## ARTYKUŁ CZWARTY.

# O rozwiązalności zadań gieometrycznych za pomocą przyrządów elementarnych — przyczynek z dziedziny gieometrji analitycznej.

napisał

**Guido Castelnuovo** w Rzymie*).

W ciągu wieku XIX zainteresowanie matematyków zwracało się niejednokrotnie do badania możliwości rozwiązywania pewnej oznaczonej klasy zadań gieometrycznych, algiebraicznych lub analitycznych za pomocą środków z góry założonych.

Wartość takich badań została w zupełności stwierdzona przez osiągnięcie wyczerpujących odpowiedzi na pytania, ku którym oddawna zwracały się daremnie wysiłki umysłów najznakomitszych uczonych.

Ten kierunek ogarnął przedewszystkim algiebrę przez badanie równań, rozwiązalnych za pomocą wyrażeń pierwiastkowych. Odkrycia, któremi się wzbogaciła teorja równań dzięki zasługom Gaussa, Abela, a nadewszystko Galoisa, rzuciły jasne światło na najróżnorodniejsze gałęzie matematyki. Nawet gieometrja elementarna, która pozostawała niemal nieruchomo w tym punkcie, do którego ją doprowadzili matematycy greccy, doznała również oddziaływania postępów algiebry. Istotnie, korzystając z pomocy gieometrji analitycznej, podjęto badania niektórych słynnych zadań, oczekujących ciągle na rozwiązanie, i wykazano w sposób niewątpliwy, że poszukiwanie rozwiązania na drodze dotychczasowej było bezużyteczne, ponieważ te zadania nie są rozwiązalne za pomocą tradycyjnych przyrządów: linjału i cyrkla. Z drugiej strony zostały osiągnięte środka-

*) W artykule tym prof. Castelnuovo zgodził się uprzejmie wyłożyć dla naszej pracy zbiorowej niektóre tematy ze swoich wykładów, mianych w uniwersytecie rzymskim, o gieometrji rzutowej i analitycznej (przyp. F. Enriquesa).

mi gieometrji elementarnej rozwiązania innych zadań (wpisanie w koło pewnych wielokątów foremnych), które matematycy greccy uważali napewno za nierozwiązalne.

Jest więc zasługą tych dwuch nauk połączonych — algiebry i gieometrji analitycznej, — że zagadnienie rozwiązalności zadań gieometrycznych za pomocą cyrkla i linjału zostało ostatecznie rozstrzygnięte po dwudziestu wiekach badań.

W badaniu zadań gieometrycznych, które mogą być rozwiązane za pomocą linjału i cyrkla, albo ogólniej — za pomocą oznaczonych przyrządów, możemy istotnie odróżnić dwa stadja: jedno należące do gieometrji analitycznej, drugie do algiebry (lub analizy). Rzeczywiście należy przedewszystkim zbadać, jaki jest rezultat konstrukcji, wykonanej nad pewną figurą gieometryczną za pomocą oznaczonego przyrządu. A ponieważ przez pośrednictwo gieometrji analitycznej każde działanie gieometryczne otrzymuje odpowiednik w pewnym działaniu analitycznym, przeto trzeba będzie zbadać, jakiemu mianowicie działaniu analitycznemu jest równoważna konstrukcja, wykonana oznaczonym przyrządem (linjałem, cyrklem i t. d.). Następnie, po otrzymaniu odpowiedzi na to pierwsze pytanie, pozostaje jeszcze do wykonania badanie, które należy do algiebry lub analizy: trzeba się przekonać, czy każde równanie, do którego prowadzi dane zadanie, rozważane za pomocą gieometrji analitycznej, może być rozwiązane za pomocą powyższego działania analitycznego, zastosowanego raz lub więcej; jest to oczywiście warunek konieczny i wystarczający, ażeby zadanie gieometryczne dało się rozwiązać przyrządem przepisanym. Pierwsze z dwuch pytań powyższych nie przedstawia, na pierwszy rzut oka, żadnej trudności; natomiast drugie zdaje się potrzebować pomocy wyższych teorji analitycznych. Tym się objaśnia, dlaczego wszystkich autorów*) którzy się zajmowali przedmiotem tutaj rozpatrywanym, pociągało więcej zadanie algiebraiczne i dlaczego ci autorowie w stosunku do strony gieometrycznej ograniczali się do wygłoszenia rezultatu, który się wydaje oczywistym: „linjał pozwala rozwiązywać każde zadanie gieometryczne, które zależy od jednego lub więcej równań stopnia pierwszego; cyrkiel, w połączeniu z linjałem, daje rozwiązanie zadań, które zależą od równań stopnia drugiego, albo też od

---

*) Cytuję, z pośród więcej znanych, dwie książki Petersena: *Metody i teorye rozwiązywania zadań geometrycznych konstrukcyjnych*, tł. K. Hertz, Warszawa 1881 i *Theorie der algebraischen Gleichungen*, Kopenhagen 1878, oraz dziełko Kleina: *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*, Leipzig 1895.

równań stopni wyższych, jeżeli te równania są rozwiązalne za pomocą kolejnego rozwiązywania równań stopnia drugiego".

Otóż, rozpatrując uważnie to zdanie, widzimy, że domyślać się tu należy szeregu nie dość ściśle ustalonych wiadomości, których pominięcie mogłoby łatwo doprowadzić do dużych błędów. Z drugiej strony wiadomości te wiążą się tak ściśle z jedną ważną teorją algiebry nowożytnej, a mianowicie z teorją obszarów wymierności, że warto te wiadomości szerzej rozwinąć.

To właśnie zamierzam uczynić w artykule niniejszym. Ponieważ mowa o przedmiocie elementarnym, przeto postaram się, ażeby i wykład był elementarny; przypuszczam więc tylko, że czytelnikowi są znane główne zasady gieometrji elementarnej i niektóre najprostsze wiadomości z gieometrji rzutowej. To też ażeby potrzebne tu wiadomości z tej ostatniej nauki sprowadzić do minimum, będę rozważał niektóre zagadnienia pod postacią miarową, ażeby następnie, za pośrednictwem rzutu środkowego, otrzymać rezultaty rzutowe, idąc w ten sposób drogą, która nie jest najlepsza pod względem teoretycznym, ale której należy niewątpliwie oddać pierwszeństwo ze stanowiska dydaktycznego. Co się tyczy porządku, zachowanego w tym artykule, to w części pierwszej rozpatruję Gieometrję linjału, zajmując się przedewszystkim konstrukcjami na prostej danej, wykreślonej na płaszczyźnie pomocniczej, która służy tylko do wykonywania działań graficznych; następnie — konstrukcjami na płaszczyźnie danej. W części drugiej badam konstrukcje za pomocą linjału i cyrkla i nadmieniam o niektórych przyrządach, mogących zastąpić cyrkiel częściowo lub całkowicie.

Zaznaczam jeszcze, że ponieważ poszukuję metody ogólnej, pozwalającej rozwiązywać oznaczonemi przyrządami każde zadanie, rozwiązalne za pomocą tych środków, przeto muszę z konieczności zaniechać prostoty i elegancji konstrukcji; te zalety bowiem mogą być osiągnięte przez badanie rozwiązania jednego tylko zadania na raz.

## I.

**§ 1. Działania, które mogą być wykonane za pomocą linjału nad odcinkami prostej.** Zacznę od bardzo prostej uwagi, która posłuży do uzasadnienia następnych konstrukcji.

Niech będą $r$, $s$ dwiema prostemi równoległemi*); na jednej z nich

*) Prosimy czytelnika o wykreślenie prostych figur, o których jest mowa w tym artykule.

$s$ obierzmy dowolny odcinek i wyznaczmy jego rzuty na $r$ z dwuch różnych punktów $T$, $T'$. W ten sposób otrzymamy dwa odcinki prostej $r$. Otóż łatwo dowieść, że stosunek dwuch odcinków, stanowiących rzuty, nie zależy od odcinka obranego na $s$, a tylko zależy od położenia środków rzutów $T$, $T'$ (a mianowicie stosunek ten równa się wyrażeniu $\frac{Tr}{Ts} : \frac{T'r}{T's}$, gdzie $Tr$ oznacza odległość punktu $T$ od prostej $r$ i t. d.). W szczególności rzuty są odcinkami równemi, jeżeli prosta $TT'$, łącząca środki rzutów, jest równoległa do $r$ i $s$.

Weźmy teraz pod uwagę prostą $r$, na której mamy wykonać pewne konstrukcje za pomocą wykreślania figur na płaszczyźnie pomocniczej, przechodzącej przez tę prostą. Ponieważ zajmujemy się teraz działaniami miarowemi nad odcinkami prostej $r$, przeto musimy się koniecznie posługiwać punktem w nieskończoności prostej $r$. Ażeby ten punkt wyznaczyć graficznie, przypuśćmy, że na płaszczyźnie pomocniczej jest wykreślona prosta pomocnicza $s$ równoległa do $r$. Wiemy, że w takim razie można*) wykreślić na płaszczyźnie za pomocą samego linjału prostą, przechodzącą przez punkt dany i równoległą do $r$.

Opierając się na tej uwadze, możemy rozwiązać niektóre zadania podstawowe, posiłkując się tylko linjałem i prostą pomocniczą $s$ równoległą do $r$.

1) Jeżeli jest dany odcinek $AB$ na $r$, to mamy wyznaczyć na $r$ odcinek $A'B' = AB$, mający koniec $A'$ albo $B'$ w punkcie danym.

Obierzmy jakikolwiek punkt pomocniczy $T$, nie leżący na $r$ ani na $s$ i poprowadźmy przez $T$ prostą $t$ równoległą do $r$ i $s$; $T'$ niech będzie innym punktem prostej $t$. Wyznaczmy teraz z punktu $T$ na prostą $s$ rzut $A_0B_0$ odcinka $AB$, a następnie wyznaczmy z punktu $T'$ na prostą $r$ rzut $A'B'$ odcinka $A_0B_0$; wtedy będzie

$$A'B' = AB.$$

Oczywiście można zawsze wyznaczyć punkt $T'$ na $t$ w taki sposób, ażeby punkt $A'$ lub $B'$ miał położenie z góry oznaczone na prostej $r$.

2) Dane są dwa odcinki na prostej $r$; wyznaczyć trzeci odcinek, któryby był równy ich sumie albo różnicy. Wystarczy zastosować konstrukcję 1) do drugiego odcinka danego.

W ogólności jeżeli jest danych na $r$ kilka odcinków, których wartości (względem danej jednostki długości i z uwzględnieniem zwrotu dodatniego, obranego na $r$) oznaczymy przez $a$, $b$, $c$,... to można wykreślić

---

*) Patrz art. III, § 6.

na $r$ odcinek długości $x = \pm a \pm b \pm c \pm \ldots$, a w szczególności $x = na$, jeżeli $n$ jest liczbą całkowitą; można więc wykonywać dodawanie algiebraiczne odcinków.

