POHKLE DARSTELLENDE GEOMETRIE

1818

1818

Darstellende Geometrie

von

K. Pohlke.

Erste Abtheilung.

Darstellung der geraden Linien und ebenen Flächen, so wie der aus ihnen zusammengesetzten Gebilde, vermittelst der verschiedenen Projectionsarten.

Nebst einem Hefte von zehn Tafeln.

Dritte Auflage.

BERLIN, 1872.

Verlag von Rudolph Gaertner.

Leipziger Strasse 133.

Vorwort.

Anfangsgründe einer vieldurchforschten Wissenschaft können selbstverständlich dem Kundigen nichts Neues darbieten. Wer aber irgend einen Zweig der reinen oder angewandten Mathematik vorzugsweise studirt, wird durch dessen Reichthum an Sätzen und Aufgaben zu dem Versuche angeregt werden, eine Auswahl derselben seinen Ansichten gemäss zu ordnen. Als ein solcher Versuch ist vorliegende Schrift zu nehmen, welche zum Gebrauch der Studirenden bestimmt ist, die meinen Vorträgen beiwohnen. Weitere Ausführungen, ins Besondere der ersten Capitel, bleiben den Vorträgen überlassen; dagegen ist Manches in den letzten Capiteln ausführlicher behandelt, als diess in der für die Vorträge ausgesetzten Zeit möglich ist.

Die in der Einleitung enthaltene Erklärung zeigt, dass ich die darstellende Geometrie in einem weiteren Sinne auffasse, als es meistens der Fall ist, indem ich Schattenlehre und Perspective als Theile, nicht als Anwendungen derselben betrachte.

Die ersten drei Capitel enthalten die Grundlage der darstellenden Geometrie im engeren Sinne nach der zuerst von Monge[6]) und Lacroix[7]) gegebenen Erklärung derselben. Die Lösung der Aufgaben erfolgt jedoch nach Olivier[19]) durch Veränderung der Projectionsebenen; diese Veränderungen entsprechen denen der Coordinatenebenen in der analytischen Geometrie und versetzen die Raumgebilde in die einfachste Lage gegen die Projectionsebenen. Bei den Aufgaben über zusammengesetzte und von krummen Flächen begrenzte Gebilde giebt man diesen stets die einfachste Lage, daher scheint es zweckmässig, schon die ersten Aufgaben auf gleiche Weise zu lösen. Die Bezeichnungsart Olivier's hat nicht Eingang gefunden, ich habe mich meistens der von Wolff[17]) gegebenen angeschlossen.

Die im vierten Capitel enthaltenen Aufgaben sind besonders zu berücksichtigen. Weinbrenner[9]) suchte sie auf eine einfachere Weise zu lösen; er bemühte sich, »ohne mathematische Formeln und Lehrsätze durch blosse Zeichnungen« den studirendeu Künstler in den Stand zu setzen, alle Raumgebilde darzustellen, im Gegensatze zu Monge, »der die schwersten durch Zeichnung zu suchenden mathematischen Aufgaben in die geometrische Zeichnungslehre ziehe«. Sein Lehrgang ist für solche Schulen zu empfehlen, in denen geringe Kenntnisse in der Mathematik vorausgesetzt werden; er ist von Hummel[20]) in dessen Projectionslehre weiter ausgedehnt worden. Aehnlich ist der Gang in dem sehr verbreiteten Werke von Le Blanc[14]) über Maschinenzeichnen. Studirenden, die eine höhere Stufe der Bildung einnehmen, ist eine wissenschaftliche Auffassung zu empfehlen; zudem wird man bei aufmerksamer Vergleichung finden, dass Weinbrenner's Lösungen keine anderen als die der darstellenden Geometrie sind.

Das fünfte Capitel enthält die seit etwa zehn Jahren so genannte Axonometrie; diese Benennung fasse ich gleichfalls in einem weiteren Sinne auf, indem ich sie auf die schiefe, im sechsten Capitel gegebene, Projection ausdehne. Die erste wissenschaftliche Behandlung dieser Darstellungsart finde ich im siebenten Abschnitt von Lambert's Perspective[4]), welchem die Wahl der Projectionsstrahlen (§. 119), die Anfertigung der Maassstäbe und einige der in den §§. 143, 144 gegebenen Projectionsarten entlehnt sind. Ausführlicher ist der Gegenstand von Karsten[5]) im dreizehnten und vierzehnten Capitel behandelt, woselbst die in den §§. 122 und 142 gegebenen fünf Formeln weitläufig entwickelt sind. Broecker's[18]) Projectionsart nach bestimmten Axen und Projectionsmaassstäben ist im Wesentlichen dieselbe. Die bereits von Kästner[3]) nachgewiesene Eigenschaft des Würfels, dass dessen Projection ein regelmässiges Sechsseit sein kann, leitete Farish[10]) auf die von ihm so genannte isometrische Projection. Sein Aufsatz über dieselbe wurde von Gregory[12]) fast wörtlich wiederholt, was zu ihrer schnellen Ausbreitung beitrug. Sopwith[16]) erweiterte diese Methode in einem ausführlichen Werke; die im §. 144 neben der Cavalier-Perspective erwähnten Projectionsarten sind von ihm ohne Herleitung und Beweis gegeben. Später führte Weisbach[21]) rationale Verhältnisse unter den Einheiten der drei Maassstäbe ein, und unterschied von der isometrischen Projection die von ihm so genannte monodimetrische und anisometrische Projection. Ausser dem von ihm selbst verfassten Werke[23]) erschienen seitdem mehrere andere über diese Projectionsart, welche den Namen Axonometrie und vielfache Anwendung erhalten hat. Skuhersky's[24]) Schriften behandeln gleichfalls diesen Gegenstand.

Das siebente Capitel giebt die Hauptsätze der Central-Projection im Sinne der neueren, oder der höheren Geometrie, wie Chasles[22]) sie nennt. Dieselbe ist aus dem Bestreben der Geometer entstanden, die Beziehungen zwischen den Gestalten bekannter Gebilde und denen ihrer Central-Projectionen festzustellen, und diese Beziehungen auf das Erforschen neuer Eigenschaften der geometrischen Gebilde anzuwenden. Dieses Bestreben tritt in den ältesten Werken über Perspective hervor, wie in dem seiner Zeit allgemein verbreiteten des Vignola[1]), deutlicher in denen von Brook Taylor[2]) und Lambert. Die eigentliche Grundlage jedoch fand die neuere Geometrie in den classischen Werken von Poncelet[11]) und Steiner[15]). Des Letzteren Werk, sowie seine, leider nicht veröffentlichten, Vorträge, sind bei dem siebenten und achten Capitel besonders benutzt worden. Bei einer umfassenden Behandlung dürften die Doppelschnitts-Verhältnisse nicht übergangen worden sein, bei einer elementaren Behandlung schien die von Steiner gegebene projectivische Potenz genügend. Die harmonischen Eigenschaften sind erklärt worden, weil sie noch nicht allgemeinen Eingang in die Lehrbücher der elementaren Geometrie gefunden haben. Die für die Projection ebener *n* seite angewendete Construction findet sich schon bei Brook Taylor nebst den beiden Eigenschaften der collinearen Figuren. Die Benennung Collineation ist von Moebius[13]) gegeben worden, der auch Euler's Erklärung der Affinität annahm und berichtigte; bei den Franzosen heissen diese Eigenschaften »homologie« nach Poncelet's Bezeichnung. Dem Werke von Moebius ist die Uebersicht der aus den Projectionen hervorgehenden geometrischen Verwandtschaften entlehnt.

Die im achten Capitel gegebene räumliche Projection ist zuerst von Breysig[8]), streng wissenschaftlich jedoch von Poncelet behandelt worden. In das neueste Werk von de la Gournerie[25]) ist sie ebenfalls aufgenommen worden.

Berlin, im December 1859.

Die zweite Auflage hat ausser einer allgemeinen Durchsicht keine wesentliche Aenderung erfahren. Die Erklärungen der einfachen und vollständigen $n$ecke, $n$seite, $n$flache sind bestimmter hervorgehoben (§§. 71, 76) und einige Bemerkungen über diese Gebilde hinzugefügt (§§. 172, 182). Die Axonometrie ist vervollständigt durch Aufnahme eines elementaren Beweises zu dem im §. 147 gegebenen Hauptsatze. Diesen Beweis hat Herr Dr. Schwarz*) vor zwei Jahren gefunden und im 63. Bande des Journals für die reine und angewandte Mathematik mitgetheilt.

Berlin, im Juli 1865.

*) jetzt Professor am Polytechnikum in Zürich.

Bei der Ueberarbeitung zur dritten Auflage sind die Bezeichnungen für Ebenen geändert (§§. 14, 47) und im vierten und fünften Capitel einige Beispiele hinzugefügt; auch ist im fünften der Gang der theoretischen Betrachtung theilweise umgestaltet.

Berlin, im Januar 1872.

K. Pohlke.

Inhalt.

Einleitung.

Erste Abtheilung.

Darstellung der Geraden u. Ebenen, sowie der aus ihnen zusammengesetzten Gebilde.

Erstes Capitel.

Die orthographische Projection.

Zweites Capitel.

Darstellung von Puncten und Geraden auf zwei Projectionsebenen.

Siebentes Capitel.

Die Central-Projection.

Achtes Capitel.

Die räumliche Projection.

und der aus ihr hergeleiteten Resultate stets zu prüfen, so dass die wirkliche Ausführung der Constructionen für ihn nur geringen Werth hat.

3. Bauwerke aller Art im weitesten Sinne des Wortes, z. B. Gebäude, Strassen, Festungswerke, Maschinen, erhalten in den Hauptformen ihrem Zwecke gemäss geometrische Gestalten und zwar die möglichst einfachen; da sie aber nur aus physischen Körpern auszuführen sind, so haben sie niemals vollkommen geometrische Gestalten. Für Baukünstler genügen deshalb die Darstellungen der Bauwerke durch Zeichnungen. Allgemein bilden letztere gleichsam ihre Sprache zur Beschreibung der Bauwerke und sind das Mittel zur Lösung der zwei in ihrer Praxis stets vorkommenden Aufgaben:

1) ein vorhandenes Bauwerk aufzunehmen und so darzustellen, dass man aus den Zeichnungen Grösse und Gestalt des Werkes, sowohl des Ganzen als seiner Theile, erkenne;
2) ein erdachtes Bauwerk zu entwerfen und so darzustellen, dass man es nach den Zeichnungen wirklich aufführen könne.

Wegen der den Bauwerken zu Grunde liegenden geometrischen Gestalten ist die Anfertigung der geforderten Zeichnungen eine Ausübung der darstellenden Geometrie und auf geometrische Gesetze begründet. Die Kenntniss dieser Gesetze allein genügt jedoch nicht; Uebungen im Zeichnen sind unerlässlich zur Erlangung der Fertigkeit, die Zeichnungen mit möglichster Genauigkeit ausführen zu können.

Für Baukünstler hat demnach die darstellende Geometrie grossen Werth; aus ihrem Bedürfnisse allein ist sie hervorgegangen.

4. Bauwerke sollen Kunstwerke sein und als solche den Gesetzen der Schönheit Genüge leisten. Ihre Darstellung durch Zeichnungen kann auch den Zweck haben, im Auge des Beschauers einen ähnlichen Eindruck wie sie selbst zu erregen. Da dieser Eindruck durch das Licht vermittelt wird, so sind die Bauwerke nicht allein als geometrische Gebilde sondern als physische Körper zu betrachten, und es ist die Art und Weise zu untersuchen, wie das Licht auf sie einwirkt.

Das Licht macht zunächst durch seine Beleuchtung die Gestalt der Bauwerke für das Auge verständlich. Die Nachahmung dieser Beleuchtung in den Zeichnungen ist deshalb ein wesentliches Mittel zur Darstellung ihrer äusseren Gestalt; mit ihr beschäftigt sich die Schatten-Construction.

Das Licht ist überhaupt die Ursache ihrer Sichtbarwerdung und daher des Eindrucks, welchen das Auge von ihrer scheinbaren Gestalt empfängt. Die Nachahmung dieser letzteren, verbunden mit der ihrer Beleuchtung, giebt ein Bild von ihnen, welches bei guter Ausführung einen ähnlichen Eindruck hervorbringen kann. Mit der Darstellung der scheinbaren Gestalt beschäftigt sich die Perspective.

Durch Aufnahme dieser Darstellungen, zu denen geometrische Gesetze allein nicht ausreichen, sondern einige Gesetze der Optik entlehnt werden müssen, erweitert sich der Umfang der darstellenden Geometrie so, dass man sagen kann:

die darstellende Geometrie ist die wissenschaftliche Begründung der Zeichenkunst.

In gleichem Maasse muss zur Ausführung der Zeichnungen die Fertigkeit des Zeichners bis zur Kunstthätigkeit gesteigert werden, damit die Darstellung eines Kunstwerkes selbst ein Kunstwerk sei.

Die Projectionen.

5. Die Darstellung der Raumgebilde wird durch Projectionen derselben erhalten, welche zugleich das Mittel darbieten, um Constructionen der räumlichen Geometrie durch Zeichnungen in einer Ebene auszuführen.

Zwei Raumgebilde sind projectivisch, oder jedes ist eine Projection des anderen, wenn eine Beziehung zwischen den Elementen des einen und entsprechenden Elementen des anderen durch ein Gesetz festgestellt ist.

Bei den einfachen im Baufache angewendeten Projectionsarten ist das Gesetz folgendes: beide Gebilde können in einer solchen Lage gedacht werden, dass alle gerade Linien, von denen jede einen Punct des einen Gebildes mit seinem entsprechenden des anderen verbindet, durch einen und denselben festen Punct gehen. Diese Projectionsart heisst Central-Projection; jene gerade Linien heissen Projectionsstrahlen (projicirende Linien, Projectanten), ihre Gesammtheit bildet einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunct der feste Punct ist, welcher der Projectionspunct (das Projectionscentrum) heisst.

Gewöhnlich ist das Gebilde, welches als Central-Projection (Entwerfung) des anderen genommen wird, eine ebene Figur, alsdann heisst ihre Ebene die Projectionsebene (Entwerfungsebene); beide Gebilde können auch räumliche sein, z. B. ein Bauwerk und ein in kleinerem Maassstabe verfertigtes Modell desselben. Wir bleiben zunächst bei der gewöhnlichen Annahme und sagen:

die Central-Projection eines Raumgebildes ist die Durchschnittsfigur einer Ebene und eines Strahlenbüschels; jeder Strahl des Büschels ist nach einem Puncte des Gebildes gerichtet, und sein Durchschnitt mit der Ebene ist die Projection dieses Punctes.

6. Bleiben das Raumgebilde und die Projectionsebene in unveränderter Lage gegen einander, während sich der Projectionspunct in der Richtung eines seiner Strahlen von dem Gebilde entfernt, so werden die Winkel, welche von den nach irgend zwei Puncten desselben gerichteten Strahlen eingeschlossen werden, um desto kleiner, je weiter sich der Projectionspunct entfernt. Ist diese Entfernung im Vergleiche zur Ausdehnung des Raumgebildes sehr gross (oder unendlich gross), so werden die von den Projectionsstrahlen eingeschlossenen Winkel sehr klein (oder unendlich klein), und man kann annehmen, alle Strahlen seien einander parallel, oder der Strahlenbüschel habe sich in eine Schaar paralleler Strahlen verwandelt.

Die Projectionsart heisst in diesem Falle die Parallel-Projection, und wir sagen:

die Parallel-Projection eines Raumgebildes ist die Durchschnittsfigur einer Ebene und einer Schaar von Parallelstrahlen; jeder Strahl ist nach einem Puncte des Gebildes gerichtet, und sein Durchschnitt mit der Ebene ist die Projection dieses Punctes.

7. Je nachdem die parallelen Strahlen gegen die Ebene unter schiefem oder unter rechtem Winkel geneigt sind, unterscheidet man die allgemeine Parallel- oder schiefe (klinographische, plagiographische) Projection und die orthographische (gerade, rechtwinklige, orthogonale) Projection.

Von den drei Arten, der Central-, schiefen und orthographischen Projection, ist die letztere die einfachste und am meisten angewendete. Es lässt sich vermuthen, dass sie die älteste, in den

Grundrissen oder orthographischen Projectionen auf wagerechter Ebene zuerst angewendete sei. Denn die Natur selbst hat in den lothrechten Linien, welche die Richtung der Schwerkraft anzeigen, einen Strahlenbüschel gegeben, dessen Strahlen rechtwinklig auf der Oberfläche der Erde sind. In einer geringen Ausdehnung kann man diese Fläche als eine wagerechte Ebene und die lothrechten Linien als parallele ansehen. Es schliessen nämlich zwei lothrechte, um 30 Meter von einander entfernte Linien einen Winkel von etwa einer Secunde ein; oder der Mittelpunct des Strahlenbüschels, d. h. der Mittelpunct unserer Erde, ist von jedem auf derselben befindlichen Körper 6366 Kilometer entfernt, kann also in Bezug auf die meisten Bauwerke als im Unendlichen liegend angesehen werden.

Gegenstände der Darstellung.

8. Die geometrischen Gestalten der Bauwerke gehören meistens der niederen, zum Theil der höheren Geometrie an. Wir setzen die Kenntniss der niederen Geometrie (mit Einschluss der Trigonometrie) voraus und haben demnach die Eigenschaften der von ihr behandelten Gebilde nicht zu erörtern. Dagegen werden wir einige der höheren Geometrie erklären, von ihren Eigenschaften so viele entwickeln, als zu ihrer Darstellung nothwendig sind und diese Entwickelungen, wo möglich, nach rein geometrischen Methoden ausführen.

Da nur die Oberfläche der Körper darzustellen ist, so sind Puncte, Linien und Flächen die Gegenstände der darstellenden Geometrie.

Wir denken jede Linie durch Bewegung eines Punctes entstanden und sagen:

> eine Linie ist der Ort aller der verschiedenen Lagen, welche ein Punct annehmen kann, der sich nach einem bestimmten Gesetze bewegt; also die stetige Aufeinanderfolge einer Reihe von Puncten.

Bewegt sich der erzeugende Punct stets in einer und derselben Richtung, so ist die Linie gerade und heisst schlechtweg eine Gerade. Dieselbe ist von unendlicher Länge; ein von zweien ihrer Puncte begrenztes Stück heisst eine Strecke. Wird nur ihre Richtung beachtet, so heisst sie ein Strahl (§. 5).

Eine aus an einander gereihten Strecken zusammengesetzte ist eine gebrochene Linie, jede andere eine krumme Linie. Bewegt sich deren erzeugender Punct in einer und derselben Ebene, so nennen wir sie schlechtweg eine Curve; bewegt sich der Punct so, dass je vier seiner auf einander folgenden Lagen nicht in einer Ebene sind, so nennen wir sie eine Raumcurve. Eine krumme Linie kann von endlicher oder von unendlicher Länge sein; ein von zweien ihrer Puncte begrenztes Stück ist ein Bogen.

9. Wir denken jede Fläche durch Bewegung einer Linie entstanden, welche die Erzeugende der Fläche ist und sagen:

eine Fläche ist der Ort aller der verschiedenen Lagen, welche eine Linie annehmen kann, die sich nach einem bestimmten Gesetze bewegt.

Wie die Gerade die einfachste Linie, so ist die Ebene die einfachste Fläche. Eine Ebene ist von unendlicher Ausdehnung; ein von Linien umschlossener Theil einer Ebene ist eine ebene Figur.

Die in den Anwendungen vorkommenden Linien und Flächen sind zwar stets begrenzt, aber man thut wohl, diese Gebilde in der vollständigen Ausdehnung zu betrachten, die sie nach dem Gesetze ihrer Erzeugung haben. Die aus der allgemeinen Anschauung hergeleiteten Constructionen reichen in allen Fällen aus, und man wird sie leicht in den sogenannten practischen Lösungen wieder erkennen.

Ueberdiess ist das Studium der darstellenden Geometrie nicht allein wegen ihrer besonderen Anwendungen dem angehenden Baukünstler zu empfehlen, sondern auch als eine Vorübung seines Verstandes auf die strenge Kunst, der er sich widmet.

10. Nachstehende Sammlung von Sätzen und Aufgaben aus den Anfangsgründen der darstellenden Geometrie bringen wir, vom einfachen zum zusammengesetzten vorgehend, in vier Abtheilungen und behandeln die Darstellung:

1) der Geraden und Ebenen, so wie der aus ihnen zusammengesetzten Gebilde, vermittelst der verschiedenen Projectionsarten;
2) einiger krummen Linien und krummen Flächen;
3) der scheinbaren Gestalt der Körper, oder die Perspective;
4) der Beleuchtung der Körper, oder die Schatten-Construction.

Erste Abtheilung.

Darstellung der **Geraden** und **Ebenen,** so wie der aus ihnen zusammengesetzten Gebilde.

Erstes Capitel.

Die orthographische Projection.

11. **D**ie Projectionsebene sei eine Ebene in beliebiger, aber fester Lage, wir bezeichnen sie durch 𝔓. Die Projectionsstrahlen seien normal (rechtwinklig) auf 𝔓, also einander parallel.

Durch einen Punct a geht ein Projectionsstrahl und schneidet 𝔓 in einem Puncte, welcher die Projection von a ist; wir bezeichnen denselben durch a'. Wir nennen Höhe des Punctes die Strecke aa'; dieselbe ist positiv oder negativ, je nachdem a auf der einen oder auf der anderen Seite von 𝔓 liegt; sie ist Null, wenn a in 𝔓 liegt, dann ist a zugleich a'.

Die Projection eines Punctes ist durch denselben bestimmt; aber der Punct ist durch die Projection nicht bestimmt.

12. Die Projection einer Geraden G ist eine Gerade G'; denn die Projectionsstrahlen aller ihrer Puncte erfüllen eine Ebene, ihre projicirende Ebene, und deren Durchschnitt mit 𝔓 ist eine Gerade. Wir nennen Durchgang (Spur, Trace) der Geraden ihren Durchschnittspunct d mit 𝔓 und ihren Neigungswinkel den Winkel γ, der ihre Neigung gegen 𝔓 misst.

Eine Gerade G kann drei Lagen in Bezug auf 𝔓 haben:

1) sie liegt in 𝔓 und ist zugleich G'; d ist unbestimmt, γ gleich Null;
2) sie ist parallel mit 𝔓 also auch mit G'; man kann sagen, d liegt im Unendlichen, γ ist Null;
3) sie ist geneigt gegen 𝔓; G und G' schneiden sich in d unter dem Winkel γ.

Ist γ ein rechter Winkel, so fallen die Projectionen aller Puncte von G in d; oder:

die Projection einer auf der Projectionsebene normalen Geraden ist ein Punct; umgekehrt:
jeder Punct der Projectionsebene ist die Projection der durch ihn normal auf die Ebene geführten Geraden.

Die Projection einer Geraden ist durch dieselbe bestimmt; aber die Gerade ist durch die Projection nicht bestimmt.

13. Die Projection jedes Punctes a, b, ... einer Geraden G liegt in G'; aber ein Punct von G' ist nicht nothwendig die Projection eines Punctes von G.

Die Projectionen von Strecken einer Geraden verhalten sich wie diese Strecken selbst, denn die Projectionsstrahlen ihrer Endpuncte sind parallel; also:

gleiche Strecken einer Geraden haben zu Projectionen gleiche Strecken.

Fig. 1. Irgend eine Strecke ab, ihre Projection $a'b'$ und der (algebraische) Unterschied der Höhen ihrer Endpuncte bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel γ, daher ist:

$$\frac{a'b'}{ab} = \cos\gamma, \text{ also: } a'b' = ab . \cos\gamma; \text{ d. h.}$$

die Projection einer Strecke ist gleich dem Producte der Strecke in den Cosinus ihres Neigungswinkels.

Diesen Cosinus nennen wir das Verkürzungs-Verhältniss $\mathfrak{q}$ (den Reductions-Coefficient) der Geraden; es ist

$$\mathfrak{q} = 1 \text{ für } \gamma = 0, \quad \mathfrak{q} = 0 \text{ für } \gamma = \frac{\pi}{2},$$

$$\mathfrak{q} > 0, < 1 \text{ für } \gamma > 0, < \frac{\pi}{2}.$$

Parallele Gerade haben zu Projectionen parallele (oder in einander liegende) Gerade, denn ihre projicirenden Ebenen sind parallel (oder fallen in einander); aber parallele Gerade in $\mathfrak{P}$ sind nicht nothwendig Projectionen paralleler Geraden. Für alle parallele Gerade gilt dasselbe Verkürzungs-Verhältniss, denn ihre Neigungswinkel sind einander gleich.

14. Die Projection einer (unbegrenzten) Ebene $\mathfrak{E}$ ist die Projectionsebene selbst. Wir nennen Schnitt (Grundschnitt, Spur, Trace) der Ebene ihre Durchschnittslinie mit $\mathfrak{P}$ und bezeichnen ihn durch E, Neigungswinkel derselben den von ihr und von $\mathfrak{P}$ eingeschlossenen Flächenwinkel ε.

Eine Ebene $\mathfrak{E}$ kann drei Lagen in Bezug auf $\mathfrak{P}$ haben:

1) sie fällt mit $\mathfrak{P}$ zusammen; E ist unbestimmt, ε gleich Null;
2) sie ist parallel mit $\mathfrak{P}$; man kann sagen, E liegt im Unendlichen, ε ist Null;
3) sie schneidet $\mathfrak{P}$ in E unter dem Winkel ε.

Der Schnitt einer Ebene ist durch dieselbe bestimmt, aber die Ebene ist durch den Schnitt nicht bestimmt. — In den Figuren stellen wir den Schnitt einer Ebene durch eine aus abwechselnden Strichen und Puncten gebildete Gerade dar.

Parallele Ebenen haben parallele Schnitte; sind aber die Schnitte zweier Ebenen parallel, so sind die Ebenen nicht nothwendig einander parallel.

15. Jede in einer Ebene $\mathfrak{E}$ liegende Gerade hat ihren Durchgang d in dem Schnitte E. Ist die Gerade parallel mit dem Schnitte, so ist sie parallel mit $\mathfrak{P}$, ihre Projection parallel mit E, ihr Verkürzungs-Verhältniss $\mathfrak{q} = 1$.

Wir nennen Neigungslinie (Linie des Gefälls) einer Ebene $\mathfrak{E}$ jede in ihr normal auf E gezogene Gerade, weil eine solche und ihre Projection einen Winkel einschliessen, welcher den Neigungswinkel ε der Ebene misst; denn die projicirende Ebene dieser Geraden ist normal auf E, weil E auf der Geraden und auf dem Projectionsstrahle ihres Durchganges normal ist. Daher ist die Projection jeder Neigungslinie einer Ebene $\mathfrak{E}$ normal auf E, ihr Verkürzungs-Verhältniss $\mathfrak{q} = \cos\varepsilon$.

In einer Ebene $\mathfrak{E}$ bilden die mit E parallelen Geraden und die Neigungslinien zwei Schaaren von Geraden, die sich rechtwinklig schneiden; nach Vorhergehendem schneiden sich auch die Projectionen der Geraden beider Schaaren rechtwinklig; hieraus folgt:

ist der eine Schenkel eines rechten Winkels parallel mit $\mathfrak{P}$, so ist dessen Projection auch ein rechter Winkel. (Ist der andere Schenkel normal auf $\mathfrak{P}$, so ist die Projection des Winkels eine Gerade).

16. Irgend eine Gerade der Ebene $\mathfrak{E}$ schneide deren Neigungslinien unter einem Winkel δ; es sei a der Durchschnitt der Geraden mit irgend einer Neigungslinie, es seien d, n die in E Fig. 2.

liegenden Durchgänge der Geraden und der Neigungslinie. Das Dreieck *and* ist rechtwinklig bei n, sein Winkel bei a ist δ, und $\frac{nd}{na} = \operatorname{tg} \delta$. Seine Projection $a'nd$ ist ebenfalls rechtwinklig bei n, Winkel a' ist die Projection von δ, also δ', und $\frac{nd}{na'} = \operatorname{tg} \delta'$. Da $na' = na . \cos \varepsilon$, so folgt: $\operatorname{tg} \delta' = \operatorname{tg} \delta . \sec \varepsilon$, d. h.:

der (spitze) Winkel δ, den irgend eine Gerade einer Ebene und eine Neigungslinie derselben einschliessen, hat zur Projection einen Winkel δ', der grösser ist als er selbst.

Das Verkürzungs-Verhältniss der Geraden da ist $\mathfrak{q} = \frac{da'}{da}$. Sehen wir da als Einheit an, so ist im Dreieck *and*:

$$dn = \sin \delta, \; na = \cos \delta,$$

und im Dreieck $a'nd$:

$$na' = na . \cos \varepsilon, \; da' = \sqrt{dn^2 + na'^2},$$

also
$$\mathfrak{q} = \sqrt{\sin^2 \delta + \cos^2 \delta . \cos^2 \varepsilon},$$

d. h. das Verhältniss $\mathfrak{q}$ ist von beiden Winkeln δ, ε abhängig und im Allgemeinen für je zwei nicht parallele Gerade der Ebene ein anderes.

Die Gerade da schliesst mit E einen Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2} - \delta$ ein; es folgt aus den rechtwinkligen Dreiecken *and*, $a'nd$, dass die Projection dieses Winkels $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \delta'$ ist, also $\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha . \cos \varepsilon$, d. h. $\alpha' < \alpha$. Und ist γ der Neigungswinkel von da gegen $\mathfrak{P}$, also $\mathfrak{q} = \cos \gamma$, so folgt: $\sin \gamma = \cos \delta . \sin \varepsilon$.

17. Irgend zwei Gerade einer Ebene mögen sich im Puncte a schneiden, und es seien d, e die (in E liegenden) Durchgänge beider Geraden, β der Winkel *dae*, dessen Oeffnung gegen E gerichtet ist. Die durch den Scheitel a gehende Neigungslinie der Ebene schliesst mit den Geraden ad, ae Winkel δ, δ_1 ein, deren Projectionen δ', δ'_1 grösser als sie selbst sind. Liegt die Neigungslinie innerhalb
Fig. 3. des Dreiecks *dae*, so ist $\delta + \delta_1 = \beta$, also $\delta' + \delta'_1 = \beta' > \beta$. Liegt
Fig. 4. die Neigungslinie ausserhalb des Dreiecks *dae*, so ist $\pm(\delta - \delta_1) = \beta$, also $\pm(\delta' - \delta'_1) = \beta'$, und denken wir die durch dea, dea' gehenden Kreise K, K_1, so ist $\beta' \gtreqless \beta$, je nachdem $K_1 \lesseqgtr K$. Es lässt sich daher nur sagen:

die Projection eines Winkels, dessen Ebene gegen $\mathfrak{P}$ geneigt ist, hat im Allgemeinen eine andere Grösse als der Winkel selbst.

Uebungs-Aufgabe. Für Fig. 4 den Winkel ε zu construiren, mit welchem β' den grössten Werth hat.

Aufgabe. Die Projection eines gegebenen Winkels β zu zeichnen, wenn die Neigungswinkel γ, γ_1 seiner Schenkel bekannt sind.

Es ist ein Dreieck dea' (nach obiger Bezeichnung) zu zeichnen als Projection eines Dreiecks dea, in welchem Winkel $a = \beta$. Nimmt man die Höhe von a (über $\mathfrak{P}$), also eine Strecke aa' beliebig, so ist jede der beiden Seiten da, ea von dea die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem aa' die eine Kathete, γ oder γ_1 der ihr gegenüber liegende Winkel ist. Aus diesen rechtwinkligen Dreiecken daa', eaa' lassen sich die Seiten da, ea, so wie ihre Projectionen da', ea' entnehmen. Die Seiten da, ea und der von ihnen eingeschlossene Winkel β bestimmen das Dreieck dea, welches die dritte Seite de des Dreiecks dea' ergiebt, in welchem a' der geforderte Winkel β' ist. Fig. 5a. Fig. 5.

18. Fällt die Ebene eines $n$seits (Polygons) N mit $\mathfrak{P}$ zusammen, so ist das $n$seit seine eigene Projection N'.

Ist die Ebene eines $n$seits N parallel mit $\mathfrak{P}$, so sind N, N' congruente Figuren. Denn jede Seite von N und ihre Projection sind parallel und gleich lang, jeder Winkel von N und seine Projection sind einander gleich, weil die entsprechenden Schenkel beider Winkel parallel sind.

Ist die Ebene $\mathfrak{E}$ eines $n$seits N gegen $\mathfrak{P}$ unter einem Winkel ε geneigt, so sind N, N' von verschiedener Grösse und Gestalt. Wir denken durch jede Ecke a, b, c, ... eine Neigungslinie der Ebene und bezeichnen deren in E liegende Durchgänge durch a^0, b^0, c^0, ... Diese letzteren Puncte sind ihre eigenen Projectionen, die der Neigungslinien normal auf E, die Strecken a^0a', b^0b', c^0c', ... durch das Verkürzungs-Verhältniss der Neigungslinien $\mathfrak{q} = \cos\varepsilon$ zu erhalten. Durch diese drei Bedingungen ist N' bestimmt.

19. Aufgabe. Die Projection eines gegebenen $n$seits N zu construiren, wenn dessen Lage gegen den Schnitt E seiner Ebene und deren Neigungswinkel ε gegeben sind.

Wir sehen die Ebene der Zeichnung als $\mathfrak{P}$ an und denken $\mathfrak{E}$ um E gedreht, bis sie mit $\mathfrak{P}$ zusammenfällt; dann lässt sich in $\mathfrak{P}$ das $n$seit in seiner wahren Gestalt und Lage gegen E zeichnen. Dieses Verfahren nennen wir Herabschlagen (Aufklappen) einer Fig. 6.

Ebene und bezeichnen einen Punct a der Ebene nach diesem Herabschlagen durch $[a]$ oder (a). Je nachdem die Drehung innerhalb des spitzen Winkels ε oder innerhalb seines Nebenwinkels gedacht wird, fällt das herabgeschlagene $n$seit in $[N]$ auf die Seite von E, auf welcher N' liegt, oder in (N) auf die entgegengesetzte Seite von E. Im ersten Falle sind $[N]$, N' in gleicher Lage oder gleichliegend gegen E, im zweiten Falle sind (N), N' in ungleicher Lage oder ungleichliegend gegen E; die eine der beiden Figuren hat die wahre, die andere die umgekehrte Gestalt von N.

Wir denken sodann die Ebene $\mathfrak{E}$ um E in ihre richtige Lage zurückgedreht und construiren die Projection des Punctes a, indem wir beachten, dass die herabgeschlagene Neigungslinie $[a]a^0$ oder $(a)a^0$ des Punctes und ihre Projection $a'a^0$ auf einander fallen (§. 15), und dass die Strecke $a'a^0 = (a)a^0 . \cos\varepsilon$ ist. Dieses umgekehrte Verfahren des ersten nennen wir Zurückschlagen der Ebene; beide sind die Grundverfahren der darstellenden Geometrie zur Ausführung von Constructionen im Raume durch Constructionen in der Ebene (§. 2).

Beim Ausführen der Zeichnung trage man den Winkel ε an irgend eine der herabgeschlagenen Neigungslinien, so dass sein Scheitel s in E liege; trage von s aus die Strecken $(a)a^0$, $(b)b^0$, $(c)c^0, \ldots$ auf den zweiten Schenkel des Winkels, und fälle von ihren Endpuncten Normalen (also mit E parallele Gerade) auf den ersten Schenkel, so bestimmen deren Abstände von s die Längen $a'a^0$, $b'b^0$, $c'c^0, \ldots$. Die Zeichnung wird deutlicher, wenn (N), N' ungleichliegend gegen E sind.

20. Um die Grössen von N, N' zu vergleichen, betrachten wir die durch die Neigungslinien aa^0, bb^0, $cc^0, \ldots$ gebildeten Trapeze a^0abb^0, $b^0bcc^0, \ldots$, deren (algebraische) Summe dem Inhalte von N gleich ist, d. h.:

$$N = \tfrac{1}{2}\left[a^0b^0(aa^0 + bb^0) + b^0c^0(bb^0 + cc^0) + \ldots\right].$$

Die Projectionen der Neigungslinien bilden entsprechende Trapeze $a^0a'b'b^0$, $b^0b'c'c^0, \ldots$, deren Summe dem Inhalte von N' gleich ist, d. h.

$$N' = \tfrac{1}{2}\left[a^0b^0(a'a^0 + b'b^0) + b^0c^0(b'b^0 + c'c^0) + \ldots\right].$$

Für letzteren Ausdruck lässt sich setzen:

$$N' = \tfrac{1}{2}\left[a^0b^0(aa^0 . \cos\varepsilon + bb^0 . \cos\varepsilon) + b^0c^0(bb^0 . \cos\varepsilon + cc^0 . \cos\varepsilon) + \ldots\right]$$

oder $N' = N . \cos \varepsilon$, d. h.

der Inhalt der Projection eines ebenen $n$seits ist gleich dem Producte des Inhalts des $n$seits in den Cosinus des Neigungswinkels seiner Ebene.

Das Verhältniss der Inhalte von N, N' ist demnach unabhängig von der Lage des $n$seits gegen E.

Ist $\cos \varepsilon = 1$, also $\varepsilon = 0$, so sind $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{P}$ parallel und N, N' congruente Figuren (wie schon §. 18 erwähnt).

Ist $\cos \varepsilon = 0$, also $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, so fallen die Projectionen aller Ecken von N in E, d. h.

die Projection jeder ebenen auf $\mathfrak{P}$ normalen Figur ist eine Gerade;

umgekehrt:

jede Gerade in $\mathfrak{P}$ ist die Projection der durch sie normal auf $\mathfrak{P}$ geführten Ebene und jeder Figur derselben.

21. Wenn wir die Gestalten von N, N' vergleichen, bemerken wir:

1) dass die verschiedenen Seiten von N verschiedene Verkürzungsverhältnisse haben, welche für jede Seite bei veränderter Lage von N gegen E andere Werthe erhalten (§. 16),
2) dass die Projectionen der Winkel andere Grössen als die Winkel selbst haben (§. 17).

Demnach ist die Gestalt von N' eine andere als die von N, sie ist selbst veränderlich je nach der Lage von N gegen E. Doch in jeder Lage von N schneidet sich je eine Seite ab, bc, ... mit ihrer Projection $a'b'$, $b'c'$, ... in ihrem Durchgange, und alle diese Durchgänge liegen in E. Die Beachtung dieser Eigenschaft gewährt Erleichterungen beim Zeichnen der Projection und giebt ein Mittel, ihre Richtigkeit zu prüfen.

Je zwei ebene Figuren, die in einer Ebene so gelegt werden können, dass

1) alle Verbindungsstrahlen ihrer einander entsprechenden Puncte parallel sind,
2) alle Durchschnittspuncte ihrer einander entsprechenden Seiten in einer Geraden liegen,

sind affine Figuren. Die unter 2) erwähnte Gerade nennen wir Affinitätsaxe.

Die beiden Eigenschaften affiner Figuren finden statt für ein $n$seit N und seine Projection N', wenn die Ebene des ersten auf die Projectionsebene herabgeschlagen ist. Danach sagen wir:

ein ebenes $n$seit und seine Projection sind affine Figuren.

22. Durch das Herabschlagen der Ebene ist die Ausführung der Aufgabe: „ein $n$seit zu projiciren" aus dem Raume in die Projectionsebene versetzt, und in dieser ein ebenes Projectionssystem entstanden. Da nämlich die Ebene $\mathfrak{E}$ der zu projicirenden Figur und die Projectionsebene $\mathfrak{P}$ auf einander gelegt sind, so ist die Ebene der Zeichnung zweifach, und eben so jeder ihrer Puncte zweifach, als der einen oder als der anderen Ebene angehörend, zu denken. Die Gerade E bleibt der Durchschnitt beider Ebenen, die Strahlen, welche die entsprechenden Puncte $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$, ... verbinden, sind die Projectionsstrahlen, welche an der beim Herabschlagen von $\mathfrak{E}$ stattfindenden Bewegung Theil nehmen und mit $\mathfrak{E}$ zugleich auf $\mathfrak{P}$ fallen. Ein solches Projectionssystem wird bestimmt durch:

1) die Affinitätsaxe E,
2) die Richtung der Projectionsstrahlen und
3) das unveränderliche Verhältniss $\mathfrak{q} = \frac{a'a^0}{aa^0} = \frac{b'b^0}{bb^0} = \ldots$, gegeben durch zwei entsprechende Puncte $a\,a'$.

Diese drei Angaben genügen, um zu jedem gegebenen $n$seit der einen Ebene das entsprechende der anderen Ebene zu construiren.

Sind, wie in obigem Falle, die Projectionsstrahlen normal auf der Affinitätsaxe, und ist $\mathfrak{q} = 1$, so sind je zwei entsprechende $n$seite congruente Figuren (symmetrische bei ungleicher Lage gegen die Affinitätsaxe); die Congruenz ist also ein besonderer Fall der Affinität.

Uebungs-Aufgaben. Die Projection eines Quadrats und die eines regelmässigen $n$seits (6, 8seits) zu construiren.

Jedes Dreiseit abc kann orthographisch so projicirt werden, dass seine Projection $a'b'c'$ einem gegebenen Dreiseite $\mathfrak{abc}$ ähnlich wird.

An eine seiner Seiten, etwa bc, trage man das dem $\mathfrak{abc}$ ähnliche Dreiseit a_1bc und zeichne den durch aa_1 gehenden Kreis K, dessen Mittelpunct auf bc liegt. K schneidet bc in den Puncten d, e, welche mit a, a_1 rechtwinklige Dreiseite dae, da_1e bilden, deren spitze Winkel von verschiedener Grösse sind; es sei Winkel $aed > a_1ed$. Fig. 6a.

Wir nehmen ae als Affinitätsaxe E, die Projectionsstrahlen parallel mit ad (also normal auf E), tragen den Winkel a_1ed in aed' und nehmen $\mathfrak{q} = \frac{ad'}{ad}$.

In dem so bestimmten Projectionssysteme ist das dem abc entsprechende Dreiseit $ab'c'$ das geforderte. Denn es sind zunächst die rechtwinkligen Dreiseite a_1ed, aed' ähnlich wegen der gleichen Winkel bei e, daher Winkel $a_1de = ad'e$; ferner ist:

$$a_1d : de : dc : db = ad' : d'e : d'c' : d'b',$$

also sind die Dreiseite a_1dc und $ad'c'$, a_1db und $ad'b'$, mithin auch a_1bc und $ab'c'$ ähnlich.

23. Es erhellt aus dem Vorhergehenden, dass die Lage eines Punctes, einer Geraden und einer Ebene, so wie die Länge einer Strecke, die Gestalt und Grösse einer Figur aus einer Projection eines solchen Gebildes allein nicht erkannt werden können. Und eben so wenig lässt sich von zwei solchen Gebilden die gegenseitige Lage im Raume aus einer Projection allein nachweisen. Wir beschränken uns auf die Angabe folgender Sätze über diese Lage.

1) Ist eine Gerade G oder eine Ebene $\mathfrak{E}$ normal auf $\mathfrak{P}$, so ist der Abstand eines Punctes a von ihnen gleich dem Abstande seiner Projection a' von G' oder von E. Denn jener Abstand ist die Länge der von a auf G oder auf $\mathfrak{E}$ gefällten Normalen und diese ist parallel mit $\mathfrak{P}$.

2) Ist eine Ebene $\mathfrak{E}$ normal auf $\mathfrak{P}$, so hat die Projection G' einer Geraden G dieselbe Lage in Bezug auf E als G zu $\mathfrak{E}$; sie liegt in ihr, ist ihr parallel oder schneidet sie (jedoch nicht unter gleichem Winkel).

3) Ist eine Gerade G normal auf einer Ebene $\mathfrak{E}$, so ist die Projection G' der Geraden normal auf dem Schnitte E der Ebene. Denn G und die durch ihren Fusspunct gehende mit E parallele Gerade der Ebene schliessen einen rechten Winkel ein, dessen einer Schenkel mit $\mathfrak{P}$ parallel ist (§. 15). Der umgekehrte Satz ist nicht richtig.

Man beachte ferner:

ist G normal auf $\mathfrak{P}$, also G' ein Punct, so sind $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{P}$ parallel, also die Projectionen aller Figuren in $\mathfrak{E}$ und die Figuren selbst sind congruent; und

ist G parallel mit $\mathfrak{P}$, ist also die Projection jeder Strecke derselben eine gleiche Strecke, so ist $\mathfrak{E}$ normal auf $\mathfrak{P}$, also die Projection jeder Figur in $\mathfrak{E}$ eine Gerade.

4) Der Winkel der Schnitte zweier auf $\mathfrak{P}$ normalen Ebenen ist gleich dem Winkel der Ebenen; bei Ebenen, die gegen $\mathfrak{P}$ geneigt sind, findet diese Gleichheit nicht statt.

24. Die orthographische Projection eines Raumgebildes ist also ungenügend zur Darstellung desselben und zur Ausführung von Constructionen. Doch findet sie Anwendung bei der Darstellung solcher Raumgebilde, an denen die Längenausdehnungen vorherrschen und die Höhen weniger bedeutend sind, z. B. bei Plänen oder Darstellungen einzelner Ortschaften und Feldmarken, beim Auftragen von Nivellements. Um Gegenstände dieser Art darzustellen, bedient man sich allgemein der orthographischen Horizontal-Projection, indem man von der Kugelgestalt der Erde absieht (§. 7) und eine wagerechte (horizontale) Projectionsebene annimmt, gleichviel ob unterhalb oder oberhalb der darzustellenden Gebilde.

Diese Projectionsebene nennt man den allgemeinen Horizont (auch die Vergleichungsebene) und die Operation des Projicirens selbst das Reduciren auf den Horizont. In diesem Sinne sagt man: ein Winkel, eine Figur soll auf den Horizont reducirt werden, wenn man ihre orthographische Projection auf eine horizontale Ebene fordert; Aufgaben, welche wir oben (§§. 17, 19) gelöst haben. Soll die Lage bemerkenswerther Puncte vollständig bestimmt werden, so giebt man deren Höhen (§. 11) über oder unter dem Horizont an, indem man diese Höhen durch Zahlen ausdrückt, welche ihre Maasse für eine gegebene Längen-Einheit sind. Die Höhenzahlen (französisch cotes, daher: Coten) können neben die Projectionen der Puncte eingetragen oder in besondere Tabellen zusammengestellt werden.

Zweites Capitel.

Darstellung von Puncten und Geraden auf zwei Projectionsebenen.

25. **D**a die Darstellung eines Raumgebildes durch seine Projection auf eine Ebene allein nicht vollständig erlangt wird, so ergänzt man sie durch eine Projection auf eine zweite Ebene. Alsdann wird das Verhalten des Gebildes gegen die eine Ebene ausgedrückt durch seine Projection auf die andere. Die beiden Ebenen können in beliebiger Lage gegen einander sein, doch nimmt man allgemein zwei auf einander rechtwinklige Projectionsebenen. Die darzustellenden Gebilde zeigen vorherrschend wagerechte und lothrechte Gerade und Ebenen, deshalb nimmt man in den Anwendungen:

die erste Projectionsebene $\mathfrak{P}_1$ in wagerechter Lage, daher: wagerechte, horizontale Projectionsebene,

die zweite Projectionsebene $\mathfrak{P}_2$ in lothrechter Lage, daher: lothrechte, verticale Projectionsebene.

Wir nennen:

erste Projection (Horizontal-Projection) eines Raumgebildes seine Projection in $\mathfrak{P}_1$,

zweite Projection (Vertical-Projection) desselben seine Projection in $\mathfrak{P}_2$,

Projectionsaxe, schlechtweg Axe (Grundschnitt), die Durchschnittslinie beider Ebenen.

Wir bezeichnen die Axe durch **A**, die erste Projection eines Punctes a durch a', seine zweite Projection durch a''. Die Axe ist in $\mathfrak{P}_1$ der Schnitt von $\mathfrak{P}_2$ und in $\mathfrak{P}_2$ der Schnitt von $\mathfrak{P}_1$.

Für die Theorie ist die Lage der Projectionsebenen im Raume gleichgiltig; die Ergebnisse der anzustellenden Betrachtungen so wie die Ausführung der Constructionen sind von jener besonderen Lage unabhängig.

26. Beide Projectionsebenen werden unendlich gedacht: jede derselben wird durch die Axe in zwei Hälften getheilt, $\mathfrak{P}_1$ in eine vordere Hälfte $\mathfrak{P}_1^v$ und in eine hintere $\mathfrak{P}_1^h$, $\mathfrak{P}_2$ in eine obere $\mathfrak{P}_2^o$ und in eine untere $\mathfrak{P}_2^u$. Der unendliche Raum wird durch beide Ebenen in vier Raumtheile zerlegt, wir nennen:

ersten Raumtheil den von $\mathfrak{P}_1^v$ und $\mathfrak{P}_2^o$ begrenzten, zweiten den von $\mathfrak{P}_1^h$ und $\mathfrak{P}_2^o$, dritten den von $\mathfrak{P}_1^h$ und $\mathfrak{P}_2^u$, vierten den von $\mathfrak{P}_1^v$ und $\mathfrak{P}_2^u$ begrenzten.

In den Anwendungen wählt man beide Projectionsebenen so, dass die darzustellenden Gebilde sich im ersten Raumtheile befinden.

Jeder Raumtheil ist ein (rechter) Flächenwinkel; wir nennen:

erste Halbirebene $\mathfrak{H}_1$ die Ebene, welche die Winkel des ersten und dritten Raumtheils halbirt,

zweite Halbirebene $\mathfrak{H}_2$ die Ebene, welche die Winkel des zweiten und vierten Raumtheils halbirt.

27. Die beiden Projectionen eines Gebildes werden in den Anwendungen oft in verschiedenen Ebenen ausgeführt; für theoretische Untersuchungen ist es vortheilhaft, sie in einer Ebene vereinigt zu haben. Man denkt deshalb $\mathfrak{P}_2$ um die Axe gedreht und auf $\mathfrak{P}_1$ herabgeschlagen, und zwar so, dass $\mathfrak{P}_2^o$ auf $\mathfrak{P}_1^h$, $\mathfrak{P}_2^u$ auf $\mathfrak{P}_1^v$ fällt (oder $\mathfrak{P}_1$ in gleicher Weise auf $\mathfrak{P}_2$ herabgeschlagen).

Darstellende Geometrie im engeren Sinne ist dieses Verfahren: ein Raumgebilde durch orthographische Projectionen auf zwei sich rechtwinklig schneidende Ebenen darzustellen, von denen die eine auf die andere herabgeschlagen wird.

Die Ebene jeder Zeichnung der darstellenden Geometrie ist also zweifach aufzufassen, d. h. als zwei auf einander liegende Ebenen, die man im Geiste in ihre ursprüngliche Lage zu versetzen hat. (Doch entsteht durch dieses Zusammenfallen beider Projectionsebenen im Allgemeinen kein ebenes Projectionssystem wie in §. 22). Der Durchschnitt beider Ebenen, die Axe **A**, wird stets angegeben, und zwar unter rechtem Winkel gegen die Richtung (von oben nach unten), durch welche man in Zeichnungen lothrechte Gerade ausdrückt.

28. Bei der Annahme der $\mathfrak{P}_1$ in wagerechter und der $\mathfrak{P}_2$ in lothrechter Lage haben die Winkel, welche die Projectionsebenen mit den an den Gebilden vorkommenden lothrechten und wagerechten

Geraden und Ebenen einschliessen, die einfachen Werthe 0 und $\frac{\pi}{2}$, welche ein leichtes Erkennen der Gebilde aus ihren Projectionen und einfache Lösungen der über sie gestellten Aufgaben bewirken.

