ARTYKUŁ SZÓSTY.

O konstrukcjach siedemnastokąta foremnego.

napisał

Ermenegildo Daniele z Pawji.

Zagadnienie o konstrukcji wielokątów foremnych, czyli, co na jedno wyjdzie, o podziale okręgu na części równe, było opracowane w sposób ogólny w artykule piątym tego tomu; zostało tam ustalone teoretycznie kryterjum do rozstrzygnięcia, czy zadanie algiebraiczne podziału okręgu na daną liczbę części równych może być sprowadzone do rozwiązania równań stopnia drugiego, czy więc (por. art. IV) odpowiednie konstrukcje graficzne nie wymagają stosowania innych przyrządów oprócz linjału i cyrkla. Celem głównym tego artykułu jest wykazanie w przypadku szczególnym, jak się specjalizuje wyłożona tam teorja ogólna, czyli jak się układa równania stopnia drugiego, od których zależy zadanie; a następnie, jak można w praktyce wykonać konstrukcję pierwiastków tych równań. Wielokątem, który wybierzemy za przykład, będzie wielokąt o 17 bokach; wykonalność jego konstrukcji linjałem i cyrklem była już wyraźnie zaznaczona w art. V. Z wielokątów, dających się zbudować środkami elementarnemi, siedemnastokąt jest najprostszym po tych wielokątach, które były badane przez matematyków starożytnych; wyłożymy przeto kilka z pośród znanych konstrukcji tego wielokąta, które nam się wydawały szczególnie charakterystycznemi.

Łatwo bądź co bądź pomyśleć, że równania stopnia 2-go, od których zależy zadanie podziału okręgu na 17 części równych, mogą być otrzymane bezpośrednio, bez powoływania się na teorję ogólną; nie brak istotnie autorów, którzy dążyli do tego celu różnemi drogami. Wymienimy następujących:

A. P a d o a*) wychodzi z rozważań gieometrycznych i ma tę zasłu-

---

*) *Poligoni regolari di 34 lati;* Boll. di Mat., 1903.

gę, że pierwszy rozwinął stronę algiebraiczną w sposób, który można uważać za elementarny.

H. Schubert*) dał wykład, który jest specjalizacją teorji Gaussa i odznacza się dużą prostotą i elegancją.

K. Kommerell**) rozważa zagadnienie, jak Padoa, pozostając w zakresie elementarnym i posługując się pięknemi pomysłami gieometrycznemi, będącemi naturalnym rozszerzeniem tych, które występują w konstrukcji pięciokąta.

C. H. Chepmell***) dochodzi do układu równań, identycznych w zasadzie z równaniami Kommerella.

F. Giudice****) z powodzeniem posiłkuje się własnością, że równanie stopnia 16-go, od którego można uczynić zależnym zadanie algiebraiczne podziału okręgu na 17 części równych, ma pierwiastki odwrotne, daje się więc sprowadzić bezpośrednio do stopnia 8-go.

Co się tyczy konstrukcji siedemnastokąta foremnego, to nie znamy dotychczas żadnej, któraby była otrzymana przez rozważania o charakterze czysto gieometrycznym, t. j. takiej, w której, oprócz rysunku gieometrycznego, występowałyby tylko rachunki arytmetyczne bądź nad liczbami, bądź nad literami; autorowie konstrukcji znanych ograniczają się wszyscy, w sposób mniej lub więcej wyraźny, do przedstawienia gieometrycznego pierwiastków równań stopnia drugiego, które rozwiązują zadanie algiebraicznie.

Ażeby dać pojęcie o różnorodności środków, jakiemi można traktować zadanie, którym się zajmujemy, wyłożymy trzy jego rozwiązania, które się różnią bardzo od siebie i z których każde odpowiada jednej z metod szczególnych rozwiązywania zadań elementarnych. Pierwsze z nich należy do typu konstrukcji Euklidesa, wykonywa się więc za pomocą linjału i cyrkla; to rozwiązanie, w zasadzie, zawdzięczamy Serretowi, który je podaje w tomie II swojej „*Algèbre supérieure*"; ale postać, w jakiej je tutaj pomieszczamy, jest prawie taka sama, jaka się znajduje w książce Bachmanna „*Die Lehre von der Kreisteilung*"; warto zaznaczyć, że w rozwiązaniu tym jedynym pomysłem, wychodzącym nieco z zakresu gieometrji ściśle elementarnej, jest nadanie znaku odcinkom tej

---

*) *Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis*, I Bd., II Abschnitt, Leipzig, Göschen, 1905.

**) *Elementargeometrische Konstruktion des regulären 17-Ecks;* Unterrichtsblätter f. Math. u. Naturwiss., XVI (1910). — *Ueber die Konstruktion der regulären Polygone;* Math. Ann., Bd. 72 (1912).

