Agnieszka Muszyńska

O OGRANICZONOŚCI ROZWIĄZAŃ PEWNEGO UKŁADU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH

7/1968

WARSZAWA

Na prawach rękopisu

Do użytku wewnętrznego

Zakład Teorii Konstrukcji Maszyn IPPT PAN

Nakład 200 egz. Ark. wyd. 0,3. Ark. druk. 0,7
Oddano do drukarni w maju 1968 r.
Wydrukowano w maju 1968 r. Nr zam. 398/0/68.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

O OGRANICZONOŚCI ROZWIĄZAŃ
PEWNEGO UKŁADU
RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH

Agnieszka Muszyńska

W artykule przedstawiono kryterium ograniczoności rozwiązań układu równań różniczkowych zwyczajnych :

/1/ $$\dot{y} = K y + f(y, t) \quad ,$$

gdzie

$$y(t) = \mathrm{col}\left[y_1(t),\ y_2(t), \dots,\ y_n(t)\right] \quad ,$$

$$f(y,t) = \mathrm{col}\left[f_1(y,t),\ f_2(y,t), \dots,\ f_n(y,t)\right]$$

są wektorami typu $(n\ ,\ 1)$, K jest macierzą o stałych elementach K_{jr} , $j\ ,\ r = 1,2,\dots,n$.

Omówione kryterium ograniczoności rozwiązań jest również oczywiście słuszne i dla układu równań różniczkowych :

/2/ $$\ddot{x} + A\dot{x} + Bx = F(x, \dot{x}, t) \quad ,$$

matematycznie mniej ogólnego, lecz zapisanego w formie częściej spotykanej w zastosowaniach mechaniki.

Wprowadza się następujące założenia :

/i/ $f_j(y,t) \in C^0$, $j = 1,2,\ldots,n$ dla wszystkich wartości y i $t \geqslant 0$;

/3/ $$\| f(y,t) \| \leqslant H + g\left(\| y \|\right) ,$$

gdzie normę zdefiniowano jako

$$\| z \| = \sum_{j=1}^{n} | z_j |$$

/dla macierzy przyjmujemy

$$\| z \| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} | z_{jr} | \quad / ,$$

H jest liczbą nieujemną, a skalarna funkcja $g(u) \in C^0$ jest niemalejącą funkcją u , $g(0) \geqslant 0$;

/ii/ układ równań liniowych

/4/ $$\dot{y} = Ky$$

posiada n różnych pierwiastków charakterystycznych ϱ_s , przy czym dla wszystkich s

/5/ $$\mathrm{Re}\, \varrho_s < 0 , \quad s = 1,2,\ldots,n .$$

Kryterium ograniczoności rozwiązań układu równań różniczkowych /1/ /lub /2// sformułujemy w postaci następującego twierdzenia :

T w i e r d z e n i e . Jeżeli dla rozwiązań układu /1/ /lub układu /2// przy przedstawionych wyżej założeniach można określić takie warunki początkowe $y_s(0)$, $s = 1,2,\ldots,n$, /lub odpowiednio $x_i(0)$, $\dot{x}_i(0)$, $i = 1,2,\ldots,\frac{n}{2}$ /, że równanie algebraiczne

$$D\, g(u) - M(u - W) = 0 , \tag{6}$$

/gdzie M , D , W są dodatnimi stałymi, które niżej będą określone - wyrażenia /13/ i /15/ / posiada dla $u > 0$ dodatni pierwiastek $u = u^*$ /jeżeli istnieje kilka pierwiastków równania /6/ - wybieramy najmniejszy z nich/ , to odpowiednie rozwiązania układu /1/ są ograniczone i spełniona jest nierówność :

$$\| y(t) \| \leqslant u^* . \tag{7}$$

/Dla układu /2/ spełniona jest nierówność :

$$\| x(t) \| + \| \dot{x}(t) \| \leqslant u^* . / \tag{8}$$

Dowód sformułowanego twierdzenia oparty jest na zastosowaniu twierdzeń o nierównościach całkowych [1 , 2 , 3] .

Układ równań różniczkowych /1/ przekształcamy na układ równań całkowych :

$$y(t) = Y(t)\, y(0) + \int_0^t Y(t - p)\, f\left[y(p), p\right] dp, \tag{9}$$

gdzie $Y(t)$ jest unormowaną macierzą fundamentalną :

$$Y(t) = \left[Y_{sj}(t)\right] = \left[\sum_{r=1}^{n} C_{jr}\, \varrho_r^{s-1}\, e^{\varrho_r t}\right],$$

$$s , j = 1,2,\ldots,n ;$$

stałe C_{jr} określa się z równań :

$$\sum_{r=1}^{n} C_{jr}\,\varrho_r^{s-1} = \delta_{js} , \quad j , s = 1,2,\ldots,n$$

/ δ_{js} - symbol Kroneckera / .

