





~~GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~

107
1/2 A nowe

ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE
GIEOMETRII ELEMENTARNEJ.

~~GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa naukowego Warszawskiego~~

GEOMETRIE (KURZ)

„WIEDZA MATEMATYCZNA“

ZBIÓR DZIEŁ Z DZIEDZINY MATEMATYKI CZYSTEJ I STOSOWANEJ WYDAWANY PRZEZ S. KWIETNIEWSKIEGO,
S. STRASZEWICZA I W. WOJTOWICZA.

ZAGADNIENIA

DOTYCZĄCE

Geometrii Elementarnej

ZEBRAŁ I UŁOŻYŁ

F. ENRIQUES.

Tom II.

KONSTRUKCJE GEOMETRYCZNE I TEORIA
IZOPERYMETRÓW.

Z drugiego wydania włoskiego przełożyli

ST. KWIETNIEWSKI i WŁ. WOJTOWICZ

~~GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~

~~L. inw. 519~~

Wydane z zapomogi Kasy pomocy dla osób pracujących na polu naukowym
im. Dr. J. Mianowskiego.

WARSZAWA, 1917.

Skład główny w księgarni Gebethnera i Wolffa.

Cena rb. 3.

opis m 51002

GEOMETRIE

LEHRBUCH

Geometrie Elementar

LEHRBUCH

V. KRISTOFFEL

Teil II

KRISTOFFEL



4519/II-40

Czcionkami Drukarni Naukowej, Stoł. m. Warszawa, Rynek Starego Miasta 11.
Geprüft und freigegeben Presserverwaltung Warschau 8/1 1917. T. Nr. 4102. Dr. Nr. 165.

Spis rzeczy.

ARTYKUŁ PIERWSZY.

O metodach elementarnych rozwiązywania zadań geometrycznych

napisał

Ettore Baroni z Rzymu.

	<i>Str.</i>
§ 1. Uwagi przedwstępne	1
§ 2. Poszukiwanie miejsc geometrycznych.	3
§ 3. Rozwiązywanie zadań oznaczonych metodą miejsc geometrycznych.	6
§ 4. Metody przekształceń	10
§ 5. Przesunięcie równoległe	10
§ 6. Kład dokoła osi	12
§ 7. Obrót dokoła punktu	15
§ 8. Metoda podobieństwa	16
§ 9. Metoda zadania odwrotnego	17
§ 10. Jednokładność	18
§ 11. Jednokładność w połączeniu z obrotem	20
§ 12. Przekształcenie za pomocą promieni odwrotnych	23

ARTYKUŁ DRUGI.

O rozwiązywaniu zadań geometrycznych za pomocą cyrkla

napisał

Ermenegildo Daniele z Pawji

§ 1. Uwagi przedwstępne	27
§ 2. Pierwsze konstrukcje	29
§ 3. Zadania podstawowe w metodzie Mascheroni'ego	32
§ 4. Rozwiązanie kilku zadań o odcinkach i kątach	34
§ 5. Podział okręgu na 3, 4, 5, 6, 8, 10 części równych	39
§ 6. Zadania rozwiązywane w przybliżeniu: wyprostowanie okręgu, podwojenie sześciąnu	40
§ 7. Przekształcenia przez promienie odwrotne i konstrukcje samym cyrklem: zadania podstawowe	41

§ 8.	Zastosowanie przekształcenia odwrotnego do dowiedzenia rozwiązalności zadań elementarnych za pomocą samego cyrkla	45
§ 9.	Wzmianka o zastosowaniu przekształcenia przez promienie odwrotne do rozwiązania niektórych zadań elementarnych	45

Str.

ARTYKUŁ TRZECI.

O rozwiązywaniu zadań geometrycznych za pomocą linjału i przyrządów linjowych. Przyczynek z dziedziny geometrii rzutowej.

napisał

Amadeo Giacomino z Aleksandrji w Egipcie.

