ARTYKUŁ SIÓDMY.

Zadania stopnia trzeciego: Podwojenie sześcianu. Podział kąta na trzy części równe.

napisał

Alberto Conti z Rzymu.

WSTĘP. Zagadnienie podwojenia sześcianu przeszło do nas od najodleglejszej starożytności. Świadczy o tym dokument autentyczny, a mianowicie list do Ptolemeusza III od matematyka greckiego Eratostenesa, urodzonego w Cyrene w wieku 3-im przed Chr.

Czytamy tam [1]):

„Eratostenes pozdrawia Ptolemeusza.

„Opowiadają, że jeden z dawnych autorów tragedji [2]) wprowadził na scenę Minosa [3]), wydającego rozporządzenie zbudowania grobu dla Glaukosa [4]); przekonawszy się, że każdą krawędź tego grobu miała sto stóp długości, Minos powiada: „małą przestrzeń, doprawdy, wyznaczyłeś grobowi królewskiemu; podwój ją, zachowując jej postać sześcienną, podwój prędko wszystkie boki grobu". Oczywiście mylił się; gdyż przez podwojenie boków figura płaska [5]) powiększa się czterokrotnie, a bryłowa [6]) ośmiokrotnie. Otóż i u matematyków powstaje pytanie, w jaki sposób

---

[1]) Por. Archimedis *opera omnia cum commentariis Eutocii*, ed. Heiberg, Lipsk 1881, tom 3, str. 102—106.

[2]) Podług niektórych autorów był to Eurypides (por. N. Th. Reimer, *Historia problematis de cubi duplicatione sive de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas.* Göttingen 1798, str. 20); inni przeczą temu (por. Heiberg, str. 105 tomu, cytowanego w poprzednim odsyłaczu).

[3]) Starożytny król Krety.

[4]) Jego syn.

[5]) Kwadrat.

[6]) Sześcian.

można podwoić jakąkolwiek figurę przestrzenną daną, zachowując jej postać, a zadanie to zostało nazwane podwojeniem sześcianu.

„Przez długi czas wszyscy byli niezdecydowani, dopiero pierwszy Hipokrates z Chios znalazł, że gdyby można było pomiędzy dwie linje proste, z których jedna jest dwa razy większa od drugiej, wstawić dwie średnie, stanowiące z tamtemi proporcję ciągłą, wtedy sześcian możnaby było podwoić — i w ten sposób zamienił jedną trudność na drugą, nie mniejszą.

„Opowiadają jeszcze, że później delijczycy, których wyrocznia [1]) skłoniła do podwojenia pewnego ołtarza, trafili na tę samą trudność [2]). I wysłano posłów do matematyków, którzy się zgromadzali w Akademji Platona, ażeby ci znaleźli poszukiwaną odpowiedź. Wzięto się do tego z zapałem i, jak mówią, starając się wstawić dwie średnie proporcjonalne między dwie proste, Archytas Tarentyjczyk osiągnął to za pomocą półwalców, a Eudoksus za pomocą pewnych linji krzywych. Następnie inni udoskonalili dowodzenia, ale nie mogli wykonać konstrukcji i zastosować jej w praktyce, z wyjątkiem może Menaechmosa, i to z wielkim trudem...“

Oto początek listu, w którym Eratostenes przedstawił legendarny początek zagadnienia i pierwsze usiłowania rozwiązania; razem z tym listem Eratostenes przesłał królowi Ptolemeuszowi swoje własne rozwiązanie tego zadania, o czym później będzie mowa (§ 6).

Tymczasem musimy się zatrzymać na pomyśle, przypisywanym przez jednozgodne mniemanie historyków Hipokratesowi z Chios (który żył w drugiej połowie wieku V przed Chr.), a mianowicie na pomyśle sprowadzenia rzeczonego zadania do innego, zwanego „wstawieniem między dwa odcinki dane dwuch średnich proporcjonalnych“, które to zadanie w języku nowożytnym można tak wypowiedzieć:

Jeżeli są dane dwa odcinki a, b, to mamy wykreślić dwa inne odcinki x, y, które z a, b, przyjętemi za wyrazy skrajne, tworzą postęp gieometryczny

$$a,\ x,\ y,\ b,$$

a więc:

(1) $$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

W rzeczy samej, z tego łańcucha stosunków wynika:

---

[1]) Wiadomo, że na Delos, małej wyspie morza Egiejskiego, Apollo miał ołtarz i był szczególnie czczony.

[2]) Skąd pochodzi nazwa zadania delijskiego, którą często oznacza się zagadnienie, tutaj omawiane.

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ x = \dfrac{ab}{y}, \end{cases}$$

przeto

(2) $$x^3 = a^2 b,$$

z czego widać, że odcinek x jest krawędzią sześcianu, równoważnego z prostopadłościanem danym, mającym za podstawę kwadrat o boku a, a za wysokość odcinek b[1]).

Jeżeli w szczególności uczynimy $b = ma$, to z (2) wyniknie

$$x^3 = ma^3,$$

a więc równanie mnożenia sześcianu przez dowolną liczbę całkowitą m; jeżeli zaś, specjalizując dalej, przyjmiemy $b = 2a$, to dojdziemy właśnie do zadania podwojenia sześcianu o krawędzi a.

Przez odkrycie, przypisywane Hipokratesowi, trudność zmieniła jedynie postać, a osiągnięto tylko tę korzyść, że zadanie pierwotne zostało przedstawione jako zadanie gieometrji płaszczyzny; ale napróżno czyniono usiłowania rozwiązania tego zadania przez zastosowanie tylko linjału i cyrkla. W warunkach, w jakich zadanie zostało postawione, rozwiązanie nie było możliwe; ale ujawnienie tej niemożliwości zależy od badań o charakterze obcym zupełnie badaniom Greków.

Można zresztą przypuszczać, że sami Grecy podejrzewali, iż zadanie nie da się rozwiązać tylko za pomocą środków gieometrji elementarnej, wobec tego, że rezultaty Archytasa, Platona, Menaechmosa, Eratostenesa, Apolonjusza, Nikomedesa, Dioklesa dowodzą, jak zobaczymy, że ci matematycy, przynajmniej tymczasowo, musieli zrezygnować z warunków, które sobie założyli, i obmyśleć rozwiązania oparte na metodach, różniących się zasadniczo od tych, które sami stosowali do rozwiązywania innych zadań gieometrycznych.

* * *

O starożytności zagadnienia podziału kąta na trzy części równe nie mamy miarodajnych świadectw, ale bieg postępów umysłu ludzkiego nie pozwala o niej wątpić[2]); po otrzymaniu po-

[1]) Widzimy więc, że do wstawienia dwuch średnich proporcjonalnych między dwa odcinki dane a, b sprowadza się także zadanie ogólne zbudowania sześcianu równoważnego z prostopadłościanem danym.

[2]) Por. J. F. Montucla, *Histoire des mathématiques*, Paris 1792—1807, Część I ks. 3.

działu kąta na dwie części równe pierwsze pytanie, które przyszło na myśl, było niezawodnie zadanie podziału kąta na dwie części, będące do siebie w stosunku danym, co możnaby było wnosić z wynalezienia kwadratury Hipjasza (§ 11). Od Hipjasza do Archimedesa nie mamy do wymienienia innych matematyków w związku z tym zadaniem, a od Archimedesa dochodzimy do Papusa, który w księdze IV swego „Zbioru“ mówi o dwuch konstrukcjach, które musimy uważać za najdawniejsze, ale o których nie wiemy, komu należałoby je pierwotnie przypisać.

I nad tym zadaniem dokonywano niezliczonych bezowocnych usiłowań; możemy powtórzyć za Bossutem[1]), że „ta zawziętość stała się rodzajem choroby epidemicznej, która się przenosiła ze stulecia na stulecie aż do naszych czasów; ta choroba musiała ustać i dla tych, którzy śledzili za postępem matematyki, rzeczywiście ustała, kiedy, w nowszych czasach, zaczęto stosować algiebrę do gieometrji. Dzisiaj choroba ta jest nieuleczalna tylko u tych, którzy atakują te zagadnienia bronią starożytnych i nie są obznajmieni z nauką dzisiejszą, wobec czego niema środka wyleczenia ich“.

Ale wszystkie te różnorodne poszukiwania, wywołane przez powyższe zagadnienie, jak również przez zagadnienie podwojenia sześcianu, były pożyteczne ze względu na zręcznie obmyślone przyrządy, wynalezione w celu rozwiązania rzeczonych zadań sposobem przybliżonym, w praktyce więcej niż wystarczającym, a nadewszystko ze względu na nowe teorje gieometryczne, dla których te poszukiwania stanowiły płodny zarodek.

Po tych uwagach wstępnych przystąpimy do omówienia obu zadań klasycznych; dowiedziemy przedewszystkim niemożliwości rozwiązania ich elementarnie, czyli tylko za pomocą linjału i cyrkla (por. art. IV § 10), i wskażemy stosowane przez starożytnych i nowożytnych najgodniejsze uwagi metody rozwiązywania tych zadań za pomocą stożkowych, albo za pomocą krzywych rzędu wyższego niż drugi, albo za pomocą przyrządów umyślnie zbudowanych, albo wreszcie za pomocą elementarnych metod przybliżonych.

Zakończymy wskazaniem metod, służących do rozwiązywania najogólniejszych zadań stopnia 3-go, a w szczególności dowiedziemy, że wszystkie te zadania dadzą się sprowadzić do podziału kąta na trzy części równe lub do wstawienia dwuch średnich proporcjonalnych między dwoma odcinkami danemi.

W przedmiocie, o którym mówimy, istnieje rozległa literatura

---

[1]) Por. Charles Bossut, *Histoire générale des mathématiques*, Paris 1810.

z wszystkich czasów i z wszystkich krajów, taką siłę przyciągającą wywierały te zagadnienia. Ażeby mieć o tym pojęcie, wystarczy zajrzeć do Bibljografji Wölffinga[1]) który z wielką starannością odszukał i poklasyfikował chronologicznie setki prac dotyczących podziału kąta na trzy lub więcej części równych. Tym trudniejsze jest nasze zadanie utrzymania się w granicach, odpowiadających książce, której część stanowi ten artykuł; mamy przecie zamieścić najgodniejsze uwagi badania starożytnych i nowożytnych, uwzględnić podobieństwo różnych rozwiązań w celu uniknięcia zbytecznych powtórzeń i opuścić poprostu wszystkie usiłowania całkiem bezowocne.

Niech nam te uwagi zjednają większe pobłażanie czytelników!

I.

§ 1. Niemożliwość elementarnego rozwiązania zadania o podwojeniu sześcianu. Jeżeli l jest krawędzią danego sześcianu, a więc l^3 przedstawia jego objętość, wtedy krawędź sześcianu dwa razy większego, niż poprzedni, jest oczywiście pierwiastkiem równania dwumiennego stopnia trzeciego

(1) $$x^3 - 2l^3 = 0.$$

Jeżeli przypuścimy, że krawędź sześcianu danego równa się 1, co można oczywiście uczynić, nie nadwerężając ogólności naszych wywodów, wtedy równanie (1) zamieni się na

(2) $$x^3 - 2 = 0.$$

Równanie to jest nieprzywiedlne.

Ten rezultat jest zawarty w następującym twierdzeniu ogólniejszym. Niech będzie $a\left(=\frac{m}{n}\right)$ liczbą wymierną, a $\frac{m}{n}$ niech będzie ułamkiem nieprzywiedlnym, przedstawiającym tę liczbę; wtedy równanie $x^3 - \frac{m}{n} = 0$, od którego zależy pomnożenie sześcianu przez $\frac{m}{n}$, jest nieprzywiedlne, jeżeli liczby m i n nie są obie sześcianami liczb całkowitych.

W rzeczy samej, gdyby równanie powyższe było przywiedlne, wtedy musiałoby być tożsamościowo:

[1]) Por. Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen im Auftrage des mathematisch-naturwissenschaftlichen Vereins in Württemberg 1900 (Januar—Oktober), 1902 (Juli).

$$x^3 - a = (x - b)(x^2 + cx + d),$$

gdzie b, c, d są liczbami wymiernemi. A więc równanie $x^3 - a = 0$ miałoby pierwiastek wymierny $x = b$, a przedstawiając b pod postacią ułamka nieprzywiedlnego $b = \frac{p}{q}$, dostalibyśmy

$$\frac{p^3}{q^3} = \frac{m}{n}$$

a zatym

$$p^3 = m, \ q^3 = n \qquad \text{c. b. d. d.}$$

W szczególności równanie $x^3 - m = 0$, gdzie m jest liczbą całkowitą, jest nieprzywiedlne, jeżeli m nie jest sześcianem innej liczby całkowitej; a więc nieprzywiedlne są równania

$$x^3 - 2 = 0, \ x^3 - 3 = 0, \ x^3 - 4 = 0, \ x^3 - 5 = 0,$$

$$x^3 - 6 = 0, \ x^3 - 7 = 0, \ x^3 - 9 = 0 \ \text{i t. d.},$$

natomiast są przywiedlne równania

$$x^3 - 8 = 0, \ x^3 - 27 = 0 \ \text{i t. d.},$$

gdyż 8, 27,... są sześcianami liczb całkowitych 2, 3,...

Otóż w teorji równań algiebraicznych dowodzi się, że równanie algiebraiczne nieprzywiedlne, którego stopień nie jest potęgą dwuch, nie może być rozwiązane za pomocą pierwiastków stopnia drugiego[1]).

A zatym równanie podwojenia sześcianu

$$x^3 - 2 = 0$$

nie jest rozwiązalne za pomocą pierwiastków stopnia drugiego.

Dlatego też[2]) wyrażenie, przedstawiające rozwiązanie równania $x^3 - 2 = 0$, nie da się wykreślić za pomocą prostych i kół, to znaczy, że nie można rozwiązać zadania o podwojeniu sześcianu, używając tylko linjału i cyrkla.

Ogólniej, przez zastosowanie tylko prostej i koła nie można rozwiązać zadania pomnożenia sześcianu w tych przypadkach, kiedy mnożnik nie jest sześcianem liczby wymiernej (a więc, w szczególności, sześcianem liczby szeregu naturalnego, o ile mnożnik jest liczbą całkowitą).

---

[1]) Por. art. V.

[2]) Por. art. IV, § 8.

§ 2. Metoda Architasa wykreślenia dwuch średnich proporcjonalnych. Podług zgodnego mniemania historyków matematyki zawdzięczamy pierwsze z licznych rozwiązań tego zadania Architasowi Tarentyjczykowi (ur. około r. 430 przed Chr.); to rozwiązanie zasługuje bardzo na uwagę, jakkolwiek jego użyteczność praktyczna jest wątpliwa. Montucla[1]), który wprost odmawia mu wszelkiego pożytku praktycznego, mówiąc, że „chociaż ten sposób jest bardzo pomysłowy, ale istnieje tylko dla umysłu, i praktyka nie mogłaby od niego otrzymać żadnej pomocy", dodaje jednak, że ten sposób „bardzo zadowala umysł i pozwala wytworzyć sobie korzystne mniemanie o gienjuszu wynalazcy". Sposób ten zasługuje na osobną wzmiankę, ponieważ odbiega zasadniczo od wszystkich innych rozwiązań tego zadania, później wynalezionych. Wykład Eudemusa tego sposobu jest przedstawiony w komentarzu Eutokiusza do księgi II dzieła Archimedesa „o kuli i walcu"; objaśnienie podali Loria i Zeuthen w swych pracach: „Le scienze esatte nell' antica Grecia" i „Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter", na które później nieraz się będziemy powoływali. Objaśnienie następujące jest podane we włoskim dziele „Lezioni di Algebra elementare", napisał G. Bellacchi (Firenze 1884, tom II, str. 134—135).

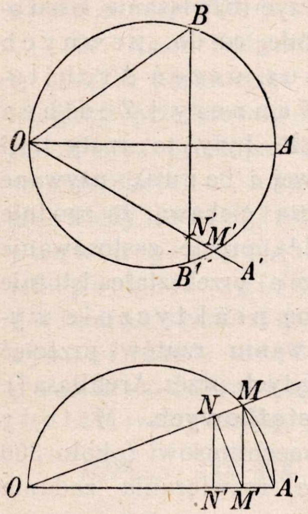

Fig. 75.

Wykreśliwszy na płaszczyźnie α okrąg o średnicy OA, równej odcinkowi większemu a (fig. 75), i wpisawszy w ten okrąg cięciwę $OB = b$, Architas buduje powierzchnię walcową, której kierownicą jest rzeczony okrąg AOB, a tworzące są równoległe do prostej OC prostopadłej do płaszczyzny α; następnie powierzchnię stożkową, utworzoną przez obrót prostej OB dokoła OA oraz powierzchnię obrotową (torus), która powstaje przez obrót dokoła OC półkola opisanego na średnicy OA w płaszczyźnie COA prostopadłej do α; dwie linje przecięcia powierzchni walcowej z każdą z dwuch pozostałych powierzchni mają punkt wspólny M; odcinek OM i jego rzut prostokątny na płaszczyznę α OM', są dwiema średniemi proporcjonalnemi między OA i OB. W rzeczy samej, ponieważ punkt M leży na powierzchni walcowej, prze-

[1]) Por. *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle avec une addition concernante les problèmes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle.* Paris, 1831, str. 223 i nast.

to rzut jego M' należy do okręgu OAB, a półokrąg południkowy, przechodzący przez M, przecina OM' w punkcie A' takim, że OA' równa się średnicy OA. Poprowadźmy z punktu B do prostej OA prostopadłą BB', przecinającą OM' w punkcie N', a okrąg OBA w punkcie B'; płaszczyzna, poprowadzona przez BB' prostopadle do OA, przecina powierzchnię stożkową wzdłuż okręgu o średnicy BB', a tworzącą OM tej powierzchni w punkcie N, skąd otrzymamy zależności:

$$ON = OB = b;\ NN'^2 = BN' \,.\, N'B' = ON' \,.\, N'M';$$

a więc trójkąt ONM' ma przy wierzchołku N kąt prosty, a równoległość prostej NM' do MA' prowadzi, ze względu na to, że trójkąt OMM' ma przy wierzchołku M' kąt prosty, do równości stosunków:

$$ON : OM' = OM' : OM = OM : OA',$$

czyli

$$b : OM' = OM' : OM = OM : a;$$

stąd wynika, jak to utrzymywaliśmy, że OM i OM' są średniemi proporcjonalnemi między a i b.

Do tego rozwiązania Architasa możemy dołączyć rozwiązanie Eudoksusa, o którym już mówiliśmy we wstępie; istotnie, co do „pewnych linji krzywych“, za pomocą których Eudoksus, uczeń Architasa, miał rozwiązać zadanie delijskie, Loria, Tannery i Zeuthen w braku dokładnych informacji, przypuszczają, że były to rzuty linji przecięcia trzech powierzchni (stożkowej, walcowej i torus), używane w konstrukcji Architasa. Bądź co bądź jest rzeczą ciekawą, że zgodnie z uwagą, którą po raz pierwszy uczynił Flauti[1]), proste zastosowanie metody gieometrji wykreślnej (podwójny rzut Monge'a) przekształca istotnie konstrukcję Architasa na konstrukcję planimetryczną praktycznie wykonalną, a zastosowanie to polega na rozpatrywaniu rzutów przecięć wzajemnych trzech powierzchni pomocniczych, użytych przez Architasa[2]).

§ 3. Podwojenie sześcianu za pomocą stożkowych. Metody Menaechmusa.—Matematykowi greckiemu Menaechmusowi (około 300 lat przed Chr.) zawdzięczamy dwa następujące rozwiązania zadania o dwuch średnich proporcjonalnych.

1. Jeżeli a, b są danemi odcinkami, to wykreślmy jedną parabolę MAN (fig. 76) o parametrze a i drugą parabolę RAS, mającą ten sam wierzchołek A, co i pierwsza, oś AY prostopadłą do osi AX pierw-

---

[1]) Por. Flauti, *Geometria di sito sul piano e nello spazio,* Napoli 1821, 2-e wyd.

[2]) Por. Loria, *Le scienze esatte nell' antica Grecia.* Księga I, str. 97 i nast.

szej paraboli i parametr równy b. Odległości OP, OQ punktu przecięcia tych dwuch paraboli od ich osi są dwiema średniemi proporcjonalnemi między danemi odcinkami a i b.

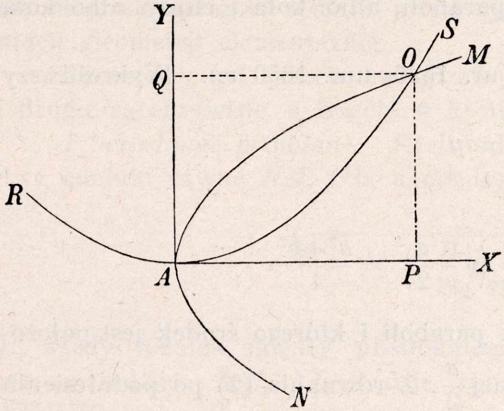

Fig. 76.

Istotnie, ponieważ

$$AP = QO \text{ i } AQ = PO,$$

przeto

$$OP^2 = a \,.\, AP \text{ i } AP^2 = b \,.\, OP,$$

a więc

$$\frac{a}{OP} = \frac{OP}{AP} = \frac{AP}{b},$$

czyli

$$\frac{a}{OP} = \frac{OP}{OQ} = \frac{OQ}{b}, \text{ c. b. d. d.}$$

Jeżeli w szczególności $b = 2a$, wtedy odcinek OP jest krawędzią sześcianu dwa razy większego od sześcianu o krawędzi a.

2. Niech będą znowu a, b odcinkami danemi. Wykreślmy parabolę MAN o parametrze a i hiperbolę równoboczną ($xy = ab$), której jedną gałąź przedstawia SBT (fig. 77), a która ma za asymptoty oś AX paraboli oraz prostopadłą do niej AY w wierzchołku A, a za potęgę iloczyn ab; wtedy odległości BD, BC punktu przecięcia paraboli i hiperboli od osi AX, AY są dwiema średniemi proporcjonalnemi między dwoma danemi odcinkami a i b.

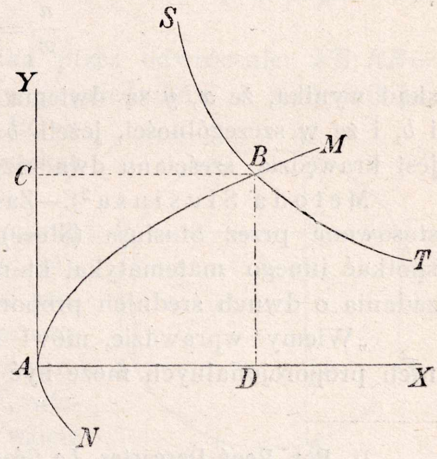

Fig. 77.

W rzeczy samej, ponieważ

$$BD^2 = a \,.\, AD; \; DA \,.\, BD = ab,$$

a $DA = BC$, przeto

$$\frac{a}{BD} = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{b}, \text{ c. b. d. d.}$$

Jeżeli w szczególności $b = 2a$, wtedy odcinek BD jest krawędzią sześcianu dwa razy większego od sześcianu o krawędzi a.

Tak w pierwszym jak w drugim z powyższych rozwiązań był robiony użytek z dwuch stożkowych, a mianowicie z dwuch paraboli w pierwszym rozwiązaniu, a z paraboli i hiperboli w drugim; ale łatwo się przekonać, że zadanie o dwuch średnich proporcjonalnych da się prościej rozwiązać za pomocą koła i paraboli, albo koła i elipsy, albo koła i hiperboli.

Metoda Kartezjusza[1]) (ur. 1596, um. 1650 r.). Wykreśliwszy parabolę

$$x^2 = ay, \tag{1}$$

wystarczy przeciąć ją okręgiem

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}, \tag{2}$$

który przechodzi przez wierzchołek paraboli i którego środek jest położony w punkcie o odciętej $\frac{b}{2}$ i rzędnej $\frac{a}{2}$. Z równania (2) po podniesieniu do kwadratu i po dokonaniu redukcji, wypada

$$x^2 + y^2 - bx - ay = 0,$$

skąd, uwzględniając (1), znajdujemy:

$$y^2 = bx. \tag{3}$$

A zatym, wskutek (1) i (3):

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b},$$

skąd wynika, że x, y są dwiema średniemi proporcjonalnemi między a i b, i że w szczególności, jeżeli $b = 2a$, to odcinek przedstawiony przez x jest krawędzią sześcianu dwa razy większego od sześcianu o krawędzi a.

Metoda Slusiusa[2]).—Zasługuje również na poznanie metoda zastosowana przez Slusiusa (Sluse), zwłaszcza, że nie przytrafiło nam się spotkać innego matematyka, któryby stosował elipsę do rozwiązania zadania o dwuch średnich proporcjonalnych.

„Wiemy wprawdzie, mówi sam Slusius, że zadanie o dwuch średnich proporcjonalnych może być rozwiązane krótszym sposobem, ale dla

---

[1]) Por. René Descartes, *La Géométrie*, Paris 1886, nowe wydanie Hermanna, str. 75.

[2]) Por. Renati Francisci Slusii, *Mesolabum seu duae mediae proportionales inter extremas datas per circulum et per infinitas hyperbolas vel ellipses et per quamlibet exhibitae ac problematum omnium solidorum effectio per easdem curvas*, Leodii, Eburonum 1668.

urozmaicenia i dla dania przykładu doniosłości metody, wyłożymy ją". Warto jeszcze zaznaczyć, że forma, w jakiej Sluse rozwija swoją metodę, jest *czysto elementarna*, jest więc z konieczności *rozwlekła*, ale nie staje się przez to zamało interesującą dla naszej pracy o zagadnieniach gieometrji elementarnej.