3) Dane są na $r$ trzy odcinki; wyznaczyć czwarty proporcjonalny do tych odcinków.

Niech będą $AB$, $A'B'$, $CD$ trzema odcinkami danemi. Obrawszy, jak poprzednio, punkt pomocniczy $T$, wyznaczmy z tego punktu rzuty odcinków $AB$ i $CD$ na prostą $s$; oznaczmy te rzuty przez $A_0B_0$ i $C_0D_0$. Wykreślmy teraz ten punkt $T'$, z którego odcinek $A_0B_0$ ma za rzut $A'B'$; z tego samego punktu rzutem odcinka $C_0D_0$ będzie odcinek $C'D'$ prostej $r$ taki, że:

$$AB : A'B' = CD : C'D'.$$

Jeżeli $a$, $b$, $c$, $x$ są wielkościami tych czterech odcinków względem dowolnej jednostki długości, to $x = \frac{bc}{a}$; jeżeli więc pierwszy z tych odcinków przyjmiemy za jedność ($a = 1$), wtedy $x = bc$; jeżeli natomiast odcinek trzeci przyjmiemy za jedność ($c = 1$), wtedy $x = \frac{b}{a}$. Wypada stąd, że działanie 3) może być uważane, zależnie od przypadku, jako mnożenie lub dzielenie odcinków, z tym zastrzeżeniem, że rezultat jest zależny od jednostki długości, co w przypadku dodawania nie ma miejsca.

Zauważmy jeszcze, że jeżeli $a = nb$, gdzie $n$ jest liczbą całkowitą (działanie 2), wtedy otrzymamy $x = \frac{c}{n}$, a więc rezultat niezależny od jednostki długości i od wartości $a$; odwołując się przeto jeszcze raz do działania 2), można, mając dany odcinek $c$, wykreślić odcinek wartości $x = \frac{m}{n} c$, gdzie $m$ i $n$ są liczbami całkowitemi.

Krótko mówiąc, jeżeli na prostej jest danych kilka odcinków, to możemy, za pomocą wskazanych wyżej konstrukcji gieometrycznych, odtworzyć graficznie każdy szereg działań wymiernych (dodawanie algiebraiczne, mnożenie algiebraiczne), wykonywanych w liczbie skończonej nad wielkościami tych odcinków; możemy wykreślić każde wyrażenie wymierne, utworzone z wartości odcinków danych. Chcąc wyrazić ten rezultat pod postacią ściślejszą, możemy powiedzieć:

Niech będzie jeden lub kilka odcinków danych (w liczbie skończonej) na jednej prostej; jeden z tych odcinków przyjmijmy za jednostkę długości, zaś inne — o ile istnieją — niech mają pewne wartości $a$, $b$, $c$, ...; oprócz tego niech będzie wykreślona równoległa do prostej pierwszej. Można wtedy, posługując się samym linjałem, wykreślić na pierwszej prostej każdy odcinek, którego wielkość otrzymuje się za pomocą działań wymiernych, zastosowanych do ilości 1, $a$, $b$, $c$,...*).

Konstrukcję wykonywa się na płaszczyźnie pomocniczej, na której trzeba przyjąć dwa elementy pomocnicze (gdyż wszystkie inne zostają wyznaczone przez te elementy i przez dane), a mianowicie równoległą, o której była mowa, i punkt $T$, nie leżący na tej równoległej ani na prostej danej.

**§ 2. Uwaga o obszarach wymierności.** Wypowiemy ten rezultat pod inną postacią, wprowadzając nowożytne pojęcie obszaru wymierności. Musimy więc odejść od głównego tematu, ażeby ustalić dokładnie znaczenie tego terminu.

Obszarem wymierności nazywa się zbiór liczb zawierający każdą liczbę, która może być otrzymana z tych samych liczb za pomocą działań wymiernych (dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia). Najprostszym obszarem wymierności jest zbiór wszystkich liczb wymiernych, czyli obszar bezwzględny wymierności; obszar ten można uważać jako otrzymany z jedności przez wykonywanie nad nią działań

---

*) Wybór jednego z odcinków danych za jednostkę długości pozwala nam wykreślić każde wyrażenie $x=R(a, b, c,...)$, gdzie $R$ jest znakiem funkcji wymiernej o spółczynnikach wymiernych, bez zwracania uwagi na warunek jednorodności; warunek ten występuje natomiast wtedy, kiedy jednostka długości jest inaczej wybrana. Okażemy, na czym ten warunek polega. Odcinki, które dotychczas miały wartości 1, $a$, $b$, $c$,..., $x$, wymierzmy inną jednostką i nowe wartości tych samych odcinków oznaczmy przez $\lambda$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,... $\xi$; wtedy będzie:

$$a=\frac{\alpha}{\lambda},\quad b=\frac{\beta}{\lambda} \text{ i t. d.}$$

Poprzednie wyrażenie, dane do wykreślenia, przyjmuje więc postać:

$$\frac{\xi}{\lambda}=R\left(\frac{\alpha}{\lambda},\ \frac{\beta}{\lambda},\ \frac{\gamma}{\lambda},\ldots\right);$$

a zatym

$$\xi=\lambda R\left(\frac{\alpha}{\lambda},\ \frac{\beta}{\lambda},\ \frac{\gamma}{\lambda},\ldots\right)$$

będzie wartością odcinka szukanego, wyrażoną za pomocą funkcji wymiernej i jednorodnej, ze stopniem jednorodności równym jedności, danych wielkości $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,... $\lambda$. Łatwo to sprawdzić, zwracając uwagę na to, że jeżeli te wielkości zostaną pomnożone przez dowolny parametr $t$, wtedy cała prawa strona równania pomnoży się przez $t^1$.

wymiernych i dlatego oznacza się go zwykle przez [1]. Każdy inny obszar wymierności zawiera obszar bezwzględny, gdyż jeżeli zawiera jakąś wielkość $a$, to zawiera też $\frac{a}{a}=1$.

Dany obszar wymierności r o z s z e r z a się albo p o w i ę k s z a, jeżeli do liczb, które go składają, d o ł ą c z a się albo p r z y b i e r a l i c z b ę, która w nim nie jest zawarta; nowy obszar zawiera więc wszystkie rezultaty działań wymiernych, wykonanych nad liczbami obszaru pierwotnego, i nad liczbą przybraną. Jeżeli więc, wychodząc z obszaru bezwzględnego [1], złożonego ze wszystkich liczb wymiernych, dołączymy liczbę niewymierną $a$, to otrzymamy nowy obszar, większy, który można oznaczać przez $[1, a]$ (albo też przez $[a]$). Stąd za pomocą stopniowego dołączania możemy otrzymać obszary $[1, a, b]$ (lub $[a, b]$) i t. d.

Dochodzimy w ten sposób do pojęcia obszaru wymierności, wyznaczonego przez p o d s t a w ę $[1, a, b, \ldots]$, złożoną ze skończonej liczby wielkości; taki obszar składa się ze wszystkich wielkości, które się otrzymuje z początkowych za pomocą nieoznaczonej ale skończonej liczby działań wymiernych. Oczywiście nie każdy obszar wymierności ma podstawę, jak to widać z przykładu obszaru złożonego ze wszystkich liczb rzeczywistych (wymiernych i niewymiernych).

Ze względu na ciąg dalszy zaznaczymy, że obszar wymierności, wyznaczony przez podstawę $[1, a, b, \ldots]$, może być rozszerzony nietylko za pomocą dołączenia wielkości nie należącej do tego obszaru, ale także za pomocą p r z y b r a n i a j a k i e g o ś o z n a c z o n e g o d z i a ł a n i a n i e w y m i e r n e g o $\Omega$; należy to rozumieć w ten sposób, że nowy obszar jest zbiorem wszystkich wielkości, które się otrzymuje z danych wielkości $1, a, b, \ldots$ za pomocą nieoznaczonej ale skończonej liczby działań wymiernych oraz działania $\Omega$. W ten sposób będziemy musieli później rozważać przypadek, w którym $\Omega$ jest wyciąganiem pierwiastka stopnia drugiego.

Wracając do określenia obszaru wymierności, zaznaczymy wreszcie, że w niektórych zagadnieniach trzeba rozróżniać pomiędzy wielkościami, określającemi obszar, wielkości mające wartość liczebną stałą (l i c z b y) i wielkości, które w rozważaniu zagadnienia mogą przyjmować wartości dowolne (p a r a m e t r y). Wtedy każdy element obszaru jest albo nową l i c z b ą, należącą do ciaśniejszego obszaru, wyznaczonego przez l i c z b y d a n e, albo też jest funkcją wymierną p a r a m e t r ó w, mającą za spółczynniki liczby obszaru ciaśniejszego, o którym mówiliśmy przed chwilą. Jeżeli więc $x$ jest parametrem, wtedy obszar $[1, x]$ składa się z liczb wymiernych i z funkcji wymiernych parametru $x$ o spółczynnikach wymiernych.

**§ 3. Inne postaci rezultatu § 1.** Powróćmy do rozważania rezultatu § 1. Korzystając z pojęć, wyłożonych w § 2, możemy wypowiedzieć ten rezultat pod postacią następującą.

Jeżeli na prostej jest jeden lub więcej odcinków, danych w liczbie skończonej, jeżeli wartości tych odcinków są 1, $a$, $b$, $c$,... i jeżeli jest wyrysowana równoległa do prostej danej, wtedy można za pomocą samego linjału wykreślić na tej prostej każdy odcinek, którego wartość należy do obszaru wymierności [1, $a$, $b$, $c$,...].

Przypuśćmy w szczególności, że odcinki dane na $r$ mają jeden koniec $O$ wspólny; wtedy liczby (dodatnie lub ujemne) 1, $a$, $b$, $c$,... są miarami odległości końców pozostałych od punktu $O$, czyli odciętych punktów końcowych względem punktu $O$ jako początku; punkt mający odciętą równą jedności nazywać się będzie punktem jednostkowym.

A więc: jeżeli mamy na prostej dwa lub więcej punktów danych, z których jeden przyjmujemy za początek układu odciętych, a inny za punkt jednostkowy; jeżeli pozostałe punkty mają odcięte $a$, $b$, $c$,...; jeżeli wreszcie jest wykreślona równoległa do prostej danej: wtedy można na danej prostej wyznaczyć za pomocą samego linjału każdy punkt, którego odcięta należy do obszaru wymierności [1, $a$, $b$, $c$,...].

