# ROZWIĄZANIA
## WSZYSTKICH ZADAŃ ALGEBRAICZNYCH NA POWTÓRZENIE CAŁEGO KURSU,

ZAWARTYCH W ZBIORZE

MICHALSKIEGO I ZAKRZEWSKIEGO.

ROZDZIAŁ XV.

OPRACOWAŁA

M. C.

12113

WARSZAWA 1917.
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNIACH GEBETHNERA I WOLFFA.

Cena Mk. 2.50

# ROZWIĄZANIA
## WSZYSTKICH ZADAŃ ALGEBRAICZNYCH NA POWTÓRZENIE CAŁEGO KURSU,

ZAWARTYCH W ZBIORZE

MICHALSKIEGO I ZAKRZEWSKIEGO.

ROZDZIAŁ XV.

OPRACOWAŁA

M. C.



WARSZAWA 1917.

Geprüft und freigegeben Presseverwaltung Warschau, den 10/IV 1917
T. № 5136 Dr. № 193.
Czcionkami Drukarni Naukowej, Warszawa, Rynek Starego Miasta № 11.

1. Niech pierwiastkami równania, które mamy napisać, będą $\alpha$ i $\beta$. Jako pierwiastki równania postaci

$$x^2+px+q=0 \quad . \; . \; . \; (1)$$

$\alpha$ i $\beta$ posiadają następujące cechy: $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$ (patrz alg. Feldbluma str. 189).

Dla określenia spółczynników $p$ i $q$ mamy równania:

$$p=-(\alpha+\beta) \; . \; . \; . \; . \; (2), \qquad q=\alpha\beta \; . \; . \; . \; . \; . \; (3),$$

$$\alpha=\frac{a}{b} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4), \qquad \beta=\frac{a^2-b^2}{7a} \; . \; . \; . \; (5),$$

$$a^3-b^3=37ab \; . \; . \; . \; (6), \qquad a-b=12 \; . \; . \; . \; (7).$$

Z równania (7) mamy: $\quad a=12+b,$

przeto równanie (6) jest:

$$(12+b)^3-b^3=37b(12+b), \text{ czyli}$$

(patrz alg. Feldbluma A. VI wzór 20 str. 66)

$12^3+3.12^2b+36b^2=37.12b+37b^2$, czyli $b^2+12b-12^3=0$, stąd

(patrz alg. Feldbluma B. IV wzór 32 str. 186)

$$b=-6\pm\sqrt{36+12^3}=-6\pm\sqrt{1764}=-6\pm42;$$

$$b_1=36, \quad b_2=-48.$$

Z równania (7)

$$a_1=12+36=48, \quad a_2=12-48=-36.$$

Zadanie ma dwa rozwiązania:

$$\text{I) } a=48, \; b=36; \quad \text{II) } a=-36, \; b=-48.$$

Rozwiązanie I. Z równań (4) i (5) mamy:

$$\alpha=\frac{48}{36}=1^1/_3; \quad \beta=\frac{48^2-36^2}{7.48}=\frac{84.12}{7.48}=3.$$

Z równań (2) i (3):

$$p=-(1^1/_3+3)=-4^1/_3, \quad q=1^1/_3.3=4.$$

Równanie, które mamy napisać, jest:

$$x^2-4^1/_3x+4=0, \text{ czyli } 3x^2-13x+12=0.$$

Rozwiązanie II. $a=-36$, $b=-48$.

Z równań (4) i (5):

$$\alpha=\frac{-36}{-48}=\frac{3}{4},\quad \beta=\frac{(-36)^2-(-48)^2}{7.(-36)}=\frac{-84.12}{-7.36}=4.$$

Z równań (2) i (3) mamy:

$$p=-\left(\frac{3}{4}+4\right)=-4^3/_4,\quad q=\frac{3}{4}.4=3.$$

Równanie I) jest:

$$x^2-4^3/_4x+3=0,\ \text{czyli}\ 4x^2-19x+12=0.$$

---

2. Przypuszczamy, że zegarek kosztował początkowo $x$ rub. Przy sprzedaży zegarka otrzymano $x\%$ zysku.

Procent jest $\frac{1}{100}$ jakiejkolwiek wielkości, więc $x\%=x.\frac{1}{100}=$ $=\frac{x}{100}$ wartości zegarka.

Zegarek kosztował $x$ (rub.), przeto zysk $=x.\frac{x}{100}=\frac{x^2}{100}$ (rub.). Sprzedano go za $a$ (rub.), więc, aby określić $x$, układamy równanie:

$$x+\frac{x^2}{100}=a\ .\ .\ .\ (1)$$

Określimy $a$. Niech cyfra dziesiątków liczby dwucyfrowej będzie $y$, cyfra jedności $z$. Zgodnie h warunkami zadania układamy dwa równania:

$$10y+z=yz\times1+26\ .\ .\ .\ (2),\quad 10z+y=yz\times2+5\ .\ .\ .\ (3).$$

Pomnożymy równania: (2) przez 2, (3) przez 1, odejmiemy (3) od (2) i zniesiemy w nich iloczyny:

$$\begin{array}{r|c|l}
10y+z=yz+26 & 2 & 20y+2z=2yz+52 \\
10z+y=2yz+5 & 1 & \mp y\mp10z=\mp2yz\mp5 \\
\hline
 & & 19y-8z=47\ .\ .\ .\ (4)
\end{array}$$

Otrzymane równanie nieokreślone (4) możemy rozwiązać kilku sposobami.

Sposób I. Określimy z równania (4) $z$:

$$z=\frac{19y-47}{8}\ .\ .\ .\ (5)$$

Równanie (2) będzie:

$$10y+\frac{19y-47}{8}=\frac{y(19y-47)}{8}+26;\ 80y+19y-47=19y^2-47y+208;$$

$$19y^2-146y+255=0\ .\ .\ .\ (6)$$

Z równania (6) (patrz alg. Feldbluma str. 186 wzór 32) mamy:

$$y=\frac{1}{19}(73\pm\sqrt{73^2-19.255})=\frac{1}{19}(73\pm\sqrt{5329-4845})=$$
$$=\frac{1}{19}(73\pm\sqrt{484})=\frac{1}{19}(73\pm22);\quad y_1=\frac{95}{19}=5;\quad y_2=\frac{51}{19}=2\frac{13}{19}$$

(cyfra dziesiątków musi być całkowita); dziesiątków było 5, co zgadza się z warunkami zadania, gdyż $y<10$. Wówczas z (5) mamy:

$$z=\frac{1}{8}(19.5-47)=\frac{48}{8}=6,$$

co się też zgadza z warunkami zadania. W takim razie:

$$a=10y+z=56.$$

Sposób II. Cyfry $y$ i $z$ — całkowite i dodatnie;

$$y<10,\quad z<10\ .\ .\ .\ (7).$$

Rozwiążemy równanie nieokreślone (4) w liczbach całkowitych sposobem kolejnego dzielenia:

$$z=\frac{19y-47}{8}=2y-5+\frac{3y-7}{8}=2y-5+t;\quad t=\frac{3y-7}{8},\quad 3y-8t=7;$$
$$y=\frac{7+8t}{3}=2+3t+\frac{1-t}{3}=2+3t+t_1\quad \frac{1-t}{3}=t_1;\quad t+3t_1=1;\quad t=1-3t_1.$$

Wtedy: $y=2+3(1-3t_1)+t_1=5-8t_1;$

$$z=2(5-8t_1)-5+(1-3t_1)=6-19t_1;$$

$t_1$ — liczba dowolna i całkowita.

Łatwo zauważyć, że jedynie, gdy $t_1=0$, możemy otrzymać dodatnie wartości $y=5$, $z=6$, które zadość czynią warunkom (7); więc

$$a=5.10+6=56.$$

W równaniu (1)

$$x+\frac{x^2}{100}=a$$

zniesiemy mianownik, przeniesiemy wszystkie wyrazy na jedną stronę:

$$x^2+100x-100a=0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma str. 186 wzór 32)

$$x=-50\pm\sqrt{2500+100a}=-50\sqrt{100(25+a)}=$$
$$=-50\pm10\sqrt{25+a}.$$

Początkowa wartość jest wielkością dodatnią, więc $x>0$, dlatego ujemny pierwiastek równania nie nadaje się do rozwiązania zadania.

$$x=10\sqrt{25+a}-50.$$

Zadanie jest możliwe, gdy $10\sqrt{25+a}>50$, czyli $\sqrt{25+a}>5$, czyli $a>0$ (bo $a$—dodatnie). Wiemy, że $a=56$, więc

$$x=10\sqrt{25+56}-50=10\sqrt{81}-50=90-50-40.$$

Zegarek kosztował początkowo 40 rub.

---

3. Znajdziemy dodatnie pierwiastki równania

$$\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1 \;\ldots\; (1)$$

Przypuszczamy że $\sqrt[3]{x+45}=u \;\ldots\; (2)$, $\sqrt[3]{x-16}=v \;\ldots\; (3)$.

Wówczas równanie (1) będzie:

$$u-v=1 \;\ldots\; (4).$$

Po podniesieniu obydwu stron równań (2) i (3) do sześcianu otrzymujemy:

$$u^3-v^3=61 \;\ldots\; (5).$$

Otrzymane równanie (5) możemy rozwiązać kilku sposobami, lecz wybierzemy najłatwiejszy.

Z równania (4) mamy:

$$u=1+v.$$

Wówczas równanie (5) będzie:

$$(1+v)^3-v^3=61, \text{ czyli}$$

(patrz alg. Feldbluma A. VI wzór 20 str. 66)

$$v^2+v-20=0;$$

skąd (patrz alg. Feldbluma B. IV wzór 31 str. 185)

$$v=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{1+4.20})=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{81})=\frac{1}{2}(-1\pm 9);\quad v_1=\frac{8}{2}=4;$$

$$v_2=-\frac{10}{2}=-5;\quad \text{wtedy}\quad u_1=4+1=5;\quad u_2=-5+1=-4.$$

Z równania (2) lub (3) mamy:

$$x=u^3-45=v^3+16;\quad \text{wówczas}\quad x_1=5^3-45=4^3+16=80;$$

$$x_2=(-4)^3-45=(-5)^3+16=-109$$

(drugie rozwiązanie nie nadaje się, gdyż mamy znaleźć pierwiastki dodatnie).

Sposób II. Z tożsamości

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ mamy: $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$ (6).

Podniesiemy do sześcianu równanie (1); przy podnoszeniu lewej strony zwrócimy uwagę na wzór (6): przypuszczamy, że w nim

$$a=\sqrt[3]{x+45},\quad b=\sqrt[3]{x-16};$$

zauważywszy, że

$$a^3=x+45,\quad b^3=x-16,\quad a-b=1,$$

otrzymujemy, że (1) będzie:

$$61-3\sqrt[3]{(x+45)(x-16)}=1,\quad \text{czyli}\quad \sqrt[3]{(x+45)(x-16)}=20.$$

Powtórne podniesienie do sześcianu obydwu stron równania daje: $(x+45)(x-16)=8000$, czyli $x^2+29x-8720=0$.

Rozwiążemy to równanie: (patrz alg. Feldbluma B. IV wzór 31 str. 185)

$\sqrt{3,57,21}=189$
28 25'7
8 22 4
369 332'1
9 332 1
0

$$x=\frac{1}{2}(-29\pm\sqrt{29^2+4.8720})=$$
$$=\frac{1}{2}(-29\pm\sqrt{841+34880})=$$
$$=\frac{-29\pm\sqrt{35321}}{2}=\frac{-29\pm189}{2};$$
$$x_1=\frac{1}{2}(189-29)=\frac{160}{2}=80$$
$$x_2=-\frac{1}{2}(29+189)=-\frac{218}{2}=-109$$

(nie nadaje się).

Przypuszczamy, że początkowa wartość herbaty $x$ (rub.) początkowa wartość kawy $y$ (rub.). Zysk, który mu przyniosła herbata i strata, jaką poniósł przy sprzedaży kawy $=z\%$. Procent jest $\frac{1}{100}$ jakiejkolwiek wielkości, więc

$$z\%=z.\frac{1}{100}=\frac{z}{100}\ \text{wartości herbaty.}$$

Herbata kosztowała początkowo $x$ (rub.), przeto zysk $=x.\frac{z}{100}=\frac{xz}{100}$ (rub.), tak samo otrzymujemy, że strata $=\frac{yz}{100}$. Wartość początkowa herbaty i kawy $=80$ rub.; wartość początkowa herbaty ($x$) wraz zyskiem $\left(x+\frac{xz}{100}\right)=55$ rub.; wartość początkowa kawy ($y$) jest większa od 27 rub. o $\frac{yz}{100}$ (rub.), więc układamy 3 równania z niewiadomemi $x$, $y$, $z$:

$$x+y=80\ .\ .\ .\ (8),\quad x+\frac{xz}{100}=55\ .\ .\ .\ (9),\quad y-\frac{yz}{100}=27\ .\ .\ .\ (10).$$

Dodamy, a potem odejmiemy od siebie stronami równania (9) i (10):

$$x+y+\frac{1}{100}z(x-y)=82;\quad x-y+\frac{1}{100}z(x+y)=28;$$

na zasadzie (8) mamy:

$$80+\frac{1}{100}z(x-y)=82;\quad x-y+\frac{80}{100}z=28,$$

czyli

$$z(x-y)=200 \ldots (11), \quad x-y+\frac{4}{5}z=28 \ldots (12).$$

Z równania (12) mamy:

$$x-y=28-\frac{4}{5}z \ldots (13).$$

Postawimy $x-y$ w równanie (11):

$$z(28-\frac{4}{5}z)=200; \quad z(7-\frac{1}{5}z)=50; \quad z^2-35z+250=0;$$

skąd (patrz alg. Feldbluma B. IV wzór 31 str. 185)

$$z=\frac{1}{2}(35\pm\sqrt{35^2-4.250})=\frac{1}{2}(35\pm\sqrt{1225-1000})=$$
$$=\frac{1}{2}(35\pm\sqrt{225})=\frac{1}{2}(35\pm15); \quad z_1=\frac{50}{2}=25, \quad z_2=\frac{20}{2}=10.$$

Obydwa rozwiązania nadają się, przeto zadanie ma dwa rozwiązania.

Rozwiązanie I. $z=25$; równanie (13) będzie:

$$x-y=28-\frac{4}{5}.25; \quad \text{czyli} \quad x-y=8 \ldots (14).$$

Rozwiązawszy równania (8) i (14) sposobem przez dodawanie i odejmowanie od siebie stronami, otrzymujemy:

$$x=\frac{1}{2}(80+8)=44, \quad y=\frac{1}{2}(80-8)=36.$$

Kupiec zapłacił za herbatę 44 rub., za kawę 36 rub.

Rozwiązanie II. $z=10$.

Równanie (13) po podstawieniu $z=10$ będzie:

$$x-y=28-\frac{4}{5}.10, \quad \text{czyli} \quad x-y=20 \ldots (15).$$

Dodawanie i odejmowanie od siebie stronami równań (8) i (15) daje:

$$2x=100, \quad 2y=60, \quad x=50, \quad y=30.$$

Herbata kosztowała 50 rub., kawa 30 rub.

---

4. Przekształcimy wyrażenie $\sqrt{26-\sqrt{5}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$.

Najpierw przekształcimy pierwiastek $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$. To możemy uczynić dwoma sposobami.

Sposób I. $\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}=$

$$=\sqrt{(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}.1+1^2}=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{5}-1,$$

wówczas:

$$\sqrt{26-\sqrt{5}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\sqrt{26-\sqrt{5}+\sqrt{5}-1}=\sqrt{25}=5.$$

Sposób II. Wyrażenie $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ można sprowadzić do $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$, gdy $a^2-b=n^2$ (–kwadrat zupełny), przekształcimy wyrażenie podług wzoru

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+n}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-n}{2}}\ \ldots\ (\alpha),$$

którego prawdziwość (jeżeli $a$ i $b$ wymierne) łatwo można udowodnić podniesieniem do kwadratu. W naszem wyrażeniu $a=6$, $b=20$, więc

$$n=\sqrt{6^2-20}=\sqrt{16}=4;$$

na zasadzie $(\alpha)$

$$\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{6-\sqrt{20}}=\sqrt{\frac{6+4}{2}}-\sqrt{\frac{6-4}{2}}=\sqrt{5}-1,$$

przeto:

$$\sqrt{26-\sqrt{5}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\sqrt{26-\sqrt{5}+\sqrt{5}-1}=\sqrt{25}=5.$$

Niech szybkość pierwszego pociągu $x$ wiorst, szybkość drugiego $y$ wiorst. Pierwszy pociąg przeszedł połowę drogi (180 wiorst) w $\frac{180}{x}$ godzin, drugi w $\frac{180}{y}$ godzin, drugi pociąg był w drodze o $1^1/_2$ g. więcej od pierwszego, przeto możemy ułożyć równanie:

$$\frac{180}{y}-\frac{180}{x}=1^1/_2\ \ldots\ (1).$$

Po upływie 5 godzin obydwa pociągi przeszły $5x+5y$ wiorst, odległość między niemi była $^1/_4$ początkowej odległości (360 wiorst), więc przeszły w przeciągu tych 5 godzin $^3/_4$ odległości; zgodnie z tem mamy:

$$5x+5y=360\,.\,^3/_4\ \ldots\ (2).$$

Gdy skrócimy (1) przez 3, (2) przez 5 i przekształcimy je, otrzymamy:

$$120x-120y=xy\ \ldots\ (3),\quad x+y=54\ \ldots\ (4).$$

Z równania (4) mamy: $y=54-x$, podstawimy $y=54-x$ w (3):

$$120x-120(54-x)=x(54-x);\quad 240x-6480=54x-x^2;$$

$$x^2+186x-6480=0;$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 32 str. 186)

$$x=-93\pm\sqrt{93^2+6480}=-93\pm\sqrt{8649+6480}=$$

$$=-93\pm\sqrt{15129}=-93\pm123;\quad x_1=30,\quad x_2=-216$$

(prędkość pociągu—dodatnia); $x=30$.

Z równania (4) mamy

$$y=54-30=24.$$

Prędkość pierwszego pociągu 30 wiorst, drugiego 24 wiorsty.

---

5. Określimy $a$ i $b$ z równań

$$\sqrt[a-b]{a+b}=2\sqrt{3}\ \ldots\ (1),\qquad (a+b).2^{b-a}=3\ \ldots\ (2).$$

Z równania (2) mamy:

$$a+b=\frac{3}{2^{b-a}}=3.2^{a-b}\ \ldots\ (3).$$

Podstawimy wartość $a+b$ w (1):

$$\sqrt[a-b]{3.2^{a-b}}=2\sqrt{3};\quad \text{czyli}\quad 2\sqrt[a-b]{3}=2\sqrt{3};\quad \text{czyli}\quad \sqrt[a-b]{3}=\sqrt{3},$$

skąd

$$a-b=2\ \ldots\ (4).$$

Równanie (3) wówczas będzie:

$$a+b=3.4,\quad a+b=12\ \ldots\ (5).$$

Gdy dodamy do siebie i odejmiemy stronami równania (4) i (5), otrzymamy:

$$a=\frac{14}{2}=7,\quad b=\frac{10}{2}=5.$$

Przypuszczamy, że kupiono $x$ marek po $a$ kopiejek, $y$ marek po $b$ kopiejek za sztukę. Dowiedzieliśmy się, że $a=7$, $b=5$, więc wszystkie marki po 7 kopiejek kosztowały $7x$ kopiejek, wszystkie marki po 5 kopiejek kosztowały $5y$ kopiejek, za wszystkie zaś marki zapłacono (2 rub.) 200 kopiejek, przeto układamy równanie:

$$7x+5y=200\ \ldots\ (6).$$

Rozwiążemy równanie nieokreślone (6). Liczba marek — wielkość dodatnia i całkowita, więc należy rozwiązać równanie w liczbach całkowitych (które nie są równe 0).

Przypuśćmy, że $x=5x'$ . . . (7) $x^1$ — liczba całkowita), skróciwszy (6) przez 5, otrzymujemy tedy:

$$7x^1+y=40.$$

Rozwiążemy to równanie nieokreślone bezpośrednio w liczbach całkowitych:

$$y=40-7x^1\ \ldots\ (8);$$

$$x>0,\quad y>0,\quad \text{więc}\quad 5x^1>0,\quad 40-7x^1>0,$$

skąd

$$0<x^1<5\tfrac{5}{7};\quad x^1=1, 2, 3, 4, 5.$$

Odpowiednie wartości $x^1$, $x$, $y$ z równań (7), (8) mamy na tablicy

| $x^1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| $y$ | 33 | 26 | 19 | 12 | 5 |

Zadanie ma 5 rozwiązań.

---

6. Przypuszczamy, że szukane liczby są $M$ i $N$, suma ich $M+N$, cyfra dziesiątków tej dwucyfrowej liczby $m$, cyfra jedności $n$.

Iloczyn tych cyfr $=12$, suma ich wraz z sumą ich kwadratów $=32$, przeto możemy ułożyć równania:

$$mn=12 \ldots (1), \quad m^2+n^2+m+n=32 \ldots (2).$$

Równanie (2) przedstawimy w postaci:

$$(m+n)^2-2mn+(m+n)=32.$$

Przypuszczamy, że $\qquad m+n=z \ldots (3).$

Z równania (1) mamy, że $mn=12$, więc $2mn=2.12$.

Podstawimy w (2) $m+n=z$ i $2mn=2.12$:

$$z^2-2.12+z=32, \quad \text{czyli} \quad z^2+z-56-0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma B. IV wzór 31 str. 185)

$$z=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{1+4.56})=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{225})=\frac{1}{2}(-1\pm15),$$

$$z_1=\frac{14}{2}=7; \quad z_2=-\frac{16}{2}=-8,$$

lecz $z>0$, bo $m$ i $n$ patrz (3) są dodatnie jako cyfry, więc wartość $z_2$ nie nadaje się.

Równanie (3). $\qquad m+n=7 \ldots (4).$

Z układu równań (1) i (4) widzimy, że $m$ i $n$ są pierwiastkami równania kwadratowego

$$v^2-7v+12=0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma B. IV wzór 31 str. 185)

$$v=\frac{1}{2}(7\pm\sqrt{49-4.12})=\frac{1}{2}(7\pm1); \quad v_1=\frac{8}{2}=4, \quad v_2=\frac{6}{2}=3.$$

Obydwa rozwiązania nadają się, więc

$$m=4,\ n=3 \quad \text{albo} \quad m=3,\ n=4$$

(Równania (1) i (4) są symetryczne).

Suma $M+N=10\ 4+3=43$ albo $M+N=3.10+4=34.$

Liczba $M$ jest wielokrotną 4, $N$ wielokrotną 5, więc

$$M=4x,\quad N=5y\ \ldots\ (5).$$

$x$ i $y$ — liczby całkowite, i zgodnie z warunkami zadania dodatnie. Suma $M+N$ może być $=34$ albo $=43$.

Rozwiążemy najpierw (patrz (5))

$$4x+5y=34\ \ldots\ (6).$$

Otrzymane równanie nieokreślone (6) rozwiążemy w liczbach całkowitych i dodatnich, gdyż $x$ i $z$ całkowite i dodatnie.

$$x=\frac{34-5y}{4}=8-y+\frac{2-y}{4}=8-y+t,$$

$t$ — liczba całkowita;

$$t=\frac{2-y}{4};\quad y+4t=2;\quad y=2-4t\ \ldots\ (7).$$

$$x=8-(2-4t)+t=6+5t\ \ldots\ (8).$$

$x$ i $y$ — dodatnie, gdy wartości $t$ — liczby całkowite, które określimy z nierówności (patrz (7) i (8))

$$6+5t>0;\quad 2-4t>0,\quad \text{skąd}\quad -1^1/_5<t<{}^1/_2;\quad t=-1 \text{ albo } 0,$$

Równania (7) i (8) dają odpowiednie całkowite i dodatnie wartości $x$ i $y$, (6) liczby $M$ i $N$, rezultat wyliczań—na tablicy.

| | | |
|---|---|---|
| $t$ | $-1$ | 0 |
| $x$ | 1 | 6 |
| $y$ | 6 | 2 |
| $M$ | 4 | 24 |
| $N$ | 30 | 10 |

Teraz rozwiążemy równanie nieokreślone

$$4x+5y=43$$

w liczbach całkowitych i dodatnich:

$$x=\frac{43-5y}{4}=10-y+\frac{3-y}{4}=10-y+u$$

($u$ — liczba całkowita);

$$u=\frac{3-y}{4};\quad y=3+4u\ .\ .\ .\ (9)$$

więc $$x=10-(3-4u)+u=7+5u\ .\ .\ .\ (10)$$

$x$ i $y$ dodatnie, więc (patrz (9) i (10))

$7+5u>0$; $3-4u>0$, skąd $-1^2/_5<u<^3/_4$; $u=-1$ albo $=0$.

Z równań (9), (10) i (11) określimy odpowiednie wartości $x$, $y$, $M$, $N$; rezultat — na tablicy.

| | | |
|---|---|---|
| $u$ | $-1$ | 0 |
| $x$ | 2 | 7 |
| $y$ | 7 | 3 |
| $M$ | 8 | 28 |
| $N$ | 35 | 15 |

---

7. Określimy kapitał $a$.

Przypuszczamy, że całkowite i dodatnie ilorazy od dzielenia $a$ przez $100=x$, przez $17=y$, wówczas

$$a=100x=17y+9,\quad \text{skąd}\quad 100x-17y=9.$$

Rozwiążemy to równanie w liczbach całkowitych i dodatnich:

$$y=\frac{100x-9}{17}=6x-1+\frac{-2x+8}{17}=6x-1+2\,.\,\frac{4-x}{17}=6x-1+2t,$$

($t=$dowolna liczba dodatnia)

$$t=\frac{4-x}{17};\quad \text{skąd}\quad x+17t=4,\quad \text{więc}\quad x=4-17t\ .\ .\ .\ (1)$$

$$y=6(4-17t)-1+2t=23-100t\ .\ .\ .\ (2)$$

$x$ i $y$ są dodatnie, gdy (patrz (1) i (2))

$4-17t>0$, $23-100t>0$, skąd $t<^4/_{17}$, $t<0{,}23$ . . . (3).

Ze wszystkich całkowitych i dodatnich wartości $x$ i $y$ (patrz (3)) $t=0$, $-1$, $-2$... nadają się tylko te, przy których kapitał początkowy $a=100x<436$, więc (patrz (1))

$$100(4-17t)<436, \quad \text{skąd} \quad 1700t>-36,$$

czyli
$$t>-\frac{9}{425} \ . \ . \ . \ (4).$$

Równania (3) i (4) dają jedyną całkowitą wartość $t$, $t=0$, zgodnie z tym (patrz (1) i (2))

$$x=4, \quad y=23, \quad \text{więc} \quad a=100.4=17.23+9=400 \text{ (rub.)}.$$

Określimy na jak długo i na jaki procent kapitał został ulokowany. Przypuszczamy, że kapitał $a$ został ulokowany na $t$ lat po $p\%$. Wówczas w przeciągu 1 roku otrzymano $\frac{p}{100}$, w przeciągu $t$ lat $\frac{pt}{100}$ — części kapitału początkowego; kapitał początkowy $a$, a więc otrzymano

$$a \times \frac{pt}{100}=\frac{apt}{100} \text{ (rub.)}.$$

Ponieważ kapitał się zamienił na $=436$ rub., przeto

$$a+\frac{apt}{100}=436 \ . \ . \ . \ (5).$$

Gdyby ten sam kapitał ($a$) został ulokowany na $(t+1)$ lat po $(p-1)\%$, przyniósłby $\frac{a(p-1)(t+1)}{100}$ zysku i zamieniłby się na 442 rub., więc piszemy,

$$a+\frac{a(p-1)(t+1)}{100}=442 \ . \ . \ . \ (6).$$

$a=400$, przeto (5) i (6) będą:

$$400+4pt=436, \quad \text{skąd} \quad pt=9 \ . \ . \ . \ (7)$$
$$400+4(pt-t+p-1)=442$$

czyli (patrz (7))
$$p-t=\frac{5}{2} \ . \ . \ . \ (8).$$

Przedstawimy równanie (8) w postaci

$$p+(-t)=\frac{5}{2}, \quad \text{a (7)} \quad p.(-t)=-9.$$

Widzimy, że $p$ i $-t$ — są pierwiastkami równania kwadratowego

$$z^2-\frac{5}{2}z-9=0; \quad \text{czyli} \quad 2z^2-5z-18=0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma R. IV wzór 31 str. 185)

$$z=\frac{1}{2.2}(5\pm\sqrt{25+4.2.18})=\frac{1}{4}(5\pm\sqrt{169})=\frac{1}{4}(5\pm13);$$

$$z_1=\frac{18}{4}=4^1/_2; \quad z_2=-\frac{8}{4}=-2.$$

Równania (7) i (8) mają dwa rozwiązania.

I. $p = 4^1/_2$; $t = -(-2) = 2$.
II. $p = -2$; $t = -4^1/_2$.

Lecz % i czas są (w danym wypadku) liczbami dodatniemi, więc rozwiązanie II nie nadaje się. Kapitał został ulokowany na 2 lata po $4^1/_2$%.

---

8. Niech szukane kapitały będą $x$ i $y$, suma ich $S$. Ponieważ $S$ jest wielokrotną 200 i od dzielenia przez 23 daje w reszcie 21; więc

$$S = 200x = 23y + 21, \text{ czyli } 200x - 23y = 21 \ldots (1)$$

$x$ i $y$ — ilorazy całkowite i dodatnie od $S:200$ i $S:23$.

$S$ — liczba czterocyfrowa, więc

$$1000 < S < 10000 \ldots (2).$$

Z równania (1) mamy:

$$y = \frac{200x - 21}{23} = 9x + \frac{-7x - 21}{23} = 9x - 7\frac{x+3}{23} = 9x - 7t,$$

$t$ — liczba całkowita i $t = \frac{x+3}{23}$; skąd $x = -3 + 23t \ldots (3)$,

więc $y = 9(-3 + 23t) - 7t = -27 + 200t \ldots (4)$.

