

OBLICZANIE  
WYTRZYMAŁOŚCI ŁUKÓW SZTYWNYCH

PRZEZ

MAURYCEGO HULEWICZA

*Inżyniera, b. ucznia szkoły Dróg i Mostów w Paryżu.*

---

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, dnia 11 czerwca 1878 roku.)

---

TREŚĆ

WSTĘP. — Określenie. — Kształt i umieszczenie łuków.

CZĘŚĆ PIERWSZA. METODA OGÓLNA.

- I° WZORY ZASADNICZE. — Odkształcenie łuku. — Wyznaczenie sił zewnętrznych.
- II° WYTRZYMAŁOŚĆ PASÓW. — Wzór ogólny parcia. — Wyrażenie parcia wywartego pod wpływem ciężaru pojedynczego, — pod wpływem ciężaru jednostajnie rozłożonego na przestrzeni  $x'_1$   $x_1$ , — pod wpływem rozszerzalności limijnej. — Wpływ ciężaru przypadkowego : a) wytrzymałość podłużnika, b) wytrzymałość łuku. — Wyrażenie ogólne wytrzymałości podłużnika pod wpływem ciężaru przypadkowego. — Wyrażenie ogólne wytrzymałości łuku. — Wyrażenie natężenia całkowitego sił międzycząsteczkowych wywartego pod wpływem ciężarów stałego i przypadkowego. a) Ciśnienia maxima, b) ciągnięcia maxima czyli ciśnienia minima. — Natężenia sił zewnętrznych pod wpływem zmiany temperatury.
- III° WYTRZYMAŁOŚĆ ŚCIANY PIONOWEJ. — Wzory ogólne. — Wpływ ciężaru stałego. — Wpływ ciężaru przypadkowego. — Wyrażenia ogólne natężenia sił wewnętrznych pod wpływem ciężaru przypadkowego — Wyrażenie natężenia sił wewnętrznych pod wpływem ciężarów stałego i przypadkowego. — Pod wpływem zmiany temperatury.
- IV° ODKSZTAŁCENIE ŁUKU. — Odkształcenie powstałe w skutek działania ciężarów jakichkolwiek. — pod wpływem zmiany temperatury → ciężarów rozłożonych symetrycznie względem połowy cięciwy — Wpływ ciężaru stałego.

ART. III.

1

## CZĘŚĆ DRUGA. ZASTOSOWANIA :

- I° WYMIARY ŁUKU I RACHUNKI WSTĘPNE. — Wyznaczenie przecięć łuku. — Wyznaczenie wysokości przecięć. — Wyznaczenie rzędnych linii środkowej. — Wyznaczenie momentów bezwładności.
- II° WYTRZYMAŁOŚĆ PASÓW. — Wyznaczenie parcia. — Wpływ ciężaru stałego. — Wpływ ciężaru przypadkowego. — Wpływ ciężarów  $p$  i  $p'$  działających jednocześnie. — Wpływ zmiany temperatury.
- III° WYTRZYMAŁOŚĆ ŚCIANY PIONOWEJ. — Wpływ ciężaru stałego. — Wpływ ciężaru przypadkowego. — Wpływ ciężaru całkowitego. — Rozkład ciśnień i ciągnięć w rozmaitych częściach ściany pionowej pod wpływem siły podłużnej. — Wpływ zmiany temperatury.
- IV° ODKSZTAŁCENIE ŁUKU. — Wyznaczenie największych wartości strzałki  $a$ ) pod wpływem ciężarów  $b$ ) pod wpływem zmiany temperatury.
- V° Porównanie ciężaru łuku z ciężarem belki prostej tegoż samego otworu i tejże samej wysokości.

## WSTĘP

**Określenie.** — Oznaczamy nazwą *łuków sztywnych*, belki łukowe używane do budowy mostów, gdzie wszystkie części składowe to jest podłużnik, łuk właściwy i ściana pionowa je łącząca, stanowią razem jedną całość sztywną, opierającą się wpływowi sił zewnętrznych. Podłużnik w tym razie stanowi pas wyższy belki, łuk zaś pas jej niższy. Ściana pionowa może być pełna lub kratowana, wytrzymałość jej winna być dostateczną, aby zapewnić sztywność systemu pod wpływem sił zewnętrznych.

Inne belki łukowe których wytrzymałość polega całkowicie na wytrzymałości samego łuku, nazwiemy *łukami zwyczajnymi*; ściany pionowe tych łuków stanowią ciężar dodatkowy służący tylko do podtrzymania pomostu kolei żelaznej, lub drogi zwyczajnej. Łuki zwyczajne są zwykle o przecięciu stałym; najlepiej jest budować je z *żelaza lanego*, które jak wiadomo przedstawia znaczną wytrzymałość w ciśnieniu i nie może być poddane z wielkiem bezpieczeństwem ciągnięciu. Kwestya wytrzymałości łuków o przecięciu stałym była już traktowaną w Pamiętniku, nie będziemy więc jej tu roztrząsać, i przejdziemy natychmiast do łuków sztywnych.

Łuki sztywne najlepiej dadzą się budować z żelaza kutego (pod tém nazwiskiem rozumiemy blachy i żelaza walcowane) dla budowli stałych i z drzewa dla budowli tymczasowych; przedstawiają one znaczną oszczędność materiału w porównaniu z łukami zwyczajnymi, a tembardziej w porównaniu z belkami prostymi tegoż samego otworu.

Kwestya obliczania wytrzymałości łuków traktowaną była po raz pierwszy w sposób praktyczny przez Navier'a (1), który może być uważanym jako twórca teoryi zgięcia, nie wspominamy więc o pracach jego poprzedników jak Euler i Lagrange.

Następnie Bresse (2) wyprowadził wzory ogólne dokładniejsze i zastosował je do łuków o przecięciu

(1) *Resumé des leçons données à l'École des Ponts et Chaussées, sur l'application de la mécanique.* Paris, 1833. dition.

(2) *Récherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes, in 4°.* Paris 1854.



stałem; metoda ta dopełniona została przez P. Albaret <sup>(1)</sup>, który po raz pierwszy wprowadził uważanie ciężarów ruchomych, które pokrywając pewną część pomostu, mogą wywołać w niektórych przecięciach ciśnienia większe niżeli gdyby tenże ciężar pokrywał cały pomost.

Pierwszą pracę, o ile nam wiadomo, traktującą o wytrzymałości łuków sztywnych winniśmy P. Darcel, jest ona zamieszczona w *Annales des Ponts et Chaussées* z r. 1862 i w niej autor ogranicza się na rozbiórce dwu przypadków rozkładu ciężarów, to jest: gdy te ciężary pokrywają most całkowicie, lub też tylko jego połowę. Drugi artykuł umieszczony tamże w 1865 r. uzupełnia pierwszą pracę i zajmuje się ciężarami ruchomymi traktując zastosowanie ich do łuków przeciętych w kluczu i wspartych na walcach stalowych tak w kluczu jak i na przyczółkach.

Dopiero w 1870 r. <sup>(2)</sup> ogłoszona została przez P. Albaret metoda obliczania wytrzymałości łuków sztywnych; metoda, za pomocą której wyznaczyć możemy z wielkiem przybliżeniem natężenia sił zewnętrznych tak w każdym przecięciu pasów, jak i w rozmaitych częściach ściany pionowej łuku. Metodę tę, do której wprowadziliśmy niektóre uproszczenia we wzorach, wskazane przez doświadczenie, przedstawiamy czytelnikom Pamiętnika. Znaczna oszczędność materiału, bezpieczeństwo zupełne, i piękność budowli tego rodzaju, są głównym powodem który nas skłonił do rozpowszechnienia metody mało jeszcze znanej a którą mieliśmy zrzęcznie wiele razy zastosować.

Główna różnica między metodą którą przedstawiamy i metodą P. Albaret polega na jej zastosowaniu. Ta ostatnia nie mogła się otrząsnąć z dawnej rutyny podług której przyjmowano, iż ciśnienie jednostajnie jest rozłożone na całym przecięciu łuku w kluczu; tymczasem, łatwo jest się przekonać za pomocą np. fig. 2 iż w przecięciu tem ciśnienie wywarłe na 3 pasy podłużnika jest 5<sup>kg</sup> 59 na mili-

metr kwadratowy, podczas gdy na jeden tylko pas wewnętrzny łuku, ciśnienie maximum jest zaledwie 1<sup>kg</sup> 99; gdyby więc w tym razie przecięcie było symetrycznem względem połowy wysokości, należałoby albo znacznie obciążyć część wewnętrzną łuku, albo wystawić podłużnik na ciśnienia przewyższające granicę wytrzymałości.

Aby uniknąć tych niedogodności przyjęliśmy stanowczo, iż ciśnienia w łuku sztywnym zupełnie w podobny sposób są rozłożone jak w belkach prostych pochyłych; to jest że ciśnienia maximum rozłożone są na pasach przecięcia, których grubość winna być proporcjonalną do natężenia ciśnień. Przecięcia więc te mogą być zupełnie podobne do przecięć belek prostych (fig. 1).

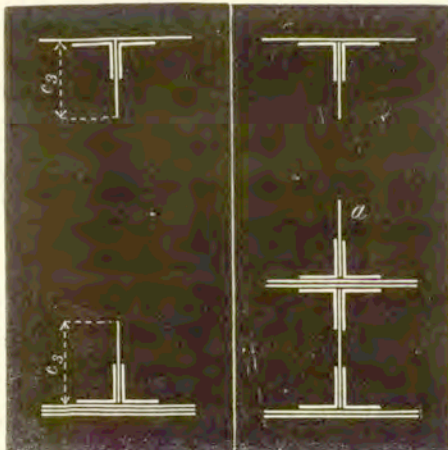


Fig. 1.

Fig. 2.

Pasy pionowe  $c_3$ , przymocowane za pomocą węgielnic do pasów poziomych, stanowią również opór przeciw ciśnieniu i służą jednocześnie do przymocowania krat łączących łuk z podłużnikiem.

W ten sposób pasy pionowe przedstawiają więcej sztywności, umocowanie ściany pionowej jest prostszem, i nakoniec unika się niedogodności obciążenia dodatkowego  $a$  (fig. 2), które byłoby niezbędnem gdybyśmy przyjęli system zastosowywany dotąd.

(1) *Annales des Ponts et Chaussées* 1862.

(2) Tamże.



Nakoniec układ wskazany na fig. 2 przedstawia tę niedogodność, iż ciśnienia wywarte na pasy środkowe spowodować mogą jeśli nie zupełne wywrócenie łuku, to przynajmniej jego wypaczenie; aby więc zapobiedz temu, zwiększyć należy znacznie liczbę i przecięcia krzyżowań poprzecznych; niedogodność ta usunięta jest na fig. 1, gdzie ciśnienia przesłane są wprost do pasów poziomych; krzyżowania więc poprzeczne w tym razie mogą być więcej oddalone od siebie i wymiary ich poprzeczne zmniejszone, służą one bowiem tylko do utrzymania odległości wzajemnej łuków w kierunku poprzecznym.

**Kształt i umieszczenie łuków.** — Łuki sztywne używane w budowie mostów dadzą się określić w sposób następujący: są to łuki o przecięciu zmiennem, których strona wypukła jest prostoliniową poziomą lub nachyloną, strona zaś wklęsła skrzywiona podług łuku koła lub paraboli.

Linija krzywa przechodząca przez środki ciężkości przecięć łuku, nosić będzie nazwę linii środkowej.

Płaszczyzna zawierająca linię środkową rozdziela zwykle wszystkie przecięcia łuku na dwie części symetryczne; łuki ustawiają się w ten sposób, aby płaszczyzna linii środkowej była pionową i zawierała siły zewnętrzne.

W zastosowaniach łuk zwykle podtrzymywany jest przez dwie podpory uważane jako nieruchome, a więc niedozwalające żadnego poruszenia końcom łuku. Podpory te składają się w ogóle z silnej budowy kamiennej, na której łuk się wspiera za pośrednictwem osad z lanego żelaza i płyt ołowianych; nakoniec pomiędzy końcem łuku i jego osadą wprowadzają się kliny żelazne mające na celu jednostajne o ile można rozłożenie ciśnień na całym przecięciu końcowym; można więc z wielkim przybliżeniem założyć w rachunkach, iż wypadkowe oddziaływania podpór przechodzą przez środki ciężkości przecięć końcowych łuku.

Często w zastosowaniach przecięcia łuku końcowe, oprócz klinów, utrzymywane są przez walce żelazne lub stalowe; w tym razie główne oddziaływanie podpory przechodzi przez oś walca, kliny zaś służą tylko do rozłożenia ciśnień na większej przestrzeni.

## CZĘŚĆ PIERWSZA

### I. — WZORY ZASADNICZE

**Odkształcenie łuku.** — Niech będzie łuk ACB oparty na końcach A i B (fig. 3). Część jego zawarta między końcem B i przecięciem któremkolwiek  $mn$  zostaje w równowadze pod wpływem sił zewnętrznych działających na odcinek  $mB$ , i sił międzycząsteczkowych wywiązanych w przecięciu  $mn$ .

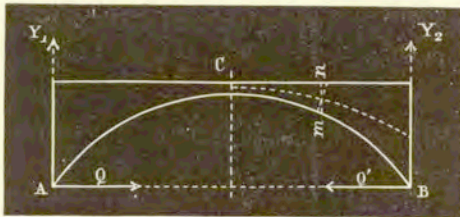


Fig. 3.

Siły zewnętrzne, jakśmy to założyli powyżej, zawarte są w płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez środki ciężkości przecięć, dadzą się więc one zredukować do wypadkowej przechodzącej przez środek ciężkości przecięcia uważanego  $mn$ , i do momentu wypadkowego działającego również w temże przecięciu.

Składowe tych sił wypadkowych względem stycznej i normalnej do linii środkowej nieodkształconej, podobnie jak w belkach prostych, będą następujące:



- a) *Siła podłużna*  $N$  normalna do przecięcia, sprawiająca ciśnienie lub ciągnienie.
- b) *Siła poprzeczna*  $A$  równoległa do przecięcia to jest normalna do linii środkowej, sprawiająca *przesunięcie poprzeczne* (glissement transversal).
- c) *Moment zgięcia*  $M$  znajdujący się w płaszczyźnie symetrii.
- d) Niezależnie od tych sił zmiana temperatury, sprawiająca rozciągnięcie lub kurczenie się materyi, wywołać może nowe natężenia sił, których wpływ dodaje się do poprzedzających.

Odkształcenia łuku wywołane przez każdą z wyżej wspomnianych sił zewnętrznych będą następujące :

- a) Pod wpływem siły Normalnej  $N$ , element łuku mający długość  $ds$  przyjmuje wydłużenie dodatnie lub ujemne mające za miarę

$$\frac{Nds}{E\Omega}$$

Składowe tego wydłużenia, równoległe do osi współrzędnych, będą następujące :

$$\frac{Ndx}{E\Omega} \quad \text{i} \quad \frac{Ndy}{E\Omega}$$

- b) Pod wpływem siły poprzecznej  $A$ , przecięcie uważane *mn* dąży do przesunięcia się po przecięciu sąsiednim w kierunku normalnym do linii środkowej; dążenie to do przesunięcia się ma za miarę

$$\frac{Ads}{kE\Omega}$$

Składowe jego w kierunkach równoległych do osi współrzędnych będą :

$$-\frac{Ads}{kE\Omega} \frac{dy}{ds} \quad \text{i} \quad +\frac{Ads}{kE\Omega} \frac{dx}{ds}$$

Liczba  $k$  oznacza stosunek współczynnika sprężystości podłużnej do współczynnika sprężystości poprzecznej.

- c) Moment zgięcia  $M$  w przecięciu *mn* sprawia, iż punkt sąsiedni  $G'(x_1 y_1)$  (fig. 4), zakreśla, względem punktu  $G(xy)$ , łuk nieskończenie mały  $Gg$  normalny do linii  $GG'$  i mający za miarę

$$GG' \frac{Mds}{EI}$$

Rzuty tego łuku na osiach współrzędnych są  $fg$  i  $fG'$ . Aby wyrazić te ilości w funkcji współrzędnych poprowadźmy linię prostą  $G'k$  równoległą do osi  $X$ , i linię  $Gk$  równoległą do osi  $Y$ ; utworzymy tym sposobem trójkąt  $GkG'$  podobny trójkątowi  $G'gf$ , na mocy których mamy :

$$\frac{G'g}{GG'} = \frac{gf}{y_1 - y} = \frac{G'f}{x_1 - x}$$



czyli

$$\frac{Mds}{EI} = \frac{gf}{y_1 - y} = \frac{G'f'}{x_1 - x},$$

otrzymamy zład wyrażenia następujące rzutów łuku  $G'g$  na osiach spórzędnych :

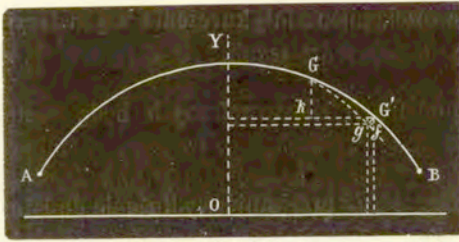


Fig. 4.

$$gf = \frac{Mds}{EI} (y_1 - y)$$

$$G'f' = \frac{Mds}{EI} (x_1 - x).$$

Jeśli oznaczymy przez  $p_0$  wykręcenie przecięcia początkowego około punktu A, wtedy znajdziemy podobnie, iż ruch odpowiedni punktu  $G'$ , w kierunkach równoległych do osi spórzędnych, będzie następujący :

$$p_0(y_1 - y_0)$$

$$p_0(x_1 - x_0).$$

d) Nakoniec siły wywołane w skutek zmiany temperatury sprawią wydłużenie lub skurczenie łuku proporcjonalne do jego długości. Jeśli oznaczymy przez  $\tau$  współczynnik rozszerzalności liniowej, to otrzymamy, w kierunkach równoległych do osi spórzędnych, wydłużenie części łuku zawartej między  $G$  i  $G'$

$$\tau(x_1 - x) \text{ i } \tau(y_1 - y).$$

Następnie wprowadza się do sił zewnętrznych oddziaływanie podpór przeszkadzających wolnemu przedłużeniu się łuku, i zadanie w ten sposób staje się całkowicie określone.

Jeśli dodamy algebraicznie, ruchy względne przecięć od punktu  $A(x_0, y_0)$  do punktu  $G'(x_1, y_1)$ , powstałe pod wpływem sił zewnętrznych wyżej wyszczególnionych a) b) c) i d), jako też i ruch przecięcia początkowego, otrzymamy ruch wypadkowy punktu  $G'$  czyli zmienność (variation)  $\Delta x_1 \Delta$  jego spórzędnych  $x_1, y_1$  :

$$(1) \quad \Delta x_1 = p_0(y_1 - y_0) + \tau(x_1 - x_0) + \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{N}{E\Omega} - \frac{\Lambda dy}{kE\Omega dx} \right) dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{M(y_1 - y)}{EI} ds$$

$$(2) \quad \Delta y_1 = p_0(x_1 - x_0) + \tau(y_1 - y_0) + \int_{y_0}^{y_1} \left( \frac{N}{E\Omega} + \frac{\Lambda dx}{kE\Omega dy} \right) dy + \int_{y_0}^{y_1} \frac{M(x_1 - x)}{EI} ds.$$

Aby wyznaczyć  $p_0$  uważajmy, dla punktu B, dla którego  $x_1 = 2l$  i  $y_1 = 0$ , mamy  $\Delta y_1 = 0$ . Zcałkowawszy więc równanie (2) względem  $x$ , od 0 do  $2l$  będzie

$$0 = 2p_0l + \int_0^{2l} \left( \frac{Ndy}{E\Omega dx} + \frac{\Lambda}{kE\Omega} \right) dx + \int_0^{2l} (2l - x) \frac{M}{EI} \frac{dx}{ds} dx.$$



Równanie to (2), zcałkowane od 0 do  $l$ , da wyrażenie zmniejszenia strzałki łuku w skutek jego odkształcenia

$$(3) \quad \Delta y_1 = p_0 l + \tau y_1 + \int_0^l \left( \frac{Ndy}{E\Omega dx} + \frac{A}{kE\Omega} \right) dx + \int_0^l (l-x) \frac{Myds}{EIdx} dx.$$

**Wyznaczenie sił zewnętrznych.**—Siły zewnętrzne, to jest ciężar stały łuku i ciężar przypadkowy, są dane początkowo; oddziaływania więc pionowe podpór dadzą się z łatwością wyznaczyć; pierwsza więc część zadania nie przedstawia żadnej trudności.

Pod wpływem sił zewnętrznych sprawiających odkształcenie łuku, wywiązują się siły poziome dążące do wydłużenia jego cięciwy; chcąc zachować niezmiennosc tej ostatniej, potrzeba aby podpory łuku wywiązały oddziaływania poziome będące w stanie zrównoważyć natężenie sił powyższych.

Siły te poziome nazwiemy *parciem łuku*; nie są one dane początkowo, ale wypływają z formy łuku i z ugrupowań ciężaru przypadkowego.

Wyznaczenie sił poziomych stanowi drugą i może najwięcej zkomplikowaną część zadania.

**Równania ogólne służące do wyznaczenia sił zewnętrznych.** — Niech będzie łuk ACB (fig. 3), zawarty w płaszczyźnie pionowej i wsparty na punktach niezmiennych A i B, znajdujących się na tejże samej linii poziomej; oznaczmy przez :

- $Q, Q'$  składowe oddziaływania podpór równoległe do osi X;
- $Y_1, Y_2$  składowe tychże równoległe do osi Y;
- $X, Y$  sumę rzutów sił zewnętrznych na kierunki równoległe do osi spólrzędnych;
- $M'$  sumę momentów tychże sił względem punktu A;
- $2l$  otwór łuku czyli długość jego cięciwy;
- $f$  strzałkę łuku;
- $\rho$  promień łuku kołowego;
- $\frac{f}{2l} = z$  zniżenie łuku;
- $x, y$  spólrzędne linii środkowej;

Rozwiązanie zadania polega na wyznaczeniu oddziaływań niewiadomych  $Y_1, Y_2, Q, Q'$ , w funkcji sił danych  $X$  i  $Y$ .

