ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.
BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR. XIII. HEFT.

URKUNDEN
ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK
IM MITTELALTER UND DER RENAISSANCE.

HERAUSGEGEBEN VON

MAXIMILIAN CURTZE.

IN ZWEI THEILEN. ZWEITER THEIL.

MIT 117 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

Vorwort.

Die Ausgabe dieser Urkunden in zwei Theilen gestattet mir, hier einige nachträgliche Bemerkungen zum ersten Theile hinzuzufügen.

Zu S. 195: Von den im Briefwechsel Regiomontan's erwähnten Persönlichkeiten lehrte Pietro Buono Avogario von 1467 bis 1506 als Docent der Astronomie an der Universität Ferrara, in der ersten Zeit mit Giovanni Bianchini zusammen. Er war aber, wie aus *Bullettino Boncompagni* VII, 339—342 sich ergiebt, schon seit 1456 in Ferrara, seiner Vaterstadt, schriftstellerisch thätig. Zur Zeit des Aufenthaltes Regiomontan's in Italien war er also etwa mit diesem gleichaltrig.

Zu S. 264: Paolo dal Pozzo Toscanelli aus Florenz gebürtig starb daselbst im Jahre 1482 im Alter von 85 Jahren. In der ersten Ausgabe der Trigonometrie Regiomontan's, Nürnberg 1533, findet sich auf S. 10—15 der besonders paginierten zweiten Abtheilung ein *Dialogus inter Cardinalem Sancti Petri: episcopum Brixinensem* (d. i. Nicolaus von Cusa) *et Paulum physicum Florentinum de circuli quadratura*, und auf S. 29 ein Dedikationsschreiben Regiomontan's an ihn: *Ioannes Germanus Paulo Florentino Artium et medicinae doctori celebratissimo ac mathematicorum praestantissimo S. P. D.*

Zu S. 295: Regiomontan schrieb auch eine eigene Schrift: *de directionibus contra Archidiaconum Parmensem,* die in der Aufzählung seiner Schriften bei Doppelmair S. 19 erwähnt wird. Wer dieser Archidiaconus gewesen, war mir nicht möglich zu bestimmen.

Zu S. 306: Dass bei Riccardi die Angabe, Antonio da Monte Olmi habe am Anfange des XVI. Jahrhunderts gelebt, wohl auf einem Druckfehler (XVI statt XV) beruht, folgt schon daraus, dass Regiomontan zu dessen Abhandlung *de iudiciis nativitatum* einen Kommentar geliefert hat, der sowohl in der Ausgabe dieser Schrift von 1540 abgedruckt ist, als er sich auch handschriftlich, vielleicht sogar in der Originalhandschrift Regiomontan's, in der Wiener Hofbibliothek erhalten hat. Vergl. *Codex Vindobonensis Palatinus 5335*, Blatt 61^r—96^r: Antonius de Montulmo, *de iudiciis nativitatum cum commentario Iohannis de Regiomonte.*

Das sind die Bemerkungen, welche ich hier einzufügen mir erlaube.

Thorn, im März 1902.

M. Curtze.

Inhaltsverzeichnis.

III.

DIE „PRACTICA GEOMETRIAE“ DES LEONARDO MAINARDI AUS CREMONA.

Die Artis Metrice Practice Compilatio des Leonardo Mainardi da Cremona.

Einleitung.

Von dieser Abhandlung fand ich den Text im *Codex Philos. 46* der Universitätsbibliothek zu Göttingen, wo sie in italienischer Sprache und zwar in Venetianischem Dialekte abgefasst ist. Fürst Boncompagni besass zwei Handschriften desselben Werkes mit lateinischem Texte, welche in der zweiten Ausgabe des Verzeichnisses durch Enrico Narducci die Nummern 302 und 303 tragen. Die Handschrift *Cod. philos. 46 Götting.* konnte ich in der hiesigen Gymnasialbibliothek benutzen, die beiden Handschriften Boncompagni's durfte ich durch die Güte ihres derzeitigen Besitzers, des Herrn Antiquariatsbuchhändlers Halle in München in meiner Wohnung einsehen und mit dem Wortlaute der italienischen Ausgabe vergleichen. Diesem Herren sowohl als der Verwaltung der Königl. Universitätsbibliothek zu Göttingen sage ich für ihre grosse Liberalität hierdurch meinen ganz ergebensten Dank.

Der *Codex Philos. 46 Götting.* ist eine Foliohandschrift von 50 Blättern, von denen Blatt 42—47 und 49—50 unbeschrieben, und deshalb wohl bei der Zählung der Blätter nicht mit eingerechnet sind, so dass das Blatt 48 die Nummer 42 erhalten hat. Auf dem untern Rande des ersten Blattes steht die Notiz: *„Ex Bibliotheca G. W. Zapff Aug. Vindel. 1784“*, auf dem letzten die weitere: *„Nassete Zuan vigenzo del 1502 adj 18 zugno de sabato a hore 9.“* Gebunden ist er in Holzdeckel mit gepresstem Lederrücken. Die Handschrift stammt aus dem Jahre 1488 und enthält:

Blatt 1^r—29^r unsere Abhandlung.
„ 29^v—30^v eine *Tabula Sinus* für den Durchmesser 120.
„ 31^r—32^r eine *Tabula Sinus* für das Verhältnis 22 : 7.
„ 32^v—34^r eine *Tabula Sollis(!)*, d. h. Tafel der Tageslängen für die einzelnen Tage des Jahres.
„ 34^v ist leer.
„ 35^r—41^v eine Reihe von weiteren geometrischen Aufgaben und Notizen, welche auf
„ 48^r und ^{v}, das mit 42 bezeichnet ist, fortgesetzt werden.

Von den *Codices Boncompagni* ist No. 302 die ältere, jedoch ist die Angabe des Katalogs, sie stamme aus dem 14. Jahrhundert, nicht richtig, da der Verfasser erst in der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts gelebt hat. Es ist eine Pergamenthandschrift von 31 Blättern, welche mit einem

Vor- und einem Nachblatt zusammengebunden sind. Sie beginnt erst auf Blatt 3^r mit den Worten

„*Leonardi Cremonensis artis metrice practice compilatio. Primus tractatus.*“

Diese Abhandlung schliesst Blatt 27^r: „*Quae vero sit proportio, alibi dixi demonstrativa conclusione fere. Deo Gratias. Amen.*“

Auf Blatt 28^a—29^b folgen dann dieselben beiden Sinustafeln wie in *Cod. Philos. 46 Götting.*

Der *Codex Boncompagni 303* ist dagegen eine Papierhandschrift von 24 Blatt aus dem 15. Jahrhundert. Sie beginnt sofort auf Blate 1^r wie *Cod. Bonc. 302.* Darüber aber steht die Bemerkung:

„*Leonardi Maynardi Astronomi et Physici, ac Mathematici Opus. Florebat sub anno 1488. Franciscus Arisius in Cremona Litterata fol. 347 Tomo p°.*“

Am Fussende derselben Seite hat dieselbe Hand den Besitztitel verzeichnet:

„*I. C. Io͞his de Sitonis à Scotia M͠lsis*“,

was auf der Innenseite des hintern Einbandes nochmals wiederholt ist. Aus einer Bemerkung auf Blatt 15^r

„Virgo Maria | Mater Dei | Ora pro nobis | peccatoribus | Adi 20 Noue[e] 1655 | Bonifacio Aliprandi Ioseffo Aliprandi.“

geht hervor, dass die Handschrift um die Mitte des 17. Jahrhunderts in dem Besitze der beiden Genannten gewesen ist. Nach dem Kataloge gehörte sie vor Boncompagni dem Advokaten Cav. Carlo Morbio in Mailand.

Die Handschrift enthält einzig und allein den Text der *Artis metrice practice compilatio* ohne die Sinustafeln.

Das oben angezogene Werk des Arisius hat den Titel:

„Cremona Literata seu in Cremonensis doctrinis et literariis dignitatibus eminentiores chronologicae adnotationes auctore Francisco Arisio nobilissimae patriae suae ordinum conservatore. Tomus Primus. Parmae MDCCII, typis Alberti Pazzoni et Pauli Montii.“

Es ist die einzige Quelle für das Leben unseres Verfassers, weshalb ich die ihn betreffende Stelle auf S. 347 vollständig mittheile.

„LXXXVIII 1)

Leonardus Maynardus Insignis Astronomus, Physicus et Mathematicus, cuius opusculum M. S. Mediolani servatur, mihi indicatum ab eruditissimo Viro Lazaro Augstino Cotta I. C. amico meo nequaquam satis laudato, cui est initium:

Leonardi Cremonensis Artis Metricae Practice compilatio. Artem Metricam seu Mensurativam occasione quadam prospiciens, cum a multis viderim

1) D. h. 1488. Ich verdanke die Abschrift dieser Notiz der Freundlichkeit des Herrn Antonio Favaro in Padua, der sie mir auf meine Bitte in der dortigen Bibliothek kopierte.

expositam diversis regulis, et figuris, ut compendiose habeatur, deliberavi hac summula praestingere, corrigendo aliqua ab aliis non bene posita, quam quippe tripartior juxta triplam mensurae rationem, videlicet longitudinem, latitudinem et corporeitatem.

Haec est Auctoris Idea, distincta tribus Tract. scilicet

De Mensura Longitudinis,
Latitudinis,
Corporum.

In margine opusculi permultae exstant delineatae figurae Mathematicae et Geometricae.

M. Hieronymus Vida in Act. 2 Orationum adversus Papienses, ubi loquitur de Mathematicis, sic habet. Fuit ante Blasium Leonardus Maynardus, qui suo tempore non tantum inter nostros, sed etiam inter omnes in iis studiis tenuit principatum.

Cavitell. Annal. sub anno 1496."

Es ist sehr wahrscheinlich, dass die Boncompagni'sche Handschrift 303 diejenige ist, welche hier von Arisius erwähnt wird.

Im Folgenden werde ich den italienischen Text der *Artis metricae practicae compilatio* zum Abdrucke bringen, unter Hinweis an den betreffenden Stellen, wenn der lateinische Text Abweichungen von dem italienischen bietet. Wie man es bei deutschen Texten gewohnt ist, habe ich auch bei diesem italienischen mich genau an den Wortlaut und die Orthographie der einzigen bekannten Handschrift gehalten. Von der *Tabula sinus* gebe ich jedesmal nur die zehn ersten und letzten Zeilen, da aus ihnen die Art der Anordnung und der Berechnung vollständig zu ersehen ist.

Die auf den folgenden Blättern des Manuskripts enthaltenen weiteren geometrischen Bemerkungen habe ich, da sie auch von Interesse sein dürften, ebenfalls zum Abdrucke gebracht. Jedenfalls sind sie von derselben Hand, welche den Text des Leonardo geschrieben hat, jedoch ebenso sicher nicht von dem Verfasser des italienischen Textes. Die Verschiedenheit der Sprache lässt das nicht zu. Dass der italienische Text die Übersetzung des lateinischen ist, nicht umgekehrt, ist mir nicht zweifelhaft, aber der italienische bildet eine verbesserte Ausgabe desselben, wie ich an den betreffenden Stellen in den Anmerkungen nachweisen werde, und deshalb verdient er den Vorzug vor dem lateinischen.

Auch hier habe ich eine deutsche Übersetzung beizugeben um so mehr für nöthig gehalten, als der italienische Text durch den benutzten Dialekt sowohl als die zum Theil sehr veraltete Ausdrucksweise dem Verständnis Hindernisse in den Weg legt.

Leonardi Cremonensis Artis Metrice Practice Compilatio.

Primus Tractatus.

Ben che molti habieno esposita larte metricha ouero mesurativa in diuerse regule, Io me ho deliberato de redurla in picholo volumen, acio che compendiosamente la se possa auere. De la qual arte ne fazo tre parte secondo le tre razone de la mesura, cioe longeza, largeza et corporeitade.[1])

In la longeza sie alteza, profonditade et extensione in longo, doue sia el piano.

La prima se chiama *altimetria,* cioe mesura de alteze.

La seconda *profundimetria,* cioe mesura de profundita.

La terza *planimetria* ouero *longimetria.*

In largeza sie la *superficie.*

E in la corporeitade ouero profonditade sie el *corpo.*

In prima aduncha de la mesura de la longeza, la quale a le tre parte preditte. E perche queste tre parte de la mesura de la longeza possono fir fatte con lo astrolabio, con lo quadrante, ouero con le verge, ouero con le spechi, nomma farsi la profondita de la valle, la quale non insegno a
1v fir fatte con li spechi, impercio de lo | gnomone de lo astrolabio e del quadrante, el quale sie scala de altimetria, primamente e da fir ditto. Unda e da sapere, che lo lado de lo gnomone ouero de lo quadrante in lo astrolabio, el quale comenza da la linea de mezo el celo, ouero de la meza notte, sie lo lado de la *ombra dritta,* e lo lado, el quale incommenza de la linea de lorizon, sie lo lado de *ombra versa.* Ma in de lo quadrante

1) In der lateinischen Fassung lautet die Einleitung folgendermaassen: Artem metricam seu mensurativam occasione quadam prospitiens cum a multis viderim expositam diversis regulis et figuris, ut compendiose habeatur, deliberavi hac summula perstringere, corrigendo aliqua ab aliis non bene posita. Quam quippe tripartior iuxta triplam mensure rationem, videlicet longitudinem, latitudinem et corporeitatem.

Des Leonardo von Cremona
Abhandlung über praktische Feldmesskunst.

Erster Traktat.

Obschon viele die Feldmessung oder die Kunst des Messens in verschiedenen Regeln auseinandergesetzt haben, habe ich mich doch entschlossen sie in einem kleinen Bande zusammenzuziehen, damit sie in kompendiöser Form zu haben sei. Ich werde diese Kunst in drei Theilen abhandeln nach den drei Arten des Messens, das ist nach der Länge, Breite und Körperlichkeit.

Zur Länge gehört die Höhe, die Tiefe und die Ausdehnung in der Länge in der Ebene.

Die erste Art heisst *Altimetrie,* das heisst die Messung der Höhe.

Die zweite *Profundimetrie,* das heisst Tiefenmessung.

Die dritte *Planimetrie* oder Längenmessung.

Zur Breite gehört die *Fläche.*

Und zur Körperlichkeit oder der Tiefe gehört der *Körper.*

Zunächst also von der Längenmessung, welche die genannten drei Theile besitzt. Da man nun diese drei Arten der Längenmessung sowohl mit dem Astrolabium und dem Quadrate ausführen kann, als mit Messstangen, oder mit Spiegeln — ausser letzteres bei der Tiefe von Thälern, denn von dieser lehre ich nicht, dass sie mit Spiegeln gefunden werden kann —, so wird zunächst von dem Gnomon des Astrolabs und des Quadranten, das ist von der Scala altimetriae, die Rede sein müssen. Es ist also zunächst zu merken, dass diejenige Seite des Gnomon oder des Quadrates auf dem Astrolab, welche von der Mittellinie des Himmels oder der Mitternacht beginnt, die Seite des *rechten Schattens*[2]) und diejenige Seite, die von dem Horizonte ihren Aufang nimmt, die Seite des *verkehrten Schattens*[3]) ist. Beim Quadranten aber ist diejenige Seite, welche an dem

2) D. i. die Cotangente. 3) Die Tangente

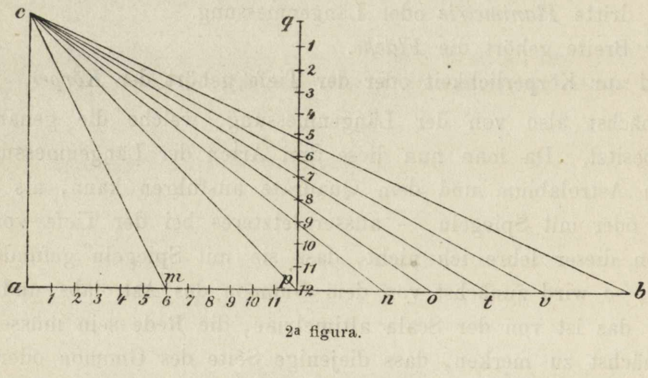
lo lado, el quale acomenza dal lado, doue sono le tauolete, si lo lado de lombra drita, e lo altro lado de ombra versa.

Anchora sapi, che doy lade de gnomone si se diuideno per 12 parte ciascaduna per si, si che el numero duodenario de tutti doy li ladi si fenisse in lo angulo, in del quale i se conzongono, e ciascaduna parte de quelle 12 parte se chiama *ponto de ombra*.

Ma e la *ombra dritta* propriamente la ombra, la quale fa la cosa drizada perpendicularmente sopra lorizon ouero sopra la faza de la terra. Como se *ab* sia orizon ouero pianura de la terra, et *ac* sia la torre, el sole sia *d*, exempli gratia sera *af* ombra drita. La *ombra versa* e quella, la qual fa la cosa ficada perpendicularmente ouero dritamente in la cosa drizada sopra lorizon. Como se in la prima figura la linea *gc* ficada in
2r la linea *ac*, fa | la ombra *ch*, la quale fi dito ombra versa.

E qui sie una regula, che, quanto la ombra drita e maiore, tanto la ombra versa e minore, e le conuerso. Ma perche la ombra drita ouero versa tolta in questo modo non serue al proposito del mesurare, inpercio dechiaro altramente queste ombre.

Adunque in del proposito non propriamente sie la ombra drita la longeza minore ouero equale a la quantitade de la cosa da fir mesuranda, si como he in la seconda figura la linea *ap* equale a la linea *ac* da fir



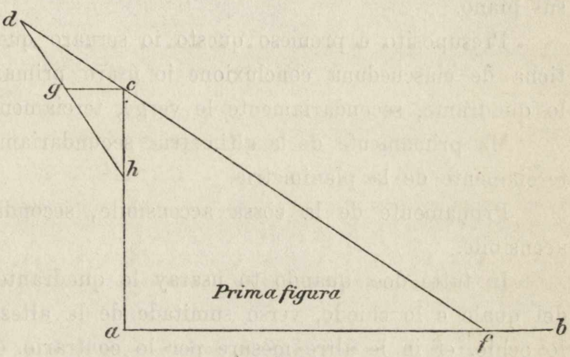
2a figura.

mesuranda, che fi dita ombra drita de la cosa *ac*. Ma la ombra versa sia la longeza maiore cha la quantitade de la cossa da fir mesuranda, si como la linea *ab*, la quale sia ombra versa. Per la ombra drita se sta distante da quela cosa mancho cha la sua alteza ouero tanto; per la ombra versa se sta distante piu. Ele etiandio da notare, che la ombra versa, auegnadio che la sia, como ho ditta, la linea *ab*, niente de meno fi significada per

Rande beginnt, in welchem die Absehen sich befinden, die Seite des *rechten Schattens,* und die andere die Seite des *verkehrten Schattens.*

Ferner ist zu wissen, dass die beiden Seiten des Gnomon jede für sich in 12 Theile getheilt sind, so dass die Zahl 12 auf beiden Seiten in der Ecke sich befindet, in der diese zusammenkommen. Jeder dieser zwölf Theile heisst ein *Punkt des Schattens.*

In eigentlicher Bedeutung ist der *rechte Schatten* derjenige Schatten, den ein auf dem Horizonte oder der Oberfläche der Erde senkrecht errichteter Gegenstand wirft. Wenn etwa ab der Horizont oder die Oberfläche der Erde bezeichnet, ac den Thurm und d die Sonne, so ist z. B. af der rechte Schatten. Der *verkehrte Schatten* ist dagegen derjenige, welchen ein Gegenstand wirft, der senkrecht oder unter rechten Winkeln in einem andern Gegenstand befestigt ist, welcher selbst auf der Horizontalebene errichtet ist. Wie wenn in der ersten Figur die Gerade gc, die in der Geraden ac befestigt ist, den Schatten ch bewirkt, der dann der verkehrte Schatten genannt wird.



1a figura.

Hierbei gilt es nun als Regel, dass, je grösser der rechte Schatten erscheint, um so viel kleiner der verkehrte Schatten ist, und umgekehrt. Da aber der rechte oder der verkehrte Schatten, wenn sie in der angegebenen Weise genommen werden, für Zwecke des Messens nicht gebraucht werden können, werde ich die dazu benutzten Schatten anderweitig erklären.

Zu diesem Zwecke ist also der rechte Schatten uneigentlich die Länge, welche kleiner oder gleich der Grösse des Gegenstandes ist, welcher gemessen werden soll, wie z. B. in der zweiten Figur die Gerade ap gleich der zu messenden Geraden ac diejenige ist, welche der rechte Schatten des Gegenstandes genannt wird. Der verkehrte Schatten aber ist die Länge grösser als die Ausdehnung des zu messenden Gegenstandes, wie etwa die Gerade ab, welche den verkehrten Schatten darstellt. Bei dem rechten Schatten steht man also dem Gegenstande näher, als seine Höhe ist, oder gleich weit ab; bei dem verkehrten Schatten steht man weiter ab. Weiter ist zu bemerken, dass, obgleich der verkehrte Schatten, wie ich sagte, die Gerade ab ist, er nichts desto weniger durch die Gerade qp, die gleich ap

la linea *pq* equale ad *ap* et ha *ac*, equidistante *ac*. Ma la linea *pq*, percio che ela fi messa 144[1]), quando e la si diuide per li soy ponti equiualente, cioe chi valeno tanto, come le parte de la linea *ab*, li quali sono *ap*, si como se hae la linea *pq* a le sue parte, cosi la ombra terminata
2v in la linea *ab* se a a la linea *ac*. Ma la linea visuale | ouero razo del sole termina queste ombre, si come le linee *cm*, *cp*, *cn*, *co*, *ct*, *cv*. Adunque le ombre de questo modo non se chiameno propriamente ombre, ma se chiameno distancie de la cossa, auegnadio che altramente se faceno le ombre, si como he, quando lo solle luce, e che la ombra se buta in sul piano.

Presuposito e premeso questo io seruaro questo ordine. Cioe in praticha de ciascheduna concluxione io usaro primamente lo astrolabio ouero lo quadrante, secondariamente le verge, terciamente li speghi.

Ma primamente de la altimetria, secundariamente de la profundimetria, terciamente de la planimetria.

Primamente de la cossa accensibile, secondariamente de la cosa inacensibile.

In tutte doe, quando tu usaray lo quadrante, tiene lo angulo suo, in del quale e lo chiodo, verso sumitade de la alteza e laltra tauoletta verso
3r lo ochio, et in le altre mesure per lo contrario. |

Prima conclusio. A volere mesurare una alteza de una torre, ouero di alcuna altra cosa acensibile, cioe ala quale se posse andare, apreso la quale cossa sia uno medesimo piano, onda he coluy, che vole mesurare, prima el te conuene vedere la cima de quella alteza, che tu voy mesurare, per quelle doy buse de la alidada de lo astrolabio ouero per quelly de lo quadrante, si che lalidada ouero lo filo, chie perpendiculo del quadrante, sia apunto sopra lo otauo, che e sopra li 45 gradi in lo astrolabio ouero in del quadrante. Andagando soto a quella cosa, che voy mesurare, ouero alingando te da la ditta cossa, si che aponto tu vedi, como e ditto di sopra, stagando firma la alidada overo lo filo del quadrante sopra li 45 gradi. Fatto questo, notta el logo, onde chada el perpendiculo che lo centro del astrolabio a terra ouero dal chiodo del quadrante, e poy mesura, quanto e dal luogo, onda el chade a tera, fina a la cosa, che tu voy mesurare: tanto e alta quella tore ouero altra cosa, quanto e dal logo, onde chade el filo, fino a quela cosa, azon-

1) Dass diese Anschauung auf einem Irrthum beruht, ist augenscheinlich. Die 144 ist das Quadrat des ganzen Schattens, und drückt sich in der hier verlangten Division das bekannte Gesetz aus $\mathrm{tg} = \frac{1}{\mathrm{ctg}}$, $\mathrm{ctg} = \frac{1}{\mathrm{tg}}$.

und ac und zugleich parallel zu ac ist, dargestellt wird. Wenn aber die Gerade pq, welche zu diesem Zwecke gleich 144 gesetzt wird[1]), durch ihre entsprechenden Punkte dividiert wird, das heisst, die ebensoviel gelten als die Theile der Geraden ab, welche auf ap liegen, so verhält sich der auf der Geraden ab begrenzte Schatten zu der Geraden ac, wie sich die gerade Linie pq zu ihren Teilen verhält. Diese Schatten aber begrenzt die Sehlinie oder der Sonnenstrahl in der Art, wie die Geraden cm, cp, cn, co, ct, cv. Die auf solche Art genommenen Schatten heissen eigentlich nicht Schatten, sondern werden Abstände von dem zu messenden Gegenstande genannt, wenn sie auch in anderer Weise Schatten sind, wie dann, wenn die Sonne scheint und der Schatten auf die Erde geworfen wird.

Dies vorausgesetzt und vorangeschickt, werde ich folgende Ordnung festhalten. Bei der Auflösung jeder Aufgabe nämlich werde ich zunächst das Astrolab oder den Quadranten benutzen, an zweiter Stelle Messstangen, an dritter Spiegel.

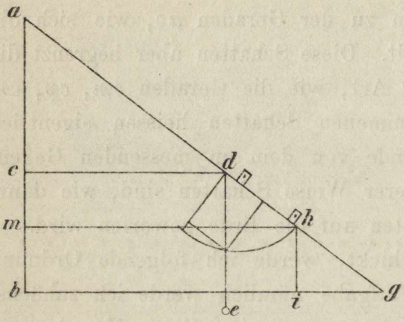
Ich werde aber zuerst vom Höhenmessen, zu zweit vom Tiefenmessen, zu dritt vom Ebenenmessen handeln.

Zuerst von der Höhenmessung zugänglicher, zu zweit von der unzugänglicher Gegenstände.

Bei diesen allen beiden halte man bei Benutzung des Quadranten diejenige Ecke desselben, in welcher sich der Stift (an dem das Bleiloth hängt) befindet, gegen die Spitze der Höhe und die andere Absehe gegen das Auge, bei den anderen Messungen aber umgekehrt.

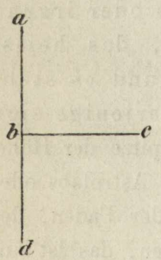
Erste Aufgabe. Will man die Höhe eines Thurmes oder irgend eines andern zugänglichen Gegenstandes messen, das heisst eines solchen, an welchen man herangehen kann, und es steht dieser Gegenstand in derselben Ebene, in welcher derjenige sich befindet, der messen will, so muss man zunächst die Spitze der Höhe, welche zu messen ist, durch beide Absehen der Alhidade des Astrolabs oder die des Quadranten so einvisieren, dass die Alhidade oder der Faden, der das Bleiloth des Quadranten trägt, genau auf den Oktanten, das ist auf 45 Grad, des Astrolabs oder des Quadranten fällt, indem man sich dem Gegenstande, den man messen will, nähert, oder sich von demselben entfernt, bis man, wie oben schon gesagt ist, die Spitze sieht, indem die Alhidade oder der Faden des Quadranten auf 45^0 feststeht. Ist das geschehen, so bestimme man den Punkt auf der Erde, auf welchen das Loth vom Mittelpunkte des Astrolabs oder dem Stifte des Quadranten fällt, und dann messe man, wie weit es vom Punkte, wo es auf die Erde fällt, bis zu dem Gegenstande ist, den man messen will: so hoch ist dann der Thurm oder der andere Gegenstand, als die Entfernung von dem Orte, auf den der

zando tanto, quanto he dal centro de lo astrolabio a tera ouero dal angulo del quadrante, doue lo chiodo del perpendiculo, como apare qui per exemplo
3^v in la terza figura, in la quale he signato el piano per *fb*, la tore | sia *ab*, la linea del centro de lo astrolabio ouero de lo angulo del quadrante, chi e *d*, a la tera sie *de*, la quale e inquale a la linea *bc*. E per quello modo se po fare, se la quantitade de la distancia da lo ochio tuo a la torre ouero dal tuo pede alla cossa, la quale sie *hm* ouero *ib*, tu gagiungessi la quantitade da lo ochio tuo a la terra, la quale sie *hi*, ouero se tu tolessi la quantita de la tua alteza de dietro da ti segnata per *gi* a la terra: in tute queste se viede, che *gb* et *ba* sono inqualle. Anchora *ib* et *ma* et *mh*, anchora *cb*, *ed*, *ca* sono equali. Ma piu certo se po fare per la linea *de*, perche piu certo po fir mesurada cum la linea *eb*, perche lo ochio non sta fermo.



3a figura.

Questa medesima si po prouare con due verge, quando tu staghi tanto da lonzo de la cosa, quanto e la alteza de la cosa da fir mesurada da lo ochio tuo. E per questo modo, cioe toglie una verga mazore de ti, in la quale ficha una altra verga perpendichular in del logo, in del qualle la verga mazore de ti avanzi lalteza, in si fatto modo, che la verga ficata sia inquale a la quantitade de la verga, chi e mazore de ti, dal logo, doue le inficha, in fina a la sumitade de la verga mazore de ti, si como apare per exemplo in la quarta figura
3^r la linea *ad* | auanza lalteza dal ochio tuo in su a la terra, chi e *db*, in del quale logo *b* infica una verga *bc* inquale de *ab*. E con quello instrumento fatte in anti e in dietro ficandolo a pionbino, che per *ca* tu vedi la cima de la cosa da fir mesuranda, tegnendo lochio al *c*. E poy mesura la distantia, che tra lastrumento, doue lo ponto *c*, a la tore, e agiungessi la quantitade *db*, la quale e inquale a la linea *ch*, et aueremo *kf*, la quale e lalteza, che noy circhiamo, como apare in la quinte figura.

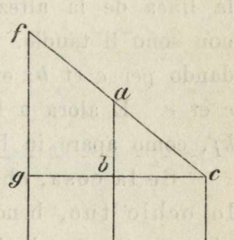


4a figura.

Anchora se puo fare questa medesima con una tauola stagando tanto lonze de la tore, che voy mesurare, quanto e lalteza de la cosa da lo ochio tuo in su, cioe a comenciando da lo ochio a mesurare

Faden fällt, bis zu jenem Gegenstande, wenn man soviel hinzufügt, als die Entfernung des Mittelpunktes des Astrolabs oder der Ecke des Quadranten, wo der Stift des Bleilothes sich befindet, von der Erde beträgt, wie es beispielsweise in der dritten Figur zu sehen ist. In ihr sei die Ebene durch ef bezeichnet, der Thurm sei ab, die Gerade vom Mittelpunkte des Astrolabs oder der Ecke des Quadranten, der d heisse, nach der Erde sei de, die gleich der Geraden bc ist. Man könnte bei dieser Methode auch so vorgehen, dass man die Grösse der Entfernung vom Auge bis zu dem Thurme, oder von den Füssen bis zu dem Gegenstande, die hm oder ib ist, zu dem Abstande des Auges vom Erdboden hinzufügt, oder dass man den Betrag seiner eigenen Grösse hinter sich auf der Erde abtrüge, sie sei durch gi bezeichnet: bei allen diesen sieht man, dass gb und ba einander gleich sind. Ebenso sind ib, mh und ma, desgleichen cb, ed und ca einander gleich. Viel genauer aber verfährt man vermittelst der Geraden de, weil sie und die Gerade eb viel genauer gemessen werden kann, da das Auge nicht fest stehen bleibt.

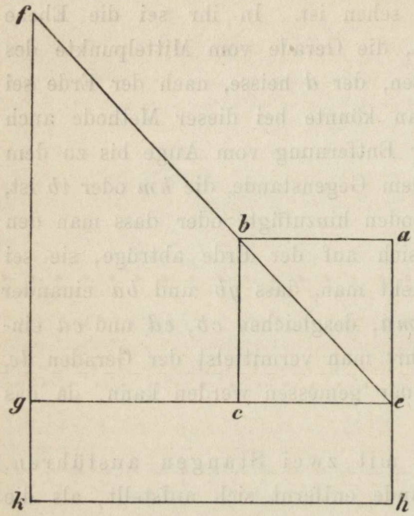
Dieselbe Aufgabe kann man mit zwei Stangen ausführen, wenn man so weit von dem Gegenstande entfernt sich aufstellt, als die Höhe des zu messenden Gegenstandes über dem Auge des Messenden beträgt, und zwar auf folgende Weise. Man nehme nämlich eine Stange, die grösser als man selbst ist, und befestige in ihr senkrecht eine andere Stange in dem Punkte, von welchem aus die Stange, die grösser ist als man selbst, diese Höhe übertrifft in der Art, dass die befestigte Latte gleich der Länge der Latte ist, die grösser als man selbst, von dem Punkte, in dem sie befestigt ist, bis zur Spitze der grösseren Stange, wie z. B. in der vierten Figur ersichtlich ist, dass die Gerade ad die Höhe vom Auge bis zur Erdoberfläche, das ist db, übertrifft. In diesem Punkte b befestige man die Stange bc gleich ab. Mit einem solchen Instrumente gehe man nun vor- oder rückwärts es immer senkrecht vermittelst Bleiloth aufstellend, bis man über c und a die Spitze des zu messenden Gegenstandes erblickt, indem man das Auge in c hält. Dann messe man den Abstand, der zwischen dem Instrumente, und zwar vom Punkte c, und dem Thurme ist, und füge demselben die Länge db hinzu, die gleich der Geraden ch ist, so erhält man kf, das ist die Höhe, die wir suchen, wie in der fünften Figur zu sehen ist.



5a figura.

Man kann das Nämliche auch vermittelst einer Tafel ausführen, indem man so weit von dem Thurme, den man messen will, sich aufstellt, als die Höhe dieses Gegenstandes von der Höhe

fino la tore. La quale tauola sia quadrangula ouero rectangula, cioe quadra, e sia drita da lo ochio tuo a lo orizonte, cioe a uno segno, che tu habi preso in la cosa, che tu voy mesurare. De la quale tauola lo lado equidistante a lo orizonte, cioe lo lato de sopra, sia segnato de tanta quantitade, quanta he la perpendiculare ouero la largeza de la tauola, come apare in la sesta figura, in la quale e signata una tauola per *abce*, la linea *ab* sie equale a la linea *ae*, chi e la perpendiculare cioe la largeza de la tauola. Agiungi adunque la longeza *ge*, la quale sie da lo
4v ochio tuo | a la torre, la quale longeza sie equale ha *gf*, chi e pur lalteza de la cossa. Agiungendeli *eh*, chi e la alteza, da lo ochio a la terra, et aueray *kf*, la qual sie tutta la alteza de la cossa, cioe torre etc.



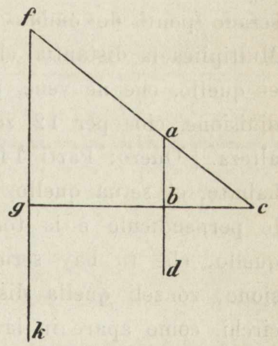
6a figura.

Secunda conclusio. Quando la cossa da fir mesuranda non e in uno medesimo piano con li toy piedi, ouero chele in uno piano piu basso cha li toy piedi, ouero chele piu alta cha lo ochio tuo. Se le in uno piano piu basso, guarda in la cosa, che voy mesurare, uno termine ouero uno segno per la linea equidistante a lo orizonte. Questa aueray per lo astrolabio, quando la soua regula ouero la lidada sera sopra la linea de lo orizonte, chi e la linea de la mita del tondo. Questa linea haueray per lo quadrante, quando lo perpendiculo sera sopra la linea de la alteza, cioe sopra quello lato del quadrante, in lo quale non sono li tauole. Questo aueray per lo instrumento de le verge, guardando per *c* et *b*; etiando per lo instrumento de la tauola guardando per *c* et *e*. E alora a la linea *gf* agiungeli la linea *kg*, et haueray la alteza *kf*, como apare in la septima figura.

Se la cosa, che tu voy mesurare, he in uno logo piu alto cha lo ochio tuo, benche alafiada el ocore, che questo se possa fare per lo otauo ouero per li 45 gradi, ouero con lo instrumento de le verge, guar-
5r dando per *c* et *a*, ouero per la | tauola quadrata guardando per *e* et *b*, niente de mancho, perche quello sempre non se puo fare, questa partichula ouero chapitulo sara tratado inmediate, como vederay qui per lordine.

des Auges aus gemessen ist, das heisst, indem man von dem Auge aus nach dem Thurme hin zu messen anfängt. Diese Tafel sei ein rechtwinkliges Viereck, das heisst ein Quadrat, und sie sei vom Auge aus horizontal gerichtet, nämlich nach einem Zeichen, das man an dem Gegenstande, der gemessen werden soll, angebracht hat. Die dem Horizont parallele Seite der Tafel, nämlich die obere Seite, sei von derselben Grösse, welche die senkrechte Seite oder die Breite der Tafel besitzt, wie in der 6. Figur zu sehen ist, in der die Tafel mit $abce$ bezeichnet, und wo die Gerade ab der Geraden ae gleich ist, die die senkrechte Seite, nämlich die Breite der Tafel, darstellt. Man suche nun die Länge ge, die von dem Auge bis zum Thurme sich erstreckt; diese Länge ist dann gleich gf, die zugleich die Höhe des Gegenstandes ist. Hierzu füge man eh, das ist die Entfernung von dem Auge bis zur Erdoberfläche, und man erhält dann ke, die Gesamthöhe des Gegenstandes, nämlich des Thurmes.

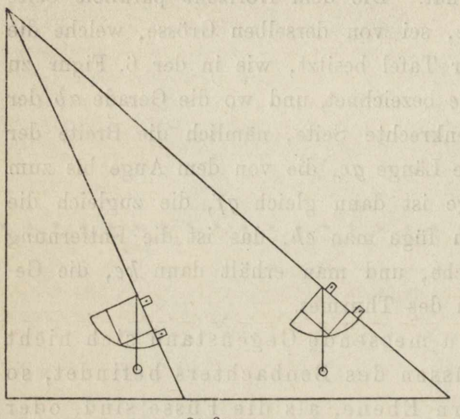
Zweite Aufgabe. Wenn der zu messende Gegenstand sich nicht in derselben Ebene mit den Füssen des Beobachters befindet, so ist er entweder in einer tiefern Ebene, als die Füsse sind, oder in einer, welche höher gelegen ist, als das Auge. Befindet er sich in einer tiefer gelegenen Ebene, so betrachte man in dem Gegenstande, den man messen will, eine Marke oder ein Zeichen, das in der Horizontalebene sich befindet. Diese findet man vermittelst des Astrolabs, wenn man das Messlineal oder die Alhidade auf die Horizontallinie einstellt, das ist auf die Halbierunglinie der Rundung. Man erhält diese Linie mittelst des Quadranten, wenn das Bleiloth sich auf der Höhenlinie befindet, das ist auf der Seite des Quadranten, die die Diopter nicht enthält; man erhält sie vermittelst des aus Stangen bestehenden Instrumentes, wenn man von c über b visiert, ebenso mittelst des Tafelinstrumentes, wenn man von c über e beobachtet. Zu der Länge ef füge man dann noch die Gerade kg hinzu, und man erhält dann die Höhe kf, wie in Figur 7 zu sehen ist.



7ª figura.

Wenn es sich aber auch trifft, falls der Gegenstand, den man messen will, an einem höhern Orte als das Auge des Beobachters sich befindet, dass man dann die Messung mit dem achten Theile des Kreises oder 45⁰ ausführen kann, oder mit dem Stangeninstrument, indem man über c und a, oder mit der quadratischen Tafel, indem man über e und b visiert, so soll doch, weil sich das nicht immer ausführen lässt, dieser Gegenstand oder dieses Kapitel sogleich im Folgenden abgehandelt werden, wie man hier der Reihe nach sehen kann.

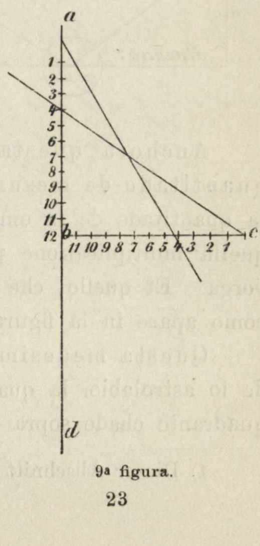
Terza conclusio. Altramente ouero per uno altro modo se puo mesurare una alteza acesibila. Prima guarda la cima de la cosa, che tu voy mesurare, per tuti doy le busi de la lidade de lo astrolabio ouero del quadrante, e notta le ponti, che da la lidade in lo astrolabio, ouero quelli, che da lo perpendiculo del quadrante. Le quali ponti, se li serano ponti de ombra drita, alora multiplica la distantia, chi e tra lo perpendiculo e la torre, che tu voy mesurare, per 12, et quello che ne vene, partilo per quelli ponti, che tu ha habuto, e quello, che ne vene per quella diuisione de li ditti ponti, zonzeli la distantia, la quale e tra lo filo da lo centro de lo astrolabio ouero da lo angulo del quadrante a la tera, como he ditto de sopra, et haueray la altezza, che tu cerchi. Se li serano ponti de ombra versa, questo se puo fare per doy modi. Prima: Multiplica la distantia, che tra ti e la torre, per quelli ponti, che ne venuto, et quello, che ne vene, partilo per 12, e quello, che ne venuto per quella diuisione, cioe per 12, zonzeli la distantia dita di sopra, et haueray quella
5v alteza. | Ouero: Parti 144 per quelli ponti de la ombra versa, che tu hay habuto, et serua quello, che ne vene. Poy multiplica la distantia, che tra lo perpendiculo e la torre, per 12, et quello, che ne vene, partilo per quello, che tu hay seruato, et a quello, che ne vegnera per questa diuisione, zonzeli quella distantia ditta de sopra, et hauera la alteza, che tu circhi, como apare in la ottaua figura.



8a figura.

Se tu volessi questa medesima alteza per lo instrumento de le verge, sapi prima, chel te conuene partire tute doe queste linee ouero verge, cioe *cb* et *ba*, per 12, achomenziando al ponto *c* et a lo ponto *a*, et se fenisa in lo angulo *b*. Et lo lato *cb* si da li ponti de la ombra recta, e lo lato *ab* si da li ponti de la ombra versa. Et quando tu he lonze da la torre meno, che non he la soua alteza, te conuene guardare per lo ponto *a* la cima de la torre per li ponti de la linea *cb*; e quando ti li he piu lonze, che non he la soua alteza, el te conuene guardare per lo ponto *c* et per li ponti de la linea *ab* la cima de la torre. Et acio che tu si piu certo in li ponti, tu poy metere doe regule ouero doe linee simile a la regula de lo astrolabio in tuti doy li ponti, *Dritte Aufgabe.* Eine Höhe, an welche man herankommen kann, lässt sich auch anders oder auf andere Art messen. Zuerst visiere man die Spitze des Gegenstandes, den man messen will, durch beide Absehen der Alhidade des Astrolabs oder des Quadranten und merke sich die Punkte, welche die Alhidade beim Astrolab, oder die, welche das Bleiloth des Quadranten angiebt. Sind diese Punkte solche des rechten Schattens, so multipliciere man den Abstand, der zwischen dem Lothe und dem Thurme ist, den man messen will, mit 12, und theile das Ergebnis durch die gemerkten Punkte, und das, was bei dieser Division durch genannte Punkte herauskommt, füge man zu dem Abstand hinzu, der zwischen dem Lothe vom Mittelpunkte des Astrolabs oder von der Ecke des Quadranten und der Erde ist, wie wir oben gesagt haben, und hat dann die Höhe, welche man sucht. Sind es aber Punkte des verkehrten Schattens, so kann man auf zwei Arten vorgehen. Erstens: Multipliciere den Abstand zwischen dir und dem Thurme mit den Punkten, die man beobachtete, und theile das Ergebnis durch 12, und das, was aus der Division, nämlich durch 12, herauskommt, addiere man zu dem oben genannten Abstand, so erhält man so die fragliche Höhe. Oder: Theile 144 durch obige Punkte des verkehrten Schattens, die man beobachtet hat, und merke das Ergebnis. Darauf multipliere man den Abstand zwischen dem Lothe und dem Thurme mit 12 und dividiere das Produkt durch das oben Gemerkte und zu dem Ergebnis dieser Division füge man denjenigen Abstand hinzu, von dem wir oben gesprochen haben, so erhält man dadurch die gesuchte Höhe, wie in Figur 8 zu sehen ist.

Will man die fragliche Höhe mittelst des Stangeninstrumentes finden, so muss man wissen, dass man zunächst beide Linien oder Stangen, nämlich *cb* und *ba* in 12 Theile theilen muss, indem man von den Punkten *c* und *a* anfängt und in der Ecke *b* endigt. Die Seite *cb* giebt dann Punkte des rechten Schattens, die Seite *ab* Punkte des verkehrten Schattens. Ist man dann von dem Thurme weniger, als dessen Höhe beträgt, entfernt, so muss man von dem Punkte *a* aus die Spitze des Thurmes durch die Punkte der Geraden *cb* einvisieren, und wenn man weiter ab steht, als seine Höhe beträgt, so muss man vom Punkte *c* aus durch die Punkte der Geraden *ab* die Spitze des Thurmes beobachten. Damit man aber in der Bestimmung der Punkte sicherer sei, kann man zwei Lineale oder zwei Linien, die der Alhidade des Astrolabs ähnlich sind, in den beiden Punkten,

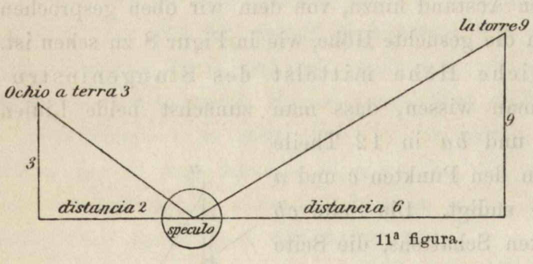


9a figura.

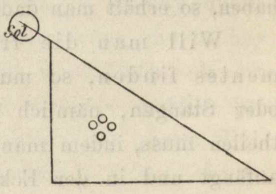
cioe in *c* et *a*, houero che una te fara, la quale tu di metere in *a* guar-
6r dando per quello, | ouero la meteray in *c* guardando per quello medesimo,
si come appare in la nona figura. El resto faray, come ho ditto in la parte immediate precedente, cioe multiplicando et diuidendo.

Questa medesima faray cum una tauola quadrata, de la quale tauola lo lato *ad* et lo lato *de* sieno diuisi per 12, si che lo numero de quela diuisione per 12 comenzi dal ponto *a* e dal ponto *e*, e se fenisa in lo ponto *d*. E lo lato *ac* sia verso ti, e lo lato *de* sia lo lato oposito a ti, et lo lato *ad* sia lo lado de sopra, et alora lo lado *ad* si da li ponti de la ombra drita, e lo lado *de* da li ponti de la ombra versa. Poy in lo ponto *c* meti una linea simile a la lidada del astrolabio. Et sia lo lado *ad* equidistante a lo orizonte, cioe sia equo a lo lado, onda tu ha fatto lo orizonte, si como apare in la 10ª figura. El resto faray, como ha dito da prima.

Anchora questa medesima faray cum uno spechio. Pone lo spechio in plano in logo, che fazandole in ante et in dietro tu vedi la cima de ta torre da fir mesurada in del mezo del spechio. E la distancia, chi e tra lo mezo del spechio e la torre, multiplica per la quantita, chi e da lo ochio tuo a la terra, et quello, che ne viene, partilo per la distantia
6v chi e | tra le piedi tuy el mezo del spechio: et vegnera la alteza, che tu
circhi, de la torre, come apare in la 11ª figura.



11ª figura.



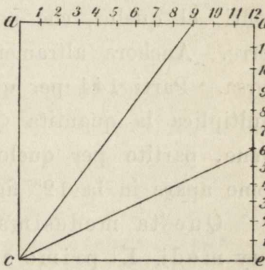
Anchora questa medesima faray cum una verga de certa quantitade de mesura cum lo sole lucente. Stara cossi. Multiplica la quantitade de la ombra de la torre per la quantitade de la verga, et quella multiplicatione partila per la quantita de la ombra, che fa quella verga. Et quello, che ne viene, sera la alteza da la torre, che tu circhi, como apare in la figura signata per 4 $\circ\overset{\circ}{\circ}\circ$.[1]

Questa medesima faray cum la sole lucente, quando la lidada de lo astrolabio, la quale e la sua riga, ouero quando lo perpendiculo del quadrante chade sopra li 45 gradi, ouero per lo instrumento de le verge,

1) Dieser Abschnitt fehlt in der lateinischen Übersetzung.

nämlich in *c* und *a* befestigen, oder es thut auch eine, die man in *a* befestigt, wenn man von hier aus beobachtet, oder auf *c* aufsteckt, wenn man durch ihn visiert, wie man in Figur 9 sehen kann. Im übrigen verfährt man so, wie wir in dem unmittelbar vorhergehenden Paragraphen gesagt haben, nämlich multiplicierend und dividierend.

Dasselbe kann man auch mit der quadratischen Tafel ausführen, bei der die Seiten *ad* und *de* jede in 12 Stücke getheilt sind, so dass die Nummern der Theilung durch 12 in den Punkten *a* und *e* anfangen und im Punkte *d* endigen. Die Seite *ac* sei nach dir gerichtet, die Seite *de* die dir gegenüberliegende, die Seite *ad* die obere Seite. Dann giebt die Seite *ad* die Punkte des rechten Schattens, und die Seite *de* die Punkte des verkehrten Schattens. Nun stecke man auf den Punkt *c* ein Lineal ähnlich der Alhidade des Astrolabs, und es sei die Seite *ad* parallel dem Horizonte, d. h. sie sei gleich der Seite, welche man zur Horizontalen gemacht hat, wie Figur 10 zeigt. Das Übrige macht man, wie zuerst gesagt worden ist.



10a figura.

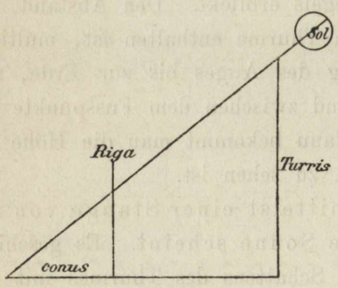
Dieselbe Aufgabe kann man auch vermittelst eines Spiegels auflösen. Man lege den Spiegel auf die Ebene an einen Ort so, dass man, indem man sich vor- oder rückwärts bewegt, die Spitze des zu messenden Thurmes in der Mitte des Spiegels erblickt. Den Abstand, der zwischen der Mitte des Spiegels und dem Thurme enthalten ist, multipliciere man mit der Länge der Entfernung des Auges bis zur Erde, und das Ergebnis theile man durch den Abstand zwischen dem Fusspunkte des Messenden und der Mitte des Spiegels, dann bekommt man die Höhe des Thurmes, die man sucht, wie in Figur 11 zu sehen ist.

Das Nämliche kann man auch mittelst einer Stange von bestimmter Länge ausführen, wenn die Sonne scheint. Es geschieht das so. Man multipliciere die Grösse des Schattens des Thurmes mit der Länge der Stange und theile dieses Produkt durch die Länge des Schattens, den die Stange wirft: das Ergebnis wird die Höhe des Thurmes sein, wie in der Figur zu sehen ist, welche mit vier o°o bezeichnet ist.[1])

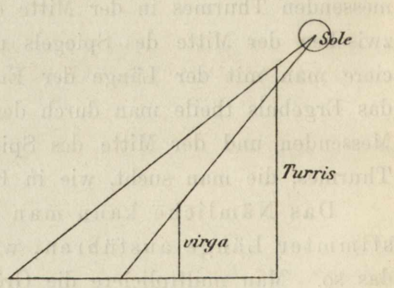
Dasselbe kann man auch durchführen, wenn die Sonne scheint, sobald die Alhidade des Astrolabs, die sein Visierlineal ist, oder sobald das Bleiloth des Quadranten auf 45° fällt, oder mit dem Stangeninstrument, sobald der Schatten des Punktes *a* auf den Punkt *c* fällt,

quando la ombra del ponto *a* chade sopra el ponto *c*, ouero per la tauola, quando lombra del ponto *b* chade sopra el ponto *e*: allora e tanto la alteza de la torre, quanto e quella sua ombra. Ma se la ombra chade in altro locho cha su li 45 gradi, nota el numero de li ponti, e se li sera ponti de ombra drita, alora multiplica la quantitade de lombra de la torre per 12, e quello, che ne vene, partilo per el numero de li
7r ponti, e aueray la alteza de la torre. | Ma se li ponti serano ponti de ombra versa, multiplica la quantitade de la ombra de la torre per quelli ponti, el quello, che ne viene, partilo per 12, et aueray la alteza de la torre. Anchora altramente poy fare, quando tu ay li ponti de la ombra versa. Parti 144 per quelli ponti, e quello, che ne viene, serualo. E poy multiplica la quantita ⟨de lombra⟩ de la torre per 12, e quelo, che ne viene, partito per quelo che tu seruasti, et aueray la alteza de la torre come apare in la 12ª figura.

Questa medesima faray cum una verga lucendo el sole per duy modi. El primo sie: driza una verga a piombino sopra la terra apreso al termine de lombra per si fato modo, che una parte de la verga cada in lombra e laltra fora de la umbra, e notto el logo, doue la umbra tocha la verga. Alora multiplica la quantita de la ombra de la torre per la quantita de la verga, la qual chade in la umbra, e quello, che ne viene, partilo per la quantita del umbra, la quale e tra el cuono de la umbra de la torre e la verga, et haueray la alteza de la torre, como apare in la 13ª figura.



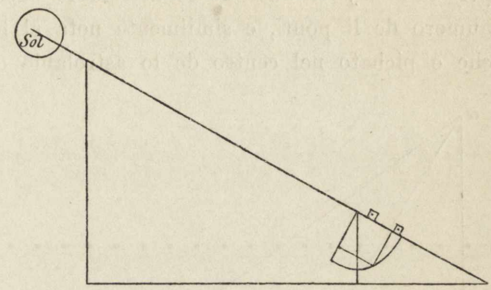
13ª figura.



14ª figura.

El secundo modo sie: a multiplicare la quantitade de la umbra de la torre per la quantita de la verga, e quello, che ne vene partilo per la umbra de la verga et aueray la alteza de la torre, como apare in la
7v 14ª figura. Ma sapi, che le triangoli de le umbre, | de la torre e de la verga sono proportionali, auegnadio che la descripcione de la 14ª figura mostra a contrario, perche la distancia de la torre e de la verga e nulla per rispeto del corpo del sole.

oder vermittelst der Tafel, sobald der Schatten des Punktes *b* auf den Punkt *e* fällt: dann ist die Höhe des Thurmes gleich der Länge seines Schattens. Wenn aber der Schatten auf eine andere Stelle als auf 45° fällt, so merke man die Zahl seiner Punkte. Sind das dann Punkte des rechten Schattens, so multipliciere man die Schattenlänge des Thurmes mit 12 und dividiere das Ergebnis durch die Zahl der Punkte, dann erhält man die Höhe des Thurmes. Sind es aber Punkte des verkehrten Schattens, so vervielfache man die Schattenlänge des Thurmes mit diesen Punkten und dividiere das Produkt durch 12, dann hat man die Höhe des Thurmes. Hat man Punkte des verkehrten Schattens, so kann man auch anders verfahren. Man theile 144 durch diese Punkte und merke sich den Quotienten. Dann multipliciere man die Schattenlänge des Thurmes mit 12 und dividiere das Ergebnis durch den oben gemerkten Quotienten, so erhält man die Höhe des Thurmes, wie in Figur 12 zu sehen ist.



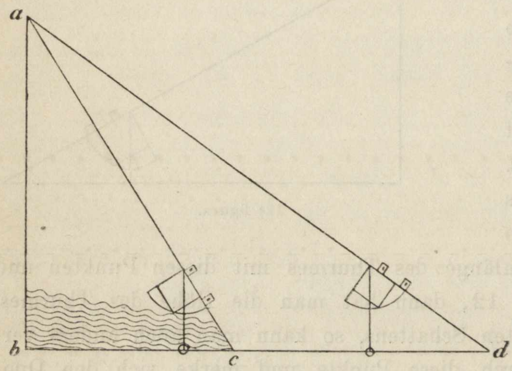
12ª figura.

Dasselbe kann man auch auf doppelte Weise vermittelst einer Latte finden, wenn die Sonne scheint. Die erste Art ist: Man errichte eine Stange nach dem Bleiloth auf der Erde am Ende des Schattens in der Art, dass ein Theil der Stange in den Schatten fällt, der andere aus ihm herausragt, und bezeichne den Punkt, in welchem der Schatten die Stange berührt. Dann vervielfache man die Schattenlänge des Thurmes mit dem Stücke der Stange, das in den Schatten fällt, und das, was herauskommt, theile man durch die Schattenlänge, welche zwischen der Spitze des Schattens des Thurmes und der Stange liegt, dann erhält man die Höhe des Thurmes, wie es Figur 13 zeigt.

Die zweite Art ist, dass man die Schattenlänge des Thurmes mit der Länge der Latte multipliciert und das Ergebnis durch den Schatten des Stange dividiert, dann erhält man die Höhe des Thurmes, wie in Figur 14 zu sehen ist. Man beachte aber, dass die beiden Schattendreiecke des Thurmes und der Stange ähnlich sind, wenn auch die Zeichnung der 14. Figur das Gegentheil zeigt, weil die Entfernung des Thurmes und der Stange gegen die des Sonnenkörpers nichts ist.

Quarta conclusio. De re inaccessibili.

Quando tu voray mesurare una alteza, doue non si possa andare, apreso ambi prediti astrumenti vedi prima la sumitade de la torre per tuti doy li busi de lo astrolabio ouero del quadrante, et etiamdio lo numero de li ponti, e similmente nota el logo, doue chade el perpendiculo, che e pichato nel centro de lo astrolabio ouero del quadrante. E poy in uno altro logo fa lo simigliante, e nota la distantia de li doy termini e la diferentia de li ponti. Ma habi questa auertentia ne li ponti, che quando tu haueray li ponti de la umbra versa, tu debi partire 144 per lo numero de li ponti, che te aduene. Alora la distancia de li doy termini multiplichela per 12, e quello, che ne vene, partilo per la diferentia de li ponti, et aueray la alteza de la torre. Esempli gratia la torre sie *ab*. Quando tu e in lo termine *c*, tu ay 10 ponti de ombra drita, e quando tu sey in lo termine *d*, tu ay 9 ponti de umbra versa, per li quali ponti 9 partisse 144, et aueray 16 ponti, de li quali
8r trane 10, che tu aueui | in termine *c*, e rimane 6 ponti. Da poy li piedi, che tra el *c* et el *d*, chi e 20, multiplicali per 12, e sera 240, li quali debi partire per 6 ponti, che tu seruasti, et aueray 40 piedi, ali quali agiugne la alteza dal centro de lo astrolabio ouero del quadrante a la tera, et haueray la alteza de la torre, come apare in la 15ª figura.



15ª figura.

Questo medesimo faray cun linstrumento de le verge, ouero cun la tauola, stagando in doy luogi, come e ditto denanzi, cioe in *c* et in *d*, perche aueray ponti diuersi, e fa in tuto, como e ditto denanzi.[1])

Ma se nuy non potramo alongarse ne approprinquarle a la torre, driza una verga perpendichulare sopra lo ponto *c*, sera *ch*, inquale a lo *bn*, equidistante da *ab*, e anchora vedi il ponto *a* per *h*, como primo vedesti per *c*, e poy multiplicha *ch* per li minori ponti, e quelo, che ne viene, partilo per la diferentia de li ponti abuti la prima et la seconda volta, et hauerai *na*. Adunque aueray *ba*. E questo e vero

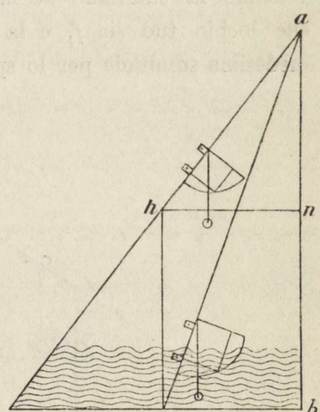
1) Dieser Abschnitt ist in der lateinischen Handschrift erst nach dem hier folgenden geschrieben.

Vierte Aufgabe. Wenn man an den Gegenstand nicht gelangen kann.

Will man eine Höhe messen, an welche man nicht herangehen kann, so visiere man zunächst mit beiden vorgenannten Instrumenten die Spitze des Thurmes durch beide Absehen des Astrolabs oder des Quadranten, und merke zugleich die Zahl der Punkte sowie ebenfalls den Punkt, auf welchen das Bleiloth fällt, das im Mittelpunkte des Astrolabs oder des Quadranten befestigt ist. Darauf thue man dasselbe in einem andern Punkte und bestimme den Abstand der beiden Stationen und die Differenz der Punkte. In betreff der Punkte beachte man aber, dass, wenn man Punkte des verkehrten Schattens beobachtet, man 144 durch die beobachtete Zahl der Punkte dividieren muss. Nun vervielfache man den Abstand der beiden Stationen mit 12, und dividiere das Ergebnis durch die Differenz der Punkte, so erhält man die Höhe des Thurmes. Es sei z. B. der Thurm *ab*. Wenn man im Punkte *c* steht, findet man 10 Punkte des rechten Schattens, und steht man im Punkte *d*, so hat man 9 Punkte des verkehrten Schattens. Durch diese 9 Punkte theile man 144, so erhält man 16 Punkte. Zieht man davon die 10, die man im Punkte *c* gefunden hat, ab, so bleiben 6 Punkte übrig. Nun multipliciere man die Zahl der Fusse, die zwischen *c* und *d* enthalten sind, das ist 20, mit 12, so ist das 240. Das muss man durch die 6 Punkte dividieren, die man sich gemerkt hat, und erhält 40 Fuss. Hierzu füge man die Höhe des Mittelpunktes des Astrolabs oder des Quadranten über der Erde hinzu, so erhält man damit die Höhe des Thurmes, wie in der 15. Figur zu sehen ist.

Dasselbe vollführt man vermittelst des Stangeninstrumentes oder mit der Tafel, wenn man, wie oben gesagt ist, an zwei Orten sich aufstellt, nämlich in *c* und in *d*, da man hierdurch verschiedene Punkte erhält, und man verfährt in allem so, wie es oben gesagt ist.

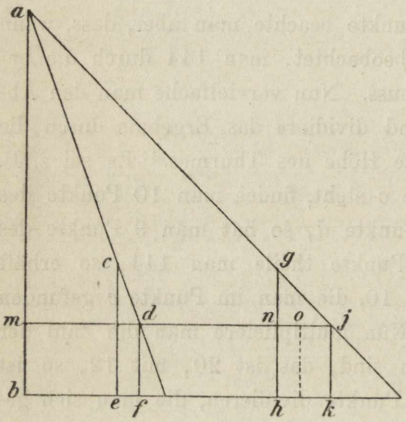
Wenn wir uns aber weder von dem Thurme entfernen können, noch ihm uns nähern, so errichte man im Punkte *c* senkrecht eine Stange, sie sei *ch*, gleich *bn*, parallel zu *ab*, und visiere wieder den Punkt *a* von *h* aus, wie man ihn früher von *c* aus gesehen hat. Dann vervielfache man *ch* mit der kleinern Punktzahl und dividiere das Ergebnis durch den Unterschied zwischen den bei der ersten und zweiten Beobachtung erhaltenen Punkten, und erhält so *na*, also hat man auch *ba*. Dies ist all-



16a figura.

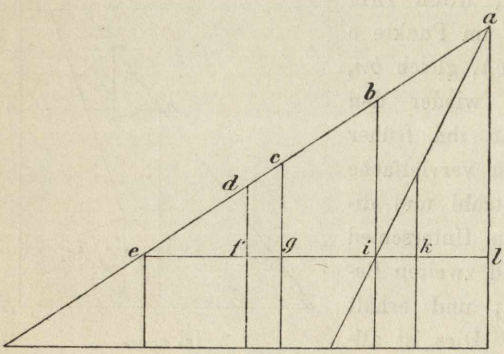
generalmente, ouero che tu volti la ombra versa in drita ouero la drita in versa, attendando che tu usaray lombra drita per versa, mesurando le pianure e le profunditade, e partire sempre 144 per lo numero de li ponti de lombra dritta, la qualli usaray per ombra versa. E questa praticha
8v la vedi in la 16ª figura. |

Questa medesima se puo fare cun una verga, la qualle verga sia *ce* in termine *e*, e lo ochio sie *d*. Anchora quela medesima verga sie in del termine *h*, la qual verga sie *gh*, e lo ochio sie *j*. E apare manifestamente, che la linea *jk*, la qual e la statura del mesuradore, e piu distante, cioe piu da lonze de la verga *gh*, cha la linea *df*, che la statura de lo mesuradore ⟨magis distat a virga *gh*, quam *df* distat⟩, de la verga *ce*, adoncha lo excesso, cioe la differentia, sie *oj*. Multiplica la distantia de li oghi, cioe la linea *dj*, per la quantitade de la verga *gh*, la qual quantita sie *gn*, e quelo, che ne viene, dobiamo partirlo per lo excesso de la distancia de li oghi, cioe per la linea *jo*, e a quelo, che ne vene, agiungeui la auanze de la quantita de la verga, cioe la linea *nh*, la quale sie la statura del mesuratore da lochio a la terra, et aueray la alteza de la torre, como apare in la 17ª figura.[1])



17ª figura.

Questa medesima si puo fare cun uno spechio, in prima vedendo la sumitade de la torre per lo spechio messo in del ponto *a*, si che lochio tuo sia *f*, e la statura tua *fc*; secondariamente vedendo quela medesima sumitade per lo spechio meso in ponto *b*, si che lo ochio tuo sia *e*, e la statura tua sia *ed*. Ed e manifesto, che la secunda distancia da ti a lo spechio sie

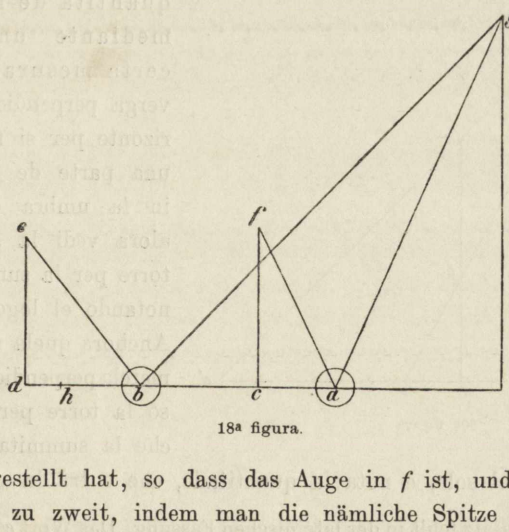


1) In der lateinischen Ausgabe ist hinzugefügt: Huius demonstrationis ratio est, quia *ge, je, ig* sciuntur, ergo *fd* scitur: scilicet sicut *ef* ad *ei* ita *fd* ad *ib*, ergo *ib* scitur. Sed sicut *fd* ad *ib* ita *eg* ad *al*, ergo *al* scitur, sicut patet in 18ª figura. — Die Figur ist die nebenstehende.

gemein richtig, ob man den verkehrten Schatten in den rechten, oder den rechten in den verkehrten verwandelt, wenn man beachtet, dass man bei Messung der Ebenen und Tiefen den rechten Schatten statt des verkehrten benutzt, und man immer 144 durch die Zahl der Punkte des rechten Schattens dividieren muss, wenn man ihn als verkehrten Schatten gebrauchen will. Diese Methode sehe man in der 16. Figur.

Das Nämliche kann man mit einer Stange ausführen. Diese Stange sei *ce* im Punkte *e*, das Auge sei *d*. Dieselbe Stange befinde sich darauf im Punkte *h*, es sei die *gh*, und das Auge sei *j*. Es ist dann klar, dass, wenn die Gerade *jk*, die die Statur des Messenden darstellt, weiter absteht, das heisst weiter von der Stange *gh* entfernt ist, als die Gerade *df*, dass dann die Gestalt des Messenden weiter von der Stange *gh* absteht, als *df* von der Stange *ce*. Es sei nun dieser Überschuss, das ist die Differenz, *oj*. Man multipliciere den Abstand der Augen, das ist die Gerade *dj*, mit der Länge der Stange, die gleich *gn* ist, und das Ergebnis müssen wir durch die Differenz zwischen den Abständen der Augen dividieren, das ist durch die Länge *oj*. Zu dem Ergebnisse füge man den Rest der Länge der Stange hinzu, nämlich die Strecke *nh*, das ist die Statur des Messenden vom Auge bis zur Erde, und erhält dadurch die Höhe des Thurmes, wie in der 17. Figur zu sehen ist.

Dasselbe kann man mit einem Spiegel ausführen, indem man zuerst die Spitze des Thurmes in dem Spiegel einvisiert, den man im



18a figura.

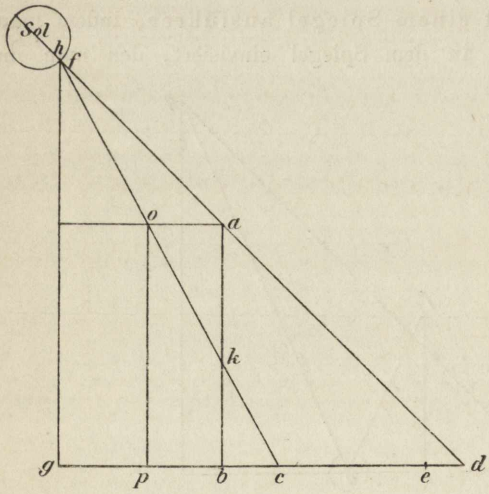
Punkte *a* aufgestellt hat, so dass das Auge in *f* ist, und die Statur des Messenden *fc*; zu zweit, indem man die nämliche Spitze des Thurmes in dem Spiegel einvisiert, der im Punkte *b* niedergelegt ist, so dass das Auge in *d* ist und die Statur des Menschen *ed*. Es ist klar, dass der zweite

9r magiore cha la | prima: sia quello excesso *dh*. Multiplica adunque la distantia da ti a lo spechio con la statura tua, cioe multiplica *ab* per *fc*, e quelo, che ne vene, partilo per lo excesso, cioe per la diferentia de la magiore alongatione da ti al spechio sopra la minore, cioe per *dh*, et aueray la alteza de la torre, como apare in la 18a figura. Per quela medesima via aueray la alteza de uno monte e la alteza de una torre, che foss in sul monte.

Quando tu seray apresso a una torre, non partandote de li, aueray la sua alteza per questo modo. Tagli la tauola quadrata messa in la 10a figura capozela a la torre, si che el lado *ad* sia equidistante a lo orizonte. Poy guarda la sumitade della torre per queli ponti *c*, *a*, e nota el segno in la sumitade de la torre, el qual guardi. Anchora viedi quelo segno per lo ponto *c*, metendo la riga in *e*, e viedi onda la riga tocha el lado *ad*, e la tocha in ponto *g*. Multiplica adunque *ec* per si medesimo, e quelo, che ne vene, partilo per *dg*, et aueray la alteza de la torre, si che sera tante volte in *cf*, la qual e lalteza de la torre, quante volte *dg* sera in *da*, sicomo apare in la 19a figura.

Questo medesimo fa se *f* fosse in aiere, si che non hauesse fondamente in terra, come sarebe una cholmegna de una chasa. A la
9v | quale agugneui la alteza da *c* a la terra, et haueray la alteza da terra.[1])

Volendo sapere la alteza de una torre lucendo el sole et etiamdio la quantita de la ombra sua mediante una verga de certa mesura, ficha la ditta verga perpendiculare sopra lorizonte per si fatto modo, che una parte de la verga chada in la umbra de la torre, e alora vedi la sumitade de la torre per la sumita de la verga notando el logo, doue tu sey. Anchora quela medesima verga metela perpendichularmente verso la torre per si fatto modo, che la summitade de la verga tochi el razo del sole, e nota la quantitade, che e tra la verga e lo cono

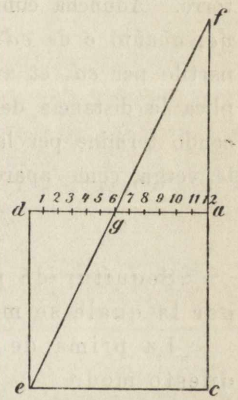


20a figura.

1) Dieser Absatz fehlt in der lateinischen Fassung. Das Wort *colmenga* bedeutet, wie mir Herr Gino Loria gütigst mittheilte, im Ferraresischen Dialekte den Betthimmel. Die Übersetzung mit *Erker* dürfte wenigstens kein falsches Bild in den Text bringen.

Abstand zwischen dir und dem Spiegel grösser ist als der erste; dieser Unterschied sei *dh*. Multipliciert man nun den Abstand zwischen dir und dem Spiegel mit deiner Statur, das heisst vervielfacht man *ab* mit *fc*, und theilt das Resultat durch den Unterschied, nämlich durch die Differenz zwischen der grössern Entfernung vom Spiegel und der kleinern, also durch *dh*, so erhält man die Höhe des Thurmes, wie die 18. Figur zeigt. Auf die nämliche Art erhält man die Höhe eines Berges und die eines Thurmes, der auf dem Berge steht.

Wenn man an einem Thurme sich befindet, so erhält man seine Höhe ohne sich von ihm zu entfernen, auf folgende Weise. Man lege die quadratische Tafel, die in der 10. Figur beschrieben ist, kopfüber an den Thurm, so dass die Seite *ad* parallel dem Horizonte steht. Dann visiere man die Spitze des Thurmes durch die Punkte *c* und *a* und merke sich das Zeichen an der Thurmspitze, das man einvisiert. Nun beobachte man dasselbe Zeichen vom Punkte *e* aus, indem man das Lineal in *e* befestigt, und sehe zu, an welchem Punkte das Lineal die Seite *ad* schneidet; es mag das der Punkt *g* sein. Dann vervielfache man *ec* mit sich selbst, und theile das Produkt durch *dg*, so hat man die Höhe des Thurmes, so nämlich, dass *ec* so oft in der Höhe des Thurmes, das ist in *cf*, enthalten ist, so oft *dg* in *da* enthalten ist, wie in der 19. Figur zu sehen ist.



19a figura.

In derselben Art geht man vor, wenn *f* in der Luft sich befände, so dass es kein Fundament auf der Erde hätte, wie z. B. ein Erker eines Hauses. Hierzu addiert man die Höhe von *c* bis zur Erde, und erhält so die Höhe von dem Erdboden.[1])

Will man die Höhe eines Thurmes bei Sonnenschein bestimmen und zugleich die Länge seines Schattens vermittelst einer Stange von gegebener Länge, so errichte man die fragliche Stange senkrecht auf dem Horizonte in der Art, dass ein Theil der Stange in den Schatten des Thurmes fällt, und visiere dann über die Spitze der Stange nach der Spitze des Thurmes, indem man den Punkt bezeichnet, auf dem man steht. Dann bringe man dieselbe Stange senkrecht näher nach dem Thurme zu, so, dass ihre Spitze den Sonnenstrahl berührt, und bestimme die Entfernung, welche zwischen der Stange und der Spitze des Thurmschattens enthalten ist. Es ist klar, dass der vorher gemerkte Punkt von der Stange in der ersten Station weiter absteht, als die Spitze des

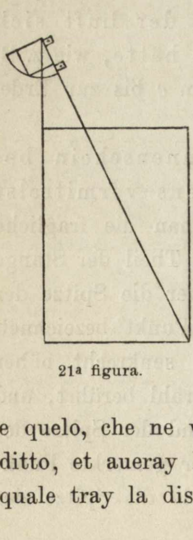
de la umbra de la torre. Et e manifesto, che el logo, che tu notasti, e piu distante da la verga in del primo termine, cha el cono de lombra de la torre de la verga in del secondo termine. Questa differentia seruela, e sia lo primo numero; e la distantia, che tra el logo notado el cono del ombra de la torre, sia el secondo numero; e la quantitade de la verga sia el terzo numero. Multiplica aduncha el secondo per lo terzo, e quelo, che ne vene, partilo per lo primo, et aueray la alteza de la torre. Exempli gratia sia el solle *h*, la torre *fg*, che faza la ombra *gc*, e la verga sia *ab*, de la qual verga la parte *bk* sie in lombra de la torre, e la distantia da
10r ti a la verga in del primo termine | sie *bd*. Item la verga *ab*, la quale e in del segondo termine, sia *op*, e chada totalmente in la ombra de la torre. Aduncha cunzosia cossa e, che la linea *bd* sia mazore che la linea *pc*, quanto e da *ed*: multiplica aduncha *ab* per *cd*, e quello, che ne viene, partilo per *ed*, et averay *fg*. E se voy sapere lumbra de la torre multiplica la distancia del cono de la ombra de la torre a la verga in del secondo termine per la alteza de la torre, e quelo, che ne vene, partilo per la verga, como apare in la 20ª figura.

Secunda pars primi tractatus.

Sequitur de profundimetria, cioe mesura de profunditade, per la quale se mette doe conclusione.

La prima de la profondita de li pozzi, la quale aueray per questo modo.

Stagando in uno de ladi del pozzo viedi cun lo astrolabio ouero cun el quadrante et termine opposito in del profundo del pozzo, e nota li ponti de la ombra drita, perche la profundita granda requere questo, e serva le ditte ponti. Poy multiplica el diametro del pozzo per 12, e quello, che ne viene, partilo per lo numero de li ponti seruati, et aueray la alteza del pozzo, como apare in la 21ª figura, de la quale tray fora la distancia del centro del astrolabio ouero
10v del quadrante a la bocha del pozzo. |



21ª figura.

Questa medesima faray colo instrumento de le verge, fazando quelo medesimo instrumento in su la stremitade del diametro de la bocha del pozo, et ponendo lochio apreso al ponto *f*. Alora como tu ay fatto de sopra, multiplica et diametro del pozo per 12, e quelo, che ne vene, partilo per li ponti, che tu auesti cun lo instrumento ditto, et aueray la alteza del pozo, si como apare in la 22ª figura, de la quale tray la distantia del ponto *f* da la bocha del pozzo.

Thurmschattens von der Stange in der zweiten Station. Diese Differenz bestimme man, sie wird die erste Zahl. Der Abstand zwischen dem gemerkten Punkte und der Spitze des Thurmschattens sei die zweite Zahl, die Länge der Stange aber die dritte Zahl. Multipliciert man also die zweite mit der dritten und theilt das Produkt durch die erste, so erhält man die Höhe des Thurmes. Es sei z. B. die Sonne h, der Thurm fg, der den Schatten gc wirft; die Stange sei ab, von der der Theil bk im Thurmschatten liege, der Abstand zwischen dem Beobachter und der Stange in der ersten Station sei bd. Es sei ferner die Stange ab in ihrer zweiten Lage op und falle vollständig in den Schatten des Thurmes. Da nun die Gerade bd um so viel grösser ist als die Gerade pc, als ed beträgt, so vervielfache man ab mit cd und theile das Ergebnis durch ed, so erhält man fg. Will man die Grösse des Thurmschattens bestimmen, so multipliciere man den Abstand der Spitze des Thurmschattens von der Stange in ihrer zweiten Lage mit der Höhe des Thurmes und das Ergebnis dividiere man durch die Länge der Stange, wie in Figur 20 zu sehen ist.

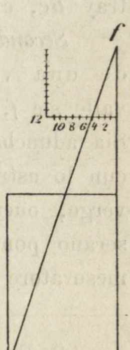
Zweiter Theil des ersten Traktates.

Es folgt die Tiefenmessung, das heisst die Ermittelung der Tiefe. Hierfür werden wir zwei Aufgaben stellen.

Die erste betrifft die Tiefe der Brunnen, die man in folgender Weise bestimmt.

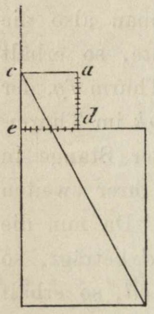
Man stehe auf einer Seite des Brunnens und visiere mit dem Astrolab oder dem Quadranten den entgegengesetzten Punkt in der Tiefe des Brunnens und bestimme die Punkte des rechten Schattens, da grosse Tiefe das erfordert. Die erhaltenen Punkte merke man sich. Darauf multipliciere man den Durchmesser des Brunnens mit 12 und dividiere das Ergebnis durch die gemerkte Zahl der Punkte, so erhält man die Tiefe des Brunnens, wie in der 21. Figur zu sehen ist. Von ihr muss man den Abstand des Mittelpunktes des Astrolabs oder des Quadranten bis zur Mündung des Brunnens abziehen.

Dasselbe kann man auch mit dem Stangeninstrumente bewirken, indem man dasselbe auf dem Endpunkte des Durchmessers der Brunnenöffnung aufstellt, und das Auge in den Punkt f bringt. Genau so, wie man es oben gethan hat, multipliciert man den Durchmesser des Brunnens mit 12 und theilt das Ergebnis durch die Punkte, welche man mit dem Instrumente beobachtet hat, und erhält so die Tiefe des Brunnens, wie in der 22. Figur ersichtlich. Von ihr muss man den Abstand des Punktes f von der Brunnenöffnung abziehen.



22ª figura.

Questa medesima faray cun una tabula quadrata drizando el lado *ec* sopra de la bocha del pozo, ponendo lo ochio apreso al *c*. El resto fa, como de sopra, si como apare in la 23ª figura, da la quale tray la distancia del ponto *c* da la bocha del pozzo.

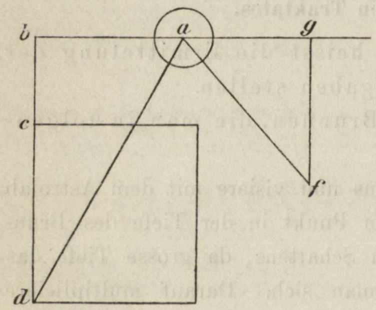


23ª figura.

Questa medesima faray cun due verge. Una sie el diametro de la bocha del pozzo, cioe *cf*, e laltra sia in su la stremitade de la boca del pozo in ponto *c*. In la stremita de la qual verga, cioe in ponto *b*, posse lo ochio guardando in del pozzo, e li, dove la linea visuale tocha el diametro de la bocha del pozo, posse per segno *d*. Poy multiplica *cb* per *df*, e quelo, che ne viene, partilo per *dc*, et aueray *fg*, chi e la alteza del pozo, si como

11r apare in la 24ª figura. |

Questa medesima faray per lo spechio. Ficha el spechio in una tabula, la qual tabula voltela verso la profondita del pozo, che sia leuada equalmente da la bocha del pozo, per si fatto modo, chel spechio sia apreso a la estremitade de la bocha del pozo in del ponto *a* de la tabula. Poy dal lado opposito del pozo fa la linea *cb* infina a la tabula, e sia lo ochio *f*, chi vieda in mezo del spechio el ponto *d* per reflexione. Poy dal ponto de lo ochio *f* faray una linea *fg*, che sia equalmente distante a la linea *bcd*. Alora multiplica *fg* per *ab*, e quelo, che ne vene, partilo per *ag*, et aueray *bcd*, dal quale tray *bc*, e rimane *cd* la alteza del pozo, como apare in la 25ª figura.



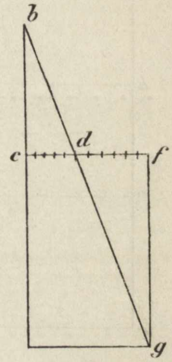
25ª figura.

Seconda conclusio. Per questo modo se mesura la profunditade de una valle.[1]) Sia el monte *bcgme*, lorizonte *cgmf*, el ponto in la valle sie *f*, la pianura in sul monte sie *be* equalmente distante a lorizonte. Sia aduncha el mesuradore in del termine *e*, e veda el ponto *f* in la valle cun lo astrolabio, ouero cun el quadrante, ouero cun lo instrumento de le verge, ouero cun la tauola quadrata, e nota li ponti. Le quale se li serano ponti de ombra versa, parti 144 per quelli ponti. Anchora sia el mesuratore in del termine *b*, e fiza notando li ponti, como e ditto da

1) Es wird hier gar nicht die Tiefe des Thales gemessen, sondern die Entfernung des Punktes *f* von dem Fusspunkte des von *b* auf die Hori-

Das Nämliche kann auch mit der quadratischen Tafel geschehen, wenn man die Seite *ec* auf der Brunnenöffnung senkrecht errichtet und das Auge in den Punkt *c* bringt. Das Weitere macht man wie oben, wie in Figur 23 ersichtlich. Man muss wieder den Abstand des Punktes *c* von der Brunnenöffnung in Abzug bringen.

Dasselbe macht man mit zwei Stangen. Eine von ihnen sei der Durchmesser des Brunnens, nämlich *cf*, die andere sei im Endpunkte der Brunnenöffnung im Punkte *c* senkrecht errichtet. Das Auge bringe man in den Endpunkt der Stange, d. h. in den Punkt *b* und visiere in den Brunnen. Da, wo die Gesichtslinie den Durchmesser der Brunnenöffnung schneidet, setze man das Zeichen *d*. Nun vervielfache man *cb* mit *df* und das, was sich ergiebt, theile man durch *dc*, so erhält man *fg*, das ist die Tiefe des Brunnens, wie die 24. Figur zeigt.



24a figura.

Dasselbe kann man mit einem Spiegel ausführen. Man befestige den Spiegel auf einer Tafel, welche man umgekehrt gegen die Tiefe des Brunnens kehrt, so dass sie gleichmässig von der Brunnenöffnung absteht, und zwar so, dass der Spiegel sich über dem Endpunkte der Brunnenöffnung im Punkte *a* der Tafel befindet. Von der andern entgegengesetzten Seite des Brunnens ziehe man die Gerade *cb* bis zu der Tafel. Es sei weiter *f* das Auge, das in der Mitte des Spiegels den Punkt *d* durch Reflexion sieht. Dann ziehe man vom Auge *f* die Gerade *fg* parallel der Geraden *bcd*, multipliciere darauf *fg* mit *ab* und theile das Ergebnis durch *ag*, so erhält man *bcd*. Hiervon ziehe man *bc* ab, so bleibt *cd*, die Tiefe des Brunnens, wie die 25. Figur zeigt.

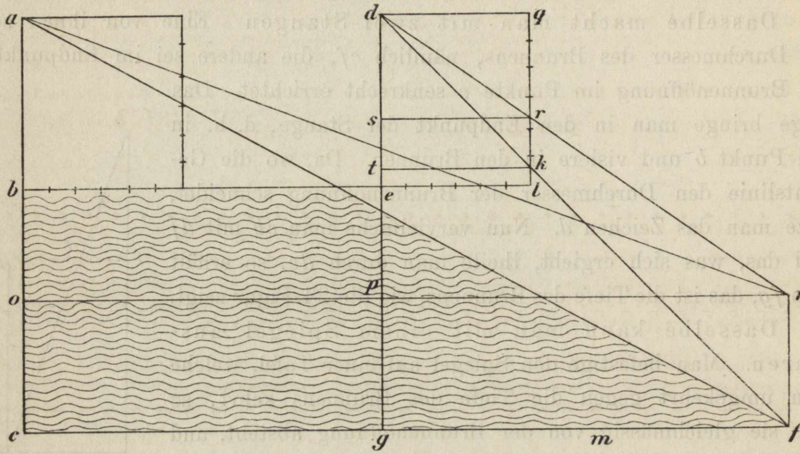
Zweite Aufgabe. In folgender Weise misst man die Tiefe eines Thales.[1])

Der Berg sei *bcgme*, die Horizontalebene *cgmf*, der Punkt im Thale sei *f*, die ebene Fläche auf dem Berge *bc* parallel dem Horizonte. Der Messende stehe nun in dem Endpunkte *e* und visiere den Punkt *f* im Thale mit dem Astrolab oder mit dem Quadranten, oder mit dem Stangeninstrumente, oder mit der quadratischen Tafel, und merke die Punkte des Schattens. Sind das Punkte des verkehrten Schattens, so theile man durch sie 144. Es sei der Messende weiter im Endpunkte *b* und thue unter Feststellung der Punkte genau so, wie wir es zuerst gesagt haben. Von diesen letzten Punkten ziehe man die zuerst beobachteten ab, und merke die Differenz.

---

zontalebene gefällten Lothes. Erst die folgenden Aufgaben geben die Höhe des Berges.

11v prima. Da li qualli | ponti tray li primi ponti, che tu auesti, e serua lo resto. Alora multiplica la distancia de li doi termine, cioe la linea *be*, per li minor ponti, e quelo, che ne vene, partilo per la diferentia de li ponti, che tu seruasti, et aueray la linea *gf*.



26a figura.

A quello medesimo modo faray, se una torre fosse in del termine *f*, de la quale volessimo sapere la sua alteza, la quale sia *nf*. Messado la linea *opn* equalmente distante al orizon, ed aueray la linea *pn*. Ma perche anchora non ay lalteza de la torre, ne la lalteza del monte, in sul quale tu sey, impercio quelle alteze se auerano in questo modo. Guarda, onde la linea visuale *df* secha, cioe tocha, la linea *ql*, e lo sia el ponto *k*, del qual ponto *k*, mena la linea *kt* equidistante a lorizon *cgmf*. Alora multiplica la linea *gf*, la qual tu ay zia atrouata, per la linea *dt*, e quello, che ne vene, partilo per la linea *kt*, et aueray la linea *dg*, ed anche la linea *eg*, la quale e lalteza del monte.

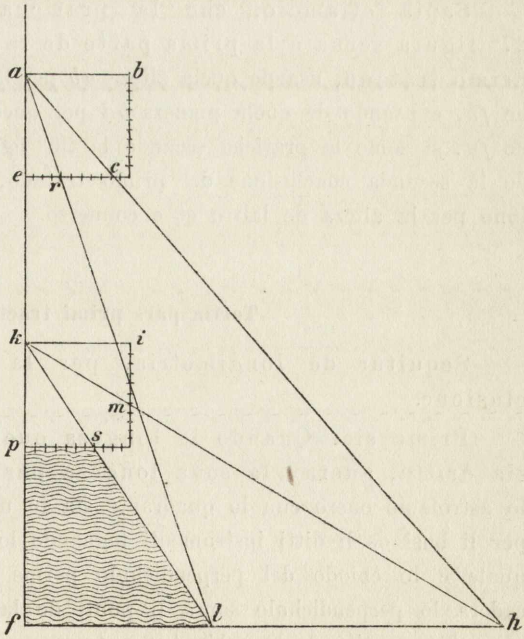
Per quelo medesimo modo faray per la alteza de la torre, vedendo doue la linea visuale *dn* secha la linea *ql*, e li sia el ponto *r*, del quale mena la linea *rs* equidistante a lorizon. Alora multiplica *pn* per *ds*, e quelo, che ne vene, partilo per *rs*, et aueray *dp* et *ep*, adunque *pg*, la quale e inguale a la alteza de la torre. E tute queste cosse apare
12r in la 26a figura. |

Ma se non fusse pianura alcuna in del monte, alora primamente guarda el termine ouero el segno in del piano, e nota le ponti de la umbra versa; secundariamente driza perpendicularmente alcuna mesura dal luogo del ochio tuo in de la prima hoperatione verso al aiere ouero el

Darauf multipliciere man den Abstand der beiden Stationen, das ist die Gerade *be*, mit der Zahl der kleinern Punktsumme, und dividiere das Ergebnis durch die gemerkte Differenz der Punkte, dann erhält man die Gerade *gf* (Fig. 26).

In derselben Weise geht man vor, wenn im Punkte *f* ein Thurm steht, dessen Höhe man bestimmen will, derselbe sei *nf*. Man messe die Gerade *opn* parallel zum Horizonte, und erhält so die Gerade *pn*. Da man aber die Höhe des Thurmes noch nicht kennt, noch die des Berges, auf welchem man sich befindet, so erhält man beide Höhen auf folgende Weise. Man sehe zu, in welchem Punkte die Gesichtslinie *df* die Gerade *ql* schneidet, es sei das im Punkte *k*. Von diesem Punkte *k* ziehe man die Gerade *kt* parallel zum Horizonte *cgmf*. Darauf multipliciere man die Gerade *gf*, die man schon gefunden hat, mit der Geraden *dt* und dividiere das Ergebnis durch die Gerade *kt*, dann erhält man die Gerade *dg* und also auch die Gerade *eg*, das ist die Höhe des Berges.

In derselben Weise findet man die Höhe des Thurmes, indem man zusieht, wo die Gesichtslinie *dn* die Gerade *ql* schneidet; es sei das im Punkte *r*. Von ihm zieht man die Gerade *rs* parallel dem Horizonte und multipliciert dann *pn* mit *ds* und dividiert das Ergebnis durch *rs*, dann erhält man *dp* und *ep* und folglich *pg*, was der Höhe des Thurmes gleich ist. Alles dieses zeigt die 26. Figur.



27 figura.

Ist aber auf dem Berge keine ebene Fläche, so beobachte man zunächst den Punkt oder das Zeichen in der Ebene und merke sich die Punkte des verkehrten Schattens. Zweitens errichte man von dem Orte des Auges bei der ersten Beobachtung aufwärts senkrecht irgend ein Maass in die Luft oder nach dem Zenith. Von der Spitze dieses Maasses aus visiere man ein zweites Mal den vorgenannten Punkt oder das Zeichen und merke wieder die Punkte. Darauf multi-

zenit. De la cima de la qual mesura guarda una altra volta el preditto termine ouero segno, e nota li ponti. Alora multiplica 12 per la mesura drizada, e quelo, che ne vene, partilo per la diferentia de li ponti abuti per la prima e per la seconda volta, come sarebe, se tu fusse in sul monte *fp* e tu volessi la longeza *fh*, e sia lalteza de la somita del monte a lo ochio tuo *kp*, e sie el numero dato de li ponti *im*, esempli gratia $3\frac{3}{11}$. Ancora dal ponto *k* fiza drizato *ak* de cognosuda quantita esempli gratia 5; e sia el numero de li ponti *bc* exempli gratia 6. E perche tragando $3\frac{3}{11}$ de 6, resta $2\frac{8}{11}$, sara questa diferentia el partitore. Multiplica adunque 5 per 12, e quelo, che ne viene, partilo per $2\frac{8}{11}$, et aueray 22, la longeza cioe *fh*, la qual circhaui. Ma quando tu auessi li ponti de umbra drita, volta quelli in de li ponti de umbra versa, perche e le da fare cossi volendo le profunditade. Como e, guardando el ponto *l* per *a* aueray *er*, cioe 6 ponti, per li quali parte 144, et aucray 24. Ancora guardando el ponto *l* per *k* aueray *ps*, cioe 11 ponti, per li quali parte 144, el aueray
12v $13\frac{1}{11}$, | le quali trali de 24, aueray el partitore $10\frac{10}{11}$. Multiplica aduncha 5 per 12, como e dito de sopra, e quelo, che ne vene, partilo per $10\frac{10}{11}$, et aueray $5\frac{1}{2}$, el quale e *fl*. Ma nota, che in la mesura de la pianura e de la profunditade tu di usare la umbra drita per la versa et e conuerso (Fig. 27).

Sapia etiamdio, che la praticha fatta segondo questa 27ª figura serua a la prima parte de la secunda conclusione del primo tratado, usando quela alteza *ab* per la pianeza messa qui, la qual he *fh*, e usando de quela pianeza *bd* per questa alteza messa qui, la qual he *fa*, si como la praticha secundo la 25ª figura serue a la secunda parte de la secunda conclusione del primo tratado, cioe usando la pianeza de luno per la alteza de laltro et e conuerso.

Tertia pars primi tractatus.

Sequitur de longimetria, per la quale ponno tre cunclusione.

Prima sie: Quando la longeza ouero pianura de un campo sia dritta, aueray la soua longeza per questo modo. Prima cun lo astrolabio ouero cun lo quadrante sta in uno locho del piano et guarda per li busi de li ditti instrumenti tegnando lo angulo del quadrante, in lo quale e lo chiodo del perpendichulo perme lo ochio, et raxionialmento cadera lo perpendichulo sopra li ponti de la umbra versa; alora multi-
13 plica la quantita de lo ochio tuo a terra per 12, ouero piu certo | multi-

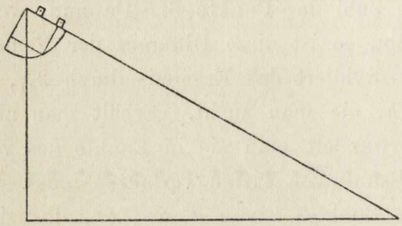
pliciere man 12 mit dem errichteten Maasse und dividiere das Ergebnis durch die Differenz der bei der ersten und zweiten Beobachtung erhaltenen Punkte. Wie es z. B. sein würde, wenn man auf dem Berge fp sich befände und man wollte die Länge fh messen, und es wäre die Höhe des Berges vom Auge aus gemessen gleich kp. Die gefundene Zahl der Punkte im sei z. B. $3\frac{3}{11}$. Nun errichte man im Punkte k die ak von bekannter Länge, etwa 5, und es sei etwa die Zahl der Punkte 6. Da nun, wenn man $3\frac{3}{11}$ von 6 abzieht, $2\frac{8}{11}$ Rest bleibt, so ist diese Differenz der Nenner. Multipliciert man nun 5 mit 12 und dividiert das Ergebnis durch $2\frac{8}{11}$, so erhält man 22, das ist die Länge fh, die man sucht. Erhält man aber Punkte des rechten Schattens, so verwandelt man sie in Punkte des verkehrten Schattens, da man so bei Messung von Tiefen verfahren muss. So erhält man z. B. bei Beobachtung des Punktes l von a aus, er, das sind 6 Punkte, durch die 144 getheilt 24 kommen. Beobachtet man ferner den Punkt l von k aus, so erhält man ps, das sind 11 Punkte. Dividiert man dadurch 144, so entstehen $13\frac{1}{11}$, die von 24 weggenommen den Nenner $10\frac{10}{11}$ ergeben. Multipliciert man nun 5 mit 12, wie oben gesagt ist, und theilt das Ergebnis durch $10\frac{10}{11}$, so erhält man $5\frac{1}{2}$, und das ist fl. Man beachte aber, dass bei Messung der Ebene und der Tiefen man sich statt des rechten Schattens des verkehrten bedienen muss und umgekehrt (Fig. 27).

Man wisse ferner, dass das Verfahren gemäss der 27. Figur auch für den ersten Theil der zweiten Aufgabe des ersten Traktates benutzt werden kann, wenn man die dortige Höhe ab für die hier genommene Ebene, nämlich fh, setzt, und die dortige Ebene bd für die hier gesetzte Höhe, nämlich fa, nimmt. Ebenso wie das Verfahren gemäss der 25. Figur auch für den zweiten Theil der zweiten Aufgabe des ersten Traktates dienen kann, indem man die Ebene des einen als die Höhe des andern gebraucht und umgekehrt.

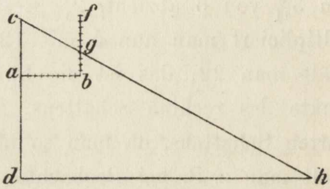
Dritter Theil des ersten Traktates.

Nun folgt die Längenmessung, für welche wir drei Aufgaben stellen.

Die erste ist folgende: Wenn die Länge oder ebene Ausdehnung eines Feldes gerade ist, so erhält man seine Länge in folgender Weise. Zuerst stehe man mit dem Astrolab oder dem Quadranten in dem einen Endpunkte der Ebene und visiere durch die Absehen genannter Instrumente, indem man die Ecke des Quadranten, in welchem der Stift des Bleilothes sich befindet, an das Auge hält. Dann fällt naturgemäss das Loth auf Punkte des verkehrten Schattens. Nun multipliciere man die Entfernung des Auges von der Erde mit 12, oder genauer, man plica la distancia del centro de lo astrolabio a tera, ouero da lo angulo del quadrante per 12, e quelo, che ne viene, partilo per lo numero de li ponti, che tu hay abuto, e quelo, che ne vene, sera la longeza como apare in la 28ª figura. E sapi, che non besogna voltare li ponti de umbra versa in li ponti de umbra dritta.



28ª figura.

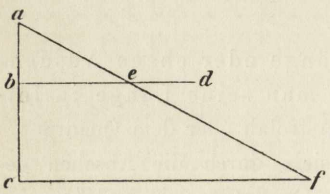


29ª figura.

Questo medesimo se puo fare cun lo instrumento de le verge, chomo he in la 27ª figura, ponendo lo ochio perme lo *c*, guardando lo altro termine del piano per la regula posta in *c*, chi secha la linea *fb* in ponto *g*. Alora multiplica *cd* per 12, e quelo, che ne viene, partilo per *fg*, et aueray *dh*, la longeza del piano, como apare in la 29ª figura. E sapi chel te bisogna cauare la linea *ab* de la linea *dh*. Houero aueray questo, como apare in la 30ª figura, ponendo lo ochio in ponto *f*, in lo quale he la regula, chi secha in lo ponto *g*. Alora multiplica *cd* per 12, e quelo, che ne vene, partilo per *cg*, et aueray *dh*, la longeza.

Questo medesimo se puo fare cun la tabula quadrata ponendo lo ochio a ponto *c*, in lo quale sie la regula, si che lo lado *ce* sia de sopra, e si che la regula si secha la linea *eb* in ponto *f*. Alora multiplica *ca* per 12, e quelo, che ne viene, partilo per *ef*, et aueray la longeza del piano, como apare in la 31ª figura. Questo medesimo si farebbe,
13' se lo | lato *ad* fosse alleuato dal piano, e alora la distantia da *c* al piano multiplica per 12 etc.

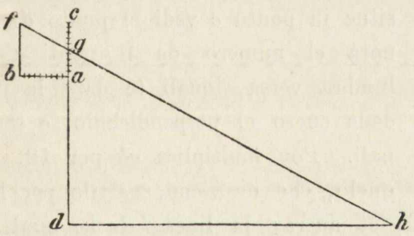
Questa medesima faray per uno tale instrumento. Sia lo piano *cf*, la verga *ac* equale a la statura, a la quale inficha una altra verga perpendichularmente, che sia *bd*; sia lo ochio tuo in ponto *a*, e sia la linea vissuale *af*, che secha la verga *bd* in ponto *e*. Alora multiplica *be* per *ac*, e quelo, che ne viene, partilo per *ab*, et haueray *cf*, la longeza, como apare in la 32ª figura.



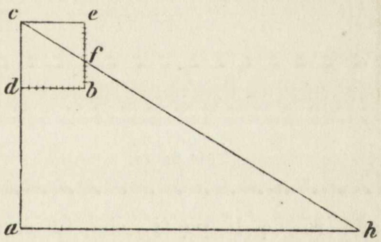
32ª figura

multipliciere den Abstand des Mittelpunktes des Astrolabs oder der Ecke des Quadranten von der Erde mit 12 und theile das Produkt durch die Zahl der Punkte, die man beobachtet hat, dann ist der Quotient die gesuchte Länge, wie in der 28. Figur ersichtlich ist. Man beachte, dass es hier nicht nöthig ist, die Punkte des verkehrten Schattens in solche des rechten Schattens zu verwandeln.

