O FUNKCYACH

NIEMAJĄCYCH POCHODNYCH

NAPISAŁ

K. HERTZ

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, dnia 11 czerwca 1878 roku.)

W ostatnich czasach matematycy zaczęli się zajmować kwestyą, czy każda funkcya ciągła ma pochodnę? Kwestya ta oprócz swéj ważności dla czystéj matematyki, może się téż stać niezmiernie ważną dla mechaniki cząsteczkowéj, gdyż można sobie wyobrazić ruch punktu po krzywéj wyrażonéj funkcyą ciągłą niemającą pochodnéj. Oczywiście, że przyczyną takiego ruchu nie może być siła w zwykłem jéj znaczeniu, gdyż dla podobnego ruchu $\frac{dx}{dt}$ a tém samém i $\frac{d^2x}{dt^2}$ nie mają żadnego znaczenia. Badania więc funkcyj ciągłych niemających pochodnych, mogą stać się ważnemi dla badaczy przyrody. W niniejszéj pracy starałem się zebrać wszystko co dotychczas w tym przedmiocie zrobiono, upraszczając i uogólniając niektóre badania.

WSTĘP

HISTORYCZNY ROZWÓJ POJĘCIA O FUNKCYI

Do *Jana Bernouill'ego* matematycy przez wyraz «funkcya» rozumieli różne potęgi jednéj podstawy, dopiero *J. Bernouilli* i *Leibnitz* wyrazem tym oznaczali każde algebraiczne wyrażenie zawierające zmienną niezależną i od owego czasu takie określenie zostało powszechnie przyjętém. Tak np.

http://rcin.org.pl

Euler (1) w następujący sposób określa funkcyę: «Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus.» Podobne określenie daje téż i *Lagrange* (2). «Nous appelerons donc simplement fonction d'une ou de plusieurs quantités, toute expression du calcul, dans laquelle les quantités entreront d'une manière quelconque mêlées ou non avec d'autres quantités regardées comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction sont censées pouvoir recevoir toutes les valeurs possibles.» Wyżéj zacytowane określenie, które można nazwać *eulerowém*, jasno pokazuje, że funkcya oznaczała każde wyrażenie algebraiczne utworzone z ilości stałych i zmiennych za pomocą czterech zasadniczych działań; funkcyę znowu przestępną uważano jako powstałą z powtarzania nad ilościami zmiennemi i stałemi tychże działań nieskończenie wiele razy. Bezpośrednim wynikiem tego sposobu uważania, było to, że wszystkie własności skończonych wyrażeń algebraicznych przeniesiono na wszystkie bez wyjątku funkcye. Tak np. nikt nie powątpiewał o możności rozwijania funkcyj w szeregi postępujące według całkowitych potęg zmiennéj. Mniemana tożsamość między skończonemi wyrażeniami i funkcyami znalazła jeszcze potwierdzenie w geometryczném przedstawieniu algebraicznych i przestępnych funkcyj, gdyż krzywe wyrażające oba rodzaje funkcyj w największéj liczbie przypadków były zupełnie do siebie podobne. Jeśli zaś dowolnie nakréślona krzywa w czemkolwiek się różniła od krzywéj algebraicznéj, to ją nazywali *nieprawidłową*, gdyż sądzono, że takiéj krzywéj nie można wyrażać równaniem (3). Eulerowe określenie funkcyi wkrótce okazało się niedostateczném, gdyż już w r. 1807 *Fourier* dowiódł, że każdą *dowolną* funkcyę (któréj obrazem geometrycznym jest krzywa nieprawidłowa) można wyrazić za pomocą szeregu trygonometrycznego (4). Badania Fourier'a zmusiły matematyków do uogólnienia pojęcia funkcyi, tak że dziś funkcyę określają w sposób następujący:

Ilość y *nazywa się funkcyą zmiennéj niezależnéj* x *w przedziale od* x = a *do* x = b, *jeśli w tym przedziale każdéj wartości zmiennéj* x *odpowiada zupełnie określona wartość ilości* y, *bez względu na to, czy* y *można, czy téż nie można wyrażać analitycznie.*

Według tego określenia, które można nazwać *określeniem Dirichletowem*, funkcyę w ogólności należy uważać jako pewien rodzaj tablicy idealnéj, w któréj, dla każdéj dowolnéj wartości zmiennéj możemy odszukać jedną lub więcéj wartości funkcyi. Łatwo jednak zrozumieć, że chcąc korzystać z samego pojęcia funkcyi nie możemy jéj uważać za zupełnie dowolną dla nieskończenie wielu wartości zmiennéj, lecz przeciwnie należy przyjąć, że na *zasadzie pewnego prawa* ze *skończonéj liczby danych* możemy obliczyć każdą wartość funkcyi (5).

---

(1) Euler. *Introductio in Analysin infinitorum.* Lausanna. 1748, Tom I, str. 4.

(2) Lagrange. *Leçons sur le calcul des Fonctions.* Paris, 1806, str. 6.

(3) *Ex hac linearum curvarum idea, statim sequitur earum divisio in continuas et discontinuas seu mixtas. Linea scilicet curva continua ita est comparata, ut ejus natura per unam ipsius* x *functionem definitam exprimatur. Quod si autem linea ita sit comparata ut variæ ejus portiones* BM, MD, DN, etc. *per varias* x *Functiones exprimatur, ita ut, postquam ex una Functione portio* BM *fuerit definita tum ex alia Functione portio* MD *describatur; hujus modi lineas curvas discontinuas seu mixtas et irregulares apellamus, propter ea quod non secundum unam legem constantum formantur, atque ex portionibus varium curvarum continuarum componuntur.* euler. *Introductio in Analys inf.* Tom II, str. 6.

(4) Fourier *Bulletin de la Société philomatique.* T. 1, str.112.

(5) Wynika to z pewnika logicznego, że w badaniach filozoficznych nigdy nie możemy przyjmować nieskończenie wielu danych. Porów. Klein. *Ueber den allgemeinen Functions-Begriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve. Sitzungsberichte der Physicalisch-medicinischen Societät zu Erlangen.* Zeszyt 6 1874 r.

http://rcin.org.pl

W tém miejscu musimy zwrócić uwagę na tę okoliczność, że przy badaniu własności funkcyj nie należy wyciągać wniosków z ich obrazu geometrycznego, gdyż postępując tą drogą, możemy dojść do fałszywych wniosków ([1]).

ROZDZIAŁ I

O FUNKCYACH CIĄGŁYCH I O POCHODNEJ

Funkcya nazywa się ciągłą w punkcie $x=x_0$, jeśli można znaleść taką ilość h, ażeby

$$f(x_0 \pm \theta h) - f(x_0) < \sigma,$$

gdzie σ oznacza ilość dowolnie małą, θ zaś ilość zawartą między 0 i 1 ([2]).

Funkcya nazywa się ciągłą w danym przedziale (a, b) jeśli jest ciągłą dla wszystkich wartości zmiennej pomiędzy a *i* b i jeśli oprócz tego czyni zadość warunkom

$$\text{gran} f(a+h) = f(a) \quad \text{i} \quad \text{gran.}\, f(b-h) = f(b).$$

Twierdzenie. Jeśli funkcya $f(x)$ jest ciągłą w przedziale od a do b, to zawsze można znaleść takie δ, ażeby dla *wszystkich* wartości zawartych pomiędzy a i b było

$$\text{bezwzględ. wart.} [f(x \pm \theta\delta) - f(x)] \leqq \sigma$$

gdzie σ oznacza *daną* dowolnie małą wielkość.

Dowodzenie. Jeśli przez x, oznaczymy liczbę większą od a, to na zasadzie samego określenia ciągłości możemy znaleść takie δ_1, ażeby $f(x_1 \pm \theta\delta_1) - f(x_1) < \frac{\sigma}{2}$. Dla punktu znowu $x_2 = x_1 + \delta_1$, możemy znaleść takie δ_2, ażeby $f(x_2 \pm \theta\delta_2) - f(x_2) \leqq \frac{\sigma}{2}$. Powtarzając to rozumowanie łatwo się przekonamy, że w punkcie $x_n = x_{n-1} + \delta_{n-1}$ znajdziemy takie δ_n, że $f(x_n \pm \theta\delta_n) - f(x_n) \leqq \frac{\sigma}{2}$. Jeśli te-

---

([1]) Klein w przytoczonej wyżej pracy dowodzi, że obrazem analitycznej krzywej nie może być funkcya lecz *pas funkcyonalny*. Przez nazwę tę autor rozumie zbiór wszystkich funkcyj, których wartości różnią się między sobą o ilość mniejszą niż σ, które zatem wyrażają się równaniem

$$y = f(x) \pm \mathrm{E}, \quad \text{gdzie} \quad \mathrm{E} \leqq \sigma.$$

([2]) Oczywiście, że jeśli funkcya jest ciągłą w punkcie $x = x_0$, to zawsze możemy znaleść takie ε, ażeby dla wszystkich wartości $\delta < \varepsilon$ było $f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0 + \delta) < \sigma$, lecz odwrotne twierdzenie nie jest prawdziwem, to jest, jeśli powyższa nierówność ma miejsce nie możemy twierdzić, że funkcya jest ciągłą w punkcie $x = x_0$, gdyż ta nierówność dowodzi tylko, że w miarę jak zmienna niezależna dąży do wartości x_0, funkcya dąży do jakiejś granicy, która jednak może być zupełnie odmienną od $f(x_0)$. Hankel w swojem dziele *Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen*, str. 10 wprowadza nowe pojęcie ciągłości fnnkcyi, a mianowicie: jeśli można znaleść takie ε, ażeby dla wszystkich wartości $\delta < \varepsilon$ było $f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0 + \delta) < \sigma$, to Hankel powiada, że funkcya $f(x)$ jest ciągłą w punktach bezpośrednio sąsiednich z punktem $x = x_0$. Wprowadzając do nauki to nowe pojęcie ciągłości