***) *Note on the geometrical construction of certain Polygons*; Math. Ann., Bd. 71 (1912).

****) *Sulla divisione del circolo;* Period. di Mat., 27 (1912).

samej prostej. Drugim jest rozwiązanie klasyczne Staudta, zawarte w tomie XXIV *Journal für Mathematik* (1842) i przeprowadzone podług pomysłów Ponceleta i Steinera, a więc przez zastosowanie tylko linjału i koła stałego na płaszczyźnie figury; Staudt ogłosił swoją konstrukcję, nie dodając do niej nawet wzmianki o dowodzeniu; dopiero wiele lat później (1872) konstrukcja Staudta została wyjaśniona przez Schrötera w tomie LXXV tego samego czasopisma. Dowodzenie Schrötera jest oddane prawie dosłownie w tylko co cytowanej książce Bachmanna, a także w „*Ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*" Kleina, który je podaje pod pewnemi względami, w postaci ładniejszej. Z temi modyfikacjami będziemy się liczyli w wykładzie. Wreszcie, jako przeciwstawienie poprzedniej, pokażemy konstrukcję 17-kąta foremnego, wykonaną samym cyrklem podług metody L. Mascheroniego, która była wyłożona w artykule II; ta konstrukcja, pochodząca od Gérarda, była ogłoszona w roku 1897 w tomie XLVIII *Math. Ann.* i stanowi w pewnej mierze odpowiedź na uwagę Kleina, pomieszczoną u spodu stronicy 27 w *Ausgewählte Fragen*: „Eine Construction des 17-Ecks nach Mascheroni nur mit Zirkel ist noch nicht versucht, obgleich sie jedenfalls möglich ist".

Nie będziemy odtwarzali wszystkich innych konstrukcji siedemnastokąta foremnego, ogłoszonych przeważnie w ostatnim dziesięcioleciu; tym więcej (co jest zrozumiałe), że te konstrukcje rzadko się odznaczają istotną oryginalnością. Ograniczymy się wzmianką o najbardziej godnych uwagi.

R. Güntsche*), biorąc za punkt wyjścia równania klasyczne, daje pierwsze rozwiązanie linjałem i cyrklem, w którym stara się osiągnąć możliwie największą prostotę, podług znanych pomysłów Lemoine'a z jego „Géométrographie". Z tej konstrukcji, za pomocą prostego pomysłu, otrzymuje się bezpośrednio inną, w której znajduje zastosowanie tylko cyrkiel, a która jest prostsza, chociaż mniej symetryczna, od rozwiązania Gérarda.

H. W. Richmond**) buduje siedemnastokąt linjałem i cyrklem, ale oddala się wyraźnie w ogólnym biegu działań od rozwiązania Serreta. Nie podaje w swej pracy objaśnienia wykonanych konstrukcji; ale dowodzenie można znaleźć w pierwszej z cytowanych prac Kommerella.

Do typu rozwiązania Serreta należy rozwiązanie podane przez

---

*) *Geometrographische Siebzehnteilung des Kreises;* Sitzungsb. d. Berl. Math. Ges. (26 Nov. 1902); Arch. d. Math. u. Ph., (3), IV (1903).

**) *To construct a regular polygon of 17 sides*; Math. Ann., Bd. 67 (1909).

Schuberta w cytowanym tomie w związku z teorją algiebraiczną, jak również rozwiązania, które wyłożyli w swych pracach Chepmell i Giudice.

§ 1. Rozwiązanie równania dwumiennego $z^{17}=1$. Równanie, od którego zależy podział okręgu na 17 części równych, jest równaniem stopnia 16-go, a mianowicie

$$\frac{z^{17}-1}{z-1}=0,$$

czyli

$$z^{16}+z^{15}+\ldots+z^2+z+1=0. \tag{1}$$

Rozpatrując koło o promieniu równym jedności w układzie spółrzędnych kartezjańskich, którego osiami są dwie prostopadłe do siebie średnice koła, dostaniemy jako obrazy pierwiastków tego równania 16 punktów okręgu, które wraz z punktem $z=1$ stanowią wierzchołki siedemnastokąta foremnego wpisanego w koło. Zakładając

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17},$$

można przedstawić pierwiastki równania (1) za pomocą wzoru:

$$\varepsilon^k=\cos\frac{2k\pi}{17}+i\sin\frac{2k\pi}{17} \quad (k=1, 2, \ldots, 16).$$

Zgodnie z ogólnym sposobem powinniśmy zacząć od dokonania wyboru pierwiastka pierwotnego modułu 17; otóż najmniejszą liczbą r, dla której 3^r-1 dzieli się bez reszty przez 17, jest, jak łatwo sprawdzić, $r=16$; liczba 3 jest więc pierwiastkiem pierwotnym modułu 17; można się też przekonać, że jest najmniejszą liczbą tego rodzaju. Uporządkujmy teraz pierwiastki równania (1) w sposób następujący:

$$\varepsilon,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^{3^2},\ \varepsilon^{3^3}, \ldots\ \varepsilon^{3^{15}},$$

czyli, ponieważ $\varepsilon^{17}=1$:

$$\varepsilon^1, \varepsilon^3, \varepsilon^9, \varepsilon^{10}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^5, \varepsilon^{15}, \varepsilon^{11}, \varepsilon^{16}, \varepsilon^{14}, \varepsilon^8, \varepsilon^7, \varepsilon^4, \varepsilon^{12}, \varepsilon^2, \varepsilon^6.$$

W następującej tablicy napiszemy okresy Gaussa o liczbie wyrazów 8, 4 i 2.