Man kann dasselbe auch mit dem Stangeninstrumente ausführen, wie man es in der 27. Figur benutzte, indem man das Auge nach *c* bringt und das andere Ende der Ebene mittelst des Messlineals, das man in *c* befestigt hat, einvisiert. Dieses schneide die Gerade *fb* im Punkte *g*. Nun multipliciere man *cd* mit 12 und das erhaltene Produkt theile man durch *fg*, dann erhält man *dh*, die Länge der Ebene, wie die 29. Figur zeigt. Man beachte aber, dass man die Länge *ab* von der Geraden *dh* wegnehmen muss. Man könnte auch die Messung so ausführen, wie die 30. Figur zeigt, dass man das Auge in den Punkt *f* bringt, in welchem das Messlineal sich befindet, das im Punkte *g* einschneidet. Man multipliciere dann *cd* mit 12 und dividiere das Ergebnis durch *cg*, so erhält man *dh*, die gesuchte Länge.



30a figura.



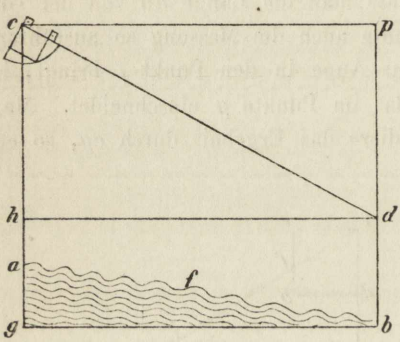
31a figura.

Ebenso kann man mit der quadratischen Tafel vorgehen, wenn man das Auge in den Punkt *c* bringt, in welchem das Messlineal befestigt ist, und zwar so, dass die Seite *ce* oben liegt, und das Lineal die Gerade *eb* im Punkte *f* schneidet. Man multipliciere nun *ca* mit 12 und das Ergebnis dividiere man durch *ef*, so erhält man die Länge der Ebene, wie in der 31. Figur ersichtlich ist. Ebenso könnte man vorgehen, wenn die Seite *ad* nicht bis zur Ebene reichte. Dann vervielfache man den Abstand von *c* bis zur Ebene mit 12 u. s. w.

Auch mit folgendem Instrumente lässt sich das ausführen. Die Ebene sei *cf*, die Stange *ac* gleich der Grösse des Beobachters. An ihr befestige man senkrecht eine zweite Stange, die *bd* heisse. Das Auge befinde sich im Punkte *a*, und die Gesichtslinie sei *af*, welche die Stange *bd* im Punkte *e* schneide. Nun multipliciere man *be* mit *ac* und theile das Ergebnis durch *ab*, so erhält man *cf*, die gesuchte Länge, wie in der 32. Figur ersichtlich.

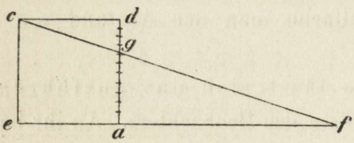
Questa medesima se puo fare per lo spechio. Driza una verga perpendicholarmente sopra lo orizonte, cioe sopra lo piano, a la qual verga apicha lo spechio in ponto, che sia mancho distante da la terra cha lo ochio tuo, como sarebe in ponto c, e sia lochio tuo a tra lo spechio e lo termine del piano, el quale sia f, e sia la distantia de lo ochio tuo de la verga la linea ba. Multiplica adunque ba per cd, e quelo, che ne viene, partilo per bc, et haueray df, como apare in la 33ª figura.

Secunda conclusio. Se la longeza del piano da fir mesurada non sera drita, como se lorizonte gb, el spazio gibboso, cioe non piano, afb, fa cossi. Ficha doe righe una in del termine a, laltra in del termine b piu basso, cossi lonze, che dal ponto d possa fir messado una linea in fina a la linea cg, la qual sia equalmente distante a lorizonte, la qual linea sia dh et non secha la gibbosita del spatio. Alora cholo
14 astrolabio ouero cun el quadrante | situe in ponto c vedi el ponto d, e nota el numero de li ponti del lumbra versa, iquali te dara la lidada ouero el perpendichulo, e seruali. Poy multiplica ch per 12, e quelo, che ne viene, partilo per lo numero de li ponti, che tu seruasti, et aueray la linea hd, la qual e equale ha gb. E se da ponto c vorey menare la linea cp in fina ad bd equidistante a lorizonte, poray fare de la linea pd, si como facesti de la linea ch, como apare in la 34ª figura. Vero he, che per questo non se cumprende la gibbositade, ma solamente la distancia de g et b.



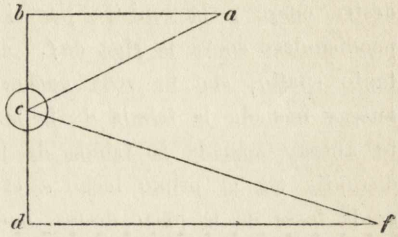
34ª figura.

Terza conclusio. E perche a la fiada hocore in la longimetria la largeza de una fossa, per la noticia de quela sia la terza conclusione. Faray cossi. Meteray la tabula de la 20ª figura sopra la ripa tua de la fossa ouero lo piano elquale, doue tu sey, e guarda el termine f in la ripa opposita per eaf, metendo lo ochio apreso al ponto e. Anchora guarda el ponto f per la linea cgf, metendo lo ochio justa a ponto c, stagando sempre la tabula ferma. Alora multiplica ec per si medesimo, e quelo, che ne viene,



35ª figura.

Man kann dasselbe auch mit einem Spiegel machen. Errichte eine Stange senkrecht zum Horizonte, befestige an dieser Stange den Spiegel in einem Punkte, der einen geringern Abstand von der Erde hat, als das Auge, wie es etwa der Punkt *c* wäre. Das Auge befinde sich in *a* zwischen dem Spiegel und dem Endpunkte der Ebene, der mit *f* bezeichnet sei; der Abstand des Auges von der Stange sei die Gerade *ab*. Multipliciere nun *ab* mit *cd* und theile das Produkt durch *bc*, so entsteht *df*, wie Figur 33 zeigt.



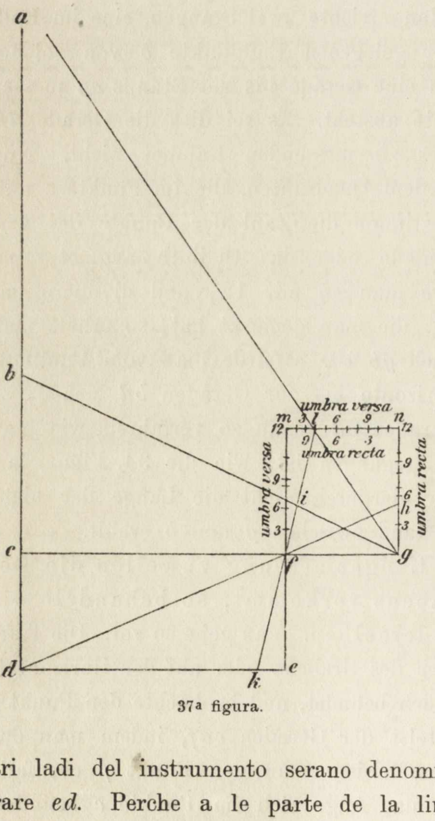
33a figura.

Zweite Aufgabe. Wenn die Längenausdehnung der zu messenden Ebene nicht horizontal liegt, wenn z. B. der Horizont *gb* ist, die höckrige, das heisst nicht ebene Länge *afb*, so verfahre man so. Man errichte zwei Stangen, eine im Endpunkte *a*, die andere in dem tiefer gelegenen Endpunkte *b* von solcher Länge, dass man vom Punkte *d* aus eine Gerade bis zur Stange *cg* messen kann, die gleichmässig vom Horizonte absteht. Es sei dies die Gerade *dh*, und sie schneide die Erhöhung des zu messenden Raumes nicht. Nun visiere man mit dem Astrolab oder dem Quadranten, die im Punkte *c* aufgestellt sind, den Punkt *d*, und bestimme die Zahl der Punkte des verkehrten Schattens, welche die Alhidade oder das Bleiloth angiebt, und merke dieselben. Dann multipliciere man *ch* mit 12, und dividiere das Produkt durch die Zahl der Punkte, die man gemerkt hat, so erhält man dadurch dle Gerade *hd*, welche gleich *gb* ist. Würde man vom Punkte *c* aus die Gerade *cp* parallel dem Horizonte bis zur Geraden *bd* ziehen, so könnte man zur Bestimmung der Geraden *pd* genau so verfahren, wie man zur Bestimmung der Geraden *ch* vorgegangen ist, wie die 34. Figur darstellt. Es ist aber klar, dass man hierdurch nicht die Länge der nicht ebenen Fläche, sondern nur den Abstand zwischen *g* und *b* erhält.

Dritte Aufgabe. Da bei der Längenmessung zuweilen die Bestimmung der Breite eines Grabens vorkommt, so behandele die dritte Aufgabe die Bestimmung derselben. Man gehe so vor. Die Tafel der Figur 20 stelle man an dem Ufer des Grabens oder auf der Horizontalebene auf, auf welchem man selbst sich befindet, und beobachte den Punkt *f* auf dem gegenseitigen Ufer vermittelst der Geraden *eaf*, indem man das Auge in den Punkt *e* bringt. Dann visiere man den Punkt *f* ebenfalls vermittelst der Geraden *cgf*, indem das Auge sich im Punkte *c* befindet, die Tafel selbst aber immer fest steht. Nun multipliciere man *ec* mit sich partilo per *dg*, et aueray *ef*, la largeza de la fossa, como apare in la 35ª figura.

Questo medesimo poy fare altramente. Guarda el ponto *f* per la linea *ebf* como prima. Posta menaray la tabula tuo verso la mane destra ouero a la senistra per si fatto modo, che lo lado *ad* staga per-
14' pendichulare sopra la riga *eaf*, | cioe al squadro, menando la tabula per tanto spatio, che tu veda anchora el ponto *f* guardando per *ca*, si tu aueray menada la tabula da la mane destra, ouero guardando per *ed*, se tu aueray menada la tabula da la parte senistra. Alora quanta sera la distantia tra el primo locho *a* el secondo locho *a*, tanta sera la largeza de la fossa da la parte destra, ouero tra el logo *a* el secondo locho *d* da la parte senistra, como apare in la 36ª figura.

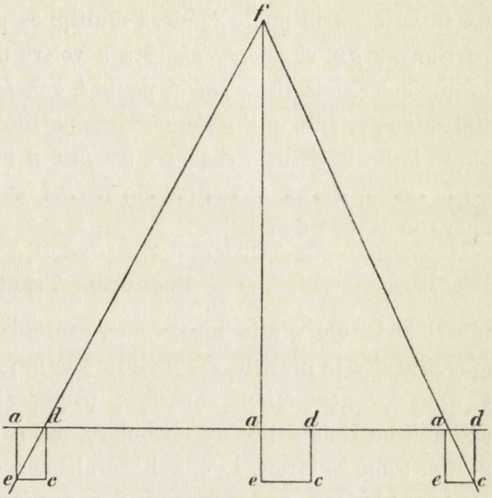
A volere mesurare una alteza de una torre sopra una ripa opposita de uno fiume, et etiamdio la largeza de fiume, faray cossi. Driza sopra la ripa, su la quale tu sey, uno tale instrumento, como he *efmng* per si fatto modo, che la asta *ef* sopra la terra sia de certa nota, in lo quale instrumento siano doy busi per doue lidade, cioe *f* et *g* equidistante a lorizon e fiza menado *gf* drito fino a la torre *da*, la qual linea sia *gfc*. La largeza del fiume sia *cd*, e la alteza de la torre sia *db* ouero *da*. Sia etiamdio ceschaduno de li tri ladi del instrumento, cioe *gn*, et *nm* et *mf* diuisi per 12 ponti. Aduncha e da considerare che, perche doy centri sono posti in lo instrumento presente per due quantita da fir mesurade, de le quale l'una si zose laltra se driza sopra quela, che zose; per la quale chasone la razone de la umbra
15 se menda, impercio | li preditti tri ladi del instrumento serano denominati variamente, percioche a mesurare *ed*. Perche a le parte de la linea *gn* firano diti ponti de ombra dritta, e a la parte de *nm* ponti de ombra versa, e termina el 12 in



37ª figura.

selbst und theile das Ergebnis durch *dg*, so erhält man *ef*, die Breite des Grabens, wie in Figur 35 ersichtlich ist.

Man kann das auch anders machen. Visiere den Punkt *f* wie vorher durch die Gerade *eaf*. Darauf rücke die Tafel nach rechts oder nach links in der Art, dass die Seite *ad* stets auf der Geraden *eaf* senkrecht bleibt, das heisst im Winkelmaass, und zwar rücke man die Tafel um eine solche Entfernung weiter, dass man den Punkt *f* wieder sieht, indem man über *c* und *a* visiert, wenn man die Tafel nach rechts gerückt hat, oder indem man über *e* und *d* visiert, wenn man nach der linken Hand gerückt hat. Dann ist die Breite des Grabens ebenso gross als der Abstand zwischen dem ersten Orte von *a* und seinem zweiten Orte, wenn man nach rechts gerückt hat, oder wie der zwischen dem ersten Orte von *a* und dem zweiten Orte von *d* bei Linksrückung, wie in Figur 36 zu sehen ist.



36^{a} figura.

Um die Höhe eines Thurmes auf dem gegenüberliegenden Ufer eines Flusses und zugleich die Breite des Flusses zu messen, gehe man so vor. Auf dem Ufer, auf welchem man sich befindet, richte man ein Instrument auf, wie es *efmng* ist, und zwar in folgender Weise. Die Stange *ef* sei über der Erde von bestimmter Länge. In dem Instrumente selbst seien je zwei Absehen für zwei Alhidaden, nämlich *f* und *g* parallel dem Horizonte befestigt. Man verlängere *gf* in gerader Linie bis an den Thurm *da*; es sei dies die Gerade *gfc*. Die Breite des Flusses sei *ed*, die Höhe des Thurmes *db* oder *da*. Es sei ferner jede der drei Seiten des Instrumentes, nämlich *gn*, *nm* und *mf* in je 12 Punkte getheilt. Dabei ist zu beachten, weil zwei Mittelpunkte im vorliegenden Instrumente angenommen sind wegen der zwei zu messenden Gegenstände, von denen einer liegt, der andere auf dem liegenden senkrecht errichtet ist, dass dieserhalb das Verhältnis der Schatten sich ändert. Deshalb werden die drei Seiten des Instrumentes verschieden benannt. Denn will man *ed* messen, so werden die Theile der Linie *gn* Punkte des

ponto n, e firano scritte de fora. Ma per mesurare da la parte nm firano diti ponti de ombra drita, e la parte de mf ponti de umbra versa, e termina el 12 in ponto m, e firano scritti de dentro. Adunque a volere mesurare ed sia lochio apreso al lado gn in ponto h menada la linea hfd. Poy moltiplica fe per gf, e quelo, che ne viene, partilo per gh, et aueray ed. Ma se lo ochio fia tra n et m in ponto l, alora multiplica ef per ml, e quelo, che ne viene partilo per gn, et aueray ek. Ma a volere mesurare db menada la linea gb, la quale secha la linea fm in ponto i, e meso lo ochio apreso ad g, alora multiplica gc per if, e quelo, che ne viene partilo per fm, et aueray eb et anche db. Ma se la linea vissuale chadesse tra m e n in ponto l, alora multiplica gc per gn, e quelo, che ne viene, partilo per nl, et haueray ca, e aduncha da, como
15' apare in la 37^a figura. |

Secundus Tractatus.

Per la dio gratia inpaza ouero fornida la pratica del mesurare la longeza, seguita la praticha del mesurare la largeza ouero le superfitie. Ma perche el e de doe generatione superficie, perche alchuna superficie e diforme, cioe che non ha linie dritte ny circhulare, ma parte drite e parte curve inregularmente, como se atroua in di colli, e alchuna e uniforme, la quale a linie drite ouero circhulare: ne la prima non se ne dica niente, ma de la uniforme, la quale ha due parte, perche alchuna e rectilinea, e alchuna e curvilinea. Prima se dira de la rectilinea, e py de la curuilinea. Ma ad auere noticia de la prima, questo bisogna intendere innanci, che una figura ouero superficie rectilinea, la quale abia piu cha tri anguli, cioe cantoni, se de resoluere in tanti trianguli, como ley sera in lordine de le figure. E la *prima* figura rectilinea e lo *triangulo;* la *seconda* e lo *quadrangulo;* e la *terza* e lo *pentagono;* e la *quarta* e lo *exagono;* e la *quinta* e lo *eptagono,* como tu vidi qui. La necessitade de questa resolutione e, perche la quantitade de quelle superficie le sono per le quantitade de li trianguli, in di quali fino resolunde, perche lo triangulo e regula de quelle, perche e la prima

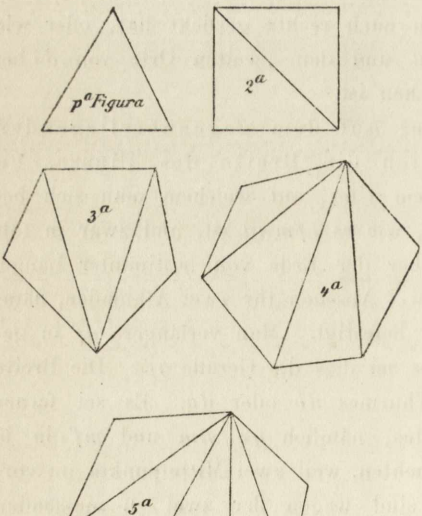


Fig. 1—5.

rechten Schattens genannt und die Theile von *nm* Punkte des verkehrten Schattens und die Zahl 12 endigt im Punkte *n*, die Zahlen werden aussen herum geschrieben. Zur Messung von *da* heissen aber die Theile von *nm* Punkte des rechten Schattens und die Theile von *mf* Punkte des verkehrten Schattens, und die Zahl 12 endigt im Punkte *m*; diese Zahlen werden innerhalb geschrieben. Will man jetzt *ed* messen, so befinde sich das Auge in der Seite *gn* im Punkte *h*, in dem die Sehlinie *hfd* gezogen ist. Nun multipliciere man *fc* mit *gf* und theile das Produkt durch *gh*, so erhält man *ed*. Befindet sich aber das Auge zwischen *n* und *m* im Punkte *l*, so multipliciere man *ef* mit *ml* und theile das Ergebnis durch *gn*, so erhält man *ek*. Will man aber *db* messen, so ziehe man die Gerade *gb*, welche die Gerade *fm* im Punkte *i* schneide, und bringe das Auge in *g*. Dann multipliciere man *gc* mit *if* und theile das Produkt durch *fm*, so erhält man *cb*, also auch *db*. Fällt aber die Gesichtslinie zwischen *n* und *m* in den Punkt *l*, so multipliciere man *gc* mit *gn* und theile das, was herauskommt, durch *nl*, so findet man *ca* und folglich auch *da*, wie in der Figur 37 zu sehen ist.

Zweiter Traktat.

Nachdem so durch Gottes Gnade die Anweisung, Längen zu messen, beendigt oder vollendet ist, folgt nun die Anweisung die Breite oder die Flächen zu messen. Da aber die Flächen von zweierlei Art sind, nämlich eine Fläche ist ungleichförmig, das heisst sie besitzt weder gerade noch kreisförmige Linien, sondern zum Theil gerade zum Theil krumme in unregelmässiger Weise, wie man sie auf Bergen findet, die andere ist gleichförmig; sie hat entweder gerade Linien oder kreisförmige zur Begrenzung: deshalb werde ich von der ersten Art nichts sagen, sondern allein von den gleichförmigen. Diese zerfallen in zwei Arten, die eine ist geradlinig, die andere krummlinig. Zuerst wird von der geradlinigen, dann von der krummlinigen die Rede sein. Um aber zur Kenntnis der ersten zu gelangen, muss man zunächst folgendes wissen, dass nämlich jede geradlinige Figur oder Fläche, die mehr als drei Winkel, das sind Ecken, besitzt, in soviel Dreiecke zerlegt werden muss, als ihre Ordnungszahl in der Reihe der Figuren ist. Die *erste* geradlinige Figur ist das *Dreieck*, die *zweite* ist das *Viereck*, die *dritte* das *Fünfeck*, die *vierte* das *Sechseck*, und die *fünfte* das *Siebeneck*, wie man hier sehen kann. Die Nothwendigkeit dieser Zerlegung folgt daraus, dass der Inhalt dieser Flächen sich aus dem Inhalte der Dreiecke ergiebt, in welche sie zerlegt werden, denn das Dreieck ist die Regel für sie, da es die erste geradlinige Figur ist. Dadurch wird die figura rectilinea. E per questo la opera se aleuiara in due conclusione. La prima sera de la quantita del triangulo, la seconda sera de la sciencia de la azonzimento de li triangoli in sema, acioche se sapia tute le altre superficie.

Prima conclusio. Quando a la prima conclusione e da fir data la dotrina per atrouare la quantita de la perpendichulare da fir menada in del triangulo da uno deli anguli al lado oposito. La

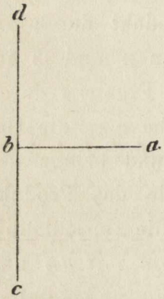


Fig. 6.

quale perpendichulare cosi fira manifesta, perzo che el triangulo proposito ouero che le rectiangulo, ouero che le ambligonio, ouero che le oxigonio. El primo ha uno angulo recto, el secondo ha uno angulo obtus, cioe mazore che recto, el terzo ha tutti li anguli hachuti, cioe menori che recti. Lo angulo recto e fatto de la linea recta chazando sopra laltera linea retta, quando e le aqualiata al so paro, como e manifesto, quando la linea *ab* chade sopra la linea *dbc*, siche lo angulo *dba* sia equale a lo angulo *cba* (Fig. 6).

Se adunque el triangulo sera rectiangulo, da lo angulo retto mena la perpendichulare al lado oposito, come he in del triangulo *abc*. Perche lo angulo *abc* he recto, impercio da lo an-

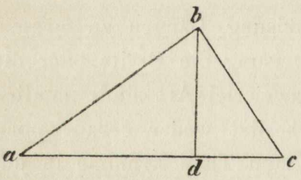


Fig. 7.

gulo *b* mena la linea *bd* perpendichular sopra la linea *ac*, alora multiplica *bc* per si medesimo, e quelo, che ne viene, partilo per *ac*, et aueray la linea *dc*. Lo quadrato de la quale tralo del quadrato de la linea *bc*, et
16' del | rimanente la radix quadrata sera *bd*, la quale si circhava (Fig. 7).

Ma se lo triangulo sera ambligonio, si como el triangulo *afg*, de lo quale lo angulo *fag* sie obtuso, prima mena la linea *fa* ultra *a*, siche dal ponto *g* fora del triangulo se poss

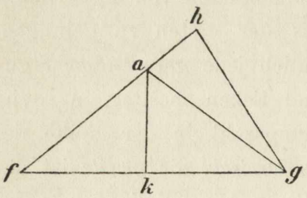


Fig. 8.

menare una linea perpendichulare sopra la linea *fa* producta, la qual perpendichulare sia *hg* sopra *fah*, siche lo angulo *fhg* fora del triangulo sia recto. Anchora dal ponto *a* obtuso mena una linea *ak* perpendiculare sopra la linea *fg*. Alora tuti doi li quadrati de *fa* e de *ag* trali de quadrato de *fg*, e la mitade del rimanente partilo per la linea *fa*, et haueray *ah*. Poy multiplica *fa* per *fh*, e quelo, che ne viene, partilo per *fg*, et haueray *fk*, de la quale el quadrato trallo del quadrato de *fa*, e de lo rimanente la radix quadrata sera *ak*, el qual tu cerchi (Fig. 8).[1])

ganze Betrachtung in zwei Aufgaben gelöst werden. Die erste wird den Inhalt des Dreiecks behandeln, die zweite beschäftigt sich mit der Kenntnis des Zusammenfassens der Dreiecke, um dadurch alle andern Flächen finden zu können.

Erste Aufgabe. Was die erste Aufgabe betrifft, so muss zuerst gezeigt werden, wie man die Länge des Lothes finden kann, das man in einem Dreiecke von einer Ecke aus auf die gegenüberliegende Seite fällen kann. Dieses Loth lässt sich so bestimmen, je nachdem das vorgelegte Dreieck rechtwinklig oder stumpfwinklig oder spitzwinklig ist. Das erste besitzt einen rechten Winkel, das zweite einen stumpfen Winkel, d. h. grösser als ein rechter; das dritte hat alle seine Winkel spitz, d. h. kleiner als rechte. Ein rechter Winkel wird von einer geraden Linie gebildet, welche auf eine andere Gerade fällt, wenn er seinem Nebenwinkel gleich ist, wie es z. B. deutlich ist, wenn die Gerade ab (Fig. 6) auf die Gerade dbc so fällt, dass der Winkel dba gleich dem Winkel cba ist.

Ist nun das Dreieck rechtwinklig, so ziehe man von dem rechten Winkel die Höhe nach der Gegenseite, wie es im Dreiecke abc geschehen ist (Fig. 7). Da dort der Winkel abc ein rechter ist, so ziehe man von dem Punkte b die Gerade bd senkrecht auf die Gerade ac, dann multipliciere man die bc mit sich selbst und theile das Ergebnis durch ac, so erhält man die Gerade dc. Jetzt ziehe man ihr Quadrat von dem Quadrate der Geraden bc ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes die bd, welche gesucht wurde.

Ist aber das Dreieck stumpfwinklig, wie es das Dreieck afg ist, dessen Winkel fag stumpf sei, so verlängere man zunächst die Gerade fa über a hinaus, so dass man vom Punkte g aus ausserhalb des Dreiecks eine senkrechte Gerade auf die verlängerte Gerade fa fällen kann. Dieses Loth sei hg auf fah, so dass also der Winkel fhg ausserhalb des Dreiecks ein rechter ist. Auch von der Spitze a des stumpfen Winkels ziehe man die Gerade ak senkrecht auf die Gerade fg. Nun subtrahiere man die beiden Quadrate der Geraden fa und ag von dem Quadrate der fg und dividiere die Hälfte des Restes durch die Gerade fa, so erhält man ah. Darauf multipliciere man fa mit fh und das Ergebnis theile man durch fg, so erhält man fk. Das Quadrat davon subtrahiere man von dem Quadrate der fa, so ist die Quadratwurzel des Restes die ak, die man sucht (Fig. 8).[1])

1) Hier ist auf umständlichem Wege $fk = \frac{fa^2 + fg^2 - ag^2}{2fg}$ gefunden. Dass auch gh als Höhe des Dreiecks angesehen werden kann, scheint ihm nicht zum Bewusstsein gekommen zu sein, so wenig als für das rechtwinklige Dreieck die Benutzung einer Kathete als Höhe.

Ma se lo triangulo e oxigonio, como he el triangulo *hnp*, de qual angulo tu voy, menare la perpendichulare al lado oposito, si como he *hd* al lado *np*. Alora lo quadrato de uno de lo doy ladi, cioe *hp*, tralo de tutti doy le quadrati de li altri ladi, e del remanente la mitade partila per la linea, sopra la quale he la perpendichulare, cioe per la linea *np*, et aueray la linea *nd*, de la quale
17 el quadrato tralo del quadrato | de *nh*, e de lo rimanente la radix quadrata sera la linea *hd*, la quale se circha. Ma sel quadrato *hn* fosse stato trato del quadrato *hp* et de *np* azonti in sema, e del rimanente la mitade fosse partita per *np*, haueressi hauuto *dp* (Fig. 9).

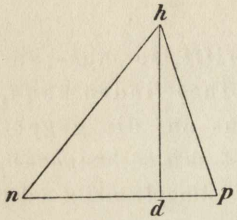


Fig. 9.

Ele aduncha manifesto al geometra, queste cosse esser ditte del triangolo, chi ha tutti li ladi inequali, el quale triangulo se chiama ascalenon, ouero píu longo da una de le parte cha le oltre doe, ouero triangolo gradatum. Ma se tuti li ladi del triangulo fusseno equali, ouero doy de lo ladi precisamente, piu facilmente se trouarebe la perpendichulare, percioche nel triangulo equilatero el quale etiamdio se chiama equicris ouero oxigonio, si como he nel triangolo *abc*, la perpendicholare *ad* partisse per 2 parte equale el lado *bc*, et per consequente la linea *dc* sie manifesta. De la quale el quadrato tralo del quadrato *ac*, e de lo rimanente la radix quadrata sera *ad* (Fig. 10).

Ma in del triangolo de doy ladi equali, el quale se chiama isoceles, similmente la perpendichulare menada al lado inequale partisse quelo lado per mezo. Adoncha el quadrato de una mitade, cioe *gh*, tralo
17′ del quadrato *gd*, e del rimanente la radix | quadrata sera *dh*, el qual e, che tu cerchi (Fig. 11—13).

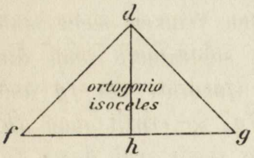


Fig. 11.

Fig. 12.

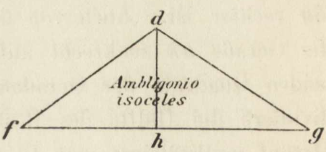


Fig. 13.

Aduncha hauuta la perpendichulare multiplica la soa mitade per el lado, sopra el qualle ela chade, et aueray la superficie ouero larea del triangulo, la qual cossa dice la prima conclusione.

Secundo conclusio. La secunda conclusione si se fa. Azunzi le quantitade zia atrouate de doy ouero de tri trianguli, ouero quanti tu voy, insieme, et haueray quello, che tu circhi.

Ist aber das Dreieck spitzwinklig, wie es das Dreieck *hnp* ist, so ziehe man von einer beliebigen Ecke das Loth nach der Gegenseite, wie etwa *hd* es für die Seite *np* ist. Darauf subtrahiere man das Quadrat der einen der beiden Seiten, etwa von *hp*, von der Summe der Quadrate der andern Seiten und theile die Hälfte des Restes durch die Gerade, auf der das Loth steht, also durch die Gerade *np*, so erhält man die Gerade *nd*. Ihr Quadrat ziehe man von dem Quadrate der *nh* ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes die Gerade *hd*, welche man sucht. Wenn aber das Quadrat der *hn* von der Summe der Quadrate der *hp* und *np* abgezogen würde und die Hälfte des Restes durch *np* dividiert, so würde man die *dp* erhalten (Fig. 9).

Dem Geometriekundigen ist nun klar, dass das Vorhergehende von solchen Dreiecken gesagt ist, die lauter ungleiche Seiten besitzen. Ein solches Dreieck heisst hinkend (*scalenon*), oder auf einer Seite länger als auf der andern, oder stufenförmig (*gradatum*). Wenn aber alle Seiten eines Dreiecks einander genau gleich sind, oder zwei von ihnen, so kann man die Höhe viel leichter bestimmen. Denn in dem gleichseitigen Dreiecke, das auch *equicris* oder spitzwinklig heisst, wie es sich z. B. im Dreiecke *abc* verhält, theilt dis Höhe *ad* die Seite *bc* in zwei gleiche Theile, und es ist daher die Länge *dc* ohne weiteres bekannt. Nun ziehe man ihr Quadrat von dem Quadrate der *ac* ab, so ist die Quadratwurzel des Restes die *ad* (Fig. 10).

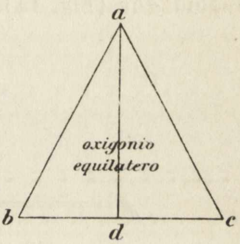


Fig. 10.

In dem Dreiecke mit zwei gleichen Seiten aber, das gleichschenklig genannt wird, halbiert in ähnlicher Weise die nach der ungleichen Seite geführte Höhe diese Seite. Man ziehe also ebenfalls das Quadrat einer Hälfte, also von *gh*, von dem Quadrate der *gd* ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes die *db*, die man sucht (Fig. 11—13).

Nachdem man so die Höhe erhalten hat, multipliciere man ihre Hälfte mit der Seite, auf welcher sie steht, so erhält man dadurch die Fläche oder den Inhalt des Dreiecks, und das heisst die erste Aufgabe.

Zweite Aufgabe. Die zweite Aufgabe wird so gelöst. Man addiert die schon gefundenen Inhalte zweier oder dreier Dreiecke, oder von so vielen, als man will, zusammen, und erhält so das, was man sucht.

Per altra via puo fir demostrada geometricamente. Cioe, prima a cescheduno triangulo za cognosuto circha el quadrato, che el sia equale, da poy a doy quadrati de doy trianguli circha uno quadrato che gesia equale a li doy triangulli, e se a questo quadrato agiugneray el quadrato del terzo triangulo, atroueray uno quadrato equale a li tri trianguli, e cossi de li altri. Adoncha questa operatione requere due cosse.

La prima he, atrouare el quadrato equale al triangulo, che se fa per questo modo. Agiugne in dritto la mitade de la perpendichulare atrouata a lo lado sopra el quale essa perpendichulare chade, e sopra la mitade de questo cunposito mette el centro e descriue uno mezo circhulo tochando la estremitade de la linea cumposita. Posa dal ponto del cunzunzimento de quale due linie driza la perpendichulare in fina a la cir-
18 cumferencia, la qual perpendichulare multiplicada | in si medesima da lo quadrato equale a lo triangulo proponudo. Como he proponudo el triangulo *abe* (Fig. 14), in del quale la perpendichulare *bc*, de la qual la

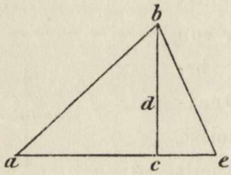


Fig. 14.

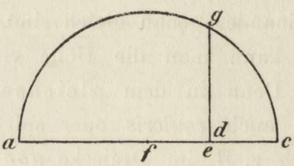


Fig. 15.

mita *dc* e da fir multiplicada in *ae*, acioche se abia la quantita del triangulo proponudo. Zonze *ae* cum *dc*, e tira *aedc* tuta una linea (Fig. 15), si che medesimo ponte sia *e*, *d*. Alora parti tuta la linea *ac* per mezo in ponte *f*, in del quale mesa la ponta del sexto se descriua mezo uno circhio *agc*. Posa dal ponto de la coniuncione de tute doe le linee, cioe dal ponto *e*, *d* fiza, trata una perpendichulare *eg* in fina a la circunferentia del circhulo. Alora questo perpendichulare sia lo lado del quadrato, chi se circhaua, siche el quadrato fatto per la multiplicatione de quela perpendichulare in si medesima sie equale al triangulo proponudo.[1])

La secunda cossa, la quale requere questa operatione, sie a sauere azonzere el quadrato a lo quadrato. La qual cossa facilmente se fara, quando tu haueray doe ladi de doy quadrati, si como te ho insegnato de uno. Adoncha queli doy quadrati azonzeli per sie fatto modo, che li faceno uno angulo retto. E allora el terza lado oposita a

1) Hier fügt der lateinische Text hinzu: Cuius perpendicularis notitiam habebis in numeris, si quadratum suum fuerit signatum numero quadrato, aliter vero non. Ut si linea *ad* esset 9, *dc* 4, linea *ge* erit 6.

Auf anderem Wege kann man die Lösung geometrisch darstellen. Zunächst sucht man nämlich zu jedem schon gefundenen Dreiecke das ihm gleiche Quadrat, darauf bestimmt man zu den zwei Quadraten von zwei Dreiecken ein Quadrat, das diesen beiden Dreiecken gleich ist. Fügt man dann zu diesem Quadrate das Quadrat des dritten Dreiecks hinzu, so findet man ein Quadrat, das den drei Dreiecken gleich ist, und so macht man es weiter. Dieses Verfahren verlangt also zweierlei.

Das erste ist, ein Quadrat zu finden, das einem Dreiecke gleich ist, und das macht man folgendermaassen. Man füge die Hälfte der gefundenen Höhe in gerader Linie der Seite hinzu, auf welcher sie senkrecht steht, und den Halbierungspunkt dieser zusammengesetzten Geraden mache man zum Mittelpunkte und beschreibe einen Halbkreis, der durch die beiden Endpunkte der zusammengesetzten Geraden geht. Dann errichte man im Vereinigungspunkte der beiden Geraden das Loth bis zum Kreisumfange, so ist das Loth mit sich selbst vervielfacht gleich dem vorgelegten Dreieck. Ist z. B. das Dreieck *abe* (Fig. 14) gegeben, in welchem die Höhe *bc* heisse, dann ist ihre Hälfte *dc* mit *ae* zu multiplicieren, um den Inhalt des gegebenen Dreiecks zu erhalten. Man verbinde *ae* mit *dc* und ziehe also die *aedc* als eine einzige gerade Linie, so dass *e* und *d* ein und derselbe Punkt sind. Nun halbiere man die ganze Gerade *ac* im Punkte *f*, setze in denselben die Spitze des Zirkels und beschreibe den Halbkreis *agc*. Dann errichte man in dem gemeinsamen Punkte der beiden Geraden, nämlich in dem festen Punkte *e*, *d*, das Loth *eg* bis zum Kreisumfange, dann ist dieses Loth die Seite des Quadrates, das man sucht, so dass also das durch Multiplikation dieses Lothes mit sich selbst entstehende Quadrat dem vorgelegten Dreiecke gleich ist (Fig. 15).[1])

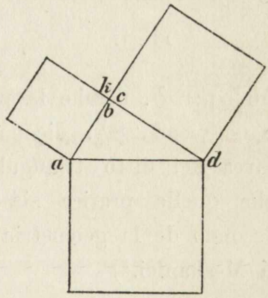


Fig. 16.

Das Zweite, was unsere Aufgabe erfordert, besteht in der Kenntnis, ein Quadrat mit einem andern zu vereinigen. Diese Aufgabe ist leicht zu lösen, wenn man die beiden Seiten der beiden Quadrate gefunden hat, wie ich es eben für eins gezeigt habe. Diese beiden Quadrate lege man nun so aneinander, dass sie einen rechten Winkel bilden, dann ist die dritte Seite, welche diesem Winkel

1) Die Grösse dieses Lothes als Zahl erhält man nur dann, wenn das Quadrat als eine Quadratzahl herauskommt, auf andere Weise nicht. Wenn z. B. die Gerade $ad = 9$, $dc = 4$ wäre, so würde die Gerade $ge = 6$ werden. (Zusatz des lateinischen Textes.)

questo angulo fara el quadrato, el quale a queli doy. Exempli gratia siando proponudi doy ladi di doy quadrati *ab* et *cd*, azonzi queli a langulo *k* drito. Alora la linea *ad* fa el quadrato equale ali preditti doy (Fig. 16).

18′ Ma el e da stendere queste cosse | za ditte facilmente, como he ditto, fir tratade, quando li ladi di trianguli, in di quali le altre superficie se resolue, serano noti. Ma non tuti, inanzi pochi sino noti non solamente in li figure rectilinie inregulare, ma etiandio in le regulari, per la qual cosa seguita non essere molto da estenderse in questo parlare. Noma che per le regulari inscriptibili in del circhio in poy usare la tabula de le corde e delle archi. E per li altri resolue in quanti trianguli tu poy, prendando la propinquitade de la certeza.

Ivi e ada notare, che in alcune libro de mechanici fi messo lo atrouamento de la quantita del triangulo altramente per si fatto modo.[1]) Prima multiplica la mitade de la somma de tuti li ladi azonti in sema per la diferentia di uno lado e de la mita de la ditta soma. Item secondo multiplica quello, che ne venuto, per la diferentia del secondo lado e de la mita de la ditta somma. Item terzo multiplica quello, che ne venuto, per la diferentia de lo terzo lado e de la mita de la ditta somma, alora la radix quadrata de quello, che ne venuto, sera larea del ditto triangulo. Exempli gratia in del triangulo *abc* (Fig. 17) sia *ab* 3, *ac* 4, *bc* 6. Perche la somma de tutti li ladi sie 13; impercio la sua mita, cioe $6\frac{1}{2}$, multiplichela per $3\frac{1}{2}$, perche la mitade auanza lo
19 lado *ab* per $3\frac{1}{2}$, ne viene $22\frac{3}{4}$. Adunque | multiplica $22\frac{3}{4}$ per $2\frac{1}{2}$, perche la mitade auanza lo lado *ac* per $2\frac{1}{2}$, ne viene $56\frac{7}{8}$; anchora multiplica $56\frac{7}{8}$ per $\frac{1}{2}$, perche la predita mitade de li ladi auanza lo lado *bc* per $\frac{1}{2}$, e ne viene $28\frac{7}{16}$: dicono adunche questi, che la radix quadrata de $28\frac{7}{16}$ e larea del ditto triangulo. Dico, che le ele vero, cunzosiacosa adunca, che quella pratica sia piu lezera cha questa, che jo ho messa per lo secondo de la geometria de EUCHLIDES, impercio e da usare la praticha de li Mechanici.[2])

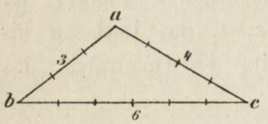


Fig. 17.

---

1) Das hier gemeinte *Buch über Mechanik* ist der *Liber de ponderibus* des JORDANUS NEMORARIUS, an dessen Ende, merkwürdig genug, der Beweis des HERON'schen Lehrsatzes vom Dreiecksinhalte angeschlossen ist.

2) Hier steht im lateinischen Texte so: Dico ego, quod hoc est verum. Nam, cum radix quadrata 28 cum $\frac{7}{16}$ fit 5 integra $19^{m}\ 57^{2a}\ 38^{3a}$, quae sunt 5 integra et minus quam $\frac{1}{3}$, illa est quantitas prefati trianguli, quod verum est secundum practicam demonstrativam suprapositam pro triangulo obtuso. Quia, cum duo

gegenüberliegt, die Seite desjenigen Quadrates, das beiden zusammen gleich ist. Sind z. B. die beiden Seiten ab und cd zweier Quadrate gegeben, so lege man sie rechtwinklig aneinander in k, dann ist das Quadrat über der Geraden ad gleich den beiden vorgenannten (Fig. 16).

Es ist aber zu beachten, dass die eben auseinandergesetzten Sachen leicht zu behandeln sind, wenn die Seiten der Dreiecke, in welche die andern Flächen sich zerlegen lassen, bekannt sind. Aber es sind nicht alle, vielmehr sehr wenige bekannt, nicht nur in den unregelmässigen geradlinigen Figuren, sondern selbst in den regulären, folglich kann man sich darüber nicht viel weiter verbreiten, ausser dass man für die regulären in einen Kreis einschreibbaren Figuren sich der Tafel der Sehnen und Bogen bedienen kann. Die andern aber zerlege man in soviel Dreiecke als man kann, indem man sich der Genauigkeit soweit als möglich nähert.

Es ist noch zu bemerken, dass in einem Buche über Mechanik die Bestimmung des Inhaltes eines Dreiecks anders, und zwar in folgender Weise gelehrt wird.[1]) Zunächst multipliciere man die Hälfte aller Seiten zusammengenommen mit der Differenz zwischen einer Seite und der Hälfte genannter Summe; zweitens multipliciere man dieses Produkt mit der Differenz zwischen der zweiten Seite und der Hälfte genannter Summe; ebenso multipliciere man dieses Ergebnis mit der Differenz zwischen der dritten Seite und der Hälfte genannter Summe, dann ist die Quadratwurzel des hieraus entstehenden Produktes der Inhalt des gegebenen Dreiecks. Es sei z. B. ein Dreieck abc gegeben, es sei $ab = 3$, $ac = 4$, $bc = 6$. Da also die Summe aller Seiten 13 beträgt, so multipliciere man die Hälfte davon, das ist $6\frac{1}{2}$, mit $3\frac{1}{2}$, da diese Hälfte die Seite ab um $3\frac{1}{2}$ übertrifft; es entsteht daraus $22\frac{3}{4}$. Nun multipliciere man $22\frac{3}{4}$ mit $2\frac{1}{2}$, weil die halbe Summe die Seite ac in $2\frac{1}{2}$ übertrifft, so entsteht $56\frac{7}{8}$; nochmals multipliciere man $56\frac{7}{8}$ mit $\frac{1}{2}$, da die obige halbe Summe der Seiten die Seite bc in $\frac{1}{2}$ übertrifft; es kommt $28\frac{7}{16}$. Nun sagen also jene, dass die Quadratwurzel von $28\frac{7}{16}$ den Inhalt des genannten Dreiecks ergiebt. Ich sage, dass das richtig ist. Da nun dieses Verfahren viel leichter als jenes ist, das ich nach dem zweiten Buche der Geometrie des Euklides gezeigt habe, so muss man also die Methode der Mechaniker benutzen.[2])

---

2) *Übersetzung des lateinischen Textes:* Ich sage, dass das richtig ist. Denn da die Quadratwurzel von $28\frac{7}{16}$ gleich $5^g 19' 57'' 38'''$ ist, das ist 5 Ganze und etwas weniger als $\frac{1}{3}$, so ist das der Inhalt genannten Dreiecks, und das ist auch nach der oben für ein stumpfwinkliges Dreieck auseinandergesetzten Beweismethode richtig. Nimmt man nämlich, da die beiden Quadrate über ac und ab

Secunda pars secundi tractatus.

Mi resta a dire de circhulo, per lo quale se mete 4 conclusione.

Prima conclusio. La prima, quando per lo diametro tu voray la circunferentia, multiplica el diametro per $3\frac{1}{7}$ parte del diametro. Exempli gratia perche el diametro del circhio *ai* sie 7 parte, quando tu lo multiplicharay per $3\frac{1}{7}$, aueray la circunferencia 22 parte (Fig. 18).[1])

Secunda conclusio. Quando voray la capacitade del circhio ouero el spacio infra la circunferentia, el quale si chiama la area, multiplica la mita del diametro in la mita de la circunferentia. Como he in lo exemplo proposito, multiplica 11 per $3\frac{1}{2}$, ed aueray $38\frac{1}{2}$, e tanto cuntiene el predito circhio de li quadrati fatti de le parte del diametro, si como e manifesta in questa figura (Fig. 19).[2])

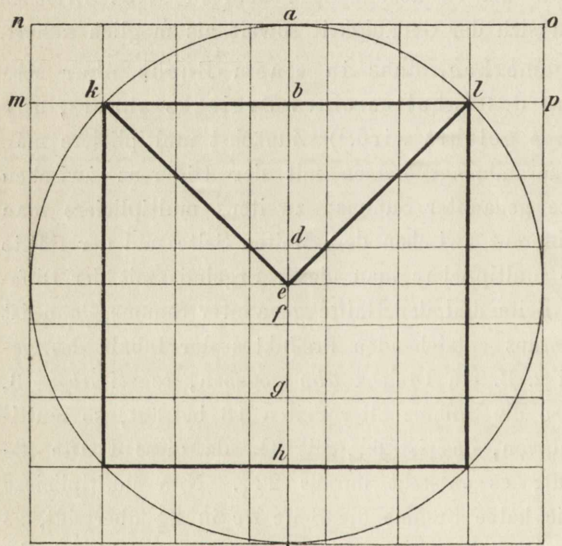


Fig. 19.

Per questo se cognose in quanto lo quadrato fatto del diametro auanza il circhio, perche el ditto, quadrato he 49, el circhio he $38\frac{1}{2}$, aduncha e lo $10\frac{1}{2}$.[3])

Ouero atrouaray
19′ larea | del circhio per questo modo piu facilmente, cioe multiplicaray el quadrato de la mita del diametro per $3\frac{1}{7}$.[4])

quadrata *ac* et *ab* simul iuncta sint 25, si illa dempta fuerint de quadrato *bc*, quod est 36, remanent 11. Cum medietatem diviserimus per lineam *ac*, videlicet 5 cum $\frac{1}{2}$ per 4, et fient 1 et $\frac{3}{8}$, quod est linea *da*, et sic linea *dc* est 5 et $\frac{3}{8}$. Quam si multiplicaverimus per *ac*, que est 4, fient 21 cum $\frac{1}{2}$, que si diviserimus per lineam *bc*, que est 6, exiet in numero quotientis 3 et $\frac{7}{12}$, quod est linea *ec*, cuius quadratum, quod est 12 et $\frac{121}{144}$, cum demptus fuerit de quadrato *ac*, quod est 16, remanebit quadratum linee *ae*, quod est $3\frac{23}{144}$, cuius radix quadrata est 1 int. 46^{m} 39^{2a} 12^{3a} 36^{4a}, quod est minus quam 1 e t $\frac{4}{5}$, quantitas videlicet linee *ac*. Cuius medietatem, que est 0 in integris 53^{ma} 19^{2a} 36^{3a} 18^{4a}, cum multiplicaverimus per 6, videlicet per lineam *bc*, fiet ut prius, ut dici tur in libro mechanicorum, 5 int. 19^{ma} 57^{2a} 38^{3a}, quod est intentum. Cum ergo practi ca illa sit levior quam ista, quam posui ex secundo geometrie Euclidis, ideo utend um est practica mechanicorum.

Zweiter Theil des zweiten Traktates.

Es bleibt mir noch übrig vom Kreise zu sprechen. Für ihn werde ich vier Aufgaben stellen.

Erste Aufgabe. Will man zuerst aus dem Durchmesser den Umfang erhalten, so vervielfache man den Durchmesser mit $3\frac{1}{7}$ des Durchmessers. Enthält z. B. der Durchmesser des Kreises ai 7 Theile, so erhält man durch Multiplikation desselbem mit $3\frac{1}{7}$ den Umfang zu 22 Theilen (Fig. 18).[1])

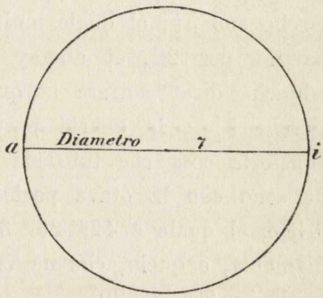


Fig. 18.

Zweite Aufgabe. Wünscht man die Fläche des Kreises oder den Raum zu finden innerhalb des Umfanges, den man Kreisinhalt nennt, so multipliciere man den Halbmesser mit der Hälfte des Umfangs. In dem vorgelegten Beispiele also multipliciere man 11 mit $3\frac{1}{2}$, dann erhält man $38\frac{1}{2}$, und soviel enthält der genannte Kreis von den Quadraten, welche über den einzelnen Theilen des Durchmessers gezeichnet sind, wie in nebenstehender Figur klar ist (Fig. 19).[2])

Daraus ersieht man auch, um wieviel das über dem Durchmesser errichtete Quadrat den Kreis übertrifft. Da dieses Quadrat 49 ist, der Kreis $38\frac{1}{2}$, so ist der Überschuss gleich $10\frac{1}{2}$.[3])

Oder man findet den Kreisinhalt viel leichter auf folgende Weise. Man multipliciere nämlich das Quadrat des Halbmessers mit $3\frac{1}{7}$.[4])

---

zusammen 25 betragen, dieses von dem Quadrate der bc, das gleich 36 ist, weg, so bleiben 11. Dividiert man hiervon die Hälfte durch die Gerade ac, nämlich $5\frac{1}{2}$ durch 4, so entsteht $1\frac{3}{8}$, das ist die Gerade da, und folglich ist die Gerade $dc = 5\frac{3}{8}$. Multiplicieren wir diese mit ac, das ist mit 4, so erhalten wir $21\frac{1}{2}$, und wenn dieses durch die Gerade bc, das ist durch 6, dividiert wird, so ergiebt sich als Quotient $3\frac{7}{12}$, das ist die Gerade ec. Nimmt man ihr Quadrat, das $12\frac{121}{144}$ beträgt, von dem Quadrate der ac, das ist 16, weg, so bleibt als Quadrat der Geraden ae $3\frac{23}{144}$ übrig. Die Quadratwurzel davon ist $1^g 46' 39'' 12''' 36''''$, das ist weniger als $1\frac{4}{5}$, nämlich der Betrag der Geraden ac. Ihre Hälfte, nämlich $0^g 53' 19'' 36''' 18''''$, multiplicieren wir mit 6, das ist mit der Geraden bc, so entsteht, wie oben nach dem Buche der Mechaniker gesagt ist, $5^g 19' 57'' 38'''$, was verlangt wurde. Da also jene Methode viel leichter ist, als diejenige, welche ich nach dem zweiten Buche der Geometrie Euklid's gezeigt habe, so muss man also die Methode der Mechaniker benutzen.

1) $U = 3\frac{1}{7}d = d\pi.$ 2) $J = \frac{d}{2} \cdot \frac{U}{2}.$

3) $d^2 - J = 48 - 38\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}.$ 4) $J = r^2\pi.$

Tertia conclusio. Quando voray sapere la quantita de la portione minore cha mezo el circhio, multiplica lo archo de la portione per la quantitade de larea de tuto el circhio, e quelo, che ne vene, partilo per la quantitade de tutta la circunferentia, e da lo numero, che ne vegnera per la diuisione, remoue la quantita del triangulo fatto de duy semidiametri del ditto circhio e de la corda de la portione.[1] ¡Verbi gratia sia la portione, de la quale tu voy sapere la quantita, *kal* (Fig. 19), sia larcho suo $5\frac{1}{2}$; el quale multiplica per $38\frac{1}{2}$, e ne vegnera $211\frac{3}{4}$, el quale partilo per 22, et aueray $9^{gr}\,37^{m}\,30^{2a}$, el quale serualo. Da questo aduncha diray sotrare la quantita del triangulo, el quale te insegnato si. Perche $5\frac{1}{2}$ e la quarta parte del circhio, adunque $2\frac{3}{4}$ sie lotaua parte, cunciosia cosa che tuto sia 22 in el proposito. Inpercio intra la tabula de seno cun la otava parte de 360, cioe cun 45^{gr}, e tolge el sino suo dritto, el quale e $42^{gr}\,25^{m}\,35^{2a}$. El qual multiplica per $3\frac{1}{2}$, che le $\frac{1}{2}$ del diametro, e quelo, che ne vene, partilo per 60, et aueray la linia *bk*, la quale he $2^{gr}\,28^{m}\,20^{2a}$. E perche in questo chaso la linea *eb* e equale a la linea *bk*, inpercio aueray la linea *eb*, la quale e perpendichulare in del triangulo. Multiplica adunque la linea *bk* per la linea *be*, ed aueray
20 la quantitade del triangulo, | che circhato, secondo la dotrina de la prima conclusione de la parte precedente, la qual quantita sie $6^{gr}\,7^{m}\,32^{2e}$. La quale trala de quelo, che tu seruasse, cioe de $9^{gr}\,37^{m}\,30^{2e}$, et rimane $3^{gr}\,29^{m}\,58^{2e}$, el quale e la quantita de la portione, che se circhava.

Ma in di altri chasi, quando larcho de la portione non e precisamente la quarta parte del circhio, ma piu ouero meno, alora per hauere la linea *bk* fa cossi, come a zo. ditto. Perche, se larcho de la portione sera 4, a respeto de tuta la circumferentia, la quale e 22, sige cunrespondera $65^{gr}\,27^{m}\,26^{2e}$, quando tuto el circhio sie 360^{gr}, e perche, per volere auere el sino del archo de la porcione del circhio proposito, bisogna cun la mitade de quelo, cioe $65^{gr}\,27^{m}\,16^{2a}$, intrare la tabula di sen, adunque intra in directo $32^{gr}\,43^{m}\,38^{2a}$, e atroueray $32^{gr}\,26^{m}\,17^{2a}$, el qual multiplicalo per $3\frac{1}{2}$ como de prima, e quelo, che ne viene partilo per 60, et aueray la linia *bk*, la qual e $1^{gr}\,53^{m}\,32^{2e}$. Ma per la linia *eb* faray cossi: larcho, cun el quale tu intrasti la tabula di sen, cioe $32^{gr}\,43^{m}\,38^{2e}$, trallo de 90, e cun lo rimanente, el quale e $57^{gr}\,16^{m}\,22^{2e}$, intraray quela medesima tabula di sen, in directo di qualo tu atroueray $50^{gr}\,28^{m}\,29^{2e}$. El quali multiplica per $3\frac{1}{7}$, e quelo, che ne viene, partilo per 60 si como da prima, ed averay la linea *eb*, la quale e $2^{gr}\,56^{m}\,39^{2e}$.

---

1) Kreisabschnitt, dessen Bogen $= 2\alpha$, ist gleich $J \cdot \frac{2\alpha}{360} - r^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Dritte Aufgabe. Will man die Grösse eines Kreisabschnittes kleiner als der Halbkreis finden, so multipliciere man den Bogen des Abschnittes mit der Grösse der ganzen Kreisfläche und dividiere das Produkt durch die Länge des ganzen Umfanges. Von der Zah , welche durch diese Division entsteht, ziehe man dann den Inhalt des Dreiecks ab, das durch die beiden Halbmesser des gegebenen Kreises und durch die Sehne des Abschnittes gebildet wird.[1]) Es sei z. B. der Abschnitt, dessen Grösse man berechnen will, kal (Fig. 19); der zugehörige Bogen sei $5\frac{1}{2}$. Ihn multipliciere man mit $38\frac{1}{2}$, so erhält man $211\frac{3}{4}$. Dieses durch 22 dividiert, ergiebt $9^0 37' 30''$; dies verwahre man. Hiervon, sagte ich, müsse man den Dreiecksinhalt abziehen, den man so erhält. Da $5\frac{1}{2}$ der vierte Theil des Kreises ist, so ist $2\frac{3}{4}$ der achte Theil, weil in unserem Beispiel der ganze Umfang gleich 22 ist. Nun gehe man also mit dem achten Theil von 360^0, das ist mit 45^0 in die Tafel der Sinus ein, und entnehme ihr seinen Sinus rectus. Derselbe ist $42^0 25' 35''$. Ihn multipliciere man mit $3\frac{1}{2}^0$, das ist mit dem Halbmesser, und theile das Ergebnis durch 60, so erhält man die Gerade $bk = 2^0 28' 30''$. Da für unsern Fall die Gerade ab gleich der Geraden bk ist, so haben wir damit die Gerade ab, das ist die Höhe des Dreiecks. Man multipliciere also die Gerade bk mit der Geraden ba, so hat man den Inhalt des Dreiecks, den man sucht, gemäss der Lehre der ersten Aufgabe des vorhergehenden Theiles. Dieser Inhalt ist $6^0 7' 32''$. Nun ziehe man dies von dem Gemerkten ab, nämlich von $9^0 37' 30''$, dann bleiben $3^0 29' 58''$, das ist die Grösse des Abschnittes, den man suchte.

In andern Fällen aber, wenn der Bogen des Abschnittes nicht genau den vierten Theil des Kreises ausmacht, sondern mehr oder weniger, dann gehe man zur Ermittelung der Geraden bk so vor, wie ich es eben gesagt habe. Da, wenn der Bogen des Abschnittes gleich 4 ist, diesem im Verhältnis zum ganzen Umfange, der 22 beträgt, $65^0 27' 26''$ entsprechen, wenn der ganze Kreis 360^0 hat, und da man zur Bestimmung des Sinus des Bogens des vorgelegten Kreisabschnittes mit der Hälfte von $65^0 27' 26''$ in die Sinustafel einzugehen hat, so gehe man in diese mit $32^0 43' 38''$ ein, und findet dann in der nämlichen Zeile $32^0 26' 17''$. Das vervielfache man mit $3\frac{1}{2}$, wie oben, und dividiere das Ergebnis durch 60, so erhält man die Gerade bk, die gleich $1^0 53' 32''$ ist. Zur Bestimmung der Geraden eb aber gehe man so vor. Man ziehe den Bogen, mit welchem man in die Sinustafel einging, also $32^0 43' 38''$ von 90^0 ab, und gehe mit dem Reste, das ist mit $57^0 16' 22''$, wieder in die Sinustafel ein, dann findet man in derselben Zeile $50^0 28' 29''$. Das multipliciere man mit $3\frac{1}{2}$ und theile das Ergebnis durch 60, wie oben, so erhält man die Gerade $eb = 2^0 56'' 39''$. So hat man also gefunden, dass die Gerade $bk = 1^0 53' 32''$ und

E si ay, che la linea *bk* sie $1^{gr}\ 53^{m}\ 32^{2e}$, e la linea *eb* sie $2^{gr}\ 56^{m}\ 39^{2e}$ siando el diametro del circhio 7.

20' E se | tu traray de tuta larea del circhio la quantita de la minore portione za atrouata, rimanera la quantita de la mazore porcione.

Per questo se cognos, in quanta parte el quadrangulo fatto de la sagita de la portione del circhio e del diametro auanza la ditta portione. Ma la sagita el sino verso sie una medesima cosa, e perche in del primo chaso quela sagita, cioe *ab*, sie $1^{gr}\ 1^{m}\ 29^{2e}$, quando la multiplicarey per 7, aueray $7^{gr}\ 10^{m}\ 23^{2e}$, la quantita de tuto el quadrangulo *mnbapo*. Aduncha auanza la ditta portione in $3^{gr}\ 40^{m}\ 45^{2e}$.

Quarta conclusio. Quando tu saperay la proportione de doy circhuli, e tu voray sapere la proportione de li diametri, troua la radix quadrata de la proportione de li ditti circhuli. Exempli gracia se uno de li circhuli auanza laltro in 16, cioe che luno intra nel altro 16 volte, el diametro del mazore auanzara el minore in 4, cioe chel sera mazore 4 volte che laltro per diametro.[1])

Tertius Tractatus.

Mo per lo dio gracia diremo in questo terzo tratado de la mesura di corpi. Ma perche alcuni corpi sono regulari e alcuni inregulari, non diremo alcuna cossa de li segundi, cioe de li inregulari, cunçosiacossa che tra li corpi regulari alchuni siano non uniformalmente regulari, come
21 sono | le veze, e le piramide tronchate e non tronchate, et alchuni siano uniformalmente regulari, come he la spera, e lo chubo, e lo octoedron, e lo duodecedron, e lo incocedron, e la piramide de 4 basi triangulari equilateri, e la columna uniforme rotonda ouero laterata, e altri corpi uniformalmente regolari, io non diro de tuti, ma solamente de li seratili, e de le columne, e de le piramide, e de li chubi, e de le spere.

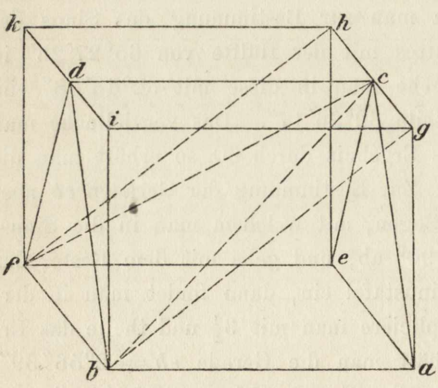


Fig. 1.

Prima conclusio. Quando tu hay lo seratile[2]) *aebfcd* (Fig. 1), del qual la basis quadrangulo *aebf* e la sumitade *cd*, aueray la portione *bfdc*. Compisse lo paralellogromo[3]) *abig*, *efkh*, cunçosiacosa adunque che el seratile parciale, cioe *gac*, *ibd* sia la mitade die Gerade $eb = 2^0\, 56'\, 39''$ ist, wenn der Durchmesser des Kreises 7 beträgt.

Wenn man ferner den Betrag des kleinern Abschnittes, den man eben gefunden hat, von dem ganzen Kreisinhalte wegnimmt, so bleibt der Inhalt des grössern Kreisabschnittes übrig.

Durch diese Betrachtung erkennt man auch, um wieviel das von dem Pfeil des Kreisabschnittes und dem Durchmesser gebildete Rechteck besagten Abschnitt übertrifft. Pfeil und Sinus versus sind ein und dasselbe. Da nun im ersten Beispiele dieser Pfeil, das ist ab, gleich $1^0 1' 29''$ ist, so erhält man durch Multiplikation desselben mit 7 $7^0 10' 23''$, das ist der Gesamtinhalt des Rechtecks *mnbapo*. Es übertrifft also genannten Abschnitt um $3^0 40' 45'$.

Vierte Aufgabe. Kennt man das Verhältnis zweier Kreisinhalte und wünscht das Verhältnis der Durchmesser zu erhalten, so suche man die Quadratwurzel des Verhältnisses genannter Kreisinhalte. Wenn z. B. der eine den andern 16 mal übertrifft, das heisst, wenn der eine in dem andern 16 mal enthalten ist, so übertrifft der Durchmesser des grossen den des kleinern viermal, das heisst, er wird einen viermal so grossen Durchmesser besitzen als der andere.[1])

Dritter Traktat.

Nun werden wir mit Gottes Hilfe in diesem dritten Traktate von der Ausmessung der Körper reden. Da aber manche Körper regelmässig, andere unregelmässig sind, so wollen wir von der zweiten Art, das ist von den irregulären, nichts sagen. Obwohl unter den regelmässigen Körpern sich einige von nicht gleichförmiger Gestalt befinden, wie die Fässer und die abgestumpften sowie die nicht abgestumpften Pyramiden, andere aber gleichförmig regulär sind, wie die Kugel, der Würfel, das Oktaeder, das Dodekaeder, das Ikosaeder und die Pyramide mit vier gleichseitigen Dreiecken als Flächen, die gleichförmig runde Säule oder die eckige und andere gleichförmig regelmässige Körper, so werden wir doch nicht von allen handeln, sondern nur von den dreiseitigen Prismen, den Säulen, den Pyramiden, den Würfeln und der Kugel.

Erste Aufgabe. Hat man das dreiseitige Prisma[2]) *aebfcd* (Fig. 1), dessen rechteckige Grundfläche *aebf*, die obere Kante aber *cd* ist, so erhält man das Stück *bfdc* so. Man vervollständige das Parallelepiped[3]) *abig*, *efkh*, so dass das Theilprisma, nämlich *gac*, *ibd*, die

1) $J : J_1 = d^2 : d_1{}^2$, also $d : d_1 = \sqrt{J} : \sqrt{J_1}$.

2) *Seratile* ist dreiseitiges Prisma, genaue Übersetzung des griechischen Wortes.

3) Parallelogromo ist hier offenbar durch Parallelepiped zu übersetzen.

de tuto el primo. Similmente el seratile *hec*, *kfd*. Quelo, che se disse de luno se dixe de laltro. Se adoncha del primo seratile uoray mouere la porcione *bfcd*, la quale e a ti ignota, tu la saueray per questo modo. Perche per la 28 conclusione del $\frac{1}{11}$ libro de Uclides[1]) la superficie *bfgeh* seca el parallelogramo fatte per mezo, ma per la sesta del $\frac{1}{12}$ libro[2]) el seratile parciale *fkd*, *che* e triplo a la piramide *hcef*, aduncha e sesquialtero al residuo, el qual e *hcfkd*. Ma quelo residuo e equale per quela
21′ medesima raxone a lo residuo del altro seratile parciale, cioe *cgbdf* | aduncha uno seratile parciale e subsesquitercio a li altri doy residui agiunti insiema. Aduncha queli agiunti insiema trali de la mita de tuto el parallelogramo, e rimagnera la porcione quesita, percio che de quela porcione e de li diti doy residuy se fa la mita del paralellogramo.

Acio che per demostracione numerale sia manifesto quelo, che se dice, la largeza de la basis del seratile, la quale sia *bf*, sia 4, la longeza, la qual sie *ab*, sia 16, e la largeza signata per la perpendichulare ducibile dal ponto *d* ad *bf* sia 5: adoncha *aebf* sie 64, e tuto el paralellogramo sie 320, e tuto el seratile 160, aduncha el parciale sie 80, de la quale la piramide sie $26\frac{2}{3}$, percio che la terza parte. Adoncha el residuo sie $53\frac{1}{3}$, ali quali 80 sie in proportione sexquialtera. Ma el doppio de quello residuo sie $106\frac{2}{3}$, el quale he a 80 in proporcione sexquiterzia. Tralo adoncha $106\frac{2}{3}$ de 160, resta $53\frac{1}{3}$, la quantitade de la porcione quesita, la quale somadamente parlando sie la terza parte del seratile.

Secunda conclusio. Ma quando fusse uno corpo in forma de secure ouero de cuneo, si como he el corpo *aec*, *bfd* (Fig. 2ª—2ᵇ), ouero che piu propriamente se dise, seratile grosso in la superficie parte, del qualle la groseza sie *abcd*, ed in la inferiore parte strato, de lo qualle la sumi-
22 tade sie la linea *ef*, | e vole se taiare da quello la porcione transversale acommenzando dal ponto *a* descendo verso *f*, la quale porcione sia *acg*, *bdh*, taiando dal tutto

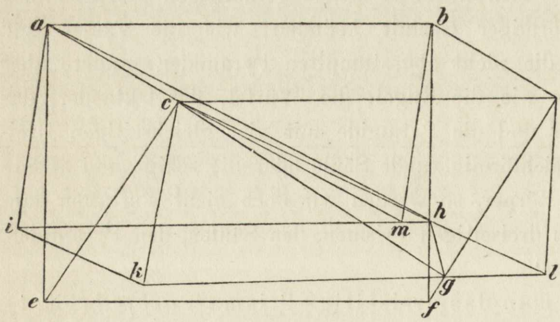


Fig. 2ª.

1) Euklides ed. Campanus XI, 28: *Si superficies aliqua solidum parallelogramum super duas quaslibet oppositas superficies eius terminales et super has duas diametros secet, eandem superficiem corpus illud per equalia secare necesse est.*

Hälfte des ganzen ersten sei, ähnlich das Prisma *hec*, *kfd*. Was nämlich von dem einen gilt, gilt auch von dem andern. Will man also von dem ersten Prisma das Stück *bfcd*, das man nicht kennt, wegnehmen, so findet man es in folgender Weise. Da nach dem 28. Satze des 11. Buches Euklid's[1]) die Fläche *bfgch* das oben konstruierte Parallelepiped halbiert, nach dem 6. Satze des 12. Buches[2]) aber das Theilprisma *fkd*, *che* das Dreifache der Pyramide *hcef* ist, so ist sie also das Anderthalbfache des Restes, der *hcfkd* ist. Dieser Rest ist aber derselben Schlussfolgerung nach gleich dem Reste des andern Theilprisma, nämlich *egbdf*, folglich ist ein Theilprisma gleich drei Viertheil der beiden Reste zusammengenommen. Man ziehe also die Summe derselben von der Hälfte des ganzen Parallelepipeds ab, so bleibt der gewünschte Theil übrig, weil dieser Theil und die beiden besagten Reste die Hälfte des Parallelepipeds ausmachen.

Damit aber das Gesagte zahlenmässig klar werde, sei die Breite der Grundfläche des Prisma, die durch *bf* bezeichnet sei, gleich 4, die Länge, die *ab* heisse, sei 16, und die Höhe, welche durch das Loth gemessen wird, das man vom Punkte *d* auf *bf* fällen kann, sei 5, dann ist $aebf = 64$, und das ganze Parallelepiped ist 320, das ganze Prisma 160, das Theilprisma folglich gleich 80. Die Pyramide davon wird also $26\frac{2}{3}$ sein, da sie sein dritter Theil ist. Der Rest ist also $53\frac{1}{3}$, von welchem 80 das $1\frac{1}{2}$fache ist. Das Doppelte dieses Restes ist aber $106\frac{2}{3}$, was von 80 das $1\frac{1}{3}$fache ist. Man ziehe nun $106\frac{2}{3}$ von 160 ab, so bleibt $53\frac{1}{3}$ als Körperinhalt des gesuchten Stückes übrig, das ist, im Allgemeinen zu reden der dritte Theil des Prisma.

Zweite Aufgabe. Wenn aber der Körper die Gestalt eines Beiles oder eines Keiles hätte, wie der Körper *ace*, *bfd* (Fig. 2ª und 2ᵇ) ist, oder, wie richtiger gesagt werden sollte, die eines Prisma, das im obern Theile stärker ist, dessen breiterer Theil *abcd* sei, im untern Theile zusammengezogen, wovon die Kante die Gerade *ef* sei, und man will von ihm ein Stück durch eine Transversalebene abschneiden, die im Punkte *a* anfängt und nach *f* zu absteigt, so sei dieses

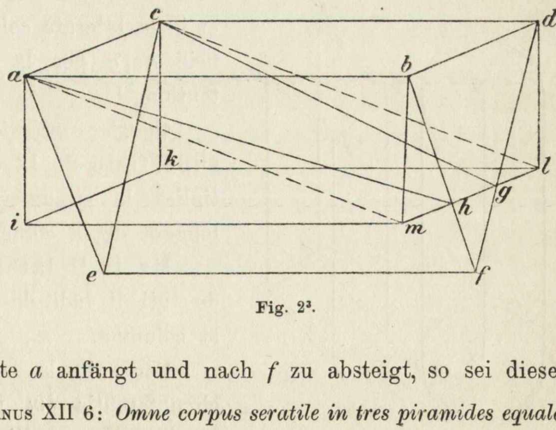


Fig. 2ª.

2) Euklides ed. Campanus XII 6: *Omne corpus seratile in tres piramides equales basesque triangulas habentes est divisibile.*

mediante la superficie *acgh*[1]) e de porcione inregulare, perche la summitade sua sie la linea *ac*, a la quale sie opposita da la parte inferiore la linea *gh* minore, e da la parte superiore la linea *bd* equale. Elieno aduncha due linee opposite *ah* et *cg* equale, anchora due *ab* et *cd*. Adunque sopra la superficie dada *acdb* driza el paralellogramo secondo lalteza de la linea *bh*, el quale sia *iklm*. Ma abi auertenzia che la linea *hg* sie parte de la linea *lm*, siche *mhgl* e tuta una linea drita, ma per la disegnatione del solido in piano pareno esse 3 linee.[2]) Aduncha la mitade de questo paralellogramo sie el corpo *bca*, *mdb* per la 28ª del 11º libro de Uclides, el qual corpo e manifesto, per la qual cosa el tuto e anchora manifesto. Cunçosiacosa adunque, che per el presuposito la linea *bh* sia manifesta, et la linea *mh* sie la mitade del exceso de *bd* sopra *hg*, sera manifesta *mb*. Ma ele doe linee *mb* et *hb* sono in una superficie, in la quale la linea *ab* sta perpendicular secundo la 5ª del 11º, conçosiacosa che per la 6ª del 12º el seratile fatto sopra la superficie *mbh* segundo la alteza *ab* sie triplo a la piramide *hmba*, sera quela piramide
22′ manifesta. Ma quela e equale a la piramide *lgde*, | la quale col corpo da fir remouesto fa la mitade del paralellogramo predito. Rimoueste aduncha quele due piramide de la dita mitade de paralellogramo, rimane el corpo da fir remouesto de tute lo seratile. Ma saperay el seratile parciale multiplicando la superficie *mbh* per la linea *ab*.

De cholumnis.

Tertia conclusio. Aueray la quantitade de la columna uniforme, ouero laterata ouero rotonda, multiplicando la quantila de labas per la longeza de la columna. Como in la columna rotonda *ab* multiplica larea del circhio *a* per la linea *ab*; et in la laterata columna multiplica la superficie *hefg* per la linea *hd*, et aueray intentum.[3])

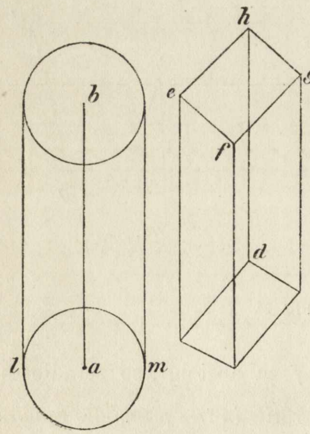


Fig. 3.

Quarta conclusio. A volere sapere la superficie de la columna rotonda, multiplica la circunferentia del circhio per la longeza de la columna.

Ma in la laterata multiplica la somma de tuti li ladi de labas per la longeza de la columna.

Como in la columna *ab* multiplica la circunferentia *lm* per la linea *ab*, et in la laterata multiplica la quantitade de

Stück *acg*, *bdh* von dem Ganzen abgeschnitten durch die Ebene *acgh*.[1]) Es ist aber ein unregelmässiges Stück, da seine obere Kante die Gerade *ac* bildet, welcher im untern Theile die kleinere Gerade *gh* gegenüberliegt, im obern Theile aber die ihr gleiche Gerade *bd*. Es sind also auch die beiden Gegenkanten *ah* und *cg* einander gleich, ebenso die beiden *ab* und *cd*. Nun errichte man über der gegebenen Fläche *acdb* ein Parallelepiped von der Höhe der Geraden *bh*, das *abcd*, *iplm* sei. Dabei beachte man aber, dass die Gerade *hg* ein Theil der Geraden *lm* ist, so dass *mhgl* eine einzige gerade Linie ist, wegen Verzeichnung des Körpers in der Ebene scheinen es aber drei Gerade zu sein.[2]) Nun ist die Hälfte der Parallelepipeds der Körper *bca*, *mdb* nach Satz 28 des 11. Buches Euklid's, dieser Körper ist aber bekannt, also ist auch der ganze bekannt. Da nun nach Voraussetzung die Gerade *bh* bekannt ist, und die Gerade *mh* die Hälfte des Überschusses der *bd* über die *hg* ist, so ist auch *mb* bekannt. Aber die beiden Geraden *mb* und *hb* befinden sich in einer Ebene, auf welcher die Gerade *ab* senkrecht steht nach dem 5. Satze des 11. Buches. Da nun nach Buch 12 Satz 6 das Prisma über der Fläche *mbh* und von der Länge *ab* das Dreifache der Pyramide *hmba* ist, so ist auch diese Pyramide bekannt. Sie ist aber gleich der Pyramide *lgde*, die mit dem wegzunehmenden Körper zusammen die Hälfte des vorgenannten Parallelepipeds ausmacht. Nimmt man also jene beiden Pyramiden von der besagten Hälfte des Parallelepipeds weg, so bleibt der von dem ganzen Prisma abzuschneidende Körper übrig. Das Theilprisma aber erhält man, indem man die Fläche *mbh* mit der Geraden *ab* multipliciert.

Von den Säulen.

Dritte Aufgabe. Man erhält den Körperinhalt der gleichförmigen Säule, mag sie rund oder eckig sein, indem man den Inhalt der Grundfläche mit der Länge der Säule multipliciert. So multipliciert man z. B. für die runde Säule *ab* den Inhalt des Kreises *a* mit der Geraden *ab*, und in der eckigen Säule multipliciert man die Grundfläche *hefg* mit der Geraden *hd*, so erhält man das Verlangte.[3])

Vierte Aufgabe. Um die Oberfläche der runden Säule zu finden, vervielfache man den Kreisumfang mit der Länge der Säule;

in der eckigen aber multipliciere man die Summe aller Seiten der Grundfläche mit der Länge der Säule.

In der Säule *ab* z B. multipliciere man den Umfang *lm* mit der Ge-

1) Es ist also ein schief abgeschnittenes Prisma zu bestimmen.

2) Wir haben in Fig. 2^a die Figur Leonardo's gegeben, während Fig. 2^b die richtige Gestalt giebt. 3) $V = g \cdot h$.

4 linee, cioe *eh*, *hg*, *gf*, *fe*, per la linea *dh*, et aueray intentum (Fig. 3).[1])

De piramidibus.

Quinta conclusio. Se voray la quantita de la piramide equialta, si como e de la columna, toglie la terza parte de la columna.

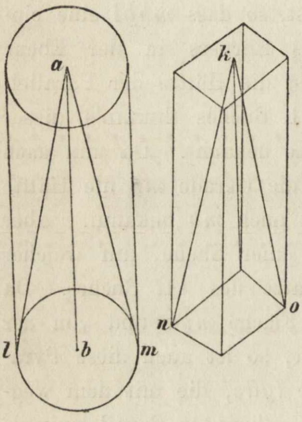


Fig. 4.

Si como e in la colomna *ab*, se voray sapere la piramide *lam*, sapi chele la terza parte de la colonna *ab*, et in la colomna laterata semelmente la piramide *nko* e la terza parte de la dita colomna (Fig. 4).[2])

Sexta conclusio. Ma quando tu voray la superficie de la piramide, sapi, che secundo la opinione de alcuni ela e la mitade de la superficie de la colomna. Ma questo non e vero, perche ele necessario, che la superficie de la piramide sia mazore cha la mitade de la superficie de la colomna, cunçosiacosa, che la ypotemissa[3]) sia mazore cha lo asale. Tu aueray adunque la quantitade de la superficie proponuda per questo modo, ouero che la colomna laterata, ouero chele rotunda. Sele laterata, multiplica la mita del lado de la basis per la ypotemissa, ed aueray la superficie triangulare de la alteza de la piramide. Et cosi per rispetto de tutti li ladi de la bassis. Como se de la colomna trilatera la basis *abf* (Fig. 5) area sia ped. $5 \cdot 11^{m} \cdot 46^{2a}$, perche la perpendichulare *fe* sie pe. 3, e cescaduno de
23' li ladi de la bassis sie pe. $3 \cdot 27^{m} \cdot 50 \cdot 45 \cdot 56 \cdot 44$, | e sia *d* el centro del circhio da fir fatto circha la bassis, e sia la linea *de*, la alteza de la colomna, 4 p^{e}, conçosiacosa adunque che per la 8^{a} dell 3^{o} la linea *cd* sia pe. 1, sera la ypotemissa *ce* pe. $4 \cdot 7^{m} \cdot 23^{2a}$. Multiplica adunca *ce* per *ac*, et aueray la superficie proponuda *aeb*, la qualle e pe. $7 \cdot 8^{m} \cdot 27^{2a}$. Adunque la superficie quadrangula de la columna sie pe. $13 \cdot 5^{m} \cdot 23^{2a}$: adunque la linea *ae* e equalle a la linea *be*, auegnandio che in questa solla figura non appare a loghio per la discripsione del corpo in piano.

Ma quando la columna sie rotunda, descrive uno circhio, del

1) $O = U \cdot h.$ 2) $J = \frac{g \cdot h}{3}.$

3) Unter Hypotenuse versteht er die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete die Höhe der Pyramide, die andere Kathete

raden *ab*; in der eckigen multipliciere man den Betrag der vier Geraden, nämlich *eh*, *hg*, *gf*, *fe* mit der Geraden *dh*, so erhält man das Verlangte (Fig. 3).[1])

Von den Pyramiden.

Fünfte Aufgabe. Will man den Inhalt einer Pyramide finden, die ebenso hoch ist als die Säule, so nehme man den dritten Theil der Säule. Will man so z. B. für die Säule *ab* die Pyramide *lam* bestimmen, so weiss man, dass sie der dritte Theil der Säule *ab* ist, und für die eckige Säule ist die Pyramide *nok* in ähnlicher Weise der dritte Theil genannter Säule (Fig. 4).[2])

Sechste Aufgabe. Will man aber die Oberfläche der Pyramide bestimmen, so wisse man, dass nach der Meinung einiger sie die Hälfte der Oberfläche der Säule ist. Das ist aber nicht richtig, da die Oberfläche der Pyramide nothwendigerweise grösser sein muss als die Hälfte der Oberfläche der Säule, da ja die Hypotenuse[3]) grösser ist als die Seitenlinie. Man erhält nun den Werth der vorgelegten Oberfläche in folgender Weise, mag sie eckig oder rund sein. Ist sie eckig, so multiplicere man die Hälfte der Seite der Grundfläche mit der Hypotenuse, so erhält man die dreiseitige Fläche der Höhe der Pyramide, und so verfährt man für alle Seiten der Grundfläche. Wenn etwa der Inhalt der Grundfläche *abf* der dreiseitigen Säule (Fig. 5) 5 Fuss $11' 46''$ wäre, weil die Höhe $fc = 5$ Fuss und jede der drei Seiten der Grundfläche gleich 3 Fuss $27' \, 50'' \, 45''' \, 56^{IV} \, 44^{V}$ ist, und es wäre *d* der Mittelpunkt des um die Grundfläche beschriebenen Kreises, und die Gerade *de*, das ist die Höhe

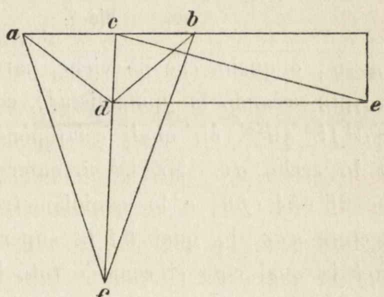


Fig. 5.

der Säule, 4 Fuss, so muss, da nach Satz 8 des 3. Buches die Gerade *cd* 1 Fuss beträgt, die Hypotenuse $ce = 4$ Fuss $7' 23''$ sein. Man multipliciere also *ce* mit *ac*, so erhält man die verlangte Oberfläche *aeb*, die dann 7 Fuss $8' 27''$ ist. Die vierseitige Fläche der Säule ist 13 Fuss $5' 23''$, da die Gerade *ae* gleich der Geraden *be* ist, obwohl das in in der Figur dem Auge nicht so erscheint wegen der Zeichnung des Körpers in einer Ebene.

Ist aber die Säule rund, so beschreibe man einen Kreis, dessen

---

aber das von dem Fusspunkte derselben auf eine Grundflächenkante gefällte Loth ist.

quale el semidiametro sia la predita ypotemissa, fato lo centro *c* (Fig. 7). Da poy de la circonferencia sua tagliandone tante parte, quante sono in la circunferencia del circhio de la abassis de la colomna, tira dal centro *c* due linie drite, le quale vada in fine a larco tolto, ed aueray el sectore del circhio el quale tu circhi. La quantita del quale tu saueray per la 3^a conclusione de la seconda parte del secundo tratado de questa opera. Tu saperay adunque quelle parte per questo modo. Multiplica 360 per la circonferencia del circhio de la bassis, e quelo, che ne viene, partilo per la circumferentia del circhio descripto secondo la ypotemissa[1]), ed aueray li gradi del archo *av*, el qual e $87^{gr}18^{m}49^{2e}$, ali quali correspondera pe. 6 · 17 · 9, perche li sono equali a lo archo *av*. Ma la circonferentia de tuto questo circhio grando sie pe. 25 · 54 · 59, e lo semidiametro sie pe. 4 · 7 · 23, adunque aueray lo sectore *ave*, lo qual he la superficie de la piramide, cioe 12^{pe} · 56 · 56.

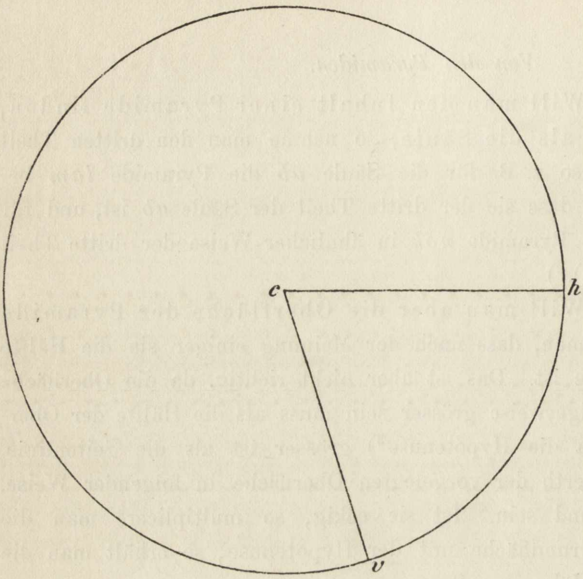


Fig. 7.

24 Per la qual cosa si como e tuto larcho | a le parte, cosi e tuto lo circhio a la sectore, aduncha la superficie de la colomna sie pe. 25 · 8 · 26, de la quale non e proporcione dupla al sectore.

Septima conclusio. Seguita per la 5^a conclusione, che tu saperay la

1) Hier fährt der lateinische Text von 303 abweichend so fort: vel, quia circumferentia basis columne *afcgek* est 6 pedum $17^m 9^{2a}$, quia semidiameter est 2 pedum, et altitudo columne est sicut prius 4 pedum, et semidiameter circuli describendi 4 pedum $28^m 20^{2a}$, ergo circumferentia sui circuli erit 28 pedum $6^m 38^{2a}$. De qua accipies 6 pedes $17^m 9^{2a}$, ubi pone *a*, *n*, et habebis *ane*, qui est superficies pyramidis, videlicet 14 pedum $3^m 21^{2a}$. Superficies vero columne est 25 pedum $9^m 24^{2a}$, cuius non est proportio dupla ad sectorem. Ut autem facilius capias illas partes, multiplica 360 per 6 pedes $17^m 9^{2a}$, et proveniens divide per 28 pedes $6^m 38^{2a}$, et habebis $80^{gr} 29^m 54^{2a}$ de circumferentia circuli *ane*, ipsum dividendo per 360.

Halbmesser die genannte Hypotenuse ist, indem man c als Mittelpunkt benutzt (Fig. 7). Dann schneide man von seinem Umfange soviele Theile ab, als in dem Umfange der Grundfläche der Säule enthalten sind, und ziehe vom Mittelpunkte c zwei gerade Linien, die nach den Endpunkten des abgeschnittenen Bogens gehen, dann erhält man den Kreisausschnitt, den man sucht. Seine Grösse findet man nach der 3. Aufgabe des zweiten Theiles des zweiten Traktates dieses Werkes. Man findet also diesen Theil auf folgende Weise. Man multipliciere 360^0 mit dem Kreisumfange der Grundfläche und theile das Ergebnis durch den Umfang des Kreises, der mit der Hypotenuse beschrieben ist[1]), so erhält man dadurch die Grade des Bogens hv; er ist $87^0 18' 49'$, ihm entsprechen 6 Fuss $17' 9''$, da sie dem Bogen hv gleich sind. Der Gesamtumfang des grossen Kreises aber ist 25 Fuss $54' 59''$, und der Halbmesser ist 4 Fuss $7' 23''$, also erhält man den Sektor hvc, der die Oberfläche der Pyramide darstellt, zu 12 Fuss $56' 56''$, denn, wie sich der ganze Umfang zu seinem Theile verhält, so verhält sich der ganze Kreis zu dem Ausschnitt. Nun ist die Oberfläche der Säule 25 Fuss $8' 26''$, und ihr Verhältnis zum Ausschnitt ist also nicht das von 2 : 1.

Siebente Aufgabe. Aus der 5. Aufgabe folgt, dass man den Theil der Pyramide kennen wird, wenn man nur den Schnittpunkt der Axe oder der Seite der Pyramide kennt, und zwar auf folgende Weise, nämlich für die Säule $bche$, wenn ihre Pyramide aeh im Punkte i durch die Ebene pd

---

1) Übersetzung des lateinischen Textes (derselbe findet sich so übrigens nur in dem Cod. Bonc. 303): oder, weil der Umfang der Grundfläche der Säule $afcgek$ (Fig. 6) gleich 6 Fuss $17' 9'''$ ist, da der Durchmesser 2 Fuss beträgt, die Höhe der Säule aber wie früher 4 Fuss misst, und der Durchmesser des zu beschreibenden Kreises 4 Fuss $28' 20''$, so ist der Umfang des zugehörigen Kreises 28 Fuss $6' 38''$. Von ihm schneide man 6 Fuss $17' 9''$ ab, und bezeichne denselben mit hv (Fig. 7), so erhält man hvc, das ist die Oberfläche der Pyramide, gleich 14 Fuss $3' 21''$. Die Oberfläche der Säule ist aber 25 Fuss $9' 24''$, und sie steht nicht zu dem Sektor im doppelten Verhältnis. Damit man aber die fraglichen Theile leichter erhalten kann, multipliciere man 360 mit 6 Fuss $17' 9''$ und theile das Ergebnis durch 28 Fuss $6' 38''$, so erhält man $80^0 29' 54''$ von dem Umfange des Kreises hvc, wenn man ihn in 360 Theile theilt.

Es ist leicht zu zeigen, dass die Werthe des italienischen Textes die richtigen sind. So ist z. B. die Hypotenuse gleich $\sqrt{17}$, und das ist 4 Fuss $7' 23''$ und nicht 4 Fuss $28' 20''$, wie der lateinische Text sagt, u. s. w.

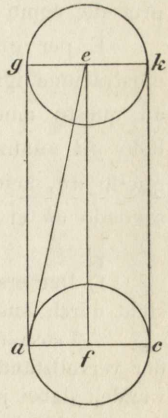


Fig. 6.

porcione de la piramide, domente tu sapi el logo de la sectione de lo axalle ouero del lado de la piramide per si facto modo. Cioe in la cholomna *bche*, quando la sua piramide *aeh* sera tajada in del ponto *i* per la superficie *pd*, ouero in del ponto *k* per la superficie *kg* (Fig. 8). Ma se e taiada in del ponto *i*, fa la columna secunda la bassis *kl* e secondo *ai*, la qual columna e tripla a la piramide *lak*, el se sauera etiamdio el residuo de la piramide, el quale sie *lehk*. Ma quando quella piramide fosse taiada in *k*, sapi prima el za ditto residuo, possa fa la columna secondo *kl* e secondo la longeza *if*, la quale sie *lkgm*, la quale trala del prefato residuo, et aueray la porcione *kgh* et *lem*.[1])

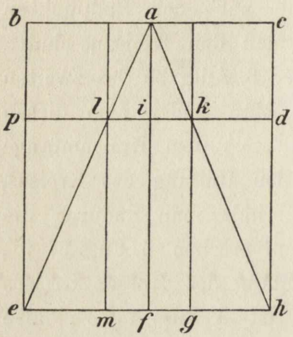


Fig. 8.

Octava conclusio. Ma quando el fosse proponudo una piramide tronchada, compise la quela, e alora primamente saueray quela per la 4ª conclusione, e le soue doue parte, ouero porcione per la 7ª conclusione. Como e, sel fosse proponudo una piramide tronchata *abcd*, de la quale el minore lado sia *bc*. Tira tuti doy li ladi equali *ab* et *dc* fino che li
24′ concurrano in *e*. | Tu saueray primamente la quantitade de tuto lo assalle de la piramide in questo modo. Dal ponto *b* mena la perpendichulare *bf* a la bassis *ad*, et lo luogo, onda lo asale taia el lado *bc* sia *h*, conçosiacosa che *bf* sia equale ad *hg*. Similmente *bh* e equale ad *fg*, e rimane *af* manifesta. Multiplicha adonche *bf* per *ag*, e quelo, che ne vene, partilo per *af*, et haueray *eg*, et per consequente *he*. Driza adunque due parciale colomne sopra *bc*, una da la parte *e*, e laltra da la parte *g*, et procede, como e dito in la prefata conclusione.[2])

E per questo seguita, che la pratiche de molti sie falace e de demostracione ignara, la quale dice, che la piramide si tronchata se mesura ad questo modo. Cioe in la piramide *agdb* (Fig. 10) conziosacosa chel lado *gd* auanza el lado *ab*, tu doy agiugnere la mitade del excesso a quello *ab*, aciochel se faza una linia *ca* et *bh*, et alora la colomna fatta segondo *ch* et secondo la longeza, la quale e *an*, e equale a la proposita

1) Der erste Körper ist also eine abgestumpfte Pyramide, der zweite entsteht durch Ausbohrung dieses Restkörpers mit einem geraden Cylinder.

2) Leonardo berechnet also die abgestumpfte Pyramide stets als Differenz der vervollständigten Pyramide und der von ihr abgeschnittenen Spitze. Er verwandelt dabei jede dieser Pyramiden in eine gleich hohe Säule. Der Bestimmung der Grundfläche derselben ist die neunte Aufgabe gewidmet. Dabei zeigt er,

geschnitten wird, oder im Punkte k durch die Fläche kg (Fig. 8). Wird sie zuerst im Punkte i geschnitten, so bilde man die Säule für die Grundfläche kl und die Höhe ai. Diese Säule ist das Dreifache der Pyramide lak, und man wird dadurch auch den Rest der Pyramide kennen, der $lehk$ ist. Wird aber die Pyramide im Punkte k geschnitten, so kennt man zunächst den schon gefundenen Restkörper. Nachher bilde man die Säule über kl und für die Länge if, die $lkgm$ sein wird. Sie ziehe man von dem vorhergefundenen Restkörper ab, so erhält man dadurch den Theil kgh, lem.[1])

Achte Aufgabe. Ist aber eine abgestumpfte Pyramide vorgelegt, so vervollständige man sie. Dann kennt man diese nach Aufgabe 4 und ihre beiden Theile nach Aufgabe 7. Wäre z. B. die abgekürzte Pyramide $abcd$ vorgelegt (Fig. 9), deren kleinere Seite bc sei, dann verlängere man beide gleiche Seiten ab und dc, bis sie sich in e treffen. Erstens kennt man dann die Länge der ganzen Axe der Pyramide folgendermaassen. Vom Punkte b fälle man das Loth bf auf die Grundfläche ad; der Punkt, in welchem die Axe die Seite bc schneidet, sei h, so dass $bf = hg$ ist. Ebenso ist $bh = fg$, und es bleibt af als bekannt übrig. Nun multipliciere man bf mit ag und dividiere das Produkt durch af, so erhält man eg und folglich auch he. Nun beschreibe man zwei Theilsäulen über bc, eine nach e zu, die andere nach g, und verfahre weiter, wie in der vorigen Aufgabe gezeigt ist.[2])

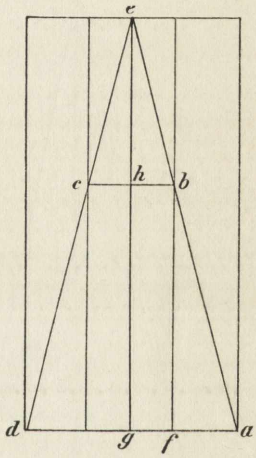


Fig. 9.

Daraus folgt, dass das Verfahren Vieler falsch ist und unbeweisbar, das so lautet. Die abgestumpfte Pyramide werde in folgender Weise gemessen, dass man nämlich für die Pyramide $agdb$ (Fig. 10), wenn die Seite gd die Seite ab übertrifft, die Hälfte des Überschusses zu ab hinzufügen soll, so dass sie eine gerade Linie $cabh$ ausmachen, dann sei die Säule über ch nach der Länge an gleich der vorgelegten Pyramide, und ich be-

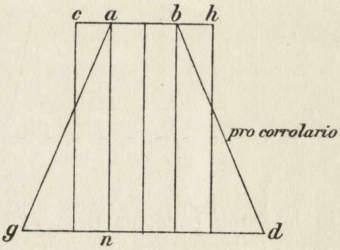


Fig. 10.

---

dass das bis dahin im Mittelalter benutzte Verfahren, das arithmetische Mittel der beiden Grundflächen als diese Grundfläche zu benutzen, unrichtig ist.

26*

piramide. Et io dicho, che questo sie falso, inpercio anetero la 9^a conclusione per veraxe praticha.

Nona conclusio. Parti la piramide tronchata per la sua longeza, e alora circha el numero quociente procede in questa forma. Percio che se lo abassis maiore de la piramide proponuda sera quadrata, alora la radice quadrata del dito numero quociente sera el lado tetragonico del abasis de la colomna da fir fatta per la multiplicatione del basis quadrata per la longeza. Ma sel abasis de la piramide proponuda sera de altra figura, ouero lateratra, ouero
25 rotonda, alora la radice quadrata | de la proporcione de quella abasis de la piramide proponuda, ouero del diametro suo ali ladi, ouero el diametro del abasis de la piramide significata per el numero quociente preditto.

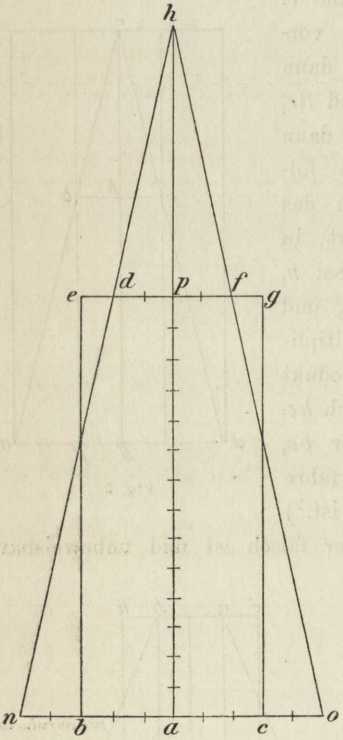


Fig. 11.

Verbi gratia in la piramide *nofd* (Fig. 11), del quale la longeza *pa* sia 14, la linea del abasis *nao* sia 10, la linea minore del abasis, cioe *dpf* sia 4, conçosiacosa che segunda la arte de la 8^a conclusione sia lo axale de la piramide compiuta cioe *hpa*, $23\frac{1}{3}$. Se la linea *nao* sera el lado tetragonico, el suo quadrato fera 100, el quale multiplicato per la linea *hpa* fira la columna $2333\frac{1}{3}$. Adunque tuta la piramide sie $777\frac{7}{9}$. Ma la linea *dpf* sie 4, adunque la basis parciale de la piramide, cioe *hdf*, sera 16. Ma la linea *ph* e $9\frac{1}{3}$, adunca la colomna fatta sopra *dpf* segondo la longeza *ph* est $149\frac{1}{3}$, adunque la piramide parciale, cioe *hdf* sie $49\frac{7}{9}$. Adunque tuto el residuo, el quale he la piramide tronchata proponuda, sia 728. Ma le manifesto segondo la via di li altri, de la quale he dito in del corolario, quela piramide tronchata serane 686, el quale sia falso, si como he manifesto per la praticha demostracione, la quale io fo. Sia adunque lasato el processo de quelli. Cumplando aduncho el processo de la praticha, la quale io ho commenza, partisse 728 per la linea *pa*, chi e 14, si viene in del numero quociente 52, chi e la abasis de la cholumna da fir fatta sopra *bac*. E
25′ perche nel calchulo za fatto se supone, che la dita bassis sia quadrata, tratta | inpercio la radice quadrata de 52, sie 7 e uno pocho piu cha $\frac{1}{5}$. Ele 7 integri e $12^m 39^{2e} 52^{3e} 36^{4e}$, et si la linea *bac* sie nel proposito $7\frac{1}{5}$. Ma segundo

haupte, dass dies falsch ist, weshalb ich die neunte Aufgabe mit dem richtigen Verfahren hinzufüge.

