## ARTYKUŁ DZIEWIĄTY.

# Niektóre uwagi ogólne o zadaniach gieometrycznych.

napisał

**F e d e r i g o   E n r i q u e s** z Bolonji.

Po badaniach szczególnych rozmaitych zagadnień, rozpatrywanych w poprzednich artykułach, podamy niektóre uwagi syntetyczne o zadaniach gieometrycznych, dotykając w pewnych punktach rozważań wyższego rodzaju. Jakkolwiek niektóre z tych uwag małą mają styczność z tym, co było mówione przy sposobności tej lub innej grupy zadań, to jednak nie uważamy za zbyteczne mieć je przed oczami w całości, ażeby ułatwić wytworzenie sądu porównawczego o tych badaniach.

**§ 1. Cel praktyczny badań gieometrycznych.** Rozwiązywanie graficzne zadań konstrukcyjnych stanowi jeden z głównych celów gieometrji. Nawet tam, gdzie ten cel wydaje się niemal zapomnianym w rozwoju poszukiwań teoretycznych, łatwo wyśledzić jego wpływ kierowniczy na te poszukiwania.

Przedewszystkim, ponieważ każde twierdzenie gieometryczne pozwala nam poznać pewne zależności między elementami figury, przeto może być uważane jako w a r u n e k, któremu jest poddana konstrukcja tej figury. Tak np. twierdzenie odwrotne do twierdzenia P i t a g o r a s a poucza nas, że jeżeli kwadrat odcinka $a$ ma być równoważny sumie kwadratów odcinków $b$, $c$, to trójkąt, mający za boki $a$, $b$, $c$, musi być prostokątny z kątem prostym zawartym między bokami $b$, $c$; ta wiadomość wyraża warunek, któremu musimy uczynić zadość, jeżeli chcemy dodawać lub odejmować dwa kwadraty, a który zawiera zarazem rozwiązanie tego zadania konstrukcyjnego, gdyż jest to warunek w y s t a r c z a j ą c y.

Wogóle analiza własności figury gieometrycznej prowadzi analogicznie do ustalenia warunków konstrukcyjnych tej figury, może więc być dopiero wtedy uważana za wyczerpaną, kiedy zostały odkryte między jej elementami takie zależności, które wskazują, w jaki sposób figura może być wyznaczona przez dowolny wybór niektórych elementów.

Przypuśćmy, że mamy do czynienia z wielościanem foremnym o dwunastu ścianach (dwunastościanem). Przedewszystkim przekonywamy się że jego ściany są pięciokątami, a jego kąty bryłowe są trójścianami; ale dopiero wtedy będziemy mogli uważać istotną konstrukcję wielościanu za wyznaczoną, kiedy okażemy, że w jego rzucie prostokątnym na płaszczyznę jednej ze ścian obrazy wierzchołków tworzą dwa dziesięciokąty foremne spółśrodkowe takie, że promień koła opisanego na większym dziesięciokącie jest większy od promienia koła opisanego na mniejszym o większą część tego promienia, podzielonego w stosunku średnim i skrajnym [1]).

§ **2. Zadania nieoznaczone.** Zadania gieometryczne mogą dotyczyć figur płaskich lub przestrzennych; ale w tym drugim przypadku prosta metoda ogólna rzutów prostokątnych, rozwinięta przez Monge'a, pozwala zawsze sprowadzić zadanie do konstrukcji płaskich; tego rodzaju redukcja może też być w wielu przypadkach szczególnych osiągnięta z łatwością bezpośrednio za pomocą odpowiednich rozważań, jak to np. widzieliśmy w zadaniu podwojenia sześcianu (art. VII).

Dlatego też będziemy się w dalszym ciągu odwoływali zawsze do zadań gieometrji płaszczyzny.

Zadania gieometryczne mogą być oznaczone albo nieoznaczone.

Za oznaczone uważamy te zadania, które wymagają konstrukcji figury za pomocą danych elementów i zależności, jeżeli figura rozwiązująca zadanie nie może być poddana ruchowi albo zmianie ciągłej; w przeciwieństwie do tego nazywamy nieoznaczonemi te zadania, które mogą mieć nieskończenie wiele rozwiązań, mogących się zmieniać w sposób ciągły, tak że możnaby było jeszcze, w pewnych granicach, dać jakiś element, lub jakąś zależność, której figura żądana musiałaby czynić zadość.

W szczególności należą do pierwszej kategorji zadań oznaczonych te wszystkie zadania, które mają tylko jedno rozwiązanie lub liczbę skończoną rozwiązań; ale do zadań oznaczonych należy np. zadanie: wykreślić na prostej danej, począwszy od punktu danego, odcinek mający długość łuku, którego promieniem jest 1, a którego styczna trygonometryczna jest dana,—ponieważ nieskończenie wiele rozwiązań tego zadania tworzy szereg nieciągły (jeżeli $y$ jest odcinkiem, rozwiązującym zadanie, to $\operatorname{arc\,tg} x = y \pm n\pi$).

---

[1]) Por. np. Enriques, *Lezioni di Geometria descrittiva*. Bologna 1902, str. 106.

Natomiast, stosownie do określenia, są nieoznaczone te zadania, w których mają być znalezione jedynie wielkości elementów (odcinków, kątów, ...) figury, ponieważ, skoro znaleźliśmy jedno rozwiązanie, istnieją prócz niego te wszystkie, które się otrzymuje z tego rozwiązania za pomocą ruchu. Jednakże dogodnie jest ograniczyć ten rodzaj zadań i nie brać pod uwagę nieoznaczoności, polegającej jedynie na położeniu figury; jest to równoważne z dołączeniem do warunków danych położenia jakiegokolwiek elementu figury (np. odcinka) w taki sposób, ażeby jej ruch na płaszczyźnie stał się niemożliwym.

Z tym zastrzeżeniem zadania gieometryczne dają się w ogólności przekształcić w taki sposób, ażeby danemi były punkty płaszczyzny, a elementami nieznanemi żeby były również punkty, mające z elementami danemi pewne związki przepisane (por. art. IV, § 7). Jeżeli wtedy punkty nieznane mogą podlegać zmianom ciągłym na linjach lub w granicach powierzchni, to zadanie jest nieoznaczone; w przypadku przeciwnym zadanie jest oznaczone.

Najelementarniejszy rodzaj zadań nieoznaczonych tworzą zadania, wymagające wykreślenia l i n j i, której punkty czynią zadość danej zależności (względem punktów danych). Zadanie takie należy uważać w praktyce jako rozwiązane, jeżeli jest dany p r z y r z ą d (czyli układ mechaniczny, obdarzony pewnym stopniem swobody), za pomocą którego można wyrysować linję żądaną, i jeżeli oprócz tego można za pomocą tego przyrządu, lub innych przyrządów danych, wyznaczyć elementy, od których ta linja zależy.