$$(A)\quad \left\{\begin{array}{l} \eta_1=\varepsilon^3+\varepsilon^{10}+\varepsilon^5+\varepsilon^{11}+\varepsilon^{14}+\varepsilon^7+\varepsilon^{12}+\varepsilon^6 \\ \eta_2=\varepsilon^1+\varepsilon^9+\varepsilon^{13}+\varepsilon^{15}+\varepsilon^{16}+\varepsilon^8+\varepsilon^4+\varepsilon^2 \\ \eta_{11}=\varepsilon^3+\varepsilon^5+\varepsilon^{14}+\varepsilon^{12},\ \eta_{12}=\varepsilon^{10}+\varepsilon^{11}+\varepsilon^7+\varepsilon^6 \\ \eta_{21}=\varepsilon^1+\varepsilon^{13}+\varepsilon^{16}+\varepsilon^4,\ \eta_{22}=\varepsilon^9+\varepsilon^{15}+\varepsilon^8+\varepsilon^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad \eta_{211}=\varepsilon^1+\varepsilon^{16},\ \eta_{212}=\varepsilon^{13}+\varepsilon^4, \ldots \end{array}\right.$$

Rozwiązanie algiebraiczne zadania można uważać za osiągnięte, jeżeli zostały obliczone okresy o dwuch wyrazach. W rzeczy samej, pierwiastki ε, brane po dwa, są zespolone sprzężone, a więc:

$$\varepsilon^k + \varepsilon^{17-k} = 2\cos\frac{2k\pi}{17};$$

są to właśnie okresy o dwuch wyrazach. Każdy z nich daje przeto dwa kąty, którym odpowiadają dwa wierzchołki siedemnastokąta, symetryczne względem osi x. Część gieometryczna zadania będzie również rozwiązana, jeśli zdołamy zbudować okresy o dwuch wyrazach, ponieważ wtedy wszystko się sprowadzi do wyznaczenia łuku, którego dostawa jest znana. Rachunek wielkości η o trzech wskaźnikach dokonywa się przez kolejne rozwiązanie szeregu równań stopnia drugiego, które teraz znajdziemy, a które pochodzą z pewnych zależności, występujących między różnemi okresami tablicy (A).

Biorąc w rachubę wyrażenia η_1 i η_2 jako funkcje wielkości ε i uwzględniając, że ε są pierwiastkami równania (1), dostaniemy:

$$\eta_1 + \eta_2 = \varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{15} + \varepsilon^{16} = -1,$$

$$\eta_1\eta_2 = 4(\varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{16}) = -4;$$

a więc η_1 i η_2 są pierwiastkami równania stopnia drugiego

$$\eta^2 + \eta - 4 = 0. \tag{2}$$

Mamy dalej:

$$\eta_{11} + \eta_{12} = \eta_1, \quad \eta_{11}\eta_{12} = -1$$

i podobnie:

$$\eta_{21} + \eta_{22} = \eta_2, \quad \eta_{21}\eta_{22} = -1;$$

a więc otrzymamy η_{11} i η_{12} jako pierwiastki równania

$$\eta^2 - \eta_1\eta - 1 = 0, \tag{3}$$

zaś η_{21} i η_{22} będą pierwiastkami równania

$$\eta^2 - \eta_2\eta - 1 = 0. \tag{4}$$

Zaznaczmy wreszcie związki:

$$\eta_{211} + \eta_{212} = \eta_{21}, \quad \eta_{211}\eta_{212} = \eta_{11},$$

które wykazują, że η_{211} i η_{212} są pierwiastkami równania

$$\eta^2 - \eta_{21}\eta + \eta_{11} = 0. \tag{5}$$

Równania (2), (3), (4), (5) są równaniami stopnia drugiego, które pragnęliśmy otrzymać. Rozwiązując (2), znajdziemy spółczynniki równań

(3) i (4); pierwiastki tych dwuch dadzą nam spółczynniki równania (5), którego pierwiastkami są dwa okresy o dwuch wyrazach. Ponieważ jednym z nich jest η_{211}, a punkty stąd otrzymane stanowią, wraz z punktem $z=1$, trzy kolejne wierzchołki siedemnastokąta, przeto z osiągnięciem η_{211} można uważać zadanie za rozwiązane w zupełności. Ostatecznie więc rozwiązanie czterech równań stopnia drugiego wystarcza do rozwiązania naszego zadania; można jeszcze dodać, że z ośmiu pierwiastków otrzymanych pięć tylko ma dla nas znaczenie, a mianowicie η_1, η_2, η_{11}, η_{21}, η_{211}; ostatni jest istotnym celem naszych poszukiwań, natomiast cztery pierwsze służą do wyznaczenia ostatniego.