Z (2) widzimy, że $x$ i $y$ — dodatnie; podstawimy w nierówność (2) $S = 200x$:

$$1000 < 200x < 10000, \text{ czyli } 5 < x < 50; \text{ więc (patrz (3))}$$

$$5 < -3 + 23t < 50, \text{ skąd } \frac{8}{23} < t < 2^7/_{23};$$

jako liczba całkowita $t = 1$ albo $= 2$.

Zgodnie z warunkami zadania, $S$ — najmniejsza czterocyfrowa liczba, więc $t = 1$,

przeto (patrz (3) i (4)) $x = 20$, $y = 173$.

Wówczas $S = 200 . 20 = 23 . 173 + 21 = 4000$.

Wyliczymy sumę procentów, która się równa

$$\sqrt{3^{1,5} + \sqrt[3]{830584} + 3\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}.$$

Niech suma procentów będzie $= s$, więc

$$s = \sqrt{3^{1,5} + \sqrt[3]{830584} + 3\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}.$$

Przypuszczamy, że

$$a = 3^{1,5}, \quad b = \sqrt[3]{830584}, \quad c = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}};$$

wyliczymy najpierw $a+b+3c$, a potem $s=\sqrt{a+b+3c}$;

1) $a=3^{1,5}=3^{\frac{3}{2}}=\sqrt{3^3}=\sqrt{3^2 3}=3\sqrt{3}$.

2) $b=\sqrt[3]{830584}=\sqrt[3]{94^3}=94$.

| | | | | dzies. | jedn. |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\sqrt[3]{830'584}$ | | 9 | 4 |
| sześcian dziesiątków | $9^3=729$ | | | | |
| potr. kwadrat dziesiątków | $3.9^2=243$ | 1015'84 | . . reszta I | | |
| potr. iloczyn kw. dzies. przez jedn. | $3.9^2.4=$ | 972 | | | |
| | | 4384 | . . reszta II | | |
| potr. iloczyn dzies. przez kw. jedn. | $3.9.4^2=$ | 432 | | | |
| sześcian jedn. | $4^3=$ | 64 | | | |
| | | 0 | . . reszta III | | |

3) Sposób I.

$$c=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{4-4\sqrt{3}+3}=\sqrt{2^2-2.2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}=$$
$$=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=2-\sqrt{3}.$$

Sposób II. $c=\sqrt{7-\sqrt{4^2.3}}=\sqrt{7-\sqrt{48}}$.

Ponieważ $7^2-48=1$—kwadrat zupełny, przeto przekształcimy $c=\sqrt{7-\sqrt{4^2.3}}$ podług wzoru ($\alpha$) (patrz rozwiązanie № 4), przypuściwszy, że $n=\sqrt{7^2-48}=1$:

$$c=\sqrt{7-\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{7+1}{2}}-\sqrt{\frac{7-1}{2}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}.$$

Więc $S=\sqrt{3\sqrt{3}+94+3(2-\sqrt{3})}=\sqrt{94+6}=\sqrt{100}=10$.

Przypuszczamy, że kapitał $x$ jest umieszczony na $p\%$, kapitał $y$ na $q\%$, suma zaś procentów $=10$, odsetek z obydwu kapitałów $=112$ rub. i 72 rub., suma kapitałów $=4000$ rub. (patrz rozwiązania №№ 2, 3, 7), mamy 4 równania z 4 niewiadomemi $x, y, p, q$:

$$x+y=4000 \ldots (5), \quad p+q=10 \ldots (6),$$
$$px=11200 \ldots (7), \quad qy=7200 \ldots (8).$$

Równania (5) i (6) dają

$$y=4000-x, \quad q=10-p,$$

więc (8)

$$(4000-x)(10-p)=7200; \quad 40000-10x-4000p+px=7200;$$

czyli (patrz (7))

$$40000-10x-4000p+11200=7200, \text{ czyli } 4400-x-400p=0,$$

skąd $x=4400-400p \ldots (9)$,

przeto (patrz (7) i (9))

$$p(4400-400p)=11200; \quad p(11-p)=28; \quad p^2-11p+28=0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 31 str, 185)

$$p=\frac{1}{2}(11\pm\sqrt{121-4.28})=\frac{1}{2}(11\pm\sqrt{9})=\frac{1}{2}(11\pm3);$$

$$p_1=\frac{14}{2}=7,\quad p_2=\frac{8}{2}=4.$$

Obydwa rozwiązania nadają się, dlatego (patrz (9) albo (7))

$$x_1=1600,\quad x_2=2800.$$

Z (5) i (6) mamy

$$y_1=2400,\quad y_2=1200,\quad q_1=3,\quad q_2=6.$$

Pierwszy kapitał = 1600 rubli i został umieszczony na 7% albo 2800 rub. na 4%, drugi kapitał = 2400 rubli na 3% albo 1200 rubli na 6%.

---

9. Znajdziemy pierwszy wyraz postępu ($a_1$).

Zgodnie z warunkami zadania $\mathrm{Lg}_{\sqrt[3]{9}}\, a_1=1{,}5$, to znaczy, że, gdy podniesiemy $\sqrt[3]{9}$ do potęgi 1,5, otrzymamy $a_1$, dlatego

$$a_1=(\sqrt[3]{9})^{1,5}=(\sqrt[3]{3^2})^{1,5}=(3^{2/3})^{1,5}=3^{2/3\cdot1,5}=3.$$

Znajdziemy sumę pierwszych 10 wyrazów tego postępu. Zgodnie z warunkami zadania mamy:

$$\frac{a_1a_2a_3}{a_3}+\frac{a_1a_2a_3}{a_2}+\frac{a_1a_2a_3}{a_1}=299,$$

czyli

$$a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=299\quad .\ .\ .\ (1).$$

Wiemy, że $a_1=3$, $n=10$, więc (patrz alg. Feldbluma C. I wzór 43 str. 274)

$$S_{10}=[2.3+(10-1)d]\frac{10}{2}=5(9d+6)\quad .\ .\ .\ (2).$$

Określimy $d$. $\quad a_2=3+d,\quad a_3=3+2d$

(patrz alg. Feldbluma C. I wzór 40 str. 280), więc (1) będzie:

$$3(3+d)+3(3+2d)+(3+d).(3+2d)=299,$$

czyli

$$9+3d+9+6d+9+3d+6d+2d^2=299;$$

$$2d^2+18d-272=0;\quad d^2+9d-136=0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma B. IV wzór 31 str. 185)

$$d=\frac{1}{2}(-9\pm\sqrt{9^2+4.136})=\frac{1}{2}(-9\pm\sqrt{625})=\frac{1}{2}(-9\pm25);$$

$$d_1=\frac{16}{2}=8;\quad d_2=-\frac{34}{2}=-17.$$

Obydwa rozwiązania nadają się. I daje postęp wzrastający ÷ 3 . 11 . 19... wówczas (patrz (2))

$$S_{10}=5(9.8+6)=5.78=390.$$

II daje postęp malejący $\div 3 . -14 . -31 \ldots$ wówczas

$$S_{10} = 5(-9 . 17 + 6) = -5 . 147 = -735.$$

Suma pierwszych 10 wyrazów tego postępu $= 390$, albo $-735$.

---

10. Określimy pierwszy wyraz i różnicę postępu $(a_1)$ i $(d)$. Rozwiążemy równanie $x^{2\lg^3 x - 1,5\lg x} = \sqrt{10}$. Zauważywszy, że $\lg a^m = m \lg a$ i $\lg 10 = 1$, zlogarytmujemy obydwie strony równania:

$$(2\lg^3 x - 1,5\lg x)\lg x = \tfrac{1}{2}; \quad 4\lg^4 x - 3\lg^2 x - 1 = 0.$$

Przypuszczamy, że $\lg^2 x = z$, wówczas $4z^2 - 3z - 1 = 0$; skąd (patrz alg. Feldbluma B. IV wzór 31 str. 185)

$$z = \frac{1}{2.4}(3 \pm \sqrt{9 + 4.4.1}) = \frac{1}{8}(3 \pm \sqrt{25}) = \frac{1}{8}(3 \pm 5);$$

$$z_1 = \frac{8}{8} = 1; \quad z_2 = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4};$$

$$\lg x = \sqrt{z}, \text{ więc mamy } 1) \ \lg x = \sqrt{1} = \pm 1;$$

gdy $\lg x = 1$, to $x_1 = 10$, gdy zaś $\lg x = -1$, to $x_2 = 10^{-1} = 0,1$.

$$2) \quad \lg x = \sqrt{-\frac{1}{4}} = \pm \frac{i}{2}; \quad i = \sqrt{-1};$$

przeto, gdy $\lg x = \frac{i}{2}$, wówczas $x_3 = 10^{\frac{i}{2}} = \sqrt{10^i}$; jeżeli $\lg x \doteq -\frac{i}{2}$, to $x_4 = 10^{-\frac{i}{2}} = \frac{1}{10^{i/2}} . = \frac{1}{\sqrt{10^i}}$. Większy z rzeczywistych pierwiastków $a = 10$, mniejszy $d = \frac{1}{10}$. Określimy sumę wyrazów postępu. Znajdziemy $\sqrt[3]{498677257}$.

$$\begin{array}{rrl}
 & \sqrt{498'677'257} & | \, 793 \\
7^3 = & 343 & \\
3.7^2 = 147 & 155677 & \quad \ldots \text{ reszta I} \\
3.7^2.9 = & 1323 & \\
 & 2337 & \\
3.7.9^2 & 1701 & \\
9^3 & 729 & \\
3.79^2 = 18723 & 56382'57 & \quad \ldots \text{ reszta II} \\
3.79^2.3 & 56169 & \\
 & 21357 & \\
3.79.3^2 \ldots & 2133 & \\
3^3 \ldots & 27 & \\
 & 0 & \quad \ldots \text{ reszta III}
\end{array}$$

Suma wyrazów $= 793$.

Określimy liczbę wyrazów ($n$).

Znajdziemy $n$ ze wzoru (patrz alg. Feldbluma C. I wzór 43 str. 289)

$$Sn=\frac{1}{2}n[2a_1+(n-1)d]; \quad a=10, \quad d=\frac{1}{10}, \quad Sn=793,$$

przeto

$$\frac{n}{2}\left[2.10+(n-1)\frac{1}{10}\right]=793; \quad (199+n)n=15860;$$

$$n^2+199n-15860=0;$$

skąd (patrz alg. Feldbluma B. IV wzór 31 str. 185)

$$n=\frac{1}{2}(-199\pm\sqrt{199^2+4.15860})=$$

$$=\frac{1}{2}(-199\pm\sqrt{39601+63440})=$$

$$=\frac{1}{2}(-199\pm\sqrt{103041})=\frac{1}{2}(-199\pm321),$$

$$n_1=\frac{321-199}{2}=\frac{122}{2}=61;$$

$$n_2=\frac{199+321}{2}=-\frac{520}{2}=-260.$$

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{\sqrt{10'30'41}=321} \\ 62 & 130 \\ 2 & 124 \\ 641 & 64'1 \\ 1 & 0 \end{array}$$

(drugie rozwiązanie jako ujemne nie nadaje się).

Liczba wyrazów$=61$.

---

11. Określimy stosunek części.

Ułamek $\frac{2n^2+16n+30}{4n-n^2+21}=-\frac{2(n^2+8n+15)}{n^2-4n-21}$ przy $n=-3$ przyjmuje wzór $\frac{0}{0}$; rozłożymy $8n$ na $3n+5n$ i $-4n$ na $+3n-7n$, skrócimy (à priori przez $n-(-3)=n+3$), podstawimy $n=-3$,

$$-\frac{2(n^2+8n+15)}{n^2-4n-21}=-\frac{2(n^2+3n+5n+15)}{n^2+3n-7n-21}=$$

$$=-\frac{2[n(n+3)+5(n+3)]}{n(n+3)-7(n+3)}=-\frac{2(n+3)(n+5)}{(n+3)(n-7)}=-\frac{2(n+5)}{n-7};$$

dalej

$$\left[-\frac{2(n+5)}{(n-7)}\right]_{n=-3}=\frac{-2.2}{-10}=\frac{2}{5}.$$

Stosunek części$=\frac{2}{5}$.

Niech szukane części będą $a_1$ $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$.

Zgodnie z warunkami zadania

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1729$$

i prócz tego

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \frac{a_4}{a_5} = \frac{a_5}{a_6} = \frac{2}{5}.$$

Stąd widzimy, że szereg $\div\div a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5 : a_6$ — postęp geometryczny, którego iloraz $q = \frac{5}{2}$, $n = 6$, $S = 1729$, mamy teraz znaleźć $a$.

Określimy $a$ ze wzoru (patrz alg. Feldbluma wzór 43 str. 297):

$$\frac{a(^5/_2)^6 - a}{^5/_2 - 1} = 1729, \quad \text{czyli} \quad \frac{a\left(\frac{15625}{64} - 1\right)}{^3/_2} = 1729,$$

skąd

$$a = \frac{1729 \,.\, 3 \,.\, 64}{2 \,.\, 15561} = \frac{32}{3} = 10^2/_3.$$

Szukany postęp jest:

$$\div\div\, 10^2/_3,\ 10^2/_3 \,.\, \frac{5}{2} = \frac{80}{3},\ \frac{80}{3} \,.\, \frac{5}{2} = \frac{200}{3},\ \frac{200}{3} \,.\, \frac{5}{2} = \frac{500}{3},\ \frac{500}{3} \,.\, \frac{5}{2} = \frac{1250}{3},$$

$$\frac{1250}{3} \,.\, \frac{5}{2} = \frac{3125}{3}, \quad \text{czyli} \quad \div\div\, 10^2/_3 : 26^2/_3 : 66^2/_3 : 166^2/_3 : 416^2/_3 : 1041^2/_3.$$

---

12. Określimy 7-my i 15-ty wyraz postępu, które się równają pierwiastkom równania logarytmicznego

$$\lg(x-5) - \frac{1}{2}\lg(3x-20) = 0{,}30103 \quad . \; . \; . \; (1).$$

Aby rozwiązać (1), potęgujemy $\frac{1}{2}\lg(3x-20)$:

$$\frac{1}{2}\lg(3x-20) = \lg\sqrt{3x-20}$$

i, zauważywszy, że $0{,}30103 = \lg 2$, piszemy równanie (1) w postaci

$$\lg(x-5) - \lg\sqrt{3x-20} = \lg 2, \quad \text{czyli} \quad \lg\frac{x-5}{\sqrt{3x-20}} = \lg 2.$$

Z równości logarytmów wnosimy w równości liczb:

$$\frac{x-5}{\sqrt{3x-20}} = 2;$$

podniesiemy do kwadratu otrzymane równanie:

$$\frac{(x-5)^2}{3x-20} = 4, \quad \text{czyli} \quad \frac{x^2 - 10x + 25}{3x-20} = 4, \quad \text{czyli} \quad x^2 - 22x + 105 = 0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 32 str. 186)

$$x = 11 \pm \sqrt{121 - 105} = 11 \pm 4; \quad x_1 = 15, \quad x_2 = 7.$$

Ponieważ postęp jest ubywający, więc $a_7 > a_{15}$, przeto $a_7 = 15$, $a_{15} = 7$.

Określimy sumę wyrazów postępu ($Sn$).

Zgodnie z warunkami zadania

$$Sn = 25x + 6 = 47y + 43 \;.\;.\;. \; (2),$$

gdzie $x$ i $y$ — liczby całkowite i dodatnie, albowiem tylko wśród tych liczb można znaleźć najmniejszą liczbę, która czyniłaby zadość warunkom zadania.

Mamy (patrz (2)) równanie nieokreślone

$$25x - 47y = 37,$$

które rozwiążemy w liczbach całkowitych i dodatnich sposobem kolejnego dzielenia

$$x = \frac{37 + 47y}{25} = 1 + 2y + \frac{12 - 3y}{25} = 1 + 2y + 3 \,.\, \frac{4 - y}{25} = 1 + 2y + 3t,$$

gdzie $t$ — liczba całkowita i $t = \frac{4 - y}{25}$, więc

$$y = 4 - 25t \;.\;.\;. \; (3); \quad x = 1 + 2(4 - 25t) + 3t = 9 - 47t \;.\;.\;. \; (4).$$

Ponieważ $x$ i $y$ — dodatnie, więc (patrz (3) i (4))

$$4 - 25t > 0, \quad 9 - 47t > 0, \quad \text{skąd} \quad t < {}^4/_{25}; \quad t < {}^9/_{47},$$

więc $\qquad t = 0, \; -1, \; -2, \; -3 \;.\;.\;. \; (5).$

Z (3), (4), (5), a potem (2) widzimy, że $x$, $y$ i $Sn$ mają najmniejsze wartości przy największej wartości $t = 0$, więc $x = 9$, $y = 4$, a najmniejsza wartość sumy $Sn = 25 \,.\, 9 + 6 = 47 \,.\, 4 + 43 = 231$.

Określimy liczbę wyrazów. Wiemy, że $a_7 = 15$, $a_{15} = 7$, $Sn = 231$, więc (patrz alg. Feldbluma wzór 40 str. 280 i wzór 43 str 284) $\quad a_7 = 15 = a_1 + 6d \;.\;.\;. \; (6), \quad a_{15} = 7 = a_1 + 14d \;.\;.\;. \; (7),$

$$[2a_1 + (n - 1)d]\frac{n}{2} = 231 \;.\;.\;. \; (8).$$

Odejmiemy stronami od (7) (6):

$$\begin{array}{r|l} a_1 + 14d = \phantom{\mp}7 & \text{skąd } d = -1, \text{ więc} \\ \mp a_1 \mp \phantom{1}6d = \mp 15 & \text{(patrz (1)) } a_1 = 15 + 6 = 21. \\ \hline 8d = -\phantom{1}8 & \end{array}$$

Podstawimy w (8) $d = -1$, $a_1 = 21$:

$$[2 \,.\, 21 - (n - 1)]\frac{n}{2} = 231, \quad \text{czyli}$$

$$(43 - n)n = 462, \quad \text{czyli} \quad n^2 - 43n + 462 = 0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 31 str. 185)

$$n = \frac{1}{2}(43 \pm \sqrt{1849 - 4 \,.\, 462}) = \frac{1}{2}(43 \pm 1);$$

$$n_1 = \frac{44}{2} = 22; \quad n_2 = \frac{42}{2} = 21.$$

Obydwa rozwiązania nadają się do zadania, przeto liczba wyrazów może być 21 albo 22.

---

13. Przypuszczamy, że szukana liczba jest $N$, wyrazy postępu rosnącego $\div\, a, b, c$ i $\because\, m:n:p$, różnica postępu arytmetycznego $=d$, iloraz geometrycznego $=q$.

Zgodnie z warunkami zadania otrzymamy układ:

$a+b+c=57$ . . . (I), $a-m=9$ . . . (II), $b-n=16$ . . . (III),
$c-p=19$ . . . (IV), $b=a+d$ . . . (V), $c=a+2d$ . . . (VI),
$n=mq$ . . . (VII), $p=mq^2$ . . . (VIII).

Postępy są rosnące, przeto $d>0$; $q>1$ . . . (IX).

Na zasadzie (V), (VI) i (VII), (VIII) równania (I) i (III), (IV) są:

$$a+a+d+a+2d=57, \text{ czyli } a+d=19 \;.\;.\;. \text{ (X)},$$

przeto (patrz V)) $b=19$; $a+d-n=16$, czyli $19-n=16$, skąd

$$n=3 \text{ i } mq=3 \;.\;.\;. \text{ (XI)}; \quad a+2d-mq^2=19 \;.\;.\;. \text{ (XII)}.$$

Z równań (X), (XI) mamy: $a=19-d$, $m={}^3/_q$, przeto (XII) i (II) są:

$$19-d+2d-\frac{3}{q}\,.\,q^2=19 \quad \text{i} \quad 19-d-\frac{3}{q}=9, \quad \text{czyli} \quad d-3q=0$$

$$\text{i} \quad d+\frac{3}{q}=10, \; d=3q \quad \text{więc} \quad 3q+\frac{3}{q}=10; \; q\neq 0; \; 3q^2-10q+3=0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 32 str. 186)

$$q=\frac{1}{3}(5\pm\sqrt{25-3\,.\,3})=\frac{1}{3}(5\pm\sqrt{16})=\frac{1}{3}(5\pm 4); \; q_1=3; \; q_2=\frac{1}{3}.$$

Rozwiązanie drugie nie nadaje się, gdyż nie zgadza się z (IX), więc

$$q=3, \; d=3\,.\,3=9,$$

przeto (patrz (X), (VI), (XI), VIII)

$$a=19-9=10, \; c=10+2\,.\,9=28, \; m=\frac{3}{3}=1, \; p=1\,.\,3^2=9.$$

Więc szukane postępy są $\div\, 10\,.\,19\,.\,28$ i $\because\, 1:3:9$.

Niech ilorazy od dzielenia $N$ przez 10, 19, 28 będą $x, y, z$, wtedy

$$N=10x+1=19y+3=28z+9 \;.\;.\;. \text{ (1)}.$$

Z równania (1) mamy 2 równania z 3 niewiadomemi:

$10x-19y=2$ . . . (2), $10x-28z=8$, czyli $5x-14z=4$ . . . (3).

Układ (2) i (3) — nieoznaczony; rozwiążemy (2) i (3) w liczbach całkowitych i dodatnich, gdyż przy $N>0$ też i $x>0$, $y>0$, $z>0$. Rozwiążemy najpierw (2) w liczbach całkowitych sposobem przez podstawienie.

Przypuściwszy, że $y=2y_1$ . . . (4), skrócimy (2) przez 2, wtedy $5x-19y_1=1$.

Wyłączywszy z tego równania $x$,

$$x=\frac{1+19y_1}{5}$$

| $y_1$ | 0 | 1 | ... |
|---|---|---|---|
| $x$ | $^1/_5$ | 4 | ... |

podstawimy zamiast $y_1$ liczby całkowite od 0 do 4 włącznie; z jednego z tych podstawień otrzymujemy wartość całkowitą dla $x$; mianowicie: $y_1=1$, $x=4$ i (patrz (4)) $y=2$.

Z równania (2) (patrz alg. Feldbluma wzór 38 str. 258)

$$x=4+19t \;.\;.\;.\; (5),\quad y=1+10t \;.\;.\;.\; (6).$$

Teraz rozwiążemy (3). Na zasadzie (5) równanie (3) będzie:

$$5(4+19t)-14z=4,\quad \text{czyli}\quad 14z-95t=16 \;.\;.\;.\; (7).$$

Przypuściwszy, że $t=2t_1$ . . . (8), skrócimy (7) przez 2; wtedy

$$7z-95t_1=8\,.$$

Wyłączywszy z tego równania $z$, podstawimy zamiast $t_1$ liczby całkowite od 0 do 6 włącznie:

$$z=\frac{95t_1+8}{7}$$

| $t_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | $1^1/_7$ | $14^5/_7$ | $26^6/_7$ | $41^6/_7$ | $55^3/_7$ | 69 | ... |

Więc para całkowitych rozwiązań (7) jest (patrz (8)) $z=69$, $t=10$, ogólne wzory rozwiązania (7) są:

$$z=69+95u \;.\;.\;.\; (9),\quad t=10+14u \;.\;.\;.\; (10),$$

gdzie $u$ — liczba całkowita. Więc (patrz (10), (5) i (6))

$$\left.\begin{aligned} x&=4+19(10+14u)=4+190+266u=194+266u\\ y&=2+10(10+14u)=2+100+140u=102+140u \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\; (11).$$

Równania (11) i (9) zawierają wszystkie rozwiązania całkowite układu (2) i (3). Aby $x$, $y$ i $z$ były dodatnie, niezbędnem jest, aby (patrz (11) i (9))

$$194+266u>0;\; 102+140u>0;\; 69+95u>0, \text{ skąd}$$

$$u>-\frac{97}{133},\quad u>-\frac{51}{70},\quad u>-\frac{69}{95},\quad \text{więc}\quad u=0, 1, 2, 3.$$

Oczywiście $N$ ma najmniejszą wartość przy najmniejszych wartościach $x$, $y$, $z$, które otrzymamy (patrz (11) i (9) przy najmniejszej wartości $u=0$, więc

$$x=194, \quad y=102, \quad z=69,$$

a przeto (patrz (1))

$$N=10 \,.\, 194+1=19 \,.\, 102+3=28 \,.\, 69+9=1941.$$

Najmniejsza szukana liczba jest 1941.

---

14. Określimy spółczynniki równania $ax+ny=c$ . . . (1). Najpierw znajdziemy $a$. Wiemy, że we wzorze (patrz alg. Feldbluma wzór 49 str. 299)

$$S_n=\frac{a_1}{1-q}; \quad q=2{,}5^{-1}=\left(\frac{25}{10}\right)^{-1}=\frac{10}{25}=0{,}4, \quad S_n=5,$$

przeto $\quad 5=\dfrac{a_1}{1-0{,}4}=\dfrac{a_1}{0{,}6}$, skąd $a_1=5 \,.\, 0{,}6=3$.

We wzorze (patrz alg. Feldbluma wzór 42 str. 283)

$$Sn=\frac{1}{2}n(a_1+a_n), \quad Sn=85, \quad a_1=1{,}125, \quad a_n=8{,}875,$$

przeto $\quad 85=\dfrac{(1{,}125+8{,}875)n}{2}$, czyli $85=\dfrac{10n}{2}$,

skąd $\quad n=2 \,.\, 8{,}5=17$.

Znajdziemy $c$ z równania kwadratowego

$$z^2-74z-935=0,$$

(patrz alg. Feldbluma wzór 32 str. 186)

$$z=37\pm\sqrt{37^2+935}=37\pm\sqrt{1369+935}=37\pm\sqrt{2304}=37\pm48,$$

$$z_1=85, \quad z_2=-11.$$

Zgodnie z warunkami zadania

$$c>0, \text{ przeto } c=z=85.$$

Spółczynnikami równania nieokreślonego (1) są:

$$a=3, \quad n=17, \quad c=85,$$

przeto (1) jest $\quad 3x+17y=85$ . . . (2),

które rozwiążemy w liczbach całkowitych i dodatnich. Przypuśćmy, że

$$x=17x_1 \;.\;.\;.\; (3),$$

skrócimy (2) przez 17 ($x_1$ — liczba całkowita). Wtedy (patrz (2) i (3)

$$3x_1+y=5,$$

a to równanie rozwiążemy bezpośrednio:

$$y=5-3x_1 \;.\;.\;.\; (4).$$

Wzory (3) i (4) zawierają wszystkie całkowite rozwiązania (2), przy $x_1$ całkowitem. Aby $x$ i $y$ były dodatnie, niezbędnem jest, aby $x_1$ czyniło zadość nierównościom (patrz (3) i (4))

$$17x>0;\quad 5-3x_1>0 \quad \text{skąd} \quad 0<x_1<1^2/_3,$$

więc jako liczba całkowita $x_1=0$ albo 1, zgodnie z tem (patrz (3), (4)) otrzymamy dwa rozwiązania

$$x=0,\ y=5 \quad \text{i} \quad x=17,\ y=5-3=2.$$

---

15. Znajdziemy rzeczywiste znaczenie ułamka $\frac{2n^2+3n-35}{2n^2+18n+40}$, jeżeli $n=-5$

$$\frac{2n^2+3n-35}{2n^2+18n+40}=\frac{2x^2+3n-35}{(2n^2+9n+20)}.$$

Podstawiwszy w ułamem $n=-5$, otrzymamy $\frac{0}{0}$. Skrócimy przeto ułamek przez $n-(-5)=n+5$.

$$\frac{2n^2+3n-35}{2(n^2+9n+20)}=\frac{2n^2+10n-7n-35}{2(n^2+5n+4n+20)}=\frac{2n(n+5)-7(n+5)}{2[n(n+5)+4(n+5)]}=$$

$$=\frac{(2n-7)(n+5)}{2(n+4)(n+5)}=\frac{2n-7}{2(n+4)}.$$

Niech rzeczywiste znaczenie ułamka będzie $d$, wtedy

$$d=\left[\frac{2n-7}{2(n+4)}\right]_{n=-5}=\frac{-17}{-2}=\frac{17}{2}$$

to jest rzeczywiste znaczenie ułamka, jeżeli $n=-5$.

Określimy średnią geometryczną ($r$). Zgodnie z warunkami zadania

$$r=10^{1-\lg 1,33\ldots}.$$

Stąd widzimy, że przy dziesiętnym układzie logarytmów

$$1-\lg 1,33\ldots=\lg r,$$

lecz $\quad 1,33\ldots=1+\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\ldots=1+\frac{^3/_{10}}{1-{^1/_{10}}}=1^3/_9=1^1/_3;$

prócz tego $\quad 1=\lg 10;\quad$ więc $\quad \lg r=\lg 10-\lg 1^1/_3,$

czyli $\quad \lg r=\lg\frac{10}{1^1/_3},\quad$ skąd $\quad r=\frac{10}{1^1/_3}=\frac{30}{4}=\frac{15}{2}.$

Średnia arytmetyczna dwóch liczb = połowie sumy ich, a średnia geometryczna 2 liczb = pierwiastkowi kwadratowemu z iloczynu tych liczb. Przypuszczamy, że szukane liczby są $x$ i $y$, ich średnia arytmetyczna i geometryczna są $d$ i $r$. Zgodnie z tem mamy:

$$d=\frac{x+y}{2};\quad r=\sqrt{xy},\quad \text{czyli}\quad x+y=2d,\quad xy=r^2,$$

skąd widzimy, że $x$ i $y$ są pierwiastkami równania

$$z^2-2dz+r^2=0\ .\ .\ .\ (1);$$

ponieważ $d=\frac{17}{2}$, $r=\frac{15}{2}$, więc $z^2-17z+\frac{225}{4}=0$,

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 31 str. 185)

$$z=\frac{1}{2}\left(17\pm\sqrt{289-4.\frac{225}{4}}\right)=\frac{1}{2}(17\pm\sqrt{64})=\frac{1}{2}(17\pm8);$$

$$z_1=\frac{25}{2}=12^1/_2,\quad z_2=\frac{9}{2}=4^1/_2.$$

Te rozwiązania dają dwie szukane liczby $=4^1/_2$ i $12^1/_2$.

