WYKŁAD SYNTETYCZNY

własności powierzchni skośnych z ich przystosowaniem do Konstrukcyi machin, sklepień kamiennych, i. t. p.

ROZPRAWA

w zamiarze otrzymania stopnia

DOKTORA FILOZOFII

napisana i na publiczném posiedzeniu

WYDZIAŁU FILOZOFICZNEGO

w Królewsko-Warszawskim Uniwersytecie broniona

przez

KAJETANA GARBIŃSKIEGO.

WARSZAWA

w Drukarni Jego Ces. Król. Mości Rządowéy

1822.

OSTRZEZENIE.

Każdego z moich czytelników uważam, za oswoionego z Jeometryią opisuiącą (*Géometrie descriptive*) Monża, *albo przynaymniey* z Jeometryią opisuiącą Potier — *Do ostatniego dziełka, iako na oyczysty nasz ięzyk przełożonego, często odwoływać się będę.— Tytuł iego iest: Wykład Jeometryi rysunkowéy przez* P. Potier, *tłumaczenia* Hreczyny.

Winienem także ostrzec o notacyi któréy używam dla skrócenia wysłowień, i tak:

1od *Punkt* (M, M'), *znaczy punkt, którego rzutem poziomym iest punkt* M, *a rzutem pionowym punkt* M'.

2re *Liniia prosta* (AB, $A'B'$), *znaczy liniią prostą, któréy rzut poziomy iest liniia* AB, *a rzut pionowy liniia* $A'B'$. — *Liniia prosta* (A, $A'B'$), *oznacza liniią pionową, któréy rzut poziomy iest punkt* A, (*iéy spodek na płasczyznie poziméy*) *a pionowy liniia* $A'B'$.

3cie *Liniia krzywa* ($a\ b\ c\ d$, $a'\ b'\ c'\ d'$), *oznacza liniią, któréy rzut poziomy iest krzywa* $a\ b\ c\ d$, *a pionowy krzywa* $a'\ b'\ c'\ d'$. —

§. 1. Pierwszy z Matematyków, *Monż* (Monge) powierzchnie ieometrycznego kształtu, iakie tylko sobie wystawić możemy, rozdzielił na dwie wielkie gromady: w pierwszéy obiął te, które liniia iakakolwiek stała co do swoiego kształtu, w biegu zależnym od pewnego prawa, opisuie; w drugiéy te, które liniia iakakolwiek, zmienna tak co do kształtu, iako i co do położenia swoiego utwarza. (Liniie te Monż zowie liniiami *tworzącemi*, lignes génératrices). Jeden z naylicznieyszych rzędów pierwszéy gromady, a zarazem naywięcéy używany w wielu sztukach, iest rzęd powierzchni, których *tworzącą* iest liniia prosta (*.)

Rzęd ten mieści w sobie dwa główne rodzaie: 1wszy rodzay tak nazwanych powierz-

(*) *Powierzchnie te nayczęściéy są używane w praktyce, dla tego iż w ich kształceniu rzemieślnik, iak np. kamieniarz lub cieśla, równie iak przy wyrobieniu płaszczyzny, kieruie się liniią prostą.*

chni *rozwiialnych* (surfaces développables); 2gi rodzay powierzchni *skośnych* (surfaces gauches.) Wykazać syntetycznie własności dotąd znaiome powierzchni ostatniego rodzaiu, wyprowadzić z nich przystosowania ważnieysze; zamiarem iest ninieyszego dziełka. Jeżeli mimo nayszczerszéy chęci nie zdołam bydź zawsze ścisłym i zrozumiałym w wykładzie téy nowéy, a zarazem naytrudnieyszéy części *ieometryi opisuiącéy*, wolno mi będzie przynaymniéy tém się pocieszać, iż pierwszy byłem, który ogół prawd tego rodzaiu wyłożył i takowe z sobą powiązał.

§. 2. Nim dam ogólną powierzchni *skośnych* definicyą, napomknę wprzód pokrótce co rozumiemy przez powierzchnie *rozwiialne*; nie można albowiem zdaniem moiém, mieć dokładnego wyobrażenia pierwszych; iak przez porównanie ich z ostatniemi.

Powierzchnią *rozwiialną* (surface développable) nazywamy taką, która przez rozwinięcie, może bydź położona na płaszczyznie, bez żadnego zmarszczenia się lub rozerwania, (ma się rozumieć że wyciąganie mogące przedłużyć powierzchnią, w tą lub ową stronę, nie ma mieysca).

Aby sobie uczynić tego ieometrycznego kształtu dokładne wyobrażenie, wystawmy sobie płaszczyznę obiegaiącą przestrzeń podług pewnego prawa. Oznaczmy tą płaszczyznę w iedném z iéy położeń, przez P1; w drugiém, przez P2; w trzeciém, przez P3; i t. d, oznaczmy nadto, przecięcie płaszczyzny P1, z płaszczyzną P2, (które będzie liniią prostą,) przez L1; przecięcie P2, z P3, przez L2; przecięcie P3, z P4, przez L3; i t. d. Zbiór wszystkich położeń płaszczyzny ruchoméy, utworzyłby powierzchnią złożoną ze ścian płaskich, których krawędziami byłyby liniie proste L1, L2, L3, L4, i t. p. Powierzchnia pomienionemi ścianami określona, w ogólności będzie powierzchnią *rozwiialną.* Gdybyśmy albowiem którąkolwiek z tych ścian płaskich np. P1, obracaiąc około linii L1, (tak iak drzwi około zawiasy) położyli na przedłużeniu ściany następnéy P2; płaszczyznę N, złożoną z obudwóch ścian P1, i P2, obracaiąc około linii L2, (w sposób powyższy) położyli na przedłużeniu ściany P3; i t. n. przyślibyśmy nakoniec do tego, że wszystkie ściany P1, P2, P3, ...Pn—1 czyli cała powierzchnia, położoną byłaby na przedłużeniu ostatniéy ściany Pn.

Własność dopiero wykazana, służąca powierzchni określonéy ścianami płaskiemi, nie iest zależną ani od liczby tych ścian ani od ich szerokości; a więc własność ta mieć będzie mieysce i w tenczas, kiedy liczba ścian będzie nieograniczona, a ich szerokość nieskończenie mała, albo inaczéy mówiąc, kiedy powierzchnia mogłaby bydź uważaną za zbiór samych liniy prostych takich iak: L1, L2, L3, i t. p. (które to liniie podług tego cośmy powiedzieli w §. 1, byłyby *tworzącemi* powierzchni *rozwiialnéy*) (*.) Każda z takowych liniy *tworzących* z *tworzącą* następną nieskończenie iéy bliską, leży na téyże saméy płaszczyznie, a więc w ogólności przetnie się z nią w pewnym punkcie: zbiór takowych punktów odznacza na powierzchni liniią krzywą łatwą do spostrzeżenia, którą *Monż* (l'arête de rébroussement) a my *krawędzią zwrotu* nazywać będziemy. Każda z liniy tworzących, podzielona iest przez *krawędź zwrotu* na dwie części. Części *tworzących* leżące z iednéy strony *krawędzi zwrotu* tworzą iednę *płachtę* (nappe); a części *tworzących*, położone z drugiéy strony *krawędzi zwrotu* drugą *płachtę* powierzchni *rozwiialnéy* (**). Aby mieć dokładnę tych *płacht i kra-*

(*) *Przechód ten od powierzchni płaszczyznami określonéy do powierzchni krzywéy, odpowiada zupełnie przeyściu z wielokątów do koła, z ostrosłupa lub graniastosłupa prostego do ostrokręgu lub walca prostego i t. p.*

(**) *Powierzchnia ostrokręgowa* (*Jeom. Rys. k.* 2-

wędzi zwrotu wyobrażenie, weźmy sobie iakąkolwiek liniią płaską, którą uważać można za wielokąt złożony z nieograniczonéy liczby boków prostych, nieograniczenie małych. Przedłużmy każdy z tych boczków w obiedwie strony a otrzymamy stycznych do linii danéy nieograniczoną liczbę. (*). Punkt przecięcia każdéy styczné z następną iéy nieskończenie bliską, będzie na linii danéy. Niech pomienione styczne wystawiaią nam dróciki nieograniczonéy długości, niepodległe żadnemu ugię-

się. zgiéy) iest także rozwiialną, gdyż wszelkie iéy dwie tworzące następne, znayduią się na iednéyże płaszczyznie. Że zaś wszystkie tworzące ostrokręgu przecinaią się z sobą w iego wierzchołku czyli środku, krawędzią zatem zwrotu dwóch płacht powierzchni, w tym razie, iest punkt.

(*) *Dawnieysi Matematycy przez styczną do linii krzywéy rozumieli, liniią prostą któraby z krzywą daną miała ieden tylko punkt spólny. Późnieysi (a szczególniéy w ostatnich wiekach) uważaiąc za wielokąt o nieograniczonéy liczbie boczków nieskończenie małych, każdą liniią; ieden z takowych boczków przedłużony w obiedwie strony, nazwali styczną krzywéy.*

ciu. Daymy na to, że naginaiąc płaszczyznę linii daney nadaiemy iey kształt pewney powierzchni krzywey np. walcowey, naówczas, zbiór (podług przypuszczenia ugiąć się nie mogących) drucików, określi w przestrzeni powierzchnią *rozwiialną*, którey liniia dana wygięta, będzie *krawędzią zwrotu*. Część drucików położona z iedney strony linii wygiętey, wystawiać będzie iednę *płachtę*, a część inna drucików położona z drugiey strony, drugą *płachtę* powierzchni. Przykład ten wykazuie zarazem tą własność, iż: każda *z tworzących* powierzchni *rozwiialney* styczną iest do *krawędzi zwrotu*; druciki albowiem, i po wygięciu płaszczyzny linii daney, nie przestały bydź stycznemi do teyże linii.

C Z Ę Ś Ć I.

Tworzenie powierzchni *skośnych*.

(*zobacz względem tego nazwania Ner 1. przypisów*)

§. 3. Powierzchni *skośnych* równie iak

rozwiialnych tworzącą iest liniia prosta (§. 1.), lecz tu, dwa położenia *tworzącéy* nieskończenie bliskie nieznayduiąc się na teyże saméy płaszczyznie, obeymuią cząsteczki nie płaskie, lecz krzywe, nieskończenie wązkie i nieskończenie długie, a których zbiór w nieograniczonéy liczbie tworzy powierzchnią.

W powierzchni *rozwiialnéy* zbiór punktów przecięć każdéy *tworzącéy* z iéy następną, tworzył *krawędź zwrotu* oddzielaiącą od siebie dwie *płachty* powierzchni; tu, *krawędzi zwrotu* a tém samém i dwóch *płacht* powierzchni nie będzie; nadto, powierzchnie *skośne* nigdy tak iak *rozwiialne* na płaszczyznie rozciągniętemi bydź nie mogą.

Do dwóch *tworzących* następnych, powierzchni *skośnéy* poprowadzić zawsze można liniią prostopadłą (Jeometry. Rysun. xięga I. k. 24.). Zbiór spodków wszystkich takowych prostopadłych tworzy na powierzchni liniią krzywą szczególną, którą *liniią ściśnienia* (courbe de striction) zwać będziemy, wzdłuż albowiem téy linii powierzchnia iest naybardziéy ściśnioną, iak to późniéy na szczególnych zobaczymy przykładach.

Lubo niektóre powierzchnie o których mowa znane były potrosze piszącym o sposobach wyrabiania części składowych sklepień w trzech ostatnich wiekach, iak np. *Phibert de l'Orme*, *Jousse*, *Franciszkowi Derand*, *De la Rue*, a szczególniéy *Frerier*; przecież pierwszy był *Monż* który ieometrycznym nad niemi zastanawiał się sposobem. Wykładem swoim niektórych własności powierzchni *skośnych*, tyle zaiąć umiał dawnych uczniów szkoły politechniczney Paryzkiéy, iż wszystko niemal co w tym względzie wiemy im winni iesteśmy.

§. 4. Abyśmy w rozbiorze powierzchni *skośnych* mogli postępować od rzeczy mniéy złożonych do trudnieyszych, podzielemy ie sobie na dwa oddziały.

1wszy Oddział zawierać będzie powierzchnie *skośne* których *tworząca*, w swym biegu przecinaiąc nieustannie dwie liniie iakiekolwiek niewzruszone w przestrzeni, (liniie te zwać będziemy *liniiami kieruiącemi* lub krócéy *kierownicami* Lignes directrrices) w każdém z swoich położeń równoodległą iest od płaszczyzny niewzruszonéy *płaszczyzną kierownicą* (plan directeur) zwanéy.

2gi Oddział zaymować będzie powierzchnie utworzone przez obieg prostéy posuwaiącéy się po trzech liniiach iakichkolwiek niewzruszonych w przestrzeni, także *kierownicami* zwanych.

ODDZIAŁ 1wszy.

Kierownicami są płaszczyzna stała i dwie liniie iakiekolwiek także stałe co do swoiego położenia. (*)

Tab. I. fig. 1.

§. 5. Niechay dwie liniie iakiekolwiek

(*) *Oddział ten powierzchni* skośnych Poitier *zowie* Cylindres gauches, *czemu podług Pana* Hreczyny *ma*

AB, A'B', i płaszczyzna MN, będą *kierownica*-*mi*. Liniia prosta AA', posuwaiąc się wzdłuż liniy AB, A'B', równoodlegle od *płaszczyzny kierownicy* MN, utworzy w ogólności (oprócz szczególnych warunków iakimby *kierownice* podlegać mogły) powierzchnią *skośną*. Bo w samey rzeczy obrawszy sobie na *kierownicy* AB, dwa punkta a, b, nieskończenie siebie bliskie i poprowadziwszy przez każdy z nich płaszczyznę równoodległą od płaszczyzny MN, pierwsza z tych płaszczyzn przetnie *kierownicę* A'B', w punkcie np. a', a druga w punkcie b'. Połączywszy punkta a, z a', i b, z b', liniiami prostemi aa', i bb', liniie te położone nieskończenie blisko siebie, nie będą się znaydowały na teyże samey płaszczyznie; gdyż w ogólności przez cztery punkta a, a', b, b', nie można poprowadzić płaszczyzny.

Gdyby *tworząca* w obiegu swoim nie ko-

odpowiadać w naszym ięzyku walce podwóyne (*Jeometrya Rys. kar.* 28. *xięga IIga*).?

niczenie była równoodległą od *płaszczyzny kierownicy*, powierzchnia ztąd powstała byłaby *rozwiialną* (zobacz przyp. Ner 2gi.)