http://rcin.org.pl

raz przez δ oznaczymy najmniejszą z liczb $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots \delta_n$ to widzimy, że dla wszystkich wartości zmiennéj zawartych pomiędzy x_1 i x_n

$$f(x \pm \theta\delta) - f(x) \leqq \sigma,$$

gdyż wartości x i $x + \delta$ albo przypadają w jednym z przedziałów $\delta_1 \ldots \delta_n$, albo téż w dwóch bezpośrednio ze sobą sąsiadujących. Przy powiększaniu liczby n mogą zachodzić dwa przypadki : 1szy, przedział pomiędzy x_1 i x_n powiększając się stopniowo przechodzi przez wszystkie wartości zmiennéj zawarte pomiędzy a i b; 2gi, wartość x_n nigdy nie przewyższa liczby c zawartéj pomiędzy a i b. Łatwo widzieć, że pierwszy przypadek będzie miał miejsce jeśli wszystkie δ pozostaną skończonemi; drugi zaś przypadek nastąpi wtedy, kiedy z powiększeniem się liczby n, wielkości δ_n stają się mniejszemi od wszelkiéj dowolnie małéj ilości ε'. Łatwo jednak dowieść, że ten ostatni przypadek jest niemożebnym. Jakoż, ponieważ x_n jest mniejszem niż c i ciągle wzrasta, to ono coraz bardziéj dąży ku liczbie $g \leqq c$. Lecz ponieważ i dla téj liczby g można znaleźć takie ε', ażeby $f(g \pm \theta\varepsilon') - f(g) \leqq \frac{\sigma}{4}$, dla każdego θ zawartego pomiędzy 0 i 1, więc rzeczywiście wartości funkcyi $f(x)$ w przedziale $(g - \varepsilon', g + \varepsilon')$ różnią się pomiędzy sobą na mniéj niż $\frac{\sigma}{2}$, a zatém, gdy wartość zmiennéj niezależnéj będzie większą od $(g - \varepsilon')$, nie ma potrzeby zmniejszać δ_n bez granic, gdyż wielkości téj możemy nadać wartość ε'. Ztąd wynika, że drugi przypadek, o którym wyżéj mówiliśmy jest niemożebnym, że zatem liczba wielkości δ jest skończoną, tak że wybrawszy najmniejszą z nich δ otrzymamy, iż $f(x \pm \theta\delta) - f(x) \leqq \sigma$ dla wszystkich wartości x zawartych pomiędzy a i b.

Pierwszy *Weierstrass* zwrócił uwagę matematyków na to, że mogą być funkcye ciągłe niemające pochodnych. Zastanowimy się nieco obszerniéj nad tą kwestyą.

Od czasu kiedy *Ampère* ([1]) dowiódł, że każda funkcya ma pochodnę, powszechnie sądzono, że twierdzenie to jest ogólnem. Dowód Ampèr'a, że

$$\operatorname{gran}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]_{h=0}$$

autor twierdzi, że funkcya może być ciągłą w punktach dowolnie blizkich punktu $x = x_0$, nie potrzebując być ciągłą ani w samym punkcie x_0, ani nawet w punktach bezpośrednio sąsiednich z punktem $x = x_0$. Jako przykład podobnej funkcyi Hankel podaje $f(x) = \sin\frac{1}{x-a}$ w punkcie $x = a$. Oczywiście, że tę funkcyę należy jeszcze oddzielnie określić dla punktu $x = a$, gdyż $\sin\infty$ nie ma znaczenia określonego, lecz jakąkolwiek wartość nadamy funkcyi $\sin\frac{1}{x-a}$ w punkcie $x = a$, ona nigdy nie będzie ciągłą w tym punkcie, a nawet nie będzie ciągłą w bezpośredniem sąsiedztwie punktu $x = a$. gdyż nie można znaleść takiego ε, ażeby dla wszystkich $\delta < \varepsilon$ różnica $\sin\frac{1}{\varepsilon} - \sin\frac{1}{\delta}$ była mniejszą od każdej liczby z góry danej. Łatwo widzieć, że ten rodzaj przerywania ciągłości funkcyi pochodzi ztąd, że $\frac{1}{x-a}$ w punkcie $x = a$ przedstawia osobliwość, której nie można usunąć przez zmianę wartości funkcyi w tym punkcie, albo innemi słowami, osobliwość funkcyi $\sin\frac{1}{x-a}$ w punkcie $x = a$ rozciąga się na cały przedział, jak się o tem łatwo przekonać możemy uważając i wartości urojone zmienniej i uważając powierzchnię kuli za geometryczną przedstawicielkę zmiennej niezależnej. W samej rzeczy wiadomo, że funkcya $\sin z$ przyjmuje wszystkie swe wartości w pewnym pasie, który dla $z = \infty$ przechodzi w punkt.

([1]) Ampère. *Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées. Journal de l'École polytechnique.* Zeszyt XIII, str. 148.

http://rcin.org.pl

nie może być w całym przedziale od a do b ani ciągle zerem ani ciągle nieskończoną polega na przypuszczeniu, że kiedy funkcya $f(x)$ jest ciągłą, to przedział od a do b można dzielić na takie części, aby w nich funkcya nie miała ani największości ani najmniejszości. Przypuszczenie to okazało się fałszywém. Dowodzenia dane przez innych matematyków również nie są ogólnemi. Ażeby się o tém przekonać dostatecznie rozpatrzeć dowodzenie *Gilberta*, gdyż ono opiera się na dowodzeniach *Bertranda* i *Duhamela*. Dla okazania, że pochodna funkcyi ciągłéj $f(x)$ nie może być nieskończoną ani dla *wszystkich* punktów całego przedziału skończonego (a, b), ani téż dla punktów postępujących za sobą w odległościach nieskończenie małych *Gilbert* (1) rozumuje w sposób następujący. Przypuszczając, że pochodna funkcyi $f(x)$ jest nieskończoną dla całego przedziału, możemy ten przedział podzielić na takie części, ażeby w nich stosunek przyrostu funkcyi Δy_p do przyrostu zmiennéj Δx_p był ciągle większym od dowolnie wielkiéj liczby R, lecz takie przypuszczenie jest niemożebnem, gdyż w takim razie stosunek pełnego przyrostu funkcyi do całego przyrostu zmiennéj byłby również większym od R, co się sprzeciwia założeniu, że funkcya ta jest ciągłą (2).

Na niedokładność tego twierdzenia pierwszy zwrócił uwagę *Schwarz* (3) rozumując w sposób następujący. Przypuszczając, że dla całego nieprzerwanego szeregu wartości zmiennéj niezależnéj x granica stosunku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ będzie nieskończoną, możemy zawsze znaleść takie δx, ażeby dla wszystkich $\Delta x < \delta x$ stosunek $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ był większym od R. Lecz oczywiście, że wartość δx zależy od R i od téj wartości x zmiennéj niezależnéj, któréj przyrost bierzemy, tak że

$$\delta x = \mathrm{F}(\mathrm{R}, x).$$

Otóż zdarzyć się może, że ta funkcya δx dąży do zera dla całego szeregu wartości zmiennéj niezależnéj czyniących zadość pewnemu warunkowi (4). Dla wykazania możności takiego przypadku *Schwarz* podał funkcyę, w któréj δx dąży do zera dla wszystkich wartości x, wyrażających się w postaci pewnych ułamków i które postępują za sobą w przerwach nieskończenie małych. Łatwo widzieć, że do takich funkcyj twierdzenie o niemożności istnienia pochodnéj nieskończonéj dla całego szeregu wartości zmiennéj nie może być stosowaném, gdyż w tym przypadku nie możemy twierdzić, że z powiększeniem się liczby n podziałów przedziału (a, b) stosunki

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_0}, \ \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}, \ \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}, \ \ldots \ \frac{\Delta y_{n-1}}{\Delta x_{n-1}}$$

dążą do wartości większych od R. Jakoż powiększać liczbę n znaczy to samo co wstawiać coraz nowe wartości zmiennéj x pomiędzy poprzednio wybranemi i chcąc aby wartości stosunku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ odpowiadające tym nowym wartościom zmiennéj także były większe od R, musimy wybrać $\Delta x < \delta x$. Lecz jeśli dla tych nowych wartości zmiennéj, δx coraz bardziéj maleje, to nie zawsze można będzie

(1) Gilbert ph. *Sur l'existence de la dérivée dans les fonctions continues. Bulletins de l'Académie Royal des Sciences de Belgique.* Tom XXXIII.

(2) Porów. Bertrand. *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral.* Tom I. str. 2.

(3) Porów. *Bulletin de l'Académie Royale des Sciences de Belgique.* Tom XXX, str. 117.

(4) Porów. Rozdział IV.

http://rcin.org.pl

uczynić zadość nierówności $\Delta x < \delta x$, tak że w tym przypadku może być skończona a nawet nieskończona liczba takich stosunków $\frac{\Delta y}{\Delta x} < R$. Funkcya, którą podał *Schwarz* ma tę własność, że dla wszystkich wartości zmiennéj niezależnéj kształtu $\frac{p}{2^m}$ (gdzie p oznacza dowolną nieparzystą liczbę) ma miejsce nierówność

$$\delta x < \frac{1}{2^{3m}R};$$

jeśli zatem

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots \Delta x_{n-1} = \frac{1}{2^m},$$

to nigdy nie można będzie uczynić zadość nierówności $\frac{\Delta y}{\Delta x} > R$.

Przytoczone wyżéj rozumowanie dowodzi, że ciągłość funkcyj nic nie ma wspólnego z ich różniczkowalnością.