Zaczniemy od trzech twierdzeń przybranych, z których pierwsze i drugie są oczywiste, a trzecie w krótkości objaśnimy.

I twierdzenie przybrane. Jeżeli od odcinka ML (fig. 78) odetniemy dwa odcinki równe NM, OL, a między N i O obierzemy dowolny punkt

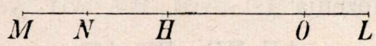

Fig. 78.

H, wtedy różnica między prostokątem o bokach MH, HL i prostokątem o bokach MN, NL będzie równoważna prostokątowi o bokach NH, HO.

II twierdzenie przybrane. Jeżeli na odcinku ER (fig. 79) obierzemy punkty G, Q, F w taki sposób, że $RE:FE=QE:GE$, wtedy EG

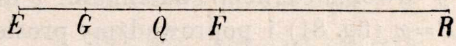

Fig. 79.

ma się do EQ jak prostokąt o bokach EF, FG do prostokąta o bokach EF, QR.

(W rzeczy samej, z założenia wynika przez odwrócenie: $FE:RE= =EG:QE$, a przez utworzenie różnicy poprzedników i następników: $FE-EG:RE-QE=EG:EQ$, czyli $FG:RQ = EG:EQ$, albo wreszcie $EG:EQ =$ prostokąt $(EF.FG)$: prostokąt $(EF.RQ)$).

III twierdzenie przybrane. Jeżeli w okrąg jest wpisany prostokąt $ABCD$ (fig. 80), a z punktu F okręgu jest poprowadzona prostopadła FE do AB w taki sposób, że prostokąt utworzony z boków AE i AB jest równoważny kwadratowi zbudowanemu na EF, wtedy cztery odcinki AD, AE, EF, AB, wzięte w tym właśnie porządku, tworzą postęp gieometryczny".

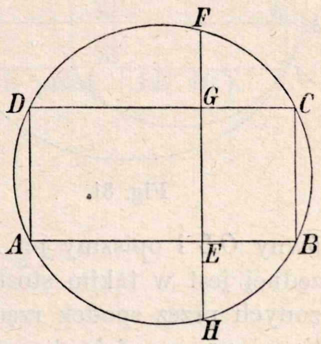

Fig. 80.

W rzeczy samej, jeżeli H jest drugim punktem przecięcia prostej FE z okręgiem, to prostokąt zbudowany z EF i GF jest równy prostokątowi zbudowanemu z EF i HE, jest więc równoważny prostokątowi zbudowanemu z AE i EB. Ale podług założenia prostokąt $(AB.AE)$, czyli suma prostokąta $(AE.EB)$ i kwadratu zbudowanego na AE, równa się kwadratowi zbudowanemu na EF, czyli sumie prostokątów $(EF.GF)$ i $(EF.EG)$. Po odjęciu równoważnych prostokątów $(AE.EB)$ i $(EF.GF)$ znajdziemy, że kwadrat z AE jest równoważny prostokątowi $(EF.EG)$, czyli:

$$EG:AE=AE:EF,$$

albo:

$$AD:AE=AE:EF.$$

A ponieważ podług założenia

$$AE:EF=EF:AB,$$

przeto

$$AD:AE=AE:EF=EF:AB, \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Na podstawie tych twierdzeń Sluse przystępuje do rozwiązania niezliczoną ilością sposobów zadania znalezienia za pomocą koła i elipsy, dwuch średnich proporcjonalnych między dwoma odcinkami danemi.

Niech będą x, y dwoma danemi odcinkami i niech będzie $x>y$. Uczyńmy odcinek $AB=x$ (fig. 81) i poprowadźmy prostopadle do tego odcinka $AD=y$; uzupełnijmy prostokąt $ABCD$ i opiszmy na nim okrąg. Na prostej AD obierzmy jakikolwiek punkt P i poprowadźmy PK równolegle do AB tak, ażeby odcinek PK był czwartą proporcjonalną do AP, AD, AB. Uzupełniwszy prostokąt $AIKP$, podzielmy jego boki przeciwległe AP i IK na dwie części równe w punktach N i O, połączmy N z O i przedłużmy NO do takiego punktu L, ażeby prostokąt utworzony z NL i OL był w takim stosunku do kwadratu z OK jak AD do AP. Przedłużmy jeszcze ON poza punkt N o odcinek NM równy OL i opiszmy na ML jako osi wielkiej elipsę, w której kwadrat rzędnej jest w takim stosunku do prostokąta utworzonego z obu (wyznaczonych przez spodek rzędnej) odcinków osi wielkiej jak AP do AD. Ta elipsa, na zasadzie konstrukcji, przejdzie przez A, I, P i K i przetnie okrąg w punkcie, który oznaczymy przez F; przez ten punkt F poprowadzimy prostopadłą do AB, przecinającą proste DC, PK, NO w punktach Q, G, H. Cztery odcinki AD, AE, EF, AB tworzą postęp gieometryczny.

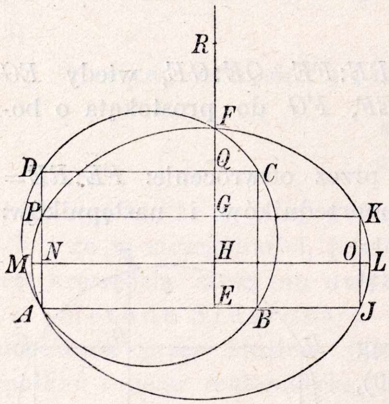

Fig. 81.

W rzeczy samej, z konstrukcji elipsy wynika:

$$HF^2 : NP^2 = MH \,.\, HL : MN \,.\, NL,$$

czyli

$$HF^2 : HG^2 = MH \,.\, HL : MN \,.\, NL,$$

skąd:

$$(HF^2 - HG^2) : HG^2 = (MH \,.\, HL - MN \,.\, NL) : MN \,.\, NL,$$

a ze względu na I twierdzenie przybrane:

$$EF \,.\, GF : HG^2 = NH \,.\, HO : MN \,.\, NL,$$

albo

$$EF \,.\, GF : NH \,.\, HO = NP^2 : MN \,.\, NL,$$

czyli, uwzględniając wykonaną konstrukcję:

$$EF \,.\, GF : NH \,.\, HO = AP : AD = EG : EQ.$$

Jeżeli teraz przedłużymy EF do takiego punktu R, że

$$EG : EQ = EF : ER,$$

to będzie wskutek II twierdzenia przybranego:

$$EG : EQ = EF \,.\, GF : EF \,.\, QR,$$

a więc

$$EF \,.\, GF : NH \,.\, HO = EF \,.\, GF : EF \,.\, QR;$$

wskutek tego prostokąty $(NH \,.\, HO)$ i $(EF \,.\, QR)$ są równoważne. A ponieważ

prostokąt $(EF \,.\, QF) =$ prost. $(AE \,.\, EB)$,

przeto

prostokąt $(EF \,.\, QR)$ – prost. $(EF \,.\, QF)$, czyli prost. $(EF \,.\, FR)$

jest równoważny

prost. $(AE \,.\, EI)$ – prost. $(AE \,.\, EB)$, czyli prost. $(AE \,.\, BI)$.

A zatym

(1) $$FR : BI = AE : EF.$$

Oprócz tego z konstrukcji wypada

(2) $$ER : EF = EQ : EG = AD : AP$$

i

$$AD : AP = PK : AB$$

czyli

(3) $$AD : AP = AI : AB.$$

Z zależności (2) i (3) wynika

$$ER : EF = AI : AB,$$

skąd, po odjęciu od obu stron jedności:

$$FR:BI=EF:AB,$$

a więc, wskutek (1):

$$AE:EF=EF:AB.$$

Przeto prostokąt $(AE.AB)$ jest równoważny kwadratowi z EF, a więc, na zasadzie III twierdzenia przybranego, odcinki AD, AE, EF, AB tworzą postęp gieometryczny, c. b. d. d.

Gdyby punkt P został obrany na przedłużeniu AD, to dowodzenie nie byłoby odmienne. Ponieważ więc można obrać punkt P gdziekolwiek na prostej AD, przeto można oczywiście otrzymać dowolną liczbę elips, które się wszystkie nadają do rozwiązania zadania.

Metoda Grégoire'a[1]) (1638—1675).— Konstrukcja Grégoire'a została wypowiedziana w twierdzeniu następującym: „hiperbola, poprowadzona przez jeden z wierzchołków prostokąta i mająca za asymptoty dwa boki prostokąta, nie schodzące się w tym wierzchołku, przecina koło opisane na prostokącie w punkcie, którego odległości od asymptot są średniemi proporcjonalnemi między sąsiedniemi bokami prostokąta". To twierdzenie jest tylko gieometrycznym wyrażeniem oczywistej własności analitycznej, że krzywe przedstawione przez równania

$$xy=ab \text{ i } x^2+y^2=ay+bx$$

przecinają się w takim punkcie x, y, że

$$a:x=x:y=y:b.$$

Mechaniczne powstawanie stożkowych. W rozwiązaniach, wyłożonych w tym paragrafie, robiliśmy ciągle użytek ze stożkowych. Ze stanowiska praktycznego warto więc przekonać się, w jaki sposób te krzywe mogą być opisane ruchem ciągłym. Wyłożymy w krótkości to, co dotyczy tego przedmiotu, zaczynając od dobrze znanego sposobu wykreślania elipsy.

a) Wykreślanie elipsy. Przypuśćmy, że są dane ogniska i suma odległości każdego punktu elipsy od ognisk (oś wielka)[2]). Weźmy nitkę giętką i nierozciągliwą długości osi wielkiej; końce tej nitki umocujmy w ogniskach, a oparłszy o nitkę ostrze poruszajmy je na płasz-

---

[1]) Por. Gregorius a Sancto Vincentio, *Opus geometricum quadraturae circuli,* Antverp. 1647.

[2]) Nie trudno się przekonać, że ze sposobu wyznaczenia elipsy, do którego się stosuje metoda Slusiusa, łatwo przejść do tego innego wyznaczenia elipsy za pomocą osi wielkiej i ognisk.

czyźnie w ten sposób, by oba kawałki nici, zawarte między ostrzem i ogniskami, pozostawały napięte. Jeżeli ruchome ostrze pozostawia widoczny ślad na płaszczyźnie, wtedy linja opisana będzie elipsą.

Do tego samego celu, wykreślenia elipsy, zbudowano umyślne przyrządy, zwane cyrklami eliptycznemi. Jeden z nich, przypisywany Leonardowi da Vinci[1]), opiera się na własności następującej. Jeżeli odcinek przesuwa się oboma końcami wzdłuż dwuch prostych do siebie prostopadłych, wtedy każdy punkt odcinka kreśli elipsę (z wyjątkiem punktu środkowego, który kreśli koło).

Inny bardzo prosty rodzaj cyrkla eliptycznego jest następujący[2]): niech będą AC, BC, MC trzema odcinkami równemi (fig. 82); dwa pierwsze leżą na jednej prostej, trzeci MC ma w M i C połączenia kolankowe z prostemi MY i AB. Jeżeli punkt A porusza się wzdłuż MY, wtedy punkt B opisuje linję prostą MB (prostopadłą do MY), a każdy inny punkt P prostej AB opisuje elipsę.

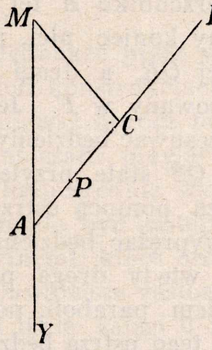

Fig. 82.

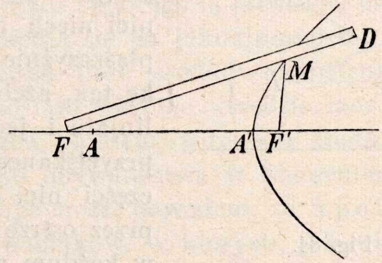

Fig. 83.

b) Wykreślenie hiperboli. Przypuśćmy, że są dane ogniska i różnica odległości każdego punktu hiperboli od ognisk (oś rzeczywista)[3]): Przypuśćmy, że linjał FD (fig. 83) może się obracać dokoła ogniska F; w drugim końcu linjału D niech będzie umocowany koniec nitki bardzo giętkiej i nierozciągliwej, której długość równa się różnicy pomiędzy długością linjału i osi rzeczywistej; drugi koniec tej nitki niech będzie umo-

---

[1]) Por. np. G. Holzmüller, *Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik*, III Theil (2-e wyd.), Lipsk 1903, str. 97 i nast.

[2]) Holzmüller, l. c.

[3]) Jak względem elipsy, podobnie i tu możemy zauważyć, że do tego sposobu łatwo sprowadzić każdy inny sposób wyznaczenia hiperboli, np. ten, w którym są dane asymptoty i jeden punkt, jak w wyłożonych poprzednio metodach Menechmusa i Gregoriusa.

cowany w drugim ognisku F'. Jeżeli za pomocą ostrza M naciągniemy nitkę w taki sposób, by część jej przylegała do linjału i jeżeli przytym obracamy linjał dokoła punktu F, wtedy ostrze M opisuje hiperbolę, ponieważ w każdym jego położeniu

$$FM - F'M = FD - (DM + MF') = AA'.$$

Inne szczególnie proste sposoby wykreślania mechanicznego można wskazać dla niektórych hiperbol szczególnych, jak np. dla hiperboli równobocznej na zasadzie powstawania jej z dwuch odwrotnie równych pęków promieni, a także dla hiperboli o mimośrodzie 2 na zasadzie własności, o której będzie mowa w § 13.

c) Wykreślenie paraboli. Przypuśćmy, że jest dane ognisko i kierownica [1]). Niech będzie DE kierownicą, a F ogniskiem paraboli; umocujmy linjał tak, ażeby jego krawędź przystawała do kierownicy DE (fig. 84) i zetknijmy z tym linjałem ekierkę SQR wzdłuż krótszej przyprostokątnej SQ; w wierzchołku R tej ekierki niech będzie umocowany koniec nici, mającej długość przyprostokątnej QR, a drugi koniec nici niech będzie umocowany w F. Jeżeli na płaszczyźnie rysunku przesuwać będziemy ekierkę tak, ażeby jej bok QS stale przylegał do linjału i jednocześnie za pomocą ostrza stale przyciskanego do QR wyprężać będziemy obie części nici MF i MR, wtedy droga przebyta przez ostrze będzie łukiem paraboli, ponieważ w każdym położeniu M tego ostrza będzie

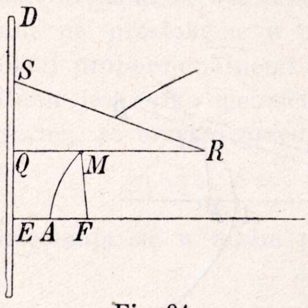

Fig. 84.

$$QM = QR - MR = MF.$$

Do wykreślenia paraboli ruchem ciągłym może też posłużyć integrator (por. art. VIII), jeżeli za krzywą różniczkową przyjęta będzie linja prosta.

§ 4. Podwojenie sześcianu za pomocą konchoidy. — Zadania na wstawiania odcinków. Ażeby lepiej zrozumieć tę grupę rozwiązań, dobrze jest zatrzymać się chwilę na pewnej kategorji zadań, ważnych pod względem historycznym i naukowym, na którą natrafili matematycy greccy, a która dziś oznacza się nazwą „wstawiania odcinków“.

---

[1]) Gdyby należało zbudować parabolę, mającą parametr danej długości (jak w wyłożonych metodach Menaechmusa i Kartezjusza), to wystarczyłoby obrać na prostej odcinek równy połowie parametru: końce tego odcinka byłyby ogniskiem i punktem przecięcia kierownicy z osią, doszlibyśmy więc tym sposobem do powyższego wyznaczenia paraboli.

Przez „wstawianie odcinków“ wogóle rozumiemy, jak pisze Zeuthen[1]), „konstrukcję takiego odcinka prostej, którego końce leżą na linjach danych, a który bądź sam, bądź w przedłużeniu, przechodzi przez punkt dany. Można ją w poszczególnych przypadkach łatwo wykonać mechanicznie za pomocą linjału (albo przełamanego kawałku papieru), na którym są umieszczone dwa znaczki na odległości danego odcinka. Ten linjał obraca się dokoła punktu stałego, przesuwając go jednocześnie w ten sposób, ażeby jeden znaczek biegł wzdłuż jednej z linji danych; ten ruch trzeba wykonywać tak długo, dopóki drugi znaczek nie znajdzie się na drugiej linji danej“.

„Sprowadzenie jakiejś konstrukcji do wstawiania odcinków bez bliższej wskazówki, jak je należy wykonać, przytrafia się już w gieometrji greckiej“[2]). „Można to rozumieć w ten sposób, że był czas, kiedy uważano wstawianie odcinków za środek konstrukcyjny, który można było w konstrukcjach gieometrycznych stosować bezpośrednio obok cyrkla i linjału“.

„Jednakże przez wzgląd na cel teoretyczny, do którego Grecy dążyli w swoich konstrukcjach, nie zadowalali się długo tą łatwością mechaniczną. Ponieważ oprócz tego, ażeby opierać się na jaknajmniejszej ilości założeń, należało przyjąć jaknajmniejszą ilość środków konstrukcyjnych, przeto bezpośrednie wykonywanie zostało wkrótce wszędzie tam usunięte, gdzie mogło być zastąpione cyrklem i linjałem, jedynemi środkami konstrukcyjnemi, które otrzymały prawo obywatelstwa w Elementach Euklidesa. Dawniejsze zastosowania są, być może, powodem, że Apolonjusz napisał dwie księgi o wstawianiu odcinków, w których, jak wiemy, jest mowa o rozwiązywaniu tych zadań za pomocą cyrkla i linjału[3]). Apo-

---

[1]) Por. l. c., str. 64 i nast.

[2]) Tak np. Hipokrates sprowadza do jednego z tych zadań wykreślenie trzeciego ze swych księżyców (Loria, l. c. I, Nr. 45); podobnie Archimedes stosuje następujące zadania:

1. Dana jest średnica koła i koniec promienia prostopadłego do niej; mamy umieścić odcinek danej długości pomiędzy kołem i przedłużeniem średnicy w ten sposób, ażeby przedłużenie tego odcinka przechodziło przez dany koniec promienia.

2. Dana jest cięciwa koła i jeden punkt opierającego się na niej łuku; umieścić odcinek danej długości pomiędzy cięciwą i łukiem dopełniającym w taki sposób, ażeby przedłużenie tego odcinka przechodziło przez punkt dany (Loria, l. c., II Nr. 41).

[3]) Zagadnienia, opracowane przez Apolonjusza, są następujące:

1. Jeżeli jest dane półkole i prosta prostopadła do jego średnicy, albo też dwa półkola, mające średnice na jednej prostej, to mamy umieścić między temi dwiema linjami odcinek danej długości, skierowany ku jednemu z końców średnicy półkola.

lonjusz chciał przez to, być może, zaradzić brakowi dzieł dawniejszych, w których zadania sprowadzano do wstawiania odcinków, jakkolwiek wykonanie nie było wskazane".

„Tam, gdzie wstawianie odcinków nie zostało sprowadzone do używania tych albo innych środków konstrukcyjnych, lub nawet nie mogło być sprowadzone, tam było konieczne badanie teoretyczne samego wstawiania odcinków. To mogło być najlepiej wykonane przez ustalenie określenia i przez opierające się na nim zbadanie tej krzywej, którą w opisanej wyżej konstrukcji mechanicznej przebiega jeden z końców odcinka danego, a mianowicie ten, który nie porusza się wzdłuż linji danej. Przez przecięcie tej krzywej z drugą linją daną zadanie zostanie rozwiązane. Badanie takie zostało przedsięwzięte, i to po czasach Archimedesa, przez Nikomedesa, a mianowicie w tym przypadku, kiedy jedną z linji danych jest prosta".

Metoda Nikomedesa. — Krzywa czwartego rzędu, wynaleziona przez Nikomedesa (250—150 prz. Chr.), została przez niego nazwana kon-

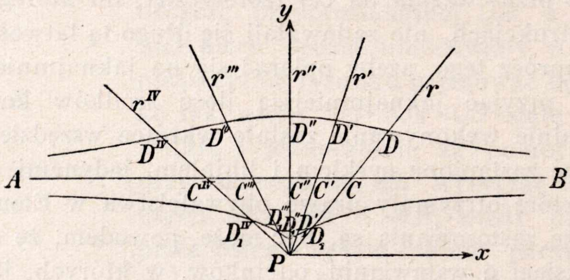

Fig. 85.

choidą ze względu na podobieństwo do muszli. Wytworzenie takiej krzywej jest bardzo łatwe: weźmy prostą AB i punkt P (fig. 85) nie leżący na niej (ta prosta nazywa się podstawą lub kierownicą, a punkt biegunem konchoidy); poprowadźmy następnie przez biegun jakąkolwiek prostą r i odetnijmy na niej od punktu przecięcia z podstawą w obu zwrotach odcinek oznaczonej długości (zwany odstępem lub parametrem konchoidy); otrzymamy w ten sposób punkty D i D_1.

---

2. Dany jest równoległobok, którego jeden z boków jest przedłużony; wstawić w kąt zewnętrzny odcinek danej długości, którego przedłużenie przechodzi przez jeden z wierzchołków, należących do boku przeciwległego.

3. Dane jest koło; mamy w nie wpisać cięciwę danej długości, skierowaną ku danemu punktowi.

W zadaniach tych rozróżnia się liczne przypadki, które prowadzą do 125 twierdzeń i 28 twierdzeń przybranych (Loria, l. c., II, Nr. 67).

Jeżeli zmieniać będziemy położenie prostej r, tak że będzie przyjmowała kolejno położenia r', r'', r''',..., podczas kiedy biegun i podstawa pozostają nieruchome a odstęp stały, wtedy miejsce gieometryczne punktów D, D_1, D', D_1', D'', D_1'',... utworzy krzywą stopnia czwartego, złożoną z dwuch gałęzi i zwaną k o n c h o i d ą. Jeżeli przyjmiemy biegun P za początek spółrzędnych, prostą poprowadzoną przez P równolegle do podstawy za oś x, a prostopadłą do niej za oś y, wtedy otrzymamy równanie konchoidy pod postacią

$$(x^2+y^2)(y-a)^2=y^2b^2,$$

gdzie a oznacza odległość bieguna od podstawy, a b odstęp konchoidy.

Nikomedes, ażeby swój wynalazek uczynić praktyczniejszym, obmyślił następujący przyrząd, za pomocą którego można wykreślić jedną gałąź konchoidy (t. zw. pierwszą konchoidę starożytnych) ruchem ciągłym.

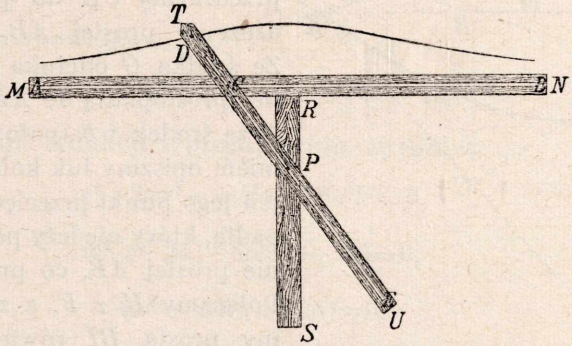

Fig. 86.

Niech będzie MN (fig. 86) linjałem niezbyt szerokim, mającym w środku żłobek AB; prostopadle do linjału MN w jednym z jego punktów (np. w punkcie środkowym) jest przytwierdzony do niego nieruchomo drugi linjał RS, na którym jest osadzony sztyfcik P. Niech będzie jeszcze TU innym linjałem ruchomym z wyżłobieniem CE takim, że sztyft P może się w nim przesuwać od jednego końca do drugiego, nie zbaczając. W końcu C tego wyżłobienia jest umocowany drugi sztyft, który się może przesuwać w wyżłobieniu AB linjału MN. Linjał TU ma jeszcze w pobliżu końca otwór D, w którym jest umieszczony ołówek.

Ażeby teraz wykreślić konchoidę poprzednio rozpatrywaną, mającą podstawę AB, biegun P i odstęp CD, umieśćmy przyrząd w ten sposób, ażeby wyżłobienie AB linjału MN leżało na żądanej podstawie, a sztyft P (który więc musi być oddalony od wyżłobienia AB jak biegun P od podstawy AB) żeby pokrył biegun P; jeżeli teraz będziemy przesuwali sztyft

C w wyżłobieniu AB, to TU obracać się będzie oczywiście dokoła P, a ołówek osadzony w D wyrysuje na papierze żądaną konchoidę.

Za pomocą konchoidy można oczywiście rozwiązać od razu zadanie umieszczenia między dwiema linjami odcinka danego, którego przedłużenie przechodzi przez punkt dany, jeżeli jedną z dwuch linji danych jest prosta.

Zobaczymy, jak dzięki temu można za pośrednictwem konchoidy Nikomedesa rozwiązać zadanie o dwuch średnich proporcjonalnych.

Niech będą AB, AD (fig. 87) odcinkami danemi i niech będzie $AD > AB$; w celu uproszczenia dowodzenia załóżmy, że $AB = 2a$, $AD = 2b$. Wykreślmy prostokąt $ABCD$, wyznaczony przez odcinki dane, podzielmy odcinek AD na dwie części równe, a środek jego E połączmy z punktem C; przedłużmy CE do przecięcia przedłużenia prostej AB w punkcie F. Ze środka G odcinka AB poprowadźmy prostopadłą do AB, a przyjąwszy B za środek i b (połowę AD) za promień, opiszmy łuk koła i wyznaczmy ten jego punkt przecięcia H z prostopadłą, który nie leży po tej samej stronie prostej AB, co prostokąt $ABCD$. Połączmy H z F, a z B poprowadźmy prostą BI równoległą do HF. Teraz zbudujmy (np. przyrządem opisanym poprzednio) konchoidę, mającą H za biegun, BI za podstawę, a b za odstęp.