Statyka podaje nam naprzód trzy równania równowagi

$$(4) \quad Q - Q' + X = 0;$$

$$(5) \quad Y_1 + Y_2 - Y = 0;$$

$$(6) \quad -M + 2l Y_2 = 0.$$

Czwarte równanie otrzymamy, wyrażając, iż pomimo wpływu sił zewnętrznych odległość punktów A i B pozostaje niezmienną. Weźmy więc cięciwę AB za oś X, prostopadłą  $AY_1$  za oś Y, punkt A za początek całkowania i wyrażmy w równaniu (1), iż dla  $x = 2l \quad \Delta x_1 = 0$ , otrzymamy ztąd równanie szukane

$$\tau 2lE + \int_0^{2l} \left( \frac{N}{\Omega} - \frac{A dy}{k\Omega dx} + \frac{M' y ds}{I dx} \right) dx = 0.$$



Odształcenie wywołane przez siłę poprzeczną  $A$  jest nieznaczące; możemy więc również jak to zrobił P. BRESSE opuścić wpływ tej siły na łuk; w skutek tego założenia, równanie ostatnie przybierze kształt prostszy i będzie

$$(7) \quad \tau 2lE + \int_0^{2l} \left( \frac{N}{\Omega} + \frac{M'y ds}{I dx} \right) ds = 0.$$

Cztery ostatnie równania są bezwzględnie ogólne, stosują się więc one do wszelkich kształtów łuku i do rozmaitych położań ciężarów nań działających.

Z rozmaitych gatunków ciężarów, mogących wpływać na odształcenie łuku, rozbierając będziemy tylko trzy przypadki, ponieważ do tych ostatnich dadzą się sprowadzić wszystkie inne ugrupowania sił zewnętrznych.

1° Ciężar stały  $p'$ , który uważać będziemy jako jednostajnie rozłożony na całym otworze łuku w kierunku równoległym do jego cięciwy.

2° Ciężar przypadkowy; ten ostatni rozdzielimy na dwie kategorie;

a) Ciężar pojedynczy  $P$  zajmujący jakiekolwiek położenie na podłużniku,

b) Ciężar jednostajnie rozłożony  $p''$ , podług cięciwy albo podłużnika, na pewnej długości oznaczonej przez odcięte  $x_1 - x$ .

Podobnie jak w obliczaniu wytrzymałości belek wieloprzęsłowych, zbadamy naprzód wpływ ciężaru stałego na dany łuk a następnie wpływ samego ciężaru przypadkowego; summa tych dwóch gatunków sił da nam wypadek ostateczny, to jest natężenie ich w każdym przecięciu łuku, pod wpływem ciężaru całkowitego.

## II. — WYTRZYMAŁOŚĆ PASÓW, ŁUKU I PODŁUŻNIKA

**Wzór ogólny parcia.** — Przypuszczamy, jakeśmy o tem wspomnieli powyżej, iż ciśnienia lub ciągnięcia maximum zrównoważone być mają przez pasy łuku i podłużnika (fig. 1).

Pierwsza kwestya jaka się przedstawia przy obliczaniu wytrzymałości łuków jest wyznaczenie parcia  $Q$ . Parcie to można wyznaczyć za pomocą wzoru (7); uważajmy jednakże iż łuki sztywne przedstawiają dość znaczne zniżenie, przynajmniej  $\frac{1}{10}$  a to w celu uniknienia zbyt wielkiego ciężaru ściany pionowej; możemy więc z wielkim przybliżeniem przyjąć założenie następujące, które znacznie upraszcza dalsze rachunki, jak to również zrobili PP. *Darcel* i *Albaret*.

$$(8) \quad \begin{cases} N = Q \\ ds = dx \end{cases} \text{ mamy zresztą } M' = M - Qy.$$

Parcie więc boczne łuków sztywnych wyrazi się za pomocą wzoru uproszczonego następującego,

$$(9) \quad Q = \frac{\int_0^l \frac{M'y}{I} dx + \tau lE}{\int_0^l \left( \frac{y^2}{I} + \frac{1}{\Omega} \right) dx}$$

**Wyrażenie parcia wywartego pod wpływem ciężaru pojedynczego.** — Niech będzie  $P$  ciężar umieszczony na odległości  $x'$  od początku spólrzędnych. W przypadku o którym mowa, parcie boczne  $Q$  równa

się połowieparcia utworzonego pod wpływem dwóch ciężarów równych  $P$ , umieszczonych po obu stronach kłacza, w punktach mających za odcięte  $+x'$  i  $-x'$ ; wyrażenie momentu zgięcia będzie w tym razie

$$(M)_0^{x'} = P(l - x')$$

$$(M)_{x'}^l = P(l - x).$$

Podstawiając te wartości w równanie (9) otrzymamy, opuszczając tymczasowo wyraz  $\pi l E$ ,

$$(10) \quad Q = P \frac{\left(1 - \frac{x'}{l}\right) \int_0^{x'} \frac{y_i^2}{l^2} dx + \int_{x'}^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{y dx}{l}}{2 \int_0^l \left(\frac{y^2}{l^2} + \frac{1}{\Omega l^2}\right) dx} = Pb.$$

Licznik w tém wyrażeniu zależnym jest od położenia ciężaru  $P$ , mianownik zaś jest stałym dla danego łuku a więc stosuje się do wszystkich układów ciężarów.

Spółczynnik  $b$  nosi nazwę *spółczynnika parcia*; obliczenie wprost wartości całkowitej tego ostatniego jest dogodniejszym, w następnych rachunkach, niżeli rozdzielenie go na dwie części, jak to zrobili PP. *Bresse* i *Albaret*.

Całkowanie równania ostatniego jest prawie niemożliwym z powodu trudności wyrażenia w funkcji  $x$  momentu bezwładności  $I$ , który znacznie się zmienia od jednego przecięcia do drugiego; całkowanie więc to zastępuje się w zastosowaniach przez summowanie za pomocą metody trapezów, metoda ta, która użyta była przez *P. Albaret* (*Annales des ponts et chaussées* 1870), polega na własnościach następujących.

Jeżeli podzielimy połowę cięciwy łuku na  $n$  części równych, i jeżeli oznaczymy następnie przez  $\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n-1} 0$ , wartości kolejne wyrazu  $\frac{y}{l}$  odpowiadające podziałom cięciwy, przez  $\gamma'_0 \gamma'_1 \gamma'_2 \dots \gamma'_{n-1} 0$ , wartości kolejne iloczynu  $\left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{y}{l}$ , wartość całki licznika może być zastąpioną przez wartość, znacznie przybliżoną i dostateczną w zastosowaniach, powierzchni trapezów spółczynników  $\gamma$  i  $\gamma'$ .

Przypuścimy iż ciężar  $P$  znajduje się w przedziale  $k$ ; w tym razie wartość pierwszej całki licznika może się wyrazić przez powierzchnię następującą :

$$\sum_0^k \frac{y}{l} \Delta x = \frac{l}{n} \left( \frac{\gamma_0 + \gamma_k}{2} + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{k-1} \right).$$

Wartość zaś drugiej całki przedstawiona będzie przez wyrażenie powierzchni,

$$\sum_k^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{y}{l} \Delta x = \frac{l}{n} \left( \frac{\gamma'_k + 0}{2} + \gamma'_{k+1} + \gamma'_{k+2} + \dots + \gamma'_{n-1} \right).$$

W podobny sposób otrzymać można wartość mianownika; oznaczywszy przez

$$g_0, g_1, g_2, \dots, g_{n-1},$$

wartości kolejne wyrazu  $\frac{y^2}{l^2}$ , odpowiadające podziałom cięciwy; przez

$$g'_0, g'_1, g'_2, \dots, g'_{n-1},$$



wartosci podobnej wyrazu  $\frac{1}{\Omega l^2}$ , otrzymamy wyrażenie następujące całki mianownika,

$$(10 \text{ bis}) \sum_0^l \left( \frac{y^2}{l^2} + \frac{1}{\Omega l^2} \right) \Delta x = \frac{l}{n} \left( \frac{g_0 + 0}{2} + g_1 + g_2 + \dots + g_{n-1} + \frac{g'_0 + 0}{2} + g'_1 + g'_2 + \dots + g'_{n-1} \right) = d.$$

Po podstawieniu tych wartości w równanie (10) i po uproszczeniu, wzór ogólny służący do wyznaczenia współczynnika  $b$  będzie miał kształt następujący :

$$(11) b = \frac{1}{\sum_0^l \left( \frac{y^2}{l^2} + \frac{1}{\Omega l^2} \right)} \left[ \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( \frac{1}{2} (\gamma_0 + \gamma_k) + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{k-1} \right) + \frac{1}{2} \gamma'_k + \gamma'_{k+1} + \dots + \gamma'_{n-1} + 0 \right].$$

Przypuśćmy iż połowa cięgiwy podzieloną została na 10 równych części, to jest założmy  $n=10$ ; umieszczając ciężar  $P$  kolejno na wszystkich przedziałach, otrzymamy, za pomocą ostatniego wzoru następujące wyrażenia współczynnika parcia  $b$  odpowiadające każdemu położeniu ciężaru  $P$ .

$$k = 0,00 \quad b_0 = \frac{1}{d} \left[ \frac{\gamma'_0}{2} + \gamma'_1 + \gamma'_2 + \gamma'_3 + \gamma'_4 + \gamma'_5 + \gamma'_6 + \gamma'_7 + \gamma'_8 + \gamma'_9 \right]$$

$$k = 0,10 \quad b_1 = \frac{1}{d} \left[ 0,9 \frac{\gamma_0 + \gamma_1}{2} + \frac{\gamma'_1}{2} + \gamma'_2 + \gamma'_3 + \gamma'_4 + \gamma'_5 + \gamma'_6 + \gamma'_7 + \gamma'_8 + \gamma'_9 \right]$$

$$k = 0,20 \quad b_2 = \frac{1}{d} \left[ 0,8 \left( \frac{\gamma_0 + \gamma_2}{2} + \gamma_1 \right) + \frac{\gamma'_2}{2} + \gamma'_3 + \gamma'_4 + \gamma'_5 + \gamma'_6 + \gamma'_7 + \gamma'_8 + \gamma'_9 \right]$$

$$k = 0,30 \quad b_3 = \frac{1}{d} \left[ 0,7 \left( \frac{\gamma_0 + \gamma_3}{2} + \gamma_1 + \gamma_2 \right) + \frac{\gamma'_3}{2} + \gamma'_4 + \gamma'_5 + \gamma'_6 + \gamma'_7 + \gamma'_8 + \gamma'_9 \right]$$

$$k = 0,40 \quad b_4 = \frac{1}{d} \left[ 0,6 \left( \frac{\gamma_0 + \gamma_4}{2} + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \right) + \frac{\gamma'_4}{2} + \gamma'_5 + \gamma'_6 + \gamma'_7 + \gamma'_8 + \gamma'_9 \right]$$

(11 bis)

$$k = 0,50 \quad b_5 = \frac{1}{d} \left[ 0,5 \left( \frac{\gamma_0 + \gamma_5}{2} + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \right) + \frac{\gamma'_5}{2} + \gamma'_6 + \gamma'_7 + \gamma'_8 + \gamma'_9 \right]$$

$$k = 0,60 \quad b_6 = \frac{1}{d} \left[ 0,4 \left( \frac{\gamma_0 + \gamma_6}{2} + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 \right) + \frac{\gamma'_6}{2} + \gamma'_7 + \gamma'_8 + \gamma'_9 \right]$$

$$k = 0,70 \quad b_7 = \frac{1}{d} \left[ 0,3 \left( \frac{\gamma_0 + \gamma_7}{2} + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6 \right) + \frac{\gamma'_7}{2} + \gamma'_8 + \gamma'_9 \right]$$

$$k = 0,80 \quad b_8 = \frac{1}{d} \left[ 0,2 \left( \frac{\gamma_0 + \gamma_8}{2} + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6 + \gamma_7 \right) + \frac{\gamma'_8}{2} + \gamma'_9 \right]$$

$$k = 0,90 \quad b_9 = \frac{1}{d} \left[ 0,1 \left( \frac{\gamma_0 + \gamma_9}{2} + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6 + \gamma_7 + \gamma_8 \right) + \frac{\gamma'_9}{2} \right]$$

$$k = 1,00 \quad b_{10} = \frac{1}{d} [0,0 + 0].$$

Wyrażenie parcia wywartego pod wpływem ciężaru jednostajnie rozłożonego na przestrzeni zawartej między odciętami  $x'_1$  i  $x_1$ . — Wyrażenie parcia otrzymać można za pomocą współczynników  $b$  wyzna-

czonych poprzednio, i tak, ciężar jednostajnie rozłożony może być uważany jako summa ciężarów cząstkowych  $pdx$ ; dla każdego położenia tego ciężaru otrzymamy pewną wartość współczynnika  $b$ ; summie ciężarów  $\int_{x_1}^{x'_1} p dx$  odpowiadać będzie współczynnik parcia  $\int_{x_1}^{x'_1} b dx$ , czyli powierzchnia zawarta pomiędzy krzywą współczynników parcia  $b$ , osią odciętych i dwu rzędnymi odpowiadającymi odciętym  $x_1, x'_1$  ograniczającym przestrzeń pokrytą ciężarem. Oznaczmy tę powierzchnię przez  $s$ . Jeżeli podzielimy ciężewę na  $n$  równych części, wyliczymy wartości odpowiednie współczynnika  $b$  za pomocą wzoru (11) i jeżeli wykreślimy krzywą przedstawioną przez te współczynniki, powierzchnia zawarta między tą krzywą i osią  $X$  stanowić będzie *powierzchnię współczynników parcia* a wartość jej  $s$ , ograniczona dwoma rzędnymi, przedstawi właśnie współczynnik parcia w przypadku gdy ciężar będzie jednostajnie rozłożony między temiż rzędnymi. Wyrażenie ostateczne parcia będzie

$$(12) \quad Q = p(x'_1 - x_1) \frac{s}{x'_1 - x_1} = ps.$$

*Wyrażenie parcia utworzonego przez rozszerzalność liniową niezależną od ciężarów.* — Jeśli założymy w równaniu (9)  $M = 0$  otrzymamy wyrażenie szukane parcia

$$(13) \quad Q = \frac{E\tau}{l \int_0^l \left( \frac{y^2}{I^2} + \frac{1}{\Omega l^2} \right) dx} ;$$

mianownik w tém wyrażeniu jest tenże sam co w przypadku poprzednim; parcie więc to otrzymuje się bardzo łatwo.

Przyпускаjąc połowę ciężewy podzieloną na  $n$  części równych, otrzymamy wzór ogólny następujący :

$$(14) \quad Q = \frac{2E}{l} \frac{n}{\sum_0^l \left( \frac{y^2}{I^2} + \frac{1}{\Omega l^2} \right)}.$$

**Wpływ ciężaru stałego.** — Ciężar stały łuków zniżonych przypuszcza się jednakowo rozłożonym w kierunku równoległym do ciężewy; oznaczywszy przez  $b'$  współczynnik odpowiedni parcia, otrzymamy,

$$Q = 2p'l'b'.$$

Współczynnik  $b'$  otrzymuje się ze wzoru (11 bis), summując, za pomocą metody *Simpson'a*, wartości  $b$  odpowiadające wszystkim podziałom połowy ciężewy i przyjmując iż długość  $l$  podzieloną została na dziesięć równych części, mamy w tym przypadku

$$b' = \frac{l}{3n} [b_0 + 2(b_2 + b_4 + b_6 + b_8) + 4(b_1 + b_3 + b_5 + b_7 + b_9)],$$

następnie

$$(15) \quad \begin{aligned} Y &= p'l, \\ M &= \frac{l^2}{2} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} - 4b_1 \frac{y}{l} \right) p'. \end{aligned}$$

Wyrażenia ogólne, natężeń maxima sił zewnętrznych, na jedność powierzchni będą :

dla podłużnika (strona zewnętrzna)

$$(16) \quad R = \frac{Q}{\Omega} + \frac{Mv}{I} = q_1 p'.$$



dla łuku (strona wklęsła)

$$(17) \quad R = \frac{Q}{\Omega} - \frac{Mv'}{I} = q'_{1}p'.$$

Wartości współczynników  $q_1$  i  $q'_1$ , otrzymanych za pomocą ostatnich wzorów, będą nieco za małe przy osadach łuku i w przecięciach sąsiednich, należy więc wzmoć nieco przecięcie łuku w tych przedziałach. Prawidło najprostsze, jakiego w tym razie użyć radzimy, polega na nadaniu pasom łuku, w pobliżu tych punktów, takiegoż samego przecięcia, jak dla pasów podłużnika w kluczu.

**Wpływ ciężaru przypadkowego.** — a) *Wytrzymałość podłużnika.* — Największe ciśnienie na podłużnik danego przecięcia otrzyma się umieszczając po prawej i po lewej stronie tegoż przecięcia, ciężary wywołujące ciśnienie w podłużniku. Położenia te ciężarów wyznaczymy za pomocą metody podanej przez P. Albaret.

Niech będzie przecięcie którekolwiek  $m$  (fig. 5), którego środek ciężkości ma za współrzędne  $x$  i  $y$ . Jeżeli ciężar  $P$  umieszczonym jest po prawej stronie tego przecięcia na odległości  $x'$  od początku współrzędnych, wtedy otrzymamy następujące wyrażenia sił zewnętrznych :

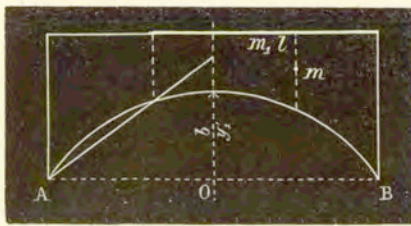


Fig. 5.

$$Y = \frac{P}{2} \left( 1 + \frac{x'}{l} \right),$$

$$Q = Pb,$$

$$M = \frac{Pl}{2} \left[ \left( 1 + \frac{x'}{l} \right) \left( 1 - \frac{x'}{l} \right) - 2b \frac{y}{l} \right].$$

Wyrażenie wytrzymałości podłużnika będzie na jednostkę powierzchni

$$(18) \quad R = \frac{Q}{\Omega} + \frac{Mv}{I} = Pl \left[ \left( \frac{1}{\Omega l} - \frac{v}{I} \frac{y}{l} \right) b + \frac{v}{2I} \left( 1 + \frac{x'}{l} \right) \left( 1 - \frac{x'}{l} \right) \right].$$

Aby wyrażenie (18) przedstawiało ciśnienie, potrzeba aby ilość w wielkim nawiasie była dodatnią; wypada ztąd warunek następujący :

$$\left( \frac{1}{\Omega l} - \frac{v}{I} \frac{y}{l} \right) b + \frac{v}{2I} \left( 1 + \frac{x'}{l} \right) \left( 1 - \frac{x'}{l} \right) \geq 0,$$

czyli

$$(19) \quad b \leq \frac{\left( 1 + \frac{x'}{l} \right) \left( 1 - \frac{x'}{l} \right)}{2 \left( \frac{y}{l} - \frac{I}{\Omega v l} \right)} = y'.$$

Potrzeba więc ażeby współczynnik parcia  $b$  był mniejszym od rzędnej linii prostej, którą oznaczyliśmy przez  $y'$ , przedstawionej przez drugi wyraz ostatniego równania.

W sposób podobny do poprzedzającego znajdziemy równanie wyrażające, że ciężar umieszczony po lewej stronie przecięcia, sprawia ciśnienie t. j. że

$$(20) \quad b \leq \frac{\left( 1 + \frac{x}{l} \right) \left( 1 + \frac{x'}{l} \right)}{2 \left( \frac{y}{l} - \frac{I}{\Omega v l} \right)} = y' ;$$

ciężar więc P, umieszczony po lewej stronie przecięcia  $m$ , sprawi ciśnienie w podłużniku, jeżeli znajdować się będzie na przestrzeni gdzie  $b < y'$ .

Linije proste wyrażone równaniem (19) przechodzą wszystkie przez punkt B, drugi ich punkt przecięcia otrzyma się łatwo za pomocą rzędnej na osi Y; wyrażenia tej ostatniej wyprowadzają się z równania (19) zakładając w niem  $x' = 0$ ; mamy ztąd :

$$(21) \quad y_1' = \frac{1 + \frac{x}{l}}{2\left(\frac{y}{l} - \frac{1}{\Omega v l}\right)}.$$

Linije proste wyrażone równaniem (20) przechodzą przez punkt A; rzędna ich na osi Y ma wartość następującą :

$$(22) \quad y_1' = \frac{1 - \frac{x}{l}}{2\left(\frac{y}{l} - \frac{1}{\Omega v l}\right)}.$$

b) *Wytrzymałość łuku wewnętrzznego.*— Wyrażenie natężenia sił na pasy wewnętrzne łuku otrzyma się z wyrażenia (18) zamieniając w niem  $v$  na  $-v'$  mamy ztąd :

$$R = \frac{Q}{\Omega} - \frac{Mv}{I} = Pl \left[ \left( \frac{1}{\Omega l} + \frac{v'}{I l} \right) b - \frac{v'}{2I} \left( 1 + \frac{x}{l} \right) \left( 1 - \frac{x'}{l} \right) \right];$$

warunek więc ciśnienia, jeśli ciężar znajduje się po prawej stronie przecięcia, wyrazi się przez

$$(23) \quad b \geq \frac{\left( 1 + \frac{x}{l} \right) \left( 1 - \frac{x'}{l} \right)}{2\left( \frac{y}{l} + \frac{1}{\Omega v' l} \right)} = y'.$$

Linije  $y'$  przechodzą przez punkt B; wartość ich rzędnej na osi Y jest dla  $x' = 0$

$$(25) \quad y_1' = \frac{1 + \frac{x}{l}}{2\left( \frac{y}{l} + \frac{1}{\Omega v' l} \right)}.$$

Jeżeli ciężar P umieszczonym jest po lewej stronie przecięcia, wtedy warunek ciśnienia jest

$$(26) \quad b \geq \frac{\left( 1 - \frac{x}{l} \right) \left( 1 + \frac{x'}{l} \right)}{2\left( \frac{y}{l} + \frac{1}{\Omega v' l} \right)} = y',$$

a rzędna, na osi Y, tych linij ma wyrażenie następujące

$$(27) \quad y_1' = \frac{1 - \frac{x}{l}}{2\left( \frac{y}{l} + \frac{1}{\Omega v' l} \right)}.$$



Z ostatnich wzorów wypada, iż ciśnienie po stronie wewnętrznej łuku sprawione będzie przez ciężary rozłożone na całej przestzeni, dla której rzędna krzywej współczynników parcia jest większą od rzędnej  $y'$  linii prostych przedstawionych przez równania (23) albo (26); warunek ten jest odwrotny znalezionemu poprzednio dla podłużnika.