Przypuśćmy np., że mamy zbudować miejsce punktów, z których odcinek dany $AB$ jest widziany pod kątem danym $\alpha$; tym miejscem jest łuk koła, który można wyrysować c y r k l e m, po znalezieniu środka i promienia, co, jak wiemy, również może być wykonane samym cyrklem (lub cyrklem i linjałem).

A więc zadanie wykreślenia linji wymaga w ogólności:

1) takiego przekształcenia własności gieometrycznych, którym punkty linji mają czynić zadość, ażeby można było poznać sposób m e c h a n i c z n e g o w y t w o r z e n i a tej linji;

2) przyrządu, pozwalającego to urzeczywistnić;

3) wyznaczenia tych elementów linji, z któremi jest związane jej wytworzenie mechaniczne.

W tym znaczeniu zadanie konstrukcji linji można zawsze uważać za r o z w i ą z a l n e, a badaczowi pozostaje szerokie pole do wynalezienia przyrządów, odpowiadających celowi. Tak np. różne sposoby mechaniczne wytworzenia elipsy pozwalają budować rozmaite przyrządy wykreślające elipsę (cyrkiel eliptyczny L e o n a r d a d a V i n c i, art. VII); na zasadzie, że parabola algiebraiczna $n$-go rzędu jest krzywą całkową paraboli rzędu $n-1$, można wykreślić tę krzywą (biorąc za podstawę linję prostą), stosując kolejno integraf $n-1$ razy (art. VIII) i t. d.

Rzecz się inaczej przedstawia, jeżeli linja ma być zbudowana przyrządami przepisanemi; wtedy łatwo rozpoznać, czy linja żądana należy czy nie należy do klasy linji, które mogą być wytworzone za pomocą przyrządów danych; jeżeli do nich nie należy, wtedy zadanie, w powyższym znaczeniu, jest nierozwiązalne. Z przypadkiem takim mamy do czynienia, jeżeli chcemy np. wykreślić linjałem i cyrklem miejsce punktów jednakowo oddalonych od punktu danego i od prostej danej; miejsce takie jest parabolą, nie należy więc do klasy linji (prostych i kół), które można wykreślić przyrządami danemi.

W przypadkach takich zamiast bezpośredniej konstrukcji linji można poszukiwać konstrukcji za pomocą punktów dość zbliżonych i uważać taką konstrukcję za rozwiązanie przybliżone danego zadania.

W przykładzie poprzednim ażeby wykreślić parabolę za pomocą punktów, przecina się zmienne koło, mające środek w punkcie danym (ognisku), z równoległą do prostej danej (kierownicy), oddaloną od niej o promień koła i leżącą po tej samej jej stronie, co punkt dany. W sposób analogiczny można za pomocą oddzielnych punktów zbudować ekierką koło, mające daną średnicę $AB$; można także zbudować to koło za pomocą punktów samym linjałem, jeżeli jest jeszcze dana średnica prostopadła do $AB$ (por. art. III).

Konstrukcja linji za pomocą punktów sprowadza w istocie dane zadanie nieoznaczone do szeregu zadań oznaczonych (teoretycznie w liczbie dowolnie wielkiej), zależących po części od elementów dowolnych. Analitycznie mamy tu do czynienia z przedstawieniem parametrycznym linji $f(x, y)=0$ za pomocą funkcji parametru $t$:

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t);$$

dla każdej dowolnie danej wartości $t$ należy wyznaczyć odcinki $x$ i $y$[1]).

---

[1]) Stąd widać, że nie zawsze można żądać konstrukcji linji za pomocą punktów przez zastosowanie konstrukcji przepisanych. Np. konstrukcja linjowa za pomocą punktów wymaga (art. IV), ażeby funkcje $\varphi$ i $\psi$ były wymierne, ażeby więc krzywa $f(x, y)=0$ była krzywą algiebraiczną rodzaju 0 (Clebsch). Jednakże te uwagi dotyczą przypadku, w którym chcemy, ażeby wyznaczenie punktu ogólnego linji zależało od konstrukcji przepisanej, zawsze tej samej, wykonywanej nad dowolnym elementem. O wiele trudniej jest rozstrzygnąć, czy krzywa zawiera szereg nieskończony punktów, leżących dowolnie blizko siebie, z których każdy mógłby być otrzymany przez właściwą konstrukcję, wykonalną środkami

§ 3. **Zadania oznaczone.** Widzieliśmy, że typowe zadanie nieoznaczone, wymagające konstrukcji linji, sprowadza się— jeżeli nie do wynalezienia mechanicznego odpowiedniego przyrządu—do rozwiązania szeregu zadań oznaczonych (konstrukcja linji za pomocą punktów).

Odwrotnie, punkty, które są rozwiązaniami zadania oznaczonego, otrzymuje się w ogólności (podług metody miejsc gieometrycznych) jako przecięcia linji, które można wyrysować rozporządzalnemi przyrządami. W tym znaczeniu używa się stale do rozwiązywania zadań oznaczonych przyrządów wykreślających linje, np. linjału, cyrkla i t.d.

Obok przyrządów tego rodzaju mają również zastosowanie przyrządy o odmiennym charakterze (będące układami, urzeczywistniającemi daną zależność gieometryczną), za pomocą których otrzymuje się pewne konstrukcje oznaczone w sposób więcej bezpośredni. Takiemi przyrządami są np. przenośnik odcinków, czyli pręt albo pasek papieru dowolnej długości, ekierka prostokątna lub ukośnokątna, linjał o dwuch krawędziach równoległych (art. III, IV); przyrządy te mogą być stosowane rozmaitemi sposobami do otrzymania konstrukcji bezpośredniej punktów lub prostych, które są w pewnych mało złożonych zależnościach względem punktów lub prostych danych.

Ale przy badaniu zadań można z początku nadawać tego rodzaju przyrządom znaczenie drugorzędne; to też jeżeli w dalszym ciągu będziemy mówili specjalnie o zadaniach oznaczonych, to będziemy stali na stanowisku, które zazwyczaj przeważa w rozwiązywaniu takich zadań i polega na poszukiwaniu punktów nieznanych jako przecięć linji. Zresztą pewne rozróżnienia i klasyfikacje, które wypadnie nam wprowadzić, są od tego ograniczenia niezależne.