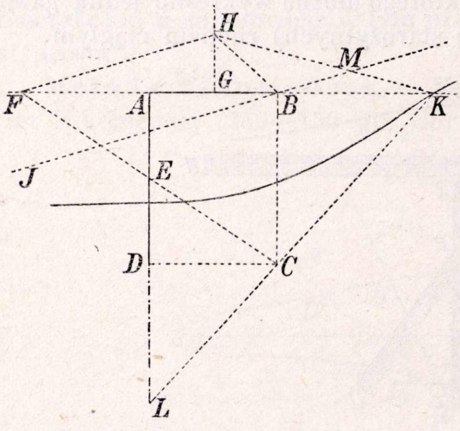

Fig. 87.

Konchoida tak zbudowana spotyka prostą AB w punkcie K takim, że dwie proste AB, BI wyznaczają na HK odcinek $MK = b$, przez co otrzymujemy rozwiązanie podstawowego zadania wstawienia odcinka względem dwuch powyższych prostych i punktu H.

Oznaczając przez L punkt przecięcia prostej CK z prostą AD, dowiedziemy, że odcinki BK, DL są szukanemi dwiema średniemi proporcjonalnemi.

Ażeby tego dowieść, załóżmy

$$BK = x, \quad DL = y.$$

Wskutek wykonanej konstrukcji

$$HG = \sqrt{b^2 - a^2}$$

$$GK = a + x,$$

a zatym

$$HK = \sqrt{HG^2 + GK^2} = \sqrt{b^2 - a^2 + (a+x)^2} = \sqrt{x^2 + b^2 + 2ax}.$$

Ale z podobieństwa trójkątów BMK, FHK wynika:

$$(\alpha) \qquad \frac{FK}{BK} = \frac{HK}{MK},$$

a uwzględniając, że $MK = b$, $FK = 4a + x$, otrzymamy z proporcji (α):

$$\frac{4a+x}{x} = \frac{\sqrt{x^2+b^2+2ax}}{b},$$

skąd, po podniesieniu do kwadratu

$$\frac{16a^2 + x^2 + 8ax}{x^2} = \frac{x^2 + b^2 + 2ax}{b^2},$$

a po zniesieniu mianowników:

$$16a^2b^2 + b^2x^2 + 8ab^2x = x^4 + b^2x^2 + 2ax^3,$$

czyli po wykonaniu redukcji i przeniesieniu wyrazów:

$$x^4 + 2ax^3 - 8ab^2x - 16a^2b^2 = 0,$$

albo

$$x^3(x+2a) - 8ab^2(x+2a) = 0,$$

skąd

$$(x^3 - 8ab^2)(x+2a) = 0;$$

a ponieważ $x + 2a$ jest różne od zera, przeto z konieczności

$$x^3 - 8ab^2 = 0,$$

czyli

$$(1) \qquad x^3 = 2a(2b)^2.$$

A ponieważ z podobieństwa trójkątów LDC, BCK otrzymujemy

$$\frac{2a}{y} = \frac{x}{2b},$$

skąd

$$xy = 4ab,$$

a dalej

$$y = \frac{4ba}{x},$$

przeto

$$y^3 = \frac{4^3a^3b^3}{x^3};$$

mamy więc wskutek (1):

$$y^3=\frac{4^3a^3b^3}{2^3ab^2}=8a^2b,$$

czyli

(2) $$y^3=(2a)^2 . 2b.$$

Mamy więc:

$$\begin{cases} xy=4ab \\ x^3=2a . (2b)^2 \\ y^3=(2a)^2 . 2b. \end{cases}$$

Równania pierwsze i trzecie, podzielone odpowiedniemi stronami, dają:

(3) $$\frac{y^2}{x}=2a, \text{ czyli } y^2=2ax;$$

a równania pierwsze i drugie, podzielone stronami, dają:

(4) $$\frac{x^2}{y}=2b, \text{ czyli } x^2=2by.$$

Z równań (3) i (4) widzimy wreszcie, że

$$\frac{2a}{y}=\frac{y}{x}=\frac{x}{2b}, \quad \text{c. b. d. d.}$$

Jeżeli w szczególności $2a=l$, $2b=2l$, to y jest krawędzią sześcianu dwa razy większego od sześcianu o krawędzi l.

Różnorodność kryterjów prostoty krzywych, stosowanych do rozwiązania. — Co się tyczy oceny wyłożonego rozwiązania i jego uproszczeń, to załączymy uwagi następujące. Kartezjusz[1]), rozpatrując linje, które mogą być w gieometrji stosowane do rozwiązywania zadań, uważa za najprostsze te krzywe, których równania mają najniższy stopień lub są najmniej złożone; dla Newtona[2]) natomiast najprostszą jest ta krzywa, której wytworzenie mechaniczne jest najłatwiejsze. Wprawdzie i Newton uznaje sposób Kartezjusza rozróżniania gatunków krzywych podług stopni ich równań; ale podług Newtona tym, czym się należy kierować w wyborze jakiejś krzywej zamiast innej przy rozwiązywaniu zadania, nie powinien być gatunek krzywej, czyli po-

[1]) Por. l. c., str. 18 i 54, gdzie Kartezjusz tak się wyraża: „trzeba zaznaczyć, że przez najprostsze (krzywe) nie należy rozumieć tych tylko, które mogą być najłatwiej wykreślone, ani tych, które czynią najłatwiejszą konstrukcję lub dowodzenie w zadaniu danym, ale przedewszystkim te, które są najprostszego gatunku (du plus simple genre) z pośród wszystkich, mogących służyć do wyznaczenia wielkości szukanej.

[2]) Por. Appendix de aequationum constructione lineari.

stać jej równania, tylko raczej łatwość wykreślania krzywej. Newton tak się wyraża: „Nie równanie, tylko wykreślenie wytwarza krzywą gieometryczną... Nie prostota równania, tylko łatwość wykreślenia wskazuje, której krzywej należy oddać pierwszeństwo w konstrukcji zadania.

„Tak np., porównując parabolę z kołem, okazuje się, że parabola ma równanie prostsze niż koło, ale kołu, jako łatwiejszemu do wykreślenia gieometrycznego, oddaje się pierwszeństwo przed parabolą. Koło i przecięcia stożkowe są tego samego rzędu ze względu na stopień równania; pomimo to w konstrukcji zadań koło nie stawia się na równi z przecięciami stożkowemi, a tylko ze względu na łatwość wykreślenia zalicza się do niższego rzędu linji prostej, wolno więc budować za pomocą koła to wszystko, co można osiągnąć za pomocą prostej".

Newton, wychodząc z założenia, że arytmetyka i gieometrja są dwiema naukami, których nie trzeba z sobą mieszać i że nie równania, jako wyrażenia należące do arytmetyki, tylko wykreślenie figury, jako rzecz właściwa gieometrji, powinno stanowić kryterjum, co jest więcej lub mniej proste w gieometrji, przychodzi do wniosku, że nie należy mu poczytywać za błąd, jeżeli woli wybrać do rozwiązania zadania tę krzywą, której wykreślenie jest najprostsze. Opierając się na tym kryterjum, Newton zachwala bardzo konchoidę Nikomedesa, mówiąc, że ta krzywa „pod względem łatwości wykreślenia nie ustępuje żadnej innej krzywej z wyjątkiem koła", i sam robi z niej rozległy użytek przy rozwiązywaniu zadań stopnia 3-go i 4-go.

Metoda Newtona.—Do tego samego zadania, które już poprzednio rozwiązaliśmy za pomocą konchoidy, a mianowicie do „umieszczenia między dwiema prostemi odcinka danej długości, skierowanego ku punktowi danemu" Newton[1]) sprowadza nowym sposobem konstrukcję dwuch średnich proporcjonalnych.

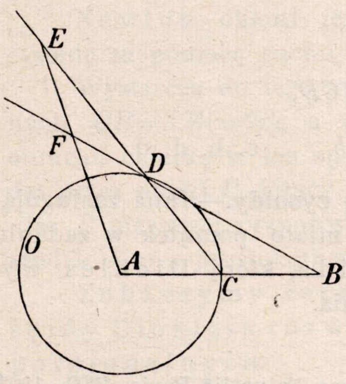

Fig. 88.

Niech bądą a, b odcinkami, między które należy wstawić dwie średnie proporcjonalne. Uczyniwszy $AB=a$ (fig. 88), podzielmy AB w punkcie C na dwie części równe, obierzmy A za środek i opiszmy promieniem $AC=\frac{1}{2}a$ koło CDO, w którym wykreślimy cięciwę $CD=b$. Jeżeli teraz w kącie EDF, utworzonym przez przedłużenia prostych CD, BD, umieścimy odcinek EF,

[1]) Por. l. c.

równy promieniowi $\frac{1}{2}a$, a którego przedłużenie przechodzi przez punkt A, wtedy cztery odcinki AB, ED, FA, CD stanowią postęp gieometryczny.

Newton nie daje żadnego dowodzenia prawdziwości konstrukcji. Dowodzenie następujące jest wyjęte z monografji B. Carrary: *Sui tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della Scienza* [1]).

Na zasadzie znanego twierdzenia Cevy:

$$\frac{AB}{CB}\cdot\frac{CD}{ED}\cdot\frac{EF}{AF}=1,$$

a ponieważ $CB=EF$, przeto

$$(1) \qquad AB.CD=ED.AF.$$

Następnie, wskutek znanej własności potęgi punktu względem koła:

$$DE.CE=EA^2-CA^2=(AC+FA)^2-CA^2=AB.FA+FA^2,$$

a więc

$$DE(CD+DE)=FA(AB+FA),$$

albo

$$DE^2\left(\frac{CD}{DE}+1\right)=FA.AB\left(1+\frac{FA}{AB}\right).$$

Ale z (1) wynika

$$\frac{CD}{DE}=\frac{FA}{AB},$$

a zatym

$$DE^2=FA.AB.$$

Z tego samego równania (1) wypada też:

$$\frac{AB}{DE}=\frac{FA}{CD};$$

przeto

$$AB:DE=DE:FA=FA:CD,$$

czyli

$$a:DE=DE:FA=FA:b, \qquad \text{c. b. d. d.}$$

§ 5. Podwojenie sześcianu za pomocą cysoidy.— Inna zasługująca na uwagę krzywa, której wynalezienie miało początek w zadaniu dwuch średnich proporcjonalnych, jest cysoida, którą Diokles wynalazł i zastosował do rozwiązania tego zadania.

---

[1]) Por. „Rivista di Fisica, Matematica e Scienze Naturali“ Pavia, 1902—1903. Kiedy mowa o tej monografji, nie dla poruszania marnej sprawy pierwszeństwa, tylko przez zamiłowanie sprawiedliwości, nie możemy pominąć milczeniem, że tak w metodzie badania, jak również nieraz i pod względem formy, robiono tam obfity użytek z tego artykułu, pomieszczonego w pierwszym wydaniu włoskim, przyczym artykuł nasz nie był wcale zacytowany.

Weźmy jakikolwiek okrąg o środku O i promieniu OA (fig. 89); niech będą AE, MN dwiema jego średnicami do siebie prostopadłemi, a B, F dwoma punktami średnicy AE, jednakowo oddalonemi od środka O. Poprowadźmy przez B i przez F proste BC, FG prostopadłe do AE; jeżeli odległość $OB = OF$ się zmienia, wtedy punkt przecięcia D prostej AG z BC kreśli krzywą, zwaną cysoidą. Jeżeli prostą AG przedłużymy do punktu przecięcia K ze styczną do koła w punkcie E, to oczywiście $AD = GK$; i odwrotnie, jeżeli $AD = GK$, wtedy $OB = OF$. Można więc też wyobrazić sobie, że cysoida powstała przez prowadzenie z punktu A (początku) siecznych i odcinanie na nich od A odcinka równego części tej siecznej, zawartego między okręgiem i styczną do okręgu w punkcie średnicowo przeciwległym do A.

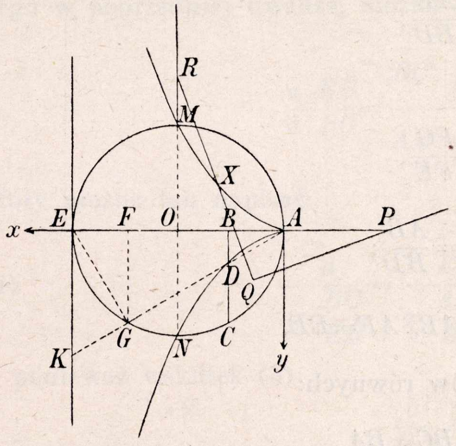

Fig. 89.

Jest to krzywa stopnia trzeciego; obierając za początek spółrzędnych punkt A, a za osi x, y średnicę AE i prostą do niej prostopadłą, wyprowadzimy z łatwością z podobieństwa trójkątów AEK, ABD i trójkątów KEG, ABD równanie tej krzywej

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x},$$

gdzie r oznacza promień danego okręgu.

Newton okazał jeszcze, że można łatwo wykreślić mechanicznie cysoidę za pomocą ruchu ciągłego[1]).

Wystarcza do tego zwykła ekierka, w której jedna z przyprostokątnych $QR = AE (= 2r)$, a druga ma długość dowolną. Jeżeli będziemy obracali ekierkę w ten sposób, że ta druga przyprostokątna stale przechodzi przez punkt P, leżący na przedłużeniu EA i oddalony od A o r, a koniec R pierwszej przyprostokątnej posuwa się wzdłuż prostej NM, wtedy środek X przyprostokątnej QR opisze cysoidę.

Zobaczymy teraz, jak można za pośrednictwem cysoidy Dioklesa rozwiązać zadanie o dwuch średnich proporcjonalnych.

---

[1]) Por. Newton, l. c.; por. też C. Briot i J. C. Bouquet, Leçons de géométrie analytique, wyd. 16, Paryż 1897, str. 29.

Przedtym jednak pomówimy o pewnej zależności, łatwej do wyprowadzenia z figury, na którą się powoływaliśmy, objaśniając dwa powyższe sposoby powstawania cysoidy (fig. 89). Z podobieństwa trójkątów ADB, AGF dostajemy:

$$\frac{AF}{FG}=\frac{AB}{BD},$$

a z trójkąta prostokątnego AEG:

$$\frac{AF}{FG}=\frac{FG}{FE},$$

skąd:

$$\frac{AF}{FG}=\frac{FG}{FE}=\frac{AB}{BD};$$

a ponieważ

$$FG=BC,\ FE=AB,\ AF=BE,$$

przeto otrzymujemy łańcuch stosunków równych:

(1)
$$\frac{EB}{BC}=\frac{BC}{BA}=\frac{BA}{BD},$$

z którego widać, że BC, BA są średniemi proporcjonalnemi między EB, BD.

Po tej uwadze przypuśćmy, że a, b są dwoma jakiemikolwiek odcinkami, dla których mamy wykreślić dwie średnie proporcjonalne. Niech będzie wyrysowana cysoida dla jakiegokolwiek koła (fig. 90), którego średnicą jest AE; wyznaczmy znanym sposobem czwartą proporcjonalną do odcinków danych a, b i promienia OE i odetnijmy ją na promieniu OQ prostopadłym do AE; końcem tego odcinka niech będzie punkt M, tak że

(2)
$$\frac{a}{b}=\frac{EO}{OM}.$$

Niech będzie D punktem przecięcia prostej EM z cysoidą; z podobieństwa trójkątów EBD, EOM mieć będziemy

$$\frac{EO}{OM}=\frac{EB}{BD},$$

a więc wskutek (2):

$$\frac{EB}{BD}=\frac{a}{b},$$

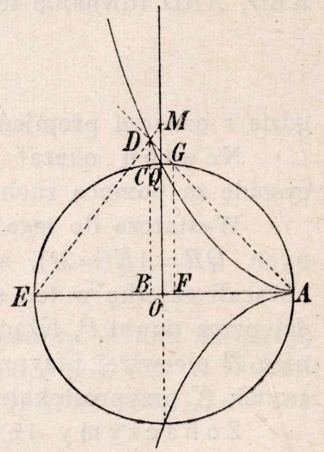

Fig. 90.

czyli:

(3) $$\frac{EB}{a} = \frac{BD}{b}.$$

Widzimy teraz, że z łańcucha stosunków równych (1), wyprowadzonego w poprzedniej uwadze, można otrzymać łańcuch następujący:

$$\frac{a.EB}{a.BC} = \frac{BC.\frac{a}{EB}}{AB.\frac{a}{EB}} = \frac{AB.b}{BD.b},$$

który można tak napisać:

(4) $$\frac{a}{a.\frac{BC}{EB}} = \frac{a.\frac{BC}{EB}}{a.\frac{AB}{EB}} = \frac{AB.\frac{b}{BD}}{b},$$

a ponieważ wskutek (3)

$$\frac{b}{BD} = \frac{a}{EB},$$

przeto dostaniemy z (4):

$$\frac{a}{a.\frac{BC}{EB}} = \frac{a.\frac{BC}{EB}}{a.\frac{AB}{EB}} = \frac{a.\frac{AB}{EB}}{b}.$$

A więc dwiema średniemi proporcjonalnemi między danemi odcinkami a, b są

$$a.\frac{BC}{EB} \text{ i } a.\frac{AB}{EB},$$

czyli odcinki x, y, które się otrzymuje jako czwarte proporcjonalne do odcinków BE, BC, a i BE, AB, a. W ten sposób rozwiązuje się więc zadanie dwuch średnich proporcjonalnych za pomocą linjału, koła i cysoidy Dioklesa.

§ 6. Podwojenie sześcianu za pomocą umyślnych przyrządów.— Metoda Platona (429—347 prz. Chr.).—Niech będą trzy linjały MN, PQ, NQ (fig. 91), z których dwa pierwsze są prostopadłe do trzeciego i mają po stronie wewnętrznej wyżłobienia w ten sposób, że czwarty linjał RS może się przesuwać w tych wyżłobieniach, poruszając się równolegle do linjału NQ. Niech teraz będą BC, AB odcinkami, dla których mamy znaleźć dwie średnie proporcjonalne (na figurze obraliśmy odcinek AB dwa razy większy od BC, ażeby podać bezpośrednio rozwiązanie mechaniczne zadania o podwojeniu sześcianu za pomocą tej metody Platona). Wykreślmy odcinki dane pod kątem prostym i przedłużmy je poza punkt wspólny B; uczyniwszy to, umieszczamy opisany przyrząd w ten sposób, że punkty A, C leżą odpowiednio na wewnętrznych krawędziach linjałów RS, NQ, a jednocześnie przedłużenia odcinków AB i BC przechodzą odpowiednio przez wierzchołki D, E kątów utworzonych przez linjały NQ, RS z linjałem MN. Wtedy BD, BE będą dwiema szukanemi średniemi proporcjonalnemi między CB i BA. W rzeczy samej z trójkątów prostokątnych CDE, DEA otrzymujemy na

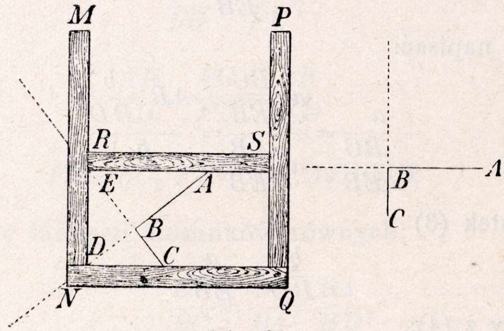

Fig. 91.

zasadzie znanej własności, że wysokość trójkąta prostokątnego, odpowiadająca przeciwprostokątnej, jest średnią proporcjonalną między odcinkami, które ta wysokość wyznacza na przeciwprostokątnej:

$$\frac{CB}{BD}=\frac{BD}{BE}; \quad \frac{BD}{BE}=\frac{BE}{BA};$$

mamy więc łańcuch stosunków równych:

$$\frac{CB}{BD}=\frac{BD}{BE}=\frac{BE}{BA}, \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Jeżeli zaś (jak na naszym rysunku) $BA=2BC$, to BD jest krawędzią sześcianu dwa razy większego od sześcianu, mającego krawędź BC.

To rozwiązanie należy do najdogodniejszych w praktyce.

Podług Eutokjusza rozwiązanie to przypisuje się Platonowi; niektórzy jednak uważają je za apokryf ze względu na to, że Eratostenes nic o nim nie mówi i że Platon ganił tych, którzy rozwiązywali zadania gieometryczne sposobami mechanicznemi, „gdyż tym sposobem zaciemnia się i odejmuje wyższość gieometrji, sprowadzając ją do stanowiska praktycznego, zamiast podnosić, zamiast dawać jej za przedmioty badania figury wieczne i bezcielesne".

Można jednak pogodzić naganę z rozwiązaniem Platona, jak mówi

Loria[1]), bądź przyjmując, że Platon, w celu zdyskredytowania rozwiązań mechanicznych, dowiódł mocą faktu, jak łatwo je wymyśleć, bądź też przypuszczając, że Platon poprzestał na sprowadzeniu zadania o dwuch średnich proporcjonalnych między dwoma odcinkami AB, BC do wstawienia między ich przedłużeniami odcinka DE, mającego położenie prostopadłe do AE, CD, a któryś komentator, zniekształcając pogląd filozofa, dodał od siebie ten bardzo prosty przyrząd, za pomocą którego można wykonać konstrukcję.

Podług M. Cantora aparat obmyślony przez Platona byłby pierwszym znanym przyrządem do rozwiązania zadania gieometrycznego; jeżeli natomiast przyjmiemy go za apokryf, to najdawniejszym znanym przyrządem gieometrycznym byłby przyrząd, opisany przez Eratostenesa w liście do króla Ptolemeusza (por. wstęp).

Metoda Eratostenesa. — Aparat Eratostenesa, nazwany przez Papusa *mesolabium* (skąd pochodzi nadawanie nazwy mesolabium wszyst-

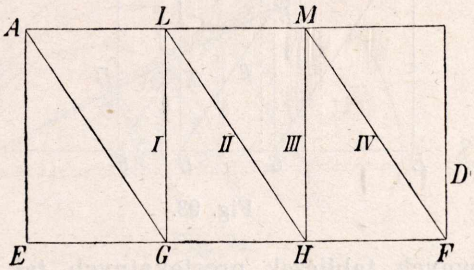

Fig. 92.

kim przyrządom, służącym do rozwiązywania zadania o dwuch średnich proporcjonalnych), opiera się na rozumowaniu następującym[2]):

Niech będą dane dwa odcinki nierówne AE, DF (fig. 92), do których mamy znaleźć dwa średnie proporcjonalne. Umieśćmy je prostopadle do EF, zbudujmy na EF trzy prostokąty równe AG, LH, MF mające za wysokość odcinek AE i poprowadźmy przekątne tych prostokątów AG, LH, MF; łatwo się przekonać, że te przekątne są do siebie równoległe.

Przypuśćmy teraz, że prostokąt środkowy pozostaje nieruchomy, a dwa inne przesuwają się po nim, a mianowicie AG na przedniej, MF na tylnej jego stronie, jak to jest przedstawione na fig. 93, dopóki punkty A, B (przecięcie prostych I i II), C (przecięcie prostych III i IV), D nie

---

[1]) Por. l. c., księga I, str. 116.

[2]) Loria, l. c., księga II, str. 144 i nast.

leżą na jednej prostej; poprowadziwszy tę prostą $ABCD$, przedłużmy ją do przecięcia K z prostą EF, również odpowiednio przedłużoną. Ponieważ proste AE, BG, CH, jak również proste AG, BH, CF są równoległe, przeto

$$EK:KG=AE:BG; \quad GK:KH=BG:CH; \quad HK:KF=CH:DF.$$

Ale

$$EK:KG=GK:KH=KH:KF,$$

a więc

$$AE:BG=BG:CH=CH:DF,$$

czyli BG, CH są średniemi proporcjonalnemi między danemi odcinkami AE, DF.

Na podstawie tego rozumowania, Eratostenes zbudował przyrząd zło-

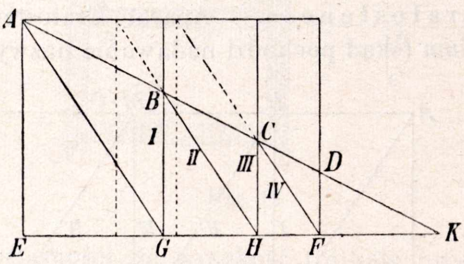

Fig. 93.

żony z trzech równych tabliczek prostokątnych tak połączonych, ażeby dwie boczne mogły się przesuwać po środkowej nieruchomej w sposób wyżej wskazany.

Łatwo zrozumieć, że to rozwiązanie można uogólnić i zastosować do znalezienia dowolnej ilości średnich geometrycznych do dwuch odcinków danych.

Metoda Kartezjusza. — Do tego samego celu ogólnego zmierza metoda podana przez Kartezjusza [1]), który wynalazł inny przyrząd, dający się zastosować do konstrukcji krzywych, za pomocą których można znaleźć nietylko dwie, ale cztery, sześć i t. d.... średnich proporcjonalnych do dwuch odcinków danych.

Kartezjusz tak opisuje ten przyrząd (fig. 94).

Przyrząd składa się z kilku linjałów, połączonych z sobą w ten sposób, że kiedy linjał YZ leży nieruchomo na prostej AN, kąt XYZ może się otwierać i zamykać; jeżeli jest całkiem zamknięty, wtedy punkty B, C, D, E, F, G, H są wszystkie połączone w punkcie A; ale w miarę,

[1]) Por. l. c., str. 17.

jak się ten kąt otwiera, linjał BC, umocowany prostopadle do XY w punkcie B, popycha ku Z linjał CD, który się posuwa wzdłuż linjału YZ w położeniu prostopadłym do niego; CD popycha linjał DE, który podobnie przesuwa się wzdłuż linjału YX, w położeniu prostopadłym do niego.

