jordana miarę zewnętrzną dowolnego zbioru ograniczonego E określa się w sposób następujący: niech $\{S_n\}$ będzie dowolnym ciągiem regularnym siatek kwadratowych; oznaczamy przez σ_n sumę pól tych wszystkich kwadratów siatki S_n, które zawierają punkty zbioru E. Liczby $\{\sigma_n\}$ tworzą ciąg monotoniczny, nierosnący, a więc zbieżny do pewnej liczby σ, która jest — ex definitione — miarą zewnętrzną zbioru E[1]).

Określona w ten sposób liczba σ zależy *pozornie* od sposobu ustalenia ciągu regularnego siatek $\{S_n\}$. To też dogodnie jest zdefinjować tę liczbę w sposób nieco odmienny, lecz, jak łatwo zauważyć, całkowicie równoważny: rozważamy dla danego zbioru ograniczonego E wszystkie układy $\mathfrak{S}$ skończonej liczby prostokątów, pokrywających łącznie zbiór E; oznaczamy dla każdego takiego układu $\mathfrak{S}$ przez $\sigma(\mathfrak{S})$ sumę pól wszystkich prostokątów, należących do układu $\mathfrak{S}$; dolny kres σ wszystkich liczb $\sigma(\mathfrak{S})$ jest wówczas miarą zewnętrzną zbioru E w sensie Peano-Jordana.

---

[1]) Definicja ta różni się nieco formalnie od definicji oryginalnych Peano i Jordana, jest jednak im równoważna.

Szczęśliwy pomysł Lebesgue'a polegał na usunięciu z powyższej definicji zastrzeżenia, iż, pokrywające rozważany zbiór E, rodziny prostokątów mają być zawsze skończone; ta drobna napozór modyfikacja, zastępująca skończone rodziny $\mathfrak{S}$ przez „skończone lub przeliczalne", stanowiła jednak krok decydujący w rozwoju teorji miary; jej konsekwencją okazały się istotnie nowe własności, których nie posiadała żadna z miar dawniejszych i które pozwoliły stać się mierze lebesgue'owskiej podstawą doniosłego uogólnienia dawnych metod całkowania.

Miara Lebesgue'a, w ciągu ostatnich lat kilkunastu, ulegała dalszym jeszcze uogólnieniom, polegającym na jej relatywizacji w różnych kierunkach. Miara Lebesgue'a polega bowiem na rozszerzeniu na dowolne zbiory, w pewien określony sposób, „pola" kwadratu, wzgl. ogólniej — w przestrzeni $\mathfrak{R}_n$ — „objętości" n-wymiarowej kostki. Wychodząc z innych — aniżeli pole (długość, objętość) — funkcji przedziału, można dojść metodami analogicznemi (choć, niemniej, stosownie zmodyfikowanemi) do „miar" innych. Jeśli więc, jako funkcję podstawową, weźmiemy dowolną funkcję addytywną, nieujemną, wówczas — zamiast miary zewnętrznej Lebesgue'a — otrzymujemy jej uogólnienie w postaci pewnej funkcji zbioru, nazwanej przez de la Vallée-Poussin'a wagą zewnętrzną (poids extérieur); relatywizacja ta stanowić może podstawę naturalną dla t. zw. całki Stieltjesa—Lebesgue'a.

Inne znów uogólnienia otrzymujemy, określając funkcję podstawową przedziału jako równą długości jego przekątni; osiągamy wówczas — dla zbiorów położonych w dowolnej przestrzeni euklidesowej — liczbę, która jest uogólnieniem długości; w sposób podobny dochodzimy ogólnie do miary „n-wymiarowej" w przestrzeniach m-wymiarowych ($n \leqslant m$), która w przypadku $n = m$ pokrywa się ze zwykłą miarą Lebesgue'a. Piękne te uogólnienia zawdzięczamy Carathéodory'emu; pogłębił je i rozwinął, otrzymując zarazem nowe uogólnienia lebesgue'owskiej teorji funkcji, Bezikowicz.

Zakres tego podręcznika nie pozwoli omówić bliżej tych kwestji; czytelnik zechce się tedy zwrócić bezpośrednio do prac oryginalnych[1]).

Miara Lebesgue'a.

§ 2. Również i w dalszym ciągu (podobnie, jak w § poprzednim) rozważać będziemy wyłącznie zbiory w przestrzeni $\mathfrak{R}_2$, t. j. położone na płaszczyźnie. Czynimy to zresztą wyłącznie dla łatwiejszego sposobu wysłowienia twierdzeń i definicji; wszystkie rozważania tyczyć się będą w istocie w równej mierze linji prostej ($\mathfrak{R}_1$), jak i przestrzeni o wyższej liczbie wymiarów; chcąc

[1]) De la Vallée-Poussin, *l. l.* (Chap. VI) oraz *Trans. Americ. Math. Soc.*, t. 16, (1915).

Carathéodory, *Nachr. Gesellsch. Wissensch. Göttingen*, (1914), pp. 404–426.

Hausdorff, *Math. Annal.*, t. 79, (1918), pp. 157—79.

Sierpiński, *Fund. Math.*, t. 9, (1927), pp. 172—185.

Besicovitch, *Math. Annal.*, t. 98, (1928), pp. 422—464.

przejść do nich, należy tylko uczynić zmiany o charakterze formalnym i terminologicznym.

Niech $\mathfrak{S}$ będzie dowolnym skończonym lub przeliczalnym układem prostokątów; będziemy oznaczali przez $\sigma(\mathfrak{S})$ sumę pól prostokątów, należących do $\mathfrak{S}$; jest to oczywiście zawsze pewna liczba nieujemna, która może być zresztą równa $+\infty$.

Nazywamy miarą zewnętrzną zbioru E dolny kres wszystkich liczb $\sigma(\mathfrak{S})$, gdzie $\mathfrak{S}$ oznacza dowolny układ skończony lub przeliczalny prostokątów, pokrywających łącznie zbiór E; miarę tę oznaczamy przez $m_e(E)$[1]).

Pokażemy przedewszystkiem, iż miara zewnętrzna uogólnia w samej rzeczy pole przedziału, t. j., iż dla prostokąta, lub — ogólniej nieco — dla każdej figury elementarnej, pokrywa się z polem.

Niech tedy R będzie dowolną figurą elementarną i niech $\mathfrak{S}$ będzie dowolnym układem, skończonym lub przeliczalnym, prostokątów, pokrywających łącznie R. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Zastąpmy w układzie $\mathfrak{S}$ każdy prostokąt K przez inny, K^*, zawierający K wewnątrz, i taki przytem, iż:

(1) $$|K^*| \leqslant (1+\varepsilon)|K|.$$

Wnętrza otrzymanych w ten sposób prostokątów K^* stanowią pewien układ zbiorów otwartych, pokrywających łącznie R, a więc, na mocy twierdzenia Borela-Lebesgue'a (por. § 4, rozdz. poprzedniego), istnieje skończona liczba prostokątów $K^* - K_1^*, K_2^*, \ldots, K_n^*$ — takich, iż:

$$R \subset \sum_{i=1}^{n} K_i^*.$$

Z prostego tedy rozważania o charakterze elementarnym wynika, na mocy (1), iż

$$|R| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |K_i^*| \leqslant (1+\varepsilon)\,\sigma(\mathfrak{S}),$$

---

[1]) Znak m_e (wprowadzony przez Lebesgue'a) pochodzi od terminu francuskiego: mesure extérieure.

ponieważ zaś ε jest liczbą dowolną i $\mathfrak{S}$ dowolnym układem prostokątów, pokrywających R, przeto temsamem:

$$|R| \leqslant m_e(R). \tag{2}$$

Z drugiej strony, rozbijając R, w jakikolwiekbądź sposób, na skończoną liczbę niezachodzących na siebie prostokątów, otrzymujemy pewien, pokrywający R, układ $\mathfrak{S}_0$ prostokątów, przyczem $\sigma(\mathfrak{S}_0) = |R|$, skąd:

$$|R| \geqslant m_e(R),$$

co łącznie z (2) daje:

$$|R| = m_e(R).$$

Symbol $|\ |$ używany był dotychczas tylko dla figur elementarnych. W dalszym ciągu będziemy używali dogodnego tego sposobu znakowania dla dowolnych zbiorów, rozumiejąc ogólnie przez $|E|$ miarę zewnętrzną zbioru E, t. j. liczbę $m_e(E)$; wynik, powyżej ustalony, umożliwia to uogólnienie.

Zbiory o mierze zewnętrznej równej zeru nazywać będziemy krótko zbiorami miary zero. W przypadku, gdy wszystkie punkty pewnego zbioru E, z wyjątkiem tylko mnogości punktów, tworzących zbiór miary zero, posiadają pewną własność (W), mówimy (wraz z Lebesgue'm), iż prawie wszystkie punkty zbioru E posiadają własność (W), lub iż warunek (W) spełniony jest w zbiorze E prawie wszędzie.

Z definicji miary zewnętrznej wynika natychmiast, iż każdy zbiór skończony jest miary zero; z twierdzenia § następnego wynikać będzie, iż każdy zbiór przeliczalny jest również miary zero, co zresztą łatwo jest udowodnić bezpośrednio.

§ 3. *Twierdzenie 1. Dla każdego ciągu skończonego lub nieskończonego zbiorów* $\{E_n\}$

$$\left|\sum_n E_n\right| \leqslant \sum_n |E_n|. \tag{1}$$

Dowód. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Przyporządkujemy każdemu zbiorowi E_n taki, pokrywający go, układ $\mathfrak{S}_n$ prostokątów, iż

$$\sigma(\mathfrak{S}_n) \leqslant |E_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{2}$$

Niech:

$$\mathfrak{S} = \sum_n \mathfrak{S}_n.$$

Układ prostokątów $\mathfrak{S}$ pokrywa oczywiście sumę zbiorów E_n, mamy więc, na mocy (2)

$$\left|\sum_n E_n\right| \leqslant \sigma(\mathfrak{S}) \leqslant \sum_n \sigma(\mathfrak{S}_n) \leqslant \sum_n |E_n| + \varepsilon,$$

co, z uwagi na to, iż ε jest dowolną liczbą dodatnią, daje żądaną nierówność (1).

Twierdzenie 2. Dla każdego zbioru E i każdej liczby dodatniej ε istnieje zawsze taki zbiór otwarty G, iż

$$E \subset G \quad \text{i} \quad |G| \leqslant |E| + \varepsilon,$$

oraz taki zbiór G_δ, H, iż:

$$E \subset H \quad \text{oraz} \quad |H| = |E|.$$

Dowód. 1^0 Niech E będzie dowolnym zbiorem, ε dowolną liczbą dodatnią i $\mathfrak{S} = (K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots)$ takim układem przeliczalnym prostokątów, pokrywających łącznie E, iż:

$$(3) \qquad |E| \geqslant \sigma(\mathfrak{S}) - \frac{\varepsilon}{2} = \sum_n |K_n| - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Każdemu z prostokątów K_n możemy przyporządkować zawierający go wewnątrz prostokąt K_n^* w ten sposób, by:

$$(4) \qquad |K_n| > |K_n^*| - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Mamy wówczas, kładąc $G = \sum_n J(K_n^*)$,

$$E \subset \sum_n K_n \subset G,$$

i, z drugiej strony, z uwagi na (3) i (4):

$$|E| \geqslant \sum_n \left[|K_n^*| - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right] - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \sum_n |K_n^*| - \varepsilon \geqslant |G| - \varepsilon.$$

2⁰ Chcąc otrzymać z kolei żądany zbiór G_δ, przyporządkowujemy zbiorowi E, dla każdego n, taki zbiór otwarty G_n, iż:

$$E \subset G_n \quad \text{oraz} \quad |G_n| \leqslant |E| + \frac{1}{n},$$

co jest możliwe na zasadzie udowodnionej już części twierdzenia.

Mnogość

$$H = \prod_n G_n$$

jest oczywiście pewnym zbiorem G_δ, spełniającym żądane warunki.

§ 4. Z twierdzenia poprzedniego nie można bynajmniej wnioskować, że dla każdego zbioru E i każdej liczby $\varepsilon > 0$, istnieje taka mnogość otwarta G, iż:

$$(1) \qquad E \subset G \quad \text{oraz} \quad |G - E| < \varepsilon.$$

Dowodzi się, w samej rzeczy, iż istnieją zbiory E, które nie posiadają powyższej własności. Mimo to klasa zbiorów, spełniających rozważany warunek, jest nader rozległa, obejmując wszystkie mnogości o prostszej budowie, spotykane w zagadnieniach analizy. Zbiory te nazywamy m i e r z a l n e m i; zbiór E jest tedy m i e r z a l n y, jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór otwarty G, spełniający warunki (1) [1].

Miarę zewnętrzną zbioru mierzalnego E nazywa się wprost jego m i a r ą, oznaczając ją przez $m(E)$ (t. j. pomijając znaczek e w symbolu m_e); w dalszym ciągu, będziemy jednak używali zazwyczaj nadal znaku $|E|$ dla oznaczenia miary zewnętrznej, zarówno zbiorów mierzalnych, jak i niemierzalnych.

Jak wynika bezpośrednio z podanej powyżej definicji, wszystkie zbiory otwarte są mierzalne; widoczne jest również natychmiast (z uwagi na tw. 2), iż mierzalne są wszystkie zbiory miary zero. Pokażemy, że mierzalne są również wszystkie zbiory domknięte oraz iż najprostsze operacje — dodawania i mnożenia

[1]) Pierwszy przykład zbioru niemierzalnego podał V i t a l i (1905). Jakkolwiek dziś już rozporządzamy wielką ilością metod, prowadzących do zbiorów niemierzalnych, niemniej jednak wszystkie te metody opierają się na t. zw. aksjomacie wyboru Z e r m e l i i nie znamy dotąd przykładu e f e k t y w n e g o zbioru, któryby nie był mierzalny. Bliższe szczegóły: S i e r p i ń s k i, *L'Axiome de M. Z e r m e l o, Bull. Ac. Sc. Cracovie, A*, (1918), pp. 97—152.

ciągu zbiorów, oraz odejmowania — nie wyprowadzają poza klasę zbiorów mierzalnych.

Twierdzenie 3. Suma ciągu (skończonego lub przeliczalnego) zbiorów mierzalnych jest mierzalna.

Dowód. Niech $\{A_n\}$ będzie ciągiem zbiorów mierzalnych, $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, i ε dowolną liczbą dodatnią. Dla każdego n istnieje tedy zbiór otwarty G_n taki, iż:

$$A_n \subset G_n \quad \text{oraz} \quad |G_n - A_n| < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Kładąc

$$G = \sum_n G_n,$$

będziemy mieli

$$A \subset G$$

i, z uwagi na tw. 1,

$$|G - A| \leqslant \sum_n |G_n - A_n| \leqslant \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Zbiór A jest tedy mierzalny.

Udowodnimy teraz pewien lemmat, który później zresztą zostanie znacznie uogólniony.

Lemmat. Jeżeli F_1, F_2 są dwoma zbiorami domkniętemi, ograniczonemi i rozłącznemi, wówczas:

$$|F_1 + F_2| = |F_1| + |F_2|.$$

Dowód. Ponieważ zbiory F_1, F_2 są domknięte, ograniczone i rozłączne, przeto istnieje taka liczba dodatnia δ, iż dla każdej pary punktów x, y

(2) $\qquad x \in F_1,\ y \in F_2$ pociąga za sobą $\rho(x, y) \geqslant \delta$.

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią, i niech $\mathfrak{S}$ będzie takim układem prostokątów, pokrywających łącznie mnogość $F_1 + F_2$, iż

(3) $$\sigma(\mathfrak{S}) < |F_1 + F_2| + \varepsilon.$$

Możemy założyć oczywiście, iż rodzina $\mathfrak{S}$ składa się wyłącznie z prostokątów o średnicy mniejszej niż δ. Wówczas, żaden z prostokątów tej rodziny nie zawiera, z uwagi na (2), jednocześnie punktów obydwu zbiorów F_1 i F_2. Oznaczając tedy, przez $\mathfrak{S}_1$, wzgl. $\mathfrak{S}_2$, zbiór tych prostokątów rodziny $\mathfrak{S}$, które zawierają punkty zbioru F_1, wzgl. F_2, będziemy mieli:

$$\sigma(\mathfrak{S}) \geqslant \sigma(\mathfrak{S}_1) + \sigma(\mathfrak{S}_2),$$

i, ponieważ rodziny $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ pokrywają odp. całkowicie zbiory F_1 i F_2, zatem z uwagi na (3):

$$|F_1 + F_2| > \sigma(\mathfrak{S}) - \varepsilon \geqslant \sigma(\mathfrak{S}_1) + \sigma(\mathfrak{S}_2) - \varepsilon \geqslant |F_1| + |F_2| - \varepsilon.$$

Stąd zaś, skoro ε jest dowolną liczbą dodatnią:

$$|F_1 + F_2| \geqslant |F_1| + |F_2|,$$

a więc, na mocy tw. 1, wprost:

$$|F_1 + F_2| = |F_1| + |F_2|.$$

Twierdzenie 4. Wszystkie zbiory domknięte są mierzalne.

Dowód. Ponieważ każdy zbiór domknięty przedstawić można jako sumę ciągu zbiorów domkniętych i ograniczonych, przeto, z uwagi na twierdzenie 3, założyć możemy, iż zbiór F, którego mierzalność należy udowodnić, jest ograniczony.

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią i G takim zbiorem otwartym, iż:

(4) $$F \subset G \quad \text{i} \quad |G| < |F| + \varepsilon.$$

Zbiór

$$H = G - F$$

jest oczywiście również pewnym zbiorem otwartym i przedstawić go tedy można jako sumę ciągu niezachodzących na siebie prostokątów: $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ [1]).

---

[1]) Ciąg ten możemy określić w sposób następujący: niech $\{\mathfrak{P}_n\}$ będzie ciągiem regularnym siatek kwadratowych (por. § 5 rozdz. poprzedniego). Oznaczmy przez $\{K_n^1\}$ ciąg, skończony lub przeliczalny, tych kwadratów siatki $\mathfrak{P}_1$, które zawierają się w H, — przez $\{K_n^2\}$ ciąg, zawartych w H, tych kwadratów siatki $\mathfrak{P}_2$, które nie zawierają się w żadnym z kwadratów K_n^1 i t. d. Układ wszystkich kwadratów K_n^i składa się, jak łatwo zauważyć, z kwadratów, niezachodzących na siebie i pokrywających łącznie zbiór H.

Będziemy mieli dla każdego n

$$\sum_{i=1}^{n} K_i \times F = 0,$$

a więc, na mocy lemmatu poprzedniego oraz (4),

$$\left|\sum_{i=1}^{n} K_i\right| + |F| = \left|\sum_{i=1}^{n} K_i + F\right| < |G| < |F| + \varepsilon,$$

skąd

$$\sum_{i=1}^{n} |K_i| < \varepsilon, \quad \text{a więc} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |K_i| \leqslant \varepsilon$$

i

$$|G - F| = |H| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |K_i| \leqslant \varepsilon,$$

co, łącznie z (4), stwierdza mierzalność zbioru F.

Niech teraz A będzie dowolnym zbiorem mierzalnym i $B = CA$ jego uzupełnieniem. Dla każdej liczby naturalnej n istnieje zatem taki zbiór otwarty G_n, iż

$$A \subset G_n \quad \text{oraz} \quad |G_n - A| < \frac{1}{n}.$$

Kładąc tedy $F_n = C\,G_n$, otrzymujemy ciąg zbiorów domkniętych F_n takich, iż dla każdego n

(5) $$B \supset F_n \quad \text{i} \quad |B - F_n| = |G_n - A| < \frac{1}{n}.$$

Mamy tedy:

$$\left|B - \sum_{n=1}^{\infty} F_n\right| = 0,$$

a więc możemy położyć

(6) $$B = \sum_{n} F_n + Q,$$

gdzie Q jest pewnym zbiorem miary zero, a więc napewno mierzalnym. Ponieważ zaś, na mocy twierdzenia poprzedniego, mierzalny jest każdy zbiór domknięty, przeto z równości (6), z uwagi na twierdzenie 3, wynika mierzalność zbioru B, a więc uzupełnienia każdego zbioru mierzalnego.

Niech teraz B będzie dowolnym zbiorem mierzalnym; jego uzupełnieniem jest tedy również zbiór mierzalny, lub — co jest równoważne — B jest uzupełnieniem zbioru mierzalnego. Dla każdego n istnieje tedy zbiór domknięty F_n, spełniający warunek (5); odwrotnie, jeśli dla jakiegoś zbioru B, istnieje dla każdej liczby naturalnej n, zbiór domknięty F_n, spełniający warunek (5), wówczas spełniona jest a fortiori równość (6), gdzie Q jest pewnym zbiorem miary zero, — i mnogość B, jest, na mocy twierdzeń 3, 4 — mierzalna.

Udowodniliśmy w ten sposób dwa twierdzenia następujące:

Twierdzenie 5. Uzupełnienie zbioru mierzalnego jest zbiorem mierzalnym.

Twierdzenie 6. Na to, aby zbiór E był mierzalny, konieczne jest i wystarcza, aby dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istniał taki zbiór domknięty F, iż

$$F \subset E \quad \text{oraz} \quad |E - F| < \varepsilon. \text{[1]}$$

Twierdzenia 4 i 5 możemy jeszcze uzupełnić następującem twierdzeniem, które jest ich natychmiastową prawie konsekwencją:

Twierdzenie 7. Iloczyn ciągu zbiorów mierzalnych oraz różnica dwu zbiorów mierzalnych są zbiorami mierzalnemi.

Dowód. 1° Niech $\{A_n\}$ będzie ciągiem mnogości mierzalnych i

$$A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Wówczas:

$$A = C \sum_{n=1}^{\infty} C A_n,$$

i dzięki twierdzeniom 4 i 5, stwierdzamy kolejno mierzalność

[1]) Własność charakterystyczna zbiorów mierzalnych, wyrażona w tem twierdzeniu, uważana być może za odpowiednik definicji mierzalności: definicja, którą podaliśmy, mówi o pewnym sposobie aproksymacji zbiorów mierzalnych od zewnątrz, przez zawierające je zbiory otwarte, obecne zaś twierdzenie — o aproksymacji od wewnątrz, przez zbiory domknięte.

zbiorów CA_n, $\sum_n CA_n$, oraz $A = C\sum_n CA_n$.

2⁰ Druga część twierdzenia wynika natychmiast już z pierwszej, z uwagi na tw. 5 oraz równość

$$A - B = A . CB.$$

Ponieważ wszystkie zbiory otwarte są mierzalne, przeto z twierdzeń 3, 5, 6 wynika, iż mierzalne są również wszystkie zbiory G_δ oraz uzupełnienia ich, F_σ. Czytelnik, któremu znana jest ogólna definicja mnogości borelowskich, stwierdzi tu natychmiast, iż wszystkie te mnogości są mierzalne.

§ 5. *Twierdzenie 8.* 1⁰ *Miara sumy ciągu zbiorów mierzalnych rozłącznych równa jest sumie miar tych zbiorów.*

2⁰. *Miara granicy ciągu monotonicznego zbiorów mierzalnych o mierze skończonej równa jest granicy ciągu miar tych zbiorów.*

Dowód. 1⁰ Niech $\{A_n\}$ będzie ciągiem zbiorów mierzalnych rozłącznych, i

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{1}$$

Założymy najpierw, iż

a) każdy ze zbiorów A_n jest ograniczony.

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. W myśl twierdzenia 6 istnieje, dla każdego n, taki zbiór domknięty F_n, iż

$$F_n \subset A_n \quad \text{oraz} \quad |A_n - F_n| < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Mamy, na zasadzie lemmatu § 4, dla każdego m:

$$|A| \geqslant \left|\sum_{n=1}^{m} F_n\right| = \sum_{n=1}^{m} |F_n| \geqslant \sum_{n=1}^{m} |A_n| - \sum_{n=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^n};$$

przechodząc tedy do granicy, gdy $m \to \infty$, otrzymujemy

$$|A| \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| - \varepsilon$$

dla każdego $\varepsilon > 0$, co z uwagi na twierdzenie 1 (§ 3) daje równość

$$|A| = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|.$$

b) Możemy łatwo teraz usunąć chwilowe zastrzeżenie, iż zbiory A_n są ograniczone, przedstawiając każdy z nich jako sumę zbiorów mierzalnych, rozłącznych i ograniczonych, t. j. kładąc

$$A_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_n^k,$$

gdzie każdy ze zbiorów A_n^k jest ograniczony [1]); mamy wówczas:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_n^k,$$

a więc z uwagi na wynik już otrzymany:

$$|A| = \sum_n \sum_k |A_n^k| = \sum_n \left| \sum_k A_n^k \right| = \sum_n |A_n|,$$

co należało udowodnić.

2⁰. Niech $\{B_n\}$ będzie ciągiem monotonicznym zbiorów mierzalnych o mierze skończonej, i niech

$$B = \lim_n B_n.$$

Rozróżnimy dwa przypadki:

a) Rozważany ciąg jest wstępujący.

Wówczas:

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n = B_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (B_{n+1} - B_n),$$

a więc na mocy udowodnionej pierwszej części twierdzenia

---

[1]) Rozkład ten otrzymujemy np., kładąc ogólnie $A_n^k = A_n \cdot (S_k - S_{k-1})$, gdzie S_k oznacza koło o promieniu k i środku w początku układu dla $k \geqslant 1$, oraz zbiór pusty — dla $k = 0$.

$$|B| = |B_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |B_{n+1} - B_n| = |B_1| + \sum_{n=1}^{\infty} [\,|B_{n+1}| - |B_n|\,]$$
$$= \lim_n |B_n|,$$

c. b. d. d.

b) Rozważany ciąg jest zstępujący.

Wówczas:

$$B_1 = B + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n - B_{n+1}),$$

a więc, na mocy pierwszej części twierdzenia:

$$|B_1| = |B| + \sum_{n=1}^{\infty} |B_n - B_{n+1}| = |B| + \sum_{n=1}^{\infty} [\,|B_n| - |B_{n+1}|\,]$$
$$= |B| + |B_1| - \lim_n |B_n|,$$

skąd

$$|B| = \lim |B_n|,$$

co należało udowodnić.

§ 6. Twierdzenie ostatnie uogólnia się częściowo na zbiory dowolne t. j. niekoniecznie mierzalne; mamy mianowicie następujące

Twierdzenie 9. *Miara zewnętrzna sumy ciągu monotonicznego, wstępującego zbiorów równa jest granicy ciągu miar zewnętrznych tych zbiorów.*

Dowód. Niech $\{A_n\}$ będzie ciągiem wstępującym zbiorów

$$A = \lim_n A_n = \sum_n A_n;$$

należy udowodnić, iż $|A| = \lim_n |A_n|$, przyczem — ze względu na związek $A \supset A_n$, a więc $|A| \geqslant |A_n|$ — wystarczy pokazać tylko, iż

(1) $$|A| \leqslant \lim_n |A_n|.$$

Niech, w tym celu, $\{G_n\}$ będzie ciągiem zbiorów otwartych takich, iż dla każdego n:

(2) $$A_n \subset G_n \qquad \text{oraz} \qquad |A_n| \geqslant |G_n| - \frac{1}{n}.$$

Połóżmy:

$$H_n = \prod_{m=n}^{\infty} G_m .$$

Zbiory H_n tworzą ciąg wstępujący zbiorów G_δ, a więc mierzalnych; na zasadzie przeto twierdzenia poprzedniego (§ 5)

$$(3) \qquad \left|\sum_{n=1}^{\infty} H_n\right| = \lim_n |H_n| ;$$

ponieważ zaś, ze względu na (2), dla każdego n,

$$A_n \subset H_n \subset G_n , \quad A \subset \sum_{n=1}^{\infty} H_n , \quad |H_n| \geqslant |A_n| \geqslant |H_n| - \frac{1}{n},$$

otrzymujemy tedy z równości (3), związek

$$|A| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{\infty} H_n\right| = \lim_n |H_n| = \lim_n |A_n| ,$$

który zawiera żądaną nierówność (1).

§ 7. *Twierdzenie 10. Warunkiem koniecznym i dostatecznym mierzalności zbioru E jest każdy z trzech warunków następujących:*

(*A*) *Istnieje pewna mnogość G_δ, zawierająca zbiór E i różniąca się odeń conajwyżej o zbiór miary zero;*

(*B*) *Istnieje pewna mnogość F_σ, zawarta w zbiorze E i różniąca się odeń conajwyżej o zbiór miary zero;*

(*C*) (warunek Carathédory'ego). *Dla każdego zbioru Q*

$$|Q| = |Q \times E| + |Q - E| .$$

Dowód. Dwa pierwsze warunki są natychmiastowemi konsekwencjami — (*A*) — definicji zbiorów mierzalnych (§ 4), (*B*) — twierdzenia 6. Pozostaje tedy udowodnić tylko trzeci.

1°. Załóżmy, iż warunek ten jest spełniony dla pewnego zbioru E.

Niech S_n oznacza koło o promieniu n oraz środku w początku układu.

Dla każdego n istnieje (tw. 2, § 3) taki zbiór G_δ, H_n, iż

(1) $$E \times S_n \subset H_n \quad \text{oraz} \quad |E \times S_n| = |H_n|.$$

Ponieważ warunek (C) jest spełniony, przeto

$$|H_n| = |H_n \times E| + |H_n - E| \geqslant |S_n \times E| + |H_n - E|,$$

a więc ze względu na (1) oraz na $|H_n| < \infty$:

$$|H_n - E| = 0.$$

Kładąc tedy:

$$H = \sum_n H_n,$$

mamy również

$$|H - E| \leqslant \sum_n |H_n - E| = 0,$$

i mnogość H, zawierająca zbiór E, różni się od E conajwyżej o zbiór miary zero. Ponieważ zaś H, jako suma ciągu zbiorów G_δ, jest oczywiście zbiorem mierzalnym, przeto temsamem mierzalny jest również zbiór E.

2⁰. Zakładamy z kolei odwrotnie, iż zbiór E jest mierzalny. Niech Q będzie dowolnym zbiorem, H — pewną zawierającą go mnogością G_δ, taką, iż:

$$|H| = |Q|.$$

Na mocy twierdzenia 8 (§ 5), będziemy mieli wtedy:

$$|Q| = |H| = |H \times E| + |H - E| \geqslant |Q \times E| + |Q - E|,$$

ponieważ zaś oczywiście (tw. 1, § 3)

$$|Q| \leqslant |Q \times E| + |Q - E|,$$

przeto ostatecznie

$$|Q| = |Q \times E| + |Q - E|,$$

co należało udowodnić.

Warunek (C) podany został przez Carathéodory'ego w związku z ogólną, abstrakcyjną teorją miary, w której warunek ten służy dla definicji zbiorów mierzalnych (por. Carathéodory, *R. F.*, Kap. V, oraz Hahn, *R. F.*, Kap. VI, §§ 5—7).

Z warunku (C) wynika natychmiast następujące uogólnienie twierdzenia 8 (§ 5):

Twierdzenie 8 bis. 1° *Jeżeli* $\{E_n\}$ *jest ciągiem zbiorów mierzalnych, rozłącznych, wówczas dla każdego zbioru* Q

$$\left|Q \times \sum_n E_n\right| = \sum_n |Q \times E_n|.$$

2° *Jeżeli* $\{E_n\}$ *jest ciągiem monotonicznym zbiorów mierzalnych i* $E = \lim_n E_n$, *wówczas dla każdego zbioru* Q *o skończonej mierze zewnętrznej*

$$|Q \times E| = \lim_n |Q \times E_n|.$$

Dowód. Mamy istotnie, na mocy twierdzenia poprzedniego, dla każdego zbioru Q i każdych dwu zbiorów A, B mierzalnych i rozłącznych

$$|Q \times (A+B)| = |Q \times (A+B) \times A| + |[Q \times (A+B)] - A|$$
$$= |Q \times A| + |Q \times B|.$$

Stąd, przez indukcję, dla każdego ciągu $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ zbiorów mierzalnych, rozłącznych,

$$\left|Q \times \sum_{k=1}^{\infty} E_k\right| \geqslant \left|\sum_{k=1}^{n} (Q \times E_k)\right| = \sum_{k=1}^{n} |Q \times E_k|$$

dla każdego n; zatem

$$\left|Q \times \sum_{k=1}^{\infty} E_k\right| \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} |Q \times E_k|$$

i z uwagi na tw. 1 (§ 3)

$$\left|Q \times \sum_{k=1}^{\infty} E_k\right| = \sum_{k=1}^{\infty} |Q \times E_k|,$$

Druga część twierdzenia dowodzi się z kolei w ten sam sposób, jak analogiczna część tw. 8.

Możemy zaostrzyć teraz łatwo drugą część tw. 2 (§ 3):

Twierdzenie 11. Dla każdego zbioru E istnieje taki, zawierający go zbiór G_δ, H, iż dla dowolnego zbioru mierzalnego A

$$|E \times A| = |H \times A|.\text{[1]} \tag{2}$$

Dowód. Wystarczy oczywiście pokazać tylko, iż istnieje zbiór mierzalny $H \supset E$, spełniający warunek (2) dla każdej mnogości mierzalnej A; zbiór taki, możemy bowiem z kolei (tw. 10) zastąpić zawsze w równości (2) przez zawierający go zbiór G_δ, który różniłby się odeń conajwyżej o zbiór miary zero.

Zbiór dany E posiadać może miarę zewnętrzną nieskończoną. Przedstawimy go tedy przedewszystkiem jako sumę ciągu niemalejącego zbiorów E_n ograniczonych. Każdemu z tych zbiorów, E_n, przyporządkujemy zawierający go zbiór G_δ, K_n, taki, iż

$$|E_n| = |K_n|. \tag{3}$$

Niech

$$H_n = \prod_{m=n}^{\infty} K_m \supset E_n, \qquad H = \sum_n H_n.$$

Zbiór H, jako suma ciągu zbiorów G_δ, a więc zbiorów mierzalnych, jest również mierzalny. Powiadamy, iż spełnia warunek (1).

Niech, w tym celu, A będzie dowolnym zbiorem mierzalnym. Mamy wówczas, na mocy twierdzenia 10 (C) i z uwagi na (3) oraz na skończoność liczb $|E_n|$, $|H_n|$

$$|E_n \times A| = |E_n| - |E_n - A| \geqslant |H_n| - |H_n - A| = |H_n \times A|,$$

a więc, w myśl twierdzenia 8 (2^0),

$$|E \times A| \geqslant \lim_n |E_n \times A| \geqslant \lim_n |H_n \times A| = |H \times A|,$$

co, z uwagi na

$$E \subset H,$$

daje żądaną równość (2).

---

[1]) Jeśli A oznacza całą płaszczyznę, wówczas otrzymujemy drugą część twierdzenia 2.

Twierdzenie Vitali'ego.

§ **8.** W rozważaniach teorji funkcji rzeczywistych odgrywają wielokrotnie ważną rolę t. zw. twierdzenia o pokrywaniu zbiorów; do takich twierdzeń należy np. cytowane w rozdz. I (§ 4), twierdzenie Borela-Lebesgue'a. Zajmiemy się obecnie pewnem twierdzeniem tego typu, zwanem twierdzeniem Vitali'ego, które odgrywa zasadniczą rolę w teorji Lebesgue'a różniczkowalności i całkowalności funkcji (por. §§ 2, 3 rozdz. III).

Będziemy mówili, iż *rodzina kwadratów* $\mathfrak{F}$ *pokrywa w sensie Vitali'ego pewien zbiór E, jeśli dla każdego punktu* $x \in E$ *i dowolnej liczby* $\varepsilon > 0$, *istnieje zawsze w rodzinie* $\mathfrak{F}$ *kwadrat o średnicy* $< \varepsilon$, *zawierający punkt x.*

Z definicji tej wynika natychmiast, iż, jeśli zbiór E zawiera się w pewnym zbiorze otwartym G, i przez $\mathfrak{F}_1$ oznaczymy układ tych wszystkich kwadratów rodziny $\mathfrak{F}$, które zawierają się w G, wówczas rodzina $\mathfrak{F}_1$ pokrywa również zbiór E w sensie Vitali'ego.

Twierdzenie 12 (Vitali'ego)[1]. *Jeśli rodzina kwadratów* $\mathfrak{F}$ *pokrywa w sensie Vitali'ego zbiór ograniczony*[2] *E, wówczas istnieje zawsze ciąg, skończony albo przeliczalny, kwadratów rozłącznych rodziny* $\mathfrak{F}$: $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$, *taki, iż*

$$\left| E - \sum_{1}^{\infty} K_n \right| = 0.$$

Dowód. Niech H będzie dowolnym kwadratem, zawierającym wewnątrz zbiór E. Możemy założyć, nie zwężając ogólności twierdzenia, iż rodzina kwadratów $\mathfrak{F}$ zawiera się również całkowicie w kwadracie H.

Wybierzemy, przez indukcję, z rodziny tej ciąg kwadratów rozłącznych, które pokrywać będą prawie całkowicie mnogość E.

---

[1]) Sam Vitali podał dowód swego twierdzenia tylko dla mnogości linjowych (*Atti Ac. Torino*, t. 43, (1907/8)); uogólnienie na przestrzenie wyższego wymiaru dokonane zostało przez Lebesgue'a (*Ann. Éc. Norm.* (3), t. 27, (1910), p. 365).

Dowód, który podajemy w tekście, zawdzięczamy Banachowi (*Fund. Math.*, t. 5, (1924), p. 130).

[2]) Założenie ograniczoności zbioru nie jest istotne i może być łatwo usunięte.

W tym celu, niech K_1 oznacza dowolny kwadrat rodziny $\mathfrak{G}$; zakładając zaś, iż ustalonych zostało n pierwszych kwadratów rozłącznych $K_1, K_2, \ldots K_n$, oznaczymy przez r_n kres górny długości boków wszystkich tych kwadratów rozważanej rodziny, które nie posiadają punktów wspólnych z żadnym z wybranych już kwadratów K_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), i jako K_{n+1} ustalimy jakikolwiek kwadrat rozłączny z kwadratami K_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), o boku większym od $\frac{r_n}{2}\cdot$ Kwadrat taki istnieje zawsze, jeśli tylko kwadraty $K_1, K_2, \ldots, K_n$ nie pokrywają już same całkowicie zbioru E; w tym jednak przypadku, kwadraty te stanowiłyby same już ciąg skończony, spełniający wymagane warunki. Możemy przeto założyć, iż indukcja nasza nie urywa się dla żadnej wartości naturalnej n, t. j. określa pewien ciąg istotnie nieskończony kwadratów rozłącznych $\{K_n\}$; pokażemy, iż ciąg ten pokrywa prawie cały zbiór E.

Niech tedy

(1) $$P = E - \sum_{n=1}^{\infty} K_n$$

i załóżmy, iż

(2) $$|P| > 0.$$

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} |K_n| \leqslant |H|$$

jest widocznie zbieżny; oznaczając tedy, dla każdego n, przez ρ_n bok kwadratu K_n, oraz przez K_n^* — kwadrat spółśrodkowy z K_n o boku równym $5\rho_n$, możemy ustalić taką liczbę N, iż

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |K_n^*| = 25 \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} |K_n| < |P|.$$

Wówczas

$$\left| P - \sum_{n=N+1}^{\infty} K_n^* \right| > 0,$$

a więc istnieją napewno punkty zawarte w P, a nienależące do żadnego z kwadratów K_n^* dla $n \geqslant N+1$. Niech x_0 będzie dowolnym takim punktem.

Ponieważ x_0, należąc do P, znajduje się, na mocy (1), poza wszystkiemi kwadratami K_n, przeto przyporządkować mu można taki zawierający go kwadrat $K \varepsilon \mathfrak{G}$, iż

(3) $$K \times K_n = 0 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Powiadamy, iż kwadrat K musi mieć jednak punkty wspólne z jednym przynajmniej z kwadratów K_n. W samej rzeczy, w przypadku przeciwnym, mielibyśmy, oznaczając przez ρ bok kwadratu K, dla każdego n:

$$\rho \leqslant r_n < 2\,\rho_{n+1},$$

a więc, ze względu na $\lim\limits_n \rho_n = 0$, również $\rho = 0$, co jest oczywiście niemożliwe. Niech tedy n_0 będzie najmniejszą z wartości wskaźnika n, dla których

$$K \times K_n \neq 0.$$

Z uwagi na (3), mamy oczywiście $n_0 > N$, a więc kwadrat K posiada punkty, leżące zewnątrz kwadratu $K^*_{n_0}$, mianowicie punkt x_0. Wynika stąd natychmiast, jako, iż jednocześnie $K \times K_{n_0} \neq 0$,

$$\rho \geqslant 2\,\rho_{n_0} > r_{n_0-1}.$$

Z drugiej wszakże strony

$$K \times K_n = 0 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots, n_0 - 1,$$

a więc

$$r_{n_0-1} \geqslant \rho,$$

co sprzeczne jest z nierównością poprzednią. Założenie (2) prowadzi tedy do sprzeczności. Zbiór P jest przeto miary zero i temsamem ciąg $\{K_n\}$ spełnia żądane warunki.

Twierdzenie Vitali'ego stosuje się często w odmiennej nieco postaci, którą podamy jako następujący

Wniosek. Jeżeli rodzina kwadratów $\mathfrak{G}$ pokrywa w sensie Vitali'ego zbiór ograniczony E, wówczas, dla każdej liczby $\eta > 0$, istnieje w rodzinie $\mathfrak{G}$ taki skończony układ kwadratów $K_1, K_2, \ldots, K_p$, iż

(4) $$\sum_{n=1}^{p} |K_n| - \eta \leqslant |E| \leqslant \left| E \times \sum_{n=1}^{p} K_n \right| + \eta.$$

Dowód. Niech G będzie zbiorem otwartym, zawierającym E i takim, iż

$$|G| \leqslant |E| + \eta.$$

Możemy założyć, iż rodzina kwadratów $\mathfrak{C}$ mieści się całkowicie w G. Oznaczając tedy przez $\{K_n\}$ ciąg kwadratów rozłącznych, wybranych z $\mathfrak{C}$ w ten sposób, by

$$(5) \qquad \left|E - \sum_{n=1}^{\infty} K_n\right| = 0,$$

będziemy mieli przedewszystkiem

$$(6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |K_n| \leqslant |G| \leqslant |E| + \eta < +\infty.$$

Niech p będzie liczbą naturalną, dla której

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} |K_n| < \eta.$$

Otrzymujemy wówczas z (5)

$$|E| = \left|E \times \sum_{n=1}^{\infty} K_n\right| \leqslant \left|E \times \sum_{n=1}^{p} K_n\right| + \eta,$$

co, łącznie z (6), pokazuje, iż układ skończony kwadratów $K_1, K_2, \ldots, K_p$, czyni zadość żądanemu warunkowi (4).

Funkcje punktu.

§ 9. Będziemy mówili, iż $f(x)$ jest funkcją punktu w przestrzeni $\mathfrak{R}_n$, jeśli każdemu punktowi x tej przestrzeni odpowiada dokładnie jedna liczba — skończona, lub nieskończona określonego znaku ($+\infty$ lub $-\infty$). Będziemy rozważać najczęściej w dalszym ciągu funkcje, określone w całej przestrzeni, wzgl. na jakiejś figurze elementarnej.

Dwie funkcje, które różnią się conajwyżej w punktach, tworzących zbiór miary zero, nazywać się będą równoważne.

Wprowadzenie w zakres rozważań funkcji, przyjmujących również wartości nieskończone, nastręczać może pewne trudności w przypadku wykonywania działań elementarnych na tych funkcjach. Uogólnienie działań elementarnych na liczby nieskończone narzuca się jednak całkiem naturalnie w wielu przypadkach tak, że zbyteczne się staje precyzowanie tego uogólnienia w postaci oddzielnej definicji. Tak np. jasne jest, co rozumieć należy przez sumę $a+b$, gdy jedna z liczb a, b jest skończona, lub obydwie nieskończone, lecz jednakowego znaku, lub przez nierówności $a \geqslant b$, $a > b$ i t. d., gdy jedna, lub nawet obydwie, z tych liczb są nieskończone.

W przypadku, gdy wynik działania na „nieskończonościach" mógłby budzić jakiekolwiek wątpliwości, będzie należało domyślać się zawsze stosownych zastrzeżeń, choćby nawet zastrzeżenia te nie były explicite formułowane.

Tak np. gdy mowa jest o sumie dwu funkcji $f+\varphi$, należy zakładać, iż punkty nieskończoności różnych znaków tych dwu funkcji wzajemnie się wymijają.

W dalszym ciągu, naogół (choć niezawsze) będziemy mieli do czynienia tylko z takiemi funkcjami, które wartości nieskończone przyjmują wyłącznie w zbiorze miary zero.

Rozważanie funkcji punktu $f(x)$ w przestrzeni $\mathfrak{R}_n$ równoznaczne jest oczywiście rozważaniu funkcji $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ n zmiennych rzeczywistych.

Funkcje mierzalne.

§ 10. Zakładamy, iż ustalona jest przestrzeń $\mathfrak{R}_n$ (wzgl. jakiś zbiór pewnej przestrzeni), w której rozważamy funkcje punktu.

Jeśli $A(x)$ oznacza ogólnie pewien warunek, tyczący się punktów x rozważanej przestrzeni, wówczas symbol $\underset{x}{E}[A(x)]$ oznaczać będzie zbiór wszystkich punktów, spełniających warunek A. Np., jeśli $f(x)$ oznacza funkcję punktu, a — jakąkolwiek liczbę, wówczas

$$\underset{x}{E}[f(x) > a] \tag{1}$$

oznacza zbiór punktów x, w których $f(x) > a$.

Funkcję $f(x)$ nazywamy mierzalną, jeśli dla każdej liczby skończonej a, zbiór określony przez (1) jest mierzalny.

Zauważyć tu można łatwo, iż dla mierzalności funkcji $f(x)$ wystarczy już tylko, aby zbiór (1) był mierzalny dla liczb a wymiernych; w samej rzeczy, dla każdej liczby rzeczywistej a można określić ciąg monotoniczny, malejący liczb wymiernych $\{r_n\}$, zdążający do a. Wówczas:

$$E[f(x) > a] = \sum_{n=1}^{\infty} E[f(x) > r_n],$$

skoro zaś każdy ze zbiorów, występujących pod znakiem Σ, po prawej stronie równości, jest mierzalny, zatem (§ 4) mierzalna jest również ich suma, t. j. zbiór (1) dla dowolnej liczby a.

Wynika dalej natychmiast z definicji funkcji mierzalnej, iż każda funkcja równoważna funkcji mierzalnej jest również mierzalna. W samej bowiem rzeczy, jeśli wartości funkcji ulegną modyfikacji w zbiorze miary zero, wówczas, dla każdej liczby a, zbiór (1) zmieni się również tylko o zbiór miary zero.

Związki wreszcie:

$$\begin{aligned}
&\underset{x}{E}[f(x) \leqslant a] = C\underset{x}{E}[f(x) > a]\\
&\underset{x}{E}[f(x) \geqslant a] = \prod_{n=1}^{\infty}\underset{x}{E}\left[f(x) > a - \frac{1}{n}\right],\\
(2)\qquad &\underset{x}{E}[f(x) < a] = C\underset{x}{E}[f(x) \geqslant a],\\
&\underset{x}{E}[a < f(x) < b] = \underset{x}{E}[f(x) > a]\,.\,\underset{x}{E}[f(x) < b],\\
&\underset{x}{E}[f(x) > -\infty] = \sum_{n=1}^{\infty}\underset{x}{E}[f(x) > -n],
\end{aligned}$$

i t. d.

pokazują, iż dla funkcji mierzalnej $f(x)$ i dowolnej liczby a (wzgl. pary liczb a, b) zbiory, występujące po lewych stronach równości (2), są wszystkie mierzalne.

Udowodnimy teraz parę prostych twierdzeń o funkcjach mierzalnych, które pokazują, iż mierzalność jest własnością, zachowującą się przy elementarnych operacjach na funkcjach.

Twierdzenie 13. Dla każdych dwu funkcji mierzalnych $g(x)$, $h(x)$ zbiory

$$\underset{x}{E}[g(x) > h(x)], \qquad \underset{x}{E}[g(x) \geqslant h(x)], \qquad \underset{x}{E}[g(x) = h(x)]$$

są mierzalne.

Dowód. Twierdzenie wynika natychmiast ze wzorów:

$$\underset{x}{E}[g(x) > h(x)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \left\{ \underset{x}{E}\left[g(x) > \frac{n}{m}\right] \cdot \underset{x}{E}\left[h(x) < \frac{n}{m}\right] \right\}.$$

$$\underset{x}{E}[g \geqslant h] = C\underset{x}{E}[h > g],$$

$$\underset{x}{E}[g = h] = \underset{x}{E}[g \geqslant h] . \underset{x}{E}[h \geqslant g].$$

Twierdzenie 14. Jeśli $f(x)$ jest funkcją mierzalną, wówczas $|f(x)|^\alpha$ jest również funkcją mierzalną.

Dowód wynika ze wzoru:

$$\underset{x}{E}[|f(x)|^\alpha > a] = \underset{x}{E}[f(x) > a^{\frac{1}{\alpha}}] + \underset{x}{E}[f(x) < -a^{\frac{1}{\alpha}}],$$

który zachodzi dla każdego $a \geqslant 0$; dla $a < 0$ zbiór, stojący po lewej stronie równości, oznacza całą przestrzeń, a więc jest również mierzalny.

Twierdzenie 15. Kombinacja linjowa o stałych spółczynnikach oraz iloczyn dwu funkcji mierzalnych są mierzalne.

Dowód 1^0. Z wzorów:

$$\underset{x}{E}[A\,g(x) + B > a] = \underset{x}{E}\left[g(x) > \frac{a-B}{A}\right], \text{ dla } A > 0,$$

$$\underset{x}{E}[A\,g(x) + B > a] = \underset{x}{E}\left[g(x) < \frac{a-B}{A}\right], \text{ dla } A < 0,$$

które zachodzą dla każdej funkcji $g(x)$ i dowolnych liczb a, A, B $(A \neq 0)$, wynika, iż, jeśli $g(x)$ jest funkcją mierzalną, wówczas mierzalna jest również każda funkcja $A\,g(x) + B$.

2^0 Jeśli mierzalne są dwie funkcje $g(x)$ i $h(x)$, wówczas mierzalność ich kombinacji linjowej $A\,g + B\,h$ wynika — na podstawie 1^0 oraz tw. 13 — ze wzoru:

$$\underset{x}{E}[A\,g + B\,h > a] = \underset{x}{E}\left[g > -\frac{B}{A}h + \frac{a}{A}\right],$$

który ma miejsce dla każdego $A > 0$. Przypadek $A < 0$ rozstrzyga się analogicznie.

3° Jeśli funkcje g i h są mierzalne, wówczas mierzalność ich iloczynu wynika, na podstawie 2° i twierdzenia 14, z tożsamości:

$$gh = \frac{1}{4}[(g+h)^2 - (g-h)^2].\ ^{1)}$$

Twierdzenie 16. Kresy–górny $\sup\limits_n f_n(x)$ *i dolny* $\inf\limits_n f_n(x)$– *oraz granice–górna* $\limsup\limits_n f_n(x)$ *i dolna* $\liminf\limits_n f_n(x)$*–ciągu funkcji mierzalnych* $f_n(x)$ *są również funkcjami mierzalnemi.*

Dowód 1° Niech: $F(x) = \sup\limits_n f_n(x)$. Mierzalność funkcji $F(x)$ w przypadku, gdy wszystkie funkcje $f_n(x)$ są mierzalne, wynika z równości:

$$\underset{x}{E}[F(x) > a] = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{x}{E}[f_n(x) > a].$$

Przez zmianę znaku otrzymujemy dowód mierzalności kresu dolnego.

2° Niech: $F_n(x) = \sup[f_{n+1}(x), f_{n+2}(x), \ldots]$.
Wówczas: $\limsup\limits_n f_n(x) = \lim\limits_n F_n(x) = \inf\limits_n F_n(x)$. Na zasadzie 1° wynika już stąd mierzalność funkcji $\limsup\limits_n f_n(x)$.

Przez zmianę znaku funkcji $f_n(x)$ otrzymujemy mierzalność granicy dolnej.

W wielu zastosowaniach użyteczne będzie jeszcze następujące

Twierdzenie 17. Każda funkcja mierzalna nieujemna jest granicą monotonicznego niemalejącego ciągu funkcji mierzalnych, nieujemnych, skończonych i przyjmujących tylko skończoną liczbę wartości różnych.

Dowód. Niech $f(x)$ będzie dowolną funkcją mierzalną nieujemną. Połóżmy dla każdej wartości n naturalnej:

$$f_n(x) = \frac{i-1}{2^n}, \quad \text{jeśli:} \quad \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \quad (i = 1, 2, \ldots, n.2^n),$$

oraz

$$f_n(x) = n, \qquad \text{jeśli:} \quad f(x) \geq n.$$

[1]) Dowód ten wymaga w przypadku, gdy g i h przyjmują wartości nieskończone, drobnego uzupełnienia, które nie przedstawia trudności i które możemy pozostawić czytelnikowi.

Funkcje $f_n(x)$ tworzą widocznie ciąg monotoniczny niemalejący. Powiadamy, iż w każdym punkcie:

$$\lim_n f_n(x) = f(x).$$

W samej rzeczy, niech

1°. $f(x_0) < +\infty$. Mamy wówczas dla każdego $n > f(x_0)$

$$0 \leqslant f(x_0) - f_n(x_0) \leqslant \frac{1}{2^n},$$

zatem:

$$\lim_n f_n(x_0) = f(x_0).$$

2°. $f(x_0) = +\infty$. Wówczas, dla każdego n, $f_n(x_0) = n$, a więc

$$\lim_n f_n(x_0) = +\infty = f(x_0).$$

Wszystkie powyższe rozważania zachowują się, rzecz prosta, bez zmiany, jeśli zamiast funkcji, określonych w całej przestrzeni, rozważać funkcje, określone tylko w jakimś zbiorze mierzalnym, np. na figurze elementarnej.

Funkcje ciągłe, półciągłe.

§ 11. Niech $f(x)$ oznacza funkcję punktu, określoną w całej przestrzeni $\mathfrak{R}_m$, wzgl. tylko w jakimś zbiorze Z tej przestrzeni. Niech x będzie dowolnym punktem, należącym do zakresu, w którym funkcja jest zdefinjowana. Oznaczmy przez $K(x, r)$ koło[1]) o środku w punkcie x i promieniu $r > 0$. Oznaczymy dalej przez $M(f, x, r)$, wzgl. $m(f, x, r)$, kres górny, wzgl. dolny, wartości, jakie funkcja f przyjmuje w punktach położonych wewnątrz koła $K(x, r)$. Gdy $r \to 0$, liczby $M(f, x, r)$, $m(f, x, r)$ dążą monotonicznie do pewnych granic, które mogą być zresztą nieskończone. Nazwiemy granice te odp. maximum i minimum funkcji f w punkcie x, oznaczając je odp. przez $M(f; x)$, $m(f; x)$, — pomijając zresztą często znak f, jeśli mowa będzie o jednej ustalonej funkcji. Różnicę $M(f; x) - m(f; x)$ oznaczać będziemy przez $O(f; x)$ i nazywać oscylacją funkcji f w punkcie x.

Widoczne jest, iż w każdym punkcie x, w którym funkcja jest określona

(1) $$M(x) \geqslant f(x) \geqslant m(x).$$

---

[1]) Przyjmujemy i tu terminologię płaszczyzny, jakkolwiek rozważania tyczą się dowolnej przestrzeni.

Jeśli w jakimś punkcie x

$$M(x) = f(x), \quad \text{wzgl.} \quad f(x) = m(x),$$

wówczas funkcja f nazywa się w tym punkcie półciągłą z góry, wzgl. z dołu. Funkcja, która w jakimś punkcie jest półciągła z góry i z dołu jednocześnie, nazywa się ciągłą w tym punkcie.

Funkcja, która jest półciągła z góry, wzgl. z dołu, wzgl. ciągła, w każdym punkcie zbioru, w którym jest określona, nazywa się wprost półciągłą z góry, wzgl. z dołu, wzgl. ciągłą, w tym zbiorze.

Zgodnie z tą definicją funkcja ciągła może przyjmować wartości nieskończone. Jednakże w dalszym ciągu tego wykładu, mówiąc o funkcjach ciągłych na jakimś zbiorze, będziemy zwykle zakładali, iż funkcje te przyjmują wszędzie w rozważanym zbiorze wartości wyłącznie skończone.

Z definicji powyższych wynika natychmiast, iż, jeśli $g(x)$ jest funkcją półciągłą z góry (z dołu), wówczas funkcja $-g(x)$ jest półciągła z dołu (z góry); dalej, iż suma dwu funkcji półciągłych z góry (z dołu) jest również funkcją półciągłą z góry (z dołu); oczywiście, aby umożliwić dodawanie, musimy założyć, iż w żadnym punkcie funkcje, które dodajemy, nie osiągają wartości nieskończonych różnych znaków.

Będziemy mówili w dalszym ciągu, dla większej prostoty wysłowienia, o funkcjach półciągłych, określonych w całej przestrzeni; łatwo jednakże spostrzec, iż wszystkie rozważania tego § zachowują się bez zmian istotnych dla funkcji, określonych na dowolnych zbiorach domkniętych.

Z uwagi tej skorzystamy w przyszłości, ponieważ — niejednokrotnie — będzie się miało do czynienia z funkcjami, określonemi tylko na jakiejś figurze elementarnej.

Twierdzenie 18. Na to, aby funkcja $f(x)$ była półciągła z góry (wzgl. z dołu), konieczne jest i wystarcza, aby, dla każdej liczby rzeczywistej a, zbiór

$$(2) \qquad \underset{x}{E}\,[f(x) \geqslant a] \qquad (\text{wzgl. } \underset{x}{E}\,[f(x) \leqslant a])$$

był domknięty.

Dowód. Wystarczy oczywiście udowodnić twierdzenie nasze tylko dla funkcji półciągłych z góry; przejście do funkcji półciągłych z dołu uskutecznia się natychmiast przez zmianę znaku funkcji.

1⁰. Warunek jest *k o n i e c z n y*. Niech $f(x)$ będzie funkcją półciągłą z góry i niech x_0 będzie punktem skupienia zbioru $\underset{x}{E}[f(x) \geqslant a]$. Dla każdego zatem $r > 0$, koło $K(x_0, r)$ zawiera wewnątrz punkty zbioru $\underset{x}{E}[f \geqslant a]$, a więc: $M(x_0, r) \geqslant a$ i również: $M(x_0) \geqslant a$. Ponieważ zaś $M(x_0) = f(x_0)$, zatem $f(x_0) \geqslant a$ i punkt x_0 należy do rozważanego zbioru (2), który jest tedy domknięty.

2⁰ Warunek jest *w y s t a r c z a j ą c y*. Niech x_0 będzie dowolnym punktem oraz $\varepsilon > 0$. Połóżmy:

$$E(\varepsilon) = \underset{x}{E}[f(x) \geqslant f(x_0) + \varepsilon]. \tag{3}$$

Ze względu na warunek nasz, który — zakładamy — jest spełniony, zbiór $E(\varepsilon)$ jest domknięty dla każdego ε, ponieważ zaś nie zawiera oczywiście punktu x_0, przeto dla dostatecznie małego r koło $K(x_0, r)$ jest rozłączne ze zbiorem $E(\varepsilon)$. Mamy wtedy:

$$f(x_0) + \varepsilon > M(x_0, r) \geqslant M(x_0),$$

ponieważ zaś ε jest dowolną liczbą dodatnią, zatem:

$$f(x_0) \geqslant M(x_0),$$

co — ze względu na (1) — daje:

$$f(x_0) = M(x_0).$$

W przypadku $f(x_0) = -\infty$ druga część dowodu wymaga modyfikacji formalnej. We wzorze (3) należy podstawić na miejsce $f(x_0) + \varepsilon$ liczbę $-n$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną. Otrzymamy wówczas:

$$M(x_0) = f(x_0) = -\infty.$$

W przypadku $f(x_0) = +\infty$ równość: $M(x_0) = f(x_0) = +\infty$ jest oczywista jako konsekwencja (1).

W n i o s e k. Każda funkcja półciągła (a więc, w szczególności, funkcja ciągła) jest mierzalna.

Istotnie bowiem, na zasadzie twierdzenia poprzedniego, zbiory $\underset{x}{E}[f(x) \geqslant a]$ są dla każdej funkcji półciągłej z góry domknięte a więc mierzalne. Temsamem mierzalne są zbiory

$$\underset{x}{E}[f(x) > a] = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{x}{E}\left[f(x) \geqslant a + \frac{1}{n}\right],$$

które są zbiorami F_σ.

Pojęcie półciągłości wprowadzone zostało do Analizy przez R. Baire'a, w jego Tezie doktorskiej (*Ann. di Matematica*, (3), t. 3. 1899). Ograniczyliśmy się tu tylko do wskazania tych własności funkcji półciągłych, które użyteczne będą w dalszych zastosowaniach. Bliższe szczegóły o funkcjach półciągłych i ich uogólnieniach znajdzie czytelnik w dziełach Hahna (*R. F.*, rozdz. II), Hausdorffa (*M.* II, rozdz. IX), Sierpińskiego (*F. A.*, rozdz. II).

Badania lat ostatnich podkreśliły rolę pojęcia półciągłości również i w tych działach Analizy, które nie należą już do właściwej teorji funkcji zmiennej rzeczywistej, np. w rachunku warjacyjnym (por. L. Tonelli, *Calcolo delle Variazioni*. 1921).

Twierdzenie Egoroff'a.

§ 12. Rozdział ten zakończy parę twierdzeń, które — należąc już dziś do rezultatów klasycznych teorji — odegrały w rozwoju jej ważną rolę. Dwa pierwsze z tych twierdzeń — twierdzenia Egoroff'a i Łuzina — zapoczątkowały serję badań nad budową ogólnej funkcji mierzalnej. Twierdzenie trzecie, które zawdzięczamy F. Riesz'owi, stało się podstawą zastosowań całki Lebesgue'a do ogólnej teorji rozwinięć ortogonalnych.

Metody dowodu trzech tych twierdzeń znajdują się ze sobą w widocznym związku. Rozpoczniemy od udowodnienia twierdzenia Egoroff'a.

Lemmat. *Jeśli Q jest pewnym zbiorem mierzalnym, o mierze skończonej, i jeśli $\{f_n(x)\}$ jest ciągiem funkcji mierzalnych i skończonych na Q, zbieżnym na tym zbiorze do pewnej funkcji mierzalnej i skończonej $f(x)$, wówczas dla każdej pary liczb dodatnich ε, η istnieje taka liczba N oraz taki zbiór P o mierze mniejszej od η, iż nierówność*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

zachodzi dla każdego wskaźnika $n > N$ i każdego punktu $x \in Q - P$.

Dowód. Oznaczymy ogólnie przez Q_m zbiór tych wszystkich punktów $x \in Q$, dla których nierówność

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

spełniona jest dla każdej liczby $n > m$. Określone w ten sposób mnogości Q_m są mierzalne i tworzą ciąg monotoniczny niemalejący, mamy bowiem dla każdego m

$$Q_m = \prod_{n=m+1}^{\infty} E_x[|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon].$$

Nadto, z uwagi na zbieżność ciągu $\{f_n(x)\}$ do $f(x)$ na całym zbiorze Q, mamy

$$Q = \sum_m Q_m,$$

skąd (§ 5, tw. 8):

$$|Q| = \lim_m |Q_m|,$$

lub:

$$\lim_m |Q - Q_m| = 0.$$

Mamy tedy dla pewnej wartości m_0:

$$|Q - Q_{m_0}| < \eta.$$

Kładąc $N = m_0$ i $P = Q_{m_0}$, otrzymujemy żądaną liczbę N i żądaną mnogość P.

Twierdzenie 19 (Egoroffa[1]). Jeżeli Q jest dowolnym zbiorem mierzalnym o mierze skończonej i $\{f_n(x)\}$ jest ciągiem funkcji mierzalnych i prawie wszędzie skończonych na Q, zbieżnym prawie wszędzie na tym zbiorze do pewnej funkcji mierzalnej i skończonej $f(x)$, wówczas, dla każdej liczby $\varepsilon > 0$, istnieje podzbiór domknięty F zbioru Q taki, iż funkcje $f_n(x)$ są zbieżne jednostajnie do $f(x)$ na F oraz

$$|Q - F| < \varepsilon.$$

Dowód. Usuwając ewent. ze zbioru Q zbiór miary zero, założyć możemy przedewszystkiem, iż funkcje $f_n(x)$ są wszystkie wszędzie skończone i wszędzie na Q zbieżne do funkcji $f(x)$. W myśl tedy poprzedniego lemmatu będziemy mogli dla każdej liczby m ustalić taki zbiór P_m, o mierze mniejszej od $\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$, oraz taki wskaźnik N_m, iż nierówność:

---

[1]) Egoroff, *Comptes Rendus*, t. 152, (1911), pp. 244—246.

(1) $$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^m}$$

spełniona jest dla każdego $n > N_m$ oraz każdego punktu $x \in Q - P_m$.

Niech:

$$Q' = Q - \sum_{m=1}^{\infty} P_m.$$

Będziemy mieli:

(2) $$|Q - Q'| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} |P_m| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z uwagi na nierówność (1), spełnioną dla $n > N_m$ we wszystkich punktach zbioru $Q' \subset Q - P_m$, ciąg $\{f_n(x)\}$ jest zbieżny jednostajnie na Q' do $f(x)$. Oznaczając tedy przez F podzbiór domknięty (§ 4, tw. 6) tego zbioru taki, iż

(3) $$|Q' - F| < \frac{\varepsilon}{2},$$

otrzymujemy żądany zbiór domknięty, ponieważ, z uwagi na (2) i (3),

$$|Q - F| < \varepsilon,$$

ciąg zaś $\{f_n(x)\}$, jako zbieżny jednostajnie na Q', jest tembardziej jednostajnie zbieżny na zbiorze $F \subset Q'$.

Twierdzenie Łuzina o funkcjach mierzalnych.

§ **13.** Niech Q będzie dowolnym zbiorem mierzalnym, ograniczonym, w dowolnej przestrzeni euklidesowej, i $f(x)$ dowolną funkcją, określoną w punktach tego zbioru. Będziemy mówili, iż funkcja $f(x)$ posiada na tym zbiorze własność (C), jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór domknięty $F \subset Q$, taki, iż

$$|Q - F| < \varepsilon,$$

funkcja zaś $f(x)$ jest ciągła i skończona wszędzie na F.

Łuzin udowodnił[1]), iż własność (C) jest równoważna mierzalności funkcji $f(x)$ na Q.

Udowodnimy najpierw jedną część tego twierdzenia w przypadku szczególnym.

[1]) Łuzin, *C. R.*, t. 154, (1912), p. 1689. Por. także: Sierpiński, *Sur les fonctions mesurables*, *Fund. Math.*, t. 3, (1922), p. 320.

Lemmat. Jeżeli funkcja $f(x)$ określona, skończona i mierzalna na pewnym zbiorze mierzalnym Q, o mierze skończonej, przyjmuje tylko skończoną liczbę wartości różnych, wówczas posiada na Q własność (C).

Dowód. Niech $l_1, l_2, \ldots, l_n$ będzie ciągiem wszystkich wartości różnych, jakie $f(x)$ przyjmuje na Q, i niech Q_i będzie mnogością tych wszystkich punktów $x \in Q$, w których

$$f(x) = l_i.$$

Każdy ze zbiorów Q_i jest mierzalny, istnieje tedy (§ 4, tw. 6), dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ i dla każdej wartości $i = 1, 2, \ldots, n$, taki zbiór domknięty $F_i \subset Q_i$, iż

$$|Q_i - F_i| < \frac{\varepsilon}{n}. \tag{1}$$

Niech:

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i.$$

Funkcja $f(x)$, jako stała na każdym ze zbiorów F_i, jest oczywiście ciągła na zbiorze F, ponieważ zaś, z uwagi na (1),

$$|Q - F| \leq \sum_{i=1}^{n} |Q_i - F_i| < \varepsilon,$$

przeto spełnia temsamem warunek (C).

Twierdzenie 20 (Łuzina). *Na to, aby funkcja $f(x)$, określona i skończona wszędzie na pewnym zbiorze mierzalnym, ograniczonym Q, była mierzalna na tym zbiorze, potrzeba i wystarcza, aby posiadała na Q własność (C).*

Dowód. 1° Warunek jest wystarczający. Niech, dla każdej liczby naturalnej n, F_n oznacza zbiór domknięty, zawarty w Q i taki, iż funkcja $f(x)$ jest ciągła na F_n, a nadto

$$|Q - F_n| < \frac{1}{n}.$$

Zbiór taki istnieje zawsze jako, iż funkcja $f(x)$ posiada własność (C).

Mamy tedy

(2) $$Q = \sum_n F_n + P,$$

gdzie P jest pewnym zbiorem miary zero.

Niech teraz a będzie dowolną liczbą rzeczywistą; oznaczmy ogólnie przez $Q(a)$, $F_n(a)$, $P(a)$ zbiór tych punktów $x \in Q$, wzgl. $x \in F_n$, wzgl. $x \in P$, w których $f(x) > a$. Wówczas, z uwagi na (2):

(3) $$Q(a) = \sum_n F_n(a) + P(a);$$

ale każdy ze zbiorów $F_n(a)$ jest mierzalny, ponieważ funkcja $f(x)$ jest ciągła, a więc tembardziej (§ 11) mierzalna, na każdym ze zbiorów F_n; nadto, zbiór $P(a) \subset P$ jest miary zero. Z (3) wynika tedy, iż mierzalny jest również zbiór $Q(a)$, a więc, iż funkcja $f(x)$ jest na Q mierzalna.

2⁰ Warunek jest konieczny.

Niech $f(x)$ będzie funkcją mierzalną na Q.

Istnieje wówczas (tw. 17, § 10), zbieżny do $f(x)$, ciąg funkcji mierzalnych i skończonych, $\{f_n(x)\}$, z których każda przyjmuje tylko skończoną liczbę wartości różnych, a więc — na mocy lemmatu poprzedniego — spełnia warunek (C). Istnieje tedy, dla każdej liczby dodatniej $\varepsilon > 0$ i każdego $n \geqslant 1$, zbiór $F_n \subset Q$, na którym funkcja $f_n(x)$ jest ciągła i taki przytem, iż:

(4) $$|Q - F_n| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Wreszcie, w myśl twierdzenia Egoroff'a (§ 12), funkcje $f_n(x)$ dążą jednostajnie do $f(x)$ na pewnym zbiorze domkniętym F_0 takim, iż:

(5) $$|Q - F_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Niech:

$$F = \prod_{n=0}^{\infty} F_n$$

Na zbiorze F funkcja $f(x)$ jest tedy granicą jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych, jest więc również ciągła na tym zbiorze. Ponieważ zaś zbiór F jest widocznie domknięty i — z uwagi na (4) i (5) —

$$|Q - F| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |Q - F_n| < \varepsilon,$$

przeto funkcja $f(x)$ posiada na Q własność (C).

Zbieżność asymptotyczna ciągów funkcji.

§ 14. Będziemy mówili, iż ciąg funkcji mierzalnych $\{f_n(x)\}$, określonych i skończonych na pewnym zbiorze mierzalnym Q, dąży na tym zbiorze asymptotycznie do pewnej funkcji $f(x)$, jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ miara zbioru punktów $x \in Q$, w których

$$|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon,$$

dąży do zera, gdy $n \to \infty$. Będziemy pisali wówczas:

$$\lim_n \text{as}\, f_n(x) = f(x) \qquad (Q).$$

Definicję tę możemy podać jeszcze w innej nieco formie, używając dogodnego w wielu przypadkach sposobu znakowania: jeśli $W(a)$ oznacza, iż liczba a spełnia pewien warunek W, wówczas

$$W[f(x)] \qquad (Q, \varepsilon)$$

oznaczać będzie, iż zbiór punktów $x \in Q$, w których $f(x)$ warunku W *nie spełnia*, jest miary mniejszej niż ε. Możemy wówczas powiedzieć, iż ciąg funkcji $f_n(x)$, mierzalnych i skończonych na Q, dąży asymptotycznie na tym zbiorze do $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, jeśli dla każdej pary liczb dodatnich ε, η istnieje taka liczba N, iż dla każdego $n > N$:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad (Q, \eta).$$

Łatwo zauważyć, iż granica asymptotyczna jest jednoznacznie określona zawsze, jeśli pomijać zbiory miary zero; inn. słowy, wszystkie funkcje, które są jednocześnie granicami asymptotycznemi tego samego ciągu funkcji $f_n(x)$ na zbiorze Q, są sobie równoważne na tym zbiorze: w samej rzeczy, jeśli $f(x)$ i $\varphi(x)$ są dwiema takiemi funkcjami i jeśli ε jest dowolną liczbą, wówczas istnieć będzie napewno liczba n taka, iż:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad (Q, \varepsilon)$$

$$|\varphi(x) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad (Q, \varepsilon),$$

skąd

$$|f(x) - \varphi(x)| < 2\varepsilon, \qquad (Q, 2\varepsilon).$$

ponieważ zaś ε jest dowolną liczbą dodatnią, zatem $f(x) = \varphi(x)$ prawie wszędzie na Q.

Podobnie dowodzimy łatwo, iż granica asymptotyczna posiada również i inne własności podstawowe granicy w sensie zwykłym, np. iż suma i iloczyn dwu ciągów funkcji mierzalnych, asymptotycznie zbieżnych na jakimś zbiorze, są również asymptotycznie zbieżne na tym zbiorze, oraz iż ich granice asymptotyczne są odp. równe sumie i iloczynowi granic ciągów danych.

Z lemmatu § 12 wynika bezpośrednio, iż, jeśli ciąg funkcji mierzalnych i skończonych na zbiorze mierzalnym Q, o mierze skończonej, jest zbieżny na tym zbiorze (w zwykłym sensie) do pewnej funkcji skończonej, wówczas jest temsamem zbieżny do niej asymptotycznie. Twierdzenie odwrotne byłoby oczywiście fałszywe, jak widać na przykładzie następującym: oznaczmy dla każdej liczby naturalnej n, przez $k(n)$ i $h(n)$ dwie liczby całkowite takie, iż:

$$n = 2^{k(n)} + h(n)$$

oraz

$$0 \leq h(n) < 2^{k(n)}.$$

Niech teraz, dla każdego n, $f_n(x)$ oznacza funkcję jednej zmiennej rzeczywistej, równą 0 w przedziale $\left(\frac{h(n)}{k(n)}, \frac{h(n)+1}{k(n)}\right)$ i jedności poza tym przedziałem. Widoczne jest wówczas, iż funkcje $f_n(x)$ dążą asymptotycznie na całej osi x do funkcji $f(x) = 1$, jakkolwiek tworzą ciąg rozbieżny w znaczeniu zwykłem w każdym poszczególnym punkcie.

Natomiast okaże się, iż z każdego, zbieżnego asymptotycznie, ciągu funkcji wyjąć można zawsze ciąg prawie wszędzie zbieżny w sensie zwykłym.

Twierdzenie F. Riesz'a.

§ 15. Twierdzenie, o którem wspomnieliśmy w § poprzednim, udowodnimy w związku z innem zagadnieniem.

Niech $f_n(x)$ będzie ciągiem funkcji mierzalnych i skończonych na pewnym zbiorze Q; będziemy mówili, iż ciąg ten spełnia asymptotycznie warunek Cauchy'ego, jeśli, dla każdej liczby dodatniej ε, miara zbioru punktów Q, w których

$$|f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \varepsilon$$

dąży do zera, gdy $n, m \to \infty$; inn. słowy, — jeśli każdej parze liczb dodatnich ε, η odpowiada taka liczba N, iż

$$(1) \qquad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \qquad (Q, \eta)$$

dla każdej pary wskaźników $n, m > N$.

Widoczne jest, iż warunek ten jest **konieczny** na to, aby ciąg $\{f_n(x)\}$ był zbieżny asymptotycznie. W samej rzeczy, jeśli

$$\lim_n \text{as}\, f_n(x) = f(x) \qquad (Q),$$

wówczas, dla każdej pary liczb $\varepsilon, \eta > 0$ określić, można taką liczbę N, iż dla $n > N$:

$$(2) \qquad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \left(Q, \frac{\eta}{2}\right).$$

Jeśli tedy jest jednocześnie $m > N$ i $n > N$, wówczas, obok (2), zachodzi również związek

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \left(Q, \frac{\eta}{2}\right),$$

który, dodany do (2), daje (1).

Udowodnimy, iż — analogicznie, jak w dziedzinie ciągów liczbowych—rozważany przez nas warunek jest nietylko konieczny, ale — zarazem — i **dostateczny**. W tym celu udowodnimy uprzednio następujący

Lemmat. Jeśli ciąg $\{f_n(x)\}$ funkcji mierzalnych i skończonych na pewnym zbiorze Q spełnia na tym zbiorze asymptotycznie warunek Cauchy'ego, wówczas istnieje taki ciąg wskaźników $N_1 < N_2 < \ldots < N_k < \ldots$, iż ciąg funkcji $\{f_{N_k}(x)\}$ jest w zbiorze Q zbieżny asymptotycznie, a zarazem prawie wszędzie zbieżny.

D o w ó d. Możemy każdej liczbie naturalnej k przyporządkować taką liczbę N_k, iż dla dowolnej pary wskaźników $n, m \geqslant N_k$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{2^k} \qquad \left(Q, \frac{1}{2^k}\right);$$

możemy założyć przytem oczywiście, iż liczby N_k tworzą ciąg rosnący.

Oznaczając przeto przez P_k zbiór tych wszystkich punktów x zbioru Q, w których

$$|f_{N_{k+1}}(x) - f_{N_k}(x)| \geqslant \frac{1}{2^k},$$

będziemy mieli:

$$|P_k| < \frac{1}{2^k}.$$

Kładąc tedy:

$$R_k = \sum_{i=k}^{\infty} P_i \quad \text{oraz}$$

(3)
$$R = \prod_{k=1}^{\infty} R_k,$$

będziemy mieli:

$$|R_k| < \frac{1}{2^{k-1}},$$

(4)
$$|R| = 0.$$

Niech teraz x_0 będzie dowolnym punktem zbioru $Q - R$. Ponieważ

$$Q - R = \sum_k (Q - R_k),$$

istnieje zatem taka wartość k_0 wskaźnika k, dla której

$$x_0 \in Q - R_{k_0},$$

skąd, z uwagi na (3) i definicję zbiorów R_k, P_k, wynika, iż nierówność

$$|f_{N_{k+1}}(x_0) - f_{N_k}(x_0)| < \frac{1}{2^k}$$

spełniona jest dla każdego $k \geqslant k_0$; stąd jednak otrzymujemy natychmiast zbieżność szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty} [f_{N_{k+1}}(x_0) - f_{N_k}(x_0)],$$

która równoważna jest zbieżności ciągu $f_{N_k}(x_0)$.

Ciąg $f_{N_k}(x)$ jest tedy zbieżny we wszystkich punktach zbioru $Q - R$, a więc — ze względu na (4) — prawie wszędzie w Q.

Oznaczając teraz przez $f(x)$ granicę ciągu funkcji $f_{N_k}(x)$ (w tych punktach, w których granica ta istnieje), mamy dla każdego k,

$$|f(x) - f_{N_k}(x)| \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} |f_{N_{i+1}}(x) - f_{N_i}(x)| < \frac{1}{2^{k-1}}$$

w każdym punkcie $x \in Q - R_k$, a więc, z uwagi na (4),

$$|f(x) - f_{N_k}(x)| < \frac{1}{2^{k-1}} \qquad \left(Q, \frac{1}{2^{k-1}}\right),$$

skąd wynika, iż ciąg $\{f_{N_k}(x)\}$ dąży również i asymptotycznie do funkcji $f(x)$ na zbiorze Q.

Twierdzenie 21 (F. Riesz'a). 1⁰ *Na to, aby ciąg funkcji $\{f_n(x)\}$, mierzalnych i skończonych na pewnym zbiorze mierzalnym Q, był asymptotycznie zbieżny na tym zbiorze, konieczne jest i wystarcza, aby ciąg ten spełniał asymptotycznie warunek Cauchy'ego.*

2⁰ *Jeżeli ciąg funkcji $f_n(x)$ jest asymptotycznie zbieżny na zbiorze Q, wówczas wyjąć zeń można ciąg $\{f_{N_k}(x)\}$ zbieżny prawie wszędzie na Q.*

Dowód. Konieczność warunku sformułowanego w pierwszej części twierdzenia została już udowodniona na początku tego §; pozostaje tedy udowodnić, iż warunek ten jest również dostateczny.

Niech tedy ciąg $\{f_n(x)\}$ spełnia asymptotycznie na Q warunek Cauchy'ego. Na zasadzie lemmatu poprzedniego istnieje rosnący ciąg wskaźników N_k taki, iż ciąg funkcji $f_{N_k}(x)$ jest zbieżny asymptotycznie na Q. Oznaczymy przez $f(x)$ funkcję, która jest na Q granicą asymptotyczną tego ciągu wyjętego, i pokażemy, iż jest ona zarazem granicą asymptotyczną ciągu danego.

Niech w tym celu ε, η będą dwiema dowolnemi liczbami dodatniemi. Niech N_{k_0} będzie liczbą taką, iż nierówność $n > N_{k_0}$ pociąga za sobą

$$|f_n(x) - f_{N_{k_0}}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \left(Q, \frac{\eta}{2}\right). \tag{5}$$

Ponieważ wszakże ciąg $f_{N_k}(x)$, dąży sam asymptotycznie do funkcji $f(x)$, przeto założyć można, iż liczba N_{k_0} jest obrana jednocześnie w ten sposób, iż:

$$|f_{N_{k_0}}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \left(Q, \frac{\eta}{2}\right).$$

Dodając tę nierówność do (5), otrzymujemy dla każdego $n > N_{k_0}$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (Q, \eta),$$

skąd wynika, iż:

$$f(x) = \lim_n \text{as}\, f_n(x) \qquad (Q).$$

Część druga naszego twierdzenia jest — z uwagi na udowodnioną już część pierwszą — tylko innem sformułowaniem poprzedniego lemmatu.

ROZDZIAŁ III.

Funkcje o wahaniu skończonem.

Pochodne funkcji przedziału.

§ 1. Rozważania tego rozdziału poświęcone będą zagadnieniom elementarnym różniczkowalności funkcji o wahaniu skończonem. Wśród twierdzeń, które podamy, naczelne miejsce zajmować będzie twierdzenie Lebesgue'a o różniczkowalności prawie wszędzie funkcji o wahaniu skończonem; znajdować się z niem będą w ścisłym związku, i inne twierdzenia, — i to zarówno ze względu na swą treść, jak i na metodę dowodu. Należy przytem zauważyć, iż większość twierdzeń tego rozdziału zawdzięczamy również Lebesgue'owi.

Jeśli $F(R)$ jest dowolną funkcją figury elementarnej, wówczas przez jej pochodną górną, wzgl. dolną, w punkcie x rozumieć będziemy granicę górną, wzgl. dolną, wyrażenia $\frac{F(K)}{|K|}$, gdzie K oznacza dowolny kwadrat, zawierający punkt x, o polu dążącem do zera. Pochodne te oznaczać się będzie odp. przez

$$\overline{F}(x), \quad \text{wzgl.} \quad \underline{F}(x).$$

W przypadku, gdy

$$\overline{F}(x) = \underline{F}(x),$$

wspólna wartość tych dwu liczb nazywa się pochodną oznaczoną lub wprost krótko pochodną funkcji w punkcie x; pochodną tę oznaczać będziemy przez $F'(x)$.

Gdy funkcja $F(R)$ posiada w jakimś punkcie x pochodną oznaczoną i skończoną, wówczas mówić się będzie, iż jest w tym punkcie różniczkowalna.

Dla funkcji przedziału linjowego, oprócz wymienionych już powyżej pochodnych, definjuje się jeszcze cztery inne pochodne, zwane pochodnemi Dini'ego.

Nazywać będziemy prawostronną górną (wzgl. prawostronną dolną) pochodną Dini'ego funkcji $F(I)$ przedziału I na linji prostej, w punkcie x, granicę górną (wzgl. dolną) ilorazu $\frac{F(I)}{|I|}$, gdzie I oznacza przedział, którego lewy kraniec ustalony jest w punkcie x i którego długość dąży do zera; dwie te pochodne oznaczać będziemy odp. symbolami

$$\overline{F}^{+}(x), \quad \underline{F}^{+}(x).$$

Zupełnie analogicznie definjuje się dwie pozostałe pochodne jednostronne, które nazywać się będą odp. górną i dolną lewostronną pochodną Dini'ego i oznaczane będą odp. przez

$$\overline{F}^{-}(x), \quad \underline{F}^{-}(x).$$

Wreszcie, prawostronną (wzgl. lewostronną) liczbą pochodną pośrednią funkcji $F(I)$ w punkcie x nazywać będziemy każdą liczbę λ, dla której istnieje taki ciąg zdążających do zera przedziałów I_n, o lewym (wzgl. prawym) krańcu ustalonym w punkcie x, iż

$$\lim_{n} \frac{F(I_n)}{|I_n|} = \lambda.$$

Zauważmy, iż, jeśli funkcja $F(I)$ jest addytywna, wówczas jej pochodna górna (dolna) jest równa większej (mniejszej) z pośród jej dwu pochodnych górnych (dolnych) Dini'ego.

