

Arystoyka

Wosinski

BIBLIJOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA.

ARYTMETYKA.

PLAN BIBLIOTEKI MATEMATYCZNO-FIZYCZNEJ.

SERYJA PIĘRWSZA (12-mo).

- Tom I. **Początki arytmetyki** M. BERKMANA. Str. X + 266; z drzeworytami w tekście. W oprawie kop. 65.
- Tom II. **Wiadomości początkowe z fizyki** S. KRAMSZTYKA. Książeczka I. Str. X + 77; drzeworytów 47. W oprawie kop. 30.
- Tom III. **Toż. Książeczka II.** Str. VIII + 132; drzeworytów 56. W oprawie kop. 45.
- Tom IV. **Wiadomości początkowe z geografii fizycznej i meteorologii** A. W. WITKOWSKIEGO. *Wkrótce wyjdzie z druku.*
- Tom V. **O najprostszych figurach geometrycznych** M. BERKMANA. *W. w. z d.*
-

SERYJA DRUGA (12-mo).

- Tom I. **Arytmetyka** M. BERKMANA. *W. w. z d.*
- Tom II. **Geometryja elementarna w wykładzie przystępnym.**
- Tom III. **Krótki wykład początków algebry.**
- Tom IV. **Przystępny wykład fizyki.**
- Tom V. **Kosmografija i geografija fizyczna z meteorologiją.**
- Tom VI. **Nauka rysunków technicznych.**
-

SERYJA TRZECIA (8-vo).

- Tom I. **Arytmetyka, kurs teoretyczny** M. A. BARANIECKIEGO, z przypiskami A. ŻBIKOWSKIEGO i J. N. FRANKEGO. Str. 375 + LVIII, z drz. w tekście. R. 1 k. 70.
- Tom II. **Zadania arytmetyczne.** *W. w. z d.*
- Tom III. **Algebra elementarna i Teoryja przybliżeń liczebnych**
- Tom IV. **Geometryja elementarna.**
- Tom V. **Krótki wykład syntetyczny elementarnych własności przecięć stożkowych.**
- Tom VI. **Trygonometryja płaska i kulista.**
- Tom VII. **Miernictwo.**
- Tom VIII. **Fizyka.**
- Tom XI. **Kosmografija i geografija fizyczna z meteorologiją** J. JĘDRZEJEWICZA. *W. w. z d.*
- Tom X. **Geometryja wykreślna.**
- Tom XI. **Mechanika elementarna.**
-

SERYJA CZWARTA (8-vo Lex.).

- Tom I. **Wstęp do analizy** M. A. BARANIECKIEGO. *W. w. z d.*
- Tom II. **Rozwiązywanie równań liczebnych** J. SOCHOCKIEGO. *W. w. z d.*
- Tom III. **Teoryja równań algebraicznych.** (*)
- Tom IV. **Geometryja analityczna** W. ZAJĄCZKOWSKIEGO. Str. 511 + XL; drzeworytów 85. Rubli 3.
- Tom V. **Geometryja syntetyczna.** (**)
- Tom VI. **Rachunek różniczkowy i całkowy.** (***)
- Tom VII. **Ćwiczenia z rachunku różniczkowego i całkowego.**
- Tom VIII. **Rachunek wariacyjny.**
- Tom IX. **Rachunek prawdopodobieństwa i Metoda najmniejszych kwadratów.**
- Tom X. **Zasady mechaniki teoretycznej.**
- Tom XI. **Rachunki wykreślne.**
-

TOM DODATKOWY «BIBLIOTEKI». Słownik matematyczno-fizyczny.

Jako uzupełniające seryją IV «Bibl. mat.-fiz.» należy uważać następuj. dzieła, ogłoszone przez BIBLIOTEKĘ KÓRNICKĄ:

- (*) **Teoryja wyznaczników**, kurs uniwersytecki M. A. BARANIECKIEGO. Paryż, 1879. 8-vo, str. XXII + 600. Marek 12.
- (**) **Wykład geometrii wykreślnej** E. SAĞAYEY. Paryż, 1882. 4-to, str. 444 z bardzo wielu drzeworytami w tekście, oraz LXII tablic miedziorytów. Marek 24.
- (***) **Wykład nauki o równaniach różniczkowych** W. ZAJĄCZKOWSKIEGO. Paryż, 1877. 8-vo, str. XXIV + 90+. Marek 20.

BIBLIJOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA,

WYDAWANA POD REDAKCYJĄ

M. A. BARANIECKIEGO

Z ZAPOMOZI KASY POMOCY DLA OSÓB, PRACUJĄCYCH
NA POLU NAUKOWYM, IMIENIA JÓZEFA MIANOWSKIEGO.

SERYJA III.

TOM I.

ARYTMETYKA,

KURS TEORETYCZNY.

NAPISAŁ

DR. MARYJAN A. BARANIECKI,

PRIVAT-DOCENT UNIWERSYTETU W WARSZAWIE.

Z PRZYPISKAMI

DRA A. ŻBIKOWSKIEGO I PROF. J. N. FRANKEGO.



WARSZAWA.

W Drukarni Noskowskiego.

—
1884.

Дозволено Цензурою.
Варшава, 7 Февраля 1884 г.



8.233

Składał głównie zecer A. Zdunczyk.
Drzewocęty ciął W. Bojarski.
Papier z papierni w Pilicy

5

Seryja III «Bibl. mat.-fiz.» ma głównie na widoku systematyczne wychowanie średnie ogólne, przygotowujący do wyższych studiów specjalnych.

Przy nauczaniu arytmetyki w szkole średniej ogólnej należy odrazu położyć jak największy nacisk na ciągłe, systematyczne już, rozumowanie uczniów podczas lekcyj. Należy oczywiście przyjąć, że uczniowie, rozpoczynający taką naukę, są już uprzednio rozwinięci w takim stopniu, jaki powinien być wynikiem starannego przerobienia z nimi «Początków arytmetyki» (tom I, seryi I). — Lekcje arytmetyki o każdej nowej części kursu powinny tworzyć ściśle obmyśloną grupę. Początkowe z nich należy poświęcić najważniejszym punktom owęj części, wyjaśnianym na tak dobranych mniejszych liczbach, iżby trudności rachunkowe nie odsuwały założeń lekcyj na plan dalszy. Przedmiotem zaś dalszych z owych lekcyj winny być rozwinięcia szczegółowe, wszelkie uzupełnienia, oraz ogólne wysławianie postępowań i otrzymywanych wypadków, a nakoniec ostateczne powolne przerobienie całej tęg części kursu przy nader systematycznym, prawie-że pedantycznym dowodzeniu. — Nie jest bynajmniej założeniem nauczania arytmetyki w szkole średniej ogólnej wyćwiczenie uczniów w prędkim wykonywaniu rachunków (należy to do szkół handlowych i t. p.) według zapamiętanych prawideł. Tu idzie przedewszystkiem o wyrobienie w uczniach ciągłego zdawania sobie sprawy z tego, co wypowiadają, o mówienie ściśle na pewien temat oznaczony, a jednak wciąż przedstawiający czyto nowe przypadki, czytóż nowe zastosowania, umiejętnie przez nauczyciela nasunięte, dające tym samym odpowiednie pole do rozwijania swobodnego myślenia uczniów. Przy takim prowadzeniu kursu, uczniowie wciąż się wprawiają w ściśle rozumowanie, łatwo zdobywają tyle samodzielności, iż, przy lekkim kierownictwie nieustannym nauczyciela, mogą sami już objaśniać rzeczy, na które po raz pierwszy ich uwagę się zwraca, a z przerabiania zadań odnoszą należyta korzyść, gdyż nauczą się każdy krok w rachunku szczegółowo uzasadniać i przywykną (gdymy tylko nauczyciel od czasu do czasu na to zwraca uwagę) mimowolnie zdawać sobie sprawę z każdego szczegółu. — Dodatkowo zaznaczyć wypada, iż dla objaśniania t. z. «nowych lekcyj» należy lepszemu ze średnich uczniów postawić wobec nowęj kwestyi, a przez odpowiednie pytania tak nim kierować, żeby mu się zdawało, iż ma swobodę zupełną odpowiedzi, lecz żeby w rzeczywistości w tych pytaniach były już pewne napomknienia na to, na czym uczeń ma oprzeć owę odpowiedź. — Z tego

bespośrednio wynika, iż w tak prowadzonym nauczaniu arytmetyki, zgodnie z jej rolą pośród ogółu kursów matematyki w szkole średniej ogólnej, należy oddać stanowczą przewagę metodzie indukcyjnej, jak to już dobrze w swoim czasie rozumiał i znakomicie wykonał światły autor *Arytmetyki dla szkół narodowych*, wydanej przez Komisją Edukacyjną.

Przy takich założeniach nauki arytmetyki w szkole średniej ogólnej, nie może być mowy o tym, aby książka, podręcznik arytmetyki, miała się znajdować w ręku ucznia wcześniej, niż przy pierwszym powtarzaniu całego już kursu.

Znacznie większe rozmiary przybrałoby to dzieło, gdyby miało przedstawiać obraz szczegółowy, niejako wzór takiego kursu. Nie miałyby to zresztą celu. Różne bowiem bywają grupy uczniów, których przygotowanie należy odpowiednio uwzględniać. Utalentowanemu i zamilowanemu w przedmiocie nauczycielowi najlepszych wskazówek dostarczy tu doświadczenie i własna pilność. — Dlatego to, co w tej książce jest wydrukowane czcionkami większymi (wraz z odsyłaczami gwiazdkowymi), obejmuje wszystko, co powinno w szkole średniej ogólnej stanowić przedmiot zajęć z uczniami w ciągu normalnego kursu, jakoteż podczas powtarzania pierwszego, które koniecznie powinno mieć miejsce zaraz po ukończeniu tego kursu. Owe ustępy tworzą spójną całość tak, iż w nich nic nie jest uwzględnione z tego, co jest podane czcionkami mniejszymi. [Gdzieindziej (zob. Przedmowę) zaznaczono, dlaczego w szkole średniej wykład ułamków zwyczajnych poprzedzać winien naukę o liczbach dziesiętnych. Gdyby jednak program obowiązujący wymagał takiej zmiany, to należy tylko treści rozdziałów V, VI i VII nadać taki porządek: a). roz. VII bez us. 6-go i 7-go § 21-go, b). roz. V i VI, c). us. 6-y i 7-y § 21-go.]

Czcionkami mniejszymi są wydrukowane te ustępy, które częściowo powinny, a częściowo mogą być uwzględniane przy powtarzaniu kursu arytmetyki przed egzaminem dojrzałości, jakoteż przy przygotowaniach do egzaminów nauczycielskich. Wiadomości zaś historyczne o miarach, podane drukiem drobniejszym w § 8-ym, znalazły się w tej książce dlatego, że „Bibl. mat.-fiz.” nie mogła ich nie objąć, a w tym tomie było najwłaściwsze dla nich miejsce. Pomieszczenie nadto krótkiego rysu historycznego o rozwoju arytmetyki i o jej nauczaniu w Polsce wynikło z ogólnego planu tego wydawnictwa.

6 lutego r. 1884.

Red.

SPIS RZECZY.

PRZEDMOWA	IX
KRÓTKI RYS ROZWOJU ARYTMETYKI I O JEJ NAUCZANIU W POLSCE	XIII
Errata	LVII

ROZDZIAŁ I.

§ 1. Pojęcia wstępne.	str. 1.
2. Liczenie słowne	7.
3. Liczenie piśmienne.	14.

ROZDZIAŁ II.

§ 4. Dodawanie liczb całkowitych	str. 27.
5. Odejmowanie liczb całkowitych	42.

ROZDZIAŁ III.

§ 6. Mnożenie liczb całkowitych	str. 57.
7. Dzielenie liczb całkowitych	89.

ROZDZIAŁ IV.

§ 8. Miary	str. 120.
9. Wyrażanie liczby wielorakiej jako liczby mianowanej prostej, i odwrotnie	139.
10. Dodawanie i odejmowanie liczb wielorakich	142.
11. Mnożenie i dzielenie liczb wielorakich	148.

ROZDZIAŁ V.

§ 12. Dzielnik i wielokrotna liczby danej. Liczby pierwsze.	str. 154.
13. Cechy podzielności.	161.
14. Spólny dzielnik kilku liczb. Największy wspólny dzielnik kilku liczb. Dwie liczby pierwsze względem siebie	173.
15. Roskład liczby na czynniki pierwsze. Wszystkie dzielniki liczby. Spólna wielokrotna kilku liczb. Najmniejsza wspólna wielokrotna kilku liczb	180.

ROZDZIAŁ VI.

§ 16. Uzupełnienie nauki o dzieleniu liczb całkowitych, czyli: o powstawaniu ułamka	str. 191.
17. O liczbach ułamkowych wogóle	196.
18. Dodawanie i odejmowanie liczb ułamkowych	210.
19. Mnożenie liczb ułamkowych	219.
20. Dzielenie liczb ułamkowych	230.

ROZDZIAŁ VII.

§ 21.	O liczbach dziesiętnych wogóle	str. 241.
22.	Dodawanie i odejmowanie liczb dziesiętnych	254.
23.	Mnożenie liczb dziesiętnych	259.
24.	Dzielenie liczb dziesiętnych	268.

ROZDZIAŁ VIII.

§ 25.	O liczbie dziesiętnej, przedstawiającej iloraz z podzielenia dwu liczb całkowitych przez siebie. Wyrażanie ułamków zwyczajnych w postaci dziesiętnych	str. 279.
26.	Wyrażanie ułamków dziesiętnych w postaci zwyczajnych	289.

ROZDZIAŁ IX.

§ 27.	Stosunki	str. 298.
28.	Proporcycje	301.

ROZDZIAŁ X.

§ 29.	O wielkościach proporcjonalnych	str. 313.
30.	Reguła trzech	319.
31.	Reguła trzech złożona	325.
32.	Reguła procentu	331.
33.	Reguła odtrącania procentu (dyskonta)	347.
34.	Reguła podziału proporcjonalnego. Reguła spółki	351.
35.	Reguła mieszaniny	356.
36.	Reguła łańcuchowa	361.
37.	Reguła fałszywego założenia	365.

PRZYPISEK I.

Warunki podzielności przez liczby pierwsze względem 10-u A. ŻBIKOWSKIEGO, str. 367.

PRZYPISEK II.

Jan Brożek o liczbach doskonałych i o liczbach zaprzyżnionych J. N. FRANKO str. 371.

PRZEDMOWA.

Od dość już dawna miałem zamiar napisania systematycznego kursu arytmetyki. Myśl ta jednak stale mię już zajmowała dopiero ¹⁾ od r. 1879, gdy Towarzystwo nauk ścisłych w Paryżu wyraziło życzenie, aby podręcznik arytmetyczny, jaki miałem przygotować dla ogłoszenia go staraniem tego Towarzystwa, mógł służyć dla tych, którzy pragnęliby znaleźć ściśle i spójne udowodnienia wszelkich postępowań w arytmetyce — co, oczywiście, odpowiadało swoim zamysłom.

Kierując się znaną prawdą: «docendo discimus», tak podczas kilkuletniego nauczania w gimnazyjum II w Warszawie, jak i przy kierowaniu przygotowaniem do egzaminów nauczycielskich, starannie zważałem na każdy szczegół, jaki się nastręczał, a dbając o uzasadnienia ściśle, najodpowiedniejsze tak naturze kwestyj objaśnianych, jak i należytemu stopniowaniu, wypracowałem powoli cały kurs, który pozostawało tylko napisać, odpowiednio do założenia książki, jakieby jej nadać wypadło. To zaś założenie ostatecznie okrzyło się dopiero z chwilą, gdy doszło do skutku wydawnictwo tej «Biblioteki» i gdy podjąłem się opracowania kursu arytmetyki seryi III. Cel więc, który przy pisaniu tej książki miałem na widoku, był dwojaki. Naprzód dostarczyć uczącym szczegółowego materiału do zajęć teoretycznych w czasie lekcyj arytmetyki w szkole średniej ogólnej, a powtóre, dać uczącym

¹⁾ Jeszcze w r. 1875 napisałem dla «L'antconu wiedzy ludzkiej» oddzielny artykuł *Arytmetyka* (w t. I, str. 96; Warsz., 8-vo Lex.). Chociaż ów artykuł miał założenia inne, niż podręcznik (por. w nim str. 4), to jednak, rozpoczynawszy wkrótce po jego napisaniu nauczanie w szkołach średnich, przekonałem się, iż wiele ustępów inaczejbym opracował, gdy bym, układając go, miał poza sobą odpowiednią praktykę pedagogiczną.

się możliwość pierwszego powtórzenia kursu arytmetyki ¹⁾, jako też przedstawić te uzupełnienia, które są właściwe przy ponownym jego powtórzeniem przed egzaminem dojrzałości. —

Z rozmaitych podręczników arytmetycznych, których wiele w różnych epokach, a głównie przed rozpoczęciem pisania tej książki, przeglądałem, nieliczne osiągnąłem korzyści. Osobliwie, że szukałem w nich jasnego i trafnego, a nadewszystko ścisłego wprowadzenia różnych kwestyj, jakoteż objaśnienia, opartego na głównych, że tak powiem, rysach im właściwych. Najwięcej stosunkowo był mi pomocny znakomity pod wielu względami podręcznik arytmetyki, który ogłosił p. J. A. Serret, profesor fakultetu paryskiego ²⁾. — Zbyt wiele zajęłoby tu miejsca wyliczenie tych ważniejszych szczegółów, które uważam za wynik własnych obmyślań. Dla większości nadto czytających tę książkę nie przedstawiałoby to żadnego interesu. A zresztą, porównanie opracowania tej książki z tykoko wzmiankowanym podręcznikiem łatwo oceniającym moją pracę wykazać może, co tu zawdzięczam swojej praktyce nauczycielskiej, a pośrednio także nieco tym moim uczniom i uczennicom, którzy zadawali pytania, odnoszące się do zaciekawiających ich kwestyj teoretycznych. —

Odmienny od zachowywanego zwykle w kursach systematycznych porządek treści nauki o podzielności liczb (rozdział V) dostateczne, zdaje mi się, znajdzie swe usprawiedliwienie w tym, iż jest naturalniejszy. — Szczegółowiej objaśnić mi należy, dlaczego, przeprowadzając naukę o liczbach dzieśietych (roz. VII) bez jakiegokolwiek odwoływania się do wiadomości z nauki o ułamkach zwyczajnych (roz. VI), tym ostat-

¹⁾ Ku temu może byłoby pożyteczne wydanie krótsze, obejmujące tylko to, co tu jest wydrukowane czcionkami większymi (wraz z odsyłaczami gwiazdkowymi).

²⁾ *Traité d'arithmétique*, 6-te wydanie, przejrzone przez autora i p. de Comberousse (Paryż, 1875). Po jednym zaś lub po dwa szczegóły drugorzędnego znaczenia zacerpnięłem tu z prac następujących: J. Bertrand: *Traité d'arithmétique*, 4-te wyd. (Paryż, 1867); A. Guilmin: *Cours complet d'arithmétique à l'usage des lycées et collèges*, 14-te wyd. (Paryż, 1866); Labosne, Marechal et Painvin: *Cours complet de mathématiques, Arithmétique*. (Paryż, 1855); R. Baltzer: *Die Elemente der Mathematik*, tom I, 3-ie wyd. (Lipsk, 1868); V. A. Le Besgue: *Introduction à la théorie des nombres* (Paryż, 1862).

nim (wraz z roz. V) wyznaczyłem miejsce przed liczbami dziesiętnymi. Owóż, wprowadzenie w powszechne użycie układu metrycznego miar rzeczywiście wywołuje, jako objaw gorączkowy, uczenie ułamków dziesiętnych przed zwyczajnymi. Tak było w końcu zeszłego i na początku bieżącego wieku we Francyi, tak jest obecnie w Austrii i w znacznej części w Niemczech. Z czasem jednak ten niewłaściwy porządek w nauczaniu ustępuje; we Francyi np. jest on oddawna potępiony. Właściwe bowiem pojęcie o liczbie wogóle charakteru ułamkowego dać mogą tylko ułamki zwyczajne, a badanie własności tych ostatnich i działań na nich wyświeśla należycie naturę takiej liczby, czego nie można osiągnąć przy nauczaniu ułamków dziesiętnych, będących tylko szczególnymi przypadkami zwyczajnych ¹⁾; tak iż wtedy, mając na myśli pojęcie ogólne, ograniczać je musimy ze względu na niedostateczne przykłady objaśniające (że już nie będę się tu rozwodził nad innymi słabymi stronami takiego porządku). — Tu mi należy zaznaczyć, że tak pod względem następstwa zachowanego przy wykładzie niektórych kwestyj, jak i pod względem zakresu, w jakim są one przedstawione, a także pod względem ostatecznej redakcyi kilku ustępów, wiele zawdzięczam światłym i wytrawnym radom p. Władysława Kwietniewskiego, mego niegdyś profesora w Szkole Głównej warszawskiej. —

Źródła do wiadomości o dawnych miarach w Polsce, podanych w § 8-ym, i tamże wymienione, obszernie omówiłem w tygodniku «Wszecławiat» (Warsz., r. 1883, N. 43). —

¹⁾ O nauczaniu liczb ułamkowych w szkołach elementarnych trafną robi uwagę inspektor takich szkół w Paryżu, dr. ès sciences, E. A. Tarnier: «Wogóle, zbyt lekceważą «ułamki zwyczajne. To może ujść małym szkółkom wiejskim, zamkniętym przez część roku «z przyczyny robót polnych, w których uczniowie udział przyjmują. Tam należy się poddać przykrzej konieczności, konieczności, według której arytmetyka wyłącznie dziesiętkowa, z systematem metrycznym, jako punktem wyjścia, narzuca się, że tak powiem, sama «przez się; rzeczywiście w tych okolicznościach, należy dążyć drogą najprędszą. Lecz «w nauczaniu (— elementarnym —) o trzech stopniach, kurs «wyższy» może być poważnym «i owocnym tylko pod warunkiem, że się dostatecznie uwzględni rachunek tych ułamków «zwyczajnych». (*Nouvelle arithmétique théoretique et pratique*, 6-te wyd., Paryż, 1873, str. 273.)

Co się nakoniec tyczy tego, iż dodany na początku książki rys historyczny przybrał tak wielkie rozmiary, to, popiérwsze, drobiazgowość obszernego materyjału nie nadawała się ku temu, aby go można było zaznaczać ogólnymi tylko rysami; a powtóre, dzięki bibliotece w Kórniku, tak zasobnej w dawne druki matematyczne polskie, która mi łaskawie dostarczyła wszystkiego, czegom zażądał, i dzięki p. drowi Danielowi Wierzbickiemu w Krakowie, mogłem o najważniejszych naszych podręcznikach arytmetycznych z wieku XVI i początku XVII, nigdzie dotąd nieopisanych, podać takie wzmianki, któreby dały pojęcie o nauczaniu wtedy u nas arytmetyki. Mając nadto pod ręką nieogłoszone dotąd ważne źródło, odnoszące się do tyle doniosłej działalności Komisji Edukacyjnej, «Protokoły Towarzystwa do ksiąg elementarnych», uznałem za właściwe przytoczyć tu z niego choć te główne fakty, które pozostawały w bezpośrednim lub bliskim związku z ówczesnym nauczaniem w naszych szkołach i z wypracowaniem dla nich dwu znakomych podręczników arytmetycznych, wydanych przez owę wiekopomną magistraturę.

KRÓTKI RYS ROZWOJU ARYTMETYKI

I O JEJ NAUCZANIU W POLSCE.

Najdawniejszym ¹⁾ zabytkiem, przedstawiającym sposoby wykonywania rachunków, jest wielce starożytny papyrus egipski, zachowany w muzeum brytańskim, który wydał RHIND, a przetłumaczył EISENLOHR (1877). Dokument ten, napisany pismem hieratycznym, posiada tytuł: *Przepis do osiągnięcia poznania wszelkich rzeczy ciemnych... wszelkich tajemnic, które są zawarte w przedmiotach. Ułożoną była ta księga w roku 33, Mesori dnia... za króla górnego i dolnego Egiptu RA-A-US życie dającego, według wzoru starych pism, które wygotowane były za czasów króla [RA-EN-M]AT przez pisarza AMES'a ułożone to pismo.* Tu wyraz RA-A-US jest przydomkiem króla Hiksosów, którego imię jest APEPA. Panowanie zaś jego przypada nie wcześniej niż na 2000 lat, a nie później niż na 1700 lat przed Chr. Do tego więc czasu należy odnieść papyrus RHIND'a, za czym przemawiają także jego cechy paleograficzne ²⁾. Początkowa część tego zwoju podaje sposoby wykonywania rachunków, a końcowa jest poświęcona zadaniom z geometrii praktycznej.

Tak w piśmie hieroglifowym, jak i w hieratycznym, ułamki $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$ miały osobne znaki, a w hieratycznym nadto takie oddzielne oznaczenia istniały dla ułamków $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{4}$. Aby zaś przedstawić np. ułamek $\frac{1}{7}$ pisano znak, oznaczający 7, kładąc nad nim osobny znak («ro», w piśmie hieratycznym: kropkę), który wskazywał, że to nie jest przedstawienie liczby 7, lecz liczby $\frac{1}{7}$. Mogli więc Egipcjanie, prócz ułamka $\frac{2}{3}$, przedstawiać tylko ułamki, które, według naszego sposobu ich pisania, mają w liczniku 1. Jakże należało przedstawiać inne ułamki, czyli, według papyруса, jakże przedstawiać wypadek zadania: «podziel 2 przez 5», 7 i t. d.? Owóż, początek papyруса zajmuje tablica wypadków takich dzieleni liczby 2 przez wszystkie liczby nieparzyste od 3 do 99. Np.

$$\text{podziel 2 przez 11} \quad \frac{1}{6} \frac{1}{66} \quad (\text{t. j. } \frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66})$$

$$\text{podziel 2 przez 13} \quad \frac{1}{8} \frac{1}{52} \frac{1}{104} \quad (\text{t. j. } \frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}).$$

¹⁾ Nie powtarzam w tym «Krótkim rysie» szczegółów o liczeniu słownym i piśmiennym. Są one podane w §§ 2-im i 3-im tej książki. Nie podaję też mniej lub więcej prawdopodobnych domysłów o początkowym wykonywaniu rachunków, opartych na liczeniu społecznych ludów pierwotnych.

Materiał faktyczny do części ogólnej czerpię z następujących źródeł: CANTOR'a *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, których ogłoszony w r. 1880 tom I obejmuje historię matematyki do r. 1200 po Chr. (autor niekiedy zbyt śmiało robi przypuszczenia); HANKEŁ'a *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter* (1874); CHASLES'a *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1875; przedruk wydania z r. 1837). Ostrożnie zaś korzystać należy z niekrytycznej często kompilacji HOEPFER'a *Histoire des mathématiques depuis leurs origines jusqu'au commencement du dix-neuvième siècle* (1874).

²⁾ Nie wyjaśniono dotąd należycie, o jakim dawniejszym królu wspomina ten tytuł.

Oczywiście, że przy pomocy tej tablicy wszelki ułamek, którego mianownik jest nie większy od 100, a licznik jakikolwiek, można wyrazić przez ułamki, które Egipcjanie wymówić i napisać mogli, a te ułamki doprowadzić do tego, iżby pośród podobnych składników, wyrażających ułamek dany, nie było dwu równych. Czy jednak wtedy Egipcjanie istotnie tak postępowali, wykonując obliczenia w swoich «domach rachunków»,¹⁾ tego z dotąd znanych zabytków wniesić nie można.

Za to w papyrusie RHIND'a są wyraźne ślady, iż pomimo tego, że oznaczali na piśmie tylko mianowniki ułamków, umieli je skracać i sprowadzać do wspólnego mianownika, gdy je należało dodać do siebie. Aby zaś przedstawić ułamki o wspólnym mianowniku, opuszczano ten ostatni, a natomiast pisano same tylko liczniki (bez kropek, więc jakby liczby całkowite — ale inkaustem odmiennego koloru), i taksamo sumę tych liczników, po której pisano już zwyczajnie wypadek dodawania. — Mnożenie wykonywa się zapomocą kolejnego podwajania, jakby częściowe zastosowanie naszej t. z. praktyki włoskiej, co w działaniach z ułamkami znakomicie ułatwia powyżej wzmiankowana tablica. — Odejmnowanie zaś i dzielenie traktuje się jako «sekem» (dopełnianie) odjemnika do odjemnej zapomocą dodawania, a dzielnika do dzielnej zapomocą mnożenia.

Ostatnią jest grupa zadań «hau» (kupa), które zdają się być rozwiązywane zapomocą fałszywego założenia. Podamy parę wysłowień tych zadań: «Kupa, jęj $\frac{2}{3}$, jęj $\frac{1}{2}$, jęj $\frac{1}{4}$, jęj całość, to stanowi 33»; « $\frac{2}{3}$ do tego, od tego $\frac{1}{4}$, pozostaje 10»¹⁾; «przepis podziału 700 chlebów między 4 osoby: $\frac{2}{3}$ dla jednej, $\frac{1}{2}$ dla drugiej, $\frac{1}{3}$ dla trzeciej, $\frac{1}{4}$ dla czwartej». — [W jednym z tych zadań są dodane do siebie liczby: 7, 49, 343, 2401 i 16 807 (t. j. potęgi liczby 7), obok których są wyrazy: obraz, kot, mysz, jęczmień i miara (prawdopodobnie objętości). To zadanie przedstawia widoczną analogiją z dziwną kwestyją, którą się jeszcze spetyka więcej, niż w 3000 lat później, u LEONARDA z PIZY (wiek XIII): 7 bab idzie do Rzymu, z których każda ma mułów 7, a na każdym mule sakiew 7, a w każdej sakwie chlebów 7, a w każdym chlebie nożyków 7, a każdy nożyk ma pochwę 7; szukana jest suma wszystkich tych rzeczy.]

Niektórzy ten zabytek uważają za podręcznik do nauki, inni zaś za rodzaj kajetu szkolnego ucznia²⁾. Za tym ostatnim przypuszczeniem przemawia wiele względów. Zadania są często niewyraźne, jakby zwięzłe notowania. Obok błędnych rachunków są na boku zaznaczone wypadki dobre, jakby przez nauczyciela wskazane. Często złe rachunki następują po dobrym, jakby ten ostatni był wzorem podanym przez nauczyciela. Po złych zaś rozwiązaniach rachunki poprawne są kilkakrotnie powtarzane, jakby dla lepszego nauczania się ich wykonywania. — Jeżeli papyrus RHIND'a był kajetem ucznia, to mistrz prawdopodobnie umiał więcej. Wskazywałoby to, że nauka rachunków w dawnym Egipcie stała na jeszcze wyższym stopniu, niż o tym bezpośrednio świadczy ów zabytek. — W każdym jednak razie jest on dowodem, iż w tak odległej starożytności nauczano już systematycznie roz-

1) T. j. $(x + \frac{2}{3}x) - \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x) = 10$.

2) O pracach, poświęconych (1877—1882) badaniu tego zabytku, p. E. MEJERSON ogłosił artykuł sprawozdawczy w *Ateneum* (r. 1883, tom IV), w którym czytelnik może znaleźć szersze przedstawienie wykonywania czterech działań.

wiązywania nawet takich zadań, jak powyżej przytoczone, oraz, że, mimo niedołęznego, a raczej wielce kłopotliwego wyrażania liczb ułamkowych, przewyciężano napotykanę trudności, a nadto, że działania na liczbach ułamkowych musiały być już bardzo rozpowszechnione, kiedy obmyślono ułatwiającą je tablicę i tak jednostajnie je wykonywano. —

Doniosłe w swoim rodzaju posiada znaczenie inny starożytny zabytek, mianowicie dwie gliniane tabliczki ¹⁾, znalezione w r. 1854 przez geologa LOFTUS'a nad Eufratem koło Senkerah, a które, według poważnych domniemań (SAYCE) pochodzą z okresu między r. 2300 a 1600 przed Chr. Tabliczki te są zapisane po obu stronach pismem klinowym (zob. str. 15), obie do siebie należą, a jedna z nich nie jest całkowita. Na tej, która nie jest uszkodzona, po obu jej stronach, jest 60 wierszy. Między liczbami są wyrazy sumeryjskie, z których powtarzający się «ibdi» oznacza: kwadrat (RAWLINSON). Z początku jest na tej tablicy:

1 jest kwadrat 1, 4 jest kwadrat 2, i t. d., 49 jest kwadrat 7.

Zamiast jednak tego, by dalej było podobnie: 64 jest kwadrat 8 i t. d., znajdujemy:

1	4	jest kwadrat	8
1	21	jest kwadrat	9
1	40	jest kwadrat	10 (i t. d.)
58	1	jest kwadrat	59
1		jest kwadrat	1

Owóż, znaczenie liczb początkowych w tych wierszach jest takie:

$1 \times 60 + 4$, $1 \times 60 + 21$, $1 \times 60 + 40$, i t. d., $58 \times 60 + 1$, 1×60^2 ,

a ostatniej liczby ostatniego wiersza: 1×60 . Ta więc tabliczka jest zestawieniem kwadratów pierwszych 60 liczb, jakby w systemacie sześćdziesiątkowym pisania liczb. Jedna strona drugiej tabliczki (uszkodzonej) jest niekompletnym wprawdzie zestawieniem dwu układów miar, z których w jednym podziały są dokładnie sześćdziesiątkowe. Zachowana część tej tabliczki na drugiej stronie przedstawia sześciany liczb od 1 do 32 (na brakującej części prawdopodobnie znajdowały się dalsze do liczby 60, jak odpowiednio na pierwszej tabliczce). Są one również napisane według systematu sześćdziesiątkowego; tak np.

obok liczby	4	znajduje się	1	4	t. j.	$4^3 = 1 \times 60 + 4$,
„	16	„	1	8	16	„ $16^3 = 1 \times 60^2 + 8 \times 60 + 16$,
„	30	„	7	30		„ $30^3 = 7 \times 60^2 + 30 \times 60$.