Linjał DE popycha EF, EF popycha FG; ten linjał popycha GH i t. d. ...; można pomyśleć nieskończenie wiele linjałów, które popychają się kolejno w ten sposób i z których jedne są prostopadłe do YX, inne do YZ.

Podczas kiedy kąt XYZ się otwiera, punkt B opisuje linję AB, która jest łukiem koła; pozostałe punkty D, F, H, w których schodzą się

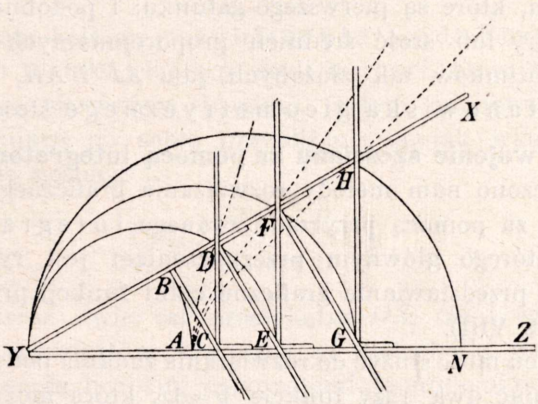

Fig. 94.

inne linjały, opisują linje krzywe, których gałęzie AD, AF, AH są wyrysowane na figurze; są to krzywe coraz wyższych stopni (czwartego, dziesiątego, czternastego i t. d.), a więc coraz więcej skomplikowane w znaczeniu kryterjum Kartezjusza (por. § 4).

Za pomocą tego przyrządu łatwo wyznaczyć dwie średnie proporcjonalne między dwoma odcinkami danemi. Jeżeli np. (fig. 94) YA, YE są dwoma odcinkami danemi, to opiszmy koło o średnicy YE, a jeżeli to koło przecina krzywą AD w punkcie D, to YD, YC są szukanemi średniemi proporcjonalnemi. W rzeczy samej, z rysunku widać, że

$$YB : YC = YC : YD,$$

czyli, ponieważ $YB = YA$:

$$YA : YC = YC : YD.$$

Podobnie:

$$YC : YD = YD : YE,$$

a więc

$$YA : YC = YC : YD = YD : YE,$$

co stwierdza to, co było powiedziane.

Rozwiązanie to może być oczywiście uogólnione do przypadku, w którym zamiast dwuch tylko, poszukuje się czterech, sześciu i t. d. średnich proporcjonalnych.

Zgodnie ze swoim odrębnym kryterjum prostoty linji, rozwiązujących zadanie, Kartezjusz tak mówi o swoim wynalazku[1]): „nie sądzę, ażeby był jakikolwiek sposób łatwiejszy znalezienia tylu średnich proporcjonalnych ile się chce, albo którego dowodzenie byłoby oczywistsze, aniżeli sposób polegający na stosowaniu linji krzywych, które opisuje przyrząd powyżej objaśniony... Ale ponieważ linja krzywa AD jest drugiego gatunku, a można znaleźć dwie średnie proporcjonalne za pomocą przecięć stożkowych, które są pierwszego gatunku; i podobnie, ponieważ można znaleźć cztery lub sześć średnich proporcjonalnych za pomocą linji, które nie są gatunków tak złożonych, jak AF i AH, przeto byłoby błędem ze stanowiska gieometrycznego stosować te krzywe".

§ 7. **Podwojenie sześcianu za pomocą integratora.**—W nowszych czasach dostarczono nam metody rozwiązania graficznego zadania podwojenia sześcianu za pomocą przyrządu zwanego integrafem albo integratorem, którego głównym przeznaczeniem jest rysowanie krzywej całkowej, czyli przedstawianie graficzne całki funkcji przedstawionej graficznie (por. art. VIII).

Przyrząd ten może służyć do rozwiązania zadania podwojenia sześcianu, ponieważ całkując dwa razy funkcję $y=6x$, którą można sobie wyobrazić jako przedstawioną przez prostą o równaniu $y=6x$, otrzymuje się funkcję, a więc i krzywą $y=x^3$; a zatem odcięta, odpowiadająca rzędnej równej 2 (względem obranej jednostki miary, niezależnej od jednostki miary przyrządu) przedstawi $\sqrt[3]{2}$.

§ 8. **Uwagi ogólne o konstrukcjach przybliżonych.** — Zanim wyłożymy ważniejsze metody poszczególne, służące do przybliżonego rozwiązania zadania podwojenia sześcianu za pomocą wyłącznie linjału i cyrkla, podamy niektóre rozważania ogólne o metodzie graficznej przybliżonej konstrukcji odcinka, przedstawionego przez jakąkolwiek liczbę niewymierną μ [2]).

Wiadomo, że każda liczba niewymierna dodatnia może być przedstawiona przez ułamek ciągły nieskończony o mianownikach całkowitych i dodatnich; niech więc będzie

---

[1]) L. c. str. 54, 55.

[2]) Ta metoda, którą zawdzięczamy Sylvestrowi, została wyłożona w dziele Novi, *Algebra superiore*, Firenze 1863, str. 406.—Por. też F. Klein, *Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie* I (litografowane), Leipzig 1896, str. 17.

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\dots}}}$$

ułamkiem ciągłym nieskończonym o mianownikach całkowitych i dodatnich, przedstawiającym wielkość niewymierną μ, a

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots \frac{p_n}{q_n}, \dots$$

niech przedstawiają kolejne przybliżenia (redukty) pierwsze, drugie, ... n-te, ... tego ułamka ciągłego, czyli wartości, które się dostaje przez zatrzymanie się na pierwszym, drugim, ... n-tym mianowniku. Którekolwiek trzy następujące po sobie przybliżenia są, jak wiadomo, związane z sobą zależnością postaci:

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{a_n p_{n-1}+p_{n-2}}{a_n q_{n-1}+q_{n-2}}.$$

Obierzmy teraz dwie osi prostokątne OX, OY i wyobraźmy sobie kratkę złożoną z kwadratów, mających za wierzchołki wszystkie punkty, których spółrzędne są liczbami całkowitemi dodatniemi od 1 do ∞. Oczywiście przybliżenia

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots \frac{p_n}{q_n}, \dots$$

przedstawiają styczne trygonometryczne kątów α_1, α_2, α_3, ... α_n, ... zawartych pomiędzy osią OX i promieniami wodzącemi OM_1, OM_2, ... OM_n, ... poprowadzonemi do punktów $M_1 \equiv (p_1, q_1)$, $M_2 \equiv (p_2, q_2)$, ... $M_n \equiv (p_n, q_n)$, ..

Wiemy z teorji ułamków ciągłych, że redukty są wartościami, zbliżającemi się coraz więcej do liczby, przedstawionej przez ułamek ciągły i że w szczególności redukty o wskaźnikach parzystych są wartościami przybliżonemi przez nadmiar, natomiast redukty o wskaźnikach nieparzystych są wartościami przybliżonemi przez niedomiar; jeżeli więc założymy

$$\operatorname{tg}\alpha=\mu,$$

to możemy powiedzieć, że kąty α_1, α_3, ... α_{2n-1}, ... stają się kolejno coraz większe, ale wszystkie pozostają mniejsze od α, natomiast kąty α_2, α_4, ... α_{2n}, ... stają się kolejno coraz mniejsze, pozostając zawsze większemi od α. Jeżeli więc wykreślimy proste OM_1, OM_3, ... OM_{2n-1}, ... i proste OM_2, OM_4, ... OM_{2n}, ..., to możemy się zbliżyć jak tylko chcemy do prostej OM, tworzącej z OX kąt α; możemy przeto wyznaczyć z dowolnym przybliżeniem styczną trygonometryczną kąta α, czyli odcinek przedstawiający liczbę μ.

Stosując tę metodę ogólną do przypadku liczby niewymiernej $\sqrt[3]{2}$, którą można rozwinąć na ułamek ciągły

$$1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\ldots}}}}}},$$

możemy elementarnie i z takim przybliżeniem, z jakim chcemy, wyznaczyć odpowiedni odcinek, t. j. krawędź sześcianu dwa razy większego od sześcianu, którego krawędź przyjęliśmy za jednostkę miary.

W przypadkach szczególnych może być dogodnie stosować jaką inną metodę odrębną, wskazaną przez sam charakter rozpatrywanego zagadnienia. Teoretycznie należy zawsze oddać pierwszeństwo metodzie dającej takie przybliżenie, które zależy od ilości wykonanych prób, gdyż w takim przypadku można doprowadzić przybliżenie do bardzo znacznego stopnia przez proste powiększanie liczby tych prób. W praktyce wybierzemy taką metodę, która za pomocą oznaczonej prostej konstrukcji prowadzi do rezultatu, będącego wystarczającym przybliżeniem rezultatu szukanego, tak że błąd popełniony będzie mniejszy od takiego, któryby jeszcze mógł być oceniony stosownemi przyrządami i naszemi zmysłami.

§ 9. Podwojenie sześcianu za pomocą przybliżonych konstrukcji elementarnych.—Metoda Apolonjusza (270—186 prz. Chr.).—Niech będą AC, AB (fig. 95) dwoma odcinkami danemi, dla których mamy wykreślić dwie średnie proporcjonalne. Umieszczając dane odcinki pod kątem prostym, budujemy wyznaczony przez nie prostokąt $ABDC$; poprowadźmy przekątne tego prostokąta, a przyjmując punkt przecięcia przekątnych E za środek, opiszmy okrąg promieniem takim, ażeby prosta łącząca punkty przecięcia okręgu F, G z przedłużeniami odcinków AB i AC (poza końce B, C) przeszła przez punkt D. Odcinki BF, CG są szukanemi dwiema średniemi proporcjonalne-

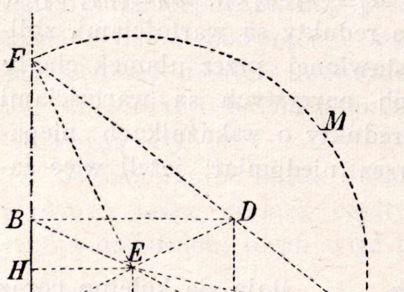

Fig. 95.

mi. W rzeczy samej, jeżeli przez E poprowadzimy proste EH, EK równoległe odpowiednio do AC, AB, to punkty H, K będą oczywiście środkami odcinków AB, AC, a więc będziemy mieli (Euklides, ks. II, pod. 6, tłom. Czecha):

(1) $$AF . BF + HB^2 = FH^2,$$

skąd:

$$AF . BF + HB^2 + HE^2 = FH^2 + HE^2,$$

albo, z uwagi na trójkąty prostokątne HBE, FHE:

(2) $$AF . BF + BE^2 = EG^2.$$

Podobnie znajdziemy:

(2′) $$AG . CG + EC^2 = EG^2,$$

stosując to samo twierdzenie Euklidesa do boku AC zamiast AB. A ponieważ $EF = EG$, przeto dostaniemy z (2), (2′)

$$AF . BF + BE^2 = AG . CG + EC^2,$$

a ponieważ $BE = EC$, przeto

$$AF . BF = AG . CG,$$

czyli

(3) $$\frac{AG}{AF} = \frac{BF}{CG}.$$

Z podobieństwa trójkątów FAG, DCG mamy jeszcze

(4) $$\frac{AG}{AF} = \frac{CG}{CD},$$

a z trójkątów podobnych DCG, FBD:

(5) $$\frac{CG}{CD} = \frac{BD}{BF};$$

przez porównanie proporcji (3), (4), (5) otrzymujemy wreszcie

$$\frac{BD}{BF} = \frac{BF}{CG} = \frac{CG}{CD},$$

czyli

$$\frac{AC}{BF} = \frac{BF}{CG} = \frac{CG}{AB},$$ c. b. d. d.

Jeżeli w szczególności $AC = 2AB$, wtedy CG jest krawędzią sześcianu dwa razy większego od sześcianu o krawędzi AB.

To postępowanie Apolonjusza daje metodę przybliżoną rozwiązania naszego zadania, gdyż promień EF takiego okręgu, którego cięciwa

FG przechodzi przez *D*, nie może być otrzymany przez oznaczoną konstrukcję za pomocą linjału i cyrkla, ale można otrzymać jego przybliżenie tak dobre, jak tylko chcemy, zbliżając za pomocą kolejnych prób granice, między któremi ten promień jest zawarty.

Zupełnie podobne do tej metody są metody przypisywane Heronowi z Aleksandrji (wiek II lub III prz. Chr.) i Filonowi z Gadary (wiek I prz. Chr.).

Metoda Vargiù. — Pomijając sposoby przybliżone Mascheroniego, które już były wyłożone w artykule II, przechodzimy do nowszych metod przybliżonego rozwiązania zadania podwojenia sześcianu; na szczególną uwagę zasługują metody, których autorami są Vargiù, Buonafalce i Boccali.

Metodę Vargiù[1]) można w krótkości tak wyłożyć: Jeżeli l jest krawędzią sześcianu, który ma być podwojony, a d jest przekątną ściany sześcianu, to wykreślmy średnią proporcjonalną m_1 między l i d, następnie wykreślmy średnią proporcjonalną m_2 między d i pierwszą znalezioną średnią proporcjonalną m_1; podobnie znajdźmy średnią proporcjonalną m_3 między pierwszą i drugą średnią proporcjonalną, t. j. między m_1 i m_2; tak samo postępujemy dalej, wykreślając średnią proporcjonalną m_4 między m_2 i m_3 i t. d.; siódma z tak znalezionych średnich proporcjonalnych przedstawia ze znacznym przybliżeniem (z niedomiarem mniejszym od $^2/_{1000}$) krawędź sześcianu dwa razy większego od sześcianu danego. W rzeczy samej, jeżeli dla uproszczenia przyjmiemy $l=1$, a więc $d=2^{1/2}$, to dostaniemy z powyższej konstrukcji

$$\frac{1}{m_1}=\frac{m_1}{2^{1/2}},\ \text{czyli}\ m_1=2^{1/4};$$

$$\frac{2^{1/2}}{m_2}=\frac{m_2}{m_1},\ m_2=2^{1/4}\,.\,m_1^{1/2}=2^{3/8};$$

$$\frac{m_1}{m_3}=\frac{m_3}{m_2},\ m_3=m_1^{1/2}\,.\,m_2^{1/2}=2^{5/16};$$

$$\frac{m_2}{m_4}=\frac{m_4}{m_3},\ m_4=m_2^{1/2}\,.\,m_3^{1/2}=2^{11/32};$$

$$\frac{m_3}{m_5}=\frac{m_5}{m_4},\ m_5=m_3^{1/2}\,.\,m_4^{1/2}=2^{21/64};$$

---

[1]) G. I. Vargiù, *Sulla duplicazione del cubo e sulla moltiplicazione di esso.* Oristano, 1877.

$$\frac{m_4}{m_6} = \frac{m_6}{m_5}, \ m_6 = m_4^{1/2} . m_5^{1/2} = 2^{43/128};$$

$$\frac{m_5}{m_7} = \frac{m_7}{m_6}, \ m_7 = m_5^{1/2} . m_6^{1/2} = 2^{85/256}.$$

Logarytmując, znajdziemy

$$2^{85/256} = 1,\ 25878\ldots,$$

a ponieważ

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}25992\ldots,$$

przeto m_7 przedstawia krawędź sześcianu dwa razy większego od sześcianu o krawędzi 1 z niedomiarem, wynoszącym około $^1/_{1000}$.

Metody Buonafalce'go. — Buonafalce[1]) rozpatrywał w trzech następujących po sobie pracach zadanie podwojenia sześcianu, a w trzeciej z nich, która jest najkompletniejsza, dał cztery przybliżone rozwiązania graficzne tego zadania. Ograniczymy się do przedstawienia pierwszego i trzeciego rozwiązania, z których pierwsze zasługuje na uwagę ze względu na prostotę konstrukcji, a trzecie ze względu na osiągnięte przybliżenie.

Pierwsze rozwiązanie Buonafalcego (fig. 96). Niech będzie AB krawędzią sześcianu danego. Wykreślmy kwadrat $ABCD$, mający za bok AB (czyli, inaczej mówiąc, rozpatrujmy ścianę danego sześcianu), poprowadźmy przekątną BD tego kwadratu, podzielmy ją na sześć części równych i odetnijmy na boku DA od D ku A odcinek DE równy szóstej części przekątnej; połączmy wreszcie E z B. Odcinek BE przedstawia z niedomiarem mniejszym od $^2/_{1000}$ krawędź sześcianu dwa razy większego od sześcianu danego. Stwierdza to następujące dowodzenie analityczne ojca A. Secchi'ego, załączone do powyższego rozwiązania w pierwszej pracy Buonafalcego.

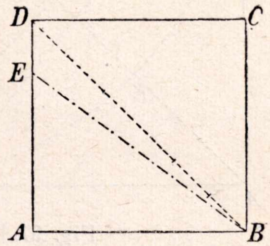

Fig. 96.

Załóżmy dla uproszczenia $AB = 1$, a więc $BD = \sqrt{2}$, $DE = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Z figury widać, że

$$EB = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{AB^2 + (AD - DE)^2},$$

---

[1]) G. Buonafalce. *Sulla scoperta di un nuovo rapporto geometrico che serve alla soluzione del problema della duplicazione del cubo.* Pisa, 1876.— Wyd. 2-e, poprawione i uzupełnione, Pisa 1876; *Duplicazione del cubo e quadratura del circolo* con aggiunte del dott. Pieraccini, Pisa 1878.

czyli, po podstawieniu:

$$EB = \sqrt{1 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{74 - 12\sqrt{2}}{36}},$$

a więc

$$EB = \frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{37 - 6\sqrt{2}},$$

skąd, po wykonaniu rachunku, uwzględniając w $\sqrt{2}$ pięć znaków dziesiętnych, dostaniemy:

$$EB = 1{,}25863\ldots;$$

ta wartość różni się od

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}25992\ldots$$

mniej niż o $^2/_{1000}$.

Trzecie rozwiązanie Buonafalcego (fig. 97). Jeżeli kwadrat $ABCD$ przedstawia ścianę danego sześcianu, to wyrysujmy ćwiartkę koła DKB o środku C i promieniu CD; odetnijmy na boku AB (od B ku A) odcinek BE równy połowie różnicy AK pomiędzy przekątną i bokiem kwadratu; od przekątnej AC odetnijmy odcinek CF równy czwartej części boku kwadratu; poprowadźmy wreszcie prostą FE, która przecina łuk koła DKB w punkcie G. Odcinek DG przedstawia z niedomiarem mniejszym od $^2/_{100000}$ krawędź sześcianu dwa razy większego od sześcianu danego. Ażeby tego dowieść,

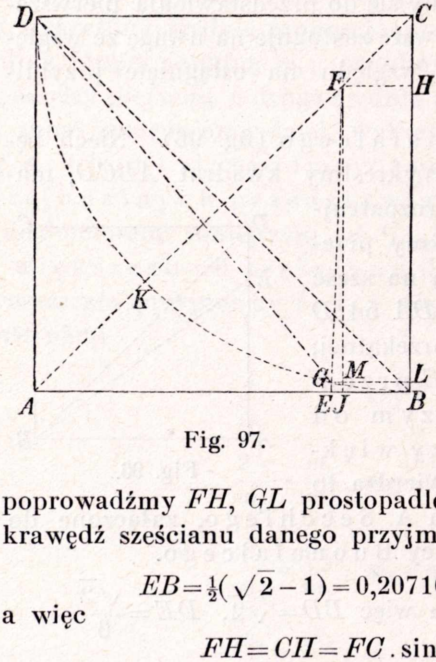

Fig. 97.

poprowadźmy FH, GL prostopadle do BC i FI prostopadle do AB. Jeżeli krawędź sześcianu danego przyjmiemy za 1, to z konstrukcji znajdziemy:

$$EB = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) = 0{,}2071067\ldots, \quad FC = \tfrac{1}{4}, \quad \sphericalangle FCH = 45^0,$$

a więc

$$FH = CH = FC \,.\, \sin 45^0 = \tfrac{1}{4} \,.\, \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}1767767\ldots$$

Widzimy, że

$$EI = EB - FH; \quad IF = BC - FH,$$

a ponieważ

$$EI = IF \cot FEI,$$

przeto

$$\cot FEI = \frac{EB - FH}{BC - FH} = \frac{0{,}0303300\ldots}{0{,}8232233\ldots} = 0{,}0368430\ldots$$

Oznaczmy dla skrócenia przez m i n wartości znalezione na EB i $\cot FEI$, a przez x oznaczmy wartość odcinka GL czyli $\cos DCG$; wtedy będzie

$$LC = \sin DCG = \sqrt{1-x^2}.$$

Jeżeli z punktu G poprowadzimy prostopadłą do AB (co zostało na figurze opuszczone, ażeby jej nie komplikować zbytecznie), to otrzymamy mały trójkąt prostokątny, którego jedna z przyprostokątnych równa się $EB - GL$, albo $LB.\cot IEF$, a więc:

$$m - x = (1 - \sqrt{1-x^2})n,$$

skąd

$$m - n - x = -n\sqrt{1-x^2},$$

skąd, po podniesieniu do kwadratu, przeniesieniu i połączeniu wyrazów:

$$x^2(n^2+1) - 2(m-n)x + m(m-2n) = 0.$$

Z tego równania stopnia drugiego względem x otrzymamy:

$$x = \frac{m - n \pm \sqrt{(m-n^2) - (n^2+1)(m-2n)m}}{n^2+1} = \frac{m - n \pm n\sqrt{1 - m(m-2n)}}{n^2+1}.$$

Jeżeli podstawimy w tym wzorze zamiast m i n ich wartości 0,2071067... i 0,0368430..., to dostaniemy, zachowując znak górny:

$$x = \cos DCG = \frac{0{,}2065941\ldots}{1{,}0013574\ldots},$$

skąd znajdziemy za pomocą logarytmów

$$\sphericalangle DCG = 78^0 5' 36'', 83\ldots$$

Wreszcie

$$DG = 2 \sin \frac{DCG}{2} = 2 \sin 39^0 2' 48'', 41\ldots,$$

skąd, po wykonaniu rachunku logarytmicznego dostaniemy

$$DG = 1{,}2599093\ldots,$$

podczas kiedy

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}2599209\ldots,$$

a więc, jak już mówiliśmy, DG różni się mniej niż o $^2/_{100000}$ od krawędzi sześcianu dwa razy większego niż sześcian dany.

Metoda Boccalego[1]. — Zasługuje również na uwagę przybliżenie osiągnięte w zadaniu o podwojeniu sześcianu przez rozwiązanie, któ-

---

[1]) Gaetano Boccali. *Doppio cubo ed altre nuove scoperte geometriche in una semplice spirale poligona,* Camerino 1884.

re dał Boccali; jednakże uważam za właściwe uzasadnić to rozwiązanie na drodze różnej od tej, którą szedł Boccali. We wstępie do swej pracy autor tak się wyraża: „...Wprawdzie Buonafalce znalazł cztery rozwiązania, włączając to, które zaleca Ojciec Secchi (t. j. pierwsze), a z nich trzecie i czwarte przewyższają pod względem przybliżenia granice mojego rozwiązania, ale musimy jeszcze uwzględnić, że dążąc do pewnego rezultatu gieometrycznego należy także brać w rachubę drogę, którą trzeba przebyć; otóż droga, którą ja przebyłem, jest drogą naprawdę nowych odkryć gieometrycznych; wskutek tego będzie zawsze więcej pożądane przystępowanie do podwojenia sześcianu na tak pięknej drodze, aniżeli na innych drogach, najeżonych nudnemi i skomplikowanemi konstrukcjami, chociażby prowadziły do większego przybliżenia, które zresztą może też być niepewne z powodu skomplikowanej konstrukcji, trudnej do wykonania z dokładnością i ścisłością". Ale uważne przeczytanie pracy Boccalego wykazuje, że droga, którą on sam przebywa, jest dość sztuczna, a proponowana przez niego konstrukcja dostatecznie przybliżonego rozwiązania zadania delijskiego nie jest nawet należycie objaśniona. Dlatego też wolę odnaleźć rozwiązania Boccalego na drodze zupełnie odmiennej od tej, którą on postępował.

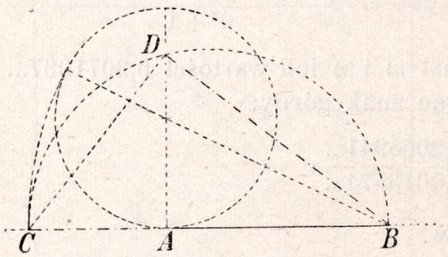

Fig. 98.

Niech będzie AB krawędzią sześcianu danego; wykreślmy znanym sposobem bok dziesięciokąta foremnego gwiaździstego, wpisanego w koło o promieniu równym AB (fig. 98) i odetnijmy na prostej BA od B ku A odcinek BC równy znalezionemu bokowi. Zakreślmy teraz półkole na średnicy BC i poprowadźmy z punktu A prostopadłą do BC, przecinającą półkole w punkcie D; połączmy wreszcie punkt D z punktami B i C.