Ustalone wyżej definicje pochodnych funkcji przedziału linjowego przenoszą się, rzecz prosta, bezpośrednio na funkcje jednej zmiennej rzeczywistej.

§ 2. Rozpoczniemy rozważania tego rozdziału od udowodnienia pewnego ogólnego twierdzenia, które rozstrzyga sprawę mierzalności pochodnych dowolnej funkcji figury elementarnej, niekoniecznie nawet addytywnej.

Twierdzenie 1[1]). *Obydwie pochodne — górna i dolna — dowolnej funkcji figury elementarnej są mierzalne.*

---

[1]) Banach, *Fund. Math.*, t. 6, (1924), p. 174.

D o w ó d. Niech $F(R)$ będzie dowolną funkcją figury elementarnej R. Udowodnimy mierzalność jej pochodnej górnej $\overline{F}(x)$. Niech w tym celu a oznacza dowolną liczbę i n, m niech będą dwiema dowolnemi liczbami naturalnemi. Przyjmiemy następujące oznaczenia:

$$(1)\qquad \begin{cases} A = \underset{x}{E}\,[\overline{F}(x) > a], \\[2ex] A_n = \underset{x}{E}\left[\overline{F}(x) > a + \dfrac{1}{n}\right], \\[2ex] B_n = \underset{x}{E}\left[\overline{F}(x) \geqslant a + \dfrac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Niech $\mathfrak{C}_{n,m}$ oznacza rodzinę wszystkich kwadratów K o średnicy $< \dfrac{1}{m}$, dla których:

$$F(K) > \left(a + \frac{1}{n}\right) |K|.$$

Widoczne jest, iż dla każdej pary liczb n, m rodzina $\mathfrak{C}_{n,m}$ pokrywa zbiór A_n w sensie V i t a l i'ego (p. rozdz. II, § 8). Na zasadzie tedy twierdzenia V i t a l i'ego istnieje ciąg przeliczalny kwadratów rodziny $\mathfrak{C}_{n,m}$, pokrywający p r a w i e c a ł y zbiór A_n. Oznaczając tedy przez $S_{n,m}$ sumę kwadratów tego ciągu, mamy

$$(2)\qquad A_n \subset S_{n,m} + T_{n,m},$$

gdzie $T_{n,m}$ oznacza pewien zbiór miary z e r o. Niech teraz:

$$(3)\qquad \begin{cases} T_n = \sum\limits_{m=1}^{\infty} T_{n,m}, \qquad T = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n, \\[2ex] S_n = \prod\limits_{m=1}^{\infty} S_{n,m}, \qquad S = \prod\limits_{n=1}^{\infty} S_n. \end{cases}$$

Mamy oczywiście:

$$(4)\qquad |T| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |T_{n,m}| = 0.$$

Z drugiej strony, zbiory $S_{n,m}$ są wszystkie zbiorami F_σ, są więc mierzalne; ze względu tedy na wyrażenia (3), mierzalny jest również zbiór S.

Ze wzoru (2), ponieważ zachodzi dla dowolnego m, mamy:

$$(5) \qquad A_n \subset \prod_{m=1}^{\infty}(S_{n,m} + T_{n,m}) \subset \prod_{m=1}^{\infty} S_{n,m} + \sum_{m=1}^{\infty} T_{n,m} = S_n + T_n.$$

Odwrotnie, jeśli jakiś punkt x należy do S_n, wówczas, dla każdej liczby naturalnej m, istnieje zawierający go kwadrat rodziny $\mathfrak{G}_{n,m}$; zatem $\overline{F}(x) \geqslant a + \dfrac{1}{n}$, a więc $x \in B_n$. Mamy tedy:

$$S_n \subset B_n, \quad \text{dla każdego } n.$$

Stąd oraz z (5) otrzymujemy na zasadzie (3):

$$S = \prod_{n=1}^{\infty} S_n \subset \prod_{n=1}^{\infty} B_n = A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n \subset \prod_{n=1}^{\infty} S_n + \sum_{n=1}^{\infty} T_n = S + T,$$

a więc, z uwagi na (4):

$$|A - S| \leqslant |T| = 0.$$

Zbiór A różni się tedy od zbioru mierzalnego S o zbiór miary zero, jest więc również mierzalny; skoro zaś zbiór (1) jest mierzalny dla każdej wartości a, przeto mierzalna jest temsamem funkcja $\overline{F}(x)$.

Twierdzenie Lebesgue'a.

§ 3. Poprzedzimy twierdzenie Lebesgue'a o różniczkowalności funkcji o wahaniu skończonem pewnym lemmatem, który użyteczny będzie i w wielu innych jeszcze rozważaniach.

Lemmat 1. *Jeśli $F(R)$ jest funkją addytywną nieujemną i jeśli w każdym punkcie x zbioru $E \subset R_0$*

$$(1) \qquad \overline{F}(x) > a,$$

wówczas:

$$F(R_0) \geqslant a \cdot \overset{|E|}{\cancel{R_0}}.$$

Dowód. Możemy założyć, nie zwężając ogólności twierdzenia, iż zbiór E mieści się całkowicie wewnątrz R_0, ponieważ przez ew. usunięcie zeń punktów, znajdujących się na brzegu R_0, zmniejszamy go tylko o zbiór miary zero.

Oznaczmy przez $\mathfrak{G}$ rodzinę kwadratów K, zawartych wewnątrz R_0 i takich, iż:

$$F(K) > a|K|. \tag{2}$$

Rodzina $\mathfrak{G}$ pokrywa oczywiście zbiór E w sensie Vitali'ego, istnieje tedy (rozdz. II, § 8, wniosek), dla każdego $\eta > 0$, układ skończony rozłącznych kwadratów tej rodziny $(K_1, K_2, \ldots, K_p)$ taki, iż:

$$\sum_{n=1}^{p} |K_n| \geqslant |E| - \eta. \tag{3}$$

Ponieważ zaś funkcja $F(R)$ jest monotoniczna, niemalejąca, przeto z (2) i (3) otrzymujemy:

$$F(R_0) \geqslant F\left(\sum_{n=1}^{p} K_n\right) = \sum_{n=1}^{p} F(K_n) > a \sum_{n=1}^{p} |K_n| > a(|E| - \eta);$$

η jest dowolną liczbą dodatnią, przeto wynika stąd natychmiast już nierówność (1).

Lemmat 2. Jeśli $F(R)$ jest funkcją addytywną monotoniczną nieujemną, wówczas prawie wszędzie

$$\overline{F}(x) < +\infty. \tag{4}$$

Dowód. Wystarczy oczywiście udowodnić, iż nierówność (4) ma miejsce prawie wszędzie, w każdym kwadracie. Niech K_0 będzie tedy dowolnym kwadratem i niech:

$$E = \underset{x}{E}\,[\overline{F}(x) = +\infty;\ x \in K_0].$$

Na zasadzie lemmatu poprzedniego mamy dla każdej liczby naturalnej n:

$$F(K_0) \geqslant n|E|,$$

skąd oczywiście $|E| = 0$.

Twierdzenie 2 (Lebesgue'a). *Każda funkcja addytywna, o wahaniu skończonem, $F(R)$ jest prawie wszędzie różniczkowalna.*

Dowód. Ponieważ — według twierdzenia Jordana — każda funkcja o wahaniu skończonem jest różnicą dwu funkcji monotonicznych, nieujemnych, przeto założyć możemy odrazu, iż funkcja $F(R)$ jest stale nieujemna.

Niech w tym celu

$$E = \underset{x}{E}[\overline{F}(x) > \underline{F}(x)],$$

i załóżmy, iż:

$$|E| > 0. \tag{5}$$

Niech dla dowolnej pary liczb naturalnych m, n:

$$E_{m,n} = \underset{x}{E}[\overline{F}(x) > \frac{m+1}{n} > \frac{m}{n} > \underline{F}(x)]. \tag{6}$$

Mamy oczywiście:

$$E = \sum_{m,n=1}^{\infty} E_{m,n}. \tag{7}$$

Z (5) wynika tedy, że istnieje jedna przynajmniej para liczb (m_0, n_0), dla której:

$$|E_{m_0,n_0}| > 0.$$

Zbiór E_{m_0,n_0} może być nieograniczony; zawiera jednak napewno pewien podzbiór ograniczony[1]), A, który jest również miary zewnętrznej > 0.

Oznaczmy przez $\mathfrak{C}$ rodzinę wszystkich kwadratów K takich, iż:

$$F(K) < \frac{m_0}{n_0}|K|. \tag{8}$$

Z uwagi na (6), rodzina $\mathfrak{C}$ pokrywa mnogość A w sensie Vitali'ego; istnieje tedy (II, § 8, wniosek), dla każdej liczby $\eta > 0$, skończony układ kwadratów rozłącznych rodziny $\mathfrak{C}$, $(K_1, K_2, \dots, K_p)$ taki, iż:

$$\left|\sum_{s=1}^{p} K_s\right| < |A| + \eta, \tag{9}$$

---

[1]) Ponieważ każda mnogość może być przedstawiona jako suma ciągu przeliczalnego mnogości ograniczonych.

oraz:

$$(10) \qquad \left|\sum_{s=1}^{p} K_s \times A\right| > |A| - \eta.$$

Kładąc teraz:

$$R_0 = \sum_{s=1}^{p} K_s,$$

otrzymujemy z (8) i (9):

$$(11) \qquad F(R_0) = \sum_{s=1}^{p} F(K_s) < \frac{m_0}{n_0} \sum_{s=1}^{p} |K_s| < \frac{m_0}{n_0}(|A| + \eta).$$

Z drugiej strony, na zasadzie lemmatu 1, otrzymujemy z (6) i (10):

$$F(R_0) \geqslant \frac{m_0+1}{n_0}\left|\sum_{s=1}^{p} K_s \times A\right| > \frac{m_0+1}{n_0}(|A| - \eta).$$

Stąd jednak i z (11):

$$m_0(|A| + \eta) > (m_0 + 1)(|A| - \eta),$$

co dla $\eta \to 0$ daje, z uwagi na $|A| > 0$, widoczną sprzeczność.

Nierówność (5) jest zatem sprzeczna. Funkcja $F(R)$ posiada, tedy prawie wszędzie pochodną oznaczoną. Skończoność prawie wszędzie tej pochodnej, a więc różniczkowalność prawie wszędzie funkcji $F(R)$, jest z kolei bezpośrednią konsekwencją lemmatu poprzedniego.

Twierdzenie powyższe podane było poraz pierwszy przez Lebesgue'a (*L. l.*) dla funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, później zaś (1910) uogólnione na funkcje addytywne w przestrzeni dowolnego wymiaru. Na szerszą klasę funkcji, aniżeli funkcje addytywne, uogólnił je Banach (*Fund. Math.*, t. 4, (1924), p. 177). Dowód, który podaliśmy w tekscie, przenosi się, bez zmian istotnych, również i na twierdzenie Banacha. Por. także inne uogólnienia: *Fund. Math.*, t. 10, (1927), p. 211.

§ 4. Twierdzenie Lebesgue'a o różniczkowalności funkcji o wahaniu skończonem uzupełnimy jeszcze dla funkcji bezwzględnie ciągłych twierdzeniem następującem:

Twierdzenie 3. Na to, aby funkcja addytywna bezwzględnie ciągła $F(R)$ była stale niedodatnia (wzgl. nieujemna), konieczne jest i wystarcza, aby w prawie każdym punkcie

$$F'(x) \leqslant 0 \qquad (\text{wzgl. } F'(x) \geqslant 0). \tag{1}$$

Dowód. Konieczność wymienionego w twierdzeniu warunku jest widoczna, pozostaje udowodnić tylko jego wystarczalność.

Niech w tym celu R będzie dowolną figurą elementarną, E zbiorem tych wszystkich punktów $x \in R$, w których funkcja F jest różniczkowalna i spełnia (1). Zakładamy, iż

$$|R| = |E|.$$

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Ponieważ F jest funkcją bezwzględnie ciągłą, przeto istnieje taka liczba η, iż

$$R' \subset R \quad \text{oraz} \quad |R'| \leqslant \eta \quad \text{pociąga za sobą} \quad |F(R')| < \varepsilon. \tag{2}$$

Oznaczmy teraz przez $\mathfrak{S}$ rodzinę wszystkich kwadratów K zawartych w R, dla których

$$F(K) \leqslant \varepsilon |K|. \tag{3}$$

Rodzina $\mathfrak{S}$ pokrywa widocznie zbiór E w sensie Vitali'ego. Na zasadzie tedy twierdzenia Vitali'ego, istnieje skończony układ kwadratów rozłącznych rodziny $\mathfrak{S}$, $(K_1, \dots, K_n)$, takich, iż:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} K_i\right| \geqslant |E| - \eta = |R| - \eta,$$

skąd:

$$\left| R \dot{-} \sum_{i=1}^{n} K_i \right| \leqslant \eta.$$

Stąd, oraz z (2) i (3), otrzymujemy:

$$F(R) = \sum_{i=1}^{n} F(K_i) + F\left(R \dot{-} \sum_{i=1}^{n} K_i\right) \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |K_i| + \varepsilon \leqslant \varepsilon (|R| + 1).$$

Ponieważ zaś ε jest dowolną liczbą > 0, zatem

$$F(R) \leqslant 0.$$

Natychmiastowym wnioskiem z udowodnionego twierdzenia jest

Twierdzenie 3 bis. Na to, aby funkcja addytywna bezwzględnie ciągła była tożsamościowo zerem, konieczne jest i wystarcza, aby pochodna jej znikała prawie wszędzie.

Twierdzenie to wyraża, iż funkcja bezwzględnie ciągła jest określona przez wartości swej pochodnej, dane prawie wszędzie. Uogólnienie tego twierdzenia na dowolne funkcje o wahaniu skończonem byłoby oczywiście fałszywe.

Ciągi monotoniczne funkcji addytywnych.

§ 5. *Twierdzenie 4. Jeżeli $\{F_n(R)\}$ jest ciągiem monotonicznym funkcji addytywnych prawie wszędzie różniczkowalnych, zbieżnym do pewnej funkcji $F(R)$, wówczas funkcja $F(R)$ jest również prawie wszędzie różniczkowalna i prawie wszędzie*

$$F'(x) = \lim_n F_n'(x).$$

Dowód. Możemy założyć, iż ciąg F_n jest monotoniczny niemalejący t. j. iż na każdej figurze R

$$F_n(R) \leqslant F_{n+1}(R) \leqslant F(R). \tag{1}$$

Niech:

$$\Psi_n(R) = F(R) - F_n(R). \tag{2}$$

Z uwagi na (1) oraz na $F(R) = \lim\limits_n F_n(R)$, mamy:

$$\Psi_n(R) \geqslant \Psi_{n+1}(R) \geqslant 0, \quad \text{dla każdego } n, \tag{3}$$

oraz

$$\lim_n \Psi_n(R) = 0. \tag{4}$$

Funkcje $\Psi_n(R)$, jako monotoniczne (co wynika z (3)), są na zasadzie twierdzenia 2 wszystkie różniczkowalne prawie wszędzie. Pochodne tych funkcji, w każdym punkcie, w którym istnieją, — a więc prawie wszędzie, — tworzą ciąg monotoniczny nierosnący liczb nieujemnych, mamy bowiem w każdym takim punkcie na zasadzie (3):

$$\Psi_n'(x) \geqslant \Psi_{n+1}'(x) \geqslant 0.$$

Prawie wszędzie zatem istnieje granica ciągu tych pochodnych

(5) $$\lim_n \Psi_n'(x) \geqslant 0.$$

Udowodnimy o niej, iż znika prawie wszędzie.

Oznaczmy w tym celu, przez E zbiór tych punktów, w których granica (5) jest dodatnia, przez E_p zaś mnogość tych punktów, w których granica ta jest $> \frac{1}{p}$. Mamy oczywiście

(6) $$E = \sum_{p=1}^{\infty} E_p .$$

Załóżmy, iż:

(7) $$|E| > 0;$$

istnieje tedy, ze względu na (6), liczba naturalna p_0 taka, iż:

$$|E_{p_0}| > 0.$$

$|E_{p_0}|$

Zbiór E_{p_0} może być oczywiście nieograniczony; posiada jednak napewno podzbiór ograniczony A, który jest również miary zewnętrznej dodatniej. Niech K będzie dowolnym kwadratem, zawierającym A. Mamy dla każdego n, w każdym punkcie $x \in A$:

$$\Psi_n'(x) \geqslant \lim_n \Psi_n'(x) > \frac{1}{p_0},$$

zatem, na zasadzie lemmatu 1 (§ 2),

$$\Psi_n(K) \geqslant \frac{1}{p_0} |A|,$$

a więc również:

$$\lim_n \Psi_n(K) \geqslant \frac{1}{p_0} |A| > 0,$$

co sprzeczne jest widocznie z (4).

Założenie (7) prowadzi tedy do sprzeczności, skąd wynika, iż prawie wszędzie $\lim\limits_{n} \Psi_n'(x) = 0$.

Stąd zaś, z uwagi na (2), wynika już bezpośrednio żądane twierdzenie.

W dziedzinie funkcji zmiennej rzeczywistej, z twierdzenia, które udowodniliśmy, wynika następujące twierdzenie Fubini'ego[1]: *jeśli szereg*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$$

jest szeregiem zbieżnym funkcji monotonicznych niemalejących, wówczas szereg ten jest różniczkowalny prawie wszędzie wyraz za wyrazem, t. j. prawie wszędzie

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n'(x). \tag{8}$$

D o w ó d. Niech $F(R)$, wzgl. $H_n(R)$, oznaczają funkcje addytywne figury elementarnej odpowiadające (por. rozdz. I, § 14) funkcji $f(x)$, wzgl. $h_n(x)$. Ponieważ funkcje $h_n(x)$ są monotoniczne niemalejące, przeto na każdej figurze elementarnej R

$$H_n(R) \geqslant 0. \tag{9}$$

Niech dalej:

$$F_k(R) = \sum_{n=1}^{k} H_n(R).$$

Funkcje $F_k(R)$ są z uwagi na (9) monotoniczne (a więc prawie wszędzie różniczkowalne) i tworzą nadto ciąg monotoniczny. Na mocy tedy udowodnionego twierdzenia, prawie wszędzie:

$$F'(x) = \lim_{k} F'_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n'(x),$$

co, dla funkcji $f(x)$, $h_n(x)$, równoważne jest związkowi (8).

---

[1]) *Rend. Acc. Linc.*, (5), t. 24, (1915), p. 204.

Punkty gęstości zbioru.

§ **6.** Niech E oznacza dowolny zbiór przestrzeni. Nazwiemy *funkcją miary zewnętrznej* tego *zbioru*, i oznaczymy przez $M_E(R)$, funkcję równą na każdej figurze elementarnej R liczbie $|E \times R|$.

Z twierdzenia 10 (C) rozdz. II (§ 7), wynika, iż funkcja miary zewnętrznej dowolnego zbioru jest funkcją addytywną. Nadto, nierówność:

$$0 \leqslant M_E(R) = |R \times E| \leqslant |R| \tag{1}$$

pokazuje, iż funkcja miary zewnętrznej jest funkcją bezwzględnie ciągłą, stale nieujemną. Mamy dalej, jak wynika z (1), w każdym punkcie x:

$$0 \leqslant \underline{M}_E(x) \leqslant \overline{M}_E(x) \leqslant 1,$$

przyczem — z uwagi na twierdzenie Lebesgue'a — pochodna $M_E'(x)$ prawie wszędzie istnieje.

Liczby $\overline{M}_E(x)$ i $\underline{M}_E(x)$ nazywać się będą odp. *górną* i *dolną gęstością zewnętrzną zbioru* E *w punkcie* x, w przypadku zaś, gdy $\overline{M}_E(x) = \underline{M}_E(x)$, wprost — *gęstością zewnętrzną zbioru* E *w punkcie* x.

W przypadku, gdy mnogość E jest linjowa i rozważana na linji prostej (w przestrzeni $\mathfrak{R}_1$), odpowiadająca jej funkcja miary zewnętrznej $M_E(R)$ jest funkcją addytywną figury elementarnej na linji prostej i (§ 1) rozważać możemy w każdym punkcie x cztery jej liczby pochodne Dini'ego $\overline{M}_E^+(x)$, $\underline{M}_E^+(x)$, $\overline{M}_E^-(x)$, $\underline{M}_E^-(x)$, które nazywać się będą odp. *prawostronną—górną i dolną—* oraz *lewostronną — górną i dolną — gęstością zewnętrzną zbioru* E *w punkcie* x.

Punkty, w których $M_E'(x)$ istnieje i

$$M_E'(x) = 1, \quad \text{wzgl.} \quad = 0,$$

nazywać się będą *punktami gęstości zewnętrznej*, wzgl. *rozrzedzenia zewnętrznego*, zbioru.

Jeśli zbiór E jest *mierzalny*, wyraz „*zewnętrzny*“ we wszystkich wyżej ustalonych terminach będzie opuszczony.

Dla zbiorów mierzalnych E między funkcjami miary zbioru i miary jego uzupełnienia zachodzi związek:

$$M_E(R) + M_{CE}(R) = |E \times R| + |CE \times R| = |R|,$$

skąd — w każdym punkcie x —

$$\overline{M}_E(x) + \underline{M}_{CE}(x) = \underline{M}_E(x) + \overline{M}_{CE}(x) = 1,$$

a więc — prawie wszędzie —

$$M'_E(x) + M'_{CE}(x) = 1. \tag{2}$$

Związek ten w twierdzeniu 5bis sprecyzujemy jeszcze dokładniej.

Twierdzenie 5. (Lebesgue'a o punktach gęstości zbioru). *Prawie każdy punkt zbioru jest punktem jego gęstości zewnętrznej.*

Dowód. 1° Twierdzenie jest niemal oczywiste dla zbioru otwartego G. Istotnie, jeśli $x \in G$, wówczas, $x \in K$ pociąga zawsze, dla dostatecznie małego kwadratu K, $K \subset G$, a więc $M_G(K) = |K \times G| = |K|$; stąd: $M_G'(x) = 1$ w każdym punkcie $x \in G$.

2° Niech, z kolei H będzie dowolnym zbiorem G_δ. Możemy więc położyć

$$H = \prod_{n=1}^{\infty} G_n, \tag{3}$$

gdzie $\{G_n\}$ jest ciągiem zstępującym zbiorów otwartych. Oznaczając tedy przez $M_n(R)$ funkcję miary zbioru G_n, mamy z (3), na zasadzie tw. 8 (2°) rozdz. II (§ 5):

$$M_H(R) = \lim_n M_n(R),$$

przyczem funkcje $M_n(R)$ tworzą ciąg nierosnący.

Z twierdzenia 4 (§ 5) wynika tedy, prawie wszędzie,

$$M_H'(x) = \lim_n M_n'(x),$$

ponieważ zaś, na zasadzie 1°, dla każdego $x \in H \subset G_n$ mamy $M_n'(x) = 1$, zatem

$$M_H'(x) = 1$$

prawie wszędzie w H.

3[0] Niech wreszcie E będzie dowolnym zbiorem. Istnieje wówczas (II, § 7, tw. 11) pewien zbiór G_δ, H, zawierający zbiór E i posiadający z nim wspólną funkcję miary zewnętrznej. Ze względu więc na 1[0]

$$M_E'(x) = M_H'(x) = 1$$

prawie wszędzie w H, a więc temsamem w $E \subset H$.

Dla zbiorów mierzalnych udowodnione twierdzenie ująć można jeszcze w taką formę, bardziej nieco dokładną:

Twierdzenie 5 bis. Jeżeli zbiór E jest mierzalny, wówczas prawie każdy punkt $x \in E$ jest jego punktem gęstości, prawie każdy zaś punkt $x \in CE$ jest jego punktem rozrzedzenia.

Twierdzenie to jest natychmiastową konsekwencją twierdzenia poprzedniego oraz równości (2).

Łuzin (*Teza*, p. 17) w taki oto, poglądowy sposób wyjaśnia sens twierdzenia Lebesgue'a o gęstości zbiorów mierzalnych: *„Spotykamy się tu z interesującą okolicznością, iż żaden zbiór mierzalny M miary μ, $(0 < \mu < 1)$, nie może być — z geometrycznego punktu widzenia — rozmieszczony jednorodnie na odcinku* (0,1). *Istotnie, dla każdego takiego zbioru, istnieje — na mocy cytowanego twierdzenia — przynajmniej jeden punkt gęstości ξ_1 i jeden przynajmniej punkt rozrzedzenia ξ_2. Wnosimy stąd, iż na odcinku* (0,1) *istnieją dwa rozłączne odcinki δ_1, δ_2 o równych długościach, przyczem jeden z nich obfituje wyraźnie w punkty zbioru H, drugi zaś — przeciwnie — jest w punkty tego zbioru ubogi. Żaden zatem zbiór mierzalny, miary różnej od* 0 *i* 1, *nie może pokrywać jednorodnie odcinka* (0,1), *i każdy taki zbiór jest niejako rozmieszczony niejednorodnie, skupieniami, w pewnych miejscach odcinka nadmiernie się zagęszczając, w innych znów — zbyt się rozrzedzając"*.

O budowie zbiorów linjowych por. również Knopp (*Math. Ann.*, t. 95, (1926), pp. 409—426).

Funkcje osobliwe.

§ 7. *Twierdzenie 6. Na to, aby funkcja addytywna $F(R)$ o wahaniu skończonem była osobliwa, konieczne jest i wystarcza, aby pochodna jej była prawie wszędzie równa zeru.*

Dowód. 1[0] Warunek jest wystarczający. Niech istotnie $F(R)$ będzie funkcją addytywną o wahaniu skończonem taką, iż prawie wszędzie

$$F'(x) = 0, \tag{1}$$

i niech R_0 będzie dowolną figurą elementarną. Oznaczmy, dla dowolnie obranej liczby $\varepsilon > 0$, przez $\mathfrak{G}$ rodzinę wszystkich kwadratów K, zawartych w R_0, dla których

$$(2) \qquad |F(K)| < \frac{\varepsilon}{|R_0|}|K|.$$

Rodzina $\mathfrak{G}$, z uwagi na (1), pokrywa, w sensie Vitali'ego, prawie całą[1]) figurę R_0; istnieje tedy układ skończonej liczby rozłącznych kwadratów tej rodziny ($K_1, K_2, \ldots, K_p$) takich, iż:

$$\sum_{n=1}^{p} |K_n| > |R_0| - \varepsilon.$$

Kładąc teraz: $R'' = \sum_{n=1}^{p} K_n$, $R' = R_0 \dot{-} R''$, będziemy mieli, z uwagi na ostatnią nierówność,

$$|R'| < \varepsilon,$$

a z uwagi na (2)

$$|F(R_0 \dot{-} R')| = |F(R'')| = \left|F\left(\sum_{n=1}^{p} K_n\right)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{p} |F(K_n)|$$
$$< \frac{\varepsilon}{|R_0|}\sum_{n=1}^{p} |K_n| \leqslant \varepsilon.$$

Funkcja $F(R)$ spełnia tedy udowodniony w rozdz. I (§ 13, tw. 5 (A)), warunek dostateczny (i konieczny zarazem) na to, aby funkcja była osobliwa.

2° Warunek, podany w twierdzeniu, jest konieczny.

Niech, w samej rzeczy, $F(R)$ będzie funkcją osobliwą. Ponieważ każda funkcja osobliwa jest sumą dwu funkcji osobliwych monotonicznych (mianowicie swych wahań, por. rozdz. I, § 13, tw. 4), przeto możemy odrazu założyć, iż funkcja $F(R)$ jest monotoniczna nieujemna.

[1]) t. j. z pominięciem ew. zbioru miary zero, obejmującego te punkty R_0, w których (1) nie ma miejsca.

Niech teraz

$$M = \underset{x}{E}[\overline{F}(x) > 0],$$

(3) $$M_n = \underset{x}{E}\left[\overline{F}(x) > \frac{1}{n}\right].$$

Załóżmy, iż:

(4) $$|M| > 0.$$

Ponieważ $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$, przeto istnieje liczba naturalna n_0, dla której

$$|M_{n_0}| > 0.$$

Oznaczmy przez A dowolny podzbiór ograniczony zbioru M_{n_0}, o mierze zewnętrznej różnej od zera, i przez K dowolny kwadrat, zawierający A.

Niech R będzie dowolną figurą elementarną taką, iż

(5) $$R \subset K, \quad |R| < \frac{|A|}{2}.$$

Mamy wówczas na zasadzie lemmatu 1 (§ 3), z uwagi na (3):

$$F(K \dot{-} R) \geqslant \frac{1}{n_0} |(K \dot{-} R) \times A| \geqslant \frac{|A|}{2n_0},$$

a więc:

(6) $$F(R) = F(K) - F(K \dot{-} R) \leqslant F(K) - \frac{|A|}{2n_0}.$$

Związek (5) pociąga zatem za sobą zawsze (6), a więc

$$S(F; K) = E(F; K) \leqslant F(K) - \frac{|A|}{2n_0} < F(K),$$

(gdzie $E(F; K)$ jest odchyleniem, i $S(F; K)$ — funkcją osobliwości funkcji F na K), co jednak oznacza, iż funkcja F nie jest osobliwa.

Nierówność (4) prowadzi tedy do sprzeczności.

Zatem: $|M| = 0$ i pochodna $F'(x)$ prawie wszędzie znika.

Zauważmy, iż z udowodnionego twierdzenia wynika również twierdzenie 5-bis (§ 6), ponieważ funkcja bezwzględnie ciągła jest wtedy i tylko wtedy osobliwa, gdy znika tożsamościowo.

*§ 8 [1]). Podamy w tym § pewną ogólną metodę konstrukcji funkcji osobliwych przedziału linjowego, lub — co jest równoważne — jednej zmiennej rzeczywistej.

1° Niech P będzie dowolnym zbiorem doskonałym, nigdzieniegęstym zawartym w przedziale (a, b); przedziałem przyległym do zbioru P nazywać będziemy każdy przedział, którego krańce należą do P i który nie zawiera wewnątrz punktów zbioru P. Oznaczając przez m i n odp. lewy i prawy kres mnogości P, nazywać będziemy przedziały (a, m) i (n, b) (które mogą się zresztą redukować do punktu, jeśli $a = m$, lub $n = b$) przedziałami pół-przyległemi do P w przedziale (a, b).

Każdemu zbiorowi doskonałemu, nigdzieniegęstemu P w przedziale (a, b) można przyporządkować funkcję $\omega(x)$, spełniającą warunki następujące:

α) jest ciągła i niemalejąca w całym przedziale (a, b); $\omega(a) = 0$, $\omega(b) = 1$;

β) jest stała w każdym przedziale przyległym lub półprzyległym do P;

γ) nie jest stała w żadnym przedziale, zawierającym wewnątrz punkty zbioru P.

Istnienie takich funkcji (które noszą nazwę funkcji monotonicznych o wszędziegęstym zbiorze przedziałów stałości) wynika natychmiast z rozważania następującego:

przedziały przyległe do P tworzą pewien zbiór uporządkowany linjowo, wszędziegęsty, nie posiadający pierwszego, ani ostatniego elementu; na mocy tedy znanego twierdzenia teorji mnogości [2]), można ustalić jedno-jednoznaczną odpowiedniość między liczbami wymiernemi u $(0 < u < 1)$ a zbiorem przedziałów przyległych, w ten sposób, iż, jeśli u_1, u_2 są dwiema liczbami wymiernemi i $0 < u_1 < u_2 < 1$, wówczas przedział odpowiadający liczbie u_1 znajduje się na lewo od przedziału, przyporządkowanego liczbie u_2.

Określamy teraz funkcję $\omega(x)$, jako równą w każdym przedziale przyległym do P tej liczbie wymiernej, która danemu przedziałowi odpowiada, w przedziałach zaś pół-przyległych kładziemy

---

[1]) W § tym, korzystamy z paru terminów (zbiór nigdzieniegęsty, zbiór Cantora), które nie były omawiane w rozdz. I; czytelnik znajdzie niezbędne wyjaśnienia w podręcznikach Sierpińskiego (*T. O.* lub *Wstęp*).

[2]) Por. np. Sierpiński: *L. P.*, p. 150, lub *Wstęp*, p. 54.

odp. $\omega(x) = 0$ (w przedziale lewym) oraz $\omega(x) = 1$ (w przedziale prawym). Wreszcie, w punktach zbioru P, które nie należą do żadnego z przedziałów przyległych, ani pół-przyległych, określamy funkcję $\omega(x)$ w ten sposób, aby ciągłość jej była zachowana; widoczne jest, iż w każdym takim punkcie należy nadać funkcji wartość równą kresowi górnemu wszystkich tych liczb wymiernych, które przyporządkowane są przedziałom przyległym, znajdującym się na lewo od rozważanego punktu.

Funkcja $\omega(x)$ określona jest w ten sposób w całym przedziale (a, b), i widoczne jest, iż spełnia wszystkie trzy warunki (α, β, γ).

2^0 Jeżeli dany zbiór doskonały P jest miary zero, wówczas odpowiadająca mu funkcja $\omega(x)$, która spełnia warunki (α, β, γ), jest funkcją osobliwą według Lebesgue'a. W samej rzeczy: każdy punkt przedziału (a, b), nie należący do P, znajduje się wewnątrz jednego z przedziałów stałości funkcji $\omega(x)$, a więc pochodna $\omega'(x)$ w każdym takim punkcie jest równa zeru. Skoro tedy $|P| = 0$, przeto, na mocy twierdzenia 6 (§ 7), funkcja $\omega(x)$ jest funkcją osobliwą [1]).

Konstrukcja zbiorów doskonałych o mierze zero nie przedstawia, jak wiadomo, żadnych trudności [2]); rozważania powyższe dają tedy ogólną metodę budowania pewnych funkcji osobliwych, monotonicznych i ciągłych (nie redukujących się do stałej). Struktura funkcji, które metoda powyższa pozwala otrzymać, jest przytem b. prosta. Z tego też powodu Vitali, zajmując się ogólną budową funkcji osobliwych, wyróżnia z pośród ogółu wszystkich funkcji osobliwych klasę tych funkcji, które spełniają w stosunku do zbiorów doskonałych P o mierze zero, warunki (α, β, γ); funkcje te obejmuje nazwą funkcji osobliwych elementarnych (scarto elementare) [3]).

3^0 Metoda, podana powyżej, pozwala budować funkcje osobliwe, ciągłe, nie redukujące się do stałej w całym przedziale

[1]) Opieramy się tu na wyłożonej w tym rozdziale teorji różniczkowalności. Możnaby jednak łatwo nadać rozważaniom tego § charakter bardziej jeszcze elementarny, nawiązując je bezpośrednio do definicji funkcji osobliwej podanej w rozdz. I.

[2]) Najprostszym przykładem takiego zbioru jest klasyczny zbiór Cantora, przy pomocy którego Lebesgue zbudował pierwszy przykład funkcji monotonicznej osobliwej, niebędącej stałą.

[3]) Vitali, *Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. 46, (1922), p. 388.

(a, b); funkcje wszakże, przy pomocy jej otrzymane, posiadają zawsze pewne przedziały stałości, a nawet — jako funkcje elementarne — posiadają wszędziegęste zbiory takich przedziałów.

Przez często stosowane w analizie t. zw. „zagęszczenie zbiorów osobliwości" można jednak podać łatwo ogólną metodę konstrukcji funkcji ciągłych, osobliwych i rosnących w każdym przedziale [1]).

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$ będzie dowolnym szeregiem liczbowym bezwzględnie zbieżnym, i $\{\omega_n(x)\}$ dowolnym ciągiem funkcji osobliwych elementarnych; szereg

$$\Omega(x) = \sum_{1}^{\infty} k_n \, \omega_n(x) \tag{1}$$

jest wówczas zbieżny (ponieważ dla każdego $n: 0 \leqslant \omega_n(x) \leqslant 1$), i przedstawia pewną funkcję osobliwą. Istotnie, możemy założyć, iż spółczynniki k_n wyrazów szeregu (1) są wszystkie nieujemne, ponieważ szereg o spółczynnikach k_n o znakach różnych, można przedstawić zawsze jako różnicę dwu szeregów, również zbieżnych, o spółczynnikach dodatnich. Zakładając zaś, iż k_n są liczbami dodatniemi, stwierdzamy natychmiast, iż $\Omega(x)$, jako suma szeregu funkcji monotonicznych niemalejących, jest również funkcją niemalejącą; z drugiej strony, na mocy twierdzenia Fubini'ego (§ 5), mamy prawie wszędzie:

$$\Omega'(x) = \sum_{1}^{\infty} k_n \, \omega_n'(x) = 0;$$

$\Omega(x)$ jest tedy funkcją osobliwą.

Jeśli teraz oznaczymy przez r_n długość największego z przedziałów stałości funkcji $\omega_n(x)$ i założymy, iż:

$$\lim_{n \to \infty} r_n = 0, \tag{2}$$

---

[1]) Przykłady takich funkcji podawane były wielokrotnie; por. np. Denjoy, *Journ. des Math.*, (1915); Sierpiński, *Giorn. di Matematiche*, t. 54, (1916); Hahn, *R. F.*, p. 533; Rajchman, *Fund. Math.*, t. 2, (1921), p. 50.

wówczas, dla każdych dwu punktów $c < d$ przedziału (a, b), istnieć będzie taka wartość m, iż: $r_m < d - c$, a więc, z uwagi na warunki (α) i (γ): $\omega_m(d) > \omega_m(c)$. Jeśli tedy założymy, iż wszystkie spółczynniki k_n są dodatnie, wówczas:

$$\Omega(d) - \Omega(c) \geqslant \omega_m(d) - \omega_m(c) > 0;$$

funkcja $\Omega(x)$, przy ustalonych w stosunku do r_n i k_n założeniach, będzie tedy nietylko osobliwa, ale również rosnąca (właściwie) w każdym przedziale.

Funkcje $\omega_n(x)$, spełniające warunek (2), można zresztą efektywnie ustalić, jeśli dana jest jakakolwiek elementarna funkcja osobliwa $\omega(x)$; funkcję $\omega(x)$, określoną np. w przedziale (0,1), można rozszerzyć przedewszystkiem na całą prostą, kładąc

$$\omega(x+1) = \omega(x) + 1.$$

Funkcje $\omega_n(x) = \omega(nx)$ spełniają wówczas widocznie warunek (2) i funkcja $\Omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \omega(nx)$, o spółczynnikach k_n dodatnich i tworzących szereg zbieżny, posiada oczywiście żądane własności.

Można również pokazać [1]), iż, odwrotnie, każda funkcja osobliwa w przedziale (a, b) daje się przedstawić w postaci sumy szeregu

$$C + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \omega_n(x),$$

gdzie $\omega_n(x)$ są elementarnemi funkcjami osobliwemi w tym przedziale, zaś C oraz k_n stałemi spółczynnikami, których szereg jest zbieżny bezwzględnie.

Łatwo jest wreszcie podać przykład funkcji ciągłej, która posiada wprawdzie prawie wszędzie pochodną równą zeru, lecz nie jest funkcją o wahaniu skończonem, a więc nie jest funkcją osobliwą.

Istotnie, jeśli $\varphi(x)$ oznacza dowolną funkcję ciągłą o wahaniu nieskończonem w przedziale (0,1) (np. $\varphi(x) = x \sin \frac{1}{x}$), zaś

[1]) Vitali, l. c.

$\omega(x)$ jest dowolną funkcją osobliwą elementarną w przedziale (a, b), wówczas funkcja złożona $\varphi[\omega(x)]$ spełnia żądane warunki; dowód nie przedstawia trudności.

Zauważymy przytem, iż można zbudować przykład funkcji, posiadającej pochodną równą prawie wszędzie zeru, a nie będącej osobliwą w żadnym przedziale.

*** Krzywe prostowalne.**

§ 9. Uzupełnimy wyniki, wyłożone w tym rozdziale, najprostszemi ich zastosowaniami do teorji krzywych prostowalnych.

Nazywać będziemy *krzywą*, określoną w przedziale (a, b), każdy układ dwu funkcji [1])

$$(C) \qquad \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \end{aligned} \qquad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Zmienna t nazywa się parametrem krzywej C; o punkcie $[x(t), y(t)]$ płaszczyzny $(a \leqslant t \leqslant b)$ mówić się będzie, iż *leży na krzywej* C, *odpowiadając wartości* t *jej parametru*; możliwe jest oczywiście, iż jeden punkt odpowiada wielu — a nawet nieskończenie wielu — wartościom parametru. Punkt krzywej C, odpowiadający wartości t parametru, oznaczać się będzie — dla skrócenia — przez $p(C; t)$.

Niech $I = (\alpha, \beta)$ będzie dowolnym przedziałem. Nazwiemy *łańcuchem* między krańcami α, β tego przedziału każdy ciąg $\pi = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ taki, iż

$$\alpha = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = \beta.$$

W przypadku, gdy przedział (α, β) zawarty jest w przedziale (a, b), w którym określona jest krzywa C, każdemu łańcuchowi $\pi = (\alpha = t_0, t_1, \ldots, t_n = \beta)$ przyporządkować możemy liczbę („*długość wielokąta wpisanego w krzywą* C, *odpowiadającego łańcuchowi* π *wartości parametru*"):

[1]) Ogólnie, w przestrzeni n-wymiarowej, krzywa jest układem n funkcji $x_i = x_i(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b;\ i = 1, 2, \ldots, n)$. Wszystkie rozumowania tego § przenoszą się oczywiście, bez zmian, na krzywe, rozważane w dowolnej przestrzeni euklidesowej. Zauważymy, iż krzywe, które tu rozważamy mogą być *nieciągłe* (t. j. nieciągłe mogą być funkcje $x(t)$, $y(t)$, przez które krzywe są określone).

$$\Lambda(C;\pi) = \sum_{i=1}^{n} \rho(p_{i-1}, p_i),$$

gdzie $p_i = p(C; t_i)$ $(i = 0, 1, \dots, n)$, zaś $\rho(p_{i-1}, p_i)$ oznacza — jak zwykle — odległość punktów p_{i-1}, p_i. Górny kres wszystkich, określonych w ten sposób, liczb $\Lambda(C;\pi)$ — gdzie π jest dowolnym łańcuchem między punktami α, β — nazywa się długością łuku krzywej C w przedziale $I = (\alpha, \beta)$ i oznacza się przez $L(C; \alpha, \beta)$ lub $L(C; I)$.

W przypadku, gdy liczba $L(C; I)$ jest skończona, krzywa C nazywa się prostowalna w przedziale I.

Z definicji tej wynika natychmiast, iż dla każdego przedziału (α, β), w którym krzywa C jest określona,

$$L(\alpha, \beta) \geqslant \rho[p(\alpha), p(\beta)]$$ [1]

(*„długość łuku krzywej jest niemniejsza od długości odpowiadającej jej cięciwy"*).

Mamy dalej, dla każdych trzech punktów $\alpha < \beta < \gamma$ przedziału, w którym krzywa C jest określona, i każdych dwu łańcuchów π_1, π_2 między odp. punktami α, β oraz β, γ:

$$\Lambda(\alpha, \beta) + \Lambda(\beta, \gamma) \leqslant L(\alpha, \gamma),$$

lub, zastępując wyrażenia, stojące po lewej stronie tej nierówności, przez ich kresy górne,

$$(1) \qquad L(\alpha, \beta) + L(\beta, \gamma) \leqslant L(\alpha, \gamma).$$

Z drugiej strony, niech $\pi = (\alpha = t_0, t_1, \dots, t_n = \gamma)$ będzie dowolnym łańcuchem między punktami α, γ, i niech h będzie taką liczbą naturalną, iż

$$t_{h-1} \leqslant \beta \leqslant t_h;$$

oznaczając tedy odp. przez π', π'' łańcuchy $(\alpha = t_0, t_1, \dots, t_{h-1}, \beta)$ i $(\beta, t_h, \dots, t_n = \gamma)$, będziemy mieli

$$\Lambda(\pi) \leqslant \Lambda(\pi') + \Lambda(\pi'') \leqslant L(\alpha, \beta) + (\beta, \gamma),$$

---

[1]) Opuszczamy tu, jak również we wzorach dalszych, symbol C rozważanej krzywej w znakach $L(C; \alpha, \beta)$, $p(C; \alpha)$ i t. p., co oczywiście nie może tu prowadzić do nieporozumienia.

a więc również

$$L(\alpha, \gamma) \leqslant L(\alpha, \beta) + L(\beta, \gamma),$$

co, łącznie z (1), daje równość

$$L(\alpha, \gamma) = L(\alpha, \beta) + L(\beta, \gamma) \tag{2}$$

dla każdych trzech punktów $\alpha < \beta < \gamma$.

Twierdzenie 7. 1. Na to, aby krzywa C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, określona w przedziale $I_0 = (a, b)$, była w tym przedziale prostowalna, konieczna jest i wystarcza, aby obydwie funkcje $x(t)$, $y(t)$ były o wahaniu skończonem w I_0.

2. Jeśli krzywa C jest prostowalna w przedziale $I_0 = (a, b)$, wówczas prostowalna jest również w każdym przedziale $I \subset I_0$, i długość jej, $L(C; I)$, jest funkcją addytywną nieujemną przedziału $I \subset I_0$; na to, aby funkcja ta była ponadto funkcją bezwzględnie ciągłą przedziału I, konieczne jest i wystarcza, aby bezwzględnie ciągłe były obydwie funkcje $x(t)$, $y(t)$.

Dowód. Niech $I = (\alpha, \beta)$ będzie dowolnym przedziałem zawartym w (a, b). Dla każdego łańcucha $\pi = (\alpha = t_0, t_1, \ldots, t_n = \beta)$ między punktami α, β mamy

$$\Lambda(\pi) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2},$$

a więc, z jednej strony

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x(t_i) - x(t_{i-1})| \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |y(t_i) - y(t_{i-1})| \end{array}\right\} \leqslant \Lambda(\pi),$$

z drugiej zaś

$$\Lambda(\pi) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x(t_i) - x(t_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |y(t_i) - y(t_{i-1})|,$$

Oznaczając tedy przez $W_1(I)$ oraz $W_2(I)$ odp. wahania funkcji $x(t)$, $y(t)$ w przedziale I, otrzymujemy nierówność

$$\begin{matrix} W_1(I) \\ W_2(I) \end{matrix} \leqslant \Lambda(\pi) \leqslant W_1(I) + W_2(I),$$

dla każdego łańcucha π między krańcami przedziału I; stąd wreszcie, zastępując liczby $\Lambda(\pi)$ przez ich kres górny $L(I)$,

$$(3) \qquad \begin{matrix} W_1(I) \\ W_2(I) \end{matrix} \leqslant L(I) \leqslant W_1(I) + W_2(I),$$

co uzasadnia w szczególności pierwszą część naszego twierdzenia.

Jeśli krzywa C jest prostowalna w I_0, wówczas — jak wynika ze związku (2) — prostowalna jest zarazem w każdym przedziale $I \subset I_0$, długość zaś jej, $L(I)$, jest funkcją addytywną (oczywiście — monotoniczną, nieujemną) przedziału I. Nierówność (3) pokazuje wówczas, iż funkcja ta jest wtedy i tylko wtedy ciągła bezwzględnie, gdy bezwzględnie ciągłe są wahania $W_1(I)$ i $W_2(I)$, a więc (I, § 13, tw. 3) wtedy i tylko wtedy, gdy ciągłe bezwzględnie są obydwie funkcje $x(t)$, $y(t)$.

Udowodniona jest w ten sposób również i druga część naszego twierdzenia.

Pierwsza część powyższego twierdzenia udowodniona została jeszcze przez Jordana. Z części drugiej skorzystamy w rozdz. następnym w celu wyrażenia długości krzywej przez całkę oznaczoną.

Twierdzenie 8. Jeśli krzywa C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, jest prostowalna w przedziale $I_0 = (a, b)$, wówczas w prawie każdym punkcie t tego przedziału

$$(4) \qquad L'(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}.$$

D o w ó d. Zauważmy przedewszystkiem, iż, skoro krzywa C jest prostowalna, przeto — z uwagi na twierdzenie poprzednie oraz tw. L e b e s g u e'a (§ 3) — wszystkie trzy funkcje $x(t)$, $y(t)$,

$L(l)$ są prawie wszędzie różniczkowalne w przedziale (a, b). Pokażemy najpierw, iż prawie wszędzie

$$L'(t) \geqslant \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}. \tag{5}$$

Mamy, w samej rzeczy, dla każdego przedziału $(t, t+h)$ $|a \leqslant t < t+h \leqslant b|$,

$$L(t, t+h) \geqslant \sqrt{[x(t+h) - x(t)]^2 + [y(t+h) - y(t)]^2};$$

dzieląc obydwie strony tej nierówności przez h i przechodząc do granicy dla $h \to 0$, otrzymujemy w każdym punkcie t różniczkowalności wszystkich trzech funkcji $x(t)$, $y(t)$, $L(l)$ — a więc prawie wszędzie w (a, b) — żądany związek (5).

Oznaczmy z kolei przez Q mnogość tych wszystkich punktów t, w których istnieją pochodne $x'(t)$, $y'(t)$, $L'(t)$ i spełniają nierówność

$$L'(t) > \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2},$$

oraz — przez Q_k, dla każdej liczby naturalnej k, mnogość tych wszystkich punktów $t \in Q$, dla których nierówności

$$\alpha < t < \beta, \qquad 0 < \beta - \alpha < \frac{1}{k}$$

pociągają za sobą, dla każdego przedziału (α, β), zawartego w (a, b), nierówność

$$\frac{L(\alpha, \beta)}{\beta - \alpha} > \sqrt{\left[\frac{x(\beta) - x(\alpha)}{\beta - \alpha}\right]^2 + \left[\frac{y(\beta) - y(\alpha)}{\beta - \alpha}\right]^2} + \frac{1}{k},$$

lub, co jest równoważne, nierówność

$$L(\alpha, \beta) - \rho[p(\alpha), p(\beta)] > \frac{\beta - \alpha}{k}. \tag{6}$$

Mamy wówczas, jak łatwo zauważyć,

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k. \tag{7}$$

Niech k będzie teraz dowolną liczbą naturalną i ε dowolną liczbą dodatnią. Istnieje taki łańcuch $\pi = (a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b)$ między punktami (a, b), iż

$$L(a, b) < \Lambda(\pi) + \varepsilon, \tag{8}$$

a więc

$$\sum_{i=1}^{n} \{L(t_{i-1}, t_i) - \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2}\} < \varepsilon, \tag{9}$$

Możemy założyć przytem, iż długości wszystkich przedziałów (t_{i-1}, t_i) są mniejsze od $\frac{1}{k}$ [1].

Dla każdego przedziału (t_{i-1}, t_i) mamy zawsze

$$L(t_{i-1}, t_i) \geqslant \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2};$$

oznaczając tedy przez $\sum_i'$ sumowanie rozciągnięte na te tylko wartości wskaźnika i, dla których odpowiednie przedziały (t_{i-1}, t_i) zawierają punkty zbioru Q_k, będziemy mieli, z uwagi na (6) i (9),

$$|Q_k| \leqslant \sum_i{}'(t_i - t_{i-1}) < k \sum_i{}' \{L(t_{i-1}, t_i) - \rho[p(t_{i-1}), p(t_i)]\}$$

$$< k \sum_{i=1}^{n} \{L(t_{i-1}, t_i) - \rho[p(t_{i-1}), p(t_i)]\} < k\varepsilon,$$

---

[1]) W samej bowiem rzeczy, jeśliby długości niektórych z tych przedziałów nie były mniejsze od $\frac{1}{k}$, wówczas moglibyśmy uzupełnić łańcuch π skończoną liczbą punktów, tak, aby w otrzymanym w ten sposób nowym łańcuchu π' odległość każdych dwu kolejnych punktów była już napewno od $\frac{1}{k}$ mniejsza.

Będziemy mieli wówczas $\Lambda(\pi') \geqslant \Lambda(\pi)$, a więc łańcuch π' spełniać będzie również nierówność (8), jeśli podstawimy go w niej zamiast łańcucha π.

skąd, ponieważ ε jest dowolną liczbą dodatnią,

$$|Q_k| = 0$$

dla każdej liczby naturalnej k, a więc również, na mocy (7),

$$|Q| = 0.$$

Mamy tedy prawie wszędzie

$$L'(t) \leqslant \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2},$$

co, łącznie z (5), daje — prawie wszędzie — żądaną równość (4).

ROZDZIAŁ IV.

Całka Lebesgue'a
(definicja opisowa).

Funkcje sumowalne.

§ 1. Niech $f(x)$ będzie dowolną funkcją punktu w przestrzeni $\mathfrak{R}_n$. Będziemy mówili, iż funkcja ta jest całkowalna w sensie Lebesgue'a, całkowalna ($\mathfrak{L}$), lub — krótko — sumowalna, jeśli jest prawie wszędzie pochodną jakiejś funkcji addytywnej i bezwzględnie ciągłej $F(R)$ figury elementarnej; piszemy wówczas

$$F(R) = \int_R f(x)\, dx,$$

i funkcja $F(R)$ nazywa się całką (w sensie Lebesgue'a) funkcji $f(x)$.

Punkt zmienny x przestrzeni $\mathfrak{R}_n$ określamy często przez n jego spółrzędnych $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i, stosownie do tego, funkcję $f(x)$— przez $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, całkę zaś jej — przez symbol całki wielokrotnej:

$$\int\int \ldots \int_R f(x_1\, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

wskazujący explicite na wymiar przestrzeni, w której funkcja f i jej całka są rozważane.

Zauważymy, iż definicje powyższe mogą być natychmiast zrelatywizowane dla funkcji f, określonych — zamiast w całej przestrzeni — tylko prawie wszędzie na pewnej figurze elementarnej R_0. Można tedy mówić o funkcji sumowalnej na pewnej figurze elementarnej R_0 [1]); jej całka jest wówczas pewną funkcją addytywną i bezwzględnie ciągłą figury elementarnej $R \subset R_0$.

Niekiedy odróżnia się całkę nieoznaczoną Lebesgue'a od całki oznaczonej Lebesgue'a, rozumiejąc przez całkę nieoznaczoną określoną wyżej funkcję addytywną i bezwzględnie ciągłą $F(R)$, przez całki oznaczone natomiast — wartości tej funkcji na indywidualnych figurach elementarnych.

W przypadku, jeśli $f(x)$ jest funkcją sumowalną jednej zmiennej rzeczywistej, całka jej jest funkcją figury elementarnej na linji prostej; całce tej odpowiada wówczas, z dokładnością do dowolnej stałej addytywnej, pewna funkcja bezwzględnie ciągła zmiennej rzeczywistej $F(x)$ (I, § 14), którą nazywamy również całką nieoznaczoną Lebesgue'a funkcji $f(x)$.

§ 2. Z definicji całki Lebesgue'a oraz rozważań rozdziałów poprzednich wynikają natychmiast następujące elementarne własności funkcji sumowalnych.

Twierdzenie 1. Każda funkcja sumowalna posiada dokładnie jedną całkę.

Jeżeli z dwu funkcji równoważnych jedna jest sumowalna, wówczas jest sumowalna również i druga, i całki tych dwu funkcji są identyczne; odwrotnie, jeśli dwie funkcje są sumowalne i mają całki identyczne, wówczas są równoważne.

Pierwsza część twierdzenia jest konsekwencją tw. 3bis rozdz. poprzedniego (§ 4). Druga — wynika natychmiast z samej już definicji całki. Z definicji tej wynika także bezpośrednio

Twierdzenie 2. Kombinacja linjowa o stałych spółczynnikach $Af_1 + Bf_2$ dwu funkcji sumowalnych f_1, f_2 jest również sumowalna, przyczem

$$\int_R (Af_1 + Bf_2)\,dx = A\int_R f_1\,dx + B\int_R f_2\,dx.$$

na każdej figurze elementarnej R.

Twierdzenie 3. Jeśli funkcja sumowalna $f(x)$ jest prawie wszędzie nieujemna (wzgl. niedodatnia), wówczas całka jej jest rów-

[1]) O uogólnieniu definicji całki na funkcje określone na dowolnych zbiorach mierzalnych — p. rozdz. następny.

nież stale nieujemna (wzgl. niedodatnia). Ogólniej, jeśli dwie funkcje sumowalne f_1, f_2 spełniają prawie wszędzie nierówność $f_1 \leqslant f_2$, wówczas na każdej figurze elementarnej R

$$\int_R f_1\, dx \leqslant \int_R f_2\, dx.$$

Twierdzenie to jest natychmiastową konsekwencją tw. 2, oraz tw. 3 rozdz. poprzedniego (§ 4).

T w i e r d z e n i e 4. *Jeśli funkcja sumowalna $f(x)$ jest nieujemna prawie wszędzie na pewnej figurze elementarnej R_0 i $\int_{R_0} f(x)\, dx = 0$, wówczas funkcja $f(x)$ znika prawie wszędzie w R_0.*

D o w ó d. Z uwagi na twierdzenie poprzednie, całka funkcji $f(x)$ jest nieujemna na wszystkich figurach $R \subset R_0$; ponieważ zaś znika na R_0, przeto znika zarazem na każdej figurze $R \subset R_0$. Funkcja $f(x)$, która jest prawie wszędzie pochodną swej całki, znika tedy również prawie wszędzie w R_0.

T w i e r d z e n i e 5. *Każda funkcja sumowalna jest mierzalna i prawie wszędzie skończona.*

Twierdzenie to wynika bezpośrednio z tw. 1 rozdziału poprzedniego (§ 2).

T w i e r d z e n i e 6. *Jeśli $\{f_n(x)\}$ jest ciągiem prawie wszędzie niemalejącym funkcji sumowalnych na pewnej figurze elementarnej R_0 i jeśli ciąg całek $\int_{R_0} f_n\, dx$ jest ograniczony z góry, wówczas funkcja $f(x) = \lim_n f_n(x)$ jest również sumowalna na R_0 i*

$$\int_{R_0} f(x)\, dx = \lim_n \int_{R_0} f_n(x)\, dx. \tag{1}$$

D o w ó d. Niech: $F_n(R) = \int_R f_n(x)\, dx$. Funkcje $F_n(R)$ tworzą ciąg monotoniczny (tw. 3), ograniczony z założenia na R_0, a więc i na każdej figurze $R \subset R_0$, dążą zatem do pewnej granicy skończonej

$F(R)$, która jest również pewną funkcją addytywną. Powiadamy, iż funkcja ta jest bezwzględnie ciągła na R_0. Istotnie, oznaczając, jak zwykle (por. rozdz. I, § 12), przez $E(F; R)$, $E(F_n; R)$ odchylenia bezwzględne odp. funkcji F, F_n, mamy, z uwagi na bezwzględną ciągłość funkcji F_n,

$$E(F_n; R_0) = 0,$$

a więc:

$$E(F; R_0) \leqslant E(F_n; R_0) + E(F - F_n; R_0) \leqslant F(R_0) - F_n(R_0).$$

Ponieważ zaś:

$$\lim_n F_n(R_0) = F(R_0), \tag{2}$$

zatem $E(F; R_0) = 0$ i funkcja $F(R)$ jest bezwzględnie ciągła na R_0.

W myśl tedy definicji całki

$$F(R) = \int_R F'(x)\,dx, \quad \text{dla każdego } R \subset R_0. \tag{3}$$

Z drugiej strony, na zasadzie twierdzenia o różniczkowalności ciągów monotonicznych (III, § 5, tw. 4), prawie wszędzie

$$F'(x) = \lim_n F_n'(x) = \lim_n f_n(x) = f(x).$$

Wzór (3) oznacza więc sumowalność funkcji $f(x)$, w zestawieniu zaś ze wzorem (2) daje związek (1).

Twierdzenie powyższe nosi często nazwę twierdzenia Lebesgue'a *o całkowaniu wyraz za wyrazem monotonicznych ciągów funkcji*. Twierdzenie to wyróżnia w sposób istotny całkę Lebesgue'a od całki Riemanna, dla której analogiczne twierdzenie byłoby fałszywe: można łatwo podać przykład monotonicznego ciągu funkcji całkowalnych w sensie Riemanna, wspólnie ograniczonych, których granica nie jest jednak bynajmniej w sensie Riemanna całkowalna.

Lebesgue, przypisując słusznie doniosłą wagę temu twierdzeniu, umieścił je (w cokolwiek innej formie niż ta, którą podaliśmy wyżej w tekście) wśród pewników swej aksjomatycznej definicji całki (*L. I.*, I, rozdz. V).

Twierdzenie 7. Pochodna funkcji o wahaniu skończonem jest sumowalna.

Każda funkcja o wahaniu skończonem jest sumą dwu funkcji, z których jedna jest całką jej pochodnej, druga zaś — jej funkcją osobliwości.

D o w ó d. Niech $F(R)$ będzie dowolną funkcją o wahaniu skończonem, $S(R)$ — jej funkcją osobliwości. Mamy (I, § 13, tw. 9):

$$F(R) = \Psi(R) + S(R), \tag{4}$$

gdzie $\Psi(R)$ jest pewną funkcją bezwzględnie ciągłą. Zatem, w prawie każdym punkcie x,

$$F'(x) = \Psi'(x) + S'(x) = \Psi'(x), \tag{5}$$

ponieważ funkcja $S(R)$, jako osobliwa, posiada prawie wszędzie pochodną równą zeru (III, § 7, tw. 6). Mamy więc z (4) i (5):

$$F(R) = \int_R \Psi'(x)\,dx + S(R) = \int_R F'(x)\,dx + S(R),$$

na każdej figurze elementarnej R.

Funkcja charakterystyczna zbioru.

§ 3. Nazywamy f u n k c j ą c h a r a k t e r y s t y c z n ą dowolnego zbioru Z w przestrzeni $\mathfrak{R}_n$ funkcję równą jedności w punktach zbioru Z oraz zeru poza tym zbiorem[1]). Funkcję tę oznaczać będziemy zwykle symbolem $e_Z(x)$, gdzie x oznacza punkt zmienny przestrzeni.

Widoczne jest, iż funkcja charakterystyczna sumy skończonego lub przeliczalnego ciągu zbiorów rozłącznych jest sumą funkcji charakterystycznych tych zbiorów. Podobnież, jeśli $\{Z_n\}$ jest ciągiem monotonicznym (wstępującym lub zstępującym) zbiorów, i $Z = \lim\limits_n Z_n$, wówczas również

$$e_Z(x) = \lim_n e_{Z_n}(x).$$

T w i e r d z e n i e 8. 1⁰ *Funkcja charakterystyczna dowolnego zbioru mierzalnego jest sumowalna i całka jej jest funkcją miary tego zbioru.*

2⁰ *Na to, aby funkcja charakterystyczna zbioru była sumowalna, konieczne jest i wystarcza, aby zbiór ten był mierzalny.*

---

[1]) D e l a V a l l é e - P o u s s i n (*Trans. Am. Math. Soc.* 1915; również *I. L.*, p. 7).

Dowód. Pierwsza część twierdzenia jest tylko innem sformułowaniem twierdzenia Lebesgue'a o punktach gęstości zbiorów mierzalnych (III, § 6, tw. 5 bis). Dostateczność warunku, wypowiedzianego w części drugiej twierdzenia, zawiera się oczywiście w części pierwszej, konieczność — wynika natychmiast z tw. 5 § poprzedniego.

Pierwszą część udowodnionego twierdzenia możemy jeszcze wyrazić w postaci ogólniejszej.

Twierdzenie 8bis. Jeśli funkcja mierzalna i skończona $f(x)$ przyjmuje skończoną tylko liczbę wartości różnych $l_1, l_2, \ldots, l_n$, każdą z nich odp. w zbiorze $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, wówczas funkcja $f(x)$ jest sumowalna oraz

$$\int_R f(x)\,dx = l_1 M_1(R) + l_2 M_2(R) + \ldots + l_n M_n(R),$$

gdzie $M_1, M_2, \ldots, M_n$ oznaczają odp. funkcje miary zbiorów $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$.

Dowód. Twierdzenie wynika natychmiast z twierdzenia 8, oraz z twierdzenia 2 § poprzedniego, ponieważ funkcja $f(x)$ jest w przypadku rozważanym kombinacją linjową funkcji charakterystycznych odp. zbiorów $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, o spółczynnikach równych $l_1, l_2, \ldots, l_n$.

Twierdzenie 9. Jeżeli funkcja addytywna $F(R)$ jest całką funkcji $f(x)$, wówczas w każdym punkcie x_0, w którym funkcja f jest półciągła z góry (wzgl. z dołu)

(1) $$\overline{F}(x_0) \leqslant f(x_0) \qquad [\text{wzgl. } \underline{F}(x_0) \geqslant f(x_0)].$$

W szczególności, w każdym punkcie, w którym funkcja $f(x)$ jest ciągła, całka jej $F(R)$ ma pochodną oznaczoną, równą wartości funkcji f.

Dowód. Niech $f(x)$ będzie funkcją półciągłą z góry (II, § 11) w pewnym punkcie x_0 i niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Jeśli K jest jakimkolwiek, byle dostatecznie małym, kwadratem zawierającym x_0, wówczas, dla $x \in K$, będzie $f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$. Zatem (tw. tw. 3, 8):

$$F(K) \leqslant [f(x_0) + \varepsilon] \cdot |K|,$$

a więc również $\overline{F}(x_0) = \limsup\limits_{|K| \to 0} \dfrac{F(K)}{|K|} \leqslant f(x_0) + \varepsilon.$

Ponieważ ε jest dowolną liczbą dodatnią, przeto otrzymujemy stąd nierówność (1).

Jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie x_0, t. zn. — półciągła z obydwu stron jednocześnie, wówczas, na zasadzie poprzedniego: $\overline{F}(x_0) \leqslant f(x_0) \leqslant \underline{F}(x_0)$, a więc $F'(x_0) = \overline{F}(x_0) = \underline{F}(x_0) = f(x_0)$, co było do dowiedzenia.

Sumowalność bezwzględna funkcji.

§ **4.** Niech $f(x)$ będzie dowolną funkcją punktu. Przyporządkujemy jej dwie funkcje, które nazywać będziemy odp. część nieujemną $\overset{*}{f}(x)$ i częścią niedodatnią $\underset{*}{f}(x)$ funkcji $f(x)$; definjujemy je w sposób następujący:

$$\overset{*}{f}(x) = f(x), \text{ jeśli } f(x) \geqslant 0; \quad \underset{*}{f}(x) = f(x), \text{ jeśli } f(x) \leqslant 0;$$
$$\quad\;\; = 0\;, \text{ jeśli } f(x) \leqslant 0; \qquad\qquad = 0\;, \text{ jeśli } f(x) \geqslant 0.$$

Między funkcją f, jej wartością bezwzględną oraz funkcjami $\overset{*}{f}$, $\underset{*}{f}$ zachodzą następujące oczywiste związki:

$$(1) \qquad f = \overset{*}{f} + \underset{*}{f}, \qquad |f| = \overset{*}{f} - \underset{*}{f} = \overset{*}{f} + |\underset{*}{f}|,$$

skąd:

$$\overset{*}{f} = \frac{1}{2}[\,|f| + f\,], \qquad \underset{*}{f} = -\frac{1}{2}[\,|f| - f\,].$$

Twierdzenie 10. Jeśli funkcja $f(x)$ jest mierzalna i jeśli prawie wszędzie

$$(2) \qquad |f(x)| \leqslant \varphi(x),$$

gdzie $\varphi(x)$ jest funkcją sumowalną, wówczas $f(x)$ jest również funkcją sumowalną.

Dowód. Ponieważ—jak wskazuje (1) — każda funkcja mierzalna jest różnicą dwu funkcji mierzalnych nieujemnych, które— jeśli f spełnia związek (2) — również spełniają ten związek, przeto możemy odrazu założyć, iż funkcja $f(x)$ sama jest nieujemna.

Istnieje zatem (II, § 10, tw. 17) ciąg monotoniczny niemalejący funkcji mierzalnych f_n, z których każda przyjmuje tylko skończoną liczbę wartości różnych, i które dążą wszędzie do funkcji f.

Mamy tedy z uwagi na (2), dla każdego n, prawie wszędzie

$$f_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x);$$

ale, na zasadzie twierdzenia § poprzedniego, każda z funkcji $f_n(x)$ jest sumowalna, a więc z uwagi na tw. 3 (§ 2), na każdej figurze R,

$$\int\limits_R f_n(x)\,dx \leqslant \int\limits_R \varphi(x)\,dx.$$

Z twierdzenia Lebesgue'a o całkowaniu ciągów monotonicznych funkcji (§ 2, tw. 6) wynika tedy, iż sumowalna jest również funkcja graniczna $f(x) = \lim\limits_n f_n(x)$.

W szczególności z udowodnionego twierdzenia wynika, iż każda funkcja mierzalna ograniczona jest sumowalna, t. j. iż dla funkcji ograniczonych warunki mierzalności i sumowalności są równoważne. Wynika zeń również natychmiast, iż iloczyn funkcji sumowalnej przez funkcję mierzalną, ograniczoną na jakiejś figurze elementarnej, jest na tej figurze sumowalny.

Twierdzenie 11. Jeśli funkcja $f(x)$ jest sumowalna oraz $F(R) = \int\limits_R f(x)\,dx$, wówczas sumowalne są również wartość bezwzględna oraz obydwie części, niedodatnia i nieujemna, funkcji f, przyczem:

$$W(R) = \int\limits_R |f|\,dx, \quad \overline{W}(R) = \int\limits_R \overset{*}{f}\,dx, \quad \underline{W}(R) = \int\limits_R \underset{*}{f}\,dx,$$

gdzie W, $\overline{W}$, $\underline{W}$ oznaczają odp. wahania funkcji F.

Dowód. Mamy istotnie w każdym punkcie x, w którym pochodna $\overline{W}'(x)$ istnieje oraz $f(x) = F'(x)$:

$$\overset{*}{f}(x) \leqslant \overline{W}'(x).$$

Nierówność powyższa zachodzi tedy prawie wszędzie. Ponieważ zaś $\overline{W}(R)$ jest, wraz z $F(R)$ (I, § 13, tw. 3), funkcją bezwzględnie ciągłą, przeto, na mocy twierdzenia poprzedniego oraz tw. 3 (§ 2), funkcja $\overset{*}{f}(x)$ jest sumowalna i na każdej figurze elementarnej R_0:

(3) $$\int_{R_0} \overset{*}{f}\, dx \leqslant \int_{R_0} \overline{W}'(x)\, dx = \overline{W}(R_0).$$

Z drugiej strony, niech R będzie dowolną figurą elementarną, zawartą w R_0. Ponieważ stale:

$$\overset{*}{f} \geqslant f, \qquad \overset{*}{f} \geqslant 0,$$

przeto:

$$\int_{R_0} \overset{*}{f}\, dx \geqslant \int_{R} \overset{*}{f}\, dx \geqslant \int_{R} f\, dx = F(R).$$

Stąd zaś, zważywszy, iż $\overline{W}(R_0)$ jest kresem górnym wartości $F(R)$ dla $R \subset R_0$, otrzymujemy:

$$\int_{R_0} \overset{*}{f}\, dx \geqslant \overline{W}(R_0),$$

co — w zestawieniu z (3) — daje równość:

(4) $$\int_{R_0} \overset{*}{f}\, dx = \overline{W}(R_0).$$

Analogicznie (wzgl. przez zmianę znaku funkcji f) dowodzi się równości:

$$\int_{R_0} \underset{*}{f}\, dx = \underline{W}(R_0).$$

Z odjęcia tej równości od (4), otrzymuje się bezpośrednio już związek

$$\int_{R_0} |f|\, dx = W(R_0).$$

Twierdzenie poprzednie możemy jeszcze w pewnym stopniu rozszerzyć na dowolne funkcje addytywne o wahaniu skończonem.

Twierdzenie 11 bis. Jeśli $F(R)$ jest funkcją addytywną o wahaniu skończonem i $W(R)$, $\overline{W}(R)$, $\underline{W}(R)$ oznaczają odp. jej wahania, wówczas w prawie każdym punkcie x

$$W'(x) = |F'(x)|, \quad \overline{W}'(x) = \overset{*}{F}'(x), \quad \underline{W}'(x) = \underset{*}{F}'(x)\text{[1]}. \tag{5}$$

Dowód. Z uwagi na twierdzenie o rozkładzie kanonicznym funkcji o wahaniu skończonem (I, § 13)

$$F(R) = \Phi(R) + S(R), \tag{6}$$

gdzie $\Phi(R)$ jest pewną funkcją bezwzględnie ciągłą, zaś $S(R)$ pewną funkcją osobliwą. Pochodna funkcji $S(R)$ znika zatem prawie wszędzie (III, § 7, tw. 6), a więc prawie wszędzie:

$$F'(x) = \Phi'(x). \tag{7}$$

Z drugiej strony, oznaczając odp. przez $W_1(R)$, $W_2(R)$ wahania bezwzględne funkcji $\Phi(R)$ i $S(R)$, otrzymujemy z (6)

$$W_1(R) - W_2(R) \leq W(R) \leq W_1(R) + W_2(R),$$

a więc — prawie wszędzie —

$$W_1'(x) - W_2'(x) \leq W'(x) \leq W_1'(x) + W_2'(x). \tag{8}$$

Ale funkcja $W_2(R)$, jako wahanie bezwzględne funkcji osobliwej, jest również (I, § 13, tw. 4) funkcją osobliwą, a więc pochodna jej znika prawie wszędzie; związek (8) daje tedy prawie wszędzie

$$W'(x) = W_1'(x),$$

lub, ze względu na twierdzenie poprzednie oraz (7),

$$W'(x) = |\Phi'(x)| = |F'(x)|.$$

Udowodniony jest w ten sposób pierwszy ze związków (5); pozostałe wynikają zeń natychmiast, z uwagi na równości:

$$2\overline{W} = F + W, \qquad 2\underline{W} = F - W,$$

$$2\overset{*}{F}' = F' + |F'|, \qquad 2\underset{*}{F}' = F' - |F'|,$$

z których dwie górne są równoważne rozkładowi kanonicznemu Jordana (I, § 10) funkcji o wahaniu skończonem, dolne zaś są bezpośrednią konsekwencją definicji części nieujemnej i niedodatniej funkcji punktu.

Twierdzenie „o całkowaniu przez części".

§ 5. Definicja całki Lebesgue'a w postaci, jaką przyjęliśmy w tym rozdziale, pozwala uzasadnić łatwo t. zw. twierdzenie „o całkowaniu przez części". Twierdzenie to, jak

---

[1]) $\overset{*}{F}'$, $\underset{*}{F}'$ oznaczają odp. część nieujemną i niedodatnią pochodnej F'.

wiadomo, znajduje zastosowanie nietylko w technice całkowania funkcji elementarnych (gdzie — rzecz prosta — aparat całki Lebesgue'a jest całkiem zbędny), ale również i w wielu rozważaniach Analizy, w których całka Lebesgue'a odgrywa rolę istotnego narzędzia.

Ponieważ twierdzenie „o całkowaniu przez części" stosuje się do funkcji punktu na prostej, t. j. do funkcji, których całki są funkcjami przedziału linjowego, przeto w sformułowaniu tego twierdzenia uważać będziemy całkę jako funkcję zmiennej rzeczywistej.

Twierdzenie 12 („o całkowaniu przez części"). *Jeśli* $F(x)$ *jest funkcją ciągłą bezwzględnie w przedziale* (a, b) i $\varphi(x)$—*funkcją sumowalną w tym przedziale, wówczas funkcja* $F(x)\,\varphi(x)$ *jest również sumowalna w* (a, b), *przyczem*

$$(1) \qquad \int_a^b F(x)\,\varphi(x)\,dx = F(b)\,\Phi(b) - \int_a^b \Phi(x)\,F'(x)\,dx,$$

gdzie:

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Dowód. Zauważmy przedewszystkiem, iż funkcja $\Phi(x)\,F'(x)$, jako iloczyn funkcji sumowalnej $F'(x)$ przez funkcję ciągłą $\Phi(x)$, jest napewno sumowalna [1]). Połóżmy:

$$(2) \qquad H(x) = F(x)\,\Phi(x) - \int_a^x \Phi(t)\,F'(t)\,dt.$$

Ponieważ funkcia $F(x)\,\Phi(x)$, jako iloczyn dwu funkcji bezwzględnie ciągłych, jest ciągła bezwzględnie [2]), przeto temsamem bezwzględnie ciągła jest również funkcja $H(x)$. Różniczkując ją, otrzymujemy z (2), prawie wszędzie:

$$H'(x) = F(x)\,\Phi'(x) = F(x)\,\varphi(x),$$

[1]) por. § poprzedni.
[2]) por. rozdz. I, § 14.

skąd:

$$\int_a^b F(x)\varphi(x)\,dx = H(b) - H(a) = H(b) = F(b)\Phi(b) - \int_a^b \Phi(x)F'(x)\,dx,$$

co należało udowodnić.

W rozdziale końcowym podamy uogólnienie tego twierdzenia na całki Denjoy; uogólnienie poprowadzone będzie jeszcze i w innym kierunku: zastąpimy mianowicie, w prawej stronie równości (1) całkę Lebesgue'a przez całkę Riemanna-Stieltjes'a, co pozwala rozszerzyć twierdzenie „o całkowaniu przez części" na dowolne funkcje $F(x)$ o wahaniu skończonem.

Całki wielokrotne. Twierdzenie Fubini'ego.

§ 6. Niech K_{n+m} $(n, m \geqslant 1)$ oznacza kostkę $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+m}; b_1, b_2, \ldots, b_{n+m})$ w $(n+m)$-wymiarowej przestrzeni $\mathfrak{R}_{n+m}$. Oznaczmy przez K_n kostkę $(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n)$ w przestrzeni $\mathfrak{R}_n$, przez K_m kostkę $(a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}; b_{n+1}, \ldots, b_{n+m})$ w przestrzeni m-wymiarowej $\mathfrak{R}_m$.

Niech $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m})$ będzie funkcją ciągłą punktu, określoną w kostce K_{n+m}. Przy ustalonych wartościach $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$ n pierwszych spółrzędnych, tworzących pewien punkt w kostce K_n, funkcja φ jest funkcją ciągłą m pozostałych spółrzędnych, inn. słowy — funkcją ciągłą punktu w kostce K_m. Jako funkcja ciągła posiada tedy rozciągniętą na K_m całkę, przyczem całka ta rozważana być może nawet w sensie Cauchy'ego[1]). Całka ta jest funkcją punktu $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in K_n$ i możemy położyć:

$$h(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) =$$

$$(1) \qquad \int\int\ldots\int_{K_m} \varphi(x_1^0, \ldots, x_n^0, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})\,dx_{n+1}\,dx_{n+2}\,dx_{n+m}.$$

Wiadomo — od czasów Cauchy'ego — iż dla funkcji ciągłych (o których tylko dotychczas mówimy) całka w kostce K_{n+m} może być sprowadzona do dwu kolejnych całkowań w kostkach odp. K_m i K_n. Mamy mianowicie, jak wiadomo:

$$(2) \int\int\ldots\int_{K_{n+m}} \varphi\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{n+m} = \int\int\ldots\int_{K_n} h(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

---

[1]) Por. rozdz. VII, § 1.

gdzie funkcja h określona jest przez wzór (1). Przez kolejne iteracje tego przekształcenia można każdą całkę w kostce przestrzeni p-wymiarowej sprowadzić do p kolejnych całkowań na odcinkach linji prostej.

Niema potrzeby wyjaśniać, jak ważna jest ta własność całek przestrzennych funkcji ciągłych i jak doniosłą rolę odegrała i odgrywa w zastosowaniach. To też, wprowadzenie nowej całki Lebesgue'a narzucić musiało pytanie, czy omawiane wyżej twierdzenie analizy klasycznej pozwoli się rozszerzyć na dowolne funkcje sumowalne.

Odpowiedź jest pozytywna, wymaga jednak pewnych zastrzeżeń. Funkcja φ może być bowiem sumowalna w kostce K_{n+m}, natomiast funkcja $\varphi(x_1^0, \ldots, x_n^0, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$, uważana, przy ustalonych dowolnie n pierwszych spółrzędnych, za funkcję punktu w kostce K_m, może być nie tylko niesumowalna, ale nawet i niemierzalna w K_m. Funkcja h może być tedy dla pewnych punktów $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ kostki K_n wogóle, przez wzór (1), niezdefinjowana.

Jednakże okazuje się, iż zbiór tych punktów wyjątkowych $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ kostki K_n, dla których funkcja φ jest w kostce K_m niesumowalna, stanowi w kostce K_n zbiór miary zero [1]); funkcja h jest tedy przez wzór (1) zdefinjowana w K_n prawie wszędzie i okazuje się, iż wzór (2) ma istotnie miejsce [2]).

Ważny ten dla teorji całki Lebesgue'a wynik zawdzięczamy Fubini'emu [3]); nosi też zwykle nazwę twierdzenia Fubini'ego o całce wielokrotnej.

Przystąpimy obecnie do dowodu tego twierdzenia. Dla uproszczenia znakowania przyjmiemy $m = n = 1$; rzecz prosta, pozorne to zwężenie twierdzenia nie jest istotne; wszystkie poniższe rozważania przenoszą się natychmiast na przypadek ogólny, gdy n i m są dowolnemi liczbami naturalnemi.

§ 7. Niech K oznacza na płaszczyźnie (x, y) prostokąt $(0, 0; a, b)$. Będziemy mówili, iż funkcja $\varphi(x, y)$, określona w całym prostokącie K i sumowalna na nim, spełnia warunek (F), jeśli:

---

[1]) Rzecz prosta w sensie miary n-wymiarowej.

[2]) Zauważmy, iż dla określenia całki, występującej po prawej stronie wzoru (2), potrzeba tylko, aby funkcja h była określona prawie wszędzie w K_n.

[3]) *Rend. Acc. Linc.*, (5), t. 161, (1907), p. 608.

1°) *dla prawie wszystkich wartości x przedziału $(0, a)$ funkcja $\varphi(x, y)$, uważana jako funkcja zmiennej y w przedziale $(0, b)$, jest w $(0, b)$ sumowalna;*

$$2^0)\qquad \iint_K \varphi(x, y)\, dx\, dy = \int_0^a h(x)\, dx,$$

gdzie $h(x)$ jest funkcją zmiennej x, określoną — ze względu na 1° — prawie wszędzie w $(0, a)$ przez wzór

$$(1)\qquad h(x) = \int_0^b \varphi(x, y)\, dy.$$

Zadaniem naszem będzie dowieść, iż każda funkcja, określona i sumowalna w K, spełnia warunek (F). Dowód, dla większej przejrzystości, rozbijemy na bardziej elementarne ogniwa.

Lemmat 1. *Kombinacja linjowa o spółczynnikach stałych skończonej liczby funkcji, spełniających warunek (F), spełnia również ten warunek.*

Lemmat ten wynika natychmiast z tw. 2 (§ 2).

Lemmat 2. *Jeżeli funkcja sumowalna $\varphi(x, y)$ jest granicą (w całym prostokącie K) monotonicznego ciągu funkcji φ_n, spełniających warunek (F), wówczas funkcja φ spełnia również ten warunek.*

Dowód. Możemy założyć odrazu, iż ciąg φ_n jest niemalejący; przez zmianę znaku przechodzimy natychmiast do przypadku, gdy φ_n tworzą ciąg nierosnący.

Niech: $$h_n(x) = \int_0^b \varphi_n(x, y)\, dy.$$

Każda z funkcji $h_n(x)$ jest określona prawie wszędzie w $(0, a)$, wszystkie więc określone są jednocześnie w całym tym przedziale, z wyjątkiem conajwyżej pewnego zbioru N miary (linjowej) zero.

Funkcje $h_n(x)$ tworzą — wraz z funkcjami $\varphi_n(x, y)$ — w każdym punkcie x, w którym są określone, a więc prawie wszędzie, ciąg monotoniczny niemalejący; połóżmy:

$$h(x) = \lim_n h_n(x)$$

Mamy ponadto, dla każdego n:

$$\int_0^a h_n(x)\,dx = \iint_K \varphi_n(x, y)\,dx\,dy \leqslant \iint_K \varphi(x, y)\,dx\,dy.$$

Z twierdzenia tedy Lebesgue'a o całkowaniu wyraz za wyrazem ciągów monotonicznych (§ 2) wynika, iż funkcja $h(x)$ jest w $(0, a)$ sumowalna oraz, iż:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \int_0^a h(x)\,dx &= \lim_n \int_0^a h_n(x)\,dx = \lim_n \iint_K \varphi_n(x, y)\,dx\,dy = \\ &= \iint_K \varphi(x, y)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Oznaczmy przez M zbiór wartości x, w których $h(x) = +\infty$. Zbiór ten (tw. 5, § 2) jest miary zero. W każdym przeto punkcie x przedziału $(0, a)$, z wyjątkiem punktów zbioru $M + N$, który jest jednak, jak udowodniliśmy, miary zero, wszystkie funkcje $h_n(x)$ są określone i tworzą ciąg ograniczony z góry przez liczbę skończoną $h(x)$. Na zasadzie tedy cytowanego przed chwilą twierdzenia Lebesgue'a mamy w każdym punkcie, nie należącym do $M + N$,

$$(3)\qquad h(x) = \lim_n h_n(x) = \lim_n \int_0^b \varphi_n(x, y)\,dy = \int_0^b \varphi(x, y)\,dy,$$

co, wraz z (2), wyraża, iż funkcja φ spełnia warunek (F).

Lemmat 3. Funkcja charakterystyczna zbioru[1]*, złożonego ze skończonej liczby odcinków równoległych do osi spółrzędnych, spełnia warunek (F).*

[1]) Mówimy w tym § zawsze tylko o zbiorach, zawartych w prostokącie K.