§ 1.	Rzuty; własności graficzne i własności miarowe	50
§ 2.	Uwagi przedwstępne o zadaniach rozwiązalnych za pomocą linjału	51
§ 3.	Twierdzenia Desarguesa i Pappusa; zadania linjowe graficzne	51
§ 4.	Charakter rzutowy dwustosunku czterech punktów linii prostej	60
§ 5.	Grupy harmoniczne	62
§ 6.	Zadania linjowe miarowe	63
§ 7.	Uwagi krytyczne	70
§ 8.	Konstrukcje linjowe w związku z danym kołem	70
§ 9.	Szeregi rzutowe punktów. Punkty podwójne	72
§ 10.	Rozwiązanie niektórych zadań klasycznych metodą probowania	76
§ 11.	Zastąpienie cyrkla kołem stałym	80
§ 12.	Konstrukcje zapomocą linjału o dwóch krawędziach równoległych: pierwszy sposób używania przyrządu	86
§ 13.	Zastąpienie cyrkla linjałem o dwóch krawędziach	88
§ 14.	Konstrukcje za pomocą węgielnicy prostokątnej i ukośnokątnej	90

ARTYKUŁ CZWARTY.

O rozwiązalności zadań geometrycznych za pomocą przyrządów elementarnych. Przyczynek z dziedziny geometrii analitycznej.

napisał

Guido Castelnuovo z Rzymu.

I.

§ 1.	Działania, które mogą być wykonane za pomocą linjału nad odcinkami prostej	96
§ 2.	Uwaga o obszarach wymierności	99
§ 3.	Inne postaci rezultatu § 1.	101
§ 4.	Znaczenie rzutowe działań, które można wykonywać na prostej za pomocą linjału	101
§ 5.	Konstrukcje miarowe planimetryczne, dające się wykonać za pomocą linjału, jeżeli jest dany równoległobok	103
§ 6.	Konstrukcje graficzne planimetrii, dające się wykonać za pomocą linjału	105
§ 7.	Jakie zadania można rozwiązywać zapomocą samego linjału?	108

	Str.
II.	
§ 8. Jaki pożytek przynosi dołączenie cyrkla do linjału?	111
§ 9. Jakie zadania można rozwiązywać linjałem i cyrklem?	114
§ 10. Wzmianka o kilku zadaniach klasycznych	116
§ 11. O niektórych prostych przyrządach, mogących służyć do rozwiązywania zadań geometrycznych, i przenośnik odcinków	116
§ 12. Użycie koła stałego	120
§ 13. Linjał o dwóch krawędziach równoległych	122

ARTYKUŁ PIĄTY.

O równaniach algebraicznych rozwiązalnych za pomocą pierwiastków stopnia drugiego i o możliwości wykreślenia wielokątów foremnych.

napisał

Federigo Enriques z Bolonji.

I.

§ 1. Sprowadzanie wyrażeń niewymiernych stopnia drugiego do postaci normalnej	127
§ 2. Układanie równania algebraicznego, któremu wyrażenie pierwiastkowe czyni zadość	130
§ 3. O stopniu równań nieprzywiedlnych, dających się rozwiązać za pomocą wyrażeń pierwiastkowych stopnia drugiego	132

II.

§ 4. Sprowadzenie zagadnienia wielokątów foremnych do równań dwumiennych	136
§ 5. Nieprzywiedlność równania $\frac{z^p-1}{z-1}=0$, jeżeli p jest liczbą pierwszą	139
§ 6. Niemożliwość konstrukcji elementarnej wielokątów foremnych, których liczba boków p jest pierwsza i nie ma postaci 2^n+1	143
§ 7. Możliwość konstrukcji wielokątów foremnych, których liczba boków p jest liczbą pierwszą, mającą postać 2^n+1	143
§ 8. O liczbach pierwszych postaci 2^n+1	150
§ 9. Zastosowanie metody Gaussa do przypadku pięciokąta foremnego	151
§ 10. Wielokąty foremne o liczbie boków złożonej	153
§ 11. Uwagi o wyznaczaniu wielokątów foremnych, których konstrukcja nie jest wykonalna elementarnie	155

ARTYKUŁ SZÓSTY.

O konstrukcjach siedemnastokąta foremnego.

napisał

Ermenegildo Daniele z Pawji.