ROZDZIAŁ II

O CAŁKACH

Określenie [1]. Jeśli wyobrazimy sobie liczby wyrażone w układzie dziesiętnym, to *dwie liczby nazywają się równemi jeśli się składają z tych samych całych, tych samych dziesiętnych, setnych* i t. d. Na zasadzie tego określenia, każda liczba zajmuje określone miejsce w rzędzie liczb. Jakoż porównywając ze sobą dwie liczby, to w przypadku kiedy one są różne, znajdziemy, że one różnią się między sobą chociaż jedną cyfrą dziesiętną; jeśli zaś porównywając dwie liczby pomiędzy sobą znajdziemy, że one składają się z tych samych cyfr dziesiętnych, to powiadamy, że te liczby są równe pomiędzy sobą. Wyjątek stanowią liczby

$$a + 0,\ \alpha\beta\gamma \ldots \mu(\nu+1) \qquad \text{i} \qquad a + 0,\ \alpha\beta \ldots \mu\nu 999 \ldots$$

które są równe pomiędzy sobą.

Twierdzenie. Dla każdéj funkcyi $f(x)$, która w przedziale od $x = a$ do $x = b$ przybiera wartości oznaczone zawierające się pomiędzy skończonemi granicami P i Q ($P < Q$) można zawsze znaleść dwie liczby G i g mające następujące własności: Żadna z wartości funkcyi nie może być większą od G i zawsze można znaleść taką wartość x, dla któréj $f(x) > G - \sigma$, jakkolwiek małem byłoby σ. Żadna z wartości funkcyi nie może być mniejszą od g i zawsze można znaleść takie x, aby $f(x) < g + \sigma$, jakkolwiek małém byłoby σ. Liczba G nazywa się *wyższą granicą*, liczba g *niższą granicą* funkcyi w przedziale od $x = a$ do $x = b$.

Dowodzenie I. Ponieważ wszystkie wartości funkcyi zawierają się pomiędzy skończonemi granicami P i Q, więc pomiędzy niemi albo znajdują się takie wartości, które są większe od α ($P \leq \alpha < Q$)

---

(1) J. Thomae. *Einleitung in die Theorie der bestimmten Integralen.* str, 1 — 3.

http://rcin.org.pl

lecz nie przewyższają liczby $\alpha+1$, albo też pomiędzy temi wartościami funkcyi są takie, które równają się α, lecz żadna z nich nie przewyższa téj liczby. Oczywiście, że w ostatnim przypadku wyższą granicą funkcyi będzie liczba α; w pierwszym zaś przypadku, przedział pomiędzy α i $(\alpha+1)$ dzielimy na 10 równych części

$$\alpha+0,\ \alpha+0{,}1,\ \alpha+0{,}2\ \ldots\ \alpha+0{,}9,\ \alpha+1$$

i rozumując tak samo jak poprzednio, znajdziemy, że wyższą granicą funkcyi albo będzie liczba $\alpha+0{,}\beta$ (gdzie $0\leqq\beta<9$), albo też granicą tą będzie liczba zawarta pomiędzy $\alpha+0{,}\beta$ i $\alpha+0,(\beta+1)$. W tym ostatnim przypadku przedział pomiędzy $\alpha+0{,}\beta$ i $\alpha+0,(\beta+1)$ znowu podzielimy na 10 równych części i powtarzając wyżéj przytoczone rozumowanie znajdziemy, że wyższą granicą funkcyi $f(x)$ będzie liczba $\alpha+0{,}\beta\mu\ldots\mu\nu\rho$ [1]. Z podanego dowodzenia nie wypada wcale, aby funkcya musiała koniecznie przybrać wartość G dla jakiejś wartości zmiennéj niezależnéj, lecz w każdym razie możemy znaleść takie wartości zmiennéj, że dla nich różnica pomiędzy wartością funkcyi i wartością G będzie mniejszą od wszelkiéj ilości danéj. Twierdzenie to wynika z samego określenia granicy wyższéj. Oczywiście, że podobném rozumowaniem można wyznaczyć i niższą granicę funkcyi. Różnicę pomiędzy wyższą i niższą granicą funkcyi w danym podziale nazywamy *wachnięciem funkcyi* w tym przedziale [2].

Wyższą granicą funkcyi

$$y=\sin\frac{\pi}{2a}x-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin xt\cos xt}{t}\,dt$$

w przedziale od $x=1$ do $x=a$, (gdzie $a>1$) będzie równą 1, lecz granicy téj, funkcya nigdy nie dosięga.

TWIERDZENIE II. *Jeśli funkcya jest ciągłą od* $x=a$ *do* $x=b$, *to w tym przedziale znajduje się przynajmniéj jedna wartość zmiennéj, dla któréj funkcya przybiera wartość równającą się wyższéj lub niższéj granicy.*

DOWODZENIE. Przedewszystkiem widzimy, że zamiast przedziału (a, b) możemy uważać przedział $(0, 1)$, gdyż zamiast zmiennéj niezależnéj x możemy wprowadzić nową zmienną, określoną równaniem $\xi=\frac{x-a}{b-a}$. Przedział $(0, 1)$ dzielimy na 10 równych części 0; 0,1; 0,2 . . . 0, 9; 1. Oczywiście, że przynajmniéj w jednym z tych przedziałów wyższa granica funkcyi będzie taka sama co w całym przedziale (0; 1), niech tym przedziałem będzie $[0, a; 0, (a+1)]$. Przedział ten podzielimy na 10 równych części i wyznaczamy znowu przedział $[0, \alpha\beta;\ 0, \alpha(\beta+1]$, w którym wyższa granica będzie taka sama co i w całym przedziale. Powtarzając wyżéj przytoczone rozumowanie znajdziemy liczbę $0, \alpha\beta\mu\ldots\nu\rho\ldots$ mającą tę własność, że pomiędzy liczbami $0,\alpha\beta\ldots\rho$ i $0, \alpha\beta\ldots\nu(\rho+1)$ znajduje się wartość zmiennéj niezależnéj odpowiadająca wyższéj granicy. Dowiedziemy teraz, że liczba $x_0=\alpha\beta\ldots\nu\rho$ jest właśnie tą wartością zmiennéj, dla któréj $f(x_0)=G$; jakoż, założywszy, że dla $x=x_0$, $f(x_0)=G-\Delta$, możemy zawsze wyznaczyć takie h, aby

$$f(x_0\pm\theta h)=f(x_0)\pm\theta_1\frac{\Delta}{2}$$

[1] Porów. THOMAE, l. c.

[2] RIEMANN, *Ueber die Darstellung einer Function durch eine trigonometrische Reihe.* Riemann's *Gesammelte mathematische Werke.* str. 227.

http://rcin.org.pl

gdyż funkcya $f(x)$ z założenia jest ciągłą, θ i θ_1 oznaczają liczby mniejsze od jedności. Podstawiając za $f(x_0)$ jego wartość otrzymamy

$$f(x_0 \pm \theta h) = G - \Delta \pm \theta_1 \frac{\Delta}{2} < G - \frac{1}{2}\Delta \ldots . \qquad (\alpha).$$

Lecz z drugiéj strony możemy tak ścieśnić granice, pomiędzy któremi leży wartość zmiennéj odpowiadająca granicy wyższéj funkcyi, żeby obie liczby $0, \alpha\beta \ldots \nu\rho$ i $0, \alpha\beta \ldots \nu(\rho+1)$ przypadały w przedziale $(x_0 - h, x_0 + h)$, tak, że w tym przedziale znajdą się wartości zmiennéj czyniące zadość nierówności

$$f(x_0 \pm \delta h) > G - \frac{1}{2}\Delta \ldots . \qquad (\beta).$$

Z dwóch nierówności (α) i (β) wynika $\Delta = 0$. Takim samym sposobem można dowieść, że funkcya ciągła przybiera też i wartość niższéj granicy.

Twierdzenie III. Każda funkcya ciągła w przedziale od $x = a$ do $x = b$ przybiera w tym przedziale wszystkie wartości pomiędzy wyższą i niższą granicą.

Dowodzenie. Niechaj M będzie dowolną liczbą zawartą pomiędzy G i g, to położywszy

$$\varphi(x) = f(x) - M$$

znajdziemy, że funkcya $\varphi(x)$ jest ciągłą, i że dla wartości zmiennéj niezależnéj odpowiadających wyższéj i niższéj granicy funkcya przybiera wartości z przeciwnemi znakami; funkcya więc $\varphi(x)$, na zasadzie znanego twierdzenia staje się zerem dla jakiejś wartości zmiennéj zawartéj pomiędzy a, b, to jest znajdzie się pewna wartość $a \leqq x \leqq b$, dla któréj

$$\varphi(x) = f(x) - M = 0 \quad \text{czyli} \quad f(x) = M.$$

Twierdzenie VI. Jeśli przedział (a, b) podzielimy na n części $aa_1, a_1a_2, \ldots a_{n-1}b$, to oznaczywszy przez G_p wyższą granicę funkcyi $f(x)$ w przedziale (a_p, a_{p+1}), przez g_p niższą jéj granicę w tym przedziale, przez Δ_p różnicę $G_p - g_p$, przez d_p różnicę $a_{p+1} - a_p$, znajdziemy, że granica summy

$$S_n = \sum_{p=0}^{p=n+1} (g_p + \theta_p \Delta_p) d_p$$

nie zależy ani od θ_p, ani od sposobu dzielenia przedziału (a, b), jak tylko dla dostatecznie małych d_p będzie

$$\sum_{p=0}^{p=n-1} d_p \Delta_p < \sigma$$

gdzie σ oznacza ilość dowolnie małą [1].