D o w ó d. Niech Z będzie mnogością, zawartą w prostokącie K i złożoną ze skończonej liczby odcinków. Mamy: $|Z| = 0$, a więc, jeśli $e(x,y)$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru Z, wówczas (tw. 8, § 3):

$$\iint_K e(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

Z drugiej strony, funkcja $e(x,y)$, uważana jako funkcja zmiennej y, jest zawsze funkcją charakterystyczną zbioru pustego lub złożonego ze skończonej liczby punktów, — z wyjątkiem skończonej conajwyżej liczby wartości x, dla których $e(x,y)$ może być funkcją charakterystyczną odcinka. W każdym razie całka

$$h(x) = \int_0^b e(x,y)\,dy$$

istnieje zawsze, i — wyjąwszy conajwyżej skończoną liczbę wartości x — jest równa zeru. Zatem:

$$\int_0^a h(x)\,dx = 0 = \iint_K e(x,y)\,dx\,dy\,.$$

L e m m a t 4. Funkcja charakterystyczna dowolnego prostokąta otwartego [1]) *spełnia warunek (F).*

D o w ó d. Niech P będzie prostokątem otwartym t. j. wnętrzem pewnego prostokąta domkniętego $(\alpha, \gamma; \beta, \delta)$, zawartego w K. Niech dalej $e(x,y)$ będzie jego funkcją charakterystyczną. Mamy zatem (tw. 8, § 3):

$$\iint_K e(x,y)\,dx\,dy = |P| = (\beta - \alpha)\,(\delta - \gamma).$$

Funkcja $e(x,y)$, przy stałym x, jest zawsze funkcją charakterystyczną zbioru pustego lub odcinka otwartego [2]). Całka

$$h(x) = \int_0^b e(x,y)\,dy$$

---

[1]) t. j. w n ę t r z a zwykłego prostokąta.

[2]) t. j. odcinka zwykłego pozbawionego końców.

istnieje tedy zawsze i mamy nadto:

$$h(x) = 0, \qquad \text{jeśli: } 0 \leqslant x \leqslant \alpha \text{ lub } \beta \leqslant x \leqslant a,$$

oraz: $$h(x) = \delta - \gamma, \qquad \text{jeśli: } \alpha < x < \beta.$$

Zatem (tw. 8): $$\int_0^a h(x)\,dx = (\beta - \alpha)(\delta - \gamma) = \int\int_K e(x, y)\,dx\,dy.$$

Lemmat 5. Funkcja charakterystyczna dowolnej figury elementarnej spełnia warunek (F).

Dowód. Każda figura elementarna jest sumą skończonej liczby niezachodzących na siebie przedziałów (prostokątów), a więc uważana być może również za sumę rozłącznych prostokątów otwartych oraz — rozłącznego z temi prostokątami — zbioru, złożonego ze skończonej liczby odcinków.

Funkcja charakterystyczna każdej figury elementarnej jest tedy sumą skończonej liczby funkcji, które — na zasadzie dwu poprzednich lemmatów — spełniają warunek (F), a więc, z uwagi na lemmat 1, spełnia również ten warunek.

Lemmat 6. Funkcja charakterystyczna dowolnego zbioru G_δ spełnia warunek (F).

Dowód. Każdy zbiór otwarty G jest granicą pewnego ciągu wstępującego figur elementarnych [1]), jego funkcja charakterystyczna jest tedy granicą niemalejącego ciągu funkcji charakterystycznych figur elementarnych, a więc funkcji, spełniających — na zasadzie lemmatu 5 — warunek (F); z uwagi na lemmat 2 — spełnia przeto również rozważany warunek.

Z kolei, każdy zbiór G_δ jest granicą ciągu zstępującego zbiorów G, jego funkcja charakterystyczna jest granicą niemalejącego ciągu funkcji charakterystycznych zbiorów otwartych i — z uwagi na tenże sam lemmat 2 — spełnia także warunek (F).

Lemmat 7. 1⁰. Każdy zbiór miary zero (płaskiej) jest miary zero (linjowej) na prawie każdej prostej równoległej do osi spółrzędnych [2]).

---

[1]) Por. odsyłacz u dołu p. 34.

[2]) t. zn. na każdej prostej $x = \xi$, wzgl. $y = \eta$, z wyjątkiem conajwyżej prostych, odpowiadających wartościom ξ, wzgl. η, tworzącym zbiory miary zero.

2°. *Funkcja charakterystyczna dowolnego zbioru miary zero spełnia warunek* (F).

Dowód. 1°. W części pierwszej twierdzenia, założyć można, iż rozważany zbiór miary zero jest zbiorem G_δ, ponieważ każdy zbiór miary zero zamknąć można zawsze w zbiór G_δ tej samej miary. Na zasadzie tedy lemmatu poprzedniego, oznaczając przez $e(x,y)$ funkcję charakterystyczną zbioru H, który jest zbiorem G_δ miary zero (płaskiej), mamy:

$$\int_0^a \left[\int_0^b e(x,y)\,dy \right] dx = \int\int_K e(x,y)\,dx\,dy = |H| = 0 .$$

Zatem (tw. 4), dla prawie wszystkich wartości x:

$$\int_0^b e(x,y)\,dy = 0 ,$$

co jednak (tw. 4) oznacza, iż zbiór H jest miary zero na prawie każdej prostej równoległej do osi y.

2°. Niech $H \subset K$ będzie dowolnym zbiorem miary zero (płaskiej), $e(x,y)$ jego funkcją charakterystyczną. Na zasadzie 1°, $e(x,y)$ jest funkcją charakterystyczną zbioru miary zero (linjowej) na prawie każdej prostej równoległej do osi y-ów, a więc dla prawie każdej wartości x, istnieje i jest równa zeru całka

$$h(x) = \int_0^b e(x,y)\,dy ;$$

zatem: $$\int_0^a h(x)\,dx = 0 = |H| = \int\int_K e(x,y)\,dx\,dy .$$

Lemmat 8. Funkcja charakterystyczna dowolnego zbioru mierzalnego spełnia warunek (F).

Dowód. Niech Z będzie dowolnym zbiorem mierzalnym, zawartym w K; istnieje tedy pewien zbiór G_δ, H, taki, iż:

$$Z \subset H, \qquad |H - Z| = 0 .$$

Oznaczając przez $e(x,y)$, $e_1(x,y)$, $e_2(x,y)$ funkcje charakterystyczne odp. zbiorów Z, H, $H-Z$, mamy:

$$e(x,y) = e_1(x,y) - e_2(x,y).$$

Ponieważ zaś — z uwagi na dwa poprzednie lemmaty — obydwie funkcje e_1 i e_2 spełniają warunek (F), przeto (lemmat 1) spełnia go również funkcja e, która jest ich różnicą.

Twierdzenie 13 (Fubini'ego). *Każda funkcja sumowalna w prostokącie K spełnia warunek* (F).

Dowód. Ponieważ każda funkcja sumowalna jest różnicą dwu funkcji nieujemnych, również sumowalnych (tw. 11), przeto — z uwagi na lemmat 1 — możemy odrazu założyć, iż rozważamy funkcję sumowalną nieujemną φ.

1°. Załóżmy najpierw, iż φ przyjmuje tylko skończoną liczbę wartości różnych $l_1, l_2, \ldots, l_n$, odp. w zbiorach $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$. Oznaczając odp. przez $e_1, e_2, \ldots, e_n$ funkcje charakterystyczne tych zbiorów, mamy:

$$\varphi = l_1 e_1 + \ldots + l_n e_n,$$

a więc, z uwagi na lemmat poprzedni oraz lemmat 1, funkcja φ spełnia warunek (F).

2°. Każda funkcja sumowalna nieujemna jest (II, § 10, tw. 17) granicą monotonicznego ciągu funkcji mierzalnych, przyjmujących tylko skończoną liczbę wartości różnych, a więc — ze względu na lemmat 2 — spełnia również warunek (F).

Ponieważ role obydwu zmiennych x i y są w rozumowaniach powyższych zupełnie równorzędne, przeto z twierdzenia Fubini'ego wynika natychmiast następujący wniosek o przemienności porządku całkowania w całkach wielokrotnych:

Wniosek. Jeżeli funkcja $\varphi(x, y)$ jest sumowalna w prostokącie $K = (0, 0; a, b)$, wówczas całki $\int\limits_0^a \varphi(x,y)\,dx$, $\int\limits_0^b \varphi(x,y)\,dy$ istnieją dla prawie wszystkich wartości y, wzgl. x, oraz:

$$\int_0^a \left[\int_0^b \varphi\,dy\right] dx = \int_0^b \left[\int_0^a \varphi\,dx\right] dy = \iint_K \varphi\,dx\,dy. \tag{4}$$

Z istnienia obydwu pierwszych całek, występujących w równości (4), nie można nic jednak wnosić naogół o istnieniu całki powierzchniowej $\iint_K \varphi\, dx\, dy$. Jak pokazał Sierpiński, funkcja φ może nie być wówczas nawet mierzalna na płaszczyźnie, a więc tembardziej nie musi być sumowalna.[1])

Można jednak podać również łatwo przykład funkcji mierzalnej, dla której obydwie całki iterowane występujące w równości (4) istnieją i są równe, podczas gdy sama funkcja φ nie jest sumowalna w prostokącie.

Niech w samej rzeczy K będzie kwadratem (0, 0, 1, 1) i niech $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ będzie ciągiem nieskończonym niezachodzących na siebie i zawartych w K kwadratów, takich przytem, iż główne ich przekątne[2]) leżą na głównej przekątnej kwadratu K.

Każdy z kwadratów D_n dzielimy na cztery kwadraty, przyczem we wnętrzach jednej pary kwadratów przeciwległych, na które D_n został podzielony, kładziemy $\varphi(x, y) = \frac{1}{|D_n|}$, we wnętrzach zaś drugiej pary $\varphi(x, y) = -\frac{1}{|D_n|}$. We wszystkich pozostałych punktach kwadratu K, w których funkcja $\varphi(x, y)$ nie została określona przez powyższą definicję, kładziemy wprost: $\varphi(x, y) = 0$.

Łatwo zauważyć, iż obydwie całki $\int_0^1 \varphi(x, y)\, dy$, $\int_0^1 \varphi(x, y)\, dx$ istnieją dla wszystkich wartości x, wzgl. y, i są równe zeru. Obydwie całki iterowane, występujące w relacji (4), istnieją tedy również i są równe zeru. Natomiast, funkcja $\varphi(x, y)$ nie jest sumowalna w kwadracie K. Istotnie w przypadku przeciwnym, jej wartość bezwzględna byłaby również sumowalna (§ 4, tw. 11); wówczas jednak mielibyśmy dla każdego k:

$$\iint_K |\varphi|\, dx\, dy > \sum_{n=1}^{k} \iint_{D_n} |\varphi|\, dx\, dy = k,$$

co oczywiście jest niemożliwe[3]).

---

[1]) *Fund. Math.*, t. 1, (1920), p. 112. Konstrukcja Sierpińskiego polega na zbudowaniu (przy pomocy pewnika Zermeli) zbioru płaskiego, niemierzalnego, który z każdą prostą równoległą do osi spółrzędnych ma dokładnie jeden punkt wspólny. Funkcja charakterystyczna tego zbioru jest funkcją żądaną.

[2]) Przez przekątną główną prostokąta rozumiemy tę przekątną, która łączy lewy kraniec dolny z prawym górnym.

[3]) Powyższy prosty przykład podał p. Zygmund.

Zauważmy wreszcie, iż Fichtenholz[1]) podał przykład, dużo mocniejszy, funkcji $\varphi(x, y)$, dla której obydwie całki iterowane istnieją i są równe, a która nie jest wszakże sumowalna w żadnym prostokącie; przykład ten jest jednak dość skomplikowany.

Prawdziwe jest natomiast następujące

Twierdzenie 14[2]). *Dla funkcji mierzalnej, stale nieujemnej istnienie którejkolwiek z całek, występujących w równości* (4), *pociąga za sobą istnienie obydwu pozostałych.*

Dowód. W samej rzeczy, niech $\varphi(x, y)$ będzie funkcją mierzalną, stale nieujemną w prostokącie $K = (0, 0; a, b)$. Załóżmy, iż całka

$$h(x) = \int_0^b \varphi(x, y)\, dy$$

istnieje dla prawie każdej wartości x oraz iż funkcja $h(x)$ jest sumowalna w przedziale $(0, a)$. Oznaczmy, dla każdej liczby naturalnej n, przez $\varphi_n(x, y)$ funkcję równą $\varphi(x, y)$ w każdym punkcie (x, y), w którym $\varphi(x, y) \leqslant n$, — oraz równą n we wszystkich punktach pozostałych. Każda, z określonych w ten sposób, funkcji φ_n jest mierzalna i ograniczona, a więc napewno (§ 4) sumowalna (płasko) w prostokącie K. W myśl przeto tw. Fubini'ego, dla każdego n,

$$\int\!\!\int_K \varphi_n(x, y)\, dx\, dy = \int_0^a \left[\int_0^b \varphi_n(x, y)\, dy\right] dx \leqslant \int_0^a h(x)\, dx < +\infty;$$

z drugiej strony, ponieważ funkcje φ_n tworzą ciąg monotoniczny, niemalejący i zbieżny do funkcji φ, zatem, z ustalonej przez powyższą nierówność ograniczoności ciągu całek funkcji φ_n, wynika (§ 2, tw. 6) sumowalność funkcji $\varphi(x, y)$ w prostokącie K, co należało udowodnić.

* Długość łuku krzywej.

§ 8. Wyłożone w końcowym § rozdz. poprzedniego własności krzywych prostowalnych możemy uzupełnić obecnie, korzystając z pojęcia całki, twierdzeniem następującem:

Twierdzenie 15. Jeżeli C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, jest krzywą prostowalną w przedziale $I_0 = (a, b)$ oraz L_0 oznacza długość

[1]) *Fund. Math.*, t. 6, (1924), p. 30.

[2]) Tonelli, *Rend. Acc. Linc.*, 18, II, (1909), p. 246.

jej w tym przedziale, wówczas

$$(1) \qquad L_0 \geqslant \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt,$$

przyczem równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy obydwie funkcje $x(t)$, $y(t)$ są ciągłe bezwzględnie.

D o w ó d. Oznaczając ogólnie przez $L(I)$ długość krzywej C w przedziale $I \subset I_0$, oraz przez $S(I)$ — funkcję osobliwości funkcji $L(I)$, mamy, w myśl tw. 7 (§ 2),

$$(2) \qquad L(I_0) = \int_a^b L'(t)\, dt + S(I_0) \geqslant \int_a^b L'(t)\, dt;$$

związek ten staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(3) \qquad S(I_0) = 0;$$

funkcja $S(I)$ jest jednak stale nieujemna, warunek (3) jest tedy równoważny znikaniu tożsamościowemu funkcji $S(I)$ w przedziale $I_0 = (a, b)$, a więc — ciągłości bezwzględnej funkcji $L(I)$; to zaś — z kolei — równoważne jest (III, § 9, tw. 7) ciągłości bezwzględnej obydwu funkcji $x(t)$ i $y(t)$ jednocześnie.

Ponieważ, z drugiej strony, (III, § 9, tw. 8), prawie wszędzie

$$L'(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt,$$

przeto nierówność (1) równoważna jest związkowi (2) i twierdzenie nasze jest w ten sposób udowodnione.

Twierdzenie powyższe, udowodnione przez L e b e s g u e'a jako uzupełnienie dawnych wyników, dotyczących krzywych prostowalnych, stanowiło jedno z pierwszych — i łatwiejszych zarazem — zastosowań nowej metody całkowania; metody dawne pozwalały udowodnić wzór na długość łuku

$$(4) \qquad L_0 = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

tylko przy pewnych specjalnych założeniach, dotyczących pochodnych $x'(t)$, $y'(t)$ (np. przy założeniu, iż pochodne te istnieją wszędzie i są ciągłe); całka L e b e s g u e'a nietylko, że wzór ten uogólniła, ale — zarazem — pozwoliła podać prosty warunek konieczny i dostateczny na to, aby równość (4) była spełniona.

Analogiczne badania dla powierzchni prostowalnych są już bardziej skomplikowane, jakkolwiek — jeśli chodzi o powierzchnie, dane w postaci $z = f(x, y)$ — sprowadzają się również do rozważań, należących do lebesgue'owskiej teorji funkcji, i nie przedstawiają trudności geometrycznych lub topologicznych. Badania te wykraczają jednak poza zakres tego podręcznika i czytelnik zechce się zwrócić bezpośrednio do prac oryginalnych; przedewszystkiem: Banach, *Fund. Math.*, t. 7, (1925), p. 225. Radó, *Fund. Math.*, t. 10, (1927), p. 197; *Math. Ann.*, t. 100, (1928), p. 445; *Acta Litt. Scient. Szeged*, t. 3, (1927), p. 131. Schauder, *Fund. Math.*, t. 8, (1926), p. 1. Tonelli, *Rend. Acc. Linc.*, S. 6ª, t. 3, (1926), p. 357, 445, 633, 714. Young, *Proc. Lond. Roy. Soc.*, A, t. 96, (1920), p. 72.

ROZDZIAŁ V.

Całka Lebesgue'a
(definicja geometryczna).

Wykres i pola funkcji.

§ 1. Przedmiotem rozważań tego rozdziału będzie przedewszystkiem uzgodnienie definicji całki rozdz. poprzedniego z definicją geometryczną, podaną również przez Lebesgue'a. Definicja ta nawiązuje do najdawniejszej i najbardziej naturalnej idei całki, — całki, rozumianej jako miara pola, przyporządkowanego funkcji w pewien, dobrze znany, sposób.

Ustalimy przedewszystkiem terminologję.

Niech x oznacza jakikolwiek punkt $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ przestrzeni $\mathfrak{R}_n$. Jeśli y oznacza dowolną liczbę rzeczywistą, wówczas przez (x, y) oznaczać się będzie punkt przestrzeni $\mathfrak{R}_{n+1}$ o spółrzędnych $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$.

Niech teraz $f(x)$ będzie funkcją określoną na pewnym zbiorze $Q \subset \mathfrak{R}_n$. Nazywać będziemy jej wykresem na tym zbiorze zbiór wszystkich punktów $[x, f(x)]$, dla których $x \in Q$ i $f(x) \neq \infty$; wykres ten oznaczać będziemy przez $W(Q; f)$.

Nazwiemy dalej polem górnem (wzgl. dolnem) funkcji f na Q zbiór wszystkich punktów (x, y) takich, iż $x \in Q$ oraz

$$0 \leqslant y \leqslant \overset{*}{f}(x), \qquad (\text{wzgl.} \quad 0 \geqslant y \geqslant \underset{*}{f}(x)),$$

gdzie $\overset{*}{f}$ (wzgl. $\underset{*}{f}$) oznacza część nieujemną (niedodatnią) funkcji f (IV, § 4).

Pole to oznaczać będziemy przez $\overset{*}{S}(Q; f)$ (wzgl. $\underset{*}{S}(Q; f)$). W przypadku, gdy funkcja f jest nieujemna (niedodatnia), jej pole górne (dolne) nazywać będziemy wprost jej polem i oznaczać przez $S(Q; f)$ (bez gwiazdki). Widoczne jest, iż pole górne (dolne) funkcji jest identyczne z polem jej części nieujemnej (niedodatniej), t. j.

$$\overset{*}{S}(Q; f) = S(Q; \overset{*}{f}), \qquad \underset{*}{S}(Q; f) = S(Q; \underset{*}{f}).$$

Wykres i pola funkcji, określonej w przestrzeni $\mathfrak{R}_n$ (wzgl. w jakimś zbiorze, zawartym w tej przestrzeni), są oczywiście pewnemi zbiorami w przestrzeni $\mathfrak{R}_{n+1}$. Ponieważ mogłaby niekiedy powstawać wątpliwość, w jakiej przestrzeni rozważamy zbiory i — stosownie do tego — o jakiej mierze jest mowa, przeto w przypadkach takich, dla uniknięcia nieporozumienia, będziemy miarę zbioru Q w przestrzeni k-wymiarowej oznaczali w niniejszym rozdziale przez $m_k(Q)$.

Celem uproszczenia wysłowień twierdzeń, do których dowodu obecnie przystępujemy, rozważać będziemy funkcje punktu, określone na linji prostej. Oczywiście, wystarczy tylko formalnej zmiany terminów, aby przejść do twierdzeń w przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów[1]).

§ 2. *Lemmat 1. Jeżeli Q oznacza dowolny zbiór linjowy i Q' zbiór płaski wszystkich tych punktów (x, y), dla których $x \in Q$ oraz $0 \leq y \leq l$ $(l > 0)$, wówczas mierzalność (płaska) zbioru Q' równoważna jest mierzalności (linjowej) zbioru Q, przyczem w przypadku mierzalności*[2]) *tych dwu zbiorów*

$$m_2(Q') = l \, . \, m_1(Q).$$

Dowód. Możemy odrazu założyć, iż mnogość Q jest ograniczona, zawsze bowiem przedstawić ją można, jako sumę ciągu niemalejącego mnogości ograniczonych.

Załóżmy tedy, iż Q zawiera się w pewnym przedziale $(0, a)$, a więc Q' w prostokącie $K = (0, 0; a, l)$.

Uważajmy funkcje charakterystyczne $e_Q(x)$, $e_{Q'}(x, y)$ odp. zbiorów Q, Q'.

---

[1]) Za wyjątkiem drugiego twierdzenia o wartości średniej (§ 5, tw. 6), związanego — z natury rzeczy — z funkcjami jednej zmiennej rzeczywistej.

[2]) Można zresztą pominąć mierzalność, zastępując miarę zwykłą przez miarę zewnętrzną.

1⁰ Niech Q' będzie zbiorem mierzalnym płasko. Mamy wówczas, ze względu na twierdzenie Fubini'ego (IV, § 7)[1]),

$$(1) \qquad m_2(Q') = \int\int_K e_{Q'}(x, y)\, dx\, dy = \int_0^l \left[\int_0^a e_{Q'}(x, y)\, dx \right] dy,$$

przyczem funkcja $e_{Q'}(x, y)$ jest na prawie każdej prostej $y = \eta$ sumowalna, a więc temsamem — mierzalna, względem x. Ale, jak łatwo zauważyć, mamy, w całym prostokącie K, $e_{Q'}(x, y) = e_Q(x)$, zatem funkcja $e_Q(x)$ jest mierzalna względem x; zbiór Q jest temsamem mierzalny linjowo. Wzór (1) daje zarazem:

$$m_2(Q') = \int_0^l \left[\int_0^a e_Q(x)\, dx \right] dy = \int_0^l m_1(Q)\, dy = l . m_1(Q).$$

2⁰ Pozostaje jeszcze udowodnić, iż, odwrotnie mierzalność zbioru Q pociąga za sobą mierzalność zbioru Q'.

W samej rzeczy, jeśli zbiór Q jest mierzalny, wówczas przedstawić go można zawsze jako sumę

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} F_k + N,$$

gdzie F_k są pewnemi zbiorami domkniętemi, zaś N zbiorem miary zero linjowej. Oznaczając przez F_k', wzgl. N', zbiór punktów $(x, y) \in Q'$, dla których $x \in F_k$, wzgl. $x \in N$, mamy:

$$Q' = \sum_{k=1}^{\infty} F_k' + N'.$$

Ponieważ zaś F_k' są widocznie zbiorami domkniętemi, a N' jest miary zero płaskiej, przeto Q' jest zbiorem mierzalnym płasko.

Twierdzenie 1. Wykres funkcji mierzalnej na zbiorze mierzalnym jest miary zero (płaskiej).

---

[1]) Wystarczy zresztą odwołać się tylko do lemmatu 8 tamtego §.

D o w ó d. Niech $f(x)$ będzie funkcją mierzalną na zbiorze Q linjowym i niech $W = W(Q; f)$. Załóżmy chwilowo, iż zbiór Q jest ograniczony.

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią, oraz

$$Q_n = Q . \underset{x}{E}\,[n\varepsilon \leqslant f(x) < (n+1)\varepsilon],$$
$$W_n = W[Q_n; f].$$

Zbiory Q_n są oczywiście mierzalne, ponieważ funkcja $f(x)$ jest mierzalna na Q, — i mamy, na zasadzie lemmatu 1,

$$m_2(W) \leqslant \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m_2(W_n) \leqslant \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m_1(Q_n) \leqslant \varepsilon\, m_1(Q).$$

Ponieważ zaś $m_1(Q)$ ma wartość skończoną i ε jest dowolną liczbą dodatnią, zatem:

$$m_2(W) = 0.$$

Przejście do przypadku, gdy zbiór Q jest nieograniczony, uskutecznia się natychmiast, przedstawiając zbiór Q jako sumę ciągu zbiorów mierzalnych ograniczonych.

L e m m a t 2. Jeśli $f(x)$ jest funkcją mierzalną, skończoną, stale nieujemną, przyjmującą na pewnej figurze elementarnej R skończoną tylko liczbę wartości różnych, wówczas pole jej jest również mierzalne oraz

$$\int_R f(x)\,dx = m_2[S(R; f)]. \tag{2}$$

D o w ó d. Niech $l_1, l_2, \ldots, l_n$ będą wartościami, jakie funkcja $f(x)$ przyjmuje — odp. na zbiorach $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, — w figurze elementarnej R. Połóżmy, dla skrócenia:

$$S = S(Q; f), \qquad S_i = S(Q_i; f) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Mamy (IV, § 3, tw. 8 bis):

$$\int_R f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} l_i \,.\, m_1(Q_i), \tag{3}$$

ponieważ zaś, na zasadzie lemmatu 1,

$$m_2(S) = \sum_{i=1}^{n} m_2(S_i) = \sum_{i=1}^{n} l_i \cdot m_1(Q_i),$$

przeto z (3) wynika równość (2).

Twierdzenie 2. 1° *Warunkiem koniecznym i dostatecznym mierzalności funkcji $f(x)$ na zbiorze mierzalnym Q, jest mierzalność jej obydwu pól $\overset{*}{S}(Q; f)$, $\underset{*}{S}(Q; f)$.*

2° *Na to, aby funkcja $f(x)$, określona i mierzalna na pewnej figurze elementarnej R, była na niej sumowalna, konieczne jest i wystarcza, aby obydwa jej pola na R miały miarę skończoną; jeśli warunek ten jest spełniony, wówczas*

$$\int_R f(x)\,dx = m_2[\overset{*}{S}(R; f)] - m_2[\underset{*}{S}(R; f)].$$

Dowód. Założyć możemy odrazu — w dowodzie obydwu części twierdzenia — iż funkcja $f(x)$ jest stale nieujemna; każda bowiem funkcja jest sumą swoich dwu części — nieujemnej i niedodatniej.

1° Udowodnimy najpierw pierwszą część twierdzenia.

A) Zakładamy, iż pole $S(Q; f)$ jest mierzalne.

Z twierdzenia Fubini'ego (IV, § 7[1])) wynika tedy, iż zbiór $S(Q; f)$ jest — dla prawie każdej wartości η — mierzalny na prostej $y = \eta$; inn. słowy, dla prawie każdej wartości η, zbiór

$$\underset{x}{E}[x \in Q;\ f(x) \geqslant \eta]$$

jest mierzalny linjowo.

Każdej tedy liczbie rzeczywistej a przyporządkować można taki ciąg malejący liczb η_n, zbieżny do a, iż każdy ze zbiorów

$$\underset{x}{E}[x \in Q;\ f(x) \geqslant \eta_n] \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

jest mierzalny linjowo. Temsamem jednak jest mierzalny również zbiór

$$\underset{x}{E}[x \in Q;\ f(x) > a] = \sum_n \underset{x}{E}[x \in Q;\ f(x) \geqslant \eta_n].$$

[1]) Wystarczy zresztą oprzeć się tylko na lemmacie 8 tego §. Wprawdzie w dowodzie tego lemmatu zakładało się, iż rozważany tam zbiór płaski mierzalny jest ograniczony, ale oczywiście przejście do zbiorów nieograniczonych nie nasuwa żadnych trudności.

i ponieważ liczba a jest dowolna, przeto funkcja $f(x)$ jest na Q mierzalna.

B) Zakładamy, iż funkcja $f(x)$ jest mierzalna na Q; jest wówczas (II, § 10, tw. 17) granicą pewnego ciągu niemalejącego funkcji nieujemnych, $f_n(x)$, mierzalnych i skończonych na Q, z których każda przyjmuje skończoną tylko ilość wartości różnych. Wówczas

$$S(Q;f) = \sum_n S(Q;f_n) + W(Q;f); \tag{4}$$

ponieważ zaś, w myśl lemmatu poprzedniego, pola funkcji $f_n(x)$ są wszystkie mierzalne i wykres, $W(Q;f)$, funkcji $f(x)$ na Q jest (tw. 1) miary zero, przeto z równości powyższej wynika bezpośrednio, iż pole $S(Q;f)$ jest również mierzalne.

2^0 Ażeby udowodnić, z kolei, część drugą (2^0) twierdzenia, zakładamy, iż Q jest figurą elementarną i $f(x)$ funkcją na niej mierzalną. Zachowując ustaloną pod 1^0 (B), definicję ciągu funkcji $f_n(x)$, mamy z (4) na zasadzie lemmatu 2:

$$m_2[S(Q;f)] = \lim_n m_2[S(Q;f_n)] = \lim_n \int_Q f_n\, dx. \tag{5}$$

Jeśli teraz pole $S(Q;f)$ ma miarę skończoną, wówczas z twierdzenia Lebesgue'a o całkowaniu ciągów monotonicznych funkcji (IV, § 2, tw. 6) wynika, z uwagi na (5), iż granica $f(x)$ ciągu funkcji $f_n(x)$ jest sumowalna oraz iż

$$m_2[S(Q;f)] = \int_Q f\, dx.$$

Odwrotnie, jeśli funkcja $f(x)$ jest sumowalna na Q, wówczas całki $\int_Q f_n\, dx$ tworzą ciąg z góry ograniczony przez $\int_Q f\, dx$ i — ze względu na (5) — pole $S(Q;f)$ ma miarę skończoną.

Twierdzenie nasze jest tedy udowodnione w całości.

Definicja geometryczna całki.

§ 3. Twierdzenie 2 § poprzedniego pozwala uogólnić dotychczasową definicję całki Lebesgue'a w sposób następujący:

Będziemy mówili, iż funkcja $f(x)$, określona prawie wszędzie na pewnym zbiorze mierzalnym E, jest sumowalna na tym zbiorze, jeżeli obydwa jej pola $\overset{*}{S}(E;f)$, $\underset{*}{S}(E;f)$ są mierzalne i mają miarę skończoną; przez całkę $\int_E f(x)dx$ rozumiemy wówczas różnicę:

$$m[\overset{*}{S}(E;f)] - m[\underset{*}{S}(E;f)].\text{[1]} \tag{1}$$

Ze względu na twierdzenie 2, definicja ta — w przypadku, gdy E jest figurą elementarną — równoważna jest definicji, przyjętej w rozdz. poprzednim (§ 1). Można jednak również i całkę na dowolnych zbiorach mierzalnych sprowadzić do całki na figurach elementarnych, a więc do całki, która określona jest zarówno przez wyżej podaną definicję geometryczną, jak i przez definicję rozdziału IV. Mianowicie, jak łatwo zauważyć, *jeśli funkcja $f(x)$ jest sumowalna na pewnym zbiorze E i $f_1(x)$ jest funkcją identyczną z $f(x)$ na E oraz równą zeru poza E, wówczas dla każdej figury elementarnej R:*

$$\int_R f_1\,dx = \int_{E.R} f\,dx\,;$$

w szczególności, dla każdej figury elementarnej R, zawierającej E:

$$\int_R f_1\,dx = \int_E f\,dx\,.$$

Odwrotnie, jeśli zbiór E jest ograniczony, wówczas sumowalność funkcji f na E równoważna jest sumowalności funkcji f_1 na jakiejkolwiek figurze elementarnej $R \supset E$.

Twierdzenie powyższe pozwala przenieść natychmiast wszystkie własności całki Lebesgue'a, ustalone w rozdz. poprzednim,— na ogólną całkę Lebesgue'a, zdefinjowaną na dowolnych zbiorach mierzalnych.

W przypadku funkcji stale nieujemnych dogodnie jest rozszerzyć definicję całki oznaczonej również i na funkcje niesumowalne. Przyjmiemy mianowicie dla każdej funkcji f, mierzal-

[1]) Zachowanie się funkcji f w podzbiorze miary zero zbioru E nie wpływa oczywiście ani na mierzalność pól funkcji f, ani na skończoność ich miary; z tego też powodu w podanej w tekście definicji zakładamy tylko, iż funkcja f jest określona prawie wszędzie na E.

nej, nieujemnej i niesumowalnej na zbiorze mierzalnym E,

$$\int_E f(x)\,dx = +\infty.$$

Formalne to rozszerzenie definicji całki oznaczonej pozwala zachować równość

$$\int_E f(x)\,dx = m\,[S\,(E;\,f)] \tag{2}$$

dla wszystkich funkcji f mierzalnych i nieujemnych na zbiorze mierzalnym E.

Twierdzenie Lebesgue'a o całkowaniu ciągów monotonicznych funkcji uogólnia się równolegle w sposób następujący: jeśli $f(x)$ jest granicą ciągu niemalejącego funkcji $f_n(x)$ mierzalnych i nieujemnych na zbiorze mierzalnym E, wówczas zawsze

$$\lim_n \int_E f_n\,dx = \int_E f\,dx.$$

Z uwagi na równość (2) oraz tw. 1 § poprzedniego, twierdzenie to wynika natychmiast z ogólnych własności miary lebesgue'owskiej (II, § 5, tw. 8 (2^0)).

Podkreślimy jeszcze pewne konsekwencje przyjętej definicji geometrycznej całki:

1^0 *każda funkcja jest sumowalna na każdym zbiorze miary zero i posiada na nim całkę równą zeru;*

2^0 *jeśli funkcja f jest sumowalna na pewnym zbiorze mierzalnym, wówczas sumowalna jest również na każdym podzbiorze mierzalnym tego zbioru;*

3^0 *jeśli funkcja f jest sumowalna na sumie E ciągu (skończonego lub przeliczalnego) zbiorów mierzalnych i rozłącznych $\{E_n\}$, wówczas:*

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x)\,dx.$$

Jeżeli każdemu zbiorowi mierzalnemu, ograniczonemu E w pewnej przestrzeni $\mathfrak{R}$ odpowiada liczba rzeczywista, skończona $F(E)$, wówczas $F(E)$ nazywa się funkcją zbioru mierzalnego w $\mathfrak{R}$.

Funkcja $F(E)$ nazywa się zupełnie addytywna, jeśli dla każdego ciągu (skończonego lub przeliczalnego) zbiorów E_n, mierzalnych i rozłącznych, których suma jest ograniczona,

$$F(E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots) = F(E_1) + F(E_2) + \ldots + F(E_n) + \ldots$$

Funkcja $F(E)$ nazywa się ciągłą absolutnie, jeśli znika dla każdego zbioru ograniczonego miary zero.

Jeśli funkcja punktu $f(x)$ jest sumowalna w jakiejś przestrzeni $\mathfrak{R}$,[1]) wówczas jest sumowalna na każdej figurze elementarnej, a więc temsamem (2^0) na każdym zbiorze mierzalnym ograniczonym rozważanej przestrzeni; połóżmy, dla każdego zbioru mierzalnego E,

$$F(E) = \int_E f(x)\,dx. \tag{3}$$

Sformułowane powyżej własności (1^0, 2^0, 3^0) całki można teraz wyrazić w sposób następujący: określona przez wzór (3) funkcja zbioru mierzalnego E jest zupełnie addytywna i absolutnie ciągła.

Można dowieść, iż również odwrotnie, *jeśli w jakiejś przestrzeni $\mathfrak{R}$ dana jest funkcja $F(E)$ zbioru mierzalnego, zupełnie addytywna i absolutnie ciągła, wówczas istnieje zawsze funkcja sumowalna $f(x)$ w tej przestrzeni taka, iż*

$$F(E) = \int_E f(x)\,dx$$

na każdym zbiorze E mierzalnym, ograniczonym.[2])

Całkowanie ciągów funkcji.

§ 4. Z definicji całki nieoznaczonej Lebesgue'a, jako funkcji bezwzględnie ciągłej, wynika natychmiast, iż, jeśli funkcja $f(x)$ jest sumowalna na pewnej figurze elementarnej R, wówczas całka

$$\int_{R'} f(x)\,dx$$

---

[1]) Należy odróżniać wyrażenie „funkcja sumowalna w przestrzeni $\mathfrak{R}$" od wyrażenia „funkcja sumowalna na przestrzeni $\mathfrak{R}$". Pierwsze wyrażenie oznacza tylko — zgodnie z definicją rozdz. IV — iż funkcja jest sumowalna *na* każdej figurze elementarnej przestrzeni, a więc również (2^0) *na* każdym zbiorze mierzalnym ograniczonym.

Drugie natomiast wyrażenie — w myśl podanej w tym § definicji geometrycznej — oznacza, iż funkcja posiada całkę skończoną rozciągniętą na całą przestrzeń.

[2]) Por. de la Vallée-Poussin, *l. c.* (Chap. V, VI); dalsze uogólnienia: Nikodym, *Fund. Math.*, t. 15, (1930), p. 168.

dąży j e d n o s t a j n i e do zera wraz z polem R', gdy R' oznacza dowolną figurę elementarną, zawartą w R. W związku z rozszerzeniem obszarów całkowania na dowolne zbiory mierzalne, narzuca się tu natychmiast uogólnienie powyższej własności w ten sposób, by figury elementarne R i R' zastąpić przez jakiekolwiek zbiory mierzalne. Uogólnienie to zawiera następujący

Lemmat. Jeśli funkcja $f(x)$ jest sumowalna na pewnym zbiorze mierzalnym E, wówczas dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\eta > 0$, taka, iż dla każdego zbioru mierzalnego $E' \subset E$ nierówność

$$|E'| < \eta$$

pociąga za sobą

$$\int_{E'} |f(x)|\, dx < \varepsilon.$$

D o w ó d. Oznaczmy przez $f_n(x)$ funkcję równą $|f(x)|$, jeśli $|f(x)| < n$, i równą n, jeśli $|f(x)| \geqslant n$. Funkcje $f_n(x)$ tworzą ciąg monotoniczny dążący do $|f(x)|$, zatem

$$\int_E |f|\, dx = \lim_n \int_E f_n\, dx,$$

i istnieje liczba N taka, iż:

$$0 \leqslant \int_E |f|\, dx - \int_E f_N\, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Połóżmy: $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2N}$.

Dla każdego zbioru mierzalnego $E' \subset E$, nierówność $|E'| < \eta$ pociąga za sobą wówczas

$$\int_{E'} |f|\, dx = \int_{E'} (|f| - f_N)\, dx + \int_{E'} f_N\, dx \leqslant \int_E (|f| - f_N)\, dx + \int_{E'} f_N\, dx$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + N|E'| < \frac{\varepsilon}{2} + N\eta = \varepsilon.$$

Z lemmatu powyższego wynika łatwo następujące

T w i e r d z e n i e 3. Jeżeli ciąg funkcji mierzalnych $f_n(x)$ na zbiorze mierzalnym Q dąży prawie wszędzie do funkcji $f(x)$ i jeśli *istnieje przytem funkcja $g(x)$ sumowalna na Q taka, iż — prawie wszędzie —*

(1) $$|f_n(x)| < g(x),$$

wówczas

(2) $$\lim_n \int_Q f_n(x)\,dx = \int_Q f(x)\,dx.$$

D o w ó d. Zauważmy przedewszystkiem, iż funkcja $g(x)$, jako sumowalna, jest prawie wszędzie skończona. Modyfikując tedy ewent. wartości funkcji $f_n(x)$ w zbiorze miary zero (co oczywiście na związek (2) nie wpływa), możemy założyć, iż wszystkie rozważane tu funkcje $f_n(x)$, $f(x)$, $g(x)$ są w zbiorze Q wszędzie skończone.

Niech teraz ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Możemy przedewszystkiem, w myśl lemmatu poprzedniego, określić taką liczbę $\eta > 0$, iż, dla każdego zbioru mierzalnego $Q' \subset Q$, nierówność

(3) $$|Q'| < \eta \quad \text{pociąga za sobą} \quad \int_{Q'} g(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Z drugiej strony, mnogość Q — która mieć może oczywiście miarę nieskończoną — przedstawić można zawsze jako sumę ciągu niemalejącego zbiorów mierzalnych i ograniczonych Q_k; mamy wówczas, jak wynika natychmiast z definicji geometrycznej całki,

$$\int_Q g(x)\,dx = \lim_k \int_{Q_k} g(x)\,dx,$$

a więc istnieje napewno w ciągu $\{Q_k\}$ taki zbiór $P = Q_{k_0}$, iż

(4) $$\int_{Q-P} g(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Zbiór ten, jako ograniczony, zawiera napewno (II, § 12) pewien podzbiór mierzalny P' miary mniejszej od η, taki iż, począwszy od pewnej wartości wskaźnika n, niezależnej od punktu x, nierówność

(5) $$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2|P|}$$

spełniona jest w każdym punkcie $x \in P - P'$.

Mamy wówczas, zważywszy na (3), (4) i (5), dla dostatecznie wysokich wartości n,

$$\int\limits_Q |f - f_n|\, dx = \int\limits_{Q-P} |f - f_n|\, dx + \int\limits_{P-P'} |f - f_n|\, dx + \int\limits_{P'} |f - f_n|\, dx$$

$$\leqslant 2\int\limits_{Q-P} g\, dx + \frac{\varepsilon}{2|P|}|P - P'| + 2\int\limits_{P'} g\, dx$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

a więc tembardziej

$$\left|\int\limits_Q f\, dx - \int\limits_Q f_n\, dx\right| < \varepsilon,$$

skąd wynika oczywiście żądany związek (2).

Twierdzenie powyższe udowodnione zostało przez Lebesgue'a jako uogólnienie dawnych twierdzeń (Arzeli i in.) o całkowaniu Riemann'owskiem ciągów funkcji. De la Vallée-Poussin (*l. L.*, p. 44) uważa je za „jeden z najpiękniejszych wyników teorji."

Udowodnimy w związku z twierdzeniem poprzedniem pewne inne jeszcze twierdzenie o całkowaniu ciągów funkcji, znane zwykle pod nazwą lemmatu Fatou.[1])

Twierdzenie 4. Jeśli ciąg funkcji $\{f_n(x)\}$, mierzalnych i stale nieujemnych na pewnym zbiorze mierzalnym Q, dąży na tym zbiorze prawie wszędzie[2]) *do pewnej funkcji $f(x)$, wówczas*

---

[1]) Znajdujemy je bowiem — po raz pierwszy — jako pewną przesłankę pomocniczą w rozprawie Fatou, poświęconej szeregom trygonometrycznym (*Acta Mathematica*, t. 30).

[2]) Ze względu na twierdzenie F. Riesza (II, § 15, tw. 21 (2^0)) możemy w sformułowaniu zarówno twierdzenia Fatou, jak i poprzedniego twierdzenia Lebesgue'a, zastąpić zbieżność prawie wszędzie przez zbieżność asymptotyczną; zresztą — w dowodach obydwu tych twierdzeń — wystarczyło skorzystać tylko ze zbieżności asymptotycznej rozważanych ciągów funkcji.

$$(6) \qquad \liminf_{n} \int_Q f_n(x)\, dx \geqslant \int_Q f(x)\, dx.^{1)}$$

D o w ó d. Zbiór Q — który może być naogół miary nieskończonej — przedstawimy przedewszystkiem (podobnie jak w dowodzie twierdzenia poprzedniego) jako granicę ciągu niemalejącego zbiorów mierzalnych i ograniczonych Q_m. Oznaczymy dalej, dla każdej liczby całkowitej m, przez $f_n^m(x)$ funkcję równą $f_n(x)$ w punktach, w których $f_n(x) \leqslant m$, oraz równą m w pozostałych punktach rozważanego zbioru. Podobnie, oznaczymy przez $f^m(x)$ funkcję równą $f(x)$, wzgl. równą m, zależnie od tego, czy w punkcie x mamy $f(x) \leqslant m$, czy też $f(x) > m$.

Określone w ten sposób funkcje $f_n^m(x)$ tworzą dla każdej, ustalonej wartości m, ciąg funkcji nieujemnych, zbieżnych prawie wszędzie do funkcji $f^m(x)$ i wspólnie ograniczonych przez liczbę stałą m, która jest oczywiście sumowalna na każdym zbiorze mierzalnym o g r a n i c z o n y m; w myśl przeto twierdzenia poprzedniego, dla każdej liczby m,

$$\int_{Q_m} f^m(x)\, dx = \lim_{n} \int_{Q_m} f_n^m(x)\, dx \leqslant \liminf_{n} \int_Q f_n(x)\, dx,$$

skąd przechodząc do granicy, gdy $m \to \infty$, otrzymujemy

$$\int_Q f(x)\, dx = \lim_{m} \int_{Q_m} f^m(x)\, dx \leqslant \liminf_{n} \int_Q f_n(x)\, dx,$$

co należało udowodnić.

Twierdzenia o wartości średniej.

§ 5. Osiągnięte rezultaty pozwalają podać obecnie pewne dwa twierdzenia, które — znane pod nazwą „t w i e r d z e ń o w a r t o ś c i ś r e d n i e j“ — znajdują liczne zastosowania w wielu działach Analizy; twierdzenia te należą w istocie rzeczy do Analizy

---

1) Funkcje, występujące tu pod znakiem całek, mogą być niesumowalne całki te wszakże są i w tym przypadku określone (są n i e s k o ń c z o n e), jako że rozważane funkcje są z założenia nieujemne. Natomiast, ze skończoności granicy po lewej stronie nierówności (6) wynika już a f o r t i o r i, iż funkcja $f(x)$ jest sumowalna.

klasycznej, gdzie dowodzone są dla całek Cauchy'ego i Riemanna.

Pierwsze z nich jest niemal oczywiste[1]) i w sformułowaniu dla całki Lebesgue'a orzeka:

Twierdzenie 5. Jeśli $g(x)$ i $f(x)$ są dwiema funkcjami sumowalnemi w przedziale (a, b), $g(x)$ jest w tym przedziale funkcją prawie wszędzie nieujemną, zaś $f(x)$ funkcją ograniczoną, wówczas funkcja $g(x) f(x)$ jest również w przedziale (a, b) sumowalna, przyczem

$$\int_a^b g(x) f(x)\, dx = \mu \int_a^b g(x)\, dx,$$

gdzie μ oznacza pewną liczbę zawartą między kresami wartości funkcji $f(x)$.

Dowód. Oznaczając przez M i m odp. kresy górny i dolny funkcji $f(x)$ w (a, b), mamy

$$M\int_a^b g(x)\, dx \geqslant \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \geqslant m\int_a^b g(x)\, dx,$$

przyczem funkcja $f(x)\, g(x)$ jest sumowalna, jako iloczyn funkcji sumowalnej przez funkcję mierzalną ograniczoną.[2])

Oznaczając tedy przez μ stosunek

$$\frac{\int_a^b f g\, dx}{\int_a^b g\, dx},$$

stwierdzamy natychmiast, iż $m \leqslant \mu \leqslant M$, co uzasadnia nasze twierdzenie.

Głębszy już charakter nosi twierdzenie następujące, zwane drugiem twierdzeniem o wartości średniej.

---

[1]) W § 8 (tw. 15) podajemy uogólnienie tego twierdzenia dla całki Riemanna-Stieltjesa.

[2]) Por. rozdz. IV, § 4.

Twierdzenie 6. Jeśli funkcja $f(x)$ jest sumowalna w przedziale (a, b) i $g(x)$ jest funkcją skończoną, monotoniczną niemalejącą w tym przedziale, wówczas funkcja $f(x)\,g(x)$ jest również sumowalna, przyczem

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx,$$

gdzie ξ jest pewną liczbą zawartą w przedziale (a, b).[1])

Dowód. Udowodnimy najpierw związek (1) w przypadku szczególnym, gdy

A) funkcja $g(x)$ jest funkcją niemalejącą i bezwzględnie ciągłą w przedziale (a, b).

Kładąc wówczas

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

mamy na mocy twierdzenia „o całkowaniu przez części" (IV, §5)

$$(2) \qquad \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = F(b)\,g(b) - \int_a^b F(x)\,g'(x)\,dx.$$

Na zasadzie „pierwszego twierdzenia o wartości średniej", jako że pochodna $g'(x)$ jest nieujemna,

$$\int_a^b F(x)\,g'(x)\,dx = \mu\int_a^b g'(x)\,dx = \mu\,[g(b) - g(a)],$$

gdzie μ jest pewną liczbą, zawartą między kresami funkcji $F(x)$ w (a, b). Ponieważ jednak funkcja $F(x)$ jest ciągła, zatem w przedziale (a, b) istnieje punkt ξ taki, iż

$$F(\xi) = \mu,$$

i ze związku (2) otrzymujemy

---

[1]) Twierdzenie to dotyczy wyłącznie funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = F(b)\,g(b) - F(\xi).[g(b) - g(a)]$$
$$= g(a)\,F(\xi) + g(b).[F(b) - F(\xi)]$$
$$= g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx,$$

t. zn. związek (1).

B) Funkcja $g(x)$ jest dowolną funkcją skończoną, niemalejącą w (a, b). Oznaczmy przez G większą z dwu liczb $|g(a)|$, $|g(b)|$. Niech dla każdej wartości naturalnej n, $g_n(x)$ oznacza funkcję linjową w każdym z przedziałów

$$\left(a + k\frac{b-a}{n},\ a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

i identyczną z $g(x)$ na krańcach tych przedziałów. Każda z funkcji $g_n(x)$ jest niemalejąca i bezwzględnie ciągła, na zasadzie tedy *A*) istnieje dla każdego n punkt ξ_n w przedziale (a, b) taki, iż:

$$\int_a^b g_n(x)\,f(x)\,dx = g_n(a)\int_a^{\xi_n} f(x)\,dx + g_n(b)\int_{\xi_n}^b f(x)\,dx$$
(3)
$$= g(a)\int_a^{\xi_n} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi_n}^b f(x)\,dx.$$

Możemy wyjąć z ciągu $\{\xi_n\}$ ciąg zbieżny $\{\xi_{n_k}\}$ do pewnego punktu ξ.

Ciąg $g_n(x)$ jest, jak łatwo zauważyć, zbieżny do funkcji $g(x)$ w każdym punkcie ciągłości tej funkcji, ponieważ zaś funkcja monotoniczna może posiadać conajwyżej tylko przeliczalną mnogość punktów nieciągłości (I, § 14), zatem, z pominięciem conajwyżej przeliczalnego zbioru punktów,

$$\lim_n g_n(x)\,f(x) = g(x)\,f(x),$$

i z uwagi na

$$|g_n(x)\,f(x)| \leqslant G.|f(x)|$$

oraz na twierdzenie 3 (§ 4):

$$\lim_n \int_a^b g_n(x) f(x)\, dx = \int_a^b g(x) f(x)\, dx.$$

Z drugiej strony, ponieważ $\xi_{n_k} \longrightarrow \xi$, przeto również:

$$\lim_k \int_a^{\xi_{n_k}} f(x)\, dx = \int_a^{\xi} f(x)\, dx,$$

$$\lim_k \int_{\xi_{n_k}}^{b} f(x)\, dx = \int_{\xi}^{b} f(x)\, dx,$$

i, kładąc w (3) $n = n_k$, otrzymujemy, przechodząc następnie do granicy dla $k \longrightarrow \infty$,

$$\int_a^b g(x) f(x)\, dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)\, dx + g(b) \int_{\xi}^{b} f(x)\, dx.$$

Twierdzenie Vitali'ego-Carathéodory'ego.

§ 6. *Lemmat. Jeżeli dwie funkcje nieujemne $f_1(x)$ i $f_2(x)$, mierzalne*[1]) *na pewnym zbiorze mierzalnym Q, spełniają na nim nierówność*

$$f_1(x) \geqslant f_2(x),$$

i jeśli pola tych dwu funkcji na Q różnią się conajwyżej o zbiór miary zero, wówczas prawie wszędzie w Q

$$f_1(x) = f_2(x).$$

Dowód. Oznaczmy przez A, wzgl. $A_{n,p}$, zbiór tych wszystkich punktów $x \in Q$, w których

$$f_1(x) > f_2(x),$$

wzgl.

$$f_1(x) > \frac{n+1}{p} > \frac{n}{p} > f_2(x).$$

---

[1]) Twierdzenie to jest zresztą prawdziwe dla dowolnych funkcji, niekoniecznie mierzalnych.

Mamy oczywiście

$$A = \sum_{n, p=1}^{\infty} A_{n, p}.$$

Załóżmy, iż:

$$m_1(A) > 0.$$

Istnieje tedy para liczb n_0, p_0 taka, iż:

$$m_1(A_{n_0, p_0}) > 0.$$

Oznaczając tedy przez S_1 i S_2 odp. pola funkcji f_1 i f_2 na Q, oraz przez S zbiór tych punktów (x, y), dla których

$$x \in A_{n_0, p_0} \quad \text{oraz} \quad \frac{n_0 + 1}{p_0} \geqslant y \geqslant \frac{n_0}{p_0},$$

otrzymujemy z uwagi na lemmat 1 (§ 2):

$$m_2(S_1 - S_2) \geqslant m_2(S) = \frac{m_1(A_{n_0, p_0})}{p_0} > 0,$$

co oczywiście sprzeczne jest z założeniem, iż pola S_1 i S_2 różnią się conajwyżej o zbiór miary zero.

Twierdzenie 7 (Vitali'ego - Carathéodory'ego). *Jeśli $f(x)$ jest funkcją mierzalną na pewnej figurze elementarnej R, wówczas istnieją zawsze dwa ciągi monotoniczne funkcji półciągłych, zbieżne prawie wszędzie do $f(x)$ — ciąg nierosnący funkcji półciągłych z dołu $\{u_n(x)\}$ oraz ciąg niemalejący funkcji półciągłych z góry $\{v_n(x)\}$ — spełniające warunki następujące:*

1^0 *każda z funkcji u_n jest ograniczona z dołu, każda z funkcji v_n jest ograniczona z góry;*

2^0 *dla każdego n, w każdym punkcie $x \in R$:*

$$u_n(x) \geqslant f(x) \geqslant v_n(x);$$

3^0 *jeśli ponadto funkcja $f(x)$ jest sumowalna na R, wówczas funkcje u_n i v_n mogą być określone w ten sposób, aby wszystkie były sumowalne i wówczas:*

$\int_R f(x)\,dx.$ [1]

$$\lim_n \int_R u_n(x)\,dx = \lim_n \int_R v_n(x)\,dx = \int_R f(x).$$ [1]

D o w ó d. A) Udowodnimy najpierw twierdzenie nasze w przypadku, gdy funkcja $f(x)$ jest stale nieujemna.

A^1. Rozpoczniemy od zbudowania ciągu $u_n(x)$.

Oznaczmy w tym celu przez R' zbiór tych wszystkich punktów (x, y), dla których $x \in R$ oraz $y \geqslant 0$. Oznaczmy dalej przez S pole funkcji $f(x)$. Ponieważ pole to jest mierzalne (§ 2, tw. 2 (1⁰)), przeto istnieje pewien zbiór G_δ, H, taki, iż:

(1) $$H \supset S \quad \text{oraz} \quad m_2(H - S) = 0.$$

Zbiór H przedstawić możemy w postaci

$$H = \prod_{n=1}^{\infty} G_n,$$

gdzie $\{G_n\}$ jest pewnym ciągiem zstępującym zbiorów otwartych.

Niech $$F_n = R' - G_n.$$

Zbiory F_n tworzą oczywiście ciąg wstępujący zbiorów domkniętych; mamy przytem dla każdego n:

(2) $$F_n \times S = 0.$$

---

[1]) Warunek (3⁰) zastąpićby tu można warunkiem ogólniejszym, niezależnym od sumowalności funkcji f:

(3⁰bis) $$\lim_n \int_R (u_n - f)\,dx = \lim_n \int_R (f - v_n)\,dx = 0.$$

Dowód — w istocie rzeczy — tensam, wymaga tylko następującego uogólnienia lemmatu poprzedniego: *jeśli f_1, f_2 ($f_1 \geqslant f_2$) są dwiema funkcjami mierzalnemi na zbiorze Q, i S_1, S_2 oznaczają odp. ich pola na Q, wówczas*

$$m_2(S_1 - S_2) = \int_Q (f_1 - f_2)\,dx.$$

Określimy teraz funkcje $u_n(x)$ w sposób następujący: dla każdego punktu $x = \xi$, $u_n(\xi)$ oznacza rzędną najniższego punktu zbioru F_n na prostej $x = \xi$; jeśli zbiór F_n nie posiada wogóle punktów wspólnych z tą prostą, wówczas kładziemy

$$u_n(\xi) = +\infty.$$

Funkcje $u_n(x)$ są w ten sposób określone. Ponieważ zbiory F_n tworzą ciąg wstępujący, przeto funkcje u_n tworzą ciąg nierosnący. Dalej, każda z funkcji u_n, jako stale nieujemna, jest napewno ograniczona z dołu i spełnia temsamem warunek 1^0.

Związek (2) pociąga za sobą z kolei

$$u_n(x) \geqslant f(x)$$

w każdym punkcie x figury elementarnej R, a więc spełniony jest również warunek 2^0.

Łatwo wreszcie zauważyć, iż zbiór

$$\underset{x}{E}\,[u_n(x) \leqslant a]$$

jest, dla każdej liczby rzeczywistej a, rzutem na oś x-ów części zbioru F_n zawartej w pasie $0 \leqslant y \leqslant a$, a więc rzutem zbioru domkniętego, ograniczonego, i temsamem jest również domknięty. Stąd oczywiście (II, § 11, tw. 18) wynika, iż funkcje $u_n(x)$ są wszystkie półciągłe z dołu.

Pozostaje udowodnić jeszcze tylko, iż prawie wszędzie

$$\lim_n u_n(x) = f(x)$$

oraz, iż w przypadku, gdy $f(x)$ jest funkcją sumowalną, funkcje $u_n(x)$ mogą być tak określone, aby były również sumowalne na R.

Oznaczmy w tym celu przez $u(x)$ granicę ciągu funkcji u_n, przez T — pole funkcji $u(x)$ na R, wreszcie — przez T_n i W_n odp. pola i wykresy funkcji u_n. Mamy wówczas, dla każdego n,

$$G_n + W_n \supset T_n \supset T \supset S, \tag{3}$$

skąd:

$$T - S \subset \prod_{n=1}^{\infty}(G_n + W_n) - S \subset \left(H + \sum_{n=1}^{\infty} W_n\right) - S. \tag{4}$$

Ale funkcje u_n, jako półciągłe, są (II, § 11) mierzalne, wykresy ich W_n mają tedy (§ 2, tw. 1) miarę (płaską) równą zeru i z (4), z uwagi na (1), otrzymujemy:

$$m_2(T-S) \leqslant m_2(H-S) + \sum_{n=1}^{\infty} m_2(W_n) = 0,$$

t. j. pola funkcji $f(x)$ i $u(x)$ różnią się conajwyżej o zbiór miary zero i na mocy lemmatu poprzedniego funkcje te są równoważne na R, a więc prawie wszędzie

$$u = \lim_n u_n = f.$$

Jeśli wreszcie funkcja $f(x)$ jest sumowalna na R, wówczas S (§ 2, tw. 2) ma miarę skończoną, temsamem miarę skończoną ma zbiór H, i zbiory otwarte G_n mogą być określone w ten sposób, aby wszystkie posiadały również miarę skończoną. Wówczas, z uwagi na (3), funkcje u_n mają także pola o mierze skończonej, są tedy (tw. 2) sumowalne oraz

$$\lim_n \int_R u_n(x)\,dx = \lim_n m_2(T_n) = m_2(T) = \int_R u(x)\,dx = \int_R f(x)\,dx.$$

Funkcje $u_n(x)$ spełniają zatem wszystkie żądane warunki.

A^2. Istnienie ciągu funkcji $v_n(x)$ dla funkcji nieujemnej $f(x)$ moglibyśmy ustalić w sposób podobny do konstrukcji funkcji $u_n(x)$. Można jednak wyprowadzić je wprost z otrzymanego już wyniku, dotyczącego funkcji $u_n(x)$. Niech w tym celu $u_n^o(x)$ oznacza ciąg nierosnący funkcji nieujemnych, półciągłych z dołu, zbieżnych prawie wszędzie do funkcji $\dfrac{1}{f(x)}$ i spełniających wszędzie, dla każdego n, nierówność:

$$u_n^o(x) \geqslant \frac{1}{f(x)}.$$

Ciąg taki istnieje na zasadzie (A^1). Połóżmy:

$$v_n(x) = \frac{1}{u_n^o(x) + \dfrac{1}{n}}.$$

Ciąg $\{v_n\}$ jest wówczas widocznie ciągiem niemalejącym funkcji półciągłych z góry, zbieżnym prawie wszędzie do $f(x)$. Dla każdego n, w każdym punkcie $x \in R$,

$$v_n(x) \leqslant n \qquad \text{oraz} \qquad v_n(x) \leqslant f(x),$$

funkcje v_n spełniają zatem obydwa warunki 1°, 2°. Wreszcie, jeśli funkcja $f(x)$ jest sumowalna, wówczas sumowalne są również funkcje $v_n(x)$, jako że

$$0 \leqslant v_n(x) \leqslant f(x),$$

i, na zasadzie twierdzenia Lebesgue'a o całkowaniu wyraz za wyrazem ciągów monotonicznych funkcji, ciąg ich całek dąży do całki funkcji $f(x)$.

B) Niech teraz $f(x)$ będzie dowolną funkcją mierzalną na figurze elementarnej R. Mamy

$$f = \overset{*}{f} + \underset{*}{f},$$

gdzie $\overset{*}{f}$, $\underset{*}{f}$ oznaczają, jak zwykle, część nieujemną i niedodatnią funkcji f. W myśl udowodnionego już wyniku dla funkcji nieujemnych, istnieje ciąg monotoniczny nierosnący funkcji półciągłych i ograniczonych z dołu $u_n^{(1)}(x)$ oraz ciąg monotoniczny niemalejący funkcji półciągłych i ograniczonych z góry $v_n^{(2)}(x)$, zbieżnych prawie wszędzie odp. do funkcji $\overset{*}{f}(x)$ i $-\underset{*}{f}(x)$, i takich przytem, iż, dla każdego n,

$$u_n^{(1)}(x) \geqslant \overset{*}{f}(x) \qquad \text{oraz} \qquad -\underset{*}{f}(x) \geqslant v_n^{(2)}(x).$$

Nadto, jeśli funkcja $f(x)$ — a więc również obydwie jej części $\overset{*}{f}$ i $\underset{*}{f}$ — są sumowalne, wówczas funkcje $u_n^{(1)}(x)$ oraz $v_n^{(2)}(x)$ mogą być tak określone, aby wszystkie były również sumowalne. Kładąc teraz

$$u_n(x) = u_n^{(1)}(x) - v_n^{(2)}(x),^{1})$$

---

[1]) Jakkolwiek funkcje $u_n^{(1)}(x)$, $v_n^{(2)}(x)$ mogą przyjmować wartości nieskończone, niemniej, jedna z nich nie przyjmuje nigdy wartości $-\infty$, druga — wartości $+\infty$. Różnica $u_n^{(1)} - v_n^{(2)}$ jest tedy całkowicie określona.

otrzymujemy ciąg funkcji, spełniających — w stosunku do funkcji $f(x)$ — wszystkie warunki naszego twierdzenia. Analogicznie określamy ciąg funkcji $v_n(x)$.

Twierdzenie powyższe było udowodnione, po raz pierwszy, przez Vitali'ego (*Rend. Ist. Lomb.*, (2), t. 38, (1905)) w postaci następującej: „*Każda funkcja mierzalna jest równa prawie wszędzie pewnej funkcji klasy drugiej Baire'a.*" Carathéodory (*R. F.*, p. 406, (Kap. VI)) uzupełnił wynik ten w sposób istotny, pokazując, iż każda funkcja mierzalna f pokrywa się prawie wszędzie z dwiema funkcjami klasy drugiej, z których jedna jest granicą niemalejącego ciągu funkcji półciągłych z góry, nigdzie niewiększych od f, druga zaś — jest granicą nierosnącego ciągu funkcji półciągłych z dołu nigdzie od f niemniejszych.

Twierdzenie Vitali'ego, w swem dawnem sformułowaniu, było jednem z pierwszych twierdzeń, które pokazywały, iż ogólna funkcja mierzalna, z pominięciem zbioru miary zero, pokrywa się z funkcjami o budowie elementarnej. Dzisiaj twierdzeń takich znamy dużo więcej.[1]) Dla nas, twierdzenie Vitali'ego będzie tu miało to przedewszystkiem znaczenie, iż pozwoli łatwo ustalić związek między całką Lebesgue'a a całką Perrona; w zastosowaniu tem istotną rolę odgrywa uzupełnienie twierdzenia Vitali'ego, wprowadzone przez Carathéodory'ego.

Całka Riemanna-Stieltjesa.

§ 7. Zakończymy rozdział ten ustaleniem związku między całką Lebesgue'a a całką Riemanna. Skorzystamy tu również ze sposobności, by rozważyć operację ogólniejszą od całki Riemanna, mianowicie — t. zw. całkę Riemanna-Stieltjesa. Całka ta odgrywa ważną rolę w wielu działach Analizy; w rozdz. X podamy zastosowanie jej do uogólnienia twierdzenia o całkowaniu przez części oraz do dowodu drugiego twierdzenia o wartości średniej dla całek Denjoy.

Przyjmiemy definicje następujące.

Niech $F(x)$ będzie dowolną funkcją o wahaniu skończonem i $g(x)$ dowolną funkcją ograniczoną w przedziale (a, b).

Oznaczmy przez D dowolny podział przedziału (a, b) na skończony układ niezachodzących na siebie podprzedziałów; niech: $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$ będą punktami tego podziału; przez $l(D)$ oznaczymy największą z liczb $a_{i+1} - a_i$ $(i = 0, 1, \ldots n-1)$.

Niech dalej, dla każdego $i = 0, 1, \ldots n-1$, N_i oznacza kres górny, wzgl. dolny, funkcji $g(x)$ w przedziale (a_i, a_{i+1}), zależnie od tego, czy $F(a_{i+1}) - F(a_i)$ jest > 0, czy ≤ 0; analogicznie, n_i

1) Por. np. Sierpiński, *Fund. Math.*, t. 3, (1922), p. 314

oznaczać będzie kres dolny, lub górny, funkcji $g(x)$ w przedziale (a_i, a_{i+1}) zależnie od tego, czy różnica $F(a_{i+1}) - F(a_i)$ jest, lub nie jest, dodatnia.

Ustaliwszy funkcje $F(x)$ i $g(x)$, przyporządkować możemy każdemu podziałowi D przedziału (a, b) dwie liczby:

$$S(D) = \sum_{i=0}^{n-1} N_i \, . \, [F(a_{i+1}) - F(a_i)],$$

oraz

$$s(D) = \sum_{i=0}^{n-1} n_i \, . \, [F(a_{i+1}) - F(a_i)],$$

przyczem widoczne jest, iż dla każdego podziału D

$$K \, . \, W \geqslant S(D) \geqslant s(D) \geqslant - K \, . \, W, \tag{1}$$

gdzie przez K oznaczamy kres górny wartości bezwzględnych funkcji $g(x)$ w przedziale (a, b), zaś przez W — wahanie bezwzględne funkcji F na tym samym przedziale.

Nazwiemy c a ł k ą g ó r n ą R i e m a n n a - S t i e l t j e s a funkcji $g(x)$ w z g l ę d e m f u n k c j i $F(x)$ w p r z e d z i a l e (a, b) granicę górną sum $S(D)$, gdy liczba $l(D)$ dąży do zera; całkę tę oznaczać będziemy przez

$$(\mathfrak{S}) \overline{\int_a^b} g(x) \, dF(x); \tag{2}$$

analogicznie, c a ł k ę d o l n ą R i e m a n n a - S t i e l t j e s a funkcji $g(x)$ względem funkcji $F(x)$, definjujemy jako granicę dolną sum $s(D)$, gdy $l(D) \longrightarrow 0$; oznaczymy ją, podobnie, przez

$$(\mathfrak{S}) \underline{\int_a^b} g(x) \, dF(x). \tag{3}$$

Z (1) wynika, iż określone w powyższy sposób całki są zawsze skończone i spełniają warunek

$$(\mathfrak{S}) \underline{\int_a^b} g \, dF \leqslant (\mathfrak{S}) \overline{\int_a^b} g \, dF;$$

w przypadku, gdy są sobie równe, mówimy, iż funkcja $g(x)$ jest w przedziale (a, b) całkowalna według Riemanna-Stieltjesa względem funkcji $F(x)$, i przez

$$(4) \qquad (\mathfrak{S})\int_a^b g\,dF$$

oznaczamy wspólną wartość obydwu całek (2) i (3), które nazywamy wówczas wprost całką Riemanna-Stieltjesa funkcji $g(x)$ w przedziale (a, b); jeśli nie będzie obawy niejasności, będziemy przytem zwykle opuszczali znak $(\mathfrak{S})$ przed symbolem całki.

Jeżeli $F(x) = x$, wówczas wyrażenia (2), (3) i (4) nazywają się odp. całką górną Riemanna, całką dolną Riemanna, wreszcie, całką Riemanna funkcji $g(x)$ w przedziale (a, b); oznaczamy je odpowiednio przez:

$$(\mathfrak{R})\overline{\int_a^b} g(x)\,dx, \quad (\mathfrak{R})\underline{\int_a^b} g(x)\,dx, \quad (\mathfrak{R})\int_a^b g(x)\,dx.$$

Jeżeli istnieje trzecia z wypisanych wyżej całek, wówczas funkcja $g(x)$ nazywa się całkowalna według Riemanna.

Całka Riemanna jest oczywiście starsza od uogólniającej ją całki Riemanna-Stieltjesa; uogólnienie to, które stanowi pewną relatywizację całki Riemanna (względem dowolnej funkcji o wahaniu skończonem), zawdzięczamy Stieltjesowi.[1]) W podobny sposób zrelatywizować i uogólnić można całkę Lebesgue'a, otrzymując t. zw. całkę Lebesgue'a-Stieltjesa;[2]) uogólnienie to wiąże się w sposób istotny i naturalny z uogólnieniem — zapomocą analogicznej relatywizacji — pojęcia miary Lebesgue'a.

Interesujące i oryginalne uogólnienie całki Lebesgue'a w kierunku stieltjes'owskim, odbiegające od uogólnień zwykłych tego typu, znajdzie czytelnik w ładnej pracy Niny Bary i Menchoffa: *Sur l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes et les fonctions absolument continues de fonctions absolument continues (Ann. di Mat.* (IV), t. 5, (1927-8)).

W przypadku, gdy funkcja $F(x)$, względem której całkujemy, jest ciągła bezwzględnie, możemy wyrazić obydwie całki krańco-

---

[1]) T. J. Stieltjes, *Ann. Fac. Sc. de Toulouse*, (1), t. 8, (1894), pp. 68—75.

[2]) Por. np. Lebesgue, *L. I.*, II, Chap. XI; Hobson, *R. F.*, p. 662.

we Riemanna-Stieltjesa łatwo zapomocą całki Lebesgue'a. Udowodnimy mianowicie

Twierdzenie 8. Jeśli funkcja $F(x)$ jest ciągła bezwzględnie w przedziale (a, b) i $g(x)$ jest dowolną funkcją ograniczoną w tym przedziale, wówczas:

$$(5)\qquad \begin{aligned} (\mathfrak{S})\overline{\int_a^b} g(x)\, dF(x) &= \int_a^b N(x)\, F'(x)\, dx, \\ (\mathfrak{S})\underline{\int_a^b} g(x)\, dF(x) &= \int_a^b n(x)\, F'(x)\, dx, \end{aligned}$$

gdzie $N(x)$ (wzgl. $n(x)$) *oznacza maximum lub minimum* (wzgl. minimum lub maximum)[1] *funkcji $g(x)$ w punkcie x, zależnie od tego, czy $F'(x) < 0$, czy $F'(x) \gtrless 0$.*[2]

Dowód. Twierdzenie nasze będzie dowiedzione, skoro pokażemy, iż — dla dowolnego ciągu podziałów $\{D_n\}$ — $l(D_n) \to 0$ pociąga za sobą

$$\int_a^b N(x)\, F'(x)\, dx = \lim_n S(D_n),$$

$$\int_a^b n(x)\, F'(x)\, dx = \lim_n s(D_n),$$

gdzie liczby $S(D_n)$, $s(D_n)$ są określone w sposób, ustalony na początku tego § dla funkcji $g(x)$, $F(x)$ i podziałów D_n.

Wystarczy udowodnić tylko pierwszą z podanych wyżej równości; dowód drugiej przeprzeprowadza się w sposób identyczny.

Niech

$$a = a_0^{(n)} < a_1^{(n)} < \ldots < a_{p_n}^{(n)} = b$$

---

[1]) p. rozdz. II, § 11.

[2]) Funkcje $N(x)$, $n(x)$ są określone w ten sposób prawie wszędzie w (a, b), mianowicie — w punktach różniczkowalności funkcji $F(x)$; wartość ich w pozostałych punktach przedziału może być ustalona dowolnie, jako że całki, występujące po stronie prawej równości (5), są rozumiane w sensie Lebesgue'a.

będą punktami podziału D_n. Oznaczymy ogólnie przez $M_i^{(n)}$, wzgl. $m_i^{(n)}$, $(n = 1, 2, \ldots; i = 0, 1, \ldots, p_n - 1)$ kres górny, wzgl. dolny, funkcji $g(x)$ w przedziale $(a_i^{(n)}, a_{i+1}^{(n)})$; $N_i^{(n)}$ oznaczać będzie liczbę $M_i^{(n)}$ lub $m_i^{(n)}$ zależnie od tego czy różnica $F(a_{i+1}^{(n)}) - F(a_i^{(n)})$ jest > 0, czy $\leqslant 0$.

Niech teraz, dla każdego n,

$$N^{(n)}(x) = N_i^{(n)}, \quad \text{jeśli:} \quad a_i^{(n)} \leqslant x < a_{i+1}^{(n)}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, p_n - 1).$$

Mamy wówczas:

$$\begin{aligned} S(D_n) &= \sum_{i=0}^{p_n-1} N_i^{(n)} . [F(a_{i+1}^{(n)}) - F(a_i^{(n)})] \\ &= \sum_{i=0}^{p_n-1} N_i^{(n)} \int_{a_i^{(n)}}^{a_{i+1}^{(n)}} F'(x)\, dx \qquad (6) \\ &= \int_a^b N^{(n)}(x)\, F'(x)\, dx . \end{aligned}$$

Oznaczając przez K kres górny wartości bezwzględnych funkcji $g(x)$ w (a, b), będziemy mieli, prawie wszędzie, dla każdego n,

$$(7) \qquad |N^{(n)}(x) . F'(x)| \leqslant K . |F'(x)| .$$

Powiadamy, iż ponadto w każdym punkcie x_0, w którym funkcja $F(x)$ jest różniczkowalna i który nie jest jednocześnie żadnym z punktów podziałów D_n,

$$(8) \qquad \lim_n N^{(n)}(x_0)\, F'(x_0) = N(x_0)\, F'(x_0) .$$

W samej rzeczy, związek ten jest widoczny, jeśli $F'(x_0) = 0$; załóżmy tedy, iż $F'(x_0) \neq 0$, np. iż $F'(x_0) > 0$.

Wówczas, z jednej strony,

$$(9) \qquad N(x_0) = M(x_0),$$

gdzie $M(x)$ oznacza m a x i m u m funkcji $g(x)$ w punkcie x, z drugiej zaś — jeśli tylko n jest dostatecznie dużą liczbą — nierówność

$$a_i^{(n)} < x_0 < a_{i+1}^{(n)},$$

pociąga za sobą

$$F(a_{i+1}^{(n)}) - F(a_i^{(n)}) > 0,$$

a więc

$$N^{(n)}(x_0) = N_i^{(n)} = M_i^{(n)};$$

z uwagi przeto na (9)

$$\lim_n N^{(n)}(x_0) = M(x_0) = N(x_0),$$

i równość (8) jest temsamem udowodniona.

Ze względu na (7), możemy tedy — w myśl twierdzenia Lebesgue'a[1]) — dokonać pod znakiem całki w wyrażeniu (6) przejścia do granicy — otrzymując:

$$\lim_n S(D_n) = \lim_n \int_a^b N^{(n)}(x) F'(x)\, dx = \int_a^b N(x) F'(x),$$

co należało udowodnić.

Twierdzenie 9. Na to, aby funkcja ograniczona $g(x)$ była całkowalna w (a, b) w sensie Riemanna-Stieltjesa względem pewnej funkcji bezwzględnie ciągłej $F(x)$ w tym przedziale, konieczne jest i wystarcza, aby funkcja $g(x)$ była ciągła w prawie każdym punkcie, w którym funkcja $F(x)$ posiada pochodną różną od zera.

Jeśli warunek ten jest spełniony, wówczas

$$\int_a^b g\, dF = \int_a^b g(x) F'(x)\, dx.$$

Dowód. Pierwsza część twierdzenia wynika natychmiast z równości

$$\overline{\int_a^b} g\, dF - \underline{\int_a^b} g\, dF = \int_a^b O(x) . |F'(x)|\, dx,$$

---

[1]) tw. 3 (§ 4).

którą otrzymujemy, odejmując stronami związki (5) i oznaczając przez $O(x)$ oscylację[1]) funkcji $g(x)$ w punkcie x.

Część druga wynika z kolei z pierwszej, oraz z równości (5), jako iż w każdym punkcie ciągłości funkcji $g(x)$

$$N(x) = n(x) = g(x).$$

Kładąc $F(x) = x$, otrzymujemy z udowodnionego twierdzenia jeszcze następujące

Twierdzenie 10. Na to, aby funkcja $g(x)$ ograniczona w przedziale (a, b) była w tym przedziale całkowalna w sensie Riemanna, konieczne jest i wystarcza, aby funkcja ta była prawie wszędzie ciągła.

Jeśli warunek ten jest spełniony, wówczas funkcja $g(x)$ jest sumowalna, i jej całki Riemanna i Lebesgue'a się pokrywają.[2])

Z Twierdzenia 9, ze względu na twierdzenie 11 rozdz. poprzedniego (§ 4), wynika jeszcze, iż, jeśli funkcja $g(x)$ jest całkowalna względem pewnej funkcji $F(x)$ bezwzględnie ciągłej, wówczas całkowalna jest zarazem względem każdego z trzech wahań tej funkcji. Uwagę tę można rozszerzyć na dowolne funkcje $F(x)$ o wahaniu skończonem: *na to, aby funkcja ograniczona $g(x)$ była całkowalna względem pewnej funkcji $F(x)$ o wahaniu skończonem, konieczne jest i wystarcza, aby całkowalna była względem obydwu jej wahań, górnego i dolnego.*

Twierdzenie to wynika z tożsamości:

$$\overline{\int_a^b} g\,dF = \overline{\int_a^b} g\,d\overline{W} + \overline{\int_a^b} g\,d\underline{W},$$

$$\underline{\int_a^b} g\,dF = \underline{\int_a^b} g\,d\overline{W} + \underline{\int_a^b} g\,d\underline{W},$$

w których $\overline{W}(x)$, $\underline{W}(x)$ oznaczają odp. wahania — górne i dolne — funkcji $F(x)$.

§ **8.** Podamy jeszcze parę elementarnych twierdzeń o całce Riemanna-Stieltjesa, które wynikają bezpośrednio z jej definicji. Przedewszystkiem

---

[1]) p. rozdz. II, § 11.

[2]) Warunek ten podał Lebesgue w swej tezie doktorskiej.

Inne warunki, oparte na dawniejszych teorjach miary, podawali wcześniej Volterra (*Giorn. di Mat.*, t. 19, (1881), p. 85); Harnack (*Math. Ann.*, t. 19). (1882), p. 242).

Twierdzenie 11. *Jeśli funkcje g, g_1, g_2 są ograniczone w przedziale (a, b), i funkcje F, F_1, F_2 są o wahaniu skończonem w tym przedziale, wówczas:*

$$\overline{\int_a^b} g \,.\, d(F_1 + F_2) \leqslant \overline{\int_a^b} g\, dF_1 + \overline{\int_a^b} g\, dF_2,$$

$$\underline{\int_a^b} g \,.\, d(F_1 + F_2) \geqslant \underline{\int_a^b} g\, dF_1 + \underline{\int_a^b} g\, dF_2,$$

$$\overline{\int_a^b} (g_1 + g_2) \,.\, dF \leqslant \overline{\int_a^b} g_1\, dF + \overline{\int_a^b} g_2\, dF,$$

$$\underline{\int_a^b} (g_1 + g_2) \,.\, dF \geqslant \underline{\int_a^b} g_1\, dF + \underline{\int_a^b} g_2\, dF.$$

Wynika stąd natychmiast

Twierdzenie 12. *Jeśli funkcje $g_1(x)$, $g_2(x)$ są ograniczone i całkowalne w przedziale (a, b) względem każdej z dwu funkcji $F_1(x)$, $F_2(x)$*[1]*) o wahaniu skończonem, wówczas każda kombinacja linjowa $\mu_1 g_1(x) + \mu_2 g_2(x)$ jest całkowalna względem każdej kombinacji linjowej*

$$\nu_1 F_1(x) + \nu_2 F_2(x),$$

oraz

$$\int_a^b (\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2)\, d(\nu_1 F_1 + \nu_2 F_2) = \sum_{i,k=1}^{2} \mu_i \nu_k \int_a^b g_i\, dF_k.$$

Twierdzenie 13. *Jeśli funkcja ograniczona $g(x)$ jest całkowalna w pewnym przedziale I_0 względem pewnej funkcji $F(x)$ o wahaniu skończonem, wówczas całkowalna jest również względem $F(x)$ w każdym podprzedziale przedziału I_0 i całka*

[1]) Gdy mówimy o całkowalności funkcji względem innej funkcji, mamy tu zawsze na myśli całkę Riemanna-Stieltjesa.

$$\int_I g\,dF$$

jest funkcją addytywną przedziału $I \subset I_0$.[1])

Twierdzenie 14. Każda funkcja ciągła jest całkowalna w sensie Riemanna-Stieltjesa względem każdej funkcji o wahaniu skończonem.

Dowód nie różni się istotnie od dowodu twierdzenia, które orzeka, iż każda funkcja ciągła jest całkowalna w zwykłym sensie Riemanna, i które wchodzi w skład każdego elementarnego wykładu Analizy.

Zauważyć tu można, iż klasa funkcji ciągłych stanowi najszerszą klasę funkcji całkowalnych względem każdej funkcji o wahaniu skończonem. Istotnie, łatwo spostrzec, iż, jeśli funkcja $g(x)$ jest nieciągła w pewnym punkcie a, wówczas nie jest już całkowalna względem funkcji równej zeru w punkcie a i jedności poza tym punktem.

Twierdzenie 15. Jeżeli $g(x)$ jest funkcją ograniczoną całkowalną w przedziale (a, b) względem pewnej funkcji monotonicznej niemalejącej $F(x)$ w tym przedziale, wówczas

$$\int_a^b g(x)\,dF(x) = \mu \,.\, [F(b) - F(a)],$$

gdzie μ jest pewną liczbą, zawartą między kresami wartości funkcji $g(x)$ w (a, b).

Dowód. Mamy istotnie, oznaczając przez M i m odp. kresy górny i dolny funkcji $g(x)$ w (a, b):

$$m \,.\, [F(b) - F(a)] \leqslant \int_a^b g(x)\,dF(x) \leqslant M \,.\, [F(b) - F(a)].$$

Kładąc:

$$\mu = \frac{\int_a^b g(x)\,dF(x)}{F(b) - F(a)},$$

otrzymujemy żądaną liczbę μ, zawartą między m i M.

---

[1]) Nie jest jednak naogół funkcją ciągłą przedziału, jeśli nie jest ciągła funkcja $F(x)$.

Twierdzenie 16. Jeśli funkcja $g(x)$ jest ciągła i $F(x)$ jest funkcją o wahaniu skończonem w (a, b), wówczas funkcja

$$U(x) = \int_a^x g(t)\,dF(t) \qquad |a \leqslant x \leqslant b|$$

jest prawie wszędzie różniczkowalna w (a, b) i prawie wszędzie

$$U'(x) = g(x)\,F'(x).$$

Dowód. Z uwagi na twierdzenia 12 i 14 oraz rozkład kanoniczny Jordana funkcji o wahaniu skończonem [1]) można założyć, nie zwężając ogólności twierdzenia, iż funkcja $F(x)$ jest monotoniczna niemalejąca.

Niech x_0 będzie dowolnym punktem różniczkowalności funkcji $F(x)$, zawartym wewnątrz przedziału (a, b). Mamy:

$$U(x_0+h) - U(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} g(t)\,.\,dF(t)\,^{2)}$$

$$= g(x_0)\,.\,[F(x_0+h) - F(x_0)] + \int_{x_0}^{x_0+h} [g(t) - g(x_0)]\,.\,dF(t),$$

a więc, na mocy twierdzenia poprzedniego,

$$(1) \qquad \frac{U(x_0+h) - U(x_0)}{h} = [g(x_0) + \varepsilon_h]\,\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h},$$

gdzie ε_h jest pewną liczbą zawartą między kresami funkcji $g(t) - g(x_0)$ dla $|t - x_0| \leqslant |h|$.