Zestawiając te tabliczki, obejmujące wyrażenia kwadratów i sześcianów liczb w układzie sześćdziesiątkowym, ze śladami układu miar Babilończyków, w którym stanowczo przemagały podziały sześćdziesiątkowe, częściowo dotąd będące w powszechnym użyciu (por. § 2, us. 12), objaśnić sobie łatwo możemy najprawdopodobniejsze ich przeznaczenie, co jeszcze wprost potwierdza jedna strona tabliczki uszkodzonej. Jeżeli prawdziwą jest zaznaczona powyżej starożytność tych tabliczek, to one wskazywałyby na to, iż działania na liczbach wielorakich w powszechnym musiały być użyciu, jeżeli obmyślono dla

¹⁾ Fotograficzne ich odtworzenie jest dołączone do rozprawy LEPSIUS'a w *Abhandlungen akademii berlińskiej* za rok 1877.

ogólnego użytku (gliniane) podobne ułatwienia. Zaznaczyć nadto wypada, że, jak z powyższego widoczna, Babilończycy byli bardzo bliscy utworzenia pozytywnego systematu sześćdziesiątkowego pisania liczb.

Niemniej starożytnego pochodzenia jest sposób wykonywania rachunków na przyrządach odpowiednich, który powoli bardzo ustępował pola arytmetyce «cyfrowej», t. j. takiej, jaka jest dziś w powszechnym użyciu.

Według źródeł chińskich, o których dotąd, co prawda, tylko przez pośrednictwo chińskich uczonych coś wiedzieć można, jeden z ministrów cesarza HUANG-TI, panującego w r. 2637 przed Chr., mianowicie SZEU-LY, był wynalazcą «swan-pan»'u, przyrządu do wykonywania rachunków, jakoteż autorem «dziewięciu rozdziałów arytmetycznych», które prawie we wszystkich późniejszych arytmetykach chińskich są uważane jako podstawa nauki rachunków ¹⁾. Swan-pan tworzy rama drewniana z utwierdzonymi w niej najczęściej 10 równoległymi drutami (tych drutów bywa niekiedy i więcej), oraz jednym poprzecznym (do tamtych prostopadłym), dzielącym więc każdy z poprzednich drutów na dwie części; na każdym zaś z owych równoległych drutów są gałki, a mianowicie z jednej strony poprzecznego drutu po 5, a z drugiej po 2. Każda z owych 5 gałek na którymkolwiek drucie służy do oznaczania 10 razy większej części liczby niż na poprzednim drucie, a każda z owych 2 oddzielnych gałek na jakimkolwiek drucie jest tyleż, co wszystkie 5 gałek, na innej części tegoż drutu się znajdujących. Łatwo więc zrozumiemy, jak na tym przyrządzie dogodnie można było unaoczniać liczby. Gdy zaś dawniejsze sposoby piśmiennego przedstawiania liczb tak Chińczyków ²⁾, jak i innych ludów (por. § 3), nie nadawały się do bezpośredniego wykonywania działań na wypisanych liczbach, przeto uci-kać się musiano do mechanicznych sposobów. Oznaczano przeto różne części danej liczby (jedności, dziesiątki, sta, ...) czyto różnymi przedmiotami, czytóż jednakowymi, różnie tylko uszykowanymi; następnie zaś, mając na uwadze owe przedmioty, wykonywano na nich odpowiednie działania, a nakoniec odczytywano i zapisywano otrzymany wypadek. Wskazówką tego, jak dawno takie wykonywanie rachunków było w Chinach uprawiane, a zarazem jak ono było rozpowszechnione, może służyć to, że w żadnej książce chińskiej o rachunkach niema uwag o tym, jak postępować, aby dane liczby dodać lub odjąć od siebie ³⁾. Natomiast na mnożenie i dzielenie są podane prawidła; pierwsze uskutecznia się przez częściowe mnożenie (uwielokrotnienie) części większej z liczb danych, drugie zaś przez powtarzane odejmowanie.

Czy przyrządy do rachowania u różnych ludów powstawały niezależnie, czytóż są modyfikacją swan-pan'u, stanowczo rozstrzygnąć się nie da. Że niektóre z nich przechodziły od jednego narodu do innego, jest dziś rzeczą dowiedzioną. Wiele jednak względów mówi za tym, iż one wszystkie powstać

¹⁾ O rachowaniu na swan-pan'ie traktuje sześciotomowe dzieło chińskie, o którym sprawozdanie ogłosił w r. 1839 E. BIOT w *Journal asiatique*.

²⁾ Dziś Chińczycy w powszednim życiu używają 9 znaków na różnych miejscach, lecz choć mają i często piszą zero, to jednak, gdy np. piszą 204, pod znakiem 2 piszą 100, a dalej obok zero i cztery.

³⁾ BIERNATZKI. *Die Arithmetik der Chinesen* (w dzienniku matematycznym CRELLE'go, tom LII, r. 1856).

mogły ze swan-pan'u, ulegając zmianom pod wpływem wymagań życia praktycznego tego narodu, który takiego przyrządu zaczął używać. Tak np. dotąd jeszcze w Rosyi używane «szczoty» mają też same ramę, druty i gałki, co swan-pan chiński; pod wpływem jednak dziesiątkowego sposobu pisania liczb znikły gałki oznaczające piątki i drut poprzeczny, a natomiast każdy drut ma 10 gałek.

Rachowanie na podobnych przyrządach wydałoby się nam dziś mogło właściwym chyba przy nauce początkowej dzieci lub dla osób niewykształconych; wszakże coś podobnego zdarza się niekiedy jeszcze widzieć tylko u «karbowych», czytających rezultaty swych obliczeń i notowań z karbów swoich lasek. Wychowani na arytmetyce cyfrowej moglibyśmy myśleć, że jeżeli nie zawsze, to przynajmniej od bardzo dawna ludzie rachują w ten sposób, jak my teraz. Jak jednak zobaczymy, arytmetyka cyfrowa wkraczać zaczyna do świata chrześcijańskiego dopiero w wieku XII. Dawna zaś arytmetyka na przyrządach odpowiednich, niegdyś wyłącznie panująca, podtrzymywana później siłą przyzwyczajenia i odpowiednimi podręcznikami, a tradycją przekazywana długo następnym pokoleniom, zwolna tylko ustępuje z pola. W Polsce np. są ślady, iż jeszcze w końcu przeszłego stulecia była ona w użyciu.

Aby więc zrozumieć, jak dawniej rachowano, aby pojąć powolny postęp arytmetyki cyfrowej, a tym samym i jej doniosłość, winniśmy choć w głównych rysach zaznajomić się z rozprzestrzenieniem i najważniejszymi sposobami wykonywania rachunków na wzmiankowanych przyrządach. Tym właśnie teraz się zajmiemy.

Według świadectwa HERODOTA, «Egipcjanie piszą wiersze swego pisma «i rachują kamykami, posuwając rękę od prawej ku lewej, gdy Hellenowie kierują od lewej ku prawej». Rachowanie więc kamykami, czyli wykonywanie mechaniczne rachunków, było powszechne w Egipcie, jakkolwiek bezpośrednio śladu tego dotąd nie mamy ¹⁾. Za to zachowały się: rysunek greckiego rachmistrza z przyrządem rachunkowym na wielkiej wazie Daryjusza w Neapolu, jakoteż znacznych rozmiarów tablica marmurowa, znaleziona w r. 1846 na wyspie Salaminie, będąca albo stołem rachunkowym publicznego wekslarza greckiego, albotóż może stołem do gry, z przygotowanymi rzędami do obliczania wygranej i przegranej. Z każdej strony jest 5 głównych rzędów i 4 pomocnicze. Pierwsze służyły do oznaczania talentów (6000 drachm), tysięcy, set, dziesiątków i pojedynczych drachm, a były podzielone na dwie części (liczman na jednej mógł przeto znaczyć tyle, co 5 na drugiej części), rzędy zaś pomocnicze służyć mogły do oznaczania monet mniejszych od drachmy. Główne rzędy są opatrzone odpowiednimi znaczeniu liczmanów, na nich kładzionych, znakami liczebnymi herodyjańskimi (por. str. 16, odsyłacz 1-y), co usprawiedliwia podział tych rzędów na wzmiankowane dwie części, gdyż istnieją oddzielne takie znaki dla 5, 50 i t. d. Przyrządy więc rachunkowe u Greków są conajmniej tak dawne, jak owe znaki herodyjańskie (por. tamże). — Taki przyrząd Grecy nazywali «abaks» ²⁾, skąd nazwa rzymska «abacus» (nasza «abak»), która stała się powszechną. — JAMBlichus, głośny autor prac o Pitagorasie i jego szkole, piszący w IV wieku po Chr., opowiada, iż założyciele

¹⁾ Wprawdzie na papyrusie z czasów króla MENEPTAH I (panow. 1341—1321) jest jakby rachunek wykonany kamykami (kółka), lecz niektóre tak pionowe jak i poziome rzędy mają po dziesięć kamyków.

²⁾ Niektórzy ten wyraz wiążą z pierwiastkiem semickim «bak», piasek.

tęj szkoły dowodzenia tak arytmetyczne, jak i geometryczne przeprowadzali na abaku, a w innym miejscu wyraźnie wypowiada, że abak pitagorejczyków tworzyła tablica ¹⁾ posypana piaskiem, co tłumaczy jej używanie przy rostrzaniach geometrycznych.

U Rzymian, jak liczne wzmianki o tym świadczą, również do ćwiczeń geometrycznych i arytmetycznych służyła tablica piaskiem pokryta, abacus, na której przeciągnąwszy rysy, można było, kładąc kamyczki, «calculi», wykonywać rachunki. Nadto zachowały się dotąd cztery przyrządy rachunkowe z nacięciami, w których przesuwają się gąłki na sztyftach. Jeden z tych przyrządów, metalowy, służył do obliczania pieniędzy, assów i uncyj; siedem głównych nacięć, opatrzonych znakami I, X, C i t. d., jest przeznaczonych na assy; każde nacięcie składa się z dwu nierównych części (ściślej, w jednej linii są dwa nierówne nacięcia); w większej można było umieszczać 4 sztyfty z główkami, a w drugiej tylko jeden, który tyleż oznaczał, co 5 w poprzedniej części; nadto w jednej linii są dwa nierówne nacięcia do obliczania uncyj (ass = 12 uncjom), z których więc w jednym można było umieszczać 5 sztyftów, a w drugim 1, równoważny 6-u w tamtej części.

Ważną reformę w rachowaniu na abaku zaprowadził sławny uczoney z początku wieku VI, ANICIUS MANLIUS BOETHIUS, autor doszłych do nas prac o arytmetyce, o muzyce, o geometrii, oraz zaginionej w XVI wieku pracy o astronomii ²⁾. Mianowicie, zamiast jednakowych, jak dotąd liczmanów, wprowadził on dziewięć różnych, «apices», na których były umieszczone znaki, oznaczające 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9, tak iż, gdy na abaku była jedna liczba, to na każdej linii mógł być tylko jeden taki znak. Według badań CANTOR'a, najdawniejsze znaki na «apices» BOECYJUSZA pochodzą od liter, które na oznaczenie liczb początkowych były używane przez Indusów w II stuleciu po Chr. i przez Aleksandryją dostały się do Rzymu. Że zaś z tychże indyjskich liter powstał skutkiem kolejnych zmian kształt dzisiejszych cyfr t. z. arabskich (por. str. 18 i 19), przeto łatwo się tłumaczy przez długi czas niezrozumiałe wzajemne podobieństwo tych znaków liczebnych. — Gdy wystawimy sobie na abaku przy pomocy «apices» wyrażoną jedną lub więcej liczb, to dostrzeżemy, iż ta tylko będzie różnica od naszego ich przedstawienia, że tam będą niezajęte linije, gdzie my piszemy zera, i można powiedzieć, że około tego zera, tej jedynej brakującej cyfry, obracają się usiłowania tylu uczonych przez tyle wieków! — Dzielenie najwięcej przedstawiało trudności. BOECYJUSZ uczy metody dopełniającego dzielenia, która prawie przez tysiąc lat była później uprawiana. Tak np. dzielniki 16, 78, 623 od bliskich im liczb okrągłych większych: 20, 80, 700 różnią się o «różnice» 4, 2, 77; dzieli się więc dzielną przez wspomniane liczby okrągłe, a do reszty dodaje się iloczyny ilorazu przez owe «różnice». Gdy zaś trzeba podzielić np. przez 308, to trzeba odłączyć odpowiednią część dzielną, pozostałą jej część podzielić przez 300, a do tej reszty dodać «różnicę» między ową odłączoną uprzednio częścią dzielną i iloczynem wyznaczonego ilorazu przez 8. — Od czasów BOECYJUSZA stale już każda liczba (numerus) od 1 do 9 jest «digitus», palec, każda liczba, jakbyśmy teraz powiedzieli,

¹⁾ BOECYJUSZ (por. niżej) nazywa ją «mensa PYTHAGOREI», co później rozumiano jako oznaczające znaną tabliczkę mnożenia (stąd powszechne przypisywanie jej PITAGORASOWI).

²⁾ Onto te cztery nauki objął powszechną później nazwą «quadrivium». [«Quadrivium» wraz z «trivium» (gramatyka, retoryka i dyjalektyka) obejmowało «siedem sztuk wyzwolonych».]

zakończona na 0, t. j. 10, 20 i t. d. (do nieskończoności), «articulus», staw (zgięcia palca), jedna lub druga ogólnie «incompositus», niezłożona, gdy wszystkie inne liczby (t. j. większe od 10, a przez 10 niepodzielne), są «compositi», złożone.

Oto jak się uczono rachunków w wieku IX: «W lecie r. 822 zacząłem pod kierunkiem TATTOŚ'a naukę arytmetyki. Naprzód objaśnił on nam księgi konsula MANLIJUSZA BOECYJUSZA o rozmaitych rodzajach i podziałach, jakoteż o znaczeniu liczb; później uczyliśmy się rachować na palcach i użycia abaku według ksiąg, które BEDA ¹⁾ i BOECYJUSZ o tym napisali» ²⁾. Nie była więc wtedy łatwą nauka rachunków: *quantus sudor in mathesi expensus est!*

Do ułatwienia jęj i rozpowszechnienia znakomicie się przyczynił sławny GERBERT (ur. w pierwszej połowie wieku X w Owernii, nauki częściowo pobierał w Marchii hiszpańskiej, zmarły w r. 1003 jako papież SYLWESTER II), znakomity na swój czas geometra i astronom, tak bezpośrednio nauczaniem w Rheims, jakoteż głośnymi swymi pracami o abaku wogóle i osobno o dzieleniu. Te dzieła arytmetyczne są opracowaniami metod BOECYJUSZA, którego GERBERT był wielkim wielbicielem, choć ani w tekście, ani na rysunkach abaku, w tych odpisach, które są starożytniejsze, niema «apices» BOECYJUSZA: występują one dopiero i z czasem upraszczają się w odpisach późniejszych ³⁾. — Od czasów GERBERT'a i jego uczniów nauka rachunków powoli staje się coraz dostępniejszą i coraz więcej się rozprzestrzenia, gdyż i ilość szkół jednocześnie się pomnaża.

* * *

Wprawdzie najpierwsza w Polsce wydana arytmetyka obcego autora jest przeważnie cyfrową, pierwsze atoli książki arytmetyczne, przez Polaków układane, uczą wykonywać rachunki zapomocą kamyków na liniach abaku — są «arytmetykami liniowymi».

Najdawniejszą ⁴⁾ w Polsce drukowaną arytmetyką jest *Algorithmus IOHANNIS DE SACRO BUSTO* ⁵⁾ (Cracovie, Haller, 1509; egzemplarz z biblioteki ⁶⁾ kórnickiej). Ta książka jest jednak arytmetyką cyfrową, a tylko parę ostatnich stron tak w tym wydaniu ⁷⁾, jak i w późniejszym (wnosząc z cech zewnętrznych; nie ma ono miejsca i roku druku; bibl. kór.), jest poświęconych pobieżnemu wykładowi arytmetyki liniowej (w wydaniu z r. 1509 jeden rysunek abaku). Do tej książki jeszcze wrócimy.

Pierwsza przez Polaka ogłoszona arytmetyka, *Algorismus linealis cum pulchris conditionibus duarum regularum Detri una de integris: altera vero de fractis: regulisque socialibus: et semper exemplis ydoneis adiunctis. In florentissimo studio*

¹⁾ Tu jest mowa o «BEDA venerabilis» (672—735), jako autorze dzieła o liczeniu na palcach. (Zob. także koniec str. 8).

²⁾ Tak pisze Walafrid STRABO.

³⁾ CANTOR, str. 746.

⁴⁾ Według dra T. ZEBRAWSKIEGO *Biblijografja piśmiennictwa polskiego z działu matematyki i fizyki, oraz ich zastosowań* (Kraków, 1873).

⁵⁾ Właściwie SACRO BOSCO, JAN z HOLYWOOD, uczony z wieku XIII, znany także jako astronom.

⁶⁾ Wzmiankując tu o pierwszym z udzielonych mi wielu z cennych zabytków, tak niezbędnych dla opracowania ustępów o arytmetyce w Polsce, a zachowanych w bibliotece kórnickiej, pospieszam wyrazić moje gorące podziękowanie jęj Zarządowi, a osobliwie p. drowi Z. CELICHOWSKIEMU.

⁷⁾ Wszystkich wydań przytoczonych przez ŻEBR i w J. ŁUKASZEWICZA *Historji szkół* (Poznań, 1849—51) jest 8 (ostatnie z wymienionym rokiem 1533).

Cracoviensi editus non minus litteris eruditus quam mercatoribus utilis. et maxime incipientibus. (Cracowie, Haller, 1517; kart 10; bibl. kór.; istnieje wcześniejsze ¹⁾ wyd. z r. 1513), którą ułożył «IOANNES DE LANZUT Magister», cała, prócz ustępu «de numeratione» (o wartości cyfry zależnie od miejsca przez nią zajętego), jest poświęcona rachunkowi na abaku. Mistrz JAN z ŁAŃCUTA przechodzi tedy kolejno: dodawanie, odejmowanie, podwajanie (duplatio), spółowanie (mediatio), mnożenie i dzielenie, przerabiając łatwe zadanie na czteroliniowym abaku (8 figur), a następnie mówi o postęпах obu rodzajów, regule trzech, nieco obszerniej o regule spółki (uwzględniając różne wnioski na różny przeciąg czasu dane), tak na liczbach całkowitych, jak i na ułamkowych. Znanych (ZEBR., ŁUK.) 13 wydań tej książki (do r. 1562) wskazuje najlepiej na jej upowszechnienie w ówczesnych szkołach ²⁾.

Pierwszą w języku polskim arytmetyką jest: *Algoritmus: To jest nauka Liczby: Polską rzeczą wydana: Przez Księdza TOMASZA KŁOSA. Na trzy części się dzieli, Pierwsza będzie o osobach liczby, wtóra o Regule detri, Trzecia o rozmaitych rachunkoch y o spółkach kupieckich* (1538). Oba istniejące egzemplarze, każde innego wydania ³⁾, są zdefektowane i nie odtwarzają całości. — Obszerna «Przedmowa do wszystkich młodzienców ⁴⁾ Polskich, zwłaszcza rodziców Krakowskich» (str. 2—8) jest poświęcona wychwalaniu każdej pokolei liczby od 1 do 9 i rozważaniu «pożitku tej nauki» na temat ze św. Augustyna: «żaden ku uznawaniu ani Boskich ani ludzkich rzeczy nie ma przystępować, «az pirwey naukę Liczby dobrze pobaczi». Pierwsza strona (9) samego już wykładu jest taka: «Poczyna się liczba Polska na liniach y na cyfrach. Pierwsza «figura telko sama siebie waży. Wtóra dziesięc. Trzecia Sto. Czwarta Ty-siąc. Szosta ⁵⁾ Sto tysięcy. Siodma Milon. Osma Dziesięc milionów. Dzie-«wiąta Milon milionow.» — (str. 10) «Naucz się they liczby dobrze wymawiać»; tu jedna z wypisanych liczb jest 10-cyfrowa, utworzona z samych 9-tek. — (str. 11) «Chceszli byc predki w liczbie Naucz sie tey wszystkiewy figuri po pamieci na każdy dzień jednego rzędu». Tu (str. 11—16) pod napisami «Wiele czyni» są wypisane szeregi dwu czynników jedno- i dwucyfrowych i ich iloczynów. — Na str. 17 «Ku lepszemu wyrozumieniu tego, Figurę z liniami «obacz.» i abak osmioliniowy z oznaczeniem wartości liczman, kładzionego na różnych liniach i między linijami (tu zamiastr poprzedniego «milon» występuje «Tysiąc tysięcy», a dalej «Pieć kroć tysiąc tysięcy» i «Dzie-

¹⁾ ŁUK. przytacza (tom I, str. 93) «spółczesne pierwszemu wydaniu tej książki: *Linealis calculatio cum pulchris documentis et regulis ad monetam cracoviensem diligenter supputata.* (Cracowie, 1513) napisał w Krakowie SEBASTYJAN PAUSCHNER LEUTSCHOVIANUS, przeznaczając je szczególnie dla kupców. ZEBR. nie wspomina o tej książce.

²⁾ Książka JANA z ŁAŃCUTA jest daleko lepszą od *Algoritmus linealis*. HENRICUS STROMER AUERBACHENSIS, dzieła nader pobieżnego, którego są znane dwa wydania z r. 1524 (Cracowie, Vietor; bibl. kór.; 6 kart, 11 rysunków abaku; zakres treści tenże, co u Mistrza JANA) i z r. 1536.

³⁾ Egzemplarz biblioteki Jagiellońskiej z kartą tytułową całą (Cracowie ex Officina Ungleriana 1538), która w egz. bibl. ks. Czartoryskich jest uszkodzona (w innym miejscu niema również oznaczonego miejsca i roku druku). [«Pokoz na liniach lata theraz idące 1537.» str. 22 egz. ks. Czar.]

Upzejomości p. dra D. WIERZBICKIEGO, astronoma w Krakowie, zawdzięczam zarządzenie przepisanie tego zabytku i sprawdzenie z oryginałami.

Z obu egzemplarzy do całości (31 kart) brak 4 kart (13—16), które widocznie obejmowały część wykładu o «Mnożeniu y dzieleniem» (najciekawsze).

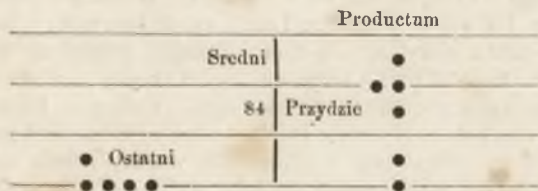
⁴⁾ Cz w odpowiednich miejscach należy czytać c, a niżej g przed i jest znakiem j-oty, t. j. gi = ji.

⁵⁾ «Piątę» niema.

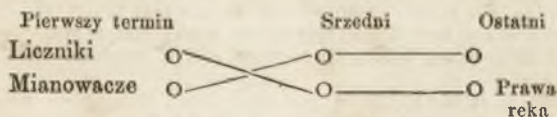
sięć kroć tysięcy tysięcy») — Dalszy ciąg owej części pierwszej obejmuje zadania na 4 działania na liczbach całkowitych, oderwanych i mianowanych tak prostych jak i wielorakich; w tym ostatnim razie z uwzględnieniem miar miejscowych i częściowo litewskich. Przy pierwszych zadaniach na dodawanie, odejmowanie (odejmowanie lat odnosi się przeważnie do faktów z dziejów ojczystych) i mnożenie są abaki z odpowiednio nałożonymi liczmanami; karty z dzieleniem zatracone. Brak wszelkich objaśnień wykonywania działań wskazuje, że autor tylko na abaku je wykonywał. Na str. 36: «Poczyna się wtora cześć o Regule Detri w czałey y w łamanej liczbie. Regula Detri. W ktorey są trzy terminy, pirwszy iesth wiadomych rzeczy, wtory iest tych wiadomych rzeczy zapłathy, Trzeci iest niewiadomych rzeczy. (Str. 37) Gdy tedy chcesz doydz niewiadomych rzeczy, mnoż ie przez zapłathę wiadomych rzeczy, A ono czo przydzie z takiego mnożenia dziel przez wiadome rzeczy. A w kocieniec (quotiens, iloraz) przydziec zapłata niewiadomych rzeczy iako tu. Kupilem post sukna.

Wiadome post:	Zapłata gich f:	Niewiadome postawow
24	84	9

«Czini $31\frac{1}{2}$ f: zapłata niewiadomych rzeczy na liniach tak. Kładz zawsze ostatni termin na liniach iako oto 9. mnożze gi przez sredni.



«Dziel przez pirwszy iako przez 24 przydzie $31\frac{1}{2}$ f: Tym obyczaiem działay «wsztyki insze takowe». Potym (str. 38—41) 6 przestróg (Kautela), objaśnionych na przykładach np. (2-ga) «Jestli pirwszy y trzeci termin: maią różne mianowanie, tedy ie obroć na iedno mianowanie» i t. p. — Następnie (str. 42—45) «Łamana Liczba pisze się» i przestróg o ułamkach, głównie o skraccaniu w postaci ułamkowej wypisanych rozwiązań zadań na regułę trzech. — Oto jak KŁOS postępuje z regułą trzech w przypadku, kiedy liczby dane są ułamkowe (str. 45—6) «Regula o łamanej liczbie pospolita. Gdy we wsztykch trzech terminiech iest łamana liczba przy czałey. Tedi złam całą liczbę przez swego mianowacza z przydaniem licznika: produktum na miestczu licznika kładąc: Pothym mnoż mianowacza ostatniego, od prawey ręki, w srednie-go. A zasię toż produktum mnoż w licznika pirwego produktum, tam kładąc «potim mianowacza pirwego mnoż w licznika sredniego albo ostatniego terminu produktum tam kładąc: iako tu w tym wnosku ukazuje.



«Wtora część tey Reguly. A iestli nie wszędzie łamana liczba iest, tedy podlož «1. pod ony termini ktchore są bez łamanej liczby, a potym czyń iakom cie

nauczył». Przykład na pierwszą część reguły jest taki: « $16\frac{2}{3}$ Korczy żyta za $4\frac{1}{2}$ zło. Zacz $3\frac{3}{4}$ korczy.» Stawia się więc dane liczby tak:

$$\frac{50}{3} \quad \frac{9}{2} \quad \frac{15}{4}$$

i przez oba mianowniki dwu ostatnich ułamków mnoży się licznik pierwszego, a przez mianownik pierwszego mnoży się licznik drugiego (lub trzeciego). Otrzymałszy

$$\frac{400}{3} \quad \frac{27}{2} \quad \frac{15}{4},$$

odrzuca się mianowniki, a z liczbami

$$400 \quad 27 \quad 15$$

postępuje się tak, jak w przypadku poprzednio przytoczonym, gdy liczby zadania na regułę trzech są całkowite, t. j. ostatnią (15) mnoży się przez średnią (27), a ten iloczyn dzieli się przez pierwszą (400). Odpowiedź: «facit 1 zloty». — Część wreszcie trzecia (str. 47 do 61) obejmuje najróżnorodniejsze zadania, przeważnie na porównanie wag tak kupieckich jak i mennicznych; jest tu także «O towarzystwie reguła» (str. 56, 7), bez wszelkiego objaśnienia odpowiedzi ¹⁾. Podkoniec zadania i rozwiązania stają się coraz mniej wyraźne; ostatni tytułek «Lamanie łamania».

Drugą w języku polskim arytmetykę, znacznie obszerniejszą od poprzedniej, ogłosił w r. 1553 «BERNARD WOIEWODKA». Jedyny zachowany tego wydania egzemplarz nie posiada karty tytułowej (bibl. kór.; na ostatniej str. «drukowano w Krakowie u dziedziców Marka Szarfenbergera. Roku 1553»; taż data pod dedykacją na str. 6; kart 110). Według wydań późniejszych (w Krakowie r. 1574 i w Wilnie r. 1602) tytuł jest taki: *Algorithm, to jest nauka liczby po polsku na liniach uczyniony*. Rysunki abaku są tylko na str. 10 z objaśnieniem, t. j. 13 linii z nazwami części liczby na nich oznaczanych (7-ma: «Tysiąc tysięcy», 10-ta: «Tysiąc tysięcy tysięcy», 13-ta: «Tysiąc tys. tysięcy»), i na ostatniej stronie (rycina) abak z liczmanami na stole, za którym siedzi sędziwy rachmistrz. — Choć autor w przedmowie mówi, że «kożdy «mało nieco dowcipu mając może się jusz wybornie sam przes się z tego to «Algorithmu wiele nauczyć», to ²⁾ jednak, czytając jego dzieło, aby dojść do takiej opinii, trzeba chyba uwzględnić inne dzieła społeczne. Tak np. prowadzi rzecz swą o dzieleniu: «Dzielenie iest liczby większey na tylo części «rozmierzenie ile iest iedności w mnieyszey liczbie, a przeto dwie liczbie są «potrzebne w każdym dzieleniu. Napierwey liczba kthorą masz dzielić, a liczba «przes kthorą masz dzielić, z których dwu wychodzi trzecia liczba którą zową «kocientem, który kocient vkazuje wiele ras liczba przes którą dzielisz może «byc miana w tey liczbie kthorą dzielisz, a przeto gdy iedną liczbę przes «drugą chcesz dzielić, tedy tę którą masz dzielić położ na linie podług ich «iusz znamionowania, a drugą liczbę, to jest przes kthorą masz dzielić napisz «sobie gdzie dla pamięci albo ią pamiętai. Potem położ twoy palec na wyssey «liniay gdzie leżą liczmany, a ile kroć liczbę przes kthorą dzielisz możesz mieć

¹⁾ Ostatnie z trzech zadań: «Trzey się złożyli, pirwszy włożył 112. zło. y stał 5. mie-sięczy, drugi włożył wino y stał 8 miesieczy, trzeci włożył 72. zło. y stał przez niewiadomy «czas, y zyskali 104. zło a iako często pirwszy z zysku brał 5. zło. tako często wtori brał «5. zło a yle rozow wthori brał 7. zło. tyle razow trzeci brał 9. zło. Jest pytanie iako «drogo ono wino szaczowano, a iako długo trzeci stał w towarzystwie, a wiele każdemu «przydzie z zysku.»

²⁾ O zerze «a dziesiąta (figura) jest którą zową cifrą, która sama zsiebie nie nie «waży ani znamionuie, ale mając miestce przy drugich dawa innym znamionowanie, a ta «jest 0».