---

[1] Porów. Riemann *Gesammellte math. Werke.* str. 225.
Meier. *Vorlesungeu über die Theorie der bestimmten Integrale.* str. 5.
Thomae. *Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale.* str. 41,

http://rcin.org.pl

Dowodzenie. Przyjmując $b > a$ dzielmy przedział (a, b) na części

$$a^1{}_1 - a, \quad a^1{}_2 - a^1{}_1, \quad a^1{}_3 - a^1{}_2 \ldots . b - a^1{}_{n_1-1} \text{ (wszystkie mniejsze od } \delta_1)$$

$$a^2{}_1 - a, \quad a^2{}_2 - a^2{}_1, \quad a^2{}_3 - a^2{}_2 \ldots . b - a^2{}_{n_2-1} \text{ (wszystkie mniejsze od } \delta_2)$$

$$a^3{}_1 - a, \quad a^3{}_2 - a^3{}_1, \quad a^3{}_3 - a^3{}_2 \ldots . b - a^3{}_{n_3-1} \text{ (wszystkie mniejsze od } \delta_3)$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$a^s{}_1 - a, \quad a^s{}_2 - a^s{}_1, \quad a^s{}_3 - a^s{}_2, \ldots . b - a^s{}_{n_s-1} \text{ (wszystkie mniejsze od } \delta_s)$$

przy czém zakładamy, że liczby $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_s$ tworzą szereg liczb malejących, i że punkta poprzedniego sposobu dzielenia stanowią punkta podziału następnego sposobu, z czego wynika, że

$$n_1 < n_2 < n_3 \ldots . < n_s.$$

Jeśli przez G^s_p i g^s_p oznaczymy wyższą i niższą granicę funkcyi $f(x)$ w przedziale $\left(a^s_p, a^s_{p+1}\right)$, przez d^s_p — różnicę $\left(a^s_{p+1} - a^s_p\right)$, to otrzymamy dwa szeregi liczb

$$A_1, A_2, A_3 \ldots A_s.$$

$$B_1, B_2, B_3 \ldots B_s,$$

gdzie

$$A_s = \sum_{p=0}^{p=n_s-1} d^s_p G^s_p, \quad B_s = \sum_{p=0}^{p=n_s-1} d^s_p g^s_p.$$

Łatwo widzieć, że z powiększeniem się liczby podziałów przedziału (a, b), liczby A_s nie wzrastają, liczby zaś B_s nie zmniejszają się. Jakoż, podzieliwszy jakikolwiek przedział $a^k_{p+1} - a^k_p$ na części w punktach $a^{k+1}_q, a^{k+1}_{q+1}, a^{k+1}_{q+1} \ldots a^{k+1}_{q+1}$ i oznaczywszy przez G^{k+1}_{q+i} g^{k+1}_{q+i} wyższą i niższą granicę w nowych przedziałach, znajdziemy że

$$\sum d^k_p G^k_p \geqq \sum d^{k+1}_p G^{k+1}_p \quad \text{czyli} \quad A_k \geqq A_{k+1},$$

$$\sum d^k_p g^k_p \leqq \sum d^{k+1}_p g^{k+1}_p \quad \text{czyli} \quad B_k \leqq B_{k+1},$$

gdyż wszystkie różnice $a^{k+1}_{q+i+1} - a^{k+1}_{q+i} = d^{k+1}_{q+i}$ są dodatne i oprócz tego $G^k \geqq G^{k+1}_{q+i}$, $g^k_p \leqq g^{k+1}_{q+i}$.

Lecz ponieważ $A_k \leqq B_k$, to przy dowolnie wielkiém s, A_s nie może być większym od liczby skończonéj A_1, ani mniejszém od liczby B_1, B_s znowu nie może być większym od A_1 ani mniejszém

http://rcin.org.pl

od B_1; wynika więc ztąd, że A_s i B_s dążą do granic zupełnie oznaczonych, które my oznaczymy przez A i B tak że

$$[\text{gran}\, A_s]_{s=\infty} = A, \quad [\text{gran}\, B_s]_{s=\infty} = B.$$

Lecz ponieważ z założenia, summę

$$\sum d_p^k \Delta_p^k = \sum (a_{p+1}^k - a_p^k)(G_p^k - g_p^k) = A_k - B_k,$$

można uczynić mniejszą od wszelkiéj ilości danéj, więc

$$\text{gran.}\, A_k = \text{gran.}\, B_k,$$

czyli

$$A = B.$$

Ztąd wynika, że

$$\text{gran}\, S_n = S.\text{gran} = \sum_{p=0}^{p=n-1} d_p(g_p + \theta_p\Delta_p) = \text{gran}\, B_p + \text{gran} \sum_{p=0}^{1=n-p} d_p\theta_p\Delta_n;$$

lecz ponieważ $0 < \theta_p < 1$, to

$$\sum_{p=0}^{p=n-1} d_p\theta_p\Delta_p < \sum_{p=0}^{p=n-1} d_p\Delta_p;$$

więc

$$\text{gran}\, S_n = S = \text{gran}\, B_p = B = A,$$

gdyż z założenia

$$\text{gran} \sum_{p=0}^{p=n-1} d_p\Delta_p = 0.$$

Summę S nazywamy całką określoną funkcyi $f(x)$ w granicach od a do b i oznaczamy przez

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Z poprzedniego dowodzenia wynika, że granica summy S_n nie zależy od θ_p, tak że w niéj ilość $g_p + \theta_p\Delta_p$ można zastąpić jednėm z wyrażeń $f(a_p)$, $f(a_p + \eta_p d_p)$, (gdzie $0 < \eta_p < 1$) nawet, w tym przypadku, gdy funkcya $f(x)$ nie będzie ciągłą.

Dowiódłszy, że granica summy S_n nie zależy od wartości θ_p, pozostaje nam jeszcze dowieść, że granica nie zależy też od sposobu dzielenia przedziału (a, b).

W tym celu summę $\Sigma d_p G_p$ oznaczamy przez S_n, summę zaś $\Sigma d'G'$ przez $S_{n'}$, gdzie d_p i d'_p oznaczają przedziały w różnych sposobach dzielenia przedziału (a, b),

$$a, a_1, a_2, \ldots. a_{n-1}, b,$$

$$a, a'_1, a'_2, \ldots. a'_{n-1}, b.$$

G_p i G'_p zaś oznaczają wyższe granice funkcyi $f(x)$ w tych przedziałach.

http://rcin.org.pl

Ponieważ przy każdym sposobie dzielenia, summa

$$S_n = \Sigma(g_p + \theta_p d_p) d_p,$$

dąży do oznaczonéj granicy, to możemy sobie wyobrazić, że przedziały (a_{p-1}, a_p) (a'_{p-1}, a'_p) są już tak małemi, że summy S_n i $S_{n'}$ różnią się odpowiednio od swych granic S i S' na mniéj niż ε i ε_1, gdzie ε i ε_1, oznaczają ilości dowolnie małe. Jeśli teraz utworzymy summę

$$S_{n''} = \Sigma(a''_{p-1} - a''_p) G''_p,$$

w któréj $a, a''_1, a''_2, \ldots a''_{n''-1}, b$ przedstawia szereg utworzony z podziałów

$$a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, b \text{ i } a, a'_1, a'_2 \ldots a'_{n'-1}, b,$$

w którym punkta podziału ugrupowane są w porządku rosnącym, G''_p zaś oznacza wyższą granicę funkcyi $f(x)$ w przedziale (a''_{p+1}, a''_p), to opierając się na pierwszéj części twierdzenia znajdziemy że $S_{n''}$ różni się od S mniéj niż na η, od S' zaś różni się mniéj na η', gdzie η i η' oznaczają ilości dowolnie małe. Wypływa to ztąd, że szereg

$$a, a''_1, a''_2 \ldots a''_{n''-1}, b,$$

można uważać jako powstały z podzielenia szeregów

$$a, a_1, a_2 \ldots a_{n-1}, b \quad \text{i} \quad a, a'_1, a'_2 \ldots a'_{n'-1}, b,$$

na drobniéjsze podziały.

Otrzymujemy sym sposobem dwa równania

$$S = \text{gran } S_n = S_{n''} + \sigma,$$

$$S' = \text{gran } S_{n'} = S_{n''} + \sigma',$$

gdzie σ i σ' oznaczają dowolnie małe ilości mniejsze niż η i η'.

Z tych dwóch równań otrzymujemy

$$S - S' = \sigma - \sigma',$$

a ztąd

$$S = S'.$$

WNIOSKI WYPŁYWAJĄCE Z OKREŚLENIA CAŁKI.

1. Równaniu warunkowemu

$$\text{gran } \Sigma d_p \Delta_p = 0,$$

stanie się zadość w następujących przypadkach: 1°, kiedy funkcya $f(x)$ jest ciągłą, 2°, kiedy funkcya zrywa swoją ciągłość w pojedynczych tylko punktach, oczywiście, że w tych punktach funkcya może

http://rcin.org.pl

nawet stać się nieokreśloną, jak np. ma miejsce z funkcyą $\sin \frac{1}{x-a}$ w punkcie $x=a$, 3°, kiedy funkcya $f(x)$ zrywa swoją ciągłość w nieskończoonéj liczbie punktów, lecz kiedy summę przedziałów zawierających punkta zrywania ciągłości można uczynić mniejszą od wszelkiéj ilości danéj.