**§ 4. Znaczenie rzutowe działań, które można wykonywać na prostej za pomocą linjału.** Zauważmy, że w konstrukcjach powyższych robi się zawsze użytek z prostej pomocniczej $s$ równoległej do prostej danej $r$. Otóż nastręcza się pytanie, jakie konstrukcje można wykonać za pomocą samego linjału, jeżeli zaniechamy używania tej równoległej. Tym samym abstrahujemy od punktu w nieskończoności prostej $r$, a więc przechodzimy od zagadnień o charakterze miarowym do zagadnień o charakterze rzutowym. Ażeby jednak otrzymać nowe rezultaty, niema potrzeby wracać drogą już raz przebytą; wystarczy przekształcić rezultat miarowy § 3 za pomocą metody rzutów, ażeby otrzymać rezultat rzutowy.

W tym celu weźmy pod uwagę rozpatrywaną poprzednio prostą $r$ i przechodzącą przez tę prostą płaszczyznę $\pi$, na której wykonywa się działania. Niech będzie $\pi'$ jakąkolwiek inną płaszczyzną. Wyznaczmy teraz rzut figury konstrukcyjnej, należącej do $\pi$, na płaszczyznę $\pi'$ z punktu $S$, który nie leży ani na $\pi$ ani na $\pi'$. Otrzymamy wtedy na $\pi'$ nową figurę, zawierającą tyle punktów i prostych co i figura początkowa, a punkty i proste będą pod względem położenia wzajemnego rozmieszczone w obu figurach jednakowym sposobem, z tym jednym zastrzeżeniem, że prostym równoległym pierwszej figury (schodzącym się w punkcie nieskończenie oddalonym) w ogólności odpowiadać będą w drugiej figurze proste, przecinające się w punkcie właściwym. Zbadajmy w szczególności, co się stanie z punktami prostej $r$ i z odpowiedniemi punktami rzutu tej prostej $r'$. Na $r$ ustaliliśmy układ odciętych z punktem początkowym $O$ i punktem jednostkowym $U$; jeżeli $x$ jest odciętą jakiegokolwiek punktu $M$ prostej $r$, wtedy:

$$x = \frac{OM}{OU}.$$

To wyrażenie możemy przedstawić pod postacią dwustosunku (albo stosunku anharmonicznego) czterech punktów, jeżeli wprowadzimy punkt w nieskończoności $X_\infty$ prostej $r$. Wiemy w rzeczy samej, że

$$x = \frac{OM}{OU} = (MUOX_\infty) = (X_\infty OUM),$$

gdzie symbole w nawiasach oznaczają dwustosunki punktów wymienionych.

Jeżeli teraz oznaczymy przez $X'$, $O'$, $U'$, $M'$ rzuty na prostą $r'$ punktów $X_\infty$, $O$, $U$, $M$ prostej $r$, wtedy będziemy mieli na zasadzie znanej własności dwustosunku:

$$(X'O'U'M') = x,$$

gdzie, zgodnie z określeniem

$$(X'O'U'M') = \frac{X'U'}{O'U'} : \frac{X'M'}{O'M'}.$$

Przypominam tutaj, że dwustosunek $x$, który punkt $M'$, zmieniający położenie na prostej, tworzy z trzema punktami stałemi tej prostej $X'$, $O'$, $U'$, otrzymuje nazwę spółrzędnej rzutowej punktu $M'$ względem punktów podstawowych $X'$, $O'$, $U'$. Te trzy punkty podstawowe, ze względu na ich spółrzędne $=\infty$, 0, 1, nazywają się odpowiednio nieskończonościowym, zerowym i jednostkowym; punkty te mogą zajmować dowolne położenia na prostej.

Przekonaliśmy się tym sposobem, że odcięta punktu ogólnego $M$ prostej $r$ równa się spółrzędnej rzutowej odpowiadającego mu punktu $M'$ prostej $r'$ względem odpowiednio obranych punktów podstawowych. Pod zwięźlejszą postacią: „układ spółrzędnych odciętych na prostej daje za pośrednictwem rzutu układ spółrzędnych rzutowych na innej prostej“; zdanie odwrotne jest także prawdziwe, o ile środek rzutów zostanie obrany w sposób odpowiedni.

Poprzednie uwagi pozwalają nam od razu nadać rezultatowi § 3 następującą postać rzutową:

Jeżeli mamy na prostej trzy lub więcej punktów danych, z których trzy zostaną przyjęte za punkty podstawowe układu spółrzędnych rzutowych, a pozostałe mają spółrzędne $a$, $b$, $c$,...; wtedy można za pomocą samego linjału wyznaczyć na prostej każdy inny punkt, którego spółrzędna należy do obszaru wymierności $[1, a, b, c, \ldots]$.

Przekonamy się później, że to twierdzenie, wraz z twierdzeniami miarowemi, których jest następstwem (§§ 1, 3), może być odwrócone.

Konstrukcja wymaga oczywiście posiłkowania się pewnemi elementami pomocniczemi płaszczyzny, na której wykonywa się działania; ale elementy pomocnicze mogą być zawsze sprowadzone do jednej prostej dowolnej, przechodzącej przez jeden z punktów podstawowych, i do jednego punktu dowolnego, leżącego zewnątrz tej prostej i zewnątrz prostej danej, gdyż wtedy konstrukcja jest w zupełności oznaczona (por. § 1). Jakiekolwiek operacje wykonywamy, elementy pomocnicze nie pozostawiają w rezultacie żadnego śladu, gdyż ten rezultat jest od nich niezależny.

**§ 5. Konstrukcje miarowe planimetryczne, dające się wykonać za pomocą linjału, jeżeli jest dany równoległobok.** Możemy teraz rozpatrzeć zagadnienie gieometrji płaszczyzny analogiczne do zagadnienia, rozwiązanego względem szeregu punktów. Postępując w tym samym porządku, zaczniemy od rozważań miarowych, ażeby następnie osiągnąć rezultat o charakterze rzutowym.

Niech będą dane na płaszczyźnie dwie pary prostych równoległych, ograniczające równoległobok. Oznaczmy przez $O$ jeden z wierzchołków równoległoboku, przez $x$, $y$ proste, przechodzące przez punkt $O$, przez $U$ wierzchołek równoległoboku przeciwległy wierzchołkowi $O$. Możemy wtedy wprowadzić układ spółrzędnych kartezjańskich, którego punktem początkowym jest $O$, osiami są proste $x$ i $y$, a punktem jednostkowym (mającym spółrzędne 1, 1) jest $U$. Wskutek tego ostatniego wyboru powiemy, że jeżeli $U_x$, $U_y$ są dwoma pozostałemi wierzchołkami równoległoboku, leżącemi odpowiednio na $x$ i na $y$, to przyjmujemy odcinek $OU_x$ za jednostkę miary odciętych (czyli odcinków, mających kierunek $x$), a odcinek $OU_y$ przyjmujemy za jednostkę miary rzędnych (czyli odcinków, mających kierunek $y$). Te dwie jednostki mogą być różne albo równe; w pierwszym przypadku należy pamiętać, że oba odcinki, jeden na osi $x$, drugi na $y$, mają tę samą wartość liczebną, ale nie są gieometrycznie równe; zastrzeżenie to upada w drugim przypadku, jeżeli mianowicie równoległobok jest równoboczny; czytelnik może się powoływać na ten drugi przypadek, o ile to uzna za pożądane.

Zauważmy, że prosta $OU$ ma równanie $x=y$; jeżeli z jednego z jej punktów poprowadzimy równoległe do $x$, $y$ aż do przecięcia z osiami $y$, $x$ (które to działanie może być wykonane samym linjałem), wtedy otrzymamy na osiach dwa odcinki, zaczynające się w $O$ i mające jednakowe wartości. Jeżeli więc jest dany odcinek na osi $x$, to możemy za pomocą samego linjału wykreślić na osi $y$ odcinek, równy liczebnie odcinkowi danemu; jeżeli zaś jest dany punkt, mający spółrzędne $a$, $b$, to można za pomocą samego linjału wykreślić punkt o spółrzędnych $b$, $a$.

Niech teraz będzie dany na płaszczyźnie $xy$ punkt $U$ i inne jeszcze punkty w liczbie skończonej; wymierzmy spółrzędne wszystkich tych punktów i oznaczmy wartości spółrzędnych, wzięte w jakimkolwiek porządku, przez $1, a, b, c, \ldots$ Możemy wtedy wykreślić za pomocą samego linjału na każdej z obu osi punkty, których odległości od $O$ mają wartości $1, a, b, c, \ldots$ względem przyjętych jednostek miary. Możemy przeto na zasadzie twierdzenia § 3 wykreślić na każdej osi, za pomocą samego linjału punkt, którego odległość od $O$ miałaby wartość $x$ lub $y$, należącą do obszaru wymierności $K=[1, a, b, c, \ldots]$; a więc możemy wyznaczyć na płaszczyźnie punkt $(x, y)$. Stąd wynika:

Jeżeli jest dany na płaszczyźnie równoległobok, którego dwa boki przyjmuje się za osi, a jeden z wierzchołków za punkt jednostkowy układu spółrzędnych kartezjańskich, i jeżeli są dane inne punkty, których spółrzędne, wzięte w jakimkolwiek porządku, mają wartości $a, b, c, \ldots$; wtedy można za pomocą samego linjału wyznaczyć każdy punkt płaszczyzny, którego spółrzędne należą do obszaru wymierności $[1, a, b, c, \ldots]$.

Wykonywając konstrukcję można się posługiwać punktami pomocniczemi, ale to nie jest konieczne; wystarcza odwoływanie się do elementów danych, gdyż np. do wykreślenia odcinka na osi $x$ wystarcza (§ 3) znajomość prostej równoległej do $x$ (boku równoległoboku) i punktu nie leżącego na tej prostej ani na $x$ (środka równoległoboku).

Zasługuje tu na zaznaczenie fakt, że twierdzenie powyższe może być odwrócone w sposób następujący:

Każdy punkt, do którego się dochodzi za pomocą konstrukcji wskazanego rodzaju, ma spółrzędne należące do omawianego wyżej obszaru wymierności $K$, z którego przeto nie można w ten sposób wyjść. Dowodzenie opiera się na wiadomościach początkowych z gieometrji analitycznej. Rzeczywiście, konstrukcja ogranicza się do łączenia linją prostą dwuch punktów danych, albo otrzymanych za pomocą poprzednich konstrukcji, oraz do wyznaczania punktów przecięcia dwuch prostych w ten sposób otrzymanych.

Otóż jeżeli dwa punkty mają spółrzędne, należące do obszaru wymierności $K$, wtedy prosta łącząca ma równanie $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, w którym spółczynniki $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ (lub, jeśli chcemy, ich stosunki) należą do tego obszaru; i jeżeli dwie proste $\alpha x + \ldots = 0$, $\alpha' x + \ldots = 0$ mają spółczynniki należące do obszaru, wtedy spółrzędne $x$, $y$ punktu przecięcia tych prostych należą napewno do tegoż obszaru. A więc i t. d.