Bei den nicht wagerechten und lothrechten Geraden und Ebenen haben jene Winkel beliebige Werthe, die Lösung der Aufgaben wird jedoch stets vereinfacht, wenn die Winkel auf die einfachen Werthe gebracht werden können. Diess wird erlangt durch Einführung von Projectionsebenen, die eine andere Lage als die beiden ersten haben, oder durch Veränderung der Lage einer, auch beider ersten. Ueber die Wahl dieser Ebenen lässt sich keine feste Regel geben ausser dieser:

jede neue Projectionsebene wird normal auf einer der vorhergehenden genommen.

Wir nennen dieselben dritte, vierte, ... Projectionsebene $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$, ... und bezeichnen die Projection eines Punctes a in denselben durch a''', a'''', ... Die Durchschnittslinie von $\mathfrak{P}_3$ mit $\mathfrak{P}_1$ (oder mit $\mathfrak{P}_2$) nennen wir die zweite Axe und bezeichnen sie durch $\mathbf{A}_2$, und so fort. Wir denken $\mathfrak{P}_3$ um $\mathbf{A}_2$ gedreht, bis sie mit $\mathfrak{P}_1$ (oder mit $\mathfrak{P}_2$) zusammenfällt. Aehnlich verfährt man bei Annahme einer vierten Projectionsebene.

Die dritte Projectionsebene $\mathfrak{P}_3$ wird häufig normal auf den beiden ersten $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ angenommen.

Darstellung des Punctes.

29. Durch einen Punct a des Raumes denken wir zwei Projectionsstrahlen aa' normal auf $\mathfrak{P}_1$, aa'' normal auf $\mathfrak{P}_2$. Die Strecke aa', seine Höhe über $\mathfrak{P}_1$, nennen wir seine erste Höhe (Horizontal-Distanz), die Strecke aa'' seine zweite Höhe (Vertical-Distanz).

Die Ebene der beiden Projectionsstrahlen oder die projicirende Ebene des Punctes ist normal auf $\mathfrak{P}_1$ und auf $\mathfrak{P}_2$, also auf $\mathbf{A}$; sie schneidet $\mathbf{A}$ in einem Puncte, den wir durch a^0 bezeichnen, $\mathfrak{P}_1$ in einer Geraden $a'a^0$, $\mathfrak{P}_2$ in einer Geraden $a''a^0$; beide Gerade sind normal auf $\mathbf{A}$. Die Strecke $a'a^0$ nennen wir die erste Ordinate des Punctes, die Strecke $a''a^0$ seine zweite Ordinate.

Die Figur $aa'a^0a''$ ist ein Rechteck, daraus folgt

$a''a^0 = aa'$, d. h. die zweite Ordinate eines Punctes ist gleich seiner ersten Höhe, und

$a'a^0 = aa''$, d. h. die erste Ordinate eines Punctes ist gleich seiner zweiten Höhe.

Fig. 7. **30.** Beim Herabschlagen von $\mathfrak{P}_2$ auf $\mathfrak{P}_1$ fallen beide Ordinaten der Richtung nach in einander, denn beide gehen durch denselben Punct a^0 und sind normal auf $\mathbf{A}$, also:

die Gerade, welche (in der Zeichnung) beide Projectionen eines Punctes verbindet, schneidet die Axe unter rechtem Winkel; und umgekehrt:

irgend zwei Puncte einer Geraden, welche (in der Zeichnung) die Axe rechtwinklig schneidet, sind die Projectionen eines Punctes im Raume.

Denn denkt man $\mathfrak{P}_2$ mit a'' zurückgeschlagen (§. 19), so bestimmen die Geraden $a'a^0$, $a''a^0$ die auf $\mathbf{A}$ in a^0 normale Ebene; führt man durch a' und durch a'' je einen Projectionsstrahl normal auf $\mathfrak{P}_1$ und auf $\mathfrak{P}_2$, so liegen diese in jener Ebene und schneiden sich im Puncte a. Hieraus folgt:

ein Punct ist durch zwei Projectionen bestimmt.

31. Lagen eines Punctes. Je nachdem ein Punct a oberhalb, in, unterhalb $\mathfrak{P}_1$ liegt, ist seine erste Höhe aa', also seine zweite Ordinate $a''a^0$ positiv (oberhalb $\mathbf{A}$), Null, negativ. Je nachdem ein Punct vor, in, hinter $\mathfrak{P}_2$ liegt, ist seine zweite Höhe aa'', also seine erste Ordinate $a'a^0$ positiv (vor $\mathbf{A}$), Null, negativ. Sind $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ auf einander gelegt, so sind die positiven Richtungen (eben so die negativen) beider Ordinaten in der Zeichnung einander entgegengesetzt.

Aus der Verbindung der drei ersten Lagen mit den drei anderen ergeben sich neun Lagen eines Punctes in Bezug auf zwei Projectionsebenen, nämlich

in der Axe:	eine Lage,
in der einen Hälfte einer Projectionsebene:	vier Lagen,
in je einem Raumtheile:	vier Lagen.

Jeder Punct a einer der beiden Halbirebenen (§. 26) ist in gleichem Abstande von $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, hat also zwei gleiche Ordinaten; daher:

liegt a in $\mathfrak{H}_1$, so liegen seine Projectionen symmetrisch gegen $\mathbf{A}$, und liegt a in $\mathfrak{H}_2$, so fallen seine Projectionen (in der Zeichnung) in einander. Umgekehrt: jeder Punct, dessen Projectionen in einander liegen, ist ein Punct von $\mathfrak{H}_2$.

Uebungs-Aufgabe. Die dreizehn Lagen eines Punctes durch Zeichnungen darzustellen.

32. Haupt-Aufgabe. Die dritte Projection eines Punctes zu construiren; d. h. ein Punct a ist gegeben durch seine Projectionen a' in $\mathfrak{P}_1$, a'' in $\mathfrak{P}_2$; eine dieser Ebenen soll beibehalten werden, etwa $\mathfrak{P}_1$, an die Stelle der anderen, $\mathfrak{P}_2$, eine dritte, $\mathfrak{P}_3$, gesetzt und in dieser die Projection a''' bestimmt werden.

Die für zwei Projectionen eines Punctes aufgestellten Gesetze gelten für $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_3$, weil $\mathfrak{P}_3$ normal auf $\mathfrak{P}_1$ ist; wird also $\mathfrak{P}_3$ auf $\mathfrak{P}_1$ herabgeschlagen, so schneiden sich die Gerade $a'a'''$ und die neue Axe $\mathbf{A}_2$ unter rechtem Winkel; wir bezeichnen ihren Durchschnitt mit a^2. Da die dritte Höhe des Punctes eine andere ist als die zweite, so ändert sich die erste Ordinate des Punctes. Die dritte Ordinate a^2a''' muss der ersten Höhe gleich werden, welche durch die ihr gleiche zweite Ordinate bekannt ist. Daher die allgemeine Lösung der Aufgabe:

man ziehe durch die beizubehaltende Projection des Punctes die Normale auf die neue Axe und nehme die dritte Ordinate gleich der wegfallenden.

Nicht zu übersehen ist, dass die dritte Ordinate gleich der wegfallenden positiv, Null, negativ sein muss; die Richtung der positiven dritten Ordinate wird der der positiven in der bleibenden Projectionsebene in Bezug auf $\mathbf{A}_2$ entgegengesetzt, es müsste denn die Deutlichkeit der Zeichnung durch gleiche Richtung der positiven Ordinaten gewinnen.

Beispiele. 1) $\mathfrak{P}_3$ sei parallel mit $\mathfrak{P}_1$, und es sei p der Abstand beider Ebenen; oder $\mathfrak{P}_1$ habe sich parallel mit ihrer ersten Lage bewegt. $\mathbf{A}_2$ muss parallel mit $\mathbf{A}$ im Abstande p von ihr sein; a'' bleibt, die Gerade $a''a'''$ fällt mit $a'a''$ zusammen, und die zweite Ordinate wird um p (algebraisch) vermindert. Fig. 8.

2) $\mathfrak{P}_3$ sei normal auf $\mathfrak{P}_1$ und auf $\mathfrak{P}_2$, oder $\mathfrak{P}_2$ mache eine Viertel-Drehung um eine auf $\mathbf{A}$ normale Gerade xy. $\mathbf{A}_2$ wird normal auf $\mathbf{A}$; a' bleibt; die erste Ordinate ändert Richtung und Länge. Fig. 9.

3) $\mathfrak{P}_3$ sei auf einer der ersten Ebenen, etwa auf $\mathfrak{P}_2$, normal und gegen die andere, also gegen $\mathfrak{P}_1$, geneigt, oder es mache $\mathfrak{P}_1$ eine Drehung von beliebigem Winkel δ um eine auf $\mathbf{A}$ normale Gerade xy. $\mathbf{A}_2$ schneidet $\mathbf{A}$ unter dem Winkel δ; a'' ändert sich nicht, aber die zweite Ordinate ändert Richtung und Länge. Fig. 10.

Man kann in beiden letzten Fällen die Herleitung des Punctes a''' aus der wegfallenden Projection zeigen, wenn man im Durchschnitt x der beiden Axen Normalen xy auf $\mathbf{A}$, xz auf $\mathbf{A}_2$ errichtet, durch die wegfallende Projection (a'' in Fig. 9, a' in Fig. 10) die Parallele mit $\mathbf{A}$ zieht, welche xy in y schneidet, mit x als Mittelpunct und der Strecke xy als Halbmesser einen Kreisbogen schlägt, welcher xz in z schneidet, und durch z die Parallele mit $\mathbf{A}_2$ bis zum Puncte a''' zieht.

33. Aufgabe. Den Abstand zweier Puncte zu messen.

Man führe durch beide Puncte a, b eine $\mathfrak{P}_3$, so ist der geforderte Abstand die Strecke $a'''b'''$. $\mathbf{A}_2$ wird durch die gleichnamigen Projectionen beider Puncte geführt (durch $a'b'$, wenn $\mathfrak{P}_3$ normal auf $\mathfrak{P}_1$, oder durch $a''b''$, wenn $\mathfrak{P}_3$ normal auf $\mathfrak{P}_2$ genommen wird).

Das rechtwinklige Dreieck, dessen eine Kathete der Abstand der gleichnamigen Projectionen der Puncte, also $a'b'$ oder $a''b''$, dessen zweite Kathete der (algebraische) Unterschied der gleichnamigen Höhen der Puncte, also $\pm(a^0a'' - b^0b'')$ oder $\pm(a^0a' - b^0b')$, ist, liefert in seiner Hypotenuse ebenfalls den geforderten Abstand.

Darstellung der Geraden.

34. Durch eine Gerade G des Raumes denken wir zwei projicirende Ebenen, die erste GG' normal auf $\mathfrak{P}_1$, die zweite GG'' normal auf $\mathfrak{P}_2$; die Schnitte derselben sind die Projectionen G', G'' der Geraden.

Soll eine Gerade durch zwei gegebene Puncte gehen, so gehen ihre Projectionen durch die gleichnamigen Projectionen der Puncte.

Lagen einer Geraden. *a)* Ist eine Gerade parallel mit beiden Projectionsebenen, so sind ihre beiden Projectionen parallel mit $\mathbf{A}$, denn die projicirenden Ebenen sind parallel: GG' mit $\mathfrak{P}_2$, GG'' mit $\mathfrak{P}_1$. Sie liegt ins Besondere

in der Axe:	eine Lage,
in der einen Hälfte einer Projectionsebene:	vier Lagen,
in dem einen Raumtheile:	vier Lagen.

Liegt sie in $\mathfrak{H}_1$, so sind beide Projectionen in gleichem Abstande von $\mathbf{A}$, liegt sie in $\mathfrak{H}_2$, so fallen (in der Zeichnung) beide Projectionen in einander.

Umgekehrt: zwei mit $\mathbf{A}$ parallele Gerade können zwei Projectionen einer Geraden sein.

35. *b)* Ist eine Gerade parallel mit einer Projectionsebene und geneigt gegen die andere, so ist ihre Projection in dieser parallel mit $\mathbf{A}$, in jener geneigt gegen $\mathbf{A}$. Ist z. B. G parallel mit $\mathfrak{P}_1$, geneigt gegen $\mathfrak{P}_2$, so ist GG'' parallel mit $\mathfrak{P}_1$, also G'' parallel mit $\mathbf{A}$, und GG' ist geneigt gegen $\mathfrak{P}_2$, also G' geneigt gegen $\mathbf{A}$.

Wir nennen ersten, zweiten Durchgang einer Geraden ihre Durchschnitte mit $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ und bezeichnen sie d_1, d_2. Die erste Höhe von d_1 und die zweite Höhe von d_2 sind Null, daher liegen d''_1, d'_2 in **A**.

Besondere Lagen der Geraden sind:

in einer Projectionsebene selbst: zwei Lagen
(ihre Projection in der andern fällt in **A**),
parallel mit $\mathfrak{P}_1$: zwei Lagen
(sie hat nur einen zweiten Durchgang),
parallel mit $\mathfrak{P}_2$: zwei Lagen
(sie hat nur einen ersten Durchgang).

Umgekehrt: eine mit **A** parallele und eine gegen **A** geneigte (doch nicht normale) Gerade können zwei Projectionen einer Geraden sein.

Ist die Gerade normal auf der einen Projectionsebene, so ist ihre Projection in dieser ein Punct, in der anderen eine Normale auf **A**; denn diese andere und die projicirende Ebene, also auch der Durchschnitt beider d. h. die Projection der Geraden, sind auf jener normal. Auch für diesen Fall finden die angegebenen sechs Lagen statt.

Umgekehrt: ist die eine Projection einer Geraden normal auf **A**, so kann die andere ein (in der Zeichnung) in derselben liegender Punct sein, sie darf weder parallel mit **A** noch geneigt gegen **A** sein.

36. *c)* Ist eine Gerade geneigt gegen beide Projectionsebenen, so sind ihre beiden Projectionen geneigt gegen **A**. Sie hat zwei Durchgänge und ins Besondere vier Lagen je nach den vier Raumtheilen, in denen die von den Durchgängen begrenzte Strecke der Geraden liegt. Diese Strecke wird Null, wenn beide Durchgänge in einander fallen, d. h. wenn die Gerade und **A** sich schneiden; diess giebt zwei neue Lagen.

Liegt die Gerade zugleich in $\mathfrak{H}_1$, so liegen ihre beiden Projectionen symmetrisch gegen **A**, und liegt sie in $\mathfrak{H}_2$, so fallen beide Projectionen in einander.

Umgekehrt: zwei gegen die Axe (doch nicht unter rechtem Winkel) geneigte Gerade können zwei Projectionen einer Geraden sein.

Liegt die Gerade in einer auf **A** normalen Ebene, so fallen mit dieser ihre beiden projicirenden Ebenen in einander; daher sind beide Projectionen normal auf **A** und fallen (in der Zeichnung) in einander. Auch in diesem Falle finden obige sechs (oder acht) Lagen statt.

Umgekehrt: ist die eine Projection einer Geraden normal auf **A**, so ist es auch die andere, und fällt (in der Zeichnung) mit ihr zusammen. Zwei auf **A** normale aber (in der Zeichnung) nicht zusammenfallende Gerade, ebenso eine auf **A** normale und eine mit ihr parallele oder gegen sie geneigte Gerade können nicht Projectionen einer Geraden sein.

Uebungs - Aufgabe. Die 41 Lagen einer Geraden durch Zeichnung darzustellen.

37. Durch zwei Projectionen G', G'' ist im Allgemeinen eine Gerade bestimmt; denn denkt man G'' mit $\mathfrak{P}_2$ in den Raum zurückgeschlagen, und errichtet durch G', G'' die projicirenden Ebenen normal auf $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, so schneiden sich diese Ebenen in G. Sind jedoch beide Projectionen normal auf **A**, so fallen beide projicirende Ebenen in einander; also streng genommen:

durch drei Projectionen, von denen keine zwei in parallelen Ebenen, ist eine Gerade bestimmt.

Durch zwei Projectionen zweier ihrer Puncte ist eine Gerade bestimmt.

In den Anwendungen kommen nur Strecken vor; eine solche ist also durch die Projectionen ihrer Endpuncte bestimmt.

Aufgabe. Die dritte Projection einer Geraden zu construiren, die durch ihre Projectionen auf zwei Ebenen gegeben ist, oder durch die Projectionen zweier ihrer Puncte, wenn sie in einer auf **A** normalen Ebene liegt.

Man construire die dritten Projectionen zweier ihrer Puncte (§. 32), und führe durch sie die der Geraden.

Aufgabe. Die Durchgänge einer Geraden zu construiren.

Fig. 11. Der Durchschnitt von **A** mit G'' ist d_1'' und der von **A** mit G' ist d_2'; die Geraden $d_1\,d_1''$, $d_2\,d_2'$ müssen normal auf **A** sein. Liegt G in einer auf **A** normalen Ebene, so löse man die Aufgabe in einer $\mathfrak{P}_3$, welche man durch die Gerade selbst führen kann.

Uebungs - Aufgabe. Aus den gegebenen Durchgängen d_1, d_2 einer Geraden ihre Projectionen zu construiren.

38. Aufgabe. Die beiden Neigungswinkel einer Geraden zu messen.

Fig. 12. Es seien γ_1, γ_2 ihre Winkel mit $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$. Nimmt man die erste projicirende Ebene der Geraden als $\mathfrak{P}_3$, so dass $\mathbf{A}_2$ mit G' zusammenfällt, so schliesst G''' mit G' den Winkel γ_1 ein; ähnlich verfahre man für γ_2. Nimmt man die von beiden Durchgängen

d_1, d_2 der Geraden begrenzte Strecke als Einheit, so ist: $d_1 d'_2 = \cos\gamma_1$, $d'_2 d_2 = \sin\gamma_1$, $d_2 d''_1 = \cos\gamma_2$ und $d''_1 d_1 = \sin\gamma_2$. Da nun $d''_1 d_1$ normal auf **A** ist, so ist $\cos\gamma_1 \gtreqq \sin\gamma_2$ d. h. $\gamma_1 + \gamma_2 \leqq \frac{\pi}{2}$. Für $\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\pi}{2}$ liegt G in einer auf **A** normalen Ebene.

Aufgabe. Die Projectionen einer Geraden zu construiren, deren beide Neigungswinkel gegeben sind.

Es muss nach dem Vorgehenden $\gamma_1 + \gamma_2 \leqq \frac{\pi}{2}$ sein. Man Fig. 13.
nehme eine beliebige Strecke als Einheit, construire $\cos\gamma_1$, $\sin\gamma_1$, $\cos\gamma_2$, $\sin\gamma_2$ und setze aus ihnen das Trapez $d_1 d'_1 d_2 d'_2$ der vorigen Aufgabe zusammen.

Beachtet man, 1) dass die Einheit beliebig genommen ist und 2) dass jede der parallelen Seiten des Trapezes positiv oder negativ sein kann, so sieht man, dass es vier Schaaren von parallelen Geraden giebt, welche die Aufgabe lösen, indem die Strecke $d_1 d_2$ eine verschiedene Länge und in jedem der zwei Paare von Scheitel-Raumtheilen zwei verschiedene Lagen erhalten kann.

Ist $\gamma_1 = \gamma_2$ und werden $d_1 d''_1$, $d_2 d'_2$ zugleich positiv oder negativ (§. 31) genommen, so sind beide Projectionen einander parallel und die Gerade ist parallel mit $\mathfrak{H}_2$; wird eine jener Strecken positiv, die andere negativ genommen, so schliessen beide Projectionen mit **A** gleiche, aber auf entgegengesetzten Seiten liegende Winkel ein, und die Gerade ist parallel mit $\mathfrak{H}_1$ (§. 26).

39. Sind $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die Neigungswinkel einer Geraden gegen drei Projectionsebenen, von denen jede normal auf beiden anderen ist, so ist:

$$1)\ \sin^2\gamma_1 + \sin^2\gamma_2 + \sin^2\gamma_3 = 1,$$
$$2)\ \cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3 = 2.$$

Es seien d_1, d_2 die Durchgänge der Geraden; man führe die Fig. 14.
$\mathfrak{P}_3$, also $\mathbf{A}_2$, durch d_2 und construire die dritte Projection der Geraden. Dieselbe zeigt, dass:

$$\sin^2\gamma_3 = \cos^2\gamma_1 - \sin^2\gamma_2 = 1 - \sin^2\gamma_1 - \sin^2\gamma_2$$
$$\text{und } \cos^2\gamma_3 = \sin^2\gamma_1 + \sin^2\gamma_2 = 1 - \cos^2\gamma_1 + 1 - \cos^2\gamma_2,$$

woraus obige Gleichungen folgen.

Von den drei Winkeln γ_1, γ_2, γ_3 kann demnach irgend einer einen beliebigen Werth γ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, ein zweiter einen beliebigen Werth zwischen 0 und $\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$ erhalten. Der dritte ist alsdann bestimmt und wird durch Construction, oder durch Rechnung mit Hilfe einer der beiden Gleichungen, erhalten.

40. Haupt - Aufgabe. Eine Projectionsebene zu wählen, die auf einer gegebenen Geraden normal ist.

Fig. 15. Die Gerade sei durch die Projectionen zweier ihrer Puncte a, b gegeben; wir nehmen an, sie sei weder parallel mit einer Projectionsebene, noch normal auf ihr. Man nehme eine $\mathfrak{P}_3$ parallel mit der einen projicirenden Ebene der Geraden, etwa der ersten, also $\mathbf{A}_2$ parallel mit $a'b'$; es kann auch die projicirende Ebene selbst als $\mathfrak{P}_3$ genommen werden, so dass $a'b'$ als $\mathbf{A}_2$ gilt. Nachdem $a'''b'''$ construirt worden (§. 37), nehme man eine $\mathfrak{P}_4$ normal auf $\mathfrak{P}_3$ und so, dass $\mathbf{A}_3$ normal auf $a'''b'''$ ist; $\mathfrak{P}_4$ ist die geforderte Ebene. Leitet man $a''''b''''$ aus $a'''b'''$, $a'b'$ ab, so ist $a''''b''''$ ein Punct.

Punct und Gerade.

41. Liegt ein Punct in einer Geraden, so liegen seine Projectionen in den gleichnamigen Projectionen der Geraden, d. h. seine erste Projection in der ersten Projection der Geraden, und so fort.

Umgekehrt: liegen zwei (streng genommen drei) Projectionen eines Punctes in den gleichnamigen Projectionen einer Geraden, so liegt auch der Punct in der Geraden; zwei Projectionen genügen nicht, wenn die Gerade in einer auf $\mathbf{A}$ normalen Ebene liegt.

Aufgabe. Die in $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ (§. 26) liegenden Puncte einer Geraden zu bestimmen.

Da die Puncte der $\mathfrak{H}_1$ in der Zeichnung symmetrisch gegen $\mathbf{A}$ liegen, so schneidet eine Gerade, welche mit der einen Projection der Geraden symmetrisch gegen $\mathbf{A}$ liegt, deren andere in der Projection des in $\mathfrak{H}_1$ liegenden Punctes. Beide Projectionen der Geraden schneiden sich in einem Puncte, in welchem beide des in $\mathfrak{H}_2$ liegenden Punctes zusammenfallen. Liegt die Gerade in einer auf $\mathbf{A}$ normalen Ebene, so wende man eine $\mathfrak{P}_3$ an.

Aufgabe. Auf eine Gerade eine Strecke von gegebener Länge von einem in ihr gegebenen Puncte aus abzutragen.

Man nehme die eine projicirende Ebene der Geraden als $\mathfrak{P}_3$ an und löse in ihr die Aufgabe.

Die ersten Projectionen von Strecken einer Geraden verhalten sich wie ihre zweiten (und wie ihre dritten) Projectionen.

Denn sind ab, bc zwei solche Strecken, so ist (§. 13):

$$\frac{a'b'}{b'c'} = \frac{ab}{bc} \text{ und } \frac{a''b''}{b''c''} = \frac{ab}{bc}, \text{ folglich: } \frac{a'b'}{b'c'} = \frac{a''b''}{b''c''}.$$

Liegen daher in einer auf **A** normalen Geraden die beiden Projectionen dreier Puncte a, b, c, ist $\frac{a'b'}{b'c'} = \frac{a''b''}{b''c''}$, und folgen sowohl a', b', c', als a'', b'', c'' in gleicher Ordnung auf einander, so liegen die drei Puncte a, b, c in einer Geraden.

42. Liegt ein Punct ausserhalb einer Geraden, so liegt mindestens die eine seiner (drei) Projectionen ausserhalb der gleichnamigen Projection der Geraden.

Aufgabe. Den Abstand eines Punctes von einer Geraden zu messen.

Ist die Gerade normal auf einer Projectionsebene, so projicirt sich der geforderte Abstand auf diese Ebene in wahrer Länge (§. 23. 1). — Ist die Gerade nicht normal auf einer Projectionsebene, so wähle man eine $\mathfrak{P}_3$, nöthigen Falls eine $\mathfrak{P}_4$, für welche diese Lage stattfindet (§. 40).

Aufgabe. Von einem gegebenen Puncte die Normale auf eine gegebene Gerade zu fällen.

Die Aufgabe ist die vorige, nur fordert man von der Normalen nicht die Länge, sondern die Projectionen auf $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$.

Es sei für beide Aufgaben ab die Gerade, m der Punct. Man Fig. 16. nehme $a'b'$ als $\mathbf{A}_2$ und construire $a'''b'''$, m'''; sodann $\mathbf{A}_3$ normal auf $a'''b'''$ und construire $a''''b''''$, m''''. (Da $a'b'$ in $\mathbf{A}_2$ liegt, so wird $a''''b''''$ ein Punct in $\mathbf{A}_3$). Nun ist die vierte Projection der Normalen mn die Gerade, welche durch m'''' und $a''''b''''$ geht; die dritte Projection $m'''n'''$, parallel mit $\mathbf{A}_3$, schneidet $a'''b'''$ in n''', d. h. in der Projection des Fusspunctes der Normalen auf ab. Aus n''' leite man n' und n'' aus n' ab; die Geraden $m'n'$, $m''n''$ sind die Projectionen der geforderten Normalen.

Bei der ersten Aufgabe ist das Zeichnen der Geraden $m'''n'''$, $m'n'$, $m''n''$, bei der zweiten dagegen die Annahme der $\mathfrak{P}_4$ unnöthig.

Zwei Gerade.

43. Dieselben liegen entweder in einer Ebene oder nicht.

Ist die Ebene zweier Geraden normal auf einer Projectionsebene, so ist sie die projicirende Ebene jeder der beiden Geraden für diese Projectionsebene, und die Projectionen beider Geraden fallen in dieser Ebene in einander.

Ist die Ebene der Geraden normal auf zwei Projectionsebenen, so fallen beide gleichnamigen Projectionen der Geraden in einander und sind normal auf **A**, also fallen in der Zeichnung die vier Projectionen in einander.

Die Ebene zweier Geraden kann nicht normal sein auf drei Projectionsebenen (von denen keine zwei parallel sind), daher können die gleichnamigen Projectionen zweier Geraden nicht in drei Projectionsebenen in einander fallen.

44. Sind zwei Gerade parallel, und ist ihre Ebene nicht normal auf einer Projectionsebene, so sind ihre gleichnamigen Projectionen parallele Gerade.

Umgekehrt: sind zwei, streng genommen drei, gleichnamige Projectionen zweier Geraden parallel, so sind es auch die Geraden; die dritten Projectionen sind nothwendig, wenn jede Gerade in einer auf **A** normalen Ebene liegt.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punct die Parallele mit einer gegebenen Geraden zu führen.

Die Lösung ist nur für den Fall zu erwähnen, dass die gegebene Gerade in einer auf **A** normalen Ebene liegt, also durch zwei Puncte a, b gegeben sein muss. Alsdann ist die geforderte Gerade, die durch den Punct m gehen soll, durch ihre Projectionen nicht bestimmt; man erhält einen zweiten Punct n derselben, wenn man $m'n' = a'b'$, $m''n'' = a''b''$ nimmt und den gleichen Strecken gleiche Richtungen giebt (§§. 13, 41).

Aufgabe. Den Abstand zweier parallelen Geraden zu messen.

Man nehme in der einen Geraden irgend einen Punct; dessen Abstand von der zweiten Geraden (§. 42) ist der geforderte.

Schneiden sich zwei Gerade, und ist ihre Ebene nicht normal auf einer Projectionsebene, so schneiden sich ihre gleichnamigen Projectionen; die Gerade, welche in der Zeichnung die Durchschnittspuncte der zwei gleichnamigen Projectionen verbindet, ist normal auf der Axe.

Fig. 16a. **Uebungs-Aufgabe.** Den Durchschnitt zweier Geraden ab, cd zu construiren, welche in einer auf **A** normalen Ebene liegen. (Vergl. die Figur).

Umgekehrt: schneiden sich zwei, streng genommen drei, gleichnamige Projectionen zweier Geraden, und ist die Gerade, welche die Durchschnitte von zwei gleichnamigen Projectionen verbindet, normal auf der entsprechenden Axe, so schneiden sich die Geraden; die dritten Projectionen sind nothwendig, wenn eine der beiden Geraden in einer auf **A** normalen Ebene liegt.

45. Zwei Gerade, welche nicht in einer Ebene liegen, also zwei Gerade im Raume, nennen wir windschiefe Gerade, und ihren Winkel den, welchen die eine mit der durch irgend einen ihrer Puncte parallel zur anderen geführten Geraden einschliesst.

Sind die gleichnamigen projicirenden Ebenen zweier windschiefen Geraden parallel, so sind die Projectionen derselben in der entsprechenden Projectionsebene parallel. Sind die projicirenden Ebenen normal auf **A**, so sind die beiden gleichnamigen Projectionen der Geraden parallel und normal auf **A**. Drei gleichnamige Projectionen zweier windschiefen Geraden können nicht parallel sein.

Sind keine zwei gleichnamige projicirende Ebenen zweier windschiefen Geraden parallel, so sind deren gleichnamige Projectionen zwei sich schneidende Gerade. Die Gerade, welche die Durchschnittspuncte ihrer gleichnamigen Projectionen verbindet, ist im Allgemeinen nicht normal auf der Axe; sie ist es, wenn eine der beiden Geraden in einer auf der Axe normalen Ebene liegt.

46. Aufgabe. Den Abstand zweier windschiefen Geraden zu messen.

Eine dritte Gerade, welche auf beiden gegebenen G, G_1 normal ist, wird von ihnen in zwei Puncten m, n geschnitten; die Strecke mn ist der geforderte Abstand. Ist die eine gegebene Gerade G normal auf einer Projectionsebene, etwa auf $\mathfrak{P}_1$, so ist mn parallel mit derselben Projectionsebene, also $m'n' = mn$ und $m'n'$ normal auf G'_1 (§. 15). Da Punct m' auf G' fällt, so ergiebt sich der geforderte Abstand in der Länge der von m' auf G'_1 gefällten Normalen. Ist keine der beiden Geraden normal auf einer der ersten Projectionsebenen, so nehme man eine $\mathfrak{P}_3$, nöthigen Falls eine $\mathfrak{P}_4$, auf welcher eine der beiden Geraden normal ist (§. 40), und löse in dieser die Aufgabe. Fig. 17.

Aufgabe. Auf zwei windschiefe Gerade die gemeinschaftliche Normale zu fällen.

Die Aufgabe ist die vorige, nur fordert man nicht die Länge der Strecke mn, sondern die Projectionen der Geraden mn. Ist G auf einer Projectionsebene, etwa auf $\mathfrak{P}_1$, normal, so ist $m'n'$ normal auf G'_1, $m''n''$ parallel mit **A**; man erhält $m''n''$, wenn man n'' aus n' herleitet und durch n'' die Gerade $m''n''$ parallel mit **A** zieht. Man wende eine $\mathfrak{P}_3$ oder $\mathfrak{P}_4$ an, wenn keine der gegebenen Geraden normal auf $\mathfrak{P}_1$ oder auf $\mathfrak{P}_2$ ist. Fig. 17.

Uebungs-Aufgaben. 1) Zwei windschiefe Gerade sind gegeben; man fordert in der einen derselben einen Punct in gegebenem Abstand von der anderen.

2) Den Abstand der beiden Projectionen einer Geraden zu messen.

Drittes Capitel.

Darstellung von Ebenen auf zwei Projectionsebenen.

47. **D**ie Linie wurde als eine stetige Folge von Puncten gedacht (§. 8); jeder dieser Puncte ist durch zwei Projectionen bestimmt, und die stetige Folge der innerhalb der Grenzen der Zeichnung liegenden gleichnamigen Projectionen dieser Puncte bildet zwei Linien als Projectionen der gegebenen Linie.

Die Fläche wurde als eine stetige Folge von Linien gedacht (§. 9); jede dieser Linien ist im Allgemeinen durch zwei Projectionen bestimmt, aber die stetige Folge der gleichnamigen Projectionen dieser Linien würde die Projectionsebene ganz oder zum Theil so bedecken, dass dieselben nicht von einander zu unterscheiden wären. Es ist deshalb für die Flächen eine andere Art der Darstellung zu wählen, welche hinreicht, um jeden Punct und jede Linie der Fläche, ins Besondere ihre Erzeugende in jeder Lage construiren zu können.

Als Erzeugende einer Fläche nimmt man die einfachste in ihr denkbare Linie, welche ihren Character ausspricht. Nach der Erklärung der Ebene ist diese eine Fläche, mit welcher jede durch irgend zwei ihrer Puncte geführte Gerade ganz zusammenfällt, d. h. die Erzeugende einer Ebene ist eine Gerade.

Die Lage einer Ebene im Raume ist bestimmt durch drei nicht in einer Geraden liegende Puncte, oder was dasselbe ist:

1) durch einen Punct und eine nicht durch denselben gehende Gerade,
2) durch zwei parallele Gerade,
3) durch zwei sich schneidende Gerade.

Die Darstellung der in einer dieser Bedingungen angegebenen bestimmenden Stücke, und Bezeichnung derselben als zu einer Ebene gehörend genügt, um die Lage der Ebene festzustellen und alle auf sie bezüglichen Aufgaben zu lösen. In den Anwendungen hat man immer begrenzte Ebenen; die Theorie betrachtet sie, wie alle Gebilde, in ihrer Gesammtheit, d. h. sie betrachtet die Ebene in ihrer unendlichen Ausdehnung. Wir beginnen mit dieser allgemeinen Auffassung.

Eine Ebene $\mathfrak{E}$ kann nicht mit beiden Projectionsebenen zugleich parallel sein, sie hat wenigstens mit einer, im Allgemeinen mit jeder derselben, eine Gerade gemein, welche wir ihren Schnitt nannten (§. 14). Wir nennen ersten, zweiten, ... Schnitt einer Ebene ihren Schnitt in $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ... und bezeichnen ihn durch E_1, E_2, ... Die Schnitte einer Ebene können als ihre bestimmenden Stücke genommen werden; zwei derselben genügen zu ihrer Darstellung.

48. Lagen einer Ebene. *a)* Geht eine Ebene $\mathfrak{E}$ durch die Projectionsaxe, so fallen ihre beiden Schnitte E_1, E_2 und $\mathbf{A}$ in einander. Zur Bestimmung der Ebene muss mindestens noch einer ihrer Puncte e durch seine Projectionen gegeben sein.

Die Ebene kann ins Besondere mit $\mathfrak{P}_1$ oder mit $\mathfrak{P}_2$ zusammenfallen; im Allgemeinen liegt sie

entweder im ersten und dritten Raumtheile

oder im zweiten und vierten Raumtheile (§. 26);

sie kann auch mit $\mathfrak{H}_1$ oder mit $\mathfrak{H}_2$ zusammenfallen.

b) Ist eine Ebene $\mathfrak{E}$ parallel mit der Projectionsaxe, so sind E_1, E_2 parallel mit $\mathbf{A}$, also auch unter sich.

Ist die Ebene parallel mit einer Projectionsebene, so ist sie normal auf der anderen; in jener hat sie keinen Schnitt, in dieser ist ihr Schnitt parallel mit $\mathbf{A}$. Ausser demselben muss ein Punct e der Ebene gegeben sein, dessen Projection in letzterer Projectionsebene in den Schnitt fällt. (Meist wird e nicht angegeben.)

Ist die Ebene parallel mit keiner Projectionsebene, so ist sie durch ihre beiden Schnitte, also durch zwei parallele Gerade, bestimmt. Der durch die Schnitte begrenzte Streifen der Ebene kann in einem jeden der vier Raumtheile liegen.

Sind E_1, E_2 in gleichem Abstande von $\mathbf{A}$, so ist die Ebene mit einer der beiden Halbirebenen parallel, also normal auf der anderen; ist sie parallel mit $\mathfrak{H}_1$, also normal auf $\mathfrak{H}_2$, so fallen (in der Zeichnung) E_1, E_2 in einander.

c) Schneidet eine Ebene 𝔈 die Projectionsaxe, so gehen durch den Durchschnitt sowohl E_1 als E_2; wir bezeichnen jenen Punct durch e^0. Die Schnitte, d. h. zwei sich schneidende Gerade, bestimmen die Lage der Ebene.

Ist die Ebene normal auf einer Projectionsebene, so ist ihr Schnitt in der anderen normal auf **A** als Durchschnittslinie von 𝔈 mit dieser anderen, d. h. von zwei auf jener normalen Ebenen.

Ist die Ebene normal auf beiden Projectionsebenen, so sind E_1, E_2 normal auf **A** und fallen (in der Zeichnung) in einander, da beide durch e^0 gehen.

Ist die Ebene geneigt gegen beide Projectionsebenen, so sind E_1, E_2 geneigt gegen **A**. Dabei ist zu unterscheiden, ob die von $\mathbf{A}, E_1$ und von $\mathbf{A}, E_2$ eingeschlossenen spitzen Winkel anstossende sind oder nicht; sind beide Winkel gleich, so liegen im ersten Falle die Schnitte symmetrisch gegen **A**, im zweiten fallen sie (in der Zeichnung) in einander.

Uebungs - Aufgabe. Die 25 Lagen einer Ebene durch Zeichnung darzustellen.

49. Haupt-Aufgabe. Den dritten Schnitt einer Ebene zu construiren; d. h. eine Ebene 𝔈 ist wie oben unter *a) b) c)* gegeben, man soll ihren Schnitt E_3 in einer gegebenen $\mathfrak{P}_3$ construiren.

E_3 geht durch die dritten Durchgänge zweier in 𝔈 liegenden Geraden. Der Schnitt in der beizubehaltenden Projectionsebene liefert in seinem Durchschnitte mit $\mathbf{A}_2$ den einen, den wir mit e^2 bezeichnen, der andere sei der Durchgang d_3 der durch e gehenden mit **A** parallelen Geraden G oder des ausfallenden Schnittes; $e^2 d_3$ ist E_3.

Fig. 20. **Beispiele.** 1) 𝔈 habe die Lage *a)*, $\mathfrak{P}_3$ sei normal auf $\mathfrak{P}_2$. Da E_1 in **A** liegt, so ist e^2 der Durchschnitt von $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_2$. G'' geht durch e'' parallel mit **A** und d_3'' liegt in $\mathbf{A}_2$; man nehme $d_3 d_3'' = e'e^0$.

Fig. 21. 2) 𝔈 in der Lage *b)* sei parallel mit $\mathfrak{P}_2$, und $\mathfrak{P}_3$ normal auf $\mathfrak{P}_2$. Die Ebenen $\mathfrak{P}_2$, 𝔈 werden von $\mathfrak{P}_3$ in zwei parallelen Geraden $\mathbf{A}_2$, E_3 geschnitten, deren Abstand gleich dem von $\mathbf{A}$, E_1 ist.

Fig. 18. 3) 𝔈 habe die Lage *c)*, $\mathfrak{P}_3$ sei parallel mit $\mathfrak{P}_1$. Der Durchschnitt von $\mathbf{A}_2 E_2$ ist e^2. Sowohl die Axen $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_2$ sind mit einander parallel, als auch die Schnitte E_1, E_3; man ziehe also E_3 parallel mit E_1 durch e^2.

Fig. 19. 4) 𝔈 habe die Lage *c)*, $\mathfrak{P}_3$ sei normal auf $\mathfrak{P}_1$. Der Durchschnitt von $\mathbf{A}_2$, E_1 ist e^2. Die Ebenen $\mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3$ schneiden sich in einer Geraden, deren erste Projection der Durchschnitt d_3' von $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_2$, deren zweite normal auf $\mathbf{A}$,

die dritte normal auf $\mathbf{A}_2$ ist; in dieser Geraden liegt d_3. Man errichte also in d'_3 Normalen auf $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_2$, von denen die erste sich mit E_2 in d''_3 schneidet, und trage auf die zweite die Strecke $d'_3 d''_3$ in $d'_3 d_3$. (Die Herleitung des Punctes kann man in der Zeichnung durch den Bogen $d''_3 d_3$ angeben).

50. Wir nennen ersten, zweiten Neigungswinkel einer Ebene $\mathfrak{E}$ die von ihr mit $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ eingeschlossenen Winkel und bezeichnen sie durch ε_1, ε_2.

Aufgabe. Die Neigungswinkel einer Ebene zu messen.

Man nehme eine $\mathfrak{P}_3$ normal auf E_1, also $\mathbf{A}_2$ normal auf E_1, so ist der von $\mathbf{A}_2, E_3$ eingeschlossene Winkel gleich ε_1. Und nimmt man $\mathfrak{P}_3$ normal auf E_2, so erhält man eben so den Winkel ε_2.

Die Neigungswinkel γ_1, γ_2 einer Geraden, welche normal auf der Ebene $\mathfrak{E}$ ist, ergänzen jeder den gleichnamigen Neigungswinkel ε_1, ε_2 zu einem Rechten. Da nun $\gamma_1 + \gamma_2 \overline{\overline{>}} \frac{\pi}{2}$ (§. 38), so ist $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \overline{\overline{<}} \frac{\pi}{2}$. Diess giebt die Lösung der

Aufgabe: Die Schnitte einer Ebene zu zeichnen, deren Neigungswinkel gegeben sind.

Man construire die Projectionen einer Geraden G, deren Neigungswinkel $\gamma_1 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1$, $\gamma_2 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon_2$ sind, und führe von irgend einem Puncte e^0 der Axe E_1 normal auf G', E_2 normal auf G'' (§. 23, 3). Es giebt vier Schaaren von Ebenen, welche der Aufgabe genügen.

Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ die Neigungswinkel einer Ebene gegen drei auf einander normale Projectionsebenen, so ist nach §. 39:

$$1)\ \sin^2\varepsilon_1 + \sin^2\varepsilon_2 + \sin^2\varepsilon_3 = 2,$$

$$2)\ \cos^2\varepsilon_1 + \cos^2\varepsilon_2 + \cos^2\varepsilon_3 = 1.$$

Punct und Ebene.

51. Ein Punct a kann in oder ausser einer Ebene liegen. Aus den Projectionen des Punctes und den Schnitten der Ebene kann diese Lage im Allgemeinen nicht erkannt werden.

Nimmt man eine $\mathfrak{P}_3$ normal auf $\mathfrak{E}$ an (so dass $\mathbf{A}_2$ normal auf E_1 oder auf E_2 ist), so liegt a''' in oder ausser E_3, je nachdem a in oder ausser $\mathfrak{E}$ liegt; im zweiten Falle ist der Abstand von a''', E_3 gleich dem Abstande von a, $\mathfrak{E}$ (§. 23, 1). Diess ergiebt die Lösung der beiden folgenden Aufgaben.

Aufgabe. Den Abstand eines Punctes von einer Ebene zu messen.

Aufgabe. Gegeben: eine Ebene und eine Projection eines Punctes; man verlangt die andere Projection desselben, so dass er entweder 1) in der Ebene oder 2) in gegebenem Abstande von ihr liege.

52. Die Lage eines Punctes in einer Ebene ist durch seine Lage gegen den einen Schnitt derselben bestimmt. Denkt man durch den Punct a die auf diesem Schnitte normale Neigungslinie, so bestimmen deren Fusspunct n (auf dem Schnitte) und die Strecke na den Punct, wobei zu beachten, auf welcher Seite des Schnittes er liegt.

Haupt-Aufgabe. Einen Punct einer Ebene herabzuschlagen; d. h. es seien ein Schnitt der Ebene, etwa E_1, und beide Projectionen a', a'' des Punctes gegeben, derselbe soll auf die Projectionsebene des gegebenen Schnittes, also auf $\mathfrak{P}_1$, herabgeschlagen werden, um seine Lage in der Ebene zu zeigen. (Da durch E_1, a die Ebene bestimmt ist, darf E_2 nicht willkürlich genommen werden).

Fig. 22. In einer $\mathfrak{P}_3$, die normal auf E_1 durch a geführt wird, hat $\mathfrak{E}$ zum dritten Schnitt die Neigungslinie an; man führe durch a' die Axe $\mathbf{A}_2$ normal auf E_1, so schneiden sich $\mathbf{A}_2$, E_1 in e^2, welcher Punct zugleich n ist. Man construire a''', so ist na''' der Schnitt E_3, die Strecke na''' gleich na. Beim Herabschlagen ändert der von na, E_1 eingeschlossene Winkel seine Grösse nicht, es fällt also (a) auf $\mathbf{A}_2$ in einen Abstand $n(a) = na'''$, entweder auf dieselbe Seite von E_1 mit a' oder auf die entgegengesetzte Seite. (Vergl. §. 19, besonders den Schlusssatz).

Die Ausführung erfordert nur 1) das Ziehen der Geraden $a'n$ normal auf E_1 und 2) die Bestimmung der Länge $n(a)$ als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $a'n$, a^0a''.

53. Haupt-Aufgabe. Einen Punct in eine Ebene zurückzuschlagen; d. h. es seien gegeben eine Ebene $\mathfrak{E}$ durch ihre Schnitte und die Lage eines Punctes a dieser Ebene durch seinen Abstand von dem einen Schnitte, etwa E_1, und durch den Fusspunct n der durch ihn gegen denselben Schnitt gezogenen Neigungslinie; es sollen die Projectionen des Punctes gezeichnet werden.

Man denke die Ebene auf $\mathfrak{P}_1$ herabgeschlagen und zeichne den Punct (a) in gegebenem Abstande na von E_1, betrachte die Gerade $n(a)$ als Axe $\mathbf{A}_2$ einer $\mathfrak{P}_3$ und construire E_3; trage sodann die Strecke $n(a)$ in na''' auf E_3, und leite aus dieser dritten Projection a''' des Punctes die beiden geforderten a', a'' her. Fig. 23.

Gerade und Ebene.

54. Eine Gerade kann drei Lagen in Bezug auf eine Ebene haben, sie liegt entweder in ihr, ist mit ihr parallel oder schneidet sie. Die eine Projection der Geraden hat dieselbe Lage gegen den gleichnamigen Schnitt der Ebene oder nicht, je nachdem die Ebene normal auf der Projectionsebene oder geneigt gegen dieselbe ist (§. 23, 2). Sind daher irgend eine Ebene $\mathfrak{E}$ durch ihre Schnitte und irgend eine Gerade G durch ihre Projectionen gegeben, so wähle man eine $\mathfrak{P}_3$ normal auf $\mathfrak{E}$ (also $\mathbf{A}_2$ normal entweder auf E_1 oder auf E_2) und construire E_3, G''', um aus der dritten Projection die Lage der Geraden gegen die Ebene zu erkennen. Diese Construction ergiebt zugleich die Lösung der beiden folgenden Aufgaben.

Aufgabe. Den Abstand einer Geraden von einer mit ihr parallelen Ebene zu messen.

Aufgabe. Den Durchschnittspunct einer Geraden und einer Ebene zu construiren.

Uebungs-Aufgabe. Eine Gerade und eine Ebene sind gegeben; man fordert in der Geraden einen Punct in gegebenem Abstande von der Ebene.

55. Liegt eine Gerade in einer Ebene, so liegen ihre Durchgänge in den gleichnamigen Schnitten der Ebene; ist sie zugleich mit einer Projectionsebene parallel, so liegt ihr gleichnamiger Durchgang im Unendlichen, d. h. ihre Projection in dieser Ebene ist parallel mit dem gleichnamigen Schnitte der gegebenen Ebene, die in der anderen parallel mit $\mathbf{A}$.

Aufgabe. In eine gegebene Ebene eine beliebige Gerade zu legen.

Jede zwei Puncte d_1 in E_1, d_2 in E_2 können als Durchgänge einer solchen Geraden gelten, deren es unzählig viele giebt.

Uebungs-Aufgabe. Eine Ebene ist gegeben und eine Projection einer Geraden dieser Ebene; deren andere Projection zu construiren.

Aufgabe. Durch eine gegebene Gerade eine beliebige Ebene zu führen.

Jede zwei durch einen und denselben Punct e^0 der Axe gehende Gerade E_1, E_2, von denen E_1 durch den ersten Durchgang d_1, E_2 durch d_2 geht, können als Schnitte einer solchen Ebene gelten, deren es unzählig viele giebt. (Es können auch E_1, E_2 zugleich parallel mit **A** sein, so dass e^0 im Unendlichen liegt.) — Ist die gegebene Gerade parallel mit der Projectionsebene, so ist in dieser der Schnitt jeder Ebene parallel mit der Projection der Geraden. Ist die Gerade parallel mit **A**, so nehme man eine $\mathfrak{P}_3$ zu Hilfe, um die Schnitte der Ebene zu bestimmen.

Die vorstehenden Aufgaben sind unbestimmte und lassen unzählig viele Lösungen zu; das Hinzufügen einer zweiten Bedingung macht sie zu bestimmten Aufgaben, welche nur eine begrenzte Zahl von Lösungen zulassen.

56. Aufgabe. Durch eine gegebene Gerade eine Ebene zu führen, von deren Neigungswinkeln der eine gegeben ist.

Fig. 24. Es sei G die Gerade, ε_1 der erste Neigungswinkel der geforderten Ebene $\mathfrak{E}$. Von einem Puncte d der Geraden (etwa von ihrem zweiten Durchgange d_2) fälle man die Normale auf $\mathfrak{P}_1$; es sei f deren Fusspunct in $\mathfrak{P}_1$ (derselbe liegt in **A**, wenn die Normale durch d_2 geht). Durch denselben Punct d (oder d_2) führe man eine zweite Gerade dn unter dem Winkel ε_1 gegen $\mathfrak{P}_1$ und zwar in einer mit $\mathfrak{P}_2$ parallelen Ebene (oder in $\mathfrak{P}_2$ selbst), so dass ihre zweite Projection den Winkel ε_1 mit **A** einschliesst; es sei n der erste Durchgang dieser Geraden. Denkt man die durch d gehende Neigungslinie der geforderten Ebene $\mathfrak{E}$, und betrachtet die zwischen d, E_1 liegende Strecke derselben, so hat deren erste Projection die Länge fn und ist normal auf E_1; beschreibt man also um f als Mittelpunct, mit fn als Halbmesser in $\mathfrak{P}_1$ einen Kreis K, so muss E_1 Tangente dieses Kreises sein und durch den ersten Durchgang d_1 von G gehen; E_2 geht durch d_2 und durch e^0 (Durchschnitt von E_1, **A**).

1) Ist $\varepsilon_1 = \frac{\pi}{2}$, so fällt n in f, K wird ein Punct, und es giebt nur eine Ebene, die projicirende Ebene der Geraden.

2) Ist γ_1 der Neigungswinkel von G gegen $\mathfrak{P}_1$ und $\varepsilon_1 < \frac{\pi}{2}, > \gamma_1$, so ist $fn < fd_1$, es können von d_1 zwei Tangenten an K geführt werden, und es giebt zwei Ebenen, welche der Aufgabe genügen.