Gdyby *tworząca* AA', zamiast posuwać się wzdłuż *kierownic*, zmuszona była w swym obiegu równoodległym od płaszczyzny MN, styczną bydź do dwóch powierzchni iakichkolwiek (S), i (S'), co do położenia swoiego w przestrzeni niezmiennych; powierzchnia (W) przez iey obieg utworzona, byłaby także *skośną*; Zbiór albowiem punktów dotknięć, dwóch powierzchni (S), i (S'), z *tworzącą* A A', we wszystkich iey położeniach, dałby nam dwie liniie krzywe, iednę (D), na powierzchni (S), drugą (D'), na powierzchni (S'), położone. Usunąwszy powierzchnie dane, uważaiąc za *kierownice* krzywe (D), i (D'); liniia prosta po nich się posuwaiąca równoodlegle od płaszczyzny MN, nie inną by utworzyła iak tylko powierzchnią (W)

Toż samo powiedziećby można, gdyby

iednę z *kierownic* zastąpiła powierzchnia iakakolwiek, do któréyby *tworząca* w swoim obiegu była styczną, przecinała *liniią kierownicę*, i posuwała się równoodlegle od *płaszczyzny kierownicy*.

Jeżeli iedna z *kierownic* iest liniią prostą, powierzchnia *skośna* téy odmiany zowie się *ostrokręgowata* (surface gauche conoïde) z powodu nieiakiego iéy podobieństwa z ostrokręgiem. Jeśli nadto *kierownica* prosta, prostopadłą iest do *płaszczyzny kierownicy*, *ostrokręgowata* przybiera nazwisko *ostrokręgowatéy prostéy* (conoïde droit). W tym ostatnim przypadku kierownica prosta iest zarazem *linią ściśnienia* (§. 3.); będąc bowiem prostopadłą do *płaszczyzny kierownicy*, iest zarazem prostopadłą i do *tworzącéy* we wszystkich iéy położeniach, iako zawsze równoodległéy od pomienionéy płaszczyzny.

Powierzchnie *ostrokręgowate proste* dość często zdarzaiące się w zastosowaniach, są tak nazwane *ostrokręgowate szrubowe.* Sposób tworzenia onych iest następuiący: Wystawmy sobie walec prosty a na iego powierzchni *liniią szrubową* (hélice) (zobacz przyp. Numer III.), liniia prosta posuwaiąca się po *linii szrubowéy* i osi walca równoodlegle od płaszczyzny iego podstawy, utworzy nam iednę z powierzchni o któréy mowa.

Przystosowanie. Machina zwana szrubą *Archimedesa*, używana do wylewania wody z kanałów, lub rzek przy budownictwie wodném, składa się za zwyczay z rury okrągłéy miedziannéy okręconéy około walca drewnianego w kształcie linii szrubowéy. Szruba takowa prócz wielu niedogodności, wymaga znacznych nakładów, i raz uszkodzona w iakiéy części, iuż iest prawie do użycia niezdatną. Szruba urządzona na sposób holenderski (a l'Holandaise) używana powszechnie w *Hollandyi, Anglii i Francyi*, iuż że iest cała z drzewa, iuż też dla tego, że przy

do-

dozorze Inżeniera zdziałaną bydź może przez każdego cieślę, i dla wielu innych dogodności, zasługuie na pierwszeństwo. Opis iéy ieometryczny iest następuiący: Niech będą dwa walce których podstawami są dwa koła spółszrodkowe; mnieyszy pełny, zwany *iądro* (noyeau); drugi większy, otaczaiący pierwszy i wydrążony, zwany (canon) *rurą*. Wystawmy sobie na powierzchni wewnętrznéy *rury*, dwie liniie szrubowe równoodległe względem siebie, i przecinaiące tworzące *rury* pod kątem 45°. Posuwaiąc po iednéy z tych liniy i osi spólnéy dwóm walcom, liniią prostą, równoodlegle od płaszczyzny podstaw, ta, utworzyłaby nam powierzchnią *skośną szrubową*. Druga takowa powierzchnia miałaby za *kierownice* liniią szrubową drugą, oś spólną walcom i płaszczyznę podstaw. Kanał otoczony temi dwiema *powierzchniami skośnemi* i dwiema powierzchniami walcowemi, iedną *rury*, a drugą *iądra*, iak naylepiéy zastąpi mieysce rury miedzianéy. (*) (Dokładny opis konstrukcyi téy machiny znaydzie czytelnik w dziele pod tytułem: *Traité elemi. de machines par Hachètte 2éme editi* page 137.)

Gdybyśmy wystawili sobie pomieniony kanał pełnym, z tego samego materyału co *iądro* szruba *Archimedesa* wyobrażałaby nam szrubę zwyczayną iakiéy używaią przy ma-

(*) *Gdybyśmy na powierzchni rury oznaczyli byli nie dwie, ale trzy, cztery, pięć, i t. d. liniy szrubowych, w téyże saméy odległości od siebie położonych; i każdą z nich z osią spólną walcom, i z płaszczyzną podstaw tych walców, uważali za* kierownice *powierzchni* ostrokręgowatéy szrubowéy; *liczba tych powierzchni byłaby trzy, cztery, pięć, i t. d. Przestrzeń zawarta między każdą takową powierzchnią, a iéy następną, wystawiałaby nam ieden kanał machiny. Liczba przeto takowych kanałów byłaby równa* 3, 4, 5, *i t. d. Budownicy nie przestaią na iednym z tych kanałów, ale daią ich za zwyczay* 3 *lub* 4, (*zobacz o tém w dziele wyżéy zacytowaném*).

chinach cisnących np. przy prassach lub stęplach po mennicach, a kanał byłby wtedy gwintem szruby. Szrubę tę zwaną czworograniastą, (quadrangulaire) wystawia nam fig. 7. Tab. II. w rzucie pionowym. Prostokąt k m, iest rzut pionowy *iądra*, linie e i h, i a g f, są częściami rzutów pionowych dwóch liniy szrubowych względem siebie równoodległych na walcu większym położonych. Powierzchnie otaczaiące gwint są: dwie powierzchnie *skośne*, które w części rzucaią się pionowo podług d e i h, i a b g f e, i powierzchnia walca większego która w części rzuca się pionowo podług e i h f g a;

Pomiędzy wielu odmianami powierzchni *skośnych ostrokręgowatych*, wielkiey uwagi godną iest ta, w którey obie *kierownice* są liniie proste. Powierzchnie tu umieszczone znane są pod nazwiskiem *paraboloid hyperbolicznych*, z przyczyny iż wszystkie ich przecięcia z płaszczyzną są albo *parabole* albo *hyperbole*. Nazywaią ie także niekiedy, *ostrokręgowate* drugiego stopnia (conoïdes du second degré.) (*)

Weźmy sobie pod rozwagę tą odmianę powierzchni, poznanie bowiem ich natury posłuży nam późniéy do odkrycia wielu pięknych własności.

§. 6. *Twierdzenie.* Tab. I. fig. 2. Niech *kierownicami paraboloidy hyperbolicznéy* będą dwie liniie proste AC, A'C', a *płaszczyzną kierownicą* MN. Trzeba pokazać, iż obrawszy sobie na téy powierzchni dwie *tworzące* iakiekolwiek AA', i CC', za kierownice, a za *płaszczyznę kierownicę*, płaszczyznę równoodległą od dwóch *kierownic* danéy powierzchni; liniia prosta, posuwaiąca się wzdłuż tych nowych *kierownic*, równoodlegle od nowéy *płaszczyzny kierownicy*; utworzyłaby nie inną, ale powierzchnią daną. Dowieść téy własno-

(*) *Pan* Hreczyna *daie im nazwisko* płaszczyzn podwóynych, *ma to niby odpowiedać francuzkiemu* (*plan gauche*) *oddawna przez praktyków używanemu Jeom: Rys kar.* 50. ?

ści iest iedno co pokazać, że: iakikolwiek punkt wzięty na powierzchni nowym sposobem utworzonéy, znayduie się zarazem i na powierzchni danéy.

Niech iedną z *tworzących* iakąkolwiek nowéy *paraboloidy hyperbolicznéy*, będzie liia m n, na któréy obieram sobie iakikolwiek punkt o. Punkt ten mówię, będzie się także znaydował na powierzchni danéy. Na dowodzenie tego prowadzę przez punkt o, płaszczyznę równoodległą od M N, płaszczyzna ta przetnie kierownice powierzchni danéy w punktach np. B, i B'. Poprowadziwszy liniią prostą B B', ta będzie *tworzącą* pierwszéy powierzchni, i przetnie koniecznie liniią m n, w punkcie o. To okazać iest iedno co dowieść że te dwie liniie m n, i B B' znayduią się na iednéy płaszczyznie. Przez punkta B, C, B', C', poprowadźmy liniie B b, C c, B' b', C' c', równoodległe od m n; niech ich przecięciami z płaszczyzną M N, będą punkta

b, c, b', c', . Trzy punkta b, c, A, znayduią się na linii prostey, $b\,A$; trzy punkta b', c', A', znayduią się także na linii prostey $b'\,A'$; nadto, dwie te liniie $b\,A$ i $b'\,A'$ są od siebie równoodległe, iako przecięcia płaszczyzn $B\,A\,b$, $B'\,A'\,b'$ równoodległych między sobą, z *płaszczyzną kierownicą* $M\,N$

W tróykącie $B\,A\,B$ iest:

$$b\,A : c\,A = B\,b : C\,c.$$

Podobnie w tróykącie $B'\,A'\,b'$ iest:

$$b'\,A' : c'\,A' = B'\,b' : C'\,c'.$$

Iże $B\,b, = B'\,b'$, a $C\,c = C'\,c'$ więc złożywszy dwie powyższe proporcye wypadnie:

$$b\,A : c\,A = b'\,A' : c'\,A',$$ albo:

$$b\,A - c\,A : c\,A = b'\,A' - c'\,A' : c'\,A'$$ czyli:

$$b\,c : A\,c. = b'\,c' : A'\,c'.$$ A ztąd wypada: że liniie $A\,A'$, $c\,c'$, $b\,b'$, powinny się z sobą zeyść w iednym punkcie (Jeom. X. Profess. Dąbrowskiego kar. 128). Że zaś liniie $A\,A'$ i $c\,c'$ schodzą się z sobą w punkcie n, (przecięciu się linii $m\,n$ z płaszczyzną $M\,N$) więc i liniia

$b b'$, przez ten punkt przechodzić musi. Trzy liniie $n o$, $B b$, $B' b'$, znayduią się na iednéy płaszczyznie z liniią $B B'$, a więc ta ostatnia przetnie się z liniią $m n$. Łatwo iest nadto spostrzedz, iż tém przecięciem nie może bydź inny punkt iak o. Wszelki zatém punkt *paraboloidy* drugim sposobem utworzonéy, znayduie się na *paraboloidzie* pierwszéy.

Wniosek. Jeżeli liniie proste takie iakiemi są $A A'$, $B B'$, $C C'$, i t. d. nazwiemy *tworzącemi* pierwszego sposobu utworzenia powierzchni, a liniie $A C$, $A' C'$, $m n$, *tworzącemi* drugiego sposobu; nie będzie żadnego punktu na *paraboloidzie hyperboliczněy* przez który nie można było na niéy poprowadzić dwóch liniy prostych, iednéy, będącéy *tworzącą* pierwszego, drugiéy, *tworzącą* drugiego sposobu utworzenia powierzchni.

Przystosowanie.

§. 7. Jednym z naypożytecznieyszych

narzędzi rolniczych (a może razem i naysta- rożytnieyszym) iest pług, (*). Z tego to powodu, oddawna, wielka liczba tak gospodarzów iako też i mechaników trudniła się iego doskonaleniem. Mimo iednak ich usilności, aż do początku naszego wieku, nikt nie zdołał połączyć w nim tych wszystkich dogodności, iakich cel iego dobrze rozważony wymaga. Przy chwili zastanowienia nie trudno iest poiąć, że kształt i wymiar *lemiesza* wraz z iego *odkładnią* stanowią całą dokładność pługa, (iak się to zaraz wyiaśni). Większa część nawet nayświetleyszych rzemieślników trzymaiąc się ślepo dawnego try-

(*) *Nayważnieysze części pługa które fig.* 3. *Tab. II. wystawia, w rzucie pionowym, są:* a, króy (*le coutre*) *którego przeznaczeniem iest kraiać ziemię w kierunku pionowym*; b, lemiesz (*le soc.*) *kraie ziemię w kierunku poziomym;* c, odkładnia (*versoir ou l'oraille*) *odwala skibę na bok, — Inne części* d, e, f, g, *są tylko do umocowania lub kierunku narzędzia.*

bu, nie znaią żadnych w téy mierze prawideł. Szczególnieyszą baczność na kształt odkładni i lemiesza zwróciło dwóch mężów niepospolitéy zasługi. Jeden z nich iest *Arbuthnot* należący do rzędu pierwszych gospodarzów Angielskich, drugi *Jefersson* dawnieyszy prezydent stanów zjednoczonych Ameryki. Ostatni który obok naygruntownieyszych ieometrycznych rozumowań, łączy zawsze szczęśliwe doświadczenia, tak mówi (*) w téy mierze:

„Powierzchnia *odkładni* powinna bydź „przedłużeniem powierzchni *lemiesza.* Nayważnieyszém iéy przeznaczeniem iest: zbierać „poziomo z *lemiesza* skibę, podnosić ią do „pewnéy wysokości i odwalać na stronę; w „całym zaś biegu stawiać ile bydź może nay„mniéy oporu, a tém samém wymagać *mini„mum* siły poruszaiącéy (force, albo, puis-

(*) *Zobacz dzieło pod tytułem* de Machines d'Agriculture par J. A. Bornis *kar.* 17.

„sance motrice). Z tych powodów brzeg „dolny *odkładni*, powinien bydź nawet bez „nachylenia, (czyli poziomy), wierzchni prze„ciwnie nachylenie swoie zwiększać powi„nien idąc coraz bardziey ku górze, w ten „sposób: iżby nakoniec swoią powierzchnią „od strony przeciwney skiby, czynił z pozio„mem kąt roztwarty, a to wszystko równie „dla oszczędzenia siły poruszaiącey, iak dla „tego aby skiba odwalała się własnym tylko „swoim ciężarem."

To wszystko zważywszy *Jefersson*, i porównawszy z doświadczeniem wykazał, iż powierzchnia *odkładni* spólnie z *lemieszem* powinna bydź *paraboloidą hyperboliczną.* (Jakim sposobem rzemieślnik mógłby sobie oznaczyć *kierownice* powierzchni *odkładni*, wyczytać można w nocie 4tey przypisów.)