*Uwaga.* W rozumowaniu powyższym przypuszczamy, że wykonywamy działania wyłącznie nad punktami danemi, nie wprowadzając elementów obcych. Ale rezultat pozostaje prawdziwym i wtedy, jeżeli wprowadza się punkty pomocnicze, o ile tylko te punkty mają istotnie charakter pomocniczych, o ile więc mogą być obierane dowolnie (bądź na płaszczyźnie, bądź na prostych danych) i nie mają żadnego wpływu na rezultat konstrukcji, która powinna być od nich bezwzględnie niezależna. Niech będzie w rzeczy samej punkt $P$ o spółrzędnych $m$, $n$ punktem pomocniczym, który może być obrany albo zupełnie dowolnie, albo dowolnie na jednej z prostych figury; i niech będzie punkt $(x, y)$ rezultatem konstrukcji, wykonanej za pomocą linjału z posługiwaniem się punktem $P$, ale w ten sposób, ażeby rezultat $(x, y)$ nie zależał od $P$. Rozumowanie poprzednie stwierdza jedynie, że $x$ i $y$ należą do obszaru wymierności

$$K' = [1, a, b, c, \ldots, m, n];$$

ale z powodu dowolności w wyborze punktu $P$ można zawsze tak uczynić, ażeby $m$, $n$ należały do pierwotnego obszaru wymierności $K$; jest to oczywiste, jeżeli punkt $P$ jest zupełnie dowolny; ale łatwo to stwierdzić i w tym przypadku, kiedy punkt $P$ podlega warunkowi należenia do jakiejś prostej $\alpha x + \ldots = 0$ figury rozpatrywanej; gdyż jeżeli wtedy obierzemy $m$ w obszarze $K$, wtedy otrzymamy $n$ za pomocą wykonywania działań wymiernych nad $m$ i nad liczbami obszaru $K$. Jeżeli $P$ obierzemy w ten sposób, to obszar $K'$ pokryje się z obszarem $K$, a więc punkt $x$, $y$, otrzymany w rezultacie ostatecznym, ma zawsze spółrzędne należące do $K$.*)

**§ 6. Konstrukcje graficzne planimetrji, dające się wykonać za pomocą linjału.** Przekształćmy twierdzenie poprzedniego paragrafu, rzutując płaszczyznę $\pi$, zawierającą naszą konstrukcję, na inną płaszczyznę $\pi'$; środek rzutów $S$ niech będzie obrany dowolnie, z warunkiem, ażeby nie leżał ani na $\pi$, ani na $\pi'$. Otrzymamy tym sposobem rezultat, mający charakter rzutowy.

Ażeby wypowiedzieć ten rezultat, musimy zbadać, jak wskutek ta-

---

*) Por. w tym względzie *Lezioni di algebra complementare* prof. Capelli, Napoli 1895, str. 429.

kiego działania przekształci się układ spółrzędnych kartezjańskich, rozpatrywany na $\pi$. Układ ten wyznaczają osi $x$, $y$, których punktem przecięcia jest $O$ i których punktami nieskończenie oddalonemi są $X_\infty$, $Y_\infty$, oraz punkt jednostkowy $U$. Obrawszy na $\pi$ jakikolwiek punkt $M$, postaramy się napisać jego spółrzędne $x$, $y$ pod postacią dwustosunków. Zauważmy w tym celu, że chcąc otrzymać odciętą $x$ punktu $M$, należy wyznaczyć rzuty punktów $U$ i $M$ z $Y_\infty$ na oś $x$; dostaniemy w ten sposób punkty $U_x$, $M_x$ takie, że (por. § 4)

$$x = \frac{OM_x}{OU_x} = (X_\infty O U_x M_x) = Y_\infty(X_\infty OUM),$$

gdzie przez ostatni symbol oznaczamy dwustosunek czterech prostych, łączących punkt $Y_\infty$ z punktami zaznaczonemi w nawiasie. Podobnie będzie:

$$y = X_\infty(X_\infty OUM).$$

Jeżeli teraz wyznaczymy rzuty punktów $O$, $X_\infty$, $Y_\infty$... płaszczyzny $\pi$ na płaszczyznę $\pi'$ z jakiegokolwiek środka i oznaczymy te rzuty (które w ogólności będą punktami właściwemi) przez $O'$, $X'$, $Y'$,..., to dostaniemy od razu:

$$x = Y'(X'O'U'M'); \quad y = X'(Y'O'U'M').$$

Należy tu przypomnieć, że jeżeli na płaszczyźnie $\pi'$ jest dany jakikolwiek trójkąt $O'X'Y'$ i punkt $U'$ nie należący do żadnego z jego boków, wtedy dla każdego punktu ogólnego $M'$ tej płaszczyzny wartości dwuch ostatnich dwustosunków wyznaczają w zupełności parę liczb $x$, $y$; i odwrotnie, jeżeli $x$ i $y$ są znane, to punkt $M'$ jest przez to wyznaczony (wyjątki stanowią wartości $x = \pm\infty$, $y = \pm\infty$ oraz punkty boku $X'Y'$, w których to przypadkach należałoby zastosować znaną umowę, ale niema potrzeby wyszczególniać jej w tym miejscu). Dwie liczby $x$, $y$, związane w ten sposób z punktem $M'$, nazywają się zazwyczaj *spółrzędnemi rzutowemi* punktu $M'$ względem *trójkąta podstawowego* $O'X'Y'$ *i punktu jednostkowego* $U'$, albo, krócej, względem *czterech punktów podstawowych* $O'X'Y'U'$. Cztery punkty podstawowe układu spółrzędnych rzutowych mogą być obrane jakkolwiek, aby tylko nie było między niemi trzech, leżących na jednej prostej.

Streszczając te uwagi powiemy, że spółrzędne kartezjańskie punktu ogólnego $M$ płaszczyzny $\pi$ równają się spółrzędnym rzutowym rzutu $M'$ punktu $M$ na $\pi'$, względem odpowiednio wybranych punktów podstawowych. Krótko mówiąc: „układ spółrzędnych kartezjańskich płaszczyzny daje za pośrednictwem rzutu na inną płaszczyznę układ spółrzędnych rzutowych". Twierdzenie odwrotne jest też prawdziwe, o ile środek i płaszczyzna rzutów zostaną odpowiednio wybrane.

Na zasadzie tej uwagi możemy teraz wypowiedzieć rezultat rzutowy analogiczny do twierdzenia miarowego § 4:

Jeżeli mamy na płaszczyźnie cztery lub więcej punktów danych w liczbie skończonej, pomiędzy któremi przypuszczamy, że są zawsze cztery punkty, stanowiące wierzchołki czworokąta; jeżeli te cztery punkty przyjmiemy za punkty podstawowe układu spółrzędnych rzutowych, i jeżeli względem tego układu spółrzędne punktów pozostałych (o ile takie istnieją) są $a$, $b$, $c$,...: wtedy można zawsze za pomocą samego linjału wykreślić każdy inny punkt, którego spółrzędne należą do obszaru wymierności [1, $a$, $b$, $c$,...]; i odwrotnie: każdy punkt, który można otrzymać za pomocą oznaczonej konstrukcji samym linjałem, ma spółrzędne należące do tego obszaru. W konstrukcji nie potrzeba (ale można) posiłkować się punktami lub prostemi pomocniczemi, które mogą być dowolnie obrane.

Rezultat powyższy może być jeszcze przedstawiony pod następującą postacią, uwydatniającą całe jego znaczenie:

„Niech będzie dana na płaszczyźnie skończona liczba punktów; połączmy te punkty po dwa linjami prostemi, wyznaczmy przecięcia prostych tak otrzymanych, rozszerzmy grupę punktów pierwotnych przez dołączenie nowych punktów znalezionych, wykonajmy nad tą nową grupą punktów takie działania, jak nad pierwszą, i t. d. aż do nieskończoności. Otrzyma się tym sposobem klasę nieskończenie wielu punktów, z wyjątkiem przypadku, w którym dane punkty wszystkie, lub wszystkie oprócz jednego, leżą na jednej prostej (wyjątek, który występuje w poprzednim twierdzeniu). Mamy scharakteryzować w jakikolwiek sposób klasę punktów tak otrzymanych, gdyż ta klasa, jak to zaraz sprawdzimy, nie zawiera wszystkich punktów płaszczyzny".

Odpowiedzią jest twierdzenie następujące:

„Jeżeli z punktów danych wybierzemy cztery, które są wierzchołkami czworokąta, i przyjmiemy je za punkty podstawowe układu spółrzędnych rzutowych; i jeżeli oznaczymy przez $a$, $b$, $c$,... spółrzędne pozostałych punktów danych, o ile punkty takie istnieją: wtedy omawiana klasa punktów składa się z tych wszystkich punktów, których spółrzędne należą do obszaru wymierności [1, $a$, $b$, $c$,...]".

Działania gieometryczne, prowadzące do konstrukcji takiej klasy punktów, mają więc odpowiednik w działaniach arytmetycznych, które prowadzą do konstrukcji obszaru wymierności, opartego na pewnej podstawie*). Najprostszy przypadek czterech tylko punktów, prowadzący do klasy wszystkich punktów, które mają obie spółrzędne wymierne, rozpatrywał po raz pierwszy Möbius, który nazwał tą klasę siecią.

**§ 7. Jakie zadania można rozwiązywać za pomocą samego linjału?** Możemy teraz dać zupełną odpowiedź na jedno z głównych pytań tego artykułu:

Jakie są zadania gieometryczne, które można rozwiązywać samym linjałem?

Oczywiście zarówno dane jak i rezultaty powinny być takie, ażeby można było wykreślić je samym linjałem, a więc będą to punkty i proste w liczbie skończonej. Ale w celu osiągnięcia większej jednostajności dobrze jest ograniczyć się do przypadku samych tylko punktów, co można zawsze osiągnąć, np. w sposób następujący. Obrawszy trójkąt, którego wierzchołki lub boki byłyby, jeżeli to możliwe, zawarte pomiędzy elementami danemi (lub, jeżeli to niemożliwe, którego pewne elementy mają położenie ogólne względem elementów danych), możemy podstawić zamiast każdej prostej (danej, lub poszukiwanej) parę punktów, w których ta prosta przecina dwa boki trójkąta podstawowego**). Tym sposobem zadanie sprowadza się zawsze do jednego lub więcej zadań typu następującego: dane są punkty w ilości skończonej; trzeba wykreślić punkt, pozostający w danych zależnościach od punktów danych. Ażeby takiemu zadaniu nadać postać analityczną, rozpatrywać będziemy punkty dane i punkt poszukiwany w układzie spółrzędnych rzutowych, których trójkątem podstawowym jest trójkąt, o jakim była mowa wyżej, i których punktem jednostkowym jest jeden z punktów danych, o ile to możliwe, lub punkt ogólny płaszczyzny w przypadku przeciwnym. Uważać będziemy wtedy jako dane spółrzędne $a$, $b$, $c$,... punktów danych, zaś jako niewiadome — spółrzędne $x$, $y$ punktu szukanego. Jeżeli zadanie jest oznaczone, wtedy zależności w nim zawarte dadzą się ostatecznie wyrazić za pomocą dwuch równań, z których jedno zawiera $x$, drugie $y$; możemy przyjąć, że równa-

---

*) Jak przekształcić ten ostatni rezultat za pomocą dwoistości płaszczyzny, wprowadzając proste zamiast punktów, jest bezpośrednio widoczne. Oczywista jest również możność rozszerzenia tego rezultatu na przestrzeń.