2. Ponieważ różnica d_p zawsze jest dodatną, więc

$$g\Sigma d_p > \Sigma(g_p+\theta_p\Delta_p)d_p < G\Sigma d_p,$$

gdzie G oznacza największą wartość funkcyi w przedziale od a do b, g zaś oznacza najmniejszą jéj wartość; wynika ztąd, że

$$\int_a^b f(x)dx = \text{gran}\, \Sigma(g_p+\theta_p\Delta_p)d_p = (b-a)[G+\theta(G-g)].$$

3. Granica summy $\Sigma f(a_p+\eta_p d_p)d_p$ będzie jeszcze zupełnie oznaczoną, a nawet nie zmieni swéj wartości, jeśli zmienimy wartości funkcyi dla skończonéj liczby wartości zmiennéj niezależnéj. Jakoż oczywiście, że zmiana wartości funkcyi dla skończonéj liczby punktów a_r, a_s, a_v . . . nie może mieć wpływu na granicę summy $\Sigma d_p\Delta_p$, gdyż summę przedziałów odpowiadającą tym punktom można oczywiście uczynić mniejszą od wszelkiéj ilości danéj. Oprócz tego, wybierając odpowiednio ilości η_p możemy ominąć punkta a_r, a_s, a_v...

4. Całkowalność funkcyj jest własnością, która pod pewnym względem utrzymuje się dla ich iloczynu, jak to wypływa z następującego twierdzenia *Du Bois Reymond*, (1).

Iloczyn ilukolwiek funkcyj całkowalnych jest całkowalnym, jeśli zaś w iloczynie znajduje się choć jeden niecałkowalny mnożnik, to iloczyn w ogólności mówiąc, będzie niecałkowalnym; nakonie iloczyn dwóch funkcyj niecałkowalnych może być całkowalnym.

Jakoż niech $\Delta\varphi_p$ i $\Delta\psi_p$ oznaczają wartości wachnięć funkcyj w przedziale d_p i niech $\varphi_p\psi_p - \varphi'_p\psi'_p$, oznacza wachnięcie iloczynu $\varphi\psi$ w p^{ym} przedziale. Widocznie, że

$$\Sigma d_p(\varphi_p\psi_p - \varphi'_p\psi'_p) = \Sigma[\varphi_p(\psi_p-\psi'_p)+\psi'_p(\varphi_p-\varphi'_p)]d_p = \Sigma\pm\varphi_p(\psi_p-\psi'_p)d_p + \Sigma\pm\psi'_p(\varphi_p-\varphi'_p)d_p =$$

$$= \Phi\Sigma(\psi_p-\psi'_p)d_p + \Psi\Sigma(\varphi_p-\varphi'_p)d_p,$$

gdzie znaki $\pm$ biorą się w ten sposób aby różnice $\psi_p-\psi'_p$ i $\varphi_p-\varphi'_p$ były dodatnemi, Φ i Ψ zaś oznaczają średnie wielkości funkcyj $\pm\varphi_p$, $\pm\psi'_p$ w granicach całkowania. Jeśli funkcye φ i ψ są całkowalne, to na zasadzie znanego równania warunkowego będzie

$$\text{gran}\, \Sigma(\varphi_p-\varphi'_p)d_p = 0, \quad \text{gran}\, \Sigma(\psi_p-\psi'_p)d_p = 0,$$

a tem samém będzie téż

$$\text{gran}\, \Sigma(\varphi_p\psi_p-\varphi'_p\psi'_p)d_p = 0.$$

W przypadku gdy funkcya ψ niecałkowalna, to przez φ_p, φ'_p, ψ_p ψ'_p oznaczymy te wartości

(1) Du Bois Reymond. *Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen.* Dziennik *Crelle-Borchard*. Tom 78, str. 25

http://rcin.org.pl

funkcyj φ i ψ w p^{ym} przedziale, przy których $\psi_p - \psi'_p$ będzie bezwzględną wartością wachnięcia funkcyi ψ w p^{ym} przedziale, to jest $\Delta\psi_p$ tak że

$$\Sigma(\varphi_p\psi_p - \varphi'_p\psi'_p) = \Phi\Sigma\Delta\psi_p d_p + \Psi\Sigma \pm \psi'_p(\varphi_p - \varphi'_p).$$

Jeśli funkcya φ jest całkowalną, to drugi wyraz prawéj strony tego równania dąży do zera. Ztąd wynika, że jeśli funkcya φ nie jest tego rodzaju, że staje się zerem w każdym dowolnie małym przedziale, to Φ nie będzie zerem i gran $\Sigma(\varphi_p\psi_p - \varphi'_p\psi'_p) \gtrless 0$, tak że iloczyn funkcyj φ i ψ nie będzie całkowalnym. Nakoniec dla okazania trzeciéj części naszego twierdzenia dość będzie zauważyć, że iloczyn dwóch funkcyj, z których jedna równa zeru dla wszystkich wymiernych wartości zmiennéj i równa jedności dla wartości niewymiernych, druga zaś przeciwnie, jest równą jedności dla wartości wymiernych zmiennéj i równą zeru dla wartości niewymiernych jest rzeczywiście całkowalnym, chociaż każdy z czynników jest niecałkowalnym.

Własność całkowalności funkcyj utrzymuje się też, przy niektórych zmianach, którym funkcye poddajemy.

Niech $\varphi(u)$ będzie taką funkcyą, że wartość stosunku

$$\frac{\varphi(u) - \varphi(v)}{u - v},$$

pozostaje zawartą pomiędzy granicami skończonemi α, β gdy u i v zmieniają się w granicach od a do b. Oczywiście, że przy takiém założeniu wachnięcia funkcyj $f(x)$ i $\varphi[f(x)]$ będą wielkościami jednego porządku we wszystkich przedziałach $a_{p+1} - a_p = d_p$ i dla tego téż własność całkowalności będzie wspólną dla $f(x)$ i $\varphi[f(x)]$. Tak np. razem z funkcyą $f(x)$ będą całkowalnemi funkcye [1]

$$[f(x)]^n, \quad \sqrt{1 + [f(x)]^n}, \quad \sin f(x).$$

5. Funkcya
$$\varphi(x) = \int_a^x f(x)dx = \text{gran}\, \Sigma f(a_p) d_p.$$

jest ciągłą. Jakoż, wiadomo że

$$\varphi(x \pm h) - \varphi(x) = \int_a^{x \pm h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = \int_x^{x \pm h} f(x)dx = \pm h[g + \theta(G - g)],$$

gdzie g i G oznaczają wyższą i niższą granicę funkcyi $f(x)$ w przedziale $\pm h$, lecz ponieważ hg i hG można uczynić mniejszémi od wszelkiéj ilości danéj, więc funkcya $f(x)$ jest ciągłą w punkcie x.

6. Pochodna funkcyi

$$\varphi(x) = \int_a^x f(x)dx = \text{gran}\, \Sigma f(\iota_s) d_s,$$

będzie $f(x)$.

---

(1) DARBOUX. *Mémoire sur les fonctions discontinues. Annales de l'École Normale.* Druga serya Tom IV. str. 77.

http://rcin.org.pl

Jakoż, z samego określenia funkcyi $\varphi(x)$ wynika, że

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(x)dx-\int_a^x f(x)dx\right]=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx.$$

Jeśli funkcya $f(x)$ jest ciągłą w punkcie x [1], to

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=f(x+\theta h),$$

więc

$$\text{gran}\,\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=f(x)$$

i to bezwzględnie na kierunek, w którym h dąży do zera, gdyż $f(x+0)=f(x-0)$. Jeśli zaś funkcya zrywa swoją ciągłość w punkcie x, lecz w ten sposób, że $f(x+0)$ i $f(x-0)$ mają oznaczone wartości, to biorąc najprzód h skończoném, dzielimy ten przedział na n równych części w punktach $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}$ i otrzymujemy

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx=\text{gran}\,\frac{1}{h}\,[(x_1-x)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_2)+\ldots(x+h-x_{n-1})f(x+h)]_{n=\infty},$$

$$=\text{gran}\,\frac{x_1-x}{h}f(x_1)+\text{gran}\,\frac{1}{h}\,[(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(x+h-x_{n-1})f(x+h)]_{n=\infty},$$

lecz

$$\text{gran}\,\frac{x_1-x}{h}\cdot f(x_1)=0,\quad \text{gran}\,\frac{1}{h}\,[(x_2-x_1)f(x_2)+\ldots+(x+h-x_{n-1})f(x+h)]_{n=\infty}=\frac{h-x_1}{h}\,\mathrm{S},$$

gdzie $\mathrm{S}=g+\theta(\mathrm{G}-g)$; więc w miarę tego jak h dąży do zera pochodna funkcyi dąży do $f(x+0)$, albo do $f(x-0)$.

Jeśli nakoniec zdarzy się, że albo obie wartości $f(x+0)$, $f(x-0)$, albo też jedna z nich będą nieoznaczonemi, to funkcya $\varphi(x)$ albo wcale nie będzie miała pochodnéj, albo też będzie miała pochodnę w jednym tylko kierunku.

ROZDZIAŁ III

NIEKTÓRE WŁASNOŚCI SZEREGÓW

Szereg

$$\varphi(x)+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\ldots$$

nazywa się jednostajnie zbieżnym (*gleichmässig convergent*) w danym przedziale (a, b) jeśli można znaleść taką liczbę n, ażeby przy niéj, wartość R_n reszty szeregu była mniejszą od wszelkiej ilości

---

[1] Wniosek II i III twierdz. 2go rozdziału.

http://rcin.org.pl

danéj σ, dla wszystkich wartości zmiennéj x zawartych pomiędzy a i b. Ciągłość szeregu w danym przedziale nie zawsze staje się powodem jego jednostajnéj ciągłości.

Tak np. szereg

$$x^2e^{-x^2}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[n^2x^2e^{-n^2x^2}-(n+1)^2x^2e^{-(n+1)^2}\right],$$

jest zbieżnym dla wszystkich wartości x, lecz łatwo widzieć, że nie będzie jednostajnie zbieżnym w przedziale od $x=0$ do $x=1$. Jakoż reszta szeregu

$$R_n=n^2x^2e^{-n^2x^2},$$

z powiększeniem się liczby n dąży do zera, lecz jakkolwiek wielkiem weźmiemy n, będzie zawsze $R_n=\frac{1}{e}$ dla $x=\frac{1}{n}$; ztąd wynika, że reszty téj nie możemy uczynić mniejszą od danéj ilości σ przy dowolnéj wartości zmiennéj

Twierdzenie I. — Jeśli szereg

$$f(x)=\Sigma\varphi_n(x)$$

jest jednostajnie zbieżnym w danym przedziale (a, b) i jeśli wyrazy tego szeregu są funkcyami ciągłemi zmiennéj x, to i sam szereg będzie funkcyą ciągłą [1].