3) Ist $\varepsilon_1 = \gamma_1$, so geht K durch den Punct d_1, es lässt sich nur eine Tangente durch d_1 an K führen, und es giebt nur eine Ebene, welche G zur Neigungslinie hat.

4) Ist $\varepsilon_1 < \gamma_1$, so ist $fn > fd_1$, d_1 liegt innerhalb K, also ist keine Tangente möglich, und die Aufgabe in diesem Falle nicht lösbar.

57. Aufgabe. Den einen Schnitt einer Ebene zu construiren, von welcher der andere Schnitt und der Neigungswinkel gegen die Projectionsebene des unbekannten Schnittes gegeben sind.

Es sei E_2 der gegebene Schnitt, ε_1 der erste Neigungswinkel der Ebene, E_1 der geforderte Schnitt. Die Aufgabe ist wie die vorige zu lösen mit dem Unterschiede, dass d_1 der Punct e^0 ist.

Aufgabe. Den einen Schnitt einer Ebene zu construiren, von welcher der andere Schnitt und der Neigungswinkel gegen die Projectionsebene des bekannten Schnittes gegeben sind.

Man nehme eine $\mathfrak{P}_3$ normal auf dem gegebenen Schnitte an, also $\mathbf{A}_2$ normal auf E_1 (oder E_2). Der Schnitt E_3 schliesst mit $\mathbf{A}_2$ den gegebenen Winkel ε_1 (oder ε_2) ein, und aus ihm lässt sich der unbekannte Schnitt E_2 (oder E_1) ermitteln.

Die Aufgabe ist für jede Grösse des Winkels ε_1 lösbar, und zwar durch zwei Ebenen, da sich E_3 gegen $\mathbf{A}_2$ unter dem Winkel ε_1 nach zwei Richtungen antragen lässt.

58. Aufgabe. Durch eine gegebene Gerade und einen ausserhalb derselben liegenden Punct eine Ebene zu führen.

Man führe durch den gegebenen Punct c und einen in der Geraden G beliebig angenommenen Punct a eine zweite Gerade ac und construire die Durchgänge der beiden Geraden; die Schnitte der geforderten Ebene gehen durch die gleichnamigen Durchgänge der Geraden. Der Punct a kann im Unendlichen angenommen werden, d. h. ac parallel mit G sein. Die Aufgabe ist eine bestimmte nur durch eine Ebene lösbare; sie kann auch so ausgesprochen werden:

durch zwei parallele oder durch zwei sich schneidende Gerade eine Ebene zu führen.

Aufgabe. Durch drei nicht in einer Geraden liegende Puncte eine Ebene zu führen.

Man ziehe zwei von den drei durch die gegebenen Puncte gehenden Geraden und verfahre dann wie in der vorigen Aufgabe.

Uebungs-Aufgaben. Es sind zwei Gerade gegeben; durch die eine derselben eine Ebene parallel mit der zweiten zu führen.

Es sind zwei Gerade und ein Punct gegeben; durch den Punct eine Ebene zu führen, welche mit beiden Geraden parallel ist.

59. Die Lage einer Geraden in einer Ebene ist durch ihre Lage gegen den einen Schnitt derselben bestimmt, also durch ihren Durchschnitt mit ihm (d. h. ihren gleichnamigen Durchgang) und den Winkel, welchen sie mit ihm einschliesst, wobei zu beachten, nach welcher Seite die Oeffnung des Winkels gerichtet ist.

Aufgabe. Eine Gerade mit einer Ebene herabzuschlagen; d. h. es seien die Schnitte E_1, E_2 einer Ebene und die Projectionen G', G'' einer in ihr liegenden Geraden gegeben, dieselbe soll auf die eine Projectionsebene, etwa auf $\mathfrak{P}_1$, herabgeschlagen werden, um ihre Lage gegen den gleichnamigen Schnitt E_1 zu zeigen.

Man schlage irgend zwei Puncte der Geraden herab. Ist der eine dieser Puncte der Durchgang d_1 der Geraden, so liegt er in dem Schnitte E_1, um welche sich die Ebene beim Herabschlagen dreht, und behält seine Lage, so dass man nur einen zweiten Punct der Geraden herabzuschlagen hat.

Aufgabe. Den Winkel zu messen, welchen die Schnitte einer Ebene einschliessen.

Man betrachte E_2 als die Gerade der vorigen Aufgabe und schlage sie auf $\mathfrak{P}_1$ herab, wobei e^0 seine Lage behält. Ein zweiter Punct a in E_2 hat seine erste Projection a' in $\mathbf{A}$; man fälle von a' die Normale auf E_1 und schneide sie mit einem Bogen zum Mittelpuncte e^0 und Halbmesser $e^0 a$ ab, denn diese Strecke ändert beim Herabschlagen ihre Länge nicht.

Aufgabe. Es ist eine Ebene und in ihr ein Punct gegeben; durch den Punct eine Gerade zu ziehen unter gegebenem Winkel gegen den einen Schnitt der Ebene.

Man schlage den Punct mit der Ebene herab und zeichne in der herabgeschlagenen Ebene eine Gerade, welche der gegebenen Bedingung genügt. Der Durchschnitt dieser Geraden und des Schnittes, um welchen die Drehung stattfand, ist ein zweiter Punct der geforderten Geraden.

60. Aufgabe. Den Winkel zweier Geraden zu messen.

Man construire den einen Schnitt der durch beide Gerade gehenden Ebene und schlage den Scheitelpunct s des Winkels in die Projectionsebene des gewählten Schnittes herab in (s), so gehen die herabgeschlagenen Geraden durch (s) und durch ihre in jenem Schnitte liegenden Durchgänge; der von ihnen eingeschlossene Winkel ist der geforderte.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punct eine Gerade zu legen, welche eine gegebene Gerade unter gegebenem Winkel schneidet.

Man construire den einen Schnitt der Ebene, welche durch den gegebenen Punct und die gegebene Gerade geht, schlage Punct und Gerade mit der Ebene auf die Projectionsebene jenes Schnittes herab, zeichne in derselben die geforderte Gerade (deren es zwei giebt) und schlage dieselbe in die Ebene zurück.

Uebungs-Aufgaben. Es sind zwei sich schneidende Gerade gegeben; die Halbirlinie ihres Winkels zu zeichnen.

Es sind ein Punct und eine Gerade gegeben; von dem Puncte aus eine Strecke von gegebener Länge abzutragen, deren zweiter Endpunct in der Geraden liegt.

Es ist eine Ebene und in ihr ein Punct gegeben; Mittelpunct und Halbmesser des Kreises zu construiren, welcher durch den Punct geht und die Schnitte der Ebene berührt.

61. Liegt eine Gerade a u s s e r einer Ebene, so ist sie entweder parallel mit ihr, oder sie schneidet dieselbe.

Ist eine Gerade durch ihre Projectionen G', G'' und eine Ebene durch ihre Schnitte E_1, E_2 gegeben, so kann man die eine Projection der Geraden, etwa G'', als gleichnamige Projection einer in $\mathfrak{E}$ liegenden Geraden cd ansehen und $c'd'$ construiren (oder $c'''d'''$, wenn G in einer auf $\mathbf{A}$ normalen Ebene liegt). Fällt $c'd'$ (oder $c'''d'''$) mit G' (oder mit G''') zusammen, so liegt G in $\mathfrak{E}$; ist $c'd'$ parallel mit G', so ist G parallel mit $\mathfrak{E}$; schneiden sich $c'd'$, G', so schneiden sich G, $\mathfrak{E}$, und zwar in einem Puncte n, dessen Projection der Durchschnitt n' von $c'd'$, G' ist. Fig. 25.

Denn cd, G liegen in einer und derselben Ebene, nämlich in der zweiten projicirenden Ebene von G.

Aufgabe. Den Durchschnitt einer Geraden und einer Ebene zu construiren.

Diese schon früher (§. 54) gelöste Aufgabe erhält eine andere Lösungsart durch die vorstehende Betrachtung.

Uebungs-Beispiele. 1) G sei parallel mit einer Projectionsebene, etwa mit $\mathfrak{P}_1$ ($c'd'$ ist parallel mit E_1).

2) G sei normal auf $\mathbf{A}$, $\mathfrak{E}$ gehe durch $\mathbf{A}$ und einen Punct e.

3) G', G'' fallen in einander, eben so E_1, E_2.

62. Der Winkel, unter welchem eine Gerade gegen eine Ebene geneigt ist, wird im Allgemeinen aus den Projectionen der Geraden und den Schnitten der Ebene nicht erkannt. Ist die Gerade normal auf der Ebene, so sind ihre Projectionen normal auf den gleichnamigen Schnitten der Ebene (§. 23, 3).

Aufgabe. Durch einen Punct die Normale auf eine gegebene Ebene zu führen.

Die Lösung erfolgt nach der vorangehenden Betrachtung.

Aufgabe. Durch einen Punct die auf eine gegebene Gerade normale Ebene zu führen.

Fig. 26. Es seien n der gegebene Punct, G die gegebene Gerade, $\mathfrak{E}$ die geforderte Ebene. Die Schnitte E_1, E_2 sind zwei Gerade, also durch vier Bedingungen zu erhalten. Da E_1, E_2 sich in einem Puncte e^0 auf $\mathbf{A}$ schneiden und normal auf G', G'' sein müssen, so fehlt nur noch eine Bedingung. Denkt man durch n eine Gerade in $\mathfrak{E}$, so ist ein Durchgang derselben ein Punct des gleichnamigen Schnittes von $\mathfrak{E}$; eine solche Gerade ist die durch n mit dem einen Schnitte, etwa mit E_2, parallel gezogene Gerade. Man ziehe also $n''d''$ parallel mit E_2 (d. h. normal auf G''), $n'd'$ parallel mit $\mathbf{A}$, construire deren ersten Durchgang d_1, ziehe E_1 durch d_1 normal auf G', E_2 durch e^0 (Durchschnitt von E_1, $\mathbf{A}$) normal auf G''.

63. Aufgabe. Den Winkel zu messen, unter welchem eine Gerade gegen eine Ebene geneigt ist.

Fällt man von irgend einem Puncte der Geraden die Normale auf die Ebene, so schliesst dieselbe mit der gegebenen Geraden den Complementswinkel des geforderten ein, der hiernach leicht zu erhalten ist (§. 60).

Aufgabe. Durch einen Punct einer in einer gegebenen Ebene liegenden Geraden eine andere Gerade zu führen, welche jene unter gegebenem Winkel schneidet und gegen die Ebene unter demselben Winkel geneigt ist.

Es seien gegeben die Ebene 𝔈, die Gerade G (§. 55) und der Punct m (§. 41). Die gegebene und die geforderte Gerade mn liegen in einer Ebene 𝔉, welche G enthält und normal auf 𝔈 ist. 𝔉 wird bestimmt durch G und eine Gerade mp, normal auf 𝔈. Man construire F_1, schlage 𝔉 mit G und mp auf $\mathfrak{P}_1$ herab, zeichne die geforderte Gerade in $(m)(n)$ und schlage sie in 𝔉 zurück.

Zwei Ebenen.

64. Sind zwei Ebenen parallel, so sind ihre gleichnamigen Schnitte parallel. Umgekehrt: sind zwei Paare (streng genommen drei Paare) gleichnamiger Schnitte zweier Ebenen parallel, so sind es auch die Ebenen; das dritte Paar ist nothwendig, wenn die Ebenen parallel mit $\mathbf{A}$ sind.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punct die Ebene zu führen, welche mit einer gegebenen Ebene parallel ist.

Es seien a der gegebene Punct, E_1, E_2 die Schnitte der gegebenen Ebene, 𝔉 die geforderte Ebene, so muss F_1 parallel mit E_1, F_2 parallel mit E_2 sein, und F_1, F_2 müssen sich in einem Puncte f^0 auf $\mathbf{A}$ schneiden. Man ziehe durch a eine Gerade ad parallel mit einer Geraden der Ebene 𝔈, etwa mit E_2, also $a''d''$ parallel mit E_2, $a'd'$ parallel mit $\mathbf{A}$, und construire den ersten Durchgang d_1 dieser Geraden, so geht F_1 durch d_1 (vergl. §. 62).

Oder: man nehme eine $\mathfrak{P}_3$ normal auf 𝔈, so dass $\mathbf{A}_2$ normal Fig. 27.
auf E_1 oder auf E_2 ist; dann ist F_3 parallel mit E_3 und geht durch a'''. Diese Constructionsart ist besonders anzuwenden, wenn 𝔈 durch $\mathbf{A}$ geht oder mit $\mathbf{A}$ parallel ist. Dann sind die vier Schnitte E_1, F_1, E_2, F_2 parallel mit $\mathbf{A}$, und man sieht aus der Construction, dass die gleichnamigen Schnitte E_1, F_1 und E_2, F_2 von der Axe $\mathbf{A}$ aus in derselben Ordnung auf einander folgen, und dass ihre Abstände von derselben proportional sind, d. h. wenn $\mathbf{A}E_1$ den Abstand der Geraden $\mathbf{A}, E_1$ bedeutet und so fort, dass:

$$\mathbf{A}E_1 : \mathbf{A}F_1 = \mathbf{A}E_2 : \mathbf{A}F_2.$$

Aufgabe. Den Abstand zweier parallelen Ebenen zu messen.

Man construire ihre Schnitte in einer $\mathfrak{P}_3$, die auf beiden normal ist; der Abstand der dritten Schnitte ist der geforderte.

Uebungs-Aufgabe. Es ist eine Ebene gegeben; man fordert eine zweite, die mit ihr parallel ist und einen gegebenen Abstand von ihr hat.

65. Schneiden sich zwei Ebenen, so kann ihre Durchschnittslinie die verschiedenen Lagen einer Geraden in Bezug auf beide Projectionsebenen haben. Je nachdem sie mit beiden, mit einer oder mit keiner derselben parallel ist, werden die Schnitte der Ebenen in beiden, in einer oder in keiner Projectionsebene parallel sein; in drei Projectionsebenen (unter denen keine zwei parallel) können die Schnitte nicht parallel sein.

Aufgabe. Die Durchschnittslinie zweier Ebenen zu construiren.

Der Durchschnittspunct der gleichnamigen Schnitte beider Ebenen ist der gleichnamige Durchgang der geforderten Geraden, welche aus ihren beiden Durchgängen zu construiren ist. Reicht diese Construction nicht aus, so wende man eine $\mathfrak{P}_3$ an.

Uebungs-Beispiele. 1) Beide Ebenen seien parallel mit $\mathbf{A}$, so ist es auch die geforderte Gerade. Man nehme $\mathfrak{P}_3$ normal auf $\mathbf{A}$, so ist die dritte Projection der Geraden ein Punct, aus welchem sich ihre beiden anderen Projectionen herleiten lassen.

2) Die eine Ebene $\mathfrak{E}$ gehe durch $\mathbf{A}$, so fallen beide Durchgänge der geforderten Geraden in $\mathbf{A}$ in einander, und zwar im Puncte f^0 der anderen Ebene $\mathfrak{F}$. Man führe $\mathfrak{P}_3$ normal auf $\mathbf{A}$ durch den zur Bestimmung von $\mathfrak{E}$ gegebenen Punct e, so schneiden sich E_3, F_3 in der dritten Projection eines zweiten Punctes der Geraden.

3) Beide Ebenen gehen durch einen und denselben Punct a der Axe; die beiden Durchgänge der geforderten Geraden fallen in denselben Punct a in einander. Man nehme $\mathfrak{P}_3$ parallel mit $\mathfrak{P}_2$, also $\mathbf{A}_2$ parallel mit $\mathbf{A}$, so liefern E_3, F_3 einen zweiten Punct b''' der geforderten Geraden.

66. Aufgabe. Die Durchschnittslinie einer Ebene $\mathfrak{E}$ mit der zweiten Halbirebene $\mathfrak{H}$ (§. 26) zu construiren.

Die beiden Projectionen der geforderten Geraden fallen in einander (§. 31).

1) Geht $\mathfrak{E}$ durch $\mathbf{A}$, so ist $\mathbf{A}$ die geforderte Gerade.

2) Ist $\mathfrak{E}$ parallel mit $\mathbf{A}$, so ist es auch die Gerade. Man nehme $\mathfrak{P}_3$ normal auf $\mathbf{A}$, so ist die dritte Projection der Geraden ein Punct, der Durchschnitt von E_3, H_3; der Schnitt H_3 hälftet den von $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_2$ eingeschlossenen rechten Winkel. Sind E_1, E_2 in gleichem Abstande und auf verschiedenen Seiten von $\mathbf{A}$, so ist $\mathfrak{E}$ parallel mit $\mathfrak{H}$.

Fig. 28. 3) Schneiden sich $\mathfrak{E}$ und $\mathbf{A}$, so ist e^0 ein Punct der geforderten Geraden; ein zweiter Punct a ist in einer mit $\mathfrak{P}_2$ parallelen $\mathfrak{P}_3$ zu erhalten; H_3, E_3 schneiden sich in a''', während a', a'' in $\mathbf{A}_2$ in einander fallen. Man nehme also $\mathbf{A}_2$ parallel mit $\mathbf{A}$; H_3 ist ebenfalls parallel mit $\mathbf{A}$, und es sind die Abstände von H_3, $\mathbf{A}_2$, so wie von $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}$ einander gleich; E_3 ist parallel mit E_2 und geht durch den Durchschnitt von $\mathbf{A}_2$, E_1. — Schliessen E_1, E_2 mit $\mathbf{A}$ gleiche und anstossende Winkel ein, so ist die geforderte Gerade normal auf $\mathbf{A}$.

Uebungs-Aufgaben. Es sind gegeben: die ersten Schnitte zweier Ebenen und die Winkel, welche ihre Durchschnittslinie mit diesen Schnitten einschliesst; die zweiten Schnitte beider Ebenen zu construiren.

Den Durchschnittspunct dreier Ebenen zu construiren.

67. Aufgabe. Den Winkel zweier Ebenen zu messen.

Man fälle von irgend einem Puncte die Normale auf jede der beiden Ebenen, so schliessen beide Normalen den Supplementswinkel des geforderten ein.

Oder: man construire die Schnitte beider Ebenen in einer $\mathfrak{P}_3$ (oder $\mathfrak{P}_4$), welche normal auf der Durchschnittslinie beider Ebenen ist (§. 23, 4); dieselben schliessen den geforderten Winkel ein. — Es seien $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ die gegebenen Ebenen, ab ihre Durchschnittslinie, Fig. 29.
und zwar a der Durchschnitt von $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{F}_1$, b der von $\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{F}_2$; ab sei geneigt gegen beide Projectionsebenen. Man führe $\mathfrak{P}_3$ durch ab, so dass $\mathbf{A}_2$ etwa mit $a''b''$ zusammenfalle, und construire $a'''b'''$ (b'' ist b'''), so ist $a'''b'''$ zugleich $\boldsymbol{E}_3, \boldsymbol{F}_3$. Man führe $\mathfrak{P}_4$ normal auf ab, also $\mathbf{A}_3$ normal auf $a'''b'''$, so ist $a''''b''''$ der Durchschnittspunct von $\mathbf{A}_3, a'''b'''$ und zugleich der Durchschnitt von $\boldsymbol{E}_4, \boldsymbol{F}_4$. Einen zweiten Punct für jeden dieser beiden Schnitte zu erhalten, construire man die vierte Projection je eines Punctes der Ebenen, etwa der in $\mathbf{A}$ liegenden Puncte e, f (die wir gewöhnlich mit e^0, f^0 bezeichnen). Es liegen e''', f''' in $\mathbf{A}_2$, da e'', f'' in $\mathbf{A}$ liegen; die Abstände der Puncte e'''', f'''' von $\mathbf{A}_3$ sind gleich den Ordinaten $e''e''', f''f'''$.

Aufgabe. Eine Ebene zu construiren, welche mit einer gegebenen Ebene einen gegebenen Winkel einschliesst und sie in einer gegebenen Geraden schneidet.

Man nehme eine $\mathfrak{P}_3$ (oder $\mathfrak{P}_4$) normal auf der gegebenen Fig. 29.
Geraden ab, so dass $a''''b''''$ ein Punct ist, durch welchen $\boldsymbol{E}_4$ geht; zeichne $\boldsymbol{F}_4$ unter dem gegebenen Winkel gegen $\boldsymbol{E}_4$ und construire die Schnitte $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$. Zu dem Behufe nehme man in $\boldsymbol{F}_4$ einen beliebigen Punct x'''', und x''' in $\mathbf{A}_2$, ziehe durch x''' die Normale auf $\mathbf{A}_2$, und mache $x'''x''$ gleich dem Abstande von x'''' zu $\mathbf{A}_3$. Dann ist x'' ein Punct für $\boldsymbol{F}_2$; ein zweiter Punct ist der zweite Durchgang von ab.

Uebungs-Aufgaben. Die Halbirebene des Winkels zweier Ebenen zu construiren.

Durch eine Gerade, welche nicht in einer gegebenen Ebene liegt, eine Ebene zu führen, welche auf der gegebenen normal ist.

68. Aufgabe. Durch eine ausserhalb einer gegebenen Ebene liegende Gerade eine Ebene zu führen, welche mit jener einen gegebenen Winkel einschliesst.

Fig. 30. Es seien ab die gegebene Gerade, $\mathfrak{E}$ die gegebene, $\mathfrak{F}$ die geforderte Ebene. Sind d_1, d_2 die Durchgänge von ab, so muss F_1 durch d_1, F_2 durch d_2 gehen, und F_1, F_2 müssen sich in einem Puncte f^0 in $\mathbf{A}$ schneiden. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ schneiden sich in einer Geraden, welche 1) durch den Durchschnitt e von ab und $\mathfrak{E}$ geht. Denkt man durch einen zweiten Punct a von ab die Normale auf $\mathfrak{E}$ gefällt, deren Fusspunct n ist, und durch denselben Punct a eine Gerade gegen $\mathfrak{E}$ unter dem gegebenen Winkel α gezogen, deren Fusspunct q ist, so ist jene Gerade 2) eine Tangente an den Kreis K, dessen Mittelpunct n, dessen Halbmesser nq ist. Ist die Gerade unter den angegebenen beiden Bedingungen gezeichnet, so geht F_1 durch ihren ersten (oder F_2 durch ihren zweiten) Durchgang g_1.

Diese Gerade kann man so construiren: man nehme eine $\mathfrak{P}_3$ normal auf E_1 (oder auf E_2), zeichne E_3, $a'''b'''$, der Durchschnitt dieser beiden Geraden ist e'''; nehme a''' beliebig in $a'''b'''$, fälle die Normale $a'''n'''$ auf E_3 und ziehe $a'''q$ unter dem Winkel α gegen E_3. Man bestimme e', a' und ziehe $a'n'$ normal auf E_1; denkt man $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{P}_1$ herabgeschlagen, so fällt (n) auf $a'n'$ in einen Abstand von E_1 gleich e^2n'''; eben so ist der Abstand von (e) zu E_1 gleich e^2e'''. Nun lässt sich um (n) als Mittelpunct mit $n'''q$ als Halbmesser der Kreis (K) beschreiben und an denselben von (e) aus die Tangente legen, welche die geforderte Gerade ist und von E_1 in ihrem ersten Durchgange g_1 geschnitten wird. (Vergleiche §. 56, woselbst für $\mathfrak{E}$ die erste Projectionsebene genommen ist).

Begrenzte Ebenen.

69. Die in den Anwendungen vorkommenden Ebenen sind stets durch Gerade oder Curven begrenzt, also ebene Figuren. Zwei Projectionen des Umfangs einer solchen Figur reichen zur Bestimmung der Ebene aus, denn man kann drei Puncte oder zwei Gerade des Umfangs beliebig wählen, um mit deren Hilfe die Schnitte der Ebene zu erhalten (§. 58); sodann können alle über die Ebene zu stellenden Aufgaben gelöst werden.

Liegen die Schnitte ausserhalb der Grenzen der Zeichnung, so wähle man eine solche $\mathfrak{P}_3$ parallel mit $\mathfrak{P}_1$ (oder mit $\mathfrak{P}_2$) dass der Schnitt E_3 innerhalb der Grenzen der Zeichnung fällt, also $\mathbf{A}_2$ parallel mit $\mathbf{A}$, wie im ersten Beispiele §. 32. Da die dritte
Fig. 8. Projection der ersten gleich wird, so sehe man diese als erste und dritte zugleich an, d. h. für einen Punct a gelte a' zugleich als a''', aber die zweite Ordinate von a sei a^2a''.

Als Beispiele wiederholen wir einige der früheren Aufgaben.

Aufgabe. Den ersten Neigungswinkel einer Ebene zu messen, von der zwei Gerade bekannt sind.

Es seien ab, ac die zwei sich in a schneidenden Geraden. Fig. 35.
Man nehme $\mathbf{A}_2$ parallel mit $\mathbf{A}$, so dass von den dritten Durchgängen b, c von ab, ac die ersten Projectionen noch innerhalb der Grenzen der Zeichnung fallen; die Gerade $b'c'$ ist E_3. Man führe eine $\mathfrak{P}_4$ normal auf E_3 durch a, also $\mathbf{A}_3$ normal auf E_3 durch a', so geht E_4 durch a''''; dieser Punct wird erhalten, wenn man $a''''a' = a''a^2$ nimmt. Der von $\mathbf{A}_3$, E_4 eingeschlossene Winkel ist der geforderte.

70. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punct die Normale auf eine Ebene zu fällen, von der drei Puncte bekannt sind.

Man verbinde je zwei der Puncte durch eine Gerade, nehme eine $\mathfrak{P}_3$ parallel mit $\mathfrak{P}_1$ und zeichne E_3 unter derselben Annahme wie in der vorhergehenden Aufgabe, so ist die erste Projection der geforderten Geraden normal auf E_3. Sodann nehme man eine $\mathfrak{P}_4$ parallel mit $\mathfrak{P}_2$, um in gleicher Weise die zweite Projection der Geraden zu erhalten.

Manche Aufgaben über Ebenen können gelöst werden, ohne zuvor deren Schnitte zu construiren.

Aufgabe. Den Winkel zweier Ebenen zu messen, wenn ihre Durchschnittslinie und ausser derselben von jeder Ebene ein Punct gegeben sind.

Man wende die zweite Constructionsart der Lösung dieser Aufgabe im §. 67 an, d. h. man nehme eine $\mathfrak{P}_3$ (oder $\mathfrak{P}_4$) normal auf der gegebenen Geraden ab, so dass deren Projection in dieser Ebene ein Punct ist; wird derselbe mit den gleichnamigen Projectionen der beiden gegebenen Puncte e, f verbunden, so schliessen diese Geraden den geforderten Winkel ein.

In der Folge geben wir Ebenen entweder durch ihre Schnitte, oder durch andere Bedingungen.

Uebungs-Aufgaben. Es sind zwei Gerade im Raume und ein Punct ausser denselben gegeben; durch den Punct die Gerade zu führen, welche beide gegebene schneidet.

Es sind drei Gerade im Raume gegeben; die Gerade zu construiren, welche mit einer der gegebenen parallel ist und die beiden anderen schneidet.

Viertes Capitel.

Darstellung von $n$seiten und $n$flachen auf zwei Projectionsebenen.

n seite.

71. In der elementaren Geometrie nennt man $n$seit oder $n$eck die ebene Figur, deren Umfang von n Strecken (seinen Seiten) gebildet wird; die n Puncte, an deren jeden zwei Seiten stossen, sind seine Ecken.

Eine solche Figur, ein einfaches $n$seit oder $n$eck entsteht, wenn von n Puncten einer Ebene in irgend einer Ordnung der erste mit dem zweiten, dieser mit dem dritten, ..., der $n$te mit dem ersten durch eine Strecke verbunden wird. Ist $n > 3$, so ist das $n$seit convex oder concav, je nachdem eine Gerade seinen Umfang in zwei oder mehreren Puncten schneidet; es ist überschlagen, wenn zwei (nicht einander folgende) Seiten sich schneiden; es geht in Grenzfälle über, wenn 3, 4, ... Puncte in einer Geraden liegen. Ist die anzunehmende Ordnung der n Puncte nicht festgestellt, so bestimmen dieselben $\frac{1}{2}[1.2.3 \ldots (n-1)]$ einfache $n$ecke.

Ein vollständiges $n$seit ist das ganze durch n Gerade einer Ebene entstehende Gebilde;

die n Geraden sind seine Seiten;

die $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ Puncte, jeder der Durchschnitt zweier Seiten, sind seine Ecken.

Ein vollständiges $n$eck ist das ganze durch n Puncte einer Ebene entstehende Gebilde,

die n Puncte sind seine Ecken;

die $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ Gerade, deren jede durch zwei Ecken geht, sind seine Seiten.

Das vollständige Dreiseit unterscheidet sich vom einfachen durch die Verlängerung der Seiten ins Unendliche; es ist vom vollständigen Dreiecke nicht verschieden.

Das vollständige Vierseit entsteht durch vier Gerade A, B, C, D;

es hat sechs Ecken, oder drei Paare von Gegenecken:

$$AB = z \quad CD = w$$
$$AC = y \quad BD = v$$
$$AD = x \quad BC = u;$$

jedes Paar Gegenecken liefert eine Verbindungslinie oder Diagonale:

$$zw = E, \; yv = F, \; xu = G;$$

Das vollständige Viereck entsteht durch vier Puncte a, b, c, d;

es hat sechs Seiten oder drei Paare von Gegenseiten:

$$ab = Z \quad cd = W$$
$$ac = Y \quad bd = V$$
$$ad = X \quad bc = U$$

jedes Paar Gegenseiten liefert einen Durchschnitt oder Diagonalpunct:

$$ZW = e, \; YV = f, \; XU = g.$$

Wir betrachten hauptsächlich die in den Anwendungen zumeist vorkommenden einfachen convexen $n$seite.

Ein $n$seit oder $n$eck, dessen Seiten oder Ecken nicht alle in einer Ebene liegen, ist ein $n$seit im Raume, ein windschiefes $n$seit oder $n$eck.

72. Aufgabe. Die Projectionen eines $n$seits zu construiren, wenn das $n$seit selbst, seine Ebene $\mathfrak{E}$ und seine Lage gegen den einen Schnitt der Ebene gegeben sind.

Das gegebene $n$seit sei ein Dreiseit abc, dessen Seite ab mit E_1 den Winkel α einschliesst. Man denke seine Ebene um E_1 auf $\mathfrak{P}_1$ herabgeschlagen und zeichne es in $(a)(b)(c)$ so, dass $(a)(b)$ mit E_1 den Winkel α einschliesst. Sodann schlage man seine Ecken nach der Aufgabe im §. 53 zurück. Man beachte E_1 als Affinitätsaxe (§. 21) der Dreiseite $(a)(b)(c)$ und $a'b'c'$, in welcher sich die entsprechenden Seiten schneiden, z. B. $(a)(b)$ und $a'b'$ in m'; $a''b''$ muss durch m'' in $\mathbf{A}$ gehen. Fig. 32.

Aufgabe. Die Projectionen eines regelmässigen $n$seits zu construiren, wenn dessen eine Seite, parallel mit einer Projectionsebene, und der Neigungswinkel seiner Ebene gegen dieselbe Projectionsebene gegeben sind.

Es sei ab die gegebene Seite parallel mit $\mathfrak{P}_1$, also $a''b''$ parallel mit $\mathbf{A}$, ε_1 der gegebene Neigungswinkel. Man nehme $\mathfrak{P}_3$ parallel mit $\mathfrak{P}_1$, so dass $a''b''$ die Axe $\mathbf{A}_2$ sei, nehme $a'b'$ für Fig. 34.

$a'''b'''$ und zeichne über $a'b'$ das geforderte $n$seit $a'b'(c)(d)$ . ., welches man auf $\mathfrak{P}_3$ herabgeschlagen denkt. Um dieses $n$seit zurückzuschlagen, fälle man von irgend einem seiner Puncte, etwa (d), die Normale auf $a'b'$; deren Fusspunct in $a'b'$ sei n; man nehme $nd' = n(d) \cos \varepsilon_1$, $d^2 d'' = n(d) \sin \varepsilon_1$ (Punct d^2 in $\mathbf{A}_2$ oder $a''b''$). Eben so für andere Puncte mit Beachtung der Eigenschaften affiner Figuren.

73. Die beiden Projectionen eines (ebenen) $n$seits sind affine Figuren: denn sie haben beide Eigenschaften solcher Figuren.

Fig. 32. 1) Die entsprechenden Ecken von N', N'', d. h. a' und a'', b' und b'', . . . liegen in Geraden, welche normal auf $\mathbf{A}$, also unter sich parallel sind.

2) Je zwei entsprechende Seiten $a'b'$ und $a''b''$, $b'c'$ und $b''c''$, . . . schneiden sich in Puncten n, n_1, . . . ; alle diese Puncte n, n_1, . . . liegen in einer Geraden, der Projection der Durchschnittslinie von $\mathfrak{H}_2$ mit der Ebene $\mathfrak{E}$ des $n$seits (§§. 41, 66).

Die Beachtung des Satzes gewährt Vortheile beim Zeichnen der beiden Projectionen. Diese bilden in der Ebene der Zeichnung ein Projectionssystem wie in §. 22, dessen Strahlen jedoch im Allgemeinen nicht normal auf der Affinitätsaxe, der Geraden nn_1, sind.

Bei gleichen Neigungswinkeln ε_1, ε_2 der Ebene des $n$seits haben beide Projectionen gleichen Inhalt; ist gleichzeitig $\mathfrak{E}$ parallel mit $\mathfrak{H}_2$, so sind beide Projectionen congruente Figuren, deren entsprechende Seiten parallel sind, die Affinitätsaxe liegt im Unendlichen; ist $\mathfrak{E}$ parallel mit $\mathfrak{H}_1$, so sind beide Projectionen congruente Figuren in ungleicher Lage gegen ihre mit $\mathbf{A}$ parallele Affinitätsaxe (oder symmetrische Figuren).

Projicirt man ein ebenes $n$seit auf drei Ebenen, von denen jede normal auf beiden anderen ist, und sind die Zahlen N, N', N'', N''' die Maasse der Inhalte des $n$seits und seiner drei Projectionen für eine gegebene Flächen-Einheit, so ist: $N^2 = N'^2 + N''^2 + N'''^2$ (§§. 20, 50).

74. Aufgabe. Das (ebene) $n$seit zu zeichnen, welches durch zwei Projectionen gegeben ist, d. h. seine wahre, im Allgemeinen von der jeder Projection verschiedene Gestalt darzustellen.

Man schlage das $n$seit mit seiner Ebene $\mathfrak{E}$ auf die eine Projectionsebene, etwa auf $\mathfrak{P}_1$, herab, E_1 geht durch die ersten Durchgänge der Seiten. Das $n$seit und seine Projection sind affine Figuren, E_1 ist die Affinitätsaxe (§. 21); man beachte, dass jede herabgeschlagene Seite durch ihren Durchgang in E_1 geht.

Fig. 33. Fällt E_1 ausserhalb der Grenzen der Zeichnung, so führe man eine $\mathfrak{P}_3$ parallel mit $\mathfrak{P}_1$ durch eine Ecke, etwa a, also $\mathbf{A}_2$ parallel mit $\mathbf{A}$ durch a'' (§. 69). Dann geht E_3 durch a' und

den Durchschnitt q von $\mathfrak{P}_3$ mit dem Umfange des $n$seits; q'' liegt in $\mathbf{A}_2$. Da die dritte Projection der ersten congruent sein würde, so nehme man die erste als dritte, zeichne E_3 durch a', q' und schlage das $n$seit mit seiner Ebene auf $\mathfrak{P}_3$ (oder $\mathfrak{P}_1$) herab. Um eine Ecke b herabzuschlagen, ziehe man $b'n$ normal auf E_3 und nehme für $n(b)$ die Hypotenuse des Dreiecks, dessen Katheten $b'n$, $b_2 b''$ sind (b_2 in $\mathbf{A}_2$ gelegen). — Mit Beachtung der Gesetze der Affinität hat man nicht nöthig, alle Ecken auf diese Weise zu construiren.

Ist das $n$seit ein Dreiseit, so können die Projectionen seiner Ecken beliebig gewählt sein, denn drei Puncte des Raumes liegen immer in einer Ebene. Soll das $n$seit mehr als drei Ecken haben, so darf man die Projectionen seiner vierten, fünften, ... Ecke nicht beliebig wählen, wenn das $n$seit ein ebenes sein soll.

Aufgabe. In einer durch drei Puncte gegebenen Ebene einen vierten Punct zu bestimmen.

Es seien die Projectionen der drei Puncte a, b, c gegeben oder Fig. 31.
willkürlich angenommen; die eine Projection des vierten Punctes d, etwa d', kann beliebig genommen werden. Man wähle in dem vollständigen Viereck $a'b'c'd'$ dasjenige Paar von Gegenseiten, dessen Durchschnitt in den Grenzen der Zeichnung liegt; es seien $a'd'$, $b'c'$, die sich in g' schneiden. Nun ziehe man $b''c''$, bestimme g'' in $b''c''$, ziehe $a''g''$ und setze d'' in $a''g''$.

Uebungs-Aufgaben. Drei Puncte a, b, c sind durch ihre Projectionen gegeben; man soll:

1) in ihrer Ebene ab als Seite eines nach c hin liegenden regelmässigen Sechsseits annehmen und dessen Projectionen construiren;

2) den Halbmesser des durch die Puncte gehenden Kreises ermitteln und die Projectionen von dessen Mittelpuncte construiren;

3) einen vierten Punct d construiren, der von ihnen gleichen gegebenen Abstand s hat.

75. Jede in den Anwendungen vorkommende ebene Figur ist ein Theil der Oberfläche eines physischen Körpers. Ein solcher besitzt die Eigenschaft der Undurchsichtigkeit in höherem oder geringerem Grade; wir legen dieselbe Eigenschaft den Ebenen bei, indem wir sie als materielle betrachten, d. h. als Körper, deren Dicke gering ist und vernachlässigt werden kann.

Ist eine begrenzte materielle Ebene, z. B. ein $n$seit, und die Projection ihres Umfanges in einer Projectionsebene gegeben, so umhüllen das $n$seit selbst, seine Projection und die projicirenden Ebenen seiner Seiten einen Theil des Raumes, welcher von dem $n$seit selbst für das in der Richtung der Projectionsstrahlen befindliche Auge des Beschauers verdeckt wird, so dass jeder in diesem Raume liegende Theil einer Figur oder Geraden von ihm nicht gesehen wird. Stellt man physische Körper durch Projectionen dar, so ist es zweckmässig, durch eine Uebereinkunft ihre verdeckten Theile von den sichtbaren zu unterscheiden; diess soll geschehen, indem wir die Projectionen der verdeckten Linien punctiren. Bei den folgenden Aufgaben wird hierauf Rücksicht genommen; die darzustellenden Gebilde sollen im ersten Raumtheile liegen (§. 26).

Aufgabe. Den Durchschnittspunct einer Geraden mit der Ebene eines Dreiseits zu bestimmen.

Fig. 36. Man sehe die eine Projection der gegebenen Geraden, etwa G', als den Schnitt ihrer gleichnamigen projicirenden Ebene an, welche von dem Umfange des Dreiseits in zwei Puncten f, g geschnitten wird, deren gleichnamige Projectionen f', g' in G' liegen. Bestimmt man die zweiten Projectionen dieser Puncte f'', g'', so schneiden sich die Geraden $f''g''$, G'' in der Projection x'' des geforderten Punctes. Wir betrachten die Puncte f', g' auch als Projectionen von Puncten f_2, g_2 der Geraden G. Die zweiten Projectionen dieser Puncte zeigen, dass (in unserer Zeichnung) die Strecke xg_2 vom Dreiseit verdeckt, also in der ersten Projection die Strecke $x'g'$ punctirt werden muss.

Dasselbe Verfahren wende man für die zweite Projection an; man betrachte G'' als Schnitt der zweiten projicirenden Ebene von G, welche den Umfang des Dreiseits in den Puncten h, i schneidet. Die ersten Projectionen dieser Puncte können auch die zweier Puncte h_2, i_2 von G sein; aus den ersten Projectionen dieser vier Puncte sieht man, dass $x''i''$ punctirt werden muss.

Fig. 37. **Aufgabe.** Die Durchschnittslinie der Ebenen eines Parallelogramms und eines Dreiseits zu construiren.

Man wiederhole das Verfahren der vorhergehenden Aufgabe für zwei Seiten des Dreiseits und nöthigen Falls für zwei Seiten des Parallelogramms.

*n*flache.

76. Wir nennen $n$flach (Polyeder) einen Körper, welcher von n Ebenen ($n \geqq 4$) begrenzt wird. Jede dieser Ebenen wird von den angrenzenden (an Zahl mindestens drei) in einem $m$seit geschnitten. Das $n$flach wird demnach von n verschiedenen $m$seiten begrenzt, welche seine Flächen (Seitenflächen, Begrenzungsflächen) heissen, und deren Gesammtheit seine Oberfläche bildet; es ist convex oder concav, je nachdem seine Oberfläche von einer Geraden in zwei oder mehreren Puncten geschnitten wird.

Die Seiten und Ecken der $m$seite sind die Kanten und Ecken des $n$flachs. Jede Gerade, welche zwei nicht in einer Fläche liegende Ecken verbindet, ist eine Diagonale; jede Ebene, welche durch drei nicht in einer Fläche liegende Ecken geht, ist eine Diagonalebene.

Diagonalen können in einem $n$flach nur (aber nicht nothwendig) gezogen werden, wenn $n \geqq 6$ ist, weil jeder Endpunct einer Diagonale der Durchschnitt von mindestens drei Flächen ist.

An einem $n$flach sind Kantenwinkel, Flächenwinkel und Körperwinkel zu unterscheiden. Ein Kantenwinkel ist ein ebener von zwei anstossenden Kanten eingeschlossener Winkel, also ein Winkel eines der $m$seite. Ein Flächenwinkel wird von zwei sich in einer Kante schneidenden Flächen eingeschlossen. Ein Körperwinkel wird von den sich in einer Ecke schneidenden Ebenen, an Zahl mindestens drei, eingeschlossen.

Ein vollständiges $n$flach ist das ganze durch n Ebenen des Raumes entstehende Gebilde; dasselbe hat $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ Kanten, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Ecken.

77. Zwei Projectionen jeder Ecke und jeder Kante eines $n$flachs genügen zur Darstellung desselben und zur Bestimmung der wahren Grösse aller seiner Stücke, wie aus dem Vorhergehenden erhellt. Denn die Länge einer Kante findet man nach §. 33, die Grösse eines Kantenwinkels nach §. 60, die Grösse eines Flächenwinkels nach §. 67, die Gestalt und Grösse eines der $m$seite nach §. 74.

Hat man die wahre Gestalt aller Flächen oder $m$seite eines $n$flachs construirt, und reiht man sie in einer Ebene in derselben Folge wie am $n$flach mit entsprechenden Seiten an einander, so erhält man das Netz des $n$flachs.

Um die Projectionen des $n$flachs, d. h. jeder Ecke und jeder Kante desselben, zeichnen zu können, ist die Kenntniss einer hinreichenden Anzahl bestimmender Stücke desselben erforderlich.

Diese Stücke sind zweierlei Art, durch die einen ist das $n$flach selbst, durch die anderen seine Lage gegen die Projectionsebenen bestimmt.

Wird das $n$flach als ein materieller Körper angesehen, so werden einige seiner Flächen für ein in der Richtung der Projectionsstrahlen befindliches Auge durch andere verdeckt sein (§. 75). Seine Oberfläche zerfällt in Bezug auf diese Richtung in zwei Theile, einen sichtbaren und einen verdeckten. Das $n_1$seit (n_1 verschieden von n), welches von denjenigen Kanten gebildet wird, in denen beide Theile an einander stossen, nennt man den Umriss des $n$flachs für diese Richtung. Dasselbe ist im Allgemeinen ein windschiefes (§. 71); seine Projection ein ebenes geschlossenes $n_2$seit ($n_2 \leqq n_1$), innerhalb dessen die Projectionen aller Kanten liegen. Der Umriss ist für jede veränderte Lage des $n$flachs so wie für jede Richtung der Projectionsstrahlen ein anderer.

Wir drücken in den Zeichnungen die Projectionen des Umrisses und aller sichtbaren Kanten durch volle Linien, die der verdeckten durch punctirte aus.

78. Ist die Lage eines $n$flachs gegen die Projectionsebenen nicht vorgeschrieben, so giebt man ihm eine solche Lage, dass seine Projectionen so einfach wie möglich ausfallen. Man legt eine seiner Flächen, die man als Grundfläche ansieht, in $\mathfrak{P}_1$, so dass dieselbe ihre eigene erste Projection ist, während ihre zweite Projection in **A** fällt. Hat ein $n$flach mehrere einander parallele Kanten, so nimmt man dieselben parallel mit beiden, wenigstens mit einer Projectionsebene. Hat es eine Symmetralebene, so nimmt man diese parallel mit einer Projectionsebene an; alsdann fallen in dieser die Projectionen der beiden symmetrischen Theile in einander, und in der anderen sind ihre Projectionen symmetrisch in Bezug auf den Schnitt jener Ebene.

Aufgabe. Ein regelmässiges Vierflach (Tetraeder) darzustellen.

Fig. 58. Das gleichseitige Dreiseit $a'b'c'$ sei seine Grundfläche in $\mathfrak{P}_1$; jede der anderen drei Flächen hat eine Seite mit diesem Dreiseit gemein. Denken wir die Flächen abd um ab, acd um ac auf $\mathfrak{P}_1$ herabgeschlagen, so fallen dieselben mit $a'b'c'$ zusammen in $a'b'(d)$, $a'c'[d]$. Nach dem Zurückschlagen (§. 53) liegt d', Projection von d, sowohl in der Normalen auf $a'b'$ durch (d), als in der Normalen auf $a'c'$ durch $[d]$, so dass d' der Durchschnitt der drei

Mittellinien des Dreiseits $a'b'c'$ ist. Legt man $a'b'c'$ mit $a'b'$ normal auf $\mathbf{A}$, so ist $c'd'$ parallel mit $\mathbf{A}$, also die Kante cd parallel mit $\mathfrak{P}_2$, und $c''d''$ muss gleich $c'[d] = c'b'$ sein; diess genügt für die zweite Projection des Vierflachs.

Aufgabe. Einen Würfel darzustellen.

Nimmt man seine Grundfläche $abcd$ in $\mathfrak{P}_1$ und zwei Flächen $abfe$, $cdhg$ parallel mit $\mathfrak{P}_2$, so sind zwei andere Flächen $adhe$, $bcgf$ normal auf $\mathfrak{P}_2$; jede der beiden Projectionen ist ein Quadrat. Fig. 39.

Aufgabe. Ein normales Parallelepiped darzustellen.

Erhält dasselbe gleiche Lage mit dem Würfel, so ist jede der beiden Projectionen ein Rechteck; diese Rechtecke sind einander gleich, wenn die auf beiden Projectionsebenen normalen Flächen Quadrate sind. Fig. 48.

79. Aufgabe. Ein regelmässiges Achtflach (Oktaeder) darzustellen.

Das gleichseitige Dreiseit $a'b'c'$ sei seine Grundfläche in $\mathfrak{P}_1$. Fig. 40.
Drei Flächen abd, ace, bcf haben jede eine Kante mit ihr gemein; wir denken dieselben so auf $\mathfrak{P}_1$ herabgeschlagen, dass jede mit $a'b'c'$ zusammen, also (d) auf c', (e) auf b', (f) auf a' fällt. Beim Zurückschlagen fallen d', e', f' auf die durch (d), (e), (f) auf $a'b'$, $a'c'$, $b'c'$ gefällten Normalen in gleichen Abstand von diesen Seiten, denn wegen der gleichen Neigung der drei Flächen gegen $\mathfrak{P}_1$ sind $a'b'd'$, $a'c'e'$, $b'c'f'$ congruente Dreiseite.

Die Puncte d, e, f sind Ecken des Dreiseits def, dessen Ebene der von abc parallel ist und welches mit diesem symmetrisch liegt; es bilden also die Projectionen der sechs Ecken ein regelmässiges Sechseck. Je zwei einer Ecke anliegende Seiten desselben, z. B. $a'd'$, $a'e'$ und die entsprechende Seite $d'e'$ des Dreiseits $d'e'f'$ bilden die Projection einer der drei anderen Flächen.

Werden $a'b'$, $e'f'$ normal auf $\mathbf{A}$ gelegt, so fallen die zweiten Projectionen der Kanten ae, bf in einander, und da dieselben mit $\mathfrak{P}_2$ parallel sind, wird $a''e'' = a'b'$.

Die erste Projection des Achtflachs erhält eine einfachere Gestalt, wenn eine seiner Diagonalebenen mit $\mathfrak{P}_1$ parallel gelegt wird. Denn die in einer solchen Ebene liegenden Ecken, z. B. a, b, e, f bilden ein Quadrat, das zur Projection ebenfalls ein Quadrat $a'b'e'f'$ hat, und in dessen Diagonalen die Projectionen der acht anderen Kanten fallen. Sind zwei seiner Seiten parallel mit $\mathbf{A}$, so ändert sich die Gestalt der zweiten Projection nicht, nur die Diagonale $c''d'' = a'f'$ wird normal auf $\mathbf{A}$.

80. Aufgabe. Ein regelmässiges Zwölfflach (Dodekaeder) darzustellen.

Fig. 41 u. 41a. Das regelmässige Fünfseit $a'b'c'd'e'$ sei seine Grundfläche in $\mathfrak{P}_1$. Fünf Flächen haben jede eine Kante mit der Grundfläche gemein; wir denken zwei derselben, nämlich die an die Kante af stossenden $baflg, eafpk$, auf $\mathfrak{P}_1$ herabgeschlagen, so dass jede mit dem Fünfseit $a'b'c'd'e'$ zusammenfällt, alsdann fällt f mit der ersten in (f) d. h. in e', und mit der zweiten in $[f]$, d. h. in b'. Werden beide Flächen zurückgeschlagen, so erhält man f' als Durchschnitt der beiden Normalen auf $a'b'$ durch (f) und auf $a'e'$ durch $[f]$. Aus der Construction ergiebt sich, dass $a'f'$ den Winkel $b'a'e'$ hälftet, also durch den Mittelpunct $\mathbf{a}$ des dem Fünfseit umschriebenen Kreises K geht. Da jede der erwähnten fünf Flächen gleiche Lage gegen die Grundfläche hat, so sind die Projectionen der fünf durch die Ecken a, b, c, d, e gehenden Kanten nach $\mathbf{a}$ gerichtet und von gleicher Länge, d. h. $a'f' = b'g' = \ldots$.

In Folge der Affinität der Fünfseite $b'a'(f)(l)(g)$ oder $b'a'e'd'c'$ und $b'a'f'l'g'$ entsprechen den Parallelen $b'(f)$, $(g)(l)$ die Parallelen $b'f'$, $g'l'$. Es ist aber $b'f'$ normal auf $a'e'$ oder parallel mit der durch (g) gehenden Mittellinie des Fünfseits $a'b'c'd'e'$, fällt also mit der Seite $b'q$ eines dem Kreise K eingeschriebenen regelmässigen Zehnseits zusammen, woraus folgt, dass $g'l'$ Seite eines regelmässigen Zehnseits mit dem Mittelpuncte $\mathbf{a}$ ist. Hiernach lassen sich die Projectionen der fünf an die Grundfläche stossenden Flächen beenden, wodurch die von fünfzehn Ecken erhalten werden. Die übrigen fünf Ecken q, r, s, t, u sind die Ecken der mit der Grundfläche parallelen Fläche, deren Lage die umgekehrte der Grundfläche ist, so dass ihre Projection gleichfalls dem Kreise K eingeschrieben ist.