«w oney liczbie v ktorey palec dzierzysz telo liczmanow na teize liniey według «palca położ, a iesli liczby przez kthorą dzielisz cale a zupełnie nie możesz mieć w oney kthorą dzielisz kthora iest na liniach, tedi telko połowicę wezmi «liczby przez kthorą dzielisz, a za to odcięcie połosz liczman pod linią pod tą «v której palec trzymaż miasto kocienta, a tak tim obyczaiem czyn począwssy «od wierzchniey liniey aż do nizssey asz wssytko dzielenie wypełnisz.» Po takim prawidle wypisane są liczby, które należy podzielić, lub liczby mianowane proste, które należy wyrazić jako liczby wielorakie, i odpowiedzi. Wyłożwszy w ten sposób 4 działania na abaku, autor już dalej o nim nie wspomina, a tylko wprost mówi: pomnóż i t. d. — Następuje «Regula Detri» na liczbach całkowitych (str. 40) taksamo pojęta i z takimże prawidłem, jak u autora poprzedniego. — Ułamki nasz autor bardzo szczegółowo traktuje (str. 57—80), drobniagowo mówiąc o sprowadzaniu ich do spólnego mianownika, o tym «iako masz łamanie łamania przywiesić w proste łamanie», przy czym poleca «2. trzecicznie trzech ćwierci iedney połowice» tak pisać:

$$\frac{2}{3} \frac{2}{4} \frac{1}{2}$$

pośrednio o skracaniu ułamków, oraz systematycznie o działaniach na «łamaniami» (tu «O podwoieniu łamania», «O rozdwoieniu albo połowiczeniu łamania», którychto działań na liczbach całkowitych nie było. — «Dla pobaczenia lepszego reguły detry w liczbie łamanej będziem bażyć siedm reguł» t. j. rozróżnić 7 przypadków według tego, w których z »terminów« i w ilu z nich jest albo «sama liczba łamana», albo «sama liczba łamana krom całej postawiona» (str. 80—108). — Resztę dzieła, a więc całą drugą jego połowę, zajmują «Reguły rozmaite a barzo potrzebne a naprzod reguła towarzystwa rozmaitego y o czasie», później (str. 142) «reguła równości» (za pewną sumę pieniędzy kupić różnych różnej ceny towarów tak, aby każdego towaru kupić tę samą ilość), «Reguła ligar To yest Reguła myessania» (ile zmieszano jednego gatunku danej ceny z danymi ilościami innych gatunków danej ceny, gdy dana cena mieszaniny), «Reguła legis. To yest Reguła wstawy» (dane ceny dwu gatunków wina i mieszaniny, oraz jej ilość; w drugim zadaniu «czworakie wino»; wyznaczyć ilości gatunków mieszanych), «Reguła położenia» (podział proporcjonalny zapomocą pojedynczego fałszywego założenia), «Reguła augmenti Reguła pomnożenia» (gdyby ktoś kupił 9 funtów, to zostałoby 13 gr., gdyby 14 f. to 1 gr.; ile kosztuje funt i ile miał pieniędzy), «Reguła residui Reguła zbytku» (kupiec sprzedał towar za 33 zł. i na każdym zł. stracił 12 gr.; ile go kosztował ten towar), «Reguła fusti» (dane stosunek ilości mieszanych gatunków, ich cena i ilość mieszaniny; jaka jej wartość, i t. d. [r. frymarków, «o sędzye» (sąd pełen wody), o budowaniu, o złocie i srebrze], nakoniec «Reguła falsi Reguła falssu», «ze dwoiey liczby fałszywey wziętey na wolą rachującego, przydzie prawdywa a pytana liczba») i «Reguła Detri conversa. Reguła detri wywrocona». Jeżeli autor nie usprawiedliwia wskazówek, jakie daje w tych różnych regułach, to przynajmniej licznymi próbami stara się wpoić przekonanie o prawdziwości podawanych przepisów. — Może w stopniowaniu zadań początkowych, w różnorodności podejmowanych kwestyj z życia praktycznego, w samym jej języku wreszcie dopatrywać należy wielkiej poczytności arytmetyki WOJEWÓDKI, która sprawić mogła to, iż egzemplarze wszystkich trzech jej wydań są dziś tak wielką rzadkością.

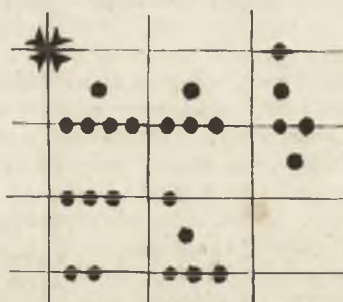
Nader starannym opracowaniem zaleca się BENEDICTI HERBESTI NEAPO-

LITANI *Arithmetica linearis* napisana w r. 1560 (data przedmowy) dla arcybiskupiej szkoły szlacheckiej w Skierniewicach, której autor, pochodzący z NOWEGO MIASTA na Rusi (karta 10-ta) w roku 1571, mając lat 40, wstąpił do zakonu Jezuitów, a umarł w Jarosławiu r. 1593. W wydaniu ¹⁾ z r. 1566 (Cracoviae, Siebeneycher, egz. bibl. głównej w Warszawie) arytmetyka obejmuje karty 6 — 33 (liczbowane); obfituje ona w rysunki abaku (jest ich 31), przedstawiające szczegółowo liczenie kamykami. Treść jest taka. Po 4 działaniach na liczbach całkowitych, «de progressionem» (karta 21), «de tribus numeris integris» (k. 23), «de tribus numeris fractis» (k. 26), i «de tribus numeris, et societatis temporis; Caput ultimum» (k. 29). Reguła trzech tak na liczbach całkowitych jak i ułamkowych (takież tu krzyże, jak na str. XXI) taksamo traktowana, jak u KŁOSA i WOJEWÓDKI, szczegółowiej tylko i nieco wyraźniejszym rozumowaniem opatrzona; w regule spółki autor opowiada wprost otrzymanie wypadków. Rachunki w regułach objaśnione na abakach, które autor pionowymi kręskami dzieli na potrzebną ilość przedziałów; gdy zaś jest liczba wieloraka, to wszystkie jej części ustawia obok siebie w jednym takim przedziale.

Umyślnie do tego miejsca odsunęliśmy przedstawienie tego, jak na liniach wykonywano cztery działania, gdyż dopiero u HERBESTA są należyte wyjaśnienia, a liczby dane są większe.

Widzimy tu obok na abaku, jak mówi Kłos, «położoną» liczbę. Na najniższej «linii» są 4 kamyki («calculi», HERBEST); a więc jedność jest 4. Taksamo dziesiątków 3. Na trzeciej są 2 kamyki, więc 2 setki; nadto nad trzecią linią kamyk, więc 5 setek; razem setek 7. Czytelnik łatwo dalej sobie objaśni, że mamy tu nałożoną liczbę 695 305 734. Niekoniecznie trzeba było mieć linie: dość było postawić większe kamyki dla oznaczenia rzędów, by obok nich kłaść liczmany. (Prócz krzyżyków, odpowiadających tysiącom, tysiącom tysięcy..., u HERBESTA na przecięciu téjże pionowej kręski z linijami 6-tą i 11-tą są kółka, oznaczające więc 100 000 i $100\ 000 \times 100\ 000$.)

Dodawanie łatwo sobie objaśnimy na tym rysunku:



na drugi. Zbięram te 5 liczmanów z drugiey linii

Mamy tu dane dwie liczby: 932 i 818. Aby je do siebie dodać, zbieram z pierwszej linii 2 i 3 liczmany; zamiast 5-u kładę równoważny 1-en nad linią, zamiast zaś 2 nad pierwszą linią, kładę 1-en

¹⁾ Prócz jednego bez wymienionego roku, znane są wydania z lat 1561, 4, 6, 9, 77.

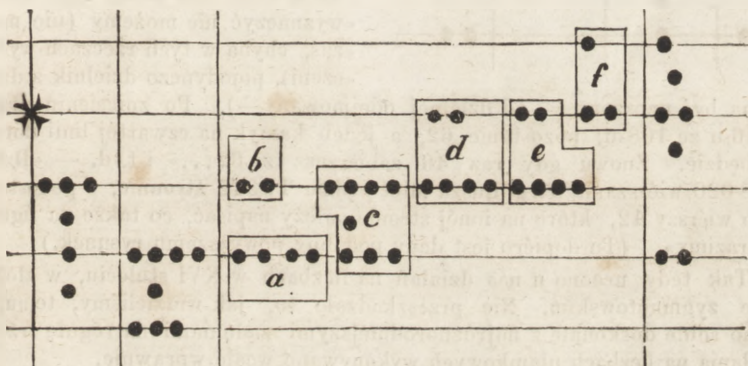
i kładę 1 nad tą linią. Na trzeciej linii jest 7; zostawiam 2, a zamiast 5-u kładę 1-en nad linią. Nakoniec zamiast 2-ch liczmanów nad 3-cią linią kładę 1-en na 4-ój. Odczytuję otrzymaną sumę: 1750.

Ten zaś rysunek objaśni nam odejmowanie:



Mamy tu dane dwie liczby: 3374 i 836. Aby je od siebie odjąć, zabięram z czwartej linii 1 liczman i zamiast niego kładę 2 nad trzecią linią; jeden z nich i jeden odjemnika znoszą się; usuwam je. Również dlatego usuwam 3 i 3 liczmany z trzeciej kreski, 2 i 2 z drugiej; zaś zamiast 1-go nad drugą kreską odjemnej, kładę 5 na drugiej i z tej linii usuwam 1 i 1; zostaje na drugiej 4. Zamiast 1-go z nich stawiam 2 nad pierwszą kreską i t. d. Pozostanie na abaku reszta 2538.

Mając pomnożyć 365×48 , położmy, jak robi HERBEST, obie te liczby na liniach (Kłos kładzie jedną, WOJEWÓDKA większą):



Tu w trzecim przedziale dodaliśmy obwódki, obejmujące składowe części iloczynu, «Summa producta non collecta», które, według tegoż HERBESTA (karta 16), tak otrzymamy. Dotknąwszy palcem pierwszej linii, nad którą mamy w mnożnej 5, z uwagi, że $5 \times 8 = 40$, zgodnie z tym «jak palec wskazuje», położymy 4 kamyki na następnej, t. j. na drugiej linii (a). «Robiąc krok na drugą linią» (ze względu na następną wyższą linią mnożnika), $5 \times 4 = 20$, dwa kamyki, «jako takie, które ze względu na palec» 20 wyraża, umieścimy na trzeciej linii (b). Skończywszy z pierwszą linią mnożnej, kładziemy palec na drugiej; mamy na drugiej (wraz z tym, co nad drugą) 6. Trzymając tedy właściwie palec, odkładamy $6 \times 8 = 48$ tak (c), jakby na tej linii, gdzie palec, były jedności, i «znowu, po podniesieniu palca na trzecią linią», $6 \times 4 = 24$, «które, jak wskazuje (—teraz—) palec, na liniach się oznacza» (d). I t. d. Zebrawszy te częściowe iloczyny razem, t. j. wykonawszy to dodawanie na liniach, otrzymujemy ostateczny iloczyn 17 520.

Dzielenie HERBEST tak przeprowadza (drugi z dwu przykładów). «We wszystkich poematach Wiergilijusza 798 020 wierszy; jeżeli na oddzielnych «stronicach po 46 wierszy napiszesz, to zapomocą dzielenia dowiesz się, ile «stronnie objąć może te wiersze. Ilość wszystkich wierszy, jako części ca-
b*

«łości, powinna być dzielna; 46, jedna część całości, dzieli. Ile więc razy «dzielną zawiera dzielnik, tyle wskazanych będzie potrzebnych stronic z o-
«wymi wierszami. Położony zatem palec na szóstej linii, gdy 46 w 7-u nie
«mieści się, ani jego połowa, zejdzio na linią piątą, gdyż tam już 46 w 79



«wejść może. Po wzięciu więc raz
«46-u z 79-u (to zaś, co się bierze,
«zawsze znika z linii), pozostanie
«33, a jeden kamyk (—calculus—)
«na owej piątą linii w miejscu ilo-
«razu niech będzie oznaczony. Zno-
«wu 46 całkowicie w 33-ch mieścić
«się nie może, lecz połowę tego wziąć
«możesz. Weź przeto z 33-ech po-
«łowę dzielnika, 23, a pozostanie,
«jak wskazuje palec, 10, połowę zaś
«kamyka ¹⁾ do liczby ilorazu dołącz.
«Na czwartą następnie linią przelo-
«żywszy palec, znajdziemy, ile razy
«46 w 108, lecz jeżeli tego od razu
«wyznaczyć nie możemy (nie mogą
«zaś, chyba w tych rzeczach wywi-
«czeni), pojedynczo dzielnik z dziel-

«nej ma być unoszony (—od dzielnej odejmowany—). Po zniesieniu przeto
«raz 46-u ze 108-u, pozostanie 62, a jeden kamyk na czwartej linii ilorazu
«przybędzie. Znowu gdy raz 46 zabierzesz z 62...» i t. d. — «Dzielo
«z 798 020 wierszami Wirgilijusza mieć będzie 17 348 stronic, a pozostanie
«nadto wierszy 12, które na innej stronie należy napisać, co także na figurze
«wyobrazimy». (Tu dopiero jest dany podobny powyższemu rysunek.)

Tak tedy uczono u nas działań na liczbach w XVI stuleciu, w złotym

okresie zygmunto-wskim. Nie przeszkadzało to, jak widzieliśmy, temu, że

radzono sobie doskonale z najróżnorodniejszymi zadaniami na regułę trzech,

a działania na liczbach ułamkowych wykonywano wcale wprawnie.

Wprawdzie w następnych stuleciach wydawnictwo arytmetyk «linijow-

wych» prawie w zupełności ustaje, co wskazuje, że w wieku XVII powszechnie

już do szkół zaprowadzono arytmetykę «cyfrową», jednak nie tak

łatwo było w zupełności wyrugować z użycia kamyki i liniję. Dowodu na to

dostarcza ostatni rozdział arytmetyki ks. JÓZEFA MARQUARTA, Scholarum Pia-

rum, stanowiącej część pierwszą jego dzieła: *Nauka matematyczna...*, w Wil-

nie w r. 1772 (bibl. główna w War.). Dawszy temu rozdziałowi (str. 115—

121) tytuł: «Arytmetyka liczmanńska», autor zajmuje się przedstawieniem

liczby i wykonywaniem 4 działań zapomocą liczmanów, kładzionych nie na

liniach narysowanych, lecz obok «znaków odmiennych» (jakby owych więk-

szych kamyków u HERBESTA; por. wyżej). Kończy zaś autor ten rozdział

taką uwagą: «Używają Arytmetyki liczmanńskiej żydzi w rachunkach swoich,

«dla tego, że jest nieomylną, gdy się z uwagą czyni, pamięci w robocie nie

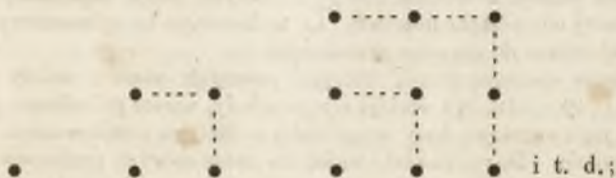
«fatyguje, zwłaszcza nabywszy zręczności w odbywaniu wszelkich rachunków.»

1) T. j. kamyk pod tą linią, na której wtedy jest palec.

Najdawniejsze ślady świadomego i systematycznego badania własności liczb spotykamy w świecie greckim.

Według świadectwa ARYSTOTELESA «Pitagorejczycy pierwsi matematykę naprzód posunęli». ARISTOKSEN wyrażniej tak o tymże mówi: «PITAGORAS arytmetyce jakby największą nadawał ważność i przez to głównie naprzód ją posunął, że ją postawił ponad potrzeby ¹⁾ kupieckie i wszelkie rzeczy rozważał pod postacią liczby». Mogły więc być przedtym pewne badania, a przynajmniej odpowiednio spostrzeżenia pewnych własności liczb, ale najdawniejsze teoretyczne dociekania w tym kierunku poczynają się od PITAGORASA z SAMOS. — Urodził się on w r. 580 (według innych w r. 569) przed Chr., przybył do Italii w r. 540 (inni twierdzą: w r. 510), założył tam szkołę w Krotonie, a umarł w r. 500 (inni przyjmują, iż umarł wkrótce po r. 509, a nawet w r. 470). Szkoła zaś przeżyła swego twórcę całe pół wieku. Nie przytaczając tu mniej lub więcej prawdopodobnych opowieści o życiu tego mędrca, jakie podają przedstawiciele t. z. szkoły nowopitagorejskiej, o sześć stuleci później w Aleksandryi powstałej, winniśmy tu zaznaczyć, że według świadectwa IZOKRATESA, którego działalność piśmiennicza przypada około r. 393 przed Chr., jak i według wzmianek wielu innych autorów, PITAGORAS przebywał czas jakiś w Egipcie i prawdopodobnie przyswoił sobie ówczesną wiedzę tamtejszych kapłanów. Ślady bowiem wyraźne dokładnej znajomości urządzeń tego stanu w Egipcie, tak ściśle spojonego, a tak zamkniętego w sobie, przejawiają się w przepisach wewnętrznych życia, a poczęści i w badaniach filozoficznych, jakie cechują szkołę PITAGORASA. Może więc i cała jego nauka pozostawała w związku z tym, co było przedmiotem badań mędrców egipskich. Przebywanie zaś PITAGORASA w Babilonie jest rzeczą nader wątpliwą.

Nie zdaje się, aby PITAGORAS zajmował się rozwiązywaniem lub objaśnianiem zadań arytmetycznych z życia powszedniego lub kupieckiego. Przeciwnie, wszystko to, co według najnowszych badań krytycznych, PITAGORASOWI i jego szkole niewątpliwie przypisane być może, odnosi się do teoretycznych badań własności liczb. A więc przedewszystkiem: podział liczb na parzyste i nieparzyste, a pierwszych na parzysto-parzyste (podzielne przez 4) i parzysto-nieparzyste; podział liczb na «kwadratowe» i niekwadratowe. Następnie przeróżne sumowania szeregów liczb: suma początkowych liczb nieparzystych po sobie następujących jest zawsze liczbą kwadratową, co zresztą nie było objaśniane zapomocą zawsze kwadratowej siatki punktów, powiększającej się stopniowo przez dodawanie coraz nowego «gnomonu», t. j. następnej liczby nieparzystej, przedstawionej szeregiem punktów, tworzących jakby kąt prosty o równych ramionach:



suma początkowych po sobie następujących liczb parzystych jest liczbą «nierównoboczną», t. j. iloczynem dwu czynników, różniących się o jedność:

¹⁾ T. j. że zajmował się nią nie ze względu na jej zastosowania przy rozwiązywaniu zadań, odnoszących się do stosunków kupieckich.

$2=1 \times 2$; $2+4=6=2 \times 3$; $2+4+6=12=3 \times 4$; $2+4+6+8=20=4 \times 5$ i t. d.; suma początkowych liczb naturalnych jest liczbą «trójkątną». PITAGORAS miał określić stosunek do przyjaciela przez liczby 220 i 284, które posiadają tę własność, iż suma dzielników jednej liczby od niej mniejszych jest równa drugiej i nawzajem (zob. § 15, us. 6); podobne liczby nazwano «zaprzyjaźnionymi». Nakoniec średnia arytmetyczna i średnia geometryczna dwu liczb były określane tak, jak to obecnie się czyni, a średnia harmoniczna (zob. § 28, us. 20) dwu liczb, jako taka liczba, która od jednej z danych jest mniejsza o taką samą jej część, o jaką część drugiej jest od tej drugiej większa (t. j. liczba h jest średnią harmoniczną dwu liczb a i b , jeżeli jednocześnie

$$h = a - \frac{a}{n} \quad \text{i} \quad h = b + \frac{b}{n},$$

skąd, rugując n , otrzymujemy dzisiejsze jej określenie). Wspomniany już wyżej (str. XVII) JAMBlichus przyznaje nadto PITAGORESOWI używanie proporcji ciągłych arytmetycznej i geometrycznej, proporcji harmonicznej, jak również proporcji «muzycznej», którą tworzą dwie dane liczby i ich średnie arytmetyczna i harmoniczna, np.

$$6 : 9 = 8 : 12 \quad (\text{ogólnie } a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b),$$

o którejto proporcji, zwaną później także «doskonałą» (jako geometryczna, w którą wchodziły liczby powstałe z proporcji arytmetycznej i harmonicznej), miał PITAGORAS w Babilonie się dowiedzieć.

Co do przypisywanego również PITAGORASOWI odkrycia, iż wszystkie harmoniczne dla naszego ucha tony są w związku ze stosunkami liczb najprostszych, zaznaczymy tu tylko, że np. $\frac{1}{2}$ długości struny, wydającej pewien ton, wyda ton o oktawę, $\frac{2}{3}$ zaś jej długości wyda ton o kwintę wyższy, a długości strun tonów znanego akordu: C, G, C, odpowiadają liczbom $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$, tworzącym proporcją harmoniczną, gdyż

$$(1 - \frac{2}{3}) : 1 = (\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) : \frac{1}{2}.$$

Na podobnej drodze prowadzone badania, niezależnie od wpływu na rozwój nauki o proporcjach, doprowadzały pitagorejczyków do wielu teoretycznych wyników, które musiały się wyraźnie zaznaczyć, jeżeli za czasów wzmiankowanego wyżej ARISTOKSENA z TARENTU, ucznia ARYSTOTELESA (384—322), powstała szkoła empiryczna muzyków, jako przeciwstawienie pretensjonalnym muzykom-matematykom. — Co się tyczy znanego wyrażania przez pitagorejczyków istoty wszelkich rzeczy i różnych pojęć zapomocą liczb, jak i wogóle całej ich mistyki liczebnej, to te kwestyje tu opuszczamy, jako nie należące właściwie do naszego przedmiotu. —

Badania geometryczne, których początek odnieść należy do TALESA z MILETU (640—548, lub dłużej) i jego szkoły, wielce pobudzone przez PITAGORASA i jego uczniów, były wciąż dalej z wielkim zamiłowaniem przez Greków uprawiane. Doprowadzało to ich do coraz nowych zastosowań własności proporcji, a w szczególności do wyczerpującego rozważania tworzenia nowych proporcji z danych, jak również do rozważania proporcji, w których oba wyrazy jednego z dwu stosunków były liczbami kwadratowymi lub liczbami sześciennymi, co, w razie gdy oba wyrazy drugiego stosunku nie są takimiż liczbami, przedstawia w rzeczywistości wprowadzenie do badań liczb niewymiernych, które też Grecy dokładnie pojmowali. Dziś, traktując odpowiednie kwestyje

geometryczne nieco inaczej, nie kładziemy na podobne proporcycje takiego nacisku, jak to geometrowie greccy czynili. — Zauważymy tu tylko, że własności, iż między dwiema liczbami kwadratowymi znajduje się jedna liczba dwuwymiarowa («powierzchniowa»), a między dwiema sześciennymi dwie trójwymiarowe («bryłowe»), tworzące proporcycją z liczbami danymi (to jest: $a^2 : ab = ab : b^2$, zaś $a^3 : a^2b = ab^2 : b^3$, lub $a^3 : ab^2 = a^2b : b^3$), starożytni nazywali twierdzeniami platońskimi (życie PLATONA ¹⁾ od 429 do 348), zaś HIPPASOS, pitagorejczyk, ARCHITAS z TARENTU (430—365), EUDOKSYJUSZ z KNIDOS (408—355), oraz TEMNONIDES i EUFRANOR (bliżej nieznani) doprowadzili ilość «mezotet» (μεσότητες), szczególnych proporcycj [ἀναλογιαι ²⁾, analogija] z trzech pewnych liczb utworzonych, do 10-u (t. j. prócz proporcycj ciągłych arytmetycznej i geometrycznej, oraz proporcyci harmonicznnej, różnili jeszcze następujące proporcycje mające miejsce między odpowiednimi każdym razem trzema liczbami, które ogólnie oznaczymy literami a, b i c ³⁾:

$$\begin{aligned} a:c &= (b-c):(a-b); & b:c &= (b-c):(a-b); & a:b &= (b-c):(a-b); \\ a:c &= (a-c):(b-c); & a:c &= (a-c):(a-b); & b:c &= (a-c):(b-c); \\ & & b:c &= (a-c):(a-b). \end{aligned}$$

Że badanie własności proporcycj Grecy prowadzili nietylko ze względu na zastosowania geometryczne, jak również, że badania własności liczb pierwszych względem siebie, a także poszukiwanie największego wspólnego dzielnika i najmniejszej wspólnej wielokrotniej doprowadzili do takiej doskonałości, iż do odpowiednich wówczas należycie udowodnionych twierdzeń, jak i metod postępowania, niema dziś nic do dodania, tego dowodzą *Elementa* (στοιχεια) EUKLIDESA (około r. 285 przed Chr.), pierwszego przedstawiciela szkoły aleksandryjskiej. Według PROKLUSA (410—485 po Chr.), «EUKLIDES, który zebrał *Elementa*, wiele rzeczy znalezionych przez EUDOKSYJUSZA w całość uporządkował, wiele z tego, co TEOTETES zaczął, do końca doprowadził, a nadto to, co przez poprzedników powierzchownie było udawadnianie, na gruntownych oparł dowodach». W większości wydań *Elementów* ⁴⁾ jako przeznaczonych do nauki geometrii, są opuszczane księgi VII, VIII i IX, obejmujące różne podania arytmetyczne, a podawane są tylko księgi I—VI, XI i XII. Takim też jest polskie tłumaczenie JÓZEFA CZECHA (Wilno, 1807; 2-gie wyd. 1817). Aby czytelnikowi choć częściowo podać możność zaznajomienia się z tym, jakie już kwestyje o podzielności liczb EUKLIDES w księgach arytmetycznych rozważa, przy odpowiednich ustępach rozdziału V niniejszej książki znajdują się cytaty z *Elementów*. Jak zaś EUKLIDES drobiazgowo bada proporcycje, można częściowo przekonać się łatwo, czytając ks. V w przekładzie CZECHA. Dodamy tu tylko, że w odpowiednich dowodzeniach liczby są przedstawiane zapomocą długości linii prostych (całe jednak rozumowanie jest tak prowadzone, iż bez-

¹⁾ W «Prawach» zaznacza, iż liczba 5040 jest podzielna przez 59 różnych liczb, między którymi są wszystkie liczby od 1 do 10.

²⁾ BOECYJUSZ ten wyraz przetłumaczył jako: «proportionalitas».

³⁾ Takie proporcycje będą tworzyć kolejno np. liczby (a, b, c) : 6, 5, 3; 5, 4, 2; 6, 4, 1; 9, 8, 6; 9, 7, 6; 7, 6, 4; 8, 5, 3.

⁴⁾ Rospowszechnione w różnych językach wydania mają za podstawę pierwszą edycyją tekstu greckiego w Bazylei w r. 1533 i wraz z nią posiadają też same, wciąż powtarzające się, lub nieco zmienione ustępy niezrozumiałe, jako grzeszące pewną niedokładnością. Dopiero PEYRARD znalazł w bibliotece paryskiej, pochodzący ze zbiorów watykańskich, z IX wieku odpis tekstu greckiego, znacznie poprawniejszy, który wraz z tłumaczeniami łacińskim i francuskim ogłosił w Paryżu w r. 1814—1818.

pośrednio do liczb oderwanych odniesione być może), oraz zauważymy, że gdy ks. V poświęca rozważaniu proporcij, zachodzących między wielkościami, to proporcjonalność liczb występuje dopiero od ks. VII, co tym więcej dziwi, że, choć według pojęć greckich nie wszelkie wielkości mogły być objęte przez liczby, to jednak, jak ARYSTOTELES wyrażnie mówi: «wielkości w szczególnych przypadkach mogą być liczbami». Może tradycja ówczesna, z którą EUKLIDES się liczył, nie dozwoliła mu złączyć tych dwu wykładów w jeden, a może pozostawił księgę V jako całość, obmyśloną przez EUDOKSYJUSZA, na co wskazuje PAPPUS (wiek IV po Chr.). Zwrócimy tu jeszcze uwagę na EUKLIDESA określenie liczby doskonałej i twierdzenie o takich liczbach (por. § 15, us. 6). —

Ułamki często się spotykają u pisarzy greckich. Najczęściej oni przedstawiają je w ten sposób, iż, napisawszy liczbę (por. str. 17), którą nazywamy licznikiem, dodają u góry z prawej strony akcent, a po napisanej liczbie, którą my umieszczamy w mianowniku, dwa akcenty, i takie wyrażenie mianownika piszą dwa razy obok siebie. Jeżeli przedstawiali ułamek o liczniku 1, to pisali sam mianownik i raz tylko, a szczególnych znaków używali dla przedstawienia ułamków $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$. Często jednak wyrażają, podobnie jak Egipcjanie (por. str. XIII), ułamki o liczniku różnym od jedności jako sumę ułamków, mających w liczniku jedność; tak postępują miernicy greccy, jak również ¹⁾ ARCHIMEDES (prawdopodobnie 287—212) przy podnoszeniu całkowitych z ułamekami do kwadratu, — KLAUDYJUSZ PTOLOMEUSZ (około r. 140 po Chr.) w *Wielkim zebraniu*, znanym pod nazwą przejętą od Arabów, «*Almagest*» (będąca skróceniem i modyfikacją tytułu greckiego), używa ułamków sześćdziesiątkowych pochodzenia babilońskiego (por. str. XV), dzieląc części (360-te części okręgu koła i 120-te średnicy), τῆ ἡμέρας, na 60 równych części, zwanych później po łacinie «partes minutae primae», a te jeszcze na 60, «partes minutae secundae» (skąd: minuty, sekundy i później terycje), a ułamki te pisze nie oznaczając mianowników. [Rozważanie takich ułamków, tak w astronomicznych, jak i w innych rachunkach, trwało powszechnie aż do wieku XVI (a u nas jeszcze i wieku XVII); używano ich tak, jak teraz dziesiętnych, np. dla wyrażania ilorazu lub pierwiastka kwadratowego, wyliczenia zaś ułatwia «canon vel tabula sexagenorum». Przy pisaniu takich ułamków postępowano wciąż jednostajnie, tak iż np.

$$\begin{array}{cccc} \text{o} & \text{I} & \text{II} & \text{IV} \\ 2 & 37 & 54 & 8 \end{array} \text{ oznaczało } 2 + \frac{37}{60} + \frac{54}{60 \times 60} + \frac{8}{60 \times 60 \times 60 \times 60}.$$

Ułamki te w wieku XVI zaczynają ustępować dziesiętnym, które początkowo pisano tak, jak owe sześćdziesiątkowe; np. ułamek 2,3456 pisano naprzód

$$\begin{array}{cccccc} \text{o} & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & & \text{IV} & & \text{IV} \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6, & \text{później} & 23456, & \text{albo} & 2,3456. \end{array}$$

Aleksandryja nie była siedliskiem wyłącznie uczonych i uczących się Greków. Owszem, prócz nich, Egipcjanie, Asyryjczycy, Indusowie, Żydzi przyjmowali czynny udział w naukowym życiu szkół tamtejszych. Stąd pochodzi pewne wzajemne oddziaływanie literatury naukowej jednych z tych narodów na inne, i dlatego «szkole aleksandryjskiej» nie można przyznawać czysto greckiego charakteru. — Jeden z objawów takiego wzajemnego oddziaływania widzieliśmy w ułamkach sześćdziesiątkowych. Innym jest ten, iż po-

¹⁾ O sposobie ARCHIMEDESA wyrażania wielkich liczb zob. str. 26.

czątkowe litery alfabetu, których Indusowie u siebie używali w wieku II po Chr., przez Aleksandryją przechodzą do Rzymu i występują tam jako wzmiankowane wyżej «apices» BOECYJUSZA.

Nie możemy tu szczegółowo śledzić dalszych badań nad własnościami liczb, z żywym zajęciem i wytrwale prowadzonych przez wielu aleksandryjskich uczonych, czego wyraźne i dość liczne ślady się zachowały. Wspomniemy tylko o trzech najwybitniejszych w tym kierunku badaczach. — NIKOMACHUS z GERAZY (prawdopodobnie z Arabii; około r. 100 po Chr.), należący do głośniejszej szkoły nowopitagorejczyków, napisał sławne dwie księgi *Wstępu do arytmetyki*, obejmujące wyniki dociekań dalej prowadzonych według wskazówek pozostałych po szkole PITAGORASA (między innymi nowymi rzeczami występują tu liczby «wielokątne» i «brylowe», czyli tak zwane «figuryczne»), któreto dzieło było długo przedmiotem studyjów wielu uczonych (w tej liczbie BOECYJUSZA). — TEONA ZE SMYRNY (około r. 130), również nowopitagorejczyka, nie tylko zajmują podobne powyższemu rostrząsania, ale nadto ta własność liczb kwadratowych, iż: gdy jest dana jakakolwiek liczba kwadratowa, to albo ona, albo liczba o jedność mniejsza, jest jednocześnie podzielna przez 3 i 4, lubtż z tych dwu liczb jedna jest podzielna przez 3, a druga przez 4; odpowiednio więc do tego, można liczby kwadratowe podzielić na cztery grupy. W tym twierdzeniu z zakresu obecnie tak rozwiniętej nauki o «resztach kwadratowych», spoczywa zarodek oddzielnej gałęzi badań matematycznych, którą dziś nazywamy teorią liczb. — DIOFANTOS z ALEKSANDRYI (co do epoki jego życia bardzo sprzeczne są wskazówki; najprawdopodobniej żył na początku wieku IV) w swej *Arytmetyce* zajmuje się takimi zadaniami liczebnymi, które go doprowadzają do wypisywania zapomocą skrótów w odpowiednim wysłowieniu istotnych równań pierwszych czterech stopni tak z jedną, jak i z dwiema niewiadomymi; rozwiązania jednak tych równań, tylko w liczbach wymiernych, wynajduje DIOFANTOS sposobami nie mającymi cechy metodycznego postępowania. W takichto zadaniach znajdują się ustępy, w których jest mowa o szczególnych własnościach liczb. Tak np. całkiem ogólnie DIOFANTOS mówi o tym, że każda liczba kwadratowa może być nieskończenie wielu sposobami wyrażona jako suma dwu kwadratów (oznaczywszy ogólnie daną liczbę kwadratową przez a^2 , można to tak przedstawić:

$$a^2 = \left(\frac{2m}{m^2+1} \cdot a\right)^2 + \left(\frac{m^2-1}{m^2+1} \cdot a\right)^2,$$

przy jakimkolwiek m). W innym miejscu jest mowa o wyrażeniu iloczynu dwu czynników (5×13), z których każdy jest sumą dwu kwadratów, dwoma sposobami jako sumy dwu kwadratów,

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Okolicznościowo również jest zaznaczone, że żadna liczba postaci $4 \cdot a + 3$ nie może być sumą dwu kwadratów. Różnica dwu liczb sześciennych jest zawsze sumą dwu takichże liczb. I t. d. Ogłoszenie drukiem dzieła DIOFANTOSA w łacińskim przekładzie w końcu wieku XVI, a w poprawniejszym w początkach wieku następnego, wywołało w wieku XVII głębsze badania własności liczb, które w drugiej połowie wieku XVIII wytwarzają oddzielną gałąź matematyki, teorią liczb, wciąż już rozrastającą się wynikami dociekań najznakomitszych matematyków. —

Jak Indusowie rachowali przed powstaniem u nich (por. str. 18) systemu pozycyjnego, t. j. przed epoką wprowadzenia zera, tego pewnych śladów dziś niema. Później zaś spotyka się u nich odejmowanie tak wykonywane, jak my teraz je przeprowadzamy (niekiedy według sposobu dziś używanego we Francji; zob. str. 51, odsyłacz). Mnożyli zaś liczby różnymi sposobami. W jednym z nich nie zaczynają od najmniejszych części, lecz przeciwnie, od największych, co jest usprawiedliwione tym, że jeszcze dotąd wykonywają rachunki pręcikiem na tablicy posypanej piaskiem; zastępywanie więc jednych cyfr innymi nie przedstawia w tym razie niedogodności. Inny z ich sposobów mnożenia wyłożymy niżej, mówiąc o podręczniku Brożka. Dzielenie wykonywano w sposób dosyć zawikłany. Sprawdzają dodawanie, odejmowanie i mnożenie zapomocą próby przez 9 (§ 13, us. 17). Przedstawiając ułamki, piszą licznik nad mianownikiem, nie oddzielając ich od siebie poziomą kręską, a astronomowie używają ułamków sześćdziesiątkowych, nie pisząc mianowników. Podnoszenie do potęg i wyciąganie pierwiastków (kwadratowych i sześciennych) uważają za działania elementarne, których sześć liczą.