§ 4. **Zasada ekonomji.** Każde zadanie możliwe (t. j. takie, które ma rozwiązania), może być rozwiązane przez zastosowanie przyrządów, odpowiadających celowi, a pomysłowość może mnożyć do nieskończoności wynajdywanie środków mechanicznych, nadających się do osiągnięcia rozwiązania. Ale (stosownie do poglądów Macha) nauka wymaga nietylko rozwiązania zadania wogóle, ale rozwiązania najekonomiczniejszego. Chodzi tutaj nietylko o ekonomję myślenia, ale tak-

---

przepisanemi. Np. krzywa rzędu trzeciego, nie mająca punktów podwójnych, jest rodzaju 1 i nie może być zbudowana linjowo za pomocą punktów w znaczeniu omówionym poprzednio, gdyż nie można wyrazić jej spółrzędnych przez funkcje wymierne jakiegoś parametru; ale ta krzywa może zawierać nieskończenie wiele punktów o spółrzędnych wymiernych, a B. Levi dowiódł w ostatnich czasach, że—o ile to ma miejsce—w sąsiedztwie każdego punktu wymiernego leży nieskończenie wiele takich punktów.

że o zaoszczędzenie skomplikowanych wyrobów mechanicznych, albo o ekonomję pracy dla każdego przyrządu danego i t. d.

Zobaczmy więc, jaki wpływ kierowniczy wywarła zasada ekonomji w dziedzinie zadań gieometrycznych konstrukcyjnych.

**§ 5. Klasyfikacja zadań.** Wyobraźnia niewykształcona poszukuje dla każdej konstrukcji szczególnej najprostszego środka wykonania. Nauka dąży do klasyfikowania i porządkowania zadań grupami tak, ażeby do każdej grupy mogły być stosowane te same przyrządy.

Jest to pierwsze wymaganie ekonomiczne, mające na widoku ogół zadań gieometrycznych.

**§ 6. Kryterja klasyfikacji.** Zaznaczymy trzy główne stanowiska, z których można w sposób naturalny klasyfikować zadania.

Te kryterja klasyfikacji mają źródło w poszukiwaniu systematycznym (które nazwaliśmy przeważającym w tego rodzaju zagadnieniach) rozwiązań zadań oznaczonych za pomocą przecięcia linji.

Wskutek tego można zadania klasyfikować na podstawie

1) prostoty mechanicznej przyrządów odpowiednich do kreślenia linji, dających rozwiązanie;

2) albo prostoty gieometrycznej tych linji;

3) albo wreszcie prostoty analitycznej równań, od których zależy zadanie, podług metody Kartezjusza.

Z pierwszego stanowiska (na którym stał Newton) można np. zaraz po zadaniach, dających się rozwiązać za pomocą koła (cyrkla), umieścić zadania, które się rozwiązuje za pomocą konchoidy Nikomedesa (art. VII); natomiast ze stanowiska drugiego prostsze jest rozwiązywanie zadań za pomocą stożkowych.

Kryterjum gieometryczne, odwołujące się do prostoty linji, od których można uczynić zależnym rozwiązanie zadania, ma odpowiednik, w pewnej mierze przynajmniej, w kryterjum analitycznym (Kartezjusza), rozpatrującym charakter równań, od których zależy wyznaczenie niewiadomych.

Z tego stanowiska zadania dzielą się na algiebraiczne i przestępne, a zadania algiebraiczne można klasyfikować podług ich stopnia.

Zauważymy, że grupy zadań, zajmujące pierwsze miejsca w klasyfikacji analityczno-gieometrycznej (zadania 1-go i 2-go stopnia) są zarazem najelementarniejsze ze stanowiska mechanicznego.

Co się tyczy wartości porównawczej powyższych stanowisk, zaznaczymy co następuje.

Kryterjum mechaniczne odpowiada najlepiej celowi wtedy, jeżeli (zakładając teoretyczny warunek ścisłości) chcemy stosować tylko takie linje, które umiemy rysować mechanicznie; jeżeli natomiast zgadzamy się na stosowanie linji, zbudowanych za pomocą oddzielnych punktów, wtedy łatwość konstrukcji jest w ogólności zależna od prostoty gieometrycznej tych linji, a więc (jeżeli nadamy zadaniu odpowiednią postać analityczną) od prostoty analitycznej równań przedstawiających zadanie.

Należy jeszcze zaznaczyć, że sprawa klasyfikacji zadań konstrukcyjnych przedstawia się rozmaicie, zależnie od tego, czy *klasyfikujemy zadania już rozwiązane*, czy też chcemy zawczasu wymiarkować, jakiego rodzaju trudności będą przedstawiały pewne klasy *zadań danych do rozwiązania*. Jeżeli pierwszemu celowi odpowiada najlepiej kryterjum mechaniczne, to do drugiego celu wydaje się stosowniejszym kryterjum geometryczne, a jeszcze lepszym analityczne. Istotnie, jeżeli zadanie jest tylko wypowiedziane, to w ogólności trudno jest od razu osądzić, jakich środków mechanicznych rozwiązanie będzie wymagało; natomiast łatwiej rozpoznamy pewne cechy gieometryczne linji, za pomocą których będzie można rozwiązać zadanie metodą miejsc gieometrycznych, a najłatwiej będzie ułożyć równania zadania za pomocą gieometrji analitycznej. Zresztą, stosownie do różnych wymagań, można się kierować rozmaitemi względami w klasyfikowaniu zadań.

**§ 7. Jak się ocenia prostotę rozwiązania zadania.** Zasadę ogólną *rozwiązania najekonomiczniejszego* można rozumieć

1) *w znaczeniu jakościowym*, jeżeli wymaga się wykonania pewnej konstrukcji przyrządami danemi, a nie jakiemikolwiek;

2) *w znaczeniu ilościowym*, jeżeli się wymaga konstrukcji *najprędszej*, w której występuje *jaknajmniejsza ilość działań*, wykonywanych przyrządami danemi.

Oczywiście kryterjum ilościowe podporządkowuje się jakościowemu. A priori nie można uważać za rzecz obojętną, czy się rysuje prostą czy koło, czy się używa linjału, czy cyrkla lub ekierki. Trzeba więc *liczyć oddzielnie działania, które się wykonywa każdym przyrządem*, jak właśnie uczy gieometrografja *Lemoine'a*. Ale można ustalić pewien *stosunek równoważności* między liczbą działań wykonanych przyrządem danym i liczbą działań wykonanych innym przyrządem, obliczając ten stosunek np. na podstawie czasu, potrzebnego do wykonania serji działań równoważnych.