§ 1. Rozwiązanie równania dwumiennego $z^{17}=1$	161
§ 2. Konstrukcja J. Serreta, zmodyfikowana przez Bachmanna	164
§ 3. Konstrukcja Staudta	166
§ 4. Konstrukcja Gérarda	170

ARTYKUŁ SIÓDMY.

Zadania stopnia trzeciego: Podwojenie sześcianu. Podział kąta na trzy części równe.

napisał

Alberto Conti z Rzymu.

Str.

Wstęp	173
I.	
§ 1. Niemożliwość elementarnego rozwiązania zadania o podwojeniu sześcianu	177
§ 2. Metoda Architasa wykreślenia dwóch średnich proporcjonalnych	179
§ 3. Podwojenie sześcianu za pomocą stożkowych	180
§ 4. Podwojenie sześcianu za pomocą konchoidy. Zadania na wstawianie odcinków	188
§ 5. Podwojenie sześcianu za pomocą cysoidy	196
§ 6. Podwojenie sześcianu za pomocą umyślnych przyrządów	199
§ 7. Podwojenie sześcianu za pomocą integratu	204
§ 8. Uwagi ogólne o konstrukcjach przybliżonych	204
§ 9. Podwojenie sześcianu za pomocą przybliżonych konstrukcji elementarnych	206
II.	
§ 10. Niemożliwość elementarnego rozwiązania zadania podziału kąta na trzy części równe	213
§ 11. Podział kąty na trzy części równe za pomocą kwadratury Hipjasza	218
§ 12. Sprowadzenie podziału kąta na trzy części równe do zadań na wstawianie odcinków	219
§ 13. Podział kąta na trzy części równe za pomocą stożkowych	221
§ 14. Podział kąta na trzy części równe za pomocą konchoidy	227
§ 15. Podział kąta na trzy części równe za pomocą ślimaka Pascala albo za pomocą innych krzywych, dających się zastosować do podziału kąta na części równe wogóle	229
§ 16. Podział kąta na trzy części równe za pomocą specjalnych przyrządów	236
§ 17. Podział kąta na trzy części równe za pomocą elementarnych konstrukcji przybliżonych	240
III.	
§ 18. Rozwiązywanie zadań stopnia trzeciego za pomocą stałej paraboli	245
§ 19. Rozwiązywanie linjowe zadań stopnia trzeciego za pomocą stałej krzywej stopnia trzeciego	247
§ 20. Sprowadzenie zadań stopnia trzeciego do podziału kąta na trzy części równe albo do konstrukcji średnich proporcjonalnych	250

ARTYKUŁ ÓSMY.

O zadaniach przestępnych, a w szczególności o kwadraturze koła.

napisał

Benedetto Calò z Neapolu.

§ 1. Zadania algebracyjne i przestępne	252
§ 2. Własności podstawowe liczb algebracyjnych	257

§ 3.	Dowód istnienia liczb przestępnych	260
§ 4.	Twierdzenie przybrane Weierstrassa	265
§ 5.	Dowodzenie twierdzenia ogólnego Lindemanna	271
§ 6.	Przestępnosc liczb e i π . Niemożliwość wyprostowania okręgu, mającego promień dany, i łuku, mającego cięciwę daną	280
§ 7.	Rozwiązanie graficzne zadania wyprostowania i kwadratury koła za pomocą integratu	281
§ 8.	Konstrukcje geometryczne, służące do wyprostowania i kwadratury koła sposobem przybliżonym	287
§ 9.	„Księżycy“, dające się zamienić na kwadraty	289
§ 10.	Wzmianka historyczna o badaniach nad zagadnieniem kwadratury koła	293
§ 11.	Dowodzenie przestępnosci liczb e i π podług najnowszego wykładu H. Webera	302

ARTYKUŁ DZIEWIĄTY.

Niektóre uwagi ogólne o zadaniach geometrycznych.

napisał

Federigo Enriques z Bolonji.