Krawędź sześcianu dwa razy większego od sześcianu danego z przybliżeniem do $^1/_{10000}$ przez nadmiar równa się

$$\tfrac{2}{3}(AC+DB).$$

W rzeczy samej, przyjmując $AB=1$, otrzymamy z powyższej konstrukcji

$$BC=\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$$

$$AC=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

czyli:

$$AC = \frac{2{,}23606797\ldots - 1}{2} = 0{,}6180339887\ldots,$$

a na zasadzie znanego twierdzenia gieometrycznego

$$BD^2 = BA \,.\, BC,$$

czyli

$$BD = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \sqrt{\frac{3{,}23606797\ldots}{2}} = 1{,}2720196495\ldots$$

A zatym

$$\tfrac{2}{3}(AC+BD) = \tfrac{2}{3}(0{,}6180339887\ldots + 1{,}2720196495\ldots) =$$

$$= \tfrac{2}{3} \,.\, 1{,}8900536382\ldots = 1{,}2600357588\ldots,$$

a ponieważ

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}2599209\ldots,$$

przeto widzimy, że pomiędzy wartością $\frac{2}{3}(AC+BD)$ i $\sqrt[3]{2}$ jest różnica mniejsza od $^2/_{10000}$ i mało co większa od $^1/_{10000}$.

Gdyby więc krawędź sześcianu danego miała np. dziesięć metrów długości, to za pomocą powyższego rozwiązania dostalibyśmy krawędź sześcianu podwojonego z nadmiarem zaledwie jednego milimetra.

II.

§ 10. Niemożliwość elementarnego rozwiązania zadania podziału kąta na trzy części równe. Niech będzie φ kątem, który mamy podzielić na trzy części równe. Ze znanego wzoru trygonometrycznego wynika

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3\operatorname{tg}\frac{\varphi}{3} - \operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{3}}{1 - 3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{3}};$$

zakładając więc $\operatorname{tg}\varphi = a$ i $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{3} = x$, dostaniemy:

$$a = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2},$$

skąd otrzymamy równanie zupełne stopnia trzeciego

$$x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0. \tag{1}$$

Z równania tego, wykonawszy przekształcenie $x = y + a$, dostaniemy równanie stopnia trzeciego sprowadzone

(2) $$y^3-3(1+a^2)y-2a(1+a^2)=0,$$

któremu więc czyni zadość różnica $x-a$ czyli

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{3}-\operatorname{tg}\varphi.$$

Dowiedziemy, że równanie (2) jest w ogólności nieprzywiedlne. W rzeczy samej, gdyby to równanie było przywiedlne, wtedy jego pierwsza strona dałaby się rozłożyć na iloczyn dwuch czynników, z których jeden musiałby być linjowym; możnaby więc ją było napisać pod postacią

$$(y-\alpha)(y^2+\beta y+\gamma),$$

gdzie α, β, γ są funkcjami wymiernemi wielkości a. Jeżeli w szczególności a jest wymierne, to α, β, γ musiałyby być wymierne; a jeżeli a jest całkowite, wtedy znane twierdzenie przybrane Gaussa (art. V) prowadzi nas do wniosku, że w założeniu przywiedlności trójmian

$$y^3-3(1+a^2)y-2a(2+a^2)$$

musiałby dać się rozłożyć na iloczyn

$$(y-\alpha)(y^2+\beta y+\gamma),$$

gdzie α, β, γ są liczbami całkowitemi. A zatym każdej wartości całkowitej a musiałaby odpowiadać wartość całkowita jednego przynajmniej z pierwiastków równania (2); a ponieważ $x=a+y$, przeto mielibyśmy wartość całkowitą na x. Ale łatwo sprawdzić, że jeżeli np. $a=2$, a więc $\operatorname{tg}\varphi=2$, wtedy nie może być całkowitą żadna z trzech wartości różnych

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{3},\quad \operatorname{tg}\frac{\varphi+180^0}{3},\quad \operatorname{tg}\frac{\varphi+2\,.\,180^0}{3},$$

odpowiadających kątom φ, $\varphi+180^0$, $\varphi+2\,.\,180^0$, które mają styczną równą 2. W rzeczy samej, z tablic trygonometrycznych znajdziemy w tym przypadku:

$\varphi=\ 63^0 26' 5'', 81$ (z dokładnością do $^1/_{100}$ sekundy), a zatym

$\frac{\varphi}{3}=\ 21^0 8' 41'', 93$ „

$\frac{\varphi}{3}+\frac{180^0}{3}=\ 81^0 8' 41'', 93$ „

$\frac{\varphi}{3}+\frac{2\,.\,180^0}{3}=141^0 8' 41'', 93$ „

a ponieważ

$$0 < \frac{\varphi}{3} < 45^0,$$

przeto

$$0 < \mathrm{tg}\frac{\varphi}{3} < 1;$$

podobnie, mamy

$$\frac{\varphi}{3} + \frac{2\,.\,180^0}{3} > 135^0,$$

ponieważ więc kąt spełniający kąta

$$\frac{\varphi}{3} + \frac{2\,.\,180^0}{3}$$

jest mniejszy od 45^0, przeto styczna tego kąta jest również, co do wartości bezwzględnej, zawarta między 0 i 1. Wykonawszy taki sam rachunek dla kąta

$$\frac{\varphi}{3} + \frac{180^0}{3},$$

znajdziemy:

$$\mathrm{tg}\frac{\varphi + 180^0}{3} = 6{,}4112..,$$

a więc

$$6 < \mathrm{tg}\frac{\varphi + 180^0}{3} < 7.$$

A zatem równanie (2) jest w ogólności nieprzywiedlne, a ponieważ nie jest stopnia 2^m, przeto nie jest rozwiązalne za pomocą pierwiastków stopnia drugiego (art. V); następstwem tego jest, że (art. IV) nie można za pomocą linjału i cyrkla wykreślić odcinka y, a więc i odcinka x. W ten sposób zostało dowiedzione, że w ogólności nie można rozwiązać zadania podziału kąta na trzy części równe, stosując tylko linjał i cyrkiel.

Postaramy się teraz osiągnąć te same wyniki, rozpatrując zagadnienie z innego stanowiska (jakkolwiek nieco mniej elementarnego).

Zakładając $\lambda = u + iv$, gdzie $u = \cos\varphi$, $v = \sin\varphi$ przedstawiają dostawę i wstawę kąta φ, który ma być podzielony na trzy części równe, i zakładając $z = x + iy$, gdzie

$$x = \cos\frac{\varphi}{3}, \quad y = \sin\frac{\varphi}{3},$$

dostaniemy, podług znanego wzoru Moivrea, równanie

$$z^3 = \lambda,$$

od którego więc tym sposobem zależy zadanie podziału kąta na trzy części równe.

Dowiedziemy przedewszystkim, że równanie $z^3 = \lambda$ jest algiebraicznie nieprzywiedlne, czyli że nie może być tożsamościowo

$$z^3 - \lambda = \{z - f(\lambda)\} \, . \, \{z^2 + \mu(\lambda) \, . \, z + \nu(\lambda)\},$$

jeżeli f, μ, ν są funkcjami wymiernemi względem λ.

W rzeczy samej, byłoby wtedy

$$f(\lambda) = \frac{Y(\lambda)}{X(\lambda)},$$

gdzie Y, X oznaczają dwa wielomiany

$$Y(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$$

$$X(\lambda) = b_0\lambda^m + b_1\lambda^{m-1} + \ldots + b_m.$$

Musiałoby więc być tożsamościowo

$$\frac{Y^3(\lambda)}{X^3(\lambda)} = \lambda.$$

Otóż, że równanie to nie może być spełnione tożsamościowo, a więc dla każdej wartości λ, to stanie się widocznym, gdy zauważymy, że gdyby wyrażenie $\frac{Y^3}{X^3}$ było równoważne wielomianowi względem λ, to stopień tego wielomianu równałby się $3(n-m)$, a więc nigdy 1.

Rozpatrywane równanie $z^3 = \lambda$ przedstawia, jak widzieliśmy, równanie podziału kąta φ na trzy części równe, jeżeli ograniczymy zmienność λ, zakładając

$$\lambda = \cos\varphi + i \sin\varphi,$$

czyli

$$|\lambda| = 1;$$

z drugiej strony przedstawia ono równanie, od którego zależy ogólne mnożenie sześcianu przez dowolną liczbę rzeczywistą, o ile ograniczymy zmienność wielkości λ do wartości rzeczywistych.

Ponieważ równanie $z^3 = \lambda$ jest algiebraicznie nieprzywiedlne, przeto można wnosić, że jest nieprzywiedlne w ogólności w obu przypadkach następujących:

$$\lambda = \cos\varphi + i \sin\varphi \quad (|\lambda| = 1)$$

i λ rzeczywiste;

w przeciwnym bowiem razie rozkład $z^3 - \lambda$ na czynniki dałby się wykonać, a więc istnienie równości

$$z^3 - \lambda = \{z - f(\lambda)\}\{z^2 + \mu(\lambda) \,.\, z + \nu(\lambda)\}$$

musiałoby być możliwe dla

$$\lambda = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

i dla wartości rzeczywistych λ; ale to byłoby możliwe tylko wtedy, gdyby równanie powyższe było prawdziwe dla wszystkich wartości zespolonych zmiennej λ, gdyż jeżeli dwie funkcje analityczne

$$z(\lambda) = \sqrt[3]{\lambda} \text{ i } z = f(\lambda)$$

przyjmują te same wartości we wszystkich punktach jakiejś linji płaszczyzny zespolonej (a mianowicie na kole punktów o wartości bezwzględnej 1 i na osi rzeczywistej), wtedy nie mogą przyjmować wartości różnych w innych miejscach płaszczyzny.

Uwaga. Powyższe rozumowanie wykazuje jednocześnie, że równanie podziału kąta na trzy części równe, a także równanie mnożenia sześcianu (przez liczbę całkowitą dowolną) jest w ogólności nieprzywiedlne, skąd wnosimy o niemożliwości rozwiązywania gieometrycznego tych zadań za pomocą prostej i koła.

Mogą się jednakże zdarzać przypadki szczególne, w których równanie rozpatrywane powyżej staje się przywiedlnym; tak np. w przypadku mnożenia sześcianu, jeżeli λ jest trzecią potęgą liczby całkowitej, ale nie dla innych wartości całkowitych λ (§ 1).

Również w zagadnieniu podziału kąta na trzy części równe są przypadki szczególne przywiedlności, istnieją więc szczególne kąty, które się dają dzielić na trzy części równe za pomocą linjału i cyrkla.

Niech np. będzie $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, gdzie liczba n nie jest podzielna przez 3. Wiemy, że jeżeli n czyni zadość temu założeniu, to można zawsze wyznaczyć dwie liczby całkowite x, y, czyniące zadość równaniu nieoznaczonemu

$$nx - 3y = 1.$$

Takie liczby x, y spełniają więc równanie

$$\frac{2\pi x}{3} - \frac{2\pi y}{n} = \frac{2\pi}{3n};$$

przeto kąt $\frac{\varphi}{3}$ można wyznaczyć jako różnicę pomiędzy kątem x-krotnym kąta $\frac{2\pi}{3}$ (kąta trójkąta równobocznego) i kątem y-krotnym kąta $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, przyjętego jako dany.

A więc wszystkie kąty $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, a wskutek tego i wszystkie kąty $m\varphi = \frac{2m\pi}{n}$, gdzie n nie jest podzielne przez 3, mogą być podzielone na trzy części równe za pomocą linjału i cyrkla.

Co się tyczy kątów $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, podzielnych elementarnie na trzy części równe, należy zaznaczyć, że z tych wszystkich kątów φ można zbudować elementarnie tylko te, dla których n rozłożone na czynniki pierwsze, ma postać

$$2^{\nu}(2^{2^{\nu_1}}+1)(2^{2^{\nu_2}}+1)\ldots,$$

gdzie $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > 0, \ldots$ (por. art. V)[1]).

§ 11. Podział kąta na trzy części równe za pomocą kwadratrycy Hipjasza.— Poszukiwania historyczne najdawniejszych badań nad podziałem kąta na trzy części równe prowadzą, podług mniemania najznakomitszych historyków matematyki, do Hipjasza z Elidy, filozofa, sofisty i matematyka, który żył w IV w. prz. Chr., a któremu należy przypisać odkrycie krzywej zwanej kwadratrycą. Zobaczymy, jak można zastosować tę krzywą do naszego zadania.

Prawdopodobnie krzywej, o której mowa, sam wynalazca nie dał żadnej nazwy; później została nazwana kwadratrycą przez Dinostratosa i innych, którzy starali się ją zużytkować do kwadratury koła[2]).

Tę krzywą można zbudować w sposób następujący. Niech będzie dany kwadrat $ABCD$ (fig. 99); przyjmując A za środek, opiszmy okrąg BED i przypuśćmy, że odcinek AB obraca się jednostajnie dokoła A; jednocześnie odcinek BC niech się porusza jednostajnie, pozostając równoległym do AD i przesuwając się końcem B wzdłuż BA. Jeżeli te oba ruchy zaczynają się jednocześnie i odbywają się jednostajnie, to ruchome proste AB, BC przecinają się w każdym położeniu w punkcie, poruszającym się wraz z niemi. Miejscem tych punktów jest krzywa zwana kwadratrycą, a główna własność tej krzywej jest następująca: jeżeli przez A poprowadzimy jakąkolwiek prostą, jak na rysunku AE, wtedy ćwiartka okręgu koła BED bę-

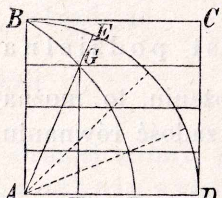

Fig. 99.

[1]) O należących tutaj badaniach szczególnych patrz Bosauquet, *Treatise on the angle of* 30° *and any other plane angle.* London 1877.

[2]) Por. Loria, l. c., I Nr. 38; Zeuthen, l. c. str. 62 i nast.

dzie w takim stosunku do łuku DE, jak odcinek BA do rzędnej GH punktu przecięcia G prostej AE z kwadratrycą; własność ta jest bezpośrednim następstwem sposobu, w jaki krzywa powstała. Jeżeli więc oznaczymy przez y rzędną dowolnego punktu kwadratrycy w układzie spółrzędnych prostokątnych (AD, AB), a przez ϑ kąt, który promień wodzący tego punktu tworzy z osią odciętych, wtedy krzywa będzie określona przez równanie

$$\frac{y}{b}=\frac{\vartheta}{R},$$

gdzie R oznacza kąt prosty, a b wartość y, odpowiadającą $\vartheta=R$.

A więc

$$y=k\vartheta, \text{ gdzie } k=\frac{b}{R}.$$

Widać stąd od razu, że ta krzywa może służyć do podziału kąta na części równe, albo też na dwie części, będące do siebie w jakimkolwiek stosunku danym. Jeżeli np. mamy podzielić kąt EAD na trzy części równe, to trzeba tylko podzielić na trzy części równe rzędną GH punktu przecięcia prostej AE z kwadratrycą i połączyć punkt A z punktami, w których kwadratryca przecina się z prostemi, poprowadzonemi przez punkty podziału równolegle do AD.

Z podobnego rozumowania okazuje się, że do tych samych zastosowań, co kwadratryca, nadaje się tak zwana linja spiralna Archimedesa ($r=a\varphi$), t. j. miejsce punktu, posuwającego się ruchem jednostajnym wzdłuż prostej, która sama obraca się jednostajnie dokoła jednego ze swych punktów.

§ 12. Sprowadzenie podziału kąta na trzy części równe do zadań na wstawianie odcinków.—Podług relacji Papusa w starożytności już sprowadzano zadanie podziału kąta na trzy części równe do dwuch zadań klasycznych na wstawianie odcinków.

Jedno z nich, którego daty nie udało się ustalić, mogło, jak pisze Zeuthen, powstać w wieku V; natomiast drugie, zawarte w *Lematach Archimedesa*, przekazanych nam przez arabów, pochodzi, być może, od samego Archimedesa.

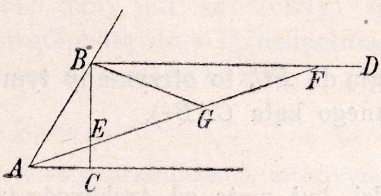

Fig. 100.

1. Przypuśćmy, że chcemy kąt (ostry) BAC podzielić na trzy części równe (fig. 100); poprowadźmy z dowolnego punktu B ramienia AB prostopadłą BC do drugiego ramienia i równoległą BD do tego ramienia; umieśćmy następnie między BC i BD odcinek $EF=2.AB$

t a k, a ż e b y j e g o p r z e d ł u ż e n i e p r z e s z ł o p r z e z *A*; powstanie w ten sposób kąt *CAE*, który jest trzecią częścią danego kąta *BAC*.

W rzeczy samej, jeżeli *G* jest środkiem odcinka *EF* i jeżeli połączymy *G* z *B*, to

$$EG = GF = BG = AB,$$

a zatym

$$\sphericalangle GAB = \sphericalangle BGA = 2 \,.\, BFG = 2 \,.\, CAE,$$

przeto

$$\sphericalangle CAE = \frac{\sphericalangle CAB}{3}, \quad \text{c. b. d. d.}$$

2. Niech będzie *BAC* kątem (ostrym), który mamy podzielić na trzy części równe (fig. 101). Określmy promieniem dowolnym koło o środku *A*; *B*, *C*, *D* niech będą punktami przecięcia tego koła z ramionami danego kąta i z przedłużeniem ramienia *AB* poza *A*; u m i e ś ć m y t e-

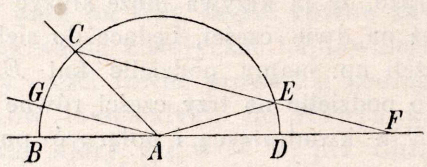

Fig. 101.

r a z p o m i ę d z y p r o s t ą *AD* i z a k r e ś l o n y m o k r ę g i e m o d c i n e k *EF* r ó w n y p r o m i e n i o w i *AC* w t a k i s p o s ó b, a ż e b y j e g o p r z e d ł u ż e n i e p r z e s z ł o p r z e z *C*; powstanie przez to kąt *EFD*, który jest trzecią częścią kąta danego.

W rzeczy samej, jeżeli połączymy *A* z *E*, to okaże się z wykonanej konstrukcji, że

$$\sphericalangle ACE = \sphericalangle CEA = 2 \,.\, EFD,$$

a ponieważ

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACE + \sphericalangle EFD,$$

przeto

$$\sphericalangle CAB = 3 \,.\, DFE,$$

czyli, jak twierdziliśmy

$$\sphericalangle DFE = \frac{\sphericalangle CAB}{3}.$$

Jeżeli więc poprowadzimy prostą *AG* równoległą do *FC*, to otrzymany tym sposobem kąt *GAB* będzie trzecią częścią danego kąta *CAB* [1]).

[1]) Ta metoda, jak już mówiliśmy, pochodzi, być może od Archimedesa; można tak wnosić z tekstu lematu VIII cytowanych *Lematów Archimedesa*, mającego takie brzmienie: „Jeżeli przedłużymy jakąkolwiek cięciwę *CE* (fig. 101) koła o odcinek *EF* równy promieniowi i jeżeli połączymy ze środkiem *A* punkt

Ażeby uzupełnić wykład dwuch ostatnich metod, w których zakładaliśmy, że kąt dany był ostry, należy dodać, że jeżeli kąt jest prosty, to wiemy dobrze, jak można go podzielić elementarnie na trzy części równe; jeżeli zaś dany kąt jest rozwarty, to możemy za pomocą środków elementarnych rozłożyć go na sumę kąta prostego i ostrego; a więc podział danego kąta rozwartego sprowadza się do podziału kąta ostrego.

§ 13. Podział kąta na trzy części równe za pomocą stożkowych. Metody przekazane przez Papusa. Było to uporem bezwątpienia, jak pisze Montucla[1]) przez długi czas poszukiwać za pomocą gieometrji elementarnej rozwiązania obu wyłożonych w poprzednim paragrafie zadań na wstawianie odcinków, do których zostało sprowadzone zadanie podziału kąta na trzy części równe. Poszukiwane wstawiania odcinków, zarówno jak zadanie, które zostało do nich sprowadzone, są zależne od równań stopnia trzeciego, w ogólności nieprzywiedlnych, a więc nie mogły być wykonane za pośrednictwem koła i prostej. Po bardzo licznych usiłowaniach, które były bezpłodne, albo prowadziły do wniosków błędnych, zaczęto się zwracać do przecięć stożkowych i do różnych innych krzywych.

Papus zdaje sprawę z głęboko obmyślanych sposobów, jakiemi różni matematycy, których nazwiska nie zostały podane, stosowali hiperbolę do rozwiązania drugiego z dwuch zadań na wstawianie odcinków do których, jak widzieliśmy, sprowadza się zadanie podziału kąta na trzy części równe.

Powróćmy więc do tego drugiego zadania i zauważmy zaraz, stając na stanowisku Papusa, że można temu zadaniu nadać jeszcze taką po-

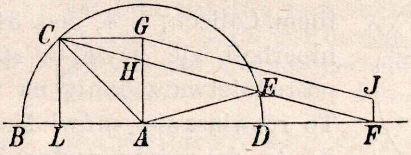

Fig. 102.

stać: dany jest kąt (ostry) BAC (fig. 102); prowadzimy z C prostą CL prostopadłą do AB, uzupełniamy prostokąt $LAGC$, a przedłużywszy AB poza A, umieszczamy między prostą AB i prostą AG odci-

końcowy przedłużenia, to otrzymamy dwie sieczne FEC, FDB, wyznaczające na danym okręgu dwa łuki nie przyległe CB, DE, z których jeden jest trzy razy większy od drugiego". Widać więc, że jest tu tylko drobna różnica formalna w stosunku do metody wyłożonej wyżej.

[1]) L. c. str. 240 i nast.

nek HF, dwa razy większy od AC, a którego przedłużenie przechodzi przez C; wtedy $\sphericalangle HFA = \frac{\sphericalangle CAB}{3}$.

Uzupełnijmy teraz równoległobok $GHFI$; z trójkątów podobnych CLF, CGH mamy:

$$FL:LC = CG:GH,$$

czyli

$$FL:AG = AL:FI,$$

skąd

$$FL\,.\,FI = AG\,.\,AL.$$

Stąd wynika, że punkt I należy do hiperboli, mającej asymptoty LF, LC i przechodzącej przez punkt G; odcinek HF jest dany co do wielkości jako podwojony odcinek AC, a więc jest też znany odcinek GI, z czego się okazuje, że punkt I, oprócz do hiperboli rzeczonej, należy także do okręgu o środku G i promieniu $GI = 2\,.\,AC$. Punkt I jest przeto przecięciem tego koła z hiperbolą. Łatwo więc wyznaczyć ten punkt, gdyż trzeba tylko wykreślić przez punkt G hiperbolę, mającą za asymptoty proste LF, LC, oraz koło o środku G i o promieniu równym podwojonemu odcinkowi AC; z punktu I, w którym się te dwie krzywe przecinają, poprowadźmy prostopadłą do BA; spodek F tej prostopadłej wyznacza położenie odcinka HF, od którego, jak widzieliśmy, zależy wyznaczenie trzeciej części kąta BAC.

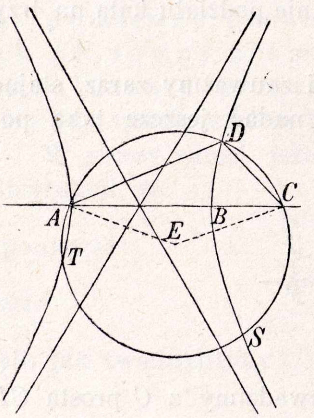

Fig. 103.

Papus mówi jeszcze o innym rozwiązaniu zadania podziału kąta na trzy części równe (Mathem. Collect., I, 4, pod. 34) również za pomocą hiperboli, ale użytej w sposób odmienny, bez pośrednictwa zadania na wstawianie odcinków. To rozwiązanie, mówi Montucla, jest tak piękne, że doprawdy zasługuje na wzmiankę; polega na zastosowaniu pewnej własności hiperboli, której asymptoty zawierają kąt 120° (fig. 103). Jeżeli mianowicie na osi takiej hiperboli odetniemy od wierzchołka B odcinek BC równy połowie osi rzeczywistej i połączymy wtedy jakikolwiek punkt D hiperboli z otrzymanym w ten sposób punktem C i z drugim wierzchołkiem A, wtedy kąt DCA jest zawsze dwa razy większy od kąta CAD[1]).

[1]) Ta własność rzeczonej hiperboli jest mało znana, dowiedziemy jej przeto. Z założenia, że asymptoty tworzą z sobą kąt 120° wnosimy, oznaczając, jak

Stąd wypada, że jeżeli poprowadzimy łuk koła przez punkty A, C, D, wtedy łuk AD będzie dwa razy większy od łuku DC. Łatwo teraz zrozumieć, jak można zastosować tę własność do podzielenia kąta na trzy części równe: na cięciwie AC trzeba wykreślić łuk koła, odpowiadający danemu kątowi $\alpha = CEA$, jako kątowi środkowemu; wtedy CED jest trzecią częścią kąta CEA, czyli kąta α.

Uwaga. Okrąg CDA, oprócz w A i D, przecina hiperbolę jeszcze w dwuch innych punktach T i S; trzy punkty D, T, S dzielą cały okrąg na trzy części równe i odcinają od punktu C trzecią część wszystkich łuków $\alpha + n\,.\,2\pi$, które się zaczynają w C a kończą w A, po okrążeniu koła dowolną ilość razy. Jeżeli w szczególności $n = 3\lambda$ (gdzie λ jest liczbą całkowitą dodatnią, ujemną lub zerem), to zadanie rozwiązuje punkt D; jeżeli $n = 3\lambda + 1$, to należy wziąć punkt T, wreszcie przypadkowi $n = 3\lambda + 2$ odpowiada punkt S. W ten sposób punkty D, T, S odpowiadają trzem rozwiązaniom równania stopnia trzeciego, od którego zależy dane zadanie.