Z drugiej strony istnieją przypadki, w których korzystnie jest z jakiegokolwiek względu działanie wymagające jakiegoś przyrządu zastąpić pewną liczbą działań, dających się wykonać innym przyrządem; i tu stosuje się wtedy kryterjum ilościowe.

Przypadki takie wywołują potrzebę poszukiwań systematycznych, czy można wszystkie zadania pewnej klasy rozwiązać za pomocą kilku najprostszych przyrządów, posiłkując się zarazem wyrysowaną na arkuszu linją lub figurą podstawową; uważa się wtedy konstrukcję tej linji za tak trudną, że pożądane jest, ażeby trzeba ją było wyrysować tylko raz jeden. Tutaj można zaliczyć badania Ponceleta i Steinera nad możliwością rozwiązywania zadań stopnia drugiego za pomocą samego linjału i stałego koła podstawowego (art. III, IV). Inny przykład przedstawia rozwiązywanie zadań stopnia trzeciego za pomocą linjału i cyrkla, jeżeli jest dana parabola stała (art. VII).

**§ 8. Wartość względna przyrządów.** Najważniejszym rezultatem klasyfikacji zadań w stosunku do przyrządów jest ocena porównawcza wartości tych przyrządów.

Ponieważ każdemu przyrządowi (używanemu w sposób ustanowiony) odpowiada „ciało" zadań, dających się rozwiązać tym przyrządem, przeto wartość przyrządu może być oceniona w stosunku do obszaru tego ciała.

Jeżeli dwa przyrządy albo dwie grupy przyrządów odpowiadają temu samemu ciału, wtedy należy je uważać za równoważne, jak np., względem konstrukcji oznaczonych, cyrkiel i linjał o dwuch krawędziach (art. II, III, IV).

Jeżeli natomiast ciało zadań, rozwiązalnych za pomocą jakiegoś przyrządu $A$, zawiera ciało zadań rozwiązalnych innym przyrządem $B$, wtedy przyrząd $A$ ma wartość większą niż $B$. Tak np. cyrkiel ma wartość większą niż linjał z podziałką, używany jako przenośnik odcinków (art. IV), ale przenośnik taki ma ze swej strony wartość większą, aniżeli ekierka, używana tylko do przenoszenia kąta prostego (art. III).

Podobnie jeszcze integraf (art. VIII) — łącznie z linjałem — daje możność rozwiązania wszystkich zadań, rozwiązalnych cyrklem, cyrklami konicznemi, przyrządem trójdzielczym, przyrządami wykreślającemi cysoidę i t. d. W rzeczy samej, ponieważ zadania $n$-go stopnia można sprowadzić do przecięć pomiędzy prostemi i parabolami $n$-go rzędu, przeto ich rozwiązanie wymaga $(n-1)$ krotnego kolejnego zastosowania integrafu.

Ale dwa przyrządy mogą też mieć wartości różne i nie dające się porównać, a mianowicie wtedy, jeżeli żadne ciało zadań, odpowiadające jednemu z przyrządów, nie jest zawarte w ciele drugim; oba ciała mogą wtedy mieć część wspólną, albo też nie istnieje żadne zadanie, należące do obu ciał. Przykład taki otrzymalibyśmy, porównywając (na podstawie kryterjów artykułu IV) to, co można zrobić cyrklem i to, co można osiągnąć przyrządem, dzielącym kąty na trzy części równe, w połączeniu z linjałem.

**§ 9. Dokładność konstrukcji.** Prostota konstrukcji i obszar ciała zadań, rozwiązalnych danym przyrządem, nie stanowią jedynych kryterjów, które trzeba mieć na względzie, oceniając użyteczność tego przyrządu; trzeba jeszcze się liczyć z dokładnością samych konstrukcji.

Z tego stanowiska jest np. cenna Gieometrja cyrkla Mascheroniego (art. II).

Rozważmy sprawę dokładności.

Teoretycznie mówi się o konstrukcjach dokładnych i o konstrukcjach przybliżonych; praktycznie wszystkie konstrukcje mają tylko wartość przybliżoną.

Jak można ocenić stopień dokładności czyli przybliżenie osiągane konstrukcją teoretycznie dokładną?

To zagadnienie należy do dziedziny, na którą wskazał F. Klein w swoich wykładach *Anwendung der Differential-und Integralrechnung auf Geometrie* (litogr.) Lipsk 1902. Można dać na nie odpowiedź matematyczną, przekształcając systematycznie wyrażenia twierdzeń gieometrycznych, które się analitycznie tłumaczą przez równości, tak, ażeby zamiast tych równości występowały nierówności. Tak np. twierdzenie: „kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe“ zamieni się na twierdzenie postaci następującej: „jeżeli dwa boki $a$, $b$ trójkąta różnią się mniej niż o $\varepsilon$, wtedy kąty przeciwległe $\alpha$, $\beta$ różnią się mniej niż o $\tau$, gdzie $\tau$ jest funkcją wielkości $\varepsilon$ (łatwą do znalezienia), stającą się nieskończenie małą wraz z $\varepsilon$“[1]). Jeżeli w konstrukcji stosuje się twierdzenie w rodzaju powyższego, to trzeba przedewszystkim założyć, że dane, które są teoretycznie równe, są wprawdzie równe dla naszych zmysłów, ale różnią się od siebie o pewną wielkość $\varepsilon$, zależną bezpośrednio od przyrządu, którym się posiłkujemy, a następnie trzeba obliczyć stopień dokładności $\tau$, z jakim elementy znalezione czynią zadość warunkom danym. Jeżeli $\tau$ jest tego samego rzędu co $\varepsilon$, a więc nie da się ocenić za pomocą zmysłów ani przyrządów, wtedy rozwiązanie zadania jest praktycznie dokładne.

Dlatego też ten sam stopień praktyczny dokładności może być przypisany rozwiązaniu zadania prostszego, niż zadanie dane, ale bardzo do niego zbliżonego. Postąpimy więc zgodnie z zasadą ekonomji, jeżeli oddamy w takim przypadku pierwszeństwo rozwiązaniu teoretycznie przybliżonemu, zamiast rozwiązaniu teoretycznie dokładnemu.

---

[1]) Dokładniej, co do wartości bezwzględnej, jest

$$\sin\beta - \sin\alpha = \frac{\varepsilon \sin\alpha}{a}.$$

Nie trzeba jednak zapoznawać pożytku rozwiązań teoretycznie dokładnych, gdyż w przeciwieństwie do rozwiązań przybliżonych, rozwiązania teoretycznie dokładne nie dają powodu do błędu systematycznego, który, w licznych bardzo przypadkach, przez powtarzanie dąży do powiększania się.