---

16. Określimy liczbę lat z równania

$$73(x^{1/3}+x^{-1/3})=9(x+x^{-1})\ .\ .\ .\ (1).$$

Przypuszczamy, że $\quad x^{1/3}+x^{-1/3}=y\ .\ .\ .\ (2);$

po podniesieniu (2) do sześcianu otrzymamy

$$x+3x^{2/3}.x^{-1/3}+3x^{1/3}.x^{-2/3}+x^{-1}=y^3,$$

czyli $\quad x+3(x^{1/3}+x^{-1/3})+x^{-1}=y^3,$

na zasadzie (2)

$$x+3y+x^{-1}=y^3,\ \text{skąd}\ x+x^{-1}=y^3-3y\ .\ .\ .\ (3).$$

Ze względu na stosunek (2), (3) równanie (1) jest:

$$73y=9(y^3-3y),\ \text{czyli}\ 9y^3-100y=0,\ \text{czyli}\ y(9y^2-100)=0,$$

skąd $\quad y_1=0\ .\ .\ .\ (4),\ \text{albo}\ 9y^2-100=0,$

skąd $\quad y_{2,3}=\pm\frac{10}{3}\ .\ .\ .\ (5).$

Więc równanie (1) zawiera 3 kwadratowe i ma przeto $(2.3=)6$ pierwiastków.

Równanie I (patrz (2), (4):

$$x^{1/3}+\frac{1}{x^{1/3}}=0\ (\text{skąd mamy, że}\ x\neq0),$$

czyli $\quad (x^{1/3})^2=-1,\ \text{skąd}\ x^{1/3}=\pm i,\ \text{więc}\ x_{1,2}=\mp i,$

gdzie $\quad i=\sqrt{-1},\ \text{albowiem}\ i^3=i^2.i=-i.$

Równanie II (patrz (2), (5):

$$x^{1/3}+\frac{1}{x^{1/3}}=\frac{10}{3};\quad \text{niech}\quad x^{1/3}=z\ \ldots (6),$$

wtedy $$z+\frac{1}{z}-\frac{10}{3}=0,\quad \text{czyli}\quad 3z^2-10z+3=0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 32 str. 186)

$$z=\frac{1}{3}(5\pm\sqrt{25-3.3})=\frac{1}{3}(5\pm4);\quad z_1=\frac{9}{3}=3\quad z_2=\frac{1}{3}.$$

Więc (patrz (6)

$$x=z^3;\quad x_3=3^3=27;\quad x_4=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}.$$

Równanie III (patrz (2), (5)):

$$x^{1/3}=+x^{-1/3}=-\frac{10}{3},\quad \text{czyli}\quad u+\frac{1}{u}+\frac{10}{3}=0,$$

gdźie $$u=x^{1/3}\ \ldots (7),\quad \text{więc}\quad 3u^2+10u+3=0;$$

skąd $$u=\frac{1}{3}(-5\pm\sqrt{25-3.3})=\frac{1}{3}(-5\pm4);$$

$$u_1=-\frac{1}{3};\quad u_2=-\frac{9}{3}=-3,$$

przeto (patrz (7))

$$x=u^3;\quad x_5=\left(-\frac{1}{3}\right)^3=-\frac{1}{27};\quad x_6=(-3)^3=-27.$$

Inaczej. Równanie I (patrz (3), (4):

$$x+\frac{1}{x}=0,\quad \text{czyli}\quad x^2=-1,\quad x_{1,2}=\pm i,\quad \text{gdzie}\quad i=\sqrt{-1}.$$

Równanie II (patrz (3), (5)):

$$x+\frac{1}{x}=\left(\frac{10}{3}\right)^3-3.\frac{10}{3},\quad \text{czyli}\quad x+\frac{1}{x}=\frac{1000}{27}-10=\frac{730}{27},$$

czyli $$27x^2-730x+27=0;$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 31 str. 186)

$$x=\frac{1}{27}(365\pm\sqrt{365^2-27.27})=\frac{1}{27}[365\pm\sqrt{(365+27)(365-27)}]=$$

$$=\frac{1}{27}(365\pm\sqrt{392.338})=\frac{1}{27}(365\pm\sqrt{2.196.2.169})=$$

$$=\frac{1}{27}(365\pm2.14.13)=\frac{1}{27}(365\pm364);$$

$$x_3=\frac{729}{27}=27;\quad x_4=\frac{1}{27}.$$

Równanie III (patrz (3) i (5)):

$$x+\frac{1}{x}=\left(-\frac{10}{3}\right)^3+3\cdot\frac{10}{3};\quad x+\frac{1}{x}+\frac{730}{27}=0;\quad 27x^2+730x+27=0;$$

skąd $$x=\frac{1}{27}\left(-365\pm\sqrt{365^2-27\cdot27}\right)=\frac{1}{27}(-365\pm364);$$

$$x_3=-\frac{1}{27};\quad x_4=-\frac{729}{27}=-27.$$

Z 6-ciu pierwiastków równania (1) całkowitym i dodatnim jest tylko jeden $x_3=27$. Więc liczba lat $=27$.

Przypuszczamy, że kapitał początkowy $1540=a$, kapitał wraz z odsetkami $6536{,}4=A$, liczba lat $27=t$, znajdziemy stopę procentową $p$.

Ze wzoru 56 (patrz alg. Feldbluma str. 364) mamy:

$$q=\sqrt[t]{\frac{A}{a}}\ \ldots\ (1),\quad \text{gdzie}\quad q=1+r=1+\frac{p}{100}.$$

$q$ wyliczamy zwykle z (1) za pomocą logarytmów

$$\lg q=\frac{\lg A-\lg a}{t}\ \ldots\ (2).$$

Zamienimy $A$, $a$, $t$ na ich wartości (patrz (2):

$$\lg q=\frac{\lg 6436{,}4-\lg 1540}{27}=$$

$$=\frac{3{,}81534-3{,}18752}{27}=$$

$$\lg 6536=3{,}81531\ \ldots\ 7\ \ldots\ 4\cdot7=28$$
$$\underline{\ 4-\qquad 3\ }$$
$$\lg 6536{,}4=3{,}81534$$
$$\lg 0{,}02325=1{,}055$$

$$=\frac{1}{27}\cdot0{,}62782=0{,}02325;$$

$$q=1+r=1{,}055;$$

$$r=\frac{p}{100}=0{,}055;$$

$$p=0{,}055\cdot100=5{,}5.$$

Kapitał był oddany na 5,5%.

---

17. 12000 rb., umieszczone na 3,5%, po 12 latach zamienią się na (patrz alg. Feldbluma wzór 56 str. 348)

$$A=12000\left(1+\frac{3{,}5}{100}\right)^{12}=12000\cdot1{,}035^{12}\ \ldots\ (1).$$

Ten sam kapitał, umieszczony na 6%, gdy się dolicza dochód do kapitału w końcu każdego półrocza, zamieni się w ciągu 12 lat na (patrz alg. Feldbluma wzór 58 str. 352)

$$B = 12000\left(1 + \frac{{}^{6}/_{100}}{2}\right)^{2\,.\,12} = 12000\,.\,1{,}03^{24}\;.\;.\;.\;(2).$$

Dochód kasy $x$ równa się różnicy $B-A$, więc (atrz (1), (2))

$$x = 12000\,.\,1{,}03^{24} - 12000\,.\,1{,}035^{12} = 12000(1{,}03^{24} - 1{,}035^{12}).$$

Aby określić $x$, moglibyśmy wyliczyć za pomocą logarytmów $m = 1{,}03^{24}$, $n = 1{,}035^{12}$ i $x = 12000(m-n)$, lecz najłatwiej jest określić $A$, potem $B$, a potem znaleźć ich różnicę

$$\begin{aligned} \lg A &= \lg 12000 + 12 \lg 1{,}035 = \\ &= 4{,}07918 + 12\,.\,0{,}01494 = \\ &= 4{,}07918 + 0{,}17928 = \\ &= 4{,}25846 \end{aligned}$$

$$0 \ldots 24 \ldots 1813$$
$$6;\quad \frac{60}{24} = 2{,}5$$

$$A = 18132{,}5.$$

$$\begin{aligned} \lg B &= \lg 12000 + 24 \lg 1{,}03 = \\ &= 4{,}07918 + 24\,.\,0{,}01284 = \\ &= 4{,}07918 + 0{,}30816 = \\ &= 4{,}38734 \end{aligned}$$

$$21 \ldots 18 \ldots 2439$$
$$13;\quad \frac{130}{18} = 7{,}2$$

$$B = 24397{,}2.$$

Więc dochód kasy $x = 24397{,}2 - 18132{,}5 = 6264$ rb. 70 kop.

---

18. Określimy $a_9$ i $a_{11}$ postępu różnicowego malejącego. Zgodnie z warunkami zadania $a_9$ i $a_{11}$ zadosyćczynią pierwiastkom równania logarytmicznego

$$\frac{1}{2}\lg 2 + \lg\sqrt{x^2+4x+5} = \frac{1}{2}[\lg(x^2-4x+5)+1]\;.\;.\;.\;(1).$$

Potęgując, otrzymujemy: $\frac{1}{2}\lg 2 = \lg\sqrt{2}$;

$$\lg\sqrt{2} + \lg\sqrt{x^2+4x+5} = \lg(\sqrt{2}\,.\,\sqrt{x^2+4x+5}) =$$
$$= \lg\sqrt{2(x^2+4x+5)};\quad 1 = \lg 10;$$
$$\lg(x^2-4x+5) + \lg 10 = \lg[10(x^2-4x+5)];$$
$$\frac{1}{2}\lg[10(x^2-4x+5)] = \lg\sqrt{10(x^2-4x+5)}.$$

Więc równanie (1) będzie:

$$\lg\sqrt{2(x^2+4x+5)} = \lg\sqrt{10(x^2-4x+5)};$$

skąd
$$2(x^2+4x+5) = 10(x^2-4x+5);$$
czyli
$$x^2+4x+5 = 5(x^2-4x+5);$$
$$4x^2 - 24x + 20 = 0;\quad x^2 - 6x + 5 = 0;$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 32 str. 106)

$$x=3\pm\sqrt{9-5}=3\pm2,\quad x_1=5,\quad x_2=1.$$

Ponieważ w postępie różnicowym $a_9>a_{11}$, więc

$$a_9=x_1=5,\quad a_{11}=x_2=1.$$

Znajdziemy sumę wyrazów postępu $Sn$. Zgodnie z warunkami zadania

$$Sn=10^{1-\lg 0{,}08(3)};\quad \text{skąd}\quad 1-\lg 0{,}08(3)=\lg Sn;\quad \text{lecz}\quad 1=\lg 10,$$

$$\lg 10-\lg 0{,}08(3)=\lg\frac{10}{0{,}08(3)},\quad \text{więc}\quad \lg Sn=\frac{10}{0{,}08(3)},$$

skąd

$$Sn=\frac{10}{0{,}08(3)};$$

$$0{,}08(3)=0{,}08+\lim\left(\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\dots\text{ ad inf.}\right)=0{,}8+\frac{^3/_{1000}}{1-{}^1/_{10}}=$$

$$=\frac{24}{300}+\frac{1}{300}=\frac{25}{300}=\frac{1}{12};\quad \text{więc}\quad Sn=\frac{10}{^1/_{12}}=120.$$

Określimy ilość wyrazów ($n$).

Ze wzoru 41 (patrz alg. Feldbluma str. 281) mamy:

$$a_9=a_1+8d\ \dots\ (2),\quad a_{11}=a_1+10d\ \dots\ (3),$$

lecz

$$a_9=5,\quad a_{11}=1,$$

więc (2) i (3) są:

$$a_1+8d=5\ \dots\ (4),\quad a_1+10d=1\ \dots\ (6).$$

Odejmiemy stronami od (5), (4):

$$\begin{array}{r|l} a_1+10d=\ \ 1 & \text{skąd } d=-2, \\ \mp a_1\mp\ 8d=\mp5 & \text{a więc } a_1=1+10\,.\,2=21. \\ \hline 2d=-4, & \end{array}$$

We wzorze 42 (patrz alg. Feldbluma str. 284)

$$Sn=\frac{n}{2}[2a_1+d(n-1)],\quad a_1=21,\quad Sn=120.$$

przeto

$$\frac{n}{2}[2\,.\,21-2(n-1)]=120,\quad \text{czyli}\quad (22-n)n=120,$$

skąd

$$n^2-22n+120=0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 32 str. 186)

$$n=11\pm\sqrt{121-120}=11\pm1,\quad n_1=12;\quad n_2=10.$$

Obydwa rozwiązania nadają się, więc ilość wyrazów $=12$ albo 10.

19. Określimy $a_1$ i $d$ postępu różnicowego, w którym ogólny wyraz $n$ ma postać $7n-6$. Ze wzoru 41 (patrz alg. Feldbluma str. 281) mamy:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = dn + a_1 - d,$$

a z warunków zadania

$$a_n = 7n - 6, \quad \text{więc} \quad dn + (a_1 - d) = 7n - 6,$$

skąd, przyrównawszy spółczynniki przy $n'$ i $n^0$, otrzymamy układ równań

$$d = 7 \text{ i } a_1 - d = -6,$$

więc

$$d = 7; \quad a_1 = -6 + 7 = 1.$$

Określimy $S$ z równania logarytmicznego.

$$\lg(S-4) - \lg\left(\frac{S}{17} + 8\right) = \lg(S-104) - 1.$$

Wiemy, że w dziesiętnym układzie logarytmów

$$\lg 10 = 1, \quad \text{i że} \quad \lg A - \lg B = \lg\frac{A}{B},$$

przeto piszemy

$$\lg\frac{S-4}{\frac{S}{17}+8} = \lg\frac{S-104}{10},$$

z równości logarytmów wnosimy o równości liczb:

$$\frac{S-4}{\frac{S}{17}+8} = \frac{S-104}{10}, \quad \text{czyli} \quad \frac{17S-68}{S+136} = \frac{S-104}{10};$$

$$(17S-68)10 = (S-104)(S+136);$$

$$170S - 680 = S^2 - 104S + 136S - 14144;$$

$$S^2 - 138S - 13464 = 0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 32 str. 181)

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{1\cdot 82\cdot 25} = 135 \\ 23 & 8\cdot 2 \\ 3 & 69 \\ 265 & 132'5 \\ 5 & 132\ 5 \\ & 0 \end{array} \qquad \begin{aligned} S &= 69 \pm \sqrt{69^2 - (-13464)} = \\ &= 69 \pm \sqrt{4761 + 13464} = \\ &= 69 \pm \sqrt{18225} = 69 \pm 135; \\ S_1 &= 204, \quad S_2 = -66. \end{aligned}$$

Pierwiastek ujemny nie nadaje się, gdyż wiemy, że $a_1 > 0$, $d > 0$, a jeżeli pierwszy wyraz i różnica są dodatnie, to wszystkie wyrazy postępu też są dodatnie, więc $S > 0$, przeto mamy jedno rozwiązanie $S = 204$.

Znajdziemy liczbę wyrazów ($n$).

We wzorze 42 (patrz alg. Feldbluma str. 284)

$$Sn=\frac{1}{2}n[2a_1=(n-1)d],\quad a_1=1,\quad d=7,\quad Sn=204,$$

więc $\frac{n}{2}[2\,.\,1+7(n-1)]=204$, czyli $(7n-5)n=408$,

czyli $7n^2-5n-408=0$,

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 31 str. 185)

$$n=\frac{1}{2\cdot 7}(5\pm\sqrt{25+4\,.\,7\cdot 408})=\frac{1}{14}(1\pm\sqrt{11449})=\frac{1}{14}(5\pm 107);$$

$$n_1=\frac{112}{14}=8;\quad n_2=-\frac{102}{14}=-\frac{51}{7}=-7^2/_7.$$

Rozwiązanie II nie nadaje się, gdyż $n$ jako liczba wyrazów powinno być całkowite i dodatnie, więc $n=8$.

Liczba wyrazów$=8$.

---

20. Niech we wzorze na spłaty terminowe (w końcu każdego roku) (patrz alg. Feldbluma str. 359)

$$e=\frac{E\,.(1+r)^n}{(1+r)^n-1},$$

z początku $E=23400$, $e=4044$, potem $E=40030$, $e=4044$ i $2n$ zamiast $n$; wtedy

$$\frac{23400(1+r)^n\,.\,r}{(1+r)^n-1}=4044\;\ldots\;(1),\qquad \frac{40030(1+r)^{2n}r}{(1+r)^{2n}-1}=4044\;\ldots\;(2).$$

gdzie $r=\frac{p}{100}$, $p$ — szukana stopa procentowa; $n$ — szukana liczba lat. Przyrównawszy lewe strony równań (1) i (2), otrzymujemy po skróceniu:

$$\frac{2340}{(1+r)^n-1}=\frac{4003(1+r)^n}{(1+r)^{2n}-1}\;\ldots\;(3).$$

Przypuszczamy, że $(1+r)^n=x\;\ldots\;(4)$, przeto $(1+r)^{2n}=x^2$,

wtedy (3) będzie: $\frac{2340}{x-1}=\frac{4003x}{x^2-1}$,

skróciwszy równanie przez $x-1$:

$$2340=\frac{4003x}{x+1}\;\ldots\;(5),$$

wtedy ginie pierwiastek $x=1$ (który otrzymujemy z równania $x-1=0$). Łatwo możemy zauważyć, że pierwiastek ten nie czyni zadość warunkom zadania, albowiem, gdyby $x=1$, wtedy (patrz (4)) $1+r=\sqrt[t]{1}=1$, więc $r=0$, co jest rzeczą niemożliwą, gdyż procent z 1 rub. kapitału $r>0$.

Z równania (5) mamy

$$2340x + 2340 = 4003x; \quad x = \frac{2340}{1663},$$

więc (patrz (4))

$$(1+r)^n = \frac{2340}{1663} \;\ldots\; (6),$$

$$(1+r)^n - 1 = \frac{2340}{1663} - 1 = \frac{677}{1663}.$$

Podstawimy w równanie (1) zamiast $(1+r)^n$ i $(1-r)^n - 1$ ich wartości

$$\frac{23400 \cdot \frac{2340}{1663} r}{\frac{677}{1663}} = 4044,$$

skąd

$$r = \frac{4044 \cdot 677}{23400 \cdot 2340} = \frac{337 \cdot 677}{1950 \cdot 2340};$$

zlogarytmujemy otrzymane równanie:

$\lg 1950 = 3,29003$
$\lg 2340 = 3,36922$
$\lg 0,69897 = 5$

$$\lg r = \lg 337 + \lg 677 + \operatorname{colg} 1950 + \operatorname{colg} 2340 =$$
$$= 2,52763 + 2,83059 + \bar{4},70997 + \bar{4},63078 =$$
$$= \bar{2},69897,$$

skąd $\qquad r = 0,05.$

Więc $\qquad p = 100r = 100 \cdot 0,05 = 5,$

sumę pożyczono na 5%.

Określimy $n$ z równania wykładniczego (patrz (6))

$$1,05^n = \frac{2340}{1663},$$

które też możemy rozwiązać za pomocą logarytmów:

$$n \lg 1,05 = \lg 2340 - \lg 1663, \quad \text{skąd} \quad n = \frac{\lg 2340 - \lg 1663}{\lg 1,05} = 7,$$

albowiem $\qquad \lg 2340 = 3,36922; \quad \lg 1663 = 3,22089,$

$$\lg 1,05 = 0,02119; \quad 3,36922 - 3,22089 = 0,14833;$$

$$\frac{0,14833}{0,02119} = \frac{14833}{2119} = 7.$$

23400 rub. zostały umorzone w przeciągu 7 lat rocznemi ratami w końcu każdego roku po 4044 rub., licząc po 5%.

21. Dowiemy się, na jaką sumę zamieni się kapitał $x$, umieszczony na procent składany po $p$ od sta, jeżeli procent zostaje doliczany do kapitału po upływie każdej $(3m=)\frac{1}{4}$ roku. Na zasadzie wzoru 58-go (patrz alg. Feldbluma str. 352) mamy:

$$A=a\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4n} \quad . \ . \ . \ (1),$$

gdzie $r=\frac{p}{100}$, przyczem w naszem zadaniu $n=1$, $a=x$. Szukany kapitał $x$ zamieni się po upływie roku, licząc po $3{,}5\%$ na

$$A=x+x\,.\,\frac{3{,}5}{100}=x+0{,}035x=1{,}035x \quad . \ . \ . \ (2).$$

Ten sam kapitał $x$, umieszczony na $5\%$, gdy procent dolicza się po upływie każdej $(3m=)\frac{1}{4}$ roku, zamieni się po upływie roku na (patrz (1)

$$B=x\left(1+\frac{0{,}05}{4}\right)^4=x(1+0{,}0125)^4=1{,}0125^4x \quad . \ . \ . \ (3).$$

Ponieważ zarobek 441 równa się $B-A$, przeto piszemy (patrz (2), (3))

$$1{,}0125^4x-1{,}035x=441, \quad \text{skąd} \quad x=\frac{441}{1{,}0125^4-1{,}035} \quad . \ . \ . \ (4).$$

Aby określić $x$ z równania (4), wyliczymy $y=1{,}0125^4$ za pomocą logarytmów:

$$\begin{array}{l|l} \lg 1{,}012=0{,}00518 \ldots 43\,.\,5=215 & \lg y=4\lg 1{,}0125=4\,.\,0{,}00540= \\ \qquad 5 \quad - \quad 22 & \qquad =0{,}02160 \\ \hline \lg 1{,}0125=0{,}00540 & \text{więc z tablic} \\ \qquad \lg 3{,}02160=1051 & \qquad y=1{,}051. \end{array}$$

Znajdziemy $x$ ze wzoru (4):

$$x=\frac{441}{y-1{,}035}=\frac{441}{1{,}051-1{,}035}=\frac{441}{0{,}016}=\frac{441000}{16}=27562{,}5\,.$$

Suma, którą pożyczono, $=27562$ rub. 50 kop.

---

22. Niech $a>b$. Zgodnie z warunkami zadania, $a>0$, $b>0$ i $a$, $b$ — liczby całkowite . . . (1). W iloczynie błędnym $a$ przez $b$ cyfra tysięcy jest o 1 mniejsza od właściwej cyfry; wskutek tego iloczyn ten mniejszy jest od właściwego iloczynu o 1000, więc iloczyn błędny jest $ab-1000$. Przy dzieleniu $ab-1000$ przez $b$ otrzymamy w ilorazie $a-12$, w reszcie $\frac{1}{14}(a-b)$, więc

$$ab-1000=b(a-12)+\frac{1}{14}(a-b) \quad . \ . \ . \ (2)$$

prócz tego mamy:

$$\lg a - \lg b + 4\lg 2 = \lg(a-b) - \lg 3 \quad . \; . \; . \; (3).$$

Z układu równań (2) i (3) określimy $a$ i $b$. Z równania (2) mamy:

$$-1000 = -12b + \frac{1}{14}(a-b); \quad a - 196b = -14000;$$

skąd
$$a = 196b - 14000 \quad . \; . \; . \; (4).$$

Potęgując równanie (3), otrzymujemy:

$$\lg a + 4\lg 2 = \lg(a \, . \, 2^4);$$

$$\lg(a \, . \, 2^4) - \lg b = \lg\frac{a \, . \, 2^4}{b}; \quad \lg(a-b) - \lg 3 = \lg\frac{a-b}{3},$$

przeto (3) będzie:

$$\lg\frac{16a}{b} = \lg\frac{a-b}{3}, \quad \text{skąd} \quad \frac{16a}{b} = \frac{a-b}{3},$$

czyli
$$48a = (a-b)b \quad . \; . \; . \; (5).$$

Podstawimy w (5) wartość $a$ z (4):

$$48(169b - 14000) = (168b - 14000)b,$$

czyli
$$168b^2 - 22112b + 672000 = 0,$$

czyli
$$21b^2 - 2764b + 84000 = 0;$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 32 str. 186)

$$\begin{array}{r|l} 
 & \sqrt{14'59'24} = 382 \\
 & 9 \\
68 & 55'9 \\
8 & 54\,4 \\
762 & 152'4 \\
2 & 152\,4 \\
 & 0
\end{array}$$

$$b = \frac{1}{21}(1382 \pm \sqrt{1382^2 - 21 \, . \, 84000}) =$$

$$= \frac{1}{21}(1382 \pm \sqrt{1909924 - 1764000}) =$$

$$= \frac{1}{21}(1382 \pm \sqrt{145924}) = \frac{1}{21}(1382 \pm 382)$$

$$b_1 = \frac{1764}{21} = 84, \quad b_2 = \frac{1000}{21} = 47\frac{13}{21}.$$

Drugie rozwiązanie nie nadaje się, gdyż nie zgadza się z (1), przeto $b = 84$, wtedy (patrz (4))

$$a = 169 \, . \, 84 - 14000 = 196.$$

Szukane liczby są 196 i 84.

---

23. Określimy liczby $a$ i $b$, które są związane układem równań

$$\lg a - 2\lg 2 = 2\lg 3 - \lg(b+4) \quad . \; . \; . \; (1),$$

$$\sqrt{\frac{a+b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{a+b}} = \frac{13^*}{6} \quad . \; . \; . \; (2).$$

$$^*\left(2{,}1(6)=2{,}1+0{,}0(6)=2{,}1+\lim\left(\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}+\ldots\text{ad inf.}\right)=\right.$$

$$\left.=2{,}1+\frac{{}^{6}/_{100}}{1-{}^{1}/_{10}}=2{,}1+\frac{1}{15}=2^{5}/_{30}=2^{1}/_{6}=\frac{13}{6}\right).$$

Przekształcimy równanie logarytmiczne (1); ponieważ

$$2\lg 2=\lg 2^2,\quad \lg a-\lg 2^2=\lg\frac{a}{2^2},$$

$$2\lg 3=\lg 3^2,\quad \lg 3^2-\lg(b+4)=\lg\frac{3^2}{b+4},$$

więc równanie (1) będzie:

$$\frac{a}{4}=\frac{9}{b+4},\quad\text{czyli}\quad a(b+4)=36\ \ldots\ (3).$$

Z warunków zadania widzimy, że liczby godzin—dodatnie, przeto

$$a>0,\quad b>0\ \ldots\ (4).$$

Przypuszczamy (patrz (2)), że

$$\sqrt{\frac{a+b}{a}}=z\ \ldots\ (5),\quad\text{wtedy}\quad\sqrt{\frac{a}{a+b}}=\frac{1}{z},$$

przeto równanie (2) będzie:

$$z+\frac{1}{z}=\frac{13}{6};\quad 6z^2-13z+6=0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 31 str. 185)

$$z=\frac{1}{2\cdot 6}(13\pm\sqrt{169-4\cdot 6\cdot 6})=\frac{1}{12}(13\pm\sqrt{25})=\frac{1}{12}(13\pm 5);$$

$$z_1=\frac{18}{12}=\frac{3}{2};\quad z_2=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}.$$

Jeżeli weźmiemy $z_1$, to (patrz (5))

$$\frac{a+b}{a}=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4},\quad\text{skąd}\quad b=\frac{5}{4}a\ \ldots\ (6).$$

Gdy zaś weźmiemy $z_2$, to

$$\sqrt{\frac{a+b}{a}}=\frac{2}{3};\quad\frac{a+b}{a}=\frac{4}{9};\quad\frac{b}{a}=-\frac{5}{9},$$

lecz to nie zgadza się z (4), przeto $z_2$ nie nadaje się.

Na zasadzie (3) i (6) mamy:

$$a\left(\frac{5}{4}a+4\right)=36,\quad\text{czyli}\quad 5a^2+16a-144=0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 32 str. 186)

$$a=\frac{1}{5}(-8\pm\sqrt{64+5\,.\,144})=\frac{1}{5}(-8\pm\sqrt{784})=\frac{1}{5}(-8\pm28);$$

$$a_1=\frac{20}{5}=4\,;\quad a_2=-\frac{36}{5}=-7^1/_5$$

(nie nadaje się, patrz (4)).

Jeżeli $a=4$ godz., to (patrz (6)) $b=\frac{5}{4}\,.\,4=5$ godzin.

Przypuszczamy, że I-sza rura napełni zbiornik w $x$ (godzin). Ponieważ $0{,}8(3)=0{,}8+\lim\left(\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\ldots \text{ ad inf.}\right)=0{,}8+\frac{^3/_{100}}{1-{}^1/_{10}}=$ $=0{,}8+\frac{1}{30}={}^5/_6$, więc II-ga rura, działając oddzielnie, napełni zbiornik w $^6/_5$ tego czasu, w ciągu którego napełni go I rura $.=\frac{6}{5}x$ g.; III-ia zaś rura napełni zbiornik w czasie o $b=5$ godzin dłuższym, niż pierwsza, t. j. w $(x+5)$ godzin. Przez wszystkie 3 rury na jedną godzinę wlewa się

$$\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{6}{5}x}+\frac{1}{x+5}\right] \text{ części zbiornika.}$$

Oprócz tego wiemy, że zawartość zbiornika $=1$ i że wlewa się ta 1 przez wszystkie 3 rury przez $a=4$ godz., przeto

$$4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{6}{5}x}+\frac{1}{x+5}\right)=1\ .\ .\ .\ (7).$$

Uprościmy (7): $\frac{4}{x}+\frac{10}{3x}+\frac{4}{x+5}=1\,;$

najmniejsza wspólna wielokrotność mianowników $=3x(x+5)$, przyczem $x>0$ . . . (8) (albowiem równa się liczbie godzin, w ciągu której można napełnić zbiornik); po zniesieniu mianowników równanie (7) będzie:

$$12(x+5)+10(x+5)+4\,.\,3x=3x(x+5);$$

$$34x+110=3x^2+15x\,;\quad 3x^2-19x-110=0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 31-szy str. 186)

$$x=\frac{1}{2\,.\,3}(19\pm\sqrt{361+12\,.\,110})=\frac{1}{6}(19\pm\sqrt{1681})=\frac{1}{6}(19\pm41);$$

$$x_1=\frac{60}{6}=10\,;\quad x_2=-\frac{22}{6}=-3^2/_3\,,$$

rozwiązanie II nie nadaje się jako ujemne, gdyż nie zgadza się z (8). Pierwsza rura, działając oddzielnie, może napełnić zbiornik w 10 godzin, druga w $\left(\frac{6}{5} \cdot 10 =\right)$ 12 godzin, trzecia w $(10 + + 5 =)$ 15 godzin.