Neunte Aufgabe. Dividiere die abgestumpfte Pyramide durch ihre Höhe und verfahre mit dem Quotienten in folgender Weise. Wenn die grössere Grundfläche der vorgelegten Pyramide ein Quadrat ist, so ist die Quadratwurzel aus obigen Quotienten die Quadratseite der Grundfläche derjenigen Säule, welche aus der Multiplikation der quadratischen Grundfläche mit der Höhe entsteht. Ist aber die Grundfläche der Pyramide von anderer Gestalt, entweder vieleckig oder rund, dann ist sie die Quadratwurzel des Verhältnisses der Grundfläche der gegebenen Pyramide oder des Durchmessers zu den Seiten oder dem Durchmesser der Grundfläche der Pyramide, die durch den obigen Quotienten bezeichnet wird. Z. B. für die Pyramide $nofd$ (Fig. 11), deren Länge $pa = 14$, die Basislinie $nao = 10$, die Seite der kleinern Grundfläche $dpf = 4$ wäre, da nach Anweisung der 8. Aufgabe die Axe der ganzen Pyramide, nämlich hpa, gleich $23\frac{1}{2}$ ist. Ist die Gerade nao Seite eines Quadrates, so beträgt ihr Quadrat 100; das multipliciere man mit hpa, so entsteht die Säule gleich $2333\frac{1}{3}$, also ist die ganze Pyramide $777\frac{7}{9}$. Die Gerade dpf aber ist 4, also ist die Grundfläche der Theilpyramide hdf gleich 16, die Gerade ph aber ist $9\frac{1}{3}$, also ist die Säule über dpf und von der Länge ph gleich $149\frac{1}{3}$, folglich ist die Theilpyramide, nämlich hdf, gleich $49\frac{7}{9}$. Der Gesamtrest, das ist die abgestumpfte Pyramide, ist also 728. Nach dem Verfahren der andern aber, von dem ich in dem Zusatze gesprochen habe, wäre offenbar diese abgekürzte Pyramide gleich 686, was falsch ist, wie ich durch mein Verfahren praktisch bewiesen habe. Dieses Verfahren ist daher zu verwerfen. Um nun das Verfahren, das ich angefangen habe, zu vollenden, theile man 728 durch die Gerade pa, das ist durch 14, so kommt im Quotienten 52, das ist die Grundfläche der Säule, welche über bac zu errichten ist. Da nun in der bis jetzt geführten Rechnung vorausgesetzt wurde, die fragliche Grundfläche sei ein Quadrat, so ziehe man deshalb die Quadratwurzel aus 52; sie ist 7 und ein klein wenig mehr als $\frac{1}{5}$. Sie beträgt nämlich 7 Ganze $12'39''53'''36''''$, und es ist folglich für unsern Fall die Gerade $bac = 7\frac{1}{5}$. Nach dem andern Verfahren wäre sie aber nur 7, was falsch ist. Nun errichte man über der Grundfläche bac und von der Höhe ap die Säule $begc$, so ist diese gleich 728.

Hat aber die vorgelegte Pyramide keine quadratische Grundfläche, sondern solche von anderer Figur, wie rechteckig oder vieleckig und un-li altri la sarebe solamente 7, el quale he falso. Adoncha sopra la bassis *bac* secondo la longeza *ap* se fa la cholumna *begc*, la quale ha 728.

Ma se la piramide proponuda non hauesse la abassis quadrata, ma de altra figura, como he quadrangula ouero multilatera e de ladi inequali, ouero circhulare, perche el se supone, che la basis de la piramide proponuda sia 100, la bassis adunque de la columna da fir cunstituita sopra *bac* sie 52, alora perche la radice quadrata de la proportione de 100 a 52 e si como 10 a $7\frac{1}{5}$ ultra la modicha parte, como e ditto di sopra, sera la proporcione de la linia *nao* a la linea *bac*, si como he 10 a $7\frac{1}{5}$, ouero che quele doe linee siene diametri ouero ladi del abassis de la figura multilatera de li ladi equali ouero inequali, percio che cescaduno lado del abassis proponuda se auera al suo relatiuo lado del abassis de la colomna da fir descripta sopra *bac* si como 10 a $7\frac{1}{5}$.

Decima conclusio. Tu mesuraray una veza in questo modo. Prima mesura una mitade in longeza secondo larte dita in la prossima conclusione 9ª, et per quello medesimo modo mesuraray laltra mitade como in questo exemplo. Mesura prima la mitade *abde* (Fig. 12), secundariemente mesura *bcef*. Ma intendi, que questo
26 non | he totalmente vero, se la linia *ab* non sia drita, e similmente *bc*, per quelo simelo modo de li opositi. Percio che, se le sono curue, ouero che *abc* sia uno archo ouero 2, similmente de li opositi, sarebe bisogna far per altro modo, massimamente se li fosse archi de circhulo pizolo, si che y fusseno molti arcuati. Ma quando non sono molto arcuati, ma quasi dritti, non ge gran forza.

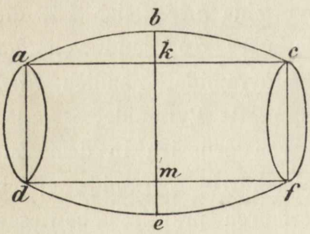


Fig. 12.

Item in questa conclusione e in la precedente non he gran forza, quando el diametro de la mitade non excede molto el diametro de la extremitade. Alora se puo fare secondo li altri, auegnadio chel non habia ueritade, ma mancha pocho de la veritade. Cunçosiacosa aduncha, che la linia *abc* sia ouero uno circhio, ouero doy, fossi non he regula de trouar la vera mesura per la sua inregularitade ouero deformitade.

Undecima conclusio. Ma quando la veza ouero la piramide rotonda zase, per hauere la continentia de quella in uno lado, sie questa conclusione. Prima in la veza, che zaxe equidistante al orizonte, se *ab* et *bc* non serano sensibilmente curui, perche alora per la sua deformitade non se hauerebe la veritade (Fig. 12), parti quello *ac* per mezo in *b*, gleichseitig, oder kreisförmig, so wird, weil vorausgesetzt ist, dass die Grundfläche der Pyramide 100 ist, die Grundfläche der über *bac* zu errichtenden Säule gleich 52 sein. Da nun die Quadratwurzel des Verhältnisses von 100 : 52 gleich 10 : $7\frac{1}{5}$ ist, unter Vernachlässigung des kleinen Theiles, wie oben gesagt ist, so wird das Verhältnis der Geraden *nao* zur Geraden *bac* auch wie 10 : $7\frac{1}{5}$ sein, mögen diese beiden Geraden Durchmesser sein, oder Seiten der Grundfläche der vieleckigen Figur von gleichen oder ungleichen Seiten, weil jede Seite der vorgelegten Grundfläche zu ihrer entsprechenden Seite der über *bac* zu errichtenden Säule sich wie 10 : $7\frac{1}{5}$ verhalten wird.

Zehnte Aufgabe. Ein Fass wird in folgender Art gemessen Zunächst messe man in der Länge eine Hälfte nach dem Verfahren, das wir in der eben vorhergehenden Aufgabe gelehrt haben, und darauf messe man nach derselben Methode die andere Hälfte, wie z. B. in dem folgenden Beispiele (Fig. 12). Man messe hier zuerst die Hälfte *abed*, zweitens messe man dann *bcfe*. Wohlverstanden, dass das nicht ganz richtig ist, wenn die Linie *ab* keine Gerade ist, und ebenso *bc*, in derselben Weise auch die gegenüberliegenden Seiten. Denn wenn sie gekrümmt sind, so dass *abc* aus einem Bogen besteht oder aus zweien, und ähnlich für die Gegenseite, so muss man auf andere Weise vorgehen, besonders dann, wenn es Bogen von kleinen Kreisen sind, so dass sie sehr stark gekrümmt sein würden. Sind sie aber wenig gekrümmt, sondern fast gerade, so hat das keinen grossen Einfluss. Ebenso hat es in dieser und der vorhergehenden Aufgabe wenig Einfluss, wenn der Mitteldurchmesser den Durchmesser der Endfläche nur wenig übertrifft. Dann ist es erlaubt nach dem Verfahren der andern vorzugehen, denn wenn es auch nicht genau ist, so fehlt doch nicht viel an der Wahrheit. Denn wenn die Linie *abc* entweder ein Kreisbogen ist, oder aus zweien besteht, so lässt sich wahrscheinlich keine Regel geben, um das wirkliche Maass zu finden, wegen ihrer Unregelmässigkeit und abweichenden Gestalt.

Elfte Aufgabe. Wenn aber das Fass oder der Kegel liegt, folge hier zur Bestimmung des Inhalts für eine Seite die Aufgabe. Sind zunächst in dem parallel dem Horizonte gelagerten Fasse *ab* und *bc* nicht stark gekrümmt, weil man sonst wegen der abweichenden Gestalt die Wahr-

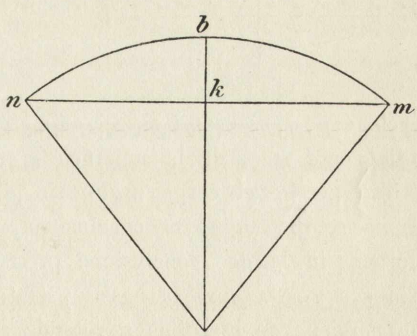


Fig. 13.

simelmente lo oposito in e, e sia menato be, chi seca ac in k et df in m. Alora secondo la longeza kc e la largeza bk sia fatta la porcione de la
26′ colomna rotonda, de la quale la abassis sie de questa figura. Si che la | linea bk in figura de la veza (Fig. 13) tenga el locho del sino verso ouero de la sagita, e la linea mkn si tenga el loco de la porcione del circhio maiore in la largeza ouero in la groseza de la veza. Ma la alteza de la porcione de la colomna sie kc, de la quale porcione la terza parte he la continencia bkc. Ma in la piramide rotonda, chi zase segondo la sua longeza, siche el suo axale sia equidistante al orizonte, chomo he in la piramide ade (Fig. 14), piu veramente le hauera la continentia de la sua porcione, cioe abc, perzo che la linea ac he drita, adonque etiamdio la sua abasis, che consimile a la figura inmediatamente ditta, cioe $nbmc$.

Ma perche quello, che ditto in la conclusione 11ª he solamente veritade, quando la veza he sechata in lo ponto a et e, i quali sono termini de li diametri de li fondi de la veza, ouero etiamdio sia sechata ab et bc, impercio quando queli diametri siano secati, el bisogna procedere altramente, et percio sia questa 12ª conclusione.

Duodecima conclusio. Sia la veza $flkp$ (Fig. 15), la quale taia la superficie do, siche tuti li diametri siano secati, e siano li ponti de la

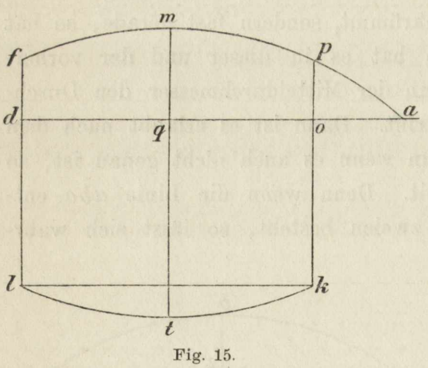


Fig. 15.

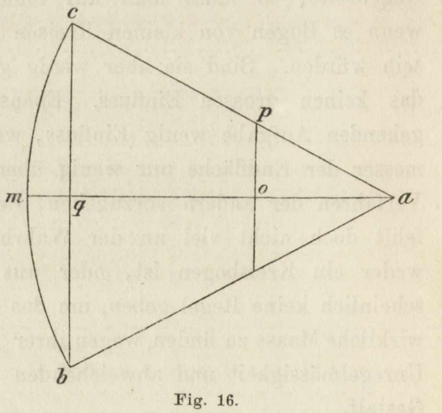


Fig. 16.

secione d, q, o, et mt sia el diametro maiore, e la longeza de la veza sia taiata per mezo da la superficie mqt, et como ho ditto, sia mp quasi drita. Alora perche el corpo $mqop$ sie piramide tronchata, inpercio compissela, como se dice in la 8ª conclusione, de la quale sia la bassis de consimile
7 forma | in le doe conclusione precedente. La longeza sia qoa, e lo cono sia a. Possa sopra la bassis prefato, la quale he mq (Fig. 16) fiza drita la porcione de la colomna rotonda segondo la longeza qoa, la quale porcione sera tripla a la piramide za fata. Anchora sopra la bassis op driza

heit nicht finden würde, so halbiere man (Fig. 12) die *ac* in *b*, ebenso die gegenüberliegende Seite in *e*, und ziehe *be*, die *ac* in *k* und *df* in *m* schneiden mag. Nun errichte man nach der Länge *kc* und der Breite *bk* ein runde Theilsäule, deren Grundfläche von folgender Gestalt sei, dass nämlich die Gerade *bk* in der Figur des Fasses (Fig. 13) die Stelle des Sinus versus oder des Pfeiles vorstellt, und die Gerade *mkn* die Stelle des Bogens eines grössten Kreises in der Breite oder Dicke des Fasses. Die Höhe der Theilsäule sei *kc*. Von dieser Theilsäule ist der dritte Theil der Inhalt der *bkc*. Für den Kegel aber, der seiner Länge nach liegt, so dass seine Axe parallel dem Horizonte ist, wie es für den Kegel *ade* (Fig. 14) der Fall ist, wird man den Körperinhalt des Theiles *abc* um so genauer erhalten, je mehr die Linie *ac* gerade ist, desgleichen seine Grundfläche, die der eben beschriebenen Figur, nämlich *abmc*, ähnlich ist.

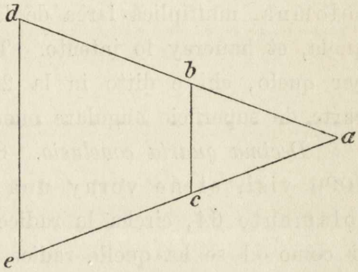


Fig. 14.

Da aber das, was ich soeben in dieser 11. Aufgabe gesagt habe, nur richtig ist, wenn das Fass in den Punkten *a* und *c*, das ist in den Endpunkten der Boden des Fasses, geschnitten wird, oder auch wenn *ab* und *bc* geschnitten werden, deshalb muss man, wenn die Durchmesser selbst geschnitten werden, anders vorgehen und daher sei folgende 12. Aufgabe gestellt.

Zwölfte Aufgabe. Es sei das Fass *flkp* (Fig. 15), das von der Ebene *do* so geschnitten werde, dass alle Durchmesser getroffen werden; die Durchschnittspunkte seien *d*, *g*, *o*; *mt* sei der grösste Durchmesser und die Länge des Fasses werde durch die Ebene *mqt* halbiert, und es sei, wie schon gesagt ist, *mp* beinahe gerade. Da dann der Körper *mqop* eine abgestumpfte Pyramide ist, so vervollständige man sie, wie es in der 8. Aufgabe gesagt ist, dann ist ihre Grundfläche von ähnlicher Gestalt wie in den beiden vorhergehenden Aufgaben. Ihre Länge sei *qoa*, der Scheitelpunkt *a*. Darauf errichte man über der ebengenannten Grundfläche, die *bmcq* ist (Fig. 16), eine runde Theilsäule nach der Länge *qoa*, die das Dreifache der eben konstruierten Pyramide sein wird. Ebenso errichte man über der Grundfläche *op* eine andere runde Theilsäule nach der Länge *oa*, die ebenso das Dreifache der Pyramide *pao* sein wird. Da nun die Theilsäulen in der folgenden Aufgabe bestimmt werden, und man auch ihre dritten Theile kennen wird, so kennt man also sowohl die ganze una altra porcione de colomna secondo la longeza *oa*, la quale etiamdio sera tripla a la piramide *pao*. Conçosiacosa adonque, che la porcione de la colomne sera manifesta in la conclusione sequente, et se sauera etiamdio li soy subtripli de quelle, adunque el tute le piramide et etiamdio le parciale se sapera. Tray adoncha la parciale piramido *pao* de tuta la piramide *mqa*, et aueray el corpo quesito, cioe *mqop*.

Decima tercia conclusio. A volere monstrare la porcione de la colomna, multiplica larea de la parte de la abasis sua per la longeza de quela, et haueray lo intento. Tu haueray la area de la parte del abassis per quelo, chi e ditto in la 2ª parte de questo opera, ouero che la sia parte de superficie angulare ouero circhulare.

Decima quarta conclusio. Se tu haueray una veza, che tenga 4096 vizi, el ne voray una altra, che sia si longa, che tenga solamente 64, circha la radice quadrata de tuti doy li numeri. Adoncha si como el se ha quelle radice luna al altra, si se hauera li diametri de
27' le veze. Adoncha el diametro | de la mazore sie octuplo al diametro de la minore veza. Se adoncha el primo diametro he 16, laltro de essere 2.[1])

Ma se tu non la volesse cosi longa, ma simile a quela, circha la radice cubica de tutti doy, ele adonque quelle radice 16 et 4. Si como adoncha se hanno quelle radice in semma, cossi se hauerano le longeze de la maiore veza a la longeza de la minore, e lo diametro maiore al diametro minore. Consimilmente dico de li seratile, de le piramide, de le colomne, de li cubi e de le spere.

De chubis.

Decima quinta conclusio. Quando tu voy lo cubo, multiplica la quantitade de la linia tua in si cubicamente, et haueray lo intento. Como he, se la linia *ab* sia 4 braza, multiplica 4 in se cubice, et fira 64, cioe la quantitade de tuto el cubo, el quale he *abhf*, *cgde* (Fig. 17).[2])

Sexta decima conclusio. Quando tu voray lo diametro del cubo, multiplica el quadrato del lato del cubo per 3, et quello, che ne viene, la radix quadrata sera el diametro. Como he, se *ab* sia 4, el suo quadrato

---

1) La radice di 4096 sie 64, la radix de 64 sie 8. Adonque la radix de 64 e lotaua parte de la radice de 4096. Sel diametro de la mazore veza he 16, el minore sera 2. Per attrouarli li diti diametri conza cosi. Prima per el minore: 8 via 16 fa 128, partilo per 64, ne viene 2, che el diametro de la minore. Se tu volesse el diametro mazore, multiplica 64 via 2, e parti per 8, et aueray el mazore. Opera simelmente per le cubice, como dicho de sopra, quando ay atrouata la radice. — Diese Anmerkung fehlt im lateinischen Texte.

2) $V = a^3$.

Pyramide als die Theilpyramide. Nun ziehe man die Theilpyramide pao von der ganzen Pyramide $cmqa$ ab, so erhält man den gewünschten Körper $mqop$.

Dreizehnte Aufgabe. Um die Theilsäulen zu bestimmen, multipliciere man den Inhalt ihres Grundflächentheiles mit ihrer Länge, so hat man das Verlangte. Den Inhalt des Grundflächentheiles erhält man aus dem, was im zweiten Theile dieses Werkes gesagt ist, mag es nun der Theil einer eckigen oder kreisförmigen Fläche sein.

Vierzehnte Aufgabe. Wenn ein Fass gegeben ist, das 4096 Vizi enthält, und man will ein anderes von derselben Länge bestimmen, das nur 64 enthält, so bestimme man die Quadratwurzeln beider Zahlen. Wie sich dann diese Wurzeln zu einander verhalten, so werden sich auch die Durchmesser der Fässer verhalten. Es ist daher der Durchmesser des grössern das Achtfache des Durchmessers des kleinern Fasses. Ist also der erste Durchmesser 16, so muss der andere 2 sein.[1])

Will man dasselbe aber nicht ebenso lang, sondern ihm ähnlich, so bestimme man die Kubikwurzeln von beiden; diese Wurzeln sind nun 16 und 4. Wie sich daher diese Wurzeln zu einander verhalten, so wird sich die Länge des grössern Fasses zu der Länge des kleinern und der Durchmesser des grössern zu dem Durchmesser des kleinern verhalten. Das Nämliche behaupte ich von dem Prisma, der Pyramide, der Säule, dem Würfel und der Kugel.

Von den Würfeln.

Fünfzehnte Aufgabe. Um den Inhalt eines Würfels zu finden, multipliciere man die Länge der Kante mit sich kubisch, so hat man das Verlangte. Ist z. B. die Kante $ab = 4$ Ellen, so multipliciere man 4 mit sich kubisch, das wird 64, und das ist der Körperinhalt des ganzen Würfels, der $abhf$, $egcd$ ist (Fig. 17).[2])

Sechzehnte Aufgabe. Will man die Körperdiagonale des Würfels bestimmen, so multipliciere man das Quadrat der Kante mit 3, dann ist die Quadratwurzel des Produktes die Diagonale. Ist z. B. $ab = 4$,

---

1) Die $\sqrt{4096}$ ist 64, $\sqrt{64} = 8$, also ist $\sqrt{64}$ der achte Theil von $\sqrt{4096}$. Wenn der Durchmesser des grössern Fasses 16 ist, so ist der des kleinern 2. Um die fraglichen Durchmesser zu erhalten, rechne man so. Zuerst für den kleinern: $8 \times 16 = 128$, dividiert durch 64 kommt 2, das ist der Durchmesser des kleinern Fasses. Will man aber den grössern Durchmesser, so multipliciere man 64 mit 2 und dividiere durch 8, so erhält man den grössern. Ebenso, wie ich oben gesagt habe, verfährt man für den Kubikinhalt, nachdem man die Wurzel bestimmt hat.

sie 16. Multiplica 16 per 3, fa 48, del qual la radix quadrata, cioe 6 integri $55^{m} 43^{2e}$, he la linea cf, cioe el diametro.[1])

Ma se quello quadrato ab, cioe 16, tu lo dopiaray, chel sia 32, alora la radix quadrata de 32 sie el diametro del quadrato de la superficie del cubo[2]), el quella diametro sie la linea ce, cioe 5 integri $39^{m} 22^{2a}$ · quasi. Ma sel prefato quadrato tu lo multiplica per 6, haueray tutte le superficie del chubo.[3])

E per lo diametro del cubo si atrouaray el lado del cubo: troua la radice de la terza parte del quadrato del diametro. Como se lo diametro fosse 6 · 55 · 43, el quadrato sera 48, et la terza parte sie 16,
28 del quale la radice quadrata sera lo lado, che tu circhi, cioe 4 etc.[4]) |

De speris.

Decima septima conclusio. Quando tu voray la quantita de la spera, multiplica larea del maiore circulo de quela per lo $\frac{2}{3}$ del suo diametro, et haueray lo intento. Como he, sel diametro, cioe ab, sera 7 (Fig. 18), la area del circhio ab sera $38\frac{1}{2}$, si como in la 2ª parte de questa opera e dito. Li $\frac{2}{3}$ de quello 7 sie $4\frac{2}{3}$. Multiplica adoncha $38\frac{1}{2}$ per $4\frac{2}{3}$, et haueray $179\frac{2}{3}$, cioe la quantitade ouero la chapacitade de tuta la spera.[5])

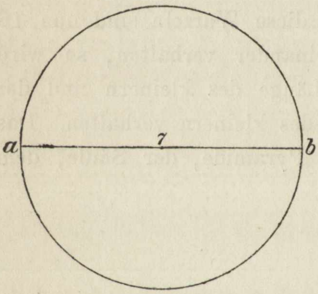


Fig. 18.

Decima octava conclusio. Quando tu voray la superficie de la spera, multiplica la circunferentia del circhio maiore per el suo diametro, et haueray quello, che tu circhi. In lo chaso preditto, quando el diametro ab he 7, la circunferencia sie 22. Multiplica 7 per 22, che fa 154, la superficie de la spera.[6])

Decima nona conclusio. Quando tu voray la porcione de la spera mazore ouero minore cha la mitade, cercha primamente la porcione del circhulo maiore, si como he ditto in la 2ª parte de questo opera. Si como aduncha la porcione del circhulo se ha al circhulo, cosi he da spera ha spera. Notta, che, sel se fu la tabula de li seni secondo la proporcione de 22 a 7, si como he fatto secondo la proporcione 360 à 120, si como la ho fatto io, alora quando lo archo del orizonte he

---

1) $D = a\sqrt{3}$. 2) $d = a\sqrt{2}$. 3) Oberfläche des Würfels $= 6a^2$.

4) $a = \sqrt{\frac{D^2}{3}}$. — Der letzte Abschnitt fehlt im lateinischen Texte.

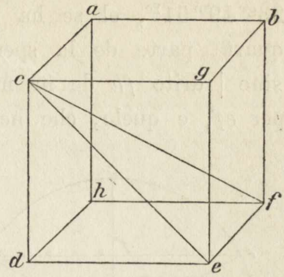


Fig. 17.

so ist das Quadrat gleich 16. Multipliciere 16 mit 3, das macht 48, und die Quadratwurzel daraus, das ist 6 Ganze 55′43″, ist die Gerade cf, nämlich die Körperdiagonale (Fig. 17).[1])

Wenn man aber das Quadrat von ab, nämlich 16, verdoppelt, so dass es 32 wird, dann ist die Quadratwurzel von 32 die Diagonale der quadratischen Seitenfläche des Würfels[2]); diese Diagonale ec ist ungefähr gleich 5 Ganzen 39′22″ (Fig. 17). Multipliciert man aber das genannte Quadrat mit 6, so erhält man die Gesamtoberfläche des Würfels.[3])

Aus der Körperdiagonale des Würfels findet man die Kante so: Man suche die Wurzel des dritten Theiles des Quadrates der Diagonale. Wäre z. B. die Diagonale gleich $6^g \cdot 55' \cdot 43''$, so ist das Quadrat gleich 48, davon ist der dritte Theil 16 und dessen Quadratwurzel ist die Kante, die man sucht, nämlich 4 u. s. w.[4])

Von den Kugeln.

Siebzehnte Aufgabe. Zur Bestimmung des Körperinhalts einer Kugel multipliciere man den Inhalt des grössten Kreises derselben mit $\frac{2}{3}$ ihres Durchmessers, so erhält man das Verlangte. Wäre z. B. der Durchmesser $ab = 7$ (Fig. 18), so ist der Inhalt des Kreises ab gleich $38\frac{1}{2}$, wie im 2. Theile dieses Werkes gelehrt ist. $\frac{2}{3}$ von 7 sind $4\frac{2}{3}$. Man multipliciere also $38\frac{1}{2}$ mit $4\frac{2}{3}$, so erhält man $179\frac{2}{3}$ und das ist der Körperinhalt oder die Mächtigkeit der ganzen Kugel.[5])

Achtzehnte Aufgabe. Will man die Oberfläche der Kugel bestimmen, so multipliciere man den Umfang eines grössten Kreises mit seinem Durchmesser, und erhält dadurch das Gesuchte. Im vorliegenden Falle, wo der Durchmesser $ab = 7$ ist, ist der Umfang gleich 22. Multipliciert man 7 mit 22, so macht das 154, die Oberfläche der Kugel.[6])

Neunzehnte Aufgabe. Wenn man einen Kugelabschnitt grösser oder kleiner als die Halbkugel finden will, so suche man zunächst den Abschnitt des grössten Kreises, wie im 2. Theile dieses Werkes gelehrt ist. Wie sich dann dieser Kreisabschnitt zum ganzen Kreise verhält, so verhält sich der Kugelabschnitt zur Kugel. Man bemerke hier, dass, wenn die Sinustafel nach dem Verhältnis von 22 : 7 berechnet wäre (wie ich es gethan habe), wie man sie nach dem Verhältnis von 360 : 120 konstruiert hat, man, wenn der Bogen des Horizontes $23^0 49' 51''$ ist, den vierten Theil

---

5) $V = \frac{d^2}{4}\pi \cdot \frac{2}{3} d = \frac{1}{6} d^3 \pi.$ 6) $O = d^2 \pi.$

$23^{gr}49^{m}51^{2e}$, el se ha la 4^{a} parte de la area del circhio, et chosi la quarta parte de la spera. Si como fi per lo archo *ab*, del quale el
28′ sino | drito *fh* de fir multiplicato per el sino dritto del archo *ce*, cioe per *ef*, e quelo, che ne viene da fir trato . del sectore del circhulo *ehgc* abuto per la multiplicacione de tutta la area per lo archo *ecg*, e per la diuisione del proueniente per tuta la circunferentia. Eno, cioe sono, aduncha, quele seni, cioe *fh* $23^{gr}8^{m}25^{2e}$, e *ef* $52^{gr}23^{m}20^{2e}$, a li quali correspondeno $1^{gr}20^{m}59^{2e}$ per el primo sino, ma per lo secondo $3^{gr}3^{m}21^{2e}$, quando el diametro he 7. Per questo se chonosse in quanto la porcione del cubo fatta de la sagitta e del diametro del circhio auanza la porcione de la spera. Conçosiacosa, chel quadrato del diametro sie 49, e la sagita *cf* sia $2^{gr}9^{m}1^{2a}$, multiplica adoncha 49 per $2^{gr}9^{m}1^{2a}$, ne viene $105^{gr}12^{m}49^{2e}$. Ma la quarta parte de la spera he $44^{gr}55^{m}$, la quale, quando la sera subtrata de $105^{gr}21^{m}49^{2e}$, rimagnera $60^{gr}26^{m}49^{2e}$, et in tanto la prefata porcione del cubo auanza la porcione de la spera preditta. Anchora se la porcione predita del cubo tu la traray de la mitade del chubo, tu saueray, in quanto questo residuo auanza la quarta parte de la spera. Chomo he el cubo circunsrito a la spera, quando el diametro he 7, sera 343, del quale la mitade sie 171 · 30. De la quale trata la prefata porcione del cubo, cioe 105 · 21 · 49, el residuo sera 66 · 8 · 11, el qual residuo
29 comparato a la quarta parte de la spera, | cioe a quelli 44 · 55, auanza quello, chomo he manifesto, $21^{gr}13^{m}11^{2a}$.[1])

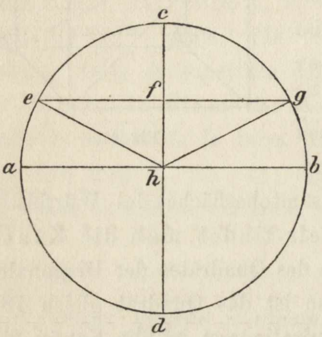


Fig. 19.

O tu, che lezaray questa opera, cognosse, mi hauere messe molte cose dicte da li altri, et hauer coreto alcuni diti de li altri, et auergene messo alchune per la dio gratia, abiando aduertencia in la sentencia del circhio, che la proporcione de la circunferentia del circhio a lo diametro non he si chomo 22 a 7, auegnadio che si per la facilita de si, etiamdio perche non he de la presente hopera reprouato questo, abia dito questa proportione, congosiacosa che la non he molto distante da la veritade. Ma quale sia la proporcione, la zo dita in altro luogo, quasi per demostratiua conclusione.[2])
29′ Deo gratias. Amen. Cumpleta die primo Aprilis 1488. |

1) Quando tu voray el diametro de una spera, multiplica la quantitade de essa spera per 343, e quela multiplicatione partila per $179\frac{2}{3}$, e de quelo, che ne viene, la radice cubicha sera el diametro adimandato. — Diese Anmerkung enthält der lateinische Text nicht.

des Kreisinhaltes und also auch den vierten Theil der Kugel vor sich hat. Wie es z. B. durch den Bogen *ae* geschieht, dessen Sinus rectus *fh* mit dem Sinus rectus des Bogens *ce*, nämlich mit *ef* multipliciert werden muss, und das Resultat von dem Kreisabschnitt *ehgc* abgezogen, den man durch Multiplikation des ganzen Kreisinhaltes mit dem Bogen *ecg* und nachherige Division des Ergebnisses durch den ganzen Kreisumfang erhält. Es sind nun hier diese Sinus nämlich $fh = 23^0 8' 25''$ und Sinus $fe = 52^0 23' 20''$. Ihnen entsprechen, wenn der Durchmesser 7 ist, für den ersten Sinus $1^0 20' 59''$, für den zweiten aber $3^0 3' 21''$. Daraus kann man auch finden, um wieviel der Würfeltheil, der von dem Pfeile und dem Durchmesser des Kreises gebildet wird, den Kugelabschnitt übertrifft. Denn das Quadrat des Durchmessers ist 49, und der Pfeil *cf* ist $2^0 9' 1''$. Durch Multiplikation von 49 mit $2^0 9' 1''$ erhält man also $105^0 21' 49''$. Der vierte Theil der Kugel ist aber $44^0 55'$, und subtrahiert man das von $105^0 21' 49''$, so bleiben 60° $26' 49''$ übrig, und um soviel übertrifft der Würfeltheil den vorgenannten Kugelabschnitt. Zieht man noch den erhaltenen Würfeltheil von dem halben Würfel ab, so erhält man auch, um wieviel dieser Rest den vierten Theil der Kugel übertrifft. Der einer Kugel vom Durchmesser 7 umgeschriebene Würfel ist z. B. gleich 343, und die Hälfte davon ist $171^0 30'$. Davon ziehe man den obengefundenen Würfeltheil, also $105^0 21' 49''$ ab, dann ist der Rest 66 · 8 · 11. Dieser Theil verglichen mit dem vierten Theil der Kugel, also mit $44^0 55'$, übertrifft diesen offenbar in 21^0 $13' 11''$.[1])

O Du, der Du dieses Werk liest, wirst erkennen, dass ich Vieles gelehrt habe, was von andern gesagt ist, und manche Behauptungen anderer verbessert, und manches mit Gottes Hilfe gesagt habe, indem ich bei Berechnung des Kreises darauf aufmerksam machte, dass das Verhältnis des Kreisumfangs zu seinem Durchmesser nicht gleich 22 : 7 ist, obwohl ich, sowohl wegen der Leichtigkeit der Berechnung und auch, weil es nicht dieses Werkes ist, sie zu rektifizieren, dieses Verhältnis angegeben habe vorzüglich deshalb, weil es nicht sehr weit von der Wahrheit abweicht. Das richtige Verhältnis aber habe ich schon an einem andern Orte gegeben durch einen fast vollständigen Beweis.[2])

Deo gratias, Amen. Vollendet am 1. April 1488.

---

1) Wenn man den Durchmesser einer Kugel finden will, so multipliciere man den Körperinhalt der Kugel mit 343 und theile das Produkt durch $179\frac{2}{3}$, dann ist die Kubikwurzel dieses Quotienten der verlangte Durchmesser. Das kommt darauf hinaus, dass $d^3 = \frac{21}{11} V$ oder $d^3 = \frac{6V}{\pi}$ ist.

2) Diese Arbeit ist vollständig verschollen.

Hieran schliesst sich auf Blatt 30^r und ^{v} eine *Tabula Sinuum* des nämlichen Verfassers für halbe Grade berechnet und auf Blatt 31^r bis 32^r eine ebenso eingerichtete *Tabula sinuum secundum proportionem 22 ad septem,* welche oben im Texte erwähnt ist.[1]) Blatt 32^v bis 34^r enthält eine *Tabula Sollis (!),* d. h. eine Tafel der Tageslängen für die einzelnen Tage des Jahres. Blatt 34^v ist leer.

Auf den Blättern 35^r—41^v, denen sechs leere Blätter folgen, worauf noch auf dem folgenden mit 42 bezeichneten Blatte das Obige fortgesetzt wird, sind eine Reihe ähnlicher Sätze niedergeschrieben, als sie in dem Werke Leonardo's sich finden. Sie sind von derselben Hand, wie dieses, geschrieben, aber, wie aus der ganz abweichenden Sprache und Orthographie

---

35 | **1.** A volere metere uno tondo mazore, che se fossa metere in uno quadro, fa cosi. Multiplica la lado del quadro, sia quanto se voglia, per $3\frac{1}{7}$, e tanto sera la circunferentia de quelo tondo, chi e in del quadro.[2])

2. A volere sapere larea de questo tondo, multiplica la mita del diametro per la mita de la circunferentia, et haueray la area del ditto tondo.[3])

3. A volere atrouare uno tondo, che tenga tanto larea sua, como fa la area de questo quadro, fa cosi, multiplica larea del tondo cun quella del quadro, e de quelo, che ne viene, troua la radix quadrata. La qual radice multiplicala per el diametro del tondo, chi e dentro dal quadro, e quello, che ne viene, partilo per larea del tondo, chi e dentro in del quadro, et quello, che ne vienera, sera el diametro del tondo, che tu circhi.

4. Anchora habiamo uno quadro, che ha per faza capeci 14, hora voglia trouare uno tondo, che sia tanto larea sua, quanto he la area de questo quadro. Fa chosi. Prima faray la area del quadro, e di 14 vie 14, fa 196. Poy multiplica questa area per $12\frac{4}{7}$, fara 2464. La radix
35′ quadrata de 2464, chie capeci 49 $\widetilde{\text{br}}$ 3 $\widetilde{\text{oz}}$ $9\frac{39}{50}$, sie la circunferentia, | che tu circhi.[4])

5. Se tu voy atrouare el diametro del tondo, che debbe essere tanto

---

1) Ich lasse ein Specimen beider Tafeln am Schlusse dieser Abtheilung des Bandes abdrucken.

2) $U = 3\frac{1}{7} d$; $\pi = 3\frac{1}{7}$. 3) $V = \frac{11}{14} d^2$.

4) 1 Capec. = 6 $\widetilde{\text{br}}$
1 $\widetilde{\text{br}}$ = 12 $\widetilde{\text{oz}}$

Es ist $\sqrt{2464} \sim 49{,}626$ statt 49,638 gerechnet.

hervorgeht, nicht von demselben Verfasser. Da sie aber doch sicher aus der nämlichen Zeit stammen als die Abschrift des Werkes LEONARDO's, füge ich sie hier ebenfalls an. Nach wieder zwei leeren Blättern findet sich von ganz anderer späterer Schrift noch die Notiz

„Nassete Zuan Vigenzo del 1502 adj 18 Zugno
de sabato a hore 9."

Hier also die Sätze des andern Verfassers:[1])

---

1. Um in ein Quadrat den grössten Kreis einzubeschreiben, der möglich ist, gehe man so vor. Man multipliciere die Seite des Quadrates, sie mag sein, welche sie will, mit $3\frac{1}{7}$, so gross ist dann der Umfang des Kreises, der in das Quadrat beschrieben ist.[2])

2. Um den Inhalt dieses Kreises kennen zu lernen, multipliciere man den Halbmesser mit der Hälfte des Umfanges, so erhält man den Inhalt genannten Kreises.[3])

3. Um einen Kreis zu finden, dessen Inhalt ebensoviel enthält[4]), als der Inhalt des Quadrates ausmacht, gehe man so vor. Man multipliciere den Inhalt des Kreises mit dem des Quadrates und suche von dem Produkte die Quadratwurzel. Diese Wurzel vervielfache man mit dem Durchmesser des Kreises, der in das Quadrat beschrieben ist, und das Ergebnis dividiere man durch den Inhalt des dem Quadrat einbeschriebenen Kreises, dann ist der erhaltene Quotient der Durchmesser des Kreises, der gesucht wird.

4. Es sei ferner ein Quadrat gegeben, dessen Seite 14 Capeci enthalte, ich will nun einen Kreis finden, dessen Inhalt ebenso gross ist, als der Inhalt dieses Quadrates. Mache es so. Zuerst berechne den Inhalt des Quadrates; er ist 14×14, das macht 196. Dann multipliciere diesen Inhalt mit $12\frac{4}{7}$, das giebt 2464. Die Quadratwurzel von 2464, die 49 Capeci 49 $\widetilde{\text{br}}$ $9\frac{39}{40}$ $\widetilde{\text{oz}}$ beträgt, ist der gesuchte Umfang.[5])

5. Will man jetzt den Durchmesser des Kreises finden, dessen Fläche

---

1) Die Nummerierung rührt von mir her.

2) Seite des Quadrates a, Umfang des Kreises $= 3\frac{1}{7}a$.

3) Inhalt des Kreises $= 3\frac{1}{7}a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}\pi$.

4) Durchmesser des gesuchten Kreises x; dann ist

$$x = \left(\sqrt{\frac{a^2}{4}\pi \cdot a^2} \cdot a\right) : \frac{a^2}{4}\pi = \frac{2a}{\sqrt{\pi}},$$

was vollständig richtig ist.

5) Da der Kreisinhalt $= \frac{U^2}{4\pi}$ ist, so ist wirklich $U^2 = 4\pi \cdot a^2$.

larea, como e quela del quadro, fa cossi. Parti la ditta circunferentia per $3\frac{1}{7}$, che ne viene capeci 15 $\widetilde{\text{br}}$ 4 $\widetilde{\text{oz}}$ $9\frac{123}{1100}$, e tanto e lo diametro del ditto tondo.

6. E gli e uno quadrangulo, chi e per facia 4, e de longo 16. A volerlo redure a uno quadrato, che sia equale per facia, fa cosi. Multiplica la longeza cun la largeza, fara 64; la radice quadrata de 64, chi e 8, sera el lado del quadrato fatto (Fig. 1).

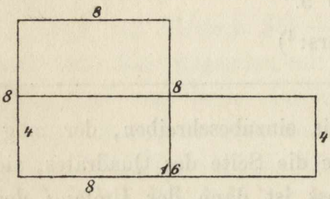


Fig. 1.

7. E gli e uno triangulo ouero uno quadro, che larea sua sie 80: voglio redure ad uno triangulo equilatero. La regula dice cosi. Quadra questa area, chi e 6400; poy multiplica per $5\frac{3}{4}$, fira 36800; poy troua la radix quadrata de la radix de 36800, e tanto sera per facia el dito triangulo, che tu circhi.[1])

8. Abiando lo lado del triangulo, volendo atrouare la perpendichulare, quadra lo lado del triangulo, e trane il $\frac{1}{4}$ de la quadratura, e del rimanente la radix quadrata sera la perpendichulare del triangulo.[2])

9. E volendo trouare lo lado de uno triangulo, che sia equilatero, fara cosi. Quadra la perpendichular, e giugni il $\frac{1}{3}$ de la quadratura: la
36 radix quadrata sera lo lado del triangulo.[3]) |

10. A volere atrouare, quanta distancia e dal centro de uno triangulo equilatero al cantone, fa cosi. Quadra lo lado del triangulo, e de la terza parte de quelo numero la radix quadrata sera la distantia dal centro al cantone.[4])

11. El' e uno triangulo ambligonio (Fig. 2), chi e per una faça 12, per laltra 10, e per laltra 6, e volgio sapere, doue chadera là perpendichulare, fa cosi. Multiplica 10 via 10, fa 100; poy 6 via 6, fa 16; tray 36 de 100, resta 64; piglia la mitade 64, chi e 32, e partilo per lado basso, chi e 12, ne viene $2\frac{2}{3}$, e queste $2\frac{2}{3}$ agiugnelo cun la mita del lado basso, chi e 6, fara $8\frac{2}{3}$, et in quelo logo chadera la perpendichulare.[5])

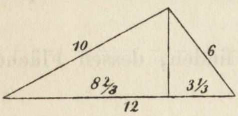


Fig. 2.

12. Et per trouare la quantita de essa perpendichulare, multiplica lo lado, chi e 6, in se medesimo, fa 36; poy multiplica quella parte del lado baso, chi e rimasa ultra la perpendichular, chi e $3\frac{1}{3}$, in si, fara $11\frac{1}{9}$;

---

1) Es muss natürlich $5\frac{1}{3}$ heissen, wie auch an spätern Stellen richtig angegeben wird.

2) $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. 3) $a^2 = \frac{4}{3}h^2$.

ebenso gross ist als die des Quadrates, so mache man es so. Man theile den berechneten Umfang durch $3\frac{1}{7}$, wodurch 15 Capeci 41 $\widetilde{\text{br}}$ $9\frac{123}{1100}$ $\widetilde{\text{oz}}$ herauskommen, so gross ist dann der Durchmesser des genannten Kreises.

6. Gegeben ist ein Rechteck, dessen Breite 4 und dessen Länge 16 ist. Um es in ein Quadrat zu verwandeln, das gleiche Seiten hat, gehe man so vor. Man multipliciere die Länge mit der Breite, so macht das 64. Die Quadratwurzel von 64, die 8 ist, ist dann die Seite des zu zeichnenden Quadrates (Fig. 1).

7. Gegeben ein Dreieck oder ein Quadrat, dessen Inhalt gleich 80 ist, ich will es in ein gleichseitiges Dreieck verwandeln. Die Regel sagt so. Quadriere diesen Inhalt, das giebt 6400, darauf multipliciere ihn mit $5\frac{3}{4}$, so entsteht 36800; dann suche die vierte Wurzel von 36800, so gross ist dann die Seite des gesuchten Dreiecks.[1])

8. Hat man die Dreiecksseite und will die Höhe finden, so quadriere man die Dreiecksseite und ziehe $\frac{1}{4}$ von dem Quadrate ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes die Höhe des Dreiecks.[5])

9. Und um die Seite eines gleichseitigen Dreiecks zu finden (wenn die Höhe bekannt ist), mache es so. Quadriere die Höhe und füge dem Quadrat seinen dritten Theil hinzu, dann ist die Quadratwurzel die Dreiecksseite.[3])

10. Um zu finden, wie gross der Abstand des Mittelpunktes eines gleichseitigen Dreiecks von der Ecke ist, gehe man so vor. Man quadriere die Seite des Dreiecks, dann ist die Quadratwurzel aus dem dritten Theile dieser Zahl der Abstand des Mittelpunktes von der Ecke.[4])

11. Gegeben ist ein stumpfwinkliges Dreieck (Fig. 2), dessen eine Seite 12, die andere 10, die dritte 6 ist; ich will bestimmen, wohin der Höhenfusspunkt fällt. Mache es so. Multipliciere 10×10, das giebt 100; darauf 6×6, das ist 36; ziehe 36 von 100 ab, es bleibt 64; nimm die Hälfte von 64, die 32 ist, und theile sie durch die Grundlinie, die 12 hält, so kommt $2\frac{2}{3}$. Diese $2\frac{2}{3}$ füge zur Hälfte der Grundlinie hinzu, die 6 ist, so giebt das $8\frac{2}{3}$, und dahin fällt der Höhenfusspunkt.[5])

12. Und um die Länge der Höhe zu finden, multipliciere die Seite, welche 6 beträgt, mit sich selbst, das giebt 36, darauf vervielfache den Theil der Grundlinie, der über dem Höhenabschnitt geblieben ist, das ist $3\frac{1}{3}$, mit sich selbst, so giebt das $11\frac{1}{9}$; ziehe das von 36 ab, so bleibt $24\frac{8}{9}$, und die Quadratwurzel von $24\frac{8}{9}$, das ist $4\frac{720828347}{729000000}$, ist die Länge der Höhe.

---

4) Der fragliche Abstand ist $\frac{2}{3}h$, also gleich $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

5) Hier ist die Formel $a^2 - b^2 = p^2 - q^2 = c\,(p - q)$ benutzt, im Gegensatz zu der Rechnung Leonardo's.

tralo de 36, rimane $24\frac{8}{9}$, e la radice quadrata de $24\frac{8}{9}$, chi e $4\frac{720828347}{729000000}$, e la quantita de la perpendiculare. La proua sie a quadrare la perpendiculare, fa $24\frac{8}{9}$; poy quadra $8\frac{2}{3}$, fa $75\frac{1}{9}$; agiunti in siema fa 100, e la
36′ radice quadrata e con el lado de 10. |

13. El' gie uno tondo, chi e per el suo diametro 10; a volere sapere el suo sen drito fa cosi. El quadrato de quello parte del semidiametro, che se azonzerebe a la sagita a compire el semediametro, tralo del quadrato del semediametro, e del rimanente la radix quadrata sera el sen drito.

14. E per sapere el sen verso, cioe la sagitta, el quadrato del sen drito tralo del quadrato del semediametro, e del rimanente la radix quadrata sera quello, che se agiugne sopra el semediametro. El qual tralo dal semediametro, el resto sera la sagita. Exempli gratia (Fig. 3) el quadrato *cb* tralo dal quadrato *cd*, e del rimanente la radix quadrata sera *ab* el sen suo drito. E per el sen verso el quadrato *ab* tralo dal quadrato *dc*, e del rimanente la radix quadrata sera *bc*, el qual tralo de *cd*, e rimagnera *db*, la sagita ouero el sen verso.[1])

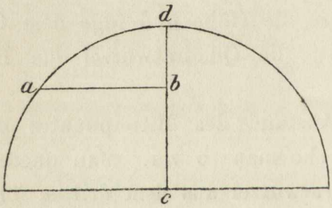


Fig. 3.

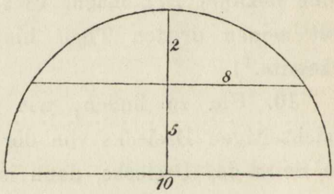


Fig. 4.

15. El' gie uno tondo, chi e per diametro $\widetilde{\mathrm{br}}$ 10; taglione una fetta, chi e longa $\widetilde{\mathrm{br}}$ 8: voglio sapere, quanto sera alta, cioe, quanto sera la sagita de quella feta (Fig. 4). Fa cossi. El quadrato de la mita de la longeza de la feta tralo dal quadrato del semediametro, e del rimanente la radix quadrata sera quello, che se azonze sopra el semediametro. El
37 qual tralo dal semediametro: el rimanente | sera la sagita, che se circhaua.

16. Volendo la longeza de tuta la feta per la sagita, multiplica la sagita, che se taia via dal diametro, per lo resto del diametro, e quelo, che ne viene, multiplicalo per 4, e la radix quadrata sera la longeza de la feta, che se circhaua.[2])

17. Et se voray sapere larcho de la porcione, sapendo la corda, la sagita e lo diametro, adiugni la mita de la corda cun la sagita, e tuto questo parti per mitado, et lo proueniente sapi, che parte e de tuto el diametro, e tal parte, como sera de tuto el diametro, tal parte sera larcho de la porcione de tula la circunferentia del circhio.[3])

Die Probe davon ist, man quadriere die Höhe, das giebt $24\frac{8}{9}$, dann quadriere man $8\frac{2}{3}$, das macht $75\frac{1}{9}$. Zusammengezählt giebt es 100, und davon die Quadratwurzel ist wie die Seite gleich 10.

13. Gegeben ein Kreis, dessen Durchmesser 10 ist. Um für einen Bogen den Sinus rectus zu finden, mache man es so. Das Quadrat des Theiles des Halbmessers, den man zum Pfeile hinzufügen müsste, um den Halbmesser zu vollenden, ziehe man vom Quadrate des Halbmessers ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes der Sinus rectus.

14. Und um den Sinus versus, das ist den Pfeil, zu erhalten, ziehe man das Quadrat des Sinus rectus vom Quadrate des Halbmessers ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes dasjenige, was man zu der Vollendung des Halbmessers hinzulegen müsste. Man ziehe dies vom Halbmesser ab, so ist der Rest der Pfeil. Z. B. (Fig. 3) ziehe man das Quadrat von cb von dem Quadrate der cd ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes ab, der zugehörige Sinus rectus. Und für den Sinus versus ziehe man das Quadrat der ab vom Quadrate der dc ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes die bc. Sie ziehe man von cd ab, so bleibt db übrig, der Pfeil oder der Sinus versus.[1])

15. Gegeben ein Kreis, dessen Durchmesser 10 ist. Ich schneide davon ein Stück ab, das 8 Ellen lang ist, und will wissen, wie hoch dasselbe ist, das heisst, wie gross der Pfeil dieses Abschnittes ist (Fig. 4). Mache es so. Das Quadrat der Hälfte der Länge des Abschnittes ziehe vom Quadrate des Halbmessers ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes das, was man ⟨dem Pfeil⟩ zur Vollendung des Halbmessers hinzufügen muss. Das ziehe man vom Halbmesser ab, der Rest ist der Pfeil, den man sucht.

16. Will man die Länge des ganzen Abschnittes aus dem Pfeile bestimmen, so multipliciere man den Pfeil mit dem Reste des Durchmessers, wenn man von ihm den Pfeil abgezogen hat, und multipliciere das Produkt noch mit 4: dann ist die Quadratwurzel davon die Länge des Abschnittes, die man sucht.[2])

17. Will man auch den Bogen des Abschnittes finden, wenn man die Sehne, den Pfeil und den Durchmesser kennt, so addiere man die Hälfte der Sehne zu dem Pfeil, halbiere die Summe, und sehe dann zu, der wievielte Theil das vom ganzen Durchmesser ist. Dann ist der Bogen der ebensovielte Theil des ganzen Umfanges, der wievielte das Obige vom ganzen Durchmesser ist.[3])

1) In No. 13 und 14 sind die Formeln enthalten:
$$\sin^2 = r^2 - (r - \text{sinvers})^2;\quad \text{sinvers} = r - \sqrt{r^2 - \sin^2}.$$

2) Dieselben Rechnungen, wenn statt des Sinus die Sehne, also der doppelte Sinus, gegeben ist.

3) Danach müsste $\text{Arc}\, 2\alpha = (\sin\alpha + \text{sinvers}\,\alpha)\,\pi$ sein.

18. A volere sapere larea de una porcione, che fusse menore cha mezo el circhio, fa de besogna sapere prima larcho de la ditta porcione e la corda, che se sottende a lo ditto archo, e la sagita ouero el sen verso. Como sarebe questa porcione $acdb$ (Fig. 5), de la quale la corda fusse 8 e la sagita 2, e lo archo fosse 10. Poy bisogna sapere, de qual circhio e stata taiada la ditta porcione. La qual saperay per questo modo. Multiplicando la mita de la corda in si medesima, e partire per la sagita, et a quello, che ne viene, agiugneui la ditta sagitta, et aueray lo diametro del circhio, de che el fo taiado.[1])

Verbi gratia multiplica ab in si, fa 16; parti questo 16 per bc, e
37′ vegnera pb 8, | ali quali zonzi bc, sera tuto el diametro 10. Ma a volere sapere larea de la dita porcione, multiplica la mita del diametro, cioe pm, per la mita del archo, cioe per ac, e quelo, che ne viene, serualo. Poy multiplica quella parte, che se azonzerebe a la sagita a compire el semediametro, cioe bp, per la mita de la corda ab, e quelo, che ne vene, tralo de quello, che tu seruasti, e lo rimanente sera larea de la ditta porcione $abdc$ quesita.

19. A volere sapere larea de la mazore porcione cha mezo el circhio fa, como ay fatto di sopra, saluo che tu aueray agiugnere a quello, che tu seruasti, quello, che tu chauy de sopra da lo seruato.

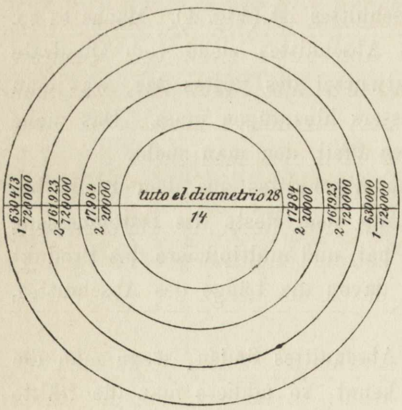


Fig. 6.

20. El' gie uno tondo, chi e 28 per diametro, del quale se vole fare 4 parti equale, e che ciaschuna parte vada al tondo (Fig. 6). Adimando, quanta parte del diametro prendera ciaschuna de queste parte. Fa cosi. Del quadrato del diametro, cioe 788, trane la quarta parte, chi e 196, e lo rimagnera 588, de lo quale 588 la radix quadrata sera lo diametro de li $\frac{3}{4}$, chi rimagnera in mezo del circhio, cioe $24\frac{89527}{360000}$[2]), siche da $24\frac{89527}{360000}$ per fina 28 sie $3\frac{270473}{360000}$ el diametro de la quarta parte de fora. E per lo secondo quarto tray quella prima quantita, cioe 196, de 588, resta 392, e la radix quadrata, cioe $19\frac{7989}{10000}$[3]),

---

1) Hier kennt also der Verfasser die Formel $d = \text{sinvers} + \frac{\sin^2}{\text{sinvers}}$.

2) $\sqrt{588} = 23{,}2487$, der Werth unseres Verfassers $= 24{,}24868$.

18. Um den Flächeninhalt eines Kreisabschnittes zu finden, der kleiner ist als der Halbkreis, muss man zunächst den Bogen des Abschnittes kennen und die Sehne, welche den fraglichen Bogen überspannt, sowie den Pfeil oder den Sinus versus. Wenn z. B. der fragliche Abschnitt $acdb$ (Fig. 5) wäre, dessen Sehne 8, der Pfeil 2 und der Bogen 10 ist, so muss man bestimmen, von welchem Kreis der fragliche Abschnitt genommen ist. Das findet man auf folgende Weise. Man multipliciere die Hälfte der Sehne mit sich selbst und theile dann durch den Pfeil und zu dem Ergebnis addiere man den Pfeil, so hat man den Durchmesser des Kreises, von dem der Abschnitt genommen ist.[1])

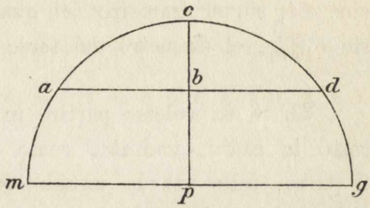


Fig. 5.

Z. B. multipliciere ab mit sich selbst, das macht 16, theile diese 16 durch bc, so kommt $pb = 8$. Dazu addiere bc, dann ist der ganze Durchmesser 10. Um aber den Inhalt genannten Abschnittes zu finden, multipliciere man den Halbmesser, also pm, mit dem halben Bogen, also mit ac, und merke sich das Ergebnis. Darauf multipliciere man das Stück, das man zum Pfeil hinzulegen musste, um den Halbmesser zu erhalten, also bp, mit der Hälfte der Sehne ab, und das Ergebnis ziehe man von dem Gemerkten ab, so ist der Rest der gesuchte Inhalt des fraglichen Abschnittes $abdc$.

19. Um den Inhalt des Abschnittes, der grösser ist als der Halbkreis, zu bestimmen, mache man es genau so, wie man es eben gemacht hat, nur dass man das zu dem Gemerkten addiert, was man oben von ihm abgezogen hat.

20. Gegeben ist ein Kreis, dessen Durchmesser 28 ist. Man will von diesem vier gleiche Theile machen, so dass jeder Theil in die Runde geht (Fig. 6). Ich frage, den wievielten Theil des Durchmessers wird jeder Theil einnehmen. Mache es so. Von dem Quadrate des Durchmessers, also von 784, ziehe seinen vierten Theil, das ist 196, ab, so bleiben 588. Die Quadratwurzel aus 588 wird dann der Durchmesser der $\frac{3}{4}$ sein, die in der Mitte des Kreises übergeblieben, also $24\frac{89527}{360000}$[2]), so dass von $24\frac{89527}{360000}$ bis zu 28 der Durchmesser des vierten Theiles von aussen gleich $3\frac{270473}{360000}$ sein wird. Für das zweite Viertel ziehe man die vorhin benutzte Zahl, also 196 von 588 ab, so bleiben 392. Davon ist die Quadratwurzel, nämlich $19\frac{7989}{10000}$[3]), der Durchmesser der zwei Viertel in der Mitte, so dass

3) $\sqrt{392}$ ist wirklich $= 19{,}7989$, so dass hier ganz genau gerechnet ist. Wie so genaue Werthe gefunden sind, ist nicht bekannt.

sie lo diametro de li 2 quarti de mezo, siche da $19\frac{7989}{10000}$ fina la $24\frac{89527}{360000}$
38 sie $4\frac{161923}{360000}$, | el diametro del secondo quarto. E per lo terzo quarto tray la prima quantita, cioe 196, de 392, resta 196, e la radix quadrata, cioe 14, sie el diametro del quarto de mezo, siche da 14 per fina $19\frac{7989}{10000}$ sie $5\frac{7989}{10000}$, el diametro del terzo quarto non precisamente.

21. Si tu volesse partire in 3 parte, tolle via la terza parte, e del resto la radix quadrata, como e fatto de sopra. E volendo partire in 2 parte, tolle via la mitade del quadrato del diametro, e del resto la
98′ radice, como dicho di sopra. |

22. Elle una peza de tera, la quale piu longa cha larga volte $3\frac{2}{5}$, et e p^{ts} 2. Adimando, quanto e longa e larga. Fa cossi. Fa la proporcione, cioe atroua duy numeri, che luno tenga laltro volte $3\frac{2}{5}$, chi e 5 e 17, perche 17 contiene 5 volte $3\frac{2}{5}$. E 5 e 17 multiplicato in sieme fa 85, el quale serualo. Poy fa de le p^{ts} 2 tabule, che sono 48, le quale 48 fanne $\frac{1}{4}$ de tabule, che sono 192. El quale e da multiplicare con 85 seruato, fara 16 320, de la qual quantitade la radix quadrata e da partire per la proportione, cioe per 5 e per 17, da parsi luno dal lattro, et haueray la longeza e la largeza fatta.

23. Try compra una peza de tera, e ciaschuno paga tanti duchati per zozo, quanti zozi gli tocha in sua parte, e costo in tuto 144 ducati. Adimando, quanti zozi gli tocha per parte. Fa cossi. Piglia la radice quadrata de 144, chi e 12; poy troua 3 numeri, che multiplicati in si medisimi e giunte in sieme le multiplicatione abiano radice, como sarebe 2 e 3 e 6, perche 2 via 2 fa 4, e 3 via 3 fa 9, et 6 via 6 fa 36; azonto in seme 4 et 9 e 36 fa 49, la chuy radice he 7, numero partitore. Poy multiplica el numero, cioe 2, via 12, fa 24, partilo per 7, ne viene $3\frac{3}{7}$ zozi a uno; poy multiplica 3 via 12, fa 36, partilo per 7, ne viene zozi $5\frac{1}{7}$ per laltro; poy multiplica 6 via 12, fa 72, partilo per 7, ne vene $10\frac{2}{7}$
39 per lo terzo. Zonte in sieme queste 3 quantitade sono zozi $18\frac{6}{7}$, | e tanto fa la peza de la terra. E per saper la quantita de duchati per uno, fa cossi. Multiplica la prima quantita di zozi in si medesima, cioe $3\frac{3}{7}$, monta dy̸ $11\frac{37}{49}$; poy multiplica zozi $5\frac{1}{7}$ in si medesimo, monta dy̸ $26\frac{22}{49}$; poy multiplica zozi $10\frac{2}{7}$ in si medesimo, monta dy̸ $105\frac{39}{49}$. Azonte insieme queste 3 quantita de duchati fano in soma dy̸ 144, como ponessimo da prima.

24. El' e uno bocheto, che mena o͠z 12 de aqua fora de uno nauilio, ed e largo el ditto bocheto o͠z 10 e alto o͠z 12. Et vorra fare uno altro von $19\frac{7989}{10000}$ bis zu $24\frac{89527}{360000}$ der Durchmesser des zweiten Viertels gleich $4\frac{161923}{360000}$ ist. Für das dritte Viertel ziehe die erste Zahl, nämlich 196, von 392 ab, dann bleibt 196. Die Quadratwurzel davon, das ist 14, ist der Durchmesser des innern Viertels, so dass von 14 bis zu $19\frac{7989}{10000}$ der Durchmesser des dritten Viertels gleich $5\frac{7989}{10000}$ nicht ganz genau sein wird.

21. Wollte man in drei Theile theilen, so ziehe man immer den dritten Theil ab und suche vom Reste die Quadratwurzel, wie oben geschehen ist. Um aber in zwei Theile zu zerschneiden, ziehe man stets die Hälfte des Quadrates des Durchmessers ab und aus dem Reste die Wurzel, wie ich oben sagte.

22. Es ist ein Landstück gegeben, das $3\frac{2}{3}$mal so lang als breit ist, und 2 p^s enthält. Ich frage, wie lang und breit es ist. Man suche das Verhältnis in ganzen Zahlen, das heisst, man suche zwei Zahlen, von denen die eine das $3\frac{2}{5}$fache der andern ist; es ist 5 : 17, denn 17 enthält die 5 $3\frac{2}{5}$mal. Multipliciere 5 mit 17, das giebt 85 und merke das. Darauf mache aus den 2 p^s Tabulae, es sind 48, die $\frac{1}{4}$ Tabula ausmachen, das ist 192. Das ist mit den gemerkten 85 zu multiplicieren und macht 16320. Die Quadratwurzel dieser Grösse ist nach dem Verhältnis 5 : 17 zu theilen, eins vom andern, so hat man die Länge und die Breite.

23. Drei kaufen ein Landstück und ein jeder bezahlt soviel Dukaten für den Zozo, soviel Zozi ihm auf seinen Theil zufallen; im Ganzen kostet es 144 Dukaten. In frage, wieviel Zozi jedem auf seinen Theil gebühren. Mache es so. Nimm von 144 die Quadratwurzel, sie ist 12. Dann suche drei Zahlen, die jede mit sich selbst multipliciert, und dann die drei Produkte zusammengezählt eine Quadratwurzel besitzen, wie es 2, 3 und 6 sind, denn $2 \times 2 = 4$, $3 \times 3 = 9$, $6 \times 6 = 36$ und 4, 9 und 36 zusammengezählt giebt 49, deren Wurzel 7 ist, der Theiler. Nun multipliciere die erste Zahl 2 mit 12, das macht 24, theile durch 7, so kommt $3\frac{3}{7}$ Zozi für den Ersten. Dann multipliciere 3 mit 12, macht 36; theile durch 7, so kommen $5\frac{1}{7}$ Zozi für den Zweiten. Darauf multipliciere 6 mit 12, macht 72, dividiere durch 7, giebt $10\frac{2}{7}$ Zozi für den Dritten. Diese drei Grössen addiert geben $18\frac{6}{7}$ Zozi, und so gross war das Landstück. Um die Zahl der Dukaten für einen jeden zu finden, mache es so. Multipliciere die erste Anzahl Zozi mit sich selbst, also $3\frac{3}{7}$, so kommen $11\frac{37}{49}$ Dukaten, dann multipliciere $5\frac{1}{7}$ Zozi mit sich selbst, so kommen $26\frac{22}{49}$ Dukaten; endlich multipliciere $10\frac{1}{7}$ mit sich selbst, so kommen $105\frac{39}{49}$ Dukaten. Alle diese drei Summen von Dukaten zusammengezählt machen zusammen 144 Dukaten, wie wir zuerst gesagt haben.

24. Es ist eine Öffnung, welche aus einem Schiffe 12 Unzen Wasser ablässt. Diese Öffnung ist 10 Unzen breit und 12 Unzen hoch. Man will

bocheto, che menara oz̃ 18 del dito nauilio a quela medesima proporcione. Adimando la largeza e la alteza. Fa cosi. Multiplica la largeza del noto bocheto per le onze de quello, che voliamo sapere, cioe 10 via 18, fa 180 area. Poy fa la proporcione de la largeza e de lalteza del noto bocheto, cioe mette 12 sopra 10, como vedi qui: $\frac{12}{10}$, esquisali sera $\frac{6}{5}$, el qual 6 e 5 e da multiplicare in siema, fa 30; el qual 30 multiplicalo con 180 di sopra, fa 5400, de la qual somma la radix quadrata[1]) e da partire per la proportione, cioe per 6 e 5, e quelo, che ne vegnero, sera la largeza e la alteza del bocheto da fir fatto. E si como 6 contiene 5 volte $1\frac{1}{5}$,
39′ cosi si contegnera quelli numeri, che vegnera, luno alo altro. |

25. El quadrato de qual numero tu voy, ouero superficie tu voy, multiplica per $5\frac{1}{3}$, el radix radicis de quel, che ne vegnera, sera el lado del triangulo equilatero.

26. E a fare uno tondo, multiplica, che area tu voy, per $12\frac{4}{7}$, e de quello, che ne viene, la radice quadrata he la circunferentia.

27. El' e uno triangulo rectiangulo per faza 10 e longo 20 (Fig. 7), e la sua area 100. A volere trare uno, che sia area 50, ouero partire quelo per mezo, quanto sera lo per facia e per longo a quela medesima proporcione? Fa cosi. Fa la proportione de la facia sopra la longeza cosi, como qui, cioe 10 sopra 20 in quella forma $\frac{10}{20}$, squisali sono $\frac{1}{2}$; poy di 1, chi e sopra la riga, via 2, che de sotto, fa 2. Poy multiplica quello 2 per la area de quello triangolo, cioe 2 via 100, fa 200, del qual 200 la radix quadrata partila per la proporcione, cioe per 1 e per 2, e quelo, che ne vegnera, sera la longeza e la facia.

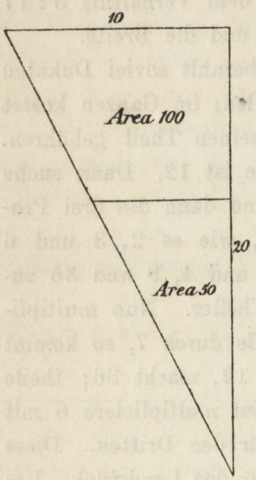


Fig. 7.

28. E se volesse $\frac{1}{3}$, piglia li $\frac{2}{3}$ de la area del tuto; e se ne volesse $\frac{1}{4}$, piglia li $\frac{3}{4}$ de la area. E se volesse li $\frac{1}{5}$, piglia li $\frac{4}{5}$ de la area del tuto, et sic de singulis, e fa como de sopra.

29. Ma nota, sel triangulo equilatero ouero isoceles, fa la proporcione de la mita de lo abaso
40 sopra tuta la perpendichulare, la quale | proporcione multiplica cun quella parte de quantita, che tu voy, operando, como ho dito de sopra, et haueray tuta la perpendichulare e la mitade de lo abaso, che se circhaua.

30. A chi volesse partire una peza de terra, che fosse per una testa

---

1) Radix 73 · 29 · 5; diuisa per 6 e per 5 ne viene 12 · 14 · 50 · 50 per 6, et per 5: 14 · 41 · 49

eine andere Öffnung herstellen, die 18 Unzen aus dem Schiffe abführen soll, nach demselben Verhältnis (von Breite und Höhe): ich frage nach der Breite und Höhe. Mache es so. Multipliciere die Breite der bekannten Mündung mit den Unzen derjenigen, welche wir berechnen wollen, also $10 \times 18 = 180$. Dann bestimme das Verhältnis der Breite zur Höhe der bekannten Öffnung, das heisst, setze 12 über 10, wie man es hier sieht, $\frac{12}{10}$, gekürzt wäre es $\frac{6}{5}$. Diese 6 und 5 sind zu multiplicieren, das macht 30; diese 30 multipliciere mit den obigen 180, so macht das 5400, und die Quadratwurzel dieser Summe ist durch das Verhältnis zu theilen, also durch 6 und 5, dann ist das Ergebnis die Breite und Höhe der zu konstruierenden Öffnung. Und so wie 6 die 5 $1\frac{1}{5}$mal enthält, so werden auch die sich ergebenden Zahlen sich gegeneinander verhalten.[1])

25. Das Quadrat einer beliebigen Zahl oder einer beliebigen Fläche multipliciere man mit $5\frac{1}{3}$, dann ist die vierte Wurzel des entstehenden Produktes die Seite des (ebenso grossen) gleichseitigen Dreiecks.

26. Um aber einen Kreis zu erhalten, multipliciere eine beliebige Fläche mit $12\frac{4}{7}$, dann ist die Quadratwurzel des Ergebnisses der Umfang des Kreises.

27. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck von der Grundlinie 10 und der Länge 20 (Fig. 7), und seine Fläche ist 100. Man will davon ein anderes abschneiden, dessen Fläche 50 ist, oder das gegebene halbieren: wie lang und wie breit wird es nach dem nämlichen Verhältnis sein? Mache es so. Suche das Verhältnis der Grundlinie zur Länge so wie hier, indem man nämlich 10 über 20 setzt in dieser Form $\frac{10}{20}$, gekürzt ist es $\frac{1}{2}$. Dann sage: 1, was über dem Strich steht, mal 2, das unten ist, giebt 2. Nun multipliciere diese 2 mit dem Inhalte des Dreiecks, also $2 \times 100 = 200$. Die Quadratwurzel dieser 200 theile dann nach dem Verhältnis, also von 1 : 2, so ist dann das, was herauskommt, die Länge und die Grundlinie.

28. Will man $\frac{1}{3}$, so nimm $\frac{2}{3}$ von dem Gesamtinhalte weg; will man $\frac{1}{4}$, so nehme man $\frac{3}{4}$ des Inhaltes, und für $\frac{1}{5}$ nehme man $\frac{4}{5}$ des Gesamtinhaltes und so für die übrigen, und verfahre wie vorher.

29. Merke aber, ist das Dreieck gleichseitig oder gleichschenklig, so suche das Verhältnis der halben Grundlinie zu der ganzen Höhe. Dieses Verhältnis multipliciere mit dem grössern Theile, welchen man will, indem man so verfährt, wie ich oben gesagt habe, und erhält dadurch die ganze Höhe und die Hälfte der Grundlinie, die man sucht.

30. Will man ein Landstück theilen, das an einem Kopfende 6 Capezi

1) Die Wurzel ist 73 · 29 · 5; dividiert durch 6 und durch 5 kommt 12 · 14 · 50 · 50 für 6, und für 5: 14 · 41 · 49.

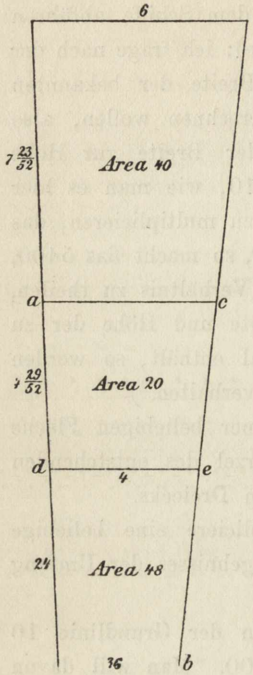


Fig. 8.

capezi 6 (Fig. 8), et per laltra capezi 4, e per longo capezi 12, e larea sua 60, prima fa cosi. Compisse la piramide in questo modo. Multiplica la testa de 6 per la longeza, chi e 12, fa 72, e partilo per la diferentia de la teste, chi e 2, ne viene 36, la longeza de la piramide. Cossi fatto, fa la area de tuta la piramide ouero de tuto lo triangulo, chi e 108, del qual 108 la radix quadrata sie $10\frac{2}{5}$ non aponto seruala. E poy fa larea de *bd*, cioe del arapente de la piramide, chi e 48; a la qual 48 azonzege quela parte de larea, che tu voy cauare de la dita peza de terra, cioe se voy partila per mezo, azonze la mita de larea de la dita peza de terra, e se voy $\frac{1}{4}$, azonze $\frac{1}{4}$, et sic de singulis. Partendo per $\frac{1}{3}$ ne troueremo adoncha $\frac{1}{3}$ de larea, chi e 20; azonto 20 a 48, fa 68, del qual 68 la radix quadrata sie $8\frac{1}{4}$ non aponto, seruala. E per atrouare donda chade la perpendichulare, multiplica la longeza de tuta la piramide per la radix de 68, perche le son le aree *dcad* e *dedb* azonte in sieme, chi e $8\frac{1}{4}$, via 36, che fa 297, e partilo per la radix de larea de tuta la piramide, chi e $10\frac{2}{5}$, che ne viene *ab* $28\frac{29}{52}$, detrato *db*
40′ 24 | resta $4\frac{29}{52}$, el caso de la perpendiculare. E per sapere la longeza de la perpendichulare, multiplica *de* per *ab* e partilo per *db*, et haueray *ac* la perpendichulare $4\frac{79}{104}$, e fatta.

31. Quando tu saperay larea de uno circhulo, e tu voray el suo diametro, azorze li $\frac{3}{11}$ de tutta larea a la ditta area, e la radix quadrata de ditta quantitade sera el diametro.

32. A volere fare uno triangulo equilatero, che sia doue volte tanto larea sua, como sia li try sui ladi azonti in sema, faray cosi. Dopia li 3 ladi del triangulo da fir fatto, fan 6, poy quadralo, cioe 6 via 6, fa 36; el quale 36 multiplicalo sempre per $5\frac{1}{3}$, che fara 192, e la radix quadrata sera el lado del triangulo adimandato; fatta.

33. E se volesse 3 volte tanto larea suo, como sarebe li ladi azonti in siema, toy 3 volte li ladi del triangulo, che sarebe 9, e poy quadra el dito 9, fara 81; el qual 81 multiplica sempre per $5\frac{1}{3}$, che fara 432, e la radix quadrata sera el lado del triangulo adimandato.

34. Quando larea de uno triangulo ambligonio e doy ladi noiando, atrouare el terzo lado, fa cosi. Parti larea del dito triangulo per la
41 mitade del lado mazore, et quello | multiplicalo per se medesimo, et quella

(Fig. 8), am andern 4 Capezi hält, und in der Länge 12 Capezi hat, und dessen Fläche 60 ist, so mache man es zunächst so. Man vollende es zu einem vollständigen Dreieck in folgender Weise. Multipliciere das Kopfende 6 mit der Länge, die 12 ist, das giebt 72, und theile das durch die Differenz der beiden Kopfenden, nämlich durch 2, so kommt 36, die Länge des ganzen Dreiecks. Nachdem diese gefunden, suche man den Inhalt des ganzen Dreiecks, der 108 ist. Von diesen 108 ist die Quadratwurzel nicht ganz genau $10\frac{2}{5}$; merke sie dir. Dann suche den Inhalt von bd, d. h. des Arapente des Dreiecks, er ist 48; zu diesen 48 füge denjenigen Theil des Inhaltes, den du von dem gegebenen Landstück abschneiden willst, hinzu, d. h., will man ihn halbieren, so addiert man die Hälfte des Inhalts des fraglichen Landstückes, will man $\frac{1}{4}$, so fügt man $\frac{1}{4}$ hinzu, u. s. w. Indem wir nun für $\frac{1}{3}$ theilen, suchen wir also $\frac{1}{3}$ des Inhalts, es ist 20. Nun ist $20 + 48 = 68$ und es ist $\sqrt{68} = 8\frac{1}{4}$, wenn auch nicht ganz genau. Auch dies verwahre. Um nun zu finden, wohin der Fusspunkt des Lothes fällt, multipliciere die Länge des ganzen Dreiecks mit $\sqrt{68}$, weil es die Flächen $dcad$ und $dcdb$ zusammengenommen sind, das ist ja $8\frac{1}{4} \times 36 = 297$, und theile durch die Wurzel aus der Fläche des ganzen Dreiecks, nämlich durch $10\frac{2}{5}$, so kommt daraus $ab = 28\frac{29}{52}$. Davon $db = 24$ abgezogen, bleibt $4\frac{29}{52}$, der Fusspunkt des Lothes. Und um die Länge des Lothes zu finden, multipliciere de mit ab und theile durch db, so erhält man ac das Loth $= 4\frac{79}{104}$, und ist gemacht.

31. Wenn man den Inhalt eines Kreises kennt, und wünscht seinen Durchmesser, so füge man $\frac{3}{11}$ des ganzen Inhaltes dem Inhalte hinzu, so ist die Quadratwurzel der erhaltenen Grösse der Durchmesser.

32. Um ein gleichseitiges Dreieck zu finden, das einen zweimal so grossen Flächeninhalt hat, als seine drei Seiten zusammengenommen sind, mache es so. Verdoppele die drei Seiten des zu suchenden Dreiecks, das macht 6, dann quadriere dies, $6 \times 6 = 36$; diese 36 multipliciere jedesmal mit $5\frac{1}{3}$, das giebt 192, dann ist die Quadratwurzel davon die Seite des verlangten Dreiecks. Fertig.

33. Will man die dreimal so grosse Fläche haben, als die drei Seiten zusammengenommen sind, so nimm die Seiten des Dreiecks dreimal, das wäre 9. Darauf quadriere genannte 9, das giebt 81. Diese 81 multipliciere immer mit $5\frac{1}{3}$, das macht 432, dann ist die Quadratwurzel die Seite des verlangten Dreiecks.

34. Kennt man die Fläche eines stumpfwinkligen Dreiecks und zwei Seiten, und will die dritte Seite haben, so verfahre man so. Man theile die Fläche des gegebenen Dreiecks durch die Hälfte der grössern Seite und multipliciere das mit sich selbst und merke das Produkt. Darauf multi-

multiplicatione serua. Poy multiplica laltro lado in si medesimo, e quelo, che ne viene, tralo del seruato, sel si puo, ouero el seruato de quello, e del resto toy la radix quadrata, la qual radice tralla del primo lado, et lo rimanente multiplicalo in si medesimo, e quelo, che ne vegnera, azonzelo a lo numero, che tu seruasti, e quelo, che vegnera, la radix quadrata sara el terzo lado adimandato.

35. A metere el mazore triangulo, che se possa metere equilatero in uno tondo, fa cosi. Piglia li $\frac{3}{4}$ del diametro, e multiplicali contra laltro $\frac{1}{4}$, chi e rimasto, e la quantita, che fara, multiplicala per 4, e la somma, che fara, la radix quadrata sera el lado del triangulo adimandato.

36. A volere la quantita de una piramide tronchata, che sera quadra, e che sia 4 per facia, cioe la baso mazore, e che sia per lo abaso menore 2, e che sia per lo asale longo 10, como apare qui per figura (Fig, 9), fa cossi. Quadra lo abaso mazore, che fara 16, poy quadra lo abaso menore, che fa 4; azonti questi doy quadrati de li abasi fanno 20. Poy multiplica luno lado del abaso con laltro lado, cioe 2 via 4, fa 8; azonto con 20 fa 28, el qual 28 e da moltiplicare con la terza parte de lo asale, chi e $3\frac{1}{3}$, che fara $93\frac{1}{3}$,
41 la quantita adimandata.[1]) |

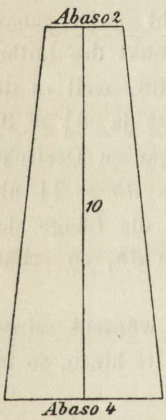


Fig. 9.

37. A volere la quantita de uno seratile, como he za segnato qui per figura (Fig. 10), che sia longo 10 de sotto, e lo abasso longo 6, e de sopra longo 8, e per lalteza 5 perpendichulariter, faray cosi. Multiplica la longeza mazore per la abasso, cioe 10 via 6, che fa 60, serualo. Poy multiplica la mitade de la longeza de sopra contra lo abasa, cioe 4 via 6, fa 24. Azonzelo cun el 60 seruato, fara 84, el quale 84 multiplicalo per la terza parte de 5, chi e la sua alteza, cioe $1\frac{1}{3}$ via 84, fara 140, la quantitade adomandata.

38. La proporcion del diametro a la circonferentia non he como 7 a 22, cioe $3\frac{1}{7}$, perche el e troppo, ne anche como e $3\frac{10}{71}$, perche el e pocho, secondo la demonstracione de ARCHIMEDE. La diferentia de $3\frac{1}{7}$ ad $3\frac{10}{71}$ sie $\frac{1}{497}$, e la otaua parte de $\frac{1}{497}$ sie $\frac{1}{3976}$; azonzelo a $3\frac{10}{71}$, fara $3\frac{39831}{282296}$, e
42 questa e la proporcion del diametro a la circonferentia.[2]) |

39. El' e da sapere secondo PTHOLOMEO, lo circulo sie per la circonferentia 360 gradi. Ma nota, che piu grandi sarebbe li gradi di uno

---

1) Hier ist genau richtig $V = (a^2 + b^2 + ab)\frac{h}{3}$.

2) Dieser seltsame Werth von π und seine Begründung ist bemerkenswerth: Es wäre danach $\pi \sim 3{,}14109$, was sehr von der Wahrheit entfernt ist.

pliciere man die andere Seite mit sich selbst und ziehe das Ergebnis von dem Gemerkten ab, wenn es möglich ist, oder das Gemerkte von ihm, und von dem Reste suche man die Quadratwurzel. Diese Wurzel nehme man von der ersten Seite weg und multipliciere den Rest mit sich selbst, das Ergebnis aber addiere man zu der gemerkten Zahl, dann ist die Quadratwurzel aus der Summe die verlangte dritte Seite.

35. Um in einen Kreis das grösste Dreieck einzubeschreiben, das sich als gleichseitiges einbeschreiben lässt, mache man es so. Man nehme $\frac{3}{4}$ des Durchmessers und multipliciere das mit dem andern Viertel, das übrig geblieben ist. Die erhaltene Grösse multipliciere man mit 4, und von der Summe, die das ausmacht, ist die Quadratwurzel die Seite des verlangten Dreiecks.

36. Zur Bestimmung des Volumens einer abgestumpften Pyramide, die quadratisch sei und zur Seitenkante 4 habe, das heisst die grössere Grundfläche, und für die kleinere Grundfläche 2, und deren Axe 10 lang sei, wie in der beigegebenen Figur (Fig. 9) zu sehen, mache man es so. Man quadriere die grössere Kante, das macht 16, dann quadriere man die kleinere, das macht 4. Beide quadratischen Grundflächen zusammen ergeben 20. Darauf multipliciere man eine Grundflächenkante mit der andern, also $2 \times 4 = 8$, zu 20 gezählt giebt 28. Diese 28 muss mit dem dritten Theile der Axe, das ist mit $3\frac{1}{3}$, multipliciert werden, das giebt $93\frac{1}{3}$, das verlangte Volumen.[1])

37. Um das Volumen eines Prisma, wie wir es hierneben in der Figur gezeichnet haben (Fig. 10), zu finden, das unten 10 lang sei, und die Grundlinie sei 6, die obere Kante sei 8 lang, und die senkrechte Höhe sei 5, mache es so. Multipliciere die grössere Länge mit der Grundlinie, also $10 \times 6 = 60$, und merke das. Dann multipliciere die Hälfte der obern Länge mit der Grundlinie, also $4 \times 6 = 24$. Addiere das zu den gemerkten 60, so macht das 84. Diese 84 multipliciere mit dem dritten Theile von 5, welches seine Höhe ist, also $1\frac{2}{3} \times 84$, so ist das das verlangte Volumen.

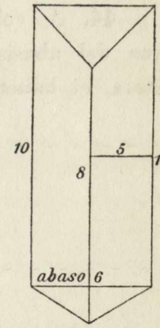


Fig. 10.

38. Das Verhältnis des Durchmessers zum Umfange ist nicht 7 : 22, nämlich $3\frac{1}{7}$, denn das ist zu gross, auch nicht gleich $3\frac{10}{71}$, weil es zu wenig ist nach dem Beweise des ARHCIMEDES. Die Differenz zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ ist $\frac{1}{497}$. Der achte Theil von $\frac{1}{497}$ ist $\frac{1}{3976}$. Addiere das zu $3\frac{10}{71}$, so kommt $3\frac{39831}{282296}$, und das ist das Verhältnis des Durchmessers zum Umfange.[2])

39. Nach PTOLEMÄUS ist bekannt, dass der Kreis einen Umfang von 360 Graden hat. Man beachte aber, dass die Grade eines grossen Kreises, grande circhulo, como he lo celo, che non sarebbe quello de una citade; et etiamdio e da sapere, che li diametri sie 120 gradi. Ma questi non sono gradi, como li gradi del circhulo, perche lo circhulo e mazore chal diametro piu cha 3 volte, perche la chomuna opinione tene, chel diametro sia $3\frac{1}{7}$ a la circonferentia. Ma ARCHIMENIDES dice luy, che non e cosi: dice, che lo he $3\frac{10}{71}$.

40. Notta, che dal centro de la terra a la spera de Saturno sie meia, de braza 4000 per miglio, sie 73387747, e quelo se chiama semidiametro spere Saturni. A volere sapere la circunferentia, multiplica lo diametro per $3\frac{10}{71}$, che fa $460999086\frac{56}{71}$. E per sapere, quante meia contiene in uno grado, parti la circunferentia per 360, che ne vene $1280553\frac{241}{12780}$, e tanta miglia he 1° gr°.

41. El e sono 2 balle de cera, luna e per el suo diametro o͠nz 4, e pexa libre 8; e una altra e per el suo diametro o͠z 6: adomando, quanto debe pexare. Dobiamo chubichare li diametri, cioe prima 5 via 4, fa 16, e 4 via 14 fa 64; per la seconda 6 via 6 fa 36, e 6 via 36 fa 216. Hore dice cossi: se 64 pexa 8, che pexara 216? Dobiamo multiplichare 8 via 216, che fa 1728, e partire per 64, che ne viene 27, e libre
42′ 27 pexara la seconda balla de o͠nz 6 per diametro. |

42. Cescaduna quantita de numero diuisa per 2 altri numeri, cescaduna de le prime parte auanza la seconda, si como auanza el mazore numero el minore.

43. A volere sapere la superficie de la spera, multiplica larea del mazore circhulo per 4, et aueray la superficie, la quale se la multiplicaray per la sexta parte del suo diametro, aueray la quantita, che la tiene.

44. A volere la capacitate de una piramide rotonda, multiplica la area del abasis, cioe de la tondeza mazore, in la terza parte de la sua alteza, et haueray la sua tenuta.

wie etwa des Himmels, viel grösser sind, als die von einer Stadt sein würden. Es ist weiter zu merken, dass die Durchmesser 120 Grade haben. Letztere sind aber keine Grade, wie die Grade des Kreises, da der Kreis mehr als dreimal so lang ist als der Durchmesser, weil die gewöhnliche Meinung sagt, dass der Kreis das $3\frac{1}{7}$fache des Durchmessers sei. Aber ARCHIMEDES selbst sagt, dass das nicht so ist: er sagt, es sei $3\frac{10}{71}$.

40. Merke, dass vom Mittelpunkte der Erde bis zu der Sphäre des Saturn 73 385 747 Meilen sind, 4000 Ellen für die Meile, und das nennt man den Halbmesser der Sphäre des Saturn. Um den Umfang kennen zu lernen, multipliciere man den Durchmesser mit $3\frac{10}{71}$, so macht das $460\,999\,086\frac{56}{71}$, und um zu wissen, wieviele Meilen er auf einen Grad enthält, theile diesen Umfang durch 360, dann ergiebt sich $1\,280\,553\frac{241}{12780}$, soviele Meilen enthält ein Grad.

41. Gegeben sind zwei Wachskugeln. Die eine hat einen Durchmesser von 4 Unzen und wiegt 8 Pfund, die andere hat einen Durchmesser von 6 Unzen, ich frage, wieviel sie wiegen wird. Wir müssen die Durchmesser kubieren. Also erstens $4 \times 4 = 16$ und $4 \times 16 = 64$, und für die zweite $6 \times 6 = 36$ und $6 \times 36 = 216$. Nun sprich so. Wenn 64 wiegen 8, wieviel wiegen 216? Wir müssen 8 mit 216 multiplicieren, das giebt 1728, und durch 64 dividieren, dann kommt 27. Also wiegt die zweite Kugel von 6 Unzen Durchmesser 27 Pfund.

42. Wenn man eine beliebige Zahl durch zwei andere Zahlen dividiert so wird jeder erste Theil den zweiten um soviel übertreffen, als die grössere Zahl die kleinere übertrifft.

43. Um die Oberfläche einer Kugel zu bestimmen, multipliciere man den Inhalt eines grössten Kreises mit 4, so erhält man die Oberfläche. Wenn man sie mit dem sechsten Theile ihres Durchmessers vervielfacht, so erhalt man den körperlichen Inhalt.

44. Um das Volumen einer runden Pyramide zu finden, multipliciere man den Inhalt der Grundfläche, das heisst der grössten Rundung, mit dem dritten Theile ihrer Höhe, so hat man das Volumen.

Tabula Sinuum.
(360 : 120)

Arcus augmentati per dimidium gradum.				Corde mediate.		
Gr.	m^a	Gr.	m^a	Gr.	m^a	2^a
0	30	179	30	0	31	25
1	0	179	0	1	2	50
1	30	178	30	1	34	14
2	0	178	0	2	5	38
2	30	177	30	2	37	2
3	0	177	0	3	8	25
3	30	176	30	3	39	46
4	0	176	0	4	11	7
4	30	175	30	4	42	27
5	0	175	0	5	13	46
etc.		etc.		etc.		
85	0	95	0	59	46	19
85	30	94	30	59	48	35
86	0	94	0	59	51	15
86	30	93	30	59	53	17
87	0	93	0	59	55	3
87	30	92	30	59	56	34
88	0	92	0	59	57	48
88	30	91	30	59	58	45
89	0	91	0	59	59	27
89	30	90	30	59	59	51
90	0	90	0	60	0	0

Tabula Sinuum.
(22 : 7)

Arcus augmentati per dimidium gradum.				Corde mediate.		
Gr.	m^a	Gr.	m^a	Gr.	m^a	2^a
0	30	179	30	0	29	59
1	0	179	0	0	59	59
1	30	178	30	1	29	57
2	0	178	0	1	59	55
2	30	177	30	2	29	53
3	0	177	0	2	59	51
3	30	176	30	3	29	47
4	0	176	0	3	59	43
4	30	175	30	4	29	37
5	0	175	0	4	59	30
etc.		etc.		etc.		
85	0	95	0	57	3	18
85	30	94	30	57	5	47
86	0	94	0	57	8	22
86	30	93	30	57	9	57
87	0	93	0	57	11	29
87	30	92	30	57	13	5
88	0	92	0	57	14	14
88	30	91	30	57	15	10
89	0	91	0	57	15	50
89	30	90	30	57	16	13
90	0	90	0	57	16	22

IV.

DIE ALGEBRA DES INITIUS ALGEBRAS AD YLEM GEOMETRAM MAGISTRUM SUUM.

Die Algebra des Initius Algebras ad Ylem geometram magistrum suum.

Einleitung.

Von der nachfolgenden Arbeit eines deutschen Mathematikers des XVI. Jahrhunderts haben sich vier Handschriften erhalten. Diejenige, welche mir zuerst zu Händen kam, scheint mir die vorzüglichere zu sein, aber keine von allen vieren ist die Originalhandschrift. Jede hat beim Abschreiben an einer oder der andern Stelle Auslassungen, durch Gleichklang der Worte veranlasst, an anderer Stelle wieder Zusätze gemacht. Der eigentliche Text ist jedoch, so weit sie ihn enthalten, ein und derselbe. Jede einzelne Handschrift hat aber die Orthographie nach ihrer Schreib- oder Mundart geregelt, so dass ich gezwungen war, einer derselben genau zu folgen und von Angabe der Abweichungen im Allgemeinen abzusehen, so dass unter dem Texte nur wirkliche Textänderungen kurz bemerkt sind.

Die Handschrift, welcher ich folge, bewahrt die königl. Universitätsbibliothek zu Göttingen unter der Bezeichnung *Codex Gotting. Philos. 30.* Es ist eine Papierhandschrift in Folio von 205 beschriebenen und numerierten Blättern. Sie enthält der Reihe nach:

Blatt 1′—150′: Den im Nachfolgenden abgedruckten Text. Auf Blatt 1 steht der Vermerk: „Auf einer hiesigen Auction erkauft (vid. Manuale A. 1808 p. 77)." Blatt 1′ enthält folgende Inhaltsangabe des ganzen Werkes:

„*Libri* Algebrae *sunt octo.*

Primus de octo equationibus et demonstrationibus earundem.

Secundus de quantitatibus additis et diminutis seu pregnantibus.

Tertius de numeris rationalibus communicantibus atque surdis trium tractatuum.

Quartus de proportionibus tam rationalibus quam irrationalibus, proportionalitatibus et medietatibus.

Quintus de binomiis et de comitibus eorundem secundum 13 numeros irrationales.

Sextus de clavibus numerorum in genere ad cunctas coniecturas propositionum sive questionum.

Septimus de areis datis corporum atque superficierum perquirendis.

Octavus de datis absolutis numerorum secundum claves examinatis.

Auf Blatt 2 befindet sich der Titel: *„Algebrae Arabis Arithmetici viri Clarissimi Liber ad Ylem Geometram praeceptorem suum.*

Anno MDXLV. 2^{da} Septembris foeliciter incipit.“

Auf derselben Seite hat ein späterer Besitzer geschrieben:

„Georgius Manitius Lowitz MDCCLIIj.“

Blatt 2′ ist leer, auf Blatt 3 beginnt dann der „Prologus in Algebram“. Nur die drei ersten Bücher sind vorhanden, aber an der Spitze von Blatt 151 steht der Vermerk: „Librum quartum in alio volumine invenies. Siquidem quintum.“ Dass dieser zweite Band sich erhalten hätte, ist mir nicht bekannt.

Blatt 151′—176′: „Algorithmus de datis (Jordani Nemorarii).“[1]) Darin Blatt 152—153 eine Einleitung aus späterer Zeit.

Blatt 176′—185: Anhänge zur vorhergehenden Arbeit.

Blatt 186—187: Arithmetische Notiz, beginnend: *„Minuta est quadrata.“*

Blatt 187′—189: *„Residui regula vera. Numeros, qui per propositum numerum divisi datos numeros residuant, invenire.“*

Blatt 190—202′: *„Tractatus de tribus notis.“* [2])

Blatt 203—205: „Fragment der Trigonometrie des Levi ben Gerson.“[3])

Auf Blatt 160, einem eingelegten Zettel, sind folgende Gleichungen geschrieben:

„Aequationes.

6 ʒʒ + 1 ʒ aequalis 5 cꝭ + 115 920. facit?

1 ʒʒ + 1 cꝭ aequalis 4 ʒ + 3 ꝶ + 2. facit?

1 ß + 10 ʒʒ + 18 cꝭ + 352 aequalis 88 ʒ + 328 ꝶ. facit?

1 ß aequalis 44 ʒ + 92 ꝶ — 16 ʒʒ — 45 cꝭ + 48. facit?

1 ʒcꝭ — 6 ß aequalis 12 ʒʒ — 52 cꝭ — 60 ʒ + 96 ꝶ + 80. facit?

1 ʒcꝭ + 27 ß + 463 ʒ + 22 950 aequalis 113 ʒʒ + 669 cꝭ + 4245 ꝶ. facit?

3 biß + 513 cꝭ + 1080 ʒ + 96 ꝶ aequalis 4 ʒcꝭ + 66 ß + 3 ʒʒ + 620?

---

1) Abgedruckt in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik II, S. 125—166 und Zeitschrift für Math. und Physik XXXVI, 1—23; 41—63; 81—95; 121—138.

2) Abgedruckt in Bibliotheca Mathematica 3. Folge I, 380—390.

3) Abgedruckt in Bibliotheca Mathematica 2. Folge XII, 103—107.

facit 1 ꝝ ist 10. frag nach den andern radicibus, so diese aequation vermag. Auch wie die Gegenaequation beschaffen sey, darinn obige wahre radices alhie die gedachten, vnd alhie die gedachten in obiger die wahren seindt etc.“ [1])

Worauf sich die Behauptung CANTOR's, Vorlesungen II^2, 612 gründet, dass unsere Handschrift im Besitze des Schreibkünstlers STEPHAN BRECHTEL, der in Nürnberg 1574 starb, gewesen sei, ist mir nicht bekannt. Dem Dialekte nach dürfte süddeutsche Herkunft wohl richtig sein.

Die drei andern Handschriften unserer Algebra besitzt die königl. öffentliche Bibliothek zu Dresden. Auch sie konnte ich, wie die Göttinger, durch die Liberalität der beiderseitigen Bibliotheksvorstände in den Räumen der hiesigen königl. Gymnasialbibliothek benutzen, und sage ich dafür allen betheiligten Faktoren verbindlichsten Dank.

Von den Dresdner Handschriften ist die am sorgfältigsten ausgeführte die, welche heute die Bezeichnung *Mspt. Dresd. C. 405* trägt. Sie ist auf Pergament vorzüglich geschrieben, wie der Einband ausweist, für Kurfürst AUGUST von Sachsen. Dieser Einband ist nämlich von rothem Maroquin, mit Goldschnitt und Goldpressung das Wappen des genannten Fürsten und seiner Gemahlin ANNA darstellend. In dem Wappen des Kurfürsten stehen die Initialen: A(ugust) H(erzog) Z(u) S(achsen) K(urfürst). Ihre Entstehungszeit ist also zwischen die Jahre 1553—1586 zu setzen, und sie ist daher jedenfalls später entstanden als die 1545 angefangene Göttinger Handschrift.

Es sind 170 beschriebene Quartblätter, denen drei Vor- und vier Nachblätter, sämtlich ebenfalls Pergament, hinzugethan sind. In ihr ist einzig und allein unsere Algebra enthalten, der sich aber am Schlusse ein Fragment eines vierten Buches anschliesst, das aber dem oben mitgetheilten Inhaltsverzeichnis entsprechend als fünftes zu bezeichnen wäre, da es von den Binomien und Recisen EUKLID's handelt. Während das Göttinger Manuskript, wie ich oben andeutete, den süddeutschen Ursprung verräth, ist die Sprache der Handschrift *C. 405* so ausgesprochen sächsisch, dass man auch dadurch seinen Ursprung nach Dresden oder Leipzig verlegen

1) Aus dem Wortlaut geht wohl unzweideutig hervor, dass der Verfasser dieser Aufgaben wusste, dass jede derselben mehr als eine Lösung besass, und dass durch Veränderung der Vorzeichen die positiven Lösungen (das sind seine wahren) sich in gleich grosse negative (das sind seine gedachten), und zugleich die negativen in gleich grosse positive verwandeln lassen. Dass seine Angabe, $x = 10$ sei eine Lösung der letzten Gleichung, nicht zutrifft, hebt die Wichtigkeit der eben hervorgehobenen Kenntnis unseres Verfassers für die Geschichte der Algebra nicht auf.

würde, wenn die Beschaffenheit der Handschrift das nicht schon von selbst an die Hand gäbe. Diese Handschrift entbehrt des im Göttinger Codex enthaltenen Titels. Sie beginnt nämlich auf dem mit 1 bezeichneten Blatte sofort mit: „*Prologus. Hie hebet sich ahn das Buch* Algebre *genandt Gebra vnnd Almuchabola tzu deutsch*“ u. s. w. Das im Mspt. Gott. Philos. 30 auf Blatt 1^b enthaltene Inhaltsverzeichnis hat sie zwischen dem *Prologus* und dem Briefe des Initius Algebras ad Ylem *magistrum suum* eingeschoben, fügt aber noch ein „*Nonus liber Compilatio super Algebram tam latina quam theutunica*“ hinzu, was wohl die Absicht des Schreibers unserer Handschrift andeuten soll, eine solche Sammlung von Aufgaben hinzuzufügen.

Die zweite Dresdner Handschrift: *Mspt. Dresd. C. 349* ist auf Papier in Folio von 155 Blättern. Da das erste Blatt, das neuere Schmutzblatt nicht eingerechnet, mit II bezeichnet ist, so dürfte ein Blatt, auf dem der *Prologus in* Algebram gestanden haben wird, verloren gegangen sein. Die Blätter und Lagen sind vielfach verbunden. Zwischen Blatt 41 und 42 ausserdem 6 nicht bezeichnete Blätter eingeschoben. Wenn man die Reihenfolge so nimmt: II, III, 137′, 137, V′, V, VI′, VI, VII—XLI, XLII—51, Eingelegte Blätter 6, 5, 1, 2, 3, 4, Blatt 52—78, 90—136, 138—150, 80—89, 79′, 79, so ist der vollständige Text der drei ersten Bücher vorhanden, nur fehlt am Ende ebenfalls ein Blatt, die letzte halbe Seite des Göttinger Manuskriptes. Das vorliegende Manuskript beginnt also auf Blatt II mit den Worten: „Initii Algebrae *Arabis viri clarissimi Ad sommum Mathematicum eo tempore geometram* Ylem *Prologus feliciter incipit.*“ Hier hat irgend Jemand über Initii mit Bleistift die Bemerkung gemacht: Anitii (Boetii)? Ebenso steht neben *sommum* am Rande: *Dominum?* Beides natürlich ganz unzulässige Konjekturen. Der Dialekt dieser Abschrift nähert sich mehr der Göttinger Handschrift als dem *Mspt. Dresd. C. 405,* ist aber doch ein anderer, als der der erstern.