Eine Ebene $\mathfrak{E}$ normal auf $\mathfrak{P}_1$, welche zum Schnitt E_1 einen durch eine Ecke der Grundfläche, etwa d', gehenden Durchmesser des Kreises K hat, ist eine Symmetralebene des Zwölfflachs; wir nehmen $\mathfrak{P}_2$ parallel mit ihr, also $\mathbf{A}$ parallel mit E_1. Die zweite Projection der Grundfläche $abcde$ fällt in $\mathbf{A}$, die der Fläche $qrstu$ ist eine mit $\mathbf{A}$ parallele Strecke. Die der Flächen $abglf$, $stoin$ sind zwei Strecken von der Länge der Mittellinie des Fünfseits. Unter den Kanten sind nur *di*, *ql* mit $\mathfrak{P}_2$ parallel, so dass ihre zweiten Projectionen die wahren Längen haben. Die zweiten Projectionen von acht mal zwei Ecken fallen bei der gewählten Lage der Symmetralebene in einander.

81. Die Lage eines *n* flachs gegen die Projectionsebenen kann durch Angabe einer Ebene und der Lage der Grundfläche des *n* flachs in dieser Ebene bestimmt werden. Um die Projectionen des *n* flachs in der gegebenen Lage zu zeichnen, denke man seine Projectionen auf zwei in einfachster Lage gegen dasselbe befindliche Ebenen nach §. 78 ausgeführt und leite aus ihnen die geforderten durch Veränderung der Projectionsebenen ab. Die Hilfs-Projectionsebenen wähle man nach den Stücken, welche die Lage des *n* flachs bestimmen; die eine ist demnach die Ebene der Grundfläche und wird bei Ausführung der Zeichnung auf eine der beiden Projectionsebenen herabgeschlagen.

Aufgabe. Ein regelmässiges Vierflach darzustellen, dessen Grundfläche *abc* in einer durch ihre Schnitte gegebenen Ebene $\mathfrak{E}$ so liegt, dass die Seite *ab* mit E_1 einen gegebenen Winkel α einschliesst.

Durch die beiden in Fig. 38 gegebenen Projectionen des Vier- Fig. 38a.
flachs ist dasselbe bestimmt. Denkt man $\mathfrak{E}$ um ihren Schnitt auf $\mathfrak{P}_1$ herabgeschlagen, so schliesst die Seite $(a)(b)$ der Grundfläche mit E_1 den Winkel α ein, und es wird die Projection des Vierflachs in $(a)(b)(c)(d)$ so gezeichnet wie die erste in Fig. 38. Durch Zurückschlagen von $\mathfrak{E}$ erhält man wie in §. 72 die beiden geforderten Projectionen der Grundfläche *abc*. Die zweite Projection Fig. 38 giebt die Höhe der Ecke *d* über der Ebene $\mathfrak{E}$; diese Höhe genügt zur Bestimmung der dritten Projection dieser Ecke. $\mathfrak{P}_3$ ist die auf $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{E}$ normale Ebene, die beim Zurückschlagen der Grundfläche benutzt wurde; d''' liegt in der Geraden, welche normal auf E_3 ist und durch den aus (d) abgeleiteten Punct $[d]$ geht. Aus d''', (d) werden d', d'' abgeleitet.

Aufgabe. Einen Würfel darzustellen; die Ebene seiner Grundfläche sei gegeben durch ihren Schnitt E_1 und ihren ersten Neigungswinkel ε_1; eine Seite *ab* der Grundfläche schliesse mit einer Neigungslinie der Ebene einen Winkel α ein.

Man denke $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{P}_1$ herabgeschlagen und zeichne das Qua- Fig. 39a.
drat $(a)(b)(c)(d)$ als Grundfläche des Würfels so, dass seine Seite

$(a)(b)$ mit der Neigungslinie $(a)n$ den Winkel α einschliesst. Man nehme eine $\mathfrak{P}_3$ normal auf $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{E}$, also $\mathbf{A}_2$ parallel mit $(a)n$, so schliesst E_3 mit $\mathbf{A}_2$ den gegebenen Winkel ε_1 ein, und enthält die Puncte a''', b''', c''', d''', welche aus (a), (b), (c), (d) herzuleiten sind. Die dritte Projection des Würfels ist nun leicht zu beenden; aus ihr und aus $(a)(b)(c)(d)$ werden die geforderten beiden Projectionen abgeleitet.

Auf gleiche Weise können die Projectionen jedes $n$flachs gezeichnet werden. Abkürzungen ergeben sich, z. B. wenn parallele und gleich lange Kanten vorkommen, wie beim Würfel selbst.

Prismen und Pyramiden.

82. Eine prismatische Fläche, schlechtweg ein *Prisma*, ist der Ort einer Geraden, welche sich parallel mit sich selbst bewegt und alle Puncte einer gebrochenen (ebenen oder windschiefen) Linie durchläuft (§. 9).

Die gebrochene Linie nennen wir die *Leitlinie*, jede Lage der Erzeugenden eine *Seite*, und wenn sie durch eine Ecke der Leitlinie geht, eine *Kante* der Fläche. Alle zwischen zwei auf einander folgenden Kanten liegende Seiten erfüllen einen ebenen Streifen; die Anzahl dieser die Fläche zusammensetzenden Streifen ist gleich der Anzahl der Seiten der Leitlinie, mit Ausnahme des Falls, dass die Leitlinie windschief ist, und eine oder mehrere ihrer Seiten in der Richtung der Erzeugenden liegen.

Ein Prisma ist convex oder concav, je nachdem es von einer Geraden in zwei oder in mehreren Puncten geschnitten werden kann; es ist geschlossen oder offen, je nachdem die Erzeugende bei fortschreitender Bewegung in eine schon inne gehabte Lage zurückkehrt oder nicht. Wir betrachten der Einfachheit wegen nur convexe geschlossene Prismen; an einem solchen ist die Anzahl der Kanten gleich der Anzahl der ebenen Streifen, und das Prisma heisst n*kantig* (oder n*seitig*).

Eine mit den Kanten parallele Ebene schneidet ein Prisma in zwei Seiten oder Kanten. Eine mit den Kanten nicht parallele Ebene schneidet es in einem $n$seit, dessen Seitenzahl gleich der seiner Kanten ist. Ist die schneidende Ebene normal auf den Kanten, so nennt man die Durchschnittsfigur den *Normalschnitt* (Geradschnitt, Querschnitt) des Prisma; die Winkel dieses $n$seits sind die Maasse der Flächenwinkel des Prisma.

Parallele Ebenen schneiden ein Prisma in congruenten $n$seiten.

Wird ein $n$seit oder ein $n$flach auf eine Ebene projicirt, so sind die durch die Puncte im Umfange des $n$seits oder im Umrisse des $n$flachs gehenden Projectionsstrahlen die Seiten eines dem $n$seite oder $n$flache umschriebenen Prisma, welches das projicirende Prisma des $n$seits oder $n$flachs ist, die Projection selbst ist ein Normalschnitt dieses Prisma.

83. In der elementaren Geometrie versteht man unter Prisma ein $n$flach ($n \geqq 5$), welches von einer (convexen, geschlossenen) ($n-2$) kantigen prismatischen Fläche und von zwei Ebenen begrenzt wird, welche mit einander parallel und gegen die Kanten dieser Fläche geneigt sind. Seine Oberfläche besteht aus zwei congruenten ($n-2$)seiten, den Grundflächen, und aus $n-2$ Parallelogrammen, den Seitenflächen; man nennt Grundkanten die, welche Seiten der Grundflächen, und Seitenkanten die, welche zweien Seitenflächen gemein sind. Ein solches Prisma ist schief oder normal, je nachdem die Seitenkanten gegen die Ebenen der Grundflächen unter schiefem oder rechtem Winkel geneigt sind; seine Höhe ist der (normale) Abstand beider Grundflächen.

Das regelmässige Prisma ist der Würfel. Ein gleichförmiges Prisma ist ein normales, das zur Grundfläche ein regelmässiges $n$seit hat, es kommt am meisten zur Anwendung. Für die einfachste Darstellung lege man eine Grundfläche in $\mathfrak{P}_1$ (oder parallel derselben) und eine Symmetralebene parallel mit $\mathfrak{P}_2$; die ersten Projectionen beider Grundflächen fallen dann in einander. Als Beispiel diene ein sechskantiges Prisma in zwei Lagen dieser Art. Fig. 42.

84. Aufgaben. 1) Ein schiefes Prisma darzustellen, von welchem gegeben sind die Grundfläche, die Höhe und die Winkel α, β, welche eine der Seitenkanten mit den durch dieselbe Ecke a gehenden Grundkanten einschliesst; 2) den Normalschnitt dieses Prisma zu construiren; 3) das Netz seiner Oberfläche zu zeichnen.

1) Man zeichne in bad den Winkel, welcher von den durch a Fig. 43a. gehenden Grundkanten eingeschlossen wird, und denke die durch a gehende Seitenkante ap einmal mit der Seitenfläche bap in $a(p)$, ein andermal mit der Seitenfläche dap in $a[p]$ auf die Grundfläche herabgeschlagen, so schliessen ba, $(p)a$ den Winkel α, da, $[p]a$ den Winkel β ein. In der Kante ap sei p in beliebigem Abstande von a angenommen, so dass $a(p) = a[p] = ap$; denkt man beide

Seitenflächen *bap*, *dap* zurückgeschlagen, so erhält man in *ap'* die Projection der Seitenkante *ap* auf die Grundfläche.

Fig. 43. Wir legen die Grundfläche *abcd* in $\mathfrak{P}_1$ so, dass *a'p'* parallel mit **A** ist. *a''b''c''d''* fällt in **A**, und die zweite Projection der anderen Grundfläche liegt in einer mit **A** parallelen Geraden, deren Abstand von **A** gleich der gegebenen Höhe *h* ist. Die Richtung für *a''p''* und durch sie die der anderen Seitenkanten erhält man, wenn man $a''p'' = ap$ nimmt.

2) Den Normalschnitt *cefg* erhält man in einer $\mathfrak{P}_3$, welche normal auf den Seitenkanten ist, also $\mathbf{A}_2$ normal auf *a''p''*. Da die Seitenkanten parallel mit $\mathfrak{P}_2$ angenommen wurden, also die ersten Ordinaten aller Puncte einer Seitenkante einander gleich sind, so ist die Construction der ersten Projection des Normalschnitts unnöthig.

Fig. 43b. 3) Denkt man die eine von je zwei anstossenden Seitenflächen um ihre gemeinschaftliche Kante gedreht, bis sie in die Ebene der anderen (neben diese) gelangt, so fallen die in beiden Flächen liegenden Seiten des Normalschnitts in eine auf jener Kante normale Gerade. Um das Netz zu erhalten, trage man demnach auf eine beliebige Gerade die Seiten des Normalschnitts eine neben die andere in *cefgc*, ziehe durch die Endpuncte jeder Seite Normalen auf die Gerade und trage auf jede derselben die beiden Strecken der entsprechenden Seitenkante, die auf beiden Seiten des Normalschnitts liegen, und deren Längen aus der zweiten Projection zu entnehmen sind. Die anderen Seiten der entstehenden Parallelogramme müssen den entsprechenden Grundkanten gleich werden, und die an *a* stossenden Parallelogramme bei *a* die Winkel α, β haben.

In Fig. 43b ist die obere Grundfläche weggelassen.

Uebungs-Aufgabe. Ein gleichförmiges fünfkantiges Prisma darzustellen; gegeben die Höhe, die Länge einer Grundkante und die Ebene $\mathfrak{E}$ seiner Grundfläche (z. B. ε_1 von 30°, der von E_1 und **A** eingeschlossene Winkel von 45°); eine Grundkante sei parallel mit E_1.

85. Eine pyramidalische Fläche, schlechtweg eine Pyramide, ist der Ort einer Geraden, welche durch einen festen Punct geht und alle Puncte einer gebrochenen (ebenen oder windschiefen) Linie durchläuft.

Der feste Punct kann als die Mitte der Erzeugenden in jeder ihrer Lagen gelten, die Fläche besteht demnach aus zwei gleichen

Theilen, welche in ihm zusammenstossen, weshalb er der Mittelpunct der Fläche ist. Die gebrochene Linie ist die Leitlinie, jede Lage der Erzeugenden eine Seite, und wenn sie durch eine Ecke der Leitlinie geht, eine Kante der Fläche.

Alle von zwei auf einander folgenden Kanten eingeschlossene Seiten erfüllen einen ebenen Winkelraum; die Anzahl dieser die Fläche zusammensetzenden Winkel ist gleich der Anzahl der Seiten der Leitlinie, wenn keine dieser Seiten durch den Mittelpunct der Fläche geht. Eine Pyramide ist convex oder concav, geschlossen oder offen, wie ein Prisma; wir betrachten nur die convexe geschlossene Pyramide, welche $n$kantig (oder $n$seitig) ist (§. 82).

Eine Pyramide kann von einer Ebene $\mathfrak{E}$ verschiedenartig geschnitten werden. Geht $\mathfrak{E}$ durch den Mittelpunct m, so sind drei Fälle zu unterscheiden.

1) Keine Kante oder Seitenfläche liegt in $\mathfrak{E}$, sondern jede wird von ihr in m geschnitten; beide Theile der Fläche liegen auf entgegengesetzten Seiten von $\mathfrak{E}$.

2) Eine Kante oder Seitenfläche liegt in $\mathfrak{E}$, jede andere wird von ihr in m geschnitten; beide Theile der Fläche liegen auf entgegengesetzten Seiten von $\mathfrak{E}$.

3) Zwei Kanten oder Seiten liegen in $\mathfrak{E}$, jede andere wird von ihr in m geschnitten; jeder Theil der Fläche wird durch $\mathfrak{E}$ in zwei Abschnitte zerlegt, die auf entgegengesetzten Seiten von $\mathfrak{E}$ liegen.

Geht $\mathfrak{E}$ nicht durch den Mittelpunct m, so lässt sich durch m eine mit ihr parallele Ebene denken. Letztere befindet sich in einer der drei angegebenen Lagen; danach schneidet $\mathfrak{E}$, unter n die Anzahl der Seitenflächen verstanden,

1) nur einen Theil der Fläche in einem geschlossenen $n$seit,

2) nur einen Theil der Fläche in einem ungeschlossenen $n$seit, oder $(n-1)$seit,

3) beide Theile der Fläche, den einen in einem ungeschlossenen $n_1$seit, den anderen in einem ungeschlossenen $n_2$seit, so dass $n_1 + n_2$ gleich n oder gleich $n+1$ oder gleich $n+2$, je nachdem die durch m gehende Parallelebene zwei Kanten, oder eine Kante und eine Seite, oder zwei Seiten der Pyramide enthält. (In §. 168 wird eine andere Anschauung dieser Figuren gegeben werden.)

Parallele Ebenen schneiden eine Pyramide in ähnlichen, ähnlichliegenden $n$seiten; das Aehnlichkeits-Verhältniss der entsprechenden

Seiten ist gleich dem Verhältniss der Abstände der schneidenden Ebenen vom Mittelpuncte m der Fläche. Je zwei dieser n seite sind in gleicher oder in umgekehrter Lage, je nachdem ihre Ebenen auf derselben oder auf entgegengesetzter Seite von m liegen.

86. In der elementaren Geometrie versteht man unter Pyramide ein n flach ($n \geqq 4$), welches von dem einen Theile einer (convexen, geschlossenen) ($n-1$) kantigen pyramidalischen Fläche und von einer Ebene begrenzt wird, welche diesen Theil der Fläche in einem geschlossenen ($n-1$) seite schneidet. Seine Oberfläche besteht aus diesem ($n-1$) seite, der Grundfläche, und aus $n-1$ Dreiseiten, den Seitenflächen. Der Mittelpunct der pyramidalischen Fläche ist die Spitze der Pyramide, und der (normale) Abstand der Spitze von der Grundfläche ihre Höhe.

Die regelmässige Pyramide ist das regelmässige Vierflach. Eine gleichförmige Pyramide hat zur Grundfläche ein regelmässiges n seit und gleiche Seitenkanten; sie kommt am meisten zur Anwendung. Für die einfachste Darstellung lege man ihre Grundfläche in $\mathfrak{P}_1$ (oder parallel derselben) und eine Symmetralebene parallel mit $\mathfrak{P}_2$; die erste Projection der Spitze fällt in
Fig. 44. den Mittelpunct der Grundfläche. Als Beispiel diene eine achtkantige Pyramide in zwei Lagen dieser Art.

87. Aufgaben. 1) Eine Pyramide darzustellen, von welcher gegeben sind die Grundfläche und die Längen dreier Seitenkanten; 2) das Netz ihrer Oberfläche zu zeichnen.

Fig. 56. 1) Es seien ein Fünfseit $abcde$ als Grundfläche und die Längen der Seitenkanten as, bs, ds gegeben. Man schlage die Seitenfläche abs und die Diagonalebene bds auf die Ebene der Grundfläche in $ab(s)$, $bd[s]$; beim Zurückschlagen wird der Durchschnitt der aus (s), $[s]$ auf ab, bd gefällten Normalen die Projection s' der Spitze auf die Ebene der Grundfläche. Legt man diese in $\mathfrak{P}_1$ mit $a's'$ parallel zu **A**, so wird $a''s'' = as$; hiermit ist die zweite Projection zu erlangen.

2) Das geforderte Netz besteht aus Dreiseiten, deren jedes durch die Länge der Seiten bestimmt ist. Die fehlenden Längen der Seitenkanten sc, se erhält man nach §. 33, wobei die Höhe s^0s'' der Pyramide als Kathete jedes der zu construirenden rechtwinkligen Dreiseite gilt.

Uebungs - Aufgabe. Eine gleichförmige sechskantige Pyramide darzustellen; gegeben die Höhe, die Länge einer Grundkante und eine Gerade mn

als Neigungslinie der Ebene der Grundfläche gegen $\mathfrak{P}_1$ und als Mittellinie der Grundfläche.

Ebene und *n* flach.

88. Die Durchschnittsfigur einer Ebene $\mathfrak{E}$ und eines n flachs ist ein n_1 seit, n_1 im Allgemeinen verschieden von n. Der Umfang dieses n_1 seits ist der Durchschnitt der Ebene und der Oberfläche des n flachs, es hat so viele Ecken als Kanten desselben von der Ebene getroffen werden. Die Aufgabe, diese Figur zu construiren, ist am einfachsten auszuführen, wenn $\mathfrak{E}$ normal auf einer Projectionsebene ist.

Aufgabe. Die Durchschnittsfigur einer auf $\mathfrak{P}_2$ normalen Ebene und einer Pyramide zu construiren, deren Grundfläche in $\mathfrak{P}_1$ liegt.

Wir nehmen als Beispiel die Pyramide der vorgehenden Aufgabe. Da die zweiten Projectionen aller Puncte von $\mathfrak{E}$ in E_2 liegen, so ist die der geforderten Figur eine Strecke von E_2 und die ihrer Ecken $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... sind deren Durchschnitte mit $s''a''$, $s''b''$, ... Aus dieser zweiten Projection ist die erste leicht herzuleiten. Man bemerke, dass jede Seite $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bc}$, ... und die entsprechende Grundkante ab, bc, ... sich in einem Puncte y, y_1 ... auf E_1 schneiden. Fig. 56.

Die wahre Gestalt der Durchschnittsfigur wird durch Herabschlagen von $\mathfrak{E}$, etwa auf $\mathfrak{P}_1$, erlangt. Man ziehe z. B. durch $\mathfrak{b}'$ die Normale $\mathfrak{b}'n$ auf E_1, und nehme $n(\mathfrak{b}) = e^0\mathfrak{b}''$. Die Seiten dieser Figur $(\mathfrak{a})(\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{b})(\mathfrak{c})$, ... gehen ebenfalls durch y, y_1, ...

89. Ist die schneidende Ebene nicht normal auf einer Projectionsebene, so nehme man eine auf ihr normale $\mathfrak{P}_3$ (vergl. §. 54). Jedoch können die Projectionen der geforderten Figur oft einfacher nach der Lösungsart folgender allgemeinen Aufgabe erlangt werden.

Haupt-Aufgabe. Die Durchschnittslinie zweier Flächen zu construiren.

Es seien $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ die gegebenen Flächen (§. 9). Man nehme eine Schaar von Hilfsflächen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{H}''$, ... Die erste derselben, $\mathfrak{H}$, schneidet $\mathfrak{F}$ in einer Linie C, $\mathfrak{F}'$ in einer Linie D; beide Linien C, D, in einer und derselben Fläche $\mathfrak{H}$ liegend, schneiden sich in Puncten p, q, r, ... der geforderten Durchschnittslinie, denn diese Puncte liegen sowohl in $\mathfrak{F}$ als in $\mathfrak{F}'$. Man wiederhole das Verfahren für $\mathfrak{H}'$, so erhält man zwei Linien C_1 als Durchschnitt von $\mathfrak{H}'\mathfrak{F}$, D_1 als Durchschnitt von $\mathfrak{H}'\mathfrak{F}'$, welche sich in Puncten p_1, q_1, r_1, ... der geforderten Linie schneiden. Und so fort für die folgenden Hilfsflächen.

Als Hilfsflächen wählt man solche, welche möglichst einfach aber der Natur der gegebenen Flächen angemessen sind, meistens Ebenen. Für die Durchschnittsfigur einer Ebene und eines $n$flachs nehme man eine projicirende Ebene jeder Kante.

Das erste Beispiel dieser Aufgabe war die Construction der Durchschnittslinie zweier Ebenen. Da dieselbe als Gerade durch zwei Puncte bestimmt ist, so reichten zwei Hilfsebenen aus; als solche dienten in §. 65 beide Projectionsebenen und in §. 75 die projicirenden Ebenen zweier die eine Ebene bestimmenden Geraden.

90. Aufgabe. Die Durchschnittsfigur einer Ebene $\mathfrak{E}$ und eines regelmässigen Achtflachs $\mathfrak{F}$ zu construiren, welches eine mit $\mathfrak{P}_1$ parallele Diagonalebene hat (§. 79).

Fig. 49. $\mathfrak{E}$ sei durch das Trapez *klmn* gegeben, $\mathfrak{F}$ durch das in der angegebenen Diagonalebene liegende Quadrat *abcd* und die Ecken *e*, *f*. Die drei Diagonalebenen des Achtflachs genügen als Hilfsebenen.

$\mathfrak{H}$ parallel mit $\mathfrak{P}_1$ schneidet $\mathfrak{E}$ in der Geraden $zy = C$, $\mathfrak{F}$ im Quadrate $abcd = D$ und liefert zwei Puncte p, q;

$\mathfrak{H}'$ normal auf $\mathfrak{P}_1$ schneidet $\mathfrak{E}$ in $xw = C_1$, $\mathfrak{F}$ in $aecf = D_1$ und liefert p_1, q_1;

$\mathfrak{H}^2$ normal auf $\mathfrak{P}_1$ schneidet $\mathfrak{E}$ in $vu = C_2$, $\mathfrak{F}$ in $bedf = D_2$ und liefert p_2, q_2.

Diese sechs Puncte sind die Ecken der geforderten Figur, von deren Seiten je zwei folgende in Flächen liegen, die eine Kante gemein haben. Die Seiten sind:

1) pp_1 in *abe*,	4) q_2q_1 in *cdf*,
2) p_1q in *ade*,	5) q_1p_2 in *bcf*,
3) qq_2 in *adf*,	6) p_2p in *abf*.

Die unter 1) 4), so wie die unter 2) 5) aufgezählten Flächen und Seiten sind parallel.

Uebungs-Aufgabe. Die Durchschnittsfigur einer Ebene und eines regelmässigen Zwölfflachs zu construiren.

91. Aufgaben. Die Durchschnittsfigur einer Ebene $\mathfrak{E}$ und 1) eines Prisma $\mathfrak{F}$, oder 2) einer Pyramide $\mathfrak{F}_1$ zu construiren, deren Grundflächen in $\mathfrak{P}_1$ liegen.

Von 𝔈 seien gegeben die Schnitte E_1, E_2, und ausser der Grundfläche abc ... von 𝔉 die Projectionen einer Kante am, von $\mathfrak{F}_1$ die der Spitze s. Fig. 45.

Man nehme als Hilfsflächen 𝔋 eine Schaar von Ebenen an, eine durch jede Seitenkante von 𝔉 oder $\mathfrak{F}_1$, so dass jede Linie D aus dieser Kante und einer nicht zu berücksichtigenden Seite besteht. Führt man die Ebenen 𝔋 parallel mit E_2, so sind die Linien C Gerade parallel mit E_2, also ihre Projectionen C' parallel mit $\mathbf{A}$, C'' mit E_2. Die ersten Schnitte H_1 geben in ihren Durchschnitten mit E_1 die ersten Durchgänge z der Geraden C.

Beim Prisma sind alle Ebenen 𝔋 einander parallel, also auch ihre Schnitte H_1; man erhält deren Richtung nach §. 58, wenn man durch einen Punct m irgend einer Seitenkante am die mit E_2 parallele Gerade mn führt, d. h. $m'n'$ parallel mit $\mathbf{A}$, $m''n''$ mit E_2.

Bei der Pyramide gehen alle Ebenen 𝔋 durch die parallel mit E_2 durch s geführte Gerade sg; man ziehe also $s'g'$ parallel mit $\mathbf{A}$, $s''g''$ mit E_2 und lege die Schnitte H_1 durch den ersten Durchgang g dieser Geraden.

In jeder Ebene 𝔋 schneidet die Gerade C die entsprechende Seitenkante D in einer Ecke 𝔞 der geforderten Figur. Deren Seiten, z. B. 𝔞𝔟, und die entsprechenden Grundkanten, ab, also auch 𝔞'𝔟', $a'b'$, schneiden sich in einem Puncte y auf E_1.

Die wahre Gestalt der Figur wird aus den Projectionen durch Herabschlagen von 𝔈, etwa auf $\mathfrak{P}_1$, erhalten. Zu dem Behufe construire man (E_2) nach §. 59 mittels eines Punctes x, und ziehe parallel mit ihr die Geraden (C), von denen jede durch den entsprechenden Durchgang z geht und den Punct (𝔞) enthält. Jede Seite (𝔞)(𝔟) schneidet sich mit 𝔞'𝔟', $a'b'$ in y auf E_1.

Andere Verfahren für die Lösung dieser Aufgaben folgen in §§. 139, 165.

Uebungs-Aufgaben. Die Durchschnittsfigur einer Pyramide und einer Ebene zu construiren, welche normal auf einer bestimmten Kante ist und einen gegebenen Abstand von der Spitze hat.

Die Durchschnittsfigur einer fünfkantigen Pyramide und einer Ebene zu construiren, welche drei bestimmte Seitenkanten in gegebenem gleichen Abstande von der Spitze schneidet.

92. Um die Durchschnitte einer Geraden mit der Oberfläche eines $n$flachs zu erhalten, führe man durch die Gerade eine Ebene 𝔋 und construire deren Durchschnittsfigur mit der Oberfläche des n flachs. Die Durchschnitte der Geraden mit dem Umfange dieser Figur sind die geforderten Puncte, deren es zwei giebt, wenn das n flach ein convexes ist.

Im Allgemeinen kann man für $\mathfrak{H}$ die eine projicirende Ebene der Geraden wählen. Ist das n flach ein Prisma, so führe man $\mathfrak{H}$ parallel mit dessen Kanten, und ist es eine Pyramide, so führe man $\mathfrak{H}$ durch deren Spitze s; in beiden Fällen besteht die Durchschnittsfigur von $\mathfrak{H}$ und der Oberfläche aus zwei Seiten, also beim Prisma aus zwei parallelen, bei der Pyramide aus zwei sich in s schneidenden Geraden.

Sieht man das n flach als ein materielles an, so bestimmt man nach §. 75, ob die Puncte sichtbar oder verdeckt sind.

Zwei n flache.

93. Denkt man zwei n flache als geometrische, nicht als materielle, Raumgebilde, so kann ein Theil des Raumes sowohl dem einen als dem anderen n flache angehören. Der gemeinschaftliche Raumtheil ist ein drittes n flach, ein sowohl aus dem ersten als aus dem zweiten ausgeschnittenes (oder ausgerissenes) Stück. Von seiner Oberfläche gehört ein Theil der Oberfläche des ersten n flachs, der andere der des zweiten an; beide Theile stossen in einem n_1 seit, der Durchschnittsfigur der Oberfläche beider n flache, an einander. Jede Ecke dieses n_1 seits ist der Durchschnittspunct einer Kante des einen n flachs und einer Fläche des anderen, und jede Seite ist die Durchschnittslinie einer Fläche des einen und einer Fläche des anderen.

Dieses n_1 seit ist im Allgemeinen ein windschiefes, und es lassen sich zwei Fälle unterscheiden.

1) Die sämmtlichen Seiten setzen eine einzige gebrochene, geschlossene Linie zusammen; alsdann ist das übrigbleibende Stück jedes der beiden n flache ein geschlossenes n flach für sich und man sagt: die beiden n flache schneiden sich gegenseitig aus, es findet A u s s c h n e i d u n g (Ausreissung) statt.

2) Die Seiten zerfallen in zwei oder mehrere Gruppen, deren jede eine gebrochene, geschlossene Linie zusammensetzt; alsdann besteht das übrigbleibende Stück des einen n flachs aus zwei oder mehreren von einander getrennten Stücken (oder n flachen), während das übrigbleibende Stück des anderen ein geschlossenes n flach ist,

von welchem das dritte umschlossen wird. Denkt man dieses zum ersten gehörig, so sagt man: das zweite $n$flach wird von dem ersten durchdrungen, es findet Durchdringung statt. Die zwei Stücke, in welche mindestens die Durchschnittsfigur zerfällt, nennt man Eintritts- und Austrittsfigur.

Beim zweiten Falle kann es vorkommen, dass beide Figuren eine oder zwei Ecken, auch eine oder zwei Seiten gemein haben; sie können alsdann als eine Figur angesehen werden, in welcher die gemeinschaftlichen Puncte oder Seiten als zweifache zu zählen sind.

94. Aufgabe. Die Durchschnittsfigur zweier $n$flache $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_1$ zu construiren.

Man construire nach §. 92 die Durchschnittspuncte jeder Kante von $\mathfrak{N}$ und der Oberfläche von $\mathfrak{N}_1$, so wie jeder Kante von $\mathfrak{N}_1$ und der Oberfläche von $\mathfrak{N}$; die hierbei anzuwendenden Hilfsebenen $\mathfrak{H}$ (§. 89) sind projicirende Ebenen der Kanten. Die erhaltenen Puncte sind die Ecken der geforderten Figur; ihre Seiten erhält man, wenn man die gefundenen Puncte in gehöriger Ordnung verbindet.

Um diese Ordnung zu bestimmen, sehe man irgend einen der Puncte als ersten, 1, an; derselbe liege auf einer Kante von $\mathfrak{N}$ und in einer Fläche von $\mathfrak{N}_1$. Man wähle unter den Puncten, die in derselben Fläche oder in den sie begrenzenden Kanten von $\mathfrak{N}_1$ liegen, den Punct 2 so, dass die Gerade 1-2 einer und derselben Fläche von $\mathfrak{N}$ angehört. Punct 2 liegt entweder auf einer Kante von $\mathfrak{N}$ oder auf einer von $\mathfrak{N}_1$; man gehe auf die an diese Kante stossende Fläche desselben $n$flachs und wähle unter den in ihr liegenden Puncten denjenigen als 3, welcher mit 1 und 2 auf derselben Fläche von $\mathfrak{N}_1$ im ersten oder von $\mathfrak{N}$ im zweiten Falle liegt. Auf diese Weise fahre man fort, bis man zum Puncte 1 zurückkehrt.

Sind alle gefundenen Puncte angewendet, so findet Ausschneidung statt; bleiben Puncte übrig, so fange man mit einem derselben an und verfahre auf dieselbe Weise, um den zweiten Theil der Figur zu erhalten.

Das Beispiel, welches wir in den folgenden vier Paragraphen ausführlich behandeln wollen, mag das Gesagte erläutern.

95. Aufgabe. Es seien gegeben: 1) ein beliebiges dreikantiges Prisma mit den Grundflächen abc, $a_1 b_1 c_1$, 2) ein regel- Fig. 46.

mässiges Achtflach, welches eine mit $\mathfrak{P}_1$ parallele Diagonalebene *defg* hat. Es soll die Durchschnittsfigur beider *n* flache construirt werden.

1) Construction der Ecken der Figur.

Fünf Hilfsebenen $\mathfrak{H}$ (§. 89) genügen. Es seien $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ die ersten projicirenden Ebenen der Kanten aa_1, bb_1; $\mathfrak{H}$ schneidet die Flächen *tde*, *tef* des Achtflachs in den Geraden $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{H}'$ die Flächen *sdg*, *sfg* in den Geraden $\mathfrak{de}$, $\mathfrak{ef}$; aa_1 und $\mathfrak{abc}$ treffen sich in den Puncten *h*, *i*, bb_1 und $\mathfrak{def}$ in den Puncten *k*, *l*. Die erste Projection zeigt, dass das Achtflach von der Kante cc_1 nicht getroffen wird.

$\mathfrak{H}^2$ werde durch das Quadrat *defg* geführt, ist also parallel mit $\mathfrak{P}_1$ und schneidet das Prisma im Dreiseit $\mathfrak{ghk}$, dessen Seite $\mathfrak{gk}$ von den Kanten *ef*, *gd* in den Puncten *m*, *n* geschnitten wird.

$\mathfrak{H}^3$ werde durch vier Ecken *s*, *e*, *t*, *g*, also normal auf $\mathfrak{P}_1$, geführt und schneidet das Prisma im Dreiseit $\mathfrak{lmn}$, dessen Umfang von den Kanten *se*, *te* in den Puncten *o*, *p* geschnitten wird.

$\mathfrak{H}^4$ werde durch die Ecken *s*, *d*, *t*, *f*, also normal auf $\mathfrak{P}_1$, geführt und schneidet zwei Seitenflächen des Prisma in den Geraden $\mathfrak{pq}$, $\mathfrak{rs}$, welche von den Kanten *sd*, *td*, *sf* in den Puncten *q*, *r*, *u*, *v* geschnitten werden.

Wir ordnen die gefundenen Puncte in folgende Tabelle.

Prisma Kante	Achtflach Fläche	Punct		Prisma Fläche	Achtflach Kante	Punct	
aa_1	*tde*	*h*	1	bcc_1b_1	*sd*	*q*	9
	tef	*i*	3		*se*	*o*	8
bb_1	*sdg*	*k*	10	abb_1a_1	*sf*	*u*	5
	sfg	*l*	6	bcc_1b_1		*v*	7
cc_1	— — —	— —		— — —	*sg*	— —	
Fläche	Kante						
— — —	*de*	— —		abb_1a_1	*td*	*r*	12
abb_1a_1	*ef*	*m*	4	acc_1a_1	*te*	*p*	2
— — —	*fg*	— —		— — —	*tf*	— —	
abb_1a_1	*gd*	*n*	11	— — —	*tg*	— —	

Die Nummern der vierten Columne werden im folgenden Paragraphen bestimmt.

96. 2) Bestimmung der Seiten der Figur.

Wir wählen den Durchschnitt *h* von aa_1 und *tde* als Punct 1. In der Fläche *tde* sind die Puncte *p*, *r* auf den Kanten *te*, *td* vorhanden; wir wählen einen derselben, z. B. den in acc_1a_1 liegenden Punct p, als 2.

Fläche tef an tde in te stossend wird von der Kante aa_1 in i, ihre Kante ef von der Fläche abb_1a_1 in m geschnitten. Punct i wird daher 3, so dass die Seiten hp, pi in der Fläche acc_1a_1 des Prisma liegen. Punct m wird 4, und es liegen pi, im in der Fläche tef des Achtflachs.

Fläche sef an tef in ef stossend wird von keiner Kante des Prisma getroffen, aber ihre Kanten se, sf schneiden erstere in o die Fläche bcc_1b_1, letztere in v, u die Flächen bcc_1b_1, abb_1a_1; von diesen drei Puncten ist u als 5 zu wählen, da er mit m in derselben Fläche abb_1a_1 liegt.

Fläche sfg an sef in sf stossend wird von der Kante bb_1 in 1 oder 6 geschnitten; es liegen mithin die Seiten im, mu, ul in der Fläche abb_1a_1. Die folgenden Puncte müssen in der Fläche bcc_1b_1 liegen, sind also die vorhin übergangenen v oder 7 und o oder 8; die Seiten ul, lv gehören zur Fläche sfg und die Seite vo zur Fläche sfe, nach welcher wir zurückgelangt sind.

Von der an se stossenden Fläche sed wird noch die Kante sd von bcc_1b_1 in q oder 9 geschnitten, so dass Seite oq in ihr liegt.

Die an sd stossende Fläche sdg wird von der Kante bb_1 in k oder 10 geschnitten; danach liegen die Seiten lv, vo, oq, qk in der Fläche bcc_1b_1. Von der Fläche sdg schneidet sich noch die Kante gd in n oder 11 mit der Fläche abb_1a_1; es liegen also in ihr die Seiten qk und kn.

Von der an gd stossenden Fläche tgd wird die Kante td in r oder 12 von abb_1a_1 geschnitten, Seite nr liegt also in ihr.

An td stösst die zuerst betrachtete Fläche tde, in welcher die geforderte Figur mit der Seite rh schliesst. Die Seiten rh und hp liegen in tde, und die Seiten kn, nr, rh liegen in der Fläche abb_1a_1.

Alle Seiten der Durchschnittsfigur setzen eine geschlossene Linie $hpimulvoqknrh$ zusammen; es findet demnach im gegenwärtigen Beispiele Ausschneidung statt.

97. Beim Ausführen der Zeichnung sehe man den von beiden $n$flachen zusammengesetzten Körper als einen materiellen an und bestimme nach §. 75 die sichtbaren und die verdeckten Ecken.

Zunächst betrachte man jedes $n$flach für sich; vom Prisma sind für $\mathfrak{P}_1$ die Grundfläche $a_1 b_1 c_1$ und die Seitenfläche $bcc_1 b_1$, für $\mathfrak{P}_2$ dieselbe Grundfläche und die Seitenflächen $acc_1 a_1$, $bcc_1 b_1$ sichtbar. Vom Achtflach für $\mathfrak{P}_1$ die an s stossenden vier Flächen, für $\mathfrak{P}_2$ die an e stossenden vier Flächen.

Sodann untersuche man die Puncte der Durchschnittsfigur.

Jeder Punct, der sowohl in einer sichtbaren Fläche des einen $n$flachs als in einer sichtbaren Fläche des anderen liegt, ist sichtbar;

also für $\mathfrak{P}_1$ die Puncte l, v, o, q, k und die vier sie verbindenden Seiten, für $\mathfrak{P}_2$ die Puncte h, p, i, v, o, q.

Jeder Punct, der in einer verdeckten Fläche des einen $n$flachs liegt, gleichviel ob in einer sichtbaren oder verdeckten Fläche des anderen, ist verdeckt;

danach sind die Puncte l, k für $\mathfrak{P}_2$ verdeckt, sie liegen zwar auf der sichtbaren Fläche $bcc_1 b_1$ des Prisma aber auf den verdeckten Flächen sfg, sgd des Achtflachs.

98. Das Netz jedes der beiden $n$flache lässt sich, freilich etwas mühsam, zeichnen, wenn man die Längen aller Kanten nach §. 33 construirt. Hierbei ist zu beachten, dass man für jedes der
Fig. 51. drei Parallelogramme des Prisma ausser den Seiten noch die Länge einer Diagonale zu bestimmen hat, wenn man nicht nach §. 84 verfahren will.

Um die nicht in den Kanten der gegebenen $n$flache liegenden Ecken der Durchschnittsfigur zu construiren, zeichne man in jedem Netze die Durchschnittslinien der einzelnen Flächen mit den Hilfsebenen $\mathfrak{H}$, z. B. in der Fläche $abb_1 a_1$ die Gerade $\mathfrak{gt}$, welche m, n, und die Gerade $\mathfrak{rs}$, welche r, u enthält.

In jedem Netze erhält man eine Verwandelte der Durchschnittslinie. Nämlich die Seiten der letzteren sind alle in eine Ebene, die des Netzes, gebracht; dabei bleibt die Länge jeder Seite unverändert, eben so die Grösse jedes Winkels, welcher von zwei in einer Fläche des $n$flachs liegenden Seiten eingeschlossen wird, aber die Grösse jedes anderen Winkels wird verändert. Und lassen sich nicht alle Flächen in dem Netze eben so wie an dem $n$flach selbst an einander reihen, so werden einzelne Seiten der Figur aus

ihrer Verbindung gerissen. Diess findet bei dem Netze des Acht- Fig. 47.
flachs mit den Seiten *mu*, *mi* statt.

99. Uebungs-Aufgabe. Die drei *n*flache einzeln darzustellen, welche aus dem Durchschnitte zweier *n*flache hervorgehen.

Im vorhergehenden Beispiele hat das beiden gegebenen *n*flachen gemeinschaftliche Stück 10 Flächen, 22 Kanten, 14 Ecken. Von den 10 Flächen gehören 3 dem Prisma an, nämlich das Dreiseit *hpi*, das Achtseit *himulknr* und das Fünfseit *lvoqk*. Und 7 gehören dem Achtflach an, nämlich 2 Fünfseite *muvoe*, *phrde*, 3 Vierseite *oqde*, *qknd*, *pime* und 2 Dreiseite *ulv*, *nrd*.

Das vom Prisma übrig bleibende Stück hat 13 Flächen, 31 Kanten, 20 Ecken. Zu den 13 Flächen liefert das Prisma 6, nämlich die beiden Grundflächen abc, $a_1b_1c_1$, die Fläche acc_1a_1, von der das Dreiseit *hpi* ausgeschnitten ist, die Fläche bcc_1b_1, von der das Fünfseit *lvoqk* ausgeschnitten ist, und die zwei von der Fläche abb_1a_1 abgeschnittenen Flächen *bahrnk*, b_1a_1imul. Die anderen 7 Flächen sind die dem gemeinschaftlichen Stück angehörenden Flächen des Achtflachs. Diess *n*flach ist ein concaves, weshalb die in der Ebene abb_1a_1 liegenden Flächen als zwei zu rechnen sind.

Das vom Achtflach übrig bleibende Stück hat 12 Flächen (zwei derselben liegen in der Ebene *sef*), 26 Kanten, 16 Ecken.

100. Aufgabe. Die Durchschnittsfigur eines Prisma und einer Pyramide zu construiren, deren Grundflächen in einer und derselben Projectionsebene, etwa in $\mathfrak{P}_1$, liegen.

Alle Ebenen, welche mit den Kanten des Prisma parallel sind Fig. 52.
und durch die Spitze *s* der Pyramide gehen, schneiden das Prisma sowohl als die Pyramide in Seiten, also in Geraden (§.§. 82, 85). Man führe durch *s* die mit den Kanten des Prisma parallele Gerade *st* und durch diese Gerade die Hilfsebenen $\mathfrak{H}$ (§. 89).

Man wende so viele Ebenen $\mathfrak{H}$ an, als Seitenkanten an beiden *n*flachen vorhanden sind. Die Durchschnittslinie C einer solchen Ebene $\mathfrak{H}$ mit der Oberfläche des *n*flachs, durch dessen Seitenkante $\mathfrak{H}$ geht, ist diese Kante und eine (nicht zu berücksichtigende) Seite; ihre Durchschnittslinie D mit der Oberfläche des anderen *n*flachs besteht aus zwei Seiten, daher erhält man im Allgemeinen in jeder Ebene $\mathfrak{H}$ zwei Ecken der Durchschnittsfigur.

Bei der Ausführung bedarf man für jede Ebene $\mathfrak{H}$ nur ihres ersten Schnittes; alle diese Schnitte gehen durch den Durchgang t der Geraden *st* (§. 55), und jeder geht durch eine Ecke einer der beiden Grundflächen.

Die Gerade $t'a'$ sei H_1, sie schneidet den Umfang der Grundfläche des Prisma in den Puncten α, β; die Ebene $\mathfrak{H}$ enthält die

Kante sa der Pyramide und zwei Seiten $\alpha\mathfrak{a}$, $\beta\mathfrak{a}_1$ des Prisma, welche von sa in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ geschnitten werden. Ebenso nehmen wir die Geraden $t'b'$, $t'c'$, ... als H_1^1, H_1^2, ... und bestimmen die Durchschnitte aller Kanten der Pyramide in $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1$, ...

Wir führen durch t' und durch die Ecken der Grundfläche des Prisma ebenfalls Schnitte von Hilfsebenen. Der Umfang der Grundfläche der Pyramide wird von den durch die Ecken f', g', h' geführten Schnitten H_1^5, H_1^6, H_1^7 getroffen, z. B. von H_1^5 in den Puncten γ, δ; Ebene $\mathfrak{H}^5$ enthält die durch f gehende Kante des Prisma und die Seiten γs, δs der Pyramide, welche von jener Kante in $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}$ geschnitten werden.

Wir erhalten im Ganzen 16 Puncte; die zweiten Projectionen derselben sind aus den ersten herzuleiten. Lassen sich die ersten Projectionen schlecht bestimmen, wenn etwa eine Seite $\alpha\mathfrak{a}$ und die Kante sa sich unter sehr spitzem Winkel schneiden, so construire man die zweiten Projectionen der Seiten und der Durchschnittspuncte und leite aus ihnen die ersten Projectionen ab.

Die Seiten der Figur werden nach §. 94 bestimmt. Die Ebenen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}^3$ zerlegen das Prisma in drei Stücke, von denen nur das mittlere in seiner Oberfläche zum Durchschnitt mit der Pyramide gelangt, wie aus der Lage der Schnitte H_1, H_1^3 gegen die Grundfläche des Prisma erhellt; es findet daher Durchdringung statt.

Läge einer dieser beiden Schnitte ausserhalb der Grundfläche des Prisma, so fände Ausschneidung statt, und ginge derselbe durch eine Ecke dieser Grundfläche, ohne deren Umfang in einem zweiten Puncte zu schneiden, so würde der in der Schlussbemerkung von §. 93 erwähnte Fall eintreten.

Uebungs-Aufgaben. Die Durchschnittsfigur zweier Pyramiden oder zweier Prismen zu construiren. Liegen die Grundflächen zweier solcher n flache in einer und derselben Projectionsebene, so kann obiges Verfahren, alle Hilfsebenen durch eine Gerade zu führen, bei der ersten Aufgabe angewendet werden; die Gerade muss die Spitzen beider Pyramiden enthalten. Bei der zweiten Aufgabe sind die Hilfsebenen parallel den Kanten beider Prismen zu nehmen.

Fünftes Capitel.

Die Axonometrie.

Axonometrie im Allgemeinen.

101. Wir denken im Raume drei feste Ebenen, jede normal auf beiden anderen, als Coordinatenebenen. Diese Ebenen schneiden sich in drei Geraden, den Coordinatenaxen, von denen jede normal auf beiden anderen ist. Die Ebenen sowohl als die Geraden haben einen und denselben Punct gemein, den Anfangspunct der Coordinaten. Diesen Punct bezeichnen wir durch **a**, die Axen durch **X**, **Y**, **Z**.

Werden durch einen Punct p des Raumes drei Ebenen geführt, je eine parallel mit je einer Coordinatenebene, so bilden die sechs Ebenen ein normales Parallelepiped mit drei mal vier einander parallelen und gleichen Kanten. Von jedem der drei Kantensysteme fällt eine Kante in eine Coordinatenaxe; diese drei Kanten sind die Coordinaten des Punctes p und werden durch x, y, z bezeichnet.

Es ist klar, dass die Lage des Punctes p im Raume durch Länge und Richtung seiner drei Coordinaten bestimmt ist; durch die Länge allein würden acht Puncte bestimmt sein, einer in jedem der acht Theile, in welche der Raum durch die Coordinatenebenen zerlegt wird.

102. Wir nehmen eine Projectionsebene $\mathfrak{P}$ in beliebiger Lage an, im Allgemeinen mit keiner der Axen parallel, und in ihr die (orthographische) Projection des erwähnten Parallelepipeds. Die Fig. 50.
Projection jedes der drei Systeme paralleler Kanten besteht aus

vier einander parallelen und gleichen Strecken, daher lässt sich die des Parallelepipeds herstellen, wenn die der drei Coordinaten bekannt sind.

Die Projection des Parallelepipeds ergiebt p' als die des Punctes p; einfacher wird diese durch die Projectionen dreier Kanten erhalten, je einer aus jedem Systeme, die erste an **a**, die dritte an p stossend; solche drei Kanten können auf sechs verschiedene Weisen gewählt werden.

Denkt man jeden Punct eines Raumgebildes durch seine Coordinaten in Bezug auf dieselben Axen bestimmt, so kann man seine Projection wie die des Punctes p erhalten.

Axonometrie ist die Methode, die Projection eines Raumgebildes aus den Projectionen der Coordinaten seiner Puncte herzuleiten,

wenn das Gebilde auf drei gegebene Coordinatenaxen bezogen, und die Lage der Projectionsebene gegen diese gegeben ist.

103. Die Ausübung dieser Methode erfordert:

1) das Beziehen aller Puncte des Raumgebildes auf drei Coordinatenaxen;
2) die Construction der Projectionen der drei Systeme von Coordinaten.

Das Beziehen aller Puncte auf die Axen geschieht bei der Aufnahme eines Bauwerkes durch das Ausmessen seiner Theile und beim Entwerfen eines solchen durch Angabe ihrer Grösse. Bei allen Bauwerken ist die für jeden Ort der Erde feste, durch das Loth gegebene Richtung der Schwerkraft zu berücksichtigen; sie leitet auf die Anwendung von Geraden und Ebenen in lothrechter und wagerechter Lage. Zudem erhalten diese Werke eine möglichst regelmässige Bildung; als Hauptform der meisten kann ein normales Parallelepiped mit vier lothrechten Kanten angesehen werden. Mit den Kanten und Flächen eines solchen sind sehr viele der an ihnen vorkommenden Geraden und Ebenen parallel; zugleich zeigen die Richtungen der Kantensysteme die drei Raumdimensionen der Länge, Breite und Höhe an.

Für die Ausführung ist es zweckmässig, die Coordinatenaxen mit diesen Richtungen, also mit möglichst vielen Geraden des Raumgebildes, parallel zu legen. Wir bezeichnen die mit der Längen-, Breiten- und Höhenrichtung parallelen Axen durch **X**, **Y**, **Z**.

Die Coordinatenebene der Axen **X**, **Y** hat demnach eine wagerechte Lage, wir nennen sie die G r u n d e b e n e und bezeichnen sie durch $\mathfrak{G}$.

Gleichviel ob ein Raumgebilde die oben angegebene regelmässige oder eine unregelmässige Gestalt hat, wir nehmen an, alle Puncte desselben seien auf die drei Coordinatenaxen bezogen, und die Coordinaten durch gegebene Strecken oder durch Zahlen ausgedrückt, welche ihre Maasse für eine gegebene Längen-Einheit sind.

104. Die Projectionen der mit den Coordinatenaxen parallelen, d. h. dreier Systeme von parallelen Geraden, erhält man durch Anwendung der in §. 13 gegebenen Sätze. Es genügt daher, die Projectionen der Coordinatenaxen zu construiren; hierzu ist die Angabe der Lage der Projectionsebene $\mathfrak{P}$ gegen dieselben erforderlich.