Badania matematyczne w zabytkach piśmienniczych dawniejszych wstępują u Indusów tylko jako przygotowania do astronomii i astrologii, lubtż jako ustępy okolicznościowo wtrącone. Najważniejszymi dla nas pomnikami wiedzy dawniej indyjskiej są dzieła astronomiczne, które pozostawili: ARJABHATTA (urodzony w r. 476 po Chr.), BRAHMAGUPTA (ur. w r. 598) i BHASKARA AKARJA (ur. w r. 1114). — Pierwszy z nich zajmuje się zadaniami na regułę trzech, tak «prostą», jak i «odwrotną»; dwaj ostatni rozwiązują także zadania na regułę trzech złożoną. Zadania na procent składany podaje już ARJABHATTA; a u tamtych występują zadania na regułę mieszaniny i znane zadania o napelnianiu studni. BHASKARA używa fałszywego założenia jako wyrobionej już metody. Wszyscy zajmują się zadaniami na «odwrócenie», w których porządek, w jakim należy wykonać działania wskazane dla wyznaczenia liczby szukanéj, jest wprost przeciwny zachowanemu w wypowiedzeniu zadania. Tak np. BHASKARA: «Piękna dziewczeczko z błyszczącymi oczyma, jeżeli dobrze pojmujesz prawdziwą metodę odwrócenia, to mi powiedz, jaka to jest liczba, która pomnożona przez 3, następnie o $\frac{3}{4}$ iloczynu powiększona, przez 7 podzielona, o $\frac{1}{5}$ ilorazu zmniejszona, przez siebie samą pomnożona, o 52 zmniejszona, wskutek wyciągnięcia pierwiastka kwadratowego, dodania «8-u i podzielenia przez 10, wydaje 2?» (Odp. 28). — Wszyscy trzej wymienieni pisarze sumują szeregi kwadratów i sześciątów liczb naturalnych, BRAHMAGUPTA sumuje liczby trójkątne, a BHASKARA podaje wyrażenia na ilość kombinacyj oraz na ilość przemian (tych ostanich także w przypadku częściowo jednakowych elementów). — Zaznaczmy jeszcze dodatkowo, że, głównie w dziełach wymienionych trzech pisarzów, występuje geometryja indyjska rozwijająca swe metody niezależnie od metod greckich, że algebra powstała u Indusów i rozwijała się świadomie, t. j. doszła do wytworzenia pewnych jednostajnych metod postępowania, że nakoniec zastosowanie algebry do geometrii i nawzajem również narodziło się w krainie Indusu i Gangesu i doprowadziło tamtejszych uczonych do poważnych wyników.

Umyślnie tu przytoczyliśmy te szczegóły, aby uzasadnić pojęcie w ostatnich dopiero czasach poczynające się rozpowszechniać, iż arabscy matematycy, wzmiankując w swych pracach, iż wykładają naukę indyjską, i przedstawiając systemat pozycyjny pisania liczb jako pomysł Indusów, nie czynili tego w celu otoczenia swych dzieł urokiem dalekiego wschodu, lecz w owych zaznaczeniach

dali tylko dowód swęj chwalebnej sumiennosci. Niesłusznie więc postępowano przez tyle wieków, upatrując kolebkę algiebrę u Arabów, a arabskim mianując powszechny teraz sposób pisania liczb. — Co się zaś cyfr terażniejszych tyczy, to one są tegoż pochodzenia, co «apices» BOECKJUSZA: powstały z początkowych liter alfabetu, używanego w Indyjach w II stuleciu po Chr. (Zero tamże około r. 400 zaczęło być w użyciu.) Z Aleksandryi rozpowszechniły się one także na północy i zachodzie Afryki. W wieku VIII Arabowie znali nie tylko owe cyfry [w tych postaciach, w jakich je oni pisali (odmiennych od używanych u nich na wschodzie), nazywają się one «gubar», piaskowe, prawdopodobnie od posypywanej piaskiem tablicy Indusów (str. XXXII)], ale także zero [sanskryckie «sunja», a arabskie «as-sifr» (skąd cyfra; zob. str. 19) oznacza: puste, próżne]. W Rzymie, choć znano owe litery (cyfry), «apices», i posługiwano się nimi, pisząc np. «6 razy 9 jest LIV», nie zdołano jednak wpaść na pomysł oznaczania osobnym znakiem linii, niezajętej na abaku przez «apices» (por. str. XVIII). Próżno więc w Rzymie w używaniu «apices» upatrywać źródła systematu pozycyjnego. — Dodać można do tęg kwestyi to jeszcze, że Arabowie, którzy pisali od ręki prawęj ku lewęj (Indusowie przeciwnie) i w tym także kierunku (oile niewypisywali liczb wyrazami ¹⁾ całymi), pisali pierwotnie liczby (poczynając od części największych) przy pomocy liter swego alfabetu (por. str. 17), musieli, przejmując systemat pozycyjny, znaleźć go już należycie wyrobionym, przyswoić go sobie nie oddzielnie, lecz wraz z całym szeregiem zastosowań, prostotą metody imponujących, kiedy go nie zmodyfikowali zgodnie z kierunkiem swego pisma. Jedynym tylko piętnem tego, żeśmy ten systemat przedstawiania liczb wzięli nie wprost od Indusów, lecz przez pośrednictwo Arabów, jest liczenie miejsca zajmowanego przez cyfry od prawęj ku lewęj.

Epoka przeniesienia stolicy kalifów do Bagdadu (768), leżącego pośredku między dwiema krainami, z których jedna miała wspaniałą przeszłość naukową, a druga ówczesnie pielegnowała naukę u siebie i dalej ją rozwijała, jest początkiem oddziaływania indyjskiej i greckiej literatury na kształtujące się życie naukowe potężnych wtędy wyznawców proroka, którymto życiem trokskliwie się opiekowali kalifowie z rodu ABBASIDÓW, ALMANZUR, HARUN ARRASZYD, ALMAMUN. Jeszcze w VIII stuleciu Arabowie zaznajomili się z astronomią i arytmetyką Indusów, a w następnym już pracowicie tłómaczą dzieła PTOLOMEUSZA, EUKLIDESA, APOLONIJUSZA, ARCHIMEDESA, DIOFANTOSA i niektórych późniejszych uczonych aleksandryjskich, oraz sami już budują obserwatoryja w Damaszku i Bagdadzie i prowadzą dalej wyliczenia astronomiczne i gieodezyjne. Przy tych rachunkach posługują się systematem pozycyjnym, który nazywają «indyjskim», choć, wpisując wypadki ostateczne do swych tablic, uciekają się do abecadłowego wyrażania liczb. We wszystkich zaś podręcznikach arabskich do nauki rachunków, w których są znaki liczebne, panuje wyłącznie systemat pozycyjny.

Autor sławnego pierwszego traktatu o algiebrze i kierownik wielkich prac astronomicznych, podjętych na zlecenie kalifa ALMAMUNA, MUHAMMED IBN MUZA ALCHWARIZMI (t. j. M., syn MUZY, z prowincyi dziś nazywanej Charizm, albo Chiwa), który żył w pierwszej ćwierci wieku IX, ułożył podręcznik arytmetyczny, o którym doniedawna tyle tylko wiedziano, że «księga o sztuce

¹⁾ Używane przez Arabów wachodu osobne znaki liczebne, zwane «diwani» mają być skröceniami odpowiednich liczebników.

«rachowania celuje ponad innymi krótkością i przystępnością, a okazuje ducha i bystrość Indusów w znakomitych wynalaskach». Znalezione w r. 1857 w bibliotece w Cambridge łaciński rękopis (*Trattati d'aritmética, publicati da B. BONCOMPAGNI, Rzym, 1857, N. 1*) pod tytułem: *Algoritmi de numero Indorum*, okazał się tłumaczeniem z początku wieku XII owej zaginionej arytmetyki ALCHWARIZMI. W tym tytule umieszczony, a znajdujący się także na początku tekstu, wyraz «Algoritmi» jest przeróbką przytoczonego przydomka MUHAMMEDA. Ten wyraz, jakoteż inne jego wersyje: algoritmi, algorismi, alchaurismi i t. d., a później: algorithmus, algorismus (najdziwaczniej objaśniane; jedno objaśnienie przytoczymy niżej z SACRO BUSCO) były używane na oznaczenie nauki rachowania na cyfrach [czyli, według wyrażenia WOJEWÓDKI (dedykacja): «jako Niemcy mówią na piorku»], wskutek czego wykonywanych rachunki na cyfrach i wykonywających na abaku nazywają odpowiednio: algorytmistami i abacistami. [Widzieliśmy, że JAN z ŁAŃCUTA, KRZOS, WOJEWÓDKA przez algorytm rozumieją wogóle arytmetykę. Obecnie używa się w nauce wyraz algorytm na oznaczenie powtarzającego się postępowania w rachunku, które staje się ¹⁾ regułą.] Z téj arytmetyki ALCHWARIZMI przytoczymy tu tylko to miejsce, w którym on doskonale mówi o zerze, gdy w liczbie po oddzieleniu dziesiątków nic nie pozostaje: «jeżeli nic nie pozostanie, kładź koło, żeby miejsce nie było próżne, lecz niech będzie to koło, które «je zajmuje, aby, gdyby (miejsce) próżne było, nie zmniejszały się miejsca «i drugie nie mogło być pierwszym».

Arabowie widocznie bardzo wielki kładli nacisk na rozpowszechnienie w masach nauki rachunków. Dowodzi tego, popiérwsze, wielka bardzo ilość dzieł, które o niej napisali, a następnie, że w późniejszych arytmetykach widocznie mają na myśli szerszy zastęp uczących się, gdyż zwykle opuszczają potrzebną tylko astronomom i uczonym wogóle rzecz o wyciąganiu pierwiastka kwadratowego i sześciennego, jakoteż o ułamkach sześćdziesiątkowych (co w początkowych arytmetykach jest szczegółowo wykładane), a zajmują się tylko dodawaniem, odejmowaniem, spólowianiem, podawaniem (to działanie zwykle po poprzednim; taksamo ALCHWARIZMI), mnożeniem (początkowo tylko takim, jak u Indusów, od większych części), dzieleniem liczb całkowitych (różnymi metodami), często próbą przez 9 («indyjską»), czterema działaniami na ułamkach, które tak piszą, jak Indusowie (str. XXXII), wreszcie wskazówkami do rozwiązywania zadań, między którymi jest metodycznie używana reguła fałszywego założenia, zwana w późniejszych przekładach łacińskich albo reguła duorum falsorum, albo reguła augmenti et deminutioni. Już zaś ALCHWARIZMI w swéj algiebrze mówi o regule trzech, którą mógł tylko przejąć od Indusów. Widzimy więc, że arytmetyka Arabów jest oczywiście pochodzenia indyjskiego.

Choć zajęci głównie astronomiją, geometryją i algiebrą, Arabowie prowadzili dalej badania teoretyczne własności liczb, przejęte od Greków i Indusów. Nie mogąc tu przytaczać niektórych istotnie ciekawych własności, przez Arabów zaznaczonych i dowodzonych, zrobimy tu tylko wzmiankę o dwu szczegółach mniejszej naukowéj ważności, lecz będących w pewnym związku

¹⁾ Tak np. mówimy, że: poszukiwanie największego spólnego dzielnika dwu liczb, wyrażanie ułamka zwyczajnego w postaci ułamka ciągłego, rozwiązywanie w liczbach całkowitych równań nieoznaczonych stopnia 1-go z dwiema niewiadomymi polegają na tym samym algorytmie, albo np. algorytm największego spólnego dzielnika, algorytm wielkości nieskończenie małych i t. d.

z poprzednio już przytoczonymi pojęciami. TABIT IBN KURRA (836—901) podaje przepis tworzenia pary liczb zaprzyjaźnionych z trzech liczb pierwszych oznaczonej postaci (por. str. 373). Najdawniejszy ślad tak zwanych «kwadratów magicznych» (t. j. takich ustawień jakby na polach szachownicy, tworzących odpowiedni kwadrat, kwadratów początkowych liczb naturalnych, iżby tak suma liczb każdego poziomego i pionowego rzędu, jak i suma liczb w każdej przekątnej, była ta sama) jest rozważany w pismach arabskich już w X stuleciu, gdy w Bizancyjum występuje w wieku XIV, a w Indyjach w XVI.

Usadowiwszy się w Hiszpanii (w wieku VIII), Arabowie żyli tam tą samą strawą naukową, co ich spółwyznawcy na wschodzie. Mimo bowiem różnic plemiennych Arabów właściwych, Syryjczyków, Greków, Persów, Turków, Koptów, Berberyjczyków, Iberyjczyków, Gotów i t. d., mimo waśni wewnętrznych, mimo zazdrości naukowej Arabów zachodu i wschodu, przeszkadzającej np. w ujednostajnieniu pisania cyfr, należy ówczesny świat islamski, t. j. Arabów w ogólniejszym pojęciu tego wyrazu, uważać za jedną całość, której części nie przestają na siebie oddziaływać. Cała więc literatura naukowa, powstała na wschodzie arabskim, jest przedmiotem studyjów Arabów hiszpańskich. Ich emirowie z rodu OMAIJADÓW w swej stolicy, Kordubie, gromadzą wielką bibliotekę i opiekują się naukami, głównie astronomiją, która kwitnie także w Toledo, a w końcu wieku X mają już własnych uczonych. Za ich następców, wśród ciągłych walk i częstych niepowodzeń, nie mogła samodzielna nauka zakwitnąć u Arabów hiszpańskich. Zawsze jednak pojawiają się poważni miejscowi uczeni aż do połowy wieku XIII, choć już wtedy tylko państwo Granady jest w mocy saraceńskiej. W tym czasie ALFONS X, król kastyjski (1252—1284), idąc za przykładem kalifów, zwołuje na swój dwór astronomów maurów, żydów i chrześcijan, aby ułożyli znane później pod jego imieniem tablice astronomiczne, jak również, aby na narzecze kastyjskie przekładali astronomiczne dzieła arabskie.

Wcześniej jednak, bo już na początku wieku XII, zaczęto na łacinę tłumaczyć dzieła czyto arabskie, czytóż tylko przez Arabów używane. W taki sposób około r. 1120 dokonany został pierwszy przekład łaciński *Elementów* EUKLIDESA przez ATELHART'a z BATH, mnicha z Anglii, prawdopodobnego tłumacza wzmiankowanego powyżej podręcznika arytmetycznego ALCHWARIZMI. Od połowy tegoż XII stulecia pojawia się cały szereg tłumaczeń z arabskiego różnych dzieł filozoficznych, medycznych, przyrodniczych, matematycznych, astronomicznych i astrologicznych. Tak GHERARDO z KREMONY (1114—1187) tłumaczy przeszło 70 dzieł, a w tej liczbie ponownie EUKLIDESA, po raz pierwszy *Ahnagest* i cały szereg prac greckich. I t. d.

Za samodzielną przeróbkę dzieła arytmetycznego ALCHWARIZMI, dokonaną przez uczonego żyda JANA z SEVILLI (JOHANNES HISPANENSIS), wielu uważa jego *Liber alghoarismi* (napisany około połowy wieku XII; *Trattati d'ar. public. d. B. BONCOMPAGNI, N. 2*), który służył za wzór wielu późniejszym podobnym podręcznikom arytmetycznym. CANTOR utrzymuje, iż ono jest niezależne od owego dzieła ALCHWARIZMI i jest tylko tłumaczeniem innego niewiadomego autora arabskiego.

Za to owocem wielkiej pracy i talentu jest dzieło *Liber abaci* LEONARDA z PIZY, zwanego FIBONACCI (t. j. syna BONIFACEGO), napisane w r. 1202, a uzupełnione w r. 1228 (*Scritti da LEONARDO PIZANO, pubbl. d. B. BONCOMPAGNI, t. I, 1857*), które doznawało długo ogromnej wziętości. Obejmuje ono w swobodnym i samodzielnie pomyslanym wykładzie arytmetyczną i algebrą-

czną wiedzę Arabów. Autor, mimo ogromu materiału, zdołał ją przedstawić wzorowo jasno, podając wszędzie należyte dowody, jeżeli one nie leżą w samym uszykowaniu wypowiedzanych prawd. W podobny sposób jest ułożona jego *Practica geometriae* (z r. 1220), matematyczne zaś pisma różne *Fl.*, a więcej *Liber quadratorum* z r. 1225 (te trzy prace: *Scruti* ..., t. II, 1862) częściowo przedstawiają owoce oryginalnych badań tego znakomitego uczonego. LEONARDOWI z PIZY zawdzięczać więc należy rozpowszechnienie w świecie chrześcijańskim arytmetyki i algebry w zakresie i metodami, jakie były w użyciu u Arabów, a szczególności wprowadzenie systemu pozycyjnego i metod rachunkowych Indusów, przeciwstawienie ich rachowaniu na abaku, podniesienie bardzo niskiego poziomu ówczesnych badań matematycznych przez przystępne wyłożenie owoców pracy naukowej Greków i Indusów, które, wraz z przyczynkami Arabów, tą drogą prędko się do szkół przedostały, nimi naprzód przekłady łacińskie tłumaczeń arabskich dzieł greckich, a później łacińskie tłumaczenia bezpośrednio z greckich oryginałów nie wpłynęły ożywczo na rozwój nauk wogóle, a matematyki w szczególności.

* * *

TADEUSZ CZACKI jedyny dotąd zwrócił uwagę na pojawianie się cyfr «arabskich» w dawnych naszych dokumentach. Oto, co on o tym mówi: «wiem tylko, że w Polsce przed Kazimierzem Wielkim, nie widziałem cyfer «arabskich w przywilejach. W jednym traktacie teologicznym czyli komentarzu JOANNIS DE CRACOVIA 1332. roku widziałem cyfry arabskimi zwane, «a oprócz dwóch przywilejów Kazimierza Wielkiego i jednego Elżbiety, do «panowania Władysława Jagielly w transakcjach publicznych cyfrowej liczby «nie widziałem. W piętnastym wieku zaczęły być powszechniej w Polsce «używane.»¹⁾

Jakieśmy wspomnieli (str. XIX), pierwszy w Polsce drukowany podręcznik arytmetyczny, *Algorithmus*²⁾ IOHANNIS DE SACRO BUSTO (1509), jest właściwie arytmetyką cyfrową. Wydanie r. 1509 zaczyna się od rodzaju przemowy: wystawiania ważności i pożytku arytmetyki, z przytoczeniem przeróżnych odpowiednich wyrzeczeń. Ma to tytuł: «*Laudatiuncula aritmetice*». Poczym: «*Incipit textus Algorithmi magistri Iohannis de Sacro Busto*». (Tego wszystkiego niema w owym wydaniu bez wymienionego miejsca i roku). Odtąd tekst obu wydań jest prawie³⁾ identyczny. Porządek treści taki: «*Est enim nomen ipsius Algorithmus et dicitur ab algos, id est ars, «et rithmus quod est numerus, quasi ars numerandi*»), a dalej o podziale liczb (na «*digitus*», «*articulus*», «*compositus*»), nakoniec wyliczenie się miu działań:

¹⁾ A dalej dodaje: «Wszelako w nadaniach literowa liczba dość często łacińska, «a najczęściej ruska, została użyta. Niech ta uwaga zastanawia czytających przywileje. Byłem świadkiem, jak przez taką niewiadomość jedno miasto utraciło dobrodziejstwo posiadania wielości łanów literą ruską *k* czterdzieści znaczącą wyszczególnionych.» *O litewskich i polskich prawach* (1800—1), tom I, w wydaniu hr. E. Raczyńskiego (Poznań, 1843—4) str. 94.

[Jak zaś sobie inaczej jeszcze radzono, zob. niżej na str. 10 w ostatnim odsyłaczu.]

²⁾ Albo p. ŻEBRAWSKI błędnie cytuje (str. 76) za WISZNIEWSKIM przez tego ostatniego (*Historija Literatury*, t. IV, str. 177) podany tytuł tego wydania pierwszego Hallera, albotóż istniało drugie wydanie także Hallera również z r. 1509, mające także 12 kart in 4-to, oraz na tytule: orzeł, herb Krakowa i pogoń. (Ostatniego przypuszczenia nie uwzględniam, przy obliczeniu znanych 8 wydań tej książki.)

³⁾ Zauważyłem różnice tylko co do kilku wyrazów głównie na dwu ostatnich kartach.

liczenie i t. d., z których siódme, wyciąganie pierwiastków jest podwójne: kwadr. i sześć., o liczeniu [tu: «decima vero (figura) dicitur theca, vel circulus, vel cifra, vel figura nihili»], o dodawaniu, o odejmowaniu, o spelowianiu, (później) o podwajaniu, o mnożeniu, o dzieleniu, o postępie (sumowanie szeregów liczb naturalnych, zaczynających się od 1 lub od 2), o wyciąganiu pierwiastków (z podziałami już wzmiankowanymi). (Wydanie r. 1509) «Finis» [poczym «Perutilis ac subtilis Algorithmi practica linealis» na dwu stronnicach; na pierwszej objaśnienie wartości liczman («denarius») na liniach i między linijami, oraz rysunek abaku ¹⁾, na drugiej: o mnożeniu, prawdziwego dzielenia (7 wierszy), prawo postępow («regula progressionum»; 5 wierszy) i o podwajaniu.] W obu wydaniach niema wykonanego ani jednego rachunku: przepisy na wykonywanie działań opowiedziane są słowami zapomocą ogólnego mówienia o jednościach, dziesiątkach, setkach i t. d. Liczby wymieniane są tylko w ustępach o liczeniu i o postępie. O ułamkach niema wzmianki.

Nie mamy w wieku XVI arytmetyk cyfrowych w języku polskim. Z kilku zaś takich łacińskich arytmetyk owego jeszcze wieku zrobimy tu wzmiankę o tych dwu, które miały więcej niż jedno wydanie.

W porównaniu z poprzednią arytmetyką znakomitym dziełem jest *De VI. Arithmeticae practicae speciebus* HENRICI GLAREANI *Epitome* (skrót), którego jedno wydanie, jako «denuo ab Authore recognita», wyszło w Krakowie r. 1549 (bibl. kór.; str. 76), a inne bez wymienionego roku (również u Szarfenbergera w Krakowie; prawdopodobnie wcześniejsze). Są to przedruki obcej książki (jedno takie wydanie Friburgi Brisgoiae, 1539). Przedmowa (str. 5—22) jest poświęcona nauce o podziałach liczebników i ich przytoczeniu: Cardinalia (tu zestawione z sobą rzymskie, greckie i pozycyjne pisanie liczb), distributiva, syncopata, Ordinis, In Arius, Syncopata frequentiora, Relativa Numeralia, Multiplicativa ab his derivata, In Anus, Adverbia Numerandi. Następuje (str. 23) właściwa arytmetyka. We wstępie (co jest aryt. i o jej podziale na teor. i prak.) wzmianka o dwu tomach BOECYJUSZA, następnie o liczeniu (o cyfrach, że są od Indusów lub Chaldejczyków przyjęte) tak rzymskim jak i greckim, wraz z podziałem liczb na «digitus», «articulus» i «compositus». Dodawanie (str. 30) i odejmowanie (str. 35) bardzo szczegółowo i dobrze objaśnione z licznymi przykładami. Mnożenie (str. 42) zaczyna się od wynajdywania iloczynów dwu liczb jednocyfrowych, których suma jest mniejsza od 10-u (por. niżej przy BROŻKU), dalej tabliczka ²⁾ PITAGORASA o 100 kwadratach i uwagi o niej. Mnożenie liczb wielocyfrowych (str. 49) po ogólnym opowiedzeniu jest objaśnione na dwu przykładach 365×24 i 300×20 . Pierwsze z tych mnożeń tak jest uszykowane:

2		t. j. 2 r. 3, 6 i piszę je nad kreską nad 2-ką;
1 2 2		2 r. 6, 12 i piszę 1 nad (poprzed.) 6, a 2 obok 6;
1 1 4		2 r. 5, 10 i piszę podobnie 1 w drugim, a 0
6 2 0 0		w pierwszym wierszu, licząc od kręski, obok już
3 6 5	Multiplicandus	napisanych cyfr; następnie 4 r. 3, 12 i piszę je
2 4	Multiplicans	w trzecim wierszu od kręski tak, aby 2-ka była
8 7 6 0	Summa producta	nad 4-ką mnożnika; 4 r. 6, 24 i piszę 4 na wol-
		nym następnym miejscu w drugim wierszu, a 2

¹⁾ Tabliczka ta jest już wypisana (o 130 kwadratach: 10×13) w książce JANA z LAŃCUTA.

²⁾ Niezgodny z tekstem, bo liczman oznaczający 5 zamiast być pod drugą linią jest pod pierwszą taksamo 50 i t. d.

na poprzednim miejscu w czwartym wierszu; 4 r. 5, 20 i piszę 0 na wolnym następnym miejscu w pierwszym wierszu, a 2 na odpowiednim w trzecim; na koniec wykonywam dodawanie kolumn tych cyfr, pisząc sumę pod kreską, poprowadzoną pod mnożnikiem. — Dzielenie (str. 53) objaśnione na kilku przykładach; w pierwszym idzie o dzielenie 8760 przez 365

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 14 \\
 252 \\
 8760 \\
 \hline
 3655 \\
 36
 \end{array}
 \quad (24)$$

(Początkowo jest nad linią liczba 8760, a pod linią liczba 365). 3 w 8-u 2 razy; piszę 2 za półksiężycem. 2 r. 3 (prze-kręślam) 6, odejmuję 6 od 8 (przekr.) i nadpisuję 2; 2 r. 6 (przekr.) 12, które odejmuję od 27 (przekr. te cyfry 2 i 7) i nadpisuję nad tylkoco przekreślonymi odpowiednio cyfry 1 i 5; 2 r. 5 (przekr.) 10, które odejmuję od 56, przekr. cyfrę 5 i nadpisuję nad nią 1). (Jest teraz do podzielenia 1420; piszę ponownie dzielnik 365 ale każdą cyfrę o jedno miejsce dalej w prawo, t. j. 3 pod 0, 6 pod 5, obok którejto cyfry piszę 5). Znowu: 3 w 14-u 4 razy; piszę 4 obok 2 za półksiężycem; 4 r. 3 (przekr.) 12, odejmuję je od 14 (przekr.) i t. d. — Potym szóstą «species»; t. j. o postępie (str. 62), sumowanie, gdzie jest mowa o postęпах 1, 2, ..., 7; 2, 4, ..., 10; 3, 6, ..., 15; 4, 8, ..., 36 i ich sumach. (Str. 65) «De regula proportionum» jest najslabszym ustępem. Jest to właściwie też sama, co w innych przytoczonych już naszych arytmetykach reguła trzech na liczbach całkowitych. Stosunki są rozważane bardzo pobieżnie (jest właściwie mowa tylko o wykładniku stosunku) w ustępie ostatnim (str. 70): «De omnium Proportionum origine compendiorum». O ułamkach niema mowy.

Trzy są znane wydania książki *Arithmetices introductio ex variis authoribus continuata* bezimiennego autora (wszystkie w Krakowie; w każdym kart 20) z lat 1549, 1556 i 1565. Ponieważ już pierwsze z tych wydań jest «denuo diligenter revisa», przeto mogło być jeszcze wydanie wcześniejsze. P. ŻEBRAWSKI zaznacza, iż w wydaniu pierwszym na str. przedostatniej jest pomieszczona wartość pieniędzy w języku polskim. ŁUKASZEWICZ (t. I, str. 93) tak tę książkę ¹⁾, jak i poprzednią zalicza do ówczesnych podręczników szkolnych.

Najważniejszą z arytmetyk wydanych u nas w wieku XVII jest bezwarunkowo *Arithmetica integrorum* (liczb całkowitych), którą w r. 1620, jako «primus hic NOWODWORCIANAЕ fundationis ²⁾ fructus» ogłosił «IOANNES BROSCIUS CURZELOVIENSIS» (JAN BROŻEK z KURZEŁOWA), ówczesnie noszący tytuł «Ordinarius ³⁾ academiae cracoviensis astrologus» (egz. z bibl. kór.). Krótką wiadomość o BROŻKU (1585—1652), jak również wyszczególnienie jego badań nad liczbami doskonałymi i nad liczbami zaprzyjaźnionymi, czytelnik znajdzie na str. 371—5 w przypisku napisanym przez ⁴⁾ prof. FRANKĘGO, którego badania,

1) Nie udało mi się dotąd widzieć tej arytmetyki.

2) Widać więc, że, przynajmniej początkowo, fundusz oddzielny na wydawanie dzieł użytecznych, powierzony akademii przez kawalera NOWODWORSKIEGO, nie był przeznaczony na drukowanie panegiryków i t. d. (jak chce ŁUK., t. I, str. 210).

3) «Astrologus» należał do «Collegium minus» (ŁUK., t. I, str. 55, 74), (a nie jak chcą niektórzy, do «Collegium majus»), równie, jak i profesor astronomii fundacyi «Stobneriano-Dąbrowsciana», którego obowiązkiem (a nie astrologa) było układanie kalendarza (ŁUK., t. III, str. 70).

4) Prof. FRANKĘ wyświeltił, iż dotychczas podawane wersje jego nazwiska (które ów uczony nawet na polskich swoich pracach zwykł pisać «Broschius», lub «Broschiusz») są błędne i że prawdziwe jego nazwisko jest BROŻEK, jak również ustalił tak rok jego urodzenia, jak i inne daty, błędnie aż do ostatnich czasów przytaczane.

odnoszące się do życia i przez naukowych tego znakomitego, dotąd lepiej przez obcych znanego, naszego uczonego z wieku XVII, podjęte wskutek zlecenia akademii umiejętności w Krakowie, zostaną wkrótce ogłoszone drukiem w oddzielnej książce. Do tej więc książki odsyłamy czytelnika dla poznania należętego zasług BROŻKA na polu geometrii i astronomii i około spraw akademii krakowskiej wogóle. My tu zaś zajmiemy się wyłącznie arytmetyką BROŻKA.— Wspomniawszy tu tylko, że nauka arytmetyki była przedmiotem wykładu na akademii, niezależnie od innych części matematyki ¹⁾, zaznaczymy naprzód, że nastrój wykładu niektórych ustępów drugiej połowy arytmetyki BROŻKA mógłby wskazywać, że autor miał na myśli znacznie już starszą młodzież. Początkowa jednak część tej książki obejmuje wykład tak przystępny i szczegółowy, z podanymi do rozwiązania zadaniami tak prostymi, iż mogła być przeznaczona do nauki w spólczesnej w Krakowie szkole średniej ²⁾, która za staraniem rektora akademii STANISŁAWA ZAWACKIEGO powstała w r. 1588, a następnie wskutek hojnej fundacyi BARTEOMIEJA NOWODWORSKIEGO (1617) podźwignęta z czasowego upadku i do świetnego na owe czasy doprowadzona stanu, przez dość długi jeszcze przeciąg czasu [znakomicie zasiloną legatem (1631) GABRYJELAPROWANCYJUSZA ³⁾, po uszlachceniu WŁADYSŁAWSKIEGO, powiększonym przez WŁADYSŁAWA IV, z którego nadto rozkazu zamknięto szkoły jezuickie w Krakowie] kwitnęła i cieszyła się bardzo licznymi uczniami (ta szkoła pozostawała wciąż pod zarządem akademii, aż do reformy w r. 1777) (ŁUK., t. III str. 432—459). Arytmetykę Brożka zalicza ŁUKASZEWICZ (t. I, str. 231) do książek używanych w Polsce w ówczesnych szkołach. — W rozdziale I «O określeniu arytmetyki i jęj podziale» (str. 1), BROŻEK potępia podział arytmetyki na praktyczną i teoretyczną («speculativa»), a natomiast «proponuje» jęj podział na prostą («simplex»), «która rozważa pojedynczą naturę liczb» i porównawczą («comparativa»), «która ustanawia porównywanie liczb». Tu także mówi o podziale na «digitus», «articulus» i «compositus». W roz. II «O liczeniu» (str. 8), zaznaczywszy, że cztery działania są liczeniem, porównywa znaki liczebne do liter alfabetu i bardzo jasno wyklada zasady systematu pozycyjnego, objaśniwszy je na przykładach trafnie dobranych. [Tęj zalety, cechującęj również wszystkie przykłady przez BROŻKA podawane, dalej już podnosić nie będziemy. Dodamy tylko, iż często jest widoczną staranność BROŻKA w wybięranu takich właśnie przykładów, któreby usuwały wątpliwości czytelnika w mogących się zdarzyć przypadkach szczególnych.] — W roz. III «Jakim sposobem dawni Rzymianie liczby oznaczali» (str. 13) przytacza naprzód przykłady historyczne, iż w liczeniu dawni Rzymianie liczyli na setki tysięcy (np. 121 setek tysięcy i t. d.), a następnie, po wzmiance o tym, że oni nie znali cyfr (figurae) 0, 1, . . . , 9, mówi: «Kopernik w ks. «I, roz. 12 te figury liczebne nazywa indyjskimi, jakoby przez Indusów wymyślone były» i wyklada znakowanie rzymskie. — W roz. IV (str. 17) «Jakim sposobem Grecy liczby oznaczali» jest na przykładach mowa o myryjadach pojedynczych, podw. i potr., a zarazem o tysiącach tysięcy, tysiąc razy tysiącach

¹⁾ Zob. ŁUK., t. III, str. 67, 140, 154; t. II, str. 103, a także artykuł prof. F. KARLIŃSKIEGO w dziele zbiorowym *Zakłady uniwersyteckie u Krakowie* (Kraków, 1869), str. 128.