Dowodzenie. — Ponieważ z założenia szereg jest zbieżnym, więc można znaleść takie n ażeby dla wszystkich wartości zmiennéj x przypadających w przedziale (a, b) było

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x), \qquad \text{gdzie} \qquad R_n(x)<\sigma.$$

Z tego równania wypada

$$f(x\pm\theta h)-f(x)=S_n(x\pm\theta h)-S_n(x)+R_n(x\pm\theta h)-R_n(x),$$

więc

$$f(x\pm\theta h)-f(x)<3\sigma,$$

gdyż bezwzględna wartość różnicy $R_n(x\pm\theta h)-R_n(x)<2_n$, różnicę zaś $S_n(x\pm\theta h)-S_n(x)$, jako składającą się ze skończonéj liczby funkcyj ciągłych można przy stosownym wyborze h uczynić mniejszą od σ.

Oczywiście, że twierdzenie odwrotne nie ma tu miejsca, ponieważ badany wyżéj szereg

$$x^2e^{-x^2}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[n^2x^2e^{-n^2x^2}-(n+1)^2x^2e^{-(n+1)^2x^2}\right]$$

chociaż przedstawia funkcyę ciągłą i składa się z wyrazów będących funkcyami ciągłemi nie jest jednakże jednostajnie zbieżnym.

---

[1] W podręcznikach dowodzą tego twierdzenia bez uwzględnienia jednostajnej zbieżności, skutkiem czego dowodzenia te są nieścisłe; najlepsze dowodzenie znajduje się w znakomitem dziele: *Trattato di Algebra Superiore di* Giovanni Novi. Tom 1 str. 74.

http://rcin.org.pl

TWIERDZENIE II. — Jeśli wyrazy szeregu jednostajnie zbieżnego są całkowalne w przedziale (a, b), to funkcya wyrażona summą tego szeregu będzie całkowalną i jéj całka równa się summie całek wyrazów szeregu.

DOWODZENIE. — Jakoż z założenia wynika, że można znaleść takie n, ażeby dla wszystkich wartości x zawartych w przedziale (a, b) było

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x),$$

gdzie $R_n(x)$ jest mniejszém od dowolnie małéj ilości σ. Oprócz tego, ponieważ wyrazy danego szeregu są całkowalne, więc $\text{gran}\Sigma d_p\Delta^s{}_p$, gdzie $\Delta^s{}_p$ oznacza wachnięcia funkcyi $S_n(x)$, można uczynić mniejszą od σ, gdyż S_n składa się ze skończonéj liczby całkowalnych funkcyj; ponieważ oprócz tego $\text{gran}\Sigma d_p\Delta^r{}_p < \sigma(b-a)$, gdzie $\Delta^r{}_p$ oznacza wachnięcia $R_n(x)$, więc

$$\text{gran}\Sigma d_p\Delta f_p,$$

gdzie Δf_p oznaczą wachnięcia funkcyi $f(x)$, można uczynić mniejszą od wszelkiéj ilości danéj, co stanowi cechę całkowalności téj funkcyi.

UWAGA. — Jeśli szereg nie czyni zadość warunkom powyższego twierdzenia to nie mamy prawa uważać summy całek wyrazów szeregu za całkę jego summy. Jakoż całkując pierwszą stronę równania

$$-2xe^{-x^2}=\sum_{n=1}^{n=\infty}[-2n^2xe^{-n^2x^2}+2(n+1)^2xe^{-(n+1)^2x^2}],$$

w granicach od 0 do x, otrzymujemy wyrażenie

$$e^{-x^2}-1,$$

całkując zaś drugę stronę tego równania znajdujemy

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}[e^{-n^2x^2}-e^{-(n+1)^2x^2}]=e^{-x^2}.$$

Pochodzi to ztąd, że uważany szereg nie jest jednostajnie zbieżnym [1].

TWIERDZENIE III. — Jeśli wszystkie wyrazy szeregu

$$f(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\varphi_3(x)+\ldots$$

są funkcyzmi ciągłemi zmiennéj x, mającemi pochodne w dodatnim lub ujemnym kierunku, albo też w obu jeśli szereg pochodnych jest jednostajnie zbieżnym w jakimś przedziale, to w tym przedziale szereg pochodnych jest pochodną danego szeregu to jest funkcyi $f(x)$.

---

[1] Zwykle w podręcznikach nawet najlepszych nie zwracają uwagi na warunek jednostajnej zbieżności szeregów. Porów. SERRET. *Cours de Calcul différentiel et intégral.* § 479.

http://rcin.org.pl

Dowodzenie. — Niech

$$f_1(x)=\varphi'_1(x)+\varphi'_2(x)+\varphi'_3(x)+\ldots$$

będzie szeregiem pochodnych; oznaczywszy summę n pierwszych wyrazów tego szeregu przez $S_n(x)$, summę pozostałych wyrazów, przez $R_n(x)$, znajdziemy na zasadzie twierdzenia poprzedniego:

$$\int_a^x f_1(x)dx=\int_a^x S_n(x)dx+\int_a^x R_n(x)dx=f(x)-f(a).$$

Lecz podług samego założenia można znaleść takie n, aby dla wszystkich wartości x danego przedziału było $R_n(x)<\sigma$

$$\text{bezwzględna wart.} \int_x^{x\pm h} R_n(x)dx<\sigma h,$$

i dla tego

$$\frac{f(x\pm h)-f(x)}{\pm h}=\frac{1}{\pm h}\int_x^{x\pm h} S_n(x)dx+\frac{\theta\sigma h}{h},\quad \text{gdzie} \quad -1<\theta<+1;$$

zkąd wypada, że

$$\text{gran} \frac{f(x\pm h)-f(x)}{\pm h}=\text{gran} \frac{1}{\pm h}\int_x^{x\pm h} S_n(x)dx+\theta\sigma=S_n(x)+\theta\sigma,$$

a ponieważ σ można uczynić mniejszém od wszelkiéj ilości danéj, więc

$$\text{gran} \frac{f(x\pm h)-f(x)}{\pm h}=S_n(x)=\varphi'_1(x)+\varphi'_2(x)+\varphi'_3(x)+\ldots$$

Twierdzenie IV. — Jeśli wyrazy szeregu zbieżnego w przedziale od $x=a$ do $x=b$ są funkcyami ciągłemi zmiennéj x, i oprócz tego mają tę własność, że są dodatne i dają się dzielić na dwie gruppy cechujące się tém, że wyrazy jednéj gruppy wzrastają ze wzrastaniem wartości zmiennéj, wyrazy zaś drugiéj gruppy zmniejszają się, to szereg będzie jednostajnie zbieżnym i summa jego przedstawia funkcyę ciągłą.

Dowodzenie. — Jakoż dla okazania powyższego twierdzenia, dość będzie zbadać oddzielnie dwa szeregi $\eta(x)$ i $\psi(x)$ składające się wyłącznie z wyrazów ciągle wzrastających i z wyrazów malejących ze wzrastaniem zmiennéj.

Jeśli wszystkie wyrazy szeregu $\eta(x)$ wzrastają to można n dobrać takiem, ażeby reszta szeregu dla wartości $x=b-\varepsilon$, to jest $R_n(b-\varepsilon)$ była mniejszą od σ, gdzie ε i σ oznaczają wielkości dowolnie małe, co można zrobić, gdyż szereg $\varphi(x)$ jest zbieżnym w przedziale od $x=a$ do $x=b$. Oczywiście że przy tak wybraném n, $R_n(x)<\sigma$ dla wszystkich wartości zmiennéj czyniących zadość nierówności $a\leqq x\leqq b$, co i stanowi cechę jednostajnéj zbieżności. W przypadku, gdy wszystkie wyrazy szeregu $\psi(x)$ maleją z powiększaniem się wartości zmiennéj, dość będzie wybrać n takiem aby $R_n(a+\varepsilon)<\sigma$ [1].

---

[1] Taki sposób dowodzenia tego twierdzenia, o ile mi się zdaje, jest ogólniejszym od dowodzenia podanego przez Darboux, l. c. str. 85.

http://rcin.org.pl

Wniosek. — Z poprzedniego twierdzenia wynika, że jeśli szereg $f(x)$, którego wyrazy są funkcyami ciągłemi zmiennéj x jest bezwarunkowo zbieżnym w przedziale (a, b) i wyrazy jego dają się uszykować w dwie gruppy odpowiednio o wyrazach rosnących i malejących to szereg jest jednostajnie zbieżnym. Jakoż, uważając oddzielnie dodatne wyrazy szeregu i oddzielnie ujemne i stosując do nich poprzednie twierdzenie przekonywamy się o prawdziwości tego wniosku.

ROZDZIAŁ IV

BADANIE NIEKTÓRYCH KLASS FUNKCYJ

KLASSA I

FUNKCYE CAŁKOWALNE

W pierwszym rozdziale naszéj pracy poznaliśmy warunki całkowalności funkcyj przerywających swoją ciągłość nieskończenie wiele razy w przedziale skończonym i mogących jednak być zcałkowanemi.