**) Ze stanowiska analitycznego jest to równoważne założeniu, że prosta jest dana za pomocą stosunków dwuch z trzech spółczynników jej równania do spółczynnika trzeciego, albo też, że jest dana za pomocą dwuch spółrzędnych rzutowych.

nia te zostały sprowadzone do najprostszej postaci (pozbawione rozwiązań obcych, o ile to możliwe). A więc:

Warunkiem koniecznym i wystarczającym, ażeby zadanie gieometryczne było rozwiązalne za pomocą samego linjału, jest, żeby równania, od których zadanie zależy, były linjowe i żeby miały spółczynniki należące do obszaru wymierności $[1, a, b, c, \ldots]$, wyznaczonego przez elementy dane. W rzeczy samej, w tym i tylko w tym przypadku spółrzędne niewiadome $x$, $y$ należą do tego obszaru.

W postaci zwięźlejszej: rozwiązalne za pomocą samego linjału są zadania gieometryczne stopnia pierwszego i tylko te zadania.

Zauważymy tutaj, że rezultat jest prawdziwy, jeżeli w konstrukcji używa się bądź tylko punktów (i prostych) danych, bądź też jeżeli się do nich dołącza punkty (lub proste) pomocnicze, które mogą być przyjęte bądź zupełnie dowolnie na płaszczyźnie, bądź dowolnie na prostych danych (lub przez punkty dane, jeżeli mowa o prostych). To jest następstwem uwagi § 5, z której wynika, że dołączenie do punktów danych punktu pomocniczego (lub, ze względu na dwoistość, prostej pomocniczej) w omówiony sposób nie prowadzi nigdy do istotnego rozszerzenia obszaru wymierności.

*Uwaga.* Musimy się teraz zastanowić nad zadaniami, które zawierają pojęcia miarowe w sposób mniej lub więcej wyraźny.

Przypuśćmy przedewszystkim, że dane są jedynie punkty właściwe (nie leżące w nieskończoności), nie związane żadną szczególną zależnością miarową, (wyjąwszy przeto zależności, które wyrażają własności graficzne, jak współlinjowość i t. d.); pomiędzy danemi nie będą więc występowały ani długości odcinków, ani wielkości kątów i t. d. Chcąc ustalić układ spółrzędnych, któryby był ściśle związany z elementami danemi, musimy się uciec do spółrzędnych rzutowych. Ale wtedy nie będziemy mogli wyrazić zależności miarowych (równoległości, zależności między odcinkami lub kątami, z wyjątkiem dwustosunków) występujących pomiędzy punktami danemi i punktem poszukiwanym. Nie będziemy więc mogli nie tylko rozwiązać zadania miarowego, opierającego się na elementach danych, ale nawet ułożyć odpowiednich równań. A więc nie można rozwiązać samym linjałem zadania, zawierającego pojęcia miarowe (równoległość, wielkość odcinków, kątów, pól i t. d.), jeżeli danemi są punkty (lub proste), między któremi nie istnieje żadna zależność miarowa z góry ustalona.

Że ta niemożliwość jest bezwzględna, a więc niezależna od układu spółrzędnych, od metody analitycznej i t. d., tego można dowieść sposobem, który tutaj zaznaczę. Niech będą dane na płaszczyźnie $\pi$ punkty $A$, $B$, $C, \ldots$, nie pozostające z sobą w żadnej zależności miarowej; $P$ niech będzie punktem, do którego się dochodzi za pośrednictwem konstrukcji, wykonanej nad punktami danemi samym linjałem. Niech będą $A'$, $B'$, $C', \ldots P'$ rzutami poprzednich punktów na płaszczyznę ogólną $\pi'$ z jakiegokolwiek środka rzutów. Rzutem figury konstrukcyjnej płaszczyzny $\pi$ będzie figura konstrukcyjna płaszczyzny $\pi'$ (ponieważ rzutami prostych są proste i t. d.); można więc powiedzieć, że konstrukcja, która prowadzi od $A$, $B$, $C, \ldots$ do punktu $P$ na płaszczyźnie $\pi$, doprowadzi na płaszczyźnie $\pi'$ od punktów $A'$, $B'$, $C', \ldots$ do punktu $P'$. To wystarcza do stwierdzenia, że zależności, które wiążą punkt znaleziony $P$ z punktami danemi $A$, $B$, $C, \ldots$ mają charakter rzutowy (a nie miarowy), czyli że nie ulegają zmianie wskutek rzutu (natomiast własności miarowe: równoległość, długości, kąty i t. d. zmieniają się wskutek rzutu).

Inaczej będzie, jeżeli punkty dane są w szczególnych zależnościach od prostej w nieskończoności. Tak np., jeżeli punkt $A$ leży w nieskończoności, jeżeli więc jest wyznaczony graficznie za pomocą dwuch równoległych, wtedy ustalając układ spółrzędnych, można przyjąć $A$ za jeden z wierzchołków trójkąta podstawowego, można więc będzie wyrazić analitycznie fakt przechodzenia prostej przez $A$, można będzie przedstawić za pomocą równania warunek, ażeby prosta szukana, przechodząca np. przez $B$, była równoległa do dwuch prostych danych; ponieważ równanie takie będzie linjowe, przeto widać od razu, że konstrukcja prostej szukanej może być wykonana samym linjałem, jak o tym dobrze wiemy.

Jeżeli jednak nie są dane (wprost lub pośrednio) inne punkty niewłaściwe, wtedy nie można wykreślić równoległej do prostej danej mającej kierunek różny od $A$ i nie można ułożyć równania, odpowiadającego temu zadaniu.

Gdyby jednak był dany równoległobok, wtedy możnaby było zastosować układ spółrzędnych kartezjańskich (§ 5), a więc możnaby było ułożyć równania każdego zadania, dotyczącego równoległości, stosunków odcinków równoległych, stosunków pól i t. d.; ale nie możnaby było jeszcze rozwiązywać zadań, dotyczących równości odcinków i kątów w położeniu ogólnym, prostopadłości i t. d. (o ile nie jest dana przynajmniej dostawa kąta równoległoboku).

Natomiast można układać równania wszystkich zadań miarowych, jeżeli jest dany kwadrat, gdyż wtedy rozporządza się układem spółrzędnych kartezjańskich prostokątnych; jeżeli równanie jest linjowe, wtedy i tylko wtedy zadanie może być rozwiązane samym linjałem*).

## II.

§ 8. **Jaki pożytek przynosi dołączenie cyrkla do linjału?** Zbadawszy w ten sposób konstrukcje, które mogą być wykonane samym linjałem, zobaczymy teraz, jaki pożytek przynosi stosowanie cyrkla, dołączone do stosowania linjału.

Zapytamy więc, jak się rozszerza klasa punktów, dających się wykreślić linjałem (za pomocą punktów danych), jeżeli do nich dołączymy wszystkie punkty, które mogą być otrzymane za pomocą konstrukcji wykonanych cyrklem; albo też, jak się rozszerza obszar wymierności $[1, a, b, c, ...]$, zawierający spółrzędne pierwszych punktów, jeżeli do niego dołączymy spółrzędne drugich punktów.

Ponieważ cyrkiel umożliwia konstrukcję kąta prostego, a także kwadratu, przeto dobrze będzie rozpatrywać nasze punkty w układzie spółrzędnych kartezjańskich prostokątnych i zastosować tę samą jednostkę miary do odciętych i do rzędnych. Możemy np. obrać jeden z punktów danych $O$ za początek, prostą, łączącą $O$ z innym punktem danym, za oś $x$, a odległość tych dwuch punktów za jednostkę długości.

Oznaczmy przez $a, b, c, ...$ spółrzędne punktów, danych w ilości skończonej; w takim razie wiemy, że za pomocą linjału można wykreślić każdy punkt, którego spółrzędne należą do obszaru wymierności

$$K = [1, a, b, c, ...].$$

Niech będzie $k$ jakąkolwiek liczbą dodatnią obszaru $K$; liczbę tę możemy uważać jako wartość znanego odcinka, położonego na osi $x$. Możemy za pomocą cyrkla wykreślić na $x$ (albo na $y$) odcinek, którego długość byłaby $\sqrt{k} = \sqrt{k \cdot 1}$, gdyż sprowadza się to do wykreślenia średniej gieometrycznej między dwoma odcinkami danemi, mającemi długości $k$ i 1. Możemy więc otrzymać za pomocą cyrkla pierwsze rozszerzenie obszaru $K$, dołączając do niego pierwiastek stopnia drugiego z każdej liczby dodatniej, zawartej w tym obszarze. Dojdziemy w ten sposób do obszaru wymierności $K'$, który znowu możemy rozszerzyć (interpretując analitycznie konstrukcje wykonywane za pomocą cyrkla) przez dołączenie pierwiastka stopnia drugiego z każdej liczby dodatniej, zawartej w tym nowym obszarze. Można tak postępować aż do nieskończoności.

---

*) O faktycznym rozwiązaniu najelementarniejszych zadań miarowych linjowych, jeżeli jest dany kwadrat (albo równoległobok i dwie pary kierunków prostopadłych) por. art. III.

Najciaśniejszy obszar wymierności, który zawiera obszary $K$, $K'$, ..., a do którego w ten sposób stopniowo dochodzimy, może być przedstawiony za pomocą symbolu

$$K^{\frac{1}{2}}=[1,\ a,\ b,\ c, ...]^{\frac{1}{2}}$$

i charakteryzuje się w zupełności przez dwie własności następujące:

1) Obszar $K^{\frac{1}{2}}$ zawiera wielkości 1, $a$, $b$, $c$, ..., dane w liczbie skończonej;

2) obszar ten zawiera oprócz tego każdą wielkość rzeczywistą, którą można otrzymać z tamtych wielkości przez zastosowanie nieoznaczonej ale skończonej liczby działań wymiernych i wyciągania pierwiastka stopnia drugiego.

Zamiast warunku 2) można przyjąć warunek równoważny, ażeby obszar $K^{\frac{1}{2}}$ był najciaśniejszym obszarem, zawierającym pierwiastki rzeczywiste wszystkich równań stopnia drugiego, których spółczynniki należą do tego samego obszaru.