²⁾ Takby wnioskować można również z przemowy wstępnej: «Adolescenti Arithmeticam hanc lecturo S.»

³⁾ Według ustawy sejmu z r. 1609, przytoczonęj przez SOŁTYKOWICZA (*O stanie akademii krakowskiej*, Kraków, 1810, str. 187). — Często nazywają go PREMANCEVIUS, lub inaczej.

tysięcy i t. d., a także o milionach i milionach milionów (wykładu znaków liczebnych greckich niema). Rozdziały V «O dodawaniu» (str. 21) i VI «O odejmowaniu» (str. 30) uczą wykonywania tych działań sposobami dzisiejszymi, a postępowanie wraże, kiedy cyfra w odjemnej jest mniejsza od odpowiedniej w odjemniku, jest przeprowadzone aż trojakim sposobem. — W «dodatku» (str. 38) BROŻEK powstaje przeciwko uważaniu osobnych działań: podwajania i spółowiania, z uwagi, że należałoby podobnie tworzyć działania: potrajanie i t. d., i objaśnia, jakto prosto owe podwajanie i spółowanie się wykonywa (tu ułamek $\frac{1}{2}$ przy spółowaniu liczby nieparzystej). — Rozdział VII «O mnożeniu» (str. 40). BROŻEK rozważa naprzód iloczyny dwu czynników jednocyfrowych, przedewszystkim równych sobie, a następnie nierównych i wtedy zaraz zmienia porządek ich następstwa. Później szczegółowo rozważa tabliczkę mnożenia, «mensa Pythagorae», o 81 kwadratach, kładąc zaraz szczególny nacisk na liczby kwadratowe w tej tabliczce. Następnie wraca do tworzenia iloczynów dwu liczb jednocyfrowych, których suma jest większa od 10 (dość, by była nie mniejsza od 10). Tak np., gdy mamy 8 pomnożyć przez 7, to zważywszy, że «odległość» («distantia») od 10-u pierwszej liczby jest 2, a drugiej 3, i rozmieściwszy te liczby tak:

$$\begin{array}{r} 8 \quad \times \quad 2 \\ 7 \quad \times \quad 3 \\ \hline 5 \quad \quad 6 \end{array}$$

z pomnożenia 2 przez 3 otrzymamy 6 jedności szukanego iloczynu, a odejmując czyto 3 od 8, czytóż 2 od 7, otrzymamy 5 dziesiątków szukanej liczby ¹⁾. BROŻEK jeszcze inaczej wyznacza iloczyny dwu czynników jednocyfrowych większych od 5-u. Liczby od 1 do 5 przedstawia wyprostowaniem jednego palca od wielkiego do małego, liczbę 6 przygięciem małego palca ku dłoni, a wyprostowaniem reszty, liczbę 7 przygięciem ku dłoni małego i czwartego, a wyprostowaniem reszty i t. d. Wyznaczenie iloczynu 6 i 8 objaśnia na przerysowanej obok figurze. Mnożąc liczbę wyrażoną przez podniesione palce ręki lewej, na której jest uwidoczniła liczba 6, t. j. liczbę 4, przez odpowiednią liczbę 2, wyrażającą ilość podniesionych palców ręki prawej, na której mamy liczbę 8, otrzymamy 8 jedności szukanego iloczynu. Obliczając zaś zgięte palce u obu rąk (1 + 3), mamy 4 dziesiątki tego iloczynu ²⁾. —



Następuje mnożenie liczb wielocyfrowych przez siebie zupełnie w dzisiejszej formie. Poczynam wykład wykonywania mnożenia w krótkach, t. j. jednym ze sposobów, jakich Indusowie (str. XXXII) używali. Przedstawimy ten sposób na liczbach np. 6784 i 4107. W kierunku linii AB (litery A, B, C, D są woryginalie) jest wypisana jedna liczba, w kierunku BD druga. Iloczyny

¹⁾ Taksamo w arytmetyce GLAREANI, HERBEST bez wypisywania takiego krzyża, robi to samo kamykami na liniach. — Łatwo takie postępowanie ogólnie uzasadnić.

²⁾ Sposobu tego używają teraz jeszcze w wielu szkołach we Francji (por. *Guide du maître pour l'enseignement d'arithmétique...* par EYSSÉRIC, Paryż, 1880).

oddzielnych liczb jednocyfrowych są wypisane we właściwych kratkach: dziesiątki ich nad, a jedności pod ukośną kreską. Dodając następnie do siebie jednocyfrowe liczby, znajdujące się w tych samych ukośnych rzędach, otrzy-

A				6	7	8	4	B
				2	2	3	1	
				4	8	2	6	4
				6	7	8	4	1
								0
2				4	4	5	2	7
7				2	9	6	8	
1								
8								
1								
6								
2								
C		1	8	8	8			D
								1

mujemy na kierunku ACD iloczyn 27861888. — Jeszcze BROŻEK szeroko wykłada, jako pożyteczne przy mnożeniu wielkich liczb, postępowanie, tym się różniące od zwykłego, że się mnoży przez cyfry mnożnika, poczynając z lewej strony, ku czemu przygotowywa on uprzednio tabliczkę iloczynów mnożnej (większego czynnika) przez liczby jednocyfrowe i sprawdza ją drobiazgowo próbą przez 9. Kończy rzecz o mnożeniu rozważaniem przypadków, gdy dane liczby kończą się na zera (podzisiejszemu), podaniem zadań i próbą mnożenia przez 9. — Rozdział VIII «O dzieleniu» (str. 76). Po ustępie o dzieleniu liczb dwucyfrowych przez jednocyfrowe przy pomocy tabliczki mnożenia i przy pomocy napisanego szeregu liczb naturalnych do 100, przechodzi do dzielenia liczb wielocyfrowych. Działania odpowiadające jednej cyfrze ilorazu dzieli, za STIFFEL'em, na trzy tempa, które oznacza literami Q («quaere», szukaj), M («multipla», mnoż) i S («subtrahe», odejmij). Samo zaś dzielenie przeprowadza naprzód sposobem podobnym do tego, jaki poznaliśmy przy arytmetyce GLAREANUS'a, z tą tylko różnicą, że BROŻEK wypisuje iloczyn dzielnika przez cyfrę ilorazu pod dzielnikiem, a następnie dopiero całą tę liczbę odejmuje odpowiednio od dzielnej lub reszt dzielenia. Tak np. dzieli 7168 przez 7:

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 7168 \\
 7777 \\
 \hline
 7148 \\
 2 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad (1024$$

Przy kilkucyfrowym zaś dzielniku BROŻEK nie przekręśla dzielnika, lecz po wykonaniu tego, co odpcwiada każdej od dzielnej cyfrze ilorazu, zmasuje z tablicy dzielnik, kreskę i to co jest pod nią, tak iż wykonywane na tablicy dzielenie 7744256 przez 2864 tak się stopniowo u niego przedstawia:

	1	1	1
2016	20164	20164	20164
7744256	7744256	7744256	7744256
2864	(2) 2864	(27) 2864	(270) 2864
5728	20048		11456

Uzupelnia to opowiedzeniem takiego wykonywania dzielenia, jak w ksiázce GLAREANUS'a. Zaznaczywszy wady tych metod, BROZEK powiada: «podał mi się sposób nowszych» (uczonych) («probatum mihi modus recentiorum») i wkłada owę nową metodę, która prowadzi do takiego dzielenia:

	7744256		
I	2864	(2)	
	5728		
	20162		
II	2864	(7)	
	20048		
	1145		
III	2864	(0)	
	0000		
	11456		
IV	2864	(4)	
	11456		

Nic nie zostaje.

W drugim zaś przykładzie nie wypisuje już wiérszy, utworzonych przez same zera, lecz tylko, zaznaczywszy jako cyfrę ilorazu 0, przypisuje następującą cyfrę dzielnój. W owym drugim przykładzie dzielnik jest 6-cyfrowy; BROZEK tworzy uprzednio przez dodawanie tabliczkę jego iloczynów przez liczby jednocyfrowe i sprawdza ją, mnożąc dzielnik dwa razy przez 3. Korzystając zaś z téj tabliczki, nie podpisuje za każdym razem dzielnika, tak iż to jego dzielenie tym się tylko różni od dzisiejszego, że kolejne cyfry ilorazu znajdują się obok odpowiadających im częściowych iloczynów odejmowanych. Po podaniu zadań, mówi nieco o ułamkach, wypadających w ilorazie, i o ich skraccaniu. Zamyka zaś rzecz o dzieleniu uwagami odnoszącymi się do przy-

padków, gdy dane liczby są zakończone na zera. — Rozdział IX «O liczbach piérwszych i złożonych bezwzględnie («per se»), oraz piérwszych i złożonych względem siebie» («inter se») (str. 101). Tu mówi o podzielności przez 2, 3, 4, 5, 6, 7¹⁾, 8²⁾, 9, 10 i 12, oraz zaznacza, że łatwo wyprowadzić warunki dla liczb 20, 30, 40, 50; 16, 32, 64, 128; 24, 48 i t. d. Następnie cytuje w oryginalnie i tłumaczy na łacinę określenie EUKLIDES (taksamo z innymi tu określeniami) liczby piérwszój i złożonój, rozważa sito ERATOSTENESA, mówi o dwu liczbach piérwszych względem siebie i złożonych względem siebie («a które liczby pewna spólna miara mierzy») i o wynajdywaniu ich największój spólnój miary (przez kolejne dzielenie). — Rozdział X «O regule proporcji» (str. 112). Naprzód BROZEK, przypomniawszy podany na początku podział arytmetyki na prostą i porównawczą, mówi, że «tak jest 1 do mnożnika, jak mnożna do iloczynu», «i tak dzielna do dzielnika, jak iloraz do 1». Powstaje przeciwko «barbarum Detri nomen», gdyż reguła odnosi się do 4 liczb, a może być mowa i o 6. Następnie o wyznaczeniu czwartój niewiadomej spośród 4 liczb proporcjonalnych i zastosowania do zadań (tu zachodzą ułamki). Gdy danych jest 5 liczb, sprowadza je (zapomocą mnożenia dwu par liczb danych) do 3, a następnie rozważa proporcję. Proporcję tak pisze: «jak 7 do 35,

¹⁾ Gdy liczba dana jest sumą 3, 6, 9 albo 12 wyrazów postępu geometrycznego z wykładnikiem 2, albo 4, albo 16, lecz «niech chłopiec (puer) to opuści», a do tego wróci po postępac.

²⁾ Po zwykłej, podaje cechę METIUS'a: podwoić cyfrę dziesiątków, cyfrę setek pomnożyć przez 4, a do tych iloczynów dodać cyfrę jednośc (por. § 13, us. 16).

tak 48 do czego?». Podobnie traktuje regułę spółki i «regułę proporcji odwrotnej».

Nadto może szczegółowo wyłożywszy ściśle arytmetyczną część tej książki, pokrótce już tylko zaznaczymy treść drugiej jej połowy. — Rozdział XI «O postępach» (str. 127) obu rodzajów z różnymi zadaniami na sumowanie, oraz z zaznaczeniem, z porównania dwu postępów (0, 1, 2, ...; 1, 2, 4, ...), logarytmów (przy podstawie 2), jako znakomitego odkrycia NAPIER'a ¹⁾. — Roz. XII «O liczbach kwadratowych» (str. 138). Roz. XIII «O sześciannach» (str. 147) (w obu także systematycznie i szczegółowo wyciąganie pierwiastków). Roz. XIV «O różnych przykładach» (str. 160), z rozmaitych autorów sławne zadania (niektóre kosmograficzne). Tu także (str. 195—8) dodawanie i odejmowanie liczb wielorakich (podzisiejsemu). Roz. XV «O liczeniu zapomocą wskaźników i na abaku ²⁾ szachowym» (str. 198). Mowa tu jest o tym, jak IOANNES NEPERUS wyraża liczby dane jako sumy potęg liczby 2; wykładniki tych potęg (poczynając od 0), lub odpowiednie litery abecadła, są wskaźnikami («indices») składników; wykonywanie działań na danych liczbach, jak mnoż., dziel., wyciąg. piérw. kw., można zastąpić działaniami prostszymi na tych liczbach, dodaw. zaś i odejm., wraze jednakowych składników, nieco uprościć. BROŻEK wypisał tu tablicę potęg liczby 2, odpowiadających wskaźnikom od 0 do 100 i wykonywa działania. Jest to więc rachunek logarytmami (przy podstawie 2), co BROŻEK wyraźnie zaznacza na końcu. Ostatni rozdział XVI «O laskach» (str. 229—252), t. j. o rachowaniu według NAPIER'a przy pomocy czworokątnych słupków mających na każdej ze ścian bocznych wypisane w kratkach przedzielonych ukośnie (podobnie jak na str. XLI) liczby pewnego szeregu z tabliczki mnożenia ³⁾.

Z książki tej łatwo wnieść można, iż BROŻEK nie tylko znalazł tak literaturę klasyczną, jak i współczesne ważniejsze prace naukowe, ale nadto, że z prawdziwym zamiłowaniem i wielką jasnością sam uczyć musiał, jeżeli to tak się wyraźnie odbiło w tym podręczniku, który metodą wykładu, praktycznie obmyślanego i z rzetelnym zapałem przeprowadzonego, tak wyprzedził epokę, w jakiej był ułożony. Wczytując się w oddzielne ustępy, dochodzi się do przeświadczenia, iż BROŻEK był wytrawnym pedagogiem, zbyt często może powołującym się w swym podręczniku na przeróżnych autorów, lecz wolnym

¹⁾ «Pro Logarithmorum tabulis tibi magne Neperae Praemia quae tribuent digna Mathematici?» (w oryginalnej kursywie). — Dzieło NAPIER'a, obejmujące logarytmy naturalne wstaw i stycznych (co minutę kąta), wyszło w r. 1614 w Edynburgu, a przedrukowane w Lijonie w 1619. Objaśnienie wyrachowywania logarytmów w wydaniu edym. z r. 1619, przedrukowanym w Lijonie w r. 1620. Termin «logarithmus» piérszwy raz w wydaniu z r. 1614.

²⁾ Ow «Abacus scacchiae» jest szachownicą o 24×24 polach czarnych i białych. Idąc od jednego wierzchołka szachownicy do przeciwnego naokół jej, czyto w jedną, czy w drugą stronę, mamy rzędy odpowiadające kolejnym potęgom 0, 1, 2, ..., (46) liczby 2. Gdy więc mamy np. pomnożyć 8 przez 64, to na przecięciu 4-go np. poziomego z 7-ym pionowym rzędem natrafimy na pole pewnego koloru, a posuwając się, jakby ruchem laura, w kierunku odpowiadającym linii, łączącej początkowe pola wzmiankowanych rzędów, dojdziemy do jednego lub drugiego pola brzeżnego w rzędach, którym odpowiada szukany iloczyn. Odpowiednio z dzieleniem.

³⁾ Tytuł tego rozdziału: «De virgulis» (virgula divina, laska czarodziejska), mimo, że BROŻEK podaje w tym rozdziale 11 rysunków takich słupków, przetłomaczono niedawno w poważnym wydawnictwie warszawskim w taki sposób: «o przecinkach», a treść poprzedzającego rozdziału, przedstawiającego (wraz z rozdziałem o postępach) piérszwe w Polsce zaznaczenie logarytmów, tak także streszczono: «o rachunku indeksów».

od rutyny i wszelkiej pedanteryi, umiejącym prosto i w sposób zniewalający do skupienia uwagi wykład swój prowadzić.

Wiadomości o kilkunastu późniejszych arytmetykach czytelnik znajdzie w artykule *Arytmetyka* WINCENTEGO TRYBULSKIEGO, ogłoszonym w tomie I *Encyklopedyi wychowawczej* (Warszawa, 1880), o którejto pracy niżej oddzielnie tu mówić będziemy. W tym tedy artykule ¹⁾ z podręczników wieku XVII są opisane: na str. 362—6 «M. IOHANNIS TONSKI I. U. et M. D. in Acad. Crac. Math. Profess. *Arithmetica vulgaris...*» (1640 w Ingolsztacie; 1645 bez miejsca druku; ŁUK. mówi: «wiele wydań»); na str. 353—361 «*Arithmetyka. To jest Nauka Rachunku Na trzy podzielona Księgi. W Pierwszey...*» Przez K. S. pilnie napisana» (autor KRZYSZTOF SCHEDEL, typograf J. K. M.; pierwsze wydanie bez roku, według BANDKIEGO między 1660 a 1665; inne z r. 1735; oba w Krakowie); na str. 372 «*Arithmetica curiosa...*» Auctore R. P. ADALBERTO TYLKOWSKI Societatis Jesu in Collegio Varsavien:...» (1668 w Krakowie; znacznie powiększona 1689; 1690) i na str. 361—2 wierszowana «*Geometry Polskiego Zabawa o arytmytce albo rachowaniu*» Jezuitę STANISŁAWA SOLSKIEGO wyjątek z dzieła *Geometra polski* (Krak., 1683) wydał JULIJAN BAYER w Warsz. 1863; na ²⁾ str. 366—372 «*Arithmetica practica...*» a M. IOANNE STANISŁAWO FORMANKOWIC in Alma Universitate Crac. Doctore et Professore.» (1669 w Krakowie). Króciutkie lecz poważne kompendyjum TONSKIEGO obejmuje staranne rozważanie ułamków sześćdziesiątkowych i dziesiętnych; niema w nim jednak tego skróconego sposobu dzielenia, który BROŻEK podał był już jako nowość. Tej pracy nie dorównują inne z wyliczonych tu arytmetyk, choć są one najwięcej używanymi podręcznikami szkolnymi owego wieku. Książka zaś TYLKOWSKIEGO obejmuje balaamstwa, które do pewnego stopnia objaśniają, dlaczego nawet te szkoły Jezuitów, w których był kurs «filozofii», obejmujący między innymi EUKLIDESA (ŁUK., t. I, str. 250), tak mało rozpoznawali w narodzie najprostsze pojęcia matematyczne wogóle.—Szkoły bazylijańskie były gorsze od jezuickich, na których się wzorowały. Szkoły zaś nowych kultów religijnych, do naszego narodu wniesionych, były obsadzone prawie wyłącznie obcymi nauczycielami, najczęściej mało dbającymi o kraj, w którym czasowo tylko przebywali, a zwracającymi głównie swą uwagę na łacinę, a jeszcze więcej na konfesyjne wychowanie młodzieży i sposobienie jej do dysput religijnych. Z tego więc względu nauka matematyki miała wyznaczoną nawet w takich szkołach średnich bardzo podrzedną rolę. Wprawdzie socynijanie ogłosili dla użytku szkoły w Rakowie «IOACH. STEGMANI *Institutionum Mathematicarum Libri II, quibus initia I Arithmeticae, II Geometriae pro incipientibus dilucide explicantur, et ad praxin varie accomodantur*» (I str. 64; II str. 190; r. 1630), której autor był rektorem owiej nietoleracyjnej szkoły (zamkniętej przez sejm r. 1638), a w arytmytce tej, zdaje się po raz pierwszy w Polsce, występują ułamki dziesiętne (ŁUK., t. I, str. 369). Nie była również wyjątkiem szkoła braci czeskich w Lesznie, choć przez pewien okres w swym istnieniu wślawiła się troskliwie obmyślanymi metodami nauczania, choć w gronie nauczycieli liczyła szanowanego ówczesnie matematyka i architekta (polaka) JANA DEKANA, choć nakoniec stała się tak rozgłośną za

¹⁾ Z arytmetyk wcześniejszych, o których wiadomości są tu wyżej podane, TRYBULSKI widział tylko podręcznik HERBESTA, o którym mówi na str. 346—9.

²⁾ Rozmieszczenie liczb przy rozwiązywaniu zadań na regułę fałszywego założenia, przytoczone przez TRYB. na str. 368, jakoteż odpowiednie prawidło, jest już w książce WOJEWÓDKI.

rektorstwa (1636—1642) głębokiego myśliciela-wychowawcy, sławnego KOMENIJUSZA (JANA AMOSA KOMENSKIEGO). Dowodu na to dostarcza znakomite dzieło KOMENIJUSZA: *Wielka dydaktyka* (polski przekład: Warszawa, 1884), w której rzecz o nauczaniu matematyki i jego założeniach jest dotknięta bardzo powierzchownie i tylko w paru wielce ogólnikowych uwagach (rozdziały XXIX—XXXI).

Równie wiek XVII, jak i znaczna część wieku XVIII nie sprzyjały u nas rozwojowi nauk wogóle, a matematyki w szczególności. Wojny zewnętrzne, częste zarazy morowe, rokosze i ustawiczne niesnaski wewnętrzne najróżnorodniejszej natury, spaczone wychowanie publiczne musiały się odbić na umysłowym życiu narodu. Co więcej, zastój naukowy jest tak ogólny, iż przedsiębrane od czasu do czasu nieliczne usiłowania reformy szkół znajdują swój wyraz jedynie w narzekaniach i protestach, lub początkowaniach bezowocnych. Akademia krakowska, w której «kolonijach» najprędzej zdawałoby się, mógł nastąpić zwrot ku lepszym metodom nauczania, zajęta sporami z Jezuitami, jałowymi a kosztownymi sprawami religijnymi, a jednocześnie ubożającą wciąż wskutek niedochodzenia dochodów i marnienia funduszy, nie pielęgnuje należycie nauk filozoficznych u siebie, nie może więc tymsamym przygotować dobrych nauczycieli dla swoich «kolonij», któreż coraz więcej chyliły się do upadku. Akademia zamojska była instytucją pozbawioną wszelkiej powagi i wartości naukowej i zaznaczyła się tylko wydawnictwem kalendarzy jej profesora STANISŁAWA DUŃCZEWSKIEGO. Akademia zaś wileńska w ręku Jezuitów była tą samą ich szkołą średnią jałową (od której się różniła prawem udzielania stopni naukowych, więcej szczegółowymi studjami scholastycznymi i czasowymi wykładami prawa kanonicznego i cywilnego).

Reforma szkół pijarskich, rozpoczęta w r. 1740 przez wielkiego obywatela STANISŁAWA KONARSKIEGO (poprzednio i te szkoły niewiele się od współczesnych jezuitkich różniły) i przez niego następnie ustalona wskutek zmiany urzędzeń w «provincyi polskiej» (1754) tego zakonu, wprowadziła do nauczania wogóle lepsze metody, wydobywając szkoły średnie z długiego zastoju i upadku. Nieliczne lecz niezłe szkoły Teatynów także zaczęły się cieszyć wziętością. Pobudzeni spółzawodnictwem, Jezuitci, przynajmniej w szkołach, znajdujących się w główniejszych miastach, za sprawą swych prowincjalów, koronnego JÓZEFA DOMARADZKIEGO i litewskiego MICHAŁA JUNIEWICZA, również wprowadzili pożądane zmiany w sposobach nauczania. Tak Pijarzy, jak i Jezuitci zaczęli wysyłać zdolniejszych młodych swych członków, sposobiących się do stanu nauczycielskiego, do Niemiec, Francyi, Włoch i Czech, którzy po powrocie przyczyniali się do dalszego postępu szkół. — Rosszérzono znacznie wykład matematyki, przeznaczając więcej na nią godzin, nauczając jej troskliwiej i systematyczniej. Prócz więcej wyczerpujących kursów arytmetyki, wprowadzono wykład algebry i gruntowniej nauczano geometrii. — Liczne pojawiają się arytmetyki, głównie przez członków obu zgromadzeń układane, lub przez nich tłómaczone, albo tylko dla użytku szkół jezuitkich przedrukowane w Polsce, z uwzględnieniem miar miejscowych. — Ożywienie w nauczaniu arytmetyki dosadnie charakteryzuje ten fakt, że gdy w pierwszej połowie w. XVIII pojawiają się tylko dwie nowe arytmetyki łacińskie dla użytku szkół jezuitkich (Wilno, 1733; Kalisz, 1745, skrót wydania weneckiego z r. 1740 dzieła TAQUET'a), to w przeciągu dwudziestu lat od r. 1757 do 1777 pojawia się 5 arytmetyk łacińskich (przedruki dwu arytmetyk HÖLL'a, prof. akad. jez. w Klausenburgu, w r. 1760 w Poznaniu, z których jedna powtórnie

w Nieświeżu w r. 1768; arytmetyki Pijara SIKORSKIEGO w 1761 w Warsz., Reformata KLECZEWSKIEGO 1771 we Lwowie i «*Arithmetica pro suprema Grammatices classe e germanico in latinum translata*» w Krak., bez wymienienia autora i roku; później w r. 1782 w Zamościu wydał jeszcze arytmetykę łacińską SŁAWIŃSKI, Bazylijanin ze szkoły przy klasztorze w Zamościu), a 11 polskich (w r. 1757 w Krak. KACZWIŃSKIEGO «za dozwoleńiem starszych do Druku podana»; w r. 1760 w Berdyczowie TORZEWSKIEGO; w r. 1765 we Lwowie Jezuita SIEKIERZYŃSKIEGO; w r. 1766 w Warsz. Pijara SKARADKIEWICZA, wydawana ponownie w r. 1771 i 1776 w Warsz.; wspomniana już na str. XXVI arytmetyka Pijara MARQUARTA w Wilnie 1772; «*Arytmetyka praktyczna kieszonkowa...*» w r. 1773 w Warsz., bez wymienienia autora, którym był Pijar OBERMAYER, powtórnie wydana w r. 1811 w Warsz.; «Arytmetyka podług reguł JMC. Pana BENIAMINA HEDERICHSA... z niemieckiego języka na polski...» w r. 1774 w Warsz.; «*Arytmetyka praktyczna...*» w r. 1775 w Warsz., bez wymien. autora, którym jest Pijar BIELSKI, z nieco odmiennym tytułem w tymże r. 1775 i 1793 w Warsz., a z wymienieniem autora w Warsz. w r. 1806, 11, 13 i 15; w r. 1775 w Kaliszu nauczyciela tamtejszój szkoły księdza CZARNOCKIEGO; «*Arytmetyka prostacka czyli nowy sposób czynienia rachunków, którego nieumiejących czytać nawet łatwo nauczyć można...*» Pijara SIRUCIA w Wilnie, 1777, «*Nauka Rachownicza Dla Młodzi uczącej się w Akademii Krakowskiej*» w Krak. 1777, po polsku i po łacinie, przeznaczona dla nauki liczb całkowitych w «kolonijach» akademii). Staranne zestawienie porównawcze treści ważniejszych z wyliczonych tu arytmetyk czytelnik znajdzie we wzmiankowanym artykule TRYBUŁSKIEGO na str. 373—8, z którego się przekona, jak powolny one wnosily postęp do nauczania u nas arytmetyki.

Otwarcie przez STANISŁAWA-AUGUSTA, wkrótce po koronacji, korpusu kadetów w Warszawie prawdopodobnie przyczyniło się również do wyrobienia lepszych metod nauczania. Jakim był ENLING, nauczyciel matematyki elementarniej, nie wiemy, ale drugi dyrektor korpusu, P'FLEYDERER z Tubingi, wykładający matematykę wyższą i fizykę, pozostawił jak najlepsze ślady swęj działalności, troskliwój o dobre metody nauczania, i szczerym przez społeczeńych był otoczony szacunkiem¹⁾.

Zaniknięcie zakonu Jezuitów w r. 1773, a przeznaczenie ich dóbr, wskutek wniosku JOACHIMA CHREPTOWICZA, na oświatę publiczną, i otworzenie Komisji Edukacyjnej, pierwszego na świecie ministerstwa oświaty, wywołało tyle pożądaną i gruntowną reformę wychowania we wszystkich jego stopniach. Różnorodność spraw, podległych nowęj magistraturze, kłopoty z ochranianiem i rewindykowaniem powierzonych jęj pieczy fundusów, przeprowadzanie reform, dozór i administracja szkół, nie dozwalały członkom Komisji Edukacyjnej, mającym nadto liczne inne zajęcia, zająć się drobiazgowym rozważaniem metod nauczania, oraz oceną lub wygotowaniem podręczników. Na wniosek więc IGNACEGO POTOCKIEGO utworzono w marcu r. 1775 Towarzystwo do ksiąg elementarnych (rozeszło się ono w kwietniu r. 1792), pozostające wciąż pod główną prezydencyją wnioskodawcy, którego towarzystwa najczynniejszym członkiem był eks-jezuita GRZEGORZ PIRAMOWICZ²⁾. W Towarzystwie

¹⁾ Por. *Mowę* PIRAMOWICZA 7 marca r. 1782 (str. 10—11).

²⁾ W tomie V «Rozpraw» wyd. filol. ak. um. w Krak. dr. WŁADYSŁAW WISIOCKI ogłosił cenną pracę *Poczet chronologiczny prac drukowanych i rękopiśmiennych* GRZEGORZA PIRAMOWICZA (1877).

do ksiąg elementarnych (składało je 10 zawsze członków) oceniano i wyrażano w ostatecznej redakcyi podręczniki szkolne, ułożono znakomite «Ustawy dla stanu akademickiego», rostrząsano wszelkie potrzeby naukowe szkół, troskliwie opracowano elementarz dla szkół początkowych, a ślady téj wytrwałej pracy ujawniano nazewnątrz od imienia Komisji Edukacyjnej. Z nieogłoszonych dotąd drukiem protokółów tego Towarzystwa widać, iż pierwszą jego czynnością było ułożenie obwieszczeń do konkursu na projekty podręczników szkolnych, które Komisya Edukacyjna ogłosiła w kraju i zagranicą. Z otrzymanych wielu projektów książki elementarnej do matematyki, nadesłany w listopadzie r. 1776 pod dewizą z CONDILLAC'a «Celui qui n'a pas appris à réfléchir, n'est pas instruit, ou il l'est mal, ce qui est pire encore»¹⁾, na skutek opinij wzmiankowanego wyżej PFLEYDERERA, Pijarów POPEAWSKIEGO i NARBUTA, oraz PIRAMOWICZA, został przyjęty w styczniu r. 1777. Autorem okazał się SZYMON LHULLIER, nauczyciel szkół w Gienewie, który od listopada tegoż roku zaczął nadsyłać częściami arytmetykę. Rękopis oceniali troskliwie naprzód PFLEYDERER, a następnie inni członkowie Towarzystwa, a pierwszy komunikował autorowi rezultaty tych uwag, który odpowiednie zmiany wprowadzał. Na tłumacza wybrano eks-jezuitę JEDRZEJA GAWROŃSKIEGO (ur. w r. 1740), wychowawca uniwersytetów w Wiedniu i Rzymie, byłego nauczyciela w kolegijum jez. w Poznaniu (gdzie robił obserwacyje astronomiczne), lektora królewskiego, kanonika i później biskupa (1804—1813) krakowskiego, którego przekład arytmetyki czytano i niekiedy modyfikowano na pełnych sesyjach Towarzystwa. Czytanie to trwało od połowy stycznia do końca kwietnia na cotgodniowych posiedzeniach (taki sam był tryb postępowania w jesieni r. 1778, w r. 1779 i 1780 z obu częściami *Geometrii* LHULLIER'go; z jego zaś *Algebry* w r. 1781 czytano już tylko wyjątki; tłumaczem obu dzieł również GAWROŃSKI). Od lutego r. 1782, w miejsce PFLEYDERERA, powołanego do pracy w kraju rodzinnym, wszedł do Towarzystwa LHULLIER, sprowadzony do kraju przez ks. CZARTORYSKIEGO (w tymże roku LHULLIER ogłasza w Warsz., zalecone przez Tow. do ks. elem. nauczycielom szkół, dzieło: «De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum geometricae considerata: seu de Maximis et Minimis, pars prior, elementaris») i czynny udział w jego pracach przez lat parę przyjmuje. Tak wypracowana *Arytmetyka dla szkół narodowych* wyszła w r. 1778 w drukarni Szkoły Głównej w Krakowie, a następnie, również pod opieką tegoż Towarzystwa, tamże w r. 1785, 1786 (8-vo, str. 248); później zaś pojawiają się różne jej wydania w Wilnie, Warszawie i Krakowie w r. 1802, 4, 7, 9, 10, 11, 14, cztery w jednym r. 1817, w r. 1819 i niekorzystnie zmienione w 1841 (TRYB., str. 383). Autor tego podręcznika, LHULLIER (ur. w r. 1750 w Gienewie), z innego jeszcze konkursu wyszedł zwycięsko: w r. 1786 otrzymał nagrodę akademii berlińskiej za pracę na ogłoszony temat: «jakie pojęcie jasne i dokładne należy sobie utworzyć o nieskończoności w matematyce». Ogłosił on pofrancusku i połacinnie bardzo wiele prac, odnoszących się do matematyki tak elementarnej, jak i wyższej. «Był on przeważnie człowiekiem rozważnym i profesorem wytrawnym. Rzucał światło na wiele ciemnych punktów teoryi, nie przywiązawszy swego nazwiska do jakiegoś znaczniejszego odkrycia»²⁾. Ówóż właśnie, *Arytmetyka*

¹⁾ «Kto nie nauczył się rozważać, nie jest wykształcony, lub jest źle wykształcony, co jest jeszcze gorsze.»

