GUSTAWICZ * RACHUNEK WYRÓWNANIA BŁĘDÓW SPOSTRZEŻEŃ

T. N. W.

Inw 49

RACHUNEK

WYRÓWNANIA BŁĘDÓW SPOSTRZEŻEŃ

na podstawie

METODY NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW.

PRZEZ

Prof. Bronisława Gustawicza.

Osobne odbicie z XII. i XIII. Sprawozdania Dyrekcyi c. k. Gimnazyum III. w Krakowie za rok 1895 i 1896.

S. Dickstein

W KRAKOWIE.
NAKŁADEM AUTORA.

W drukarni A. Koziańskiego w Krakowie.
1896.

WSTĘP.

1. Pierwszy, co zajął się teoretycznem badaniem błędów spostrzeżeń, był Józef Ludwik Lagrange w r. 1770[1]. Wszelako teorya jego, oparta na zasadach rachunku prawdopodobieństwa, stosująca je do błędów spostrzeżeń, poszła wkrótce w zapomnienie.

Odkrycie dzisiejszej metody najmniejszych kwadratów wyprzedza teorya wyrównania błędów, skreślona przez Piotra Szymona Laplace'a, który w celu wyznaczenia wymiarów ziemi obliczył z większej liczby niż 2 pomiarów ziemskich zapomocą równań kształtu:

$$\begin{aligned}
a_1 x + b_1 y + c_1 z + \; . \; . \; . \; . \; + w_1 &= 0, \\
a_2 x + b_2 y + c_2 z + \; . \; . \; . \; . \; + w_2 &= 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_n x + b_n y + c_n z + \; . \; . \; . \; . \; + w_n &= 0,
\end{aligned}$$

żądane niewiadome na podstawie dwóch warunków, tj.: 1) algebraiczna suma błędów jest równa zeru, 2) bezwzględna suma błędów ma być najmniejszością. Teoryę tę podał Laplace w dziele: „Traité de mécanique céleste“.[2]

Rachunek wyrównania błędów zapomocą metody najmniejszych kwadratów, dzisiaj powszechnie przyjęty, ogłosił drukiem Adryan Marya

---

[1]) Encke. Berliner astronomischer Jahrbuch f. 1853. str. 310-351.
[2]) T. II. An VII. (1802). Première partie. Livre III. art. 40. P. 143.

Legendre w r. 1805 w dziele: „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes“ (Paris. 1806) w dodatku na str. 72—80 p. t.: „Sur la méthode des moindres carrés“. Powtórnie zaś ogłosił tę pracę w r. 1810 w „Mémoires de la classe des Sciences mathématiques et physiques de l'institut de France“.[1]

Niezależnie od Legendre'a wynalazł metodę najmniejszych kwadratów Karol Fryderyk Gauss w r. 1795 jako słuchacz matematyki w uniwersytecie w Getyndze, którą ogłosił drukiem dopiero w r. 1809 w dziele: „Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium“. A chociaż Legendre'owi przynależy się pierwszeństwo ogłoszenia pracy swej, uważamy Gauss'a za wynalazcę i ojca metody najmniejszych kwadratów, gdyż jemu bezsprzecznie przypisać należy obok pierwszeństwa odkrycia, przedewszystkiem pierwszeństwo zastosowania, a głównie rozwinięcie większej części tej nauki, którą dziś zowiemy metodą najmniejszych kwadratów.[2] Dzieła Gauss'a, traktujące o tej metodzie, są następujące:

1809. *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium.* Hamburg 1809.[3]

1810. *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809, societati regiae tradita Nov. 25. 1810.*[4]

1816. *Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen.*[5]

1821. *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars prior, societati regiae exhibita Febr. 15. 1821.*[6]

1823. *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars posterior, societati regiae exhibita Febr. 2. 1823.*[7]

1826. *Supplementum theoriae combinationis erroribus minimis obnoxiae, societati regiae exhibita Sept. 16. 1826.*[8]

W zbiorowem wydaniu dzieł Gauss'a p. t.: „Carl Friedrich Gauss' Werke, herausgegeben von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen“ (1863—1874), „Theoria motus“ obejmuje tom VII., „Disquisitio de elementis ellipticis Palladis“ tworzy początek tomu VI., prace zaś o metodzie najmniejszych kwadratów znajdują się w tomie IV.

Powyższe teorye Gauss'a z cennymi dodatkami Bessel'a przerobił Encke i podał p. t. „Ueber die Methode der kleinsten Quadrate“ w dodatku do „Berliner astronomisches Jahrbuch“

---

1) Année 1810. Seconde partie. str. 149 i nast.

2) Por. Gauss' Werke. Bd. VI. str. 56—59.

3) Lib. II. sect. III.

4) W „Commentationes societatis regiae scientiarum Goettingensis recentiores“. Vol. I. 1808—1811.

5) W „Zeitschrift f. Astronomie und verwandte Wissenschaften herausgegeben von Lindenau und Bohnenberger“. Tübingen. 1816. T. I. str. 185—196.

6) W „Commentationes soc. reg. sc. Goett. rec“. Vol. V. 1819—1822 str. 33—62.

7) Ibidem. Vol. V. 1823. str. 63—90.

8) Ibidem. Vol. VI. 1823—1827. str. 57—98.

z lat 1834, 1835 i 1836. W wydaniu zbiorowem: „J. E. Encke's astronomische Abhandlungen zusammengestellt aus den Jahrgängen 1830—1862 des Berl. astr. Jahrb.“ tworzy powyższa rozprawa o metodzie najmniejszych kwadratów rozdziały XII., XIII. i XIV. pierwszego tomu (1866).

2. Wszystko to atoli odnosi się do teoretycznych prac Gauss'a o tejże metodzie. Na praktyczne zastosowanie tej teoryi Gauss'a do wyrównania tryangulacyjnego dopiero w najnowszych czasach zwrócono szczególniejszą uwagę; uczynił to mianowicie podpułkownik O. Schreiber w „Zeitschrift f. Vermessungskunde“ (1879, str. 141) i major Gaede w artykule: „Beiträge zur Kenntnis von Gauss' praktisch-geodätischen Arbeiten“ w powyższem czasopiśmie (1885, str. 113—225), również W. Jordan i K. Steppes w rozprawie: „Das deutsche Vermessungswesen, historisch-kritische Darstellung, auf Veranlassung des deutschen Geometer-Vereins unter Mitwirkung von Fachgenossen herausgegeben“ (2 Bde. Stuttgart. 1882).

Bessel rozwinął w rozprawie: „Untersuchungen über die Bahn des Olber'schen Kometen“[1], jakoteż w dziełku: Fundamenta astronomiae deducta ex observationibus J. Bradley“[2] teoryę rozdziału błędów na podstawie licznych spostrzeżeń.

Nadradca G. H. L. Hagen przedstawił w „Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (Berlin. 1837, drugie wyd. 1867) nader ciekawą teoryę błędów. Tę samą rzecz rozwinął także Bessel w rozprawie: „Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler“[3].

3. Do pierwszych podręczników, służących do nauki o metodzie najmniejszych kwadratów, zaliczamy powyżej wspomniane dzieło Hagen'a, następnie Krystyana Ludwika Gerlinga p. t.: Die Ausgleichungsrechnung der praktischen Geometrie oder die Methode der kleinsten Quadrate in ihren Anwendungen auf geodätische Aufgaben“. (Hamburg und Gotha. 1843). Od tego czasu szereg prac o teoryi najmniejszych kwadratów, już to popularnych, już też ściśle naukowych wzrósł do okazałej liczby. Już w r. 1877 wylicza Merriman w „A list of writings relating to the method of least squares“[4] 408 tytułów rozpraw, dotyczących tego przedmiotu

Na końcu rozprawki podaję znaną mi literaturę tegoż przedmiotu; dzieła oznaczone gwiazdką służyły mi za podstawę w opracowaniu niniejszej pracy. Nie roszczę sobie bynajmniej praw do oryginalności, która w wykładzie elementarnym nauki jest tylko do pewnego stopnia możebna; wszelako starałem

---

[1]) W „Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften. Mathematische Klasse“. 1812—1813. str. 119.

[2]) Koenigsberg. 1818. str. 18—21.

[3]) Astronomische Nachrichten. XV. Bd. Nr. 358 i 359. Octob. 1838. str. 369 i nast.

[4]) Transact. of the Connecticut. Acad. Vol. IV. 1877. Por. Czuber. Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig. 1891.

się w wykładzie o jak największą jasność, by praca ta mogła wzniecić w czytelniku zamiłowanie do tej gałęzi nauk matematycznych, której bogata literatura dowodzi nadzwyczajnego zainteresowania się nią przez geometrów, fizyków, geodetów i astronomów, jakoteż by pobudziła chętnych do samodzielnych na tem polu poszukiwań. Również uważam za zbyteczne wymienianie szczegółowe, co z każdego z wspomnianych dzieł przeniosłem do mej pracy a co jest owocem moich studyów. Rozumny i światły czytelnik, dobrze obeznany z piśmiennictwem tego przedmiotu, sam to dostrzeże i pozna, że cokolwiek z nich wyjąłem, przerobiłem poprzednio na swój sposób, starając się na każdym kroku materyał tak wyzyskać, aby tej pracy zapewnić jak największą użyteczność.

Wkońcu wspomnę, że w literaturze polskiej znane są z tego zakresu tylko dwie mniejsze prace, tj. prof. Dominika Zbrożka i jego asystenta Augusta Witkowskiego, obecnie profesora fizyki w uniwersytecie Jagiellońskim w Krakowie. Praca pierwszego p. t. „Zastosowanie wyznaczników w teoryi najmniejszych kwadratów“ znajduje się w „Pamiętniku Akademii Umiejętności w Krakowie“ (Wydział matem. przyrodniczy. T. IX, 1884. Str. 199—218). Praca druga nosi tytuł: „Teorya najmniejszych kwadratów. Według wykładów prof. D. Zbrożka, napisał August Witkowski, asystent geodezyi w szkole politechnicznej we Lwowie“. (Autograf. Lwów. 1879. Str. 119).

Oprócz teoryi podaję jeszcze liczne, stosownie dobrane przykłady, wzięte z rzeczywistości, gdyż przykłady zmyślone nie miałyby tutaj żadnej racyi bytu i nie przyniosłyby uczącemu się najmniejszej korzyści. Przykłady te praktyczne, wprawdzie obliczone przez dotyczących spostrzegaczy, obliczyłem je powtórnie po największej części w odmienny sposób, stosownie do potrzeb książki. Posłużyć one mają za wzorce, podług których w obliczaniu postępować należy.

Pisałem w Krakowie, w kwietniu 1895.

Błędy spostrzeżeń. — Rodzaje błędów.

1. Wszelkie pomiary i spostrzeżenia, choćby z największą starannością i dokładnością wykonywane, nie prowadzą nigdy do poznania prawdziwej wartości ilości niewiadomej, ale dają wyniki, mniej lub więcej od tej wartości się różniące. Różnice pomiędzy wartością prawdziwą a spostrzeganą lub pomierzoną zowiemy błędami spostrzeżeń. Błędy te są wogóle mniejsze lub większe stosownie do tego, czy do pomiaru lub obserwacyi użyliśmy przyrządu dokładniejszego, czy też mniej dokładnego, jakoteż czy użyliśmy tego, czy też owego sposobu spostrzegania.

Błędy spostrzeżeń udzielają się wszystkim ilościom, jakie z wyników pomiaru lub spostrzegania dają się wyprowadzić lub obliczyć; stąd to pochodzi, że i te ilości wogóle nie są wolne od mniejszych lub większych błędów. Aby zaś ze spostrzeżeń i pomiarów uzyskane ilości zużytkować do pewnego, oznaczonego celu, trzeba się postarać, aby błędy nie przekraczały pewnej granicy, która wogóle może być rozmaitą, co znowu zależy od celu, w jakim dokonano pomiaru lub też spostrzeżenia.

Jeżeli np. mamy zużytkować plan sytuacyjny miejskiej parceli, wysoko cenionej, do sporządzenia planów zabudowania tej parceli a powierzchnię parceli do obliczenia kosztów kupna na podstawie ugodzonej ceny za jednostkę powierzchni, to jasną jest, że granice, wśród których błędy wszystkich pomiarów się znajdują, muszą być stanowczo mniejsze, niż w tym przypadku, gdy używamy planu sytuacyjnego parceli łąki i jej powierzchni do sporządzenia kosztorysu i planu nawodnienia tej parceli.

Dlatego też stosownie do celu, jaki osiągnąć zamierzamy przez pomiary lub spostrzeżenia, potrzeba określić ściśle wielkość błędów, którym mogą podlegać ilości mające się wyznaczyć, a więc odpowiednio do tego wielkość błędów spostrzeżeń, czyli krócej się wyrażając, potrzeba ściśle określić stopień dokładności, jaki mieć chcemy.

2. Od stopnia dokładności wykonywanych pomiarów lub spostrzeżeń zależy w dalszym ciągu potrzebny do osiągnięcia tegoż nakład pracy i kosztów. Im dokładniej roboty będziemy przeprowadzali, tem wogóle większy będzie nakład pracy i kosztów. Wszelako zawsze żądamy, aby ten nakład sprowadzić do najmniejszości, a więc w każdym razie należy rozwiązać następujące zadanie: „Do wykonać się mających spostrzeżeń lub pomiarów wybrać takie przyrządy i taki sposób postępowania, aby przy ile możności najmniejszym nakładzie pracy i kosztów osiągnąć taki stopień dokładności, jakiego cel pracy wymaga“.

Aby to zadanie rozwiązać, potrzeba zająć się szczegółowo błędami spostrzeżeń i uzyskać prawa, którym one podlegają. Jest to przedmiotem tak zwanej teoryi błędów spostrzeżeń. Zadaniem więc tej teoryi nie może być obliczenie prawdziwej wartości, co wogóle jest niemożebne, lecz ustawienie metodycznego postępowania, opartego na zasadach rachunku prawdopodobieństwa, podającego sposoby wyznaczenia wartości najbardziej ze spostrzeżeniami zgodnej, a co najważniejsza, dozwalającego każdej chwili ocenić ściśle stopień dokładności podjętej pracy.

3. Różnice pomiędzy wartością prawdziwą a spostrzeganą pochodzą z równoczesnego pojawiania się błędów trojakiego rodzaju, tj. a) błędów grubych, b) stałych, c) przypadkowych.

4. Błędy grube powstają wskutek grubego przeoczenia podczas pomiaru lub spostrzeżenia, np. przy pomiarach długości błędy takie wynosić mogą 1 m., 2 m., 5 m., 10 m. itd., których przyczyną jest błędne odczytanie, albo błędne liczenie liczby całkowitych łat, lub całkowitych długości łańcucha, lub taśmy mierniczej.

Pomiary należy tak przeprowadzać, aby pojawiające się błędy grube wpadały miernikowi zaraz w oko; wyniki pomiarów, takimi błędami obarczone, należy odrzucić i zastąpić je nowymi, powtórnym pomiarem uzyskanymi, a od grubych błędów wolnymi rezultatami. Jak należy najodpowiedniej urządzać pomiary i spostrzeżenia, by ustrzedz się grubych błędów, i jak wyszukać wyniki pomiarów, grubymi błędami obciążone, należy do zakresu miernictwa. O tego rodzaju błędach w dalszym ciągu tej pracy mówić nie będziemy.

5. Błędy występujące ustawicznie w jednym kierunku we wszystkich spostrzeżeniach bez wyjątku i odznaczające się tą wspólną cechą, że wszystkie spostrzeżenia powiększają albo pomniejszają o jednę i tę samę ilość, zowiemy błędami stałymi. Zródłem tych błędów bywa pospolicie wadliwe urządzenie przyrządu, służącego do wykonywania spostrzeżeń, następnie wła-

ściwość samej osoby spostrzegającej, albo też wreszcie działanie rozmaitych innych wpływów.

Jeżeli odmierzamy kąt zapomocą teodolitu, na którego kole uskuteczniono podziałkę niedokładnie, popełniamy zawsze błąd, wynikający z wadliwości podziałki. Jeżeli luneta teodolitu nie jest dokładnie centralnie ustawiona, odczytujemy również stale błędnie wielkość kąta, między dwoma kierunkami zawartego. Przy mierzeniu długości występują stałe błędy, jeżeli użyte do pomiaru łaty, taśmy lub łańcuchy miernicze nie posiadają dokładnych długości itd. Stosownie do tego, czy są za długie, czy też za krótkie, otrzymamy za mały, albo też za wielki wynik pomiaru. Niemniej popełniamy błąd stały w mierzeniu długości wskutek nienależytego przekładania lub przesuwania łaty lub łańcucha, zbaczając od wytkniętego kierunku w jednę lub drugą stronę. W tym przypadku wynik pomiaru jest za wielki.

Stałe błędy spostrzeżeń należy co do ich wielkości sprowadzić do najmniejszości przez możliwie dokładne zrektyfikowanie przyrządów. Następnie należy pomiary i spostrzeżenia, ile możności, w ten sposób wykonać, aby błędy stałe nie wpływały szkodliwie na wynik rachunku. Wogóle, jeżeli pojawiają się błędy stałe w pomiarach lub spostrzeżeniach, należy je albo naprzód wyznaczyć, albo też z rachunku wyrugować. Jak zaś to się uskutecznia, uczy nas o tem również nauka miernictwa.

6. Błędy przypadkowe są to nieuniknione, na wynik pomiaru tylko przypadkowo, czy to w dodatnim, czy też odjemnym kierunku wpływające, po usunięciu błędów grubych i stałych pozostałe błędy spostrzeżeń. Źródła tych błędów szukać również należy w niedokładności przyrządów i naszych zmysłów; wszelako dodać winniśmy, że przyczyny, które je wywołują, są bardzo liczne i bardzo zmienne do tego stopnia, że uchylają się w zupełności zpod kontroli naszych zmysłów. Dlatego też to powiadamy, że błędy przypadkowe składają się z bardzo wielu małych błędów cząstkowych. Jeżeli np. zapomocą teodolitu mierzymy kąt, to błąd przypadkowy wytwarza się z szeregu nieznacznych błędów, które powstają przy ustawieniu przyrządu ponad wierzchołkiem kąta, przy celowaniu do sygnałów, przy poziomem ustawieniu koła, przy ustawieniu sygnałów między niteczkami krzyża nitkowego, przy odczytaniu koła podziałkowego i t. d.

Ponieważ przypadkowy błąd spostrzeżenia zawiera w sobie przypadkowe błędy cząstkowe, objawiające się czy to w dodatnim, czy też w odjemnym kierunku, to przyjąwszy, że wszystkie te bardzo małe błędy cząstkowe są zarówno wielkie, możemy wypowiedzieć następującą hipotezę:

„Przypadkowy błąd spostrzeżenia jest równy algebraicznej sumie w wielkiej liczbie występujących bardzo małych, jednakowo wielkich, dodatnich i odjemnych przypadkowych błędów cząstkowych".

Tymi to błędami przypadkowymi zajmuje się rachunek wyrównania błędów.

7. Wszelkie spostrzeżenia ilości niewiadomej w celu wyznaczenia najprawdopodobniejszej wartości tej niewiadomej, tudzież jej ważności, względnie błędu średniego, a nadto w celu zdania sprawy z dokładności lub błędu średniego poszczególnych spostrzeżeń, mogą być albo bezpośrednie albo pośrednie.

Jeżeli ilość niewiadomą, której najprawdopodobniejszą wartość wyznaczyć mamy, spostrzegamy bezpośrednio znaczną liczbę razy — np. pomiar długości podziałką, kątów teodolitem, ciśnienia powietrza barometrem i t. d., powiadamy, że spostrzeżenia są bezpośrednie.

Jeżeli zaś spostrzegamy bezpośrednio jednę lub kilka ilości, zapomocą których wyznaczamy dopiero szukaną ilość niewiadomą, powiadamy, że spostrzeżenia są pośrednie. Tak np. wymierzywszy długości boków trójkąta, wyznaczamy wartości kątów, albo wymierzywszy objętość i temperaturę pewnej ilości gazu, wyznaczamy jego ciśnienie, albo też spostrzegamy czas wahania wahadła, aby wyznaczyć przyspieszenie siły ciężkości ziemskiej i t. d.

8. Ponieważ podczas spostrzeżenia popełniamy zawsze błędy, choćbyśmy wykonywali je z największą skrupulatnością i starannością, nie dochodzimy przeto nigdy do wiadomości prawdziwej wartości spostrzeganej ilości niewiadomej albo też ilości niewiadomej ze spostrzeżeń obliczonej. Jeżeli spostrzegamy jakową ilość tylko raz, nie ma wcale mowy o popełnionym błędzie, gdyż nawet nie możemy się domyślać, czy to spostrzeżenie dostarczyło nam wartości za wielkiej, czy też za małej. Inaczej rzecz się ma, gdy spostrzegamy tę samą ilość znaczną liczbę razy i otrzymamy wyniki mniej lub więcej od siebie się różniące. W tym przypadku znowu niewiadomo, który z rzeczonych wyników jest prawdziwą wartością spostrzeganej ilości; pytamy się zatem, jaka jest najprawdopodobniejsza wartość ilości niewiadomej, którąśmy wymierzali. Odpowiedź na to daje nam metoda średniej arytmetycznej czyli też metoda najmniejszych kwadratów, metoda nader prosta, łatwa i w praktyce stosowana.

Wyrównanie spostrzeżeń bezpośrednich jednej ilości.

9. Ilość x wymierzono zarówno starannie n - razy i otrzymano długości $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Pytamy się o najprawdopodobniejszą wartość niewiadomej x.

Oznaczywszy przez $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ wyniki spostrzeżeń, podjętych w celu wyznaczenia wartości niewiadomej x, a wykonanych z jednakową starannością i pod jednakowymi warunkami, natenczas za wartość najprawdopodobniejszą a niewiadomej x musimy przyjąć średnią arytmetyczną ilości $a_1, a_2, \ldots, a_n$; a więc:

$$a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}. \qquad (I)$$

Zasadę tę przyjmujemy jako twierdzenie nie potrzebujące dowodu, gdyż ilościom a musimy przyznać równorzędne prawdopodobieństwo i korzystamy z tego twierdzenia w celu wyznaczenia wartości najprawdopodobniejszej w przypadkach, które nie odznaczają się taką prostotą, jak obecny.

Z powyższego równania wynika bezpośrednio następujące:

$$(a_1 - a) + (a_2 - a) + (a_3 - a) + \ldots + (a_n - a) = 0.$$

10. Przez $f(\varepsilon)$ oznaczamy prawdopodobieństwo, że jakiś błąd ε leży między 0 i ε. Jeżeli w jest prawdopodobieństwem, że popełniony błąd leży między ε i $\varepsilon + \Delta\varepsilon$, przyczem $\Delta\varepsilon$ jest bardzo małe w porównaniu do ε, to podług twierdzenia o prawdopodobieństwie złożonem jest:

$$f(\varepsilon + \Delta\varepsilon) = f(\varepsilon) + w,$$

zatem:

$$w = f(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - f(\varepsilon).$$

Skoro $\Delta\varepsilon$ przejdzie w $d\varepsilon$ i położymy:

$$\lim_{\Delta\varepsilon = 0} \frac{f(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - f(\varepsilon)}{\Delta\varepsilon} = \varphi(\varepsilon),$$

otrzymamy:

$$w = \varphi(\varepsilon) . d\varepsilon \qquad (1)$$

jako prawdopodobieństwo, że popełniony błąd leży między ε i $\varepsilon + d\varepsilon$, gdzie $d\varepsilon$ jest nieskończenie małe. Funkcya φ zowie się p r a w e m b ł ę d u.

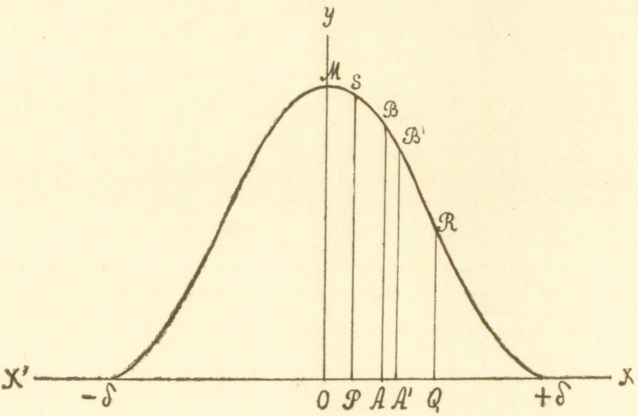
Zawsze istnieć będzie granica $\pm\delta$, której błąd nie będzie mógł przekroczyć; a zatem prawdopodobieństwo, że błąd jest równy δ albo większy od δ, jest równe zeru, czyli być musi:

$$\varphi(x) = o, \text{ gdy } x \geqq \delta. \tag{2}$$

Jeżeli x i y oznaczają spółrzędne prostokątne na płaszczyźnie, to

$$y = \varphi(x) \tag{3}$$

Fig. 1.



przedstawia krzywą, która oś X-ów przecina w $x = \pm\delta$. Jeżeli $OA = \varepsilon$ (fig. 1), to element powierzchni $AA\,BB'$ przedstawia prawdopodobieństwo w, że popełniony błąd leży między ε i $\varepsilon + d\varepsilon$. Jeżeli $OP = a$ i $OQ = b$, to powierzchnia $PQRS$ czyli

$$W = \int_a^b \varphi(\varepsilon)d\varepsilon \tag{4}$$

przedstawia prawdopodobieństwo, że popełniony błąd leży między a i b. A że błąd musi pewnie leżeć między $-\delta$ a $+\delta$, przeto otrzymamy:

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \varphi(\varepsilon)d\varepsilon = 1. \tag{5}$$

11. Oznaczmy prawo błędu na podstawie założenia, że średnia arytmetyczna spostrzeżeń jest najprawdopodobniejszą wartością ilości niewiadomej. Dla tego założenia do powyższych własności prawa błędu, równaniami (2) i (5) określonemi, przybywa jeszcze i ta, że

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi\,(-\varepsilon), \tag{6}$$

skoro prawdopodobieństwo popełnienia błędu $+\varepsilon$ jest zarówno tak wielkie, co prawdopodobieństwo popełnienia błędu $-\varepsilon$.

Jeżeli w n pomiarach ilości x popełniono błędy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_1 - x, \\ \varepsilon_2 &= a_2 - x, \\ &\dots\dots \\ &\dots\dots \\ \varepsilon_n &= a_n - x, \end{aligned}$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są wartości spostrzegane, w takim razie mamy:

$w_1 = \varphi(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1$ jako prawdopodobieństwo, że popełni się błąd ε_1,
$w_2 = \varphi(\varepsilon_2)\, d\varepsilon_2$ „ „ „ „ „ „ ε_2,
. . . .
. . . .
$w_n = \varphi(\varepsilon_n)\, d\varepsilon_n$ „ „ „ „ „ „ ε_n.

Podług twierdzenia o prawdopodobieństwie złożonem prawdopodobieństwo W, że w szeregu spostrzeżeń pojawią się właśnie błędy $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, dane jest równaniem:

$$W = w_1 \,.\, w_2 \,.\, \ldots \, w_n =$$
$$= \varphi(\varepsilon_1) \,.\, \varphi(\varepsilon_2) \ldots \varphi(\varepsilon_n) \,.\, d\varepsilon_1 \,.\, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_n \tag{7}$$

Przyczyną tych błędów jest nieznajomość wartości x. Wskutek tego wszystkie ε mogą niezależnie od siebie przyjąć wszelkie wartości od $+\delta$ do $-\delta$.

Podług założenia średnia arytmetyczna:

$$a = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \tag{8}$$

ma być najprawdopodobniejszą wartością ilości niewiadomej, t. j. dla $x = a$ ma W stać się największością; przeto być musi:

$$\left(\frac{d\,W}{dx}\right)_{x=a} = 0. \tag{9}$$

A że W dla $x = a$ nie jest ani 0, ani ∞, przeto możemy warunek największości napisać także w postaci:

$$\left(\frac{d\,l\,W}{dx}\right)_{x=a} = 0. \tag{10}$$

Z (7) wypływa zatem:

$$\frac{d\,l\,W}{dx} = -\left[\frac{\varphi'(\varepsilon_1)}{\varphi(\varepsilon_1)} + \frac{\varphi'(\varepsilon_2)}{\varphi(\varepsilon_2)} + \ldots\ldots + \frac{\varphi'(\varepsilon_n)}{\varphi(\varepsilon_n)}\right]$$

gdyż $d\varepsilon_1 \,.\, d\varepsilon_2 \,.\,.\,.\, d\varepsilon_n$ nie zależą od x, a $\frac{d\varepsilon_i}{dx} = -1.$

Skoro położymy:

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \psi(z), \tag{11}$$

to warunek (10) przyjmie postać następującą:

$$\psi(a_1 - a) + \psi(a_2 - a) + \,.\,.\,.\,.\, + \psi(a_n - a) = 0. \tag{12}$$

Równanie to musi spełnić nasza funkcya ψ dla zupełnie dowolnych wartości $a_1, a_2, \ldots, a_n$, gdy a posiada wartość, podaną równaniem (8). Możemy zatem różniczkować równanie (12) co do którejkolwiek z ilości $a_1, a_2, \ldots, a_n$, skoro tylko uwzględnimy równanie (8). Różniczkując przeto co do a_1, otrzymamy:

$$\psi'(a_1 - a)\frac{d(a_1 - a)}{da_1} + \psi'(a_2 - a)\frac{d(a_2 - a)}{da_1} + \,.\,.\,.\, + \psi'(a_n - a)\frac{d(a_n - a)}{da_1},$$

a że:

$$\frac{da}{da_1} = \frac{1}{n},$$

jakoteż:

$$\frac{da_1}{da_1} = 1, \quad \frac{da_2}{da_1} = 0, \;.\,.\,.\,.\,, \frac{da_n}{da_1} = 0,$$

gdyż $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ są od siebie niezależne, otrzymamy:

$$\psi'(a_1 - a) = \frac{1}{n}[\psi'(a_1 - a) + \psi'(a_2 - a) + \,.\,.\,.\, + \psi'(a_n - a)],$$

$$\psi'(a_2 - a) = \frac{1}{n}[\psi'(a_1 - a) + \psi'(a_2 - a) + \,.\,.\,.\, + \psi'(a_n - a)],$$

. . . .

$$\psi'(a_n - a) = \frac{1}{n}[\psi'(a_1 - a) + \psi'(a_2 - a) + \,.\,.\,.\, + \psi'(a_n - a)],$$

czyli:

$$\psi'(a_1 - a) = \psi'(a_2 - a) = \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, = \psi'(a_n - a) = c.$$

Przeto dla dowolnych wartości z argumentu

$$\psi'(z) = c,$$

więc:

$$\psi(z) = \int c\, dz + c_1$$

$$= cz + c_1,$$

więc podług (11):

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = cz + c_1$$

czyli:

$$\frac{dl\varphi(z)}{dz} = cz + c_1,$$

więc:

$$l\varphi(z) = c\int zdz + \int c_1 dz + \log c_2$$

$$= \frac{1}{2} cz^2 + c_1 z + \log c_2,$$

i

$$\varphi(z) = c_2 e^{{}^1\!/_2 cz^2 + c_1 z}$$

Stałe c_2, c_1, c wyznaczają trzy warunkowe równania (5), (6) i (2).

Co się tyczy c_1, to z równania (6):

$$\varphi(z) = \varphi(-z),$$

wynika, że być musi:

$$\frac{1}{2} cz^2 + c_1 z = \frac{1}{2} cz^2 - c_1 z$$

czyli że:

$$c_1 = 0.$$

Funkcya $\varphi(z)$ maleje z rosnącem z, w takim razie c musi być odjemne. Połóżmyż zatem:

$$\frac{1}{2} c = -h^2,$$

gdzie h oznacza ilość rzetelną. Wtedy będzie:

$$\varphi(z) = c_2 e^{-h^2 z^2},$$

a podług (2) będzie:

$$\delta = \infty,$$

gdy:

$$\varphi(\infty) = 0,$$

co jest możliwe, gdyż błędy znajdują się pewnie poniżej tej ilości.

Aby obliczyć ostatecznie c_2, połóżmy za $\varphi(z)$ wartość w równanie (5), w skutek czego przejdzie ono w następujące:

$$c_2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 z^2} dz = 1.$$

A że:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{h},$$ [1]

mieć będziemy:

$$c_2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}},$$

zatem:

$$\varphi(z) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2z^2} \qquad \text{(II)}$$

jako wzór na prawo błędu dla powyżej danego założenia.

12. Należałoby nareszcie okazać, że wartość W w równaniu (7) jest w istocie największością. Podstawiwszy weń wartość za , otrzymamy:

$$W = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2(\varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 + \ldots + \varepsilon_n{}^2)} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_n,$$

zatem:

$$\frac{dlW}{dx} = +2h^2\left[(a_1 - x) + (a_2 - x) + \ldots + (a_n - x)\right]$$

i

$$\frac{d^2lW}{dx^2} = -2h^2,$$

więc istotnie odjemne, przeto $l\ W$, a więc W jest największością dla $x = a$.

Prawdopcdobieństwo, że popełniony błąd leży między ε i $\varepsilon + d\varepsilon$, czyli jak się mówi, prawdopodobieństwo, że się popełni błąd ε, wyrazi się zatem równaniem:

$$w = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2z^2} d\varepsilon \qquad \text{(III)}$$

13. Krzywa, przedstawiona równaniem:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2z^2},$$

która uzmysławia prawo błędu w spółrzędnych prostokątnych x, y, jest symetryczną względem osi Y-ów i ma oś X-ów za

[1]) Obacz dodatek I. na końcu rozprawy.

asymptotę. Dla $x = \infty$ staje się $y = o$, a krzywa zbliża się szybko do osi X-ów, tak że dla cokolwiek większego x staje się y już bardzo małem, gdy przyjmiemy h równe tylko 1. Im większe będzie h, tem szybcej zbliżać się będzie ta krzywa do osi X-ów. Dla $h = 1$ i $h = 2$ otrzymujemy następujące wartości:

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \qquad y_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-4x^2}$$

dla $x = 0\cdot0$	$y_1 = 0\cdot56419$,	$y_2 = 1\cdot12838$,
$x = 0\cdot2$	$y_1 = 0\cdot54206$,	$y_2 = 0\cdot96154$,
$x = 0\cdot4$	$y_1 = 0\cdot48077$,	$y_2 = 0\cdot59498$,
$x = 0\cdot5$	$y_1 = 0\cdot43939$,	$y_2 = 0\cdot41410$,
$x = 0\cdot6$	$y_1 = 0\cdot39362$,	$y_2 = 0\cdot26736$,
$x = 0\cdot8$	$y_1 = 0\cdot29749$,	$y_2 = 0\cdot08722$,
$x = 1\cdot0$	$y_1 = 0\cdot20755$,	$y_2 = 0\cdot02066$,
$x = 1\cdot5$	$y_1 = 0\cdot05947$,	$y_2 = 0\cdot00014$.

Z tego widzimy, o ile szybcej maleje y_2 od y_1.

Ilość h nazywa Gauss miarą dokładności. Im większe zatem h, tem mniejsze prawdopodobieństwo popełnienia znacznego błędu, tem dokładniejsze czyli ściślejsze jest spostrzeżenie.

14. Obliczmy prawdopodobieństwo, że błąd nie przekroczy pewnej danej ilości γ. Jeżeli błąd nie ma przekroczyć ilości γ, musi on się znajdować między $-\gamma$ a $+\gamma$. Prawdopodobieństwo to podług równania (4) jest:

$$W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\gamma}^{+\gamma} e^{-h^2x^2} . dx ,$$

$$\text{a że} \int_{-\gamma}^{+\gamma} e^{-h^2x^2} . dx = \int_{-\gamma}^{o} e^{-h^2x^2} . dx + \int_{o}^{+\gamma} e^{-h^2x^2} . dx$$

$$= \int_{o}^{\gamma} e^{-h^2x^2} . dx + \int_{o}^{\gamma} e^{-h^2x^2} . dx$$

$$= 2 \int_{o}^{\gamma} e^{-h^2x^2} . dx ,$$

przeto:

$$W = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\gamma} e^{-h^2x^2} . dx$$

jako prawdopodobieństwo, że błąd nie przekroczy ilości γ.

Podstawiwszy: $hx = z$,

mieć będziemy: dla $x = 0$, $z = 0$,

$x = \gamma$, $z = h\gamma$,

a że: $hdx = dz$,

wynika stąd:

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{h\gamma} e^{-z^2} . dz = \Theta(h\gamma). \qquad \text{(IV)}$$

Wartości $\Theta(h\gamma)$ dla każdego argumentu $h\gamma < 3$ podaje nam tablica I.[1] Ponieważ $\Theta(h\gamma)$, a więc W dla $h\gamma > 3$ mało się różni od 1, wystarcza ta tablica dla wszystkich w praktyce przychodzących przypadków.

15. Błąd oczekiwany. Wartość ρ, posiadająca tę własność, że prawdopodobieństwo pojawienia się błędu nie większego — bez względu na znak — jak ρ, wynosi $1/2$, zowie się błędem oczekiwanym.

Podług wzoru (IV) otrzymujemy wyrażenie:

$$1/2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{h\rho} e^{-z^2} dz = \Theta(h\rho),$$

z którego przy pomocy tablicy I. wypada:

$$h\rho = 0{\cdot}476936,$$

przeto otrzymujemy wzór:

$$\rho = \frac{0{\cdot}476936}{h}, \qquad \text{(V)}$$

dozwalający obliczyć ρ, jeżeli znamy h, jakoteż wzór drugi:

$$h = \frac{0{\cdot}476936}{\rho}, \qquad \text{(V')}$$

z którego znajdziemy h, jeżeli dany błąd oczekiwany.

---

[1]) Na końcu rozprawki.

Powiedzieliśmy, że prawdopodobieństwo nieprzekroczenia, w danem spostrzeżeniu, błędu oczekiwanego wynosi $1/_2$; tedy prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego, t. j. przekroczenia tego błędu będzie $1-1/_2$, przeto także $1/_2$. Wnosimy stąd, że w szeregu spostrzeżeń, wykonanych z dokładnością h i błędem oczekiwanym ρ, zdarzy się prawdopodobnie tyleż błędów mniejszych od ρ, ile większych — bez względu na znak —. Wniosek powyższy może posłużyć niekiedy do znalezienia błędu oczekiwanego, a przeto i miary dokładności.

Jakoż jeżeli znane są błędy poszczególnych spostrzeżeń, wystarczy je uporządkować podług ich wielkości, nie uwzględniając znaku; błąd stojący w pośrodku będzie błędem oczekiwanym.

16. Błąd średni. Błędem średnim danego szeregu spostrzeżeń, wykonanych z tą samą dokładnością, zowiemy ilość μ, której kwadrat jest średnią arytmetyczną pomiędzy kwadratami prawdziwych błędów spostrzeżeń; jeżeli te błędy oznaczymy przez $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, będzie z określenia:

$$\mu^2 = \frac{\varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 + \ldots + \varepsilon_n{}^2}{n} = \frac{[\varepsilon^2]}{n},$$

przeto:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}} \qquad \text{(VI).}$$

Prawdopodobieństwo bowiem, że w danem spostrzeżeniu popełnimy błąd μ, t. j. że błąd leżeć będzie między μ a $\mu + d\mu$, jest podług (III):

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\mu^2} d\mu,$$

prawdopodobieństwo zaś, że ten sam błąd pojawi się w n po sobie następujących spostrzeżeniach, jest:

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n . \; e^{-\,nh^2\mu^2} (d\mu)^n .$$

Prawdopodobieństwa pojawienia się błędów $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ są:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} . \; e^{-\,h^2\varepsilon_1{}^2} . \, d\mu,$$

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} . \; e^{-\,h^2\varepsilon_2{}^2} . \, d\mu,$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} . \; e^{-\,h^2\varepsilon_n{}^2} . \, d\mu,$$

przeto prawdopodobieństwo, że te błędy pojawiają się w n wykonanych spostrzeżeniach, będzie:

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2)} \cdot (d\mu)^n$$

A zatem być musi:

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-nh^2\mu^2}(d\mu)^n = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_n^2)} \cdot (d\mu)^n$$

czyli:

$$n\mu^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2,$$

stąd:

$$\mu^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2}{n} = \frac{[\varepsilon^2]}{n},$$

czyli:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}. \qquad \text{C. b. d o.}$$

17. **Związek między błędem średnim μ a miarą dokładności h danego szeregu spostrzeżeń.** Łatwo jest znaleźć drogą teoretyczną związek pomiędzy błędem średnim μ a miarą dokładności h, a przeto i błędem oczekiwanym ρ spostrzeżeń. Wszelako trzeba przypuścić, że liczba spostrzeżeń jest bardzo znaczną, tak iż błędy poszczególnych spostrzeżeń można uważać za postępujące po sobie sposobem ciągłym. Jeżeli w praktyce nie da się to żądanie ściśle urzeczywistnić, to wynika z tego, że liczebne rachunki będą się tylko mniej lub więcej zbliżały do wypadków teoryi.

Pomyślmy sobie błędy $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_\nu$ uporządkowane co do ich wielkości bezwzględnej. Tedy między ε_1 a $\varepsilon_1 + d\varepsilon_1$ może z n błędów przypaść liczba s_1, t. zn. s_1 błędów ma się różnić od ε_1 co najwyżej o $d\varepsilon_1$ (bardzo małą ilość). Zatem prawdopodobieństwo, że którykolwiek z błędów szeregu spostrzeżeń leży między ε_1 a $\varepsilon_1 + d\varepsilon_1$, jest:

$$\frac{s_1}{n},$$

gdy wogóle n błędów się pojawia, z których atoli tylko s_1 zawartych jest w powyższych granicach.

Ponieważ podług ust. 2. równanie (1):

$$w_1 = \varphi(\varepsilon_1)d\varepsilon_1$$

oznacza prawdopodobieństwo, że błąd leży między ε_1 i $\varepsilon_1 + d\varepsilon_1$, przeto:

$$\varphi(\varepsilon_1)d\varepsilon_1 = \frac{s_1}{n}. \tag{13}$$

Jeżeli $s_2, s_3, \ldots\ldots, s_\nu$ błędów przypada odpowiednio pomiędzy ε_2 i $\varepsilon_2 + d\varepsilon_2$, ε_3 i $\varepsilon_3 + d\varepsilon_3, \ldots\ldots, \varepsilon_\nu$ i $\varepsilon_\nu + d\varepsilon_\nu$, otrzymamy analogicznie:

$$\varphi(\varepsilon_2)d\varepsilon_2 = \frac{s_2}{n},$$

$$\varphi(\varepsilon_3)d\varepsilon_3 = \frac{s_3}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi(\varepsilon_\nu)d\varepsilon_\nu = \frac{s_\nu}{n}.$$

Z tych równań wypływa więc:

$$\sum_1^\nu \varepsilon_i^2\varphi(\varepsilon_i)d\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_1^{\,2}s_1 + \varepsilon_2^{\,2}s_2 + \varepsilon_3^{\,2}s_3 + \ldots\ldots + \varepsilon_\nu^{\,2}s_\nu}{n}.$$

W liczniku po prawej stronie znaku równości znajduje się suma kwadratów wszystkich błędów, czyli raczej ilość, która od tej sumy tylko nieskończenie mało się różni. Kwadrat bowiem każdego błędu pomnożony jest liczbą wskazującą, ile razy w szeregu n błędów jakiś błąd osiąga tę wielkość. Gdyby wszystkie $s = 1$, byłaby suma równą wprost $[\varepsilon^2]$. Możemy zatem napisać:

$$\sum_1^\nu \varepsilon_i^2\varphi(\varepsilon_i)d\varepsilon_i = \frac{[\varepsilon^2]}{n} = \mu^2.$$

Ten związek istnieje dla każdego szeregu spostrzeżeń, gdy n jest bardzo wielkie. Wtedy atoli suma po lewej stronie znaku równości przechodzi w określoną całkę, której granice w każdym razie nie przekraczają wielkości δ, poza którą nie leży żaden błąd. Zatem mamy:

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \varepsilon^2\varphi(\varepsilon)d\varepsilon = \mu^2$$

Wprowadźmy prawo błędu z wzoru (II), a otrzymamy:

$$\mu^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon,$$

kładąc $\delta = \infty$.

Ponieważ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-h^2 z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2h^3},$$ [1]

przeto:

$$\mu^2 = \frac{1}{2h^2},$$

czyli otrzymamy wzór:

$$\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \qquad \text{(VII)}$$

wykazujący związek między błędem średnim μ a miarą dokładności h.

18. Wiążąc znaleziony właśnie wzór z równaniami (V) i (V'), dojdziemy z łatwością do następujących:

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{1}{\mu\sqrt{2}}, \\ \rho &= 0{\cdot}476936.\ \mu\sqrt{2} = 0{\cdot}6744897\mu \\ \mu &= 1{\cdot}4826000\ \rho. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII)}$$

Równania powyższe ustanawiają tylko wzajemne zależności pomiędzy ilościami ρ, h, μ, ale nie dozwalają jeszcze obliczyć ich bezwzględnych wartości, gdyż nie znamy błędów prawdziwych ε.

19. Z w i ą z e k m i ę d z y b ł ę d e m ś r e d n i m μ a b ł ę d e m ś r e d n i m ś r e d n i e j a r y t m e t y c z n e j. Niech μ oznacza błąd średni szeregu spostrzeżeń a M błąd średni średniej arytmetycznej tegoż szeregu spostrzeżeń. Spostrzeżeń niech będzie n.

Jeżeli a jest średnią arytmetyczną, to podług (I) mamy

$$a = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n),$$

jeżeli zaś x jest prawdziwą wartością ilości niewiadomej, to: $M_1 = a - x$ jest błędem tej średniej arytmetycznej. Jeżeli więc ε_1 jest którymkolwiek z popełnionych błędów, to:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= a_i - x \\ &= a_i - a + a - x \\ &= a_i - a + M_1. \end{aligned}$$

Utworzywszy więc sumę z wszystkich n błędów, mieć będziemy:

$$[\varepsilon] = [a_i - a] + nM_1,$$

[1]) Obacz Dodatek I. na końcu rozprawki.

a że:

$$[a_i - a] = a_1 - a + a_2 - a + a_3 - a + \ldots + a_n - a$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) - na = o,$$

przeto:
$$[\varepsilon] = nM_1,$$

czyli potęgując obustronnie przez 2:
$$[\varepsilon^2] + [\varepsilon_i \varepsilon_k] = n^2 M_1^2,$$

czyli uwzględniając wzór (VI):
$$n\mu^2 + [\varepsilon_i \varepsilon_k] = n^2 M_1^2 \qquad (14)$$

W sumie iloczynów $\varepsilon_i \varepsilon_k$ przychodzą dodatnie i odjemne ilości, gdyż ε są dodatnie i odjemne. Wskutek tego $[\varepsilon_i \varepsilon_k]$ w porównaniu do $[\varepsilon\varepsilon]$, której to sumy składniki są dodatnie, są małe, przeto można $[\varepsilon_i \varepsilon_k]$ opuścić, tak że powyższe równanie przedzierżgnie się w następujące:

$$n\mu^2 = n^2 M^2,$$

skąd:
$$\mu = M\sqrt{n},$$

więc:
$$M = \frac{\mu}{\sqrt{n}} \qquad (IX)$$

jako związek między błędem średnim μ a błędem M średniej arytmetycznej.