---

zwykle, połowy osi przez a i b, że $b = a \operatorname{tg} 60^0 = a\sqrt{3}$, a zatym równanie hiperboli względem jej osi jako spółrzędnych

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

przyjmuje postać

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1, \text{ czyli } y^2 = 3x^2 - 3a^2.$$

Jeżeli teraz ze środka F odcinka AC (fig. 104) poprowadzimy do AC prostopadłą, przecinającą AD w punkcie G, to ażeby dowieść, że kąt DCA jest dwa razy większy od CAD, trzeba tylko okazać, że CG jest dwusieczną kąta DCA, czyli że $AG : GD = AC : CD$; a w tym celu musimy tylko dowieść, że $AC : CD = AF : FP$. Ale $AC = 3a$, $CD = \sqrt{DP^2 + PC^2} = \sqrt{y^2 + (2a - x)^2}$, $AF = \frac{3}{2}a$, $FP = x - \frac{a}{2}$, a więc proporcję powyższą można tak napisać:

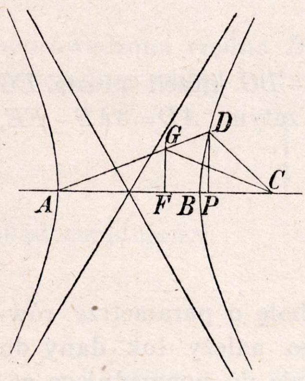

Fig. 104.

$$3a : \sqrt{y^2 + (2a - x)^2} = \frac{3}{2}a : \left(x - \frac{a}{2}\right).$$

A ponieważ dla rozpatrywanej hiperboli

$$y^2 = 3x^2 - 3a^2,$$

przeto, podstawiając to wyrażenie na y^2, z powyższej proporcji dostaniemy

$$3a : \sqrt{4x^2 + a^2 - 4ax} = 3a : (2x - a) = \frac{3}{2}a : \frac{2x - a}{2}.$$

A zatym proporcje, które mieliśmy sprawdzić, są prawdziwe, CG jest dwusieczną kąta DCA, a kąt DCA jest dwa razy większy od DAC.

Stożkowe były stosowane przez matematyków nowoczesnych jako środek podziału kąta na trzy części równe i doprowadziły do następujących konstrukcji zasługujących na uwagę.

Metoda Kartezjusza[1]). Zadanie podziału kąta lub łuku na trzy części równe Kartezjusz stawia w taki sposób: obierzmy za jednostkę promień koła, do którego należy łuk $ABCD$ (fig. 105) dany do podziału; niech będzie jego cięciwa $AD=q$, a przez z oznaczmy cięciwę AB trzeciej części łuku $ABCD$, który przypuśćmy, że został już podzielony w B, C na trzy części równe. Poprowadźmy promienie OA, OB, OC, OD, a przez punkt B poprowadźmy prostą BF równoległą do CO; z trójkątów AOB i BAE, które są podobne (gdyż mają $\sphericalangle ABO$ wspólny, a $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BAE$), wynika:

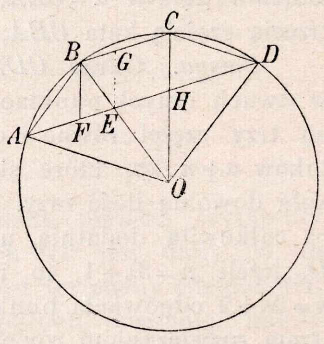

Fig. 105.

(1) $$AO:AB=AB:BE;$$

zaś z trójkątów BAE i EBF, które są również podobne (gdyż mają $\sphericalangle BEE$ wspólny, a $\sphericalangle FBE=\sphericalangle BOC=\sphericalangle BAE$) wynika

(2) $$AB:BE=BE.FE.$$

Ponieważ z proporcji (1) otrzymujemy

$$1:z=z:BE;\quad BE=z^2,$$

przeto z (2) wypada:

$$z:z^2=z^2:FE,\ \text{czyli}\ FE=z^3.$$

Widzimy z figury, że $AE=HD=AB$ i $EH=BC-BG$ (jeżeli prosta EG jest równoległa do HC), czyli $EH=AB-FE$, a zatem $AD=3AB-FE$, czyli

$$q=3z-z^3;$$

przeto z czyni zadość równaniu

(3) $$z^3=3z-q.$$

Opiszmy teraz, idąc za Kartezjuszem, parabolę o parametrze równym połowie promienia koła (fig. 106), do którego należy łuk dany do podziału, a więc o parametrze równym $\frac{1}{2}$, stosownie do poprzedniego założenia; weźmy na osi, począwszy od wierzchołka A, odciętą $AB=2$, a z B poprowadźmy odcinek BC prostopadły do osi i równy $\frac{q}{2}$, t. j. po-

[1]) Por. *La Géométrie*, l. c., str. 75 i nast.

łowie cięciwy danego łuku. Przyjąwszy C za środek, a CA za promień, wykreślmy okrąg, który mieć będzie z parabolą, oprócz wierzchołka, trzy inne punkty przecięcia; rzędnemi tych punktów są trzy wartości szukanej cięciwy. W rzeczy samej, biorąc pod uwagę zwrot, w którym została

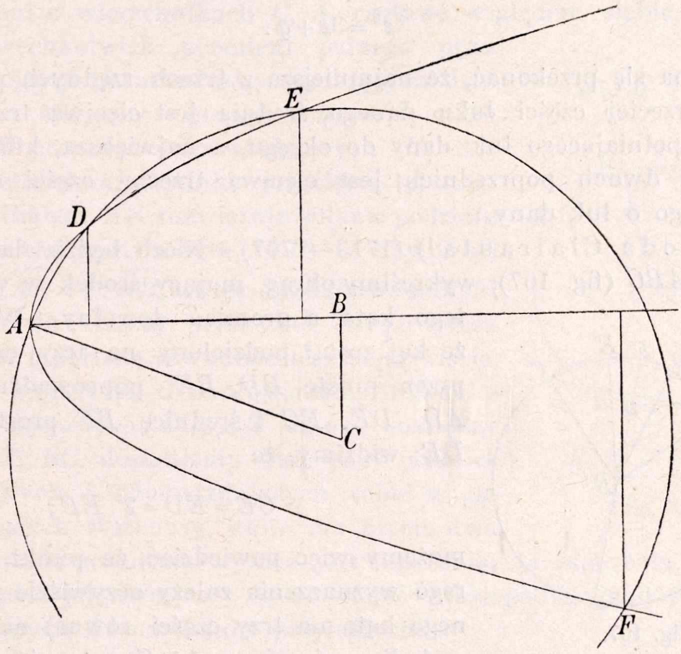

Fig. 106.

poprowadzona rzędna BC ze środka, dostajemy dla punktów przecięcia następujący układ równań:

$$\begin{cases} y^2 = x \\ (x-2)^2 + \left(y+\frac{q}{2}\right)^2 = 2^2 + \frac{q^2}{4}, \end{cases}$$

skąd znajdujemy:

$$(y^2-2)^2 + \left(y+\frac{q}{2}\right)^2 = 2^2 + \frac{q^2}{4}$$

$$y^4 - 3y^2 + qy = 0$$

$$y(y^3 - 3y + q) = 0;$$

a więc $y=0$, czemu odpowiada punkt A, albo $y^3 = 3y - q$, skąd widać, że rzędna y któregokolwiek punktu przecięcia czyni zadość równaniu (3), do którego, podług metody Kartezjusza, sprowadza się zadanie podziału kąta na trzy części równe. Gdyby rzędna BC była poprowadzona na półpłaszczyźnie dodatniej, wtedy otrzymalibyśmy $y^3 = 3y + q$, które to równanie różni się od (3) tylko znakiem przy z, gdyż jeżeli w równaniu (3) zastąpimy z przez $-z$ i zmienimy wszystkie znaki, to równanie to zamieni się na

$$z^3 = 3z + q.$$

Można się przekonać, że najmniejsza z trzech rzędnych przedstawia cięciwę trzeciej części łuku danego, średnia jest cięciwą trzeciej części łuku, uzupełniającego łuk dany do okręgu, a największa, która się równa sumie dwuch poprzednich, jest cięciwą trzeciej części okręgu, powiększonego o łuk dany.

Metoda Clairauta[1] (1713—1767).—Niech będzie dany jakikolwiek kąt ABC (fig. 107); wykreślmy okrąg, mający środek w wierzchołku tego kąta, a promień dowolny. W założeniu, że kąt został podzielony na trzy części równe przez proste BD, BE, poprowadźmy cięciwy AD, DE, EC i średnicę BF prostopadłą do DE; widzimy, że

$$CE = ED = 2 . EF;$$

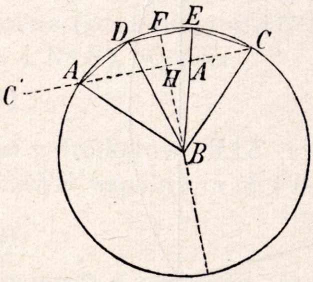

Fig. 107.

możemy więc powiedzieć, że punkt E (od którego wyznaczenia zależy oczywiście podział danego kąta na trzy części równe) należy do hiperboli, mającej punkt C za ognisko, średnicę BF za kierownicę, a 2 za mimośród. Odległość punktu A od C jest dwa razy większa, niż odległość tegoż punktu od średnicy BF; oprócz tego punkt A należy do prostopadłej, poprowadzonej z C do BF, jest więc wierzchołkiem rzeczonej hiperboli, a drugi jej wierzchołek A' leży na CA po tej samej stronie prostej BF, co i punkt C w odległości $\frac{2}{3} . CH$ od C (jeżeli H jest punktem przecięcia prostych AC i BF). W ten sposób mamy oś rzeczywistą hiperboli, a drugie ognisko leży na prostej AA' (zewnątrz odcinka AA') na odległości od A równej CA'. Przez to została w zupełności wyznaczona hiperbola, która, przecinając okrąg z początku opisany, wyznacza punkt E, a więc pozwala podzielić dany kąt ABC na trzy części równe.

Metoda Chaslesa[2]) (1793—1880). — Niech będzie ACB kątem, a więc $\widehat{AB}$ łukiem, który mamy podzielić na trzy części równe (fig. 108);

---

[1]) Por. Taylor. *Geometry of the conics.* Cambridge, 1881, Nr. 308, str. 126.
[2]) Por. *Aperçu historique.*

obierzmy jakikolwiek łuk $\widehat{BD}$ i łuk $\widehat{AE} = 2 . \widehat{BD}$. Poprowadziwszy styczną AT widzimy, że kąt TAE równa się kątowi BCD; jeżeli sobie teraz wyobrazimy, że łuk BD stopniowo się zmienia, a więc odpowiednio i łuk AE (który jest stale dwa razy większy od łuku BD), to otrzymamy dwa pęki promieni o wierzchołkach C, A, rzutowe względem siebie, gdyż kąt dwuch którychkolwiek promieni jednego pęku równa się kątowi promieni odpowiadających drugiego pęku. Miejscem gieometrycznym punktu przecięcia M promieni odpowiadających CD, AE jest przeto stożkowa, a punkt przecięcia tej stożkowej N z łukiem AB rozwiązuje zadanie podziału łuku AB (a tym samym kąta ACB) na trzy części równe, gdyż $\widehat{AN} = 2 . \widehat{NB}$, a więc $\sphericalangle ACB = 3 . \sphericalangle BCN$.

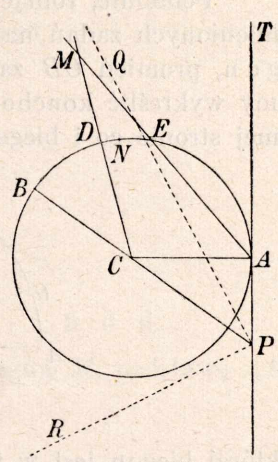

Fig. 108.

Można się zresztą przekonać, że powyższa stożkowa jest hiperbolą równoboczną; rzeczywiście, jeżeli przez punkty A, C poprowadzimy równoległe do dwusiecznych PQ, PR kątów pomiędzy prostemi AT, BC, dostaniemy dwie pary promieni równoległych i odpowiadających sobie w pękach tworzących stożkowej, która ma przeto dwa punkty w nieskończoności, a więc jest hiperbolą; ta hiperbola jest równoboczna, gdyż jej asymptoty są do siebie prostopadłe, jako równoległe do dwusiecznych dwuch kątów przyległych.

§ 14. Podział kąta na trzy części równe za pomocą konchoidy. Metoda Nikomedesa.—Jak to już zaznaczyliśmy w § 4, zadania na wstawianie odcinków, do których został w § 12 sprowadzony podział kąta na trzy części równe, mogą być bezpośrednio rozwiązane za pomocą muszli Nikomedesa.

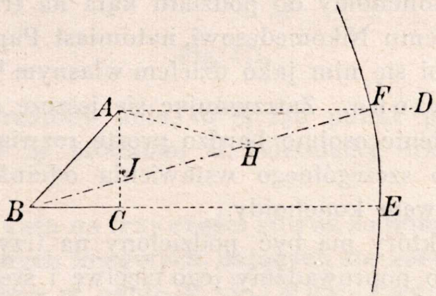

Fig. 109.

Ażeby rozwiązać pierwsze zadanie (fig. 109), wystarcza wykreślić znanym już przyrządem (§ 4) konchoidę, mającą punkt B za biegun, prostą AC za podstawę, a $2 . AB$ za parametr. Jeżeli F jest punktem, w którym ta konchoida spotyka prostą AD, to łącząc B z F otrzymamy odcinek IF równy parametrowi konchoidy, a więc równy $2 . AB$; będzie więc, jak już dowiedliśmy, $\sphericalangle FBC = \frac{\sphericalangle ABC}{3}$.

Podobnie, robiąc użytek z konchoidy, łatwo rozwiązać drugie z wymienionych zadań na wstawianie odcinków (§ 12); przyjmując C za biegun, promień CB za parametr, a prostą AB za podstawę, możemy wykreślić konchoidę (fig. 110), która względem podstawy leży po tej samej stronie co i biegun (t. zw. drugą konchoidę starożytnych, dla

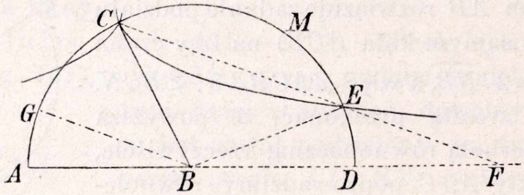

Fig. 110.

której biegun jest w tym przypadku punktem podwójnym, gdyż parametr jest większy od odległości bieguna od podstawy). Jeżeli E jest punktem, w którym tak wykreślona konchoida przecina półkole $ACMD$ zewnątrz danego kąta ABC, to poprowadźmy prostą CE i przedłużmy ją do przecięcia F z przedłużeniem średnicy AD; w ten sposób umieścimy między półkolem i prostą AB odcinek $EF = BC$, będzie więc, jak tego dowiedliśmy (§ 12, 2), $\sphericalangle DFE = \frac{\sphericalangle ABC}{3}$.

Zastosowanie konchoidy do podziału kąta na trzy części równe Proklus przypisuje samemu Nikomedesowi, natomiast Papus, niesłusznie zdaniem Cantora, chlubi się nim jako dziełem własnym [1]).

Metoda Newtona. Zatrzymując się jeszcze na tym rodzaju rozwiązań, warto wymienić osobno bardzo proste rozwiązanie Newtona [2]) za pomocą pewnego szczególnego wstawienia odcinka, dającego się wykonać za pośrednictwem konchoidy.

Jeżeli łukiem, który ma być podzielony na trzy części równe, jest łuk AB (fig. 111), to poprowadźmy jego cięciwę i średnicę CA, następnie poprowadźmy prostą BC i umieśćmy między AB, CB odcinek ED równy średnicy CA i skierowany ku środkowi M danego okręgu. Jeżeli G jest

---

[1]) Por. Loria, l. c., II, str. 202.—Cantor, *Vorlesungen*, str. 305.
[2]) L. c.

punktem przecięcia prostej DE z półkolem ABC, to łuk GB jest trzecią częścią łuku danego, czyli $\sphericalangle BMG = \frac{1}{3} \sphericalangle BMA$.

W rzeczy samej, jeżeli F jest środkiem odcinka ED, to $BF = \frac{1}{2} DE$, a więc BF równa się promieniowi BM. Stąd wypada, że $\sphericalangle BMG = \sphericalangle GFB = 2 . FDB = 2\delta$. A zatym

$$\sphericalangle BMA = \sphericalangle GMA + \sphericalangle BMG = (\gamma + \delta) + 2\delta,$$

jeżeli założymy $\sphericalangle BCA = \gamma$.

Stąd

$$\sphericalangle BMA = 3\delta + \frac{\sphericalangle BMA}{2},$$

a więc

$$\frac{\sphericalangle BMA}{2} = 3\delta,$$

czyli wreszcie

$$\sphericalangle BMA = 3 . (2\delta) = 3 . \sphericalangle BMG, \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Jeżeli więc wykreślimy konchoidę, mającą biegun M, podstawę AB

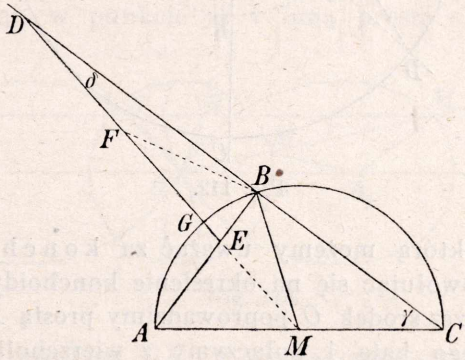

Fig. 111.

i parametr równy średnicy koła, to łącząc punkt przecięcia D tej konchoidy i prostej BC ze środkiem M, odetniemy trzecią część od łuku i od kąta danego.

§ 15. Podział kąta na trzy części równe za pomocą ślimaka Pascala albo za pomocą innych krzywych, dających się zastosować do podziału kąta na części równe w ogóle [1]). Ś l i m a k P a s c a l a. Niech będzie

1) Redagując ten paragraf, odwoływaliśmy się w szczególności do dzieła: G. L o r i a. *Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven, Theorie und Geschichte*, Leipzig 1902, gdzie w wielu miejscach, a zwłaszcza w osobnym rozdziale (rozdz. XII, str. 323 i nast.) są obszernie omówione ważniejsze krzywe, za pomocą których można rozwiązać w ogólności zadanie podziału kąta na części

ABC jakimkolwiek kątem, który ma być podzielony na trzy części równe (fig. 112); opiszmy okrąg, przechodzący przez wierzchołek B danego kąta i mający środek O w którymkolwiek punkcie ramienia BC. Poprowadźmy przez B dowolną ilość prostych i, począwszy od punktu przecięcia każdej z tych prostych z okręgiem, odetnijmy na każdej z nich w obu zwrotach przeciwległych odcinek równy promieniowi. Miejscem gieometrycznym otrzymanych w ten sposób punktów X jest linja czwartego rzędu, będąca przypadkiem szczególnym krzywej, znanej pod nazwą ślimaka Pascala[1]), a którą możemy uważać za konchoidę o podstawie kołowej, powołując się na określenie konchoidy (§ 4).

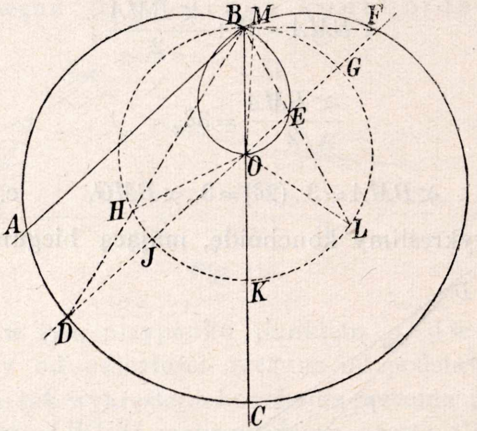

Fig. 112.

Jeżeli teraz przez środek O poprowadzimy prostą DE równoległą do ramienia AB danego kąta i połączymy z wierzchołkiem B punkt D, w którym ta równoległa przecina rzeczoną krzywą, to $\sphericalangle ABD = \frac{\sphericalangle ABC}{3}$.

równe. Korzystamy z tej okazji, ażeby wyrazić autorowi żywe podziękowanie za dostarczone nam łaskawie uwagi i za publikacje, które nam oddał z całą uprzejmością do rozporządzenia.

[1]) Pascal, o którym tutaj mowa, jest to, jak utrzymują Cantor, Tannery i Loria, bez wątpienia Stefan, ojciec Błażeja; podług Robervala (w *Observations*) należy samemu Stefanowi Pascalowi przypisać uwagę, że ślimak jest krzywą, którą można zastosować do podziału kąta na trzy części równe; tę uwagę powtarzano później wielokrotnie z różnemi odmianami (por. Azémar. *Trisection de l'angle suivi de recherches analytiques sur le même sujet de Garnier*, Paris 1809. Fusinieri. *Trisezione geometrica degli archi di cerchio*. Mem. delta Societa Ital. delle Scienze, XXIII, 1846; Jouanne. *Trisection de l'angle au moyen du limaçon de Pascal*. Nouv. Ann. 2, Ser. IX, 1870.—Brocard. *Note sur un compas trisecteur*. Bull. de la Soc. math. de France, III, 1875.

W rzeczy samej, $ABC = ABD + DBC = ABD + OHB = ABD + 2 . ODB = = 3 . ABD$, c. b. d. d.

Podobnie, rozpatrując dwa pozostałe punkty E, F, wspólne dla równoległej do AB, poprowadzonej przez O, i dla krzywej, łatwo dowieść, że

$$\sphericalangle ABE = \sphericalangle ABL = \frac{\pi + ABC}{3}$$

i

$$\sphericalangle ABF = \frac{2\pi + ABC}{3},$$

wyznaczyliśmy więc wszystkie trzy rozwiązania zadania.

Cyclois anomala Cevy. — Tomasz Ceva w swoich *Opuscula Mathematica* (Mediolani 1699) podał pod tytułem *Cycloidum anomalarum descriptio* konstrukcję krzywej, którą autor nazywa *cyclois anomala*, i wyłożył zastosowanie tej krzywej do podziału kąta na dowolną liczbę części równych. Ta krzywa tak powstaje: niech będzie dane koło o środku O i promieniu a (fig. 113); przez środek prowadzimy dowolną prostą OX, przecinającą okrąg w punkcie A i inną prostą r, przecinającą okrąg

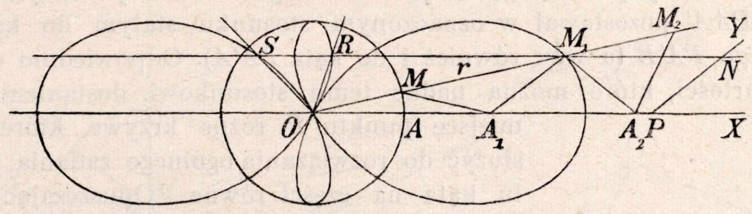

Fig. 113.

w punkcie M; na prostych OX i r wyznaczamy szeregi punktów A_1, A_2, $A_3, \ldots$ i M_1, M_2, $M_3, \ldots$ tak, ażeby było:

$$MA_1 = A_1M_1 = M_1A_2 = A_2M_2 = \ldots = a.$$

Jeżeli prosta r się obraca, wtedy każdy z punktów M_1, M_2, $M_3, \ldots$ zakreśla cykloidę Cevy. Oznaczmy teraz kąt (r, OX) przez ω; dostaniemy oczywiście:

$$\sphericalangle A_1OM = \sphericalangle MA_1O = \omega$$

$$\sphericalangle MM_1A_1 = \sphericalangle A_1MM_1 = 2\omega$$

$$\sphericalangle A_2A_1M_1 = \sphericalangle M_1A_2A_1 = 3\omega$$

$$\sphericalangle A_2M_1M_2 = \sphericalangle M_1M_2A_2 = 4\omega$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

stąd widać, że skoro rzeczone krzywe Cevy zostały wykreślone, to można się niemi posługiwać do rozwiązania zadania podziału dowolnego kąta na części równe. W szczególności ażeby podzielić kąt na trzy części równe, można posiłkować się pierwszą krzywą Cevy (fig. 113) w sposób następujący: niech będzie dany kąt $XPY=\alpha$, którego jedno ramię leży na prostej OX; odetnijmy na PY odcinek $PN=OA$ i poprowadźmy przez N równoległą do OX aż do zewnętrznego przecięcia z krzywą, a otrzymany punkt przecięcia połączmy ze środkiem O linją prostą: ta prosta tworzy z OX kąt $\frac{\alpha}{3}$.

Ale i ta krzywa daje wszystkie trzy rozwiązania zadania, gdyż jeżeli jeszcze punkty przecięcia R, S powyższej równoległej z krzywą połączymy z punktem O, to łatwo się przekonamy, że

$$\sphericalangle XOR=\frac{\pi+\alpha}{3}, \quad \sphericalangle XOS=\frac{2\pi+\alpha}{3}.$$

Na powyższej własności opiera się cyrkiel trójdzielczy, przypisywany Cevie, i podobny przyrząd Tschirnhausena.

Krzywe Schoutego.—Niech będą dane dwa punkty stałe A, A' (fig. 114); weźmy pod uwagę miejsce takich punktów P płaszczyzny, ażeby kąt PAA' pozostawał w oznaczonym stosunku stałym do kąta zewnętrznego $PA'B$ (a więc również i do kąta $PA'A$). Odpowiednio do różnych wartości, które można nadać temu stosunkowi, dostaniemy jako miejsce punktu P różne krzywe, które mogą służyć do rozwiązania ogólnego zadania podziału kąta na części równe. Opuszczając szczegółowe wyjaśnienia, odsyłamy czytelnika do cytowanego rozdziału pracy Lorii: *Spezielle algebr. und transc. ebene Kurven;* tutaj poprzestaniemy na wzmiance, że poprzednio wyłożone rozwiązanie (§ 13) przez zastosowanie pewnej własności hiperboli, zawartej w kącie 120^0, jest tylko przypadkiem szczególnym tego ogólniejszego rozwiązania Schoutego.