Zanim część algiebraiczną zadania będziemy mogli uważać za wyczerpaną, musimy dać kryterjum do odróżnienia od siebie obu pierwiastków każdego z czterech równań stopnia drugiego; istotnie nie jest rzeczą obojętną wybór jednego pierwiastka lub drugiego, gdyż każdy pierwiastek otrzymał już w tablicy (A) wyrażenie, wyznaczone przez pewne szczególne ε. W tym celu załóżmy dla skrócenia

$$\varepsilon^k+\varepsilon^{17-k}=2\cos\frac{2k\pi}{17}=c_k,$$

będzie więc $c_k=c_{17-k}$; możemy teraz napisać:

$$\eta_1=c_3+c_5+c_6+c_7,\quad \eta_2=c_1+c_2+c_4+c_8;$$

$$\eta_{11}=c_3+c_5,\quad \eta_{12}=c_6+c_7,\quad \eta_{21}=c_1+c_4,\quad \eta_{22}=c_2+c_8;$$

$$\eta_{211}=c_1,\quad \eta_{212}=c_4.$$

Zauważmy teraz, że ponieważ c_k są wielkościami rzeczywistemi, przeto są też rzeczywiste wszystkie η; można więc porównywać z sobą ich wielkości, co uczynimy w sposób następujący. Wyobraźmy sobie (fig. 70) półkole o promieniu 1, podzielone na 17 części równych za pomocą punktów R_0, R_1, R_2, ... R_{17}, i oznaczmy przez s_1, s_2,... odległości R_0R_1, R_0R_2,... Z trójkąta $R_0R_kR_{17}$ mamy, pamiętając, że $R_0R_{17}=s_{17}=2$:

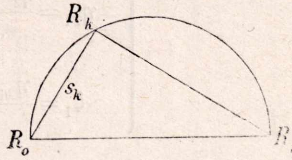

Fig. 70.

$$s_k=2\sin\frac{k\pi}{34},\ (k=1,\ 2,\ldots,\ 17)$$

a ponieważ

$$\cos\frac{2k\pi}{17}=\sin\frac{(17-4k)\pi}{34},$$

przeto łatwo sprawdzić równości:

$$c_1 = s_{13},\ c_2 = s_9,\ c_3 = s_5,\ c_4 = s_1,$$
$$c_5 = -s_3,\ c_6 = -s_7,\ c_7 = -s_{11},\ c_8 = -s_{15};$$

można więc wyrazić wielkości η za pomocą s_k, a mianowicie:

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \eta_1 = s_5 - s_3 - s_7 - s_{11},\ \eta_2 = s_1 + s_9 + s_{13} - s_{15}; \\ \eta_{11} = s_5 - s_3,\ \eta_{12} = -s_7 - s_{11},\ \eta_{21} = s_{13} + s_1,\ \eta_{22} = s_9 - s_{15}; \\ \eta_{211} = s_{13},\ \eta_{212} = s_1. \end{array}\right.$$

Jeżeli teraz zauważymy, że s_k rosną wraz z wskaźnikiem k, to będziemy mogli od razu wyprowadzić nierówności następujące:

$$(7)\quad \eta_{211} > \eta_{212};\ \eta_{11} > 0,\ \eta_{12} < 0,\ \eta_{21} > 0,\ \eta_{22} < 0,\ \eta_1 < 0;$$

uwzględniając jeszcze, że musi być $\eta_1\eta_2 = -1$, znajdziemy:

$$(8)\quad \eta_2 > 0.$$

Nie mamy teraz wątpliwości co do wyznaczenia pierwiastków naszych czterech równań stopnia drugiego, możemy je więc wypisać od razu w załączonej tutaj tabliczce, gdzie oznaczyliśmy dla uproszczenia $\eta_{211} = \zeta_1$, $\eta_{212} = \zeta_2$.

$$(B)\quad \left\{\begin{array}{ll} \eta_1 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}, & \eta_2 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ \eta_{11} = \dfrac{\eta_1 + \sqrt{\eta_1^2+4}}{2}, & \eta_{12} = \dfrac{\eta_1 - \sqrt{\eta_1^2+4}}{2} \\ \eta_{21} = \dfrac{\eta_2 + \sqrt{\eta_2^2+4}}{2}, & \eta_{22} = \dfrac{\eta_2 - \sqrt{\eta_2^2+4}}{2} \\ \zeta_1 = \dfrac{\eta_{21} + \sqrt{\eta^2_{21} - 4\,\eta_{11}}}{2}, & \zeta_2 = \dfrac{\eta_{21} - \sqrt{\eta^2_{21} - 4\,\eta_{11}}}{2}. \end{array}\right.$$

§ 2. Konstrukcja J. Serreta, zmodyfikowana przez Bachmanna. Na dowolnej prostej x (fig. 71) obierzmy jakikolwiek punkt O; umówimy się, że od niego będziemy mierzyli odcinki dodatnie w zwrocie dowolnie wybranym. Przez O poprowadzimy prostopadłą do x i obierzemy na tej prostopadłej punkt A tak, że $OA = 1$, w założeniu, że siedemnastokąt mamy wpisać w koło o promieniu 1. Następnie wyznaczmy na x odcinek

$$OB = -\tfrac{1}{4}$$

i zakreślmy okrąg $B(BA)$; ten okrąg przetnie x w dwuch punktach C i C', a z wykonanych konstrukcji wynika, co do wartości bezwzględnej:

$$BA = BC = BC' = \frac{\sqrt{17}}{4},$$

a, z właściwym znakiem:

$$OC = OB + BC = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$$

$$OC' = OB + BC' = \frac{-1+\sqrt{17}}{4},$$

albo, uwzględniając tablicę (B):