Z uwagi na ciągłość funkcji $g(t)$, ε_h dąży do zera wraz z h, i przechodząc w równości (1) do granicy dla $h \to 0$, otrzymujemy

$$U'(x_0) = g(x_0)\,F'(x_0).$$

---

[1]) Rozdz. I, § 10.

[2]) Jeśli $h < 0$, wówczas całkę $\int_{x_0}^{x_0+h}$ zastąpić tu należy przez $-\int_{x_0+h}^{x_0}$.

Ponieważ, na mocy twierdzenia Lebesgue'a, prawie każdy punkt przedziału (a, b) jest punktem różniczkowalności funkcji $F(x)$, przeto równość ostatnia spełniona jest prawie wszędzie i twierdzenie nasze jest udowodnione.

Rozważania dwu ostatnich §§ — podobnie jak i wszystkie inne rozważania tego rozdziału — przeprowadziliśmy dla funkcji określonych na linji prostej. Rozważania te jednak przenoszą się automatycznie, bez istotnych trudności, na przestrzeń o dowolnej ilości wymiarów. Przechodząc w rozważaniach, dotyczących całki Riemanna-Stieltjesa, do przestrzeni n-wymiarowych należy rozumieć: przez g (funkcję całkowalną) — funkcję punktu określoną w pewnej figurze elementarnej R; przez F (funkcję, względem której całkujemy) — funkcję addytywną o wahaniu skończonem; przez D — dowolny rozkład figury R na skończoną liczbę przedziałów (ogólnie n-wymiarowych), wreszcie — przez $l(D)$ — maximum średnic przedziałów, występujących w podziale D. Z chwilą, gdy dokonamy tych zmian formalnych, wszystkie rozważania dotychczasowe pozostają nadal w mocy.

* ROZDZIAŁ VI.

Układy ortogonalne funkcji.

Uwagi wstępne.

§ 1. Jedno z najwcześniejszych, a zarazem i najpiękniejszych zastosowań całki Lebesgue'a znajdujemy w ogólnej teorji rozwinięć ortogonalnych; można powiedzieć nawet, iż całka lebesgue'owska umożliwiła powstanie tej teorji, której metody przenikają dziś głęboko do najróżnorodniejszych dziedzin analizy i stały się punktem wyjścia dla spółczesnej teorji operacji funkcjonalnych. W rozdziale tym, luźniej zresztą związanym z całością tego podręcznika, nie możemy dać nawet najogólniejszego zarysu odpowiadającego obecnemu stanowi teorji szeregów ortogonalnych.[1]) Ograniczymy się też do wyłożenia tu wyłącznie jednego tylko, podstawowego wyniku tej teorji, na który składają się t. zw. twierdzenia Riesz'a-Fischera i Parsevala. Idea istotna tego wyniku staje się jasna, skoro rozważać go w płaszczyźnie pewnych pojęć ogólnych, należących do teorji mnogości; rozpoczniemy tedy rozdział niniejszy pewnemi rozważaniami o charakterze bardziej nieco abstrakcyjnym.

---

[1]) Nie posiadamy dotąd w literaturze matematycznej wykładu systematycznego tej teorji, której wyniki rozrzucone są po licznych pracach oryginalnych. Wykład taki, w formie podręcznika — monografji, przygotowywany jest przez p.p. Steinhausa i Orlicza. Wiele interesującego materjału z tej dziedziny znajdzie również czytelnik w czasopismie polskiem *Studia Mathematica.*

Przestrzenie metryczne.

§ 2. Zbiór $\mathfrak{M}$ nazywamy przestrzenią metryczną, jeśli każdej parze a, b jego elementów przyporządkowana jest liczba nieujemna $\rho(a, b)$, zwana ich odległością i spełniająca trzy warunki następujące:

(I) *Dla każdej pary elementów* $a, b \in \mathfrak{M}$, *równość* $\rho(a, b) = 0$ *spełniona jest wtedy i tylko wtedy, gdy* $a = b$;

(II) (warunek symetrji) *dla każdej pary elementów* $a, b \in \mathfrak{M}$

$$\rho(a, b) = \rho(b, a);$$

(III) (warunek trójkąta) *dla każdych trzech elementów* $a, b, c \in \mathfrak{M}$

$$\rho(a, c) \leqslant \rho(a, b) + \rho(b, c).$$

Odpowiedniość jedno-jednoznaczną między dwiema przestrzeniami metrycznemi nazywamy izometryczną, jeżeli odległości odpowiadających sobie par elementów tych dwu przestrzeni są zawsze sobie równe. Dwie przestrzenie metryczne, między któremi ustalić można odpowiedniość izometryczną, nazywają się izometryczne.

Jeśli a jest elementem przestrzeni metrycznej $\mathfrak{M}$, r dowolną liczbą dodatnią, wówczas otoczeniem punktu a o promieniu r (w przestrzeni $\mathfrak{M}$) nazywamy zbiór wszystkich elementów $x \in \mathfrak{M}$, dla których

$$\rho(a, x) < r.$$

Zbiór $\mathfrak{A}$, zawarty w przestrzeni $\mathfrak{M}$, nazywa się wszędziegęsty w tej przestrzeni, jeżeli każde otoczenie każdego elementu przestrzeni $\mathfrak{M}$ zawiera elementy zbioru $\mathfrak{A}$.

Mówimy, iż element a przestrzeni metrycznej jest granicą mocną[1]) ciągu elementów $\{a_n\}$ tej przestrzeni, jeżeli

---

[1]) Używamy tu terminu granica „mocna", ponieważ dla wielu przestrzeni metrycznych rozważa się również granice, określone w sposób odmienny. Np. w polu funkcji o kwadracie sumowalnym (p. niż § 4) rozróżniać będziemy parę rodzajów zbieżności ciągów funkcji, odpowiednio do różnych definicji granicy: zbieżność prawie wszędzie, zbieżność asymptotyczną, zbieżność mocną; termin zbieżność mocna pochodzi z ogólnej teorji operacji funkcjonalnych, w której rozważa się jeszcze inny rodzaj zbieżności, zwany zbieżnością słabą.

$$\lim_n \rho(a, a_n) = 0;$$

piszemy wówczas

$$a = \lim_n a_n.$$

Ciąg, który posiada granicę mocną, nazywa się ciągiem mocno zbieżnym.

Będziemy mówili, iż ciąg $\{a_n\}$ elementów przestrzeni metrycznej spełnia mocno warunek Cauchy'ego, jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba N, iż nierówność $n, m > N$ pociąga za sobą zawsze

$$\rho(a_m, a_n) < \varepsilon.$$

Widoczne jest, iż warunek ten jest konieczny na to, aby ciąg $\{a_n\}$ był mocno zbieżny, nie jest jednak — naogół — dostateczny. Jeśli, w pewnej przestrzeni metrycznej, każdy ciąg, spełniający mocno warunek Cauchy'ego, jest zarazem mocno zbieżny, wówczas przestrzeń nazywa się zupełna.

Twierdzenie 1. Jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem elementów przestrzeni metrycznej $\mathfrak{M}$, zbieżnym mocno do pewnego elementu a tej przestrzeni, wówczas dla każdego punktu $b \in \mathfrak{M}$

$$\lim_n \rho(a_n, b) = \rho(a, b).$$

Dowód. Mamy istotnie, z uwagi na warunek „trójkąta", dla każdego elementu b

$$\rho(a, b) - \rho(a, a_n) \leqslant \rho(a_n, b) \leqslant \rho(a_n, a) + \rho(a, b).$$

Skoro więc, z założenia

$$\lim_n \rho(a_n, a) = \lim_n \rho(a, a_n) = 0,$$

przeto

$$\lim_n \rho(a_n, b) = \rho(a, b),$$

co należało udowodnić.

Nierówności Schwarza.

§ 3. Zanim określimy przestrzenie metryczne, które stanowić będą główny przedmiot rozważań tego rozdziału, przypomnimy przedewszystkiem pewne dwie nierówności, zwane nierównościami Schwarza.

A) *Jeżeli* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *są dwoma ciągami liczbowemi i szeregi* $\sum_n x_n^2$, $\sum_n y_n^2$ *są zbieżne, wówczas szereg* $\sum_n x_n y_n$ *jest również zbieżny, przyczem*

$$(1)\qquad \left(\sum_n x_n y_n\right)^2 \leqslant \sum_n x_n^2 \cdot \sum_n y_n^2 .$$

B) *Jeżeli* $x(t)$, $y(t)$ *są dwiema funkcjami mierzalnemi na pewnym zbiorze mierzalnym* P *i kwadraty ich są sumowalne na* P, *wówczas funkcja* $x(t)\,y(t)$ *jest również sumowalna na* P, *przyczem*

$$(2)\qquad \left(\int_P x(t)\,y(t)\,dt\right)^2 \leqslant \int_P [x(t)]^2\,dt \cdot \int_P [y(t)]^2\,dt .$$

Udowodnimy tylko jedną część, np. (*B*), powyższego twierdzenia; część (*A*) uzasadnia się w sposób najzupełniej analogiczny.

Przedewszystkiem, z uwagi na mierzalność obydwu funkcji $x(t)$, $y(t)$, funkcja $x(t)\,y(t)$ jest również mierzalna; a więc, ponieważ funkcje $[x(t)]^2$, $[y(t)]^2$ są nadto jeszcze sumowalne na P oraz

$$|x(t)\,y(t)| \leqslant [x(t)]^2 + [y(t)]^2,$$

zatem funkcja $x(t)\,y(t)$ jest także sumowalna na P, a wraz z nią również i każda funkcja postaci $[\lambda\, x(t) + \mu\, y(t)]^2$, gdzie λ, μ są dowolnemi spółczynnikami liczbowemi. Mamy

$$\lambda^2 [x(t)]^2 + 2\lambda\mu\, x(t)\,y(t) + \mu^2 [y(t)]^2 = [\lambda\, x(t) + \mu\, y(t)]^2 \geqslant 0,$$

wyrażenie przeto

$$\lambda^2 \int_P [x(t)]^2\,dt + 2\lambda\mu \int_P x(t)\,y(t)\,dt + \mu^2 \int_P [y(t)]^2\,dt$$

jest pewną formą kwadratową, nieujemną, parametrów λ, μ; wyróżnik jej jest przeto niedodatni, t. j.

$$\left[\int_P x(t)\,y(t)\,dt\right]^2 - \int_P [x(t)]^2\,dt \cdot \int_P [y(t)]^2\,dt \leqslant 0,$$

co równoważne jest nierówności (2).

Przestrzeń Hilberta.

§ 4. Nazywamy przestrzenią Hilberta, albo, krócej, przestrzenią $\mathfrak{H}$, zbiór wszystkich ciągów nieskończonych liczb rzeczywistych, których szereg kwadratów jest zbieżny; odległość między dwoma elementami $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ tej przestrzeni określamy przez wzór

$$(1) \qquad \rho(x, y) = \sqrt{\sum_n (x_n - y_n)^2}\,{}^{1)}.$$

Widoczne jest, iż zdefinjowana w ten sposób odległość spełnia dwa pierwsze warunki podane w § 2; pokażemy, iż spełnia również i trzeci z tych warunków („trójkąta"); uważajmy w tym celu trzy dowolne elementy

$$x=(x_1, x_2, \ldots), \quad y=(y_1, y_2, \ldots), \quad z=(z_1, z_2, \ldots)$$

przestrzeni $\mathfrak{H}$. Nierówność

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

możemy wówczas, kładąc ogólnie

$$u_n = y_n - x_n, \qquad v_n = z_n - y_n,$$

napisać w postaci

$$\sqrt{\sum_n (u_n + v_n)^2} \leqslant \sqrt{\sum_n u_n^2} + \sqrt{\sum_n v_n^2},$$

która równoważna jest widocznie związkowi

$$\sum_n u_n v_n \leqslant \sqrt{\sum_n u_n^2} \cdot \sqrt{\sum_n v_n^2},$$

wynikającemu już bezpośrednio z nierówności Schwarza § poprzedniego.

---

[1]) Liczba ta jest zawsze skończona, jako że szeregi $\sum x_n^2$, $\sum y_n^2$ są z założenia zbieżne.

Elementy przestrzeni Hilberta nazywamy jej punktami lub wektorami. Jeśli $x = (x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$ jest punktem (wektorem) tej przestrzeni, wówczas liczby x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ nazywamy spółrzędnemi punktu x lub składowemi wektora x.

Sens tej terminologji jest zrozumiały, jeśli zważyć, iż przestrzeń $\mathfrak{H}$ (wprowadzona przez Hilberta (1906) w związku z jego teorją równań całkowych) stanowi naturalne i bezpośrednie uogólnienie przestrzeni euklidesowych $\mathfrak{R}_n$; wzór (1), określający odległość w przestrzeni $\mathfrak{H}$, jest — w szczególności — bezpośredniem przeniesieniem definicji odległości geometrji analitycznej przestrzeni euklidesowych wymiaru skończonego [1]) (por. I, § 3).

Z drugiej strony, dogodnie jest często rozumieć przestrzeń Hilberta jako uogólnienie pola wektorów przestrzeni euklidesowych; ujęcie to prowadzi natychmiast do przeniesienia na przestrzeń $\mathfrak{H}$ definicji iloczynu skalarnego oraz ortogonalności (prostopadłości) wektorów przestrzeni euklidesowych.

Możemy np. nazwać iloczynem skalarnym dwu wektorów $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ przestrzeni $\mathfrak{H}$ liczbę

$$(x, y) = \sum_n x_n \cdot y_n, \tag{2}$$

i z kolei dwa wektory tejże przestrzeni nazwać ortogonalnemi, jeśli ich iloczyn skalarny jest zerem.

Zbieżność szeregu, występującego po prawej stronie równości (2), wynika z nierówności Schwarza, którą rozumieć możemy obecnie jako uogólnienie znanego twierdzenia geometrji: *wartość bezwzględna iloczynu skalarnego dwu wektorów jest conajwyżej równa iloczynowi ich długości.*

Uwagi te wyjaśniają sens niektórych terminów i twierdzeń tego rozdziału. W szczególności, z narzucającej się analogji z przestrzeniami euklidesowemi wynika definicja ortogonalności funkcji (p. niż. § 7). Analogja ta zyskuje dokładniejsze jeszcze uzasadnienie dla pola funkcji o kwadracie sumowalnym, jako że pole to jest wprost izometryczne z przestrzenią Hilberta (§ 11).

Pole funkcji o kwadracie sumowalnym.

§ 5. Obok przestrzeni Hilberta, określonej w § poprzednim, rozważać tu będziemy jeszcze pewne przestrzenie funkcyjne, o których udowodnimy następnie, iż są wszystkie izometryczne z przestrzenią Hilberta.

Niech mianowicie P będzie dowolnym zbiorem mierzalnym, o mierze skończonej lub nieskończonej, różnej wszakże od zera.

---

[1]) Systematyczny wykład geometrji (elementarnej i różniczkowej) przestrzeni $\mathfrak{H}$ znaleźć można w książce Vitali'ego: *Spazio hilbertiano.* 1929.

Nazwiemy **polem** albo **przestrzenią funkcji o kwadracie sumowalnym na zbiorze** P mnogość wszystkich funkcji $x(t)$, określonych i mierzalnych na P, których kwadrat $[x(t)]^2$ jest na zbiorze P sumowalny;[1]) przestrzeń tę oznaczać będziemy przez $\mathfrak{L}^2(P)$,[2]) przyczem dwie funkcje równoważne na P i należące do wymienionego pola, uważać będziemy za ten sam jego element. Odległość każdych dwu funkcji $x(t)$, $y(t) \in \mathfrak{L}^2(P)$ określamy przez wzór

$$\rho(x, y) = \sqrt{\int_P [y(t) - x(t)]^2 \, dt}. \tag{1}$$

Definicja ta spełnia widocznie dwa pierwsze warunki § 2. Ażeby pokazać, iż spełnia również warunek trzeci — **trójkąta** — postępujemy podobnie, jak w § poprzednim. Niech $x(t), y(t), z(t)$ będą trzema dowolnemi funkcjami pola $\mathfrak{L}^2(P)$. Kładąc

$$u(t) = y(t) - x(t),$$

$$v(t) = z(t) - y(t),$$

napisać możemy nierówność

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

wyrażającą warunek trójkąta, w postaci

$$\sqrt{\int_P [u(t) + v(t)]^2 \, dt} \leqslant \sqrt{\int_P [u(t)]^2 \, dt} + \sqrt{\int_P [v(t)]^2 \, dt},$$

---

[1]) W przypadku, gdy zbiór P ma miarę skończoną, z sumowalności kwadratu funkcji mierzalnej $x(t)$ wynika natychmiast, iż sumowalna jest na P również i sama funkcja $x(t)$; jeśli jednak zbiór P ma miarę nieskończoną, wówczas funkcja $x(t)$ może być niesumowalna pomimo, iż sumowalny jest jej kwadrat. Np. funkcja $\frac{1}{x^2}$ sumowalna jest na przedziale $(1, +\infty)$, funkcja zaś $\frac{1}{x}$ posiada na tym samym przedziale całkę nieskończoną.

[2]) W teorjach ogólniejszych wprowadza się przestrzenie ogólniejsze ($\mathfrak{L}^p$) funkcji o p-tej ($p > 0$) potędze sumowalnej; stąd wskaźnik 2 w oznaczeniu przestrzeni, którą rozważamy w tekście.

która, z kolei, równoważna jest związkowi

$$\int_P u(t)\, v(t)\, dt \leq \sqrt{\int_P [u(t)]^2 dt} \cdot \sqrt{\int_P [v(t)]^2 dt},$$

wynikającemu już bezpośrednio z nierówności Schwarza (dla funkcji).

W dalszym ciągu, dla uproszczenia znakowania, założymy, iż zbiór P pokrywa się z przestrzenią $\mathfrak{R}_1$, t. j. linją prostą; odpowiadające pole funkcji o kwadracie sumowalnym $\mathfrak{L}^2(\mathfrak{R}_1)$ oznaczać będziemy wprost przez $\mathfrak{L}^2$;[1]) podobnież, w przypadku, gdy rozważane będą w tym rozdziale całki rozciągnięte na całą linję prostą, będziemy — dla skrócenia, — pomijali w symbolu całki znak obszaru całkowania. Rzecz prosta, wszystkie poniższe rozważania przenoszą się natychmiast na pola funkcji o kwadracie sumowalnym na dowolnym zbiorze mierzalnym (o mierze dodatniej) w przestrzeni euklidesowej dowolnego wymiaru.

W przestrzeni $\mathfrak{L}^2$, jako pewnej przestrzeni metrycznej z ustaloną przez wzór (1) odległością, określona jest temsamem definicja zbieżności mocnej (§ 2) ciągów funkcyjnych. Będziemy mówili tu ponadto, iż szereg funkcji $x_n(t)$ pola $\mathfrak{L}^2$ jest mocno zbieżny, jeśli mocno zbieżny jest ciąg jego sum cząstkowych

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t),$$

należących oczywiście również do pola $\mathfrak{L}^2$; granicę mocną tego ciągu

$$s(t) = \lim_n s_n(t),$$

nazywać będziemy granicą mocną albo sumą mocną szeregu funkcji $x_n(t)$

W przypadku, gdy szereg $\sum_n x_n(t)$ redukuje się do sumy skończonej (t. j. gdy wyrazy jego, począwszy od pewnego miejsca, są zerami), wówczas suma mocna równoważna jest oczywiście sumie w znaczeniu zwykłem.

---

[1]) Mówiąc tedy w dalszym ciągu tego rozdziału o funkcjach o kwadracie sumowalnym, będziemy rozumieli, iż kwadrat ich posiada całkę skończoną rozciągniętą na całą linję prostą.

§ 6. *Twierdzenie 2.*[1]) *1° Przestrzeń $\mathfrak{L}^2$ jest zupełna.*

2° Jeżeli ciąg funkcji $x_n(t) \varepsilon \mathfrak{L}^2$ jest mocno zbieżny, wówczas jest temsamem zbieżny asymptotycznie oraz

$$\lim_n \text{as}\, x_n(t) = \lim_n x_n(t).$$

Dowód. Niech $\{x_n(t)\}$ będzie ciągiem funkcji pola $\mathfrak{L}^2$, spełniającym mocno warunek Cauchy'ego (§ 2). Pokażemy, iż ciąg ten jest zbieżny asymptotycznie, oraz iż jego granica asymptotyczna jest zarazem granicą mocną. W ten sposób udowodnione zostaną jednocześnie obydwie części twierdzenia.

Pokażemy najpierw, iż

A) ciąg $x_n(t)$ jest zbieżny asymptotycznie.

Niech w tym celu ε będzie dowolną liczbą dodatnią i oznaczmy przez $Q_{m,n}(\varepsilon)$ mnogość wszystkich punktów t, w których

$$|x_n(t) - x_m(t)| \geqslant \varepsilon.$$

Mamy wówczas:

$$\rho\,[x_m(t),\, x_n(t)] = \sqrt{\int [x_m(t) - x_n(t)]^2\, dt} \geqslant \varepsilon \,.\, \sqrt{|Q_{m,n}(\varepsilon)|}\,;$$

a więc, ponieważ $\rho\,[x_m(t),\, x_n(t)]$ dąży z założenia do zera, gdy $m, n \rightarrow \infty$, zatem również, dla każdego ε,

$$\lim_{m,n} |Q_{m,n}(\varepsilon)| = 0;$$

ciąg $\{x_n(t)\}$ spełnia tedy asymptotycznie warunek Cauchy'ego, a więc (II, § 15, tw. 21) jest temsamem zbieżny asymptotycznie.

B) Pokażemy, z kolei, iż granica asymptotyczna ciągu $\{x_n(t)\}$ jest zarazem jego granicą mocną.

Niech, w samej rzeczy,

$$x(t) = \lim_n \text{as}\, x_n(t),$$

i niech η będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieje taka liczba N, iż dla $n, m > N$

$$\sqrt{\int [x_n(t) - x_m(t)]^2\, dt} < \eta,$$

[1]) Pewne uogólnienia tego twierdzenia (korzystające zresztą z metod analogicznych) — w pracy Kaczmarza i Nikliborca, *Fund. Math.*, t. 11, 1928), p. 151.

a więc, przechodząc do granicy, gdy $n \to \infty$, otrzymujemy w myśl lemmatu Fatou (V, § 4, tw. 4), dla każdego $m > N$,

$$\sqrt{\int [x(t) - x_m(t)]^2\, dt} \leqslant \liminf_n \sqrt{\int [x_n(t) - x_m(t)]^2\, dt} \leqslant \eta,$$

skąd wynika oczywiście, iż funkcja $x(t)$ jest o kwadracie sumowalnym oraz iż jest granicą mocną ciągu $\{x_n(t)\}$.

Twierdzenie 3. Jeżeli ciągi $\{x_n(t)\}$, $\{y_n(t)\}$ funkcji o kwadracie sumowalnym są mocno zbieżne odp. do funkcji $x(t)$, $y(t)$, wówczas

$$\lim_n \int x_n(t)\, y_n(t)\, dt = \int x(t)\, y(t)\, dt.$$

Dowód. Mamy z założenia

$$(1) \qquad \lim_n \int [x(t) - x_n(t)]^2\, dt = 0, \quad \lim_n \int [y(t) - y_n(t)]^2\, dt = 0,$$

a, z uwagi na tw. 1 (§ 1), również

$$(2) \qquad \lim_n \int [y_n(t)]^2\, dt = \int [y(t)]^2\, dt.$$

Z drugiej strony, z nierówności Schwarza

$$\left| \int [x(t)\, y(t) - x_n(t)\, y_n(t)]\, dt \right| \leqslant$$

$$\left| \int x(t) \cdot [y(t) - y_n(t)]\, dt \right| + \left| \int y_n(t) \cdot [x(t) - x_n(t)]\, dt \right| \leqslant$$

$$\int [x(t)]^2\, dt \cdot \int [y(t) - y_n(t)]^2\, dt + \int [y_n(t)]^2\, dt \cdot \int [x(t) - x_n(t)]^2\, dt,$$

skąd — z uwagi na (1) i (2) — wynika już bezpośrednio żądana równość.

Układy ortogonalne i normalne.

§ 7. Dwie funkcje $x(t)$, $y(t)$, określone na pewnym zbiorze mierzalnym Q, nazywają się wzajemnie ortogonalne na nim, jeśli iloczyn ich jest sumowalny na tym zbiorze oraz

$$\int_Q x(t)\, y(t)\, dt = 0\,.$$

Funkcja $x(t)$ nazywa się normalna na zbiorze Q, jeśli

$$\int_Q [x(t)]^2\, dt = 1\,.$$

Dla uproszczenia, mówiąc w dalszym ciągu o funkcjach ortogonalnych, wzgl. normalnych, będziemy zakładali, iż zbiór Q jest linją prostą (przestrzenią $\mathfrak{R}_1$); w przypadku przeciwnym, będziemy zaznaczali zawsze wyraźnie mnogość, na której funkcje są rozważane. Oczywiście, nie będzie to wpływać bynajmniej na zwężenie ogólności rozumowań.

Każda funkcja normalna należy oczywiście do pola $\mathfrak{L}^2$; z drugiej strony jasne jest, iż, jeśli tylko funkcja $x(t)$, zawarta w polu $\mathfrak{L}^2$, nie znika prawie wszędzie, wówczas uczynić ją można normalną przez pomnożenie przez stosowną stałą normującą równą odwrotności pierwiastka kwadratowego z całki $\int [x(t)]^2\, dt$.

Rodzina funkcji, z których każde dwie — różne — są względem siebie ortogonalne, nazywa się układem ortogonalnym; jeśli ponadto wszystkie należące do układu tego funkcje są normalne, układ nazywa się ortogonalny i normalny.

Jeśli ciąg (skończony lub przeliczalny) funkcji

(1) $$\vartheta_1(t),\ \vartheta_2(t),\ \ldots,\ \vartheta_n(t),\ \ldots$$

jest układem ortogonalnym i normalnym, wówczas każdy szereg postaci

$$\sum_n a_n\, \vartheta_n(t)\,,$$

(gdzie a_n oznaczają dowolne spółczynniki liczbowe) nazywa się szeregiem ortogonalnym postępującym wedle funkcji układu (1). Szereg taki nazywa się ponadto rozwinięciem Fourier'owskiem lub ortogonalnem pewnej funkcji $x(t)$, wedle układu (1), jeśli spółczynniki a_n dane są przez wzory

(2) $$a_n = \int x(t)\, \vartheta_n(t)\, dt\,;$$

określone w ten sposób liczby a_n noszą nazwę spółczynników Fouriera funkcji $x(t)$ względem układu (1).

W przypadku, gdy funkcja $x(t)$ jest o kwadracie sumowalnym, całki występujące w równości (2) są zawsze (§ 3) określone; funkcje o kwadracie sumowalnym posiadają tedy zawsze rozwinięcie Fourier'owskie wedle dowolnego układu ortogonalnego i normalnego. Jeśli jednak funkcje $\vartheta_n(t)$ układu (1) spełniają jeszcze pewne dodatkowe warunki (np. są ograniczone, ciągłe, lub posiadają pochodną ciągłą i t. p.) wówczas całki (2) mogą być określone również i dla pewnej szerszej klasy funkcji $x(t)$ aniżeli pole $\mathfrak{L}^2$. Może się również zdarzyć, iż całki (2), nie istniejąc w sensie Lebesgue'a, określone są jednak w pewnem znaczeniu ogólniejszem, np. w sensie Perrona, Denjoy (p. rozdz. X). Mówimy wówczas o rozwinięciach Fouriera-Perrona, Fouriera-Denjoy, odróżniając je w ten sposób od rozwinięć Fouriera-Lebesgue'a, o których zakładamy wyraźnie, iż spółczynniki ich określone są przez całki lebesgue'owskie. Nie będziemy korzystali nadal z tych rozróżnień terminologicznych, jako że rozumiemy tu, jak zawsze dotychczas, całkę w sensie definicji Lebesgue'a. Ograniczymy się również wyłącznie do rozwinięć funkcji o kwadracie sumowalnym; rozwinięcia te są bowiem w prosty nader sposób scharakteryzowane przez wynik Riesza-Fischera, który zawiera zarazem warunek konieczny i dostateczny na to, aby szereg ortogonalny był mocno zbieżny.

Zbieżność mocna szeregu ortogonalnego pociąga za sobą oczywiście — w myśl tw. 2 — zawsze zbieżność asymptotyczną, nie wynika z niej jednak bynajmniej zbieżność prawie wszędzie. Istnieją pewne warunki na to, aby szereg ortogonalny mocno zbieżny był zarazem zbieżny prawie wszędzie; kryterja te wykraczają jednak poza ramy tego wykładu; czytelnik znajdzie je w pracach oryginalnych.[1])

Najdawniej systematycznie rozważanym układem ortogonalnym funkcji jest t. zw. układ trygonometryczny

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \quad \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

ortogonalny i normalny w przedziale $(-\pi, \pi)$; w ślad za nim rozważane były później i inne szczególne układy ortogonalne.[2]) Ze specjalnych tych badań wyłoniła się w naturalny sposób teorja ogólna.

---

[1]) Zwrócimy tu uwagę przedewszystkiem na prace następujące: Rademacher, *Math. Ann.*, t. 87, (1922), p. 112; Menchoff, *Fund. Math.*, t. 4, (1923), p. 82; t. 8, (1926), p. 56; t. 10, (1928), p. 375; Kaczmarz, *Math. Ann.*, t. 96, (1925), p. 148; *Studia Mathematica,* t. 1, (1929), p. 87; Orlicz, *Bull. Ac. Pol.*, (1927), p. 81.

[2]) Wiele przykładów systemów ortogonalnych rozważanych w analizie znajdzie czytelnik w dziele Couranta-Hilberta: *Methoden der Mathematischen Physik.* t. 1 (1924).

Twierdzenie 4. 1⁰ *Jeśli* $\{\vartheta_n(t)\}$ *jest układem ortogonalnym i normalnym funkcji, wówczas warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności mocnej szeregu*

$$\sum_n a_n \vartheta_n(t) \tag{3}$$

jest zbieżność szeregu $\sum_n a_n^2$.

2⁰ *Jeśli warunek ten jest spełniony i* $a(t)$ *jest sumą mocną szeregu* (3), *wówczas szereg ten jest rozwinięciem Fourier'owskiem funkcji* $a(t)$, *przyczem*

$$\int [a(t)]^2\, dt = \sum_n a_n^2. \tag{4}$$

Dowód. 1⁰ Z uwagi na tw. 2 (§ 6), na to, aby szereg (3) był mocno zbieżny, konieczne jest i wystarcza, aby ciąg jego sum cząstkowych spełniał mocno warunek Cauchy'ego, t. j. aby wyrażenie

$$\int \Big[\sum_{k=m+1}^{n} a_k \vartheta_k(t)\Big]^2 dt = \sum_{k=m+1}^{n} a_k^2$$

dążyło do zera, gdy m i n $(n > m)$ dążą do nieskończoności; to jednak równoważne jest oczywiście zbieżności szeregu liczbowego $\sum_n a_n^2$ i, temsamem, uzasadnia pierwszą część naszego twierdzenia.

2⁰ Załóżmy, iż szereg (3) jest mocno zbieżny oraz iż $a(t)$ jest jego mocną sumą. Oznaczając tedy przez $s_n(t)$ n-tą sumę cząstkową tego szeregu, mamy

$$a(t) = \lim_n s_n(t), \tag{5}$$

a więc, na mocy tw. 3 (§ 6), dla każdego k,

$$\int a(t)\, \vartheta_k(t)\, dt = \lim_n \int s_n(t)\, \vartheta_k(t)\, dt. \tag{6}$$

Ale, zważywszy na normalność i ortogonalność rozważanego układu funkcji, mamy dla każdego $n \geqslant k$

$$\int s_n(t)\, \vartheta_k(t)\, dt = a_k,$$

a więc, z (6),

$$\int a(t)\,\vartheta_k(t)\,dt = a_k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

i szereg (3) jest rozwinięciem ortogonalnem funkcji $a(t)$.

Wreszcie, z uwagi, raz jeszcze, na tw. 3, otrzymujemy z (5)

$$\int [a(t)]^2\,dt = \lim_n \int [s_n(t)]^2\,dt = \lim_n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 .$$

Twierdzenie nasze jest tedy udowodnione w całości.

Twierdzenie Riesza-Fischera.

§ 8. Z twierdzenia § poprzedniego wynika, iż, jeśli suma kwadratów spółczynników szeregu ortogonalnego jest skończona, wówczas szereg ten jest rozwinięciem pewnej funkcji o kwadracie sumowalnym; odwrócenie tego wyniku zawiera się w następującem twierdzeniu, wyrażającem t. zw. nierówność Bessel'a.

Twierdzenie 5. Jeśli szereg

$$\sum_n a_n\,\vartheta_n(t)$$

jest rozwinięciem funkcji $a(t)$ o kwadracie sumowalnym, wedle układu ortogonalnego i normalnego funkcji $\{\vartheta_n(t)\}$, wówczas

$$\int [a(t)]^2\,dt \geqslant \sum_n a_n^2 .$$

Dowód. Uwzględniając definicję spółczynników a_n przez równości

$$a_n = \int a(t)\,\vartheta_n(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

otrzymujemy natychmiast, dla każdego m, tożsamość

$$\int [a(t) - \sum_{n=1}^{m} a_n\,\vartheta_n(t)]^2\,dt = \int [a(t)]^2\,dt - \sum_{n=1}^{m} a_n^2 ,$$

skąd — jako że wyrażenie po lewej stronie równości jest napewno nieujemne —

$$\int [a(t)]^2 \, dt \geqslant \sum_{n=1}^{m} a_n^2 .$$

Przechodząc do granicy (jeśli rozważany układ jest nieskończony), gdy $m \longrightarrow \infty$, otrzymujemy żądaną nierówność.

Wynik powyższy, łącznie z drugą częścią twierdzenia poprzedniego, daje natychmiast następujące twierdzenie Riesza-Fischera.[1])

Twierdzenie 6. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby szereg ortogonalny $\sum_n a_n \vartheta_n(t)$ *był rozwinięciem ortogonalnem funkcji o kwadracie sumowalnym, jest zbieżność szeregu* $\sum_n a_n^2$.

Układy zupełne. Tożsamość Parsevala.

§ **9**. Szereg ortogonalny, spełniający warunek twierdzenia Riesza-Fischera, może być naogół rozwinięciem wielu funkcji o kwadracie sumowalnym; w szczególności, jeśli istnieje — różna od zera — funkcja $\vartheta(t)$ o kwadracie sumowalnym, ortogonalna względem wszystkich funkcji rozważanego układu ortogonalnego $\{\vartheta_n(t)\}$, wówczas szereg o wszystkich spółczynnikach równych zeru, jest rozwinięciem ortogonalnem zarówno zera, jak i funkcji $\vartheta(t)$. Przeciwnie, spostrzegamy natychmiast, iż, jeśli każda funkcja ortogonalna względem wszystkich funkcji układu $\{\vartheta_n(t)\}$ znika prawie wszędzie, wówczas szereg $\sum_n a_n \vartheta_n(t)$ może być conajwyżej rozwinięciem jednej tylko funkcji o kwadracie sumowalnym.[2])

Uwagi powyższe prowadzą do ustalenia definicji następującej.

Układ $\mathfrak{U}$ funkcji, określonych na pewnym zbiorze mierzalnym Q, nazywamy zupełnym na tym zbiorze względem pewnej klasy $\mathfrak{K}$ funkcji, określonych również na Q, jeśli

1⁰ iloczyn każdej funkcji układu $\mathfrak{U}$ przez dowolną funkcję klasy $\mathfrak{K}$ jest całkowalny na Q, oraz jeśli

---

[1]) F. Riesz, *Comptes Rendus*, t. 144, (1907), pp. 615, 734. Fischer, ibid., pp. 1022, 1148.

[2]) Oczywiście — funkcji równoważnych nie traktujemy tu jako różnych.

2^0 każda funkcja klasy $\mathfrak{K}$, ortogonalna na Q względem wszystkich funkcji układu $\mathfrak{U}$, znika na Q prawie wszędzie.

W rozdziale tym zakładać będziemy przeważnie, iż klasa $\mathfrak{K}$ jest polem funkcji o kwadracie sumowalnym; układ $\mathfrak{U}$, który jest zupełny na pewnym zbiorze mierzalnym Q względem pola funkcji o kwadracie sumowalnym na tym zbiorze, będziemy nazywali wprost zupełnym na Q.

Jeśli zbiór, na którym rozważamy układ zupełny funkcji, nie będzie wyraźnie wymieniony, wówczas rozumieć będziemy zawsze, iż zbiór ten pokrywa się z linją prostą, t. j. z przedziałem $(-\infty, +\infty)$ zmiennej rzeczywistej.

Jeśli iloczyn funkcji $x(t)$ przez dowolną funkcję o kwadracie sumowalnym jest zawsze sumowalny, wówczas funkcja $x(t)$ jest również o kwadracie sumowalnym. Pomijamy tu dowód tego twierdzenia,[1]) z którego wynika natychmiast, iż *każdy układ zupełny względem pola $\mathfrak{L}^2$ zawiera się również sam w tem polu.*

W § następnym podamy przykłady układów zupełnych. Tymczasem udowodnimy następujące

Twierdzenie 7. Jeśli ciąg $\{\vartheta_n(t)\}$ jest układem ortogonalnym i normalnym funkcji, wówczas trzy następujące warunki są równoważne:

(*A*) *układ $\{\vartheta_n(t)\}$ jest zupełny;*

(*B*) *każda funkcja o kwadracie sumowalnym jest sumą mocną swego rozwinięcia wedle tego układu;*

(*C*) *dla każdej funkcji $a(t)$ o kwadracie sumowalnym:*

$$\int [a(t)]^2\, dt = \sum_n a_n^2, \tag{1}$$

gdzie a_n oznaczają spółczynniki Fouriera funkcji $a(t)$ względem układu $\{\vartheta_n(t)\}$.

---

[1]) Twierdzenie to jest często podawane w postaci równoważnej twierdzenia z teorji szeregów liczbowych: *jeśli szereg $\sum a_n x_n$ jest zbieżny dla każdego ciągu liczb x_n o zbieżnej sumie kwadratów, wówczas szereg $\sum a_n^2$ jest również zbieżny* (Hellinger-Toeplitz, *Nachr. Ges. Wiss., Göttingen,* (1906), p. 351; Riesz, (*F.*), *Les systèmes d'équations linéaires.* Paris. 1913. p. 47).

D o w ó d. Pokażemy kolejno, iż z warunku (A) wynika warunek (B), z warunku (B) — warunek (C), wreszcie z (C) — warunek (A). Temsamem twierdzenie nasze będzie udowodnione w całości.

1^0. Zakładamy, iż s p e ł n i o n y j e s t w a r u n e k (A).

Niech $a(t)$ będzie dowolną funkcją o kwadracie sumowalnym,

$$\sum_n a_n \vartheta_n(t) \tag{2}$$

jej rozwinięciem ortogonalnem. W myśl tw. R i e s z a - F i s c h e r a kwadraty liczb a_n tworzą szereg zbieżny, a więc, na mocy tw. 4 (§ 7), szereg (2) jest mocno zbieżny do pewnej funkcji $b(t)$ o kwadracie sumowalnym, i jest zarazem jej rozwinięciem. Funkcje $a(t)$, $b(t)$ posiadają tedy odp. identyczne spółczynniki F o u r i e r'a względem funkcji układu $\{\vartheta_n(t)\}$, lub — co jest równoważne — różnica $a(t) - b(t)$ jest ortogonalna względem wszystkich funkcji tego układu. Ponieważ jednak układ $\{\vartheta_n(t)\}$ jest — z założenia — zupełny, zatem różnica ta znika prawie wszędzie, funkcje $a(t)$ i $b(t)$ są równoważne, a temsamem funkcja $a(t)$ jest sumą mocną szeregu (2).

Układ rozważany spełnia zatem warunek (B).

2^0. Zakładamy, iż s p e ł n i o n y j e s t w a r u n e k (B).

Niech znów $a(t)$ będzie dowolną funkcją o kwadracie sumowalnym, szereg (2) jej rozwinięciem ortogonalnem. Mamy, z założenia,

$$\lim_n \int \left[a(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \right]^2 dt = 0 . \tag{3}$$

Ale całka, stojąca powyżej pod znakiem granicy, jest równa różnicy

$$\int [a(t)]^2 \, dt - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 .$$

Równość (3) równoważna jest tedy równości (1) i warunek (C) jest spełniony.

3^0. Zakładamy wreszcie, iż s p e ł n i o n y j e s t w a r u n e k (C).

Wówczas, dla każdej funkcji $a(t)$ o kwadracie sumowalnym, ortogonalnej względem wszystkich funkcji układu $\{\vartheta_n(t)\}$, mamy z (1)

$$\int [a(t)]^2 \, dt = 0,$$

a więc, prawie wszędzie, $a(t) = 0$.

Układ $\{\vartheta_n(t)\}$ jest tedy zupełny, t. zn. spełniony jest warunek (A).

Tożsamość (1), która, jak udowodniliśmy, charakteryzuje układy ortogonalne, normalne i zupełne, nosi nazwę tożsamości Parsevala. Podaje się ją często w postaci formalnie nieco ogólniejszej

$$\int a(t)\, b(t)\, dt = \sum_n a_n b_n \tag{4}$$

($a(t)$, $b(t)$ — funkcje o kwadracie sumowalnym, a_n, b_n odp. ich spółczynniki Fourier'a względem dowolnego układu ortogonalnego, normalnego i zupełnego funkcji).

Mamy, w samej rzeczy, z tożsamości (1), zastępując w niej $a(t)$ przez $a(t) \pm b(t)$

$$\int [a(t) \pm b(t)]^2 \, dt = \sum_n (a_n \pm b_n)^2.$$

Odejmując od siebie stronami równości, zawarte w powyższym związku, otrzymujemy tożsamość (4).

Można tu zauważyć, iż tożsamość (4) otrzymuje się przez przyrównanie iloczynu funkcji $a(t)$, $b(t)$ do iloczynu formalnego ich rozwinięć ortogonalnych, i przecałkowanie — również formalne — obydwu stron uzyskanej w ten sposób równości. Metoda ta, użyta przez Parsevala w r. 1805 (w zastosowaniu zresztą tylko do układu trygonometrycznego), wymaga jednak istotnego uzasadnienia, które — jak widzieliśmy — sięga dość głęboko w nowoczesną teorję funkcji rzeczywistych.

Poprawne dowody tożsamości Parsevala dla układu trygonometrycznego podali dopiero Liapunoff oraz Hurwitz.[1])

Uogólnienie na dowolne układy ortogonalne zawdzięczamy Rieszowi i Fischerowi.

§ **10.** *Twierdzenie 8. Każdy układ zupełny funkcji jest nieskończony.*

---

[1]) Hurwitz, *Math. Annal.*, t. 57, (1903), p. 429.

Dowód. Wystarczy pokazać, iż dla każdego układu skończonego funkcji można zbudować funkcję, która nie znika prawie wszędzie i jest ortogonalna względem wszystkich funkcji danego układu.

Niech, w samej rzeczy, dany będzie układ n funkcji sumowalnych

(1) $$g_1(t),\ g_2(t), \dots, g_n(t).$$

Położmy

$$a_{ik} = \int_k^{k+1} g_i(t)\,dt \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n, \\ k = 1, 2, \dots, n, n+1. \end{array}$$

Układ n równań jednorodnych z $n+1$ niewiadomemi $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$

(2) $$\sum_{k=1}^{n+1} a_{ik} x_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

posiada oczywiście zawsze rozwiązania niezerowe;[1]) niech

$$x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n+1}^0$$

będzie pewnem takiem rozwiązaniem. Określimy funkcję $x(t)$, kładąc

$$x(t) = 0, \quad \text{dla} \quad t < 1 \quad \text{i} \quad t > n+2,$$

oraz

$$x(t) = x_k^0, \quad \text{dla} \quad k \leq t < k+1 \qquad (k = 1, 2, \dots, n+1).$$

Podstawiając teraz w równaniach (2) x_k^0 zamiast x_k, otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_{ik} x_k^0 = \sum_{k=1}^{n+1} \int_k^{k+1} x_k^0 \cdot g_i(t)\,dt = \int x(t)\, g_i(t)\,dt = 0,$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

co oznacza, iż funkcja $x(t)$ jest ortogonalna względem wszystkich funkcji układu (1).

Twierdzenie nasze jest w ten sposób udowodnione.

---

[1]) Por. np. Ruziewicz i Żyliński. *Wstep do matematyki*. I. 1927. p. 135.

Podamy teraz pewien prosty przykład przeliczalnej rodziny funkcji ciągłych, tworzących układ zupełny. Niech w tym celu $\{(a_i, b_i)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ będzie ciągiem wszystkich przedziałów o krańcach wymiernych. Oznaczymy przez $\vartheta_{ik}(t)$, dla każdej pary liczb naturalnych i, k, funkcję równą jedności w przedziale (a_i, b_i), zeru — dla $t \leqslant a_i - \frac{1}{k}$ oraz $t \geqslant b_i + \frac{1}{k}$, i linjową w przedziałach pozostałych $\left(a_i - \frac{1}{k}, a_i\right)$ oraz $\left(b_i, b_i + \frac{1}{k}\right)$. Układ określonych w ten sposób funkcji jest zupełny względem pola $\mathfrak{L}^2$, a nawet — ogólniej nieco — względem klasy wszystkich funkcji sumowalnych. Istotnie, ponieważ każda z funkcji $\vartheta_{ik}(t)$ znika tożsamościowo zewnątrz pewnego skończonego przedziału, przeto iloczyn jej przez dowolną funkcję sumowalną jest sumowalny na całym przedziale nieskończonym $(-\infty, +\infty)$; jeśli zaś pewna funkcja sumowalna $g(t)$ jest ortogonalna względem układu $\{\vartheta_{ik}(t)\}$, wówczas, dla każdej pary liczb naturalnych i, k,

$$\int \vartheta_{ik}(t)\, g(t)\, dt = 0,$$

lub, przechodząc do granicy, gdy $k \to \infty$,

$$\int_{a_i}^{b_i} g(t)\, dt = 0,$$

dla każdego przedziału (a_i, b_i).

Całka funkcji $g(t)$ znika tedy na każdym przedziale o krańcach wymiernych, a więc — ze względu na swą ciągłość — znika tożsamościowo. Temsamem przeto funkcja podcałkowa $g(t)$ jest prawie wszędzie zerem, i rozważany układ jest zupełny.

Warunkowi zupełności zadośćczynią również liczne układy funkcyjne rozważane w analizie; zupełny jest np. w przedziale $(-\pi, \pi)$ układ trygonometryczny (por. § 7), jak również — w każdym przedziale skończonym zmiennej t — układ $1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots$ Są to oczywiście układy bardziej naturalne aniżeli ten, który podaliśmy powyżej i który jest widocznie ad hoc skonstruowany; jednakże dowody, iż układy te są zupełne, noszą charakter mniej bezpośredni i wymagają odwołania się do pewnych twierdzeń o aproksymacji funkcji ciągłych przez wielomiany trygonometryczne, wzgl. wielomiany zwykłe.

§ **11**. Podany w § poprzednim przykład układu zupełnego funkcji nie jest wprawdzie układem ortogonalnym, możemy łatwo go jednak zmodyfikować — korzystając z t. zw. metody „ortogonalizacji“ Schmidta[1]) — w ten sposób, aby otrzymać układ zarazem ortogonalny, normalny i zupełny.

Wprowadzimy przedewszystkiem definicję następującą: dwie rodziny funkcji $\mathfrak{S}$ i $\mathfrak{S}'$ nazywać się będą równoważne, jeżeli każda funkcja jednej rodziny równoważna jest pewnej kombinacji linjowej skończonej liczby funkcji rodziny drugiej.

Widoczne jest natychmiast, iż, jeśli jedna z dwu równoważnych sobie rodzin funkcji jest zupełna, wówczas zupełna jest także i druga.

Twierdzenie 9 (Schmidta). *Każdy — skończony lub przeliczalny — układ funkcji o kwadracie sumowalnym równoważny jest pewnemu — conajwyżej przeliczalnemu*[2]) *— układowi normalnemu i ortogonalnemu.*

Dowód. Niech

$$g_1(t),\ g_2(t), \ldots, g_n(t), \ldots \tag{1}$$

będzie ciągiem — skończonym lub przeliczalnym — funkcji o kwadracie sumowalnym. Możemy założyć oczywiście, iż żadna z funkcji tego ciągu nie jest równoważna żadnej kombinacji linjowej funkcji poprzedzających; istotnie, usuwając ewent. z ciągu (1) te funkcje, które są równoważne kombinacjom linjowym funkcji poprzednich, otrzymamy układ równoważny ciągowi (1).

Połóżmy:

$$\begin{aligned}
&h_1(t) = g_1(t), \\
&h_2(t) = \lambda_1^1 h_1(t) + g_2(t), \\
&h_3(t) = \lambda_1^2 h_1(t) + \lambda_2^2 h_2(t) + g_3(t), \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
&h_n(t) = \lambda_1^{n-1} h_1(t) + \lambda_2^{n-1} h_2(t) + \ldots + \lambda_{n-1}^{n-1} h_{n-1}(t) + g_n(t), \\
&\cdot\ \cdot
\end{aligned} \tag{2}$$

[1]) Schmidt, *Diss.*, *Goettingen*, (1905), oraz *Math. Ann.*, t. 63, (1907), p. 433.

[2]) Z rozważań dalszych wynikać będzie zresztą, iż każdy układ ortogonalny i normalny jest conajwyżej przeliczalny.

gdzie λ_i^k są pewnemi stałemi, które później zostaną bliżej określone. Niezależnie jednak od obioru tych stałych spostrzega się natychmiast, iż układ funkcji $h_i(t)$ jest równoważny zawsze układowi (1); w samej rzeczy, równania (2) wyrażają z jednej strony — bezpośrednio — każdą funkcję $g_n(t)$ jako kombinację linjową funkcji $h_1(t)$, $h_2(t), \ldots, h_n(t)$, z drugiej zaś — przez rekurencję — każdą funkcję $h_n(t)$ jako kombinację linjową funkcji $g_1(t)$, $g_2(t)$, $\ldots, g_n(t)$.

Ponadto, widoczne jest ze związków (2), iż żadna z funkcji $h_n(t)$ nie znika prawie wszędzie; w przypadku bowiem, gdyby funkcja $h_n(t)$ była zerem, wówczas funkcja $g_n(t)$ byłaby równoważna pewnej kombinacji linjowej funkcji $g_1(t), \ldots, g_{n-1}(t)$, co wyłączone jest wszakże przez założenie ustalone na początku tego dowodu.

Pokażemy teraz przez indukcję, iż możliwe jest ustalenie spółczynników λ_i^k w ten sposób, by funkcje $h_k(t)$ tworzyły układ ortogonalny.

Załóżmy, w samej rzeczy, iż spółczynniki λ_i^k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ zostały już określone w ten sposób, iż funkcje $h_1(t)$, $h_2(t), \ldots, h_n(t)$ tworzą układ ortogonalny. Ażeby wówczas również i funkcja $h_{n+1}(t)$ była ortogonalna względem funkcji $h_1(t)$, $h_2(t), \ldots, h_n(t)$, wystarczy określić spółczynniki λ_i^n $(i = 1, 2, \ldots, n)$ w ten sposób, by, dla $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\int h_{n+1}(t)\, h_i(t)\, dt = \int \left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^n h_j(t) + g_{n+1}(t)\right] h_i(t)\, dt$$

$$= \lambda_i^n \int [h_i(t)]^2\, dt + \int g_{n+1}(t)\, h_i(t)\, dt = 0,$$

t. j. położyć

$$\lambda_i^n = -\frac{\int g_{n+1}(t)\, h_i(t)\, dt}{\int [h_i(t)]^2\, dt} \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

co jest oczywiście możliwe, ponieważ żadna z funkcji $h_i(t)$ nie znika prawie wszędzie, a więc całka, występująca w mianowniku wyrażenia na λ_i^n, jest od zera różna.

Mnożąc z kolei każdą z funkcji $h_i(t)$ przez stosowny czynnik normujący (§ 7), otrzymujemy układ ortogonalny i normalny funkcji, równoważny układowi (1), co należało udowodnić.

Ponieważ podaliśmy już w § poprzednim przykłady układów przeliczalnych i zupełnych funkcji o kwadracie sumowalnym, przeto z udowodnionego twierdzenia wynika, iż istnieją conajwyżej przeliczalne układy zupełne, ortogonalne i normalne funkcji o kwadracie sumowalnym; w myśl tw. 8 układy te nie mogą być jednak skończone, są przeto dokładnie przeliczalne. Otrzymujemy stąd natychmiast następujące

Twierdzenie 10. Przestrzeń $\mathfrak{L}^2$ oraz przestrzeń Hilberta są izometryczne.

Dowód. Niech $\{\vartheta_n(t)\}$ będzie dowolnym układem ortogonalnym, normalnym i zupełnym funkcji o kwadracie sumowalnym. Każdej funkcji $x(t) \in \mathfrak{L}^2$ przyporządkujemy ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ jej spółczynników Fourier'a względem rozważanego układu; zgodnie z tw. Riesza-Fischera (§ 8) ciąg ten jest pewnym punktem przestrzeni Hilberta; odwrotnie, w myśl tegoż twierdzenia, każdy punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ przestrzeni $\mathfrak{H}$ jest ciągiem spółczynników Fouriera pewnej — jednej tylko z uwagi na zupełność układu $\{\vartheta_n(t)\}$ — funkcji $x(t)$ o kwadracie sumowalnym. Ustalone w powyższy sposób przyporządkowanie określa tedy pewną jedno-jednoznaczną odpowiedniość między polem $\mathfrak{L}^2$ a przestrzenią $\mathfrak{H}$. Powiadamy, iż odpowiedniość ta jest izometryczna; w samej rzeczy, jeśli $x(t)$, $y(t)$ są funkcjami o kwadracie sumowalnym, $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ ciągami spółczynników Fourier'a odp. tych dwu funkcji, wówczas liczby $y_i - x_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ są spółczynnikami Fourier'a funkcji $y(t) - x(t)$ i — z uwagi na tożsamość Parsevala (§ 9) —

$$\int [y(t) - x(t)]^2 dt = \sum_i (y_i - x_i)^2,$$

co oznacza, iż odległość funkcji $x(t)$, $y(t)$ w polu $\mathfrak{L}^2$ równa jest odległości odpowiadających im punktów $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ w przestrzeni Hilberta.

Twierdzenie powyższe pozwala przenosić natychmiast własności przestrzeni Hilberta na przestrzeń $\mathfrak{L}^2$. W szczególności widoczne jest natychmiast, iż w przestrzeni Hilberta istnieje podzbiór przeliczalny wszędziegęsty: jest nim np. zbiór wszystkich punktów o spółrzędnych wymiernych, z których tylko skończona ilość jest różna od zera. Temsamem tedy, przestrzeń $\mathfrak{L}^2$ zawiera również pewien podzbiór przeliczalny wszędziegęsty.

Wynika stąd natychmiast, dla układów ortogonalnych, następujące uzupełnienie tw. 8 (§ 9):

Twierdzenie 11. Każdy układ ortogonalny i zupełny w przestrzeni $\mathfrak{L}^2$ jest przeliczalny.

Dowód. Niech $\mathfrak{S}$ będzie układem ortogonalnym i zupełnym w polu $\mathfrak{L}^2$; możemy założyć oczywiście (usuwając ewent. z układu $\mathfrak{S}$ funkcję prawie wszędzie równą zeru, a pozostałe funkcje mnożąc przez stosowne czynniki normujące), iż układ ten jest normalny. Mamy wówczas, dla każdych dwu funkcji $x(t)$, $y(t)$ układu $\mathfrak{S}$,

$$\rho[x(t), y(t)] = \sqrt{\int [y(t) - x(t)]^2 dt} = \sqrt{2}. \tag{3}$$

Niech teraz $\mathfrak{R}$ będzie układem przeliczalnym funkcji wszędziegęstym w polu $\mathfrak{L}^2$. Każdej funkcji $x(t) \in \mathfrak{S}$ możemy tedy przyporządkować pewną funkcję $r(t) \in \mathfrak{R}$ tak, aby

$$\rho[x(t), r(t)] < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Z uwagi na (3) dwum różnym funkcjom układu $\mathfrak{S}$ przyporządkowane są w ten sposób różne (nie-równoważne) funkcje układu $\mathfrak{R}$; ponieważ zaś układ $\mathfrak{R}$ jest z założenia przeliczalny, przeto temsamem conajwyżej przeliczalny jest układ $\mathfrak{S}$.

Układ $\mathfrak{S}$ jednak, jako zupełny, nie może być na zasadzie tw. 8 (§ 10) skończony; jest tedy dokładnie przeliczalny.[1])

Udowodnimy jeszcze następujące

Twierdzenie 12. Każdy układ $\mathfrak{S}$ ortogonalny i normalny funkcji zawarty jest w pewnym układzie ortogonalnym, normalnym i zupełnym.

Dowód. Niech

$$\mathfrak{R} = [r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t), \ldots]$$

---

[1]) Twierdzenie, którego dowód bezpośredni podaliśmy w tekście, jest w gruncie rzeczy natychmiastową konsekwencją elementarnego twierdzenia teorji mnogości: *w przestrzeni metrycznej, posiadającej część przeliczalną wszędziegęstą, każdy zbiór odosobniony* (t. j. nie posiadający punktów skupienia) *jest conajwyżej przeliczalny.* Istotnie, z równości (3) wynika, iż każdy układ normalny, ortogonalny funkcji jest zbiorem odosobnionym w przestrzeni $\mathfrak{L}^2$. Por. Riesz, F., *Comptes Rendus*, t. 143, (1906), p. 738; Hausdorff, *M.* I, p. 463.

będzie układem przeliczalnym wszędziegęstym w polu $\mathfrak{L}^2$ i niech, ogólnie, $\mathfrak{G}_n$ oznacza otoczenie punktu $r_n(t)$ o promieniu $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Określimy przez indukcję ciąg liczb n_k i — jednocześnie — ciąg funkcji $x_k(t)$ pola $\mathfrak{L}^2$:

n_1 jest najmniejszą wartością wskaźnika n, dla której $\mathfrak{G}_n$ zawiera funkcje normalne, ortogonalne względem wszystkich funkcji układu $\mathfrak{S}$; $x_1(t)$ oznacza z kolei jakąkolwiek funkcję normalną, zawartą w $\mathfrak{G}_{n_1}$ i ortogonalną względem wszystkich funkcji układu $\mathfrak{S}$. Ogólnie, zakładając, iż ustalonych już zostało k pierwszych elementów ciągów $\{n_i\}$ oraz $\{x_i(t)\}$, określamy liczbą n_{k+1} jako najniższą wartość wskaźnika n, dla której otoczenie $\mathfrak{G}_n$ zawiera funkcje normalne i ortogonalne względem wszystkich funkcji układu $\mathfrak{S}$ oraz funkcji $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)$; przez $x_{k+1}(t)$ oznaczymy, z kolei, jakąkolwiek funkcją normalną, zawartą w $\mathfrak{G}_{n_{k+1}}$ i ortogonalną względem wszystkich funkcji układu $\mathfrak{S}$ oraz względem $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)$.

Możemy założyć, iż indukcja powyższa nie urywa się dla żadnej wartości k, t. j. iż dla każdej wartości $k \geqslant 0$ istnieje wskaźnik n_{k+1} spełniający wymagane warunki; w przypadku przeciwnym już sam układ $\mathfrak{S}$, wzgl. układ $\mathfrak{S}$ łącznie ze skończoną liczbą funkcji $x_i(t)$, byłby żądanym układem zupełnym.

Ciąg $\{n_k\}$ jest tedy ciągiem istotnie nieskończonym: powiadamy, iż ciąg ten jest nieograniczony. W samej bowiem rzeczy, jeśliby ciąg $\{n_k\}$ był ograniczony, wówczas, dla pewnych dwu różnych wartości i, j, mielibyśmy $n_i = n_j$, i funkcje $x_i(t)$, $x_j(t)$ zawierałyby się w temsamem otoczeniu $\mathfrak{G}_{n_i} = \mathfrak{G}_{n_j}$, co sprzeczne jest jednak z założeniem, iż promienie wszystkich otoczeń $\mathfrak{G}_n$ są równe $\frac{\sqrt{2}}{2}$, podczas gdy — z uwagi na normalność i ortogonalność wzajemną funkcji $x_i(t)$, $x_j(t)$ — mamy

$$\rho\,[x_i(t), x_j(t)] = \sqrt{2}\,.$$

Niech teraz $x(t)$ będzie dowolną funkcją, która nie znika prawie wszędzie, a jest ortogonalna względem wszystkich funkcji układu $\mathfrak{S}$ oraz ciągu $\{x_k(t)\}$. Możemy założyć iż funkcja ta jest normalna. Ponieważ otoczenia $\mathfrak{G}_n$ pokrywają łącznie całe pole $\mathfrak{L}^2$ przeto, dla pewnego h, mamy

$$x(t) \in \mathfrak{G}_h\,,$$

skąd wynika, iż dla każdego k

$$n_k \leqslant h,$$

co jednak jest oczywiście niemożliwe, jako iż ciąg $\{n_k\}$ jest, jak udowodniliśmy już powyżej, nieograniczony.

Układ, złożony tedy z funkcji układu $\mathfrak{S}$ i ciągu $\{x_i(t)\}$, jest zupełny, ponieważ zaś jest przytem normalny i ortogonalny, przeto twierdzenie nasze jest udowodnione.

Uwagi uzupełniające. Twierdzenie Banacha-Fichtenholza.

§ 12. Zauważyliśmy już w § 7, iż, jeśli układ ortogonalny i normalny spełnia pewne warunki dodatkowe, wówczas rozważać można rozwinięcia — wedle tego układu — funkcji należących do klas szerszych aniżeli pole funkcji o kwadracie sumowalnym. Oczywiście, iż rozważania te wymagają innych metod i nie dają już tak prostych i zamkniętych w sobie wyników, jak te, które — zawarte w twierdzeniach Riesza-Fischera i Parsevala — charakterystyczne są dla pola $\mathfrak{L}^2$.[1]) Ograniczymy się tu do podania jednego tylko szczególnie elementarnego, a często pożytecznego, twierdzenia dotyczącego rozwinięć dowolnych funkcji sumowalnych.

Twierdzenie 13. Jeśli ciąg nieskończony $\{\vartheta_n(t)\}$ jest układem ortogonalnym i normalnym w przedziale I funkcji wspólnie ograniczonych[2]) *w tym przedziale, wówczas dla każdej funkcji sumowalnej $x(t)$*

$$\lim_n \int_I x(t)\,\vartheta_n(t)\,dt = 0. \tag{1}$$

Dowód. Niech M oznacza kres górny wartości bezwzględnych funkcji $\vartheta_n(t)$ dla $t \in I$ oraz $n = 1, 2, \ldots$ Z założenia liczba M jest skończona.

---

[1]) Badania nad rozwinięciami ortogonalnemi funkcji wykraczających poza pole funkcji o kwadracie sumowalnym znajdzie czytelnik w pracach, związanych ściślej z ogólną teorją operacji funkcjonalnych: Riesz, *F.*, *Math. Zeitschr.*, t. 18, (1923), p. 117; Steinhaus, *Bull. Ac. Pol.*, (*A*), (1926), p. 11; Orlicz, *Studia Mathematica*, t. 1, (1929), pp. 1, 241; Riesz, M., *Acta Math.*, t. 49, (1927), p. 465.

[2]) t. zn., iż istnieje stała skończona M taka, iż dla każdego $t \in I$ oraz $n = 1, 2, \ldots$ mamy: $|\vartheta_n(t)| \leqslant M$.

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią i $y(t)$ taką funkcją mierzalną i ograniczoną w przedziale I, iż

$$(2) \qquad \int_I |x(t) - y(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Funkcja $y(t)$, jako ograniczona, jest tembardziej o kwadracie sumowalnym w rozważanym przedziale, w myśl tedy tw. 5 (§ 8), szereg kwadratów całek

$$\int_I y(t)\, \vartheta_n(t)\, dt$$

jest zbieżny, i istnieje taka liczba N, iż dla $n > N$

$$\left| \int_I y(t)\, \vartheta_n(t)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z uwagi przeto na (2), mamy dla każdego $n > N$

$$\left| \int_I x(t)\, \vartheta_n(t)\, dt \right| \leqslant \int_I |x(t) - y(t)| \,.\, |\vartheta_n(t)|\, dt + \left| \int_I y(t)\, \vartheta_n(t)\, dt \right| \leqslant \varepsilon$$

skąd otrzymujemy już natychmiast żądany związek (1).

Z udowodnionego powyżej twierdzenia wynika bezpośrednio, iż spółczynniki trygonometryczne Fouriera dowolnej funkcji sumowalnej dążą do zera, t. j. iż dla każdej funkcji sumowalnej $x(t)$ w przedziale $(-\pi, \pi)$

$$\lim_n \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin nt\, dt = \lim_n \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos nt\, dt = 0$$

Analogon tego twierdzenia dla funkcji całkowalnych w sensie Denjoy — p. niż. rozdz. X, § 6.

§ 13. Rozważanie układów zupełnych względem pewnej klasy funkcji nasuwa natychmiast pytanie, czy z zupełności układu względem pewnej klasy wnioskować można o zupełności tego układu względem klasy innej, ogólniejszej; w szczególności np., czy zupełność układu względem pola funkcji o kwadracie sumowalnym w jakimś przedziale skończonym pociąga za sobą zupełność względem klasy funkcji sumowalnych w tym przedziale.

Rozstrzygnięcie negatywne tego pytania zawdzięczamy Banachowi i Fichtenholzowi;[1]) udowodnimy mianowicie następujące

Twierdzenie 14. Jeżeli $f(t)$ jest dowolną funkcją, określoną i sumowalną w przedziale (a, b), wówczas istnieje taki układ przeliczalny $\mathfrak{U}$ funkcji ciągłych w tym przedziale, iż każda funkcja ortogonalna względem wszystkich funkcji układu $\mathfrak{U}$, jest (prawie wszędzie) postaci $C f(t)$, gdzie C jest stałą dowolną.

Dowód. W przypadku, gdy funkcja dana $f(t)$ jest prawie wszędzie zerem, wystarczy (i należy) przyjąć jako układ $\mathfrak{U}$ dowolny układ przeliczalny funkcji ciągłych, zupełny w przedziale (a, b) względem klasy wszystkich funkcji sumowalnych w tym przedziale. Układ taki podaliśmy już wyżej w § 10. Możemy tedy założyć odrazu, iż funkcja $f(t)$ nie znika prawie wszędzie.

Niech $\{(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ będzie ciągiem wszystkich czwórek liczb wymiernych takich, iż

$$a < \alpha_i < \beta_i < \gamma_i < \delta_i < b.$$

Oznaczymy, dla skrócenia, przez g_i oraz h_i odp. całki

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} f(t)\,dt, \qquad \int_{\gamma_i}^{\delta_i} f(t)\,dt,$$

a przez ε_{ik}, dla każdej pary liczb naturalnych i, k, mniejszą z dwu liczb $\frac{\beta_i - \alpha_i}{3k}$, $\frac{\delta_i - \gamma_i}{3k}$.

Mamy wówczas oczywiście, dla każdego i,

$$\lim_k \varepsilon_{ik} = 0. \tag{1}$$

Niech teraz $\vartheta_{ik}(t)$ oznacza funkcję ciągłą w całym przedziale (a, b), znikającą poza przedziałami (α_i, β_i), (γ_i, δ_i), równą odp.

---

[1]) Fichtenholz, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. 50, (1926), p. 4. Banach, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (2), t. 21, (1922), p. 95.

Metodę Banacha uprościł i uogólnił Orlicz (*Studia Mathematica*, t. 1, (1929), p. 5).

h_i oraz $-g_i$ w przedziałach $(\alpha_i+\varepsilon_{ik}, \beta_i-\varepsilon_{ik})$ i $(\gamma_i+\varepsilon_{ik}, \delta_i-\varepsilon_{ik})$, linjową wreszcie w każdym z czterech pozostałych przedziałów $(\alpha_i, \alpha_i+\varepsilon_{ik})$, $(\beta_i-\varepsilon_{ik}, \beta_i)$, $(\gamma_i, \gamma_i+\varepsilon_{ik})$, $(\delta_i-\varepsilon_{ik}, \delta_i)$. Powiadamy, iż układ przeliczalny funkcji $\vartheta_{ik}(t)$ czyni zadość żądanym warunkom.

Mamy, w samej rzeczy, jeśli $x(t)$ jest dowolną funkcją ortogonalną względem wszystkich funkcji $\vartheta_{ik}(t)$, dla każdej pary liczb i, k,

$$\int_a^b x(t)\,\vartheta_{ik}(t)\,dt=\int_{\alpha_i}^{\beta_i} x(t)\,\vartheta_{ik}(t)\,dt+\int_{\gamma_i}^{\delta_i} x(t)\,\vartheta_{ik}(t)\,dt=0,$$

skąd, przechodząc do granicy, gdy $k\to\infty$, otrzymujemy z uwagi na (1),

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} h_i.x(t)\,dt-\int_{\gamma_i}^{\delta_i} g_i.x(t)\,dt=0,$$

lub

$$\frac{\int_{\alpha_i}^{\beta_i} x(t)\,dt}{\int_{\alpha_i}^{\beta_i} f(t)\,dt}=\frac{\int_{\gamma_i}^{\delta_i} x(t)\,dt}{\int_{\gamma_i}^{\delta_i} f(t)\,dt}.$$

Z uwagi na ciągłość całki, uważanej jako funkcja przedziału, związek powyższy — udowodniony dotychczas tylko dla każdej pary rozłącznych przedziałów (α_i, β_i), (γ_i, δ_i) o krańcach wymiernych — rozszerza się natychmiast na dowolną parę przedziałów, zawartych w (a, b); istnieje tedy taka stała C, iż, dla każdego przedziału (α, β),

$$\int_\alpha^\beta x(t)\,dt=C\int_\alpha^\beta f(t)\,dt,$$

skąd oczywiście

$$x(t)=Cf(t)$$

prawie wszędzie w (a, b), i rozważany układ funkcji $\vartheta_{ik}(t)$ spełnia żądane warunki.

Funkcję sumowalną $f(t)$, o której mowa jest w sformułowaniu udowodnionego powyżej twierdzenia, możemy w rozmaity sposób specjalizować. Jeśli np. kwadrat jej nie jest sumowalny, wówczas odpowiadający jej układ $\{\vartheta_{ik}(t)\}$ jest układem zupełnym w polu funkcji o kwadracie sumowalnym, nie jest jednak zupełny względem klasy wszystkich funkcji sumowalnych w rozważanym przedziale. Jeśli znów funkcja $f(t)$ jest jakąkolwiek funkcją nie-ciągłą, lecz o kwadracie sumowalnym, wówczas otrzymujemy układ funkcji ciągłych $\{\vartheta_{ik}(t)\}$, zupełny wzgiędem klasy funkcji ciągłych, nie-zupełny natomiast w polu funkcji o kwadracie sumowalnym.

Ortogonalizując układy $\{\vartheta_{ik}(t)\}$ (metodą Schmidta, § 11), otrzymujemy układy ortogonalne i normalne funkcji w przedziale (a, b), posiadające te same własności.

ROZDZIAŁ VII.

Całka Perrona.

Zarys historyczny. Całka Newtona.

§ 1. W rozdziałach poprzednich zamknęliśmy tę część wykładu, która poświęcona jest właściwej teorji Lebesgue'a. Przystępując z kolei do dalszych uogólnień, ustalimy przedewszystkiem bliżej nieco stosunek całki lebesgue'owskiej do poprzedzających ją, dawniejszych metod całkowania. Historyczny ten niejako rzut oka wyjaśni zarazem drogi dalszego rozwoju badań.

Teorja całki rozwijała się, jak wiadomo, w dwu odmiennych kierunkach, z których jeden odpowiada pojęciu całki oznaczonej, drugi — pojęciu funkcji pierwotnej albo całki nieoznaczonej.

W Leibnitzu widzi się zazwyczaj prekursora pojęcia całki oznaczonej, rozumianej jako granica pewnych sum przybliżonych; Leibnitz'owi zawdzięczamy również powszechnie używany znak $\int$, który Leibnitz wprowadził, modyfikując symbol S oznaczający sumy zwykłe.

W Newtonie widzimy natomiast raczej przedstawiciela drugiego kierunku t. j. całki rozumianej jako operacja odwrotna względem różniczkowania, jako funkcja pierwotna[1]). Oczywiście, rozróżnienie to — między ideami Leibnitza i New-

[1]) Termin funkcja pierwotna był wprowadzony zresztą znacznie później przez Lagrange'a.

tona — jest raczej konwencjonalne niż ścisłe. Zapewne, iż obydwu tym znakomitym twórcom rachunku nieskończonostkowego nie był obcy związek między obydwiema definicjami całki, jakkolwiek ich sposób uzasadnienia tego związku mało mógłby nas dziś zadowalać.

Po śmierci Leibnitza rozwój teorji całki poszedł raczej po linji newtonowskiej, co zrozumiałe jest, jeśli się zważy, iż całka, rozumiana jako operacja odwrotna względem różniczkowania, była czemś pojęciowo dużo prostszem aniżeli całka oznaczona tak jak definjował ją był Leibnitz; pozatem odpowiadała bardziej rachunkom formalnym, które rozwinęły się jako konsekwencja odkrycia nowego algorytmu.

W tym kierunku szły więc przedewszystkiem prace Eulera, który wprost definjował rachunek całkowy jako „methodus ex data differentialium relatione inveniendi relationem ipsarum quantitatum".

Dopiero Cauchy powraca do idei Leibnitza, by przyswoić ją analizie nowoczesnej. Nie operując już mglistemi pojęciami elementów nieskończenie małych, Cauchy opiera swą definicję całki na ogólnej teorji granic. Pokazuje, iż dla każdej funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale (a, b), istnieje granica sum postaci

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1}-x_k) \qquad (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b),$$

gdy długość największego z przedziałów (x_k, x_{k+1}) dąży do zera. Granica ta jest ex definitione według Cauchy'ego całką oznaczoną funkcji $f(x)$ w (a, b).

Definicję swą Cauchy ogranicza dobrowolnie do funkcji ciągłych. W istocie jednak zasięg właściwy tej definicji jest znacznie szerszy, to też oddawna już stosowano algorytm Cauchy'ego do całkowania — w miarę potrzeby — pewnych funkcji nieciągłych. Dopiero jednak pierwszy Riemann wyróżnia explicite ogólną klasę funkcji ograniczonych, dla których istnieje granica wyżej określonych sum przybliżonych Cauchy'ego. Nazywamy dziś te funkcje — funkcjami całkowalnemi w sen-

---

[1]) A. Cauchy. *Résumé des leçons données à l'Éc. R. Polytechnique, t. 1,* (1823). *Oeuvres*, II, t. 4, p. 122.

sie Riemanna, granicę zaś zbudowanych dla nich sum (1) — całką w sensie Riemanna.[1])

Badania ubiegłego stulecia nad uporządkowaniem i sprecyzowaniem podstawowych definicji Analizy poświęciły sporo uwagi również i całce Riemanna. Nie zamierzając wchodzić tu bliżej w szczegóły historyczne, ograniczymy się do podkreślenia końcowego momentu tych badań, który związany jest przedewszystkiem z imieniem C. Jordana. W klasycznym swym wykładzie Analizy dla Szkoły Politechnicznej, opiera Jordan teorję całki Riemanna na podstawie zbudowanej przez siebie ogólnej teorji miary zbiorów. Metoda ta jest zapowiedzią niejako nowoczesnego rozdziału w dziejach całki, który zwiąże systematycznie pojęcie całki z teorją mnogości, w szczególności zaś z ogólną teorją miary.[2])

Ideę Jordana podejmuje w swej Tezie doktorskiej (1902) H. Lebesgue. Stawiając sobie jako cel uogólnienie całki Riemanna, Lebesgue modyfikuje uprzednio teorję jordanowską miary [3]) i na zdobytej w ten sposób nowej podstawie buduje swą teorję całki. Oto, jak przedstawia się u samego Lebesgue'a definicja całki.

---

1) B. Riemann, *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe*, (Habilitationsschrift), Göttingen, 1854. (*Werke*, II Aufl., Leipzig, 1892, p. 239/41).

Zamiast sum (1) Cauchy'ego rozważa Riemann sumy ogólniejszego nieco typu, mianowicie

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k),$$

w których ξ_k oznacza dowolny punkt przedziału (x_k, x_{k+1}). Można jednak dowieść łatwo, iż istnienie granicy tych sum jest równoważne istnieniu granicy sum Cauchy'ego. Być może, iż Riemann'owi szczegół ten nie był znany.

[2]) Jak większość odkryć matematycznych, pomysł Jordana okazuje się — z perspektywy historycznej — przedewszystkiem skupieniem i uporządkowaniem idei, które nie były obce i innym matematykom spółczesnym. Tak np. du Bois-Reymond, jeszcze w r. 1880 (*Math. Ann.*, t. 19), wyróżnił klasę zbiorów, która równoważna jest zbiorom miary zero według Jordana; zbiory te du Bois-Reymond obejmuje nazwą grup punktowych całkowalnych i przy pomocy tych zbiorów podaje znany warunek całkowalności funkcji według Riemanna. Bliższe szczegóły w *Encykl.* Rosenthala (§ § 20, 28, 29).

[3]) Por. II, § 1.

Niech $f(x)$ będzie dowolną funkcją mierzalną w (a, b), która wartości nieskończone przyjmuje tylko conajwyżej w mnogości miary zero, i niech

$$(2)\qquad \ldots < l_{-n-1} < l_{-n} < \ldots < l_0 < \ldots < l_n < l_{n+1} < \ldots$$

będzie dowolnym ciągiem liczb, rozbieżnym w obydwu kierunkach do ∞, tak jednak, iż różnice

$$l_{k+1} - l_k \qquad (k = \ldots - n, \ldots, 0, \ldots, n, \ldots)$$

są z góry ograniczone. Tworzymy sumę

$$(3)\qquad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} l_i \cdot \left| \underset{x}{E}\,[l_i \leqslant f(x) < l_{i+1}] \right|;$$

jeżeli dla jednego — dowolnego zresztą — układu (2) szereg (3) jest zbieżny bezwzględnie, wówczas jest bezwzględnie zbieżny również i dla każdego innego ciągu $\{l_i\}$, spełniającego zadane warunki, i sumy (3) dążą do oznaczonej granicy, gdy kres górny różnic $l_{i+1} - l_i$ dąży do zera; granica ta jest całką funkcji $f(x)$ w (a, b), sama zaś funkcja nazywa się w tym przypadku sumowalna w przedziale (a, b).[1])

Sumy (3), stanowiące przybliżenia całki Lebesgue'a, są niewątpliwie odmiennego typu aniżeli sumy występujące w definicji Cauchy-Riemanna i na pierwszy rzut oka wydawać się mogą nieco sztuczne. Oto jednak, jak sam Lebesgue wyjaśnia — poglądowo i dowcipnie — sens swej definicji, nawiązując ją do dawnych metod Cauchy-Riemanna:

„Geometrzy XVII-go stulecia pojmowali całkę funkcji $f(x)$ jako sumę nieskończonej liczby elementów niepodzielnych (indivisibles), z których każdy był rzędną, dodatnią lub ujemną, funkcji $f(x)$. Myśmy natomiast uporządkowali wprost elementy te wedle ich stosunkowej wielkości; dokonaliśmy — jak mówi się w algebrze — połączenia, redukcji wyrazów podobnych. Możnaby również powiedzieć, iż, całkując wedle Riemanna, sumuje się te elementy w porządku odpowiadających im wartości x i postępuje się podobnie, jakby czynił to kupiec, który obliczając stan kasy rachuje monety i banknoty w przypadkowym i dowolnym porządku, w jakim wpadają mu w ręce. Postępowanie takie nie byłoby właściwe: to też pójdziemy śladem kupca bardziej akuratnego który powiada:

---

[1]) Definicja ta jest formalnie odmienna od określenia, które podaliśmy w tym wykładzie; jednakże, opierając się na dotychczasowych rozważaniach, czytelnik bez trudu uzgodni obydwie definicje.

mam $m(E_1)$ monet 1-koronowych wartości $1 . m(E_1)$,

mam $m(E_2)$ monet 2-koronowych wartości $2 . m(E_2)$,

mam $m(E_3)$ monet 3-koronowych wartości $3 . m(E_3)$

i t. d. Ogółem mam

$$S = 1 . m(E_1) + 2 . m(E_2) + 3 . m(E_3) + \dots$$ [1]".

Powróćmy z kolei jednak znów do idei Newtona, t. zn. definicji całki jako funkcji pierwotnej. Jak zaznaczyliśmy już wyżej, idea ta dominowała w Analizie aż do czasów Cauchy'ego. Cauchy'emu zawdzięczamy nietylko definicję całki oznaczonej funkcji ciągłej, w formie odpowiadającej spółczesnym wymaganiom Analizy, ale również pierwszy poprawny dowód związku między całką oznaczoną a funkcją pierwotną; temsamem ustalona jest przez Cauchy'ego w zakresie funkcji ciągłych — równoważność obydwu idei całki.

Równoważność ta znika jednak natychmiast, skoro wykraczamy poza funkcje ciągłe, przechodząc od całki Cauchy'ego do całki Riemanna. Istnieją bowiem, z jednej strony (jak spostrzega się odrazu), funkcje całkowalne w sensie Riemanna, które nie posiadają funkcji pierwotnej, z drugiej zaś — jak pokazał pierwszy Volterra[2]) — funkcje ograniczone, posiadające funkcję pierwotną, lecz nie-całkowalne w sensie Riemanna.

Zanim zbadamy teraz stosunek całki Lebesgue'a do funkcji pierwotnej, zauważymy tu przedewszystkiem, iż definicja funkcji pierwotnej rozszerza się natychmiast na funkcje punktu w przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów. Będziemy mówili mianowicie, iż funkcja $f(x)$ punktu x w przestrzeni $\mathfrak{R}_n$ jest całkowalna w sensie Newtona, jeśli istnieje funkcja $F(R)$ addytywna i ciągła figury elementarnej w tej przestrzeni, wszędzie różniczkowalna[3]) i posiadająca w każdym punkcie pochodną równą wartości funkcji $f(x)$ w tym punkcie.

---

[1]) Lebesgue, *Sur le développement de la notion d'intégrale* (Conférence faite à Copenhague, le 8 mai 1926, à la Soc. Math.), *Matematisk Tidsskrift, B.* (1926), pp. 54 — 74.

[2]) *Giorn. di Mat.*, t. 19, (1881). Również: Lebesgue, *L. l.*, I, p. 93.

[3]) Przypominamy, iż w myśl definicji naszej (III, § 1) różniczkowalność oznacza istnienie pochodnej skończonej.

Funkcja $F(x)$ nazywa się wówczas całką Newtona[1]) albo funkcją pierwotną funkcji $f(x)$; jak wynika z tej definicji, każda funkcja całkowalna w sensie Newtona jest mierzalna (III, § 2) i wszędzie skończona.

Określona tak operacja Newtona nie daje się rozszerzyć *bezpośrednio* w ten sposób, by umożliwić całkowanie również i pewnych funkcji przyjmujących wartości nieskończone; już bowiem i funkcja ciągła jednej zmiennej rzeczywistej nie jest naogół określona jednoznacznie (z dokładnością do dowolnej stałej addytywnej) przez swą pochodną, jeśli pochodna ta — istniejąc nawet wszędzie — może przyjmować wartości nieskończone.[2]) Istnieją mianowicie przykłady *funkcji ciągłych, posiadających w przedziale* (a, b) *wszędzie pochodne równe, a nie - różniących się mimo to o stałą.*[3])

1^0 Pokażemy tu przedewszystkiem, iż, *jeśli dany jest dowolny zbiór doskonały miary zero H w przedziale* $(0, 1)$, *wówczas istnieje zawsze funkcja stale rosnąca* $F(x)$, *posiadająca wszędzie w tym przedziale pochodną — nieskończoną w zbiorze H i skończoną poza tym zbiorem.*[4])

Załóżmy w tym celu, dla prostoty, iż krańce przedziału $(0, 1)$ są zarazem kresami zbioru H i niech $\{(a_n, b_n)\}$ będzie ciągiem przedziałów przyległych do H (III, § 8); niech, ogólnie

$$k_n = b_n - a_n$$

i niech $\{h_n\}$ oznacza ciąg liczb dodatnich takich, by

---

[1]) Całce, którą nazwaliśmy w tekscie całką Newtona, wielu autorów (np. Lebesgue) nadaje nazwę całki Duhamela. Nie wydaje to się słuszne, ponieważ sposób definjowania całki zapomocą funkcji pierwotnej niewątpliwie dużo wyprzedza Duhamela. Sądzimy, iż sprawiedliwsze jest nadanie tej całce imienia Newtona, który w sposób bezpośredni nawiązywał obliczanie pól do operacji odwrotnej względem procesu różniczkowania, nie przechodząc przez algorytm tworzenia całki oznaczonej jako sumy nieskończenie małych elementów.