²⁾ «Winniśmy jednak zaznaczyć, zdaje się słusznie, jego rozkład na czynniki sumy i różnicy dwu ilości wykładniczych, jego rozwiązanie zadania o wpisaniu w koło wie-

dla szkół narodowych najwięcej może przekonywa o tych przymiotach autora. Przedewszystkim LHUILIER, mając pisać algiebrę i geometryją, ograniczył mądrze zakres arytmetyki, nie wtłaczając w nią tego, co jest obcym arytmetyce. Dzieło składa się z czterech części: I. «O rachunkach w liczbach całkowitych», II. «Zamykająca w sobie cztery arytmetyczne działania na liczbach wielorakich, to jest różne gatunki rzeczy oznaczających» (str. 79), III. «O rachunkach w liczbach łamanych» (str. 106), IV. «O regule trzech»¹⁾ (str. 164—248 w 3-im wyd.). Zaznajomiwszy ucznia przy pomocy sposobów poglądowych z najprostszymi liczbami i działaniami na nich (przyczym bardzo szczegółowe i trafne czyni uwagi), autor, nie stawiając żadnych zgóry określeń lub prawideł, metodą ściśle indukcyjną uczy wykonywania działań na liczbach, wychodząc zawsze z zadań na liczby mianowane. Ścisłym i przystępnym rozumowaniem objaśnia każdy krok, nie przechodzi jednak nigdy w pedantyczność. Prawidła wypowiada dopiero po przerobieniu wielu zadań. Podaje wciąż trafne uwagi, które dziś bynajmniej nie są przestarzałe. Osobliwie jest troskliwy, by wielkimi liczbami nie przygnębiać dziecięcych umysłów, a drobiazgowo i słusze podaje wskazówki, jak mianowicie zachować stopniowanie przy wyborze liczb, poczynając od łatwiejszych. Rozróżnia doskonale w działaniach liczby oderwane od mianowanych, zaznacza starannie dwojakie założenie dzielenia i t. d. Sam LHUILIER scharakteryzował swą pracę następująco uwagą, którą wypowiada przy części trzeciej, t. j. przy rozpoznaniu nauki o ułamkach: «żeby uczniowie, nie napamięć i z samymi tylko regułami idąc, uczyli się rachunków na liczbach łamanych, ale przy każdym przykładzie im podanym zastanawiali się i uważali, jakby ich sam rozum do tego, a nie innego sposobu rachowania prowadził, choćby żadnych nawet prawideł na to nie było, które zapewne nie skądinąd się wzięły, tylko z pilnego uważania i rostrząsania natury każdego w szczególności działania». Z układu książki widać, iż LHUILIER rozumiał nauczanie tylko na lekcyi, był nieprzyjacielem wszelkich zapamiętywań reguł i postępowań mechanicznych. Z głębokim przeświadczeniem wypowiadamy nasze przekonanie, iż dzieło to jest najlepszym, z istniejących, zbiorem wskazówek dla uczących, jak prowadzić w wielu razach zajęcia w czasie lekcyj. Jako takie dzieło, polecamy je dla uważnego odczytania go wszystkim starannym nauczycielom. — Wracając jeszcze do książki (nie mamy co przytaczać tu jej treści), tu jeszcze tylko zaznaczymy, że wykład ułamków dziesiętnych, jako ułożony w epoce przed rozpowszechnieniem się ich pod wpływem systematu metrycznego, jest bardzo krótki. Zadania zaś na regule trzech są rozwiązywane i objaśniane znakomicie zapomocą sprowadzania do jedności lub niekiedy metodą rozkładową. (Rzecz bowiem o stosunkach i proporcjach LHUILIER wyklada w rozdziale VIII części I *Geometrii dla szkół narodowych*.) Oddzielne kwestyje należy teraz w szkole średniej ogólnej wykladać nieco inaczej, uwzględniając więcej stronę teoretycz-

¹⁾ «łokata, którego boki przechodzą odpowiednio przez punkty dane, nakoniec jego zastosowanie do trójkątów kulistych prostokątnych twierdzenia o kwadracie przeciwprostokątnej». — Umarł około r. 1810». LAROUSSE *Grand dictionnaire universel du XIX siècle* (Paryż, 1873, artykuł «L'HUILIER».)

¹⁾ O Regule Trzech prostej (Directa). O Regule trzech odwrotnej (inversa). Uwagi stosujące się do dwóch rozdziałów poprzedzających O Regule procentu i o Regule odtrącania onego. O Regule spółki (societatis). Przystosowanie Reguły Trzech do zamian pieniędzy. Przystosowanie reguły trzech do miar i wag w miastach znakomitszych Europy używanego. O Regule trzech Składanej (Composita). Wykład niektórych skrótów i praktycznego używania Reguł poprzedzających.

na, ale zresztą nastrój téj książki jest zupełnie dzisiejszy ¹⁾. Przekład GAWROŃSKIEGO jest na owe czasy znakomitym pod względem języka, z którym nie mogą iść w porównanie wyliczone poprzednio arytmetyki polskie w. XVIII. GAWROŃSKI położył w tłumaczeniach dzieł LHUILIER'go podwaliny naszego dzisiejszego języka matematycznego, doskonalonego później przez JANA ŚNIADECKIEGO.

Pomnęlibyśmy nader ważny rys w reformie nauczania u nas wogóle, przez Komisją Edukacyjną przeprowadzonego, gdybyśmy tu choć nie zaznaczyli pieczołowitości, z jaką ta magistratura zajęła się sposobieniem nauczycieli szkół średnich. Objąwszy zarząd wszelkich szkół, któreteż prawie wszystkie bez szemrania mu się poddały, Komisya Edukacyjna zrazu zaprowadziła w nich tymczasowe zmiany, a przez swoich wizytorów gromadziła materyjały do gruntownej szkół naprawy. Ostatecznie projekty ²⁾ reformy obu akademij w Krakowie i Wilnie (nazwanych Szkołami Głównymi), wszystkich szkół średnich, oraz ogólne uwagi o szkołach parafjalnych uległy kodyfikacyi w Towarzystwie do ksiąg elementarnych. Z protokółów tego Towarzystwa (którego członkiem już przedtem został ks. HUGO KOŁŁATAJ) widać, iż od początku r. 1781 do końca kwietnia wszyscy członkowie Towarzystwa gorliwie wypracowują oddzielne części projektu, którego ostateczną redakcyą prowadzi PIRAMOWICZ. Tegoż roku we wrześniu rozdano uroczyście przepisy pod tytułem jeszcze «Projektu» zgromadzonemu w Warszawie rektorom szkół wydziałowych koronnych, natychmiast wprowadzono je w życie w całym kraju, a w r. 1783 wydane je (z pewnymi zmianami), jako obowiązujące «*Ustawy... dla stanu akademickiego*» (t. j. nauczycielskiego Szkół Głównych, wydziałowych i podwydziałowych). Z tych *Ustaw* ³⁾ łatwo widzieć można, jak wielki już nacisk położono wówczas na przygotowywanie nauczycieli szkół średnich, jaką ważność téj sprawie nadano, jak rozumnie i troskliwie obmyślono te ramy, które już

¹⁾ W r. 1816 na posiedzeniu warszawskiego towarzystwa przyjaciół nauk wystąpił Pijar ANTONI DĄBROWSKI, prof. uniw. warsz., z powierzoną rozprawą: *Uwagi nad sposobem dawania matematyki w szkołach publicznych*, w której stawia takie zarzuty *Arytmetyce dla szkół narodowych* (str. 23 odbitki): «1-ód, że nie wszystkie działania fundamentalne są tak gruntownie wyłożone, jak być powinny, czego dowodem jest, że najlepszy z uczniów, «umiejący całą Arytmetykę z LHUILIER'go, zapytany o iloczyn, gdy jest mnożnikiem zero, «zawsze prawie da fałszywą odpowiedź, i nigdy dostatecznie nie wyłoży, dlaczego niektóre iloczyny są mniejsze od swoich czynników, a niektóre ilorazy większe aniżeli dzielna; «2-re, że na działania trudniejsze nie podaje prawideł, które jednak w umiejętnościach «i naukach tym są, jak powiedział CONDILLAC, czym są poręczne na moście, nie żeby pomagały «podróżnym do przeprawy, lecz żeby broniły ich od upadku». Drugi zarzut nie jest słuszny: prawidła główniejsze LHUILIER podaje, tylko nie wyróżnia ich szczególnym drukiem, a, wierny swéj zasadzie, wyżej przytoczonej, ciągle rozumując, na prawidła się nie powołuje, lecz postępuje «jak sam rozum do tego prowadzi». Nie podaje zaś prawideł np. na wykonywanie dzielenia liczb całkowitych, które więcéj jest ćwiczeniem na poprawne dość trudne opisanie postępowania, dobrze już przez ucznia pojętego, niż ową «poręczą na moście». Co się zaś tyczy zarzutu pierwszego, to druga jego część jest słuszną: rzeczywiście, LHUILIER odpowiedniego nacisku nie robi. Za to początkowa część zarzutu pierwszego nie przynosi zaszczytu wypowiadającemu go. Zero występuje jako liczba dopiero w algiebrze; w arytmetyce zaś jest znakiem, służącym do zapelnienia niejsca niezajętego przez cyfrę znaczącą. Dlatego dobry nauczyciel nigdy nie użyje w arytmetyce wyrażenia: mnożyć przez zero, lub zero mnożyć przez oznaczoną liczbę. Żadne zadanie arytmetyczne do czegoś podobnego nie doprowadza.

²⁾ Najważniejszy projekt przedstawił wzmiankowany wyżej POPEAWSKI (*Mowa PIRAMOWICZA* 7 marca r. 1782, str. 13).

³⁾ *Ustawy* te przedrukowano w r. 1872 we Lwowie jako tom I *Biblijoteki pedagogicznej i dydaktycznej*.

wypełnić miała gorliwość i talent wykonawców. Tu tylko przytoczymy fakt, najlepiej mówiący o przejęciu się Komisji Edukacyjnej ważnością tej myśli jeszcze przed wygotowaniem «Projektu». W r. 1780 kandydatów ze szkół wydzielowych litewskich wysłano na koszt Komisji do lepszej ówczesnie Szkoły Głównej w Krakowie i jednocześnie Komisja posłała do JANA ŚNIADECKIEGO wezwanie do Paryża, aby podróż swą do Anglii odłożył na czas późniejszy, a jaknajprędzej zjechał do Krakowa dla zajęcia się owymi kandydatami.... Przy tak sposobionych nauczycielach poważny był nastrój, a owocna działalność tych szkół, w których pracowali, lub później już tylko dosługiwali swych lat owi byli kandydaci Komisji Edukacyjnej. Oddziaływali ci ostatni swym przykładem na młodszych, nie tak troskliwie już przygotowywanych, nauczycieli, jak o tym świadczyły doniedawna jeszcze żywe wspomnienia ludzi starszych.

Jeszcze jeden owoc działalności owego Towarzystwa do ksiąg elementarnych wchodzi w zakres naszego przedmiotu. Od pierwszych dni swego istnienia, Towarzystwo, jak to widać z jego protokółów, troska się ciągle o elementarz dla szkół początkowych. Różne projekty powstają, rozmaite przygotowania się robią. Nie do nas należy kręślić ciekawe dzieje tych obmyślań. Ostatecznie wydany został w r. 1785 «Elementarz dla szkół parafialnych narodowych» (w drukarni Szkoły Głównej koronnej; egz. bibl. głów. w Warsz.). Składa się on z czterech części: I. Nauka pisania i czytania (str. 43), II. Katechizm początkowy (str. 44—48) (autorem obu części członek Tow., Pijar ONUFRY KOPCZYŃSKI), III. Nauka ¹⁾ obyczajowa (str. 1—54) (PIRAMOWICZA) i IV. Nauka rachunków (str. 55—120) (GAWROŃSKIEGO). Ta Nauka rachunków pozostanie nazawsze niespożytym dowodem, iż metoda pogłówna w zastosowaniu do arytmetyki została do naszych szkół początkowych wprowadzona i systematycznie była w nich uprawiana jeszcze w wieku XVIII, nadługo przedtem, nim ją już w bieżącym stuleciu jako nowy całkiem pomysł zaczęto wysławiać na zachodzie, skąd później, jakby świeżą zdobycz dydaktyki, przesadzono do nas. Wprowadzenie tej metody odbyło się wtedy u nas cicho, poważnie; krzewiciele jej, przejęci tylko ważnością sprawy, tak dalece nie dbali o rozgłos, że nawet imiona autorów różnych części Elementarza nie są zaznaczone w zwykłej aprobacie Komisji Edukacyjnej i w żadnym sprawozdaniu lub artykule wydrukowane nie były, tak iż je po raz pierwszy tu stanowczo, nie zaś jako domysł tylko, podajemy. Powiedziano tam tylko, iż to dzieło «od Towarzystwa do Xąg Elementarnych roztrząsnione». Cała Nauka rachunków ma te główne zalety, jakich od podobnego dzieła dziś wymagać możemy. Przystępność, jasność, stopniowanie właściwe, objaśnienia trafne: to cechy ogólne. Co się tyczy szczegółowego wykładu, powiemy tu tylko o rozdziale I, «O liczeniu» (str. 55—65), jako przedstawiającym najwięcej trudności w podobnej pracy. Mamy tedy naprzód w trzech rzędach: kropki, wypisane liczebniki i cyfry (1 do 9). Według objaśnienia, należy przechodzić od którejkolwiek do następnej przez powiększenie o 1, a potem: «Dla większej «Uczniów wprawy, weźmie nauczyciel dziewięć sztuk groszy miedzianych, albo, co najłatwiej mieć można, dziewięć ziarn grochu lub innego zboża,

¹⁾ Przedrukowane również we lwowskiej *Bibl. ped. i dyd.* znakomite dzieło PIRAMOWICZA «Powinności nauczyciela mianowicie zaś w szkołach parafialnych...» (pierwotnie wydane w r. 1787) miało wejść do składu drugiej części elementarza, która w całości nie doszła do skutku.

«i dając jedno naprzykład ziarno któremu z Uczniów, spyta się, ile ma ziarn w rękę? odpowiedź: *jedno*; gdy mu do tego przyda jeszcze jedno ziarno i spyta się, ile ma ziarn w rękę? odpowiedź: *dwa*... Niech to samo powtórzy z kilku innymi Uczniami. Niech im samym potym każe rachować od jednego ziarna do dziewięciu. Niech naostatek sam bierze, albo któremu z Uczniów daje po kilka razem ziarn na rękę, a drudzy niech zgadywają przez samo widzenie, ile ma ziarn na rękę. Gdy już dobrze liczyć będą umieli od jednego do dziewięciu, niech im powie, że te słowa, liczby oznaczające, które wymawiali, a które mają w drugim rzędzie pod kropkami podpisane, mogą się krócej wyrazić i w samej rzeczy wyrażają tak, jak trzeci rząd okazuje, gdzie zamiast tego słowa: jedno piszę się 1, zamiast... Każe im podobne pisać na tablicy i potym wymawiać, tak, jak mają w drugim rzędzie. Powie im, że nie masz więcej, jak tylko te dziewięć znaków liczbowych i że nimi choćby największe liczby można oznaczyć, jako to potym obaczą. Zwróci się jeszcze z nimi do wzoru i powie krótko, że jaką liczbę mają kropkami oznaczoną w pierwszym rzędzie, też samę mają słowem, pod nią podpisanym, wyrażoną w drugim rzędzie, a w trzecim rzędzie pod tymże słowem mają znak liczbowy toż samo, co i słowo, krócej wyrażający. Będzie, wrywając, pytał się ich, ile jest gdzie kropek, palcem na nie, lub skazówką skazując i jak się ta liczba kropek znakiem liczbowym wyraża.» Umyślnie przytoczyliśmy cały ten ustęp, aby dać czytelnikowi możność zrozumienia nastroju, jaki nietylko w tym rozdziale, ale w całym znakomicie obmyślanym elementarzu się przebija. Dalsze stopnie nauki o liczeniu są: dziesiątki: 10, 20, ..., 90; świetny wykład liczb pośrednich między tymi dziesiątkami; setki: 100, 200, ..., 900 i krócej już o liczbach pośrednich; tysiące: 1000, 2000, ..., 9000 i nakoniec ogólny zarys pojęcia o liczbach, mających więcej cyfr. Na zakończenie tego rozdziału: «i uczyni im otuchę, że gdy teraz uczyć się dobrze będą, a potym na kawałek chleba pracowicie zarabiać, tedy mają się spodziewać, że co teraz na ziarnach rachowali, to potym ten rachunek, a może i większy, na pieniądze uczciwymi sposobami zebranych czynić będą mogli.» Rozdziały II—V poświęcone cztem działaniom; przy mnożeniu rzecz o miarach; w rozdziale o dzieleniu postępowanie przygodne z liczbami wielorakimi. Rozdział VI «O regule trzech», gdzie są rozwiązywane najprostsze zadania, według tego, jak «rozum sam naturalny człowieka podał sposób postępowania sobie w tym działaniu.» —

Niezależnie już od Komisji Edukacyjnej, nakładem STANISZAWA-AUGUSTA wyszła w czterech tomach «*Nauka matematyki do użycia artyleryi francuskiej, napisana przez p. BÉZOUT na polski język przełożona...*» (1781—2) przez JÓZEFA JAKUBOWSKIEGO, «Kapit: Ar: Kor:». Pierwsza część tomu I, «*Fundamenta rachunków*» (str. 208 i XVI), przedstawia kurs arytmetyki, wraz z nauką o proporcjach, o wyciąganiu pierwiastków kwadratowych i sześciennych, o postępach, oraz o logarytmach, tak gruntownie i systematycznie, a jasno opracowany, iż to dzieło BÉZOUT wciąż jeszcze wychodzi we Francji w ponawianych wydaniach. Jest to najlepszym dowodem trafności wówczas wyboru tego dzieła do przekładu. Arytmetyka BÉZOUT przedstawia niejako dopełnienie arytmetyki LHUILIER'go. Gdy druga uczy praktycznie i trafnie czterech działań na liczbach całkowitych, ułamków i rozwiązywania zadań, to pierwsza systematyzuje te wiadomości, uzupełnia je pod względem teoretycznym traktowaniem gruntowniejszym ułamków dziesiętnych (odrzuca łącznie z liczbami całkowitymi) i szczegółowym przedstawieniem własności stosunków i

proporcji, a nadto wnosi do naszej literatury pierwszy należyty wykład wzmiankowanych dalszych części tego dzieła. Szwankuje ona tylko pod względem słownictwa, które u JAKUBOWSKIEGO jest zbyt oryginalnym.

Wydanie u nas w ostatniej ćwierci wieku zeszłego trzech ostatnio tu zaznaczonych arytmetyk zapowiadać się zdawało jaknajlepiej o dalszym rozwoju nauczania arytmetyki u nas. Możebytóż to nastąpiło przy innych, przyjaźniejszych warunkach ogólnych. —

Przechodzimy nakoniec do wieku XIX. Nie możemy tu ani wliczać wszystkich dotąd wydanych arytmetyk, ani tymwięcej o każdej z nich mówić szczegółowo. W kilkakrotnie już przytoczonym artykule TRYBULSKIEGO czytelnik znajdzie (str. 386—396) wyłożenie wypracowywanych, głównie w Niemczech, w bieżącym już wieku, i metod nauczania początków arytmetyki (PESTALLOZZI, DISTERWEG i HEUSER, HENTSCHEL, GRUBE i ich następcy), jakoteż (str. 397—410), przegląd, niekiedy zbyt łagodny, ważniejszych polskich książek, do tego się odnoszących. Pozostaje więc nam wspomnieć już tylko o tych arytmetykach, które poświęcone są przeważnie systematycznemu jej wykładowi. Oczywiście, ograniczymy się tylko na tych, o których wspomnieć warto, choćby ze względu na ich rozpowszechnienie.

Chcąc wogóle mówić o naszych arytmetykach wieku bieżącego, mimowoli staje się przedewszystkim wobec pytania, dlaczego one nie przedstawiają dalszego rozwinięcia tego poglądu na nauczanie, który widnieje ze znakomitej książki LHULLIER'go, dlaczego niema najmniejszego śladu jej oddziaływania, dlaczego pod względem dydaktycznym tylko upadek zaznaczyć należy? Trafną nam się wydaje uwaga TRYBULSKIEGO (str. 396): «Autor jój (-LHULLIER-), nie wykazawszy błędów dawniej metody i nie potępwszy jój ani jednym słowem, tym samym pozwolił rutynistom ignorować ją i pogrążyć się napowrót w błogim spoczynku beczynności; wyłożywszy zaś swoje zasady ze spokojem iście matematycznym, zyskał wprawdzie uznanie światłych mężów Komisji Edukacyjnej, ale nie wzbudził w tłumie entuzjazmu, tak niezbędnego dla przeprowadzenia w masę jakiegokolwiek nowej idei; tym zaś sposobem nie ściągnął na siebie gniewu i piorunów przeciwników, aletóż i nie zjednał dla swój idei gorących zwolenników i apostołów. Dlategoteż zasady LHULLIER'go, jakkolwiek nadzwyczajnej doniosłości, nie przeszły prawie poza obręb jego własnego dziełka». — Okolicznościowo zaznaczymy tu, iż szkoły średnie okręgu wileńskiego, zostające pod bezpośrednim zarządkiem uniwersytetu w Wilnie i jego rektora JANA ŚNIADECKIEGO, używały głównie *Arytmetyki dla szkół narodowych*.

JÓZEF CZECH, naprzd profesor matematyki elementarnej w Szkole Głównej koronnej w Krakowie, a następnie pierwszy dyrektor gimnazjum wolińskiego w Krzemieńcu, tłumacz *Elementów* EUKLIDESA, wydał w r. 1807 w Wilnie *Krótki wykład arytmetyki*, tamże przedrukowywany następnie w l. 1809, 11, 16, 17, 27 i 28. Dziwny jest układ tej książki. Część pierwsza (do str. 98 wyd. z r. 1817) jest zestawieniem tego, co uczniowie, źle przez nauczyciela prowadzeni, nazywają niekiedy: teorią, t. j. zbiorem definicji i prawideł, a gdzieniegdzie objaśnień, w rodzaju np. podanego po prawidło na mnożenie liczb dziesiętnych: «Przyczyna tego działania gruntuje się na naturze i sposobie znaczenia ułamków dziesiętnych» (str. 17; żadnego dodatkowego niema już objaśnienia). Toż samo w ustępach o podnoszeniu do kwadr. i sześć. i wyciąg. pierw., o postępach i o logarytmach (te ostatnie jeszcze stosunkowo najlepiej). Reguła trzech (str. 60—62, 66—67) ledwo zaznaczona.

Część druga (str. 99—127) obejmuje «Wzory działań», jakby wyciąg z zeszytu ucznia, w którym były przerabiane zadania; pozbawione zwykle wszelkich objaśnień. CZECH położył jako wychowawca wielkie zasługi w szkole krzemienieckiej, czego dowodem powszechny i tak poważnie wyrażony ¹⁾ żal po jego śmierci w r. 1810. Może nauczyciel arytmetyki za dyrektorstwa CZECHA (który wykładał algebrę), ANTONI STRZELECKI, pomimo takiego podręcznika dobrze naukę arytmetyki prowadził, ale CZECH wydaniem tej książki nie zasłużył sobie bynajmniej na zaszczytną wzmiankę. Słusznietóż delegacyja uniwersytetu wileńskiego w r. 1811 nie uznała za możliwe wprowadzenie arytmetyki CZECHA, używanej w szkole krzemienieckiej, do innych szkół zostających ówczesnie pod pieczę CZACKIEGO ²⁾.

Wielką w swoim czasie wziętością cieszyły się «Zasady arytmetyki ułożone przez byłego profesora matematyki w szkole departamentowej» (RADOMIŃSKIEGO), ogłoszone w Warszawie w r. 1821, a później powiększone w r. 1827 (str. 258 i VI tablic miar), podzielone na dwie części w l. 1832—4 i oddzielnie część pierwsza 1841 i 1858. Dzieło RADOMIŃSKIEGO obejmuje tenże zakres głównej treści, co książka CZECHA, i również w nim wykład ułamków dziesiętnych jest prowadzony razem z liczbami całkowitymi. Jest ona jednak kursem bezwarunkowo starannie obmyślonym i troskliwie opracowanym. Wprawdzie jest to kurs właściwie dedukcyjny; nawet podawane przepisy wykonywania działań są później dopiero objaśniane, którymto objaśnieniom łatwo niekiedy wiele zarzucić można; tu i owdzie niepotrzebne wycieczki (np. przy odejmowaniu: «różnica może być większa niż liczba, od której się odejmowało» i naturalnie: «majątek» i «dług», str. 21), i t. d., tak iż książkę tej ani pod względem metody, ani objaśnień przytoczonych, ani gruntowności rozumowania, ani też jasności wogóle nie można postawić obok *Arytmetyki dla szkół narodowych*, albo *Fundamentów rachunków*. Lecz w każdym razie, wyczerpującym zaznaczeniem różnych szczegółów, jakoteż właściwym sobie systematem w całym wykładzie, pracowitością nakoniec widoczną z całego tego dzieła, daje się wytlomaczyć uznanie, jakim ta książka przez dość długi przeciąg czasu się cieszyła.

W r. 1844 znany filozof i zacny obywatel, KAROL LIBELT, ogłosił w dwu tomach «Wykład matematyki dla szkół gimnazjalnych» (Poznań). Początkowa część tomu I (str. 11—164) przedstawia pierwszą próbę przeszczepienia na nasz grunt niefortunnej koncepcyi niemieckiej, t. z. «allgemeine Arithmetik», albo «Buchstabenrechnung». W tej książce (przyjmując, że uczniowie przeszli już pobieżny kurs początków rachunków) wyklada się ogólnie sześć działań algebraicznych na literach, mogących otrzymywać także wartości ujemne, mówi się także o liczbach niewymiernych i nieco o urojonych, a następnie dopiero przeprowadza się w zastosowaniu, a więc na podstawie algebraicznych prawideł, po raz pierwszy systematyczny wykład właściwej arytmetyki, przy przerabianiu dowodzeń, gdzie tylko można, na literach (które mogą teraz oznaczać tylko liczby dodatne). Tak np. w rozdziale «O rachunkach praktycznych» dowodzi się różnych twierdzeń ogólnych. Przytoczymy tu jedno z takich twierdzeń: «Jeżeli z sześciu ilości danych A, B, C, D, M, N, (rozumiejąc ich wartości), M zależy od A i B, a N zależy od C i D, tak, że ilekroć

¹⁾ Zob. artykuł dra PIOTRA CHMIEŁOWSKIEGO *Czacki Tadeusz w Encyklopedyi wychowawczej* (t. III, 1883, str. 63).

²⁾ Zob. tamże str. 66.

« $B = D$, to $M : N = A : C$, a ilekroć $A = C$, to $M : N = B : D$, natenczas « $M : N = (A \cdot B) : (C \cdot D)$ ». Po dowiedzeniu tego twierdzenia, 4 wnioski podobnie wysłowione i odpowiednio uzasadniane. A to wszystko dla rozwiązywania zadań takiego typu: «Kiedy 4 robotników w 5 dniach wykopuje 48 prętów «szachtowych ziemi, ilu trzeba robotników, ażeby w 6 dniach 216 prętów było «wykopanych?» — Układ ogólny tej części dzieła był do pewnego stopnia narzucony LIBELTOWI wymaganiami programu w poznańskim obowiązującego; z przedmowy jego jednak widać, że takie traktowanie rzeczy wydało mu się pomysłem bardzo szczęśliwym, tak iż ani złych stron ogólnie dydaktycznych tej metody, ani tego, że ona jest nieodpowiednią dla naszej młodzieży¹⁾, LIBELT zgola nie dostrzegał. Przy tym jednak systemacie, jaki LIBELT w tej pracy przyjął, zaleca się ona ścisłością przeprowadzenia całego kursu.

Również część I *Elementarnej wykładu matematyki* przez JANA KANTEGO STECZKOWSKIEGO, profesora na uniwersytecie Jagiellońskim, obejmująca *Arytmetykę* (dwa wydania towarzystwa naukowego krakowskiego, w r. 1851 i 1861; 2-ie str. 327), przedstawia wykład arytmetyki na podstawie algiebry. Rolę, jaka tu przypadła arytmetyce, dosadnie scharakteryzuje ten fakt, że reguła trzech, jako zastosowanie proporcji, wraz z nauką o proporcjach znalazła się po ułamkach ciągłych, dwumianie NEWTON'a, pierwiastkach, liczbach niewymiernych i urojonych i logarytmach. Jednak niektóre ustępy arytmetyczne, jak o podzielności liczb i o ułamkach, posiadają istotne zalety. Pod względem zaś ścisłości metodycznej wykładu dzieło STECZKOWSKIEGO nie dorównywa pracy LIBELTA. Przeznaczenie *Arytmetyki* STECZKOWSKIEGO dopiero dla klas «wyższych, począwszy od czwartej» usprawiedliwia do pewnego stopnia nastroj w jej wykładzie.

Wadliwości dydaktyczne programu matematyki, obowiązującego w szkołach średnich austriackich, zostały jeszcze spotęgowane nieporządkiem w rozkładzie treści, zbyt dużym naciskiem na kwestyje drugorzędne w podręcznikach MOĆNIKA, których tłumaczenia i przeróbki gnębią naszą młodzież w szkołach galicyjskich. Różne owe opracowania arytmetyki dla wszelkich szkół, od początkowych począwszy, pojawiają się wciąż w Galicyi w licznych wydaniach od r. 1847. Wychowanie na tych arytmetykach wielu pokoleń, które może nadto już do takich kursów przywykły, a probacyja władz szkolnych, nie dostrzegających, jak szkodliwe dla młodych umysłów jest pozbawienie ich tego pożytku, jaki z dobrego prowadzenia nauki arytmetyki na całe wychowanie wynika, jest może przyczyną tego, że w Galicyi (pozbawionej nadto niegdyś zbawionego wpływu Komisji Edukacyjnej) żadnej niema jakkolwiek poważnej samodzielnej pracy arytmetycznej. Prawdopodobnie sumienni i światli nauczyciele w szkołach galicyjskich ograniczają się na usunięciu w samym nauczaniu tych wad, jakie przedstawiają te książki MOĆNIKA i ich tłumaczenia lub opracowania.

¹⁾ Mając na myśli stopniowe rozbudzenie ścisłego myślenia, zdolności kombinacyjnych, oraz istotne przyswajanie sobie treści nauczanych części matematyki przez uczącą się naszą młodzież, wypada dla szkoły średniej ogólnej za najwłaściwszy uznać taki porządek, kiedy po starannej nauce o liczbach całkowitych, ułamkach, proporcjach, jednocześnie z przechodzeniem reguły trzech rozpoczyna się nauka algiebry, w której po czterech działaniach, ogólnie z ciągłymi liczebnymi objaśnieniami traktowanych, po przerobieniu troskliwie dobranych zadań na ułamki algiebraiczne, w celu rozwinięcia samodzielnego myślenia uczniów starannie prowadzonym kursem układania i rozwiązywania równań stopnia 1-go z warunków zadania poprzedzą się nauką o podnoszeniu do potęgi i wyciąganiu pierwiastka...

Arytmetyka wydana w Warszawie (1858—9) przez okrąg naukowy, trzy części (z zadaniami) na klasy I (str. 129), II (str. 100), III (str. 150), a IV (str. 128) o sposobie prowadzenia rachunku pamięciowego, uwagi dydaktyczne i rozwiązania zadań, napisana przez A. ZABIEŁŁĘ, załeca się dobrym wprowadzeniem pojęcia o ułamkach, ustępem o objaśnieniu miar powierzchni i objętości i t. d. Całość jednak kursu nie przedstawia ani systematycznego opracowania, ani też zalet wybitniejszych pod względem dydaktycznym.