Na podstawie rozumowań powyższych możemy więc stwierdzić, że wychodząc ze skończonej liczby punktów, których spółrzędne wyznaczają obszar wymierności $K=[1,\ a,\ b,\ c, ...]$, i wykonywając nad niemi działania za pomocą linjału i cyrkla, można wykreślić każdy punkt, którego spółrzędne należą do obszaru $K^{\frac{1}{2}}$.

A teraz utrzymuję, że twierdzenie odwrotne też jest prawdziwe: każdy punkt, do którego się dochodzi przez wykonywanie nad danemi punktami działań linjałem i cyrklem, ma spółrzędne należące do obszaru wymierności $K^{\frac{1}{2}}$. W rzeczy samej, rozporządzamy z początku pewną klasą punktów, np. tych punktów, których spółrzędne należą do obszaru wymierności $K$. Nowe punkty, które mogą być dołączone do tamtych za pośrednictwem pewnych konstrukcji, wykonanych cyrklem, otrzymuje się jako przecięcia prostej z kołem, albo też jako przecięcia dwuch kół, które są również wyznaczone przez punkty pierwotne. Można zresztą ograniczyć się przypadkiem prostej i koła, gdyż gdyby były dane dwa koła

$$x^2+y^2+ax+by+c=0,$$
$$x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0,$$

wtedy możnaby było zamiast drugiego koła wziąć prostą (oś pierwiastną):

$$(ax+by+c)-(a'x+b'y+c')=0,$$

którą można wykreślić linjowo za pomocą środków i promieni kół danych*). Z drugiej strony koło jest oznaczone, jeżeli znamy jego środek i promień, albo środek i jeden punkt, albo też trzy punkty; ale dwa ostatnie przypadki łatwo sprowadzić do pierwszego za pomocą działań linjowych. Otóż jeżeli punkty, wyznaczone przez pewien obszar wymierności $K$, przyjmiemy jako znane, wtedy możemy powiedzieć, że koło jest w zupełności wyznaczone, jeżeli jego środek ma spółrzędne $\alpha$, $\beta$, należące do $K$, a promień $r$ jest liczbą należącą do $K$, albo też jest odległością dwuch punktów danej klasy, w którym to przypadku jeżeli nie $r$, to w każdym razie $r^2$ należy do $K$. Jakkolwiekbądź równanie koła

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

mieć będzie spółczynniki należące do $K$. To samo można powiedzieć o równaniu prostej

$$mx+my+p=0,$$

wyznaczonej przez dwa punkty danej klasy. Znalezienie przecięć prostej i koła sprowadza się do rozwiązania układu tych dwuch równań, a więc ostatecznie do rozwiązania jednego równania stopnia drugiego z jedną niewiadomą $x$ o spółczynnikach należących do $K$, a następnie do znalezienia $y$ za pomocą działań wymiernych. Przeto spółrzędne każdego punktu, który może być dołączony do klasy pierwotnej za pomocą jednego działania, wykonanego cyrklem (w połączeniu z działaniami, wykonanemi linjałem), należą na pewno do tego obszaru wymierności $K'$, który się otrzymuje z obszaru $K$ przez przybranie pierwiastków stopnia drugiego wszystkich liczb dodatnich, zawartych w $K$. Widzimy od razu, jak należy postępować dalej, wykonując kilkakrotne działanie cyrklem, i jak się dochodzi tym sposobem do określonego wyżej obszaru $K^{\frac{1}{2}}$.

Możemy więc wypowiedzieć teraz następujący rezultat podstawowy:

Rozporządzając skończoną liczbą punktów, które mają względem układu prostokątnego kartezjańskiego spółrzędne 1, $a$, $b$, $c$,..., wykonajmy nad niemi oznaczone konstrukcje za pomocą linjału i cyrkla. Każdy punkt, który osiągniemy po skończonej liczbie działań, mieć będzie spółrzędne należące do obszaru wymierności $K^{\frac{1}{2}}$ wytworzonego z danych liczb 1, $a$, $b$, $c$,... przez wykonywanie nad temi liczbami działań wymiernych oraz wyciągania pierwiastków stopnia drugiego z liczb dodatnich (w ilości skończonej); i odwrotnie, każdy punkt, którego spółrzędne należą do $K^{\frac{1}{2}}$, może być wykreślony za pomocą linjału i cyrkla.

---

*) Por. art. III.

Krótko mówiąc, za pomocą linjału i cyrkla można zbudować każde wyrażenie rzeczywiste, utworzone z wielkości danych, o ile to wyrażenie nie zawiera innych działań niewymiernych, jak tylko wyciąganie pierwiastków stopnia drugiego.

**§ 9. Jakie zadania można rozwiązywać linjałem i cyrklem?** Poprzedni rezultat pozwala od razu odpowiedzieć na pytanie, jakie zadania mogą być rozwiązane za pomocą linjału i cyrkla? Zaznaczmy przedewszystkim, że zarówno elementy dane, jak i poszukiwane, muszą być albo punktami, albo prostemi, albo kołami w liczbie skończonej. Ale zamiast prostej i koła można podstawić pewną liczbę punktów, za pomocą których można te elementy wyznaczyć; te punkty są ze swej strony znane, jeżeli są znane powyższe elementy. Tak np. koło można zastąpić jego środkiem i przecięciem koła z równoległą do osi $x$, poprowadzoną przez środek. Można więc przyjąć, że są dane tylko punkty i że się poszukuje również tylko punktów. Rozpatrujmy punkty dane i punkty szukane względem układu spółrzędnych kartezjańskich prostokątnych, związanego z punktami danemi w sposób poprzednio wyłożony. Niech będą $1, a, b, c, \ldots$ spółrzędnemi punktów danych, a $x$ niech będzie jedną ze spółrzędnych jednego z punktów szukanych; rozumowanie, które zastosujemy do $x$, można powtórzyć dla każdej spółrzędnej każdego punktu poszukiwanego. Ażeby punkt niewiadomy można było wykreślić za pomocą linjału i cyrkla, wielkość (rzeczywista) $x$ powinna być możliwą do obliczenia za pomocą skończonej ilości działań wymiernych i wyciągania pierwiastków stopnia drugiego z liczb danych $1, a, b, c, \ldots$ Przyrównywując $x$ do wyrażenia utworzonego w ten sposób z wielkości danych, otrzymamy, po zniesieniu niewymierności, równanie algiebraiczne wymierne, które jest całkowite względem $x$ i którego spółczynniki należą do obszaru wymierności $K = [1, a, b, c, \ldots]$.

Możemy więc na razie powiedzieć, że jeżeli przedstawimy warunki zadania pod postacią analityczną i dokonamy rugowania niewiadomych w ten sposób, że układ sprowadzi się do jednego lub więcej równań, z których każde będzie zawierało jedną tylko niewiadomą $x, \ldots$, to tak otrzymane równania muszą być algiebraiczne i mogą być doprowadzone do postaci całkowitej wymiernej w ten sposób, że spółczynnikami będą wielkości obszaru $K$.

Ale warunki tutaj wyłożone nie są w ogólności wystarczające, pominąwszy przypadek, w którym stopień każdego równania jest $\leqq 2$, gdyż wtedy zadanie może być oczywiście rozwiązane linjałem i cyrklem. Rzeczywiście, jeżeli przynajmniej jedno z omawianych równań jest stopnia wyższego od 2, wtedy trzeba jeszcze, ażeby poszukiwany pierwiastek tego równania mógł być obliczony za pomocą wykonywania nad wielkościami danemi działań wymiernych i wyciągania pierwiastków stopnia drugiego, czyli inaczej mówiąc, za pomocą kolejnego rozwiązywania równań stopnia drugiego. Można wyobrazić sobie, że równania te zawsze następują po sobie w takim porządku, że pierwsze równanie stopnia drugiego ma spółczynniki, należące do obszaru $K$, drugie równanie ma spółczynniki należące do obszaru, który się otrzyma z $K$ przez przybranie pierwiastków równania pierwszego i t. d. aż do ostatniego równania, które będzie miało za pierwiastek wielkość szukaną, a za spółczynniki liczby należące do obszaru, który się otrzymuje z $K$ przez przybranie pierwiastków wszystkich poprzedzających równań stopnia drugiego. Powiemy więc, streszczając rzecz główną a resztę zachowując w myśli:

Warunkiem koniecznym i wystarczającym, żeby zadanie gieometryczne można było rozwiązać linjałem i cyrklem, jest, ażeby każde równanie, od którego to zadanie zależy, było algiebraiczne, wymierne i całkowite o spółczynnikach należących do obszaru wymierności, utworzonego z wielkości danych, i ażeby oprócz tego każde z tych równań albo było stopnia $\leqq 2$, albo też ażeby się dało rozwiązać za pośrednictwem rozwiązywania szeregu równań stopnia drugiego, utworzonego we wskazany sposób.

Albo w postaci zwięźlejszej:

Zadaniami rozwiązalnemi linjałem i cyrklem są zadania stopnia pierwszego i drugiego, a oprócz tego te zadania stopni wyższych, których rozwiązanie można sprowadzić do rozwiązania szeregu zadań stopnia $\leqq 2$.

*Uwaga.* I tutaj, ażeby nie komplikować wykładu, mówiłem wyłącznie o elementach danych, ale nie o elementach (punktach i prostych) pomocniczych, których wprowadzanie może być pożyteczne w celu wykonania konstrukcji. Rozumie się, że trzeba, ażeby np. punkt pomocniczy mógł być dowolnie obrany bądź na całej płaszczyźnie, bądź na prostej wyznaczonej przez elementy dane, bądź na kole wyznaczonym przez elementy dane, a wybór tego punktu nie powinien mieć wpływu na rezultat konstrukcji. Ale wtedy, rozumując jak w *uwadze* § 5, widzimy, że można przyjąć przynajmniej jedną spółrzędną takiego punktu, należącą do obszaru $K$; druga spółrzędna należeć będzie albo do $K$, albo też do obszaru $K^{\frac{1}{2}}$, który się otrzymuje z $K$ przez przybranie wyciągania pierwiastka stopnia drugiego. To dowodzi, że wprowadzenie punktu pomocniczego nie pozwala wyjść z obszaru $K^{\frac{1}{2}}$, do którego, jak mówiliśmy, muszą należeć spółrzędne punktu szukanego, gdyż ten punkt może być wykreślony za pomocą linjału i cyrkla. Tak więc rezultat powyższy pozostaje prawdziwym i wtedy, jeżeli obok elementów danych wprowadza się pomocnicze.