Es sei ε der Winkel, unter welchem $\mathfrak{P}$ gegen die Grundebene $\mathfrak{G}$ geneigt ist; den Schnitt **G** dieser Ebene nennen wir die G r u n d l i n i e. Und denken wir in $\mathfrak{G}$ eine Neigungslinie (§. 15) in Bezug auf $\mathfrak{P}$, so schliesse die Axe **X** mit dieser Neigungslinie einen Winkel δ ein. Durch die Winkel ε, δ ist die Lage der Projectionsebene gegen die Axen bestimmt.

Umgekehrt: nimmt man die Projectionsebene als gegeben an, so ist die Lage der Axen gegen dieselbe durch die Winkel ε, δ bestimmt, und wir können nach dem Früheren deren Projectionen construiren. Diese Aufgabe ist die Hauptaufgabe der Axonometrie, und fordert:

1) die Bestimmung der Winkel, welche von den Projectionen der Axen eingeschlossen werden,
2) die Bestimmung des Verkürzungs-Verhältnisses für jede Axe (§. 13).

Die Projection der Axe **Z** ist immer normal auf der Grundlinie (§. 23, 3); man richte sie, als Darstellung einer lothrechten Geraden, in den Zeichnungen stets von oben nach unten, folglich **G** von links nach rechts, wie die Projectionsaxe **A** (§. 27). Wir bezeichnen durch ξ, v die von den Projectionen der Axen **X**, **Y** mit der von **Z** eingeschlossenen (spitzen) Winkel, durch q_x, q_y, q_z die Verkürzungs-Verhältnisse der Coordinaten x, y, z.

Die Winkel ε, δ, welche die Lage der Coordinatenaxen gegen die Projectionsebene bestimmen, können von verschiedener Grösse innerhalb der Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ sein. Werden diese Grenzwerthe ebenfalls betrachtet, so lassen sich drei Hauptfälle, ins Besondere aber neun Lagen der Projectionsebene unterscheiden.

I. Grundrisse und Aufrisse.

105. Hat jeder der Winkel ε, δ den einen der Grenzwerthe, so ist die Projectionsebene mit zwei Coordinatenaxen, also mit einer Coordinatenebene parallel.

1) Für $\varepsilon = 0$ ist $\mathfrak{P}$ parallel mit der Grundebene oder der Ebene der Axen **X**, **Y**, sie kann auch mit ihr zusammenfallen. Bei dieser Annahme fällt der Winkel δ aus; denn da die Ebenen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{P}$ parallel sind, so hat die erste keine Neigungslinie gegen die zweite. Die Axe **Z** projicirt sich als ein Punct, daher ist $q_z = 0$ und die Winkel ξ, v fallen aus. Die Projectionen der Axen **X**, **Y** schliessen einen rechten Winkel ein, es ist $\xi + v = \frac{\pi}{2}$, $q_x = q_y = 1$. Eine solche Projection heisst in den Anwendungen ein Grundriss.

Für $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ ist $\mathfrak{P}$ normal auf der Grundebene, die Projection der Axe **Z** normal auf der Grundlinie G (§. 104), und $q_z = 1$. Die Projectionen der Axen **X**, **Y** fallen in G, ihre Verkürzungs-Verhältnisse hängen vom Winkel δ ab. Eine solche Projection heisst in den Anwendungen ein Aufriss oder Standriss.

2) Für $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, $\delta = \frac{\pi}{2}$ ist $\mathfrak{P}$ parallel mit der Ebene der Axen **X**, **Z** oder fällt mit ihr zusammen, $\xi = \frac{\pi}{2}$, $v = 0$, $q_x = 1$, $q_y = 0$. Die Projection heisst ins Besondere ein Längen-Aufriss.

3) Für $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, $\delta = 0$ ist $\mathfrak{P}$ parallel mit der Ebene der Axen **Y**, **Z** oder fällt mit ihr zusammen, $\xi = 0$, $v = \frac{\pi}{2}$, $q_x = 0$, $q_y = 1$. Die Projection heisst ins Besondere ein Seiten-Aufriss.

Die Projectionsebene $\mathfrak{P}$ erhält hierbei nothwendig für 1) die wagerechte, für 2) und 3) eine lothrechte Lage. Wenn auch den Ebenen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ diese Lagen in den vorhergehenden Capiteln zuertheilt wurden, so waren sie doch für die aufgestellten Sätze und Aufgaben nicht erforderlich (§. 25).

106. Hat ein Bauwerk die oben (§. 103) angegebene regelmässige Bildung, so zeigt seine Projection auf eine der drei Coordinatenebenen jede mit derselben parallele ebene Figur in ihrer wahren Gestalt (§. 18) und jede mit einer der beiden anderen Ebenen parallele Figur als eine Gerade (§. 20).

Durch die Projection auf eine Ebene allein ist ein Raumgebilde nicht bestimmt (§§. 23, 24), daher ist allgemeiner Gebrauch, jedes Bauwerk durch Projectionen auf die drei Coordinatenebenen darzustellen, d. h. durch Grundriss, Längen- und Seiten-Aufriss, wie wir mit einem als Beispiel gewählten Grabkreuze gethan haben. Fig. 53.
Diese Darstellungsart hat den Vortheil, dass man die wahre Gestalt jeder mit den Coordinatenebenen parallelen Figur in einer der drei Zeichnungen erhält und ihre Längen-Ausdehnungen unmittelbar aus diesen Zeichnungen nach dem beigefügten Maassstabe entnehmen kann. Sie ist keine andere als die von der darstellenden Geometrie im engeren Sinne (§. 27) angewendete, wenn man dem Gebilde die einfachste Lage gegen die Projectionsebenen (§. 78), diesen aber die oben vorgeschriebenen Lagen giebt.

Wir haben im zweiten, dritten und vierten Capitel nachgewiesen, dass durch zwei, streng genommen durch drei Projectionen jedes Raumgebilde bestimmt ist, und dass man diese Projectionen erlangen kann, selbst wenn seine Bildung nicht die in unserem Sinne regelmässige ist (§. 103), sobald eine hinreichende Anzahl bestimmender Stücke desselben gegeben ist.

Die projicirenden Linien der Puncte sind parallel den Richtungen ihrer Coordinaten, und ihre Höhen über den Projectionsebenen sind gleich den Längen der Coordinaten; jede der drei Zeichnungen giebt zwei Systeme der Coordinaten in ihrer wahren Länge. Daher sagen wir:

> ein Raumgebilde ist durch seine Projectionen auf die drei Coordinaten- (oder Projections-) Ebenen und die beigefügten Maassstäbe gegeben.

Behufs jeder anderen Darstellung desselben können wir aus diesen Projectionen die oben (§. 103) geforderten Coordinaten seiner Puncte entnehmen.

107. Man nennt den Längen- und Seiten-Aufriss eines Bauwerks seine Vorder- (auch Hinter-) und Seiten-Ansicht, weil eine solche Zeichnung dem Bilde nahe kommt, unter welchem es einem Beschauer erscheint, der sich in bedeutender Entfernung von ihm in der durch die Projectionsstrahlen angegebenen Richtung befindet, der also vor (auch hinter) ihm oder seitwärts von ihm steht, so dass er nur die eine Front desselben ansieht. Eben so nennt man den Grundriss eine Ober- oder Unter-Ansicht, je nachdem der Beschauer oberhalb oder unterhalb des Raumgebildes in der Richtung der Projectionsstrahlen gedacht wird.

Der Abstand einer Projectionsebene $\mathfrak{P}$ vom Gebilde ist von keinem Einfluss auf die Projection, daher kann $\mathfrak{P}$ ausserhalb des Bauwerkes gedacht werden oder durch dasselbe hindurch gehend. Denkt man im letzteren Falle den Theil desselben diesseits der Projectionsebene weggenommen, so ändert sich die Projection, und sie erhält den Namen Durchschnitt, je nach der Coordinatenebene, mit welcher $\mathfrak{P}$ parallel ist: Horizontal-, Längen-, Querdurchschnitt. Die Durchschnittsfiguren selbst werden in den Zeichnungen entweder schraffirt oder in Farben angelegt, welche das Material der durchschnittenen Theile charakterisiren.

Unter dem Grundrisse eines Gebäudes versteht man gewöhnlich einen Horizontal-Durchschnitt desselben (z. B. in Fig. 53 ist $\mathfrak{P}_1$ durch ihren zweiten Schnitt AB angegeben). Längen- oder Querdurchschnitte, besonders einzelner Theile, nennt man auch Profile.

Alle diese Zeichnungen oder Projectionen führen den Gesammtnamen geometrische Zeichnungen, weil die Lage der Ebene einer jeden so gewählt ist, dass einige ebene Figuren des Raumgebildes sich in ihrer wahren Gestalt projiciren. Aber keine von ihnen genügt für sich allein, dem Beschauer die Vorstellung des ganzen Bauwerkes zu geben, es bleibt Aufgabe seines Verstandes, sich dieselbe aus ihnen allen nach den Gesetzen der darstellenden Geometrie zu bilden.

II. Ueber-Eck-Projectionen.

108. Hat einer der Winkel ε, δ den einen Grenzwerth 0 oder $\frac{\pi}{2}$, der andere eine beliebige Grösse zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, so ist die Projectionsebene parallel mit einer Coordinatenaxe, also normal auf der Ebene beider anderen.

Die Projectionen der Axen, auf deren Ebene $\mathfrak{P}$ normal ist, fallen in den Schnitt ihrer Ebene in einander, die Projection der dritten Axe ist normal auf diesem Schnitt, und ihr Verkürzungs-Verhältniss gleich Eins.

4) Für $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, $\delta > 0$, $< \frac{\pi}{2}$ ist $\mathfrak{P}$ parallel mit der Axe **Z**.

$\xi = \upsilon = \frac{\pi}{2}$, $q_x = \sin\delta$, $q_y = \cos\delta$, $q_z = 1$.

Für $\delta = \frac{\pi}{4}$ ist $q_x = q_y = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

5) Für $\varepsilon > 0$, $< \frac{\pi}{2}$, $\delta = 0$ ist $\mathfrak{P}$ parallel mit der Axe **Y**.

$\xi = 0$, $\upsilon = \frac{\pi}{2}$, $q_x = \cos\varepsilon$, $q_y = 1$, $q_z = \sin\varepsilon$.

Für $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$ ist $q_x = q_z = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

6) Für $\varepsilon > 0$, $< \frac{\pi}{2}$, $\delta = \frac{\pi}{2}$ ist $\mathfrak{P}$ parallel mit der Axe **X**.

$\xi = \frac{\pi}{2}$, $\upsilon = 0$, $q_x = 1$, $q_y = \cos\varepsilon$, $q_z = \sin\varepsilon$.

Für $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$ ist $q_y = q_z = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

109. Unter diesen Annahmen, namentlich unter der vierten, nennt man eine solche Projection in den Anwendungen eine Uebereck-Projection. Man kann sie zunächst aus dem Grundrisse und Aufrisse eines Gebildes, z. B. des in Fig. 53 gegebenen Grabkreuzes, als eine dritte Projection herleiten.

Zu dem Behufe nehme man für die Annahme 4) $\mathfrak{P}_3$ normal auf $\mathfrak{P}_1$, und $\mathbf{A}_2$ gegen **X** unter dem Winkel $\frac{\pi}{2} - \delta$ geneigt. Für 5) und 6) nehme man $\mathfrak{P}_3$ normal auf $\mathfrak{P}_2$, $\mathbf{A}_2$ gegen **A** unter dem Winkel ε geneigt, für 5) lege man **X**, für 6) **Y** parallel mit **A** in $\mathfrak{P}_1$. Sodann construire man wie früher (§. 32) die dritte Projection jedes Punctes p. Fig. 54. Fig. 55.

In dieser Weise ist die Darstellung des Kreuzes nach den Annahmen 4) ($\delta = 65^\circ$) und 6) ($\varepsilon = 67^\circ$) erhalten, nur ist die Lage der Zeichnung so geändert worden, dass die den lothrechten entsprechenden Geraden in die Richtung gebracht sind, die für solche Gerade (von oben nach unten) angenommen wird. Fig. 54a u. 55a.

Für regelmässige Raumgebilde ist diese Projectionsart nicht zu empfehlen, sie ist wenig vortheilhaft für eine anschauliche Darstellung, da die Figuren, deren Ebenen mit der einen (der auf $\mathfrak{P}$ normalen) Coordinatenebene parallel sind, sich als Gerade projiciren. So in Fig. 54a die Grundfläche und die Figuren, deren Ebenen mit dieser parallel sind, in Fig. 55a die Seitenflächen in den mit **YZ** parallelen Ebenen.

Zuweilen wendet man diese Projectionsart nach der ersten Annahme an, um die innere Einrichtung eines Bauwerkes, z. B. einer Gewölbe-Construction, zu zeigen, indem man die Projectionsebene so annimmt, dass sie das Bauwerk durchschneidet und mit keiner Coordinatenebene parallel ist. Sie wird durch ihren Schnitt in der Grundebene gegeben; diesen Schnitt bezeichnet man, etwa mit *AB*, und nennt eine solche Projection einen Durchschnitt nach der Linie *AB*. Streng genommen ist diese Benennung eine unrichtige, doch bedient man sich ihrer selbst in den unter §. 107 angegebenen Fällen. (Vergl. Fig. 53.)

Hat ein Raumgebilde eine von der regelmässigen abweichende Gestalt und keine Figuren, deren Ebenen den lothrechten Coordinatenebenen parallel sind, dagegen solche, deren Ebenen mit der Grundebene parallel oder unter einem sehr spitzen Winkel gegen dieselbe geneigt sind, so wird eine Projection desselben nach einer der Annahmen 5), 6) in §. 108 die letzteren Flächen in besserer Entwicklung zeigen als der Aufriss. Die Projectionsebene kann so gewählt werden, dass die vorzüglichsten, das Gebilde charakterisirenden ebenen Figuren eine nur geringe Verkürzung erleiden und die Zeichnung eine anschauliche Darstellung des Raumgebildes liefert.

110. Aufgabe. Ein Sechsseit in wagerechter Lage sei gemeinschaftliche Grundfläche eines unter ihm stehenden Prisma mit lothrechten Kanten und einer oberhalb befindlichen Pyramide. Der so gebildete Körper (etwa ein Thurm) soll auf eine Ebene in der Lage 6) projicirt werden.

Fig. 57. Wir nehmen Grundriss und Aufriss des Körpers als gegeben an; die untere Grundfläche liege in **XY** beliebig, d. h. keine Seite sei mit einer Axe parallel. Die geforderte Figur wird zunächst als dritte Projection erlangt, wobei die Ausführung in zweierlei Weise so modificirt werden kann, dass die Figur sogleich die richtige Lage erhält.

1) Man lege den Grundriss mit **X** normal auf **A**, nehme **X** als ersten Schnitt von $\mathfrak{P}_3$, führe $\mathbf{A}_2$ (ihren zweiten Schnitt) gegen **A** unter dem Winkel ε, und fälle aus der ersten Projection jedes Punctes a', h', s', . . . die Normale $a'\mathfrak{a}'$, $h'\mathfrak{h}'$, $s'\mathfrak{s}'$, . . . auf **X**, eben so aus der zweiten die Normale $a''\mathfrak{a}''$, $h''\mathfrak{h}''$, $s''\mathfrak{s}''$, . . . auf $\mathbf{A}_2$.

Bringe nun $\mathfrak{P}_3$ in lothrechte Lage, also $\mathbf{A}_2$ mit allen in ihr liegenden Puncten in $(\mathbf{A}_2)$, $(\mathfrak{a}'')$, $(\mathfrak{h}'')$, $(\mathfrak{s}'')$, ... normal auf $\mathbf{A}$, und drehe sie sodann um die jetzt in ihr liegende Axe $\mathbf{Z}$, bis sie mit $\mathfrak{P}_2$ parallel ist, drehe also $\mathbf{X}$ mit allen in ihr liegenden Puncten um $\mathbf{Z}'$ in $(\mathbf{X})$, $(\mathfrak{a}')$, $(\mathfrak{h}')$, $(\mathfrak{s}')$, ... Die Normalen zu $\mathbf{A}$ aus $(\mathfrak{a}')$, $(\mathfrak{h}')$, $(\mathfrak{s}')$, ... und die Parallelen zu $\mathbf{A}$ aus $(\mathfrak{a}'')$, $(\mathfrak{h}'')$, $(\mathfrak{s}'')$, ... schneiden sich in a''', h''', s''', ...

2) Man lege den Grundriss mit $\mathbf{X}'$ parallel zu $\mathbf{A}$ und führe durch jeden seiner Puncte, a', h', s', ... die Normale $a'\mathfrak{a}$, $h'\mathfrak{h}$, $s'\mathfrak{s}$, ... auf $\mathbf{Y}'$. Lege sodann $(\mathbf{Y})$ in $\mathfrak{P}_2$ unter dem Winkel ε gegen $\mathbf{Z}''$ mit den in ihr liegenden Puncten und zeichne über ihr den Aufriss wie in Fig. 57 nur in geneigter Lage. Die Normalen zu $\mathbf{A}$ aus a', h', s', ... und die Parallelen zu $\mathbf{A}$ aus a'', h'', s'', ... schneiden sich in a''', h''', s''', ... Fig. 58.

Die Construction entspricht für die untere Grundfläche der in Fig. 6 (§. 19), nur denke man in dieser die mit der Projection gleichliegende Figur $[a][b]$ ... unterhalb E.

111. Nach der axonometrischen Methode erhält man die geforderte Projection mit Hilfe derer der Coordinaten aller Ecken des Gebildes.

Man zeichne die Projection $\mathbf{Z}''$ der Axe $\mathbf{Z}$ beliebig (von oben nach unten), die von $\mathbf{Y}$ fällt mit ihr zusammen, die von $\mathbf{X}$, also $\mathbf{X}''$ schneidet sie unter rechtem Winkel in $\mathbf{a}''$. Trage für jede Ecke, z. B. für s: Fig. 58.

1) die Coordinate x, d. h. die Strecke $\mathbf{a}'\mathfrak{s}'$ des Grundrisses (Fig. 57), auf $\mathbf{X}''$ in $\mathbf{a}''\mathfrak{s}^0$;

2) die Projection der Coordinate y, d. h. die Strecke $\mathfrak{s}'s'$ (Fig. 57) multiplicirt mit $\cos\varepsilon$, auf die durch $\mathfrak{s}^0$ mit $\mathbf{Z}''$ parallele Gerade in $\mathfrak{s}^0\mathfrak{s}$;

3) die Projection der Coordinate z, d. h. die Strecke s^0s'' des Aufrisses (Fig. 57), multiplicirt mit $\sin\varepsilon$, auf dieselbe Gerade in $\mathfrak{s}s'''$.

Die verkürzten Coordinaten zu erhalten, trage man auf den einen Schenkel des Winkels ε von seinem Scheitelpuncte aus die Strecken $\mathfrak{s}'s'$, s^0s'' in sk, sl und fälle aus k, l die Normalen kk', ll' auf den anderen Schenkel, so ist $sk' = y \,.\, \cos\varepsilon$, $ll' = z \,.\, \sin\varepsilon$. Oder man trage auf eine Gerade $\mathbf{X}$ eine beliebige Längen-Einheit in ab, verbinde die Puncte a, b mit einem beliebigen Puncte p, Fig. 59.

ziehe die Geraden **Y**, **Z** parallel mit **X** und so, dass die auf ihnen durch pa, pb abgeschnittenen Strecken $a_1 b_1 = ab \cdot \cos \varepsilon$, $a_2 b_2 = ab \cdot \sin \varepsilon$ sind. Trägt man eine Coordinate y auf **X** in ac, so schneidet die Gerade pc auf **Y** in $a_1 c_1$ die Projection y' ab, u. s. w.

III. Axonometrie ins Besondere.

112. Hat keiner der Winkel ε, δ einen der Grenzwerthe 0 oder $\frac{\pi}{2}$, so ist die Projectionsebene $\mathfrak{P}$ geneigt gegen jede Coordinaten-Axe und -Ebene. Die Projectionen keiner zwei Axen schliessen einen rechten Winkel ein, und das Verkürzungs-Verhältniss jeder Axe liegt zwischen Null und Eins. Die Projection jeder ebenen, mit einer Coordinatenebene parallelen Figur ist eine derselben affine Figur, deren Seiten und Winkel nicht unmittelbar gemessen werden können.

Die Darstellung eines Gebildes unter dieser Annahme nennt man ins Besondere eine axonometrische Projection (Darstellung oder Zeichnung) desselben. Sie ist nichts anderes als eine orthographische Projection, bei welcher das darzustellende Gebilde nicht die einfachste Lage gegen die Projectionsebene hat (§. 81). Es ist hierbei gleichgiltig, ob man sich die Ebene in lothrechter Lage vorstellen will und annehmen, die Lage des Gebildes im Raume sei verändert; oder ob man dieses als fest und die Ebene in geneigter Lage nehmen will. Wir ziehen letztere Annahme als die naturgemässe vor.

Die Projectionsebene $\mathfrak{P}$ lässt sich als eine vierte, $\mathfrak{P}_4$, ansehen, deren Lage durch die Winkel δ, ε bestimmt ist, und auf welche man jeden Punct des Raumgebildes projicirt. Diess Verfahren genügt für einfache Gebilde; für zusammengesetzte ist es vortheilhafter die axonometrische Methode anzuwenden, indem man zunächst die Projectionen der Axen und ihre Verkürzungs-Verhältnisse aufsucht.

113. Haupt-Aufgabe. Die Coordinatenaxen auf eine gegebene Ebene zu projiciren.

Fig. 60. Die Lösung dieser Aufgabe erfolgt durch die Annahme mehrerer auf einander folgenden Projectionsebenen. Es sei $\mathfrak{P}_1$ die Grundebene (§. 103), $\mathfrak{P}_2$ parallel mit der Ebene der Axen **X**, **Z**. Dann ist **X**′ parallel mit **A**, **Y**′ normal auf **A**, **Z**′ ist **a**′. Es fällt **X**″ in **A**, **Y**″ ist **a**″, **Z**″ normal auf **A**. Eine und dieselbe beliebige

Längen-Einheit werde auf jede der drei Axen abgetragen, so dass $\mathbf{a}'x' = \mathbf{a}'y' = \mathbf{a}''x'' = \mathbf{a}''z'' = 1$.

Die dritte Projectionsebene $\mathfrak{P}_3$ sei normal auf $\mathfrak{P}_1$ und so, dass $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{X}'$ sich unter dem Winkel δ schneiden; man construire $\mathbf{a}'''$, x''', y''', z''' (§. 32).

Die vierte Projectionsebene $\mathfrak{P}_4$ sei normal auf $\mathfrak{P}_3$ und gegen $\mathfrak{P}_1$ unter dem Winkel ε geneigt, so dass $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_2$ sich unter dem Winkel ε schneiden; man construire $\mathbf{a}''''$, x'''', y'''', z'''', indem man die vierten Ordinaten dieser Puncte in Bezug auf $\mathbf{A}_3$ d. h. die Strecken $\mathbf{a}''''\mathfrak{a}$, $x''''\mathfrak{x}$, ... gleich und gleichliegend nimmt mit den ersten Ordinaten in Bezug auf $\mathbf{A}_2$ d. h. den Strecken $\mathbf{a}'\mathbf{a}'''$, $x'x'''$, ... ; hiermit ist die Aufgabe gelöst. Denn die Grundebene ist gegen $\mathfrak{P}_4$ unter dem Winkel ε geneigt, $\mathbf{A}_2$ ist ihre Neigungslinie und schliesst mit $\mathbf{X}$ den Winkel δ ein.

Die erhaltene Figur liefert die Projectionen der Axen $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ in den Geraden $\mathbf{a}''''x''''$, $\mathbf{a}''''y''''$, $\mathbf{a}''''z''''$, die Winkel ξ, v (§. 104) in den Winkeln $x''''\mathbf{a}''''z''''$, $y''''\mathbf{a}''''z''''$ und die Verkürzungs-Verhältnisse:

$$\mathfrak{q}_x = \frac{\mathbf{a}''''x''''}{\mathbf{a}'x'},\ \mathfrak{q}_y = \frac{\mathbf{a}''''y''''}{\mathbf{a}'y'},\ \mathfrak{q}_z = \frac{\mathbf{a}''''z''''}{\mathbf{a}''z''}.$$

114. Ein Raumgebilde sei durch Grundriss, Aufrisse und beigefügte Maassstäbe gegeben. Wir legen die Axen $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ in die Ebene $\mathfrak{P}_1$ des Grundrisses oder in eine mit derselben parallele, und bestimmen nach dem vorigen Paragraphen die Winkel ξ, v so wie die Verkürzungs-Verhältnisse $\mathfrak{q}_x$, $\mathfrak{q}_y$, $\mathfrak{q}_z$.

In der Ebene der geforderten axonometrischen Projection zeichnen wir $\mathbf{Z}'$ von oben nach unten (§. 104), nehmen in ihr den Anfangspunct $\mathbf{a}'$ beliebig und führen $\mathbf{X}'$, $\mathbf{Y}'$ durch $\mathbf{a}'$ unter den nach dem vorigen Paragraphen erhaltenen Winkeln ξ, v gegen $\mathbf{Z}'$ geneigt.

Aus dem für den Grundriss und Aufriss gegebenen Maassstabe leiten wir drei andere Maassstäbe nach den Verkürzungs-Verhältnissen $\mathfrak{q}_x$, $\mathfrak{q}_y$, $\mathfrak{q}_z$ ab, um auf denselben die Längen der projicirten Coordinaten zu nehmen. Es sei z. B. auf eine Gerade die Längen-Einheit des gegebenen Maassstabes in ab abgetragen, so dass $ab = 1$; man verbinde durch Gerade die Puncte a, b mit einem beliebigen Puncte p und ziehe die Geraden X, Y, Z parallel mit ab so, dass die auf ihnen durch pa, pb abgeschnittenen Strecken $a_1b_1 = \mathbf{a}''''x''''$, $a_2b_2 = \mathbf{a}''''y''''$, $a_3b_3 = \mathbf{a}''''z''''$ sind. Fig 60a.

Aus den Richtungen der Projectionen der Axen und aus den Längen der projicirten Coordinaten lässt sich die Projection jedes Punctes des Raumgebildes construiren.

115. Aufgabe. Die axonometrische Projection eines Punctes k zu construiren.

Fig. 50. Es seien x', y', z' die aus den Maassstäben entnommenen Längen für die Projectionen der Coordinaten x, y, z des Punctes k. Die drei Strecken x', y', z' lassen sich auf sechs verschiedene Weisen abtragen (§. 102); z. B. x' auf $\mathbf{X}'$ in $a'b$, y' auf die durch b mit $\mathbf{Y}'$ gezogene Parallele in bf, z' auf die durch f mit $\mathbf{Z}'$ gezogene Parallele in fk'.

Die Projection jeder Strecke wird durch die ihrer Endpuncte erhalten; sie hat die Länge der Strecke nur dann, wenn diese mit der Projectionsebene parallel ist. Die Projection jeder mit einer Coordinatenaxe parallelen Strecke wird unmittelbar nach einem der drei abgeleiteten Maassstäbe gemessen, daher ist die axonometrische Projection eines solchen Raumgebildes leicht zu erhalten, dessen meiste Kanten mit den Coordinatenaxen parallel sind.

Aufgabe. Die axonometrische Projection eines normalen Parallelepipeds zu zeichnen.

Fig. 50. Dasselbe sei durch seine Projectionen Fig. 48 gegeben; wir nehmen die Ecke a als Anfangspunct, die Kanten ab, ac, ad in den Richtungen der Axen $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$. Trägt man die Längen der Projectionen dieser Kanten nach den Maassstäben von $\mathbf{a}'$ aus ab, so lässt sich die geforderte Projection durch Ziehen von parallelen Geraden beenden.

Das Ergebniss der Construction ist eine Darstellung des Parallelepipeds entsprechend den Projectionen des Würfels Fig. 39a; denn nur die Methode der Ausführung ist eine andere als die der darstellenden Geometrie.

Gegebene Richtung der Projectionsstrahlen.

116. In den geometrischen Zeichnungen eines regelmässigen Raumgebildes (§. 103) projiciren sich die meisten ebenen Figuren seiner Oberfläche als congruente Figuren, also ihre Winkel und Seiten in wahrer Grösse; es sind aber mehrere solcher Zeichnungen zum Verständnisse des Gebildes erforderlich (§.§. 106, 107). In einer axonometrischen Zeichnung projiciren sich jene Figuren als affine, also ihre Winkel und Seiten in verschiedener Grösse, dagegen giebt eine solche Zeichnung vom Raumgebilde eine anschauliche Darstellung. Diese kommt dem Bilde nahe, unter welchem es einem Beschauer erscheint, der die mit den drei Coordinatenebenen parallelen Flächen gleichzeitig aus einer im Verhältniss zur Ausdehnung des Gebildes bedeutenden Entfernung betrachtet.

Da die Darstellung der scheinbaren Gestalt durch die Perspective gegeben wird, so nennt man diese Projectionsart zuweilen die geometrische oder (orthographische) Parallel-Perspective und die Projectionen selbst perspectivische, richtiger perspectivartige Zeichnungen, im Gegensatze zu den geometrischen (§. 107). Die Benennung axonometrische Zeichnungen ist eigentlich eine unrichtige, da Axonometrie nichts weiter als die Methode ist, eine solche Zeichnung aus den Projectionen der Coordinaten herzuleiten.

Wird in Bezug auf ein gegebenes Raumgebilde ein bestimmter Ort O angenommen, und soll es so dargestellt werden, wie es erscheint, wenn es von diesem Orte aus, also in einer gegebenen Richtung betrachtet wird, so führe man aus O nach einem Puncte p in der Mitte des Gebildes die Gerade Op. Diese giebt die Richtung der Projectionsstrahlen, also auch die Lage der (auf denselben normalen) Projectionsebene an; und ist am Gebilde ein Coordinatensystem eingerichtet, so ergeben sich auch die diese Lage ausdrückenden Winkel δ, ε, wie folgendes Beispiel erläutern mag.

117. Aufgabe. Eine Thurmspitze so darzustellen, wie sie von einem gegebenen Orte aus erscheint.

Dieselbe sei durch Grundriss und Aufriss gegeben; die Axe des Thurms sei **Z**, die Grundfläche der Spitze diene als Grundebene mit **X**, **Y** parallel den Seitenflächen des Thurms. Die Zeichnung in kleinerem Maassstabe zeigt den Ort für das Auge O des Beschauers. Verbindet man O mit dem auf **Z** in der Mitte der Spitze gelegenen Puncte p durch die Gerade Op, so drückt diese die Sehrichtung aus. Der von ihr mit dem festen Lothe (der Axe **Z**) eingeschlossene Winkel ist ε, denn die für die Darstellung anzunehmende Projectionsebene $\mathfrak{P}_4$ muss normal auf Op sein, ist also gegen die Grundebene unter demselben Winkel ε geneigt; die Figur zeigt denselben in der mit Op parallelen $\mathfrak{P}_3$. Die durch Op und **Z** gehende lothrechte Ebene schliesst mit der Ebene **XZ** den Winkel δ ein; ihr Schnitt $O'p'$ mit der Grundebene ist von

Fig. 61.
Fig. 62.

dieser eine Neigungslinie gegen $\mathfrak{P}_4$ und schneidet **X** unter dem Winkel δ (§. 104).

Die Coordinaten von O sind in Metern

$$x = p'q' = 18{,}20,\quad y = q'0' = 50,\quad z = q''0'' = -22{,}30;$$

für p sind: $\quad x = y = 0, \quad z = 2{,}50;$

daher: $$\operatorname{tg}\delta = \frac{50}{18{,}2},\quad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\sqrt{18{,}2^2 + 50^2}}{22{,}3 + 2{,}5},$$

und annähernd $\delta = 70^0$, $\varepsilon = 65^0$.

In Fig. 60 sind diese Winkel gewählt und die Einheit gleich 3 Meter gesetzt; die nach §. 113 construirten Winkel und Verkürzungs-Verhältnisse sind daher für die Ausführung zu benutzen mit dem Bemerken, dass die Projectionsstrahlen für die Thurmspitze von unten nach oben, in Fig. 60 von oben nach unten gehen, die spitzen Winkel ξ, v sind deshalb nach unten zu richten.

Fig. 63. **118.** Zur Ausführung der Construction nehmen wir die Axe **Z** beliebig, führen durch einen Punct **a** derselben **X**, **Y** unter den Winkeln ξ, v gegen sie und bestimmen sodann die Projection jedes Punctes k nach §. 115.

Um Verwirrung zu vermeiden, denken wir die Ebene **XY** parallel mit der eigentlichen Grundebene in beliebigem Abstande von derselben und nehmen für jeden Punct k zuerst nur die Coordinaten x, y, welche den Punct f, als Projection von k auf **XY** ergeben. Alle diese Puncte f bilden einen axonometrischen Grundriss des Gebildes, der eben so unter (oder über) der axonometrischen Projection selbst liegt, wie die erste unter der zweiten bei der darstellenden Geometrie (§. 27).

Nehmen wir dann auf **Z** den Punct $\mathbf{a}_1$ für die eigentliche Grundebene an, so ist die Projection jeder Coordinate z um die Strecke $\mathbf{aa}_1 = ff_1$ zu vermehren; d. h. $f_1 k$ ist eigentlich die Projection der Coordinate z, wir tragen aber von f aus die Strecke $\mathbf{aa}_1 + f_1 k$ auf.

Die Axonometrie hat den Zweck, ein Gebilde anschaulich darzustellen. Das Hinzufügen des axonometrischen Grundrisses, der Axen und der Maassstäbe bewirkt aber, dass man aus der Zeichnung die Lage jedes Punctes k angeben kann; hierdurch wird das Gebilde selbst eben so bestimmt, wie durch geometrische Zeichnungen.

119. Soll ein Raumgebilde anschaulich dargestellt werden, ohne dass sein Bild für einen bestimmten Ort gefordert wird, so müssen die Winkel ε, δ so gewählt werden, dass die Projectionen der ebenen Figuren des Raumgebildes, welche am meisten beitragen, dasselbe anschaulich zu machen, am wenigsten verkürzt werden, d. h. dass für sie das Verhältniss $\mathfrak{q}$ (§§. 20, 23) der Einheit nahe komme.

Je nachdem der Winkel ε sich mehr oder weniger einem rechten nähert, werden die Projectionen der mit der Grundebene **XY** parallelen Figuren mehr oder weniger verkürzt, der Beschauer hat, nach der Sprache der Zeichner, weniger oder mehr Aufsicht (oder Untersicht) des Raumgebildes.

Ist der Winkel δ ein halbrechter, so werden die Projectionen der Figuren, welche mit den Ebenen **XZ**, **YZ** parallel sind, gleichmässig verkürzt; liegt die Grösse von δ zwischen einem halbrechten und einem rechten, so werden die Projectionen der mit **XZ** parallelen Figuren weniger, die der mit **YZ** parallelen mehr verkürzt; liegt die Grösse von δ zwischen Null und einem halbrechten Winkel, so findet das Umgekehrte statt.

Sind an dem Raumgebilde vorspringende oder zurückliegende Theile, und sollen die ersteren nicht andere Theile verdecken oder die letzteren von solchen nicht verdeckt werden, so suche man im Grundriss und Aufriss eine Richtung der Projectionsstrahlen, die diesen Forderungen möglichst Genüge leistet, und wähle nach der Hauptaufgabe §. 40 eine $\mathfrak{P}_{\prime}$ normal auf **XY** und parallel mit diesen Strahlen, sodann die $\mathfrak{P}_{\prime\prime}$ als eigentliche Projectionsebene, normal auf den Strahlen.

Nach dergleichen Betrachtungen sind die Winkel ε, δ zu bestimmen. Folgendes Beispiel mag diese Regeln etwas erläutern.

120. Aufgabe. Die Ecke des Hauptgesimses eines Gebäudes so darzustellen, wie sie einem Beschauer erscheint, der beide Seitenflächen des Gebäudes, die eine mehr entwickelt als die andere, sieht und die Untersicht des Gesimses hat.

Das Gesims ist gegeben: 1) durch Aufriss oder Vorder-Ansicht, Fig. 60.
2) durch Grundriss, Unter-Ansicht oder Horizontalschnitt nach der Linie *AB* des Aufrisses, 3) durch Profil oder Querschnitt nach der Linie *CD* des Grundrisses.

Die vordere obere Ecke des Gesimses sei der Anfangspunct **a** der drei Axen, von denen die **Z** nach unten gerichtet ist. Wir zeichnen im Grundriss einen Projectionsstrahl $m'n'$ so, dass die

Grösse des von ihm und der **X** Axe eingeschlossenen Winkels δ zwischen einem halbrechten und einem rechten liegt. Damit die vorspringenden Sparrenköpfe an der mit **XZ** parallelen Seitenfläche des Gesimses möglichst entwickelt werden, richten wir $m'n'$ durch die zurückliegende Kante m' eines solchen so, dass die vordere Kante n' des nebenliegenden zur Seite bleibt. Mit dieser Richtung $m'n'$ ist $\mathbf{A}_2$ (§. 113) parallel, und Winkel δ auf $62\frac{1}{2}°$ für dieses Beispiel bestimmt.

Wir zeichnen die zweite Projection $m''n''$ des Strahles so, dass dieselbe stärker geneigt ist als die zweite Projection der ansteigenden Kanten der Sparrenköpfe, damit die untere Fläche der letzteren in der Darstellung erscheine. Aus der ersten und zweiten Projection ergiebt sich (§. 38) der Neigungswinkel ε des Strahls mn gegen das Loth, d. h. der von $\mathfrak{P}$ gegen die Grundebene (§. 117) zu 73° für dieses Beispiel; unter ihm schneiden sich die Axen $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_2$.

Verfährt man nun, wie oben (§§. 113, 114) angegeben, so
Fig. 73. wird man mit einiger Aufmerksamkeit die geforderte Projection anfertigen können.

121. Jedesmal, wenn ein Gesims an beiden Seitenflächen eines Gebäudes vorspringt, entsteht an der Ecke eine Durchschnittsfigur. Dieselbe ist eine ebene Figur, deren Ebene die Halbirebene des von den Coordinatenebenen **XZ**, **YZ** eingeschlossenen Flächen-
Fig. 66. winkels ist. Die erste Projection dieser Figur ist die Gerade $\mathbf{a}'b'$, welche den Winkel der Axen **X**, **Y** hälftet, ihre zweite Projection ist das Profil des Gesimses; die Figur selbst ist eine diesem Profil affine Figur, deren Höhen, d. h. die in der Richtung von **Z** liegenden Strecken, denen des Profils gleich sind, während ihre Breiten, d. h. die mit der Grundebene parallelen Strecken, zu denen des Profils sich wie $\sqrt{2}:1$ verhalten.

Fig. 73. Am besten beginnt man die axonometrische Zeichnung mit der Construction dieser Figur, welche wir das Gehrungsprofil nennen wollen, und zieht alsdann von ihren Ecken aus die Kanten des Gesimses parallel mit den Axen **X**, **Y**.

Um dieses Profil zu erhalten, beachte man im Grundriss (Fig. 66) die Figur $\mathbf{a}'c'b'd'$, welche wegen der nach beiden Seiten des Gebäudes gleichen Vorladung ein Quadrat ist. Man denke dasselbe in der Grundebene und zeichne seine axonometrische Projection in $\mathbf{a}cbd$. Trägt man von $\mathbf{a}$ gegen c die Strecken auf, um welche die einzelnen Ecken des Profils gegen **a** zurückliegen (nach dem Maassstabe für **X**, Fig. 73a), und zieht durch die erhaltenen Puncte Parallelen mit **Y**, so theilen diese die Diagonale **a***b* proportional. Zieht man sodann durch *b* die Parallele mit **Z** und trägt auf dieselbe die Höhen des Profils (nach dem Maassstabe für **Z**, Fig. 73a) auf, so lässt sich das Gehrungsprofil durch zwei Schaaren von Geraden, die einen parallel mit **Z**, die anderen parallel mit der Diagonale **a***b*, beenden.

Man kann selbst für die Projection **a***b* der Diagonale einen Fig. 73a. Maassstab dadurch erhalten, dass man in der Figur der Maassstäbe eine mit *ab* parallele Gerade so zieht, dass ihre durch *pa*, *pb* abgeschnittene Strecke $a_4 b_4$ sich zu $a_1 b_1$ verhalte wie in Fig. 73 $ab:ac$. (Die auf *ab* getragene Einheit für diese Maassstäbe ist grösser genommen als die des Maassstabes für Grundriss und Aufriss, Fig. 66, im Verhältniss 5:4.)

Willkürliche Richtung der Projectionsstrahlen.

122. Raumgebilde können hinreichend bestimmt werden durch die in Zahlen gegebenen Coordinaten ihrer Puncte, welche in skizzirte (nicht genau construirte) geometrische Zeichnungen derselben eingetragen sind. Nach dieser Angabe kann eine anschauliche Darstellung von ihnen erlangt werden, wenn man, ohne eine bestimmte Richtung der Projectionsstrahlen festzustellen, die Projectionen der drei Axen, oder deren Verkürzungs-Verhältnisse, innerhalb gewisser Grenzen beliebig wählt.

Wir drücken zunächst die mittels der Hauptaufgabe (§. 113) construirten fünf Grössen durch die Winkel δ, ε aus. Es ist Fig. 60. nämlich:

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{b''''x''''}{b''''a''''}, \qquad \operatorname{tg} v = \frac{c''''y''''}{c''''a''''},$$

$$a''''x'''' = \sqrt{b''''x''''^2 + b''''a''''^2}, \quad a''''y'''' = \sqrt{c''''y''''^2 + c''''a''''^2}.$$

Wir setzen $a'x' = a'y' = a''z''$ gleich Eins. Da Winkel $\mathbf{AA}_2 = \delta$, so kommt:

$$b'x' = \sin\delta = b''''x'''', \qquad c'y' = \cos\delta = c''''y'''',$$

$$b'a' = \cos\delta = b'''a''', \qquad c'a' = \sin\delta = c'''a''',$$

und wegen $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 = \varepsilon$:

$$b''''a'''' = \cos\delta \, . \cos\varepsilon, \qquad c''''a'''' = \sin\delta \, . \cos\varepsilon.$$

Ferner ist $a'''z''' = a''z''$, und $a''''z'''' = \sin\varepsilon$.

Durch Einstellung dieser Werthe erhält man:

$$\text{I.}\quad \operatorname{tg}\xi = \operatorname{tg}\delta \,.\, \sec\varepsilon,$$
$$\text{II.}\quad \operatorname{tg}v = \operatorname{cotg}\delta \,.\, \sec\varepsilon,$$
$$\text{III.}\quad q_x = \sqrt{\sin^2\delta + \cos^2\delta \,.\, \cos^2\varepsilon},$$
$$\text{IV.}\quad q_y = \sqrt{\cos^2\delta + \sin^2\delta \,.\, \cos^2\varepsilon},$$
$$\text{V.}\quad q_z = \sin\varepsilon.$$

Die Formeln I, III haben wir früher schon gefunden (§. 16). Denn die Projection der durch a gehenden Neigungslinie der Grundebene fällt mit der von **Z** zusammen, so dass ξ die Projection des Winkels δ ist.

Nimmt man nun für die Projectionen der drei Axen die Winkel ξ, v beliebig an, so sind die drei Verkürzungs-Verhältnisse bestimmt, und umgekehrt. Es dürfen aber ξ, v nicht ganz beliebig gewählt werden; denn aus den Formeln I, II folgt $\xi + v > \frac{\pi}{2}$, und weil jeder der beiden Winkel als spitzer genommen wird, ist $\xi + v < \pi$. Der Fall, dass einer der Winkel ξ, v, oder jeder von ihnen ein rechter ist, kann nur für die Grenzwerthe von ε, δ eintreten (§.§. 105, 108).

123. Aufgabe. Die Projectionen der drei Axen sind gegeben, es sollen ihre Verkürzungs-Verhältnisse bestimmt werden.

Fig. 64. Es seien **X**', **Y**', **Z**' die Projectionen der Axen, die sich unter den angegebenen Bedingungen in der Projection **a**' des Anfangspunctes schneiden. Wir ziehen eine Gerade $\mathbf{G}_1$ in beliebigem Abstande von **a**' normal auf **Z**' als Grundlinie; ihre Durchschnitte d, e mit **X**', **Y**' sind die Durchgänge dieser Axen. Denkt man die Grundebene auf $\mathfrak{P}$ herabgeschlagen, so gehen (**X**), (**Y**) durch d, e und schneiden sich rechtwinklig in (**a**) auf **Z**'. Daher ist:

$$q_x = \frac{d\mathbf{a}'}{d(\mathbf{a})},\quad q_y = \frac{e\mathbf{a}'}{e(\mathbf{a})}.$$

Nimmt man eine $\mathfrak{P}_2$, welche $\mathfrak{P}_1$ in **Z**' schneidet, so dass **Z**' die Axe **A** ist, so erhält man $\mathbf{G}_2$, wenn man über n**a**' als Kathete mit n(**a**) als Hypotenuse das rechtwinklige Dreieck n**a**'**a**'' zeichnet, indem n(**a**) eine Neigungslinie von $\mathfrak{G}$ ist. Der Winkel **a**'n**a**'' ist der Neigungswinkel ε dieser Ebene; da **Z** normal auf $\mathfrak{G}$, so ist

$$q_z = \sin\varepsilon = \frac{\mathbf{a}'\mathbf{a}''}{n\mathbf{a}''}.$$

Trägt man die Einheit des Maassstabes der Coordinaten von (**a**) aus auf (**X**), (**Y**) in (x), (y) und schlägt diese Puncte in x', y' zurück, so sind **a**$'x'$, **a**$'y'$ die Einheiten der Maassstäbe für die Projectionen der Coordinaten x, y. Und zeichnet man die zweite Projection von **Z**, also **Z**$''$ normal auf $\mathbf{G}_2$ durch **a**$''$, trägt auf dieselbe die Einheit in **a**$''z''$ und projicirt z'' in z', so ist **a**$'z'$ die Einheit für die Projectionen der Coordinaten z.

In der Figur ist e(**a**) als Einheit genommen, daher fallen e, (y), y' in einander. Man bemerke ferner, dass Winkel $d(\mathbf{a})n = \delta$.

124. Die Grenzen für die Verkürzungs-Verhältnisse $\mathbf{q}_x$, $\mathbf{q}_y$, $\mathbf{q}_z$ finden sich nach folgender Betrachtung. Quadrirt und addirt man die Gleichungen III, IV, V (§. 122), so kommt:

$$\mathbf{q}_x^2 + \mathbf{q}_y^2 + \mathbf{q}_z^2 = 2,$$

oder wenn γ_x, γ_y, γ_z die Neigungswinkel der Axen **X**, **Y**, **Z** gegen $\mathfrak{P}$ bezeichnen:

$$\cos^2\gamma_x + \cos^2\gamma_y + \cos^2\gamma_z = 2.$$

Diese Gleichung entspricht der im §. 39 aufgestellten, wenn man die Coordinatenebenen als die drei Projectionsebenen, irgend einen Projectionsstrahl **S** als die Gerade und seine Neigungswinkel gegen die drei Ebenen als die Winkel γ_1, γ_2, γ_3 betrachtet. Es werde z. B. die Ebene **XY** als $\mathfrak{P}_1$ genommen, so sind **Z** und $\mathfrak{P}_1$, so wie **S** und $\mathfrak{P}$ (axonometrische Projectionsebene) normal auf einander, also Winkel $\mathbf{Z}\mathfrak{P}$ oder γ_z gleich $\mathbf{S}\mathfrak{P}$ oder γ_1.

Jeden der drei Cosinus können wir durch die Verkürzungs-Verhältnisse ausdrücken, indem wir setzen:

$$\cos^2\gamma_x = \frac{2q_x^2}{q_x^2+q_y^2+q_z^2}, \quad \cos^2\gamma_y = \frac{2q_y^2}{q_x^2+q_y^2+q_z^2}, \quad \cos^2\gamma_z = \frac{2q_z^2}{q_x^2+q_y^2+q_z^2}.$$

Der Werth jedes Cosinus ist aber ein ächter Bruch, daher folgt aus diesen Ausdrücken:

$$q_y^2 + q_z^2 > q_x^2, \qquad q_x^2 + q_z^2 > q_y^2, \qquad q_x^2 + q_y^2 > q_z^2,$$

d. h. die Verkürzungs-Verhältnisse müssen von der Art sein, dass mit drei Strecken (AB, AC, BC), welche ihren Quadraten (q_z^2, Fig. 65.
q_y^2, q_x^2) proportional sind, ein Dreieck (ABC) construirt werden kann.

125. Wir drücken nun die Winkel ξ, v durch die Verkürzungs-Verhältnisse aus. Die Gleichungen III, IV, V (§. 122) quadrirt, sodann die letzte von der Summe der anderen abgezogen, giebt:

$$\cos \varepsilon = \sqrt{\frac{q_x^2 + q_y^2 - q_z^2}{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}} \quad \text{oder 1)} \sec \varepsilon = \sqrt{\frac{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}{q_x^2 + q_y^2 - q_z^2}}.$$

In III $\cos \varepsilon$ durch den gefundenen Werth ersetzt, liefert:

$$\sin \delta = \sqrt{\frac{q_x^2 + q_z^2 - q_y^2}{2 q_z^2}}, \qquad \cos \delta = \sqrt{\frac{q_y^2 + q_z^2 - q_x^2}{2 q_z^2}},$$

$$\text{oder 2)} \operatorname{tg} \delta = \sqrt{\frac{q_x^2 + q_z^2 - q_y^2}{q_y^2 + q_z^2 - q_x^2}}, \qquad \text{3)} \operatorname{cotg} \delta = \sqrt{\frac{q_y^2 + q_z^2 - q_x^2}{q_x^2 + q_z^2 - q_y^2}}.$$

Werden die Werthe 1), 2), 3) in die Gleichungen I, II (§. 122) eingestellt, so kommt:

$$\operatorname{tg} \xi = \sqrt{\frac{(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)(q_x^2 + q_z^2 - q_y^2)}{(q_x^2 + q_y^2 - q_z^2)(q_y^2 + q_z^2 - q_x^2)}},$$

$$\operatorname{tg} v = \sqrt{\frac{(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)(q_y^2 + q_z^2 - q_x^2)}{(q_x^2 + q_y^2 - q_z^2)(q_x^2 + q_z^2 - q_y^2)}},$$

und setzt man in diese Formeln die Zahlenwerthe der Verkürzungs-Verhältnisse, die den im §. 124 angeführten Bedingungen entsprechen, so ergeben sich Zahlen für die Tangenten der Winkel ξ, v und damit diese Winkel selbst.

126. Die für $\operatorname{tg} \xi$, $\operatorname{tg} v$ gefundenen Formeln gleichen den Formeln, welche die Beziehung zwischen den Seiten a, b, c und
Fig. 65. den gegenüberliegenden Winkeln A, B, C eines Dreiecks ausdrücken, z. B.

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{(a+b+c)(b+c-a)}},$$

wenn wir $\frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} - v$ setzen. Hierin liegt die Lösung der

Aufgabe: Die Verkürzungs-Verhältnisse der drei Coordinatenaxen sind gegeben; es sollen die Projectionen dieser Axen ihrer Richtung nach construirt werden.

Man construire ein Dreieck ABC von der Art, dass

$$AB : AC : BC = q_z^2 : q_y^2 : q_x^2$$

und hälfte dessen Winkel, so liefern die Halbirlinien der Winkel A, B, C die Projectionen der Axen **X**, **Y**, **Z** der Richtung nach.

Isometrische Projection.