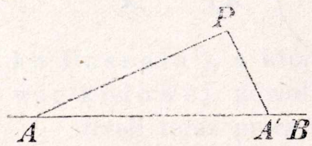

Fig. 114.

W wymienionej książce Loria mówi jeszcze obszernie o innych krzywych dzielczych dość skomplikowanych; nie uważamy jednak za właściwe zatrzymywać się nad niemi dłużej, ażeby się nie oddalać od naszego głównego tematu. Bądź co bądź, nie chcemy pominąć zupełnie krzywych Kempego.

Krzywe Kempego.—Przedewszystkim poczyńmy uwagi następujące. Każda liczba całkowita jest albo pierwszą, albo jest iloczynem czynników pierwszych; przeto podział kąta na jakąkolwiek liczbę części równych może być sprowadzony do podziału na liczbę pierwszą części równych. Otóż jeżeli p jest liczbą pierwszą (nieparzystą), to, jak wiemy z twierdzenia Fermata, liczba $2^{p-1}-1$ jest podzielna przez p, tak samo więc będzie z iloczynem

$$(2^{\frac{p-1}{2}}+1)(2^{\frac{p-1}{2}}-1),$$

którego przynajmniej jeden z czynników jest przeto wielokrotnością liczby p. Stąd wynika, że jeżeli mamy dzielić kąt na jakąkolwiek liczbę części równych, wtedy wystarcza rozważyć podział na liczbę części równych, mającą postać $2^n \pm 1$, gdyż część szukana będzie wielokrotnością części tak znalezionej.

Wykreślmy teraz, przyjmując M za środek, a a za promień, koło (fig. 115) styczne do osi x w punkcie O; poprowadźmy przez O dowolną sieczną OA i odetnijmy na niej odcinki

$$AB = AM, \quad BC = BM, \quad CD = CM, \ldots$$

Jeżeli teraz proste AM, BM, CM, DM,... przedłużymy poza M, a kąty, które te proste tworzą z OA oznaczymy przez α, β, γ, δ,..., zaś kąty,

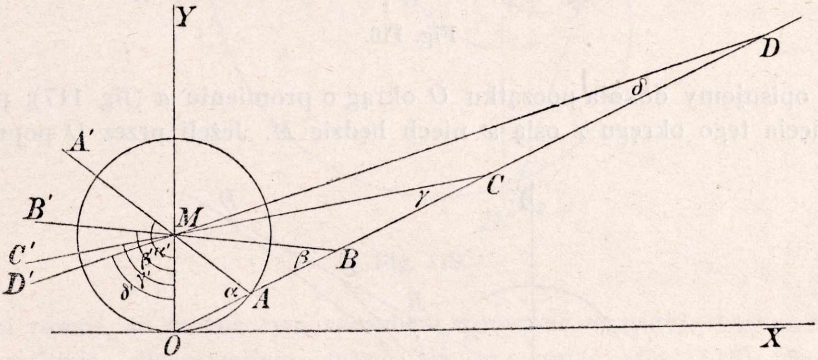

Fig. 115.

które tworzą proste MA', MB', MC', MD',... z MO oznaczymy przez α', β', γ', δ',..., wtedy będzie $\alpha' = 2\alpha$, $\beta' + 3\beta$, $\gamma' = 5\gamma$, $\delta' = 9\delta$,... Niech teraz sieczna OA obraca się dokoła punktu O; wtedy punkty B, C, D,... opiszą pewne krzywe; jeżeli przez M poprowadzimy jakąkolwiek prostą, tworzącą z MO kąt ω, to ta prosta przetnie okrąg i opisane krzywe w punktach F, G, H, K,... takich, że kąty MFO, MGO, MHO, MKO,... równają się odpowiednio $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega}{3}$, $\frac{\omega}{5}$, $\frac{\omega}{9}$,... A więc te krzywe mogą być używane do podziału kąta na 2^n+1 części równych.

W przypadku szczególnym podziału kąta na trzy równe części krzywa jest ślimakiem Pascala, otrzymuje się więc za pomocą tej krzywej wszystkie trzy rozwiązania zadania. Rzeczywiście, jeżeli (fig. 116) $\sphericalangle B'MO = \alpha$, to

$$\sphericalangle B'BO = \frac{\alpha}{3}, \quad \sphericalangle B'B_1O = \frac{\pi+\alpha}{3}, \quad \sphericalangle B'B_2O = \frac{2\pi+\alpha}{3}.$$

W drugim przypadku ogólnym podziału kąta na $2^n - 1$ części rów-

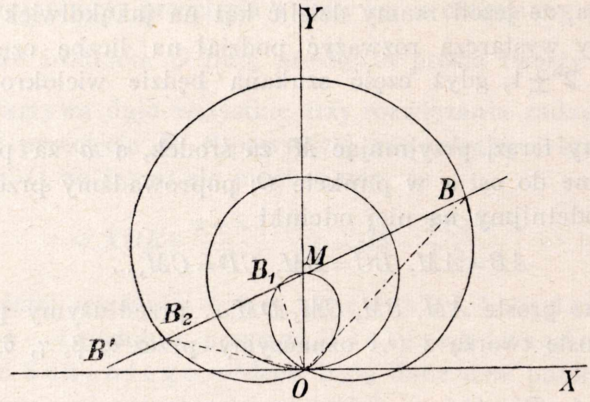

Fig. 116.

nych opisujemy dokoła początku O okrąg o promieniu a (fig. 117); punkt przecięcia tego okręgu z osią x niech będzie M. Jeżeli przez O poprowa-

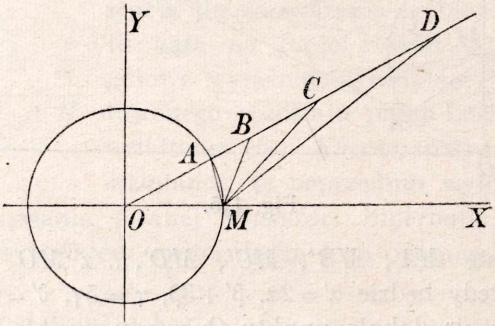

Fig. 117.

dzimy dowolny promień OA i wyznaczymy na nim takie odcinki że $AB = AM$, $BC = BM$, $CD = CM, \ldots$, to oczywiście

$$\sphericalangle OAM = \sphericalangle AMO, \quad \sphericalangle OBM = \tfrac{1}{3} \sphericalangle BMO, \quad \sphericalangle OCM = \tfrac{1}{7} \sphericalangle CMO,$$

$$\sphericalangle ODM = \tfrac{1}{15} \sphericalangle DMO, \ldots$$

Jeżeli znowu OA obraca się dokoła O, to punkty $B, C, D, \ldots$ opisują pewne krzywe, jeżeli więc poprowadzimy przez M prostą, zawierającą z MO kąt ω, to ta prosta przetnie rzeczone krzywe w punktach F, G, H,... w taki sposób, że

$$\sphericalangle OFM = \tfrac{1}{3}\,\omega, \quad \sphericalangle OGM = \tfrac{1}{7}\,\omega, \quad \sphericalangle OHM + \tfrac{1}{15}\,\omega, \ldots;$$

a zatym rozpatrywane krzywe mogą służyć do podziału kąta na $2^n - 1$ części równych.

W szczególności okazuje się i tutaj w przypadku podziału na trzy

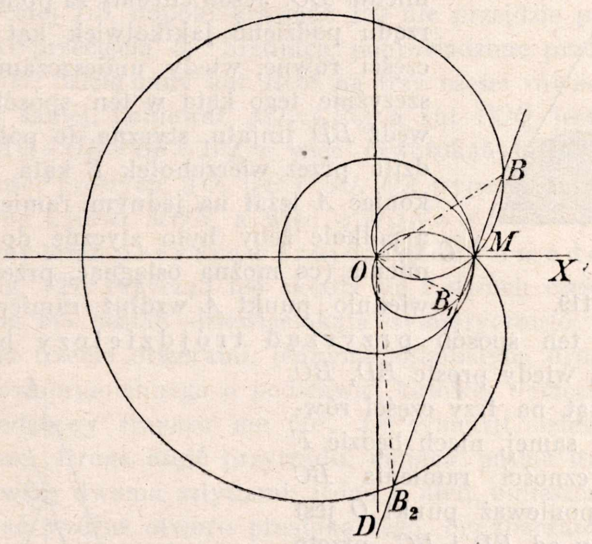

Fig. 118.

części równe, że można tym sposobem otrzymać wszystkie trzy rozwiązania zadania. Rzeczywiście, łatwo się przekonać (fig. 118), że jeżeli $\sphericalangle BMO = \alpha$, to

$$\sphericalangle OBM = \frac{\alpha}{3}, \quad \sphericalangle OB_1D = \frac{\pi + \alpha}{3}, \quad \sphericalangle OB_2D = \frac{2\pi + \alpha}{3}.$$

Ponieważ uwzględniliśmy tu wszystkie przypadki, do których się sprowadza zadanie podziału kąta na dowolną liczbę części równych, przeto metoda Kempego wyczerpuje zadanie całkowicie [1]).

---

[1]) A. Kempe. *De verdeeling van een hock een* 2^{n+1} *gelyke deelen; De verdeeling van een hock een villkenrig antal gelyke deelen*, Niew Archiv voor Wiskunde, 2 ser., I, 1894. Por. także: Sur les courbes sectrices, Mém. de Liège 2, 20, 1898, a o powstawaniu mechanicznym tych krzywych: Zeitschr. f. Math. u Phys. 49, 1903 i Verhandl. d. Math. Kongresses zu Heidelberg. Leipzig 1905, str. 492.

§ 16. Podział kąta na trzy części równe za pomocą specjalnych przyrządów. Wyobraźmy sobie przyrząd, przedstawiony na fig. 119, gdzie DFE jest półkręgiem (z drzewa, mosiądzu i t. p.), DB linjałem dostatecznie długim, umieszczonym w położeniu stycznym do półkręgu w punkcie D, a AE drugim linjałem, na którym leży średnica półkręgu DFE, a którego część zewnętrzna AD równa się długości promienia DO. Jeżeli chcemy za pomocą tego przyrządu podzielić jakikolwiek kąt ABC na trzy części równe, wtedy umieszczamy go na płaszczyźnie tego kąta w ten sposób, ażeby krawędź BD linjału, styczna do półkola, przechodziła przez wierzchołek B kąta danego, ażeby koniec A leżał na jednym ramieniu tego kąta, a półkole żeby było styczne do drugiego ramienia (co można osiągnąć, przesuwając odpowiednio punkt A wzdłuż ramienia BA).

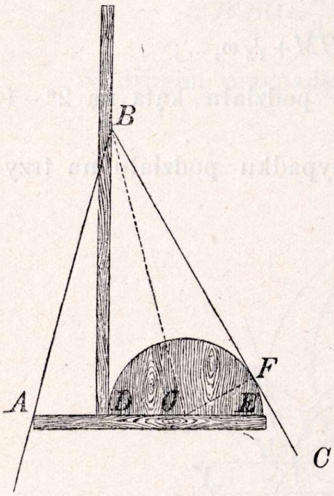

Fig. 119.

Jeżeli w ten sposób przyrząd trójdzielczy będzie ułożony w kącie ABC, wtedy proste BD, BO podzielą ten kąt na trzy części równe. W rzeczy samej, niech będzie F punktem styczności ramienia BC z półkolem; ponieważ punkt O jest równooddalony od BD i BC, przeto należy do dwusiecznej kąta DBC; ale oczywiście

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBO,$$

a więc

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBO = \sphericalangle OBC, \text{ c. b. d. d.}^{1)}$$

Zasługuje jeszcze na zaznaczenie przyrząd trójdzielczy, który zbudował Q. Amadori[2]). Ażeby wyjaśnić zasadę, na której się opiera przyrząd Amadorego, obierzmy jakikolwiek kąt ROS (fig. 120), podzielmy go prostą

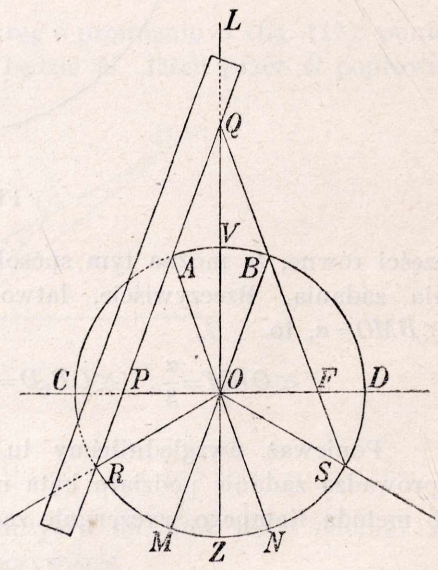

Fig. 120.

[1]) Opis tego przyrządu podał Good Arthur (Tom Tit) w książce *La science amusante.*

[2]) Opis został podany w książeczce *Sulla Trisezione d'un angolo qualunque,* Savona 1883.

LZ na dwie części równe, opiszmy koło $RZSV$ o środku w wierzchołku O i o promieniu dowolnym i poprowadźmy średnicę CD prostopadłą do dwusiecznej LZ kąta danego. Weźmy teraz linjał RQ, dostatecznie długi, i wyznaczmy na nim odcinek PQ równy średnicy koła; ten linjał umieśćmy na płaszczyźnie kąta danego do podziału tak, ażeby punkty P i Q należały odpowiednio do średnicy CD i dwusiecznej LZ. Przesuwając linjał można znaleźć takie jego położenie, że krawędź linjału PQ przejdzie przez punkt R; jako przecięcie prostej PQ z kołem dostaniemy punkt A, a jeżeli w podobny sposób przesuwać będziemy linjał po drugiej stronie prostej LZ, dopóki krawędź PQ nie przejdzie przez S, to dostaniemy punkt przecięcia B. Średnice poprowadzone przez A i B, t. j. proste AN i BM, dzielą dany kąt ROS na trzy części równe[1]).

W rzeczy samej, ponieważ $AO = \frac{1}{2}PQ$, a kąt POQ jest prosty, przeto $PA = AO = AQ = OB = BF = BQ$, a więc czworokąt $AOBQ$ jest rombem, a z równoległości prostych AO, QB i BO, QA wypada, że oba kąty PAO i OBF są równe kątowi MON, a więc $\sphericalangle MON = \sphericalangle NOS = \sphericalangle ROM$.

Rozpatrzmy teraz przyrząd trójdzielczy Amadorego, przedstawiony na fig. 121. Przyrząd ten składa się z dwuch części blaszanych, z których jedna ma postać dziewięciokąta symetrycznego względem osi i jest opatrzona trzema otworami, jednym półkolistym, drugim w kształcie trapezu równoramiennego o podstawie kołowej i trzecim prostokątnym. Łuk podstawy trapezu ma 60^0. Oś symetrji dziewięciokąta jest wyryta w blasze. Druga część przyrządu, mająca postać linjału, jest połączona z pierwszą dwoma sztyftami; jeden z nich, umieszczony w Q, może się przesuwać wzdłuż otworu prostokątnego, bez zbaczania; drugi, osadzony w punkcie P, jest tak urządzony, że obejmuje z obu stron szerszą część przyrządu. Oba sztyfty mogą być za pomocą śrubek przytwierdzone w dowolnym położeniu. Odległość między osiami obu sztyftów równa się średnicy CD, a prawa krawędź linjału przechodzi przez te osi.

Jeżeli chcemy jakikolwiek kąt ROS podzielić na trzy części równe, to dzielimy go naprzód na dwie części równe, kładziemy następnie przyrząd opisany na płaszczyźnie kąta tak, ażeby środek otworu półkolistego pokrył się z wierzchołkiem kąta O, a oś symetrji przyrządu ażeby upadła na dwusieczną kąta LZ; następnie przesuwamy sztyft P wzdłuż krawędzi CD, dopóki prawa krawędź linjału nie przejdzie przez punkt przecięcia R ramienia OR z półkolem, ograniczającym wycięcie. W tym położeniu przytwierdza się śrubami oba sztyfty, wyznacza się punkt prze-

[1]) Punkt Q można oczywiście otrzymać również za pomocą konchoidy, której biegunem jest punkt R, podstawą prosta CD a odstępem średnica CD.

cięcia A prostej PQ z górnym łukiem koła i łączy się ten punkt ze środkiem O; dostajemy tym sposobem jedną z żądanych prostych ON; jeśli

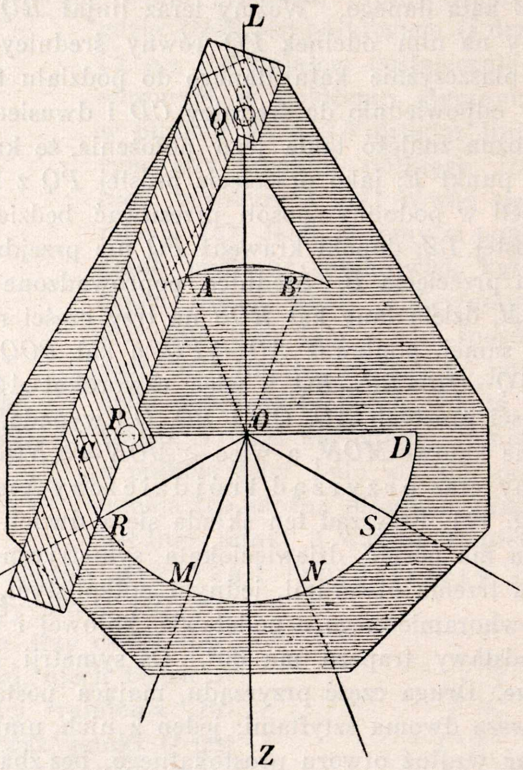

Fig. 121.

chcemy, to możemy otrzymać drugą, przesuwając linjał do punktu S i wyznaczając punkt B[1]).

Z przyrządów służących do podziału kąta na 2^n+1 (a więc w szczególności i na 3) części równych wymienimy jeszcze bardzo prosty przyrząd Nicholsona[2]). Przyrząd ten ma postać gnomona prostokątnego (fig. 122), w którym odległość $PQ=m$ równa się długości QR i nazywa się modułem przyrządu; w P jest osadzony ołówek. Przyrządem tym operujemy w ten sposób, ażeby punkt R poruszał się wzdłuż pewnej krzywej, kierownicy, podczas kiedy krawędź SQ przechodzi przez stały punkt O. Punkt P opisuje wtedy inną krzywą, która się nazywa poliodą (πολύς, dużo; ὁδός, droga).

---

[1]) Inne przyrządy trójdzielcze zostały obmyślone i zbudowane przez A. Fusinierego (Bolonja, 1822) Lorenzoniego (Bolonja 1827) i in.

[2]) Opisany w pracy: *The multisection of angles*, The Analyst 10, 1883.

Zobaczymy, w jaki sposób można za pomocą tego przyrządu podzielić kąt na dowolną liczbę części równych, a przedewszystkim na trzy części.

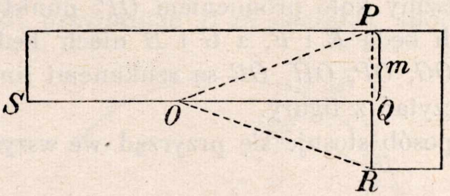

Fig. 122.

Niech będzie AOB (fig. 123) kątem danym; poprowadźmy w odległości m (modułu przyrządu) równoległą CD do OA i opiszmy poliodę Π, której kierownicą jest OB, a punktem stałym O. Punkt przecięcia P tej poliody z prostą CD, leżący wewnątrz kąta, łączymy z O linją prostą; wtedy kąt $AOP = \frac{1}{3} AOB$. Wynika to bezpośrednio z przystawania trójkątów prostokątnych RQO, PQO, PSO.

Zauważmy jeszcze, że za pomocą tego przyrządu otrzymuje się wszystkie trzy rozwiązania zadania; gdyż polioda składa się w tym przypadku, jak

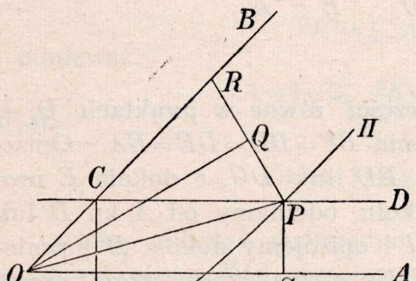

Fig. 123.

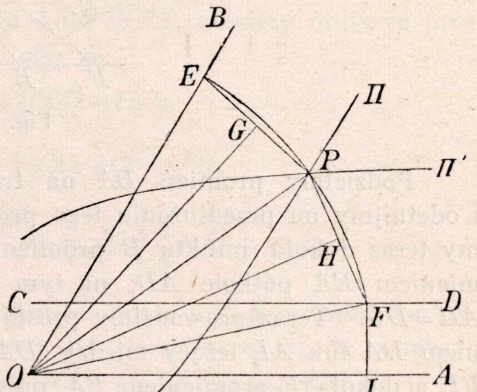

Fig. 124

o tym łatwo się przekonać, z dwuch gałęzi, biegnących dokoła O do nieskończoności; te gałęzie przecinają prostą CD w czterech punktach, z których trzy dają rozwiązania zadania, natomiast czwarty leży na prostej CD i jest symetryczny do E względem O (jeżeli E oznacza punkt symetryczny względem OA do punktu przecięcia C prostych OB i CD).

Jeżeli mamy podzielić kąt AOB na pięć części równych, to poprowadźmy (fig. 124), jak w poprzednim przypadku, równoległą CD do OA

i opiszmy naprzód poliodę Π względem kierownicy OB, a następnie poliodę Π' względem kierownicy CD, przyjmując za każdym razem O za punkt stały. Jeżeli P jest punktem przecięcia obu krzywych, leżącym wewnątrz kąta, to opiszmy koło promieniem OP; punkty przecięcia tego koła z OB i CD niech będą E i F, a G i H niech będą środkami cięciw EP i PF. Proste OG, OP, OH, OF są szukanemi linjami podziału. Dowodzenie łatwo odczytać z figury.

W podobny sposób stosuje się przyrząd we wszystkich innych przypadkach.

§ 17. Podział kąta na trzy części równe za pomocą elementarnych konstrukcji przybliżonych.—Metoda Cominotty[1]). Niech będzie ABC kątem danym do podziału na trzy części równe, a AC łukiem koła opisanego dowolnym promieniem dokoła wierzchołka B (fig. 125).

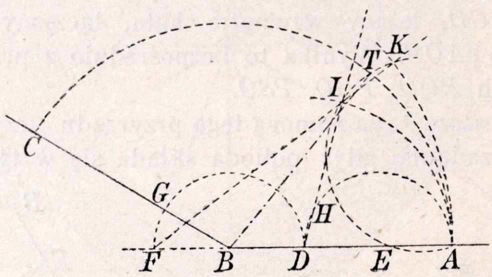

Fig. 125.

Podzielmy promień BA na trzy części równe w punktach D, E i odetnijmy na przedłużeniu tego promienia $BF = BD = DE = EA$. Opiszmy teraz dokoła punktu B promieniem BD łuk DG, a dokoła E promieniem EA półkole AD; na tym półkolu odcinamy od A ku D łuk $AH = DG$. Teraz prowadzimy prostą DH i opisujemy dokoła D promieniem DA łuk AI, leżący między DA i DH; prowadzimy jeszcze prostą FI, a dokoła F promieniem FA opisujemy łuk AK, zawarty między FA i FI. Wtedy półkole, przechodzące przez K, I, A (prosta AI jest oczywiście prostopadła do FK) przecina łuk AC w punkcie T, który ze znacznym przybliżeniem wyznacza trzecią część łuku AC.

Okążemy, że tym sposobem otrzymuje się dobre przybliżenie dla łuku 180^0; Cominotto utrzymuje, nie podając jednak dowodzenia, że tym bardziej osiągniemy dostateczne przybliżenia dla łuków mniejszych; potwierdzają to badania graficzne. Powtórzmy więc tę samą konstrukcję

[1]) E. Cominotto. Trisezione approssimata dell'angolo. Padova, 1895.

(fig. 126) w przypadku szczególnym, kiedy kąt ABC jest półpełny, a więc łuk $AC = 180^0$ i sprawdźmy, o ile cięciwa AT różni się od promienia, który dla uproszczenia przyjmiemy za jedność. W tym celu obliczymy spółrzędne punktu T, przyjmując B za początek spółrzędnych, a BA za

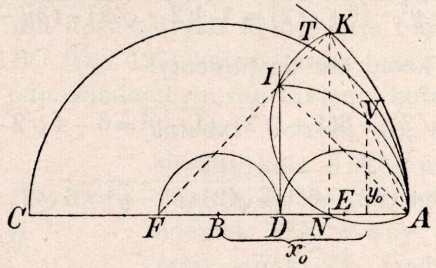

Fig. 126.

oś x; te spółrzędne otrzymamy jako rozwiązania wspólne równań koła ATC o środku B i koła KTA o środku V.