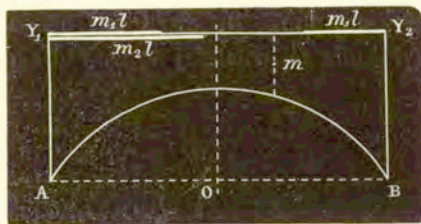


Fig. 6,

Dla łuku, kiedy ciężar ten pokrywa przestrzeń  $m_1l$ , od przyczółka bliższego B do pewnego punktu znajdującego się poza uważanem przecięciem (fig. 5).

Dla łuku, kiedy ciężar ten pokrywa przestrzeń  $m_1l$  (fig. 6), zaczynając od przyczółków, albo też przestrzeń  $m_3l$ , zaczynając od przyczółka więcej oddalonym A i niedochodząc do przecięcia  $m$ .

Obecnie zajmijmy się wyprowadzeniem wzorów dających natężenia sił zewnętrznych dla układów ciężaru przypadkowego podanych powyżej.

Wyrażenie wytrzymałości podłużnika pod wpływem ciężaru przypadkowego pokrywającego przestrzeń  $m_1l$  od przyczółka bliższego uważanemu przecięciu (fig. 5) do pewnego punktu znajdującego się poza przecięciem. — Wyrażenie sił zewnętrznych w tym razie jest :

$$\text{oddziaływanie pionowe } Y_2 = p''lm \frac{4-m}{4}.$$

Jeżeli oznaczymy przez  $s$  powierzchnię, odpowiadającą długości  $ml$  krzywej współczynników parcia, wyliczoną w założeniu  $l=1$ , wtedy

$$Q = sp''l,$$

następnie

$$(28) \quad M = \frac{l^2}{2} \left[ \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left( \frac{m(4-m)}{2} - \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right) - 2s \frac{y}{l} \right] p''.$$

Mamy złąd

$$(29) \quad R = \frac{Q}{\Omega} + \frac{Mv}{I} = qp''.$$

Wyrażenie ogólne wytrzymałości danego przecięcia łuku wewnętrznego, pod wpływem ciężaru jednostajnie rozłożonego na przestrzeni  $m_3l$ , zawartej pomiędzy przyczółkiem więcej oddalonym A i punktem przecięcia  $m$  (fig. 6).

Mamy w tym razie

$$Y_2 = \frac{m}{4} p''l,$$

$$Q = sp''l,$$

(30)

$$M = l^2 \left[ \frac{m^2}{4} \left(1 - \frac{x}{l}\right) - s \frac{y}{l} \right] p'',$$

następnie

$$(31) \quad R = \frac{Q}{\zeta} - \frac{Mv'}{I} = q'p''.$$

Jeżeli nadto ciężar jest umieszczonym na przestrzeni  $m_1 l$ , zawartej pomiędzy bliższym przyczółkiem B i punktem przecięcia, wtedy natężenie całkowite sił równać się będzie poprzedzającemu zwiększonemu natężeniem utworzonym pod wpływem ciężaru  $pm_1 l$ ; to ostatnie otrzyma się zastępując we wzorze (30)  $m$  przez  $m_1$  i  $\frac{x}{l}$  przez  $-\frac{x}{l}$ .

Wyrażenie natężenia sił międzycząsteczkowych wywartego pod wpływem ciężarów stałego i przypadkowego działających jednocześnie. — 1° *Ciśnienia maxima*. — Największe ciśnienia wywarte pod wpływem ciężaru całkowitego otrzymują się dodając algebraicznie współczynniki wytrzymałości  $q_1$  i  $q$  otrzymane poprzednio. Mamy ztąd dla podłużnika

$$(32) \quad R = p'q_1 + p''q = pq - p'(q - q_1).$$

Dla łuku wewnętrznego  $R = q'p + (q' - q'_1)p'$ .

W wyrażeniach tych, ilość  $q$  przedstawia współczynnik wytrzymałości przy położeniu najniekorzystniejszym ciężaru przypadkowego,  $q_1$  współczynnik wytrzymałości pod wpływem ciężaru stałego i  $p$  ciężar całkowity  $p = p' + p''$ .

2° *Ciągnienia maxima albo ciśnienia minima*. — Ciągnienia maxima albo ciśnienia minima w przecięciu danym utworzone są przy rozkładach dopełniających ciężaru przypadkowego; wyrażenia ich więc otrzymują się zastępując w równaniach poprzedzających  $p$  przez  $p'$  i nawzajem; otrzymamy ztąd równania następujące ciągnięć :

(32 bis) dla podłużnika  $R = -(q - q_1)p + qp'$ ,

dla łuku  $R = -(q' - q'_1)p + qp'$ ,

aby wyrażenia te przedstawiały ciśnienie, potrzeba aby drugie ich wyrazy przedstawiały wartości odjemne.

Ciągnienia maxima są zresztą bardzo małe w łukach zniżonych, dla których współczynniki ciśnień są dodatne; rzecz się ma zupełnie przeciwnie w łukach o mniejszem zniżeniu, gdzie niektóre współczynniki ciśnień są odjemne, wtedy ciągnienia są znaczne i przewyższają w tych miejscach natężenia ciśnień.

Wpływ zmiany temperatury. — Ciśnienia lub ciągnienia dodatkowe, wywołane przez rozszerzalność materji niezależnie od ciężarów, otrzymują się, jakśmy wspomnieli powyżej, zakładając we wzorach (5) i (9)  $p = 0$ . Wyrażenia sił zewnętrznych w tym razie będą :

$$Y_2 = 0,$$

$$M = -Qy.$$

Wartość parcia  $Q$  wyznaczy się za pomocą wzoru (9), zakładając w nim  $M = 0$ ; otrzymamy ztąd

$$Q = \frac{E\tau l}{l^2 \int_0^l \left( \frac{y^2}{l^2} + \frac{1}{\Omega l^2} \right) dx}$$

czyli na mocy wzoru (11)

(32 ter.)  $Q = E\tau \frac{n}{l^2 d}$



Następnie podstawiając te wartości w wyrażenia ogólne ciśnień otrzymamy

$$(32 \text{ quater}) \text{ dla podłużnika} \quad R = Q \left( \frac{1}{\Omega} - y \frac{v}{I} \right)$$

$$\text{dla łuku} \quad R = Q \left( \frac{1}{\Omega} + y \frac{v'}{I} \right).$$

### III. — WYTRZYMAŁOŚĆ ŚCIANY PIONOWEJ

**Wzory ogólne.** — Części składowe ściany pionowej winny mieć wymiary dostateczne aby przeciwstawić opór *przesunięciu podłużnemu* górnej części łuku względem części jego dolnej; zajmijmy się więc przedewszystkiem wyznaczeniem natężenia tej siły w każdym przecięciu łuku sztywnego.

Niech będzie  $d\Omega$ , element powierzchni przecięcia uważanego znajdujący się na odległości  $v$  od osi zgięcia, wyrażenie natężenia przesunięcia podłużnego w tym elemencie jest następujące

$$Q \frac{d\Omega_1}{\Omega} + \frac{Mv}{I} d\Omega_1$$

Summa tych natężeń we wszystkich elementach uważanej powierzchni  $\Omega_1$  mającej środek ciężkości w odległości  $v_2$  od osi zgięcia będzie,

$$\theta = Q \frac{\bar{\Omega}_1}{\Omega} + \frac{Mv_2}{I} \Omega_1,$$

albo zakładając dla skrócenia  $\frac{\Omega_1 v_2}{I} = U$ , ostatnie równanie przybierze kształt następujący

$$\theta = Q \frac{\Omega_1}{\Omega} + MU.$$

Jeżeli w przecięciu sąsiednim znajdującem się na odległości  $dx$  od przecięcia poprzedniego, wykonamy summowanie podobne, wtedy wyrażenie tego ostatniego będzie

$$\theta + \frac{d\theta}{dx} dx.$$

Różnica tych dwóch natężeń  $\frac{d\theta}{dx} dx$  jest właśnie natężeniem siły szukanej, która usiłuje przesunąć powierzchnię  $\Omega_1$ , względem powierzchni całkowitej  $\Omega$ , w kierunku  $x$  dodatnich jeżeli natężenie to jest odjemnem i nawzajem.

Oznaczmy przez  $D = \frac{d\theta}{dx}$  natężenie przesunięcia podłużnego, wyrażenie jego w przypadku ogólnym będzie,

$$(33) \quad Ddx = Q \frac{d\Omega_1}{dx} dx + U \frac{dM}{dx} dx + M \frac{dU}{dx} dx.$$

Jeżeli stosunek  $\frac{\Omega_1}{\Omega}$  jest stałym, co ma miejsce w bocznych częściach łuku, wtedy  $d\frac{\Omega_1}{\Omega} = 0$  i wyrażenie ostatnie przybiera kształt prostszy

$$(34) \quad Ddx = U \frac{dM}{dx} dx + M \frac{dU}{dx} dx.$$

Zajmiemy się obecnie wyprowadzeniem wyrażeń natężenia maximum przesunięcia podłużnego utworzonego pod wpływem ciężarów stałego i przypadkowego.

**Wpływ ciężaru stałego.** — W przypadku ciężaru stałego jednostajnie rozłożonego w kierunku równoległym do cięciwy łuku, wyrażenie momentu zgięcia jakieśmy widzieli (15) jest

$$M = \frac{l^2}{2} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} - 4b' \frac{y}{l} \right) p'.$$

Z powyższego wyrażenia otrzymujemy różniczkując

$$\frac{dM}{dx} = - \left( \frac{x}{l} + 2b' \frac{dy}{dx} \right) pl'.$$

Wprowadzając te wartości do równania (33) otrzymamy wyrażenia ogólne natężenia siły przesunięcia poprzecznego w kształcie następującym :

$$D = l \left[ U \frac{x}{l} - \frac{ldU}{2dx} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right) + 2b' \left( U \frac{dy}{dx} + y \frac{dU}{dx} - \frac{d\Omega}{dx} \right) \right] = q_2 p'.$$

Jeśli oznaczymy przez  $\beta$  ilość zawartą w ostatnim nawiasie, wtedy ostatnie równanie wyrazi się ogólnie :

$$(35) \quad D = - l \left[ U \frac{x}{l} - l \frac{dU}{2dx} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right) + 2b' \beta \right] p' = q_2 p'.$$

W przypadku łuków sztywnych niepodobna jest wyznaczyć dokładnie wartości  $\frac{dy}{dx}$  ponieważ za nią się równania linii środkowej; wartości te jednakże otrzymują się z wielkim przybliżeniem za pomocą rzędnych kolejnych  $y$  linii środkowej, odpowiadających podziałom połowy cięciwy na  $n$  części równych, przypuszczając iż linija ta jest łukiem parabolicznym przechodzącym przez trzy punkta sąsiednie, których rzędne są  $y_{i-1}, y_i, y_{i+1}$ ,

$$(36) \quad \frac{dy_{i-1}}{dx} = - \frac{n}{2l} (3y_{i-1} - 4y_i + y_{i+1})$$

$$(37) \quad \frac{dy_i}{dx} = - \frac{2l}{n} (y_{i-1} - y_{i+1})$$

$$(38) \quad \frac{dy_{i+1}}{dx} = - \frac{n}{2l} (-y_{i-1} + 4y_i - 3y_{i+1}).$$

Wyrażenie (36) służy do wyznaczenia wartości  $\frac{dy}{dx}$  w kluczu dla  $x=0$ ; a ponieważ zwykle łuk jest symetrycznym względem strzałki OY, przeto mamy zawsze w tym miejscu  $\frac{dy}{dx} = 0$ .

Wyrażenie (37) służy do wyznaczenia wartości  $\frac{dy}{dx}$  dla wszystkich przecięć z wyjątkiem przecięć końcowych, nakoniec wyrażenie (38) daje wartość  $\frac{dy}{dx}$  dla ostatniego przecięcia na przyczółku.



Wzory ostatnie dają również, ze znacznym przybliżeniem, wartości  $d\frac{\Omega_1}{\Omega}$  i  $\frac{dU}{dx}$ , podstawiając w nich zamiast  $y$ , wartości na  $\frac{\Omega_1}{\Omega}$  albo  $U$ , odpowiadające tymże samym podziałom cięgiwy.

**Wpływ ciężaru przypadkowego.** — Natężenie siły sprawiającej przesunięcie podłużne pod wpływem ciężaru stałego jest odjemne; rozpatrzmy więc tylko warunki przy których natężenie tejże siły jest odjemnem pod wpływem ciężaru przypadkowego, ponieważ przy tych tylko warunkach natężenie siły podłużnej przybiera wartości maximum.

Uważajmy naprzód ciężar  $P$  umieszczony po prawej stronie przecięcia  $m$  w pewnym punkcie, którego odcięta jest  $x'$ ; wyrażenie sił zewnętrznych w tym razie będzie.

$$Q = Pb$$

$$M = \frac{Pl}{2} \left[ \left(1 + \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x'}{l}\right) - 2b \frac{y}{l} \right].$$

Mamy ztąd przez różniczkowanie

$$\frac{dM}{dx} = \frac{P}{2} \left(1 - \frac{x'}{l} - 2b \frac{dy}{dx}\right).$$

Następnie, podstawiając te wartości w równanie (33), otrzymamy

$$D = \frac{P}{2} \left[ \left(1 - \frac{x'}{l}\right) \left(U + \left(1 + \frac{x}{l}\right) l \frac{dU}{dx}\right) - 2b \left(U \frac{dy}{dx} + y \frac{dU}{dx} - \frac{d\Omega_1}{dx}\right) \right].$$

Aby wyrażenie to było odjemnem potrzebny jest warunek następujący

$$(39) \quad b \leq \frac{\left[ U + \left(1 + \frac{x}{l}\right) l \frac{dU}{dx} \right] \left(1 - \frac{x'}{l}\right)}{2\beta} = y'.$$

W równaniu tém  $\beta$  oznacza wartość ostatniego nawiasu przedostatniego równania,  $y'$  przedstawia rzędną linii prostych podobnych do przedstawionych przez równania (19) i (26),

Linije te przechodzą przez punkt  $B$ ; drugi ich punkt przecięcia z krzywą współczynników parcia otrzyma się za pomocą rzędnej na osi  $Y$ ; ta ostatnia dla  $x' = 0$  przedstawia wartość następującą

$$y'_1 = \frac{U + \left(1 + \frac{x}{l}\right) l \frac{dU}{dx}}{2\beta}.$$

Drugi ten punkt przecięcia wskaże przestrzeń  $ml$ , na której rozłożyć należy ciężar przypadkowy aby otrzymać dla każdego przecięcia natężenie maximum siły  $D$  mającej wartość odjemną.

Postępując w podobny sposób znajdziemy warunek następujący, aby ciężar  $P$  umieszczony po lewej stronie przecięcia  $m$  wywołać w niem mógł natężenie odjemne siły  $D$   $dx$ .

$$(40) \quad b \leq \frac{\left[ U + \left(1 - \frac{x}{l}\right) l \frac{dU}{dx} \right] \left(1 + \frac{x'}{l}\right)}{2\beta} = y'.$$

Wartość rzędnej na osi  $Y$  tych linii ma wartość następującą :

$$y_1' = \frac{\left(1 - \frac{x}{l}\right) l \frac{dU}{dx} - U}{2\beta}.$$

Natężenia dodatnie maximum, przesunięcia podłużnego, wyznaczą się przy układach dopełniających ciężaru przypadkowego, tutaj zaś zauważymy, iż współczynnik parcia  $b$  jest ilością dodatnią, nie może on być więc mniejszym od ilości ujemnej; w zastosowaniach więc, usunąć należy roztrząsanie przypadków przy których drugi wyraz nierówności (39) i (40) przedstawia wartość ujemną.

Rzędna na osi  $Y$ , linii przedstawionych przez równanie (40), jest nieskończenie wielką dla  $x=0$ ; i wartość jej maleje stopniowo jeżeli  $x$  zwiększa się; dla przecięć zatem początkowych, aż do przecięcia dla którego linija (40) staje się styczną do krzywej współczynników parcia, mamy zawsze

$$b < y'.$$

Aby więc otrzymać maximum natężenia siły  $D$  w każdym z tych przecięć, należy rozłożyć ciężar przypadkowy na całej przestrzeni  $m$ , znajdującej się po lewej stronie tegoż przecięcia. Dla każdego z przecięć następnych linije (40) przecinają krzywą  $AB$ , należy więc w tym razie umieścić ciężary na przestrzeni  $b$ , zawartej między punktem przecięcia i przecięciem  $m$  (fig. 7).

Rzędna na osi  $Y$ , linii przedstawionych przez równanie (39), jest  $-\infty$  dla  $x=0$ ; wartość ta zwiększa się bezwzględnie, razem z  $x$  staje się zerem i przybiera następnie wartości dodatnie.

Wspomnieliśmy poprzednio, iż usunąć należy roztrząsanie przypadków dla których  $y'$  ma wartości ujemne, usunąć należy również przypadki w których, przy wartościach dodatnich tej

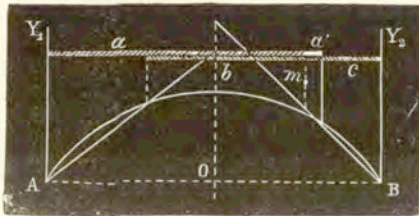


Fig. 7.

rzędnej, punkt przecięcia linii (39) z krzywą współczynników parcia  $b$ , znajduje się po lewej stronie uważanego przecięcia  $m$ ; oba bowiem te przypadki nie przedstawiają rozwiązań żądanych. Pozostaje więc tylko uważać przypadki w których linija (39) przecina krzywą  $b$  po prawej stronie uważanego przecięcia. Należy więc w tym razie rozłożyć ciężary po prawej stronie przecięcia  $m$  aż do punktu przecięcia  $a'$  (fig. 7). Na koniec dla przecięć sąsiednich przyczółkowi  $Y_2$ , zaczawszy od

punktu w którym linija (39) staje się styczną do krzywej współczynników parcia, mamy również  $b < y'$ . Aby więc dla przecięć tych otrzymać maximum siły  $D$ , rozłożyć należy ciężar przypadkowy, oprócz przestrzeni  $b$ , na przestrzeni  $c$  (fig. 7).

Wyrażenie ogólne wytrzymałości, przeciw przesunięciu podłużnemu utworzonemu pod wpływem ciężaru rozłożonego na przestrzeni  $(m - m')$  znajdującej się po lewej stronie przecięcia, zaczynając od lewego przyczółka  $A$ . — Przecięcie uważane znajduje się w tym przypadku na końcu ciężaru (fig. 10). Oznaczając jak poprzednio przez  $s$  powierzchnię odpowiadającą przestrzeni  $(m - m')l$  pokrytej ciężarem przypadkowym krzywej współczynników parcia, otrzymamy wyrażenia następujące sił zewnętrznych :

$$Y_2 = \frac{p'l}{4} (m^2 - m'^2), \quad Q = sp'l,$$

$$M = l^2 \left[ \frac{m^2 - m'^2}{4} \left(1 - \frac{x}{l}\right) - s \frac{y}{l} \right] p'.$$

Różniczkując ostatnie równanie mamy

$$\frac{dM}{dx} = -l \left( \frac{m^2 - m'^2}{4} + s \frac{dy}{dx} \right) p'.$$



Po wykonaniu działań i podstawieniu wartości w równanie (33), otrzymamy ostatecznie

$$(41) \quad D = -l \left[ \frac{m^2 - m'^2}{4} \left( U - l \frac{dU}{dx} \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \right) + s\beta \right] p'' = q'_2 p''.$$

*Natężenie przesunięcia podłużnego pod wpływem jednoczesnym ciężaru stałego i przypadkowego.* — Natężenie maximum siły  $Ddx$  otrzymana się dodając algebraicznie współczynniki wyrażające natężenie pod wpływem ciężaru stałego i przypadkowego, ten ostatni przypuszcza się w położeniu najniekorzystniejszym; używając znakowania podanego powyżej, otrzymamy dla wartości odjemnych siły podłużnej wyrażenie następujące :

$$(42) \quad Ddx = q'_2 p + (q_2 - q'_2) p'.$$

Wyrażenie natężenia maximum, siły podłużnej  $Ddx$ , przy układzie dopełniającym ciężaru przypadkowego, będzie

$$(43) \quad D_1 dx = (q_2 - q'_2) p + q'_2 p'.$$

Ze wzorów ostatnich wybiera się ten, który daje większą wartość dla siły  $D$ .

*Rozkład ciśnień i ciągnięć, w rozmaitych częściach ściany pionowej, wywartych pod wpływem siły podłużnej.* — W części środkowej łuku, w okolicach klucza, ściana pionowa jest zwykle pełną; jeżeli więc oznaczymy przez  $e$  grubość tej ściany, to otrzymamy wyrażenie równowagi następujące

$$Redx = Ddx.$$

z kądem wytrzymałość na milimetr kwadratowy przecięcia podłużnego

$$(44) \quad R = \frac{D}{e}.$$

Maximum  $R$  odpowiada maximum siły  $D$ , która ma miejsce podług powierzchni przechodzącej przez linię środkową, prostopadle do płaszczyzny pionowej; ponieważ w tem miejscu ilość  $U$  przedstawia największą wartość możebną.

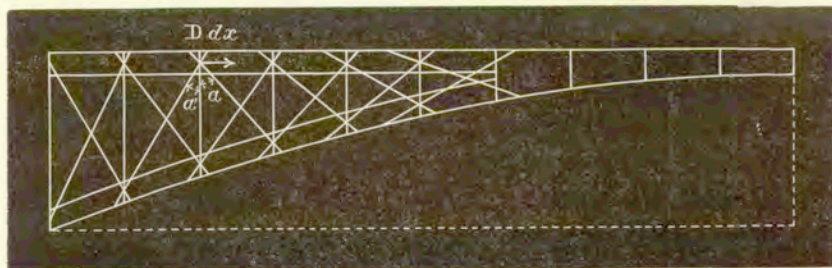


Fig. 8.