127. Durch die Verkürzungs-Verhältnisse sind die Einheiten der drei Maassstäbe gegeben. Man kann noch Verhältnisse unter diesen Einheiten durch Zahlen ausdrücken und axonometrische Zeichnungen sehr leicht herstellen, wenn man diese Zahlen als einfache rationale nimmt. Es seien:

$$m = \frac{\mathfrak{q}_x}{\mathfrak{q}_z}, \quad n = \frac{\mathfrak{q}_y}{\mathfrak{q}_z}.$$

Setzen wir demnach für $\mathfrak{q}_x$, $\mathfrak{q}_y$ die Werthe $m \,.\, \mathfrak{q}_z$, $n \,.\, \mathfrak{q}_z$ in die Gleichungen für $\cos \varepsilon$, $\operatorname{tg} \delta$ (§. 125), so erhalten wir:

$$\cos \varepsilon = \sqrt{\frac{m^2+n^2-1}{m^2+n^2+1}}, \quad \operatorname{tg} \delta = \sqrt{\frac{m^2+1-n^2}{n^2+1-m^2}},$$

oder einfacher:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \sqrt{\frac{2}{m^2+n^2-1}}, \quad \cos \delta = \sqrt{\frac{1+n^2-m^2}{2}}.$$

Um nun die den Verhältnissen m, n entsprechenden Winkel ξ, v zu erlangen, nehme man die durch diese Ausdrücke gegebenen Winkel δ, ε, und construire wie in §. 113 die Projectionen der drei Axen. Man kann aber auch die Winkel ξ, v durch Rechnung aus den Gleichungen in §. 125 ermitteln.

Es lassen sich hierbei drei Fälle unterscheiden, deren jedem eine besondere Lage der Projectionsebene entspricht (§. 104 am Schlusse).

128. 7) Setzt man $\mathfrak{q}_x = \mathfrak{q}_y = \mathfrak{q}_z$, so kommt:

$$\operatorname{tg} \xi = \operatorname{tg} v = \sqrt{3},$$
$$\text{also } \xi = v = 60^\circ.$$

Die Winkel ε, δ, welche die Lage von $\mathfrak{P}$ bestimmen, ergeben sich gleichfalls, wenn man in die Ausdrücke für ihre Functionen (§. 127) $m = n = 1$ setzt, nämlich:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \sqrt{2}, \ \cos \delta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Danach wird der Winkel δ, Fig. 60, ein halbrechter; ergänzt man die Figur $x'\mathfrak{a}'y'$ durch den Punct d' zu einem Quadrate und nimmt $d'''z'''$ als Richtung der Projectionsstrahlen, so schliessen diese mit dem Lothe $z'''\mathfrak{a}'''$ den Winkel ε ein, für welchen $\operatorname{tg} \varepsilon = \sqrt{2}$, wonach annähernd $\varepsilon = 54^\circ\, 44'$.

Da die Einheiten der drei Maassstäbe einander gleich sind, nennt man die axonometrische Projection unter dieser einfachsten Annahme die isometrische Projection oder Perspective (§. 116). Die Coordinatenaxen hat man die isometrischen Axen genannt; jede ist unter gleichem Winkel gegen $\mathfrak{P}$ geneigt, daher gilt für jede dasselbe Verkürzungs-Verhältniss, d. h.

$$\mathfrak{q}_x = \mathfrak{q}_y = \mathfrak{q}_z = \sqrt{\tfrac{2}{3}} = 0{,}8165 \text{ (nach §. 124).}$$

Die isometrische Projection ist derjenige Fall der Axonometrie (§. 102), bei welchem die Projectionsebene gegen jede der drei Coordinatenaxen unter gleichem Winkel geneigt ist;

oder: bei welchem die Projectionsebene normal auf der Diagonale eines Würfels ist, dessen Kanten mit den Coordinatenaxen parallel sind.

Fig. 68. Die Projectionen von sechs Kanten dieses Würfels sind die Seiten eines regelmässigen Sechsseits, die der sechs anderen Kanten fallen in die drei Hauptdiagonalen des Sechsseits.

Hauptdiagonale eines $(2n)$seits ist eine Diagonale, welche von irgend einer als ersten genommenen Ecke nach der $(n+1)$ten Ecke gezogen wird.

129. Die Coordinatenebenen nennt man in diesem Falle auch isometrische Ebenen, jede von ihnen ist unter demselben Winkel gegen $\mathfrak{P}$ geneigt, also ist das Verkürzungs-Verhältniss $\mathfrak{q}$ (§. 22) aller ebenen Figuren, welche in einer Ebene liegen, die mit irgend einer Coordinatenebene parallel ist, dasselbe, nämlich $\mathfrak{q} = \cos \varepsilon = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$. Die Projectionen der sechs Quadrate der Oberfläche obigen Würfels sind danach congruente Figuren; jede ist eine aus zwei gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzte Raute.

Da jede Coordinatenebene gegen $\mathfrak{P}$ unter gleichem Winkel geneigt ist, so ist die eine Halbirebene des von zwei dieser Ebenen eingeschlossenen Flächenwinkels normal auf $\mathfrak{P}$, also die Projection jeder in einer solchen Ebene liegenden Figur eine Gerade. Von den sechs Diagonalebenen des Würfels sind drei mit jenen Halbirebenen parallel, und ihre Projectionen sind Gerade, welche mit den drei Hauptdiagonalen des Sechsseits zusammenfallen; also:

bei der isometrischen Projection sind von den sechs Halbirebenen der von den Coordinatenebenen eingeschlossenen Flächenwinkel drei normal auf der Projectionsebene.

Die isometrische Projection ist für die Ausführung sehr bequem, da die Winkel ξ, v leicht zu construiren sind und für die Projectionen der drei Coordinatensysteme ein und derselbe Maassstab anzuwenden ist, dessen Einheit sich zu der wahren Einheit, wie $\sqrt{\tfrac{2}{3}}$ zu 1 verhält. Zur Darstellung unregelmässiger Gebilde ist sie mit

Vortheil anzuwenden, weniger zur Darstellung solcher mit Figuren, deren Ebenen parallel sind mit den Halbirebenen der von den Coordinatenebenen eingeschlossenen Flächenwinkel; es würde z. B. bei der Darstellung des Hauptgesimses, Fig. 73, die Projection des (in der einen Halbirebene liegenden) Gehrungsprofils eine Gerade sein. Dasselbe findet statt bei der isometrischen Projection des durch Fig. 53 gegebenen Grabkreuzes. Fig. 80.

130. 8) Stellt man eine der drei Annahmen:

a) $\mathfrak{q}_x = \mathfrak{q}_y$ verschieden von $\mathfrak{q}_z$,
b) $\mathfrak{q}_x = \mathfrak{q}_z$ „ „ $\mathfrak{q}_y$,
c) $\mathfrak{q}_y = \mathfrak{q}_z$ „ „ $\mathfrak{q}_x$,

so sind jedesmal zwei Coordinatenaxen unter gleichem Winkel gegen $\mathfrak{P}$ geneigt, nämlich:

$$\mathbf{X}, \mathbf{Y} \text{ für } a), \quad \mathbf{X}, \mathbf{Z} \text{ für } b), \quad \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \text{ für } c).$$

Bei diesen Annahmen sind zwei Maassstäbe erforderlich, deshalb nennt man die axonometrische Projection in diesem Falle die monodimetrische, disisometrische oder dimetrische Projection.

Die dimetrische Projection ist derjenige Fall der Axonometrie, bei welchem die Projectionsebene gegen zwei Coordinatenaxen unter gleichem Winkel geneigt ist.

Die eine Halbirlinie des Winkels, welcher von den beiden gegen $\mathfrak{P}$ gleichgeneigten Axen eingeschlossen wird, ist die Neigungslinie der Ebene dieser Axen, und da die Projection der dritten Axe mit der dieser Neigungslinie zusammenfällt, so folgt daraus, dass die Projection der jedesmaligen dritten Axe den (stumpfen) Winkel hälftet, der von den Projectionen der beiden gleichgeneigten Axen eingeschlossen wird. Für $\mathfrak{q}_x = \mathfrak{q}_y$ ist demnach $\xi = v$.

Die dritte Axe und die angegebene Neigungslinie bestimmen die eine Halbirebene des Flächenwinkels, welcher von den beiden durch die dritte Axe gehenden Coordinatenebenen eingeschlossen wird. Demnach ist diese Halbirebene normal auf $\mathfrak{P}$, und die Projection jeder in ihr liegenden Figur eine Gerade; also:

bei der dimetrischen Projection ist von den sechs Halbirebenen der von den Coordinatenebenen eingeschlossenen Flächenwinkel eine normal auf der Projectionsebene.

131. Diese Projectionsart ist bei der Darstellung regelmässiger Gebilde der isometrischen vorzuziehen. Der eine Maassstab gilt für zwei Systeme von Coordinaten, der andere für das dritte.

Bei der Annahme *a)* ist $m = n$, demnach:

$$\operatorname{tg} \xi = \operatorname{tg} v = \sqrt{\frac{2n^2 + 1}{2n^2 - 1}}, \text{ d. h. } \xi = v;$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \sqrt{\frac{2}{2n^2 - 1}}, \cos \delta = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \text{ also } \delta = 45^0.$$

Wir behandeln besonders die Annahme *b)*, setzen also $m = 1$ (oder $\mathfrak{q}_x = \mathfrak{q}_z$) und $\mathfrak{q}_y = n . \mathfrak{q}_z$. Hiernach ist:

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{\sqrt{(2 + n^2)(2 - n^2)}}{n^2}, \quad \operatorname{tg} v = \sqrt{\frac{2 + n^2}{2 - n^2}},$$

und
$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{n}, \quad \cos \delta = \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

Es sei z. B. $n = \frac{1}{2}$, so kommt:

$$\operatorname{tg} \xi = \sqrt{7.9}, \quad \operatorname{tg} v = \sqrt{\frac{9}{7}},$$

wonach annähernd:

$$\xi = 82^0\, 49', \quad v = 48^0\, 35'.$$

Man bemerke, dass $v = \frac{1}{2}(\pi - \xi)$.

Diese Winkel lassen sich durch eine Näherungs-Construction
Fig. 81. auftragen: man ziehe **Z'** (von oben nach unten) und die Grundlinie **G** normal auf **Z'**. Nun schliessen **X'**, **Y'** mit **G** die Complementswinkel von ξ, v ein, und es ist:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \xi\right) = \sqrt{\frac{1}{7 \cdot 9}}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sqrt{\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 7}{7 \cdot 9}},$$

wofür man annähernd setzen kann:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \xi\right) = \frac{1}{8}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \frac{7}{8}.$$

Man trage auf **G** eine beliebige Strecke acht mal von **a'** nach *b* und von **a'** nach *c*, ziehe durch *b*, *c* Parallelen mit **Z'** und trage auf dieselben jene Strecke einmal von *b* nach *d*, sieben mal von *c* nach *f*, so sind **a***d*, **a***f* die Projectionen von **X**, **Y**.

Eben so ergeben sich aus

$$\operatorname{tg} \varepsilon = 2\sqrt{2}, \quad \cos \delta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

die Näherungswerthe:

$$\varepsilon = 70^0\, 32', \quad \delta = 69^0\, 18',$$

und (nach §. 124) das Verkürzungs-Verhältniss

$$q_x = q_z = \tfrac{2}{3}\sqrt{2} = 0{,}9428.$$

Nach dieser Annahme ist eine Freitreppe gezeichnet. Die Coordinaten ihrer Puncte sind durch die Maasse gegeben, welche in die Skizze ihres Aufrisses und Durchschnittes nach AB eingeschrieben sind (§. 122). Fig. 81. Fig. 82.

132. 9) Nimmt man an, q_x, q_y, q_z seien verschieden von einander, so sind keine zwei Coordinatenaxen unter gleichem Winkel gegen $\mathfrak{P}$ geneigt; es gilt für jede derselben ein anderes Verkürzungs-Verhältniss, und die Anfertigung dreier Maassstäbe ist nothwendig. Die axonometrische Projection in diesem allgemeinsten Falle nennt man die anisometrische oder trimetrische Projection.

Die trimetrische Projection ist derjenige Fall der Axonometrie, bei welchem die Projectionsebene gegen jede der drei Coordinatenaxen unter einem anderen Winkel geneigt ist.

Bei der trimetrischen Projection ist von den sechs Halbirebenen der von den Coordinatenebenen eingeschlossenen Flächenwinkel keine normal auf der Projectionsebene.

Die Einheit für den einen Maassstab, etwa für **Z**, wird beliebig gewählt, die Einheiten beider anderen werden durch die Zahlen m, n bestimmt. Die Annahme $q_x = m \cdot q_z$, $q_y = n \cdot q_z$ ändert die Gleichung §. 124 in $q_z^2(1 + m^2 + n^2) = 2$ und diese setzt das Verhältniss der Einheit des Maassstabes für die Coordinaten selbst zu der willkürlich gewählten gleich $\sqrt{\frac{1+m^2+n^2}{2}}$. (Dieselbe Maasseinheit gilt auch für die mit der Projectionsebene parallelen Geraden, §. 115.) Danach ist also:

$$q_x : q_y : q_z : 1 = m : n : 1 : \sqrt{\frac{1+m^2+n^2}{2}},$$

oder in Fig. 60a:

$$a_1b_1 : a_2b_2 : a_3b_3 : ab = m : n : 1 : \sqrt{\frac{1+m^2+n^2}{2}}.$$

Nachfolgende Tabelle enthält in den ersten beiden Columnen verschiedene Werthe der Zahlen m, n, in der dritten den entsprechenden Werth für $\sqrt{\frac{1+m^2+n^2}{2}}$. Die vierte und fünfte

Columne enthalten die entsprechenden Werthe der Winkel ξ, v, welche bei der Ausführung durch die in der sechsten und siebenten Columne gegebenen Werthe für die Tangenten ihrer Complementswinkel aufgetragen werden können (§. 131). Die achte und neunte Columne enthalten die Werthe für die entsprechenden Winkel ε, δ. (Mit Ausnahme der Zahlen m, n sind alle übrigen annähernd gegeben.)

	m	n	$\sqrt{\frac{1+m^2+n^2}{2}}$	ξ	v	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right)$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-v\right)$	ε	δ
Isometr.	1	1	1,2247	60°	60°			54° 44′	45°
Dimetr.	1	$\frac{1}{2}$	1,0607	82° 49′	48° 35′	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	70° 32′	69° 18′
	1	$\frac{1}{3}$	1,0274	86° 49′	46° 36′	$\frac{1}{18}$	$\frac{17}{18}$	76° 44′	76° 22′
	1	$\frac{1}{4}$	1,0155	88° 13′	45° 54′	$\frac{1}{32}$	$\frac{31}{32}$	79° 58′	79° 49′
	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	1,1250	65° 23′	65° 23′	$\frac{6}{17}$	$\frac{6}{17}$	62° 44′	45°
	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	1,0929	68° 2′	68° 2′	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	66° 12′	45°
	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	1,0308	76° 22′	76° 22′	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	75° 58′	45°
Trimetr.	$\frac{23}{24}$	$\frac{1}{3}$	1,0074	87° 45′	69° 44′	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{8}$	83° 4′	71° 55′
	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{2}$	1,0149	84° 49′	72° 11′	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{3}$	80° 10′	62° 2′
	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	1,0341	78° 50′	71° 47′	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	75° 14′	52° 14′

133. Nach der Annahme $m=\frac{9}{10}$, $n=\frac{1}{2}$ ist das in Fig. 53
Fig. 83. durch Grundriss und Aufriss gegebene Grabkreuz gezeichnet. Die
Fig. 84. Basis desselben ist in grösserem Maassstabe mit Hilfe eines axonometrischen Grundrisses gezeichnet worden. Man beachte, dass die Projectionen der den Ecken a, x entsprechenden Profile nicht in die Diagonalen des (projicirten) Rechtecks $axby$ fallen, sondern in die Diagonalen eines über ax (projicirt) gezeichneten Quadrats $axcd$; die durch y mit xd parallel gezogene Gerade ist die Projection des Profils bei y.

Die Bezeichnung „isometrische Projection“ wird zuweilen für die drei Projectionsarten angewendet, wenn einfache durch rationale Zahlen ausgedrückte Verhältnisse unter den Einheiten der drei Maassstäbe gewählt sind. Die Wahl solcher Verhältnisse erleichtert allerdings die Ausführung der axonometrischen Darstellung eines Raumgebildes, bedingt jedoch keineswegs die für dasselbe erforderliche Anschaulichkeit in der Darstellung. Eine solche ist nur durch zweckmässige Wahl der Winkel ε, δ nach den im §. 119 gegebenen Bemerkungen zu erlangen, wie wir sie bei der Zeichnung der Thurmspitze, Fig. 61, und des Hauptgesimses, Fig. 66, getroffen haben. Im Allgemeinen wird aus dieser Wahl eine trimetrische Projection hervorgehen, und die Verhältnisszahlen m, n werden irrationale sein (im zweiten Beispiele ist $m=0{,}9382$, $n=0{,}5538$), so dass man die Einheiten der drei Maassstäbe am einfachsten durch Construction erhält.

In obiger Tabelle finden sich die den angenommenen Verhältnisszahlen m und n entsprechenden Winkel ε, δ; weichen letztere von den für einen besondern Fall als zweckmässig erkannten nicht viel ab, so kann man die allgemeine axonometrische Projection durch die jenen Winkeln entsprechende dimetrische oder trimetrische ersetzen.

Ein Raumgebilde kann von der Art sein, dass es sich bequemer auf Axen beziehen lässt, von denen die beiden der Grundebene **X**, **Y** einen schiefen Winkel einschliessen, oder auf vier Axen, von denen drei **V**, **X**, **Y** in der Grundebene liegen, z. B. ein solches, dessen Hauptform ein sechskantiges gleichförmiges Prisma ist (Fig. 57). Auch für diese Fälle kann man die Aufgabe §. 113 lösen und die axonometrische Methode anwenden.

Sechstes Capitel.

Die schiefe Projection.

134. **D**ie Projectionsebene $\mathfrak{P}$ sei in fester Lage, die Projectionsstrahlen seien unter einander parallel und gegen $\mathfrak{P}$ unter einem Winkel $\sigma > 0, < \frac{\pi}{2}$ geneigt.

Durch einen Punct a geht ein Projectionsstrahl und schneidet $\mathfrak{P}$ in einem Puncte, welcher die schiefe Projection von a ist; wir bezeichnen denselben durch $a_,$. Liegt a in $\mathfrak{P}$, so ist a zugleich $a_,$.

$a_,$ ist durch a und die Richtung der Projectionsstrahlen bestimmt, aber a ist durch $a_,$ nicht bestimmt.

Die Projection einer Geraden G ist eine Gerade $G_,$, Schnitt von $\mathfrak{P}$ und der durch sie geführten projicirenden Ebene; letztere ist durch G und die Richtung der Projectionsstrahlen bestimmt.

G, $G_,$ schneiden sich in d, dem Durchgange der Geraden, unter einem Winkel φ, der im Allgemeinen vom Neigungswinkel γ der Geraden verschieden ist.

$G_,$ ist durch G und die Richtung der Projectionsstrahlen bestimmt, aber G ist durch $G_,$ nicht bestimmt.

135. Die Projectionen von Strecken einer Geraden verhalten sich wie die Strecken selbst, da alle Projectionsstrahlen parallel sind.

Fig. 69. Es seien α, β die Winkel der Projectionsstrahlen mit G, $G_,$, a, b zwei Puncte der Geraden, $a_,$, $b_,$ deren Projectionen, so ist:

$$\frac{a_, b_,}{ab} = \frac{da_,}{da} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

$$\text{also: } a_, b_, = ab\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \text{ d. h.}$$

die schiefe Projection einer Strecke ist gleich dem Producte der Strecke in den Quotienten der Sinus der Winkel, welche die Projectionsstrahlen mit der Geraden und ihrer Projection einschliessen.

Der Quotient $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ ist das Verkürzungs-Verhältniss $\mathfrak{q}$ der Geraden; wir setzen also: $a_{,}b_{,} = \mathfrak{q} . ab$.

Ist φ der von der Geraden und ihrer Projection eingeschlossene Winkel, so ist $\varphi + \alpha + \beta = \pi$.

Für $\varphi = 0$ ist $\alpha + \beta = \pi$, demnach: $\sin\alpha = \sin\beta$, $\mathfrak{q} = 1$, $a_{,}b_{,} = ab$.

Für $\varphi > 0$ ist $\alpha + \beta < \pi$; je nachdem $\alpha \gtreqless \beta$, ist $\mathfrak{q} \gtreqless 1$, $a_{,}b_{,} \gtreqless ab$.

Für $\varphi = 0$ ist G parallel mit $\mathfrak{P}$ und mit $G_{,}$; für $\varphi > 0$ und $\alpha = \beta$ sagt man: G, $G_{,}$ sind antiparallel gegen die Projectionsstrahlen. Aus Vorstehendem folgt der Satz:

sind eine Gerade und ihre schiefe Projection einander parallel, oder antiparallel gegen die Projectionsstrahlen, so ist das Verkürzungs-Verhältniss der Geraden gleich Eins.

Für $\alpha = 0$ ist $a_{,}b_{,} = 0$, d. h.

die schiefe Projection einer mit den Projectionsstrahlen parallelen Geraden ist ein Punct; umgekehrt:

jeder Punct in $\mathfrak{P}$ ist die Projection der durch ihn parallel mit den Projectionsstrahlen geführten Geraden.

Für φ gleich dem Neigungswinkel γ der Geraden gegen $\mathfrak{P}$ und $\beta = \frac{\pi}{2}$, also $\alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma$ ist $\mathfrak{q} = \sin\alpha = \cos\gamma$ und $a_{,}b_{,} = ab . \cos\gamma$, d. h. die Projection eine orthographische (§. 13).

Parallele Gerade haben zu Projectionen parallele Gerade und dasselbe Verkürzungs-Verhältniss.

136. Für unbegrenzte Ebenen gilt das im §. 14 Gesagte auch für die schiefe Projection. Ebenso hat jede in einer Ebene liegende Gerade ihren Durchgang im Schnitte der Ebene.

Die schiefe Projection eines ebenen Winkels hat im Allgemeinen eine andere Grösse als der Winkel selbst; in zwei Fällen ist die Grösse beider Winkel dieselbe:

1) wenn die Ebene des Winkels parallel mit $\mathfrak{P}$ ist,

2) wenn der Kreis K, der durch den Scheitel a des Winkels und die Durchgänge d, e seiner Schenkel geht, gleich ist dem Kreise K_1, der durch die Projection $a_,$, durch d und e geht (§. 17).

Die schiefe Projection eines ebenen $n$seits N ist die Durchschnittsfigur $N_,$ von $\mathfrak{P}$ mit dem projicirenden Prisma des $n$seits, d. h. dem ihm umschriebenen Prisma (§. 82), dessen Seiten mit den Projectionsstrahlen parallel sind.

Fällt die Ebene $\mathfrak{E}$ des $n$seits mit $\mathfrak{P}$ zusammen, so ist N zugleich $N_,$.

Ist die Ebene $\mathfrak{E}$ parallel mit $\mathfrak{P}$, so sind N, $N_,$ congruente Figuren (§. 82).

Ist die Ebene $\mathfrak{E}$ geneigt gegen $\mathfrak{P}$, so sind N, $N_,$ von verschiedener Grösse und Gestalt.

137. Aufgabe. Die schiefe Projection eines gegebenen $n$seits N zu construiren, wenn seine Lage gegen den Schnitt E_1 seiner Ebene, und deren Neigungswinkel ε gegen $\mathfrak{P}$ gegeben sind.

Wir lösen die Aufgabe mit den von der darstellenden Geometrie (im engeren Sinne, §. 27) gebotenen Mitteln. Die Ebene der Zeichnung sei die Ebene für die schiefe Projection und zugleich $\mathfrak{P}_1$; wir nehmen $\mathfrak{P}_2$, also auch $\mathbf{A}$, normal auf E_1.

Fig. 74. Es seien: a eine Ecke von N, $a_,$ ihre Projection; $\mathfrak{H}$ die Halbirebene desjenigen von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{P}$ eingeschlossenen Flächenwinkels ε, in welchem die Strecke $aa_,$ des Projectionsstrahls liegt; h der Durchschnitt von $aa_,$ mit $\mathfrak{H}$. Die durch h auf $\mathfrak{H}$ errichtete Normale schneidet $\mathfrak{E}$ in s, $\mathfrak{P}$ in s_1; wir führen durch ss_1 zwei Ebenen, die eine $\mathfrak{B}$ normal auf E_1, die andere $\mathfrak{F}$ durch $aa_,$, und bezeichnen durch s_0, a_0 die Durchschnitte von E_1 mit $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}$. Die Dreiecke s_0a_0s in $\mathfrak{E}$, $s_0a_0s_1$ in $\mathfrak{P}$ sind congruent, haben also bei a_0 gleiche Winkel η; in der Seite sa_0 liegt a, in der entsprechenden Seite s_1a_0 liegt $a_,$. Wird $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{P}$ so herabgeschlagen, dass die Drehung innerhalb des Winkels ε stattfindet, also $[N]$, $N_,$ gleichliegend gegen E_1 sind (§. 19), so werden $[s]a_0$, s_1a_0 sich decken, also $[a]a_0$, $a_,a_0$ in einander fallen, und mit ihnen zugleich der Projectionsstrahl $aa_,$, wenn derselbe an der Bewegung theilnimmt, so dass er stets durch $aa_,$ geht.

Wird durch den Projectionsstrahl jeder Ecke des $n$seits, also durch $bb_,$, $cc_,$, ... die mit $\mathfrak{F}$ parallele Ebene geführt, so sind die Durchschnittslinien aller dieser Ebenen mit $\mathfrak{E}$, d. h. die Geraden

aa_0, bb_0, cc_0, ... unter einander parallel, und eben so ihre Durchschnittslinien mit $\mathfrak{P}$, d. h. die Geraden $a_{,}a_0$, $b_{,}b_0$, $c_{,}c_0$, ... Beim Herabschlagen von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{P}$ fallen je zwei entsprechende Gerade Fig. 75. $[a]a_0$ und $a_{,}a_0$, $[b]b_0$ und $b_{,}b_0$, $[c]c_0$ und $c_{,}c_0$, ... in einander. (Die Richtung dieser Geraden ist aus Fig. 74 entnommen.) Die Geraden $a_{,}a_0$, $b_{,}b_0$, $c_{,}c_0$, ... sind die schiefen Projectionen von aa_0, bb_0, cc_0, ..., also ist (§. 135):

$$a_{,}a_0 = \mathbf{q} \cdot aa_0, \qquad b_{,}b_0 = \mathbf{q} \cdot bb_0, \qquad c_{,}c_0 = \mathbf{q} \cdot cc_0, \; \ldots .$$

Die Summe der durch die Geraden aa_0, bb_0, cc_0, ... gebildeten Trapeze a_0abb_0, b_0bcc_0, ... ist gleich dem Inhalte von N, d. h.

$$N = \tfrac{1}{2} \sin\eta \, [a_0b_0(aa_0 + bb_0) + b_0c_0(bb_0 + cc_0) + \ldots].$$

Die Summe der durch die Geraden $a_{,}a_0$, $b_{,}b_0$, $c_{,}c_0$, ... gebildeten Trapeze $a_0a_{,}b_{,}b_0$, $b_0b_{,}c_{,}c_0$, ... ist gleich dem Inhalte von $N_{,}$, d. h.

$$N_{,} = \tfrac{1}{2} \sin\eta \, [a_0b_0(a_{,}a_0 + b_{,}b_0) + b_0c_0(b_{,}b_0 + c_{,}c_0) + \ldots]$$

oder:

$$N_{,} = \tfrac{1}{2} \sin\eta \, [a_0b_0(\mathbf{q} \cdot aa_0 + \mathbf{q} \cdot bb_0) + b_0c_0(\mathbf{q} \cdot bb_0 + \mathbf{q} \cdot cc_0) + \ldots]$$

oder:

$$N_{,} = \mathbf{q} \cdot N.$$

Dieser Ausdruck für den Inhalt der schiefen Projection eines $n$seits ist unabhängig von dessen Lage gegen E_1, und Factor $\mathbf{q}$ derselbe für jede Figur der Ebene $\mathfrak{E}$.

138. Eben so kann man die Halbirebene $\mathfrak{H}'$ des Nebenwinkels von ε denken und die auf $\mathfrak{H}'$ normale Ebene $\mathfrak{F}'$ durch den Strahl $aa_{,}$ führen, welche E_1 in a^0 (verschieden von a_0), $\mathfrak{E}$ in aa^0, $\mathfrak{P}$ in $a_{,}a^0$ so schneidet, dass die Geraden aa^0, $a_{,}a^0$ mit E_1 gleiche Winkel η_1 einschliessen. Wird nun $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{P}$ so herabgeschlagen, dass die Drehung innerhalb des Nebenwinkels von ε statt- Fig. 75. findet, also (N), $N_{,}$ ungleichliegend gegen E_1 sind, so fallen wieder $(a)a^0$, $a_{,}a^0$ der Richtung nach in einander; alles Uebrige folgt wie oben.

Durch das Herabschlagen von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{P}$ ist nachgewiesen, dass den $n$seiten N, $N_{,}$ die erste Eigenschaft affiner Figuren zukommt; sie besitzen auch deren zweite Eigenschaft, denn jede Seite von N und ihre Projection schneiden sich im Durchgang der Seite, und dieser liegt in E_1, der Affinitätsaxe. Also:

ein ebenes $n$seit und seine schiefe Projection sind affine Figuren.

Zugleich ist durch das Herabschlagen von $\mathfrak{E}$ ein ebenes Projectionssystem (§. 22) in $\mathfrak{P}$ entstanden, dessen Projectionsstrahlen die Affinitätsaxe E_1 unter schiefem Winkel schneiden.

Sind die Projectionsstrahlen normal auf E_1, so fallen die Ebenen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}^1$, $\mathfrak{V}$ in einander und der von E_1 mit $(a)a_,$ eingeschlossene Winkel ist ein rechter, eben so der Winkel η. Ist auch $\mathfrak{q}=1$, so fällt s mit a, s_1 mit $a_,$ zusammen, die Projectionsstrahlen schliessen mit $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{P}$ gleiche Winkel ein, und es sind N, $N_,$ congruente Figuren; daher:

sind die Projectionsebene und die Ebene eines $n$seits einander parallel, oder antiparallel gegen die Projectionsstrahlen, so sind das $n$seit und seine schiefe Projection congruente Figuren.

Ist die Ebene eines $n$seits N parallel mit den Projectionsstrahlen, so ist dessen Projection $N_,$ eine Gerade. Umgekehrt: jede Gerade in $\mathfrak{P}$ ist die schiefe Projection der durch sie parallel mit den Projectionsstrahlen geführten Ebene und jeder Figur derselben.

139. Der Satz über die schiefe Projection eines $n$seits (§. 136) lässt sich umgekehrt so aussprechen:

von den Durchschnittsfiguren je zweier Ebenen mit einem und demselben Prisma ist jede die schiefe Projection der anderen.

Da zwei solche Figuren affin sind, so kann man die eine auf die Ebene der anderen herabschlagen und ein ebenes Projectionssystem einrichten, um die eine Figur aus der anderen herzuleiten.

Fig. 45. Diess Verfahren kann auf die Aufgabe 1) in §. 91 angewendet werden, wenn man nur die Durchschnittsfigur selbst, nicht ihre Projectionen fordert. Der Schnitt E_1 ist die Affinitätsaxe; construirt man den Durchschnitt $\mathfrak{a}$ der Kante am mit der Ebene $\mathfrak{E}$ und schlägt denselben in $(\mathfrak{a})$ herab, so ist durch die Gerade $a'(\mathfrak{a})$ die Richtung der Projectionsstrahlen des Systems so wie das Verhältniss $\mathfrak{q}$ bestimmt. Einen zweiten Punct $(\mathfrak{b})$ zu erhalten, verlängert man $a'b'$ bis an E_1 in y, zieht $y(\mathfrak{a})$ und durch b' die Parallele $b'(\mathfrak{b})$ mit $a'(\mathfrak{a})$.

Die Geraden $a'(\mathfrak{a})$, $b'(\mathfrak{b})$, ... sind in der Figur weggelassen.

Damit die Grundfläche eines schiefen Prisma und dessen Durchschnittsfigur mit einer Ebene $\mathfrak{E}$ congruente Figuren seien, müssen die Ebene der Grundfläche und $\mathfrak{E}$ entweder parallel oder antiparallel gegen die Seiten des Prisma sein; in letzterem Falle nennt man beide Figuren antiparallele Schnitte des Prisma. Um die Lage einer solchen Ebene zu construiren, projicire man das Prisma auf eine Ebene ($\mathfrak{P}_3$ oder $\mathfrak{P}_4$), welche parallel mit seinen Seiten und normal auf seiner Grundfläche ist. Die geforderte Ebene ist gleichfalls normal auf dieser Projectionsebene, ihr Schnitt und der der Grundfläche sind gegen die Seiten unter gleichem Winkel α, aber in umgekehrter Richtung, geneigt; auf gleiche Weise sind sie gegen einen Normalschnitt des Prisma unter dem Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ geneigt.

Die Vogel-Perspective.

140. Die schiefe Projection eines Raumgebildes wird am leichtesten unter Anwendung der axonometrischen Methode erlangt. Sie kann, gleich einer axonometrischen Projection, ein anschauliches Bild desselben liefern, ohne dass man nöthig hat, ihm oder der Projectionsebene $\mathfrak{P}$ eine geneigte Lage zu geben (§. 112). Gewöhnlich nimmt man $\mathfrak{P}$ in lothrechter Lage, also normal auf der Grundebene, an, so dass der Winkel ε (§. 104) ein rechter ist.

Die auf der Grundebene normale Axe **Z** kann man der Einfachheit wegen in $\mathfrak{P}$ legen, während die Axen **X**, **Y** in der Grundebene beliebig liegen. Es schliesse **X** mit der durch **a** gehenden Neigungslinie der Grundebene den Winkel δ (§. 104) ein; die Angabe dieses Winkels genügt zur Bestimmung der Lage der Coordinatenaxen gegen $\mathfrak{P}$.

Die Lage der Projectionsstrahlen bestimmen wir durch zwei Winkel: 1) ihren Neigungswinkel σ gegen $\mathfrak{P}$, d. h. den von einem Strahle **a**s und seiner Projection **a**s'' auf $\mathfrak{P}$ eingeschlossenen Winkel; 2) den Winkel α, welchen diese Projection **a**s'' mit **Z** einschliesst.

Oder diese Lage ist durch den Neigungswinkel γ der Strahlen gegen die Grundebene und ihre Projection auf dieser gegeben. Der Winkel γ kann, wie folgt, durch die Winkel σ und α ausgedrückt werden. Wir nehmen die Grundebene $\mathfrak{G}$ als $\mathfrak{P}_1$, die Ebene der schiefen Projection als $\mathfrak{P}_2$ der darstellenden Geometrie (§. 27), so dass **G** als Axe dient, und zeichnen die beiden Projectionen eines Strahles **a**s, von denen **a**s'' mit **Z** den Winkel α einschliesst. Fig. 70.
Nehmen wir auf **a**s den Punct s beliebig, die Strecke **a**s als Einheit, so ist

$$\mathbf{a}s'' = \cos\sigma, \qquad s''s^0 = \cos\sigma \,.\, \cos\alpha;$$

ferner ist

$$\frac{s's}{\mathbf{a}s} = \sin\gamma, \qquad s's = s''s^0 \text{ (§. 29)},$$

also

$$\sin\gamma = \cos\sigma \,.\, \cos\alpha.$$

Wir ziehen die Annahme der Winkel σ, α vor. Der von den Projectionsstrahlen mit dem Lothe (der Axe **Z**) eingeschlossene Winkel ist $\frac{\pi}{2} - \gamma$.

141. Aufgabe. Die Coordinatenaxen auf eine gegebene lothrechte Ebene schief zu projiciren.

Wir lösen die Aufgabe mit Hilfe der darstellenden Geometrie.
Fig. 76. $\mathfrak{P}_1$ sei die Grundebene; die Ebene $\mathfrak{P}$ der schiefen Projection, oder $\mathfrak{P}_3$, sei parallel mit $\mathfrak{P}_2$, so dass $\mathbf{A}_2$ parallel mit $\mathbf{A}$ ist. $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ liegen in $\mathfrak{P}_1$, ihr Durchschnitt $\mathbf{a}$ in $\mathbf{A}_2$; $\mathbf{Z}$ liegt also in $\mathfrak{P}$ selbst. Wir tragen auf jede Axe eine und dieselbe Längen-Einheit in $\mathbf{a}x$, $\mathbf{a}y$, $\mathbf{a}z$ auf. Die Richtung der Projectionsstrahlen sei durch die Projectionen der Geraden $\mathbf{a}s$ gegeben.

Nach diesen Angaben ist es leicht, die Durchschnittspuncte von $\mathfrak{P}$ mit den durch x, y gehenden Strahlen zu construiren. Die zweite Projection zeigt die wahre Lage dieser Puncte $x_{,}$, $y_{,}$ gegen $\mathbf{a}_{,}z_{,}$ so dass sich aus ihr die Winkel ξ, v und die Einheiten der drei Maassstäbe entnehmen lassen (§§. 113, 114). Mit Beachtung des Schlusssatzes von §. 135 kann hiernach die schiefe Projection jedes Raumgebildes axonometrisch construirt werden. Das Verfahren ist dem im vorhergehenden Capitel angewendeten entsprechend, weshalb wir nicht weiter auf dasselbe eingehen.

Die auf diese Weise erhaltene Darstellung eines Raumgebildes ist eine perspectivartige Zeichnung desselben, welche mehr oder weniger dem Bilde gleicht, unter welchem es einem in der Richtung der Projectionsstrahlen befindlichen Beschauer erscheint; daher kann man auch diese Projectionsart eine geometrische oder (schiefe) Parallel-Perspective nennen (§. 116).

Da die Projectionsstrahlen gegen die Grundebene (unter dem Winkel γ, §. 140) geneigt sind, der Beschauer aber in bedeutender Entfernung von dem darzustellenden Raumgebilde zu denken ist, etwa in der Lage eines in der Luft schwebenden Vogels, so hat man diese Projectionsart durch den Namen Vogel-Perspective bezeichnet. Diese Bezeichnung ist eine unbestimmte, sie ist auch unpassend, wenn die Grundebene oberhalb des Gebildes gedacht, und letzteres von unten betrachtet wird (Fig. 73), daher hat man für diesen Fall die scherzhafte Bezeichnung Frosch-Perspective gebraucht.

142. Für die Tangenten der Winkel ξ, v so wie für die Verkürzungs-Verhältnisse der drei Axen lassen sich ähnliche Formeln wie für die (orthographische) Axonometrie aufstellen (§. 122).

Für $\mathbf{a}x = \mathbf{a}y = \mathbf{a}z = 1$ ist: Fig. 76.

$$\mathbf{a}'b' = \mathbf{a}''b'' = c'y' = \sin\delta,$$
$$\mathbf{a}'c' = \mathbf{a}''c'' = b'x' = \cos\delta.$$

Die (in der Figur nur durch ihre Projectionen gegebenen Dreiecke) $xbx_,$, $ycy_,$ sind bei b, c rechtwinklig und haben bei $x_,$, $y_,$ den Winkel σ; daher:

$$bx_, = b''x_,'' = b'x' \,.\, \mathrm{cotg}\,\sigma = \cos\delta \,.\, \mathrm{cotg}\,\sigma,$$
$$cy_, = c''y_,'' = c'y' \,.\, \mathrm{cotg}\,\sigma = \sin\delta \,.\, \mathrm{cotg}\,\sigma.$$

Da $b''x_,''$, $c''y_,''$ mit den auf $\mathbf{A}$ normalen Geraden $x_,''p$, $y_,''q$ den Winkel α einschliessen, so ist:

$$b''p = \cos\delta \,.\, \mathrm{cotg}\,\sigma \,.\, \sin\alpha, \qquad x_,''p = \cos\delta \,.\, \mathrm{cotg}\,\sigma \,.\, \cos\alpha,$$
$$c''q = \sin\delta \,.\, \mathrm{cotg}\,\sigma \,.\, \sin\alpha, \qquad y_,''q = \sin\delta \,.\, \mathrm{cotg}\,\sigma \,.\, \cos\alpha.$$

Nun ist $\mathrm{tg}\,\xi = \dfrac{\mathbf{a}''b'' \mp b''p}{x_,''p}$, $\quad \mathrm{tg}\,v = \dfrac{\mathbf{a}''c'' \pm c''q}{y_,''q}$, oder:

I. $\mathrm{tg}\,\xi = \mathrm{tg}\,\delta \,.\, \mathrm{tg}\,\sigma \,.\, \sec\alpha \mp \mathrm{tg}\,\alpha,$

II. $\mathrm{tg}\,v = \mathrm{cotg}\,\delta \,.\, \mathrm{tg}\,\sigma \,.\, \sec\alpha \pm \mathrm{tg}\,\alpha.$

Die beiden Zeichen sind zu setzen, weil der Winkel α positiv, wie in der Figur, oder negativ genommen werden kann.

Die schiefwinkligen Dreiecke $\mathbf{a}''b''x_,''$, $\mathbf{a}''c''y_,''$ ergeben die Werthe $\mathbf{a}_,x_,$, $\mathbf{a}_,y_,$, oder:

III. $\mathbf{q}_x = \sqrt{\sin^2\delta + \cos^2\delta \,.\, \mathrm{cotg}^2\sigma \mp 2\sin\delta \,.\, \cos\delta \,.\, \mathrm{cotg}\,\sigma \,.\, \sin\alpha},$

IV. $\mathbf{q}_y = \sqrt{\cos^2\delta + \sin^2\delta \,.\, \mathrm{cotg}^2\sigma \pm 2\sin\delta \,.\, \cos\delta \,.\, \mathrm{cotg}\,\sigma \,.\, \sin\alpha}.$

Die Axe $\mathbf{Z}$ liegt in $\mathfrak{P}$, daher:

V. $\mathbf{q}_z = 1.$

Man beachte, dass (wegen §. 135) $\mathbf{q}_x$ sowohl als $\mathbf{q}_y$ nicht nothwendig kleiner als Eins (wie bei der orthographischen Projection) sind.

Will man $\mathbf{q}_x = \mathbf{q}_y = 1$ setzen (also $\mathbf{q}_x = \mathbf{q}_y = \mathbf{q}_z$), so wird diess durch folgende Annahmen erlangt. Die Gleichungen III, IV quadrirt und addirt geben

$$\mathrm{cotg}\,\sigma = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 - 1},$$

für $\mathbf{q}_x = \mathbf{q}_y = 1$ muss also $\sigma = 45^0$ sein. Ausserdem muss der dritte Summand in III, IV gleich Null sein, was durch eine der drei Annahmen erlangt werden kann: 1) $\delta = \frac{\pi}{2}$, 2) $\delta = 0$, 3) $\alpha = 0$.

Die Cavalier-Perspective.

143. Von den Winkeln δ, σ, α muss für die schiefe Projection der Winkel $\sigma > 0$, $< \frac{\pi}{2}$ sein, denn der letztere Werth entspricht der orthographischen Projection. Die Winkel δ, α können einen der Grenzwerthe erhalten, durch welche die Constructionen und die aufgestellten Formeln vereinfacht werden.

1) Wird $\delta = \frac{\pi}{2}$ gesetzt, so fällt **X** in $\mathfrak{P}$. Nun sind **a**x, **a**z ihre eigenen Projectionen, also: $\xi = \frac{\pi}{2}$ und $\mathbf{q}_x = \mathbf{q}_z = 1$. Daher projiciren sich alle Figuren, deren Ebenen mit der Coordinatenebene **XZ** parallel sind, als congruente Figuren, alle übrige ebene Figuren dagegen als affine Figuren.

Wird $\delta = 0$ gesetzt, so fällt **Y** in $\mathfrak{P}$; es gelten dieselben Sätze, nur sind die Axen **X**, **Y** umzutauschen.

Die nach der Annahme $\delta = \frac{\pi}{2}$ geänderten Formeln:

$$
\begin{array}{rl}
\text{I.} & \operatorname{tg} \xi = \infty, \\
\text{II.} & \operatorname{tg} v = \operatorname{tg} \alpha, \\
\text{III.} & \mathbf{q}_x = 1, \\
\text{IV.} & \mathbf{q}_y = \operatorname{cotg} \sigma, \\
\text{V.} & \mathbf{q}_z = 1,
\end{array}
$$

ergeben dasselbe; ausserdem zeigen sie, dass der Winkel v sowohl als $\mathbf{q}_y$ jeden beliebigen Werth erhalten können; diese Projectionsart gestattet demnach eine grosse Willkür.

144. Setzt man $\mathbf{q}_y = 1$, d. h. $\sigma = 45^0$ und zugleich $\operatorname{tg} v = \operatorname{tg} \alpha = 1$, d. h. $v = \alpha = 45^0$, so erhält man die Projectionsart, welche ins Besondere unter dem Namen der Cavalier-Perspective oder 45 Grad-Perspective bekannt und ihrer Einfachheit wegen sehr gebräuchlich ist.

Die Annahme der Winkel v und α zu 30^0, $\mathbf{q}_y = 1$ ergiebt die Vertical-Horizontal-Projection, und die Annahme der Winkel v und α zu 60^0, $\mathbf{q}_y = 1$ ergiebt die Vertical-Lateral-Projection.

Bei der Cavalier-Perspective erhalten die Figuren der Ebenen, welche mit den Coordinatenebenen **XY**, **YZ** parallel sind, gleiche Entwickelung; bei der Vertical-Horizontal-Projection sind die Figuren, deren Ebenen der Grundebene **XY** parallel sind, mehr und die anderen weniger entwickelt, bei der Vertical-Lateral-Projection findet das Entgegengesetzte statt.

Die Namen der beiden letzteren Projectionsarten deuten an, dass in einer Zeichnung die Vortheile einer horizontalen und einer verticalen Projection oder zweier verticalen Projectionen vereinigt sein sollen. Unter Cavalier-Perspective überhaupt verstand man oft allgemein jede schiefe Projection, wenn der Winkel σ zu 45^0 genommen wird.

Da bei diesen drei Projectionsarten ein und derselbe Maassstab für die Projectionen der drei Systeme von Coordinaten gilt, so sind dieselben schiefe isometrische Projectionen. Die von ihnen gelieferten Darstellungen eines Raumgebildes haben geringe Aehnlichkeit mit dem Bilde, unter welchem letzteres erscheint, wie an der Cavalier-Perspective des durch Fig. 53 gegebenen Grabkreuzes Fig. 85.
zu ersehen ist.

Diesem Uebelstande wird abgeholfen, wenn man q_y geringer als Eins, etwa gleich $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... setzt, während der Winkel α beliebig, etwa zu 45^0, genommen wird. Hierdurch ergiebt sich eine Projectionsart, welche der dimetrischen (§. 130) entspricht; nach ihr ist zum Vergleich die durch Fig. 82 gegebene Freitreppe gezeichnet. Fig. 86.
Unter der für diese Zeichnung gestellten Annahme $q_y = \frac{1}{2}$ hat der Winkel σ die Grösse von annähernd $63^0\ 26'$.

Hierher gehört die zum Zeichnen von Krystallen vorgeschlagene isographische Projection; bei derselben ist $\operatorname{tg} v = \frac{4}{3}$, $q_y = \frac{1}{3}$, d. h. annähernd $v = 53^0\ 8'$, $\sigma = 71^0\ 34'$.

Bei der Bezeichnung „isometrische, dimetrische und trimetrische Projection" denken wir im gegenwärtigen Capitel nur an die Anwendung eines, zweier oder dreier Maassstäbe, nicht an die in §§. 128, 130, 132 gegebenen für die orthographische Axonometrie geltenden Erklärungen.

145. 2) Der Winkel α darf nur den Grenzwerth 0 erhalten; für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sind die Projectionsstrahlen mit der Grundebene parallel, also ist die Projection jeder Figur einer mit der Grundebene parallelen Ebene eine Gerade, wie bei der Uebereck-Projection (§. 109).

Für $\alpha = 0$ ist $\cos\sigma = \sin\gamma$, d. h. $\sigma + \gamma = \frac{\pi}{2}$, also σ der Winkel der Projectionsstrahlen mit dem Lothe (§. 140). Unter dieser Annahme vereinfachen sich die Formeln im §. 142, wie folgt:

$$\text{I.}\quad \operatorname{tg}\xi = \operatorname{tg}\delta \,.\, \operatorname{tg}\sigma,$$
$$\text{II.}\quad \operatorname{tg} v = \operatorname{cotg}\delta \,.\, \operatorname{tg}\sigma,$$
$$\text{III.}\quad q_x = \sqrt{\sin^2\delta + \cos^2\delta \,.\, \operatorname{cotg}^2\sigma},$$
$$\text{IV.}\quad q_y = \sqrt{\cos^2\delta + \sin^2\delta \,.\, \operatorname{cotg}^2\sigma},$$
$$\text{V.}\quad q_z = 1.$$

Beide in diesen Formeln vorkommende Winkel δ und σ sind spitze Winkel. Ist der Winkel σ ins Besondere gleich 45°, so vereinfachen sich die Formeln abermals in:

$$\text{I.}\quad \operatorname{tg} \xi = \operatorname{tg} \delta, \qquad \text{II.}\quad \operatorname{tg} v = \operatorname{cotg} \delta,$$

$$\text{III.}\quad \mathfrak{q}_x = 1, \qquad \text{IV.}\quad \mathfrak{q}_y = 1, \qquad \text{V.}\quad \mathfrak{q}_z = 1,$$

die Projectionen der Axen **X**, **Y** schneiden sich unter rechtem Winkel und die Projection wird eine schiefe isometrische. Da $\sigma + \gamma = \frac{\pi}{2}$, so ist auch $\gamma = 45°$, d. h. die Grundebene und die Projectionsebene sind antiparallel gegen die Projectionsstrahlen (§. 138); also hat jede Figur der Grundebene oder einer derselben parallelen Ebene zur Projection eine congruente Figur.

Diess ist die Projectionsart, bei welcher auf dem Grundrisse einer Stadt oder Festung die Projectionen aller lothrechten Geraden unter einander parallel gezogen werden und (nach dem Maassstabe des Grundrisses) die wahren Längen erhalten; wegen ihrer früheren Anwendung auf die Darstellung von Festungswerken hat man sie die Militair-Perspective genannt, wiewohl diese Benennung auch gleichbedeutend mit schiefer Projection überhaupt genommen wurde.

Setzt man den Winkel δ ebenfalls gleich 45°, so wird $\xi = v = 45°$, und man erhält noch einmal die oben erwähnte Cavalier-Perspective mit dem Unterschiede, dass die Figuren, deren Projectionen congruente Figuren sind, in Ebenen liegen, welche dort (§. 144) mit der Coordinatenebene **XZ**, hier mit der Grundebene **XY** parallel sind. Die Figuren, deren Ebenen mit beiden anderen Coordinatenebenen parallel sind, erscheinen dort wie hier gleichmässig entwickelt. Das Bild des nach dieser Projectionsart dar-
Fig. 71. gestellten Würfels wird die über die Cavalier-Perspective gemachten Bemerkungen bestätigen.