---

24. Określimy $n$ i $k$.

Z warunków zadania widzimy, że $n$ i $k$ muszą być całkowite i takie, żeby

$$n + 3 > k + 1, \quad \text{czyli} \quad n > k - 2, \quad n + 3 > 0,$$

$$n > -3, \quad k + 1 > 0, \quad \text{czyli} \quad k > -1 \ . \ . \ . \ (1).$$

Równania

$$nk(n-k) = 30 \ . \ . \ . \ (2), \quad n^3 - k^3 = 117 \ . \ . \ . \ (3).$$

możemy rozwiązać dwoma sposodami.

Sposób I. Pomnożymy równanie (2) przez $-3$ i dodamy je stronami do (3)

$$n^3 - 3nk(n-k) - k^3 = 27, \quad \text{czyli} \quad (n-k)^3 = 27,$$

skąd, przyjmując tylko rzeczywistą wartość pierwiastka, albowiem $n$ i $k$ — rzeczywiste, otrzymujemy

$$n - k = 3 \ . \ . \ . \ (4).$$

więc (patrz (2), (4))

$$nk = 10, \quad \text{czyli} \quad n(-k) = -10 \ . \ . \ . \ (5).$$

Z (4), (5) widzimy, że $n$ i $-k$ są pierwiastkami równania kwadratowego

$$z^2 - 3z - 10 = 0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 31 str. 185)

$$z = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 10}) = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{49}) = \frac{1}{2}(3 \pm 7);$$

$$z_1 = \frac{10}{2} = 5, \quad z_2 = -\frac{4}{2} = -2;$$

więc $\quad n_1 = 5, \quad k_1 = -(-2) = 2 \quad$ albo $\quad n_2 = -2, \quad k_2 = -5.$

Rozwiązanie drugie nie nadaje się, gdyż nie zgadza się z (1) (właściwie nie nadaje się $k_2$).

Sposób II. Przedstawimy równanie (3) w postaci

$$(n-k)(n^2 + nk + k^2) = 117.$$

(patrz (2)) $$n - k = \frac{30}{nk};$$

przeto mamy: $$\frac{30(n^2 + nk + k)}{nk} = 117,$$

czyli $$10\left(\frac{n}{k} + 1 + \frac{k}{n}\right) = 39 \ . \ . \ . \ (6).$$

Niech $\frac{n}{k}=x$, wtedy $\frac{k}{n}=\frac{1}{x}$,

więc (6) będzie:

$$10\left(x+1+\frac{1}{x}\right)=39, \quad \text{czyli} \quad 10x^2-29x+10=0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 31-szy str. 185)

$$x=\frac{1}{2.10}(29\pm\sqrt{841-4.10.10})=\frac{1}{20}(29\pm\sqrt{441})=\frac{1}{20}(29\pm21);$$

$$x_1=\frac{50}{20}=\frac{5}{2}; \quad x_2=\frac{8}{20}=\frac{2}{5},$$

gdyby $x=\frac{5}{2}$, to $\frac{n}{k}=\frac{5}{2}$ i $n=\frac{5}{2}k$,

więc (patrz (2)

$$\frac{5}{2}k.k\left(\frac{5}{2}k-k\right)=30, \quad \text{czyli} \quad k^3=\frac{30.2.2}{5.3}=8,$$

skąd $k=\sqrt[3]{8}=2$ i $n=\frac{5}{2}.2=5$,

gdy zaś $x=\frac{2}{5}$, to $n=\frac{2}{5}k$, więc $\frac{2}{5}k.k\left(\frac{2}{5}k-k\right)=30$,

czyli $k^3=-\frac{30.5.5}{2.3}=-125;$

$$k=\sqrt[3]{-125}=-\sqrt[3]{125}=-5 \quad \text{i} \quad n=-5.\frac{2}{5}=-2.$$

lecz drugie rozwiązanie nie czyni zadość warunkom względem $n$ i $k$. Według wzoru 71-go (patrz alg. Feldbluma str. 373)

$$C_{n+3}^{k+1}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)\ldots[n+3-(k+1)+1]}{1.2.3\ldots(k+1)}=$$

$$=\frac{(n+3)(n+2)\ldots(n-k+2)(n-k+3)}{1.2.3\ldots k(k+1)} \quad . \; . \; . \; (7)$$

lecz $n=5$, $k=2$, przeto (patrz (7))

$$C_8^3=\frac{8.7.6}{1.2.3}=8.7=56.$$

Liczba kombinacji $=56$.

---

25. Określimy wykładnik $n$ potęgi $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$.

Wykładnik $n$ równa się najmniejszej wartości, jaką może mieć suma $y+\frac{64}{y}$ przy rzeczywistych znaczeniach $y$, iloczyn liczb $y$ i $\frac{64}{y}$ jest $y.\frac{64}{y}=64$, więc na zasadzie twierdzenia 2° suma ma najmniejszą wartość, gdy

$$y=\frac{64}{y},\quad \text{skąd}\quad y^2=64;\quad y=\sqrt{64}=\pm 8;$$

Szukana wartość $n$ jest $\pm 8 \pm \frac{64}{8} = \pm 16$, lecz my rozpatrujemy potęgi dwumianów z wykładnikami całkowitemi i dodatniemi, przeto $n=16$. Ponieważ

$$\sqrt{x}=x^{1/2},\quad \sqrt[3]{x}=x^{1/3}\frac{1}{x^{1/3}}=x^{-1/3}\quad \text{i}\quad n==16,$$

więc mamy teraz znaleźć w rozwinięciu dwumianu

$$(x^{1/2}+ +x^{-1/3})^{16}$$

wyraz, zawierający $x^3$.

Niech tym wyrazem będzie $(k+1)-ty$ wyraz, wtedy

$$U_{k+1}=C_{16}^{k}x^3\ \ldots\ (8)$$

określimy $k$.

Przypuszczamy, że we wzorze (patrz alg. Feldbluma wzór 80-ty str. 382) ogólnego rozwinięcia dwumianu Newtona

$$(x+a)^n,\ x=x^{1/2},\ a=x^{-1/3},\ n=16$$

wtedy

$$U_{k+1}=C_{16}^{k}(x^{1/2})^{16-k}(x^{-1/3})^k=C_{16}^{k}x^{8-1/2k}x.^{-1/3k}=C_{16}^{k}x^{8-1/2k-1/3k}$$

czyli

$$U_{k+1}=C_{16}^{k}x^{8-5/6k}\ \ldots\ (9).$$

Z równania (8) i (9) mamy:

$$8-\frac{5}{6}k=3,\quad \text{skąd}\quad k=5:\frac{5}{6}=6,$$

więc szukany wyraz (patrz (8)) jest siódmy, stąd

$$U_7=C_{16}^{6}x^3=\frac{16.15.14.13.12.11}{1.2.3.4.5.6}x^3=8008x^3.$$

---

26. Niech szukana liczba będzie $N$, pierwsza i ostatnia cyfra tej liczby według 13-go układu liczenia, licząc z lewej strony, $=x$ i $y$. Wtedy

$$N=(x0y)_{13}=(y0x)_{11}\ \ldots\ (1).$$

Jako cyfry jednocześnie 13-go i 11-go układu liczenia

$$\left.\begin{array}{l}0<x<11\\0<y<11\end{array}\right\}\ \ldots\ (2);$$

ten warunek jest nietylko niezbędnym lecz i wystarczającym, albowiem $11<13$.

Z równania (1) mamy:

$$13^2x+13 \, . \, 0+y=11^2 \, . \, y=11 \, . \, 0+x \; . \; . \; . \; (1 \text{ bis}),$$

czyli

$$168x-120y=0,$$

po skróceniu przez 24 $7x-5y=0$ . . . (3).

Rozwiążemy to równanie nieokreślone w liczbach całkowitych i dodatnich, które czyniłyby zadość warunkom (2).

W równaniu (3)

$$x=y=0,$$

przeto ogólne wzory rozwiązania tego równania są:

$$x=5t, \quad y=7t \; . \; . \; . \; (4),$$

gdzie $t$ — dowolna liczba całkowita.

Na zasadzie (2) mamy (patrz (4)):

$$0<5t<11; \quad 0<7t<11, \quad \text{czyli} \quad 0<t<2^1/_5; \quad 0<t<1^4/_{11},$$

skąd

$$0<t<1^4/_{11} \quad \text{więc} \quad t=1,$$

przeto (patrz (4), (1), (1 bis))

$$x=5, \quad y=7,$$

$$N=(507)_{13}=(705)_{11}=169 \, . \, 5+7=121 \, . \, 7+5=852.$$

Szukana liczba jest 852.

---

27. Określimy $n$ i $q$, wyrażając je przez $m$ i $p$.

Sposób I. $x-7$ jest największym wspólnym dzielnikiem dwóch trójmianów drugiego stopnia

$$x^2+mx+n \quad \text{i} \quad x^2+px+q,$$

z tego wnosimy, że

$$x^2+mx+n=(x-7)(x+\alpha) \quad \text{i} \quad x^2+px+q=(x-7)(x+\beta),$$

gdzie $\alpha$ i $\beta$ — ilości (całkowite), które nie zależą od $x$ i $\alpha \neq \beta$. Więc

$$x^2+mx+n=x^2+(\alpha-7)x-7\alpha;$$

$$x^2+px+q=x^2+(\beta-7)x-7\beta.$$

Otrzymane równości są tożsamościami, przeto, przyrównawszy spółczynniki jednakowych potęg $x$, otrzymujemy

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha-7=m; & -7\alpha=n \\ \beta-7=p; & -7\beta=q \end{array}\right\} \text{ skąd } \begin{array}{l} n=-7(m+7)=-7m-49, \\ q=-7(p+7)=-7p-49. \end{array}$$

Sposób II. Ponieważ trójmiany $x^2+mx+n$ i $x^2+px+q$ dzielą się przez $x-7$, więc wartość $x=7$ (patrz twierdzenie Bezout) jest jednym z dwóch pierwiastków tych trójmianów; niech inne pierwiastki będą $\alpha$ i $\beta$. Lecz suma pierwiastków trójmianu drugiego stopnia postaci $x^2 + Px + Q$ równa się $= -P$, a iloczyn $= Q$; więc

$$\left.\begin{array}{ll} 7+\alpha = -m, & 7\alpha = n \\ 7+\beta = -p, & 7\beta = q \end{array}\right\} \text{ skąd } \begin{array}{l} n = 7(-m-7) = -7m-49, \\ q = 7(-p-7) = -7p-49. \end{array}$$

Najmniejsza wielokrotność $M$ dwóch ilości (całkowitych) $P$ i $Q$ = iloczynowi ich, podzielonemu przez ich wspólny największy dzielnik $D$.

Niech $P = x^2 + mx + n$, $Q = x^2 + px + q$, $D = x - 7$, przeto:

$$M = \frac{(x^2+mx+n)(x^2+px+q)}{x-7} \quad . \; . \; . \; (1),$$

skąd widzimy, że iloczyn dwóch wielomianów II-go stopnia $P$ i $Q$ jest wielomianem $(2+2=)$ 4-go stopnia; on dzieli się przez dwumian I-go stopnia $D$, więc iloraz $M$ jest wielomianem $(4-1=)$ 3-go stopnia postaci

$$ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

gdzie $a$, $b$, $c$, $d$ — są tymczasem spółczynnikami nieokreślonemi.

Ponieważ (patrz (1)) $M.D = PQ$, więc

$$(ax^3+bx^2+cx+d)(x-7) = (x^2+mx+n)(x^2+px+q);$$

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx-7ax^3-7bx^2-7cx-7d =$$
$$= x^4+mx^3+nx^2+px^3+mpx^2+npx+qx^2+mqx+nq;$$

$$ax^4+(b-7a)x^3+(c-7b)x^2+(d-7c)x-7d =$$
$$= x^4+(m+p)x^3+(mp+n+q)x^2+(mq+np)x+nq \quad . \; . \; . \; (2).$$

Ponieważ (2) powinno być tożsamością, przeto spółczynniki jednakowych potęg głównej litery $x$ powinny być równe, więc (patrz (2))

$$\left.\begin{array}{l} a=1; \ldots \mathrm{I} \quad b-7a=m+p; \ldots \mathrm{II} \quad c-7b=mp+n+q; \ldots \mathrm{III} \\ \qquad d-7c=mq+np; \ldots \mathrm{IV} \quad -7d=nq \ldots \mathrm{V} \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; (3).$$

Zgodnie z warunkami zadania $m$ i $p$ — dowolne, więc należy $n$, $q$, $b$, $c$, $d$ wyrazić przez $m$, $p$; aby to uczynić, nie wystarczyłby nam układ (3), lecz my mamy

$$n = -7m-49; \quad q = -7p-49 \quad . \; . \; . \; (4).$$

Równanie I układu (3) daje $a=1$, wtedy (patrz II układu (3)) $b = m+p+7$.

Z III i (4) mamy

$$c = mp + (-7m-49) + (-7p-49) + 7(m+p+7) = mp - 49.$$

Równanie IV układu (3) i drugie układu (4) dają:

$$d = m(-7p-49) + (-7m-49)p + 7(mp-49) =$$
$$= -7mp - 49m - 49p - 7.49 = -7(mp+7m+7p+49) =$$
$$= -7[m(p+7)+7(p+7)] = -7(m+7)(p+7).$$

Podstawiwszy otrzymane wartości $d$, $n$, $q$ w równanie V układu (3), otrzymamy tożsamość:

$$-7-7(m+7)(p+7)=(-7m-49)(-7p-49).$$

Więc szukana najmniejsza wielokrotność $P$ i $Q$ jest

$$M=x^3+(m+p+7)x^2+(mp-49)x-7(m+7)(p+7).$$

Określimy najmniejszą wielokrotność przy $m=-5$ i $p=-3$. Najmniejsza wielokrotność wielomianów

$$P=x^2-5x-14 \quad \text{i} \quad Q=x^2-3x-28,$$

według otrzymanego wyżej wzoru będzie

$$M=x^3+(-5-3+7)x^2+(5.3-49)x-7(-5+7).(-3+7)=$$
$$=x^3-x^2-34x-56.$$

---

28. Rozwiniemy ułamek

$$\frac{12x^3+2x^2+10x+1}{6x^2+x+2} \text{ w ciągły:}$$

$$\begin{array}{lllll} & \scriptstyle 2x & \scriptstyle x & \scriptstyle 3x & \scriptstyle 2 \\ [12x^3+2x^2+10x+1]: & [6x^2+x+2]: & [6x+1]: & 2: & 1 \\ \underline{\;\;,, \;\mp 2x^2 \mp 4x\;\;} & \underline{\;\;,, \;\mp x\;\;} & \;\;-1 & \overline{0} & \\ \quad\;\; 6x+1 & \quad 2 & & & \end{array}$$

więc

$$\frac{12x^3+2x^2+10x+1}{6x^2+x+2}=(2x,\ x,\ 3x,\ 2).$$

Znajdziemy wszystkie przybliżenia otrzymanego ułamka ciągłego:

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{2x}{1};\quad \frac{P_2}{Q_2}=2x+\frac{1}{x}=\frac{2x^2+1}{x};\quad \frac{P_3}{Q_3}=\frac{(2x^2+1).3x+2x}{x.3x+1}=\frac{6x^3+5x}{3x^2+1};$$

$$\frac{P_4}{Q_4}=\frac{(6x^3+5x).2+(2x^2+1)}{(3x^2+1).2+x}=\frac{12x^3+2x^2+10x+1}{6x^2+x+2}.$$

Możemy jeszcze innym sposobem znaleźć przedostatnie przybliżenie, mianowicie:

$$\frac{P_3}{Q_3}=2x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{3x}}=2x+\frac{3x}{3x^2+1}=\frac{2x(3x^2+1)+3x}{3x^2+1}=$$

$$=\frac{6x^3+2x+3x}{3x^2+1}=\frac{6x^3+5x}{3x^2+1}.$$

Licznik przedostatniego przybliżenia $P_3=6x^3+5x$, ponieważ $x=5$, więc

$$P_3=6.5^3+5.5=750+25=775.$$

Niech części, na które mamy rozłożyć liczbę 775, będą $m$ i $n$. Zgodnie z warunkami zadania $m$ dzieli się bez reszty przez 37, a $n$ przy dzieleniu przez 49 daje w reszcie 14, przeto układamy równania:

$$m = 37u \;.\;.\;.\; (1), \quad n = 49v + 14 \;.\;.\;.\; (2),$$

gdzie $u$ i $v$ ilorazy całkowite i dodatnie.

Ponieważ $\qquad m + n = 775.$

przeto (patrz (1) i (2))

$$37u + 49v + 14 = 775, \quad \text{czyli} \quad 37u + 49v = 761 \;.\;.\;.\; (3).$$

Rozwiążemy otrzymane równanie nieokreślone (3) sposobem dzielenia kolejnego:

$$u = \frac{761 - 49v}{37} = 21 - v + \frac{-16 - 12v}{37} = 21 - v - 4 \,.\, \frac{4 + 3v}{37} = 21 - v - 4t,$$

gdzie $t$ — liczba całkowita i $t = \frac{4 + 3v}{37}$, skąd

$$v = \frac{-4 + 37t}{3} = -1 + 12t + \frac{-1 + t}{3} = -1 + 12t + t_1,$$

gdzie $t_1$ — liczba całkowita i $t_1 = \frac{-1 + t}{3}$; skąd $t = 1 + 3t_1$,

a przeto

$$v = -1 + 12(1 + 3t_1) + t_1 = 11 + 37t_1;$$
$$u = 21 - (11 + 37t_1) - 4(1 + 3t_1) = 6 - 49t_1.$$

Lecz $u$ i $v$ — dodatnie, więc $6 - 49t > 0$;

$$11 + 37t_1 > 0, \quad \text{skąd} \quad -\frac{11}{37} < t_1 < \frac{6}{49},$$

więc jako liczba całkowita $\qquad t_1 = 0,$

zgodnie z tem $\qquad t_1 = 0, \quad u = 6, \quad v = 11,$

przeto (patrz (1) i (2))

$$m = 37 \,.\, 6 = 222, \quad n = 49 \,.\, 11 + 14 = 553.$$

---

29. Określimy niewiadomą liczbę $N$.

Według 9-go układu $N$ przedstawia się w postaci czterech cyfr, z których 2 z lewej strony są 3 i 3, a prawa niech będzie $x$, wtedy druga cyfra z prawej strony będzie $x - 3$, więc

$$N = [33(x - 3)x]_9.$$

Liczbę zaś $[33(x - 3)x]$ możemy rozłożyć na

$$3 \,.\, 9^3 + 3 \,.\, 9^2 + (x - 3) \,.\, 9 + x,$$

przyczem wykonywamy działania według dziesiątkowego układu. przeto

$N = 3 \cdot 9^3 + 3 \cdot 9^2 + (x-3) \cdot 9 + x = 2187 + 243 + 9x - 27 + x \; . \; . \; . \; (1).$

$N$ jest wielokrotną 11, więc

$$N = 11y \; . \; . \; . \; (2),$$

gdzie $y$ — spółczynnik wielokrotności.

Przyrównawszy 2 wartości $N$ z (1) i (2), otrzymamy

$2187 + 243 + 9x - 27 + x = 11y$, czyli $11y - 10x = 2403 \; . \; . \; . \; (3).$

Rozwiążemy otrzymane równanie nieokreślone (3) w liczbach całkowitych, dodatnich i takich, aby niewiadome $x$ i $x-3$ były mniejsze od zasady układu liczenia 9, to znaczy, że

$$x < 9, \quad x - 3 < 9, \quad \text{skąd} \quad x < 9 \; . \; . \; . \; (4)$$

i aby cyfra $x-3$ była dodatnią, to znaczy, że

$$x > 3 \; . \; . \; . \; (5).$$

Z (3) mamy:

$$x = \frac{11y - 2403}{10} = y - 240 + \frac{y-3}{10} = y - 240 + t,$$

gdzie liczba całkowita

$$t = \frac{y-3}{10}; \quad y = 3 + 10t, \quad x = 3 + 10t - 240 + t = -237 + 11t,$$

lecz $x$ i $y$ — dodatnie i $x$ czyni zadość warunkom (4) i (5), przeto

$$3 + 10t > 0; \quad -237 + 11t < 9; \quad -237 + 11t > 3;$$

skąd $t > -0{,}3; \quad t < 22^4/_{11}$ i $t < 21^9/_{10}, \quad 21^9/_{11} < t < 22^4/_{11},$

przeto liczba całkowita $t = 22.$

Zgodnie z tem

$$x = 242 - 237 = 5; \quad y = 3 + 220 = 223,$$

a przeto szukana liczba (patrz (1) i (2))

$$N = 2403 + 10 \cdot 5 = 11 \cdot 223 = 2453$$

i przedstawia się według 9-go układu w postaci $(3325)_9$.

Niech według układu liczenia z zasadą $r$ liczba $N$ przedstawia się w postaci $(10103)r$, więc

$$(10103)_r = 2453.$$

Lecz wiemy, że

$$(10103)_r = 1 \cdot r^4 + 0 \cdot r^3 + 1 \cdot r^2 + 0 \cdot r + 3 = r^4 + r^2 + 3,$$

przeto $r^4 + r^2 + 3 = 2453$ czyli $r^4 + r^2 - 2450 = 0 \; . \; . \; . \; (6).$

Rozwiążemy otrzymane równanie dwukwadratowe (6): przypuszczamy, że $r^2 = z$, wtedy (6) będzie

$$z^2 + z - 2450 = 0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 31-szy str. 185)

$$z=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{1+4.2450})=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{9801})=\frac{1}{2}(-1\pm 99);$$

$$z_1=\frac{98}{2}=49;\quad z_2=-\frac{100}{2}=-50,$$

ponieważ $r^2=z$, przeto $r=\pm\sqrt{z}$, więc $r_{1,2}=\pm\sqrt{49}=\pm 7$; $r_{3,4}=\pm\sqrt{-50}=\pm\sqrt{2.25}.\,i=\pm 5\sqrt{2}.\,i$, gdzie $i=\sqrt{-1}$.

Ponieważ rozpatrujemy układy liczenia tylko z całkowitemi dodatniemi zasadami, przeto $r_{2,3,4}$ nie nadają się do naszego zadania.

Szukana zasada jest 7.

Rzeczywiście, $(10103)_7=2453$.

---

30. Określimy liczbę $S$, równającą się sumie wymiernych wyrazów rozwinięcia

$$(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})^6.$$

Niech we wzorze 79-ym (patrz alg. Feldbluma str. 297):

$$x=\sqrt[3]{3},\quad a=\sqrt[3]{2},\quad \text{wtedy}$$

$$(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})^6=(\sqrt[3]{3})^6+6(\sqrt[3]{3})^5.\sqrt[3]{2}+\frac{6.5}{1.2}(\sqrt[3]{3})^4(\sqrt[3]{2})^2+\frac{6.5.4}{1.2.3}3.2+$$
$$+\frac{6.5}{1.2}(\sqrt[3]{3})^2(\sqrt[3]{2})^4+6\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2})^5+(\sqrt[3]{2})^6=3^2+6.3.\sqrt[3]{3^2}\sqrt[3]{2}+$$
$$+15.3\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{4}+20.6+15.2\sqrt[3]{9}.\sqrt[3]{2}+6.2\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{2^2}+2^2=$$
$$=9+18\sqrt[3]{18}+45\sqrt[3]{12}+120+30\sqrt[3]{18}+12\sqrt[3]{12}+4=133+$$
$$+48\sqrt[3]{18}+57\sqrt[3]{12};\quad S=133.$$

Znajdziemy pierwszy i drugi wyraz $a_1$ i $a_2$ postęgu różnicowego.

Zgodnie z warunkami zadania

$$S_{10}=255\quad\text{i}\quad a_1a_{10}=144.$$

Na zasadzie wzoru 42-go (patrz alg. Feldbluma str. 283)

$$S_{10}=255=\frac{10}{2}(a_1+a_{10})=5(a_1+a_{10}),$$

skąd $\qquad a_1+a_{10}=\dfrac{255}{5}=51;$ ponieważ $a_1.\,a_{10}=144,$

więc $a_1$ i $a_{10}$ są pierwiastkami równania

$$z^2-51z+144=0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 31 str. 185)

$$z=\frac{1}{2}(51\pm\sqrt{2601-4\,.\,144})=\frac{1}{2}(51\pm\sqrt{2025})=\frac{1}{2}(51\pm45);$$

$$z_1=\frac{96}{2}=48,\quad z_2=\frac{6}{2}=3,$$

więc $a_1=48,\quad a_{10}=3,$ albo $a_1=3,\quad a_{10}=48;$

zgodnie z warunkami zadania postęp jest wzrastający, przeto

$$a_1<a_{10},$$

więc rozwiązanie pierwsze nie nadaje się

$$a_1=3,\quad a_{10}=48.$$

Na zasadzie wzoru 41-go (patrz alg. Feldbluma str. 281)

$$a_{10}=a_1+9d,\quad \text{skąd}\quad d=\frac{1}{9}(a_{10}-a_1);$$

$$d=\frac{1}{9}(48-3)=\frac{45}{9}=5,\quad \text{więc}\quad a_2=a+d=3+5=8.$$

Przypuszczamy, że części, na które mamy rozdzielić liczbę 133, są $m$ i $n$, przyczem $m$ jest wielokrotną 3 i $n$ 8; niech ilorazy całkowite (i dodatnie przy dodatnich $m$ i $n$) od dzielenia $m$ przez 3 i $n$ przez 8 będą $x$ i $y$; zgodnie z tem:

$$m=3x,\quad n=8y\;\ldots\;(1).$$

Ponieważ $m+n=133,$

więc (patrz (1)) $3x+8y=133\;\ldots\;(2).$

Rozwiążemy otrzymane równanie nieokreślone (2) w liczbach całkowitych i dodatnich sposobem przez podstawienie. Wyłączywszy z (2) $x$

$$x=\frac{133+8y}{3.}$$

| $y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $x$ | $44^1/_3$ | $41^2/_3$ | 39 |

i podstawiwszy zamiast $y$ liczby 0, 1, 2, otrzymujemy

$$x=39,\quad y=2,$$

przeto ogólne wzory rozwiązań równania (2) w liczbach całkowitych są

$$x=39+8t,\quad y=2-3t\;\ldots\;(3),$$

gdzie $t$ — liczba całkowita, $x$ i $y$ są dodatnie przy wartościach $t$, które czynią zadość nierównościom (patrz (3))

$$39+8t>0;\quad 2-3t>0,\quad \text{skąd}\quad -4^7/_8<t<{}^2/_3.$$

Między liczbami $-4^7/_8$ i $^2/_3$ mamy 5 liczb całkowitych $-4,\ -3,-2,\ -1,\ 0,$ zgodnie z tem

$$t=-4,\ -3,\ -2,\ 0,$$

więc (patrz (3), (1)) zadanie ma 5 rozwiązań

| $t$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 7 | 15 | 23 | 31 | 39 |
| $y$ | 14 | 11 | 8 | 5 | 2 |
| $m$ | 21 | 45 | 69 | 93 | 117 |
| $n$ | 112 | 88 | 64 | 40 | 16 |

31. Wyciągniemy pierwiastek sześcienny:

$$
\begin{array}{rll}
 & \sqrt{7'414'875}=195 & \\
1^3\ \ldots & 1 & \\
3\ 1^2=3 & 61'14 & \ldots \text{ reszta I} \\
3.1^2.9\ \ldots & 27 & \\
 & 3714 & \\
3.1.9^2\ \ldots & 243 & \\
9^3 & \ \ 729 & \\
3.19^2=1083 & 5558'75 & \ldots \text{ reszta II} \\
3.19^2.5\ \ldots & 5415 & \\
 & \ \ 14375 & \\
3.19.5^2\ \ldots & \ \ 1425 & \\
5^3\ \ldots & \ \ \ \ 125 & \\
 & \ \ \ \ \ \ 0 & \ldots \text{ reszta III}
\end{array}
$$

Określimy spółczynnik wyrazu rozwinięcia

$$\left(\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}+\sqrt[7]{x^5}\right)^{10},$$

który zawiera $x'$. Niech szukany wyraz będzie $(k+1)-y$, wtedy, ponieważ on zawiera $x'$ (patrz alg. Feldbluma wzór 80 str. 382)

$$U_{k+1}=C_{10}^{k}x\ \ldots\ \text{(I)}.$$

Możemy dany dwumian przedstawić w postaci:

$$\left(\frac{1}{x^{4/3}}+x^{5/7}\right)^{10},\quad \text{czyli}\quad (x^{-4/3}+x^{5/7})^{10}.$$

Przypuszczamy, że we wzorze 80-ym

$$x=x^{-4/3},\quad a=x^{5/7},\quad n=10,$$

wtedy $$U_{k+1}=C_{10}^k(x^{5/7})^k(x^{-4/3})^{10-k}=C_{10}^k x^{5/7\,k-40/3+4/3\,k}=$$
$$=C_{10}^k x^{43/21\,k-40/3}\quad .\ .\ .\ (II).$$

Przyrównamy wyrażenia szukanego wyrazu z (I) i (II):

$$C_{10}^k x=C_{10}^k x^{43/21\,k-40/3};$$

jeżeli potęgi jednakowych liczb są równe, to wykładniki tych potęg też są równe, przeto

$$\frac{43}{21}k-\frac{40}{3}=1,\quad \text{skąd}\quad \frac{43}{21}k=\frac{43}{3};\quad k=\frac{21}{3}=7.$$

Więc szukany wyraz jest 8-my. Spółczynnik tego wyrazu (patrz alg. Feldbluma wzór 71 str. 374) jest

$$\overset{7}{\underset{10}{C}}=\overset{10-7}{\underset{10}{C}}=\overset{3}{\underset{10}{C}}=\frac{10\,.\,9\,.\,8}{1\,.\,2\,.\,3}=120.$$

Niech części, na które mamy rozdzielić liczbę 195, będą $x$, $y$, $z$; przypuszczając, że części te mają być dodatnie, otrzymujemy:

$$x>0,\quad y>0,\quad z>0\ .\ .\ .\ (1).$$

Wiemy, że suma wszystkich trzech części $=195$, że pierwsza część jest większa od ostatniej o 120 i że kwadrat wyrazu powtarzającego się w ciągłej proporcji geometrycznej równa się iloczynowi pozostałych wyrazów, przeto niewiadome $x$, $y$, $z$ są powiązane równaniami:

$$x+y+z=195\ .\ .\ .\ (2),\qquad x-z=120\ .\ .\ .\ (3),\qquad y^2=xz\ .\ .\ .\ (4).$$

Z równania (3) mamy: $\quad x=120+z,$

a z (2) $\quad y=195-(x+z)=195-(120+z+z),$

czyli $\quad y=75-2z\ .\ .\ .\ (5).$

Podstawimy w (4) $y=75-2z$ i $x=120+z$:

$$(75-2z)^2=(120+z)z;\quad 5625-300z+4z^2=120z+z^2;$$
$$3z^2-420z+5625=0;\quad z^2-140z+1875=0;$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 32-gi str. 186)

$$z=70\pm\sqrt{4900-1875}=70\pm\sqrt{3025}=70\pm55,$$
$$z_1=125;\quad z_2=15,$$

więc (patrz (3), (5))

$$x_1=120+125=245,\quad x_2=120+15=135;$$
$$y_1=75-2\,.\,125=-175,\quad y_2=75-2\,.\,15=45.$$

I-szy układ rozwiązań nie nadaje się, albowiem w nim $y<0$, co nie zgadza się z (1), II-gi zaś nadaje się. Więc szukane części są: 135, 45, 15.