Der letzte mir bekannte Codex unserer Algebra ist das *Mspt. Dresd. C. 8.* Dass er unsere Algebra, wenn auch nur theilweise enthält, ist dem Verfasser des Katalogs entgangen. Er beginnt nämlich nicht wie die andern mit dem Titel: Initii Algebrae *viri Clarissimi* u. s. w., sondern erst mit dem 9. Kapitel des ersten Buches der ganzen Arbeit: „*Capitulum nonum de secunda propositione* Algebrae *Arabis in sua Gebra et Almuchabola eiusque expositio.*“ Ausserdem fehlen und sind augenscheinlich überhaupt nie vorhanden gewesen die Kapitel 20—25 des ersten Buches und das ganze zweite Buch. Das 19. Kapitel füllt nämlich gerade die Vorderseite von Blatt 13, dann ist Blatt 13′ leer und auf Blatt 14^r beginnt der *Liber tertius* Algebrae. Dafür hat aber unsere Handschrift dasselbe Fragment eines vierten Buches erhalten, das auch *C. 405* aufbewahrt hat. Im

Ganzen umfasst sie 66 in den untern rechten Ecken mit Bleistift gezählte Folioblätter in Papier. Zwischen Blatt 29 u. 30 liegt ein Konvolut Zettel, auf denen hier und da ein paar Zahlen geschrieben sind. Blatt 64 und 65 sind leer, auf Blatt 66 finden sich ein paar geometrisch-algebraische Konstruktionen. Es werden nämlich das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten 4 und 8 und das Rechteck mit den Seiten 8 und 12 durch Vermittelung eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten 6 und 12 sind, in ein Rechteck zusammengezogen mit den Seiten $\sqrt{80}$ und $\sqrt{180}$, den Hypotenusen der beiden benutzten rechtwinkligen Dreiecke. Darüber steht:

$$„\sqrt{14400} = 120, \textit{ tantumdem de } \begin{array}{r} 96 \\ \underline{24} \\ 120. \end{array}“$$

Die vorliegende Arbeit hat bis jetzt die Aufmerksamkeit der Geschichtsforscher der Mathematik nur insofern erregt, als in derselben die wundersamsten Kombinationen und Verwechslungen von Persönlichkeiten vorkommen, und man mit einigen von ihnen überhaupt nichts anzufangen wusste. Wer sich aber die Mühe giebt den nachfolgenden Abdruck wirklich durchzulesen, wird dagegen über die Kenntnis unseres Autors in der Algebra erstaunt sein, und nur bedauern, dass nicht auch die versprochenen Bücher 4—8, beziehungsweise 9, sich erhalten haben. Nach Andeutungen im Texte der erhaltenen Bücher müssen die verloren gegangenen auch *Gleichungen des dritten Grades* behandelt haben. Dass unser Buch nicht auf Muhamed ben Mûsâ Alchwarîzmî zurückgeht, ist klar, obwohl der deutsche Bearbeiter diesen wohl kennt, aber ihn mit dem Propheten Muhamed verwechselt. Ob das Werk überhaupt in seinem lateinischen Texte wirklich einen Araber zum Verfasser hat, oder ob der deutsche Kommentator sich einen solchen fingiert, lasse ich dahin gestellt. Trotz der Willkür, mit welcher Zeit- und Personenfragen behandelt werden, sind doch manche Bemerkungen, die von guter Geschichtskenntnis zeugen. So wird z. B. den Indern nachgerühmt, dass sie hervorragende Rechenmeister gewesen seien; auf sie wird mit Recht die Auflösung der unbestimmten Gleichungen ersten Grades zurückgeführt, die sogenannte *Regula virginum*. Da auch die Ta-yen-Regel mit ihrer Begründung behandelt wird, so würde, wenn der lateinische Text wirklich eine Übersetzung aus dem Arabischen darstellt, die Bekanntschaft mit dieser Regel auch den Arabern zugestanden werden müssen.

Wenden wir uns jetzt zur Feststellung des als Yles bezeichneten Geometers, über den ich hoffe, volle Klarheit geben zu können. Die von dem angeblichen Verfasser unserer Algebra, soweit sie lateinischen Text besitzt, dem Yles zugeeigneten Lehrsätze sind nichts weiter als die ersten sechs Lehrsätze des 2. Buches der Geometrie EUKLID's, so dass die Wahrscheinlichkeit vorliegt, EUKLIDES sei mit YLES gemeint, was ja nach CANTOR dadurch fast zur Gewissheit würde, als YLES sich mit einem arabischen Worte decken soll, das EUKLID als *Stoicheiotes* bezeichnen würde. Das alles blieb aber nur Konjektur, besonders noch im Hinblick darauf, dass im deutschen Kommentare unserer Algebra selbst darauf hingewiesen wird, dass im 2. Buche EUKLID's, der mit Namen genannt wird, dieselben Lehrsätze sich finden, welche INITIUS ALGEBRAS als dem *dritten* Buche der Geometrie des YLES entnommen angiebt. Was Letzteres, nämlich die Erwähnung eines dritten Buches, angeht, so ist das darauf zurückzuführen, dass man die Erklärungen, Petitionen und Axiome des ersten Buches EUKLID's als ein selbständiges Buch annahm, dann die Lehrsätze des ersten als das zweite und folgerichtig das zweite als drittes bezeichnete. Nun hat mir aber das *Msc. Mathem.* 8^0. *8* der Landesbibliothek zu Kassel den Schlüssel geliefert, aus welchem die Identität zwischen YLES und EUKLIDES wohl sicher hervorgehen dürfte.[1]) Diese Handschrift, ein Kommentar zu den acht ersten Büchern EUKLID's, beginnt folgendermaassen:

„*Commentum in librum introductorium elementorum.*

Credimus suae quemque artis et auctorem et disputatorem optimum esse, quae etiam cogitatio tunc eruditissimum divi PLATONIS pectus attigit, dum conductores sacrae arae de modo et forma eius secum sermonem conferre conductos ad EUCLIDEM geometram ire iussit, scientiae eius cedens, immo professioni. Fuit enim EUCLIDES teste LAERTIO geometra Megarensis insignis, vel, ut alii dicunt, EUCLIDES non est proprium nomen, sed appellativum, id est *Ysagogicus,* ELIAS autem est eius proprium nomen, et dicunt, PLATONEM non remissise ad personam, sed ad librum, qui dicitur EUCLIDES, id est *Introductorius.* Non enim fuisse PLATONEM et huius libri auctorem contemporaneos horum opinio est. Non autem aestimandum, quod PLATO propterea, quia ignarus geometriae vel inferior cuiquam mortalium fuerit, arae sacrae conductores responso vacuos reiecerit; cessit enim non doctiori, sed professioni. PLATO enim philosophiam, EUCLIDES vero, vel secundum alios ELIAS, geometriam profitebatur. Haec de auctore libri sufficiant."

Hieraus geht unzweideutig hervor, dass im Mittelalter geglaubt wurde, der eigentliche Name des Verfassers der Elemente sei ELIAS, und EUKLIDES sei der Name seines Werkes. Dass ELIAS und YLES nur Formen ein und

1) Auch diese Handschrift habe ich in dem hiesigen städtischen Archive benutzen dürfen, was ich hier dankend anerkennen möchte.

desselben Wortes sind, ist augenfällig. Es ist hier also eine Verschiebung insofern eingetreten, als das Wort *Stoicheia*, das sich mit *Ysagogicus* dem Sinne nach deckt, für Übersetzung des Eigennamens Euclides gehalten, und umgekehrt jene *Stoicheia* als der wirkliche Name Euklid's mit Elias-Yles übersetzt wurden. Wenn wir heutigen Tages sagen: „Er kennt seinen Euklid gut“, so begehen wir damit eine ähnliche Verwechslung, da wir ja auch den Verfassernamen für sein Werk einschmuggeln.

Es ist wohl kaum zweifelhaft, dass auch die Form Elias für den Verfasser der Elemente auf arabische Tradition zurückgeht, und nur wegen des andern Übersetzers nicht die Form Yles gewählt ist. Dem deutschen Kommentator unserer Algebra aber, der im XVI. Jahrhundert von einem dritten Buche des Yles las, zugleich aber auch dieselben Sätze im zweiten Buche Euklid's fand, ist die Identifikation beider nicht klar geworden. Auch im Kommentar des An-Nairizi zum Euklid ist der Theil, welcher sich mit den Erklärungen, Petitionen und Axiomen des ersten Buches befasst, vollständig in sich abgeschlossen und bildet einen Abschnitt für sich, so dass es gar nicht unwahrscheinlich ist, dass bei den Arabern wirklich eine andere Zählweise der Bücher beliebt worden ist, besonders bei kommentierten Ausgaben.

Die Arbeit selbst zerfällt von selbst in zwei Theile. Der erste umfasst die lateinische Abhandlung nebst der Übersetzung des deutschen Bearbeiters, der zweite dann dessen ausführlichen Kommentar. Wäre nur der lateinische Text nebst Übersetzung erhalten, so würde aus der ganzen Arbeit nicht viel zu machen sein, da erst der Kommentar zeigt, wie dieser oft sehr unklare Text aufgefasst werden muss. Liest man den Kommentar, so sieht man, dass in dem Texte wirklich das erkennbar enthalten ist, was darüber gesagt ist. Es würde aber ohne solche Beihilfe für einen erstmaligen Leser schwer fallen, alles das sofort in dem Texte zu erkennen. Der lateinische Text giebt sich als eine Übersetzung aus dem Arabischen aus, seine Form jedoch hat nichts von arabischen Texten an sich, wie sie in andern lateinischen Übersetzungen des Mittelalters uns erhalten sind, so dass man zweifelhaft sein könnte, ob die behauptete Abstammung Wirklichkeit ist, doch glaube ich trotz alledem sie aufrecht erhalten zu müssen. Die für die technischen Ausdrücke gebrauchten Zeichen aber sind die im XVI. Jahrhundert üblichen und stammen sicherlich nicht aus dem Arabischen, sondern sind aus Italien importiert, worauf schon die Multiplikation der Potenznamen, nicht die Addition derselben hinweist. Die Formen der Potenzen der Unbekannten sind der Reihe nach

𝔑, 𝔯, 𝔷, 𝔠, 𝔷𝔷, ß, 𝔷𝔠, 𝔟ß, 𝔷𝔷𝔷, 𝔠𝔠

für x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8, x^9

und werden gelesen: *Dragma, res* oder *radix, zensus, cubus, zensus de zensu, sursolidum, zensicubus, bissursolidum, zensus zensui de zensu, cubus de cubo,* Die Zeichen + und — sind hier nicht nur als Additions- und Subtraktionszeichen, sondern als wirkliche Vorzeichen gebraucht worden. Das benutzte Wurzelzeichen ist ein starker Punkt mit daranhängendem nach oben gezogenem Schwanze, also so: ∫. Ihm wird unmittelbar angehängt das Zeichen derjenigen Potenz, als deren Wurzel es gebracht werden soll; so ist ∫ʒ die Quadratwurzel, ∫ce die Kubikwurzel, ∫cce die neunte Wurzel u. s. w. Im Codex *C. 8* ist diese Angabe nicht neben das Wurzelzeichen, sondern oben gleichsam als Exponent geschrieben. Sollen mehrere Grössen addiert und dann aus ihnen zusammen die Wurzel gezogen werden, so steht neben dem Wurzelzeichen nicht das Funktionszeichen, sondern die Abkürzung cs, d. h. *communis,* das Funktionszeichen aber hinter dem ganzen Ausdruck, der ausserdem noch in einem Winkelhaken (*Gnomon*) eingeschlossen ist. Z. B.

∫cs |8 + ∫22ʒ, das ist $\sqrt{8+\sqrt{22}}$.

Dieser Gnomon hat dabei die Bedeutung, dass das von ihm Eingeschlossene keine Länge sondern eine Potenz bedeutet. So ist die einfache 8 eine Länge oder einfache Zahl, dagegen |8ʒ ein Quadrat von acht Flächeneinheiten, dessen Längeneinheit ∫ʒ |8 ist. Ebenso wäre |8ce ein Würfel von 8 Kubikeinheiten und ∫ce |8 die dazugehörige Kante u. s. w. Ein zweifacher Punkt mit dem Schwanze an dem letzten bedeutet stets die Wurzel aus der Wurzel. Z. B. ∫∫ce |88 würde heissen Kubikwurzel aus der Kubikwurzel von 88. Sie ist mit ∫cce 88 identisch, wird aber nur benutzt, wenn der Radikand eine sogenannte Mediale im Euklidischen Sinne ist.

Nach einer kurzen Einleitung des deutschen Kommentators, die an Abenteuerlichkeit und Durcheinanderwerfung von Zeiten und Thatsachen ihres Gleichen sucht, folgt ein dem supponierten Verfasser, Initius Algebras, zugeschriebener Brief an seinen Lehrer Yles, der ihn gebeten haben soll, ihm zu erklären, wie aus den Sätzen seiner Geometrie die in der mittelalterlichen von den Arabern stammenden Algebra betrachteten sechs Unterfälle der Gleichungen des ersten und zweiten Grades gefolgert werden können. Darauf werden die ersten sechs Sätze des zweiten Buches Euklid's in der erwähnten Weise durchgenommen, und aus ihnen die gewöhnlichen Gleichungformen und Auflösungen bewiesen. Es sind das bekanntlich

$$ax = b;\ ax^2 = bx;\ ax^2 = b;\ ax^2 + bx = c;\ ax^2 + c = bx;\ ax^2 = bx + c.$$

Zu jeder wird ein abenteuerliches Beispiel, in welchem Männer der verschiedensten Zeiten in Beziehung mit einander gebracht werden, gestellt und aufgelöst. Nun erst beginnt die eigentliche Algebra oder, wie unser Verfasser sie nennt, Gebra und Almuchabola, für ihn ist ja Algebras der Verfasser des Buches. Nach Besprechung der cossischen Zeichen 𝒩, 𝓇, ʒ, 𝒸, ß u. s. w. werden dann die von unserem Verfasser beliebten acht Arten der Gleichungen behandelt, die sich bei weitem über das hinaus erstrecken, was in dem vorbereitenden Briefe auseinandergesetzt ist. In seine erste Gleichung sind alle Formen eingeschlossen, die aus $ax^n = bx^{n-1}$ entstehen, und obwohl er sie nur bis $n = 9$ ausdehnt, so ist doch durch die Bemerkung, dass es nicht üblich sei, weiter zu gehen, angedeutet, dass die Wirkungsweise auch auf die folgenden Potenzen sich erstreckt.

Ähnliches gilt von allen übrigen Gleichungsformen. So gehen die nächsten drei auf $ax^{n+m} = bx^n$ zurück, wo m höchstens gleich 4 genommen wird, weil man eben höhere Wurzeln als die vierte nicht auszuziehen gewohnt war. Da aber unser Bearbeiter die Wurzeln bis zur 9. Potenz auszuziehen lehrt, so ist für ihn eine Ausdehnung bis zu diesem Punkte nicht unwahrscheinlich. Alle übrigen Gleichungsformen kommen auf $ax^{n+2m} + bx^{n+m} = cx^n$ für $m = 1$ bis 4 zurück, auch hier diese Einschränkung nur der Gewohnheit des Rechnens verdankend.

Aus einer spätern Stelle geht übrigens hervor, dass der deutsche Bearbeiter in einem der nicht erhaltenen Bücher die Lösung der Gleichungen des dritten Grades zu geben verspricht. Da bei Abfassung der Arbeit die *Ars magna Cardano's* noch nicht erschienen war, sie ging ja erst 1545 in Nürnberg aus der Presse hervor, so kann diese Wissenschaft doch nur aus anderer Quelle, die wohl eine arabische sein dürfte, geflossen sein. Der Verlust des Restes unserer Arbeit, Buch 4—8, wäre daher in geschichtlicher Hinsicht doppelt zu bedauren.

Das zweite Buch beschäftigt sich mit der Rechnung positiver und negativer Grössen, letztere wirklich als *negative* bezeichnet, während die positiven *affirmati* heissen, die negativen freilich hin und wieder auch *diminuti*. Es werden alle Rechnungsarten mit solchen Grössen dargelegt. Der Verfasser kennt sie alle, nur die Division mehrgliedriger Grössen durcheinander ist ihm eine unmögliche. Auch die Rechnungen mit allgemeinen Brüchen wird gelehrt, hierbei auch die Division solcher durcheinander. Die Zeichenregeln sind vollständig gegeben, wenn auch nicht so kurz und bündig, wie z. B. in der Wiener Algebra im *Codex Vindob. Palatinus 5277.*[1]) Dagegen ist in einer beigefügten Tafel mit doppeltem Eingang das Resultat der Multiplikation aller möglichen Zeichenkombinationen gegeben, wobei auch die rein negative Zahl sich findet in der Form: — 𝒩.

1) Siehe Cantor, Vorlesungen II², S. 425.

Das dritte Buch, das letzte vollständig und mit deutschem Kommentar erhaltene, ist in drei Traktate getheilt. Das ganze Buch handelt von Wurzeln und von Zahlentheorie. Im ersten Traktate lehrt der deutsche Bearbeiter das Ausziehen der Wurzeln und zwar für die ersten sechs Grade, während er für die 7. bis 9. Wurzel nur sagt, man solle das bisher Gesagte verallgemeinern. Der lateinische Text dieser ersten 9 Kapitel lehrt eigentlich nicht das Wurzelausziehen, sondern das Erheben einer zweitheiligen Grösse auf die ersten neun Potenzen. Da aber das folgende Kapitel angiebt, diese Potenzerhebung sei nur geschehen, um die Wurzelausziehung zu ermöglichen, so hat eben der deutsche Bearbeiter es vorgezogen, diese Wurzelbestimmungen schon in den vorhergehenden Kapiteln mit zu behandeln. Die Binomialkoeffizienten stellt er übersichtlich in der Art her, dass er die Zahl 10001 nach und nach auf die aufeinanderfolgenden Potenzen erhebt. Er erhält so folgende Formen:

1000900360084012601260084003600090001
1000800280056007000560028000080001
10007002100350035002100070001
1000600150020001500060001
1000500100010000050001
10004000600040001
1000300030001
100020001
10001

Auch eine Tafel der neun ersten Potenzen der neun Einer ist vorhanden, weil sie zur Ausziehung der betreffenden Wurzeln unumgänglich nöthig sei. Die Ausziehung der Wurzeln wird im übrigen *mutatis mutandis* genau so gelehrt, wie wir es heute bewirken würden, wenn wir nicht durch die Logarithmen einen leichteren Weg einschlagen könnten. Der Bearbeiter weist aber auch darauf hin, dass man bequemer statt der vierten oder sechsten, achten oder neunten Wurzel, die Quadratwurzel aus der Quadratwurzel, dieselbe Wurzel aus der Kubikwurzel, dieselbe Wurzel aus der Quadratwurzel der Quadratwurzel, oder endlich die Kubikwurzel aus der Kubikwurzel benutzen könnte. Dieser erste Traktat erstreckt sich zunächst nur auf die Auffindung der betreffenden Wurzeln aus vollständigen Potenzen.

Der zweite Traktat des dritten Buches ist fast vollständig zahlentheoretisch. Aufsuchen aller Divisoren einer Zahl, dabei also auch Bestimmung der Primzahlen, wobei Verfasser weiss, dass man die Untersuchung erst mit der grössten in der zu untersuchenden Zahl enthaltenen Quadratwurzel zu beginnen braucht, Bestimmung des grössten gemeinsamen Maasses zweier Zahlen sind die Themata der ersten drei Paragraphen. Das vierte Kapitel dagegen giebt die Lösung des sogenannten Restproblems, das als Regula Ta-yen bei den Chinesen schon um Christi Geburt bekannt war, das im Abendlande sich zuerst um 1228 bei LEONARDO VON PISA hat finden lassen, das dann im Anfang des XV. Jahrhunderts in einer Zeitzer griechischen Handschrift angetroffen ist, das endlich um die Mitte des XV. Jahrhunderts einem gewissen Frater FRIDERICUS des Kloster St. Emeram zu Regensburg und kurz darauf REGIOMONTAN bekannt war. Auf den Inhalt will ich hier nicht eingehen, da ich in der Anmerkung zu dem betreffenden Kapitel eine genaue Darstellung des Gedankenganges gegeben habe, ich möchte hier nur darauf aufmerksam machen, dass unser deutscher Bearbeiter auch die Erweiterung des Problemes auf nicht theilerfremde Divisoren, wie die ursprüngliche Aufgabe und auch der lateinische Text sie fordert, durchführt, und auch die Bedingung kennt, unter der im zweiten Falle die Aufgabe unmöglich wird. In moderner Form, die aber dem Wesen nach mit der hier auseinandergesetzten zusammenfällt, hat GAUSS die Aufgabe in den *Disquisitiones arithmeticae* behandelt.

Die zwei folgenden Kapitel handeln von den vollkommenen, mangelhaften und überschiessenden Zahlen. Auseinandersetzung des einfachen falschen Ansatzes, der auf YLES-EUKLIDES zurückgeführt wird, und des doppelten falschen Ansatzes, der auf die Araber zurückgehe und bei ihnen *Itata* heisse, ist der Inhalt der drei folgenden Kapitel. Hier wird darauf besonders Gewicht gelegt, dass durch beide Methoden nur solche Aufgaben gelöst werden können, die in Gleichungsform geschrieben auf Gleichungen des ersten Grades führen, und an einem bestimmten Beispiel, das eine rein quadratische Gleichung geben würde, gezeigt, dass nur die Lösung solcher Gleichungen zu einem richtigen Ergebnis führen könne, während sowohl der einfache wie der doppelte falsche Ansatz unmögliche Lösungen ergeben.

Das zehnte Kapitel, dessen Ursprung der deutsche Bearbeiter auf den ALIABRAS INDUS, also überhaupt nach Indien verlegt, verlangt die Auflösung unbestimmter Aufgaben des ersten Grades durch ganze rationale Zahlen *(numeri rationales integri)*. Bis jetzt galt BACHET DE MÉZIRIAC als erster, der in seiner DIOPHANT-Ausgabe von 1621 diese Forderung der ganzzahligen Lösung gestellt habe. Da die älteste erhaltene Handschrift unserer Algebra aus 1545 stammt, das Original daher noch älter sein muss, so ist also diese Forderung schon mindestens 66 Jahre früher gestellt worden. Die hier gegebene Lösung ist keineswegs die BACHET's, sondern stimmt mit der jetzt gebräuchlichen überein. Für die Lösung sehe man die Anmerkung zu dem betreffenden Kapitel. Mit diesem geschichtlich wichtigen Probleme schliesst der zweite Traktat.

Der dritte Traktat handelt endlich von den irrationalen Wurzeln und der Rechnung mit solchen. Zur Anwendung und Begründung kommen in moderner Art geschrieben folgende Formeln:

$$\sqrt[n]{a \cdot b^n} \pm \sqrt[n]{a \cdot c^n} = \sqrt[n]{a(b \pm c)^n};$$

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \quad = \sqrt{(a+b) \pm \sqrt{4ab}};$$

$$\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b} \quad = \sqrt[3]{(a+b) \pm \sqrt[3]{27a^2b} + \sqrt[3]{27ab^2}};$$

u. s. w.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}; \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m \cdot b^n}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m \cdot b^n}};$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{\frac{a^m}{b^n}}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{\frac{a^m}{b^n}}};$$

$$b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot b^n}; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{b} \quad = \sqrt[n]{\frac{a}{b^n}}.$$

Die angenäherte Ausziehung der Wurzel wird durch die Formel bewirkt

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{b}\sqrt[n]{ab^n}.$$

Der Bearbeiter gebraucht für b stets eine Potenz von 10, speciell mit Vorliebe 100 und lässt zu einer noch weiteren Annäherung immer die Formel benutzen:

$$\sqrt[n]{a^n + b} = a + \frac{b}{n_1 a^{n-1} + n_2 a^{n-2} + n_3 a^{n-3} + \cdots + n_{n-1} a + 1},$$

das sind dieselben Formeln, welche nach Staigmüller der Tübinger Professor Scheubel zur selben Zeit gebrauchte. Den Nenner des Bruches nennt er dabei die Distanz zwischen den Potenzen a^n und $(a+1)^n$ und im Verhältnisse dieses Zuwachses der Potenz beim Wachsen der Wurzel um eins müsse auch der Zuwachs b der vorliegenden Zahl zu dem Zuwachs der um eins gewachsenen Zahl stehen. Die speziellen Fälle

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2n+1};$$

$$\sqrt[3]{a^3 + b} = a + \frac{b}{3a^2 + 3a + 1} = a + \frac{b}{3a(a+1)+1}$$

werden an Beispielen gezeigt.

Über das Fragment eines vierten, eigentlich fünften Buches brauche ich hier mich nicht auszulassen.

| Prologus in Algebram.[1]) 3

Hie hebet sich an das Buch Algebrae, des grossen Arismetristens, geschrieben zu den zeithen Alexandri vnd Nectanebi, des grossen Grecken vnnd Nigromantis, geschrieben zu Ylem, dem grossen Geometer jn Egypten, jn Arabischer Sprach genant *Gebra vnnd Almuchabola,* das dann bey vns wirdt genant *das Buch von dem Dinge der vnwissenden zall.* Vnd ist aus Arabischer Sprach jn kriechisch transferirt von Archimede, vnnd aus kriechisch jn das Latein von Apuleio, vnd wird genandt bey den Welschen *das Buch de la cosa,* das dann aber wird gesprochen *das Buch von dem ding;* wann aus einem vnbekanten dinge findet man das wesen der zal vnd gantzen essentz, das dann gewesen ist die frage ze wissen. Vnnd aus disem Buch finden wir, das der Machomet[2]) in seinem Alkoran vermeldet von disen Regeln, vnnd nennet sie auch Gebram vnd Almuchabolam. Sie werden auch gebraucht von den Indiern, vnnd nennen sie *Aliabra vnd Aluoreth,* das ist das Buch, das Aliabras zu den zeiten Alexandri aus Arabischer sprache jn jndische gesatzt hat, vnd wird bey jnen gesagtt *das Buch Aluoreth,* das ist von dem Dinge abermals, oder *das Buch der Coniecturation,* dann wir schatzen oder achten, die zal sej ein ding, vnd ist bej den Indischen ein Rechen vbung gewesen mehr dann bej allen andern volkern.[3]) Sie gaben auch das gemelte Buch | durch etliche grunde ge- 3′
leutert, als es Algebras gesagt hatt, vnnd ist geschrieben erstlichen von Algebras zu Ylem[4]), dem grofsen Geometer, der do was preceptor oder

1) Das Wort Algebram bedeutet hier sicherlich nicht unsere heutige *Algebra,* sondern den angenommenen Verfasser Initius Algebras. Für unsern Kommentator, der diesen Prologus geschrieben hat, hat die Algebra den Namen *Gebra und Almuchabola.*

2) Das ist natürlich Verwechselung des Muhamed ben Mûsa Alchwarîzmî mit Muhamed dem Propheten, wie ja auch im Vorhergehenden wunderlich genug mit Zeit und Thatsachen umgesprungen ist.

3) Der deutsche Kommentator weiss also, dass die Inder vorzugsweise im Rechnen ausgezeichnet waren. Er kommt mehrfach auf diese Eigenschaft zurück.

4) Über die Persönlichkeit des Yles und seine Beziehung zu Euklides sehe man die Einleitung. Die Verwechselung zwischen Euklid dem Geometer und Euklid

vorfarn Euclidis des fursten zu Megarien, mit grossem fleis vnnd leitung. Wann zu den gezeithen was Algebras der kostlichste vnd berümtist in der zal von Pythagora her, vnnd furter nie kheiner gewest, der so grundliche ding von den zalen hett gesatzt. Wann pey Pythagora biſs auf Platonem, vnd von Platone biſs auf Aristotelem was gewenlich, das sie alle ding durch die zalen wolten demonstriren. Des wir dann noch finden in den Texualien Aristotelis, das er viel ding demonstrirt durch Mathematicam, vnnd finden auch durch die Zalen als durch himlische Grunde die schetze der Natur. Wir finden auch noch bei vns, das do von allen Meistern ye biſs auf vnser zeitt nicht scherpfers in der zal ist funden worden, dann das do sein die zaln vnd das Buch Algebrae, vnnd laut zu vnserm Teutschen mit seinen geclerten anhengen, jnmaſsen hernach volgt, wann es an jme selbst schwer ist in Latein gesatzt, darumb zu cleren not ist.[1])

4 | *Initii Algebrae Arabis, Viri Clarissimi, ad Summum Mathematicum eo tempore Geometren Ylem Prologus foeliciter incipit.*

Dein begern zu erfüllen, du liebhaber vnser zalen, des wir vns nicht wenig von dir verwundern, der du bist der gröste vnter den vnsern, ein vnüberwindlicher Geometer, der ich dich meiner zal ergrundung thun soll, vnd deine kunst die meine beweist, binn ich nicht gesinnet, der zusetzen werden vber dich newes gefunden habe, sonder aber, als du mutest ze wissen meine wis vnd form der Linien Bipartiten vnnd Tripartitis, das ist der Linien Natur in zwei vnd drei getheilt, bin ich vngezweifelt, deine groſsmutigkeit werden clein achten mein selbst vorgenomene weise, wiewol

---

von Megara, der hier sogar ein Fürst von Megarien wird, ist ja seit Diogenes Laertios eine ganz gewöhnliche.

1) In der Dresdner Handschrift *C. 405* ist hier folgende Inhaltsanzeige des ganzen Werkes eingefügt:

Primus liber: de octo aequationibus et demonstrationibus earundem.

Secundus liber: de quantitatibus additis et diminutis sive pregnantibus.

Tertius liber: de numeris rationalibus communicantibus atque surdis trium tractatuum.

Quartus liber: de proportionibus tam rationalibus quam irrationalibus, proportionalitatibus et medietatibus.

Quintus liber: de binomiis et de coniunctibus eorum secundum 13 numeros irrationales.

Sextus liber: de clavibus numerorum coniecturis propositionum sive questionum.

Septimus liber: de areis datis corporum atque superficierum perquirendis.

Octavus liber: de datis absolutis numerorum secundum claves examinatorum.

Nonus liber: compilatio super Algebram tam latina quam theutunica.

vorhin jn der zal nie angetast vnd gehört. Yedoch, so dein gemute mich
wirdet vornemen, wirstu mich defs mit deinen demonstrationibus vnd be-
weisungen bezeugenn, vnd dir bald zu gedechtnus fallen mein cleine er-
findung. Bitt dich fleifsiger aufmerkhung, ansehung, was vbung ich habe
deiner zwigespalte vnd drigespalte Linien, vnd die in die zal gebrachtt
nicht wenig zu verwundern hast, das ich aus deiner werden kunst solle
saugen, das du von mir begerst zu wissen. | Verwundert mich, aus was 4'
Ohren dir solch mein zal vorkhomen sei, als du schreibst von Zitheo, dem
Singer, vnd Lameno[1]), dem Arismetico, die mir bekant sein. Bin ich nicht
wissens fragen, das ich mich des hette vormessen, von deiner Achtparkeit
bey jnen zu berhumen, sondern aus jren fragstuck meiner gefunden Art
gebraucht, die du jnen mit vil hubscher beweisung deiner Geometrei auf-
gelost hast, sind sie fort zu mir, deinen vnwirdigen jungen, khumen, aus
deiner Anwejsung jnen ettwas derhalben arithmetice zu ostendiren, das dir
dozumal vnbedacht gewest, das sich solchs zu der zal sollte gemefsen
haben. Vnd fragst gros verwundern deiner partiten vnd tripartiten linien,
die do nest angesehen vnd daraus gezogen die Gebra vnd Almuchabola,
das also bei vns wol ze verwundern, die zal so weit vmb sich zu be-
greifen. Vnter andern meldestu, das noch kheiner vber mich der zaln sei
erfunden von vnsern vatter Pythagora her, des du mich vnwirdigen lobest,
dann alle mein erfindung aus deinen bipartitis vnd tripartitis linien ge-
zogen ist, vnd grofsmutigkt mich, das ich meine sect mit deiner werden
kunst mag bewisen. Dein vorbild, dein augen nie abgebrechen, werde ich
dir solchs vorwerfen vnd sehen lassen, was | newes sey, das dein vrsach 5
nicht vorgangen sey in deinem Buch von der linien bipartitis gesaget, des
ich dich erinnern würde, hastu forpas meinen fleis zuvormerken deiner lehr
mir gethan. Aper meldestu, dich nicht vorsehen hettest meiner vbung, des
mir deine harpfe wortt gesaget von der Linien Bipartitis vnd Tripartitis
einfürung gegeben haben, auch kaum, das ich solches so weit habe bracht
in Gebram vnd Almuchabolam, das ich mag finden aus deinen Linien eine
bekhante Zal des vnbekhanten vnd fragenden dings. Vnd wiewol solchs
noch gleicherwis bei vns vnmöglich ist den vnvorständigen, will ich deiner
liebe solche mein cleine gefundene seckt vnuorholen haben bei dir plei-
benden, auf das nicht gemeiner man spreche, gewachsen sein vber dich,
das dir dann vorkleinung brechtt. Vnd wie wol dein werde kunst meine
sect beweist, wirdt sie dennoch schwerlich hieher aufszudrucken, wol er-
messen hast, meine arbeit gethan deiner ercleten proposition auslegung

1) Diese Namen sind wohl fingiert; ich konnte wenigstens keinen derselben in mir zugänglichen Werken auffinden.

eraigen werden, vnd wie ich aber bei mir Gebram vnd Almuchabolam aus deinen linien erfunden habe, will ich setzen zum ersten von deiner bipartitis linien, die du auch zu schetzen der zal hast zugeaignet, vnd alsdann | von den tripartitis, wie die soll in die Bipartitis reducirt werden, das man ernstlich muge haben den eingang jn Gebram vnd Almuchabolam, aus was Grunde sie anfengklich entspreuſst. Wenn die gemeldte Gebra vnd Almuchabola neher kheinen anfang khan schöpfen, dann aus den gemelten Linien, die du dann aus kunstlichen propositionen hast gesatzt vngezweifelt deiner Geometrej clerlich auſsgedruckt, vnd jtzlicher Geometer vnd fleiſsiger der kunst in gedechtnus fueren, vff das er besser möge ergrunden vnser Gebram vnd Almuchabolam. Vnd volgett hernach von der gemelten Linien Bipartitis Yʟɪs das erst Capitel.

Capitulum primum de linea bipartita Yʟɪs *Geometris (!).*

Du sagest in deinem dritten Buch von der Natur der Linien, nachdem vns ein ytzlich linien vnzerthailt genandt wirdt ein *Continuum*, das do an im selbst vnzerthailt gesprochen, vnd khan auch erstlich ein ytzlichs continuum anderst nicht gethailt werden, dann jn zway thail. Vnd wie wol wir sprechen, sie moge in funfe, sechs oder mehr thail gethailt wer-
*6 den, | so ist doch nach dem vorstande der Natur ein ytzliche thailung erstlich gespalten vnd khan auch in mehr tail nicht gethailt werden, dann in zwei thail, vnd dasselbige wider in zwei, das gegen der gantzen Linien vorpas zu viel thailen gezalt wirdtt. Sam also, wir wollen setzen, die Linien ab sey gethailt in 7 thail vorstentlich, vnd sey das erste bc. Sprich ich, das ab in zwei gethailt ist in puncten c. Setzen wir d den andern punct. Also sprich ich, das ac gethailt ist in zwai thail gegen den punct d, vnd also wirdtt gegen der gantzen Linien gesaget in drei thaile, vnd doch ein ytzliches Continuum wirdt gesprochen in zwei thail erstlich zu thailen. Vnd hierumb sagstu nit vnbilligen, von der zweigespaltenen Linien habe ich gedachtt in meiner Gebra vnd Almuchabola von dem dinge gesprochen, die weil die Linien vnzerthailt ein Continuum ist, das do gantz ist und kheine vorstentliche dissection an jme selbst nit hatt, so mag ich sie wol nennen ein ding, das noch vnzertailt ist vnd gantz gerechennt gegen der zal, die do noch kheinen namen jn die gesatzt hatt, das ist das
6′ Continuum. So aber der gantzen Linien zehen die zal eroffnet ist | vnd dergleich gesatztt ist, vnd vor zehen gerechent, vnd soll alsdann gethailt werden in dem Sinne gegen dem dinge in zwei thail, sprechen wir, das

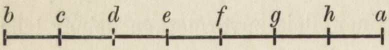


Fig. 1.

das ein thail continuum ist ein ding, vnd das andere zehen an der zal minus ein ding, vnd das zusamen gesetzt ist zehen, das was die gantze Linien. Also wird gesagt ein ding Gebra, vnd 10 minus ein ding Almuchabola[1]), vnd ist vnser erster eingang zu sagen von dem dinge, das dann in Gebra vnd Almuchabola vor ein Radicem vnd wurtzel genomen wirdt, wann alle ding mögen hieraus entspringen. Es ist auch die gantze Gebra vnd Almuchabola auf die Bipartiten Linien gegrundt. Gleicherweis ein ytzlichs continuum erstlich zu thailen nicht mehr thaile khan an sich nemen dann zwei, also vermag auch ein gemelte Linien nicht mehr dann aus ir selbst beschreiben ein superficien, der dann nicht mehr dann zwo dimensiones vormag, darumb werden die Gebra vnd Almuchabola allein den planitien zugeaignet. Aber als tripartita linea sich etwas weiter erstrecket, wollen wir seiner zeitt genugsam volg thun. Wie nun dein linea
bipartita sol gewerificirt werden, | neme ich vor deine sechs gesatzte pro- 7
positiones des dritt Buchs von den bipartiten Linien vnd jrer naturenn, vnnd wie ich aus den gezogen habe gebram, das ding, vnd Almuchabolam, die zal minder dasselbigen dings. Nach welcher naturen dann ein jtzliche Linien erstlich gethailt wirdtt, setze ich dein erste proposition, vnd ereugen dir die also lautende:

Capitulum secundum de prima propositione Ylis *lineae bipartita eiusque natura et essentia.*

Linea bipartita ducta per aliam id potentialiter efficiet, quod tota in quamlibet eius partem producit, et si expletum una earum coniunctum dividit, reliquam quantitatem renasci necesse est.[2])

Vnd laut zu vnserm deutschen also:

Ein jtzliche zerthailte Lini in etzliche thail so die durch ein andere gefurth wirdt, so schreibt sie mit jrer machtt, das dann aus der gantzen jn jtzlich thail der zuthailen zusamen entspreufst. So dann solches entsprofsen durch der Linien eine gethailt wirdtt, so erheischt not, die andere werde wider gros
geboren zu werden. | 7'

1) Dieser Unterschied zwischen Gebra und Almuchabola dürfte sich wohl nur an dieser Stelle finden. Später kennt aber der Kommentator sehr gut auch den Begriff *restauratio*.

2) Euclides II, 1 (ed. Ratdolt 1492): Si fuerint due linee, quarum una in quodlibet partes dividitur, illud, quod ex ductu alterius in alteram fit, equum erit his, que ex ductu linee indivise in unam quamque partem linee particulatim divise rectangula producentur. Das Korollarium von *et si* an ist bei Euklid nicht vorhanden.

Da wir aber vnser Gebram vnd Almuchabolam aus deinen Continuis gezogen vnnd pracht habenn in den vorstande der zalen, so wisse, das wir jnn negsten Capitel gesetzt haben, das ein Continuum vnzerthailt gedachtt wirdtt vor ein ding, das kheinen namen der zaln hat, alſs dann ein vngethailte Linien ist. Aber die gethailte Linien, gesprochen partita, wirdet nit der zal gemeſs, wann sie vorstentliche thaile jn jr hatt, vnnd werden genandt vnitates gebrae, das sind vnitates des dings in potentia vnd auch der quotient des Almuchabola, den man tailet in der Equation. Dann also offte vnitas ist in dem ding, das ist in gebra, so offte ist der quotient in Almuchabola, vnd also offte vnitas in dem quotient, so offt ist das ding in Almuchabola. Das seind vier proportionalisch zal gesatzt, daraus wir vnser Regeln gesatzt vnd transponirt haben.

Setzen wir lineam partitam *ab* (Fig. 2) getailt in vorstentliche thail, *ac* die linien vngethailt vnd gantz, jn massen die proposition cleret, vnd setzen den gantzen Superficien *ab* in *ac* sei 60 an der zaln. Nun sprechen wir, nach der proposition, das *ac* in *ab* gemultiplicirt beschreibe den gantzen superficien

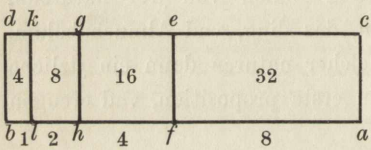


Fig. 2.

Prima aequatio.

8 *acdb*, das seind | 60, so mus von noth *ac* sein ein einig ding, das in vnitates *ab* wirdt gefurt vnd 60 machen in potentia, darumb mus *ab* der quotient sein des superficies, das seind vnitates des dings Gebrae *ac* in potentia. So nun *ab* der quotient ist, so thailen wir 60, Almuchabolam, durch 15, Gebram, das seind durch vnitates *ab*, kombt 4. Also sprechen wir, das das *ac* sey 4 aus der zal, das was das ding, die gantze vnzerthailte Linien. Nun ist das ding 4 vnitates werdt gewest in longitudine; darumb seind vnitates gebrae auch worden 4 in potentia, wann 8 in potentia vermag 32, vnnd 4 in potentia 16, vnd 2 vermag 8, vnnd 1 vermag 4. Vnd solchs zubeweisen vnd menschlich vernunfft einzubilden vornemlichen, wollen wir den text figurlich zusetzen ein Beispil, auf das der text clerlicher zu vernemen sey mit leichter anweisung.

Es sitzen bey einander vier philosophi, nemlich Plato, Euclides, Pythagoras vnd Aristoteles. Werden zureden mit Algebrae dem groſsen
8′ Arismetro in einer | collation sprechende: Liber Algebras, wir vnthereinander wollen gern wissen, wie alt ein yeder in sonderheit sey, dann wir alle vier seind 1455 jhar altt; vnd Euclides ist noch so alt als Aristoteles, vnd Plato noch so altt als Euclides, so ist Pythagoras noch so alt als Plato. Nun mach vns das durch dein Gebram vnd Almuchabolam,

vns zubeweisen dein erste gesatzte Regel gezogen aus der partita linea Ylis des grofsen Geometers. Anttwort Algebras: Ich setze jr seit alle alt das gantzen superficie *ac* in *ab*, das ist 1455, nach eurer sage, das nenne ich Almuchabolam, das ist die zal, deme das ding *ac* Gebrae gleichen mus mit allen rectangeln, wann die proposition sagett, das *ac* in ytzlich thail *ab* aller Rectangeln macht gleich als *ac* in *ab*. Nun ist *hl*, Euclides, noch so alt als *lb*, Aristoteles, so ist *fh* Plato noch so alt als *lh* dann Euclides. Auch so ist *af*, Pythagoras, noch so alt als Plato, so erheischt not, das das erste 1 in der zal, das ander 2, das dritt 4 vnd das viert 8. Vnd so diese 15 vnitates gefurth werden durch *ac*, ein ding, das dann Continuum ist vnd khein discretion der zal hatt, so khomet der superficies: also werden die 15 vnitates in potentia gleich dem superficie 1455.

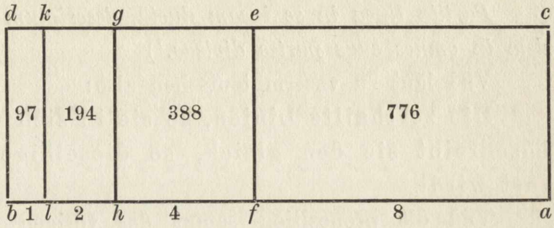


Fig. 3.

| So dann die gemelten 15 vnitates sein der quotient des dings continui *ac* 9
gegen den superficien, so thailen wir den superficien durch 15, khombt nach der proposition die zal des dings *ac* continui 97. Wann eine Lini jn die ander gemultiplicirt erwechst der superficies, darumb von not wider gethailt den superficiem durch der Linien eine, geporn wirdt die andere der proposition. Noch so alt ist Aristoteles 97 jar, vnd ist der Rectangel *kdlb* jn potentia, vnd sein vnitas jn der lenge 1. Nun multiplicir wider *ac* in *hl*, khombt 194, so alt ist Euclides, vnd ist das andere rectangulum, das aus der vnzerthailten Linien jn die gethailten erwechst. Als dann die proposition auswist, multiplicir 97 in 4, khombt 388, so alt ist Plato, vnd ist das dritt Rectangulum, vnd sein vnitates in der lenge sein 4, vnd ytzlich in potentia ist 97, darumb heisen sie vnitates Gebrae in potentia. Nun multiplicir 97 mit 8, khomen 776; so alt ist Pythagoras. Solche Rectangel alle zusamen geben den gantzen superficiem nach aller Form vnd weise gesatzter proportion der Linien partita vnd inpartita, das ist der zerthailten vnd unzerthailten linien. Nun volget das dritt Capitel von der andern Linien partita Ylis, | des geometers. 9′

Aristoteles	97
Euclides	194
Plato	388
Pythagoras	776
Summa	1455

Capitulum tertium de linea partita Ylis, *eiusque essentia ac natura propositio secunda.*

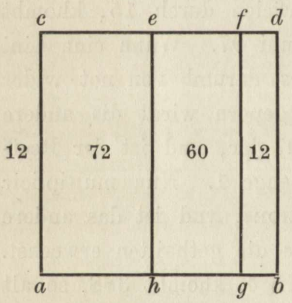
Partita linea in se ipsam ducta, descriptum aequum est indivisae eiusdem in omnes suas partes divisas.[1])

Vnd laut zu vnserm teutschen also:

Die zerthailte Linien, so sie in sich selbst gefurt wirdt, so beschreibt sie den gleich, so dieselbige in alle jre thail gefurt wirdt.

Vnd die proposition sampt der vorigen werden auch gesatzt von Euclide im andern Buche an der ersten vnd andern proposition, wann er was ein junger Ylis des grosen Geometers.

Von diser proposition einzufueren vnter andern Regeln Gebrae et Almuchabolae, so nennen wir vor, inmassen vorgesagt, zu setzen die ungethailte Lini vor ein ding, so die in sich selbst gefurt wirdt, beschreibt
10 vns ein quadrat, des Radix ist die lini continua, vnd | vnwissent der zaln gesatzt. So dann die gethailt wirdt in vorstentliche thaile der zal gemes, so erwechst aus den tailen jn die gantzen linien gleich dem vorigen quadratt. Setzen wir (Fig. 4), die zerthailten Linien *ab* sey vnitas, *gh* vnd *ah*, vnd *ac* ist vnwissent, so setzen wir ein ding als vnwissent. Also nach der ersten proposition *ac* in *ab* macht 144, Almuchabolam, darumb ist *ab* aber der quotient. Thailen wir 144 in *ab* 12, so khumen 12; also ist ein ding *ac* in longitudine 12, vnd der erste Rectangel in potentia ist 12, der ander 60, der dritt 72, vnd jre vnitates in der lenge seind in potentia jr jtzlich 12, vnd solche Rectangel machen auch 144 gleich dem quadrat. Vnd diese gemelte proposition Ylis setzen die Indij nicht, vnd sagen, es sey genugsam in der ersten proposition ausgedruckt, dann wo *ab* in so vil thail partirt wirdt oder ist, das ist in vnitates, souil dann das ding werden wirdt, so ist es superficialiter gemultiplicirt, als die erste clerlich aufsgedrucket hatt. Ist dann die Linj jn souil thail gethailt, so vil das ding werth ist, so ist nit noth das ding zu suchen, sonder es ist bekant, vnd
10' hierumb weistu in | nachuolgenden bericht, warumb dise gesatzte proposition von den Indiern nicht gesatzt ist, vnd wie sie den Text Algebrae



Secunda aequatio.

ʒ · ℭ

Fig. 4.

1) Euclides II, 2: Si fuerit linea in partes divisa, illud, quod ex ductu totius linea in se ipsam fit, equum erit his, que ex ductu eiusdem in omnes suas partes.

gescherpft haben, ist noch zur zeitt nichtt vorstentlich zu wissen, sondern dem text Algebrae gemes zu sagen.[1]) Vnd solche proposition leicht einzubilden, wollen wir abermals dem Text ein vornemlich Exempel addirn also lautende leichter begreifung zu dem Eingang dis Buchs.

Lameno, der grofse Arismetist, fraget Algebram in einem fragstucke, wie der grosse Alexander hette geben dem Platoni, Aristoteli vnd auch dem Pythagora etzlich marck golds zu verzern zu Athenis vff der hohen schule, die hetten sie vorkaufft ye 1 mk so theuer, souil der marck gewesen waren, vnd doch hatte Pythagoras 6 mal alsouil zu verzern als Aristoteles, so hatte Plato auch funfmal alsouil sam Aristoteles, vnd des goldes was in der summa 8649. Nun wolte ich gern wissen, wie theuer eine Marckh geben worden were, vnd wieuil geldes yeder zu vorzern hette.

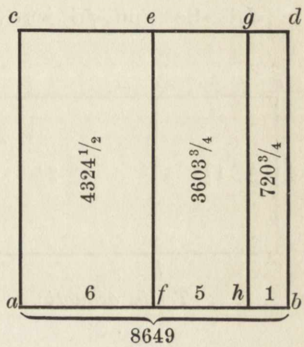


Fig. 5.

Setzen wir *ac* sey ein ding des geldes, *cd* gleicherleng des geldes. Nun *ac* in *cd* macht ein quadrat, pey vns gesprochen ein ʒ, das ist 8649 gleich in der zal, den multiplicirn mit 1 ʒ, wirdt 8649 ʒ. Nun ist ein | itz- 11
lich latus radix des zensus, darumb radix von 8649 ist 93: souil Marck, vnd souil eine Marckh gegolten *dc*. Nun hat Aristoteles von dem ʒ 1, Pythagoras 6, vnd Plato 5 der linien *cd* von dem gelde, das sind 12 radices gleich dem zens in potentia. haben wir vorgesagt, das *cd* sey der quotient der superficie, darumb theile zens durch quotienten 12, khombt der Rectangel in potentia *bhdg* Aristoteles, vnd den magstu auch in die zal fueren (Fig. 5).

Capitulum quartum de linea bipartita Ylis geometris eiusque natura et essentia.

Bipartita linea ducta si fuerit in alterutrum eius partem, coaequum est, quod ex eadem fit in se ipsam, et alterius per alteram. | [2]) 11′

Vnd laut zum deutschen also:

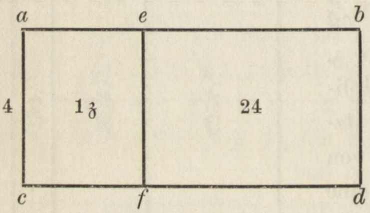
Ein ytzliche zwigespalten Linien so die wirdt gefurt jn

1) Wieder ein Beispiel für die Kenntnis des deutschen Bearbeiters, was indische Rechenkunst betrifft.

2) Euklides II, 3: Si fuerit linea in duas partes divisa, illud, quod fit ex ductu totius in alterutram partem, equum erit his, que ex ductu eiusdem partis in se ipsam et alterius in alteram.

jrer thail eins, welches das sey, so ist das gleich deme, was aus dem selbigen thaile khombt jn sich selbst vnd aus dem selbigen gefurt in das ander.

Solche gesatzte proposition wird vns beschrieben in der dritten proposition Euclidis seins andern Buchs. Wie wir nun vnsere dritten Regel Gebrae et Almuchabolae aus diser proposition gezogen haben, setzen wir die bipartiten Linien *cd* sey eines thails vnwissent der zal *cf*, vnd das *df* sey aus der zal 24 inpotentia, vnd der gantze superficies *abcd* sey 40 in numeris. Nun zu ergrunden das eine thail vnser Bipartiten, die dann nach der gesatzten proposition beschreiben thut 1 ʒ der zal vnwissent gesatzt, so saget eigentlich die proposition, der gantze superficies erwachse aus der gantzen Linien *cd* gefurt in *cf*, oder aber aus *cf* in sich vnd *cf* in *df*. So nun *fd* ist wissent gesatzt 24 in potentia, so die gezogen werden von 40, Rest 16, das ist der zins des Radix *cf*, in longitudine vnd in numeris 4, also ist der quadrat 16 vnd



Tertia aequatio.

ʒ · ℋ

Fig. 6.

12 | radix, das ist das ding, das vnwissent war in der lenge vnd potentia, was 4. So wir nun haben gefunden, das das aus der bipartiten Linien eines thails in sich entspringt in longitudine vnd potentia, vnd das ander thail *fd* wissent ist in potentia, so sollen wir auch ergrunden, was das in longitudine sey. Saget uns die proposition, das das eine thail in der lenge in sich vnd dasselbig in das ander beschreibt den gantzen superficiem *abcd*. Hierumb ist *cf* der quotient von 24 in potentia gegen *fd* in longitudine, wann aus *cf* in *fd* wirdt *ebfd*, das ist 24. Wann thaile 24 in 4, khumbt 6, das ist *fd*, also ist die gantze linien bipartita in longitudine 10, vnd das eine thail ist 4 in numeris, vnd das andere 6, vnd das ding, das vnwissend was in longitudine vnd potentia, was radix des zensus *aecf*. Vnd von solcher proposition haben gesatzt die Indij grosse heimlichkeit zu erfaren vnd auszugrunden die zalen[1]), jn massen wir dauon sagen werden, auf das wir aber angeregter Exempel vorgesatzt Ordnung hatten, wollen wir den Text cleren.

2′ Hipocras gab auf ein zeit dem Galeno gellt, jme | zu kaufen des holtzes Aloes in der messe zu Athenis in die Apotecken gehorig. Nun aus vil warf Galenus das gelt in seinen Beutel vnter anders sein geltt, das jme vnwissent was, das er auch vorhin im beutel gehabt hette, doch

1) Auch hier wieder die Erwähnung der Inder als grosser Algebraiker.

merket er seine empfelhnis jme gethan: so theuer man gebe 1 ℔ aloes, souil ℔ sollt er bringen, vnd er hette jme darnach zalt. Also da er kame gen Athenis, da fand er 40 fl im beutel, die gab er den khaufman nach empfelnis Hypocratis, vnd sprach: gebt mir, als auch Hipocras geschrieben hatt, vnd sonderlich so gebt mir das ℔ auch jm gelde des holtzes Aloes, dann ich habe sunst mehr auszurichten, vnd fast mir es ein vnd verwart mirs. Also am widergang fraget er jn, ob er es jm aufsgericht hette; antwort jme der kaufmann: jr habet beide souil sich geburt, vnd jr habet besunder des vor 24 fl. Das zeiget Galenus an. Do in nun Hipocras auf dem widerkhomen ersahe, fraget er jnen, wie er die sachen hette aufsgericht. Antwort Galenus: Ich wais nicht, wieuil ich vorhin jm peutel gehabt habe, so habe ich nicht gefragt, wieuil | 1 ℔ gestehe, sunder er 13
saget, ich habt seiner vor 24 fl vnd wir baide vor 40 fl. Also werden sie der sachen vnwissent, vnd schicken nach dem Algebra, vnd baten jn nach ergangner sachen, solchs sie bede durch die Gebram vnnd Almuchabolam zu entscheiden. Algebra sprach: Wir setzen Hipocratis ℔ sein cf, ein vnwissent ding in longitudine vnd potentia, vnd Galeni ℔ sein fd in potentia 24 in numeris. Nun geldtt cf das ding souil als des ℔ sein. Nun das ist in longitudine ein ding, vnd gilt auch 1 mal ein in potentia den quadrat oder zensus. Nun aus der proposition, so ist der vnwissent zensus $aecf$ mit 24 in numeris $edbf$ gleich 40, dem gantz parallelogramum $cbad$ in numeris. Zeuch ab $ebfd$ vom gantz superficie, restant 16, der zensus $aecf$, des latus ist radix, das ist 4, nach der proposition in sich selbst. Also ist das ding 4 werdt in longitudine, das sind die ℔ Hipocratis, vnd ytzlichs hat gegolten 4 gulden, das ist 16, das was der zens in potentia. Nun ist 24 in numeris nach der proposition aus cf in fd, darumb thailen wir 24 mit 4, khomen 6 ℔, gehorn | Galeno, wann 4 der 13′
ist von 24 in potentia gegen fd in longitudine. Vnd so haben wir bewisenn vnser dritte Regel in vnser Gebra vnd Almuchabola. Nun folgett von dem funften Capitel die vierdte proposition Ylis des grossen geometris.

Capitulum quintum de quarta propositione Ylis lineae bipartitae eiusque natura et essentia.

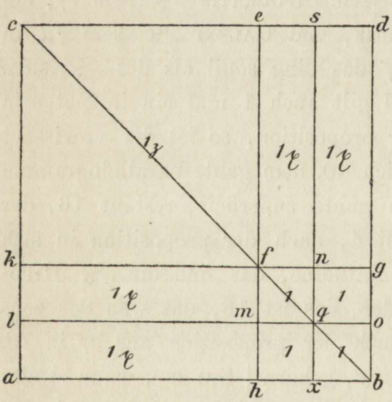
Quod ex partita nostra in se ducta describitur, coaequabitur numero et mensura utraque parti in se et alterius per alteram bis. Patet omnia crescentia gnomone lineam bipartitam in infinitum quantitate describere.[1])

1) Euclides II, 4: Si fuerit linea in duas partes divisa, illud, quod fit ex ductu totius in se ipsam, equum est his, que ex ductu utriusque partis in se ipsam et alterius in alteram bis. Auch hier ist das Korollar: *Patet omnia* bei Euklid nicht vorhanden.

Vnd laut zu vnserm Teutschen also:

Das dann khomet aus vnser zwiegespalten Linien in sich gefurt, wirdt gleich an der zal vnd mensur einem itzlichen thaile der Bipartiten in sich gefurt vnd eines thails in das ander zwir. vnd herumb wirdt offenbar, das alle die quadrangel, die do wachsen sind bei dem diameter durch den Gnomon, das ist durch den Winckelhacken oder Radicem, beschreiben die linea
14 bipartita mit jrer quantitet zu wachsen on ende zu ergrunden. |

Vnd aus solcher haben wir gezogen vnser vierdte Regel Gebrae et Almuchabolae. Sie wirdt auch gesatzt in der vierdten proposition des andern Buchs Euclidis. Wir nennen Gnomonem oder die Supplemente vor die Radix, wann ein jtzlicher quadrat wechst mit zweien Radicibus vnd dem gnomo, den sie geben, zu erfüllung der quadratur. Darumb, sooft der circumscribirt wirdt, macht er mit den Supplementa den quadrat wachsent in vnitate, vnd macht in longitudine die linien bipartita. Als wir setzen *cekf* (Fig. 7) sollen wachsen vnitate mit den radicibus circumscribirt *klfm* das ist ein 𝔯, vnd *esfn* der ander Radix, vnnd pleibt vacuum, in das die quadratur nicht erfullett wirdt, vnnd ist gnomo genant. So dann der quadrat wirdt *fnmq*, so ist *fnmq*, der quadrat erfult, vnd *lq* die linien ist zerspalten worden in *m*. Also mogen wir furter das quadrat *clqs* auch circunscribirn, als jtzunden gethan wurde, *ab* gespalten in *x*. Das mochte geschehenn nach der proposition one ende. Wir nennen auch einen ytzlichen wachsenden quadrat circa diametrum | vor 1 ʒ, der in der lenge vnd



Quarta aequatio.

𝔑 𝔯 + ʒ

Fig. 7.

14′

potentia vnwissent ist. In der lenge ist sein zu der zal vnwissent, damitt er wechst, vnd in potentia hat er kheinen Namen, sonder aber die radices vnd der zens zusamen seind in numeris vorgelegt. Also wir setzen wollen *cekf*, der vnwissent ʒ, ist circumscribirt mit 4 radicibus *kflm* vnd *lmah* vnd *efsn* vnd *sdng*, die do auch vnwissent sein, dann allein, das sie den namen haben, das jr 4 sein. Nun sein der ʒ vnd 4 radices zusamen 45 in numeris vnd gezelte thaile in der zal oder vnitates in numeris der linien *ca* vnd *cd* ist *cagdsf*, vnd zu der Completur des quadrats ist gesprochen der gnomo *fmx*. Nun wollen wir setzen, der quadrat in der lenge *kf*

ist ein ding, das ist 𝔵, vnd so ich die linien kf, das ding, in sich füre oder radicem, wird ʒ oder quadrat, welcher mit abgemelten 4 radicibus ist 45 in numeris, was mögen die radices vnd der zensus sein in numeris gesondert von einander. So mercke, das wir haben eigentlich gesatzt, das dem quadrat gebrechen ist der gnomo fmh, so ich den quadrire, wird $fghb$ vnd erfult die gantz quadratnr $acdb$, welcher gnomo ist $fghb$ ist gesatzt von 4 distinguirten vnitaten in numeris, die do erwachsen aus dem halben
thail der radices | in sich gefurt, wann yede seithen des Quadrats zwo 15
seithen circumscribirt ad crescentiam. So ich nun solche 4 unitates zu 45 thu, die dann jme gleich seind in der zal, wann es sein 4 vnitates von dem gantzen quadrat in numeris, so erwechst 49, das ist die gantze quadratur $cadb$, vnd radix 7 a durch b. So nun des gnomoni seiten fg von der bipartiten ab gezogen wirdt, das sind zwo vnitates xb in numeris, von 7, restant 5, das ist ah vel kf. Also sprechen wir, das ah der radix ist 5, vnd das in sich ist 25 in numeris, der ʒ, welcher mit seinen 4 radicibus 45 machtt, inmassen wir gesatzt. Vnd solchs zu vnterrichtung menschlichs sinnes vnd figurlich einzubildenn mit leichtem Exempeln, setzen wir dem Text zu mit verlaubung Algebrae[1]) also:

Salomon schickt Esopum gehn Damasco zu khaufen Samett vnnd Scharlach; gab jme 45 fl. Do er dohin kham, kaufet er ein Samett so theuer, souil er da elen nam, vnd 4 eln Scharlach so theuer die eln, sam des Sametts was, vnd als er vor konig Salomon kam, fragt Salomon, was
das kostet. Antwort Esopus: Nun rath, Khonig, du gabst | mir 45 fl, 15′
dauon hab ich kaufft souil des sametts, so theuer man ein eln geben hatt, vnd 4 Eln Scharlach so theuer 1 eln sam des Samets ist: nun sage mir khonig, was ein eln kost des Samets, wieuil der sein, vnd wieuil ich vor 1 eln scharlach geben hab. Salomon entsatzte sich vnnd sandte nach Algebram, jm solchs durch Gebram vnnd Almuchabolam zumachen. Als das Algebras vernam, sprach er zum konig Salomon: Durchlauchtiger konig, hastu doch selbst vil Regeln jn der zal gesatzt, die nach dir genandt sein, als regula Salomonis[2]), so man ordine converso practicirt regulam Hali Habenrigel, so man die zalen setzt in die vier proportionalische zaln der aufgab nach, als wir nachuolgend sagen werden. Verwundert mich, das ich dich solchs durch mein Gebram vnnd Almuchabolam berichten soll. Salomon antwort: Du berumbter Arismetrist Algebra, deine Regeln straffen

1) Hieraus ist klar, dass alle diese wunderbaren Aufgaben dnrch den deutschen Bearbeiter hinzugefügt sind.

2) Hier wird also die *Regula Salomonis,* d. h. das sogenannte Rückwärtsrechnen, auch *regula sermonis* genannt, dem Könige Salomon zugewiesen. Siehe Cantor, Vorlesungen II², 247.

die meinen, denn mir noch nie kundig gewest, was durch die surdischen
vnnd jrrationalischen zaln solle volfurt werden, vnnd sage mich mit andern,
so sich nennen Arithmeticos, zu jrren schwerlichen, vnnd gebe dir preis vor
16 allen | vnter der sonnen erbeitten in der zal, vnnd wollest mich solchs
deiner Gebra vnnd Almuchabola thun berichten, welcher Gebra vnnd Al-
muchabola zu demonstriren jn zal, jn mas vnnd jn gewichtte geschaffen,
jnmassen ich gesatzt hab Sapientiae undecimo, nichts von ist, es wirdt
aufgelest vnd soluirt. Algebras antwort: So setzen wir des Samets eln
sey *kf*, ein ding in longitudine. Nun kosten die ein ding 1 mal eins, das
ist der vnwissent ʒ *kfce*, vnd ist das gelt des samts, bei vns gesagt ziens
oder tribut, in potentia des dings in longitudine. Nun sind des scharlachs
4 vnitates in numeris, kost eine, souil des dings *kf* ist in longitudine, das
was ein ding *kf*. So mus der scharlach kostenn in potentia, die wir
supplementum oder paralellogramum nennen. Also waren 4 radices der
zens oder die 4 supplementa in potentia mit dem ziens *kfce* 45 in numeris
gleich, inmassen vorgesagett. Nun so wir die 4 Supplementa mediren, das
ist mit dem gnomone circumscribiren auf bede seiten, so durch die bipar-
16' titen Linien erwechst ad crescentiam des ziens bey | diameter, so gebricht
zu der Quadratur der vorgemelte Gnomo, welcher, so er quadrirt wirdt,
durch sein circumscribirt des Supplements vnitates, der dann zwo in
numeris sein, wirdt 4. So die zu 45 addirt werden, wirdt 49, das ist die
gantze bipartita in sich; *ab* 7, der radix in numeris, von welchen ab-
gezogen die zwo Seithen Gnomonis restant 5, vnd das was das ding in
longitudine *kf*, die eln des sammets, vnd das ziens, tribut, ʒ oder geldt 25,
das ist der eln. Nun hat etzliche eln des Scharlachs souil golten, sam des
Samts gewesen ist in longitudine, das was 5; nun 4 mal 5 macht 20, das
sind die vier supplementa in potentia vnd das geltt des Scharlachs. Also
haben wir bewisen vnsere vierdte Regel Gebrae vnd Almuchabolae. Nun
folget von dem sechsten Capitell die funffte proposition Ylis des grofsen
Geometris.

Capitulum sextum de quinta propositione Ylis lineae tripartitae eiusque natura et essentia.

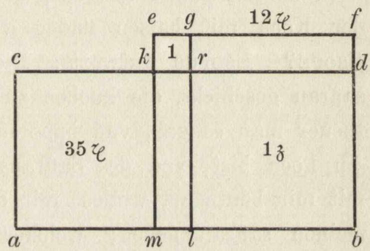
*Aequale quidem est contentum sub aequalium medietate in se sectionum
tripartitae lineae, quod sub inaequalibus cum tetragonismo inter utrasque
17 complectitur.* | [1])

1) Euklides II, 5: Si linea recta per duo equalia duoque inequalia secetur, quod sub inequalibus totius sectionis rectangulum continetur, cum eo quadrato, quod ab ea, que inter utrasque est sectiones, describitur, equum est ei quadrato, quod a dimidio totius linee in se ducto describitur.

Vnd laut zum deutschen also:

Es ist gleich, das do ist vnter den gleichen sectionibus oder halben thailen jn sich gefurt der tripartiten Linien dem, das gehalten oder beschriben wirdtt aus den vngleichen thailen gemelter linien, mit sampt dem quadrat der zwischen beiden sectionibus der gleichen vnd vngleichen thailen erfullet wirdt.

Von diser proposition zu reden vnd einzufueren vnser funfte Regel Gebre vnd Almuchabole, welche auch Euclides an seiner funften proposition seines andern Buchs ercleret, sollen wir eigentlich aufmerkhung haben mehr dann mit vorgesatzten propositionibus, wann sie etwas dapfer vnd schwerer ist, dann die vorgesatzten. Zum ersten vnd eingang diser proposition nennen wir (Fig. 8) die Linien *ab* vor den radicem des gantzen parallelogrami *ad*, wann wir wissen, so *bd* in *ab* gefürt ist, das *ab* radices seindt, jnmaſsen wir vormals gesatzt haben, das eine jtzliche Linien des superficies ist sein radix: die setzen wir ex numeris ist 12. Nun *bd* ist radix des ziens vnwiſsent ex numeris, vnd *ar* das parallelogramum ist ex numeris 35, solchs zusamen, der vnwissende census vnd 35 ex numeris, ist *ad* das gantz parallelogramum, welchen dann gleich sein die 12 radices *ab* in die seithen *bd* gefurt des vnwissenden zens. | Nun stehet die frage, was der vnwissende zensus sei, 17′



Quinta aequatio.

𝔑 + ʒ 𝔯

Fig. 8.

vnd was ein jtzliche section der Linien sey in potentia *ab* vnd longitudine, das ist, was das gantze parallelogramum sei jn Numeris *ad*, das alsouiel mach als die radices *ab* in *bd*, die seithen des ziens der vnwissent was. Saget vns klerlich die proposition: vnd das halbthail der Linien tripartitis in sich gefurt es sei gleich dem parallelogramo *ar* in numeris, das dann entspringet aus den inequalen sectionen mit sampt dem quadrat *kg*, das dann zwischen den zweyen sectionen geformirt wirdt. Nun ist das halbtheil der radices in sich 36, wenn die gantze radices 12 sein, dauon das halbe thail 6 mus sein in numeris in longitudine, das ist in potentia 36. Das were das halbe thail der radicis in numeris potentie. Davon zeuch das parallelogramum *ar* dragmarum in numeris, so bleibt *kg* das quadrat, als dann gesagt ist, das medietas radicum mehr vormag in sich dann *ar*, das quadrat zwischen zweien sectionen, vnd restat vnitas, wann *ar* in numeris ist 35, vnd *mf* das halbe thail in sich ist 36, vnd also ist des *kg* quadrats radix vnitas in der lenge *ml*. So die von der medietet radicum

18 *mb*, die 6 was, wirdt gezogen | restat *lb* 5 in numeris, das was der radix des ziens oder tributs, dann wir nennen den zens. So aber der zu der medietet gethan wirdt, erwechst *al*, die ander section inequalis. Also ist eins *al* 7 in numeris, die ander *lb* 5, das sein die 12 radices, welche dann in potentia der ersten section inaequalibus *al* in *db* ist 35, das parallelogramum *ar*, die ander *lb* 25, der vnwissent ziens, macht in numeris 60, das ist auch *ab* 12 radix in potentia in *db* das jm 5 gleich.

Das aber vornemblich sei, nach deme die materien an jr selbst schwer ist, sagen wir also figurlich.

Algus der philosophus schickt aus Esopum gein Paris Saffran zu kaufen die kuchen zu bestellen. Esopus kauft souil lott, so theuer man 1 lot gab, behilt 35 ₰. Vnterwegen ward er mit dem hunger begriffen, hette nichts, damit er sich gesettigen mochte, begegnet jm also Zuterich der Koch mit haisen fladen vnnd Butterwecken sprechende: wann her
18′ Esope? Esopus antwortt: Lieber, mein herr | Algus hatt mich vmb saffran geschickt, die kuchen zu bestellen, des hab ich kaufft souil loth, so theuer man es gab, vnd habe mich mit essen nicht versorgett. Dieweil du ein koch bist, vnd des Saffrans auch bedarffest, bit ich dich, du wollest mit mir beuthenn, wollest mir deine 12 stuck fladen vnd puterwecken vor meinen saffran geben; welcher geringer ist, soll dem andern zugeben. Zuterich gieng das ein. Also satzten sie sich vnnd rechneten, das die 12 stuckh Zuterichs 35 ₰ besser waren dann der saffran. Also gab Esopus die 35 ₰ zu, as vnterwegen alsouil fladen souil es mehr waren dann der wecken, die vbrigen pracht er seinem philosopho dem Algo, vnnd sagt jm, wie es ergangen, sprechende: Souil der fladen mehr wahren dann der wecken, souil hab ich jr gessen, vnd kostet doch jtzlichs stuckh souil sam des saffrans was. Nun rath wieuil hab ich fladen geessen, wie theuer hab ich das loth kaufft, vnd wieuil ist sein gewesen. Algus entsatzte sich vnd schalt Esopum. Er antwortet jme vnnd saget: Hastu doch grosse ding jn der zal geschrieben, den Algorismum de integris, de fractis etc[a].[1]), kanstu
19 das nicht machen | durch deine neben gesatzten Regeln, dauon viel wirdt gehalten? Algus antwortt: Du hast in allen dingen behende anschlege, wir wollen senden nach dem Algebra. Also khame Algebras. Nach Gelegenheit der sachen sprach er: Wir setzen, Esopum gekaufft haben 1 lot umb 1 ding *lb* in longitudine. Nun sind des auch gewesen 1 ding, das ist in sich der ʒ *lbrd*. Nun hat er Zuterich gegeben 35 ₰ in numeris *ar*,

1) Das bezieht sich natürlich auf den *Algorismus de integris* des Sacrobosco, der ja vielfach einem Philosophen Algus zugeschrieben wird. Der *Algorismus de fractis* dürfte dagegen der des Iohannes de Lineriis sein sollen.

das parallelogramum. Soliches 1 ʒ *ld* vnd *ar* seind gleich dem gantz parallelogramo *ad*, ist der Safran 1 ʒ vnd 35 in numeris. Nun kosten die 12 stucke auch souil, vnd doch jedes jn sunderheit kost souil, als des saffrans gewesen ist, das was *lb* vel *db* geführt in *ab*, macht 12 radices oder ding, wann *bd* ist gesetzt ein ding. Nun ist *ab* 12 mal ein ding, macht 12 radices, die halb seind 6, ist *mb* in longitudine, die in sich selbst, wird *mf*. Dauon zieh die 35, jnmassen oben gesagt, das das halbe thail nach der proposition tripartite mehr vermag in sich dann *ar* ex numeris in dem quadrat *kg*, vnd restat 1 in numeris, des radix ist *lm*, gezogen von 6, *mb*, restat 5, souil des Saffrans lot gewesen, vnd auch die | wecke 19′
haben kost itzlichs *ld* 25 ₰. *mb* 6 zu *lm* wird 7, souil ist der fladen gewesen, haben kost 35 ₰: solchs zusamen macht 60 ₰. Nun die 12 stuckh kost ye eins souil ₰ als der loth gewesen, der was 5 loth *bd*, die seithen des quadrats, in *ab* 12 facit auch 60. Vnnd hat geessen 2 fladen, wann jr zween mehr seind dann der wecke, vnd also haben wir figurlich bewisen vnsere funfte Regel Gebre vnnd Almuchabole.

Nun volget von der sechsten Regel der linea tripartita Ylis des groſſen Geometris.

Capitulum septimum de sexta propositione Ylis lineae bipartitae et tripartitae eiusdēmque natura et essentia.

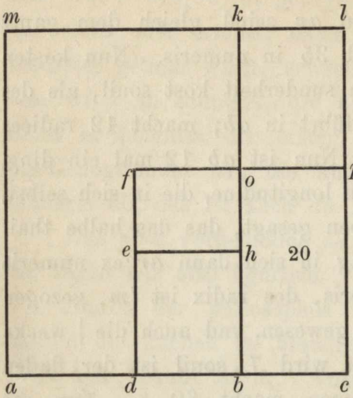
Quod ex bipartita equali in se producitur cum eo, quod ex adiecta in totam tripartitam fit, aequum est ei, quod constat ex adiecta et aequali in se.[1])

Vnnd laut zum teutschen also:

Das dann aus der gleichen gespalten Linien bipartita khomendt mit dem, das aus der Linien hinzugesatzt in die gantze tripartita erwechst, ist gleich deme, das dann geschehet aus der hinzugeworffen vnnd gleichen bipartita in sich gefurt. | 20

Aus diser sechsten proposition haben wir genomen vnser sechste Regel Gebre vnnd Almuchabole. Wir nemen *al* vor einem vnwissenden ziens jn longitudine vnd potentia (Fig. 9), vnd doch wissen wir, das parallelogramum *bl* ist ex numeris 20, und *ak* seind 8 radices in potentia des ziensus. Nun wolten wir gern wissen, was der ziens in numeris were, vnd was seine seithen *ac* in longitudine. Saget vns die proposition, das die bipartita gleich gethailt *ab* sein 8 in numeris, wann *ak* sein 8 radices

1) Euklides II, 6: Si recta linea in duo equalia dividatur, alia vero ei linea in longum addatur, quod ex ductu totius iam composite in eam, que iam adiecta est, cum eo, quod ex ductu dimidie in se ipsam, equum est ei quadrato, quod ab ea, que constat ex adiecta et dimidia in se ipsam ducta describitur.



Sexta equatio.

20′ ℋ + ℛ ʒ

Fig. 9.

des ziens in potentia: darumb mueſſen *ab* 8 sein jn longitudine. Nun war *db*, das halbe tail, 4: saget die proposition, das *db* in sich gefurt mit sampt *bl* 20, das dann 36 macht, sey gleich *de* in sich gefurt. Nun radix von 36, das war *dc* 6 in numeris, so ist *db* 4 gesatzt, wann *ab* waren 8 radices, seind gleich gethailt in *db*. Also so *dc* 6 ist vnd *db* 4, so ist *bc* 2 ex numeris, vnd also were *ad* auch 4, wann ime *db* gleich ist, wann *ad* ist der Linien halbthail mit dem *db* der radix. Nun haben wir *dc* 6 ex numeris, so *ad* der halbe | thail, 4 hinzukhumbt, ist *ac* die gantze Linie in longitudine 10: sprechen wir, der zens ist in longitudine 10 radicum vnd in potentia 100, vnd *ak* seind 80, das sein 8 radices in potentia, vnd *bl* ist 20, das macht 100, vnd *bc* ist 2 jn longitudine, die adiecta, macht 20 in die gantze tripartita *ac*. Vnd also fueget sich wol, solchs auch figurlich einzubilden.

Nichomachus der groſs Arismetrist hatte etzliche Bucher jn Mathematica, die wolten kaufen Aristeus vnnd Apolonius, die zwei grosen Mathematici. Nun bot Nichomachus ein Buch so theuer, souil er der hette. Aristeus sprach: ich hab 20 fl, so hat mein geselle 8 Bucher auch ydes so theuer sam du eins gibst. Wir setzen wahr vmb wahr vnd lassen es
21 gleicher seithen gleich sein. Nun 20 fl, die mein seind, vnd die acht Bucher meines gesellen jn arithmetica, so ist der stich gleich, jnmassen du begerest. Nichomachus der war des zufrede, vnd also khamen sie zu Boetio, dem grosen jnterpreten, der fraget, was sie vmb die bucher geben hetten. Appolonius antwortt: Ich hette 8 Bucher, die stach ich daran, so gab mein Gesell Aristeus 20 fl, vnd souil der Bucher Nichomachj gewesen, so theuer sind die Bucher baider seits eins am stich gegeben, vnnd rath Boetius, was die Bucher gestanden haben, die Nichomachi gewesen seind, vnd wie theuer jtzlichs am stich gegeben worden sej beide seits, vnd wieuil Aristeus vor die 20 fl Bucher nemen soll. Aristeus sprach: Lieber Boetius, du hast nun die maisten Thail in Arithmetica getransferirt, bericht vns, wann ich vnd Appolonius sein zween Geometrici vnd der zaln so grundtlich nicht erfaren, damit mir vmb meine 20 fl recht geschehe. Boetius entsetzte sich vor der Sachen also sagende: Ich bin solcher fragstuckh nicht gegrundt, auch so wiest es mein Arithmetica nicht aus. Jr solt euch Nichomachum haben lassen machen, der do gefunden

hat falsi coniecturae propositionem oder Regula lancis genant.[1]) Also be-
sante Aristeus | Nichomachum. Antwortet er: Jch khan vormerken, das 21′
solche frage durch die Errores genant nicht aufgelost mogen werden, vnnd
gab jme anweisung an Algebram. Also sprach Algebras: Mich befrembt
Aristeus vnd Appoloni von euch grosſen geometris, vnd von Boetio vnd
Nichomacho, die do weit jn den zaln bekant sein vnd geschrieben haben,
das jr kunst do wendet, vnnd soll euch solchs durch mein Gebram vnd
Almuchabolam berichten, vnnd doch viel seind, die sich nennen Arith-
meticos, zuvormuten die vnd dergleichen frage durch Regulam lancis zu
machen Nichomachi, durch Ligar, durch Pagamenti vnd durch ander der-
gleichen noch von jnen gesatzt vnd schwerer hergehenden, vnd sprach: jr
saget eigentlich, das Nichomachus hab gepott vnd am stich geben ein
Buch so theuer, so uil der gewesen sein. Setzen wir ac (Fig. 9) sein die
Bucher ein ding, costen al den zens in sich, vnnd souil machen auch 20 fl
Aristenj vnd die acht Bucher Appolonj. Nu ist das parallelogramum bl
20, vnd souil costen dj Bucher Aristei, vnd die zal derselben ist vnwissent
in longitudine bc. Nun die Bucher Appolonj seind 8 jn longitudine ab,
bipartita linea in equalia gethailt, vnd kosten das parallelo|gramum ak, 22
vnd ye eins ist so theuer angeschlagen, alsuil Nichomachi Bucher waren,
der dann waren ac, das was gesatzt ein ding, das waren 8 ding oder
Radices, die dann erfullen mit den 20 fl den gantzen zens, dem sie gleich
gesatzt sein am stich. Nun saget die proposition, das die 8 radices halb
db 16 thun in numeris mit bl 36 machen gleich dc in sich, also ist dc
radix 6, vnd das ander halbe thail der Radix ad darzu ist 10 in numeris.
Also waren der Bucher ac Nichomachi 10, die kosten in potentia 100,
den ʒ; die 8 Bucher Appolonj ab kosten 80 fl, dann jtzlichs cost 10. So
nun die gantzen Linien ac ist 10 Bucher, vnd Appolonius hat 8, so mus
bc 2 sein in numeris. Also, freundlicher Aristene, due nimbst 2 Bucher
vor deine 20 fl, der jtzlichs gleich kost dem stich nach.

Vnd also haben wir bewisen vnser sechste Regel Gebre vnd Almuchabole.

Nun volgen die Propositiones Algebrae Arabis seiner Gebra
vnd Almuchabola, die er aus den gesatzten propositionibus Ylis,
seines Praeceptoris, gezogen hat, vnd laut die erst also: | 22′

1) Hier wird also Nikomachus als Erfinder der *regula falsi* bezeichnet, die später als Erfindung der Araber hingestellt wird, und von ihnen *Itata* genannt sei.

Capitulum octauum de prima propositione Algebrae in sua Gebra et Almuchabola ex digestis propositionibus Ylis enucleata.

Sunt autem ea, quae sunt in Gebra et Almuchabola, earum, quae fiunt potentia in numeris, unitates rei in longitudine.[1])

Hie hebet sich an das Buch vnd die erste proposition Algebre seins ersten Buchs von seiner Gebra vnd Almuchabola, die er dann anfenglichen hat gezogen aus den gemelten vnnd gesatzten propositionibus Ylis, seines meisters des grossen Geometers, welcher text Algebre zumal schwer ist gesatzt anfenklich berurt, der dann von Aliabra, den jndischen maister gebessert ist worden[2]), jnmassen wir den jm teutschen auch einziehen wollen, vnd zu seiner zeit lateinisch nach dem deutschen setzen, das man Algebram teutsch vnd lateinisch haben mag, durch seine propositiones, vnd Aljabram seiner spros von jme gesatzt lateinisch, derhalben wir gruntlich der Gebra vnnd Almuchabola gegrundet mogen werden, vnd laut solche gemelte proposition Algebre zu Deutsch also:

Es sind die ding, die do jn der kunst Gebra vnd Almu-
23 chabola sind, vnitates des dings, welcher ding, die do seind | jn
der lenge der linien vnd jrer macht jn den zalen absolutis, das
ist offenbar gesagt vnd gesatzt.

Von dieser proposition einzufueren sollen wir mercken, das Algebras hat genomen die vnitates des dings in Gebra vor radices, vnd des dings potentz vor ein zensum, vnd solchs ding vnd zensus seind vrsache der, die jn numeris absolutis gesatzt. Sam also ein jtzliche Lini definite quantitatis in der lenge, die do hat kheinen namen der zalen, vnd doch jre potentz in der zalen ist 25, sprechen wir, das *ab* die linien ist ein vnitas vnd ein ding oder figur der zufindenden zalen; so ich sie in sich fuere, macht ein quadrat, das ist gesprochen bei vns ein zensus, der dann auch vnwissent ist, das ist der tribut von dem ding, das seind 25 jn numeris. Also ist die figur in Gebra der linien *ab*, die do jn der lenge 5 was in numeris vnd in potentia 25 auch in numeris. Vnd hierumb setzen wir jn Gebra allweg ein ding, das ist ein figur der zalen in der lenge, vnnd ein zens, das ist ein figur in potentia der zalen, vnd also sprechen wir, das in Gebra die zal sey absoluta, das ist, das dann offenbar ist der zens vnd

1) Im *Codex Gottingensis Philos. 30* ist durch Überschreiben von Zahlen dieser Satz so umgemodelt: „Sunt autem ea, quae sunt in Gebra et Almuchabola unitates rei, earum, quae in longitudine fiunt, potentia in numeris.“ Alle Handschriften stimmen aber in der Fassung überein, die wir aufgenommen haben.

2) Auch hier wieder der Hinweis auf die Verbesserung der Algebra durch die Inder.

radix. Von diesen dreien stucken saget vns die gemelte proposition, das alle stuck in Gebra vnnd Almuchabola seind vnitates des dings, welcher | ding, die do seind in der lenge in der zal vnd jrer potentz in den zalen, 23'
sie vrsach sein, das ist radix vnd ʒ, die do sind vrsach der offenen zal. Also cleret vns die gemelte proposition Algebre der ding, so in der kunst Gebra vnd Almuchabola gebraucht werden, so, in dem so er spricht: unitates rei, das sein vnitates des dings. Als wir vor gesagt haben, das die gemelt linien *ab* was 5 in numeris, vnd doch anfenglich was gesetzt ein ding, also was die erste vnitas *ab* continua eine figur vnd form des dings, das wir wissen wolten in der leng, das was 5, das ding in numeris, vnd 25 in potentia was der zensus *ab* sein form, vnd also haben wir gefunden, das vns not ist, weither zuwissen der ding notturft jn Gebra, das ist des Radix, zensus vnd der zaln der forme, dann radix jn longitudine ist 1, vnd ʒ in potentia. Und nachdem aber die Gebra auf der zalen gegrundt ist, volget von der zaln erstlich das Neundt Capitel.

Capitulum nonum de secunda propositione Algebrae *Arabis in sua Gebra et Almuchabola eiusque expositio.*

Dragma est unitas actualis absoluta, qua numerus collectione in cumulum multitudinis crescit, quae quidem in Gebra et Almuchabola quantitates 𝔐
numerorum vocentur. | 24

Hie saget vns Algebras von dem ersten stuckh seiner Gebra vnd Almuchabola, vnd laut zum teutschen also:

Dragma, das ist ein bekant gewichte der zaln, das dann genenndt, gezellt vnd gewogen wirdt, in der zaln ist ein vnitas, die so gegenwertig vnbeschwert ist von allen vnbekanten dingen, sonder plos vnd lauter wissent gezelt, genendt vnd geponderirt ist in der zal, damit dann die zal anfenglich erwechst in den Hauffen zusamen gelesen jn die manigfaltigkeit. Welche dragma dann in Gebra vnd Almuchabola werden gesprochen die quantitates der zaln.

Von dem dragma zu reden, jnmassen vns die proposition clertt, nennen wir dragmam vor ein jtzliche wissende zal die do kheine beschwerung hett, das ist das sie weder grosser noch cleiner moge werden. Wann 4, 5 oder 7 oder aber ein andere zal khunen an jr substantz pleiben, des namen khein andern form noch augment noch decrement an sich nemen, als dann radix thun mag. Als ich spreche 4 radices, die mogen jres pleibenden namens quaternarii verendern werden. Wann 4 radices von 144 dem quadrat grosser sein an der zaln, wann von 64, vnd dan noch 4 radices allenthalben genent

werden, vnd hierumb werden gesagt, das Radices numeri respectivi seind,
24' | jnmassen hernach volgt. Aber dragma sein an jm selbst plosse zaln gesprochen in Gebra vnd Almuchabola, vnd darumb die Arabi dragmam setzen, das dann ein pondus ist, als man noch in den Apotecken gebraucht, was gewonheit bey jnen zu der zeiten, das sie alle jre tribut, zins vnd geldt durch gewicht in bezalunge namen, vnd was dragma bei jnen das gewonlichste gewichte der zalen vnter dem Volke. Hierumb noch gebraucht werden in den Apoteck, wann zu den zeithen Galeni vnd Hipocratis was khein gewenlicher gewicht bei den Arabis dann dragma, das dann mit seiner besondern figuren hernach volgent wird bezeichent also ϑℓ.[1]) Es sprechen bei vns etzliche, dragma werde genomen vor eine gemeine muntze der moneten, als guldenn, pfennig. Sagen wir auch nach vnser Gebra vnd Almuchabola, das Dragma billicher hie werde genomen vor ein pondus, dann vor eine moneten. Vrsach ist die: wann eine jtzliche monet mag geheisen werden mit mehr vnitatibus dem Radix gleich, wann ein gulden ist ein monet, vnd gulde dragma der gilt mer groschen dann eine silberne vnd dragma pfennig geltt, vnd werden doch beide dragma genent. Das ist dragma nicht der apotecker oder Arabischen, dann sie nennen dragma das pondus nach gemeinen lauf in der zaln der granen, die dann gewenlichen
25 bei allen volckern ein gewicht, ein zal | vnd ein schwer haben, vnd hierumb hat Algebras gesagt dragmam, das dann ein vnveringklich pondus ist, wann 1 cℓ, 1 ℔, 1 lot vnd dergleichen sind bei allen Nationibus nicht in gleichen brauch oder pondus. Alsdann ist dragma, das dann vnverruckt bei allen nationibus gebraucht wurdet, wann es nach den granen genomen vnd abgeponderirt wirdet, damit die Regel sanative der Medici in einer form gehalten mogen werden, inmassen die von Auicenna, Galeno, Hypocrate, die alle Arabes gewest seind, beschrieben sind. Vnd der vrsach, das khein zal mocht besser gesprochen werden jn pleibenden wesen, dann durch dragma, hat sie Algebras angenomen mit den Arabischen Ertzten gleichmessig jn seiner Gebra vnd Almuchabola zu gebrauchen, vnd haben wir also geclert das erst gebrauchendt stuckh jn Gebra, das ist dragma. Nun volget von dem ding, das wir radicem nennen, das zehente Capitel.

Capitulum decimum de tertia propositione Algebrae Arabis in Gebra et Almuchabola eiusque expositio.

𝓇 *Res est substantia numeri impregnata unitatibus longitudine, qua census in potentia crescit. ipse namque et causae in coniecturationibus*

---

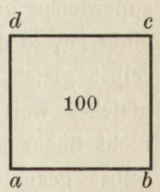
1) Das Zeichen ϑℓ für Dragma wird in den Dresdner Handschriften Φ geschrieben.

quaestionum radices quedam nomine totius numerorum geniturae appellare ceperunt.[1]) | 25′

Hie saget Algebras von dem andern stuck seiner Gebra vnd Almuchabola, das ist von dem ding oder ꝶ, vnd laut zum Deutschen also:

Das ding ist ein substantz, die do geschwengert ist mit den vniteten in der zal zu gebern durch die leng einer linien, welcher linien lenge der ʒ mit macht erwechst, vnd solche gesatzten ding jn unser Gebra vnd Almuchabola seind vrsach der zal zu finden in den fragstucken. vnd sie haben genomen den namen radix, das wir rem nennen, radicem, das ist eine seiten oder leng des quadrats, die do vnwissent genandt ein ding ist, vnd solcher ding gemelter Gebra vnd Almuchabola seind erstlich vrsach aller geberenden zalen durch die leng der Linien.

Von diser proposition Algebre zu nemen einen schrifftlichen sin, so haben wir vormals gesagt, das ein ding mag grosser vnd cleiner genomen werden vnvorrucktes namens. Als wir setzen 4 radices, das sein 4 ding, in der leng von 144, die seind grosser dann 4 radices von 64, vnd seind doch in longitudine, das ist in der seithen des quadraten, ytzliche vor ein ding gerechent, vnd wie wol die vier ding von 144 in der leng geschwengert sein, wann jtzlich | ding hat zu gebern 12 vnitates in numeris, 26
also desgleichen von 64 sein 4 ding ytzlichs 8 vnitates zu gepern. Vnnd hierumb nennet Algebras rem ein geschwengerte substantz der zalen, die do geschwengert ist mit unitates in der lenge in numeris gegen den zensus zurechnen in numeris. Vnd hierumb mogen wir setzen ein ding, das zu gepern hat vnitates jn der zalen, vnd das nennen wir radicem oder rem, von welchem dann zu gebern muglich ist alleine zaln, jnmassen wir dann angezaigt haben. Welchs dann mit besondern zaichen wirdt figurirt jn nachvolgenden Capitel. Wann vrsprunglich der grundt zu fassen, es were ein quadrat vnwissent gesatzt $abcd$ (Fig. 10), das sein, ab wer vnwissent. Nun nach vnser Gebra vnd nach rechten verstandt, so wirdt genandt ab eine Lini schwanger, ein ding, das do tragen mag alle zalen, wann dem ʒ ist noch kheine aufgelegt, vnd gleicherwis das ab, das einige ding in der leng geschickt zu gepern ein



1 ꝶ
Fig. 10.

1) In der Handschrift *C. 8* ist der Wortlaut dieses Paragraphen durch übergeschriebene Zahlen in folgender Weise berichtigt: „Res est substantia numeri impregnata unitatibus, qua census longitudine crescit in potentiam. Ipse namque est causa totius geniturae numerorum in coniecturationibus numerorum. Nomine quidem radicem appellare ceperunt.“ Das stimmt auch mit der deutschen Übersetzung besser überein.

jtzliche zal, also ist auch der tribut des dings zu wagen in pecunia eine jtzliche zal, die jme aufgelegt ist oder wurde. Nun legen wir auf den
26′ zens | 100 dragmas argenti, so were *ab* das ding in longitudine, beschwerdt mit 10 vnitatibus in numeris. Legen wir dann auf der Linien 9 in numeris, so ist der tribut 81 dragmas, also were das ding in longitudine 9 in numeris vnd 81 in potentia. Vnd solchs ist der vorstandt in vnser Gebra, das wir nennen cosam, das ist ein radix oder res gesaget. Nun folgett das eilfte Capitel von dem dritten stuckh, das ist vom zenso.

Capitulum undecimum de quarta propositione Algebrae *eiusque expositio.*

ʒ *Zensus est potentia radicis in se descripta, qua res longitudine in superficiem ab aequalibus ad aequalia pariendum numerum denudanda crevit.*

Hie saget vns Algebras von dem dritten stuckh seiner Gebra vnd Almuchabola, das ist von dem zens, vnd laut zum deutschen also:

Zensus ist ein Macht des radix in sich gefurt, welcher macht das ding in der lenge gesatzt in einem superficiem von gleich zu gleich ist gewachsen, vff das do wurde entplöst die geberende
27 zal, von der wegen dann das ding gesatzt was. |

Diser proposition einen vorstentlichen schriftlichen sin einzufueren, so gibt vns die proposition zu verstehen, was ʒ sey in vnser Gebra vnnd Almuchabola, saget, das zensus sey, dadurch das ding oder den radix in den superficiem quadrieren in sich gefurt etlicher weyse. do ein ding, das do einig ist, so dasselbig gesatzet oder geschatzet wird in dem werdt, oder jm selbst gleich, so ist das sein zins oder tribut, vnd wird bey vns genandt gleicher weis als ein geldt des dings, wann ein jtzlich ding in der weltt nicht hoher khan gewirdigt werden oder verkaufft, dann alsuil als an jm selbst geachtt. Also wird ʒ pej vns genandt als ein Tribut des dings, wann ein mas verschlossen jn einem vaſs zuverkauf wird geacht als ein vnwissent ding. Nun solchs am einem valorem vnd werdt anzuschlagen, das es werdt were, antworten wir nach vnser Gebra vnd Almuchabola, das es nit hoher khan verkaufft werden, dann vmb sich selbst, dann ein jtzlich ding ist sein selbst werdt, vnd also ist derselbig werdt bei vns gesatzt ein ʒ, das ist ein guldt oder valor des dings. Dann ein ding, das do vnbekannt ist, khan keiner zal zugeeigent werden der guldung dann das ding selbst. Nemen wir vor, solchs besser zu bedeuten, damit wir
27′ grundtlich bericht werden, | was der ʒ in vnser Gebra sey: Es kauft einer vom andern ein buch umb ein gelt zu bezalen vff etlich zeitt. So die verscheintt, hat er des gelts nicht, damit er bezalen mag, wirdt jn allem rechten ertheilt, die weil das Buch nicht geergert worden ist, das er sich

mit seinem gut mus wider bezalen lassen. Also solche Bezalunge wirdt bej vns gesprochen ein ziens, das Buch mag 1000 fl haben golten, vier oder funf, noch dennoch ist der ziens oder bezalung recht wider mit dem ding, vnd also hastu vorstentlich, das do erstmal seinen vniteten nach wirdet das ding in longitudine gesatzt, vnd alsdann sein valor, das ist in potentia, angeschlagen so hoch, als es an jm selbst ist. Wir mogen auch den gemelten zensum nennen ein quadrat, der do von gleicher lenge zu gleicher lenge ist erwachsen, jnmassen vns die proposition weyset. Aber so verstentlich zu begreifen, ist es schlechten menschen zu dunckel, vnd hierumb nennet es ALGEBRAS zensum. Vnd also haben wir clerlichen, das do radix gepirdt zensum, vnd die zwey geberen vnitates in numeris. Nun volget von der eigenschafft diser dreier stuckh, dragma, radix, zensus das 12 capitel.

Capitulum duodecimum de quinta propositione ALGEBRAE *eiusque expositio.* | 28

His itaque dispositis, in Gebra ordine, quo sibi succedunt signis non numero, omnis superficierum et solidorum series inseritur, atque cuilibet proportionati continue inmutabiliter communicet.

Nach gemelten dreien stuckhen saget vns ALGEBRAS von diser proposition, vnd laut zum deutschen also:

Die do sind in Gebra also geordnet der ordnung, als sie nacheinander volgendt der zaichen nit mit der zal, in solcher ordnung wird angezaigt die nacheinander volgung thun alle zalen der superficien vnd solidorum, auch welche Ordnung einer yeden proportionalitet vnverruckt gemeine ist.

Inmassen wir die cleren wollen, zum ersten sagt die proposition: so die gemelten drei stuckh werden gesatzt in der ordnung, der sie dann nacheinander volgendtt mit den zeichen, sagen wir, das zum ersten ist gesatzt dragma, die wir bei vns figurlich schreiben ϑf, φ, welcher dann in der ordnung vorbeschrieben volgt der Radix, den wir figurlich signiren 𝔵 [1]), solchen volget nach der 𝔷, von welchem wir gesaget haben, der do entspreufst aus den 𝔵 in sich gefurt. So nun solche drei zaichen ϑf, 𝔵, 𝔷 jener ordnung, wie dann angezaigt, gesatzt, | so entspringen aus jnen alle 28′
andere nachvolgende zaichen, nicht der offen zal not zu sein, wann sie allein proportionaliter dinet jn der zaln. Wann wir wissen, das jn dreyen zaln die extremi quadrati sein vnd im vierten cubi, jm funften 𝔷 de zenso,

---

1) Das Zeichen für *res* also 𝔵 ist in der Göttinger Handschrift geradezu ein geschriebenes deutsches x (𝔵), so dass also die Entstehung von x aus diesem Zeichen sehr wahrscheinlich ist. Das Zeichen für *census* ist ebenso ein deutsches 𝔷; es wird ja auch mit *zens* oder *ziens* identifiziert.

vnd so sie also fortpas gesatzt werden die obgemelten signa, so machen sie bedeutlich die natur aller proportionen. Also wir setzen wollen duplam proportionem continuam in numeris, sehen wir, das der dritt in der ordnung der proportionalitet continua ein quadrat ist, der viert ein cubus, der

Dragma	φ	1
Radix	𝔯	2
Zensus	ʒ	4
Cubus	𝔠	8
Zensus de zenso	ʒʒ	16
Sursolidum	ß	32
Zensi cubus	ʒ𝔠	64
Bissursolidum	biß	128
Zensus zensui de zenso	ʒʒʒ	256
Cubus de cubo	c𝔠	512

funfft ein zensus de zens. Aber die gesatzte proportion dupla dienet allein, soweit sich jr zal ausspannet. Aber
29 die | proposition mit den signis gesatzt, die ist allein proportionaliter dienen, wann in einer ytzlichen proportionalitet continua werden die nomina der superficien zalen vnd solidorum vnuerruckt gehalten. Es ist auch in disen signis nicht anderst zu halten, dann wie es jn andern continuen proportionaliteten gehalten wirdt, also das die speties continua, disiuncta, eversa, permutata etc. gehalten werden. Wann gleicherleiweyse die proportion 𝔯 ist ad ʒ, deſsgleichen ist ʒ ad cubum vnd 𝔠 ad ʒʒ; darumb auch 𝔯 ad 𝔠 sam ʒ ad ʒʒ, vnd dergleichen der andern signa, die wir dann darstellen haben in c𝔠, vber den nicht not ist zugehen, jnmassen hernach die vrsach ereugen soll. Ist auch von Algebra weither nicht gesetzt dann durch diese drei Zeichenn φ, 𝔯, ʒ, die dann continue proportionales sein, vnnd aus jn entspringen alle nachvolgende signa mit jren caractern geschrieben, jnmassen bei vns gewonheit ist vnnd angezaigt. Bin auch guter zuversicht, ein yeder fleissiger schuler, ehe vnd er auch anheb vnsere Gebra, jm sollent vorhin bekant sein die proportiones, proportionalitates vnd medietates numerorum. Wann vns
29' die ding alle einzufueren wurde sehr weitleufig, | vnd darumb allein einzufueren, was vns in Gebra vnd Almuchabola not ist, setzen wir bedeutlich caracteres gemes den superficien vnd corporibus, vnd, wie die erwachsen angezaigter continua proportionalitate, wollen wir satzen vnnd auſsdrucken jn nachuolgendem Capittel.

Capitulum tredecimum de sexta propositione Algebrae eiusque expositio.