Skrzydła u wiatraków nad których wydoskonaleniem także wielu gorliwych pracowało mężów, podług *Monża i Hachette* kształt także *paraboloidy hyperboliczněy* mieć powinny. (Jak się w tym razie oznaczaią *kierownice*, zobacz w dziele pod tytułem: *Sur la composition des machines par Lantz et Betancourt* 2. edition karta 36.)

Nadto powierzchnie *skośne* těy odmiany zdarzaią się często tak przy konstrukcyi dachów w budowlach których ściany przeciwne nie są od siebie równo-odległe, iako też przy bardzo wielu robotach fortyfikacyi (czytay *Memoires sur la fortification permanente par Séa à St. Petersbourg* 1811).

ODDZIAŁ 2gi.

Kierownicami są trzy liniie iakiekolwiek stałe co do kształtu i położenia w przestrzeni.

§. 8. Nayogólnieysza iaką sobie wystawić możemy z pomiędzy powierzchni *skośnych*, iest ta: w którěy *tworząca* zmuszona iest posuwać się wzdłuż trzech liniy iakichkowiek A, B, C, oznaczonych tak co do swoiego kształtu iako i co do położenia. Za pomocą tego warunku, wyznaczyćby można wszystkie położenia *tworzącéy*. Obrawszy sobie albowiem na *kierownicy* A, punkt iakikolwiek a, za środek ostrokręgu któregoby *kierownicą* (*) była krzywa dana B, i oznaczywszy punkt c, przecięcia się téy powierzchni z krzywą C; liniia prosta poprowadzona przez punkta c i a przecinałaby wszystkie trzy *kierownice* A, B, C, a więc oznaczałaby *tworzącą* w iedném z iéy położeń. Bo naprzód liniia ac, przecina *kierownice* A, i C, gdyż przechodzi przez punkta a, i c, położone na tych liniiach; przecina także i liniią B, bo cała iest położona na ostrokręgu, którego ta liniia iest *kierownicą*. Tak iakeśmy oznaczyli iedno z położeń *tworzącéy*, oznaczylibyśmy wszystkie inne iéy położenia, których dostateczna liczba, dałaby nam wyobrażenie kształtu powierzchni.

(*) Kierownica *ostrokręgu*, *wzięta iest w znaczeniu używanym w* Jeomet. Rysunkowéy.

Maiąc rzuty trzech *kierownic* iakichkolwiek (fig. 9. Tab. II.) (a b A c d, a' b' A' c' d'), (e f B g h, e' f' B' g' h'), (i k C l m, i' k' C' l' m'), *powierzchni skośnéy*, gdybyśmy chcieli oznaczyć rzuty *tworzącéy* we wszystkich iéy położeniach; postąpićby można w ten sposób — Obierzmy sobie punkt (C, C'), na linii (i k C l m, i' k' C' l' m'), za środek ostrokręgu którego *kierownicą* iest iedna z dwóch *kierownic* pozostałych np. (e f B g h, e' f' B' g' h'), ostrokręg ten przetnie walec pionowy którego podstawą iest liniia (a b A c d), podług linii (a b A c d, 5' 6' 7' 8'), łatwéy do oznaczenia, (*Jeometrya Rysunk. k.* 85). Przecięcie się téy linii z liniią (a b A c d, a' b' A' c' d'), rzuca się pionowo w punkcie A', a poziomo w punkcie A, połączywszy więc punkt A z punktem C liniią prostą AC, punkt A' z punktem C' liniią prostą A' C', liniie te będą rzutami *tworzącéy* przechodzącéy przez punkt (C, C'). Tym samym sposobem oznaczylibyśmy *trworzące* (a e i, a' e' i'), (b f k, b' f' k'), (egl, e'g'l'), i t. d. Ponieważ dwie z tych *tworzących* iakiekolwiek nieskończenie siebie bliskie, znaydowałyby się każda na innym ostrokręgu, a tém samém nie na iedney płaszczyznie, przeto w ogólności (wyłączaiąc tylko szczególne warunki którymby *kierownice* odpowiadać mogły), powierzchnie sposobem powyższym utworzone będą *skośnemi*.

Gdybyśmy na mieyscu trzech liniy *kierownic*, wystawili sobie trzy powierzchnie, do których we wszystkich położeniach swoich liniia prosta byłaby styczną, powierzchnia ztąd wypadła, byłaby także *skośną* drugiego oddziału. Ze zbioru bowiem punktów dotknięć *tworzącéy* ruchoméy z powierzchniami utworzyłyby się trzy liniie krzywe, po których posuwaiąc liniią prostą, utworzylibyśmy powierzchnią o któréy mowa. Toż samo byłoby w ten-czas, gdyby mieysce dwóch lub iednéy z *kierownic*, zastąpiły dwie lub iedna powierzchnia do których *tworząca* w biegu styczną bydźby musiała. Słowem, liniia prosta obiegaiąc przestrzeń w każdém ze swoich położeń trzem odpowiadaiąc warunkom, w ogóle (prócz szczególnych warunków iakimby *tworząca* ieszcze uledz mogła), tworzy *powierzchnią skośną.*

Powierzchnie szruby tróykątnéy, należą do tego oddziału. Tworzenie ich iest następuiące (Tab. 2. fig. 8) — Wystawmy sobie walec pionowy, którego podstawą na płaszczyznie poziomey rzutów iest koło e f g k. Na iednéy z płaszczyzn południkowych tego walca, np. na płaszczyznie która za *ślad poziomy* ma liniią prostą S a, iest tróykąt równo-ramienny którego rzuty są g a, poziomy, a zaś tróykąt $g' a' g''$, pionowy, podstawa tego tróykąta (g, $g' g''$), przystaie do *tworzącéy* walca. Niech teraz biegiem iednostaynym, płaszczyzna południkowa S a, obraca się około osi walca (S, $S' S''$), biorąc następnie położenia płaszczyzn południkowych, których ślady poziome byłyby S b, S c, i t. d; w ten sposób, iżby za kautworzy nie inną powierzchnią *hyperboloidy*, ale *hyperboloidy* daney:

Niech IK. będzie liniią prostą (fig. 5. (a) Tab. I.) posuwaiącą się wzdłuż trzech liniy prostych stałych AB, MN, CD, a liniie AD, CB, przecinaiące *kierownice* w punktach A, M, D, i B, N, C, niech wyrażaią dwa iéy położenia iakiekolwiek. Ponieważ liniie KI i MN, iako przecinaiące się w punkcie np. G, znayduią się na iedney płaszczyznie; przeto, liniie KN i MI, przedłużone we wszystkie strony przetną się z sobą w pewnym punkcie — Że zaś iedna z tych liniy leży na płaszczyznie tróykąta DCB, druga na płaszczyznie tróykąta DAB; przeto, punkt ich przecięcia nie może bydź gdzieindziey, iak na linii prostéy DB, spólném przecięciu się tych dwóch płaszczyzn. Punkt ten oznaczmy przez L.

Tymże samym sposobem okazalibyśmy, iż

uważaiąc *tworzącą* K I w innem iakiemkolwiek położeniu, np. w położeniu K' I'; połączywszy punkt K', z N i punkt M z punktem I', liniiami prostemi, liniie te K' N i M I', przeciąćby się musiały w punkcie pewnym L', położonym także na linii D B. Dwie liniie takie iakiemi są, K I, i M N, dzielą zawsze boki *czworokąta skośnego* A B C D, (quadril a gauche) na ośm części, czyli odcinków, iakoto: A I, I B, B N, N C, C K, K D, D M, AM—Mówię, iż utworzywszy dwa iloczyny z tych odcinków, tak, aby czynnikami każdego z nich były cztery odcinki niemaiące z sobą końców spólnych, iloczyny te będą pomiędzy sobą równe.

Przekątna D B, dzieli *czworobok skośny* A B C D iakeśmy powiedzieli, na dwa tróykąty A B D, i B C D. Uważaymy ieden z tych tróykątów np. B C D, fig. 5. (b). Poprowadźmy przez punkt D, równoodległą od linii prostey K N L, aż do przecięcia się

3*

z C B, w punkcie J. Dla podobieństwa tróykątów C K N i C D J iest:

$$CK : DK = CN : NJ \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Z uważania tróykątów równokątnych N B L i D B J, wypada: $BD : BL = BJ : BN$, a ztąd:

$BD + BL : BL = BJ + BN : BN$. czyli

$$DL : BL = NJ : BN. \quad \ldots \quad (2)$$

Z pomnożenia wyrazów odpowiadaiących w proporcyach (1) i (2) wypada:

$CK \times DL : DK \times BL = CN : BN$. a ztąd:

$$BN \times CK \times DL = CN \times DK \times BL \ldots\ldots \quad (a)$$

Podobnymże sposobem z uważania drugiego tróykąta ABD, w *czworoboku skośnym* A B C D fig. 5 (a) otrzymalibyśmy:

$$DM \times AI \times BL = AM \times IB \times DL \ldots\ldots \quad (b)$$

Rozmnożywszy strony odpowiadaiące w równaniach (a), i (b), i zniósłszy czynniki spólne, będzie:

$$BN \times CK \times DM \times AI = CN \times DK \times AM \times IB.$$

Widzimy, że w każdy z tych dwóch iloczynów, wchodzą cztery z ośmiu odcinków *czworoboku skośnego*, niemaiące końców spólnych. Równanie powyższe zamienić można na:

$$\frac{AI \times CK}{BI \times DK} = \frac{CN \times AM}{DM \times BN} \quad . \ . \ . \ (c)$$

Jeśli *kierownice* A B, M N, i D C są niezmienne, dla iakiegokolwiekbądź położenia linii K I, posuwaiącéy się po trzech pierwszych, np. dla położenia K I', będzie także:

$$\frac{CN \times AM}{DM \times BN} = \frac{AI' \times CK'}{BI' \times DK'} = S \ . \ . \ . (m)$$

S, znaczy pewną ilość stałą, odcinki bowiem C N, A M, D M, B N, w przypuszczeniu powyższém są niezmienne.

Podobnież ieśli liniie A D, I K, B C, są stałe, dla iakiegokolwiek z położeń linii M N po nich się posuwaiącéy, np. dla M N, będzie:

$$\frac{AI \times CK}{BI \times BN} = \frac{CN' \times AM'}{DM' \times BN'} = S \ . \ . \ . (n)$$

Z dwóch równań (m) i (n) wypada:

$$\frac{A\dot{I} \times CK'}{B\dot{I} \times DK'} = \frac{CN' \times A\dot{M}}{DM' \times B\dot{N}}.$$

Porównany ten wypadek z równaniem (c), dowodzi; iż iak liniie M N i K I, przecinały się z sobą w pewnym punkcie (G) tak też i liniie M'N' i K' I', przecinać się z sobą muszą koniecznie w pewnym punkcie X. Czyli inaczéy; że liniia M N, we wszystkich swoich położeniach posuwaiąc się wzdłuż liniy A D, K I, C B, przecinać będzie liniią K I, posuwaiącą się po trzech liniiach A B, M N, D C, we wszystkich iéy położeniach. Nie masz przeto ani iednego punktu na *hyperboloidzie iednopłachtowéy*, przez któryby nie można było poprowadzić dwóch liniy prostych, należących do dwóch oddzielnych szeregów liniy, odpowiadaiących dwóm sposobom tworzenia powierzchni.

Uwaga. Gdyby trzy iakiekolwiek *tworzące*, iednego z dwóch tych sposobów tworzenia *hyperboloidy*, równoodległemi były od pewnéy płaszczyzny; *hyperboloida* odpowiadaiąca temu warunkowi, byłaby *paraboloidą hyperboliczną* (§ 6). Powierzchnia więc ostatnia iest tylko szczególną odmianą pierwszéy.

§. 10. Nim opuścimy wykład ogólny sposobów tworzenia *powierzchni skośnych*; zwróćmy ieszcze uwagę naszę na pewną odmianę *hyperboloid iednopłachtowych.*

Wystawmy sobie dwie liniie proste nie na téyże saméy płaszczyznie leżące — Jeżeli iedna z nich obraca się około drugiéy nieruchoméy, zakreślaiąc każdym punktem koło prostopadle do téy linii nieruchoméy (*osią obrotu* zwanéy *Geom. Rys. kar.* 37.) i maiące środek swóy na téyże osi obrotu; zbiór takowych kół utworzy pewną powierzchnią *obrotową.* (surf. de révolut.) Dwa położenia *tworzącéy* nieskończenie bliskie, oddzielone od siebie łukami kół prostopadłych do osi, nie będą miały żadnych punktów spólnych; nadto nie będą od siebie równoodległe, a więc nie będą leżyć na iedéy płaszczyznie. Powierzchnia zatém o któréy mowa, iest także *powierzchnią skośną*.

Oznaczmy naykrótszą odległość między osią a *tworzącą* powierzchni czyli, prostopadłą do obudwu liniy danych (*Geom. Rys.* kar. 24). Przez spodek S, téy prostopadłéy, na *tworzącéy*, poprowadźmy równoodległą A, od osi —. Gdybyśmy przez punkt S, na płaszczyznie dwóch liniy, *tworzącéy* i linii A, poprowadzili liniią prostą czyniącą z A, kąt taki iaki z nią czyni *tworząca*, i z przeciwnéy strony teyże *tworzącéy* leżącą; liniia ta, w obrocie swoim około osi, utworzyłaby nie inną, ale tęż samę powierzchnią co *tworząca* pierwsza. Bo, podług wykreślenia, między nową *tworzącą* A a osią, taż sama iest odległość i toż samo nachylenie, co między osią a *tworzącą* pierwszą.

Dwoiaki więc mamy sposób utworzenia

pomienioney powierzchni przez obieg linii prostey. Nadto łatwo spostrzedz można iż *tworząca* pierwsza we wszystkich swoich położeniach przecina *tworzącą* drugą także we wszystkich iey położeniach. Ztąd wypada iż: obrawszy sobie trzy położenia iakiekolwiek *tworzącey*, należące do któregokolwiek z dwóch sposobów utworzenia powierzchni, i posuwaiąc po nich liniią prostą ta, utworzyłaby także powierzchnią o którey mowa. Powierzchnia więc ta, należy do *hyperboloid iednopłachtowych*. Zowią ią także *hyperboloidą obrotową iednopłachtową* (hyperboloïd de révolution à une nappe), dla tego, że przez obrot hyperboli około osi uroioney utworzoną bydź może. (Zobacz *Corresp. sur l'Ecole polytech. page* 242 T. I.) (*).

(*) *Przez uważanie tey powierzchni P.* Hachette *oznaczył syntetycznie kąt* maximum *nachylenia szruby Archimedesa* (§. 5.) *do płaszczyzny wody.* (*Zobacz* Traité élem. de machines par Hachette 2me edit. page 139.)