32. Określimy iloczyn pierwszego wyrazu postępu przez czwarty z równania logarytmicznego

$$x^{1+\lg x}=0{,}001^{-2/3}.$$

Złogarytmujemy dane równanie:

$$(1+\lg x)\,.\,\lg x=-\frac{2}{3}\lg 0{,}001, \quad \text{lecz} \quad \lg 0{,}001=-3,$$

albowiem $10^{-3}=0{,}001$,

więc równanie będzie

$$\lg x+\lg^2 x=-\frac{2}{3}\,.\,-3, \quad \text{czyli} \quad \lg^2 x+\lg x-2=0.$$

Rozwiążemy otrzymane równanie kwadratowe względem $\lg x$ podług wzoru 31-go (patrz alg. Feldbluma str. 185):

$$\lg x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{1+4\,.\,2})=\frac{1}{2}(-1\pm 3); \quad (\lg x)_1=\frac{2}{2}=1,$$

więc $x_1=10$, albowiem $10^1=1$; $(\lg x)_2=-\frac{4}{2}=-2$,

więc $x_2=0{,}01$, albowiem $10^{-2}=\frac{1}{100}$.

Lecz iloczyn równa się większemu pierwiastkowi równania, przeto do zadania nadaje się wartość $x_1=10$. Więc iloczyn równa się 10.

Określimy sumę $S$ kwadratów drugiego i trzeciego wyrazu postępu. Zgodnie z warunkami zadania $S$ równa się drugiej potędze granicy nieskończonego ułamka perjodycznego (8, 16, 16, 16...). Niech $y=(8, 16, 16, 16...)$, wtedy $y-8=(0, 16, 16...)$,

więc

$$y-8=\cfrac{1}{16+\underbrace{\cfrac{1}{16+\cfrac{1}{16+\dots}}}_{y-8}}=\frac{1}{16+(y-8)};$$

więc otrzymujemy $(y-8)(y+8)=1$; $y^2-64=1$, $y^2=65$;

ponieważ $S=y^2$, więc $S=65$.

Niech postęp różnicowy o czterech liczbach będzie

$$\div\, a\,.\,(a+d)\,.\,(a+2d)\,.\,(a+3d),$$

gdzie $a$ i $d$ — pierwszy wyraz i różnica postępu.

Ponieważ iloczyn pierwszego wyrazu przez czwarty równa się 10, a suma kwadratów drugiego i trzeciego wyrazu $=65$, przeto układamy równania:

$$a(a+3d)=10 \;.\;.\;.\; (1), \quad (a+d)^2+(a+2d)^2=65 \;.\;.\;.\; (2).$$

Otworzymy nawiasy i pomnożywszy równanie (1) przez (2), odejmiemy je od (2):

$$\begin{array}{r|c|l} a^2+3ad=10 & 2 & \mp 2a^2 \mp 6ad \qquad = \mp 20 \\ 2a^2+6ad+5d^2=65 & 1 & \underline{\quad 2a^2+6ad+5d^2= \quad 65} \\ & & \qquad\qquad 5d^2=45\,, \end{array}$$

stąd $$d^2=\frac{45}{5}=9, \quad d=\pm\sqrt{9}=\pm 3.$$

Dalszy ciąg rozwiązania dzieli się na 2 części: A) $d=3$; równanie (1) będzie $$a^2+9a-10=0,$$
skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 31-szy str. 185)

$$a=\frac{1}{2}(-9\pm\sqrt{81+4.10})=\frac{1}{2}(-9\pm\sqrt{121})=\frac{1}{2}(-9\pm 11);$$

$$a_1=\frac{2}{2}=1, \quad a_2=-\frac{20}{2}=-10.$$

Więc szukany postęp będzie

$$\div 1.(1+3).(1+2.3).(1+3.3), \text{ czyli } \div 1.4.7.10$$

(postęp wzrastający z dodatniemi wyrazami) albo

$$\div -10.(-10+3).(-10+2.3).(-10+3.3),$$

czyli $$\div -10.-7.-4.-1$$

(postęp malejący z ujemnemi wyrazami).

B) $d=-3$; równanie (1) będzie:

$$a^2-9a-10=0,$$

skąd $$a=\frac{1}{2}(9\pm\sqrt{81+40})=\frac{1}{2}(9\pm 11);$$

$$a^{\text{III}}=\frac{20}{2}=10; \quad a^{\text{IV}}=-\frac{2}{2}=-1.$$

Więc szukany postęp będzie

$$\div 10.(10-3).(10-2.3).(10-3.3), \text{ czyli } \div 10.7.4.1$$

(postęp malejący z dodatniemi wyrazami) albo

$$\div -1.(-1.-3).(-1-2.3).(-1-3.3),$$

czyli $$\div -1.-4.-7.-10$$

(postęp wzrastający pod względem wielkości bezwzględnej wyrazów z wyrazami ujemnemi).

---

33. Określimy sumę wyrazów postępu z równania

$$\frac{3x+2}{5}:\left|1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}\right|=\frac{x}{19}+20.$$

Zamienimy ułamek ciągły $(1, 1, 1, x)$ na zwyczajny, poczynając wskazane działania dodawania i odejmowania od końca ułamka:

1) $1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$; 2) $1:\frac{x+1}{x}=\frac{x}{x+1}$;

$$1+\frac{x}{x+1}=\frac{x+1+x}{x+1}=\frac{2x+1}{x+1};$$

3) $1:\frac{2x+1}{x+1}=\frac{x+1}{2x+1}$; $1+\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2x+1+x+1}{2x+1}=\frac{3x+2}{2x+1}$.

Więc ułamek ciągły $(1, 1, 1, x)=\frac{3x+2}{2x+1}$. Wtedy równanie będzie:

$$\frac{3x+2}{5}:\frac{3x+2}{2x+1}=\frac{x}{19}+20; \quad \frac{2x+1}{5}=\frac{x}{19}+20.$$

Pomnożywszy równanie przez wspólny mianownik $=5 \,.\, 19$, otrzymamy:

$$(2x+1)19=5x+20 \,.\, 5 \,.\, 19; \quad 38x+19=5x+1900;$$

$$33x=1881; \quad x=\frac{1881}{33}=57.$$

Suma wyrazów postępu równa się 57.

Określimy iloczyn wyrazów postęgu. Niech iloczyn ten będzie $N$. $N$ jest liczbą czterocyfrową, cyfra jedności tej liczby $=2$; przypuszczamy, że pozostałe cyfry, licząc z lewej strony, są $y, z, u$; wtedy

$$N=(yzu2)_{10}.$$

Zgodnie z warunkami zadania liczba $(2yzu)_{10}$ jest mniejsza od $N$ o 3249, więc

$$(yzu2)_{10}-(2yzu)_{10}=3249, \quad \text{czyli}$$

$$10^3y+10^2z+10u+2-(10^3 \,.\, 2+10^2y+10z+u)=3249;$$

$$1000y+100z+10u+2-2000-100y-10z-u=3249;$$

$$900y+90z+9u=5247, \text{ czyli } 100y+10z+u=583 \quad . \; . \; (1).$$

Rozwiążemy otrzymne równanie nieoznaczone (1) z 3-ma niewiadomemi w liczbach całkowitych i dodatnich tak, aby

$$0<y<10, \quad 0<z<10 \; . \; . \; . \; (2), \quad 0<u<10 \; . \; . \; . \; (3),$$

albowiem $y, z, u$ są cyframi dziesiątkowego układu liczenia, przyczem $y$ musi być cyfrą znaczącą (nie może się równać $0$).

Z równania (1) mamy:

$$u=583-(100y+10z) \; . \; . \; . \; (4).$$

Na zasadzie warunków (3)

$$0<583-(100y+10z)<10, \quad \text{skąd} \quad 583>100y+10z>573 \; . \; . \; . \; (5).$$

Liczba całkowita (przy $y$ i $z$ całkowitych) $100y+10z$ jest wielokrotną 10, lecz z liczb 583 i 573 (patrz (5)) tylko liczba 580 jest wielokrotną 10; więc

$$100y+10z=580,$$

przeto (patrz (4))

$$u=583-580=3, \quad \text{więc} \quad 10y+z=58,$$

skąd bezpośrednio $z=58-10y \; . \; . \; . \; (6).$

Na zasadzie warunków (2) mamy

$$0<58-10y<10, \quad \text{skąd} \quad 5{,}8>y>4{,}8,$$

więc jako liczba całkowita $y=5,$

przeto (patrz (6)) $z=58-10.5=8.$

Szukana liczba $N$ z cyframi 5, 8, 3, 2 równa się 5832.

Niech szukany postęp będzie $\because a:b:c$. Wiemy, że suma wyrazów tego postępu $=57$, że iloczyn ich $=5832$; ponieważ $b$— średnia geometryczna między $a$ i $c$ (patrz rozwiązanie № 31; liczby $a$, $b$, $c$ tworzą proporcję geometryczną), więc $b^2=ac$; niewiadome $a$, $b$, $c$ są powiązane 3-ma równaniami:

$$a+b+c=57, \quad abc=5832, \quad b^2=ac \; . \; . \; . \; (A).$$

Pomnożywszy równanie trzecie układu (A) przez $b$, otrzymamy

$$b^3=abc,$$

wtedy na zasadzie równania drugiego układu (A)

$$b^3=5832=18^3,$$

skąd, zwróciwszy uwagę na to, że szukamy rzeczywistych wyrazów postępu, otrzymamy $b=18.$

Teraz sprowadzimy układ (A) do postaci:

$$a+c=57-18; \quad ac=\frac{5832}{18} \quad \text{czyli} \quad a+c=39, \quad ac=324.$$

Niewiadome $a$, $c$ są pierwiastkami równania kwadratowego

$$z^2-39z+324=0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 32-gi str. 186)

$$z=\frac{1}{2}(39\pm\sqrt{1521-4.324})=\frac{1}{2}(39\pm\sqrt{225})=\frac{1}{2}(39\pm15);$$

$$z_1=\frac{54}{2}=27; \quad z_2=\frac{24}{2}=12.$$

Więc $a=27, \quad c=12, \quad \text{albo} \quad a=12, \quad c=27;$

obydwa rozwiązania nadają się do zadania, więc szukany postęp może być wzrastający $\because 12:18:27$ albo malejący $\because 27:18:12$.

34. Określimy $m$. Niech wielomian

$$x^3+6x^2+11x+6=P$$

i wielomian $$x^3+9x^2+26x+24=Q,$$

najmniejsza wielokrotna tych wielomianów $=M$. Ponieważ $m=$ $=$spółczynnikowi przy $x^3$ w najmniejszej wielokrotnej $M$ wielomianów $P$ i $Q$, przeto określimy pierw $M$ (patrz rozwiązanie № 27). Rozłożymy wyrażenia $P$ i $Q$:

$$\begin{aligned} P&=x^3+6x^2+11x+6=x^3+x^2+5x^2+5x+6x+6= \\ &=x^2(x+1)+5x(x+1)+6(x+1)=(x+1)(x^2+5x+6)= \\ &=(x+1)(x^2+2x+3x+6)=(x+1)[x(x+2)+3(x+2)]= \\ &=(x+1)(x+2)(x+3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q&=x^3+9x^2+26x+24=x^3+2x^2+7x^2+14x+12x+24= \\ &=x^2(x+2)+7x(x+2)+12(x+2)=(x+2)(x^2+7x+12)= \\ &=(x+2)(x^2+3x+4x+12)=(x+2)[x(x+3)+4(x+3)]= \\ &=(x+2)(x+3)(x+4) \end{aligned}$$

$$M=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)\,.$$

W iloczynie $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ dwumianów z pierwszym wyrazem wspólnym $x^3$ jest drugim wyrazem, a na zasadzie prawa o tworzeniu iloczynu dwumianów, (patrz alg. Feldbluma str. 379) spółczynnik drugiego wyrazu iloczynu równa się sumie wszystkich drugich wyrazów dwumianów, przeto

$$m=1+2+3+4=(1+4)\,.\,\frac{4}{2}=10.$$

Określimy $n$. $n$ jest spółczynnikiem takiego wyrazu rozwinięcia $(\sqrt[3]{z}+\sqrt{z^{-1}})^{26}$, który po uproszczeniu zawiera $z^7$. Przedstawimy daną potęgę w postaci

$$(z^{1/3}+z^{-1/2})^{26},$$

przypuszczamy, że we wzorze 80-ym (patrz alg. Feldbluma str. 382)

$$x=z^{1/3},\quad a=z^{-1/2},\quad n=26,$$

wtedy ogólny wyraz rozwinięcia danego dwumianu będzie:

$$U_{k+1}=C_{26}^k(z^{-1/2})^k(z^{1/3})^{26-k}=C_{26}^k z^{-1/2k+26/3-1/3k}=C_{26}^k z^{-5/6k+26/3}\ \ldots\ (\mathrm{I}).$$

Dla otrzymania z tego wyrazu, wyrazu, zawierającego $z^7$, jest niezbędnem i wystarczającem, aby (patrz (I))

$$-\frac{5}{6}k+\frac{26}{3}=7,\quad \text{skąd}\quad -\frac{5}{6}k=-\frac{5}{3};\quad k=\frac{6}{3}=2.$$

Więc wyraz, zawierający $z^7$, będzie $(2+1=)$ 3-ci. Spółczynnik tego wyrazu będzie (patrz alg. Feldbluma wzór 71-szy str. 374)

$$C_{26}^{2} = \frac{26 \cdot 25}{1 \cdot 2} = 13 \cdot 25.$$

Szukana liczba $n = 13 \cdot 25$.

W wyrażeniu $\sqrt{m + \frac{1}{25}n}$ $m = 10$, $n = 13 \cdot 25$,

przeto $\sqrt{m + \frac{1}{25}n} = \sqrt{10 + \frac{1}{25} \cdot 13 \cdot 25} = \sqrt{10 + 13} = \sqrt{23}$.

Przedstawimy w postaci ułamka łańcuchowego otrzymaną liczbę niewymierną $\sqrt{23}$ (patrz alg. Feldbluma str. 388, 389, 390)

$$\sqrt{23} = 4 + \frac{1}{x_1}; \quad \frac{1}{x_1} = \sqrt{23} - 4; \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{23} - 4} = \frac{\sqrt{23} + 4}{7};$$

$$x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}; \quad \frac{1}{x_2} = \frac{\sqrt{23} - 3}{7}; \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{23} - 3} = \frac{\sqrt{23} + 3}{2};$$

$$x_2 = 3 + \frac{1}{x_3}; \quad \frac{1}{x_3} = \frac{\sqrt{23} - 3}{2}; \quad x_3 = \frac{2}{\sqrt{23} - 3} = \frac{\sqrt{23} + 3}{7};$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{x_4}; \quad \frac{1}{x_4} = \frac{\sqrt{23} - 4}{7}; \quad x_4 = \frac{7}{\sqrt{23} - 4} = \sqrt{23} + 4;$$

$$x_4 = 8 + \frac{1}{x_5}; \quad \frac{1}{x_5} = \sqrt{23} - 4; \quad x_5 = \frac{1}{\sqrt{23} - 4} = \frac{\sqrt{23} + 4}{7};$$

widzimy, że $x_5 = x_1$;

więc $\sqrt{23} = (4, 1, 3, 1, 8, x) = (4, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8 \ldots)$.

---

35. Określimy $a$. Zgodnie z warunkami zadania $a =$ spółczynnikowi przy $x^7$ rozwinięcia $(\sqrt[7]{x^5} + x^1\sqrt{x^{-1}})^{16}$. Przedstawimy daną potęgę w postaci $(x^{5/7} + x^{-3/2})^{16}$. Na zasadzie wzoru 80-go, (patrz alg. Feldbluma str. 382) ogólny wyraz rozwinięcia tej potęgi będzie:

$$U_{k+1} = C_{16}^{k}(x^{-3/2})^{k}(x^{5/7})^{16-k} = C_{16}^{k} x^{-3/2 k + 80/7 - 5/7 k} = C_{16}^{k} x^{-31/14 k + 80/7}.$$

Dla otrzymania z ogólnego wyrazu rozwinięcia wyrazu, zawierającego po uproszczenia $x^7$, niezbędnem jest i wystarczającem, aby

$$-\frac{31}{14}k + \frac{80}{7} = 8, \quad \text{skąd} \quad -\frac{31}{14}k = -\frac{31}{7}; \quad k = \frac{14}{7} = 2.$$

Więc wyraz, zawierający $x^7$, jest $(2 + 1 =)$ 3-ci, szukany spółczynnik tego wyrazu (patrz alg. Feldbluma wzór 71-szy str. 374) jest:

$$C_{16}^{2} = \frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 120.$$

$$4Q = 4(x^4 - 43x^3 - 88x^2 - 89x - 45) =$$
$$= 4x^4 - 172x^3 - 352x^2 - 356x - 180;$$

$$\begin{array}{lrrrrr|l}
 & 4x^4 - & 172x^3 - & 352x^2 - & 356x - & 180 & 4x^3 - 177x^2 - 136x + 45 \\
 & " & \pm 177x^3 \pm & 136x^2 \mp & 45x & & x + 5 \\
\hline
 & & 5x^3 - & 216x^2 - & 401x - & 180 & \\
\text{pomnoż. przez 4} & & 20x^3 - & 864x^2 - & 1604x - & 720 & \\
 & & " & \pm 885x^2 \pm & 680x \mp & 225 & \\
\hline
\text{reszta II} \dots & & & 21x^2 - & 924x - & 945 & = 21(x^2 - 44x - 45)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrr|l}
 & 4x^3 - & 177x^2 - & 136x + & 45 & x^2 - 44x - 45 \\
 & " & \pm 176x^2 \pm & 180x & & 4x - 1 \\
\hline
 & - & x^2 \pm & 44x \pm & 45 & \\
 & & " + & 44x + & 45 & \\
\hline
\text{reszta III} \dots & & & & 0 &
\end{array}$$

$$D = x^2 - 44x - 45 = x^2 + x - 45x - 45 = x(x+1) -$$
$$- 45(x+1) = (x+1)(x-45).$$

Czynnik $x+1$ pokazuje, że równania (I) i (II) mają wspólny pierwiastek $x = -1$; czynnik zaś $x - 45$ określa drugi wspólny pierwiastek równań $x = 45$; lecz pierwiastek ujemny nie zgadza się z warunkami zadania, przeto weźmiemy $x = 45$.

Pierwszy mularz, pracując sam, mógłby wymurować ścianę w 45 dni.

Znajdziemy liczbę dni, w ciągu której drugi mularz, pracując sam, mógłby wymurować tę ścianę. Liczba ta równa się wyrazowi rozwinięcia $\sqrt[3]{u^2} + u^{-0,888\ldots})^7$, który nie zawiera $u$, to znaczy, że wyraz ten zawiera $u^0$.

Ogólny wyraz rozwinięcia danej potęgi (patrz alg. Feldbluma wzór 80-ty str. 382)

$$U_{k+1} = C_7^k (u^{-0,888})^k (\sqrt[3]{u^2})^{7-k}.$$

ponieważ

$$0,888\ldots = \lim\left(\frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \ldots \text{ad inf.}\right) = \frac{{}^8/_{10}}{1 - {}^1/_{10}} = \frac{{}^8/_{10}}{{}^9/_{10}} = \frac{8}{9},$$

$$\sqrt[3]{u^2} = u^{2/3}, \quad \text{więc}$$

$$U_{k+1} = C_7^k (u^{-8/9})^k (u^{2/3})^{7-k} = C_7^k u^{-8/9 k} u^{14/3 - 2/3 k} =$$
$$= C_7^k u^{-8/9 k + 14/3 - 2/3 k} = C_7^k u^{-14/9 k + 14/3}.$$

Ponieważ szukany wyraz zawiera $u^0$, przeto

$$u^{-14/9 k + 14/3} = u^0.$$

Jeżeli potęgi jednakowych liczb są równe, to wykładniki tych potęg też są równe, więc

$$-\frac{14}{9}k+\frac{14}{3}=0, \qquad k=\frac{9}{3}=3.$$

Szukany wyraz jest (3+1+) 4-ty; wtedy (patrz alg. Feldbluma wzór 71-szy str. 374)

$$U_4=C_7^3=\frac{7\,.\,6\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3}=7\,.\,5=35.$$

Przypuszczamy, że pierwszy mularz pracował $x$ dni i że drugi skończył robotę w $y$ dni, wiemy, że pierwszy mularz, pracując sam, może wymurować ścianę w 45 dni, drugi, pracując sam, może wymurować tę ścianę w 35 dni, więc pierwszy mularz wymurował w ciągu dnia $\frac{1}{45}$ część ściany, w $x$ dni $=$ $=\frac{x}{45}$ część ściany; drugi w ciągu 1 dnia wymurował $\frac{1}{35}$ część ściany, w ciągu $y$ dni $=\frac{y}{35}$ część ściany. Po upływie $x$ dni pracy pierwszego mularza i $y$ dni pracy drugiego została wymurowana $\left(\frac{x}{45}+\frac{y}{35}\right)$ część ściany, co się równa zgodnie z warunkami zadania wielkości całej ściany, którą przyjmujemy za 1, przeto mamy równanie

$$\frac{x}{45}+\frac{y}{35}=1, \quad \text{czyli} \quad \frac{x}{9}+\frac{y}{7}=5\ .\ .\ .\ (1).$$

Ponieważ $x$ i $y$ — liczby całkowite, więc na zasadzie (1) $x$ jest wielokrotną 9, $y$ — wielokrotną 7, przeto

$$x=9x', \quad y=7y'\ .\ .\ .\ (2),$$

gdzie $x'$ i $y'$ też są liczbami całkowitemi; prócz tego $x$ i $y$ — liczby dni pracy, $x'$ i $y'$ — liczby dodatnie, przeto rozwiążemy w liczbach całkowitych (które się nie równają 0) równanie nieoznaczone (patrz (1), (2))

$$x'+y'=5;$$

rozwiążemy je bezpośrednio

$$y'=5-x'\ .\ .\ .\ (3),$$

lecz $x'>0, \ y'>0,$

więc $5-x'>0, \quad 5>x'>0;$

skąd jako liczba całkowita

$$x'=4,\ 3,\ 2 \text{ albo } 1,$$

więc (patrz (3) i (2)) zadanie ma 4 rozwiązania.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x'$ | 4 | 3 | 2 | 1 | |
| $y'$ | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| $x$ | **36** | **27** | **18** | **9** | (dni) |
| $y$ | **7** | **14** | **21** | **28** | |

37. Określimy trzeci wyraz postępu $a_3$. $a_3$ równa się liczbie dwucyfrowej, w której cyfra jedności jest o 5 większa od cyfry dziesiątków, przeto gdy cyfra jedności $=x$, cyfra dziesiątków $=x-5$, więc

$$a_3=[(x-5)x]_{10}.$$

Gdy zaś za zasadę układu liczenia weźmiemy $x$, $a_3$ wyrazi się w postaci:

$$a_3=(36)_x.$$

Przyrównamy 2 otrzymane wyrażenia $a_3$:

$$[(x-5)x]_{10}=(36)x \;...\; (\mathrm{I}),$$

skąd, na zasadzie warunków względem cyfr wszelkiego układu liczenia z zasadą całkowitą i dodatnią, mamy:

$x-5>0$, t. j. $x>5$; $6<x$, $x>6$; $x<10$, więc $6<x<10$,

skąd jako liczba całkowita i dodatnia $x=7, 8$ albo 9. Z tych wszystkich wartości jedna tylko $x=7$ czyni zadość (I), przeto

$$a_3=[(7-5)7]_{10}=27.$$

Znajdziemy $a_{10}$ postępu. Ponieważ od dzielenia $a_{10}$ przez 8 i 11 otrzymujemy w resztach 3 i 6, więc

$$a_{10}=8x+3=11y+6 \;...\; (\mathrm{II}),$$

gdzie $x$ i $y$ — ilorazy całkowite i dodatnie, gdyż $a_{10}$ jest najmniejszą liczbą całkowitą, która od dzielenia przez 8 i 11 daje w resztach 3 i 6, a przeto $a_{10}$ — dodatnie. Więc (patrz (II))

$$8x+3=11y+6, \quad \text{czyli} \quad 8x-11y=3 \;...\; (\mathrm{III}).$$

Rozwiążemy równanie nieoznaczone (III) w liczbach całkowitych i dodatnich sposobem dzielenia kolejnego:

$$x=\frac{3+11y}{8}=y+\frac{3+3y}{8}=y+3.\frac{1+y}{8}=y+3t,$$

gdzie $t$ — liczba całkowita i $t=\frac{1+y}{8}$; skąd

$$y=-1+8t; \quad x=-1+8t+3t=-1+11t \;...\; (\mathrm{IV}).$$

Ponieważ $x$ i $y$ — dodatnie, więc

$$-1+8t>0; \quad -1+11t>0,$$

skąd $\quad t>\frac{1}{8}, \; t>\frac{1}{11}; \;$ przeto $\; t>\frac{1}{8};$

więc liczba całkowita $t=1, 2, 3, 4$ ...

Z (II) i (IV) widzimy, że $a_{10}$ ma najmniejszą wartość, przy najmniejszych wartościach $x$ i $y$, a $x$ i $y$ zaś mają najmniejsze wartości przy najmniejszej wartości $t=1$; więc

$$x=11-1=10, \quad y=8-1=7; \quad a_{10}=8.10+3=11.7+6=83.$$

Określimy sumę wyrazów postępu. Suma wyrazów równa się czwartemu wyrazowi rozwinięcia $(1+\sqrt[3]{3,4})^{11}$. Przypuszczamy, że $x=1$, $a=\sqrt[3]{3,4}$, $n=11$, $k=3$, wtedy otrzymamy na zasadzie wzoru 80-go (patrz alg. Feldbluma str. 382)

$$U_4=C_{11}^3(\sqrt[3]{3,4})^3 \,.\, 1^8=C_{11}^3 \,.\, 3,4=\frac{11 \,.\, 10 \,.\, 9 \,.\, 3,4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}=11 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 3,4=561.$$

Więc szukana suma wyrazów postępu $=561$. Wiemy, że w postępie różnicowym $a_3=27$, $a_{10}=83$ i $Sn=561$, mamy określić $n$. Niech pierwszy wyraz postępu będzie $a_1$ i różnica $d$. Na zasadzie wzoru 40-go (patrz alg. Feldbluma str. 280) układamy równania $a_1+2d=27$ . . . (1), $a_1+9d=83$ . . . (2).

Na zasadzie wzoru 43-go (patrz alg. Feldbluma str. 284) mamy:

$$561=\frac{1}{2}n[2a_1+(n-1)d] \quad . \; . \; . \; (3).$$

Gdy odejmiemy od (2) równanie (1), otrzymamy

$$7d=56, \quad \text{skąd} \quad d=8,$$

więc (patrz (1)) $\quad a_1=27-2 \,.\, 8=27-16=11.$

Podstawimy wartości $a_1$ i $d$ w (3):

$$561=\frac{1}{2}n[2 \,.\, 11+(n-1) \,.\, 8], \quad \text{czyli}$$

$$n[11+4(n-1)]=561, \quad \text{czyli} \quad 4n^2+7n-561=0;$$

skąd

$$n=\frac{1}{2 \,.\, 4}(-7 \pm \sqrt{49+4 \,.\, 4 \,.\, 561})=\frac{1}{8}(-7 \pm \sqrt{9025})=\frac{1}{8}(-7 \pm 95);$$

$$n_1=\frac{88}{8}=11, \quad n_2=-\frac{102}{8}=-12^3/_4 \,.$$

Liczba wyrazów postępu musi być dodatnia i całkowita, przeto rozwiązanie drugie nie nadaje się do zadania, więc $n=11$. Trzeba wziąć 11 wyrazów.