$$OC = \frac{\eta_1}{2},\ OC' = \frac{\eta_2}{2}.$$

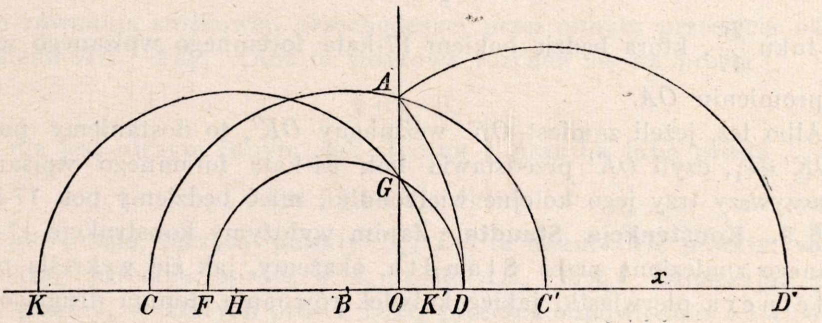

Fig. 71.

Tym sposobem zostały wykreślone pierwiastki równania (2).

Następnie okrąg $C(CA)$ przecina x po stronie dodatniej w punkcie D, dla którego:

$$OD = OC + CD = OC + \sqrt{\overline{OC}^2 + \overline{OA}^2} = \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\frac{\eta_1^2}{4} + 1},$$

albo, ze względu na tablicę (B):

$$OD = \eta_{11}.$$

Podobnie okrąg $C'(C'A)$ przecina x po stronie dodatniej w punkcie D' takim, że

$$OD' = OC' + C'D' = \frac{\eta_2}{2} + \sqrt{\frac{\eta_2^2}{4} + 1} = \eta_{21}.$$

Odetnijmy teraz na x odcinek $OF = -1$; na DF jako na średnicy opiszmy półkole i oznaczmy przez G jego punkt przecięcia z prostą OA. Niech będzie H jednym z punktów przecięcia prostej x z okręgiem

$$G(\tfrac{1}{2}\,OD'),$$

a przez K, K' oznaczmy punkty wspólne prostej x i okręgu $H(HG)$; dostajemy z figury:

$$-OK+OK'=KK'=2\,.\,HG=OD'=\eta_{21},$$
$$-OK\,.\,OK'=OG^2=-OF\,.\,OD=\eta_{11}\,.$$

A więc $-OK$ i OK' są pierwiastkami równania (5) i oba są dodatnie, jak to być musi stosownie do (6); niech będzie $-OK>OK'$; wtedy, wskutek nierówności (7)

$$-OK=\zeta_1\,,\quad OK'=\zeta_2\,.$$

Jeżeli teraz podzielimy OK na dwie części równe, wtedy otrzymamy odcinek, przedstawiający $\cos\frac{2\pi}{17}$, a stąd można od razu otrzymać cięciwę łuku $\frac{2\pi}{17}$, która będzie bokiem 17-kąta foremnego wpisanego w koło o promieniu OA.

Albo też, jeżeli zamiast OK weźmiemy OK', to dostaniemy podług (6): $OK'=s_1$, czyli OK' przedstawia bok 34-kąta foremnego wpisanego; wyznaczywszy trzy jego kolejne wierzchołki, mieć będziemy bok 17-kąta.

§ 3. Konstrukcja Staudta. Zanim wyłożymy konstrukcję 17-kąta foremnego znalezioną przez Staudta, okażemy, jak się wykreśla metodą Steinera pierwiastki jakiegokolwiek równania stopnia drugiego

$$x^2-px+q=0.$$

Przypuśćmy, że jest wyrysowane koło (fig. 72), którego promień przyjmujemy za jednostkę; poprowadźmy z punktów średnicowo przeciwległych O, A styczne x, t i odnieśmy punkty płaszczyzny do dwuch osi

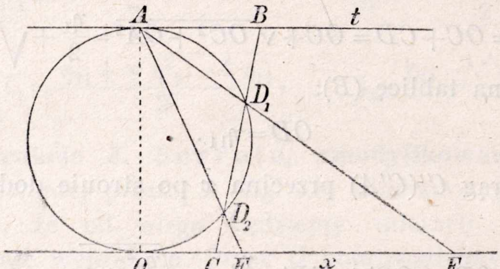

Fig. 72.

kartezjańskich, z których oś x jest styczną do koła w punkcie O, a y jest średnicą OA. Oznaczając przez x_1 i x_2 pierwiastki danego równania, wyznaczmy na osi x punkty E_1, E_2, mające za odcięte odpowiednio x_1, x_2; dostajemy od razu równania prostych AE_1 i AE_2, a mianowicie:

$$2x+x_1(y-2)=0, \quad 2x+x_2(y-2)=0;$$

mnożąc stronami te dwa równania, otrzymamy równanie obu prostych razem:

$$4x^2+2(x_1+x_2)(y-2)x+x_1x_2(y-2)^2=0,$$

czyli

$$4x^2+2px(y-2)+q(y-2)^2=0.$$

Jeżeli od tego równania odejmiemy równanie koła:

$$x^2+y(y-2)=0,$$

pomnożywszy je przedtym przez 4, dostaniemy:

$$2px(y-2)+q(y-2)^2-4y(y-2)=0;$$

jest to równanie stożkowej, przechodzącej przez punkty przecięcia okręgu z prostemi AE_1, AE_2. Otóż ta stożkowa rozpada się na prostą