𝔠 *Cubum, quem primum radix in censum produxit, ipse quidem ab aequalibus per aequalia ad aequalia soliditetur et in altitudinem crescit, regularissimum omnium corporum, quo solo et tetragono superficie vel planitie eius cuncta metiri habent.*

In hienachgemelten stuck saget ALGEBRAS, was cꝰ [1] sey, vnd laut zum deutschen also:

Cubus, den do erstlich pflantzet radix durch den zensus, der erwechst von gleicher leng durch gleich gleichlich in die hohe, vnd ist das aller richtigte corpus vnter allen andern corpora, mit welchen allein vnd dem quadrat, der sein planum ist, damit er wechset, alle corpora gemessen werden. | 30

Sollen wir wissen vnd aufmerkung haben, das der cubus wirdt gebraucht in Gebra gleichmessig erstlich durch den ꝛ gesatzt ein ding, welchs so das in sich gefurt wirdt, erwachst der zens, so dann der noch einmal in den zens gefurt wirdt, erwechst cubus, darumb mus man hier hinen gebrauchen das ꝛ cubice, jnmassen dann hernachmals volgen wirdtt, dann er hie alleine mit seinem signo, vnd nicht mit wissender zaln, gleich wie der zens, gebraucht wirdt. Sie haben auch cꝰ vnd ʒ einen ꝛ, jnmassen die proposition sagett, das des cꝰ planicies sey der tetragonus, welcher seiner seithen in plano, der cꝰ in altitudine erwechst: Darumb spricht er: *ab aequalibus ad aequalia aequaliter soliditetur et in altitudinem crescit,* vnd dergleichen sein alle, die do wachsenn in gleicher proportion, wann ϑf ad cubum in gleicher proportion als cꝰ gegen ʒcꝰ, also auch ꝛ gegen ʒʒ, als ʒʒ ist gegen biß, und seind alle in den radix cubica, jnmassen dann die gesatzte figur der signa ausweist, die deme einem ytzlichen ϑf ist gemes, das du dann mit einer zal hast zu vorsuchen, die dann continua proportionalis ist, dabei du erkennen mogest die proportion der zalen gegen den signa. Vnd von dem cub wollen wir, zur zeit den Algorismus setzen, bas ercleren, wie er in der zal sol gebraucht werden. | 30*

Capitulum decimum quartum de septima propositione ALGEBRAE *eiusque expositio.*

Census de censo ipsum est quadratum quadrati, cuius radix contra ʒʒ *cubum ducta, vel census in se, a solido in planitiem relabata quadratura.*

Hie volget von dem ʒʒ, der dann erwechst von dem radix in den cꝰ gefurdt oder aus dem ʒ in sich selbst gefurt, vnd laut zu vnserm deutschen also.

Zensdezens, das ist ein quadrat von einem quadrat, des radix wirdt gefurt wider in den cꝰ, oder der zens in sich selber, vnd wirdt genant ein quadratura, die do khumbt von solido gefallen in die planitiem.

---

1) Das Zeichen für den *cubus* ist das Anfangs-*c* mit darangehängter Endsilbe *us* (9), die der Bequemlichkeit halber umgekehrt geschrieben ist (cꝰ).

Wann ein jtzlich corpus, so das in sein radicem gemultiplicirt wird, erwechst in den plan, vnd darumb kumbt ʒʒ von ȼ in seinen ℞ gefurt, oder aber aus dem quadrat in sich selbst gefurt, vnd wirdt genandt zensdezens regularis Gebrae. Wann gleicherweis ʒ radicem hat, also hat ʒʒ radicem radicis quadratam vnd wirdt von den superficien in plano gemelter proportion der signa gefunden. Deſsgleichen cubus de cubo wirdet regulare Gebre von den corporischen zalen, wann er radicem cubicam hatt. Von den zweien wir dann aus dem zenso die superficien vnd aus dem cubo die
31 corpora reguliren, darumb ist | ʒʒ regulatiuum der superficien aus ʒ, vnd cȼ der corpora aus ȼ, vnd wirdt hie auch gebraucht mit den zaichen zu coniecturiren, jnmassen wir dann vormals rem oder radicem gesatzt haben. Denn, so wir setzen in vnser Gebra 1 ʒʒ, das ist, das zu viermalen jn die multiplication ist gegangen vnd von dem radix zum vierten mal prolongirt ist, dann 16 ʒʒ ist zu 2 mal 2 vnd zu 2 mal 2 von 2 dem radix wirdt geweitert werden, darumb heisen wir es quadratum de quadrato, des radix ist von dem ℞ radix. Als von 16 ist 4 radix, von welchen 4 ist radix 2, also ist radix des ʒʒ 16 in der zal 2, welches zensdezens, so wir erstlich ein radix gesetzt haben, das ist ein ℞ wer 2, valor des dings in numeris, vnd das ding wer 2 vnd sein ʒʒ wer in numeris 16. Vnd also ist auch jm cubo vorgesatzt, ℞ cubica ist das ding etc. vnd deſsgleichen auch in den nachuolgenden Signis als ß vnnd biß aigentlich auſsdruckt wirdt. Volget von dem sursolido vnd bissursolido das 15 Capitel.

Capitulum decimum quintum de octava propositione Algebrae *eiusque*
31′ *expositio.* |

ß, biß *Sursolidum simul et bissursolidum ductiones quedam radicum contra soliditatem, quae a corporeitate in planiciem et ab eadem in eandem irradicabilem recedunt. Ipse enim radicem gerunt non censicam, non cubicam, sed quo tunc loco ductione a radici alterari ceperunt.*

Hie saget Algebras von den sechsten vnd achtenn signo, das ist von dem sursolido vnd bissursolido, vnd laut zum deutschen also:

Sursolidum vnd bissursolidum seind fierung etlich der radix wider die soliditet, welche dann von den corporischen zalen in die plan, vnd von der plan wider die corporischen zalen vngeregulirt fallen oder wachsen, wiewol sie radices gepern vnd haben, haben aber nicht quadratam noch cubicam, sundern dann der fuerung jrer stadt, so weit sie dann von den ℞ erstlich sein ausgezogen oder gegangen.

Von disen signis sursolidi vnd bissursolidi laut der proposition werden

hiemassen gesatzt von Algebra, sam die vorgemelten signa gesatzt seind
worden zu coniecturirn in Gebra vnd Almuchabola, vnd wiewol sie kheinen
radicem regulirn nicht haben, als cubicam oder tetragonicam, noch auch
nicht radicem ʒʒ | doch so werden jre radices genant an der statt, so weit 32
die dann von dem ersten radicem gewandert haben, als sursolidam vnd
bissursolidam, von welchen dann zu irer zeit zu extrahirn wir sagen werden
in vnserm andern Buch, wann die zwei signa vnter allen signis exempt
vnd ausgenommen seindt. Hierumb spricht die proposition: *irradicabilem,*
id est, non regularem, wann alle andere signa mogen durch gesatzte extraction der radix volfurt werden, jnmassen durch maiores nostros vnd
vnsere vorfarn gesatzt sein als radix ʒce, quasi ein ce des ʒ. Dann radix
cubica von 64 ist 4, das ist der zens, des ist 2 sein radix. Gleich ist
auch zugesprochen radix cce von 512 ist 8, vnd radix von 8 ist 2, vnd
also seind dise signa gegrundett auf die corpora vnd superficies, die da
radicem haben, jre latera secundum proportionem duplicatam et triplicatam.
Wann die superficienn haben die proportion gegen jren latera proportionem
duplicatam, vnd die corpora triplicatam, aber die zwei signa supersolidum
vnnd bissursolidum, als 32, das dann sursolidum ist, seind exempta, dann
sie haben quintuplicatam vnd septuplicatam laterum vnd gleichwol 2 vor
jren radicem, als 64 ʒce oder 512 cce. Aber allein, das | der nicht ge- 32′
regulirt ist vnnd in vsu oder gewonheit der schlechten Arithmetic nicht ist,
dann wir von disen radicibus sonderlich werden sagen, zuerfordern jre radices,
als dann die proposition saget: *radicem gerunt* etc. Also nennen wir jre
gemelten radices sursolidam vnnd bissursolidam, wann die durch funffte vnd
sibende multiplication von dem radix aufsgewandert haben, jnmassen ʒʒ der
vierten Multiplication extendirt ist von dem ꝛ. Auch soltu mercken, das
die zwei signa werden hierumb genant sursolida, das ist surda solida, dann
sie entspringen aus den corporibus vnd superficiebus zusamen gemultiplicirt
an surdischen vnd irrationalischen section als an der funfften vnd siebenden
stadt der Multiplication. Nemen wir 4, das ist ein quadrat vnnd superficies, vnd nemen 8 den ce. So wir nun sprechen 4 mal 8 ist 32, das
khan nicht haben ꝛ, dann proportio corporum ist sesquealterirt gegen den
superficiem, wann duplicatum vnd triplicatum seind sesquialteri, welcher
dann weder duplicata noch triplicata ist. Vnd desgleichen bissursolidum.
Von 8 das dann ist ce vnd 16, | das dann ist ʒʒ, wirdt 128, das dann 33
auch kheinen regulirten radicem hatt, sondern sursolidam. vnnd von solchen
ductionibus wirdt noch vil demonstrirt, indem man findet, das sie gleichermas 2 pro radici ß vnd biß haben, jnmassen die andern regularen signa
in der figura gesatzt ʒce, ʒʒʒ, cce.

Capitulum decimum sextum de nona propositione Algebrae *eiusque expositio.*

ʒce, ʒʒʒ, cce *Caeterae namque ductiones regularem quandam compositionem superficierum duplicatae vel corporum triplicatae proportionis laterum habent mutuo (scilicet inter se corpus ad corpus, superficies ad superficiem), vero quemadmodum laterum atque superficierum aut corporum atque superficierum ad invicem constabit sesquialtera nota proportio.*

Hie saget Algebras von den andern dreien seiner zal ʒce, ʒʒʒ vnd cce, vnd laut gemelter text zum Deutschen also:

Die andern signa vnd fuerung oder multiplicirung der zalen, die haben eine geregulirte satzung mit zwei lateribus als die superficien duplicata jrer latera, die corpora triplicata jrer laterum, aber so die vnnereinander jtzliche proportionirt wirdt
33' oder werden, als | latus gegen andere laterum, oder linien gegen linien, superficies gegen einem andern superficie oder Corpus gegen einem andern corpore, so ist ein Latus gegen einem andern latus als ein simpel linien gegen der andern. Aber ein superficies gegen dem andern ist als der latera duplicata, das ist in sich gemultiplicirt; der corpora proportio ist als der latera getriplicirt. Also ist zu concludiren, das ein corpus gegen den andern ist mit jren superficien in solido, als ire superficies der corpora gegeneinander in plano. Auch so ist ein superficies gegen den andern duplicata, in welcher dann die proportion der laterum gegeneinander ist in longitudine duplicata. Aber so man proportionirt ein corpus gegen einem superficien, das ist sesqualterirt. Wann duplicatum ist der superficien vnd triplicatum der corpora; so man nun

1 ℞
2 · 3 𝔯
4 · 6 · 9 ʒ
8 · 12 · 18 · 27 ce
16 · 24 · 36 · 54 · 81 ʒʒ
32 · 48 · 72 · 108 · 162 · 243 ß
64 · 96 · 144 · 216 · 324 · 486 · 729 ʒce
128 · 192 · 288 · 432 · 648 · 972 · 1458 · 2187 biß
256 · 384 · 576 · 864 · 1296 · 1944 · 2896 · 6374 · 6561 ʒʒʒ
512 · 768 · 1152 · 1728 · 2592 · 3888 · 5782 · 12748 · 12922 · 19683 cce[1])

1) Unter diesem Dreieck steht in *C. 8* die Unterschrift: „Figura omnium ductionum, superficierum, solidorum et proportionalitatum.“ In den beiden andern Dresdner Handschriften fehlt die Zusammenstellung vollständig.

duplicatum vnnd triplicatum zusamen rechent in der proportion, so seind die sesqualterj, das seind sursolidi vnd biſsursolidi.

Von disen dreien signis den text gleichmessig dem vorstandt einzufuren, nemen wir vor vns ʒcℭ als 64, der dann ist ein zens des cℭ 8, welcher dann 8 hat vor sein latus rationale vnd wirdt geheiſen ʒcℭ, wann sein duction an der sechst stat ist vnd hat gemeinschaft | mit dem cubo 34
vnd zens. Mit dem cubo 8 dann der cℭ 8 wirdt aus dreien duplen, so wirdt diser aus 2 mal 3 duplen. Also von wegen der drei duplat hat er gemeinschafft mit dem Cub von 8 des 𝔯 ist 2, der hie mit 6 duplen geduplicirt wird, das ist 4, also ist 𝔯 von 64 cubica 4, des vrsach ist 64 ein cℭ des ʒ 4. Es wirdt auch genandt cℭʒ, das ist cubizens von wegen der 6 dupla. Wann der ziens wirdt aus zweyen dupla, so ist das zu dreimal zwey. Also mit dreien duplen wer es 8, vnd aber mit zwir 8, das wer 8 mal 8, das wer 64, von wegen der 2, vnd also ist es regularis ductio, wann es hat duplicatam proportionem mit 8 superficien vnd mit 4 dricorpora, welcher radix cubica von 8 vnd zensica von 4 gleich sein in 2. Aber ʒʒʒ, die achtest duction aus von 2 dem radix, entspreuſst aus 8 duplen vnd hierumb, das ʒʒ mit 4 duplen erwechst, vnd diser mit 8, wird duplicatum, also ʒ de ʒʒ, 256, wann 256, das ist ʒʒ die achtest duction von 2 aus; des radix ist 16, das ist ʒʒ; des radix radicis 2, vnd hat also dise duction eine geregulirte proportion mit den superficien. Von dem letzten signo ccℭ das | ist cubus ab cubo, welcher dann die neundte auf- 34′
furung ist von dem radice, wann der aus den neun duplen khumbt. Nun 9 duplum das ist triplum triplati, wenn aus drei duplen wirdt 8, aus den andern auch 8, aus den dritten auch acht, das ist 8 mal 8 zu 8 mal ist 512. Des Radix radices cubica ist 2, vnd das letzte signum in gemelter Gebra ist auch regulare mit den Corporen, vnter welchen alle signa ß vnnd biß khein regulirt convenientz nicht haben, dann sie quintuplicatam lateram haben vnd septuplicatam, welche proportion khein convenientz haben mit den corporibus, wann sie weder duplicata noch triplicata seint vnnd an surdischen stetten gesatzt werden, inmassen darnach jn vnserm dritten buch von jren radicibus gesagt wirdt.[1])

Nun volget das 17 capitel Algebre von den vergleichungen, welche dann entspringen aus jetzt gesatzten Zeichen.

---

1) Die von unserm Verfasser angewendeten Zeichen sind also folgende:

	𝔑,	𝔯,	ʒ,	cℭ,	ʒʒ,	ß,	ʒcℭ,	biß,	ʒʒʒ,	ccℭ,
das ist	x^0,	x^1,	x^2,	x^3,	x^4,	x^5,	x^6,	x^7,	x^8,	x^9.

Capitulum decimum septimum de decima propositione ALGEBRAE *eiusque expositio.*

35 *Omnium ductionum ordinis proportionalis descripti | octo aequationes Gebrae et Almuchabolae invenimus, quarum qualibet signis ad duas aequales restaurando vel minuendo partes reducitur.*

Hie saget ALGEBRAS was vor Equationes entspringen aus vorgesatzten Signis vnd ductionibus, vnd lautet zum teutschen also:

Von allen fuerungen oder multiplicirungen der proportionalischen satzung der signa vorbeschrieben finden wir acht aequationes Gebre vnd Almuchabole, welcher equationes jr jtzliche mit vorgemelten signis zuthailen, das ist zu zweien gleichen thailen bracht wirdt mit gebung oder nemung der affirmirung vnd negirung, jnmassen hernach volgen wirdt zu seiner zeit der equationes demonstrationes einzufueren.

Welchs aber werden die gemelten equationes, wollen wir dir ordine setzen.[1])

𝔑		𝔯
𝔯		ʒ
ʒ		cℓ
cℓ		ʒʒ
ʒʒ	aequatur	ß
35′ ß		ʒcℓ
ʒcℓ		biß
biß		ʒʒʒ
ʒʒʒ		ccℓ

Die erst equation der gemelten signa ist, wann zwei einander vergleicht werden, die nach ordnung der proportionalischen Satzung nacheinander volgen, vnnd khein Intermis gesetzt wirdt, vnnd seind hie gesatzt die signa diser equation. Wann jre proportion ist inmassen | 𝔑 vnd 𝔯 gegen einander gesatzt, das wir vns dann haben zubewaysen jm 12. capitel, wann sie continui proportionales seind, hierumb mus sein 𝔑 gegen 𝔯 als 𝔯 gegen ʒ, vnnd hierumb wirdt die erste equation genant, wann ein signum dem negstvolgenden vergleicht wirdt.

---

1) Die von unserm Verfasser aufgestellten Gleichungen sind in neuerer Bezeichnung folgende:

I) $ax^n = bx^{n+1},\ n = 0\ldots 8$; II) $ax^n = bx^{n+2},\ n = 0\ldots 7$;

III) $ax^n = bx^{n+3},\ n = 0\ldots 6$; IV) $ax^n = bx^{n+4},\ n = 0\ldots 5$;

V) $ax^n = bx^{n+1} + cx^{n+2},\ n = 0\ldots 7$;

VI) $bx^{n+1} = ax^n + cx^{n+2},\ n = 0\ldots 7$;

VII) $cx^{n+2} = ax^n + bx^{n+1},\ n = 0\ldots 7$;

VIII) $\left.\begin{array}{l} ax^n = bx^{n+2} + cx^{n+4} \\ bx^{n+2} = ax^n + cx^{n+4} \\ cx^{n+4} = ax^n + bx^{n+2} \end{array}\right\},\ n = 0\ldots 5;\quad \left.\begin{array}{l} ax^n = bx^{n+3} + cx^{n+6} \\ bx^{n+3} = ax^n + cx^{n+6} \\ cx^{n+6} = ax^n + bx^{n+3} \end{array}\right\},\ n = 0\ldots 3;$

$$\left.\begin{array}{l} ax^n = bx^{n+4} + cx^{n+8} \\ bx^{n+4} = ax^n + cx^{n+8} \\ cx^{n+8} = ax^n + bx^{n+4} \end{array}\right\},\ n = 0, 1.$$

𝔑		ʒ
𝔯		𝔠
ʒ		ʒʒ
𝔠	aequatur	ß
ʒʒ		ʒ𝔠
ß		biß
ʒ𝔠		ʒʒʒ
biß		𝔠𝔠

Die ander vergleichung ist, wann zwei signa durch das mittel vbergangen einander werden vergleicht vnnd auch nach ordnung nacheinander volgenden egesatzten proportionalischen satzungen, welche satzung vorgleicht wirdt dem superficie. Wann die erst gesatzte regel vnd equation ist vorgemelt, hat die natur der linien, wann sie khein intervallum hat, das ist khein jntermission, sondern continue volgendt in forma der linien. Aber dise gesatzte hat ein Intervallum jn forma der Linien eins signums, welchs nach ordnung vbergangen wirdt, jnmaſsen die figur clerlich auſsweist durch die signa.

Die dritt equation ist, wann do zwei signa vbergangen | werden 36
jn ehegemelter satzung oder proportionalischen ordnung. Solchs hat die

𝔑		𝔠
𝔯		ʒʒ
ʒ		ß
𝔠	aequantur	ʒ𝔠
ʒʒ		biß
ß		ʒʒʒ
ʒ𝔠		𝔠𝔠

natur der corpora, welche dann zwei jntervalla haben oder media proportionalia. Solchs wirdt dann durch den 𝔠 volfurt, als vnsere dritte equation verlautern wirdt, dann sie seind alle proportionalia. hierumb mus die proportion sein 𝔑 ad 𝔠 als 𝔯 zu ʒʒ, zwischen welchen dann allemal zwei signa jntermis sein vnd alwegen proportion der corporen ist. Wann, so wir setzen ein comutabilen numerum der proportionen, jnmaſsen wir jm 12 Capitel gesagt haben: So dragma, das ist ein vnitas actualis, wirdt vorgleicht 8 𝔠, wird von not corpus gegen corpus geproportionirt, darumb sein corpora, die proportion triplicata latera haben. hierumb radix cubica von 8 wirdt nach der equation werden valor. So wir nun 𝔯 gegen ʒʒ proportioniren, das ist 2 gegen 16, wirdt aber die gemelte proportion gehalten, in welcher satzung vntermischt ist ʒ vnd 𝔠, das der form der dritten equation, jnmaſsen die figur auſsweist.

Die vierdt aequation wird vorstentlich aus disen signis gezogen,
so dann drei signa werden intermittirth | jn gemelter ordnung der propor- 36′
tionalischen satzung, vnd diese aequation wirdt auch dem superficie vor-

𝔑		ʒʒ
𝔯		ß
ʒ	aequantur	ʒ𝔠
𝔠		biß
ʒʒ		ʒʒʒ
ß		𝔠𝔠

gleicht; wann so 𝔑 wirdt vorgleicht ʒʒ, werden drei signa intermittirt, vnd radix radicis quadrata ist der valor. Vber disen saltum diser dreier signa ist nicht gewonheit, wann so mann transgressum hat vber 4 signa, so kheme radix vf sursolicam, der dann bei vnsern Arithmeticis jn gewonheit vnd brauch nicht ist. vnd wie wol wir von dem jn vnserm dritten buch sagen werden mitt einfurenden demonstrationibus, lassen wir das hie zur zeit pleiben vnd wollen transgressive hiemit eingezogen haben, die do durch ordnung der ductiones vnd ordnung multiplicationis geschehen mögen. vnd so wir nun transgressum hetten mit sechsen signa, so erheischt nott, das 𝔑 mus sich vorgleichen 𝔟ß, welchs radix bissursolica ist valor, vnnd also dergleichen wollen wir hiemit eingebracht haben. Wie die signa gemelter equation stehen sollen weist aus die Figur.

37 Die funfft aequation wirdt vormerckt aus ge|melten signis, so drei signa nach einander volgent, vnd die letzten zwei werden vergleicht den ersten jn gemelter proportionalischer satzung, welche auch den superficiebus, jnmassen wir jn den sechst propositionen Ylis demonstrirt haben, vnnd diese satzung daraus gezogenn, welche dann nach ordnung der aequation also gesetzt werden wirdt.

𝔯	𝔷		𝔑
𝔷	𝔠𝔢		𝔯
𝔠𝔢	𝔷𝔷		𝔷
𝔷𝔷	ß		𝔠𝔢
ß	𝔷𝔠𝔢	aequantur	𝔷𝔷
𝔷𝔠𝔢	𝔟ß		ß
𝔟ß	𝔷𝔷𝔷		𝔷𝔠𝔢
𝔷𝔷𝔷	𝔠𝔠𝔢		𝔟ß

Die sechste Equation gemelter signa wird vormerckt in gedachter proportionalischen satzung, wann do drei signa nacheinander volgent, vnnd die ersten zwei werden vorgleicht dem dritten, welche aequation abermals den superficien wird zugeaignet, wann sie continue nacheinander volgent sein. vnd wie wol wir sprechen, das die ersten zwei dem letzten vorgleicht werden, so geschicht intermissis des mitteln, jn dem, das das erst dem
37′ letzten gleicht mit den mitteln, vnd stet in der figurn also mit jren | signis:

𝔑	𝔷		𝔯
𝔯	𝔠𝔢		𝔷
𝔷	𝔷𝔷		𝔠𝔢
𝔠𝔢	ß		𝔷𝔷
𝔷𝔷	𝔷𝔠𝔢	aequantur	ß
ß	𝔟ß		𝔷𝔠𝔢
𝔷𝔠𝔢	𝔷𝔷𝔷		𝔟ß
𝔟ß	𝔠𝔠𝔢		𝔷𝔷𝔷

Die siebende Equation vorberurter Signa angezaigter proportionalischer satzung oder ordnung ist von dreien signis, welche ohne mittel nacheinander volgenden, vnd das erst vnd letzt werden vergleicht dem mitteln, welche mit den negsten vorgesatzten zweien vorgleicht den superficien vnd nicht den corporischen zaln, jnmassen die nachvolgende figur aufsweist, wie gesatzt:

𝔑	𝔯		𝔷
𝔯	𝔷		𝔠
𝔷	𝔠		𝔷𝔷
𝔠	𝔷𝔷		ß
𝔷𝔷	ß	aequantur	𝔷𝔠
ß	𝔷𝔠		𝔟ß
𝔷𝔠	𝔟ß		𝔷𝔷𝔷
𝔟ß	𝔷𝔷𝔷		𝔠𝔠

Die acht Aequation wird gesatzt von dreien signis nacheinander volgende in gemelter ordnung der proportionalischen satzungen, doch dermassen, das eine ordenliche saltirung geschehe, vnd alle wege zwei einem vergleicht oder equirt werden, vnnd wirdt vf egemelte siben regeln gegrundt; vnd hierumb wird sie nach den negsten dreien jn drei theil gespalten, vnd noch jeder aber in drej nach den ersten gesatzten. Zum ersten, wann do saltus geschicht eines signi, welchs alsdann soll werden vorgleicht auf das letzt den ersten zweien, | aber das erst den letzten zweien, 38
aber das erst und letzt dem mitteln; vnd nach solchen radix tetragonica gibt valorem nach der andern Equation. Zum andern, so aber transgressus geschicht mit zweien signis gleichmäfsig der dritten Aequation vnd alfsdann saltum abermals, das erst vnd letzt dem mitteln, aber das erst vnd ander dem dritten, aber das letzt vnd mittel dem ersten, nach den negst dreien gesatzten aequationibus, vnd alfsdann radix cubica beweist den valorem. Zum dritten, so der saltus geschicht mit dreien signis gleich der vierdten gesatzten Equation vnd also die saltua abermals vorgleicht werden nach negst gesatzten dreien: das erst dem letzten vnd mitteln, aber das letzt dem ersten vnnd mitteln, aber das erst und letzt dem mitteln, vnd alfsdann radix radicis beweist valorem nach der vorgenanden vierden equation vnd wird mit jren signis dreifaltig also gesatzt in neun gespalten species.

Durch die funfft Equation zu machen alsdann durch die andere				Durch die sechste zu machen alsdann durch die andere			
𝔷	𝔷𝔷		𝔑	𝔑	𝔷𝔷		𝔷
𝔠	𝔯		𝔯	𝔯	ß		𝔠
𝔷𝔷	𝔷𝔠	aequantur	𝔷	𝔷	𝔷𝔠	aequantur	𝔷𝔷
ß	𝔟ß		𝔠	𝔠	𝔟ß		ß
𝔟ß	𝔷𝔷𝔷		𝔷𝔷	𝔷𝔷	𝔷𝔷𝔷		𝔷𝔠
𝔷𝔠	𝔠𝔠		ß	ß	𝔠𝔠		𝔟ß

Durch die siebende Equation
darnach durch die andere.

φ	𝔷		𝔷𝔷
𝔯	𝔠		ß
38′ 𝔷	𝔷𝔷	aequantur	𝔷𝔠
𝔠	ß		bß
𝔷𝔷	𝔷𝔠		𝔷𝔷𝔷
ß	bß		𝔠𝔠

Durch die funfften darnach durch die dritten

𝔠	𝔷𝔠		φ
𝔷𝔷	bß	aequantur	𝔯
ß	𝔷𝔷𝔷		𝔷
𝔷𝔠	𝔠𝔠		𝔠

Durch die sechsten darnach durch die dritten

φ	𝔷𝔠		𝔠
𝔯	bß	aequantur	𝔷𝔷
𝔷	𝔷𝔷𝔷		ß
𝔠	𝔠𝔠		bß

Durch die siebende alsdann
durch die dritten

φ	𝔠		𝔷𝔠
𝔯	𝔷𝔷	aequantur	bß
𝔷	ß		𝔷𝔷𝔷
𝔠	𝔷𝔠		𝔠𝔠

Durch die funfft alſsdann durch die vierdt.

𝔷𝔷	𝔷𝔷𝔷	aequantur	φ
ß	𝔠𝔠		𝔯

Durch die sechst alsdann durch die vierdt.

φ	𝔷𝔷𝔷	aequantur	𝔷𝔷
𝔯	𝔠𝔠		ß

Durch die siebend darnach
durch die vierdt.

φ	𝔷𝔷	aequantur	𝔷𝔷𝔷
𝔯	ß		𝔠𝔠

Capitulum decimum octavum de prima aequatione Gebrae et Almuchabolae.

Primam aequationem dinoscimus duorum signorum sibi invicem mutuo sequentium esse aequipolentiam. Minus per maius omnium aequationum esse comittendum, ut multitudo in aequatione subsumpta unitatem signi aequipollentem accipiat, huius tum rei perquirendae primae aequationis solutam radicem expedivimus.

Hie saget Algebras von seiner ersten equation Gebrae et Almuchabole, vnd laut zum teutschen also: | 39

Die ersten Aequation erkennen wir zweier signa ein vorgleichung sein, die do nach einander volgent sein one Intermiss: also solle das minste signum durch das meiste am namen gethailt werden jn allen equationibus, vff das die manigfaltigkeit der zalen jn der Equation vfgenomen die vnitet ergreife des vorgleichendenn zeichens vnd darnach des fragenden dings der ersten equation haben wir aus verricht den vfgelosten radix.

Dise Equation durch einen schrifftlichen Sin den text gleichmessig zu jncorporiren, so laut die erste Equation also: Wann jn einer Coniecturation zwei signa aneinander volgendt werden vorgleicht, so solle allemal das cleinste am namen, das ist, das weniger ductiones hatt, durch das meiste gethailt werden, das ist, das do mehr ductiones hat, vnd was do kompt, beweist die frage. Vnd jn solcher Equation haben wir vorgesaget, das 𝔑 vd ꝛ seind die ersten zwei signa, die einander vorgleicht werden, so soll das 𝔑, das ist absolutus numerus, durch ꝛ gethailt werden, das ist durch radicem, wann ꝛ an des Bedeutung grosser dann Numerus ist, jnmassen wir vorgesatzt haben, das dem ꝛ ein jtzliche zal moge vfgelegt werden, | 39′
vnd mit den 𝔑, welche nicht grosser khonnen werden, dann sie an jn selber gesatzt sind, auch so wol ꝛ an der ersten duction vnd nicht dragma. Vnd solche equation haben wir bewisen in vnserm andern capittel, sagende von der linien bipartita, daher sie dann vrsprunglich geschopfet wirdt, auch dopei mit einem Exempel eingefurt ist worden. Nun finden wir in gemelter proportionalischer satzunge, das dise gegenwertige Equation neun modos equandj heltt, jn den sie wirdt nach gemeinem Lauf der signa equirt.

Der erst modus equandi ist, wann 𝔑 wird vergleicht ꝛ. Als wir setzen 12 ꝛ gleich 84 𝔑, wirdt gefragt was ꝛ werde sein. Saget die Equation, wir wollen thailen 84 𝔑 in 12 ꝛ, facit 7; also ist das Ding 7, wann 7 mal 12 macht 84, vnd ein ꝛ ist 7.[1])

Der ander modus, wann do ꝛ wirdt vorgleicht ʒ. Sam 4 ʒ gleich 20 ꝛ. thailen wir 20 jn 4, khomen 5, das ist der ꝛ werdt, wann 1 ʒ von 5 ist 25, das machen 4 in numeris 100. Nun 20 radices | von gemelten 1 ʒ 40
machen auch 100, wann 5 mal 20 ist auch 100.

Der dritte modus ist, wann ʒ vergleicht wirdt ꞓ. Sam also 40 ʒ gleich 4 ꞓ. thailen wir ʒ in cubum, facit 10, vnd das ist ein radix werdt, wann 4 ꞓ ist signum equipolentis, vnd 40 ʒ die equiren jm. So wir nun thailen

1) Die allgemeine Lösung ist hier, wenn $ax^n = bx^{n+1}$, so ist $x = \frac{a}{b}$.

40 mit 4, so nimbt signum equipolentis 4 vnitates in sich, der dann jn Equatione subsumirt ist worden mit 4, vnd khumbt 10, das ist vnitas von 4 cꝭ, vnd ist valor radicis. Wann 1 cꝭ von 10 ist 1000, vnd der 4 ist 4000. Nun 1 ʒ von 10 ist 100, vnd der 40 macht auch 4000.

Der vierdte modus diser equation ist, wann ʒʒ vergleicht werden cꝭ. Als 2 ʒʒ gleich 10 cꝭ. Wir thailen 10 in 2, facit 5, das ist ein 𝔯 werdt von dem gemelten cubo vnd ʒʒ; wann 1 ʒʒ von 5 macht 625, vnd der zwene machen in numeris 1250. Nun 10 cꝭ von gemelten 5 seind auch 1250, wann 1 cꝭ ist 125, das 10 mal ist 1250.

Der funffte modus diser Equation ist, wann ʒʒ vergleicht wirdt ß. Sam 6 ʒʒ sind gleich 2 ß, tailen wir 6 jn 2, facit 3; das ist valor radicis. Wann
40′ 2 ß von 3 machen | 486, souil seind auch 6 ʒʒ von 3.

Der sechste modus, wann sursolidum vorgleicht wirdt ʒcꝭ, als 8 ß werden vorgleicht 2 ʒcꝭ, thailen wir 8 mit 2, facit 4, das ist ein radix werdt. Wann 8 ß von 4 machen 8192, souil machen auch 2 ʒcꝭ von 4.

Der siebendt modus, wann ʒcꝭ wirdt vorgleicht biß. Sam also 9 ʒcꝭ seind gleich 3 biß, thailen wir 9 in 3, facit 3, das ist der 𝔯 werdt, dann ein biß von 3 macht 2187, der drei facit 6561, vnd 9 ʒcꝭ von dreien machen auch souil, wann ein ʒcꝭ von 3 macht 729, vnd der neun machen auch souil 6561.

Der acht modus diser Equation ist, wann ein biß vorgleicht wirdt ʒʒʒ. Sam also wir setzen wollen: 5 ʒʒʒ werden vorgleicht 10 biß, so thailen wir 10 mit 5, facit 2, das varirt valor 𝔯; wann 5 ʒʒʒ von 2 seind 1280 in numeris, souil machen auch 10 biß, wann ein biß ist 128 vnd das 10 mal macht auch 1280.

Der neundte modus diser ersten Equation ist, wenn ccꝭ vorgleicht wirdt ʒʒʒ, als 3 ccꝭ sind gleich 6 ʒʒʒ, thailen wir 6 mit 3, facit 2, das ist der radix werdt.

41 Difs seind erste fundamenten vnd fustapfen der Equation, | dapei man mag die zukunfftigen ercleren, die doch daraus gezogen vnd applicirt werden.

Capitulum decimum nonum Algebrae *de secunda aequatione Gebrae et Almuchabolae.*

Secundam aequationem notavimus duorum signorum interciso medio equipollentiam: minus per maius, ut diximus, esse committendum, huius producti latus tetragonicum valorem et quantitatem numeri radicis ostendit.

Hie cleret Algebras seine andere Equation, so erstlich demonstrirt ist worden jn der proposition Ylis, vnd laut zum teutschen also:

Wir haben die ander Equation vnser Gebra vormerckt ein vorgliedrung zweier signa gemelter proportionalischer satzung, zwischen welchen ein Mittel vbergangen ist oder abgeschnitten: (als wir gesagt haben) solle das minste seines namens durch das meiste gethailt werden, vnd was aus solchem kumpt oder erwechst, desselbigen tetragonische oder gevierte seiten beweist den werdt des gesatzten 𝔯 oder dings in quantitate der zal, wie gros der sei. | [1]) 41′

Solche Equation zu jncorporiren nach dem text: wann so zwei signa gemelter satzung durch einen vberganghhen mittel vorgleicht werden, solle die minste benennung durch die meiste gethailt werden, vnd radix quadrata derselbigen beweist die 𝔯, jnmassen die figur der signa diser Equation aufsweist, der dann nach gemeinem lauf acht modi gesetzt sein.

Der erst modus diser Equation ist, wann 𝔑 vorgleicht wirdt den 𝔷, zwischen welchen signis 𝔯 vbergangen wirdt. Sam also 7 𝔷 gleich 252 𝔑. thaile 𝔑 in 𝔷, facit 36, dauon radix quadrata ist 6, souil ist der 𝔯 werdt. thailen wir 252 𝔑 mit 7 𝔷, das dann signum equipolentis vnd subsumirt ist mit 7 vnitatibus, so khumen 36 𝔑, das ist 1 𝔷 vnd vnitet des zeichen equipolentis, jnmassen die erste Equation cleret, warum man das minste signum durch das maiste thailt. Nun radix quadrata von 36 ist 6, das ist die 𝔯 werdt, wann 1 𝔷 macht 36, vnd der thail 7 thun 252, ist gleich 252 𝔑.

Der ander modus diser andern Equation ist, wann 𝔯 vorgleicht wirdt 𝔠. Sam also wir setzen wollenn 5 𝔠 gleich 45 𝔯. thailen wir 45 𝔯 in 5 𝔠, facit | 9, vnd radix von 9 ist 3, vnd souil ist werdt der 𝔯; wann 1 𝔠 42
von 3 ist 27, vnd deren funfe faciunt 135 𝔑, souil sollen auch machen 45 𝔯. Nun ist 1 𝔯 3 vnd 45 mal 3 macht auch 135 𝔑: ist recht.

Der dritt modus diser Aequation ist, so 𝔷𝔷 vergleicht wird 𝔷. Sam also wir setzen wollen 36 𝔷 seind gleich 16 𝔷𝔷. thailen wir 36 𝔷 mit 16 𝔷𝔷, facit $2\frac{1}{4}$, vnd radix von $2\frac{1}{4}$ facit $\frac{3}{2}$ oder $1\frac{1}{2}$, vnd das ist werdt der 𝔯. Wann 16 𝔷𝔷 von $\frac{2}{3}$ seind 81, vnd 36 𝔷 seind auch souil, wann 1 𝔷 ist $2\frac{1}{4}$, vnd der 36 machen 81 vnd ist recht.

Der vierdte modus diser Exquation ist, wann 𝔠 vorgleicht wirdt ß. Als wir dann setzen wollen: 108 𝔠 seind gleich 3 ß. Nun sagen wir, was der 𝔯 sei, thailen wir 108 mit 3, khomen 36, vnd radix ist 6, sovil ist werdt der 𝔯, wann 1 ß von 6 macht 7776 in 𝔑. Nun das zu drei malen facit 23328 in Numeris. Nun 1 𝔠 von 6 macht 216, das 108 mal facit auch 23328; ist recht.

---

1) Allgemeine Lösung: $ax^n = bx^{n+2}$; $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Der funfft modus ist, wann ʒʒ wirdt vorgleicht ʒcℓ, zwischen welchen dann vbergangen wirdt ß. Sam also wir setzen wollen 7 ʒcℓ gleich 28 ʒʒ. Die
42′ frag, | was 1 𝓇 werdt sey. thailen wir 28 mit 7, facit 4, radix ist 2, das der 𝓇 werdt ist. Wann 1 ʒʒ von 2 ist 16, vnd der 28 faciunt 448 ϑℓ. Nun 1 ʒcℓ ist 64, vnd der 7 machen auch souil, vnnd ist recht.

Der sechste modus von diser Equation ist, wann ß wirdt vorgleicht biß. Sam also, wir setzen wollen; 75 ß seind gleich 3 biß. thailen wir 75 ß in 3 biß, khumen 25, davon ist 𝓇 5, das ist der werdt der radix, wann 3 biß von 5 sind 234375 ϑℓ, vnd 75 ß seind auch souil, wann 1 ß ist 3125, vnd deren 75 ist auch 234375 in numeris, vnnd ist recht.

Der siebende modus von diser Equation ist, wann ʒcℓ wirdt vorgleicht ʒʒʒ. Sam also, wir setzen 144 ʒcℓ seind gleich 9 ʒʒʒ. was mag werdt sein der 𝓇. thaile 144 mit 9, facit 16, vnd radix, als 4, ist valor. Wann 1 ʒʒʒ von 4 macht 65536 in numeris vnd das zu neun mal facit 589824. Nun 144 ʒcℓ machen auch souil, wann 1 ʒcℓ von 4 macht 4096 vnd das 144 mal macht gemelten Numerum, vnd ist recht.

Der achte modus und letzte diser andern equation ist, wann biß vorgleicht wird ccℓ nach gebrauch gewonlicher signa pey vns. Sam also, wir setzen 98 biß seind gleich 2 ccℓ. Wir thailen wie vor biß in ccℓ, khomen
43 49, dauon ist radix quadrata | 7, das dann valor des radix ist, und souil ist der 𝓇 werdt, wann 1 ccℓ von 7 macht 403933607, und das zweifach macht 807867214, vnd souil machen auch 98 biß von 7. Wann 1 biß macht 8243543, vnd das zu 98 mal macht 807867214, den obgeschrieben numerum zweyer ccℓ, vnd ist recht.

Warumb wir solche modus nach der lenge erzeln, wirdt zu seiner zeitt not sein, das wir die ersten fundamenta gemelter andern equation bedeut haben, vmd hierumb ist mit fleis zu vormerck, die wir erzelt haben.

Capitulum vicesimum Algebrae *de tertia equatione Gebrae et Almuchabolae.*

Tertiam aequationem proposuimus, cum duo signa ordine proportionali descripta transgressis duobus continuis mediis in coniecturis sibi ivicem aequivalent. Minus per maius committeretur, quotientis cubigonicum latus valorem rei numerabit.

Wir haben gesatzt von diser Equation anfengklich jrer signa; hie volget die aufsweisung derselben, vnnd laut zu teutschen also:

43′ Wir haben vorgelegt die dritten Equation, wann do | zwei signa nach der proportionalischen Satzung vnd Ordenung beschrieben zweier mittel vbergangen jn den coniecturen aneinander vorgleicht werden, solle das minst signum durch das meiste getheilt werden, vnnd desselben quotienten cubische seiten oder radix cubica wirdet zelen den werdt des dings.[1])

Von diser Equation den text zu cleren, so ist der schriftlich sin dauon, so da zwei signa einander werden vorgleicht, welche jn gesatzter proportionalischer satzung oder ordnung volgendt durch zwei vbergangen werden, so solle das cleinste seiner bennenung durch das groste gethailt werden, vnd radix cubica des quotienten beweist die Frage der 𝔯 oder das ding, vnnd solche gesatzte equation hat durch gesatzte signa sieben modus equandi pey vns gewonlich.

Der erste, so ce vorgleicht wirdt ϑ. Sam also, wir setzen wollen 189 ϑ gleich 7 ce. tailen wir ϑ in ce, facit 27, vnd radix cubica dauon, als 3, beweist den werdt des 𝔯. Wann ein ce von 3 macht 27, vnd der zu 7 mal facit 189 ϑ vnd ist recht. Die vrsache, das das minste gethailt soll werden, haben wir erstlich in derer ersten Equation thun vermelden, wann multiplicitas ist mit 7 subsumirt des zeichen equipolentis, | so wir 44
dragmas thailen in 7 thail, so khumbt 1 ce. Also hat an sich genomen das signum equipolentis vnitates vnd hierumb, so nun 27 ist 1 ce, so ist auch gebrechent der ce seiner radix cubica, vnd alſs dann derselbig beweist die frage, jnmassen dann die Equation ausweist.

Der ander modus diser Equation, wann do 𝔯 vergleicht wirdt 𝔷𝔷. Sam also, wir wollen setzen 3 𝔷𝔷 seind gleich 375 𝔯. thailen wir 375 𝔯 in 3 𝔷𝔷, khombt 125, vnd radix cubica, als 5, beweist die frag. wann 1 𝔷𝔷 von 5 macht 625, vnd das dreimal macht 1875. Nun 375 𝔯 seind auch souil, vnd ist recht gemacht.

Der dritt modus diser dritten Equation ist, wann sich 𝔷 vorgleicht ß. sam also, wir setzen wollen 40 𝔷 gleich 5 ß, theilen wir 40 in 5, khomen 8, dauon radix cubica ist 2, beweist den werdt des 𝔯. Wann 1 ß von 2 ist 32, so machen 5 sursolida 160, souil machen auch 40 𝔷.

Der vierdt modus diser Equation, wann der ce wird vorgleicht 𝔷ce. Sam also, wir setzen wollen, 7 𝔷ce seind gleich 448 ce, thailen wir 448 ce mit 7 𝔷ce, facit 64, dauon beweist radix cubica, als 4, den werdt des 𝔯, vnd deſsgleichen also mugen wir in andern signa thun. | 44′

Der funffte modus aequandi diser Equation, wann 𝔷𝔷 vnd bß einander werden vorgleicht. Sam also, wir setzen 243 𝔷𝔷 vergleicht 9 bß, thailen wir eine in das ander, khomen 27, dauon radix cubica 3 vnd valor des 𝔯.

Der sechste modus equandi diser Equation, wann do ß wirdt vorgleicht

1) Allgemeine Lösung: $ax^n = bx^{n+3}$; $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

ʒʒʒ. Sam also, wir setzen wollen im forigen fall 9 ʒʒʒ vorgleicht 243 ß, gleichkombt aber in vorberurter, was 3 der 𝔯.

Der siebende modus. Wann do ʒ𝔠 vergleicht wird 𝔠𝔠, mogen wir aber setzen in obgemelten fall.

Dapey zu erkhundigen ist, das alle modi equandi eines falls sind, dann es alle equa multiplicia sein 𝔖𝔣 vnd 𝔠 der zweien signa, vnd werden dise modi allein declarirt, darumb das die ductiones so weit fallen, jnmassen man die jn den questionibus eigentlich vornemen wirdt; vnd die equation ist erstlich von Algebras nicht demonstrirt jn den proportionibus Ylis, dann sie alleine durch die plan Superficien gesatzt sein. Aber solche Equation
45 ist von Aliabra, dem grossen Indischen | Maister demonstrirt aus der Linien solida, jnmassen wir jn den corporen zu seiner Zeit setzen werden, was vor Equationes Aliabras aus den Corporischen zalen gezogen hatt, die do jn die sechse jn kheiner Form noch modum equandi hat, noch gebracht khonnen werdenn; vnd wieuol sie von Algebra gesagt ist vnd nach Ordnung der signa aus der proportionalischen satzung gezogen, vnd doch hat Aliabras jn den corporibus noch ettlich treffenliche Equationes addirt. Und die weil die vorgesatzten vnnd alle nachgesatzten, anſsgenomen dise gegenwertige, durch die plana volfurdt, hat Algebras auch diese in ordnung der signa erzelt, die dann zu seiner zeit wider von Algebea jn den corporibus repetirt wirdt mit andern Equationibus der soliden, die wir hieher nicht haben wollen vnter die plana einziehen, dann khein gemes mit dem nicht haben ist.[1]) Nun volget vnser vierdte Equation.

Capitulum vicesimum primum Algebrae de quarta Equatione Gebrae et Almuchabolae.

Quartam aequationem assignamus demonstratione digesta eam esse duorum
45′ *signorum tribus ablatis mediis extremorum aequiparantiam. Minus per | maius pertinuit, huius quotientis radix radicis tetragonica valorem rei quaesitae explanat.*

Hie zeiget Algebras seine vierdte Equation sagende, vnd laut zum teutschen also:

Die vierdt Equation vornemen wir, sein vorhin angezaigt mit jrer demonstration jn den propositionen Ylis zweier signa durch drei vnterlassene mittel der letzten zweien eine vor-

---

1) Hieraus ist klar, dass der Bearbeiter, ob auch der lateinische Text ist fraglich, die Lösung der Gleichungen dritten Grades gekannt hat oder zu kennen glaubte. Er kommt an späterer Stelle nochmals darauf zurück. Sollte er Cardano gekannt haben?

gleichung sein. Das minste seiner Benennung thailen wir durch das groste, vnd desselbigen quotient radix des radicis quadratae ereuget den werdt des gesuchten dings.[1])

Also kurtzlich den vorstandt dieser Equation einzufuren, so ist der sin dauon, so zwei signa in vorgesatzter proportionalischer Satzung oder ordnung werden einander vorgleicht, zwischen welchen zwei signa nach proportionalischer satzung oder ordnung drei vbergangen werden, so solle das minste durch das meiste gethailt werden, vnd radix quadrata von den radix quadrate bericht die frage. Vnd dieser Equation seind gewonlich bey vns sechs modi Equandi wie volget.

Der erst modus. So dragma vorgleicht wirdt ʒʒ. Sam also, | wir 46
setzen wollen, 5 ʒʒ seind gleich 405 φ, thailen wir φ in ʒʒ, facit 81, dauon radix radicis, als 3, bericht die frage, vnd desgleichen magstu einfuren die andern vorangezaigte signa dieser Equation: sam 5 ß werden vorgleicht 405 ꝝ. Welche modi equandi zugleich wie oben 3 die ꝝ ist, vnnd also furter, dann es seind aequa multiplicia der ersten signa φ vnd ʒʒ diser Equation, als wir dann im 17. capitel angezaigt haben, was oder wieuil modus equandi ein jtzliche equation hat nach gemeinem lauf vnnd gebrauch jrer signa; vnnd vber diese Equation, das ist vber ʒʒ, seindt vnsere maiores nicht khomen. Wann, so wir 4 signa vberschreiten, khomet es auf φ vnd ß, jnmassen das 15. Capitel ausweist der dann weder radix quadrata noch cubica noch quadrati de quadrato ist, sondern ein sursolida radix, der mit seiner funften multiplication vorendert ist von dem ꝝ, wann jtzlicher weise ʒʒ durch φ vierdte multiplication verendert ist, welche multiplication ist zu quadriren, darumb sie an der vierdten stat dem quadrat gemes gesatzt ist. Aber ß stedt an der funfften stadt der multiplication, | 46′
welche funffte stadt khein gemes hat, weder mit den corporibus noch superficien, vnd hierumb haben vnsere maiores nicht wollen daruber procidiren, vnnd wie wol wir zu seiner zeit von dem ꝝ, ß vnd weiter biſs auf ccꝯ sagen werden, wolten wir solches hie vormissen vnd zu seiner zeit durch Algebram einfuren, der dann dise gegenwertige Equation pis auf ccꝯ ostendirt hat. Vnnd als wir angezaigt haben, so vier signa vbergangen werden, so khumbt es auf radix ß[a]; so 5 vberschritten werden, vf ʒcꝯ, das dann abermals radicabilis ist; so 6 vbergangen werden, so khumbt es auf radix biß[a], die stadt dann aber irradicabilis ist, vnd desgleichen fortbas. Der grosse Arismetrist Algebras cleret, als nachuolgent ereugen wirdt jn vnserm andern Buch, treffenlich dauon setzt vnd gebraucht in den demon-

1) Allgemeine Lösung: $ax^n = bx^{n+4}$; $x = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$.

strationibus der soliden. Vnnd solche viere jtzundt gesatzte Equationes seind genanndt simplices modos, wann allewegen zwei signa aneinander vorgleicht werden, vnnd nach disen vier Equationes wirdt dj coss ge-
47 funden | der achten Equation, wann sie werden soluirt durch die 3 negst volgenden modos compositos biſs auf dj vier equationes, die alſsdann ausdrucken den valorem des ꝝ. Wann sie also die acht Equation durchwandert alle equationes, darumb sie weit in die multiplication von dem ꝝ auſsgewandert ist worden. Aber diese nachuolgenden modos werden genant compositi, darumb das do allewegen zwei signa werden einem vorgleicht, jnmassen dann nachuolgende begriffen ist. Aber unsers Algebrae seind allein die gegenwertige Equation vnd die acht radicabiles, wann diſs wirdt soluirt durch die andere gesatzte equation der ordnung, vnnd hierumb wirdt sie genandt 𝔷𝔷, das ist quadratum quadrati, wann radix radicis erweist dj ꝝ, das dann die ander der ordnung allein durch den quadratischen radicem hat soluirt, welche radix abermals quadrata ist, die ꝝ gegenwertiger equation. Wie vnnd aber die achte sol reducirt werden, bezaiget sie genugsam mit jrem Capitel. Nun volgt von der funften Equation Algebrae.

47′ *Capitulum vicesimum secundum de quinta equatione Gebrae et Almuchabolae.* |

Quintae aequationis essentiam experire promisimus. Ipsa est enim, cum sibi invicem tria signa successiva, duoque postrema primo aequationi parantur: Primum quidem et medium per postremum maius comitantur, medietas medii tetragonisetur, et huius productum cum primo in unam congeriem coacerveturi latus inde tetragonicum minus medietate medii valorem radicis obtinebit.[1]

Hie ereugnet Algebras sein funffte Equation Gebre vnd Almuchabole, den ersten modum compositum, vnd laut zum deutschen also.

Wir haben verheisen die aigenschafft der funfften Equation zuergrunden vnd aufszulegen, die dann ist, so drei signa one mittel nach einander volgendt nach ordnung proportionalischer Satzung vnter einander werden vorgleicht, also die letzten zwej dem ersten: so soll alſsdann das erst vnd mittel durch das letzte gethailt werden, das ist durch das meiste am namen, vnnd das halbthail deſs mitteln, so das tetragonisirt, das ist quadrirt wirdt, vnd das selbig erwachsende mit dem ersten in ein samlung zusamengethun wirdt, alſsdann die quadratische seithen

1) Allgemeine Lösung:

$$ax^n = bx^{n+1} + cx^{n+2};\quad \frac{a}{c}x^n = \frac{b}{c}x^{n+1} + x^{n+2};\quad x = \sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{a}{c}} - \frac{b}{2c}\,.$$

solchs quadrirten minus | das halbthail des mitteln zeichens 48
wirdt halten den werdt des ℞.

Also zu einfuerung der begreifung diser equation sprechen wir, so 3 signa one mittel nacheinander der gesatzten proportionalischen satzung oder ordnung vorgleicht, also die letzten zwei signa dem ersten, sollen wir das erst vnd mittel signum durch das letzte vnd meist thailen, vnd sollen das mittel mediren, vnd dasselbig in sich multipliciren, was khumbt, zum ersten zaichen thun, vnd radix quadrata desselbigen minus der halbe thaile des mitteln zeichen, vnd ist, das wir quadrirt haben, bewist die coſs. Vnd die Equation hat nach gemeinem lauf acht modos equandi, vnter welchen dann der erst ist, so ℞ vnd ʒ werden vorgleicht ϑ. Sam also, wir setzen wollen 1 ʒ vnd 8 ℞ seind gleich 65 ϑ. theile ℞ vnd ϑ mit ʒ: ist gethailt, mediren wir 8 ℞, facit 4, die multipliciren wir in sich, facit 16; die addiren wir zu 65 ϑ, facit 81, vnd radix dauon ist 9; dauon zichen wir den halben thail des ℞, als 4, pleiben 5, facit ist die ℞ werdt. Das probir wir also. 1 ʒ macht 25, vnd 8 ℞ machen 40, die zusamen, khomen
65 vnd ist recht. Deſsgleichen | helt sich solchs mit allen equa multi- 48′
plicia, wann alle andere modi equandi diser equation seind equa multiplicia diser signa ʒ ℞ vnd ϑ. Das wollen wir beweisen in vorangezaigter coſs.

Wir setzen den andern modum equandi vnd sprechen: 6 ʒ vnd 2 cℓ seind gleich 80 ℞. Solchs machen wir nach satzung der Equation: wir thailen ʒ vnd ℞ mit cℓ, facit 40 ℞ 3 ʒ, mediren 3 ʒ, facit $\frac{3}{2}$; für solchs in sich, facit $\frac{9}{4}$; das addirn wir zu 40 ℞, facit $\frac{169}{4}$; dauon ist radix $\frac{13}{2}$; dauon der halben thail des zens, pleibt 5, souil ist die ℞ werdt. Nun machen 80 ℞ 400 in numeris, souil machen auch 6 ʒ vnnd 2 cℓ, dann 1 cℓ von 5 macht 125, der zwene sind 250; so machen 6 ʒ 150 ϑ; solchs zusamen macht auch 400, vnnd ist recht.

Wie wir aber sollen erkhennen, das alle andern modi seind equa multiplicia, so merck wir die vorigen ersten angezaigten ℞ vnd jre signa, das ist den ersten modum equandi, der do waz 1 ʒ vnd 8 ℞ gleich 65 ϑ, vnd der ander modus waz 6 ʒ 2 cℓ gleich 80 ℞. Setzen wir den ersten deme andern gleich, also 80 ϑ gleich 2 ʒ vnd 6 ℞, also sprechen wir, das der ander gegen den ersten ist equa subsumirt mit 5, wann 2 ʒ seind 50 in ϑ
und 6 ℞ 30, machen zusamen 80, gleichett 80 ϑ. | Also ist es furt in 49
andern modis equandis diser vnd nachuolgenden equationen, das alle modi werden reducirt diser aequation in dise signa ℞ ʒ vnd ϑ, die dann das erst fundament seind diser equation in dise signa vnd aller jrer modos equandi. Nun volget von der sechsten Equation.

Capitulum vicesimum tertium de sexta aequatione Gebrae et Almuchabolae.

Sextam aequationem annectere. Eam esse trium signorum continuorum altrinsecorum duorum assimiliationem medio. Sed, ut diximus, per maius comitentur, medietas medii si creverit tetragonaliter et a producto primi sustulerimus, radix residui si colligetur medietate medii vel minuetur, querendam radicem rei propositae enucleabit.

Hie erzelt Algebras seine sechste Equation seiner Gebre vnnd Almuchabole, die dann jmassen die andern erstlich in den propositionen Ylis demonstrirt ist worden, vnnd laut zum teutschen also.

Die sechste Equation den andern anzuhangen, die dann ist dreyer zeichen aneinander volgendt eine vorgleichung dem mitteln gemelter proportionalischer satzung der eufsersten. Aber
49' als wir gesagt haben, durch das | gröste sollen die andern zwej gethailt werden, vnd das halbe thail des mitteln, so das erwechst tetragonisch, vnd von solchem erwachsen das erste abgetragen oder hinweg genomen wirdt, radix des bleibenden residui, so das zusamen geclaubt wirdt oder gelossen den halben thail des mitteln zeichens oder dauon gemindert, so wirdt solchs ereugenen den fragenden ꝝ des furgelegten dings.[1])

Solche sechste Regel in bessern vorstandt zu geben vnnd zu scherpfen, sprechen wir, das die sechste Equation ist eine vorgleichung dreyer signa one mittel nacheinander volgendt, vnter welchen das erst vnd letzte werden vorgleicht dem mitteln. Saget der text, wir sollen die wenigsten zwei durch das letzte, das ist das grose, thailen, das mittel mediren; was khombt in sich fueren, vom product das erste zihen, vnd radix des vbrigen soll zu dem vorigen halben thail oder quadrirten gethan oder abgezogen werden, vnd alfsdann solchs wirdt beweisen die ꝝ.

Solcher equation finden wir gewenlich acht modos equandi, als dann das 17. capitel cleret. Vnnd solcher erster modus equandi ist, so ꝝ vorgleicht wirdt φ vnd ʒ. φ vnd ʒ seind das erste vnd letzte, welch dann vorgleicht werden dem mitteln, als ꝝ, nach der vorgemelten proportionali-
50 schen satzung. Sam also, wir setzen wollen, | 18 ꝝ seind gleich 28 φ vnd 2 ʒ. thailen wir φ vnd ꝝ durch ʒ, facit 9 ꝝ vnd 14 φ. Nun saget die Equation, das mittel sollen wir mediren; wir mediren ꝝ, facit $\frac{9}{2}$, füren solchs in sich, facit $\frac{81}{4}$; dauon zihen wir das erste, als 14, pleiben $\frac{25}{4}$; dauon nemen wir radicem, khomen $\frac{5}{2}$. Nun sollen wir den halbthail der ꝝ

1) Allgemeine Lösung:

$$bx^{n+1} = ax^n + cx^{n+2}; \quad \frac{b}{c}x^{n+1} = \frac{a}{c}x^n + x^{n+2}; \quad x = \frac{b}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{a}{c}}.$$

subtrahirn[1]), mugen nicht, deshalb addirn wir $\frac{9}{2}$, facit zusamen $\frac{14}{2}$, macht 7: souil ist 𝔯 werdt. Das wollen wir probirn: Wir haben gesatzt, 18 𝔯 seind gleich 28 𝔡 vnd 2 ʒ. So nun valor der 𝔯 ist 7, so machen 2 ʒ 98 in numeris, dazu 23 𝔡, facit zusamen 126; souil machen auch 𝔯, als 18, dann 18 mal 7 ist auch 126, vnnd also finden wir ex numeris absolutis, das 18 𝔯 gleich souil machen, sam 28 𝔡 vnd 2 ʒ, vnnd ist recht.

Desgleichen mugen wir fueren die andern modos equandi diser Equation, das wir dann nemen equa multiplicia, jnmassen wir in vorgesetzter Equation exemplificirt haben. Wir setzen 18 ʒ seind gleich 28 𝔯 vnd 2 𝔠. thailen wir solchs obgemelter massen, khumbt auch valor obgemelter form 7. Wann 18 ʒ von 7 seind 882 in numeris, souil sollen auch machen 28 𝔯 vnd 2 𝔠. Wann 2 𝔠 von 7 seind 686, vnnd 28 𝔯 von 7 machen 196 in numeris. Nun solchs zusam facit auch 882, vnd ist recht. Also | sprechen 50′ wir, das 28 𝔯 vnd 2 𝔠 vf einen thail, 18 ʒ vfm andern thail mit 7 subsumirt gleich seind gegen dem ersten modo equandi, vnnd desgleichen ist es auch in den andern modis equandis diser equation, die dann alle reducibiles seind in die ersten fundamenta 𝔡 vnd ʒ und 𝔯 diser equation pis ß in cc𝔠, vnd so ferner man sie dann fueren will, vnnd von disem modo equandi wirdt verificirt in dem letzten Buch der demonstrationum. Nun volget von der sibenden Equation Algebrae das 24 Capitel.

Capitulum vicesimum quartum de septima aequatione Gebrae et Almuchabolae.

Septimam aequationem inserere precatum est. Cum enim tria signa sibi ordine continuo mutantia, primum et medium postremo in coniecturis coaequae comparationis fuerint, per postremum maius comitantur. Quod si medium medietate decreuerit, quantitasque huius tetragonizata in unum acervum quantitati cum primo recollecta fuerit, radice huius tetragonica adiuncta sibi quantitate medietatis medii valorem rei enucleabit.

Hie cleret Algebras die siebendt Equation seiner Gebra vnd Almuchabola. sagendt, textlich lautendt zum teutschen also. | 51

Dise siebende Equation zu inseriren ist vorberurt worden, so do drey signa nach anhengender ordnung one mittel der proportionalischen satzung nacheinander volgendt, das erst vnd das mittel dem letzten in den coniecturen oder schatzung der quaestionen einer gleichen proportionirung oder vorgleichung finden werden; durch das letzte, das ist durch das grose seiner

1) Hier hat der Bearbeiter seine eigenen Worte falsch verstanden. Er thut so, als ob die Lösung hiesse $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{a}{c}} \pm \frac{b}{2c}$.

benennung, sollen die andern gethailt werden. Sodann das mittel seines halben thails erwechst oder verkleinert wirdt, vnd solche quantitet tetragonirt oder quadrirt, so die wirdt in einen haufen einer quantitet mit dem ersten zeichen zusamen gelesenn, radix derselben mit hinzugethaner quantitet des halben vorigen thails des mitteln zeichens wirdet entplosen den werdt des dings.[1])

Solchen textlichen sin clerlichen in gebrauch der vernunfft einzufuren, sprechen wir: die siebende Equation ist, so drey signa einander werden vorgleicht, nemlich das erst vnd mittel dem letzten jn gemelter ordnung der proportionalischen satzung, so sollen wir das erste vnd mittel durch dj grose benenung thailen, das ist durch das letzte, das mitle zeichen sollen wir darnach mediren, den halben thail in sich multipliciren, was khumbt zu dem ersten zeichen addirn. Alſsdann radix desselbigen erwachsen soll
51′ gethan werden zu dem vorgemedirten | des mitteln zeichens, vnd was do khumbt, beweist den ꝛ. Solcher equation finden wir auch 8 modos equandi, als wir dann angezaigt haben vorhin jn vnserm 17. capitel, vnd solcher erster modus equandi ist, so φ vnd ꝛ werden vorgleicht ʒ. Sam also, wir setzen wollen, 32 φ vnd 20 ꝛ seind gleich 3 ʒ. Wir thailen φ vnd ꝛ in ʒ, facit $\frac{32}{3}$ φ vnd $\frac{20}{3}$ ꝛ. Wir mediren ꝛ, facit $\frac{20}{6}$, das multiplicirn wir in sich, facit $\frac{400}{36}$; das thun wir zu dem ersten zeichen, das ist zu $\frac{32}{3}$, khomen $\frac{484}{36}$; von dem ist radix $\frac{28}{6}$; zu dem thun wir das halbe thail des mitteln zeichens, das was $\frac{20}{6}$, facit $\frac{48}{6}$ zusamen, macht 8, souil ist die ꝛ werdt. Das wollen wir probirn. Also wir haben gesatzt, das 3 ʒ seind gleich 32 φ vnd 20 ꝛ. So nun 8 ein ꝛ ist, so weren 20 ꝛ 160 in numeris; dazu thun wir 32 φ, wirdt 192: souil sollen auch 3 ʒ machen von 8. Nun ist 1 ʒ 64, das dreimal macht auch souil, vnd ist probirt, das die ꝛ 8 in numeris ist. Desgleichen mogen wir solchs beweisen, wie in vorgethaner Equation ist bewisen, durch die andern modos equandi, das wir nemen equa multiplica subsumpta; als wir setzen wollen, vff das wir anfengklich den grundt der ꝛ lernen vnnd scherffen mogen, wir setzen das
52 vnd sprechen: 32 ꝛ vnd 20 ʒ | seind gleich 3 ȼ. Wir thailen abermals wie oben durch ȼ, die grost benennung, nach dem text, vnd khombt nach der equation 8 der valor der ꝛ, wie vormals. Wann 3 ȼ vnd 8 ꝛ seind 1536 in numeris, das sollen auch sein 32 ꝛ vnnd 20 ʒ. Nun 32 ꝛ von 8 seind 256 in numeris, vnd 20 ʒ von 8 seind 1280 in numeris; das thun wir zusamen, macht auch souil, vnnd ist recht. Also sprechen wir, das

1) Allgemeine Lösung:

$$cx^{n+2} = ax^n + bx^{n+1}; \quad x^{n+2} = \frac{a}{c}x^n + \frac{b}{c}x^{n+1}; \quad x = \frac{b}{2c} + \sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{a}{c}}.$$

20 ʒ vnd 32 𝔯 gleich seind 3 cℓ mit 8 subsumirt gegen den ersten modo equandi, der do was 32 ϑℓ vnd 20 𝔯 gleich 3 ʒ, vnd also seind fort oder dritt gegen den andern auch mit 8 subsumirt pifs auf ccℓ, vnnd weither findestu equa multiplicia des ersten modi equandi, der do was 𝔯 vnd ϑℓ zu vorgleichen ʒ, welche signa gedachts modi seind fundamenta diser equation, darin alle andern reducirt werden.

Mun volget von der achten vnd letzten Equation ALGEBRAE, welche dann durch die drei modos compositos soluirt wirdt erstlich, vnd alfsdann entlich durch erstliche drei modos simplices.

Capitulum vicesimum quintum de octaua aequatione Gebrae et Almuchabolae.

Octavam aequationem perscribendam illis digestis expedimus. Est namque trium signorum, quemadmodum priorum, non tamen successivorum aequipollentia, secundum | quod prius aut posterius alterum altero sit salto ordine 52′ *signorum, eoque trium fit his proximis, quod vero saltivorum primis simplicis aequationibus pollicemur exordia.*[1])

Hie vervolget ALGEBRAS die achte duction, das ist die achte Equation, vnnd laut nach jrem deutschen also:

Die achten Equation zu beschreiben, die rechnen vnd verordenen wir durch die vorgesetzte Equation, welche dann ist eine vorgleichung dreyer signa gleichmesig den nechsten dreyen gesatzten modis compositis, aber nicht angehender zeichen vnd one mittel nacheinander volgender signa der proportionalischen satzung, sonder nach dem als eins ehe dann das ander durch vberhupfung in ordnung ist gesatzt, in dem das die vergleichung ist dreyer signa, so gebrauchen wir diser nechst satzung dreyer modorum compositorum, aber in dem, das jntermiss vnd vberhupfung geschieht, so gebrauchen wir den Eingang der ersten dreyer modorum simplicium, welche dann beweisen den werdt der 𝔯.

Den vorstandt diser Equation einzufueren sagen wir kurtzlich, das die achte Equation ist eine vorgleichung dreyer signa, jnmassen die modi compositi seind, aber nicht on vnterlass nacheinander volgendt, sonder vberhupfung nacheinander vorgleicht werden nach form vnd weise der modorum compositorum, so drey signa werden vorgleicht | allwegen zwei dem dritten 53

---

1) Die Lösung besteht dem Wesen nach darin, dass man die Grössen x^2, x^3, x^4 als die zunächst zu suchenden Unbekannten betrachtet und darauf die resultierenden Gleichungen $\left.\begin{matrix} x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{matrix}\right\} = p$ nach früheren Regeln auflöst.

nach der modorum compositorum einem, so solle dann solche Equation nach form der modorum compositorum einer gemacht werden, nach dem das erst dem andern zweien, aber das erst vnd letzt dem mitteln, aber die ersten zweien dem letzten vorgleicht werden. Nachdem sie dann durch vberhupfung gesatzt seindt: wirdt die vbergehung oder vberhupfung dann zwischen den signis eines zeichens, soll das durch den andern modum simplicem volfurt werden. So sie dann geschicht zweier signa, durch den dritten simplicem. Geschicht dann vberhupfung dreyer signorum, solle das durch den vierten simplicem modum volfurt werden. Und also furter, welche dann den werdt der 𝔯 beweisen.

Sam wir also wollen setzen exemplariter. wir finden auch, das dise Equation 36 modi equandi hellt, wie im 17 Capitel vormeldet. nach form der dreyer modorum compositorum, welche den valorem der equation nicht weiter strecken, dann in die proportion, das ist auf den valoren 𝔯, aber den quadrat, so ein signum vbergangen wirdt, aber des ℭ, so zwei vbergangen werden, aber des 𝔷𝔷, so drey vbergangen werden etc, welchen valorem
53' radicum dj ersten drei modi simplici soluiren in den | werdt der 𝔯. Sam also wir setzen wollen: 45 𝔑 vnd 4 𝔷 seind gleich 1 𝔷𝔷, sollen wir aigentlich mercken, das diser modus equandi diser equation geschicht durch form des dritten modus compositi, jndem das dj ersten zwei vorgleicht werden dem letzten, wann 𝔑 vnd 𝔷 nach ordnung proportionalischer Satzung vorgehen dem 𝔷𝔷, vnnd ein ordentliche progression geschicht eines signi zwischen zweien. Sagt vns gemelter modus, das wir durch den 𝔷𝔷 sollen thailen. Nun thailen wir numerum vnd ziens, das ist 45 𝔑 vnd 4 𝔷, mit 1 𝔷𝔷, ist gethailt; wir medirn 𝔷, wirdt 2, furen das in sich, facit 4, das addirn wir zu 𝔑, als 45, wirdt 49; dauon radix, als 7, sam der halbe thail des mitteln wirdt 9, die progression des andern modi simplici, wann radix von 49 ist 7, vnd das halbe thail was 2, vnd 7 zusamen machen 9; die relinquiren wir zum andern modo simplici. Darumb das hie durch angezaigten modum equandi allein ein signum vbergangen wirdt, sprechen wir nach dem andern modi simplici, das radix tetragonica von 9 beweist die 𝔯, das ist 3, der valor gemelts modi equandi diser equation. Das mugen wir probirn. Dann ein 𝔷𝔷 von 3 ist 81. Nun seindt 4 𝔷 von 3 in numeris 36,
54 vnd 45 𝔑 dazu seind auch 81: ist | recht. vnd desgleichen magstu die andern modos equandi diser Equation genuglich figurirt jm 17 Capitel nach form der ander modorum compositorum, vnd alſsdann valorem reliquiren zu den simplicibus modis, nachdem die progreſsion geschicht, vnd solchen valorem dann den coſs entlich volfuren durch dieselben. Vnd also hastu grundtlich vnterrichtung der achten Equation vnd jrer modorum equandi, die wir dann jm 17 capittel nach ordnung erzelt haben.

Nun volget das ander Buch von dem Algorithmo, gehorig zu der Gebra vnd Almuchabola, vnd wie man den zu der Gebra gebrauchen soll, vnnd zum ersten de additis et diminutis signorum.

Explicit liber primus Algebrae.

| *Secundus liber* Initii Algebrae *Arabis, viri clarissimi, ad summum mathematicum eo tempore* Ylem *geometren foeliciter incipit.*[1]) 54′

Ad ea quae in Gebra et Almuchabola disseruimus de signis utilitatis atque commodi erunt quantitates additae ac diminutae et ea, quae circa easdem versari habent, quae quidem penes affirmationem et priuationem constituuntur.

Hie hebet Algebras an sein ander Buch der Gebra vnnd Almuchabola, vnnd ist, do er saget von den gebrauch der Algorithmorum gehorig zu gemelter Gebra, vnnd laut zum teutschen also:

Zu dem wir vorgemeldet haben jn Gebra vnd Almuchabola von den signis, werden nutz vnnd figurlich werden die quantitet genandt additae vnd diminutae vnd die dobej jnen verhandelt werden, welche quantitet addite vnd diminute werden mit der affirmirung vnd negirung bezeichent und beschrieben.

Von disen quantiteten vnd gemelten capiteln den schriftlichen sin vnd vorstandt des texts zu lautern, saget der text aigentlich: zu dem wir vorgesatzt haben in der Gebra von den signis, sollen wir mercken, das wir nemen solchen gebrauch der signorum | in Gebra Algorismum de additis et 55
diminutis signorum, der dann nicht allein in gebrauch der signa gehelt vnd gebraucht wirdt, sonder furter auch die binomia betreffent, wann solche signa noch anhangen der matri pregnanti, das ist, das sie noch nicht absolute in numeris seind. Wiewol das sie gleichmessig mit der affirmirung vnd negirung alſs die binomia vnd residua beschrieben werden, so seind sie doch vnterschiedlich, jndem, das die binomia absoluti numeri surdi sein, deſsgleichen jre residua, aber dise quantitet seind noch nicht so weit bracht, sonder in schwengernder mutter, wann sie noch kheiner Equation bracht seindt, vnd hierumb sagt der text, das sie nutze werden solche quantitet addite vnd diminute, das ist, zu dem wir gesatzt haben, das seind zu den

1) Hier haben die Handschriften C. 405 und C. 349 als Überschrift: *Initium secundi libri* Algebrae . . . *incipit,* was nur aus Missverständnis enstanden sein kann. Dieses zweite Buch behandelt die Rechnung mit positiven und negativen Zahlen für ganze und gebrochene Ausdrücke. Der Bearbeiter spricht bald von affirmirten und negativen Zahlen, bald von numeris additis et diminutis. Er bedient sich der Zeichen + und —, die Dresdner Handschriften haben letzteres in der Form ÷

equationibus signorum, mit denen, die do pej jnen gehandelt werden. Das seind dann bedeutliche speties, wie man die jn addirung, subtrahirung, multiplicirung etc. gebrauchen soll, vnd werden solche quantitet eigentlich verzeichent mit der affirmirung vnd negirung, das ist mit dem signo minus vnd plus. Dann so einem zeichen wird zugesatzt das zeichen +, bedeut, das sie ist quantitas addita; wird aber dem signo zugeschrieben das zeichen
55′ —, bedeut, | das es ist quantitas diminuta, jnmassen das eigentlich jn den Tabeln ALGEBRAE gesatzt vnd angezeigt ist, vnd solcher Algorismus gehet aus vniuersaliter durch alle signa, das ist, das man einen proceſs hellt in additis vnd diminutis, es sein ꝛ, 𝔷 oder 𝔷𝔷, das ist auch in den binomiis vnd residuis, wann radix quadrata nicht anders addirt wirdt den ꝛ der affirmirung oder negirung, vnd hierumb so ist diser algorismus nicht allein gegrundet auf die affirmirung vnd negirung, das ist auf die quantitet addita vnd diminuta signorum jn vniuersali der signorum in numeris respectiuis oder pregnantibus, sonder auch absolutis surdis. Darumb saget vnd setzet ALGEBRAS zwen Algorismi jn gebrauch seiner Gebra vnd Almuchabola, das ist Algorismum de additis et diminutis, der dann genandt numerorum respectiuorum oder pregnantium, den andern de binomiis et recisis genandt surdorum absolutorum.

Zum ersten volgt hernach das ander Capitel der ersten speties des algorismi de additis et diminutis, das ist Additio.

56 *Capitulum secundum de prima spetie quantitatum additarum atque diminutarum, quae acceruatio appellatur, eiusque expositio.* |

Signorum accervationem proponimus. Quae eiusdem nominis sunt, eandem invariabilem in aggregatione retinere quantitatis habitudinem; quod si alterum altera quantitate disparatum sit, colligendum potentior excessus, refecti positivus vel privativus unius ab alio inscribatur hoc, quod in denominatis respectivis et absolutis binomicis numerorum esse convenit proprium.

Hie cleret vns ALGEBRAS das ander capitel seines andern Buchs, vnnd drucket aus die erste spetiem, so bei den quantiteten addite vnd diminute wirdet gefunden, mit namen die zusammenfugung der signa mit obscribirten quantiteten der negation vnd affirmation, welche erste speties Additio genanndt, auch nachuolgendt die andern berurt hat kurzlich im ersten Capitel, da er spricht: *Et ea, quae circa easdem versari habent* etc., also finden wir, das erstlich bei den quantiteten addite vnd diminute vorhandelt wirdt vorneint vnd nachuolgendt, welchs dann zum teutschen lautet also:

Wir legen vor die Zusammenfugung der signorum. Die do seind eines namens von den zeichen zusammenhaltung jn der

addirung oder zusamengehauflichung eine vormerckhung nemen des signi mit der quantitet der affirmirung oder negirung; so aber vorruckte signa mit den quantitatibus denominatis eines namens werden zusamen wurden gegeben, so soll die angeschnitten | zal eine von der andern des zeichens der grossen vber- 56
treffung der affirmirung vnd negirung beschrieben werden, vnnd solchs ist die aigenschafft mit den benenten zalen von den signis additis oder diminutis + vnd — auch in disen plossen vnnd absolutis surdis numeris a radice benent.

Solchen Text vorstentlich zu declariren, sprechen wir, so wir wollen addirn Signa, die eines namens seindt mit beigeschriebenen quantiteten denominirt der negation oder affirmation, so sollen wir mercken eben, ob die denominirt quantiteten beyde seind univoca oder disparata. Seind die quantitet denominate univoce, so bleiben sie vnvorruckt der affirmation affirmativa, vnd negation negativa. Seind sie aber disparata, so soll ein zal von der andern gezogen werden, vnnd was pleibt, soll mit der grosten vbertretung seiner quantitet der addita vnnd diminuta geschrieben werden. Sam also, wir exemplariter setzen wollen: Wir wollen addirn 6 ϑ + 9 ꝛ zu 5 ϑ + 12 ꝛ. Sprechen wir erstlich, das beiderseit univoca seind, nemblich addita, vnnd hierumb addirn wir ytzliche signa eines namens mit vnverruckter quantitet addita. Wir addirn 5 vnd 6, werden 11 ϑ, vnd 9 + 12, werden 21 ꝛ. Also sprechen wir, das tota addita seind 11 ϑ vnd 21 ꝛ. Stet also: | [1]) 57

$$\begin{array}{r} 6\ \vartheta + \ \ 9\ ꝛ \\ 5\ \vartheta + 12\ ꝛ \\ \hline 11\ \vartheta + 21\ ꝛ. \end{array}$$

So wir aber negativa exemplificirn, sam also: 5 ʒ — 6 cꝭ wollen wir addirn zu 9 ʒ — 4 cꝭ, sprechen wir, das die denominata aber vnivoca seind a negatione. Sprich 5 zu 9 werden 14 ʒ vnd 4 zu 6 werden 10 cꝭ. Also ist die gantze additio 14 ʒ — 10 cꝭ. Steet also:[2])

$$\begin{array}{r} 5\ ʒ - \ \ 6\ cꝭ \\ 9\ ʒ - \ \ 4\ cꝭ \\ \hline 14\ ʒ - 10\ cꝭ. \end{array}$$

So wir aber disparata setzen, also das excessus negativus ist potentior. sam also 7 ϑ + 3 ꝛ wollen wir addirn zu 5 ϑ — 12 ꝛ, addirn wir 5 vnd 7, werden 12 ϑ. Nun sollen wir die disparata auch addirn, so ist

---

1) Das ist in moderner Bezeichnung: $\begin{array}{r} 6 + \ \ 9x \\ 5 + 12x \\ \hline 11 + 21x. \end{array}$ 2) Ebenso: $\begin{array}{r} 5x^2 - \ \ 6x^3 \\ 9x^2 - \ \ 4x^3 \\ \hline 14x^2 - 10x^3. \end{array}$

negatiuum potentius, so ziehen wir ab nach laut des texts 3 von 12, restant 9 𝔯, der mussen wir irer Beneuung der negation schreiben, also were die gantze addition 12 𝔑 — 9 𝔯. Steet also[1]):

7 𝔑 + 3 𝔯
5 𝔑 — 12 𝔯
―――――――
12 𝔑 — 9 𝔯.

So wir aber setzen, affirmatiuum sei potentius. Sam also: 7 ʒ — 1 𝔠 wollen wir addirn zu 3 ʒ + 8 𝔠, Addirn wir addita, werden 10 ʒ, wir
57′ addirn auch | disparata, sagt der text, eins vom andern zu ziehen: nemen wir 1 von 8, pleiben 7 𝔠. Also soll potentior excessus seiner benenung der affirmation beschrieben werden, vnd wird tota additio 10 ʒ + 7 𝔠. Steet also[2]):

7 ʒ — 1 𝔠
3 ʒ + 8 𝔠
―――――――
10 ʒ + 7 𝔠.

Solchs zu probirn, so nemen wir, das 𝔯 sei valor in numeris 6. Nun wern 7 ʒ von 6 in numeris 252, dauon sollen wir abziehen den 𝔠, dann wir haben gesatzt 7 ʒ minus 1 𝔠. Nun ist 1 𝔠 von 6 in numeris 216, die ziehen wir ab von 252, pleiben 36. Nun suchen wir, was 3 ʒ sein von 6, facit 108, vnd 8 𝔠 von 6 machen 1728, das addirn wir zu 108, facit 1836. Die addirn wir zu den ersten 36, khomen 1872, vnd souil sollen auch machen 10 z vnd 7 𝔠. Suchen wir 10 ʒ von 6, facit 360 in numeris. Nun 7 𝔠 von 6 machen 1512, addirn wir dazu 360, so khomen 1872, jnmassen wir oben gesatzt, vnnd ist recht. Desgleichenn magstu die andern auch probirn in gleicher form valorem zu nemen.[3])

58 Nun volget von der abzihung das dritte Capitel |

Capitulum tertium de secunda spetie quantitatum additarum atque diminutarum, quae detractio appellatur eiusque expositio.

Detractionem appellamus univocorum minoris potentiae a maiori separationem quandam servata quantitate ascripta. Eorum autem univocorum, quorum distrahendum potentioris fit excessus, una ab alia resecetur, quod relictum fuerit, disiuncta quantitate priori notetur. Si vero aequivocantur

---

1) In moderner Bezeichnung: $\begin{array}{r} 7 + 3x \\ 5 - 12x \\ \hline 12 - 9x. \end{array}$ 2) Desgleichen: $\begin{array}{r} 7x^2 - x^3 \\ 3x^2 + 8x^3 \\ \hline 10x^2 + 7x^3. \end{array}$

3) Diese Art der Probe ist ja noch heute beim Schulunterrichte gebräuchlich.

habitudines, in unam congeriem coacerventur, productum, quod crescit distrahendo, contraria quantitate inficetur.

Hie volgendt leutert ALGEBRAS seine andere speties der quantitatum aditarum vnd diminutarum genandt die Abziehung, vnnd laut solch gemelt capitel also:

Die abziehung der signorum die seindt eines namens oder einer Benenung, die heisen wir eine absonderung der cleinern macht von der grossern, doch das do behalten werden die beschrieben quantitet der benenung. Sonder aber die do auch eins namens seind vnd einer Benennung, welcher dann das abzihende grofser excess ist, dann das von dem man abzeucht, so soll ein quantitet benent von der andern abgeschnitten werden, vnnd das pleibende soll mit verwandelter benenter quantitet der vordern vniuoca gezeichnet werden. So vnnd aber, das sie equiuocirt seind, das ist so eine addita vnnd die andere diminuta seind, sollen die jn ein samlung gelesen werden, vnd das erwachsende sol mit vorwandelter benenter quantitet gegen dem das alwegen sol werden bezeichent vnd beschrieben.

Solchs zu scherpfen vnd kurtzlich einzufuren, sprechen wir, so do beiderseits vniuoca seind eines namens, vnd das abzihende cleiner macht ist, dann von dem man zeucht, so soll eins vom andern mit vnverruckter benenung gezogen werden. Ist aber das grosser excess, das man abzihen soll, so soll eins vom andern gezogen werden, vnd das pleibendt solle mit voranderter benenung geschrieben werden. Seind sie aber equivocirt, das ist das einerseit ist addita vnd der andern diminuta, so sollen die zusamen gethun werden, vnd das erwachsende soll mit voranderter benenung geschrieben werden.

Als wir das exemplariter setzen wollen, zum ersten, wann beiderseit vniuoca affirmatiua seind numerorum excessus. Sam also wir setzen wollen exemplariter $3\,\mathcal{N} + 3\,\mathfrak{r}$ sollen wir abziehen von $6\,\mathcal{N} + 12\,\mathfrak{r}$. Wir nemen
| eins vom andern, restat $3\,\mathcal{N} + 9\,\mathfrak{r}$, dann daruon man zichen soll, ist 59
vbertreffendt, derhalben verwandelt sich nicht das zeichen, vnd steet also[1]):

$$\begin{array}{r} 6\,\mathcal{N} + 12\,\mathfrak{r} \\ \underline{3\,\mathcal{N} + 3\,\mathfrak{r}} \\ 3\,\mathcal{N} + 9\,\mathfrak{r}. \end{array}$$

Zum andern setzen wir peiderseits vniuoca negatiua auch numerorum

1) In moderner Bezeichnung: $\begin{array}{r} 6 + 12x \\ \underline{3 + 3x} \\ 3 + 9x. \end{array}$

excessus des abzihenden. Also zihen wir 10 𝔯 — 3 𝔠𝔢 von 12 𝔯 — 8 𝔠𝔢, pleiben 2 𝔯 — 5 𝔠𝔢, vnd steet also wie hie[1]):

$$\begin{array}{r} 12\ 𝔯 - 8\ 𝔠𝔢 \\ 10\ 𝔯 - 3\ 𝔠𝔢 \\ \hline 2\ 𝔯 - 5\ 𝔠𝔢. \end{array}$$

Zum dritten saget der text: Sondern aber der, die auch eines namens seind vnnd einer benenung, welcher dann das abzihende grosser excessus ist dann das, von dem man abzihet, soll eine benente quantitet von der andern abgezogen werden, vnd das bleibende sol jn voranderter benenter quantitet der vordern vniuoca vorzeichent werden. Sam also do vniuoca affirmatiua seind, wir wollen abzihen 5 ϑ + 9 𝔯 von 10 ϑ + 3 𝔯. Also zihen wir 5 von 10, pleiben 5 ϑ, vnd nemen 3 von 9 𝔯, pleiben 6 𝔯, vnd beschreiben
59' sie mit dem signo —, also pleiben 5 ϑ — 6 𝔯: steet also[2]): |

$$\begin{array}{r} 10\ ϑ + 3\ 𝔯 \\ 5\ ϑ + 9\ 𝔯 \\ \hline 5\ ϑ - 6\ 𝔯. \end{array}$$

So aber vniuoca negatiua sein. Also wir wollen abzihen 10 𝔠𝔢 — 12 𝔷𝔷 von 12 𝔠𝔢 — 5 𝔷𝔷. Nun 10 𝔠𝔢 von 12 restant 2 𝔠𝔢, vnd 12 von 5 khonnen wir nicht nemen, derhalben zihen wir 5 von 12, pleiben 7, die affirmirn wir, vnd restat also 2 𝔠𝔢 + 7 𝔷𝔷. steet also[3]):

$$\begin{array}{r} 12\ 𝔠𝔢 - 5\ 𝔷𝔷 \\ 10\ 𝔠𝔢 - 12\ 𝔷𝔷 \\ \hline 2\ 𝔠𝔢 + 7\ 𝔷𝔷. \end{array}$$

Zum vierdten saget der text: vnnd so aber die equiuocirt seind. Sam also, wir setzen wollen, wir ziehen ab 5 ϑ — 3 𝔯 von 7 ϑ + 8 𝔯. Nemen wir 5 von 7, restet 2 ϑ, vnd 3 von 8 seind disparate. Hierumb addirn wir 3 vnd 8, werden 11, vnd affirmirn das, wann die substraction oder das subtrahendem an jene selbst ist privatiuum, vnd so dann das vor priuatiue benent, machen die zwei priuatiua affirmatiuum, vnd steet also im restant 2 ϑ vnd 11 𝔯[4]):

$$\begin{array}{r} 7\ ϑ + 8\ 𝔯 \\ 5\ ϑ - 3\ 𝔯 \\ \hline 2\ ϑ + 11\ 𝔯. \end{array}$$

60 |

1) In moderner Bezeichnung: $\begin{array}{r} 12x - 8x^3 \\ 10x - 3x^3 \\ \hline 2x - 5x^3. \end{array}$ 2) Desgleichen: $\begin{array}{r} 10 + 3x \\ 5 + 9x \\ \hline 5 - 6x. \end{array}$

3) Ebenso: $\begin{array}{r} 12x^3 - 5x^4 \\ 10x^3 - 12x^4 \\ \hline 2x^3 + 7x^4. \end{array}$ 4) Das ist: $\begin{array}{r} 7 + 8x \\ 5 - 3x \\ \hline 2 + 11x. \end{array}$

So wir aber distrahendo setzen: Sam wir wollen abzihen 2 ϑ + 3 ꝛ von 68 ϑ — 20 ꝛ, zihen wir 2 von 68 ϑ, plaiben 66, vnd 3 von 20 seind disparate. Hierumb addirn wir 20 vnd 3, werden 23 ꝛ, die negiren wir, wann wir haben gesatzt, das die subtraction an jr selbst priuatio ist. Nun ist das distrahendum affirmatiuum gesatzt, das dann aber an sich selbst priuirt das affirmatiuum, vnnd steet im Restant 66 ϑ ÷ 23 ꝛ. steet also[1]):

$$\begin{array}{r} 68\ \vartheta - 20\ ꝛ \\ 2\ \vartheta + \ \ 3\ ꝛ \\ \hline 66\ \vartheta - 23\ ꝛ. \end{array}$$

Das wollen wir probirn. Setzen wir, der valor der ꝛ sei 2 jn numeris absolutis. Also werden 2 ϑ vnd 3 ꝛ vff einen thail 8, so were vffm andern 68 ϑ — 20 ꝛ, das were jn numeris 28. Nun ziehen wir 8 von 28 pleiben 20 ϑ. Souil sollen auch das restat machen. Als 66 ϑ — 23 ꝛ. wann 23 ꝛ seind 46 in numeris, die nemen wir von 66, pleiben auch 20 wie vor, desgleichen in andern.

Capitulum quartum de tertia spetie quantitatum additarum atque diminutarum, quae multiplicatio appellatur, eiusque tabellaris expositio. | 60

Numerorum Gebrae el Almuchabolae seriem proportionalem descripsimus, quo mutuo crescentiam signorum alterationes habent. Horum transverse unius in alterum ordine proportionali relinquantur restingui tabulare. Quod si univocum univoce ductum fuerit positivi, sin vero disparatae privationis inmutabiliter custodies quantitatem.

Hie saget Algebras von der dritten spetie der quantiteten additarum vnd diminutarum, Multiplicatio genandt, vnnd laut zum teutschen also:

Der zalen Gebrae vnd Almuchabolae proportionalischer Satzung oder ordnung haben wir vormalen beschrieben, durch welche sie haben die wachsung der vorenderung der zeichen, welcher zeichen furung eins in das ander vnd alſsdann transferse oder kreutzweis der gesatzten proportionalischen ordnung haben wir gelossen den fustapfen der verwandlung die tabellirung. Also die vniuoca mit einander multiplicirt werden, so wirstu verwandelt behalten die quantitet der affirmirung; so aber disparata eine in der ander gemultiplicirt werden, so erwechst allemal die privation, das ist negativum.

---

1) In moderner Bezeichnung: $\begin{array}{r} 68 - 20x \\ 2 + \ \ 3x \\ \hline 66 - 23x. \end{array}$

Solchen text kurtzlich zu verstehen, sprechen wir: so do miteinander werden gemultiplicirt die quantiteten addite oder diminute, so sollen sie in
61 einander gefurth | werden jtzliche in jre correlativum oder beigesatzt zeichen vnd alſsdann creutzweis, vnd was dann daraus entspreusst durch verwandlung der signorum findestu in gemelten tafeln der signorum, was aber daraus khumbt respectu affirmationis ist negationis, findestu jn der andern tafel; wann, so vniuoca werden mit einander gemultiplicirt, so erwechst affirmativum, wann aber disparata werden mit einander gemultiplicirt, so erwechst negativum.

Zum ersten wollen wir setzen exemplariter, wann vniuocum affirmatiuum ein ander affirmatiuum multiplicirt. Sam also $3\,\varphi + 2\,\mathfrak{z}$ wollen wir multiplicirn mit $5\,\mathfrak{r}$ vnnd $8\,\mathfrak{z}$. Setzen wir solchs correlatiue also:

$$\begin{array}{l} 3\,\varphi + 2\,\mathfrak{z} \\ 5\,\mathfrak{r} + 8\,\mathfrak{z}, \end{array}$$

vnd multiplicirn $5\,\mathfrak{r}$ in sein correlatiuum als $3\,\varphi$, werden $15\,\mathfrak{r}$, wann wir finden, in den tafeln auch anfengklich demonstrirt ist, das φ in $\mathfrak{r}$ gefurtt $\mathfrak{r}$ generirt. Nun multiplicirn wir $8\,\mathfrak{z}$ in $2\,\mathfrak{z}$, facit $16\,\mathfrak{z}\mathfrak{z}$, wann so $\mathfrak{z}$ multiplicirt $\mathfrak{z}$, wirdt $\mathfrak{z}\mathfrak{z}$ vormeldet auch in vestigio der tabellar gefunden. Darnach so multiplicirn wir transferse $5\,\mathfrak{r}$ mit $2\,\mathfrak{z}$, wirdt $10\,\mathfrak{c}$, vnd $3\,\varphi$ in $8\,\mathfrak{z}$,
61′ facit $24\,\mathfrak{z}$, vnd | steet die multiplication in forma $15\,\mathfrak{r} + 16\,\mathfrak{z}\mathfrak{z} + 10\,\mathfrak{c} + 24\,\mathfrak{z}$. steet also wie hie[1]):

$$\begin{array}{c} 3\,\varphi + 2\,\mathfrak{z} \\ \times \\ 5\,\mathfrak{r} + 8\,\mathfrak{z} \\ \hline 15\,\mathfrak{r} + 16\,\mathfrak{z}\mathfrak{z} + 10\,\mathfrak{c} + 24\,\mathfrak{z}. \end{array}$$

Dann aber vniuocum negatiuum vniuocum negatiuum multiplicirt. Sam also, $2\,\mathfrak{r} - 2\,\mathfrak{c}$ wollen wir multiplicirn mit $2\,\varphi - 5\,\mathfrak{r}$. Setzen wir in forma priori, wie hie verzeichnet steet:

$$\begin{array}{l} 2\,\mathfrak{r} - 2\,\mathfrak{c} \\ 2\,\varphi - 5\,\mathfrak{r}, \end{array}$$

vnd sprechen: 2 mal 2 ist $4\,\mathfrak{r}$, vnd 5 mal 2 seind $10\,\mathfrak{z}\mathfrak{z}$ iuxta tabulam, wann negatiuum negatiuum multiplicirt. Nun sprich transferse: 2 mal 2 sein $4\,\mathfrak{c}$, vnd 2 mal 5 sein $10\,\mathfrak{z}$, vnd stehen die Multiplication in forma $4\,\mathfrak{r} + 10\,\mathfrak{z}\mathfrak{z} - 4\,\mathfrak{c} - 10\,\mathfrak{z}$, vnd steht also[2]):

---

1) In moderner Bezeichnung:

$$(3 + 2x^2)(5x + 8x^2) = 15x + 16x^4 + 10x^3 + 24x^2.$$

2) $$(2x - 2x^3)(2 - 5x) = 4x + 10x^4 - 4x^3 - 10x^2.$$

2 𝔯 — 2 𝔠

2 𝔖 — 5 𝔯

4 𝔯 + 10 𝔷𝔷 — 4 𝔠 — 10 𝔷.

Wann wir aber disparata mit einander multiplicirn sollen. Sam also 5 𝔖 + 7 𝔠 mit 6 𝔷 minus 8 𝔷𝔷. setzen wir das aber more correlatiuorum wie hie:

5 𝔖 + 7 𝔠

6 𝔷 — 8 𝔷𝔷,

vnd sprechen: 6 mal 5 seind 30 𝔷, vnd 7 mal 8 | seind 56 bß —. Nun 62
solchs transferse, sprechen wir 6 mal 7 macht 42 ß, vnd 5 mal 8 seind 40 𝔷𝔷, vnd steen dise multiplication also: 30 𝔷 — 56 bß — 40 𝔷𝔷 + 42 ß, vnd steet also, wie hie[1]):

5 𝔖 + 7 𝔠

6 𝔷 — 8 𝔷𝔷

30 𝔷 — 56 bß — 40 𝔷𝔷 + 42 ß.

Solchs zu probirn, nemen wir valorem 𝔯 in numeris 3. Also sprechen wir 5 𝔖 + 7 𝔠 seind 194 in numeris. Nun 6 𝔷 minus 8 𝔷𝔷 seind negatiue in numerus 54 — 648. Das sollen wir multiplicirn mit 194, facit 10476 — 125712, vnd solchs solle die Multiplication 30 𝔷 — 56 bß — 4 𝔷𝔷 + 42 ß auch machen in numeris. Nemen wir 30 𝔷 von 3 in numeris seind 270, vnd nemen 42 ß von 3 seind in numeris 10206; zu solchen addirn wir 270, wann unter der gantzen multiplication ist allein 30 𝔷 vnd 42 ß affirmativum, vnd khomen 10476 in numeris affirmatiue. Nun suchen wir weither die negatiua: 56 bß von 3 seindt 122472 in numeris negatiue, vnnd 40 𝔷𝔷 seind 3240; das addirn wir zusamen, facit 125712 negatiue: also wer die gantze Multiplication 10476 — 125712 wie oben, vnd ist recht. | 62′
Die Tafel.

| Nun wollen wir nemen affirmation, das erste gesatzte Exempel diſs 63′
Capitels zu probirn. Wir nemen valorem 𝔯 5 in numeris, also weren 3 𝔖 + 2 𝔷 in numeris 53. Nun 5 𝔯 von 5 seindt 25, vnd 8 𝔷 seindt 200, das weren in numeris zusamen 225, die sollen wir mit 53 multiplicirn, facit 11925: das were die gantze multiplication, vnd dasselbe sollen auch machen 15 𝔯 + 16 𝔷𝔷 + 10 𝔠 + 24 𝔷. Nun 15 𝔯 von 5 seind 75, vnnd

1) In moderner Bezeichnung:

$$(5 + 7x^3)(6x^2 - 8x^4) = 30x^2 - 56x^7 - 40x^4 + 42x^5.$$

16 𝔷𝔷 seind 10000, vnd 10 𝔠 seind 1250, vnd 24 𝔷 seind 600. Solchs addirn wir zusam, facit 11925, jnmassen wie oben. Nun folgett hernach, wie man gemelte affirmation sol machen aus ehgerurten text der proportionalischen satzung:

62′ u. 63 | TABVLA PRIMA NVMERORVM GEBRÆ ET ALMVCHABOLÆ MVLTIPLICATIONIS.[1])

			1	2	3	4	5	6	7	8	9	Locus ductionum	
		1	2	4	8	16	32	64	128	256	512		
		𝔑	𝔯	𝔷	𝔠	𝔷𝔷	ß	𝔷𝔠	biß	𝔷𝔷𝔷	𝔠𝔠		
1	𝔑	𝔑 1	𝔯 2	𝔷 4	𝔠 8	𝔷𝔷 16	ß 32	𝔷𝔠 64	biß 128	𝔷𝔷𝔷 256	𝔠𝔠 512	Locus ductionum	
2	𝔯	𝔯 2	𝔷 4	𝔠 8	𝔷𝔷 16	ß 32	𝔷𝔠 64	biß 128	𝔷𝔷𝔷 256	𝔠𝔠 512	𝔷ß 1024	10	das ist, wie weit der radix von seiner stadt ausgewandert ist.
4	𝔷	𝔷 4	𝔠 8	𝔷𝔷 16	ß 32	𝔷𝔠 64	biß 128	𝔷𝔷𝔷 256	𝔠𝔠 512	𝔷ß 1024	terß 2048	11	
8	𝔠	𝔠 8	𝔷𝔷 16	ß 32	𝔷𝔠 64	biß 128	𝔷𝔷𝔷 256	𝔠𝔠 512	𝔷ß 1024	terß 2048	𝔷𝔷𝔠 4096	12	
16	𝔷𝔷	𝔷𝔷 16	ß 32	𝔷𝔠 64	biß 128	𝔷𝔷𝔷 256	𝔠𝔠 512	𝔷ß 1024	terß 2048	𝔷𝔷𝔠 4096	quadrß 8192	13	
32	ß	ß 32	𝔷𝔠 64	biß 128	𝔷𝔷𝔷 256	𝔠𝔠 512	𝔷ß 1024	terß 2048	𝔷𝔷𝔠 4096	quadrß 8192	𝔷biß 16384	14	
64	𝔷𝔠	𝔷𝔠 64	biß 128	𝔷𝔷𝔷 256	𝔠𝔠 512	𝔷ß 1024	terß 2048	𝔷𝔷𝔠 4096	quadrß 8192	𝔷biß 16384	𝔠ß 32768	15	
128	biß	biß 128	𝔷𝔷𝔷 256	𝔠𝔠 512	𝔷ß 1024	terß 2048	𝔷𝔷𝔠 4096	quadrß 8192	𝔷biß 16384	𝔠ß 32768	𝔷𝔷𝔷𝔷 65536	16	
256	𝔷𝔷𝔷	𝔷𝔷𝔷 256	𝔠𝔠 512	𝔷ß 1024	terß 2048	𝔷𝔷𝔠 4096	quadrß 8192	𝔷biß 16384	𝔠ß 32768	𝔷𝔷𝔷𝔷 65536	quintß 131072	17	
512	𝔠𝔠	𝔠𝔠 512	𝔷ß 1024	terß 2048	𝔷𝔷𝔠 4096	quadrß 8192	𝔷biß 16384	𝔠ß 32768	𝔷𝔷𝔷𝔷 65536	quintß 131072	𝔷𝔠𝔠 262144	18	

1) In dieser Tabelle sind die Potenzeichen der Algebra bis zu x^{18} fortgesetzt. Das Prinzip ist dabei stets das multiplikative der Exponenten. So ist z. B. $x^{18} = x^{2 \cdot 9}$. Sind die Exponenten Primzahlen, so entsteht stets ein neues *Sursolidum,* die hier bis zum quintß $= x^{17}$ fortgesetzt sind.

| Zum ersten der tabeln der signatorum so mercken wir nach der proportionalischen Satzung, vnd setzen nacheinander die signa biß in die 13. duction, vnd beschreiben die nach einem gnomonem. Vnd so dann solcher gnomo gemacht ist, so heben wir an die andere gnomon an den 𝔵, vnd finieren den mit ʒß, darnach machen wir den dritten, heben den an mit dem ʒ, vnd finiren den mit dem terß, vnd also furter; finden wir, das sie seind continua proportionalia, vnd in costirter Linien finden wir numeros ductionum, wie weit sie von den 𝔵 gewandert sein, von welchen | tafeln wir vrsprunglich sagen werden von den soliden. Hierumb gebrauchen wir der hierher nit weiter, dann das wir mogen wissen, so ein signum das ander multiplicirt, was daraus ist entsprießen. Wie wol sie ettwas von vmb sich begreifen vnd vmb sich helten, so ist vns dißmal nicht weither not zu declariren. 63′ wieder 64

| TABVLA SECVNDA NVMERORVM GEBRÆ ET ALMVCABOLÆ MVLTIPLICATIONIS.[1] 66

	Affirmatum + 1 𝔑	Negativum − 1 𝔑	Affirm. Negat. 1 𝔑 − 1 𝔵	Negat. Negat. − 1 𝔑 − 1 𝔵	Affirm. Affirm. 1 𝔑 + 1 𝔵
Affirmatum + 1 𝔑	Affirmatum + 1 𝔑	Negativum − 1 𝔑	Affirm. Negat. 1 𝔑 − 1 𝔵	Negat. Negat. − 1 𝔑 − 1 𝔵	Affirm. Affirm. 1 𝔑 + 1 𝔵
Negativum − 1 𝔑	Negativum − 1 𝔑	Affirmatum + 1 𝔑	Negat. Affirm. 1 𝔵 − 1 𝔑	Affirm. Affirm. 1 𝔑 + 1 𝔵	Negat. Negat. − 1 𝔑 − 1 𝔵
Affirm. Negat. 1 𝔑 − 1 𝔵	Affirm. Negat. 1 𝔑 − 1 𝔵	Negat. Affirm. 1 𝔵 − 1 𝔑	Affirm. Affirm. 1 𝔑 + 1 𝔵	Affirm. Negat. 1 𝔑 − 1 𝔵	Affirm. Negat. 1 𝔑 + 1 𝔵
Negat. Negat. − 1 𝔑 − 1 𝔵	Negat. Negat. − 1 𝔑 − 1 𝔵	Affirm. Affirm. 1 𝔑 + 1 𝔵	Affirm. Negat. 1 𝔑 − 1 𝔵	Affirm. Affirm. 1 𝔑 + 1 𝔵	Neg. Neg. Neg. − 1 𝔑 − 1 ʒ − 2 𝔵
Affirm. Affirm. 1 𝔑 + 1 𝔵	Affirm. Affirm. 1 𝔑 + 1 𝔵	Negat. Negat. − 1 𝔑 − 1 𝔵	Affirm. Negat. 1 𝔑 − 1 𝔵	Neg. Neg. Neg. − 1 𝔑 − 1 ʒ − 2 𝔵	Affir. Affir. Affir. 1 𝔑 + 1 ʒ + 2 𝔵

| Nun volget von der andern tafeln der Benenung, das ist von dem affirmativo vnd negativo. So mercken wir, das der text saget, so man vniuoca mit einander multiplicirt, das positiua quantitas entspringt, das ist quantitas addita; so aber priuatiua vnter einander werden multiplicirt, so 64 wieder

1) Bei dieser Tafel dürfte wohl zu beachten sein, dass das Minuszeichen *für sich allein* vorkommt als − 𝔑. Dass die Tafel nicht in allen Stücken richtig ist, sondern in mehreren Fächern dreitheilige Produkte stehen müssten, auch bei 1 𝔑 − 1 𝔵 mal 1 𝔑 + 1 𝔵 jedesmal 1 𝔑 − 1 ʒ als Produkt erscheinen sollte, ist klar. Ich hielt mich aber nicht befugt, hier eine Änderung oder Berichtigung eintreten zu lassen.

entspringt priuatiuum, vnd hierumb ist dise tafeln gesatzt oben an der ersten leng die benenunge nacheinander, der ersten latitudine auch. Dieselben, sind alſsdann more quatuor numerorum proportionalium jn einander gemultiplicirt, also das alle wege correlatiua eiusdem signi seind, alſsdann jn der proportionalischen ordnung ist, vnnd die zalen jn gemelter tafeln explicirn. Nun folget das funfft capitel von diuisio nach diser tafell.