---

38. Określimy $a$. $a=$spółczynnikowi tego wyrazu rozwinięcia $(\sqrt[3]{u^2}+u^{-10})^{16}$, który wcale nie zależy od $u$. Ogólny wyraz tego rozwinięcia (patrz alg. Feldbluma wzór 80-ty str. 382) jest: $U_{k+1}=C_{16}^k u^{-10})^k(u^{2/3})^{16-k}=C_{16}^k u^{-10k}u^{32/3-2/3k}=C_{16}^k u^{-32/3k+32/3}$.

Dla otrzymania z ogólnego wyrazu rozwinięcia wyrazu, który zawiera $u^0=1$, niezbędnem jest (patrz rozwiązanie № 36) aby wykładnik ogólnego wyrazu rozwinięcia $=0$; więc

$$-\frac{32}{3}k+\frac{32}{3}=0, \quad \text{skąd} \quad k=1.$$

Szukany wyraz jest $(1+1=)$ 2-gi i równa się $U_2=16$, (albowiem spółczynnik drugiego wyrazu rozwinięcia dwumianu Newtona równa się wykładnikowi dwumianu). Więc $a=16$.

Określimy $b$. Niech wielomian

$$12x^3+10x^2-8x+6=P,$$

wielomian $$3x^4-2x^3-5x^2+4x-2=Q,$$

wspólny największy dzielnik tych wielomianów $=D$. Określimy $D$. Wyłączywszy z $P$ 2, otrzymamy

$$P'=6x^3+5x^2-4x+3,$$

pomnożywszy $Q$ przez $(2^2=)$ 4, otrzymamy

$$Q_1=12x^4-8x^3-20x^2+16x-8.$$

Znajdziemy $D$ sposobem dzielenia kolejnego $Q_1$ przez $P'$.

$$\begin{array}{r|l}
12x^4-\phantom{1}8x^3-20x^2+16x-8 & 6x^3+5x^2-4x+3 \\ \cline{2-2}
\text{„}\quad \mp 10x^3\pm\phantom{1}8x^2\mp\phantom{1}6x\phantom{-8} & \quad 2x-3 \\ \cline{1-1}
-18x^3-12x^2+10x-8 & \\
\text{„}\quad \pm 15x^2\mp 12x\pm 9 & \\ \cline{1-1}
3x^2-\phantom{1}2x+1 & \quad \ldots \text{ reszta I}
\end{array}$$

Podzielimy $P'$ przez I-szą resztę.

$$\begin{array}{r|l}
6x^3+5x^2-4x+3 & 3x^2-2x+1 \\ \cline{2-2}
\text{„}\quad \pm 4x^2\mp 2x\phantom{+3} & \quad 2x+3 \\ \cline{1-1}
9x^2-6x+3 & \\
\text{„}\quad \pm 6x\pm 3 & \\ \cline{1-1}
0 & \quad \ldots \text{ reszta II.}
\end{array}$$

$$D=3x^2-2x+1.$$

$b$ równa się spółczynnikowi przy $x^2$ w $D$, spółczynnik przy $x^2$ w $D=3$, przeto $b=3$.

Określimy $c$. Niech ułamek perjodyczny $(3, 3, 6, 3, 6, \ldots)$ będzie $z$, wtedy:

$$z-3=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\underbrace{\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\ddots}}}_{z-3}}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+(z-3)}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{z+3}}=\frac{z+3}{3z+10};$$

skąd $$(z-3)(3z+10)=z+3;\quad 3z^2+10z-9z-30=z+3;$$

$$3z^2=33; \quad z^2=\frac{33}{3}=11.$$

$c$ równa się kwadratowi tego ułamka, przeto $c=11$.

Niech każda z szukanych liczb trzycyfrowych będzie $N$, ilorazy od $N:16$ i $N:11=x$ i $y$, ponieważ reszta od $N:16$ równa się 3, przeto
$$N=16x+3=11y \ldots (1).$$

Zadanie posiada własności arytmetyczne, więc $N$, a przeto $x$ i $y$ — dodatnie i zamieniają $N$ na zasadzie (1) na liczbę trzycyfrową, zawartą między 100 i 1000, a mianowicie
$$100<N<1000 \ldots (2).$$
Więc (patrz (1) $16x+3=11y$, czyli $16x-11y=-3 \ldots (3)$.

Rozwiążemy równanie nieoznaczone (3) w liczbach całkowitych i dodatnich sposobem dzielenia kolejnego
$$y=\frac{3+16x}{11}=x+\frac{3+5x}{11}=x+t,$$
gdzie $t$ — dowolna liczba całkowita i $t=\frac{3+5x}{11}$; skąd
$$x=\frac{-3+11t}{5}=2t+\frac{-3+t}{5}=2t+t_1,$$
przyczem $t_1$ — dowolna liczba całkowita i $t_1=\frac{-3+t}{5}$; skąd $t=3+5t_1$, więc
$$\left.\begin{aligned} x&=2(3+5t_1)+t_1=6+10t_1+t_1=6+11t_1 \\ y&=6+11t_1+3+5t_1= \qquad 9+16t_1 \end{aligned}\right\} \ldots (4).$$
Określimy $N$; na zasadzie (4), (1) mamy:
$$N=16(6+11t_1)+3=11(9+16t_1)=99+176t_1 \ldots (5).$$
Wiemy z (2), że $N$ — liczba trzycyfrowa, przeto (patrz (5) i (2))
$$100<99+176t_1<1000, \quad \text{skąd} \quad \frac{1}{176}<t_1<5\frac{21}{176}.$$

Lecz między $\frac{1}{176}$ i $5\frac{21}{176}$ mamy pięć liczb całkowitych: 1, 2, 3, 4 i 5, więc $t_1=1, 2, 3, 4$ albo 5, przeto szukanych liczb będzie 5 i suma ich (patrz (5)) będzie:

| | | | |
|---|---|---|---|
| przy $t_1=1$ | liczba | $N=99+176=275$ | |
| „ $t_1=2$ | „ | „ $=99+2.176=451$ | |
| „ $t_1=3$ | „ | „ $=99+3.176=627$ | |
| „ $t_1=4$ | „ | „ $=99+4.176=803$ | |
| „ $t_1=5$ | „ | „ $=99+5.176=979$ | |
| Suma = | | | 3135. |

Suma wszystkich liczb trzycyfrowych $=3135$.

39. Określimy $n$ z równania $11C_n^3=24C_{n+1}^2$. Na zasadzie wzoru 71-go (patrz alg. Feldbluma str. 374)

$$11C_n^3=24C_{n+1}^2 \quad \text{czyli} \quad 11.\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}=24.\frac{n(n+1)}{1.2},$$

czyli $11n^2-33n+22=72n+72$, czyli $11n^2-105n-50=0$,

skąd $$n=\frac{105\pm\sqrt{11025+2200}}{22}=10, \quad n_1=-\frac{5}{11},$$

lecz $n$ — dodatnie i całkowite, przeto rozwiązanie drugie nie nadaje się. Wykładnik dwumianu $=10$. Znajdziemy dwa wymierne wyrazy rozwinięcia dwumianu $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^{10}$. Wykładnik pierwszego wymiernego wyrazu danego dwumianu musi być liczbą wielokrotną 3, przeto on będzie $3x$, wykładnik drugiego musi być wielokrotną 2, przeto będzie $2y$.

Wiemy że suma wykładników obydwu wyrazów dwumianu równa się wykładnikowi dwumianu, więc mamy równanie nieoznaczone: $3x+2y=10$, które rozwiążemy w liczbach całkowitych i dodatnich

$$y=\frac{10-3x}{2}=5-2x+\frac{x}{2};$$

niech $$\frac{x}{2}=t; \quad x=2t; \quad y=5-4t+t=5-3t;$$

$x$ i $y$ — dodatnie, $x>0$ i $y>0$, przeto $2t>0$ i $5-3t>0$, skąd $t>0$ i $t<{}^5/_3$, więc $t=1$; wtedy $x=2$, $y=2$.

Wykładnik drugiego wyrazu $(\sqrt[3]{3})$ dwumianu $=3.2=6$, więc wyraz jest $(6+1=)$ 7-my.

Na zasadzie wzoru 80-go (patrz alg. Feldbluma str. 382)

$$U_7=C_{10}{}^6(\sqrt[3]{3})^6(\sqrt{2})^4=\frac{10.9.8.7.3^2.2^2}{1.2.3.4}=7560.$$

Drugi wymierny wyraz jest pierwszym wyrazem dwumianu i równa się $(\sqrt{2})^{10}=32$.

Określimy $x$ z równania $\lg(x+2)-\lg 5=\lg(x-6)$.

$$\lg(x+2)-\lg 5=\lg(x-6); \quad \lg\frac{x+2}{5}=\lg(x-6),$$

z równości logarytmów wnosimy w równości liczb, więc

$$\frac{x+2}{5}=x-6; \quad x+2=5x-30; \quad 4x=32, \quad x=8.$$

Znajdziemy liczbę wyrazów postępu. We wzorze 41-ym (patrz alg. Feldbluma str. 281)

$$a_n=a_1+(n-1)d, \quad a_n=7560, \quad a_1=32, \quad d=8,$$

więc $$7560=32+(n-1)8, \quad \text{skąd} \quad n=942.$$

Liczba wyrazów postpępu $=942$.

40. Określimy sumę pierwiastków równania

$$9^{x+3x^{-1}}=6561 \ . \ . \ . \ (1).$$

Zauważywszy, że $6561=9^4$,

przedstawimy równanie (1) w postaci $9^{x+3x^{-1}}=9^4$.

Jeżeli potęgi jednakowych liczb są równe, to wykładniki ich też są równe, przeto: $x+3x^{-1}=4$ czyli $x+3.\frac{1}{x}=4$, czyli $x^2+3=4x$, czyli $x^2-4x+3=0 \ . \ . \ . \ (2)$.

Suma pierwiastków równania (2) (patrz alg. Feldbluma str. 189) równa się spółczynnikowi przy $x$ w pierwszej potędze z przeciwnym znakiem, przeto szukana suma pierwiastków $=4$. Uprościmy wyrażenie

$$\frac{\left[(-a)^2\right]^m.\left(-\frac{1}{2}b\right)^{-2}}{(a^m b^{-1})^2}-\frac{(a^{-1}-b^{-1})(3ab)^2}{a^2b-ab^2}+\frac{\left[-\left(-\frac{1}{2}a\right)^6\right]^{-1}}{\left[\left(-2^{\frac{1}{a}}\right)^3\right]^{-2}} \ . \ . \ . \ (A).$$

1) $$\frac{\left[(-a)^2\right]^m.\left(-\frac{1}{2}b\right)^{-2}}{(a^m b^{-1})^2}=\frac{(a^2)^m.\left(-\frac{1}{2}b\right)^{-2}}{a^{2m}b^{-2}}=\frac{a^{2m}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}b^{-2}}{a^{2m}b^{-2}}=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}=(-2)^2=4.$$

2) $$\frac{(a^{-1}-b^{-1})(3ab)^2}{a^2b-ab^2}=\frac{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)9a^2b^2}{ab(a-b)}=\frac{\frac{b-a}{ab}.9ab}{a-b}=$$

$$=\frac{(b-a)9}{a-b}=\frac{-(a-b)9}{a-b}=-9.$$

3) $$\frac{\left[-\left(-\frac{1}{2}a\right)^6\right]^{-1}}{[(-2^{-1}a)^3]^{-2}}=\frac{[-(-2^{-1}a)^6]^{-1}}{(-2^{-3}a^3)^{-2}}=\frac{(-2^{-6}a^6)^{-1}}{2^6a^{-6}}=\frac{-2^6a^{-6}}{2^6a^{-6}}=-1.$$

Więc $$A=4-(-9)+(-1)=4+9-1=12.$$

Dowiemy się, w ile dni drugi posłaniec dogoni pierwszego. Przypuszczamy, że drugi posłaniec dogoni pierwszego w $x$ dni po swoim wyjeździe. Pierwszy posłaniec zgodnie z warunkami zadania wyruszył w drogę 10 dni przed drugim, więc był w drodze od czasu wyruszenia do spotkania się z drugim posłańcem $(x+10)$ dni. Pierwszy posłaniec, przechodząc po 4 mile dziennie, w $(x+10)$ dni przeszedł $4(x+10)$ mil. Drugi posłaniec, który szedł z szybkością 12 mil na dzień, przeszedł przez $x$ dni $12x$ mil. Ponieważ przestrzenie, które przeszli obydwaj posłańcy od miejsca wyruszenia do miejsca spotkania się, są równe, przeto układamy równanie:

$12x=4(x+10)$ czyli $12x=4x+40$, czyli $8x=40$, skąd $x=5$.

Drugi posłaniec dogoni pierwszego w 5 dni.

---

41. Znajdziemy wykładnik postępu

$$3\sqrt{12}-5\sqrt{1,33\ldots}-\sqrt{3}+4\sqrt{\frac{1}{12}}-\sqrt{27}+2\sqrt{0,75}=$$

$$=3\sqrt{3.4}-5\sqrt{\frac{4}{3}}-\sqrt{3}+4\sqrt{\frac{3}{36}}-9\sqrt{9.3}+2\sqrt{\frac{3}{4}}=$$

$$=6\sqrt{3}-\frac{10}{3}\sqrt{3}-\sqrt{3}+\frac{4}{6}\sqrt{3}-3\sqrt{3}+\sqrt{3}=\frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Wykładnik postępu $q=\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Określimy stosunek liczby funtów towaru pierwszego gatunku do liczby funtów drugiego gatunku.

Pierwszy wyraz postępu $a_1=9$, (zgodnie z warunkami zadania) więc siódmy wyraz tego postępu

$a_7=a_1q^6=9\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^6=9\,.\,\frac{1}{3^6}\,.\,3^3=9\,.\,\frac{1}{3^3}=\frac{1}{3}$. Stosunek jest 1:3.

Określimy wartość towaru. Znajdziemy spółczynnik szóstego wyrazu rozwinięcia $(a+b)^9$.

Każdy wyraz rozwinięcia dwumianu Newtona wyraża się wzorem (patrz alg. Feldbluma wzór 80-ty str. 382)

$$U_{k+1}=C_n^k a^k x^{n-k}\ \ldots\ (1),$$

gdzie $n$ jest wykładnikiem dwumianu, $x$ — pierwszy wyraz jego, $a$ — drugi wyraz, $k$ — liczba wyrazów rozwinięcia, poprzedzających wyraz, którego spółczynnik szukamy. Tem razem $k=5$, $n=9$, $x=a$, $a=b$, przeto wzór nasz będzie, $U_6=C_9^5a^4b^5$.

Spółczynnik szóstego wyrazu $=C_9^5$. Na zasadzie wzorów 73-go i 71-go (patrz alg. Feldbluma str. 375 i 374) mamy:

$$C_9^5=C_9^{9-5}=C_9^4=\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}=126.$$

Wszystek towar kosztował 126 dziesiątków rub., czyli 1260 rub.

Dowiemy się, ile było pudów towaru. Przypuszczamy, że pierwszego gatunku było $x$ pudów, więc drugiego było $3x$ (stosunek liczby funtów pierwszego gatunku do liczby funtów drugiego gatunku $=\frac{1}{3}$, więc stosunek liczb pudów też $=\frac{1}{3}$). Wartość puda pierwszego gatunku zgodnie z warunkami zadania $=\frac{2}{5}x$ rub., wartość puda drugiego gatunku $=\left(\frac{2}{5}x-2\right)$ rub. Wszystek towar pierwszego gatunku kosztował $\left(\frac{2}{5}x \,.\, x=\right)\frac{2}{5}x^2$ rub., wszystek towar drugiego gatunku $\left[3x\left(\frac{2}{5}x-2\right)=\frac{6}{5}x^2-6x=\right]\frac{6x^2-30x}{5}$ rub.

Towar pierwszego i drugiego gatunku razem kosztował

$$\left(\frac{2}{5}x^2+\frac{6x^2-30x}{5}=\right)\frac{8x^2-30x}{5} \text{ rub.},$$

co równa się zgodnie z warunkami zadania 1260 rub., przeto układamy równanie: $\frac{8x^2-30x}{5}=1260$ czyli $8x^2-30x-6300=0$, skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 32-gi str. 186)

$$x=\frac{15\pm\sqrt{225+50400}}{8}=\frac{15\pm225}{8};$$

$$x_1=\frac{15+225}{8}=\frac{240}{8}=30,\quad x_2=\frac{15-225}{8}=-\frac{210}{8}=-26\tfrac{1}{4}.$$

(ale liczba pudów towaru nie może być ujemną, przeto przyjmujemy rozwiązanie pierwsze). Pierwszego gatunku było 30 pudów, drugiego $(30\,.\,3)=90$ pudów.

---

42. Określimy liczbę elementów, która tworzy 45 kombinacji po 2. Na zasadzie wzoru $C_m^n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\ldots n}$ (patrz alg. Feldbluma wzór 71-szy str. 373) mamy:

$$C_m^2=\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}=45 \quad \text{czyli} \quad m(m-1)=90, \quad \text{czyli} \quad m^2-m-90=0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 32-gi str. 186)

$$m=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+90}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{361}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{19}{2},$$

$$m_1=\frac{1}{2}+\frac{19}{2}=10,\quad m_2=\frac{1}{2}-\frac{19}{2}=-9.$$

Ponieważ $m$ może być tylko liczbą dodatnią, przeto $m=10$. W sztuce było o 10 łokci więcej, aniżeli kupiec zamówił.

Znajdziemy czwarty wyraz postępu geometrycznego malejącego nieskończonego. Określimy najpierw pierwszy wyraz postępu $(a_1)$:

$$a_1=\sqrt[3]{11\cdot390\cdot625}=225$$

$$\begin{array}{r|r}
 & 8 \\
3.2^2=12 & 33'90 \\
3.2^2.2= & 24 \\
3.2.2^2= & 24 \\
2^3= & 8 \\
 & 2648 \\
3.22^2=1452 & 7426\cdot25 \\
3.22^2.5= & 7260 \\
3.22.5^2= & 1650 \\
5^3= & 125 \\
 & 742625 \\
 & 0
\end{array}$$

Znajdziemy teraz wykładnik postępu ($q$):

$$S=\frac{a_1}{1-q}$$

(patrz alg. Feldbluma wzór 49-ty str. 299).

$$S=337{,}5,\quad a_1=225,$$

przeto $\quad 337{,}5=\dfrac{225}{1-q}$

czyli $\quad 337{,}5-337{,}5q=225,$

czyli $\quad 337{,}5q=112{,}5,$

skąd $\quad q=\dfrac{112{,}5}{337{,}5}=\dfrac{1}{3}.$

Strata w %, którą poniósł kupiec, jest czwartym wyrazem tego postępu, ponieważ $a_4=a_1.q^3$, więc $p=225.\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{225}{27}=\frac{25}{3}\%$.

Dowiemy się, ile było łokci w sztuce. Przypuszczamy, że w sztuce było $x$ łokci, kupiec zapłacił za $(x-10)$ łokci po 3 ruble za łokieć, więc zapłacił $3(x-10)$ rub. Znajdziemy $\frac{25}{3}\%$ od $3(x-10)$ — stratę, którą poniósł kupiec:

$$1\% \text{ od } 3(x-10) \text{ rub.}=\frac{1}{100} \text{ tej liczby}=\frac{3}{100}(x-10) \text{ rub.};$$

$$\frac{25}{3}\%=\left[\frac{3}{100}\cdot\frac{25}{3}(x-10)\text{ rub.}=\right]\frac{1}{4}(x-10)\text{ rub.}$$

Więc przy sprzedaży materji kupiec otrzymał

$$\left[3(x-10)\text{ rub.}-\frac{1}{4}(x-10)\text{ rub.}=\right]\frac{11}{4}(x-10)\text{ rub.}$$

Gdy sprzedawał materję po 2,5 rub., otrzymał za $x$ łokci $(2{,}5x)$ rub., przeto mamy równanie: $\frac{11}{4}(x-10)=2{,}5x$ czyli $11x-110=10x$, skąd $x=110$. W sztuce było 110 łokci.

---

43. Rozwiążemy układ równań

$$(x+2)(y-1{,}7)-(4^{-1}+y)(x+0{,}2)=1{,}35\ \ldots\ (\mathrm{I}).$$

$$\lg x+\lg(y-3)^{-1}=0\ \ldots\ (\mathrm{II}).$$

Rozwiążemy (II): $\quad \lg[x(y-3)^{-1}]=0\ \ldots\ (\mathrm{A}).$

Ponieważ $0=\lg 1$, więc równanie (A) ma postać:

$$\lg[x(y-3)^{-1}]=\lg 1;$$

z równości logarytmów wnosimy o równości liczb, więc

$$x(y-3)^{-1}=1 \quad \text{czyli} \quad \frac{x}{y-3}=1, \quad \text{czyli} \quad x=y-3 \;\ldots\; (\mathrm{III}).$$

Uprościmy równanie (I):

$$xy+2y-1{,}7x-3{,}4-\left(\frac{1}{4}+y\right)(x+0{,}2)=1{,}35 \quad \text{czyli}$$

$$xy+2y-1{,}7x-3{,}4-xy-0{,}25x-0{,}05-0{,}2y=1{,}35, \quad \text{czyli}$$
$$200y-170x-340-25x-5-20y=135, \quad \text{czyli}$$
$$180y-195x=480, \quad \text{czyli} \quad 12y-13x=32 \;\ldots\; (\mathrm{IV}).$$

Podstawimy w (IV) z (III) $x=y-3$:

$$12y-13(y-3)=32 \quad \text{czyli} \quad 12y-13y+39=32, \quad \text{skąd} \quad y=7.$$

Podstawimy $y=7$ w (III): $\qquad x=(7-3=)\,4.$

Określimy piąty wyraz postępu $\because 4 \ldots 7$. Ponieważ 7 jest 12 tym wyrazem tego postępu, więc na zasadzie wzoru (patrz alg. Feldbluma wzór 45-ty str. 291)

$$a_n=aq^{n-1}, \quad \text{lecz} \quad 7=4q^{11}, \quad \text{skąd} \quad q^{11}=\frac{7}{4} \quad \text{i} \quad q=\sqrt[11]{\frac{7}{4}}.$$

Więc piący wyraz postępu ($x$) będzie:

$$x=\left[aq^4=4\left(\sqrt[11]{\frac{7}{4}}\right)^4=4\sqrt[11]{\frac{7^4}{4^4}}=\sqrt[11]{\frac{7^4 . 4^{11}}{4^4}}=\sqrt[11]{7^4 . 4^7}\right]=$$

$=\sqrt[11]{2401 . 16384}$. Zlogarytmujemy obydwie strony równania:

$$\lg x=\frac{1}{11}\lg 2401+\frac{1}{11}\lg 16384=\frac{1}{11}.3{,}38039+\frac{1}{11}.4{,}21442=$$
$$=0{,}30731+0,\;38313=0{,}69044, \quad \text{skąd} \quad x=4{,}9027.$$

---

44. Znajdziemy $\sqrt[5]{161051}$. Niech $x=\sqrt[5]{161051}$. Logarytmując, otrzymujemy:

$$\lg x=\frac{1}{5}\lg 161051=\frac{1}{5}.5{,}20697=1{,}04139; \quad \text{skąd} \quad x=11.$$

Rozwiążemy równanie

$$x-\frac{12}{2x+a-ax-2}=\frac{6ax^{-1}}{a-2}-\frac{3ax^{-2}}{1-\frac{1}{2}a}.\frac{1}{1-\frac{1}{x}} \;\ldots\; (\mathrm{I}).$$

Uprościmy oddzielne wyrazy (I)-go: 1) $\dfrac{6ax^{-1}}{a-2}=\dfrac{6a}{(a-2)x}$.

2) $$\frac{3ax^{-2}}{1-\frac{1}{2}a}.\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{6ax^{-2}}{2-a}.\frac{x}{x-1}=\frac{6ax^{-1}}{(x-1)(2-a)}=\frac{6a}{x(2-a)(x-1)}.$$

3) $\frac{12}{2x+a-ax-2}=\frac{12}{2x-2-ax-a}=\frac{12}{2(x-1)-a(x-1)}=$

$=\frac{12}{(x-1)(2-a)}$. Więc możemy przekształcić (I):

$$x-\frac{12}{(x-1)(2-a)}=\frac{6a}{x(a-2)}-\frac{6a}{x(2-a)(x-1)} \quad \text{czyli}$$

$$x+\frac{12}{(x-1)(a-2)}=\frac{6a}{(a-2)x}+\frac{6a}{x(a-2)(x-1)}, \quad \text{czyli}$$

$$x^2(a-2)(x-1)+12x=6a(x-1)+6a, \quad \text{czyli}$$

$$x^2(a-2)(x-1)+12x=6ax-6a+6a, \quad \text{czyli}$$

$$x^2(a-2)(x-1)+12x-6ax=0, \quad \text{czyli}$$

$$x^2(a-2)(x-1)-6x(a-2)=0, \quad \text{czyli}$$

$$x^2(x-1)-6x=0, \quad \text{czyli} \quad x[x(x-1)-6]=0, \quad \text{czyli}$$

$$x^2(x^2-x-6)=0;$$

jeżeli iloczyn równa się 0, więc choć jeden z jego czynników $=0$, przeto albo $x=0$, albo $x^2-x-6=0$; skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 31-szy str. 185)

$$x_1=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm 5}{2};$$

$$x_2=\left(\frac{1+5}{2}=\frac{6}{2}=\right)3, \quad x_3=\left(\frac{1-5}{2}=-\frac{4}{2}=\right)-2.$$

Większy pierwiastek równania $=3$, mniejszy $=-2$.

Określimy drugi wyraz postępu: $\div\div a,\ \frac{2}{3}a,\ \frac{4}{9}a \ldots$ ad inf.). Podług wzoru (patrz alg. Feldbluma wzór 49-ty str. 299)

$$S=\frac{a_1}{1-q} \quad \text{mamy} \quad S=\frac{a_1}{1-\frac{2}{3}}=3a_1$$

Pierwszy wyraz postępu ($a_1$) jest o 1 mniejszy od sumy wszystkich jego wyrazów, więc $3a_1-a_1=1$, skąd $a_1=\frac{1}{2}$.

Wtedy 2-gi wyraz $=\left(\frac{2}{3}a_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\right)\frac{1}{3}$.

Rozłożymy 11 na dwie części. Niech większa część liczby 11 będzie $x$, więc mniejsza $=(11-x)$. Iloraz od dzielenia większej części przez 3 równa się $\frac{x}{3}$, iloraz od dzielenia mniejszej części przez $-2=\frac{11-x}{-2}=\frac{x-11}{2}$. Suma tych ilorazów zgodnie z warunkami zadania równa się $\frac{1}{3}$, przeto układamy równanie:

$\frac{x}{3}+\frac{x-11}{2}=\frac{1}{3}$ czyli $2x+3x-33=2$, skąd $5x=35$, więc $x=7$.

Większa część liczby 11 jest 7, mniejsza $=(11-7=)4$.

---

45. Rozwiążemy równanie

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}-\sqrt{x}\,.\,0{,}037037\ldots\right)x}=\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sqrt{x}:$$

zauważywszy, że $0{,}(037)=\frac{37}{999}=\frac{1}{27}$, przedstawimy dane równanie w postaci

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{27}\sqrt{x}\right)x}=\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sqrt{x},$$

podniesiemy obydwie strony równania do sześcianu:

$$\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{27}\sqrt{x}\right)x=3\sqrt{3}-3\sqrt{x}+\frac{1}{3}x\sqrt{3}-\frac{1}{27}x\sqrt{x} \quad \text{czyli}$$

$$\frac{1}{3}x\sqrt{3}-\frac{1}{27}x\sqrt{x}=3\sqrt{3}-3\sqrt{x}+\frac{1}{3}x\sqrt{3}-\frac{1}{27}\sqrt{x}, \quad \text{czyli}$$

$0=3\sqrt{3}-3\sqrt{x}$; $3\sqrt{x}=3\sqrt{3}$, więc $\sqrt{x}=\sqrt{3}$, skąd $x=3$.

Wyliczymy powierzchnię trójkąta. Niech skrajnemi wyrazami postępu $\div\!\div\, a, (1{,}01a), \ldots l$, będą $a$ i $l$, liczba wyrazów $n$, wtedy

$$l=a(1{,}01)^{n-1} \quad \text{czyli} \quad \frac{l}{a}=(0{,}01)^{n-1}\ \ldots\ (1);$$

zgodnie z warunkami zadania $\frac{l}{a}=1{,}6944713$, więc możemy przekształcić równanie (1) $\quad 1{,}6944713=(1{,}01)^{n-1}$;

zlogarytmujemy obydwie strony otrzymanego równania:

$$(n-1)\lg 1{,}01=\lg 1{,}6944713, \quad \text{skąd}$$

$$n-1=\left(\frac{\lg 1{,}6944713}{\lg 1{,}01}=\frac{0{,}229032}{0{,}00432}=\frac{229032}{4320}=\right)53, \quad \text{więc} \quad n=54.$$

Powierzchnia trójkąta $=54$.

Określimy przyprostokątne trójkąta. Niech długość większej przyprostokątnej $=x$, mniejszej $=y$; zgodnie z warunkami zadania różnica przyprostokątnych $=3$, więc $x-y=3\ \ldots\ldots$ (II).

Powierzchnia trójkąta $=\left(\frac{1}{2}xy\right)$ i zgodnie z warunkami zadania równa się 54, więc $\frac{1}{2}xy=54$, skąd $xy=108\ \ldots$ (III).