Wird der Winkel σ grösser als 45° gesetzt, so ist:

$$\text{I.}\quad \operatorname{tg} \xi > \operatorname{tg} \delta, \qquad \text{II.}\quad \operatorname{tg} v > \operatorname{cotg} \delta,$$

d. h. $\xi + v > \frac{\pi}{2}$, oder die Projectionen der Axen **X**, **Y** schneiden sich unter stumpfem Winkel; und:

$$\text{III.}\quad \mathfrak{q}_x < 1, \qquad \text{IV.}\quad \mathfrak{q}_y < 1.$$

Wird der Winkel σ kleiner als 45° gesetzt, so ist:

$$\text{I.}\quad \operatorname{tg} \xi < \operatorname{tg} \delta, \qquad \text{II.}\quad \operatorname{tg} v < \operatorname{cotg} \delta,$$

d. h. $\xi + v < \frac{\pi}{2}$, oder die Projectionen der Axen **X**, **Y** schneiden sich unter spitzem Winkel; und:

III. $q_x \gtrless 1$, IV. $q_y \gtrless 1$.

In beiden Fällen sind die Verkürzungs-Verhältnisse der Axen **X**, **Y** verschieden von Eins, und man erhält im Allgemeinen eine trimetrische Projection. Für $\delta = 45^0$ wird $q_x = q_y$ und die Projection eine dimetrische.

146. Wie für die Axonometrie lässt sich für diese einfache schiefe Projection (wenn $\alpha = 0$) eine Tabelle anlegen, in welcher die Winkel ξ, v, σ, δ berechnet sind, wenn die durch die Verkürzungs-Verhältnisse gegebenen Einheiten der Maassstäbe sich wie einfache rationale Zahlen verhalten sollen, d. h. wenn $q_x : q_y : q_z = m : n : 1$ (§. 132). In nachstehender Tabelle sind für die trimetrische Projection dieselben Zahlen m, n gewählt, wie in der Tabelle des §. 132; für die dimetrische Projection gilt hier nur die Annahme $m = n$.

	m	n	ξ	v	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \xi\right)$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$	σ	δ
Dimetrisch	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	53° 55′	53° 55′	$\frac{8}{11}$	$\frac{8}{11}$	53° 55′	45°
	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	58° 3′	58° 3′	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	58° 3′	45°
	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	70° 32′	70° 32′	$\frac{6}{17}$	$\frac{6}{17}$	70° 32′	45°
Trimetrisch	$\frac{23}{24}$	$\frac{1}{3}$	87° 1′	60° 27′	$\frac{1}{19}$	$\frac{4}{7}$	80° 15′	73° 9′
	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{2}$	82° 58′	64° 3′	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	76° 14′	63° 17′
	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	74° 33′	63° 19′	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{2}$	69° 34′	53° 26′

Die Columnen dieser Tabelle haben dieselbe Bedeutung wie in der Tabelle §. 132. Die dortige dritte Columne fällt aus, weil $q_z = 1$, also gleich der Einheit des Maassstabes für die Coordinaten selbst ist. Der Winkel σ hier entspricht dem Winkel ε dort; denn σ sowohl als ε ergänzen den Winkel γ (§. 140) zu einem rechten.

Als Beispiel für diese Projectionsart ist die Darstellung eines Hauses nach der Annahme $m = n = \frac{3}{4}$ gegeben. Fig. 72.

Diese schiefe Projectionsart stimmt darin mit der axonometrischen überein, dass die Projectionsstrahlen unter dem Winkel $\sigma = \varepsilon$ gegen das Loth geneigt sind; der Unterschied beider besteht in der Lage der Projectionsebene, welche für die Axonometrie normal auf den Strahlen, für die schiefe Projection normal auf der Grundebene, d. h. in lothrechter Lage, ist.

Daher können wir an ein und derselben Figur eine einfache Herleitung der fünf Formeln §§. 128, 145 zeigen, wenn wir die Axen **X**, **Y** (mit den gleichen Strecken ax, ay) in $\mathfrak{P}_1$ legen, $\mathfrak{P}_2$ Fig. 77.
parallel mit **Z** und mit den Projectionsstrahlen nehmen, von denen

wir einen durch jeden der Puncte a, x, y, z führen. Eine $\mathfrak{P}_3$ normal auf diesen Strahlen (also $\mathbf{A}_2$ unter dem Winkel $\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \gamma$ gegen $\mathbf{A}$ geneigt) und eine $\mathfrak{P}_4$ normal auf $\mathfrak{P}_1$ und auf $\mathfrak{P}_2$ (also $\mathbf{A}_3$ normal auf $\mathbf{A}$) schneiden diese Strahlen in der orthographischen und in der schiefen Projection der vier Puncte. Nun sind

$a'''x'''$ und $a_,x_,$

die Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke mit den Katheten

$\mathfrak{a}\mathfrak{x}$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{x}$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{x}_2$;

es ist aber $\mathfrak{a}\mathfrak{x} = \sin\delta$, $a''x'' = \cos\delta$, daher

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{x}_1 = \cos\delta \,.\, \cos\varepsilon, \qquad \mathfrak{a}_2\mathfrak{x}_2 = \cos\delta \,.\, \operatorname{cotg}\sigma,$$

$$a'''x''' = \sqrt{\sin^2\delta + \cos^2\delta \,.\, \cos^2\varepsilon}, \qquad a_,x_, = \sqrt{\sin^2\delta + \cos^2\delta \,.\, \operatorname{cotg}^2\sigma},$$

u. s. w. (Vergl. §. 122 und Fig. 60.)

Hauptsatz der Axonometrie.

147. Wird bei Anwendung der schiefen Projection und der axonometrischen Methode die Projectionsebene nicht in lothrechter, sondern in beliebiger Lage genommen, so werden die Formeln, welche den im §. 142 gegebenen entsprechen, noch zusammengesetzter als diese; wir werden zeigen, wie dieselben zu erhalten sind. Zunächst beweisen wir folgenden Hauptsatz:

drei Strecken von beliebiger Länge, $a_,x_,$, $a_,y_,$, $a_,z_,$, die in einer Ebene von einem Puncte $a_,$ aus unter beliebigen Winkeln gegen einander gezogen werden, bilden eine Parallel-Projection gleicher auf drei rechtwinklige Coordinatenaxen vom Anfangspuncte aus abgetragener Strecken ax, ay, az; doch darf nur eine der Strecken $a_,x_,$, ... oder einer der Winkel gleich Null sein.

Dass die Ausnahmen gemacht werden müssen, leuchtet zunächst ein. Denn ist eine der Strecken, etwa $a_,x_,$, gleich Null, so muss die entsprechende Gerade, also ax, parallel mit den Projectionsstrahlen sein (§. 135); jede der beiden anderen Geraden schliesst mit ihr einen rechten Winkel ein, also muss deren Projection grösser als Null sein. Und ist einer der beiden Winkel, etwa $x_,a_,y_,$, gleich Null, so ist die Ebene des entsprechenden Winkels, also xay, parallel mit den Projectionsstrahlen (§. 138); die dritte Strecke ist auf dieser Ebene normal, also kann von ihren Puncten nur a zur Projection einen auf der Geraden $x_,a_,y_,$ liegenden Punct haben.

Wir denken im Raume das System S der drei Coordinatenaxen mit den gleichen Strecken ax, ay, az. Soll die Figur $a_,x_,y_,z_,$
Fig. 67. dessen Parallel-Projection $S_,$ sein, so ist $a_,$ die Projection jedes

Punctes p des durch a gehenden Strahles. Sind x, y, z die Coordinaten desjenigen Punctes p, für welchen $x = ax$, so fallen die Projectionen der Coordinaten: $x_{,}$ in $a_{,}x_{,}$, $y_{,}$ in $x_{,}f_{,}$ parallel mit $a_{,}y_{,}$, $z_{,}$ in $f_{,}p_{,}$ parallel mit $a_{,}z_{,}$; da $p_{,}$ in $a_{,}$ fällt, muss $f_{,}$ auf $a_{,}z_{,}$ liegen.

Aus diesen Projectionen ergeben sich die Verhältnisse der drei Coordinaten, nämlich:

$$x : y : z = a_{,}x_{,} : a_{,}x_{,}\frac{x_{,}f_{,}}{a_{,}y_{,}} : a_{,}x_{,}\frac{f_{,}p_{,}}{a_{,}z_{,}}$$

und durch diese Verhältnisse die Richtung des Strahles ap im Systeme S.

Für die unbekannte Länge der Strecken ax, ay, az nehmen wir $a_{,}x_{,}$, statt der Coordinaten x, y, z des Punctes p die Strecken $a_{,}x_{,} = \mathfrak{x}$, $a_{,}x_{,}\frac{x_{,}f_{,}}{a_{,}y_{,}} = \mathfrak{y}$, $a_{,}x_{,}\frac{f_{,}p_{,}}{a_{,}z_{,}} = \mathfrak{z}$ als Coordinaten eines Punctes $\mathfrak{p}$, und bilden mit diesen Strecken ein dem S ähnliches System $\mathfrak{S}$, in welchem $a\mathfrak{p}$ die Lage des Strahles ap hat. Sodann construiren wir (wie in §. 113) die orthographische Projection von $\mathfrak{S}$ in einer auf $a\mathfrak{p}$ normalen Projectionsebene.

Zu dem Behufe legen wir **X**, **Y** in $\mathfrak{P}_1$, tragen $\mathfrak{x}$ in $a'\mathfrak{x}'$, $a'\mathfrak{y}'$ und $\mathfrak{y}$ auf die durch $\mathfrak{x}'$ parallel mit **Y** gezogene Gerade in $\mathfrak{x}'\mathfrak{f}'$; $\mathfrak{f}'$ Fig. 67a.
ist zugleich $\mathfrak{p}'$. Wir nehmen $\mathfrak{P}_2$ parallel mit $a\mathfrak{p}$, also **A** parallel mit $a'\mathfrak{f}'$, setzen a'', $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{y}''$, $\mathfrak{f}''$ auf **A** und nehmen $a''\mathfrak{z}''$ gleich $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{f}''\mathfrak{p}''$ gleich $\mathfrak{z}$. Nun giebt $a\mathfrak{p}$ die Richtung der Projectionsstrahlen; wir nehmen daher $\mathfrak{P}_3$ normal auf $\mathfrak{P}_2$, $\mathbf{A}_2$ normal auf $a''\mathfrak{p}''$ und construiren die dritten Projectionen $a'''\mathfrak{x}'''\mathfrak{y}'''\mathfrak{z}'''\mathfrak{f}'''$. (Dabei fällt $\mathfrak{f}'''$ auf $a'''\mathfrak{z}'''$ und es ist $a'''\mathfrak{f}''' : a'''\mathfrak{z}''' = a_{,}f_{,} : a_{,}z_{,}$.)

Die erhaltene Figur $\mathfrak{S}'''$, d. h. die orthographische Projection von $\mathfrak{S}$, ist ähnlich der orthographischen Projection S' des Systems S in einer auf ap normalen Ebene. Sind nun $S_{,}$, $\mathfrak{S}'''$ ähnlich, so ist $S_{,}$ die orthographische Projection von S und $ax = \frac{a_{,}x_{,}^2}{a'''\mathfrak{x}'''}$ (weil $a_{,}x_{,} : ax = a'''\mathfrak{x}''' : a_{,}x_{,}$).

Im Allgemeinen wird diese Aehnlichkeit nicht stattfinden; dann lässt sich das Dreiseit $x_{,}a_{,}y_{,}$ orthographisch so projiciren, dass seine Projection $x'a'y'$ dem Dreiseite $\mathfrak{x}'''a'''\mathfrak{y}'''$ ähnlich wird. Wir führen die Construction nach §. 22 aus, zeichnen das Dreiseit $x_{,}a_{,}y_{,}$ mit Fig. 67b.

den gegebenen Strecken $a,x,$, $a,y,$ und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, auf seine Seite $x,y,$ das dem $\mathfrak{x}'''a'''\mathfrak{y}'''$ ähnliche Dreiseit $x,\mathfrak{a}y,$ (in der Figur der Deutlichkeit wegen umgekehrt) und den durch $a,\mathfrak{a}$ gehenden Kreis. Durch die Construction erhalten wir in der Affinitätsaxe E die Durchschnittslinie der Ebenen $\mathfrak{P}$ (welche $S,$ enthält) und $\mathfrak{P}_3$, im Verhältnisse $\mathfrak{q} = \frac{a,d'}{a,d}$ den Cosinus des Neigungswinkels beider Ebenen oder den Sinus des Neigungswinkels σ der Projectionsstrahlen gegen $\mathfrak{P}$, in der Strecke $a,x,\ \frac{\mathfrak{a}'x'}{a'''\mathfrak{x}'''}$ die Strecke ax.

Verändern wir nun die Strecken des Systems $\mathfrak{S}$ im Verhältnisse $\frac{ax}{a'\mathfrak{x}'}$, so erhalten wir das System S; die Gerade $a'\mathfrak{f}'$ und der Winkel $\gamma = \mathfrak{p}''a''\mathfrak{f}''$ geben die Lage der Projectionsstrahlen; die Ebene $\mathfrak{P}$ ist durch ihren Schnitt mit der auf den Strahlen normalen $\mathfrak{P}_3$ sowie durch ihren Neigungswinkel $\frac{\pi}{2} - \sigma$ gegen dieselbe bestimmt.

Die Ebene $\mathfrak{P}$ kann zwei symmetrische Lagen gegen $\mathfrak{P}_3$ erhalten. — Aus den Sätzen über parallele Gerade (§§. 13, 135) folgt, dass die Projectionen der aus den Puncten $x,\ a,\ y,$ mit $z,$ gebildeten Dreiseite den aus den entsprechenden Puncten $\mathfrak{x}'''\ a'''\ \mathfrak{y}'''\ \mathfrak{z}'''$ gebildeten ebenfalls ähnlich sind.

148. Nehmen wir die Länge der gleichen Strecken ax, ay, az als Einheit, so ist $a,x, = \mathfrak{q}_x$, $a,y, = \mathfrak{q}_y$, $a,z, = \mathfrak{q}_z$. Die Längen dieser Strecken sind
Fig. 67b durch die Figur bestimmt, in welcher $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{P}_3$ herabgeschlagen ist, während das System S seine Lage gegen $\mathfrak{P}$ behält, so dass die Figur zugleich die orthographische und die schiefe Projection von S zeigt. Nennen wir α den von dem Strahle $z'z,$ mit a,z' eingeschlossenen Winkel und setzen $x'a,z' = \xi$, $y'a,z' = v$ (§. 113), so ist:

$$
\begin{aligned}
1)\quad ax_{,}^2 &= ax'^2 + x'x_{,}^2 - 2ax' \,.\, x'x, \,.\, \cos(\xi \pm \alpha),\\
ay_{,}^2 &= ay'^2 + y'y_{,}^2 - 2ay' \,.\, y'y, \,.\, \cos(v \mp \alpha),\\
az_{,}^2 &= az'^2 + z'z_{,}^2 + 2az' \,.\, z'z, \,.\, \cos\alpha.
\end{aligned}
$$

Es ist aber:

$$
\begin{aligned}
a,x' &= \cos\gamma_x, & a,y' &= \cos\gamma_y, & a,z' &= \cos\gamma_z,\\
xx' &= \sin\gamma_x, & yy' &= \sin\gamma_y, & zz' &= \sin\gamma_z,
\end{aligned}
$$

(§. 38), und denken wir im Raume das Dreiseit $xx'x,$, welches bei x' einen rechten Winkel, bei $x,$ den Winkel σ hat, so ist $x'x, = xx' \,.\, \operatorname{cotg}\sigma$, eben so im Dreiseite $yy'y,$, . . .; daher:

$$
x'x, = \sin\gamma_x \,.\, \operatorname{cotg}\sigma, \qquad y'y, = \sin\gamma_y \,.\, \operatorname{cotg}\sigma, \qquad z'z, = \sin\gamma_z \,.\, \operatorname{cotg}\sigma.
$$

Durch Einsetzen dieser Werthe verwandeln sich die Gleichungen 1) in:

$$2)\quad q_x^2 = \cos^2\gamma_x + \operatorname{cotg}^2\sigma \,.\, \sin^2\gamma_x - 2\operatorname{cotg}\sigma \,.\, \sin\gamma_x \,.\, \cos\gamma_x \,.\, \cos(\xi \pm \alpha),$$
$$q_y^2 = \cos^2\gamma_y + \operatorname{cotg}^2\sigma \,.\, \sin^2\gamma_y - 2\operatorname{cotg}\sigma \,.\, \sin\gamma_y \,.\, \cos\gamma_y \,.\, \cos(v \mp \alpha),$$
$$q_z^2 = \cos^2\gamma_z + \operatorname{cotg}^2\sigma \,.\, \sin^2\gamma_z + 2\operatorname{cotg}\sigma \,.\, \sin\gamma_z \,.\, \cos\gamma_z \,.\, \cos\alpha,$$

und nimmt man aus den Gleichungen III, IV, V im §. 122 die Werthe für $\cos\gamma_x$, $\sin\gamma_x$, ..., so wie aus I, II die nöthigen Functionen von ξ, v, so erhält man die oben erwähnten allgemeinen Formeln.

Wir führen dieselben nicht aus, bemerken aber, dass beim Addiren der drei Gleichungen unter 2) die drei ersten Summanden rechts nach Gleichung 2) in §. 39 die Summe 2, die drei zweiten Summanden nach 1) in §. 39 die Summe $\operatorname{cotg}^2\sigma$ ergeben, während die drei letzten Summanden (wenn man ihre angedeuteten Werthe nimmt) sich aufheben. Hierdurch wird die Gleichung in §. 124 so verallgemeinert:

$$q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 2 + \operatorname{cotg}^2\sigma.$$

Durch σ ist der Winkel bezeichnet, unter welchem die Projectionsstrahlen gegen die Projectionsebene geneigt sind (§. 134); bei der orthographischen Projection ist $\sigma = \frac{\pi}{2}$, also $\operatorname{cotg}\sigma = 0$.

149. Da zur Anfertigung jeder axonometrischen Zeichnung die Projectionen der Axen construirt sein müssen, so können nach dem Hauptsatze (§. 147) diese Projectionen, sowohl den Richtungen als den Verkürzungs-Verhältnissen nach, willkürlich genommen werden, und es rechtfertigt sich aus ihm die in obigen Tabellen (§§. 132, 146) enthaltene annähernde Bestimmung der Winkel ξ, v.

Wir bemerken noch, dass die unbestimmten Benennungen Vogel-, Militair- und Cavalier-Perspective häufig als gleichbedeutend mit schiefer Projection überhaupt genommen werden; sie können eben so wohl auf die orthographische Projection bezogen werden, wenn nur die Projectionsstrahlen gegen das Loth (oder die Grundebene) geneigt sind, wie diess bei der (eigentlichen) axonometrischen Projection (§. 112 u. s. w.) der Fall ist. Wir behalten einige Betrachtungen über diese Projectionsarten der dritten Abtheilung vor, in welcher wir die Perspective behandeln, und werden daselbst zeigen, dass die schiefe Projection eines Raumgebildes von seiner natürlichen Erscheinung ganz abweicht, wenn der Winkel σ (§. 140) kleiner als 60° ist, und ihr um desto näher kommt, je mehr sich σ einem rechten nähert.

Soll die Darstellung eines Raumgebildes seiner natürlichen Erscheinung so nahe kommen, als es die Parallel-Projection gestattet, so ist die axonometrische Projection (§§. 112, 116) anzuwenden.

Soll die Darstellung nur überhaupt ein Bild von ihm geben, besonders aber leicht auszuführen sein, so ist die isometrische Projection oder die Cavalier-Perspective anzuwenden.

Fast eben so leicht ist die Anwendung der dimetrischen Projection, besonders der schiefen am Schlusse von §. 144 gegebenen, welche den Vortheil darbietet, dass die nach ihr erhaltenen Darstellungen der natürlichen Erscheinung viel näher kommen. Eben so empfiehlt sich zur übersichtlichen Darstellung von Gebäude-Gruppen eine dimetrische Projection nach der Annahme $m = n$ (§§. 130, 132, 146), bei welcher nach obigem Hauptsatze die Winkel ξ, v, so wie die Einheit des zweiten Maassstabes, willkürlich genommen werden dürfen.

Siebentes Capitel.

Die Central-Projection.

150. **D**ie Projectionsebene $\mathfrak{P}$ und ausserhalb derselben der Projectionspunct **O** seien in fester Lage; die Projectionsstrahlen bilden einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunct **O** ist.

Durch einen Punct a des Raumes geht ein Strahl des Büschels und schneidet $\mathfrak{P}$ in einem Puncte, welcher die Central-Projection von a ist; wir bezeichnen denselben durch $a_,$.

$a_,$ ist durch a und den Projectionspunct bestimmt, aber a ist durch $a_,$ nicht bestimmt.

Liegt a in $\mathfrak{P}$, so ist a zugleich $a_,$.

Ist der Strahl $\mathbf{O}a$ parallel mit $\mathfrak{P}$, so sagen wir: $a_,$ ist ein unendlich ferner Punct in $\mathfrak{P}$, und bezeichnen ihn a_{∞}. In den Zeichnungen drücken wir einen solchen Punct durch eine mit $\mathbf{O}a$ parallele Strecke aus, an deren einen Endpunct der Buchstab mit dem Zeichen ∞ gesetzt ist (siehe Fig. 87 den Punct q auf der Strecke cq).

Alle Puncte, deren Strahlen mit $\mathfrak{P}$ parallel sind, erfüllen eine durch **O** gehende mit $\mathfrak{P}$ parallele Ebene, die wir die Parallelebene nennen und durch $\mathfrak{N}$ bezeichnen.

151. Die Projection einer Geraden G ist eine Gerade $G_,$, Schnitt von $\mathfrak{P}$ mit der durch G und **O** geführten projicirenden Ebene.

Die Geraden G, $G_,$ schneiden sich im Durchgange e von G unter einem Winkel, welcher im Allgemeinen von ihrem Neigungswinkel γ gegen $\mathfrak{P}$ verschieden ist.

$G_,$ ist durch G und den Projectionspunct bestimmt, aber G ist durch $G_,$ nicht bestimmt.

Liegt eine Gerade G in $\mathfrak{P}$, so ist sie zugleich $G_,$.

Ist eine Gerade G parallel mit $\mathfrak{P}$, so ist auch $G_,$ ihr parallel.

Ist $\mathbf{O}$ ein Punct einer Geraden G, so ist $G_,$ ein Punct; umgekehrt:

jeder Punct in $\mathfrak{P}$ ist die Projection der durch den Punct und durch $\mathbf{O}$ geführten Geraden.

Liegt eine Gerade in $\mathfrak{R}$ (§. 150), so liegen die Projectionen aller ihrer Puncte im Unendlichen, oder die Projection der Geraden ist die in $\mathfrak{P}$ liegende unendlich ferne Gerade, die wir durch G_∞ bezeichnen.

152. Die Projection jedes Punctes a einer Geraden G liegt in deren Projection $G_,$ und ist der Durchschnitt von $G_,$ mit dem Strahle $\mathbf{O}a$.

Drei Puncte einer Geraden sind besonders zu beachten:

1) ihr Durchgang e, der zugleich $e_,$ ist,
2) ihr in $\mathfrak{R}$ liegender Punct r, der zur Projection $r_,$ den unendlich fernen Punct von $G_,$ hat,
3) ihr unendlich ferner Punct q, der zur Projection $q_,$ den Durchschnitt von $G_,$ mit dem durch $\mathbf{O}$ parallel zu G geführten Strahle hat.

Fig. 87. Betrachten wir in der projicirenden Ebene von G die stetige Aufeinanderfolge der nach den entsprechenden Puncten beider Geraden G, $G_,$ gerichteten Strahlen und die durch dieselben vermittelte Beziehung der Punctenpaare $r\ r_,$, $q\ q_,$, so schliessen wir, dass jede Gerade nur einen unendlich fernen Punct hat, der in der stetigen Aufeinanderfolge ihrer Puncte keine Unterbrechung macht.

Die Puncte r, $q_,$, von denen jeder dem unendlich fernen Puncte $r_,$, q der anderen Geraden entspricht, nennt man die Gegenpuncte beider Geraden. Die Geraden selbst sind zwei projectivische Gerade, indem jede als die Central-Projection der anderen angesehen werden kann.

Fig. 87. **153.** Zwei projectivische Gerade G, $G_,$, die mit ihnen parallelen Strahlen $\mathbf{O}q_,$, $\mathbf{O}r$ und der durch irgend einen Punct a der einen geführte Strahl $\mathbf{O}a$ bilden zwei ähnliche Dreiecke $ra\mathbf{O}$, $q_,\mathbf{O}a_,$. Diese Dreiecke ergeben die Proportion:

$$ra : \mathbf{O}r = \mathbf{O}q_, : q_,a_,$$

oder die Gleichung:

$$ra\,.\,q_,a_, = \mathbf{O}r\,.\,\mathbf{O}q_,,$$

in welcher die zweite Seite für jedes beliebige Punctenpaar $a\ a_,$, $b\ b_,$, ... der Geraden G, $G_,$ unveränderlich ist. Daher der Satz: bei zwei projectivischen Geraden hat das Rechteck unter den Abständen zweier entsprechenden Puncte von den Gegenpuncten einen unveränderlichen Werth.

Wird das Rechteck $\mathbf{O}r\,.\,\mathbf{O}q_,$ in ein ihm gleiches Quadrat verwandelt, dessen Seite wir durch $\mathfrak{q}$ bezeichnen, so ist $\mathfrak{q}^2$ die projectivische Potenz der beiden Geraden.

154. Zwei entsprechende Punctenpaare $a\ a_,$, $b\ b_,$ zweier projectivischen Geraden liefern demnach die Gleichungen: Fig. 87.

$$q_,a_, = \frac{\mathfrak{q}^2}{ra},\quad q_,b_, = \frac{\mathfrak{q}^2}{rb}.$$

Die Subtraction der zweiten Gleichung von der ersten liefert:

$$\pm(q_,a_, - q_,b_,) = \pm(rb - ra)\,.\,\frac{\mathfrak{q}^2}{ra\,.\,rb},$$

oder:

$$a_,b_, = ab\,.\,\frac{\mathfrak{q}^2}{ra\,.\,rb},\ \text{d. h.}$$

die Central-Projection einer Strecke ist gleich dem Producte der Strecke in den Quotienten der projectivischen Potenz durch das Rechteck unter den Abständen beider Endpuncte der Strecke von ihrem Gegenpuncte;

sie ist also grösser oder kleiner, je nachdem die erwähnten Abstände kleiner oder grösser sind, sie ist der Strecke gleich für $ra\,.\,rb = \mathfrak{q}^2$.

Liegen die Endpuncte einer Strecke ac auf verschiedenen Seiten vom Gegenpuncte r, so müssen die beiden Gleichungen

$$q_,a_, = \frac{\mathfrak{q}^2}{ra},\ q_,c_, = \frac{\mathfrak{q}^2}{rc}$$

addirt werden, indem die eine Strecke als negativ zu nehmen ist; man erhält gleichfalls:

$$a_,c_, = ac\,.\,\frac{\mathfrak{q}^2}{ra\,.\,rc}.$$

Hierbei ist Folgendes zu bemerken. Von zwei Strahlen $\mathbf{O}a$, $\mathbf{O}b$, oder $\mathbf{O}a$, $\mathbf{O}c$, werden zwei Winkel eingeschlossen, deren Summe gleich π ist, sie heissen Ergänzungswinkel (Supplementswinkel); die Zahlenwerthe der trigonometrischen Functionen beider Winkel sind in absoluter Hinsicht dieselben, nur die meisten in den Vorzeichen verschieden. Eben so werden von zwei Puncten

a, b oder a, c einer Geraden zwei Strecken begrenzt, deren Summe gleich ∞ ist, wir nennen sie Ergänzungsstrecken; die Maasse beider Strecken sind in absoluter Hinsicht dieselben, denn ist s die Länge der endlichen Strecke ab oder ac, so ist $\infty - s$ die Länge der unendlichen aqb oder aqc; von diesem Ausdruck ist nur s als wirkliches Maass zu nehmen.

Liegen in zwei projectivischen Geraden beide Endpuncte zweier entsprechenden Strecken ab, $a_,b_,$ auf einer und derselben Seite von ihren Gegenpuncten r, $q_,$, so entspricht der endlichen Strecke ab die endliche $a_,b_,$ und der unendlichen aqb die unendliche $a_,r_,b_,$. Liegen die Endpuncte zweier entsprechenden Strecken ac, $a_,c_,$ auf verschiedenen Seiten von ihren Gegenpuncten r, $q_,$, so entspricht der endlichen Strecke ac die unendliche $a_,r_,c_,$ und der unendlichen aqc entspricht die endliche $a_,c_,$, wie aus der Figur zu ersehen ist.

Obige Gleichungen geben in jedem Falle die Längen der endlichen Strecken $a_,b_,$, $a_,c_,$.

Harmonische Puncte.

Fig. 88. **155.** Sind in der einen von zwei projectivischen Geraden drei Puncte a, b, c angenommen, so dass $ab = cb$, so ist:

$$a_,b_, = ab \cdot \frac{\mathfrak{q}^2}{ra \cdot rb}, \qquad c_,b_, = cb \cdot \frac{\mathfrak{q}^2}{rc \cdot rb},$$

wonach:

$$a_,b_, : c_,b_, = \frac{1}{ra} : \frac{1}{rc}.$$

Da nun: $a_,q_, = \dfrac{\mathfrak{q}^2}{ra}$, $\qquad c_,q_, = \dfrac{\mathfrak{q}^2}{rc}$,

so folgt die Proportion:

$$a_,b_, : c_,b_, = a_,q_, : c_,q_,,$$

d. h. die vier Puncte $a_,$, $b_,$, $c_,$, $q_,$ sind harmonische Puncte.

Fig. 89. Vier Puncte a, b, c, d einer Geraden von der Art, dass die Abstände je zweier zugeordneten von den beiden anderen gleiches Verhältniss haben, dass also $\frac{ab}{cb} = \frac{ad}{cd}$, nennt man harmonische Puncte.

Und man sagt, die Strecke ac ist durch die Puncte b, d harmonisch getheilt, wenn obige Gleichung stattfindet.

Aufgabe. Eine Strecke ac nach einem gegebenen Verhältnisse $m:n$ harmonisch zu theilen.

Man ziehe zwei Parallelen in beliebiger Richtung durch a und c, trage auf die eine derselben eine Strecke aO, auf die andere nach beiden Seiten von c Strecken $cf = cg$ ab, so dass $aO : cf = m : n$. Die Strahlen Of, Og schneiden ac in den geforderten Puncten b, d.

156. Das Verhältniss $m:n$ kann jeden beliebigen Werth erhalten. Sind die beiden zugeordneten Puncte a, c fest, so giebt jeder besondere Werth des Verhältnisses ein anderes Punctenpaar b, d; d. h.

es giebt zu zwei festen Puncten a, c einer Geraden unzählige Paare einander zugeordneter mit ihnen harmonischen Puncte b, d.

Ist ins Besondere das Verhältniss $m:n=1$, so fällt der zwischen a, c liegende Punct in die Mitte m der Strecke ac, und der ausserhalb liegende wird der unendlich ferne q der Geraden. Also:

liegt von vier harmonischen Puncten der eine m in der Mitte zwischen zwei zugeordneten a und c, so ist sein zugeordneter unendlich fern.

Oder: irgend zwei Puncte und die Mitten der beiden von ihnen begrenzten Ergänzungsstrecken sind harmonische Puncte.

Ist $\frac{ab}{cb}=\frac{ad}{cd}=\infty$, so muss gleichzeitig $cb=cd=0$ sein, und ist $\frac{ab}{cb}=\frac{ad}{cd}=0$, so muss gleichzeitig $ab=ad=0$ sein; d. h.

in jedem von beiden Puncten a, c ist ein zweites Paar b, d vereint, das mit dem ersten vier harmonische Puncte bildet.

Das Gesetz für alle Punctenpaare einer Geraden, die in Bezug auf zwei feste Puncte zugeordnete harmonische sind, lässt sich feststellen, wie folgt. Ist m die Mitte der Strecke ac, so kann man für

$$\frac{ab}{cb}=\frac{ad}{cd}$$

setzen:

$$\frac{ma+mb}{mc-mb}=\frac{md+ma}{md-mc}.$$

Diese Gleichung ergiebt:

$$ma^2=mc^2=mb\,.\,md,\text{ d. h.}$$

bei vier harmonischen Puncten ist das Rechteck unter den Abständen zweier zugeordneten Puncte vom Mittelpuncte der von beiden anderen begrenzten Strecke gleich dem Quadrate der Hälfte dieser Strecke.

157. Die Projectionen von vier harmonischen Puncten a, b, c, d einer Geraden sind ebenfalls vier harmonische Puncte $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$, $d_{,}$ der entsprechenden Geraden.

Fig. 89. Man führe durch c die Parallele mit dem Strahle $\mathbf{O}a$; dieselbe wird von den Strahlen $\mathbf{O}b$, $\mathbf{O}d$ in f, g so geschnitten, dass $cf = cg$. Denn es ist:

$$ab : cb = \mathbf{O}a : cf$$

und

$$ad : cd = \mathbf{O}a : cg.$$

Man führe durch $c_,$ ebenfalls die Parallele mit $\mathbf{O}a$; dieselbe wird von den Strahlen $\mathbf{O}b$, $\mathbf{O}d$ in $f_,$, $g_,$ so geschnitten, dass $c_,f_, = c_,g_,$. Da nun

$$a_,b_, : c_,b_, = \mathbf{O}a_, : c_,f_,$$

und

$$a_,d_, : c_,d_, = \mathbf{O}a_, : c_,g_,,$$

so ist

$$a_,b_, : c_,b_, = a_,d_, : c_,d_,.$$

Aus diesem Satze folgt, wie schon (§. 155) nachgewiesen wurde, dass die Central-Projectionen dreier gleichfernen Puncte einer Geraden und der Gegenpunct in der Projection der Geraden vier harmonische Puncte sind.

Fig. 88. **158.** Es sei in der einen von zwei projectivischen Geraden eine fortlaufende Reihe gleichferner Puncte a, b, c, d, ..., so dass $ab = bc = cd = \ldots = \mathbf{s}$, und es sei $ra = \mathbf{r}$. Je drei auf einander folgende dieser Puncte bilden mit dem unendlich fernen q vier harmonische Puncte, z. B. a, b, c, q; b, c, d, q; ... und die Abstände dieser Puncte von dem Gegenpuncte r bilden die arithmetische Reihe:

$$\mathbf{r} \qquad \mathbf{r} + \mathbf{s} \qquad \mathbf{r} + 2\mathbf{s} \; \ldots .$$

In der Projection der Geraden bilden die entsprechenden Puncte $a_,$, $b_,$, $c_,$, $d_,$, ... eine fortlaufende Reihe harmonischer Puncte, denn es sind $a_,$, $b_,$, $c_,$, $q_,$; $b_,$, $c_,$, $d_,$, $q_,$; ... harmonische Puncte. Die Abstände dieser Puncte vom Gegenpuncte $q_,$ sind

$$q_,a_, = \frac{\mathbf{q}^2}{ra} \qquad q_,b_, = \frac{\mathbf{q}^2}{rb} \qquad q_,c_, = \frac{\mathbf{q}^2}{rc} \ldots,$$

oder

$$\frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{r}} \qquad \frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{r}+\mathbf{s}} \qquad \frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{r}+2\mathbf{s}} \ldots,$$

d. h. die Quotienten einer und derselben Grösse, nämlich der projectivischen Potenz $\mathbf{q}^2$, durch die Glieder obiger arithmetischen Reihe. Eine solche Reihe heisst eine harmonische Reihe; danach sagen wir:

die Abstände der Projectionen gleichferner Puncte einer Geraden vom Gegenpuncte in der Projection der Geraden bilden eine harmonische Reihe.

Die Strecken $a_,b_,$, $b_,c_,$, $c_,d_,$, ... selbst haben die Längen:

$$\frac{\mathfrak{q}^2\mathfrak{s}}{\mathfrak{r}(\mathfrak{r}+\mathfrak{s})}\quad \frac{\mathfrak{q}^2\mathfrak{s}}{(\mathfrak{r}+\mathfrak{s})(\mathfrak{r}+2\mathfrak{s})}\quad \frac{\mathfrak{q}^2\mathfrak{s}}{(\mathfrak{r}+2\mathfrak{s})(\mathfrak{r}+3\mathfrak{s})}\ \ldots;$$

die Nenner dieser Ausdrücke sind Glieder einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung.

159. Ist eine Gerade G parallel mit $\mathfrak{P}$, also mit ihrer Projection $G_,$, so fallen ihre drei bemerkenswerthen Puncte e, r, q (§. 152) in den unendlich fernen gemeinschaftlichen Punct beider Geraden in einander.

Für zwei projectivische Gerade in solcher Lage ist die Potenz $\mathfrak{q}^2 = \infty$; an ihre Stelle tritt das Aehnlichkeits-Verhältniss $\mathfrak{q}$ der entsprechenden Strecken beider Geraden. Dasselbe ist gleich dem Verhältniss der Abstände beider Geraden vom Projectionspunct **O**; denn sind n, n_1 die Längen der von $\mathfrak{P}$ auf die Geraden G, $G_,$ Fig. 90. gefällten Normalen, so ist

$$\frac{a_,b_,}{ab} = \frac{b_,c_,}{bc} = \ldots = \frac{n_1}{n} = \mathfrak{q}.$$

Zwei solche Gerade sind projectivisch ähnliche Gerade. Haben sie gleichen Abstand von **O**, ist also $n = n_1$, so sind alle entsprechenden Strecken einander gleich, d. h. $\mathfrak{q} = 1$, und sie sind projectivisch gleiche Gerade.

Zu ähnlichen Ergebnissen gelangt man, wenn der Projectionspunct **O** ins Unendliche rückt, d. h. wenn sich die Central- in Parallel-Projection verwandelt. In diesem Falle sind zwei projectivische Gerade stets projectivisch ähnlich oder gleich; den Werth des Aehnlichkeits- oder Verkürzungs-Verhältnisses $\mathfrak{q}$ haben wir früher bestimmt (§§. 13, 135).

Geht eine Gerade durch den Projectionspunct **O**, so ist ihre Projection ein Punct, und die Potenz $\mathfrak{q}^2 = 0$.

160. Die Central-Projection paralleler Geraden ist ein Strahlenbüschel.

Man denke durch **O** den Strahl **O**q parallel mit den gegebenen Geraden, also nach ihrem gemeinschaftlichen unendlich fernen Puncte q gerichtet. Die projicirenden Ebenen der Geraden gehen alle durch diesen Strahl, bilden also einen Ebenenbüschel, dessen Axe er ist. Dieser Ebenenbüschel wird von $\mathfrak{P}$ in einem Strahlenbüschel zum Mittelpuncte $q_,$ geschnitten.

Fallen die projicirenden Ebenen zweier oder mehrerer parallelen Geraden in einander, so fallen auch die Projectionen dieser Geraden in einander.

Die Potenz $\mathbf{q}^2$ ist für jede der parallelen Geraden und ihre Projection im Allgemeinen eine andere. Denn es ist $\mathbf{q}^2 = \mathbf{O}r . \mathbf{O}q,$ (§. 153); die Strecke $\mathbf{O}q,$ ist zwar für alle parallele Gerade dieselbe, aber die Strecke $\mathbf{O}r$ ist im Allgemeinen eine andere für jede von ihnen. Sie ist Null für die durch $\mathbf{O}$ gehende Gerade, sie ist gleich für alle Gerade, deren Durchschnitte r mit der Parallelebene $\mathfrak{R}$ gleichfern von $\mathbf{O}$ sind. Die Potenz $\mathbf{q}^2$ hat also für parallele Gerade alle möglichen Werthe zwischen 0 und ∞.

Sind parallele Gerade mit $\mathfrak{P}$ parallel, so sind ihre Projectionen einander ebenfalls parallel, denn der Parallelstrahl $\mathbf{O}q$ ist parallel mit $\mathfrak{P}$. Das Aehnlichkeits-Verhältniss $\mathbf{q}$ hat im Allgemeinen für jede einen anderen Werth, dessen Grösse zwischen 0 und ∞ liegt, je nachdem der Abstand des Punctes $\mathbf{O}$ von den Geraden zwischen ∞ und 0 liegt.

Die Central-Projection einer Schaar von Geraden, die einen Punct r der Ebene $\mathfrak{R}$ gemein haben, ist eine Schaar von parallelen Geraden mit der Richtung des Strahles $\mathbf{O}r$.

Projectivische Ebenen.

161. Für unbegrenzte Ebenen gilt das im §. 14 Gesagte auch bei der Central-Projection.

Die Projection einer Ebene $\mathfrak{E}$ ist die Projectionsebene $\mathfrak{P}$ selbst. Beide Ebenen werden durch die Projectionsstrahlen in eine solche Beziehung gesetzt, dass jedem Puncte a, jeder Geraden G, jedem $n$seite N in $\mathfrak{E}$ ein bestimmter Punct $a,$, eine bestimmte Gerade $G,$, ein bestimmtes $n$seit $N,$ in $\mathfrak{P}$ entspricht. Zwei solche Ebenen, von denen jede als Projection der anderen angesehen werden kann, sind p r o j e c t i v i s c h e E b e n e n.

Unter den Puncten in $\mathfrak{E}$ sind drei Reihen besonders zu beachten:

1) die im Schnitte E liegenden Puncte e, von denen jeder zugleich $e,$ ist,
2) die im Durchschnitte R mit der Parallelebene $\mathfrak{R}$ liegenden Puncte r, deren entsprechende $r,$ auf $\mathfrak{P}$ im Unendlichen liegen,

3) die unendlich fernen Puncte q, deren entsprechende $q_,$ im Schnitte $Q_,$ von $\mathfrak{P}$ und der durch $\mathbf{O}$ parallel mit E geführten Ebene $\mathfrak{Q}$ liegen.

Die Ebenen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Q}$ schneiden sich in einer Geraden, welche durch $\mathbf{O}$ geht und parallel mit E ist; wir nennen sie die Parallelaxe der Ebene $\mathfrak{E}$.

Jede durch diese Axe geführte Ebene schneidet $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{P}$ in den entsprechenden parallelen Geraden G, $G_,$, deren projicirende Ebene sie ist. Wir betrachten die stetige Folge dieser projicirenden Ebenen und die durch dieselben vermittelte Beziehung der einander entsprechenden Geradenpaare G, $G_,$, zu denen R in $\mathfrak{E}$ und die Reihe der unendlich fernen Puncte $r_,$ in $\mathfrak{P}$, so wie die Reihe der unendlich fernen Puncte q in $\mathfrak{E}$ und die Gerade $Q_,$ in $\mathfrak{P}$ gehören, und folgern aus dieser Betrachtung, dass die unendlich fernen Puncte einer Ebene sämmtlich in einer Geraden, der G_∞ der Ebene (§. 151), liegen.

Denkt man obige Gerade G, $G_,$ als Erzeugende der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{P}$, welche sich parallel mit sich selbst fortbewegen, so sieht man, dass die unendlich fernen Geraden $R_,$ in $\mathfrak{P}$, Q in $\mathfrak{E}$ in der stetigen Folge der verschiedenen Lagen der Erzeugenden beider Ebenen keine Unterbrechung machen.

Die Geraden R, $Q_,$, von denen jede der unendlich fernen Geraden $R_,$, Q der anderen Ebene entspricht, nennt man die Gegenaxen beider Ebenen; sie sind parallel mit dem Schnitte E und der Parallelaxe der Ebene $\mathfrak{E}$.

Parallele Ebenen haben in $\mathfrak{P}$ parallele Schnitte und eine gemeinschaftliche Gegenaxe $Q_,$; sie können als ein Ebenenbüschel angesehen werden, dessen Axe ihre unendlich ferne Gerade Q ist.

162. Jede Gerade G der Ebene $\mathfrak{E}$ und ihre Projection $G_,$ in $\mathfrak{P}$ sind projectivische Gerade, die den Punct e, Durchgang von G auf dem Schnitte E gemein haben. Ihre projicirende Ebene schneidet die Parallebenen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Q}$ in zwei Geraden, welche mit G, $G_,$ ein Parallelogramm bilden; dessen Ecken sind $\mathbf{O}$, r auf R, e, $q_,$ auf $Q_,$, d. h. die Gegenpuncte der Geraden liegen in den Gegenaxen ihrer Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{P}$.

Ist eine Gerade parallel mit dem Schnitte E, so ist es auch ihre Projection; in diesem Falle sind beide Gerade projectivisch ähnlich. Unter diesen Geraden sind zwei Paare projectivisch gleich, nämlich:

1) die im Schnitt E in einander liegenden,

2) die in $\mathfrak{E}$ in gleichem Abstande mit E auf der anderen Seite der Gegenaxe R liegende Gerade und ihre Projection, welche in $\mathfrak{P}$ in gleichem Abstande mit E auf der anderen Seite der Gegenaxe $Q_,$ liegt.

Parallelen Geraden der einen Ebene, welche nicht mit E parallel sind, entspricht in der anderen Ebene ein Strahlenbüschel, dessen Mittelpunct in ihrer Gegenaxe liegt.

163. Die Central-Projection eines ebenen Winkels hat im Allgemeinen eine andere Grösse als der Winkel selbst (§§. 17, 136).

Durch jeden Punct a in $\mathfrak{E}$ gehen unendlich viele Gerade derselben Ebene und machen ihn zu einem Strahlenbüschel, durch den entsprechenden Punct $a_,$ in $\mathfrak{P}$ gehen die entsprechenden Geraden; die Puncte a, $a_,$ werden projectivische Strahlenbüschel, von denen je zwei entsprechende Strahlen sich in E schneiden.

Es sei $\mathfrak{H}$ die Halbirebene des einen von den Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{P}$ eingeschlossenen Flächenwinkels; die durch $\mathbf{O}$ auf $\mathfrak{H}$ gefällte Normale schneide $\mathfrak{E}$ in s, $\mathfrak{P}$ in $s_,$. Wird durch den Strahl $\mathbf{O}s$ die auf E normale Ebene $\mathfrak{B}$ geführt, welche E in g, $\mathfrak{E}$ in sg, $\mathfrak{P}$ in $s_,g$ schneidet, so ist $sg = s_,g$, und werden durch s, $s_,$ irgend zwei entsprechende Gerade geführt, welche den Punct e in E gemein haben, so sind die Dreiecke sge, $s_,ge$ congruent, also die Winkel gse, $gs_,e$ gleich. Hieraus folgt, dass jedem Winkel in $\mathfrak{E}$ zum Scheitel s ein ihm gleicher Winkel in $\mathfrak{P}$ zum Scheitel $s_,$ entspricht.

Ist $\mathfrak{H}^1$ die Halbirebene des anderen Flächenwinkels $\mathfrak{E}\mathfrak{P}$ und sind t, $t_,$ die Durchschnitte mit der durch $\mathbf{O}$ auf $\mathfrak{H}^1$ gefällten Normalen, so gilt für t, $t_,$ dasselbe, d. h.

es giebt in zwei projectivischen Ebenen zwei einander entsprechende Punctenpaare $s\ s_,$, $t\ t_,$, welche die Mittelpuncte projectivisch gleicher Strahlenbüschel der Ebenen sind.

Harmonische Strahlen.

Fig. 89. **164.** Werden vier harmonische Puncte a, b, c, d einer Geraden mit einem Puncte O ausserhalb der Geraden durch Strahlen verbunden, so erhält man vier harmonische Strahlen, oder einen harmonischen Büschel.

Es giebt

$$\text{Dreieck } Oab \qquad \sin(aOb) = \sin(Oba)\,\frac{ab}{Oa},$$

$$\text{Dreieck } Ocb \qquad \sin(cOb) = \sin(Obc)\,\frac{cb}{Oc},$$

$$\text{„} \quad Oad \qquad \sin(aOd) = \sin(Oda)\,\frac{ad}{Oa},$$

$$\text{„} \quad Ocd \qquad \sin(cOd) = \sin(Odc)\,\frac{cd}{Oc}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{\sin(aOb)}{\sin(cOb)} : \frac{\sin(aOd)}{\sin(cOd)} = \frac{ab}{cb} : \frac{ad}{cd},$$

und da $\frac{ab}{cb} = \frac{ad}{cd}$, so ist auch $\frac{\sin(aOb)}{\sin(cOb)} = \frac{\sin(aOd)}{\sin(cOd)}$.

Vier durch einen Punct O gehende Strahlen Oa, Ob, Oc, Od von der Art, dass die Sinus der Winkel, welche von je zwei zugeordneten mit den beiden anderen eingeschlossen werden, gleiches Verhältniss haben, dass also $\frac{\sin(aOb)}{\sin(cOb)} = \frac{\sin(aOd)}{\sin(cOd)}$, nennt man harmonische Strahlen.

Für harmonische Strahlen gelten dieselben Gesetze wie für harmonische Puncte (§. 156).

Werden zwei zugeordnete Strahlen fest angenommen, so giebt es unzählige Paare einander zugeordneter Strahlen, die mit ihnen harmonisch sind.

Hälftet der eine von vier harmonischen Strahlen den von zwei zugeordneten eingeschlossenen Winkel, so hälftet sein zugeordneter den Ergänzungswinkel.

Um das Gesetz für alle zugeordneten Strahlenpaare zu erhalten, sei Oh der Strahl, welcher den Winkel aOc hälftet, so kann man für

$$\frac{\sin(aOb)}{\sin(cOb)} = \frac{\sin(aOd)}{\sin(cOd)}$$

setzen
$$\frac{\sin(hOa + hOb)}{\sin(hOc - hOb)} = \frac{\sin(hOd + hOa)}{\sin(hOd - hOc)}$$

und hieraus ableiten:

$$\operatorname{tg}^2(hOa) = \operatorname{tg}^2(hOc) = \operatorname{tg}(hOb)\,.\,\operatorname{tg}(hOd), \text{ d. h.}$$

bei vier harmonischen Strahlen ist das Product der Tangenten der Winkel, welche zwei zugeordnete Strahlen mit dem Halbirstrahle des Winkels der beiden anderen Strahlen einschliessen, gleich der zweiten Potenz der Tangente der Hälfte des letzteren Winkels.

Die Projectionen von vier durch einen Punct p gehenden harmonischen Strahlen sind ebenfalls vier durch den entsprechenden Punct $p_{,}$ gehende harmonische Strahlen.

Denn eine Gerade schneidet dieselben in vier harmonischen Puncten (§. 157); die Projectionen dieser Puncte sind harmonische Puncte, und diese bestimmen mit $p_{,}$ harmonische Strahlen.

Central-Projection ebener $n$seite.

165. Die Central-Projection eines ebenen $n$seits N ist die Durchschnittsfigur $N_{,}$ von $\mathfrak{P}$ mit der projicirenden Pyramide des $n$seits, d. h. der ihm umschriebenen Pyramide (§. 85), deren Seiten durch **O** gehen.

Fällt die Ebene $\mathfrak{E}$ des $n$seits mit $\mathfrak{P}$ zusammen, so ist N zugleich $N_{,}$.

Ist $\mathfrak{E}$ parallel mit $\mathfrak{P}$, so sind N, $N_{,}$ ähnliche Figuren, als Durchschnitte einer Pyramide und zweier parallelen Ebenen.

Ist $\mathfrak{E}$ gegen $\mathfrak{P}$ geneigt, so sind N, $N_{,}$ von verschiedener Grösse und Gestalt.

Geht $\mathfrak{E}$ durch **O**, so ist $N_{,}$ eine Gerade. Umgekehrt: jede Gerade in $\mathfrak{P}$ kann die Central-Projection einer ebenen Figur sein, deren Ebene durch die Gerade und durch **O** geht.

Aufgabe. Die Central-Projection eines gegebenen $n$seits N zu construiren, wenn seine Lage gegen den Schnitt E seiner Ebene $\mathfrak{E}$ und deren Neigungswinkel ε gegen $\mathfrak{P}$ gegeben sind.

Die Lösung dieser Aufgabe kann nach §. 91 erfolgen. Nachstehendes Verfahren ergiebt die Beziehung zwischen N und $N_{,}$, indem wir durch Herabschlagen von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{P}$ die Construction aus dem Raume in die Projectionsebene versetzen (vergl. §§. 19, 137).