[2]) W dziedzinie funkcji jednej zmiennej rzeczywistej jednoznaczność (z dokładnością do stałej dowolnej) funkcji pierwotnej otrzymuje się z elementarnych twierdzeń rachunku różniczkowego; w dziedzinie funkcji punktu w przestrzeni n-wymiarowej — jednoznaczność ta wynika z tw. 1 § następnego; oczywiście, twierdzenie o jednoznaczności całki Newtona zawiera się w ogólniejszem twierdzeniu o jednoznaczności całki Perrona.

[3]) Hahn, *Monatshefte für Math. u. Phys.*, t. 16, (1905), p. 161; Ruziewicz, *Fund. Math.*, t. 1, (1920), p. 148.

[4]) Założenie, iż zbiór H jest miary zero, jest istotne. Z twierdzeń bowiem Denjoy i Pani Young (IX, § 3) wynika, iż zbiór punktów, w których pochodna staje się nieskończona, posiada zawsze miarę zero.

(4)
$$\lim_n \frac{h_n}{k_n} = +\infty$$

oraz

(5)
$$\sum_n h_n = 1.$$[1]

Połóżmy

$$f(x) \begin{cases} = +\infty, & \text{dla } x \in H \\ = \dfrac{h_n}{\sqrt{(x-a_n)(b_n-x)}}, & \text{dla } a_n < x < b_n. \end{cases}$$

Określona w ten sposób funkcja jest nieujemna i ciągła[2]) w przedziale (0, 1). Istotnie, ciągłość ta jest oczywista w każdym punkcie, który nie należy do H; z drugiej jednak strony, jeśli przez m_n oznaczyć kres dolny rozważanej funkcji w przedziale (a_n, b_n), wówczas, z uwagi na (4)

$$\lim_n m_n = \lim_n \frac{2h_n}{k_n} = +\infty,$$

a więc, dla każdego punktu $x_0 \in H$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty = f(x_0).$$

Powiadamy teraz, iż funkcja ta jest zarazem sumowalna w przedziale (0, 1). Mamy istotnie

$$\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx = h_n \int_{a_n}^{b_n} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_n)(b_n-x)}} = 2\pi h_n$$

skąd oczywiście, z uwagi na (5),

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 2\pi.$$

Połóżmy

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

---

[1]) Ciąg taki istnieje — jak wiadomo — zawsze z uwagi na zbieżność szeregu $\sum_n k_n$; możemy przyjąć np. $h_n = \sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}$, gdzie r_n oznacza n-tą resztę tego szeregu.

[2]) z uwzględnieniem — oczywiście — wartości nieskończonych.

Funkcja $F(x)$ jest oczywiście stale rosnąca w przedziale $(0, 1)$, a z uwagi na ciągłość funkcji $f(x)$ mamy w każdym punkcie tego przedziału (IV, § 3, tw. 9)

$$F'(x) = f(x);$$

w szczególności tedy

$$F'(x) = +\infty, \quad \text{jeśli } x \in H,$$

oraz

$$F'(x) < +\infty, \quad \text{jeśli } x \in CH.$$

2° Niech teraz $T(x)$ będzie dowolną funkcją ciągłą, niemalejącą i nieredukującą się do stałej w przedziale $(0, 1)$, stałą natomiast — w każdym z przedziałów przyległych do H. Funkcje takie — jak wiadomo już (III, § 8) — istnieją. Połóżmy

$$G(x) = F(x) + T(x).$$

Mamy oczywiście wewnątrz każdego z przedziałów przyległych

$$G'(x) = F'(x),$$

przyczem równość ta zachowuje się również i w punktach zbioru H, jako iż w punktach tych pochodna funkcji F — a wraz z nią i pochodna funkcji G — staje się nieskończona.

Funkcje F i G mają tedy pochodne identyczne, jakkolwiek nie różnią się o stałą.

Określenia całki Newtona nie można uogólnić również i w ten sposób, by zastąpić w niem termin „wszędzie" przez „prawie wszędzie", t. zn. rozumieć funkcję pierwotną jako funkcję różniczkowalną prawie wszędzie, której pochodna pokrywa się prawie wszędzie z funkcją podcałkową. Zarówno przykład wyżej podany — jak i samo już istnienie funkcji osobliwych, nie redukujących się do stałej (III, § 8) — pokazują, iż uogólnienie takie przekreślałoby zasadę jednoznaczności całki.[1]) Jeśli wszakże, rozszerzając definicję tej całki w kierunku zastąpienia terminu „wszędzie" przez „prawie wszędzie", zacieśnić ją jednocześnie przez ograniczenie zakresu dopuszczalnych funkcji pierwotnych do funkcji bezwzględnie ciągłych, wówczas rozważana definicja stanie się definicją całki Lebesgue'a i pokryje się dokładnie z określeniem, jakie zostało przyjęte za podstawę naszego wykładu. W ten sposób całkę Lebesgue'a, która wyrosła sama na gruncie idei całki oznaczonej Leibnitza-Cauchy-Riemanna, rozumieć można równocześnie jako pewną modyfikację całki newtonowskiej.

---

[1]) Zwrócić tu należy uwagę na ładną, ogólną konstrukcję Łuzina (*Teza*, p. 34): *dla każdej funkcji mierzalnej $f(x)$ istnieje funkcja ciągła $F(x)$, której pochodną prawie wszędzie jest funkcja $f(x)$.*

Nie można bynajmniej jednak twierdzić, iż całka ($\mathfrak{L}$) obejmuje całkę Newtona. Łatwo bowiem pokazać, iż już wśród funkcji jednej zmiennej rzeczywistej istnieją funkcje, które — posiadając funkcję pierwotną — nie są wszakże sumowalne.

W samej rzeczy, niech

$$F(x) = x^2 \sin \frac{\pi}{x^2} \qquad (\text{dla } x \neq 0),$$

$$F(0) = 0.$$

Funkcja $F(x)$ posiada widocznie wszędzie pochodną $F'(x)$, która nie jest jednak bynajmniej sumowalna. Istotnie, ponieważ funkcja $F'(x)$ jest ograniczona w każdym przedziale $(\varepsilon, 1)$ $(\varepsilon > 0)$, funkcja $F(x)$ spełnia w każdym takim przedziale t. zw. warunek Lipschitza, jest tedy tembardziej ciągła bezwzględnie.

Gdyby tedy funkcja $F'(x)$ była sumowalna w całym przedziale $(0, 1)$, wówczas jej całka nieoznaczona ($\mathfrak{L}$) pokrywałaby się (z dokładnością do stałej addytywnej) z funkcją $F(x)$ w całym przedziale $(0, 1)$. Prowadzi to — rzecz prosta — do sprzeczności, ponieważ funkcja $F(x)$ — jakkolwiek bezwzględnie ciągła w każdym przedziale $(\varepsilon, 1)$ $(\varepsilon > 0)$ — w przedziale $(0, 1)$ nie jest nawet funkcją o wahaniu skończonem.

Całka Lesgue'a tedy, choć rozważana być może zarówno na linji idei Leibnitza, jak i Newtona, nie wiąże jednak ostatecznie dwu tych kierunków.[1]) Zadanie to rozwiązują dopiero dalsze uogólnienia, które zawdzięczamy Perronowi oraz Denjoy. W rozdziale obecnym rozważymy metodę Perrona, której stosunek uogólniający do całki Newtona jest bezpośrednio widoczny. Mniej już elementarny charakter, bliższy metodom lebesgue'owskim, nosi teorja Denjoy: poświęcone jej będą rozdziały następne.

Twierdzenie podstawowe teorji Perrona.

§ 2. Rozważania pierwszej części tego rozdżiału — podobnie jak i rozdziałów poprzednich — odnoszą się do przestrzeni euklidesowych dowolnego wymiaru i jedynie celem formalnego uproszczenia przyjmiemy tu terminologję płaszczyzny. Druga część natomiast (§ § 8 — 10) związana jest istotnie z linją prostą: podkreślimy to wyraźnie w sformułowaniu właściwych twierdzeń.

Rozpoczniemy od dowodu pewnego elementarnego twierdzenia, podstawowego dla rozważań, do których obecnie przystępujemy.

[1]) Zauważymy tu, iż sam Lebesgue kładł już w pierwszem wydaniu swych *Leçons sur l'intégration* (rozdz. V, VI) duży nacisk na problemat wiązania obydwu zasadniczych idei całki. Sposób postawienia zagadnienia przez Lebesgue'a wpłynął niewątpliwie na kierunek późniejszych badań Denjoy

Przyjmiemy przedewszystkiem definicję następującą:

Będziemy mówili, iż niemal wszystkie punkty jakiegoś zbioru posiadają pewną własność W, jeśli mnogość tych punktów zbioru, które własności W nie posiadają, jest conajwyżej przeliczalna.

Twierdzenie 1. Jeżeli funkcja addytywna i ciągła[1] $F(R)$ *posiada w niemal wszystkich punktach pewnej figury elementarnej* R_0 *górną* (wzgl. dolną) *pochodną niedodatnią* (nieujemną), *wówczas*

$$(1) \qquad F(R_0) \leqslant 0 \qquad [\text{wzgl. } F(R_0) \geqslant 0].$$

Dowód. A) Udowodnimy najpierw, iż nierówność (1) spełniona jest zawsze, jeśli R_0 jest kwadratem i jeśli w niemal każdym punkcie x tego kwadratu

$$(2) \qquad \overline{F}(x) < 0.$$[2]

Załóżmy, iż

$$(3) \qquad F(R_0) > 0.$$

Niech $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ oznacza ciąg punktów kwadratu R_0, w których nierówność (2) nie jest spełniona.

Możemy określić łatwo przez indukcję ciąg kwadratów $\{K_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, spełniających warunki następujące:

$$(4) \qquad R_0 = K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots;$$

$$(5) \qquad F(K_n) > 0;$$

(6) $\quad K_n$ $(n \geqslant 1)$ nie zawiera żadnego z punktów $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

$$(7) \qquad d(K_n) \to 0.$$

Załóżmy, w samej rzeczy, iż określony został kwadrat $K_n \subset R_0$ spełniający warunki (5), (6). Możemy — ze względu na ciągłość funkcji F — podzielić go na skończoną (> 4) liczbę kwadratów równych K_n^i $(i = 1, 2, \ldots, p_n)$, dostatecznie małych na to, aby dla każdego $i = 1, 2, \ldots p_n$:

$$F(K_n^i) < \frac{1}{5} F(K_n).$$

---

[1]) I, § 7.

[2]) $\overline{F}(x)$ i $\underline{F}(x)$ oznaczają odp. górną i dolną pochodną funkcji $F(x)$; por. III, § 1.

Ponieważ

$$0 < F(K_n) = \sum_{i=1}^{p_n} F(K_n^i),$$

punkt zaś a_{n+1} może należeć jednocześnie conajwyżej do czterech kwadratów z pośród K_n^i, przeto istnieje napewno pewien kwadrat $K_n^{i_0}$, który nie zawiera punktu a_{n+1} i na którym wartość funkcji jest > 0. Kwadrat ten oznaczymy przez K_{n+1}.

Stwierdzamy natychmiast, iż określony w ten sposób ciąg kwadratów jest istotnie nieskończony i spełnia wszystkie warunki (4), (5), (6), (7).

Niech teraz x_0 będzie punktem wyznaczonym przez iloczyn ciągu nieskończonego kwadratów K_n.

Ze względu na (5) i (7) będziemy mieli:

$$F(x_0) \geqslant 0,$$

co jest jednak widocznie sprzeczne z założeniem (2), ponieważ — z uwagi na (6) — punkt x_0 nie może pokrywać się z żadnym z punktów wyjątkowych $a_1, a_2, \ldots$ Związek (3) prowadzi tedy do sprzeczności.

B) Pokażemy teraz, że nierówność (1) zachodzi przy założeniu (2) (spełnionym niemal wszędzie), dla każdej figury elementarnej R_0. Wystarczy udowodnić to oczywiście dla przypadku, gdy R_0 jest prostokątem. Niech w tym celu ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Możemy podzielić zawsze prostokąt R_0 na skończoną liczbę niezachodzących na siebie kwadratów $K^{(1)}, \ldots, K^{(s)}$ oraz pewien prostokąt P o średnicy dostatecznie małej na to, aby:

$$|F(P)| < \varepsilon.$$

Mamy wówczas na zasadzie (*A*):

$$F(R_0) = \sum_{i=1}^{s} F(K^{(i)}) + F(P) < \varepsilon.$$

Ponieważ zaś ε jest dowolną liczbą > 0, zatem:

$$F(R_0) \leqslant 0.$$

C) Niech wreszcie w niemal każdym punkcie $x \varepsilon R_0$ spełniona będzie nierówność

$$\overline{F}(x) \leqslant 0.$$

Oznaczmy przez ε dowolną liczbę dodatnią i niech:

$$G(R) = F(R) - \varepsilon . |R| .$$

Mamy wówczas niemal wszędzie w R_0:

$$\overline{G}(x) = \overline{F}(x) - \varepsilon < 0$$

i z uwagi na (*B*):

$$F(R_0) - \varepsilon . |R_0| = G(R_0) \leqslant 0.$$

Ponieważ zaś ε jest dowolną liczbą dodatnią, przeto otrzymujemy stąd:

$$F(R_0) \leqslant 0,$$

i twierdzenie nasze udowodnione jest w całej ogólności.

Funkcje zniższające i zwyższające.

§ 3. Niech $f(x)$ będzie dowolną funkcją punktu, określoną na pewnej figurze elementarnej R_0. Nazwiemy funkcją zwyższającą (wzgl. zniższającą) funkcji $f(x)$ na R_0 każdą funkcję addytywną i ciągłą figury elementarnej $R \subset R_0$, której dolna (wzgl. górna) pochodna jest wszędzie w R_0 różna od $-\infty$ (wzgl. od $+\infty$) i niemniejsza (wzgl. niewiększa) od $f(x)$.

Twierdzenie 2. Jeśli $U(R)$ i $V(R)$ są odp. funkcjami zwyższającą i zniższającą funkcji $f(x)$ na pewnej figurze elementarnej R_0, wówczas dla każdej figury $R \subset R_0$:

$$U(R) \geqslant V(R). \tag{1}$$

Dowód. Niech $H(R) = U(R) - V(R)$. Mamy wówczas w każdym punkcie $x \varepsilon R$:

$$\underline{H}(x) \geqslant \underline{U}(x) - \overline{V}(x), \tag{2}$$

przyczem odejmowanie wskazane po prawej stronie nierówności jest zawsze wykonalne, ponieważ $\underline{U}(x) \neq -\infty$ i $\overline{V}(x) \neq +\infty$. Ponieważ zaś w każdym punkcie x

$$\underline{U}(x) \geqslant f(x) \geqslant \overline{V}(x),$$

zatem z (2)

$$\underline{H}(x) \geqslant 0,$$

a więc, na mocy twierdzenia poprzedniego, $H(R) \geqslant 0$ na każdej figurze elementarnej $R \subset R_0$, co, oczywiście, równoważne jest (1).

Całka oznaczona Perrona.

§ 4. Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada na R_0 funkcje zwyższające i zniższające, i jeśli kres dolny wartości na R_0 wszystkich funkcji zwyższających jest równy kresowi górnemu wartości na R_0 wszystkich funkcji zniższających funkcję $f(x)$, wówczas funkcja $f(x)$ nazywa się całkowalna w sensie Perrona, albo całkowalna ($\mathfrak{P}$) na R_0; wspólna wartość obydwu rozważanych kresów nazywa się wtedy całką oznaczoną Perrona, albo całką oznaczoną ($\mathfrak{P}$), funkcji $f(x)$ na R_0; [1] całkę tę oznaczać będziemy przez

$$(\mathfrak{P}) \int_{R_0} f(x)\, dx.$$

Z definicji powyższej oraz twierdzenia 2 wynika natychmiast następujące

Twierdzenie 3. 1° *Na to, aby liczba L była całką Perrona funkcji $f(x)$ na R_0, konieczne jest i wystarcza, aby dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ funkcja $f(x)$ posiadała taką funkcję zwyższającą $U(R)$ i taką funkcję zniższającą $V(R)$, iż*

$$U(R_0) - V(R_0) < \varepsilon \quad \textit{oraz} \quad U(R_0) \geqslant L \geqslant V(R_0).$$

2° *Jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w sensie Perrona na pewnej figurze elementarnej R_0, wówczas całkowalna jest również na każdej figurze elementarnej $R \subset R_0$, i dla każdej funkcji zwyższającej U oraz zniższającej V funkcji $f(x)$ na R_0*

$$U(R) \geqslant (\mathfrak{P}) \int_R f(x)\, dx \geqslant V(R).$$

[1]) Termin „oznaczona" będziemy zwykle pomijali.

Całka nieoznaczona Perrona.

§ 5. *Twierdzenie 4. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w sensie Perrona na każdej z dwu niezachodzących na siebie figur elementarnych R_1, R_2, wówczas całkowalna jest również na ich sumie, przyczem*

$$(1)\qquad (\mathfrak{P})\int\limits_{R_1+R_2} f(x)\,dx = (\mathfrak{P})\int\limits_{R_1} f(x)\,dx + (\mathfrak{P})\int\limits_{R_2} f(x)\,dx.$$

Dowód. Niech ε będzie dowolną liczba dodatnią. Z uwagi na twierdzenie poprzednie istnieje dla każdej z figur R_i $(i = 1, 2)$ taka funkcja zwyższająca $U_i(R)$ oraz taka funkcja zniższająca $V_i(R)$ $(R \subset R_i)$, iż

$$(2)\qquad U_i(R) \geqslant (\mathfrak{P})\int\limits_R f(x)\,dx \geqslant V_i(R)$$

oraz

$$(3)\qquad U_i(R_i) - V_i(R_i) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (i = 1, 2).$$

Połóżmy dla każdego $R \subset R_1 + R_2$:

$$U(R) = U_1(R \times R_1) + U_2(R \times R_2),$$

$$V(R) = V_1(R \times R_1) + V_2(R \times R_2).$$

U jest oczywiście funkcją zwyższającą, V — funkcją zniższającą funkcji $f(x)$ na $R_1 + R_2$, przyczem (2) i (3) dają:

$$U(R_1 + R_2) \geqslant (\mathfrak{P})\int\limits_{R_1} f(x)\,dx + (\mathfrak{P})\int\limits_{R_2} f(x)\,dx \geqslant V(R_1 + R_2)$$

oraz

$$U(R_1 + R_2) - V(R_1 + R_2) < \varepsilon.$$

Dwie nierówności powyższe — ze względu na twierdzenie poprzednie — oznaczają całkowalność $(\mathfrak{P})$ funkcji $f(x)$ na $R_1 + R_2$ i uzasadniają zarazem równość (1).

Z ostatnich dwu twierdzeń wynika, iż, jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w sensie Perrona na pewnej figurze elementarnej R_0, wówczas całkowalna jest również na każdej figurze $R \subset R_0$ i funkcja

$$F(R) = (\mathfrak{P})\int\limits_R f(x)\,dx,$$

jest w R_0 pewną funkcją addytywną. Nazywamy ją całką nieoznaczoną Perrona, albo całką nieoznaczoną ($\mathfrak{P}$), funkcji $f(x)$; jej wartości na indywidualnych figurach $R \subset R_0$ są całkami oznaczonemi ($\mathfrak{P}$), zgodnie z definicją podaną w § poprzednim.

W przypadku, gdy $f(x)$ jest funkcją punktu na linji prostej, jej całka nieoznaczona ($\mathfrak{P}$) jest funkcją addytywną figury elementarnej na linji prostej i odpowiadają jej (I, § 14) pewne funkcje zmiennej rzeczywistej, różniące się między sobą conajwyżej o stałą. Funkcje te (podobnie jak dla całki Lebesgue'a) nazywamy także całkami nieoznaczonemi ($\mathfrak{P}$) rozważanej funkcji $f(x)$.

Twierdzenie 5. Kombinacja linjowa $l_1 f_1(x) + l_2 f_2(x)$ dwu funkcji całkowalnych w sensie Perrona na pewnej figurze elementarnej R_0 jest również całkowalna ($\mathfrak{P}$), przyczem

$$\int\limits_{R_0} (l_1 f_1 + l_2 f_2)\, dx = l_1 \int\limits_{R_0} f_1\, dx + l_2 \int\limits_{R_0} f_2\, dx.$$

Dowód. A) Jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w sensie Perrona, U i V są odp. jej funkcjami zwyższającą i zniższającą, i l jest dowolną stałą, wówczas $l.U$, wzgl. $l.V$, jest funkcją zwyższającą, $l.V$, wzgl. $l.U$, jest funkcją zniższającą funkcji $l.f(x)$ — zależnie od tego czy l jest liczbą $\geqslant 0$, czy $\leqslant 0$. W każdym razie, wynika stąd na mocy tw. 3 (1^0), iż, jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna na R_0, wówczas całkowalna jest również funkcja $l.f(x)$ oraz

$$\int\limits_{R_0} l.f(x)\, dx = l \int\limits_{R_0} f(x)\, dx.$$

B) Jeśli $U_i(R)$, $V_i(R)$ są odp. funkcjami zwyższającemi i zniższającemi funkcji $f_i(x)$ ($i = 1, 2$) na R_0, wówczas $U_1 + U_2$, $V_1 + V_2$ są odp. funkcjami zwyższającą i zniższającą funkcji $f_1 + f_2$ na R_0. Z uwagi tedy znów na twierdzenie 3 (1^0), jeśli każda z dwu funkcji f_1, f_2 jest całkowalna ($\mathfrak{P}$), wówczas całkowalna ($\mathfrak{P}$) jest również ich suma $f_1 + f_2$ oraz

$$(\mathfrak{P}) \int\limits_{R_0} (f_1 + f_2)\, dx = (\mathfrak{P}) \int\limits_{R_0} f_1\, dx + (\mathfrak{P}) \int\limits_{R_0} f_2\, dx.$$

Z A) oraz B) wynika już twierdzenie nasze w całej ogólności.

T w i e r d z e n i e 6. *Jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna* ($\mathfrak{P}$) *na pewnej figurze elementarnej R_0, wówczas całkowalna jest również na każdej figurze $R \subset R_0$ i jej całka nieoznaczona* ($\mathfrak{P}$)

$$(4) \qquad F(R) = (\mathfrak{P}) \int_R f(x)\, dx$$

jest, dla $R \subset R_0$, funkcją addytywną, ciągłą, prawie wszędzie różniczkowalną w R_0, przyczem prawie wszędzie

$$(5) \qquad F'(x) = f(x).$$

D o w ó d. Funkcja $F(R)$, określona przez wzór (4), jest — jako całka nieoznaczona ($\mathfrak{P}$) — pewną funkcją addytywną figury $R \subset R_0$. Oznaczając przez U i V odp. funkcję zwyższającą i zniższającą funkcji $f(x)$ w R_0, mamy, dla każdej figury $R \subset R_0$,

$$U(R) \geqslant F(R) \geqslant V(R),$$

skąd

$$|F(R)| \leqslant |U(R)| + |V(R)|,$$

a więc funkcja F jest ciągła wraz z obydwiema funkcjami U oraz V, ciągłemi e x d e f i n i t i o n e.

Pozostaje udowodnić jeszcze różniczkowalność funkcji F prawie wszędzie oraz równość (5).

Niech w tym celu ε będzie dowolną liczbą dodatnią oraz $U(R)$ taką funkcją zwyższającą funkcji f, iż (tw. 3)

$$(6) \qquad 0 \leqslant U(R_0) - F(R_0) < \varepsilon^2;$$

niech:

$$(7) \qquad H(R) = U(R) - F(R).$$

Funkcja $H(R)$ jest oczywiście pewną funkcją monotoniczną, nieujemną, a więc — w myśl twierdzenia L e b e s g u e'a (III, § 3) — prawie wszędzie różniczkowalną. Niech

$$P = \mathop{E}_{x}[H'(x) > \varepsilon; \quad x \in R_0]$$

Mamy wówczas [1])

$$H(R_0) \geqslant \varepsilon |P|,$$

---

[1]) Por. rozdz. III, § 3, lemmat 1.

i, z uwagi na (6) i (7),

$$|P| < \varepsilon. \tag{8}$$

Z drugiej strony, w każdym punkcie x, w którym funkcja H jest różniczkowalna, mamy

$$\underline{U}(x) = H'(x) + \underline{F}(x),$$

a więc, w prawie każdym punkcie $x \in R_0 - P$,

$$-\infty < \underline{U}(x) \leqslant \underline{F}(x) + \varepsilon,$$

lub

$$\underline{F}(x) \begin{matrix} > -\infty \\ \geqslant f(x) - \varepsilon. \end{matrix}$$

Zważywszy tedy na (8) oraz na to, iż ε jest dowolną liczbą dodatnią, otrzymujemy

$$\underline{F}(x) \begin{matrix} > -\infty \\ \geqslant f(x) \end{matrix} \tag{9}$$

w prawie każdym punkcie $x \in R_0$.

Analogicznie, mamy prawie wszędzie w R_0

$$\overline{F}(x) \begin{matrix} < +\infty \\ \leqslant f(x) \end{matrix},$$

co łącznie z (9) daje prawie wszędzie

$$-\infty < \underline{F}(x) = \overline{F}(x) = f(x) < +\infty$$

i uzasadnia nasze twierdzenie.

Temsamem udowodnione zostało, iż każda funkcja $f(x)$ całkowalna $(\mathfrak{P})$ jest prawie wszędzie skończona. Ponieważ zaś — z drugiej strony — każda funkcja punktu, która jest prawie wszędzie pochodną funkcji figury elementarnej, jest mierzalna (III, § 2, tw. 1), przeto otrzymujemy następujące

Twierdzenie 7. Każda funkcja całkowalna w sensie Perrona jest mierzalna i prawie wszędzie skończona.

§ 6. Z określenia całki Perrona wynika bezpośrednio, iż operacja ta obejmuje sobą całkę Newtona, rozumianą w sensie definicji, przyjętej w § 1 tego rozdziału.[1]) Mniej już widoczny jest stosunek całki Perrona do całki Lebesgue'a; twierdzenie, które poniżej podajemy, rozstrzyga tę kwestję, pokazując, iż całka ($\mathfrak{P}$) obejmuje sobą także i tę całkę. Wynika stąd natychmiast (por. § 1), iż zakres funkcji całkowalnych ($\mathfrak{P}$) jest istotnie szerszy zarówno od klasy funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a, jak i klasy funkcji całkowalnych według Newtona, a nawet — od sumy tych dwu klas.

Twierdzenie 8. Jeżeli funkcja jest całkowalna na figurze elementarnej R_0 w sensie Lebesgue'a, wówczas całkowalna jest również w sensie Perrona, i obydwie jej całki — Lebesgue'a i Perrona — są sobie równe.

Dowód. Niech $f(x)$ będzie funkcją sumowalną (w sensie Lebesgue'a) na R_0 i niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Na mocy twierdzenia Vitali'ego-Carathéodory'ego (V, § 6) istnieją napewno dwie funkcje sumowalne — funkcja półciągła i ograniczona z dołu $u(x)$ oraz funkcja półciągła i ograniczona z góry $v(x)$ — takie, iż:

(1) $$u(x) \geqslant f(x) \geqslant v(x), \qquad \text{dla każdego } x \in R_0,$$

oraz

(2) $$\int_{R_0} u(x)\,dx - \int_{R_0} v(x)\,dx < \varepsilon.$$

Niech:

$$U(R) = \int_R u(x)\,dx, \qquad V(R) = \int_R v(x)\,dx.$$

Mamy wówczas (IV, § 3, tw. 9) w każdym punkcie $x \in R_0$:

$$\underline{U}(x) \geqslant u(x) > -\infty, \quad \overline{V}(x) \leqslant v(x) < +\infty.$$

Funkcje U i V są tedy z uwagi na (1) odp. funkcją zwyższającą i zniższającą funkcji $f(x)$, przyczem z (1) i (2) otrzymujemy:

[1]) Jeśli bowiem funkcja addytywna $F(R)$ jest funkcją pierwotną funkcji punktu $f(x)$, wówczas jest jednocześnie jej funkcją zwyższającą i zniższającą, a więc — temsamem — jej całką nieoznaczoną Perrona.

$$U(R_0) \geqslant \int_{R_0} f(x)\,dx \geqslant V(R_0)$$

oraz

$$U(R_0) - V(R_0) < \varepsilon.$$

Funkcja $f(x)$ jest tedy — w myśl tw. 3 — całkowalna w sensie Perrona i jej całka ($\mathfrak{P}$) pokrywa się z całką ($\mathfrak{L}$).

W zakresie funkcji, zachowujących znak stały, wynik powyższy można uzupełnić: w zakresie tym obydwie operacje — Perrona i Lebesgue'a — są całkowicie równoważne. Mianowicie

Twierdzenie 9. Jeśli funkcja $f(x)$, całkowalna ($\mathfrak{P}$) na pewnej figurze elementarnej R_0, jest na niej stale nieujemna,[1] *wówczas jest sumowalna na tej figurze.*

Dowód. Niech $U(R)$ będzie jakąkolwiek funkcją zwyższającą funkcji $f(x)$. Mamy tedy dla każdego $x \in R_0$

$$\underline{U}(x) \geqslant f(x) \geqslant 0. \tag{3}$$

Na mocy przeto tw. 1, $U(R)$ jest funkcją monotoniczną, nieujemną i posiada temsamem prawie wszędzie pochodną oznaczoną, sumowalną na R_0. Związek (3) możemy tedy napisać prawie wszędzie w postaci

$$U'(x) \geqslant f(x) \geqslant 0,$$

skąd, z uwagi na sumowalność funkcji $U'(x)$, wynika (IV, § 4) sumowalność funkcji f.

Lemmat. Jeśli funkcja $f(x)$ jest funkcją całkowalną ($\mathfrak{P}$) na pewnej figurze elementarnej R_0 i funkcja $g(x)$ różni się od $f(x)$ conajwyżej w punktach, w których $f(x)$ ma wartość nieskończoną, wówczas $g(x)$ jest również funkcją całkowalną ($\mathfrak{P}$) oraz

$$(\mathfrak{P})\int_{R_0} g\,dx = (\mathfrak{P})\int_{R_0} f\,dx.$$

Dowód. Wystarczy udowodnić oczywiście nasz lemmat w przypadku, gdy funkcje $f(x)$ i $g(x)$ różnią się w tych tylko

[1]) Jak wynikać będzie z twierdzenia następnego, wystarczy tu założyć iż funkcja $f(x)$ jest tylko prawie wszędzie nieujemna.

punktach, w których funkcja $f(x)$ staje się nieskończonością ustalonego znaku, np. $+\infty$.

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieje napewno taka funkcja $U(R)$ zwyższająca i taka funkcja $V(R)$ zniższająca funkcję $f(x)$ na R_0, iż

$$(4)\qquad U(R_0) - V(R_0) < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Funkcja $U(R)$ jest zarazem funkcją zwyższającą dla $g(x) \leqslant f(x)$. Zbudujemy jeszcze funkcję zniższającą dla $g(x)$.

Niech w tym celu $h(x)$ będzie funkcja równą $-\infty$ w punktach x, w których $f(x) = +\infty$, i równą zeru we wszystkich punktach pozostałych. Ponieważ zbiór $\underset{x}{E}[f(x) = +\infty]$ jest miary zero (tw. 7), przeto funkcja $h(x)$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a, a temsamem w sensie Perrona (tw. 8), i posiada całkę równą 0. Niech $V_1(R)$ będzie funkcją zniższającą funkcji $h(x)$, spełniającą warunek

$$(5)\qquad V_1(R_0) > -\frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Funkcja

$$V_2(R) = V(R) + V_1(R)$$

jest wówczas funkcją zniższającą funkcji $g(x)$. Istotnie, w tych punktach x, w których $f(x) < +\infty$,

$$\overline{V}_2(x) \leqslant \overline{V}(x) + \overline{V}_1(x) \leqslant \overline{V}(x) \leqslant f(x) = g(x),$$

w punktach zaś, w których $f(x) = +\infty$, mamy

$$\overline{V}_1(x) \leqslant h(x) = -\infty,$$

a więc również, zważywszy, że $\overline{V}(x) < +\infty$,

$$\overline{V}_2(x) \leqslant \overline{V}(x) + \overline{V}_1(x) = -\infty \leqslant g(x).$$

Z drugiej strony, ze względu na (4) i (5),

$$U(R_0) - V_2(R_0) < \varepsilon$$

oraz

$$U(R_0) > (\mathfrak{P})\int_{R_0} f(x)\,dx > V(R_0) \geqslant V_2(R_0).$$

Funkcja $g(x)$, dla której U oraz V_2 są odp. pewną funkcją zwyższającą i zniższającą, jest tedy całkowalna ($\mathfrak{P}$) (tw. 3 (1°), § 4) i posiada na R_0 całkę oznaczoną równą całce funkcji $f(x)$.

Twierdzenie 10. Jeśli z dwu funkcji równoważnych jedna jest całkowalna ($\mathfrak{P}$) na pewnej figurze elementarnej R_0, wówczas całkowalna jest również i druga, i całki tych dwu funkcji są sobie równe.

Dowód. Niech $f_1(x)$, $f_2(x)$ będą dwiema funkcjami równoważnemi i niech funkcja f_1 będzie całkowalna ($\mathfrak{P}$) na R_0. Oznaczmy przez $g(x)$ funkcję równą $f_1(x)$ wszędzie, gdzie $f(x)$ posiada wartość skończoną, równą zaś zeru we wszystkich pozostałych punktach. Na zasadzie lemmatu poprzedniego funkcja $g(x)$ jest całkowalna ($\mathfrak{P}$) i

$$(\mathfrak{P})\int_{R_0} g\,dx = (\mathfrak{P})\int_{R_0} f_1\,dx.$$

Funkcja $f_2(x) - g(x)$[1]) jest prawie wszędzie równa zeru, a więc

$$\int_{R_0} (f_2 - g)\,dx = 0.$$

Funkcja $f_2 = (f_2 - g) + g$ jest tedy (tw. 5, § 5) również całkowalna ($\mathfrak{P}$), przyczem

$$(\mathfrak{P})\int_{R_0} f_2\,dx = (\mathfrak{P})\int_{R_0} g\,dx = (\mathfrak{P})\int_{R_0} f_1 dx,$$

co należało udowodnić.

Twierdzenia poprzednie pozwalają uogólnić natychmiast na całkę Perrona twierdzenie Lebesgue'a (IV, § 2, tw. 6) o całkowaniu wyraz za wyrazem ciągów monotonicznych funkcji. Otrzymujemy następujące

Twierdzenie 11. Jeśli $\{f_n(x)\}$ jest ciągiem prawie wszędzie niemalejącym funkcji całkowalnych ($\mathfrak{P}$) na pewnej figurze elementarnej R_0, i ciąg całek tych funkcji na R_0 iest ograniczony z góry,

---

[1]) Odejmowanie jest wszędzie wykonalne, ponieważ funkcja $g(x)$ przyjmuje tylko wartości skończone:

wówczas granica $f(x) = \lim_n f_n(x)$ *jest również całkowalna* ($\mathfrak{P}$) *na* R_0, *przyczem*

$$\lim_n (\mathfrak{P}) \int_{R_0} f_n \, dx = (\mathfrak{P}) \int_{R_0} f \, dx .$$

Dowód. Twierdzenie obecne sprowadza się natychmiast do wspomnianego wyżej twierdzenia Lebesgue'a. Wystarczy tylko zamiast funkcji $f_n(x)$ wziąć pod uwagę funkcje $f_n(x) - f_1(x)$, które jako całkowalne ($\mathfrak{P}$) i prawie wszędzie nieujemne, są zarazem (tw. 9, 10) sumowalne w sensie Lebesgue'a.

§ 7. *Twierdzenie 12.* 1°. *Jeżeli górna* (wzgl. dolna) *pochodna funkcji addytywnej, ciągłej* $F(R)$ *jest niemal wszędzie różna od* $+\infty$ (wzgl. od $-\infty$) *oraz ograniczona z góry* (wzgl. z dołu) *na pewnej figurze elementarnej* R_0 *przez funkcję* $g(x)$ *całkowalną w sensie Perrona, wówczas*

$$F(R_0) \leqslant (\mathfrak{P}) \int_{R_0} g(x) \, dx \quad \left[\text{wzgl.} \geqslant (\mathfrak{P}) \int_{R_0} g(x) \, dx\right];$$

2° *Jeżeli obydwie pochodne — górna i dolna — funkcji addytywnej, ciągłej* $F(R)$ *są niemal wszędzie skończone oraz całkowalne* ($\mathfrak{P}$) *na* R_0, *wówczas funkcja* $F(R)$ *jest prawie wszędzie w* R_0 *różniczkowalna oraz jest całką nieoznaczoną* ($\mathfrak{P}$) *swej pochodnej.*

Dowód. 1° Zakładamy, iż niemal wszędzie w R_0

$$\overline{F}(x) \begin{matrix} < +\infty \\ \leqslant g(x) \end{matrix},$$

gdzie $g(x)$ jest pewną funkcją całkowalną ($\mathfrak{P}$) na R_0. Niech $U(R)$ będzie dowolną funkcją zwyższającą $g(x)$ na R_0 i niech:

$$H(R) = U(R) - F(R).$$

Mamy:

$$\underline{H}(x) \geqslant \underline{U}(x) - \overline{F}(x) \geqslant 0$$

niemal wszędzie na R_0, ponieważ niemal wszędzie $\overline{F}(x) < +\infty$, wszędzie zaś $\underline{U}(x) > -\infty$ oraz $\underline{U}(x) \geqslant g(x) \geqslant \overline{F}(x)$. Stąd (tw. 1, § 2):

$$H(R_0) \geqslant 0, \quad \text{a więc:} \quad U(R_0) \geqslant F(R_0) .$$

Ponieważ zaś $U(R)$ jest dowolną funkcją zwyższającą funkcji $g(x)$, przeto

$$(\mathfrak{P})\int_{R_0} g(x)\,dx \geqslant F(R_0),$$

co należało udowodnić.

2° Jeśli $F(R)$ spełnia założenia drugiej części twierdzenia, wówczas, z uwagi na udowodnioną już część pierwszą, mamy dla każdego $R \subset R_0$

$$(\mathfrak{P})\int_R \underline{F}(x)\,dx \leqslant F(R) \leqslant (\mathfrak{P})\int_R \overline{F}(x)\,dx.$$

Kładąc

$$T_1(R) = (\mathfrak{P})\int_R [\overline{F}(x) - \underline{F}(x)]\,dx$$

oraz

(1) $$T_2(R) = (\mathfrak{P})\int_R \overline{F}(x)\,dx - F(R),$$

otrzymujemy dwie funkcje monotoniczne niemalejące, z których pierwsza, $T_1(R)$, jako całka Perrona funkcji stale nieujemnej $\overline{F} - \underline{F}$, jest zarazem (§ 6, tw. 9) jej całką Lebesgue'a, a więc funkcją bezwzględnie ciągłą. Temsamem przeto bezwzględnie ciągła jest i druga funkcja $T_2(R) \leqslant T_1(R)$ i równość (1) napisać możemy w postaci

$$F(R) = (\mathfrak{P})\int_R \overline{F}(x)\,dx - T_2(R) = (\mathfrak{P})\int_R (\overline{F} - T_2')\,dx,$$

skąd — z uwagi na tw. 6 (§ 5) — wynika natychmiast nasze twierdzenie.

Z twierdzenia powyższego otrzymujemy natychmiast następujące analogiczne twierdzenie dla całki Lebesgue'a:

Twierdzenie 13. 1° *Jeżeli górna* (wzgl. dolna) *pochodna funkcji addytywnej i ciągłej* $F(R)$ *jest niemal wszędzie na* R_0 *różna od* $+\infty$ (wzgl. od $-\infty$) *i ograniczona z góry* (wzgl. z dołu) *przez pewną funkcję sumowalną* $g(x)$, *wówczas odchylenie górne* (wzgl. dolne) *funkcji* $F(R)$ *na* R_0 *jest równe zeru.*

2° *Jeżeli obydwie pochodne — górna i dolna — funkcji addytywnej i ciągłej $F(R)$ są niemal wszędzie na R_0 skończone i sumowalne, wówczas funkcja $F(R)$ jest ciągła bezwzględnie na R_0 (t. zn. jest całką nieoznaczoną* Lebesgue'a).

Dowód. 1° Mamy, na zasadzie twierdzenia poprzedniego, dla każdego $R \subset R_0$,

$$F(R) \leqslant \int_R g(x)\,dx = G(R),$$

gdzie $G(R)$, jako całka Lebesgue'a, jest funkcją bezwzględnie ciągłą. Zatem

$$\overline{E}(F; R_0) \leqslant \overline{E}(G; R_0) = 0,$$

(gdzie — jak zwykle — $\overline{E}(F; R_0)$, $\overline{E}(H; R_0)$ oznaczają górne odchylenia na R_0 odp. funkcji F oraz H), skąd oczywiście

$$\overline{E}(F; R_0) = 0.$$

2° Część druga twierdzenia jest natychmiastową konsekwencją pierwszej.

Lemmat Zygmunda.

§ 8. W § tym — jak również i w następnych — mowa będzie wyłącznie o funkcjach punktu na linji prostej, t. j. o funkcjach jednej zmiennej rzeczywistej. Dla funkcji tych niektóre z pośród twierdzeń poprzednio udowodnionych ująć się dają w formę bardziej dokładną.

Przyjmiemy przedewszystkiem następującą definicję.

Jeżeli $F(x)$ jest dowolną funkcją, określoną w przedziale (a, b), i E dowolnym zbiorem, zawartym w tym przedziale, wówczas przez $F(E)$ oznaczać będziemy zbiór wartości, jakie rozważana funkcja przyjmuje w zbiorze E; mnogość tę nazywać będziemy obrazem zbioru E, określonym przez funkcję F, albo — jeśli funkcja F jest ustalona — wprost obrazem zbioru E.

Lemmat (Zygmunda). *Jeżeli funkcja $F(x)$ jest ciągła w przedziale (a, b) i obraz zbioru tych wszystkich punktów x $(a \leqslant x < b)$, w których*

(1) $$\overline{F}^{+}(x) \leqslant 0,$$

nie zawiera żadnego odcinka (nie redukującego się do punktu)[1], *wówczas funkcja $F(x)$ jest w rozważanym przedziale monotoniczna niemalejąca.*

D o w ó d. Niech c, d $(c < d)$ będą dwoma puktami przedziału (a, b). Załóżmy, iż

(2) $$F(c) > F(d).$$

Niech P będzie zbiorem tych wszystkich punktów przedziału (a, b), w których spełniona jest nierówność (1). $F(P)$ nie zawiera przeto żadnego odcinka, a więc z uwagi na (2) istnieje punkt y_0, który nie należy do $F(P)$ i spełnia nierówność

(3) $$F(c) > y_0 > F(d).$$

Oznaczmy przez Q zbiór punktów x przedziału (c, d), w których

$$F(x) = y_0,$$

i niech x_0 będzie prawym kresem tego zbioru. Mamy oczywiście $x_0 < d$. Ze względu na ciągłość funkcji F punkt x_0 należy do Q i — jak wszystkie punkty Q — znajduje się poza mnogością P. Mamy tedy

(4) $$\overline{F}^{+}(x_0) > 0.$$

Z drugiej wszakże strony — z uwagi na (3) oraz definicję punktu x_0 — mamy dla każdego punktu x przedziału (x_0, d)

$$F(x_0) = y_0 > F(x),$$

skąd oczywiście

$$\overline{F}^{+}(x) \leqslant 0,$$

co sprzeczne jest jednak z (4).

Założenie (2) prowadzi tedy do sprzeczności i funkcja $F(x)$ jest stale niemalejąca w (a, b).

Możemy teraz, dla funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, uzupełnić twierdzenie 1 w sposób następujący:

T w i e r d z e n i e 14. Jeżeli funkcja $F(x)$, określona i ciągła w przedziale (a, b), posiada w niemal każdym punkcie x $(a \leqslant x < b)$

[1]) Inn. słowy, obraz rozważanego zbioru ma być p u n k t o k s z t a ł t n y w sensie terminologji teorji mnogości.

górną prawostronną pochodną nieujemną, wówczas jest w tym przedziale monotoniczna niemalejąca.

D o w ó d. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią i

$$F_\varepsilon(x) = F(x) + \varepsilon x.$$

Mamy wówczas w każdym punkcie x rozważanego przedziału

$$\bar{F}^+_\varepsilon(x) = \bar{F}^+(x) + \varepsilon,$$

a więc niemal wszędzie

$$\bar{F}^+_\varepsilon(x) \geqslant \varepsilon > 0.$$

Zbiór wartości x, dla których $\bar{F}^+_\varepsilon(x) \leqslant 0$, jest przeto conajwyżej przeliczalny; obraz jego jest temsamem również przeliczalny, a więc, w żadnym razie, nie zawiera odcinka.[1]) Na mocy tedy lemmatu Z y g m u n d a, mamy dla każdej pary punktów c, d $(a \leqslant c < d \leqslant b)$,

$$0 \leqslant F_\varepsilon(d) - F_\varepsilon(c) = F(d) - F(c) + \varepsilon(d - c),$$

a, ponieważ ε jest dowolną liczbą dodatnią,

$$F(d) \geqslant F(c).$$

*Twierdzenia S c h e e f f e r a i D i n i'ego.

§ 9. Twierdzenie § poprzedniego wiąże się z pewnemi dwoma wynikami, należącemi do ubiegłego stulecia i znanemi pod nazwą twierdzeń L. S c h e e f f e r a oraz U. D i n i'ego.

Twierdzenie S c h e e f f e r a[2]) orzeka: *każda funkcja ciągła, skończona, która w niemal każdym punkcie posiada skończoną pochodną prawostronną górną, jest całkowicie* (z dokładnością do stałej addytywnej) *określona przez pochodną tę daną niemal wszędzie;* inn. słowy, *jeśli pochodne prawostronne górne dwu funkcji ciągłych i skończonych $F(x)$ oraz $G(x)$ są niemal wszędzie skończone i sobie równe, wówczas funkcje te różnią się conajwyżej o stałą.*

---

[1]) Opieramy się tu na elementarnem twierdzeniu teorji mnogości, orzekającem, iż *zbiór punktów dowolnego odcinka* (nie redukującego się do punktu) *jest zawsze nieprzeliczalny.* Twierdzenie to wynika zresztą natychmiast z teorji miary L e b e s g u e'a, ponieważ każda mnogość przeliczalna jest miary zero.

[2]) S c h e e f f e r, *Acta Math.*, t. 5, (1889).

Kładąc, w samej rzeczy

$$H(x) = F(x) - G(x),$$

mamy niemal wszędzie

$$\underline{H}^+(x) + \overline{G}^+(x) \leqslant \overline{F}^+(x) \leqslant \overline{H}^+(x) + \overline{G}^+(x),$$

skąd

$$\underline{H}^+(x) \leqslant 0 \leqslant \overline{H}^+(x).$$

Funkcja $H(x)$ jest tedy, na mocy tw. 14, jednocześnie niemalejąca i nierosnąca, a więc stała.

W rozdziałach dalszych (IX i X) podamy wyniki nowsze, sięgające znacznie dalej aniżeli twierdzenie Scheeffera. Niemniej, twierdzenie to zasługuje na uwagę zarówno ze względu na swą prostotę, jak i na znaczenie historyczne: jest prekursorem badań nowoczesnych nad warunkami, pozwalającemi wyznaczyć funkcję przez jej liczby pochodne.

Twierdzenie Dini'ego jest następujące: *wszystkie cztery pochodne* Dini'ego *funkcji $F(x)$ ciągłej i skończonej w przedziale (a, b) mają w tym przedziale te same kresy górne i dolne, — które są zarazem kresami stosunku $\frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}$, gdzie α i β oznaczają dwa dowolne punkty przedziału (a, b).*[1])

Ażeby udowodnić to twierdzenie, wystarczy pokazać tylko, iż, jeśli jedna z czterech pochodnych Dini'ego, w przedziale (a, b), np. $\overline{F}^+(x)$, zawiera się między granicami A i B, wówczas między granicami temi zawiera się również stosunek $\frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

To zaś wynika natychmiast z rozważenia dwu funkcji $F(x) - Ax$ oraz $F(x) - Bx$, z których pierwsza ma prawostronną górną pochodną stale nieujemną, druga zaś — stale niedodatnią. Stosując tedy do obydwu rozważanych funkcji tw. 14, otrzymujemy:

$$A(\beta - \alpha) \leqslant F(\beta) - F(\alpha) \leqslant B(\beta - \alpha),$$

dla dowolnego przedziału (α, β) zawartego w (a, b).

Z twierdzenia Dini'ego wynika natychmiast, iż, *jeśli jedna z czterech liczb pochodnych funkcji ciągłej jest w jakimś punkcie ciągła, wowczas ciągłe są w nim również trzy pozostałe, i wszyst-*

---

[1]) Dini, *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali.* Piza. 1878.

kie cztery są sobie równe, t. zn., iż *rozważana funkcja posiada w tym punkcie pochodną oznaczoną.*

Całka Perrona funkcji jednej zmiennej.

§ **10.** Opierając się na tw. 14 (§ 8) zaostrzyć możemy — dla funkcji jednej zmiennej rzeczywistej — twierdzenia 12 i 13.

Twierdzenie 15. 1^0 *Jeżeli prawostronna pochodna dolna* (wzgl. górna) *funkcji* $F(x)$, *skończonej i ciągłej w przedziale* (a, b), *jest niemal wszędzie różna od* $+\infty$ (wzgl. od $-\infty$) *i ograniczona z góry* (wzgl. z dołu) *przez funkcję* $h(x)$ *całkowalną* ($\mathfrak{P}$) *w tym przedziale, wówczas*

$$F(b) - F(a) \leqslant (\mathfrak{P}) \int_a^b h(x)\, dx \qquad \left[\text{wzgl.} \geqslant (\mathfrak{P}) \int_a^b h(x)\, dx\right].$$

2^0 *Jeśli wymieniona w* 1^0 *funkcja* $h(x)$ *jest sumowalna, wówczas odchylenie górne* [1]) (wzgl. dolne) *funkcji* $F(x)$ *w* (a, b) *jest równe zeru.*

3^0 *Jeśli funkcja skończona i ciągła* $F(x)$ *posiada w niemal każdym punkcie* x *przedziału* (a, b) *jakąś liczbę pochodną prawostronną pośrednią* [2]) $\lambda(x)$ *skończoną i całkowalną* ($\mathfrak{P}$) *w* (a, b), *wówczas funkcja* $F(x)$ *jest prawie wszędzie różniczkowalna i*

$$F(b) - F(a) = (\mathfrak{P}) \int_a^b F'(x)\, dx$$

4^0 *Jeżeli rozważana liczba pochodna* $\lambda(x)$ *jest całkowalna w sensie Lebesgue'a, wówczas funkcja* $F(x)$ *jest bezwzględnie ciągła w* (a, b).

Dowód. Możemy pominąć szczegółowy dowód dwu pierwszych części naszego twierdzenia, zważywszy, iż dowód ten jest zupełnie analogiczny do dowodu twierdzeń 12 (1^0) i 13; jedynie— zamiast odwoływać się do tw. 1 — należy obecnie oprzeć się na tw. 14, odpowiadającem funkcjom jednej zmiennej rzeczywistej.

Część 3^0 naszego twierdzenia wynika natychmiast z 1^0, jeśli zauważyć, iż w każdym punkcie:

$$\underline{F}^+(x) \leqslant \lambda(x) \leqslant \overline{F}^+(x).$$

[1]) Por. I, §§ 12, 14.

[2]) Por. III, § 1.

Wreszcie, ostatnia część, 4°, jest bezpośrednią już konsekwencją części 3°.

Twierdzenie 15, jak również twierdzenia 12 i 13 § 7 stanowią naturalne uogólnienie dawnego twierdzenia Lebesgue'a, z 1906 r.: *jeśli funkcja ciągła* $F(x)$ *posiada jedną pochodną* Dini'ego *wszędzie skończoną i sumowalną, wówczas funkcja ta jest prawie wszędzie różniczkowalna i jest całką swej pochodnej.* Pewne niejasne momenty w pierwotnym dowodzie tego twierdzenia wzbudziły dyskusję; Lebesgue zmuszony był z tego powodu parokrotnie uzupełniać swój dowód początkowy.[1])

Rozwinięta przez de la Vallée-Poussina teorja funkcji zwyższających i zniższających[2]) okazała się najbardziej właściwą drogą dowodu rozważanego twierdzenia Lebesgue'a, prowadzącą równocześnie do dalszych uogólnień. Funkcje te (fonctions majorantes i minorantes wedle de la Vallée-Poussin'a) równoważne są funkcjom zwyższającym i zniższającym Perrona (Ober-u. Unterfunktionen); de la Vallée-Poussin traktował je jednak wyłącznie jako narzędzie badania własności całki Lebesgue'a, Perron natomiast oparł na nich nową definicję całki, która okazała się w następstwie ogólniejsza od definicji lebesgue'owskiej.[3]) Równolegle z definicją uogólniają się również i pewne twierdzenia dotyczące całki Lebesgue'a; przykładem takim są choćby twierdzenia 12, 13, 15 tego rozdziału.

Można zauważyć tu ogólnie, iż — przy dzisiejszym stanie teorji — aparat całki Perrona okazuje się naturalnym środkiem uogólnienia tych przedewszystkiem twierdzeń, opartych na teorji całki Lebesgue'a, które korzystają z metody funkcji zwyższających i zniższających de la Vallée-Poussina. Wymienimy tu z zastosowań twierdzenie z dziedziny szeregów Fourier'a funkcji sumowalnych, noszące nazwę „twierdzenia de la Vallée-Poussina o jednoznaczności";[4]) twierdzenie to, z zachowaniem dawnej metody dowodu, przenosi się bez trudu na funkcje całkowalne ($\mathfrak{P}$).[5])

---

[1]) Lebesgue, *Rend. Acc. Linc.*, (5), t. 15 II, (1906) p. 3—8; (5), t. 16 I, (1907), p. 92—100, 283—290; również: *Ann. Éc. Norm. Sup.*, (1910), gdzie rozważane twierdzenie uogólnione jest na funkcje addytywne w przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów.

[2]) De la Vallée-Poussin, *Cours d'Analyse*, t. I, 2. éd., (1909), p. 270—271; 3. éd. (1914), p. 269—72; *I. L.*, p. 74—76.

[3]) Oryginalna definicja Perrona (*Sitzgsber. Heidelberger Ak. Wiss.*, 14. Abh., (1914), A, p. 1—16) dotyczy wyłącznie całki funkcji ograniczonych. Bauer (*Monatsh. f. Math. u. Phys.*, t. 26, (1915)), przenosząc ją na funkcje nieograniczone, pokazał, iż całka ($\mathfrak{P}$) obejmuje całkowicie całkę Lebesgue'a, i rozszerzył zarazem definicję Perrona na funkcje punktu w dowolnej przestrzeni euklidesowej.

Późniejsze badania ustaliły równoważność całki Perrona ze słabszą z całek Denjoy (p. niż. rozdz. X).

[4]) De la Vallée-Poussin, *Comptes Rendus.*, t. 155, (1912), p. 951—53.

[5]) Por. Zygmund, *Math. Zeitschr.*, t. 25, (1926), p. 288—90.

Zwrócimy tu jeszcze uwagę czytelnika na pewną natychmiastową konsekwencję tw. 15, która uogólnia twierdzenie 14: *jeśli pochodna prawostronna górna funkcji skończonej i ciągłej $F(x)$ jest* niemal *wszędzie różna od* $-\infty$ *i* prawie *wszędzie nieujemna, wówczas funkcja $F(x)$ jest niemalejąca w (a, b).*[1])

Wynika stąd z kolei następujące uogólnienie twierdzenia Scheeffera: *jeśli pochodne prawostronne górne dwu funkcji ciągłych, skończonych, są* niemal *wszędzie skończone i* prawie *wszędzie sobie równe, wówczas funkcje te różnią się conajwyżej o stałą.*

W rozdz. X (§ 4) podamy pewne twierdzenie Denjoy, które, obejmując sobą powyższy wniosek, stanowi dalsze jeszcze uogólnienie twierdzenia Scheeffera.

---

[1]) Carathéodory, *R. F.*, p. 580.

ROZDZIAŁ VIII.

Funkcje o wahaniu skończonem uogólnionem.

Uwagi wstępne.

§ 1. W rozdz. IV i V wyłożyliśmy teorję całki Lebesgue'a, przyjmując za punkt wyjścia t. zw. „opisową“ definicję tej całki jako funkcji bezwzględnie ciągłej, której pochodna prawie wszędzie równa się funkcji podcałkowej.

W rozwoju historycznym definicja całki Lebesgue'a (por. § 1 rozdz. poprzedniego) wyprzedza jednak bezpośrednią teorję funkcji bezwzględnie ciągłych, którą wyłoniła dalsza dopiero ewolucja teorji całki. Podobnież przedstawia się rozwój dalszych uogólnień całki Lebesgue'a, które zawdzięczamy Denjoy i Perron'owi: teorja Perrona, jak Czytelnik mógł zauważyć w rozdziale poprzednim, pozostawia całkiem na boku teorję funkcji bezwzględnie ciągłych; podobnie również i Denjoy nie wiązał początkowo swej teorji z uogólnieniem pojęcia funkcji bezwzględnie ciągłej; w swych Notach, przedstawionych Akademji Francuskiej[1]) i zawierających — znane dziś pod nazwą całek Denjoy — uogólnienie całki Lebesgue'a, określa swe całki jako wynik pewnych procesów pozaskończonych, które polegają na poddaniu funkcji podcałkowej jednocześnie operacji całkowej Lebesgue'a, jak również i pewnym operacjom całkowym (niewłaściwym) Cauchy'ego i Harnack'a.[2])

---

[1]) Denjoy, *Comptes Rendus*, t. 154, (1912), p. 859, oraz t. 162, (1916), p. 377.

[2]) Por. rozdz. X.

Na pomysły Denjoy, zawarte w pierwszej ze wspomnianych dwu Not, zwrócili jednak natychmiast uwagę matematycy rosyjscy Łuzin i Khintchine,[1]) nawiązując do nich badania swe z podstaw teorji pochodnej i całki. Przedewszystkiem udało się Łuzin'owi[2]) otrzymać takie uogólnienia funkcji o wahaniu skończonem oraz funkcji bezwzględnie ciągłych, które w stosunku do całki Denjoy z 1912 r. odgrywają analogiczną rolę jak zwykłe funkcje o wahaniu skończonem i funkcje bezwzględnie ciągłe w teorji całki Lebesgue'a. Będziemy w dalszym ciągu nazywali funkcje te — wyróżnione przez Łuzina — odp. funkcjami o uogólnionem wahaniu skończonem *w znaczeniu węższem* oraz uogólnionemi funkcjami bezwzględnie ciągłemi *w znaczeniu węższem.*[3])

Wkrótce potem, rozwijając w sposób naturalny idee Łuzina, otrzymał Khintchine dalsze jeszcze uogólnienia, wprowadzając funkcje, które — w wykładzie naszym — nazywać będziemy funkcjami o uogólnionem wahaniu skończonem *w znaczeniu szerszem*, oraz uogólnionemi funkcjami bezwzględnie ciągłemi[4]) w temsamem znaczeniu. Funkcje te jednak — w przeciwieństwie do zwykłych funkcji o wahaniu skończonem oraz do funkcji wyróżnionych przez Łuzina — nie są naogół prawie wszędzie różniczkowalne w sensie zwykłym; okazuje się natomiast, iż własność różniczkowalności prawie wszędzie przenosi się na te funkcje, jeśli uogólnić jednocześnie definicję pochodnej, wprowadzając t. zw. pochodną aproksymatywną.[5]) Khintchine pokazał przytem, iż wyróżnione przezeń funkcje są nietylko prawie wszędzie różniczkowalne aproksymatywnie, ale — co więcej — iż każda uogólniona funkcja bezwzględnie ciągła *w znaczeniu szerszem* jest jednocześnie określona przez swą pochodną aproksymatywną daną prawie wszędzie.[6])

---

[1]) Zachowujemy tu pisownię francuską nazwiska, które w tej postaci jest cytowane zazwyczaj w literaturze.

[2]) Lusin, *Comptes Rendus*, t. 284, (1912), p. 1475; również: *Teza*, p. 62.

[3]) Por. niż §§ 15, 17.

[4]) Por. niż. §§ 8, 10.

[5]) Por. niż. § 5; termin „pochodna aproksymatywna", powszechnie dziś używany, wprowadzony został przez Denjoy; Khintchine używał terminu „pochodna asymptotyczna".

[6]) P. niż. § 11.

Rezultat tych badań doprowadził do uogólnienia całki Lebesgue'a przez zastąpienie w jej definicji — którą podaliśmy w rozdz. IV — „funkcji bezwzględnie ciągłej" przez „uogólnioną funkcję bezwzględnie ciągłą *w znaczeniu szerszem*" oraz „pochodnej zwykłej" przez „pochodną aproksymatywną". Uogólnienie takie zostało sformułowane wyraźnie przez Khintchine'a w Nocie Akademji Paryskiej z r. 1916;[1]) jednocześnie Khintchine zauważył, iż tak określona całka uogólnia dawną całkę Denjoy z r. 1912. W ten sposób udało się Khintchine'owi wyprzedzić nieco Denjoy, którego druga Nota z teorji całki, zawierająca równoważne i niezależnie otrzymane wyniki, ukazała się dopiero w parę miesięcy po pracy Khintchine'a.

Hadamard, przedstawiając Akademji wspomnianą pracę Khintchine'a, dorzuca do niej — od siebie — uwagę następującą: „*Wiele z pośród wyników, ustalonych definitywnie w tej Nocie, zawartych jest — jak mi wiadomo — w rozprawie p. Denjoy, która znajduje się, od pewnego już czasu, w druku. Niemniej, priorytet tycb wyników należy niewątpliwie do p. Khintchine'a.*"

Wykład systematyczny swej teorji całki ogłosił Denjoy w t. t. 33 (1916) i 34 (1917) „*Annales de l'Éc. Norm. Sup.*," w pracy p. t. *Mémoire sur la totalisation des nombres dérivés non-sommables*, którą cytować będziemy w dalszym ciągu krótko, jako: Denjoy, *Totalisation.* Część pierwsza tej pracy— w której uwzględnione są już wyniki matematyków rosyjskich — będzie głównym tematem tego rozdziału. W części drugiej Denjoy daje t. zw. określenie konstruktywne swej całki, które omówione będzie w rozdz. X.

Podkreślimy tu jeszcze wyraźnie, iż wszystkie wspomniane powyżej uogólnienia odnoszą się wyłącznie do funkcji jednej zmiennej rzeczywistej i o tych tylko funkcjach mowa będzie zarówno w dalszym ciągu tego rozdziału, jak i w dwu rozdziałach następnych.[2]) Oczywiście, iż definicje i twierdzenia, które tu ustalimy przenoszą się automatycznie na funkcje addytywne przedziału linjowego (I, § 14) i nie będą przeto wymagały oddzielnych omówień w przypadkach, gdy — ze względów for-

---

[1]) Khintchine, *Comptes Rendus*, t. 162, (1916), p. 287—91.

[2]) Istnieją wprawdzie próby rozszerzenia algorytmu Denjoy na funkcje n zmiennych rzeczywistych t. j. punktu w przestrzeni n-wymiarowej (por. np. Looman, *Sur la totalisation, Fund. Math.*, t. 4, (1923), pp. 246—285). Również i w rozdz. poprzednim podaliśmy teorję całki Perrona dla przestrzeni n-wymiarowej. Wszystkie te jednak uogólnienia, w obecnem swem stadjum, nie są na tyle zupełne, aby można je było uważać za rezultat zakończony, lub za pożyteczne narzędzie analityczne w zastosowaniach.

malnych — okaże się dogodniejsze rozważanie funkcji przedziału zamiast funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.

Twierdzenie Baire'a.

§ 2. W rozważaniach dalszych korzystać będziemy parokrotnie z pewnego twierdzenia teorji Baire'a. Przyjmiemy przedewszystkiem następującą definicję:

Nazywać będziemy kawałkiem zbioru E każdy zbiór postaci $E \times I$, gdzie I jest dowolnym przedziałem, zawierającym wewnątrz przynajmniej jeden punkt zbioru E.

Twierdzenie Baire'a sformułować możemy teraz w postaci:

Jeżeli zbiór domknięty F zawarty jest w sumie ciągu $\{F_i\}$ zbiorów domkniętych, wówczas jeden przynajmniej ze zbiorów F_i zawiera jakiś kawałek zbioru F.

Dowód. Załóżmy, iż żaden ze zbiorów domkniętych F_i nie zawiera żadnego kawałka zbioru F. Można utworzyć tedy — przez indukcję — ciąg zstępujący kawałków K_i tego zbioru w ten sposób, by dla każdego i

$$K_i \times F_i = 0.$$

Wówczas jednak również

$$\prod_{i=1}^{\infty} K_i \times \sum_{i=1}^{\infty} F_i = 0,$$

ponieważ zaś — na mocy twierdzenia Cantora (I, § 4) — iloczyn zbiorów K_i nie jest pusty, przeto zbiór F nie zawiera się w sumie zbiorów F_i.[1])

Granice aproksymatywne.

§ 3. Uogólnienie pochodnej, o którem wspomnieliśmy w § 1, wiąże się z równoległem uogólnieniem definicji granicy.

Niech $F(x)$ będzie dowolną funkcją, określoną w pewnem otoczeniu punktu a (z wyłączeniem ewent. samego punktu a, w którym funkcja może nie być określona[2])). Nazwiemy górną

---

[1]) Twierdzenie to (które rozszerza się bez trudu na pewne ogólniejsze przestrzenie abstrakcyjne) wiąże się z rozróżnieniem t. zw. dwu kategorji zbiorow według Baire'a. Por. np. Sierpiński, *T. O.*, p. 218, lub *Wstęp*, p. 105.

[2]) Przy definicji granic jednostronnych wystarczy oczywiście rozważać tylko otoczenia jednostronne.

prawostronną granicą aproksymatywną funkcji $F(x)$ w punkcie a kres dolny wszystkich liczb L, dla których zbiór punktów

$$(1) \qquad \underset{x}{E}\,[F(x) > L; \quad x > a]$$

posiada w punkcie a punkt rozrzedzenia zewnętrznego.[1])

Podobnie definjujemy **górną lewostronną granicę aproksymatywną funkcji** $F(x)$ w punkcie a oraz dwie **granice aproksymatywne dolne**. Dla oznaczenia określonych w ten sposób czterech granic aproksymatywnych używać będziemy odp. znaków:

$$\limsup_{x \to a+} \operatorname{apr} F(x), \quad \limsup_{x \to a-} \operatorname{apr} F(x),$$

$$\liminf_{x \to a+} \operatorname{apr} F(x), \quad \liminf_{x \to a-} \operatorname{apr} F(x).$$

Większą z dwu granic aproksymatywnych górnych nazywać będziemy wprost **górną granicą aproksymatywną**, oznaczając ją przez

$$\limsup_{x \to a} \operatorname{apr} F(x).$$

Analogicznie, definjuje się **dolną granicę aproksymatywną**

$$\liminf_{x \to a} \operatorname{apr} F(x).$$

Mamy, jak łatwo zauważyć zawsze,

$$(2) \quad \limsup_{x \to a+} F(x) \geqslant \limsup_{x \to a+} \operatorname{apr} F(x) \geqslant \liminf_{x \to a+} \operatorname{apr} F(x) \geqslant \liminf_{x \to a+} F(x),$$

oraz związek analogiczny dla granic lewostronnych.

Można tu zauważyć — dla dokładniejszego jeszcze wyjaśnienia sensu definicji granic aproksymatywnych — iż cztery granice zwykłe można zdefinjować w sposób zupełnie analogiczny. Np. granicę górną prawostronną funkcji $F(x)$ w punkcie a określić można jako kres dolny wszystkich liczb L, dla których a jest punktem odosobnionym względem zbioru (1).[2]) Nierówność (2) staje się wówczas oczywista.

---

[1]) Por. rozdz. III, § 6. W przypadku, gdy funkcja $F(x)$ jest mierzalna, termin „punkt rozrzedzenia **zewnętrznego**" zastąpić można, rzecz prosta, wprost przez wyraz „punkt rozrzedzenia."

[2]) t. zn. nie jest jego punktem skupienia.

Jeśli obydwie granice aproksymatywne, górna i dolna, prawostronne, wzgl. lewostronne, są sobie równe, wówczas wspólna ich wartość nazywa się wprost prawostronną (wzgl. lewostronną) granicą aproksymatywną; jeśli wreszcie, w jakimś punkcie, wszystkie cztery granice aproksymatywne są równe, wówczas wspólna ich wartość nazywa się granicą aproksymatywną funkcji w rozważanym punkcie.

Z nierówności (2) widać, iż, jeśli funkcja $F(x)$ posiada w jakimś punkcie granicę w znaczeniu zwykłem (prawostronną, lewo — lub obustronną), wówczas posiada temsamem granicę aproksymatywną (prawo —, lewo — lub obustronną); obydwie te granice są oczywiście sobie równe.

Zauważyć dalej łatwo, iż, jeśli w otoczeniu punktu a istnieje zbiór mierzalny E, posiadający w punkcie a gęstość 1 (prawo —, lewo —, wzgl. obustronną) i jeśli istnieje granica funkcji $F(x)$, gdy x dąży do a, przebiegając punkty zbioru E, wówczas istnieje również granica aproksymatywna (prawo—, lewo—, wzgl. obustronna) funkcji $F(x)$ w punkcie a i obydwie te granice są sobie równe. Twierdzenie odwrotne jest również prawdziwe, jakkolwiek mniej nieco oczywiste bezpośrednio.

*** Ciągłość aproksymatywna.**

§ 4. Funkcja $F(x)$, określona w przedziale (a, b), nazywa się aproksymatywnie ciągła w pewnym punkcie x_0 tego przedziału, jeśli posiada w x_0 granicę aproksymatywną i granica ta jest równa wartości funkcji w tym punkcie.

Definicję powyższą zawdzięczamy Denjoy, który wskazał jednocześnie na kilka interesujących zastosowań tego uogólnienia ciągłości zwykłej.[1]) Ograniczymy tu się tylko do zacytowania następującego twierdzenia Denjoy:

Każda funkcja mierzalna i skończona jest prawie wszędzie ciągła aproksymatywnie.

Dowód[2]) wynika natychmiast z tw. Łuzina (II, § 13).

---

[1]) Denjoy, *Bull. Soc. Math. de France*, t. 43, (1915), p. 165.

[2]) Por. Sierpiński, *Fund. Math.*, t. 3, (1922), p. 320. Inny dowód, bardziej jeszcze bezpośredni, podany również przez Sierpińskiego (*Fund. Math.*, t. 4, (1923), p. 124) i związany z pewnem uogólnieniem definicji Denjoy, opiera się na tem, iż ciągłość aproksymatywna zachowuje się przy jednostajnem przejściu do granicy, oraz iż każdą funkcję przybliżać można jednostajnie przez ciąg funkcji, które przyjmują conajwyżej przeliczalną ilość wartości różnych i dla których przeto rozważane twierdzenie jest oczywiste.

Istotnie — w myśl tego twierdzenia — jeśli pewna funkcja $F(x)$ jest skończona i mierzalna w pewnym przedziale I_0, wówczas przedział ten przedstawić można jako sumę pewnego zbioru miary zero, oraz ciągu zbiorów domkniętych $\{P_n\}$ takich, iż na każdym z nich funkcja $F(x)$ jest ciągła. Ponieważ zaś prawie każdy punkt każdego ze zbiorów P_n jest punktem gęstości tego zbioru, zatem prawie wszędzie w każdym z tych zbiorów — a więc prawie wszędzie w I_0 — funkcja $F(x)$ jest ciągła aproksymatywnie.

Twierdzenie powyższe można odwrócić: *każda funkcja prawie wszędzie ciągła aproksymatywnie jest mierzalna.*[1])

Pochodne aproksymatywne.

§ 5. Jeśli $F(x)$ jest dowolną funkcją określoną i skończoną w przedziale (a, b), wówczas, w każdym punkcie x_0 tego przedziału, cztery granice aproksymatywne

$$\limsup_{h\to 0+} \text{apr}, \quad \liminf_{h\to 0+} \text{apr}, \quad \limsup_{h\to 0-} \text{apr}, \quad \liminf_{h\to 0-} \text{apr}$$

wyrażenia

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$$

nazywamy odp. górną i dolną prawostronną, wzgl. lewostronną, pochodną aproksymatywną funkcji $F(x)$ w punkcie x_0; oznaczać je będziemy odp. przez

(1) $$\overline{F}^+_a(x_0), \quad \underline{F}^+_a(x_0), \quad \overline{F}^-_a(x_0), \quad \underline{F}^-_a(x_0),$$

analogicznie jak cztery liczby pochodne Dini'ego (III, § 1). Ogólnie, liczby (1) nazywać będziemy pochodnemi aproksymatywnemi krańcowemi.

Jeśli $\overline{F}^+_a(x) = \underline{F}^+_a(x)$, wówczas wspólna wartość tych dwu pochodnych aproksymatywnych krańcowych nazywa się pochodną aproksymatywną prawostronną; oznaczamy ją przez $F^+_a(x)$. Analogicznie, definjuje się pochodną aproksymatywną lewostronną $F^-_a(x)$.

Większą z liczb $\overline{F}^+_a(x)$, $\overline{F}^-_a(x)$ nazywać się będzie górną pochodną aproksymatywną obustronną; oznaczamy ją przez $F_a(x)$. Podobnie określa się dolną pochodną apro-

[1]) Kamke, *Fund. Math.*, t. 10, (1927), p. 431.

ksymatywną obustronną $\underline{F}_a(x)$ jako mniejszą z pośród liczb $\underline{F}_a^+(x)$, $\underline{F}_a^-(x)$.

Jeśli wszystkie cztery pochodne aproksymatywne krańcowe są sobie równe, wówczas wspólną ich wartość nazywamy wprost pochodną aproksymatywną funkcji $F(x)$; oznaczać ją będziemy przez $F_a'(x)$. Jeśli pochodna ta jest nadto jeszcze skończona, wówczas o funkcji $F(x)$ mówi się, iż jest w rozważanym punkcie różniczkowalna aproksymatywnie.

Widoczne jest, iż, jeśli funkcja $F(x)$ posiada w punkcie x pochodną zwykłą, wówczas temsamem posiada pochodną aproksymatywną i

$$F_a'(x) = F'(x);$$

twierdzenie odwrotne byłoby — rzecz prosta — fałszywe.

Podane powyżej uogólnienia pojęcia granicy i pochodnej zawdzięczamy Denjoy i Khintchine'owi.[1]) Znaczenie tych uogólnień wynika z następującej prostej uwagi: *jeśli dwie funkcje* $F(x)$ *i* $G(x)$ *różnią się tylko w pewnym zbiorze punktów, który w punkcie* a *posiada gęstość* 0, *wówczas ich odp. granice aproksymatywne i krańcowe pochodne aproksymatywne w punkcie* a *są sobie równe.* W szczególności więc, ze względu na twierdzenie Lebesgue'a o gęstości (III, § 6), *jeśli dwie funkcje mierzalne* $F(x)$ *i* $G(x)$ *są identyczne w pewnym zbiorze* E, *wówczas odpowiednie ich granice oraz krańcowe pochodne aproksymatywne są równe prawie wszędzie w zbiorze* E.

W wykładzie naszym ograniczamy się wyłącznie do podania definicji i kilku własności pochodnych aproksymatywnych, które wskazują na rolę tego uogólnienia w teorji całki. Pomijamy natomiast dalsze uogólnienia, na tej samej linji, zdefinjowane również przez Denjoy (np. t. zw. przez Denjoy „nombres dérivés prépondérants" (*Totalisation*, Chap. I, pp. 198—99)), nie wprowadzające jednak wraz z sobą nowych metod. Dalsze i głębsze własności pochodnych aproksymatywnych znajdzie Czytelnik u Denjoy (l. c., pp. 208—222) oraz w dwu pięknych rozprawach Khintchine'a (*Moskowskij Matiem. Sbornik*, t. 31, (1923), pp. 265, 377; oraz *Fund. Math.*, t. 9, (1927), p. 212).

Jeśli $F(x)$ jest dowolną funkcją, określoną i skończoną w punktach pewnego zbioru E, wówczas mówimy, iż funkcja ta jest różniczkowalna w pewnym punkcie $a \in E$ względem zbioru E, skoro istnieje granica skończona wyrażenia

---

[1]) Por. § 1.

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a},$$

gdy x dąży do a, przebiegając punkty zbioru E; granica ta nazywa się pochodną funkcji $F(x)$ w punkcie a względem zbioru E.

Jeśli zbiór E jest mierzalny i a jest jego punktem gęstości, wówczas różniczkowalność funkcji F w rozważanym punkcie względem zbioru E pociąga za sobą jej różniczkowalność aproksymatywną, oraz równość obydwu pochodnych — pochodnej aproksymatywnej oraz pochodnej względem zbioru E. Wartości, jakie funkcja przyjmuje ewent. poza zbiorem E, nie grają tu oczywiście żadnej roli.

Funkcje o wahaniu skończonem na zbiorze.

§ **6**. Rozważanie funkcji na zbiorach linjowych prowadzi do uogólnienia definicji wahania bezwzględnego.

Niech $F(x)$ będzie dowolną funkcją, określoną i skończoną w punktach zbioru Q. Nazwiemy jej wahaniem słabem[1] — albo wprost wahaniem — na Q kres górny liczb

$$\sum_i |F(b_i)-F(a_i)|,$$

gdzie $\{(a_i, b_i)\}$ jest dowolnym układem skończonej liczby niezachodzących na siebie przedziałów, których krańce należą do Q. Wahanie to oznaczać będziemy przez $V(F; Q)$.

Jeśli

$$V(F; Q) < +\infty,$$

wówczas funkcja F nazywa się funkcją o wahaniu skończonem w znaczeniu szerszem[2]) lub wprost — funkcją o wahaniu skończonem — na zbiorze Q.

Widoczne jest natychmiast, iż, jeśli zbiór Q jest przedziałem, wówczas określona powyżej liczba $V(F; Q)$ pokrywa się z wahaniem bezwzględnem funkcji F na Q wedle definicji rozdz. I

---

[1]) Termin wahanie słabe wprowadzamy tu dla odróżnienia od innego jeszcze wahania, które nazwiemy mocnem (p. niż. § 13).

[2]) Termin w znaczeniu szerszem jest tu użyty dla odróżnienia od klasy funkcji, które posiadają skończone wahanie mocne.

(§§ 9, 14). Podana przeto powyżej definicja uogólnia (w zakresie funkcji jednej zmiennej rzeczywistej) dotychczasową definicję funkcji o wahaniu skończonem w całym przedziale.[1])

Bezpośrednio widoczne są twierdzenia następujące:

1° *Każda funkcja o wahaniu skończonem na jakimś zbiorze jest na tym zbiorze ograniczona.*

2° *Jeśli funkcja jest o wahaniu skończonem na jakimś zbiorze, wówczas jest również o wahaniu skończonem na każdym podzbiorze tego zbioru.*

Mamy bowiem dla każdej funkcji F, określonej na zbiorze Q, i każdego zbioru $Q' \subset Q$

$$V(F;\, Q') \leqslant V(F;\, Q).$$

3° *Dowolna kombinacja linjowa o spółczynnikach stałych oraz iloczyn dwu funkcji o wahaniu skończonem na zbiorze Q są również funkcjami o wahaniu skończonem na tym zbiorze.*

Mamy bowiem dla każdych dwu funkcji $F(x)$ i $G(x)$, określonych na zbiorze Q,

$$V(\lambda F + \mu G;\, Q) \leqslant |\lambda| \,.\, V(F;\, Q) + |\mu| \,.\, V(G;\, Q),$$

gdzie λ i μ są dowolnemi stałemi; również, jeśli

$$H(x) = F(x) \,.\, G(x)$$

i M oznacza kres górny wartości bezwzględnych funkcji F i G na zbiorze Q, wówczas[2])

$$V(H;\, Q) \leqslant M \,.\, [V(F;\, Q) + V(G;\, Q)].$$

4° *Jeśli funkcja $F(x)$ ciągła w przedziale (a, b) jest o wahaniu skończonem na pewnym zbiorze Q, zawartym w tym przedziale, wówczas jest również o wahaniu skończonem na domknięciu $\overline{Q}$ tego zbioru.*

Mamy bowiem z uwagi na ciągłość funkcji F

$$V(F;\, \overline{Q}) = V(F;\, Q).$$

[1]) W przypadku, gdy zbiór Q jest figurą elementarną, liczba $V(F;\, Q)$ nie pokrywa się wprawdzie z wahaniem bezwzględnem funkcji F na Q (może być odeń większa), spostrzega się jednak natychmiast, iż skończoność jednej z tych liczb pociąga za sobą zawsze skończoność drugiej.

[2]) Por. I, § 14.

§ 7. Funkcję $F(x)$, określoną na zbiorze Q, nazywamy monotoniczną niemalejącą (wzgl. nierosnącą) na tym zbiorze, jeśli — dla każdej pary punktów x_1, x_2 zbioru Q — nierówność

$$x_1 \leqslant x_2$$

pociąga za sobą

$$F(x_1) \leqslant F(x_2) \qquad [\text{wzgl. } F(x_1) \geqslant F(x_2)].$$

Lemmat. Na to, aby funkcja $F(x)$ była ograniczona i niemalejąca na pewnym zbiorze P, zawartym w przedziale (a, b), konieczne jest i wystarcza, aby na zbiorze tym identyczna była z funkcją skończoną i niemalejącą w całym przedziale (a, b).

Dowód. Dostateczność warunku jest widoczna. Załóżmy tedy, iż funkcja $F(x)$ jest ograniczona i niemalejąca na zbiorze P. Oznaczmy, dla każdego punktu x przedziału (a, b), przez $P[x]$ zbiór wszystkich punktów $y \leqslant x$ zbioru P, oraz przez $G(x)$ — liczbę równą górnemu kresowi wartości, jakie funkcja F przyjmuje w punktach odpowiadającego zbioru $P[x]$; jeśli zbiór ten jest pusty, wówczas przez $G(x)$ rozumieć będziemy kres dolny wartości funkcji F w punktach całego zbioru P. Określona w ten sposób funkcja $G(x)$ jest żądaną funkcją wszędzie skończoną, niemalejącą w całym przedziale (a, b) i identyczną z $F(x)$ w punktach zbioru P.

Twierdzenie 1. *Na to, aby funkcja $F(x)$ była o wahaniu skończonem na pewnym zbiorze Q, zawartym w przedziale (a, b), konieczne jest i wystarcza, aby identyczna na nim była z funkcją o wahaniu skończonem w całym przedziale (a, b).*

Dowód. Dostateczność powyższego warunku jest widoczna. Aby udowodnić jego konieczność, załóżmy, iż funkcja $F(x)$ jest o wahaniu skończonem na Q i niech, dla każdego punktu x, $V(x)$ oznacza wahanie funkcji F na części zbioru, zawartej w przedziale (a, x); jeśli przedział ten nie zawiera wogóle punktów rozważanego zbioru, wówczas położymy wprost $V(x) = 0$.

Funkcja $V(x)$ jest monotoniczna i ograniczona w całym przedziale (a, b); spostrzegamy również natychmiast, iż różnica $V(x) - F(x)$ jest funkcją ograniczoną i monotoniczną niemalejącą na zbiorze Q, a więc istnieje — w myśl lemmatu poprzedniego — funkcja $T(x)$ skończona i niemalejąca w całym przedziale (a, b), pokrywająca się z rozważaną różnicą na zbiorze P. Mamy tedy w każdym punkcie $x \in P$

$$F(x) = V(x) - T(x),$$

przyczem funkcja po prawej stronie powyższej równości, jako różnica dwu funkcji skończonych i monotonicznych w przedziale (a, b), jest oczywiście o wahaniu skończonem w całym tym przedziale.

Twierdzenie nasze jest w ten sposób udowodnione.

Wynika stąd natychmiast, z uwagi na twierdzenie Lebesgue'a (III, § 3), następujące uogólnienie tego twierdzenia:

Twierdzenie 2. Funkcja o wahaniu skończonem na zbiorze Q jest w prawie każdym punkcie $x \in Q$ różniczkowalna względem tego zbioru.

Twierdzenie 3. Jeśli $F(x)$ jest funkcją mierzalną w przedziale (a, b) i o wahaniu skończonem na pewnym zbiorze Q, wówczas jest o wahaniu skończonem na pewnym zbiorze mierzalnym $Q' \supset Q$ i różniczkowalna aproksymatywnie w prawie każdym punkcie tego zbioru.

Dowód. W myśl tw. 1 funkcja $F(x)$ o wahaniu skończonem na zbiorze Q jest na tym zbiorze identyczna z pewną funkcją $G(x)$ o wahaniu skończonem w całym przedziale (a, b). Niech

$$Q' = \underset{x}{E}[F(x) = G(x)].$$

Zbiór Q' — który jest oczywiście mierzalny, jako że mierzalne są obydwie funkcje F i G — obejmuje zbiór Q i funkcja $F(x)$ jest na nim, wraz z $G(x)$, o wahaniu skończonem. Różniczkowalność aproksymatywna funkcji F — w prawie każdym punkcie zbioru Q' — jest już bezpośrednią konsekwencją twierdzenia poprzedniego oraz twierdzenia Lebesgue'a „o gęstości“ (III, § 6, tw. 5 bis).

Funkcje o uogólnionem wahaniu skończonem.