W częściach bocznych łuku, zbliżając się do przyczółków, ściana pionowa nie jest pełną, ale składa się zwykle ze sztab walcowanych krzyżujących się podług pewnego systemu. W części tej, siła podłużna  $Ddx$  przedstawia największą wartość podług tejże samej powierzchni przechodzącej przez linię środkową; i natężenie tej siły winno być zrównoważone wytrzymałością sztab ściany pionowej.

Natężenie siły podług kierunku każdej sztaby, zależy, oprócz wielkości sił zewnętrznych, od ilości i ugrupowania tych sztab; przejrzymy więc rozmaite układy jakie zazwyczaj bywają nadawane tym ostatnim w zastosowaniach.

*1szy Układ (fig. 8).* — Ściana pionowa w częściach bocznych składa się ze sztab krzyżujących się  $T$  i  $T'$  równoważących siłę podłużną, i ze sztab pionowych, które nie wchodzą do rachunku wytrzymałości, ale służą jedynie do doskonałego połączenia wszystkich części składowych łuku.



Niech będzie  $\alpha$  kąt jaki tworzy jedna ze sztab T z linią pionową i  $\alpha'$  kąt odpowiedni sztaby T' z tąż linią; wyrażenie ogólne natężenia sił, w kierunku sztab T zbliżających się do osi łuku zaczynając od podłużnika, będzie

$$(45) \quad T = \frac{\text{dos } \alpha'}{\text{wst}(\alpha + \alpha')} D dx.$$

Sztaba poddana będzie ciśnieniu lub ciągnieniu, stosownie do tego czy znak ostatniego wyrażenia będzie dodatnym lub ujemnym.

Oznaczmy przez  $n$  liczbę sztab spotkanych w kierunku poziomym na długości  $\Delta x$  zawartej między dwiema prostopadłymi przechodzącymi przez końce sztaby, liczba ta, odpowiadająca ułamkowi długości  $dx$ , będzie  $ndx$ ; oznaczmy nadto przez  $\omega$  przecięcie proste jednej z tych sztab; wyrażenie wytrzymałości tej ostatniej będzie

$$Rn\omega = \frac{\text{dos } \alpha}{\text{wst}(\alpha + \alpha')} D \Delta x.$$

Mamy ztąd wyrażenie następujące przecięcia sztaby T w funkcji jej wytrzymałości

$$(46) \quad n\omega = \frac{\text{dos } \alpha'}{\text{wst}(\alpha + \alpha')} \frac{D}{R}.$$

W podobny sposób znajdziemy dla sztab T' oddalających się od osi łuku, wyrażenia następujące natężenia sił w ich kierunku

$$(47) \quad T' = Rn\omega' = - \frac{\text{dos } \alpha}{\text{wst}(\alpha + \alpha')} D \Delta x$$

zktąd wyrażenie ich przecięcia

$$(48) \quad n\omega' = - \frac{\text{dos } \alpha}{\text{wst}(\alpha + \alpha')} \frac{D}{R}.$$

Na figurze 8 wskazane są dwie tylko sztaby krzyżujące się w każdym przedziale podłużnika, albo-

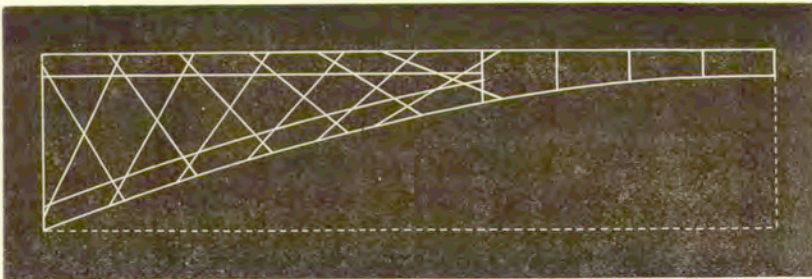


Fig. 9.

wiem układ ten jest najprostszym. Można jednakże liczbę sztab w każdym przedziale zwiększyć do trzech stosownie do wymiarów łuku; nachylenia tych ostatnich winny być zawarte między nachyleniami ostatecznych sztab przedziału.

2<sup>si</sup> Układ (fig. 9).— Układ ten różni się od poprzedzającego usunięciem sztab pionowych w częściach bocznych ściany; sztaby te zostawione są tylko na końcach i w części pełnej dla zapewnienia sztywności. W przypadku tym sztaby nachylone T i T' utrzymać winny w równowadze, oprócz sił wyznaczonych poprzednio, części im odpowiednie ciężaru pomostu i ciężaru przypadkowego. Oznaczwszy jak poprzednio przez  $p$  ciężar całkowity  $p = p' + p''$ , otrzymamy wyrażenie następujące natężenia sił pod wpływem ostatnich ciężarów.

$$D' dx = p dx.$$



Składowa tej siły w kierunku sztaby będzie

$$T_1 = p dx \frac{\text{wst}\alpha'}{\text{wst}(\alpha + \alpha')}.$$

Natężenie więc całkowite sił w kierunku sztaby uważanej wyrazi się równaniem następującem

$$(49) \quad T_2 = T + T_1 = \frac{D \text{dos}\alpha + p \text{wst}\alpha}{\text{wst}(\alpha + \alpha')} dx = R n \omega dx.$$

Otrzymamy podobnie dla sztab  $T'$  wyrażenie następujące natężenia sił

$$(50) \quad T'_2 = T' + T'_1 = \frac{-D \text{dos}\alpha + p \text{wst}\alpha}{\text{wst}(\alpha + \alpha')} dx = R n \omega dx.$$

Zapomocą dwóch ostatnich wzorów wyznaczyć można wymiary stosowne przecięcia poprzecznego sztab.

Jeśli nachylenie sztab  $T$  i  $T'$  względem pionowej jest jednakowem, czyli  $\alpha = \alpha'$  wtedy ostatnie wzory przybiorą kształt prostszy następujący:

$$(51) \quad T_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{D}{\text{wst}\alpha} + \frac{p}{\text{dos}\alpha} \right) dx = R n \omega dx$$

$$(52) \quad T'_2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{D}{\text{wst}\alpha} - \frac{p}{\text{dos}\alpha} \right) dx = R n \omega dx.$$

3ci Układ (fig. 10).— Ściana pionowa składa się ze sztab naprzemian pionowych i pochyłych w kierunku osi; sztaby pionowe zamiast stanowić ciężar dodatkowy jak w układzie 1<sup>ym</sup> wchodzą przeciwnie

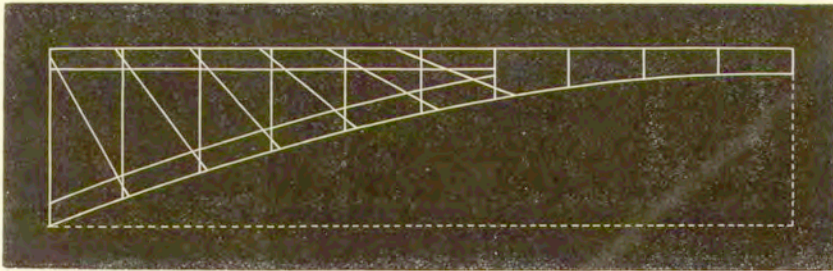


fig. 10.

w rachunek wytrzymałości i pod tym względem porównać je można ze sztabami układu 2<sup>go</sup>. Dwa te ostatnie układy uważamy jako najwięcej zalecające się do zastosowań, usuwają one bowiem wszelki ciężar dodatkowy zapewniają więc oszczędność materiału; ten ostatni nadto będąc racjonalniej użytym daje sztywność i wytrzymałość żądaną rozmaitym częściom ściany pionowej.

Wyrażenie wytrzymałości w przypadku rozbieżnym otrzyma się z równań (49) i (50) zakładając w nich  $\alpha = 0$ . Mamy ztąd

$$(53) \quad T_2 = \frac{D}{\text{wst}\alpha} dx = R n \omega' dx$$

$$(54) \quad T_2 = [-D \text{dotycz}\alpha + p] dx = R n \omega' dx.$$

Natężenie siły podłużnej pod wpływem zmiany temperatury. — Wyrażenie sił zewnętrznych w przypadku rozbiernym jest następujące jakśmy widzieli poprzednio

$$M = -Qy.$$

Mamy ztąd

$$\frac{dM}{dx} = -Q \frac{dy}{dx}.$$

Następnie na mocy wzoru (33)

$$(55) \quad Ddx = -Q \left( y \frac{dU}{dx} + U \frac{dy}{dx} - \frac{d\Omega_1}{dx} \right) dx = -Q\beta.$$

Widzimy ze wzoru ostatniego, iż natężenie siły podłużnej wywartej pod wpływem zmiany temperatury jest zerem w kluczu; zmienia się ono stopniowo razem zespółczynnikiem  $\beta$ , osiąga maximum około  $0,3l$  i zmniejsza się następnie zbliżając się do przecięć końcowych na przyczółkach.

#### IV. — ODKSZTAŁCENIE ŁUKÓW SZTYWNYCH

Wzory ogólne. — Z pomiędzy odkształceń łuku, najważniejsze w zastosowaniu są jego zniżenia pod wpływem ciężarów lub rozszerzalności; rozbiernać więc tylko będziemy zmienność rzędnej danego punktu.

Zmienność rzędnej  $y_1$  przecięcia uważanego, któremu odpowiada odcięta  $x_1$ , otrzymana się z równania (2).

Wprowadziwszy do tego równania warunki przyjęte w obliczaniu wytrzymałości łuków i uważając że wskutek symetrii łuku względem połowy otworu mamy

$$\int_0^{2l} \frac{1}{\Omega} \frac{dy}{dx} dx = 0,$$

otrzymamy wyrażenie ogólne następujące zmienności rzędnej przecięcia uważanego

$$\Delta y_1 = \left[ Ep_0 x_1 - Q \int_0^{x_1} \frac{1}{\Omega} \frac{dy}{dx} dx + \int_0^{x_1} (x_1 - x) \frac{M'}{I} dx \right] \frac{1}{E}.$$

Równanie to dla  $x = 2l$ , gdzie  $\Delta y_1 = 0$ , daje

$$\Delta y_1 = 2 \left[ Ep_0 x_1 + \frac{x_1}{2l} \int_0^{2l} (2l - x) \frac{M'}{I} dx \right] \frac{1}{E} = 0.$$

Zastępując obecnie  $M'$  przez jego wartość znaną powyżej i uważając jeszcze, iż w skutek symetrii mamy

$$\frac{x_1}{2l} \int_0^{2l} (2l - x) \frac{y'}{I} dx = x_1 \int_0^{x_1} \frac{y'}{I} dx.$$

otrzymamy ostatecznie po wyrugowaniu  $p_0$  z dwóch przedostatnich równań

$$(56) \quad \Delta y_1 = \frac{1}{E} \left[ -Q \left( \int_0^{x_1} \frac{1}{\Omega} \frac{dy}{dx} dx + \int_0^{x_1} (x_1 - x) \frac{y'}{I} dx - x_1 \int_0^{x_1} \frac{y'}{I} dx \right) \right. \\ \left. + \int_0^{x_1} (x_1 - x) \frac{M}{I} dx - \frac{x_1}{2l} \int_0^{2l} (2l - x) \frac{M}{I} dx \right].$$



Spółczynnik ilości —  $Q$  jest niezależnym od sił zewnętrznych, zmienia się on tylko z odciętą przecięcia uważanego; oznaczywszy więc dla uproszczenia ten współczynnik przez —  $H$ ; otrzymamy wzór ogólny odkształcenia pionowego, w kształcie następującym

$$(57) \quad \Delta y_1 = \frac{1}{E} \left[ QH + \int_0^{x_1} (x_1 - x) \frac{M}{l} dx - \frac{x_1}{2l} \int_0^{2l} (2l - x) \frac{M}{l} dx \right].$$

**Wpływ ciężaru pojedynczego  $P$ .** — Uważajmy ciężar  $P$  umieszczony w pewnym punkcie; którego odcięta jest  $x'$  wyrażenie sił zewnętrznych będzie w tym razie

$$Q = Pb$$

$$(M)_0^{x'} = Pl \left( 2 - \frac{x'}{l} \right) \frac{x}{l}$$

$$(M)_{x'}^{2l} = Pl \left( 2 - \frac{x}{l} \right) \frac{x'}{l}.$$

Przypuśćmy naprzód, iż ciężar znajduje się po lewej stronie przecięcia uważanego, to jest że  $x' < x$ , wtedy równanie (57) daje

$$(58) \quad \Delta y_1 = \frac{Pl}{E} \left[ bH_1 + \left( 1 - \frac{x'}{2l} \right) \int_0^{x'} \frac{x}{l} \left( \frac{x_1}{l} - \frac{x}{l} \right) dx + \frac{x'}{2l} \int_{x'}^{x'} \frac{\left( \frac{x_1}{l} - \frac{l}{x} \right) \left( 2 - \frac{x}{l} \right)}{1} dx \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \left( 2 - \frac{x'}{l} \right) \frac{x_1}{l} \int_0^{x'} \frac{\left( 2 - \frac{x}{l} \right) \frac{x}{l}}{1} dx - \frac{x' x_1}{4l^2} \int_0^{2l} \frac{\left( 2 - \frac{x}{l} \right)^2}{1} dx \right]$$

Jeżeli ciężar jest umieszczonym po prawej stronie przecięcia to jest jeżeli  $x' > x_1$  wtedy podobnym sposobem znajdziemy

$$(59) \quad \Delta y_1 = \frac{Pl}{E} \left[ bH_1 + \left( 1 - \frac{x'}{2l} \right) \int_0^{x_1} \frac{\left( \frac{x_1}{l} - \frac{x}{l} \right) \frac{x}{l}}{1} dx - \frac{1}{4} \left( 2 - \frac{x'}{l} \right) \frac{x_1}{l} \int_0^{x'} \frac{\left( 2 - \frac{x}{l} \right) \frac{x}{l}}{1} \right. \\ \left. - \frac{x' x_1}{4l^2} \int_0^{2l} \frac{\left( 2 - \frac{x}{l} \right)^2}{1} dx \right].$$

Jeżeli cięciwa łuku podzieloną jest na pewną liczbę części równych, wtedy za pomocą wartości odpowiadających każdemu podziałowi otrzymać możemy zmienności  $\Delta y_1$  odpowiednie przecięciom uważanym.

Za pomocą ilości  $\Delta y_1$  w ten sposób wyznaczonych wykreślimy *krzywą odkształcenia* umieszczając nad osią  $X$  zmienności dodatne i pod tąż osią zmienności ujemne. Zmienności dodatne wskażą podniesienia się łuku, zmienności zaś ujemne jego zniżenia.

Jeżeli teraz ocenić chcemy wpływ ciężaru jednostajnie rozłożonego na przestrzeni zawartej między odciętami  $x'$  i  $x''$ , to wyznaczmy naprzód  $S$  sumę algebraiczną powierzchni zawartych między

między temi odciętami i odkształcenie w przecięciu uważanem wyrazi się za pomocą wzoru następującego

$$(60) \quad \Delta y_1 = \frac{p^2}{E} \int_{x'}^{x''} \delta dx = \frac{p^2}{E} S.$$

$\delta$  oznacza wartość wielkiego nawiasu równania (59).

W zastosowaniach ważnem jest tylko ocenienie odkształcenia w kluczu i połowie części bocznych; dostatecznem więc będzie wyliczyć ostatnie równania dla dwu wartości  $x_1$  to jest

$$x_1 = l \quad \text{i} \quad x' = \frac{l}{2}.$$

**Wpływ zmiany temperatury.** — Zakładając w równaniu (57)  $M = 0$  i dodając wyraz  $\tau y_1$  podług równania (2), otrzymamy

$$(61) \quad \Delta y_1 = \tau y_1 + \frac{QH}{E}.$$

Wartości tego wyrażenia wyliczają się również w zastosowaniach tylko dla dwóch przecięć  $x_1$  wskazanych poprzednio.

## CZĘŚĆ DRUGA

### ZASTOSOWANIA

#### I. — WYMIARY ŁUKU I RACHUNKI WSTĘPNE.

Wzory ogólne wyprowadzone w rozdziałach poprzednich zastosujemy do przykładu łuku zniżonego na  $\frac{1}{10}$  i mającego otwór  $28^m,00$ , który wybudowanym został podług naszego projektu pod koleją żelazną *Grande Ceinture de Paris*.

Cięciwa liczoną jest od skrajnych punktów dotknięcia węgielnic z pasami łuku wewnętrznego; przyjmujemy również, iż przez te punkta przechodzą oddziaływania poziome parę łuku; cięciwę tę przyjmujemy w następnych rachunkach za oś X i do niej odniesiemy rzędne linii środkowej, linię zaś prostopadłą przechodzącą przez połowę cięciwy przyjmujemy za oś Y.

Pierwszą kwestyą jaka się nasręcza jest wyznaczenie przecięcia w kluczu; przecięcie to raz otrzymane pozwala na rozkład natychmiastowy pasów na całej rozciągłości łuku i podłużnika podług prawidła które wskażemy poniżej. Po wyznaczeniu w ten sposób wymiarów łuku i podłużnika, oblicza się ich wytrzymałość za pomocą wzorów ogólnych Części I<sup>ej</sup>.

**Wyznaczenie przecięcia w kluczu.** — Natężenie maximum sił zewnętrznych na przecięcie w kluczu nie jest jednakowem na wyższych i niższych pasach tegoż przecięcia; natężenie to jest od 5 do 7 razy większe na pasy podłużnika, niżeli na pasy łuku; logicznie więc przecięcie uważane nie może być symetrycznem względem połowy swej wysokości, ale przedstawiać winno ilość pasów w części wyższej i niższej proporcjonalną do natężeń sił zewnętrznych.



Przecięcie w kluczu wyznaczyć należy w sposób następujący: ze strony wewnętrznej zostawić jeden tylko pas, dostateczny do zapewnienia sztywności łuku w kierunku poprzecznym, i który jest zwykle wystawionym na małe stosunkowo natężenia sił zewnętrznych; po stronie zaś zewnętrznej umieścić należy od 4<sup>ch</sup> do 6<sup>ciu</sup> pasów i wogóle ilość dającą się łatwo nitować z węgielnicami.

Pasy w ten sposób umieszczone przymocowują się do ściany pionowej zwykle pełnej za pośrednictwem węgielnic i nitów odpowiedniej średnicy.

Grubość pasów jest zwykle 0,01 dla mostów średniej wielkości; na wysokość przecięcia  $H_0$  dla łuków zniżonych na  $\frac{1}{10}$  bierze się zwykle około  $\frac{1}{50}$  otworu. Co do szerokości pasów ta jest zmienną; zależy ona od ilości łuków i wielkości ciężarów; dobrze jest pod tym względem, aby szerokość ta zawarta była w granicach między 0,5 i 0,8 wysokości.

Dla mostów znacznego otworu pasy winny być przymocowane do podwójnej ściany pionowej równie jak to ma miejsce dla belek prostych.

Dla łuków pod kolej żelazną, których otwór dosięga lub przechodzi 100<sup>m</sup> proponujemy przecięcie w kluczu wskazane na fig. 10; układ ten przy znacznej oszczędności metalu w skutek usunięcia zupełnego pomostu, zapewnia wielką sztywność budowli; i usuwa niedogodność zawielkiej grubości pasów po stronie zewnętrznej.

Podajemy twierdzenie następujące, stosujące się do wszelkich zniżeń łuku, które pozwala wyznaczyć z wielkim przybliżeniem wymiary przecięcia w kluczu po stronie zewnętrznej podłużnika.

*Wymiary pasów, węgielnic i szerokość ściany pionowej winny być także same jak wymiary części wyższej belki prostej w połowie jej otworu, mającej też samą wysokość jak przecięcie skrajne łuku  $2h=f+H_0$ , tenże sam otwór  $2l$ , i zostającej pod wpływem tegoż samego ciężaru  $p$ .*

To zaś ostatnie przecięcie otrzymuje się łatwo za pomocą wzoru znanego  $\frac{pl^2}{2} = R \frac{v}{I}$ . Jest ono nieco większe od przecięcia żadanego.

Po wyznaczeniu przecięcia w kluczu, należy sprawdzić jego wytrzymałość przedewszystkiem po stronie zewnętrznej, co do strony wewnętrznej wytrzymałość jej będzie zawsze w dobrych warunkach jeżeli przecięcie ułożonem zostało podług prawideł wskazanych poprzednio.

Ciśnienie na jedność powierzchni pasów zewnętrznych wyrażonem jest przez równanie (16)

$$R = \frac{Q}{\Omega} + M \frac{v_i}{I} - qpl.$$

Wiadomo bowiem (str. 37), iż ciśnienie to będzie maximum skoro ciężar przypadkowy pokrywa całą długość mostu.

W założeniu tem przyjąć można dla łuków zniżonych na  $\frac{1}{10}$  wartość średnią następującą dla współczynnika parcia

$$b = 1,075$$

będzie więc

$$Q = 2,15pl.$$



Mamy dalej za pomocą równania (15) dla  $x = 0$

$$M = 0,2155pl.$$

Następnie ilości  $\Omega$  i  $\frac{v}{I}$  wyznaczone są z przecięcia przyjętego do naszego przykładu (str. 31).

$$\Omega = 0,037100$$

$$\frac{v}{I} = 108,063.$$

Podstawiając te wartości w równanie otrzymamy

$$R = (57,95 + 23,29)(p + p')l.$$

Podług wymiarów mostu i ciężarów przyjętych mamy

$$p = 3000^k$$

$$p' = 2000^k$$

$$l = 14^m$$

otrzymamy więc ostatecznie

$$R = 81,24 \times 70000^k = 5,686800^k$$

czyli 5,69<sup>k</sup> na milimetr kwadratowy.

Przecięcie więc może być

ostatecznie przyjętem; po wykonaniu rachunków ilość tylko  $b$  może się nieco zmienić.