Znacznie lepszą od poprzedniego kursu jest *Arytmetyka* K. GRUBECKIEGO wydawana w Warsz. w l. 1857, 65, 67 (str. 208) i 78, obejmująca w starannym i dość systematycznym wykładzie naukę o liczbach całkowitych i ułamkach wraz z trafnymi zadaniami. Po śmierci K. GRUBECKIEGO wydana została przez MICHAŁA GRUBECKIEGO (1867) część druga, obejmująca proporcycje, regułę trzech i o podnoszeniu do kwadr. i wyciąganiu pier. kwadr., również z zadaniami (str. 190). W niektórych ustępach widoczną jest też sama staranność i istotna znajomość przedmiotu, która załeca część pierwszą, inne za to ustępy nie dochodzą do tego poziomu. Osobliwie końcowy ustęp o regule fałszywego założenia jest bardzo słaby.

Nakoniec, «*Arytmetyka z teoryją przybliżeń liczebnych*» G.-H. NIEWĘGZOWSKIEGO (Paryż, 1866, str. 352), wydana nakładem hr. JANA DZIAŁYŃSKIEGO, który tak hojnie podtrzymywał ruch naukowy na polu nauk ścisłych, załeca się obfitością szczegółów poruszonych. Nauka o proporcycjach i regułach po wyciąganiu pierw. kw. Wykład czterech działań na liczbach całkowitych bardzo pobieżny. Nawzór książek francuskich metoda w tym dziele zachowana jest dedukcyjną. Układ i sposób przedstawienia oddzielnych ustępów bardzo się zbliża do lepszych książek francuskich, poświęconych teoretycznemu wykładowi arytmetyki. Wyczerpanie zupełne nakładu, pomimo tego, że w tym dziele potrzeby szkół naszych nie były uwzględnione, najlepiej wskazuje, iż wykład ścisłszy zasad arytmetyki jest u nas na czasie. —

Wspomniano tu kilka razy artykuł WINCENTEGO TRYBULSKIEGO, *Arytmetyka*, ogłoszony w *Encyklopedyi wychowawczej* (r. 1880, tom I, str. 319—435) przedstawia wielce pracowite i sumienne studyum. Wprawdzie początek, o różnych systematach liczenia, opracowany został głównie na podstawie niespecyjalnego dzieła TAYLOR'a w przekładzie francuskim (*La civilisation primitive*, tłum. pani BRUNET), oraz przytoczonego już (str. XIII) niekrytycznego dzieła HOFER'a, i wprawdzie na tym ostatnim, jak również na zeszlowiecznym dziele MONTUCLA, *Histoire des mathématiques*, opierają się głównie tu i owdzie wzmiankowane fakta z historii arytmetyki w starożytności i średnich wiekach, to jednak wielką zasługą TRYBULSKIEGO jest pierwsze tak mozolne rozejrzanie się w tych dawnych arytmetykach naszych, które mógł odnaléć w bibliotece głównej w Warszawie, właściwe ich ocenienie, jak również należyte podniesienie wartości zapomnianej już prawie *Arytmetyki dla szkół narodowych*. Sam głównie zajęty nauczaniem początkowym (umarł w r. 1882 jako nauczyciel szkoły technicznej dróg, żel. warsz.-wied. i warsz.-bydg. w Warsz.), ze szczególnym zamiłowaniem opracował ustęp o ruchu na zachodzie w wieku bieżącym na polu nauczania początkowego, jak również o śladach oddziaływania tego ruchu na odpowiednie nasze podręczniki. Ostatni ustęp artykułu obejmuje (od str. 410) wskazówki do nauczania początkowego arytmetyki, z których nie wszystkie (np. na str. 419, 421) trafiają do naszego przekonania.

Zakończymy ten niewątpliwie przydługi tu ustęp o stuleciu bieżącym choćby pobieżnym zaznaczeniem poważnych prac, odnoszących się do teoryi liczb. —

W tomie XVII (r. 1843) *Roczników* towarzystwa naukowego krakowskiego KAROL HUBE, profesor na uniwersytecie jagiellońskim, podał dowód twierdzenia LEGENDRE'a: «Jeżeli $4cx + a$ jest jedna z form liniowych, odpowiadających dzielnikom $t^2 \pm cu^2$, każda liczba pierwsza zawarta w formie $4cx + a$ będzie koniecznie dzielnikiem formuły $t^2 \pm cu^2$, a następnie będzie miała jedną z form kwadratowych $py^2 + 2qyz + rz^2$, odpowiadających formie liniowej $4cx + a$ » Tego twierdzenia, udowodnionego dla szczególnych wartości c , HUBE dowodzi dla każdego c . — P. FRANCISZEK MERTENS, profesor na uniwersytecie Jagiellońskim, ogłosił w dzienniku matematycznym CRELLE'go w tomie LXXVII (r. 1874) *Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie*, a w tomie LXXVIII *Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie*. Pierwsza z tych prac jest poświęcona mało uprawianej gałęzi teorii liczb, mianowicie wyznaczaniu wyrażeń granicznych dla sum niektórych szeregów liczb, według pewnego określenia po sobie następujących, czyli tak zwanych funkcji liczebnych. Nad dwiema tylko z takich sum pracował uprzednio (w r. 1849) LEJEUNE-DIRICHLET. P. MERTENS uzupełnia dociekania swego poprzednika i bada sześć nowych podobnych sum, tak iż tą pracą otworzył nowe pole dla podobnych rostrząsań, teoretycznie wiele ciekawych, choć bardzo mozolnych ze względu na przedstawiające się trudności do pokonania. Druga zaś z wymienionych prac jest poświęcona ściślemu dowodowi pewnych dwu wzorów LEGENDRE'a, odnoszących się do ciągu liczb pierwszych postaci $4m + 1$, $4m + 3$ i wogóle $a + mk$, gdzie a i k są danymi liczbami pierwszymi względem siebie. — P. JULIJAN SOCHOCKI, profesor uniwersytetu w Petersburgu, pomieścił w tomie X *Pamiętnika* towarzystwa nauk ścisłych w Paryżu (r. 1878): *Wyznaczenie stałych mnożników we wzorach dla liniowej transformacji funkcji Θ , sumy GAUSS'a i prawo wzajemności symbolów LEGENDRE'a*. W tej pracy wyrażenie mnożnika stałego, wiążącego dwie funkcje Θ , z których jedna powstała z drugiej wskutek liniowego przekształcenia parametrów, wyznaczone przez p. HERMITE'a przy pomocy pewnych wzorów GAUSS'a i CAUCHY'ego, p. SOCHOCKI otrzymuje z własności elementarnych funkcji Θ , a wprowadzenie własności owego mnożnika prowadzi autora do znalezienia wartości sum GAUSS'a, oraz do różnych własności charakterystycznych symbolu LEGENDRE'a.

Styczeń r. 1884.

E R R A T A.

<i>str. wiersz</i>	<i>zamiast</i>	<i>powinno być.</i>
13 8 <i>od dołu</i>	50	70
„ 7 „	rzędów	rzędów, 50
24 1 „	§-u	us.
49 19, 21 <i>od góry</i>	42	44
49 9 <i>od dołu</i>	(5	5 (
50 10 <i>od góry</i>	7648	7646
„ 3 <i>od dołu</i>	większą	mniejszą
„ 14 „	50 588	650 588
52 24 <i>od góry</i>	do	od
55 6 „	37	38
71 3 <i>od dołu</i>	jestto	jest to
95 21 <i>od góry</i>	4 łokieć	łokieć
116 14 „	17006 5151	17105 5131
124 6 <i>od dołu</i>	dm.	cm.
131 14 „	2615	2615 (sic)
132 6 <i>od góry</i>	garncy małych	garncze małe
134 14 <i>od dołu</i>	staj milowych	stajom milowym
135 16 „	dawny,	dawny
136 8 <i>od góry</i>	aby	że
„ 12 „	wymierzone	wymierzone
„ 13 „	oznaczone	oznaczane
138 13 <i>od dołu</i>	sażenia	sażeni
139 6 „	30 006	30086
142 4 <i>od góry</i>	15 m.	15 g.
„ 31 „	30	50
„ 4 <i>od dołu</i>	9	29
143 20 <i>od góry</i>	17 261 825	17 261 525
„ 23 „	dg.	cg.
144 17 „	dnie	dni
146 22 „	29	27
153 1 <i>od dołu</i>	14, 15.	14.
159 28 „	podzielne	podzielna
172 11 <i>od góry</i>	89	88
„ 25, 27 „	1	2
175 26 „	2	1
207 18 „	44	144
225 11 <i>od dołu</i>	12	12—15
268 4 „	20	16

<i>str.</i>	<i>wiersz</i>		<i>zumiasz</i>	<i>powinno być</i>
271	3	<i>od góry</i>	2,8719	2,5719
302	1	<i>od dołu</i>	VII i IX	VII—IX
307	16	<i>od góry</i>	ułamkow	ułamkowe
„	23	„	3	2
322	22	„	wprost	odwrotnie
324	11	„	96	56
336	13	„	<u>15.85</u>	<u>15.238</u>
„	19	„	238	85
341	17	„	Zarobek	Strata
342	14	<i>od dołu</i>	Ile	a. Ile
344	9	„	się zmieniają	zmieniają się
348	11	„	33	38
350	3	„	840	860
354	4	<i>od góry</i>	przyczyną	przyczynę
			<u>6</u>	<u>9</u>
XXI	15	„	<u>4+6+9</u> *	<u>4+6+9</u> *
„	16	<i>od dołu</i>	post	post:
XXXVIII	9	„	przestróg	7 przestróg
XL	4	„	przeznaczony	przeznaczany
XLI	13	„	Glareani	Glareanus'a
XLIX	8	<i>od góry</i>	Stiffel	Stifel
LII	12	„	przeprowadzonego	przeprowadzonej
			i metod	metod

AR Y T M E T Y K A.

ROZDZIAŁ I.

POJĘCIA WSTĘPNE. LICZENIE.

§ 1. POJĘCIA WSTĘPNE.

1. Aby zrozumieć, czym jest liczba, należy zastanowić się uważnie nad jakimkolwiek przykładem odpowiednim.

Gdy np. słyszymy kogoś mówiącego:

kupiłem *trzy* funty chleba,

to łatwo zauważymy, że tę samą myśl możnaby wypowiedzieć wyraźniej, mówiąc:

kupiłem chleba *trzy razy więcej niż jeden* funt.

Widzimy z tego, że w pierwszym wyrzeczeniu liczba *trzy* oznacza to samo, co w drugim wyrzeczeniu: *trzy razy więcej niż jeden*. To zaś pojęcie «trzy razy więcej niż jeden» wynikło, wogóle mówiąc, z porównania ciężaru kupionego chleba z ciężarem funta; mówiąc zaś ściślej — z wymierzenia ciężaru kupionego chleba ciężarem funta.

Przedmiot, który w takim porównaniu służy nam za podstawę porównania, czyli przedmiot, którym mierzymy inny dany przedmiot (jak w powyższym przykładzie: funt, którym mierzymy ciężar kupionego chleba), nazywamy jednostką. Możemy więc powiedzieć:

Jednostka jestto przedmiot, służący do wymierzenia innego przedmiotu, o którym chcemy mieć dokładne pojęcie.

Podobnie, wyrażenie: «przeciąg czasu *dwudziestu czterech* godzin stanowi dobę» jest skróceniem wyrażenia «przeciąg czasu *dwadzieścia cztery* razy większego niż jedna godzina stanowi dobę». W tym przykładzie przeciąg czasu, który rozumiemy przez dobę, porównujemy z godziną, w celu wymierzania go tą jednostką — godziną. Jako właśnie wynik z tego wymierzenia, otrzymujemy liczbę *dwadzieścia cztery*.

Z tych dwu przykładów widzimy, że każda z tych liczb: *trzy* i *dwadzieścia cztery* przedstawia się nam jako wynik z wymierzenia pewnego przedmiotu innym, przyjętym za jednostkę.

Do tegoż samego doprowadziłoby nas rozważanie innych przykładów.

2. Niezawsze jednak możemy pewne dwa przedmioty ze sobą porównywać, a tymmnieź wymierzać jeden z nich drugim. Tak np. ciężaru trzech funtów nie moglibyśmy porównywać z przeciągiem czasu jednéj godziny, a tynsamym mierzyc jednego z nich drugim.

Takie dwa przedmioty, które mogą być ze sobą porównywane, t. j. dwa takie przedmioty, z których jeden może być wyrażony przez drugi, nazywamy *jednorodnymi*. Jednorodnymi więc np. będą nietylko: *pięć godzin* i *godzina*, ale także: *rok* i *miesiąc* (bo: rok możemy wyrazić jako dwanaście miesięcy, a nawzajem: miesiąc jako dwunastą część roku); również np. *dwa lata* i *sześć miesięcy* (bo: dwa lata jest to samo, co cztery razy po sześć miesięcy, albo: sześć miesięcy jest czwartą częścią dwu lat).

Przedmioty, których nie można ze sobą porównywać, czyli takie, których wprost jednych przez drugie wyrazić nie możemy, nazywamy przedmiotami *różnorodnymi*. Różnorodnymi więc będą np. *trzy funty* i *jedna godzina*, *łokieć liniowy* i *łokieć kwadratowy*.

3. Bezpośrednio z tego wynika, że *jednostka jest jednorodna z przedmiotem, który tą jednostką mierzymy*. Gdy zaś liczba, jakieśmy widzieli, jest wynikiem z wymierzenia pewnego przedmiotu innym, przyjętym za jednostkę, więc możemy powiedzieć:

Liczba jestto wynik z wymierzenia pewnego przedmiotu innym, z nim jednorodnym, przyjętym za jednostkę.

Tak np. w wyrażeniu «kupilem trzy funty chleba» liczba trzy jest wynikiem z wymierzenia ciężaru kupionego chleba ciężarem funta, przyjętym za jednostkę.

Podobnie, gdy mamy: trzy funty i dwanaście łutów cukru, to tu ciężar cukru wymierzamy naprzód ciężarem funta, a to, co jest już lżejsze od funta, wymierzamy ciężarem łuta. W tej więc (*jednej*) liczbie mianowanej złożonej (porównaj niżej ustęp 11-ty) używaliśmy przy wymierzaniu *dwu* (jednorodnych, różnych wielkością) jednostek i tynsamym, zgodnie z powyższym określeniem, mamy *dwie* liczby w ścisłym znaczeniu (por. us. 10): trzy i dwanaście. — Gdy zaś powiemy trzy i trzy-ósme funta cukru, to tu (*jedna*) liczba: trzy i trzy-ósme, jest wynikiem z wymierzenia ciężaru tego cukru (*jedną*) jednostką: ciężarem funta (por. § 16, us. 1 b.).

4. Ponieważ jedność jest liczbą, więc i określenie jej powinno wypaść z powyższego określenia liczby — jako przypadek szczególny.

Widzieliśmy, że gdy pewien przedmiot wymierzamy innym, z nim jednorodnym, w tym mierzeniu przyjętym za jednostkę, to wynikiem z tego jest liczba. — Wystawmy sobie, że mając jakieś dwa przedmioty jednorodne, wybraliśmy do wymierzenia ich taki przedmiot (z nimi jednorodny), jako jednostkę, iż okazało się, że jeden z danych dwu przedmiotów jest np. pięć razy większy od jednostki wybranéj, drugi zaś jest zupełnie taki sam, jak ta jednostka (np. gdy, mając dwa ciężary, wybraliśmy, jako jednostkę, ciężar funta i okazało się, że jeden z danych przedmiotów przedstawia ciężar pięciu funtów, drugi zaś ciężar funta). Jeżeli zechcemy o obu danych przedmiotach *jednakowo się wyrazić*, to, gdy o pierwszym powiemy, że

on jest *pięć razy* większy od jednostki,

wypadnie nam o drugim powiedzieć, że

on jest *jeden raz* większy od jednostki.

A gdy w pierwszym przypadku wynikiem z tego wymierzenia jest liczba pięć, to w drugim przypadku wynikiem z wymierzenia będzie liczba jeden, czyli *jedność*. Z tego wypada, że

Jedność jestto wynik z wymierzenia pewnego przedmiotu drugim, takim samym.

5. Gdy powiem: mam cztery funty mąki, to o tym, że ciężar téj mąki jest istotnie *cztery* funty, możemy się w ten sposób przekonać. Oddzielimy taką część mąki, którejby ciężar był taki sam, jak ciężar funta; da nam to liczbę *jedność* (pierwszą). Z pozostałej mąki oddzielimy znowu taką część, którejby ciężar był taki sam, jak ciężar funta; otrzymamy znów stąd liczbę *jedność* (drugą). W taki sam sposób otrzymamy jeszcze *jedność* (trzecią) i znowu *jedność* (czwartą). Więc nasza liczba *cztery* jest to samo, co

jedność i jedność i jedność i jedność.

Tak liczba *jedność*, jak i każda liczba, z *jedności* powstała przez dołączenie do niej jednéj lub wielu *jedności*, nazywa się liczbą całkowitą ¹⁾. Możemy więc powiedzieć, że

Jedność i każde skupienie jedności nazywamy liczbą całkowitą.

Inaczej nieco: ponieważ wynik z wymierzenia ciężaru czterech funtów mąki ciężarem jednego funta jest jednoznaczny z zebraniem czterech wyników z wymierzenia ciężaru jednego funta mąki przyjętym za jednostkę ciężarem funta (z którychto wyników każdy, jak wiemy, jest *jednością*), więc: liczba całkowita jest *jednością*, albo zebraniem, czyli skupieniem *jedności* ²⁾.

¹⁾ Ściśle mówiąc, liczba *jedność* i liczby, z *jedności* powstałe przez dołączenie do niej jednéj lub wielu *jedności*, zostały nazwane całkowitymi, w przeciwstawieniu u ł a m k o m (§ 17, us. 2).

²⁾ W arytmetyce mamy do czynienia z liczbami, z których każda — wogóle mówiąc — jest skupieniem *jedności* i równych części *jedności* (§ 17, us. 2).

6. Szereg liczb całkowitych, po sobie następujących, t. j. szereg liczb jedność, dwa, trzy, cztery, pięć, sześć, siedem i t. d., z których pierwszą jest jedność (jeden), a każda następująca powstaje z poprzedzającej przez dołączenie do niej jedności, nazywa się szeregiem liczb naturalnych ¹⁾.

Mając liczbę jakkolwiek wielką, zawsze możemy do niej dołączyć jedność i w ten sposób otrzymać następną, jeszcze większą liczbę. Więc: *szereg liczb naturalnych jest nieograniczony, czyli: liczb całkowitych jest nieskończenie wiele.*

7. Wypowiadanie lub przedstawianie kolejne (we właściwym porządku) liczb, stanowiących szereg liczb naturalnych, nazywa się liczeniem, a tym samym: liczyć jestto wypowiadać lub przedstawiać kolejne liczby z szeregu liczb naturalnych.

Liczenie często zaczynamy od którejkolwiek liczby z szeregu liczb naturalnych, a przerywamy je na którejś z dalszych liczb tego szeregu.

Gdy mamy liczyć (albo: policzyć) przedmioty dane, to przy tej czynności wystawiamy sobie, że one wszystkie są jednakowe, czyli, że one są równe sobie, tak, iż każdy z przedmiotów, do policzenia danych, mógłby zastąpić inny, którykolwiek z nich. Skutkiem tego: liczyć przedmioty jestto wyrazić (dowiedzieć się), jak często jeden z tych przedmiotów mógłby być pomyslanym, aby przedstawić wszystkie dane przedmioty.

8. Pod nazwą arytmetyki rozumić właściwie powinniśmy naukę o liczbach, gdyż wyraz grecki *arimos* ²⁾ znaczy: liczba. Przedmiotem więc arytmetyki są działania na liczbach (ogół tych działań stanowi rachunek), oraz wszelkie badania własności liczb.

Arytmetyka rozpowszechnienie swe zawdzięcza temu, że wykonywanie działań na liczbach, oraz niektóre najprostsze liczb własności, miały swoje zastosowanie przy rozwiązywaniu różnych zadań z życia praktycznego. Przez dość znaczny przeciąg czasu zaniechano nawet całkiem badania teoretycznego własności liczb, a zajęto się wyłącznie zadaniami praktycznymi, przeważnie ze stosunków handlowych. Należyte objaśnianie rozwiązywania takich zadań stało się przedmiotem nauki młodzieży, nie tylko jako rozwijające ściśle my-

¹⁾ Niektórzy jakąkolwiek liczbę z szeregu liczb naturalnych (t. j. jakąkolwiek liczbę całkowitą) nazywają liczbą naturalną. Tak np. Schröder (*Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, 1873) powiada: *liczba naturalna jest sumą jedności.*

W tymże dziele znajdujemy przytoczony następujący pogląd Hesse'go na liczbę: „...liczba do pewnego stopnia jest przedstawieniem danych do policzenia przedmiotów. Gdy jednak przedmioty ze świata cielesnego są przez rzeźbiarza przedstawiane pod względem ich rozciągłości w przestrzeni i ograniczenia (kształtu), gdy malarz, fotograf, rysownik przedstawia je pod względem ich kolorytu, części oświeconych i części w cieniu, konturu, — to rachmistrz przedstawia jedności tylko pod względem ich ilości (wielości).

Liczba naturalna jest przedstawieniem jedności ze względu na ich mnogość.»

²⁾ ὁ ἀριθμός — złączenie, zebranie, skupienie, a także: liczba, uwaga.

ślenie, ale także jako często bezpośrednio pożyteczne w życiu dalszym. Nauce tej, mającej na celu nauczanie wykonywania działań na liczbach, zapoznanie się z najelementarniejszymi ich własnościami, wraz z nauką o rozwiązywaniu różnych zadań z życia praktycznego, pozostawiono nazwę arytmetyki, pod którą się rozwinęła, — nauce zaś, obejmującej teoretyczne badania własności liczb (nie wchodzącej w zakres ogólnego wykształcenia średniego), nadano nazwę teorii liczb. (Niekiedy teorią liczb nazywają arytmetyką wyższą, wtedy, w przeciwstawieniu, naukę o działaniach na liczbach i rozwiązywaniu zadań praktycznych nazywają arytmetyką elementarną).

Przez arytmetykę rozumiemy naukę o działaniach na liczbach, o niektórych własnościach liczb, pomocnych do zrozumienia lub prostszego wykonywania tych działań, oraz o rozwiązywaniu odpowiednich zadań z życia praktycznego.

Rachunkiem nazywamy albo ogół wszelkich działań arytmetycznych, albotóż razem uważane te działania, które wykonano w celu rozwiązania pewnego zadania.

W miarę rozwoju nauk matematycznych wogóle i doskonalenia się metod nauczania, arytmetyka robi odpowiednie postępy. Rozumieć to należy w ten sposób, iż modyfikuje się z czasem wykład arytmetyki przez zmianę nacisku na pewne oddzielne kwestyje. Zasada rozumowania jest niezmienna, jeżeli tylko należycie prosto została wyłożoną — zmieniają się tylko rozwinięcie szczegółów i ich zastosowania praktyczne.

Uczymy niekiedy arytmetyki ze specjalnym celem: przysposobienia uczniów np. do przemysłu, do handlu. Wtedy w wykładzie uwzględniamy drobniawo odpowiednie zadania, podajemy i objaśniamy używane, a praktyczne w użyciu skrócenia — powstaje w ten sposób arytmetyka przemysłowa, arytmetyka handlowa.

Zauważymy jeszcze, że w kursie arytmetyki, służącym dla ogólnego wykształcenia średniego, różne kwestyje, którymi się w nim zajmujemy, rozwijamy drobniawo, niż tego ich zastosowania wymagają. Robimy to, popierwsze, dlatego, aby dać wyczerpujące przedstawienie rzeczy poruszanych tak, iżby wykład każdej z nich był w odpowiedni sposób zakończony, a powtórę, w celu obudzenia zamiłowania do systematycznego i gruntownego myślenia. Matematyka bowiem, której arytmetyka jest częścią i zarazem podstawą, jest w średnim wykształceniu kursem praktycznym myślenia ścisłego.

9. Oddawna przy nauczaniu arytmetyki ma się na widoku rozwiązywanie różnych zadań. Powstały więc powoli odpowiednie metody postępowania, które wymagają czystości i wyraźności rachunku piśmiennego, tymwięcej, że przez wzgląd na szybkość zwykle się w nim robi pewne skrócenia.

Dlatego rachunki powinny być wykonywane czysto, wyraźnie, jaknajkrócej, jednak tak, aby każdy krok w rachunku mógł być

objaśniony, a cały rachunek tak poprowadzony, żeby z każdego szczegółu łatwo można było zdać sobie sprawę, t. j. łatwo było go sprawdzić.

10. Nienazbyt jednak dbano niekiedy o ścisłość wyrażenia i o ich trafność na wszelkie przypadki. Wszystkie atoli te wyrażenia, którym zarzucić możemy, iż początkowo niedość ogólnie były pomyślane ¹⁾, powszechnie pozostawiono i nierozważnie postępowałyby ten, kto by je dziś chciał zmieniać.

Jedną z takich nieścisłości jest używanie wyrazu liczba na oznaczenie (właściwej) liczby wraz z mianem jednostki. Tak np. *trzy funty, dwadzieścia cztery godziny* nazywano wciąż liczbami. Jednakże z czasem, zachowując zawsze dla tych przedmiotów nazwę liczb, wprowadzono pewne rozróżnienie. Mianowicie: liczbę w ścisłym znaczeniu wraz z mianem jednostki nazwano liczbą mianowaną (konkretną), liczbę zaś właściwą (t. j. taką, przy której niema, lub nie może być wypowiedziane miano jednostki), nazwano, w przeciwstawieniu mianowanej, liczbą niemianowaną, albo liczbą oderwaną (abstrakcyjną). Powiemy więc:

Jeżeli przy liczbie jest wymienione miano jednostki, to tę liczbę wraz z mianem jednostki nazywamy liczbą mianowaną. Tak np. «trzy funty» jestto liczba mianowana.

*Jeżeli zaś przy liczbie nie jest, lub nie może *) być postawione miano jednostki, to tę liczbę nazywać będziemy liczbą oderwaną.* Np. pięć, szesnaście i t. d.

W liczbie więc mianowanej mamy liczbę oderwaną i miano jednostki.

11. Gdy powiem: kupiłem trzy łokcie i osiem cali wstążki, to tu: trzy łokcie i osiem cali, jako oznaczające długość jednego przedmiotu, wstążki, uważamy za *jedną* liczbę mianowaną — tymwięcej, że moglibyśmy całą tę długość wyrazić w calach (i powiedzieć: mamy przedmiot, którego długość jest osiemdziesiąt cali.) W tej jednak liczbie mamy *dwie* jednostki (jednorodne, różne wielkością — dwojaki): łokieć i cal; oddzielne części tej liczby, jedna: trzy łokcie, druga: osiem cali, są także liczbami mianowanymi. Dlatego naszą (jedną) liczbę mianowaną: trzy łokcie i osiem cali nazywamy liczbą mianowaną złożoną, albo wogóle, z uwagi, że mamy w niej dwojaki (a w innych liczbach mogą być trojaki **), czworaki ***) i t. d.) jednostki, — liczbą wieloraką. W przeciwstawieniu temu, liczbę mianowaną taką, jak np. pięć łokci, t. j. wyrażoną przy po-

¹⁾ Porównaj § 16, us. 2; § 19, us. 2; § 20 us. 2.

*) Np. 6 funtów jest cięższe od 2 funtów *trzy* razy.

**) Np. 12 sążni, 2 łokcie i 5 cali.

***) Np. 3 lata, 25 dni, 8 godzin i 40 minut.

mocy jednéj tylko jednostki, nazwiemy liczbą mianowaną prostą. Powiemy więc:

Liczba mianowana, wyrażona przy pomocy jednéj tylko jednostki, nazywa się liczbą mianowaną prostą.

Liczba mianowana, wyrażona przy pomocy dwu, lub więcej (jednorodnych) różnych wielkością jednostek, nazywa się liczbą mianowaną złożoną, albo liczbą wieloraką. To ostatnie nazwanie (liczba wieloraka) jest krótsze i dosładne; dlatego wyłącznie go dalej używać będziemy.

Gdy powiem: kupiłem 5 funtów cukru, 5 łokci, 1 stopę i 6 cali wstążki i 3 kopy orzechów, to mamy tu trzy liczby mianowane, z których dwie: 5 funtów i 3 kopy, są liczbami mianowanymi prostymi, pozostała zaś: 5 łokci, 1 stopa i 6 cali jest liczbą wieloraką.

Zauważyć tu jeszcze można, że gdy mówię: kupiłem 2 łokcie płótna i 16 cali wstążki, to mamy tu dwie liczby mianowane: jednę, 2 łokcie, drugą, 16 cali, odnoszące się do różnogatunkowych przedmiotów (płótno i wstążka). Jeżeli zaś powiem: kupiłem 6 jabłek i 8 gruszek, to mamy również dwie liczby mianowane — a byłyby jedna, gdybyśmy mieli powiedziane ogólnie: 14 sztuk owoców.

12. Zwykle, gdy mówimy ogólnie: liczby całkowite, to rozumiemy przez to liczby całkowite (us. 5) tak oderwane, jak i mianowane proste. Gdy zaś mamy na myśli liczby wielorokie całkowite, wtedy mówimy: liczby wielorokie całkowite, albo też wprost: liczby wielorokie ¹⁾.

§ 2. LICZENIE SŁOWNE.

1. Wyrabianie się oddzielnych nazw dla liczb złożonych z dwu lub więcej jedności odnieść należy do pierwszych chwil życia grodnadnego ludzi.

Nazwy te nadto wyrabiać się musiały bardzo powoli. Dowodu na to dostarcza nam zamieszkujące na krańcu Afryki południowej plemię myśliwskie Saan, znane więcej pod nazwą Buszmanów, zostające dotąd na najniższym stopniu rozwoju, które obecnie ma o liczbach takie tylko pojęcia: jeden, dwa, trzy i wiele, a dla ich oddania posiada oddzielne wyrazy ²⁾. — Wielu murzynów ³⁾ umie liczyć tylko do pięciu.

Najprościej — zdawałoby się — można liczby od siebie różnić, nadając im wszystkim coraz inne nazwy. Z powodu jednak,

¹⁾ Np. «rachunki w liczbach całkowitych», «działania na liczbach wielorakich» (*Arytmetyka dla szkół narodowych*, trzeci raz wydana r. 1785, str. 1 i 79).

²⁾ Według listownego zawiadomienia (1883, marzec) prof. uniwersyteckiego Antoniego Rehmanna, który dwa lata przebył w Afryce południowej.

³⁾ Rozumiemy tu oddzielne jednostki, a nie całe plemiona.

że liczb jest nieskończenie wiele (§ 1, us. 6), byłyby to nader niepraktyczne — nawet wraze, gdybyśmy się ograniczyli do tych tylko liczb, z którymi najczęściej mamy do czynienia. Trzebaby bowiem nietylko bardzo wielu nazw się wyuczać, ale nadto ciągle mieć na myśli wielkość liczby, oznaczonej przez każdą z tak wielu nazw.

2. Do usunięcia tych trudności w wyróżnianiu jednych liczb od drugich znakomicie przyczyniło się to, że nieodrazu miano do czynienia z wielu liczbami. Długo bowiem ludzie pozostawali w warunkach tak prostych, że zupełnie im wystarczało niewiele liczb początkowych, a do ich przedstawienia wygodnie posługiwać się mogli palcami, jednocześnie wyrabiając sobie powoli oddzielne dla tych liczb nazwy.

Że istotnie palce u rąk były używane do przedstawienia liczby — o tym przekonywają nas różne okoliczności. Małe dzieci dla wyrażenia liczby, a nawet dla rachunków swoich posługują się często palcami. Nie znając języka osób, z którymi chcemy się porozumieć, wraze odpowiedniej potrzeby pokazujemy na przedmiot, a następnie przy pomocy palców dajemy do zrozumienia, ile takich przedmiotów chcemy wziąć, lub ile ich dać mamy. — U niektórych plemion polinezyjskich liczba pięć bywa oznaczona wyrazem ¹⁾, który znaczy ręka. Plemię indyjskie Kora (w Ameryce) dla liczby dziesięć używa wyrażenia, oznaczającego podanie rąk. Plemiona Zulu (w Afryce południowej) rachują wciąż na palcach, okazując dziesiątek uderzeniem o siebie obu rąk z wyprostowanymi palcami, mniejsze zaś liczby wyprostowaniem odpowiedniej liczby palców, a dla oddania liczby pięć mówią: cała ręka, jako osiem mówią: wielki (palec), albo: zostaw (zegnij) dwa palce, i tak samo dziewięć: zostaw jeden palec ²⁾. — Nietylko palce u rąk, ale i palce u nóg służyły wielu ludom pierwotnym do przedstawienia liczby. Dlatego np. na wyspie Mare w Australii, a także u wielu plemion indyjskich w Ameryce i niektórych murzyńskich w Afryce, jako dwadzieścia mówi się: człowiek (t. j. wszystkie palce człowieka), a nawet zaznaczono, że jedno z plemion indyjskich pojęcia 11, 12 i t. d. tak wyraża: noga jeden, noga dwa i t. d. (t. j. jeden, dwa i t. d. palce nogi).