§ **8**. Funkcję $F(x)$ nazywamy funkcją o uogólnionem wahaniu skończonem *w znaczeniu szerszem*, lub wprost — funkcją o uogólnionem wahaniu skończonem — w przedziale (a, b), jeśli przedział ten jest sumą ciągu (skończonego lub przeliczalnego) zbiorów takich, iż na każdym z nich $F(x)$ jest o wahaniu skończonem. Funkcje o uogólnionem wahaniu skończonem będziemy — dla skrócenia — nazywali także funkcjami (VBG).[1])

Widoczne jest, iż funkcje (VBG) stanowią uogólnienie zwykłych funkcji o wahaniu skończonem; spostrzegamy również natychmiast, iż *kombinacja linjowa o spółczynnikach stałych oraz iloczyn dwu funkcji* (VBG) *jest znowuż pewną funkcją* (VBG).

Z twierdzenia 3 § poprzedniego otrzymujemy bezpośrednio następujące twierdzenie, które w teorji całki Denjoy stanowi analogon twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowalności funkcji o wahaniu skończonem.

Twierdzenie 4 (Denjoy-Khintchine'a). *Każda funkcja mierzalna, o uogólnionem wahaniu skończonem w jakimś przedziale, jest prawie wszędzie w tym przedziale różniczkowalna aproksymatywnie.*

Funkcje bezwzględnie ciągłe na zbiorze.

§ 9. Nazywać będziemy funkcję $F(x)$, określoną i skończoną na pewnym zbiorze Q, funkcją bezwzględnie ciągłą *w znaczeniu szerszem,* albo wprost — bezwzględnie ciągłą — na tym zbiorze, jeśli każdej liczbie $\varepsilon > 0$ odpowiada taka liczba $\eta > 0$, iż dla dowolnego układu skończonego niezachodzących na siebie przedziałów $\{(a_i, b_i)\}$, których krańce należą do Q, nierówność

$$\sum_i (b_i - a_i) < \eta$$

pociąga za sobą

$$\sum_i |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon.$$

Definicja powyższa uogólnia definicję funkcji bezwzględnie ciągłych w przedziale (I, §§ 12, 14) i prowadzi do bezpośredniego uogólnienia pewnych podstawowych ich własności. Mamy mianowicie:

1^0 *Każda funkcja bezwzględnie ciągła na zbiorze ograniczonym Q jest na nim zarazem o wahaniu skończonem* (a więc temsamem (§ 6) *jest na nim ograniczona*).

---

[1]) Pierwsze litery terminu francuskiego „variation bornée généralisée.“

Istotnie, jeśli funkcja $F(x)$ jest bezwzględnie ciągła na pewnym zbiorze ograniczonym Q, wówczas istnieje taka liczba $\eta > 0$, iż dla każdego układu niezachodzących na siebie przedziałów (a_i, b_i) takich, iż $a_i, b_i \in Q$, nierówność

$$(1) \quad \sum_i (b_i - a_i) < \eta \quad \text{pociąga za sobą} \quad \sum_i |F(b_i) - F(a_i)| < 1.$$

Niech Q_n oznacza część zbioru Q, zawartą w przedziale $[n\eta, (n+1)\eta]$. W myśl (1) funkcja $F(x)$ jest o wahaniu skończonem na każdej z mnogości Q_n, — ponieważ zaś zbiór Q, jako ograniczony, jest sumą skończonej liczby mnogości Q_n, przeto funkcja $F(x)$ jest temsamem o wahaniu skończonem na całym tym zbiorze.

2° *Jeśli funkcja jest bezwzględnie ciągła na jakimś zbiorze, wówczas jest również bezwzględnie ciągła na każdym podzbiorze tego zbioru.*

3° *Kombinacja linjowa oraz iloczyn dwu funkcji bezwzględnie ciągłych na jakimś zbiorze są również bezwzględnie ciągłe na tym zbiorze.*

Twierdzenie to wynika ze zwykłych oszacowań (por. I, § 14).

4° *Jeśli funkcja $F(x)$, ciągła w przedziale (a, b), jest bezwzględnie ciągła na pewnym zbiorze Q, zawartym w tym przedziale, wówczas jest również ciągła bezwzględnie na domknięciu $\bar{Q}$ zbioru Q.*

Uogólnione funkcje bezwzględnie ciągłe.

§ 10. Funkcję $F(x)$ nazywamy uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą *w znaczeniu szerszem* albo wprost uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą w przedziale (a, b), jeśli jest ciągła w przedziale (a, b) i jeśli przedział ten jest sumą ciągu (skończonego lub przeliczalnego) zbiorów Q_n takich, iż na każdym z nich funkcja $F(x)$ jest ciągła bezwzględnie.

Uogólnione funkcje bezwzględnie ciągłe nazywać będziemy także często — dla skrócenia — funkcjami (ACG)[1]).

Mamy — na mocy twierdzeń § poprzedniego —

1° *Każda uogólniona funkcja bezwzględnie ciągła jest zarazem funkcją o uogólnionem wahaniu skończonem.*

---

[1]) Pierwsze litery terminu francuskiego „(fonction) absolument continue généralisée“.

2° *Kombinacja linjowa oraz iloczyn dwu uogólnionych funkcji bezwzględnie ciągłych są również uogólnionemi funkcjami bezwzględnie ciągłemi.*

W szczególności, z pierwszego z powyższych twierdzeń wynika, iż każda uogólniona funkcja bezwzględnie ciągła jest prawie wszędzie różniczkowalna aproksymatywnie (§ 8, tw. 4). Okaże się, iż — co więcej — każda taka funkcja jest zawsze określona jednoznacznie (z dokładnością do dowolnej stałej addytywnej) przez swą pochodną aproksymatywną, daną prawie wszędzie. Własność ta wiąże się z inną własnością uogólnionych funkcji bezwzględnie ciągłych, nazwaną przez Łuzina własnością (N).

We wspomnianym wyżej twierdzeniu Denjoy-Khintchine'a (§ 8) nie można zastąpić oczywiście różniczkowalności aproksymatywnej przez różniczkowalność zwykłą; istotnie, każda funkcja, przyjmująca conajwyżej przeliczalną ilość wartości różnych, jest pewną funkcją (VBG); w szczególności tedy np. funkcja, równa zeru w każdym punkcie wymiernym i jedności w każdym punkcie niewymiernym, jest pewną funkcją (VBG) mierzalną, nie jest zaś nigdzie ciągła, a więc — tembardziej — różniczkowalna w sensie zwykłym.

Można jednak podać również łatwo przykład funkcji (ACG), która nie jest nigdzie różniczkowalna (w sensie zwykłym) w zbiorze miary dodatniej. Niech, w tym celu, H będzie dowolnym zbiorem doskonałym, nigdzie niegęstym, o mierze dodatniej; a, b niech oznaczają odp. jego kresy, $\{I_n = (a_n, b_n)\}$ — ciąg przyległych doń przedziałów, c_n wreszcie — odp. środki przedziałów I_n. Oznaczymy dalej, dla każdego n, przez p_n, maximum odległości między dwoma kolejnemi z pośród n pierwszych przedziałów $I_1, I_2, \ldots, I_n$, uporządkowanych w sposób naturalny, t. j. od strony lewej do prawej. Widoczne jest, iż

$$\lim_n |I_n| = \lim_n p_n = 0. \tag{1}$$

Określamy teraz pewną funkcję $F(x)$ w sposób następujący:

1° $\qquad F(x) = 0, \qquad$ jeśli $x \in H$;

2° $\qquad F(c_n) = p_n + |I_n| \qquad (n = 1, 2, \ldots)$;

3° w każdym z przedziałów (a_n, c_n) oraz (c_n, b_n) funkcja $F(x)$ jest linjowa.

Ze względu na (1), określona tak funkcja $F(x)$ jest ciągła w całym przedziale (a, b). Nadto przedział ten jest sumą zbioru H i ciągu przedziałów I_n, zarówno zaś na zbiorze H, jak i na każdym z przedziałów I_n, funkcja $F(x)$ est ciągła bezwzględnie. Funkcja ta jest więc w przedziale (a, b) uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą.

Powiadamy, iż nie jest jednak różniczkowalna w żadnym punkcie x_0 zbioru H. Mamy przedewszystkiem — ponieważ funkcja $F(x)$ znika w zbiorze H —

$$\underline{F}(x_0) \leq 0. \tag{2}$$

W przypadku, gdy punkt x_0 jest lewym krańcem któregokolwiek z przedziałów I_n, mamy oczywiście

$$\overline{F}(x_0) \geqslant \overline{F}^+(x_0) > 0,$$

a więc — z uwagi na (2) — funkcja F nie jest w tym punkcie napewno różniczkowalna. Załóżmy tedy, iż punkt x_0 nie jest lewym krańcem żadnego z tych przedziałów oraz iż $x_0 \neq b$[1]; oznaczmy, dla każdej liczby n, przez k_n wskaźnik tego z pośród n pierwszych przedziałów $I_1, I_2, \ldots I_n$, który — znajdując się na prawo względem x_0 — położony jest najbliżej tego punktu. Dla dostatecznie wielkich wartości n przedział taki zawsze istnieje i k_n dąży, wraz z n, do ∞.

Wówczas, dla każdego n,

$$0 < c_{k_n} - x_0 < p_{k_n} + |I_{k_n}|,$$

a więc

$$\frac{F(c_{k_n}) - F(x_0)}{c_{k_n} - x_0} = \frac{p_{k_n} + |I_{k_n}|}{c_{k_n} - x_0} > 1,$$

ponieważ zaś $\lim\limits_n c_{k_n} = x_0$, przeto

$$\overline{F}(x_0) \geqslant 1,$$

skąd — w zestawieniu z (2) — wynika oczywiście, iż w punkcie x_0 funkcja pochodnej nie posiada.

Warunek (*N*) Łuzina.

§ 11. Mówimy, iż funkcja $F(x)$, określona w pewnym zbiorze Q, spełnia na tym zbiorze warunek (N), jeśli — dla każdego zbioru $P \subset Q$ miary zero — mamy również

$$|F(P)| = 0.$$[2]

Nazwę „warunek (N)" wprowadził Łuzin, który — pierwszy — zwrócił uwagę na rolę tego warunku w teorji całki.[3] Łatwo zauważyć, iż warunek ten — w zakresie funkcji ciągłych — konieczny jest i dostateczny na to, aby funkcja przyporządkowywała każdemu zbiorowi mierzalnemu obraz mierzalny.[4]

---

[1] Jeśli $x_0 = b$, postępujemy zupełnie analogicznie, rozważając tylko pochodną ze strony lewej.

[2] Oznaczamy tu — jak zwykle — przez $F(P)$ obraz zbioru P t. j. zbiór wartości przyjmowanych przez funkcję $F(x)$ w punktach P (VII, § 8).

[3] Łuzin, *Teza*, p. 109.

[4] Rademacher, *Monatshefte f. Math. u. Phys.*, t. 27, (1916), p. 183. Hahn, *R. F.*, pp. 586—589.

Twierdzenie 5. 1° *Jeśli funkcja $F(x)$ jest bezwzględnie ciągła na zbiorze Q, wówczas spełnia na nim warunek (N).*

2° *Jeśli $F(x)$ jest uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą w przedziale (a, b), wówczas spełnia w tym przedziale warunek (N).*

Dowód. 1° Niech $F(x)$ będzie funkcją bezwzględnie ciągłą na pewnym zbiorze Q i niech P będzie dowolnym podzbiorem — miary zero — tego zbioru.

Każdej liczbie $\varepsilon > 0$ odpowiada taka liczba $\eta > 0$, iż dla każdego układu niezachodzących na siebie przedziałów $\{(a_k, b_k)\}$, których krańce należą do Q, nierówność

$$\sum_k (b_k - a_k) < \eta$$

pociąga za sobą

$$\sum_k |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon.$$

Wynika stąd zarazem, iż dla każdego układu niezachodzących na siebie przedziałów $\{I_k\}$, o sumie długości mniejszej od η, mamy

$$(1) \qquad \sum_k (M_k - m_k) \leqslant \varepsilon,$$

gdzie M_k i m_k oznaczają odp. kresy — górny i dolny — funkcji $F(x)$ w zbiorze $Q \times I_k$.[1])

Układ $\{I_k\}$ możemy wybrać oczywiście w ten sposób, by pokrywał zbiór P, który jest miary zero; układ przedziałów (m_k, M_k) pokrywa wówczas obraz $F(P)$ tego zbioru i — z uwagi na (1) —

$$|F(P)| \leqslant \varepsilon,$$

skąd, ponieważ ε jest dowolną liczbą dodatnią,

$$|F(P)| = 0$$

i funkcja F spełnia warunek (N).

2° Druga część twierdzenia wynika natychmiast już z pierwszej, ponieważ funkcja, która spełnia warunek (N) na każdym

[1]) W przypadku, gdy — dla pewnego k — zbiór ten jest pusty, kładziemy $M_k = m_k = 0$.

zbiorze pewnego przeliczalnego ciągu zbiorów, spełnia go oczywiście na ich sumie.

Opierając się na udowodnionej w ten sposób własności (N) funkcji (ACG), podamy następujące uogólnienie (w zakresie funkcji jednej zmiennej rzeczywistej) twierdzenia 3 rozdz. III (§ 4):

T w i e r d z e n i e 6. *Jeśli uogólniona funkcja bezwzględnie ciągła w przedziale (a, b) posiada w tym przedziale prawie wszędzie pochodną aproksymatywną — lub, ogólniej, pochodną górną prawostronną — stale nieujemną, wówczas funkcja ta jest monotoniczna niemalejąca.*

D o w ó d. Niech $F(x)$ będzie uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą w przedziale (a, b); zakładamy, iż — prawie wszędzie —

$$\overline{F}^{+}(x) \geqslant 0\,.$$

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią i niech

$$G(x) = F(x) + \varepsilon x\,.$$

Prawie wszędzie

$$\overline{G}^{+}(x) = \overline{F}^{+}(x) + \varepsilon \geqslant \varepsilon > 0\,. \tag{2}$$

Oznaczając tedy przez Q mnogość tych punktów, w których nierówność (2) nie jest spełniona, mamy

$$|Q| = 0\,,$$

a ponieważ funkcja $G(x)$ jest — wraz z $F(x)$ — uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą w (a, b) i spełnia temsamem warunek (N) w tym przedziale, przeto również

$$|G(Q)| = 0\,.$$

Mnogość $G(Q)$ nie zawiera tedy napewno żadnego odcinka i w myśl lemmatu Z y g m u n d a (VII, § 8) funkcja $G(x)$ jest niemalejąca w (a, b). Dla każdej zatem pary punktów $x_1 < x_2$ tego przedziału

$$G(x_2) - G(x_1) = F(x_2) - F(x_1) + \varepsilon(x_2 - x_1) \geqslant 0\,,$$

ponieważ zaś ε jest dowolną liczbą dodatnią, przeto

$$F(x_2) - F(x_1) \geqslant 0\,,$$

co uzasadnia nasze twierdzenie.

Analizując rozumowanie powyższe, widzimy, iż z założenia uogólnionej bezwzględnej ciągłości funkcji $F(x)$ korzystało się w tym tylko celu, by pokazać, iż każda funkcja postaci $F(x) + \varepsilon x$ ($\varepsilon > 0$) spełnia warunek (N). Godne jest tu uwagi, iż — jak pokazał Mazurkiewicz — sam warunek (N) nie zachowuje się naogół bynajmniej, jeśli do funkcji, nawet ciągłej, która go spełnia, dodać dowolną funkcję linjową.[1]) Z tego też powodu rozumowanie powyższe zawodzi, jeśli zamiast założenia, iż funkcja $F(x)$ jest uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą, przyjąć tylko, iż posiada własność (N).

Niemniej uogólnienie takie twierdzenia 6 jest prawdziwe: z dalej idących twierdzeń, które podamy w rozdz. następnym, wynikać będzie nawet, iż *każda funkcja ciągła, spełniająca warunek* (N) *i posiadająca pochodną nieujemną w prawie każdym punkcie, w którym jest różniczkowalna, jest monotoniczna niemalejąca.*

§ 12. Udowodnione zostało w § poprzednim, iż każda funkcja bezwzględnie ciągła spełnia warunek (N). Pokażemy obecnie, iż — w zakresie funkcji ciągłych o wahaniu skończonem — warunek (N) jest całkowicie równoważny ciągłości bezwzględnej funkcji; podobnie, w zakresie funkcji ciągłych o uogólnionem wahaniu skończonem, warunek (N) okaże się równoważny uogólnionej ciągłości bezwzględnej.

Twierdzenia te wynikać będą z pewnych oszacowań na miarę obrazu zbioru.

Lemmat. *Jeśli funkcja $F(x)$, określona i skończona w przedziale (a, b), jest różniczkowalna w każdym punkcie x pewnego zbioru Q i pochodne jej spełniają warunek*

(1) $$|F'(x)| \leqslant M,$$

wówczas

(2) $$|F(Q)| \leqslant M|Q|.$$

Dowód. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Oznaczymy, dla każdej liczby naturalnej n, przez Q_n mnogość tych wszystkich punktów x, dla których nierówność

$$|y - x| \leqslant \frac{1}{n}$$

[1]) Mazurkiewicz, *Ann. Soc. Polon. de Math.*, t. 7, (1928), p. 266. Dawniej jeszcze Lebesgue (*Rend. Acc. Linc.*, t. 16, (1907), p. 285) pokazał, iż suma dwu funkcji, spełniających warunek (N), może już warunku tego nie spełniać.

pociąga za sobą, dla każdego punktu y przedziału (a, b), nierówność

$$|F(y) - F(x)| \leqslant (M+\varepsilon)|y-x|.$$

Zbiory Q_n tworzą ciąg monotoniczny niemalejący i — z uwagi na (1) —

$$\lim_n Q_n = Q,$$

skąd

$$\lim_n |F(Q_n)| = |F(Q)|. \tag{3}$$

Każdemu ze zbiorów Q_n przyporządkować możemy z kolei taki pokrywający go ciąg przedziałów $\{I_k^{(n)}\}$, iżby

$$\sum_k |I_k^{(n)}| \leqslant |Q_n| + \varepsilon; \tag{4}$$

możemy założyć przytem oczywiście, iż długość żadnego z tych przedziałów nie przekracza liczby $\frac{1}{n}$. Wówczas, ze względu na definicję zbiorów Q_n, mamy, dla każdej pary punktów x, y, należących do zbioru $Q_n \times I_k^{(n)}$,

$$|F(y) - F(x)| \leqslant (M+\varepsilon)|y-x| \leqslant (M+\varepsilon)|I_k^{(n)}|.$$

Średnica[1]) tedy — a więc tembardziej miara zewnętrzna — żadnego ze zbiorów $F(Q_n \times I_k^{(n)})$ nie przewyższa długości odpowiadającego przedziału $I_k^{(n)}$, pomnożonej przez stały czynnik $M+\varepsilon$. Zważywszy przeto na (4), mamy, dla każdego n,

$$|F(Q_n)| \leqslant \sum_k |F(Q_n \times I_k^{(n)})| \leqslant$$

$$\leqslant (M+\varepsilon) \sum_k |I_k^{(n)}| \leqslant (M+\varepsilon)[|Q_n| + \varepsilon],$$

skąd, przechodząc — na mocy (3) — do granicy, otrzymujemy

$$|F(Q)| \leqslant (M+\varepsilon)[|Q| + \varepsilon].$$

Liczba ε jest tu dowolną liczbą dodatnią, z nierówności powyższej wynika przeto bezpośrednio żądana nierówność (2).

---

[1]) I, § 3.

Twierdzenie 7. Jeżeli funkcja $F(x)$, określona i skończona w przedziale (a, b), jest różniczkowalna w każdym punkcie pewnego zbioru mierzalnego Q, zawartego w tym przedziale, wówczas

$$|F(Q)| \leqslant \int_Q |F'(x)|\, dx.\text{[1]} \tag{5}$$

Dowód. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Oznaczymy, dla każdej liczby naturalnej n, przez Q_n mnogość tych wszystkich puktów $x \in Q$, w których

$$(n-1)\varepsilon \leqslant |F'(x)| < n\varepsilon.$$

Wówczas, na mocy lemmatu poprzedniego,

$$|F(Q)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |F(Q_n)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n\varepsilon \,.\, |Q_n| \leqslant \int_Q |F'(x)|\, dx + \varepsilon \,.\, |Q|,$$

skąd, ponieważ ε jest dowolną liczbą dodatnią, wynika już natychmiast nierówność (5).

Twierdzenie 8. Na to, aby funkcja $F(x)$, ciągła i o wahaniu skończonem na pewnym zbiorze domkniętym P, była na nim bezwzględnie ciągła, konieczne jest i wystarcza, aby funkcja ta spełniała na zbiorze P warunek (N).

Dowód. Konieczność warunku (N) zawarta jest już w części pierwszej tw. 5 § poprzedniego. Ażeby udowodnić, iż warunek ten jest także wystarczający, załóżmy, iż $F(x)$ jest funkcją ciągłą o wahaniu skończonem na zbiorze domkniętym P i spełnia na tym zbiorze warunek (N); oznaczmy przez I przedział zawarty między kresami zbioru P oraz przez $G(x)$ funkcję identyczną z $F(x)$ w punktach zbioru P i linjową w przedziałach

---

[1]) Oszacowanie (5) wymaga jedynego zastrzeżenia, iżby pochodna $F'(x)$ była wszędzie w zbiorze Q skończona; oczywiście jednak, oszacowanie to nie jest banalne tylko w tym przypadku, gdy pochodna $F'(x)$ jest na Q sumowalna.

W nierówności (5) zastąpić można pochodną oznaczoną przez którąkolwiek z liczb pochodnych Dini'ego, zakładając wszakże również, iż uważana liczba pochodna jest wszędzie w zbiorze Q skończona. Dowód tej nierówności jest już bardziej złożony i wymaga odwołania się do ogólnych twierdzeń o liczbach pochodnych, które podane będą w rozdz. następnym (§§ 3—5).

doń przyległych. Funkcja ta jest oczywiście ciągła i o wahaniu skończonem w całym przedziale I, i spełnia w całym tym przedziale warunek (N).

Niech a, b $(a < b)$ będą dwoma dowolnemi punktami przedziału I; oznaczmy przez E zbiór tych punktów przedziału (a, b), w których funkcja G jest różniczkowalna i przez E' — mnogość punktów pozostałych tego przedziału. Zbiór E' jest oczywiście miary zero, a więc ponieważ funkcja G spełnia warunek (N), przeto

$$|G(E')| = 0.$$

Z drugiej strony, przedział $[G(a), G(b)]$, wzgl. $[G(b), G(a)]$, jest zawarty widocznie w obrazie przedziału (a, b), a więc, w myśl twierdzenia poprzedniego,

$$|G(b) - G(a)| \leqslant |G(E)| + |G(E')| = |G(E)| \leqslant \int_a^b |G'(x)|\, dx.$$

Nierówność powyższa spełniona jest dla każdego przedziału (a, b), zawartego w I, a więc, ponieważ pochodna $G'(x)$ jest sumowalna w przedziale I (IV, § 2, tw. 7), przeto funkcja $G(x)$ jest bezwzględnie ciągła w przedziale I i — temsamem — funkcja $F(x)$ jest bezwzględnie ciągła na zbiorze P, na którym pokrywa się z funkcją $G(x)$.

Czytelnik zauważy z łatwością, iż w przypadku, gdy zbiór P jest sam przedziałem, rozumowanie powyższe może być zastosowane — bez zmian — do dowodu twierdzenia mocniejszego: *na to, aby funkcja $F(x)$, ciągła w przedziale (a, b), była w przedziale tym ciągła bezwzględnie, konieczne jest i wystarcza, aby funkcja ta spełniała w (a, b) warunek (N) i posiadała prawie wszędzie pochodną oznaczoną, sumowalną w tym przedziale.*[1]) Dalej idące wzmocnienie tego twierdzenia podamy w rozdz. następnym (§ 9).

Z twierdzenia 8 wynika natychmiast następujący analogon jego dla funkcji (VBG):

Twierdzenie 9. Na to, aby funkcja $F(x)$, ciągła i o uogólnionem wahaniu skończonem w przedziale (a, b), była w przedziale tym uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą, konieczne jest i wystarcza, aby spełniała w (a, b) warunek (N).

Dowód. Konieczność warunku (N) zawiera się już

[1]) Por. Menchoff, *Math. Ann.*, t. 95, (1926), p. 645. Dalsze uogólnienia: *Bull. Ac. Pol., A*, (1926), p. 103.

w drugiej części tw. 5 § poprzedniego. Załóżmy tedy odwrotnie, iż funkcja ciągła $F(x)$ jest w przedziale (a, b) funkcją (VBG), spełniającą warunek (N). Przedział ten jest tedy sumą ciągu zbiorów $\{P_n\}$ takich, iż na każdym z nich funkcja $F(x)$ jest o wahaniu skończonem. Z uwagi na ciągłość funkcji $F(x)$ można przytem założyć [§ 6, (4^0)], iż wszystkie zbiory P_n są domknięte. Wówczas — w myśl tw. poprzedniego — funkcja $F(x)$ jest bezwzględnie ciągła na każdym ze zbiorów P_n, a więc — temsamem — jest uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą w całym przedziale (a, b).

Funkcje o wahaniu skończonem w znaczeniu węższem na zbiorze.

§ 13. Rozważane dotychczas uogólnienia definicji funkcji o wahaniu skończonem, jak również funkcji bezwzględnie ciągłych, wymagały przejścia od różniczkowalności w znaczeniu zwykłem do różniczkowalności aproksymatywnej; równoczesne to uogólnienie definicji pochodnej było — jak widzieliśmy już wyżej (§ 10) — niezbędnym warunkiem zachowania twierdzenia o różniczkowalności prawie wszędzie funkcji o wahaniu skończonem.

To też obok tych — tak daleko idących — uogólnień rozważamy i inne jeszcze, słabsze nieco, lecz nie wymagające zato modyfikacji określenia pochodnej. Przystąpimy obecnie do ich wykładu, zachowując przytem tensam porządek definicji, jak w rozważaniach dotychczasowych.

Jeżeli $F(x)$ jest funkcją określoną i skończoną w przedziale $(a\ b)$, wówczas nazywać będziemy jej wahaniem mocnem na pewnym zbiorze Q, zawartym w tym przedziale, górny kres sum

$$\sum_k O(F; I_k),$$

gdzie $\{I_k\}$ oznacza dowolny układ, niezachodzących na siebie przedziałów, których krańce należą do zbioru Q.[1]) Wahanie to oznaczać będziemy przez $V^*(F; Q)$.

[1]) $O(F; I_k)$ oznacza — jak zwykle (I, §§ 7, 14) — oscylację funkcji $F(x)$ w przedziale I_k.

Jeśli $V^*(F; Q)$ jest liczbą skończoną, wówczas funkcja $F(x)$ nazywać się będzie **funkcją o wahaniu skończonem** *w znaczeniu węższem* na zbiorze Q.

Jeśli zbiór Q jest przedziałem, wówczas wahanie mocne funkcji na Q pokrywa się z jej wahaniem bezwzględnem; jeśli zbiór Q jest figurą elementarną t. j. sumą skończonej liczby przedziałów, mamy wprawdzie naogół tylko nierówność

$$W(F; Q) \leqslant V^*(F; Q),$$

łatwo wszakże spostrzec, iż — i w tym przypadku — skończoność liczby $W(F; Q)$ pociąga za sobą skończoność wahania $V^*(F; Q)$. Podana tedy powyżej definicja funkcji o wahaniu skończonem *w znaczeniu węższem* na zbiorze Q równoważna jest — w przypadku, gdy zbiór ten jest figurą elementarną — definicji podanej w rozdz. I (§ 9).

Łatwo zauważyć dalej, iż zawsze

$$V(F; Q) \leqslant V^*(F; Q);$$

stąd, *jeśli funkcja $F(x)$, określona i skończona w pewnym przedziale (a, b), jest o wahaniu skończonem w znaczeniu węższem*[1] *na pewnym zbiorze Q, zawartym w tym przedziale, wówczas jest na nim również o wahaniu skończonem w znaczeniu szerszem.*

Celem stwierdzenia, iż jakaś funkcja jest o wahaniu skończonem *w znaczeniu szerszem* na pewnym zbiorze Q, uwzględniamy wyłącznie wartości funkcji przyjmowane w tym zbiorze; przeciwnie, okoliczność, iż pewna funkcja jest o wahaniu skończonem *w znaczeniu węższem* na Q, uzależniona jest od zachowania się funkcji również i poza Q.

Jeśli $F(x)$ i $G(x)$ są dwiema funkcjami ograniczonemi w przedziale I, a przez M oznaczymy kres górny wartości bezwzględnych tych dwu funkcji w tym przedziale, wówczas

$$O(\lambda F + \mu G; I) \leqslant |\lambda| . O(F; I) + |\mu| . O(G; I),$$

$$O(F . G; I) \leqslant M . [O(F; I) + O(G; I)],$$

gdzie λ, μ są dowolnemi stałemi spółczynnikami.

Z oszacowań tych wynika, iż *kombinacja linjowa o spółczynnikach stałych oraz iloczyn dwu funkcyj o wahaniu skończonem* w znaczeniu węższem *na pewnym zbiorze Q, jest również o wahaniu skończonem na tym zbiorze* w temsamem znaczeniu.

---

[1] Por. § 6.

Nie przedstawia również trudności dowód następującego twierdzenia.

Jeśli funkcja $F(x)$, określona w przedziale (a, b) jest funkcją o wahaniu skończonem w znaczeniu węższem na pewnym zbiorze Q, zawartym w tym przedziale, wówczas jest nią również na domknięciu $\bar{Q}$ zbioru Q.

§ 14. Uogólnienie twierdzenia Lebesgue'a dla określonej w § poprzednim klasy funkcji nosi charakter bardziej bezpośredni aniżeli uogólnienia ustalone w postaci twierdzeń 2 i 3 (§ 7) dla funkcji o wahaniu skończonem *w znaczeniu szerszem.*

Udowodnimy mianowicie następujące

Twierdzenie 10. Jeśli funkcja $F(x)$, określona w przedziale (a, b), jest o wahaniu skończonem w znaczeniu węższem na pewnym zbiorze domkniętym Q, zawartym w (a, b), wówczas różniczkowalna jest prawie wszędzie w tym zbiorze i w prawie każdym jego punkcie

$$F'(x) = G'(x),$$

gdzie $G(x)$ oznacza funkcję identyczną z $F(x)$ na zbiorze Q oraz linjową w przedziałach do Q przyległych.

Dowód. Niech I będzie przedziałem, zawartym między kresami zbioru Q, oraz $\{I_n\}$ ciągiem przedziałów przyległych do Q. Oznaczymy ogólnie przez M_n i m_n odp. kresy — górny i dolny — funkcji $F(x)$ w przedziale I_n. Określimy teraz dwie funkcje $M(x)$ i $m(x)$, kładąc

$$M(x) = M_n, \quad m(x) = m_n,$$

jeśli x jest punktem wewnętrznym przedziału I_n $(n = 1, 2, \dots)$, oraz

$$M(x) = m(x) = F(x), \qquad \text{jeśli } x \in Q.$$

Ponieważ funkcja $F(x)$ jest — z założenia — o wahaniu skończonem *w znaczeniu węższem* na Q, przeto stwierdzamy natychmiast, iż obydwie funkcje $M(x)$ i $m(x)$ są o wahaniu skończonem w całym przedziale I, są więc prawie wszędzie w tym przedziale różniczkowalne. Ponieważ zaś identyczne są na zbiorze Q, przeto w prawie każdym punkcie $x \in Q$

(1) $$M'(x) = m'(x).$$

Z drugiej strony, w całym przedziale I,

$$M(x) \geqslant \frac{F(x)}{G(x)} \geqslant m(x),$$

a w szczególności, jeśli $x \in Q$, wówczas

$$M(x) = F(x) = G(x) = m(x);$$

mamy tedy w każdym punkcie $x \in Q$, w którym obydwie funkcje $M(x)$ oraz $m(x)$ są różniczkowalne,

$$M'(x) \geqslant \frac{\overline{F}^+(x)}{\underline{G}^+(x)} \geqslant m'(x),$$

skąd — z uwagi na (1) — w prawie każdym punkcie $x \in Q$

$$\overline{F}^+(x) = \overline{G}^+(x) = M'(x) = m'(x).$$

Analogiczne równości otrzymuje się dla trzech pozostałych pochodnych Dini'ego funkcji $F(x)$ oraz $G(x)$. Funkcja $F(x)$ jest tedy prawie wszędzie różniczkowalna w zbiorze Q i pochodna jej, w prawie każdym punkcie tego zbioru, spełnia równość

$$F'(x) = G'(x) = M'(x) = m'(x).$$

Funkcje o uogólnionem wahaniu skończonem w znaczeniu węższem.

§ 15. Mówić będziemy, iż funkcja $F(x)$, określona w przedziale (a, b), jest o uogólnionem wahaniu skończonem *w znaczeniu węższem* — albo, dla skrócenia, funkcją (VBG^*) — w tym przedziale, jeśli przedział (a, b) jest sumą ciągu zbiorów Q_n takich, iż na każdym z nich funkcja $F(x)$ jest o wahaniu skończonem *w znaczeniu węższem.*

Zauważyliśmy już poprzednio (§ 13), iż funkcja, która jest o wahaniu skończonem *w znaczeniu węższem* na jakimś zbiorze, jest nią również na domknięciu tego zbioru. Wynika stąd, iż, *jeśli funkcja $F(x)$ jest (VBG^*) w przedziale (a, b), wówczas przedział ten jest zawsze sumą ciągu zbiorów domkniętych, na których $F(x)$ jest o wahaniu skończonem w znaczeniu węższem.*

Z definicji funkcji (VBG^*) oraz rozważań § 13 wynika bezpośrednio, iż

1⁰ *Każda funkcja o wahaniu skończonem w przedziale* (a, b), *jest zarazem funkcją* (VBG^*) *w tym przedziale; każda funkcja* (VBG^*) *w przedziale* (a, b) *jest zarazem funkcją* (VBG).

2⁰ *Kombinacja linjowa oraz iloczyn dwu funkcji* (VBG^*) *w jakimś przedziale jest również funkcją* (VBG^*).

Otrzymujemy wreszcie natychmiast następujące uogólnienie twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowalności prawie wszędzie funkcji o wahaniu skończonem.

Twierdzenie 11 (Łuzina-Denjoy). *Każda funkcja, o uogólnionem wahaniu skończonem w znaczeniu węższem w przedziale* (a, b), *jest w tym przedziale prawie wszędzie różniczkowalna.*[1])

Dowód. Jeśli funkcja $F(x)$ jest (VBG^*) w przedziale (a, b), wówczas przedział ten jest sumą ciągu zbiorów domkniętych takich, iż na każdym z nich funkcja $F(x)$ jest o wahaniu skończonem *w znaczeniu węższem.* Twierdzenie nasze jest tedy natychmiastową konsekwencją twierdzenia 10 § poprzedniego.

Funkcje bezwzględnie ciągłe w znaczeniu węższem na zbiorze.

§ 16. Mówimy, iż funkcja $F(x)$, określona w przedziale (a, b), jest bezwzględnie ciągła *w znaczeniu węższem* na pewnym zbiorze Q, zawartym w tym przedziale, jeśli każdej liczbie $\varepsilon > 0$ odpowiada taka liczba $\eta > 0$, iż nierówność

$$\sum_k |I_k| < \eta$$

pociąga za sobą — dla każdego układu $\{I_k\}$ niezachodzących na siebie przedziałów, których krańce należą do zbioru Q — nierówność

$$\sum_k O(F; I_k) < \varepsilon.$$

W przypadku, gdy mnogość Q jest figurą elementarną, definicja ta równoważna jest zwykłej definicji bezwzględnej cią-

[1]) Por. analogiczne twierdzenie Denjoy-Khintchine'a (§ 7).

głości, — stanowi tedy pewne jej uogólnienie, mniej wszakże daleko idące, aniżeli definicja bezwzględnej ciągłości *w znaczeniu szerszem* (§ 8). Widoczne jest również natychmiast, iż w twierdzeniach 1^0 — 4^0 § 9, wyrażających podstawowe własności funkcji bezwzględnie ciągłych na dowolnych zbiorach, zastąpić można wszędzie „bezwzględną ciągłość“ przez „bezwzględną ciągłość *w znaczeniu węższem*“.

Uogólnione funkcje bezwzględnie ciągłe w znaczeniu węższem.

§ 17. Funkcję $F(x)$, określoną w przedziale (a, b), nazywamy uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą *w znaczeniu węższem* — albo, krócej, funkcją (ACG^*) — w tym przedziale, jeśli funkcja ta jest ciągła w (a, b) i jeśli przedział ten jest sumą ciągu zbiorów takich, iż na każdym z nich funkcja $F(x)$ jest bezwzględnie ciągła *w znaczeniu węższem*.

Każda funkcja (ACG^*) jest zarazem funkcją (VBG^*) i (ACG); jest tedy (§ 15, tw. 11) prawie wszędzie różniczkowalna i określona jednoznacznie (z dokładnością do dowolnej stałej addytywnej) przez wartości swej pochodnej dane prawie wszędzie (§ 11, tw. 6); twierdzenie 3 rozdz. III o funkcjach bezwzględnie ciągłych przenosi się dosłownie na funkcje (ACG^*): *na to, aby funkcja (ACG^*) była monotoniczna niemalejąca, konieczne jest i wystarcza, aby pochodna jej była prawie wszędzie nieujemna.*

§ 18. Zauważyliśmy już w § poprzednim, iż każda funkcja (ACG^*) jest zarazem funkcją (VBG^*) i (ACG). Podamy obecnie odwrócenie tego twierdzenia; jednocześnie ustalimy parę prostych związków między rozważanemi w tym rozdziale klasami funkcji.

Lemmat. *Jeśli a, b są kresami pewnego zbioru domkniętego P, wówczas, dla każdej funkcji $F(x)$, określonej w przedziale $I = (a, b)$,*

$$(1) \qquad O(F; I) \leqslant M_0 - m_0 + 2 \sum_k O(F; I_k),^{1)}$$

gdzie $\{I_k\}$ oznacza ciąg przedziałów przyległych do zbioru P, zaś M_0, m_0 odp. kresy — górny i dolny — wartości funkcji $F(x)$ w punktach tegoż zbioru.

---

[1]) Spółczynnik 2 może być tu zresztą skreślony przez omówienie dodatkowe pewnego szczegółu dowodu.

Dowód. Oznaczmy przez M i m odp. kresy górny i dolny funkcji $F(x)$ w przedziale (a, b). Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią i x_1 punktem przedziału (a, b), w którym

$$M \leqslant F(x_1) + \varepsilon. \tag{2}$$

Jeśli $x_1 \in P$, wówczas z nierówności tej wynika natychmiast

$$M \leqslant M_0 + \varepsilon,$$

jeśli zaś x_1 należy do jednego z przedziałów przyległych do P, np. do I_{k_1}, wówczas z (2)

$$M \leqslant M_0 + O(F; I_{k_1}) + \varepsilon \leqslant M_0 + \sum_k O(F; I_k) + \varepsilon.$$

W obydwu tedy przypadkach

$$M \leqslant M_0 + \sum_k O(F; I_k) + \varepsilon.$$

Analogicznie zupełnie

$$m \geqslant m_0 - \sum_k O(F; I_k) - \varepsilon;$$

odejmując stronami nierówność tę od poprzedniej i uwzględniając, iż ε jest dowolną liczbą dodatnią, otrzymujemy żądany związek (1).

Twierdzenie 12. Na to, aby funkcja $F(x)$, określona w przedziale (a, b) i $\begin{cases}\text{o wahaniu skończonem}\\ \text{ciągła bezwzględnie}\end{cases}$ na pewnym zbiorze domkniętym P zawartym w (a, b), była na zbiorze tym $\begin{cases}\text{o wahaniu skończonem}\\ \text{ciągła bezwzględnie}\end{cases}$ również i w znaczeniu węższem, konieczne jest i wystarcza, aby zbieżny był szereg jej oscylacji na przedziałach przyległych do P.

Dowód. Konieczność podanego w twierdzeniu warunku jest oczywista, pozostaje tedy udowodnić tylko, iż warunek ten jest dostateczny.

Niech tedy

$$\sum_k O(F; I_k) < +\infty, \tag{3}$$

gdzie $\{I_h\}$ oznacza ciąg przedziałów przyległych do zbioru P.

1^0 Zakładamy, iż funkcja $F(x)$ jest o wahaniu skończonem (*w znaczeniu szerszem na* P), t. j. iż

$$V(F; P) < +\infty. \tag{4}$$

Mamy — z uwagi na lemmat poprzedni — dla każdego układu niezachodzących na siebie przedziałów $\{J_k\}$, których krańce należą do P,

$$\sum_k O(F; J_k) \leqslant \sum_k (M_k - m_k) + 2 \sum_h O(F; I_h),$$

gdzie M_k, m_k oznaczają odp. kresy funkcji w zbiorze $P \times J_k$; zatem

$$\sum_k O(F; J_k) \leqslant V(F; P) + 2 \sum_h O(F; I_h),$$

skąd, z uwagi na (3) i (4),

$$V^*(F; P) \leqslant V(F; P) + 2 \sum_h O(F; I_h) < +\infty,$$

co oznacza, iż funkcja $F(x)$ jest o wahaniu skończonem *w znaczeniu węższem* na P.

2^0 Zakładamy, iż funkcja $F(x)$ jest bezwzględnie ciągła (*w znaczeniu szerszem*) na P.

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieje tedy taka liczba $\eta > 0$, iż dla każdego układu niezachodzących na siebie przedziałów $\{J_k\}$, których krańce należą do P, nierówność

$$\sum_k |J_k| < \eta \quad \text{pociąga za sobą} \quad \sum_k (M_k - m_k) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{5}$$

gdzie M_k, m_k oznaczają odp. kresy funkcji na zbiorze $P \times J_k$.

Z uwagi na zbieżność szeregu (3) mamy dla pewnej wartości wskaźnika N

$$\sum_{h=N+1}^{\infty} O(F; I_h) < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{6}$$

Oznaczmy przez η_0 najmniejszą z $N+1$ liczb $\eta, |I_1|, |I_2|, \ldots, |I_N|$, i niech $\{J_k^0\}$ będzie dowolnym układem niezachodzących na siebie przedziałów o krańcach należących do P i o łącznej sumie długości mniejszej od η_0. Żaden wówczas z przedziałów J_k^0 nie zawiera żadnego z N pierwszych przedziałów ciągu $\{I_h\}$ i na zasadzie lemmatu poprzedniego otrzymujemy, z uwagi na (5) oraz (6),

$$\sum_k O(F; J_k^0) < \varepsilon,$$

co wyraża, iż funkcja $F(x)$ jest bezwzględnie ciągła na P *w znaczeniu węższem.*

Z udowodnionego w ten sposób twierdzenia wynika bezpośrednio

Twierdzenie 13. Jeśli funkcja o wahaniu skończonem w znaczeniu węższem na pewnym zbiorze domkniętym P,[1] *jest na nim jednocześnie bezwzględnie ciągła w znaczeniu szerszem, wówczas jest na P bezwzględnie ciągła również i w znaczeniu węższem.*

Twierdzenie 14. Jeśli funkcja $F(x)$ jest zarazem (VBG^*) oraz (ACG) w pewnym przedziale $(a, b,)$ wówczas jest w tym przedziale funkcją (ACG^*).

Dowód. Przedział (a, b) jest — z jednej strony — sumą ciągu zbiorów P_i, na których funkcja $F(x)$ jest o wahaniu skończonem *w znaczeniu węższem*, z drugiej zaś — sumą ciągu zbiorów Q_i, na których funkcja $F(x)$ jest bezwzględnie ciągła *w znaczeniu szerszem.* Z uwagi na ciągłość funkcji $F(x)$ (jako funkcji (ACG)) założyć możemy, iż wszystkie zbiory P_i oraz Q_i są domknięte. Domknięte są tedy również wszystkie zbiory $P_i \times Q_k$ i, w myśl twierdzenia poprzedniego, funkcja $F(x)$ jest na każdym z nich bezwzględnie ciągła *w znaczeniu węższem*; ponieważ zaś przedział (a, b) jest sumą zbiorów $P_i \times Q_k$, tworzących pewien układ conajwyżej przeliczalny, przeto temsamem funkcja $F(x)$ jest (ACG^*) w tym przedziale.

Udowodnione twierdzenie pozwala przenieść natychmiast na funkcje (ACG^*) twierdzenie 9 (§ 12):

---

[1]) W twierdzeniu powyższem założenie domkniętości zbioru P jest istotne. W samej rzeczy, jeśli np. przez P rozumieć przedział $(-1, 1)$ pozbawiony punktu 0, wówczas funkcja charakterystyczna tego zbioru jest o wahaniu skończonem *w znaczeniu węższem* oraz bezwzględnie ciągła *w znaczeniu szerszem* na P, a nie jest mimo to bezwzględnie ciągła *w znaczeniu węższem* na tym zbiorze.

Twierdzenie 15. Na to, aby funkcja $F(x)$, ciągła i (VBG^*) w pewnym przedziale (a, b), była w tym przedziale funkcją (ACG^*), konieczne jest i wystarcza, aby spełniała warunek (N).

Definicje Denjoy-Łuzina.

§ **19**. Przyjęte w rozdziale tym definicje funkcji (VBG), (ACG), (VBG^*) oraz (ACG^*) oparte są na pomyśle Khintchine'a.[1]) Inne definicje — równoważne definicjom Khintchine'a w zakresie funkcji ciągłych — podane zostały przez Łuzina i Denjoy; sformułujemy je tu w postaci pewnego warunku koniecznego i dostatecznego na to, aby funkcja należała do jednej z klas wyżej wymienionych.

Twierdzenie 16. Na to, aby funkcja $F(x)$, skończona i ciągła w przedziale $I_0 = (a, b)$, była w tym przedziale $\left\{\begin{matrix}(VBG)\\(VBG^*)\\(ACG)\\(ACG^*)\end{matrix}\right.$ *konieczne jest i wystarcza, aby każdy zbiór domknięty zawarty w I_0 posiadał zawsze pewien taki kawałek, na którym funkcja $F(x)$*

jest $\left\{\begin{array}{l}\textit{o wahaniu skończonem w znaczeniu szerszem,}\\ \textit{o wahaniu skończonem w znaczeniu węższem,}\\ \textit{bezwzględnie ciągła w znaczeniu szerszem,}\\ \textit{bezwzględnie ciągła w znaczeniu węższem.}\end{array}\right.$

Dowód przeprowadzimy dla funkcji (VBG); rozumowanie jest zupełnie analogiczne dla pozostałych trzech rodzajów funkcji.

A) Warunek jest dostateczny.

Zakładamy tedy, iż każdy zbiór domknięty zawarty w I_0 posiada kawałek, na którym funkcja ciągła $F(x)$ jest o wahaniu skończonem. Oznaczmy przez $\{J_n\}$ ciąg wnętrz tych wszystkich przedziałów o krańcach wymiernych, które zawierają się w I_0 i w których $F(x)$ jest funkcją (VBG).

Każdy z tych przedziałów otwartych przedstawić możemy w postaci

$$J_n = \sum_i Q_n^i,$$

gdzie Q_n^i są pewnemi zbiorami, na których $F(x)$ jest funkcją o wahaniu skończonem. Niech

$$P = I_0 - \sum_n J_n;$$

[1]) *Comptes Rendus*, t. 162, (1916), p. 287.

wówczas

(1) $$I_0 = P + \sum_n J_n = P + \sum_n \sum_i Q_n^i.$$

Powiadamy, iż mnogość P, która jest widocznie domknięta i zawiera krańce a, b przedziału I_0, redukuje się wprost do pary tych punktów. W samej rzeczy, w przypadku przeciwnym, mnogość ta posiadałaby pewien kawałek P_1, zawarty całkowicie wewnątrz przedziału I_0 i — w myśl naszego założenia — zbiór P_1 zawierałby znów z kolei pewien kawałek P_2, na którym funkcja $F(x)$ byłaby o wahaniu skończonem. Istniałby tedy pewien przedział $I \subset I_0$ o krańcach wymiernych, zawierający wewnątrz punkty zbioru $P_2 \subset P$ i taki, iż $P_2 \times I = P \times I$. Funkcja $F(x)$ byłaby tedy o wahaniu skończonem na zbiorze $P \times I$, a że, w myśl (1),

$$I \subset P \times I + \sum_n \sum_i Q_n^i,$$

przeto byłaby zarazem (VBG) w całym przedziale I, co sprzeczne jest jednak z tem, iż przedział ten zawiera wewnątrz punkty zbioru P.

Zbiór P złożony jest tedy dokładnie z dwu tylko punktów, a więc funkcja $F(x)$ jest na nim oczywiście o wahaniu skończonem. Z rozkładu (1) wynika zatem, iż funkcja ta jest (VBG) w przedziale $I_0 = (a, b)$.

B) Warunek podany w twierdzeniu jest konieczny.

Niech, w samej rzeczy, funkcja ciągła $F(x)$ będzie (VBG) w przedziale I_0. Przedział ten przedstawić możemy tedy jako sumę ciągu zbiorów Q_n takich, iż na każdym z nich funkcja $F(x)$ jest o wahaniu skończonem, przyczem, z uwagi na ciągłość funkcji $F(x)$, założyć możemy, iż wszystkie zbiory Q_n są domknięte. Jeśli przeto $P \subset I_0$ jest dowolnym zbiorem domkniętym, wówczas — w myśl twierdzenia Baire'a (§ 2) — zbiór ten posiada pewien kawałek, który zawarty jest całkowicie w jednym ze zbiorów Q_n. Na kawałku tym funkcja $F(x)$ jest o wahaniu skończonem, i warunek nasz jest w ten sposób spełniony.

Rozumowanie zastosowane w drugiej części powyższego dowodu — jakkolwiek nader proste — zasługuje na podkreślenie, zbiegają się w niem bowiem metody lebesgue'owskie z baire'owskiemi. Związanie ze sobą tych dwu odrębnych metod teorji funkcji rzeczywistych stanowi rys charakterystyczny badań Denjoy i okazało się jednym z najbardziej płodnych pomysłów. Rozumowanie analogiczne spotka czytelnik parokrotnie jeszcze w dalszym ciągu tego wykładu.

Z twierdzenia 16 wynika w szczególności, iż każda funkcja ciągła, która jest (VBG) w jakimś przedziale (a, b), jest zawsze o wahaniu skończonem w pewnym jego podprzedziale; temsamem tedy, dla każdej funkcji (VBG), ciągłej, istnieją przedziały, w których funkcja ta jest prawie wszędzie różniczkowalna, i przedziały te tworzą pewien układ wszędziegęsty. Z drugiej jednak strony — pokazaliśmy już wyżej (§ 10), iż funkcja (VBG), nawet ciągła, może nie mieć pochodnej oznaczonej w zbiorze miary dodatniej.

ROZDZIAŁ IX.

Twierdzenia o liczbach pochodnych.

Uwagi wstępne.

§ 1. Rozdział obecny poświęcony będzie badaniom z teorji różniczkowalności, wychodzącym poza zakres funkcji różniczkowalnych prawie wszędzie (w sensie zwykłym lub aproksymatywnym). Rozpoczniemy od wyłożenia tu grupy twierdzeń Denjoy (§ § 3, 4), ustalających ogólne związki między liczbami pochodnemi funkcji całkiem dowolnych. Rozważania dalsze (§§ 6—9), których jądro stanowią rezultaty Banacha, obejmować będą własności funkcji, spełniających pewne warunki, związane z warunkiem (N) Łuzina; badania te — jak spostrzegła Nina Bary — prowadzą do daleko idących uogólnień twierdzeń 6 i 9 rozdziału poprzedniego (§§ 11, 12). §§ końcowe wreszcie zawierać będą wyniki o charakterze poniekąd odwrotnym: podamy tam pewne kryterja Denjoy, które — wychodząc z zachowania się liczb pochodnych — pozwalają wnioskować o przynależności funkcji do jednej z klas wyróżnionych w rozdziale poprzednim.

Dwa twierdzenia elementarne.

§ 2. Mówimy, iż funkcja $F(x)$ osiąga w pewnym punkcie x_0 maximum (wzgl. minimum) właściwe, jeśli istnieje taki przedział I, zawierający wewnątrz punkt x_0, iż dla każdego — różnego od x_0 — punktu x tego przedziału

$$F(x) < F(x_0) \qquad [\text{wzgl. } F(x) > F(x_0)].$$

Twierdzenie 1.[1]) *Zbiór punktów, w których funkcja $F(x)$ osiąga maximum lub minimum właściwe, jest conajwyżej przeliczalny.*

Dowód. Oznaczmy przez A mnogość tych punktów, w których funkcja osiąga maximum właściwe. Każdemu punktowi $x_0 \in A$ przyporządkować można jednoznacznie pewien, zawierający go, przedział o krańcach wymiernych tak, aby dla każdego różnego od x_0 punktu x tego przedziału spełniona była nierówność

$$F(x) < F(x_0).$$

Dwum różnym punktom zbioru A odpowiadają wówczas zawsze dwa różne przedziały. Ponieważ zaś mnogość wszystkich przedziałów o krańcach wymiernych jest oczywiście przeliczalna, przeto temsamem conajwyżej przeliczalny jest zbiór A.

Analogicznie dowodzi się, iż conajwyżej przeliczalny jest również zbiór punktów, w których funkcja osiąga swoje minimum właściwe.

Twierdzenie 2 (Sierpińskiego i G. C. Young).[2]) *Jeśli $F(x)$ jest dowolną funkcją skończoną w pewnym przedziale, wówczas niemal wszędzie*

$$(1) \qquad \overline{F}^{+}(x) \geqslant \underline{F}^{-}(x) \quad oraz \quad \overline{F}^{-}(x) \geqslant \underline{F}^{+}(x).$$

Dowód. Niech A oznacza mnogość punktów, w których nie jest spełniona pierwsza z nierówności (1), i $A_{m,n}$ niech będzie zbiorem tych punktów x, w których

$$\overline{F}^{+}(x) < \frac{m}{n} < \underline{F}^{-}(x).$$

Mamy oczywiście

$$(2) \qquad A = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}.$$

---

[1]) Schönflies, *Jahresb. d. Deutsch. Math.-Verein.*, t. 8, (1900), p. 158. Sierpiński, *Spraw. Tow. Nauk. Warsz.*, (1912), p. 236; *Prace Matematyczno-Fizyczne*, t. 27, (1916), p. 17.

Łatwo zauważyć, iż twierdzenie jest prawdziwe w ogólnych przestrzeniach metrycznych posiadających część przeliczalną wszędziegęstą (VI, § 2).

[2]) Sierpiński, *Bull. Ac. Sc. Cracovie*, (1912), p. 850; G. C. Young, *Acta Math.*, t. 37, (1914), p. 147.

Niech

$$F_{m,n}(x) = F(x) - \frac{m}{n}x.$$

Mamy w każdym punkcie $x \in A_{m,n}$

$$\overline{F}^{+}_{m,n}(x) < 0 < \underline{F}^{-}_{m,n}(x),$$

skąd wynika łatwo, iż w każdym takim punkcie funkcja $F_{m,n}$ osiąga swe maximum właściwe. Na mocy tedy twierdzenia poprzedniego każdy ze zbiorów $A_{m,n}$ jest conajwyżej przeliczalny i temsamem, z uwagi na (2), conajwyżej przeliczalny jest zbiór A.

Analogicznie dowodzimy, iż conajwyżej przeliczalny jest zbiór punktów, w których spełniona nie jest druga z nierówności (1).

Twierdzenia Denjoy.

§ 3. Twierdzenie Pani Young i Sierpińskiego wyraża jeden ze wspomnianych już w § 1 związków między liczbami pochodnemi dowolnej funkcji. Związek ten jest szczególnie elementarny i spełniony jest niemal wszędzie.[1]) Mniej już natomiast elementarne i głębiej sięgające w lebesgue'owską teorję funkcji, są już zależności ustalone — prawie wszędzie — przez Denjoy dla funkcji ciągłych, a uogólnione następnie przez Panią G. C. Young — na dowolne funkcje mierzalne.[2]) Wyprowadzeniem ważnych tych i pożytecznych często związków zajmiemy się w tym §.

Lemmat 1. Jeżeli a jest punktem gęstości zewnętrznej zbioru Q, wówczas każdej liczbie $\varepsilon > 0$ *przyporządkować można taką liczbę* $\eta > 0$, *iż, jeśli tylko*

$$0 < a - x < \eta,$$

---

[1]) Oczywiście, w każdym indywidualnym punkcie cztery liczby pochodne są najzupełniej niezależne: dając sobie z góry cztery dowolne liczby $l+$, $L+$, l^-, L^- — byleby, rzecz prosta, takie, iż $l+ \leqslant L+$, $l^- \leqslant L^-$ — zbudować można, bez trudu, funkcję ciągłą $F(x)$, dla której, w pewnym punkcie a,

$$\underline{F}^{+}(a) = l+, \quad \overline{F}^{+}(a) = L+, \quad \underline{F}^{-}(a) = l^-, \quad \overline{F}^{-}(a) = L^-.$$

[2]) Denjoy, *Journ. des Mathém.*, (7), t. 1, (1915), p. 105; Young, *Proc, Lond. Math. Soc.*, (2), t. 19, (1917), p. 360). Por. także: *Fund. Math.*, t. 5, (1924) p. 98, oraz Ridder, *Spraw. Tow. Nauk. Warsz.*, t 23, p. 1.

wówczas zbiór Q zawiera punkty ξ, spełniające nierówność

$$(1) \qquad 1 \leqslant \frac{a-\xi}{a-x} \leqslant 1+\varepsilon .$$

D o w ó d. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią, mniejszą od jedności. Ponieważ a jest punktem gęstości zewnętrznej zbioru Q, przeto istnieje taka liczba $\eta > 0$, iż dla każdej liczby dodatniej $h < 2\eta$

$$(2) \qquad \left| \underset{\xi}{E} [\xi \in Q; \quad a-h \leqslant \xi \leqslant a] \right| > \frac{h}{1+\varepsilon} \cdot$$

Niech teraz x będzie dowolnym punktem, spełniającym nierówność

$$0 < a - x < \eta .$$

Mamy wówczas

$$0 < (1+\varepsilon)(a-x) \leqslant 2(a-x) \leqslant 2\eta$$

i podstawić możemy w (2)

$$h = (1+\varepsilon)(a-x),$$

otrzymując

$$\left| \underset{\xi}{E} [\xi \in Q; \quad x - \varepsilon(a-x) \leqslant \xi \leqslant a] \right| > a - x .$$

Ponieważ zaś, z drugiej strony, oczywiście

$$\left| \underset{\xi}{E} [\xi \in Q; \quad x \leqslant \xi \leqslant a] \right| \leqslant a - x ,$$

przeto, odejmując stronami tę nierówność od poprzedniej, otrzymujemy

$$\left| \underset{\xi}{E} [\xi \in Q; \quad x - \varepsilon(a-x) \leqslant \xi \leqslant x] \right| > 0 .$$

Istnieją tedy napewno punkty $\xi \in Q$ spełniające warunek

$$x - \varepsilon(a-x) \leqslant \xi \leqslant x ,$$

lub — co jest równoważne — związek (1).

L e m m a t 2. *Jeśli funkcja $F(x)$, określona i skończona w przedziale (a, b), posiada w każdym punkcie pewnego zbioru P o dodatniej mierze zewnętrznej prawostronną górną* (wzgl. dolną) *pochodną* $\overline{F}^{+}(x) < +\infty$, (wzgl. $\underline{F}^{+}(x) > -\infty$), *wówczas istnieje pewien zbiór*

$S \subset P$, o mierze zewnętrznej również dodatniej, taki, iż funkcja $F(x$ w każdym punkcie $x \in S$ jest różniczkowalna względem S i jej pochodna względem tego zbioru równa jest liczbie pochodnej $\underline{F}^-(x)$ (wzgl. $\overline{F}^-(x)$).

D o w ó d. Założmy, iż w każdym punkcie $x \in P$

$$\overline{F}^+(x) < +\infty.$$[1]

Oznaczmy, dla każdej liczby naturalnej n, przez P_n, zbiór tych wszystkich punktów $x \in P$, dla których nierówność

$$0 < y - x \leqslant \frac{1}{n}$$

pociąga za sobą — dla dowolnego punktu y — nierówność

$$F(y) - F(x) < n(y - x). \tag{3}$$

Niech, dalej, dla każdej liczby całkowitej i, P_n^i oznacza część zbioru P_n zawartą w przedziale $\left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$. Mamy wówczas

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} P_n^i,$$

ponieważ zaś $|P| > 0$, przeto istnieje napewno para wskaźników n_0, i_0, dla których

$$|P_{n_0}^{i_0}| > 0.$$

Oznaczmy przez Q mnogość tych wszystkich punktów zbioru $P_{n_0}^{i_0}$, które są punktami jego gęstości zewnętrznej. Na zasadzie twierdzenia L e b e s g u e'a „o gęstości" (III, § 6, tw. 5),

$$|Q| = |P_{n_0}^{i_0}| > 0,$$

przyczem zbiór Q składa się już wyłącznie z punktów swej gęstości zewnętrznej.

---

[1]) Zastępując funkcję $F(x)$ przez $-F(x)$, otrzymujemy analogiczny wynik dla przypadku, gdy w każdym punkcie $x \in P$

$$\underline{F}^+(x) > -\infty.$$

Niech
$$G(x) = F(x) - n_0 x.$$

Z nierówności (3) wynika wówczas, iż dla każdej pary punktów x_1, x_2 takich, iż
$$x_1 \in Q, \qquad 0 < x_2 - x_1 \leqslant \frac{1}{n_0}$$
spełniona jest nierówność
$$G(x_2) - G(x_1) = F(x_2) - F(x_1) - n_0(x_2 - x_1) < 0,$$
a więc

(4) $$G(x_2) < G(x_1).$$

W szczególności tedy nierówność powyższa spełniona jest dla każdej pary punktów $x_1 < x_2$ zbioru Q, jako że średnica tego zbioru jest conajwyżej równa $\frac{1}{n_0}$. Funkcja $G(x)$ jest tedy monotoniczna malejąca na Q, i z uwagi na twierdzenie Lebesgue'a (VIII, § 6, tw. 2) posiada w prawie każdym punkcie x tego zbioru pochodną skończoną względem Q; pochodną tę oznaczymy tu przez $\lambda(x)$.

Niech teraz $a \in Q$ będzie dowolnym punktem, w którym funkcja $G(x)$ jest różniczkowalna względem Q, i niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią mniejszą od 1. Każdemu punktowi $x < a$, położonemu dostatecznie blisko punktu a, przyporządkować możemy — w myśl lemmatu poprzedniego — taki punkt $x' \in Q$, iż

(5) $$1 \leqslant \frac{a - x'}{a - x} \leqslant 1 + \varepsilon.$$

Mamy wówczas przedewszystkiem
$$0 \leqslant x - x' \leqslant a - x' \leqslant \frac{1}{n_0},$$
a więc, w myśl (4),
$$G(x') \geqslant \begin{matrix} G(x) \\ G(a) \end{matrix},$$

i zważywszy na (5), otrzymujemy natychmiast

$$\frac{G(a)-G(x)}{a-x}=\frac{G(a)-G(x)}{a-x'}\,\frac{a-x'}{a-x}$$

$$\geqslant\frac{G(a)-G(x')}{a-x'}\,\frac{a-x'}{a-x}\geqslant(1+\varepsilon)\frac{G(a)-G(x')}{a-x'};$$

ponieważ zaś, gdy punkt x dąży do a ze strony lewej, wówczas, z uwagi na (5), punkt x' dąży również do a, przebiegając jednak tylko punkty zbioru Q, przeto

$$\underline{G}^-(a)\geqslant(1+\varepsilon)\,.\,\lambda(a),$$

i — jako że ε jest dowolną liczbą dodatnią, mniejszą od jedności —

$$\underline{G}^-(a)\geqslant\lambda(a).$$

Z drugiej strony, mamy oczywiście

$$\underline{G}^-(a)\leqslant\lambda(a),$$

ostatecznie zatem

(6) $$\underline{G}^-(a)=\lambda(a).$$

Przechodząc teraz do funkcji $F(x)=G(x)-nx$, stwierdzamy przedewszystkiem, iż funkcja ta jest, wraz z $G(x)$, różniczkowalna prawie wszędzie w Q względem tego zbioru; oznaczając przez $l(x)$ pochodną funkcji $F(x)$ względem Q w dowolnym punkcie $x\in Q$, w którym pochodna ta istnieje, mamy oczywiście

$$l(a)=\lambda(a)-n_0,\quad \underline{F}^-(a)=\underline{G}^-(a)-n_0,$$

a więc z (6)

(7) $$\underline{F}^-(a)=l(a).$$

Nierówność ta udowodniona jest w ten sposób w każdym punkcie mnogości Q, w którym funkcja G, a więc i F, jest względem Q różniczkowalna; usuwając tedy z Q zbiór — miary zero — tych wszystkich punktów, w których funkcja $G(x)$ nie jest względem Q różniczkowalna, otrzymujemy, jako resztę, pewien zbiór S, o dodatniej mierze zewnętrznej, w którym nierówność (7) spełniona jest już dokładnie wszędzie.

Lemmat nasz jest w ten sposób udowodniony całkowicie

Wynikają zeń natychmiast twierdzenia Denjoy i Pani Young. W celu uproszczenia ich sformułowania skorzystamy tu z terminologji, wprowadzonej przez Denjoy, który pochodne $\overline{F}^{+}(x)$ i $\underline{F}^{-}(x)$, jak również pochodne $\underline{F}^{+}(x)$ oraz $\overline{F}^{-}(x)$, nazywa pochodnemi wzajemnie przeciwległemi (dérivés opposés).

Możemy obecnie sformułować pierwsze z wymienionych twierdzeń w postaci następującej:

Twierdzenie 3. Jeżeli funkcja $F(x)$, skończona, w przedziale (a, b), posiada w każdym punkcie pewnego zbioru P, zawartego w tym przedziale, jedną z liczb pochodnych górnych (wzgl. dolnych) *Dini'ego różną od $+\infty$* (wzgl. od $-\infty$), *wówczas liczba ta jest prawie wszędzie w P skończona i równa swej liczbie pochodnej przeciwległej.*

Dowód. Załóżmy, iż w każdym punkcie P

$$\overline{F}^{+}(x) < +\infty; \tag{8}$$

udowodnimy, iż prawie wszędzie w P

$$-\infty < \overline{F}^{+}(x) = \underline{F}^{-}(x) < +\infty. \tag{9}$$

Analogiczne rozumowanie przeprowadza się, gdy warunek (8) zastąpiony jest przez stosowną nierówność dla którejkolwiek innej liczby pochodnej Dini'ego.

Oznaczmy przez Q mnogość tych punktów $x \in P$, w których związek (9) nie jest spełniony, i pokażemy, iż

$$|Q| = 0. \tag{10}$$

W samej rzeczy, załóżmy, iż

$$|Q| > 0.$$

Wówczas, z uwagi na lemmat poprzedni, zbiór Q zawierałby pewien podzbiór S o dodatniej mierze zewnętrznej, na którym funkcja $F(x)$ byłaby wszędzie różniczkowalna względem S i spełniała równość

$$\underline{F}^{-}(x) = l(x), \tag{11}$$

gdzie $l(x)$ oznacza pochodną funkcji F w punkcie $x \in S$ względem zbioru S.

Z ostatniej tej równości wynika w szczególności, iż liczba $\underline{F}^-(x)$ jest wszędzie skończona w zbiorze S; ponieważ zaś zbiór ten posiada dodatnią miarę zewnętrzną, przeto możemy doń oraz do pochodnej $\underline{F}^-(x)$ raz jeszcze zastosować lemmat poprzedni otrzymując pewien zbiór o dodatniej mierze zewnętrznej, $T \subset S \subset Q$, taki, iż liczba Dini'ego przeciwległa względem $\underline{F}^-(x)$, t. j. $\overline{F}^+(x)$, jest w każdym punkcie $x \in T$ równa pochodnej funkcji $F(x)$ w tym punkcie względem T; ponieważ jednak $T \subset S$, przeto pochodna ta jest identyczna z pochodną względem zbioru S, a więc, z uwagi na (11), mamy dla każdego punktu $x \in T \subset S \subset Q$

$$\underline{F}^-(x) = \overline{F}^+(x) = l(x) \neq \infty.$$

Zbiór T, ponieważ jest miary różnej od zera, jest napewno niepusty; dochodzimy tedy do sprzeczności z założeniem, iż związek (9) nie jest spełniony w żadnym punkcie zbioru $Q \supset T$.

Równość (10) jest w ten sposób udowodniona.

Twierdzenie 4. Jeżeli funkcja $F(x)$, określona i skończona w przedziale (a, b), posiada w każdym punkcie pewnego zbioru P dwie liczby pochodne Dini'ego z jednej strony skończone, wówczas funkcja ta jest w prawie każdym punkcie tego zbioru różniczkowalna.

Dowód. Niech P_1, wzgl. P_2, oznacza zbiór tych punktów zbioru P, w których skończone są pochodne Dini'ego $\overline{F}^+(x)$, $\underline{F}^+(x)$, wzgl. $\overline{F}^-(x)$, $\underline{F}^-(x)$.

Na zasadzie twierdzenia poprzedniego mamy wówczas prawie wszędzie w P_1

$$\overline{F}^+(x) = \underline{F}^-(x), \qquad \underline{F}^+(x) = \overline{F}^-(x). \tag{12}$$

Ponieważ jednak

$$\overline{F}^+(x) \geqslant \underline{F}^+(x), \qquad \overline{F}^-(x) \geqslant \underline{F}^-(x),$$

przeto z równości (12) wynika natychmiast, iż prawie wszędzie w zbiorze P_1 wszystkie cztery pochodne Dini'ego są równe. Ponieważ zaś — przynajmniej dwie z nich — są, z założenia, skończone, przeto temsamem udowodniona jest różniczkowalność funkcji $F(x)$ w prawie każdym punkcie mnogości P_1.

Analogicznie dowodzi się różniczkowalność rozważanej funkcji w prawie każdym punkcie zbioru P_2.

Twierdzenie 5. Jeżeli funkcja skończona $F(x)$ posiada w każdym punkcie pewnego zbioru P pochodną górną $\overline{F}(x)$ (wzgl. dolną $\underline{F}(x)$) *różną od* $+\infty$ (wzgl. od $-\infty$), *wówczas funkcja ta jest różniczkowalna w prawie każdym punkcie tego zbioru.*

Dowód. Jeśli w każdym punkcie $x \in P$

$$\overline{F}(x) \neq +\infty,$$

wówczas temsamem

$$\overline{F}^{+}(x) < +\infty \quad \text{oraz} \quad \overline{F}^{-}(x) < +\infty.$$

Z twierdzenia 3 wynika tedy, iż w zbiorze P skończone są prawie wszędzie wszystkie cztery liczby pochodne Dini'ego, a więc, na mocy twierdzenia poprzedniego, funkcja ta jest różniczkowalna w prawie każdym punkcie rozważanego zbioru.

Zanotujemy tu jeszcze następujące

Twierdzenie 6. Dla dowolnej funkcji skończonej $F(x)$ każdy ze zbiorów

$$(13) \qquad \begin{array}{l} \underset{x}{E}[\overline{F}^{+}(x) = -\infty], \quad \underset{x}{E}[\overline{F}^{-}(x) = -\infty], \\ \underset{x}{E}[\underline{F}_{+}(x) = +\infty], \quad \underset{x}{E}[\underline{F}_{-}(x) = +\infty] \end{array}$$

jest miary zero.

Dowód. Twierdzenie to najprościej wyprowadzić można bezpośrednio z lemmatu 2.[1]) Uważajmy np. pierwszy ze zbiorów (13); kładąc — dla skrócenia —

$$(14) \qquad Q = \underset{x}{E}[\overline{F}^{+}(x) = -\infty],$$

załóżmy, iż

$$|Q| > 0.$$

Na zasadzie wspomnianego lemmatu mnogość Q zawierałaby tedy pewien zbiór S ($|s| > 0$), względem którego, w każdym jego punkcie, funkcja $F(x)$ byłaby różniczkowalna, t. j. posiadała po-

[1]) Można je udowodnić zresztą łatwo zupełnie bezpośrednio; por. Banach, *Comptes Rendus*, t. 163, (1921), p. 457.

chodną skończoną. Jest to jednak najwidoczniej sprzeczne z definicją (14) zbioru Q. Mnogość Q jest przeto miary zero, co należało udowodnić.

W szczególności, z udowodnionego twierdzenia wynika, iż *zbiór punktów, w których funkcja posiada pochodną oznaczoną nieskończoną, jest zawsze miary zero.*

§ 4. Z rozważań § poprzedniego otrzymujemy łatwo następujące twierdzenie Denjoy, które ustala związek między liczbami pochodnemi Dini'ego a różniczkowalnością aproksymatywną (VIII, § 5):

Twierdzenie 7. Jeśli funkcja skończona i mierzalna $F(x)$ posiada w każdym punkcie pewnego zbioru P jedną z czterech pochodnych Dini'ego, np. $\overline{F}^{+}(x)$, skończoną, wówczas jest różniczkowalna aproksymatywnie prawie wszędzie w tym zbiorze i w prawie każdym jego punkcie

(1) $$F_a'(x) = \overline{F}^{+}(x).$$

Dowód. Udowodnimy najpierw, iż funkcja $F(x)$ jest w prawie każdym punkcie zbioru P różniczkowalna aproksymatywnie. Niech — w tym celu — Q oznacza mnogość tych punktów x zbioru P, w których funkcja nie jest aproksymatywnie różniczkowalna; załóżmy, iż

(2) $$|Q| > 0.$$

Wówczas z uwagi na lemmat 2 § poprzedniego mnogość Q zawiera pewną mnogość S o dodatniej mierze zewnętrznej, taką, iż w każdym punkcie $x \in S$ funkcja $F(x)$ jest względem S różniczkowalna.

Niech x_0 będzie dowolnym punktem mnogości S, będącym punktem jej gęstości zewnętrznej. Oznaczmy przez l wartość pochodnej funkcji $F(x)$ w punkcie x_0 względem mnogości S.

Widoczne jest wówczas, iż, dla każdej liczby dodatniej ε, zbiór

(3) $$\underset{x}{E}\left[l - \varepsilon \leqslant \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leqslant l + \varepsilon\right]$$

zawiera wszystkie punkty zbioru S położone dostatecznie blisko punktu x_0. Punkt x_0 jest tedy również punktem gęstości zewnętrznej zbioru (3). Ale funkcja $F(x)$ jest mierzalna; mierzalna jest tedy również i funkcja $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$, a — temsamem — mnogość (3); uzupełnienie jej posiada zatem w x_0 punkt rozrzedzenia; w szczególności tedy punkt x_0 jest punktem rozrzedzenia obydwu zbiorów

$$\underset{x}{E}\left[\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} > l+\varepsilon\right],$$

$$\underset{x}{E}\left[\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} < l-\varepsilon\right],$$

i z definicji krańcowych pochodnych aproksymatywnych (VIII, § 5) wynika natychmiast, iż:

$$l-\varepsilon \leqslant \underline{F}_a(x_0) \leqslant \overline{F}_a(x_0) \leqslant l+\varepsilon,$$

skąd, ponieważ ε jest dowolną liczbą dodatnią,

$$\overline{F}_a(x_0) = \underline{F}_a(x_0) = l \neq \infty.$$

Funkcja $F(x)$ jest tedy w punkcie $x_0 \epsilon S \subset Q$ różniczkowalna aproksymatywnie, co jednak sprzeczne jest z definicją zbioru Q.

Założenie (2) prowadzi tedy do sprzeczności, i funkcja $F(x)$ jest prawie wszędzie w zbiorze P różniczkowalna aproksymatywnie.

Należy jeszcze udowodnić, iż w prawie każdym punkcie zbioru P spełniona jest równość (1). Jest to jednak natychmiastową konsekwencją związków

$$\underline{F}^-(x) \leqslant F_a'(x) \leqslant \overline{F}^+(x),$$

$$\underline{F}^-(x) = \overline{F}^+(x),$$

z których pierwszy zachodzi w każdym punkcie różniczkowalności aproksymatywnej funkcji $F(x)$, drugi zaś — z uwagi na twierdzenie 3 — prawie wszędzie w zbiorze P.

* **§ 5.** W rozdz. poprzednim (§ 12) podaliśmy już pewne oszacowania na miarę obrazu $F(Q)$ dowolnej mnogości Q, w której funkcja $F(x)$ jest wszędzie różniczkowalna; z oszacowań tych wynika natychmiast, iż, *jeśli funkcja $F(x)$ jest różniczkowalna w każdym punkcie pewnego zbioru Q miary zero, wówczas obraz tego zbioru jest również miary zero.* Dalsze rozważania tego rozdziału

wymagać będą pewnego zaostrzenia tego twierdzenia: pokażemy mianowicie, iż na to, by spełniona była równość

$$|F(Q)| = 0,$$

wystarczy założyć, iż w każdym punkcie $x \in Q$ skończona jest jedna tylko z czterech pochodnych Dini'ego funkcji $F(x)$. Uogólnienie to — jakkolwiek formalnie nie odbiegające zbyt daleko od twierdzenia już udowodnionego — wymaga jednak bardziej nieco kłopotliwych rozważań. Udowodnimy przedewszystkiem następujący

Lemmat. *Jeśli funkcja $F(x)$ określona jest i skończona w przedziale (a, b) i jeśli w każdym punkcie x pewnego zbioru E, zawartego w tym przedziale,*

$$|\overline{F}^{+}(x)| < N,$$

wówczas

$$|F(E)| \leqslant 7N|E|.$$

Dowód. Oznaczmy, dla każdej liczby naturalnej n, przez E_n zbiór tych wszystkich punktów $x \in E$, dla których nierówność

(1) $0 < x' - x < \frac{1}{n}$ pociąga za sobą $F(x') - F(x) < N(x' - x)$

dla dowolnego punktu x' przedziału (a, b).

Zbiory E_n, a więc również i zbiory $F(E_n)$, tworzą ciąg monotoniczny niemalejący, przyczem

$$E = \sum_n E_n, \qquad F(E) = \sum_n F(E_n).$$

Stąd oczywiście:

$$|F(E)| = \lim_n |F(E_n)|.$$

Ustalmy chwilowo wartość wskaźnika n i uważajmy odpowiedni zbiór E_n. Niech G_n będzie zbiorem otwartym, zawierającym zbiór E_n i spełniającym warunek

$$|G_n| < |E_n| + \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Ponieważ, w każdym punkcie $x \in E$, $|\overline{F}^{+}(x)| < N$, przeto każdemu punktowi $x \in E_n$ przyporządkować możemy, dla każdej liczby $\varepsilon > 0$, punkt $y \in G_n$ spełniający warunki następujące:

$$0 < y - x < \frac{1}{2n},$$

$$|F(y) - F(x)| < N(y-x) < N\varepsilon.$$

Druga z powyższych nierówności (ponieważ liczba $\varepsilon > 0$ może być dowolnie mała) pozwala, przez zastosowanie do zbioru $F(E_n)$ twierdzenia V i t a l i'ego (II, § 8) otrzymać układ skończony przedziałów (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots m)$, spełniających warunki następujące:

(3) przedziały (x_i, y_i) zawarte są wszystkie w G_n;

(4) $$x_i \in E_n \quad \text{oraz} \quad 0 < y_i - x_i < \frac{1}{2n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

(5) każde dwa z pośród przedziałów $[F(x_i), F(y_i)]$ [1]) są rozłączne;

(6) $$|F(E_n)| < |P| + \frac{1}{n},$$

gdzie P oznacza sumę przedziałów $[F(x_i), F(y_i)]$;

(7) $$|F(y_i) - F(x_i)| < N.(y_i - x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Oznaczmy teraz, dla każdej pary liczb h, k $(= 1, 2, \ldots, m)$, przez $s(h, k)$ długość większego z pośród przedziałów (x_h, y_h), (x_k, y_k), oraz przez $d(h, k)$ odległość wzajemną przedziałów $[F(x_h), F(y_h)]$, $[F(x_k), F(y_k)]$.

Pokażemy przedewszystkiem, iż, j e ś l i p r z e d z i a ł y (x_h, y_h), (x_k, y_k) m a j ą p u n k t y w s p ó l n e, w ó w c z a s:

(8) $$d(h, k) \leqslant 2N.s(h, k).$$

W samej rzeczy, zważywszy na (5), przedziały $[F(x_h), F(y_h)]$, $[F(x_k), F(y_k)]$ są rozłączne, założyć przeto możemy, iż pierwszy z nich poprzedza drugi, a więc — napewno —

(9) $$F(x_k) < F(y_k).$$

---

[1]) Dla oznaczenia przedziału, którego krańcami są punkty $F(x_i)$, $F(y_i)$, używamy tu znaku $[F(x_i), F(y_i)]$; korzystając jednak z tego znakowania, nie przesądzamy bynajmniej, iż $F(x_i)$ jest lewym, $F(y_i)$ zaś prawym krańcem tego przedziału. W rzeczy samej, jakkolwiek $x_i < y_i$, nie wiemy nic o porządku punktów $F(x_i)$, $F(y_i)$.

Z drugiej strony, przedziały (x_h, y_h) i (x_k, y_k) — na osi odciętych — mają punkty wspólne, a więc $x_h < y_k$, i z uwagi na (4)

$$0 < y_k - x_h < 2s(h, k) < \frac{1}{n};$$

na mocy przeto (9) oraz (1):

$$0 < F(y_k) - F(x_h) < N.(y_k - x_h) < 2N.s(h, k),$$

skąd wynika już oczywiście nierówność (8).

Oznaczymy teraz przez I_1 największy z pośród wszystkich przedziałów (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, m)$, przez I_2 — największy z kolei z pośród przedziałów (x_i, y_i), niezachodzących na I_1, i t. d.; ogólnie, określimy indukcyjnie przedział I_j $(j > 1)$ jako największy z pośród tych przedziałów (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots m)$, które nie zachodzą na żaden z wybranych poprzednio przedziałów $I_1, I_2, \ldots I_{j-1}$. Otrzymujemy w ten sposób skończony ciąg niezachodzących na siebie przedziałów, wyjętych z ciągu przedziałów (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots m)$,

$$I_1, I_2, \ldots, I_p \qquad (p < m),$$

takich, iż każdy z przedziałów (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots m)$ zachodzi na jeden przynajmniej z przedziałów I_k, od którego w żadnym razie nie jest większy.

Oznaczmy przez P_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ sumę wszystkich przedziałów $[F(x_i), F(y_i)]$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, odpowiadających przedziałom (x_i, y_i), które zachodzą na przedział I_j i których długości nie przewyższają długości tego przedziału. Będziemy mieli, z uwagi na (6),

$$|F(E_n)| < \sum_{j=1}^{p} |P_j| + \frac{1}{n}.$$

Z drugiej strony z (8) i (7) wynika łatwo, iż średnica — a więc tembardziej miara — zbioru P_j jest równa conajwyżej liczbie $7N.|I_j|$. Na mocy tedy nierówności poprzedniej oraz (3) i (2)

$$|F(E_n)| < 7N.\sum_{j=1}^{p} |I_j| + \frac{1}{n} < 7N.|G_n| + \frac{1}{n} < 7N.|E_n| + \frac{7N+1}{n}.$$

Związek powyższy ustalony został dla dowolnego ze zbiorów E_n; przechodząc tedy do granicy wraz z n, otrzymujemy

$$|F(E)| \leqslant 7N . |E|,$$

co należało udowodnić.

Twierdzenie 8. Jeśli funkcja $F(x)$, określona i skończona w pewnym przedziale (a, b), posiada w niemal każdym punkcie pewnego zbioru E miary zero jedną jakąkolwiek z czterech pochodnych Dini'ego skończoną, wówczas

$$|F(E)| = 0 .$$

Dowód. Oznaczmy, dla każdej liczby naturalnej n, odp. przez A_n, B_n, C_n, D_n zbiory punktów $x \in E$, w których odp. liczby

$$|\overline{F}^{+}(x)|, \quad |\overline{F}^{-}(x)|, \quad |\underline{F}^{+}(x)|, \quad |\underline{F}^{-}(x)|,$$

są mniejsze od n.

Mamy wówczas na zasadzie lemmatu poprzedniego, dla każdego n:

$$|F(A_n)| \leqslant 7n . |A_n| = 0,$$

i analogicznie również:

$$|F(B_n)| = |F(C_n)| = |F(D_n)| = 0 .$$

Ponieważ zaś

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n + C_n + D_n) + Q,$$

gdzie Q jest pewnym zbiorem przeliczalnym, przeto również:

$$|F(E)| = 0 .$$

Twierdzenie nasze jest tedy udowodnione.

Wynika zeń, jako natychmiastowy wniosek, następujące

Twierdzenie 9. Funkcja skończona i określona w przedziale (a, b), która w niemal każdym punkcie tego przedziału posiada skończoną przynajmniej jedną ze swych czterech pochodnych Dini'ego, spełnia w tym przedziale warunek (N).