Fig. 92. **166.** Die Ebene der Zeichnung sei $\mathfrak{P}$ und zugleich $\mathfrak{P}_1$, wir wählen $\mathfrak{P}_2$, also auch **A** (§§. 25, 27), normal auf dem Schnitte E_1. Die Ebene $\mathfrak{E}$ ist in der Figur durch ihre Schnitte gegeben; ein in ihr liegender Punct a (eine Ecke des $n$seits), der Projectionspunct **O**, der Strahl **O**a und dessen Durchschnitt $a_{,}$ mit $\mathfrak{P}$ sind durch ihre Projectionen dargestellt.

Wir construiren die Halbirebenen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}^1$ der beiden von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{P}$ eingeschlossenen Flächenwinkel und fällen von **O** die Normale auf jede dieser Ebenen; diese Normalen schneiden $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{P}$ in den Puncten s $s_,$, t $t_,$. Wir führen durch $\mathbf{O}$ die auf E_1 normale Ebene $\mathfrak{V}$; ist g der Durchschnitt von V_1, E_1, so ist $gs = gs,$ und $gt = gt,$.

Den Strahl $\mathbf{O}s$ oder $\mathbf{O}t$ sehen wir als Axe eines Ebenenbüschels an, von welchem jede Ebene durch den nach einer Ecke a, b, ... des $n$seits gerichteten Strahl $\mathbf{O}a$, $\mathbf{O}b$, ... bestimmt ist. Diese Ebenenbüschel werden von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{P}$ in den projectivisch gleichen Strahlenbüscheln beider Ebenen (§. 163) geschnitten.

Endlich führen wir durch $\mathbf{O}$ die Ebene $\mathfrak{Q}$ parallel mit $\mathfrak{E}$; bezeichnen wir durch q den Durchschnitt von Q_1 V_1, so ist: $q\mathbf{O} = qs, = qt,$.

Denken wir nun gleichzeitig die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{Q}$ um E_1, Q_1 nach derselben Richtung gedreht und auf $\mathfrak{P}$ herabgeschlagen, so fallen die Puncte $[s]$, $[\mathbf{O}]$ mit $s,$, oder die Puncte (t), $(\mathbf{O})$ mit $t,$ zusammen, je nachdem die Drehung nach der einen oder nach der anderen Seite stattfindet; ebenso fallen die entsprechenden Strahlen beider Büschel $[s]$ $s,$, oder (t) $t,$ in einander.

Es gehen aber je zwei einander entsprechende Strahlen durch die entsprechenden Ecken a, b, ... von N und $a,$, $b,$, ... von $N,$, so dass nach dem Herabschlagen alle Verbindungslinien entsprechender Ecken von $[N]$ und $N,$ durch $s,$ oder $[\mathbf{O}]$, und von (N) und $N,$ durch $t,$ oder $(\mathbf{O})$ gehen. Diese Linien sind die Projectionsstrahlen, welche an der beim Herabschlagen von $\mathfrak{E}$ stattfindenden Bewegung Theil nehmen und mit $\mathfrak{E}$ zugleich auf $\mathfrak{P}$ fallen. Fig. 93.

Beachtet man noch, dass je zwei entsprechende Gerade der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{P}$, also auch die Seiten von N, $N,$, sich stets in E_1 schneiden, so lässt sich nach diesen beiden Eigenschaften die geforderte Projection $a,b,$ ... aus einem der $n$seite $[a][b]$ ... oder $(a)(b)$ ... herleiten.

In Fig. 93 sind die Geraden (R), Q_1, E_1, $[R]$, so wie die Puncte $(\mathbf{O})$, (a), $[\mathbf{O}]$, $[a]$, $a,$ aus Fig. 92 entnommen.

So wie das Verhältniss der Projection einer Strecke zur Strecke selbst in der Central-Projection weniger einfach (§. 154) als in der Parallel-Projection ausgedrückt ist, so ist es auch mit dem Verhältnisse der Inhalte von N, $N,$. Die Untersuchung der Grösse der Raumgebilde ist nicht Gegenstand der darstellenden Geometrie, daher gehen wir auf die Bestimmung des Inhaltes von $N,$ nicht ein.

167. Je zwei ebene Figuren, die in einer Ebene so gelegt werden können, dass

1) alle Verbindungsstrahlen ihrer einander entsprechenden Puncte einen Strahlenbüschel bilden,
2) alle Durchschnittspuncte ihrer einander entsprechenden Seiten in einer Geraden liegen,

sind collineare Figuren. Die unter 2) erwähnte Gerade ist die Collineationsaxe; man nennt auch wohl den Mittelpunct des unter 1) erwähnten Strahlenbüschels das Collineationscentrum. Hiernach sagen wir:

ein ebenes $n$seit und seine Central-Projection sind collineare Figuren.

Durch das Herabschlagen von $\mathfrak{E}$ ist in $\mathfrak{P}$ ein ebenes Projectionssystem entstanden, welches sich von den früheren (§§. 22, 138) nur darin unterscheidet, dass in jenen die Projectionsstrahlen einander parallel waren, indem $\mathbf{O}$ im Unendlichen lag. Das gegenwärtige System wird bestimmt durch:

1) die Collineationsaxe E,
2) den Projectionspunct $\mathbf{O}$, der entweder in s, oder in t, liegt, je nachdem die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{P}$ gleich oder ungleich liegen,
3) zwei entsprechende Puncte a, $a_,$.

Beim gleichzeitigen Herabschlagen der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{Q}$ auf $\mathfrak{P}$ behalten die Schnitte (E_1, Q_1 oder) E, Q ihre Lage; mit $\mathfrak{E}$ zugleich fällt der Schnitt R der Parallelebene $\mathfrak{R}$ und mit $\mathfrak{Q}$ der Projectionspunct $\mathbf{O}$ so wie die Parallelaxe in $\mathfrak{P}$. Diese vier Gerade sind einander parallel, und es sind die Abstände

$$Q\mathbf{O} = ER \text{ und } QE = \mathbf{O}R.$$

Bei gleicher Lage der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{P}$ liegen E, $\mathbf{O}$ zwischen Q, R, bei ungleicher Lage ausserhalb Q, R, und zwar E auf der einen, $\mathbf{O}$ auf der anderen Seite. Das Projectionssystem ist bestimmt, wenn E, $\mathbf{O}$ und die eine Gegenaxe, Q oder R (statt zweier entsprechenden Puncte a, $a_,$), gegeben sind.

168. Der Satz über die Central-Projection eines $n$seits (§. 165) lässt sich umgekehrt so aussprechen:

von den Durchschnittsfiguren je zweier Ebenen mit einer und derselben Pyramide ist jede die Central-Projection der anderen; der Mittelpunct m der Pyramide ist als Projectionspunct $\mathbf{O}$ und ihre Seiten sind als Projectionsstrahlen anzusehen.

Da beide Figuren collinear sind, so lässt sich ein ebenes Projectionssystem einrichten, in welchem die eine Figur aus der anderen hergeleitet werden kann. Man führe durch **O** (d. h. durch m) die Ebene $\mathfrak{Q}$, welche mit der Ebene $\mathfrak{E}$ der gegebenen Figur parallel ist, und schlage gleichzeitig diese Figur mit $\mathfrak{E}$ und den Punct **O** mit $\mathfrak{Q}$ auf die Ebene $\mathfrak{P}$ der geforderten Figur herab, so bestimmen die Schnitte E, Q mit dem herabgeschlagenen Puncte **O** das Projectionssystem in $\mathfrak{P}$.

Die Aufgabe „die Durchschnittsfigur einer Pyramide und einer Ebene zu construiren" wird hierdurch gleichbedeutend mit der Aufgabe „die Central-Projection eines gegebenen $n$seits zu construiren" (§. 165). Wir benutzen in den folgenden Beispielen die Sätze der Central-Projection, um die Lösung dieser Aufgabe zu vervollständigen und eine klare Anschauung der verschiedenartigen Figuren zu erlangen, welche aus dem Durchschnitt einer Ebene und einer Pyramide entstehen (§. 85).

Aufgabe. Die Central-Projection eines gegebenen Dreiseits abc zu construiren.

Das ebene Projectionssystem sei durch die Collineationsaxe E, die Gegenaxe Q und den Projectionspunct **O** gegeben. Die Ebenen desselben seien ungleichliegend, und in einer derselben sei das Dreiseit abc gegeben; die in seiner Ebene liegende Gegenaxe R hat von **O** den Abstand der Axen E, Q.

Sind e_1, e_2, e_3 die in E liegenden Durchgänge der Seiten ab, ac, bc, so gehen die entsprechenden Seiten $a_, b_,$, $a_, c_,$, $b_, c_,$ der geforderten Figur durch dieselben Puncte; zieht man durch **O** Strahlen nach a, b, c, so liegen die entsprechenden Puncte $a_,$, $b_,$, $c_,$ in diesen Strahlen. Zu diesen beiden im §. 166 gegebenen Bedingungen kommen folgende zwei.

Sind r_1, r_2, r_3 die Durchschnitte der Seiten ab, ac, bc mit R und zieht man durch **O** Strahlen nach diesen Puncten, so sind die Seiten $a_, b_,$, $a_, c_,$, $b_, c_,$ parallel mit diesen Strahlen; zieht man durch **O** Strahlen parallel mit den Seiten ab, ac, bc, und sind q_1, q_2, q_3 die Durchschnitte dieser Strahlen mit Q, so gehen die Seiten $a_, b_,$, $a_, c_,$, $b_, c_,$ durch diese Puncte. Denn es sind z. B. r_1, q_1 die Gegenpuncte der projectivischen Geraden ab, $a_, b_,$, diese aber liegen in den Gegenaxen beider Ebenen (§. 162).

169. Das gegebene Dreiseit abc kann in Bezug auf die in seiner Ebene liegende Gegenaxe R fünf verschiedene Lagen, daher seine Projection fünf verschiedene Gestalten haben. Wir bezeichnen das Dreiseit durch $\triangle$ und die verschiedenen Gestalten durch hinzugefügte Zahlen.

Fig. 94. 1) Die drei Ecken a, b, c liegen auf einer und derselben Seite von R. Jede seiner Seiten, z. B. ab, ist demnach eine endliche Strecke, deren Endpuncte auf einer und derselben Seite von ihrem Gegenpuncte r_1 liegen, also wird die entsprechende Seite ebenfalls von einer endlichen Strecke $a_{,}b_{,}$ gebildet, deren Endpuncte auf einer und derselben Seite von ihrem Gegenpuncte q_1 liegen (§. 154). Hieraus folgt, dass das Dreiseit $a_{,}b_{,}c_{,}$ oder $\triangle_1$ gleich seinem entsprechenden abc ein geschlossenes ist.

Fig. 95. 2) Zwei Ecken a, b liegen auf einer und derselben Seite von R, die dritte c liegt in R. Für $a_{,}b_{,}$ gilt das unter 1) Gesagte; die Puncte r_2, r_3 fallen mit c zusammen, der Punct $c_{,}$ liegt daher im Unendlichen, d. h. die Seiten $a_{,}c_{,}$, $b_{,}c_{,}$ sind parallel. Das letztere folgt aus der Congruenz der Dreiecke ce_2e_3, $\mathbf{O}q_2q_3$ (Abstand $\mathbf{O}Q$ ist gleich dem Abstand RE, §. 167). Das Dreiseit $a_{,}b_{,}c_{,}$ oder $\triangle_2$ ist demnach in der begrenzten Ebene der Zeichnung ein ungeschlossenes.

Fig. 96. 3) Eine Ecke a liegt ausserhalb R, beide andere b, c liegen in R. Die Puncte b, c sind zugleich r_1, r_2, daher liegen $b_{,}$, $c_{,}$ im Unendlichen. Die Puncte e_3, q_3, r_3 liegen gleichfalls im Unendlichen, so dass das Dreiseit $a_{,}b_{,}c_{,}$ oder $\triangle_3$ nur zwei an $a_{,}$ stossende und ins Unendliche laufende Gerade zeigt, seine dritte Seite $b_{,}c_{,}$ ist eine Strecke der G_∞ (§. 161) seiner Ebene.

Fig. 97. 4) Zwei Ecken a, c liegen auf verschiedenen Seiten von R, die dritte b in R. Die Seite ac, die von R in d geschnitten wird, ist eine endliche Strecke, deren Endpuncte auf verschiedenen Seiten von ihrem Gegenpuncte r_2 (oder d) liegen, also wird die entsprechende Seite von der unendlichen Strecke $a_{,}c_{,}$ gebildet, deren Endpuncte auf verschiedenen Seiten von Q liegen (§. 154); die Zeichnung zeigt zwei Theile dieser Strecke, die in entgegengesetzter Richtung von $a_{,}$ und von $c_{,}$ aus nach $d_{,}$ (im Unendlichen) laufen. Im Puncte b liegen zugleich r_1, r_3, Punct $b_{,}$ liegt daher im Unendlichen, d. h. die Seiten $a_{,}b_{,}$, $c_{,}b_{,}$ sind parallel; das letztere folgt auch aus der Congruenz der Dreiecke be_1e_3, $\mathbf{O}q_1q_3$. Man beachte, dass die Seiten $a_{,}b_{,}$, $c_{,}b_{,}$ entgegengesetzte Richtung haben; sie dürfen nämlich die Gegenaxe Q nicht schneiden, weil die entsprechenden Seiten ab, cb nicht die G_∞ ihrer Ebene schneiden. Das Dreiseit $a_{,}b_{,}c_{,}$ oder $\triangle_4$ zeigt in der Zeichnung zwei unge-

schlossene Theile, von denen jeder zwischen zwei sich schneidenden Geraden liegt.

5) Zwei Ecken a, b liegen auf einer Seite, die dritte c auf der anderen Seite von R. Für die Seite $a,b,$ gilt, was unter 1) für dieselbe Seite gesagt ist, und für die Seiten $a,c,$, $b,c,$ gilt, was unter 4) für die Seite $a,c,$ gesagt ist. Das Dreiseit $a,b,c,$ oder $\triangle_5$ zeigt in der Zeichnung zwei ungeschlossene Theile, der eine $d,a,b,f,$ von drei Geraden, der andere $f,c,d,$ von zwei Geraden begrenzt. Fig. 98.

Nach diesen Betrachtungen ist das im §. 85 über die Durchschnittsfiguren einer $n$kantigen Pyramide und einer Ebene Gesagte zu berichtigen; diese Figur ist jedesmal ein $n$seit. Das unter 2) erwähnte $(n-1)$seit wird durch Hinzufügen einer in der G_∞ liegenden Seite zu einem $n$seit. Die unter 3) erwähnte Anzahl $n+1$ oder $n+2$ der Seiten reducirt sich auf n, indem im obigen vierten und fünften Falle $a,d,$, $c,d,$ und im fünften $b,f,$, $c,f,$ als Theile einer Seite anzusehen sind.

170. Aufgabe. Die Central-Projection eines gegebenen einfachen Vierseits *abcd* zu construiren.

Die Lösung der Aufgabe erfolgt wie die der entsprechenden für das Dreiseit (§. 168).

In Bezug auf die Gegenaxe in der Ebene des Vierseits liegen von dessen Ecken:

1) 6) 7) keine   2) 5) eine   3) 4) zwei

in ihr und

1) vier   2) drei   3) zwei

auf derselben Seite, oder

6) drei und eine   5) zwei und eine   4) eine und eine

7) zwei und zwei

auf verschiedenen Seiten von ihr.

Diesen Lagen entsprechen sieben verschiedene Gestalten für die Projection des Vierseits, eine Zahl, die sich noch vermehrt, wenn man convexe, concave, überschlagene (§. 71) Vierseite als verschiedene Gestalten ansieht.

Beispiele. 1) Das Vierseit sei ein Parallelogramm und liege ganz auf einer Seite von R.

Das Projectionssystem sei durch die Collineationsaxe E, die Gegenaxe Q und den Projectionspunct **O** gegeben. Die Ebenen Fig. 99.

desselben seien gleichliegend, und in der, welche Q nicht enthält, liege *abcd*. (Die in seiner Ebene liegende Gegenaxe R ist in der Zeichnung weggelassen.)

Die Durchgänge e_1, e_2, e_3, e_4 seiner Seiten *ab*, *bc*, *cd*, *da* in E sind Puncte der entsprechenden Seiten $a_,b_,$, $b_,c_,$, $c_,d_,$, $d_,a_,$. Zieht man durch **O** die Strahlen $\mathbf{O}q_1$, parallel mit *ab*, *cd*, und $\mathbf{O}q_2$, parallel mit *bc*, *da*, so schneiden sich $a_,b_,$, $c_,d_,$ in q_1 und $b_,c_,$, $d_,a_,$ in q_2 (§. 160). Ist das Vierseit ein Rechteck, so wird $q_1 q_2$ Durchmesser eines durch **O** gehenden Halbkreises.

Fig. 79. 2) Das Vierseit sei concav und jede Seite werde von R geschnitten.

Es wird durch R in drei Theile zerlegt, die Dreiseite *bfg*, *dhk* und das Sechsseit *afgchk*; daher besteht seine Projection aus drei ungeschlossenen Theilen, da die Projectionen von *fg*, *hk* zwei Strecken der G_∞ der Ebene sind.

Fig. 78. 3) Das Vierseit sei überschlagen, zwei Seiten werden von R geschnitten.

Seine Projection zeigt zwei ungeschlossene Theile, von denen der eine überschlagen ist.

In den Figuren zu beiden letzten Fällen sind die Ebenen des Systems ungleichliegend, alle Hilfslinien ausgelassen und die Projectionen der Vierseite zu grösserer Deutlichkeit schraffirt.

171. Aufgabe. Die Central-Projection eines vollständigen Vierseits zu construiren, dessen eine Diagonale in der Gegenaxe seiner Ebene liegt.

Fig. 100. Das Projectionssystem sei durch die Collineationsaxe E, die Gegenaxe R und den Projectionspunct **O** gegeben. Die Ebenen desselben seien gleichliegend, und in der, welche R enthält, sei das Vierseit gegeben. (Die andere Gegenaxe Q ist in der Zeichnung weggelassen.)

Sind e_1, e_2, e_3, e_4 die Durchgänge der Seiten *ab*, *bc*, *cd*, *da* in E, so gehen $a_,b_,$, $b_,c_,$, $c_,d_,$, $d_,a_,$ durch dieselben Puncte. Und sind r_1, r_2 die in der Gegenaxe R liegenden Ecken des Vierseits, r_1 Durchschnitt von *ab*, *cd*, r_2 Durchschnitt von *bc*, *da*, so sind die Geraden $a_,b_,$, $c_,d_,$ mit $\mathbf{O}r_1$, $b_,c_,$, $d_,a_,$ mit $\mathbf{O}r_2$ parallel. Die geforderte Projection ist ein Parallelogramm.

Diess Parallelogramm wird ein Rechteck, wenn $r_1 r_2$ Durchmesser eines durch **O** gehenden Halbkreises ist; es wird ein Quadrat, wenn der nach dem Durchschnitte r_3 der Diagonale *ac* mit *R* gerichtete Strahl $\mathbf{O}r_3$ den Winkel $r_1\mathbf{O}r_2$ hälftet.

Uebungs-Aufgabe. In der einen Ebene eines Projectionssystems ein Vierseit zu zeichnen, dem in der anderen Ebene ein Quadrat entspricht.

Ein Parallelogramm kann demnach stets als Central-Projection eines vollständigen Vierseits gelten; die G_∞ der Ebene ist seine dritte Diagonale. Eben so kann es als Central-Projection eines vollständigen Vierecks gelten, von dessen Diagonalpuncten zwei in der Gegenaxe liegen.

Wir benutzen diese Eigenschaft zum Beweise folgender Sätze (im Anschluss an die Erklärungen, §. 71):

auf jeder Diagonale eines vollständigen Vierseits sind die in ihr liegenden Gegenecken und die Durchschnitte mit den anderen Diagonalen harmonische Puncte,	um jeden Diagonalpunct eines vollständigen Vierecks bilden die durch ihn gehenden Gegenseiten und die nach den anderen Diagonalpuncten gerichteten Strahlen einen harmonischen Büschel.

Den Satz links zu beweisen, sehen wir das Vierseit als Central-Projection eines Parallelogramms an; in diesem wird jede Diagonale von der anderen gehälftet und von der G_∞ in ihrem unendlich fernen Puncte geschnitten (§§. 156, 157).

Den Satz rechts zu beweisen, betrachten wir die Geraden *ab*, *bc*, *cd*, *da* als vollständiges Vierseit. Eine Diagonale desselben, z. B. *ef*, wird durch die beiden anderen harmonisch getheilt, d. h. die Puncte *e*, *h*, *f*, *k* sind harmonisch, folglich (§. 164) sind auch die Strahlen *ge*, *gh*, *gf*, *gk* harmonisch, oder die Figur *g* — *efhk* ist ein harmonischer Büschel. Fig. 91.

172. Die Anschauung der einfachen *n* ecke wird durch Einführung der Seiten von unendlicher Länge so erweitert, das *n* Puncte eine grössere Anzahl einfacher *n* ecke bestimmen, als die früher (§. 71) aufgestellte Formel ergiebt.

Drei Puncte *a*, *b*, *c* bestimmen vier einfache Dreiecke, welche zusammen die Ebene decken und ein vollständiges Dreieck bilden. Bezeichnen wir die verschieden gestalteten Dreiecke wie im §. 169, so sind unter den vier Dreiecken, je nachdem von den drei Puncten

keiner, einer, zwei

im Unendlichen liegen:

$1\triangle_1$, $3\triangle_5$, $2\triangle_2$, $2\triangle_4$, $4\triangle_3$.

Vier Puncte *a*, *b*, *c*, *d* können in folgenden Lagen in Bezug auf die Gegenaxe ihrer Ebene gedacht werden:

1) ein mal: vier auf derselben Seite,
2) vier mal: drei und einer auf verschiedenen Seiten,
3) drei mal: zwei und zwei auf verschiedenen Seiten.

Je nachdem ein Punct innerhalb, oder jeder Punct ausserhalb des von den anderen gebildeten Dreiecks $\triangle_1$ liegt, tritt der zweite Fall nur drei mal oder der dritte nur zwei mal ein, so dass immer sieben Lagen stattfinden. Bei jeder Lage bestimmen die vier Puncte 3, im Ganzen also 21 einfache Vierecke, welche zusammen 6 mal die Ebene decken und ein vollständiges Viereck bilden. Unter den vier Puncten können einer oder zwei unendlich ferne sein.

Wir begnügen uns für jetzt mit den im Vorhergehenden entwickelten Sätzen und Constructionen, welche die Grundlage der Central-Projection bilden. Weitere Ausführungen, ins Besondere die Darstellung räumlicher Gebilde, versparen wir auf die dritte Abtheilung, indem die Perspective sich vorzugsweise der Central-Projection bedient.

Verwandtschaften ebener Gebilde.

173. Das Grundverfahren der darstellenden Geometrie, nämlich das Herabschlagen einer Ebene auf die Projectionsebene, haben wir ins Besondere benutzt, um die Projection eines ebenen $n$seits zu construiren (§§. 19, 137, 166). Durch die Construction wurden wir auf ebene Projectionssysteme und auf die Verwandtschaften ebener Gebilde geleitet. Wir stellen dieselben zur Uebersicht zusammen, und bemerken zunächst, dass geometrische Verwandtschaft nichts anderes als Projection ist, wie wir diese (im §. 5) erklärt haben, d. h. eine gesetzliche Beziehung zwischen den entsprechenden Elementen zweier Gebilde.

Die allgemeinste der einfachen, in der darstellenden Geometrie vorkommenden, Verwandtschaften ist die Collineation. Dem Wortlaute nach findet Collineation statt zwischen zwei Ebenen und den in ihnen liegenden Gebilden, wenn dieselben so auf einander bezogen werden, dass allen Puncten der einen, welche in einer Geraden liegen, solche Puncte der anderen entsprechen, welche ebenfalls in einer Geraden liegen. Zwei solche Ebenen und ihre Gebilde sind collinear oder projectivisch.

Verwandtschaften oder Projectionen höherer Art sind solche, in denen einer Geraden der einen Ebene eine Curve in der anderen entspricht; sie sind unserem Zwecke fremd, weshalb wir nicht auf sie eingehen.

Die Collineation findet zwischen zwei Ebenen der angegebenen Art statt, unabhängig von der Lage derselben im Raume. Wir gelangten zu ihr, wenn beide Ebenen eine solche Lage hatten, bei welcher alle Verbindungsstrahlen entsprechender Puncte einem Büschel **O** angehören, die Ebenen mögen sich schneiden oder in einander liegen; wir zeigten, dass diese Eigenschaft, wenn sie bei zwei sich schneidenden Ebenen stattfindet, beim Herabschlagen der einen Ebene auf die andere nicht aufgehoben wird (§. 166).

Das Projectionssystem, welches durch dieses Verfahren in der Ebene hergestellt wird, ist durch drei Stücke bestimmt; diese sind:

1) die Collineationsaxe E,
2) der Projectionspunct **O**,
3) zwei in einem Projectionsstrahle liegende einander entsprechende Puncte a, $a_,$.

Die Eigenschaften collinearer Gebilde sind im gegenwärtigen Capitel behandelt worden.

174. Es entstehen besondere Arten der Collineation,
wenn die Collineationsaxe die unendlich ferne Gerade der Ebene ist; oder
wenn der Projectionspunct im Unendlichen liegt; oder
wenn beides zugleich stattfindet.

I. Die Collineationsaxe sei die unendlich ferne Gerade der Ebene, so bietet das Projectionssystem folgende Unterschiede dar.

1) Einem unendlich fernen Punct der einen Ebene entspricht ein unendlich ferner Punct der anderen Ebene: es liegen demnach beide Gegenaxen mit der Collineationsaxe zugleich im Unendlichen.

2) Je zwei entsprechende Gerade sind einander parallel und projectivisch ähnlich (§. 159). Ihr Aehnlichkeits-Verhältniss ist gleich dem Verhältniss der Abstände ihrer entsprechenden Puncte vom Projectionspuncte, d. h.

$$\mathfrak{q} = \frac{a_,b_,}{ab} = \frac{\mathbf{O}a_,}{\mathbf{O}a} = \frac{\mathbf{O}b_,}{\mathbf{O}b} = \dots .$$

3) Das Aehnlichkeits-Verhältniss $\mathfrak{q}$ ist dasselbe für alle einander entsprechenden Geradenpaare. Denn schneiden sich zwei Gerade ab, bc in b, so schneiden sich $a_,b_,$, $b_,c_,$ in $b_,$, und es ist:

$$\frac{a_,b_,}{ab} = \frac{\mathbf{O}b_,}{\mathbf{O}b}, \qquad \frac{b_,c_,}{bc} = \frac{\mathbf{O}b_,}{\mathbf{O}b},$$

folglich:
$$\frac{a_,b_,}{ab} = \frac{b_,c_,}{bc}.$$

4) Jeder endlichen Strecke entspricht eine endliche Strecke (vergl. §. 154).

5) Parallelen Geraden entsprechen parallele Gerade.

6) Alle entsprechenden Winkel sind einander gleich, denn ihre entsprechenden Schenkel sind parallel.

7) Einem $n$seite entspricht ein ähnliches, ähnlichliegendes $n$seit; wegen 2) 4) 6).

8) Einem geschlossenen $n$seite entspricht ein geschlossenes $n$seit; wegen 4).

Die besondere Art der Collineation, bei welcher die Axe im Unendlichen liegt, ist die Aehnlichkeit; der Projectionspunct heisst der Aehnlichkeitspunct und zwar der äussere oder der innere, je nachdem die Ebenen gleichliegend oder ungleichliegend sind. Im ersten Falle liegen in jedem Strahle die entsprechenden Puncte auf einer und derselben Seite von **O**, im anderen Falle auf entgegengesetzten Seiten von **O**.

Zu dieser Art von ebenem Projections- oder Aehnlichkeits-Systeme gelangt man aus dem Raume, wenn die Ebenen 𝔈, 𝔓 parallel sind. Man denke irgend einen Projectionsstrahl, welcher 𝔈 in s, 𝔓 in $s_{,}$ schneidet, als Axe eines Ebenenbüschels; dieser wird von 𝔈, 𝔓 in zwei gleichen Strahlenbüscheln, eine seiner Ebenen, 𝔄, in zwei entsprechenden Strahlen sa, $s_{,}a_{,}$ geschnitten. — Wird 𝔈 parallel mit sich selbst fortbewegt, so dass der Strahl sa sich in der Ebene 𝔄, der Punct s sich im Strahle **O**s bewegt, bis s in $s_{,}$ fällt, so fällt gleichzeitig **O** in $s_{,}$ und es fallen die entsprechenden Strahlen der Büschel s, $s_{,}$ und mit ihnen die Projectionsstrahlen in einander. Je nachdem **O** ausserhalb der Ebenen 𝔈, 𝔓 oder zwischen ihnen lag, wird er äusserer oder innerer Aehnlichkeitspunct.

175. II. Der Projectionspunct liege im Unendlichen, so bieten sich folgende Unterschiede dar.

1) Einem unendlich fernen Puncte der einen Ebene entspricht ein unendlich ferner Punct der anderen Ebene; es liegen demnach beide Gegenaxen im Unendlichen.

2) Je zwei entsprechende Gerade sind projectivisch ähnlich; doch ist das Verkürzungs-Verhältniss **q** nicht dasselbe für alle entsprechenden Geradenpaare (vergl. z. B. §. 16).

3) Die Sätze 4), 5) und 8) für die Aehnlichkeit gelten auch hier.

Die besondere Art der Collineation, bei welcher der Projectionspunct im Unendlichen liegt, ist die Affinität und im ersten und sechsten Capitel behandelt worden.

176. III. Die Collineationsaxe sei die unendlich ferne Gerade der Ebene und der Projectionspunct liege im Unendlichen, so bieten sich folgende Unterschiede dar.

1) Satz 1) für die Aehnlichkeit.

2) Je zwei entsprechende Gerade sind parallel und projectivisch gleich, d. h. $\mathbf{q} = 1$.

3) die Sätze 4), 5), 6) für die Aehnlichkeit.

4) Einem $n$seite entspricht ein congruentes $n$seit.

5) Satz 8) für die Aehnlichkeit.

Die besondere Art der Collineation, bei welcher Collineationsaxe und Projectionspunct zugleich im Unendlichen liegen, ist die Congruenz. Beide projectivische Ebenen des Projectionssystems können in diesem Falle nur gleichliegend sein.

Die Congruenz kann als besonderer Fall der Aehnlichkeit erhalten werden, wenn das Aehnlichkeits-Verhältniss $\mathbf{q} = 1$ ist. Für $\mathbf{O}$ als äusseren Aehnlichkeitspunct decken sich alle einander entsprechenden Gebilde. Für $\mathbf{O}$ als inneren Aehnlichkeitspunct liegen sie auf entgegengesetzten Seiten von $\mathbf{O}$ und gelangen zum Decken durch eine halbe, innerhalb der einen Ebene stattfindende Drehung der anderen Ebene um $\mathbf{O}$.

Die Congruenz kann als besonderer Fall der Affinität erhalten werden, wenn die Projectionsstrahlen normal auf der Affinitätsaxe sind, und das Verhältniss $\mathbf{q} = 1$ ist (§. 22). Sind beide Ebenen gleichliegend, so decken sich alle einander entsprechenden Gebilde. Sind die Ebenen ungleichliegend, so liegen die Gebilde auf entgegengesetzten Seiten der Affinitätsaxe und gelangen zum Decken durch eine halbe, ausserhalb der einen Ebene stattfindende Drehung der anderen Ebene um die Axe. In diesem Falle heisst die Congruenz auch Symmetrie. Die Gebilde liegen symmetrisch gegen die Axe, welche die Symmetralaxe ist.

Achtes Capitel.

Die räumliche Projection.

177. In den vorhergehenden Capiteln ist als Projection eines Raumgebildes eine ebene Figur angenommen; es können aber zwei projectivische Gebilde, d. h. solche, von denen jedes die Projection des anderen ist, räumliche Gebilde sein (§. 5). Alsdann finden zwischen ihnen die nämlichen Verwandtschaften statt, wie zwischen zwei ebenen projectivischen Gebilden.

Man denke zwei Räume, d. h. den ganzen Raum zweifach, ebenso jeden Punct zweifach, als dem einen oder als dem anderen Raume angehörend. Diese Räume beziehe man auf einander so, dass alle Puncte des einen, welche in einer Geraden liegen, solchen Puncten des anderen entsprechen, welche ebenfalls in einer Geraden liegen. Beide Räume und ihre auf die angegebene Weise entsprechenden Gebilde sind collinear oder projectivisch (§. 173).

Wir betrachten zwei projectivische Räume nur in der einfachen Lage, bei welcher die Verbindungsstrahlen ihrer einander entsprechenden Puncte einem Büschel **O** angehören. Beide Räume bilden ein räumliches Projectionssystem, welches durch drei Stücke bestimmt ist; diese sind:

1) eine Ebene $\mathfrak{E}$, die Collineationsebene, in deren Puncten entsprechende Puncte e, $e_{,}$ beider Räume in einander fallen,
2) ein Punct **O**, der Projectionspunct, d. h. der Mittelpunct eines Strahlenbüschels, von welchem jeder Strahl entsprechende Puncte beider Räume verbindet,
3) zwei in einem dieser Strahlen liegende einander entsprechende Puncte a, $a_{,}$.

Diese Annahmen reichen hin, um zu jedem Gebilde des einen Raumes das entsprechende des anderen Raumes zu construiren.

Je nachdem die Puncte a, $a_{,}$ auf einer und derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten der Ebene $\mathfrak{E}$ liegen, sind die Räume gleichliegend oder ungleichliegend.

Die folgenden Constructionen im Raume sind am besten in freier Vorstellung auszuführen.

178. Aufgabe. Die räumliche Projection eines gegebenen Punctes b zu construiren.

Die Gerade ab schneidet $\mathfrak{E}$ in einem Puncte e, der zugleich $e_{,}$ ist. Der geforderte Punct $b_{,}$ ist Durchschnitt des Strahles $\mathbf{O}b$ und der Geraden $a_{,}e_{,}$.

Für einen unendlich fernen Punct q sind aq, $\mathbf{O}q$ parallel, daher entstehen zwei ähnliche Dreiecke $aa_{,}e$, $\mathbf{O}a_{,}q_{,}$, und aus diesen die Proportion

$$a_{,}e : a_{,}q_{,} = a_{,}a : a_{,}\mathbf{O}.$$

Ist p ein zweiter unendlich ferner Punct in demselben Raume mit q, $p_{,}$ sein entsprechender Punct und d der Durchschnitt von $\mathfrak{E}$ mit der Geraden ap, so entstehen ebenfalls zwei ähnliche Dreiecke $aa_{,}d$, $\mathbf{O}a_{,}p_{,}$ und aus ihnen die Proportion

$$a_{,}d : a_{,}p_{,} = a_{,}a : a_{,}\mathbf{O}.$$

Aus beiden Proportionen folgt

$$a_{,}e : a_{,}q_{,} = a_{,}d : a_{,}p_{,},$$

d. h. die Dreiecke $a_{,}de$, $a_{,}p_{,}q_{,}$ sind ähnlich und die Geraden $p_{,}q_{,}$, de sind parallel.

Nimmt man statt des Punctes p jeden anderen unendlich fernen Punct desselben Raumes, so sind stets die Geraden $p_{,}q_{,}$, de parallel; alle Gerade de liegen in der Collineationsebene $\mathfrak{E}$, folglich liegen alle Gerade $p_{,}q_{,}$ in einer mit $\mathfrak{E}$ parallelen Ebene.

Ein Gleiches ergiebt sich, wenn man zu den unendlich fernen Puncten $r_{,}$ des anderen Raumes die entsprechenden r des ersten Raumes construirt; d. h.

diejenigen Puncte des einen Raumes, welche den unendlich fernen Puncten des anderen Raumes entsprechen, liegen in einer mit der Collineationsebene parallelen Ebene. Diese Ebenen bezeichnen wir durch $\mathfrak{Q}_{,}$, $\mathfrak{R}$.

179. Aufgabe. Die räumliche Projection einer gegebenen Geraden zu construiren.

Der Durchschnitt e der Ebene $\mathfrak{E}$ und der gegebenen Geraden G ist ein Punct $e_,$ der geforderten Geraden $G_,$. Dieselbe ist durch diesen Punct $e_,$ und durch die Projection $b_,$ irgend eines zweiten Punctes b der gegebenen Geraden bestimmt.

Die entsprechenden Geraden G, $G_,$ liegen in der durch $\mathbf{O}$ gehenden projicirenden Ebene; sie sind projectivische Gerade, und es kommen ihnen alle Eigenschaften derselben zu (§§. 152—158).

Ist G parallel mit $\mathfrak{E}$, so ist $G_,$ parallel mit G, also auch mit $\mathfrak{E}$ (§. 159).

Die projicirende Ebene zweier entsprechenden Geraden schneidet $\mathfrak{E}$ und die Ebenen $\mathfrak{Q}_,$, $\mathfrak{R}$ in drei einander parallelen Geraden. Es ist klar, dass dieselben die Ecken e, $q_,$, r des Parallelogramms enthalten, welches von den Geraden G, $G_,$ und den mit ihnen parallelen Strahlen des Büschels $\mathbf{O}$ gebildet wird. Hieraus folgt, dass die Gegenpuncte zweier projectivischen Geraden in den Ebenen $\mathfrak{Q}_,$, $\mathfrak{R}$ liegen; ferner, dass der Abstand der Ebenen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{E}$ gleich ist dem Abstande der Ebene $\mathfrak{Q}_,$ von $\mathbf{O}$, oder dass $\mathfrak{E}\mathfrak{R} = \mathbf{O}\mathfrak{Q}_,$, $\mathfrak{E}\mathfrak{Q}_, = \mathbf{O}\mathfrak{R}$ ist.

Liegt eine Gerade G oder $G_,$ des einen Raumes in $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{Q}_,$, so ist ihre entsprechende die unendlich ferne Gerade der projicirenden Ebene, welche durch $\mathbf{O}$ und G oder $G_,$ bestimmt ist.

Eine unendlich ferne Gerade des Raumes wird durch eine sie enthaltende Ebene bestimmt.

P a r a l l e l e G e r a d e des einen Raumes haben zur Projection einen Strahlenbüschel; der Mittelpunct dieses Büschels liegt in der Ebene $\mathfrak{Q}_,$ oder $\mathfrak{R}$ des anderen Raumes.

180. Eine Ebene $\mathfrak{F}$ des einen Raumes schneidet $\mathfrak{E}$ und die Ebene $\mathfrak{R}$ ihres Raumes in zwei parallelen Geraden F, R. Die Gerade F ist ihre eigene Projection; die von R ist die unendlich ferne Gerade der projicirenden Ebene von R. Der Ebene $\mathfrak{F}$ entspricht demnach eine Ebene $\mathfrak{F}_,$, welche durch F geht, parallel mit der (durch $\mathbf{O}$ und R bestimmten) projicirenden Ebene von R. Oder man führe durch $\mathbf{O}$ die mit $\mathfrak{F}$ parallele Ebene, welche die Ebene $\mathfrak{Q}_,$ des anderen Raumes in $Q_,$ schneidet, so ist die Ebene $\mathfrak{F}_,$ durch die Geraden F, $Q_,$ ebenfalls bestimmt. Die Ebenen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_,$ sind projectivisch und es kommen ihnen und ihren einander entsprechenden Gebilden alle Eigenschaften projectivischer Ebenen zu (§§. 161 u. fg.).

Ist eine Ebene $\mathfrak{F}$ des einen Raumes parallel mit $\mathfrak{E}$, so ist jede in ihr liegende Gerade parallel mit $\mathfrak{E}$, hat also zur Projection ebenfalls eine mit $\mathfrak{E}$ parallele Gerade, woraus folgt, dass die entsprechende Ebene $\mathfrak{F}_{,}$ parallel mit $\mathfrak{E}$, also auch mit $\mathfrak{F}$ ist. Beide Ebenen sind projectivisch ähnlich.

Zu diesen Ebenen gehören die beiden Ebenen $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{O}_{,}$. Durch Betrachtungen, welche den in den §§. 152, 161 angestellten entsprechen, schliessen wir, dass alle unendlich fernen Puncte des Raumes in einer Ebene, der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}_\infty$, liegen. Die Ebenen $\mathfrak{O}_{,}$, $\mathfrak{N}$ beider Räume, welche der $\mathfrak{E}_\infty$ (der dem einen Raume als $\mathfrak{O}$, dem anderen als $\mathfrak{N}_{,}$ angehörenden Ebene) entsprechen, nennt man die Gegenebenen des Projectionssystems.

In diesen Gegenebenen liegen die Gegenpuncte je zweier projectivischen Geraden und die Gegenaxen je zweier projectivischen Ebenen des räumlichen Projectionssystems.

Parallele Ebenen des einen Raumes haben in $\mathfrak{E}$ parallele Schnitte; in dem anderen Raume entspricht ihnen ein Ebenenbüschel, dessen Axe ihre gemeinschaftliche in der Gegenebene liegende Gegenaxe ist.

181. Die räumliche Projection eines $n$flachs ist ein $n$flach von derselben Anzahl von Flächen, Kanten, Ecken u. s. w., und wird durch die Projectionen seiner Kanten und Ecken erhalten.

Aufgabe. Die räumliche Projection eines Vierflachs zu construiren.

Das Projectionssystem sei gegeben durch die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{O}_{,}$ und den Punct **O**. Die Lösung erfolgt wie die der entsprechenden Aufgabe für das Dreiseit (§. 168), indem die geforderte Figur durch folgende vier Bedingungen bestimmt wird.

Sind e_1, e_2, ... die in $\mathfrak{E}$ liegenden Durchgänge der Kanten ab, ac, ... des Vierflachs $abcd$, so gehen die entsprechenden Kanten $a_{,}b_{,}$, $a_{,}c_{,}$, ... durch dieselben Puncte. Zieht man Strahlen durch **O** nach a, b, ..., so liegen die entsprechenden Ecken $a_{,}$, $b_{,}$, ... in diesen Strahlen. Sind r_1, r_2, ... die Durchgänge der Kanten ab, ac, ... durch $\mathfrak{N}$, so sind die Kanten $a_{,}b_{,}$, $a_{,}c_{,}$, ... parallel mit den durch **O** nach r_1, r_2, ... gerichteten Strahlen. Zieht man durch **O** Strahlen parallel mit den Kanten ab, ac, ... und sind q_1, q_2, ... die Durchschnitte dieser Strahlen mit $\mathfrak{O}_{,}$, so gehen die Kanten $a_{,}b_{,}$, $a_{,}c_{,}$, ... durch diese Puncte.

Will man die Aufgabe durch Anwendung der darstellenden Geometrie (§. 27) lösen, so wird man am einfachsten die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{Q}$, normal auf der Projectionsaxe $\mathbf{A}$ nehmen.

182. Die Gestalten der beiden einander entsprechenden $n$flache können ebenso für die sinnliche Anschauung von einander abweichen wie die zweier entsprechenden $n$seite. Ins Besondere ist ihre Lage in Bezug auf die Gegenebenen zu berücksichtigen (§. 170). Beim Vierflache Θ z. B. liegen von dessen Ecken
1) 7) 8) keine, 2) 6) eine, 3) 5) zwei, 4) drei
in der Gegenebene und
1) vier, 2) drei, 3) zwei, 4) eine
auf derselben Seite, oder
7) drei und eine, 6) zwei und eine, 5) eine und eine,
8) zwei und zwei
auf verschiedenen Seiten von ihr.

Diesen Lagen entsprechen acht verschiedene Gestalten für die Projection des Vierflachs; die Seitenflächen derselben sind verschieden gestaltete Dreiseite, die wir wie im §. 169 bezeichnen.

1) Θ_1 ist wie Θ ein geschlossenes Vierflach; die Seitenflächen sind $4\triangle_1$.

2) Θ_2 hat eine unendlich ferne Ecke, ist ein dreikantiges Prisma, begrenzt durch eine die Kanten schneidende Ebene und von dieser bis ins Unendliche sich erstreckend; Seitenflächen: $1\triangle_1$, $3\triangle_2$.

3) Θ_3 hat eine unendlich ferne Kante, ist ein sich ins Unendliche erstreckender Keil; Seitenflächen $2\triangle_2$, $2\triangle_3$.

4) Θ_4 hat eine unendlich ferne Seitenfläche, ist von einer im Mittelpuncte durchschnittenen dreikantigen Pyramide die eine Hälfte; Seitenflächen: 1 unendlich fernes $\triangle_1$, $3\triangle_3$.

(Eine $n$kantige Pyramide bestimmt also ein unendlich fernes $n$seit, das in der $\mathfrak{E}_\infty$ des Raumes, §. 180, liegt.)

5) Θ_5 hat eine unendlich ferne Kante, entsteht aus einer dreikantigen im Mittelpuncte durchschnittenen Pyramide, deren eine Hälfte parallel mit sich selbst längs einer Kante von der anderen Hälfte abgerückt ist; Seitenflächen: $2\triangle_3$, $2\triangle_4$.

6) Θ_6 hat eine unendlich ferne Ecke, besteht aus der einen Hälfte einer dreikantigen im Mittelpuncte durchschnittenen Pyramide und einem sich ins Unendliche erstreckenden Keile; Seitenflächen: $1\triangle_2$, $2\triangle_4$, $1\triangle_5$.

7) Θ_7 ist eine dreikantige Pyramide, aus der ein Stück vom Mittelpuncte bis zu einer die Kanten treffenden Ebene ausgeschnitten ist; Seitenflächen: $1\triangle_1$, $3\triangle_5$.

8) Θ_8 besteht aus zwei nach entgegengesetzten Seiten ins Unendliche sich erstreckenden Keilen; Seitenflächen: $4\triangle_5$.

Wie drei Puncte einer Ebene vier einfache Dreiseite (§. 172), so bestimmen vier Puncte des Raumes acht einfache Vierflache, welche zusammen den Raum erfüllen und ein vollständiges Vierflach bilden. Je nachdem von den Puncten

keiner,	einer,	zwei,	drei

im Unendlichen liegen, sind die Vierflache:

$1\Theta_1$	$2\Theta_2$	$4\Theta_3$	$8\Theta_4$.
$4\Theta_7$	$6\Theta_6$	$4\Theta_5$	
$3\Theta_8$			

183. Da parallelen Geraden des einen Raumes ein Strahlenbüschel entspricht, so ist die räumliche Projection eines Prisma eine Pyramide, deren Mittelpunct in der Gegenebene ihres Raumes liegt.

Aufgabe. Die räumliche Projection eines Parallelepipeds zu construiren.

Es seien ab, cd, ef, gh vier parallele Kanten desselben, und es seien k_1, k_2, k_3, k_4 ihre Durchschnittspuncte mit $\mathfrak{E}$; diese Puncte gehören ihren Projectionen an. Der Strahl des Büschels **O**, welcher diesen Kanten parallel ist, bestimmt den Gegenpunct q_1 in der Ebene $\mathfrak{Q}_,$. In den Geraden, welche q_1 mit k_1, k_2, k_3, k_4 verbinden, liegen die entsprechenden Kanten $a_,b_,$, $c_,d_,$, $e_,f_,$, $g_,h_,$. Ebenso verfahre man für die beiden anderen Systeme von je vier parallelen Kanten.

Die räumliche Projection der acht Ecken eines Parallelepipeds sind acht Puncte, welche in den Kanten von vier vierkantigen Pyramiden zu gleicher Zeit liegen. Die Mittelpuncte dieser Pyramiden sind die drei Puncte q_1, q_2, q_3 in $\mathfrak{Q}$, für die Projectionen der drei Kantensysteme, und der Punct $p_,$, Projection des Durchschnittes p der vier Diagonalen ag, bh, ce, df des Parallelepipeds.

Uebungs-Aufgabe. Die 17 verschiedenen Lagen eines Parallelepipeds in Bezug auf die Gegenebene seines Raumes aufzusuchen (vergl. §. 169).

Verwandtschaften räumlicher Gebilde.

184. Es entstehen für die Collineation räumlicher Gebilde dieselben besonderen Arten, wie für die Collineation ebener Gebilde;

die für diese entwickelten Sätze gelten mit geringen Aenderungen auch für jene.

I. Ist die Collineationsebene die unendlich ferne Ebene des Raumes, so wird die Collineation zur Aehnlichkeit und der Projectionspunct wird äusserer oder innerer Aehnlichkeitspunct.

Satz 1) im §. 174 wird so ausgedrückt: einem unendlich fernen Puncte des einen Raumes entspricht ein unendlich ferner Punct des anderen Raumes; es liegen demnach beide Gegenebenen mit der Collineationsebene zugleich im Unendlichen.

Die Sätze 2) bis 8) gelten; dazu kommt:

Einem $n$flach entspricht ein ähnliches, ähnlichliegendes $n$flach.

Einem geschlossenen $n$flach entspricht ein geschlossenes $n$flach.

II. Liegt der Projectionspunct im Unendlichen, so wird die Collineation zur Affinität.

Satz 1) im §. 175 ändert sich wie oben; beide Gegenebenen liegen im Unendlichen.

Einem geschlossenen $n$flach entspricht ein geschlossenes $n$flach.

III. Liegen die Collineationsebene und der Projectionspunct zugleich im Unendlichen, so wird die Collineation zur Congruenz.

Die Congruenz wird als besonderer Fall der Aehnlichkeit erhalten, wenn das Aehnlichkeits-Verhältniss $\mathfrak{q} = 1$ ist. Ist $\mathbf{O}$ äusserer Aehnlichkeitspunct, so fallen alle entsprechenden Elemente entsprechender Gebilde in einander. Ist $\mathbf{O}$ innerer Aehnlichkeitspunct, so findet Symmetrie statt, d. h. zwei entsprechende Gebilde sind symmetrisch oder von der Art, dass ihre einander entsprechenden Seiten, ebenen Winkel und Flächenwinkel einander gleich sind, ohne dass jedoch beide Gebilde mit den entsprechenden Elementen in einander gelegt werden können.

Die Congruenz wird als besonderer Fall der Affinität erhalten. Sind die Räume gleichliegend, so fallen alle entsprechenden Gebilde in einander. Sind die Räume ungleichliegend, so findet Symmetrie statt, und die Collineationsebene ist die Symmetralebene, auf welcher die Projectionsstrahlen normal sind.

IV. Liegt von den zwei entsprechenden Puncten a, $a_{,}$ der eine, etwa $a_{,}$, in der Collineationsebene, so liegen die entsprechenden Puncte $b_{,}$, $c_{,}$, ... aller Puncte b, c, ... des ersten Raumes in derselben Ebene. Diese ist alsdann Projectionsebene und zugleich die eine Gegenebene, die andere Gegenebene fällt mit der Parallelebene $\mathfrak{N}$ (§. 150) zusammen. Die räumliche Projection verwandelt sich in die im siebenten Capitel behandelte Central-Projection.

Die Central-Projection wird häufig *Perspective* genannt, weil letztere sich ihrer vorzugsweise bedient, wenn die Darstellung eines Raumgebildes ein ebenes Gebilde sein soll. Ebenso nennt man die räumliche Projection auch *Relief-Perspective*, weil sie angewendet wird, wenn die Darstellung eines Raumgebildes ein räumliches Gebilde sein soll.

Berichtigungen.

S. 91 Z. 13 v. unten lies $S\mathfrak{P}_1$ statt $S\mathfrak{P}$.

S. 111 Z. 3 v. unten lies 122 statt 128.

Druck der F. priv. Hofbuchdruckerei in Rudolstadt.