Rozwiążemy układ równań (II) i (III). Z (II) mamy $x=y+3$ . . . (IV), podstawimy wartość $x$ w (III):

$$(y+3)y=108 \quad \text{czyli} \quad y^2+3y-108=0;$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 32-gi str. 186)

$$y=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+108}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{441}{4}}=-\frac{3}{2}\pm\frac{21}{2};$$

$$y_1=\left(-\frac{3}{2}+\frac{21}{2}=\right)9, \quad \left(y_2=-\frac{3}{2}-\frac{21}{2}=-12,\right.$$

lecz nie nadaje się jako ujemne).

Podstawimy $y=9$ w równanie (IV): $x=(9+3=)12$. Więc jedna przyprostokątna $=9$, druga $=12$.

---

46. Rozwiążemy równanie $392{,}9885=\sqrt[\frac{x}{12}]{3125}\,.\sqrt[0{,}05x]{485544{,}9}$. Zlogarytmujemy obydwie strony danego równania:

$$\lg 392{,}9885=\frac{12}{x}\lg 3125+\frac{100}{5x}\lg 485544{,}9 \quad \text{czyli}$$

$$2{,}59428=\frac{12}{x}\,.\,3{,}49485+\frac{20}{x}\,.\,5{,}68623, \quad \text{czyli}$$

$$x\,.\,2{,}59438=(41{,}9382+113{,}7246=)155{,}6628, \quad \text{skąd}$$

$x=\dfrac{155{,}6628}{2{,}59438}=60$. Znajdziemy całkowite i dodatnie czynniki 60-ciu. Niech większy czynnik będzie $x$, więc mniejszy $=\dfrac{60}{x}$.

Suma kwadratów potrojonego mniejszego czynnika i podwojonego większego równa się zgodnie z warunkami zadania 801, przeto układamy równanie

$$\left(3\,.\,\frac{60}{x}\right)^2+(2x)^2=801 \quad \text{czyli} \quad \frac{32400}{x^2}+4x^2=801, \quad \text{czyli}$$

$$32400+4x^4=801x^2 \quad \text{czyli} \quad 4x^4-801x^2+32400=0, \quad \text{skąd}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{801\pm\sqrt{641606-518400}}{8}}=\pm\sqrt{\frac{801+351}{8}};$$

$$x_1=\left(+\sqrt{\frac{801+351}{8}}=\sqrt{\frac{1152}{8}}=\sqrt{\frac{576}{4}}=\frac{24}{2}=\right)12;$$

$$x_2=\left(-\sqrt{\frac{801+351}{8}}=\right)-12; \quad x_3=\left(+\sqrt{\frac{801-351}{8}}=\right.$$

$$\left.=\sqrt{\frac{450}{8}}=\sqrt{\frac{225}{4}}=\right)\frac{15}{2}; \quad x_4=\left(-\sqrt{\frac{801-351}{8}}=\right)-\frac{15}{2}.$$

Z czterech otrzymanych wartości $x$, nadaje się tylko $x_1=12$, albowiem tylko ta wartość jest dodatnia i całkowita. Więc drugi czynnik $=\left(\frac{60}{12}=\right)5$. Znajdziemy sumę wszystkich trzydziestu wyrazów postępu. Postęp jest malejący, a dwa jego obok siebie stojące wyrazy są 12 i 5, więc różnica postępu $d=(5-12=)-7$. Postęp składa się z 30-tu wyrazów, 5 i 12 są wyrazami środkowemi, więc 12 jest 15-tym, a 5 16-tym wyrazem tego postępu. We wzorze $a_n=a_1+(n-1)d$ (patrz alg. Feldbluma wzór 41-szy str. 281) $a_n=12$, $d=-7$, $n=15$, przeto $12=a-7\,.\,14$, skąd $a=110$. Suma wyrazów postępu (patrz alg. Feldbluma wzór 43-ci str. 284) $Sn=\frac{1}{2}n[2a_1+(n-1)d]$; podstawimy zamiast $a_1$, $d$ i $n$ ich wartości:

$$Sn=\frac{30(220-7\,.\,29)}{2}=15(220-7\,.\,29)=17\,.\,15=255.$$

Suma wszystkich 30-tu wyrazów postępu $=255$.

---

47. Rozwiążemy równania $\frac{\lg x^4-1}{8}+\frac{\lg y^3-2}{4}=0{,}875\ .\ .\ (\mathrm{I})$. $\frac{3\lg x+1}{6}-\frac{7\lg y+2}{4}=-3{,}833\ .\ .\ .\ (\mathrm{II})$. Z równania (I) mamy:

$$\frac{4\lg x-1}{8}+\frac{3\lg y-2}{4}=0{,}875 \quad \text{czyli} \quad 4\lg x-1+6\lg y-4=7,$$

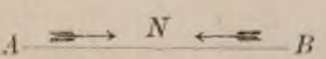
czyli $4\lg x+6\lg y=12$, czyli $2\lg x+3\lg y=6\ .\ .\ .\ (\mathrm{III})$. Uprościmy równanie (II) $\frac{3\lg x+1}{6}-\frac{7\lg y+2}{4}=-\frac{23}{6}$ czyli $6\lg x+2-21\lg y-6=-46$, czyli $2\lg x-7\lg y=-14\ .\ .\ .\ (\mathrm{IV})$. Odejmiemy stronami (IV) od (III):

$$\begin{array}{r r|}
2\lg x+3\lg y= & 6\\
\underline{\pm 2\lg x \mp 7\lg y=} & \underline{\mp 14}\\
10\lg y= & 20
\end{array}$$

skąd $\lg y=2$ i $y=100$. Podstawimy w (III) $\lg y=2$:

$2\lg x+6=6$ czyli $2\lg x=0$, czyli $\lg x=0$, skąd $x=1$.

Określimy odległość $AN$. Przypuszczamy, że przestrzeń $AN$ zawiera $x$ stóp, $BN$ — $y$ stóp.




Jedno ciało przeszło odległość $BN=y$ stóp w ciągu (33 min. 20 sek. $=$) 2000 sek., więc każdą stopę przechodziło w $\frac{2000}{y}$ sekund. Ciało, które wyszło z $A$, zużywa na przebycie jednej stopy o 1 sek. mniej aniżeli pierwsze ciało, więc przechodzi jedną stopę w $\left(\frac{2000}{y}-1\right)$ sek. Odległość $AN=x$ stóp to ciało przejdzie w $\left(\frac{2000}{y}-1\right)x$ sek. Otrzymana liczba sekund równa się zgodnie z warunkami zadania (33 min. 20 sek.=) 2000 sek., przeto mamy równanie $\left(\frac{2000}{y}-1\right)x=2000$ czyli $\frac{2000x}{y}-x=2000$, czyli $2000x-xy-2000y$ . . . (I). Odległość $AN$ zgodnie z warunkami zadania jest o 100 stóp większa od $BN$, więc układamy równanie z $x$ i $y$: $x-y=100$ czyli $y=x-100$ . . . (II).

Rozwiążemy układ równań (I) i (II). Podstawimy $y=x-100$ w (I): $2000x-x(x-100)=2000(x-100)$ czyli $2000x-x^2+100x=2000x-200000$, czyli $x^2-100x-200000=0$, skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 32-gi str. 186) $x=50\pm\sqrt{2500+200000}=50\pm\sqrt{202500}$; $x_1=(50+450=)500$; $x_2=-400$, lecz to rozwiązanie nie nadaje się, (gdyż odległość $AN$ nie może być ujemną). Więc odległość $AN=500$ stóp.

---

48. Określimy skrajne wyrazy postępu różnicowego, w którym suma wszystkich 14-tu wyrazów równa się 518, a różnica postępu 2. Na zasadzie wzoru 43-go (patrz alg. Feldbluma str. 284) mamy: $518=\frac{14[2a_1+2(14-1)]}{2}$ czyli $518=7(2a+26)$, czyli $74=2a+26$, czyli $2a=48$, skąd $a=24$.

Podług wzoru $a_n=a_1+(n-1)d$ (patrz alg. Feldbluma wzór 41-szy str. 281) mamy: $a_n=(24+(14-1)2=24+26=)50$.

Rozwiążemy równanie $(x\,.\,796{,}1731)^{\frac{1}{5{,}2232268}}=10$: zlogarytmujemy je: $\frac{1}{5{,}2232268}\lg(x\,.\,796{,}1731)=\lg 10$ czyli

$\frac{1}{5{,}2232268}(\lg x+\lg 796{,}1731)=1$, czyli

$\lg x+\lg 796{,}1731=5{,}2232268$, czyli $\lg x+2{,}90101=5{,}2232268$, czyli $\lg x=2{,}3222168$; skąd $x=210$. Podzielimy skrajne wyrazy postępu (24 i 50) na części. Niech mniejsza część pierwszego wyrazu $=x$, wtedy większa część $=24-x$. Przypuszczamy, że większa część ostatniego wyrazu $=y$, wtedy mniejsza część $=50-y$. Zgodnie z warunkami zadania stosunek mniejszej części pierwszego wyrazu do większej części ostatniego $=\frac{2}{7}$, przeto mamy równanie: $x:y=2:7$ (I). Iloczyn pozostałych dwóch części $=210$, więc mamy równanie: $(24-x)(50-y)=210$ . . (II).

Rozwiążemy (I) i (II). Z równania (I) mamy $2y=7x$, skąd $y=\frac{7}{2}x$; równanie (II) przedstawimy w postaci:

$$1200-50x-24y+xy=210 \quad \text{czyli} \quad xy-50x-24y+990=0.$$

Podstawimy w ostatnie równanie $y=\frac{7}{2}x$:

$$\frac{7}{2}x^2-50x-84x+990=0 \quad \text{czyli} \quad \frac{7}{2}x^2-134x+990=0, \quad \text{czyli}$$

$$7x^2-268x+1980=0; \text{ skąd}$$

$$x=\frac{134\pm\sqrt{17956-13860}}{7}=\frac{134\pm\sqrt{4096}}{7}=\frac{134\pm 64}{7};$$

$$x_1=\left(\frac{134+64}{7}=\frac{198}{7}=\right)28^2/_7; \quad x_2=\left(\frac{134-64}{7}=\frac{70}{7}=\right)10.$$

$x$ jest częścią liczby 24, przeto $x<24$, więc pierwsza wartość $x (x=28^2/_7)$ nie nadaje się. Podstawimy $x=10$ w równanie $y=\frac{7}{2}x$: $y=\frac{7}{2}.10=35$. Mniejsza część pierwszego wyrazu $=10$, więc większa część $=(24-10=)14$; większa część ostatniego wyrazu $=35$, więc mniejsza $=(50-35=)15$.

---

49. Rozwiążemy równanie $21,8-\sqrt{x+16,6}=2x$: $21,8-2x-\sqrt{x+16,6}=0$. Niech $\sqrt{x+16,6}=y$ . . . (I), wtedy $x+16,6=y^2$, $x=y^2-16,6$; $2x=2y^2-33,2$ . . . (II). Podstawimy $y=\sqrt{x+16,6}$, $2x=2y^2-33,2$ z (I) i (II) w nasze równanie: $21,8-2y^2+33,2-y=0$; czyli $2y^2+y-55=0$, skąd

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{1+440}}{4}=\frac{-1\pm 21}{4}=5 \quad \text{albo} \quad =-\frac{11}{2}.$$

Jeżeli $y=5$, to $\sqrt{x+16,6}=5$; podniesiemy obydwie strony równania do kwadratu: $x+16,6=25$; $x_1=8,4$.

Jeżeli $y=-\frac{11}{2}$, to $\sqrt{x+16,6}=-\frac{11}{2}$,

podniesiemy obydwie strony równania do kwadratu: $x+16,6=30,25$, $x_2=13,65$, druga wartość $x$ nie czyni zadość równaniu, nadaje się przeto tylko $x=8,4$. Określimy wyraz rozwinięcia dwumianu $\left(\sqrt[6]{0,05a^{-1/_{5}}}+\sqrt[5]{\frac{5}{11}a}\right)^{11}$. Każdy wyraz rozwinięcia dwumianu Newtona wyraża się wzorem (patrz alg. Feldbluma wzór 80-ty str. 382) $U_{k+1}=C_n^k a^k x^{n-k}$. W naszem zadaniu

$$U_{k+1}=C_{11}^k\left(\sqrt[5]{\frac{5}{11}a}\right)^k\left(\sqrt[6]{0,05^{-1}}\right)^{11-k}=$$

$$=C_{11}^k\left(\sqrt[5]{\frac{5}{11}}\right)^k\left(\sqrt[6]{0,05}\right)^{11-k}a^k a^{\frac{-5(11-k)}{6}}.$$

Zgodnie z warunkami zadania szukany wyraz nie zawiera $a$, to znaczy, że zawiera $a^0$, przeto

$$a^k a^{\frac{-5(11-k)}{6}} = a^0; \quad a^{k+\frac{-5(11-k)}{6}} = a^0; \quad \text{skąd}$$

$$k + \frac{-5(11-k)}{6} = 0 \quad \text{czyli} \quad 6k - 55 + 5k = 0; \quad 11k = 55, \quad k = 5.$$

Szukany wyraz jest $C_{11}^k \left(\sqrt[5]{\frac{5}{11}}\right)^5 \left(\sqrt[6]{0,05}\right)^6 . a^5 a^{\frac{-5.6}{6}} =$

$$= \frac{11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5} . \frac{5}{11} . 0,05 . a^5 . a^{-5} = 10,5 \frac{a^5}{a^5} = 10,5.$$

Przypuszczamy, że próba stopu jest $x$, to znaczy, że na jeden funt stopu przypada $x$ zołotników srebra gatunkowego. Stop waży (5 p. 10 funt. $=$) 210 funt., więc zawiera $210x$ zołotników srebra gatunkowego, miedzi zaś $(210 . 96 - 210x) = 210(96 - x)$ zołotników; ciężar względny srebra $= 10,5$, miedzi $= 8,4$, więc srebro przy zanurzaniu do wody traci $\frac{210}{10,5}x$ zoł., miedź traci $\frac{210(96-x)}{8,4}$ zoł. Cały stop traci $\frac{210}{10,5}x + \frac{210(96-x)}{8,4}$, co zgodnie z warunkami zadania równa się $21^1/_4$ f. $= 2040$ zoł., przeto: $\frac{210}{10,5}x + \frac{210(96-x)}{8,4} = 2040$ czyli $20x + 25(96 - x) = 2040$, czyli $20x + 2400 - 25x = 2040$, skąd $5x = 360$, $x = 72$.

---

50. Określimy liczbę elementów, z których można utworzyć 253 kombinacje po dwa. Przypuszczamy, że elementów było $m$, więc (patrz alg. Feldbluma wzór 71-szy str. 373)

$$C_m^2 = 253 \quad \text{czyli} \quad \frac{m(m-1)}{1.2} = 253, \quad \text{skąd } m^2 - m - 506 = 0.$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 32-gi str. 186)

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 506} = \frac{1 \pm 45}{2}, \quad x_1 = 23,$$

($x_2 = -22$, lecz ta wartość $x$ jako ujemna nie nadaje się). Liczba elementów $= 23$. Określimy sumę 5-ciu całkowitych i dodatnich liczb, przedstawiających postęp różnicowy. Przypuszczamy, że $a_1$ — pierwszy wyraz postępu, $d$ — różnica postępu. Zgodnie z warunkami zadania $a_2 + a_5 = 28$ czyli $a + d + a + 4d = 28$, czyli $2a + 5d = 28$ . . . (I). Zgodnie z warunkami zadania $a_2 . a_4 = 128$ czyli $(a + d)(a + 3d) = 12\,8$ . . . . (II). Z równania (I) mamy $a = \frac{28 - 5d}{2}$. Podstawimy wartość $a$ z (I) w (II):

$$\left(\frac{28-5d}{2} + d\right)\left(\frac{28-5d}{2} + 3d\right) = 128 \quad \text{czyli} \quad \frac{28-3d}{2} . \frac{28+d}{2} = 128,$$

$3d^2 + 56d - 272 = 0$, skąd (patrz alg. Fsldbluma wzór 32-gi str. 186)

$$d=\frac{-28\pm\sqrt{784+816}}{3}=\frac{-28\pm40}{3};\quad d=4,$$

$(d_1=-\frac{68}{3}$, lecz do zadania nadaje się tylko $d$ dodatnie).

Określimy $a$ z (I): $2a+20=28$, skąd $2a=(28-20)8$, skąd $a=4$. Na zasadzie wzoru (patrz alg. Feldbluma wzór 43 str. 284)

$$Sn=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}\quad\text{mamy}\quad Sn=\frac{(2\,.\,4+4\,.\,4)5}{2}=60.$$

Dowiemy się, kiedy się ożenił. Przypuszczamy, że ilorazy od dzielenia liczby jego lat przez 8 i 5 są $x$ i $y$. Zgodnie z warunkami zadania możemy ułożyć równanie: $8x+1=5y+3$ czyli $8x-5y=2$. Rozwiążemy otrzymane równanie nieoznaczone:

$$y=\frac{8x-2}{5}=2x-\frac{2x+2}{5}=2x-\frac{2(x+1)}{5};\quad\text{niech}\quad\frac{x+1}{5}=t,$$

więc $$y=2x-\frac{2(x+1)}{5}=2x-2t\ \ldots\ \text{(III)}.$$

Z równania $\frac{x+1}{5}=t$ mamy $x=5t-1$. Podstawimy w (III) $x=5t-1$: $y=10t-2t-2$, skąd $y=8t-2$. $x$ i $y$ dodatnie, więc $5t-1>0$ i $8t-2>0$; $t>\frac{1}{4}$ i $t>\frac{1}{5}$, wtedy $t=1, 2, 3\ldots$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Jeżeli | $t=1$, | to | $x=4$ | Przeto liczba lat $=8\,.\,4+1=33$ lata. Ta jedyna wartość czyni zadość warunkom zadania, gdyż jest większa od 23 i mniejsza od 60. |
| " | $t=2$, | — | $x=9$ | |
| " | $t=3$, | — | $x=14$. | |

---

51. Znajdziemy spółczynnik siódmego wyrazu rozwinięcia $(a+b)^9$. Na zasadzie wzoru 80-go (patrz alg. Feldbluma str. 382)

$$U_7=C_9^6b^6a^3\quad\text{czyli}\quad C_9^6=C_9^3=\frac{9\,.\,8\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3}=84\ \ldots\ \text{(I)},$$

więc spółczynnik siódmego wyrazu rozwinięcia danego dwumianu równa się 84. Określimy trzy szukane postępy ilorazowe. Niech pierwszym wyrazem i wykładnikiem pierwszego postępu będą $a$ i $q$, wtedy pierwszy postęp będzie $\dot{\div}\, a, aq, aq^2\ \ldots$ (2).

Zgodnie z warunkami zadania pierwsze wyrazy trzech szukanych postępów tworzą postęg geometryczny o wykładniku 2, więc pierwszymi wyrazami drugiego i trzeciego postępu będą $2a$ i $4a$; wykładniki zaś tych trzech szukanych postępów tworzą postęp różnicowy, którego różnica równa się 1; ponieważ wykładnik w pierwszym postępie jest $q$, przeto wykładnikami w drugim i trzecim postępie są $(q+1)$ i $q(+2)$. Pierwszy wyraz i wykładnik w drugim postępie geometrycznym są $2a$ i $(q+1)$, więc drugi postęp jest: $\dot{\div}\, 2a, 2a(q+1), 2a(q+2)^2$ . . (3). Pierwszy wyraz i wykładnik trzeciego postępu geometrycznego są $4a$ i $(q+2)$, przeto postęp ten jest: $\div\!\div 4a,\ 4a(q+2),\ 4a(q+2)^2 \ldots (4)$.

Suma drugich wyrazów otrzymanych postępów równa się zgodnie z warunkami zadania 24, przeto (patrz (2), (3), (4))

$$aq+2a(q+1)+4a(q+2)=24, \quad \text{czyli} \quad aq+2aq+2a+4aq+8a=24,$$
$$\text{czyli} \quad 7aq+10a=24 \ldots (5).$$

Ponieważ suma trzech pierwszych wyrazów trzeciego postępu (patrz (1)) równa się 84, przeto (patrz (4) i (1))

$$4a+4a(q+2)+4a(q+2)^2=84 \quad \text{czyli}$$
$$4a+4aq+8a+4aq^2+16aq+16a=84, \quad \text{czyli}$$
$$28a+20aq+4aq^2=84, \quad \text{czyli} \quad 7a+5aq+aq^2=21 \ldots (6).$$

Rozwiążemy układ równań (5) i (6). Wyniesiemy z obydwu równań $a$ za nawias, potem podzielimy (6) przez (5):

$$7aq+10a=24, \quad a(7q+10)=24,$$
$$7a+5aq+aq^2=21, \quad a(7+5q+q^2)=21,$$
$$\frac{a(7+5q+q^2)}{a(7q+10)}=\frac{21}{24} \quad \text{czyli} \quad \frac{7+5q+q^2}{7q+10}=\frac{7}{8}, \quad \text{skąd}$$
$$56+40q+8q^2-49q-70=0, \quad \text{czyli} \quad 8q^2-9q-14=0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 31-szy str. 185)

$$q=\frac{9\pm\sqrt{81+448}}{16}=\frac{9\pm\sqrt{529}}{16}=\frac{9\pm23}{16}; \quad q_1=\frac{9+23}{16}=2,$$
$$q_2=\frac{9-23}{16}=-\frac{14}{16}=-\frac{7}{8}.$$ Określimy $a$ z (5):

$$a=\frac{24}{7q+10}=\frac{24}{7\,.\,2+10}=\frac{24}{24}=1,$$ gdy zaś weźmiemy $q=-\frac{7}{8}$, wtedy

$$a=\frac{24}{7\,.\,-\frac{7}{8}+10}=\frac{24}{-\frac{49}{8}+10}=-\frac{192}{31}.$$

Jeżeli weźmiemy $a=1$, $q=2$, postęp pierwszy będzie (patrz (2)): $\div\!\div 1\,.\,2\,.\,4\,.\,8 \ldots$, drugi (patrz (3)) $\div\!\div 2, 6, 18, 54 \ldots$, trzeci (patrz (4)): $\div\!\div 4\,.\,16\,.\,64\,.\,256 \ldots$.

Gdy zaś weźmiemy $a=-\frac{192}{31}$, $q=-\frac{7}{8}$.

postęp pierwszy będzie $\frac{192}{31}$, $-\frac{168}{31}$, $\frac{147}{31} \ldots$, drugi

$\frac{384}{31}$, $\frac{48}{31}$, $\frac{6}{31} \ldots$, trzeci $\frac{768}{31}$, $\frac{864}{31}$, $\frac{972}{31} \ldots$.

52. Określimy największy pierwiastek równania

$$3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0:$$

$$3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0 \quad \text{czyli} \quad 3(x^3 + 1) - 7x(x + 1) = 0,$$
$$3(x + 1)(x^2 - x + 1) - 7x(x + 1) = 0, \quad \text{czyli}$$
$$(x + 1)(3x^2 - 3x + 3 - 7x) = 0, \quad (x + 1)(3x^2 - 10x + 3) = 0;$$
$$(x + 1) = 0; \quad x_1 = -1; \quad 3x^2 - 10x + 3 = 0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 31-szy str. 185)

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6}; \quad x_1 = \frac{18}{6} = 3; \quad x_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Więc największy pierwiastek równania $= 3$, przeto powiększony ośm razy ten pierwiastek jest: $z = 8 \,.\, 3 = 24 \ldots \ldots (1)$ czyli iloczyn elementów ułamka równa się 24.

Niech licznik szukanego ułamka będzie $y$, a mianownik $x$, wtedy (patrz (1)) $x \,.\, y = 24 \ldots (2)$.

Określimy sumę pierwszych 20-tu wyrazów postępu różnicowego. Przypuszczamy, że pierwszy wyraz szukanego postępu jest $a$, różnica $d$. Ponieważ $a$ jest większe od $d$ o $\frac{1}{48}$ i $2^2/_3$ razy, przeto układamy równania: $a = d + \frac{1}{48}$, $a = 2^2/_3 d \ldots (3)$.

Jeżeli lewe strony równań są równe, to prawe strony też są równe, przeto $d + \frac{1}{48} = 2^2/_3 d$ czyli $48d + 1 = 128d$, skąd $80d = 1$, więc $d = \frac{1}{80}$; na zasadzie (3) $a = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{80} = \frac{1}{30}$.

Niech we wzorze 43-im (patrz alg. Feldbluma str. 284):

$$a_1 = \frac{1}{30}, \quad d = \frac{1}{80}, \quad n = 20, \quad \text{wtedy}$$

$$S_{20} = \frac{\left[2 \cdot \frac{1}{30} + \frac{1}{80}(20 - 1)\right] . 20}{2} = \left(\frac{2}{30} + \frac{19}{80}\right) . 10 = \frac{(16 + 57) . 10}{240} = \frac{73}{24}.$$

Szukany ułamek jest $\frac{y}{x}$, odwrócony $= \frac{x}{y}$, suma tych ułamków $= \frac{73}{24}$, przeto piszemy: $\quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{73}{24} \ldots (4)$.

Pomnożywszy równanie (2) przez (4), otrzymamy:

$$\frac{x^2y}{y} + \frac{y^2x}{x} = 73, \quad \text{czyli} \quad x^2 + y^2 = 73 \ldots (5).$$

Rozwiążemy układ równań (5) i (2). Pomnożywszy (2) przez 2, dodamy je stronami do (5), potem odejmiemy je od (5) stronami:

$$\begin{array}{ll|ll}
x^2+y^2 = 73 & & x^2+y^2 = 73 & \\
2xy = 48 & & \pm 2xy = \pm 48 & \\
\hline
x^2+2xy+y^2=121 & \text{czyli} & x^2-2xy+y^2= 25 & \text{czyli} \\
(x+y)^2=11^2, & \text{skąd} & (x-y)^2=5^2, & \text{skąd} \\
x+y=11 \ldots (6). & & x-y=5 \ldots (7). &
\end{array}$$

Z układu (6) i (7) mamy $x=8$; $y=3$. Więc szukany ułamek jest $\frac{3}{8}$.

---

53. Znajdziemy zasadę takiego układu logarytmów, przy którym $\lg\sqrt[4]{4}=0,1(6)$. Niech zasada będzie $x$, wtedy

$$\lg_x\sqrt[4]{4}=0,1(6);\quad \lg_x\sqrt[4]{4}=\frac{1}{6},\quad x^{1/6}=\sqrt[4]{4},$$

podniesiemy obydwie strony ostatniego równania do 4-tej potęgi:

$$x^{4/6}=4;\quad x^{2/3}=4 \quad \text{czyli} \quad (\sqrt[3]{x})^2=2^2, \quad \text{skąd} \quad \sqrt[3]{x}=2,$$

podniesiemy ostatnie równanie do sześcianu: $x=8 \ldots . (1)$, więc zasada równa się 8.

Określimy liczbę, która zamieni się na 9, jeżeli do niej dodamy 20% jej samej. Przypuszczamy, że liczba ta jest $y$. Procent jest $\frac{1}{100}$ jakiejkolwiek wielkości, więc 20% równa się $\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$ jakiejkolwiek wielkości. Ponieważ szukana liczba jest $y$, przeto 20% jej równa się $\frac{1}{5}y$. Zgodnie z warunkami zadania układamy równanie: $y+\frac{1}{5}y=9$ czyli $5y+y=45$, skąd

$$y=\frac{45}{6}=\frac{15}{2}=7^1/_2 \ldots (2).$$

Określimy 4 liczby, z których pierwsze trzy tworzą postęp ilorazowy rosnący, a trzy ostatnie postęp różnicowy. Przypuszczamy, że trzy pierwsze liczby, ponieważ tworzą postęp ilorazowy, są: $\because a, aq, aq^2 \ldots (3)$, więc trzy następne liczby, przedstawiające postęp różnicowy, są $\div aq, aq^2, 2aq^2-aq \ldots . (4)$*
*($2aq^2-aq$ otrzymujemy, gdy do $aq^2$ dodajemy różnicę tego postępu, która jest $aq^2-aq$ czyli $aq^2+aq^2-aq=2aq^2-aq$). Ponieważ suma pierwszego i czwartego wyrazu równa się (patrz (1)) 8, przeto (patrz (3), (4) i (1)) mamy: $a+2aq^2-aq=8 \ldots . (5)$. Suma drugiego i trzeciego wyrazu równa się (patrz (2)) $7^1/_2$, przeto (patrz (3), (4) i (2)) $aq+aq^2=7^1/_2$; $2aq+2aq^2=15 \ldots (6)$.

Rozwiążemy układ równań (5) i (6). Określimy z (6) $a$ i podstawimy jego wartość w (5):

$$a(2q+2q^2)=15,\quad a=\frac{15}{2q+2q^2}\ \ldots\ (7)$$

patrz (5) $\dfrac{15}{2q+2q^2}+\dfrac{30q^2}{2q+2q^2}-\dfrac{15q}{2q+2q^2}=8$ czyli

$15+30q^2-15q=16q+16q^2$, czyli $14q^2-31q+15=0$, skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 31-szy str. 185)

$$q=\frac{31\pm\sqrt{961-840}}{2\,.\,14}=\frac{31\pm\sqrt{121}}{28}=\frac{31\pm 11}{28};\quad q_1=\frac{42}{28}=\frac{3}{2};$$

$q_2=\dfrac{20}{28}=\dfrac{5}{7}$. Weźmiemy $q_1$, ponieważ $q_2$ nie odpowiada warunkom zadania. Wtedy (patrz (7)) $a=\dfrac{15}{3\,.\,\frac{3}{2}+2\,.\,\frac{9}{4}}=\dfrac{15}{3+4^1/_2}=\dfrac{15}{7^1/_2}=2;$

więc pierwsza liczba $=2$; druga liczba $aq=2\,.\,\dfrac{3}{2}=3$; trzecia $aq^2=2\,.\,\dfrac{9}{4}=4^1/_2$; czwarta $2aq^2-aq=2\,.\,2\,.\,\dfrac{9}{4}-2\,.\,\dfrac{3}{2}=9-3=6$.