20. Obliczenie miary dokładności *H*, odpowiadającej średniej arytmetycznej. Ponieważ *M* jest błędem średniej arytmetycznej, a więc błędem średnim spostrzeżenia, któreby dało średnią arytmetyczną, przeto podług (VII) będzie:

$$M = \frac{1}{H\sqrt{2}},$$

skąd:
$$H = \frac{1}{M\sqrt{2}},$$

albo uwzględniając wzór (IX), otrzymamy:

$$H = \frac{\sqrt{n}}{\mu\sqrt{2}}, \qquad (X)$$

albo też w postaci:
$$H = h\sqrt{n}. \qquad (X')$$

21. Ważności. Liczby całkowite, proporcyonalne do kwadratów miar dokładności, zowią się ważnościami spo-

strzeżeń. Jeżeli przez p i p' oznaczymy ważności, przez h i h' miary dokładności dwu spostrzeżeń, to proporcya:

$$p : p' = h^2 : h'^2 \tag{XI}$$

zawiera w sobie powyższe określenie.

Jeżeli P jest ważnością średniej arytmetycznej, p ważnością danego spostrzeżenia, to według wzorów (X') i (XI) otrzymamy:

$$P : p = H^2 : h^2 = n : 1,$$

czyli:

$$P = np \tag{XII}$$

t. zn.: Ważność średniej arytmetycznej z n spostrzeżeń jest n-razy większą od ważności jednego z danych spostrzeżeń. Kładąc $p = 1$, otrzymamy:

$$P = n, \tag{XII'}$$

z czego czytamy: Ważność jakiegokolwiek wyniku jest to liczba spostrzeżeń jednakowej dobroci potrzebnych do uzyskania średniej, z tą samą dobrocią, jaką posiada wynik dany, przyczem za jednostkę ważności bierze się ważność wspólną tych spostrzeżeń".

Jest to twierdzenie w praktycznem zastosowaniu rachunku wyrównania niezmiernie ważne, gdyż często wskazuje nam jedyną drogę ocenienia dokładności różnych wyników.

22. Ponieważ:

$$p : p' = h^2 : h'^2,$$

przeto ze względu na wzór (VIII) otrzymamy:

$$p : p' = \mu'^2 : \mu^2,$$

gdzie μ i μ' oznaczają średnie błędy spostrzeżenia.

A że podług (IX):

$$\mu = M\sqrt{n},$$

przeto wiążąc z równaniem (XII), mieć będziemy:

$$\mu = M\sqrt{\frac{P}{p}}, \tag{XIII}$$

gdzie M uważamy za błąd średni spostrzeżenia o ważności P a μ za błąd średni spostrzeżenia o ważności p. Równanie powyższe powiada: Chcąc błąd średni M spostrzeżenia o ważności P zamienić na błąd średni spostrzeżenia o ważności p, należy M pomnożyć przez $\sqrt{\frac{P}{p}}$.

23. Obliczenie błędu oczekiwanego średniej arytmetycznej. Wzór (VIII) podaje związek między błędem

średnim a oczekiwanym danego spostrzeżenia. Ponieważ M jest błędem średnim średniej arytmetycznej, a oznaczywszy przez R błąd oczekiwany średniej arytmetycznej, napiszemy:

$$\begin{aligned} R &= 0{\cdot}6744897\ M, \\ M &= 1{\cdot}4826000\ R. \end{aligned} \qquad \text{(XIV)}$$

Wiążąc wzory (IX) i (XIV), mieć będziemy:

$$R = \frac{\rho}{\sqrt{n}}. \qquad \text{(XV)}$$

24. W y z n a c z e n i e b ł ę d u ś r e d n i e g o. Powyższe wzory wskazują, że wszelkie rodzaje błędów możemy obliczyć, gdy znamy jeden z nich. Atoli μ jest dane przez sumę kwadratów błędów, t. j.: $\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}$. Ponieważ $\varepsilon_i = a_i - x$, przeto ε_i jest niewiadome; a zatem chodzić będzie o to, aby wyrazić μ przez znane błędy $\alpha_i = a_i - a$. Obliczymy więc błąd średni jednego spostrzeżenia z błędów $\alpha_i = a_i - a$, gdzie a oznacza średnią arytmetyczną z spostrzeżeń $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Wiadomo, że:

$$\varepsilon_i = a_i - x = a_i - a + a - x = \alpha_i + M_1,$$

gdzie M_1 oznacza błąd średni średniej arytmetycznej. Potęgując przez 2, otrzymamy:

$$\varepsilon_i^2 = \alpha_i^2 + 2M_1\alpha_i + M_1^2,$$

a sumując, będziemy mieli:

$$[\varepsilon^2] = [\alpha^2] + 2M_1\,[\alpha] + nM_1^2.$$

Ponieważ:

$$[\alpha] = (a_1 - a) + (a_2 - a) + \ldots + (a_n - a) = 0,$$

przeto:

$$[\varepsilon^2] = [\alpha^2] + nM_1^2.$$

Zastępując M_1 przez błąd średni M, to uwzględniając wzory (VI) i (IX), otrzymamy:

$$n\mu^2 = [\alpha^2] + \mu^2,$$

więc:

$$(n - 1)\,\mu^2 = [\alpha^2],$$

czyli ostatecznie:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[\alpha^2]}{n-1}} \qquad \text{(XVI)}$$

jako wyrażenie średniego błędu jednego spostrzeżenia przez błąd $\alpha_i = a_i - a$.

25. Weźmy pod uwagę ν szeregów spostrzeżeń jednakowej dokładności. Niech

a' będzie średnią arytmetyczną z n' spostrzeżeń ,
a'' „ „ „ „ n'' „
. . . .
$a^{(\nu)}$ „ „ „ „ $n^{(\nu)}$ „

Wyznaczmy najprawdopodobniejszą wartość szukanej ilości x, jakoteż średni błąd jednego spostrzeżenia, błąd znalezionej wartości i ważność tej wartości.

a) Przypuszczamy, że te ν szeregów spostrzeżeń tworzą jeden jedyny szereg spostrzeżeń z

$$n = n' + n'' + \dots + n^{(\nu)}$$

zarówno dokładnych spostrzeżeń, a wtedy najprawdopodobniejsza wartość niewiadomej będzie średnią arytmetyczną z tych n wartości.

Jeżeli:

$$\begin{array}{l} a_1', \; a_2', \; \dots \dots, \; a_{n'}' \\ a_1'', \; a_2'', \; \dots \dots, \; a_{n''}'' \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_1^{(\nu)}, \; a_2^{(\nu)}, \; \dots \dots, \; a_{n^{(\nu)}}^{(\nu)} \end{array}$$

są ilościami spostrzeganemi, to

$$a' = \frac{1}{n'}\,(a_1' + a_2' + \dots + a_{n'}'),$$

$$a'' = \frac{1}{n''}\,(a_1'' + a_2'' + \dots + a_{n''}''),$$

. . . .

$$a^{(\nu)} = \frac{1}{n^{(\nu)}}\left(a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \dots + a_{n^{(\nu)}}^{(\nu)}\right),$$

przeto najprawdopodobniejsza wartość ilości niewiadomej x będzie:

$$a = \frac{1}{n}\Big(a_1' + a_2' + \dots + a_{n'}' + a_1'' + a_2'' + \dots + a_{n''}'' + \dots \dots$$
$$\dots \dots + a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \dots \dots + a_{n^{(\nu)}}^{(\nu)}\Big),$$

czyli:

$$a = \frac{n'a' + n''a'' + \dots + n^{(\nu)}a^{(\nu)}}{n' + n'' + \dots + n^{(\nu)}}. \qquad \text{(XVII)}$$

Połóżmy ważność jednego spostrzeżenia $= p_0$, to dla ważności poszczególnych średnich arytmetycznych otrzymamy wyrażenia:

$$p' = n'p_0\,,$$
$$p'' = n''p_0\,,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$p^{(\nu)} = n^{(\nu)}p_0\,,$$

skutkiem czego wzór (XVII) przyjmie następującą postać:

$$a = \frac{a'p' + a''p'' + \ldots + a^{(\nu)}p^{(\nu)}}{p' + p'' + \ldots + p^{(\nu)}}. \qquad \text{(XVII')}$$

Równanie to podaje nam zatem sposób szukania najprawdopodobniejszej wartości niewiadomej ilości ze spostrzeżeń o różnej dokładności, gdy znamy ważności tych spostrzeżeń.

b) Niech μ będzie błędem średnim jednego spostrzeżenia, który pozostaje niezmiennym dla wszystkich szeregów spostrzeżeń, gdyż poszczególne spostrzeżenia mają być zarówno dokładne, jakoteż niech M', M'', . . . , $M^{(\nu)}$ będą błędami średnimi średnich arytmetycznych poszczególnych szeregów, M zaś błędem średnim średniej arytmetycznej a z całych szeregów spostrzeżeń; natenczas podług (IX) będzie:

$$\mu = M'\sqrt{n'} = M''\sqrt{n''} = \ldots = M^{(\nu)}\sqrt{n^{(\nu)}} = M\sqrt{n}\,, \qquad (15)$$

a więc:

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{n}}\,,$$

czyli:

$$M = \frac{\mu\sqrt{p_0}}{\sqrt{[p]}}. \qquad \text{(XVIII)}$$

c) Chodzi jeszcze o wyznaczenie μ z błędów:

$$\alpha' = a' - a\,,$$
$$\alpha'' = a'' - a\,,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\alpha^{(\nu)} = a^{(\nu)} - a\,,$$

gdzie tylko a', a'', . . . , $a^{(\nu)}$ i a są wiadome. W tym celu piszemy:

$$M_1' = a' - x,$$

a więc także:

$$M_1' = a' - a + a - x = \alpha' + M_1,$$

przeto:

$$M_1'^2 = \alpha'^2 + M_1^2 + 2M_1\alpha'$$

i

$$n'M_1'^2 = n'\alpha'^2 + n'M_1^2 + 2M_1 n'\alpha'.$$

Zastąpiwszy M_1' i M_1 przez błędy średnie M' i M, to pomnąc, że:

$$n'M'^2 = \mu^2,$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} \mu^2 &= n'\alpha'^2 + n'M^2 + 2Mn'\alpha', \\ \mu^2 &= n''\alpha''^2 + n''M^2 + 2Mn''\alpha'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu^2 &= n^{(\nu)}\alpha^{(\nu)2} + n^{(\nu)}M^2 + 2Mn^{(\nu)}\alpha^{(\nu)}. \end{aligned}$$

Dodawszy te ν równań, będziemy mieli:

$$\nu\mu^2 = \Sigma n^{(i)}\alpha^{(i)2} + M^2\,\Sigma n^{(i)} + 2M\,\Sigma n^{(i)}\alpha^{(i)},$$

a że podług wzoru (XVII) jest:

$$a\Sigma n^{(i)} = \Sigma n^{(i)}a^{(i)},$$

przeto:

$$\Sigma n^{(i)}a^{(i)} - a\,\Sigma n^{(i)} = 0,$$

czyli:

$$\Sigma n^{(i)}(a^{(i)} - a) = 0,$$

a kładąc:

$$\Sigma n^{(i)} = n,$$

będzie:

$$\nu\mu^2 = [n^{(i)}\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}] + M^2 n,$$

a podług równania (15):

$$\nu\mu^2 = [n^{(i)}\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}] + \mu^2,$$

z czego wynika, że:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[n\alpha\alpha]}{\nu - 1}}$$

jako wzór na obliczenie błędu średniego jednego spostrzeżenia.

d) Zastąpiwszy liczby $n^{(i)}$ przez ważności, przyczem p_0 jest ważnością jednego spostrzeżenia, otrzymamy:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\alpha\alpha]}{p_0\,(\nu-1)}} \qquad \text{(XIX)}$$

jako średni błąd jednego spostrzeżenia o ważności p_0, gdy spostrzeżenia o ważnościach p', p'', ... $p^{(\nu)}$ dały ilości a', a'', ..., $a^{(\nu)}$.

26. Uwaga. Suma kwadratów błędów ma najmniejszą wartość dla średniej arytmetycznej.

Jest bowiem:

$$[\varepsilon^2] = (a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \ldots + (a_n - x)^2,$$

przeto dla x, dla którego $[\varepsilon^2]$ jest najmniejszością, musi być:

$$\frac{d[\varepsilon^2]}{dx} = -2[(a_1 - x) + (a_2 - x) + \ldots + (a_n - x)] = 0$$

t. zn. że:

$$x = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = a$$

jest ową wartością, dla której $[\varepsilon^2]$ staje się najmniejszością, gdyż

$$\frac{d^2[\varepsilon^2]}{dx^2} = +2.$$

Średnia zatem arytmetyczna sprowadza sumę kwadratów błędów do najmniejszości, co też dało powód, że rachunek wyrównania, wychodzący ze średniej arytmetycznej, zowie się metodą najmniejszych kwadratów.

---

27. Zagadnienia. 1. Wymierzono kąt α 12 razy i znaleziono następujące wartości:

1)	24° 17' 36·2"	5)	24° 17' 36·1"	9)	24° 17' 38·2"
2)	32·8"	6)	39·2"	10)	36·9"
3)	37·8"	7)	41·9"	11)	35·8"
4)	42·2"	8)	33·1"	12)	34·6"

Wyznaczyć najprawdopodobniejszą wartość tego kąta, błąd średni jednego spostrzeżenia i błąd średni, jako też oczekiwany średniej arytmetycznej.

Rozwiązanie. a) W celu wyznaczenia najprawdopodobniejszej wartości kąta szukamy poprostu średniej arytmetycznej z 12 spostrzeżeń. A więc

$$\frac{36{\cdot}2+32{\cdot}8+37{\cdot}8+42{\cdot}2+36{\cdot}1+39{\cdot}2+41{\cdot}9+33{\cdot}1+38{\cdot}2+36{\cdot}9+35{\cdot}8+34{\cdot}6}{12}$$

$$= \frac{444{\cdot}8}{12} = 37{\cdot}07''$$

Zatem najprawdopodobniejsza wartość kąta jest a = $24^0\ 17'\ 37{\cdot}07''$.

b) Tworzymy następującą tabelką:

Lp.	$a_{(i)}$	α_i	α_i^2
1.	24⁰ 17' 36·2"	— 0·87	0·7569
2.	32·8"	— 4·27	18·2329
3.	37·8"	+ 0·73	0·5329
4.	42·2"	+ 5·13	26·3169
5.	36·1"	— 0·97	0·9409
6.	39·2"	+ 2·13	4·5369
7.	41·9"	+ 4·83	23·3289
8.	33·1"	— 3·97	15·7609
9.	38·2"	+ 1·13	1·2769
10.	36·9"	— 0·17	0·0289
11.	35·8"	— 1·27	1·6129
12.	34·6"	— 2·47	6·1009
		+ 13·95	99·4268
		— 13·99	

W kolumnie pod α_i znajdują się błędy $\alpha_i = a_i - a$, w kolumnie zaś pod α_i^2 mamy kwadraty tychże błędów. Ostatni wiersz poziomy podaje sumy z tych kolumn.

Że kolumna „α_i“ nie daje na sumę zera, tylko:

$$[\alpha_i] = +\ 13{\cdot}95 - 13{\cdot}99 = -\ 0{\cdot}04,$$

przyczyną tego jest niewymierne dzielenie, które dało średnią arytmetyczną.

c) Podług (XVI) znajdziemy średni błąd jednego spostrzeżenia.

Albowiem:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\alpha^2]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{99{\cdot}4268}{11}}$$

$$\mu = \pm\ 3{\cdot}01''.$$

d) Podług (IX) znajdziemy błąd średniej arytmetycznej:

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{n}} = \pm \frac{3{\cdot}01}{\sqrt{12}} = +\ 0{\cdot}87''.$$

e) Przeto podług (XIV) błąd oczekiwany R średniej arytmetycznej będzie:

$$R = M \,.\, 0{\cdot}674 = \pm\, 0{\cdot}87 \,.\, 0{\cdot}674$$
$$= \pm\, 0{\cdot}58''.$$

Mamy zatem następujący wynik: Najprawdopodobniejsza wartość szukanego kąta jest $24^0\ 17'\ 37{\cdot}07''$ a prawdziwa wartość kąta leży bezsprzecznie między $24^0\ 17'\ 37{\cdot}07'' + 0{\cdot}58''$ a $24^0\ 17'\ 37{\cdot}07'' - 0{\cdot}58''$.

Błąd średni jednego spostrzeżenia jest: $\mu = \pm\, 3{\cdot}01''$ a błąd średni średniej arytmetycznej: $M = \pm\, 0{\cdot}87''$.

2. W r. 1798 ogłosił Cavendish wynik z 29 doświadczeń, z których oznaczył gęstość ziemi, a mianowicie przyjąwszy gęstość wody 1, otrzymał następujących 29 wypadków:

5·50	5·26	5·58	5·62	5·79	5·42	5·46
5·61	5·55	5·65	5·29	5·10	5·47	5·30
5·88	5·36	5·57	5·44	5·27	5·63	5·75
5·07	5·29	5·53	5·34	5·39	5·34	5·68
			5·85.			

Wyznaczyć najprawdopodobniejszą wartość gęstości ziemi, błąd średni i oczekiwany jednego spostrzeżenia, błąd średniej arytmetycznej i miarę dokładności.

R o z w i ą z a n i e.

$$[a_i] = 159{\cdot}01,\ [\alpha_i] = +\,2{\cdot}47 - 2{\cdot}40 = +\,0{\cdot}07,$$
$$[\alpha_i^2] = 1{\cdot}1967$$

a) $d = \dfrac{[a]}{n} = \dfrac{159{\cdot}01}{29} = 5{\cdot}48$

b) $\mu = \pm \sqrt{\dfrac{[\alpha^2]}{n-1}} = \pm \sqrt{\dfrac{1{\cdot}1967}{28}} = \pm\, 0{\cdot}2067.$

c) $M = \dfrac{\mu}{\sqrt{n}} = \dfrac{0{\cdot}2067}{\sqrt{28}} = 0{\cdot}0384.$

d) $\rho = 0{\cdot}6744\mu = 0{\cdot}1397.$

e) $R = 0{\cdot}6744M = 0{\cdot}0259.$

f) $h = \dfrac{1}{\mu\sqrt{2}} = 3{\cdot}42.$

g) $H = \dfrac{1}{M\sqrt{2}} = 18{\cdot}42.$

h) Do skontrolowania rzetelności rachunku użyć można wzoru:

$$H^2 : h^2 = n : 1$$

$$n = \frac{H^2}{h^2} = \frac{18{\cdot}42^2}{3{\cdot}42^2} = 29{\cdot}00,$$

jak być powinno.

Z powyższego rachunku wynika, że prawdziwa wartość gęstości ziemi leży między:

$$5{\cdot}48 + 0{\cdot}0259 \quad \text{i} \quad 5{\cdot}48 - 0{\cdot}0259.$$

U w a g a. Uporządkowawszy błędy α_i co do ich wielkości, otrzymamy następujący szereg:

− 0·41, − 0·38, − 0·22, − 0·21, − 0·19, − 0·19, − 0·18, − **0·14**, − 0·14, − 0·12, − 0·09, − 0·06, − 0·04, − 0·02, − 0·01, + 0·02, + 0·05, + 0·07, + 0·09, + 0·10, + 0·13, + **0·14**, + 0·15, + 0·17, + 0·20, + 0·27, + 0·31, + 0·37, + 0·40.

Grubszem pismem oznaczone błędy stoją w pośrodku odjemnych, względnie dodatnich błędów. Zatem stosownie do ustępu 15. (str. 17) błąd oczekiwany musi wynosić 0·14, co też zgadza się zupełnie z wynikiem drogą rachunkową powyżej uzyskanym: $\rho = 0{\cdot}1397$. Tym sposobem drogą mechaniczną można wyznaczyć błąd oczekiwany wielkiego szeregu spostrzeżeń.

3. Odmierzono kilka razy kąt teodolitem T i okazał się jako błąd średniej arytmetycznej $M = 12''$. Drugi teodolit T_1 dla jednakowo wielkiej liczby pomiarów daje błąd średniej arytmetycznej $M_1 = 6''$. Jakie ważności przypiszemy pomiarom jednym i drugim teodolitem w celu porównania ich?

R o z w i ą z a n i e. Podług (XIII) mamy proporcyę:

$$p : p_1 = M_1 : M,$$

gdzie p jest ważnością dla spostrzeżenia teodolitem T, a p_1 ważnością dla T_1. Przeto będzie:

$$p : p_1 = 6^2 : 12^2$$

$$p : p_1 = 1 : 4.$$

Kładąc $p = 1$, otrzymamy $p_1 = 4$, co oznacza, że każde spostrzeżenie teodolitem T_1 wykonywane jest 4 razy dokładniejsze, niż jedno spostrzeżenie teodolitem T zrobione.

W ten sposób należy wyznaczyć ważności, które odpowiadają różnym przyrządom, jeżeli mamy porównywać ze sobą wyniki, zapomocą nich otrzymane.

4. Mierzono kąt teodolitem repetycyjnym i otrzymano następujących 14 wartości: 69° 31' i sekundy: 1) 45·00, 2) 31·25, 3) 45·00, 4) 42·50, 5) 37·50, 6) 38·33, 7) 27·50, 8) 43·33, 9) 40·63, 10) 36·25, 11) 42·50, 12) 39·17, 13) 45·00, 14) 40·83. — Wartości te otrzymano jako wyniki powtarzań w liczbie: 1) 5, 2) 4, 3) 3, 4) 5, 5) 3, 6) 3, 7) 3, 8) 3, 9) 4, 10) 2, 11) 3, 12) 3, 13) 2, 14) 3.

Wyznaczyć najprawdopodobniejszą wartość kąta, błąd średni i oczekiwany jednego spostrzeżenia, jakoteż średniej arytmetycznej i odpowiednie miary dokładności.

R o z w i ą z a n i e. Wyniki pomiarów są różnie dokładne, i to tem dokładniejsze, im częściej je powtórzono. Liczby powtarzań przyjmujemy jako wprost równe ważnościom i ustawiamy następującą tabelę, gdzie p_i oznacza ważności, a_i sekundy, $p_i a_i$ iloczyny z dwu pierwszych kolumn. Z sumy wszystkich $p_i a_i$ otrzymujemy średnią wartość a podług wzoru (XVII). Kolumna α_i zawiera błędy $\alpha_i = a_i - a$, następująca iloczyny $p_i \alpha_i$; potem idą wartości α_i^2 i wreszcie iloczyny $p_i \alpha_i^2$, potrzebne do obliczenia błędu średniego. Kolumnę $p_i \alpha_i$ obliczono tylko dla próby, gdyż $[p\alpha] = 0$, albo prawie $= 0$.

L. p.	p_i	a_i	$p_i a_i$	α_i	$p_i \alpha_i$	α_i^2	$p_i \alpha_i^2$
1.	5	45·00	225·00	+ 5·22	+26·10	27·248	136·24
2.	4	31·25	125·00	— 8·53	—34·12	72·761	291·04
3.	3	45·00	135·00	+ 5·22	+15·66	27·248	81·74
4.	5	42·50	212·50	+ 2·72	+13·60	7·398	36·99
5.	3	37·50	112·50	— 2·28	— 6·84	5·198	15·59
6.	3	38·33	115·00	— 1·45	— 4·35	2·103	6·31
7.	3	27·50	82·50	—12·28	—36·84	150·798	452·39
8.	3	43·33	130·00	+ 3·55	+10·65	12·603	37·81
9.	4	40·63	162·52	+ 0·85	+ 3·40	0·723	2·89
10.	2	36·25	72·50	— 3·53	— 7·06	12·461	24·92
11.	3	42·50	127·50	+ 2·72	+ 8·16	7·398	22·19
12.	3	39·17	117·50	— 0·61	— 1·83	0·372	1·12
13.	2	45·00	90·00	+ 5·22	+10·44	27·248	54·49
14.	3	40·83	122·50	+ 1·05	+ 3·15	1·103	3·31
	46		1830·00		+91·16		1167·03
					—91·04		

a) Podług (XVII') mamy:

$$a = \frac{[pa]}{[p]} = \frac{1830}{46} = 39{\cdot}78'',$$

jako sekundy mierzonego kąta.

b) Dla błędu średniego jednego spostrzeżenia podług (XIX):

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[p\alpha^2]}{\nu - 1}} = \pm \sqrt{\frac{1167{\cdot}03}{13}} = \pm\ 9{\cdot}475''.$$

c) Dla błędu średniego średniej arytmetycznej podług (XVIII):

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{\pm\ 9{\cdot}475}{\sqrt{46}} = \pm\ 1{\cdot}397''.$$

d) Dla błędu oczekiwanego szeregu spostrzeżeń podług (VIII):

$$\rho = 0{\cdot}6744\ \mu = 0{\cdot}6744 .\ \pm\ 9{\cdot}475 = \pm\ 6{\cdot}390''.$$

e) Dla błędu oczekiwanego średniej arytmetycznej podług (XIV):

$$R = 0{\cdot}6744\ M = 0{\cdot}6744 .\ \pm\ 1{\cdot}397 = \pm\ 0{\cdot}942''.$$

f) Dla miary dokładności błędu średniego μ podług (VII):

$$h = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} = \frac{1}{9{\cdot}475\sqrt{2}} = 0{\cdot}0746.$$

g) Dla miary dokładności średniej arytmetycznej podług (VII):

$$H = \frac{1}{M\sqrt{2}} = \frac{1}{1{\cdot}397\sqrt{2}} = 0{\cdot}5062.$$

Wartością najprawdopodobniejszą kąta szukanego jest tedy:

$$69^0\ 31'\ 39''{\cdot}78$$

z błędem średnim $\pm\ 1{\cdot}397''$ a ważnością 46, a prawdziwa wartość kąta leży między:

$$69^0\ 31'\ 39{\cdot}''78 + 0{\cdot}942$$

i

$$69^0\ 31'\ 39{\cdot}''78 - 0{\cdot}942.$$

---

5. Dumas w celu wyznaczenia ciężaru atomowego wodoru, przyjąwszy ciężar atomowy tlenu = 100, otrzymał na podstawie 19 doświadczeń następujące wartości dla ciężaru atomowego wodoru: 12·472, 12·480, 12·480, 12·489, 12·490, 12·490, 12·490, 12·491, 12·496, 12·508, 12·522, 12·533, 12·546, 12·547, 12·550,

12·550, 12·551, 12·551, 12·562. Jakaż jest najprawdopodobniejsza wartość ciężaru atomowego wodoru, jakiż jest błąd średni i oczekiwany jednego spostrzeżenia, jakoteż średniej arytmetycznej i jakie są miary dokładności jednego spostrzeżenia i średniej arytmetycznej. Odp. $a = 12·515$, $\mu = \pm 0·31$, $\rho = \pm 0·0209$, $M = \pm 0·0071$, $R = \pm 0·0048$, $h = 22·8$, $H = 99·6$.

6. Wymierzono kąt trzema różnymi teodolitami T_1 z błędem średnim $\mu_1 = 6''$, T_2 z błędem średnim $\mu_2 = 10''$ i T_3 z błędem średnim $\mu_3 = 14''$ i otrzymano odpowiednio wartości $\alpha_1 = 25^0\ 16'\ 17·62''$, $\alpha_2 = 25^0\ 16'\ 13·32''$ i $\alpha_3 = 25^0\ 16'\ 10·23''$. Obliczyć najprawdopodobniejszą wartość kąta i błąd oczekiwany średniej arytmetycznej. Odp. $a = 25^0\ 16'\ 11·96''$, $R = \pm 1·15''$.

7. Mierzono kąt o przybliżonej wartości $12^0\ 15'\ 36''$ trzema różnymi teodolitami i otrzymano w 5 pomiarach teodolitem T_1 wartości: $12^0\ 15'\ 31·7''$, $-\ 39·8''$, $-\ 40·7''$, $-\ 28·6''$, $-\ 32·3''$, w 7 pomiarach teodolitem T_2: $12^0\ 15'\ 32·8''$, $-\ 36·7''$, $-\ 38·2''$, $-\ 29·3''$, $-\ 41·6''$, $-\ 35·3''$, $-\ 36·2''$, w 6 pomiarach teodolitem T_3: $12^0\ 15'\ 32·6''$, $-\ 38·2''$, $-\ 32·3''$ $-\ 39·5''$, $-\ 41·2''$, $-\ 34·3''$. Obliczyć najprawdopodobniejszą wartość kąta, jeżeli poszczególnym teodolitom odpowiadają dokładności, wyrażone ważnościami $p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $p_3 = 1$. Jaki jest błąd oczekiwany średniej arytmetycznej? Odp. $a = 12^0\ 15'\ 35·41''$, $R = \pm 0·68''$.

8. W latach 1845—46 wyznaczono wysokość biegunową obserwatoryum astronomicznego w Moskwie na podstawie wielokrotnych spostrzeżeń i otrzymano następujące wypadki:

1)	$55^0\ 45'\ 20·29''$	z błędem	średnim	$M_1 = 0·368$,
2)	$19·39''$	„	„	$M_2 = 0·400$,
3)	$20·61''$	„	„	$M_3 = 0·295$,
4)	$20·27''$	„	„	$M_4 = 0·341$,
5)	$19·81''$	„	„	$M_5 = 0·279$,
6)	$19·61''$	„	„	$M_6 = 0·590$,
7)	$19·22''$	„	„	$M_7 = 0·388$,
8)	$19·08''$	„	„	$M_8 = 0·265$,
9)	$19·71''$	„	„	$M_9 = 0·381$,

Jaka jest najprawdopodobniejsza wysokość biegunowa tegoż obserwatoryum i jaki jest błąd oczekiwany tegoż obliczenia? Odp. $a = 55^0\ 45'\ 19·763''$, $R = \pm 0·126''$.

Wyrównanie spostrzeżeń pośrednich jednej ilości.

28. Ilości x nie możemy bezpośrednio spostrzegać, tylko ilości x_1, x_2, ... , x_k. Wiadomo tedy, że

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots\ldots + c_k x_k,$$

gdzie stałe c_1, c_2, ... , c_k są ilościami wiadomemi. Otóż chcemy obliczyć wartość najprawdopodobniejszą ilości x i odpowiadające jej błędy, znając błędy średniej arytmetycznej M_1, M_2, ... , M_k, popełnione przy spostrzeganiu ilości x_1, x_2, ... , x_k, przyczem a_1, a_2, ... , a_k oznaczają wartości najprawdopodobniejsze ilości x_1, x_2, ... , x_k.

Wartość najprawdopodobniejszą ilości szukanej x znajdziemy oczywiście, skoro za x_1, x_2, ... , x_k podstawimy wartości najprawdopodobniejsze tychże ilości.

Oznaczywszy tedy przez a wartość najprawdopodobniejszą ilości x, to, skoro:

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \; . \; . \; . \; . \; + c_k x_k,$$

mieć będziemy:

$$a = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \; . \; . \; . \; . \; + c_k a_k \qquad \text{(XX)}$$

jako wzór podający wartość najprawdopodobniejszą ilości x.

Oznaczywszy błąd, odpowiadający tej wartości a, przez M_a, tak że: $M_a = a - x$, to przez odjęcie powyższych obu równań, skoro zważymy, że błędy tak dodatnio, jak odjemnie wziąć można, otrzymamy:

$$\pm M_a = \pm c_1 M_1 \pm c_2 M_2 \pm \; . \; . \; . \; . \; \pm c_k M_k, \qquad (1)$$

gdzie:

$$M_i = a_i - x_i .$$

Potęgując (1) przez 2, mieć będziemy:

$$M_a{}^2 = \sum_i c_i{}^2 M_i{}^2 + 2 \sum_{i,k} \pm c_i c_k M_i M_k.$$

Ponieważ w drugiej sumie występują dodatnie i odjemne wyrazy, to w porównaniu do pierwszej sumy jest ona bardzo małą; dlatego też możemy ją w obliczeniu średniego błędu M_a opuścić, tak że ostatecznie otrzymamy wzór:

$$M_a = \pm \sqrt{[c^2 M^2]} \qquad \text{(XXI)}$$

dostarczający nam sposobu obliczenia błędu średniego średniej wartości ilości x.

Podstawiając w wzorze (XXI) za M_i błędy oczekiwane R_i, to skoro R_a jest błędem oczekiwanym ilości a, mieć będziemy:

$$R_a = \pm \sqrt{[c^2 R^2]}. \qquad \text{(XXII)}$$

Ważności, odpowiadające poszczególnym spostrzeganym ilościom a_1, a_2, ... , a_k, a, oznaczmy przez P_1, P_2, ... , P_k, P_a, a wtedy, skoro $p_0 = 1$, otrzymamy podług (XVIII) następujące ważne równania:

$$P_1 = \frac{1}{M_1{}^2}, \; P_2 = \frac{1}{M_2{}^2}, \; . \; . \; . \; . \; , \; P_k = \frac{1}{M_k{}^2}. \qquad (2)$$

Ponieważ

$$P_a = \frac{1}{M_a^2},$$

to podług (XXI) być musi:

$$\frac{1}{P_a} = M_a^2 = [c^2 M^2],$$

a skoro w sumie po prawej stronie znaku równania zastąpimy M_i przez ważności, otrzymamy:

$$\frac{1}{P_a} = \left[\frac{c^2}{P}\right]. \qquad \text{(XXIII).}$$

29. Załóżmy, że ilość x, którą mamy spostrzegać, jest pewną znaną funkcyą ilości $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k$, które w rzeczywistości spostrzegamy, jakoteż załóżmy, żeśmy wyznaczyli $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k$ jako najprawdopodobniejsze wartości ilości $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k$ i ich błędy średnie $M_1, M_2, \ldots\ldots, M_k$; mamy wyznaczyć najprawdopodobniejszą wartość ilości x i odpowiadające jej błędy.

Zatem, skoro

$$x = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k),$$

to najprawdopodobniejszą wartością niewiadomej ilości x będzie ta, którą nam daje podstawienie najprawdopodobniejszych wartości ilości $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k$, a więc otrzymamy:

$$a = f(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k) \qquad \text{(XXIV)}$$

jako najprawdopodobniejszą wartość ilości x.

Przez odjęcie otrzymamy:

$$a - x = f(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k) - f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k),$$

stąd:

$$a - x = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 - x) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_2 - x) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a_k - x),$$

czyli:

$$\pm M_f = \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} . M_1 \pm \frac{\partial f}{\partial x_2} . M_2 \pm \ldots\ldots \pm \frac{\partial f}{\partial x_k} . M_k,$$

a z porównania z równaniem (1) wypływa wzór następujący:

$$M = \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 M^2\right]} \qquad \text{(XXV)}$$

a dla ważności:

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{P}\right]. \qquad \text{(XXVI)}$$

Znając zatem błąd średni M i ważność P, można przy pomocy wzorów, powyżej wyprowadzonych, wyznaczyć wszystkie inne ilości.

---

30. Zagadnienia. 1. Zapomocą łaty mierniczej o długości l wymierzono przestrzeń, której długość okazała się równą k-razy długości łaty. Przy każdorazowem pokładaniu łaty oszacowano błąd $= \mu$. Jaki jest błąd średni wyniku i jaki błąd oczekiwany?

Rozwiązanie. Niech x oznacza nieznaną długość przestrzeni; tedy jest:

$$x = l + l + l + \ldots + l = k \cdot l,$$

zatem z porównania z (XXI) jest:

$$c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = c_k = 1,$$

więc na wartość najprawdopodobniejszą ilości x otrzymamy:

$$a = kl$$

z błędem średnim:

$$M = \mu\sqrt{k}$$

i ważnością:

$$P = \frac{p}{k},$$

gdzie p oznacza ważność pojedynczego pomiaru, więc:

$$p = \frac{1}{\mu^2},$$

Podług wzoru (XIV) otrzymamy dla błędu oczekiwanego:

$$R = 0{\cdot}6744897M.$$

Z wzoru:

$$M = \mu\sqrt{k} = \mu\sqrt{\frac{a}{l}}$$

widzimy, że błąd wyniku będzie tem większy, im dłuższą jest przestrzeń, którą wymierzamy, i im mniejszą jest łata miernicza, do pomiaru użyta.

2. Gerling używał przy pomiarze podstawy pod sieć geodezyjną 5 łat T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 o długości 1 toazy, 1 łaty t_1 o długości 3', wreszcie 1 łaty t_2 o długości 2'. Po dokładnem, kilkakrotnem porównaniu z łatą normalną okazały się następujące długości:

$T_1 = 1^t + 0{\cdot}0156''$ z błędem średnim: $M_1 = 0{\cdot}0008''$
$T_2 = 1^t + 0{\cdot}0302''$ „ „ „ $M_2 = 0{\cdot}0006''$

$T_3 = 1^t + 0{\cdot}0075''$ z błędem średnim $M_3 = 0{\cdot}0010''$
$T_4 = 1^t + 0{\cdot}0030''$ „ „ „ $M_4 = 0{\cdot}0006''$
$T_5 = 1^t + 0{\cdot}0205''$ „ „ „ $M_5 = 0{\cdot}0023''$
$t_1 = 3' - 0{\cdot}055''$ „ „ „ $M_1' = 0{\cdot}0003''$
$t_2 = 2' + 0{\cdot}002''$ „ „ „ $M_2' = 0{\cdot}0002''$.

Podstawę tę wymierzano w ten sposób, że kładziono naprzód wszystkie łaty sążniowe, jednę po drugiej, a następnie po łacie T_5 następowała łata T_1 i t. d. Przybliżona długość wynosiła $12^t\ 5'$, tak że wkońcu położono jeszcze łatę t_1 i t_2. Jaka jest najprawdopodobniejsza długość podstawy, jaki jest błąd średni i oczekiwany pomiaru, jeżeli wskutek pokładania łat mierniczych pojawiający się błąd oszacowano na 0·01" a błąd przy końcu podstawy występujący na 0·15"?

Rozwiązanie. Ze sposobu, w jaki kładziono łaty po sobie podczas pomiaru podstawy, wynika, że długość:

$$x = 3T_1 + 3T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5 + t_1 + t_2.$$

Wstawiwszy za T_1, T_2 . . . . powyżej podane wartości, otrzymamy:

$$a = 12^t\ 5'\ 0{\cdot}1464''$$

jako najprawdopodobniejszą wartość długości podstawy.

Podług (XXI) błąd średni wyniku byłby:

$$\sqrt{9M_1^2 + 9M_2^2 + 4M_3^2 + 4M_4^2 + 4M_5^2 + M_1'^2 + M_2'^2}.$$

A uwzględniając jeszcze 13 razy objawiający się błąd o wielkości 0·01" podczas kładu łat i błąd 0·15" przy końcu podstawy, będziemy mieli ostatecznie:

$$M = \sqrt{9M_1^2 + 9M_2^2 + 4M_3^2 + 4M_4^2 + 4M_5^2 + M_1'^2 + M_2'^2 + 13(0{\cdot}01)^2 + (0{\cdot}15)^2}$$

a po podstawieniu wartości powyżej podanych, otrzymamy:

$$M = 0{\cdot}1543''.$$

Błąd oczekiwany wynosi zatem:

$$R = 0{\cdot}6744897M = 0{\cdot}6744897\ .\ 0{\cdot}1543$$
$$R = 0{\cdot}1041.$$

Prawdziwa więc długość podstawy leży między:

$$12^t\ 5'\ 0{\cdot}1464'' - 0{\cdot}1041'' = 12^t\ 5'\ 0{\cdot}0423''$$
i $$12^t\ 5'\ 0{\cdot}1464'' + 0{\cdot}1041'' = 12^t\ 5'\ 0{\cdot}2505''.$$

3. Z trójkąta *ABC* wymierzono bok $b = 106$ m., przyczem błąd średni $M_1 = 0{\cdot}06$ m. Następnie wymierzono kąty $\beta = 29^0\ 39'$ z błędem średnim $M_2 = 1'$, i $\gamma = 120^0\ 7'$ z błędem średnim $M_3 = 2'$. Obliczyć długość boku c i błędy mu odpowiadające.

R o z w i ą z a n i e. Na bok c mamy wyrażenie:

$$c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}, \tag{1}$$

zatem po podstawieniu wartości otrzymamy:

$$c = 233{\cdot}34 \text{ m.}$$

Aby znaleźć błąd średni tej ilości, różniczkujmy równanie (1):

$$dc = \frac{\sin\gamma'}{\sin\beta'}\, db + b\, \frac{\cos\gamma'}{\sin\beta'}\, d\gamma' \,.\, \sin 1' - b\, \frac{\sin\gamma' \cos\beta'}{\sin^2\beta'}\, d\beta' \sin 1',$$

gdzie kąty wyrażono w minutach, również $d\beta'$ i $d\gamma'$, gdyż błędy M_2 i M_3, które oznaczają przyrosty $d\beta'$ i $d\gamma'$, podano także w minutach.

Ze względu na wzór (XXI) mamy:

$$db = M_1 = 0{\cdot}06, \qquad c_1 = \frac{\sin\gamma'}{\sin\beta'},$$

$$d\beta' = M_2 = 1', \qquad c_2 = -b\,.\,\frac{\sin\gamma' \cos\beta'}{\sin^2\beta'}\,.\,\sin 1',$$

$$d\gamma' = M_3 = 2', \qquad c_3 = b\,.\,\frac{\cos\gamma'}{\sin\beta'}\, \sin 1',$$

skąd zatem wyznaczymy c_1^2, c_2^2, c_3^2. Przeprowadziwszy tedy rachunek, otrzymamy:

$$c_1^2 = 3{\cdot}0574,$$
$$c_2^2 = 0{\cdot}00897,$$
$$c_3^2 = 0{\cdot}00098.$$

Przeto podług (XXI) mieć będziemy:

$$M^2 = c_1^2 M_1^2 + c_2^2 M_2^2 + c_3^2 M_3^2$$
$$= 3{\cdot}0574\,.\,(0{\cdot}06)^2 + 0{\cdot}00897(1)^2 + 0{\cdot}00098(2)^2$$
$$= 0{\cdot}02390,$$

czyli:

$$M = 0{\cdot}1546$$

a błąd oczekiwany:

$$R = 0{\cdot}6744\,.\, M = 0{\cdot}6744\,.\, 0{\cdot}1546.$$
$$R = 0{\cdot}1043.$$

Prawdziwa tedy długość boku c leży między 233·24 m. a 233·44 m.

Dla miary dokładności boku c otrzymujemy:

$$H = \frac{1}{M\sqrt{2}} = 4{\cdot}574.$$

Dla kąta α znajdziemy:

$$\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma) = 30^0\ 14',$$

a dla błędu średniego podług (XXI), skoro $c_1 = c_2 = -1$, mieć będziemy:

$$M'^2 = M_2{}^2 + M_3{}^2 = (1)^2 + (2)^2 = 5,$$

więc:

$$M' = \sqrt{5} = 2{\cdot}236',$$

a błąd oczekiwany będzie:

$$P' = 0{\cdot}6744\ .\ 2{\cdot}236 = 1{\cdot}508'.$$

Dla miary dokładności zaś:

$$H' = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = 0{\cdot}316.$$

Przyjąwszy ważność jednego spostrzeżenia = 1, to na ważność obliczonego kąta mieć będziemy:

$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{4} + \frac{1}{1} = \frac{5}{4},$$

czyli:

$$P' = \frac{4}{5},$$

gdyż ważności kątów β i γ podług (XIII) są odpowiednio 1 i 4.

4. Z danego stanowiska obserwujemy zapomocą lunety dwa sygnały i oznaczamy kąt, pod którym je widzimy. Jeżeli błąd średni w ustawieniu lunety na sygnał wynosi 0·698" a średni błąd odczytania na kole 2·5", jak wielki błąd średni mamy w wyniku rachunku?

R o z w i ą z a n i e. Błąd spostrzegania w jednym kierunku składa się tutaj z błędu ustawienia lunety i odczytania podziałki; będzie on zatem:

$$M_s = \pm\sqrt{M_1{}^2 + M_2{}^2} = \pm\sqrt{(0{\cdot}698)^2 + (2{\cdot}5)^2}$$
$$= \pm\sqrt{6{\cdot}7372}$$
$$= \pm\ 2{\cdot}5956.$$

Błąd tedy dla kąta składa się z błędu spostrzeżeń dwóch kierunków, a więc:

$$M = \pm \sqrt{M_s^2 + M_s^2} = \pm M_s \sqrt{2}$$
$$= \pm 3{\cdot}6707''.$$

5. Łatą o długości 2·052 m. wymierzono pewną przestrzeń, przykładając ją 13 razy. Przy każdorazowym kładzie łaty oszacowano błąd na 0·5 cm. Jaki jest średni błąd wyniku i błąd oczekiwany? — Odp.: M = ± 1·802, R = ± 1·214.

6. Teodolitem T_1 wymierzono kąt 15 razy i znaleziono wartości: 65° 18·7', — 15·6', — 21·7', — 20·6', — 19·3', — 22·2', — 21·3', — 14·8', — 16·7', — 18·3', — 17·4', — 16·9', — 15·1', — 19·2', — 19·8', a teodolitem T_2 10 razy i otrzymano: 65° 20·4', — 22·6', — 16·3', — 23·8', — 15·4', — 17·8', — 19·3', — 21·5', — 20·9', — 19·8'. W jakim stosunku pozostają miary dokładności, które tym przyrządom przypisać można. — Odp.: $h_1 : h_2 = \sqrt{7{\cdot}3} : \sqrt{5{\cdot}9} = 27 : 24 = 9 : 8$.

7. Dwa kąty A i B trójkąta ABC wymierzono i to kąt A 5 razy teodolitem T_1, a kąt B 7 razy teodolitem T_2 i znaleziono dla A: 32° 15·6', — 19·7', — 21·8', — 17·3', — 18·9', a dla kąta B: 123° 45·6', — 49·3', — 42·6', — 48·9', — 47·6', — 44·9', — 46·7'. Obliczyć najprawdopodobniejszą wartość trzeciego kąta C i błąd oczekiwany tejże wartości. — Odp.: C = 23° 54·9', $R = \pm$ 3·20'.

Wyrównanie spostrzeżeń pośrednich.

31. Spostrzeżenie, w którem obserwujemy nie ilość niewiadomą, o której wyznaczenie nam chodzi, tylko pewną znaną funkcyę tej niewiadomej, nazwaliśmy pośredniem. Wiedząc np., że $y = f(x)$ i znając rodzaj tej funkcyi, to skoro spostrzegaliśmy ilość y, możemy wogóle wyznaczyć wartości na x. Dopóki mamy tylko jedno spostrzeżenie na y, nie ma mowy o wyrównaniu. Gdybyśmy jednak obserwowali y np. 5 razy, to z powodu błędów spostrzeżeń otrzymalibyśmy 5 różnych wartości na y, a wtedy zadaniem rachunku wyrównania jest wyznaczenie wartości na x takiej, która najlepiej odpowiada tym 5 wartościom spostrzeżeń.

Rozumie się samo przez się, że skoro obserwowaliśmy kilka funkcyj $y_1, y_2, \ldots, y_n$ kilku niewiadomych $x_1, x_2, \ldots, x_k$, a temi funkcyami są:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$
$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

to sposób postępowania jest analogiczny. Pamiętać atoli należy, że jeżeli mamy x_k wyznaczyć, musi być $k \leqq n$, bo gdyby $k > n$, to zadanie byłoby nieokreślone.