Dla przecięcia przedstawionego na fig. 11 które należy do łuku zniżonego na  $\frac{1}{15}$  i mającego otworu  $2l = 100^m$ , mamy

$$\Omega = 0,237390 \quad p = 7200^k.$$

Dla łuków zniżonych na  $\frac{1}{15}$  można przyjąć na współczynnik parcia wartość średnią następującą :

$$b' = 1,51.$$

Zkąd następnie

$$\frac{Q}{\Omega} = 637p$$

$$M \frac{v}{I} = 215p$$

i nakoniec

$$R = (637 + 215)7200 = 6134400 \quad \text{czyli } 6,13 \text{ na milimetr kwadratowy.}$$

**Rozkład pasów na części zewnętrzne i wewnętrzne łuku.** — Po wyznaczeniu przecięcia w kluczu i zapewnieniu się, iż przy układzie przyjętem ciśnienie maximum na jedną powierzchnię nie przechodzi granicy praktycznej wytrzymałości, ilość pasów zewnętrznych i wewnętrznych danego łuku otrzyma się bardzo łatwo w sposób następujący:

a) W przecięciach skrajnych na przyczółkach ilość pasów wewnętrznych winna się równać ilości pasów zewnętrznych w kluczu; po stronie zaś zewnętrznej przecięć skrajnych usunąć można w zupełności pasy pozostawiając tylko żelaza kątowe (węgielnice); w przypadku tylko mostów o wielkim

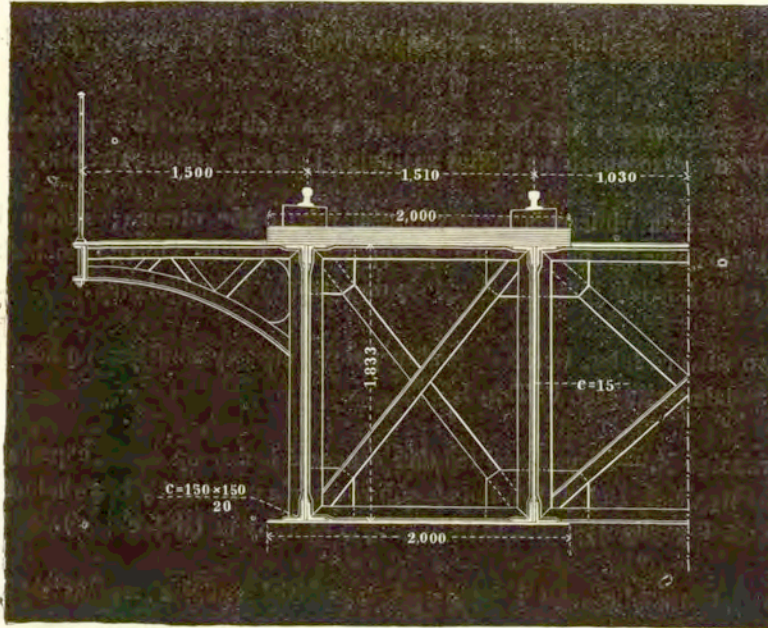


Fig. 11.



otworze pozostawić można jeden pas zewnętrzny (fig. 11), a to więcej w celu zapewnienia sztywności poprzecznej, i pokrycia odstępu między szynami, niżeli na zapewnienie wytrzymałości podłużnej.

b) Na przecięciu przypadającym około 0,4*l* zaczynając od klucza ilość pasów zewnętrznych winna być jednakową i równać się o ile można połowie summy pasów w kluczu.

c) W przecięciach pośrednich zwiększyć lub zmniejszyć należy ilość pasów proporcjonalnie do liczby przedziałów.

Podług tych wskazówek pasy zewnętrzne i wewnętrzne łuków wszelkich wymiarów rozłożone zostaną podług figur od 1<sup>szej</sup> do 7<sup>ej</sup> umieszczonych na tablicy znajdującej się przy końcu artykułu.

Przechodzimy obecnie do zastosowania obliczenia wytrzymałości łuku o 28<sup>m</sup> otworu; sądząc iż jeden przykład dostatecznym będzie do wskazania sposobu postępowania, podług którego dochodzi się do wypadków żądanych; ta sama bowiem metoda stosuje się do otworów jakichkolwiek.

Z powodu małego stosunkowo otworu łuku, liczba podziałów połowy cięciwy zmniejszoną została do 8, i długość pasów przyjętą została podług fig. 9, Tab. I.

**Wyznaczenie wysokości przecięć H.** — Wysokości te które oznaczać będziemy ogólnie przez H liczone są pomiędzy krawędziami węgielnic (fig. 11); w ten sposób równania momentów bezwładności podane niżej daleko są prostsze niżeli gdyby wysokość ta liczoną była całkowicie ( $H + e + e'$ ).

Przyjmując iż podłużnik łuku jest prostoliniowym i poziomym, wysokości szukane wyrażą się za pomocą wzoru następującego

$$H = f + H_0 - y;$$

w którym *f* oznacza strzałkę łuku to jest odległość niższej krawędzi węgielnic wewnętrznych w kluczu od cięciwy łuku; ilość *H*<sub>0</sub> oznacza wysokość w kluczu, i *y* rzędnę krzywej podług której są zakrzywione krawędzie wewnętrzne węgielnic.

Ilości *H*<sub>0</sub> i *f* są znane; wyznaczenie zatem wysokości *H* zależy od wyznaczenia rzędnych *y*.

Krzywa wewnętrzna węgielnic łuku, przedstawia zwykle formę kołową lub paraboliczną, wyznaczmy więc tylko w tych dwóch przypadkach wartości rzędnej *y*.

Oznaczywszy przez *z* zniżenie łuku to jest stosunek  $\frac{f}{2l}$  mamy równania następujące

a) dla łuków kołowych

$$\frac{y}{l} = \sqrt{\left(z + \frac{1}{4z}\right)^2 - x^2} - \left(\frac{1}{4z} - z\right)$$

b) dla łuków parabolicznych

$$\frac{y}{l} = 2z\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$$

W celu ułatwienia zastosowań wyliczyliśmy w tablicy następującej wartości dwóch ostatnich wzorów dla czterech zniżen najwięcej używanych, przypuszczając iż połowa cięciwy podzieloną została na 10 równych części.

Tablica 1.

Wartosci rzednych $x$ $l$	WARTOŚCI RZĘDNYCH $\frac{y}{l}$			
	Rzędne łuków kołowych		Rzędne łuków parabolicznych	
	<i>Zniżenie <math>z = \frac{1}{8}</math></i>		<i>Zniżenie <math>z = \frac{1}{10}</math></i>	
$x$	$\frac{1}{8} [17\sqrt{1 - \frac{64x^2}{289l^2}} - 15]$	$\frac{1}{4} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$	$2,6\sqrt{1 - \frac{x^2}{6,76l^2}} - 2,4$	$\frac{1}{5} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$
0,0	0,250000	0,250000	0,200000	0,200000
0,1	0,245750	0,247500	0,198180	0,198000
0,2	0,239188	0,240000	0,192296	0,192000
0,3	0,228538	0,227500	0,182632	0,182000
0,4	0,211963	0,210000	0,169060	0,168000
0,5	0,190288	0,187500	0,151458	0,150000
0,6	0,163534	0,160000	0,129800	0,128000
0,7	0,131000	0,127500	0,103982	0,102000
0,8	0,093600	0,090000	0,073848	0,072000
0,9	0,049825	0,047500	0,039060	0,038000
1,0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
	<i>Zniżenie <math>z = \frac{1}{12}</math></i>		<i>Zniżenie <math>z = \frac{1}{15}</math></i>	
$x$	$\frac{1}{12} (37\sqrt{1 - \frac{44x^2}{1369l^2}} - 35)$	$\frac{1}{6} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$	$\frac{1}{6} (22,9\sqrt{1 - \frac{36x^2}{524,41l^2}} - 22,1)$	$\frac{2}{15} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$
0,0	0,166667	0,166667	0,133334	0,133334
0,1	0,165125	0,165000	0,131807	0,132000
0,2	0,159889	0,160000	0,127990	0,128000
0,3	0,152082	0,151667	0,122647	0,121133
0,4	0,140458	0,140000	0,112341	0,112000
0,5	0,125843	0,125000	0,100128	0,100000
0,6	0,010713	0,106667	0,085625	0,085333
0,7	0,085883	0,085000	0,068565	0,034000
0,8	0,061063	0,060000	0,048527	0,024000
0,9	0,032542	0,031667	0,025665	0,012667
1,0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000



**Wyznaczenie rzędnych linii środkowej.** — Uważajmy przecięcie jakiegokolwiek łuku, ma ono kształt podwójnego T przedstawiony na fig. 11; węgielnic i pasy pionowe tego przecięcia są jednakowe w górnej i dolnej jego części, szerokość pasów pionowych  $a$  również jest jednakową, grubość tylko tych ostatnich jest różną i oznaczy się przez  $c$  w części górnej i przez  $c'$  w części dolnej.

Aby wyznaczyć rzędne  $y$  linii środkowej, niezbędnem jest wyznaczyć poprzednio położenie linii AB przechodzącej przez środek ciężkości przecięcia uważanego, to jest jedną z odległości  $h$  lub  $h'$  które ją oddzielają od krawędzi zewnętrznych węgielnic.

Odległość  $h'$  np. otrzyma się biorąc momenty wszystkich części składowych przecięcia względem osi XX'; po wykonaniu działań i po uproszczeniu otrzymamy wyrażenie następujące stosujące się do wszystkich przypadków

$$h' = \frac{1}{2} \left[ H + \frac{a}{\Omega} (c - c')(H + c + c') \right].$$

W podobny sposób otrzymamy

$$(62) \quad h = \frac{1}{2} \left[ H - \frac{a}{\Omega} (c - c')(H + c + c') \right]^{(1)}.$$

Ilość  $\Omega$  w tych wyrażeniach oznacza powierzchnię całego przecięcia, inne zaś wymiary tegoż przecięcia są wskazane na fig. 11.

Tablica II.

N° przecięć	Grubość pasów		Wysokość przecięcia H	Powierzchnia $\Omega$	Wysokość $h$	Rzędne linii środkowej		Odległość włókien najwięcej oddalonych od linii AB	
	$c$	$c'$				$y=3,30-h$	$\frac{y}{l}$	$v$	$v'$
1	0,03	0,01	0,500	0,02380	0,1819	3,1181	0,2227	0,2119	0,3281
2	0,03	0,01	0,542	0,02422	0,1990	3,101	0,2215	0,2290	0,3530
3	0,92	0,02	0,690	0,02550	0,3350	2,665	0,2118	0,3550	0,3550
4	0,01	0,02	0,880	0,0238	0,4474	2,8026	0,2002	0,5074	0,4026
5	0	0,03	1,280	0,0238	0,8188	2,4812	0,1772	0,8188	0,3912
6	0	0,03	1,568	0,0238	1,0860	2,2140	0,1581	1,0860	0,512
7	0	0,03	2,048	0,0238	1,417	1,883	0,1345	1,4170	0,661
8	0	0,03	2,624	0,0238	1,814	1,486	0,1061	1,814	0,840
9	0	0,03	3,300	0,0238	2,279	1,021	0,0730	2,279	1,051

(1) Dowodzenie i rozwinięcie tego, jak również następnych wzorów znajdzie czytelnik w dziełku naszym wydanem po francuzku *Expressions analytiques et tables des moments d'inertie et des moments résistants*.

Mamy ztąd, oznaczywszy przez  $H_0$  wysokość w kluczu,

$$y = f + H_0 - h.$$

Stosując te równania do naszego przykładu otrzymamy wartości liczebne rzędnej  $h$  i następnie  $y$  odpowiadające podziałom  $\frac{1}{2}$  cięciwy którą przypuszczamy podzieloną na 8 równych części; wartości te umieszczone są w załączonej tablicy II.

Dwie ostatnie kolumny tej tablicy zawierają wartości

$$v = h + c$$

$$v' = h' + c'$$

**Wyznaczenie momentów bezwładności.** — Moment bezwładności przekięcia przedstawionego na fig. 12 względem linii AB przechodzącej przez środek ciężkości tegoż przekięcia wyrazi się za pomocą wzoru następującego

$$(63) \quad I = (ac + a'e_1 + a''e_2 + ec_3)h^2 + (ac^2 - a'e_1^2 - a''e_2^2 - ec_3^2)h + \frac{1}{3}(ac^3 + a'e_1^3 + a''e_2^3 + ec_3^3).$$

Za pomocą tego wzoru otrzymać można również wartość momentu bezwładności części przekięcia zostającej pod linią AB względem tejże linii.

Summa tych dwóch wartości przedstawi moment bezwładności przekięcia całkowitego; summa ta jest zawsze łatwą do wykonania, ograniczymy się więc tylko na wyznaczeniu wzoru (63).

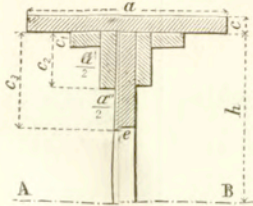


Fig. 12 bis.

Wyliczanie wprost wartości tego wzoru jakkolwiek już uproszczonego, dla wszystkich wartości  $h$  i  $h'$  jest jeszcze dość mozolnem.

Dla uproszczenia rachunków wyliczyliśmy wartości współczynników tego wzoru w dziełku naszym wspomnianem powyżej, które stosują się do wszystkich prawie wymiarów przekięcia; wyciągamy zeń tylko równania wprost się odnoszące do przykładu rozbiieranego.

Wymiary przekięć łuku są następujące :

$$\begin{aligned} \text{ściany pionowej} & \quad e = 0,010 & \quad e_3 = 0,40 \\ \text{węgielnic} & \quad \frac{90,90}{10} \\ \text{pasów poziomych} & \quad a = 0,300 & \quad c = 0,010. \end{aligned}$$

Wyrażenia momentu bezwładności odpowiadające tym wymiarom są następujące; wyrażenia te dla uniknięcia zbyt wielkiej liczby cyfr dziesiętnych pomnożone są przez 1000 000

a) w przypadku ściany pełnej

$$(64) \quad \begin{aligned} \text{Jeśli } c = 0,01 & \quad \text{wtedy } I_1 = 3333h^3 + 6400h^2 - 148h + 5,013 \\ c = 0,02 & \quad \text{» } I_2 = 3333h^3 + 9400h^2 - 58h + 5,713 \\ c = 0,03 & \quad \text{» } I_3 = 3333h^3 + 12400h^2 + 92h + 7,613; \end{aligned}$$



b) w przypadku ściany ulżonej.

$$\begin{aligned}
 \text{Jeśli } c=0,00 \quad \text{wtedy } I_0 &= 7400h^2 - 1778h + 218,247 \\
 c=0,01 \quad \text{»} \quad I_1 &= 10400h^2 - 1748h + 218,347 \\
 c=0,02 \quad \text{»} \quad I_2 &= 13400h^2 - 1658h + 219,047 \\
 c=0,03 \quad \text{»} \quad I_3 &= 16400h^2 - 1508h + 220,947.
 \end{aligned}
 \tag{65}$$

Nadając w równaniach tych na  $h$  wartości otrzymane w tablicy I i dodając do siebie po dwa wypadki otrzymane stosownie do wymiarów przecięć, przyjdziemy do wartości następujących momentów bezwładności.

Tablica III.

N° przecięć	Grubość pasów		Wysokości		Wartości liczebne 1000000 I.		
	$c$	$c'$	$h$	$h'$	Części wyższej przecięcia	Części niższej przecięcia	Przecięcia całkowitego
1	0,03	0,01	0,1819	0,3181	454,697	712,828	1167,524
2	0,03	0,01	0,1990	0,3430	543,242	841,713	1384,955
3	0,02	0,02	0,3350	0,3350	1116,516	1116,516	2333,032
4	0,01	0,02	0,4974	0,3826	1921,922	1546,225	3468,147
5	0,00	0,03	0,8188	0,3612	3723,628	1815,890	5539,518
6	0	0,03	1,086	0,482	7014,869	3304,204	10319,073
7	0	0,03	1,417	0,631	12557,199	5799,239	18356,438
8	0	0,03	1,814	0,810	21343,365	9759,507	31102,872
9	0	0,03	2,279	1,021	34600,603	15777,314	50377,919

## II. WYTRZYMAŁOŚĆ PASÓW

**Wyznaczenie parcia.** — W przykładzie rozbieganym podzieliliśmy połowę ciężki na 8 części równych i przyjęliśmy osie współrzędnych w podobny sposób jak na str. 25.

Pierwsze i dość mozolne działania przy wyliczeniu parcia zależą na wyznaczeniu momentów bezwładności każdego przecięcia; wypadki tych działań, umieszczone są w Tab. II i III.

Za pomocą wartości tych wyznaczyć można kolejno wszystkie wyrazy wchodzące do równania (11), gdzie założymy  $n = 8$ ; ostatnie wypadki działań umieszczone są w tablicy następującej :

Tablica IV.

N <sup>o</sup> przecięć.	Spółrzędne linii środkowej.		WARTOŚCI SPÓŁCZYNNIKÓW.			
	$\frac{x}{l}$	$\frac{y}{l}$	$\gamma$	$\gamma'$	$\frac{1}{l} \frac{y^2}{l^2}$	$\frac{1}{l^2 \Omega}$
1	0	0,2227	190,7450	190,745	42,479	0,214
2	$\frac{1}{8}$	0,2215	159,933	139,941	35,425	0,209
3	$\frac{2}{8}$	0,2118	90,783	68,087	19,228	0,200
4	$\frac{3}{8}$	0,2002	57,725	36,078	11,557	0,214
5	$\frac{4}{8}$	0,1772	31,988	15,994	5,668	0,214
6	$\frac{5}{8}$	0,1581	15,321	5,745	2,422	0,214
7	$\frac{6}{8}$	0,1345	7,527	1,832	0,986	0,214
8	$\frac{7}{8}$	0,1061	3,411	0,426	0,362	0,214
9	1	0,0730	1,449	0,0000	0,106	0,214

Sumując dwie ostatnie kolumny podług równania (10<sup>bis</sup>) mamy naprzód

$$\sum_0^l \frac{y^2}{l^2} = \frac{1}{2} (42,479 + 0,106) + 35,425 + \dots + 0,362 = 96,9405$$

$$\sum_0^l \frac{1}{l^2 \Omega} = \frac{1}{2} (0,214 + 0,214) + 0,209 + \dots + 0,214 = \frac{1,6930}{98,6335}$$

Mianownik więc w wyrażeniu współczynnika parcia będzie

$$(66) \quad 2 \sum_0^l \left( \frac{y^2}{l^2} + \frac{1}{l^2 \Omega} \right) = 197,267 = d$$

Następnie jeśli we wzorze (11) nadawać będziemy na  $k$  wartość zmieniającą się od  $\frac{1}{8}$  do  $\frac{1}{8}$  to jest jeżeli przypuścimy, iż ciężar  $P$  znajduje się kolejno na wszystkich przedziałach połowy cięż-



ciwy, wtedy za pomocą wartości tablicy ostatniej otrzymamy na mocy wzoru (41<sup>bis</sup>) następujące wartości współczynnika parcia odpowiadające każdemu położeniu ciężaru  $P$ ; i tak dla:

$$\begin{aligned}
 \frac{k}{n} = 0 \quad b_1 &= \frac{1}{197,267} \left[ 1 (0,00 \quad \quad \quad) + 363,476 \right] = 1,843 \\
 \text{»} = \frac{1}{8} \quad b_2 &= \frac{1}{197,267} \left[ \frac{7}{8} (75,339 + 0,00) + 98,132 \right] = 1,782 \\
 \text{»} = \frac{2}{8} \quad b_3 &= \frac{1}{197,267} \left[ \frac{6}{8} (140,764 + 159,933) + 94,419 \right] = 1,620 \\
 \text{»} = \frac{3}{8} \quad b_4 &= \frac{1}{197,237} \left[ \frac{5}{8} (124,235 + 250,716) + 42,036 \right] = 1,401 \\
 (67) \quad \text{»} = \frac{4}{8} \quad b_5 &= \frac{1}{197,267} \left[ \frac{4}{8} (111,367 + 308,441) + 16,000 \right] = 1,145 \\
 \text{»} = \frac{5}{8} \quad b_6 &= \frac{4}{197,267} \left[ \frac{3}{8} (103,033 + 340,429) + 5,131 \right] = 0,869 \\
 \text{»} = \frac{6}{8} \quad b_7 &= \frac{1}{197,267} \left[ \frac{2}{8} (99,036 + 355,750) + 1,342 \right] = 0,583 \\
 \text{»} = \frac{7}{8} \quad b_8 &= \frac{1}{197,267} \left[ \frac{1}{8} (97,078 + 363,077) + 0,213 \right] = 0,293 \\
 \text{»} = 1 \quad b_9 &= \frac{1}{197,267} [0 ( \quad \quad \quad) + 0,000] = 0,000
 \end{aligned}$$

Wyznamy obecnie powierzchnie krzywej współczynników parcia odpowiadające każdemu przedziałowi ciężwy; powierzchnie środkowe wyznaczone są za pomocą metody Simpson'a uważając krzywą współczynnów parcia jako łuk paraboliczny; powierzchnie zaś skrajne ku przyczółkom wyliczone są za pomocą metody trapezów. Zaczawszy tedy od klucza mamy

$$\begin{aligned}
 s_1 &= 0,227 & s_5 &= 0,126 \\
 s_2 &= 0,213 & s_6 &= 0,091 \\
 s_3 &= 0,189 & s_7 &= 0,055 \\
 s_4 &= 0,159 & s_8 &= 0,018
 \end{aligned}
 \tag{68}$$

**Wpływ ciężaru stałego.**— Wartość współczynnika parcia pod wpływem ciężaru stałego  $b'$ , otrzyma się w sposób dostatecznie przybliżony zastępując ten ostatni przez ciężary równe  $P$  umieszczone jednocześnie na wszystkich przedziałach ciężwy; wartość więc współczynnika parcia wyrazi się przez powierzchnię krzywej wyrażonej przez rzędne (67) zsumowane za pomocą metody Simpson'a; otrzymamy ztąd

$$(69) \quad b' = \frac{1}{24} (1,843 + 6,656 + 17,104) = 1,078,$$

ztąd wartość parcia poziomego

$$Q = 2b'p'l = 2,156p'l.$$

Wyrażenia innych sił zewnętrznych utworzonych przez ciężar stały są następujące :

$$Y_2 = p'l$$

$$M = \frac{l^2}{2} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} - 4b' \frac{y}{l} \right) p'.$$

Wykonywając działania wskazane i podstawiając wartości otrzymane w równania (16) i (17) otrzymamy kolejno wartości liczebne wyrazów wchodzących w te równania i następnie wartości współczynników wytrzymałości  $q_1$  i  $q'_1$ .

Tablica następująca przedstawia wypadki działań wykonanych

Tablica V.