Równanie całkowe /9/ przekształcamy w nierówność :

$$/10/ \quad \left\| y(t) \right\| \leqslant \left\| Y(t)\ y(0) \right\| + \int_0^t \left\| Y(t-p) \right\| \left\| f\left[y(p), p \right] \right\| dp .$$

Jeżeli spełnione jest założenie /ii/ /nierówność/5// , to można przeprowadzić następujące szacowania :

$$\left\| Y(t)\ y(0) \right\| \leqslant \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| Y_{sj}\ y_s(0) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \left| C_{jr}\,\varrho_r^{s-1}\, e^{\varrho_r t}\, y_s(0) \right| \leqslant$$

$$/11/ \quad \leqslant e^{-Mt} \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \left| C_{jr}\,\varrho_r^{s-1}\, y_s(0) \right| =$$

$$= C\ e^{-Mt}$$

i dla $t \geqslant p$

$$\left|Y_{sj}(t-p)\right| \leqslant e^{-M(t-p)} \sum_{r=1}^{n} \left|C_{jr}\, \varrho_r^{s-1}\right| \quad ,$$

/12/
$$\left\|Y_{sj}(t-p)\right\| \leqslant D\, e^{-M(t-p)} \quad ,$$

gdzie

$$M = \min\left(-\operatorname{Re} \varrho_r\right) \quad , \quad r = 1,2,\ldots,n \quad ,$$

/13/
$$C = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \left|C_{jr}\, \varrho_r^{s-1}\, y_s(0)\right| ,$$

$$D = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \left|C_{jr}\, \varrho_r^{s-1}\right|$$

Uwzględniając założenie /i/ /nierówność /3// oraz szacowania /11/ i /12/, możemy dalej przekształcić nierówność całkową /10/ :

$$\left\|y(t)\right\| \leqslant C\, e^{-Mt} + D \int_0^t e^{M(p-t)} \left[H + g\left(\left\|y(p)\right\|\right)\right] dp$$

i dalej

/14/
$$\left\|y(t)\right\| \leqslant W + D \int_0^t e^{M(p-t)}\, g\left(\left\|y(p)\right\|\right) dp \quad ,$$

gdzie

/15/
$$W = C + \frac{DH}{M} .$$

Wprowadzimy następujące oznaczenie :

/16/
$$u(t) = W + D \int_0^t e^{M(p-t)} g\left(\|y(p)\|\right) dp ,$$

skąd otrzymujemy

/17/
$$\frac{du}{dt} = D\, g\left(\|y(t)\|\right) - M\left(u - W\right) .$$

Nierówność /14/ z uwzględnieniem oznaczenia /16/ zapisujemy następująco :

$$\|y(t)\| \leqslant u(t) .$$

Ponieważ, jak wynika z założenia /i/ , funkcja $g(u)$ jest niemalejąca, więc słuszna będzie również nierówność :

$$g\left(\|y(t)\|\right) \leqslant g\left(u(t)\right) ,$$

co z uwzględnieniem /17/ można zapisać następująco :

/18/
$$\frac{du}{dt} \leqslant D\, g(u) - M\left(u - W\right) .$$

Zanalizujemy równanie różniczkowe pierwszego rzędu :

/19/
$$\frac{dv}{dt} = D\, g(v) - M\left(v - W\right) .$$

Prześledzimy na płaszczyźnie $\left(v, \frac{dv}{dt}\right)$ /Rys. 1/ zachowanie się rozwiązania szczególnego równania /19/ o warunku początkowym :

$$v(0) = W .$$

Jeżeli $v(0) = W$, to $\frac{dv}{dt}(0) = D\,g(W) \geqslant 0$, a więc funkcja $v(t)$ rośnie. Z założeń przedstawionego wyżej twierdzenia wynika, że iatnieje taka liczba u^*, że