32. Spostrzeżenia pośrednie wyrównywamy podług tych samych zasad. co bezpośrednie, a mianowicie na zasadzie twierdzenia, że średnia arytmetyczna z kilku spostrzeżeń jest wartością najprawdopodobniejszą ilości szukanej x, albo że suma kwadratów błędów jest najmniejszością.

33. W dalszem badaniu naszem rozróżnimy a) wyrównanie spostrzeżeń pośrednich bez równań warunkowych między szukanemi ilościami zachodzących, czyli krócej wyrównanie spostrzeżeń pośrednich, b) wyrównanie spostrzeżeń pośrednich z równaniami warunkowemi zachodzącemi między ilościami spostrzeganemi, czyli wyrównanie spostrzeżeń ilości zawarowanych i c) wyrównanie spostrzeżeń pośrednich z równaniami warunkowemi zachodzącemi między ilościami szukanemi czyli wyrównanie spostrzeżeń pośrednich ilości zawarowanych.

W każdym z tych przypadków rozróżnimy spostrzeżenia o jednakowej i niejednakowej dokładności.

A. Wyrównanie spostrzeżeń pośrednich
(bez równań warunkowych).

1. Wszystkie spostrzeżenia jednakowej dokładności.

a. Normalne równania Gauss'a.

34. Pomiędzy k niewiadomemi ilościami $x, y, z, \ldots, v$ istnieje n równań:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + k_1v = L_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + k_2v = L_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z + \ldots + k_3v = L_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx + b_ny + c_nz + \ldots + k_nv = L_n, \end{array}\right\} \quad (1)$$

gdzie $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$ są ilości spostrzegane, $a, b, c, \ldots, k$ ilości wiadome. Chodzi zatem o wyznaczenie równań, któreby dały najlepsze wartości na $x, y, z, \ldots, v$, spełniające powyższy układ równań, gdy na miejsce $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$ wstawimy przez spostrzeżenie znalezione wartości $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$.

Gdybyśmy znali dokładnie $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$, to, ponieważ te n równania nie są sprzeczne, otrzymalibyśmy łatwo wartości na $x, y, z, \ldots, v$, gdyż potrzebaby było wyznaczyć je z k którychkolwiek n równań. Pozostałe zaś $(n-k)$ równania spełniłyby się same dla znalezionych wartości. Gdyby $n < k$, nie moglibyśmy wyznaczyć k ilości $x, y, z, \ldots, v$.

Kładąc więc na miejsce $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$ przez spostrzeżenie znalezione ilości $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$, natenczas otrzymamy układ n równań:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + k_1 v = l_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + k_2 v = l_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots + k_3 v = l_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x + b_n y + c_n z + \ldots + k_n x = l_n, \end{array}\right\} \quad (2)$$

które nie będą już z sobą zgodne, t. j. nie będzie wogóle takich wartości na $x, y, z, \ldots, v$, któreby spełniły wszystkie równania, a przyczyną tego są błędy, w spostrzeżeniach popełnione, dające się wyrazić równaniem:

$$\varepsilon_i = L_i - l_i, \quad (3)$$

gdzie $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. W tym przypadku, gdyby wszystkie $\varepsilon_i = 0$, a więc wszystkie $L_i = l_i$, równania (2) byłyby niesprzeczne, a więc identyczne z układem (1).

Ponieważ nie można uskutecznić, aby wszystkie $\varepsilon_1 = 0$, staramy się tedy spełnić inny warunek, a mianowicie ten, aby suma kwadratów błędów była najmniejszością, aby więc każdy z błędów stał się ile możności najmniejszym przez mające się wyznaczyć ilości $x, y, z, \ldots, v$. Mamy zatem ilości $x, y, z, \ldots, v$ wyznaczyć w ten sposób, aby

$$[\varepsilon\varepsilon] = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots + \varepsilon_n^2$$

było najmniejszością. W takim razie być musi:

$$\frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial z} = 0, \ldots, \frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial v} = 0. \quad (4)$$

Przedstawiwszy sobie ε_i jako funkcye ilości $x, y, z, \ldots, v$, otrzymamy, po podstawieniu w równanie (3) za L_i wartości otrzymanej z równań (1), następujący układ równań:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + k_1 v - l_1, \\ \varepsilon_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + k_2 v - l_2, \\ \varepsilon_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots + k_3 v - l_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_n = a_n x + b_n y + c_n z + \ldots + k_n v - l_n. \end{array}\right\} \quad (5)$$

A że:

$$\frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial x} = 2\left(\varepsilon_1 \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial\varepsilon_2}{\partial x} + \varepsilon_3 \frac{\partial\varepsilon_3}{\partial x} + \ldots + \varepsilon_n \frac{\partial\varepsilon_n}{\partial x}\right),$$

jakoteż, że:

$$\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x} = a_1, \quad \frac{\partial\varepsilon_2}{\partial x} = a_2, \quad \frac{\partial\varepsilon_3}{\partial x} = a_3, \ldots, \frac{\partial\varepsilon_n}{\partial x} = a_n,$$

mieć będziemy:

$$\frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial x} = 2\,(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3 + \ldots + a_n\,\varepsilon_n),$$

albo też:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial x} = {} & a_1\,(a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + k_1v - l_1) + \\ & + a_2\,(a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + k_2v - l_2) + \\ & + a_3\,(a_3x + b_3y + c_3z + \ldots + k_3v - l_3) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_n\,(a_nx + b_ny + c_nz + \ldots + k_nv - l_n)\,,\end{aligned}$$

czyli:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial x} = [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \ldots + [ak]\,v - [al],$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned}[aa] &= a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + \ldots + a_n^{\,2}, \\ [ab] &= a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots\ldots + a_nb_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [ak] &= a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots\ldots + a_nk_n\,.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Analogicznie postępując, dojdziemy do następujących rezultatów:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial y} &= [ba]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + \ldots + [bk]\,v - [bl], \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial z} &= [ca]\,x + [cb]\,y + [cc]\,z + \ldots + [ck]\,v - [cl], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial v} &= [ka]\,x + [kb]\,y + [kc]\,z + \ldots + [kk]\,v - kl],\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

przyczem pamiętać należy, że:

$$[ab] = [ba],$$
$$[ac] = [ca],\ \text{i t. d.}$$

Wskutek równań (7) przejdą równania warunkowe (4) dla najmniejszości w następujące:

$$\left.\begin{aligned}&[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \ldots\ldots + [ak]\,v = [al]\,, \\ &[ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + \ldots\ldots + [bk]\,v = [bl]\,, \\ &[ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + \ldots\ldots + [kk]\,v = [cl]\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[ak]\,x + [bk]\,y + [ck]\,z + \ldots\ldots + [kk]\,v = [kl]\,,\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

który to układ k równań wystarcza do wyznaczenia k ilości $x, y, z, \ldots, v$. Ten to układ równań zowiemy normalnemi równaniami Gauss'a.

35. Chcąc okazać, że układ równań (8) dopuszcza tylko jedno rozwiązanie co do ilości $x, y, z, \ldots, v$, należałoby równania te istotnie rozwiązać. Aby uwidocznić należycie sposób postępowania, który przy rozwiązaniu okazuje się bardzo praktycznym, przyjmiemy, że mamy tylko cztery niewiadome x, y, z, t, a więc następujące cztery równania normalne:

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,t &= [al],\\
[ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + [bd]\,t &= [bl],\\
[ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + [cd]\,t &= [cl],\\
[ad]\,x + [bd]\,y + [cd]\,z + [dd]\,t &= [dl],
\end{aligned}\right\} \qquad (8')$$

gdzie spółczynniki, na przekątnej leżące tj. $[aa]$, $[bb]$, $[cc]$, $[dd]$, jako sumy rzeczywistych kwadratów, są zawsze dodatnie i różne od zera. Z pierwszego równania układu (8′) wynika:

$$x = -\frac{[ab]}{[aa]}\,y - \frac{[ac]}{[aa]}\,z - \frac{[ad]}{[aa]}\,t + \frac{[al]}{[aa]}, \qquad (9)$$

Podobnie możnaby wyznaczyć y z drugiego, z z trzeciego i t z czwartego równania.

Podstawiwszy wartość przedstawioną równaniem (9) w pozostałe trzy równania układu (8′), otrzymamy następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
&\left([bb] - \frac{[ab]}{[aa]}\,[ab]\right) y + \left([bc] - \frac{[ac]}{[aa]}\,[ab]\right) z + \\
&\qquad + \left([bd] - \frac{[ad]}{[aa]}\,[ab]\right) t = \left([bl] - \frac{[al]}{[aa]}\,[ab]\right),\\
&\left([bc] - \frac{[ab]}{[aa]}\,[ac]\right) y + \left([cc] - \frac{[ac]}{[aa]}\,[ac]\right) z + \\
&\qquad + \left([cd] - \frac{[ad]}{[aa]}\,[ac]\right) t = \left([cl] - \frac{[al]}{[aa]}\,[ac]\right),\\
&\left([bd] - \frac{[ab]}{[aa]}\,[ad]\right) y + \left([cd] - \frac{[ac]}{[aa]}\,[ad]\right) z + \\
&\qquad + \left([dd] - \frac{[ad]}{[aa]}\,[ad]\right) t = \left([dl] - \frac{[al]}{[aa]}\,[ad]\right).
\end{aligned}$$

Kładąc dla krótkości pisania:

$$[bb\,.\,1] = [bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]},$$

$$[bc\,.\,1] = [bc] - \frac{[ac]\,[ab]}{[aa]}, \text{ i t. d.,}$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned}
[bb\,.\,1]\,y + [bc\,.\,1]\,z + [bd\,.\,1]\,t &= [bl\,.\,1], \\
[bc\,.\,1]\,y + [cc\,.\,1]\,z + [cd\,.\,1]\,t &= [cl\,.\,1], \qquad (10) \\
[bd\,.\,1]\,y + [cd\,.\,1]\,z + [dd\,.\,1]\,t &= [dl\,.\,1],
\end{aligned}$$

jako układ pierwszych równań eliminacyjnych. Układ ten ma analogiczne własności, co układ (8), a mianowicie spółczynniki wyrazów na przekątnej leżących, t. j. $[bb\,.\,1]$, $[cc\,.\,1]$, $[dd\,.\,1]$, są dodatnie i różne od zera.

Albowiem jest:

$$[bb\,.\,1] = [bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]} = \frac{[aa]\,[bb] - [ab]\,[ab]}{[aa]},$$

a że podług (6) jest:

$$[aa] = \sum_{i=1}^{i=n} a_i^2 \quad , \quad [bb] = \sum_{k=1}^{k=n} b_k^2 \ ,$$

przeto:

$$[aa]\,.\,[bb] = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} a_i^2 b_k^2 = \sum_{i=1}^{i=n} a_i^2 b_i^2 + \sum_{i,k} a_i^2 b_k^2 \ ,$$

gdzie $\sum\limits_{i,k}$ oznacza, że należy wziąć wszelkie kombinacye z i i k, w których i jest różne od k.

Podobnież ponieważ jest:

$$[ab] = \sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i \quad , \quad [ab] = \sum_{k=1}^{k=n} a_k b_k \ ,$$

przeto:

$$[ab]\,.\,[ab] = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} a_i a_k b_i b_k = \sum_{i=1}^{i=n} a_i^2 b_i^2 + \sum_{i,k} a_i a_k b_i b_k.$$

Zatem otrzymamy:

$$\begin{aligned}
[aa]\,.\,[bb] - [ab]\,.\,[ab] &= \sum_{i,k} a_i^2 b_k^2 - \sum_{i,k} a_i a_k b_i b_k \\
&= \sum_{i,k} (a_i^2 b_k^2 - a_i a_k b_i b_k) \\
&= \sum_{i,k}{}' (a_i^2 b_k^2 - 2a_i a_k b_i b_k + a_k^2 b_i^2),
\end{aligned}$$

gdzie Σ' oznaczać ma, że odtąd przy wyborze i i k należy wybierać tylko $i < k$. Tedy będzie:

$$[aa]\,[bb] - [ab]\,[ab] = \sum_{i,k}{}' (a_i b_k - a_k b_i)^2,$$

a więc:

$$\frac{[aa]\,[bb] - [ab]\,[ab]}{[aa]} = \sum_{i,k}{}' \frac{(a_i b_k - a_k b_i)^2}{[aa]}$$

a że $[aa]$, jak powyżej widzieliśmy, jest dodatnie, przeto $\sqrt{[aa]}$ jest rzetelny, więc:

$$[bb\,.\,1] = [bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]} = \sum_{i,\,k}{}' \left(\frac{a_i b_k - a_k b_i}{\sqrt{[aa]}} \right)^2 \tag{11}$$

jest sumą samych kwadratów, przeto dodatnie. Zerem atoli $[bb\,.\,1]$ być nie może, gdyż dla wszystkich i i $k > i$ musiałoby się spełnić:

$$a_i b_k - a_k b_i = 0$$

czyli:

$$\frac{b_i}{a_i} = \frac{b_k}{a_k},$$

co być nie może.

Z pierwszego równania układu (10) można zawsze wyznaczyć y w postaci:

$$y = -\frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\,z - \frac{[bd\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\,t + \frac{[bl\,.\,1]}{[bb\,.\,1]} \tag{9'}$$

i podstawić tę wartość w pozostałe dwa równania, w skutek czego mieć będziemy:

$$\left([cc\,.\,1] - \frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}[bc\,.\,1]\right) z + \left([cd\,.\,1] - \frac{[bd\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}[bc\,.\,1]\right) t =$$
$$= \left([cl\,.\,1] - \frac{[bl\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}[bc\,.\,1]\right),$$

$$\left([cd\,.\,1] - \frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}[bd\,.\,1]\right) z + \left([dd\,.\,1] - \frac{[bd\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}[bd\,.\,1]\right) t =$$
$$= \left([dl\,.\,1] - \frac{[bl\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}[bd\,.\,1]\right),$$

albo też przyjąwszy schematyczne oznaczenie spółczynników, tj.:

$$[cc\,.\,2] = [cc\,.\,1] - \frac{[bc\,.\,1]\,[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]},$$

$$[cd\,.\,2] = [cd\,.\,1] - \frac{[bd\,.\,1]\,[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}, \text{ i t d.},$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} [cc\,.\,2]\,z + [cd\,.\,2]\,t &= [cl\,.\,2] \\ [cd\,.\,2]\,z + [dd\,.\,2]\,t &= [dl\,.\,2] \end{aligned} \tag{12}$$

jako układ drugich równań eliminacyjnych.

Ponieważ podług (11) spółczynnik $[bb\,.\,1]$ jest sumą kwadratów i to samo w zupełności przypada dla $[cc\,.\,1]$, to podobnym rachunkiem, co powyżej, wykazać można, że $[cc\,.\,2]$ i $[dd\,.\,2]$ są również sumami kwadratów, więc zawsze dodatnie i od zera rożne.

Z pierwszego równania układu (12) otrzymać można zawsze z:

$$z = -\frac{[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}\,t + \frac{[cl\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}, \qquad (9'')$$

a po podstawieniu w drugie równanie układu (12) będzie:

$$\left([dd\,.\,2] - \frac{[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}\,[cd\,.\,2]\right) t = \left([dl\,.\,2] - \frac{[cl\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}\,[cd\,.\,2]\right)$$

albo też oznaczywszy schematycznie:

$$[dd\,.\,3] = [dd\,.\,2] - \frac{[cd\,.\,2]\,[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]},$$

$$[dl\,.\,3] = [dl\,.\,2] - \frac{[cl\,.\,2]\,[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]},$$

mieć będziemy:

$$[dd\,.\,3]\,t = [dl\,.\,3] \qquad (13)$$

jako równanie przedstawiające układ trzecich równań eliminacyjnych.

I tutaj $[dd\,.\,3]$ jest sumą kwadratów, więc zawsze dodatnie i od zera różne. Z (13) otrzymamy:

$$t = \frac{[dl\,.\,3]}{[dd\,.\,3]}. \qquad (9''')$$

W ten sposób wskazane jest rozwiązanie równań normalnych. Zapomocą $(9''')$ obliczamy wartość t ze spółczynników równań normalnych; wartość t podstawiona w $(9'')$ da wartość na z, a skoro wartości t i z podstawimy w $(9')$ mieć będziemy y, a wkońcu podstawiwszy y, z, t, w (9), otrzymamy wartość na x.

Zatem za równania normalne otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{[ab]}{[aa]}\,y - \frac{[ac]}{[aa]}\,z - \frac{[ad]}{[aa]}\,t + \frac{[al]}{[aa]},\\
y &= -\frac{[bc.1]}{[bb.1]}\,z - \frac{[bd.1]}{[bb.1]}\,t + \frac{[bl.1]}{[bb.1]},\\
z &= -\frac{[cd.2]}{[cc.2]}\,t + \frac{[cl.2]}{[cl.2]},\\
t &= \frac{[dl.3]}{[dd.3]},
\end{aligned} \qquad (A)$$

który jest zupełnie równoważny układowi równań normalnych i dozwala obliczyć bezpośrednio wartości t, z, y, x, gdy spółczynniki równań eliminacyjnych są znane. Układ tych równań nazwiemy układem zredukowanych równań normalnych.

36. Z powyższego przeprowadzenia rachunku widoczny jest sposób postępowania w tym przypadku, gdy więcej jest niewiadomych niż cztery. Wskazana droga doprowadza zawsze do wyniku w postaci równań (A).

37. Okażemy w niniejszym ustępie, że wartości x, y, z, t, wysnuwające się z równań normalnych lub z układu im równoważnego, czynią sumę kwadratów błędów najmniejszością.

Za dowolne x, y, z, t, połóżmy:

$$\begin{aligned} [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,t - [al] &= X, \\ [bb.1]\,y + [bc.1]\,z + [bd.1]\,t - [bl.1] &= Y_1, \\ [cc.2]\,z + [cd.2]\,t - [cl.2] &= Z_2, \\ [dd.3]\,t - [dl.3] &= T_3. \end{aligned} \tag{14}$$

Natenczas owe wartości na x, y, z, t, które spełnią $X = o$, $Y_1 = o$, $Z_2 = o$, $T_3 = o$, będą przedstawiały rozwiązania równań normalnych (8').

Podług równań (5) mamy:

$$\varepsilon_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i t - l_i\,,$$

więc:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i\varepsilon_i = {} & a_i a_i x^2 + b_i b_i y^2 + c_i c_i z^2 + d_i d_i t^2 - l_i l_i + \\ & + 2\,(a_i b_i xy + a_i c_i xz + a_i d_i xt - a_i l_i x + b_i c_i yz + \\ & + b_i d_i yt - b_i l_i y + c_i d_i zt - c_i l_i z - d_i l_i t), \end{aligned}$$

a przez sumowanie od $i = 1$ do $i = n$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} [\varepsilon\varepsilon] = {} & [aa]x^2 + [bb]y^2 + [cc]z^2 + [dd]t^2 - [ll] + \\ & + 2([ab]y + [ac]z + [ad]t - [al])\,x \\ & + 2([bc]z + [bd]t - [bl])\,y \\ & + 2([cd]t - [cl])\,z \\ & - 2[dl]\,t. \end{aligned}$$

Zebrawszy wyrazy z x^2 i x i uzupełniwszy je do zupełnego kwadratu mieć będziemy:

$$\begin{aligned} [\varepsilon\varepsilon] = {} & \frac{1}{[aa]}\Big([aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]t - [al]\Big)^2 - \\ & - \frac{1}{[aa]}\Big([ab]y + [ac]z + [ad]t - [al]\Big)^2 + \\ & + [bb]y^2 + [cc]z^2 + [dd]t^2 - [ll] + \\ & + 2\,([bc]z + [bd]t - [bl])y + \\ & + 2([cd]t - [cl])z \\ & - 2[dl]t \end{aligned}$$

czyli uwzględniając pierwsze równanie (14):

$$[\varepsilon\varepsilon] - \frac{X^2}{[aa]} = \left([bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]}\right) y^2 + \left([cc] - \frac{[ac]^2}{[aa]}\right) z^2 +$$
$$+ \left([dd] - \frac{[ad]^2}{[aa]}\right) t^2 - \left([ll] - \frac{[al]^2}{[aa]}\right) + 2\left([bc] - \frac{[ac][ab]}{[aa]}\right) zy$$
$$+ 2\left([bd] - \frac{[ab][ad]}{[aa]}\right) ty - 2\left([bl] - \frac{[ab][al]}{[aa]}\right) y$$
$$+ 2\left([cd] - \frac{[ac][ad]}{[aa]}\right) tz - 2\left([cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]}\right) z$$
$$- 2\left([dl] - \frac{[ad][al]}{[aa]}\right) t$$

czyli:

$$[\varepsilon\varepsilon] - \frac{X^2}{[aa]} = [bb\,.\,1] y^2 + 2\left([bc\,.\,1] z + 2\left([bd\,.\,1] t - [bl\,.\,1]\right)\right) y$$
$$+ [cc\,.\,1] z^2 + [dd\,.\,1] t^2 + [ll\,.\,1]$$
$$+ 2\left([cd\,.\,1] t - [cl\,.\,1]\right) z$$
$$- 2\,[dl\,.\,1]\, t.$$

Uzupełniwszy pierwszy wiersz do zupełnego kwadratu, będziemy mieli:

$$[\varepsilon\varepsilon] - \frac{X^2}{[aa]} = \frac{1}{[bb.1]}\left([bb.1]\, y + [bc.1]\, z + [bd.1]\, t + [bl.1]\right)^2 -$$
$$- \frac{1}{[bb.1]}\left([bc.1]\, z + [bd.1]\, t - [bl.1]\right)^2$$
$$+ [cc.1]\, z^2 + [dd.1]\, t^2 + [ll.1] +$$
$$+ 2\left([cd.1]\, t - [cl.1]\right) z$$
$$- 2\,[dl.1]\, t,$$

czyli uwzględniając drugie równanie układu (14), otrzymamy:

$$[\varepsilon\varepsilon] - \frac{X^2}{[aa]} - \frac{Y_1{}^2}{[bb.1]} = \left([cc.1] - \frac{[bc.1]^2}{[bb.1]}\right) z^2 + \left([dd.1] -\right.$$
$$\left. - \frac{[bd.1]^2}{[bb.1]}\right) t^2 + \left([ll.1] - \frac{[bl.1]^2}{[bb.1]}\right)$$

$$+ 2\left([cd.1] - \frac{[bc.1]\,[bd.1]}{[bb.1]}\right) tz - 2\left([cl.1] - \frac{[bc.1]\,[bl.1]}{[bb.1]}\right) z$$

$$- 2\left([dl.1] - \frac{[bd.1]\,[bl.1]}{[bb.1]}\right) t$$

czyli:

$$[\varepsilon\varepsilon] - \frac{X^2}{[aa]} - \frac{Y_1{}^2}{[bb.1]} = [cc.2]\,z^2 + 2\,([cd.2]\,t - [cl.2])\,z +$$

$$+ [dd.2]\,t^2 - 2\,[dl.2]\,t + [ll.2]$$

$$= \frac{1}{[cc.2]}\,([cc.2]\,z + [cd.2]\,t - [cl.2])^2 -$$

$$- \frac{1}{[cc.2]}\,([cd.2]\,t - [cl.2])^2$$

$$+ [dd.2]\,t^2 - 2\,[dl.2]\,t + [ll.2],$$

a więc w uwzględnieniu trzeciego równania (14):

$$[\varepsilon\varepsilon] - \frac{X^2}{[aa]} - \frac{Y_1{}^2}{[bb.1]} - \frac{Z_2{}^2}{[cc.2]} = \left([dd.2] - \frac{[cd.2]^2}{[cc.2]}\right) t^2 +$$

$$+ \left([ll.2] - \frac{[cl.2]^2}{[cc.2]}\right)$$

$$- 2\left([dl.2] - \frac{[cl.2]\,[cd.2]}{[cc.2]}\right) t$$

$$= [dd.3]\,t^2 - 2\,[dl.3]\,t + [ll.3].$$

Uwzględniwszy ostatnie równanie grupy (14), będziemy mieli:

$$[\varepsilon\varepsilon] - \frac{X^2}{[aa]} - \frac{Y_1{}^2}{[bb.1]} - \frac{Z_2{}^2}{[cc.2]} - \frac{T_3{}^2}{[dd.3]} = [ll.3] - \frac{[dl.3]^2}{[dd.3]}.$$

Położywszy:

$$[ll.3] - \frac{[dl.3]\,[dl\;3]}{[dd.3]} = [ll.4],$$

otrzymamy:

$$[\varepsilon\varepsilon] = \frac{X^2}{[aa]} + \frac{Y_1{}^2}{[bb.1]} + \frac{Z_2{}^2}{[cc.2]} + \frac{T_3{}^2}{[dd.3]} + [ll.4]. \qquad (15)$$

Ilości $[aa]$, $[bb\,.\,1]$, $[cc\,.\,2]$, $[dd\,.\,3]$ są wszystkie dodatnie i od zera różne. Nadawszy tedy x, y, z, t jakiekolwiek wartości, będzie $[\varepsilon\varepsilon]$ zawsze większe, aniżeli dla wartości na x, y, z, t, które czynią równocześnie:

$$X = 0,\; Y_1 = 0,\; Z_2 = 0,\; T_3 = 0,$$

więc które są rozwiązaniami równań normalnych.

Podstawiwszy w równania błędów (5) za x, y, z, t wartości, które wypływają z równań normalnych, to ilości ε_i mogą przejść w α_i. Wtedy ε_i są prawdziwymi błędami, gdy zaś α_i błędami, które popełniono, gdy zamiast prawdziwych wartości za x, y, z, t podstawiono rozwiązania równań normalnych. Z równania (15) wynika zatem, że:

$$[\alpha\alpha] = [ll\,.\,4]. \tag{16}$$

A więc i $[ll\,.\,4]$ jest sumą kwadratów, co też z budowy tej ilości wypływa.

Jeżeli zaś mamy k niewiadomych ilości x, y, z, t, . . . , v, to analogicznie do powyższego przeprowadzenia znajdziemy:

$$[\varepsilon\varepsilon] = \frac{X^2}{[aa]} + \frac{Y_1{}^2}{[bb.1]} + \frac{Z_2{}^2}{[cc.2]} + \frac{T_3{}^2}{[dd.3]} + \ldots + \frac{V_{k-1}{}^2}{[kk.k-1]} + [ll.k],$$

jakoteż, że

$$[\alpha\alpha] = [ll\,.\,k].$$

Równania

$$X = 0,\; Y_1 = 0,\; Z_2 = 0,\; T_3 = 0, \;.\;.\;.\;.\; V_{k-1} = 0$$

zastępują równania normalne i dostarczają wartości na x, y, z, t, . . . , v, dla których suma kwadratów błędów jest minimum.

38. Niech L_1, L_2, ... , L_n będą ilościami mającemi się spostrzegać i niech będzie:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= f_1\,(x,\,y,\,z,\,.\;.\;.\;.\,,\,v), \\ L_2 &= f_2\,(x,\,y,\,z,\,.\;.\;.\;.\,,\,v), \\ &\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ L_n &= f_n\,(x,\,y,\,z,\,.\;.\;.\;.\,,\,v), \end{aligned}\right| \tag{17}$$

gdzie f_1, f_2, ... , f_n są funkcyami znanemi. Jeżeli ze spostrzeżenia otrzymaliśmy wartości l_1, l_2, ... , l_n, tak że $\varepsilon_i = L_i - l_i$ są błędami pojawiającymi się podczas spostrzeżenia, to błędy te według założenia muszą być nieznaczne. Podstawiając tedy za L_1, L_2, . . . , L_n wartości l_1, l_2, ... , l_n, otrzymamy w jakikolwiekbądź sposób układ wartości na x_1 y_1, z_1, ... , v_1, który albo czyni zadosyć wszystkim n równaniom albo przynajmniej k z nich. Prawdziwe więc wartości x, y, z, ... , v, które spełniają równania (17), różnić się będą nieznacznie od x_1, y_1, $z_1, \ldots, v_1$, tak że będziemy mogli podstawić:

$$x - x_1 = \xi, \quad y - y_1 = \eta, \quad z - z_1 = \zeta, \quad \ldots, \quad v_1 - v = \omega,$$

gdzie $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega$ są ilościami małemi.

Podstawiwszy tedy $x_1, y_1, z_1, \ldots, v_1$ w równania (17) otrzymamy:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, y_1, z_1, \ldots, v_1) = l_1 - \lambda_1 \\ f_2(x_1, y_1, z_1, \ldots, v_1) = l_2 - \lambda_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, y_1, z_1, \ldots, v_1) = l_n - \lambda_n \end{array}\right\} \qquad (18)$$

gdzie λ_i znikają dla k równań wziętych do wyznaczenia ilości $x_1, y_1, z_1, \ldots, v_1$, podczas gdy pozostałe λ są nieskończenie małe, gdyż $x_1, y_1, z_1, \ldots, v_1$ niewiele się różnią od wartości $x, y, z, \ldots, v$, jakoteż także mało się różnią $l_1, l_2, \ldots, l_n$ od $L_1, L_2, \ldots, L_n$.

Ze względu na równania (17) i (18) mieć będziemy:

$$\varepsilon_i = L_i - l_i = f_i(x, y, z, \ldots, v) - f_i(x_1, y_1, z_1, \ldots, v_1) - \lambda_i$$

a opuszczając wyższe potęgi z $x - x_1 = \xi$, $y - y_1 = \eta, \ldots$, otrzymamy:

$$\varepsilon_i = -\lambda_i + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_1 \xi + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)_1 \eta + \left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\right)_1 \zeta + \ldots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial v}\right)_1 \omega,$$

gdzie $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_1$ oznacza, że w cząstkowych pochodnych funkcyi f co do x za $x, y, z, \ldots, v$ podstawiono $x_1, y_1, z_1, \ldots, v_1$. Przeto znane są wartości:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_1 = a_i, \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)_1 = b_i, \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\right)_1 = c_i, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial v}\right)_1 = k_i,$$

skutkiem czego otrzymamy następujący układ równań:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 + \lambda_1 = a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + \ldots + k_1\omega \\ \varepsilon_2 + \lambda_2 = a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + \ldots + k_2\omega \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_n + \lambda_n = a_n\xi + b_n\eta + c_n\zeta + \ldots + k_n\omega. \end{array}\right\} \qquad (19)$$

Z tym układem równań, zupełnie analogicznym do układu równań błędów, postępujemy co do wyznaczenia wartości na $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega$, które $[\varepsilon + \lambda)^2]$ czynią najmniejszością, zupełnie tak samo, co z układem równań błędów.

Znalazłszy takie wartości błędów, tedy mamy:

$$x = x_1 + \xi, \quad y = y_1 + \eta, \quad z = z_1 + \zeta, \quad \ldots, \quad v = v_1 + \omega$$

jako wartości niewiadomych, które wprawdzie nie czynią ściśle zadość równaniom (17), gdy za $L_1, L_2, \ldots, L_n$ podstawimy

$l_1, l_2, \ldots, l_n$, ale zawsze lepiej je spełniają niż $x_1, y_1, z_1, \ldots, v_1$.

Wielkiej wagi jest tutaj, aby wartości na $x_1, y_1, z_1, \ldots, v_1$, obrano tak, aby poprawki $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega$ wypadły jak najmniejsze. Gdyby dla otrzymanych wartości $x, y, z, \ldots, v$ suma kwadratów błędów była jeszcze dość znaczną, należy te wartości $x, y, z, \ldots, v$ podstawić za wartości $x_1, y_1, z_1, \ldots, v_1$ w cząstkowych pochodnych

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y}, \frac{\partial f_i}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial v},$$

skutkiem czego otrzymamy nowe spółczynniki:

$$a_i', b_i', c_i', \ldots, k_i'$$

a zapomocą w ten sposób uzyskanego układu równań błędów znajdziemy nowe poprawki, jakie na wartościach $x, y, z, \ldots, v$ uczynić należy.

---

39. Zagadnienia. 1. Z punktu O wymierzono w płaszczyźnie ku czterem punktom A, B, C, D kąty i znaleziono następujące wartości: AOB = 48° 17′ 1·4″, AOC = 96° 52′ 16·8″, AOD = 152° 54′ 6·8″, BOC = 58° 35′ 14·3″, BOD = 104° 37″ 7·8″ i COD = 56° 1′ 48·9″. Wyznaczyć najprawdopodobniejsze wartości tychże kątów.

Rozwiązanie. Ponieważ te cztery kierunki tworzą między sobą 6 kątów, które pomierzono, a trzy z tych kątów, jak AOB, AOC i AOD wyznaczają już te kierunki, to mamy w takim razie 3 nadliczbowe pomiary a zadaniem naszem jest wyznaczenie takich wartości tych 6 kątów, dla których suma kwadratów błędów jest najmniejszością, czyli chodzi nam o wyznaczenie najprawdopodobniejszych wartości tych kątów.

W tym celu połóżmy:

$$\begin{aligned} AOB &= 48^0\ 17'\ 1'' + x, \\ AOC &= 96^0\ 52'\ 16'' + y, \\ AOD &= 152^0\ 54'\ 6'' + z, \end{aligned} \qquad (1)$$

gdzie x, y, z, oznaczają poprawki, które przeprowadzić należy na wartościach kątów, aby otrzymać wartości najprawdopodobniejsze.

Ponieważ podług pomiaru znaleziono:

$$\begin{aligned} AOB &= 48^0\ 17'\ 1{\cdot}4'' \\ AOC &= 95^0\ 52'\ 16{\cdot}8'' \\ AOD &= 152^0\ 54'\ 6{\cdot}8'' \end{aligned}$$

przeto wynika, że:

$$\begin{aligned} x &= 0{\cdot}4'', \\ y &= 0{\cdot}8'', \\ z &= 0{\cdot}8''. \end{aligned} \qquad (2)$$

Ponieważ BOC = AOC — AOB, przeto podług (1) mamy:

$$\begin{array}{lrl} & BOC = 48^0\ 35'\ 15'' & + y - x \\ \text{a z pomiaru:} & BOC = 48^0\ 35'\ 14{\cdot}3'' & \\ \hline \text{przeto:} & 0 = & \mathbf{0{\cdot}7''} + \mathbf{y} - \mathbf{x} \end{array}$$

tj. związek, który mają spełnić x i y.

Podobnież:

BOD = AOD — AOB, przeto podług (1):

$$\begin{array}{lrl} & BOD = 104^0\ 37'\ 5'' & + z - x, \\ \text{a z pomiaru:} & BOD = 104^0\ 37'\ 7{\cdot}8'' & \\ \hline \text{więc:} & 0 = & -\ \mathbf{2{\cdot}8''} + \mathbf{z} - \mathbf{x} \end{array}$$

jako równanie warunkowe, któremu z i x mają uczynić zadość. Wreszcie:

COD = AOD — AOC,

$$\begin{array}{lrl} \text{przeto podług (1):} & COD = 56^0\ 1'\ 50'' & + z - y, \\ \text{z pomiaru:} & COD = 56^0\ 1'\ 48{\cdot}9'' & \\ \hline \text{więc:} & 0 = & \mathbf{1{\cdot}1''} + \mathbf{z} - \mathbf{y} \end{array}$$

jako trzecie równanie warunkowe, wykazujące związek między z i y. Mamy zatem następujące równania błędów:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 0y & + & 0z & = & 0{\cdot}4 \\ 0x & + & y & + & 0z & = & 0{\cdot}8 \\ 0x & + & 0y & + & z & = & 0{\cdot}8 \\ x & - & y & + & 0z & = & 0{\cdot}7 \\ -\ x & + & 0y & + & z & = & 2{\cdot}8 \\ 0x & + & y & - & z & = & 1{\cdot}1. \end{array}$$

Wypisawszy sobie spółczynniki w tabelkę, w celu wyznaczenia spółczynników równań normalnych podług powyżej wskazanej teoryi, otrzymamy:

L. p.	a	b	c	l
1.	1	0	0	0·4
2.	0	1	0	0·8
3.	0	0	1	0·8
4.	1	— 1	0	0·7
5.	— 1	0	1	2·8
6.	0	1	— 1	1·1

Z tej tabliczki układamy następującą:

L. p.	aa	ab	ac	al	bb	bc	bl	cc	cl
1.	1	0	0	0·4	0	0	0	0	0
2.	0	0	0	0	1	0	0·8	0	0
3.	0	0	0	0	0	0	0	1	0·8
4.	1	− 1	0	0·7	1	0	−0·7	0	0
5.	1	0	− 1	−2·8	0	0	0	1	2·8
6.	0	0	0	0	1	− 1	1·1	1	−1·1
	3	− 1	− 1	−1·7	3	− 1	1·2	3	2·5

Ostatni wiersz poziomy daje zatem:

$$[aa] = 3\,,\ [ab] = -1\,,\ [ac] = -1\,,\ [al] = -1{\cdot}7\,,$$
$$[bb] = 3\,,\ [bc] = -1\,,\ [bl] = 1{\cdot}2\,,$$
$$[cc] = 3\,,\ [cl] = 2{\cdot}5\,,$$

przeto równania normalne są:

$$3x - y - z = -1{\cdot}7$$
$$-x + 3y - z = 1{\cdot}2$$
$$-x - y + 3z = 2{\cdot}5.$$

Z równań tych tworzymy podług teoryi układ pierwszych równań eliminacyjnych, których spółczynniki obliczamy ze spółczynników równań normalnych. Mamy bowiem:

$$[bb.1] = [bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]} = 3 - \frac{-1.\ -1}{3} = \frac{8}{3}\,,$$

$$[bc.1] = [bc] - \frac{[ac]\,[ab]}{[aa]} = -1 - \frac{-1.\ -1}{3} = -\frac{4}{3}\,,$$

$$[bl.1] = [bl] - \frac{[al]\,[ab]}{[aa]} = 1{\cdot}2 - \frac{-1{\cdot}7\ -1}{3} = \frac{1{\cdot}9}{3}\,,$$

$$[cc.1] = [cc] - \frac{[ac]\,[ac]}{[aa]} = 3 - \frac{-1.\ -1}{3} = \frac{8}{3}\,,$$

$$[cl.1] = [cl] - \frac{[al]\,[ac]}{[aa]} = 2{\cdot}5 - \frac{-1{\cdot}7.\ -1}{3} = \frac{5{\cdot}8}{3}\,.$$

Zatem otrzymujemy układ pierwszych równań eliminacyjnych:

$$\frac{8}{3}y - \frac{4}{3}z = \frac{1{\cdot}9}{3}$$

$$-\frac{4}{3}y + \frac{8}{3}z = \frac{5{\cdot}8}{3}$$

Spółczynniki drugich równań eliminacyjnych otrzymamy z poprzednich bardzo łatwo, a mianowicie:

$$\left[cc\,.\,2\right] = \left[cc\,.\,1\right] - \frac{[bc\,.\,1][bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]} = \frac{8}{3} - \frac{-\frac{4}{3}\cdot -\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}} = 2,$$

$$\left[cl\,.\,2\right] = \left[cl\,.\,1\right] - \frac{[bl\,.\,1][bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]} = \frac{5{\cdot}8}{3} - \frac{\frac{1{\cdot}9}{3}\cdot -\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{13{\cdot}5}{6},$$

tak że drugie równanie eliminacyjne jest:

$$2z = \frac{13{\cdot}5}{6}.$$

Zatem otrzymujemy następujący układ (A) równań, do rozwiązania prowadzących:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{1{\cdot}7}{3} \\ y &= \frac{1}{2}z + \frac{1{\cdot}9}{8} \\ z &= \frac{13{\cdot}5}{12} \end{aligned}\right\} \text{ skąd wypada: } \left\{\begin{aligned} z &= 1{\cdot}125 \\ y &= 0{\cdot}800 \\ x &= 0{\cdot}075 \end{aligned}\right.$$

Najprawdopodobniejsze tedy wartości kątów są:

AOB = 48° 17′ 1·07″,	BOC = 48° 35′ 15·72″,
AOC = 96° 52′ 16·80″,	BOD = 104° 37′ 6·05″,
AOD = 152° 54′ 7·12″,	COD = 56° 1′ 50·32″.

2. Z punktu *O* celowano do pięciu punktów *A*, *B*, *C*, *D*, *E* wymierzono następujące kąty: AOB = 15° 7′ 16·4″, AOC = 56° 18′ 15·3″, AOD = 105° 32′ 7·8″, AOE = 208° 48′ 16·7″, BOC = 41° 11′ 0·6″, BOD = 90° 24′ 50·8″, BOE = 193° 41′ 1·2″, COD = 49° 13′ 53·4″, COE = 152° 30′ 2·3″, DOE = 103° 16′ 10·1″. Wyznaczyć najprawdopodobniejsze wartości tychże kątów.

R o z w i ą z a n i e. Kąty AOB, AOC, AOD, AOE wskazują dokładnie pięć kierunków ze stanowiska *O* ku *A*, *B*, *C*, *D* i *E*.

Mamy zatem 6 nadliczbowych pomiarów; chodzi nam o najprawdopodobniejsze wartości tychże kątów.

Oznaczywszy przez x, y, z, t poprawki, jakie na tych kątach uskutecznić należy, otrzymamy:

$$\begin{aligned} AOB &= 15^0\ 7'\ 16'' + x, \\ AOC &= 56^0\ 18'\ 15'' + y, \\ AOD &= 105^0\ 32'\ 7'' + z, \\ AOE &= 208^0\ 48'\ 16'' + t. \end{aligned}$$

Z porównania z wartościami pomierzonemi a w temacie podanemi wypada:

$$x = 0{\cdot}4, \quad y = 0{\cdot}3, \quad z = 0{\cdot}8, \quad t = 0{\cdot}7.$$

W dalszym ciągu znajdziemy:

	a)	BOC = AOC − AOB =	41° 10′ 59″	+ y − x	–
a że:		BOC =	41° 11′ 0·6″		
przeto:		0 =	**− 1·6**	**+ y − x**	
	b)	BOD = AOD − AOB =	90° 24′ 51″	+ z − x	–
a że:		BOD =	90° 24′ 50·8″		
przeto:		0 =	**− 0·2**	**+ z − x**	
	c)	BOE = AOE − AOB =	193° 41′	+ t − x	–
a że:		BOE =	193° 41′ 1·2″		
przeto:		0 =	**− 1·2**	**+ t − x**	
	d)	COD = AOD − AOC =	49° 13′ 52″	+ z − y	–
a że:		COD =	49° 13′ 53·4″		
przeto:		0 =	**− 1·4**	**+ z − y**	
	e)	COE = AOE − AOC =	152° 30′ 1″	+ t − y	–
a że:		COE =	152° 30′ 2·3″		
przeto:		0 =	**− 1·3**	**+ t − y**	
	f)	DOE = AOE − AOD =	103° 16′ 9″	+ t − z	–
a że:		DOE =	103° 16′ 10·1″		
		0 =	**− 1·1**	**+ t − z**	

Mamy zatem następujące równania błędów:

x	.	.	.	=	0·4
.	y	.	.	=	0·3
.	.	z	.	=	0·8
.	.	.	t	=	0·7
− x	+ y	.	.	=	1·6
− x	.	+ z	.	=	− 0·2
− x	.	.	+ t	=	1·2
.	− y	+ z	.	=	1·4

$$\begin{array}{cccccc} . & -y & . & +t & = & 1{\cdot}3 \\ . & . & -z & +t & = & 1{\cdot}1. \end{array}$$

Tworzymy zatem następującą tabelkę:

a)

L. p.	a	b	c	d	l
1.	1	0	0	0	0·4
2.	0	1	0	0	0·3
3.	0	0	1	0	0·8
4.	0	0	0	1	0·7
5.	− 1	1	0	0	1·6
6.	− 1	0	1	0	− 0·2
7.	− 1	0	0	1	1·2
8.	0	− 1	1	0	1·4
9.	0	− 1	0	1	1·3
10.	0	0	− 1	1	1·1

Z tej tabelki otrzymujemy następującą:

b)

L. p.	aa	ab	ac	ad	al	bb	bc	bd	bl	cc	cd	cl	dd	dl
1.	1	0	0	0	0·4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.	0	0	0	0	0	1	0	0	0·3	0	0	0	0	0
3.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0·8	0	0
4.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0·7
5.	1	−1	0	0	−1·6	1	0	0	1·6	0	0	0	0	0
6.	1	0	−1	0	0·2	0	0	0	0	1	0	−0·2	0	0
7.	1	0	0	−1	−1·2	0	0	0	0	0	0	0	1	1·2
8.	0	0	0	0	0	1	−1	0	−1·4	1	0	1·4	0	0
9.	0	0	0	0	0	1	0	−1	−1·3	0	0	0	1	1·3
10.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	−1	−1·1	1	1·1
	4	−1	−1	−1	−2·2	4	−1	−1	−0·8	4	−1	−0·9	4	4·3

Zatem mamy następujące równania normalne:

$$\left.\begin{array}{rl} 4x - y - z - t &= -2{\cdot}2 \\ -x + 4y - z - t &= -0{\cdot}8 \\ -x - y + 4z - t &= 0{\cdot}9 \\ -x - y - z + 4t &= 4{\cdot}3 \end{array}\right\}$$ które mamy rozwiązać co do x, y, z, t.

Rozwiązanie tych równań można sprowadzić do zredukowanego układu równań (A); należy tylko obliczyć spółczynniki równań eliminacyjnych. Dla łatwiejszego przeglądu piszemy równania normalne schematycznie w ten sposób, że wpisujemy we wzorzec spółczynniki, jak to wykazuje wzorzec I. tak ogólny, jak szczególny.

Wzorzec I.

x	y	z	t	
[aa] 1	[ab] $\frac{[ab]}{[aa]}$	[ac] $\frac{[ac]}{[aa]}$	[ad] $\frac{[ad]}{[aa]}$	[al] $\frac{[al]}{[aa]}$
[ab] ×	[bb] $\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	[bc] $\frac{[ac]}{[aa]}[ab]$	[bd] $\frac{[ad]}{[aa]}[ab]$	[bl] $\frac{[al]}{[aa]}[ab]$
[ac] ×		[cc] $\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$	[ad] $\frac{[ad]}{[aa]}[ac]$	[cl] $\frac{[al]}{[aa]}[ac]$
[ad] ×			[dd] $\frac{[ad]}{[aa]}[ad]$	[dl] $\frac{[al]}{[aa]}[ad]$

Wzorzec I.

x	y	z	t	
4 1	−1 −0·25	−1 −0·25	−1 −0·25	−2·2 −0·55
−1 ×	4 0·25	−1 0·25	−1 0·25	−0·8 0·55
−1 ×		4 0·25	−1 0·25	0·9 0·55
−1 ×			4 0·25	4·3 0·55

Odejmując w drugim, trzecim i czwartym poziomym szeregu liczby dolne od górnych, otrzymamy spółczynniki pierwszych równań eliminacyjnych, które wpisujemy również schematycznie, jak wskazuje wzorzec II.