Można pomimo to powiedzieć, że w większości przypadków jest konieczne albo pożyteczne poprzestawanie na poszukiwaniu rozwiązań przybliżonych. Ale pod tym względem Klein słusznie rozróżnia pomiędzy przybliżeniem, zawierającym błąd, który nie przekracza granicy danej a priori, a przybliżeniem systematycznym, w którym, przez wykonanie dostatecznie wielkiej liczby działań można otrzymać pożądany stopień przybliżenia.

Wszelkie pomiary, na zasadzie których rozwiązuje się zadania sposobem analitycznym, należą w istocie do metody przybliżenia systematycznego, zastosowanego na szeroką skalę; przez zastosowanie szczególnych środków pomocniczych osiąga się następnie dogodne konstrukcje odcinków (lub innych elementów), których wielkość jest dana (por. np. art. VI). Artykuły II, VI i VII zawierają ciekawe przykłady konstrukcji przybliżonych, obarczonych błędem, nie przekraczającym granicy uprzednio danej.

**§ 10. Metody rozwiązywania zadań.** Mówiąc o klasyfikacji zadań zaznaczyliśmy już, że inaczej należy się zapatrywać na zadania rozwiązane, a inaczej na zadania dane do rozwiązania. Jeżeli się uważa zadania jako pytania, na które odpowiedź jeszcze nie została dana, wtedy szczególniejszej wagi nabiera wzgląd na metodę rozwiązania.

Zasada ekonomji występuje tu jako kryterjum porównawcze metod, pozwalających osiągnąć jaknajłatwiej (to znaczy z jaknajmniejszym wysiłkiem myśli) rozwiązanie danych zadań.

Otóż pytamy, jakie metody należy uważać za najekonomiczniejsze?

Jeżeli mamy na względzie przygotowanie naukowe, wymagane od badacza, to nazwiemy ekonomiczniejszą tę metodę, która jest elementarniejsza. Ale metody najelementarniejsze, łatwo przystępne dla tych, którzy posiadają szczupły zapas wiadomości, nie dostarczają w rozmaitych przypadkach kryterjów kierowniczych o charakterze ogólnym, a więc stosowanie ich wymaga za każdym razem pewnego wysiłku umysłu.

Rozwiązanie sposobem elementarnym jest więc najekonomiczniejsze tylko w stosunku do pojedyńczego przypadku; ze względu na całokształt warto zadać sobie trud zdobycia większego przygotowania naukowego, ażeby osiągnąć jakiś wskaźnik o charakterze ogólnym i nie spotykać na każdym kroku nowej trudności.

Postęp nauki przedstawia właśnie udoskonalenie metod w znaczeniu ekonomicznym ze względu na całokształt zadań do rozwiązania, podobnie jak maszyna tkacka jest ekonomiczna dla przemysłu, który musi wytwarzać wielką ilość materjału.

**§ 11. Rozwój metod.** Ciekawą jest rzeczą przekonać się, jak metody najwyższe, które gieometrja nowożytna stosuje do zadań, rozwinęły się z metod elementarnych pod naciskiem wymagań ekonomicznych.

Weźmy pod uwagę metodę miejsc gieometrycznych, która pierwsza nadaje się do rozwiązywania zadań w większej liczbie. Gieometrja elementarna posiłkuje się tą metodą w ciasnych granicach wskutek znajomości małej tylko liczby linji szczególnych. Jeżeli sobie założymy nie wykraczać poza rozważanie prostych i kół, to zostaniemy już powstrzymani w zastosowaniach tej metody, jeżeli choć jeden warunek zadania prowadzi do stożkowej jako miejsca gieometrycznego.

Już starożytni odczuwali potrzebę rozszerzenia tych granic; ale istotne uogólnienie zostało dokonane przez K a r t e z j u s z a, gdyż przedstawienie analityczne krzywych pozwoliło uważać, w pewnym znaczeniu, jako dającą się wyrysować każdą krzywą, której równanie zostało napisane.

Metoda analityczna, która tą drogą powstała, daje możność systematycznego badania możliwości i sposobów rozwiązywania zadań, urzeczywistnia przeto n a j w i ę k s z ą e k o n o m j ę w i c h c a ł o k s z t a ł c i e. Wprawdzie ta metoda nie jest jednakowo przejrzysta w każdym przypadku poszczególnym i nie zawsze prowadzi do rozwiązania najprędszego lub najprostszego; wprawdzie nie rozwiązuje całkowicie trudności, o ile się wykracza poza te typy równań, których rozwiązanie wykonywa się przyrządami o sposobie użycia dokładnie zbadanym. Ale tę wadę równoważy (jak to już zaznaczyliśmy) okoliczność, że pierwiastki równania można wykreślić co najmniej sposobem przybliżonym, pozwalającym osiągnąć dowolny stopień przybliżenia, a twierdzenia analizy o rozwinięciach na szeregi potęgowe albo na ułamki ciągłe służą znakomicie do tego celu.

Druga metoda ogólna rozwiązywania zadań opiera się na pojęciu przekształcenia. W artykule I okazaliśmy, że to pojęcie nadaje się do użytecznych zastosowań również w zakresie szczuplejszym gieometrji elementarnej.

Ale badając w dalszym ciągu korzyści, jakie zamierzano osiągnąć za pomocą przekształceń, dochodzimy naturalnym sposobem do rozszerzenia zakresu: każdej grupie własności figur odpowiada grupa przekształceń, pozostawiających je bez zmiany, i odwrotnie. Tak więc rzutowość, przekształcenie przez promienie odwrotne, przekształcenia kremonjańskie i t. d. stają się kolejno przedmiotem badań i dają początek rozwojowi systematycznemu Gieometrji ze szczególnego punktu widzenia[1]).

Badanie tego rozwoju zaprowadziłoby nas za daleko od celu, zakreślonego w tym artykule. Ograniczymy się przeto do kilku uwag o wartości przekształceń ze względu na rozwiązywanie zadań konstrukcyjnych, trzymając się w ogólności w pobliżu przedmiotów, należących do gieometrji elementarnej.

**§ 12. Metody przekształceń: dogodność położenia.** Jak widać z art. I, pierwsze zastosowanie przekształcenia służy do tego celu, żeby figurze, na której się wykonywa działania, albo niektórym jej częściom, nadać położenie dogodniejsze. Cel taki może być osiągnięty bądź przez ruch płaszczyzny, bądź przez przekształcenie, zmieniające niektóre z elementów figury, ale pozostawiające bez zmiany to, co jest do konstrukcji istotnie potrzebne.