**§ 10. Wzmianka o kilku zadaniach klasycznych.** Rozważania ostatniego paragrafu wykazują, w jaki sposób rozstrzygnięcie pytania, czy pewne zadanie jest rozwiązalne linjałem i cyrklem, może być sprowadzone za pośrednictwem gieometrji analitycznej do pytania, czy pewne równania są rozwiązalne przez wprowadzenie takich tylko niewymierności, które pochodzą z wyciągania pierwiastków stopnia drugiego. Pytanie to należy do algiebry, a algiebra rozporządza dzisiaj środkami, za pomocą których można rozpoznać, czy pewne równanie algiebraiczne może być rozwiązane tym sposobem.

Za przykłady przeczące niech posłużą zadania: o podziale kąta danego $\omega$ na trzy części równe, co odpowiada równaniu

$$4x^3 - 3x - \cos\omega = 0,$$

i o podwojeniu sześcianu ($x^3 - 2 = 0$); jako przykład pozytywny przytoczymy zadanie o podziale koła na liczbę pierwszą $p$ części równych, jeżeli ta liczba $p$ ma postać $2^n + 1$ (równanie $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + 1 = 0$)*). O wiele trudniejsze jest w pewnych przypadkach pytanie, które należy przedewszystkim rozstrzygnąć, a mianowicie, czy równanie, od którego zadanie zależy, jest algiebraiczne czy przestępne, gdyż brak tutaj ogólnej metody badania. I tak dopiero przed niewielu laty, w roku 1882, Lindemann dowiódł, że zadanie o wyprostowaniu i kwadraturze koła jest przestępne, gdyż $\pi$ nie jest pierwiastkiem żadnego równania algiebraicznego o spółczynnikach wymiernych (należących do obszaru wymierności [1] oznaczonego przez jedyną wielkość daną, promień koła, przyjęty za jednostkę długości)**).

Ale nie możemy się zatrzymywać na takich zagadnieniach o charakterze analitycznym, nie wykraczając poza granice, któreśmy sobie wyznaczyli.

**§ 11. O niektórych prostych przyrządach, mogących służyć do rozwiązywania zadań gieometrycznych: przenośnik odcinków.** Zaznaczmy, że jakkolwiek rozumowania dotychczas wyłożone można zastosować do badania innych przyrządów gieometrycznych (oprócz linjału i cyrkla), które służą do rozwiązywania zadań o wyższym charakterze; jednakże oddamy pierwszeństwo rozpatrzeniu pewnych przyrządów, któremi można,

---

*) Por. art. VII i V.

**) Por. art. VIII.

rozwiązując zadania omawiane wyżej, zastąpić cyrkiel częściowo lub w zupełności. Zacznijmy od przenośnika odcinków*).

W tym celu zauważmy, że jedno z działań najczęściej wykonywanych cyrklem polega na przenoszeniu na prostą daną, począwszy od punktu danego, odcinka wyznaczonego na płaszczyźnie w innym położeniu; działanie to jest równoważne wyznaczeniu przecięcia koła danego z prostą, przechodzącą przez jego środek. Otóż działanie takie często się wykonywa w praktyce i bez użycia cyrkla, a tylko z zastosowaniem paska papieru, albo linjału z podziałką gotową lub możliwą do zrobienia, i t. d.; w ogóle z zastosowaniem przyrządu, który nazwiemy krótko przenośnikiem odcinków. Warto zauważyć, że ten przyrząd można też sprowadzić do prostszej postaci, a mianowicie do przenośnego odcinka oznaczonej długości, którą można przyjąć za jednostkę (przenośnik jednostki długości); gdyż jeżeli przeniesiemy jednostkę z prostej $r$ na inną prostą $s$, to można, za pośrednictwem konstrukcji odcinka czwartego proporcjonalnego (wykonalnej samym linjałem), przenieść każdy inny odcinek z $r$ na $s$.

Zapytamy teraz: czy za pomocą przenośnika jednostki długości i linjału można rozwiązać te wszystkie zadania, które są rozwiązalne za pomocą cyrkla i linjału? a jeżeli nie, to jakie zadania można rozwiązać za pomocą tych przyrządów?

Zaczniemy od zbudowania kąta prostego za pomocą przenośnika. W tym celu na dwuch jakichkolwiek prostych $r$, $s$, spotykających się w jakimś punkcie $O$, odetniemy po obu stronach tego punktu $O$ jednostkę długości. W ten sposób otrzymamy cztery wierzchołki prostokąta, którego środkowe $x$, $y$ (dające się wykreślić linjałem, por. art. III, § 6) są do siebie prostopadłe; są to dwusieczne kąta $rs$**).

Korzystając z tych dwuch prostych $x$, $y$ i posługując się jednostką długości, możemy teraz zbudować układ spółrzędnych kartezjańskich prostokątnych i rozpatrywać względem tego układu punkty dane w zadaniu. Niech będzie $K$ najciaśniejszym obszarem wymierności, zawierającym spółrzędne tych punktów. Przypominamy teraz, że najogólniejsze działanie, które można wykonać naszym przyrządem, polega na zbudowa-

*) Por. ten paragraf z klasyczną monografją D. Hilberta *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig, Teubner, 1909.

**) Zauważmy przy tej sposobności, że nasz przyrząd pozwala dzielić wszelkie kąty dane na dwie części równe. Ale i odwrotnie: przyrząd, który pozwala dzielić każdy kąt na dwie części równe, pozwala też przenosić odcinki z jednej prostej na inną.

niu odcinka równego jedności, mającego jeden z końców w danym punkcie $(a, b)$ i leżącego na danej prostej

$$y-b=m(x-a) \quad (a,\ b,\ m \text{ należą do } K).$$

Drugi koniec odcinka, otrzymany przez konstrukcję, mieć będzie spółrzędne takie, że wypadnie

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=(x-a)\sqrt{1+m^2}=1,$$

skąd:

$$\sqrt{1+m^2}=\frac{1}{x-a}.$$

Widzimy stąd, że za pomocą przenośnika odcinków możemy wykreślić wyrażenie (np. jako wartość jakiegoś odcinka) postaci $\sqrt{1+m^2}$, jeżeli $m$ jest liczbą daną (wartością odcinka danego); i to jest najogólniejsze działanie, które można wykonać omawianym przyrządem.

Ostatecznie wyprowadzamy wniosek, że jeżeli do punktów, mających spółrzędne (kartezjańskie prostokątne) $1, a, b, c, \ldots$ zastosujemy konstrukcje za pomocą linjału i przenośnika odcinków, to spółrzędne każdego punktu, który tym sposobem osiągniemy, należeć będą do obszaru wymierności, który powstaje przez wykonywanie nad liczbami danemi działań wymiernych i działania $\sqrt{1+m^2}$, gdzie $m$ oznacza liczbę daną, albo liczbę otrzymaną z liczb danych, za pomocą powyższych działań. I odwrotnie, każdy punkt, którego spółrzędne należą do tego obszaru, może być otrzymany za pomocą omawianych przyrządów.

Niech będzie $K$ pierwotnym obszarem wymierności, wyznaczonym przez elementy dane; oznaczmy przez $(K^{\frac{1}{2}})$ obszar, do którego się dochodzi przez dołączenie do działań wymiernych działania $\sqrt{1+m^2}$; natomiast przez $K^{\frac{1}{2}}$ oznaczać będziemy, jak dotychczas, obszar, do którego się dochodzi, dołączając do $K$ działanie ogólne wyciągania pierwiastka stopnia drugiego $\sqrt{m}$ z liczby dodatniej $m$, należącej do obszaru $K$, albo do obszarów, które się stopniowo otrzymuje sposobem omawianym wyżej. $K^{\frac{1}{2}}$ jest, że tak powiem, obszarem liczb, dających się zbudować linjałem i cyrklem, natomiast $(K^{\frac{1}{2}})$ jest obszarem liczb, dających się zbudować linjałem i przenośnikiem. Z określenia od razu wynika, że obszar $(K^{\frac{1}{2}})$ jest zawarty w $K^{\frac{1}{2}}$; możemy jednak zapytać, czy jest także i odwrotnie, a więc czy oba obszary pokrywają się z sobą, czy nie. Łatwo się przekonamy na przykładzie, że obszar $(K^{\frac{1}{2}})$ jest ciaśniejszy od obszaru $K^{\frac{1}{2}}$, skąd wyprowadzimy wniosek, że nie każda konstrukcja, wykonalna linjałem i cyrklem, może być wykonana linjałem i przenośnikiem odcinków. Ten ostatni przyrząd nie może więc zastąpić cyrkla w zupełności.

Ażeby tego dowieść w sposób najprostszy, weźmy pod uwagę pewien szczególny obszar $K$, np. obszar $K=[1, a]$, gdzie $a$ jest parametrem (§ 2), to znaczy, że jest wielkością, która może przyjmować dowolne wartości w toku rozumowania. Zajmijmy się teraz wyrażeniem $\sqrt{1-a^2}$, które należy do obszaru $K^{\frac{1}{2}}$ i może być zbudowane linjałem i cyrklem dla wszystkich wartości $a$ zawartych między $-1$ i $+1$. Przypuśćmy, jeżeli to możliwe, że to wyrażenie należy (dla tych samych wartości $a$) również do obszaru $(K^{\frac{1}{2}})$. Przypuśćmy więc, że można napisać równanie, którego pierwsza strona jest $\sqrt{1-a^2}$, natomiast druga strona musi zawierać jeden lub więcej znaków $\sqrt{\ }$, z których każdy ma pod sobą wyrażenie postaci $1+m^2$, gdzie $m$ jest wielkością $k$ obszaru $K$, albo wielkością $k'$ obszaru rozleglejszego, który się otrzymuje przez dołączenie do $K$ wielkości, mających postać $\sqrt{1+k^2}$, i t. d. W każdym przypadku $m$ będzie wielkością rzeczywistą, $1+m^2$ będzie wielkością dodatnią, a $\sqrt{1+m^2}$ wielkością rzeczywistą. A więc druga strona naszego przypuszczalnego równania ma wartość rzeczywistą dla każdej wartości rzeczywistej $a$. Z drugiej strony równanie nasze jest prawdziwe dla nieskończenie wielu wartości $a$ $(-1 \leqq a \leqq 1)$, a ponieważ dotyczy zależności algiebraicznej, przeto musi być prawdziwym dla każdej wartości $a$. Otóż to nie jest możliwe; w rzeczy samej, pierwsza strona $\sqrt{1-a^2}$ jest urojona np. dla $a>1$, podczas kiedy druga strona jest rzeczywista, jakiekolwiek będzie $a$. Niedorzeczność, do której doszliśmy w ten sposób, dowodzi nam, że $\sqrt{1-a^2}$ nie może należeć do obszaru $(K^{\frac{1}{2}})$, że więc obszar ten jest ciaśniejszy od obszaru $K^{\frac{1}{2}}$. Mówiąc gieometrycznie, przykład nasz dowodzi, że jeżeli są dane dwa odcinki, nie będące z sobą w zależności, to nie można zbudować przenośnikiem trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątną byłby większy z odcinków danych, a przyprostokątną drugi odcinek.