§ 1.	Cel praktyczny badań geometrycznych	312
§ 2.	Zadania nieoznaczone.	313
§ 3.	Zadania oznaczone	316
§ 4.	Zasada ekonomji	316
§ 5.	Klasyfikacja zadań	317
§ 6.	Kryteria klasyfikacji	317
§ 7.	Jak się ocenia prostotę rozwiązania zadania	318
§ 8.	Wartość względna przyrządów	319
§ 9.	Dokładność konstrukcji	320
§ 10.	Metody rozwiązywania zadań	321
§ 11.	Rozwój metod	322
§ 12.	Metody przekształceń: dogodność położenia	323
§ 13.	Sprowadzenie do przypadku szczególnego	324
§ 14.	Równoważność środków konstrukcyjnych	326
§ 15.	Rozwiązywanie zadań za pomocą elementów podwójnych odpowiedzi	327
§ 16.	Zakończenie	329

ARTYKUŁ DZIESIĄTY.

Elementarna teoria izoperymetrów.

napisał

O. Chisini z Bolonji.

ROZDZIAŁ I.

Teoria izoperymetrów u Pappusa.

§ 1.	Lematy o trójkątach	333
------	-------------------------------	-----

	<i>Str.</i>
§ 2. Twierdzenie Zenodora: największy z pośród wielokątów izoperymetrycznych	335
§ 3. Własności izoperymetryczne koła	337

ROZDZIAŁ II.

Twierdzenie Cramera i największy wielokąt.

§ 4. Czworokąt	337
§ 5. Wielokąt ogólny	341
§ 6. Wielokąt przegubowy wpisany w koło jest jednoznacznie wyznaczony	342

ROZDZIAŁ III.

Podstawy teorii klasycznej.

§ 7. Zagadnienie najkrótszej drogi, związane ze zjawiskiem odbicia światła	344
§ 8. Największy z wielokątów izoperymetrycznych jest równoboczny . . .	346
§ 9. Lemat o trójkącie prostokątnym	347
§ 10. Lemat o łamanej przegubowej	347
§ 11. Największy z wielokątów przegubowych. Wielokąty izoperymetryczne	348
§ 12. Własność izoperymetryczna koła	349

ROZDZIAŁ IV.

Teoria figur izoperymetrycznych według Steinera.

§ 13. Lematy o trójkątach	350
§ 14. Twierdzenie podstawowe: własność izoperymetryczna koła	352
§ 15. Twierdzenia Cramera i Zenodora, jako wnioski z twierdzenia podstawowego	354
§ 16. Metoda figur symetrycznych	354
§ 17. Teoria figur kulistych izoperymetrycznych	355

ROZDZIAŁ V.

Krytyka nowożytna i zagadnienia istnienia maximum.

§ 18. Postulat istnienia maximum. Przypadek trójkąta	357
§ 19. Postępowanie Caratheodory'ego	359
§ 20. Metoda Study'ego	361
§ 21. O wklęsłości	364

ROZDZIAŁ VI.

Teoria izoperymetrów, uniezależniona od postulatu o istnieniu maximum.

§ 22. Wstęp	370
§ 23. Lemat, dotyczący istnienia wielokąta o danych bokach, wpisanego w koło	371
§ 24. Twierdzenie Cramera	374
§ 25. Twierdzenie Zenodora	378
§ 26. Inny dowód twierdzenia Zenodora	380

ROZDZIAŁ VIII.

O bryłach izoperymetrycznych.

§ 27. O graniastosłupach i o walcach	391
§ 28. O ostrosłupach i o stożku	394
§ 29. Własności izoperymetryczne kuli	399
§ 30. O wielościanach w ogólności	403



~~GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa naukowego Warszawskiego~~

K.

~~GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~

The first part of the paper is devoted to a general discussion of the problem of the origin of life. It is shown that the origin of life is a problem of the first order of importance. It is a problem of the first order of importance because it is a problem of the first order of importance. It is a problem of the first order of importance because it is a problem of the first order of importance.

The second part of the paper is devoted to a general discussion of the problem of the origin of life. It is shown that the origin of life is a problem of the first order of importance. It is a problem of the first order of importance because it is a problem of the first order of importance. It is a problem of the first order of importance because it is a problem of the first order of importance.

The third part of the paper is devoted to a general discussion of the problem of the origin of life. It is shown that the origin of life is a problem of the first order of importance. It is a problem of the first order of importance because it is a problem of the first order of importance. It is a problem of the first order of importance because it is a problem of the first order of importance.