Zaznaczymy w szczególności dwa zastosowania tej metody:

1) Sprowadzenie konstrukcji do granic danego arkusza rysunku, co można w dogodny sposób wykonać, zależnie od okoliczności, za pomocą jednokładności, kolineacji środkowej, albo też odwrotności względem koła.

Jednokładność przedstawia tę korzyść, że zachowuje kąty i stosunki odcinków, a więc w szczególności zamienia koło na koło; ale nie sprowadza do odległości skończonej elementów nieskończenie oddalonych, nie może więc sprowadzić do granic uprzednio wskazanych wszystkich konstrukcji linjowych, a zwłaszcza tych konstrukcji, w których chodzi o proste równoległe. W takim razie można się z pożytkiem odwołać do ogólnej kolineacji środkowej. Osiągnięte w art. III sprowadzenie konstrukcji linjowych do granic rysunku opiera się w istocie na przekształceniu kolineacyjnym.

2) Zastąpienie jednej linji przez inną, jeżeli są poszukiwane punkty przecięcia, jest również świetnym zastosowaniem przekształceń, rozpatrywanych z zajętego przez nas stanowiska.

Prosty przykład takiego zastosowania mieliśmy w artykule III, gdzie była zastosowana jednokładność do przekształcenia koła jakiegokolwiek (oznaczonego ale nie wyrysowanego) na koło podstawowe wyrysowane, a na tym została oparta możność zastąpienia w ogólności użytku cyrkla przez koło stałe (jeżeli oprócz tego można rozporządzać linjałem).

Ogólniej jeszcze, kolineacja pozwala nam sprowadzić badanie prze-

---

[1]) Por. F. Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen 1872, przedrukowane w Math. Annalen 43 (Erlanger Programm). Przekład polski w t. X „*Prac Matematyczno-fizycznych*".

cięć stożkowej dowolnie obranej, co stanowi więcej, niż zwykłe udogodnienie położenia, gdyż można wtedy przekształcić stożkową daną na stożkową szczególną, np. na koło. Do takiego celu wystarcza przekształcenie środkowo-kolineacyjne; przekształcenie takie pozwala nam więc rozwiązać cyrklem zadanie przecięcia jakiejkolwiek stożkowej, oznaczonej ale nie wyrysowanej, z linją prostą[1]) (por. § 13).

Inny ciekawy przykład dotyczy możliwości wyznaczenia linjowego przecięć stożkowej albo koła $K$ z prostą, jeżeli jest wyrysowany dowolnie mały łuk krzywej $K$.

Wystarcza w tym celu zastosowanie przekształcenia kolineacyjnego krzywej $K$ na siebie samą, tak ażeby jej łuk, zawierający punkty szukane (łuk taki można wyznaczyć linjowo) zamienił się na łuk dany[2]).

**§ 13. Sprowadzenie do przypadku szczególnego.** Z rozważań dotychczasowych widoczny jest inny jeszcze pożytek przekształceń.

Oprócz dogodności położenia przekształcenia pozwalają jeszcze osiągnąć inne korzyści przez specjalizowanie i upraszczanie figur na różne sposoby. Jakkolwiek zastosowania tego rodzaju zjawiają się już w przypadkach najelementarniejszych (art. I), jednakże ogromne rozszerzenie ich zakresu osiąga się dopiero wychodząc poza podobieństwo.

Najprostszemi przekształceniami, które powstają przez uogólnienie przekształceń elementarnych, są w ogólności te, które się otrzymuje przez rzuty wielokrotne płaszczyzny (Poncelet). Te przekształcenia rzutowe można wykonywać na płaszczyźnie danej, nie występując z niej; charakterystyczną ich własnością jest, że zamieniają proste na proste, wskutek czego nadano im nazwę kolineacji albo homografji (Möbius).

Jeżeli na prostej są dane trzy punkty $ABC$, to konstrukcja punktu (czwartego harmonicznego) $D$, dla którego

$$\frac{AD}{BD} = -\frac{AC}{BC}$$

nie jest odrazu widoczna. Przez rzut ta konstrukcja staje się nam oczywistą, jeżeli mamy na uwadze niezmienność rzutową dwustosunku, skąd wyprowadza się właśnie znaną własność czworokąta (art. III, § 5).

Korzyść zastąpienia rzutów przez konstrukcje kolineacyjne na płasz-

---

[1]) Rozwiązanie elementarne tego zadania było podane w art. VII.

[2]) Por. F. Severi, *Sui problemi determinati risolubili colla riga e col compasso.* Circolo Matematico di Palermo, 1904. Istnieje także twierdzenie analogiczne o wyznaczaniu przecięć stożkowej z prostemi i kołami; to twierdzenie zostało wyrażone przez Descartes'a a dowiedzione przez Smith'a, *Mémoires sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques.*

czyźnie okazuje się, kiedy trzeba wykonywać działania na figurze w związku z figurą przekształconą. I tak zwróciliśmy już uwagę, że zadanie znalezienia punktów przecięcia stożkowej z prostą sprowadza się do przecięcia koła z prostą za pomocą kolineacji, która może być kolineacją środkową.

Ażeby stożkowa $C$ przekształciła się środkowo-kolineacyjnie na koło, wystarcza w rzeczy samej obrać za prostą zbiegu (której odpowiada prosta w nieskończoności) jakąkolwiek prostą $a$ leżącą zewnątrz $C$ i postarać się o to, ażeby inwolucja punktów sprzężonych, wyznaczona przez $C$ na $a$, przekształciła się na inwolucję bezwzględną; można tak uczynić np. za pomocą kolineacji środkowej, której środek jest punktem wspólnym kół, mających za średnice odcinki, zawarte między punktami sprzężonemi inwolucji.

Okazuje się, że takie przekształcenie pozwala także sprowadzić poszukiwanie przecięć dwuch stożkowych do przecięć stożkowej (którą może być, stosownie do woli, elipsa, hiperbola lub parabola) z kołem. Można otrzymać rezultat jeszcze wydatniejszy: przypuśćmy, że mamy dwie stożkowe $C_1$, $C_2$ oznaczone ale nie wyrysowane; oprócz tego niech będzie dana parabola $K_1$ całkowicie wyrysowana. Można wyznaczyć prostą $p$ styczną do stożkowej $C_1$, leżącą zewnątrz $C_2$; można teraz obrać na płaszczyźnie kolineację (która w ogólności nie będzie środkową), mającą $p$ za prostą zbiegu i zamieniającą stożkową $C_1$ na $K_1$, a inwolucję punktów sprzężonych względem $C_2$ — daną na $p$ — na inwolucję bezwzględną; przeto $C_2$ przekształci się za pomocą tej kolineacji na koło $K_2$. Tym sposobem zadanie wyznaczenia przecięć $C_1$ i $C_2$ sprowadza się do przecięć paraboli $K_1$ (danej uprzednio) z kołem $K_2$.