Równanie pierwszego koła ATC jest

(1) $$x^2 + y^2 = 1.$$

Ażeby znaleźć równanie drugiego koła KTA, musimy obliczyć promień VA i spółrzędne środka. Widzimy, że

$$VA^2 = \tfrac{1}{4} \,.\, AK^2 = \tfrac{1}{4}(IA^2 + IK^2),$$

a ponieważ

$$IA = \tfrac{2}{3}\sqrt{2}, \quad IK = \tfrac{4}{3} - \tfrac{2}{3}\sqrt{2} = \tfrac{2}{3}(2 - \sqrt{2}),$$

przeto

$$VA^2 = \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{8}{9} + \tfrac{4}{9}(2 - \sqrt{2})^2\right] = \frac{4(2 - \sqrt{2})}{9}.$$

Ażeby obliczyć spółrzędne punktu V, połączmy K z punktem N, w którym okrąg KIA przecina promień BA. Jeżeli przez x_0, y_0 oznaczymy spółrzędne punktu V, to ponieważ $NA = IK$, $NK = IA$, więc

$$x_0 = 1 - \tfrac{1}{2} \,.\, IK = 1 - \tfrac{1}{3}(2 - \sqrt{2}) = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$$

$$y_0 = \tfrac{1}{2}\, NK = \tfrac{1}{2}\, IA = \tfrac{1}{3}\sqrt{2}.$$

A więc równanie koła KTA jest:

(2) $$\left(x - \frac{1 + \sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{4(2 - \sqrt{2})}{9}.$$

Stąd znajdziemy:

$$x - \frac{1 + \sqrt{2}}{3} = \sqrt{\frac{4(2 - \sqrt{2})}{9} - \left(y - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}$$

a ze względu na (1):

$$\sqrt{1-y^2}-\frac{1+\sqrt{2}}{3}=\sqrt{\frac{4(2-\sqrt{2})}{9}-\left(y-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2},$$

czyli

$$3\sqrt{1-y^2}-(1+\sqrt{2})=\sqrt{4(2-\sqrt{2})-(3y-\sqrt{2})^2}.$$

Po podniesieniu do kwadratu dostaniemy:

$$9(1-y^2)+(1+\sqrt{2})^2-6(1+\sqrt{2})\sqrt{1-y^2}=6-4\sqrt{2}-9y^2+6\sqrt{2}\,.\,y,$$

czyli

$$6(1+\sqrt{2})-6(1+\sqrt{2})\sqrt{1-y^2}=6\sqrt{2}\,.\,y,$$

albo

$$1-\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}y=\sqrt{1-y^2}\,.$$

A więc:

$$1+\frac{2}{(1+\sqrt{2})^2}\,.\,y^2-\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\,.\,y=1-y^2,$$

$$\frac{2+(1+\sqrt{2})^2}{(1+\sqrt{2})^2}\,.\,y^2-\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\,.\,y=0.$$

Rozwiązanie $y=0$ prowadzi do punktu A; dla punktu T będzie więc

$$y=\frac{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{2+(1+\sqrt{2})^2}=\frac{4+2\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}}=0{,}872\ldots$$

A zatym

$$x=\sqrt{1-y^2}=\sqrt{1-0{,}872\ldots^2}=0{,}489\ldots$$

Gdyby cięciwa AT była dokładnie równa promieniowi koła ATC, wtedy spółrzędne punktu T byłyby

$$y_1=\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}866\ldots$$

$$x_1=\tfrac{1}{2}=0{,}5\,;$$

te wartości mało się różnią od znalezionych y i x, jeżeli $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ zostaną obliczone z dokładnością do jednej tysiącznej. Z tak obliczonych wartości x, y znajdziemy

$$AT=\sqrt{(1-x)^2+y^2}=1{,}010\ldots,$$

a więc AT różni się od promienia 1 mniej niż o $\frac{2}{100}$.

Widzimy więc, że przybliżenie osiągnięte za pomocą tej konstrukcji dla łuku 180^0 jest tak znaczne, że błąd niknie przy użyciu linjału i cyrkla; dla mniejszych kątów przybliżenie jest jeszcze większe.

Cominotto w cytowanej pracy wspomina jeszcze o innej konstrukcji przybliżonej podziału kąta na trzy części równe; ta konstrukcja jest bardzo prosta i dla dość ostrych kątów daje błąd nieznaczny.

Niech będzie ABC (fig. 127) kątem, który mamy podzielić na trzy części równe, a DE odpowiadającym mu łukiem (koła o środku B i o promieniu dowolnym); poprowadźmy dwusieczną kąta ABC i odetnijmy na niej od punktu H, w którym przecina łuk DE, odcinek HF równy promieniowi. Jeżeli teraz punkt D', średnicowo przeciwległy do punktu D, połączymy z punktem F, to prosta $D'F$ przetnie łuk DE w punkcie G, który w przybliżeniu wyznacza trzecią część tego łuku.

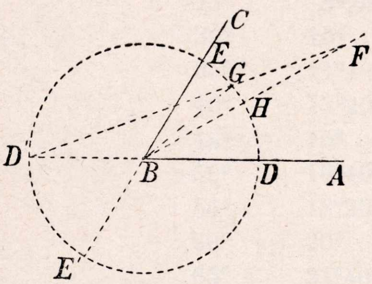

Fig. 127.

Jeżeli jednak wykonamy tę konstrukcję dla łuku 180^0, wtedy cięciwa EG różni się od promienia dość znacznie i jeżeli przyjmiemy promień za jedność, to znajdziemy, że w tym przypadku cięciwa EG jest mniejsza od jedności więcej niż o jedną dziesiątą. Tę konstrukcję Cominotto podaje jako znaną; konstrukcji, wynalezionej przez samego Cominottę należy oddać pierwszeństwo, gdyż daje dokładność znacznie większą.

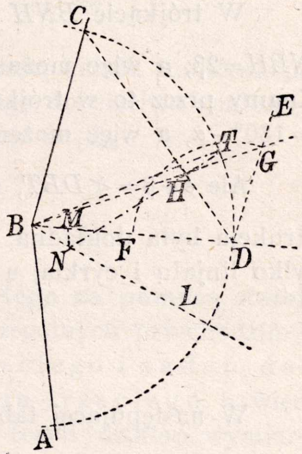

Fig. 128.

Metoda Monti'ego[1]). Jeżeli ABC jest kątem, który ma być podzielony na trzy części równe, a AC łukiem odpowiadającym temu kątowi (fig. 128), to poprowadźmy dwusieczną BD tego kąta, a przez punkt D równoległą DE do BC i odetnijmy na niej od punktu D do G połowę promienia. Punkt przecięcia prostych CD i BG oznaczmy przez H. Zbudujmy teraz kąt $LBD = DBG$ po drugiej stronie prostej BD, a z punktu M, który dzieli odcinek BD wewnętrznie w stosunku $1:5$, poprowadźmy pro-

[1]) Pompeo Monti. *Regola generale per la soluzione grafica della trisezione dell'angolo*, seguita dalla *Dimostrazione* del prof. Giovanni Schiaparelli, Il Politecnico, 1895.

stopadłą do BD; punkt przecięcia tej prostopadłej z prostą BL niech będzie N. Prosta NH spotyka łuk AC w punkcie T, który wyznacza w przybliżeniu trzecią część łuku AC, a więc i kąta ABC. Schiaparelli dał dowód następujący.

Zauważmy przedewszystkim, że na zasadzie konstrukcji

$$HD = \tfrac{1}{3}\, CD,$$

gdyż trójkąty BHC i GHD są podobne, a odcinek BC jest dwa razy większy od DG.

Niech będzie $\sphericalangle ABD = \varphi$, wtedy

$$\sphericalangle CDB = 90^0 - \frac{\varphi}{2},$$

a jeżeli promień równa się 1, to

$$CD = 2 \sin \frac{\varphi}{2},$$

a więc

$$HD = \tfrac{2}{3} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Możemy teraz w trójkącie BDH obliczyć bok HB i kąt DBH, który oznaczymy przez β.

W trójkącie BNH znamy już bok BH, bok $BN = \frac{BM}{\cos\beta} = \frac{1}{6\cos\beta}$ i kąt $NBH = 2\beta$; a więc można obliczyć kąt BHN, który oznaczymy przez α. Znamy przez to w trójkącie BHT bok BH, bok $BT = 1$ i kąt $THB = 180^0 - \alpha$, a więc możemy obliczyć kąt HBT, który oznaczymy przez ε.

Ale $\varepsilon + \beta = \sphericalangle DBT$, a ten kąt musiałby się równać $\frac{\varphi}{3}$, gdyby konstrukcja była dokładna; nie jest to możliwe, wobec tego, że używaliśmy tylko linjału i cyrkla, a błąd popełniony wyraża się przez

$$\left|(\beta + \varepsilon) - \frac{\varphi}{3}\right|.$$

W następującej tabliczce są podane wartości $\frac{\varphi}{3}$ i $\sphericalangle DBT = \beta + \varepsilon$ co 5^0 od 0^0 do 90^0. Ostatnia kolumna wykazuje błąd, a rzut oka na nią wystarcza, ażeby zauważyć, że ten błąd jest bardzo mały i ginie w zwykłych konstrukcjach graficznych, nawet wykonywanych ze znaczną dokładnością; błąd ten nigdy nie dochodzi do 7 minut, jest więc istotnie bardzo drobny wobec konstrukcji tego rodzaju.

Tabliczka porównawcza kąta $TBD = \beta + \varepsilon$ z wartością istotną $\frac{1}{3}\varphi$.

$\underbrace{\varphi}$	$\underbrace{\frac{1}{3}\varphi}$	$\underbrace{\sphericalangle TBD = \beta + \varepsilon}$	$\underbrace{\text{Błąd}}$
0^0	0^0	0^0	0
5^0	$1^0 40'$	$1^0 40'$	0
10^0	$3^0 20'$	$3^0 20' 1''$	$+0' 1''$
15^0	5^0	$5^0 0' 2''$	$+0' 2''$
20^0	$6^0 40'$	$6^0 40' 4''$	$+0' 4''$
25^0	$8^0 20'$	$8^0 20' 6''$	$+0' 6''$
30^0	10^0	$10^0 1'$	$+1'$
35^0	$11^0 40'$	$11^0 41' 7''$	$+1' 7''$
40^0	$13^0 20'$	$13^0 22' 4''$	$+2' 4''$
45^0	15^0	$15^0 3' 2''$	$+3' 2''$
50^0	$16^0 40'$	$16^0 44' 1''$	$+4' 1''$
55^0	$18^0 20'$	$18^0 25' 1''$	$+5' 1''$
60^0	20^0	$20^0 5' 9''$	$+5' 9''$
65^0	$21^0 40'$	$21^0 46' 6''$	$+6' 6''$
70^0	$23^0 20'$	$23^0 26' 8''$	$+6' 8''$
75^0	25^0	$25^0 6' 7''$	$+6' 7''$
80^0	$26^0 40'$	$26^0 45' 2''$	$+5' 2''$
85^0	$28^0 20'$	$28^0 22' 6''$	$+2' 6''$
90^0	30^0	$29^0 58' 5''$	$-1' 55''$

Ta konstrukcja daje przybliżenie o wiele lepsze, aniżeli konstrukcja Cominotty; jeżeli ją zastosujemy do kąta półpełnego, to cięciwa znalezionego kąta różnić się będzie od promienia mniej niż o $\frac{2}{1000}$.

III.

§ 18. Rozwiązywanie zadań stopnia trzeciego za pomocą stałej paraboli.—Od rozważanych dotychczas zadań szczególnych przechodzimy do rozważania ogólnego zadań stopnia trzeciego i zadań, dających się sprowadzić do zadań stopnia trzeciego, a więc takich, które można za pomocą linjału i cyrkla (czyli działań wymiernych i wyciągania pierwiastków stopnia drugiego) sprowadzić do konstrukcji pierwiastków równania stopnia trzeciego lub szeregu takich równań.

Postępowanie podobne do tego, które już poprzednio stosowaliśmy w różnych przypadkach, przekonywa, że wszystkie zadania stopnia trzeciego można rozwiązać za pomocą paraboli całkowicie wyrysowanej, czyniąc tylko użytek z linjału i cyrkla.

Zadanie ogólne stopnia trzeciego, które można uważać za typowe, polega na rozwiązaniu równania stopnia trzeciego i jednoczesnego z nim równania stopnia pierwszego względem spółrzędnych x, y, czyli na znalezieniu punktów przecięcia krzywej stopnia trzeciego (wyznaczonej ale nie wyrysowanej) z prostą. Ale jeżeli w równaniu stopnia trzeciego względem x, y podstawimy zamiast y wyrażenie linjowe względem x, otrzymane przez rozwiązanie równania stopnia pierwszego między x i y, to otrzymamy równanie stopnia trzeciego, zawierające tylko niewiadomą x; widzimy więc, że zadanie typowe stopnia trzeciego można sprowadzić do konstrukcji pierwiastków równania stopnia trzeciego z jedną niewiadomą x.

Niech teraz będzie dana parabola $y = x^2$. Przetnijmy ją z kołem, którego środek niech będzie (α, β) i które przechodzi przez wierzchołek $(0, 0)$ paraboli; równanie tego koła jest

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2, \tag{1}$$

albo

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0.$$

Kładąc w tym równaniu $y = x^2$, otrzymamy równanie

$$x^4 - (2\beta - 1)x^2 - 2\alpha x = 0,$$

czyli, opuszczając pierwiastek $x = 0$:

$$x^3 - (2\beta - 1)x - 2\alpha = 0.$$

Ale równanie najogólniejsze stopnia trzeciego względem x można sprowadzić do tej postaci, gdyż równanie takie, po wykonaniu przekształcenia wymiernego, przyjmuje postać

$$x^3 - px + q = 0,$$

należy więc tylko uczynić

$$p = 2\beta - 1$$

$$q = -2\alpha.$$

Tym sposobem dowiedliśmy słuszności powyższego zdania, które jest bezpośrednim uogólnieniem tego, o czym się już przekonaliśmy, mówiąc o dwuch poprzednich zadaniach szczególnych. W rzeczy samej, powrócimy do przypadku podwojenia sześcianu o krawędzi a, jeżeli założymy $\alpha = a^3$ i $\beta = \frac{1}{2}$; natomiast dostaniemy podział na trzy części równe kąta φ, mającego styczną trygonometryczną równą a, jeżeli założymy:

$$\alpha = a(1+a^2)$$

$$\beta = \frac{1+3(1+a^2)}{2}.$$

Twierdzenie powyższe można uogólnić, przyjmując zamiast paraboli jakąkolwiek całkowicie wyrysowaną stożkową stałą różną od koła. Mając taką stożkową można rozwiązać każde zadanie stopnia trzeciego za pomocą linjału i cyrkla. Ten rezultat znaleźli Kortum i J. S. Smith w dwuch znanych pracach, nagrodzonych w r. 1868 przez Akademję berlińską [1]).

§ 19. Rozwiązywanie linjowe zadań stopnia trzeciego za pomocą stałej krzywej stopnia trzeciego. — London [2]) otrzymał rezultat analogiczny do rezultatu Ponceleta i Steinera względem zadań stopnia drugiego: wszystkie zadania stopnia trzeciego można rozwiązać za pomocą samego linjału, jeżeli jest dana podstawowa krzywa stopnia trzeciego w zupełności wyrysowana, z dodaniem kwadratu przy rozwiązywaniu zadań miarowych (por. art. III).

Dowiedziemy tego twierdzenia wprost, odwołując się do dwuch przypadków szczególnie prostych, w których za podstawową krzywą stopnia trzeciego bierze się bądź parabolę

$$y = x^3,$$

bądź cysoidę Dioklesa (§ 5)

$$y^2 = \frac{x^3}{2r-x};$$

oprócz tego przyjmiemy jako dany kwadrat czterech punktów

$$(0, 0); \ (0, 1); \ (1, 0); \ (1, 1),$$

który daje nam możność wykonywania linjowo wszystkich konstrukcji, wyrażających się przez działania wymierne nad elementami danemi (art. IV).

Co do pierwszego przypadku, to wystarczy zauważyć, że pierwiastki równania stopnia trzeciego

$$x^3 - px - q = 0$$

[1]) H. Kortum. *Ueber geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades.* Bonn 1869.—H. J. S. Smith. *Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques,* Ann. di Matematica, Serie II, tom 3; Coll. math. pap. II, str. 1—66.

[2]) Franz London. *Die geometrischen Konstruktionen dritten und vierten Grades, ausgeführt mittels der geraden Linie und einer festen Kurve dritter Ordnung.* Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 41.

są odciętemi punktów wspólnych paraboli

$$y = x^3$$

i prostej

$$y = px + q$$

(por. § 7).

Przechodząc teraz do przypadku, w którym jest dana cysoida, zauważmy, że zadanie typowe stopnia trzeciego zależy od rozwiązania równania sześciennego względem x, a więc może być sprowadzone do rozwiązania równania sześciennego względem $\frac{y}{x}$; wystarczy w rzeczy samej zastosować przekształcenie spółrzędnych:

$$x = \frac{Y}{X}, \quad y = Y.$$

Niech będzie cysoida dana za pomocą równań parametrycznych

$$x = \frac{2rt^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2rt^3}{1+t^2}, \quad t = \frac{y}{x},$$

z których po wyrugowaniu t otrzymuje się właśnie równanie

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}.$$

Przetnijmy tę cysoidę dowolną prostą

$$y = ax + b;$$

punkty przecięcia są wyznaczone przez równanie

$$t = \frac{y}{x} = a + \frac{b}{x},$$

czyli, wyrażając x za pośrednictwem t:

$$2rt^3 - (2ar + b)t^2 - b = 0.$$

Trzeba teraz dowieść, że najogólniejsze równanie stopnia trzeciego względem $t = \frac{y}{x}$, które może być przyjęte pod postacią

$$\alpha t^3 + \beta t + \delta = 0,$$

można przekształcić w y m i e r n i e na równanie, pozbawione wyrazu stopnia pierwszego, w którym natomiast występuje kwadrat niewiadomej.

Znajdziemy to istotnie bardzo łatwo, zakładając $t = \frac{1}{t'}$, przez co równanie powyższe zamieni się na równanie żądanego typu:

$$\delta t'^3 + \beta t'^2 + \alpha = 0.$$

London zaleca szczególnie stosowanie cysoidy, zarówno przez wzgląd na proste powstawanie mechaniczne tej krzywej, jak i przez wzgląd na to, że cysoida zawiera punkty kołowe płaszczyzny, pozostające w związku z konstrukcjami miarowemi.

Można się jeszcze przekonać, że „jeżeli jest dana cysoida K i środek O koła tworzącego, to można zbudować samym linjałem kwadrat podstawowy, mający za wierzchołki punkt zwrotu cysoidy K i jej przecięcia z kołem podstawowym [1])", a zatem wszystkie zadania stopnia trzeciego graficzne i miarowe można rozwiązać samym linjałem, jeżeli jest dana cysoida stała wraz ze środkiem koła tworzącego.

---

[1]) Niech będzie dana cysoida K, przedstawiona na załączonym rysunku (fig. 129). Przypuśćmy, że ta cysoida jest całkowicie wyrysowana i że jest dany środek O koła tworzącego. Chcemy wykreślić za pomocą linjału punkt B, w którym asymptota b przecina prostą OA prostopadłą do niej, oraz punkty C, D krzywej, które wraz z A tworzą kwadrat $ABCD$.

W tym celu musimy się odwołać do pojęcia rzutowości, a w szczególności do inwolucji na cysoidzie; określamy jako rzutowe szeregi punktów na K dwa szeregi punktów, otrzymane przez przecięcie pęków promieni rzutowych spółśrodkowych o środku w punkcie zwrotu A.

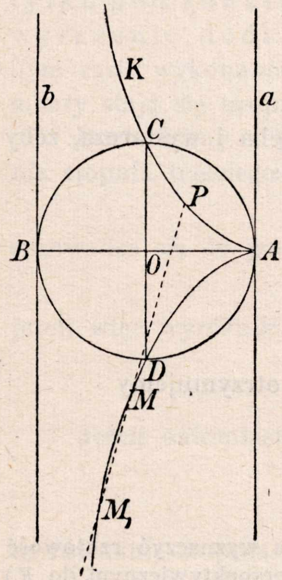

Fig. 129.

Postępujemy w ten sposób.

Obierzmy na K punkt P i weźmy pod uwagę inwolucję na krzywej taką, ażeby odpowiadały sobie punkty (jak M, M_1), leżące na jednej prostej z P; następnie wyznaczmy promień harmonicznie sprzężony z AO względem AP, AM_1; ten promień niech przetnie K w punkcie M'. Jeżeli będziemy zmieniali M, to otrzymamy między M i M' rzutowość, której punktami podwójnemi będą punkt A i punkt w nieskończoności krzywej K, który jest jej punktem przegięcia.

A więc w pęku A, który jest perspektywiczny do cysoidy, można wykreślić linjałem prostopadłą a do OA jako drugi promień podwójny rzutowości, której jednym promieniem podwójnym jest OA.

Stąd wynika konstrukcja linjowa punktu symetrycznego względem OA do każdego punktu krzywej K. Pary punktów symetrycznych, w ten sposób otrzymane, tworzą na K inwolucję I.

Punkty C, D, sprzężone w tej inwolucji, otrzymuje się następnie jako przecięcia krzywej K z prostopadłą poprowadzoną do OA z punktu O; tę prostopadłą można wykreślić linjowo, (gdyż jest danych dowolnie wiele równoległych do niej).

Możemy teraz jeszcze wykreślić linjowo asymptotę b cysoidy K za pośrednictwem rzutowości w pęku niewłaściwym prostopadłych do OA; promieniami

§ 20. Sprowadzenie zadań stopnia trzeciego do podziału kąta na trzy części równe albo do konstrukcji średnich proporcjonalnych. Rozpatrzymy teraz związek pomiędzy zadaniami ogólnemi stopnia trzeciego i zadaniami szczególnemi podziału kąta na trzy części równe i wyznaczania średnich proporcjonalnych. Zadaniu ogólnemu stopnia trzeciego odpowiada równanie zupełne stopnia trzeciego, które za pomocą przekształcenia wymiernego można zawsze pozbawić wyrazu stopnia drugiego i sprowadzić do postaci

(1) $$z^3 - pz + q = 0.$$

Łatwo się przekonać, że to równanie można za pomocą przekształcenia $z = \lambda y$ zamienić na równanie, od którego zależy podział kąta na trzy części równe (§ 10), a mianowicie:

(2) $$y^3 - 3(1+a^2)y - 2a(1+a^2) = 0;$$

w tym celu należy tylko wyznaczyć odpowiednio λ i a. W rzeczy samej, podstawiając w (1) $z = \lambda y$, dostajemy

$$\lambda^3 y^3 - p\lambda y + q = 0,$$

czyli, po podzieleniu przez λ^3:

$$y^3 - \frac{p}{\lambda^2} y + \frac{q}{\lambda^3} = 0.$$

Ażeby więc utożsamić równania (1) i (2) potrzeba i wystarcza, żeby λ i a czyniły zadość dwom następującym związkom:

(3) $$\frac{p}{\lambda^2} = 3(1+a^2)$$

(4) $$\frac{q}{\lambda^3} = -2a(1+a^2).$$

Dzieląc te równania stronami odpowiedniemi, otrzymujemy

$$\frac{p\lambda}{q} = -\frac{3}{2a},$$

---

podwójnemi tego pęku są a i b. W rzeczy samej, można wyznaczyć rzutowość zastępującą I; otrzymuje się ją wyznaczając w pęku A (perspektywicznym do K) rzutowość o promieniach podwójnych AO i a.

Możnaby wskazać inną konstrukcję, więcej symetryczną, opierając się na pojęciu nieco mniej elementarnym, a mianowicie rozpatrując odpowiedniość rzutową między punktami krzywej K i stycznemi do niej w tych punktach.

F. E.

skąd:

(5) $$a = -\frac{3q}{2p\lambda}.$$

Podstawiając tę wartość zamiast a w równaniu (3) znajdziemy

$$\frac{p}{\lambda^2} = 3\left(1 + \frac{9q^2}{4p^2\lambda^2}\right)$$

czyli

$$12p^2\lambda^2 = 4p^3 - 27q^2,$$

a więc:

(6) $$\lambda = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{4p^3 - 27q^2}{3}},$$

a wskutek (5)

(7) $$a = -\frac{3q}{\sqrt{\frac{4p^3 - 27q^2}{3}}}.$$

Wykonane przekształcenie można więc rozpatrywać jako konstrukcję, która się daje wykonać linjałem i cyrklem, a która sprowadza dane zadanie stopnia trzeciego do podziału kąta na trzy części równe, o ile tylko pod znakiem pierwiastka we wzorach (6) i (7) mamy wyrażenie dodatnie. Ten warunek jest istotny, gdyż w przeciwnym razie wykonanie konstrukcji powstrzymuje ta okoliczność, że jej elementy stają się urojonemi.

Dochodzimy więc do wniosku, że konstrukcja pierwiastków równania stopnia trzeciego

$$z^3 - pz + q = 0$$

sprowadza się do podziału kąta na trzy części równe, jeżeli

$$4p^3 - 27q^2 > 0,$$

jeżeli więc wyróżnik

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0.$$

Jeżeli natomiast założymy, że

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} > 0,$$

to równanie stopnia trzeciego

$$z^3 - pz + q = 0$$

ma jeden pierwiastek rzeczywisty, który się wyraża wzorem

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Jeżeli więc w tym przypadku wykreślimy linjałem i cyrklem odcinki

$$a = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$$

$$b = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$$

co do wartości bezwzględnej, to pozostaje tylko wyznaczyć $\sqrt[3]{a}$ i $\sqrt[3]{b}$, a więc wykreślić krawędź sześcianu, równoważnego prostopadłościanowi o krawędziach a, 1, 1 i b, 1, 1. Ta ostatnia konstrukcja zależy od wstawienia dwuch średnich proporcjonalnych między a i 1 i między b i 1.

Możemy więc powiedzieć wraz z Kartezjuszem[1]):

Wszystkie konstrukcje stopnia trzeciego można sprowadzić za pomocą linjału i cyrkla do podziału kąta na trzy części równe albo do wyznaczenia dwuch średnich proporcjonalnych.

[1]) L. c., str. 76—77.