Bezpośrednią konsekwencją lemmatu tego § jest również twierdzenie następujące: *jeśli funkcja $F(x)$ w niemal każdym punkcie pewnego zbioru E posiada przynajmniej jedną z czterech pochodnych Dini'ego równą zeru, wówczas zbiór*

$F(E)$ jest miary zero. Dla funkcji ciągłych — lub ogólniej — dla funkcji ciągłych w sensie Darboux[1]) otrzymuje się stąd natychmiast twierdzenie: *jeśli funkcja $F(x)$, ciągła — lub ogólniej — ciągła w sensie Darboux — w przedziale (a, b), posiada w niemal każdym punkcie tego przedziału przynajmniej jedną ze swych czterech pochodnych Dini'ego równą zeru, wówczas funkcja ta jest stała w (a, b).*

Jeśli w sformułowaniu powyższego twierdzenia założyć, iż *w niemal każdym punkcie przedziału jest zerem jedna z pochodnych Dini'ego z określonej strony (ustalonej jednakowo dla wszystkich rozważanych punktów)*, wówczas twierdzenie to byłoby zawarte oczywiście w twierdzeniu Scheeffera (VII, § 9); w sformułowaniu ogólnem jest odeń niezależne.

Zauważymy tu jeszcze, iż, opierając się na twierdzeniach § 3, możemy łatwo wzmocnić nierówność ustaloną w lemmacie udowodnionym na początku tego §, zastępując w niej spółczynnik $7N$ wprost przez N; dowód — analogiczny jak lemmatu podanego w § 12 rozdz. poprzedniego. Możemy iść w tym kierunku dalej jeszcze nieco i uogólnić twierdzenie 7 rozdz. VIII,[2]) jak następuje: *jeśli funkcja $F(x)$ posiada w każdym punkcie pewnego zbioru mierzalnego Q jedną z czterech pochodnych Dini'ego, np. $\bar{F}^+(x)$, skończoną, wówczas*

$$|F(Q)| \leq \int_Q |\bar{F}^+(x)|\, dx.$$

***Warunek (T_1) Banacha.**

§ **6.** Mówimy, iż funkcja $F(x)$ spełnia w przedziale (a, b) warunek (T_1), jeśli prawie każdą swą wartość przyjmuje w tym przedziale skończoną tylko ilość razy.

Pokażemy, korzystając z twierdzeń §§ poprzednich, iż własność ta — wyróżniona przez Banacha[3]) — równoważna jest pewnej własności różniczkowej funkcji ciągłych. Udowodnimy przedewszystkiem następujący

Lemmat. Jeśli funkcja ciągła $F(x)$ nie posiada w żadnym punkcie x pewnego zbioru Q pochodnej oznaczonej — skończonej ani nieskończonej — i jeśli ponadto każdy punkt $x \in Q$ jest punktem odosobnionym[4]) zbioru $\underset{\xi}{E}[F(\xi) = F(x)]$, wówczas

$$(1) \qquad |F(Q)| = |Q| = 0.$$

---

[1]) Funkcja $F(x)$ nazywa się ciągła w sensie Darboux w przedziale (a, b), jeśli w każdym podprzedziale (α, β) tego przedziału przyjmuje wszystkie wartości zawarte między $F(\alpha)$ a $F(\beta)$.

[2]) Por. odsyłacz u dołu p. 229.

[3]) *Fund. Math.*, t. 8, (1926), p. 167.

[4]) t. zn. nie jest jego punktem skupienia.

D o w ó d. Ponieważ funkcja $F(x)$ jest ciągła, każdy zaś punkt $x \in Q$ jest punktem odosobnionym odpowiadającego mu zbioru $\underset{\xi}{E}[F(\xi) = F(x)]$, przeto każdemu takiemu punktowi odpowiada pewna taka liczba $h > 0$, iż wyrażenie $F(\xi) - F(x)$ zachowuje znak stały, jeśli $|\xi - x| < h$ i jeśli ξ znajduje się z jednej strony punktu x; wyrażenie to nadto nie zmienia znaku, gdy ξ przechodzi z jednej strony punktu x na drugą, wtedy tylko, jeśli w punkcie tym funkcja osiąga e x t r e m u m właściwe, a więc jeśli punkt ten należy (§ 2, tw. 1) do pewnego przeliczalnego zbioru punktów. Niemal wszędzie tedy w zbiorze Q wszystkie cztery pochodne D i n i'ego posiadają znak wspólny i możemy położyć

(2) $$Q = A + B + N,$$

gdzie N jest pewnym zbiorem conajwyżej przeliczalnym, zaś A, wzgl. B, mnogością tych punktów zbioru Q, w których wszystkie cztery pochodne D i n i'ego są nieujemne, wzgl. niedodatnie. Pokażemy, iż

(3) $$|F(A)| = |A| = 0.$$

W samej rzeczy, ponieważ — z założenia — funkcja $F(x)$ nie posiada pochodnej oznaczonej w żadnym punkcie zbioru Q, zatem, w każdym punkcie $x \in A \subset Q$,

(4) $$\overline{F}(x) > \underline{F}(x) \geqslant 0,$$

i z twierdzenia 5 (§ 3) otrzymujemy

(5) $$|A| = 0.$$

Nadto, w myśl nierówności (4), pochodna dolna $\underline{F}(x)$ jest skończona w każdym punkcie $x \in A$, a więc, z uwagi na (5) oraz twierdzenie 8 § poprzedniego,[1])

$$|F(A)| = 0,$$

co łącznie z (5) daje żądany związek (3). Zupełnie analogicznie dowodzimy, iż

---

[1]) Korzystając z metod, stosowanych niż. w § 12, można tu uniknąć odwoływania się do twierdzenia 8 i oprzeć się na twierdzeniu prostszem, orzekającem, iż każda funkcja bezwzględnie ciągła na zbiorze spełnia na tym zbiorze warunek (N) (VIII, § 11).

$$|F(B)| = |B| = 0$$

i — zważywszy na (2) — otrzymujemy żądaną równość (1).

Twierdzenie 10. Na to, aby funkcja $F(x)$, ciągła i skończona w przedziale (a, b), spełniała w tym przedziale warunek (T_1), konieczne jest i wystarcza, aby obraz zbioru tych punktów przedziału, w których funkcja $F(x)$ nie posiada pochodnej oznaczonej (skończonej ani nieskończonej), był miary zero.

Dowód. Oznaczmy przez R zbiór tych punktów przedziału, w których funkcja $F(x)$ nie posiada pochodnej oznaczonej, oraz przez S zbiór tych wartości, które $F(x)$ przyjmuje nieskończenie wiele razy. Należy udowodnić, iż związki

$$|S| = 0 \qquad \text{oraz} \qquad |F(R)| = 0$$

są sobie równoważne

1° Załóżmy najpierw, iż

(6) $$|S| = 0.$$

Oznaczmy przez R' zbiór tych wszystkich punktów x, dla których $F(x) \in S$. Mamy $F(R') \subset S$, a więc, z uwagi na (6),

(7) $$|F(R')| = 0.$$

Z drugiej strony, dla każdego punktu $x \in R - R'$ zbiór $\underset{\xi}{E}[F(\xi) = F(x)]$ jest zawsze skończony, a więc — temsamem — odosobniony [1]). Na mocy tedy lemmatu poprzedniego

$$|F(R - R')| = 0,$$

co łącznie z (7) daje

$$|F(R)| = 0.$$

2° Załóżmy, z kolei, odwrotnie, iż

(8) $$|F(R)| = 0.$$

Pokażemy przedewszystkiem, iż

(9) $$S - F(R) \subset F(H),$$

---

[1]) t. zn. iż wszystkie jego punkty są odosobnione.

gdzie H oznacza mnogość tych wszystkich punktów przedziału, w których funkcja $F(x)$ posiada pochodną oznaczoną równą zeru. W samej rzeczy, jeśli

$$y \in S - F(R),$$

wówczas — z jednej strony — we wszystkich punktach zbioru $\underset{\xi}{E}[F(\xi) = y]$ funkcja $F(x)$ posiada pochodną, z drugiej zaś — zbiór ten jest nieskończony i—z uwagi na ciągłość funkcji $F(x)$— domknięty. Niech ξ_0 będzie dowolnym jego punktem skupienia. Mamy wówczas

$$F'(\xi_0) = 0,$$

a więc

$$y = F(\xi_0) \in H,$$

skąd wynika oczywiście związek (9). Ponieważ zaś, na mocy twierdzenia 7 rozdz. poprzedniego (§ 12) [1]),

$$|F(H)| = 0,$$

przeto również

$$|S - F(R)| = 0,$$

i — zważywszy na (8) —

$$|S| = 0.$$

Twierdzenie 11. Każda funkcja ciągła, o wahaniu skończonem w jakimś przedziale, spełnia w tym przedziale warunek (T_1).

Dowód. Niech $F(x)$ będzie dowolną funkcją ciągłą o wahaniu skończonem w przedziale (a, b). Ażeby udowodnić, iż funkcja ta spełnia w tym przedziale warunek (T_1), wystarczy, w myśl twierdzenia poprzedniego, pokazać, iż

$$|F(R)| = 0, \tag{10}$$

gdzie R oznacza mnogość tych punktów, w których funkcja $F(x)$ nie posiada pochodnej oznaczonej. [2])

---

[1]) Możnaby również odwołać się do lemmatu § poprzedniego, którego dowód jest wszakże bardziej skomplikowany aniżeli cytowanego twierdzenia.

[2]) Dowód bezpośredni w pracach: Banach, *Fund. Math.*, t. 7, (1925), p. 229; Vitali, ibid., t. 8, (1926), p. 181. Por. także: Jansen, *Über einige stetige Kurven* etc., (Inaugural-dissertation), Königsberg, (1907).

Oznaczmy w tym celu przez l_0 długość krzywej $y = F(x)$ w przedziale (a, b)[1]. Z uwagi na ciągłość funkcji $F(x)$, długość łuku rozważanej krzywej w przedziale (a, x) przebiega — rosnąc — wszystkie wartości przedziału $(0, l_0)$, gdy x zmienia się w przedziale (a, b). Oznaczymy, ogólnie, przez $X(l)$ $(0 \leqslant l \leqslant l_0)$ tę wartość zmiennej x, której odpowiada długość l łuku; przez $Y(l)$ oznaczymy z kolei odpowiadającą wartość funkcji $y = F(x)$, kładąc

$$Y(l) = F[X(l)].$$

Funkcje

$$x = X(l), \quad y = Y(l)$$

określają krzywą, której parametr pokrywa się z długością jej łuku. Mamy tedy, w myśl twierdzenia 8 rozdz. III (§ 9), prawie wszędzie w przedziale $(0, l_0)$

$$[X'(l)]^2 + [Y'(l)]^2 = 1. \tag{11}$$

Spostrzegamy natychmiast, iż, jeśli dla pewnej wartości l istnieją obydwie pochodne $X'(l)$, $Y'(l)$ i nie są jednocześnie równe zeru, wówczas w odpowiadającym punkcie $x = X(l)$ funkcja $F(x)$ posiada pochodną oznaczoną równą ilorazowi $Y'(l) : X'(l)$ (który — rzecz prosta — może być nieskończony). Oznaczając tedy przez L zbiór tych wszystkich wartości parametru l, dla których pochodne $X'(l)$, $Y'(l)$ bądź nie istnieją, bądź też istnieją, lecz znikają równocześnie, mamy

$$R \subset X(L), \qquad F(R) \subset Y(L); \tag{12}$$

zarazem, z uwagi na (11),

$$|L| = 0,$$

i ponieważ parametr l oznacza długość łuku, przeto tembardziej

$$|Y(L)| = 0,$$

skąd, na mocy drugiego ze związków (12), wynika żądana równość (10).

W twierdzeniu powyższem założenie c i ą g ł o ś c i funkcji $F(x)$ nie jest istotne i usunięcie tego warunku wymaga nieznacznego tylko omówienia. Można iść dalej jeszcze i dowieść, iż *obraz zbioru wartości, jakie dowolna funkcja*

---

[1]) III, § 9. Formalnie, zgodnie z terminologją ustaloną w rozdz. III należy tu mówić o k r z y w e j: $x = t$, $y = F(t)$.

(VBG^*) osiąga w punktach, w których nie posiada pochodnej oznaczonej, jest zawsze miary zero; dowód przebiega najzupełniej analogicznie do dowodu twierdzeń 10 i 11 rozdz. poprzedniego (§§ 14, 15). Stąd, w myśl twierdzenia 10, *każda funkcja (VBG^*) ciągła*[1]) *spełnia warunek* (T_1).

Natomiast, funkcje ciągłe (VBG), a nawet funkcje (ACG), nie spełniają już naogół rozważanego warunku. Jeżeli mianowicie $F(x)$ oznacza funkcję, która — w § 10 rozdz. poprzedniego (p. 223) — podana była jako przykład funkcji (ACG) nie-różniczkowalnej w zbiorze miary dodatniej, wówczas łatwo jest zauważyć, iż funkcja $F(x)+x$ nie spełnia warunku (T_1) w przedziale (0,1).

***Warunek (T_2) Banacha.**

§ 7. Zauważyliśmy w § poprzednim, iż funkcje (VBG), nawet ciągłe, nie spełniają naogół warunku (T_1). Funkcje te czynią natomiast zadość pewnemu warunkowi ogólniejszemu, który Banach[2]) nazwał warunkiem (T_2).

Mówimy, iż funkcja $F(x)$ spełnia w przedziale (a, b) warunek (T_2), jeśli przyjmuje w tym przedziale każdą swą wartość conajwyżej tylko przeliczalną mnogość razy.

Twierdzenie 12. Każda funkcja ciągła[3]), *(VBG) w przedziale (a, b), spełnia w tym przedziale warunek (T_2).*

Dowód. W samej rzeczy, jeśli funkcja $F(x)$, ciągła w przedziale (a, b), jest w nim (VBG), wówczas przedział ten jest sumą ciągu zbiorów domkniętych P_n, na których $F(x)$ jest o wahaniu skończonem. Oznaczmy, dla każdego n, przez $F_n(x)$ funkcję równą $F(x)$, jeśli $x \in P_n$, oraz linjową w przedziałach przyległych do P_n. Określone w ten sposób funkcje są — wszystkie — o wahaniu skończonem w całym przedziale (a, b) i, na mocy twierdzenia 11 § poprzedniego, każde z równań

$$F_n(x) = a$$

posiada — dla prawie każdej wartości a — skończoną conajwyżej ilość pierwiastków. Temsamem, równanie

$$F(x) = a$$

---

[1]) Łatwo zauważyć, iż w tym przypadku założenie ciągłości jest już niezbędne: w samej rzeczy, funkcja $F(x) = \sin\frac{1}{x}$ ($F(0) = 0$) jest funkcja ~~(ACG^*)~~ (VBG^*), nie spełniając oczywiście warunku (T_1).

[2]) *Fund. Math.*, t. 8, (1926), p. 167.

[3]) Założenie ciągłości funkcji $F(x)$ daje się łatwo usunąć i z tego twierdzenia (podobnie jak z tw. 11).

posiada — dla prawie każdej wartości a — conajwyżej przeliczalną mnogość rozwiązań i funkcja $F(x)$ spełnia warunek (T_2).

§ 8. Z rozważań tego § wynikać będzie, iż każda funkcja, która spełnia warunek (T_2), — jakkolwiek może nie być naogół nigdzie różniczkowalna — posiada jednak zawsze pochodną oznaczoną w pewnej nieprzeliczalnej mnogości punktów. Co więcej, okaże się, iż na to, aby funkcja, spełniająca warunek (T_2), była monotoniczna, wystarczy już tylko, aby pochodna jej zachowywała znak stały niemal wszędzie tam tylko, gdzie istnieje. Udowodnimy przedewszystkiem następujący

Lemmat. Jeśli P jest dowolnym zbiorem domkniętym przeliczalnym, wówczas zawiera zawsze dwa punkty odosobnione a, b, takie, iż przedział (a, b) nie zawiera już wewnątrz żadnego punktu zbioru P.

Dowód. 1^0 Lemmat jest widoczny w przypadku, gdy zbiór P wogóle nie posiada punktów skupienia. Również, jeśli zbiór P zawiera dokładnie jeden tylko punkt skupienia ξ, wówczas pozostałe punkty zbioru P tworzą — z jednej conajmniej strony punktu ξ — ciąg monotoniczny nieskończony. Spostrzegamy natychmiast iż każde dwa kolejne punkty takiego ciągu dają żądaną parę punktów.

2^0 Niech teraz P będzie dowolnym, domkniętym i przeliczalnym, zbiorem punktów i niech P_1 oznacza zbiór jego punktów odosobnionych. Przypadek, gdy $P = P_1$, został już wyżej rozstrzygnięty; można tedy założyć, iż zbiór $P - P_1$ nie jest pusty; ponieważ zaś jest oczywiście domknięty i przeliczalny, przeto zawiera napewno punkty odosobnione.[1]) Niech $\xi \varepsilon P - P_1$ będzie takim punktem; pewien, dostatecznie mały, przedział $(\xi - h, \xi + h)$ nie zawiera tedy — prócz punktu ξ — żadnych innych punktów zbioru $P - P_1$; z drugiej strony, punkt ξ jest oczywiście punktem skupienia zbioru P_1, i część zbioru P, zawarta w przedziale $(\xi - h, \xi + h)$, posiada przeto dokładnie jeden punkt skupienia, mianowicie punkt ξ. W myśl tedy 1^0 możemy z niej wyjąć parę punktów, spełniającą żądane warunki.

Twierdzenie 13. Jeżeli funkcja $F(x)$, skończona i ciągła w przedziale (a, b), spełnia w tym przedziale warunek (T_2), wówczas

[1]) W przeciwnym bowiem wypadku zbiór $P - P_1$ byłby doskonały, a więc nieprzeliczalny (por. np. Sierpiński, *T. O.*, p. 217, lub *Wstęp*, p. 105.

(1) $$-|F(N)| \leqslant F(b) - F(a) \leqslant |F(P)|,$$

gdzie P, wzgl. N, oznacza zbiór tych wszystkich punktów przedziału (a, b), w których funkcja $F(x)$ posiada pochodną oznaczoną nieujemną, wzgl. niedodatnią.

Dowód. Wystarczy udowodnić tylko, iż

(2) $$F(b) - F(a) \leqslant |F(P)|;$$

zastępując funkcję $F(x)$ przez $F(-x)$, przechodzimy natychmiast do drugiej z nierówności zawartych w związku (1).

Możemy założyć, iż

(3) $$F(b) > F(a),$$

ponieważ w przypadku przeciwnym nierówność (2) staje się oczywiście banalna.

Niech Y oznacza zbiór tych wartości funkcji $F(x)$, które funkcja ta przyjmuje conajwyżej przeliczalną ilość razy w przedziale (a, b). Mamy wówczas — jako że funkcja ta spełnia, z założenia, warunek (T_2) —

(4) $$F(b) - F(a) \leqslant |Y|.$$

Pokażemy przedewszystkiem, iż każdemu punktowi $y \in Y$ przyporządkować można jednoznacznie pewien punkt x_y przedziału (a, b), spełniający warunki następujące:

(5) $$F(x_y) = y;$$

(6) $$\bar{F}(x_y) \geqslant 0;$$

(7) x_y jest punktem odosobnionym zbioru $\underset{\xi}{E}[F(\xi) = F(x_y)]$.

W samej rzeczy, niech $y \in Y$; rozróżnimy dwa przypadki:

1^0 Zbiór $\underset{\xi}{E}[F(\xi) = y]$ składa się z jednego tylko punktu, który oznaczymy wówczas przez x_y. Punkt ten spełnia oczywiście warunki (5), (7), a nadto — zważywszy na (3) — spełnia zarazem warunek (6).

2^0 Zbiór $\underset{\xi}{E}[F(\xi) = y]$ zawiera więcej niż jeden punkt, ponieważ zaś jest conajwyżej przeliczalny, przeto — na mocy lemmatu poprzedniego — zawiera napewno parę punktów odosobnionych takich, iż przedział, zawarty między niemi, nie posiada już w swem wnętrzu punktów rozważanego zbioru. W jednym tedy przynajmniej z tych dwu punktów pochodna górna funkcji F jest nieujemna. Punkt ten oznaczymy w tym przypadku znów przez x_y i stwierdzamy natychmiast, iż spełnione są przezeń również warunki (5), (6), (7).

Niech teraz X będzie zbiorem wszystkich, wyznaczonych w ten sposób punktów x_y dla $y \in Y$, i niech z kolei X_1, oznacza zbiór tych punktów $x \in X$, w których funkcja $F(x)$ posiada pochodną oznaczoną. Mamy wówczas, z jednej strony, z uwagi na (6),

$$X_1 \subset P,$$

z drugiej zaś na mocy (7) oraz lemmatu § 6,

$$|F(X_1)| = |F(X)|,$$

a więc, zważywszy na (4),

$$F(b) - F(a) \leqslant |Y| = |F(X)| = |F(X_1)| \leqslant |F(P)|,$$

co należało udowodnić.

Z udowodnionego twierdzenia wynika jako bezpośredni wniosek następujące

Twierdzenie 14. Na to, aby funkcja skończona i ciągła $F(x)$, spełniająca w przedziale (a, b) warunek (T_2) (a więc, w szczególności, każda funkcja ciągła o uogólnionem wahaniu skończonem,[1])), *była monotoniczna niemalejąca w tym przedziale, konieczne jest i wystarcza, aby pochodna jej $F'(x)$, była nieujemna w niemal każdym punkcie, w którym istnieje.*

D o w ó d. K o n i e c z n o ś ć powyższego warunku jest widoczna. D o s t a t e c z n o ś ć wynika natychmiast z nierówności

$$0 \leqslant F(x_2) - F(x_1),$$

która, jeśli warunek nasz jest spełniony, zachodzi — na mocy twierdzenia poprzedniego — dla każdej pary punktów x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ przedziału (a, b).

---

[1]) Twierdzenie to — dla zwykłych funkcji o wahaniu skończonem — wynika także z pewnych twierdzeń d e l a V a l l é e - P o u s s i n a (*l. L.*, p. 93).

***Funkcje spełniające warunek (N).**

§ 9. Twierdzenia § poprzedniego, dotyczące funkcji spełniających warunek (T_2), przenoszą się — w szczególności—na funkcje spełniające warunek (N), a nawet — dla funkcji tych — mogą być w sposób istotny zaostrzone. Udowodnimy tu mianowicie, iż *warunek* (N) *pociąga za sobą zawsze warunek* (T_2). Dowód tego twierdzenia — które zawdzięczamy Banachowi[1]) — opiera się na dwu lemmatach następujących

Lemmat 1. Jeżeli $F(x)$ jest dowolną funkcją ciągłą w przedziale (a, b) i Q dowolnym zbiorem domkniętym, zawartym w tym przedziale, wówczas istnieje zawsze taki zbiór mierzalny $R \subset Q$, iż każda wartość $y \in F(Q)$ przyjmowana jest na R dokładnie raz jeden.

Dowód. Oznaczmy, dla każdej wartości $y \in F(Q)$, przez x_y dolny kres zbioru $Q.\underset{x}{E}[F(x) = y]$, domkniętego z uwagi na ciągłość funkcji F. Niech R będzie zbiorem wszystkich określonych w ten sposób punktów x_y dla $y \in F(Q)$. Na zbiorze tym, który zawiera się oczywiście w Q, każda wartość $y \in F(Q)$ przyjmowana jest przez funkcję $F(x)$ dokładnie raz jeden. Pozostaje przeto udowodnić tylko, iż zbiór R jest mierzalny.

Oznaczmy w tym celu, dla każdej liczby naturalnej n, przez P_n mnogość tych punktów x przedziału (a, b), dla których istnieją w tym przedziale punkty $\xi \in Q$, spełniające warunki

$$F(\xi) = F(x), \qquad x - \xi \geqslant \frac{1}{n}.$$

Mamy wówczas

$$R = Q - \sum_{n=1}^{\infty} P_n.$$

Ale z uwagi na ciągłość funkcji $F(x)$ każdy ze zbiorów P_n jest, jak łatwo zauważyć, domknięty; zbiór Q jest również — z założenia — domknięty. Mnogość R jest przeto oczywiście mierzalna.

Lemmat 2. Jeżeli $F(x)$ jest dowolną funkcją ciągłą, spełniającą warunek (N) w przedziale (a, b), i Q dowolnym zbiorem mie-

[1]) *Fund. Math.*, t. 8, (1926), p. 169.

rzalnym, zawartym w tym przedziale, wówczas istnieje zawsze zbiór mierzalny $R \subset Q$ taki, iż

1° $$|F(Q) - F(R)| = 0,$$

2° *każda wartość przyjmowana jest przez funkcję $F(x)$ na R conajwyżej tylko przeliczalną mnogość razy.*

D o w ó d. Zbiór Q, jako mierzalny, przedstawić możemy w postaci

$$Q = \sum_n Q_n + M,$$

gdzie $\{Q_n\}$ jest ciągiem zbiorów domkniętych i M pewnym zbiorem miary zero. Na mocy lemmatu poprzedniego każdemu zbiorowi Q_n przyporządkować możemy pewien zbiór mierzalny $R_n \subset Q_n$ taki, iż każda wartość $y \in F(Q_n)$ przyjmowana jest na R_n dokładnie raz jeden. Kładąc tedy

$$R = \sum_n R_n,$$

otrzymujemy zbiór mierzalny R, na którym każda wartość przyjmowana jest conajwyżej przeliczalną mnogość razy. Z drugiej strony, ponieważ funkcja $F(x)$ spełnia warunek (N), zatem

$$|F(M)| = 0,$$

a więc, zważywszy na

$$F(Q) - F(R) \subset F(M),$$

mamy

$$|F(Q) - F(R)| = 0.$$

Zbiór R spełnia tedy wszystkie żądane warunki.

T w i e r d z e n i e 15. Jeżeli funkcja ciągła[1]) *$F(x)$ spełnia w przedziale $I = (a, b)$ warunek (N), wówczas spełnia zarazem warunek (T_2).*

D o w ó d. Przyjmiemy następujące oznaczenia.

Dla każdego zbioru mierzalnego $Q \subset I$ nazwiemy zbiorem Q_* każdy zbiór mierzalny $R \subset Q$ taki, iż

---

[1]) Twierdzenie to rozszerza się bez trudu, dzięki twierdzeniu Ł u z i n a (II, § 13), na dowolne funkcje mierzalne; założenie m i e r z a l n o ś c i jest tu niezbędne.

1° $$|F(Q)-F(R)|=0;$$

2° każda wartość przyjmowana jest przez funkcję F na R conajwyżej tylko przeliczalną mnogość razy.

Na mocy lemmatu poprzedniego każda mnogość mierzalna $Q \subset I$ zawiera zbiory Q_*; górny kres miar tych zbiorów oznaczymy tu — dla skrócenia — przez $\mu(Q)$.

Zauważymy przedewszystkiem, iż każdy zbiór mierzalny $Q \subset I$ zawiera zbiór Q_*, którego miara równa jest $\mu(Q)$. W samej rzeczy, dla każdej liczby naturalnej n, istnieje napewno taki zbiór Q_*, R_n, iż

(1) $$|R_n| > \mu(Q) - \frac{1}{n}\,.$$

Kładąc tedy

$$R = \sum_n R_n\,,$$

otrzymujemy zbiór R, którego miara równa jest oczywiście, z uwagi na (1), liczbie $\mu(Q)$ i który — jako suma ciągu zbiorów Q_* — jest również pewnym zbiorem Q_*.

Niech teraz T będzie pewnym zbiorem I_*, spełniającym warunek

$$|T| = \mu(I)\,.$$

Wówczas

$$\mu(I-T)=0\,,$$

a więc, ponieważ funkcja $F(x)$ spełnia warunek (N), przeto

(2) $$|F(I-T)|=0\,.$$

Ale każda wartość, której funkcja $F(x)$ nie przyjmuje w zbiorze $I-T$, przyjmowana być może tylko w zbiorze T, a więc — conajwyżej tylko przeliczalną mnogość razy. Funkcja $F(x)$ spełnia tedy warunek (T_2).

Z twierdzenia powyższego wyprowadzimy następujące

Twierdzenie 16. Na to, aby funkcja $F(x)$, skończona i ciągła w przedziale I, była w przedziale tym ciągła bezwzględnie, konieczne jest i wystarcza, by funkcja ta spełniała warunek (N) oraz by

(3) $$\int_R F'(x)\,dx < +\infty\,,$$

gdzie R oznacza zbiór tych punktów przedziału I, w których funkcja $F(x)$ jest różniczkowalna i posiada pochodną nieujemną.

D o w ó d. K o n i e c z n o ś ć podanych warunków jest widoczna,[1] pozostaje tedy udowodnić tylko ich d o s t a t e c z n o ś ć. Załóżmy, iż funkcja $F(x)$ spełnia warunek (N) oraz iż pochodna jej $F'(x)$ jest sumowalna na zbiorze R. Oznaczmy, dla każdej pary punktów $a, b \in I$ $(a < b)$, przez R_a^b część zbioru R, zawartą w przedziale (a, b), oraz przez N_a^b zbiór tych punktów tego przedziału, w których funkcja $F(x)$ posiada pochodną oznaczoną równą $+\infty$. Ale (tw. 6, § 3)

$$|N_a^b| = 0,$$

a więc, ponieważ funkcja $F(x)$ spełnia warunek (N), również

$$|F(N_a^b)| = 0,$$

skąd, zważywszy na tw. 13 § poprzedniego oraz twierdzenie 7 rozdz. VIII (§ 12),

$$F(b) - F(a) \leqslant |F(R_a^b + N_a^b)| = |F(R_a^b)| \leqslant \int_{R_a^b} F'(x)dx.$$

Oznaczając tedy przez $g(x)$ funkcję równą $F'(x)$ w punktach zbioru R oraz zeru poza tym zbiorem, mamy dla każdego przedziału (a, b), zawartego w I,

$$F(b) - F(a) \leqslant \int_a^b g(x)\,dx,$$

a że — z uwagi na (3) — funkcja $g(x)$ jest sumowalna w przedziale I, przeto z nierówności powyższej wynika, iż wahanie górne funkcji $F(x)$ jest w przedziale tym skończone, a więc, iż funkcja $F(x)$ jest o wahaniu skończonem. Ponieważ zaś spełnia warunek (N), zatem (VIII, § 12, tw. 8) jest zarazem bezwzględnie ciągła.

Twierdzenie powyższe (w nieco słabszem sformułowaniu) udowodnione zostało przez Ninę B a r y (*Comptes Rendus*, t. 189, (1929), p. 441). Wynika zeń — w szczególności — iż, *jeśli pochodna funkcji $F(x)$, ciągłej i spełniającej warunek (N), jest nieujemna* (wzgl. niedodatnia) *w prawie każdym punkcie, w którym funkcja $F(x)$ jest różniczkowalna, wówczas funkcja ta jest monotoniczna nie-*

[1]) Por. rozdz. VIII, § 11, tw. 5.

malejąca (wzgl. nierosnąca). Uwaga ta zawiera istotne uogólnienie twierdzenia 6 rozdz. poprzedniego (§ 11).

Twierdzenie 16 może być dalej jeszcze uogólnione: *jeśli funkcja ciągła $F(x)$ spełnia warunek (N) i funkcja $g(x)$ — równa $F'(x)$ w tych punktach, w których funkcja $F(x)$ jest różniczkowalna, oraz zeru poza temi punktami — posiada funkcję zwyższającą w sensie Perrona, wówczas funkcja $F(x)$ jest całką nieoznaczoną* ($\mathfrak{P}$) (lub — co jest równoważne[1]) — uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą *w znaczenia węższem*).

***Warunek (D).**

§ 10. Z rozdz. poprzedniego (§ 12) wynika, iż *funkcja, która posiada pochodną oznaczoną i skończoną w niemal każdym punkcie pewnego zbioru, spełnia na zbiorze tym warunek* (N). W rozdz. obecnym (tw. 9, § 5) wzmocniliśmy ten wynik, zastępując w twierdzeniu powyższem pochodną oznaczoną przez jakąkolwiek z czterech liczb pochodnych Dini'ego. Widoczne jest, iż w uogólnieniu tem nie można iść dalej — w kierunku zastąpienia pochodnej Dini'ego przez dowolną liczbę pochodną pośrednią (III, § 1); łatwo jest — istotnie — podać przykład funkcji (nawet — ciągłej), która w każdym punkcie pewnego zbioru miary zero posiada pewną liczbę pochodną pośrednią równą zeru, a która — mimo to — przyporządkowuje zbiorowi temu obraz miary dodatniej.

Niemniej, rozszerzyć można rozważane twierdzenie na pewną specjalną klasę liczb pochodnych pośrednich; nowe to uogólnienie wyników rozdziału poprzedniego wiąże się z teorją aproksymatywnej różniczkowalności funkcji (VIII, § 5).

Przyjmiemy definicje następujące:

Będziemy mówili, iż funkcja $F(x)$ spełnia w pewnym punkcie x_0 warunek (D), jeśli istnieje taki zbiór Q o gęstości różnej od zera w punkcie x_0 oraz taka liczba skończona N, iż dla każdego punktu $x \varepsilon Q$

$$(1) \qquad |F(x) - F(x_0)| < N \cdot |x - x_0|;$$

będziemy mówili, iż funkcja $F(x)$ spełnia w punkcie x_0 warunek $D(\alpha, N)$ — gdzie α, N oznaczają dowolną parę liczb dodatnich, skończonych — jeśli istnieje zbiór mierzalny o gęstości górnej $> \alpha$ w punkcie x_0 taki, iż w każdym punkcie tego zbioru spełniona jest nierówność (1).

[1]) Por. rozdz. X, § 13.

Łatwo zauważyć, iż, jeśli funkcja mierzalna posiada w jakimś punkcie skończoną pochodną aproksymatywną, lub ogólniej — jeśli posiada w nim skończoną jedną z czterech pochodnych aproksymatywnych krańcowych (VIII, § 5), wówczas temsamem spełnia w tym punkcie warunek (D). Istotnie, załóżmy np., iż skończona jest liczba pochodna aproksymatywna

$$L = \overline{F}_a^+ (x_0)$$

funkcji mierzalnej $F(x)$ w punkcie x_0.

Zbiór

$$\underset{x}{E}\left[\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \geqslant L + 1\right]$$

posiada wówczas w punkcie x_0 gęstość prawostronną równą zeru, zbiór natomiast

$$\underset{x}{E}\left[\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} > L - 1\right]$$

posiada w tymsamym punkcie gęstość prawostronną górną dodatnią. Wynika stąd oczywiście, iż zbiór

$$\underset{x}{E}\left[L - 1 < \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} < L + 1\right]$$

posiada w punkcie x_0 również gęstość górną dodatnią, a więc, iż funkcja $F(x)$ spełnia w punkcie x_0 warunek (D).

§ 11. Udowodnimy, iż funkcja mierzalna [1]), spełniająca niemal wszędzie w przedziale warunek (D), spełnia zarazem w tym przedziale warunek (N) Łuzina.

Rozbijemy dowód tego twierdzenia na parę prostszych lemmatów.

Lemmat 1. Jeśli pochodna funkcji monotonicznej niemalejącej $F(x)$ jest w prawie każdym punkcie pewnego zbioru Q większa od liczby dodatniej N, wówczas:

$$M - m \geqslant N\,|Q|, \tag{1}$$

[1]) Założenie mierzalności możnaby zresztą łatwo tu usunąć.

gdzie M i m oznaczają odp. kresy górny i dolny wartości funkcji $F(x)$ na zbiorze Q[1].

D o w ó d. Niech Q_n oznacza zbiór tych wszystkich punktów $x \in Q$, dla których nierówność

$$0 < x' - x < \frac{1}{n}$$

pociąga za sobą, dla każdego punktu x', nierówność

$$(2) \qquad F(x') - F(x) > N(x' - x).$$

Zbiory Q_n tworzą ciąg monotoniczny, niemalejący, przyczem

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n + R,$$

gdzie R jest pewnym zbiorem miary zero. Zatem

$$(3) \qquad |Q| = \lim_n |Q_n|.$$

Oznaczmy dla każdej liczby całkowitej i, przez Q_n^i część zbioru Q_n, zawartą w przedziale $\left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$, przez a_n^i, b_n^i, wzgl. α_n^i, β_n^i, — odp. kresy górny i dolny każdego n i e p u s t e g o zbioru Q_n^i, wzgl. $F(Q_n^i)$. Układ przedziałów (a_n^i, b_n^i), dla każdej ustalonej wartości wskaźnika n, pokrywa odpowiedni zbiór Q_n. Mamy tedy dla każdego n:

$$(4) \qquad |Q_n| \leqslant \sum_i{}' (b_n^i - a_n^i),$$

gdzie sumowanie $\sum_i{}'$ rozciąga się na te wszystkie wartości wskaźnika i, dla których odpowiedni zbiór Q_n^i nie jest pusty.

Podobnież, ze względu na monotoniczny charakter funkcji $F(x)$, żadne dwa przedziały (α_n^i, β_n^i) o tymsamym wskaźniku n, lecz różnym wskaźniku i, nie zachodzą na siebie; ponieważ zaś wszystkie te przedziały zawarte są w przedziale (m, M), przeto, dla każdego n:

---

[1]) W nierówności (1) można łatwo zastąpić wyrażenie $M - m$ przez $|F(Q)|$.

(5) $$M - m \geqslant \sum_i{}' (\beta_n^i - \alpha_n^i),$$

gdzie znak sumowania $\sum_i{}'$ rozciąga się na tesame wartości wskaźnika i, jak w nierówności (4).

Niech teraz x, y $(x \leqslant y)$ oznacza dowolną parę punktów zbioru Q_n^i. Mamy dla każdej takiej pary, na zasadzie (2),

$$\beta_n^i - \alpha_n^i \geqslant F(y) - F(x) \geqslant N(y - x),$$

skąd, przez przejście do granicy, gdy $x \to a_n^i$, $y \to b_n^i$,

$$\beta_n^i - \alpha_n^i \geqslant N(b_n^i - a_n^i),$$

i z uwagi na nierówności (4) i (5),

$$M - m \geqslant N . |Q_n|;$$

skoro teraz $n \to \infty$, nierówność powyższa daje, na mocy (3), żądany związek (1).

L e m m a t 2. Jeżeli, dla pewnej pary liczb dodatnich, skończonych α, N, funkcja $F(x)$, mierzalna w przedziale (a, b), spełnia warunek $D(\alpha, N)$ w każdym punkcie pewnego zbioru Q, zawartego w tym przedziale, wówczas:

(6) $$|F(Q)| \leqslant \frac{2N}{\alpha}(b - a).$$

D o w ó d. Przyjąć możemy, iż przedział (a, b) jest skończony; w przypadku przedziału nieskończonego nierówność (6) jest oczywista.

Niech, dla każdej liczby y, $H(y)$ oznacza miarę zbioru wszystkich punktów x przedziału (a, b), spełniających nierówność

(6') $$F(x) \leqslant y.$$

Określona w ten sposób funkcja $H(y)$ jest oczywiście niemalejąca w całym przedziale nieskończonym $(-\infty, +\infty)$ zmiennej y i spełnia w całym tym przedziale nierówność

(7) $$0 \leqslant H(y) \leqslant b - a.$$

Niech y_0 będzie dowolnym punktem zbioru $F(Q)$, w którym funkcja $H(y)$ posiada pochodną oznaczoną; oszacujemy z dołu wartość tej pochodnej.

Niech, w tym celu, x_0 będzie jakimkolwiek punktem mnogości Q, w którym

$$F(x_0) = y_0,$$

i niech ε będzie dowolną, mniejszą od 1, liczbą dodatnią. Ponieważ funkcja $F(x)$ spełnia w punkcie x_0 warunek $D(\alpha, N)$, istnieje zatem pewien przedział I zawierający punkt x_0, o długości $< \varepsilon$, i taki przytem, iż, oznaczając przez A zbiór punktów x tego przedziału, dla których

$$(8) \qquad |F(x) - F(x_0)| \leqslant N|x - x_0|,$$

mamy

$$(9) \qquad |A| > \alpha |I|.$$

Niech y', y'' będą odp. kresami — górnym i dolnym — wartości funkcji $F(x)$ na zbiorze A; połóżmy dla skrócenia

$$y''' = y'' - \varepsilon(y' - y'').$$

Ponieważ punkt x_0 należy napewno do A, zatem

$$(10) \qquad y''' \leqslant y'' \leqslant F(x_0) = y_0 \leqslant y';$$

nadto, z uwagi na (8),

$$(11) \qquad y' - y'' \leqslant 2N.|I|,$$

a więc również:

$$(12) \quad y' - y''' \leqslant 2N.|I| + 2N\varepsilon.|I| \leqslant 2N\varepsilon + 2N\varepsilon^2 \leqslant 4N\varepsilon.$$

Mamy teraz z uwagi na definicje funkcji $H(y)$ i zbioru A, oraz na nierówność (9):

$$\begin{aligned} H(y') - H(y''') &= |\underset{x}{E}[y' \geqslant F(x) > y''']| \\ &\geqslant |\underset{x}{E}[y' \geqslant F(x) \geqslant y'']| \\ &\geqslant |A| \\ &\geqslant \alpha.|I|. \end{aligned}$$

Zatem, ze względu jeszcze na (12),

$$\frac{H(y')-H(y''')}{y'-y'''}=\frac{H(y')-H(y'')}{y'-y''}\cdot\frac{y'-y''}{y'-y'''}\geqslant\frac{\alpha}{2N}\cdot\frac{1}{1+\varepsilon},$$

Ponieważ zaś ε może być dowolnie małą liczbą dodatnią i funkcja $H(y)$ posiada w punkcie y_0 pochodną, przeto, zważywszy na (10) i (12), otrzymuje się z ostatniej nierówności:

$$H'(y_0)\geqslant\frac{\alpha}{2N}. \tag{13}$$

Nierówność powyższa została tedy udowodniona dla każdego punktu y_0 mnogości $F(Q)$, w którym funkcja $H(y)$ jest różniczkowalna, a więc — na zasadzie twierdzenia Lebesgue'a — w prawie każdym punkcie zbioru $F(Q)$. Stosując tedy lemmat 1 do funkcji $H(y)$ oraz zbioru $F(Q)$, otrzymujemy z uwagi na (7) i oszacowanie (13)

$$|F(Q)|\leqslant\frac{2N}{\alpha}(b-a).$$

Twierdzenie 17. Jeżeli funkcja $F(x)$, określona i mierzalna w przedziale (a, b), spełnia warunek (D) w niemal każdym punkcie pewnego zbioru Q miary zero, zawartego w tym przedziale, wówczas

$$|F(Q)|=0.$$ [1]

Dowód. Niech Q_n $(n=1, 2, \ldots)$ oznacza zbiór tych wszystkich punktów zbioru Q, które spełniają warunek $D\left(\frac{1}{n}, n\right)$. Mamy wówczas

---

[1]) Zarówno w sformułowaniu lemmatu 2, jak i twierdzeń 17, 18, 19, założenie mierzalności funkcji $F(x)$ może być łatwo usunięte, przyczem dowody ulegną zaledwie formalnej modyfikacji: wystarczy w dowodzie lemmatu 2 zdefinjować funkcję $H(y)$, jako miarę wewnętrzną mnogości punktów, spełniających nierówność (6').

Nadto, korzystając z pewnych twierdzeń Denjoy-Khintchine'a o różniczkowalności aproksymatywnej, skreślić można po stronie prawej nierówności (6) spółczynnik $\frac{2}{\alpha}$. Ogólniej, udowodnić można następujące twierdzenie: *jeśli, dla pewnej stałej liczby N, funkcja dowolna $F(x)$ spełnia warunek $D(0, N)$ w niemal każdym punkcie pewnej mnogości Q, wówczas:*

$$|F(Q)|\leqslant N|Q|.$$

$$Q = \sum_n Q_n + R,$$

$$F(Q) = \sum_n F(Q_n) + F(R),$$

gdzie R, a więc i $F(R)$, są pewnemi zbiorami conajwyżej przeliczalnemi. Nadto zbiory Q_n, a wraz z niemi i zbiory $F(Q_n)$, tworzą ciągi monotoniczne niemalejące. Zatem

$$(14) \qquad |F(Q)| = \lim_n |F(Q_n)|.$$

Niech teraz ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Każdemu ze zbiorów Q_n przyporządkować możemy zawierający go zbiór otwarty G_n taki, iż

$$|G_n| < \varepsilon.$$

Możemy z kolei przedstawić każdy z tych zbiorów G_n w postaci

$$G_n = \sum_k I_n^k,$$

gdzie $\{I_n^k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ tworzą, dla każdego n, ciąg przedziałów otwartych, rozłącznych. Na mocy lemmatu poprzedniego mamy, dla każdej pary wskaźników n, k,

$$|F(Q_n \times I_n^k)| \leqslant 2n^2 |I_n^k|,$$

a więc:

$$|F(Q_n)| \leqslant 2n^2 \sum_k |I_n^k| \leqslant 2n^2 |G_n| \leqslant 2n^2 \varepsilon.$$

Ponieważ zaś ε jest dowolną liczbą dodatnią, przeto, dla każdego n,

$$|F(Q_n)| = 0,$$

a, ze względu na (14), również

$$|F(Q)| = 0.$$

Z udowodnionego twierdzenia — łącznie z twierdzeniem 8 § 5 — wynika natychmiast

Twierdzenie 18. Jeżeli w niemal każdym punkcie przedziału (a, b), w którym określona jest pewna funkcja mierzalna, skończona $F(x)$, funkcja ta spełnia warunek (D) lub też posiada *przynajmniej jedną z czterech pochodnych D i n i'ego skończoną, wówczas funkcja $F(x)$ spełnia w (a, b) warunek (N).*

Jak pokazaliśmy już na początku tego §, funkcja mierzalna, która posiada w jakimś punkcie skończoną jedną z pochodnych krańcowych aproksymatywnych, spełnia zarazem w tym punkcie warunek (D); w twierdzeniu poprzedniem zawiera się tedy następujące

T w i e r d z e n i e 19. Jeżeli w niemal każdym punkcie przedziału (a, b) funkcja mierzalna i skończona posiada skończoną przynajmniej jedną z liczb pochodnych krańcowych—zwykłych (D i n i'ego) lub aproksymatywnych — wówczas funkcja ta spełnia w tym przedziale warunek (N).

Pewne klasy funkcji (VBG^*) i (ACG^*).

§ 12. W § tym oraz następnych podamy pewne kryterja D e n j o y, które na zasadzie zachowania się liczb pochodnych pozwalają zaliczyć funkcję do jednej z klas (VBG), (ACG), (VBG^*) i (ACG^*).

Kryterja te stanowią podstawę dla dokładniejszego zbadania stosunku całek D e n j o y[1]) do funkcji pierwotnej. Widzieliśmy już (VII, § 1), iż różniczkowalność funkcji w całym nawet przedziale nie pociąga za sobą naogół bynajmniej jej ciągłości bezwzględnej. Przeciwnie, z twierdzeń, które podamy w dalszym ciągu tego rozdziału, wynikać będzie, iż już znacznie słabsze założenia aniżeli r ó ż n i c z k o w a l n o ś ć decydują o bezwzględnej ciągłości u o g ó l n i o n e j.

Udowodnimy przedewszystkiem następujące

T w i e r d z e n i e 20. Jeśli $F(x)$ jest funkcją określoną i skończoną w pewnym przedziale (a, b), wówczas zbiór tych punktów przedziału, w których spełniona jest jedna przynajmniej z nierówności

$$\overline{F}(x) < +\infty, \tag{1}$$

$$\underline{F}(x) > -\infty, \tag{2}$$

jest sumą ciągu zbiorów takich, iż na każdym z nich funkcja $F(x)$ jest o wahaniu skończonem w z n a c z e n i u w ę ż s z e m.

---

[1]) Por. rozdz. następny § ~~3~~ 2.

Dowód. Oznaczmy przez A, wzgl. B, zbiór tych punktów, w którym spełniony jest warunek (1), wzgl. (2). Udowodnimy, iż rozkład, podany w sformułowaniu naszego twierdzenia uskutecznić się daje dla zbioru A; w analogiczny sposób rozkłada się oczywiście zbiór B.

Niech, dla każdej liczby naturalnej n, A_n oznacza zbiór punktów $x \in A$ takich, iż nierówność

$$(3) \qquad |x' - x| \leqslant \frac{1}{n}$$

pociąga za sobą dla dowolnego punktu x' przedziału (a, b)

$$(4) \qquad \frac{F(x') - F(x)}{x' - x} < n.$$

Oznaczmy dalej, dla każdej liczby naturalnej n oraz całkowitej i, przez A_n^i część zbioru A_n zawartą w przedziale $\left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$ [1]. Przez a_n^i, b_n^i oznaczymy odpowiednio kresy — dolny i górny — zbioru A_n^i.

Pokażemy, iż funkcja $F(x)$ jest o wahaniu skończonem w znaczeniu węższem na każdym ze zbiorów A_n^i.

Niech, w tym celu,

$$F_n(x) = F(x) - nx;$$

będziemy mieli wówczas, ze względu na (4), dla każdego punktu $x \in A_n$ i każdego punktu x', spełniającego nierówność (3),

$$\frac{F_n(x') - F_n(x)}{x' - x} < 0.$$

W szczególności tedy, jeśli x_1, x_2 $(x_1 \leqslant x_2)$ oznacza dowolną parę punktów zbioru A_n^i, wówczas

$$(5) \qquad F_n(a_n^i) \geqslant F_n(x_1) \geqslant F_n(x_2) \geqslant F_n(b_n^i),$$

dla każdego zaś punktu x', zawartego w przedziale (x_1, x_2), będziemy mieli:

$$F_n(x_1) \geqslant F_n(x') \geqslant F_n(x_2).$$

---

[1]) Niektóre z tych zbiorów mogą być, rzecz prosta, puste.

Z ostatniej tej nierówności wynika, iż dla każdego przedziału $I = (\alpha, \beta)$, którego krańce należą do zbioru A_n^i, mamy:

$$O[F_n; I] = F(\beta) - F(\alpha);$$

stąd zaś, z uwagi na (5), otrzymujemy dla każdego układu niezachodzących na siebie przedziałów $I_s = (\alpha_s, \beta_s)$ $(s = 1, 2, \dots k)$, których krańce należą do A_n^i,

$$\sum_{s=1}^{k} O[F_n; I_s] = \sum_{s=1}^{k} [F(\beta_s) - F(\alpha_s)] \leqslant F_n(a_n^i) - F_n(b_n^i).$$

Funkcja $F_n(x)$, a więc temsamem i funkcja $F(x) = F_n(x) + nx$, jest tedy o wahaniu skończonem w znaczeniu węższem na A_n^i i rozkład

$$A = \sum_{i, n} A_n^i$$

mnogości A zadośćczyni żądanym warunkom.

Twierdzenie 21. Jeśli $F(x)$ jest funkcją określoną i skończoną w przedziale (a, b), wówczas zbiór tych punktów przedziału, w których obydwie liczby pochodne Dini'ego z jednej, jakiejkolwiek strony, są skończone, jest sumą ciągu zbiorów takich, iż na każdym z nich funkcja $F(x)$ jest bezwzględnie ciągła w znaczeniu węższem.

Dowód. Oznaczmy przez A zbiór tych punktów, w których skończone są obydwie prawostronne pochodne Dini'ego funkcji $F(x)$; pokażemy, iż zbiór ten jest sumą ciągu zbiorów, na których $F(x)$ jest funkcją ciągłą bezwzględnie w znaczeniu węższem. Analogiczna metoda pozwoli rozłożyć zbiór, gdzie skończone są liczby $\bar{F}^{-}(x)$, $\underline{F}^{-}(x)$.

Niech, dla dowolnej liczby naturalnej n, A_n oznacza mnogość tych punktów $x \in A$, dla których nierówność

$$0 \leqslant x' - x \leqslant \frac{1}{n}$$

pociąga za sobą, dla każdego punktu x' przedziału (a, b), nierówność

$$|F(x') - F(x)| \leqslant n(x' - x). \tag{6}$$

Oznaczmy dla każdej liczby naturalnej n oraz całkowitej i, przez A_n^i część zbioru A_n, zawartą w przedziale $\left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$. Mamy oczywiście:

(7) $$A=\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}A_n^i.$$

Niech teraz $I=(x_1, x_2)$ $(x_1 \leqslant x_2)$ będzie dowolnym przedziałem, którego krańce należą do zbioru A_n^i. Będziemy mieli wówczas, dla każdego punktu $x' \epsilon I$,

$$0 \leqslant x'-x_1 \leqslant \frac{1}{n},$$

a więc, z uwagi na (6),

$$|F(x')-F(x_1)| \leqslant n(x'-x_1) \leqslant n\,|I|,$$

skąd

$$O[F;I] \leqslant 2n\,.\,|I|.$$

Dla każdego tedy układu przedziałów $I_1, I_2, \ldots I_k$, których krańce należą do zbioru A_n^i:

$$\sum_{s=1}^{k}O[F;I_s] \leqslant 2n\sum_{s=1}^{k}|I_s|,$$

ponieważ zaś n jest dla każdego poszczególnego zbioru A_n^i liczbą stałą, przeto z nierówności tej wynika, iż funkcja $F(x)$ jest bezwzględnie ciągła w znaczeniu węższem na każdym ze zbiorów A_n^i; wzór (7) określa tedy żądany rozkład zbioru A.

Z ostatnich dwu twierdzeń otrzymujemy natychmiast następujące

T w i e r d z e n i e 22. 1⁰ *Jeśli liczby pochodne funkcji $F(x)$, określonej i skończonej w pewnym przedziale (a, b), spełniają w niemal każdym punkcie x tego przedziału przynajmniej jedną z nierówności:*

(8) $$\overline{F}(x) < +\infty,$$

(9) $$\underline{F}(x) > -\infty,$$

(10) $$-\infty < \underline{F}^{+}(x) \leqslant \overline{F}^{+}(x) < +\infty,$$

(11) $$-\infty < \underline{F}^{-}(x) \leqslant \overline{F}^{-}(x) < +\infty,$$

wówczas $F(x)$ jest w rozważanym przedziale funkcją o uogólnionem wahaniu skończonem w z n a c z e n i u w ę ż s z e m.

2⁰ *Jeśli ponadto funkcja $F(x)$ jest w przedziale (a, b) ciągła i jej liczby pochodne w niemal każdym punkcie spełniają przynajmniej jeden z warunków (10) lub (11), wówczas funkcja $F(x)$ jest w rozważanym przedziale uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą w znaczeniu węższem.*

W szczególności, z drugiej części powyższego twierdzenia wynika, iż, jeśli funkcja ciągła w jakimś przedziale (a, b) jest w niemal każdym punkcie tego przedziału różniczkowalna — przynajmniej jednostronnie — wówczas jest w tym przedziale uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą *w znaczeniu węższem.*

* § 13. Opierając się na twierdzeniu 9 § 5 możemy wzmocnić kryterjum podane w drugiej części twierdzenia 22.

Twierdzenie 23. Jeśli funkcja $F(x)$, określona i ciągła w pewnym przedziale (a, b), posiada w niemal każdym punkcie tego przedziału skończone bądź dwie pochodne Dini'ego z jednej strony, bądź jedną z pochodnych krańcowych obustronnych $\underline{F}(x)$, $\overline{F}(x)$, wówczas funkcja ta jest w przedziale (a, b) uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą w znaczeniu węższem.

Dowód. Z twierdzenia poprzedniego (1^0) wynika, iż rozważana funkcja jest o uogólnionem wahaniu skończonem w znaczeniu węższem w przedziale (a, b), z twierdzenia 9 (§ 5) zaś, iż spełnia w tym przedziale warunek (N). Z uwagi tedy na twierdzenie 15 rozdziału poprzedniego (§ 18), funkcja ta jest uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą w znaczeniu węższem.

Pewne klasy funkcji (VBG) i (ACG).

§ 14. Podamy teraz analogiczne warunki różniczkowe do tych, jakie były rozważane w § poprzednim, tym razem dla funkcji o uogólnionem wahaniu skończonem w znaczeniu szerszem.

Twierdzenie 24. Jeśli funkcja $F(x)$ jest określona i skończona w pewnym przedziale (a, b), wówczas zbiór tych punktów przedziału, w których spełniona jest jedna przynajmniej z nierówności

$$(1) \quad \overline{F}^{+}(x) < +\infty, \qquad (2) \quad \underline{F}^{+}(x) > -\infty,$$

$$(3) \quad \overline{F}^{-}(x) < +\infty, \qquad (4) \quad \underline{F}^{-}(x) > -\infty,$$

$$(5) \quad \overline{F}_{a}(x) < +\infty, \qquad (6) \quad \underline{F}_{a}(x) > -\infty,$$

jest sumą ciągu zbiorów takich, iż na każdym z nich funkcja $F(x)$ jest o wahaniu skończonem.

D o w ó d. Oznaczymy przez A i B zbiory punktów, w których spełnione są odp. nierówności (1) i (5). Rozłożymy każdy z tych zbiorów na sumę ciągu mnogości, na których funkcja $F(x)$ jest o wahaniu skończonem. W analogiczny, rzecz prosta, sposób uskutecznia się żądany rozkład dla każdego z czterech pozostałych zbiorów, określonych odp. przez związki (2), (3), (4) i (6).

1^0 Oznaczmy, dla każdej liczby naturalnej n, przez A_n zbiór tych wszystkich punktów $x \in A$, dla których nierówność

$$0 \leqslant x' - x \leqslant \frac{1}{n}$$

pociąga za sobą, dla każdego punktu x' rozważanego przedziału,

$$F(x') - F(x) \leqslant n(x' - x). \tag{7}$$

Oznaczmy dalej, dla każdej liczby naturalnej n oraz całkowitej i, przez A_n^i część zbioru A_n, zawartą w przedziale $\left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$. Niech

$$F_n(x) = F(x) - nx.$$

Dla każdej pary punktów x_1, x_2 $(x_1 \leqslant x_2)$ zbioru A_n^i mamy

$$0 \leqslant x_2 - x_1 \leqslant \frac{1}{n},$$

a więc, z uwagi na (7),

$$F(x_2) - F(x_1) \leqslant n(x_2 - x_1),$$

lub

$$F_n(x_2) - F_n(x_1) \leqslant 0.$$

Funkcja $F_n(x)$ jest tedy monotoniczna, nierosnąca, na każdym ze zbiorów A_n^i; każdy z tych zbiorów przedstawić zatem można jako sumę ciągu zbiorów $A_n^{i,j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ takich, iż na każdym z nich funkcja $F_n(x)$, jest monotoniczna i o g r a n i c z o n a, a więc o wahaniu skończonem. Wraz z nią o wahaniu skończonem na zbiorze $A_n^{i,j}$ jest oczywiście również i funkcja $F(x) = F_n(x) + nx$.

Rozkład tedy zbioru A

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} A_n^i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} A_n^{i,j}$$

jest rozkładem o żądanej własności.

2^0 Zajmiemy się z kolei zbiorem B, t. j. zbiorem tych punktów x przedziału (a, b), w których spełniona jest nierówność (5).

Z definicji górnej pochodnej aproksymatywnej (VIII, § 6) wynika natychmiast, iż każdemu punktowi $x \in B$ przyporządkować można liczbą naturalną n taką, iż zbiór

$$\underset{y}{E}\left[\frac{F(y) - F(x)}{y - x} > n\right]$$

posiada w punkcie x punkt rozrzedzenia.

Jeśli tedy oznaczymy, dla każdej liczby naturalnej n, przez B_n zbiór tych wszystkich punktów $x \in B$, dla których nierówność

$$0 \overset{<}{\cancel{\leqslant}} h \leqslant \frac{1}{n}$$

pociąga za sobą, dla każdej liczby h, jednocześnie obydwie nierówności:

$$(8) \qquad \left|\underset{y}{E}\left[F(y) - F(x) > n(y - x); \quad x \leqslant y \leqslant x + h\right]\right| < \frac{h}{2},$$

$$(9) \qquad \left|\underset{y}{E}\left[F(x) - F(y) > n(x - y); \quad x - h \leqslant y \leqslant x\right]\right| < \frac{h}{2},$$

wówczas będziemy mieli

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n .$$

Oznaczmy, dla każdej liczby naturalnej n oraz całkowitej i, przez B_n^i część zbioru B_n, zawartą w przedziale $\left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$. Połóżmy nadto

$$F_n(x) = F(x) - nx .$$

Udowodnimy przedewszystkiem, iż funkcja $F_n(x)$ jest monotoniczna na każdym ze zbiorów B_n^i.

Niech, w tym celu, x_1, x_2 $(x_1 \leqslant x_2)$ będzie dowolną parą punktów zbioru B_n^i. Mamy oczywiście

$$0 \leqslant x_2 - x_1 \leqslant \frac{1}{n};$$

kładąc tedy w (8)

$$x = x_1, \; h = x_2 - x_1,$$

będziemy mieli:

$$(10) \qquad \left| \underset{y}{E} \left[F(y) - F(x_1) > n(y - x_1); \quad x_1 \leqslant y \leqslant x_2 \right] \right| < \frac{x_2 - x_1}{2};$$

podobnież, kładąc w (9)

$$x = x_2, \; h = x_2 - x_1,$$

otrzymujemy

$$(11) \qquad \left| \underset{y}{E} \left[F(x_2) - F(y) > n(x_2 - y); \quad x_1 \leqslant y \leqslant x_2 \right] \right| < \frac{x_2 - x_1}{2}.$$

Nierówności (10) i (11) pokazują, iż w przedziale (x_1, x_2) istnieje napewno punkt y_0, który nie należy do żadnego ze zbiorów

$$\underset{y}{E}\,[F(y) - F(x_1) > n(y - x_1)], \quad \underset{y}{E}\,[F(x_2) - F(y) > n(x_2 - y)],$$

a więc spełnia jednocześnie obydwie nierówności:

$$F(y_0) - F(x_1) \leqslant n(y_0 - x_1),$$

$$F(x_2) - F(y_0) \leqslant n(x_2 - y_0).$$

Dodając te dwie nierówności, otrzymujemy

$$F(x_2) - F(x_1) \leqslant n(x_2 - x_1),$$

lub

$$F_n(x_2) - F_n(x_1) \leqslant 0.$$

Funkcja $F_n(x)$ jest tedy monotoniczna nierosnąca na każdym zbiorze B_n^i; każdy z tych zbiorów przedstawić zatem można jako sumę ciągu zbiorów $B_n^{i,j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ takich, że na każdym z nich funkcja $F_n(x)$ jest monotoniczna i ograniczona, a więc napewno — o wahaniu skończonem. Temsamem, na każdym ze zbiorów $B_n^{i,j}$ jest o wahaniu skończonem funkcja $F(x) = F_n(x) + nx$. Ponieważ zaś

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} B_n^i = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} B_n^{i,j},$$

przeto twierdzenie nasze jest udowodnione.

Twierdzenie 25. Jeśli funkcja $F(x)$ jest określona i skończona w przedziale (a, b), wówczas zbiór tych punktów przedziału, w których skończone są dwie jej pochodne krańcowe aproksymatywne z jednej strony, jest sumą ciągu zbiorów takich, iż na każdym z nich funkcja $F(x)$ jest ciągłą bezwzględnie.

Dowód. Niech A oznacza zbiór punktów x, w których skończone są obydwie liczby $\overline{F}_a^+(x)$, $\underline{F}_a^+(x)$. Przedstawimy zbiór A jako sumę ciągu zbiorów, na których funkcja $F(x)$ jest bezwzględnie ciągła. Analogicznie rozłoży się zbiór tych punktów x przedziału, w których skończone są pochodne $\overline{F}_a^-(x)$, $\underline{F}_a^-(x)$.

Każdemu punktowi $x \in A$ przyporządkować można liczbą naturalną n tak, aby zbiór

$$\underset{y}{E}[|F(y) - F(x)| > n(y - x)]$$

posiadał w punkcie x punkt rozrzedzenia (VIII, § 3).

Jeśli tedy oznaczymy, dla każdej liczby naturalnej n, przez A_n zbiór tych wszystkich punktów $x \in A$, dla których nierówność

$$0 \lneq h < \frac{2}{n}$$

pociąga za sobą, dla każdego h,

$$(12) \qquad \left|\underset{y}{E}\left[|F(y) - F(x)| > n(y - x);\quad x < y < x + h\right]\right| < \frac{h}{4},$$

wówczas będziemy mieli:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Oznaczmy dalej (podobnie jak w dowodach twierdzeń poprzednich), dla każdej liczby naturalnej n oraz całkowitej i, przez A_n^i część zbioru A_n zawartą w przedziale $\left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$. Pokażemy, iż funkcja $F(x)$ jest ciągła bezwzględnie na każdym ze zbiorów A_n^i.

Niech w tym celu $x_1 \lneq x_2$ będa dwoma dowolnemi punktami pewnej mnogości A_n^i, i niech

$$x_3 = x_2 + (x_2 - x_1).$$

Mamy wówczas

$$0 < x_3 - x_1 = 2(x_2 - x_1) < \frac{2}{n};$$

kładąc tedy w (12):

$$x = x_1, \quad h = 2(x_2 - x_1) = x_3 - x_1,$$

otrzymujemy

$$\left| \underset{y}{E}\left[|F(y) - F(x_1)| > n(y - x_1);\ x_1 < y < x_3 \right] \right| < \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_3 - x_2}{2},$$

a więc tembardziej

$$\left| \underset{y}{E}\left[|F(y) - F(x_1)| > n(y - x_1);\ x_2 < y < x_3 \right] \right| < \frac{x_3 - x_2}{2}. \tag{13}$$

Podobnie z uwagi na to, iż

$$0 < x_3 - x_2 = x_2 - x_1 < \frac{1}{n},$$

możemy położyć w (12):

$$x = x_2, \quad h = x_3 - x_2,$$

otrzymując wówczas

$$\left| \underset{y}{E}\left[|F(y) - F(x_2)| > n(y - x_2);\ x_2 < y < x_3 \right] \right| < \frac{x_3 - x_2}{4}.$$

Nierówność ta, wraz z nierównością (13), wskazuje, iż zbiory

$$\underset{y}{E}[\,|F(y) - F(x_1)| > n(y - x_1)\,],$$
$$\underset{y}{E}[\,|F(y) - F(x_2)| > n(y - x_2)\,]$$

nie wypełniają — nawet łącznie — przedziału (x_2, x_3). Istnieją tedy napewno w tym przedziale punkty y takie, iż jednocześnie:

$$|F(y) - F(x_1)| < n(y - x_1) < n(x_3 - x_1) = 2n(x_2 - x_1),$$

$$|F(y) - F(x_2)| < n(y - x_2) < n(x_3 - x_1) = 2n(x_2 - x_1).$$

Odejmując od siebie stronami te nierówności, otrzymujemy

$$|F(x_2) - F(x_1)| < 4n(x_2 - x_1). \tag{14}$$

Jeśli tedy $\{I_s = (\alpha_s, \beta_s)\}$ $(s = 1, 2, \dots k)$ oznacza dowolny układ przedziałów, których krańce należą do pewnego zbioru A_n^i, wówczas, na zasadzie (14),

$$\sum_{s=1}^{k} |F(\beta_s) - F(\alpha_s)| < 4n \sum_{s=1}^{k} |I_s|,$$

skąd wynika natychmiast, iż funkcja $F(x)$ jest bezwzględnie ciągła na każdym ze zbiorów A_n^i. Rozkład

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} A_n^i$$

jest zatem żądanym rozkładem zbioru A.

Z ostatnich dwu twierdzeń wynika natychmiast następujące

T w i e r d z e n i e 26. 1° *Jeżeli liczby pochodne funkcji $F(x)$, określonej i skończonej w pewnym przedziale (a, b), spełniają w niemal każdym punkcie x tego przedziału przynajmniej jedną z nierówności*

$$(15)\quad \overline{F}^{+}(x) < +\infty, \qquad (16)\quad \underline{F}^{+}(x) > -\infty,$$

$$(17)\quad \overline{F}^{-}(x) < +\infty, \qquad (18)\quad \underline{F}^{-}(x) > -\infty,$$

$$(19)\quad \overline{F}_a(x) < +\infty, \qquad (20)\quad \underline{F}_a(x) > -\infty,$$

$$(21)\quad -\infty < \underline{F}_a^{+}(x) \leqslant \overline{F}_a^{+}(x) < +\infty,$$

$$(22)\quad -\infty < \underline{F}_a^{-}(x) \leqslant \overline{F}_a^{+}(x) < +\infty$$

wówczas funkcja $F(x)$ jest o uogólnionem wahaniu skończonem w (a, b).

2° *Jeśli liczby pochodne funkcji $F(x)$ spełniają w niemal każdym punkcie przedziału (a, b) przynajmniej jeden z warunków* (21) *lub* (22) *i jeśli ponadto funkcja $F(x)$ jest c i ą g ł a, wówczas jest uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą w (a, b).*

Z twierdzenia tego, z drugiej jego części, wynika natychmiast, iż funkcja ciągła, różniczkowalna aproksymatywnie — choćby tylko jednostronnie — w niemal każdym punkcie jakiegoś przedziału, jest w tym przedziale uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą.

* § 15. Opierając się na twierdzeniu 18 § 11, zaostrzyć możemy drugą część twierdzenia poprzedniego.

T w i e r d z e n i e 27. Jeśli funkcja $F(x)$, ciągła w pewnym przedziale (a, b), posiada w niemal każdym punkcie tego przedziału skończoną jedną z czterech pochodnych D i n i'ego, bądź też skończone dwie krańcowe liczby pochodne aproksymatywne z jednej, ja-

kiejkolwiek strony, bądź wreszcie skończoną jedną z dwu pochodnych aproksymatywnych krańcowych $\overline{F}_a(x)$, $\underline{F}_a(x)$, *wówczas funkcja ta jest uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą w przedziale* (a, b).

Dowód. Na mocy twierdzenia 26 (1°) § poprzedniego funkcja $F(x)$, spełniająca warunki założenia, jest o uogólnionem wahaniu skończonem w przedziale (a, b), z uwagi zaś na twierdzenie 18 (§ 11) spełnia warunek (N). Z twierdzenia 9 (rozdz. VIII, (§ 12) wynika tedy, iż rozważana funkcja jest uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą.

ROZDZIAŁ X.

Całki Denjoy.

Uwagi wstępne.

§ 1. Podobnie jak w teorji całki Lebesgue'a oprzemy i w tym rozdziale wykład podstawowych własności całek Denjoy na t. zw. opisowej definicji tych całek, analogicznej do podanej w rozdz. IV (§ 1) definicji całki Lebesgue'a.

Wychodząc z tego określenia całek Denjoy, dojdziemy z kolei do innej, równoważnej definicji, która — zawarta implicite w tw. 8 (§ 11) — odpowiada — w istocie rzeczy, dokładnie definicji konstruktywnej Denjoy, nie wymagając wszakże wprowadzenia liczb pozaskończonych. Zastosowanie tego sposobu scharakteryzowania całek znajdzie Czytelnik w dowodzie twierdzenia Hake'go, które, wraz z twierdzeniem Alexandroffa-Loomana (§ 13), ustala równoważność całki Perrona ze słabszą z całek Denjoy.

Wreszcie, w § ostatnim rozdziału podajemy definicję konstruktywną rozważanych całek w postaci, opartej już wyraźnie na indukcji pozaskończonej. Całki Denjoy wyłaniają się tu jako naturalne zamknięcie pewnej herarchji pozaskończonej całek coraz ogólniejszych, powstających z kojarzenia ze sobą, w określonym porządku, operacji całkowej Lebesgue'a z t. zw. operacjami niewłaściwemi Cauchy'ego i Harnacka.

Całki Denjoy: definicja, własności podstawowe.

§ 2. Funkcja $f(x)$, określona w pewnym przedziale $I_0 = (a, b)$, nazywa się całkowalna $(\mathfrak{D})$, wzgl. $(\mathfrak{D}^*)$, w tym przedziale, jeśli istnieje taka funkcja (ACG), wzgl. (ACG^*), $F(x)$, iż w prawie każdym punkcie $x \in I_0$.

$$f(x) = F'_a(x), \quad [\text{wzgl.} = F'(x)].$$

O funkcji $F(x)$ mówimy wówczas, iż jest c a ł k ą n i e o z n a c z o n ą $(\mathfrak{D})$, wzgl. $(\mathfrak{D}^*)$, funkcji $f(x)$ w przedziale $I_0 = (a, b)$, różnicę zaś $F(b) - F(a)$, nazywamy c a ł k ą o z n a c z o n ą[1] $(\mathfrak{D})$, wzgl. $(\mathfrak{D}^*)$, funkcji $f(x)$ na tymsamym przedziale i oznaczamy przez

$$(\mathfrak{D}) \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{lub} \quad (\mathfrak{D}) \int_{I_0} f(x)\,dx,$$

wzgl.
$$(\mathfrak{D}^*) \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{lub} \quad (\mathfrak{D}^*) \int_{I_0} f(x)\,dx.$$

Jak wynika natychmiast z twierdzeń rozdz. VIII (§ 11), całki nieoznaczone $(\mathfrak{D})$, wzgl. $(\mathfrak{D}^*)$, tejsamej funkcji $f(x)$, lub też dwu funkcji równoważnych, różnić się mogą między sobą conajwyżej o stałą. Temsamem całka oznaczona $(\mathfrak{D})$, wzgl. $(\mathfrak{D}^*)$, jest już jednoznacznie określona przez funkcję podcałkową i nie zmienia się, jeśli wartości funkcji podcałkowej ulegną ewent. modyfikacji w zbiorze miary zero.

Widoczne jest dalej, iż, jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna $(\mathfrak{D})$ [wzgl. $(\mathfrak{D}^*)$] w pewnym przedziale I_0, wówczas całkowalna jest w temsamem znaczeniu w każdym przedziale $I \subset I_0$; funkcja przedziału $I \subset I_0$

$$(\mathfrak{D}) \int_I f(x)\,dx \qquad [\text{wzgl. } (\mathfrak{D}^*) \int_I f(x)\,dx]$$

jest pewną funkcją addytywną i nazywa się również c a ł k ą n i e o z n a c z o n ą $(\mathfrak{D})$, [wzgl. $(\mathfrak{D}^*)$] funkcji $f(x)$ w przedziale I_0. Całki te, uważane jako funkcje addytywne przedziału, są oczywiście określone jednoznacznie przez funkcję podcałkową.

Widoczne jest wreszcie natychmiast, iż, *jeśli dwie funkcje* $f_1(x)$ *oraz* $f_2(x)$ *są całkowalne* $(\mathfrak{D})$ [wzgl. $(\mathfrak{D}^*)$] *w jakimś przedziale* I_0, *wówczas każda ich kombinacja linjowa* $f = Af_1 + Bf_2$,

---

[1]) Termin „o z n a c z o n a" będzie często opuszczany.

o spółczynnikach stałych, jest również całkowalna w temsamem znaczeniu, przyczem

$$\int_I (A f_1 + B f_2)\, dx = A \int_I f_1\, dx + B \int_I f_2\, dx,$$

gdzie całki rozumiane są w sensie ($\mathfrak{D}$) [wzgl. ($\mathfrak{D}^*$)].

Z twierdzenia 22 (2°) rozdz. poprzedniego (§ 12) wynika, iż, *jeśli funkcja $f(x)$ jest niemal wszędzie pochodną skończoną (przynajmniej jednostronną) pewnej funkcji ciągłej $F(x)$, wówczas funkcja $f(x)$ jest całkowalna ($\mathfrak{D}^*$) i $F(x)$ jest jej całką nieoznaczoną* ($\mathfrak{D}^*$). Całka ($\mathfrak{D}^*$) obejmuje tedy całkę Newtona (VII, § 1). Analogicznie, w myśl tw. 26 (2°) rozdz. poprzedniego (§ 14), *jeśli funkcja $f(x)$ jest niemal wszędzie pochodną aproksymatywną skończoną (przynajmniej jednostronną) pewnej funkcji ciągłej $F(x)$, wówczas funkcja $f(x)$ jest całkowalna ($\mathfrak{D}$) i $F(x)$ jest jej całką nieoznaczoną* ($\mathfrak{D}$).

Twierdzenie 1. Każda funkcja całkowalna ($\mathfrak{D}$) jest mierzalna i prawie wszędzie skończona.

Dowód. Niech $F(x)$ będzie całką nieoznaczoną ($\mathfrak{D}$) funkcji $f(x)$ w pewnym przedziale I. $F(x)$ jest tedy (ACG) w I i przedział ten przedstawić można jako sumę ciągu zbiorów domkniętych P_n takich, iż na każdym z nich funkcja $F(x)$ jest bezwzględnie ciągła. Istnieje przeto (VIII, § 7, tw. 1), dla każdego n, funkcja $F_n(x)$ o wahaniu skończonem w całym przedziale (a, b), identyczna z $F(x)$ na zbiorze P_n. Wówczas, w prawie każdym punkcie $x \in P_n$,

$$f(x) = F_a'(x) = F_n'(x),$$

skąd, z uwagi na mierzalność pochodnej funkcji o wahaniu skończonem, wynika już mierzalność funkcji $f(x)$ na każdym ze zbiorów P_n, a więc — w całym przedziale I[1]). Skończoność (prawie wszędzie) funkcji $f(x)$ wynika już bezpośrednio z tw. 4 rozdz. VIII (§ 8).

[1]) W tenżesam sposób pokazać można, iż — ogólniej — pochodna aproksymatywna dowolnej funkcji mierzalnej (VBG) jest mierzalna. Ogólniej jeszcze (rzecz prosta — na innej już drodze) dowodzi się, iż obydwie pochodne aproksymatywne krańcowe $\overline{F}_a(x)$ oraz $\underline{F}_a(x)$ dowolnej funkcji mierzalnej $F(x)$ są zawsze mierzalne; por. III, § 2, tw. 1.

Zamiast całka (całkowalność ($\mathfrak{D}$)) mówi się również całka (całkowalność) Denjoy w znaczeniu szerszem; podobnie, całkę ($\mathfrak{D}^*$) nazywa się także całką Denjoy w znaczeniu węższem. Termin „w znaczeniu szerszem" będziemy zresztą zwykle pomijali.[1])

§ 3. Stosunek wzajemny funkcji bezwzględnie ciągłych, funkcji (ACG^*) oraz (ACG) przesądza o stosunku, jaki zachodzi między operacjami całkowemi Lebesgue'a i Denjoy. Mianowicie

Twierdzenie 2. Jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalną ($\mathfrak{L}$) w przedziale I_0, wówczas jest również całkowalna ($\mathfrak{D}^*$) w tym przedziale oraz

$$(\mathfrak{L})\int_{I_0} f\,dx = (\mathfrak{D}^*)\int_{I_0} f\,dx;$$

jeśli zaś funkcja $f(x)$ jest całkowalna ($\mathfrak{D}^*$) w I_0, wówczas jest temsamem całkowalna ($\mathfrak{D}$) oraz

$$(\mathfrak{D}^*)\int_{I_0} f\,dx = (\mathfrak{D})\int_{I_0} f\,dx.$$

Pierwszą część powyższego twierdzenia należy tu jeszcze uzupełnić w sposób następujący:

Twierdzenie 3. Funkcja $f(x)$, całkowalna ($\mathfrak{D}$) i prawie wszędzie nieujemna w pewnym przedziale I_0, jest w tym przedziale sumowalna.

Dowód. Istotnie, jeśli $F(x)$ jest całką nieoznaczoną Denjoy funkcji $f(x)$ prawie wszędzie nieujemnej, wówczas prawie wszędzie

$$F_a'(x) = f(x) \geqslant 0,$$

i, zważywszy na twierdzeniu 6 rozdz. VIII (§ 11), funkcja $F(x)$ jest monotoniczna niemalejąca; funkcja $f(x)$, która jest prawie wszędzie jej pochodną, jest temsamem (IV, § 2, tw. 7) sumowalna.

---

[1]) Sam Denjoy używa dla oznaczenia swego procesu całkowania terminu „totalisation", dla oznaczenia zaś samych całek — terminu „totale"; całkę ($\mathfrak{D}^*$) nazywa Denjoy — dla odróżnienia od całki ($\mathfrak{D}$) — „totale complète".

Opierając się na tem twierdzeniu, możemy rozszerzyć na całki Denjoy twierdzenie Lebesgue'a „o całkowaniu wyraz za wyrazem monotonicznych ciągów funkcji“. [1])

Twierdzenie 4. Jeżeli $\{f_n(x)\}$ *jest ciągiem prawie wszędzie niemalejącym funkcji całkowalnych* ($\mathfrak{D}$), *wzgl.* ($\mathfrak{D}^*$), *w przedziale* I_0 *i jeśli ciąg całek tych funkcji na* I_0 *jest ograniczony z góry, wówczas granica* $f(x) = \lim\limits_n f_n(x)$ *jest również całkowalna* ($\mathfrak{D}$), *wzgl.* ($\mathfrak{D}^*$), *w* I_0, *przyczem*

$$\lim_n (\mathfrak{D}) \int_{I_0} f_n(x)\,dx = (\mathfrak{D}) \int_{I_0} f(x)\,dx.$$

Dowód. Twierdzenie powyższe sprowadza się natychmiast do wspomnianego wyżej twierdzenia Lebesgue'a. Wystarczy rozważyć tylko, zamiast funkcji $f_n(x)$, funkcje $f_n(x) - f_1(x)$, które — jako całkowalne ($\mathfrak{D}$) i prawie wszędzie nieujemne — są zarazem, na mocy twierdzenia 3, sumowalne w sensie Lebesgue'a.

***Uogólnienie twierdzenia Scheeffera.**

§ 4. Zauważyliśmy już w § 2, iż niektóre wyniki końcowych §§ rozdz. poprzedniego interpretują się bezpośrednio w terminach teorji całki. Dodamy, tu jeszcze, iż twierdzenie 7 rozdz. IX (§ 4) pozwala wynik, zawarty w twierdzeniu 27 tegoż rozdziału, sformułować w postaci następującej: *jeśli funkcja* $f(x)$, *niemal wszędzie skończona, jest identyczna niemal wszędzie bądź z jedną z czterech pochodnych Dini'ego, bądź też z jedną z dwu krańcowych pochodnych aproksymatywnych obustronnych pewnej funkcji ciągłej* $F(x)$, *wówczas funkcja* $f(x)$ *jest całkowalna w sensie Denjoy i* $F(x)$ *jest jej całką nieoznaczoną Denjoy.*

Uwaga ta wzmacnia twierdzenie Scheeffera, jak również i uogólnienie tego twierdzenia, rozważane w rozdziale VII (§ 10). Istotnie, pokazaliśmy tam, iż każda funkcja ciągła jest określona jednoznacznie (z dokładnością do stałej addytywnej) przez podanie prawie wszędzie wartości jej prawostronnej górnej pochodnej Dini'ego, jeśli tylko — rzecz prosta — pochodna ta niemal wszędzie jest skończona. W twierdzeniu tem, zastąpić można oczy-

[1]) IV, § 2, tw. 6; por. także analogiczne twierdzenie dla całki Perrona (VII, § 6, tw. 11).

wiście pochodną prawostronną górną przez którąkolwiek z trzech pozostałych pochodnych Dini'ego, jednakże w rozumowaniu przeprowadzonem w rozdz. VII istotny jest warunek, iż we wszystkich punktach rozpatruje się pochodną Dini'ego zawsze tegosamego rodzaju.

Obecnie natomiast powiedzieć możemy, iż *funkcja ciągła $F(x)$ jest określona jednoznacznie (z dokładnością do stałej addytywnej), jeśli dana jest funkcja $\lambda(x)$ identyczna prawie wszędzie z jedną którąkolwiek z liczb Dini'ego funkcji $F(x)$, przy założeniu tylko dodatkowem, iż funkcja $F(x)$ posiada niemal wszędzie jedną przynajmniej z pochodnych Dini'ego skończoną.* W samej bowiem rzeczy, na mocy wyżej podanego twierdzenia, funkcja $\lambda(x)$ jest wówczas całkowalna ($\mathfrak{D}$) i $F(x)$ jest jej całką nieoznaczoną.

Uogólnione twierdzenie „o całkowaniu przez części".

§ 5. Udowodnione w rozdz. IV (§ 5) twierdzenie o całkowaniu przez części dla całki Lebesgue'a przenosi się natychmiast na całki Denjoy przez zastąpienie w sformułowaniu tego twierdzenia, „funkcji sumowalnej $\varphi(x)$" przez „funkcję całkowalną ($\mathfrak{D}$), wzgl. ($\mathfrak{D}^*$)." Dowód — oparty na definicji opisowej całek Denjoy — wymagałby tylko formalnej modyfikacji rozumowania, zastosowanego w przypadku całki lebesgue'owskiej.

Pójdziemy tu jednak — ze względu na pewne zastosowania — dalej nieco i zastąpimy równocześnie w sformułowaniu wymienionego twierdzenia „funkcję bezwzględnie ciągłą $F(x)$" przez „funkcję o wahaniu skończonem"; uogólnienie to jest już bardziej istotne i wymagać będzie wprowadzenia całki Riemanna-Stieltjesa. W dowodzie skorzystamy z pewnych oszacowań na przyrost i oscylację funkcji $T(x)$, określonej przez wzór

$$(1) \qquad T(x) = F(x)\,\Phi(x) - (\mathfrak{S})\int_a^x \Phi(t)\,dF(t) \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

gdzie $F(x)$ oznacza dowolną funkcją monotoniczną niemalejącą w przedziale $I_0 = (a, b)$, a $\Phi(x)$ — dowolną funkcję ograniczoną i całkowalną w I_0 względem $F(x)$ (w sensie Riemanna-Stieltjesa). Pokażemy mianowicie, iż dla każdego przedziału $I = (\alpha, \beta)$, zawartego w I_0,

$$(2) \quad T(\beta) - T(\alpha) \leqslant M.\,|\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)| + O(\Phi; I)\,.\,[F(\beta) - F(\alpha)],$$

oraz

(3) $$O(T; I) \leqslant M.\, O(\Phi; I) + O(\Phi; I)\,.\,[F(\beta) - F(\alpha)]\,,$$

gdzie M jest górnym kresem wartości bezwzględnych funkcji $F(x)$ w przedziale I_0.