$$y-2=0,$$

która nie jest niczym innym, jak styczną t, oraz na inną prostą

$$2px+q(y-2)-4y=0,$$

która jest prostą, łączącą punkty D_1, D_2, te mianowicie punkty, w których okrąg przecina, oprócz w A, proste AE_1 i AE_2. Oznaczając przez B i C punkty, w których prosta D_1D_2 przecina odpowiednio t i x, otrzymamy ich odcięte, kładąc w ostatnim równaniu kolejno $y=2$ i $y=0$; znajdziemy tym sposobem:

$$AB=\frac{4}{p}, \quad OC=\frac{q}{p}.$$

Stąd można wyprowadzić następującą konstrukcję pierwiastków równania $x^2-px+q=0$. Do koła prowadzi się dwie styczne t i x w dwuch punktach A i O średnicowo przeciwległych; na tych stycznych ustala się jednakowy zwrot dodatni. Na t i x wyznacza się punkty B i C w taki sposób, ażeby było, co do wartości i znaku, względem promienia koła jako jedności:

$$AB=\frac{4}{p}, \quad OC=\frac{q}{p};$$

poprowadziwszy następnie prostą BC, wyznacza się rzuty punktów przecięcia tej prostej z okręgiem z punktu A na prostą x: odległości tych rzutów od O przedstawiają pierwiastki danego równania. Z poprzedniej analizy wynika, że prosta BC przecina okrąg w punktach rzeczywistych zawsze, o ile pierwiastki są rzeczywiste. Widzimy zresztą, że pominąwszy wyznaczenie odcinków AB i OC, cała pozostała konstrukcja może być wykonana linjowo w założeniu, że jest dane koło wraz ze swym środkiem.

Zastosujemy teraz tę konstrukcję do znalezienia pierwiastków równań (2), (3), (4), (5).

W równaniu (2) mamy $p = -1$, $q = -4$; odetnijmy na stycznej x (fig. 73) odcinek $OC = 4$, a więc równy podwojonej średnicy (co możnaby było wykonać bez użycia cyrkla); prosta, która łączy C ze środkiem koła, spotyka t w punkcie, mającym za odciętą -4. Jeżeli więc oznaczymy przez D_1, D_2 punkty wspólne tej prostej i okręgu, to proste AD_1, AD_2 przetną x w dwuch punktach E_1, E_2, których odcięte przedstawiają pierwiastki η_1, η_2 równania (2); jeżeli pierwszy z tych dwuch punktów E_1, E_2 ma odciętą ujemną, wtedy będzie wskutek (8):

$$OE_1 = \eta_1, \quad OE_2 = \eta_2.$$

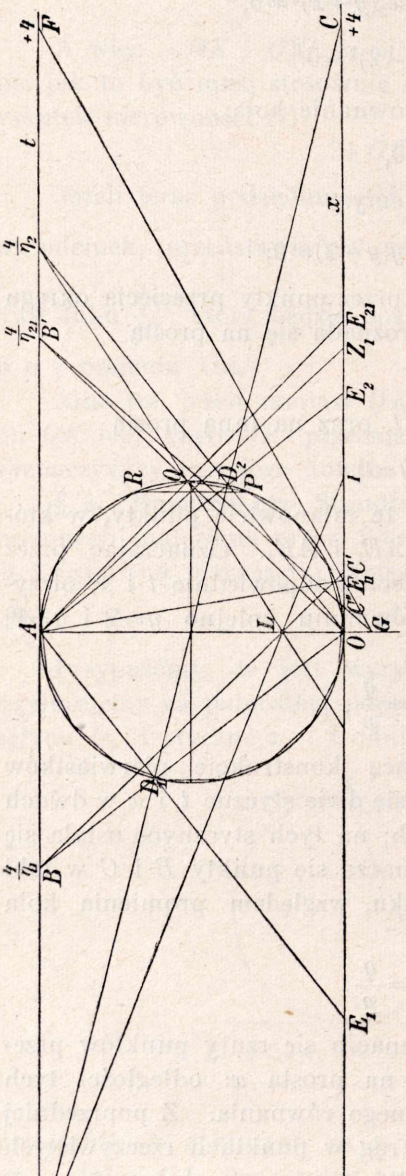

Fig. 73.

Ażeby otrzymać pierwiastki równania (3), trzeba wyznaczyć na t punkt o odciętej $\frac{4}{\eta_1}$, a na x punkt o odciętej $-\frac{1}{\eta_1}$. Pierwszy z nich nie jest niczym innym, jak przecięciem prostej t z prostą OD_1; w rzeczy samej, oznaczając ten punkt przez B i uwzględniając, że kąt AD_1O jest prosty, widzimy, że trójkąty AOB, AOE_1 są podobne, a więc boki ich są związane zależnością:

$$AB : AO = AO : OE_1,$$

czyli

$$AB = \frac{AO^2}{OE_1} = \frac{4}{\eta_1}.$$

Co do punktu osi x, mającego za odciętą $-\frac{1}{\eta_1}$, zauważmy, że prosta, łącząca punkt leżący na t i mający odciętą -4 z punktem leżącym na x i mającym odciętą 1, spotyka średnicę OA w punkcie L, dla którego jest:

$$LO:LA=1:-4=-\tfrac{1}{4};$$

prosta BL przecina x w punkcie C' takim, że

$$OC':AB=LO:LA=-\tfrac{1}{4},$$

a więc

$$OC'=-\frac{AB}{4}=-\frac{1}{\eta_1}.$$

Dzięki temu prosta, łącząca punkt prostej t o odciętej $\frac{4}{\eta_1}$ z punktem prostej x o odciętej $-\frac{1}{\eta_1}$, jest tą samą prostą BC'; a zatem, wyznaczając z punktu A na prostą x rzuty punktów wspólnych okręgu i prostej BC', otrzymamy pierwiastki równania (3). Ograniczamy się do wyznaczenia pierwiastka η_{11} (będącego pierwiastkiem dodatnim), który się przedstawia przez odcinek OE_{11}.

W sposób zupełnie podobny, biorąc pod uwagę punkt D_2 zamiast D_1, znajdziemy pierwiastki równania (4): a więc wyznaczamy rzut punktu D_2 z O na t i tak znaleziony punkt łączymy z L; otrzymana prosta łącząca przecina okrąg w dwuch punktach, które rzutujemy z A na x; otrzymane stąd rzuty dają szukane pierwiastki. I tutaj wyznaczamy tylko pierwiastek η_{21}, który się przedstawia za pomocą odcinka OE_{21}.

Dochodząc wreszcie do równania (5), w którym $p=\eta_{21}$, $q=\eta_{11}$, zaczniemy od wyznaczenia na t punktu B' o odciętej $\frac{4}{\eta_{21}}$; otrzymujemy go, rzutując z O na t drugi punkt przecięcia okręgu z prostą AE_{21}. Następnie trzeba wyznaczyć na x punkt o odciętej $\frac{\eta_{11}}{\eta_{21}}$; w tym celu, oznaczając przez F punkt prostej t o odciętej $+4$, poprowadźmy FE_{11} i niech będzie G punktem przecięcia tej prostej z prostą OA; wtedy GB' spotka x w punkcie C'', mającym odciętą $\frac{\eta_{11}}{\eta_{21}}$. W rzeczy samej, mamy

$$AF:AB'=OE_{11}:OC'',$$

czyli

$$4:\frac{4}{\eta_{21}}=\eta_{11}:OC'',$$

skąd

$$OC''=\frac{\eta_{11}}{\eta_{21}}.$$

Pierwiastki ζ_1, ζ_2 równania (5) otrzymamy więc, rzutując z A na x punkty wspólne okręgu i prostej $B'C''$. Jeżeli Z_1 jest punktem odpowiadającym pierwiastkowi ζ_1, wtedy prosta AZ_1 przetnie średnicę okręgu równoległą do x w punkcie, którego odcięta jest $\cos\frac{2\pi}{17}$; jeżeli P, R są punktami wspólnemi okręgu i cięciwy, poprowadzonej przez ten punkt prostopadle do x, a Q jest punktem o odciętej dodatniej, w którym okrąg przecina się z wspomnianą średnicą, wtedy P, Q, R będą trzema kolejnemi wierzchołkami siedemnastokąta foremnego wpisanego*).

§ 4. Konstrukcja Gérarda. Wykonajmy w równaniu (2) przekształcenie $\eta = 2\xi$ i oznaczmy przez ξ_1 i ξ_2 pierwiastki równania przekształconego; wprowadźmy następnie wielkości ξ zamiast η do wzorów tablicy (B); wzory te zamienią się na następujące:

$$\xi_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}, \quad \xi_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}, \quad \eta_{11} = \xi_1 + \sqrt{\xi_1^2+1}, \quad \eta_{21} = \xi_2 + \sqrt{\xi_2^2+1},$$

$$\zeta_1 = \frac{\eta_{21} + \sqrt{\eta^2_{21} - 4\eta_{11}}}{2};$$

wypisaliśmy tu tylko pięć pierwiastków, które nam będą potrzebne.

Niech będzie O środkiem okręgu (fig. 74), w który chcemy wpisać 17-kąt foremny; wyznaczmy na okręgu punkty A, B, C, D, będące wierzchołkami sześciokąta foremnego, następnie znajdźmy punkt środkowy M odcinka OA (podług artykułu II, § 4), wyznaczmy również punkt przecięcia X okręgu $A(AC)$ z okręgiem $D(AC)$. Ponieważ $OX = \sqrt{2}$ (art. II, § 4), przeto okrąg $A(OX)$ spotyka okrąg dany w dwuch punktach F, F' takich, że czworokąt $AFDF'$ jest kwadratem. Przyjmijmy proste OD i OF odpowiednio za osi x i y i postarajmy się wyznaczyć na osi x, jak to było robione w metodach poprzednich, punkty o odciętych ξ_1, ξ_2, η_{11}, η_{21}, ζ_1. Punkty K i K', w których się przecinają okręgi $O(1)$ i $M(1)$, mają oba odciętą $-\frac{1}{4}$, a rzędną

$$\pm\sqrt{1-\tfrac{1}{16}},$$

okręgi $K(OX)$ i $K'(OX)$ przecinają się w dwuch punktach E_1, E_2 osi x, których odcięte są odpowiednio

$$-\tfrac{1}{4} - \sqrt{2-(1-\tfrac{1}{16})} = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$$

---

*) W pracy, ogłoszonej w *Math. Annalen* (VI, 1873) Affolter dowodzi, że wyłożona tu konstrukcja Staudta dla 17-kąta może być rozszerzona na wszystkie wielokąty foremne, dające się zbudować linjałem i cyrklem, i rozwija szczegółowo konstrukcje, stosujące się do wielokąta o 257 bokach.

i
$$\frac{-1+\sqrt{17}}{4},$$
są to więc ξ_1 i ξ_2.