CZĘŚĆ II.

Własności ogólne powierzchni *skośnych*.

§. 11. *Co do płaszczyzny styczney.* Podług *Clairault*, (który pierwszy dał nam teoryą powierzchni), płaszczyzna styczna w pewnym punkcie do powierzchni iest: płaszczyzna przechodząca przez dwie liniie styczne do powierzchni w tymże punkcie (sur les courbes à double courbure p. *Clairault*, art. 8. edycya z r. 1731). Definicya matematyków późnieyszych, zdaie się bydź więcey przemawiaiącą do umysłu i mniey oderwaną. Podług ostatnich, tak iak wszelką liniią krzywą uważamy za wielokąt którego boki są nieskończenie małe i w nieskończoney liczbie (§. 2.); tak też i wszelką powierzchnią brać można za wielościan którego ściany są w nieograniczoney liczbie i nieskończenie małe. Którakolwiek z takowych ścianeczek płaskich, przedłużona we wszystkie strony iest: płaszczyzną styczną do powierzchni podług ścianeczki którey iest przedłużeniem. Ścianeczka ta, spólna powierzchni i płaszczyznie stycznéy, zowie się ścianeczką albo punktem dotknięcia (*l'élement ou, point de contact*).

§. 12. Z tey definicyi wypada to ważne *twierdzenie :* Płaszczyzna styczna w pewnym punkcie do powierzchni iest: zbiorem stycznych w tymże punkcie do każdéy linii na powierzchni położonéy. Jakoż, tém samém że te liniie krzywe przechodzą przez punkt dotknięcia; przechodzą także i przez ścianeczkę spólną płaszczyznie stycznéy i powierzchni. Każda więc z tych liniy, ma swóy boczek nieskończenie mały na ścianeczce spólnéy. Że zaś, styczna do linii krzywéy w pewnym punkcie, iest przedłużeniem boczku nieskończenie małego przechodzącego przez tenże punkt (§. 2.); przeto i wszystkie styczne w punkcie danym do *krzywych* położonych na powierzchni, znayduią się na płaszczyznie styczney w tymże punkcie. Płaszczyzna ta albowiem, iest przedłużeniem ścianeczki nieskończenie małey, na którey się dany punkt znayduie (*).

Ponieważ zaś dwie liniie proste dostateczne są do oznaczenia płaszczyzny; aby więc płaszczyznę styczną poprowadzić do powierzchni w punkcie na niey obranym, dosyć iest: poprowadzić w tym punkcie dwie liniie proste styczne do dwóch *krzywych* położonych na powierzchni, a płaszczyzna przechodząca przez dwie te styczne, będzie płaszczyzną żądaną — Definicya zatém płaszczyzny styczney dana przez *Clairault*, iest wnioskiem powyższego twierdzenia.

Liniia prostopadła do płaszczyzny sty-

(*) *Dowodzenie tey propozycyi sposobem analitycznym, znaydzie ciekawy czytelnik w przypiskach do* księgi drugiey Jeometryi Rysunkowey.

czněy wyprowadzona z punktu dotknięcia zowie się *normalną* powierzchni (ligne normale), Liniią tę P. *Hreczyna*, zowie *węgielną* (*kart.* 27. *Jeom. Rys.*)

Z tego cośmy powiedzieli pokazuie się: iż, wiedząc iak się prowadzi płaszczyzna styczna w iakimkolwiek punkcie do powierzchni; wiemy tém samém sposób oznaczenia i *normalněy* w tymże punkcie.

§. 13. *Twierdzenie.* Ie. Płaszczyzna przechodząca przez iakąkolwiek *tworzącą* T, powierzchni *skośněy* iakiéykolwiek; iest styczną w ogólności do powiezchni w każdém ze swoich położeń, w iednym z punktów *tworzącéy* T.. Niechay płaszczyzna P, oznacza nam iedno z położeń płaszczyzny o któréy mowa. Liniie proste $\overset{1}{T}, \overset{2}{T}, \overset{3}{T}$... i t. d. niech oznaczaią *tworzące* powierzchni *skośněy* nieskończenie siebie bliskie i z iedněy strony *tworzącéy* T położone. Liniie proste $\overset{1}{D}, \overset{2}{D}, \overset{3}{D}$.... i t. d. niech oznaczaią *tworzące* nieskończenie siebie bliskie powierzchni daney z drugiey strony *tworzącey* T, leżące. Nadto daymy, że *tworzące* te idą w porządku... $\overset{3}{T}$, $\overset{2}{T}$, $\overset{1}{T}$, T, $\overset{1}{D}$, $\overset{2}{D}$, $\overset{3}{D}$.... i t. d. i że T, iest nieskończenie bliską $\overset{1}{T}$ i $\overset{1}{D}$. Wyłączywszy szczególne przypadki, płaszczyzna P, nie będzie równoodległą od żadney z pomienionych *tworzących*, a więc przetnie ie w punktach... $\overset{3}{t}$, $\overset{2}{t}$, $\overset{1}{t}$, $\overset{1}{d}$, $\overset{2}{d}$, $\overset{3}{d}$.... i t. d. nieskończenie siebie bliskich. Zbiór tych punktów utworzy liniią krzywą... $\overset{3}{t}\ \overset{2}{t}\ \overset{1}{t}\ \overset{1}{d}\ \overset{2}{d}\ \overset{3}{d}$... Że zaś punkta t', i d'. są z dwóch stron przeciwnych względem *tworzącey* daney T; więc cząsteczka nieskończenie mała t' d', linii... $\overset{3}{t}\ \overset{2}{t}\ \overset{1}{t}\ \overset{1}{d}\ \overset{2}{d}\ \overset{3}{d}$,.... przetnie nam *tworzącą* T, w pewnym punkcie.

Oznaczmy to przecięcie przez t, i wykażmy że ten punkt t, będzie punktem dotknięcia płaszczyzny P z powierzchnią daną — Ponieważ *krzywa*... $\overset{3}{t}\ \overset{2}{t}\ \overset{1}{t}\ t\ \overset{1}{d}\ \overset{2}{d}\ \overset{3}{d}$.... położona iest na płaszczyznie P; przeto na teyże płaszczyznie znayduie się i styczna do teyże *krzywey*, w punkcie t. Nadto (podług założenia) na płaszczyznie P, znayduie się *tworząca* T, która siebie samey iest styczną. Płaszczyzna więc P, iest styczną do powierzchni w punkcie t, gdyż przechodzi przez styczne w tymże punkcie do dwóch liniy położonych na powierzchni (§. 12.)

Wniosek. Z tey dopiero wyprowadzoney własności, wnieść można w ogóle:

1ód. Że, wszelka płaszczyzna styczna do *powierzchni skośney*; iest iey zarazem i sieczną.

2re. Że chcąc mieć płaszczyznę styczną do tey powierzchni; dosyć iest poprowadzić płaszczyznę przez iednę z iey *tworzących.*

3cie. Że oznaczywszy liniią przecięcia się tey płaszczyzny z powierzchnią; punkt przecięcia tey linii z *tworzącą*, będzie punktem dotknięcia płaszczyzny styczney z powierzchnią.

Gdyby *powierzchnia skośna* była iedną z należących do pierwszego oddziału (§. 5.), płaszczyzna P, poprowadzona przez *tworzącą* T téy powierzchni, równoodlegle od *płaszczyzny kierownicy*, iako równoodległa od wszystkich *tworzących* powierzchni, nie dałaby nam liniy... $\overset{3}{t}\,\overset{2}{t}\,\overset{1}{t}\,t\,\overset{1}{d}\,\overset{2}{d}\,\overset{3}{d}$.... A więc płaszczyzna P, w tém iednem położeniu, nie byłaby styczną do powierzchni (*). Gdyby powierzchnia była *paraboloidą hyperboliczną* lub *hyperboloidą iednopłachtową*; liniia... $\overset{3}{t}\,\overset{2}{t}\,\overset{1}{t}\,t\,\overset{1}{d}\,\overset{2}{d}\,\overset{3}{d}$... byłaby zawsze liniią prostą. Przez każdy bowiem punkt t, wzięty na iednéy z dwóch tych powierzchni, poprowadzić można dwie liniie proste całkiem położone na powierzchni (§. 6. i §. 9.), które to liniie wyznaczaią płaszczyznę styczną w punkcie t (§. 12.).

(*) *W tym szczególnym przypadku uważaćby można że liniia...* $\overset{3}{t}\,\overset{2}{t}\,\overset{1}{t}\,t\,\overset{1}{d}\,\overset{2}{d}\,\overset{3}{d}$... *znayduie się w nieskończonéy odległości, a więc że i punkt dotknięcia t, iest w odległości nieskończonéy. Łatwo zatém i ten pozorny wyiątek podciągnięty bydź może pod ogólne prawidło.*

§. 14.

§. 14. *Twierdzenie IIgie.* Dwie iakiekolwiek *powierzchnie skośne* S i S', maiące iednę *tworzącą* T i trzy płaszczyzny styczne, których punkta dotknięcia m, m', m'', znayduią się na *tworzącey* T, spólne; będą do siebie stycznemi we wszystkich punktach linii T.

Wystawmy sobie przez trzy punkta m, m', m'', poprowadzone iakiekolwiek trzy płaszczyzny P, P', P'', przecinaiące powierzchnią S podług trzech liniy D, D', D'', a powierzchnią S' podług trzech liniy B, B', B''. Z tego cośmy wyłożyli w paragrafie 12. wypada: że liniie krzywe D z B, D' z B', D'' z B'', brane po dwie, mieć będą boczki nieskończenie małe spólne w punktach m, m', m'' — boczki te oznaczmy przez t, t', t'' — To dobrze obiąwszy, wystawmy sobie że *tworząca* powierzchni S posuwa się po liniiach D, D', D'', iako po nowych *kierownicach.* Widoczną iest rzeczą, iż nieskończenie blisko z iedney i z drugiey strony linii T, *tworząca* ta posuwać się będzie po boczkach t, t', t'', spólnych liniiom D i B, D' i B', D'' i B'', branych po dwie. A więc, cząsteczka powierzchni nieskończenie wązka utworzona wzdłuż linii spólney T, spólną będzie dwóm powierzchniom S i S', czyli inaczey: te powierzchnie będą do siebie stycznemi wzdłuż *tworzącey* T— Płaszczyzna styczna w iakimkolwiek bądź punkcie obranym na linii T, do iedney z tych powierzchni; będzie zarazem styczną i do drugiey. Wszelka bowiem ścianeczka płaska nieskończenie mała w iakimkolwiek punkcie linii T położona na powierzchni S; leży zarazem i na powierzchni S'.

Uwaga. Gdyby dwie powierzchnie S i S', były pierwszego oddziału, miały tęż samę *płaszczyznę kierownicę* i nadto, dwie płaszczyzny styczne spólne w punktach m, m', leżących na *tworzącey* T spólney; powierzchnie te, byłyby także do siebie stycznemi wzdłuż linii T — Dowodzenie w tym razie iest zupełnie podobne do poprzedzaiącego.

§. 15. *Twierdzenie IIIcie. Hyperboloid iednopłachtowych* stycznych do *powierzchni skośnéy*, wzdłuż *tworzącéy* iakieykolwiek T; poprowadzić można nieograniczoną liczbę.

Weźmy na iednéy *z tworzących* T powierzchni danéy, trzy punkta iakiekolwiek m, m', m'', w których, płaszczyznami stycznemi do powierzchni niech będą płaszczyzny P, P', P'' — Obrawszy sobie na każdéy z tych płaszczyzn iednę liniią prostą na pierwszéy, D, na drugiéy, D', na trzeciéy, D'', w iakimkolwiek kierunku byle pochodzące przez trzy punkta m, m', m''; *Hyperboloida iednopłachtowa* któréyby liniie D, D', D'', były *kierownicami* (podług twierdzenia poprzedzaiącego), styczną byłaby do powierzchni danéy. Że zaś liniie D, D', D'', na płaszczyznach P, P', P'', nieograniczenie położenia swoie zmieniać mogą; więc *hyperboloid iednopłachtowych* (którymby te liniie służyły za *kierownice*) stycznych do *powierzchni skośnéy*, poprowadzić można nieograniczoną liczbę.

§. 16. Ponieważ *kierownice* wszystkich *hyperboloid* stycznych do *powierzchni skośnéy* wzdłuż iednéy z *tworzących* teyże powierzchni, odpowiadaią dwóm tylko warunkom, to iest: naprzód, przecinaią *tworzącą* w trzech punktach, powtóre, znayduią się na płaszczyznach stycznych do powierzchni w tych dwóch punktach; przeto, *kierownice* te mogą ieszcze bydź równoodległemi od płaszczyzny iakimkolwiek sposobem poprowadzonéy w przestrzeni. W tym ostatnim przypadku *hyperboloida* styczna zamieni się na *paraboloidę hyperboliczną* (uwaga do §. 9.), a więc:

Twierdzenie IVte. Paraboloid hyperbolicznych stycznych do *powierzchni skośnéy* wzdłuż iakieykolwiek *tworzącéy*; poprowadzić można, nieograniczoną liczbę.