64′ | *Capitulum quintum de quarta spetie quantitatum additarum atque diminutarum, quae divisio appellatur, eiusque tabularis expositio.*

Prohibemur divisionem quantitatum additarum atque diminutarum numerorum Gebrae et Almuchabolae, donec ad opponendum restaurando vel diminuendo redactae fuerint in aequationem committendam. Sin vero dividantur, supponendum est, unitates in numeris esse aequales. addita addere licet diminuereque privata. divisoque producto per relictum vel euerse numero per numerum. Quibus mutuo detractis quotientis indiferentis secundari ad addita et diminuta generaliter excessus habetur.[1])

Hie saget Algebras von seiner vierdten speties gemelter quantiteten additarum vnnd diminutarum Gebre vnd Almuchabole division genandtt, vnd laut zum teutschen also:

Wir vorpieten die thailung benenter quantiteten der affirmirung vnd negirung, das ist der additen vnd diminuten Gebre vnd Almuchabole also lange, biſs sie gegeben werden vnd verendert jn die equationen zu thailen mit gegeneinandersatzung der vergleichuug zu restauriren der benennunge, alſs dann hernach volgen wirdt. So sie aber gethailt werden die additen vnd
65 diminuten quantiteten, so ist das vorzusetzen vnd | praesupponiren, das solche quantitet der affirmirung vnd negirung gleich seind den numeris absolutis, das ist, das sie nicht cleiner noch grosser jn jrer bedeutung seind, dann do seind vnitates in numeris absolutis. Alſsdann sollen die addita zu den numeris gethan werden, vnd die minuten abgezogen, vnd soll dann der dividendus gethailt werden durch den divisorem, das ist das product aus den additen vnd numeris, oder restant aus den diminuten vnd numeris oder e contrario, vnd alſsdann ein absolut

1) Unser Verfasser kennt also die Division ganzer Funktionen durch einander nicht. Das von ihm beschriebene umständliche Verfahren, um Ausdrücke wie $56 - 4$ und $20 + 4$ durch einander zu dividieren, hat nur den Zweck, den Quotienten auch in derselben Form und zwar so zu finden, dass der erste Theilquotient der der beiden ersten Zahlen, also hier $\frac{56}{20} = 2\frac{4}{5}$, wird.

numerus durch den andern solcher zweier quaniteten zal sol von einander gezogen werden, vnd die vbertreffung der quantiteten eins gegen dem andern, so wirdt solcher excess gemeinlich umb irrendes des andern quotienten beschreiben addite vnd diminute. Als so der principalen, das ist der numern quotient, seindt excedirt vom secundario, so soll solcher excess diminutae dem secundario zugesatzt werden; excedirt der principal den secundarium, so soll solcher excess additae dem secundario geschrieben werden, vnd also ist er generalis zu den additis vnd diminutis, vnd hierumb wirdt er genandt indifferens.

Sam also, wir setzen wollen exemplariter, vff das wir den text besser vorstehen mugen, wir wollen thailen 56 𝔯 — 4 durch 20 𝔯 vnd 4. Addirn wir addita, das ist | 4, facit 24, vnd remouiren diminuta, das ist 4 von 56, 65′
pleibt 52; das thailen wir nach dem text, den restanten durch das product, das ist 52 durch 24, facit $2\frac{1}{6}$, das ist der quotient principalis. Nun thailen wir die Numeros durch die numeros, als 56 mit 20, facit $2\frac{4}{5}$, das ist secundarius. Der principalen excedirt, herumb ziehen wir $2\frac{1}{6}$ von $2\frac{4}{5}$, pleiben $\frac{19}{30}$, das ist der excess des secundarij, vnd hierumb soll der diminute geschrieben werden gegen den secundarium, also were der quotient $2\frac{4}{5}$ — $\frac{19}{30}$. Vnd solchs kurzlich zu probirn, setzen wir, so solchs der quotient ist, vnd 20 plus 4 der divisor, so wir dann multiplicirn quotienten in diuisorem, so khumbt vom product solcher multiplicirung dividendus, das ist die zal, welche gethailt soll werden wider. Sprich 20 mol $2\frac{4}{5}$ macht 56; nu sprich $\frac{19}{30}$ mal 4 macht $2\frac{16}{30}$ diminute, das zeuch von 56, rest $53\frac{14}{30}$. Nun multiplicir das transverse, sprich 4 mal $2\frac{4}{5}$ macht $11\frac{1}{5}$ addite, das addir zu $53\frac{14}{30}$, khumbt $64\frac{2}{3}$. Nun sprich $\frac{19}{30}$ mal 30 macht $12\frac{2}{3}$, von $64\frac{2}{3}$ bleiben 52, also khomen 56 𝔯 — 4, vnd ist recht.

So aber principalis quotiens excedirt secundarium: sam also, 10 𝔯 + 12 wollen wir thailen durch 6 𝔯 — 2, | | addirn wir 10 vnd 14, werden 24 66 66′
addita, vnd minuiren 2 von 6, pleiben 4. Nun thailen wir 24 mit 4, khomen 6, das ist der principalis quotiens. Nun thailen wir 10 𝔯 durch 6, khomen $1\frac{2}{3}$; das nemen wir von jme, pleiben $4\frac{1}{3}$. Also das wirdet additum, vnd khumbt $1\frac{2}{3}$ + $4\frac{1}{3}$. Das magstu probirn, wie oben vormeldet vnnd wie wol der text nicht vormeldt von gesetzter tafeln, so werden sie doch jm negsten Capitell eingezogen, do wir dann haben gesatzt eine von der Multiplicirung. Wann, so wir das product des Multiplicirn thailen durch den Multiplicanten, so khumpt wider Multiplicant. Also mogen wir heraus ermessen setzende, so wir multiplicirn ce in ʒʒ, so entspringen biß: so wir nun thailen biß mit ce, so mus von not wegen ʒʒ wider khomen, als dann dise tafeln anzeigt. Du findest hierjnn auch alle modos Equandi aller

equation, vnnd sondern die equationes Aliabre mit sampt den andern gesatzten. Sam also zweier signa ʒʒ ist gleich ʒ𝔠 findestu jn dem funfften winkel der andern equation. So wir aber dreier signa eine vorgleichung machen, finden wir in dem erstenn triangel an der dritten ꝛ die funffte
67 equation mit jren modis equandi. So wir aber wieder | steigen, ansehen aber den ersten, finden wir alle modos Equandi der sechsten Equation, vnd desgleichen jn den andern absteigenden triangeln etc., vnd deſsgleichen viel andere mugen eingezogen werden in diser tafeln hierher nicht dienende.

TABVLA TERTIA NVMERORVM GEBRÆ ET ALMVCHABOLÆ DIVISIONIS. 1)

Locus omnium aequationum.

		1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
		𝔑	ꝛ	ʒ	𝔠	ʒʒ	ß	ʒ𝔠	biß	ʒʒʒ	𝔠𝔠
1	𝔑	𝔑	ꝛ	ʒ	𝔠	ʒʒ	ß	ʒ𝔠	biß	ʒʒʒ	𝔠𝔠
2	ꝛ	Primus modus	𝔑	ꝛ	ʒ	𝔠	ʒʒ	ß	ʒ𝔠	biß	ʒʒʒ
4	ʒ		Secundus	𝔑	ꝛ	ʒ	𝔠	ʒʒ	ß	ʒ𝔠	biß
8	𝔠			Tertius	𝔑	ꝛ	ʒ	𝔠	ʒʒ	ß	ʒ𝔠
16	ʒʒ				Quartus modus	𝔑	ꝛ	ʒ	𝔠	ʒʒ	ß
32	ß					Quintus	𝔑	ꝛ	ʒ	𝔠	ʒʒ
64	ʒ𝔠						Sextus	𝔑	ꝛ	ʒ	𝔠
128	biß							Septimus	𝔑	ꝛ	ʒ
256	ʒʒʒ								Octavus	𝔑	ꝛ
512	𝔠𝔠									Nonus	𝔑
		Quinta aequatio Algebrae	Quarta aequatio Algebrae	Tertia aequatio Algebrae	Secunda Algebrae aequatio	Prima aequatio Algebrae	Quarta	Tertia	Secunda	Prima equatio	

1) Dass in dieser Tafel die verschiedenen Formen der Gleichungen enthalten sein sollen, dürfte vielleicht so zu verstehen sein. In der am untern Rande mit *Secunda equatio* bezeichneten Spalte gehe man bis zu der Zeile hinauf, vor

Capitulum sextum de diversis denominationibus quantitatum additarum atque diminutarum earundemque reductionibus.

Diversarum denominationum, si quae fuerint, quantitates additae atque diminutae ad idem genus transversae multiplicationis reducantur, unaque in aliam per quantitatem denominationis si ducta fuerit, numeratorem, exinde coacervatio vel detractio a denominatione producta univoce appellabitur.[1])

Nachdem Algebras hat gesatzt von den speciebus der quantiteten additarum vnd diminutarum, die dann gantz integra seindt gewest, vnd kheine benenung kheiner fract gehabt haben, will er hie nachuolgende sagen von gemelten quantiteten jn geprochen, vnd laut zum deutschen also:

So do seind die quantiteten addite vnd diminute zwispenniger vnd vngleicher denomination, das ist, das sie nicht eines namens seind, so sollen die in eine denomination | durch 67′
die Multiplicirung in Creutzweis gebrachtt werden, vnd alſsdann eine in die andere gefurt werden, die do seind die quantitet der denomination, das ist, ein nenner in den andern, vnnd so dann solchs geschicht, so man dann numeratores oder die zeler zusam geaddirt oder von einander zeuchett, desselbig pleibendt oder erwachsendt wirdt genenndt von dem, das aus den denominationibus ist erstanden zusam gemultiplicirt.

Sam also, wir setzen wollen dem text gemes, wann sie coaceruirt oder addirt werden die quantiteten addite vnd diminute vngleicher denomination oder nenner, als wir wollen addiren:

$$\frac{2\,ꝛ - 2\,𝔑}{1\,𝔑 + 1\,ꝛ} \quad \text{zu} \quad \frac{3\,𝔑 + 1\,ȝ}{1\,ꝛ}$$

Setzen wir also:

$$\frac{2\,ꝛ - 2\,𝔑}{1\,𝔑 + 1\,ꝛ} \qquad \frac{3\,𝔑 + 1\,ȝ}{1\,ꝛ}$$

vnd multiplicirn die creutzweis sprechende: 1 ꝛ furen wir jn 2 ꝛ — 2 𝔑, werden 2 ȝ — 2 ꝛ. Nun furen wir 1 𝔑 + 1 ꝛ in 3 𝔑 + 1 ȝ, facit 3 𝔑 + 1 𝔠𝔢 + 1 ȝ + 3 ꝛ. Solchs addirn wir zu 2 ȝ — 2 ꝛ, facit 3 𝔑

welcher links 8 steht, das ist die fünfte, dann findet man dort am äussersten rechten Rande stehen ȝȝ · ß · ȝ𝔠𝔢. Da bei der *Secunda aequatio* ein Zeichen ausgelassen werden soll, so hat man also hier die Gleichung ȝȝ = ȝ𝔠𝔢. In der mit 4 anfangenden Zeile aber stehen die verschiedenen Formen der fünften Gleichung: 𝔑, ꝛ, ȝ; ꝛ, ȝ, 𝔠𝔢, u. s. w. bis ß, ȝ𝔠𝔢, biß, und wenn man noch die daran nach rechts oben sich anschliessenden hinzunimmt, auch noch ȝ𝔠𝔢, biß, ȝȝȝ und biß, ȝȝȝ, 𝔠𝔠𝔢.

1) Das ist Addition und Subtraktion von allgemeinen Brüchen.

$+ 1$ ce $+ 3$ ʒ $+ 1$ ꝶ; solchs ist der numerator. Nun multiplicirn wir denominatorem, das ist 1 φ $+ 1$ ꝶ mit 1 ꝶ, facit 1 ꝶ vnd 1 ʒ, vnd solchs
68 ist der gemein Nenner des obgemelten zelers vnd stehet also wie hie: |

$$\frac{2\,ꝶ - 2\,φ}{1\,φ + 1\,ꝶ} \times \frac{3\,φ + 1\,ʒ}{1\,ꝶ}$$

$$\frac{3\,φ + 1\,ce + 3\,ʒ + 1\,ꝶ}{1\,ꝶ + 1\,ʒ}\ ^{1)}$$

khumbt aus der multiplication jm Creutz gemelte Addition, wie hie verzeichent.

Das wollen wir probirn ex valore, vnd lasen valorem 3 sein in Numeris, vnnd suchen erstlich, was do sei der zeler des crsten buchs in numeris, der was 2 ꝶ $-$ 2 φ, das ist 4 in numeris, wenn 2 ꝶ seind 6 in numeris, subtrahirn wir 2 φ, pleiben 4. Nun suchen wir, was sein nenner sey ex numeris, der ist 1 φ vnd 1 ꝶ, das ist auch 4. Nun thailen wir 4 durch 4, facit 1, also were der erste Bruch in Numeris 1. Nun suchen wir gleicherweis den andern Bruch, vnnd nemen zu dem ersten den zeler, der ist 3 φ vnd 1 ʒ, das ist in numeris 12. Nun suchen wir seinen Nenner, der was 1 ꝶ, das ist 3 in numeris: thailen wir 12 mit 3, facit 4, wann der Bruch ist auch gethailt. Also ist der andere Bruch 4 in numeris, den addirn wir zum ersten, der was 1 in numeris, vnnd khumbt 5 aus der gantzen addition, die was

$$\frac{3\,φ + 1\,ce + 3\,ʒ + 1\,ꝶ}{1\,ꝶ - 1\,ʒ}.$$

So es dann auch 5 in numeris macht, so ist es recht. Nun suchen wir im zeler, was do sei 1 ce von 3, facit 27, dazu 3 φ, facit 30 φ, zu 3 ʒ, das ist 27, vnd 1 ꝶ khomen 60, souil macht der zeler in numeris. Die thailen wir durch 1 φ $+ 1$ ʒ, das ist 12, khomen auch 5, vnd ist recht ge-
68′ macht. |

Setzen wir den andern punct, als der text sagt, wann sie detrahirt werden, solle allermas volfurt werden wie vor, dann alleine, wo man vor het addirt, soll man jtzunder subtrahirn. Sam also, wir setzen wollen abzuzihen $\frac{1\,φ + 2\,ʒ}{1\,ꝶ}$ von $\frac{2\,ce + 8\,ʒ}{7\,φ}$. Setzen wir die, wie vorgesazt, also:

$$\cdot\ \frac{1\,φ + 2\,ʒ}{1\,ꝶ} \quad \frac{2\,ce + 8\,ʒ}{7\,φ}.$$

Multiplicirn die Creutzweis, jnmassen vorgethan, khumbt des ersten mit

---

1) In moderner Bezeichnung: $\frac{2x - 2}{1 + x} + \frac{3 + x^2}{x} = \frac{3 + x^3 + 3x^2 + x}{x + x^2}$.

7 𝔑 in 1 𝔑 + 2 𝔷, 7 𝔑 + 14 𝔷, vnd des andern mals khumbt mit 1 𝔯 in 2 𝔠𝔢 + 8 𝔷, 2 𝔷𝔷 + 8 𝔠𝔢; die addirn wir nicht, sondern subtrahirn eins vom andern, pleiben 2 𝔷𝔷 + 8 𝔠𝔢 — 7 𝔑 vnd 14 𝔷, das ist der zeler. Nun multiplicirn wir die nenner mit einander, als 1 𝔯 mit 7 𝔑, khomen 7 𝔯, vnd stehet das Restat also wie hie oben:

$$\frac{1\,\mathfrak{N} + 2\,\mathfrak{z}}{1\,\mathfrak{r}} \times \frac{2\,\mathfrak{ce} + 8\,\mathfrak{z}}{7\,\mathfrak{N}}.$$

Multiplicirn wir die, vnd nemen eins vom andern nach laut des Texts, so pleiben:

$$\frac{2\,\mathfrak{zz} + 8\,\mathfrak{ce} - 7\,\mathfrak{N} - 14\,\mathfrak{z}}{7\,\mathfrak{r}}.\text{[1)]}$$

Das wollen wir probirn ex numeris absolutis. Setzen wir, das 𝔯 sei 2 in numeris. Nun suchen wir den zeler des ersten Bruchs, dauon man nemen soll, als $\frac{2\,\mathfrak{ce} + 8\,\mathfrak{z}}{7\,\mathfrak{N}}$, das seind 48; die thailen wir mit 7 𝔑, facit $6\frac{6}{7}$, das ist der eine pruch. Nun suchen wir | auch den andern Bruch, den man 69
abziehen soll, als $\frac{1\,\mathfrak{N} + 2\,\mathfrak{z}}{1\,\mathfrak{r}}$, facit 9; den thailen wir in 1 𝔯, als in 2, facit $4\frac{1}{2}$, den subtratrirn wir von $6\frac{6}{7}$, pleiben $2\frac{5}{14}$, vnd souil sollen auch machen der gemelte restat als

$$\frac{2\,\mathfrak{zz} + 8\,\mathfrak{ce} - 7\,\mathfrak{N} - 14\,\mathfrak{z}}{7\,\mathfrak{r}}.$$

Suchen wir erstlich den zeler: 2 𝔷𝔷 + 8 𝔠𝔢 von 2 seind 96. Nun sollen abgezogen werden 7 𝔑 vnd 14 𝔷, die machen 63; nemen wir sie, bleiben 33. Nun ist der nenner 14 von wegen 7 𝔯: thailen wir sie, khomen $2\frac{5}{14}$, vnd ist recht. Desgleichen magstu alle andere probirn. Nun volget das sibende Capitel.

Capitulum septimum de diversis denominationibus quantitatum additarum atque diminutarum earumque multiplicationibus.

Numerorum pregnantium, quorum denominatio est divisa, numeratorum atque denominationum se mutuo fit multiplicatio. Quod si sit denominatorum denominationis denominatio, ad unam denominationem se invicem multiplicatium reducentur quantitantum.

---

1) In moderner Form: $\frac{2x^3 + 8x^2}{7} - \frac{x + 2x^2}{x} = \frac{2x^4 + 8x^3 - 7 - 14x^2}{7x}.$

Hie saget vns Algebras von der Multiplication der quantiteten additen vnd diminuten, vnd laut zum teutschen also:

Der geschwengerten quantiteten additen vnd diminuten, die do seind einer ungleichen benenung oder denomination, so sollen die numeratores besonder vnd die denominationes mit einander
69′ multiplcirt werden. So dann ist, | das die Nenner benennt seind, welche benenung dann aber ein denomination ist, das ist gesprochen, so ein nenner hat einen andern nenner, welchs dann nenners nenner hat, respectu eines numeratoris, so sollen die nenner in eine quantitet zusamen gemultiplicirt werden, die dann ist eine benenung oder denomination des ersten gesatzten zelers.

Solchen schriftlichen text zu leutern, wollen wir setzen exempla, vff den ersten punct des texts, als er sagt: So die quantiteten addite vnd diminute einer ytzlichen benenung seind, sam also wir setzen wollen zu multiplicirn:

$$\frac{2\,\varphi + 1\,\mathfrak{z}}{1\,\mathfrak{r}} \quad \text{mit} \quad \frac{5\,\mathfrak{r} + 2\,\varphi}{1\,\mathfrak{z} + 1\,\mathfrak{r}},$$

setzen wir correlatiue vnd multiplicirn einen zeler in den andern als $2\,\varphi + 1\,\mathfrak{z}$ mit $5\,\mathfrak{r} + 2\,\varphi$, facit $10\,\mathfrak{r} + 2\,\mathfrak{z} + 5\,\mathfrak{c} + 4\,\varphi$ vor den zeler. Nun multiplicirn wir die nenner auch mit einander, khumbt $1\,\mathfrak{c} + 1\,\mathfrak{z}$, das wer der Nenner, vnd stehet dje multiplication also:

$$\begin{array}{c} \dfrac{2\,\varphi + 1\,\mathfrak{z}}{1\,\mathfrak{r}} \text{——} \dfrac{5\,\mathfrak{r} + 2\,\varphi}{1\,\mathfrak{z} + 1\,\mathfrak{r}} \\ \hline \dfrac{10\,\mathfrak{r} + 2\,\mathfrak{z} + 5\,\mathfrak{c} + 4\,\varphi}{1\,\mathfrak{c} + 1\,\mathfrak{z}} \end{array}$$ [1]

Das wollen wir probirn ex valore aus den absolutis numeris, so setzen wir, die $\mathfrak{r}$ solle 4 sein in numeris. Nun suchen wir, was der zeler des ersten
70 | Bruchs sey, das ist $2\,\varphi$ vnd $1\,\mathfrak{z}$, facit in numeris 18, wann $1\,\mathfrak{z}$ ist 16 von 4, derzu 2 machen 18. Nun sein Nenner ist $1\,\mathfrak{r}$, das ist 4; thailen wir, facit $4\frac{1}{2}$. Nun suchen wir den andern bruch auch dermassen: $5\,\mathfrak{r}$ seind 20, vnd $2\,\varphi$ seind 22, pas ist der zeler des andern Bruchs, vnd sein Nenner ist 20. Thailen wir, facit $1\frac{1}{10}$. Nun wollen wir die zwei absoluten bruch mit einander multiplicirn jnmassen man pflegt in gebrochen zalen zu thun, das wir hie in den zalen Algebre presupponiren, khombt 4 vnd $\frac{19}{20}$:

---

1) In modernen Zeichen:

$$\frac{2 + x^2}{x} \times \frac{5x + 2}{x^2 + x} = \frac{10x + 2x^2 + 5x^3 + 4}{x^3 + x^2}.$$

souil macht auch das product $\frac{10\ ꝛ + 2\ ʒ + 5\ ɕ + 4\ φ}{1\ ɕ + 1\ ʒ}$. Suchen wir zum ersten den zeler in numeris. 10 ꝛ von 4 seind 40, 2 ʒ seindt 32, 5 ɕ seind 320 vnd 4 φ seind 4. Addirn solchs, facit 396. Das thailen wir mit 1 ɕ + 1 ʒ, als 80, vnnd khumbt recht $4\frac{19}{20}$.

Nun sagt der text, so ein Bruch khomet in der zalen Gebre, der do het Nenners nenner. Sam also, wir setzen wollen, vnd des vil khumbt in den coniecturationibus, das ist in den examinibus der proposition, wir wollen multiplicirn

$$\frac{\frac{10\ φ - 1\ ʒ}{1\ ꝛ + 1\ ʒ}}{4\ φ} \quad \text{mit} \quad \frac{\frac{1\ ɕ + 1\ ʒ}{1\ ꝛ + 1\ φ}}{1\ ʒ}.$$ [1])

Setzen wir die correlatiua, wie stedt, jnmassen wir vorgehalten haben. Sagt der text, es sollen die Nenner | zusamen gemultiplicirt werden eines 70′
ytzlichen pruchs. Sam also, 4 φ ist der letzte nenner des ersten Bruchs, die multiplicirn wir in 1 ꝛ + 1 ʒ, facit 4 ꝛ + 4 ʒ. Vnd das wer der Nenner des ersten Bruchs. Wir machen den andern auch also, khumbt 1 ɕ + 1 ʒ. Also weren gemelte Nenner reducirt. Die wollen wir nun mit einander multiplicirn, jnmassen wir den ersten pruch gethun haben, vnd khumbt aus der multiplication der zwir bruche:

$$\frac{10\ ɕ - 1\ ʒʒ + 10\ ʒ - 1\ ß}{8\ ʒʒ + 4\ ɕ + 4\ ß}.$$

Solchs wollen wir probirn. Wir nemen erst gesatzte pruch, die do noch nicht reducirt seind, vnd suchen valorem. Zum ersten den zeler des ersten Bruchs, vnd lassen valorem ꝛ sein 2 in numeris. Also 10 φ — 1 ʒ macht 6, das gethailt mit 1 ꝛ + 1 ʒ, facit 1; das gethailt wider in 4 facit $\frac{1}{4}$: souil macht der erst Bruch in numeris absolutis. Desgleichen mache den andern. Besiche, was do sey 1 ɕ + 1 ʒ von 2, facit 12, gethailt in 1 ꝛ + 1 φ, in 3, facit 4, die gethailt in 1 ʒ, als in 4, facit 1 oder $\frac{4}{4}$. Die wollen wir mit einander multiplicirn, khumbt $\frac{1}{4}$ in numeris; das soll auch thun die obgemelte multiplication. Wir suchen zum ersten 10 ɕ von 2, macht 80, — 1 ʒʒ, als 16, bleiben 64, vnd 10 ʒ seind 40, — 1 ß, facit 32: zih ab, pleiben 8, zu 64 wird 72 in numeris der zeler. Nun | suchen wir den nenner: 8 ʒʒ seind 128, vnd 4 ɕ seind 32, vnd 4 ß 71

---

1) In moderner Bezeichnung:

$$\frac{\frac{10 - x^2}{x + x^2}}{4} \times \frac{\frac{x^3 + x^2}{x + 1}}{x^2} = \frac{10 - x^2}{4x + 4x^2} \times \frac{x^3 + x^2}{x^3 + x^2} = \frac{10x^3 - x^4 + 10x^2 - x^5}{8x^4 + 4x^3 + 4x^5}.$$

seind 128; das addirn wir zusam, facit 288, das ist der Nenner. also were der Bruch $\frac{72}{288}$ in numeris, macht $\frac{1}{4}$, vnd ist recht.

Capitulum octavum de diversis denominationibus quantitatum additarum atque diminutarum earumque divisionis diviso pregnata sive potentialis, non absoluta.

Divisionem absolutam signorum, ut diximus, refutamus. Earumque autem, quarum denominatio est coaptata per interiectionem virgularum in Gebram esse potentialiter divisa: unam vero per aliam committendam disparate habitudinis transversae ductionis divisionem in eandem essc reductam denominationem diminutio.

Hie saget Algebras von der division der quantiteten additarum vnd diminutarum, vnd laut der text zum teutschen also:

Die division gemelter zaln Gebre die absoluten, als wir gesagt haben, vorwerfen wir, sonder der, den dj denomination vnterschrieben ist durch die zwischen fugung der virgulen des Bruchs, sprechen wir, das dj gethailt ist oder sey jn Gebra
71' potentialiter. Aber eine benente | quantitet addita oder diminuta, so die sol gethailt werden durch eine andere, welche also vngleicher denomination sein, vorkunden wir, solche vormelte thailung gebracht werden jn eine denomination durch die transferse oder creutzformige multiplicirung.[1])

Sam also, wir setzen wollen zu thailen $\frac{5\,\vartheta + 1\,\text{ʒ}}{1\,\vartheta + 1\,\text{ꝛ}}$ mit $\frac{2\,\text{ʒ} + 2\,\text{ce}}{1\,\text{ꝛ}}$. Setzen wir sie correlatiue wie die andern, sehen wir, das ein jtzlich quantitet mit einer virgulen vnterschrieben ist gegen jrer denomination, damit sie ist potentialiter gethailt, vnd nicht actu, als der text sagt. Aber eine durch die andere zu thailen, jnmassen wie hie, die do vngleicher denomination seindt, so multiplicirn wir Creutzweis nach vnterweisung des sechsten Capitels difs Buchs, als 1 ꝛ mit 5 ϑ vnd 1 ʒ, facit 5 ꝛ vnd 1 ce, das ist der zeler oder diuidendus; furn wir 1 ϑ + 2 ꝛ in 2 ʒ vnd 2 ce, facit 2 ʒ + 4 ʒʒ + 6 ce, vnd ist der Nenner. Stehet also jn seinem form wie hie

$$\frac{5\,\vartheta + 1\,\text{ʒ}}{1\,\vartheta + 2\,\text{ꝛ}} \times \frac{2\,\text{ʒ} + 2\,\text{ce}}{1\,\text{ꝛ}}.$$

So wir creutzweis multiplicirn, so khumbt der quotient als wie hie:

72 $$\frac{5\,\text{ꝛ} + 1\,\text{ce}}{2\,\text{ʒ} + 4\,\text{ʒʒ} + 6\,\text{ce}}. \mid {}^{2})$$

1) Division allgemeiner Brüche ist also erlaubt.

2) In moderner Bezeichnung: $\frac{5 + 2x^2}{1 + 2x} : \frac{2x^2 + 2x^3}{x} = \frac{5x + x^3}{2x^2 + 4x^4 + 6x^3}$.

Das wollen wir probirn. Wir nemen valorem in numeris 2, also were der erste Bruch $\frac{5\,\mathfrak{X} + 1\,\mathfrak{z}}{1\,\mathfrak{X} + 2\,\mathfrak{z}}$ in numeris $\frac{9}{5}$, die sollen wir thailen mit dem andern, als $\frac{2\,\mathfrak{z} + 2\,\mathfrak{C}}{1\,\mathfrak{c}}$, das ist $\frac{24}{2}$, also sollen wir thailen $\frac{9}{5}$ mit $\frac{24}{2}$, khumen $\frac{18}{120}$, so wir die lassen aufgehn jn geringer zaln, khomen $\frac{3}{20}$. Souil soll auch der quotient in numeris machen. Suchen wir gleicherweis den zeler vnd auch den Nenner, so finden wir $\frac{18}{120}$, jnmassen wie oben, vnd ist recht gemachtt.

Capitulum nonum de custodia vigilis adverso aequationis numero absoluto positus eiusque officio assimulationis.

Assimulatio est, qua coniecturatio proportionis ad duas aequales restaurando vel diminuendo partes numero absoluto examine vigilis ex adverso aequationis positus reducitur.

Hie saget Algebras von der Assimulation, nachdem gesagt ist von der eigenschaft der signa, durch welche man in die Equation khumbt, so khan die nicht volfurt werden, es geschehe dann ein vorgleichung zweier thailen, vnd laut zum teutschen also:

Die Assimulierung oder vorgleichung ist, durch welchs die coniecturation der propositionen geschehen durch das | Examen 72′
des wechters, welcher dann gesatzt ist in der Equation durch absolutos numeros, durch benenung oder gebung zu zweien gleichen thailen pracht wirdt.[1])

Diesem text einen vorstentlichen sin einzufuren, der etwas tief gegrundt, sagt er zum ersten von der vorgleichunge zweier thailen, die dann geschehen soll also: was ein thail zu wenig hat, soll jme restaurirt werden, vnd dem andern dasselbig; hat dann ein thail zuuil, soll jme genomen werden, deſsgleichen dem andern. Als wir setzen wollen, damit wir den text begreifen mögen, ein coniecturation ist geschehen, jnmassen der text lautet, durch das Examen des wechters oder hueters der Equation, also zu finden eine zal, wann ich daraus nim $\frac{1}{3}$ vnd $\frac{1}{4}$ vnd addir 7 dragmas darzu, das 28 khumen. Sprechen wir, das 28 $\mathfrak{X}$ sey der vigil equationis oder der hueter, durch welchen dann geschieht das Examen der Aufgabe in den

1) Hier wird also gelehrt, wie die ursprüngliche Aufgabe durch Restauratio und Diminutio in eine der Formen gebracht werden kann, die oben als Normalformen der Gleichungen angegeben sind. Die in Ziffern gegebene Zahl wird dabei *Vigil,* d. h. Wächter genannt, weil durch sie die Richtigkeit der Übertragung der Aufgabe in eine Gleichung kontrolliert wird.

coniecturen des setzenden ꝛ; dann 28 vigiliren, das solchs Examen der gesatzten ꝛ sol recht volfurt werden, vnd hierumb ist der wachsende vf einer seiten in absoluto numero vnd hutendt der Equation. So nun 1 ꝛ ist gesatzt vnd examinirt nach der Aufgab, khomen $\frac{7}{12}$ ꝛ + 7 ϑ, die seind gleich
73 28 ϑ, den huter vnd vigil. Solche | zwei thail sollen wir dann vorgleichen. Saget der text, welchs thail zuuil hat, dem sole abgezogen werden, vnd dem andern auch souil. Nun hat die Coniecturation einer seit + 7 ϑ, die deliren wir vnd nemen dem vigil auch souil, pleiben 21 ϑ, vnd also ist vff beiden Seithen vorgleichnus geschehen, das ist, $\frac{7}{12}$ ꝛ gleich seind 21 ϑ, dem vigil; vnd also ist zu vermercken aus dem text, das alle numeri absoluti in einer aufgabe, durch oder von welcher die coniecturation geschicht, werden geheisen wechter vnd vigiles, vnd die do werden coniecturirt von der ꝛ, heist die coniecturatio, durch welche dann die vorgleichung wirdt gefurt gegen gemelten vigilis, vnd jren anhengen, welches halben dann die coniecturation geschicht durch jre Examina der aufgab gemes. Sam also, eine coniecturation ist laut einer proposition oder Aufgabe gefurt, vnd khumbt des einem thail 157 ϑ — 2 ꝛ + 3 ʒ, vnd opposita parte khombt 1 ϑ + 7 ʒ — 42 ꝛ, die wir doch presupponiren einander gleich, verordent durch die examina vigilum jn die Equation zu vorgleichen. Nim einem thail 1 ϑ vnd nim 157 auch 1 ϑ, pleiben 156 ϑ. Nim einem thail 3 ʒ, vnd nim dem andern 7 ʒ auch 3 ʒ, pleiben 4 ʒ; restaurir dem einen thail 2 ꝛ, vnd gib dem andern auch 2 ꝛ, pleiben 40 ꝛ,
73' vnd sein in form | vorgleicht einem thail 156 vnd dem andern 4 ʒ — 40 ꝛ. Restaurir dem ein thail 40 ꝛ vnd dem andern auch 40 ꝛ, pleiben vff einem thail 4 ʒ vnd vfm andern 156 ϑ + 40 ꝛ, vnd stedt jn der sibenden Equation.[1]) Nun mochte einer sprechen: so dann zwei thail gleich einander seind, was darfen wir dann der vorgleichung? Antworten wir, das ehegenamte vorgleichung seind allein von wegen der affirmirung vnd negirung, das ist von den quantiteten additen vnd diminuten, als dann in den coniecturationibus khumbt, das allerwegen zwei thail gleich werden. So dann von equalibus genomen wirdt oder restaurirt wirdet, so werden wider equalia, oder werden equalia auch der angenomen conception, machen aus

1) Dieses durchgeführte Beispiel ist in neuerer Bezeichnung folgendes:

$$157 - 2x + 3x^2 = 1 + 7x^2 - 42x,$$
$$156 - 2x + 3x^2 = 7x^2 - 42x,$$
$$156 - 2x = 4x^2 - 42x,$$
$$156 = 4x^2 - 40x,$$
$$156 + 40x = 4x^2,$$

und es ist also auf die siebente Gleichungsform zurückgeführt.

ehegemelten vorgleichten thail. Durch die sibende Equation khumbt valor des 𝔠𝔢 in numeris 13. Nun haben wir gesatzt erstlich 1 𝔖𝔣 vnd 7 ʒ, das weren 1183 in numeris, vnd 1 𝔖𝔣 ist 1184, minus 42 𝔠𝔢 herabgezogen pleiben 638, vnd souil sollen sein 157 𝔖𝔣 — 2 𝔠𝔢 + 3 ʒ, wann sie seind presupponirt gleich erstlich gesatzt. Nun 157 𝔖𝔣, dauon ziehen wir 2 𝔠𝔢, pleiben 131, addirn wir 3 ʒ, khomen 638 wie oben, vnd ist recht.

Das wollen wir probirn. Wir haben obgemelte thail vorgleicht durch dj assimulation, vnd ist khumen einem thail 4 ʒ, dem andern 156 𝔖𝔣 + 40 𝔠𝔢.
Sprechen wir, | 4 ʒ von 13 seind 676, vnd des andern thails 156 𝔖𝔣 + 40 𝔠𝔢 74
seind auch souil, also were gleich addirt worden 38 in numeris, wann auf yeden paiden ersten thailen was 638, so ist vff disen assimulirten 676, das ist 38 mehr, das dann hernachuolgendt besser gegrundt wirdt zu vorstehen.

Capitulum ultimum, quomodo numerus pregnans per aequationem deducatur in partum ad pariendum numerum absolutum rationalem sive surdum.

Absolutam divisionem numerorum pregnantium aequationi effectum deposcit, eaque numerum nudum rationalem pariet, expletum surdum vero naturae rationamento reliquit binomica normate docente.

Hie endet Algebras sein ander Buch der Gebra vnd Almuchabola vnd beschleufst entlich der signorum eigenschafft, vnd laut zum teutschen also:

Die equation begert vnd erfordert eine offene thailung der zalen, die do geschwengert werden in den signis den effect vnd darzu gebraucht sie entlich erfunden sein, welche equation geporn sein eine plosse vnvernunftige zal, eroffnet die natur aber surden oder irrationalen gesprochen, hatt verlassen die equation der natur zur geberung die Rationirung oder handlung,
als dann die binomischen Regeln diss ercleren werden. | 74′

Solchen text begreiflich zu ergrunden, nemen wir für vns die negsten Capitel die ehegemelten vorgleichten zalen nach der assimulation, die do erstlich waren 1 𝔖𝔣 + 7 ʒ — 42 𝔠𝔢 waren gleich 157 𝔖𝔣 — 3 ʒ, welche dann geschwengerte zalen seind, vnd durch dj gemelte assimulation seind sie pracht jn die siebende Equation zu zweien gleichen thailen, die do waren 4 ʒ, wie vorsteht, vnd den andern 156 𝔖𝔣 + 40 𝔠𝔢, so dann solchs durch dj equation gethailt wirdt, die dann ein offene thailung begert actu vnd nicht in potentia, wann zu der equation bracht werden, zu gebern dj offenbarlichen zal. Also thailen wir durch 4 ʒ, 156 𝔖𝔣 + 40 𝔠𝔢, jnmassen durch die Equation bericht hat, vnnd gebirt den valorem cosse 13 unitates absolutae in numeris, der dann rationalis explicite der natur erkennt-

lich mit seinen vnitaten geporn ist, den wir auch rationaliter mögen handeln durch die geschwengerte zal, darinn er ist verschlossen gewest. Also wir wollen exemplariter setzen erstlich rationaliter dem text gemes, vnd darnach jrrationaliter auf den andern punct, als der text sagt, wir wolten finden dj vernunftige zalen 13, die vns die Equation erfordert hat, durch die geschwengerte zaln der signorum, die do waren gleich peiderseits, als wir vorangezaigt haben, die wir wollen probiren, ob solche ein
75 rationalische | zal sey gewesen in der geschwengerten mutter der signorum. So eroffnen wir den ersten thail, der was 1 𝔑 + 7 ʒ — 42 𝓇 in den numeris absolutis aus 13, vnd steht also 1 𝔑 + 1183 𝔑 — 546 𝔑, wann 1183 seind 7 ʒ von 13, so seind 546 𝔑 42 𝓇. Eroffnen wir den andern thail, der do was 157 𝔑 — 2 𝓇 + 3 ʒ, so wir beide seithenn gegeneinander ansehen, so finden wir, durch 13 𝔑 einander gleich sein gewest die signa, als dann ein schwanger Mutter der zaln 13, wann yeder seithen khomen 638. So wir sie dann vorgleichen mit den negationibus vnd affirmationibus, also das wir ab equalibus equalia nemen oder ad equalia addirn equalia, so khomen oder pleiben equalia. Addirn wir 26 𝔑 dem einen thail, der — 26 𝔑 hat, so bezalt er seine Negation, vnd geben dem andern thail auch 26. Wir nemen dem einen thail 507 𝔑, wann die affirmation vberflus hat, vnd nemen dem andern thail auch souil, wir geben auch dem ainen thail 546 𝔑, so bezalt er auch seine Negation, vnd geben dem andern thail auch souil; wir nemen 1 𝔑 von einem thail vnd nemen dem andern auch souil; also finden wir abermals peiderseitz gleich yder zal 676, der numerus, der dann was in schwangern vnd 4 ʒ eins thails
75′ vnd 156 𝔑 + 40 𝓇 anders thails. | Also ist die Assimulation geschehen, durch 38, die wir zu zweien gleichen thailen addirt haben, das ist zu 638, ist khumen beiderseitz in der vergleichung 676 vnd 676, vnd ist recht.

Aber den surdischen numerum, als der text sagt, der hat der Equation die natur verlassen die Rationirung durch nachuolgende Regel der Binomien vnsers dritten buchs, wann derselbig explicite nicht herauskhumbt, sonder beschlossen wirdt in taube vnvernunftige zaln. Als wir setzen wollen 320 𝔑 + 3 ʒ — 1 𝓇 ist gleich 149 𝔑 + 8 ʒ + 7 𝓇; so wir das vorgleichen, khumbt einem thail 171 𝔑, dem andern 5 ʒ + 8 𝓇, vnd steet in der funften Equation, durch welche, so die signa pregnantia gethailt werden, die vnvernunftige zal $\frac{871}{25}$, von welcher radix $-\frac{4}{5}$ ist die zal, die die Equation begert, vnd hierumb, so ist $\frac{871}{26}$ macht die zal irrationalis, wann wir sie nach gebrauch der vniteten in numeris nicht handeln khunen. Wann wir die handeln sollen, so ist radix von $\frac{871}{25} - \frac{4}{5}$.[1]) Nun ist sie

1) Während die oben gefundene Gleichung $156 + 40x = 4x^2$ die rationale

surde, vnd herumb hat die Equation die natur verlassen das rationament durch binomische Regeln jn vnsern dritten Buch hernachuolgendt.

Explicit liber secundus ALGEBRAE. | 76

Incipit liber tertius ALGEBRAE *Arabis de numeris rationalibus communicantibus atque surdis trium tractatuum, qui ex matre pregnante per aequationes digestas nascebantur absolute.*

Tractatus primus tertii libri.[1])

Rationalis est numerus Gebrae, qui digestis aequationibus absolute unitatum complectitur. Ex hoc manifestum, omnem numerum longitudine radicem esse numeri sui potentionalis, rationalem numerum vero non omnem potentionalem esse radicis rationalem, sed potentiae tantum omnis rationatur unitatis planitie lineae rationalis datae in longitudine.

Hie saget ALGEBRAS in seinem dritten Buch zum ersten von den numeris rationalibus des ersten tractats, vnd laut zum teutschen also:

Das ist ein rationalisch zal des dings, die do khomet aus den eegemelten Equationibus offenbarlich jrer vniteten, damit sie dann gezelt werden, vnd hierumb ist wissentlich, ein jtzliche zal mag sein ein radix rationalis seiner quadratischen zalen, das ist in potentia, vnnd hierumb ist nicht zu vorwundern, das nicht ein yede zal in potentia seines radicis ist rationalis, sondern allein in der macht, das ist in potentia, wirdt ein ytzliche zal gebraucht rationalis der quadratischen vnitet, die dann in der lenge gegeben wird rationalis. | [2]) 76′

Wurzel $x = 13$ besitzt, hat die Gleichung $320 + 3x^2 - x = 148 + 8x^2 + 7x$, welche restaurando und diminuendo in $171 = 5x^2 + 8x$ übergeht, die Lösung $x = \sqrt{\frac{871}{25}} - \frac{4}{5}$, und ist also irrational. Sie hat die Form eines Recisum EUKLID's und lässt sich naturgemäss erst durch die im dritten Buche gelehrte Wurzelausziehung bestimmen.

1) Dieser erste Traktat des dritten Buches handelt von der Ausziehung der Wurzeln. Zunächst müsste man eigentlich sagen von der Erhebung eines Binoms auf die ersten neun Potenzen. Da aber im letzten Kapitel dieses Theiles gesagt wird, dass alles Vorhergehende nur auseinander gesetzt sei, um die Auffindung der Wurzeln zu ermöglichen, so hat der deutsche Bearbeiter die Wurzelausziehung schon in den einzelnen Paragraphen gelehrt. Die Ausziehung betrifft nur rationale Wurzeln aus vollständigen Potenzen.

2) Klarlegung des EUKLIDischen Begriffs: linearrational und in Potenz rational, aber unter Ausdehnung des Begriffs „in Potenz rational“ auf alle nach irgend einer Wurzel irrationale Zahlen, so dass also z. B. 81 als fünfte Potenz angesehen nur in Potenz rational ist, dagegen als vierte Potenz betrachtet sowohl in der Potenz, als in der Länge rational ist. Hier tritt zuerst das Wurzelzeichen

Von solchen text einzufuren den schrifftlichen sin, so nemen wir einen jtzlichen radicem rationalem, der in der lenge, das ist in der vngemultiplicirten zal gesatzt wirdt, dann als Linea, die khein ander zufallen hat, dann longitudinem, also hat auch die zal kheinen andern namen gesatztt in der lenge dann allein, das sie wirdt genant ein radix rationalis einer potentionalischen zal, vnd also mag ein ytzliche zal gesatzt in der naturlichen profusion der lenge der zalen werden oder sein ein radix. Sam also 5 in der profusion der naturlichen zalen wirdt gesatzt in der lenge, wann sie khein andere beschwerung hat, dann das sie die stadt vertritt der naturlichen satzung, darin sie von jrer vnitet ausgangen ist, die dann mag sein der radix jrer potentionalischen zaln, das ist 25. Von gleicherweis die linien 5 in sich vormag potentionaliter den quadrat, das ist den superficien, also vormag 5 an der zal 25, den ʒ, vnd also wird 5 in der lenge rationirt mit 5 vniteten, vnd 25 mit 25 superficien, welche jtzlicher jrer lenge ist vnitas vnd in potentia vnitas, vnd das ist der erst punct vom text. Aber nicht wirdt gesagt, das ein jtzlich potentionalische zal sein rationalisch in der lenge, das ist jres radix, sondern allein in potentia.
77 Wann also wir nemen 7 oder 10 vor 1 ʒ, so wissen wir, | das 7 5 vniteten rationiren, die dann potentionaliter auch seind, nicht longitudine, vnd wiewol jr vnitas potentionalis hat eine rationalische lenge, dann sie gebieret den quadraten vnitatem potentionalem, damit sie 7 rationirt, so wirdt solche lenge nicht rationalisch gegen der leng 7 der potentz, wann die lenge von 7 oder radix ist ∫7, so ist die potentionalische vnitet 1 in der lenge rationalisch, die wirdt mit ∫7 nicht communicirt, vnd also sprechen wir, das ein jtzliche zal mag sein rationalis in potentia, aber nicht allwegen in potentia vnd longitudine, vnd also sagt der text erstlich vniuersaliter, das ein jtzliche zal mag longitudine werden potentionaliter rationalisch, aber nicht vmbgekert, dann ein jtzliche potentionalische zal mag werden longitudine nicht rationalisch, sonder allein in potentia wirdt vniuersaliter ein jtzlich zal rationalisch, das ist mit potentionalischen vniteten gemessen vnd gezelt. Damit man aber mag verstehen, jn welcher gestalt die potentionalischen zalen sollen mit den potentionalischen vniteten rationirt werden, so nemen wir 18 vor 1 ʒ, den wir mit 4 vniteten wollen rationiren. So wir jenen mit 4 vniteten rationirn jn longitudine, so khumbt $4\frac{1}{2}$, das weren auch vnitet der lenge. Nun ist 18 1 ʒ, der do 18 potentionalische vnitet hat, also mussen wir auch 4 potentioniren, werden 16, vnd also

---

auf, noch allein durch einen starken Punkt mit daran befindlichem längeren Zug ∫ bezeichnet. Wie später die Wurzeln mit verschiedenen Exponenten unterschieden werden, wird seiner Zeit auseinandergesetzt werden.

rationiren wir 18 mit 16, khumbt $1\frac{1}{8}$ potentz, das ist $1\frac{1}{8}$ ʒ, | vnd also ist 77′
zu vorstehen, das man lenge mit lenge, das ist radicem mit radice, vnd potentz mit potentz soll rationiren, vnd darumb so wirdt lenge gegen lenge potentionirt rationalisch, vnd potentz gegen potentz auch rationalisch rationirt.

Nun ist not zu wissen, das ein jtzlicher radix in longitudine wirdt rationalisch in potentia durch 8 ductiones pej vns gewonlichen, wann es mag gesprochen werden 1 𝔯 in longitudine des quadrats, des cubi, des ʒʒ etc., jnmassen dann die ductiones nach einander volgendt rationalisch. Wann ein jtzliche zal zu extrahirn radicem furgelegt wirdt potentialiter angesehen vnnd gehalten, hat die alſsdann radicem rationalem, so wirdt sie gesprochen in longitudine vnd potentia rationalis, wirdt sie aber erfunden jres radix der duction, von der sie genandt ist, surda vnd nicht eine gantze radicem rationalem hat, so wirdt sie genandt die zal in potentia allein rationalis, vnd also volget von der quadratischen duction, die dann die erste ist vnter den ductionibus der rationalischen zalen, vnd volgt also das ander Capitel.

Capitulum secundum de hauriendis lateribus numerorum rationalium quadratorum.

Omnium rationabilium ductionum hauriendae radicis quadratum, quod primi planiciei rationalis potentia est radicis, crescere quidem habet duabus radicibus duplicatis gnomone[1]), *quae supplementa descripsimus, cum censiculo.* | [2]) 78

Hie eruolget Algebras von der ersten duction der rationalischen zalen zu sagen, vnnd laut zum deutschen also:

Vnter allen rationalischen ductionibus der schopfenden radix so ist das quadrat oder ʒ die erste macht oder potentz des radix, das ist der zalen jn longitudine, welcher ʒ oder quadrat wachsen ist, das ist gesprochen, so er wechst in die groſs der potentz des radicis, mit zweien radicibus superficialiter gefurt durch den gnomon, die do sprechen werden supplementa,

1) Der Ausdruck „*duabus radicibus duplicatis gnomone*“ ist so zu verstehen: Nach unserem Verfasser ist ja die erste Potenz, das ist *res*, die zweite Duktion, da er *Dragma* als erste rechnet. Die obigen Worte heissen daher nichts weiter als $2xy$, wenn x die Radix und y den Gnomon bezeichnet. In ähnlicher Weise sind die spätern Ausdrücke *triplicatis, quadruplicatis* ... *gnomone* aufzufassen, sie bedeuten also multipliciert mit y^2, y^3 u. s. w.

2) Hier lesen alle Manuskripte, mit Ausnahme von *C. 8*, *censicubo* statt *censiculo*, sie kürzen es sogar mit ʒ𝔠 ab. Dass nur *C. 8* recht hat, ist klar.

das ist, damit die quadratur oder der ʒ complirt wirdt, vnd mit dem zensiculo, das ist mit dem gnomone in sich gefurt.

Von solchen text den vorstandt einzufuren, der ettwas kunstlich ist vnd weniger wissent, so nemen wir vor, 15129 zu rationiren in longitudine, wann wir sie potentionaliter gesatzt haben. Nun wissen wir, das ein jtzlicher zens des ersten limits sein potentz vber den dritten limit, das ist vber den Centenarium, nicht strecket, vnd herumb so rationiren wir gemelten numerum mit dem dritten limit centenario, vnd halten allwegen bei jedem Centenario sein station, jnmassen der text saget, vnnd zihen ab 2 radices mit dem zensiculo. Also hat gemelte zal zwen centenarios, vnd
78′ hierumb haben wir drei stationes. Wir setzen vnter den letzten Centenario | ein vnitet, wann er nit mehr vormag mit seiner potentz dann vnitatem, vnd ziehen ab die potentz der vnitet, vnd surgit der letzte Centenarius,

$$\begin{array}{c} \dot{1}5\dot{1}2\dot{9} \\ 110 \end{array}$$

vnd also haben wir 10 vor radicem gegen dem negsten centenario, die ander station. Nun sagt der text, der quadrat wachse mit 2 radicibus, hierumb zwir 10 ist 20, das wollen wir herabzihen, so offte wir mogen, das mag zwir gesein. Also sprechen wir, das 2 ist der wachsende gnomo, vnd 20 ein supplement. Solchen gnomonem multiplicirn wir mit 20, wirdt 40, das ist *duplicatum,* als der text sagt; solche 40 zihen wir ab von 51 supra caput des andern centenarii, pleiben 11, die setze vber 51. Nun addir den gnomonem 2 zu 10, wirdt 12, vnd multiplicir den gnomonem in sich, wirdt 4, der zensiculus; den zeuch auch von 11, bleiben 7 respectu centenarii.

$$\begin{array}{c} 7 \\ 11 \\ \dot{1}5\dot{1}2\dot{9} \\ 112 \\ 123 \end{array}$$

Nun haben wir 12 vor radicem, der wirdt gegen dem Anfang der zalen gerechnet, vor 120, die duplirn wir, wann der text sagt, er wachse mit 2 radicibus; nun zween radices seind 240, die zihen wir ab, so offte wir mogen, vnd das ist dreymal, vnd wirdt also 3 gnomo; den multiplicirn wir mit 240, wirdt 720, die zihen wir ab, vnd multiplicirn 3, gnomonem in sich, wirdt 9, zensiculus, den zihen wir auch ab, vnd surgit. Also gib
79 der dritten station drey, vnd wirdt 123 radix der furgelegten | zalen rationalis in longitudine.[1])

1) Wir sehen hier, dass unser Verfasser bei Ausziehung der Quadratwurzel

Vnd solchs wollen wir geometrice ostendiren, damit man mercken mag, das der quadrat wechst mit zweien radicibus, gesprochen supplementa, vnd seinem zensiculo. Wir nemen vnitatem, des letzten centenarium, gegen der gantzen zal des andern Centenarij potentionaliter, vnnd wirdt 100, das ist der quadrat *abcd* (Fig. 11), des radix ist 10 in longitudine, das war vor 1 gegen dem ersten Centenario, aber hie wird es gegen der gantzen zaln gerechnet des andern Centenarii. Nun 2 radices von 10 sein 20, das multiplicirn wir mit dem gnomo *cf*, der 2 in latere hat, wirdt 40, dann 2 mus der gantze gnomo sein gegen der andern station der zwei supplementa.

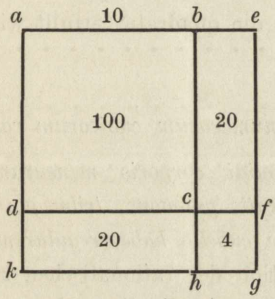


Fig. 11.

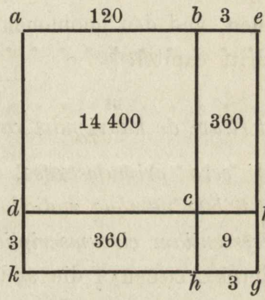


Fig. 12.

Nun ist der gnomo zu erfullen, die quadratur, auch aufsen. Multiplicir 2 auch in sich, wirdt 4, zeuch ab, also haben wir 12 der andern station, das ist der ander erwachsen quadrat vnd *ag*, als 144, angezogen auf der andern station des Centenarij, vnd also haben wir noch einen Centenarium 729. Ruckten wir weither 12, so khomen 120, wann wir sie einer Figur weither geruckt haben, das ist 10, vnd ist der quadrat *ad*
(Fig. 12) 14400. Nun facit 2 radices 240, das mussen wir | duplicirn mit 79'
dem gnomone 3, khomen 720, das seindt 2 supplementa *bf* vnd *ck*, also ist auch aufsen 9 der zensiculus zu dem complement des quadrates *ag*. So der erfullt wirdt, khumbt das *ae* in longitudine, ist rationalis mit 123 vnitates, vnd ist recht.

Solchs wollen wir dich auch arithmetice demonstrirn. Wir setzen ein zal, die wir dann auch in den andern ductionibus gebrauchen wollen, vnd nemen sie durch zifferes, damit man mag erkhennen, das do radix vnd ʒ

---

noch genau so verfährt wie Regiomontan mit Überwärtsrechnung und Durchstreichung der benutzten Ziffern, nur dass er die Punkte, welche die Hunderte bezeichnen, nicht unter, sondern über die Ziffern setzt. Die Beispiele haben sich nur im Göttinger Manuskripte und in *C. 8* erhalten. *C. 405* und *C. 349* fügen sie nicht hinzu.

vnterschidlich khomen in der multiplication. Sam also, wir multiplicirn wollen 1001, vnd machen hieraus 1 ʒ, furen den in sich selbst, khomen 1002001. Nun ist radix 1001, so nun 1000 wirdt jn sich gefurt, khomen 1000000. Nun ist der mit einer vnitet gewachsen. Nun 2 𝔯 von 1000 sein 2000, vnd geb sie zu 100000, khumbt 1002000. Nun multiplicir den gnomonem 1 in sich, khumbt 1, das addir dazu, khumbt 1002001, das ist, so ich 1001 in sich multiplicr, khumbt gemelter quadrat wie oben geschrieben. Wir sprechen deshalben, das der wachsende quadrat zu seiner completur bedorffe zwei supplementa, die wir radices nennen, vnd den gnomonem, damit die quadratur erfullt wirdt, vnnd
80 volgt das dritt capitel. |

1001 radix
ʒ 𝔯 gnomo
1002001

Capitulum tertium de hauriendis radicibus numerorum cubicorum rationalium.

Cubum vero primum esse, quod solidi corporis mensuram metitur rationalem; tribus namque radicibus triplicatis gnomone, tribusquc tetragonis duplicatis crescentiam circumscriptionis cum cubello habet regularem.[1])

Hie cleret Algebras die andere duction der rationalischen zalen, vnd sagt, das der cubus sei an der ordnung die ander duction, aber an jr selbst wirdt die aus dreyen planen Linien oder zalen zusam gefuget, jnmassen dann der quadrat aus zweien, aber an der ordnung der satzung gemelter duction wirdt der cubic, die andere duction, beschrieben, vnd laut zum teutschen also:

Der Cubic ist das erste thail, der do thailt die mensur der solidischen corporn rationalis, welche die wachsung hat der circumscribirung regulistrirt mit dreyen radicibus getriplicirt, mit 3 ʒ geduplicirt durch den gnomonem, mit sampt dem gnomene in sich cubice, genannt dem cubello.

Solchen text vorstentlichen einzufuren, nemen wir fur zu rationiren 1860867 in longitudine. So wisse, gleicherweis das der zens sein potentz
80′ des ersten limits nicht strecket | vber centenarium, also streckt auch der Cub sein potentz des ersten limits nicht vber den Milenarium, vnd hierumb rationiren wir gemelte zal durch den Milenarium, vnd halten auch bei yden Milenario ein station, vnd zum letzten im anfang der zalen, vnd thun dann gleicherweis, wie in dem quadrat. Wir suchen in dem letzten millenario die grosten potentz des cubi vnd ist 1, die ziehen wir herab, vnd rucken solche vnitet vnter den ersten milenarium, vnd bedeut 10, vnnd halten die andere station. Nun wechst der cub mit 3 radicibus, das

1) Nach dem oben Gesagten heisst das also:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^3y + 3xy^2 + y^3.$$

ist 30, vnd mit 3 ʒ von 10, ist 300, die mogen zwir abgezogen werden, vnd also wird 2 gnomo. Nun triplir 10 radices, vnd wird 30, vnd solchs triplir: sprich 2 mal 30 ist 60 vnd 2 mal 60 ist 120, vnd solchs pei der Reststation abgezogen. Nun 3 ʒ von 10 seind 300, solchs duplir auch durch den gnomonem, wirdt 600, die zeuch auch bei der station herab. Darnach fure 2, den gnomonem, cubice, wirdt cubellus 8. Den zeuch auch herab pei der station, vnd restat bei dem ersten Milenario 132.

$$
\begin{array}{l}
\quad\ \ 3 \\
\ \ 142 \\
\dot{\cancel{1}}8\dot{\cancel{6}}\cancel{0}86\dot{7} \\
\cancel{1}\ 12
\end{array}
$$

Nun rucken wir 12 auch weither biſs zum anfang vnd bedeut 120. Solchen radicem machen wir dreimal, wirdt 360. Nun 3 ʒ von 120 seind 43200, die mogen wir dreimal herabzihen, | hierumb wird 3 gnomo. Also triplirn 82
wir durch gnomonem corporaliter 3 radices, das ist 360, khomen 3240, das zichen wir herab. Nun multiplicirn wir superficialiter 3 ʒ auch durch gnomonen khumen 129600, das zichen wir auch herab in der dritten vnd letzten station im anfang der zalen. Also haben wir noch cubellum; multiplicirn 3 cubice, den gnomonem, khomen 27, das zichen wir auch herab; die abgeschrieben zal gehen gantz auf, also sprechen wir, das gemelte zal in longitudine wird gerationirt mit 123 vniteten.

Solchs wollen wir demonstriren in der vorgesatzten zal, vnd nemen

1001 𝔯
cℓ ʒ 𝔯 gnomo
100300 3001 .

vor vns 1000 in vnitate pro radice. Also were der Cubic dauon 1000000000. Solcher Cubic soll wachsen in vnitate. Nun erwechst der mit 3 radicibus, das wern 3000, solchs addirn wir zu 1000000000; wir nemen nun 3 ʒ von 1000, werden 3000000, das addirn wir auch sampt dem gnomone, wirdet 100300 3001, vnd das ist der Cubic von 1001, welcher gewachsen ist in vnitate.

Solchs wollen wir auch demonstriren in continuis. Wir haben gesagt erstlich die zal 1860867, vnd haben sie rationirt mit zweien Millenarien, welches ersten potentz ist gewesen vnitas, die dann gegen den andern Millenario ist 10, das sei der Cubic *ay* (Fig. 13), welches latus ist *ak* 10, vnd sein potentz 1000. Nun sol | er wachsen mit 2 vniteten, jnmassen 82′
erstlich angezaigt, in der andern station, das wirdt der gnomo *ec*. Nun wechst er mit 3 radicibus *eb* vnd *de* vnd *qp*, das sind 30, vnd solche drei supplementa sollen wir solidiren mit dem gnomo 2, vnd werden 120, souil sind die supplementa solida. Noch seind 3 ʒ, damit er wechst, der erste *af* oder auch *bg*, der dritt *gd*. Nun 1 ʒ von 10 seind 100, das weren 300, die sollen auch solidirt werden durch den gnomonem 2, vnd werden 600. Noch

ist gebrechen der Cubellus 2, der mus auch solidirt werden *ec*, wirdt 8, vnd das alle seind crescentz des Cubs. Das addire, als 1000, des radix were 10, vnnd darnach 120, das weren 3 radices, vnd 600, das weren 3 ʒ, vnd 8, das was der cubellus, werden 1728. Alsouil ist der gantz cubus *ag*, des radix ist 12, wann 10 der erst vnd 2, damit er gewachsen ist, das

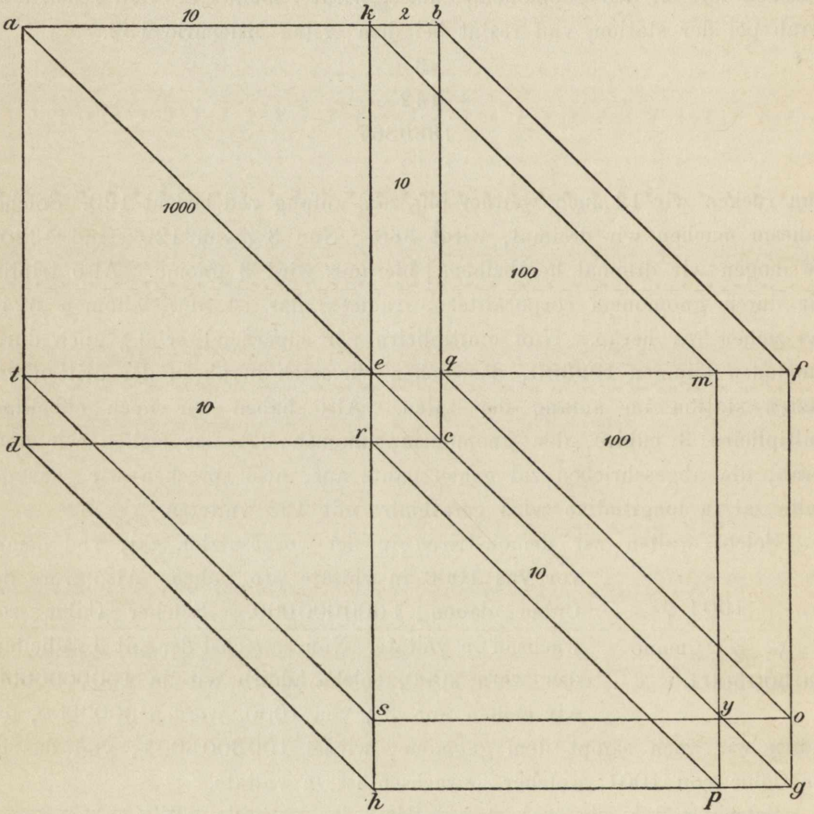


Fig. 13.

wirdt 12. Souil ist der cubus bei der andern station der furgelegten zalen herabgezogen. Solche 12 ist gegen der ersten figuren der furgelegten zal nach Ordnung der figuren, die bedeuten 120; die cubir wir, facit 1728000. Der cubus sey *ay*, als wie vor. Nun ist vor angezaigt, das er mit 3 vniteten
83 wachsen soll bey der letzten station, | das wirdt der gnomo. Nun wechst er mit 3 radicibus *ab*, *de* vnd *qp*, das seind 360, die sollen wir solidiren wie vor, khumen ⟨3240⟩. Nun 3 ʒ von 120 seind 43200, die gemelten *af*, *bg* vnd *dg*. Noch ist gebrechendt der cubellus 3, ist 27, das addire alles zusamen, vnd khumbt *ag* der gantze Cubus 1860867, vnd ist recht, vnnd probirt.

Capitulum quartum de hauriendis radicibus vel lateribus numerorum rationabilium quadratorum de quadratis.

Census de censo radicem radicis gerens tetragonicam ipse quidem complectitur quatuor cubis duplicatis gnomone, sex censibus triplicatis, quatuor radicibus quadruplicatis cum gnomonico parallelogrammo circa diametrum, inalterabilem quandam circumscriptionem crescentiae habet rationalem.[1])

Hie zeiget Algebras die dritte duction genant zensus de zenso vnd laut der text zum teutschen also:

Census de censu ist ein duction begerende der vorgelegten zaln ⟨radicem⟩ des radicis quadratisch gefurt, welche duction wirdt vmbgeben mit 4 cuben duplicirt mit dem gnomone, mit 6 ʒ getriplicirt, mit 4 radicibus quadruplicirt, vnd mit dem gnomone gefurt der duction gemes, pey dem diametro | gesatzt, durch 83′
welche duction also zens de zens vnvorwandelig vmbgeschrieben wirdt rationalischer erwachsung.

Solchen text vorstentlichen einzufuren, nemen wir vor zu rationiren 228886641 in longitudine. haben wir gesagt, das der Cubic des ersten limits sein potentz nicht strecke vber dem Millenarium, also streckt auch ʒʒ sein macht nicht vber decem millenarium, sonder darunter. Hierumb so rationiren wir die obgemelten zalen mit 5 figuren, vnd halten aber in gemelter form pej jtzlichem zehntausent ein station, als wir jn Cubic gar eigentlich zu vorstehen geben haben. Wir suchen zu dem letzten limit die grosten potentz der duction, die dann mag 1 sein, vnd zihen die ab, vnd rucken solchen vnitet vnter den nechsten distinguirten limit, vnd bedeut 10, jnmassen im Cubic.

1 152
228886641
1 10

Nun ist die duction wachsende mit 4 cubis. So cubir wir 10, khomen 1000, das ist 4000, vnd 6 ʒ von 10 seind 600, vnd 4 radices seind 40. Solchs addirn wir zusamen, facit 4640, die rucken wir in gemelter zaln 12888, das mag zweimal gesein, vnd also wirdt der wachsende gnomo 2, wie in dem cubic. Nun duplirn wir die 4 cꝭ, das ist 4000, facit 4000, vnd triplicir die 6 ʒ, das sein 600, khomen 2400, vnd quadruplicir | 4 ꝛ, 84
das seindt 40, werden 320: solchs addir alles zusamen, facit 10720; das subtrahir pey der station gehalten des geruckten Limit von der zaln mit sampt dem gnomone 2 in sich gefurt der duction gemes, werden 16, vnd

1) Das heisst: $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$.

restat vom limit. anzurechnen 21526641, vnd haben also der station gehalten vnd ausgericht. Nun rucken wir die 10 mit dem gnomone, das ist 12, zu dem anfang der zalen, die do seindt bedeutent 120, die werden also genomen vor die radices.

~~1~~ 152
~~2~~2~~8~~~~8~~6641
~~1~~ 120

Nun machen wir 4 cubic von 120, seindt 6912000, vnd 6 ʒ von 120, seind 86400, vnd 4 ꝛ seind 480: solchs addirn wir alles zusamen, facit 699880. Besihe, wie offte man solche zal mag abzihen von ehegesetzten zaln 21526641, das mugen wir dreimal nemen, vnd also sprechen wir wie vor, das drei wirdet der gnomo. Darumb duplicire die 4 𝔠 mit dem gnomone, werden 20736000, vnd 6 ʒ, das seind 86400, die triplicir mit dem gnomone, werden 777600, vnd 4 ꝛ, das seind 480, die quadrupliciren wir, machen 12960. Solchs addir alles zusamen, werden 21526560. Solchs subtrahir von eegemelten zalen, vnd pleiben 81, vnd so du den gnomonem in sich furest nach laut der duction, so khumbt 81, vnd gehet die ehegemelte zal gantz auf, vnd also sprechen wir, das dj gemelte zal ist ʒʒ,
84′ vnd sein radix ist 123, vnd defsgleichen machstu thun jn andern. |

Vff das wir aber dem text genug thun, jnmassen sich zu demonstriren gepurt, nemen wir die anfengklichen zalen jm quadrat vnd cub genomem.

𝔠 ʒ ꝛ gnomo

Also sprechen wir, das 100300 3001 sei der cubic des radix 1001. Solchen radicem furen wir in den cub, wirdt naturlich daraus ʒʒ. Nun sehen wir in dem Cubo, das die letzte vnitet ist der cubic von 1001, darnach 3 seind 3 ʒ, vnd darnach wieder 3 seind 3 ꝛ, vnd die letzte figur vnitas ist der gnomo. So wir nun gemelten cubo haben pracht jn ʒʒ, der dann ist wie hie:

ʒʒ 𝔠 ʒ ꝛ gnomo
100400600400 1 ,

sprechen wir obgemelter massen, das die letzte vnitet in der zalen triplicibus ist der ʒʒ von 1000, vnd 4 ist 4 𝔠 duplicati von 1001, vnd 6 seind 6 ʒ triplati von 1001, vnd die letzten 4 seind 4 ꝛ quadruplati von 1001, vnd die letzte vnitet ist gewesen der wachsende gnomo. Vnd also sihest du eigentlich, so jee weither der duction ist so extendirt, so offte sich mehr manigfaltigen die ꝛ etc., vnd also magstu dich in allen zalen halten. Gehet aber die zal nicht gar auf mit der duction, so hastu gefunden den grosten radix, vnd residuum magstu darnach mit einer gelehenten zaln resoluirn, jnmassen du in nachuolgenden Capiteln horen wirst, wie man die residua
85 sol | gebrauchen. Nun volget von den sursoliden, wie man da radicem

suchen soll, nicht quadratam, nicht cubicam, nicht censodecensicam, sonder jn welcher duction es aus ist gangen von dem rationalischen radice, der do ist gewachsen durch die multiplicirung in rationalisch satzung.

Capitulum quintum de radicibus hauriendis numerorum sursolidorum loco quidem ductionis rationalis quinto.

Sursolidum autem ampliorem cumulum soliditatis gerit, quinque censuum de censu duplicatis, decem cubis triplicatis, decemque censibus quadruplicatis, quinque radicibus quintuplicatis cum gnomone circumscribitur.[1])

Hie eroffnet vns Algebras seine vierte duction an der funfften stadt gesatzt, welcher text zum teutschen also lautet:

Sursolidum also genandt, das ist ein ungeregularisch corpus, ist begern eine grossere solidische heufung dann die fordern ductiones. Wann das genandt sursolidum wirdt vmbschrieben mit 5 ʒʒ geduplicirt, mit 10 cℓ getriplicirt, nach formirung der corporum, mit 10 ziensen quadruplicirt vnd mit 5 radicibus quintuplicirt, mit dem gnomo der duction gemes gefurdt. | 85

Welchen text besser zu ercleren, wollen wir vornemen den sursolidischen radicem zu extrahiren vnd rationiren jn longitudine. Sam also, wir setzen wollen zu rationiren die zal 71̇6703̇146875̇. So mercken wir, das wir jn mit dem sechsten limit distinguiren mussen, das ist mit 100000, wann 9 der digitus in dise duction gefurt wirdt, extendirt sich nicht vber gemelten limit, sonder vorbleibtt darunter. Wir signiren vnd suchen vnter dem letzten gedistinguirten limit, als vnter 71, was das groste sursolidum moge sein; finden wir, das 2 der radix des grossten ß. So wir das herabzihen, als 32, pleiben 3967031̇46875̇. Solche 2 jetzt gefunden rucken wir zum andern distinguirten Limit, vnd bedeut 20, jnmassen vorhin offt angezaigt. Solche 20 nemen wir vor radicem, vnd wollen suchen den wachsenden gnomonem. Nun sagt der text, das sursolidum wachse mit 5 ʒʒ, die mache aus 20, werden 800000, mit 10 cℓ von 20, seind 80000, mit 10 zensibus von 20, seind 4000, vnd mit 5 radicibus von 20, seind 100. Solche addir alle zusamen, werden 884100. Dise zal suche in vorgelegter zal wie offte, mag 3 mal gesein vnd nicht mehr, vnd wirdt der gnomo, damit das sursolidum wachsen solle.

3
~~4~~9
~~7~~~~1̇~~6703̇146875̇
~~2~~ 20

1) Das bedeutet: $(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$.

Nun duplicirn wir die 5 ʒʒ, das seind 800000, vnd werden geduplirt mit dem gnomone 3, vnd khomen 2400000; nun triplicirn wir die 10 ℭ mit gemeltem gnomone 3, khomen 720000; nun quadruplicir die 10 ʒ auch
86 mit dem gnomone | 3, khomen 108000; quintuplicir 5 radices, die do seind 100, auch mit dem gnomone 3, khomen 8100, vnd fure den gnomonem der duction gemes, wird 243, vnd addir solchs alles zusamen, khumbt 3236343. Das nim von der zalen, die dann vorgelegt ist worden, vnd restat 73068846875. Vnd nun rucken wir 20 vnd den gnomonem 3, das ist 23, zu der ersten figur vnd halten alda die letzte station, vnd ist bedeuten 230. Solche zal nemen wir vor den radicem vnd sagen nachdem die duction wachsen ist mit 5 ʒʒ etc. Darumb machen wir 5 ʒʒ von 230, ist 13992050000; nun 10 cubi von 230 seind 121670000; suchen wir 10 ʒ von 230, khumen 529000; nun 5 ℞ von 230 seind 1150: solchs addirn wir alles zusamen, khumbt 1414250150. Solche zal suche in den gemelten restanten von egemelter zal vorgelegt ist, das ist in 73068846875, vnd das mag 5 mal gesein. Also sprechen wir, das der gnomo ist 5, damit die sursolitet wachsen.

~~3~~7

~~4~~~~9~~30688

~~7~~~~1~~~~6~~~~7~~~~0~~~~3~~~~1~~46875

~~2~~ ~~2~~~~0~~ 230

Nun duplicir die 5 ʒʒ mit dem gnomo 5, werden 69960250000, vnd das seind 5 geduplicirt ʒʒ. Nun sollen wir die 10 cubos, das seind 121670000 triplicirn, das ist mit 5 mal 5, als 25, multiplicirn, werden 3041750000. Sagt der text, der ß wachse mit 10 ʒ quadruplicirt. Nun quadruplicirn wir 10 ʒ, als 529000 mit 5, vnd werden 66125000. Noch wechst der ß mit 5 ℞ quintuplicirt mit dem gnomone; nemen wir 5 ℞, die seind 1150,
86′ die quintuplicirn wir, | werden 718750. Solchs alles addirn wir zusamen, vnd werden alle vmbgeschrieben supplement gesamelt 73068843750. Solchen ziehen wir von obgeschribener zal an negster station vberplieben, vnd pleibt 3125, vnd das ist der gnomo von 5 der duction gemes gefurt, vnd geht die zal gantz auf vnd ist ein sursolitet, des radix ist 235.

Solchs dich zu berichten, das sursolitet wechst mit ehgenanten circumscriptibilia, so nemen wir vor die zal in ʒʒ vorgenomen

ʒʒ	ℭ	ʒ	℞	gnomo
100	400	600	400	1 ,

vnd multiplicirn solche mit dem ℞ 1001, so erwechst der ß. Wir multiplicirn, khomen

ß	ʒʒ	ℭ	ʒ	℞	gnomo
100	50	100	1000	500	1 ,

also findestu in ehgemelter zaln, das die letzie vnitet ist sursolidum, die ander 5 ʒʒ, die dritte 10 cꝭ, die vierdte 10 z, die funffte 5 radices vnd die erste vnitet ist der gnomo, vnd so offt dann die duction gehet, so oft manigfeltigen sich die ꝛ, ʒ, cꝭ vnd ʒʒ. Vnd desgleichen magstu in andern zalen extrahirn radicem sursolidam, wie wol er weder quadrat noch cubic, noch quadrat von quadrat nicht ist, doch bezaiget er seinen radicem nach ordnung der duction, wie offte dje multiplication ist ausgangen von der ersten ꝛ. Nun volget von dem zensicubo das sechste Capitel.

Capitulum sextum de hauriendis lateribus numerorum censicuborum loco, quo situantur rationales quidem ductiones, | 87

Censicubus autem crescit sex sursolidis duplicatis, quindecim censibus de censu triplicatis, viginti cꝭ quaternatis, quindecim censibus quintuplatis et sex radicibus sexcuplatis cum gnomico parallelogrammo.[1])

Hie eroffnet ALGEBRAS seine funffte duction an der sechsten stadt gesatzt, den radix auszuzihen, welcher text zum teutschen also laut.

Zensicubus (gesagt ein zins des cubi, als 2 ist radix von 64 in dem zensicubo, also ist von 2 der zens 4, von welchen 4 ist 64 der cꝭ, vnd wirdt gesagt herumb zensicubus), welcher wachsen ist mit 6 sursolidis geduplicirt, mit 15 ʒʒ getriplicirt, mit 20 cꝭ quadruplicirt, mit 15 ʒ quintuplicirt, vnd mit 6 ꝛ sextuplicirt mit sampt dem gnomone, das ist ein winckelhacken, zu erfullen die quadratur.

Von solcher rationalischen duction ist zu extrahiren der radix, jnmassen wie vorgesagt ist, wie wol nicht not were, von diser duction zu setzen ein sonderliche rationirung, wann radix cubica von einer zal vnd alſsdann radix quadrata derselbigen radix cubica beweist radicem; ʒcꝭ ist deshalben also sein nam ausstrecken. Aber vff das wir der angefangen ordnung der duction halten mogen, wollen wir setzen zu rationiren in longitudine 172358602780396096. Nun haben wir die negste duction distinguirt mit 6, | das ist mit 100000, so mussen wir nach ordnunge solche zalen distin- 87′
guiren mit 1000000, das seind 7 figuren, vnd heben an vnter dem letzten limit, vnd ziehen herab dic groſse potentz des ʒcꝭ, das ist der ʒcꝭ von 7, der ist 117649, pleiben biſs auf den limit 50709 etc., solchen septenarium rucken wir zu dem negsten gesatzten vierten limit, vnd ist bedeuten 70, jnmassen in den vorigen ductionibus gesatzt ist. Saget der text aigent-

---

1) Nämlich:
$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6.$$

```
8152
545071126
65719248604
17235860278039609 6
      7    70   740
           4
```

lich, der ʒ𝔠 wachse mit 6 ß geduplicirt, suchen wir also 6 ß von 70, die seindt 10084200000; suchen wir 15 ʒʒ von 70, seind 360150000; wir suchen 20 𝔠, jnmassen der text sagt, die seindt 6860000; suchen wir 15 ʒ von 70, die seindt 73500; wir suchen 6 𝔯, seind 420. Solche circumscriptibilia sollen wir zusamenn addirn, werden 10450283920. Solche zal such in obgemelter restanten vorgelegter zal vberpliben vom anfang des limits zu rechnen, do wir haben die station gehalten, das mag nicht 5 mal sein, sondern viermal, das magstu wol versuchen. Nun sagt der text mit 6 sursoliden wachse der ʒ𝔠, die dann seind 10084200000, die sollen wir mit dem gemelten gnomone 4 gefunden duplicirn, werden 40336800000. Nun sollen wir die 15 ʒʒ gefunden, die do seind 360150000, triplicirn mit dem gnomone 4, werden 5762400000. Nun quadruplicirn wir die 20 gefunden 𝔠, die waren 6860000 auch mit
88 gemelten | gnomone 4, werden 439040000. Wir quintuplicirn die 15 ʒ, die waren 73500, auch mit gemeltem gnomone 4, vnd werden 18816000. Noch haben wir 6 𝔯 zu sextuplicirn. Nun 6 𝔯 von 70 die machen 420, sextuplicirn wir mit dem gnomone 4, werden 430080. Solche zaln der circumscriptibilia addir alle zusamen, werden 46557886080, die zeuch vom vberplibenen restanten in vorgelegter zaln, vnd pleiben von der station 8152116700 etc. Noch haben wir den gnomonem 4 auch zu furen der duction gemes, der dann macht 4096; die zeuch auch herab bei der station, vnd pleiben 8152112604 etc., vnd also haben wir dise station ausgericht. Nun rucken wir jn fort zu der ersten figur, das ist 70 vnd 4, seind 74, vnd werden bedeuten 740 gegen der ersten, jnmassen in den andern ductionibus, vnd werden aber genomen vor den radix. Nun suchen wir aber die circumscriptibilia von 740, den radix, so finden wir, das sechs sursolida von 740 seind 1331403974400000, wann, so wir solchen wollen suchen, so multiplicirn wir 740, den radix, pifs in sursolidum, vnd nemen das 6 mal, also auch die gemelten andern circumscriptibilia. Wir nemen 15 ʒʒ von 740, die seindt 4497986400000, wann 1 ʒ ist 299865760000, dauon seind leicht die circumscriptibilia zu machen. Nun suchen wir, was 20 𝔠 machen von 740, nun ist 1 𝔠 405224000, das multiplicirn wir mit 20, das seind 8104480000. Nun suchen wir 15 ʒ von 740, die seind 8214000, wann 1 ʒ ist 547600. Nun suchen wir zuletzt 6 𝔯 von 740, das seind 4440. Solche supplementa alle addirn wir zusamen, damit der
88′ ʒ𝔠 ist wachsen, | werden zusamen gesummirt 1335910073498440. Solche zal such im vberplieben restant; das mag nicht mehr dann 6 mal gesein, jnmassen man den quotient jn einer diuision nemen soll, vnd solche 6 wirdt

der gnomo. Sagt der text die 6 ß sollen mit dem gnomone duplicirt werden. Hierumb duplicir die ß, werden 7988423846400000; nun triplicirn wir die obgemelten ʒʒ durch den gnomonem, werden 161927510400000; nun quadruplicir die 20 cℭ mit dem gnomone 6, werden 1950567680000; nun quintuplicir die 15 ʒ, werden 10645344000; nun sextuplicirn wir die 6 radices, werden 34525440: solchs addir alles zusamenn, wirdt 8152112604393096 mit sampt dem gnomone 6 der duction gemes gefurt, vnd geht gantz auff die ehgemelte zal; das magstu probirn, wie in der sursolitet gesagt ist.

Capitulum septimum de hauriendis lateribus numerorum bissursolidorum loco ductionis, quo situantur, rationalis quidem dicti.

Bissursolidum autem continuum quoddam ductuum adiutum capit septem censicuborum duplicatorum, vigintiuno sursolidorum triplicatorum, triginta quinque censuum de censu quadruplicatorum, triginta quinque cuborum quintuplicatorum, viginti uno censuum sextuplicatorum, septemque radicum septuplicatarum cum gnomunculo, quo situ multiplicatio ab initio ordinis processerat, tot multiplicis ductionis subsumuntur crescentia circumscriptibilia diametro. | [1]) 89

Hie saget Algebras vom Bissursoliden, welche duction an der siebenden stat gesatzt vom ꝛ aus vnd nach ordnung, so ist der Bissursolitet die sechste duction, welche duction nach dem text laut zum teutschen also:

Das Bissursolidum, das ist ein hangende duction der andern, welche erfullung nimet mit 7 ʒcℭ, mit 21 ß, mit 35 ʒʒ, mit 35 cℭ, mit 21 ʒ, mit 7 ꝛ vnd mit dem gnomone der duction gemes, doch dermassen, an welcher stadt die multiplication vom anfang hat ausgangen, souil werden gemanigfaltigt die circumscriptibilia durch den gnomonem. Als die duction ist an der 7den stadt aufsgangen von dem radix, darumb werden die ꝛ geseptuplirt durch den gnonomem; von dem ʒ ist sie aufsgangen an der sechsten stadt, darumb werden die ʒ gesextuplirt; sie ist aufsgangen von cℭ an der funfften stadt, darumb wirdt der cub quintuplicirt durch den gnomonem; sie ist geruckt von ʒʒ an der vierdten stadt, darumb werden die ʒʒ qudruplicirt; sie ist gewandert von ß an der dritten stadt, darumb werden die sursolidi getriplicirt durch den gnomonem; sie hat gewandert an die andere stadt vom ʒcℭ, deshalb werden die ʒcℭ geduplicirt durch den gnomonem, vnnd also ist

1) Das heisst:

$$(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7.$$

Von hier an führt der Bearbeiter die Wurzelausziehung nicht mehr durch, sondern zeigt, dass, wenn die Zahl wächst, die Potenz die angegebene Formel erfüllt.

es fort zu vorstehen in der nachuolgenden duction allermas, wie wir jtzo erclert haben von dem circumscriptibilibus.

89′ Vff das abber gehalten werd ein ordnung vorgesatzter | duction, so wollen wir rationiren ein zal in longitudine wachsende der duction gemes. Wir setzen nach ordnung der proportionalischen satzung, das 128 ist ein biß in potentia, des radix ist 2 in longitudine. Nun wollen wir setzen, das gemelter biß sol wachsen mit dem gnomone 3, also das er in 5 mochte khumen, zu probirn vnd zu erforschen, ob der gemelte biß wachse, jnmassen wie der text sagt, mit seinen circumscriptibilibus angezaiget. Nun hat 128 pro radice 2 in longitudine, sagt der text die duction wachse erstlich mit 7 ʒcℭ; nun ist ʒcℭ von 2 64, das machet 7 mal, facit 448; das duplicirn wir mit dem gemelten gnomone 3, facit 1344. Nun sagt der text weiter, die duction wachse mit 21 ß, nun 1 ß von 2 ist 32, der machen 21 gleich 672, die triplicirn wir mit dem gnomone 3, werden 6048. Nun wechst die duction weiter mit 35 ʒʒ, so ist 1 ʒʒ von 2 16, das machen wir funfundreifsig mal, macht 560, die sollen wir quadruplicirn mit dem gnomone 3, werden 15120. Sagt der text, die duction strecke sich auch mit 35 cℭ. Nun ist 1 cℭ von 2 8, der machen 35 wie hie 280, das mussen wir quintuplicirn mit 3, facit 22680. So wechst auch die duction mit 21 ʒ. Nun ist 1 ʒ 4, vnd der 21 machen 84, die sechstuplirn wir, facit 20412. Noch hat er zu wachsen mit 7 𝔯. Nun ist 1 𝔯 2, der 7 machen 14, die septuplirn wir mit dem gnomone 3, vnd khumen 10206, Noch ist gebrechent der quadratur, der gnomo 3, der soll der duction gemes gefurt
90 werden, sein | 2187, vnd das seind alle circumscriptibilia des gemelten biß. Die addirn wir alle zusamen, machen 78125, vnd das ist der biß von 5. Wann, so 5 der duction gehorig gefurt wirdt, khomen 78125. Vnd also magstu alle zaln extrahirn, von welchen du dann haben wilt den radix biß, welcher clerlichen in den vordern ductionibus ausgedruckt ist. Wann alle extraction der ductionum seind einformig, als du dann jm quadrat erstlich vnd andermals jm cub, vnd nachuolgendt anderweise mit den stationibus erfunden hast nach ausweisung der duction mit jren circumscriptibilibus, hierumb die grossen vormieden plieb. Vff das dem leser, vnd der solche sachen erfarn will, nicht verdrossen werde, die grosse der zaln zu multiplicirn, habe ich gedacht, solche erwachsung jn cleinern zaln zu eroffnen, dich in grossen, gleicherweise jn den vorigen zu halten wissen. Wie du aber sollt erfarung haben, aus was vrsachen die gemelte duction mit eegemelten circumscriptibilibus ist wachsen vnd nicht mit den andern minder oder mehr, haben wir die letzlich jm quadrat, cubic vnd ʒʒ jn numeris zu demonstriren eroffnet ein zal, welche, so du sie jn dise duction furst, findestu aigentlich jn simpler multiplication alle wachsende vmbstende

diser duction, welche zal von erster duction bifs zu letzter gleichmessig gefurt das letzte Capitel der ductionum dich berichten wirdt. 90′

Capitulum octavum de hauriendis lateribus numerorum census censui de censu loco ductionis rationalis dicti.

Census vero censui de censu crescentiam circumscriptionis suscipit octo bissursolidis duplicatis, viginti octo censicubis triplicatis, quinquaginta sex sursolidis quadruplicatis, septuaginta censibus de censu quintuplicatis, quinquaginta sex cubis sextuplicatis, viginti octo censibus septuplicatis, quoque octo radicibus octuplicatis, cum gnomonico circumscriptibili complemento.[1])

Hie saget vns Algebras von dem ʒʒʒ, vnd ist nach ordnung die siebende duction. Sie wirdt aber an der achten stadt von dem ꝛc ausgehen, welcher text laut zum teutschen also:

Zensus zensui de zensu nimet die wachsung der vmbschreibungen supplementa mit 8 bissursolidis geduplicirt, mit 28 ʒc𝔢 getriplicirt, mit 56 sursolidis quadruplicirt, mit 70 ʒʒ quintuplicirt, mit 56 c𝔢 sextuplicirt, mit 28 ʒ septuplicirt, vnd mit 8 c𝔢 octuplicirt, mit sampt der gnomonischen erfullung der vmbschreibung der duction gemes gefurt.

Vff das die ordnung gehalten werde, jnmassen jn vorgesatzten ductionibus, wollen wir diser duction extraction auch eroffnen, wiewol nicht not ist, die zu setzen, dann sie mag mit dem radice quadrata volfurt werden. Von ordnung vnd fundament wegen, darzu | wir sie gebrauchen werden, wollen 91
wir setzen ein cleine zal zuvor wachseu. Wir nemen 1256, der text begerende ʒʒʒ, des ꝛc 2 sol vnd ist, der sol wachsen mit 3. Saget der text der ʒʒʒ sol wachsen mit 8 biß. Nun ist 1 biß 128, das nemen wir 8 mal, facit 1024, das sollen wir duplicirn mit dem gnomone 3, jnmassen vorgesagt ist, wirdt 3072, wann der ʒʒʒ hat ausgeruckt an die andere stadt fur den biß, darumb multiplicir den mit dem gnomone. Saget der text der ʒʒʒ sey wachsende mit 28 ʒc𝔢 getriplicirt. Nun ist 1 ʒc𝔢 64, den mach 28 mal, facit 1792, das sollen wir triplicirn mit dem gnomone 3, facit 16128. Nun wechset er weither mit 56 ß quadruplicirt. Nun ist ein sursolidum 32, das sollen wir 56 mal machen, facit 1792; das sollen wir mit dem gnomone 3 quadruplicirn, facit 48384. Er wachst auch mit 70 ʒʒ. Nun ist 1 ʒʒ 16, das machen wir 70 mal, facit 1120, das sollen wir quintuplicirn mit dem gnomone 3, facit 90720. Er wachset fort mit 56 𝔠𝔢 gesextuplicirt. Nun

1) Das heisst:

$$(x+y)^8 = x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8xy^7 + y^8.$$

ist 1 cℓ 8 von 2, das machen wir 56 mal, facit 448; das sollen wir mit dem gnomone 3 sesduplicirn, facit 108864. Er wechset furter mit 28 ʒ septuplicirt. Nun ist 1 ʒ 4, das machen wir 28 mal, facit 112, das mussen wir mit dem gnomone septuplicirn, wirdt 81648. Er wechst auch zuletzt mit 8 ꝛ geoctuplicirt. Nun ist 1 ꝛ von obgemelten ʒʒʒ 2, vnd das achtmal genomen facit 16; das sollen wir octuplicirn mit dem gnomone 3,
91′ facit 34992. Noch hat | die quadratur erfullung mit dem gnomone der duction gemes gefurt. Hierumb multiplicire den gnomonem so lang biſs in die duction ʒʒʒ khomet, facit 6561. Solche circumscriptibilia sollen wir alle zusamen addiren, khomen 390625, vnd ist das der ʒʒʒ von 5, wann wir eigentlich gesagt heben, das 256, des radix 2 ist, solle wachsen mit 3, das wirdt 5 jn der Crescentz, vnd hierumb ist zu vormercken, wie er hat gewachsen, also ist er auch zu extrahirn aller form zu behalten, als wir dann im Cubic vnd quadrat gar grundlich eroffent haben. Warumb wir aber dise angezeigte ductiones so weit strecken vnd gestreckt haben, werden wir befinden, so wir werden von den solidischen equationibus sagen vnser Gebra vnd Almuchabola. Denn, als wir vormals vermeldung gethun haben, wie der cubic vnd andere auch der solidischen Equation seind, so ist die ordnung vnter der proportionalischen satzunge, das die do sollen eingehen jn die Aporismata oder Equationes, sollen nach ordnung fallen der gesatzten ordnunge, so es geschicht durch ein ordentlichen saltum. Als mogen wir wol setzen, das do φ + ʒ + cℓ werden vorgleicht ꝛ, oder so wir setzen cℓ vnd φ werden vorgleicht ꝛ vnd ʒ, oder so wir setzen cℓ vnd ꝛ werden
92 vorgleichtt | ʒ + φ, vnd der one zal. Hierumb zu seiner zeit dieselbigen mit den vorgesatzten durch besondere vnd behende wege mit den ductionibus der Equation der soliden vnd planen zu bringen, haben wir gedacht, dise ductiones also zu vorfuren, vff das wir haben mogen einen eingang, von dem wir dapfer sagen werden, wie ein jtzliche vorgleichung jn vnser Gebra vnd Almuchabola gebraucht soll werden.[1]) Nun volget zu sagen von der letzten duction ccℓ.

---

1) Hier sagt der Bearbeiter klipp und klar, er wolle an späterer Stelle zeigen, wie man Gleichungen lösen könne von der Form $a + bx^2 + cx^3 = dx$, oder $cx^3 + a = dx + bx^2$, oder $cx^3 + dx = bx^2 + a$. Wir haben schon oben S. 490 auf diese Stelle aufmerksam gemacht. Sollte der Verfasser wirklich diese Lösung besessen haben, und zwar aus arabischer Quelle? Denn Cardano's *Ars magna* erschien doch erst im Jahre 1545, das heisst in demjenigen, in welchem die Göttinger Handschrift angefangen wurde, und diese ist, wie ich schon oben agte, unter keinen Umständen die Originalhandschrift.

Capitulum nonum de hauriendis lateribus numerorum cuborum de cubo rationalium.

Cubus de cubo, qui statu decimi limitis ponitur, nec consueta ultra progressionem eius numerositate sit transductio, quoniam in infinitum protenderetur multitudo proportionalis descripti ordinis, ipse quidem complectitur novem ȝȝȝ duplicatis triginta sex bissursolidis triplicatis, octoginta quatuor censicubis quadruplicatis, centum quidem viginti sex sursolidis quintuplicatis, et centum viginti sex censibus de censu sextuplicatis, octuaginta quatuor cubis septuplicatis triginta sex censibus octuplicatis, novemque radicibus nonetuplatis, cum cubiculo de cubo gnomonico complemento.[1])

Hie saget Algebras von seiner letzten duction, cubus de cubo genant, vnd wirdt gesatzt an der achten duction, sie ist aber von dem ꝛ an der neundten stadt ausgangen, vnd laut gemelter text zum teutschen also: 92′

Cubus de cubo, der do wirdt gesatzt pei dem Ende des zehenden Limits, wann 9 der letzte Limit ist pei zehen. Es ist auch nicht gewonlich, das die vbertrettung geschehe vber gemelte zal des cubi de cubo der gemelten duction, wann die zal der proportionalischen satzunge wirdt gestreckt mit angehengter multiplication piſs an ende. Er wirdt umbgeben mit 9 ȝȝȝ zu wachsenn geduplicirt, mit 36 biß getriplicirt, mit 84 ȝcℭ quadruplicirt, mit 126 ß quintuplicirt, vnd mit souil ȝȝ gesestuplicirt, mit 84 cℭ septuplicirt, mit 36 ȝ octuplicirt, mit 9 radicibus nonuplicirt vnd mit dem wachsenden gnomo der duction gemes gefurt, welcher erfullung ist der quadratur.