Następnie okrąg $E_1(1)$ przecina okręgi $F(\xi_1)$ i $F'(\xi_1)$ w dwuch punktach L_1 i L_1', mających tę samą odciętą ξ_1, a rzędną ± 1; zaś okręgi
$$L_1(E_1X=\sqrt{\xi_1^2+2}) \text{ i } L_1'(E_1X)$$
spotykają się na osi x w punkcie E_{11} o odciętej
$$OE_{11}=OE_1+E_1E_{11}$$
$$=OE_1+\sqrt{L_1E_{11}^2-L_1E_1^2}=\xi_1+\sqrt{\xi_1^2+1}=\eta_{11}.$$

Podobnie okrąg $E_2(1)$ przecina $F(\xi_2)$ i $F'(\xi_2)$ w dwuch punktach L_2 i L_2' o odciętej ξ_2 i rzędnych ± 1, a okręgi $L_2(E_2X)$ i $L_2'(E_2X)$ wyznaczają na osi x punkt E_2, o odciętej η_{21}.

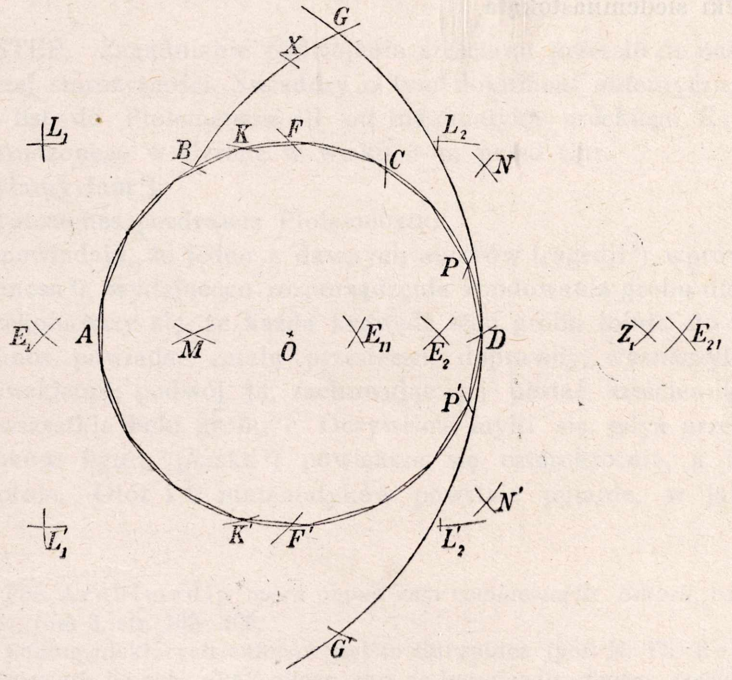

Fig. 74.

Wreszcie znajdujemy punkty N, N', w których się przecinają okręgi $O(AE_{11})$ i E_{21} (AE_{11}); te punkty mają za odciętą $\frac{1}{2}\eta_{21}$, a za rzędne
$$\pm\sqrt{ON^2-\tfrac{1}{4}\eta^2_{21}}=\pm\sqrt{(\eta_{11}+1)^2-\tfrac{1}{4}\eta^2_{21}};$$

wtedy okręgi $N(E_{11}B)$ i $N'(E_{11}B)$ wyznaczają na osi x punkt Z_1 o odciętej ζ_1. W rzeczy samej, ponieważ

$$NZ_1 = N'Z_1 = E_{11}B =$$
$$= \sqrt{ME_{11}{}^2 + MB^2} = \sqrt{(\eta_{11}+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}} = \sqrt{\eta_{11}{}^2+\eta_{11}+1},$$

przeto

$$OZ_1 = \tfrac{1}{2}\eta_{21} + \sqrt{NZ_1{}^2 - \left(\frac{NN'}{2}\right)^2} = \tfrac{1}{2}\eta_{21} + \sqrt{\eta^2{}_{11}+\eta_{11}+1-(\eta_{11}+1)^2+\tfrac{1}{4}\eta^2{}_{21}} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\eta_{21} + \sqrt{\tfrac{1}{4}\eta^2{}_{21} - \eta_{11}} = \zeta_1.$$

A teraz, ponieważ

$$\zeta_1 = 2\cos\frac{2\pi}{17},$$

przeto pozostaje nam tylko przeciąć okrąg $O(1)$ z okręgiem $Z_1(1)$, ażeby otrzymać dwa punkty P i P', które wraz z D stanowią trzy kolejne wierzchołki siedemnastokąta.