§. 17. Pomiędzy wszystkiemi *paraboloi-*

dami stycznemi do *powierzchni skośnéy* wzdłuż iéy *tworzącéy*; iedna będzie taka, któréy *kierownice* prostopadłemi będą do linii dotknięcia. A przeto, *płaszczyzna kierownica* iednego z dwóch sposobów utworzenia i wszystkie *tworzące* tegoż samego sposobu; będą także prostopadłemi do linii dotknięcia (§. 6.). Gdybyśmy takową *paraboloidę* obracali około linii dotknięcia w ten sposób, iżby wszystkie iéy *tworzące* prostopadłe do linii dotknięcia, obiegły czwartą część całkowitego swego obrotu; wszystkie te *tworzące* prostopadłe, ze stycznych do powierzchni zamieniłyby się na iéy *normalne* (§. 12.), a więc:

Twierdzenie Vte. Zbiór *normalnych* wzdłuż iednéy z *tworzących*, do *powierzchni skośnéy* poprowadzonych; tworzy zawsze *paroboloidę hyperboliczną.*

§. 18. Piękna ta własność w teoryi, ważną iest także w swoich przystosowaniach. *Monż* na karcie 131 (*Géometrie Descript*:

4ème edition) mówi: „Sklepienia stawiane „z ciosowego kamienia, złożone są z poie„dynczych części *zwornikami* (voussoirs) zwa„nych. Każdy *zwornik* określony iest ścia„nami różnéy krzywizny, których wykształ„cenie pilnéy wymaga baczności. Naprzód: „ze ściany należącéy do ozdoby całości i „składaiącéy część powierzchni widzialnéy „sklepienia, ścianą *obłączystości* czyli *pałączy„stości* (douelle) zwanéy. Powtóre: ze ścian „którcmi się *zworniki* stykaią z sobą, a które „zwać można *ścianami spoienia* (joints). Wy„robienie tych *ścian spoienia* ma wielki „wpływ na trwałość sklepień. Bo dla te„go, że ciśnienie przesyła się z iednego *zwor„nika* na drugi prostopadle do ścian spoie„nia; koniecznie wypada, aby takowe ścia„ny stykały się z sobą iak naywiększą liczbą „punktów — A to dla tego, aby w każdym „punkcie dotknięcia ciśnienie było ile bydź „może iak naymnieysze, a we wszystkich

„razem zbliżało się do równości. Potrzeba „więc, aby w każdym *zworniku ściany spo-* „*ienia* przystępowały iak naywięcéy do pra- „wdziwych powierzchni których są części- „mi, czemu tém łatwiéy odpowiedzieć będzie „można, im powierzchnia spoienia będzie „prostszą i dokładniéy wyrobić się mogącą „przez rzemieślnika. Dla téy to przyczyny „nayczęściéy powierzchnie spoienia bywaią „płaskie — Są przecież liczne przypadki, w „których nie można uczynić takowego roz- „porządzenia, bez zgwałcenia prawideł któ- „rym budowanie sklepień odpowiadać po- „winno. W takowych razach, należy wy- „bierać z pomiędzy powierzchni krzywych „te, które prócz innych własności, byłyby „iak nayprostszemi do utworzenia a tém sa- „mém, nayłatwieysze do wyrobienia (*). Ze

(*) *Podług* Monża, *ieżeli to bydź może, powierzchnie te powinny bydź rozwiialne i przecinać* powierzchnią pałączystości *podług liniy dwoistéy krzywizny, W braku dzieła* Monża, *czytelnik analityk znaydzie wiele in-*

„wszystkich powierzchni krzywych, nayle-
„piéy odpowiadaią tym dogodnościom po-
„wierzchnie których *tworzącemi* są linie
„proste.

„Prócz wyżéy wymienionych, ieden z
„naygłównieyszych warunków iakim *ściany*
„*spoienia* odpowiadać powinny, iest: aby by-
„ły prostopadłemi we wszystkich punktach
„do powierzchni sklepienia, czyli *pałączysto-*
„*ści* — Jeżeli albowiem dwie ściany któremi
„się stykaią z sobą dwa *zworniki* przyległe,
„tworzyłyby z powierzchnią sklepienia dwa
„kąty znacznie nierówne; większy z tych
„kątów od kąta prostego zdolnym byłby
„wytrzymać większy opór niż drugi. W ci-
„śnieniu zatém wzaiemném iakie wywieraią
„na siebie *zworniki* przyległe, kąt mnieyszy

teressuiącego w téy mierze, w rozprawie Proffessora A. Krzyżanowskiego *pod tytułem*: De construendis Camaris ellipsoïdicis ope projectionis graphicae Anno 1821.

„mógłby łatwo wyskoczyć. Przypadek ten „nietylko że oszpeciłby sklepienie, ale nad„to miećby mógł wielki wpływ na trwałość „całéy budowli.”

Jeżeli *powierzchnia pałączystości* sklepienia iest *powierzchnią skośną*, np. *szrubowatą* (§. 5.), często odznaczaią się na niéy *tworzące* w pewnéy od siebie odległości będące (Tab. II. fig. 6.) (a S, a' O), (S b, p m), (Sc, p' m'), (d S, m'') i t. d; a części powierzchni zawarte między dwiema następnemi np. między (S b, p m) i (S c, p' m') biorą się za ściany któreśmy nazwali *ścianami pałączystości zworników*. W takowym razie widoczną iest rzeczą, iż z każdego punktu liniy (S b, p m), (S c, p' m'), (d S, m'') i t. d. wyprowadziwszy *normalne* do *powierzchni pałączystości*; części powierzchni ze zbioru tych *normalnych* utworzone będą składać *ściany spoienia zworników*. Sciany te albowiem, odpowiadałyby wskazanym przez *Monża* warunkom.

Ściany zatém *spoienia* sklepienia *szrubowego* (a w ogólności wszystkich sklepień o *powierzchniach skośnych*) przecinaiące *powierzchnie pałączystości* podług *tworzących*; są zawsze częściami *paraboloid hyperbolicznych.*

Fig. 10. Tab. II. Wystawia nam rzuty, (fig. (a) poziomy; a fig. (c) pionowy) wschodów szrubowych z iądrem (escalier à plein noyeau) — Fig. (b) obok pierwszych położona, wyobraża rzut pionowy iednego ze *zworników* sklepienia wschodów wraz z częścią przyczepioną walca pionowego (za podstawę maiącego koło m n o, fig. (c)), około którego wschody się okręcaią — Walec ten zowią *iądrem* noyeau. Czworokącik (fig. (b)) $b'c'm'n'$ którego dwa boki $c'b'$, $m'n'$ są krzywe, iest rzutem *ściany pałączystości zwornika*. *Ściana spoienia* do pierwszéy prostopadła, ma za rzut czworokąt $b''b'n'r$. (Ta to ściana powinna bydź częścią *paraboloidy hyperbolicznéy*) —

Druga takowa ściana ma rzut pionowy zakryty. (*)

Pan Dupin wykazuiąc iak wielkie korzyści *Jeometrya opisuiąca Monża* przyniosła sztukom; tak mówi o dawnieyszych autorach sklepień „Uważali oni powierzchnie *ścian spoienia zworników* iako *rozwiialne* w tenczas, kiedy te były *skośnemi*, a nie wątpiąc o mo-

(*) *Powierzchnia* ściany spoienia, *maiąca za rzut pionowy czworokąt* $b'' b' n' r$ *przecina płaszczyznę poziomą* zwornika, *któréy śladem pionowym iest linia* $d\ r$ *w ogóle podług linii krzywéy. Z tego powodu,* zwornik *wierzchni następny, należy tak urządzić, iżby pomienioną krzywą zakrywał — W schody podobnego rodzaiu widzieć można w korpusie pałacu Prymasowskim zwanego (przy wchodzie bocznym). Że i tu budowniczy nie znał powyżéy wzmiankowanych prawideł; dowodzą widoczne załamy powierzchni pałączystości. Gdyby albowiem* ściany spoienia *dobrze wyrobionemi były, powyższe załamy nigdyby nastąpić nie mogły, zwłaszcza, że i mur otaczaiący wschody znacznie się do umocowania onych przyczynia.*

żności rozwinięcia ich na płaszczyznię, nie mogli widocznie wskazywać inney iak całkowicie błędną konstrukcyą." (*Essai Historique sur les services et les travaux scientifiques de G. Monge* par *Ch. Dupin* page 131).

§. 19. *Zagadnienie 1wsze.* Maiąc rzuty trzech *kierownic* powierzchni *skośney* i rzut poziomy iednego z iey punktów, oznaczyć

1ód. Rzut pionowy punktu;

2re. Płaszczyznę styczną, do powierzchni w tym punkcie;

1wsze. Niech (a b c d, a' b' c' d'), (e f g h, e' f' g' h'), (i k l m, i' k' l' m') (fig. 9. Tab. II.) będą trzema *kierownicami* powierzchni, punkt M rzutem poziomym punktu dotknięcia.

Aby oznaczyć rzut pionowy tego punktu, wystawmy sobie na powierzchni pewną liczbę *tworzących* (a e i, a' e' i'), (b f k, b' f' k'), (c g l, c' g' l'), (d h m, d' h' m') i t. d. Poprowadźmy przez punkt M płaszczyznę pionową iakąkolwiek, którey ślad poziomy iest np. linia n M. Płaszczyzna ta, przetnie każdą z *tworzących* w pewnym punkcie, a zbiór takowych utworzy liniią krzywą (n o p q, n' o' p' q') łatwą do oznaczenia. Na linii téy znaydować się będzie punkt dotknięcia, którego rzutem poziomym iest punkt M. Lecz rzut pionowy tego punktu znayduie się na prostopadłéy M M', spuszczonéy z punktu M do osi dwóch płaszczyzn rzutów (*Jeometrya Rysunk.* kar. 6.), nadto znayduie się na linii n' o' p' q', a więc rzut ten iest na przecięciu M', linii M M' z liniią n' o' p' q'. Punkt zatém dotknięcia płaszczyzny stycznéy szukany, iest (M, M').

Gdybyśmy chcieli oznaczyć *tworzącą* w tym punkcie, należałoby wykreślić *ostrokrąg* maiący za wierzchołek punkt (M, M') a za *kierownicę* np. liniią (e f g h, e' f' g' h'). *Ostrokrąg* ten, przeciąłby *kierownice* (a b c d, a' b' c' d') i (i k l m, i' k' l' m') w dwóch punktach np. (A, A'), (C, C') które oznaczą *tworzącą* (A B M C, A' B' M' C') szukaną (§. 8.).

Rzut pionowy M', punktu dotknięcia z *tworzącą* przezeń przechodzącą możnaby ieszcze otrzymać następuiącym sposobem: Wystawmy sobie powierzchnią *skośną* maiącą za *kierownicę* liniią pionową (M, r M') i dwie z trzech *kierownic* powierzchni daney, naprzykład: (e h, e' h'), (i m, i' m'). Powierzchnia ta przedłużona we wszystkie strony, przetnie liniią (a d, a' d') w pewnym punkcie (A, A'), (który łatwo iak późniey zobaczymy będzie można wyznaczyć).

Poprowadziwszy przez ten punkt na powierzchni *skośney* przybraney *tworzącą*, liniia ta przecinać będzie zarazem wszystkie cztery linije (e h, e' h'), (a d, a' d') (M, r M') (i m, i' m'); będzie więc *tworzącą* (A C, A' C') powierzchni daney.

2re. Maiąc oznaczony punkt (M, M') *i tworzącą* A C, A' C' poprowadźmy przez punkta (A, A'), (B, B'), (C, C'), styczne (A D, A' D'), (B E, B' E'), (C F, C' F'), do trzech *kierownic* danych.

Gdyby liniia prosta posuwała się po tych trzech stycznych, utworzyłaby *hyperboloidę iednopłachtową* styczną do powierzchni daney wzdłuż *tworzącey* (A C, A' C') (§. 15). Płaszczyzna styczna w punkcie (M, M') do tey *hyperboloidy*, będzie zarazem styczną i do powierzchni daney.

Prowadzenie zatém płaszczyzn stycznych do *powierzchni skośney* w pewnym punkcie sprowadziliśmy, do prowadzenia płaszczyzny styczney w tymże punkcie z *hyperboloidą iednopłachtową* styczną z powierzchnią daną, wzdłuż *tworzącey* przechodzącey przez punkt dany. Gdyby powierzchnia dana była pierwszego oddziału, zagadnienie poprzednie zamieniłoby się na poprowadzenie płaszczyzny styczney do *paraboloidy hyperboliczney* w punkcie na niey danym.

§. 20. *Zagadnienie 2gie.* Poprowadzić płaszczyznę styczną do *hyperboloidy iednopłachtowéy*, któréy *kierownice* są dane, w punkcie A wziętym na téy powierzchni.

Przez punkt A poprowadźmy dwie liniie proste na *hyperboloidzie*, z których iedna, byłaby *tworzącą* iednego, druga, *tworzącą* drugiego sposobu utworzenia powierzchni (§. 9). Dwie te liniie iako proste, są samych siebie stycznemi w punkcie A, płaszczyzna więc przechodząca przez nie, będzie płaszczyzną styczną do *hyperboloidy* w punkcie A (§. 12.).

Uwaga. Płaszczyzna styczna do *paraboloidy hyperboliczney* w punkcie na niéy wziętym; oznaczonąby była przez dwie *tworzące* dwoiakiego sposobu utworzenia powierzchni poprowadzone przez tenże punkt (§. 6.) — To cośmy powiedzieli w dwóch poprzedzaiących paragrafach; obiaśnić można następuiącym przykładem:

§. 21.

§. 21. Niech powierzchnią drugiego oddziału będzie *ostrokręgowata szrubowa* (*zobacz Ner 3ci przypisów* Tab. II. fig. 6.) któréy *kierownicami* są naprzód, *liniia szrubowa* (a b c d y, a' m m' m'' y' O'); 2re, *oś* (S, O O') *walca* pionowego na którym ta liniia leży; 3cie, płaszczyzna pozioma rzutów. Na téy powierzchni dany iest punkt (M, M') w którym poprowadzić trzeba płaszczyznę styczną. Przez punkt dany prowadzę *tworzącą* powierzchni (S y, w y') (§. 5.) która przetnie dwie liniie *kierownice oś walca*, w punkcie (S, w) a *liniią szrubową*, w punkcie (y, y'). Styczne w tych punktach do *kierownic* są: (S, O O') i (y r, y' r')— Styczne te wraz z płaszczyzną poziomą będą *kierownicami paraboloidy hyperboliczněy* styczněy do powierzchni *ostrokręgowatéy szrubowéy* — Płaszczyzna styczna do téy *paraboloidy* w punkcie (M, M') będzie płaszczyzną żądaną §. 15. i 19.

Wiemy że przez punkt (M, M') na *pa-*

raboloidzie hyperboliczney dwie liniie proste poprowadzić można (§. 6.) — Jedna z nich iest (S y, w y') — Drugą oznaczymy w następuiący sposób: *Śladami* poziomemi *kierownic paraboloidy* (*) są punkta (r, r') i (S, O) — Połączywszy te punkta z sobą liniią prostą (S r, r O), ta będzie iedną z *tworzących paraboloidy* (§. 8). Dwie *tworzące paraboloidy* (S y, w y'), (S r, O r') i płaszczyznę równoodległą od liniy (S, O O') i (r y, r' y') wziąwszy za *kierownice*; liniia prosta (M n, M' n') równoodległa od nowéy *płaszczyzny kierownicy* i przecinaiąca nowe *kierownice* (S y, w y') i (s r O r'), będzie drugą liniią prostą położoną na *paraboloidzie* styczney (§ 6). Płaszczyzna zatém, przechodząca przez dwie liniie (S y, w y') (M n, M' n'), a którey śla-

(*) Sladami *linii zowią się iéy punkta przecięcia z płaszczyznami rzutów. Punkt leżący na płaszczyznie poziomey, zowie się* śladem *poziomym*, *a leżący na płaszczyznie pionowéy zowie się* śladem *pionowym* (*iak się te punkta oznaczaią,* zobacz Jeom. Rys. stron. 10.)

dy są: poziomy (n g) a pionowy ($x'z'$) (*Jeom. Rys. stron.* 17.), będzie płaszczyzną styczną w punkcie (M, M') do *paraboloidy* a tém samém i do *powierzchni szrubowéy*.