Von diser duction die ordnunge zu halten, jnmassen wir vorgethun haben, nemen wir vor ein zal 512, welcher radic ccℭ ist 2, die sollen wachsen mit dem gnomone 2, also das der wachsende ccℭ in 4 khome, vnnd wie du hier jnnen thust, also magstu den extrahirn, als du im cubic vnd quadrat grundtlich vnterricht bist, welche weyse vorendert jn allen ductionen gehalten wirdt. Der text sagt, der ccℭ wachse mit 9 ȝȝȝ. Nun ist 1 ȝȝȝ von 2, 256, die sollen wir machen 9 mal, facit 2304; das sollen wir mit dem gnomone duplicirn, das ist mit 2, wirdt 4608, | das ist das 93
erste circumscriptibile. Sagt der text furter, er wachse mit 36 biß. Nun ist 1 biß von 512, des ꝛ ist 2, das ist 128, das mache 36 mal, facit 4608; das sollen wir mit dem gnomone triplicirn, werden 18432. Nun wechst

---

Das heisst endlich:

$$(x+y)^9 = x^9 + 9x^8y + 36x^7y^2 + 84x^6y^3 + 126x^5y^4 + 126x^4y^5$$
$$+ 84x^3y^6 + 36x^2y^7 + 9xy^8 + y^9.$$

er furter mit 84 ʒcł. Nun ist 1 ʒcł von 2, der ꝛccł von 512, das ist 64, das wollen wir machen 84 mal, facit 5376; das sollen wir quadruplicirn mit dem gnomone 2, werden 43008. Sagt der text weither, der ccł wachse mit 126 ß quintuplicirt. Nun ist 1 ß von 2, dem radix, 32, das sollen wir 126 mal nemen, wirdt 4032; das sollen wir mit dem gnomone 2 quintuplicirn, facit 64512. Sagt der text furter der cubus de cubo wachse mit 126 ʒʒ. Nun ist 1 ʒʒ von 2, dem radix, 16. Multiplicir 126 mit 16, facit 2016; das sollen wir sestuplicirn mit dem gnomone 2, werden 64512. Nun wechst er furter mit 84 cł. Nun ist 1 cł 8 von dem radix 2, das machen wir zu 84 malen facit 672; das wollen wir septuplicirn mit dem obgemelten gnomone 2, werden 43008. Er wechset furter mit 36 ʒ octuplicirt. Nun ist 1 ʒ von 2, dem radix, 4, das zu 35 malen facit 144; die octuplicirn wir mit 2, dem gnomone, facit 18432. Nun wechst er zuletzt mit 9 radicibus. Nun ist 1 ꝛ 2, der 9 machen 18, die nonuplicirn wir
93′ mit 2, dem gnomone, werden 4608. Nun sollen erfullen sein quadratur | der gnomo der duction gemes gefurt, ist 512. Das sollen wir alles zusam addirn, so finden wir, das er ist in 4 gewachsen, 262144, vnd desgleichen wirdt er auch extrahirt. Solche Circumscriptibilia findestu jn nachgesatzter

ccł	ʒʒʒ bß ʒcł ß ʒʒ cł ʒ ꝛ gnomo **1000900360084012601260084003600090001**
ʒʒʒ	bß ʒcł ß ʒʒ cł ʒ ꝛ gnomo **10008002800560070005600280008000 1**
bß	ʒcł ß ʒʒ cł ʒ ꝛ gnomo **1000700210035003500210007000 1**
ʒcł	ß ʒʒ cł ʒ ꝛ gnomo **1000600150020001500060001**
ß	ʒʒ cł ʒ ꝛ gnomo **10005001000100005000 1**
ʒʒ	cł ʒ ꝛ gnomo **1000400060004000 1**
cł	ʒ ꝛ gnomo **1000300030001**
ʒ	ꝛ gnomo **100020001**
ꝛ	gnomo **10001**

[1]

1) Diese Tabelle ist sehr instruktiv und zeigt die Folge der Binomialkoeffizienten in sehr übersichtlicher Weise.

figuren vom 𝔯 aus gemultiplicirt pis in den ccℓ. Darinnen mogen wir sehen alle wachsende supplementa, vnd haben sie gesetzt dermassen, das die figure significatiue nicht mogen zusamen komen von wegen der ziffern entzwischen, vff das der verstandt der supplement nicht vorplendet werde durch zusamenfugung der significatiuen. Also so der 𝔯 in sich gefurt wirdt, als 10001, so khumbt der ȝ, als 100020001; also bedeut 1 den ȝ, der do wachsend ist mit 2 𝔯, das seind 2 𝔯 geduplicirt durch den gnomonem, das letzte 1 in sich. So aber nun 𝔯 gefurt wirdt wider ȝ, so khumbt 1000300030001, das bedeut, das der cub mit 3 ȝ vnd 3 𝔯 sein wachsunge hat vnd mit dem gnomone der duction gemes, vnd zugleich fort. | 94

Capitulum decimum de distinctione limitum numerorum, quorum sit extractio ductionum hauriendorum laterum rationalium.

Causam autem geniturae ductionum monstravimus propter exhaurienda latera, quorum in primis limitibus numerorum distinguamus. Quaelibet enim rudix primo limite contenta censica censum quidem infra tertium producit, cubica vero cubum infra quartum; censica vero de censu potentiam suam infra quintum explicat. Quo enim loco ductio ordine proportionali situatur, illo limite distinguetur numerus hauriendae radicis. Ultimo ergo distincto limite cuiuslibet radicis extrahendae detrahatur eius potentia, quae quidem anterioranda erunt limitibus, ut augmentum circumscriptionis supplementorum, gnomonorum quoque crescentiam circa diametron inalterabilem complectionis accipiant. Omnium autem extractionum utamur formulis inscriptis tabularum.

Hie saget Algebras sein letzt intentum der duction, sagende:

Wir haben demonstrirt die vrsachen der geburt gemelter ductionen von wegen zuvorstehung jrer laterum, das ist jrer extrahirung, welche duction, so wir wollen aufszihen oder extrahiren jrre latera oder wurtzeln, sollen wir zum ersten die zal durch limit distinguiren, dermassen | ein jtzlicher radix aller 94′ duction des ersten limits, das ist digitorum der neun figur, gepirt den ȝ vnter der dritten dem limit, das ist dem centenario; den cubic vnterhalb dem vierten, das ist dem Millenario, den ȝȝ vnter dem funfften; das ist dem decemmillenario, vnd also fort, wo die duction wirdt gesatzt der vorgemelten proportionalischen satzung der signorum, desselbigen limits sollen die zal gedistinguirt werden, von welcher geschopft soll werden der radix. Also wollen wir etrahiren sursolidam radicem, das ist der sursolidus gesatzt in proportionalischer satzung vom dragma an der sechsten stadt, hierumb sol er mit dem sechsten limit, das ist mit dem

centocentenario gedistinguirt werden. So das also ist geschehen, bej dem letzten distinguirten limit einer jtzlichen duction radix zu extrahirn sol herabgezogen werden die potentz der duction gemes, welche also zu verandern sein, das ist zu ruck zum negsten distinguirten limit, vf das also durch den gnomonem die gemelten circumscriptibilia oder supplementa erwachsen, vnd erfullung bej dem diametro der superficien vnd corporum vnverruckt nemen werden. Aber in allen extractionen der gemelten ductionibus gebrauchen wir die formula der tabelen des ersten
95 limits digitorum, den wir also mussen presupponiren. | [1])

ꝛ	2	3	4	5	6	7	8	9
ʒ	4	9	16	25	36	49	64	81
ce	8	27	64	125	216	343	512	729
ʒʒ	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
ß	32	243	1024	3125	7776	16087	32768	59049
ʒce	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441
biß	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969
ʒʒʒ	256	6561	65536	390625	1679616	5764801	16777216	43046721
cce	512	19683	262144	1953125	10077696	40353607	134217728	387420489

95' | Wann du wissen bist, das du in 81 khein extraction khanst erstrecken, wann es ein einiger digitus ist, sein radix, dergleichen in andern ductionibus, so wir wollen extrahirn radicem sursolidam in 37, haben wir nach ordnung khein andere extraction, dann das es allein ein einiger digitus ist, der so helt des grosten sursoliteten radicem, das ist 2, vnd hierumb sagt der text von der tabellen des ersten limits. Wie nun ein yetzliche duction sol extrahirt werden, haben wir angezaigt, wie die stationen, so der text nennet, verandert sollen werden, vnd hierumb wollen wir hiermit vollendett haben den ersten tractat vnsers dritten buchs vnser Gebra vnd Almuchabola von den rationalischen zalen vnd jren lateribus, das ist jrer wurzeln. Das vestigium der tabellatur ist an der andern seiten dises blats

1) Hier ist also die von dem deutschen Bearbeiter schon bei den einzelnen Potenzierungen befolgte Anweisung gegeben, allgemein die Wurzeln der Zahlen zu suchen, und die Angabe, dass die Potenzierung nur gezeigt sei um der Wurzelausziehung willen. Die dann folgende Tabelle der neun ersten Potenzen der Einer ist dazu natürlich unumgänglich nöthig.

beschrieben des ersten limits aller ductionen, welche dir nutz sein jn gesatzten extractionibus zu erkhunden vnnd zu erforschen den gnomonem einer gesetzlichen duction gemes.

Tractatus secundus libri tertii ALGEBRAE *de communicantibus numeris, et primo proposito solo numero, an primus sive compositus contra se inveniatur tantum. Capitulum primum.*[1]) | 96

Omnis numerus, rationans totum et detractum rationat et residuum. Ex hoc manifestum: Omnis numerus residuum potentia numerantis a toto detracta numerans, numerat etiam numerum totum. Ex eo ipsum esse probatur omnium suorum communicantium rationalem compositum. Residuum autem incommensurabile si fuerit, descensu continuo primus et incompositus contra se invenitur mensurae unitatis rationalis.

Hie hebet ALGEBRAS an seinen andern tractat des dritten buchs, sagende von den communicanten der rationalischen zalen, vnd eroffnet das anfengklich zum teutschen lautendt also:

Ein ytzliche zal, die do rationiret oder zelet das gantze vnd herabgezogen, die zelet auch das vberpleibent. Hierumb wirdt offentlich, ein ytzliche zal, die do zelet das vberpleibendt, so anders derselbigen zelenden den zalpotentz oder quadrat von dem gantzen ist gezogen worden, so zelet auch dieselbige zal die gantze zal. Heraus wird probirt, das dieselbige zal ist rationalisch vnd zusamengesatzt durch gemelten Communicanten der Multiplication. So aber das vberpleibendt vngezelt pleibt durch angende herabsteigendt von den zalen zu zalen, so wirdt die vorgelegte zal primus vnd incompositus, das ist, das sie khein andere zusammensatzunge hat, dann das sie mit der gemeinen Mensur der vnitet, die do ist ein rationirung aller zalen, wirdet gezelet. | 96′

Von disen text schrifftlich den vorstandt einzufuren, cleret er nemblichen drey punct, dadurch er im letzten beschleust, das vilen geometricis noch nicht ist demonstrirt worden. Zum ersten nemen wir vor den ersten punct, sagende, ein ytzlich zal, die do zelet oder thailet eine gantze zal

1) Der zweite Traktat des dritten Buches handelt von ganzen Zahlen. Darin findet sich die Auseinandersetzung des einfachen falschen Ansatzes, der dem YLES und seinen Schülern zugeschrieben wird, des doppelten falschen Ansatzes, den die Araber benutzt hätten, der Ta-yen-Regel mit ihrer Begründung und die Lösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades in ganzen Zahlen, welche den Indern zugeschrieben werden. Dieser Abschnitt dürfte geschichtlich höchst beachtenswerth sein.

vnd die herabgezogen, sol auch rationiren das vberpleibent. Als wir nemen 144 vor die gantze zal, vnd herabgezogen 81, vnd das vberpleibent ist 63 von not wegen; so wir nemen ex suppositione 9 den numeranten, der zelet die gantzen vnd 81, hierumb mus 9 zelen das vberpleibent, als 63, von notwegen vnd nicht ex suppositione. Also mugen wir hieraus ziehen vmbgekert: ein yede zal, die do zelet das vberpleibent, so die potentz des numerantis ist herabgezogen von dem gantzen, dieselbige zal zelet auch die gantze zal. Als 9 zelet das vberpleibendt 63, vnd 81 ist die potentz des numerantis 9, die do von dem gantzen 144 ist herabgezogen, so ist, 9 numerirt 63 das vberpleibendt vnd 81 das abgezogen, so numerirt auch 9 die gantze zal, das ist 144. Also saget der text, das wir mogen wissen, ob ein yede zal sey compositus oder primus, das ist, das wir mogen wissen, so die alle proportionirt ist, das man khan finden alle zalen, die sie thailen oder zelen. Vns wirdt vorgeleget 144, zu finden alle seine communicanten.[1]) Wir suchen die potentz 144, ist 12, oder den grosten radix, so die zal
97 nicht gantz aufgeht. Also | sprechen wir, das 12 vnd 12 sein die grosten communicanten der gemelten zaln. Wir decendiren, als der text sagt: sie seind descenso continuo, vnd nemen 11, so wissen wir, das allweg die negste quadrat jre distantz habe durch die imparen jrer gnomon. Also, so ich die potentz von 11 herabzeuch von 144, bleiben 23, das thut 11 vnd 12 geaddirt, wann so wir die naturlichen satzunge der zalen alwegen ein parem vnd jmparem zusamen addirn, erwachsen angehende alle imparen die distantz der quadraten. Nun finden wir, das 11, der Numerant, nicht zelet 23, das Residuum, darumb zelet er auch nicht 144, vnd ist mit 11 kheine Mensur sonder 0. Wir descendiren vf 10, sprechen 10 vnd 11 seind 21, die addir zu 23, khumen 44, das ist das Residuum, so die potentz des numerantis 10 herabgezogen wirdt von 144. Also finden wir, das 10 nicht zelt die 44, darumb zelt es auch nicht die 144 (die 10). Wir staigen fort, addirn 9 vnd 10 wirdt 19, die addir zu 44, wird 63, das ist das Residuum des numeranten potentz, so die herabgezogen, als wir vorgemelt haben. Solchs Residuum wirdt gezelt von 9 zu 7 malen, also sagen wir, das 9 die 144 zelt. Addir 9 vnd 7, ist 16, so offt zelt 9 die 144, das seind die andern communicanten. Wann 9 numerirt die detraction 9 mal, so ist 63 das residuum, wird 7 mal numerirt: so ich addire 9, das detract numerirt,

1) Diese Methode, sämtliche Divisoren einer beliebigen Zahl zu finden, ist nicht ohne Interesse. Sie wird hier und später *Scala* Jacob genannt, doch wohl im Hinblick auf die Himmelsleiter, welche Jacob im Traume sah, wenn auch die Beziehung auf sie unklar ist, wie so vieles in diesem Werke. Es ist hier auch die Eigenschaft ausgesprochen, dass, um sämtliche Divisoren einer Zahl zu erhalten, man nur bis zur Quadratwurzel aus ihr die Zahlen darauf zu untersuchen braucht.

Scala Jacob.

12	12
11	0
10	0
9	16
8	18
7	0
6	24
5	0
4	36
3	48
2	72
1	144

vnd 7, das residuum numerirt, wirdt totum numerirt zu
16 mal. Wir setzen fort zu 8, vnd addirn 8 zu 9, | ist 17, 97'
das addir zu 63, wirdt 80, vnd das zelt der numerant 8 zu 10 mal. Addir 8 zu 10, wirdt 18, also finden wir 8 vnd 18. Wir steigen fort zu 7, vnd 8 wirdt 15; addirn wir zu 80, wird 95, die zelt der Numerant 7 nicht, hierumb wird er auch nicht zelen 144. Wir ruckten zu 6, vnd addir zu 7 khumbt 13, die addirn wir zu 95, khumen 108, die zelt der genant numerant 6 zu 18 mal, hierumb zelt er auch 144, als die proposition sagt. Nun addir 18 vnd 6, ist 24, also seind 6 vnd 24 die vierten communicanten. Nun rucken wir zu 5, vnd 6 addirn wir, wirdt 11, zu 108 wird 119, die zelt der Numerant nicht, wann sein potenz 25 herab wirdt gezogen, pleiben 119, hierumb zelt auch 5 die 144 nicht. Wir steigen vnter sich zu 4, vnd 5 ist 9, das addirn wir zu 119, wirdt 128, die zelt der Numerant 4 zu 32 mal, hierumb zelt auch 4 die 144 nach angezaigter proposition. Addir 4 vnd 32, wirt 36, also ist 4 vnd 36 der funffte communicant. Wir descendirn an der laiter zu 3, vnd 4 werden 7, die geben wir 128, wird 135, die zelt der numerant 3 zu 45 mal, hierumb aigentlich zelt er auch 144. Addir 3 zu 45, khomen 48, so offt numerirt der Numerant 144. Also haben wir die
sechsten Numeranten. | Wir descendirn vff 2, vnd 3 wirdt 5, zu 135 wirdt 98
140, die zelt der numerant 2 zu 70 malen, also numerirt er auch 144, dann 2 zu 70 wirdt 72, vnd also haben wir den letzten communicanten ausgenomen die vnitet, die do ist ein gemeine mensur alle zaln. Also haben wir funden, so wir vorlegen ein einige zal, zu finden, ob die ist primus oder compositus. Finden wir sie als jtzt, sprechen wir, sie sey zusamengesatzt von ettlichen multiplicatiuen zaln, finden wir aber, das Residuum incommensurabile ist in dem absteigen, als der text sagt, mit den Numeranten, als er spricht: *residuum autem incommensurabile etc.,* vnd finden khein angende zal von dem radice aus piſs auf die vnitet, so sprechen wir, das die zal von kheiner mag gezelt werden, dann mit der vnitet, vnnd ist incompositus, dann so ein zal an sich selbst incompositus ist, so ist sie mit kheiner andern multiplicirn oder communicirn.[1]) Vnd in disem absteigen haben wir an dem ꝶ an der zalen, den wir nennen den Numeranten, vnd sein potentz detractum, vnd das vberpleibendt Residuum. Also ist nicht not von der zaln anfang zu descendiren, sondern von jrem

1) Die beschriebene Methode ist also auch zur Bestimmung der Primzahlen ausreichend.

radix anzuheben, als der text sagt: *potentia numerantis;* vnd also mogen wir finden ein yde zal, ob die wider sich selbst primus sei oder nicht, vnd
98′ ist dise proposition soluirt. |

Capitulum secundum de communi mensura unitatis numerorum in longitudine et potentia.

Omnium numerorum communis mensura est vnitas. Ex hoc manifestum, omnes eadem esse communicantes longitudine et potentia, longitudine quidem proportione, ut numeri ad numerum, rationalis datae, potentia vero, quemadmodum quadrati numeri ad numerum quadratum superficiei quadratae unitatis rationantis rationabilis datae in longitudine.[1])

Hie eruolget Algebras sagende, nachdem er vormals gecleret hat jm letzten spruche: *invenitur mensurae vnitatis rationalis etc.,* von diser vnitet sagt er, welche ist eine gemeine Mensur aller zalen, vnd laut zum deutschen also:

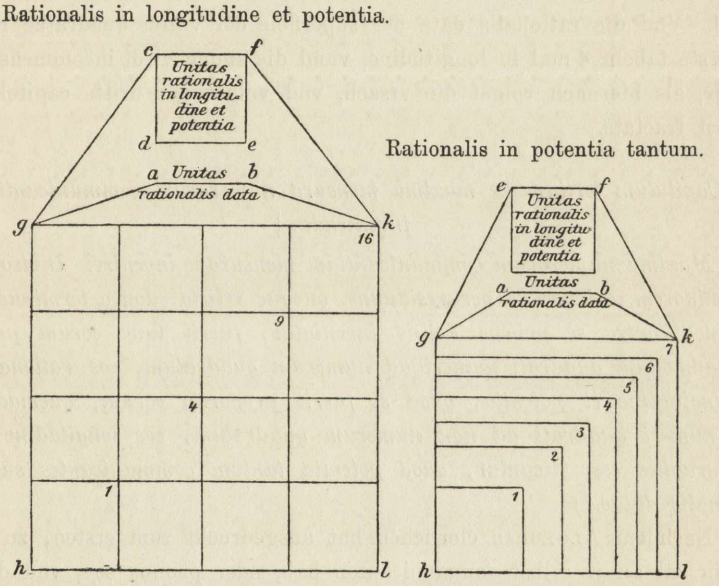
Aller zalen ist ein gemein mensur vnitas, dann alle zalen haben vrsprungklich jren anfang wachsendt aus der vnitet. Hierumb wirdt offenbar, das alle zalen communicirn in der lenge vnd potentz mit der obgemelten vnitet, doch also: in der lenge als ein zal habendt ist ein proportz zu der andern der gegebenden vnitet, die do sollen zelen. Als 7 vnd 5 communicirn in der lenge, wann vnitas zelt 7 zu 7 maln vnd 5 zu 5 maln, hierumb wirdt die proportz nicht anders angesehen, dann als 7 gegen 5. Ist der
99 vnitet nach in der potentz, aber so ist vnitas | aber eine gemeine mensur als einer quadratisischen zalenn mit der andern, zu rationiren mit einer quadratischen unitet, die do geben ist, damit zu rationirn in potentia. Als so wir 5 vnd 7 ansehen als quadraten, so ist die gemelte vnitet in 7 oder 5 ein quadrat, welche vnitet ist in der lenge gegeben ein vnitet, die so sie potentionirt wirdt, entspreust die quadratische vnitet, damit die quadraten sein zu rationirn.

Disen text schrifftlich einzufuren vf einen vorstentlichen sin, so nemen wir vor 7 vnd 5, vnd sagen, das ein yede zal ist nach dem fordersten capitel an sich selbst primus vnd alleine mit der vnitet zu zelen, die do ist ein gemeine mensur aller zaln, als dann das capittel erinnert. Vnd nachdem

---

1) Dieses Kapitel setzt noch einmal ausführlich den Unterschied zwischen in der Länge rational und in der Potenz rational auseinander, sowie denjenigen, der zwischen der Einheit als gemeinsames Maass sowohl aller in der Länge als auch aller in der Potenz rationalen Zahlen besteht.

7 wirdt gezelt zu 7 mal, vnd 5 zu 5 mal in der lenge, so sehen wir sie an, das sie seind rationalische radices der quadraten, jn welchen sie vermaglich sein, als 7 vermag 49 den quadrat, welchen quadrat messen 7 schuch in der lenge, vnd 5 vermag 25, den quadrat, welchen quadrat messen 5 schuch jn der lenge. Also will ich ansehen 25 vnd 49 als quadraten, so mensurirt sie die quadratische vnitet, welche jr geben ist den schuhen jn der lenge, als der schuch in der lenge von 7 sein quadrat mensurirt 49 zu 49 maln, vnd der schuch in der leng von 5 sein quadrat mensurirt 25 zu 25 mal. Hierumb mogen wir mercken, das ein yede vnitet in der leng bedeut ein rationalische quadrat vnd in potentia, | vnd widerumb nicht ein yeder quadrat 99′ in potentia bedeutet ein rationalische vnitet in der leng. Wan $\surd 7$, des quadrat angesehen hat 7 quadratische vnitet in potentia, welche jtzliche



Communis mensura unitas in longitudine et potentia.

Communis mensura unitas in potentia tantum.

Fig. 14.

jn der lenge nicht ist rationalisch mit der lenge von 7 des quadrat, vnd herumb wird 7 in der lenge der quadrat nicht rationirt mit der rationalischen data, welche gegeben ist jren quadratischen vniteten jn der lenge, und hieraus werden die zaln erkhent, pei vns surdi genent, von welchen nachuolgent wirdt gesagt. Also mogen wir clerenn, das alle zalen mogen sein rationalis in potentia, wann 7 mag ein quadrat sein, vnd sein radix ist surd. Ein ytzliche zal ist auch in longitudine rationalisch, so sie wirdt angesehen vor radix irer potentz, den sie vormag; als 7, wann wir sie ansehenn, das sie 49 vormag, so ist sie rationalis zu messen mit vniteten als 7, welcher vnitet ist geben der superficie in der lenge potentz, welche superfices quadrata zelet 49 zu 49 malen. Also beschliefsen wir, das vnitas ist ein gemeine mensur aller zalen, doch gespaltener meinung, als der text sagt. In der lenge, so ist sie linearis, vnd in der potentz, ist die vnitet superficialis, also dann clerlich die tabellen Moisy ercleren.

100 Tabulae lapideae Moisy (Fig. 14 auf S. 549) sequuntur.[1] |

In disen zweien steinern tafeln Moisy finden wir, das die erste mit der andern communicirt allein in potentia der superficien vnitaten; wann die erste ist rationalis in longitudine vnd potentia, so ist die ander allein in potentia rationalis. Haben hierumb eine gemeine mensur, das ist eine superficiem der vnitet, der sie alle rationirt, die erste 16 mal vnd die ander 7 mal. Vnd die rationalis data der superficie der vnitet quadratae rationirt die erste tabeln 4 mal in longitudine, vnnd die ander wirdt incommensurabilis mit jr, als hiernach volget die vrsach, vnd volget das dritte capitel vnsers andern tractats.

Capitulum tertium de maxima mensura numerorum communicantium
100′ *invenienda.* |

Maxima numerorum communicantium mensuram invenire. Diviso maiore per minorem, minoreque per residuum, quoque relicto, donec terminus eos in minimos contra se primos exiens inveniatur, fuerit tunc eorum proportio, quemadmodum quadrati numeri ad numerum quadratum, eos rationales esse in longitudine et potentia, quod si fuerit proportio eorum, quemadmodum non numeri quadrati ad non numerum quadratum, eos longitudine incommensurabiles esse dicuntur, quod potentia tantum communicantes superficiei rationalis datae.[2])

Nachdem Algebras clerlichen hat ausgedruckt zum ersten, zu finden, ob ein zal an jr selbst communicanten hab, oder primus sey, vnd darnach, das alle zaln haben ein gemeine mensur, die vnitet, hie saget er von der

---

1) Auch diese beiden Figuren sind eine Anspielung auf die Gesetzestafeln des Moses.

2) Dieser Paragraph lehrt das Euklidische Verfahren das grösste gemeinsame Maass zweier Zahlen zu bestimmen. Die am Ende desselben gegebene Figur der *Virga Aaron*, die an den zur Schlange gewordenen Stab Aaron's erinnern soll, zeigt zugleich, dass die zu untersuchenden Zahlen sowohl in der Potenz als in der Länge rational sind, wenn sich die Quotienten durch den gemeinsamen Theiler wie zwei Quadratzahlen verhalten, dagegen nur in der Länge rational, wenn dies nicht der Fall ist.

grosten mensur oder von den grosten Communicanten zu finden zweier zalen,
welcher text zum teutschen laut also:

Zu finden die groste Mensur der communicanten zalen soll
also geschehen, so do gethailt wirdt die groste zal mit der
minsten, vnd die minste durch die vberpleibenden, vnd das vber-
pleibend durch das negste verlassen etc., also lang biſs do ge-
funden wird ein terminus oder zal, welchs sie auſszeucht die
vorgelegten zalen in die contra se primos, das ist das sie fort
zu kheine andere wider mogen gethailt werdenn dann jn die
vnitates, dauon gesagt ist. So dann das also volfurt ist, vnd sie
jn die cleinsten zal pracht seind, | haben sie die proportion 101
gegeneinander als ein quadratische zal gegen der andern, so
sprechen wir, das die vorgelegten zaln seind rationales communi-
cantes jn der lenge vnd jn potentia; ist aber der resoluirten zal
kheine gegen der andern als ein quadrat gegen dem andern, sagen
wir, das die vorgelegten zaln seind in der lenge incommensura-
biles, das ist, das sie nichtt mit einander gemensurirt werden,
vnd werden gesagt in der potentz allein communicantes mit der
quadratischen superficie, die gelihen wirdt der vnitet rationalis
datae in der potentz.

Von welchen text zu sagen vnd den zu leutern, so will ich setzen
zwo zalen 279 vnd die ander 496, vnd wollen sehen, jn welchen form die
miteinander communicirn jn der grosten Mensur. Sagt der text, wir wollen
thailen 496 mit 279, pleiben 217. Nun sollen wir thailen 279 mit 217,
das ist die kleiner zal mit dem vberpleibend, pleiben 62; nun sollen wir
das residuum 217 thailen mit 62, khumbt im restant 31; nun sollen wir
thailen 62 in 31, vnd geht gantz auf. Also sagen wir, nachdem der text
sagt, das 31 ist der terminus, das ist die zal, die sie aussucht in die
minsten zwo zalen nach jrer proportion, vnnd 31 thailet sie bede, vnd ist
die groste Mensur. Nemlich 496 mit 31 khumen 16. Nun thailen wir
279 mit 31, khumen 9, also sagen wir, das die gemelten zaln seind in
der cleinsten proportion | 9 vnd 16, welche zwo zaln sich zusamen halten 101′
jnmaſsen als zwen quadraten, sam 279 gegen 496. Derhalben sagen wir,
das 279 vnd 496 seind in potentia vnd longitudine commensurabiles. In
potentia so mensurirt 31 den quadrat 279 zu 9 malen vnd 496 zu
16 malen, vnd in longitudine so mensurirt 31 des quadrats lenge 279 zu
3 mal vnd 496 zu 4 maln, gleicherweis als 9 vnd 16 communicirn in longi-
tudine, als 9 zu 3 malen mit der vnitet, vnd 16 zu 4 malen, also mogen
wir demonstratiue beweisen, das jre equa multiplicia auch also communicirn.
Nemblich so wir die vnitet, die do mensurirt 9 vnd 16 in longitudine, mit

Virga Aaron.

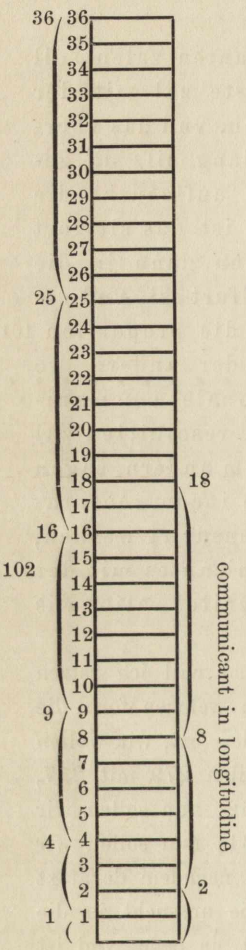


Fig. 15.

der mensur gefunden 31 multiplicirn, khumbt 31, vnd 9 vnd 16 auch damit, khumbt 279 vnd 496, also sprechen wir, das 279 vnd 496 seind equa multiplicia von 1 vnd 9 vnd 16, alle genomen in potentia; vnd so wir nemen die radices von 1 vnd 9 vnd 16, khumbt 1 vnd 3 vnd 4, vnd also sprechen wir das 31 zele den quadraten 279 in seiner lenge zu 3 malen vnd 496 zu 4 maln, vnd also haben wir clert den ersten thail des text. Wir nemen vor: *quod si fuerit proportio,* das andere thail, vnd suchen die groste mensur von 36 vnd 96, jnmassen obgethan, finden wir in den cleinsten zaln 3 vnd 8, welche die proportion nicht haben als ein quadrat gegen dem andern. Sagen wir, das 36 vnd 96 sein in longitudine incommunicantes vnd allein potentia rationales, dermas der quadrat 12, die groste mensur, zelt 36 den quadrat zu 3 maln vnd 96 zu 8 malen. Aber die radix davon in der leng von dem quadrat von 12 die communicirt | nit mit der lenge vom quadrat 36 vnd 96. Das ist aber in den obern zaln, vnd hierumb seind 8 vnd 3 gleich in potentia gegen der vnitet gerechent in potentia, die rationirt als jre multiplicia 96 vnd 36 vnd 12; wann 36 ist multiplex gegen 3, als 96 gegen 8 vnd 12 gegen der vnitet. So ist allwegen ein proportz der muitiplication, als wir sehen jn der virga Aaron, als do seind 1 vnd 4 vnd 9 rationales in der lenge vnd potentz commensurabiles, also sein auch 2 vnd 8 vnnd 18 jr equa multiplicia auch in der lenge vnd potentia commensurabiles. Also do 1 numerirt 9 zu dreimalen in longitudine, also mensurirt 2 die 18 auch 3 mal in longitudine; als do mensurirt vnitas in potentia 9 zu 9 malen, also auch 2 in potentia die 18 zu 9 malen in potentia, als die rute Aaron (Fig. 15) clerlichen ausweist.

De inveniendo numero primo propositorum divisorum atque residuantium.
Capitulum quartum.

Divisoribus contra se primis atque residuantibus propositis inveniendi numeri primi, quibus metiri habeat, omnium divisorum denominatio communis cuilibet communicat. Partium vero denominatarum denominantes cuius-

libet relinquitur incommensurabilitas, quae, si in unitatem residuantem, divisis divisoribus reducentur, primisque residuantibus producta multiplicentur, coacervatum deinde minus denominatione communi inveniendus numerus minimus propositorum divisorum atque residuantium contra se primus esse probatur.[1] | 102′

---

1) Dieses Kapitel handelt von der sogenannten Regel Ta-yen und giebt genau den Weg an, auf welchem man zur Lösung gelangen kann. Das von dem Bearbeiter durchgeführte Beispiel, wenn die Reste nicht ein gemeinsames Maass haben, ist folgendes:

$$N = 7x + 5 = 8y + 7 = 9z + 6 = 11t$$

in ganzen Zahlen aufzulösen. 7, 8, 9, 11 heissen ihm die Theiler; 5, 7, 6 und 0 die Reste. Er bildet das Produkt der Theiler, das ist 5544, und theilt dasselbe durch jeden einzelnen Theiler, oder was dasselbe ist, er bildet auch die Produkte der jedesmaligen drei übrigen Theiler. So erhält er 792, 693, 616, 504. Diese durch den jedesmaligen Divisor nochmals getheilt geben als Reste der Reihe nach 1, 5, 4, 9. Nun sind also die obigen Quotienten so zu verwandeln, dass überall bei Division durch die Theiler die Einheit übrigbleibt, denn wenn man dann die sich ergebenden Zahlen mit den verlangten Resten multipliciert, so müssen bei der Division durch die Theiler die betreffenden Reste übrigbleiben. Die so entstehenden Zahlen nennt er reduciert. Die erste 792 ist natürlich reduciert. Für die übrigen geht er so vor. Den bei 693 übergebliebenen Rest 5 addiert er zu sich selbst und wirft 8 davon ab; den bleibenden Rest 2 addiert er wieder zu 5 und, da von der Summe 8 nichts weggenommen werden kann, so addiert er nochmals 5. Von der Summe 8 weggeworfen bleiben 4. Nach nochmaliger Addition und Subtraktion bleibt endlich 1 als Rest. Nun ist 5 fünfmal addiert, das ist soviel, als ob man 693 mit 5 multipliciert hätte, macht man also die Multiplikation, so erhält man 3465, und diese Zahl giebt durch 8 getheilt 1 als Rest. In ähnlicher Weise findet er, dass 616 mit 7 zu multiplicieren ist, so dass 4312 entsteht und, obwohl wegen des Restes 0, der für Division durch 11 bleiben soll, die Rechnung, wie er selbst sagt, nicht nöthig ist, führt er sie doch ebenfalls durch, und findet, dass 504 mit 5 zu vervielfachen ist. Sie wird dann 2520. Die so erhaltenen Hülfszahlen multipliciert er nun mit den jeweilig verlangten Resten, und die entstehenden Zahlen 3960, 24255, 25872, 0 geben addiert eine Lösung der Aufgabe, die durch Addition oder Subtraktion des Produktes aller Divisoren, also von 5544, weitere Lösungen liefert, deren kleinste 4191 ist. Diese Lösung stimmt absolut überein mit der chinesischen im *Swan-King* des Sun-tsze und der von Gauss in den *Disquisitiones arithmeticae,* die ja die obige Lösung, nur in moderne Zeichen gebracht, darstellt. Unser Verfasser geht aber noch weiter, wie Yih-hing im *Tayen lei schu.* Er erweitert nämlich seine Betrachtungen auch auf den Fall nicht theilerfremder Divisoren. Sein Beispiel ist in den Gleichungen enthalten:

$$N = 6x + 2 = 8y + 6 = 10z + 4 = 14t + 8.$$

Er sucht das kleinste gemeinsame Vielfache der Divisoren, das ist 840, und theilt dasselbe wie früher durch die einzelnen Divisoren, so erhält er die Quotienten 140, 105, 84, 60. Nochmalige Division durch die Theiler geben die Reihe 2, 1, 4, 4.

Hie saget Algebras zu finden die zal, welche durch angezaigte diuisores vnd residuantes primi sein; als er vormals gecleret hat, ob ein zal an jr selbst primus oder nicht sey, werden hie vorgeschlagen diuisores vnd residuanten, die do wider sich selbst primi der zu findenden zaln, vnd laut zum teutschen also:

So do seind proponirt diuisores vnd residuantes, die do wider sich selbst primi seind der zu findenden zaln, mit welchen divisoribus sollen getheilt werdenn der vberbleibendt restanten, so ist alweg die gemeine denomination, das ist der Nenner, communiciren oder zelen alle divisores oder die thail, die do also gezelt werden vnd benennt von jrem divisore, demselben thail wird verlossen oder entzogen die zelung oder commensurabilitas mit jren denominantibus, das ist von dem divisore, dauon sie genenet werden; welcher thail also benent, so die also durch jren divisoren gethailt werden, dauon sie genent werden, vnd reducirt wird dermas, das alwege vnitas residuirt, vnd so solche reducirung ist geschehen durch alle divisores, so sollen solche reducirte producte jtzlichs mit seinem residuum gemultiplicirt werden, vnd darnach das zusamen gethun von allen producten minder des gemeinen Nenners, so offt man den mag
103 herab nemen, das pleibende ist dj cleinste zal | wider sich primus der furgelegten thailern vnd restanten probirt.

Von disem text grundtlich zu reden vnd den vorstandt an tag zu

---

Da der erste Rest der von der Aufgabe verlangte ist, so bleibt 140 unverändert, der zweite Quotient 105 ist, da ja der Rest 1 geblieben, mit 6 zu vervielfachen, das giebt 630; der dritte Quotient 84 giebt wieder von selbst den Rest 4, er bleibt also unverändert. Würde man ihn aber, ebenso wie den ersten, nach früherer Art prüfen, so bliebe beidemale 0 als Rest. Endlich giebt 60 durch 14 getheilt den Rest 4, also muss $2 \cdot 60 = 120$ den Rest 8 geben, der verlangt ist. Die Summe von $140 + 630 + 84 + 60 = 974$ ist die gesuchte Zahl. Auch hier giebt Addition oder Subtraktion von 840 weitere Lösungen. Die kleinste ist also 134. Auch auf den Grund der weitern Lösungen geht er am Schlusse des Kapitels ein. Zuletzt enthält das Göttinger Manuskript auch noch die Bedingung, unter welcher die Aufgabe unmöglich ist. Das Beispiel ist

$$N = 5x + 4 = 6y + 3 = 8z + 2 = 9t + 1.$$

Hier geht 6 in dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen 360 auf, und die obigen Betrachtungen lassen sich also nicht in Anwendung bringen. Vergleiche hierzu besonders L. Matthiessen, *das Restproblem in den chinesischen Werken Swan-king* von Sun-tsze und *Tayen lei schu* von Yih-hing (Crelle's *Journal* XCI, 254—261). Die Bekanntschaft mit solchen Aufgaben habe ich früher nachgewiesen bei Leonardo Pisano, bei Frater Fridericus in Regensburg um 1450, bei Regiomontan. Die Aufgaben, welche letzterer gestellt hat, siehe oben S. 219 und 295.

geben, wollen wir setzen zu finden ein Numerum primum mit 7, mit 8, mit 9; mit 11 soll er compositus sein: also mit 7 sollen im restanten 5 sein, mit 8 7 vnd mit 9 6, aber mit 11 soll er gar aufgehen. Also ist der suchende numerus primus gegen angezeigten theilern vnd residuanten, vnd ist auch compositus, wann mit 11 soll er communicirn. Sagt der text, das die gemeine denomination aller thailern communicir auch mit jtzlichem thailer. Hierumb giebt er anzeigung, das man soll machen einen gemeinen Nenner der divisoren, der dann ist 5544, welcher mit einem jtzlichen thailer ist communicirn. Als mit 7, so wird er gezelt 792 mal, vnd mit 8 zu 693 mal, vnd mit 9 zu 616 mal, vnd mit 11 zu 504 mal. Sagt fort der text, das solche benente thail von dem thailer, dauon benent werden, das ist von jren denominanten, nicht werden commensurirt: als 792 werden gesagt ein benent thail von jren denominanten 7, mit dem solch thail khein mensur hat, desgleichen die andern. Meldet der text fort, so die gethailt werden mit jren thailern, als 792 mit 7, restat vnitas; 693 mit 8, restat 5; vnd 616 mit 9, restat 4; vnd 504 mit 11, restat 9, vnd solche thail sollen dermas | reducirt werden jn andere zal, welche alsdann, so 103'
die mit jtzgemelten thailern gethailt werden, das dann allenthalben vnitas residuir. Das soll dermassen geschehen: so wir thailen 729 mit 7, restat 1, dauon darf die nicht weither reducirt werden, als der text sagt, sunder sie pleiben vnuorwandelt. Aber so wir thailen 693 mit 8, restat 5, die mussen wir reducirn jn ein ander zal, so sie in die wirdt gethailt mit 8, das dann vnitas pleibt. So examinirn wir sie auch nach denn loca, vnd addirn 5 zu 5, wirdt 10. Dauon wirf 8 hinweg, pleiben 2; addir 5 vnd 2, wirdt 7, vnd 5 zu 7 seind 12; vnd von 12 wirf aber 8 hinweg, pleiben 4; addir 5 vnd 4, wirdt 9, dauon wirf 8, restat vnitas. Also zele die loca, findestu 5 loca, also multiplicir 693 mit 5, wirdt 3465, so ich die thaile mit 8, restat 1. Also ist der ander thail ausgericht. Dermas so wir thailen 616 mit 9, restat 4: also addir 4 vnd 4, wirdt 8, vnd 4 + 8 werden 12. Dauon wirf 9, restat 3. Addir 4 zu 3, wirdt 7; addir 4, wirdt 11, dauon 9, pleiben 2. Addir 4, wirdt 6; addir zu 4, wird 10, dauon 9, pleibt vnitas. Examinir die loca, der dann 7 seind. Hierumb multiplicir 616 mit 7, khumen 4312, so die mit 9 gethailt werden, restat vnitas. Desgleichen mogen wir thun mit 504, wiewol es nicht not, wann sie khein | Residuanten hat, darin sie soll gemultiplicirt 104
werden, als der text sagt. Nicht desterweniger wollen wir sie examinirn. Wir thailen sie mit jrem diuisore 11, pleiben 9, hierumb sollen wir die reducirn jn ein zal, jn welcher, so sie gethailt wirdt mit 11, das vnitas residuir. Addir 9, facit 18, vnd wirf hin 11, restant 7; addir 9 vnd 7, werden 16, wirf weg 11, restat 5, addir zu 9, facit 14, nun ab 11,

pleiben 3; zu 9 wirdt 12; dauon 11 restat vnitas. Also zele solche loca, khomen 5. Die multiplicir mit 504, facit 2520, so die mit 11 gethailt werden, restat vnitas, vnd also sagt der text, das bemelte thail seind reducirt jn zal, welche so die gethailt werden durch furgelegte divisores, restat vnitas. Warumb wir aber solche Reductionen durch die loca examinirt haben, propter hoc fit, das ist die vrsach. Wann, so wir nemen die reducirte zal eine, als 504, do pleiben 9, so wir zwispalten, duplirn sich auch 9, das residuum jn jr; hierumb haben wir gesagt 9 vnd 9 ist 18, hinweg 11 gegangen an der gespalten zal, vnd pleibt 7, wann 504 zu 2mal ist 1008, das gethailt mit 11, restat 7. So wir noch einmal 504 zu 1008 addirn, addirn sich 9 vnd 7 zusammen, wann jn dem ersten ist 9 das residuum, vnd jm andern 7, das wirdt 16, vnd ist die zal worden getriplicirt. Werfen wir von 16 die 11, restat 5, so man 1512 in 11 thailt, werden auch 5 pleiben. Wir addirn aber 504 zu 1512, so ist die zal quadruplicirt, vnd ist die vierdte stadt, khumbt 2016, welche so die
104′ gethailt wirdt mit 11, pleiben 3; wann jn 504 | pleiben 9, vnd in 1512 pleiben 5. Nun 9 vnd 5 zusamen, khumen 14. Nim 11, restat 3. Wir addirn 504 zu 2016, facit 2520, das ist die zal, die do gereducirt worden ist, vnd ist nun gequintuplicirt, als wir sagten, sie wirdt an der funfften stadt. Wann in 504 restat 9, vnd in 2016 restat 3, vnd 9 wirdt 12, also thailet sich 11 weg, rest vnitas, das haisst also reducirt in vnitatem residuantem, als der text sagt. Er meldet furter und spricht, das die jtzgenanten reductiones als 792 vnd 3465 vnd 4312 vnd 2520, ein ytzliche soll jn jrem residuanten gemultiplicirt werden. Also multiplicirn wir 792 mit seinem residuanten 5, facit 3960; wir multiplicirn 3465 mit dem restant 7, facit 24255; wir multiplicirn 4312 mit seinem Restanten 6, facit 25872; wir multiplicirn 2520 mit seinem Restanten 0, khumbt 0; vnd hierumb khumen solche product alle zusamen, als 3960 + 24255 + 25872 vnd 0, vor das letzte, als wir vrsach werdenn sagen. Die machen jn einer Summa 54087. Was vrsach das ist, darumb man sie zusamen thut, vnd mit dem restanten seind gemultiplicirt: wann ein ytzliche zal vorgemacht geht durch alle divisores auf ausgenomen mit seinem divisore, dauon sie den namen hat, do pleibt vnitas. Dieselbig vnitet ein ytzliche ist in den reducirten zalen mit jrem residuanten gemultiplicirt worden vnnd ist das residuum

	Residuantes.		
5	7	6	0
	Diuisores.		
7	8	9	11
	Partes denominatae.		
792	693	616	504
	Reducirt.		
792	3465	4312	2520

105 daraus wordenn, vnd darumb, das ein ytzliche reducirte zal mit allen | diuisoribus aufgeht, aufsgenomen mit dem seinen, so geht sie nicht auf, hierumb

so mus die gantz summa 54087 auch durch die gemelten divisores nicht aufgehen, vnd mus residuirn mit jtzlichem divisore, als der text sagt. Sprechen wir, das 54087 sei die zal, die wir suchen, vnd so offt wir die gemein denomination darzu addirn 5544, ye grosser die zal wechst, nach der proposition gemes. Sagt der text: *coacervatum minus denominatione.* Hierumb zu yederweis, so offte wir die denomination herab nemen, so bleibt ein cleinere zal vnserm proposito gemes, vnd so die gemelte denomination nimer khan herabgezogen werden, so concludiren wir mit dem text, das das residuum sein mus minimus numerus, das ist die cleinste zal der angezaigten divisoren vnd residuanten. Also thaile 54087 mit 5544, pleiben 4191, vnd das ist die cleinste zal, so die gethailt wirdt mit 7, restant 5; mit 8, pleiben 7; mit 9, pleiben 6, vnd mit 11 ist er compositus.

Nun mogen wir abnemen bej disem text einen treffenlichen punct. So do wurden vorgeschlagen divisores, die do communicirn mit einander vnd khein ordnung wirdt gehalten derhalben, als ich setzen will oppositum textu, zu finden numerum primum mit disen diuisoribus. Wann jn zelet 6, sollen 2 pleiben, wann ich mit 8 zelen, sollen 6 residuirn, | vnd wann 105′
ich jnen mit 10 zele, soll 4 vberpleiben ⟨vnd wann ich jnen zele mit 14, soll 8 vberpleiben⟩. So machen wir einen gemeinen Nenner, darinn wir die denominantes partes vf das cleinste haben mogen, das ist 840, darjnn suchen wir die denominantes partes, machen nach einander volgendt 140 vnd 105 vnd 84 ⟨vnd 60⟩, vnd thailen jnmassen wie oben 140 in 6, pleiben 2, vnd hierumb, das er nicht khan in die loca khumen, dar jnn er aufging an der dritten stadt, darumb lassen wir jn reducirt vnd gemultiplicirt sein mit sein restanten 2. Wir thailen 105 in 8, vnd restat vnitas. Die multiplicir in seinen restanten 6, facit 630; wir thailen 84 mit 10, restat 4. So wir die wollen examinirn nach den locis vormals gethun, als 4 vnd 4 macht 8, vnd 4 macht 12, wirf 10 hinweg, restat 2, vnd 4 seind 6, vnd 4 machen 10. Nun 10 von 10 rest 0, soll vnitas pleiben. Dieweil 84 ist gethailt mit seinem divisore 10, vnd 4 jm restant, der im geben ist, lassen wir 84 reducirt sein. Wir thailen 60 durch 14, restant 4, vnd sollt vnitas restirn. So wir examinirn, so stedt er an der siebenden stadt auf in 0. Wie sollen wir dann examinirn? So mercken wir, das die, die do aufgehenn jn 0, vnd jrn restanten nach der proposition nicht furn sollen, seind reducirt. Dieweil aber 60 aufstehet, vnd seinen Residuanten 8 nicht mit furt, also sollen wir 60 examinirn, an welcher stadt jm werde gegeben | der restant 8. Sprich, so ich 60 mit 14 thaile, 106
restat 4, vnd sollten 8 restirn. Addire 4 vnd 4, wirdt 8, also geschieht das an der andern stadt. Multiplicir 60 mit 2, wirdt 120; so ich die

mit 14 thaile, restat 8. Also thue jm allerwegen, so die loca aufstehen mit der vnitet, so examinir jn nach den locis so lang, pifs jm sein restat gegeben wirdt. Also addirn wir 140 + 630 + 84 vnd 120, facit 974, vnd das ist die zal, so offt wir die gemelte denomination herabziehen, als 840. So wir sie aber addirn, so wirdt die zal grosser nach laut des texts. So wir abzihen, restat 134.

Warumb wir aber die denomination herabziehen vnd sagen, das Residuum sey die cleinste zal? Nach dem ersten capitell: *Omnis numerus rationans totum* etc. Ein ytzliche zal, so die thailt das gantz vnd herabgezogen, so thailet auch das Residuum. Dieweil also gemelte divisores thailen die gantze der proposition gemes, vnd thailen auch die denomination, sie thailen auch das Residuum, vnd also haben wir beider seit den text schrifftlich eingefurt.

In disem Exempel jtzt vorzeichendt ist denominator communis 360, vnnd nach dem jm ersten Exempel vermeldung gethun neben der figur des Exempels, das ein ytzliche zal aus gemeinem Nenner gezogen durch alle divisores, aufsgenomen durch seinen, soll aufgehen, | so begibt sich in solchem Exempel jtzd vorhanden, das 60 durch seinen diuisorem, welchs nicht sein solte, aufgehet, vnd nicht durch die andern alle. Deshalben befinden wir, vnd mogen sagen, das solchs vnmuglich sey zu machen, vnd andere dergleichen, so sich begibt, das ein zal durch seinen thailer vfgehebt vnd 0 restirent ist. Vnd volget also das funffte Capitel.

	4	3	2	1	Residuantes
	5	6	8	9	Divisores
106′	72	0	45	40	Partes denominatae
	864		900	280	Reducirt.

De numeris compositis eorumque expositio, Capitulum quintum, et primo de perfectis.

Omnes numeros, quorum est mensura praeter unitatem, compositos esse contra se necesse est. Quod si partium aliquotarum numerositates colliguntur, aut maiorem, aut minorem, aut aequalem toto sortiuntur substantiam. Horum autem tam parium quam imparium solum perfecti, qui paritatis sunt substantiae, numerositatibus suarum partium reducuntur aequales, qui et paucissimi sunt et unius constanti ordine limitum procreati.[1])

Nachdem Algebras gesaget hat de numeris primis zum ersten, so do

1) Der vorliegende Paragraph handelt von nicht theilerfremden Zahlen und zunächst unter diesen von den vollkommenen Zahlen, von denen die drei ersten angegeben und auf die betreffende Eigenschaft geprüft werden.

furgelegt wirdt ein einige zal, zu finden, ob die primus sei oder nicht; zum andern, ob vns furgelegt wurden zwo zaln, zu finden, ob die primi contra se sein oder nicht, vnd jr groste mensur; zum dritt hat er gesagt von einer gemeinsamen mensur vnitatis aller zaln; zum vierdten halt er zu verstehn 107
geben zu finden ein zal, welche mit vorgeschlagenen divisoribus primi sein, vnd also ist de primis gesagt. Hierumb cleret er sprechende von den numeris compositis zum teutschen also lautendt:

Aller zalen, welcher do ist ein gemeine Mensur on die vnitet, dauon wir gesagt haben, dieselbigen seind von not compositi. Do derselbigen zal jrer benenten thail zusammen geclaubt werden, so machen die ein grosere zal, oder eine cleinere, oder eine gleiche zal der furgelegten. Der aller miteinander so do seind gerad oder vngerad allein die perfecti gesprochen, welche einer geraden substantzen sein, werdt gefunden werden gleich den zalen zusamen jrer gemelten thail, welcher auch sonst wenig ist, vnd einer vnvoruckten ordnung der limit, das ist der staffel der zalen, gemacht werden.

Disen text schrifftlich vorstentnus zu geben, cleret der text nachuolgendt von den diminutis vnd superfluis, welche, so ire benente thail zusamengefugt werden, machen sie ein weil zu viel, vnd ein weil zu wenig der gantzn zal vngemes. Aber die perfecti, von welchen wir sagen wollen, das ist von den volkhumenen zaln, die seind irer benanten thail zusam gesatzt gleich der furgelegten zaln, welcher zumal wenig ist, vnd werden also funden, so wir setzen nach ordnung die pariter pares also (Fig. 16): | 107′

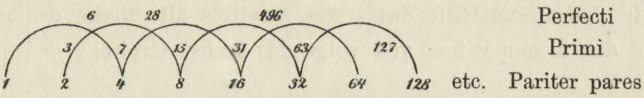


Fig. 16.

So wir addirn die ersten zwei 1 + 2, werden 3, der ist primus durch das erst Capitel. Also 3 werden gemultiplicirt mit dem letzten pariter parem geaddirt, das was 2; werden 6, vnd also sprechen wir, das do 6 ist compositus durch das erst capitel, vnd ist perfectus vnter dem limit 10. Wann ein ytzlicher limit hat nicht mehr dann eines, wann darumb sagt der text, jr seind wenig vnd nach ordnung der limites gemacht. Wann, so wir 6 examinirn nach dem ersten capitel, finden wir in der scala Jacob, das ist in dem descens der leiter, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$. Das seind alle benente thail in 6, welche an jrer zalen, sagt der text, zusamen seind gleich 6, der gantzen zal. Wann $\frac{1}{3}$ ist 2, $\frac{1}{2}$ ist 3 vnd $\frac{1}{6}$ ist 1; das zusamen facit 6, vnd solchs

endet khein zal vnter 10, die do seind compositi gerad oder vngerad. Also
hat der limit vnter dem centenario auch nicht mehr dann ein. Wann wir
in der obern disposition addirn 3 vnd 4, werden 7. Der ist primus, mul-
108 tiplicirt mit dem letzten pariter parem, als 4, | khomen 28, welcher ist
perfectus oder volkhumene zal vnter 100. Wann, so wir jn examinirn
nach vnserm ersten gesatzten Capitel des tractats, so finden wir jn *scala*
Jacob $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{28}$, das seind alle bemelte Theil von 28, welche an
der zal machen 28. Wann $\frac{1}{2}$ ist 14, $\frac{1}{14}$ ist 2, $\frac{1}{7}$ ist 4, $\frac{1}{4}$ ist 7 vnd $\frac{1}{28}$
ist 1. Das alles zusamen macht 28, vnd das thut khein andere zal vnter
100, vnd hierumb wirdt sie des andern limits gerechent ein volkhomene
zal. So enden sich alle perfecti in 6 vnd 8 durch alle limiten aus. Wir
gehen fort, addirn 8 zu 7, werden 15, vnd examinirn den nach dem ersten
Capitell, finden wir, das der nicht primus ist, darumb mag er nicht per-
fectum constituiren, vnd vacat mit 8. Wann, so das mit 15 gemultiplicirt,
facit 120, das wirdt nit perfectus vnd khemen zwene vnter dem Limite
millenario. Wann so wir addirn 15 vnd 16, werden 31, vnd der ist
primus. So der mit 16 wirdt multiplicirt, facit 496, vnd der ist perfectus
vnter dem limit 1000, vnd khein andere. Wann alle seine benente thail
seind die zalen von den er compositus ist, das ist von 1 von 2, 4, 8, 16,
welche also jre Correlatiua multiplication herwider haben. Wann 1 ist
genant $\frac{1}{496}$ vnd herwieder von 496 ist genandt $\frac{1}{1}$, also $\frac{1}{2}$ ist 248 vnd $\frac{1}{248}$
ist 2; $\frac{1}{4}$ ist 124 vnd $\frac{1}{124}$ ist 4; vnd $\frac{1}{8}$ ist 62 vnd $\frac{1}{62}$ ist 8; vnd $\frac{1}{16}$ ist 31
108′ | vnd $\frac{1}{31}$ ist 16, vnd solchs alles ist 496, khan also khein andere zal
solchs vnter 1000 volenden, vnd also beschliesen wir mit dem text, das
alle perfecti pares sein, welche ex suppositione werden gesagt compositi. Also
mogen wir finden mit Hilfe des ersten Capitels alle thaile den compositen
gleich wie der incompositen, vnd volgt das sechst Capitel.

De numeris compositis, qui diminuti atque superflui nominantur, Capitulum sextum.

Diminuti vero compositi contra se sunt, qui et substantiam paritatis atque imparitatis partiti sunt. Sub pariter namque paribus atque pariter imparibus resident simul et sub secundis et compositis imparibus. Superflui autem immoderata plenitudine sui corporis partium numerositate substantiam superabunt, et ipsi quidem sub sola impariter pari forma nascentur.[1])

1) In diesem Kapitel werden die mangelhaften und überschiessenden Zahlen behandelt, dabei auch die Ausdrücke *pariter par*, *pariter impar* und *impariter par* erklärt, letztere besonders deshalb, weil die *numeri superflui* sich nur unter den letztern finden sollen. Als Beispiel dient 36, das nach zweimaliger Halbierung unpaarig wird, und dessen Divisorensumme 55 beträgt.

Als ALGEBRAS hat gecleret jm negsten Capitel: *aut maiorem, aut minorem, aut aequalem* etc. Nun hat er aequalem demonstrirt, perfectum genant, eruolget nunmals die andern membra dividentia den numerum compositum, vnd laut der text zum teutschen also: | 109

Es seind auch diminuten compositi an jn selbst, welche auch gethailt haben die substantz gerad vnd vngerad. Wann sie seind vnter den pariter paribus vnd vnter den pariter imparibus funden, auch vnter den Compositen der imparen. Aber die vberflussigen zalen seind mit einer vngewisen vberflussigkeit vbertreffen durch jre benente thail der gantzen substantz der furgelegten zal, vnd werden allein geborn vnter den impariter paribus.

Von disen text zu sagen, nachdem er zwen partes hat von den diminutis vnd superfluis, ist not, das wir sagen kurtz zu vormelden, was pariter par sey, pariter impar vnd impariter par. Kurtz zu sagen, nachdem allenthalben in andern Buchern der kindern gemain ist, doch von anfahender diser disciplinen, so haisen wir, das pariter pares, die do mogen halb gethailt werden, das ist mit 2, bifs auf vnitatem, als 16, 32, 8 etc. Wir haisen die pariter impares, die do mit 2 gethailt werden einmal vnd nicht weither khonnen descendirn in paritate, das ist in der geradigkeit, als 10, 14, 22, 26, 34 etc. Wir nennen die impariter pares, welche descendiren vngleich in paritate einmal mehr dann das ander, khomen sie doch nicht vff die gemeinen mensur vnitatem, als 12, 36, 144. Vnd ye weither sie descendirn in paritate, ye mehr die benanten thaile, von dem sie wirdt compositus genant, erwachsen zusamen vber die substantz jrer zal, | daraus 109′
sie genomen sind. Als wir wollen cleren den ersten thail der diminuten; sagt der text, das sie allein vnter dem pariter pare seind vnd vnter den pariter imparibus. Wann, so wir setzen einen ytzlichen pariter parem vnd examinirn den in der scala auch, nachdem er absteigt in paritate vff die vnitet, finden wir, das sie allwegen diminuti seind, das ist, das sie nicht gantz jre zal vermugen die benenten thail, daraus sie genomen seind, vnd ist der Bruch allwegen an einer vnitet in pariter paritibus. Als wir setzen 16; hat $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ vnd $\frac{1}{16}$, wann sie nach ordnung nach disen zalen in paritate steiget. $\frac{1}{2}$ ist 8, $\frac{1}{4}$ ist 4, $\frac{1}{8}$ ist 2, vnd $\frac{1}{16}$ ist 1, vnd so wir das alles copulirn, so finden wir 15, das ist einer vnitet minder, dann der corpus ist, vnd also ist es in allen pariter paribus, vnd hierumb so sprechen wir propter quid in der dupla progression, das man das letzte sol duplicirn vnd vnitatem oder das erste herabzihen, dann das letzte hat alle benante fordere thaile, die zusamen machen corpus minus 1, vnd hierumb hastu vrsach, warumb das geschieht etc. Die diminuti werden auch gemacht von den

pariter imparibus. Als wir sprechen 14, welcher compositus ist, vnd
110 so seine benenten thail zusamen werden | gethun, machen sie weniger, dann das corpus ist. Sie werden auch gefunden vnter den imparibus die do compositi seind, als 27. Wann $\frac{1}{3}$ ist 9, vnd $\frac{1}{9}$ ist 3, vnd $\frac{1}{27}$ ist 1; solche thail zusamen machen 13, die dann weniger seind dann das Corpus. Aber als der text sagt im andern thail, die superflui, das ist die vberflussigen, werden allein funden vnter den impariter paribus vnd sunderlich, welche so sie nimer descendirn mogen, das sie seind secundi vnd compositi der inparen. Als 36, so wir descendirn: halb ist 18, halb ist 9, vnd 9 ist secundus vnd compositus. Hierumb wirdt 36 zumal sehr superfluus gesprochen. Wann $\frac{1}{2}$ ist 18, $\frac{1}{4}$ ist 9, $\frac{1}{6}$ ist 6, $\frac{1}{9}$ ist 4, $\frac{1}{12}$ ist 3, vnd $\frac{1}{3}$ ist 12, vnd $\frac{1}{18}$ ist 2, vnd $\frac{1}{36}$ ist 1. Solchs alles zusamen facit 55. Vnd also sprechen wir, das alle die zaln diminuti, superflui vnd perfecti seind compositi, vnd nicht primi, die wir also jrer thailen, dauon sie compositi seind, mogen examinirn nach vnserm ersten Capitel. Vnd also haben wir grundlich gesagt von den primis vnd compositis, welche so jre jtzliche einfeltig proponirt wirdt oder selbander, zu finden dieselbig mensur. Nun volget hernach von den zalen, so jr mehr dann zwo oder eine proponirt werden, zu erforschen, welchs die groste Mensur sey vnter jnen, oder ob sie gegeneinander
110′ primi seind oder nicht. Dann es khumbt, | das vnterweilen zwo compositi sein vnd von des driten wegen mussen sie vntereinander vnd gegeneinander primi gehalten werden, das ist, das sie minimi werden gesatzt in der proportion der furgab, als volgendt ist.

De numeris rationalibus et communicantibus, ex qua aequatione digesta semper nascentur rationales in coniecturis et antiquiori modo. Capitulum septimum.

Omnes numeros, quorum proportio ut numeri ad numerum, rationales et communicantes inseruimus, eosque absolutos semper ex sola nostra prima aequatione unitatuum nasci descripsimus, quos et in coniecturis Ylici quatuor quantitatum proportionalium expediti sunt, alii vero ex erroribus, quos Arabes itata vocant, nos autem lancem ducem posuimus, produxerint. Quorum vero quandoque proportio non velut numeri ad numerum, aliis dictis aequationibus rationari investigentur, quare dictas sectas refutare antiquorum necesse est.[1])

1) Dieses Kapitel will zeigen, dass der einfache falsche Ansatz, von dem Verfasser die vier proportionierten Zahlen des Yles genannt, so wenig als der doppelte falsche Ansatz, die *Itata* der Araber und die *Lances* der Lateiner des Mittelalters, zur Auflösung von solchen Aufgaben gebraucht werden können, welche auf Gleichungen des zweiten Grades führen, sondern dass sie einzig und allein bei solchen zum Ziele führen, welche auf solche des ersten Grades zurück-

Hie saget Algebras von den zaln, so jr mehr dann zwo proportionirt werden, zu erforschen ob die primi sein vnd gehalten werden nach der proportion die sie haben, vnd laut der text zum teutschen also:

Wir haben gesagt vnd gesatzt, das alle zal ratio|nales vnd 111
communicantes, welcher zaln sich die proportion heltt als do ein zal zu der andern, also sind sie primi, so ist vnitas gesagt die gemeine mensur, seind sie compositi, so seind sie communicantes, die werden allein proportionirt oder selbander; welche zaln also, die wir cleret haben, werden allein geporn rationales alwgen rationales jrer vniteten von vnser erst gesagten equation, welche also jn der satzung oder coniecturen der proportionum von den Ylicis, die do waren der secten Ylis, examinirt wurden vnd funden durch 4 proportionalische zalen. Aber andere, die do waren der secten der alten Arabischen sorgten, das do in den Coniecturen wurden gefunden allwegen durch die errores rationalische zaln, die die Arabes nenten Itata, das wir nennen lancem, das ist numerum fallacem, ein weitleuffige vngewise zal der Enigma nicht gemes, vnd erforschen hieraus die obgerurten zaln, die do allwegen werden funden rationales. Sagten auch, was also durch die errores oder Ylische zaln nit funden wirdt, das das vnmuglich in der zaln gegrundt werden muge. Aber, sagt der text, die zalen, welcher khein proportion zusamen ist, als do mag gesein einer zal zu der andern, sie sey geprochen oder gantz werden gefunden zu rationirn durch die andere vnsere equationes an die erste, welche zaln also von not wegen zurucke schlagen oder richten die gemelten secten von den alten gesatzt. | 111′

Von disem text einen schrifftlichen Bericht einzunemen, sagt der text, das alle zaln rationalisch sein, als welche do haben ein proportz als ein zal zu der andern, von den dann genug gesagt ist. Als ich spreche, $1\frac{1}{3}$ gegen $2\frac{2}{7}$ hat ein proportz, als do hat jr numerus 48 gegen 28. Hierumb so seind sie rationales, dann vnitas ist ein gemeine mensur, vnd communicantes, wann sie noch vber die gemeinenn mensur haben 4. Welche 4 sie thailt jn die vordern proportion: als 7 gegen 12 seind als 28 gegen 48.

---

geführt werden können. Obwohl die Alten behauptet hätten, wenn durch eine der beiden erwähnten Methoden keine rationalen Zahlen gefunden werden könnten wären die Aufgaben überhaupt nicht möglich, so zeigt Verf. doch, dass gerade durch die Gleichungen solche Lösungen gefunden werden können, die den Alten als unlösbar galten. So würde die in Zeichen geschriebene Gleichung $\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 13\frac{1}{2}$ nach dem Verfahren des Yles $x = 3\frac{3}{8}$, nach dem der Araber $10\frac{4}{71}$ geben, obwohl der wirkliche Werth von $x = 9$ ist.

Vnd solche zaln werden alwegen aus der ersten gesatzten Equation. Wann, das wir wollen sprechen, es mochte radix von 7 oder radix von 3 herauskhomen, die haben kheine proportz als ein zal gegen der andern, wann jr radix nicht wissent ist. Also mogen wir sprechen, das allwegen jn den furgaben der Arismeticen vnd Geometern, was jn vnserer ersten equation fellet, das also one zweifel die furgabe data, das ist, das sie mag sein rationalisch. Aber die Alten, als do waren die von secten Ylis, wusten noch nicht von den equationibus Algebrae, vnd sprachen, wann do ein furgab kheme dem grossen geometro Ylo, wer also dieselbe frag durch die vier quantitet der proportionalischen satzung nicht vfgelost mocht werden,
112 also zu verstehen, das sie nach aller muglig|keit examinirt wirdt, als ane zweifel Ylis kunt, sagten die gemelten Ylici, das solche fragstückhe der zalen vngemes weren. Weiter sagt der text: *Alii vero* etc. Aber etzliche andere, die do waren der secten der alten Araber, sagtenn, hetten ein gemein scibile bej jnen gesprochen Itata, das weren Errores, do durch sie examinirten, so in Arithmetern vnd Geometern kheine solche scibile, als pej vns wirdt gesagt, vnd das nemen mogen von den weitleufigen zalen der aufgab vngemes, das ist, das sie durch zwei weitleüfige zaln der Aufgab a casu genomen vnd vngeproportionirt funden, durch die errores, das ist, wie weit sie a veritate distirten, das ist, wie weit sie irrten, do drucken sie aus ein rationalische zal der Aufgabe gemes, vnd sagtenn auch, welche aufgab, so sie examinirt wurde durch die lances, als sie von rechts wegen solten, vnd nicht durch die errores funden wirdt, die were bei jnen vnmuglich zu erforschen. Sagt der text furter: *quorum vero etc.* So do aber khumbt, das do ist die proportion einer zal gegen der andern nicht als ein rationalische zal zu der andern, solche zal mussen erforscht werden durch vnser Gebra, das ist durch die equationes, die wir gesatzt haben an die erste. Also mogen wir sagen mit dem text Algebrae, das solche zaln
112' refutiren vnd vorcleinen die secten | von den alten gesatzt, wie wol das vnsere altenn viel hubscher fragen haben aufgelost, vnd doch durch kheine genante Regel soluirt, sonder durch particulares demonstrationes, von welchen also vnser Gebra vnd Almuchabola sagendt ist, welche zaln hieraus rationalisch ergehen mogen vnd welche nicht, also mogen wir concludirn mit dem text, das alle zaln, so durch die erste equation ersprissen, werden rationalisch geporn vnd nimmermehr irrationalisch. Also mugen auch alle fragen durch die aufgelost werden, die do gehen durch die vier quantitet der Ylicorum, oder durch die errores der Arraben, vnd herwiderumb, wo do aufgelost ist durch die 4 quantitet proportionaln oder durch die lances, mogen auch gehen durch vnsere gesatzte equationes, nemlich durch die erste. Aber viel rationalische zaln werden geporn durch vnser andere ge-

satzte equationes, die do nimer funden werden durch die lances, vnd hierumb werden durch solche vnser equationes, except die erste, refutirn die gemelten secten der Araben vnd der Ylicorum. Als wir setzen von den vorstant wegen des texts, zu finden ein zal, welcher ich $\frac{1}{2}$ vnd $\frac{1}{3}$ in vnd mit einander multiplicir, das $13\frac{1}{2}$ khume. So wir das examinirn durch die quantitet der Ylicorum, so erfindt | sich das nicht, vnd wird examinirt 113
nach der Ylischen Form also vnd nicht anderst. Wir nemen ein zal 24, die hat $\frac{1}{3}$ vnd $\frac{1}{2}$, wann $\frac{1}{3}$ ist 8, vnd $\frac{1}{2}$ ist 12, vnd 12 mal 8 macht 96. Sprich 96, das Examen, gibt 24, propositum, was gibt $13\frac{1}{2}$, das Examen? facit nach der Ylischen zaln oder form $3\frac{3}{8}$, vnd so man das examinirt probative, so felet es. Examinirn wir das durch die errores, dermas wir setzen lancem 12, sagt in errore zuuil $11\frac{1}{2}$; setzen wir den lancem 24, so khumbt zuuil $82\frac{1}{2}$, volfuren das durch die errores, so finden wir $10\frac{4}{71}$. So wir das probatiue examinirn, so findt sich vngerecht, vnd doch solche zal muglich zu finden ist 9, vnd hierumb das Exempel a latere eingefurt, dapei du magst mercken, das viel seind, die do rationalisch durch vnsere equationes, ausgenomen die ersten, erfunden werden, ohne durch die 4 proportionalisch quantitet oder durch die errores, Itata genandt, wann wir khumen durch vnsere andere Equation auf dj rationalische zal 9. Also volget hernach von dem ersten membro zu sagen, als der text sagt: *quos et in coniecturis*, das ist von den vier proportionalischen zaln, die do allererst Yles gebraucht hat zu coniecturis. | 113′

De quatuor numeris proportionalibus Ylicis de eorumque mensura, qua minimos contra se proportione data terminos exuentur. Capitulum octavum.

Quorum proportio primi ad tertium data, eademque secundi ad quartum data erit, qua vero data primi ad secundum, eadem et data erit tertii ad quartum. Ex hoc manifestum, quartum quotientem primi divisoris producti tertii per secundum. Constat proprium, id produci ab extremitatibus, quod ex medietatibus conficitur; in minimis enim terminis quatuor datos contra se esse reperies proportione eadem proportionales.

Hie saget Algebras von den vier proportionalischen zaln Ylis, vnd laut gemelter text zum teutschen also:

Welcher zaln die proportion des ersten vnd dritten ist geben, dieselbige proportion wirdt auch gegeben dem andern gegen den vierdten; welche proportion aber offenbar ist des ersten vnd andern, dieselbige wirdt auch gegeben dem dritten gegen dem vierdten. Hierumb wirdt offenbar, das die vierdte zal ist ein quotient der ersten zal, des thailers, des multiplicirten dritten

mit dem andern. Also sprechen wir, das ein rechte eigenschaft ist der proportionalischen satzung, das khumbt von den extremis, das ist von dem ersten vnd letzten, gemultiplicirt gleich dem,
114 das do khumbt aus | den zweien mitteln, das ist vom dritten
vnd andern. Also finden wir, das in vier termini, die do noti vnd gegeben seind, die vier proportionalisch zal werden funden in andern vier zaln vff das cleinste jn der ersten proportion rationales.

Von disem text zu sagen vnd einen schrifftlichen sin einzufuren, saget er eigentlich: welcher zaln die erste proportion geben zur dritten ist, dieselbige wirdt auch gegeben dem andern vnd vierdten. Wann wir sagen hier von den vier proportionalischen zaln, die erste zur andern als die dritt zur vierten, also werden sie auch permutatim aus der 16. proposition quinti Euclidis Geometriae[1]) proportionales sein, wann welche proportionales seind, seind auch permutatim proportionales; vnd welche auch permutatim proportionales seind, die seind auch per diffinitionem proportionalium proportionales. Als wir setzen wollen a latere dem text: Ye 6 Eln vor 10 fl., wie 12 khumem vor 20 fl., wann so 6 vmb 10 komen, so sein 12 zwir 6, darumb mufsen 12 komen vmb 20, das ist vmb zwir 10. Sprechen wir permutatim, das do sein disparate 6 gegen 12 als 10 gegen 20. Sagt der text von dem ersten corollario, der letzte terminus were der quotient des gemultiplicirten products des dritten vnd andern gethailt durch den ersten. Als wir multiplicirn 10 mit 12, facit 120, thailen solchs durch den ersten;
114' khumpt 20: also ist 20 der quotient des products | 120, welcher entsprossen
ist ducch den andern vnd dritten gemultiplicirt, welche also die mittlen termini seind vnter den vieren proportionalen quantiteten. mogen wir sagen mit dem text, das aus dem multiplicirn, nemlich der mitteln khumen sei dem gleich, das von den extremen khome. So nun der erste terminus ist divisor vnd wirdt gefurt jn quotienten den letzten, so khumht wider das gemultiplicirt ist worden vom andern vnd dritten, als vns das grundtlich

	eln		fl.
a.	6	*c.*	10
b.	12	*d.*	20

---

1) Euclides V, 16: Si fuerint quatuor quantitates proportionales, permutatim quoque proportionales erunt.

Der ganze Paragraph handelt von den Proportionen des Yles, und zeigt, wie man eine vorgelegte Proportion sowohl nach jeder ihrer vier Glieder als Unbekannten auflösen kann, wie auch die Umwandlung einer solchen in eine andere, die vier relative Primzahlen enthält. Als Beispiel bringt er die Proportion:

$$480 : 900 = 108 : 216$$

auf die einfachste Form $40 : 80 = 9 : 18$, indem er sämtliche Glieder durch das grösste gemeinschaftliche Maass aller vier Glieder, das ist 12, dividiert.

beweist wirdt septimo Geometriae an der zweinzigsten proposition demonstrirn. Von kurtzwegen sagt der text weiter, das solche vier quantitet proportionalisch werden auch jn vorgemelter proportion jn den cleinsten termini proportionales. Solchs zu ergrunden, von wegen wir hie ad propositum reden, die mensur zu finden dreyer oder vier terminorum oder mehr, welche sie ad minimos terminos theilet vnvorruckter proportion. Wir suchen die ersten zwen nach vnserm dritten Capitel, vnd finden jre groste Mensur. Dieselbigen Mensur nemen wir vnd examinirn den dritten damitt, anch nach dem dritten capitel, vnd finden aldo noch ein mensur. Wir nemen aber solche mensur vnd mensuriren oder examinirn den vierdten, vnd finden do
aber ein Mensur, vnd solche, | die do durch ausgeht, die thailet sie ad 115
minimos terminos jn der ersten pleibenden proportion. Als wir setzenn wollen 4 quantitet proportionales, vnd wollen sie examinirn jn die minsten terminos. Wir suchen die ersten zwene, finden sie nach dem ersten Capitel,

a. 480 *c*. 108
b. 960 *d*. 216

das 480 die groste Mensur ist der ersten zweier nach vnserm dritten Capitel. Wir nemen 480, die Mensur, examinirn den dritten 108 damit, vnd finden, das die groste Mensur ist der Zweier 480 vnd 108 ist 12; wir nemen 12, die mensur, vnd examinirn aber nach dem dritten Capitel 216 damit, vnd finden, das 12 solche zal vfthailt. Und so das nicht geschehen were, so hetten wir die gesucht nach dem dritten Capitel; dieweil aber 12 die 216 aufthailt, so sprechen wir nach der dritten proportion des siebenden Buchs

a · 40 · *c* · 9
b · 80 *d* · 18

Geometriae, das 12 die groste Mensur ist vnter den vorgesatzten zaln, vnd ist khein ander terminus der obgemelten zaln aussucht jn ehegemelter vnverruckter proportion dann 12. So die werden aufgelost, khumen 40 · 80 · 9 · 18, vnd sein numeri contra se, das ist gegen ehegerurter proportion der zalen, die do waren 480 · 960 · 108 · 216. Also concludirn wir mit dem text, das sie 12
examinirt hat | in die minsten zal der vorigen proportion. 115′

De numeris minimis contra se sua proportioue exuta productis. Capitulum nonum.

Dixerunt Arabes ex itata semper produci numeros rationales minimos contra se sua proportione exutos, namque primi unitatis ad secundum examinans proportione data ad eadem data erit quaesiti ad propositum data, quae unitatis proportione ad quaesitum, et eadem data erit examinantis ad propositum. Ec hoc palam erit, quatuor numeros Yliacos esse proportionales, et in quibus ita non fuerit, nequaquam rationales per Itata invenies. Quaesitum necesse *erit moram relinqui equationibus, quibus praeter primam demonstrationem gestavimus.*[1])

Hie saget Algebras vns von den zaln, die do werden exuirt in die minste proportion aus den zaln Itatis, vnd laut der text zum deutschen also:

Es haben gesagt die alten Arabes, das do aus den zaln zu den erroribus werden gefurt rationalische zaln, die do seind ausgezogen in die minste proportion jrer terminum. Dann des ersten der vnitet zu dem andern der erforschung gegebener proportionen, dieselbe wirdt auch gegeben der suchenden zal gegen der furgab; vnd so der vnitet proportion gegeben zu der gesuchten
116 zal offenbar ist, dieselbige wirdt | auch gegeben der zaln des examinirn zu der furgelegtenn. Hierumb wirdt offenbar, das do werden 4 Ylis zal proportionales, vnd jn welchen zaln das auch also nicht funden wirdt, so wirdt nimermehr rationirt das quaesitum durch Itata, sunder es wirdt gelassen die beharrung den ander equation, von welcher wir sunderlich an die ersten haben gesagt ir demonstrationes.

Von disem text gleichmesig vorgethan einen vorstentlichen sin einzufueren, mussen wir cleren die gemelten Itata der Araben, vnd was die gesatzt haben, daraus sie nachuolgendt haben gefurt rationalische zaln in numeros exutos, das ist, die do seind die cleinsten an jrer proportion, mercken wir, das sie haben genant die Itata regula errorum, die wir sagende die regula lancis, die do ist in zweien weitleufigen zaln, welche examinirt werden nach der aufgab, die dann sagendt ist zuuil oder zu wenig der Aufgab gemes. Die selbigen zwo zaln nenneten sie errores, das waren die jrrenden zal von der warheit der auffgab durch das examen funden die genenten lances, welche errores, so die gleich warn nach dem Excess oder defect der Wahrheit, so ziehen sie die von einander, und sprechen, das der Residuant solte sein der thailer zu der zalen, die man thailen soltt, welche sie producirten, so sie multiplicirten einen lancem jn den errorem des andern,
116′ vnd zeuchen auch | ein product vom andern. Sagende sie, das solcher Restant solte sein die zal, die man thailen sollt, durch welche also beweist wurde die frag, so sie mit gedachtem thailer gethailt wurdt. Wer aber sach, das das defect vnd excess der errorum nicht gleich were, wo, vnd

1) Dieses Kapitel setzt in bekannter Weise den doppelten falschen Ansatz auseinander und kommt am Schlusse nochmals darauf zurück, dass nur solche Aufgaben durch denselben gelöst werden können, welche den ersten Grad nicht übersteigen. In den Dresdner Handschriften *C. 405* und *C. 349* sind die in den Text eingeschobenen übersichtlichen Beispiele nicht beigegeben, welche die Anordnung der Rechnung für jeden Fall andeuten.

sie vor voneinander gezogen waren, damit gemacht ward der thailer vnd die zalen, damit man thailen soltt, also wurden sie gemacht; so man addirt die excess vnd defect, wurdt der diuisor, vnd die gemultiplicirten producta der errores in des andern lancem werde gesagt der diuidendus. Also solche mainung des texts nenneten sie Itata. Das wir aber auf die meinung des texts khomen, wollen wir setzen ein einfurendt leicht Exempel durch die errores, damit wir khumen vf den Intentum des auctors. Zu finden ein zal, welche, so wir von jr nemen $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, vnd solche zusamen thun, das 47 khumen. Sagten die alten Arabes vnd namen vngeuerlich ein zal oder lancem, als 12,

Lanx	Error	
12 defectus	$37\frac{3}{5}$	residuum
	Error	$9\frac{2}{5}$
24 defectus	$28\frac{1}{5}$	

welche sie nach gemelter frage examinirten. Wann $\frac{1}{3}$ von 12 ist 4, $\frac{1}{4}$ ist 3 vnd $\frac{1}{5}$ ist $2\frac{2}{5}$. Solchs zusam macht $9\frac{2}{5}$ vnd jrret von 47 jn $37\frac{3}{5}$. Also sagten sie, das der defect, als $37\frac{3}{5}$, ward genant der error von der wahrheit, der aufgefunden | durch gemelten lancem. Sie namen den 117
andern lancem, als 24 mocht sein, welchen sie auch also examinirten vnd funden aber im defect der warheit $28\frac{1}{5}$. Also ziehen sie einen errorem vom andern, nachdem sie gleich seind in defectu, vnd wird der residuant $9\frac{2}{5}$. Das sollte sein der divisor. Als nun multiplicirn sie ein lancem in den errorem des andern, als 24 mit $37\frac{3}{5}$ vnd 12 mit $28\frac{1}{5}$, vnd nemen solche producta von einander, jnmassen wir subtrahirn, restabunt 564, vnd thailen das vbrig, khumb 60, das quaesitum. Vnd desgleichen theten sie, wo die errores excedirten. Wir wollen setzen von anheben diser kunst ein schlecht einfurendt Exempel durch die errores, jn welchem Exempel sie beide superabundant sein oder excediren, als wir schimpflich setzen: Es wollen jr zween khaufen ein pferdt vor 30 fl. Spricht der erst zum andern: leih mir deines gelds $\frac{1}{2}$, so hab jch 30 fl,, so wil ich obgemelt pferd kauffen. Spricht der ander zum ersten sprechende: leih mir deins gelts $\frac{1}{3}$, so will ich das pferdt kaufen, so hab ich auch 30 fl. Die frage, wieuil yeder gelts habe. Setzen wir lancem, der erst hab 12 gehabt, so mus von not wegen der ander 36 haben. Wann, so er dem ersten $\frac{1}{2}$ leihet, so hat er 30; gibt aber der erst dem andern $\frac{1}{3}$, so khumbt $+$ 10 an der Warheit. Wir nemen den andern lancem vnd examinirn in dermas, als 9, so werden wir finden im excess 15, subtrahirn wir | obgemelte 10 von 15, pleiben 5 vor 117′
den thailer. Wir multiplicirn ein jtzlichen lancem mit des andern error vnd subtrahirn die producta von einander, restabunt 90, vnd diuidirn wie

Lanx	Error	
12 excessus	10	residuum
9 excessus	15	5

vor, khumbt 18, das quesitum, also mus der ander von not wegen 24 fl. haben, vnd also hastu genuglich, so die errores excedirn oder diminuirn. Nun von dem dritten punct der alten secten der Itata zu sagen, setzen wir aber ein kindisch Exempel, in welchem die errores nicht gleich sind, sondern von einem lance der ein diminuirt wirdt vnd vom andern excedirt. Es hat einer einen seuberlichen Deckel, wiegt 16 lot, darzu zween Becher, vnd so er den Deckel setzet vff den ersten Becher, so wiegt er 5 mal souil sam der andern; so er auf den andern gesatzt wirdt, so vberwiegt er den ersten 8 mal. Nun fragen wir, wieuil yeder pecher gewogen hab. Setzen wir lancem 12. Nun habe, so der deckel darauf stund er 28, sagt die proposition, er wege zu 5 mal mehr dann der ander: darumb thail 28 in 5, facit $5\frac{3}{5}$, Souil mus der ander gewogen haben. So wir nun den deckel darauf setzen, khomen $21\frac{3}{5}$, solt 96 sein, so ist error defectus $74\frac{2}{5}$.

Lanx	Error	
12	defectus $74\frac{2}{5}$	summa
2	excessus $3\frac{3}{5}$	78

Wir setzen den andern lancem 2, vnd examinirn vorigermassen, finden wir errorem excedirn $3\frac{3}{5}$. Also addirten sie die errores, wurden 78, das solt sein der thailer, vnd multiplicirten einen
118 yeden Lancem in des andern errorem, addirten | die producta, khomen 192. So wir die thailen mit vorgemachten thailer, khomen $2\frac{6}{13}$. So schwer ist der erste Becher gewest. So du diſs examinirt der proportion gemes, wie du dann dem lancem hast gethan, findestu, das der ander hat gewogen $3\frac{9}{13}$, vnd ist recht nach der proposition. Also haben wir cleret den punct, die difficultates der Itata. Nun von solcher einzufuren von jres wegen den text vorgemeldet von der Itata, das ist von den lancibus vnd erroribus, sagen wir, das der text vorgemeldet: Hierumb, wann sie gebern allwegen, die errores vnd lances, so die nach der proposition examinirt werden, rationalische zaln, welche also, als der text sagett, werden producirt ex Itata allwegen in die cleinsten proportion der 4 quantitet proportionalen. Als wir nemen vor, damit der text desto vorstentlicher sey, das erste gesatzte Exempel, so finden wir, das wir ex Itata producirn minimos numeros contra se proportione exutos nach den 4 quantiteten proportionalium der Ylischen. Als wir setzten der lanx war 12, der wurde examinirt, khomen $9\frac{3}{5}$, welche sich halten gegen der vnitet als 1 gegen $\frac{47}{60}$, wann 12 wirdt gerechent vor 1 gantz. Nun ist $9\frac{3}{5}$ nicht gantz 12, wann $\frac{9\frac{3}{5}}{12}$ macht $\frac{47}{60}$, also setzen wir 47 das propositum vnd suchen ein zal, die do hat die proportz gegen jr als 1 gegen $\frac{47}{60}$. Also finden wir 60, quesitum, durch vnser vorgesatzte negste
118′ Capitel khombt, das wir | finden durch die 4 quantitet Ylis, das 1 kegen $\frac{47}{60}$ sein in der proportion als 60 gegen 47, welche so sie reducirt werden, komen sie jn vier quantitates proportionales, die do numeri rationales seind. Also sprechen wir mit dem text, wo solchs nicht geschicht, das kheine rationalische zal noch die berichtunge der frage nicht khan gefunden werden

durch die Itata, sondern sie wirdt gleichmesig gerechent vnser ersten Regel Gebre, vnd also solche Frage zu berichten wirdt gelassen vnsern Equationibus, die wir ane vnser ersten equation demonstrirt haben. Als wir setzen wollten, vff das wir khomen mogen zu beschliesen den text, wir suchen ein zal, wann wir daraus nemen $\frac{1}{3}$ vnd $\frac{1}{4}$ vnd multiplicirn das mit einander, das 9 khomen, vnd setzen durch gemelte Itata den ersten lancem 12 vnd den andern 24 etc., vnd so wir solchs examinirn finden wir quaesitum 11, vnd so wir die proportz suchen 11 als quaesiti vnd 9 das propositum, so finden wir nach dem text 11 gegen 9. Also suchen wir gegen der vnitet auch die proportion, finden wir $1\frac{9}{11}$, vnd solchs $1\frac{9}{11}$ soll sein examen der lances, so finden wir $\frac{1}{12}$, das hat nicht die proportion gegen der vnitet, als do hat propositus gegen den quaesito, also concludirn wir mit dem text, das das 11 das quaesitum nicht sein khan, vnd sprechen also, das solche frage vn-
muglich zu uolfuren durch die Itata, | vnd relinquiren sie vnsern andern 119
equationibus. Darumb sagen wir, das der text allein cleret die Itata, das ist die errores vnd lances, zu erfaren vnd demonstriren, ob alle frage muglich sein do durch zu machen vnd welche nicht, vnd also haben wir volfurt genugsam den Intentum des texts: was durch die erste equation ergehen mag, vnd wirdt auch durch die errores volfurt vnd lances, desgleichen durch die 4 quantiteten proportionales Ylis, vnd was solchs, wie vorlautet, nicht gegeben wirdt mit 4 quantiteten proportionales, sonder disproportionales, so relinquiren wir vf vnsere andere Equationes.

De inveniendis compositis numeris et partibus multitudinis per quasdam proportiones propositas ex quodam numero toto et toto aequales. Capitulum decimum.

Propositis quibuscunque proportionibus et numero toto rationali invenire licebit per easdem partes multiplicativas quodam toto numero priori aequales producentes compositos rationales eidem toto aequales.[1])

Als nun Algebras hat gesagt von dem numerum rationalem, cleret er alhier sein letzte Capitel des tractats sagende, das auch rationalische zaln werden funden, welche also compositi auch in den coniecturen der proposi-
tionen, vnd laut der text zum teutschen also: | 119′

So do werden vorgeschlagen, was proportiones die sein mögen,

1) Hier wird die *regula virginum* oder *regula coecis* durchgesprochen und eine ganz allgemeine Methode zu ihrer Lösung gegeben. In dem lateinischen Texte ist nur gesagt, es sei eine solche möglich, wenn die Anzahl der verlangten Grössen und die dafür zu entrichtende Geldsumme einander gleich seien, aus einer Bemerkung des deutschen Bearbeiters aber folgt, dass diesem klar war, es sei diese Bedingung nicht unbedingt nöthig.

vnd sonderlich, eine rationalische zaln zu finden, vnd ist muglich vnd gepurlich durch die ehegerurten proportiones multiplicirende thail, welche der gantzen furgesatzten zal rationalis gleich seind, vnd welche also sein producirn compositos rationales aus den proportionibus vorgesatzt, welche alſsdann gleichermas gleich seind dem numero rationali vorgeschlagen.

Von disem Text schrifftlich ein vorstentnus zu geben, so ist zu wissen das Aliabras, der Indus, gepraucht an vielen orten die so gemelte Regeln, vnd khumbt vrsprunglich aus den communicirenden zaln, als wir figuriren wollen exemplariter, damit wir auf den vorstandt des texts khomen.

Es hat einer willen zu kaufen 100 stuckh viehes umb 100 fl., nemlich schaf, Esel vnd Ochsen, das dann die Kinder ratende vorgeschlagen, aber vns hieher zu geprauchen. Erofnen wir, souil vns not ist der rationalischen zaln halber, welcher kauft 20 schaf vor 1 fl., 1 Esel pro 1 fl. vnd 1 Ochs pro 3 fl., vnd solch summe der fl. ist 100 vnd des viches ist auch 100 stukh.

1	20	60	
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{1}$	denominans res

Regula virginum

Sagt der text, so do werden vorgeschlagen etzliche proportiones, als do seind: 20 schaf vor 1 fl, 1 Esel pro 1 fl vnd 1 Ochse pro 3 fl, nun durch solche proportiones zu finden mul-
120 tiplicirende thail | durch eegenannte proportiones, welche machen 100, vnd die compositi daraus eruolgent auch 100. Saget Aliabras Indus in dem Buch seiner thaten[1]), das do aus den dingen sol gemacht werden ein gemeiner thailer oder Nenner, als 20 mal 1 ist 20, als in der figur figurirt ist worden. Nun sol ein ytzlicher thail jr nenner gesucht werden, als $\frac{1}{20}$ von 20 ist 1, vnd $\frac{1}{1}$ von 20 ist 20, vnd 3 thail von 20 ist 60. Also setzen wir dise gefundene thail 1 + 20 + 60, vnd zihen 1, das ist das minste, vom andern, restat 19 + 59, vnd solche werden die thailer. Wann so wir zihen 1 von jme selbst, restat Nulla. Also solchs ist geschrieben,

	divisores
60	59
20	19
1	0

denominator
20

so multiplicirn wir den minsten numeranten der thailen, das ist 1, in das ding, person oder vich, vnd die gantze denomination in das gelt. Sam also, ein mal 100 ist 100, vnd 20 mal 100 ist 2000, wann in disem vil das ding vnd geldt des vihs in einer zal. Also zihen wir 100 von 2000, pleiben 1900, vnd solchs sollen wir diuidirn in 19 vnd 59 dermaſsen, das eins mit dem andern aufgeht, vnd wann er nicht ganz aufgeht, so ist die frage nicht muglich. Also so wir thailen 1900 mit 19 zu 41 malen, pleiben 1121, welche zal, so die mit 59 gethailt wirdt, khumen 19, also sprechen wir, das wir haben funden

1) Das soll *daten* heissen, die andern Handschriften lesen *datorum*.

partes multiplicativae | 41 vnd 19, welche wir zusamen addirn, werden 60, 120'
von 100 gezogen pleiben 40 vor das 0 gesatzte vnd den nechsten numerant der schaf, das ist 40, der esel 41 vnd 19 ochsen, welche partes multiplicative machen 100, als der text sagt, das die partes multiplicative sollen gleich sein dem numero proposito rationali, welche also partes genant solle machen integros numeros rationales compositos, von welcher zaln wegen hie der text ruret. So wir multiplicirn 40 mit 1, nachdem die proportion saget, 20 schaf gelten 1 fl, so machen 40 2 fl, vnd so wir multiplicirn 41 mit 1, wann 1 esel gilt 1 fl, facit 41, vnd 19 mit 3, wann 1 ochs gilt 3 fl, facit 57. Also haben wir 40, 41 vnd 19 ding, das ist partes multiplicative, gleich toto rationali 100 vnd compositos integros rationales aus den multiplicativa, das ist das gelt 2 vnd 41 vnd 57, auch gleich toto rationali. Also mogen wir sagen mit dem text, das Aliabras in seinem daten hat gefunden rationalisch zaln, welche auch also durch vnsere erste equation mogen volfurt werden vnd die 4 proportionalische zaln Ylis. Aber von des wegen, das sie integra werden rationalisch als man recht mogen compositi mugen sein, hat Aliabras cleret, von welcher | zaln also zu finden 121
Algebras als sequax hat geschatzt vnd genant dise numeros rationales producirt ex partibus multiplicatiuis, welche zu finden seind vorgeschlagen worden gegeben proportiones. Vnd also wollen wir hie gantz geendet haben, zu sagen von den rationalischen zalen, vnd heben an von den irrationalischen den dritten tractat des dritten Buchs Algebrae.

2	41	57	Gelt.
Partes multiplicatives			
40	41	19	Vieh.
Proportiones propositae			
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{1}$	

	Ochs	3	59	Divisores	2000
100	Esel	1	19		100
	Schaf $\frac{1}{20}$				1900

So man dividirt, khombt yedem das facit.[1])

1) Die Lösung der vorgelegten Aufgabe, welche auf die Gleichungen

$$x + y + z = 100$$

$$3x + y + \tfrac{1}{20}z = 100$$

hinauskommt, ist folgendermaassen geführt. Zuerst ist die zweite Gleichung mit 20 multipliciert, das giebt

$$60x + 20y + z = 2000,$$

dann davon die erste subtrahiert; es entsteht

$$59x + 19y = 1900,$$

und diese Gleichung ist dann so aufzulösen, dass x und y ganze rationale Zahlen

Tractatus tertius libri tertii ALGEBRAE *de numeris surdis.*[1])

Capitulum primum. Quid sit numerus surdus eiusque expositio.

Irrationalis numerus Gebrae longitudine ipse quidem potentialiter tantum rationalis, numerus vero potentialiter tantum rationalis longitudine surdus invenitur. Medialis autem potentialiter surdus ipse et longitudine, potentionalis numeri surdi irrationalis esse probatur. Ex hoc manifestum, omnem numerum longitudine rationalem et potentia rationalem esse, necesse est.

Hie eruolget ALGEBRAS seinen dritten tractat seines dritten Buchs. sagende von den zalen, die do seind irrationales, jnmassen als er am an-
121′ fang hat verheisen. Welcher zal, als wir vorgesaget haben, khein proportz | ist gegen der andern, als do mag sein ein rationalische zal gegen der andern, als wir gesagt haben im dritten Capitel des andern tractats. Laut also:

---

werden. Für $x = 19$ wird hier offenbar sofort $y = 41$ Um dann z zu finden, subtrahiert man $x + y$, das ist 60, von $x + y + z = 100$ und erhält $z = 40$, und es ist wirklich $19 + 41 + 40 = 100$ und $3 \cdot 19 + 1 \cdot 41 + \frac{1}{20} \cdot 40 = 100$. Es wird nicht angegeben, wie die Endgleichung zu lösen ist, *nur dass sie in ganzen rationalen Zahlen gefunden werden muss.* Die Lösung selbst wird auf das Buch *datorum* des ALIABRAS INDUS zurückgeführt, wohl wieder ein Beweis für die nicht schlechte Geschichtskenntnis des Bearbeiters. Dass die Inder zuerst die unbestimmten Gleichungen des ersten Grades unter Forderung ganzer rationaler Werthe der Unbekannten, auflösten, ist erst seit etwa einem Jahrhundert bekannt. Woher stammt nun die Kenntnis unseres Bearbeiters dieser Thatsache? Wo ist das Buch *datorum* des ALIABRAS INDUS, das hier erwähnt wird? Die Auflösung ähnlicher Aufgaben bei BACHET DE MÉZIRIAC beruht auf völlig anderen Betrachtungen. Jedenfalls aber hat nicht er zuerst in Europa das Verlangen nach ganzen rationalen Werthen der Unbekannten aufgestellt, schon vor 1545, in der Urschrift unserer Handschriften, muss es gefordert worden sein. Dass aber der deutsche Bearbeiter weiter ging als der ihm zur Kommentierung vorliegende Text, liegt in den Worten: „Sam also, ein mal 100 ist 100, vnd 20 mal 100 ist 2000, wann in diesem vil das Ding vnd geldt des vihs in einer zal.“ Es muss also doch auch möglich sein, dass beide Zahlen nicht gleich sind. So würden die beiden Gleichungen BACHET's $x + y + z = 41$, $4x + 3y + \frac{1}{3}z = 40$ nach unserm Bearbeiter so gelöst worden sein. Nach 2 ist auch $12x + 9y + z = 120$, davon Gl. 1 giebt $11x + 8y = 79$. Da für x nur ein ungerader Werth möglich ist, so sieht man sofort, dass $x = 5$ für y den Werth 3 ergiebt, dann ist aber $z = 33$, das sind die Lösungen BACHET's. Die am Ende des Kapitels stehende Übersicht des Lösungsganges haben nur *Gotting. Philos. 30* und *Dresd. C. 8.*

1) Der dritte Traktat dieses dritten Buches handelt von den irrationalen Wurzeln, während der erste Traktat das Ausziehen der rationalen Wurzeln lehrte. Im ersten Paragraphen wird zunächst gezeigt, dass eine in der Länge irrationale Zahl nur in der Potenz rational sein kann, und umgekehrt eine nur in der Potenz rationale Zahl in der Länge irrational sein muss. Die Zahl aber, die sowohl in der Länge als in der Potenz irrational ist, heisst medial.

Die irrationalische zal vnser Gebra in der lenge wirdt alleine jn jrer potentz rationalisch; aber die zal, die allein in potentia ist rationalisch, werden gesagt in der lenge, das ist jres radicis, irrationalis oder numerus surdus. Die medialische zal aber, welche do ist in potentia irrationalisch vnd in longitudine, in potentia jres radicis vnd in longitudine radix radicis. Wann so die potentia ist irrationalisch so ist die radix von jr die potentz, vnd radix der potentz ist die longitudo, also ist numerus medialis radix radicis irrationalis. Hierumb wird offenbar, das jetzliche zal in der leng rationalisch ist auch in potentia rationalisch von not wegen. | 122

Von disem text gleichmesig, wie vor gethan, einen schrifftlichen vorstandt einzufuren, so ist zum ersten not, das wir cleren von punct zu punct den text. Zum ersten, was do numeris oder eyn zal sey irrationalisch. So nennen wir das ein irrationalische zal, welche khein radicem quadratam, cubicam noch ȝȝ hat oder khein radicem der furgegebenen duction, als 7 oder 11, oder welche khein duction begreifft, jnmassen wir vorgesagt haben. Welche in dieser lenge wirdt geschrieben also √ mit einem vorgesatzten punkt der figurirten duction, als √ȝ 7, das ist radix quadrata von 7, oder √ȼ von 11, oder √ȝȝ von 13, das ist radix radicis von 13, vnd also werden sie nachuolgent jn der lenge, das ist jrer radicum figurirt, wie hernach volget.[1])

In longitudine ita scribitur numerus surdus per ductiones absolute.

√ȝ 7	Radix ziens oder quadrata von	7
√ȼ 11	Radix cubica von	11
√ȝȝ 13	Radix ziens de zens von	13
√ß 15	Radix, das ist sursolida von	15
√ȝȼ 14	Radix censicubica von	14
√biß 17	Radix bissursolica von	17
√ȝȝȝ 19	Radix census censui de censu von	19
√ȼȼ 15	Radix cubi de cubo von	15

1) Wie schon in der Einleitung gesagt ist, ist das Wurzelzeichen ein starker Punkt, an welchen sich ein nach oben gerichter längerer Strich anschliesst. Um zu wissen, von welcher Potenz die Wurzel ist, wird das entsprechende algebraische Zeichen daneben gesetzt. Es ist also:

Sagt der text weither, das die potentionalische zal, die allein in potentia ist rationalisch, wirdt in longitudine surda genant, welcher zaln khein proportion khan gegeben werden gegen einander als ein rationalischen zal gegen einer andern, vnd werden also in der potenz figurirt ⌊5 ʒ, das das ist quadratum 5, ⌊3 cl cubus 3, ⌊17 ʒʒ census de censu 17, ⌊9 ß sursolidum 9 etc, vnd so werden sie durch die andern ductiones in der potentz
122′ gesatzt, vnd in longitudine werden sie geschrieben, | wie hie vorgesatzt mit dem punct, vnd hie in der potentz mit dem gnomone, darumb, das alle ductiones angulum rectum nicht refutirn, vnd stet die figur also:[1])

In potentia figurantur ita numeri surdi longitudine.