Okazuje się więc, że z a d a n i a (4-go stopnia, albo dające się sprowadzić do szeregu zadań czwartego stopnia) r o z w i ą z a l n e z a p o m o c ą s t o ż k o w y c h, d a d z ą s i ę r o z w i ą z a ć z a p o m o c ą c y r k l a i p a r a b o l i s t a ł e j [1]).

Ten rezultat jest zresztą zawarty w rezultacie osiągniętym inną drogą w artykule VII, gdyż zadania 4-go stopnia, na zasadzie znanego rozwiązania równania stopnia czwartego, dają się sprowadzić do zadań stopnia drugiego i trzeciego.

Z zasługujących na uwagę kolineacji wymienimy p o k r e w i e ń s t w a (M ö b i u s a), czyli kolineacje, które pozostawiają bez zmiany prostą w nieskończoności; można je z korzyścią stosować do zadań, których

---

[1]) Stosownie do twierdzenia D e s c a r t e s'a-S m i t h'a, wspomnianego poprzednio, wystarcza dać łuk paraboli.

przedmiotem są pola figur, gdyż mają tę własność charakterystyczną, że zmieniają pola w stosunku stałym[1]).

Przypuśćmy np., że mamy „wpisać w elipsę równoległobok, mający pole dane; oprócz tego może być jeszcze dany jeden wierzchołek równoległoboku". To zadanie można sprowadzić do „wpisania w koło prostokąta, mającego pole dane" za pomocą przekształcenia elipsy na koło przez pokrewieństwo, czyli przez kolineację środkową, mającą środek w nieskończoności. To ostatnie zadanie łatwo się rozwiązuje, gdyż zależy od równań

$$xy=a^2, \quad x^2+y^2=4r^2,$$

(gdzie $a^2$ oznacza pole dane, a $r$ promień koła); znajdujemy więc

$$x+y=\pm 2\sqrt{r^2+\frac{a^2}{2}}$$

$$x-y=\pm 2\sqrt{r^2-\frac{a^2}{2}},$$

gdzie $x$ i $y$ są bokami prostokąta, który należało wpisać w koło.

**§ 14. Równoważność środków konstrukcyjnych.** Przekształcenia nietylko dostarczają pomocy w rozwiązywaniu faktycznym zadań danych, ale też oświetlają zagadnienie rozwiązalności zadań za pomocą przyrządów danych.

Niech będzie dany przyrząd $a$, który pozwala wykonywać pewne działania podstawowe $A_1, A_2, \ldots$; te działania określają pewne ciało $(A)$ zadań, rozwiązalnych za pomocą $a$ (por. § 8).

Wykonajmy teraz przekształcenie, które zamienia $A_1, A_2, \ldots$ na jakieś nowe konstrukcje $A_1', A_2', \ldots$ Wartość przyrządu $a'$, któryby pozwolił wykonywać działania $A_1', A_2', \ldots$ można odrazu ocenić, jeżeli jest znana wartość przyrządu $a$, gdyż ciałem zadań, rozwiązalnych przyrządem $a'$, jest ciało $(A')$ otrzymane z przekształcenia ciała $(A)$.

W szczególności jeżeli ciało $(A')$ zawiera działania $A_1, A_2, \ldots$, wtedy to ciało zawiera całe ciało $(A)$, a więc przyrząd $a'$ może zastąpić $a$.

Dochodzi się do tego samego wyniku, jeżeli przyrząd $a'$ pozwala wykonać przekształcenie powyższe, ponieważ wtedy przyrząd ten czyni możliwym sprowadzenie konstrukcji $A_1, A_2 \ldots$ do $A_1'$, $A_2', \ldots$ Przekształcenie dostarcza więc kryterjum, za pomocą którego moż-

[1]) Por. np. Enriques. Lezioni di Geometria proiettiva, § 50.

na wydać sąd o równoważności danych środków konstrukcyjnych.

Prosty przykład tego rodzaju poznaliśmy w artykule II; ponieważ przekształcenie przez promienie odwrotne daje się wykonać samym cyrklem i ponieważ takie przekształcenie zamienia figurę złożoną z koła i prostych płaszczyzny na zbiór kół, przeto wnosimy stąd, że samym cyrklem można wykonać te konstrukcje, które się otrzymuje za pomocą linjału i koła stałego, czyli (stosownie do rezultatów Ponceleta i Steinera, art. III) wszystkie konstrukcje, wykonalne linjałem i cyrklem.

Podobnie figura, złożona z paraboli stałej i z kół płaszczyzny, przechodzących przez wierzchołek paraboli, przekształca się — przez odwrotność — na figurę złożoną z krzywej wymiernej rzędu trzeciego i z prostych; a ponieważ to przekształcenie można wykonać samym linjałem, jeżeli są dane twory miarowe płaszczyzny (np. za pomocą kwadratu), wnosimy przeto, że zadania stopnia trzeciego, które dają się rozwiązać za pomocą przecięć paraboli z kołami przechodzącemi przez jej wierzchołek, można też rozwiązywać samym linjałem, jeżeli jest dana na płaszczyźnie stała krzywa wymierna stopnia trzeciego i kwadrat, albo też cysoida i środek jej koła tworzącego, gdyż w tym przypadku można zbudować kwadrat (por. art. VII, § 19).

Drugi pouczający przykład o charakterze nieco odmiennym jest następujący.

Rozpatrujmy na płaszczyźnie biegunowość względem koła, która jest przekształceniem punktów na proste i prostych na punkty. Za pomocą tej biegunowości, której konstrukcja jest linjowa, działanie „przecinania koła prostą" przekształca się na „prowadzenie przez punkt stycznych do koła". A ponieważ pierwsze działanie, wraz z „obieraniem punktu" i „rysowaniem prostej", pozwala rozwiązywać wszystkie zadania stopnia drugiego, a w szczególności pozwala prowadzić przez punkt styczne do koła, przeto wnosimy, że te same zadania można rozwiązać drugim działaniem, które może być wykonane linjałem o dwuch krawędziach[1]). Rezultat ten został znaleziony innym sposobem w artykule III.

**§ 15. Rozwiązywanie zadań za pomocą elementów podwójnych odpowiedniości.** Przekształcenia albo odpowiedniości między punktami płaszczyzny albo prostej mają też zastosowanie szczególne w rozwiązywa-

---

[1]) Por. Enriques, *Lezioni di Geometria proiettiva*, § 74.—Możliwość wykonania praktycznego tego działania linjałem o dwuch krawędziach, mającym długość skończoną, wynika z tego, co było powiedziane w § 12 (por. Severi, l c.).

niu zadań, jeżeli punkty niewiadome są punktami podwójnemi odpowiedniości.