§. 22. *Zagadnienie 3cie.* Poprowadzić płaszczyznę styczną do *powierzchni skośnéy* któréy *kierownice* są dane, przez punkt dany zewnątrz powierzchni?

Sposób 1wszy. Przez iakąkolwiek z *tworzących* i punkt dany poprowadziwszy płaszczyznę, płaszczyzna ta będzie styczną do powierzchni (§ 13.)— Ztąd wypada, że *powierzchnia skośna* dana w ogólności, mieć będzie nieskończoną liczbę płaszczyzn stycznych przechodzących przez punkt dany. Oznaczywszy dostateczną liczbę tych płaszczyzn i każdéy z takowych punkt dotknięcia; liniia poprowadzona przez te punkta, będzie liniią dotknięcia *powierzchni skośnéy* z *ostrokręgiem* na niéy opisanym a którego *wierzchołek* czyli *środek* iest punkt dany — Każda z płaszczyzn stycznych do tego *ostrokręgu* byłaby płaszczyzną odpowiadaiącą zagadnieniu — (*obiaśnienie tego znaydzie czytelnik w Nrze 5tym. przypisów*).

Oznaczenie punktów dotknięcia każdéy z płaszczyzn stycznych sposobem w §. 13. wyłożonym; dość trudne byłoby do wykreślenia. Potrzebaby bowiem dla wyszukania każdego z tych punktów oznaczyć naprzód liniią przecięcia płaszczyzny stycznéy z powierzchnią daną; a dopiero przecięcie téy linii z *tworzącą* przez którą płaszczyzna styczna przechodzi byłoby punktem szukanym. Unikaiąc kreślenia takowych liniy krzywych, użyć można następuiącego sposobu:

Sposób 2gi. Wystawmy sobie *hyperboloidę iednopłachtową* lub *paraboloidę hyperboliczną* styczną do powierzchni danéy, wzdłuż iakieykolwiek z *tworzących* — Płaszczyzna poprowadzona przez *tworzącą* spólną i punkt dany, będzie styczną do obu powierzchni.

Płaszczyzna ta przetnie powierzchnią przybraną podług linii prostéy — Przecięcie téy linii z *tworzącą* spólną będzie punktem dotknięcia szukanym.

§. 23. *Zagadnienie 4te.* Poprowadzić płaszczyznę styczną do *powierzchni skośnéy* któréy *kierownice* są dane, równoodlegle od linii prostéy danéy.

Rozwiązanie. Poprowadziwszy płaszczyznę równoodległą od linii danéy, przez iakąkolwiek z *tworzących*, płaszczyzna ta będzie iedną z odpowiadaiących warunkom żądanym (§. 13.).

Zagadnienie więc dane, równie iak poprzedzaiące będzie miało nieograniczoną liczbę rozwiązań.

Nic łatwieyszego iak oznaczyć punkt dotknięcia każdéy z powyższych płaszczyzn którymkolwiek z dwóch sposobów w paragrafie poprzedzaiącym wyłożonych. Liniia łącząca z sobą te punkta (która w ogólności iest krzywą); będzie *liniią dotknięcia powierzchni skośnéy* z *walcem* na niéy opisanym, a którego *tworzące* byłyby równoodległemi od linii danéy.

Wszelka płaszczyzna styczna do tego *walca*, byłaby styczną i do *powierzchni skośnéy*. Ninieysze więc zagadnienie iest tylko szczególnym przypadkiem poprzedzaiącego w które włączony byłby ten warunek, iż punkt dany znaydowałby się w nieskończonéy odległości.

§. 24. To cośmy powiedzieli w dwóch ostatnich paragrafach, nader iest ważném *w nauce cieniów* i *w perspektywie* — Punkt oświecaiący (czyli wydaiący światło) rzuca promienie na wszystkie strony w kierunku liniy prostych (*). Promienie te zaięłyby ca-

(*) *Biorąc rzeczy z skrupulatnością matematyczną przypuszczenie to w tenczas tylko miałoby mieysce; gdyby środek w którym promień światła bieg swóy odbywa był iednostaynéy gęstości.*

łą przestrzeń, gdyby żadne ciało nieprzezroczyste nie wstrzymywało ich w biegu — W tym albowiem ostatnim przypadku promienie nienatrafiaiące na ciało nieprzezroczyste bieg swóy całkowity odbywałyby; promienie zaś wstrzymane, nie mogłyby się rozciągać z drugiéy strony ciała. Strona ta z téy przyczyny zupełnie światła byłaby pozbawioną.

Niech *ostrokrąg* maiący za *środek* punkt oświecaiący i opisany na powierzchni ciała nieprzezroczystego, przedłużonym będzie aż za ciało nieprzezroczyste. Część tego *ostrokręgu* za ciałem położona, będzie granicą między przestrzenią zapełnioną promieniami wychodzącemi z punktu oświecaiącego a tą, do któréy żaden z promieni przeyść nie może — Ta ostatnia część przestrzeni zupełnie ciemna, zowie się *cieniem* (*ombre*).

Liniia dotknięcia powierzchni *ostrokręgowatéy* z powierzchnią ciała, oddziela część oświeconą tego ciała od części ciemnéy i iest nader ważną przy wydaniu powierzchni ciała za pomocą gradacyi cieniów. Gdyby w mieyscu punktu oświecaiącego znaydowała się zrzenica oka naszego, a ciało przypuściliśmy oświecone iakimkolwiek bądź sposobem; *liniia dotknięcia* powierzchni ciała oświeconego z *ostrokręgiem* na niéy opisanym i maiącym za *środek* zrzenicę oka, oddzielałaby nam część ciała widzialną od niewidzialnéy. Przecięcie się *ostrokręgu* tego z powierzchnią na któréy chcielibyśmy wydać obraz ciała; byłoby *perspektywą* tegoż ciała (*). Jeżeli ciało iest opisane powierzchniami *skośne-*

(*) *Zakres niniejszego dziełka nie dozwala nam wchodzić w szczegóły tyczące się* nauki cieniow i perspektywy *które, odtąd dopiero słusznie policzyć można do rzędu umieiętności, odkąd do nich* Monż *swoię zastosował* Jeometryą. *Czytelnik życzący sobie w przedmiotach o których mowa dokładną powziąć wiadomość, niechay czyta dzieła:* Science du Dessin par Vallée 1821, *albo* Géometrie descript par Monge 4ème édition.

mi iak np. *w szrubie tróykątnéy*, *czworograniastéy*, *wschodach szrubowych* i t. d; *liniia oddzielaiąca część ciemną od oświeconéy* lub *perspektywa* ciał takowych, oznaczałaby się podług prawideł w paragrafie 22. wyłożonych.

Gdyby punkt oświecaiący znaydował się w odległości nieskończenie wielkiéy; promienie światła rzucane przezeń i idące do nas byłyby równoodległemi (tak prawie iak uważać można promienie słoneczne). W tym przypadku *liniia oddzielaiąca część oświeconą od ciemnéy*, byłaby dotknięciem się *walca* opisanego z powierzchnią. *Tworzące walca* tego byłyby równoodległemi od promieni. Dla ciał powierzchniami *skośnemi* określonych, liniią tę *dotknięcia* oznaczyćby można podług (§. 22). (*)

(*) *W tém przypuszczeniu P.* Hachette *oznaczył* liniią oddzielaiącą część oświeconą od ciemnéy: *na szrubie tróykątnéy wymodelowanéy z gipsu*, *czego interessuiący opis czytać można w* (Correspondance sur l'Ecole Imperiale politechnique 2. Vol. page 13.)

§. 25. *Zagadnienie 5te.* **Poprowadzić przez liniią prostą L, płaszczyznę styczną do *powierzchni skośnéy* któréy *kierownice* są dane.**

Sposób 1wszy. Opiszmy na powierzchni danéy dwa *ostrokręgi* O i O', których środki a i a', byłyby dwa iakiekolwiek punkta na linii L— Oznaczmy ich *liniie dotknięcia* z powierzchnią, iednę przez D, drugą przez D' (§. 22).

Wszelka płaszczyzna styczna do *ostrokręgu* O, będzie zarazem styczną do powierzchni danéy — Punktem zaś dotknięcia będzie pewien punkt linii D (§. 22.)— Płaszczyzna więc styczna do *ostrokręgu* O i przechodząca przez liniią L, będzie płaszczyzną szukaną. Dla téyże saméy przyczyny płaszczyzna przechodząca przez liniią daną i styczna do powierzchni *ostrokręgowéy* O', byłaby także płaszczyzną szukaną.

Punkt więc dotknięca płaszczyzny szukanéy z powierzchnią daną, znayduie się tak na linii D iak i na linii D'; a więc znaydować się będzie na ich spólném przecięciu.

W ogólności przeto, liczba rozwiązań odpowiadaiących temu zagadnieniu, zależyć będzie od liczby punktów wypadłych z przecięcia się liniy D i D'.

Sposób 2gi. Poprowadźmy przez liniią daną płaszczyznę i oznaczmy liniią S przecięcia téy płaszczyzny z powierzchnią (§. 26.). Liniie L i S, iako leżące na téyże saméy płaszczyznie, przetną się w pewnych punktach. Przez te punkta poprowadźmy *tworzące* powierzchni danéy. Widoczną iest rzeczą, iż każda z tych *tworzących* z liniią daną, znaydować się będą na iednéy z płaszczyzn stycznych do powierzchni (§. 13.). Zagadnienie więc to tyle ma rozwiązań ile iest punktów przecięć liniy L i S.

Uwaga. Mógłby bydź przypadek iż iedna lub więcéy *tworzących* powierzchni, byłyby równoodległemi od linii danéy —

Liniia dana z każdą takową *tworzącą* wyznaczałaby płaszczyznę styczną (§. 13.) — *Tworzące* równoodległe możnaby oznaczyć następuiącym sposobem:

1mo. Jeśli powierzchnia iest pierwszego oddziału (§ 5)? Jedna z *kierownic* obierze się za *kierownicę* walca którego *tworzące* będą równoodległemi od linii daney. *Walec* ten przetnie *kierownicę* drugą w pewnych punktach — Przez te punkta poprowadźmy *tworzące walca*. Takowe z tych ostatnich *tworzących*, które są równoodległemi od *płaszczyzny kierownicy*; będą *tworzącemi* szukanemi.

2re. Jeśli powierzchnia iest oddziału drugiego (§. 8.)? Jednę z *kierownic* (iak w poprzedzaiącym razie) bierzemy za podstawę walca którego *tworzące* byłyby równoodległemi od linii daney. *Walec* ten przetnie *kierownicę* drugą w pewnych punktach. *Tworzące walca* poprowadzone przez te punkta a przecinaiące zarazem i *kierownicę* trzecią, będą *tworzącemi* szukanemi. (*)

O wspólnem przecięciu powierzchni w ogólności, a w szczególności o przecięciu powierzchni skośnych.

§. 26. Kreślenie liniy wypadłych z przecięcia powierzchni krzywych; iest bez wątpienia iedną z naytrudnieyszych części konstrukcyi.

Mimo wielu prawideł iakie *Jeometrya opisuiąca* wskazuie, można przeecież łatwo pobłądzić — Lubo naylepszym tu przewodnikiem iest wprawa, teorya iednak wtedy szczególniey kiedy sposób tworzenia powierzchni

(*) *Jeżeli punkt przecięcia rzutów poziomych dwóch liniy w przestrzeni danych i punkt przecięcia rzutów pionowych tychże liniy, znayduią się na linii prostopadłéy do linii ziemnéy (ligne de terre); liniie dane w przestrzeni przecinaią się z sobą. Podług téy uwagi, łatwoby było w drugim przypadku rozpoznać* tworzące *szukane.*

dokładnie iest oznaczony, ważnych ułatwień użycza.

Zagadnienie 1*wsze.* Maiąc dwie powierzchnie iakiekolwiek (R) i (r), oznaczyć ich spólne przecięcie. ?

Dla rozwiązania tego zagadnienia w ogólności, przybrać można pewien system płaszczyzn P, P', P'', P''' i t. d, (albo przechodzących przez pewną liniią albo równoodległych pomiędzy sobą, lub tym podobnych). Płaszczyzny te przecinać będą powierzchnią (R) podług liniy np. K, $\overset{1}{K}$, $\overset{2}{K}$, $\overset{3}{K}$,... i t. d; a powierzchnią (r) podług liniy L $\overset{1}{L}$, $\overset{2}{L}$, $\overset{3}{L}$,.. i t. d. Liniie K i L, $\overset{1}{K}$ i $\overset{1}{L}$, $\overset{2}{K}$ i $\overset{2}{L}$, $\overset{3}{K}$ i $\overset{3}{L}$, i t. d, dwie po dwie biorąc, iako leżące na teyże saméy płaszczyznie przetną się w ogólności: w punktach a, b, c,.... położonych na płaszczyznie P; w punktach a', b', c',... położonych na płaszczyznie P'; w punktach a'', b'', c'', . . . położonych na płaszczyznie P''; i t. d. A ponieważ te punkta znayduią się tak na powierzchni (R) iak i na powierzchni (r), połączywszy ie zatém przyzwoitym sposobem, otrzymalibyśmy liniią spólną tymże powierzchniom.

Mniéy lub więcéy trudności w konstrukcyi téy linii, zależy zawsze od wyboru płaszczyzn P, P', P'', P''' i t. d. I tak gdyby nam szło o oznaczenie przecięcia się powierzchni *skośnych* znacznieby zmnieyszyć można rotę, gdybyśmy w mieysce systemu płaszczyzn iakichkolwiek; brali płaszczyzny przechodzące przez *tworzące* iednéy powierzchni i równoodległe np. od pewnéy linii — Każda z takowych płaszczyzn przecięłaby powierzchnią drugą podług pewnéy linii krzywéy. Punkta spólne takowym krzywym z *tworzącemi* położonemi z niemi na teyże saméy płaszczyznie przybranéy; byłyby punktami należącemi do spólnego przecięcia powierzchni — Gdyby szło o oznaczenie przecięcia powierzchni *skośnéy z ostrokręgiem* lub *walcem*; w pierwszym razie, płaszczyzny przybrane przechodzić powinny przez *środek ostrokręgu*; w drugim zaś, bydź równoodległemi od *tworzącey walca*. Gdyż przecięciami takowych płaszczyzn z *ostrokręgiem* lub *walcem* byłyby liniie łatwe do oznaczenia bo *tworzące* tychże powierzchni.