N <sup>o</sup> przecięć	$\frac{Q}{\Omega p'}$	$\frac{M}{p'l}$	$\frac{M_0}{p'l}$	$q_1$	$\frac{M_0'}{p'l}$	$q'_1$
1	1268,235	+ 3,891	+ 706,198	1974,433	+ 1903,458	174,777
2	1246,243	+ 2,868	+ 474,219	1720,462	- 731,001	515,242
3	1183,686	+ 2,373	+ 361,075	1544,751	+ 361,081	822,605
4	1268,235	- 0,381	- 55,741	1212,594	- 44,222	1312,457
5	1268,235	- 1,380	- 203,979	1064,256	- 97,455	1365,690
6	1268,235	- 7,169	- 754,479	513,756	- 355,703	1623,928
7	1268,235	-13,961	-1077,700	0,535	- 502,724	1770,959
8	1268,235	-21,867	-1275,340	- 7,105	- 590,565	1858,800
9	1268,235	-30,848	-1395,448	-127,213	- 643,559	1911,794

Wpływ ciężaru przypadkowego. — a) Ciśnienia maxima pasów zewnętrznych. — Widzieliśmy powyżej (str. 13), iż ciężar umieszczony po prawej stronie przecięcia uważanego  $m$  sprawi ciśnienie na całej przestrzeni tej strony dla której

$$b \leq \frac{\left(1 + \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x'}{l}\right)}{2 \left(\frac{y}{l} - \frac{1}{v\Omega l}\right)} = y'.$$

Łatwo jest się przekonać, iż linije przedstawione przez ostatnie równanie nie przecinają krzywej współczynników parcia; na całej więc przestrzeni zaczawszy od przecięcia uważanego aż do przyczółka sąsiedniego nierówność ostatnia ma miejsce; ciężary zatem rozłożone na całej tej przestrzeni wywołają ciśnienia w przecięciu uważanem.



Widzieliśmy dalej (str. 14), iż aby ciężary umieszczone po lewej stronie przecięcia uważanego, utworzyć mogły ciśnienie w temże przecięciu potrzebny jest warunek następujący

$$b \leq \frac{\left(1 - \frac{x}{l}\right)\left(1 + \frac{x'}{l}\right)}{2\left(\frac{y}{l} - \frac{1}{v\Omega l}\right)} = y'.$$

Linije te przecinają krzywą współczynników parcia; pierwszy ich punkt przecięcia znajduje się jak wiadomo na przyczółku A; drugi zaś punkt przecięcia otrzyma się za pomocą ich rzędnej na osi Y.

Wyrażenie tej ostatniej dla  $x' = 0$  jest następujące

$$y_1' = \frac{1 - \frac{x}{l}}{2\left(\frac{y}{l} - \frac{1}{v\Omega l}\right)}.$$

Wartości tej ostatniej wyliczone dla każdego przecięcia  $\frac{x}{l}$  przedstawione są w tablicy następującej:

Tablica VI.

N <sup>o</sup>	$\frac{x}{l}$	$\frac{1}{v\Omega l}$	$y_1'$
1	0	0,0165	2,485
2	$\frac{1}{8}$	0,0178	2,147
3	$\frac{2}{8}$	0,0183	1,938
4	$\frac{3}{8}$	0,0205	1,739
5	$\frac{4}{8}$	0,0203	1,593
6	$\frac{5}{8}$	0,0285	1,447
7	$\frac{6}{8}$	0,0388	1,306
8	$\frac{7}{8}$	0,0514	1,342
9	1	0,0663	0,000

Po wykreśleniu krzywej współczynników parcia i oznaczeniu na osi Y rzędnych  $y_1'$  otrzymamy łatwo punkta przecięcia szukane za pomocą rysunku, łącząc liniami prostymi końce rzędnych  $y_1'$  z punktem podpory A. Następnie za pomocą skali ocenić możemy współczynniki  $m$  przestrzeni  $ml$ , na której ciężary rozłożone wywiążą ciśnienia w przecięciu  $m$ .

Figura 12, tab. I, przedstawia wypadki wykreśleń i długości ostateczne  $ml$ .

Po wyznaczeniu współczynników  $m$  za pomocą ostatniej figury i powierzchni im odpowiednich za pomocą tejże figury i wzorów (63) wyznaczyć możemy wartość wyrazów wchodzących do równań (28) i (29) i następnie wyznaczyć wartość współczynnika wytrzymałości pasów zewnętrznych  $q$ . Wyliczenia kolejnie wzorów zamieszczone są w tablicy następującej

Tablica VII.

N°	$\frac{x}{l}$	$m$	$s$	$\frac{Q}{\Omega p'}$	$\frac{M}{p'}$	$\frac{M v}{p' l}$	$q$
1	0	2,000	2,156	1268,235	3,891	706,198	1974,433
2	$\frac{1}{8}$	1,235	1,494	863,584	6,516	1077,409	1940,993
3	$\frac{2}{8}$	1,055	1,179	647,294	10,113	1538,818	2186,112
4	$\frac{3}{8}$	0,950	0,986	579,999	11,765	1721,254	2301,253
5	$\frac{4}{8}$	0,884	0,867	509,999	12,874	1902,915	2412,914
6	$\frac{5}{8}$	0,820	0,755	414,117	10,738	1130,088	1574,205
7	$\frac{6}{8}$	0,755	0,646	379,999	6,857	529,317	909,316
8	$\frac{7}{8}$	0,685	0,544	319,999	1,064	62,055	382,054
9	1	0,000	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000

b) *Cisnienia maxima pasów wewnętrznych.* — Warunek aby ciężar  $P$  umieszczony po prawej stronie przecięcia utworzył ciśnienie w przecięciu uważanem jest następujący (str. 14) :

$$(23) \quad b \geq \frac{\left(1 + \frac{x}{l}\right)\left(1 - \frac{x'}{l}\right)}{2\left(\frac{y}{l} + \frac{1}{v'\Omega l}\right)} = y'$$

Rzędne na osi  $Y$  tych linii mają wartości następujące dla  $x' = 0$

$$y'_1 = \frac{1 + \frac{x}{l}}{2\left(\frac{y}{l} + \frac{1}{v'\Omega l}\right)}$$



Skoro ciężar  $P$  umieszczonym jest po lewej stronie przecięcia wtedy warunek ciśnienia jest (str. 14

$$(26) \quad b \geq \frac{\left(1 - \frac{x}{l}\right)\left(1 + \frac{x'}{l}\right)}{2\left(\frac{y}{l} + \frac{1}{v'\Omega l}\right)} = y'.$$

Wyrażenie rzędnych na osi  $Y$  tych ostatnich linii jest podług wzoru (27)

$$y'_1 = \frac{1 - \frac{x}{l}}{2\left(\frac{y}{l} + \frac{1}{v'\Omega l}\right)}$$

Wyliczymy naprzód wartości rzędnych na osi  $Y$

*Tablica VIII.*

N <sup>o</sup>	$\frac{x}{l}$	$\frac{1}{\Omega v' l}$	WARTOŚCI RZĘDNYCH $y'_1$	
			Z równania (25)	Z równania (27)
1	0	0,011	2,129	2,139
2	$\frac{1}{8}$	0,014	2,398	1,857
3	$\frac{2}{8}$	0,018		1,632
4	$\frac{3}{8}$	0,026		1,381
5	$\frac{4}{8}$	0,042		1,141
6	$\frac{5}{8}$	0,060,		0,860
7	$\frac{6}{8}$	0,083		0,575
8	$\frac{7}{8}$	0,111		0,288
9	1	0,1476		0,00

Dalej za pomocą fig. 13 tab. I nakreślonej w podobny sposób jak fig. 12 wyznaczmy punkta przecięcia się ostatnich linii z krzywą współczynników parcia, co następnie pozwoli oznaczyć przestrzenie  $ml$  na których rozłożyć należy ciężar przypadkowy

Nakoniec podstawivszy w równaniach (30) i (31) wartości współczynników  $m$  i powierzchni im odpowiednich  $s$  otrzymamy wartości liczebne tych równań, które wstawione następnie w równanie (31) dadzą nam wartości ostateczne współczynnika wytrzymałości pasów wewnętrznych  $q'$ .

Oto są wypadki działań :

Tablica IX.

N <sup>o</sup> przecięc.	$\frac{x}{l}$	$m$	$s$	$\frac{Q}{\Omega p'}$	$\frac{M}{p'}$	$\frac{Mv'}{p' l}$	$q'$
1	0	0,780 0,780	0,687 0,687	808,235	— 0,175	— 49,093	857,328
2	$\frac{1}{8}$	1,000	1,078	623,121	— 3,925	— 1000,412	1623,533
3	$\frac{2}{8}$	1,105	1,269	696,706	— 7,808	— 1187,932	1884,638
4	$\frac{3}{8}$	1,210	1,384	854,118	— 9,469	— 1099,210	1953,328
5	$\frac{4}{8}$	1,320	1,627	957,059	— 13,819	— 975,895	1932,954
6	$\frac{5}{8}$	1,448	1,786	1050,588	— 16,817	— 834,309	1884,847
7	$\frac{6}{8}$	1,605	2,974	1160,924	— 20,483	— 737,575	1898,499
8	$\frac{7}{8}$	1,783	2,101	1235,714	— 24,219	— 664,086	1889,800
9	1	2,000	2,156	1268,235	— 30,848	— 643,560	1941,794

Wpływ ciężarów stałego i przypadkowego działających jednocześnie. — a) Ciśnienia maxima. — Spółczynniki ciśnień maxima otrzymują się dodając algebraicznie spółczynniki  $q_1$  i  $q'$  otrzymane powyżej; mamy bowiem na mocy wzorów (32).

Dla pasów zewnętrznych

$$R = qp - (q - q_1)p'$$

dla pasów wewnętrznych

$$R = q'p - (q' - q_1')p'.$$

Łuk, którego obliczamy wytrzymałość wchodzi w skład mostu pod kolej żelazną (Passage inférieur); ciężar stały utrzymywany przez każdy łuk na metr długości w liczbach okrągłych jest

$$p' = 640^k$$

Co do ciężaru przypadkowego, ten podług cyrkularza ministra robót publicznych z roku 1877 jest dla otworu 28<sup>m</sup>

$$p'' = 2190^k.$$

Ciężar więc całkowity w przykładzie rozbieieranym będzie

$$p = p' + p'' = 2830.$$



Po podstawieniu tych wartości w równaniu (32) i po wykonaniu działań, wartości liczebne współczynników i następnie ciśnienia ostateczne maxima na milimetr kwadratowy przecięć będą następujące :

Tablica X.

N <sup>o</sup> przecięć.	Ciśnienia maximum R na pasy zewnętrzne.		Ciśnienia maximum R na pasy wewnętrzne	
	W funkeji ciężarów	W kilogramach na mil. kw.	W funkeji ciężarów	W kilogramach na mil. kw.
1	1974,433p	<sup>k</sup> 5,59	857,328p — 682,551p'	<sup>k</sup> 4,99
2	1940,493p — 220,531p'	5,35	1623,533p — 4108,291p'	3,89
3	2186,112p — 641,361p'	5,78	1884,638p — 1062,033p'	4,65
4	2301,253p — 1088,659p'	5,84	1861,939p — 640,871p'	4,86
5	2412,914p — 1438,658p'	5,97	1932,954p — 667,264p'	5,11
6	1574,205p — 1060,449p'	3,78	1884,847p — 260,919p'	5,16
7	909,316p — 908,781p'	1,98	1898,499p — 127,540p'	5,29
8	782,054p — 389,159p'	0,83	1889,800p — 38,000p'	5,33
9	0 — 127,213p'	—0,02	1911,794p — 0	5,41

b) Ciągnięcia maxima albo ciśnienia minima. — Ciągnięcia maxima w danem przecięciu odpowiadają układom dopełniającym ciężaru przypadkowego sprawiającym ciśnienia maxima; wyznaczą się więc

Tablica XI.

N <sup>o</sup> przecięć	Ciągnięcie maximum R na pasy zewnętrzne		Ciągnięcie maximum R na pasy wewnętrzne	
	W funkeji ciężarów	W kilog. na mil. kw.	W funkeji ciężarów	W kilog. na mil. kw.
1	+ 1974,433p'		— 682,551p + 857,328p'	
2	— 220,531p + 1940,493p'		— 4108,291p + 1623,533p'	2,09
3	— 641,361p + 2186,112p'		— 1062,033p + 1884,638p'	1,79
4	— 1088,659p + 2301,253p'	1,12	— 640,871p + 1861,939p'	
5	— 1438,658p + 2412,914p'	2,28	— 667,264p + 1932,954p'	
6	— 1060,449p + 1574,205p'	1,99	— 260,919p + 1884,847p'	
7	— 908,781p + 909,316p'		— 127,540p + 1898,499p'	
8	— 389,159p + 382,054p'		— 38,000p + 1889,800p'	
9	— 127,213p + 0		+ 1911,794p'	

one za pomocą współczynników otrzymanych poprzednio zastępując (na mocy twierdzenia naszego podanego w artykule o belkach wieloprzęsłowych) w równaniach (32)  $p$  przez  $p'$  i odwrotnie; otrzymamy ztąd wyrażenia ogólne następujące

Dla pasów zewnętrznych

$$R = -(q - q_1)p + qp';$$

i dla pasów wewnętrznych

$$R = -(q' - q'_1)p + q'p'.$$

Ciągnienia przedstawione będą przez wartości ujemne ostatnich współczynników; wartości ich dodatnie przedstawia najmniejsze ciśnienia

Po wykonaniu działań otrzymamy w tablicy następującej wartości ostatnich współczynników i w końcu największe natężenia ciśnień na jednostkę przyjętą powierzchni, to jest na milimetr kwadratowy; ostatnie te wartości są wyznaczone tylko dla przecięć gdzie natężenie  $R$  jest maximum.

Tablica XII.

N°	WARTOŚCI WYRAZÓW		ZWIĘKSZENIE LUB ZMNIJSZENIE CIŚNIEŃ NA MILIMETR KWADR.	
	$\frac{1}{\Omega} - y\frac{1}{v}$	$\frac{1}{\Omega} + y\frac{1}{v}$	na pasy zewnętrzne	na pasy wewnętrzne
1	- 524,170	918,005	0 <sup>k</sup> ,70	1 <sup>k</sup> ,23
2	- 471,457	813,916	0,63	1,09
3	- 411,767	490,199	0,55	0,66
4	- 367,688	367,660	0,49	0,49
5	- 324,820	217,149	0,43	0,29
6	- 190,989	152,869	0,25	0,20
7	- 103,337	109,822	0,14	0,15
8	- 44,649	82,149	0,06	0,11
9	- 4,169	63,316	0,01	0,08

Tablica ostatnia wskazuje, iż w łukach sztywnych zniżonych na  $\frac{1}{10}$  ciągnienia są bardzo małe; głównie więc wymiary tych łuków wyznaczyć należy z punktu widzenia wytrzymałości podczas ciśnienia.

**Wpływ zmiany temperatury.** — W klimatach średnich przyjmuje się zwykle, iż temperatura zmienia się o 30° wyżej lub niżej od temperatury, w której łuk się ustawia, i która stosownie się dobiera w porze wiosennej. Naturalnie iż w klimatach zimniejszych zmianę powyższą należy liczyć na większą liczbę stopni.

Przyjmując zmienność temperatury na 30°, rozszerzalność liniowa całkowita żelaza odpowiadająca tej zmianie będzie

$$\tau = 30 \times 0,000012 = 0,00036.$$



Podstawiając tę wartość w równanie (32<sup>ter</sup>) zakładając w niem  $E = 10^8 \times 180$  otrzymamy parcie dodatkowe odpowiadające rozszerzalności

$$Q = E\tau \frac{n}{l^2 d} = \frac{51840000}{38664,332} = 1340,77.$$

Następnie wprowadzając tę wartość w wyrażenie (32<sup>iv</sup>) otrzymamy zwiększenie ciśnienia lub ciągnięcia, dla pasów zewnętrznych i wewnętrznych łuku.

Uważajmy tutaj, iż summa wszystkich ciśnień któreśmy wyznaczyli może tylko mieć miejsce w okolicznościach zupełnie wyjątkowych zniżenia lub podwyższenia temperatury, przy jednoczesnym umieszczeniu ciężarów przypadkowych w położeniach najniekorzystniejszych co do wytrzymałości, i to tylko podczas krótkich chwil.

Można więc w wielu razach opuścić wpływ rozszerzalności szczególnie w przypadkach, gdzie zwiększenie ciśnienia w skutek wpływu tej ostatniej jest, jak w obecnym przykładzie, niewielkiem.

### III. — WYTRZYMAŁOŚĆ ŚCIANY PIONOWEJ

Wspomnieliśmy w rozdziale III<sup>im</sup> iż części składowe ściany pionowej przedstawiać winny wymiary dostateczne aby stanowić opór przeciw nateżeniu siły D którą oznaczyliśmy nazwiskiem *siły podłużnej*.

Wyrażenie tej siły w przypadku ogólnym jest następujące (równanie 33<sup>b</sup>)

$$Ddx = Q \frac{d\Omega_1}{dx} dx + U \frac{dM}{dx} dx + M \frac{dU}{dx} dx.$$

Zajmiemy się naprzód wyznaczeniem wartości rozmaitych wyrazów wchodzących w skład ostatniego równania.

Uważajmy tu iż siła D zmienia się z wyrazem  $\Omega_1 v_2$ ; a ponieważ w rachunkach następnych potrzebna jest tylko największa wartość tej siły wyraz więc  $\Omega_1 v_2$  wyliczyć należy w przypadku gdy on ma największą wartość która ma miejsce jak wiadomo z wytrzymałości materiałów, jeśli na  $\Omega_1$  przyjmie się całkowitą część znajdującą się po nad linią środkową AB (fig. 12<sup>bis</sup>).

**Wpływ ciężaru stałego.** — W przypadku ciężaru stałego wyrażenie siły podłużnej D jest następujące (równanie 35)

$$(35) \quad D = -l \left[ U \frac{x}{l} - l \frac{dU}{2dx} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right) + 2b'\beta \right] p' = q_2 p'.$$

Wartości liczebne wyrazów tego równania otrzymane są za pomocą metod uproszczonych następujących :

Wyznaczenie n wartości  $U = \frac{\Omega_1 V_2}{I}$ . Przypominamy tutaj iż dla uproszczenia budowy wymiary przecięć  $a', a'', c_1, c_2$  i  $c$  (fig. 12) są stałe na całej długości łuku i podłużnika; nadto wysokość  $c_3$  jest równie stałą w częściach bocznych łuku; jedyne ilości zmienne są :  $h, h', c$  i  $c'$ ; dwie ostatnie zmieniają od 0,01 do 0,01.

W przypadku tym wyrażenia ilości  $\Omega_1 V_2$  są następujące; wypadki te jak równie i momentów bezwładności podane poprzednio są pomnożone przez 4 000 000.

a) W części środkowej łuku gdzie ściana pionowa jest pełną

$$\text{dla } c = 0,03 \quad \text{mamy :} \quad \Omega_1 v_2 = 5000h^2 + 12400h + 46,$$

$$\text{» } c = 0,02 \quad \text{»} \quad \Omega_1 v_2 = 5000h^2 + 9400h - 29.$$

b) W częściach bocznych łuku gdzie ściana ta jest ulżoną

$$\text{dla } c = 0,02 \quad \text{mamy :} \quad \Omega_1 v_2 = 13400h - 829,$$

$$\text{» } c = 0,01 \quad \text{»} \quad \Omega_1 v_2 = 10400h - 874,$$

$$\text{» } c = 0,00 \quad \text{»} \quad \Omega_1 v_2 = 7400h - 889.$$

Podstawiając w równaniach tych na wysokość  $h$  wartości liczebne wyliczone poprzednio dla momentów bezwładności, otrzymamy wypadki zawarte w tablicy następującej

Tablica XIII.

	N <sup>o</sup> przecięć	$h$	$c$	1000000 $\Omega_1 v_2$	U
Ściana pełna.	1	0,1819	0,03	2466,998	2,113
	2	0,1990	0,03	2671,605	1,929
	3	0,3350	0,02	3951,125	1,698
	4	0,4974	0,01	4298,960	1,240
	5	0,8188	0,00	5170,120	0,933
Ściana ulżona.	6	1,086	0	7147,400	,692
	7	1,417	0	9596,800	0,522
	8	1,814	0	12534,600	0,400
	9	2,279	0	15975,600	0,317

Wyznaczenie wartości  $\frac{\Omega_1}{\Omega}$ . Wartości tego stosunku dla przecięcia któregokolwiek otrzymują się bardzo łatwo zapomocą wzorów następujących :

W przypadku ściany pionowej pełnej

$$\frac{\Omega_1}{\Omega} = \frac{\Omega + a(c - c') + e(h - h')}{2\Omega}.$$

W przypadku ściany ulżonej

$$\frac{\Omega_1}{\Omega} = \frac{\Omega + a(c - c')}{2\Omega}.$$



Podstawiając zamiast liter drugiego wyrazu, ostatnich dwóch równań, wartości ich otrzymane poprzednio, przyjdziemy kolejno do wypadków następujących :

Tablica XIV.

N <sup>o</sup> przecięć	$\Omega$	$a(c-c')$	$e(h-h')$	$\frac{\Omega_1}{\Omega}$
1	0,02380	0,006	— 0,001362	0,5974
2	0,02422	0,006	— 0,001340	0,5941
3	0,02550	0,000	— 0,000	0,5000
4	0,02380	— 0,003		0,4370
5	0,02380	— 0,009		0,3109
6	0,02380	— 0,009		0,3109
7	0,02380	— 0,009		0,3109
8	0,02380	— 0,009		0,3109
9	0,02380	— 0,009		0,3109

Ściana pełna. — Ściana ulżona.

*Wyznaczenie pochodnych funkcji wchodzących w skład równania (33).* Pochodne te wyznaczają się za pomocą metody wskazanej na str. 19 która się stosuje do wszystkich przypadków gdzie się nie zna równania funkcji.

Stosując tedy równania (37) i (38) do przykładu rozbieranego to jest zastępując w tych równaniach  $y$  kolejno przez  $U$  i  $\frac{\Omega_1}{\Omega}$ ; uważając nadto, iż wskutek symetrii łuku względem prostopadłej przechodzącej przez połowę cięciwy, pochodna dla  $x = 0$  jest zawsze zerem, otrzymamy wypadki następujące :

Tablica XV.