Najprostszy taki przykład był podany w artykule III pod nazwą metody prób. W zadaniach tam rozpatrywanych punkty niewiadome były punktami podwójnemi w rzutowości na prostej; ta rzutowość była wyznaczona przez trzy próby nieudane.

W ogólności jeżeli punkty poszukiwane (na prostej lub na płaszczyźnie) są punktami połączonemi odpowiedniości, której konstrukcja jest znana, wtedy mamy przynajmniej sposób zbliżenia się do rozwiązań za pomocą kolejnych przybliżeń, powtarzając konstrukcję tej odpowiedniości[1]).

Zastosujemy tę metodę jeszcze w jednym przykładzie, w którym występuje oddowiedniość wyższa od rzutowości.

Przypuśćmy, że mamy wstawić między dwie dane proste $a$, $b$ odcinek długości danej, tak ażeby jego przedłużenie przeszło przez dany punkt $O$ (art. VII).

Próby rozwiązania zadania linjałem i cyrklem prowadzą oczywiście do odpowiedniości [2, 2], w której każdemu punktowi prostej $a$ odpowiadają dwa punkty prostej $b$ i odwrotnie. Rzutując z $O$ prostą $b$ na $a$, otrzymuje się na $a$ odpowiedniość [2, 2], mającą 4 punkty podwójne, które rozwiązują zadanie.

Zastosujemy jeszcze tę samą metodę do konstrukcji pierwiastków równania stopnia trzeciego

$$f_3(x)=0,$$

o czym już była mowa w artykule VII.

Prosta konstrukcja gieometryczna Grassmanna (polegająca na uogólnieniu teorji czwartych punktów harmonicznych[2])) pozwala rozpatrywać trzy punkty prostej, mające za odcięte powyższe pierwiastki, jako punkty podwójne odpowiedniości [1, 2] (biegunowość względem trój-

---

[1]) Z zastosowania tej metody przybliżenia do znalezienia punktów podwójnych rzutowości na prostej powstaje znane rozwinięcie wielkości niewymiernej stopnia drugiego na ułamek ciagły okresowy. Analogiczne postępowanie względem punktów podwójnych kolineacji płaskiej odpowiada uogólnieniu tego algorytmu na wielkości niewymierne stopnia trzeciego i t. d. (Jacobi, Minkowski).

Ponieważ $n$ punktów prostej, danych przez równanie stopnia $n$, można uważać za punkty połączone odpowiedniości [1, $n$—1], przeto można osiągnąć przedstawienie wielkości niewymiernej stopnia $n$ metodą iteracyjną, polegającą na powtarzaniu działania wymiernego stopnia $n-1$.

[2]) Por. Cremona, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, Bologna 1862, przekład niem. (Curtze) Greifswald 1865.

ki), która powstaje przez podporządkowanie rzutowe punktów prostej parom inwolucji $I$ (albo promieniom pęku, złożonego ze stycznych do kół, przechodzących przez dwa punkty stałe, z których jeden jest wierzchołkiem pęku, i przecinających prostą w parach inwolucji).

Rzutujemy teraz powyższą odpowiedniość na stożkową (np. na koło) $C$, obierając środek rzutów $O$ na tej krzywej; inwolucja na $C$ będzie wyznaczona przez proste pęku $P$, rzutowego z pękiem $O$. Dwa pęki rzutowe $O$ i $P$ wytwarzają stożkową, której przecięcia z $C$ dają rozwiązania równania stopnia trzeciego.

Przypuśćmy teraz, że jest dana na płaszczyźnie krzywa rzędu trzeciego $C$, mająca punkt podwójny $O$. Styczne w $O$ do krzywej $C$ spotykają prostą w dwuch punktach $A$, $B$. Możemy zastosować do prostej przekształcenie rzutowe tak, ażeby inwolucja (która jest przekształceniem inwolucji $I$) zawierała parę $AB$ i żeby punkt $P$, odpowiadający tej parze w odpowiedniości danej, zajął położenie dowolne, które później wskażemy.

Rzutujemy teraz z punktu $O$ prostą $AB$ na krzywą $C$; rzuty par inwolucji $I$ utworzą na $C$ inwolucję $I'$, o której łatwo dowieść, że jej pary leżą na prostych, przechodzących przez stały punkt $P'$ krzywej $C$. Możemy założyć, że punkt $P'$ jest rzutem punktu $P$. Wtedy odpowiedniość [1, 2], dana na naszej prostej, zamienia się na odpowiedniość perspektywiczną między pękami promieni $O$ i $P'$. Oś perspektywiczna spotyka krzywą w punktach podwójnych.

Tym sposobem otrzymuje się nowe dowodzenie możliwości konstrukcji pierwiastków równania stopnia trzeciego za pomocą przecięć stałej krzywej wymiernej stopnia trzeciego z prostą (por. art. VII, § 19).

**§ 16. Zakończenie.** Oświetliliśmy z różnych stanowisk postępy w konstrukcjach i metodach rozwiązywania całokształtu zadań, dokonane przez Algiebrę i Gieometrję nowożytną, oraz poznaliśmy płynące stąd korzyści ekonomiczne.

W szczególności nauczyliśmy się klasyfikować zadania przez rozstrzyganie możliwości konstrukcji przyrządami danemi; usuwa się przez to daremne usiłowania, skierowane do osiągnięcia celów niemożliwych wobec środków rozporządzalnych.

Jakkolwiek pojęcia nauki nowożytnej są ogólniejsze i potężniejsze od starożytnych, zmuszają nas więc do przyznania im wyższości, to jednak musimy uwzględnić, że te pojęcia przedstawiają się nam na pierwszy rzut oka jako więcej abstrakcyjne, a zatym więcej oddalone od postaci bezpośredniej, pod jaką zwykle bywają stawiane zadania praktyczne.

Ażeby odnaleźć w tej abstrakcji zawartość konkretną, najlepiej jest przebyć drogę, którą postępował umysł ludzki, a więc podjąć na nowo metody i zasady elementarne Greków.

Dlatego też nie chcemy usuwać na bok nic z tego, czego nas nauczyli matematycy starożytni, a od spółczesnej, wyższej i szerszej kultury naukowej żądamy jedynie wyjaśnienia istoty Gieometrji elementarnej, której cudowne szczegóły tym jaśniej błyszczą w świetle nowożytnych pojęć ogólnych.