Zauważmy tutaj, że dowodzenie, przeprowadzone dla obszaru $[1, a]$, byłoby ważne, z drobnemi zmianami, dla ciaśniejszego obszaru $K=[1]$, gdyż wtedy mielibyśmy do czynienia z wyrażeniem, zawierającym (pod postacią nieprzywiedlną) kilka znaków pierwiastka stopnia drugiego, i utworzonym w taki sposób, że wartości, którebyśmy otrzymali, zmieniając znaki pierwiastków wszelkiemi możliwemi sposobami, byłyby po części rzeczywiste, po części urojone; takim jest np. wyrażenie $\pm\sqrt{\pm\sqrt{2}}$, które ma dwie wartości rzeczywiste i dwie urojone. Takie wyrażenie, należące do obszaru $K^{\frac{1}{2}}$, napewno nie może należeć do obszaru $(K^{\frac{1}{2}})$, gdyż w tym ostatnim przypadku wszystkie jego wartości musiałyby być rzeczywiste. Z tych uwag wynika od razu rezultat:

Jeżeli mamy jeden lub więcej odcinków danych, których długości 1, $a$, $b$, $c$,... jedne są stałe (liczebne), inne dowolne (parametryczne) i jeżeli mamy wykreślić odcinek, którego wartość jest dana przez wyrażenie utworzone za pomocą wykonywania nad wielkościami danemi działań wymiernych i wyciągania pierwiastków stopnia drugiego (w założeniu, że liczba pierwiastków została o ile możności zredukowana), to warunkiem koniecznym, ażeby odcinek poszukiwany mógł być wykreślony linjałem i przenośnikiem odcinków, jest ten, żeby były rzeczywistemi wszystkie wartości, które dane wyrażenie może przyjąć, jeżeli się zmienia w jakikolwiek sposób bądź znaki pierwiastków, bądź też wartości parametrów, występujących między wielkościami danemi.

Temu rezultatowi, który, jak to widzieliśmy, łatwo sprawdzić, Hilbert przeciwstawia inny, o wiele ważniejszy, do którego dochodzi przez rozumowanie zbyt daleko idące, ażeby mogło być tutaj oddane: powyższy warunek możliwości konstrukcji jest nietylko konieczny, ale i wystarczający.

Na tej zasadzie możemy powiedzieć, że każde zadanie, które jest rozwiązalne linjałem i cyrklem, może też być rozwiązane, jeżeli zamiast tego drugiego przyrządu zostanie zastosowany przenośnik odcinków, o ile tylko wszystkie rozwiązania algiebraiczne danego zadania są rzeczywiste (a więc możliwe do wykreślenia) nawet wtedy, kiedy wielkościom danym pozostawia się największą dowolność, jaka dla nich jest w ogóle możliwa.

Jako przykład Hilbert zaznacza, że zagadnienie podziału koła na $n$ części równych, o ile jest rozwiązalne linjałem i cyrklem, jest też rozwiązalne linjałem i przenośnikiem odcinków. Można też zauważyć (drogą bezpośrednią), że za pomocą tych ostatnich przyrządów może być rozwiązane każde zadanie stopnia drugiego (mające rozwiązania rzeczywiste), jeżeli elementy dane w tym zadaniu mają spółrzędne wymierne.

**§ 12. Użycie koła stałego.** Widzieliśmy, że przenośnik odcinków pozwala rozszerzyć obszar wymierności $K$ przez dołączenie działania $\sqrt{1+k^2}$, wykonywanego nad liczbą $k$ tego obszaru, ale nie daje sposobu wykonania działania $\sqrt{1-k^2}$ ani też działania $\sqrt{k}$ (to ostatnie działanie odpowiada używaniu cyrkla). Nastręcza się więc pytanie, czy przyrząd, któryby pozwolił wykonać działanie $\sqrt{1-k^2}$ (dla $-1 \leqq k \leqq 1$), mógłby w zupełności zastąpić cyrkiel. Otóż jest rzeczą oczywistą, że na to pytanie musimy odpowiedzieć twierdząco. W rzeczy samej, niech będzie $a$ wielkością, należącą do obszaru wymierności $K$; możemy zbudować samym linjałem wyrażenie

$$k=\frac{1-a}{1+a},$$

a przeto przyrządem omawianym można zbudować wyrażenie

$$x=\sqrt{1-k^2}=\frac{1}{1+a}\sqrt{(1+a)^2-(1-a)^2}=\frac{2}{1+a}\sqrt{a},$$

a więc ostatecznie wyrażenie

$$\sqrt{a}=\frac{1+a}{2}x.$$

Przyrząd, o którym mówimy, pozwala więc rozszerzyć obszar $K$ w taki sam sposób, jak cyrkiel: za pośrednictwem kolejnych rozszerzeń pozwala osiągnąć obszar $K^{\frac{1}{2}}$, utworzony przez wyrażenia, dające się zbudować linjałem i cyrklem. Powiemy przeto:

*Przyrząd, za pomocą którego, jeżeli są dane dwa odcinki długości 1 i $a<1$, można zbudować trzeci odcinek długości $\sqrt{1-a^2}$, może zastąpić w zupełności cyrkiel w rozwiązywaniu wszystkich zadań gieometrycznych, dających się rozwiązać cyrklem i linjałem.*

Zobaczymy, jakim sposobem można urzeczywistnić taką konstrukcję.

Niech będzie wyrysowane (jakimkolwiek przyrządem) *koło* w oznaczonym położeniu na płaszczyźnie i niech będzie znany środek $O$ tego koła. Przedewszystkim jest widoczne, że można poprowadzić samym linjałem dwie proste prostopadłe, przechodzące przez $O$, gdyż wystarczy w tym celu wpisać w koło prostokąt, przyjąwszy za jego przekątne dwie dowolne średnice koła, a następnie wykreślić proste środkowe tego prostokąta. Przyjąwszy promień koła za jednostkę, otrzymamy układ spółrzędnych kartezjańskich prostokątnych, względem którego rozpatrywać będziemy elementy dane.

Niech teraz będzie $OA=a$ znanym odcinkiem osi $x$, mniejszym od promienia koła (np. odciętą punktu danego); poprowadźmy (za pomocą linjału, por. art. III, § 6) prostopadłą do $x$ w punkcie $A$ aż do przecięcia z okręgiem koła w punkcie $P$; odcinek $AP$ tak znaleziony będzie się równał $\sqrt{1-a^2}$. A więc:

*Jeżeli na płaszczyźnie jest wyrysowane raz na zawsze koło, którego środek jest znany, wtedy można, posługując się tym kołem i samym tylko linjałem rozwią-*

zać każde zadanie, rozwiązalne linjałem i cyrklem. Jest to dobrze znany rezultat, który zawdzięczamy Ponceletowi i Steinerowi. Zauważmy, że znajomość środka koła jest konieczna tylko do rozwiązywania zadań miarowych, ale nie rzutowych. W tym ostatnim przypadku koło mogłoby też być zastąpione przez jakąkolwiek stożkową, z wyjątkiem stożkowej rozpadającej się na dwie proste.

**§ 13. Linjał o dwuch krawędziach równoległych.** Zobaczymy teraz, czy cyrkiel można zastąpić w zupełności linjałem o dwuch krawędziach równoległych, czyli zwyczajnym linjałem, którego obu krawędzi jednocześnie używa się w ten sposób, że można prowadzić dwie proste równoległe, oddalone od siebie na szerokość linjału.

Zauważmy przedewszystkim, że stosując dwukrotnie linjał o dwuch krawędziach, można zbudować równoległobok równoboczny, którego wysokość równa się szerokości linjału. Przekątne równoległoboku dają parę prostych prostopadłych, które przyjmiemy za osi układu kartezjańskiego, a szerokość linjału przyjmiemy za jednostkę długości.

Należy teraz zbadać, jakie konstrukcje podstawowe można wykonać linjałem o dwuch krawędziach, a ponieważ takie konstrukcje są zależne od sposobu użycia linjału, przeto musimy ustalić pewne różnice.

Pierwszy sposób używania linjału o dwuch krawędziach polega na złączeniu jednej jej krawędzi z daną prostą i poprowadzeniu równoległej do tej prostej w odległości jednostki długości. W ten sposób nasz przyrząd daje możność przesunięcia prostej danej równolegle do samej siebie o odległość równą jednostce długości. Jeżeli teraz przypuścimy, że ta prosta jest prostopadłą, poprowadzoną do danej prostej $r$ w sposób wyżej wskazany, wtedy za pośrednictwem tego ostatniego działania będziemy mogli wykreślić na dowolnej prostej $r$ odcinek równy jednostce długości. Wnosimy więc, że linjał o dwuch krawędziach, zastosowany pierwszym sposobem, może zastąpić przenośnik odcinków; widoczne jest, że nie daje nic więcej, niż ten ostatni przyrząd, co zresztą łatwoby było sprawdzić drogą analityczną.

Ale jest jeszcze drugi sposób posługiwania się linjałem o dwuch krawędziach; sposób ten polega na ułożeniu linjału tak, ażeby jego dwie krawędzie przeszły odpowiednio przez dwa punkty, których odległość przewyższa lub równa się szerokości linjału (jednostce długości), i na poprowadzeniu prostych wyznaczonych przez krawędzie. Tym sposobem, jak to zobaczymy, można rozwiązać każde zadanie, które jest rozwiązalne linjałem i cyrklem.

Ażeby tego dowieść, obierzmy na osi $x$ odcinek $OA = a > 1$, który uważać będziemy jako znany. Układając linjał w ten sposób, ażeby jedna krawędź przeszła przez $O$, druga przez A, wykreślmy wzdłuż tej drugiej krawędzi prostą $AB$, spotykającą oś $y$ w punkcie $B$; niech będzie $OB=b$ odcinkiem w ten sposób znalezionym. Ażeby obliczyć $b$, zauważmy, że prosta nieograniczona $AB$ ma równanie

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\,;$$

ta prosta jest oddalona od $O$ o jednostkę długości; otrzymamy stąd równanie

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=1,$$

skąd (co do wartości bezwzględnej):

$$\frac{1}{b}=\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}.$$

To dowodzi, że rozporządzając linjałem o dwuch krawędziach i znając

$$k=\frac{1}{a}<1,$$

można zbudować wyrażenie $\sqrt{1-k^2}$; a to nam wystarcza do stwierdzenia (§ 12), że każde zadanie, rozwiązalne linjałem i cyrklem, może też być rozwiązane przez zastosowanie samego linjału o dwuch krawędziach równoległych*).

*) Poleca się porównanie rezultatów, otrzymanych w dwuch ostatnich paragrafach, z rezultatami podanemi w artykule III.