N <sup>o</sup> przecięć	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{dU}{dx}$	$\frac{d \frac{\Omega_1}{\Omega}}{dx}$
1	0,0000	0,000	0,0000
2	— 0,0437	— 0,1186	— 0,0278
3	— 0,0853	— 0,1826	— 0,0449
4	— 0,1382	— 0,2171	— 0,0540
5	— 0,1682	— 0,1566	— 0,0363
6	— 0,1709	— 0,1160	— 0,0000
7	— 0,2080	— 0,1833	0,
8	— 0,2463	— 0,0586	0,
9	— 0,2851	— 0,0363	0,

Możemy teraz zapomocą trzech ostatnich tablic XIII, XIV i XV wyznaczyć z wielką łatwością wyrazy równania (35) i następnie wartość ostateczną współczynnika  $q_2$ .

Oto są wypadki działań.

Tablica XVI.

N <sup>o</sup> przecięć	$\frac{l}{2} \times \frac{dU}{dx}$	$U \frac{dy}{dx}$	$y \frac{dU}{dx}$	$\beta$	$q_2$
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	— 0,8302	— 0,0843	— 0,3678	— 0,4243	— 1,4909
3	— 1,2782	— 0,1448	— 0,5414	— 0,6413	— 2,1585
4	— 1,5197	— 0,1714	— 0,6084	— 0,7258	— 2,4058
5	— 1,0962	— 0,1569	— 0,3886	— 0,5092	— 1,098
6	— 0,8120	— 0,1183	— 0,2568	— 0,3751	— 0,871
7	— 0,5831	— 0,1086	— 0,1568	— 0,2654	— 0,428
8	— 0,4102	— 0,0985	— 0,0871	— 0,1856	— 0,121
9	— 0,2301	— 0,0904	— 0,0371	— 0,1275	— 0,035

**Wpływ ciężaru przypadkowego.** — Wartości siły podłużnej pod wpływem ciężaru stałego są odjemne jak to widać z ostatniej tablicy, zajmiemy się więc tylko wyznaczeniem granicy odjemnej tej siły przy rozmaitych układach ciężaru przypadkowego; ponieważ w tym razie tylko wypadki otrzymane będą największe możebne.

Na mocy równania (39) mamy warunek następujący aby ciężar umieszczony po prawej stronie przecięcia uważanego, nadać mógł wartość odjemną wyrażeniu siły podłużnej,

$$b \leq y'$$

zakładając

$$y' = \frac{\left[ U + \left( 1 + \frac{x}{l} \right) \frac{dU}{dx} \right] \left( 1 - \frac{x'}{l} \right)}{2\beta},$$

Wartości rzędnej na osi  $y$  linii przedstawionych przez ostatnie równanie jest

$$y'_1 = \frac{U + \left( 1 + \frac{x}{l} \right) \frac{dU}{dx}}{2\beta}.$$

Podobnie na mocy równania (40) mamy warunek następujący aby ciężar umieszczony po lewej



stronie przecięcia uważanego, nadać mógł wyrażeniu siły podłużnej w tem przecięciu wartość odjemną,

$$b \leq y',$$

zakładając

$$y' = - \frac{\left[ U - \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \frac{ldU}{dx} \right] \left( 1 + \frac{x}{l} \right)}{2\beta}.$$

Rzędne na osi  $y$  linii przedstawionych przez równanie ostatnie mają wyrażenie następujące

$$y'_1 = - \frac{U - \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \frac{ldU}{dx}}{2\beta}.$$

Wartości liczebne rzędnych na osi  $y$  wyliczone są w tablicy następującej

Tablica XVII.

N° przecięć	$\left( 1 - \frac{x}{l} \right) \frac{ldU}{dx}$	$U - x \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \frac{ldU}{dx}$	Rzędne $y'_1$	
			Równ. (39)	Równanie (40)
1	0	2,113	$-\infty$	$+\infty$
2	— 1,4528	3,382	— 0,071	3,985
3	— 1,9173	3,615	† 1,498	2,818
4	— 1,8996	3,139	2,939	2,162
5	— 1,0962	2,029	2,356	1,992
6	— 0,6090	1,301		1,734
7	— 0,2916	0,8136		1,533
8	— 0,1025	0,5025		1,352
9	— 0,0	0,517		1,243

Wykreśliwszy krzywą współczynników parcia  $b$  i odciawszy na osi  $y$  długości proporcjonalne rzędnych  $y'_1$  na tejsze samej skali co i rzędne  $b$ , i nakoniec połączywszy linijami prostemi końce rzędnych  $y'_1$  z punktem A otrzymamy punkta przecięcia się tych linii które pozwolą nam następnie ocenić zapomocą skali długości  $m$  i  $m'$  odpowiadające przestrzeni  $(m - m')l$  dla której  $b < y'$ . Szczegóły tych wykreśleń wskazane są na fig. 14, tab. I.

Po wyznaczeniu długości  $m$  i  $m'$  możemy wyznaczyć następnie powierzchnię krzywej  $b$  odpowiadającą przestrzeni  $(m - m')l$ .

Następnie wartości te wstawione w równanie (41) dadzą wartości ostateczne współczynnika  $q'_2$ .

Po wykonaniu działań wskazanych otrzymamy wypadki zawarte w tablicy następującej.

*Tablica XVIII.*

N <sup>o</sup> przecięć	$m$	$m'$	$S_{m-m'}$	$\frac{m^2-m'^2}{4}$	$S\beta$	$q'_2$
1	1,000	0,0	1,078	0,2500	0,	7,396
2	1,125	0,0	1,305	0,3164	— 0,554	7,224
3	1,250	0,0	1,518	0,3906	— 0,837	8,050
4	1,375	0,775	1,028	0,3225	— 0,746	3,728
5	1,500	0,919	0,930	0,3263	— 0,474	2,632
6	2,000	1,058	0,971	0,7201	— 0,364	8,033
7	2,000	1,150	0,807	0,6694	— 0,214	4,642
8	2,000	1,230	0,671	0,6218	— 0,125	2,625
9	1,280	1,280	0,590	0,5904	— 0,075	1,571

Natężenie siły podłużnej wywarne pod wpływem ciężarów stałego i przypadkowego działających jednocześnie. — Dodając algebraicznie wypadki otrzymane pod wpływem ciężarów stałego i przypadkowego podług wzorów ogólnych (42) i (43) przyjdziemy kolejno do wypadków zawartych w tablicy XIX.

Pierwsza kolumna tej tablicy zawiera wartości D w funkcyi ciężarów  $p$  i  $p'$  druga zaś podaje tę wartość w kilogramach. Tenże sam skład przedstawiają dwie ostatnie kolumny tej tablicy dające wartości dodatnie siły D.

Przypominamy iż wypadki otrzymane dają natężenie siły podłużnej na jednostkę długości.

*Tablica XIX.*

N <sup>o</sup> przecięć	Wartości odjemne siły podłużnej D		Wartości dodatnie siły podłużnej D	
	W funkcyi ciężarów	W kilogramach	W funkcyi ciężarów	W kilogramach
1	— 7396 $p$ + 7396 $p'$	— 16198	7396 $p$ — 7396 $p'$	16198
2	— 7224 $p$ + 5733 $p'$	— 16775	5733 $p$ — 7224 $p'$	11601
3	— 8050 $p$ + 5893 $p'$	— 19010	5893 $p$ — 8050 $p'$	11525
4	— 3728 $p$ + 1322 $p'$	— 9704	1322 $p$ — 3728 $p'$	1363
5	— 3346 $p$ + 4444 $p'$	— 6625	4444 $p$ — 3346 $p'$	10435
6	— 2790 $p$ + 3661 $p'$	— 5553	3661 $p$ — 2790 $p'$	8575
7	— 2293 $p$ + 2721 $p'$	— 4748	2721 $p$ — 2293 $p'$	6232
8	— 1835 $p$ + 1956 $p'$	— 3941	1956 $p$ — 1835 $p'$	4361
9	— 1571 $p$ + 1606 $p'$	— 3418	1606 $p$ — 1571 $p'$	3540



Rozkład ciśnień i ciągnięć w rozmaitych częściach ściany pionowej wywartych pod wpływem siły podłużnej  $D$ . — W części środkowej łuku ściana pionowa jest pełną; natężenie więc siły podłużnej w tej części łuku wyznaczy się za pomocą wzoru (44) gdzie założywszy  $e = 0,010$  otrzymamy

$$R = 100D.$$

Stosując ten wzór do czterech pierwszych przecięć łuku odpowiadających ścianie pełnej, przyjdziemy do następujących natężeń tej siły na millimetr kwadratowy

dla przecięcia	N° 1	mamy	$R = 1^k,62$
»	N° 2	»	$R = 1^k,68$
»	N° 3	»	$R = 1^k,90$
»	N° 4	»	$R = 0^k,97.$

W częściach bocznych łuku gdzie ściana pionowa jest uloną natężenie siły podłużnej, jakieśmy o tem wspomnieli wyżej, wyliczone na przedział zawarty między dwoma punktami sąsiednimi krzyżowania się sztab łączących łuk z podłużnikiem, winno być zrównoważone wytrzymałością tychże sztab.

Sztaby te w przykładzie rozbieżnym ułożone są podług systemu N° 3 (fig. 10) to jest kierunki ich są naprzemian pionowe i pochyle; wyznaczenie zatem ich przecięcia wyliczy się za pomocą wzorów (53) i (54). Jeśli tedy założymy w tych wzorach  $dx = \frac{l}{n} = 1,75$  i  $R = 5000000$  to otrzymamy dla sztab pochyłych :

$$T_2 = \frac{1,75D}{\sin \alpha} = Rn\omega',$$

i ze wzoru (54) dla sztab pionowych

$$T_2 = 1,75(-\cot \alpha + p) = Rn\omega'$$

ze wzorów ostatnich otrzymamy wyrażenia następujące powierzchni przecięć  $n\omega$  jaką nadać należy sztabom aby natężenie maximum sił na jednostkę powierzchni nie przewyższyło granicy przyjętej.

I tak dla sztab pochyłych  $T$  przecięcie żądane będzie

$$n\omega = \frac{D}{R} \times \frac{1,75}{\sin \alpha}.$$

Dla sztab zaś pionowych

$$n\omega = -\frac{D}{R} 1,75 \cot \alpha + 1,75 \frac{p}{R}.$$

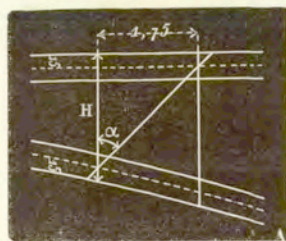


Fig. 13.

Podług wymiarów łuku linie przechodzące przez punkta krzyżowań się sztab ściany pionowej są równoległe do krawędzi węgielnic zewnętrznych i wewnętrznych i przechodzą w odległości 0,15 od krawędzi skrajnych tychże węgielnic; w tym razie wartości linii trygonometrycznych ostatnich wzorów będą następujące

$$\frac{1,75}{\sin \alpha} = \sqrt{(H - 0,30)^2 + 1,75^2},$$


$$1,75 \cot \alpha = H - 0,30.$$

Wykonywając działania wskazane i zakładając  $R = 5000000$  przyjdziemy kolejno do wypadków następujących :

Tablica XX.

N <sup>o</sup> przecięć	$\frac{D}{R}$	$\frac{1,75}{\text{wst } \alpha}$	1,75doty $\alpha$	Przecięcie $n\omega$ w mill kw. sztab pochyłych		Przecięcie $n\omega'$ sztab pionowych	
				Wyliczone	Rzeczywiste	Wyliczone	Rzeczywiste
5	— 1325	1,844	0,580	2443	4936	1760	4744
6	— 1110	1,958	0,880	2173	4936	1968	4744
7	— 2949	2,161	1,268	2051	4936	2194	4744
8	— 1788	2,473	1,748	1949	4936	2368	4744
9	— 684	2,909	2,324	1989	4936	2489	4744

Skład przecięć nadanych sztabom jest następujący :

Sztaby pochyłe są uformowane z dwóch żelaz w kształcie  mających wymiary  $\frac{175 \times 60}{8 \times 10^4}$ ; których ciężar na metr długości wynosi 19<sup>k</sup>,25.

Sztaby pionowe składają się z czterech węgielnic  $\frac{80.80}{8}$ , ważących każda 9<sup>k</sup>,55 na metr bieżący.

**Wpływ zmiany temperatury.** — Ciągnięcia lub ciśnienia, rozmaitych części ściany pionowej utworzone pod wpływem zmiany temperatury wyznaczą się za pomocą wzoru (55).

Przyjmując też same granice zmienności temperatury i też samą wartość na współczynnik sprężystości jak poprzednio (str. 4) to jest

$$\tau = 30^\circ \times 0,000012 = 0,00036, \quad E = 108 \times 10^8;$$

i podstawiając je w równanie (55); otrzymamy wartości szukane zwiększenia ciśnień lub ciągnięć.

Mamy naprzd dla przestrzeni środkowej łuku na mocy wzoru (44)

dla przecięcia N <sup>o</sup> 1	$R = 0^k,00,$
» N <sup>o</sup> 2	$R = 0^k,06,$
» N <sup>o</sup> 3	$R = 0^k,09,$
» N <sup>o</sup> 4	$R = 0^k,10.$

Następnie stosując wzory (53) otrzymamy dla części bocznych łuku wypadki zawarte w tablicy XXI.

Widzimy w tej tablicy, iż największe ciśnienia lub ciągnięcia pod wpływem zmiany temperatury na 30°, nie osiągają jednej trzeciej kilograma na milimetr kwadratowy przecięcia; obliczanie więc zwiększenia tego może być opuszczonem w wielu razach w zastosowaniach, szczególnie gdy otwór łuku jest stosunkowo nie wielkim. W przypadkach tylko gdy otwór łuku jest znacznym, to jest



gdy on osiąga lub przechodzi 100 metrów, wtedy dobrze jest zapewnić się o natężeniach ostatecznych sił międzycząsteczkowych w każdej jego części.

Tablica XXI.

N <sup>o</sup> przecięć	Wartości 1,75 D	Zwiększenie ciśnień lub ciągnięć na mil. kw.	
		Sztab pochyłych	Sztab pionowych
5	1194,76	0,255	0,073
6	880,12	0,117	0,081
7	622,72	0,156	0,081
8	435,48	0,125	0,080
9	299,16	0,098	0,073

#### IV. ODKSZTAŁCENIA ŁUKU.

a) **Odkształcenie pod wpływem ciężarów.** — Wspomnieliśmy wyżej na str. 25 iż w zastosowaniach wyznacza się zmienność strzałki w dwóch tylko przecięciach to jest w kluczu i w połowie części bocznych; do tych więc przypadków zastosujemy równania części pierwszej.

*Odkształcenie w kluczu.* — Uważajmy naprzód, iż ciężary symetrycznie umieszczone względem połowy otworu, dają w tem miejscu zmiany rzędnej  $y$ , równe i tegoż samego znaku; dostatecznym więc będzie wyznaczyć wpływ ciężarów umieszczonych na pierwszej połowie łuku, to jest na lewo od przecięcia w kluczu i podwoić następnie wypadek otrzymany; dla wyznaczenia zaś tego ostatniego wpływu samo równanie (58) wystarczy.

I tak założywszy w tem równaniu  $x_1 = l$  otrzymamy naprzód na mocy równania (56)

$$(60) \quad H_l = -l^2 \left( \int_0^l \frac{1}{\Omega l^2} \frac{dy}{dx} dx - \int_0^l \frac{x}{l} \cdot \frac{y}{ll} dx \right),$$

następnie równanie (58) stanie się dla przypadku rozbieranego

$$\Delta y_l = \frac{Pl^2}{E} \left( \frac{\partial H_l}{\partial l^2} - \frac{1}{2} \int_0^{x'} \frac{x}{l} \cdot \frac{x}{ll} dx - \frac{x'}{2l} \int_{x'}^l \frac{x}{ll} dx \right) = \frac{Pl^2}{E} \delta.$$

Wartości wyrazów  $\frac{1}{\Omega l^2}$ ,  $\frac{x}{l}$  i  $\frac{x}{ll}$  znane są z tablicy IV, wartości zaś wyrazów  $\frac{dy}{dx}$  z tablicy, możemy więc za pomocą tych wartości uformować szeregi wyrazów wchodzących do ostatnich równań; wartości te zamieszczone są w tablicy następującej, przypominamy tu iż początek spółrzędnych znajduje się nie w połowie otworu ale na lewej podporze łuku (w punkcie A fig. 3).

Stosując metodę używaną poprzednio otrzymamy, za pomocą tablicy XXII, dla całek wchodzących w ostatnie równania wartości przybliżone następujące :

$$\int_0^l \frac{1}{\Omega l^2} \frac{dy}{dx} = 0,2561,$$

$$\int_0^l \frac{x}{l} \frac{y}{ll} = 363,4767.$$

Wyrażenie zatem  $H_l$  będzie :

$$H_l = (363,4767 - 0,2661)l^2 = 363,2206l^2.$$

Tablica XXII.

N <sup>o</sup> przecięć	$\frac{1}{\Omega^2} \frac{dy}{dx}$	$\frac{x}{l} \frac{y}{ll}$	$\frac{x}{l} \frac{x}{ll}$	$\frac{x}{ll}$
1	0,0610	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0527	0,4264	0,5024	4,0189
3	0,0445	1,8317	3,4048	13,6192
4	0,0366	5,7454	13,6277	36,3405
5	0,0366	15,9940	45,1303	90,2606
6	0,0296	36,0781	112,6322	180,2115
7	0,0171	68,0872	241,1026	321,4701
8	0,0091	139,9414	552,8158	631,7895
9	0,0000	190,7450	856,5134	856,5134

Umieszczając następnie ciężar P kolejno na wszystkich przecięciach pierwszej połowy łuku i wykonyując działania odpowiednie podług metody wskazanej na str. 34 przyjdziemy kolejno do wartości następujących dla współczynników odkształcenia  $\delta$ . I tak :

$$\begin{aligned} \text{dla } x' = 0 & \text{ mamy } \delta_0 = 0,00 - 0,00 - 0,00 = 0,000 \\ x' = \frac{1}{8} & \text{ „ } \delta_1 = 106,424 - 0,126 - \frac{1}{16} \times 1703,958 = -0,200 \\ x' = \frac{2}{8} & \text{ „ } \delta_2 = 211,757 - 1,102 - \frac{1}{8} \times 1695,139 = -1,237 \\ x' = \frac{3}{8} & \text{ „ } \delta_3 = 315,638 - 5,361 - \frac{3}{16} \times 1670,159 = -2,878 \\ x' = \frac{4}{8} & \text{ „ } \delta_4 = 415,887 - 20,050 - \frac{1}{4} \times 1606,858 = -5,878 \\ x' = \frac{5}{8} & \text{ „ } \delta_5 = 508,872 - 59,491 - \frac{5}{16} \times 1471,622 = -10,501 \\ x' = \frac{6}{8} & \text{ „ } \delta_6 = 588,417 - 147,924 - \frac{3}{8} \times 1220,781 = -17,300 \\ x' = \frac{7}{8} & \text{ „ } \delta_7 = 647,259 - 346,404 - \frac{7}{16} \times 744,151 = -24,711 \\ x' = 1 & \text{ „ } \delta_8 = 669,416 - 698,736 - 0 = -29,320. \end{aligned}$$

Ostatni szereg wzorów pokazuje naprzód, iż wszystkie wartości dla współczynników odkształcenia  $\delta$  są ujemne, wypada ztąd ten ważny fakt, iż w przyjętym łuku *nie*ma zupełnie *wzniesienia*



w kluczu, jakimkolwiek jest położenie ciężarów, strzałka tylko tego przecięcia zmienia tylko swą długość pod wpływem ciężarów zewnętrznych, i największa jej wartość odpowiada ciężarom jednocześnie umieszczonym na wszystkich podziałach ciężkiwy, albo co na jedno wychodzi ciężarowi jednostajnie rozłożonemu na całej długości łuku.

Spółczynnik odkształcenia utworzonego pod wpływem tego ostatniego ciężaru wyrazi się przez powierzchnię objętą krzywą współczynników  $\delta$ , krzywa ta wykreślona jest na fig. 15, tab. I i powierzchnia nią objęta obliczona za pomocą metody SIMPSONA jest :

$$S = \frac{1}{3n} (\delta_0 + \delta_0 + 4(\delta_2 + \delta_4 + \delta_6 + \delta_8) + 2(\delta_3 + \delta_5 + \delta_7)) l = 9,638l.$$

Wartości zatem strzałki w kluczu, mając na uwadze drugą połowę łuku również obciążoną, na mocy wzoru (60) będą :

$$\Delta y_l = \frac{p l^2}{E} \times 2S = \frac{p l^3}{E} \times 19,266.$$

Stosując wartość tę do przykładu rozbieranego, to jest, nadając na  $p$  wartości  $p' = 640^k$ ;  $p = 2830^k$ ; następnie zakładając  $l = 14^m$  i nakoniec przyjmując na współczynnik sprężystości  $E$  wartość  $180 \times 10^8$ , otrzymamy strzałki następujące :

$$\text{pod wpływem ciężaru stałego } p', \Delta y_l = \frac{640 l^2}{E} \times 19,266 = 0^m,00192,$$

$$\text{» » ciężaru całkowitego } p, \Delta y_l = \frac{2830 l^3}{E} \times 19,266 = 0^m,00847.$$

Zmiana całkowita rzędnej w kluczu podczas przejazdu pociągów, gdyby ciężar ich równał się ciężarowi przyjętemu, wyrażoną będzie przez różnicę dwóch ostatnich wartości, to jest, przez strzałkę łuku która przejdzie nieco  $6\frac{1}{2}$  milimetrów. Obaczmy niżej iż strzałka ta jest połową prawie strzałki jakąby przyjęła belka prosta tegoż samego otworu umieszczona w tychże samych warunkach co łuk sztywny.

b) *Odkształcenie w połowie części bocznych łuku.* — Podstawiając na wyrażenie  $H_1$  w równania (56)  $x_1 = \frac{l}{2}$ , otrzymamy po uproszczeniu :

$$H_1 = -l^2 \left( \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{\Omega l^2} \frac{dy}{dx} dx - \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x}{l} \frac{y}{l} dx - \frac{1}{2} \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{y}{l} dx \right).$$

Wartości kolejne dwóch pierwszych całek zawarte są w tablicy XXII, wartości zaś wyrazu ostatniego w tablicy IV; wykonywając tedy odpowiednie działania otrzymamy :

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{\Omega l^2} \frac{dy}{dx} dx = 0,1823,$$

$$\times \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x}{l} \frac{y}{l} dx = 16,0005,$$

$$\frac{1}{2} \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{y}{l} dx = 209,9040,$$

wartość zatem współczynnika  $H_1$  będzie

$$H_1 = (16,0005 + 209,9040 - 0,1823)l^2 = 226,087l^2.$$

Zakładając następnie w równaniach (58) i (59)  $x_1 = \frac{l}{2}$ , otrzymamy, w przypadku uważanym, po uproszczeniu.