---

54. Określimy licznik i mianownik 4-go przybliżenia ułamka ciągłego, w który się zamieni $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{x};\quad x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1=2+\frac{1}{x_1};$$

$$\frac{1}{x_1}=\sqrt{2}-1;\quad x_1=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1=2+\frac{1}{x_2};$$

otrzymamy ułamek ciągły: $\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}$

| | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| Licznik | 1 | 3 | 3.2+1=7 | 7.2+3=17 |
| Mian. | 1 | 2 | 2.2+1=5 | 5.2+2=12 |

więc $a=17$, $b=12$ . . (1).

Znajdziemy wyraz rozwinięcia dwumianu $\left(\sqrt{z}-\sqrt[3]{z^{-1}}\right)^{10}$, który nie zależy od $z$. Przypuszczamy, że tym wyrazem jest $U_{k+1}$-ty wyraz, lecz (patrz alg. Feldbluma wzór 80-ty str. 382)

$$U_{k+1}=C_{10}^k\left(\sqrt[3]{z^{-1}}\right)^k\left(\sqrt{z}\right)^{10-k}=C_{10}^k z^{-\frac{k}{3}}z^{\frac{10-k}{2}}=C_{10}^k z^{\frac{-2k+30-3k}{6}}=$$

$=C_{10}^k z^{\frac{30-5k}{6}}$. Wyraz nie zależy od $z$, t. j. zawiera $z^0$, przeto $z^{\frac{30-5k}{6}}=z^0$. Jeżeli potęgi jednakowych liczb są równe, więc wykładniki ich też są równe: $\frac{30-5k}{6}=0$, skąd $k=6$. Wtedy $U_{6+1}=C^6_{10}=C^4_{10}=\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}=210$ . . (2) (patrz alg. Feldbluma wzory 73-ci i 71-szy str. 375, 374). Rozwiążemy w liczbach całkowitych i dodatnich równanie nieoznaczone $ax+by=c$ . . (3). Ponieważ (patrz (1), (2)) $a=17$, $b=12$, $c=210$, przeto (3) jest $17x+12y=210$; $y=\frac{210-17x}{12}=17-x+\frac{6-5x}{12}=17-x+t$, gdzie $t=\frac{6-5x}{12}$, skąd $x=\frac{6-12t}{5}=1-2t+\frac{1-2t}{5}=1-2t+t_1$, gdzie $t_1=\frac{1-2t}{5}$, skąd $t=\frac{1-5t_1}{2}=-2t_1+\frac{1-t_1}{2}=-2t_1+t_2$, gdzie $t_2=\frac{1-t_1}{2}$, skąd $t_1=1-2t_2$. Podstawimy wartość $t_1$ w równania $y=17-x+t$ i $x=1-2t+t_1$: $y=17t_2+9$; $x=6-12t_2$. $x$ i $y$ — liczby dodatnie, więc $x>0$ i $y>0$, przeto $6-12t_2>0$; $17t_2+9>0$; więc $t_2<\frac{1}{2}$ i $t_2>-\frac{9}{17}$; więc $t_2=0$, $y=9$, $x=6$.

---

55. Znajdziemy liczbę dwucyfrową. Niech cyfra dziesiątków będzie $x$, wtedy cyfra jedności zgodnie z warunkami zadania będzie $(x+5)$, więc liczba dwucyfrowa równa się $10x+x+5$, lecz wiemy, że $10x+x+5=3(x+5)+6$, skąd liczba dziesiątków $x=2$, cyfra jedności $(x+5=2+5=)\,7$, więc cyfra dwucyfrowa $=27$. Rozwiążemy równanie $82{,}9x-x^2+8{,}3=0$: $81{,}9x-x^2+$ $+8{,}3=0$; $x^2-82{,}9x-8{,}3=0$, skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 32-gi str. 186) $x=\frac{82{,}9}{2}\pm\sqrt{\frac{6872{,}41}{4}+8{,}3}=\frac{82{,}9\pm83{,}1}{2}$; $x_1=83$, ($x_2=-\frac{1}{10}$ nie nadaje się, gdyż pierwiastek powinien być dodatni). Określimy czwarty wyraz rozwinięcia dwumianu $\left(1+\sqrt[3]{3{,}4}\right)^{11}$. Na zasadzie wzoru 80-go (patrz alg. Feldbluma str. 382)

$$U_{3+1}=C^3_{11}\left(\sqrt[3]{3{,}4}\right)^3.1^8=\frac{11.10.9}{1.2.3}.3{,}4=561.$$

Dowiemy się, ile wyrazów trzeba wziąć. Zgodnie z warunkami zadania $a_3=27$ czyli $a+2d=27$. . . (I) (w postępie różnicowym $a_3=a+2d$) $a_{10}=83$ czyli $a+9d=83$ . . . (II) (w postępie różnicowym $a_{10}=a+9d$). Odejmiemy stronami równanie (I) od (II):

$$\begin{array}{r} a+9d=\ \ 83 \\ \underline{\pm a\pm2d=\pm27} \\ 7d=\ \ 56, \end{array}$$

skąd $d=8$; podstawiwszy $d=8$ w (I) lub (II), otrzymamy $a=11$. Według wzoru 43-go (patrz alg. Feldbluma str. 284)

$561=\frac{[2.11+(n-1)8]n}{2}$. Rozwiążemy otrzymane równanie:

$561=\frac{[22+8n-8]n}{2}=\frac{[14+8n]n}{2}=7n+4n^2$; $4n^2+7n-561=0$, skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 31-szy str. 185)

$$n=\frac{-7\pm\sqrt{49+8976}}{8}=\frac{-7\pm95}{8};\quad n_1=11;\quad n_2=-\frac{102}{8},$$

lecz liczba wyrazów postępu nie może być ujemną, przeto bierzemy $n_1=11$. Trzeba wziąć 11 wyrazów.

---

56.* Określimy pierwiastki równania $x^2-600x+87500=0$. (patrz alg. Feldbluma wzór 32-gi str. 186)

$x=300\pm\sqrt{90000-87500}=300\pm\sqrt{2500}$; $x_1=300+50=350$; $x_2=300-50=250$. Określimy różnicę drugich potęg tych pierwiastków ($S$). $S=350^2-250^2=122500-62500=60000$ wiorst. Długość kolei żelaznej między $A$ i $B$ równa się 60000 wiorst. Przypuszczamy, że przeznaczono początkowo na przebycie odległości między $A$ i $B$ $x$ godzin, więc na 1 godzinę pociąg przebywał $\frac{60000}{x}$ wiorst, a w 12 g. przebył $12\left(\frac{60000}{x}\right)$ w. Po upływie 12-tu godzin pozostało mu się jeszcze $(x-12)$ godzin czasu, lecz zatrzymał się na $\frac{1}{4}$ tego czasu, więc miał jeszcze jechać $\frac{3}{4}(x-12)$ godzin. Ale pociąg zwiększył prędkość początkową na 500 wiorst, więc przebywał teraz na godzinę $\left(\frac{60000}{x}+500\right)$ wiorst, a w $\frac{3}{4}(x-12)$ godzin przebył $\frac{3}{4}(x-12)\left(\frac{60000}{x}+500\right)$ wiorst. Ponieważ w oznaczonym terminie pociąg był w odległości 3000 wiorst od $B$, więc przeszedł wszystkiego $(60000-3000=)$ 57000 wiorst; przyczem w ciągu 12-tu godzin przebył $12\left(\frac{60000}{x}\right)$ wiorst, a potem $\frac{3}{4}(x-12)\left(\frac{60000}{x}+500\right)$ wiorst, przeto możemy ułożyć równanie:

$$12\left(\frac{60000}{x}\right)+\frac{3}{4}(x-12)\left(\frac{60000}{x}+500\right)=57000;$$

$$2880000+180000x-2160000+1500x^2-18000x=228000x;$$

$15x^2-660x+7200=0$; $x^2-44x+480=0$, skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 32-gi str. 186) $x=22\pm\sqrt{484-480}=22\pm\sqrt{4}$;

* W tem zadaniu są błędy: zamiast sumy drugich potęg pierwiastków — powinna być różnica drugich potęg pierwiastków, zamiast 5 wiorst — 500 wiorst, zamiast 30 wiorst — 3000 wiorst.

$x_1=22+2=24$; $x_2=22-2=20$. Obydwa rozwiązania nadają się, więc przeznaczono początkowo na przebycie drogi między $A$ i $B$ 24 lub 20 godzin.

---

57. Znajdziemy odległość między dwoma miastami. Określimy pierwsze dwa przybliżenia ułamka ciągłego [2, 2, 3, 3, 2] bezpośrednio, a resztę przybliżeń podług wzoru 83-go (patrz alg. Feldbluma str. 391): $\frac{P_1}{Q_1}=\frac{2}{1}$; $\frac{P_2}{Q_2}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$;

$$\frac{P_3}{Q_3}=\frac{5.3+2}{3.2+1}=\frac{17}{7};\quad \frac{P_4}{Q_4}=\frac{17.3+5}{7.3+2}=\frac{56}{23};\quad \frac{P_5}{Q_5}=\frac{56.2+17}{23.2+7}=\frac{129}{53},$$

więc odległość między dwoma miastami $=129$ wiorst. Określimy spółczynnik 4-go wyrazu rozwinięcia $(a+b)^8$. Na zasadzie wzorów 80-go i 71-go (patrz alg. Feldbluma str. 382, 373) $U_{k+1}=C_n^k=C_8^3=\frac{8.7.6}{1.2.3}=56$. Lecz pierwszy podróżny przejechał w pierwszą godzinę liczbę wiorst 7 razy mniejszą od 56-ciu, więc przebył w tę godzinę (56:7=) 8 wiorst. Znajdziemy wykładnik postępu ilorazowego. Niech pierwszym wyrazem i wykładnikiem tego postęgu będą $a$ i $q$, więc drugim, trzecim i czwartym wyrazami jego będą $aq$, $aq^2$, $aq^3$. Ponieważ suma 1-go i 3-go wyrazu jest 5, a suma 2-go i 4-go$=2{,}5$, przeto układamy równania: $\begin{array}{l|l} a+aq^2=5 & a(1+q^2)=5 \\ aq+aq^3=2{,}5 & aq(1+q^2)=2{,}5 \end{array}$ skąd $q=\frac{1}{2}$, więc w każdą następną godzinę pierwszy podróżny przejeżdżał o $\frac{1}{2}$ wiorsty więcej. Dowiemy się, ile wiorst przejechał drugi podróżny w pierwszą godzinę. Podług wzoru 68-go (patrz alg. Feldbluma str. 369) $A_4^2=4.3=12$. Liczba warjacji z 4-ech elementów po 2 wynosi 12, lecz on przejechał o 1 więcej, więc przebył w pierwszą godzinę (12+1=) 13 wiorst. Określimy pierwiastek równania $4^{x+0,7}=\sqrt{2^{7-10x}}$; $2^{2(x+0,7)}=\sqrt{2^{7-10x}}$,

$$2(x+0{,}7)\lg2=\frac{1}{2}(7-10x)\lg2;\quad 2(x+0{,}7)=\frac{7-10x}{2};$$

$4x+2{,}8=7-10x$; $14x=4{,}2$; $x=4{,}2:14=0{,}3$. W każdą następną godzinę drugi podróżny przebywał o 0,3 wiorsty mniej. Obydwaj podróżni przebyli w pierwszą godzinę (8+13=) 21 w., więc pozostało im jeszcze przebyć (129−21=)108 w. Określimy liczbę godzin, w ciągu której obydwaj podróżni przejechali 108 wiorst. Ponieważ pierwszy podróżny przejechał w ciągu II-ej godziny $8^1/_2$ w., w ciągu III-ej — 9 w. i t. d., drugi podróżny przejechał w ciągu II-ej godziny 12,7 w., w ciągu III-ej—124 w., i t. d., więc łatwo zrozumieć, że otrzymaliśmy dwa postępy różnicowe, w których pierwsze wyrazy i różnice są wiadome, przyczem obydwa postępy zawierają jednakową liczbę wyrazów.

Ponieważ liczba wyrazów każdego postępu pokazuje jednocześnie, ile godzin obydwaj podróżni i każdy z nich zużył na przebycie odległości, którą przebył do spotkania się z drugim, nie licząc pierwszej godziny, w którą obydwaj przebyli 21 w., ponieważ pierwszy wyraz I-go postępu $a=8^1/_2$ w., pierwszy wyraz II-go postępu $a=12,7$ w., różnica I-go postępu $d={}^1/_2$, różnica II-go postępu — $d=-0,3$, liczba wyrazów I-go postępu $n=x$, liczba wyrazów II-go postępu $n=x$, więc na zasadzie wzoru 43-go (patrz alg. Feldbluma str. 284) suma wyrazów I-go postępu

$$Sx=[17+{}^1/_2(x-1)]\frac{x}{2}=\frac{17x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}=\frac{33x}{4}+\frac{x^2}{4};$$

suma wyrazów II-go postępu

$$Sx=[25,4+(-0,3)(x-1)]\frac{x}{2}=\frac{25,4}{2}x-\frac{0,3x^2}{2}+\frac{0,3x}{2}=\frac{257x}{20}-\frac{3x^2}{20};$$

lecz obydwaj podróżni przebyli 108 wiorst, przeto układamy równanie: $\frac{x^2}{4}+\frac{33x}{4}+\frac{257x}{20}-\frac{3x^2}{20}=108$ czyli $2x^2+422x-2160=0$,

$$x^2+211x-1080=0; \quad \text{skąd} \quad x=\frac{-211}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{211}{2}\right)^2+1080}=$$

$$=\frac{-211}{2}\pm\sqrt{\frac{48841}{4}}; \quad x_1=\frac{-211}{2}+\frac{221}{2}=\frac{10}{2}=5;$$

$\left(x_2=\frac{-211}{2}-\frac{221}{2}=-\frac{433}{2}=-216^1/_2\right.$ nie nadaje się). Podróżni spotkali się po $(5+1=)$ 6-ciu godzinach.

58. Określimy sumę wszystkich sześciu wyrazów postępów $S$. Zgodnie z warunkami zadania

$$S=\frac{1}{2}\sqrt[3]{7\cdot077\cdot888}=\frac{1}{2}.192=96 \ . \ . \ . \ (1).$$

$$\begin{array}{r|r}
1^3= & 1 \\
3.1^2=3 & 6077 \\
3.1^2.9= & 27 \\
3.1.9^2= & 243 \\
9^3 \ = & 729 \\
 & 5859 \\
3.19^2=1083 & 218888 \\
3.19^2.2= & 2166 \\
3.19.2^2= & 228 \\
2^3 \ = & 8 \\
 & 218888 \\
 & 0
\end{array}$$

Więc suma wszystkich szukanych sześciu wyrazów postępów jest 96. Znajdziemy $n$ z równania $\frac{1}{8}6^{3n}=2^{2n}3^{3n}$:

$$2^{-3}=2^{2n}\left(\frac{3}{6}\right)^{3n}; \quad 2^{-3}=2^{2n}.\frac{1}{2^{3n}};$$

$$2^{-3}=2^{-n}, \quad \text{skąd} \quad n=3 \ . \ . \ . \ (2).$$

Niech pierwszy wyraz i iloraz szukanego postępu geometrycznego będą $a$ i $q$, więc postęp będzie

$$\because a, aq, aq^2 \ . \ . \ . \ (3).$$

Ponieważ pierwszy wyraz postępu różnicowego mieści się 2 razy w pierwszym wyrazie postępu geometrycznego, a pierwszym wyrazem postępu geometrycznego (patrz (3)) jest $a$, przeto pierwszym wyrazem postępu różnicowego będzie $\frac{a}{2}$. Drugi wyraz postępu różnicowego jest 3 razy mniejszy od drugiego wyrazu postępu geometrycznego, więc (patrz (3) i (2)) drugim wyrazem postępu różnicowego będzie $\frac{aq}{3}$. Trzeci wyraz postępu różnicowego jest $2n$ razy mniejszy od trzeciego wyrazu postępu geometrycznego, przeto (patrz (3) i (2)) trzecim wyrazem postępu różnicowego będzie $\frac{aq^2}{2.3}=\frac{aq^2}{6}$. Więc postęp różnicowy będzie: $\div \frac{a}{2}, \frac{aq}{3}, \frac{aq^2}{6}$ . . . (4). Suma wszystkich sześciu wyrazów równa się (patrz (1)) 96, przeto (patrz (3), (4) i (1))

$$a+aq+aq^2+\frac{a}{2}+\frac{aq}{3}+\frac{aq^2}{6}=96 \quad \text{czyli}$$

$$6a+6aq+6aq^2+3a+2aq+2aq^2=576, \quad \text{czyli}$$

$9a+8aq+7aq^2=576$ . . . (5). Drugie równanie ułożymy z postępu różnicowego na zasadzie tego, że różnica ($d$) jest jednakowa: $\frac{aq}{3}-\frac{a}{2}=\frac{aq^2}{6}-\frac{aq}{3}$ czyli $2aq-3a=aq^2-2aq$, czyli $-aq^2+4aq-3a=0$, czyli $aq^2-4aq+3a=0$ . . . (6). Skróciwszy (6) przez $a$, otrzymamy: $q^2-4q+3=0$, skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 32-gi str. 186) $q=2\pm\sqrt{4-3}=2\pm1$; $q_1=3$, $q_2=1$. Z równania (5) mamy $a=\frac{576}{9+8q+7q^2}$, lecz $q=3$, przeto $a=\frac{576}{9+8q+7q^2}=\frac{576}{9+24+63}=\frac{576}{96}=6$. Pierwszy wyraz postępu geometrycznego $a=6$, wykładnik $q=3$, więc szukany postęp geometryczny (patrz (3)) będzie $\because\!\because$ 6, 18, 54. Różnicowy zaś (patrz (4)): $\div$ 3, 6, 9.

---

59. Znajdziemy sumę wymiernych wyrazów rozwinięcia $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6$. Na zasadzie wzoru 79-go (patrz alg. Feldbluma str. 381) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6=(\sqrt{3})^6+\frac{6}{1}(\sqrt{3})^5.\sqrt{2}+$

$$+\frac{6.5}{1.2}(\sqrt{3})^4(\sqrt{2})^2+\frac{6.5.4}{1.2.3}(\sqrt{3})^3(\sqrt{2})^3+\frac{6.5}{1.2}(\sqrt{3})^2(\sqrt{2})^4+$$

$$+\frac{6}{1}\sqrt{3}(\sqrt{2})^5+(\sqrt{2})^6.$$

Wymiernemi liczbami (takiemi, z których można wyciągnąć pierwiastek) są: $(\sqrt{3})^6=27$; $\frac{6.5}{1.2}(\sqrt{3})^4.(\sqrt{2})^2=3.5.9.2=270$; $\frac{6.5}{1.2}(\sqrt{3})^2.(\sqrt{2})^4=3.5.3.4=180$; $(\sqrt{2})^6=8$. Więc suma tych liczb wymiernych ($S$) równa się: $S=27+270+180+8=485$ . (1). Niech pierwszym wyrazem i różnicą postępu różnicowego rosnącego będą $a$ i $d$, wtedy pierwsze pięć wyrazów tego postępu będą: $\div a$, $(a+d)$, $(a+2d)$, $(a+3d)$, $(a+4d)$ . . . (2), z (1) wiemy, że suma tych pięciu wyrazów jest 485, przeto układamy równanie: $S_5=\frac{(a+a+4d)5}{2}=485$ czyli $10a+20d=970$, czyli $a+2d=97$ . . (3). Ponieważ suma kwadratów wyrazów postępu równa się 47135, przeto po podniesieniu (2) do kwadratu otrzymamy: $a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2+(a+3d)^2+(a+4d)^2=47135$ czyli $a^2+a^2+2ad+d^2+a^2+4ad+4d^2+a^2+6ad+9d^2+a^2+8ad+16d^2=$ $=47135$, czyli $5a^2+20ad+30d^2=47135$, czyli $a^2+4ad+6d^2=9427$ . . (4). Rozwiążemy układ równań (3) i (4). Określimy z (3) $a$ i podstawimy jego wartość w (4): (patrz (3)) $a=97-2d$ . . . (5) (patrz (4)) $(97-2d)^2+4d(97-2d)+6d^2=9427$ czyli $9409-388d+4d^2+388d-8d^2+6d^2=9427$, skąd $2d^2=18$, $d^2=9$, $d=\pm\sqrt{9}$; $d_1=3$, $d_2=-3$. Bierzemy $d_1=3$, więc postęp jest rosnący. Podstawimy $d=3$ w (5): $a=97-2.3=91$.

Określimy $n$. Niech $x$ będzie zasadą logarytmów, przy której $\lg 4096=6$, wtedy $\lg_x 4096=6$; $x^6=4096$; $x^6=4^6$; jeżeli potęgi jednakowych liczb są równe, to wykładniki ich też są równe, przeto $x=4$, więc $n=4$. Znajdziemy $m$.

$$\frac{m+9}{2}:\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{m-5}}}=m+4\ .\ .\ .\ (6).$$

$$1:\left(2+\frac{1}{m-5}\right)=1:\frac{2m-9}{m-5}=\frac{m-5}{2m-9};$$

$$1+\frac{m-5}{2m-9}=\frac{3m-14}{2m-9};\quad 1:\frac{3m-14}{2m-9}=\frac{2m-9}{3m-14};$$

więc ułamek ciągły $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{m-5}}}=\frac{2m-9}{3m-14}$, przeto (6) będzie:

$\frac{m+9}{2}:\frac{2m-9}{3m-14}=m+4$ czyli $(m+9)(3m-14)=2(m+4)(2m-9)$, czyli $3m^2+27m-14m-126=4m^2+16m-18m-72$, czyli

$m^2-15m+54=0$, skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 32-gi str. 186)

$$m=\frac{15}{2}\pm\sqrt{\frac{225-216}{4}}=\frac{15}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{15\pm3}{2};\quad m_1=\frac{18}{2}=9;$$

$m_2=\frac{12}{2}=6$. Określimy $n$-ty wyraz postępu: $n=4$, a czwarty wyraz postępu różnicowego równa się $a+3d$, ponieważ $a=91$, $d=3$, przeto $n$-ty wyraz jest: $a+3d=91+3\,.\,3=100$. Określimy sumę $m$ wyrazów. Ponieważ $m$ może być 9 i 6, przeto, gdy $m=9$, suma będzie:

$$S_9=\frac{(a+a+8d)n}{2}=\frac{(91+91+24)9}{2}=\frac{206\,.\,9}{2}=927,$$

gdy zaś $m=6$, suma jest: $S_6=\frac{(a+a+5d)6}{2}=197\,.\,3=591$.

---

60.* Określimy iloczyn $\sqrt[3]{133432831}\,.\,\sqrt[0,3]{3,4822024}$. Niech iloczyn ten $=x$, więc $x=\sqrt[3]{133432831}\,.\,\sqrt[0,3]{3,4822024}$; zlogarytmujemy otrzymane równanie:

$$\lg x=\frac{1}{3}\lg 133432831+\frac{1}{0,3}\lg 3,4822024=\frac{1}{3}\,.\,8,1252626+$$
$$+\frac{10}{3}\,.\,0,5418540=2,7084209+1,80618=4,5146009,\ \text{skąd}\ x=32704.$$

Rozwiążemy równanie $\sqrt{0,15x+2}=\frac{2+\frac{1}{2}\sqrt{3x}}{2+\frac{1}{4+}\dots}$ . . . (1).

Przypuszczamy, że $y=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\dots}}}$ Dodawszy do mianownika ostatniego ogniwa ułamka ciągłego ułamek równy $y$, otrzymamy równanie

$$y=\frac{1}{4+y}\quad\text{czyli}\quad y(4+y)=1,\quad\text{czyli}\quad y^2+4y-1=0,$$

skąd (patrz alg. Feldbluma wzór 32-gi str. 186)

$y=-2\pm\sqrt{4+1}=-2\pm\sqrt{5}$; $y_1=-2+\sqrt{5}$; ($y_2=-2-\sqrt{5}$ nie nadaje się, gdyż $y$ musi być dodatnie). Wtedy (1) ma postać:

$$\sqrt{0,15x+2}=\frac{2+\frac{1}{2}\sqrt{3x}}{2-2+\sqrt{5}}\quad\text{czyli}\quad\sqrt{0,15x+2}=\frac{2+\frac{1}{2}\sqrt{3x}}{\sqrt{5}},$$

czyli $\sqrt{5}\,.\,\sqrt{0,15x+2}=2+\frac{1}{2}\sqrt{3x}$, czyli $\sqrt{0,75x+10}=2+\frac{1}{2}\sqrt{3x}$, czyli $2\sqrt{\frac{3}{4}x+10}=4+\sqrt{3x}$, czyli $\sqrt{3x+40}=4+\sqrt{3x}$.

* W tem zadaniu jest błąd: zamiast ilorazowi $\sqrt[3]{133432831}$ przez $\sqrt[0,3]{3,4822024}$ — powinno być iloczynowi $\sqrt[3]{133432831}$ przez $\sqrt[0,3]{3,4822024}$.

Podniesiemy obydwie strony równania do kwadratu:

$3x + 40 = 16 + 8\sqrt{3x} + 3x$ czyli $24 = 8\sqrt{3x}$, czyli $3 = \sqrt{3x}$.
Podniesiemy obydwie strony ostatniego równania do kwadratu $9 = 3x$, skąd $x = 3$. Określimy postęp różnicowy, którego pierwsze dwa wyrazy są wykładnikami różnych potęg liczby 8, a różnica $= 32704$. Różnica tego postępu = pierwiastkowi równania (1), więc, gdy jeden wykładnik liczby 8 jest $a$, drugi $= a + 3$. Różnica $(a + 3)$-ej i $(a)$-ej potęgi liczby 8 będzie: $8^{a+3} - 8^{a}$, ta różnica $= 32704$, więc mamy równanie: $8^{a+3} - 8^{a} = 32704$ czyli $8^{a}(8^{3} - 1) = 32704$, czyli $8^{a} . 511 = 32704$; $8^{a} = 64$; czyli $8^{a} = 8^{2}$, skąd $a = 2$; wtedy drugi wyraz postępu $= (2 + 3 =)5$, postęp więc jest: $\div 2, 5, 8$. Określimy pierwszy wyraz i wykładnik postępu różnicowego, który jest utworzony z części postępu $\div 2, 5, 8$. Zgodnie z warunkami zadania 2 jest rozdzielone na trzy części i z tych części utworzone są trzy pierwsze wyrazy nowego postępu, tak samo rozdzielono 5 również na trzy części, z których utworzono trzy następne wyrazy nowego postępu. Suma I-go, II-go i III-go wyrazu nowego postępu $= 2$, suma IV-go, V-go i VI-go wyrazu $= 5$. Niech pierwszy wyraz nowego postępu będzie $u$, różnica $r$, ułożymy wtedy dwa równania: $u + u + r + u + 2r = 2$ czyli $3u + 3r = 2$...(I) i $u + 3r + u + 4r + u + 5r = 5$ czyli $3u + 12r = 5$ . . (II). Odejmiemy stronami równanie (I) od (II), otrzymamy tedy: $9r = 3$, skąd $r = \frac{1}{3}$.
Podstawimy $r = \frac{1}{3}$ w (I): $3u + 1 = 2$, skąd $3u = 1$, skąd $u = \frac{1}{3}$.
Określimy sumę 20-tu wyrazów postępu różnicowego, którego pierwszy wyraz $= \frac{1}{3}$ i różnica też $= \frac{1}{3}$. Niech we wzorze 43-im (patrz alg. Feldbluma str. 284) $a = \frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{3}$, $n = 20$, wtedy

$$S_{20} = \frac{\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} . 19\right] . 20}{2} = \left(\frac{2}{3} + \frac{19}{3}\right)10 = \frac{21}{3} . 10 = 70.$$

Suma 20 wyrazów ostatniego postępu $= 70$.

## SPROSTOWANIA.

| *Str.* | *Zad.* | *Wiersz* | *Zamiast:* | *Powinno być:* |
|---|---|---|---|---|
| 13 | 6 | 3 z góry | $y=3+4u$ | $y=3-4u$ |
| 25 | 15 | 3 z góry | $\frac{2n^2+3n-35}{2n^2+18n+40}=\frac{2x^2+3n-35}{(2n^2+9n+20)}$ | $\frac{2n^2+3n-35}{2n^2+18n+40}=\frac{2n^2+3n-35}{2(n^2+9n+20)}$ |
| 28 | 16 | 7 z dołu | $\lg q=\frac{\lg 6436{,}4-\lg 1540}{27}$ | $\lg q=\frac{\lg 6536{,}4-\lg 1540}{27}$ |
| 30 | 18 | 9 z góry | $0{,}08(3)=0{,}08+\lim\left(\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\ldots \text{ ad inf.}\right)=0{,}8\ldots$ | $0{,}08(3)=0{,}08+\lim\left(\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\ldots \text{ ad inf.}\right)=0{,}08\ldots$ |
| 35 | 22 | 5 z góry | $a-196b=-14000$ | $a-\mathbf{169}b=-14000$ |
| 35 | 22 | 6 z góry | $a=196b-14000$ | $a=\mathbf{169}b-14000$ |
| 38 | 24 | 2 z dołu | $\frac{30(n^2+nk+k)}{nk}=117$ | $\frac{30(n^2+nk+k^2)}{nk}=117$ |
| 55 | 35 | 2 z góry | $(\sqrt[2]{x^5}+x^1\sqrt{x^{-1}})^{16}$ | $(\sqrt[2]{x^5}+x^{-1}\sqrt{x^{-1}})^{16}$ |
| W niektórych zadaniach | | | równanie nieokreślone | równanie **nieoznaczone** |

DRUKARNIA
NAUKOWA
w WARSZAWIE