Wzorzec II.

y	z	t	
[bb.1]	[bc.1]	[bd.1]	[bl.1]
1	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bd.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}$
	[cc.1]	[cd.1]	[cl.1]
[bc.1] ×	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1]$	$-\frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bc.1]$	$-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bc.1]$
		[dd.1]	[dl.1]
[bd.1] ×		$-\frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bd.1]$	$-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bd.1]$

Wzorzec II.

y	z	t	
3·75	−1·25	−1·25	−1·35
1	−0·333	−0·333	−0·36
	3·75	−1·25	0·75
−1·25×	0·417	0·417	0·45
		3·75	3·75
−1·25×		0·417	0·45

Odjąwszy znowu w drugiej i trzeciej kolumnie poziomej liczby dolne od górnych, otrzymamy spółczynniki drugich równań eliminacyjnych, które jak poprzednio wpisujemy w następujący wzorzec:

Wzorzec III.

z	t	
[cc.2]	[cd.2]	[cl.2]
1	$\frac{[cd.2]}{[cc.2]}$	$\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$
	[dd.2]	[dl.2]
[cd.2]×	$\frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cd.2]$	$\frac{[cl.2]}{[cc.2]}[cd.2]$

Wzorzec III.

z	t	
3·333	− 1·667	− 0·1
1	− 0·5	− 0·03
	3·333	3·3
− 1·667×	0·833	0·5

Odejmując wreszcie dolne liczby od górnych w drugiej kolumnie poziomej, otrzymamy trzecie i ostatnie równanie eliminacyjne, tj.:

$$2{\cdot}5\, t = 2{\cdot}8,$$

co daje:

$$t = 1{\cdot}12.$$

A więc otrzymujemy następujący układ zredukowanych równań:

$$\begin{aligned} t &= 1{\cdot}12 \\ z - 0{\cdot}500\, t &= -\, 0{\cdot}02 \\ y - 0{\cdot}333\, z - 0{\cdot}333\, t &= -\, 0{\cdot}36 \\ x - 0{\cdot}25\, y - 0{\cdot}250\, z - 0{\cdot}250\, t &= -\, 0{\cdot}55. \end{aligned}$$

Zatem po kolejnem podstawianiu otrzymamy:

$$t = 1{\cdot}12,\quad z = 0{\cdot}53,\quad y = 0{\cdot}19,\quad x = -\, 0{\cdot}09.$$

Przeto najprawdopodobniejsze wartości tych 10 kątow są następujące:

1) AOB = 15° 7′ 15·91″	6) BOD = 90° 24′ 51·62″
2) AOC = 56° 18′ 15·19″	7) BOE = 193° 41′ 1·21″
3) AOD = 105° 32′ 7·53″	8) COD = 49° 13′ 52·34″
4) AOE = 208° 48′ 17·12″	9) COE = 152° 30′ 1·93″
5) BOC = 41° 10′ 59·28″	10) DOE = 103° 16′ 9·59″

3. Długość L wahadła sekundowego, zależną od szerokości geograficznej φ stanowiska, wyraża równanie $L = A + B\,.\,sin^2\varphi$. Ilości stałe A i B wyznacza się w ten sposób, że wymierzono długość wahadła sekundowego w różnych szerokościach geograficznych i otrzymano następujące wyniki spostrzeżeń:

	Stanowisko spostrzeżenia	Póln. szer. geogr. φ	Obserwowana długość L wahadła sek. w calach ang.
1.	Św. Tomasz . . .	— 0° 24′ 41″	39·02074
2.	Maranham	— 2° 31′ 43″	01214
3.	Ascension	— 7° 55′ 48″	02410
4.	Sierra Leone . . .	+ 8° 29′ 28″	01997
5.	Trinidad	+ 10° 38′ 56″	01884
6.	Bahia	— 12° 59′ 21″	02425
7.	Jamajka	+ 17° 56′ 7″	03510
8.	Nowyjork	+ 40° 42′ 43″	10168
9.	Londyn	+ 51° 31′ 8″	13929
10.	Drontheim	+ 63° 25′ 54″	17456
11.	Hammerfest . . .	+ 70° 40′ 5″	19519
12.	Grenlandya	+ 74° 32′ 19″	20335
13.	Spitzbergen	+ 79° 49′ 58″	21469

Obliczyć na podstawie tych spostrzeżeń najprawdopodobniejsze wartości stałych A i B.

R o z w i ą z a n i e. Dla uniknienia rachunku wielkiemi liczbami połóżmy:

$$A = 39 + x,$$
$$B = 0{\cdot}2 + y,$$

tak że długość wahadła sekundowego wyrazimy równaniem:

$$L = 39 + x + (0{\cdot}2 + y) \sin^2\varphi,$$

czyli: $$L - 39 - 0{\cdot}2 \sin^2\varphi = x + y\sin^2\varphi.$$

Lewa strona równania jest wiadomą, gdyż L oznacza długość obserwowaną a φ szerokość geograficzną. Zatem wyrażenie:

$$L - 39 - 0{\cdot}2 \sin^2\varphi = l$$

przedstawia błąd, który należy poprawić. Obliczywszy wartości dla $sin^2\varphi$ a następnie l, otrzymamy na x i y następujące równania błędów:

1) $x + 0{\cdot}00005y = 0{\cdot}02073$,
2) $x + 0{\cdot}00195y = 0{\cdot}01175$,
3) $x + 0{\cdot}01903y = 0{\cdot}02029$,
4) $x + 0{\cdot}02180y = 0{\cdot}01561$,
5) $x + 0{\cdot}03415y = 0{\cdot}01201$,
6) $x + 0{\cdot}05052y = 0{\cdot}01415$,
7) $x + 0{\cdot}09483y = 0{\cdot}01613$,
8) $x + 0{\cdot}42544y = 0{\cdot}01659$,
9) $x + 0{\cdot}61280y = 0{\cdot}01673$,
10) $x + 0{\cdot}79995y = 0{\cdot}01457$,
11) $x + 0{\cdot}89041y = 0{\cdot}01711$,
12) $x + 0{\cdot}92893y = 0{\cdot}01756$,
13) $x + 0{\cdot}96884y = 0{\cdot}02092$.

Otrzymujemy zatem tabelkę:

a)

Lp.	a	b	λ
1.	1	0·00005	0·02073
2.	1	00195	01175
3.	1	01903	02029
4.	1	02180	01561
5.	1	03415	01201
6.	1	05052	01415
7.	1	09483	01613
8.	1	42544	01659
9.	1	61280	01673
10.	1	79995	01457
11.	1	89041	01711
12.	1	92893	01756
13.	1	96884	02092

z której obliczamy tabelkę następującą:

b)

Lp.	aa	ab	al	bb	bl
1.	1	0·00005	0·02073	0·00000	0·00000
2.	1	00195	01175	00000	00002
3.	1	01903	02029	00036	00039
4.	1	02180	01561	00046	00034
5.	1	03415	01201	00116	00041
6.	1	05052	01415	00225	00071
7.	1	09483	01613	00899	00153
8.	1	42544	01659	18062	00706
9.	1	61280	01673	37577	01025
10.	1	79995	01457	81000	01166
11.	1	89041	01711	79210	01523
12.	1	92893	01756	86304	01630
13.	1	96884	02092	93896	02027
	13	4·84870	0·21415	3·97371	0·08417

Zatem równania normalne są kształtu:

$$13\,x + 4{\cdot}84870y = 0{\cdot}21415,$$
$$4{\cdot}84870\,x + 3{\cdot}97371y = 0{\cdot}08417,$$

co schematycznie napisawszy otrzymamy:

x	y	
13	4·84870	0·21415
1	0·37297	0·01647
	3·97371	0·08417
0·37297 ×	0·13911	0·00614

Z wzorca tego wyłaniają się następujące dwa równania zredukowane:

$$3{\cdot}83460y = 0{\cdot}07803,$$
$$x + 0{\cdot}37297y = 0{\cdot}01647,$$

czyli stąd:

$$y = 0{\cdot}02035,$$
$$x = 0{\cdot}00888,$$

przeto:

$$A = 39 + x - 39{\cdot}00888,$$
$$B = 0{\cdot}2 + y = 0{\cdot}22035$$

jako najprawdopodobniejsze wartości dla szukanych stałych, a więc mamy wzór:

$$L = 39{\cdot}00888 + 0{\cdot}22035 \sin^2\varphi,$$

podający długość wahadła sekundowego w calach angielskich.

---

b) Błędy niewiadomych w spostrzeżeniach pośrednich.

40. Wyznaczenie błędu średniego spostrzeżeń pośrednich. Podług wzoru (VI) błąd średni określa się równaniem:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}},$$

jeżeli w n spostrzeżeniach popełniono błędy ε_1, ε_2 ε_3, ..., ε_n. Ponieważ te błędy ε_i pozostają niewiadomymi, gdyż nie możemy nigdy poznać prawdziwych wartości niewiadomych ilości x, y,

z, t, ..., v, a więc tem samem obliczyć wartości ilości L_1, L_2, . . . , L_n, przeto chodzić będzie o to, aby w miejsce ε_i wprowadzić błędy α_i, które otrzymamy, gdy w równania błędów (5) za prawdziwe wartości, które oznaczymy przez x_0, y_0, z_0, t_0, ..., v_0, podstawimy rozwiązania x, y, z, t, ..., v równań normalnych.

Będzie zatem:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_i &= a_i x_0 + b_i y_0 + c_i z_0 + \ldots + k_i v_0 - l_i\,, \\ \alpha_i &= a_i x + b_i y + c_i z + \ldots + k_i v - l_i\,, \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

więc także:

$$\varepsilon_i - \alpha_i = a_i\,(x_0 - x) + b_i\,(y_0 - y) + c_i\,(z_0 - z) + \ldots + k_i\,(v_0 - v). \quad (21)$$

Kładąc:

$$\begin{aligned} x_0 - x &= M_x\,, \\ y_0 - y &= M_y\,, \\ z_0 - z &= M_z\,, \\ v_0 - v &= M_v\,, \end{aligned}$$

gdzie M_x, M_y, M_z, . . . , M_v oznaczają błędy, które popełniamy, gdy za prawdziwe wartości x_0, y_0, z_0, . . . , v_0 podstawimy rozwiązania x, y, z, . . . , v równań normalnych, otrzymamy za równanie (21) następujące:

$$\varepsilon_i = \alpha_i + a_i\,M_x + b_i\,M_y + c_i\,M_z + \ldots + k_i\,M_v\,. \quad (22)$$

Spotęgowawszy równanie to przez 2 i zesumowawszy wszystkie analogiczne równania dla $i = 1$ do $i = n$, otrzymamy następujące:

$$\begin{aligned} [\varepsilon\varepsilon] = [\alpha\alpha] + 2[a\alpha]M_x + 2[b\alpha]M_y + 2[c\alpha]M_z + \ldots\ldots \\ \ldots + 2\,[k\alpha]\,M_v + [(aM_x + bM_y + cM_z + \ldots + kM_v)^2]\,. \quad (23) \end{aligned}$$

A że wiemy, że $[\alpha\alpha]$ jest najmniejszością, to także być musi:

$$\left[\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right] = 0\,, \left[\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right] = 0\,, \left[\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right] = 0\,, \ldots\ldots, \left[\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right] = 0\,,$$

a że:

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial x} = a_i\,, \quad \frac{\partial\alpha_i}{\partial y} = b_i\,, \quad \frac{\partial\alpha_i}{\partial z} = c_i\,, \ldots\ldots, \frac{\partial\alpha_i}{\partial v} = k_i\,,$$

przeto:

$$[\alpha a] = 0\,, \ [\alpha b] = 0\,, \ [\alpha c] = 0\,, \ldots\ldots [\alpha k] = 0.$$

A skoro przyjmiemy, że mamy tylko cztery niewiadome x, y, z, t, to równanie (23) przyjmie kształt następujący:

5

$$\left.\begin{aligned}[\varepsilon\varepsilon] - [\alpha\alpha] &= [(aM_x + bM_y + cM_z + dM_t)^2] \\ &= [aa]\,M_x{}^2 + [bb]\,M_y{}^2 + [cc]\,M_z{}^2 + [dd]\,M_t{}^2 + \\ &+ 2\,([ab]\,M_y + [ac]\,M_z + [ad]\,M_t)\,M_x + \\ &+ 2\,([bc]\,M_z + [bd]\,M_t)\,M_y + \\ &+ 2\,[cd]\,M_z\,M_t\,.\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Prawa strona tego równania ma zupełnie tę samą postać, co prawa strona przedostatniego równania na str. 48 (w ust. 37). Kładąc w owem równaniu $l_i = 0$ i za x, y, z, t ilości M_x, M_y, M_z, M_t, otrzymamy powyższe równanie (24). Tam uskutecznione przekształcenie stosujemy w zupełności i tutaj, w skutek czego na podstawie równania (15) otrzymamy:

$$[\varepsilon\varepsilon] - [\alpha\alpha] = \frac{M^2}{[aa]} + \frac{M_1{}^2}{[bb.1]} + \frac{M_2{}^2}{[cc.2]} + \frac{M_3{}^2}{[dd.3]}, \qquad (25)$$

gdzie podług równań (14) w ust. 37 jest:

$$\left.\begin{aligned}M &= [aa]\,M_x + [ab]\,M_y + [ac]\,M_z + [ad]\,M_t\,, \\ M_1 &= [bb.1]\,M_y + [bc.1]\,M_z + [bd.1]\,M_t\,, \\ M_2 &= [cc.2]\,M_z + [cd.2]\,M_t\,, \\ M_3 &= [dd.3]\,M_t\,,\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

przyjąwszy w równaniach (14) wszystkie $l_i = 0$, skutkiem czego:

$$[al] = 0\,,\ [bl.1] = 0\,,\ [cl.2] = 0\,,\ [dl.3] = 0\,,\ [ll.4] = 0\,,$$

więc wogóle wszystkie spółczynniki, zawierające l, stają się $= 0$.

Zatem dla naszych czterech niewiadomych x, y, z, t przyjmie równanie (22) następującą postać:

$$\varepsilon_i = \alpha_i + a_i\,M_x + b_i\,M_y + c_i\,M_z + d_i\,M_t\,.$$

Pomnożywszy je przez a_i i dodawszy do siebie wszystkie analogiczne iloczyny dla $i = 1$ do $i = n$, otrzymamy:

$$[a\varepsilon] = [\alpha a] + [aa]\,M_x + [ab]\,M_y + [ac]\,M_z + [ad]\,M_t\,.$$

Mnożąc to samo równanie kolejno przez b_i, c_i i d_i, to po zsumowaniu bacząc, że $[\alpha a] = 0$, $[\alpha b] = 0$, $[\alpha c] = 0$ i $[\alpha d] = 0$, otrzymamy następujące cztery równania:

$$\left.\begin{aligned}[a\varepsilon] &= [aa]\,M_x + [ab]\,M_y + [ac]\,M_z + [ad]\,M_t\,, \\ [b\varepsilon] &= [ab]\,M_x + [bb]\,M_y + [bc]\,M_z + [bd]\,M_t\,, \\ [c\varepsilon] &= [ac]\,M_x + [bc]\,M_y + [cc]\,M_z + [cd]\,M_t\,, \\ [d\varepsilon] &= [ad]\,M_x + [bd]\,M_y + [cd]\,M_z + [dd]\,M_t\,.\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Powyższe równania mają ten sam kształt, co równania normalne (8'), które przedzierżgną się w równania (27), gdy w nich za x, y, z, t, l podstawimy ilości M_x, M_y, M_z, M_t, ε. A więc będzie można zupełnie tak samo sprowadzić równania (27) do kształtu równań normalnych (A); potrzeba bowiem w układzie

(A) za x, y, z, t, l wprowadzić M_x, M_y, M_z, M_t, ε. Tym sposobem otrzymamy następujący układowi (27) zupełnie równoważny układ równań:

$$\left.\begin{array}{l}[aa]\,M_x + [ab]\,M_y + [ac]\,M_z + [ad]\,M_t = [a\varepsilon],\\ [bb\,.\,1]\,M_y + [bc\,.\,1]\,M_z + [bd\,.\,1]\,M_t = [b\varepsilon\,.\,1],\\ [cc\,.\,2]\,M_z + [cd\,.\,2]\,M_t = [c\varepsilon\,.\,2],\\ [dd\,.\,3]\,M_t = [d\varepsilon\,.\,3].\end{array}\right\} \quad (28)$$

Z porównania tego układu (28) z równaniami (26) wypływa:

$$\left.\begin{array}{l}M = [a\varepsilon],\\ M_1 = [b\varepsilon\,.\,1],\\ M_2 = [c\varepsilon\,.\,2],\\ M_3 = [d\varepsilon\,.\,3].\end{array}\right\} \quad (29)$$

Ponieważ:

$$M = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3 + \dots + a_n\varepsilon_n,$$

przeto:

$$M^2 = a_1^2\varepsilon_1^2 + a_2^2\varepsilon_2^2 + a_3^2\varepsilon_3^2 + \dots + a_n^2\varepsilon_n^2 + 2\,(a_1a_2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \dots).$$

Ponieważ suma w nawiasie przedstawiona w porównaniu do sumy kwadratów jest bardzo małą, gdyż ε_i są częścią dodatnie, częścią odjemne, przeto przy obliczeniu średniej wartości dla M można tę sumę opuścić, skutkiem czego otrzymamy:

$$M^2 = a_1^2\varepsilon_1^2 + a_2^2\varepsilon_2^2 + a_3^2\varepsilon_3^2 + \dots + a_n^2\varepsilon_n^2.$$

Wszelako za $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$ można położyć średni błąd μ, zatem będzie:

$$M^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)\,\mu^2$$
$$= [aa]\,\mu^2,$$

przeto:

$$M = \mu\sqrt{[aa]} \quad (30)$$

Dla M_1 otrzymamy:

$$M_1 = [b\varepsilon\,.\,1] = [b\varepsilon] - \frac{[ab][a\varepsilon]}{[aa]}$$

$$= (b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \dots + b_n\varepsilon_n) - \frac{[ab]}{[aa]}(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n)$$

$$= \left(b_1 - \frac{[ab]}{[aa]}a_1\right)\varepsilon_1 + \left(b_2 - \frac{[ab]}{[aa]}a_2\right)\varepsilon_2 + \dots,$$

przeto położywszy dla krótkości pisania:

$$b_i - \frac{[ab]}{[aa]}a_i = A_i,$$

otrzymamy:

$$M_1 = [A\varepsilon],$$

a postępując, jak powyżej przy obliczeniu M, otrzymamy:

$$M_1 = \mu \sqrt{[AA]}.$$

Wszelako:

$$A_i^2 = b_i^2 + \left(\frac{[ab]}{[aa]}\right)^2 a_i^2 - 2a_i b_i \frac{[ab]}{[aa]},$$

przeto:

$$[AA] = [bb] + \left(\frac{[ab]}{[aa]}\right)^2 [aa] - 2 \frac{[ab]}{[aa]} [ab]$$

$$= [bb] + \frac{[ab][ab]}{[aa]} - 2 \frac{[ab][ab]}{[aa]}$$

$$= [bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]}$$

$$= [bb\,.\,1].$$

A zatem:

$$M_1 = \mu \sqrt{[bb\,.\,1]} \tag{30'}$$

Podobnie postępując, znajdziemy:

$$\left.\begin{aligned} M_2 &= \mu \sqrt{[cc\,.\,2]} \\ M_3 &= \mu \sqrt{[dd\,.\,3]} \end{aligned}\right\} \tag{30''}$$

jako średnie wartości. Podstawiwszy (30), (30′) i (30″) w równanie (25), otrzymamy:

$$[\varepsilon\varepsilon] - [\alpha\alpha] = \mu^2 + \mu^2 + \mu^2 + \mu^2 = 4\,\mu^2,$$

a że podług (VI):

$$n\mu^2 = [\varepsilon\varepsilon],$$

wiec:

$$n\mu^2 = [\alpha\alpha] + 4\mu^2,$$

czyli:

$$\mu^2 (n^2 - 4) = [\alpha\alpha],$$

tedy:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\alpha\alpha]}{n - 4}}.$$

Jeżeli nie *4*, tylko k niewiadomych mamy, tedy równanie (25) zawierać będzie po prawej stronie znaku równości k wyrazów, a zamiast 4 równań (30), (30′) i (30″) mieć ich będziemy k, w skutek czego po dokonanem w (25) podstawieniu otrzymamy:

$$[\varepsilon\varepsilon] - [\alpha\alpha] = k\mu^2,$$

skąd:

$$n\mu^2 = [\alpha\alpha] + k\mu^2,$$

więc:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\alpha\alpha]}{n-k}} \qquad \text{(XXVII)}$$

jako średni błąd μ, gdy dokonano n pośrednich spostrzeżeń dla k niewiadomych.

Ze względu na to, że $[\alpha\alpha] = [ll \,.\, k]$ (ob. str. 51. ust. 37), otrzymamy następujące wyrażenie na błąd średni spostrzeżeń pośrednich:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[ll \,.\, k]}{n-k}} \,. \qquad \text{(XXVIII)}$$

41. W y z n a c z e n i e b ł ę d ó w M_x, M_y, M_z, ... p o s z c z e g ó l n y c h n i e w i a d o m y c h z b ł ę d u ś r e d n i e g o μ. Dla łatwiejszego przeprowadzenia sposobu wyznaczenia błędów M_x, M_y, M_z, . . . , przyjmiemy tylko cztery niewiadome. Ku temu celowi służą równania (28), które po uwzględnieniu równań (29) i (30). (30′) (30″) przybiorą kształt:

$$\left.\begin{array}{r} [aa]M_x + [ab]M_y + [ac]M_z + [ad]M_t = \mu\sqrt{[aa]} \\ [bb\,.\,1]M_y + [bc\,.\,1]M_z + [bd\,.\,1]M_t = \mu\sqrt{[bb\,.\,1]} \\ [cc\,.\,2]M_z + [cd\,.\,2]M_t = \mu\sqrt{[cc\,.\,2]} \\ [dd\,.\,3]M_t = \mu\sqrt{[dd\,.\,3]} \end{array}\right\} \quad (31)$$

Ostatnie równanie daje:

$$M_t = \frac{\mu}{\sqrt{[dd\,.\,3]}} .$$

Przyjąwszy dla poszczególnego spostrzeżenia ważność $= 1$, to, podług (XVIII) mamy:

$$M = \frac{\mu\sqrt{p_0}}{\sqrt{P}} ,$$

przeto ważność P_t ilości niewiadomej t będzie:

$$P_t = [dd\,.\,3], \qquad \text{(XXIX)}$$

pomnąc, że

$$M_t = \frac{\mu}{\sqrt{P_t}} .$$

Z równania (XXIX) czytamy: „R o z w i ą z a w s z y r ó w n a n i a n o r m a l n e s p o s o b e m e l i m i n a c y j n y m, o t r z y m a m y, ż e s p ó ł c z y n n i k n i e w i a d o m e j w o s t a t n i e m r ó w n a n i u e l i m i n a c y j n e m j e s t w a ż n o ś c i ą t e j ż e n i e w i a d o m e j."

Gdybyśmy układ równań (8′) rozwiązali w ten sposób, że obliczamy nasamprzód t z ostatniego, potem z, następnie y, tak że ostatecznie otrzymamy:

$$[aa\,.\,3]x = [al\,.\,3],$$

to ważność P_x ilości x wyrazimy równaniem:

$$P_x = [aa\,.\,3],$$

a więc:

$$M_x = \frac{\mu}{\sqrt{P_x}} = \frac{\mu}{\sqrt{[aa\,.\,3]}}.$$

Jeżeli więc chcemy obliczyć wszystkie ważności, trzeba wyznaczyć także spółczynniki [aa . 3], [bb · 3], [cc . 3] i [dd . 3].

42. Ponieważ w obliczeniu ważności ilości l_i są nieznaczne, można je tedy dowolnie obierać. Obrawszy je zatem nasamprzód tak, aby było:

$$[al] = 0,\ [bl] = 0,\ [cl] = 0,\ [dl] = 1,$$

otrzymamy za równania normalne (8′) następujące cztery równania:

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\,Q_1 + [ab]\,Q_2 + [ac]\,Q_3 + [ad]\,Q_4 &= 0,\\
[ab]\,Q_1 + [bb]\,Q_2 + [bc]\,Q_3 + [bd]\,Q_4 &= 0,\\
[ac]\,Q_1 + [bc]\,Q_2 + [cc]\,Q_3 + [cd]\,Q_4 &= 0,\\
[ad]\,Q_1 + [bd]\,Q_2 + [cd]\,Q_3 + [dd]\,Q_4 &= 1.
\end{aligned}\right\}\quad (I_4)$$

Rozwiązawszy powyższe równania podobnym sposobem, co równania normalne, otrzymamy jako ostateczne równanie:

$$[dd\,.\,3]\,Q_4 = 1,$$

skąd:

$$Q_4 = \frac{1}{[dd\,.\,3]} = \frac{1}{P_t},$$

t. zn.: rozwiązanie Q_4 układu równań (I_4) jest odwróconą ważnością niewiadomej t.

Zupełnie analogicznie otrzymamy, że rozwiązanie Q_1 układu równań:

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\,Q_1 + [ab]\,Q_2 + [ac]\,Q_3 + [ad]\,Q_4 &= 1,\\
[ab]\,Q_1 + [bb]\,Q_2 + [bc]\,Q_3 + [bd]\,Q_4 &= 0,\\
[ac]\,Q_1 + [bc]\,Q_2 + [cc]\,Q_3 + [cd]\,Q_4 &= 0,\\
[ad]\,Q_1 + [bd]\,Q_2 + [cd]\,Q_3 + [dd]\,Q_4 &= 0,
\end{aligned}\right\}\quad (I_1)$$

jest odwróconą ważnością niewiadomej x; następnie że rozwiązanie Q_2 układu równań:

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\,Q_1 + [ab]\,Q_2 + [ac]\,Q_3 + [ad]\,Q_4 &= 0,\\
[ab]\,Q_1 + [bb]\,Q_2 + [bc]\,Q_3 + [bd]\,Q_4 &= 1,\\
[ac]\,Q_1 + [bc]\,Q_2 + [cc]\,Q_3 + [cd]\,Q_4 &= 0,\\
[ad]\,Q_1 + [bd]\,Q_2 + [cd]\,Q_3 + [dd]\,Q_4 &= 0,
\end{aligned}\right\}\quad (I_2)$$

jest odwróconą ważnością niewiadomej y, i że wreszcie rozwiązanie Q_3 układu równań:

$$\left.\begin{array}{l} [aa]\, Q_1 + [ab]\, Q_2 + [ac]\, Q_3 + [ad]\, Q_4 = 0, \\ [ab]\, Q_1 + [bb]\, Q_2 + [bc]\, Q_3 + [bd]\, Q_4 = 0, \\ [ac]\, Q_1 + [bc]\, Q_2 + [cc]\, Q_3 + [cd]\, Q_4 = 1, \\ [ad]\, Q_1 + [bd]\, Q_2 + [cd]\, Q_3 + [dd]\, Q_4 = 0, \end{array}\right\} \quad (I_3)$$

jest odwróconą ważnością niewiadomej z.

Z tego powodu zowiemy układy równań (I_1), (I_2), (I_3), (I_4) równaniami ważności. Ich spółczynniki dane są przez spółczynniki równań normalnych; w dodatku II. podamy sposób równoczesnego rozwiązywania równań normalnych i ważności.

---

43. Zagadnienia. 1. Obliczyć błędy oczekiwane kątów znalezionych w zagad. 1. ust. 39.

Rozwiązanie. a) Znajdziemy nasamprzód błąd średni szeregu spostrzeżeń podług wzoru (XXVII), t. j.:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\alpha\alpha]}{n-k}},$$

gdzie $n = 6$, $k = 3$, gdyż danych jest 6 równań warunkowych a niewiadomych jest 3. Zatem:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\alpha\alpha]}{3}}.$$

Aby obliczyć $[\alpha\alpha]$, pomnijmy, że:

$$\alpha_i = a_i x + b_i y + c_i z - l_i,$$

gdzie x, y, z są rozwiązaniami równań normalnych Gauss'a, a l_i prawemi stronami równań błędów.

Jako rozwiązanie równań normalnych otrzymaliśmy poprzednio:

$$x = 0{\cdot}075,$$
$$y = 0{\cdot}800,$$
$$z = 1{\cdot}125,$$

a na równania błędów:

$$\begin{array}{l|l} x = 0{\cdot}4, & x - y = 0{\cdot}7, \\ y = 0{\cdot}8, & z - x = 2{\cdot}8, \\ z = 0{\cdot}8, & y - z = 1{\cdot}1. \end{array}$$

Zatem mamy:

$$
\begin{array}{llll}
\alpha_1 = x \qquad - 0\cdot4 = - 0\cdot325, & \alpha_1^2 = 0\cdot106, \\
\alpha_2 = y \qquad - 0\cdot8 = 0\cdot000, & \alpha_2^2 = 0\cdot000, \\
\alpha_3 = z \qquad - 0\cdot8 = + 0\cdot325, & \alpha_3^2 = 0\cdot106, \\
\alpha_4 = x - y - 0\cdot7 = - 1\cdot425, & \alpha_4^2 = 2\cdot017, \\
\alpha_5 = z - x - 2\cdot8 = - 1\cdot725, & \alpha_5^2 = 3\cdot062, \\
\alpha_6 = y - z - 1\cdot1 = - 1\cdot425, & \alpha_6^2 = 2\cdot017, \\
\hline
 & [\alpha\alpha] = 7\cdot308,
\end{array}
$$

przeto:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{7,308}{3}} = \pm \sqrt{2\cdot436}$$

$$\mu = \pm 1\cdot56.$$

b) Aby znaleźć błędy średnie ilości x, y, z, t, należy ustawić równania ważności i rozwiązać takowe.

Ponieważ równania normalne w danym przypadku są:

$$
\begin{aligned}
3x - y - z &= - 1\cdot7, \\
- x + 3y - z &= 1\cdot2, \\
- x - y + 3z &= 2\cdot5,
\end{aligned}
$$

przeto równania ważności będą:

$$
\left.
\begin{aligned}
3Q_1 - Q_2 - Q_3 &= 1 \\
- Q_1 + 3Q_2 - Q_3 &= 0 \\
- Q_1 - Q_2 + 3Q_3 &= 0
\end{aligned}
\right\} \text{ dla } x,
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
3Q_1 - Q_2 - Q_3 &= 0 \\
- Q_1 + 3Q_2 - Q_3 &= 1 \\
- Q_1 - Q_2 + 3Q_3 &= 0
\end{aligned}
\right\} \text{ dla } y,
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
3Q_1 - Q_2 - Q_3 &= 0 \\
- Q_1 + 3Q_2 - Q_3 &= 0 \\
- Q_1 - Q_2 + 3Q_3 &= 1
\end{aligned}
\right\} \text{ dla } z.
$$

Co się tyczy równań ważności dla z, to są one już co do Q_3 rozwiązane przez równania normalne; otrzymaliśmy bowiem tam równanie:

$$2z = \frac{13\cdot5}{6},$$

tak że tutaj wypaść musi:

$$2Q_3 = 1, \text{ czyli } Q_3 = \frac{1}{2},$$

więc:
$$P_z = 2.$$

Ponieważ równania ważności są zupełnie symetryczne i przechodzą jedne w drugie przez zamianę wskaźników, przeto być musi:

$$P_z = P_y = P_x,$$

a więc podług wzoru:

$$M_x = M_y = M_z = \frac{\mu}{\sqrt{2}} = \pm 1{\cdot}10.$$

Błąd więc oczekiwany wartości x, y, z podług wzoru (XIV) jest:

$$R_x = R_y = R_z = \pm 1{\cdot}10 \,.\, 0{\cdot}674 = \pm 0{\cdot}74.$$

Z tego okazuje się, że błędy oczekiwane kątów powyżej (str. 56) obliczonych są:

dla kąta AOB . . . . ± 0·74,
„ „ AOC . . . . ± 0·74,
„ „ AOD . . . . ± 0·74,

a podług wzoru (XXII) będzie:

dla kąta BOC . . . . $\sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \pm 0{\cdot}74 \sqrt{2} = \pm 1{\cdot}03$,
„ BOD . . . . $\sqrt{R_z^2 + R_x^2} = \pm 0{\cdot}74 \sqrt{2} = \pm 1{\cdot}03$,
„ COD . . . . $\sqrt{R_z^2 + R_y^2} = \pm 0{\cdot}74 \sqrt{2} = \pm 1{\cdot}03$.

Zatem prawdziwe wartości kątów mierzonych (str. 56) są:

AOB = 48° 17′ 1·07″ ± 0·74,	BOC = 48° 35′ 15·72″ ± 1·03,
AOC = 96° 52′ 16·80″ ± 0·74,	BOD = 104° 37′ 6·05″ ± 1·03,
AOD = 152° 54′ 7·12″ ± 0·74,	COD = 56° 1′ 50·32″ ± 1·03.

2. Obserwowano ilość piasku, wysypującą się otworem w jednej sekundzie. Jeżeli r oznacza promień otworu w calach reńskich, a m ilość piasku w sześć. calach reńskich, otrzymano następujące wypadki:

dla r = 0·05487	wysypało się piasku w jednej sekundzie	m = 0·00912
= 0·08052		0·02985
= 0·09869		0·05399
= 0·12017		0·09532
= 0·16784		0·23463.

Na podstawie powyższych danych wyprowadzić wzór, któryby wyrażał zależność wysypującej się ilości piasku od wielkości otworu[1].

---

[1] Ob. Hagen. Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin. 1867.

R o z w i ą z a n i e. W ogólności możnaby wyrazić żądane prawo równaniem:

$$m = f(r, a, b, c, \ldots),$$

gdzie f jest pewną określoną funkcyą, której stałe a, b, c, . . . wyznaczyć należy. Obliczywszy tedy błędy oczekiwane stałych a, b, c, . . . i znalazłszy je bardzo małymi w porównaniu do ilości a, b, c, . . . , możemy powyższe równanie $m = f(a, b, c, \ldots)$ przyjąć jako wyrażenie żądanej zależności m od r. Jeżeli zaś błędy oczekiwane okażą się wielkimi w porównaniu do a, b, c, . . . , to nie możemy prawa tego przyjąć w powyższej postaci. W takim razie przyjmujemy inne prawo i wyznaczamy znowu stałe. Liczba wprowadzonych stałych, rozumie się samo przez się, musi być mniejszą od liczby spostrzeżeń.

Niech będzie więc żądane prawo wyrażone równaniem:

$$m = Ar^2 + Br^3,$$

gdzie A i B oznaczają stałe, które mamy wyznaczyć.

Aby zaś wyznaczyć poszczególne wypadki w postaci o ile można zgodnej co do ich wielkości, przyjmijmy, że

$$l = 10m, \quad A = 10x, \quad B = 100y,$$

a otrzymamy:

$$l = x(10r)^2 + y(10r)^3,$$

$$l_i = a_i x + b_i y,$$

gdzie:

$$a_i = (10r_i)^2, \quad b_i = (10r_i)^3,$$

$$l_i = 10m_i\ .$$

Równania błędów są następujące:

$$1)\ 0{\cdot}0912 = 0{\cdot}301072x + 0{\cdot}165198y,$$

$$2)\ 0{\cdot}2985 = 0{\cdot}648347x + 0{\cdot}522049y,$$

$$3)\ 0{\cdot}5399 = 0{\cdot}973774x + 0{\cdot}960920y,$$

$$4)\ 0{\cdot}9532 = 1{\cdot}444083x + 1{\cdot}735355y,$$

$$5)\ 2{\cdot}3463 = 2{\cdot}817027x + 4{\cdot}728100y,$$

które dają następującą tabelkę:

a)

Lp.	a	b	c
1.	0·301072	0·165198	0·0912
2.	0·648347	0·522049	0·2985
3.	0·973774	0·960920	0·5399
4.	1·444083	1·735355	0·9532
5.	2·817027	4·728100	2·3463

Z tej tabelki otrzymamy przy użyciu tablic logarytmicznych następującą:

b)

Lp.	aa	ab	al	bb	bl	ll
1.	0·0906442	0·0497365	0·0274577	0·0272940	0·0150661	0·0083174
2.	0·4203540	0·3384691	0·1935316	0·2725353	0·1558316	0·0891022
3.	0·9482359	0·9357192	0·5257406	0·9233674	0·5188007	0·2914920
4.	2·0853760	2·5059960	1·3765000	3·0114560	1·6541400	0·9085900
5.	7·9356400	13·3191800	6·6095900	22·3549100	11·0935300	5·5051220
	11·4802501	17·1491008	8·7328199	26·5895627	13·4373684	6·8026236

Wskutek tego mamy:

Wzorzec I.

x	y	
11·4802501 **1**	17·1491008 **1·493791**	8·7328199 **0·762435**
17·1491×	26·5895627 25·61717	13·4373684 13·04500
8·73282 ×		6·8026236 6·64290

Przez odjęcie liczb petitem oznaczonych od liczb nad niemi stojących w drugim i trzecim szeregu poziomym mieć będziemy:

Wzorzec II.

y	
0·97239 **1**	0·39237 **0·403511**
	0·15972 0·15833

Z wzorca II. i I. wysnuwają się tedy następujące równania:

$$y = 0{\cdot}403511\,,$$
$$x + 1{\cdot}49379\, y = 0{\cdot}760627\,,$$
$$[ll\,.\,2] = 0{\cdot}00139\,,$$

gdzie [ll . 2] otrzymaliśmy przez odjęcie drobnem pismem oznaczonej liczby ostatniego wiersza wzorca II. od liczby ponad nią stojącej, gdyż, jak wiadomo, jest;

$$[ll\,.\,2] = [ll\,.\,1] - \frac{[bl\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}[bl\,.\,1]\,.$$

Powyższe równania dają:

$$x = 0{\cdot}760627 - 1{\cdot}49379\,.\,0{\cdot}403511 = 0{\cdot}157867\,.$$

Zatem:

$$A = 10x = 1{\cdot}57867,$$
$$B = 100y = 40{\cdot}3511,$$

Sumę kwadratów błędów $[\alpha\alpha]$, odpowiadającą powyższym równaniom błędu, gdy za x i y podstawimy znalezione wartości, znajdziemy podług równania (16), na str. 51. podanego, a zwłaszcza:

$$[\alpha\alpha] = [ll\,.\,2] = 0{\cdot}00139\,.$$

A że jest danych pięć równań z dwiema niewiadomemi, to podług (XXVIII) otrzymamy średni błąd:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[\alpha\alpha]}{n-k}} = \pm\sqrt{\frac{0{\cdot}00139}{3}}$$
$$= \pm\, 0{\cdot}0215,$$

a błąd oczekiwany podług (VIII):

$$\rho = \pm\, 0{\cdot}0215\,.\,0{\cdot}6744 = 0{\cdot}0145\,.$$

Z wzorca II. widać, że ważność ilości y odpowiadająca jest:

$$P_y = 0{\cdot}97239\,,$$

przeto podług wzoru (XVIII):

$$M_y = \frac{\mu}{\sqrt{P_y}} = \pm\frac{0{\cdot}0215}{\sqrt{0{\cdot}97235}} = \pm\, 0{\cdot}0218$$

jest błędem średnim niewiadomej y.

Aby zaś obliczyć błąd średni niewiadomej x, wyznaczamy P_x zapomocą równań ważności, z wzorca I. wyprowadzonych, a mianowicie:

$$11{\cdot}48025\; Q_1 + 17{\cdot}14910\; Q_2 = 1,$$
$$17{\cdot}14910\; Q_1 + 26{\cdot}58956\; Q_2 = 0,$$

czyli:

$$\frac{11{\cdot}48025\,.\,26{\cdot}58956 - 17{\cdot}14910^2}{26{\cdot}58956}\, Q_1 = 1,$$

skąd:

$$\frac{1}{Q_1} = \frac{305{\cdot}2548 - 294{\cdot}0915}{26{\cdot}58956} = 0{\cdot}41934 = P_x\,,$$

zatem:

$$M_x = \frac{\mu}{\sqrt{P_x}} = \pm \frac{0{\cdot}0215}{\sqrt{0{\cdot}41984}} = \pm\ 0{\cdot}03318.$$

Błąd oczekiwany otrzymamy podług wzoru (XIV), t. j.:

$$R = 0{\cdot}6744\ M,$$

przeto:

$$R_x = \pm\ 0{\cdot}6744\ .\ 0{\cdot}03318 = \pm\ 0{\cdot}02237,$$
$$R_y = \pm\ 0{\cdot}6744\ .\ 0{\cdot}0215 = \pm\ 0{\cdot}01450.$$

Możemy tedy powiedzieć, że prawdziwe wartości ilości x i y leżą między:

$$x = 0{\cdot}157867 + 0{\cdot}02237 \text{ a } 0{\cdot}157867 - 0{\cdot}02237,$$
$$y = 0{\cdot}403511 + 0{\cdot}01450 \text{ a } 0{\cdot}403511 - 0{\cdot}01450,$$

więc wysnuwają się wartości:

$$A = 1{\cdot}57867 \pm 0{\cdot}2237$$
$$B = 40{\cdot}3511 \pm 1{\cdot}450$$

z prawdopodobieństwem $= \frac{1}{2}$, gdy przyjmiemy prawo pod postacią równania:

$$m = Ar^2 + Br^3.$$

Błędy oczekiwane tedy są w stosunku do ilości stałych dostatecznie małe; możemy przeto przyjąć równanie:

$$m = 1{\cdot}579\ r^2 + 40{\cdot}351\ r^3$$

na wyrażenie ilości piasku w jednej sekundzie wypływającego przez otwór o promieniu r.

---

c) *Sprawdzanie rachunku.*

44. Z zagadnień, w poprzednich ustępach podanych, jest widoczne, że rachunek wyrównania spostrzeżeń jest dosyć żmudny, a nader pożądaną rzeczą jest, aby być pewnym, że nie popełniło się żadnego błędu. Dlatego też należy sprawdzać otrzymane wypadki, nie dopiero na samym końcu rachunku, ale już w ciągu tegoż; należy zatem być pewnym na każdym kroku, że błędu rachunkowego się nie popełniło. Jak zaś kontroluje się czyli sprawdza rachunek podczas wyrównywania spostrzeżeń pośrednich, wyłuszczają następujące ustępy.

45. Jeżeli równania:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = l_1\,, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = l_2\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_nx + b_ny + c_ny + d_nt = l_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

są równaniami błędów czterech niewiadomych (gdy jest więcej niewiadomych niż 4, sposób postępowania jest analogiczny), to połóżmy:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + l_1 = s_1, \\ a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + l_2 = s_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n + b_n + c_n + d_n + l_n = s_n. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Dodawszy te równania kolumnami, to spełnić się tedy musi równanie:

$$[a] + [b] + [c] + [d] + [l] = [s], \qquad (3)$$

jeżeli ilości s_i dobrze wyznaczono. Jest to zatem kontrola dla s_i

Pomnożywszy równania (2) kolejno przez a_1, a_2, a_3, . . . a_n, dodajmy je do siebie; podobnież pomnożywszy je kolejno przez b_1, b_2, . . . , b_n, dodajmy je do siebie, i t. d., a otrzymamy następujący układ 5 równań:

$$\left.\begin{array}{l} [aa] + [ab] + [ac] + [ad] + [al] = [as], \\ [ab] + [bb] + [bc] + [bd] + [bl] = [bs], \\ [ac] + [bc] + [cc] + [cd] + [cl] = [cs], \\ [ad] + [bd] + [cd] + [dd] + [dl] = [ds], \\ [al] + [bl] + [cl] + [dl] + [ll] = [ls], \end{array}\right\} \qquad (K_1)$$

Lewe strony tych równań przedstawiają spółczynniki równań normalnych (8′) w ust. 35. str. 44. Obliczamy zatem prawe strony powyższych równań, tj. $[as]$, $[bs]$, . . . , $[ls]$ równocześnie ze spółczynnikami $[aa]$, $[ab]$, $[ac]$, . . . , dodając we wzorcu I. do liczb a, b, c, . . . jeszcze jednę kolumnę s; natenczas podług (K_1) suma spółczynników równań normalnych i prawych stron tychże musi się zgadzać z obliczonemi ilościami, tj. $[as]$, $[bs]$, . . . , $[ls]$. Zwrócić atoli należy uwagę na tę okoliczność, że zpowodu rachowania logarytmami i możliwych skróceń nie może istnieć bezwzględna zgodność, gdyż w ostatnich miejscach dziesiętnych w rachunku uwzględnionych, muszą się pojawiać pewne zboczenia czyli różnice. Jeżeli zatem zgodność wyników jest dostatecznie dobra, to możemy być pewni, żeśmy dobrze obliczyli spółczynniki równań normalnych.

Pierwsze równanie układu (K_1) mnożymy przez $\frac{[ab]}{[aa]}$ a odjąwszy je od drugiego, otrzymamy:

$$[bb\,.\,1] + [bc\,.\,1] + [bd\,.\,1] + [bl\,.\,1] = [bs\,.\,1],$$

pomnąc, że (ob. str. 44.):

$$[bs\,.\,1] = [bs] - \frac{[ab]}{[aa]}[as],$$

co z danych ilości obliczyć się daje.

Mnożąc drugie równanie układu (K_1) przez $\frac{[ac]}{[aa]}$ i odejmując je od trzeciego i postępując tak samo z równaniem czwartem i piątem, otrzymamy następujący układ czterech równań:

$$\left.\begin{aligned}
[bb.1] + [bc.1] + [bd.1] + [bl.1] &= [bs.1],\\
[bc.1] + [cc.1] + [cd.1] + [cl.1] &= [cs.1],\\
[bd.1] + [cd.1] + [dd.1] + [dl.1] &= [ds.1],\\
[bl.1] + [cl.1] + [dl.1] + [ll.1] &= [ls.1].
\end{aligned}\right\} \qquad (K_2)$$

Po lewej stronie znaku równości mamy tutaj spółczynniki pierwszych równań eliminacyjnych (10) w ust. 35 str. 45. Ponieważ prawe strony powyższych równań obliczają się z ilości, przychodzących w (K_1), przeto równania (K_2) sprawdzają rzetelność spółczynników pierwszych równań eliminacyjnych. Gdy przekonamy się, że spółczynniki układu (10) czynią dostatecznie dobrze zadosyć układowi równań (K_2), możemy być pewni, żeśmy żadnego błędu nie popełnili i możemy dalej rachować.

Jeżeli pierwsze równanie układu (K_2) pomnożymy przez $\frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}$ i odciągniemy od drugiego, następnie jeżeli pomnożymy piewsze równanie tegoż układu przez $\frac{[bd\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}$ i odejmiemy od trzeciego i jeżeli postąpimy tak dalej analogicznie, to korzystając ze skróceń, podanych na str. 46., otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned}
[cc\,.\,2] + [cd\,.\,2] + [cl\,.\,2] &= [cs\,.\,2],\\
[cd\,.\,2] + [dd\,.\,2] + [dl\,.\,2] &= [ds\,.\,2],\\
[cl\,.\,2] + [dl\,.\,2] + [ll\,.\,2] &= [ls\,.\,2],
\end{aligned}\right\} \qquad (K_3)$$

gdzie lewe strony tych równań są spółczynnikami drugich równań eliminacyjnych (12) w ust. 35. str. 46, prawe zaś można obliczyć z (K_2).

Przekonawszy się o dostatecznie dobrej zgodności prawych i lewych stron równań układu (K_3) możemy dalej prowadzić rachunek, będąc pewni, że aż do spółczyników drugich równań eliminacyjnych nie popełniliśmy żadnego błędu.