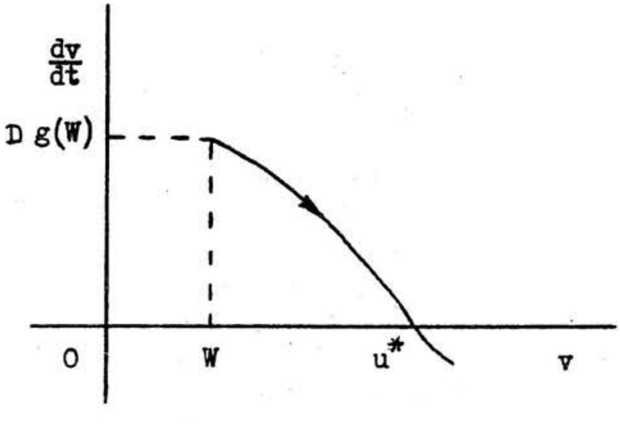
$$D\,g(u^*) - M(u^* - W) \equiv 0 .$$

A więc $v(t)$ rośnie do wartości u^* i dla $v = u^*$ mamy $\frac{dv}{dt} = 0$. Ponieważ dla każdej wartości v, $\frac{dv}{dt}$ jest określone jednoznacznie, więc dla $t > 0$ $v(t) \to u^*$, przy $t \to \infty$ i dla wszystkich $t \geqslant 0$

$$v(t) \leqslant u^* .$$

Powracamy do nierówności różniczkowej /18/. Z /18/ i /19/ mamy

$$\frac{du}{dt} \leqslant \frac{dv}{dt} , \qquad /20/$$



Rys. 1

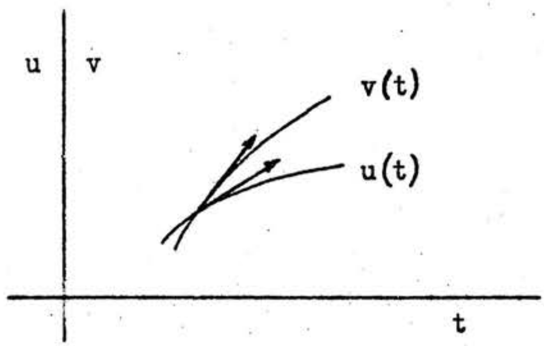
a więc w każdym punkcie płaszczyzny (t, u) i (t, v) nachylenie krzywej $u(t)$ będzie mniejsze od nachylenia krzywej $v(t)$/Rys. 2/. Ponieważ $u(o) = v(o) = W > 0$ i $u(t) > 0$ dla wszystkich $t \geqslant 0$, to krzywe całkowe $u(t)$, spełniające nierówność /20/ będą następująco ograniczone :

$$0 < u(t) \leqslant v(t) \leqslant u^{*} ,$$

stąd

$$\|y(t)\| \leqslant u^{*} ,$$

co zgodne jest z tezą przedstawionego twierdzenia.



Rys. 2

Tak więc udowodniona została ograniczoność rozwiązań układu równań różniczkowych /1/ /lub równoważnego mu układu /2//, o ile istnieje określona wyżej liczba u^{*}. Ponieważ stała W zależy zarówno od parametrów układu /1/ jak i od warunków początkowych, to można określić, że dla danych parametrów układu /1/ warunek istnienia liczby u^{*} określa pewien obszar warunków początkowych, z którego startujące rozwiązania są ograniczone. Ponieważ założenie /i/ dotyczące funkcji nieliniowych w układzie /1/ dopuszcza np. charakterystyki sprężyste miękkiego typu, co jak wiadomo powoduje dla dużych wartości y powstanie rozwiązań nieograniczonych, zrozumiałym jest ograniczenie nałożone na obszar warunków początkowych. Dla konkretnych funkcji $f_j(y,t)$ $j = 1,2,\ldots,n$ obszar ten można łatwo oszacować.

Na zakończenie należy wspomnieć, że sformułowane twierdzenie słuszne jest również dla układów równań różniczkowych typu /1/, których część liniowa /układ równań /4// posiada niektóre pierwiastki charakterystyczne równe sobie /przy warunku, że nierówność /5/ nadal jest spełniona/. W tym przypadku normę macierzy fundamentalnej szacuje się nieco inaczej, co prowadzi do otrzymania innych wartości stałych M, C, D.

Wreszcie należy wspomnieć, że normy wektorów i macierzy można również wybrać i w innej, równoważnej postaci.

L I T E R A T U R A

[1] E.F. Beckenbach, R. Bellman, Inequalities, Springer - Verlag, Berlin - Gottingen - Heidelberg 1961.

[2] А. Мушинская, Об ограниченности решений некоторой нелинейной системы с двумя степенями свободы, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, 7, 1966.

[3] А. Мушинская, Об ограниченности решений некоторой системы дифференциальных уравнений с гироскопической связю, Годишник на ВТУЗ, Математика, т.III, кн. 2, София, 1966.