Jeżelibyśmy szukali przecięcia płaszczyzny z *powierzchnią skośną*, możnaby się obeyść bez płaszczyzn przybranych — Bo każdey *tworzącey* oznaczywszy punkt spólnego przecięcia z płaszczyzną daną; zbiór takowych punktów dałby nam liniią spólną płaszczyznie i powierzchni.

Nie iest mieysce w wykładzie ogólnym własności *powierzchni skośnych*, rozwiązywać podobnego rodzaiu zagadnienia na szczególnych przykładach. Czytelnik dla własney wprawy oznaczyć może podług sposobów wskazanych: przecięcie się *hyperbolidy iednopłachtowey* lub *paraboloidy hyperboliczney* z *hyperboloidą iednopłachtową*, *paraboloidą hyperboliczną*, lub też co iest daleko łatwiey

z płaz płaszczyzną. (*) Liniie spólnego przecięcia powierzchni, które często zdarzaią się przy konstrukcyi a szczególniéy przy budowaniu sklepień; oznaczaią się za zwyczay przez ich dwa rzuty, pionowy i poziomy. Im dokładniéy są wykreślone rzuty, tém dokładniéy oznaczona iest liniia przecięcia. Aby zaś mieć całkowite wyobrażenie kształtu linii, niedość iest mieć pewną liczbę punktów przez które ona ma przechodzić, ale należy nadto oznaczyć pewną liczbę iéy stycznych. Styczne albowiem, naydokładniéy wykazuią wszystkie wygięcia i zwroty liniy. — Z tego łatwo wnieść, iak ważném iest rozwiązanie następuiącego zagadnienia:

(*) *Ponieważ wszystkie te powierzchnie są drugiego rzędu, wszelkie przeto ich przecięcia z płaszczyzną będą liniiami drugiego rzędu, iako to*: Ellipsy, parabole *lub* hyperbole — *Jak z położenia płaszczyzny przecinaiącéy, rozpoznać można w tym razie naturę linii przecięcia; czytelnik znaydzie sposoby podane przez P.* Hachette (Czytay: Ier Suplément à la Géometrie Descrip. od str. 63 : 77.)

§. 27. *Zagadnienie 2gie.* Przez punkt (a) obrany na linii (S) przecięciu spólném dwóch powierzchni (R) i (r); poprowadzić styczną do teyże linii?

Sposób 1wszy Monża (*Géome. descrip. par Monge*). Liniia szukana iako styczna w punkcie (a) do linii (S) całkiem na powierzchni (R) położonéy; znayduie się na płaszczyznie stycznéy P w punkcie (a) do powierzchni (R) (§. 12.). Liniia szukana znayduie się także na płaszczyznie P' stycznéy w punkcie (a) do powierzchni (r) — Gdyż na téy powierzchni podług założenia znayduie się także liniia dana (S). Ponieważ więc, liniia szukana ma się znaydować na obudwóch razem płaszczyznach P i P'; przeto będzie ich spólném przecięciem.

Sposób 2gi Pana Binet młodszego (*Correspon. sur l'Ecole polytechnique pag.* 199 T. 3.).

Wystawmy sobie *normalną* (N) w punkcie (a) do powierzchni R — *Normalna* ta będąc prostopadłą w punkcie (a) do płaszczyzny stycznéy z powierzchnią R; iest prostopadłą zarazem do wszystkich liniy prostych przechodzących przez iéy spodek i położonych na płaszczyznie P, a tém samém i do liniy szukanéy. Dla teyże saméy przyczyny, *normalna* (n) w punkcie (a) do powierzchni (r) będąc prostopadłą do płaszczyzny (p) stycznéy z tąż powierzchnią; będzie także prostopadłą i do linii szukanéy — Poprowadziwszy zatem przez *normalne* (N) i (n) płasczyznę i wyprowadziwszy do niéy z punktu (a) liniią prostopadłą; liniia ta będzie styczną szukaną. (*).

Nic więc łatwieyszego, iak wiedząc sposób prowadzenia płaszczyzn stycznych do powierzchni przecinaiących się; poprowadzić liniią styczną w pewnym punkcie i do spólnego przecięcia tychże powierzchni Umielibyśmy przeto powyższe zagadnienia rozwiązać,

(*) *Rzuty téy stycznéy będą stycznęmi do rzutów linii spólnego przecięcia.*

dla spólnego przecięcia dwóch *powierzchni skośnych*, dla precięcia powierzchni *skośnéy* z *ostrokręgiem*, *walcem* lub *powierzchnią obrotową*. Maiąc bowiem punkt dotknięcia, umiemy do pomienionych powierzchni prowadzić płaszczyzny styczne —. Tu byłoby mieysce mówić, o przecięciu z sobą trzech powierzchni iakichkolwiek dotąd nam znanych, a szczególniéy *skośnych* — Ale ponieważ ta materya sama z siebie mniéy interesowna prawie iest bez zastósowania, przeto ią całkiem pominę.

§. 28. *Zagadnienie 3cie.* Maiąc liniią krzywą iakąkolwiek o podwóynéy krzywości lub płaską; poprowadzić do niéy styczną przez iakikolwiek punkt (*m*) na niéy wzięty?

Rozwiązanie. Liniią daną uważam za spólną dwóm *powierzchniom skośnym* (S) i (S) których *kierownicą* spólną iest taż liniia dana — Dwie inne *kierownice* powierzchni (S), są dwie liniie proste zewnątrz linii krzywéy leżące A i $\overset{1}{A}$, — Dwie znowu *kierownice* powierzchni ($\overset{1}{S}$) są dwie liniie proste B i $\overset{1}{B}$, także zewnątrz linii danéy położone.

Poprowadźmy w punkcie (m) danym, dwie płaszczyzny styczne, iednę do powierzchni (S), drugą do powierzchni ($\overset{1}{S}$) — Spólne przecięcie tych płaszczyzn, będzie styczną szukaną (§. 27).

Płaszczyzna styczna w punkcie (m) do któréykolwiek powierzchni np. (S), oznaczy się w ten sposób: Niech *tworząca* T powierzchni (S), przechodzi przez punkt (m) — Poprowadźmy przez T płaszczyznę iakąkolwiek P, ta będzie styczną do powierzchni w pewnym punkcie (d), który oznaczy się podług §. 13. Przez punkt (d) na płaszczyznie P, poprowadźmy iakąkolwiek linią prostą $\overset{2}{A}$. *Hyperboloida iednopłachtowa* maiąca za *kierownice* liniie proste A, $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$; byłaby styczną do powierzchni (S) wzdłuż linii T (§.14.). Płaszczyzna Q styczna do téy *hyperboloidy* w punkcie (m); będzie płaszczyzną styczną i do powierzchni (S) (§. 19.).

Podobnymże sposobem oznaczylibyśmy płaszczyznę Q', styczną w punkcie (m) do powierzchni (S'). Przecięcie się płaszczyzn Q i Q', będzie styczną szukaną. Nie ma zatém żadnéy takiéy linii do któréybyśmy nie umieli poprowadzić linii styczney, przez punkt iakikolwiek na niéy wzięty — Gdyby liniia dana była płaską, dośćby ią było położyć na iednéy powierzchni *skośnéy*; gdyż iedną z płaszczyzn na któréyby styczna szukana leżała, byłaby sama płaszczyzna linii.

Zagadnienie to dla liniy ciągłych nawet, było bez rozwiązania aż do wynalezienia rachunku rozniczkowego (*). Sposób syntetyczny który dopiero wyłożyłem, winniśmy P. *Hachette* (*Géom. à trois dimmen: pag.* 6 *par Synthe:*). Dla łatwieyszego zastosowania tego sposobu w konstrukcyi, na mieysce iednéy z dwóch *kierownic* prostych powierzchni (S) i (S'), przybraćby można *płaszczyznę kierownicę.*

(*) *Czytay rachunek rozniczkowy La Croix.*

W takowym przypadku obie powierzchnie przybrane zamieniłyby się na *skośne ostrokręgowate* (§. 5.) (*). Gdyby liniia krzywa dana była przez swoie rzuty, poziomy i pionowy; naydogodniéy w tym razie mógłby bydź użyty sposób wskazany w T. 10 Nrze 3m na k. 89. pisma peryodycznego wychodzącego we Francyi pod tytułem: *Annales des Mathématiques. par Gergonne.* Za pomocą własności wyłożonych powierzchni *skośnych*, wieleby ieszcze zagadnień delikatnych z jeometryi wyższéy rozwiązać można, iak np. pomiędzy innemi: oznaczyć *promień krzywości* linii iakiéykolwiek lub powierzchni, w iakimkolwiekbądź punkcie (**). — Ale przedmiot ten wychodziłby z granic iakieśmy sobie zamierzyli.

(*) *Czytelnik w téy mierze znaleść może przykłady w dziele pod tyt.* Géom. Descr. par Vallée *k.* 267. *Drugi dodatek* P. Hachette *szczególniéy co do figur zasługuie na uwagę.*

(**) *Zobacz* Géom. à trois dimensions p. 82. *albo* Géome. descriptive *par* Vallée *p.* 271.

§. 29. Z tego tu krótkiego podiedynczéy części *Jeometryi opisuiącéy* wykładu, pokazuie się; iż ten szczęśliwy nieocenionego *Monża* utwor, we wszystkich zdarzeniach konstrukcyi iest naypewnieyszym przewodnikiem, i że następuiące zdanie nie iest wcale przesadzoném: „La Géometrie descriptive, n'est „pas une science purement spéculative, elle „trouve de nombreuses applications dans plu„sieurs sciences et dans beaucoup d'arts, on „ne peut dont trop en récommender l'êtude." (Avant propos de mém: sur la forti: perman: par Séa à St. Pétersbourg 1811.).

PRZYPISY

Ner 1wszy.

To nazwanie (powierzchnie skośne) *zdaie mi się naywięcéy odpowiedać francuzkiemu nazwaniu*, (surfaces gauches) *przez* Monża *wznowionemu. Tłumacz dziełka pod tytułem:* Complé: de la Géom. p. Lacroix (*Jeomet. płaszcz. i powierz: krzy. czyli, miernict: opisu- ią.* 1811 *w Wrocławiu*) *powierzchnie te, zowie* (*nie wiem dla czego*) zgiętemi.

Pan Hachette *któremu wyrażenie* Gauche, *nieprzyiemnie wpada w ucho mniema; że nazwisko* surface reglée, *iako dla powierzchni z obiegu linii prostéy powstaiącéy, iest naystosownieyszém* (Géom. à trois dimen. part Synth. p. 17) — *Lecz zważywszy, że i powierzchnie* rozwiialne *także przez obieg linii prostéy utworzonemi bydź mogą; trudno iest zgadnąć, dla czegoby to wznowione nazwisko, powierzchniom pierwszego tylko rodzaiu służyć miało?*

Ner 2gi.

Gdyby tworząca *dwóm tylko odpowiedała warunkom iak np. gdyby posuwała się po dwóch* krzywych AB, $\dot{A}\dot{B}$, *nie będąc od* płaszczyzny kierownicy *równoodległą; powierzchnia z tego obiegu utworzona, byłaby nie* skośną *ale* rozwiialną. *Jakoż, obierzmy sobie iakikolwiek punkt* a *na linii AB, za* środek ostrokręgu *którego* kierownicą *byłaby liniia A'B'* — *Wszelka płaszczyzna styczna do tego* ostrokręgu, *przechodziłaby przez iednę ze stycznych do iego* kierownicy *A'B'* (Géom. Rys. kar. 51.). *Płaszczyzna zatém przechodząca przez styczną w punkcie* a *do linii AB i styczna do* ostrokręgu; *przechodziłaby zarazem przez dwie styczne, iednę do linii A B, drugą do A'B'* — *Zmieniaiąc* środek ostrokręgu *na linii AB, otrzymalibyśmy nieograniczoną liczbę płaszczyzn stycznych do dwóch* krzywych *danych. Dwie podobne płaszczyzny nieskończenie siebie bliskie, przecinałyby się z sobą podług linii prostéy przecinaiącéy obie* krzywe *dane — Zbiór takowych liniy prostych, utworzyłyby powierzchnią* rozwiialną (§. 2.) — *Toż samo miałoby mieysce, gdyby zamiast po dwóch* krzywych *danych, liniia prosta posuwała się po dwóch powierzchniach co do położenia swego niezmiennych, i zawsze będąc do nich styczną.*

Ner 3ci.

Liniie szrubowe *kreślą się następuiącym sposo-*

bem: Obierzmy sobie na kole abcdya (*Fig.* 6. *Tab.* 2) *położoném na płaszczyznie poziomèy rzutów, ciąg punktów a, b, d, . . i t p. Wyprowadźmy z każdego takowego punktu prostopadłe do płaszczyzny koła* ($b, b\dot{m}$), ($c, \dot{c}\ddot{m}$), ($d, O\ddot{m}$). . . *i t. n. Liniia przecinaiąca te prostopadłe, w punktach* (a, a'), (b, m), (c, m'), (d, m'') . *i t. d. tak, iżby onych wzniesienia* ($b, b\dot{m}$), ($c, c\dot{m}$), ($d, O\ddot{m}$) ... *i t. p. nad płaszczyznę poziomą, były w stosunku do łuków rozwiniętych ab, ac, ad,.. i t. d. będzie* liniią szrubową.

Z tèy definicyi pokazuie się: iż liniia szrubowa, *znayduie się cała na* walcu *pionowym którego podstawą iest koło abcdya* (*koło to zowie się także* podstawą liniy szrubowèy). *Że na rozwinięciu walca* liniia szrubowa *i ièy podstawa zamieniaią się na dwie liniie proste, których kąt nachylenia będzie miał styczną równą stosunkowi stałemu liniy* (b, bm'),(c, cm'), (d, Om''), . . . *i td. i łuków ab, ac, ad,.. i t. d. — Ta uwaga posłuży nam do wykreślenia rzutu pionowego* linii szrubowèy.