Pomnożywszy pierwsze równanie układu (K_3) przez $\frac{[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}$ i odjąwszy je od drugiego, jakoteż pomnożywszy pierwsze przez $\frac{[cl\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}$ i odjąwszy je od trzeciego, otrzymamy układ dwu równań:

$$\left.\begin{aligned}
[dd\,.\,3] + [dl\,.\,3] &= [ds\,.\,3],\\
[dl\,.\,3] + [ll\,.\,3] &= [ls\,.\,3],
\end{aligned}\right\} \qquad (K_4)$$

które sprawdzają spółczynniki trzecich równań eliminacyjnych (14).

Tym sposobem — przyjąwszy do ilości a_i , b_i , c_i . . . . , l_i , tylko jednę ilość s_i , — przeprowadzamy kontrolę rachunku, która przekonywa nas o prawdziwości spółczynników każdego układu równań eliminacyjnych.

Co do porządku, jaki zachować należy w rachunku, obacz dodatek II., na końcu rozprawki podany, jako też rozwiązania zagadnień w następującym ustępie 46.

---

46. Z a g a d n i e n i a. 1. Wiadomo, że ciepłota wnętrza ziemi wzrasta od jej powierzchni ku środkowi ziemi. W okolicy Paryża, którego średnia ciepłota roczna $T_0 = 10{\cdot}60^0$ C., wymierzono średnią roczną ciepłotę w rozmaitych głębokościach, przyczem znaleziono:

w głębokości h	= 28 m.	ciepłotę T	=	11·71⁰C.,
„	= 66 m.	„	=	12·90⁰C.,
„	= 173 m.	„	=	16·40⁰C.,
„	= 248 m.	„	=	20·00⁰C.,
„	= 298 m.	„	=	22·20⁰C.,
„	= 400 m.	„	=	23·75⁰C.,
„	= 505 m.	„	=	26·43⁰C.,
„	= 548 m.	„	=	27·70⁰C.

Czy równanie:

$$T = T_0 + Ah + Bh^2$$

wyraża zależność ciepłoty wnętrza ziemi od głębokości?

R o z w i ą z a n i e. Jeżeli przyjmiemy, że równanie:

$$T = T_0 + Ah + Bh^2$$

wyraża zależność średniej temperatury rocznej T od głębokości h, to, skoro położymy:

$$100A = x, \quad 10000B = y,$$

otrzymamy:

$$T - T_0 = \left(\frac{h}{100}\right) x + \left(\frac{h}{100}\right)^2 y$$

a po podstawieniu powyżej podanych wartości znajdziemy następujące równania błędów:

$$1{\cdot}11 = 0{\cdot}28x + 0{\cdot}28^2y, \qquad 11{\cdot}60 = 2{\cdot}98x + 2{\cdot}98^2y,$$
$$2{\cdot}30 = 0{\cdot}66x + 0{\cdot}66^2y, \qquad 13{\cdot}15 = 4{\cdot}00x + 4{\cdot}00^2y,$$
$$5{\cdot}80 = 1{\cdot}73x + 1{\cdot}73^2y, \qquad 15{\cdot}83 = 5{\cdot}05x + 5{\cdot}05^2y,$$
$$9{\cdot}40 = 2{\cdot}48x + 2{\cdot}48^2y, \qquad 17{\cdot}10 = 5{\cdot}48x + 5{\cdot}48^2y.$$

Na podstawie tych równań otrzymujemy następującą tabelkę:

a)

L. p.	a	b	l	s
1.	0·28	0·0784	1·11	1·4684
2.	0·66	0·4356	2·30	3·3956
3.	1·73	2·9929	5·80	10·5229
4.	2·48	6·1504	9·40	18·0304
5.	2·98	8·8804	11·60	23·4604
6.	4·00	16·0000	13·15	33·1500
7.	5·05	25·5025	15·83	46·3825
8.	5·48	30·0304	17·10	52·6104
	22·66	90·0706	76·29	**189·0206**

Z tabelki tej widzimy, że suma pierwszych trzech kolumn równą jest sumie ostatniej kolumny,, że zatem wartość *s* dobrze obliczono.

Przeprowadzając dalej rachunek zapomocą logarytmów, znajdziemy łatwo spółczynniki równań normalnych i ilości kontrolne, które wpisujemy w następującą tabelkę: (Ob. stron. 82.)

Uwaga. Próbę przeprowadza się korzystnie z poszczególnemi liczbami, tak n. p.:

$a_1 a_1 + a_1 b_1 + a_1 l_1 = 0·0784 + 0·02195 + 0·3108 = 0·41115$, co zgadza się w zupełności z $a_1 s_1 = 0·41115$.

Następnie mamy:

$$
\begin{array}{rl}
[aa] = & 90·07060 \\
[ab] = & 404·55797 \\
[al] = & 295·99230 \\
\hline
\Sigma = & 790·62087 \\
\text{i } [as] = & 790·62093,
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\end{array}}\right\} \text{co dostatecznie dobrze się zgadza.}
$$

Podobnież otrzymujemy:

$$
\begin{array}{rl}
[ab] = & 404·55797 \\
[bb] = & 1934·10002 \\
[bl] = & 1306·89854 \\
\hline
\Sigma = & 3645·55653 \\
\text{i } [bs] = & 3645·55652
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\end{array}}\right\} \text{które to wypadki zgadzają się nader dobrze.}
$$

Wkońcu mamy też:

$$
\begin{array}{rl}
[al] = & 295·99230 \\
[bl] = & 1306·89854 \\
[ll] = & 979·00352 \\
\hline
\Sigma = & 2581·89436 \\
\text{i } [ls] = & 2581·89437
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\end{array}}\right\} \text{bardzo zgodne wypadki.}
$$

L. p.	aa	ab	al	as	bb	bl	bs	ll	ls
1.	0·0784	0·02195	0·3108	0·41115	0·06147	0·08703	0·17044	1·23210	1·62992
2.	0·4356	0·28750	1·5180	2·24113	0·18975	1·00188	1·47912	5·29000	7·81002
3.	2·9929	5·17772	10·0340	18·20462	8·95745	17·35882	31·49399	33·64000	61·03283
4.	6·1504	15·25299	23·3120	44·71540	37·82742	57·81376	110·89417	88·36002	169·48570
5.	8·8804	26·46359	34·5680	69·91200	78·86150	103·01264	208·33733	134·56000	272·14060
6.	16·0000	64·00000	52·6000	132·60000	256·00000	210·40000	530·40000	172·92250	435·92250
7.	25·5025	128·78763	79·9415	234·23163	650·37751	403·70457	1182·86971	250·58890	734·23500
8.	30·0304	164·56659	93·7080	288·30500	901·82492	513·51984	1579·91136	292·41000	899·63780
	90·0706	404·55797	295·9923	790·62093	1934·10002	1306·89854	3645·55652	979·00352	2581·89437

47. Zamiast równań normalnych układamy wzorzec I. i rozszerzamy go o dwie kolumny. W pierwszą z tych dodanych kolumn z napisem: „S u m a“, wpisujemy sumy z liczb tego samego wiersza, w drugą zaś kolumnę „ P_x “ liczby *1*, *0*, przedstawiające prawe strony równań ważności ilości niewiadomej x, skutkiem czego rozwiązujemy je równocześnie z równaniami normalnemi. Ostatnie liczby każdego szeregu poziomego są to odpowiednie logarytmy. A więc mamy:

Wzorzec I.

x	y		Suma	P_x
90·07060 **1**	+404·55797 **4·491567** 0·6523977	+295·99230 **3·286224** 0·5166972	+790·62087 **8·777791** 0·9433853	1 **0·011102** 0·0454169—2
+404·55797 × 2·6069808	1934·10002 +1817·100 3·2593785	+1306·89854 + 1329·469 3·1236780	+3645·55653 + 3551·127 3·5503661	0 4·491565 0·6523977
+ 295·99230 × 2·4712803		979·00352 + 972·6968 2·9879775	+2581·89436 + 2598·158 3·4146656	
790·62093	3645·55653	2581·89437	Kontrola	Z drugiej tabelki.

O b j a ś n i e n i e d o p o w y ż s z e g o w z o r c a:

log 404·55797 = 2·6069808		log 295·99230 = 2·4712803	
log 90·07060 = 1·9545831		log 90·07060 = 1·9545831	
0·6523977		0·5166972	

log 790·62087 = 2·8979684	log1 = 0·0000000
log 90·07060 = 1·9545831	log 90·07060 = 1·9545831
0·9433853	0·0454169—2

W ciągu dalszym układamy wzorzec II., przyczem namieniamy, że do charakterystyki logarytmu dopisane *n* oznacza, że dotycząca liczba jest odjemną. Dla niektórych wyjaśnień porównaj wzorzec w Dodatku II.

Wzorzec II.

y		Suma	P_x
117·00002	− 22·57046	+ 94·42956	− 4·491565
1	**− 0·19291**	**+ 0·80709**	**− 0·038478**
	$0\cdot_n 2853545-1$	0·9069219—1	$0\cdot_n 5842118-2$
	+ 6·30672	− 16·26374	
− 22·57046 ×	4·35406	− 18·21638	
$1_n\cdot 3535404$	0·6388949	$1_u\cdot 2604623$	
94·42953	− 16·26364	Kontrola	Z wzorca I.

Objaśnienie do powyższego wzorca:

$$\begin{array}{ll} \log\ 22{\cdot}57046 = 1_n{\cdot}3535404 & \log\ 94{\cdot}42956 = 1{\cdot}9751078 \\ \log\ 117{\cdot}00002 = 2{\cdot}0681859 & \log\ 117{\cdot}00002 = 2{\cdot}0681859 \\ \hline 0_n{\cdot}2853545-1 & 0{\cdot}9069219-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \log\ 4{\cdot}491565 = 0_n{\cdot}6523977 \\ \log\ 117{\cdot}00002 = 2{\cdot}0681859 \\ \hline 0_n{\cdot}5842118-2. \end{array}$$

Jako ostatnie równania sprawdzające otrzymujemy:

$$[ll\ .\ 2] = 1{\cdot}95266,$$
$$[ls\ .\ 2] = 1{\cdot}95264,$$

co daje dostatecznie dobrą zgodność.

Z wzorca I. i II. mamy:

$$y = -\ 0{\cdot}19291,$$
$$x + 4{\cdot}491567y = 3{\cdot}286324,$$

z czego wypływa:

$$y = -\ 0{\cdot}1929,$$
$$x = 4{\cdot}1527.$$

Dla ważności otrzymamy:

$$Q_1 + 4{\cdot}491567\ Q_2 = 0{\cdot}011102,$$
$$Q_2 = -\ 0{\cdot}038478,$$

więc:

$$\frac{1}{P_x} = Q_1 = 0{\cdot}183531,$$
$$P_x = 5{\cdot}4236,$$
$$P_y = 117{\cdot}0000$$

bezpośrednio z wzorca II.

Błąd średni tedy będzie:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[ll\,.\,2]}{8-2}} = \pm\sqrt{\frac{1{\cdot}95266}{5}} = \pm\, 0{\cdot}5705,$$

przeto:

$$M_x = \pm\frac{\mu}{\sqrt{P_x}} = \pm\frac{0{\cdot}5705}{\sqrt{5{\cdot}4236}} = \pm\, 0{\cdot}24439,$$

$$M_y = \pm\frac{\mu}{\sqrt{P_y}} = \pm\frac{0{\cdot}5705}{\sqrt{117}} = \pm\, 0{\cdot}052747.$$

Błędy zaś oczekiwane są:

$$R_x = \pm\, 0{\cdot}1648,$$
$$R_y = \pm\, 0{\cdot}03557,$$

tak że powiedzieć możemy, że prawdziwą wartość stałych A i B określają niewątpliwie równania:

$$A = 0{\cdot}041527 \pm 0{\cdot}001648,$$
$$B = -\,0{\cdot}00001929 \pm 0{\cdot}000003557.$$

Zatem żądany wzór, dostatecznie odpowiadający powyższym wartościom, będzie:

$$T = T_0 + 0{\cdot}04153h - 0{\cdot}00001919h^2,$$

przyczem błąd oczekiwany w A wynosi około 4%, a w B około 18%. Ponieważ B jest samo przez się bardzo małe, przeto ów pod uwagę wzięty znaczny błąd, bardzo mało wpływa na ostateczny wynik.

2. Dla warunków, podanych w zagadnieniu 2. ust. 43., przyjmujemy, że istnieje wzór:

$$m = pr^q,$$

podający ilość wysypującego się piasku w reńskich calach sześć. na sekundę, gdzie r oznacza promień otworu. Mamy wyznaczyć ilości stałe p i q.

R o z w i ą z a n i e. Mieliśmy tam bowiem:

dla r =	0·05487	m =	0·00912
=	0·08052	=	0·02985
=	0·09868	=	0·05399
=	0·12017	=	0·09532
=	0·16784	=	0·23463

Wzór:

$$m = pr^q$$

napiszemy w postaci następującej:

$$\log m = \log p + q \log r,$$

gdzie podług naszej ogólnej teoryi jest:

$$l = \log m, \quad a = 1, \quad b = \log r,$$

kładąc:

$$\log p = x, \qquad q = y.$$

Bacząc, że:

$$\log 0\cdot00912 = 0\cdot9599948 - 3 = -2\cdot0400052,$$

otrzymujemy następującą tabelkę:

a)

Lp.	a	b	l	s
1.	1	— 1·2607	— 2·0400	— 2·3007
2.	1	— 1·0941	— 1·5251	— 1·6192
3.	1	— 1·0058	— 1·2677	— 1·2735
4.	1	— 0·9202	— 1·0208	— 0·9410
5.	1	— 0·7751	— 0·6296	— 0·4047
	5	— 5·0559	— 6·4832	— 6·5391

z której otrzymujemy następującą:

b)

Lp.	aa	ab	al	as	bb	bl	bs	ll	ls
1.	1	—1·2607	—2·0400	—2·3007	1·589365	2·571828	2·900492	4·161600	4·693429
2.	1	—1·0941	—1·5251	—1·6192	1·197054	1·668612	1·771567	2·325930	2·469442
3.	1	—1·0058	—1·2677	—1·2735	1·011630	1·275052	1·280886	1·607064	1·614416
4.	1	—0·9202	—1·0208	—0·9410	0·846768	0·939340	0·865908	1·042033	9·960573
5.	1	—0·7751	—0·6296	—0·4047	0·600780	0·488003	0·313683	0·396396	0·254799
	5	—5·0559	—6·4832	—6·5391	5·245597	6·942835	7·132536	9·533023	9·992659

Z tej tabelki wyjmujemy liczby dla wzorca I.

Wzorzec I.

x	y		Suma
5	— 5·0559	— 6·4832	— 6·5391
1	**— 1·01118**	**— 1·29664**	**— 1·30782**
	$0\cdot_{n}0048285$	$0\cdot_{n}1128194$	$0\cdot_{n}1165479$
	5·245597	6·942835	7·132532
— 5·0559 ×	5·112426	6·555681	6·612206
$0\cdot_{n}7037985$	0·7086270	0·8166179	0·8203464
		9·533023	9·992658
— 6·48332 ×		9·406376	8·478864
$0\cdot_{n}8117894$		0·9246088	0·9283373
— 6·5391	7·132536	9·992659	Kontrola

Z tabelki b).

Liczby drobnem pismem wskazane drugiego i trzeciego wiersza odjęte od liczb, ponad niemi stojących, dają liczby dla wzorca następującego:

Wzorzec II.

y		Suma
0·133171	0·387154	0·520325
1	**2·907195**	**3·907232**
	0·4634741	0 5918692
	1·126647	1·513801
	1·125532	1·512700
	0·0513579	0·1797530
0·520330	1·513995	Kontrola

Z wzorca I.

W wzorcu tym w trzeciej kolumnie sumy:

$$[bb\,.\,1] + [bl\,.\,1] = 0{\cdot}133171 + 0{\cdot}387154 = 0{\cdot}520325$$

i

$$[bl\,.\,1] + [ll\,.\,1] = 0{\cdot}387154 + 1{\cdot}126647 = 1{\cdot}513801$$

zgadzają się dostatecznie z liczbami w ostatnim wierszu przychodzącemi a drogą rachunkową z wzorca I. otrzymanemi.

Wzorzec I. i II. daje:

$$[ll\,.\,2] = 0{\cdot}001115\,,$$
$$y = 2{\cdot}907195\,,$$
$$x - 1{\cdot}01118y = -\,1{\cdot}29664\,,$$

z czego wynika:

$$x = 1{\cdot}64305\,,$$
$$y = 2{\cdot}9072\,,$$

przeto:

$$x = \log p = 1{\cdot}64305,$$
$$y = \quad q \quad = 2{\cdot}9072,$$

czyli:

$$p = 43{\cdot}96\,,$$
$$q = \;\; 2{\cdot}9072\,.$$

Dla błędu średniego otrzymujemy:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[\alpha\alpha]}{n-k}} = \pm\sqrt{\frac{[ll\,.\,2]}{5-2}} = \pm\sqrt{\frac{0{\cdot}001115}{3}} = \pm\,0{\cdot}01928.$$

Błąd zaś oczekiwany:

$$\rho = \pm\,0{\cdot}01399,$$

jest cokolwiek mniejszy od wartości, którą podaliśmy w temże zagadnieniu na str. 76., tj. od 0·01450.

Co się tyczy błędów w x i y zawartych, to mamy:

$$M_y = \frac{\mu}{\sqrt{P_y}} = \frac{\pm\,0{\cdot}01928}{\sqrt{0{\cdot}133171}} = \pm\,0{\cdot}0528.$$

Aby obliczyć M_x, należy wyznaczyć nasamprzód P_x zapomocą równań ważności:

$$5Q_1 - 5{\cdot}0559Q_2 \quad = 1\,,$$
$$-\,5{\cdot}0559Q_1 + 5{\cdot}245597Q_2 = 0\,,$$

albowiem otrzymujemy:

$$\frac{5\,.\,5{\cdot}245597 - 5{\cdot}0559^2}{5{\cdot}245597}\,Q_1 = 1,$$

a stąd:

$$P_x = \frac{1}{Q_1} = \frac{26{\cdot}227985 - 25{\cdot}562125}{5{\cdot}245597} = 0{\cdot}12693\,,$$

a więc:

$$M_x = \frac{\mu}{\sqrt{P_x}} = \pm\,\frac{0{\cdot}01928}{\sqrt{0{\cdot}12693}} = \pm\,0{\cdot}0541.$$

Zatem błędy oczekiwane są:

$$R_x = \pm\,0{\cdot}0365,$$
$$R_y = \pm\,0{\cdot}0356.$$

Aby zaś wyznaczyć błąd oczekiwany ilości stałej p, zważmy, że

$$p = 10^x,$$

więc:

$$p + R_p = 10^{x \pm R_x},$$

zatem:

$$R_p = 10^x (10^{R_x} - 1) = p (10^{R_x} - 1).$$

A że:

$$10^{+0.0365} = 1.09,$$
$$10^{-0.0365} = 0.92,$$

więc:

$$10^{+0.0365} - 1 = 0.09,$$
$$10^{-0.0365} - 1 = -0.08,$$

przeto:

$$R_p = \pm 43.96 \,.\, 0.09$$
$$R_p = \pm 3.956$$
$$R_q = \pm 0.03563.$$

Tedy otrzymujemy wzór na ilość m piasku wysypującego się w sekundzie otworem o promieniu r:

$$m = 43.96 \,.\, r^{2.9072}$$

z błędem oczekiwanym oznaczonych ilości stałych:

$$\pm 0.03563 \text{ i } \pm 0.01399.$$

3. Jaki jest błąd oczekiwany wartości m poprzedniego zagadnienia, gdy zastosujemy wzór:

$$m = 43.96 \,.\, r^{2.9072}\ ?$$

R o z w i ą z a n i e. Jeżeli mamy wogóle:

$$m = pr^q$$

a w p i q są błędy bardzo małe, to, ponieważ:

$$\log m = \log p + q \log r$$
$$= x + y \log r,$$

różniczkując, mieć będziemy:

$$\frac{dm}{m} = dx + dy \,.\, \log r.$$

Jeżeli więc $\pm R_x$, $\pm R_y$ jest błędem oczekiwanym w x, względnie w y, to podług (XXII) błąd oczekiwany R_m wyrazimy równaniem:

$$\frac{R_m}{m} = \pm \sqrt{R_x^2 + R_y^2 (\log r)^2}$$

czyli:

$$R_m = \pm m \sqrt{R_x^2 + R_y^2 (\log r)^2}.$$

Błąd zatem wzrastać będzie z promieniem *r* otworu wypływu.

Przyjąwszy $r = 0{\cdot}1044$, która to wartość jest średnią arytmetyczną z pięciu danych wartości promienia *r*, otrzymamy:

$$R_m = \pm\, m \sqrt{0{\cdot}03649^2 + 0{\cdot}03563^2 \,.\, 0{\cdot}9813^2}$$
$$= \pm\, 0{\cdot}19 m\,,$$

a więc oczekiwany błąd w oznaczeniu ilości *m* podług wzoru:

$$m = 43{\cdot}96 \,.\, r^{2{\cdot}9072}$$

wynosi niemal 19% wartości *m*.

4. Jaki jest błąd oczekiwany ilości *m*, jeżeli zastosujemy na str. 77. podany wzór:

$$m = 1{\cdot}237 r^2 + 40{\cdot}351 r^3,$$

jeżeli błędy oczekiwane

$$\text{dla } 1{\cdot}237 \text{ jest } R_A = \pm\, 0{\cdot}2237,$$
$$\text{„ } 40{\cdot}351 \text{ „ } R_B = \pm\, 1{\cdot}45?$$

Rozwiązanie. Skoro mamy wzór:

$$m = Ar^2 + Br^3,$$

przeto:

$$dm = r^2 \,.\, dA + r^3 \,.\, dB\,,$$

czyli:

$$R_m = \pm \sqrt{P_A^2 \,.\, r^4 + P_B^2 \,.\, r^6}$$
$$= \pm\, r^2 \sqrt{P_A^2 + P_B^2 r^2},$$

a więc błąd rośnie wraz z *r*. Przyjąwszy znowu $r = 0{\cdot}1044$, mieć będziemy:

$$R_m = \pm\, r^2 \sqrt{0{\cdot}2237^2 + 1{\cdot}45^2 \,.\, 0{\cdot}1044^2}$$
$$= \pm\, 0{\cdot}27 \,.\, r^2,$$

przeto:

$$\frac{R_m}{m} = \pm \frac{0{\cdot}27}{1{\cdot}237 + 40{\cdot}351 \,.\, 0{\cdot}1044} = \pm\, 0{\cdot}04977,$$

tak że:

$$R_m = \pm\, 0{\cdot}05 m,$$

więc mniejszy niż poprzednio. Zatem ostatni wzór jest dokładniejszy niż poprzedzający.

2. Spostrzeżenia o niejednakowej dokładności.

48. Niech L_1, L_2, L_3, . . . , L_n oznaczają spostrzeżenia pośrednie niejednakowo dokładne, z których wyznaczono l_1, l_2, l_3, . . . , l_n; również niech p_1, p_2, p_3, . . . , p_n będą ważnościami, tymże spostrzeżeniom odpowiadającemi. Natenczas, jak wiadomo, równania:

$$
\begin{aligned}
a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + k_1v &= l_1,\\
a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + k_2v &= l_2,\\
a_3x + b_3y + c_3z + \ldots + k_3v &= l_3,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_nx + b_ny + c_nz + \ldots + k_nv &= l_n
\end{aligned}
$$

są równaniami błędów, przyczem pamiętać należy, że skoro x, y, z, . . . , v oznaczają prawdziwe wartości spostrzeżeń, popełnione błędy wyrażamy wogóle równaniem:

$$\varepsilon_i = a_ix + b_iy + c_iz + \ldots + k_iv - l_i .$$

Powyżej okazaliśmy, że wyrównanie spostrzeżeń jednakowej dokładności uskuteczniamy na podstawie warunku, aby suma kwadratów błędów była najmniejszością. Również wiemy, że każdy błąd można sprowadzić do jednostki ważności, mnożąc go pierwiastkiem kwadratowym z ważności mu przynależnej. Zatem:

$$\varepsilon_1\sqrt{p_1},\ \varepsilon_2\sqrt{p_2},\ \varepsilon_3\sqrt{p_3},\ \ldots,\ \varepsilon_n\sqrt{p_n}$$

są błędami zredukowanymi do jednostki ważności, które to błędy przypisać należy spostrzeżeniom jednakowo dokładnym. Możemy tedy tak samo i tutaj postąpić, czyniąc sumy kwadratów tych błędów najmniejszością. Zatem $[\varepsilon\varepsilon p]$ musi być najmniejszością. Przeto być musi:

$$\frac{\partial\,[\varepsilon\varepsilon p]}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial\,[\varepsilon\varepsilon p]}{\partial y} = 0,\ \ldots,\ \frac{\partial\,[\varepsilon\varepsilon p]}{\partial v} = 0,$$

czyli:

$$
\begin{aligned}
p_1\varepsilon_1\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x} + p_2\varepsilon_2\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial x} + \ldots + p_n\varepsilon_n\frac{\partial\varepsilon_n}{\partial x} &= 0,\\
p_1\varepsilon_1\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial y} + p_2\varepsilon_2\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial y} + \ldots + p_n\varepsilon_n\frac{\partial\varepsilon_n}{\partial y} &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p_1\varepsilon_1\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial v} + p_2\varepsilon_2\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial v} + \ldots + p_n\varepsilon_n\frac{\partial\varepsilon_n}{\partial v} &= 0,
\end{aligned}
$$

czyli wprowadzając w pierwsze z powyższych równań wartości za ε_i, mieć będziemy:

$$p_1 (a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + k_1 v - l_1) a_1 + p_2 (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots$$
$$\ldots + k_2 v - l_2) a_2 + \ldots + p_n (a_n x + b_n y + c_n z + \ldots + k_n v - l_n) a_n = 0$$

czyli pisząc symbolicznie:

$$[paa]\, x + [pab]\, y + [pac]\, z + \ldots + [pak]\, v = [pal].$$

Przekształciwszy analogicznie drugie, trzecie, . . . , n^{te} z powyższych równań, otrzymamy następujący układ równań dla niewiadomych x, y, z, . . . , v:

$$\left.\begin{array}{l} [paa]\, x + [pab]\, y + \ldots + [pak]\, v = [pal], \\ [pab]\, x + [pbb]\, y + \ldots + [pbk]\, v = [pbl], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [pak]\, x + [pbk]\, y + \ldots + [pkk]\, v = [pkl]. \end{array}\right\} \quad (W)$$

Powyższy układ równań (W) jest zupełnie równy układowi równań normalnych (8'); dalsze tedy postępowanie jest zupełnie takie same, jak dla spostrzeżeń jednakowej dokładności, co powyżej wskazano.

49. Dodamy tylko kilka uwag odnoszących się do ustawienia układu równań (W).

Tworzymy nasamprzód, jak poprzednio, zawsze tabelkę *a*), z niej zaś tabelkę *b*), w którą wpisujemy iloczyny $a_1 a_1$, $a_1 b_1$, $a_1 c_1$, ... Do tej tabelki dołączamy jeszcze jednę kolumnę, w którą wpisujemy ważności poszczególnych spostrzeżeń. Z tej tabelki *b*) tworzymy nową tabelkę, którą oznaczymy przez *c*, zawierającą iloczyny $p_1 a_1 a_1$, $p_1 a_1 b_1$, $p_1 a_1 c_1$, . . . , które otrzymujemy, mnożąc każdy wiersz poziomy tabelki *b*) przez odpowiednią ważność tegoż wiersza, w ostatniej kolumnie się znajdującą. Dalszy rachunek jest w zupełności ten sam, co powyżej.

Ponieważ ważności są tylko liczbami stosunkowemi, można je dla prostoty rachunku zaokrąglać do liczb całkowitych. Równania (W) nie zmienią się, jeżeli wszystkie ważności pomnożymy przez tę samą liczbę.

50. Jeżeli h_1, h_2, h_3, . . . są miarami dokładności, odpowiadającemi spostrzeżeniom, to według wzoru (XI) będzie:

$$p_1 : p_2 : p_3 : \ldots : p_n = h_1^2 : h_2^2 : h_3^2 : \ldots : h_n^2.$$

Wprowadziwszy tedy h_i^2 za p_i, kładąc np.:

$$p_i = rh_i^2,$$

otrzymamy za układ *(W)*, po uproszczeniu przez r, następujący układ równań:

$$\left.\begin{array}{l} [h^2aa]\,x + [h^2ab]\,y + \ldots + [h^2ak]\,v = [h^2al], \\ [h^2ab]\,x + [h^2bb]\,y + \ldots + [h^2bk]\,v = [h^2bl], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [h^2ak]\,x + [h^2bk]\,y + \ldots + [h^2kk]\,v = [h^2kl]. \end{array}\right\} \quad (M)$$

A że możemy za $[h^2aa]$, $[h^2ab]$, . . . napisać $[ha\,.\,ha]$, $[ha\,.\,hb]$, . . . , przeto powyższy układ równań (M) otrzymać można z równań błędów:

$$\begin{array}{l} h_1\ (a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + k_1x) = h_1l_1\,, \\ h_2\ (a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + k_2v) = h_2l_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_n\ (a_nx + b_ny + c_nz + \ldots + k_nv) = h_nl_n\,. \end{array}$$

Znając przeto miary dokładności, trzeba tedy każde równanie błędu pomnożyć odpowiednią miarą dokładności, a w ten sposób otrzymane równania zużytkować do ustawienia równań normalnych. Dalszy rachunek jest ten sam, co powyżej.

Dla błędu średniego stosujemy tutaj wzór:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[p\alpha\alpha]}{n-k}} \qquad \text{(XXX)}.$$

---

51. Zagadnienie. Ze stanowiska O celowano do 5 punktów A, B, C, D, E i otrzymano 10 następujących wartości kątowych:

AOB =	15° 37′ 32·67″	z 24	spostrzeżeń
AOC =	45° 20′ 47·34″	„ 16	„
AOD =	156° 23′ 28·76″	„ 32	„
AOE =	268° 44′ 19·84″	„ 12	„
BOC =	29° 43′ 13·56″	„ 8	„
BOD =	140° 45′ 57·13″	„ 24	„
BOE =	253° 6′ 45·03″	„ 4	„
COD =	111° 2′ 42·86″	„ 16	„
COE =	223° 23′ 30·94″	„ 32	„
DOE =	112° 20′ 49·32″	„ 8	„

Wyznaczyć najprawdopodobniejsze wartości tych kątów.

R o z w i ą z a n i e. W tym celu, jak w zagadnieniu 1. w ust. 39. (str. 53), kładziemy:

$$\begin{aligned} AOB &= 15^0\ 37'\ 31'' + x, \\ AOC &= 45^0\ 20'\ 46'' + y, \\ AOD &= 156^0\ 23'\ 27'' + z, \\ AOE &= 268^0\ 44'\ 18'' + t, \end{aligned} \tag{1}$$

przeto równania błędów będą:

$$x = 1{\cdot}67, \quad y = 1{\cdot}34, \quad \Big| \quad z = 1{\cdot}76, \quad t = 1{\cdot}84. \tag{2}$$

Ponieważ BOC = AOC — AOB, przeto podług (1) mamy:

$$BOC = 29^0\ 43'\ 15'' + y - x,$$

a z pomiaru: $BOC = 29^0\ 43'\ 13{\cdot}56''$

przeto: $0 = \mathbf{1{\cdot}44 + y - x}$

t. j. związek, który mają spełnić x i y.

Ponieważ BOD = AOD — AOB, przeto podług (1):

$$BOD = 140^0\ 45'\ 56'' + z - x,$$

a z pomiaru: $BOD = 140^0\ 45'\ 57{\cdot}13''$

więc: $0 = \mathbf{-\,1{\cdot}13 + z - x}$

jako równanie warunkowe, któremu z i x mają uczynić zadość.

Następnie: BOE = AOE — AOB, przeto podług (1):

$$BOE = 253^0\ 6'\ 47'' + t - x,$$

z pomiaru: $BOE = 253^0\ 6'\ 45{\cdot}03''$

więc: $0 = \mathbf{1{\cdot}97 + t - x}$

jako trzecie równanie warunkowe, wykazujące związek między t i x.

Jakoteż: COD = AOD — AOC, przeto podług (1):

$$COD = 111^0\ 2'\ 41'' + z - y,$$

z pomiaru: $COD = 111^0\ 2'\ 42{\cdot}86''$

więc: $0 = \mathbf{-\,1{\cdot}86 + z - y}$

jako związek, który mają spełnić z i y.

Podobnież: COE = AOE — AOC, przeto podług (1):

$$COE = 223^0\ 23'\ 32'' + t - y$$

z pomiaru: $COE = 223^0\ 23'\ 30{\cdot}94''$

więc: $0 = \mathbf{1{\cdot}06 + t - y}$

jako związek między ilościami t i y.

Wreszcie: DOE = AOE − AOD, przeto podług (1):

DOE = 112° 20′ 51″ + t − z,

z pomiaru: DOE = 111° 20′ 49·32″

więc: 0 = **1·68 + t − z**

jako szóste równanie warunkowe, podające związek między *t* i *z*.

Otrzymujemy zatem następujące wartości dla kątów, wyrażone przez poprawki *x*, *y*, *z* i *t*:

AOB = 15° 37′ 31″ + x,
AOC = 45° 20′ 46″ + y,
AOD = 156° 23′ 27″ + z,
AOE = 268° 44′ 18″ + t,
BOC = 29° 43′ 15″ + y − x,
BOD = 140° 45′ 56″ + z − x,
BOE = 253° 6′ 47″ + t − x,
COD = 111° 2′ 41″ + z − y,
COE = 223° 23′ 32″ + t − y,
DOE = 112° 20′ 51″ + t − z.

Równania zaś błędów są:

x + 0 . y + 0 . z + 0 . t	= 1·67	z 24	spostrzeżeń,
0 . x + y + 0 . z + 0 . t	= 1·34	z 16	„
0 . x + 0 . y + z + 0 . t	= 1·76	z 32	„
0 . x + 0 . y + 0 . z + t	= 1·84	z 12	„
x − y + 0 . z + 0 . t	= 1·44	z 8	„
− x + 0 . y + z + 0 . t	= 1·13	z 24	„
x + 0 . y + 0 . z − t	= 1·97	z 4	„
0 . x − y + z + 0 . t	= 1·86	z 16	„
0 . x + y + 0 . z − t	= 1·06	z 32	„
0 . x + 0 . y + z − t	= 1·68	z 8	„

Za ważności, odpowiadające powyższym równaniom błędów, moglibyśmy przyjąć bezpośrednio liczbę spostrzeżeń; aby jednak nie rachować liczbami wielkiemi, przyjmujemy ważność jednego spostrzeżenia równą 4, gdyż wszystkie liczby ważności są podzielne przez 4, za jednostkę ważności. Tak uproszczone liczby wprowadzamy do tabelki *b*) w ostatnią kolumnę. Zatem mamy nasamprzód tabelkę:

a)

Lp.	a	b	c	d	l	s
1.	1	.	.	.	1·67	2·67
2.	.	1	.	.	1·34	2·34
3.	.	.	1	.	1·76	2·76
4.	.	.	.	1	1·84	2·84
5.	1	—1	.	.	1·44	1·44
6.	—1	.	1	.	1·13	1·13
7.	1	.	.	—1	1·97	1·97
8.	.	—1	1	.	1·86	1·86
9.	.	1	.	—1	1·06	1·06
10.	.	.	1	—1	1·68	1·68
	2	0	4	—2	15·75	**19·75**

Z poprzedniej tabelki a) otrzymujemy bezpośrednio następującą:

b)

L. p.	aa	ab	ac	ad	al	as	bb	bc	bd	bl	bs	cc	cd	cl	cs	dd	dl	ds	ll	ls	p
1.	1	.	.	.	1·67	2·67	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2·789	4·459	6
2.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1·34	2·34	.	.	.	.	.	.	.	1·796	3·136	4
3.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1·76	2·76	.	.	.	3·098	4·858	8
4.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1·84	2·84	3·386	5·226	3
5.	1	—1	.	.	1·44	1·44	1	.	.	—1·44	—1·44	.	.	.	.	.	.	.	2·074	2·074	2
6.	1	.	—1	.	—1·13	—1·13	.	.	.	.	.	1	.	1·13	1·13	.	.	.	1·277	1·277	6
7.	1	.	.	—1	1·97	1·97	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	—1·97	—1·97	3·881	3·881	1
8.	.	.	.	.	.	.	1	—1	.	—1·86	—1·86	1	.	1·86	1·86	.	.	.	3·460	3·460	4
9.	.	.	.	.	.	.	1	.	—1	1·06	1·06	.	.	.	.	1	—1·06	—1·06	1·124	1·124	8
10.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	—1	1·68	1·68	1	—1·68	—1·68	2·822	2·822	2
	4	—1	—1	—1	3·95	**4·95**	4	—1	—1	—·09	**0·1**	4	—1	6·43	**7·43**	4	—2·87	**—1·87**	25·707	**32·317**	

z której to tabelki podług powyżej podanych wskazówek otrzymujemy następującą:

c)

L. p.	paa	pab	pac	pad	pal	pas	pbb	pbc	pbd	pbl	pbs	pcc	pcd	pcl	pcs	pdd	pdl	pds	pll	pls
1.	6	.	.	.	10·02	16·02	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16·734	26·754
2.	.	.	.	.	.	.	4	.	.	5·36	9·36	.	.	.	.	.	.	.	7·184	12·544
3.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.	14·08	22·08	.	.	.	24·784	38·864
4.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	5·52	8·52	10·158	15·678
5.	2	—2	.	.	2·88	2·88	2	.	.	—2·88	—2·88	.	.	.	.	.	.	.	4·148	4·148
6.	6	.	—6	.	—6·78	—6·78	.	.	.	.	.	6	.	6·78	6·78	.	.	.	7·662	7·662
7.	1	.	.	—1	1·97	1·97	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	—1·97	—1·97	3·881	3·881
8·	.	.	.	.	.	.	4	—4	.	—7·44	—7·44	4	.	7·44	7·44	.	.	.	13·840	13·840
9.	.	.	.	.	.	.	8	.	—8	8·48	8·48	.	.	.	.	8	—8·48	—8·48	8·992	8·992
10.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	—2	3·36	3·36	2	—3·36	—3·36	5·644	5·644
	15	—2	—6	—1	8·09	**14·09**	18	—4	—8	3·52	**7·52**	20	—2	31·66	**39·66**	14	—8·29	—5·29	103·027	**138·007**

Tabelka *c*) podaje nam zatem następujące cztery równania normalne:

$$\begin{aligned} 15x - 2y - 6z - t &= 8{\cdot}09, \\ -2x + 18y - 4z - 8t &= 3{\cdot}52, \\ -6x - 4y + 20z - 2t &= 31{\cdot}66, \\ -x - 8y - 2z \quad 14t &= -8{\cdot}29. \end{aligned}$$

W celu rozwiązania tych równań stosujemy w dodatku II. przytoczone wzorce, w skutek czego otrzymamy po kolei:

Wzorzec I.

	x	y	z	t		Suma
	15 **1**	— 2 **— 0·13333**	— 6 **— 0·4**	— 1 **— 0·06667**	8·09 **0·53934**	14·09 **0·93934**
	— 2 ×	18 0·26667	— 4 0·8	— 8 0·13333	3·52 — 1·07868	7·52 — 1·87868
	— 6 ×		20 2·4	— 2 0·4	31·66 — 3·23604	39·66 — 5·63604
	— 1 ×			14 0·06667	— 8·29 — 0·53934	— 5·29 — 0·93934
	8·09 ×				103·027 4·3632	138·007 7·5992
Z tabelki c).	14·09	7·52	39·66	— 5·29	138·007	Kontrola

Wzorzec II.

	y	z	t		Suma
	17·73333 **1**	— 4·8 **— 0·27068** $0{\cdot}_{n}43245 - 1$	— 8·13333 **— 0·45865** $0{\cdot}_{n}66148 - 1$	4·59868 **0·25932** 0·41384 — 1	9·39868 **0·53000** 0·72428 — 1
	— 4·8 × $0{\cdot}_{n}68124$	17·6 1·29924 0·11369	— 2·4 2·20150 0·34272	34·89604 — 1·24474 $0{\cdot}_{n}09508$	45·29604 — 2·54400 $0{\cdot}_{n}40552$
	— 8·13333 × $0{\cdot}_{n}91027$		13·93333 3·73033 0·37175	— 7·75066 — 2·10915 $0{\cdot}_{n}32411$	— 4·35066 — 4·31070 $0{\cdot}_{n}63455$
	4·59868 × 0·66263			98·6638 1·19253 0·07647	130·4078 2·43729 0·38691
Z wz. I.	9·39868	45·29604	— 4·35066	130·4078	Kontrola

Wzorzec III.

	z	t		Suma
	16·30076 **1**	— 4·60150 **0·28229** 0·$_n$45069—1	36·14078 **2·21711** 0·34579	47·84004 **2·93480** 0·46748
	— 4·60150 × 0·$_n$66290	10·20300 1·29894 0·11359	— 5·64151 — 10·20209 1·$_n$00869	— 0·04001 — 13·50455 1·$_n$13048
	36·14078 × 1·55800		97·4713 80·12833 1·90379	127·97057 106·0659 2·02558
Z wzorca II.	47·84004	0·03996	127·97051	Kontrola

Wzorzec IV.

	t		Suma
	8·90406 **1**	4·56058 **0·51219** 0·70943 — 1	13·46464 **1·5120** 0·17961
	— 4·56058 × 0·65902	17·34297 2·3359 0·36845	21·90355 6·8965 0·83863
Z wzorca III.	13·46454	21·90467	Kontrola

Zatem otrzymujemy ostatecznie równania:

$$t = 0{\cdot}51219.$$

$$[ll\,.\,4] = 15{\cdot}0071.$$

Z wzorców IV. aż do I. znajdziemy następujące równania zredukowane:

$$\begin{aligned} t &= 0{\cdot}51, \\ z - 0{\cdot}28t &= 2{\cdot}22, \\ y - 0{\cdot}27z - 0{\cdot}46t &= 0{\cdot}26, \\ x - 0{\cdot}13y - 0{\cdot}40z - 0{\cdot}067t &= 0{\cdot}54, \end{aligned}$$

z których otrzymamy żądane poprawne:

$$t = 0{\cdot}51, \; z = 2{\cdot}36, \; y = 1{\cdot}12, \; x = 1{\cdot}12.$$

Wprowadziwszy poprawki te w równania (3), otrzymamy następujące najprawdopodobniejsze wartości kątów:

AOB = 15° 37′ 32·12″	BOD = 140° 45′ 57·24″
AOC = 45° 20′ 47·12″	BOE = 253° 6′ 46·39″
AOD = 156° 23′ 29·36″	COD = 111° 2′ 42·24″
AOE = 268° 44′ 18·51″	COE = 223° 23′ 31·39″
BOC = 29° 43′ 15·00″	DOE = 112° 20′ 49·15″.

Wartość błędu średniego obliczamy według wzoru (XXVIII):

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[ll\,.\,k]}{n-k}} = \pm \sqrt{\frac{[ll\,.\,4]}{10-4}} = \pm \sqrt{\frac{15}{6}} = \pm\, 1{\cdot}58.$$

Za jednostkę ważności przyjęliśmy ważność, odpowiadającą średniej arytmetycznej z 4 spostrzeżeń, podzieliwszy wszystkie ważności przez 4. W takim razie ważność pojedynczego spostrzeżenia jest: $p_0 = \frac{1}{4}$.

Aby błąd średni sprowadzić do ważności jednego spostrzeżenia, dzielimy go przez $\sqrt{p_0}$ (por. wzór IX), przeto:

$$\mu' = \frac{\mu}{\sqrt{p_0}} = 2\mu = \pm\, 3{\cdot}16.$$

Z wzorca IV. otrzymujemy ważność P_t ilości t, a mianowicie:

$$P_t = 8{\cdot}9,$$

przeto błąd średni M_t ilości t będzie:

$$M_t = \frac{\mu'}{\sqrt{P_t}} = \pm \frac{3{\cdot}16}{\sqrt{8{\cdot}9}} = \pm\, 1{\cdot}059.$$

Zatem błąd oczekiwany:

$$R_t = M_t\,.\,0{\cdot}6744 = \pm\, 1{\cdot}059\,.\,0{\cdot}6744 = \pm\, 0{\cdot}71.$$

B. Wyrównanie spostrzeżeń ilości zawarowanych.

52. Niech będą $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k$ ilości, mające się wyznaczyć ze spostrzeżeń, a poddane warunkom kształtu:

$$\begin{aligned} \varphi_1 (X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k) &= 0, \\ \varphi_2 (X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \varphi_v (X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

w liczbie $\nu < k$, które winny być ściśle spełnione. Spostrzegane zaś wartości tych ilości są: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ z ważnościami im przynależnemi: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$.

Z powodu nieuniknionych błędów spostrzeżeń wartości te nie uczynią ściśle zadość równaniom (1); przeto otrzymać musimy:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1\,(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) = \xi_1, \\ \varphi_2\,(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) = \xi_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_\nu\,(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) = \xi_\nu, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

gdzie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ są małemi ilościami, które z łatwością obliczyć można, znając kształt równań (1), tudzież wyniki spostrzeżeń: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$. Założywszy, że $\nu < k$ a funkcye φ są ciągłe i dają się różniczkować, jakoteż że wszystkie spostrzeżenia są jednakowej dokładności, pytamy się o najprawdopodobniejsze poprawki $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_k$, które dodane do ilości $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ usuną sprzeczności, pojawiające się w równaniach warunkowych, tak że będzie:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = x_1 + \varepsilon_1, \\ X_2 = x_2 + \varepsilon_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ X_k = x_k + \varepsilon_k. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

53. Z pojęcia poprawek $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_k$ wynika, że powinno być:

$$\varphi_i(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, x_3 + \varepsilon_3, \ldots, x_k + \varepsilon_k)$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots, \nu - 1, \nu.$$

Bacząc, że ilości $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_k$ są ilościami bardzo małemi, to rozwijając podług wzoru Taylora, otrzymamy:

$$\varphi_i\,(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, x_3 + \varepsilon_3, \ldots, x_k + \varepsilon_k) =$$
$$= \varphi_i\,(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}\varepsilon_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\varepsilon_k + \ldots,$$

a ograniczając się na pierwszych potęgach ilości ε, mieć będziemy:

$$\varphi_i\,(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}\varepsilon_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\varepsilon_k = 0$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots, \nu - 1, \nu,$$

jako równania warunkowe, wyrażające związki zachodzące między poprawkami $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_k$.

Połóżmy dla skrócenia:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} = a_1, \ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} = a_2, \ldots, \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k} = a_k, \ \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) = w_1, \\
\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} = b_1, \ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} = b_2, \ldots, \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_k} = b_k, \ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_k) = w_2, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_1} = n_1, \ \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_2} = n_2, \ldots, \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_k} = n_k, \ \varphi_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_k) = w_\nu,
\end{array}\right\} \quad (4)$$

a otrzymamy za układ równań (1) następujący układ równań linijnych warunkowych:

$$\left.\begin{array}{l}
a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots + a_k\varepsilon_k + w_1 = 0, \\
b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \ldots + b_k\varepsilon_k + w_2 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 + \ldots + n_k\varepsilon_k + w_\nu = 0,
\end{array}\right\} \quad (5)$$

w liczbie ν, zupełnie równoważnych układowi (1) i tworzących ν związków pomiędzy ilościami $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_k$.