⌊5 ʒ	Quadrat von	5
⌊3 cl	Cubus von	3
⌊7 ʒʒ	Census de censu von	7
⌊9 ß	Sursolidus von	9
⌊7 ʒcl	Censicubus von	7
⌊10 biß	Bissursolidus von	10
⌊11 ʒʒʒ	Census censui de censu von	11
⌊13 ccl	Cubus de cubo von	13

Saget der text furter von dem numero mediali: in potentia ist er irrationalis vnd in longitudine, vnd von wegen der potentz zu schöpfen den radicem, welcher also die potentz bezeichnet, welche alſsdann in longitudine

---

ſʒ*a*, ſcl*a*, ſʒʒ*a*, ſß*a*, ſʒcl*a*, ſbiß*a*, ſʒʒʒ*a*, ſccl*a*
der Reihe nach
$\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[6]{a}$, $\sqrt[7]{a}$, $\sqrt[8]{a}$, $\sqrt[9]{a}$,
wobei stets vorausgesetzt ist, dass a keine gleichnamige Potenz ist.

1) Soll weiter angezeigt werden, dass eine bestimmte gegebene Zahl nicht als in der Länge, also als einfache Zahl gegeben ist, sondern als eine irrationale Potenz, so wird sie in einen rechten Winkelhaken (*gnomon*) eingeschlossen, und das Zeichen der Potenz, welche sie vorstellen soll, diesem Winkelhaken rechts angehängt. Es heisst also z. B. ⌊3 cl, es sei 3 ein Würfel und nur als solcher rational. Ebenso ist ⌊3 ß, eine nur in der fünften Potenz rationale Grösse. Auf diese Erweiterung der Euklidischen Erklärung von in Potenz rational haben wir schon oben hingewiesen.

jrs radicis auch irrationalisch ist, Vnd also hat der numerus medialis ein ytzliche duction zu erforschen radicem radicis, vnd werden also vorzeichent in der potentz irrationalis, als ·∫ʒ |12, das ist, der radix von 12 ist die potentz, vnd radix des radicis quadrata ist die longitudo. Desgleichen ·∫ce |14, das ist radix cubica von 14 ist die potentz, vnd radix cubica von
| dem radix longitudo etc. Also sprechen wir ∫cce des 12, des medials, 123
ist longitudo, vnd also werden sie figurirt in der potentz durch alle ductiones aus die numeri mediales, die do in potentia seind irrationales, vnd werden gezeichent in longitudine mit dem punct gezwifacht. ∴∫ʒ |6 ist radix radicis des medialis ·∫ʒ |6, aber die quantiteten oder die potentionalischen ductiones irrationales werden verzeichent in diser weise ·∫|5 ʒ, das ist der quadrat von 5 ist irrationalis etc, vnd ∴∫|5 ʒ ist latus in longitudine, vnd wirdt genant medialis, darumb das er jn medio loco proportionalis zwischen zweyen quadraten aber cuben oder anderen ductionen. Sam wir wollen figuriren, das die vorstandt haben, dauon wir gesagt haben.[1])

Also werden die mediales vorzeichnet

·∫ʒ |6		quadrato
·∫ce |13		cubico
·∫ʒʒ |9		censo de censo
·∫ß |8	Medialis a	sursolido
·∫ʒce |10		censicubo
·∫biß |15		bissursolido
·∫ʒʒʒ |16		censu ʒ de ʒ
·∫cce |9		cubo de cubo

Ita figurantur mediales in longitudine

∴∫ʒ |16		ʒ
∴∫ce |12		ce
∴∫ʒʒ |5		ʒʒ
∴∫ß |13	Das ist radix radicis	ß
∴∫ʒce |17		ʒce
∴∫biß |15		biß
∴∫ʒʒʒ |19		ʒʒʒ
∴∫cce |11		cce

1) Die Bezeichnung der Medialen ist wieder eine andere. Sie sollen bekanntlich sowohl in der Länge als in der Potenz irrational sein. Als irrationale Potenz werden sie so charakterisiert, dass *über* das Wurzelzeichen noch ein Punkt gesetzt wird, natürlich die Zahl selbst in einen Winkelhaken eingeschlossen, also z. B. so: ·∫ʒ |3. In der Länge aber werden sie so geschrieben, dass zwei Punkte neben einander, unter sich verbunden und an dem zweiten der längere Strich angehängt wird, also z. B. so: ∴∫ʒ |3, gelesen Quadratwurzel aus der Quadratwurzel von 3. Obgleich für unser Gefühl das mit $\sqrt[4]{3}$ übereinstimmt, so ist doch für die Auffassung der damaligen Zeit ∫ʒʒ |3 und ∴∫ʒ |3 etwas wesentlich Verschiedenes. Die nicht mediale irrationale Zahl wird nämlich wieder anders gekennzeichnet. Als mediales Quadrat sahen wir ·∫ʒ |3 schreiben, als einfaches irrationales Quadrat wird dieselbe Zahl ·∫|3 ʒ geschrieben, also der Potenzexponent, um so kurz zu sagen, hinten angehängt, und die Wurzel dieser irrationalen Potenz ist dann natürlich ∴∫|3 ʒ.

Item numeri quadrati in potentia irrationales disiuncti a mediali.

$\surd\,\underline{\lvert 5}_{\mathfrak{z}}$	der quadrat
$\surd\,\underline{\lvert 5}_{\mathfrak{c}}$	der cubic
$\surd\,\underline{\lvert 5}_{\mathfrak{zz}}$	der census de censu

Ita figurantur numeri quadrati in potentia irrationales in longitudine.

$\surd\,\underline{\lvert 5}_{\mathfrak{z}}$	der quadrat
$\surd\,\underline{\lvert 5}_{\mathfrak{c}}$	der cubus
$\surd\,\underline{\lvert 5}_{\mathfrak{zz}}$	der census de censu

Wir nemen *ac* (Fig. 17) vor radicem der quadratischen duction in numeris $\surd_{\mathfrak{z}}\,5$ vnd *cb* $\surd_{\mathfrak{z}}\,3$, vnd quadrirn *ac*, facit $\underline{\lvert 5}_{\mathfrak{z}}$, vnd quadrirn *cb*, facit $\underline{\lvert 3}_{\mathfrak{z}}$; das sein zwei quadraten in potentia allein rationales, als wir oben gesagt haben. Nun in quarta secundi geometriae, wir multiplicirn $\surd_{\mathfrak{z}}\,5$ vnd $\surd_{\mathfrak{z}}\,3$ mit einander das ist *ac* jn *bc* bis, khomen die zwei supplementa vnd khumbt $\surd_{\mathfrak{z}}\,\underline{\lvert 15}$, das sein zwei numeri mediales, die do in potentia seind irrationales vnd seind gesatzt medio loco proportionales zwischen den zweien quadraten $\underline{\lvert 5}_{\mathfrak{z}}$ vnd $\underline{\lvert 3}_{\mathfrak{z}}$. Also sagen wir das die drei numeri $\underline{\lvert 3}_{\mathfrak{z}}$, $\surd_{\mathfrak{z}}\,\underline{\lvert 15}$ vnd $\underline{\lvert 5}_{\mathfrak{z}}$ sein continui proportionales. Also haben wir geclert die vrsach des medii. Als wann radix quadrata von 15, das ist das supplement, vnd radix von dem radice ist das latus tetragonicum des supplement in longitudine vermag proportionaliter describirn, vnd also ist es in cubicis

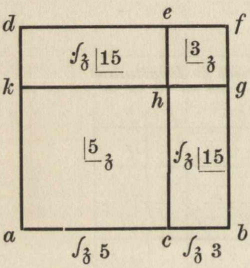


Fig. 17.

124 vnd andern ducti|onibus, welche do mehr media proportionalia haben dann eins, vnd werden alle genant mediales, von wegen das sie nach ordnung der duction seind media proportionalia der ductionen. Sagt der text per modum corollarii, das alle zal an der lenge rationales werden hieraus erkant in potentia rationales. Wann eine yede zal absoluta ist vff das minst in potentia rationalis, vnd hierumb werden die rationalischen zaln in longitudine absoluta gesatzt, vnd in potentia, wie andere zaln, die allein potentia rationales seind, als wir gesagt haben. Als 2 bedeut ein radix vnd $\underline{\lvert 4}_{\mathfrak{z}}$ sein potentz quadrat, also der gleichen wir jn der glosa angezaiget; vnd volget also das ander Capitel vnsers dritten tractats des dritten Buchs.

Capitulum secundum de additione radicum numerorum irrationalium
124′ *communicantium longitudine.* |

Radicum numerorum irrationalium coacervatio omnium ductionum constabit, cum, si longitudine communicantes fuerint proportione et mensura *quadam, ductiones, quae proponantur, si primi et minimi in eadem exuentur, inde radices coacervandae erunt. Productum vero, si vocabulum ductionis accepit, excrescens huius, cum si communicantes quantitate ductionum fuerit, huius producti radix aggregationem radicum numerorum propositorum ostendet.*[1])

Hie saget Algebras von der ersten speties der numerorum irrationalium, vnd sagt von den radicibus der irrationalen in longitudine communicantium. Als wir sagen, das 12 vnd 3 seind communicantes in longitudine, vnd seind doch an jn selbst surdi, darum sagt er hie, zu addirn $\surd\mathfrak{z}\ 3$ zu $\surd\mathfrak{z}\ 12$, dergleichen welche zal do communicirn in longitudine vnd sie haben ein proportz gegeneinander als ein quadrat gegen dem andern, hierumb communicirn sie der dritten duction der quantitatum in longitudine, vnd laut gemelter text zum deutschen also:

Die zusammengebung der radicum aller ductiones, welche so die zaln longitudine communicirn in der proportz vnd einer mensur der | furgehaltenen ductionen, welche zaln, so die exuirt 125
werden in die cleinsten zal vnd proportz der duction, vnd von welcher also genomen werden die radices vnd werden zusamen geaddirt, was daraus khumbt, das der duction gemes gefurt wirdt, vnd letzlich solch product erwechst durch den communicanten, damitt sie haben communicirt, sagen wir, das der radix desselbigen erwachsenden der duction die addirung beweise der gemelten radicum furgelegter zaln.

Als wir wollen schrifftlich cleren, das, so wir vornemen den quadrat, welcher die erste duction ist, so ist nicht not die rationalen vorzuschlahen, wann wir dauon genugsam zu erkhennen gegeben haben vnd beweisen jre Addirung durch ihre offene radices an jr selber. Welche aber so die longitudine communicirn, als zu addirn $\surd\mathfrak{z}\ 8$ zu $\surd\mathfrak{z}\ 18$, welche in potentia vnd longitudine communicirn mit den rationaln, sagt der text, das man sol suchen die mensur $8 + 18$, finden wir 2, welche sie thailt zu 4 vnd 9; das ist die proportion der duction, als der text sagt. Von welchen 4 vnd 9 wir nemen jre radices zusamen, nach den sie rationales seind, werden 5,

1) In diesem Kapitel wird die Formel entwickelt:

$$\sqrt{a^2b} + \sqrt{c^2b} = \sqrt{(a+c)^2b}\,.$$

Gerechnet wird so: $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$, $\sqrt{c^2b} = c\sqrt{b}$, also ist $\sqrt{a^2b} + \sqrt{c^2b} = (a+c)\sqrt{b} = \sqrt{(a+c)^2b}$. Aber die Rechnung gilt auch allgemeiner $\sqrt[n]{a^nb} + \sqrt[n]{c^nb}$ ist auch gleich $\sqrt[n]{(a+c)^nb}$. So ist in seinem Beispiele $\surd\beta\ 3 + \surd\beta\ 96 = 1\,\surd\beta\ 2 + 2\,\surd\beta\ 3 = 3\,\surd\beta\ 3 = \surd\beta\ 243 \cdot 3 = \surd\beta\ 729$, das ist in unsern Zeichen $\sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{729}$.

vnd multiplicirn das quadrate, das ist mit den rational ductionibus, wirdt 25. Solchs, sagt der text, soll wider gemultiplicirt werden mit dem com-
125′ municanten, das was 2, wird 50, vnd radix | von 50 ist radix der angegebenen zal, welche also was /ʒ von 8 vnd /ʒ 18. Sprechen wir, jr beder radix ist /ʒ 50, vnd defsgleichen in den andern ductionibus, welche nun so die jn longitudine communicirn furgegebene duction. Als wir wollen setzen von dem cubic; ich soll addirn /cꜫ von 4 zu /cꜫ von 32. So wir suchen Mensur nach dem dritten capittel vnsers andern tractats, finden wir pro mensura 4, vnd die numer werden minimi 1 + 8, welche in proportione seind der cuben. Wir nemen jre radices zusamen, werden 3, vnd cubirn die, werden 27, vnd solche multiplicirn wir mit 4, dem communicanten, khumen 108 vnd /cꜫ von 108 ist geaddirt /cꜫ 4 vnd /cꜫ 32, vnd also gleich in andern ductionibus, welche, so sie longitudine communicirn. Als ich wollte addirn /ß von 3 zu /ß von 96, so examinirn sie sich ad ductionem in 1 vnd 32 vnd die summa der radicen von dem ist 3. Das multiplicirn wir der duction gemes, khomen 243, vnd solchs sollen wir mit dem communicanten multiplicirn, das ist mit 3, wirdt 729 vnd /ß von 729 ist die
126 addition der radicum der furgelegten zaln, vnd also furter. |

Das wollen wir geometrice ostendirn (Fig. 18), vnd nemen vor zum ersten den quadrat, vnd wie er sich in dem hellt, also ist es in den andern ductionibus. So wir suchen mensuram, finden wir das /ʒ 18 vnd /ʒ 8 seind

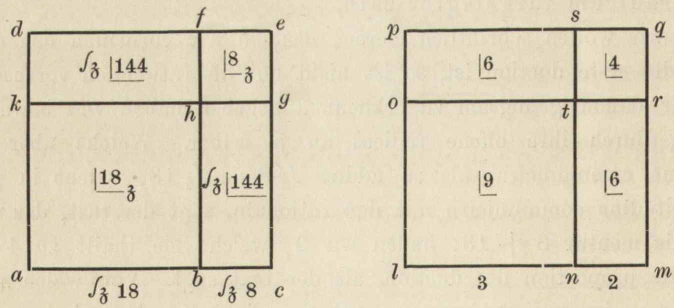


Fig. 18.

equa multiplicia von 9 vnd 4, welche also jre radices machen 5, vnd jre potentz 25, wann 9 vnd 4 vnd 6 vnd 6 seind ex quarta secundi geometriae 25. Nun seind /ʒ 18 vnd /ʒ 8 equa multiplicia mit + 2, also 2 mal 25 seind 50. Also sagen wir, das die quadrata vnd supplementa seind equa multiplicia; haben wir ex 15 geometriae quinti, das multiplicabilia haben eine gleiche proportion, mogen wir sagen, das /|50 ʒ ist souil sam /ʒ von 18 vnd /ʒ von 8 zusamen geaddirt, wann 18 vnd 8 vnd /ʒ |144, das ist 12 geduplirt mit 6 dem submultiplex, zwir genomen macht 50, vnd also mogen wir

solchs nachuolgend beweisen in der extraction der surden ad propinquitatem mit | dem numero mutuato, das ist mit der entlehnten zal, als du eigent- 126′
lich eher nicht wirst vnd magst also probirn, als wir tabellaria vestigia werden setzen dem numero mutuato. Vnd also haben wir genuglich vorstentnus eingefurt, damit man mag addirn etzliche radices der ductionum, welche do communicirn in longitudine. Nun volget hernach von den numeris irrationalibus, die do in longitudine kheine communicantes haben, als do seind $\surd_{\mathfrak{z}}$ von 5 zu $\surd_{\mathfrak{z}}$ von 3 zu addirn, welche also nicht sein in der proportion kheiner duction, vnd hierumb werden sie vnverstentlich addirt, es sey denn, das wir sonderlich geometrisch beweisung einfuren, als wir im negsten Capitel sagen werden von den zalenn, die do nicht sein in kheiner proportion der ductionum.

Capitulum tertium de additione radicum irrationalium incommensurabilium longitudine.

Incommensurabilium vero numerorum longitudine descensus radicum relinquitur, cum in adaucta proportione ductionis, qua versantur, non sedent, sed binomiis, trinomiis, quadrinomiis et quampluribus numeris irradicabilibus hi numeri construuntur, et geometrica quadam figuratione propter quid ostenduntur. | [1]) 127

Nachdem ALGEBRAS gesagt hat von den radicibus der zaln irrationalen, welche in der lenge communicirn, das ist, das sie sein similes, das ist in proportione quadratorum oder ductionum etc, hie saget er von zaln, welche do sein jn kheiner proportion der duction vnd laut der text zum deutschen also:

Der irrationalischen zalen absteigung zu iren radicibus, welche do nicht communicrn jn longitudine, wird verlossen, wann sie seind nicht equa multiplicia, das ist, das sie nicht sein jn der proportion der ductionen, jn welcher dann sie proportionirt

---

1) Addition allgemein irrationaler Wurzeln nach der Formel:

$$\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{(a+b)+\sqrt[n]{(n_1)^n a^{n-1} b}+\sqrt[n]{(n_2)^n a^{n-2} b^2}+\cdots+\sqrt[n]{(n_{n-1})^n a\, b^{n-1}}}$$

unter $n_1, n_2, \cdots, n_{n-1}$ die Binomialkoefficienten verstanden. Sein erstes Beispiel ist $\sqrt{3}+\sqrt{5}=\sqrt{8+\sqrt{60}}$. Um dabei anzudeuten, dass die erste Wurzel sich auf den ganzen Ausdruck erstreckt, der ihr folgt, ist ihr unmittelbar cs angehängt, das heisst *communis,* die sonst dort stehende Bezeichnung des Wurzelexponenten jedoch an das Ende des den ganzen Ausdruck einschliessenden Winkelhakens gerückt. In cossischen Zeichen heisst also die obige Gleichung:

$$\surd_{\mathfrak{z}}\,3+\surd_{\mathfrak{z}}\,5=\surd cs\,\underline{|8+\surd 60}_{\mathfrak{z}}\,.$$

werden, sondern sie werden, spricht er, mit gespalten zaln, das ist mitt zwifach genomigen, mitt drifach genomigen, mitt vierfach genomigen vnd mit der noch mehr vnradicirten zaln der quantiteten affirmatiue vnd negatiuen vmbschreiben, vnd werden also beweist durch geometrische formen jre vrsach, warumb sie dermas vnd nicht anderst sollen addirt werden.

Von disem text schrifftlich zu sagen, so nemen wir vor jn gleicher form jm negsten Capitel beweist aus quarta secundi geometrie vnd setzen zu addirn √ʒ 5 zu √ʒ 3, welche also, sam der text sagt, incommensurabiles seind longitudine

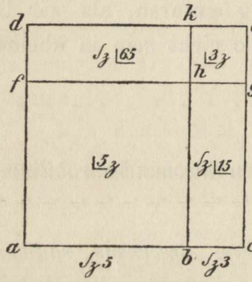
127' 

Fig. 19.

vnd irrationales gemelter duction | vnd khein communicanten haben. Setzen wir ab sei √ʒ 5, vnd bc sey √ʒ 3 (Fig. 19), so wir ab quadriren, so khumbt |5 ʒ, der quadrat ah in potentia rationalis. Wir quadrirn bc, ist |3 ʒ, der quadrat he rationalis in potentia. Wir producirn ex quarta eiusdem secundi Geometriae die zwei supplementa fk vnd bg, welche erwachsen aus ab in bc zwir gefurt, machen √ʒ |15 vnd aber √ʒ |15, aus welchen circumscriptibilibus, sagt der text, die Addition sol werdenn. Wir addirn 5 vnd 3, das sind die zwo rationalisch potentz, ist 8; wir addirn die zwei supplementa, das ist die zween numeri mediales, ist √ʒ |60: also sprechen wir, das der gantze quadrat ac sey in numeris irrationabilibus |8 + √|60 ʒ, vnd radix von dem ist ac, das ist in longitudine in numeris irrationalibus, geschrieben dermas als

√cs |8 + √|60 ʒ

vnd das ist √ʒ von 5 vnd √ʒ von 3 geaddirt, vnd wirdt binomius numerus, das ist mit zweifach gnomischen zaln vmbschrieben. Wann 8 vnd √ʒ von 60 sein gespalten, vnd hierumb sagt der text: binomiis. Saget furter mit trinomiis, das geschicht in cubic zaln. Sam also, wir wollen addirn √cl von 8 zu √cl von 27. Wir cubicirn √cl von 8, wird |8 cl, vnd cubicirn √cl
128 von 27, wirdt | |27 cl, das seindt die zwen cubic pq vnd kl (Fig. 20) in der obersten superficie in rationalibus, wann khein duction schwerer ist zu addirn dann der cubic. Hierumb wollen wir exemplariter setzen zum ersten in rationalibus Exempel, darnach surden. So wir haben die zwenn cubic 27 + 8, so nemen wir das vorgetriplirt quadrat von dem radix cubica des grosten cubic, der do ist 27. Das finden wir also: wir multiplicirn 27 cubice, khumen 19683; also √ccl von 19683 ist √cl von 27, das multiplicirn wir

ʃccℓ 19683 in ʃccℓ von 19683, khumbt quadratum radicis ʃcℓ 27, das dann more irrationibilum ist 387420489. Also sagen wir, das quadratum cubice radicis von 27 ist ʃccℓ 387420489. Solchs sollen wir triplicirn, so multiplicirn wiz ccℓ von 3, der dann íst 19643 mit dem ʃccℓ 387420489, khumbt ʃccℓ 7428597484987, vnd das ist triplum radicis quadrati cubici

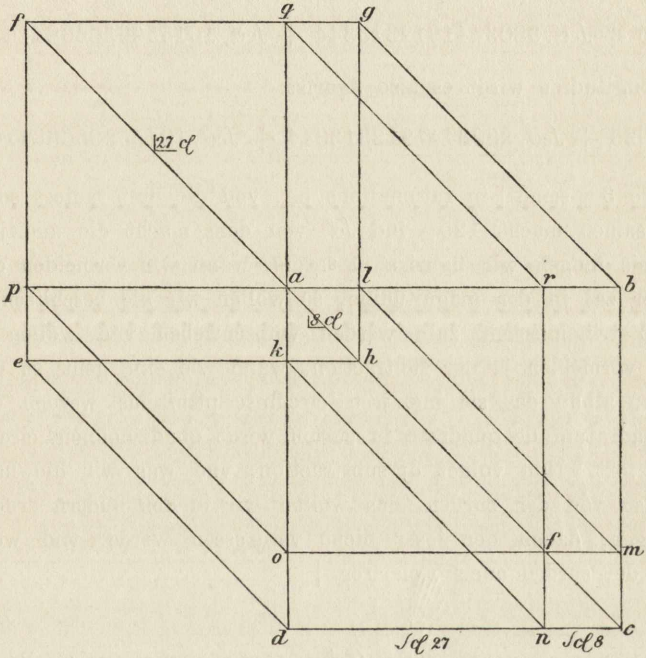


Fig. 20.

maioris cubici. Solchs sollen wir multiplicirn in ʃcℓ von 8, das ist minorem cubicum, also cubirn wir 8, khumbt 512. Also multiplicirn wir ʃccℓ 512 mit ʃccℓ 7428597484987, khumen also 3803441912313344, vnd das seind die 3 zensus, damit der cubus wechst *fs*, *dg* vnd *hb* vnd haben also noch die radices zu solidirn, welche dann erwachsen aus dem triplicirten quadrat von dem radix cubica des cleinern cubic gemultiplicirt in radicem des grossen cubi, also finden wir, das wir wie oben multiplicirn | 8 cubice, 128'
khumbt 512, das ist ʃccℓ von 512, Nun multiplicirn wir 512 mit 512, facit in more irrationalium ʃccℓ 262144, vnd das ist quadratum von ʃcℓ 8. Das sollen wir aber triplicirn, darumb multiplicir ccℓ von 3, der dann ist 19683, mit 262144, khumbt 5159780352, vnd ʃccℓ von solchem ist triplum quadratum cubicae radicis des cleinern cubus, der do was 8. Solchs sollen wir multiplicirn in radicem cubicam des grossen, was 27. Nun ist ccℓ

gewest von 27 ſcc𝔢 19683, darumb multiplicir 19683 mit 5159780352, vnd khumbt 101559956668416, vnd das seind 3 radices solidatae *ph* + *ln* + *gk*, vnd also finden wir more irrationalium, 27 vnd 8, das macht 35 vnd 3803441912313344, das seind 3 ʒ, vnd 101559956668416, das seind die drei radices solidatae. Also sprechen wir, das gemelter cubic figurirt ist in potentia

|35 + ſcc𝔢 3803441912313344 + ſcc𝔢 101559956668416 𝔢

vnd in longitudine wirdt es also figurirt:

ſcs |35 + ſcc𝔢 3803441912313344 + ſcc𝔢 10155995668416 𝔢.

129 Wann die 3 ʒ seind | in rationalibus 54, vnd die drei radices solidirt 36, solchs zusamen macht 125, vnd ſc𝔢 von dem macht die addition, Vnd gleicherweis mogen wir figurirn in surdis, wann wir vermeiden die grosse muche der zal in der magnitudine, so wollen wir hie beschlisen, das die cubic mit trinomischen zaln werden vmbschrieben vnd wollen also die ductiones vormelden jn der subtraction, wann wie eine geht, so geht auch die ander, allein das sie mit jren circumscriptibilibus werden vorandert. Wann quadratum de quadrato in surdis wirdt quadrinomicis circumsribirt, vnd also fort. Nun volget dj substraction, vnd was wir hie haben vormyden also von den surden, das wollen wir jn den andern eruolgen von kurtz wegen, dauon der leser nicht verdrossen werde, vnd wollen den
129′ Artickel der surden auch declariren. |

Capitulum quartum de subtractione radicum numerorum irrationalium communicantium longitudine.

Radicum numerorum irrationalium diminutio omnium ductionum notabitur, cum si, ut diximus, longitudine communicant, proportionis mensura, qua ductio proponitur, si primi et minimi eorum exuti in eadem ad radicis exsoluentur, radices segregandae sunt, residuum, si ductionis nomen usurpet. Exortum huius si communicantis quantitate dictum fuerit, huius tum producti radix subtractionis radicum numerorum propositorum manifestet.[1]

Nachdem Algebras cleret hat die addition der irrationalen, welche do communicirn vnd nicht communicirn, hie ervolget er die andern species,

1) Hier ist wieder die angewendete Formel:

$$\sqrt[n]{a^n b} - \sqrt[n]{c^n b} = \sqrt[n]{(a-c)^n b}\,.$$

Die Rechnung genau geführt wie bei der Addition.

sagende von der subtraction der communicanten in longitudine, vnd laut zum teutschen also:

Die abnemung der radicum von einander der irrational zaln, welche, als wir gesagt haben, communicirn in longitudine mit der mensur der proportion der duction, mit welcher sie proponirt werden, so jre termini exuti, das seind die minsten jn derselben proportion der duction, wird aufgeloset jn jre radices, so sollen
sie von einander gezogen werden, vnd das | residuum, so es ge- 130
schopfet den namen der duction, vnd was heraus khumbt, so das mit der mensur communi gemultiplicirt wirdet, desselben product radix wirdt offenbar die abnemung der radicum von einander der vorgelegten zaln.

Von disem text, wie vorgesagt, eine schrifftliche meinung zu geben, nemen wir vor eine duction, als wir wollen subtrahirn √ʒʒ 5 von √ʒʒ 405, so suchen wir, als der text sagt, die groste mensur, ist 5; vnd die minimi termini seind 1 + 81, welcher radices gegebener duction ist 1 + 3. Nun ziehen wir 1 von 3, bleiben 2, vnd solche 2 sollen der duction gemes gefurt werden, facit 16, welche, als der text sagt, mit dem Communicanten sollen gemultiplicirt werden, facit 80, vnd √ʒʒ von 80 ist die subtraction oder das restat, so ich subtrahir √ʒʒ 5 von √ʒʒ 405. Desgleichen in allen ductionibus, so sie seind similes ductiones propositae. Als ich wolte subtrahirn √ce 16 von √ce 1024, so soluirn wir ad minimas partes oder terminos √ce 16 + √ce 1024, khumen 1 + 64, von welchen die radices sein 1 + 4. So wir sie von einander zihen, pleiben 3. Solche cubicirn wir, seind 27, vnd multiplicirn mit dem communicanten 16, khomen 432, vnd √ce von 432 ist das Residuum, so man die eegemelten termini von einander zeuchet,
vnd defsgleichen | wirdt solchs auch bewisen jn den andern ductionibus. 130′
Als ich wolt setzen ein sursolitet, √ß 64 von √ß 486 zu zichen, examinirn wir die ad minimos terminos, khumen 32 vnd 243, von welchen √ß ist 2 + 3; ziehen wir 2 von 3, restat 1. Solchs multiplicirn wir der duction gemes, khumbt 1, das multiplicirn wir mit dem Communicanten 2, khomen 2: also khumbt jm restanten √ß von 2, vnd desgleichen jn andern ductionibus.

Das wollen wir geometrice ostendiren. Wir nemen in den quadraten zu subtrahirn √ʒ 18 von √ʒ 200. Wir resoluirn sie in numeros, das ist in minimos terminos der duction, finden wir 9 vnd 100, von welchen die radices seind 10 vnd 3. Also seind 18 vnd 200 equa multiplicia, Was dann ist in simplicibus, das ist auch in equis multiplicibus. ex 15ª quinti Geometrie.[1])

1) Euclides V, 15: Si fuerint aliquibus quantitatibus eque multiplices assignate, erit ipsarum multiplicium atque submultiplicium una proportio.

Nun saget auch septima secundi geometrie[1]): Was do werde aus *ab* in
131 sich gefurt mit sampt *bc* in sich, das sei dem gleich, das | do khumbt aus *ab* in *cb* zwir vnd aus *ac* in sich gefurt (Fig. 21). So wir nun zichen *cb* von *ab*, restat *ac* in longitudine vnd in potentia *ak*. Nun ist *ab* in potentia 200 ȝ, vnd *cb* in potentia 18 ȝ, das macht zusamen 218: das soll gleich sein den zweien medialen in potentia *ge* vnd *ce* mit sampt dem quadrat *ak*. Also ziehen wir die zwei medial in

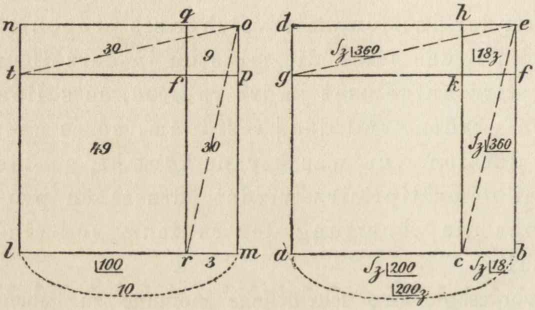


Fig. 21.

potentia, die zusamen machen √ȝ 1440 von 218 ȝ dem quadrat des gantzen, restat 98, vnd das ist quadratum *ak* ignotum, des radix ist *ac*. Also sagen wir, so wir ziehen √ȝ 18 von √ȝ 200 restat √ȝ 98, das was quadratum *ak*, also ist 98 auch gleich multiplex mit 49. Dann ipsa simplicia waren 3 vnd 10, vnd so wir 3 von 10 ziehen, pleiben 7, des quadrat ist 49. Vnd also haben wir solchs im quadrat bewisen, vnnd helt sich gleichmesig in andern ductionibus.

Als wir setzen, ich wil subtrahirn √cꝭ 16 von √cꝭ 250. Suchen wir die gantze mensur, ist 2, vnd seind die resolventen 8 vnd 125, von welchen radix ist 2 vnd 5. So wir nun subtrahirn 2 von 5, pleiben 3. Solchs sollen wir cubicirn, khomen 27, das ist mit der gemeinen mensur multiplicirn, als 2, khomen 54, vnd √cꝭ von 54 restat, so wir subtrahirn √cꝭ 16 von √cꝭ 250. Vnd also helt es sich allerweis in andern ductionibus,
131′ vnd solchs dich also geometrice zu ostendirn | werden wir sagen jm nachuolgenden Capitel, von dem, so sie seind incommensurabiles in longitudine. Vnd also haben wir es in der duction mogen vorfurn des quadrats von dem quadrat, als wir setzen zu subtrahirn √ȝȝ 7 von √ȝȝ 567. Wir resoluirn ad minimos terminos, finden wir 1 + 81, von welchen radix radicis ist 1 + 3. Nun ziehen wir 1 von 3, restant 2; die furen wir der duction gemes, khumbt 16. Das multiplicirn wir mit dem communicanten, khumbt 112, vnd √ȝȝ 112 pleiben, so wir subtrahirn √ȝȝ 7 von √ȝȝ 567, vnd ist recht. Volget von den incommensurabilibus longitudine das funfft capitel.

1) Euclides II, 7: Si linea in duas partes dividatur, quod fit ex ductu totius in se ipsam, cum eo, quod ex ductu alterius partis in se ipsam, equum est eis, que ex ductu totius linee in eandem partem bis et ex ductu alterius partis in se ipsam.

Capitulum quintum de subtractione Radicum numerorum irrationalium incommensurabilium longitudine.

Eorum vero, quorum rationamentum longitudinis non est, ipsi quidem nequaquam in adaucta proportione resident, sed ut prius irradicabilibus numeris plurinomicis et habitudinibus negativorum vel privativorum constituuntur. Et horum etiam causas, propter quid, geometricis demonstrationibus anneximus.[1]) | 132

Hie cleret ALGEBRAS die zaln, welche do seind in longitudine incommensurabiles, vnd saget von jren subtractionibus, welcher text laut zum deutschen also:

Der zalen, welcher do ist kheine Mensur der duction, vnd dieselbigen seind mit nichte in der proportion der similen ductionen, sondern sie werden vmbschrieben mit vngeradicirten zalen der manignamig zalen mitsampt den habitudinen der Negation vnd priuation, vnd der aller haben wir vrsach gesatzt vnd geometrischer demonstration anhangen.

Von wegen des textes, wie vormals gethan, einen schrifftlichen sin zu geben, vnd nachdem die quadratische duction die erste ist, so wollen wir dauon setzen. Als ich will abzihen ſʒ 5 von ſʒ 12. So nemen wir vor ein quadrat (Fig. 22) des lenge *ab* ist ſʒ 12, von dem so gezogen wirdt ſʒ 5, restat *ak*. Wir nemen fur, als in der Addition, septimam secundi Geometrie: Was do wirdt aus *ab* in sich gefurt mit samt dem *kb* in sich, das sei gleich dem, das do khumbt aus *ad* in *kb* zwir vnd aus *ak* in sich gefurt. Nun ist *ad* der quadrat $\underline{|12}_{\mathfrak{z}}$, vnd *gd* der quadrat $\underline{|5}_{\mathfrak{z}}$, das zusamen ist $\underline{|17}_{\mathfrak{z}}$, vnd souil soll auch sein *kd* vnd *hd* vnd *ag*. Nun seind *hd* ſʒ $\underline{|60}$, das zwir aus septima geometrie ist ſʒ $\underline{|240}$. So wir das von $\underline{|17}_{\mathfrak{z}}$ herabzihen, so pleibet $\underline{|17 - ſ240}_{\mathfrak{z}}$, das ist der quadrat *ag*, vnd ſcs $\underline{|17 - ſ240}_{\mathfrak{z}}$ ist *ak*. Also sprechen wir | de- 132′
monstratiue, so wir subtrahirn ſʒ 5 von ſʒ 12, restat ſcs $\underline{|17 - ſ240}_{\mathfrak{z}}$ des quadrats, der was *ak* in longitudine, vnd also werden die irradicabiles

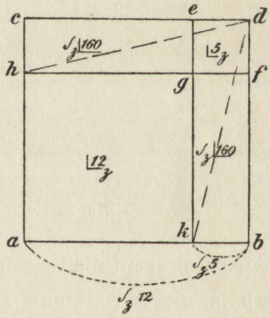


Fig. 22.

1) Für die Subtraktion allgemeiner Wurzeln wird die ähnliche Formel entwickelt wie für die Addition. Das Beispiel für die Quadratwurzel ist dabei folgendes:

ſʒ 12 — ſʒ 5 = ſcs $\underline{|17 - ſ240}_{\mathfrak{z}}$ das heisst $\sqrt{12} - \sqrt{5} = \sqrt{17 - \sqrt{240}}$.

numeri mit den habitudinen geschrieben —, das ist mit der Negation, als in der addition ist geformirt mit der affirmation, vnd ist in der ersten duction mit binomischen zaln, das ist mit zwiefach genomigen.

Nun wollen wir dich berichten mit den cubicen, welche mit trinomischen zaln vmbeschrieben werden. Sam also, wir setzen zu subtrahirn ʃce von 5 von ʃce 7. Solchs dich zu berichten khonnen wir nicht bescheiden, wir setzen dann eine rationalische zal oder exempel more irrationalium zu subtrahirn, vnd wie wir jn dem procedirn more irrationalium, also wollen wir in den irrational zaln in longitudine auch operirt haben. Als wir setzen wollen abzuzihen ʃce 8 von ʃce 125 in rationalibus, thun wir also: der cubus *ab* (Fig. 23) ist 125, vnd das solidum *ke* ist 20, welche do

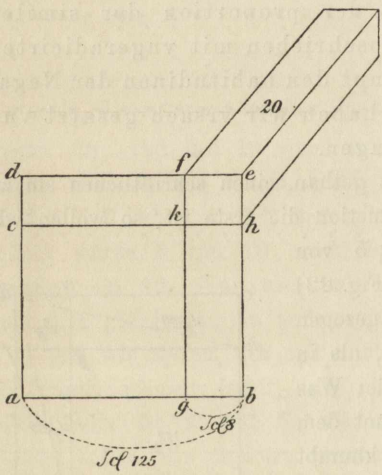


Fig. 23.

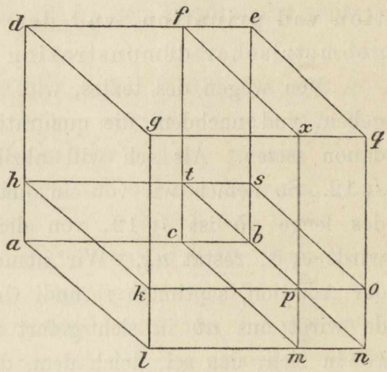


Fig. 24.

wirdt ex septima secundi geometriae aus *gb* in *ab*. Wann *gb* ist 2 vnd *ab* ist 5, vnd 2 mal 5 ist 10 vnd 2 mal 10 ist 20, oder khumbt aus *gb*
133 | in sich gefurt, das ist 4, in *ab*, als 5, macht 20. Also addirn wir ex septima secundi Geometriae 125 vnd das solidum 20, werden 145. Solchen ziehen wir ab ex septima secundi duplum solidi, das do wird aus *ab* in *gb*, wann *ab* ist 5, vnd *gb* ist 2 vnd 5 mal 2 ist 10, vnd 5 mal 10 ist 50, vnd das zwir ist 100, oder khumbt *ab* in sich gefurt, das ist 25 in *gb*, das ist 2, macht 50, das zwir ist 100. Das zihen wir ab von 145, restat 45, das ist das solidum, das do wirdt vom quadrat *ak* in *ab*. Also thailen wir 45 in *ab*, ist 5, khomen 9, das ist das quadrat *ak*, cuius radix quadrata 3, vnd also sagen wir, so ich subtrahire ʃce 8 von ʃce 125, so pleibt ʃce 27, das ist 3. Solches more irrationalium zu setzen in vnsere
133′ andere figur des cubics (Fig. 24), | wir nemen *dn* den gantzen cubic 125

vnd nemen *tn*, das ist 20, vnd addirn das, ist 145, wann 20 wirdt zwir genomen mit den andern circumscriptibilien. Nun der gantz cubic ist allerwegen jn der potentz rationalis, dj 20 finden wir more irrationabilium. Also wir cubiren 8, wird 512, vnd ʃcc von 512 ist ʃc von 8. Das multiplicirn wir in sich, facit ʃcc 262 144, vnd das ist quadratum von ʃc 8. Das multiplicir in cubum de cubo von 125. Multiplicir 125 cubice, facit 1 953 125, vnd ʃcc von dem ist 5. Das multiplicir in ʃcc 262 144, facit 51 200 001 000, vnd ʃcc von dem ist das andere circumscriptibile. Also haben wir 145 + ʃcc 51 200 001 000. Dauon sollen wir subtrahirn duplum solidi, so do wirdt aus *ab* in *gb*; finden wir, so wir das quadrat *ab*, das was 25, in *cb* furen, das was 2, vnd solchs zwir setzen wir more irratio-
nalium. Also wir cubirn | 125, facit 1 953 125, vnd ʃcc von dem ist 5, 134
das multiplicirn wir jn sich, facit ʃcc 3 794 705 265 625, vnnd das ist quadratum von 5. Das multiplicir in 2, als wir gesagt haben, hierumb in cc von 2, ist 512. Multiplicir die gantze zal oder die gemelte, facit 19 428 896 000 000, vnd ʃcc ist 50, das ist *hn* Das solidum sol noch einmal genomen werden *fn*, darumb multiplicir 512 jn das negste product, khumbt 9 847 592 191 521 000 000, vnd ʃcc von dem ist 100, also sagen wir more irrationabilium, das

$$|\overline{145 + \text{ʃcc}\ 51\,200\,001\,000 - \text{ʃcc}\ 194\,288\,966\,000\,000},$$

das ist *hf* solidum altitudinis *ho*, welchs, so es gethailt wirdt in *ab*, restat quadratum *hf*, des radix ist *ht*, das was 3. Also dergleichen in irrationalibus vnd andern ductionibus. Nun volget hernach die multiplication.

Capitulum sextum de multiplicatione radicum numerorum irrationabilium tam communicantium quam incommensurabilium longitudine.

Radicum numerorum irrationalium multiplicatio aequalis radici numeri unius in alterum, cum fuerit ductionum similium. Et si diversarum sint denominationum ad eadem et in idem genus reducentur, capiatque unus alterius denominationem. Quod si exinde unus in alium ducatur, radix unius radicis alterius ductionis multiplicationem radicum propositorum numerorum
ostendit. | [1]) 134′

Nachdem Algebras genugsame meinung zu vorstehen gibt der Addition vnd subtraction, sagt er hie von den zaln jrer radicum multiplicationis, vnd laut zum teutschen also:

1) Hier wird allgemein die Multiplikation der Wurzeln gelehrt. Die gebrauchten Formeln sind in neuerer Bezeichnung:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m b^n}.$$

Die multiplication der radicum der jrrationalischen zaln ist dem radici gleich der multiplication einer zal irrationalisch in die andere irrationalisch gefurt, so sie einer duction seind. So sie aber vngleicher benenung sein, so sollen sie zuuor jn eine benenung vnd jn ein form reducirt werden, als ein jtzliche irrationalische zal sol der andern denomination an sich nemen vnd darnach, so eine wird in die ander gemultiplicirt, so beweist radix des radicis der andern duction die multiplication der radicum der furgelegter zaln.

Von solchen text schrifftlichen sin einzufuren, nemen wir vor zum ersten zu multiplicirn, die do seind similes, das ist, das sie einer benenung seind. Sagt der text, es sey gleich, so dj zalen mit einander gemultiplicirt vnd radix vom product, als so man ein radix mit dem andern multiplicirt. Das ostendirn wir also: √ʒ 4 zu multiplicirn mit √ʒ 9: sprich, 4 mal 9 machtt 36, vnd √ʒ von 36 macht 6, vnd ist gleich, so ich multiplicir √ʒ 4, das ist 2, mit √ʒ 9, das ist 3, khumbt auch 6, vnd also in den surdenn.
135 Als so wir wolten multiplicirn √ʒ 5 mit √ʒ 7. | Wir sprechen 5 mal 7 ist 35, vnd √ʒ 35 ist die multiplication, defsgleichen in allen ductionibus. Als ich sprechenn: √cℓ von 2 mit √cℓ von 7 macht √cℓ von 14. Vnd so ist es jn allen, die do seind in longitudine incommensurabiles oder nicht, vnd das wollen wir kurtzlich den ersten thail des text distinguirt haben. Sagt der text furter: so sie aber vngleicher benenung seind. Als wir setzen zu multiplicirn √ʒ 4 mit √cℓ 27, sagt der text, das ein jede rationalische zal soll nemen der andern benenung. Als wir cubicirn 4, facit 64, vnd sollen quadriren 27, facit 729. Nun multiplicirn wir eine mit der andern, facit 46656. Also so wir nemen daruon √ʒ, khumbt 216 vnd √cℓ dauon, ist 6, beweist die multiplication. Hierumb spricht der text: *radix unius radicis alterius ductionis* etc. Nun mugen wir auch sagen, √cℓ von 46656 ist 36, vnd √ʒ von 36 ist 6, das beweist die frage. Also mogen wir auch setzen jn andern ductionibus der zalen, sie seind rationales oder nicht. Als ich wolt setzen, wir wollen multiplicirn √ʒ von 5 mit √cℓ von 3, thun wir jme wie vor, vnd cubicirn 5, wirdt 125; wir quadrirn 3, khomen 9, gemultiplicirt mit 125 wirdt 1125, vnd √ cubica von der quadrata radix ist die multiplication, vnd defsgleichen in andern ductionibus. Sam ich will
135′ multiplicirn √cℓ von 2 mit √ʒʒ | von 3. Wir cubicirn 3, facit 27, vnd quadriren die quadrat von 2, facit 16, vnd multiplicirn 27 mit 16, facit 432, vnd √cℓ der √ʒʒ beweist die frage oder radix quadrata de quadrato des cubice radicis, vnd also jn andern multiplicationibus. Mogen wir bej dem text einfuren heraus nemen. Als wir sprechen: ich will multiplicirn 3√ʒ 2 mit 4√ʒ 3. Wir reducirn 3 radices in die denomination des ʒ facit 9;

sprich: 2 mal 9 ist 18, vnd ſʒ von 18 seind 3 radices von 2. Wir cubicirn 4, facit 64; das multiplicirn wir mit 3, facit 192, vnd ſc von 192 seind 4 radices cubi von 3; vnd seind in proposito 3456, vnd radix cubica des quadraten radix, oder radix quadrata des cubicen radicis ist bewisen vorgelegte multiplication, vnd deſsgleichen in andern ductionibus. Solchs zu ostendirn, propter quid das sey, das radix der multiplication eins radicis jn den andern sey gleich der radix der Multiplikation einer irrationalen in die andern, das wollen wir geometrice ostendirn. Wir multiplicirn ſʒ 5 mit ſʒ 2, vnd sagen ſʒ 10 sei die multiplication. So wir *ac* (Fig. 25) multiplicirn in *bc*, wirdt *dh* supplementum oder *kb*, also ist der eins ein superficies, hierumb so ein radix in den andern wird gemultiplicirt, macht er numerum superficialem, darumb radix von 10 | ist die superficies *dh* oder *cg*. Hierumb ist zu vormercken, so ein irrationalische zal in die ander gemultiplicirt ist, das dieselbige producirt medialem, von welcher radix ist die superficies jrer radicum, so sie miteinander werden gemultiplicirt, vnd seind allwegen genandt mediales potentionales, vnd hierumb ist ſʒ von 10 gleich, das ist die superficien *dh*, deme, so ſʒ 5 vnd ſʒ von 2 mit einander gemultiplicirt. Solche zal seind auch alle wege mediales, wann sie seind in potentia allwegen irrationales, als wir jm ersten capittel genugsam von dem gesagt haben. Das wollen wir nachuolgendt sagen von der diuision der surden, sie seind in longitudine commensurabiles oder nicht. 136

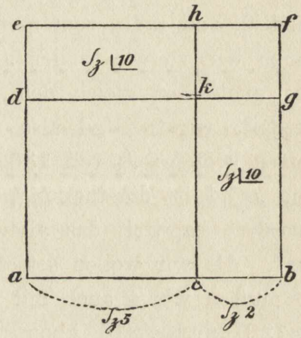


Fig. 25.

Capitulum septimum de diuisione radicum numerorum irrationalium tam communicantium quam incommensurabilium longitudine.

Omnium radicum numerorum irrationalium diuisio aequalis radici quotientis unius diuisi per alium, cum sint similis ductionis propositi. Quod si diuersi, quemadmodum diximus, ad idem genus reducantur. Quod si unus per alium committatur, radix quotientis unius radicis alterius ductionis diuisionem explanat. | [1]) 136′

Hie saget Algebras von der diuision der radicum numerorum irrationalium, vnd laut der text zum teutschen also:

1) Division der allgemeinen Wurzeln nach den Formeln:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\,; \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^n}}\,.$$

Die thailunge der radicum jrrationalischer zal wirdt gleich dem radici des quotienten, der do ist, so ein zal irrationalium wirdt gethailt durch die ander, so sie anderst sein einer gleichen duction die vorgelegten zal. So sie aber einer vngleichen benenung seind, als wir vormals auch gesagt haben, so sollen sie in einer benenung gereducirt werden, vnd alſsdann, so einer durch den andern gethailt wirdt, radix des quotienten von dem radice der andern duction beweist dj theilunge.

Von dem text einzufuren wie vor eine schrifftliche meinung, so nemen wir vor zu thailen √ʒ von 81 durch √ʒ von 9. So thailen wir 81 durch 9, facit 9, vnd radix vom quotienten 9, als 3, beweist die diuision, vnd also sagen wir, so wir thailen √ʒ von 81 in √ʒ 9, khomen 3, vnd also ist radix des quotienten gleich dem, so ein radix vorgelegter zaln mit dem andern gethailt wirdt. Vnd also ist es auch jn jrrationalibus. Sam also, wir setzen wollen: √ʒ von 136 durch √ʒ 4; wir thailen 136 mit 4, facit 34, vnd √ʒ 34 ist die thailung, vnd bey dem mögen wir einfuren zu disem vnd
137 vordern capittel, das allewege sollen sein gleiche duction, | als der text sagt. Als wir wollen setzen √ʒ 128 zu thailen mit 4 oder zu multiplicirn, so muſsen wir 4 auch mit der duction benenen, das ist √ʒ 16 vnd thailen √ʒ 128 durch √ʒ 16, khomen 8, vnd √ʒ von 8 beweist die thailung, als wir dann weiter werden sehen. Ich will thailen 24 mit √cꝭ 5; also mussen wir 24 cubicirn, khumbt 13824, das thailen wir mit 5, facit $2764\frac{4}{5}$, vnd √cꝭ von dem beweist die diuision, vnd dergleichen mögen wir auch setzen jm quadrato de quadrato. Wir wollen diuidirn √ʒʒ von 128 durch √ʒʒ 4. Wir thailen, khumen 32, vnd √ʒʒ 32 beweist dj frage. So sie aber weren von vngleichen benenungen, als ich wollte thailen √ʒ von 64 durch √cꝭ von 8, so sollen sie, als wir vorgesagt haben, jn eine benenunge reducirt werden. Also wir cubicirn 64, wirdt 262144, vnd quadrirn 8, khumen 64; wir diuidirn eins jn das ander, khomen 4096, vnd √cꝭ des quadraten radicis von 4096 beweist die thailunge, oder √ʒ der cubic radicem von gemelter zalen, vnd hierumb sagt der text, radix des quotienten der einen duction des radicis der andern duction beweist die frage. Wann √cꝭ von 4096 ist 16, dauon √ʒ ist 4. Also ich thaile √ʒ von 64, ist 8, mit √cꝭ von 8, ist 2, khumbt 4, vnd ist recht. Oder radix quadrata von 4096 ist 64, dauon ist √cꝭ 4, vnd khumbt wie vor, vnd also wollen wir dich auch in surdis gewisen haben. Als ich spreche, √cꝭ von 10 durch √ʒ 2; also cubicir 2, wirdt 8, vnd
137′ quadrir 10, wirdt 100, | thaile eins in das ander, khumen $12\frac{1}{2}$, vnd √cꝭ des quadraten radicem oder √ʒ des cubic radicem von gemelter zal beweist die thailung. Vnd also mugen wir erfarn, ob man spreche 3√ʒ 3 zu diuidirn mit 2√cꝭ 2. Also benennen wir 3 radices, das werden 9 in gleicher

duction von 3, vnd sprechen, 3 mal 9 ist 27. Also benennen wir 2 radices cubice, werden 8 in gleicher duction von 2, vnd sprechen 2 mal 8 ist 16. Also sein √cꝭ 16 2 √cꝭ von 2. Nun thailen wir √ȝ von 27 mit √cꝭ von 16, also seind wir in vnserm proposito wie vor, vnd mussen gleicher massen halten in andern ductionibus, das sie also alle gespaltne radices jn ein gebracht werden, vnd darnach nach dem text jn den propositum zu machen, das wollen wir dich geometrice demonstrin (Fig. 26). Wir haben, das gemultiplicirt ist √ȝ 2 in √ȝ 32, die medie √ȝ 64 producirt; also so aus √ȝ 32 in √ȝ 2 khumbt √ȝ 64 des radix superficien ist *kf*, also so ich thaile √ȝ 64 mit √ȝ 2, khumbt √ȝ 32, das ist *ac* in longitudine, als es vor was. Also mogen wir elicirn, das do die thailunge thailet numeros potentionales, also der diuisor, latus correlatiuum ist der quotienten, mit welchen der quotient multiplicative producirt den superficien, also welcher superficies, so er durch sein latus correlatiuum gethailt wirdt, | khumbt das ander, 138
vnd deshalb sagen wir, das die diuision vnd multiplication seind seine correlativa. Multiplicatio hat sich ut potentia, diuisio ut longitudo, der quotient ut latus relatiuum, welche longitudo vnd latus relatiuum machen die gesprochen multiplication.

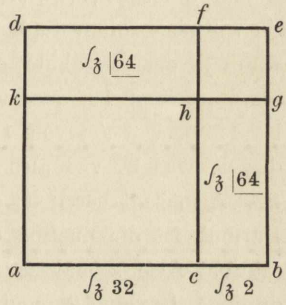


Fig. 26.

Capitulum octavum de duplicatione radicum numerorum irrationalium tam communicantium quam incommensurabilium longitudine.

Omnium radicum numerorum propositorum duplatio, triplatio, val quadruplatio est, quemadmodum numerorum propositorum quadruplatio, nonuplatio vel sedecuplatio, ut semper nomine ductionis, qua versantur, vocentur. Radix exinde vocabuli propositum ostendit.[1])

Hie eruolget Algebras seine funffte spetien der jrrationalischen zaln, welcher text laut zum teutschen also:

Aller radicum duplatio, triplatio oder quadruplatio ist gleich der vorgelegten zaln quadruplatio, nonucuplatio oder sedecuplatio, also das allewege die zalen werden genent in potentia,

1) Hier werden die Regeln entwickelt:

$$b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n a};$$

Beispiele nur für $b = 2, 3, 4$ und $n = 2$ und 3. Schon in dem vorigen Kapitel war dieselbe Regel in allgemeinerer Fassung angegeben.

von welchen geduplicirt sollen werden radices der zaln vor-
138′ geleget. Vnd radix also der duction gemes beweist die frage. | Sam also, zu duplirn √ʒ von 36, so wissen wir, das radix quadrata von 36 ist 6, vnd zwir 6 ist 12. So sprechen wir, das 36 quadruplicirt ist 144, vnd √ʒ von 144 ist 12, vnd dergleichen in surdis. Wir wollen duplirn √cꝭ 8, wir benennen die duplatio der duction gemes, wirdt 8, wann duplatio in cubicis ist octuplatio, do sie was jn dem quadrat quadruplatio, vnd also 8 mal 8 ist 64, vnd √cꝭ von 64 ist 4, der geduplirt radix cubica von 8. So wir aber solten duplicirn √ʒʒ von 81, also musten wir nemen sedecuplatio, wann 2 dem vocabulo gemes gefurt ist 16. Nun ist 81 quadratum de quadrato vnd 16 quadratum de quadrato von 2. Wann also 16 mal 81 ist 1296, vnd √ʒʒ von 1296 ist 6, vnd das ist auch geduplicirt √ʒʒ von 81, der do was 3, vnd also dergleichen jn surdis. Wir wollen duplirn √ʒ von 12. Also sagt eer text: *ut semper nomine ductionis, qua versantur, vocentur.* Darumb ist die duction quadrata, darumb 2 auch geduplicirt wirdt quadruplatio. Also 2 mal 2 ist 4, vnd 4 mal 12 ist 48, vnd √ʒ 48 ist der geduplirte √ʒ von 12, vnd also in andern ductionibus. Deſsgleichen in der triplicatio. Im quadrat so ist es nonecuplatio, wann, als wir sprechen, wir wolten triplicirn √ʒ von 4, also denominirn wir triplatio wird nonecuplatio.
139 Wann 3 mal 3 ist 9, vnd 4 mal 9 ist 36, vnd √ʒ 36 ist 6. | Also sagen wir, das 6 ist triplum radicis von 4, vnd desgleichen auch jn surdis. Als wir wollen triplirn √cꝭ von 5, also multiplicirn wir 5 in 27, facit 135, vnd √cꝭ von 135 ist die getriplicirte √cꝭ von 5, vnd also ist es auch in quadratis de quadrato. Als wir setzen, ich will duplirn √ʒʒ von 7. Also quatratum de quadrato von 2 ist 16, das multiplicirn wir in 7, facit 112, dauon √ʒʒ ist die duplation, vnd also halt dich in den andern ductionibus. Solchs dich geometrice zu ostendiren, mogen wir sagen, das dir solchs genugsam jn der multiplication bericht ist worden, wann mit 2 geduplicirt ist mit 2 gemultiplicirt, vnd mit 3 getriplicirt ist mit 3 gemultiplicirt, als wir jn der figur haben gesatzt, das kf, das supplement (Fig. 27), das ist √ʒ $\overline{|35}$, der medialis, welchs radix ist die superficies. So wir nun wollen in eine summa bringen die zwei supplementa kf vnd cg, vnd nachdem sie gleich sind, so duplirn wir √ʒ $\overline{|35}$ dermassen, wir multiplicirn das mit 2, dermas die multiplication saget, wir multiplicirn nicht 35 an sich, sondern den radicem hierin, dieweil also √ʒ $\overline{|35}$ potentia ist vnd superficialis, so mus
139′ gleich mit gleich multiplicirt werden. Wir machen 2 auch ad potentiam |

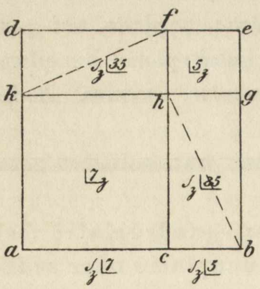


Fig. 27.

der furgelegten duction, khumbt 4. Also multiplicirn wir 35 mit 4, khomen 140, vnd ʃʒ von 140 seind die supplementa, vnd hierumb ist diser numerus in potentia irrationalis. Sprechen wir, das geduplirt jm quadraten sey mit dem quaternario gequadruplicirt, vnd in cubo mit dem octonario geduplicirt, das ist die vorgelegt zal geoctuplicirt. Also das allewege der duplandus, triplandus, quadruplandus etc. an sich neme das vocabulum der vorgelegten zalen des radix, der do soll geduplicirt werden, getriplicirt oder gequadruplicirt werden, vnd also mugen wir sprechen gleichmessig jn der vngleichen benennungen. Also wir wollen duplirn 2ʃcɛ von 5. Wir cubicirn 2, werden 8, vnd 5 mal 8 macht 40, vnd ʃcɛ von 40 seind 2ʃcɛ von 5. Nun sollen wir 40 duplirn, so haben sie jre benenung vom cubic, darumb so wir ʃcɛ von 40 sollen mit 2 multiplicirn, vnd 2 vnbenent sein, hierumb benennen wir 2 a cubo, khumbt 8, vnd das multiplicirn wir jn 40, khumbt 320, vnd ʃcɛ von 320, das seind geduplicirt 2ʃcɛ 5, vnd also dergleichen in andern vnglicher benennunge, die wir also von kurtz wegen abschneiden, vnd wollen sagen von der Mediation, das ist die opposita speties diser beschriebenen. Vnd also | haben wir genuglich aufsgedruckt, 140
souil vns der duplatio not ist zu den surden.

Capitulum nonum de mediatione radicum numerorum irrationalium tam communicantium quam incommensurabilium longitudine.

Mediatio vero, vel tertiatio, sive quaternatio radicum numerorum propositorum est, quemadmodum numerorum propositorum per ductionis vocabulum divisio. Radix huius quotientis propositae ductionis quaesitum divulget.[1])

Hie eruolget ALGEBRAS seine letzte spetiem der irrationalischen zaln, welche do ist die mediation, ein anfang der diuision, als do duplatio ist der multiplication, wann die cleinste merung wirdt mit 2, vnd die cleinste thailung mit 2, vnd laut der text zum teutschen also:

Die Mediation oder tertiation oder quaternation der radicum furgelegter zaln, ist gleich als die vorgelegten zaln durch das vocabulum der duction gemes gethailt wirdt. Vnd radix des quotienten furgelegter duction eroffnet die frage.

Als wir clerlich wollen berichten, wir wollen medirn ʃʒ 64, so wissen

1) Die hier entwickelte Regel ist in moderner Bezeichnung

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b^n}},$$

wieder für $b = 2, 3, 4$ und $n = 2$ und 3.

140′ wir, das vocabulum ist √ʒ, hierumb so mussen wir gleich ducirn 2, so wir | sprechen 2 mal 2 ist 4, also √ʒ 4 ist gleich in der duction 64. Hierumb thailen wir 64 in 4, khomen 16, vnd radix dauon, als 4, bericht die frage, vnd also ist es auch in der ternation, das wir allewegen similia similibus sollen opponirn. Als ich wolt tertioniren √ʒ von 7, so für der duction gemes die 3, wirdt 9, damit thail 7, facit $\frac{7}{9}$, vnd √ʒ bericht die frag, vnd desgleichen jn andern ductionibus. Als wir setzten, wir wollen quarternirn √cꝭ von 920. Wir nemen den principen, das ist den fursten der quaternation, ist 4, furen den der duction gemes, wird 64; damit thailen wir 920, steet $\frac{920}{64}$, vnd √cꝭ ist die quaternation.

Vnd ob aber kheme einem jtzlichen, der do lesendt were, zweifel, das sich solchs nicht finden soltt etc, wollen wir in nachuolgendem capitel beweysen von jtzlichen speties besonder, wie man die radices der surden extrahirn solt, damitt ein jtzlicher vorstehen mag, was wir hervorgesagtt haben vnd durch alle speties demonstrirt. Also mogen wir auch wie vor pey dem text einfuren, so die benennung vngleich were. Als ich wollte medirn 3 √cꝭ 5, so thun wir jme wie vormals. Wir reducirn die 3 radices
141 in einem radicem. Also | nachdem 3 kheine benente quantitet ist, so benennen wir sie der duction gemes, khumen 27, vnd multiplicirn 27 mit 5, khumen 135, seind 3 radices cubice von 5. Solche 135 thailen wir mit dem principi der mediation der duction gemes, seind 8, khumen $16\frac{7}{8}$, vnd radix cubica von disem beweist gemedirte 3 radices cubice von 5, vnd ist recht. Und alle natur, die die diuision hat, die hat auch die mediation, vnd doch auch mit vnterschid. Wann die diuision thailet numeros potentionales mit dem divisori ad longitudinem, wann der quotient allwegen ist das latus relativum des diuisoris, welcher, so er wider jn den quotienten gemultiplicirt wirdt, gebirt den vorigen numerum superficialem. Aber die mediation die halbirt die potentionalische zal vnd longitudines (Fig. 28), wann wir sprechen in die vorigen demonstrationes geometrice, das die zwei supplement *dk* vnd *cg* seind zusamen √ʒ |40, welche also in potentia seind. So sie wider gemedirt werden, khumbt wider √ʒ |10 wie vor, vnd pleibt in potentia, das ist in der division nicht. Also, wollen wir solchs wie vor jn der duplation demonstrirt haben, vnd also
141′ streckt sich die duplation vnd | Mediation ad potentiam vnd longitudinem, wiewol sich die diuision in numeris auch dahin zeuchett, das wir auch mugen longitudinem thailen, wir sind das aber hieher nicht gebrauchent, sondern wir nemen

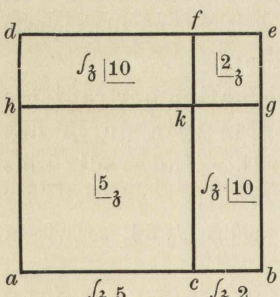


Fig. 28.

ein zal gewenlich vnd thailen die, das ist in potentia, vnd der divisor latus relatiuum des quotienten, vnd die multiplication nemen wir producirt aus zweien numeris linearibus, welche, so die mit einander werden gemultiplicirt, producirn einen superficien. Aber die duplation vnd mediation hat Algebras gesatzt, darumb das sie sich strecken, als wir sie hie gebrauchen ad utrumque, das ist ad numeros potentionales vnd longitudines. Aber die additiones vnd subtractiones haben wir demonstrirt, wann wir mogen addirn radices oder subtrahirn der potentz oder longitudinem. Als wir dann in binomiis sagen werdenn, vnd wollen also vnsere speties hie haben beschlossen, die wir alle sembtlich zu probirn durch die numeros mutuatos fürnemen werden, damit ein jtzlicher muge sprechen vnd erkennen, das der numerus surdus ad instans, das ist in den letzten quadranten oder scherpf nicht moge quadrirt werden, vnd solche demonstration wollen wir in den binomiis einfuren, vnd sagen, jn welcher weise er | vngequadrirt pleiben 142
mus, vnd warumb es vnmuglich ist, surdum zu quadrirn, wiewol etzliche vornemen den surdum zu quadrirn durch wege der fraction radicis, sagen wir vnd noch kunfftig demonstrirt wirdet, das dj nicht zu hertzen nemen, das vnser vorfarn so grosse muhe gehabt haben jn den Binomiis vnd andern surden, vnnd so es muglich were, es auch demonstrirt hetten. Sag ich commentator, wo das muglich were, das der diameter commensurabilis costae, vnd do gar vnbillich wurde gesprochen bey den philosophis aus, so werden wir sunderlich hernach setzen von den Binomiis.

Capitulum decimum de propinquitate radicum numerorum irrationalium exstirpandarum numero mutuato.

Radicum exstirpationem numerorum irrationalium penitus ab arte reliquit natura; ea vero propinquitate quadam, qua praediximus, numero mutuato rationali, quod cum discrimine demonstrare licet. Quoniam quidem in simplicem, quadratum vero eius in denominationem si ducatur quantitatem propinquitatem quaesitae radicis. Radix huius de tanto propinquius ostendit, de quanto maior numerus millenarius mutuabitur. Sic reliquarum ductionum proponitur notitia propinquitatis radicum. | [1]) 142′

1) Die Fassung des lateinischen Textes giebt die Anweisung, zunächst aus $\sqrt[n]{a}$ die neue Aufgabe $\frac{\sqrt[n]{ab^n}}{b}$ zu bilden, und aus der neuen Zahl die Wurzel, so weit es in Ganzen möglich ist, auszuziehen. Der deutsche Bearbeiter benutzt als solche Hilfszahl stets 1000 oder überhaupt eine Potenz von 10, so dass er also Decimalbrüche erhält. Er zeigt die Art der Benutzung an Beispielen, die er bei den einzelnen Rechnungsarten früher gefunden hat.

Hie eruolget Algebras die extraction der numerorum surdorum, vnd wie man hie radices soll extrahirn mit dem numero mutuato, das ist mit einer gelehenten zal, welcher text zum teutschen laut also:

Die extrahirung des radicis der irrationalischen zaln hat die kunst der natur gantz vorlassen, das ist vnmuglich zu finden, aber von dem wir gesagt haben zu demonstrin sollen mit einer nahenden weis mit einer entlehnten zal, welche so sie in jr gleich gefurt wirdt, das ist die vnbenenth jn die vnbenenthe, vnd der quadrat derselbigen jn die benenthe, von welcher zal also radix die nahent vnd propinquitet des gesuchten radix beweist. Also ist naher, souil grosser ist die entlehente zal genomen mit den limiten der millenaren, also wirdt gefunden die propinquitet des radicis der andern duction, die wir gesatzt haben.

Von solchem text einen schrifftlichen sin einzufuren durch alle speties, vnd wie wir den text vorstehen sollen, gibt der text anzeigung der andern duction, das ist der quadratischen, vnd desgleichen jn andern, vnnd kurtzlich zu treffen zu der materien, heben wir an, als in andern Capiteln ge-
143 satzt ist. |

Additio radicum numerorum irrationalium communicantium longitudine.

Wir addirn $\surd\mathfrak{z}\,8$ zu $\surd\mathfrak{z}\,18$, soll machen geaddirt $\surd\mathfrak{z}\,50$. Das mochte einer dubitirn oder zweifeln, so wollen wir mutuiren millenarium, das ist 1000, wollen den nach dem text quadrirn, wirdt 1000000. So wir nun haben zwo benente quantiteten $\surd\mathfrak{z}\,8 + \surd\mathfrak{z}\,18$, so multiplicirn wir der jtzlichen eine in das quadratum, das ist in 1000000, khomen mit 8 jn numeris 8000000, vnd von solchen sollen wir extrahirn radicem ad propinquum, facit 2828 millesimas. Also so wir eine grossere zal hetten mutuirt, so were das residuum, so vber ist bliben, noch subtiliter resoluirt, vnd also fort, vnd dennoch khombt es nicht ad verum quadratum. Wir multiplicirn desgleichen 18 jn die zal, extrahirn, khomen 4242, die addirn wir zu 2828, wird 7070, vnd die zwey residua mogen vielleicht vnam millesimam machen. Wir extrahirn $\surd\mathfrak{z}\,50$, multiplicirn auch in die zal 1000000, extrahirn, soll radix bringen 7070 oder auf das negst 7071, dann ytzlicher extraction ist blieben ein gros Residuum. Wir mogen den radix noch subtiliter suchen, so wir den Millenarium noch grosser mutuiren, zugleich jn cubicis vnd andern ductionibus, doch khomen wir nimer ad ultimum quadratum oder scherpf.[1])

1) Verfasser hat früher gefunden $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{50}$. Um das zu prüfen sucht er, mit Hilfe der Zahl 1000, $\sqrt{8} = \frac{2828}{1000}$ und $\sqrt{18} = \frac{4242}{1000}$ nebst jedesmal

Additio radicum numerorum irrationalium incommensurabilium longitudine. | 143′

Wir haben gesatzt jn vnserm dritten Capittel der incommensurabilium, das √ȝ 5 + √ȝ 3 geaddirt seindt √cs |8 + √60 ȝ.[1]) Das wollen wir durch mutuatum probirn. Wir suchen, was do seind vor √ȝ 5 vnd √ȝ 3, multiplicirn ytzliches jn 1000000, wie vor, vnd extrahirn, finden wir jn millesimis vor √ȝ 5 2236 vnd residuum |304, das schreiben wir ad proprinquitatem also, wir duplicirn radicem, wird 4412, addirn vnitatem, wird 4473, das setzen wir vor den nenner. Also sprechen wir, der negste radix von 5 sei in millesimis $2236\frac{304}{4473}$. Zugleich den andern von 3, khomen $1732\frac{176}{3465}$. Solchs addirn wir ad propinquum jn den millesimen, khumen 3968, vnd so wir die fractionen solen zusamenbringen, thun sie kheinen gantzen Millesimam. Nun haben wir 8, ein vnbenenthe quantitet, darumb multiplicirn wir, als der text sagt, 8 darein jn den mutuatum simplicem, werden 8000, vnd in 60 multiplicirn wir quadratum, wann sie benant ist, vnd suchen radicem in gleicher form wie vor, khumbt 7745 vnd residuum 14975. vnd steet also $7745\frac{14975}{15491}$ zusamen facit 15745, vnd die fract macht beileuffig einen Millesimam vnd doch nicht gar. Nun saget der erste quadrat √cs, darumb multiplicirn wir 15746 in den mutuatum 1000 vnd extrahirn radicem, khumbt | 3968, die obgemelten Millesimen, vnd ist rechtt. Warumb wir 144
aber 15746 jn 1000 multiplicirn, dann dj millesimi seind nicht benent sondern allein von der gantzen quantitet. Vnd also mogen wir die andern ductiones auch probirn.

Subtractio radicum numerorum irrationalium communicantium longitudine.[2])

Wir haben gesatzt in der subtraction, das do restat √ȝȝ 32, so ich subtrahire √ȝȝ 5 von √ȝȝ 405, so sehen wir an zum ersten die duction. Wir

---

einem Bruchtheil eines Tausendstel. Beides addiert giebt also nahezu $\frac{7071}{1000}$. $\sqrt{50}$ ist aber ebenfalls nahezu 7,071, also die Rechnung richtig ausgeführt. Noch genauer würde man die Wurzeln finden, wenn man eine noch höhere Potenz von 10 genommen hätte, ohne aber jemals zum vollen Werthe derselben zu gelangen.

1) Das Beispiel $\sqrt{5} + \sqrt{3} = \sqrt{8 + \sqrt{60}}$ findet er so als richtig. $\sqrt{5}$ ist in obiger Weise gesucht $= 2236\frac{304}{4473}$ Tausendstel, wo der Bruch nach der Formel $\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2n+1}$ gefunden ist. Ebenso ist $\sqrt{3} = 1732\frac{176}{3465}$ Tausendstel, das ist mit $\sqrt{5}$ zusammen gleich 3968 Tausendstel, wobei die Bruchtheile noch kein ganzes Tausendstel ergeben. Ferner ist $\sqrt{60} = 7745\frac{14975}{15491}$ Tausendstel, dazu 8 Ganze $= 8000$ Tausendstel, giebt 15745, oder des Bruches halber nahezu 15746 Tausendstel. Daraus die Wurzel, nachdem nochmals mit 1000 vervielfacht ist, giebt wie oben 3,968.

2) Hier verzichten wir, ebenso wie in den folgenden Beispielen, auf eine Wiedergabe in moderner Bezeichnung.

nemen quadratum de quadrato von 1000, facit 1000000000000, vnd in solche quantitet multiplicirn wir 5, extrahirn radicem, khumbt nach der duction gesatzt von dem ʒʒ 1499 millesimae. Wir multiplicirn auch 405 in die zal, extrahirn, khumen 4486. Von dem zihen wir ab 1499, bleiben 2987. Souil sollen auch khomen von √ʒʒ 32. So thun wir, wie gemelt, khumbt auch 2987, ist rechtt. Desgleichen operirn wir von den numeris, die do seind incommensurabiles longitudine.

Subtractio radicum numerorum incommensurabilum longitudine.

Als wir gesatzt haben jn der subtraction, so wir subtrahirn √ʒ 5 von √ʒ 12, restat √cs $|\underline{17 - \sqrt{240}}_{\mathfrak{z}}$, also thun wir wie vor, vnd multiplicirn jn
144' quadratum 1000, | das ist in 1000000, den √ʒ 5, werden 5000000, vnd √ʒ von dem ist $2236\frac{304}{4473}$ millesime; vnd gleicherweis suchen wir von 12, khomen in den mutuaten $3464\frac{704}{6929}$ millesime vff das negste. Wir subtrahirn von einander, pleiben 1228, die Bruche lassen wir faren, dann sie bringen khein jrrunge, angesehen, je grosser man den numerum mutuirt, je grosser der residuum wird, vnd weniger an seiner bedeutung ist. Vnd also khomen vom quadrat in potentia auch souil √cs $|\underline{17 - \sqrt{240}}_{\mathfrak{z}}$. So nun 17 ist vnbenennt, das multiplicrn wir jn 1000, khomen 17000. Nun suchen wir √ʒ von 240. Also nach dem sie ist benent, so multiplicirn wir sie in das quadrat 1000000, khumbt 240000000, vnd √ʒ ist $15491\frac{28919}{30983}$. Das subtrahirn wir von 17000, als die negation des surden quadrat weist, bleiben 1509, die Bruch lassen wir stehen, als du vormals gehort hast. Sagt der quadrat √cs, also multiplicirn wir 1509 millesime, nachdem sie vnbenent sein, allein was sie von der gantzen quantitet sein, jn 1000, khumbt 1509000, vnd radix von dem khumbt 1228, vnd ist rechtt. Also mogen wir sprechen, das gemelter quadrat surd in seiner potentz der war restat ist. Vnd dergleichen magstu nemen experientiam jn andern ductionibus durch numerum
145 mutuatum. |

Multiplicatio radicum numerorum tam communicantium quam incommensurabilium longitudine.

Wir haben gesatzt in der multiplication zu multiplicirn √ʒ 5 mit √ʒ 7, vnd solte bringen √ʒ 35. Das probirn wir, bringen 5 ad numerum mutuatum, khomen $2236\frac{304}{4473}$, defsgleich 7, khumbt jn millesimis $2645\frac{3975}{5291}$, vnd solche millesime multiplicirn wir mit einander, facit mit den Bruchen gemultiplicirt vnd wider gantz aufgehoben, als man in den Bruchen multiplicirt, 5916097, das Residuum lassen wir faren, vnd so wir mit 1000 aufheben, khomen 5916, das residuum lassen wir faren. Vnd so wir √ʒ von 35 extrahirn, finden wir auch souil, vnd desgleichen magstu jn andern ductionibus alle surden radicen probirn, die wir weiter zu extrahirn jn der multiplication vormeiden von kurtz wegen, vnd wollen sagen von der division.

Divisio radicum numerorum irrationalium tam communicantium, quam incommensurabilium longitudine.

So wir thailen √ʒ 136 mit √ʒ 4, khumbt jm quotienten √ʒ 34, das sollen wir auch ad propinquitatem ostendirn. Wir suchen √ʒ 136, inmassen
vormals gethan, khumbt $11661\frac{21079}{23323}$; | wir suchen √ʒ von 4, ist 2000; Wir 145'
multiplicirn 11661 in den radicem 1000, khumbt 11661000, vnd so wir das dividirn durch 2000, khomen 5830; das residuum lassen wir faren, vnd souil soll khumen, so wir extrahirn von 34 radicem, vnd khumbt gleich 5830, das residuum lassen wir bleiben, vnd also magstu propinquitatem noch neher finden, so du einen grossen numerum nimbst vnd den mutuirst. Vnd wie du dich also jm quadrat hellst, also magstu gleichmessig in andern ductionibus thun.

Duplatio radicum numerorum tam communicantium quam incommensurabilium longitudine.

Also mogen wir sagen, das wir gesatzt haben zu duplirn √ʒ 12, vnd seind khomen √ʒ 48. Das sollen wir demonstriren durch numerum mutuatum. Haben wir vormals zu vorstehen geben, das do duplatio sich gleichmessig heltt in den multiplicationibus. Wir suchen √ʒ 12 aus gemeltem mutuato 1000, vnd multiplicirn 12 in seine quadraten, darumb sie eine benente quantitet ist, khumen pro radice $3464\frac{704}{6929}$; vnd so wir solche millesime duplirn, khomen 6928, vnnd souil khomen auch von √ʒ 48, vnd ist recht. Wir mogen solchs auch nach der multiplication vorfurn. Also
wir wollen multiplicirn √ 12 mit 2. Also denominirn wir 2, wirdt 4, vnd 146
multiplicirn √ʒ 4 mit √ʒ 12, khumbt | √ʒ 48. Wir suchen auch √ʒ 4 durch das mutuatum, finden 2000, das multiplicirn wir in die millesime von 12, werden 6928000, vnd solches dividirn wir mit 1000, facit 6928, khumbt wie vor, vnd ist recht.

Mediatio radicum numerorum irrationalium tam communicantium quam incommensurabilium longitudine.

Wir haben anfengklich vormeldung gethun von der Mediation der surden vnd gesatzt zu tertionirn √ʒ von 7. Wir suchen √ʒ von 7 durch numerum mutuatum, das ist 1000000, khumbt √ʒ 7 in millesimis $2645\frac{3975}{5291}$ vnd $\frac{1}{3}$ von den millesimen ist $881\frac{2}{3}$ ad propinquum, vnd souil soll auch machen √ʒ $\frac{7}{9}$, als wir im Anfang gesatzt haben. Wann 7 ist 2645, das

multiplicirn wir in 1000, khumbt 2645000, vnd thailen das mit √ʒ 9 in millesimis, der do seind 3000, vnd khumbt wie oben $881\frac{2}{3}$, vnd desgleichen in andern ductionibus, mogen wir vns halten nach dem form der oben vermelten diuision; wann die mediation ist ein thailunge durch den minsten diuisor, als do ist duplatio eine multiplication durch den cleinsten multiplicatorem, vnd also wollen wir haben jnserirt um vorgesatzte speties vnd
146′ wollen also weiter melden von der extrahirung. Solln wir mercken drey namhafftige | stuckh. Zum ersten, wie man per numerum mutuatum khan erkhennen, welche zal irrationalis sey oder nichtt; zum andern wollen wir sagen, wie man vff das subtilest ein yede fract schreiben soll der residua so in den zaln vberpleiben der duction; vnd zum letzten wollen wir geben Anzaigung, jn welcher gestalt vnser vorfarn vnd maiores jn manigfaltige wege gebraucht haben die propinquitet der surden vnd numerum mutuatum, als sonderlich, so wir gebrauchen der Astronomie der sinuum vnd andern tabellen, als wir im andern tractat sagen werden, der Areen, das ist von den Commensuren (Continentzen) der Zirckel vnd ander superficien. Vnd zum ersten, wie wir sollen erkhennen durch den mutuatum numerum, ob ein zal rationalisch sey, wollen wir setzen ein mercklich beyspil.

Primus punctus annexus.[1]) Ich hab gefunden in einer furgab, das do ist valor cosse √ʒ von 121. Wolte ich gern wissen, was do radix were, vnd ob er kheinen rationalen hette, das man nichts dester weniger mochte wissen, was √ʒ von 121 were an schilling in goldt, das do eine gemeine rechnung ist in allen andern; vnd ob er schon radicem hett, das wir dann noch nichts desterweniger in der operatien abgienge. Also multiplicirn wir wie vor in quadratum von 20, machen 400; das mit 121 gemultiplicirt
147 facit | 48400. Also extrahirn wir radicem, finden wir 220, vnd gehet auf. Also sprechen wir, das sie hat einen rationalen radicem ex secunda parte secundae noni geometriae sagende, so ein quadrat ein zal multiplicirt, welche also vffgehet, so mus also dieselbige Zal sein gewesen ein quadrat. So wir suchen den radicem finden wir 220 schilling in goldt, vnd darumb ist es aufgangen, sagen wir, nachdem 20 ist gewesen der mutuant, also heben wir auf 220 schilling in goldt durch die mutuanten, khomen 11. Sagen wir, das √ʒ von 2121 ist 11; vnd also magstu uff yede operation operirn, als in cubicen, quadraten de quadratis vnd andern ductionibus.

1) Hier sagt der Verfasser, man solle eine Zahl, von der man nicht weiss, ob sie ein Quadrat ist, mit einem Quadrate multiplicieren, dann aus dem Produkte die Wurzel ziehen, geht dann die Wurzel auf, so ist auch die ursprünglich gegebene Zahl ein Quadrat gewesen, nach Euklides IX, 2: *Si vero ex ductu tetragoni in numerum aliquem tetragonus producatur, illum numerum aliquem esse tetragonum.*

Secundus punctus annexus.[1]) Zum andern wollen wir einpilden, wie
man aus rechtem grunde die negste propinquitet schreiben soll der surden
fraction. Wollen solchs erstlich in quadrato erclern. Sam also, wir extra-
hirn durch den mutuatum numerum 1000, finden wir in den millesimen ʃʒ
von 3 1732, vnd das residuum ist 176. Also duplirn wir 1732 vnd
addirn vnitatem, wirdt 3465, das schreiben wir vor den nenner also $1732\frac{176}{3465}$.
Vnd ist die vrsache, nachdem alle zalen zwischen allen quadraten surden
sind, vnd alle quadrat distiren durch die impares, die wir nennen gnomones,
also sagen wir, das zwischen dem quadrat von 1732, der do ist 299824,
vnd dem quadrat | von 1733, der einer vnitet mehr ist, darin das vber- 147'
pleibende residuum participirt 3003289. So wir sie von einander ziehen,
pleiben 3465, der vorgemeldet nenner, jn welcher distantz die fract auf
das negste proportionirt. Wann, so jme der zeler gleich were dem nenner,
so erreicht es den negsten quadrat einer vnitet mehr, vnd also ist es
allwegen, der radix geduplirt vnd einer vnitet mehr die distantz des negsten
quadraten, wann der quadrat wechst mit zweien supplementen, die do seind
der geduplirte radix erstlich, vnd mit dem gnomone, welche also circum-
scriptibilia thun ein imparem, wann alle zal geduplirt gerad oder vngerad
mit zugebung der vnitet erwechst vngerade. Haben also genugsam vom
quadraten gesagt, vnd defsgleichen in andern ductionibus. So khunen wir
die fract nicht neher schreyben, dann durch die distantz der negsten zweien
potentionalischen zaln vorgelegter duction werde gesatzt vor den nenner des
Residui. Doch haben wir erkhennen geben vom cubic, als wir wolten
suchen den nechsten ʃcc in mutuato 1000 von 2. Wir cubicirn 1000,
khomen 1000000000, darin furen wir 2 vnd extrahirn, finden wir nach
der propinquitet pro radix 1259. Nun fragen wir, wie wir sollen signiren
die denomination des residui. Wir cubicirn 1259, | vnd was khumbt, be- 148

---

1) Die hier gegebene Anweisung, eine angenäherte Wurzel beliebigen Grades aus einer Zahl zu erhalten, kommt auf die Formel hinaus, welche H. Staigmüller in der Festschrift zu Cantor's siebzigstem Geburtstage bei Johannes Scheubel nachgewiesen hat, nämlich

$$\sqrt[n]{a^n + b} \sim a + \frac{b}{n_1 a^{n-1} + n_2 a^{n-2} + \cdots + n_{n-2} a + 1}.$$

Den Nenner nennt er die Distanz zwischen a^n und $(a+1)^n$, sie ist ja auch die Differenz beider. Für $n = 2$ ist so $\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2n+1}$ die schon den alten Griechen bekannte Formel, für $n = 3$, $\sqrt[3]{a^3 + b} = a + \frac{b}{3a^2 + 3a + 1}$, oder wie Verfasser es noch darstellt, $= a + \frac{b}{3a(a+1) + 1}$ u. s. w.

halten wir vnd lassen den radix einer vnitet mehr sein, in welcher das residuum participirt, das ist 1260. Cubicirn den auch, vnd nehmen eins vom andern, vnd was pleibt, soll vor die denomination geschrieben werden des Bruchs, vnd also in allen ductionibus. Oder addir vnitatem zu dem radici, das ist 1260, solchs multiplicir mit dem extrahirten 1259, was khumbt, triplicire, vnd dem triplat gieb aber vnitatem, so khumbt die obgemelte distantz auch der zweier negsten cubic.

Tertius punctus annexus,[1]) Zum dritten wollen wir sagen, wie vnsere vorfarn solche mutuirung gebraucht haben. Khurtzlich der halbe zirkhel wer 1000 gethailt, vnd haben funden ein sin durch cordam vnd arcum; denselbigen zu extrahirn von 2000000: die frage, wieuil gradus der sinus habe in gemelten diametro. Also exstrahirn wir den radix, finden wir 1414 millesime des gemelten sinus jn diametro gestreckt. Solche millesime heben wir auf durch den mutuanten 1000, khumbt 1, vnd ist 1 gradus, Rest 414. Das multiplicir in 60, khumen 24840, das thail auch mit dem mutuanten 1000, khumen 24 minuten, vnd pleiben 840; das multiplicir wider mit 60, khumen 50400, vnd das dividir aber mit dem Mutuanten 1000, khumen 50 secund, pleiben 400, Die multiplicir mit 60, khumen 24000, thaile mit
148′ dem Mutuanten, khumen 24 tertz, geht gleich auf. Also sagen wir, | das gemelte sinus in diametro hat 1 gradum, 24 minuta, 50 secunden vnd 24 tertz. Defsgleichen magstu suchen cordam et arcum per gradus in radicibus, vnd also magstu jn auch in die signa applicirn, das die erste vnitet ein gantz signum ist, die 404 resoluir mit 30, werden 12 gradus, restant 420, die resoluir in 60, vnd thaile allwegen mit dem mutuanten, khumen 25 minuten, pleiben 200, die resolvir mit 60, wie vor, khumen 12 secunden, vnd gehet auch auf; vnd so du solche resoluten reducirst in die secunden vnd thailest jrer gemeinsamen denomination, so khumbt der erste radix 1414 wider. Vnd also wollen wir beschliessen vnd gesagt haben, souil vns in der gebra geburlich ist gewesen von dem mutuirn.

---

1) Durch diesen dritten Anhang zeigt der Verfasser, weshalb man im Mittelalter jene merkwürdige Umwandlung der decimal in der vorher gezeigten Weise gefundenen Wurzel in Sexagesimalbrüche vornahm. Es war bei allen astronomischen Rechnungen, für die es ja nur Tafeln in Sexagesimaltheilung gab, nothwendig, die Resultate in derselben Form zu erhalten, wenn man solche Tafeln benutzen wollte. War also z. B. ein Sinus zu finden, der $= \sqrt{2000000}$ sein sollte für den Halbmesser gleich 1000, so fand man durch Wurzelausziehung zunächst dafür 1,414. Den Decimalbruch verwandelte man dann durch Multiplikation mit 60 und Division durch 1000 in Minuten, den bleibenden Minutenbruch in ähnlicher Weise in Sekunden u. s. f. Man erhält so $\sqrt{2} = 1$ Grad $24' 50'' 24'''$, und konnte nun in der ebenso berechneten Sinustafel den Bogen finden, der dem Sinus zugehörte.

Capitulum undecimum de numeris irrationalibus potentia de eorumque perquirendis radicibus.

Omnium ductionum irrationalium perquirendas radices longitudine descripsimus. Earumque vero, quarum potentiae irrationales sunt et medialis numeri participantes naturam, similiter, ut diximus, his digestis spetiebus numeri irrationalis expediuntur, solum interceptum est, quod ad radicem radicis devenitur ductionis propositae in longitudine. | [1]) 149

Nachdem Algebras declarirt hat die speties der numerorum irrationalium in longitudine, hie eruolget er sagende von den numeris irrationalibus, welche do seind potentia irrationales, vnd laut gemelter text zu vnserm teutschen also.

Aller duction radices zu finden jn der lenge, das ist in longitudine, haben wir anzeigung vnd beschreybung gegeben. Aber von den, welche potentz irrationalis ist, vnd die natur haben der numerorum medialium, als wir jnn ersten capitel gesagt haben, werden vns aufsgerichtt durch vorgemelte speties, allein das aufsgenomen, das man khumbt zu den radicibus der radicum der duction, welche dann furgegeben ist, jnmassen dann die natur des medials gelert ist.

Von disem text einzufuren, wollen wir dich berichtenn mit rationalischen Exempeln, vnd wollen sie also more irrationalium setzen, dabej abzunemen ist, wie es mit den surden soll gehalten werden, welche do khein mensur haben. Als wir setzen zu addirn zwen quadrat ⁚√|4 ʒ zu ⁚√|9 ʒ. Wir wissen, das die potentz der gemelten quadrat more irrationalium gesatzt ist, der quadrat 5, vnd radix von 5 ist die longitudo. Also addirn wir durch vnsere vorgesatzte speties, finden wir, als der text sagt, √ʒ 25, vnd ist in potentia √|25 ʒ, vnd also radix radicis quadrati also figurirt √|25 ʒ, vnd also steet in der longitudine, das ist √ʒ 5, vnd desgleichen in andern | ductionen. Als ich will setzen in zwei proportionalische Cubic 149′
√|18 ce vnd √|27 ce. Wir wissen, das 8 ist der Cubic in potentia von jn zweyen, vnd also, so wir die cubic addirn nach vnsern vorgesatzten speciebus more surdorum, khumen √cs |35 + 54 + 36 ce vnd √ce von dem ist der cubic

1) Hier wird das früher Gesagte auf mediale Grössen ausgedehnt, also auf solche, die auch in der Potenz irrational sind, wie √|5 ʒ und √|3 ʒ, sie geben natürlich als Resultat einer Addition √cs |⁚√|5 ʒ + ⁚√|3 ʒ + √|250 ʒ, das ist in unserer Bezeichnung:

$$\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{3} = \sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt[4]{250}}.$$

in potentia vnd also radix radicis cubica, der do ist √|35 + 54 + 36 cꝭ, das ist √cꝭ 5, das ist additio, vnd desgleichen in andern ductionibus allein, das do khumbt √ der furgelegten duction der vorgesatzten spetien. Vnd solche zal participanten vnd haben die natur der zal medialis, dann als die zal medialis allwegen ist irrationalis vnd radix radicis desselbigen seind die supplementa, also seind die numeri potentionales surdi die quadraten aber cubi, welche der diameter thailet durch mittel entzwey, als vns deret quarta secundi Geometrie. So wir aber wollen setzen den quadrat √|5 ʒ vnd den quadrat √|3 ʒ (Fig. 29), so wir sie nach den vorigen spetiebus addirn, khomen √cs|8 + √60 ʒ, vnd radix von dem ist die potentz vnd √cs das ist in longitudine. Vnd also haben dise numeri allein ein vnterschied, das sie durch radicem radicis khomen ad longitudinem, vnd solche zal

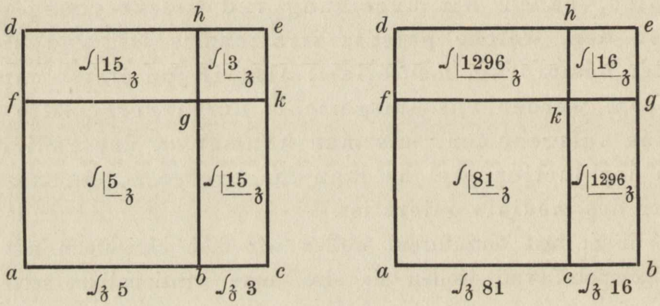


Fig. 29.

werden wir viel haben in den binomiis vnd den 13 zaln irrationaln, als
150 wir setzen werden mit sampt sonderlichen von dem numero | mediali. Vff das wir aber mogen khomen jn vorstandt der zaln, welche do potentia jrrationales seind, wollen wir setzen eine gemeine demonstration geometrie. Wir wollen addirn √ʒ 5 zu √ʒ 3. Also wir quadrirn √ʒ von 5, khumbt √ʒ 5, das ist der surd quadrat √|5 ʒ; wir quadrirn √ʒ von 3, khumbt √ʒ 3, das ist der surd quadrat √|3 ʒ. Solche zwen quadraten surd mit sampt den zweien medialen zusamen geaddirt radix gantzer quantitet als √cs |√ʒ 5 + √ʒ 3 + √|250 ʒ, radix von diesem gantzen quadrat ist zusamen addirt √ʒ 5 vnd √ʒ 3, das ist in longitudine. So wir aber allein wollen addirn die zwei quadraten surden, als √|5 ʒ vnd √|3 ʒ, sagen wir, jnmassen in vnsern vorgesetzten spetiebus, do wir sie genomen haben in longitudine, do waren sie zusamen |8 + √ʒ 60 ʒ. Also was vor jn longitudine ist genomen, das ist hier potentia, dann √ʒ von 5 vnd √ʒ von 3 zusamen geaddirt, sie sein potentionales oder in longitudine, so machen sie |8 + √ʒ 60 ʒ.

Wir nemen diese quantitet vor einen quadrat, so ist ∫ʒ von solcher gantzen quantitet die longitudo also gefigurirt: so wir sie | aber nemen ∫cs, den quadrat vom quadrat in potentia, so ist ∫cs |8 + ∫60 ʒ die longitudo, deſsgleichen, so wir ansehen radicem von dem quadrat ∫cs |∫ʒ 5 + ∫ʒ 3 + ∫ʒ 250 ʒ in potentia, so ist radix radicis der gantzen quantitet die longitudo. Vnd hierumb wollen wir mit dem text beschliessen, das der protentionalischen surdischen zalenn addirung vnd der longitudinen surden ist ein form, deſsgleichen durch andere speties, Dann allein mit dem seind sie vnternomen vnd vnterschieden was vor radix radicis ist gewesen der potentz in longitudine das ist der radix radicis. Vnd solchs magstu auch durch numerum mutuatum probirn, als wir dich vnterricht haben. Vnd wollen also hiemit beschliessen das dritt Buch Gebre vnd Almuchabole, vnd seind furter sagen im vierdten Buch von den potentionaliteten der rationaln sampt den jrrationaln proportionaliteten vnd medieteten, welche also dienende zu den Binomien, von den wir jm funfften sagen werden.

(150′ beside line 2)

Explicit tertius liber Algebrae. | 151

Librum quartum in alio volumine invenies. Siquidem quintum.

| *Liber quartus* Algebrae *Arabis de binomiis atque recisis, simul et omnium irrationalium numerorum, quorum sunt tredecim, et primo* Cod. Dresd. C. 405 Blatt 168

Capitulum primum de divisione eorundem in genere.[1])

Binomiorum disserere normas simul et recisorum una cum mediali et decem comitum praemissorum ducum praescripsimus, quorum omnium tredecim quantitates irrationales spetie differentes in genere continuarum ad numerum contrahuntur. Haec in ter geminas partes dogmate antiquorum et maiorum nostrorum distinguuntur.

1) Wie schon in der Einleitung gesagt ist, sollte dieses Fragment nicht als viertes, sondern als fünftes Buch bezeichnet sein, da nach dem Inhaltsverzeichnis des ganzen Werkes das vierte Buch von den Verhältnissen, Proportionen und Medieteten handeln sollte. Es ist sehr zu bedauern, dass der im Göttinger Manuskripte angezeigte zweite Band der Handschrift sich nicht ebenfalls gerettet hat. Das Fragment selbst giebt in etwas anderer Reihenfolge und abgekürzter Weise die Erklärungen Euklid's im X. Buche seiner Geometrie von den 6 Binomien und 6 Apotomen, während die Erklärung der dreizehnten Irrationale und die weitere Behandlung derselben verloren sind. Ich habe das Fragment mit aufgenommen, trotzdem die Erklärung des deutschen Bearbeiters fehlt, um wenigstens so weit als möglich über die Kenntnisse Rechenschaft zu geben, welche um die Mitte des XVI. Jahrhunderts in Deutschland in betreff der Arithmetik und Algebra bekannt waren.

Capitulum secundum de divisione bimembri in spetie binomorum et recisorum in sex normas.

Primo nosce distinguere geminas partes binomiorum et recisorum vel residuorum. Aut namque maius nomen tanto amplius minori portioni potest, quantum est quadratum communicantis, aut sibi incommensurabilis in longitudine. Hae ter sumptae distinxerunt normas sex binomiorum simul et
168′ recisorum eorundem. |

Capitulum tertium de sex normis binomiorum et recisorum seu residuorum secundum distinctionem tergeminam.

Tergeminae partes binomiorum et recisorum sunt: aut longior portio data rationali communicans et minor rationalis, sicque primum et quartum nominabitur; aut minus nomen rationali dato communicans et maius irrationale, sicque secundum et quintum vocabitur; aut neutri portionum eidem, sicque tertium et sextum appellabitur.

Capitulum quartum de modo inveniendi binomia et residua secundum sex differentias eorum.

Binomia atque recisa geminis partibus descriptis invenienda constant. Cum duobus numeris proportionalibus eorum primaeva fundamenta similibus proportione quatuor numerorum redigentur, et si primus amplius possit secundo quadrato aliquo communicanti maiori, aut incommensurabili in
169 longitudine, necesse est, quoque tertium | secundum illud esse posse quarto Palam itaque binomium atque recisum duobus numeris tantum potentia rationalibus constitui.

Capitulum quintum de radicibus inveniendis tam binomiorum quam residuorum secundum sex differentias.

Omnium binomiorum et recisorum radices investigemus, si maiorem portionem cuiuslibet in duas partes demetimur, quorum unius in alteram augmentum sit aequale quartae parti quadrati brevioris. Huius tunc radicem unius in alteram esse superficiem decem sequentium numeri medialis comitum distinguendam praemissorum ducum, quorum rationem geometricam subiecimus descriptam.

Capitulum sextum de duobus ducibus binomiorum et residuorum dicti binomium atque residuum absolutum.

Maiorem quidem portionem binomii primi atque sui residui si in duas partes, quemadmodum diximus, metimur, duoque hi numeri iuncti binomium

absolutum | atque idem residuum sub specie et differentia binomiorum con- 169′
stituunt. Ex hoc manifestum, binomium atque residuum absolutum duces geometrica ratione describendos subiecta esse necesse est.

Capitulum septimum de primis comitibus binomiorum et residuorum dicti binomiale primum et residuum mediale primum, deque eorum proprietatibus et demonstrationibus geometricis.

Secundi quidem atque sui residui sic eandem, ut diximus, binomii portionem permetimur, iunctique hi numeri bimedium primum et residuum mediale primum comitem componunt sub differentia bimembri prima binomiorum atque recisorum descripta. Mediales quidem sunt et rationalem unius in alterum duplum superficialem numerum continentes, quorum quadrata sunt mediale pariter accepta et potentia communicantia. | 170

Capitulum octavum de secundis comitibus binomiorum et recisorum dicti bimediale secundum et residuum mediale secundum, de eorumque proprietatibus et demonstrationibus geometricis.

Et tertii quidem eandem partitionem binomii maioris portionis discernimus, et bimedialem numerum secundum et residuum mediale secundum constituunt sub prima differentia bimembri binomiorum et recisorum inserta. Qui et mediale sunt et medialem superficiem continentes, quorum et quadrata mediale pariter accepta et potentia tantum, ut prius, communicantia.

Namensverzeichnis.

Sachregister
über Heft XII und XIII der Abhandlungen.

(Die Zahlen bis 336 beziehen sich auf Heft XII dieser „Abhandlungen", die spätern auf das vorliegende XIII. Heft.)

B

C

S

T

U

V

W

Folgende Druckfehler bittet man vor Gebrauch des Buches verbessern zu wollen.

340, 7 v. u.: AUGUSTINO. — *343*, 3 v. u.: Anfang. — *346*, 2: quando ela. — *351,* 32: Länge *gf*. — *354:* In der Figur o8o muss die auch im Original fehlende Stange ergänzt werden. — *360,* 4 v. u.: ita *cg*. — *383*, 6 v. u.: das besagt. — *389,* 1 v. u.: 49—38½. — *400,* 23: archo *hv*. — 25: archo *hv*. — grande. — 27: *hvc*. — 5 v. u.: pone *h*, *v*. — hoc. — *409,* 28: seien *d, q, o*. — *422,* 1 v. u.: 24,2487. — *431,* 5 v. u.: ARCHIMEDES. — *459,* 27: 4 der zens. — *480,* 1: decimum. — *504,* 26: restat.