Niechay liniie proste ad i ad' (*Fig.* 6. (*b*) *Tab.* 2.) *wystawiaią nam* podstawę *i* liniią szrubową *na rozwinięciu walca. Obierzmy sobie na linii ad punkta b, c, d, .. i t. d. i wyprowadźmy z każdego takowego punktu prostopadłe bm, cm', dm''... i t. d. aż do* *przecięcia się z liniią ad, w punktach m, m', m'',.. i t. d.* *Na podstawie abcdy* walca, (*Fig.* 6. (*a*)) *na którym* liniia szrubowa *ma się znaydować, od punktu a weźmy łuki ab, ac, ad,.. i t. d. równe liniiom ab, ac, ad,.. i t. d.* (*fig.* 6. (*b*)). *Z punktów b, c, d, i t. d.* (*fig.* (*a*)) *wyprowadźmy pionowe równe liniiom bm, cm', dm'' i t. d.* (*fig.* (*b*)), *rzucaiące się pionowo w naturalnéy swoiéy wielkości podług liniy bm, cm', Om'' i t. d — Liniia a m m' m'' y' O' łącząca z sobą punkta a, m, m', m'', i t d. będzie rzutem pionowym* linii szrubowéy.

Z tego wszystkiego cośmy dotąd powiedzieli wykazuie się: Ze liniia szrubowa, *wszystkie tworzące walca na którym leży przecina pod tymże samym kątem. Że chcąc w iakimkolwiek punkcie na* linii szrubowéy *położonym poprowadzić do niéy styczną* (*która zawsze leży na płaszczyznie stycznéy do walca w punkcie danym* (§. 12)); *potrzeba na płaszczyznie stycznéy walca w punkcie danym, poprowadzić przez tenże punkt liniią prostą czyniącą z płaszczyzną poziomą kąt równy kątowi d a d' fig.* 6 (*b*)— *Styczne* (*q d, q' m''*) *i* (*r y, r' y'*) *w punktach* (*d, m''*) *i* (*y, y'*) *tym sposobem są oznaczone.*

Liniia prosta (*a S, a' O*) *przecinaiąca w biegu swym równoodległym od płaszczyzny poziomu*, liniią szrubową (*a b c d y a, a m m m' m y O'*) *i oś walca* (*S, OS'*), *biorąca następnie położenia liniy* (*b S, mp*) (*cS, mp'*), (*dS, m''*) *i t. d. da nam obraz* powierzchni ostrokręgowatéy szrubowéy — Liniią ściśnienia (§. 5.) *téy powierzchni będzie* oś walca (*S, OS'*).

Ner 4ty.

Aby dadź wyobrażenie liniy podług których rzemieślnik kierowałby się w wyrobieniu lemiesza *i* odkładni Jeferssona; *wystawmy sobie z drzewa* równoległościan prostokątny *DA' Fig.* 4. *Tab.* 1. (*Podług* Jeferssona równoległościan *ten mieć powinien* długość *AA'* = 2 *stopom.* Szerokość *BD* = 13½ *calom*, wysokość *AB* = 1 *stopie*) — *Poprowadźmy sobie myślą* przekątną *AD'*, *a na ścianie DBB'D' liniią xy równoodległą od krawędzi BB' w odległości* 4½ *cala. Liniia prosta xD' posuwaiąc się po* przekątnéy *AD' i linii yx, równoodlegle od ściany A'B'C'D'; tworzyć będzie powierzchnią odkładni.*

Wykryymy teraz przekątną *AD':*

Naprzód: prowadźmy piłę podług liniy AA' i AD', aż dopókąd niedotknie się punktów A i D. Powtóre, poprowadźmy piłę podług dwóch liniy AC' i CD', aż

Wszelka płaszczyzna M styczna do ostrokręgu *O, będąc styczną we wszystkich punktach* tworzącéy *któ-ra przez punk dotknięcia przechodzi* (Jeom. Rys. str. 36.)*; iest zarazem styczną do* ostrokręgu *w pewnym punkcie* k, *położonym na linii D.*

Płaszczyzna M iako styczna do ostrokręgu *w punkcie* k; *przechodzi przez styczną w tym punkcie do linii D spólnéy powierzchniom O i S. Nadto, na téy płaszczyznie (iakeśmy powiedzieli) znayduie się* tworząca ostrokręgu *przez punkt dotknięcia* k *przechodząca* — (Tworząca *ta iest styczną do iednéy z liniy oznaczonych przez* L, $\overset{1}{L}$, $\overset{2}{L}$, $\overset{3}{L}$, *i t. d. na powierzchni S położonéy.*) *Płaszczyzna zatem M, iest styczną do powierzchni S w punkcie* k; *gdyż przechodzi przez dwie styczne w tym punkcie do dwóch liniy położonych na powierzchni* (§. 12.).

Własność dopiero wykazana miałaby i w tenczas mieysce, gdyby środek m *znaydował się w nieskończonéy odległości czyli, gdyby* ostrokrąg *opisany zamienił się na* walec.

K O N I E C.

O m y ł k i.

Karta	Wiersz	zamiast	czytay
11	10	Frerier	Frezier
12	20	Poiter	Potier
18	3	élemi:	élemens:
18	21	wyżéy	niżey
26	2	nawet bez	bez
32	14	hyperbloïde	hyperboloïde
49	4	m, m, m,	m, m', m'',
62	7	kierownicę	kierownice
63	1	po (C, C')	*doday*: spólnego przecięcia *tworzącey z kierownicami*
65	20	§ 15	§ 16
66	7	r O	r' O

Fig: 1.

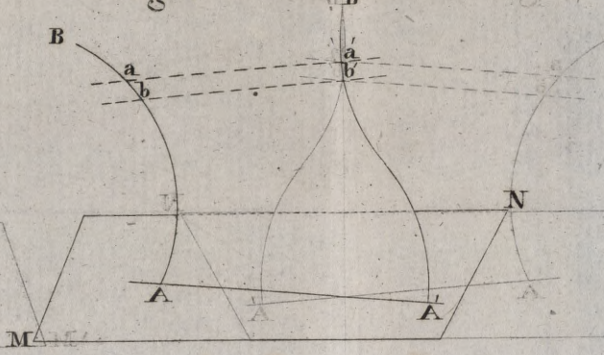


Fig: 2

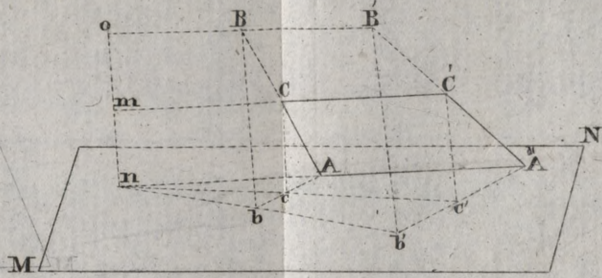
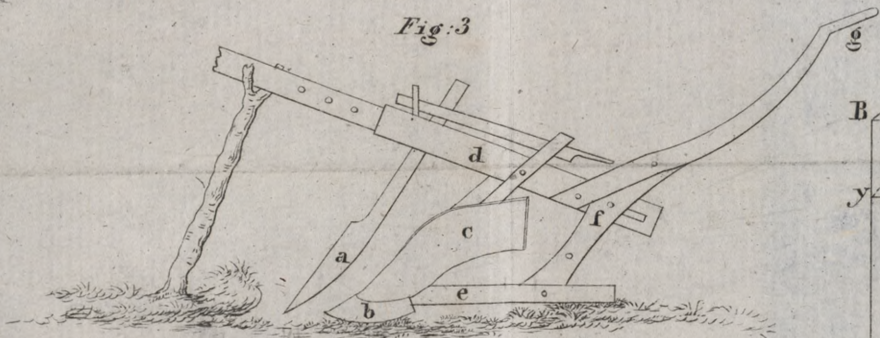


Fig: 3



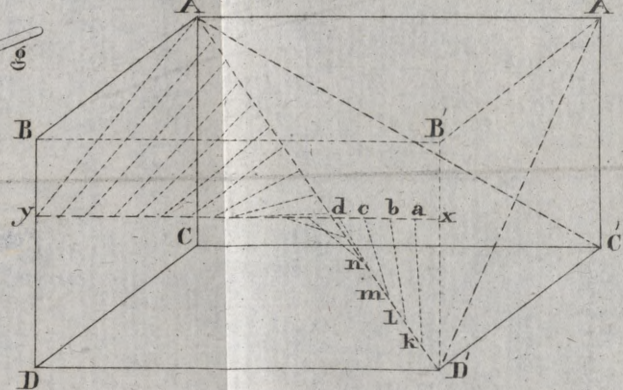


Fig: 5 (a)

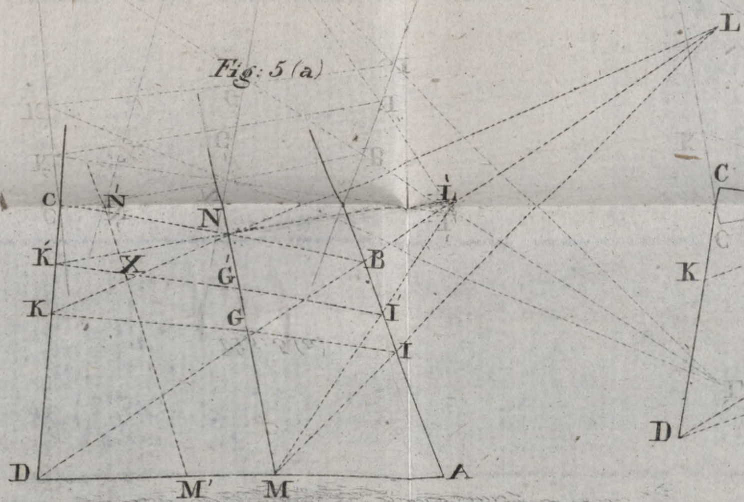
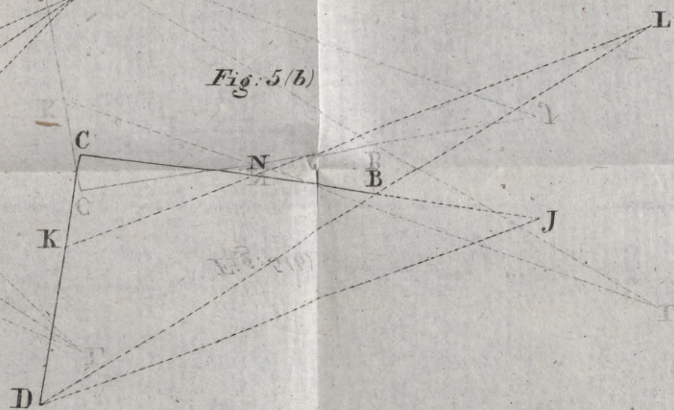


Fig: 5 (b)



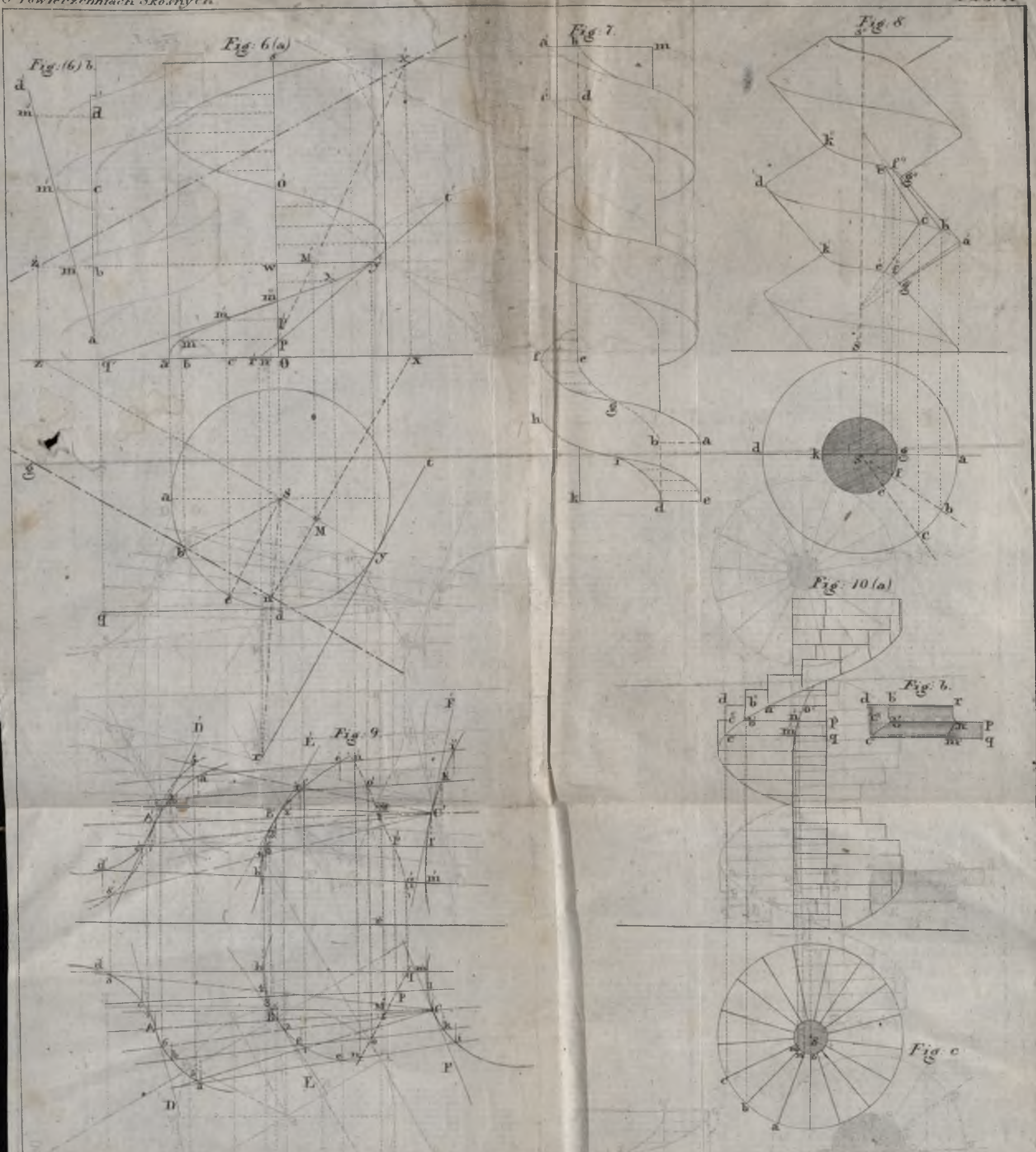


Fig: 6(a)
Fig: (6) b.
Fig: 7.
Fig: 8.
Fig: 9.
Fig: 10 (a)
Fig: b.
Fig: c

1272 Garbiński Kajetan.

Wykład syntetyczny własności powierzchni skośnych z ich przystosowaniem do konstrukcyi machin, sklepień kamiennych, i.t.p.

Rozprawa w zamiarze otrzymania stopnia doktora filozofji

Warszawa

1822

str. 96 + 2 tab.

20 x 14

0'4a, b, c, g, f
M^1 1a-b, 3b, f, l
M^2 7d, M^4 g, k
L'21a-b, d.