Wszelako poprawki $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_k$ nietylko mają zadość uczynić układowi (5), ale nadto spełnić zasadę najmniejszych kwadratów, podług której suma kwadratów poprawek ε, z uwzględnieniem dokładności odnośnych spostrzeżeń, powinna być najmniejszą możebną, tj.:

$$\Omega = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots + \varepsilon_k^2$$

ma być najmniejszością, czyli co na jedno wychodzi, funkcya:

$$\begin{aligned}
\Omega' = [\varepsilon\varepsilon] & - 2k_1(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots + a_k\varepsilon_k + w_1) \\
& - 2k_2(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \ldots + b_k\varepsilon_k + w_2) \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& - 2k_\nu(n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 + \ldots + n_k\varepsilon_k + w_\nu)
\end{aligned}$$

ma stać się najmniejszością, a będzie nią, skoro będzie:

$$\frac{\partial\Omega'}{\partial\varepsilon_1} = 0, \quad \frac{\partial\Omega'}{\partial\varepsilon_2} = 0, \ldots, \frac{\partial\Omega'}{\partial\varepsilon_k} = 0,$$

czyli gdy:

$$\begin{array}{l}
\varepsilon_1 - (k_1a_1 + k_2b_1 + \ldots + k_\nu n_1) = 0, \\
\varepsilon_2 - (k_1a_2 + k_2b_2 + \ldots + k_\nu n_2) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varepsilon_k - (k_1a_k + k_2b_k + \ldots + k_\nu n_k) = 0,
\end{array}$$

czyli wreszcie, gdy:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 = k_1 a_1 + k_2 b_1 + \ldots + k_\nu n_1, \\ \varepsilon_2 = k_1 a_2 + k_2 b_2 + \ldots + k_\nu n_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_k = k_1 a_k + k_2 b_k + \ldots + k_\nu n_k. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Podstawiwszy tedy powyższe wartości (6) w równania (5), mieć będziemy:

$$\left.\begin{array}{l} [aa]\, k_1 + [ab]\, k_2 + \ldots + [an]\, k_\nu + w_1 = 0, \\ [ab]\, k_1 + [bb]\, k_2 + \ldots + [bn]\, k_\nu + w_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [an]\, k_1 + [bn]\, k_2 + \ldots + [nn]\, k_\nu + w_\nu = 0. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Obliczywszy z tych równań mnożniki $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_\nu$, znajdziemy następnie poprawki $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_k$ z układu (6).

Podług Gauss'a zowią się ilości $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_\nu$ korrelatami, a równania (7) równaniami korrelacyjnemi. Postać tych równań jest zupełnie równoważną równaniom normalnym (8′), a wszystko, co tam o nich powiedziano, odnosi się do tych równań w zupełności. Rozwiązanie tych równań uskutecznia się podług zasad powyżej wyłuszczonych.

54. *Uwaga.* Zdarzyć się może, że wartości $x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, x_3 + \varepsilon_3, \ldots, x_k + \varepsilon_k$, zapomocą układu (6) wyznaczone, nie spełniają należycie układu równań (1). Jest to oznaką, że $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ nie są dobremi wartościami przybliżonemi. Natenczas przyjmujemy:

$$\begin{array}{l} x_1 + \varepsilon_1 = x_1', \\ x_2 + \varepsilon_2 = x_2', \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_k + \varepsilon_k = x_k' \end{array}$$

jako układ dalszych wartości przybliżonych i postępujemy zupełnie tak samo, jak powyżej, wyznaczając przez $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3', \ldots, \varepsilon_k'$ układ nowych poprawek.

55. Nasuwa się obecnie pytanie, jak należy wyrównywać ilości zawarowane, jeżeli spostrzeżenia poszczególnych ilości nie są jednakowej dokładności.

Niech będą $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ ważności, odpowiadające ilościom $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$. Jeżeli $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_k$ oznaczają najprawdopodobniejsze poprawki, jakie na ilościach $x_1, x_2,$

$x_3, \ldots, x_k$ należy uskutecznić, to podług teoryi rachunku wyrównania powinno

$$\Omega = [p\varepsilon\varepsilon]$$

być najmniejszością. Wszelako pomiędzy mającemi się wyznaczyć ilościami istnieją równania warunkowe, które sprowadzamy do postaci równań linijnych (5), jak to wyłuszczyliśmy w poprzednim ustępie (53). Temi tedy równaniami warunkowemi są:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots + a_k\varepsilon_k + w_1 = 0, \\ b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \ldots + b_k\varepsilon_k + w_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 + \ldots + n_k\varepsilon_k + w_\nu = 0. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Aby zaś:

$$\begin{aligned} \Omega' = [p\varepsilon\varepsilon] & - 2k_1\,(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots + a_k\varepsilon_k + w_1) \\ & - 2k_2\,(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \ldots + b_k\varepsilon_k + w_2) \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & - 2k_\nu\,(n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 + \ldots + n_k\varepsilon_k + w_\nu) \end{aligned}$$

stało się najmniejszością, musi być:

$$\frac{\delta\Omega'}{\delta\varepsilon_1} = 0, \quad \frac{\delta\Omega'}{\delta\varepsilon_2} = 0, \ldots, \frac{\Omega'}{\delta\varepsilon_k} = 0,$$

czyli:

$$\begin{array}{l} p_1\varepsilon_1 - (k_1a_1 + k_2b_1 + \ldots + k_\nu n_1) = 0, \\ p_2\varepsilon_2 - (k_1a_2 + k_2b_2 + \ldots + k_\nu n_2) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_k\varepsilon_k - (k_1a_k + k_2b_k + \ldots + k_\nu n_k) = 0, \end{array}$$

zatem:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 = \dfrac{a_1}{p^1}\,k_1 + \dfrac{b_1}{p_1}\,k_2 + \ldots + \dfrac{n_1}{p_1}\,k_\nu, \\ \varepsilon_2 = \dfrac{a_2}{p_2}\,k_1 + \dfrac{b_2}{p_2}\,k_2 + \ldots + \dfrac{n_2}{p_2}\,k_\nu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_k = \dfrac{a_k}{p_k}\,k_1 + \dfrac{b_k}{p_k}\,k_2 + \ldots + \dfrac{n_k}{p_k}\,k_\nu. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Podstawiwszy za $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ powyższe wartości (9) w układ równań (8), otrzymamy dla korrelat $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_\nu$ następujący układ równań:

$$\left.\begin{array}{l} \left[\frac{aa}{p}\right] k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] k_2 + \ldots + \left[\frac{an}{p}\right] k_\nu + w_1 = 0, \\ \left[\frac{ab}{p}\right] k_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] k_2 + \ldots + \left[\frac{bn}{p}\right] k_\nu + w_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left[\frac{an}{p}\right] k_1 + \left[\frac{bn}{p}\right] k_2 + \ldots + \left[\frac{nn}{p}\right] k_\nu + w_\nu = 0, \end{array}\right\} (10)$$

których rozwiązanie wskazano już powyżej.

56. Błąd średni spostrzeżeń zawarowanych. Z poprawek $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ wyraźmy np. ν ostatnich poprawek zapomocą ν równań warunkowych (5). Kładąc tedy:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 = x, \\ \varepsilon_2 = y, \\ \ldots\ldots \\ \varepsilon_k = v, \end{array}\right\} \qquad (11)$$

otrzymamy z układu (5) ν dalszych równań, a mianowicie:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_{k-\nu+1} = A_1 x + B_1 y + \ldots + K_1 v + L_1, \\ \varepsilon_{k-\nu+2} = A_2 x + B_2 y + \ldots + K_2 v + L_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_k \quad = A_\nu x + B_\nu y + \ldots + K_\nu v + L_\nu. \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Układ równań (11) i (12) tworzy więc układ równań błędów, a warunek $[\varepsilon\varepsilon] =$ najmniejszości prowadzi nas do normalnych równań Gaussowych, gdyż nie istnieją żadne warunki między ilościami $x, y, \ldots, v$. Wynik dla $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_k$ jest ostatecznie tutaj ten sam, jakiśmy powyżej otrzymali zapomocą korrelat, a zadaniem niniejszego wywodu jest wyznaczenie błędu średniego podług wzoru (XXVII). Ponieważ mamy $k - \nu$ niewiadomych i k równań błędów, to podług rzeczonego wzoru wyłania się wzór:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\nu}}. \qquad \text{(XXXI.)}$$

Jeżeli zaś spostrzeżenia są niejednakowej dokładności, to analogicznie otrzymamy z wzoru (XXX) następujący:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{\nu}}. \qquad \text{(XXXII.)}$$

57. Wziąwszy pod uwagę równania (6), to skoro pomnożymy je kolejno przez $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_k$ i do siebie dodamy, otrzymamy:

$$[\varepsilon\varepsilon] = [a\varepsilon]\, k_1 + [b\varepsilon]\, k_2 + \ldots + [n\varepsilon]\, k_\nu$$

a odnośnie do układu równań (5):

$$[\varepsilon\varepsilon] = k_1 w_1 + k_2 w_2 + \ldots + k_\nu w_\nu\,, \qquad (13)$$

w skutek czego wzór (XXXI) przyjmie postać następującą:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[kw]}{\nu}}\,, \qquad \text{(XXXIII)}$$

który dostarcza nam sposobu sprawdzenia rachunku.

58. Do powyższego wyniku (XXXIII) dojdziemy również z równań (8) i (9), a mianowicie:

$$\left.\begin{aligned}[p\varepsilon\varepsilon] &= [a\varepsilon]\,k_1 + [b\varepsilon]\,k_2 + \ldots + [n\varepsilon]\,k_\nu \\ &= k_1 w_1 + k_2 w_2 + \ldots + k_\nu w_\nu\,,\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

zatem:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[kw]}{\nu}}\,.$$

59. Sprawdzenie rachunku przeprowadza się zupełnie tak samo, jak przy ustawianiu i rozwiązywaniu normalnych równań Gaussowych. Jedynie pamiętać należy, że w celu ustawienia równań korrelacyjnych z równań warunkowych (5) położyć należy:

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 + \ldots + n_1 &= s_1\,, \\ a_2 + b_2 + \ldots + n_2 &= s_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \end{aligned}$$

jakoteż że mamy równania sprawdzające kształtu następującego:

$$\begin{aligned} [aa] + [ab] + \ldots + [an] &= [as]\,, \\ [ab] + [bb] + \ldots + [bn] &= [bs]\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \end{aligned}$$

Jeżeli po ustawieniu równań korrelacyjnych chcemy wciągnąć także ich prawe strony do równań sprawdzających, co jest konieczne, należy utworzyć sumy:

$$\begin{aligned} [aa] + [ab] + \ldots + [an] + w_1 &= [as] + w_1\,, \\ [ab] + [bb] + \ldots + [bn] + w_2 &= [bs] + w_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \end{aligned}$$

i postępować dalej zupełnie tak samo, jak w rozwiązywaniu równań normalnych.

60. Wyznaczmy błąd średni funkcyi:

$$F = F\,(X_1\,, X_2\,, \ldots, X_k)$$

dla $X_i = x_i + \varepsilon_i$, gdzie ε_i oznacza najprawdopodobniejsze poprawki ilości zawarowanych X_1, X_2, ..., X_k.

W tym celu wstawmy wartości $x_i + \varepsilon_i$ w funkcyę i oznaczmy $F(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ przez F_0, to rozwijając podług wzoru Taylor'a, otrzymamy:

$$F = F_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\varepsilon_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_k}\varepsilon_k + \ldots$$

a kładąc dla skrócenia:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_k} = f_k \tag{15}$$

i ograniczając się na pierwszych potęgach ilości ε_i, otrzymamy:

$$F = F_0 + f_1\varepsilon_1 + f_2\varepsilon_2 + \ldots + f_k\varepsilon_k. \tag{16}$$

Chodzi zatem o wyznaczenie poprawek $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ przez ilości wiadome. W tym względzie otrzymaliśmy powyżej:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_1k_1 + b_1k_2 + \ldots + n_1k_\nu, \\ \varepsilon_2 &= a_2k_1 + b_2k_2 + \ldots + n_2k_\nu, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_k &= a_kk_1 + b_kk_2 + \ldots + n_kk_\nu. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Pomnożywszy je kolejno przez $f_1, f_2, \ldots, f_k$ i dodawszy, mieć będziemy:

$$f_1\varepsilon_1 + f_2\varepsilon_2 + \ldots + f_k\varepsilon_k = [af]\,k_1 + [bf]\,k_2 + \ldots + [nf]\,k_\nu. \tag{17}$$

Podstawiwszy w równaniach korrelacyjnych (7) ilości $[af]$, $[bf], \ldots, [nf]$ za $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$, w skutek czego k_1, $k_2, \ldots, k_\nu$ przejdą w $K_1, K_2, \ldots, K_\nu$, otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} &[aa]\,K_1 + [ab]\,K_2 + \ldots + [an]\,K_\nu + [af] = 0, \\ &[ab]\,K_1 + [bb]\,K_2 + \ldots + [bn]\,K_\nu + [bf] = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[an]\,K_1 + [bn]\,K_2 + \ldots + [nn]\,K_\nu + [nf] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Pomnożywszy ten układ równań kolejno przez $k_1, k_2, \ldots$, k_ν i dodawszy je, mieć będziemy:

$$\begin{aligned} &([aa]\,k_1 + [ab]\,k_2 + \ldots + [an]\,k_\nu)\,K_1 \\ + &([ab]\,k_1 + [bb]\,k_2 + \ldots + [bn]\,k_\nu)\,K_2 \\ + &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + &([an]\,k_1 + [bn]\,k_2 + \ldots + [nn]\,k_\nu)\,K_\nu \\ + &([af]\,k_1 + [bf]\,k_2 + \ldots + [nf]\,k_\nu) = 0, \end{aligned}$$

czyli ze względu na układ (6):

$$\begin{aligned} &[af]\,k_1 + [bf]\,k_2 + \ldots + [nf]\,k_\nu = \\ &= w_1K_1 + w_2K_2 + \ldots + w_\nu K_\nu, \end{aligned} \tag{19}$$

przeto z porównania (19) i (17) przyjmie równanie (16) ostatecznie kształt:

$$F = F_0 + w_1 K_1 + w_2 K_2 + \ldots + w_\nu K_\nu . \qquad (20)$$

Mamy zatem funkcyę F wyrażoną przez ilości wiadome. Aby zatem obliczyć błąd średni tejże funkcyi, który wysnuwa się z błędu średniego M, wchodzący w ilości $x_1, x_2, \ldots, x_k$, odnosimy się do wzoru (XXV), skutkiem czego otrzymamy:

$$M_F = \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \mu^2\right]}$$

czyli:

$$M_F = \pm \mu \sqrt{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]} .$$

A że z (20) wypada:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F_0}{\partial x_1} + \frac{\partial w_1}{\partial x_1} K_1 + \frac{\partial w_2}{\partial x_1} K_2 + \ldots + \frac{\partial w_\nu}{\partial x_1} K_\nu ,$$

a że na podstawie (15) i (4) jest:

$$\frac{\partial F_0}{\partial x_1} = f_1 (x_1, x_2, \ldots, x_k) = f_1 ,$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1} = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = - a_1 , \text{ itd. itd.},$$

przeto mieć będziemy:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1 - a_1 K_1 - b_1 K_2 - \ldots - n_1 K_\nu ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2 - a_2 K_1 - b_2 K_2 - \ldots - n_2 K_\nu ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = f_k - a_k K_1 - b_k K_2 - \ldots - n_k K_\nu ,$$

z czego wynika:

$$\begin{aligned}
\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right] = [ff] &- 2 ([af] K_1 + [bf] K_2 + \ldots + [nf] K_\nu) \\
&+ ([aa] K_1 + [ab] K_2 + \ldots + [an] K_\nu) K_1 \\
&+ ([ab] K_1 + [bb] K_2 + \ldots + [bn] K_\nu) K_2 \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ ([an] K_1 + [bn] K_2 + \ldots + [nn] K_\nu) K_\nu ,
\end{aligned}$$

czyli uwzględniając równania (18):

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right] = [ff] - [af] K_1 - [bf] K_2 - \ldots - [nf] K_\nu .$$

Zatem mamy ostatecznie:

$$\left.\begin{aligned} M_F &= \pm \mu \sqrt{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]}, \\ \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right] &= [ff] - [af]\,K_1 - [bf]\,K_2 - \ldots - [nf]\,K_\nu, \end{aligned}\right\} \text{(XXXIV)}$$

gdzie:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_k} = f_k,$$

$$[aa]\,K_1 + [ab]\,K_2 + \ldots + [an]\,K_\nu + [af] = 0,$$
$$[ab]\,K_2 + [bb]\,K_2 + \ldots + [bn]\,K_\nu + [bf] = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[an]\,K_1 + [bn]\,K_2 + \ldots + [nn]\,K_\nu + [nf] = 0,$$

które to równania rozwiązujemy w sposób zupełnie analogiczny, co równania normalne.

---

61. Zagadnienia. 1. Podczas tryangulacyi wymierzono wszystkie trzy kąty trójkąta *ABE* z jednakową dokładnością i znaleziono, że kąt $A = 46^0\ 17'\ 38{\cdot}32''$, kąt $B = 73^0\ 35'\ 16{\cdot}15''$, i kąt $C = 60^0\ 7'\ 5{\cdot}16''$. Bok zaś $AB = c = 34876{\cdot}57$ m. — Wyznaczyć najprawdopodobniejsze wartości tych trzech kątów.

Rozwiązanie. W trójkącie geodezyjnym suma trzech kątów wynosi $180^0 + E$, gdzie E jest przepełnieniem sferycznem. Oznaczając zatem przez $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ poprawki tych kątów *A*, *B*, *C*, mamy:

$$A + \varepsilon_1 + B + \varepsilon_2 + C + \varepsilon_3 - (180 + E) = 0,$$

a że:

$$A + B + C = 179^0\ 59'\ 59{\cdot}63'',$$

więc:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0{\cdot}37'' + E$$

jako mające się spełnić równanie warunkowe.

Na obliczenie przepełnienia sferycznego mamy wzór:

$$E = \frac{\Delta}{r^2}\ 206265,$$

gdzie powierzchnię trójkąta dla bardzo wielkiego $r = 6366739$ m. uważaną za płaską, obliczamy według wzoru:

$$\Delta = \frac{a\,.\,c}{2} \sin B,$$

czyli:

$$\Delta = \frac{c^2\,.\,\sin A\,.\,\sin B}{2 \sin C},$$

przeto:

$$E = \frac{c^2 \cdot \sin A \cdot \sin B}{2r^2 \cdot \sin C} \cdot 206265.$$

Przeprowadziwszy tedy rachunek, otrzymujemy:

$$E = 2{\cdot}475''.$$

Zatem nasze równanie warunkowe:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 2{\cdot}845''.$$

W skutek tego:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1.$$

Więc równanie korrelacyjne:

$$3\ k_1 = 2{\cdot}845,$$
$$k_1 = 0{\cdot}948.$$

Równania błędów są tedy:

$$\varepsilon_1 = k_1 = 0{\cdot}948,$$
$$\varepsilon_2 = k_2 = 0{\cdot}948,$$
$$\varepsilon_3 = k_3 = 0{\cdot}948,$$

tak że najprawdopodobniejsze wartości tych kątów są:

$$A = 46^0\ 17'\ 39{\cdot}268''$$
$$B = 73^0\ 35'\ 17{\cdot}098''$$
$$C = 60^0\ \ 7'\ \ 6{\cdot}108''.$$

Dla średniego błędu mamy:

$$w_1 k_1 = 2{\cdot}845 \cdot 0{\cdot}948 = 2{\cdot}697,$$

więc:

$$\mu = \pm \sqrt{2{\cdot}697} = \pm 1{\cdot}64.$$

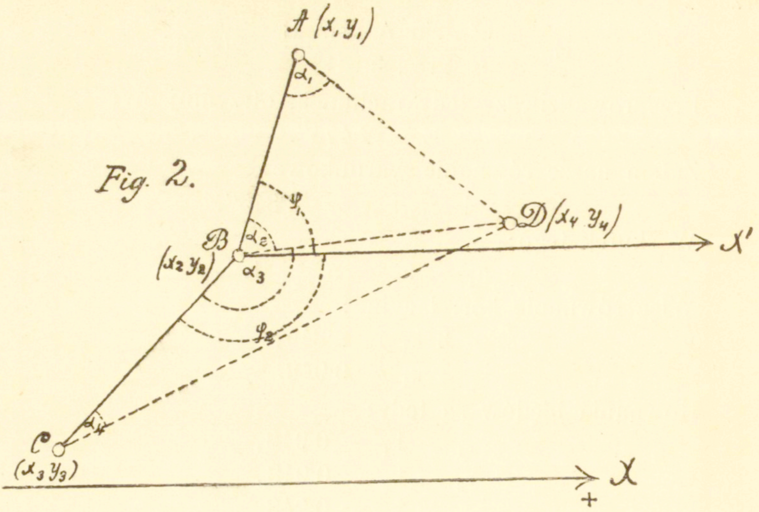
Próba.

$$\mu = \pm \sqrt{[\varepsilon\varepsilon]} = \pm \sqrt{3\ (0{\cdot}948)^2} = \pm 0{\cdot}948 \sqrt{3}$$
$$= \pm 1{\cdot}64.$$

2. Z trzech stanowisk *A*, *B*, *C* wyznaczono czwarte niedostępne stanowisko *D* (fig. 2) przez pomiar kątów: $\alpha_1 = 41^0\ 19'$, $\alpha_2 = 62^0\ 56'$, $\alpha_3 = 117^0\ 38'$ i $\alpha_4 = 36^0\ 23'$. Położenie stanowisk *A*, *B*, *C*, określają ich spółrzędne odnośnie do pewnego stałego układu spółrzędnych, a mianowicie:

$$x_1 = 38489{\cdot}73, \quad y_1 = 23688{\cdot}60 \quad \text{dla A},$$
$$x_2 = 37949{\cdot}06, \quad y_2 = 24408{\cdot}05 \quad \text{dla B},$$
$$x_3 = 37673{\cdot}59, \quad y_3 = 24767{\cdot}10 \quad \text{dla C}.$$

Wyznaczyć najprawdopodobniejsze wartości spółrzędnych stanowiska *D*.



Rozwiązanie. Ponieważ trzy punkty A, B, C są dane, przeto kąt ABC jest wiadomy, zatem poprawki, jakie uskutecznić mamy na kątach α_2 i α_3, podlegać muszą jednemu warunkowi. Drugim warunkiem jest to, że bok BD obliczony z trójkątów ABD i BCD musi posiadać jednęże wartość.

Aby obliczyć kąt ABC, musimy znać koniecznie kierunek osi X-ów. Niech prosta BX' będzie równoległą do dodatniego kierunku osi kątów X-ów, tak że być musi:

$$\operatorname{tg} X'BA = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2},$$

$$\operatorname{tg} X'BC = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}.$$

Zatem:

$$\operatorname{tg} X'BA = \frac{719{\cdot}45}{540{\cdot}67} = \operatorname{tg}\varphi_1$$

$$\operatorname{tg} X'BC = -\frac{359{\cdot}05}{275{\cdot}47} = \operatorname{tg}\varphi_2,$$

przeto po obliczeniu:

$$\begin{array}{rcl} X'BA & = & 53^0\ 4{\cdot}47' = \varphi_1 \\ X'BC & = & 127^0\ 29{\cdot}77' = \varphi_2 \\ \hline ABC & = & 180^0\ 34{\cdot}24' \end{array}$$

Kąty φ_1 i φ_2 wskazano w rysunku łukami. Jeżeli przez ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 oznaczymy szukane poprawki, natenczas być musi:

$$\alpha_2 + \varepsilon_2 + \alpha_3 + \varepsilon_3 = 180^0\ 34{\cdot}24',$$

a że:
$$\alpha_2 + \alpha_3 = 180^0\ 34',$$

przeto otrzymujemy:

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0{\cdot}24' \qquad (1)$$

jako pierwsze równanie warunkowe.

Aby ustawić drugie równanie warunkowe, to położywszy $AB = d_1$ i $BC = d_2$, otrzymamy na wyrażenie boku $BD = a$ z trójkąta *ABD:*

$$a = \frac{d_1 \,.\, \sin(\alpha_1 + \varepsilon_1)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)},$$

i z trójkąta *BDC:*

$$a = \frac{d_2 \,.\, \sin(\alpha_4 + \varepsilon_4)}{\sin(\alpha_3 + \alpha_4 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)},$$

przeto z podzielenia obu tych równań otrzymujemy:

$$\frac{d_1 \,.\, \sin(\alpha_1 + \varepsilon_1) \,.\, \sin(\alpha_3 + \alpha_4 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)}{d_2 \,.\, \sin(\alpha_4 + \varepsilon_4) \,.\, \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)} = 1 \qquad (2)$$

jako ogólne drugie równanie warunkowe.

Ponieważ:

$$d_1 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 899{\cdot}98,$$
$$d_2 = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} = 452{\cdot}55,$$

przeto po podstawieniu powyższych wartości za d_1 i d_2 w (2) i obliczeniu otrzymamy ostatecznie jako drugie równanie warunkowe:

$$1{\cdot}39\,\varepsilon_1 + 0{\cdot}25\,\varepsilon_2 - 2{\cdot}05\,\varepsilon_3 - 3{\cdot}41\,\varepsilon_4 = -1{\cdot}75. \qquad (3)$$

Zatem mamy tabelkę a):

a)

L. p.	a	b
1.	0	1·39
2.	1	0·25
3.	1	— 2·05
4.	0	— 3·41

i przynależne równania błędów z korrelatami k_1 i k_2

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_1 = \phantom{k_1 +{}} 1{\cdot}39\,k_2 \\ \varepsilon_2 = k_1 + 0{\cdot}25\,k_2 \\ \varepsilon_3 = k_1 - 2{\cdot}05\,k_2 \\ \varepsilon_4 = - 3{\cdot}41\,k_2 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Z tabelki a) wysnuwają się spółczynniki równań korrelacyjnych, zestawione w tabelce b):

b)

L. p.	aa	ab	bb
1.	0	0	1·93
2.	1	0·25	0·06
3.	1	— 2·05	4·20
4.	0	0	11·63
	2	— 1·80	17·82

a więc mamy równania korrelacyjne:

$$2\, k_1 - 1{\cdot}80\, k_2 = 0{\cdot}24,$$
$$-1{\cdot}80\, k_1 + 17{\cdot}82\, k_2 = -1{\cdot}75,$$

skąd otrzymujemy:

$$16{\cdot}2\, k_2 = -1{\cdot}53,$$

więc:

$$k_2 = -\frac{1{\cdot}53}{16{\cdot}2} = -0{\cdot}094,$$

wreszcie:

$$k_1 = -0{\cdot}9 \,.\, 0{\cdot}094 + 0{\cdot}12 = 0{\cdot}035.$$

Podstawiwszy znalezione wartości korrelat w (4), znajdziemy:

$\varepsilon_1 = -0{\cdot}13'$	$\varepsilon_1{}^2 = 0{\cdot}0169$
$\varepsilon_2 = +0{\cdot}01'$	$\varepsilon_2{}^2 = 0{\cdot}0001$
$\varepsilon_3 = +0{\cdot}23'$	$\varepsilon_3{}^2 = 0{\cdot}0529$
$\varepsilon_4 = +0{\cdot}32'$	$\varepsilon_4{}^2 = 0{\cdot}1024$
	$\Sigma = 0{\cdot}1723$

przeto najprawdopodobniejsze wartości kątów są:

$$\alpha = 41^0\ 18{\cdot}87'$$
$$\beta = 62^0\ 56{\cdot}01'$$
$$\gamma = 117^0\ 38{\cdot}23'$$
$$\delta = 36^0\ 23{\cdot}32'.$$

Dla błędu średniego mamy:

$$w_1k_1 + w_2k_2 = 0{\cdot}1729,$$

co dostatecznie dobrze zgadza się z powyżej znalezioną sumą tj. $[\varepsilon\varepsilon] = 0{\cdot}1723$; przeto podług (XXXIII):

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{0{\cdot}1729}{2}} = \pm\ 0{\cdot}285.$$

Z trójkątów *ABD* i *BDC* wysnuwają się już powyżej zastosowane wzory:

$$a_1 = \frac{d_1 \sin \alpha_1}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)},$$
$$a_2 = \frac{d_2 \sin \alpha_4}{\sin (\alpha_3 + \alpha_4)},$$

które dają nam, że

$$\log a_1 = \log a_2 = 2{\cdot}78747$$

czyli:

$$a_1 = a_2 = 613{\cdot}02 \text{ m}.$$

Oznaczywszy przez (x_4, y_4) spółrzędne punktu D, otrzymamy:

$$x_4 - x_2 = a \cos DBX',$$
$$y_4 - y_2 = a \sin DBX',$$

gdzie: $DBX' = X'BC - \alpha_3 = 9^0\ 51{\cdot}54'$,

przeto:

$$x_4 = x_2 + 603{\cdot}99 = 38553{\cdot}05,$$
$$y_4 = y_2 + 104{\cdot}96 = 24513{\cdot}01$$

jako najprawdopodobniejsze wartości spółrzędnych punktu D.

3. Wyznaczyć błąd oczekiwany wartości x_4 i y_4, w poprzedniem zagadnieniu obliczonych.

Rozwiązanie. Ku temu celowi użyjemy nasamprzód wzorów (XXXIV), kładąc raz x_4, drugi raz y_4 za F. Pomnąc, że:

$$DBX' = \varphi_2 - \alpha_3,$$

otrzymamy dla x_4:

$$x_4 = x_2 + d_1 \cos(\varphi_2 - \alpha_3)$$
$$= x_2 + \frac{a \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot \cos(\varphi_2 - \alpha_3).$$

Zatem:

$$\frac{\partial x_4}{\partial \alpha_1} = f_1 = a \frac{\cos\alpha_1 \cos(\varphi_2 - \alpha_3)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} - a \frac{\sin\alpha_1 . \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha_2) . \cos(\varphi_2 - \alpha_3)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

$$\frac{\partial x_4}{\partial \alpha_2} = f_2 = -a \frac{\sin\alpha_1 \ . \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha_2) . \cos(\varphi_2 - \alpha_3)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

$$\frac{\partial x_4}{\partial \alpha_3} = f_3 = a \frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} . \sin(\varphi_2 - \alpha_3),$$

$$\frac{\partial x_4}{\partial \alpha_4} = f_4 = 0,$$

czyli:

$$f_1 = (x_4 - x_2)[\operatorname{ctg}\alpha_1 - \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha_2)] = 840{\cdot}39, \quad f_1^2 = 706250,$$
$$f_2 = -(x_4 - x_2) . \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha_2) = -153{\cdot}37, \quad f_2^2 = 23517,$$
$$f_3 = (x_4 - x_2) . \operatorname{tg}(\varphi_2 + \alpha_3) = 1049{\cdot}00, \quad f_3^2 = 1100420.$$
$$f_4 = 0.$$

Z tabelki b), w poprzedniem zagadnieniu podanej, wynika:

$$a_1 = 0 \quad , a_2 = 1 \quad , a_3 = 1 \quad , a_4 = 0,$$
$$b_1 = 1{\cdot}39, \ b_2 = 0{\cdot}25, \ b_3 = -2{\cdot}05, \ b_4 = -3{\cdot}41.$$

Przeto mamy:

$$\begin{array}{rl}
a_1 f_1 = & 000{\cdot}00, \\
a_2 f_2 = & -153{\cdot}37, \\
a_3 f_3 = & 1049{\cdot}00, \\
a_4 f_4 = & 000{\cdot}00, \\
\hline
[af] = & 895{\cdot}63,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
b_1 f_1 = & 1168{\cdot}14, \\
b_2 f_2 = & -38{\cdot}34, \\
b_3 f_3 = & -2150{\cdot}45, \\
b_4 f_4 = & 000{\cdot}00, \\
\hline
[bf] = & -1020{\cdot}65.
\end{array}$$

8

Mamy tedy oba równania:

$$2\ K_1 - 1{\cdot}80\ K_2 = 895{\cdot}63\,,$$
$$-1{\cdot}80\ K_1 + 17{\cdot}82\ K_2 = -1020{\cdot}65\,,$$

z których wiadomym sposobem otrzymamy:

$$16{\cdot}2\ K_2 = -214{\cdot}59,$$
$$K_1 - 0{\cdot}9\ K_2 = 447{\cdot}81,$$

więc:

$$K_2 = -13{\cdot}25\,,$$
$$K_1 = 435{\cdot}89\,.$$

Zatem:

$$[af]\ K_1 = 390396$$
$$[bf]\ K_2 = 13524$$
$$\overline{[af]\ K_1 + [bf]\ K_2 = 403920\,,}$$

jakoteż: $[ff] = 1830187\,,$

tak że:

$$\left[\left(\frac{\delta F}{\delta x}\right)^2\right] = 1426267$$

i:

$$\sqrt{\left[\left(\frac{\delta F}{\delta x}\right)^2\right]} = 1195{\cdot}27.$$

Ponieważ błąd średni μ odnosi się do błędów kątowych, przeto wyrażamy go w minutach, a więc:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{2}} = \pm\sqrt{\frac{[kw]}{2}} = \pm\sqrt{\frac{0{\cdot}1729}{2}} = +\ 0{\cdot}285',$$

przeto w jednostkach długości:

$$\mu = \pm\ 0{\cdot}285\ .\ 0{\cdot}00029 = \pm\ 0{\cdot}00008265.$$

Zatem:

$$M_{x_4} = \pm\ 0{\cdot}00008265\ .\ 1194{\cdot}25$$
$$= \pm\ 0{\cdot}0987,$$

a więc błąd oczekiwany podług wzoru (XIV):

$$R_{x_4} = 0{\cdot}6745\ .\ M_{x_4} = \pm\ 0{\cdot}0987\ .\ 0{\cdot}6745 = \pm\ 0{\cdot}06657.$$

Widzimy tedy, że prawdziwa wartość odciętej x_4 punktu *D* leży między:

$$38553{\cdot}05 + 0{\cdot}07$$

i

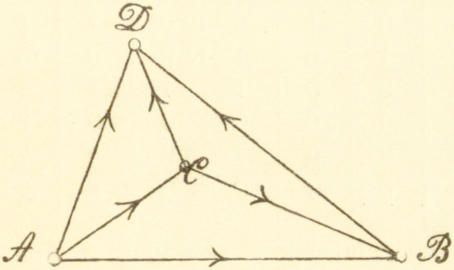
$$38553{\cdot}05 - 0{\cdot}07 \text{ metrów.}$$

4. Niwelacyą geometryczną wyznaczono różnice wysokości stanowisk *A*, *B*, *C*, *D* (fig. 3) i to tak:

1. Między A i B = 10·8838 m., ważność $p_1 = 34$,
2. „ A i C = 4·6783 „ „ $p_2 = 108$,
3. „ A i D = 18·5595 „ „ $p_3 = 49$,
4. „ C i B = 6·1959 „ „ $p_4 = 66$,
5. „ C i D = 13·8677 „ „ $p_5 = 78$,
6. „ B i D = 7·6657 „ „ $p_6 = 60$.

Wyznaczyć najprawdopodobniejsze poprawki, które trzeba uskutecznić na powyższych liczbach.

Fig 3.



Strzałki w figurze wskazują kierunek wznoszenia się.

Rozwiązanie. Pomiędzy danemi 6 różnicami wysokościowemi muszą istnieć trzy równania warunkowe, które wysnuwamy z trójkątów *ABC*, *ACD* i *ABD*, a mianowicie tak, że suma algebraiczna różnic wysokościowych musi być równą zeru.

Jeżeli więc $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ oznaczają owe mające się uskutecznić poprawki, to być musi:

$$AC + \varepsilon_2 + BC + \varepsilon_4 - (AB + \varepsilon_1) = 0,$$
$$AC + \varepsilon_2 + CD + \varepsilon_5 - (AD + \varepsilon_3) = 0,$$
$$AB + \varepsilon_1 + BD + \varepsilon_6 - (AD + \varepsilon_3) = 0.$$

Po wstawieniu danych wartości otrzymamy:

$$-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 = +0{\cdot}0092,$$
$$\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_5 = +0{\cdot}0135,$$
$$+\varepsilon_1 + \varepsilon_6 - \varepsilon_3 = +0{\cdot}0100.$$

Zatem mamy następującą tabelkę:

a)

L. p.	a	b	c
1.	− 1	0	+ 1
2.	+ 1	+ 1	0
3.	0	− 1	− 1
4.	+ 1	0	0
5.	0	+ 1	0
6.	0	0	+ 1

Stąd układamy równanie błędów zapomocą korrelat k_1, k_2, k_3 podług równań (9) str. 103:

$$34\,\varepsilon_1 = -k_1 + k_3, \qquad 66\,\varepsilon_4 = k_1,$$
$$108\,\varepsilon_2 = k_1 + k_2, \qquad 78\,\varepsilon_5 = k_2,$$
$$49\,\varepsilon_3 = -k_2 - k_3, \qquad 60\,\varepsilon_6 = k_3,$$

jakoteż spółczynniki równań korrelacyjnych zapomocą tabelki:

b)

L. p.	aa	ab	ac	bb	bc	cc	p
1.	1	0	−1	0	0	1	34
2.	1	1	0	1	0	0	108
3.	0	0	0	1	1	1	49
4.	1	0	0	0	0	0	66
5.	0	0	0	1	0	0	78
6.	0	0	0	0	0	1	60

zapomocą tabelki następującej, wypływającej z poprzedzającej:

L. p.	$\frac{aa}{p}$	$\frac{ab}{p}$	$\frac{ac}{p}$	$\frac{bb}{p}$	$\frac{bc}{p}$	$\frac{cc}{p}$
1.	0·02941	0	−0·02941	0	0	0·02941
2.	0·00926	0·00926	0	0·00926	0	0
3.	0	0	0	0·02041	0·02041	0·02041
4.	0·01515	0	0	0	0	0
5.	0	0	0	0·01282	0	0
6.	0	0	0	0	0	0·01667
	0·05382	0·00926	−0·02941	0·04249	0·02041	0·06649

w postaci następującej:

$$0{\cdot}05382\,k_1 + 0{\cdot}00926\,k_2 - 0{\cdot}02941\,k_3 = 0{\cdot}0092,$$
$$0{\cdot}00926\,k_1 + 0{\cdot}04249\,k_2 + 0{\cdot}02041\,k_3 = 0{\cdot}0135,$$
$$-0{\cdot}02941\,k_1 + 0{\cdot}02041\,k_2 + 0{\cdot}06649\,k_3 = 0{\cdot}0100.$$

Używając do rozwiązania tego układu równań naszych wzorców i posługując się zarazem kolumną kontrolną, co tutaj jako rzecz wiadomą opuszczamy, dojdziemy ostatecznie, że:

$$0{\cdot}03456\,k_3 = 0{\cdot}00761$$

czyli:

$$k_3 = 0{\cdot}2202,$$

jakoteż:

$$k_2 + 0{\cdot}62274\ k_3 = 0{\cdot}29144$$
$$k_1 + 0{\cdot}17206\ k_2 - 0{\cdot}54649\ k_3 = 0{\cdot}17094,$$

skąd:

$$k_2 = 0{\cdot}15431,$$
$$k_1 = 0{\cdot}26472.$$

Otrzymujemy tedy następujące równania błędów:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{34}\,(k_3 - k_1) = -\ 0{\cdot}00131\,,$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{108}\,(k_1 + k_2) = 0{\cdot}00388\,,$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{49}\,(k_2 + k_3) = -\ 0{\cdot}00764\,,$$
$$\varepsilon_4 = \frac{1}{66}\,k_1 = 0{\cdot}00401\,,$$
$$\varepsilon_5 = \frac{1}{78}\,k_2 = 0{\cdot}00198\,,$$
$$\varepsilon_6 = \frac{1}{60}\,k_3 = 0{\cdot}00367\,,$$

które podają nam najprawdopodobniejsze wartości różnic wysokościowych:

AB = 10·8825 m.,	CB = 6·1999 m.
AC = 4·6822 m.,	CD = 13·8697 m.
AD = 18·5519 m.,	BD = 7·6694 m.

Średni błąd obliczymy podług wzoru (XXXIII):

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[kw]}{\nu}} = \pm\sqrt{\frac{0{\cdot}00669}{3}} = \pm\ 0{\cdot}0472.$$

C. Wyrównanie spostrzeżeń pośrednich ilości zawarowanych.

62. Pomiędzy n ilościami $X, Y, Z, \ldots, V$ istnieje ν równań warunkowych:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1\,(X, Y, Z, \ldots, V) = 0 \\ \varphi_2\,(X, Y, Z, \ldots, V) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_\nu\,(X, Y, Z, \ldots, V) = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

które zawsze ściśle muszą się spełnić. Wszelako nie obserwujemy bezpośrednio ilości $X, Y, Z, \ldots, V$, jeno ilości $L_1, L_2, \ldots, L_k$, które są wiadomemi funkcyami ilości $X, Y, Z, \ldots V$, a mianowicie:

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = f_1\,(X, Y, Z, \ldots, V) \\ L_2 = f_2\,(X, Y, Z, \ldots, V) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_k = f_k\,(X, Y, Z, \ldots, V) \end{array}\right\} \tag{2}$$

i znaleziono, że spostrzegane ilości wynoszą $L_1', L_2', \ldots, L_k'$. Chodzi nam zatem o wyznaczenie najprawdopodobniejszych wartości ilości $X, Y, Z, \ldots, V$.

W tym celu wyznaczamy nasamprzód przybliżone wartości ilości $X, Y, Z, \ldots, V$, odpowiadające spostrzeżeniom L_1', $L_2', \ldots, L_k'$. Niech temi wartościami przybliżonemi będą X_0, $Y_0, Z_0, \ldots, V_0$, a niech $x, y, z, \ldots v$ oznaczają poprawki, jakie na tych wartościach uskutecznić należy. W takim razie być musi:

$$\left.\begin{array}{l} L_1' = f_1\,(X_0 + x, Y_0 + y, Z_0 + z, \ldots, V_0 + v), \\ L_2' = f_2\,(X_0 + x, Y_0 + y, Z_0 + z, \ldots, V_0 + v), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_k' = f_k\,(X_0 + x, Y_0 + y, Z_0 + z, \ldots, V_0 + v). \end{array}\right\} \tag{3}$$

Położywszy:

$$\left.\begin{array}{l} L_1' - f_1\,(X_0, Y_0, Z_0, \ldots, V_0) = l_1, \\ L_2' - f_2\,(X_0, Y_0, Z_0, \ldots, V_0) = l_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_k' - f_k\,(X_0, Y_0, Z_0, \ldots, V_0) = l_k, \end{array}\right\} \tag{4}$$

jakoteż:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial X_0} = a_1, \ \frac{\partial f_1}{\partial Y_0} = b_1, \ \frac{\partial f_1}{\partial Z_0} = c_1, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial V_0} = k_1, \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_0} = a_2, \ \frac{\partial f_2}{\partial Y_0} = b_2, \ \frac{\partial f_2}{\partial Z_0} = c_2, \ldots, \frac{\partial f_2}{\partial V_0} = k_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_k}{\partial X_0} = a_k, \ \frac{\partial f_k}{\partial Y_0} = b_k, \ \frac{\partial f_k}{\partial Z_0} = c_k, \ldots, \frac{\partial f_k}{\partial V_0} = k_k, \end{array}\right\} \tag{5}$$

otrzymamy na podstawie wzoru Taylor'a następujące równania błędów:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + k_1 v - l_1, \\ \varepsilon_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + k_2 v - l_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_k = a_k x + b_k y + c_k z + \ldots + k_k v - l_k. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Gdyby x, y, z, . . . , v były od siebie niezawisłe, postąpilibyśmy podług wskazówek podanych w ustępach 34—51. Wszelako między ilościami X, Y, Z, . . . , V istnieją związki (1), a więc także między x, y, z, . . . v, mianowicie:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 (X_0 + x, Y_0 + y, Z_0 + z, \ldots, V_0 + v) = 0, \\ \varphi_2 (X_0 + x, Y_0 + y, Z_0 + z, \ldots, V_0 + v) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_\nu (X_0 + x, Y_0 + y, Z_0 + z, \ldots, V_0 + v) = 0. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Położywszy:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 (X_0, Y_0, Z_0, \ldots, V_0) = w_1, \\ \varphi_2 (X_0, Y_0, Z_0, \ldots, V_0) = w_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_\nu (X_0, Y_0, Z_0, \ldots, V_0) = w_\nu \end{array}\right\} \quad (8)$$

i

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial X_0} = \alpha_1, \ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial Y_0} = \alpha_2, \ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial Z_0} = \alpha_3, \ldots, \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial V_0} = \alpha_n, \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial X_0} = \beta_1, \ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial Y_0} = \beta_2, \ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial Z_0} = \beta_3, \ldots, \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial V_0} = \beta_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial\varphi_\nu}{\partial X_0} = \lambda_1, \ \dfrac{\partial\varphi_\nu}{\partial Y_0} = \lambda_2, \ \dfrac{\partial\varphi_\nu}{Z_0} = \lambda_3, \ldots, \dfrac{\partial\varphi_\nu}{\partial V_0} = \lambda_n \end{array}\right\} \quad (9)$$

możemy napisać warunki (1) w następującej postaci linijnej:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \ldots + \alpha_n v + w_1 = 0, \\ \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \ldots + \beta_n v + w_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \ldots + \lambda_n v + w_\nu = 0. \end{array}\right\} \quad (10)$$

W dalszym ciągu postępowania obrać możemy dwojaką drogę. Albo wyznaczamy z równań (10) z n ilości x, y, z, . . . , v którekolwiek ν przez pozostałe $(n - \nu)$, gdyż musi być $n > \nu$, a otrzymane wartości wstawimy w układ (6), w skutek czego problem wyrównania sprowadzamy do wyrównania $(n - \nu)$ ilości; w tym to razie postępujemy podług rozdziału A. Albo też rachujemy podług rozdziału B sposobem następującym.

Staramy się, aby:

$$\begin{array}{rl} \Omega' = [\varepsilon\varepsilon] & - 2k_1 (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \ldots + \alpha_n v + w_1) \\ & - 2k_2 (\beta_1 x + \beta_1 y + \beta_3 z + \ldots + \beta_n v + w_2) \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & - 2k_\nu (\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \ldots + \lambda_n v + w_\nu) \end{array}$$

stało się najmniejszością; w takim razie być musi:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \ . \ . \ . \ . \ , \frac{\partial \Omega}{\partial v} = 0,$$

a więc:

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\varepsilon\right] = \alpha_1 k_1 + \beta_1 k_2 + \ . \ . \ . + \lambda_1 k_\nu,$$

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\varepsilon\right] = \alpha_2 k_1 + \beta_2 k_2 + \ . \ . \ . + \lambda_2 k_\nu,$$

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial v}\varepsilon\right] = \alpha_n k_1 + \beta_2 k_2 + \ . \ . \ . + \lambda_n k_\nu,$$

czyli:

$$\left.\begin{aligned}
[aa]x + [ab]y + \ldots + [ak]v &= [al] + \alpha_1 k_1 + \beta_1 k_2 + \ldots + \lambda_1 k_\nu, \\
[ab]x + [bb]y + \ldots + [bk]v &= [bl] + \alpha_2 k_1 + \beta_2 k_2 + \ldots + \lambda_2 k_\nu, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[ak]x + [bk]y + \ldots + [kk]v &= [kl] + \alpha_n k_1 + \beta_n k_2 + \ldots + \lambda_n k_\nu.
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Z tych równań obliczamy $x, y, z, \ldots, v$, jako linijne funkcye korrelat $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ w postaci:

$$\left.\begin{aligned}
x &= A_1 k_1 + A_2 k_2 + \ldots + A_\nu k_\nu + M_1, \\
y &= B_1 k_1 + B_2 k_2 + \ldots + B_\nu k_\nu + M_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v &= N_1 k_1 + N_2 k_2 + \ldots + N_\nu k_\nu + M_\nu.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Podstawiwszy te wartości w ν równań (10), to wyznaczymy z nich te ν korrelat $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$, a tem samem z układu (12) otrzymamy ostatecznie wartości $x, y, z, \ldots, v$.