Dla ciężarów umieszczonych po lewej stronie przecięcia  $x_1$

$$\Delta y_{\frac{l}{2}} = \frac{Pl^2}{E} \left[ \frac{\delta H_1}{l^2} - \frac{3}{8} \left(1 - \frac{x'}{2l}\right) \int_0^{x'} \frac{x}{l} \frac{x}{l} dx - \frac{3}{8} \frac{x'}{l} \int_{x'}^{\frac{l}{2}} \left(2 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l} dx - \frac{x'}{8l} \int_{\frac{l}{2}}^{2l} \left(2 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{dx}{l} \right] = \frac{pl^2}{E} \delta.$$

Dla ciężarów zaś umieszczonych po prawej stronie przecięcia  $x_1$

$$\Delta y_{\frac{l}{2}} = \frac{Pl^2}{E} \left[ \frac{\delta H_1}{l^2} - \frac{3}{4} \left(1 - \frac{x'}{2l}\right) \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x}{l} \frac{x}{l} dx - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x'}{2l}\right) \int_{\frac{l}{2}}^{x'} \left(2 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l} dx - \frac{x'}{8l} \int_{x'}^{2l} \left(2 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{dx}{l} \right] = \frac{pl^2}{E} \delta.$$

Wartości pierwszych całek dwóch ostatnich wyrażeń otrzymamy za pomocą tablicy XXII; pozostaje tylko ułożyć tablicę dla wyrazów pozostałych  $\left(2 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l}$  i  $\left(2 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{1}{l}$ .

Tablica XXIII.

N <sup>o</sup> przecięć	$\left(2 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l}$	$\frac{1}{l} \left(2 - \frac{x}{l}\right)^2$	N <sup>o</sup> przecięć	$\left(2 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l}$	$\frac{1}{l} \left(2 - \frac{x}{l}\right)^2$
1	0,0000	79,4010	10	710,7632	552,8158
2	7,5355	113,1527	11	401,8376	241,1026
3	23,8336	166,8352	12	247,7908	112,6322
4	59,0533	255,8975	13	135,3908	45,1303
5	135,3908	406,1725	14	59,0533	13,6277
6	247,7908	545,1398	15	23,8336	3,4048
7	401,8376	669,7293	16	7,5355	0,5024
8	710,7632	913,8383	17	0,0000	0,0000
9	856,5134	856,5134			

Zapomocą tablicy ostatniej wyznaczyć możemy wartości przybliżone całek dwóch ostatnich równań i następnie wartości współczynników  $\delta$ . Przedostatnie równanie stosuje się do przestrzeni od  $x' = 0$  do  $x' = \frac{l}{2}$  to jest do pięciu pierwszych przecięć łuku i wyznaczy nam 5 pierwszych wartości współczynnika  $\delta$ ; pozostałe wartości tegoż współczynnika wyznaczone będą przez równanie ostatnie, które stosuje



się do przestrzeni zawartej między  $x' = \frac{l}{2}$  i  $x' = 2l$ ; ułożywszy tedy tablicę podobną do przedstawionej na stronie 51, przyjdziemy kolejno do wypadków następujących :

dla $x' = 0$	mamy $\delta_0 =$	0,000	dla $x' = \frac{9}{8}$	mamy $\delta_9 = +$	3,555
$x' = \frac{1}{8}$	» $\delta_1 = -$	6,131	$x' = \frac{10}{8}$	» $\delta_{10} =$	9,105
$x' = \frac{2}{8}$	» $\delta_2 = -$	12,572	$x' = \frac{11}{8}$	» $\delta_{11} =$	11,815
$x' = \frac{3}{8}$	» $\delta_3 = -$	18,618	$x' = \frac{12}{8}$	» $\delta_{12} =$	11,790
$x' = \frac{4}{8}$	» $\delta_4 = -$	23,530	$x' = \frac{13}{8}$	» $\delta_{13} =$	10,065
$x' = \frac{5}{8}$	» $\delta_5 = -$	24,506	$x' = \frac{14}{8}$	» $\delta_{14} =$	7,212
$x' = \frac{6}{8}$	» $\delta_6 = -$	21,452	$x' = \frac{15}{8}$	» $\delta_{15} =$	3,882
$x' = \frac{7}{8}$	» $\delta_7 = -$	14,543	$x' = 2$	» $\delta_{16} =$	0,000
$x' = 1$	» $\delta_8 = -$	5,086			

Po wykreśleniu krzywej współczynników odkształcenia  $\delta$  (fig. 16, tab. I) przekonamy się iż zniżenie maximum przecięcia uważanego ma miejsce wtedy gdy ciężar przypadkowy rozłożony jest na przestrzeni  $1,062l$  zaczynając od podpory A; obliczając tedy powierzchnię odjemną odpowiadającą tej przestrzeni objętej krzywą współczynników  $\delta$  mamy :

$$S' = \frac{1}{3n} \left[ \delta_1 + \delta_9 + 4(\delta_3 + \delta_4 + \delta_6 + \delta_8) + 2(\delta_5 + \delta_7) \right] l + \frac{0,062\delta_9}{2n} l = 15,799l,$$

następnie zniżenie odpowiednie będzie

$$\Delta y_l = \frac{\rho l^2}{E} \times 15,799.$$

Największe wzniesienie uważanego przecięcia odpowiada przypadkowi dopełniającemu ciężarów przypadkowych, to jest, gdy te ostatnie rozłożone są na pozostałej przestrzeni łuku  $0,938l$ ; powierzchnia dodatna objęta krzywą współczynników  $\delta$  odpowiadająca tej przestrzeni jest

$$S = \frac{1}{3n} \left[ \delta_{10} + \delta_{16} + 4(\delta_{11} + \delta_{13} + \delta_{15}) + 2(\delta_{12} + \delta_{14}) \right] l + \frac{0,063\delta_{10} + 0,125\delta_{16}}{2n} l = 7,168l$$

Podniesienie zatem szukane będzie :

$$\Delta y_l = \frac{\rho l^3}{E} \times 7,168.$$

Zniżenie pod wpływem ciężaru jednostajnie rozłożonego na całej długości łuku wyrażonem będzie przez sumę algebraiczną dwóch ostatnich ilości

$$\Delta y_l = -\frac{\rho l^3}{E} (15,799 - 7,168) = -\frac{\rho l^3}{E} \times 8,631.$$

Nadając w dwóch przedostatnich wyrażeniach  $\Delta y_l$  na  $p$  wartości ciężaru przypadkowego, w ostatnim zaś wartość ciężaru stałego, otrzymamy wypadki następujące dla przykładu rozbieranego

$$\text{Zniżenie maximum} \quad \Delta y_l = -\frac{l^3}{E} (15,799p - 7,168p') = -0^m,0061.$$

$$\text{Wzniesienie maximum} \quad \Delta y_l = -\frac{l^3}{E} (7,168p - 15,799p') = +0^m,0016.$$

Nakoniec zniżenie stałe pod wpływem ciężaru stałego

$$\Delta y_l = -\frac{l^3}{E} \times 8,631p' = -0^m,0008.$$

b) Odkształcenie pod wpływem zmiany temperatury.—Jeśli w równaniu (61) zastąpimy  $Q$  przez jego wartość wyznaczoną za pomocą wzoru (14)  $Q = E\tau \frac{n}{l^2 d}$ , otrzymamy ztąd wzór ogólny następujący :

$$\Delta y_l = \tau l \left( \frac{y_1}{l} + \frac{H_1}{l^2 d} \cdot \frac{n}{l} \right) = \tau l \left( \frac{y_1}{l} + \frac{8H_1}{98,6335l^3} \right).$$

Wzór ten zastosowany do dwóch przecięć których badamy odkształcenie, to jest do przecięć których odcięte są  $x_1 = l$ , i  $x_1 = \frac{l}{2}$ , daje nam po wykonaniu rachunków.

Dla pierwszego przecięcia

$$\Delta y_l = \tau l (0,2227 + 2,1041) = 0^m,0118.$$

Dla drugiego zaś

$$\Delta y_l = \tau l (0,1772 + 1,3097) = 0,0074.$$

## V. PORÓWNANIE CIĘŻARÓW ŁUKU I BELKI PROSTEJ.

Dla wykazania korzyści jaką przynosi, pod względem oszczędności materiału i pod względem lekkości, łuk sztywny nad belką prostą, porównajmy ciężary tych dwóch systematów, umieszczonych w tychże samych warunkach co do wymiarów i wytrzymałości.

Niech będzie belka prosta przedstawiająca otwór równy cięciwie łuku poprzednio obliczonego, to jest  $l = 28^m,00$ ; wysokość między węgielnicami równa wysokości przecięć łuku na przyczółkach  $2h = 3,30$  i na koniec też same wymiary węgielnic i pasów tak poziomych, jak pionowych (fig. 17, tab. I).

Belkę w ten sposób zbudowaną poddajmy wpływowi tychże samych ciężarów stałego i przypadkowego, to jest załóżmy :

$$p' = 640^k$$

$$p'' = 2190$$

$$p = 2830.$$



1. **Wytrzymałość Pasów.** — *Wyznaczenie momentów zgięcia.* — Wiadomo z mechaniki stosowanej, iż moment zgięcia w którymkolwiek punkcie belki wolno umieszczonej na dwóch podporach wyrazi się wzorem następującym

$$M = \frac{plx}{2} - \frac{px^2}{2}.$$

Wiadomo również, iż maximum tego wyrażenia ma miejsce w połowie otworu, to jest dla  $x = \frac{l}{2}$ ; gdzie

$$M_m = \frac{l^2}{8} p.$$

Podstawiając w ostatnim wyrażeniu za  $p$  i  $l$  ich wartości otrzymamy

$$M_m = 98 \times 2830 = 277340.$$

*Wyznaczenie momentów wytrzymałości.* — Przecięcie poprzeczne belki przedstawione jest na (fig. 17, tab. I); pasy poziome składają się jak dla łuku z pewnej liczby blach mających każda 0,30 szerokości i 0,01 grubości.

Moment wytrzymałości każdego z tych przecięć otrzyma się bardzo łatwo za pomocą metody i tablic podanych w broszurze naszej wspomnianej poprzednio (1), stosując więc do przykładu którym się zajmujemy tablice X, XII, XIV, i oznaczając przez  $M$  jeden z momentów wytrzymałości, otrzymamy wypadki następujące :

<i>Przecięcie bez pasów poziomych.</i> Moment pasów pionowych 2	$\frac{400}{10}$	$m_a = 61,515$
»	węgielnic $\frac{90 \cdot 90}{10}$	$m_c = 65,220$
		$M_0 = 126,771.$
<i>Przecięcie z jednym pasem poziomym.</i> Moment pasów pionowych i węgielnic	$\frac{330}{332}$	$M_0 = 126,007$
»	pasa poziomego $\frac{300}{10}$	$m_s = 59,406$
		$M_1 = 185,413.$
<i>Przecięcie z dwoma pasami.</i> Moment pasów pionowych i węgielnic	$\frac{330}{336}$	$M_0 = 125,253$
»	dwóch pasów poziomych $\frac{300}{10}$	$m_s = 118,906$
		$M_2 = 244,059.$
<i>Przecięcie z trzema pasami.</i> Moment pasów pionowych i węgielnic	$\frac{330}{336}$	$M_0 = 124,507$
»	trzech pasów poziomych $\frac{300}{10}$	$m_s = 178,219$
		$M_3 = 302,726.$

(1) *Expériences analytiques*, etc. — Pracę tę znajdzie czytelnik, w przekładzie polskim, w *Przeglądzie Technicznym* wychodzącym w Warszawie, z r. 1879.

Ostatni wypadek wskazuje, iż przecięcie z trzema pasami jest dostatecznym w części środkowej belki; przedstawia ono bowiem moment wytrzymałości 302,726 większy od momentu zgięcia; ciśnienie zatem maximum na milimetr kwadratowy przecięcia będzie mniejsze od sześciu kilogramów przyjętych jako granica.

Stosując następnie metodę wskazaną na str. 54, otrzymamy długości następujące, jakie nadać należy pasom poziomym, aby ciśnienie maximum na milimetr kwadratowy w każdym przecięciu belki nie przechodziło granicy przyjętej; w przypadku tedy belki wolno położonej na dwóch podporach, długości cięciw parabolicznych  $\lambda$  wyznaczą się za pomocą wzoru ogólnego

$$\lambda = x_b - x_a = l \sqrt{1 - \frac{M_r}{M_m}},$$

gdzie  $M_r$  oznacza jeden z momentów wytrzymałości otrzymanych poprzednio, i  $M_m$  moment zgięcia maximum.

Rozwiązując wzór ten, otrzymamy kolejno długości następujące:

*Dla pierwszego pasa*, długość ta równa się długości belki;

<i>Dla drugiego pasa</i>	$\lambda = 28 \times 0,576 = 16,128$
Nadmiar dla przykrycia	0,672
Długość drugiego pasa	16,800

<i>Dla trzeciego pasa</i>	$\lambda = 28 \times 0,347 = 9,716$
Nadmiar dla przykrycia	1,484
Długość trzeciego pasa	11,200.

**2. Wyznaczenie sztab ściany pionowej.** — Sztaby ściany pionowej stanowić mają opór dostateczny przeciw nateżeniu siły poprzecznej  $A$ .

Wyrażenie tej ostatniej w przypadku belki umieszczonej na dwóch podporach, mając wzgląd na ciężary ruchome będzie :

$$A = \frac{pl}{2} - \frac{3p + p'}{4} x.$$

Założywszy, iż przecięcie proste sztaby  $\omega$  nie ma być wystawione na ciśnienie lub ciągnienie większe od 5<sup>k</sup> na milimetr kwadratowy; przecięcie to w każdym punkcie belki wyznaczy się za pomocą wzoru następującego

$$\omega = \frac{A}{5 \cos \alpha} = \frac{2pl - (3p + p')x}{20 \cos \alpha}$$

$\alpha$  oznacza kąt stały jaki tworzą sztaby z kierunkiem pionowym = 45°.

Po zastąpieniu w tem równaniu liter przez ich wartości, otrzymamy

$$\omega = 11205 - 645,5x.$$

Wartości tego wzoru odpowiadające punktom krzyżowania się sztab na pasach pionowych, umieszczone są w tablicy następującej; ostatnie kolumny tej tablicy zawierają ilość i wymiary nitów, jakimi sztaby przymocowane być mają do tychże pasów; przecięcie całkowite nitów winno być jak wiadomo równowarte przecięciu prostemu sztaby.



Tadlica XXIV.

N <sup>o</sup> PRZE- CIĘĆ	ODCIĘTE <i>x</i>	PRZECIĘCIE WYLICZONE <i>ω</i>	SZTABY PRZYJĘTE KSZTAŁTU			N I T Y		
			LICZBA I NUMER SZTAB	PRZECIĘCIE CAŁKOWITE	Ciężar je- dnej sztaby na metr długości	LICZBA	ŚREDNICA	PRZECIĘ- CIE CAŁ- KOWITE
1	0,0	11205	4 z N <sup>o</sup> 1	11160	21 <sup>k</sup> ,75	24	0,025	11784
2	1,40	10301	2 z N <sup>o</sup> 1 + 2 z N <sup>o</sup> 2	11466				
3	2,80	9398	4 z N <sup>o</sup> 2	9760	19,25	24	0,025	11784
4	4,20	8464	2 z N <sup>o</sup> 2 + 2 z N <sup>o</sup> 2	9896				
5	5,60	7590	4 z N <sup>o</sup> 3	7912	16,00	24	0,022	9120
6	7,00	6687	2 z N <sup>o</sup> 3 + 2 z N <sup>o</sup> 4	7398				
7	8,40	5783	4 z N <sup>o</sup> 4	6884	13,00	24	0,022	7536
8	9,80	4979		6884				7536
9	11,20	3975		6884				7536
10	12,60	3072		6884				7536
11	14,00	2168		6884				7536

Długość i ciężar sztab. — Długość jednej sztaby jest  $\frac{3,12}{\cos \alpha} = 4^m,41$ .

Wymiary i ciężar całkowity sztab jest następujący :

N <sup>o</sup> 1	wymiary :	$\frac{175.60}{10.10}$ ,	ciężar ich jest	$10 \times 21^k,75 = 217,50$
N <sup>o</sup> 2	»	$\frac{175.60}{8.40}$ ,	» » »	$8 \times 19^k,25 = 154,00$
N <sup>o</sup> 3	»	$\frac{140.52}{8.40}$ ,	» » »	$8 \times 16^k,00 = 128,00$
N <sup>o</sup> 4	»	$\frac{140.45}{7.10}$ ,	» » »	$8 \times 13^k,00 = 104,00$
				<u>603,5.</u>

Następnie ciężar całkowity szukany będzie

$$603^k,5 \times 4^m,41 = 2661.$$

Mamy teraz wszystkie dane, aby wyznaczyć ciężar belki i ładu sztywnego; ciężary te rozkładają się w sposób następujący

	LUK	BELKA	RÓŻNICE
a) <i>Pasy i węgielnice:</i>			
Pasy pionowe . . . . .	1350	4872 <sup>k</sup> ,0	} 484 <sup>k</sup>
Węgielnice . . . . .	1622	1584,0	
Pasy poziome . . . . .	2015	2714,0	
b) <i>Ściana pionowa:</i>			
Sztaby ściany pionowej i pokłady . . . . .	1892	2800	} 1752
Część pełna belki prostej i osady ładu . . . . .	186	1010	
Razem . . . . .	7045	9980	2935

Z porównania tych ciężarów wypada, iż z wyjątkiem węgielnic podłużnych, których ciężar jest prawie tenże sam w obu przypadkach, każda część składowa łuku jest lżejszą od części odpowiedniej belki prostej; zmniejszenie to ciężaru w przykładzie rozbieganym jest

- 14<sup>o</sup>/<sub>o</sub> dla pasów pionowych i węgielnic
- 46<sup>o</sup>/<sub>o</sub> dla ściany pionowej i końców belki
- 30<sup>o</sup>/<sub>o</sub> około dla całej budowli.

Dodajmy nadto, iż belka z samymi tylko sztabami pochyłymi nie przedstawia dostatecznej sztywności w kierunku poprzecznym, wzmocnić więc ją należy słupami pionowymi oddalonymi na 2<sup>m</sup>,80 i złożonymi z blachy poprzecznej  $\frac{150 \times 3,120}{10}$  i z dwóch węgielnic  $\frac{80,80}{8}$ ; ciężar zatem jednego słupa będzie 6<sup>m</sup>,12 × 30<sup>k</sup>,20 = 94<sup>k</sup>; a że słupów takich potrzeba 9, przeto ciężar całkowity belki podniesie się do 10826<sup>k</sup>; wypada ztąd, iż różnica całkowita między belką prostą a łukiem jest 35<sup>o</sup>/<sub>o</sub>, czyli przeszło jedna trzecia.

*Odkształcenie belki.* — Największa strzałka jaką przyjąć może belka w połowie otworu pod wpływem ciężaru całkowitego  $p$  jednostajnie rozłożonego na całej jej długości, wyznaczy się za pomocą wzoru znanego z mechaniki stosowanej

$$\Delta f = \frac{80}{384} \times \frac{p l^4}{EI} = \frac{80}{384} \times \frac{R p l^4}{EMv} = 0^m,0148.$$

Strzałka ta jest prawie podwójną od strzałki łuku  $\Delta y_l$  wyznaczonej poprzednio.

Z wypadków ostatnich jakkolwiek stosujących się do jednego tylko przykładu wyprowadzić można wnioski następujące.

Łuk sztywny przedstawia korzyści niezaprzeczone w porównaniu z belką prostą :

- a) Pod względem oszczędności materiału przy tejże samej wytrzymałości.
- b) Pod względem odkształcenia; strzałki bowiem łuku przyjęte pod wpływem ciężarów zewnętrznych daleko są mniejsze od strzałki belki prostej.
- c) Pod względem przestrzeni wolnej pozostawionej pod niższymi pasami poziomymi.

Użycie więc łuków sztywnych przedstawia znaczne dogodności w zastosowaniach; z powodów tych można się mniej surowo zapatrywać z punktu widzenia krytycznego, na mniejszą ścisłość matematyczną metody obliczania ich wytrzymałości; metoda ta bowiem do której zasady i uproszczenia przez nas wprowadzone oceni czytelnik, zależy, jak to widać z rozwinięć części drugiej, na wyznaczeniu znacznej liczby tablic liczebnych, i obliczaniu za pomocą ich wartości przybliżonych, całek wchodzących do równań teoretycznych.

Dodamy jednakże jako ostateczny wynik, iż przybliżenia otrzymane są dostatecznymi do zastosowań, odkształcenia bowiem rzeczywiste budowli bardzo się zbliżają do odkształceń naprzd wyliczonych; sądzimy więc iż użycie tej metody pozostanie korzystnym do obliczania wytrzymałości łuków sztywnych dopóty, dopóki postęp analizy nie przedstawi sposobów uproszczonych wyrażenia w funkcji  $x$  i zcałkowania równań podanych w pierwszej części niniejszego artykułu.



## ERRATA.

<i>Strona</i>	<i>wiersz</i>	<i>zamiast</i>	<i>powinno być.</i>
11	19	2E	$\mp E,$
23	28		zakończyć wzór nawiasem )
»	29	$\int_0^x$	$\int_0^{x_1}$
24	8 i 9	Pl	$\frac{Pl}{2}$
»	12	$\frac{x'}{2l} \int_0^{x'}$	$\frac{x'}{2l} \int_0^{x_1}$
»	12 i 16	Pl	Pl <sup>2</sup>
	17	$\int_0^{2l} ( ) px$	$\int_{x'}^{2l} ( ) dx$
25	3	$\frac{p^2}{E}$	$\frac{pl^2}{E}$