Mamy, w samej rzeczy, dla każdego przedziału $I' = (\alpha', \beta')$, zawartego w $I \subset I_0$,

$$T(\beta') - T(\alpha') = [\Phi(\beta') - \Phi(\alpha')]\,.\,F(\beta') + [F(\beta') - F(\alpha')]\,.\,\Phi(\alpha')$$
$$- (\mathfrak{S})\int_{\alpha'}^{\beta'} \Phi(x)\, dF(x)\,.$$

Ponieważ jednak funkcja $F(x)$ jest monotoniczna, przeto (V, § 8, tw. 15)

$$(\mathfrak{S})\int_{\alpha'}^{\beta'} \Phi\, dF = \mu\,[F(\beta') - F(\alpha')]\,,$$

gdzie μ oznacza pewną liczbę, zawartą między kresami wartości funkcji $\Phi(x)$ w przedziale I'; zatem,

$$T(\beta') - T(\alpha') = [\Phi(\beta') - \Phi(\alpha')]\,.\,F(\beta') + [\Phi(\alpha') - \mu]\,.\,[F(\beta') - F(\alpha')]\,,$$

skąd

(4) $$|T(\beta') - T(\alpha')| \leqslant M\,.\,|\Phi(\beta') - \Phi(\alpha')| + O(\Phi; I')\,.\,[F(\beta') - F(\alpha')]\,.$$

Dając w tej nierówności $I' = I$, otrzymujemy bezpośrednio (2); zastępując zaś w (4) wyrażenia $|T(\beta') - T(\alpha')|$, $|\Phi(\beta') - \Phi(\alpha')|$, $O(\Phi; I')$ oraz $|F(\beta') - F(\alpha')|$ przez odp. ich kresy górne dla $I' \subset I$, otrzymujemy związek (3).

Z oszacowania (2) wynika natychmiast, iż, *jeśli funkcja $\Phi(x)$ jest ciągła w przedziale I_0, wówczas funkcja $T(x)$ jest także ciągła w tym przedziale*. Udowodnimy nadto, iż, *jeśli funkcja $\Phi(x)$ jest ciągła w I_0 oraz bezwzględnie ciągła na pewnym zbiorze $P \subset I_0$, wówczas funkcja $T(x)$ jest również bezwzględnie ciągła na tym zbiorze.*

Niech, w tym celu, ε będzie dowolną liczbą dodatnią; z uwagi na ciągłość funkcji $\Phi(x)$ w całym przedziale $I_0 = (a, b)$ oraz bezwzględną jej ciągłość na zbiorze P, istnieje taka liczba $\eta > 0$, iż nierówność

$$\sum_k |I_k| < \eta$$

pociąga za sobą dla każdego układu niezachodzących na siebie przedziałów $\{I_k = (\alpha_k, \beta_k)\}$, których krańce należą do P,

$$\sum_k |\Phi(\beta_k) - \Phi(\alpha_k)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

oraz

$$O(\Phi; I_k) < \frac{\varepsilon}{4M} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

gdzie przez M oznaczyliśmy — jak wyżej — kres górny wartości bezwzględnych funkcji $F(x)$ w przedziale (a, b). Mamy wówczas, na mocy (2),

$$\sum_k |T(\beta_k) - T(\alpha_k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4M}[F(b) - F(a)] < \varepsilon,$$

i funkcja $T(x)$ jest bezwzględnie ciągła na P.

Analogicznie zupełnie, korzystając tylko ze związku (3), zamiast (2), pokazujemy, iż, *jeśli funkcja* $\Phi(x)$ *jest bezwzględnie ciągła w znaczeniu węższem na pewnym zbiorze* $P \subset I_0$, *wówczas funkcja* $T(x)$ *jest również bezwzględnie ciągła na* P *w temsamem znaczeniu.*

Z rozważań powyższych wynika natychmiast, iż, *jeśli funkcja* $\Phi(x)$ *jest funkcją* (ACG), wzgl. (ACG^*), *w przedziale* I_0, *wówczas, określona przez wzór* (1), *funkcja* $T(x)$ *jest również funkcją* (ACG), wzgl. (ACG^*), *w tym przedziale.*

Możemy udowodnić teraz łatwo następujące uogólnione twierdzenie o całkowaniu przez części.[1])

Twierdzenie 5. Jeśli $F(x)$ *jest funkcją o wahaniu skończonem w przedziale* (a, b), *a* $\varphi(x)$ — *funkcją całkowalną* $(\mathfrak{D})$, wzgl.

[1]) Por. także, oparty na definicji konstruktywnej całek Denjoy, dowód tego twierdzenia w książce Hobsona (*R. F.*, p. 711). Dowód, który podajemy wyżej w tekście i który nawiązuje bezpośrednio do definicji opisowej, opiera się na pomyśle p. Zygmunda.

($\mathfrak{D}^*$), wzgl. ($\mathfrak{L}$), *w tym przedziale, wówczas funkcja* $F(x)\,\varphi(x)$ *jest całkowalna w temsamem znaczeniu,*[1] *przyczem*

$$(5)\quad \int_a^b F(x)\,\varphi(x)\,dx = \Phi(b)\,F(b) - \Phi(a)\,F(a) - (\mathfrak{S})\int_a^b \Phi(x)\,dF(x),$$

gdzie $\Phi(x)$ *jest całką nieoznaczoną* ($\mathfrak{D}$), wzgl. ($\mathfrak{D}^*$), wzgl. ($\mathfrak{L}$), *funkcji* $\varphi(x)$.

Dowód przeprowadzimy dla całki ($\mathfrak{D}$); zupełnie analogicznie postępuje się w dwu przypadkach pozostałych.

Założyć możemy, iż funkcja $F(x)$ jest monotoniczna, niemalejąca w przedziale (a, b). Dając wówczas

$$(6)\qquad T(x) = F(x)\,\Phi(x) - (\mathfrak{S})\int_a^x \Phi(t)\,dF(t),$$

stwierdzamy natychmiast, na zasadzie rozważań poprzednich tego §, iż funkcja $T(x)$ jest uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą w przedziale (a, b), różniczkując zaś aproksymatywnie obydwie strony związku (6) i korzystając z twierdzenia 16 rozdz. V (§ 7), otrzymujemy prawie wszędzie

$$T'_a(x) = F(x)\ \Phi'_a(x) = F(x)\,\varphi(x);$$

wynika stąd oczywiście całkowalność ($\mathfrak{D}$) funkcji $F(x)\,\varphi(x)$ oraz związek

$$(\mathfrak{D})\int_a^b F(x)\,\varphi(x)\,dx = T(b) - T(a),$$

równoważny związkowi (5).

---

[1]) Zauważmy tu, iż funkcje o wahaniu skończonem tworzą najszerszą klasę funkcji, które — pomnożone przez dowolną funkcję całkowalną ($\mathfrak{D}$), lub ($\mathfrak{D}^*$) — dają zawsze znowuż funkcję całkowalną ($\mathfrak{D}$): dla każdej funkcji $F(x)$ o wahaniu nieskończonem zbudować można funkcję całkowalną ($\mathfrak{D}$) (dokładniej nawet — funkcję z jednym tylko punktem osobliwym, posiadającą całkę niewłaściwą Cauchy'ego), której iloczyn przez funkcję $F(x)$ nie jest już całkowalny według Denjoy.

Drugie twierdzenie o wartości średniej.

§ **6.** Z twierdzenia § poprzedniego wynika natychmiast drugie twierdzenie o wartości średniej[1]) dla całek Denjoy.

Twierdzenie 6. Jeżeli funkcja $\varphi(x)$ jest całkowalna $(\mathfrak{D})$ w przedziale (a, b) i $F(x)$ jest dowolną funkcją skończoną, niemalejącą w tym przedziale, wówczas istnieje zawsze w przedziale (a, b) taki punkt ξ, iż

$$(1)\qquad \int_a^b \varphi(x) F(x)\, dx = F(a) \int_a^\xi \varphi(x)\, dx + F(b) \int_\xi^b \varphi(x)\, dx,$$

gdzie całki rozumiane są w sensie Denjoy.[2])

Dowód. Dając

$$(2)\qquad \Phi(x) = (\mathfrak{D}) \int_a^x \varphi(t)\, dt,$$

mamy, na mocy twierdzenia 5 oraz twierdzenia o wartości średniej dla całki Riemanna-Stieltjesa (V, § 8, tw. 15),

$$\begin{aligned}(\mathfrak{D}) \int_a^b \varphi(x) F(x)\, dx &= \Phi(b) F(b) - (\mathfrak{S}) \int_a^b \Phi(x)\, dF(x)\\ &= \Phi(b) F(b) - \mu\,[F(b) - F(a)]\\ &= \mu \,.\, F(a) - [\Phi(b) - \mu] \,.\, F(b),\end{aligned}$$

gdzie μ jest liczbą, zawartą między kresami funkcji ciągłej $\Phi(x)$ w przedziale (a, b), a więc osiąganą przez tę funkcję w pewnym punkcie ξ przedziału. Związek ostatni napisać przeto możemy w postaci

---

[1]) Por. V, § 5 (tw. 6), gdzie rozważane twierdzenie udowodnione jest dla całki Lebesgue'a; łatwo zauważyć jednak, iż metoda tam stosowana zawodzi w teorji całki Denjoy.

[2]) Istnienie całki, stojącej po lewej stronie równości (1), wynika już z twierdzenia 5.

$$(\mathfrak{D})\int_a^b \varphi(x)F(x)\,dx = F(a)\ \Phi(\xi) - F(b)\,.\,[\Phi(b)-\Phi(\xi)],$$

ktora — na mocy (2) — równoważna jest związkowi (1).

Zauważymy tu, iż z twierdzenia 5 wynika istnienie spółczynników trygonometrycznych Fouriera-Denjoy (por. VI, § 7) dowolnej funkcji $x(t)$ całkowalnej ($\mathfrak{D}$) w przedziale $(-\pi, \pi)$, t. j. całek

$$(\mathfrak{D})\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos nt\,dt,\quad (\mathfrak{D})\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin nt\,dt \qquad (n = 0, 1, \ldots);$$

co więcej twierdzenie to pozwala oszacować z góry rząd wzrastania tych spółczynników, które — w przeciwieństwie do spółczynników trygonometrycznych Fouriera funkcji sumowalnych — nie dążą bynajmniej naogół do zera. Mamy mianowicie, całkując przez części,

$$(\mathfrak{D})\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos nt\,dt = (-1)^n\,[X(\pi)-X(-\pi)] - \int_{-\pi}^{\pi} X(t)\,d\cos nt$$

$$= (-1)^n\,[X(\pi)-X(-\pi)] + n\int_{-\pi}^{\pi} X(t)\sin nt\,dt\,,$$

$$(\mathfrak{D})\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin\ nt = -\int_{-\pi}^{\pi} X(t)\,d\sin nt = -\,n\int_{-\pi}^{\pi} X(t)\cos nt\,dt\,,$$

gdzie $X(t)$ oznacza całkę nieoznaczoną Denjoy funkcji $x(t)$, a więc — w każdym razie — funkcję ograniczoną. Na mocy tedy twierdzenia 13 rozdz. VI (§ 12)

$$\lim_n \int_{-\pi}^{\pi} X(t)\cos\ nt\,dt = \lim_n \int_{-\pi}^{\pi} X(t)\sin\ nt\,dt = 0,$$

i z poprzednich związków,

$$\lim_n \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos nt\,dt = \lim_n \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin nt\,dt = 0\,.$$

gdzie całki rozumiane są w sensie Denjoy.

Ogólne operacje całkowe.

§ 7. Rozważania dalsze tego rozdziału, które doprowadzą — w §§ 11 i 17 — do nowego sposobu scharakteryzowania całek Denjoy, opierać się będą na paru ogólnych definicjach o charakterze bardziej abstrakcyjnym.

Niech $\mathfrak{M}$ oznacza pewną operację funkcjonalną, która — dla każdego przedziału I — wyróżnia pewną klasę funkcji, określonych w tym przedziale, przyporządkowując im jednoznacznie liczby rzeczywiste skończone. O funkcjach w ten sposób wyróżnionych mówić będziemy, iż należą do zakresu operacji $\mathfrak{M}$ na przedziale I albo iż operacja $\mathfrak{M}$ jest dla nich na tym przedziale określona. Jeśli $f(x)$ należy do zakresu operacji $\mathfrak{M}$ na przedziale $I=(a, b)$, wówczas przez $\mathfrak{M}_a^b(f)$, lub $\mathfrak{M}(f; I)$, oznaczać będziemy liczbę, którą operacja $\mathfrak{M}$ przyporządkowuje funkcji f na I.

Nazywać będziemy operacją całkową, albo wprost — całką, każdą operację $\mathfrak{M}$ ustalonego wyżej typu, która spełnia następujące trzy warunki:

(I) jeśli funkcja $f(x)$ należy do zakresu operacji $\mathfrak{M}$ na pewnym przedziale I_0, wówczas należy również do jej zakresu na każdym przedziale $I \subset I_0$ i liczba $\mathfrak{M}(f; I)$ jest funkcją addytywną oraz ciągłą przedziału $I \subset I_0$;

(II) jeśli funkcja $f(x)$ należy do zakresu operacji $\mathfrak{M}$ na każdym z dwu przedziałów przyległych I_1, I_2, wówczas należy również do jej zakresu na przedziale I_1+I_2;

(III) funkcja $f(x)$ tożsamościowo równa zeru w jakimś przedziale I należy zawsze do zakresu operacji $\mathfrak{M}$ na tym przedziale, przyczem

$$\mathfrak{M}(f; I)=0.$$

Jeśli operacja $\mathfrak{M}$ jest całką, wówczas funkcja $f(x)$, należąca do zakresu jej na jakimś przedziale I_0, nazywać się będzie całkowalna ($\mathfrak{M}$) na I_0, liczba zaś $\mathfrak{M}(f; I_0)$ — całką ($\mathfrak{M}$) funkcji $f(x)$ na przedziale I_0; górny kres wartości bezwzględnych liczb $\mathfrak{M}(f; I)$ dla $I \subset I_0$ nazywać będziemy oscylacją całki ($\mathfrak{M}$) funkcji $f(x)$ na I_0 i oznaczać przez $O(\mathfrak{M}; f; I_0)$.

Dwie całki $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ nazywać się będą zgodne, jeśli dla każdej funkcji $f(x)$, całkowalnej zarówno w sensie ($\mathfrak{M}$), jak ($\mathfrak{N}$), na przedziale I, mamy zawsze

$$\mathfrak{M}(f; I)=\mathfrak{N}(f; I).$$

O całce $\mathfrak{M}$ będziemy mówili, iż obejmuje całkę $\mathfrak{N}$, jeśli obydwie te całki są zgodne i jeśli każda funkcja całkowalna ($\mathfrak{N}$) jest zarazem całkowalna ($\mathfrak{M}$); piszemy wówczas

$$\mathfrak{M} \supset \mathfrak{N} \quad \text{lub} \quad \mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}.$$

§ 8. Niech $f_1(x)$ będzie dowolną funkcją równą zeru poza pewnym zbiorem ograniczonym P. Widoczne jest natychmiast, iż, jeśli $\mathfrak{M}$ oznacza jakąkolwiek całkę i funkcja $f_1(x)$ jest całkowalna ($\mathfrak{M}$) na jakimkolwiek przedziale I, zawierającym wewnątrz zbiór P, wówczas funkcja ta jest całkowalna na każdym przedziale $I' \supset P$ i zawsze przytem

$$\mathfrak{M}(f_1; I') = \mathfrak{M}(f_1; I).$$

Uwaga ta pozwala przyjąć definicję następującą:

będziemy mówili, iż funkcja $f(x)$ jest całkowalna ($\mathfrak{M}$) na zbiorze ograniczonym P, jeśli funkcja $f_1(x)$ — równa $f(x)$ na zbiorze P i zeru poza zbiorem P — jest całkowalna ($\mathfrak{M}$) na każdym przedziale $I \supset P$; liczbę $\mathfrak{M}(f_1; I)$ (niezależną od wyboru przedziału $I \supset P$) nazywać będziemy wówczas całką ($\mathfrak{M}$) funkcji $f(x)$ na P i oznaczać przez $\mathfrak{M}(f; P)$.

Operacje całkowe zamknięte.

§ 9. Wyróżnimy pewną klasę operacji całkowych.

Nazywać będziemy operację całkową $\mathfrak{M}$ zamkniętą, jeśli czyni zadość dwu następującym warunkom, które oznaczymy odp. przez (C) i (H)[1]:

(C) jeśli jakaś funkcja $f(x)$, określona w przedziale $I = (a, b)$, jest całkowalna ($\mathfrak{M}$) w każdym przedziale $(a + \varepsilon, b - \eta)$ (gdzie $a < a + \varepsilon < b - \eta < b$) i jeśli istnieje granica

$$(1) \qquad \lim_{\varepsilon, \eta \to 0} \mathfrak{M}_{a+\varepsilon}^{b-\eta}(f),$$

wówczas funkcja ta jest również całkowalna ($\mathfrak{M}$) w całym przedziale I[2]);

[1]) Ponieważ znajdują się w widocznym związku z definicją całek niewłściwych Cauchy'ego i Harnacka (por. niż. §§ 15, 16).

[2]) Ze względu na ciągłość całki jako funkcji przedziału (§ 7, warunek (I)), całka $\mathfrak{M}(f; I)$ równa się wówczas granicy (1).

(H) jeśli P jest zbiorem domkniętym, ograniczonym, $\{I_k\}$ — ciągiem przedziałów przyległych do P, $f(x)$ — pewną funkcją całkowalną $(\mathfrak{M})$ na P oraz na każdym z przedziałów I_k, i jeśli

$$(2) \qquad \sum_k |\mathfrak{M}(f; I_k)| < +\infty, \quad \lim_k O(\mathfrak{M}; f; I_k) = 0,$$

wówczas funkcja $f(x)$ jest całkowalna $(\mathfrak{M})$ w całym przedziale $I = (a, b)$, zawartym między kresami a, b zbioru P, oraz

$$\mathfrak{M}(f; I) = \mathfrak{M}(f; P) + \sum_k \mathfrak{M}(f; I_k).$$

Warunek ostatni można nieco uogólnić; nazwiemy **warunkiem** (H^*) warunek, który otrzymuje się z warunku (H) przez zastąpienie w jego sformułowaniu założenia (2) przez następujące, mocniejsze nieco,

$$(2^*) \qquad \sum_k O(\mathfrak{M}; f; I_k) < +\infty.$$

Operacja całkowa $\mathfrak{M}$, która spełnia warunek (C) oraz warunek (H^*), nazywać się będzie **zamkniętą w znaczeniu ogólniejszem**.

Jeśli chodzi o operacje całkowe rozważane dotychczas w tym wykładzie, to łatwo zauważyć, iż całka Newtona, zarówno jak i całki Riemann'a oraz Lebesgue'a, nie są zamknięte w żadnym sensie. Natomiast okaże się w dalszym ciągu tego wykładu, iż całka $(\mathfrak{D})$ jest zamknięta w sensie zwykłym, całka $(\mathfrak{D}^*)$ — w sensie ogólniejszym.

Całka Lebesgue'a nie spełnia już nawet warunku (C), jak to widać natychmiast na przykładzie pochodnej funkcji $F(x)$, określonej w przedziale $(0,1)$ przez równości:

$$F(x) = x^2 \sin \frac{\pi}{x^2} \quad (0 < x \leqslant 1), \quad F(0) = 0.$$

Funkcja ta posiada w całym przedziale $(0,1)$ pochodną, przyczem pochodna ta jest ciągła w każdym przedziale $(\varepsilon,1)$ $(\varepsilon > 0)$.

Mamy tedy dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^1 F'(x)\,dx = -\varepsilon^2 \sin\frac{\pi}{\varepsilon^2}, \quad \text{skąd:} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 F'(x)\,dx = 0,$$

gdzie całki rozumiane są w sensie Lebesgue'a.

Tymczasem, jak pokazaliśmy w rozdz. VII (p. 187), gdzie określona tu funkcja $F(x)$ była już rozważana, pochodna jej nie jest w przedziale $(0,1)$ sumowalna.

§ 10. *Twierdzenie 7.* 1° *Całka ($\mathfrak{D}$) jest operacją zamkniętą.*

2° *Całka ($\mathfrak{D}^*$) jest operacją zamkniętą w sensie ogólniejszym.*

Dowód. Udowodnimy tylko część pierwszą twierdzenia; część druga uzasadnia się w sposób zupełnie analogiczny.

A) Całka $\mathfrak{D}$ spełnia warunek (*C*) § 9.

Niech, w tym celu, $f(x)$ będzie dowolną funkcją, określoną w przedziale (a, b) i całkowalną ($\mathfrak{D}$) w każdym przedziale $(a+\varepsilon, b-\eta)$ $(a < a+\varepsilon < b-\eta < b)$; zakładamy, iż istnieje granica

$$\lim_{\varepsilon, \eta \to 0} (\mathfrak{D}) \int_{a+\varepsilon}^{b-\eta} f(x)\, dx$$

i pokażemy, iż funkcja $f(x)$ jest wówczas całkowalna ($\mathfrak{D}$) w całym przedziale (a, b).

Niech

$$F(x) = \lim_{\varepsilon, \eta \to 0} (\mathfrak{D}) \int_{a+\varepsilon}^{x-\eta} f(x)\, dx \qquad (a < x \leqslant b),$$

$$F(a) = 0.$$

Określona w ten sposób funkcja $F(x)$ jest widocznie funkcją ciągłą w przedziale (a, b) i całką nieoznaczoną ($\mathfrak{D}$) funkcji $f(x)$ w każdym przedziale $\left(a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right)$. Mamy tedy prawie wszędzie w każdym z tych przedziałów — a więc prawie wszędzie w całym przedziale (a, b) —

$$F'_a(x) = f(x); \tag{1}$$

z drugiej strony, funkcja $F(x)$, będąc (*ACG*) w każdym z przedziałów $\left(a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right)$, jest również (*ACG*) w całym przedziale (a, b) i jest przeto w tym przedziale — z uwagi na (1) — całką nieoznaczoną ($\mathfrak{D}$) funkcji $f(x)$.

B) Całka $\mathfrak{D}$ spełnia warunek (*H*).

Niech, w tym celu, P będzie dowolnym zbiorem domkniętym, ograniczonym, a, b — jego kresami, oraz $\{I_k\}$ — ciągiem przedziałów doń przyległych. Zakładamy, iż pewna funkcja $f(x)$ jest całkowalna w sensie Denjoy na zbiorze P i na każdym z przedziałów I_k oraz iż

$$(2) \qquad \sum_k \left| (\mathfrak{D}) \int_{I_k} f(x)\,dx \right| < +\infty, \quad \lim_k O_k = 0,$$

gdzie przez O_k oznaczyliśmy oscylację całki nieoznaczonej $(\mathfrak{D})$ funkcji $f(x)$ w przedziale I_k.[1] Należy dowieść, iż funkcja ta jest wówczas całkowalna $(\mathfrak{D})$ w całym przedziale (a, b) oraz iż

$$(\mathfrak{D}) \int_a^b f(x)\,dx = (\mathfrak{D}) \int_P f(x)\,dx + \sum_k (\mathfrak{D}) \int_{I_k} f(x)\,dx.$$

Niech $f_1(x)$ będzie funkcją równą $f(x)$ w punktach zbioru P oraz zeru poza tym zbiorem. Funkcja ta jest — z założenia — całkowalna $(\mathfrak{D})$ w całym przedziale (a, b), przyczem

$$(3) \qquad (\mathfrak{D}) \int_a^b f_1(x)\,dx = (\mathfrak{D}) \int_P f(x)\,dx.$$

Niech teraz, dla każdego punktu x przedziału (a, b),

$$(4) \qquad F(x) = \sum_k (\mathfrak{D}) \int_{I \times I_k} f(x)\,dx,$$

gdzie przez I oznaczyliśmy — dla skrócenia — przedział (a, x). Ze względu na (2) określona w ten sposób, funkcja $F(x)$ jest skończona i ciągła w całym rozważanym przedziale.

Oznaczmy przez $g(x)$ funkcję, równą zeru w punktach zbioru P, oraz — odp. liczbom $\frac{1}{|I_k|} (\mathfrak{D}) \int_{I_k} f(x)\,dx$ wewnątrz przedziałów I_k. Z uwagi na pierwszy ze związków (2) funkcja $g(x)$ jest sumowalna w (a, b) i jej całka nieoznaczona Lebesgue'a

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,dt \qquad (a < x < b)$$

[1] Drugi ze związków (2) uwzględniamy oczywiście w tym tylko przypadku, gdy ciąg przedziałów przyległych do P jest nieskończony.

jest pewną funkcją bezwzględnie ciągłą w (a, b). Ponieważ zaś określona w ten sposób funkcja $G(x)$ pokrywa się — jak wynika natychmiast z (4) — z funkcją $F(x)$ w punktach zbioru P, przeto funkcja $F(x)$ jest również bezwzględnie ciągła na P i w prawie każdym punkcie $x \in P$

$$F'_a(x) = G'(x) = g(x) = 0 = f(x) - f_1(x). \tag{5}$$

Nadto, widoczne jest bezpośrednio z (4), iż funkcja $F(x)$ jest całką nieoznaczoną ($\mathfrak{D}$) funkcji $f(x)$ w każdym z przedziałów I_k, skąd wynika oczywiście, iż — z jednej strony — w prawie każdym punkcie x przedziału (a, b), nienależącym do P,

$$F'_a(x) = f(x) = f(x) - f_1(x), \tag{6}$$

z drugiej zaś, — iż funkcja $F(x)$, bezwzględnie ciągła na P, jest zarazem funkcją (ACG) w każdym z przedziałów przyległych do P, a więc — w rezultacie — jest (ACG) w całym przedziale (a, b). Zważywszy tedy na (3), (5), (6) i (4), funkcja $f(x)$ jest całkowalna ($\mathfrak{D}$), przyczem

$$\begin{aligned}(\mathfrak{D})\int_a^b f(x)\,dx &= (\mathfrak{D})\int_a^b [f(x) - f_1(x)]\,dx + (\mathfrak{D})\int_a^b f_1(x)\,dx \\ &= F(b) - F(a) + (\mathfrak{D})\int_P f(x)\,dx \\ &= \sum_k (\mathfrak{D})\int_{I_k} f(x)\,dx + (\mathfrak{D})\int_P f(x)\,dx,\end{aligned}$$

co należało udowodnić.

§ 11. Pokazaliśmy w § poprzednim, iż całka ($\mathfrak{D}$) jest operacją zamkniętą w sensie definicji § 9. Udowodnimy obecnie, iż całka ta, wśród wszystkich operacyj zamkniętych, zajmuje pewne szczególne miejsce, jest mianowicie n a j s ł a b s z ą operacją całkową zamkniętą, obejmującą całkę L e b e s g u e'a.

L e m m a t. Jeśli $f(x)$ jest funkcją całkowalną ($\mathfrak{D}$), wzgl. ($\mathfrak{D}^*$), w przedziale (a, b) oraz P jest pewnym zbiorem domkniętym, zawartym w tym przedziale, wówczas istnieje zawsze taki kawałek[1] *K tego zbioru, iż*

[1]) Por. VIII, § 2.

(1) *funkcja $f(x)$ jest sumowalna na P, oraz*

$$(2) \quad \sum_k \left| (\mathfrak{D}) \int_{a_k}^{b_k} f(x)\,dx \right| < +\infty, \qquad \textit{wzgl.} \ \sum_k O_k < +\infty,$$

gdzie $\{(a_k, b_k)\}$ oznacza ciąg przedziałów przyległych do K, a O_k — oscylację całki nieoznaczonej ($\mathfrak{D}^*$) funkcji $f(x)$ na przedziale (a_k, b_k).

Dowód. Niech $f(x)$ będzie funkcją całkowalną ($\mathfrak{D}$) w (a, b) i $F(x)$ jej całką nieoznaczoną Denjoy. W myśl tw. 16 rozdz. VIII (§ 19) funkcja $F(x)$ jest wówczas bezwzględnie ciągła na pewnym kawałku K zbioru P, a więc temsamem identyczna — na K z pewną funkcją $G(x)$ ciągłą bezwzględnie w całym przedziale (a, b). Mamy tedy, w prawie każdym punkcie $x \in K$,

$$f(x) = F_{a}'(x) = G'(x),$$

skąd wynika oczywiście sumowalność funkcji $f(x)$ na K. Nadto, oznaczając przez $\{(a_k, b_k)\}$ ciąg przedziałów przyległych do K, mamy

$$\sum_k \left| (\mathfrak{D}) \int_{a_k}^{b_k} f(x)\,dx \right| = \sum_k |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_k |G(b_k) - G(a_k)| < +\infty,$$

t. j. pierwszy ze związków (2).

Analogicznie postępujemy w przypadku całki $\mathfrak{D}^*$.

Możemy uzupełnić obecnie twierdzenie § poprzedniego w sposób następujący:

Twierdzenie 8. 1° *Całka $\mathfrak{D}$ jest najsłabszą zamkniętą operacją, obejmującą całkę Lebesgue'a.*

2° *Całka $\mathfrak{D}^*$ jest najsłabszą, zamkniętą w znaczeniu ogólniejszem, operacją całkową, obejmującą całkę Lebesgue'a.*

Dowód. Udowodnimy tylko pierwszą część twierdzenia, część druga uzasadnia się w sposób najzupełniej analogiczny.

Stwierdzamy przedewszystkiem (§ 3, tw. 2), iż całka Denjoy obejmuje całkę Lebesgue'a oraz iż — w myśl twierdzenia § poprzedniego — jest operacją zamkniętą. Wystarczy tedy udowodnić jeszcze, iż zawsze, jeśli $\mathfrak{M}$ oznacza jakąkolwiek całkę zamkniętą, obejmującą całkę Lebesgue'a, a $f(x)$ — dowolną funkcję całkowalną ($\mathfrak{D}$) w przedziale $I_0 = (a, b)$, wówczas funkcja ta jest również całkowalna ($\mathfrak{M}$) w przedziale I_0, przyczem

$$\mathfrak{M}(f; I_0) = (\mathfrak{D}) \int_{I_0} f(x)\, dx .$$

Dla dowodu przyjmiemy chwilowo oznaczenia następujące: nazwiemy przedziałem regularnym każdy przedział $I \subset I_0$, w którym funkcja $f(x)$ jest całkowalna ($\mathfrak{M}$) oraz

$$\mathfrak{M}(f; I) = (\mathfrak{D}) \int_{I} f(x)\, dx ;$$

punkt $x \in I_0$ nazywać się będzie z kolei regularnym, jeśli wszystkie przedziały $I \subset I_0$, zawarte w pewnem otoczeniu $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ punktu x, są regularne.

Udowodnimy przedewszystkiem dwie uwagi następujące:

(A) Jeśli wszystkie punkty przedziału $I \subset I_0$ są regularne, wówczas przedział ten jest również regularny.

Istotnie, załóżmy, iż pewien przedział $I \subset I_0$ jest nieregularny. Jeśli tedy podzielimy go na dwa przedziały równe, wówczas jeden przynajmniej z otrzymanych przedziałów będzie także nieregularny; oznaczymy przedział ten przez $I^{(1)}$. Dzielimy go znów z kolei na dwa przedziały równe i, postępując w tenżesam sposób dalej, otrzymujemy ciąg zstępujący przedziałów nie-regularnych $\{I^{(k)}\}$ o długościach zdążających do zera. Punkt wspólny tych przedziałów jest oczywiście pewnym punktem nie-regularnym przedziału I, co uzasadnia uwagę (A).

(B) Jeśli wszystkie punkty wewnętrzne przedziału $I \subset I_0$ są regularne, wówczas przedział I jest również regularny.

Istotnie, jeśli wszystkie punkty wewnętrzne pewnego przedziału $I = (u, v) \subset I_0$ są regularne, wówczas — w myśl (A) — każdy przedział $\left(u + \frac{1}{n}, v - \frac{1}{n}\right)$ jest już napewno regularny; funkcja $f(x)$ posiada tedy w każdym takim przedziale całkę ($\mathfrak{M}$), przyczem

$$\overset{v-\frac{1}{n}}{\underset{u+\frac{1}{n}}{\mathfrak{M}}}(f) = (\mathfrak{D})\int_{u+\frac{1}{n}}^{v-\frac{1}{n}} f(x)\,dx\,.$$

Ponieważ jednak całka $\mathfrak{M}$ jest, z założenia, operacją zamkniętą, a więc — w szczególności — spełnia warunek (C) § 9, przeto, przechodząc w równości powyższej do granicy, otrzymujemy całkowalność ($\mathfrak{M}$) funkcji $f(x)$ w całym przedziale $I = (u, v)$ oraz równość

$$\overset{v}{\underset{u}{\mathfrak{M}}}(f) = (\mathfrak{D})\int_{u}^{v} f(x)\,dx\,,$$

skąd wynika, iż przedział ten jest regularny.

Załóżmy teraz, iż

(α) przedział I_0 nie jest regularny.

Przedział ten zawiera wówczas wewnątrz — w myśl (B) — napewno punkty nie-regularne. Oznaczmy przez P zbiór punktów nie-regularnych przedziału I_0. W myśl lemmatu poprzedniego istnieje tedy taki przedział $J \subset I_0$, zawierający wewnątrz jeden przynajmniej punkt zbioru P, iż funkcja $f(x)$ jest sumowalna na zbiorze $P \times J$ i jej całki oznaczone Denjoy na przedziałach przyległych do $P \times J$ tworzą szereg bezwzględnie zbieżny. Niech J' będzie dowolnym podprzedziałem tego przedziału. Funkcja $f(x)$ jest oczywiście sumowalna na zbiorze $P \times J'$ (który może być zresztą pusty) oraz

(3) $$\sum_k \left| (\mathfrak{D})\int_{J_k'} f(x)\,dx \right| < +\infty\,,$$

gdzie $\{J_k'\}$ oznacza ciąg przedziałów przyległych do zbioru, utworzonego przez dołączenie krańców przedziałów J' do zbioru $P \times J'$. Zważywszy tedy na zamkniętość całki Denjoy (§ 10, tw. 7),

(4) $$(\mathfrak{D})\int_{J'} f(x)\,dx = (\mathfrak{L})\int_{P\times J'} f(x)\,dx + \sum_k (\mathfrak{D})\int_{J_k'} f(x)\,dx\,.$$

Ale wszystkie przedziały J_k', nie zawierając wewnątrz punktów zbioru P, są w myśl (B) regularne i na każdym z nich przeto określona jest całka ($\mathfrak{M}$) funkcji $f(x)$ przez równość

$$\mathfrak{M}(f; J_k') = (\mathfrak{D})\int_{J_k'} f(x)\,dx, \tag{5}$$

skąd, na mocy (3),

$$\sum_k |\mathfrak{M}(f; J_k')| < +\infty.$$

Całka $\mathfrak{M}$ obejmuje — z założenia — całkę Lebesgue'a i jest zamknięta. Funkcja $f(x)$ jest tedy całkowalna ($\mathfrak{M}$) na całym przedziale J', przyczem

$$\mathfrak{M}(f; J') = (\mathfrak{L})\int_{P \times J'} f(x)\,dx + \sum_k \mathfrak{M}(f; J_k'),$$

a więc, w myśl (4) i (5),

$$\mathfrak{M}(f; J') = (\mathfrak{D})\int_{J'} f(x)\,dx.$$

Każdy zatem przedział $J' \subset J$ jest regularny, co — oczywiście — sprzeczne jest z założeniem, iż przedział J zawiera wewnątrz punkty nie-regularne.

Założenie (α) prowadzi w ten sposób do sprzeczności. Przedział I_0 jest tedy regularny; funkcja $f(x)$ jest na nim całkowalna ($\mathfrak{M}$), a jej całka ($\mathfrak{M}$) na I_0 pokrywa się z całką Denjoy. Twierdzenie nasze jest przeto udowodnione.

Twierdzenie Hake'go.

§ 12. Ustaliliśmy już poprzednio (§§ 2, 3) wzajemny stosunek całek Denjoy, Lebesgue'a i Newtona. Zajmiemy się z kolei zbadaniem stosunku całek Denjoy do całki Perrona: jakkolwiek stosunek ten sprowadza się do prostej równoważności całek ($\mathfrak{D}^*$) i ($\mathfrak{P}$), niemniej uzasadnienie tego związku wymaga już dość głębokiego wniknięcia we własności rozważnych całek, stanowiąc wynik prac świeższej stosunkowo daty.

Pierwszy wynik w tej dziedzinie zawdzięczamy Hake'mu[1]), który udowodnił, iż całka Perrona obejmuje całkę ($\mathfrak{D}^*$).

Dla większej jasności rozbijemy dowód tego twierdzenia na parę lemmatów, uzupełniających własności całki Perrona, wyłożone w rozdziale VII.

---

[1]) *Math. Ann.*, t. 83, (1921), p. 120.

Lemmat 1. Na to, aby funkcja $f(x)$, określona w przedziale I_0, była całkowalna ($\mathfrak{P}$) w I_0 i by pewna liczba L była jej całką oznaczoną ($\mathfrak{P}$ w tym przedziale, konieczne jest i wystarcza, aby dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istniały takie dwie funkcje $S(x)$ oraz $T(x)$, skończone i ciągłe w I_0, dla których

$$(1) \qquad |[S(b) - S(a)] - L| < \varepsilon, \qquad |[T(b) - T(a)] - L| < \varepsilon$$

oraz niemal wszędzie

$$(2) \qquad \underline{S}(x) \begin{matrix} \geqslant f(x) \\ > -\infty \end{matrix}, \qquad \overline{T}(x) \begin{matrix} \leqslant f(x) \\ < +\infty \end{matrix}.$$

Dowód. Konieczność powyższego warunku wynika wprost z definicji całki Perrona; pozostaje tedy udowodnić tylko, iż warunek ten jest również i dostateczny. Niech, w tym celu, ε będzie dowolną liczbą dodatnią i $S(x)$ funkcją, skończoną i ciągłą w I_0, spełniającą nierówność (1) i — niemal wszędzie — warunek (2). Niech $\{a_k\}$ oznacza ciąg punktów, w których warunek (2) nie jest spełniony. Każdemu z punktów a_k przyporządkować możemy liczbę $h_k > 0$ taką, iż oscylacja funkcji $S(x)$ w przedziale $(a_k - h_k, a_k + h_k)$ jest mniejsza od $\frac{\varepsilon}{2^k}$. Oznaczymy z kolei przez $O_k(x)$ funkcję, równą oscylacji funkcji $S(x)$ w przedziale (a_k, x), jeśli $a_k \leqslant x \leqslant a_k + h_k$, — oraz oscylacji ze znakiem ujemnym w przedziale (a_k, x), jeśli $a_k - h_k \leqslant x \leqslant a_k$. Przyjmiemy pozatem

$$O_k(x) = O_k(a_k + h_k), \text{ jeśli } x \geqslant a_k + h_k,$$

oraz

$$O_k(x) = O_k(a_k - h_k), \text{ jeśli } x \leqslant a_k - h_k.$$

Funkcja $S(x) + O_k(x)$ posiada wówczas napewno w punkcie a_k pochodną dolną nieujemną. Dając tedy

$$U_k(x) = S(x) + O_k(x) + \frac{\varepsilon \sqrt[3]{x - a_k}}{2^k},$$

---

[1]) Jeśli chodzi o twierdzenie, które jest celem tego §, to możnaby tu uprościć nieco lemmat powyższy, zastępując w sformułowaniu jego termin „niemal wszędzie" przez „wszędzie, za wyjątkiem jednego conajwyżej punktu". Lemmat ten jest jednak sam przez się godny uwagi, ponieważ pokazuje, iż pewne uogólnienie funkcji zwyższających i zniższających Perrona nie prowadzi do modyfikacji samej całki Perrona.

mamy, dla każdego k,

(3) $$\underline{U}_k(a_k) = +\infty.$$

Niech teraz

(4) $$U(x) = S(x) + \sum_k \left[O_k(x) + \frac{\varepsilon \sqrt[3]{x - a_k}}{2^k} \right].$$

Wówczas

$$|U(x) - S(x)| < \sum_k O^k(x) + \varepsilon \sqrt[3]{|I_0|} < \varepsilon [1 + \sqrt[3]{|I_0|}],$$

a więc, zważywszy na (1),

(5) $$|U(b) - U(a) - L| \leqslant \varepsilon [3 + 2\sqrt[3]{|I_0|}].$$

Powiadamy, iż funkcja $U(x)$ jest funkcją zwyższającą funkcji $f(x)$ w I_0. W samej rzeczy, ponieważ wszystkie funkcje, stojące pod znakiem $\sum$ w równości (4), są monotoniczne niemalejące, przeto w każdym punkcie $x \in I_0$

(6) $$\underline{U}(x) \geqslant \underline{S}(x)$$

oraz

(7) $$\underline{U}(x) \geqslant \underline{U}_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Jeśli tedy punkt x nie zawiera się w ciągu punktów a_k, wówczas otrzymujemy wprost z (2) i (6)

$$\underline{U}(x) \geqslant \underline{S}(x) \begin{array}{l} \geqslant f(x) \\ > -\infty \end{array},$$

w każdym zaś z punktów a_k mamy, zważywszy na (3) i (7),

$$\underline{U}(a_k) \geqslant \underline{U}_k(a_k) = +\infty \begin{array}{l} \geqslant f(a_k) \\ > -\infty \end{array}.$$

Podobnie zupełnie budujemy funkcję $V(x)$, zniższającą dla $f(x)$ i spełniającą równoległą do (5) nierówność

$$|V(b) - V(a) - L| \leqslant \varepsilon [3 + 2\sqrt[3]{|I_0|}],$$

ponieważ zaś ε jest tu dowolną liczbą dodatnią, przeto z tej nierówności oraz (5) wynika, iż funkcja $f(x)$ jest całkowalna w sensie Perrona w I_0 oraz iż L jest wartością jej całki oznaczonej na tym przedziale.

Lemmat 2. Jeśli funkcja $f(x)$, znikająca tożsamościowo w punktach pewnego zbioru domkniętego P, całkowalna jest w sensie Perrona na każdym z przedziałów do P przyległych, i jeśli szereg oscylacji jej całki nieoznaczonej ($\mathfrak{P}$) na tych przedziałach jest zbieżny, wówczas funkcja $f(x)$ jest całkowalna ($\mathfrak{P}$) na całym przedziale (a, b), zawartym między krańcami zbioru P, przyczem

$$(8) \qquad (\mathfrak{P})\int_a^b f(x)\,dx = \sum_k (\mathfrak{P})\int_{a_k}^{b_k} f(x)\,dx,$$

gdzie $\{(a_k, b_k)\}$ oznacza ciąg przedziałów przyległych.

Dowód. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Każdemu przedziałowi (a_k, b_k) przyporządkować możemy taką funkcję $U_k(x)$, zwyższającą w tym przedziale dla $f(x)$, iż

$$(9) \qquad \left| U_k(x) - (\mathfrak{P})\int_{a_k}^{x} f(t)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{2^k}, \text{ jeśli } a_k \leqslant x \leqslant b_k.$$

Niech $O_k(x)$ $(a_k \leqslant x \leqslant b_k)$ oznacza oscylację funkcji $U_k(x)$ w przedziale (a_k, x). Ponieważ — z założenia — szereg oscylacji całki nieoznaczonej ($\mathfrak{P}$) funkcji $f(x)$ na przedziałach (a_k, b_k) jest zbieżny, przeto, na mocy (9), również

$$\sum_k O_k(b_k) < +\infty,$$

i możemy ustalić tak liczbę K, iż

$$(10) \qquad \sum_{k=K+1}^{\infty} O_k(b_k) < \varepsilon.$$

Dajmy, dla skrócenia,

$$S_k(x) = U_k(x), \quad \text{jeśli } k \leqslant K,$$

oraz

$$S_k(x) = U_k(x) + O_k(x), \quad \text{jeśli } k > K,$$

i niech:

$$U(x) = \sum_k^{(x)} [S_k(b_k) - S_k(a_k)], \text{ jeśli } x \in P,$$

(gdzie znak sumowania $\sum\limits_{k}^{(x)}$ rozciąga się na te wszystkie wartości wskaźnika k, dla których $b_k \leqq x$) oraz

$$U(x) = U(a_k) + S_k(x) - S_k(a_k),$$

jeśli x jest punktem wewnętrznym przedziału (a_k, b_k).

Określona w ten sposób w całym przedziale (a, b) funkcja $U(x)$ jest, jak łatwo spostrzec, ciągła w całym tym przedziale, a nadto

$$\left| U(b) - U(a) - \sum_k (\mathfrak{P}) \int_{a_k}^{b_k} f(x)\,dx \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \left[S_k(b_k) - S_k(a_k) - (\mathfrak{P}) \int_{a_k}^{b_k} f(x) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[U_k(b_k) - U_k(a_k) - (\mathfrak{P}) \int_{a_k}^{b_k} f(x)\,dx \right] + \sum_{k=K+1}^{\infty} O_k(b_k),$$

a więc, zważywszy na (9) i (10),

$$\left| U(b) - U(a) - \sum_k (\mathfrak{P}) \int_{a_k}^{b_k} f(x)\,dx \right| < 3\varepsilon. \tag{11}$$

Powiadamy, iż funkcja $U(x)$ jest funkcją zwyższającą dla $f(x)$ w całym przedziale (a, b). W samej rzeczy, jeśli punkt x jest punktem wewnętrznym, albo lewym krańcem któregokolwiek z przedziałów przyległych, wówczas dla dostatecznie małej wartości $h > 0$ mamy zawsze

$$U(x+h) - U(x) = S_k(x+h) - S_k(x) \geqq U_k(x+h) - U_k(x),$$

skąd

$$\underline{U}^+(x) \geqq \underline{U}_k^+(x) \begin{matrix} \geqq f(x) \\ > -\infty \end{matrix}.$$

Jeśli natomiast x nie jest punktem wewnętrznym ani lewym krańcem żadnego z tych przedziałów, wówczas należy do zbioru P, i punkt $x + h$, dla dostatecznie małej wartości $h > 0$, nie zawiera się w żadnym z K pierwszych przedziałów (a, b), a więc

$$U(x+h) - U(x) \geqq 0,$$

skąd znowuż

$$\underline{U}^+(x) \geqq 0 = f(x) > -\infty.$$

Identyczne związki spełnione są, rzecz prosta, dla lewostronnej dolnej pochodnej funkcji $U(x)$ i funkcja jest tedy zwyższająca dla $f(x)$ w przedziale (a, b). Przez zmianę znaku funkcji $f(x)$ stwierdzamy z kolei natychmiast istnienie dla niej takiej funkcji zniższającej $V(x)$, która spełnia analogiczny do (11) związek

$$\left| V(b) - V(a) - \sum_k (\mathfrak{P}) \int_{a_k}^{b_k} f(x)\, dx \right| < 3\varepsilon,$$

a więc, ponieważ ε jest dowolną liczbą dodatnią, przeto funkcja $f(x)$ jest w przedziale (a, b) całkowalna w sensie Perrona, a jej całka oznaczona $(\mathfrak{P})$ w tym przedziale określona jest przez wzór (8).

Twierdzenie 9 (Hake'go). *Całka* $\mathfrak{P}$ *obejmuje całkę* $\mathfrak{D}^*$.

Dowód. Ponieważ (VII, § 6) całka Perrona obejmuje całkę Lebesgue'a, przeto w myśl tw. 8 (§ 11) — wystarczy już tu tylko pokazać, iż całka $(\mathfrak{P})$ jest zamknięta w znaczeniu ogólniejszem, t. j. spełnia warunki (C) oraz (H^*) § 9. Dowód rozbija się tedy na dwie części.

(A) Całka $\mathfrak{P}$ spełnia warunek (C).

Niech, w samej rzeczy, $f(x)$ będzie dowolną funkcją, określoną w przedziale (a, b); zakładamy, iż funkcja ta jest całkowalna $(\mathfrak{P})$ w każdym przedziale $(a+\varepsilon, b-\eta)$ $(a < a+\varepsilon < b-\eta < b)$, oraz, iż istnieje granica

$$\lim_{\varepsilon, \eta \to 0} (\mathfrak{P}) \int_{a+\varepsilon}^{b-\eta} f(x)\, dx; \tag{12}$$

należy zaś dowieść, iż funkcja ta posiada całkę oznaczoną $(\mathfrak{P})$ na całym przedziale (a, b).

Niech, w tym celu, c będzie dowolnym punktem wewnętrznym przedziału (a, b) i niech, dla skrócenia, $b_n = b - \dfrac{b-c}{n}$. Funkcja $f(x)$ jest całkowalna $(\mathfrak{P})$ w każdym z przedziałów (b_n, b_{n+1}) $(n = 1, 2, \ldots)$, możemy tedy, dla każdej liczby $\varepsilon < 0$, określić funcję $U(x)$, tak by w każdym z przedziałów (b_n, b_{n+1}) była funkcją zwyższającą dla $f(x)$, a nadto spełniała w każdym z nich warunek

$$(13) \qquad \left| U(x) - U(b_n) - (\mathfrak{P}) \int_{b_n}^{x} f(t)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2^n} \qquad (b_n < x < b_{n+1})$$

Ze względu na warunek ten oraz istnienie granicy (12) funkcja $U(x)$, ustalona dotychczas tylko w przedziałach (b_n, b_{n+1}), posiada granicę skończoną, gdy $x \to b$; granicę tę określimy jako wartość funkcji $U(x)$ w punkcie b.

Określona w ten sposób już w całym przedziale (c, b) funkcja $U(x)$ jest widocznie ciągła w całym tym przedziale, a nadto, jak wynika z jej określenia w przedziałach (b_n, b_{n+1}), spełnia w każdym punkcie $x < b$ przedziału (c, b) warunek

$$\underline{U}(x) \begin{matrix} \geqq f(x) \\ > -\infty \end{matrix};$$

mamy pozatem z (13)

$$\left| U(b) - U(c) - \lim_{\eta \to 0} (\mathfrak{P}) \int_{c}^{b-\eta} f(x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Zupełnie podobnie określamy funkcję $V(x)$, ciągłą i skończoną w przedziale (b, c), która w każdym, różnym od b, jego punkcie spełnia warunek

$$\underline{V}(x) \begin{matrix} \leqq f(x) \\ < +\infty \end{matrix},$$

przyczem

$$\left| V(b) - V(c) - \lim_{\eta \to 0} (\mathfrak{P}) \int_{c}^{b-\eta} f(x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Z lemmatu 1 wynika tedy, iż funkcja $f(x)$ posiada w przedziale (c, b) całkę oznaczoną $(\mathfrak{P})$, równą granicy

$$\lim_{\eta \to 0} (\mathfrak{P}) \int_{c}^{b-\eta} f(x)\, dx.$$

Analogicznie, funkcja ta posiada całkę oznaczoną $(\mathfrak{P})$ w przedziale (a, c), a więc całkowalna jest w sensie Perrona w całym przedziale (a, b).

(B) Całka $\mathfrak{P}$ spełnia warunek (H^*).

Niech istotnie P będzie dowolnym zbiorem domkniętym, (a, b) — przedziałem, zawartym między jego kresami, i $f(x)$ pewną funkcją określoną w tym przedziale. Zakładamy, iż funkcja ta jest całkowalna ($\mathfrak{P}$) na zbiorze P i na każdym z przedziałów do P przyległych, oraz iż zbieżny jest szereg oscylacji jej całki nieoznaczonej ($\mathfrak{P}$) na tych przedziałach. Należy dowieść, iż funkcja ta posiada całkę ($\mathfrak{P}$) na całym przedziale (a, b), równą sumie

$$(14) \qquad (\mathfrak{P})\int_P f(x)\,dx + \sum_k (\mathfrak{P})\int_{a_k}^{b_k} f(x)\,dx,$$

gdzie $\{(a_k, b_k)\}$ oznacza ciąg przedziałów przyległych do zbioru P.

Oznaczymy, w tym celu, przez $f_1(x)$ funkcję równą $f(x)$, jeśli x należy do zbioru P, i zeru poza tym zbiorem; analogicznie niech

$$f_2(x) \begin{array}{ll} = f(x), & \text{jeśli} \quad x \in CP \\ = 0, & \text{jeśli} \quad x \in P \end{array}.$$

Spostrzegamy natychmiast, iż funkcja $f_2(x)$ spełnia w przedziale (a, b) założenia lemmatu poprzedniego, a więc jest całkowalna ($\mathfrak{P}$) w tym przedziale, przyczem

$$(15) \qquad (\mathfrak{P})\int_a^b f_2(x)\,dx = \sum_k (\mathfrak{P})\int_{a_k}^{b_k} f_2(x)\,dx = \sum_k (\mathfrak{P})\int_{a_k}^{b_k} f(x)\,dx.$$

Z drugiej strony, funkcja $f_1(x)$ jest — z założenia — całkowalna ($\mathfrak{P}$) w (a, b) oraz

$$(16) \qquad (\mathfrak{P})\int_a^b f_1(x)\,dx = (\mathfrak{P})\int_P f(x)\,dx.$$

Funkcja $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ jest tedy również całkowalna ($\mathfrak{P}$) w (a, b) i — zważywszy na (15) i (16) — jej całka oznaczona w tym przedziale równa jest sumie (14).

Twierdzenie Alexandroffa-Loomana.

§ 13. Twierdzenie 9 nasuwa z natury rzeczy zagadnienie odwrotne, czy całka ($\mathfrak{D}^*$) nie obejmuje także całki ($\mathfrak{P}$), t. zn. czy dwie te całki nie są wprost równoważne. Zagadnienie to postawił istotnie już sam Hake w pracy swej cytowanej w § poprzednim, pozostawiając je wszakże bez odpowiedzi. Dopiero w parę lat później — niezależnie od siebie i prawie równocześnie — rozstrzygnęli je twierdząco Alexandroff i Looman[1]). Wydawać się może napozór dziwne, iż wynik, zawarty w twierdzeniu Alexandroffa i Loomana, osiągnięty został później aniżeli wynik Hake'go, ponieważ — jak czytelnik łatwo zauważy — dowód twierdzenia Hake'go jest bodajże bardziej złożony aniżeli dowód twierdzenia odwrotnego. Wytłumaczyć to można tem tylko, iż definicja opisowa całek Denjoy, do której nawiązują metody Alexandroffa i Loomana, była dawniej daleko rzadziej stosowana aniżeli definicja konstruktywna, na której opiera się bezpośrednio rozumowanie Hake'go.

Lemmat. *Jeśli funkcja $f(x)$, określona w pewnym przedziale $I_0 = (a, b)$, jest w tym przedziale całkowalna* ($\mathfrak{P}$) *i jeśli jedna przynajmniej z jej funkcji zwyższających jest o wahaniu skończonem w znaczeniu węższem na pewnym zbiorze $Q \subset I_0$, wówczas wszystkie funkcje zwyższające i zniższające oraz całka nieoznaczona* ($\mathfrak{P}$) *funkcji $f(x)$ w przedziale I_0 są również na tym zbiorze o wahaniu skończonem w znaczeniu węższem.*

Dowód. Niech $f(x)$ będzie funkcją całkowalną w sensie Perrona w przedziale (a, b) i $F(x)$ jej całką nieoznaczoną ($\mathfrak{P}$). Zakładamy, iż istnieje funkcja $U^0(x)$, zwyższająca dla $f(x)$ w tym przedziale, o wahaniu skończonem w znaczeniu węższem na pewnym zbiorze Q. Jeśli tedy $V(x)$ jest dowolną funkcją zniższającą funkcji $f(x)$, wówczas różnica $U^0(x) - V(x)$ jest monotoniczna w całym przedziale (a, b), a więc temsamem funkcja

$$V(x) = U^0(x) - [U^0(x) - V(x)]$$

jest, wraz z $U^0(x)$, o wahaniu skończonem w znaczeniu węższem na Q.

Z kolei, jeśli przez $U(x)$ oznaczymy dowolną funkcję zwyższającą funkcji $f(x)$, wówczas obydwie funkcje $U(x) - V(x)$, $F(x) - V(x)$ są monotoniczne niemalejące w całym przedziale, a więc funkcje

$$U(x) = V(x) + [U(x) - V(x)], \quad F(x) = V(x) + [F(x) - V(x)]$$

są, wraz z $V(x)$, o wahaniu skończonem w znaczeniu węższem na Q.

Lemmat nasz jest w ten sposób udowodniony.

---

[1]) Alexandroff, *Math. Zeitschr.*, t. 20, (1924), p. 213; Looman, *Math. Ann.*, t. 93, (1925), p. 153.

Twierdzenie 10 (Alexandroffa-Loomana). *Całka Perrona równoważna jest całce Denjoy w znaczeniu węższem.*

Dowód. Z uwagi na twierdzenie Hake'go wystarczy tu już tylko udowodnić, iż każda funkcja całkowalna $(\mathfrak{P})$ jest zarazem całkowalna $(\mathfrak{D}^*)$.

Niech tedy $f(x)$ będzie dowolną funkcją, określoną w przedziale $I_0 = (a, b)$ oraz całkowalną $(\mathfrak{P})$ w tym przedziale, i niech $F(x)$ będzie jej całką nieoznaczoną Perrona. Pokażemy przedewszystkiem, iż funkcja $F(x)$ jest uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą w znaczeniu węższem w przedziale (a, b).

Niech, w tym celu, $U^0(x)$ będzie pewną, dowolnie zrestą wybraną, funkcją zwyższającą funkcji $f(x)$. Ponieważ mamy wówczas w całym przedziale (a, b)

$$(1) \qquad \underline{U}^0(x) > -\infty,$$

przeto, na mocy tw. 20 rozdziału IX (§ 12), przedział ten jest sumą ciągu zbiorów Q_n $(n = 1, 2, \ldots)$ takich, iż na każdym z nich funkcja $U^0(x)$ jest o wahaniu skończonem w znaczeniu węższem. Możemy założyć oczywiście, iż zbiory te są domknięte oraz iż każdy z nich zawiera krańce a, b rozważanego przedziału.

Niech teraz ε będzie dowolną liczbą dodatnią i $U(x)$ — taką funkcją zwyższającą funkcji $f(x)$ w (a, b), iż

$$(2) \qquad [U(b) - U(a)] - [F(b) - F(a)] \leqslant \varepsilon.$$

Oznaczmy, dla każdego n, przez $U_n(x)$, wzgl. $F_n(x)$, funkcję identyczną z $U(x)$, wzgl. z $F(x)$, w punktach zbioru Q_n i linjową w przedziałach przyległych do tego zbioru. Na mocy lemmatu poprzedniego funkcja $U(x)$ jest o wahaniu skończonem w znaczeniu węższem na każdym ze zbiorów Q_n, a więc funkcja $U_n(x)$ jest o wahaniu skończonem w całym przedziale I_0. Z drugiej strony, w całym tym przedziale

$$\underline{U}_n(x) > -\infty,$$

a więc — z uwagi na twierdzenie 13 (1°) rozdz. VII (§ 7) — funkcja $U_n(x)$ posiada odchylenie dolne równe zeru.

Ponieważ jednak funkcja $U_n(x) - F_n(x)$ jest, wraz z funkcją $U(x) - F(x)$, monotoniczna niemalejąca w I_0, zatem z nierówności (2) wynika, iż dla każdego układu niezachodzących na siebie przedziałów (a_i, b_i), zawartych w I_0,

$$\sum_i [U_n(b_i) - U_n(a_i)] - \sum_i [F_n(b_i) - F_n(a_i)] \leqslant$$
$$\leqslant [U_n(b) - U_n(a)] - [F_n(b) - F_n(a)]$$
$$\leqslant [U(b) - U(a)] - [F(b) - F(a)]$$
$$\leqslant \varepsilon.$$

Stąd zaś,—jako że, jak już zauważyliśmy, odchylenie dolne funkcji $U_n(x)$ jest zerem,—otrzymujemy, iż odchylenie dolne funkcji $F_n(x)$ jest $\geqslant -\varepsilon$, a więc, — ponieważ ε jest dowolną liczbą dodatnią, — iż odchylenie to wprost znika.

Podobnie zupełnie, rozważając tylko zamiast funkcji zwyższających, funkcje zniższające, stwierdzamy, iż znika również i odchylenie górne funkcji $F_n(x)$, a więc w rezultacie — iż funkcja ta jest ciągła bezwzględnie. To jednak oznacza, iż funkcja $F(x)$ jest bezwzględnie ciągła na każdym ze zbiorów Q_n, a więc, iż jest uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą w przedziale I_0.

Nadto jednak, na mocy lemmatu poprzedniego, funkcja $F(x)$ jest, wraz z funkcją $U^0(x)$, o wahaniu skończonem w znaczeniu węższem na każdym ze zbiorów Q_n, jest więc (VBG^*) w całym przedziale I_0. Z uwagi tedy na udowodnioną już wyżej uogólnioną ciągłość bezwzględną (w znaczeniu szerszem) funkcji $F(x)$, wynika z kolei natychmiast z twierdzenia 14 rozdz. VIII (§ 18), iż rozważana funkcja $F(x)$ jest uogólnioną funkcją bezwzględnie ciągłą również i w znaczeniu węższem; ponieważ zaś — w myśl tw. 6 rozdz. VII (§ 5) — prawie wszędzie

$$F'(x) = f(x),$$

przeto funkcja $F(x)$ jest zarazem całką nieoznaczoną $(\mathfrak{D}^*)$ funkcji $f(x)$, co należało udowodnić

Ze względu na wynik, zawarty w powyższem twierdzeniu, całkę $\mathfrak{D}^*$ nazywa się często całką Denjoy-Perrona; dla odróżnienia, całkę $\mathfrak{D}$ nazywa się wówczas całką Denjoy-Khintchine'a (por. VIII, § 1).

Całka niewłaściwa Cauchy'ego.

§ 14. Ostatnie §§ tego rozdziału poświęcimy t. zw. konstruktywnej definicji całek Denjoy[1]). Definicja ta — której unikaliśmy dotychczas, nie chcąc wprowadzać do wykładu

[1]) Por. Denjoy, *Totalisation*, Chap. II, p. 181.

tego liczb pozaskończonych — wiąże explicite pojęcie całki Denjoy z klasycznemi uogólnieniami, znanemi pod nazwą całek niewłaściwych Cauchy'ego i Harnacka.

Rozpoczniemy tedy od sprecyzowania definicji tych dwu całek niewłaściwych, nawiązując znów do rozważań abstrakcyjnych §§ 7 — 9.

Przyjmiemy przedewszystkiem następującą definicję: będziemy mówili, iż punkt a jest punktem osobliwym funkcji $f(x)$ w przedziale I względem pewnej operacji całkowej $\mathfrak{M}$, lub — krótko — punktem osobliwym ($\mathfrak{M}$) funkcji $f(x)$ w I, jeśli istnieją dowolnie małe przedziały, zawierające punkt a i zawarte w I, na których funkcja $f(x)$ nie jest całkowalna ($\mathfrak{M}$).

Z definicji tej wynika natychmiast, iż zbiór punktów osobliwych funkcji $f(x)$ w jakimś przedziale I, względem pewnej operacji całkowej, jest zawsze domknięty. Łatwo dalej zauważyć, iż, jeśli zbiór ten jest pusty, wówczas funkcja $f(x)$ jest napewno w przedziale I całkowalna ($\mathfrak{M}$). W samej rzeczy, jeśli funkcja $f(x)$ nie jest w przedziale I całkowalna ($\mathfrak{M}$), wówczas nie jest całkowalna ($\mathfrak{M}$) przynajmniej na jednym z przedziałów, które otrzymuje się, dzieląc na połowy przedział I. Przedział ten dzielimy dalej na połowy, stwierdzając znów, iż na jednym przynajmniej z otrzymanych przedziałów funkcja $f(x)$ nie jest całkowalna ($\mathfrak{M}$); postępując w tenżesam sposób, otrzymujemy taki ciąg zstępujący przedziałów, o długościach dążących do zera, iż na żadnym z nich funkcja $f(x)$ nie jest całkowalna ($\mathfrak{M}$). Punkt wspólny tych przedziałów jest oczywiście punktem osobliwym ($\mathfrak{M}$) funkcji $f(x)$ w przedziale I.

§ 15. Przyporządkujemy każdej operacji całkowej $\mathfrak{M}$ pewną operację, którą oznaczymy przez $\mathfrak{M}^c$ i którą zdefinjujemy w sposób następujący: do zakresu jej na dowolnym przedziale $I_0 = (a, b)$ należeć będą wszystkie funkcje $f(x)$, spełniające warunki:

(1) $f(x)$ posiada conajwyżej skończoną ilość punktów osobliwych ($\mathfrak{M}$) w przedziale I_0;

(2) istnieje funkcja $F(x)$, ciągła w przedziale I_0, taka, iż dla każdego przedziału (c, d), zawartego w I_0 i niezawierającego punktów osobliwych ($\mathfrak{M}$) funkcji $f(x)$,

$$F(d) - F(c) = \overset{d}{\underset{c}{\mathfrak{M}}}(f).$$

Jeśli funkcja taka istnieje, wówczas jest przez warunki (1) i (2) określona jednoznacznie z dokładnością do dowolnej stałej addytywnej; kładziemy wówczas

$$\mathfrak{M}^c(f; I_0) = F(b) - F(a).$$

Zdefinjowana w ten sposób operacja $\mathfrak{M}^c$ spełnia, jak spostrzega się natychmiast, warunki (I), (II), (III) § 7, jest tedy znowuż pewną operacją całkową, jednoznacznie przyporządkowaną całce $\mathfrak{M}$. Nazwiemy ją całką niewłaściwą ($\mathfrak{M}$) Cauchy'ego; widoczne jest, iż zawsze

$$\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}^c.$$

Uogólnienie określonego procesu całkowania przez przyporządkowanie mu odpowiedniej całki niewłaściwej Cauchy'ego, stosowane było początkowo przez samego Cauchy'ego do całki, rozumianej w sensie podanej przezeń definicji[1]; uogólnienie to umożliwiło całkowanie pewnych funkcji posiadających conajwyżej skończoną liczbą nieciągłości. Z kolei, w Analizie riemannowskiej, tosamo uogólnienie zastosowane zostało do całki Riemanna, stając się źródłem całki, która—znana pod nazwą całki niewłaściwej Riemanna-Cauchy'ego — pozwala scałkować metodami riemannowskiemi pewne funkcje o skończonej liczbie punktów nieograniczoności. Podobne uogólnienie możnaby, rzecz prosta, zastosować do całki Lebesgue'a, jednakże, jak łatwo spostrzec z uwagi na zamkniętość całek Denjoy, zarówno to uogólnienie, jak i obydwa pozostałe wyżej wspomniane, objęte są już przez całki Denjoy.

Wychodząc z pewnej operacji ($\mathfrak{M}$), możemy utworzyć ciąg operacji

(3) $$\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^c, \mathfrak{M}^{cc}, \ldots, \mathfrak{M}^{cc\cdots c}, \ldots,$$

z których każda obejmuje poprzednią i jest w stosunku do niej całką niewłaściwą Cauchy'ego. Można iść dalej jeszcze i przedłużyć ciąg (3) przez indukcję pozaskończoną, kładąc $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$ i ogólnie, dla $\alpha < \Omega$,

$$\mathfrak{M}_\alpha = \Big(\sum_{\xi<\alpha} \mathfrak{M}_\xi\Big)^c.\ ^{2)}$$

Mamy wówczas, jak łatwo zauważyć,

$$\mathfrak{M}_\Omega = \sum_{\xi<\Omega} \mathfrak{M}_\xi.\ ^{3)}$$

[1] Por. VII, § 1.

[2] Por. niż. § 17.

[3] Możnaby nawet zdefinjować całkę, którą oznaczyliśmy w tekście przez $\mathfrak{M}_\Omega$, jako najsłabszą operację całkową $\mathfrak{T}$, obejmującą operację $\mathfrak{M}$ i spełniającą ponadto warunek $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^c$.

W przypadku, gdy $\mathfrak{M}$ oznacza całkę Riemanna, $\mathfrak{M}_\Omega$ jest t. zw. całką niewłaściwą Lejeune-Dirichleta, która uogólnia metodę Riemannowską całkowania na pewne funkcje o conajwyżej przeliczalnym zbiorze punktów nieograniczoności [1]).

Przez analogję możnaby było rozszerzyć sens tego terminu i nazwać ogólnie, przyporządkowaną w powyższy sposób dowolnej zupełnie całce $\mathfrak{M}$, operację $\mathfrak{M}_\Omega$ całką niewłaściwą ($\mathfrak{M}$) Lejeune-Dirichleta. Bezpośrednią definicję tej całki możnaby łatwo zresztą otrzymać, modyfikując nieznacznie określenie całki niewłaściwej ($\mathfrak{M}$) Cauchy'ego: mianowicie, wystarczyłoby tylko zastąpić w sformułowaniu warunku (1) wyraz „skończoną" przez „przeliczalną". W przypadku, gdy $\mathfrak{M}$ oznacza całkę Riemanna lub Lebesgue'a, całka niewłaściwa ($\mathfrak{M}$) Lejeune-Dirichleta jest oczywiście objęta również przez całki Denjoy.

Całki niewłaściwe Harnacka.

§ 16. Podamy z kolei, w formie ogólnej, definicję t. zw. całki niewłaściwej Harnacka.

Przyporządkujemy mianowicie, w sposób jednoznaczny, każdej operacji całkowej $\mathfrak{M}$ pewną operację $\mathfrak{M}^h$, którą określimy, jak następuje:

zakres operacji $\mathfrak{M}^h$ na dowolnym przedziale I obejmować będzie wszystkie funkcje $f(x)$, określone w tym przedziale, takie, iż, jeśli P oznacza mnogość ich punktów osobliwych ($\mathfrak{M}$) w przedziale I, a $\{I_n\}$ — ciąg przedziałów przyległych do P w I [2]), wówczas

(1) funkcja $f(x)$ jest całkowalna ($\mathfrak{M}$) na P oraz na każdym z przedziałów I_n;

(2) $$\sum_n |\mathfrak{M}(f;\, I_n)| < +\infty, \qquad \lim_n O(\mathfrak{M};\, f;\, I_n) = 0.$$

---

[1]) W istocie rzeczy, Lejeune-Dirichlet podał swoje uogólnienie całki Riemanna w węższym nieco zakresie, mianowicie dla takich tylko funkcji, dla których zbiór punktów nieograniczoności posiada skończoną conajwyżej ilość punktów skupienia (t. j. skończoną t. zw. pierwszą pochodną). Uogólnienie to, dla ogólnych operacji całkowych $\mathfrak{M}$, odpowiadałoby operacji określonej jako suma ciągu przeliczalnego

$$\mathfrak{M} + \mathfrak{M}^c + \mathfrak{M}^{cc} + \ldots \qquad \text{(por. § 17)}$$

Pełne uogólnienie podane było przez du Bois-Reymonda (*Journ. f. reine u. ang. Math.*, t. 79, (1875), pp. 36 — 37); por. także: Rosenthal, *Encykl.*, p. 1050.

[2]) t. zn. przyległych do zbioru, utworzonego przez dołączenie do zbioru P krańców przedziału I.

Jeżeli funkcja $f(x)$ warunki te spełnia, wówczas definjujemy

$$\mathfrak{M}^h(f; I) = \sum_n \mathfrak{M}(f; I_n) + \mathfrak{M}(f; P).$$

Określona w ten sposób operacja funkcjonalna $\mathfrak{M}^h$ spełnia, jak spostrzega się natychmiast, warunki (I), (II) i (III) § 7, a więc jest również pewną operacją całkową. Nazywać ją będziemy całką niewłaściwą ($\mathfrak{M}$) Harnacka w znaczeniu szerszem, albo wprost całką niewłaściwą ($\mathfrak{M}$) Harnacka.

Całkę niewłaściwą ($\mathfrak{M}$) Harnacka w znaczeniu węższem, którą oznaczać będziemy przez $\mathfrak{M}^{h*}$, otrzymujemy, modyfikując nieznacznie definicję całki $\mathfrak{M}^h$; mianowicie, pozostawiając w definicji tej warunek (1) bez zmiany, zastępujemy w niej warunek (2) przez następujący:

$$(2^*) \qquad \sum_n O(\mathfrak{M}; f; I_n) < +\infty,$$

który jest mocniejszy aniżeli (2).

Mamy oczywiście

$$\mathfrak{M}^h \supset \mathfrak{M}^{h*} \supset \mathfrak{M}.$$

Określone powyżej operacje $\mathfrak{M}^h$, $\mathfrak{M}^{h*}$ nazwaliśmy całkami niewłaściwemi Harnacka, ze względu na widoczne ich pokrewieństwo ze znanem uogólnieniem całki Riemanna, które — dokonane przez Harnacka — umożliwia zastosowanie procesu całkowania riemannowskiego do pewnych funkcji, posiadających nieprzeliczalną mnogość punktów nieograniczoności. Oryginalna całka Harnacka odpowiada zresztą dokładniej operacji $\mathfrak{M}^{h*}$ aniżeli operacji $\mathfrak{M}^h$. [1])

Zauważymy tu jeszcze, iż jeśli operacja całkowa $\mathfrak{N}$ jest zamknięta, lub — ogólniej — jeśli spełnia choćby tylko warunek (H) (por. § 9), wówczas pokrywa się z całką $\mathfrak{N}^h$. Łatwo jednak zauważyć, iż z tożsamości $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^h$ bynajmniej nie wynika jeszcze, iż operacja $\mathfrak{N}$ spełnia warunek (H).

Podobnie zupełnie, jeśli operacja $\mathfrak{N}$ spełnia warunek (H^*) § 9, wówczas $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^{h*}$.

Definicja konstruktywna całek Denjoy.

§ 17. Rozważanie dwu poprzednich §§, poświęcone całkom niewłaściwym, prowadzą w sposób naturalny do nowej definicji całek Denjoy, opartej na indukcji pozaskończonej.

---

[1]) Harnack, *Math. Ann.*, t. 21, (1883), p. 324; t. 24, (1884), p. 220. Por. także: Hobson, *R. F.*, p. 657, oraz Rosenthal, *Encykl.*, p. 1053.

Ustalimy przedewszystkiem pewien dogodny sposób znakowania:

niech $\{\mathfrak{M}_\xi\}$ $(\xi < \nu)$ będzie ciągiem — naogół pozaskończonym — całek i załóżmy, iż dla każdej pary wskaźników $\xi < \eta < \nu$

(1) $$\mathfrak{M}_\xi \subset \mathfrak{M}_\eta .$$

Oznaczymy przez

$$\sum_{\xi<\nu} \mathfrak{M}_\xi$$

całkę $\mathfrak{M}$, której zakres — na każdym przedziale I — równy jest sumie zakresów całek $\mathfrak{M}_\xi$ $(\xi < \nu)$ na tym przedziale i która dla każdej funkcji $f(x)$, należącej do jej zakresu, określona jest przez równość

(2) $$\mathfrak{M}(f; I) = \mathfrak{M}_{\xi_0}(f; I),$$

gdzie ξ_0 oznacza najmniejszą wartość wskaźnika ξ, dla której funkcja $f(x)$ jest całkowalna $(\mathfrak{M}_\xi)$ na I. Wynika zresztą z (1), iż równość (2) zachowuje się, jeśli zastąpić w niej wskaźnik ξ_0 przez jakąkolwiek liczbę $\xi \geqslant \xi_0$.

Niech teraz $\{\mathfrak{L}_\xi\}$, $\{\mathfrak{L}^*_\xi\}$ będą dwoma ciągami pozaskończonemi całek, określonych w sposób następujący przez indukcję:

$\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}^*_0$ oznacza całkę lebesgue'owską;

$$\mathfrak{L}_\alpha = \Big[\sum_{\xi<\alpha} \mathfrak{L}_\xi\Big]^{ck}, \quad \mathfrak{L}^*_\alpha = \Big[\sum_{\xi<\alpha} \mathfrak{L}^*_\xi\Big]^{ck*} \qquad (\alpha > 0).$$

Pokażemy, iż

$$\mathfrak{D} = \sum_{\xi<\Omega} \mathfrak{L}_\xi = \mathfrak{L}_\Omega ,$$

$$\mathfrak{D}^* = \sum_{\xi<\Omega} \mathfrak{L}^*_\xi = \mathfrak{L}^*_\Omega .$$

Wystarczy udowodnić tu zresztą tylko pierwszą z powyższych równości; druga uzasadnia się — rzecz prosta — w sposób całkiem analogiczny.

Ponieważ całka $\mathfrak{D}$ jest zamknięta (§ 10) i obejmuje całkę Lebesgue'a, przeto stwierdzamy natychmiast, przez indukcję, iż dla każdego ξ

(3) $$\mathfrak{D} \supset \mathfrak{L}_\xi ,$$

skąd oczywiście

$$\mathfrak{D} \supset \sum_{\xi<\Omega} \mathfrak{L}_\xi .$$

Ażeby przekształcić związek powyższy w tożsamość

$$\mathfrak{D} = \sum_{\xi<\Omega} \mathfrak{L}_\xi ,$$

należy dowieść jeszcze, iż każda funkcja całkowalna ($\mathfrak{D}$) w jakimś przedziale jest w nim zarazem całkowalna ($\mathfrak{L}_\xi$) dla pewnej, dostatecznie wielkiej wartości wskaźnika $\xi < \Omega$.

Niech tedy $f(x)$ będzie funkcją całkowalną ($\mathfrak{D}$) w przedziale (a, b). Oznaczmy, ogólnie, przez P_ξ zbiór jej punktów osobliwych ($\mathfrak{L}_\xi$) w tym przedziale. Zbiory $\{P_\xi\}$ tworzą ciąg zstępujący zbiorów domkniętych i istnieje przeto pewna liczba $\mu < \Omega$ taka, iż

(4) $$P_\mu = P_{\mu+1} \text{ [1]}.$$

Załóżmy, iż

(5) $$P_\mu = P_{\mu+1} \neq 0 .$$

Rozważymy najpierw przypadek, gdy zbiór P_μ nie redukuje się do krańców przedziału (a, b).

Zbiór ten zawiera wówczas, w myśl lemmatu § 11 pewien kawałek K, taki, iż funkcja $f(x)$ jest na nim sumowalna i szereg wartości całki ($\mathfrak{D}$) tej funkcji na przedziałach do K przyległych jest zbieżny bezwzględnie. Niech I oznacza jakiś przedział, zawierający wewnątrz punkty zbioru K i obrany w ten sposób, by

$$I \times K = I \times P_\mu .$$

Oznaczymy przez $\{I_n\}$ ciąg przedziałów przyległych do zbioru $I \times K$ w przedziale I. Ponieważ żaden z tych przedziałów nie

[1]) Istnienie takiej liczby dowodzi się łatwo przez sprowadzenie do sprzeczności. Załóżmy, w samej rzeczy, iż, dla każdej liczby $\mu < \Omega$, mamy $P_\mu \neq P_{\mu+1}$. Każdy zbiór P_μ zawiera tedy pewien punkt x_μ, który nie należy do $P_{\mu+1}$; ponieważ zaś wszystkie rozważane zbiory są domknięte, przeto, z kolei, punktowi x_μ przyporządkować możemy pewien zawierający go przedział I_μ o krańcach wymiernych, rozłączmy ze zbiorem $P_{\mu+1}$, a więc—temsamem—ze wszystkiemi zbiorami P_ξ dla $\xi > \mu$. Otrzymujemy w ten sposób ciąg pozaskończony typu Ω przedziałów I_μ, z których — jak spostrzega się natychmiast — żadne dwa nie mogą się pokrywać. Prowadzi to jednak oczywiście do sprzeczności, ponieważ przedziałów o krańcach wymiernych jest tylko mnogość przeliczalna. [Por. także: S i e r p i ń s k i, *T. O.*, p. 52.].

zawiera już wewnątrz punktów osobliwych $(\mathfrak{L}_\mu)$, przeto funkcja $f(x)$ jest całkowalna $(\mathfrak{L}_\mu)$ na każdym przedziale, zawartym wewnątrz któregokolwiek z przedziałów I_n i całka jej na takim przedziale pokrywa się, w myśl (3), z całką $(\mathfrak{D})$. Wynika stąd natychmiast, iż na każdym z przedziałów I_n funkcja $f(x)$ jest całkowalna $(\mathfrak{L}^c_\mu)$ oraz iż

$$\mathfrak{L}^c_\mu(f; I_n) = (\mathfrak{D}) \int_{I_n} f(x)\, dx,$$

$$O(\mathfrak{L}^c_\mu; f; I_n) = O(\mathfrak{D}; f; I_n).$$

Stąd oczywiście

(6) $$\sum_n |\mathfrak{L}^c_\mu(f; I_n)| < +\infty,$$

a w przypadku, gdy ciąg przedziałów $\{I_n\}$ jest istotnie nieskończony, również

(7) $$\lim_n O(\mathfrak{L}^c_\mu; f; I_n) = 0.$$

Z uwagi na (4) wszystkie punkty zbioru K, które zawarte są wewnątrz przedziału I, są zarazem punktami osobliwemi $(\mathfrak{L}^c_\mu)$ funkcji $f(x)$ w tym przedziale. Z drugiej strony, ponieważ funkcja $f(x)$ jest sumowalna na K, przeto jest tembardziej całkowalna $(\mathfrak{L}^c_\mu)$ na tym zbiorze, i z (6) oraz (7) wynika, iż całkowalna jest $(\mathfrak{L}^{ch}_\mu = \mathfrak{L}_{\mu+1})$ na całym przedziale I, co oczywiście sprzeczne jest z założeniem, iż przedział ten zawiera wewnątrz punkty zbioru $P_\mu = P_{\mu+1}$.

Założyliśmy powyżej, iż zbiór P_μ nie redukuje się do krańców przedziału (a, b). W tym jednak, wyłączonym dotąd, przypadku spostrzega się natychmiast, iż funkcja $f(x)$ jest całkowalna $(\mathfrak{L}^c_\mu)$, a więc tembardziej całkowalna $(\mathfrak{L}_{\mu+1})$, w tym przedziale, co oczywiście znów jest sprzeczne z założeniem (5).

Założenie to prowadzi tedy do sprzeczności. Mamy więc $P_\mu = 0$, skąd wynika oczywiście, iż funkcja $f(x)$ jest całkowalna $(\mathfrak{L}_\mu)$ w rozważanym przedziale.

Twierdzenie nasze jest w ten sposób udowodnione.

Bibljografja.

(Nawias [ ] zawiera skrót, w jakim tytuł podręcznika jest cytowany).

Carathéodory, C. *Vorlesungen über reelle Funktionen.* 2. Aufl. 1927 [*R. F.*]

Hahn, H. *Theorie der reellen Funktionen.* Bd. I. 1921. [*R. F.*].

Hausdorff, F. *Grundzüge der Mengenlehre.* 1914. [*M.* I].

„ *Mengenlehre.* 2. Aufl. 1927. [*M.* II].

Hobson, E. W. *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series.* Vol. I. 3 ed. 1927. [*R. F.*].

Lebesgue, H. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* 1904. [*L. I.* I]. — 2-e éd. 1928. [*L. I.* II].

Łuzin, M. *Intiegrał i trigonomietriczeskij riad.* (w jęz. rosyjskim). 1915. [*Teza*].

Rosenthal, A. *Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlichen.* (Encykl. d. math. Wissensch. II, 3). 1924. [*Encykl.*].

Sierpiński, W. *Funkcje przedstawialne analitycznie.* 1925. [*F. A.*].

„ *Wstęp do teorji mnogości i topologji.* 1930. [*Wstęp*].

„ *Zarys teorji mnogości.* T. I. *Liczby pozaskończone.* Wyd. 3. 1928. [*L. P.*] — T. II. *Topologja Ogólna.* 1928. [*T. O.*].

Vallée-Poussin (de la), Ch. J. *Intégrale de Lebesgue. Fonctions d'ensemble Classes de Baire.* 1919. [*I. L.*].

Oprócz tych podręczników, cytowanych w tekscie, winniśmy wymienić jeszcze:

Kamke, E. *Das Lebesguesche Integral. Eine Einführung in die neuere Theorie der reellen Funktionen.* 1925.

Schlesinger, L. u. Plessner, A. *Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen.* 1926.

Obydwie książki wyróżniają się zwięzłym i jasnym wykładem. Książka Kamke'go zawiera ponadto teorję całki Denjoy-Perrona, rzadziej zwykle spotykaną w podręcznikach.

Z artykułów o charakterze encyklopedycznym wspomnieć należy:

Kamke, E. *Neuere Theorie der reellen Funktionen.* (Pascal. *Repertorium der höheren Mathematik.* 2. Aufl. Bd. I. 3. Hälfte).

Wspomnianą w przedmowie polemikę w sprawach priorytetu zawierają prace:

Borel, E., *Sur l'intégration des fonctions non-bornées et sur les définitions constructives*, *Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 35. 1919.

Lebesgue, H., *Remarques sur la théorie de la mesure et de l'intégration*, *Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 36. 1918.

Z prac, których nie mogliśmy uwzględnić w tekście, ponieważ ukazały się już po ukończeniu druku, wymienimy przedewszystkiem:

Bary, N., *Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues*, *Math. Ann.*, t. 103. 1930.

Temat tej ładnej pracy wiąże się z rozważaniami rozdziałów VIII i IX.

Praca prof. S. Mazurkiewicza, zawierająca przykład wspomniany na str. 227, ukaże się w t. 16 „*Fund. Math*“.

Skorowidz Terminów.

Skorowidz Autorów.