Wszelako daleko prościej i prędzej do celu dojdziemy, jeżeli użyjemy pierwszej wskazanej metody.

63. Jeżeli spostrzeżenia są niejednakowej dokładności, bierzemy pod uwagę ważności $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$, odpowiadające spostrzeganym ilościom $L_1', L_2', \ldots, L_k'$, i zamiast równań błędów (6) ustawiamy następujące równania błędów:

$$\sqrt{p_1}\varepsilon_1 = a_1\sqrt{p_1}x + b_1\sqrt{p_1}y + \ldots + k_1\sqrt{p_1}v - \sqrt{p_1}l_1,$$

$$\sqrt{p_2}\varepsilon_2 = a_2\sqrt{p_2}x + b_2\sqrt{p_2}y + \ldots + k_2\sqrt{p_2}v - \sqrt{p_2}l_2,$$

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$\sqrt{p_k}\varepsilon_k = a_k\sqrt{p_k}x + b_k\sqrt{p_k}y + \ldots + k_k\sqrt{p_k}v - \sqrt{p_k}l_k,$$

i postępujemy, jak powyżej wskazano.

64. Przybliżony sposób rachowania. Ustawiwszy równania normalne:

$$\left.\begin{array}{l}[aa]\,x + [ab]\,y + \ldots + [ak]\,v = [al]\,, \\ [ab]\,x + [bb]\,y + \ldots + [bk]\,v = [bl]\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [ak]\,x + [bk]\,y + \ldots + [kk]\,v = [kl]\,,\end{array}\right\} \quad (1)$$

i wiedząc, że $x, y, z, \ldots, v$ są ilościami bardzo małemi, co najczęściej się wydarza, albo co też uskutecznić można, to ponieważ jest dostateczne obliczenie ilości $x, y, z, \ldots, v$ tylko do kilku miejsc dziesiętnych, możemy zamiast poprzednich wyłożonych ścisłych metod rozwiązania użyć następującej metody przybliżonego rachunku.

Otóż opuszczamy w każdem równaniu wszystkie wyrazy lewej strony aż po wyraz leżący na przekątnej, który ma zawsze przy sobie spółczynnik dodatni i od zera różny; w takim razie otrzymamy:

$$\left.\begin{array}{lcl}[aa]\,x_1 = [al]\,, & & x_1 = \dfrac{[al]}{[aa]}\,, \\ [bb]\,y_1 = [bl]\,, & \text{a stąd:} & y_1 = \dfrac{[bl]}{[bb]}\,, \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ [kk]\,v_1 = [kl]\,, & & v_1 = \dfrac{[kl]}{[kk]}\,,\end{array}\right\} \quad (2)$$

jako pierwsze przybliżone równania. A podstawiwszy w (1)

$$x = x_1 + d_1\,,\ y = y_1 + d_2\,, \ldots, v = v_1 + d_n\,,$$

mieć będziemy następujący układ równań:

$$\left.\begin{array}{l}[aa]\,d_1 + [ab]\,d_2 + \ldots + [ak]\,d_n = D_1\,, \\ [ab]\,d_1 + [bb]\,d_2 + \ldots + [bk]\,d_n = D_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [ak]\,d_1 + [bk]\,d_2 + \ldots + [kk]\,d_n = D_n\,,\end{array}\right\} \quad (3)$$

jeżeli:

$$\left.\begin{array}{l}[al] - ([aa]\,x_1 + [ab]\,y_1 + \ldots + [ak]\,v_1) = D_1\,, \\ [bl] - ([ab]\,x_1 + [bb]\,y_1 + \ldots + [bk]\,v_1) = D_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [kl] - ([ak]\,x_1 + [bk]\,y_1 + \ldots + [kk]\,v_1) = D_n\,.\end{array}\right\} \quad (4)$$

Z równaniami (3) postępujemy jak z układem (1) i otrzymujemy drugi układ przybliżonych równań, a mianowicie:

$$\left.\begin{aligned} [aa]\, d_{1,1} &= D_1\,, & &\qquad & d_{1,1} &= \frac{D_1}{[aa]}\,, \\ [bb]\, d_{2,1} &= D_2\,, & &\text{a stąd:} & d_{2,1} &= \frac{D_2}{[bb]}\,, \\ & \ldots\ldots & & & & \ldots\ldots \\ [kk]\, d_{n,1} &= D_n\,, & & & d_{n,1} &= \frac{D_n}{[kk]}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Kładąc znowu:

$$d_1 = d_{1,1} + d_{1,2}\,,\quad d_2 = d_{2,1} + d_{2,2}\,, \ldots\,, d_n = d_{n,1} + d_{n,2}\,,$$

otrzymamy z układu (3) układ równań dla $d_{1,1}$, $d_{2,1}, \ldots d_{n,1}$, a postępując tak dalej, dojdziemy wkońcu do bardzo małych wartości dla $d_{1,i}$, $d_{2,i}, \ldots, d_{n,i}$, które niczem innem nie są jak poprawkami, tak że ostatecznie otrzymamy jak najdokładniejsze wartości na x, y, $z, \ldots, v$, a mianowicie:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + d_{1,1} + d_{1,2} + d_{1,3} + \ldots\,, \\ y &= y_1 + d_{2,1} + d_{2,2} + d_{2,3} + \ldots\,, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v &= v_1 + d_{n,1} + d_{n,2} + d_{n,3} + \ldots\,. \end{aligned}$$

---

65. Zagadnienia. 1. Z punktu O wymierzono kąty ku 7 stanowiskom A, B, C, D, E, F, G i otrzymano następujące wartości:

1.	AOB	=	101° 56′ 42·125″	jako	przeciętną	z	20	spostrzeżeń.
2.	AOD	=	126° 43′ 6·075″	„	„	„	20	„
3.	BOC	=	18° 14′ 14·600″	„	„	„	10	„
4.	BOD	=	24° 46′ 24·175″	„	„	„	20	„
5.	BOE	=	27° 14′ 17·528″	„	„	„	9	„
6.	BOF	=	50° 22′ 7·148″	„	„	„	32	„
7.	COD	=	6° 32′ 6·775″	„	„	„	10	„
8.	COF	=	32° 7′ 52·117″	„	„	„	15	„
9.	DOE	=	2° 27′ 52·950″	„	„	„	10	„
10.	DOF	=	25° 35′ 44·441″	„	„	„	22	„
11.	DOG	=	45° 37′ 42·375″	„	„	„	20	„
12.	EOF	=	23° 7′ 49·600″	„	„	„	10	„
13.	FOG	=	20° 2′ 0·250″	„	„	„	22	„

Wyznaczyć najprawdopodobniejsze wartości tych kątów, skierowawszy punkt zerowy podziałki ku pewnemu stałemu punktowi.

R o z w i ą z a n i e. Dla uniknienia rachunku wielkiemi liczbami połóżmy:

$$\left.\begin{aligned} AOB &= 101^0\ 56'\ 42'' + x - w \\ AOC &= 120^0\ 10'\ 57'' + y - w \\ AOD &= 126^0\ 43'\ \ 5'' + z - w \\ AOE &= 129^0\ 10'\ 59'' + t - w \\ AOF &= 152^0\ 18'\ 49'' + u - w \\ AOG &= 172^0\ 20'\ 48'' + v - w \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

gdzie x, y, z, t, u, v oznaczają poprawki, jakie na kątach uwzględnić należy; w zaś oznacza poprawkę dotyczącą położenia punktu zerowego w pomiarze kątowym. Szukane ilości x, y, z, t, u, v wyrażamy w sekundach.

Równania błędów są:

$$\left.\begin{aligned} -w + x &= 0{\cdot}125, & -y + z &= -1{\cdot}225, \\ -w + z &= 1{\cdot}075, & -y + u &= 0{\cdot}117, \\ -x + y &= -0{\cdot}400, & -z + t &= -1{\cdot}050, \\ -x + z &= 1{\cdot}175, & -z + u &= 0{\cdot}441, \\ -x + t &= 0{\cdot}528, & -z + v &= -0{\cdot}625, \\ -x + u &= 0{\cdot}148, & -t + u &= -0{\cdot}400, \\ & & -u + v &= 1{\cdot}250, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

z których układamy tabelkę:

a)

L. p.	g	a	b	c	d	e	f	l	p
1.	— 1	+ 1	.	.	.	.	.	0·125	20
2.	— 1	.	.	+ 1	.	.	.	1·075	20
3.	.	— 1	+ 1	.	.	.	.	— 0·400	10
4.	.	— 1	.	+ 1	.	.	.	1·175	20
5.	.	— 1	.	.	+ 1	.	.	0·528	9
6.	.	— 1	.	.	.	+ 1	.	0·148	32
7.	.	.	— 1	+ 1	.	.	.	— 1·225	10
8.	.	.	— 1	.	.	+ 1	.	0·117	15
9.	.	.	.	— 1	+ 1	.	.	— 1·050	10
10.	.	.	.	— 1	.	+ 1	.	0·441	22
11.	.	.	.	— 1	.	.	+ 1	— 0·625	20
12.	.	.	.	.	— 1	+ 1	.	— 0·400	10
13.	.	.	.	.	.	— 1	+ 1	1·250	22

Zatem otrzymujemy następujące równania normalne:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrrl}
+\mathbf{40}w & -20x & & -20z & & & & = -24{\cdot}000 \\
-20w & +\mathbf{91}x & +10y & -20z & -9t & -32u & & = -26{\cdot}488 \\
 & -10x & +\mathbf{35}y & -10z & & -15u & & = +6{\cdot}515 \\
-20w & -20x & -10y & +\mathbf{102}z & -10t & -22u & -20v & = +46{\cdot}048 \\
 & -9x & & -10z & +\mathbf{29}t & -10u & & = -1{\cdot}748 \\
 & -32x & -15y & -22z & -10t & +\mathbf{101}u & -22v & = -15{\cdot}327 \\
 & & & -20z & & -22u & +\mathbf{42}v & = +15{\cdot}000
\end{array}\right\} (3)$$

Rozwiązując powyższe równania według metody podanej w rozdziale *A* (str. 41.), otrzymamy dokładne wartości na x, y, z, t, u, v. Wszelako rachunek jest za długi i żmudny. Wiedząc zaś, że x, y, z, t, u, v mogą być tylko małemi wartościami, stosujemy z korzyścią metodę rachunku przybliżonego. Pomnąc więc, że równanie kontrolne jest postaci $O = O$, gdyż i prawe strony równań (3) dają O na sumę, otrzymamy po kolei następujące wartości przybliżone:

$$\begin{array}{rl|l}
w = & -0{\cdot}6 & +24{\cdot}000 - 24 + 4 - 8 \qquad\qquad\qquad = -4{\cdot}000 \\
x = & -0{\cdot}2 & +26{\cdot}488 + 12 - 18{\cdot}2 - 2 - 8 \qquad\qquad = +10{\cdot}288 \\
y = & 0{\cdot}2 & -6{\cdot}515 + 2 + 7 - 4 \qquad\qquad\qquad = -1{\cdot}515 \\
z = & 0{\cdot}4 & -46{\cdot}048 + 12 + 4 - 2 + 40{\cdot}8 - 10 = -1{\cdot}248 \\
t = & 0{\cdot}0 & +1{\cdot}748 + 1{\cdot}8 - 4 \qquad\qquad\qquad\quad = -0{\cdot}452 \\
u = & 0{\cdot}0 & +15{\cdot}327 + 6{\cdot}4 - 3 - 8{\cdot}8 - 11 \qquad\quad = -1{\cdot}073 \\
v = & 0{\cdot}5 & -15{\cdot}000 + 21 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = -2{\cdot}000
\end{array} \quad (4)$$

Na prawo od kreski pionowej mamy lewe strony równań normalnych (3) sprowadzone do zera. Tutaj musi się ziścić równanie kontrolne $O = O$, nietylko dla prawych stron równań (3), lecz także dla prawych stron (4) pierwszych równań przybliżonych, jakoteż wszystkich następnych równań przybliżonych. W istocie suma z (4) jest równą zeru.

Ponieważ spółczynniki równań przybliżonych pozostają ustawicznie te same, jak w równaniach (3), nie piszemy ich przeto w równaniach przybliżonych, lecz tylko prawe ich strony, w skutek czego otrzymamy łatwo dający się wysnuć następujący rachunek, przyczem przy *d* opuszczamy dla łatwości pisania drugie wskaźniki, gdyż pomyłka jest tu wcale niemożliwą.

$$\begin{array}{rl|ll}
d_1 = & -0{\cdot}10 & +\ 4{\cdot}000 - 4{\cdot}00 - 2{\cdot}20 + 0{\cdot}20 & = -\ 2{\cdot}000 \\
d_2 = & +0{\cdot}11 & -10{\cdot}288 + 2{\cdot}00 + 10{\cdot}01 + 0{\cdot}40 + 0{\cdot}20 + \\
 & & \qquad + 0{\cdot}09 + 0{\cdot}32 & = +\ 2{\cdot}732 \\
d_3 = & -0{\cdot}04 & +\ 1{\cdot}515 - 1{\cdot}10 - 1{\cdot}40 + 0{\cdot}10 + 0{\cdot}15 & = -\ 0{\cdot}735 \\
d_4 = & -0{\cdot}01 & +\ 1{\cdot}248 + 2{\cdot}00 - 2{\cdot}22 + 0{\cdot}40 - 1{\cdot}02 + \\
 & & \qquad + 0{\cdot}10 + 0{\cdot}22 + 1{\cdot}00 & = +\ 1{\cdot}748 \\
d_5 = & -0{\cdot}01 & +\ 0{\cdot}452 - 0{\cdot}99 + 0{\cdot}10 - 0{\cdot}29 + 0{\cdot}10 & = -\ 0{\cdot}628 \\
d_6 = & -0{\cdot}01 & +\ 1{\cdot}073 - 3{\cdot}52 + 0{\cdot}60 + 0{\cdot}22 + 0{\cdot}10 - \\
 & & \qquad - 1{\cdot}01 + 1{\cdot}10 & = -\ 1{\cdot}437 \\
d_7 = & -0{\cdot}05 & +\ 2{\cdot}000 + 0{\cdot}20 + 0{\cdot}22 - 2{\cdot}10 & = +\ 0{\cdot}320 \\
\hline
 & & & \Sigma = \quad 0{\cdot}000
\end{array} \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{ll|ll}
d_1 = & -0{\cdot}05 & +2{\cdot}000-2{\cdot}00-0{\cdot}60-0{\cdot}20 & =-0{\cdot}800\\
d_2 = & +0{\cdot}03 & -2{\cdot}732+1{\cdot}00+2{\cdot}73+0{\cdot}20-0{\cdot}20+ & \\
 & & \quad +0{\cdot}18+0{\cdot}32 & =+1{\cdot}498\\
d_3 = & -0{\cdot}02 & +0{\cdot}735-0{\cdot}30-0{\cdot}70-0{\cdot}10+0{\cdot}15 & =-0{\cdot}215\\
d_4 = & +0{\cdot}01 & -1{\cdot}748+1{\cdot}00-0{\cdot}60+0{\cdot}20+1{\cdot}02+ & \\
 & & \quad +0{\cdot}20+0{\cdot}22 & =+0{\cdot}292\\
d_5 = & -0{\cdot}02 & +0{\cdot}628-0{\cdot}27-0{\cdot}10-0{\cdot}58+0{\cdot}10 & =-0{\cdot}222\\
d_6 = & -0{\cdot}01 & +1{\cdot}437-0{\cdot}96+0{\cdot}30-0{\cdot}22+0{\cdot}20- & \\
 & & \quad -1{\cdot}01 & =-0{\cdot}253\\
d_7 = & 0{\cdot}00 & -0{\cdot}320-0{\cdot}20+0{\cdot}22 & =-0{\cdot}300
\end{array}\right\}(6)$$

$$\Sigma = 0{\cdot}000$$

$$\left.\begin{array}{ll|ll}
d_1 = & -0{\cdot}020 & +0{\cdot}800-0{\cdot}800-0{\cdot}300-0{\cdot}040 & =-0{\cdot}340\\
d_2 = & +0{\cdot}015 & -1{\cdot}498+0{\cdot}400+1{\cdot}365+0{\cdot}060-0{\cdot}040+ & \\
 & & \quad +0{\cdot}063+0{\cdot}064 & =+0{\cdot}414\\
d_3 = & -0{\cdot}006 & +0{\cdot}215-0{\cdot}150-0{\cdot}210-0{\cdot}020+0{\cdot}030 & =-0{\cdot}135\\
d_4 = & +0{\cdot}002 & -0{\cdot}292+0{\cdot}400-0{\cdot}300+0{\cdot}060+0{\cdot}204+ & \\
 & & \quad +0{\cdot}070+0{\cdot}044+0{\cdot}140 & =+0{\cdot}326\\
d_5 = & -0{\cdot}007 & +0{\cdot}222-0{\cdot}135-0{\cdot}020-0{\cdot}203+0{\cdot}020 & =-0{\cdot}116\\
d_6 = & -0{\cdot}002 & +0{\cdot}253-0{\cdot}480+0{\cdot}090-0{\cdot}044+0{\cdot}070- & \\
 & & \quad -0{\cdot}202+0{\cdot}154 & =-0{\cdot}159\\
d_7 = & -0{\cdot}007 & +0{\cdot}300-0{\cdot}040+0{\cdot}044-0{\cdot}294 & =+0{\cdot}010
\end{array}\right\}(7)$$

$$\Sigma = 0{\cdot}000$$

$$\left.\begin{array}{ll|ll}
d_1 = & -0{\cdot}008 & +0{\cdot}340-0{\cdot}320-0{\cdot}080-0{\cdot}060 & =-0{\cdot}120\\
d_2 = & +0{\cdot}004 & -0{\cdot}414+0{\cdot}160+0{\cdot}364+0{\cdot}040-0{\cdot}060+ & \\
 & & \quad +0{\cdot}027+0{\cdot}032 & =+0{\cdot}149\\
d_3 = & -0{\cdot}004 & +0{\cdot}135-0{\cdot}040-0{\cdot}140-0{\cdot}030+0{\cdot}015 & =-0{\cdot}060\\
d_4 = & +0{\cdot}003 & -0{\cdot}326+0{\cdot}160-0{\cdot}080+0{\cdot}040+0{\cdot}306+ & \\
 & & \quad +0{\cdot}030+0{\cdot}022 & =+0{\cdot}152\\
d_5 = & -0{\cdot}003 & +0{\cdot}116-0{\cdot}036-0{\cdot}030-0{\cdot}087+0{\cdot}010 & =-0{\cdot}027\\
d_6 = & -0{\cdot}001 & +0{\cdot}159-0{\cdot}128+0{\cdot}060-0{\cdot}066+0{\cdot}030- & \\
 & & \quad -0{\cdot}101 & =-0{\cdot}046\\
d_7 = & +0{\cdot}000 & -0{\cdot}010-0{\cdot}060+0{\cdot}022 & =-0{\cdot}048
\end{array}\right\}(8)$$

$$\Sigma = 0{\cdot}000$$

$$\left.\begin{array}{ll|ll}
d_1 = & -0{\cdot}003 & +0{\cdot}120-0{\cdot}120-0{\cdot}020-0{\cdot}020 & =-0{\cdot}040\\
d_2 = & +0{\cdot}001 & -0{\cdot}149+0{\cdot}060+0{\cdot}091+0{\cdot}010-0{\cdot}020+ & \\
 & & \quad +0{\cdot}009 & =+0{\cdot}001\\
d_3 = & -0{\cdot}001 & +0{\cdot}060-0{\cdot}010-0{\cdot}035-0{\cdot}010 & =+0{\cdot}005\\
d_4 = & +0{\cdot}001 & -0{\cdot}152+0{\cdot}060-0{\cdot}020+0{\cdot}010+0{\cdot}102+ & \\
 & & \quad +0{\cdot}010+0{\cdot}020 & =+0{\cdot}030\\
d_5 = & -0{\cdot}001 & +0{\cdot}027-0{\cdot}009-0{\cdot}010+0{\cdot}029 & =-0{\cdot}021\\
d_6 = & -0{\cdot}000 & +0{\cdot}046-0{\cdot}032+0{\cdot}015-0{\cdot}022+0{\cdot}010+ & \\
 & & \quad +0{\cdot}022 & =+0{\cdot}039\\
d_7 = & -0{\cdot}001 & +0{\cdot}048-0{\cdot}020-0{\cdot}042 & =-0{\cdot}014
\end{array}\right\}(9)$$

$$\Sigma = 0{\cdot}000$$

Z powyższych tedy równań (4)—(9) otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
w &= -\,0{\cdot}6 + \Sigma d_1 = -\,0{\cdot}6 - 0{\cdot}186 = -\,0{\cdot}786,\\
x &= -\,0{\cdot}2 + \Sigma d_2 = -\,0{\cdot}2 + 0{\cdot}160 = -\,0{\cdot}040,\\
y &= +\,0{\cdot}2 + \Sigma d_3 = +\,0{\cdot}2 - 0{\cdot}071 = +\,0{\cdot}129,\\
z &= +\,0{\cdot}4 + \Sigma d_4 = +\,0{\cdot}4 + 0{\cdot}006 = +\,0{\cdot}406,\\
t &= +\,0{\cdot}0 + \Sigma d_5 = +\,0{\cdot}0 - 0{\cdot}041 = -\,0{\cdot}041,\\
u &= +\,0{\cdot}0 + \Sigma d_6 = +\,0{\cdot}0 - 0{\cdot}023 = -\,0{\cdot}023,\\
v &= -\,0{\cdot}5 + \Sigma d_7 = +\,0{\cdot}5 - 0{\cdot}058 = +\,0{\cdot}442.
\end{aligned}
$$

Przeto mieć będziemy:

$$
\begin{aligned}
x - w &= +\,0{\cdot}746,\\
y - w &= +\,0{\cdot}915,\\
z - w &= +\,1{\cdot}192,\\
t - w &= +\,0{\cdot}745,\\
u - w &= +\,0{\cdot}763,\\
v - w &= +\,1{\cdot}228.
\end{aligned}
$$

Zatem najprawdopodobniejsze wartości wprowadzonych kątów będą:

$$
\begin{aligned}
AOB &= 101^0\ 56'\ 42{\cdot}746''\\
AOC &= 120^0\ 10'\ 57{\cdot}915''\\
AOD &= 126^0\ 43'\ 6{\cdot}192''\\
AOE &= 129^0\ 10'\ 59{\cdot}745''\\
AOF &= 152^0\ 18'\ 49{\cdot}763''\\
AOG &= 172^0\ 20'\ 49{\cdot}228'',
\end{aligned}
$$

z czego obliczamy najprawdopodobniejsze wartości mierzonych kątów:

1. $AOB = 101^0\ 56'\ 47{\cdot}746''$	7. $COD = 6^0\ 32'\ 8{\cdot}277''$
2. $AOD = 126^0\ 43'\ 6{\cdot}192''$	8. $COF = 32^0\ 7'\ 51{\cdot}848''$
3. $BOC = 18^0\ 14'\ 15{\cdot}169''$	9. $DOE = 2^0\ 27'\ 53{\cdot}553''$
4. $BOD = 24^0\ 46'\ 23{\cdot}446''$	10. $DOF = 25^0\ 35'\ 43{\cdot}571''$
5. $BOE = 27^0\ 14'\ 16{\cdot}999''$	11. $DOG = 45^0\ 37'\ 43{\cdot}036''$
6. $BOF = 50^0\ 22'\ 7{\cdot}017''$	12. $EOF = 23^0\ 7'\ 50{\cdot}018''$

13 $FOG = 20^0\ 1'\ 59{\cdot}465''$.

---

2. Wymierzono zapomocą niwelacyi wysokość pięciu stanowisk *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, mianowicie:

stanowiska	A . . .	115·52 m.	ponad	powierzchnię morza,	
„	B . . .	60·12 m.	„	stanowisko	A,
„	B . . .	177·04 m.	„	powierzchnię morza,	
„	C . . .	234·12 m.	„	stanowisko	A,
„	C . . .	171·00 m.	„	„	B,
„	D . . .	632·25 m.	„	„	C,
„	E . . .	— 211·01 m.	„	„	D,
„	E . . .	596·12 m.	„	„	B,
„	E . . .	427·18 m.	„	„	C.

Wyznaczyć najprawdopodobniejsze wysokości tych stanowisk ponad powierzchnię morza. — Odp. $A = 115·62$ m., $B = 176·95$ m., $C = 348·62$ m., $D = 982·70$ m., $E = 773·52$ m.

3. Z punktu O celowano do pięciu punktów A, B, C, D, E i wymierzono następujące kąty: $AOB = 32^0\ 15'\ 3''$, $DOE = 38^0\ 5'\ 50''$, $BOC = 42^0\ 16'\ 56''$, $COD = 120^0\ 15'\ 1''$, $AOC = 74^0\ 31'\ 56''$, $BOD = 162^0\ 32'\ 0''$, $COE = 158^0\ 20'\ 53''$, $AOD = 194^0\ 46'\ 54''$, $AOE = 232^0\ 52'\ 48''$, $BOE = 200^0\ 37'\ 52''$. Wyznaczyć najprawdopodobniejsze wartości tychże kątów. Odpowiedź: Oznaczywszy przez x, y, z, t poprawki, jakie na 4 pierwszych kątach należy uskutecznić, otrzymamy następujące równania normalne:

$$\begin{aligned}4x + 3y + 2z + t &= -11,\\ 3x + 4y + 4z + 2t &= -\ \ 3,\\ 2x + 4y + 6z + 3t &= +\ \ 2,\\ x + 2y + 3z + 4t &= +\ \ 5,\end{aligned}$$

z których wypada: $x = -3·8$, $y = 0·6$, $z = 0·4$, $t = 1·6$, zatem najprawdopodobniejsze wartości kątów:

AOB = $32^0\ 15'\ 59·2''$	BOD = $162^0\ 32'\ 58''$
DOE = $38^0\ 5'\ 50·6''$	COE = $158^0\ 20'\ 53''$
BOC = $42^0\ 16'\ 56·4''$	AOD = $194^0\ 46'\ 57·2''$
COD = $120^0\ 15'\ 2·6''$	AOE = $232^0\ 52'\ 48·8''$
AOC = $74^0\ 31'\ 55·8''$	BOE = $200^0\ 37'\ 53·6''$.

4. Długość L wahadła sekundowego, zależną od szerokości geograficznej φ stanowiska, wyraża równanie $L = A + B\ sin^2\varphi$. Dla wyznaczenia ilości A i B wymierzono długość wahadła sekundowego w różnych szerokościach geograficznych i otrzymano następujące wyniki spostrzeżeń:

	Stanowisko spostrzeżenia	Szerokość geograficzna φ	Obserwowana długość L wahadła sekundowego
1.	Peru	0° 0'	0·99669
2.	Puortobello	9° 34'	0·99689
3.	Pondicherry . . .	11° 56'	0·99710
4.	Jamajka	18° 0'	0·99745
5.	Petit-Goave	18° 27'	0·99728
6.	Kap	33° 55'	0·99877
7.	Formachera . . .	38° 40'	0·99908
8.	Tuluza	43° 36'	0·99950
9.	Wiedeń	48° 13'	0·99987
10.	Gota	50° 56'	1·00006
11.	Londyn	51° 31'	1·00018
12.	Arensberg	58° 15'	1·00074
13.	Petersburg	59° 56'	1·00101
14.	Pella	66° 48'	1·00137
15.	Ponoj	67° 5'	1·00148
16.	Paryż	48° 50'	1·00000

Wyznaczyć najprawdopodobniejsze wartości stałych *A* i *B* z powyższych 16 spostrzeżeń, pomnąc, że długość wahadła sekundowego dla Paryża przyjęto równą 1. — Odp.: Równania normalne są:

$$16\ A + 6{\cdot}946891\ B = 15{\cdot}98747$$
$$6{\cdot}946891\ A + 4{\cdot}383855\ B = 6{\cdot}94928$$

a długość wahadła sekundowego wyraża równanie:

$$L = 0{\cdot}996823 + 0{\cdot}00549745\ \sin^2\varphi.$$

5. Przyjąwszy objętość pewnej ilości rtęci przy temperaturze O^0 *C.* równą jednostce, znalazł Regnault, że

przy temperaturze	50° C.	objętość	tejże	=	1·009013,
	100° C.	„	„	=	1·018153,
	150° C.	„	„	=	1·027419,
	200° C.	„	„	=	1·036811,
	250° C.	„	„	=	1·046329,
	300° C.	„	„	=	1·055973,
	350° C.	„	„	=	1·065743.

Wyznaczyć na podstawie tych pomiarów zależność objętości rtęci od ciepłoty. — Odp.: Przyjąwszy, że

$$v = 1 + at + bt^2,$$

gdzie t oznacza ciepłotę w stopniach Celsiusa, v objętość w jednostkach objętości przy ciepłocie 0^0 $C.$, chodzić nam będzie o wyznaczenie stałych a i b. Aby uniknąć wielkich liczb, kładziemy:

$$100\ a = x,$$
$$10000\ b = y,$$

tak że równania błędów przybiorą postać:

$$v - 1 = \left(\frac{t}{100}\right) x + \left(\frac{t}{100}\right)^2 y.$$

Znajdziemy przeto:

$$v = 1 + 0{\cdot}00017901\ t + 0{\cdot}000000025223\ t^2.$$

6. Podczas tryangulacyi wymierzono kilkakrotnie kąty A, B, C trójkąta ABC, którego bok $AB = 25786{\cdot}34$ m., i otrzymano następujące wartości:

$A = 81^0\ 21'\ 43{\cdot}36''$ z 70 pomiarów,
$B = 25^0\ 16'\ 28{\cdot}85''$ z 101 „
$C = 73^0\ 21'\ 46{\cdot}35''$ z 85 „

Wyznaczyć najprawdopodobniejsze wartości tych trzech kątów. — Odp.: Exces sferyczny wynosi $0{\cdot}74''$, a najprawdopodobniejsze wartości kątów są:

$$\begin{aligned} A &= 81^0\ 21'\ 44{\cdot}22'' \\ B &= 25^0\ 16'\ 29{\cdot}46'' \\ C &= 73^0\ 21'\ 47{\cdot}06'' \\ \hline \Sigma &= 180^0\ 0'\ 0{\cdot}74''. \end{aligned}$$

DODATEK I.

Obliczenie całki Laplace'a.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

1. Położywszy:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

to kładąc y za x, napisać możemy także:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy.$$

Przez obustronne mnożenie otrzymamy:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \, . \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\; e^{-y^2}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\, dx \, . \, dy \, ,$$

tak że I^2 przechodzi w całkę podwójną.

Jeżeli x i y są spółrzędnemi prostokątnemi w płaszczyźnie, to $dx \, . \, dy$ oznacza powierzchnię nieskończenie małego prostokąta, znajdującego się w płaszczyźnie przy punkcie o spółrzędnych x i y, a mającego dx i dy za boki.

Połóżmy tedy:

$$z = e^{-x^2-y^2}$$

i oznaczywszy przez z trzecią spółrzędną przestrzenną, to równanie powyższe oznaczać będzie powierzchnię, rozpościerającą się ponad płaszczyzną XY. Płaszczyzna ta XY jest płaszczyzną ledwieniestyczną tej powierzchni, boć powierzchnia ta w postaci dzwonu wznosi się ponad nią aż do pewnego punktu A ($x = 0$, $y = 0$, $z = 1$), a spłaszczając się coraz bardziej, zbliża się nieskończenie do płaszczyzny XY.

Powierzchnia ta powstaje w skutek obrotu pewnej krzywej AB w płaszczyźnie XZ około osi OZ. Równanie tej krzywej jest:

$$z = e^{-x^2} \, .$$

Objętość bryły, którą zamyka ta powierzchnia obrotowa z płaszczyzną XY, określa równanie:

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} z \, dx \, dy.$$

Zatem:

$$I^2 = V.$$

Objętość tę możemy obliczyć w inny sposób. Wprowadźmy spółrzędne biegunowe w płaszczyźnie XY. Kładąc zatem:

$$x = \rho \cos \varphi,$$
$$y = \rho \sin \varphi,$$

i przyjąwszy za element powierzchni $dx \,.\, dy$ inny element powierzchni nieskończenie mały o bokach $\rho d\varphi$ i $d\rho$, otrzymamy na określenie elementu objętościowego:

$$z \,\rho d\rho \, d\varphi,$$

a więc objętość:

$$V = \int_{\varphi = 0}^{\varphi = 2\pi} \int_{\rho = 0}^{\rho = \infty} z \,\rho d\rho \, d\varphi,$$

czyli:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} z \,\rho \, d\rho \,.$$

Ponieważ:

$$x = \rho \cos \varphi \,,$$
$$y = \rho \sin \varphi \,,$$

przeto:

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

więc:

$$z = e^{-x^2 - y^2} = e^{-\rho^2},$$

zatem:

$$\int z \,\rho \, d\rho = \int e^{-\rho^2} \rho \, d\rho \,.$$

Położywszy:

$$\rho^2 = \xi,$$

więc:

$$2\rho \, d\rho = d\xi,$$

będziemy mieli:

$$\int z \,\rho \, d\rho = \frac{1}{2} \int e^{-\xi} d\xi = -\frac{1}{2} e^{-\xi},$$

więc:

$$\int_0^{\infty} z \,\rho \, d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\xi} d\xi = \frac{1}{2}\,.$$

Podstawiwszy tę wartość w powyższą całkę, otrzymamy:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} z \,\rho \, d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \,.\, \frac{1}{2} = \pi,$$

więc:

$$I^2 = V = \pi,$$

czyli:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

---

2. Ponieważ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

a że:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

przeto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

czyli stąd:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Kładąc hx za x i hdx za dx, otrzymamy:

$$2h\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-h^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2h}.$$

Zróżniczkowawszy co do h to równanie obustronnie, mieć będziemy:

$$-2h\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-h^2x^2} dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{2h^2},$$

zatem:

$$\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-h^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2h^3},$$

TABLICA I.

$$\Theta(h\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{h\gamma} e^{-z^2} \,.\, dz \,.$$

hγ	Θ (hγ)	hγ	Θ (hγ)	hγ	Θ (hγ)
0·00	0·000 0000	**0 30**	0·328 6267	**0 60**	0·603 8561
0·01	011 2833	**0·31**	338 9081	**0·61**	611 6812
0·02	022 5644	**0·32**	349 1259	**0·62**	619 4114
0·03	033 8410	**0·33**	359 2785	**0·63**	627 0463
0·04	045 1109	**0·34**	369 3644	**0·64**	634 5857
0·05	0·056 3718	**0·35**	0·379 3829	**0·65**	0·642 0292
0·06	067 6215	**0·36**	389 3296	**0·66**	649 3765
0·07	078 8577	**0·37**	399 2059	**0·67**	656 6275
0 08	090 0781	**0·38**	409 0093	**0·68**	663 7820
0·09	101 2806	**0·39**	418 7385	**0·69**	670 8399
0·10	0·112 4630	**0·40**	0·428 3922	**0·70**	0·677 8010
0·11	123 6230	**0·41**	437 9690	**0·71**	684 6654
0·12	134 7584	**0·42**	447 4676	**0·72**	691 4330
0·13	145 8671	**0·43**	456 8867	**0·73**	698 1038
0·14	156 9470	**0·44**	466 2251	**0·74**	704 6780
0·15	0·167 9959	**0·45**	0·475 4818	**0·75**	0·711 1556
0·16	179 0117	**0·46**	484 6555	**0·76**	717 5367
0·17	189 9923	**0·47**	493 7452	**0·77**	723 8216
0·18	200 9357	**0·48**	502 7498	**0·78**	730 0104
0·19	211 8398	**0·49**	511 6683	**0·79**	736 1035
0·20	0 222 7025	**0·50**	0·520 4999	**0·80**	0·742 1010
0·21	233 5218	**0·51**	529 2437	**0·81**	748 0033
0·22	244 2958	**0·52**	537 8987	**0·82**	753 8108
0·23	255 0225	**0·53**	546 4641	**0·83**	759 5238
0·24	265 7000	**0·54**	554 9392	**0·84**	765 1427
0·25	0·276 3263	**0·55**	0·563 3233	**0·85**	0·770 6680
0·26	286 8997	**0·56**	571 6157	**0·86**	776 1002
0·27	297 4182	**0·57**	579 8158	**0·87**	781 4398
0·28	307 8800	**0·58**	587 9229	**0·88**	786 6873
0·29	318 2834	**0·59**	595 9365	**0·89**	791 8432

hγ	Θ (hγ)	hγ	Θ (hγ)	hγ	Θ (hγ)
0·90	0·796 9082	**1·25**	0·922 9001	**1·60**	0·976 3484
0·91	801 8828	**1·26**	925 2359	**1·61**	977 2069
0·92	806 7677	**1·27**	927 5136	**1·62**	978 0381
0·93	811 5635	**1·28**	929 7342	**1·63**	978 8429
0·94	816 2710	**1·29**	931 8987	**1·64**	979 6218
0·95	0·820 8908	**1·30**	0·934 0080	**1·65**	0·980 3756
0·96	825 4236	**1·31**	936 0632	**1·66**	981 1049
0·97	829 8703	**1·32**	938 0652	**1·67**	981 8104
0·98	834 2315	**1·33**	940 0150	**1·68**	982 4928
0·99	838 5081	**1·34**	941 9137	**1·69**	983 1526
1·00	0·842 7008	**1·35**	0·943 7622	**1·70**	0·983 7904
1·01	846 8105	**1·36**	945 5614	**1·71**	984 4070
1·02	850 8380	**1·37**	947 3124	**1·72**	985 0028
1·03	854 7842	**1·38**	949 0160	**1·73**	985 5785
1·04	858 6499	**1·39**	950 6733	**1·74**	986 1346
1·05	0·862 4360	**1·40**	0·952 2851	**1·75**	0·986 6717
1·06	866 1435	**1·41**	953 8524	**1·76**	987 1903
1·07	869 7732	**1·42**	955 3762	**1·77**	987 6910
1·08	873 3261	**1·43**	956 8573	**1·78**	988 1742
1·09	876 8030	**1·44**	958 2966	**1·79**	988 6406
1·10	0·880 2050	**1·45**	0·959 6950	**1·80**	0·989 0905
1·11	883 5330	**1·46**	961 0535	**1·81**	989 5245
1·12	886 7879	**1·47**	962 3729	**1·82**	989 9431
1·13	889 9707	**1·48**	963 6541	**1·83**	990 3467
1·14	893 0823	**1·49**	964 8979	**1·84**	990 7359
1·15	0·896 1238	**1·50**	0·966 1052	**1·85**	0·991 1110
1·16	899 0962	**1·51**	967 2768	**1·86**	991 4725
1·17	902 0004	**1·52**	968 4135	**1·87**	991 8207
1·18	904 8374	**1·53**	969 5162	**1·88**	992 1562
1·19	907 6083	**1·54**	970 5857	**1·89**	992 4793
1·20	0·910 3140	**1·55**	0·971 6227	**1·90**	0·992 7904
1·21	912 9555	**1·56**	972 6281	**1·91**	993 0899
1·22	915 5339	**1·57**	973 6026	**1·92**	993 3782
1·23	918 0501	**1·58**	974 5470	**1·93**	993 6557
1·24	920 5052	**1·59**	975 4620	**1·94**	993 9226

hγ	Θ (hγ)	hγ	Θ (hγ)	hγ	Θ (hγ)
1·95	0·994 1794	**2·30**	0·998 8568	**2·65**	0·999 8215
1·96	994 4263	**2·31**	998 9124	**2·66**	999 8313
1·97	994 6637	**2·32**	998 9655	**2·67**	999 8406
1·98	994 8920	**2·33**	999 0162	**2·68**	999 8494
1·99	995 1114	**2·34**	999 0646	**2·69**	999 8578
2·00	0·995 3223	**2·35**	0·999 1107	**2·70**	0·999 8657
2·01	995 5248	**2·36**	999 1548	**2·71**	999 8732
2·02	995 7194	**2·37**	999 1968	**2·72**	999 8803
2·03	995 9064	**2·38**	999 2369	**2·73**	999 8870
2·04	996 0859	**2·39**	999 2751	**2·74**	999 8934
2·05	0·996 2580	**2·40**	0·999 3115	**2·75**	0·999 8994
2·06	996 4235	**2·41**	999 3462	**2·76**	999 9051
2·07	996 5821	**2·42**	999 3793	**2·77**	999 9105
2·08	996 7344	**2·43**	999 4108	**2·78**	999 9156
2·09	996 8805	**2·44**	999 4408	**2·79**	999 9204
2·10	0·997 0206	**2·45**	0·999 4694	**2·80**	0·999 9250
2·11	997 1548	**2·46**	999 4966	**2·81**	999 9293
2·12	997 2836	**2·47**	999 5226	**2·82**	999 9334
2·13	997 4070	**2·48**	999 5472	**2·83**	999 9373
2·14	997 5253	**2·49**	999 5707	**2·84**	999 9409
2·15	0·997 6386	**2·50**	0·999 5931	**2·85**	0·999 9443
2·16	997 7471	**2·51**	999 6143	**2·86**	999 9476
2·17	997 8511	**2·52**	999 6345	**2·87**	999 9507
2·18	997 9507	**2·53**	999 6537	**2·88**	999 9536
2·19	998 0459	**2·54**	999 6720	**2·89**	999 9563
2·20	0·998 1371	**2·55**	0·999 6893	**2·90**	0·999 9589
2·21	998 2244	**2·56**	999 7058	**2·91**	999 9613
2·22	998 3079	**2·57**	999 7215	**2·92**	999 9637
2·23	998 3878	**2·58**	999 7364	**2·93**	999 9658
2·24	998 4642	**2·59**	999 7505	**2·94**	999 9679
2·25	0·998 5373	**2·60**	0·999 7640	**2·95**	0·999 9698
2·26	998 6071	**2·61**	999 7767	**2·96**	999 9716
2·27	998 6739	**2·62**	999 7888	**2·97**	999 9733
2·28	998 7375	**2·63**	999 8003	**2·98**	999 9750
2·29	998 7986	**2·64**	999 8112	**2·99**	999 9765
				3·00	0·999 9779
				4·00	0·999 9999

DODATEK II.

Wzorce służące do ustawienia i rozwiązania równań normalnych wraz z sprawdzeniem i obliczeniem ważności.

Przyjmujemy tylko *4* niewiadome x, y, z, t, (tj. $k = 4$), gdyż dla większej liczby niewiadomych przeprowadzamy rachunek w ten sam sposób.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1t - l_1 \\ \varepsilon_2 &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2t - l_2 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon_n &= a_nx + b_ny + c_nz + d_nt - l_n \end{aligned}\right\} \dots (1) \begin{array}{c}\text{Równania}\\ \text{błędów}\end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + l_1 &= s_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + l_2 &= s_2 \\ \dots\dots\dots\dots& \\ a_n + b_n + c_n + d_n + l_n &= s_n \end{aligned}\right\} \dots (2) \begin{array}{c}\text{Równania}\\ \text{sum}\end{array}$$

$[a] + [b] + [c] + [d] + [l] = [s]$ 1. Równanie sprawdzające.

Tabelka a

z $(k + 2)$ kolumnami i n wierszami.

a	b	c	d	l	s
a_1	b_1	c_1	d_1	l_1	s_1
a_2	b_2	c_2	d_2	l_2	s_2
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
a_n	b_n	c_n	d_n	l_n	s_n

Tabelka a'

(w razie obliczania logarytmami)

z $(k + 2)$ wierszami i $(n + 1)$ kolumnami.

	1	2	3	.	.	.	n
loga	$\log a_1$	$\log a_2$	.	.	.	.	$\log a_n$
logb	$\log b_1$	$\log b_2$	.	.	.	.	$\log b_n$
logc	$\log c_1$	$\log c_2$	.	.	.	.	$\log c_n$
logd	$\log d_1$	$\log d_2$	.	.	.	.	$\log d_n$
logl	$\log l_1$	$\log l_2$	.	.	.	.	$\log l_n$
logs	$\log s_1$	$\log s_2$	.	.	.	.	$\log s_n$

Uwaga. Na pasku papieru wzdłuż górnego brzegu wypisujemy logarytmy liczb $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ w ten sposób, jak wskazuje tabelka a', a więc tak:

$\log a_1$	$\log a_2$	$\log a_3$	.	.	.	$\log a_n$

Zesunąwszy go popod pierwszy wiersz tabelki a', dodajemy ponad sobą stojące logarytmy; otrzymamy tedy logarytmy liczb $a_1{}^2, a_2{}^2, a_3{}^2, \ldots, a_n{}^2$, dla których z tablic logarytmicznych wyszukujemy odpowiednie liczby i wpisujemy je w tabelkę b. Następnie zesuwamy ten pasek papieru popod drugi wiersz i znowu dodajemy. Do otrzymanych sum szukamy liczb, które nam dają $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n$ i wpisujemy do tabelki b. Tak postępujemy dalej, aż otrzymamy $a_1s_1, a_2s_2, \ldots, a_ns_n$. — Teraz przeprowadzamy próbę zapomocą 2. równania sprawdzającego (obacz poniżej). Otrzymawszy zgodność rachunku, wypisujemy na drugim pasku papieru, jak powyżej, logarytmy liczb $b_1, b_2, \ldots, b_n$ i postępujemy, jak poprzednio z logarytmami liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$, z tą tylko różnicą, że zaczynamy od drugiego wiersza poziomego, gdyż $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n$ mamy już obliczone. Wpisawszy wszystkie iloczyny z $b_1, b_2, \ldots b_n$ do tabelki b, uskuteczniamy próbę zapomocą 3. równania sprawdzającego. Tak postępujemy, aż otrzymamy wszystkie iloczyny tabelki b i przekonamy się zapomocą równań sprawdzających, że spółczynniki $[aa]$, $[bb]$ . . . równań normalnych są dobrze obliczone.