Przykład I. — Niech $f(x)$ będzie funkcyą, która dla wszystkich wartości niewymiernych zmiennéj, jakoteż dla $x=a$ i $x=b$ staje się zerem, dla wszystkich zaś wartości wymiernych wyrażających się w postaci ułamku $\frac{p}{q}$ przybiera wartość $\frac{1}{q}$. Łatwo dowieść, że taka funkcya jest całkowalną to jest że $\int_0^1 f(x)dx$ ma określoną wartość. Jakoż, liczba wartości zmiennéj, przy których $f(x) \geqq \frac{1}{Q}$ (gdzie Q oznacza liczbę dowolnie wielką) jest oczywiście mniejszą od summy $1+2+3+\ldots(Q-1) = \frac{1}{2}Q(Q-1)$, gdyż tylko wartości

$$\frac{1}{2};\quad \frac{1}{3},\ \frac{2}{3};\quad \frac{1}{4},\ \frac{3}{4};\quad \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5};\ \ldots\ \frac{1}{Q},\ \frac{2}{Q},\ \frac{3}{Q}\ \ldots\ \frac{Q-1}{Q},$$

czynią zadość warunkowi $f(x) \geqq \frac{1}{Q}$.

Lecz jeśli przedział (0, 1) podzielimy na mQ^2 równych części, znajdziemy, że warunkowi $f(x) \geqq \frac{1}{Q}$ funkcya czyni zadość dla liczby wartości zmiennéj oczywiście mniéjszych od Q^2 i summa przedziałów zawierających te części będzie tym sposobem mniejsza od $Q^2 \frac{1}{mQ^2} = \frac{1}{m}$. Biorąc więc m dostatecznie wielkiem możemy ilość $\frac{1}{m}$ uczynić dowolnie małą; całka więc $\int_0^1 f(x)dx$ jest zupełnie określoną i równa się zeru, gdyż niższa jéj granica g_s jest w każdym przedziale równą zeru.

Przykład II (1). Jeśli przez (nx) oznaczymy różnicę między liczbą nx i najbliższą jéj liczbą

(1) Porów. Riemann, l. c. str 338.

całkowitą (większą lub mniejszą od nx) i jeśli, oprócz tego umówimy się nadać (nx) wartość zera, w przypadku gdy nx jest średnią wartością dwóch sąsiednich liczb całkowitych, to funkcya

$$f(x)=\frac{(x)}{1}+\frac{(2x)}{2^2}+\frac{(3x)}{3^2}+\frac{(4x)}{4^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(nx)}{n^2},$$

będzie zupełnie określoną dla każdéj rzetelnéj wartości zmiennéj x, gdyż szereg określający funkcyę jest ciągłym. Lecz łatwo widzieć, że funkcya $f(x)$ przerywa swoją ciągłość dla wszystkich wartości zmiennéj kształtu $x=\frac{p}{2m}$, gdzie p oznacza liczbę nieparzystą pierwszą względem m. Jakoż podstawiając zamiast x wartość $\frac{p}{2m}\pm\alpha$, znajdziemy

$$\operatorname{gran}\left[\frac{(2s+1)mp}{2m}\pm(2s+1)m\alpha\right]_{\alpha=0}=\mp\frac{1}{2},$$

więc

$$\operatorname{gran}f\left(\frac{p}{2m}\pm\alpha\right)=f\left(\frac{p}{2m}\right)\mp\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(3m)^2}+\frac{1}{(5m)^2}+\ldots\right)=f\left(\frac{p}{2m}\right)\mp\frac{\pi^2}{16m^2}.$$

Ztąd widzimy, że funkcya $f(x)$ zrywa swoją ciągłość dla wszystkich wartości wymiernych zmiennéj, które w najprostszym kształcie wyrażone są w postaci ułamków o parzystym mianowniku, dla wszystkich zaś innych wartości zmiennéj, funkcya jest ciągłą. Lecz ponieważ w każdym skończonym przedziale, jakkolwiek małym, znajduje się nieskończenie wiele punktów odpowiadających wartościom $x=\frac{p}{2m}$, więc oczywiście funkcya $f(x)$ w każdym przedziale zrywa swoją ciągłość nieskończenie wiele razy.

Okażemy teraz, że wyżéj podana funkcya jest całkowalną. W tym celu, jak wiemy, dość będzie dowieść, że liczba punktów, w których funkcya robi skoki $>\sigma$, jest w danym przedziale skończoną.

Ponieważ skok funkcyi w punkcie przerywania się ciągłości $=\frac{\pi^2}{8m^2}$, więc ażeby

$$\frac{x^2}{8m^2}>\sigma,$$

trzeba aby $m<\frac{\pi}{2\sqrt{2\sigma}}$,

a ponieważ w skończonym przedziale może tylko być skończoną liczba ułamków mających mianowniki mniejsze od danéj liczby, więc funkcya $f(x)$ czyni zadość warunkowi całkowalności.

Przykładów nieciągłych lecz całkowalnych funkcyj można podać nieskończenie wiele, posiłkując się zasadą nazwaną przez *Hankla zasadą zgęszczania osobliwych punktów funkcyi* (Princip der condensation der Singularitäten) [1], która polega na tém, że osobliwe punkta funkcyi $\varphi(x)$ leżące w odle-

---

[1] Hankel, l. c. str. 19

http://rcin.org.pl

głościach skończonych zgęszczają się dla funkcyi $f(x)$ utworzonéj z $\varphi(x)$ w ten sposób, że postępują za sobą w odległościach nieskończenie małych. Tak np. w poprzednim przykładzie osobliwe punkta funkcyi (x) będące w odległościach

$$x=\frac{2m+1}{2},$$

zgęściły się dla funkcyi $f(x)$ w ten sposób, że postępują za sobą w odległościach nieskończenie małych.

Wogólności łatwo dowieść że wszystkie funkcye $f(x)$ przerywające swoją ciągłość w ten sposób, że $f(x+h)$ i $f(x-h)$ mają oznaczone wartości są całkowalne. Jakoż, z samego założenia możemy dla każdéj wartości zmiennéj przypadającéj w przedziale (a, b) znaleść takie h, ażeby

$$\left.\begin{array}{l}\text{wart. bezwzględ. } [f(x+\theta h)-f(x+0)]<\sigma \\ \text{wart. bezwzględ. } [f(x-\theta h)-f(x-0)]<\sigma\end{array}\right\} \quad 0<\theta<1,$$

dla tego też można znaleść takie δ_1, aby

$$f(a+\theta\delta_1)-f(a+0)\leqq\frac{\sigma}{2},$$

dla wszystkich θ zawartych pomiędzy 0 i 1.

Wybrawszy δ_2 o ile można największém i oznaczywszy $a+\delta_1$ przez a_1 możemy znowu znaleść takie δ_2, ażeby

$$f(a_1+\theta\delta_2)-f(a_1+0)<\frac{\sigma}{2}.$$

Oznaczywszy $a_1+\delta_2$ przez a_2, możemy to działanie powtarzać i po skończonéj liczbie działań dojdziemy do b, o czém łatwo się przekonać powtarzając to samo rozumowanie, któreśmy użyli dla wykazania jednostajnéj ciągłości funkcyj.

Niech $a, a_1, a_2 \ldots a_{n-1}, b$ będzie szeregem punktów otrzymanych przy wyżéj opisanych działaniach, utwórzmy szereg przedziałów

$$a,\ a+\varepsilon,\ a_1-\varepsilon,\ a_1+\varepsilon,\ a_2-\varepsilon,\ a_2+\varepsilon \ldots a_{n-1}+\varepsilon,\ b-\varepsilon,\ b,$$

gdzie ε oznacza najmniejszą z wielkości δ_n. Z założenia wynika że wachnięcia funkcyi tylko w przedziałach $(a+\varepsilon, a_1-\varepsilon)$, $(a_1+\varepsilon, a_2-\varepsilon) \ldots (a_{n-1}+\varepsilon, b-\varepsilon)$ mogą być większemi od σ, lecz ponieważ summa tych przedziałów $=2(n-1)\varepsilon$, to przy odpowiednim wyborze ε, summę tę możemy uczynić mniejszą od wszelkiéj ilości danéj, funkcya zatém $f(x)$ czyni zadość warunkowi całkowalności. Z poprzedniego wynika, że niecałkowalnemi mogą być takie funkcye $\varphi(x)$, dla których w każdym przedziale $\varphi(x+h)$ i $\varphi(x-h)$ stają się nieoznaczonemi w nieskończonéj liczbie punktów. Łatwo widzieć, że nie każda funkcya tego ostatniego rodzaju jest niecałkowalną, gdyż możemy

http://rcin.org.pl

utworzyć funkcye całkowalne stające się nieoznaczonemi w nieskończonéj liczbie punktów. Taką funkcyą będzie np szereg

$$f(x)=\sin\frac{\pi}{x}+\frac{1}{10^3}\sum_{0}^{9}{}_n\left(\sin\frac{\pi}{10x-n}\right)+\frac{1}{100^3}\sum_{0}^{99}{}_n\left(\sin\frac{\pi}{100x-n}\right)+\frac{1}{1000^3}\sum_{0}^{999}{}_n\left(\sin\frac{\pi}{1000x-n}\right)+\ldots,$$

dla któréj zakładamy $\sin\frac{\pi}{ax-b}=0$ dla $x=\frac{b}{a}$.

Oczywiście, że wartości $f(x\pm h)$ stają się nieoznaczonemi dla wszystkich $x=0, \alpha\beta\gamma\ldots\rho\ldots$, lecz ponieważ liczba punktów, dla których granice nieoznaczonych wartości $f(x+h)$ i $f(x-h)$ są większe od danéj liczby σ jest skończoną, więc funkcya $f(x)$ czyni zadość warunkowi całkowalności.

KLASSA II

FUNKCYE CIĄGŁE NIEMAJĄCE POCHODNYCH

Widzieliśmy, że dowodzeń o istnieniu pochodnéj dla każdéj funkcyi ciągłéj nie należy uważać za ogólne i za stosujące się do wszystkich bez wyjątku funkcyj. Oprócz tego, w ostatnich czasach udało się utworzyć funkcye ciągłe niemające pochodnych. Funkcye te są dwojakiego rodzaju: 1° funkcye niemające pochodnych dla nieskonczonéj liczby punktów danego przedziału, postępujących według pewnego prawa, 2° funkcye niemające pochodnych w żadnym punkcie danego przedziału. Funkcye pierwszego rodzaju podane były przez *Hankla* (1) i innych. Najciekawszy przykład takiéj funkcyi podał *Schwartz* (2) i dla tego téż ten przykład podajemy.

Niech $E(x)$ oznacza największą liczbę całkowitą zawartą w dodatnéj zmiennéj x i niech $\varphi(x)$ oznacza funkcyę określoną następującém równaniem:

$$\varphi(x)=E(x)+\sqrt{x-E(x)},$$

gdzie pierwiastek bierzemy ze znakiem $+$. Łatwo widzieć, że funkcya $\varphi(x)$ zawsze będzie dodatną, ciągłą i będzie wzrastała razem ze zmienną. Krzywa, jaką to równanie wyraża składa się z nieskończonéj liczby łuków parabolicznych, ztąd wypada, że pochodna $\varphi'(x)$ funkcyi $\varphi(x)$ stanie się nieskończoną dla wartości całkowitych zmiennéj; oprócz tego łatwo dowieść, że dla każdego x będzie

$$\varphi(x)\leqq x+\frac{1}{4},$$

gdyż

$$\varphi(x)=x+\sqrt{x-E(x)}-[x-E(x)]=x-\left[\sqrt{x-E(x)}-\frac{1}{2}\right]^2+\frac{1}{4}.$$

(1) l. c. str. 19.

(2) Schwartz, *Archives des Sciences physique et naturelles*. N° 189 str. 33.

http://rcin.org.pl

Jeśli teraz utworzymy funkcyę

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^{2n}},$$

to łatwo widzieć, że będzie ciągłą dla wszystkich wartości zmiennéj x, gdyż szereg określający tę funkcyę jest jednostajnie zbieżnym i wyrazy jego są funkcyami ciągłemi zmiennéj x (Rozdział III, twierdz. I). Okażemy teraz, że pochodna funkcyi $f(x)$ staje się nieskończoną dla wszystkich wartości zmiennéj kształtu

$$x = \frac{m'}{2^m},$$

gdzie m i m' oznaczają dowolnie wielkie liczby całkowite, to jest że wartości zmiennéj, dla których $f'(x)$ staje się nieskończoną mogą postępować za sobą w przedziałach dowolnie małych. Jakoż, ponieważ lewa strona równania

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\varphi(2^n x + 2^n h) - \varphi(2^n x)}{2^{2n} h}$$

jest szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich, więc

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > \frac{\varphi(2^m x + 2^m h) - \varphi(2^m x)}{2^{2m} h},$$

a ponieważ $2^m x = m'$, więc

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > \frac{\varphi(m' + 2^m h) - \varphi(m')}{2^{2m} h}.$$

Lecz ponieważ h możemy uczynić dowolnie małém, więc możemy uczynić $h < \frac{1}{2^m}$, albo $2^m h < 1$ i dla tego opierając się na określeniu funkcyi $f(x)$, otrzymamy

$$\varphi(m' + 2^m h) - \varphi(m') = \sqrt{2^m h},$$

a tém samém

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > \frac{1}{2^{\frac{3m}{2}} \sqrt{h}}$$

to jest, że stosunek $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ze zmniejszaniem się h może być uczyniony większym od wszelkiéj ilości danéj, *c. b. d. o.*

Takiego rodzaju funkcyj można utworzyć nieskończenie wiele, lecz bezporównania ciekawszemi są funkcye ciągłe niemające pochodnych dla żadnéj wartości zmiennéj. Funkcyę takiego rodzaju podał pierwszy *Weierstrass* i zakomunikował Du Bois Reymond. Podamy tę funkcyę w uogólnionym kształcie.

---

(1) Du Bois Reymond, l. c. str. 39.

http://rcin.org.pl

Niech x będzie zmienną rzeczywistą, p i a liczbami nieparzystemi b — liczbą stałą mniejszą od jedności, dowiedziemy że szereg

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos^p (a^n x)\pi$$

jest funkcyą ciągłą niemającą pochodnéj dla żadnéj wartości zmiennéj, jeśli tylko iloczyn ab będzie większym od pewnéj ilości.

Jakoż, niech x_0 będzie dowolną wartością zmiennéj x, m zaś liczbą całkowitą i dodatną. Łatwo widzieć, że można zawsze znaleść taką liczbę całkowitą α_m, dla któréj różnica

$$x_{m+1} = a^m x_0 - \alpha_m$$

czyni zadość warunkowi

$$-\frac{1}{2} < x_{m+1} \leqq \frac{1}{2}.$$

Jeśli teraz uczynimy

$$x' = \frac{\alpha_m - 1}{a^n}, \quad x'' = \frac{\alpha_{m+1}}{a^m},$$

otrzymamy

$$x' - x_0 = -\frac{1 + x_{m+1}}{a^m}, \quad x'' - x_0 = \frac{1 - x_{m+1}}{a^m},$$

zkąd wypada, że

$$x' < x_0 < x'',$$

lecz ponieważ m oznacza liczbę dowolną, więc możemy ją uczynić tak wielką, ażeby różnica $x' - x_0$ i $x'' - x_0$ były mniejsze od wszelkiéj liczby danéj.

Przy powyższém znakowaniu otrzymamy

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b^n \cos^p (a^n x')\pi - \cos^p (a^n x_0)\pi}{x' - x_0}$$

czyli

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = \sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{(ab)^n \cos^p(a^n x')\pi - \cos^q(a^n x_0)\pi}{a^n(x' - x_0)} + \sum_{n=0}^{p=\infty} \frac{b^{m+n} \cos^p(a^{m+n} x')\pi - \cos^p(a^{m+n} x_0)\pi}{x' - x_0}.$$

Ponieważ zaś

$$\cos^p(a^n x')\pi - \cos^p(a^n x_0)\pi = [\cos(a^n x')\pi - \cos(a^n x_0\pi] \sum_{s=0}^{s=p-1} \cos^{p-1-s}(a^n x')\pi \cos^s(a^n x_0)\pi,$$

$$\frac{\cos(a^n x')\pi - \cos(a^n x_0)\pi}{a^n(x' - x_0)} = -\pi \sin\left(a^n \frac{x' + x_0}{2} \pi\right) \frac{\sin a^n \left(\frac{x - x_0}{2}\right)\pi}{a \left(\frac{x' - x_0}{2}\right)\pi}$$

i $\sum_{s=1}^{s=p-1} \cos^{p-1-s}(a^n x')\pi \cos^s(a^n x_0)\pi$ zawiera się pomiędzy $-p$ i $+p$, więc wartość bezwzględna

http://rcin.org.pl

summy $\sum_{n=0}^{n=m-1} (ab)^n \frac{\cos^p(a^n x')\pi - \cos^p(a^n x_0)\pi}{a^n(x' - x_0)}$ będzie mniejszą od $p\pi \sum_{n=0}^{n=m-1} (ab)^n$, a zatém ta wartość bezwzględna nie będzie większą od $\frac{p\pi}{ab-1}(ab)^m$. Oprócz tego, ponieważ a i p są liczbami nieparzystemi, więc

$$\cos^p(a^{m+n}x')\pi = \cos^p a^n(\alpha_m - 1)\pi = -(-1)^{p\alpha_m}$$

$$\cos^p(a^{m+n}x_0)\pi = \cos^p(a^n\alpha_m + a^n x_{m+1})\pi = (-1)^{p\alpha_m}\cos^p(a^n x_{m+1})\pi$$

i

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} b^{m+n} \frac{\cos^p(a^{m+n}x')\pi - \cos^p(a^{m+n}x_0)\pi}{x' - x_0} = (-1)^{p\alpha_m}(ab)^m \sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \frac{1 + \cos^p(a^n x_{m+1})\pi}{1 + x_{m+1}}.$$

Wszystkie wyrazy szeregu

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \frac{1 + \cos^p(a^n x_{m+1})\pi}{1 + x_{m+1}}$$

są dodatne, a ponieważ $\cos^p(a^n x_{m+1})\pi > 0$ i $\frac{1}{2} < 1 + x_{m+1} < \frac{3}{2}$, więc pierwszy wyraz szeregu nie jest mniejszym od $\frac{2}{3}$.

Ztąd wypada, że

$$\frac{f(x') - fx_0)}{x' - x_0} = (-1)^{p\alpha_m}(ab)^m\eta\left[\frac{2}{3} + \frac{\varepsilon p\pi}{ab-1}\right],$$

gdzie η oznacza liczbę większą od jedności, ε zaś liczbę zawartą pomiędzy -1 i $+1$.

Takim samym sposobem otrzymamy

$$\frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = -(-1)^{p\alpha_m}(ab)^m\eta_1\left[\frac{2}{3} + \frac{\varepsilon_1 p\pi}{ab-1}\right],$$

gdzie η_1 i ε_1 mają to samo znaczenie co η i ε.

Jeśli teraz dobierzemy ab takim sposobem, aby $ab > 1 + \frac{2}{3}p\pi$, to stosunki

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} \text{ i } \frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0}$$

będą miały znaki przeciwne i dążyć będą do nieskończoności wraz z powiększaniem się m do nieskończoności. Ztąd wynika, że funkcya $f(x)$ w dowolnie wybranym punkcie x_0 nie ma oznaczonéj pochodnéj ani skończonéj ani nieskończenie wielkiéj.

Warszawa dnia 20 września 1878 roku.

http://rcin.org.pl