Tabelka b

z $\left[\frac{1}{2}(k+2)(k+3)-1\right]$ kolumnami i $(n+1)$ wierszami.

aa	ab	ac	ad	al	as	bb	bc	bd	bl	bs	cc	cd	cl	cs	dd	dl	ds	ll	ls
$a_1{}^2$	a_1b_1	a_1c_1	a_1d_1	a_1l_1	a_1s_1	$b_1{}^2$	b_1c_1	b_1d_1	b_1l_1	b_1s_1	$c_1{}^2$	c_1d_1	c_1l_1	c_1s_1	$d_1{}^2$	d_1l_1	d_1s_1	$l_1{}^2$	l_1s_1
$a_2{}^2$	a_2b_2	a_2c_2	a_2d_2	a_2l_2	a_2s_2	$b_2{}^2$	b_2c_2	b_2d_2	b_2l_2	b_2s_2	$c_2{}^2$	c_2d_2	c_2l_2	c_2s_2	$d_2{}^2$	d_2l_2	d_2s_2	$l_2{}^2$	l_2s_2
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$a_n{}^2$	a_nb_n	a_nc_n	a_nd_n	a_nl_n	a_ns_n	$b_n{}^2$	b_nc_n	b_nd_n	b_nl_n	b_ns_n	$c_n{}^2$	c_nd_n	c_nl_n	c_ns_n	$d_n{}^2$	d_nl_n	d_ns_n	$l_n{}^2$	l_ns_n
[aa]	[ab]	[ac]	[ad]	[al]	[as]	[bb]	[bc]	[bd]	[bl]	[bs]	[cc]	[cd]	[cl]	[cs]	[dd]	[dl]	[ds]	[ll]	[ls]

$[aa] + [ab] + [ac] + [ad] + [al] = [as]$ 2. Równanie sprawdzające.

$[ab] + [bb] + [bc] + [bd] + [bl] = [bs]$ 3. „ „

$[ac] + [bc] + [cc] + [cd] + [cl] = [cs]$ 4. „ „

$[ad] + [bd] + [cd] + [dd] + [dl] = [ds]$ 5. „ „

$[al] + [bl] + [cl] + [dl] + [ll] = [ls]$ 6. „ „

Wzorzec I.

z $(2k+1)$ kolumnami pionowemi i $(k+2)$ szeregami.

W kolumnie: „Suma“ znajdują się prawe strony powyższych równań sprawdzających.

x	y	z	t		Suma	P_x	P_y	P_z
[aa] **1**	[ab] **[ab]:[aa]** $\log\frac{[ab]}{[aa]}$	[ac] **[ac]:[aa]** $\log\frac{[ac]}{[aa]}$	[ad] **[ad]:[aa]** $\log\frac{[ad]}{[aa]}$	[al] **[al]:[aa]** $\log\frac{[al]}{[aa]}$	[as] **[as]:[aa]** $\log\frac{[as]}{[aa]}$	1 **1:[aa]**	0 **0**	0 **0**
[ab] × log [ab]	[bb] $\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$ $\log\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	[bc] $\frac{[ac]}{[aa]}[ab]$ $\log\frac{[ac]}{[aa]}[ab]$	[bd] $\frac{[ad]}{[aa]}[ab]$ $\log\frac{[ad]}{[aa]}[ab]$	[bl] $\frac{[al]}{[aa]}[ab]$ $\log\frac{[al]}{[aa]}[ab]$	[bs] $\frac{[as]}{[aa]}[ab]$ $\log\frac{[as]}{[aa]}[ab]$	0 $\frac{1}{[aa]}[ab]$ $\log\frac{1}{[aa]}[ab]$	1 0	0 0
[ac] × log [ac]		[cc] $\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$ $\log\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$	[cd] $\frac{[ad]}{[aa]}[ac]$ $\log\frac{[ad]}{[aa]}[ac]$	[cl] $\frac{[al]}{[aa]}[ac]$ $\log\frac{[al]}{[aa]}[ac]$	[cs] $\frac{[as]}{[aa]}[ac]$ $\log\frac{[as]}{[aa]}[ac]$	0 $\frac{1}{[aa]}[ac]$ $\log\frac{1}{[aa]}[ac]$	0 0	1 0
[ad] × log [ad]			[ad] $\frac{[ad]}{[aa]}[ad]$ $\log\frac{[ad]}{[aa]}[ad]$	[dl] $\frac{[al]}{[aa]}[ad]$ $\log\frac{[al]}{[aa]}[ad]$	[ds] $\frac{[as]}{[aa]}[ad]$ $\log\frac{[as]}{[aa]}[ad]$	0 $\frac{1}{[aa]}[ad]$ $\log\frac{1}{[aa]}[ad]$	0 0	0 0
[al] × log [al]				[ll] $\frac{[al]}{[aa]}[al]$ $\log\frac{[al]}{[aa]}[al]$	[ls] $\frac{[as]}{[aa]}[al]$ $\log\frac{[as]}{[aa]}[al]$			
[as]	[bs]	[cs]	[ds]	[ls]	Kontrola	Z tabelki *b*.		

Wyznaczywszy liczby pismem tłustem podane w pierwszym szeregu, jakoteż ich logarytmy, wpisujemy do pierwszej kolumny pionowej liczby tam stojące i ich logarytmy. Równocześnie wypisujemy *log [ab]* na pasku papieru na dolnym jego brzegu i przykładamy go tak, aby przypadł ponad $\log\frac{[ab]}{[aa]}$, więc aby zakrył liczby tłustem pismem podane. Oba logarytmy dodajemy, a ich sumę $\log\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$ wpisujemy w wskazanem miejscu drugiego szeregu. Następnie przesuwamy pasek ponad $\log\frac{[ac]}{[aa]}$, dodajemy i postępujemy jak poprzednio, aż otrzymamy wszystkie logarytmy drugiego szeregu. Zupełnie tak samo postępujemy z *log [ac]* itd., wskutek czego otrzymamy wszystkie logarytmy wzorca I., do których szukamy odpowiednich liczb i wpisujemy je ponad dotyczącymi logarytmami tegoż wzorca. Odjąwszy petitem podane liczby 2., 3., itd.

szeregu od liczb ponad niemi stojących, otrzymamy spółczynniki [bb.1], [bc.1], . . . pierwszych równań eliminacyjnych dla wzorca II.

Zanim wpiszemy owe spółczynniki do wzorca II., należy sprawdzić rachunek zapomocą następującego układu równań sprawdzających:

$$1 + \frac{[ab]}{[aa]} + \frac{[ac]}{[aa]} + \frac{[ad]}{[aa]} + \frac{[al]}{[aa]} = \frac{[as]}{[aa]} \qquad \text{7. Równanie sprawdzające.}$$

$$\left.\begin{array}{l} [bb\,.\,1] + [bc\,.\,1] + [bd\,.\,1] + [bl\,.\,1] = [bs\,.\,1] \\ [bc\,.\,1] + [cc\,.\,1] + [cd\,.\,1] + [cl\,.\,1] = [cs\,.\,1] \\ [bd\,.\,1] + [cd\,.\,1] + [dd\,.\,1] + [dl\,.\,1] = [ds\,.\,1] \\ [bl\,.\,1] + [cl\,.\,1] + [dl\,.\,1] + [ll\,.\,1] = [ls\,.\,1] \end{array}\right\} \text{8. Równania sprawdzające.}$$

Wzorzec II.

z $2k$ kolumnami i $(k + 1)$ szeregami.

W kolumnie „Suma“ znajdują się prawe strony równań sprawdzających (8).

y	z	t		Suma	P_x	P_y	P_z
[bb.1] **1**	[bc.1] **[bc.1]:[bb.1]** $\log\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	[bd.1] **[bd.1]:[bb.1]** $\log\frac{[bd.1]}{[bb.1]}$	[bl.1] **[bl.1]:[bb.1]** $\log\frac{[bl.1]}{[bb.1]}$	[bs.1] **[bs.1]:[bb.1]** $\log\frac{[bs.1]}{[bb.1]}$	[b0.1] **[b0.1]:[bb.1]** $\log\frac{[b0.1]}{[bb.1]}$	1 **1:[bb.1]** $\log\frac{1}{[bb.1]}$	0 **0**
[bc.1] × log[bc.1]	[cc.1] $\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1]$ $\log\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1]$	[cd.1] $\frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bc.1]$ $\log\frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bc.1]$	[cl.1] $\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bc.1]$ $\log\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bc.1]$	[cs.1] $\frac{[bs.1]}{[bb.1]}[bc.1]$ $\log\frac{[bs.1]}{[bb.1]}[bc.1]$	[c0.1] $\frac{[b0.1]}{[bb.1]}[bc.1]$ $\log\frac{[b0.1]}{[bb.1]}[bc.1]$	0 $\frac{1}{[bb.1]}[bc.1]$ $\log\frac{1}{[bb.1]}[bc.1]$	1 0
[bd.1] × log[bd.1]		[dd.1] $\frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bd.1]$ $\log\frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bd.1]$	[dl.1] $\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bd.1]$ $\log\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bd.1]$	[ds.1] $\frac{[bs.1]}{[bb.1]}[bd.1]$ $\log\frac{[bs.1]}{[bb.1]}[bd.1]$	[d0.1] $\frac{[b0.1]}{[bb.1]}[bd.1]$ $\log\frac{[b0.1]}{[bb.1]}[bd.1]$	0 $\frac{1}{[bb.1]}[bd.1]$ $\log\frac{1}{[bb.1]}[bd.1]$	0 0
[bl.1] × log[bl.1]			[ll.1] $\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bl.1]$ $\log\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bl.1]$	[ls.1] $\frac{[bs.1]}{[bb.1]}[bl.1]$ $\log\frac{[bs.1]}{[bb.1]}[bl.1]$	Z wz. I. $[b0.1] = -\frac{[ab]}{[aa]}$, $[c0.1] = -\frac{[ac]}{[aa]}$, $[d0.1] = -\frac{[ad]}{[aa]}$.		
[bs.1]	[cs.1]	[ds.1]	[ls.1]	Kontrola			

$$1+\frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}+\frac{[bd\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}+\frac{[bl\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}=\frac{[bs\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}$$ 9. Równanie sprawdzające.

$$\left.\begin{aligned}[][cc\,.\,2]+[cd\,.\,2]+[cl\,.\,2]&=[cs\,.\,2]\\ [cd\,.\,2]+[dd\,.\,2]+[dl\,.\,2]&=[ds\,.\,2]\\ [cl\,.\,2]+[dl\,.\,2]+[ll\,.\,2]&=[ls\,.\,2]\end{aligned}\right\}$$ 10. Równania sprawdzające.

Rachunek taki sam, jak we wzorcu I.

Wzorzec III.

z (2 k — 1) kolumnami pionowemi a k szeregami.

W kolumnie: „Suma“ znajdują się prawe strony równań sprawdzających.

z	t		Suma	P_x	P_y	P_z
[cc.2] **1**	[cd.2] **[cd.2]:[cc.2]** $\log\frac{[cd.2]}{[cc.2]}$	[cl.2] **[cl.2]:[cc.2]** $\log\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$	[cs.2] **[cs.2]:[cc.2]** $\log\frac{[cs.2]}{[cc.2]}$	[c0.2] **[c0.2]:[cc.2]** $\log\frac{[c0.2]}{[cc.2]}$	[c1.2] **[c1.2]:[cc.2]** $\log\frac{[c1.2]}{[cc.2]}$	1 **1:[cc.2]** $\log\frac{1}{[cc.2]}$
$[cd.2]\times\log[cd.2]$	[dd.2] $\frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cd.2]$ $\log\frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cd.2]$	[dl.2] $\frac{[cl.2]}{[cc.2]}[cd.2]$ $\log\frac{[cl.2]}{[cc.2]}[cd.2]$	[ds.2] $\frac{[cs.2]}{[cc.2]}[cd.2]$ $\log\frac{[cs.2]}{[cc.2]}[cd.2]$	[d0.2] $\frac{[c0.2]}{[cc.2]}[cd.2]$ $\log\frac{[c0.2]}{[cc.2]}[cd.2]$	[d1.2] $\frac{[c1.2]}{[cc.2]}[cd.2]$ $\log\frac{[c1.2]}{[cc.2]}[cd.2]$	0 $\frac{1}{[cc.2]}[cd.2]$ $\log\frac{1}{[cc.2]}[cd.2]$
$[cl.2]\times\log[cl.2]$		[ll.2] $\frac{[cl.2]}{[cc.2]}[cl.2]$ $\log\frac{[cl.2]}{[cc.2]}[cl.2]$	[ls.2] $\frac{[cs.2]}{[cc.2]}[cl.2]$ $\log\frac{[cs.2]}{[cc.2]}[cl.2]$			
[cs.2]	[ds.2]	[ls.2]	Kontrola			

Z wz. II.

$$[c0.2]=[c0.1]-\frac{[b0.1]}{[bb.1]}[bc.1]$$

$$[d0.2]=[d0.1]-\frac{[b0.1]}{[bb.1]}[bd.1]$$

$$[c1.2]=-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$$

$$[d1.2]=-\frac{[bd.1]}{[bb.1]}$$

$$1 + \frac{[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]} + \frac{[cl\,.\,2]}{[cc\,.\,2]} = \frac{[cs\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}$$ 11. Równanie sprawdzające.

$$\left.\begin{aligned}[][dd\,.\,3] + [dl\,.\,3] &= [ds\,.\,3]\\ [dl\,.\,3] + [ll\,.\,3] &= [ls\,.\,3]\end{aligned}\right\}$$ 12. Równanie sprawdzające.

Wzorzec IV.

z $(2k - 2)$ kolumnami pionowemi i $(k - 1)$ szeregami.

z		Suma	P_x	P_y	P_z
[dd.3] **1**	[dl.3] **[dl.3]:[dd.3]** $\log\frac{[dl.3]}{[dd.3]}$	[ds.3] **[ds.3]:[dd.3]** $\log\frac{[ds.3]}{[dd.3]}$	[d0.3] **[d0.3]:[dd.3]**	[d1.3] **[d1.3]:[dd.3]**	[d2.3] **[d2.3]:[dd.3]**
[dl.3] × log[dl.3]	[ll.3] $\frac{[dl.3]}{[dd.3]}[dl.3]$ $\log\frac{[dl.3]}{[dd.3]}[dl.3]$	[ls.3] $\frac{[ds.3]}{[dd.3]}[dl.3]$ $\log\frac{[ds.3]}{[dd.3]}[dl.3]$	$[d0.3] = [d0.2] - \frac{[c0.2]}{[cc.2]}[cd.2]$ $[dl.3] = [dl.2] - \frac{[cl.2]}{[cc.2]}[cd.2]$		
[ds.3]	[ls.3]	Kontrola	Z wz. III. $[d2.3] = \frac{[cd.2]}{[cc.2]}$		

$$1 + \frac{[dl\,.\,3]}{[dd\,.\,3]} = \frac{[ds\,.\,3]}{[dd\,.\,3]}$$ 13. Równanie sprawdzające.

$$[ll\,.\,4] = [ls\,.\,4]$$ 14. Równanie sprawdzające.

Układ zredukowanych równań normalnych.

$$t = \frac{[dl\,.\,3]}{[dd\,.\,3]}$$

$$z + \frac{[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}\,t = \frac{[cl\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}$$

$$y + \frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\,z + \frac{[bd\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\,t = \frac{[bl\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}$$

$$x + \frac{[ab]}{[aa]}\,y + \frac{[ac]}{[aa]}\,z + \frac{[ad]}{[aa]}\,t = \frac{[al]}{[aa]}$$

Układ zredukowanych równań ważności.

$$Q_1 + \frac{[ab]}{[aa]} Q_2 + \frac{[ac]}{[aa]} Q_3 + \frac{[ad]}{[aa]} Q_4 = \frac{1}{[aa]}$$

$$Q_2 + \frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]} Q_3 + \frac{[bd\,.\,1]}{[bb\,.\,1]} Q_4 = \frac{[b0\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}$$

$$Q_3 + \frac{[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]} Q_4 = \frac{[c0\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}$$

$$Q_4 = \frac{[d0\,.\,3]}{[dd\,.\,3]}.$$

Ważnością ilości x jest $P_x = \dfrac{1}{Q_1}$

$$Q_2 + \frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]} Q_3 + \frac{[bd\,.\,1]}{[bb\,.\,1]} Q_4 = \frac{1}{[bb\,.\,1]}$$

$$Q_3 + \frac{[cd\,.\,2]}{[cl\,.\,2]} Q_4 = \frac{[cl\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}$$

$$Q_4 = \frac{[dl\,.\,3]}{[dd\,.\,3]}.$$

Ważnością ilości y jest $P_y = \dfrac{1}{Q_2}$.

$$Q_3 + \frac{[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]} Q_4 = \frac{1}{[cc\,.\,2]}$$

$$Q_4 = \frac{[d2\,.\,3]}{[dd\,.\,3]}.$$

Ważnością ilości z jest $P_z = \dfrac{1}{Q_3}$.

$$Q_4 = \frac{1}{[dd\,.\,3]}.$$

Ważnością ilości t jest $P_t = \dfrac{1}{Q_4}$.

Błąd średni oblicza się ze wzoru:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[ll\,.\,k]}{n-k}} \text{ dla } k \text{ niewiadomych.}$$

Błąd średni każdej poszczególnej niewiadomej:

$$M_x = \frac{\mu}{\sqrt{P_x}}, \qquad M_z = \frac{\mu}{\sqrt{P_z}}$$

$$M_y = \frac{\mu}{\sqrt{P_y}}, \qquad M_t = \frac{\mu}{\sqrt{P_t}}$$

Błąd oczekiwany oblicza się według wzoru:

$$\rho = 0{\cdot}6744897\ \mu .$$

DODATEK III.

Zestawienie wzorów.

Wzór I: $a = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)$.

Wzór II: $\varphi(z) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 z^2}$.

Wzór III: $w = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 z^2} d\varepsilon$.

Wzór IV: $W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\gamma} e^{-z^2} . dz = \Theta(h\gamma)$.

Wzór V: $\rho = \frac{0{\cdot}476936}{h}$.

Wzór VI: $\mu = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}$.

Wzór VII: $\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}}$.

Wzór VIII: $\begin{cases} h = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} \\ \rho = 0{\cdot}6744897\,\mu \\ \mu = 1{\cdot}4826000\,\rho \end{cases}$.

Wzór IX: $M = \frac{\mu}{\sqrt{n}}$.

Wzór X: $H = \frac{\sqrt{n}}{\mu\sqrt{2}}$.

Wzór X′: $H = h\sqrt{n}$.

Wzór XI: $p : p' = h^2 : h'^2$.

Wzór XII: $P = np$.

Wzór XIII: $\mu = M\sqrt{\frac{P}{p}}$.

Wzór XIV: $\begin{cases} R = 0{\cdot}6744897\ M. \\ M = 1{\cdot}4826000\ R. \end{cases}$

Wzór XV: $R = \frac{\rho}{\sqrt{n}}$.

Wzór XVI: $\mu = \pm\sqrt{\frac{[\varkappa\varkappa]}{n-1}}$.

Wzór XVII: $a = \frac{a'n' + a''n'' + \ldots + a^{(\nu)}n^{(\nu)}}{n' + n'' + \ldots + n^{(\nu)}}$.

Wzór XVII': $a = \frac{a'p' + a''p'' + \ldots + a^{(\nu)}p^{(\nu)}}{p' + p'' + \ldots + p^{(\nu)}}$.

Wzór XVIII: $M = \frac{\mu\sqrt{p_0}}{\sqrt{[p]}}$.

Wzór XIX: $\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\varkappa\varkappa]}{p_0(\nu-1)}}$.

Wzór XX: $\begin{cases} x = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_kx_k. \\ a = c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_ka_k. \end{cases}$

Wzór XXI: $M_a = \pm\sqrt{[c^2M^2]}$.

Wzór XXII: $R_a = \pm\sqrt{[c^2R^2]}$.

Wzór XXIII: $\frac{1}{P_a} = \left[\frac{c^2}{P}\right]$.

Wzór XXIV: $\begin{cases} x = f(x_1, x_2, \ldots, x_k). \\ a = f(a_1, a_2, \ldots, a_k). \end{cases}$

Wzór XXV: $M_f = \pm\sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 M^2\right]}$.

Wzór XXVI: $\frac{1}{P_f} = \left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{P}\right]$.

Wzór XXVII: $\mu = \pm\sqrt{\frac{[\alpha\varkappa]}{n-k}}$.

Wzór XXVIII: $\mu = \pm\sqrt{\frac{[ll\,.\,k]}{n-k]}}$.

Wzór XXIX: $P_t = [dd\,.\,3]$.

Wzór XXX: $\mu = \pm \sqrt{\frac{[p\alpha\alpha]}{n-k}}$.

Wzór XXXI: $\mu = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\nu}}$.

Wzór XXXII: $\mu = \pm \sqrt{\frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{\nu}}$.

Wzór XXXIII: $\mu = \pm \sqrt{\frac{[kw]}{\nu}}$.

Wzór XXXIV: $$\begin{cases} M_F = \pm \mu \sqrt{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]}. \\ \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right] = [ff] - [af] K_1 - [bf] K_2 - \ldots - [nf] K_\nu. \end{cases}$$

DODATEK IV.

Piśmiennictwo.

Abbe, E. Uiber die Gesetzmässigkeit in der Vertheilung der Fehler bei Beobachtungsreihen. Jena. 1863.

Airy, George Biddel. On the algebraical and numerical theory of errors of observations and the combination of observations. London. 1875.

Tenże. Theory of errors of observations. London. 1879.

Allister, M. On the law of the geometric mean in the theory of errors. W „Quaterly Jour. XVII. and Proc. of London, XXII".

* Andonovič, M. J. Zasady rachunku prawdopodobieństwa i teorya najmniejszych kwadratów. Belgrad. 1886. (po serbsku).

* Andrae, C. G. Uiber die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers durch die gegebenen Differenzen von *m* gleichgenauen Beobachtungen einer Unbekannten. W „Astron. Nachrichten. 1872. Bd. 79. Nr. 1889."

Bache, A. D. Comparisons of the results obtained in geodesy by the application of the theory of least squares. New York. 1853.

Tenże. Comparison of the reduction of horizontal angles by the methods of „dependent directions" and of „dependent angular quantities" by the method of least squares. W „App. XXXIII. in the yearly rep. of the U. S. C. S. 1854. p. 63—70".

3 * Baeyer, J. J. Uiber Fehlerbestimmung und Ausgleichung eines geometrischen Nivellements. W „Astron. Nachrichten. 1875. Bd. 86. Nr. 2052“.

4 * Bauernfeind, C. M. von. Näherungsverfahren zur Ausgleichung der zufälligen Beobachtungsfehler in geometrischen Höhennetzen. München. 1879. W „Sitz.-Ber. d. Kgl. Bayer. Akad. Bd. 6. str. 243“.

5 * Tenże. Uiber ein Verfahren die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineare Gleichungen überhaupt durch succesive Annäherung aufzulösen. München. 1874.

Belatti, J. Intorno ad un modo di semplificare in alcuni casi l'applicazione del metodo dei minimi quadrati al calcolo delle costanti empiriche. W „Atti di Ven. (5), I.“.

Bertrand, J. Démonstration simple du théorème du calcul des probabilités, annoncé par *M. Bienaymé*. W „Comptes-Rendus. T. 81“.

6 * Tenże. Méthode des moindres carrés. Paris. 1855. (Jest to tłómaczenie Gauss'a „Theoria combinationis.“).

Tenże. Calcul de probabilités. 1889.

7 * Bessel, F. W. Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler. W „Astron. Nachr. 1838. Bd. 15. Nr. 358, 359“.

8 * Tenże. Ein Hilfsmittel zur Erleichterung der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate. W „Astron. Nachr. 1840. Bd. 17. Nr. 399“.

Bienaymé, M. Application d'un théorème nouveau du calcul des probabilités. W „Comptes-Rendus. T. 81“.

Tenże. Sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés. Paris. 1853.

Tenże. Sur la probabilité des erreurs d'après la méthode des moindres carrés. Paris. 1858.

9 * Bobek, Dr. K. J. Lehrbuch der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Stuttgart. 1891.

10 * Börsch, A. und Simon, P. Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate, von *C. F. Gauss*. Mit Vorwort von *F. R. Helmert*. Berlin. 1887.

11 * Bruns, H. Uiber eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung. Leipzig. 1886.

Bryant, S. Sur la déduction des principes inductifs de la théorie mathématique des probabilités. W „Phil. Mag. V. Ser. 1884“.

12 * Carpmael, Ch. On the law of facility of error in the sum of *n* independent quantities. Montreal. 1883.

* Catalan, E. Remarques sur la théorie des moindres carrés. W „Mém. de l'Acad. roy. des sciences etc. de Belgique. Bruxelles. 1880—1882. Vol. 43". 13

* Chauvenet, W. Treatise on the method of least squares. Philadelphia. 1880. 14

* Tenże. Method of least squares. W „A manual of spherical and practical astronomy. Philadelphia. 1891. Vol. II. 469—566". 15

Crofton, M. W. On the proof of the law of errors of observation. W „Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London. Vol. 159".

* Czuber, E. Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerthe. Leipzig. 1884. 16

* Tenże. Zur Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeit. W „Sitz.-Ber. d. Akad. d. Wiss. in Wien. Bd. 90". 17

Tenże. Zum Satze vom arithmetischen Mittel. W „Astron. Nachr. 1886. Bd. 113. Nr. 2701".

* Tenże. Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig. 1891. 18

Datti, G. B. Della combinazione degli errori nel metodo dei minimi quadrati. Torino. 1879.

* Dienger, J. Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadrate. Braunschweig. 1857. 19

* Tenże. Uiber die Ausgleichung der Beobachtungsfehler. W „Ann. f. Math. u. Phys. Bd. 18". 20

Tenże. Uiber die Bestimmung des Gewichts etc. „Ibidem. Bd. 19".

* Tenże. Die Laplace'sche Methode der Ausgleichung bei zahlreichen Beobachtungen. Wien. 1875. 21

Tenże. Uiber die Ermittelung des wahrscheinlichen Fehlers bei Längenmessungen. W „Ann. f. Math. und Phys. Bd. 31".

* Doolittle, C. L. Introduction to the method of least squares. W „A treatise on practical astronomy. New York. 1892. p. 1—70". 22

Edgeworth, T. Y. A priori probabilities. W „Phil. Mag. Ser. 5. XVIII.".

Tenże. The law of error. „Ibidem. LXVI. 1883." 23

* Tenże. The method of least squares. „Ibidem. LXVI. 1883". 24

Tenże. The physical basis of probability. „Ibidem".

Encke, I. F. Uiber die Begründung der Methode der kleinsten Quadrate. W „Abhandl. der Berl. Akad. v. J. 1831".

* Tenże. Methode der kleinsten Quadrate. W „Berl. Astron. Jahrb. 1834—1836". 25

Tenże. Beitrag zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate. W „Berl. Astron. Jahrb. 1850".

Tenże. Uiber die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Beobachtungen. „Ibidem. 1853".

Wydanie zbiorowe: * I. E. Encke's astronomische Abhandlungen, zusammengestellt aus den Jahrgängen 1830—1862 des Berl. astr. Jahrb.". Ob. rozd. XII—XIV. w t. I. (1866).

Faà de Bruno. Traité élémentaire du calcul des erreurs avec des tables stéréotypées. Florence. 1869.

Fechner, G. Th. Uiber die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers eines Beobachtungsmittels durch die Summe der einfachen Abweichungen. W „Poggend. Ann. 1873—1875".

Forest, E. L. de. On a theorem in probability. W „Analyst. VII".

Tenże. Law of facility of errors in two dimensions. „Ibidem. VIII".

Tenże. On the elementary theory of errors. „Ibidem."

Tenże. On an unsymmetrical probability curve. „Ibidem. IX.".

Tenże. Law of error in position of a point in space. „Ibidem".

* Forti, A. O. La teorica degli errori ed il metodo dei minimi quadrati c. applicaz. sulle science d'osservazioni. Milano. 1880.

* Freeden, W. von. Theorie und Praxis der Methode der Ausgleichsrechnung. Braunschweig. 1863.

Fries. Versuch einer Kritik der Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Braunschweig. 1842.

Gaede. Beiträge zur Kenntnis von Gauss' praktisch-geodätischen Arbeiten. Karlsruhe. 1885. (Także w „Zft. f. Vermess. XIV.")

Galbraith, W. On the method of least squares, as employed in determining the figure of the earth from experiments with the pendulum, as well as by the measurement of arcs. W „Phil. Mag. II. 1827. p. 48—54".

Galloway. On the application of the method of least squares to the determination of the most probable errors in a portion of the ordnance Survey of England. W „Mem. Astr. Soc. London. Vol. 15".

* Gauss, C. F. Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf eine Aufgabe der praktischen Geometrie. W „Astron. Nachr. 1823. Bd. 1. Nr. 6".

* Tenże. Uiber die vortheilhafteste Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate. Ibidem. 1827. Bd. 5. Nr. 110.

Tenże. Por. *Bertrand, J.*

Tenże. Por. *Börsch A.*

Uwaga. Inne dzieła *Gauss'a* wymieniono we wstępie.

Geer, P. van. Over het gebruik van determinanten bij de methode der kleinste kwadraten. W „Nieuwe archief voor wiskunde. Deel. IX.".

Tenże. Sur l'emploi des déterminants dans la méthode des moindres carrés. „Ibidem. Deel. XVIII. 1883".

* Geisenheimer, L. Uiber Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin. 1880.

* Gerling, Ch. L. Die Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie oder die Methode der kleinsten Quadrate mit ihren Anwendungen auf geodätische Aufgaben. Hamburg u. Gotha. 1843.

Tenże. Nachträge zur Ausgleichungsrechnung. W „Annal. f. Math. und Physik. Bd. 6".

Glaisher, J. W. L. Remarks on certain portions of Laplace's proof of the method of least squares. W „The London, Edinburg and Dublin Phil. Magaz. 1872".

Tenże. On the law of facility of errors of observations and on the method of least squares. W „Monthly Notices XXXII. Mem. of the Roy. astr. Soc. London. XXXIX. II.".

Tenże. On the rejection of discordant observations. W „Monthly Notices. XXXIII.".

Tenże. On the solution of the equations in the method of least squares. „Ibidem. XXXIV."

Tenże. On the method of least squares. „Ibidem. XL."

Tenże. Note of an point in the method of least squares. W „Messenger. (2). IX".

Gooss. Zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate. Kreuznach. 1865.

Gould, B. A. Benjamin Peirce's criterion for the rejection of doubtful observations. W „App. XLI. in the yearly reports of the U. S. C. S. 1854. p. 131—138".

Gram, J. P. Uiber die Entwickelung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate. W „Zft. f. reine und angew. Math. Bd. 94. 1883".

Tenże. Om Raekkendviklingen bestemte ved Hjaelp af de mindste Kvadraters Methode. Kjobenhavn. 1879.

Gravelaar, N. L. W. A. Het gebruik van determinanten bij de methode der kleinste kwadraten. W „Nieuwe archief voor wiskunde. Vol X. 1883".

* Hagen, G. H. L. Grundzüge der Wahrscheinlichkeits- 29
rechnung. Berlin. 1837. Wyd. II. 1867.

* Tenże. Die wahrscheinlichen Fehler der Constanten. 30
W „Sitz.-Ber. d. Akad. d. Wiss. in Berlin. 1883. Bd. 44".

* Hansen, P. A. Neue Methode bei Anwendung der Me- 39
thode der kleinsten Quadrate, die Gewichte der unbekannten Grössen zu berechnen. W „Astron. Nachr. 1831. Bd. 8. Nr. 192".

* Tenże. Uiber die Anwendung der Wahrscheinlichkeits- 32
rechnung auf geodätische Vermessungen im Allgemeinen und über die Malpertuis'sche Gradmessung. W „Astron. Nachr. 1831. Bd. 9. Nr. 202, 203, 205, 206".

* Tenże. Von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie (Abh. d. königl. sächs. Gesell. d. Wiss. B. VIII.). Leipzig. 1867.

Halphen. Sur un problème de probabilités. W „Bull. de la Soc. math. de France. Vol. I.“.

* Helmert, F. R. Beiträge zur Theorie der Ausgleichung trigonometrischer Messungen. W „Zft. f. Math. u. Phys. Bd. 14“.

* Tenże. Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen auf die Geodäsie und die Theorie der Messinstrumente. Leipzig. 1872.

* Tenże. Uiber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers aus einer endlichen Anzahl wahrer Beobachtungsfehler. W „Zft. f. Math. und Phys. Bd. 20“.

Tenże. Uiber die Formeln für den Durchschnittsfehler W „Astron. Nachr. 1875. Bd. 85. Nr. 2039“.

Tenże. Uber die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler. W „Zft. f. Math. und Phys. Bd. 21“.

Tenże. Die Genauigkeit der Formel von Peters zur Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers directer Beobachtungen gleicher Genauigkeit. W „Astron. Nachr. 1876. Bd. 88. Nr. 2096, 2097“.

Tenże. Uiber den Maximalfehler einer Beobachtung. W „Zft. f Vermess. Bd. 6“.

Tenże. Zur Bestimmung des Gewichts von Beobachtungen, deren mittleres Fehlerquadrat sich aus mehreren Theilen zusammensetzt. W „Astron. Nachr. 1877. Bd. 89. Nr. 2127, 2128“.

* Henke, Prof. Dr. Richard. Uiber die Methode der kleinsten Quadrate. Leipzig. 1894.

Hilgard, J. E. On the verification of the probability function. W „Rep. of the meeting of the British Association etc. London. 1872“.

* Jordan, W. Uiber die Bestimmung der Genauigkeit mehrfach wiederholter Beobachtungen einer Unbekannten. W „Astron. Nachr. 1869. Bd. 74. Nr. 1766“.

* Tenże. Uiber Bestimmung des mittleren Fehlers durch Wiederholung der Beobachtungen. „Ibidem. 1872. Bd. 79. Nr 1886“.

Tenże. Uiber das Einschalten eines trig. Punktes in ein gegebenes Dreiecknetz nach der Methode der kleinsten Quadrate. W „Zft. f. Math. und Phys. Bd. 16“.

Tenże. Uiber die Bestimmung des Gewichtes einer durch die Methode der kleinsten Quadrate bestimmten Unbekannten. „Ibidem. Bd. 17“.

Tenże. Uiber die Berechnung des mittleren Fehlers einer Basismessung. W „Astron. Nachr. 1873. Bd. 81. Nr. 1924“.

* Tenże. Verallgemeinerung eines Satzes der Methode der kleinsten Quadrate. W „Zft. f. Math. und Phys. Bd. 18“. 41

Tenże. Die Beziehung zwischen den wahrscheinlichsten Verbesserungen und den mittleren Fehlern von Beobachtungen. W „Zft. f. Vermess. Bd. 5“.

Tenże. Questions de probabilités. W „Bull. de la Soc. math. de France. Vol. I.“.

* Tenże. Handbuch der Vermessungskunde. I. Bd. Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 3 Aufl. Stuttgart. 1888. 42

* Koll, Otto. Die Theorie der Beobachtungsfehler und die Methode der kleinsten Quadrate auf die Geodäsie und die Wassermessungen. Berlin. 1893. 43

* Koppe, C. Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate in der praktischen Geometrie. Nordhausen. 1885. 44

Kries, J. Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Freiburg. 1886.

Kummell, C. H. New investigation of the law of errors of observation. W „Analyst. III.“.

Tenże. Revision of proof of the formula for the error of observation. „Ibidem. VI.“.

Tenże. Reduction of observation equations which contain more than one observed quantity. W „Analalyst. VI.“.

Tenże. Proof of same remarkable relations in the method of least squares. „Ibidem VII.“.

Tenże. On the composition of errors from single causes of error. W „Astron. Nachr. 1882. Bd. 103. Nr. 2460—2461“.

Lagrange, J. L. Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre de milieu entre les résultats des plusieurs observations. W „Miscell. Taurinensia. Vol. V. p. 167“.

* Lalande, J. de. Théorie analytique des probabilités. Paris. 1847. 45

Landré, C. L. Over de functie φ van de methode der kleinste kwadraten. W „Nieuwe archief voor wiskunde. VII.“.

Tenże. De middelbare fout bij waarnemingen ter bepaaling van meer dan een onbekende. „Ibidem. T. X. 1884“.

Laplace, P. S. de. Théorie analytique des probabilités. Paris. 1812. (II. wyd. 1814, III. wyd. 1820).

Tenże. Application du calcul des probabilités aux opérations géodésiques. W „Conn. de temps pour 1820“.

Tenże. Application du calcul des probabilités aux opérations géodésiques de la méridienne de France. „Ibidem. 1822“.

Tenże. Mémoire sur l'application du calcul des probabilités aux opérations et spécialement aux opérations du nivellement. W „Ann. de Chim. et Phys. Vol. XII.“.

* Tenże. Traité élémentaire de mécanique céleste. T. I—V. Paris. 1878—1882. (na niem. przetł. *Burckhardt*, 2 vol.). — Exposition du système du monde. T. VI. Paris. 1884. — Théorie des probabilités. T. VII. Paris. 1886. — Mémoires divers. T. VIII—XIII. Paris. 1887.

Laquière, E. Rectification d'une formule des probabilités. W „Bull. de la Soc. math. de France. Vol. VIII.“.

Tenże. Note sur un problème des probabilités. „Ibidem. T. VIII.“.

* Laurent, H. Traité du calcul des probabilités. Paris. 1873.

Tenże. Sur la méthode des moindres carrés. W „Liouville Journ. (3). I.“.

* Legendre, A. M. Sur la méthode des moindres carrés. W „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes. Paris. 1806. (p. 72—80). Powtórnie pracę tę ogłoszono w „Mémoires de la classe des Sciences methém. et phys. de l'institut de France“. Paris. 1810. II. partie. p. 149—160.

Lehmann-Filhés, R. Beitrag zur Methode der kleinsten Quadrate. W „Astron. Nachr. 1885. Bd. 110. Nr 2622“.

Lemoine, M. E. Quelques questions des probabilités résolues géométriquement. W „Bull. de la Soc. math. de France. Vol. XI. 1882—1883“.

Tenże. Sur une question des probabilités. „Ibidem. T. I.“

* Liagre, J. Calcul des probabilités et la théorie des erreurs avec des applications aux sciences d'observation en général et à la géodésie en particulier. Bruxelles. 1852. — Deuxième édition par *C. Peny*. 1879.

Lorenz, L. Om Udförelsen af Beregningerne efte de mindste Kvadraters Methode. W „Zeuthen's Tidsskr. (3). VI. Kjobenhavn. 1876“.

Lüroth, J. Bemerkungen über die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers. W „Astron. Nachr. 1869. Bd. 73. Nr. 1740“.

Tenże. Vergleichung von zwei Werthen des wahrscheinlichen Fehlers. „Ibidem. 1876. Bd. 87. Nr. 2078“.

Tenże. Ein Problem der Fehlertheorie. W „Zft. f. Vermess. Bd. 9“.

Mees, R. A. Uiber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers aus einer endlichen Anzahl von Beobachtungen. W „Zft. f. Math. und Phys. Bd. 20, 21“.

* Merriman, M. Elements of the method of least squares. New York. 1877.

Tenże. A list of writings relating to the method of least squares. W „Transact. of the Connecticut Acad. Vol. IV. 1877".

Meyer, A. Mémoire sur l'application du calcul des probabilités aux opérations du nivellement topographique. W „Mém. Acad. Belgique. XXI. 1847".

* Tenże. Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung; deutsch bearbeitet von Emanuel Czuber. Leipzig. 1879.

Tenże. Cours de calcul de probabilité fait à l'Université de Liège de 1849—1857, publié par F. Folie. Bruxelles. 1874.

Minding, F. De la méthode des moindres carrés. W „Bull. de l'Acad. Impér. de St.-Pétersbourg. Bd. XVI".

* Natani, L. Methode der kleinsten Quadrate. Berlin. 1875.

* Neovius, V. Lärobok i minsta quadrat-methoden. Äbo. 1870.

* Ninck Blok, C. J. J. Overzicht van de methode der kleinste kwadraten. Leiden. 1876.

Peirce, C. S. On the theory of error of observations. W „App. 21 of the yearly report of the U. S. C. S. 200—224".

Pinelli, G. V. Breve esposizione della teoria degli errori di osservazione (Metodo dei minimi quadrati). Genova. 1883.

* Pizzetti, P. Sulla compensazione delle osservazioni secondo il metodo dei minimi quadrati. Roma. 1887.

Poisson, S. D. Sur la probabilité des resultats moyens des observations. W „Connaissance des Temps pour l'an 1827. Additions. p. 273". — Ciąg dalszy „Ibidem. 1832. Addit. p. 3".

Tenże. Solution d'un problème de probabilité. W „Liouville, Journ. II. 1834".

Puissant, L. Application du calcul des probabilités à la mesure de la précision d'un grand nivellement trigonométrique. W „Mém. Acad. X. 1831".

Tenże. Deuxième mémoire sur l'application du calcul des probabilités aux mésures géodésiques. „Ibidem. XI. 1832".

Tenże. Sur l'application du calcul des probabilités à la mesure de la précision d'un grand nivellement indépendant des distances respectives des stations. W „Compt.-Rend. 1838".

Reuschle. Uiber die Deduction der Methode der kleinsten Quadrate aus Begriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. W „Crelle's Journ. Bd. 26. 1843".

Safford, T. H. On the method of least squares. W „Proc. Am. Ac. X. 1876".

* Sawitsch, A. N. Die Anwendung der Wahrscheinlichkeits-Theorie auf die Berechnung von Beobachtungen und geodätischen Messungen. Leipzig 1863. (tłóm. z rosyjskiego).

Schiaparelli, G. V. Sur le principe de la moyenne arithmétique. W „Astron. Nachr. Nr. 2068, 2097“.

Tenże. Sul principio della media arithmetica nel calcolo dei resultati delle osservazioni. W „Rend. d. Ist. Lomb. di sc. e lett. Milano. Ser. 2. I.“.

Schlömilch, O. Uiber die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers. W „Zft. f. Math. und Phys. Bd. 17“.

* Schnuse, C. H. Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren wichtigsten Anwendungen. Von S. D. Poisson. Aus dem Französischen übersetzt mit den nöthigen Zusätzen. Braunschweig. 1841.

Schols, Ch. M. La formule d'interpolation de Tchébycheff suivant la méthode des moindres carrés. Haarlem. 1877.

Tenże. Over het gebruik van determinanten bij de methode der kleinste kwadraten. W „Nieuwe Arch. voor wisk. I.“.

Schott, C. A. Probable error of observation. W „App. XXXIII. in the yearly rep. of the U. S. C. S. 1854. p. 86—95“.

Tenże. Probable error. Article from the Astr. Nachr. Nr. 1034. translated by —. „Ibidem. LIX. 1856. p. 306—308“.

Seeliger, H. Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen über die Vertheilung zufälliger Fehler. W „Astron. Nachr. 1880. Bd. 97. Nr. 2323“.

* Seidel, L. Uiber ein Verfahren die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineare Gleichungen überhaupt durch succesive Annäherung aufzulösen. W „Abhandl. d. k. bayer. Akad. II. Cl. Bd. 11“.

Tenże. Uiber die Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe solcher Unbekannten, zwischen welchen Bedingungsgleichungen bestehen. W „Astron. Nachr. 1874. Bd. 84. Nr. 2005, 2006“.

Simon, P. Ob. Börsch, A.

Steinthal, A. E. The method of least squares applied to conditioned observations. W „Mess. of Math. London“.

Stone, O. A quasi proof of the arithmetical mean. W „A. Hull. Query. 1880 and Analyst. VII.“.

Tenże. On the determination of the error and rate of a clock by the method of least squares. W „Urania, 1881“.

Stone, E. J. On the rejection of discordant observations. W „Monthly Not. XXXIV.“.

Tenże. On the most probable result which can be derived from a number of direct determinations of assumed equal values. „Ibidem. XXXIII. and XXXVI.“.

Tenże. Note on a discussion relating to the rejection of discordant observations. „Ibidem. XXXV.“.

Tenże. Sur le principe de la moyenne arithmétique. W „Astr. Nachr. Bd. 88“.

Thiele, T. N. Sur la compensation de quelques erreurs quasi-systemat, par la méthode des moindres carrés. Copenhague. 1880, 1881.

Tilly, J M. de. Note sur le principe de la moyenne arithmétique et sur son application à la théorie mathématique des erreurs. W „Nouv. corr. de math., publ. par E. Catalan et O. Mansion. I. 1875“.

Tenże. Théorie mathématique des erreurs. W „Ballistique. Bruxelles. 1875“.

Todhunter, J. On the method of least squares. W „Phil. Trans. of R. soc. of Cambrigde. XI. II.“.

Tschebyscheff, P. Formule d'interpolation par la méthode des moindres carrés. W „Mém. couronnés et mém. des savants étrangers, publ. par l'Acad. roy. de Belgique. T. 21“.

* Veltmann, W. Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach dem Principe symmetrisch berechneter Mittelgrössen. Marburg. 1886.

* Veltmann, W. und Koll. Formeln der niederen und 55
höheren Mathematik, sowie der Theorie der Beobachtungsfehler und der Ausgleichung derselben nach der Methode der kleinsten Quadraten. Bonn. 1886.

Vogler, Ch. A. Genauigkeit einiger Näherungsformeln zum Zerlegen mittlerer Beobachtungsfehler in mehrere Glieder. W „Zft. f. Vermess. Bd. 6“.

* Tenże. Grundzüge der Ausgleichungsrechnung, Braunschweig. 1882—1883.

Tenże. Die Methode der kleinsten Quadratsummen als Bildnerin bestgewählter Mittelgrössen. W „Zft. f. Vermess. Bd. 16“.

* Wittstein, Th. Dr. Die Methode der kleinsten Quadraten. Hannover. 1854.

Tenże. Ein Zusatz zur Methode der kleinsten Quadrate. W „Astr. Nachr. 1882. Bd. 102. Nr. 2446“. 56

* Wrede, J. Nagra anmärkning ar rörande minsta quadrat methoden. Stockholm. 1873.

Wright, T. W. On the computation of probable error. W „Analyst. IX.“.

Zachariae, G. Laerebog i Tneorien om de mindste Kvadraters Methode. Nyborg. 1871. (Wyd. 2. 1887).

Tenże. Note betreffend die Bestimmung des mittleren Fehlers. W „Astr. Nachr. 1873. Bd. 80. Nr. 1901“.

* Tenże. De mindste Kvadraters Methode. Kjobenhavn. 1887. 57

* Zbrożek, D. Zastosowanie wyznaczników w teoryi najmniejszych kwadratów. W „Pamiętniku Akad. Um. w Krakowie. Wydz. mat. przyr. T. IX. 1884. 199—218“.

* Zbrożek-Witkowski. Teorya najmniejszych kwadratów. Lwów. 1879. (Autogr.)

* Zech, J. Zur Methode der kleinsten Quadrate. Tübingen. 1857.

Uwaga.

Winienem jeszcze nadmienić z uczuciem szczerej wdzięczności, że oprócz dzieł powyżej gwiazdką oznaczonych, jak to wspomniałem we wstępie (str. 3.), do opracowania niniejszej rozprawki służyły mi również za nić przewodnią notaty własne z wykładów nieodżałowanej pamięci profesora lwowskiej Szkoły Politechnicznej Dominika Zbrożka, który zachęcił mnie do pracy na polu geodezyi wyższej. Wykłady powyższe, na które uczęszczałem w roku $187^3/_4$ jako słuchacz III. roku szkoły inżynieryi, oparł wówczas ś. p. prof. D. Zbrożek głównie na pracach Dienger'a, Gerling'a, Hagen'a, Helmert'a i Sawitsch'a. Liczne przykłady, które rozwiązywaliśmy jużto podczas wykładów, już też na tak zw. repetytoryach, znalazły w przeważnej części umieszczenie w niniejszej rozprawce, atoli w odmiennem opracowaniu.

KONIEC.

TREŚĆ.

Dodatek II.

Dodatek III.

Dodatek IV.