Początkowo wystarczały ludziom dla przedstawiania liczb palce obu rąk, a dla tych liczb powoli wyrabiały się oddzielne nazwy, które

¹⁾ Zob. artykuł, który ogłosił (*Ateneum*, r. 1882, t. III) Jan Kuba ry: *Wyspy Nukuoro; z podróży po oceanie Wielkim* (lima, albo rima, znaczy: ręka, pięć).

²⁾ Wyraźnych śladów odbywania rachunków na palcach dostarczają także zabytki egipskie, greckie i rzymskie.

Rachunek na palcach u różnych ludów odbywa się zawsze w kierunku od małego ręki lewej do małego prawej.

Oznaczanie liczb do 10 przez wyprostowanie jednego tylko palca rąk spotyka się na niektórych zabytkach egipskich (np. na wielu egzemplarzach łokci).

(Pisma Greków bizantyjskich i Arabów o rachunku na palcach, prawdopodobnie dość rozpowszechnionym, uczyły za pomocą palców obu rąk przedstawiać wszystkie liczby od 1 do 9999).

z czasem upraszczały się i zmieniały znacznie pod wpływem różnych, nieznanych nam okoliczności. W ten tylko sposób objaśnić sobie możemy, dlaczego w językach wszystkich ludów, wyżej rozwiniętych, istnieją nazwy osobne dla przedstawienia pierwszych dziesięciu ¹⁾ liczb — nazwy niezłożone, podobnie jak nasze nazwy *jeden, dwa, trzy, cztery, pięć, sześć, siedem, osiem, dziewięć, dziesięć*, albo *dziesiątek* ²⁾, gdy tymczasem nazwy nieco większych liczb są już złożone.

3. Gdy jednak z biegiem czasu zachodziła potrzeba częstszego przedstawiania liczb nieco większych, to korzystano z tego, że przez wyprostowanie palców jednej, lub obu rąk, albo przez gięst odpowiedni, oznaczający wszystkie palce człowieka, dawało się za każdym takim ruchem odrazu pojęcie o pięciu, albo dziesięciu, albo też o dwudziestu, a tylko części liczby mniejsze przedstawiano oddzielnymi palcami.

Widocznie, takie przedstawianie liczb większych najprędzej, najraźniej iść musiało wtedy, kiedy się używało naraz obu rąk, gdyż rozmaite ucywilizowane narody liczą zawsze przy pomocy liczby dziesięć.

Wystawmy sobie np., że jeden człowiek chce dać drugiemu pojęcie o liczbie trzydzieści siedem, posługując się palcami rąk. Będzie więc pierwszy tak postępował: trzy razy zrzędu ukaże wyprostowane wszystkie palce obu rąk, a następnie, nieco się zatrzymawszy, ukaże palców siedem. Ów zaś drugi człowiek, patrzący, zaznacza sobie naprzód, ile razy widział przedstawioną liczbę dziesięć, t. j. ile było dziesiątków, a następnie osobno zauważy liczbę siedem. W ten sposób, tak chcący dać pojęcie o liczbie trzydzieści siedem, jak i dowiadujący się o tej liczbie, wydzielają z niej naprzód wszystkie całe dziesiątki, a osobno zaznaczają pozostałą część liczby, mniejszą od dziesięciu.

4. Zupełnie więc naturalnie, przy wymawianiu liczby większej od dziesięciu, wyrobiło się to, iż oddzielamy z niej całe dziesiątki, a osobno zaznaczamy pozostałą jej część (t. j. część mniejszą od dziesięciu).

¹⁾ Ze początkowo powstać mogły oddzielne nazwy tylko dla pierwszych pięciu liczb, a liczby od 5 do 9 wyrażały się przy ich pomocy, tego ślady mamy w mowie *niektórych* plemion murzyńskich Afryki, *niektórych* plemion indyjskich Ameryki, *wielu* plemion Australii, wyrażających 6 przez: pięć i jeden, 7 przez: pięć i dwa, i podobnie: 8: pięć i trzy, 9: pięć i cztery — gdy społeczeństwo inne z tych plemion mają już dla tych liczb oddzielne nazwy. Zauważyć jednak należy, że we wzmiankowanych sposobach liczenia na oznaczenie liczby 10 zjawia się już nazwa niezłożona.

Odtworzenie tego znajdujemy w pierwotnym liczeniu piśmiennym Greków i w liczeniu piśmiennym Rzymian (por. § 3, us. 3, 6).

²⁾ Por. str. 10, odsyłacz ⁵⁾.

Jeżeli w liczbie, prócz dziesięciu, jest jeszcze jedność, to mówimy ¹⁾: jeden na dziesięć ²⁾, czyli przez skrócenie (i łącząc te trzy wyrazy w jeden): jedenaście; podobnie, zamiast: dwa na dziesięć, mówimy krócej: dwanaście, i t. d. dopóki w liczbie, prócz dziesięciu, jest niewięcej niż dziewięć jedności. W ten więc sposób powstają nazwy

jedenaście, dwanaście, trzynaście, czternaście, i t. d. do: dziewiętnaście ³⁾.

Jeżeli w liczbie jest więcej niż jeden dziesiątek, to zamiast mówić: dziesięć i dziesięć ⁴⁾ i t. d., obliczamy, ile mamy tych (całych) dziesiątków i, posiłkując się liczbami dobrze już znanymi: dwa, trzy i t. d., łączymy ich nazwy z nazwą dziesięć, skutkiem częstszego użycia, w jeden wyraz. Mamy więc:

dwadzieścia ⁵⁾, *trzydzieści* ⁶⁾, *czterdzieści, pięćdziesiąt* ⁷⁾, ..., *dziewięćdziesiąt*.

Jeżeli więc mamy np. liczbę, w której, prócz dwu dziesiątków, jest pięć jedności, to powiemy: dwadzieścia i pięć ⁸⁾, albo krócej:

¹⁾ Podobnie we wszystkich językach słowiańskich; w językach niemieckim i francuskim nazwy tych dwu części zestawiają się bezpośrednio: dreizehn, ... neunzehn; dix-sept, dix-huit, dix-neuf. Nazwy liczb 11 i 12 w języku niemieckim, 11—16 we francuskim, jako mniejszych, a więc częściej używanych, podległy wcześniej znacznemu przekształceniu.

²⁾ Dziesięć jest tu biernikiem. Porównaj odsyłacz ⁶⁾.

³⁾ W Biblii (szarospatackiej) królowej Zofii (żony Jagiełły): jeden na ście, jeden naście, dwanaście, dwanaście, trzynaście, czternaście, pięć naście, pięćnaście, sześć na ście, sześć naście, siedm naście, siedmnaście, osmnaście, dziewięćnaście; w przekładzie (r. 1449) Świętosława s Wocieszyna statutu wiślickiego: cztyrnaście, cztyrnaście, piętnadzieścia, piętnadzieścia, pięćnaście, pięćnaście, pięćnaście, pięćnaście, pięćnaście, osmnaście; w przekładzie (r. 1450) Macieja z Rożana statutów mazowieckich: pięćnaście, pięćnaście, pięćnaście, pięćnaście; w tłumaczeniu (r. 1503) kilku statutów: siedmnaście, osmnaście, osmnaście.

⁴⁾ Dziesięć a dziesięć — Zwód statutów przez Wawrzyńca z Prażmowa (r. 1531).

⁵⁾ Dzieścia (niekiedy: dziesta) jest prawidłowo utworzony mian. liczby podwójnej od dziesiąt (dziesięć), tak jak od grosz, skojec — (dwa) grosza, skojca. Mówiono także: dwu dziesiątku (Bibl.), od: dwa dziesiątka (i podobnie: trzy dziesiątki, Bibl., Świętos.).

Przez analogiją do: dwadzieścia powstały powyższe: piętnadzieścia, piętnadzieścia, ...

Formy: dzieście, ście, ćcie, cie uważa się powszechnie za bier. l. poj. Występują one tylko w połączeniach: jedenaście, dwanaście, pięćnaście, pięćnaście i t. d. W innych razach bier. ma formę mian., t. j. dziesięć.

⁶⁾ Dzieści jest mian. l. mn. Występuje niekiedy w formie: dzieście (np. w rozprawie J. P r z y b o r o w s k i e g o *Vetustissima adjectivorum...*, w zabytku z r. 1426: dwadzieście). Stąd prowincjonalizmy litewskie: dwadzieście, trzydzieście, czterdzieście.

⁷⁾ Dziesiąt jest dopeł. l. mn. (Tu liczebniki: dwa, trzy, cztery, jako stojące przed wyrazami, do których się odnoszą, są przymiotnikami, a pięć, ... dziewięć są rzeczownikami; podobnie więc, jak: trzy cnoty, a pięć cnót, mamy: trzy *dziesięci*, a pięć *dziesiąt*.)

⁸⁾ W Biblii kr. Zofii: dwadzieścia i osm, XXX i sześć, do dwudziestu a do trzech, i podobnie: sto a dwadzieścia a siedm, sto dwadzieścia i trzy, sześć set a dziewięć dziesiąt, z tysiąca a z siedmi dziesiąt a z pięci, tysiąc tysięcy a sto tysięcy, a obok tego: jeno a trzydzieści, pięć a sto, dwa dziesiątka a sto, sześć a trzydzieści a sto, CCC a dwa a LXX, sześćdziesiąt trzysta, dwa tysiąca a dwa a LXXX a C, i jeszcze: siedm a trzydzieści ku stu, oraz: przez jenego trzydzieści, przez pięci pięćdziesiąt, czterdzieści bez jednego.

Przytoczyłem w tym ustępie tylko materyjał, potrzebny dla objaśnienia powstania nazw dzisiejszych, według pracy źródłowej dra Antoniego K a l i n y: *O liczebnikach w języku staropolskim (Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń wydz. filol. akad. um. w Krakowie, tom VI)*, w której czytelnik znaleźć może wiele innych szczegółów ciekawych.

dwadzieścia pięć. Liczby więc pośrednie między dwadzieścia a trzydzieści wymówimy:

dwadzieścia jeden, dwadzieścia dwa, i t. d., do: dwadzieścia dziewięć.
Podobnie dalej:

trzydzieści jeden, trzydzieści dwa, trzydzieści trzy i t. d.

I t. d.

Każda z tych nazw nie jest częstego użycia. Dlatego dwu wyrazów, je tworzących, nie łączymy w jeden.

5. Tego, czego się teraz dość prędko uczymy w wieku dziecięcym, ludzkość dorabiać się musiała bardzo powoli. — Od chwili gdy zaczęto liczyć całymi dziesiątkami, do czasu, w którym uczuć się dała potrzeba krótszego wyrażania liczb większych od liczby: dziesięć dziesiątków, grupowanie jedności w dziesiątki stało się już postępowaniem dobrze znanym, rozpowszechnionym, uważanym za dogodny. I widocznie, przez analogiją do tak dogodnego grupowania jedności w dziesiątki, wytworzono podobne postępowanie z owymi liczbami większymi, t. j. zaczęto skupiać dziesiątki po dziesięć w oddzielne części, osobliwie, gdy już dla oznaczenia dziesięciu dziesiątków utworzono nazwę osobną: *sto* lub *setka*.

I w takiż sam sposób, jak radzono sobie przy wypowiedaniu liczby większej od dziesięciu, postępowano z daną liczbą większą od sta, t. j., przy wypowiedaniu jój, naprzód były oddzielane całe sta, później z pozostałej części (mniejszej od sta) całe dziesiątki, a nakoniec wypowiedano pozostałą część liczby, mniejszą od dziesięciu. Oddzielając w ten sposób całe setki, zaznaczano, że było

dwie ście ¹⁾, trzy sta, cztery sta, pięć set ²⁾ i t. d. dziewięć set, a następnie, skutkiem częstego użycia, mówiono, jak teraz, łącząc te wyrazy ³⁾,

dwieście, trzysta, czterysta, pięćset, sześćset, siedemset, osiemset, dziewięćset.

6. Podobnie wyrażenie: dziesięć set zostało z czasem ⁴⁾ zastąpione przez nazwę krótszą: *tysiąc*. Ponieważ jednak tak tysiąc, jak i większe liczby są rzadziej używane, więc wyrazów, użytych do wypowiedzenia liczb: dwa tysiące, trzy tysiące i t. d. razem nie piszemy.

¹⁾ Jestto liczba podwójna (podobnie jak np. w przysłowiach: mądrej głowie dość dwie słowie; cztery gęsi, dwie niewieście: gotowy jarmark w mieście). — W Biblii kr. Zofii: dwie ście, dwie secie (tamże: dwie lecie).

²⁾ Mówimy: *trzysta, czterysta*, ale: *pięćset, sześćset* i t. d. (por. str. 10, odsyłacz ¹⁾).

³⁾ I przedłużając przedostatnią zgłoskę tych wyrazów, ze złączenia powstałych.

⁴⁾ W różnych językach indo-europejskich nazwy liczb 2—9, 10, 100 są pokrewne sobie, gdy tymczasem nazwy liczby 1000, jako wiele w tych językach rozmaite, powstawać już zapewne musiały po rozdzieleniu się szczepów, w każdym z nich oddzielnie.

Wyrażenia: *dziesięć tysięcy* ¹⁾, *sto tysięcy* ²⁾, jako rzadko używane, nie zostały ³⁾ zastąpione nazwami osobnymi.

7. Długo mówiono: *tysiąc tysięcy*. Było to jednak równie niedogodnym, jakby np. *dziesięćdziesiąt*. Z czasem téż *tysiąc tysięcy* zostało zastąpione przez: *milijon* ⁴⁾.

Dziesięć milionów, *sto milionów* również nie mają nazw oddzielnych ⁵⁾.

Tysiąc milionów, gdy jest mowa o pieniądzech, zastępuje się odniedawna przez *milijard*.

8. Liczby jeszcze większe bardzo rzadko wypada wypowiadać (por. § 3, us. 18).

Obecnie znajdują się u nas w użyciu dwa sposoby wypowiedzania liczb bardzo wielkich. Jedni, idąc za przykładem Francuzów, *tysiąc milionów* nazywają *bilijonem*, *tysiąc bilijonów* *trylijonem*, *tysiąc trylijonów* *kwatrylijonem* ⁶⁾ i t. d., gdy drudzy, zgodnie z Niemcami, *bilijonem* nazywają *milion milionów*, *bilijonów* *trylijonem*, *bilijon trylijonów* *kwatrylijonem* i t. d. ⁷⁾.

¹⁾ Starożytni Grecy dość często używali liczby 10 000, mając osobną dla niej nazwę (*μύρια, α, -α*).

²⁾ W życiu potocznym objawia się u nas dążność do krótszego wyrażania setek tysięcy. Tak np., zamiast mówić: *czteryście tysięcy*, mówią niekiedy: *czterykroć*, jako skrócenie wyrażenia *czterykroć sto tysięcy*, i podobnie mówią np. *czterykroć sześćdziesiąt tysięcy*, przez co nie należy rozumieć: 4 razy 60 000.

³⁾ W sanskrycie istnieją oddzielne nazwy dla 1, 10, 100, 1000, 10 000, 100 000, 1000 000, 10 000 000, 100 000 000, oraz dla liczb przedstawionych 1-ścią z 10-ma, 12-ma i t. d. (z parzystą liczbą zer), aż do 1 z 20-u zerami; nazwy zaś liczb przedstawionych przez 1 z 9-ma, 11-ma i t. d., aż do 1 z 21-m zerem tworzą się z poprzednich przez dodanie wyrazu: *wielki*.

⁴⁾ Wyraz: *milijon* (prawdopodobnie wyraz włoski, zgrubiały od *mille*, jako: *wielki tysiąc*, mający oznaczać początkowo we Włoszech 10 beczulek złota) w tym znaczeniu spotyka się po raz pierwszy w wydanej we Włoszech arytymetyce *Pacioli* (r. 1494), bardzo rozpowszechnionej. — W arytymetykach polskich wyraz: *milijon* pojawia się w XVII stuleciu, chociaż: *tysiąc tysięcy*, a nawet *tysiąc tysięcy tysięcy* i t. d. zachowują niektóre nasze arytymetyki aż do końca trzeciej ćwierci XVIII stulecia.

⁵⁾ Mówią często: *jedności tysięcy*, *jedności milionów*, a dla dopełnienia: *jedności proste* (1). Ten sposób mówienia jest sprzeczny z istotnym pojęciem (*jedynie istniejących*) *jedności* w danej liczbie. Zamiast więc mówić: w liczbie jest tyle *jedności tysięcy*, tyle *jedności milionów* i przez to wprowadzać pojęcia nie odpowiadające naturze tych części liczby, należy wyrażać się wprost: w liczbie jest tyle *tysięcy*, tyle *milionów*, podobnie jak się mówi: tyle *dziesiątków tysięcy*, tyle *setek*, tyle *dziesiątków*. Por. § 3, us. 20.

⁶⁾ Wyrazy *bilijon*, *trylijon* i t. d. powstały w początku XVII stulecia, lecz rozpowszechniły się dopiero w XVIII.

⁷⁾ Ten ostatni sposób liczenia był wprowadzony do szkół naszych przez wydaną i do użytku zaleconą (r. 1778) przez Komisją Edukacyjną *Arytm. dla sz. nar.* Mimo to, pod wpływem tak studyjów, odbywanych we Francji, jak i książek późniejszych, stosowanie się do sposobu francuskiego jest dziś u nas więcej rozpowszechnione.

Moim zdaniem jest rzeczą małej wagi wybór stanowczy między tymi dwoma sposobami pojmowania wyrazów *bilijon* i t. d. W nauce szkolnej dopiero przy powtarzaniu kursu arytymetyki właściwą jest o tym wzmianka, a wtedy można przytoczyć oba sposoby pojmowania. W klasach zaś niższych nie należy przygnębiać wyobraźni uczącego się rozważaniem tak wielkich liczb.

9. W takito sposób uniknęliśmy potrzeby tworzenia osobnej nazwy dla każdój liczby (por. us. 1). Zapomocą niewielu wyrazów, mianowicie zapomocą wyrazów:

jeden, dwa, trzy, cztery, pięć, sześć, siedem, osiem,
dziesięć, dziesięć, sto, tysiąc, milion, ...,

przez odpowiednie ich łączenie jesteśmy w stanie wypowiedzieć wszystkie liczby.

Na tym właśnie polega nasze liczenie słowne.

10. Ponieważ, jak widzieliśmy, ten sposób liczenia rozwinął się z tego, że każde dziesięć jedności skupiamy w oddzielny dziesiątek i to postępowanie dalej ściśle stosujemy, skupiając dziesięć dziesiątków w setkę i t. d., więc nazywamy go sposobem, albo systematem dziesiątkowym liczenia.

11. Podobnie, jak systemat dziesiątkowy powstał z liczby palców obu rąk, taksamo z liczby palców jednej ręki, lub z liczby wszystkich palców człowieka (por. us. 2, 3) mogły powstać systematy: piątkowy i dwudziestkowy.

Systemat piątkowy, dokładnie wykształcony, t. j. taki, w którymby (przynajmniej) liczba 5 razy 5, t. j. 25, miała osobną nazwę (a tymwięcej liczby: 5 razy 25, t. j. 125, i t. d.), nigdzie nie powstał. Przeszkodziła temu ta okoliczność, że już dla liczby 2 razy 5, t. j. dla 10, zjawiała się nazwa osobna, prosta ¹⁾, tak, iż w liczeniu dalszym liczba 10 (albo niekiedy 20) bierze przewagę.

Systemat dwudziestkowy, należycie wyrobiony posiadają: Azteki (w Meksyku), którzy mają oddzielne wyrazy dla liczb 20 («policzone»), 20.20, t. j. 400 («włosy»), 20.20.20, t. j. 8000 («worek»), i plemię indyjskie Maya (w Yukatanie), mające osobne wyrazy dla liczb 20, 400, 8000, 160 000.—Walijczycy, szczerp celtycki, mówią: 20 do 10 (t. j. 30), dwa 20 (t. j. 40), 10 i dwa 20 (t. j. 50) i t. d. do 90 włącznie. W podobny sposób mówią w niższej Bretanii, zamieszkałej także przez szczerp celtycki. Wszystkie takie sposoby wyrażania liczb znajdują się również w mowie Basków. Francuskie: soixante-dix, soixante-onze i t. d., quatre-vingts, quatre-vingt-dix i t. d. quatre-vingt-dix-neuf²⁾ uważa się powszechnie jako ślad wpływu celtyckiego sposobu liczenia. W mowie Rezyjan, plemienia słowiańskiego, zamieszkałego w północnych Włoszech (w prowincyi Udine): trikradwujsti (trzykroć 20), trikradwujsti nu desat (50, obok: paterdu, pięć rządów), sztirkradwujsti (80), sztirkradwujsti nu desat (90), nu petnijst (95)³⁾. Albańczycy (półwysep Bałkański) mówią (tylko): *δου-ζέτ* (dwa 20). Duń-

¹⁾ Por. str. 9, odsyłacz 1).

²⁾ A także niekiedy: six-vingts (120), quinze-vingts (300), rzadziej: sept-vingts (140), huit-vingts (160)..— W niektórych jednak okolicach Francuzi mówią: septante (70), octante (80) i nonante (90).

³⁾ Por. Jana Baudouina de Courtenay: *O Słowianach we Włoszech* (Ognisko, 1882).

czycy: tresindstve (trzykroć 20), firesindstve (80), a nadto: półtrzeciakroć dwadzieścia (halvtredsinstve, 50), półczwartakroć dwadzieścia (70) i półpięta- kroć dwadzieścia (90). Liczba 100 posiada jednak zawsze nazwę niezłożoną. — Podobne uwzględnienie w liczeniu liczby 20 ma miejsce u wielu plemion indyj- skich w Ameryce, u niektórych murzyńskich w Afryce, a także u ludów Kau- kazu, oraz plemion, zamieszkujących niektóre wyspy Australii.

12. W układach miar, które różne ludy sobie wytworzyły, przeważną rolę gra liczba 12 i jej dzielniki ¹⁾. Ta sama przyczyna, której następstwem są takie podziały miar, wpływać musiała także na liczenie ²⁾.

Tak np. w niższej Bretanii mówią: tri-ouec'h (wym. triuekh), trzy sześć (18, gdy Walijczycy tę liczbę wyrażają: deu-naw, dwa dziewięć), i podobnie triouec'h ugent (18.20).

Buramani, inaczej Bolanami nazywani (na zachodnich brzegach Afryki, między Sierra Leone i Senegambiją), mówią podobnie: sześć dwa (razy), sześć cztery (razy), gdy chcą wyrazić liczby 12 i 24, oraz: sześć i jeden (7).

Fryzowie dawni mówili: dwanaścieziesiąt (tolftich, 120). — Podobny system mieszany dziesiątkowo-dwunastkowy posiadali częściowo Skandynawi i Anglosasi.

Na téjże drodze prawdopodobnie powstał systemat sześćdziesiątkowy w rachunkach astronomicznych Babilończyków, który dotąd przetrwał w po- działach okręgu koła i w podziałach godziny.

— Nowo-Zelandczycy posiadają zupełnie wykształcony systemat jed- nastkowy: mają osobne nazwy dla liczb: 11, 121, 1331, mówią: 11 z 1-ym, 11 z 2-ma i t. d., 2 razy 11, 3 razy 11 i t. d. ³⁾.

§ 3. LICZENIE PIŚMIENNE.

1. Gdy stosunki ludzkie tak się rozwinęły, że należało zostawiać ślad tego, co się mówiło, lub też przesyłać myśl swoją osobom od- dalonym, czyli, gdy upowszechniało się to, co dziś przez pismo roz- umiemy, wynikła potrzeba przedstawiania liczb, czyli odtworzenia li- czenia słownego przez *liczenie piśmienne*.

¹⁾ Podziały dziesiętne miar (np. nasze pręciki i ławki) wytworzyły się pod wpływem rachunków piśmiennych.

²⁾ Stąd: tuzin, kopa . . .

³⁾ Fakty przytoczone w us. 2, 6, 7, 11, 12 czerpałem z prac następujących: Pott, *Die Sprachverschiedenheit in Europa an den Zahlwörtern nachgewiesen, sowie die quindre und vigesimale Zählmethode* (1868), H a n k e l, *Zur Geschichte der Mathematik* (1874) i C a n - t o r, *Vorlesungen über Gesch. der Math.* (I, 1880). Ostatni dwaj autorowie często opierają się na przytoczonej pracy P o t t'a, jak również na poprzednim jego dziele: *Die qu. u. vig. Zählmethode bei Völkern aller Welttheile* (1847) (tego dostać nie mogłem).

2. To przedstawianie liczb służyło do utrwalenia tego, co już było rozpowszechnione w liczeniu słownym, a więc: w zgodzie z nim być musiało.

Najprościej było obmyślić inny znak na oznaczenie jednościi inny dla dziesięciu, jeszcze inny dla sta i t. d. Gdy więc chciano przedstawiać liczbę np. sześćdziesiąt siedem, to stawiano ¹⁾: sześć jednakowych znaków, z których każdy oznaczał dziesięć, i siedem jednakowych znaków, z których każdy oznaczał jedność, tak, iż dla przedstawienia tej liczby sześćdziesiąt siedem potrzebowano trzynastu znaków. W podobny sposób liczbę np. dwadzieścia trzy przedstawiano pięciu znakami. Według tej zasady przedstawiając liczbę dziewięćset dziewięćdziesiąt dziewięć, potrzeboby dwudziestu siedmiu znaków ²⁾.

¹⁾ Przy piśmiennym przedstawianiu liczby właściwymi znakami, zawsze, zgodnie z przyjętym kierunkiem pisania, części większe liczby stają przed mniejszymi. Jedyny wyjątek od tej zasady powszechnej znaleziono w rękopisach syryjskich z VI i VII wieku po Chrystusie przy przedstawianiu liczby 3 przez znak liczby 1 i (skrócony) znak liczby 2, t. j. znak liczby 2 stoi po znaku liczby 1, co się także powtarza przy pisaniu liczb 8, 13 i t. d. w ich częściach, przedstawiających tę liczbę 3.

(Przytaczane w tym § fakty czerpię z wzmiankowanych dzieł Hankel'a i Cantor'a, jak również z pracy tego ostatniego: *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker*, 1863).

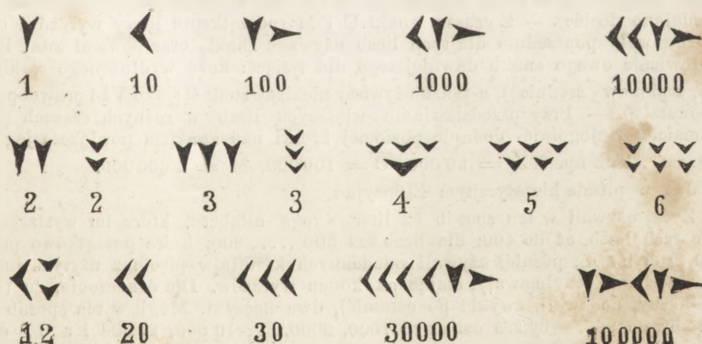
²⁾ To się ściśle stosuje do przedstawiania liczb w piśmie hieroglificznym Egipcyan, w którym używano znaków



1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000

rozmaicie obecnie objaśnianych przez uczonych (tak np. w znaku liczby 1000 jedni widzą kwiat lotosu, inni lampę, i t. d.)

Ta sama zasada stawiania znaków, odpowiadających częściom liczby, obok siebie w jednym, dwu, lub trzech wierszach jest przeprowadzona w piśmie klinowym Babilończyków (czytają je od lewej ku prawej)



ale tylko do liczby 100. Po stu bowiem, liczba mniejsza, stojąca z lewej strony większej, wskazuje, ile razy tę większą należy sobie wystawić powtórzoną. W ten sposób powstały znak liczby 1000 dopuszcza znów przed sobą znak liczby mniejszej, mnożącej tamtę, jak to widzimy na rysunku na liczbach 10000 (nie należy więc go uważać za 20.100), 30000, 100000. Z większych liczb pewnym jest, iż Babilończycy pisali liczby 36000 i 120000 tak: 30.1000 i 6.1000, 100.1000 i 20.1000.— Fenicyjanie (o ile wszystkie znane zabytki wykazują) mieli podobny sposób pisania liczb.

3. U Rzymian, skutkiem tego, że oni posiadali jeszcze osobne znaki, przedstawiające liczby: pięć, pięćdziesiąt, pięćset, pisanie liczb było znacznie krótsze, chociaż opierało się na tej samej zasadzie ¹⁾. Używali oni znaków następujących:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Więc np. liczbę: sześćdziesiąt siedem przedstawiali zapomocą takich znaków: pięćdziesiąt, dziesięć, pięć, jeden, jeden (pisząc zawsze większe części przed mniejszymi): LXVII, a zatym pięciu znakami, a nie trzynastu, jak powyżej (us. 2). Liczbę jednak dwadzieścia trzy przedstawiali XXIII, a więc także (us. 2) za pomocą pięciu znaków.

4. Wcześniej jednak powstało na Wschodzie przedstawianie liczb oparte na tym, że każda liczba: jeden, dwa, ..., dziewięć, dziesięć, dwadzieścia, ..., dziewięćdziesiąt, sto, dwieście, ..., dziewięćset; tysiąc, dwa tysiące i t. d. otrzymała osobny znak ²⁾, lub literę alfabetu, do których dodawano odpowiednie znaczniki ³⁾, wskazujące, że te litery są przed-

¹⁾ Podobnie Grecy początkowo (od VI wieku przed Chr., w ciągu trzech stuleci przezwaznie) przedstawiali liczby. Jednością był znak I (kręska), liczbę 5 przedstawiali literą Π, częściciej w kształcie Π (pierwszą literą wyrazu πέντε), 10 literą Δ (pierwszą wyrazu δέκα), sto literą Η (litera ta była początkowo znakiem przydechu, który jest wyraźny na początku wyrazu εκατόν), 1000 literą Χ (χίλια), 10000 literą Μ (μύρια), nadto dla liczb 50, 500, 5000, 50000 mieli znaki powstałe z połączenia znaku liczby 5 z odpowiednimi znakami liczb 10, 100, 1000, 10000 w taki sposób, jak np. I^π (500).

Znaki Rzymian V, X, L, oraz znaki w najdawniejszych czasach przez nich używane dla liczb 100 i 1000, powstały z odpowiednich znaków dla liczb u Etrusków, które znów wytworzyły się według wszelkiego prawdopodobieństwa z odpowiednich liter, istniejących w alfabecie etruskim (jak się jednak u Etrusków pisały odpowiednie liczebniki, a tym samym: czy te znaki liczebne są w związku z ich pierwszymi literami — do tąd nie zdołano docięć). — Z czasem znaki C i M (początkowe litery wyrazów: centum, mille) wyrugowały poprzednio dla tych liczb używane znaki, oraz powstał znak D (może przez spółowienie owego znaku dawniejszego dla tysiąca: koła wydłużonego w kierunku poziomym, z pionową średnicą), a także używany niekiedy znak Q (jako VI i prawdopodobnie z tego powstały). — Przy przedstawianiu większych liczb w różnych czasach postępowano rozmaicie. Najogólniej dodanie poziomej kręski nad znakiem powiększa jego wartość 1000 razy. Tak np. $\overline{XX} = 20\,000$, $\overline{C} = 100\,000$, $\overline{M} = 1\,000\,000$.

²⁾ Jak w piśmie hieratycznym Egipcyan.

³⁾ Żydzi używali w ten sposób 22 liter swego alfabetu, które im wystarczyły na oznaczenie tych liczb, aż do 400; dla liczb zaś 500, ..., 900, które początkowo przedstawiali: 400, 100 i t. d., później używali odmiennych kształtów pięciu z użytych już liter, kształtów, które one przyjmowały, stając na końcu wyrazów. Dla oznaczenia, że te litery oznaczają liczby, dodawali, zwykle po ostatniej, dwa haczyki. Mogli w ten sposób przedstawiać liczby do 999. Aby zaś oznaczyć 1000, 2000, ..., 10 000, 20 000 i t. d., używali znów liter tych samych i w tym samym porządku, stawiając nad nimi dwie kropki, których nie stawiano wraze, jeżeli mniejszą część oznaczająca litera, stając przed odpowiadającą większej, już tym samym wskazywała, że ona oznacza tysiące. Liczbę 15 pisali 9, 6 tylko dlatego, że litery, oznaczające 10, 5 były początkowymi wyrazu Jehowa — czego starannie unikali.

Wzmiankowane powyżej początkowe oznaczenie liczb przez Greków ustąpiło z czasem sposobowi ich pisania, opartemu na podobnej, jak u Żydów, zasadzie (powstało ono w wieku V przed Chr.). 24 litery alfabetu jońskiego (którego około r. 400 za-

stawieniem nie dźwięku, ale pewnej liczby. — W tym sposobie pisania liczb dla przedstawiania liczb mniejszych od sta potrzeba było 18-u znaków różnych, dla przedstawienia liczb mniejszych od tysiąca potrzeba było 27-u znaków różnych.

Ale liczby do dziesięciu były przedstawiane tylko jednym znakiem, liczby od dziesięciu do sta wyrażano dwoma znakami lub nawet jednym (np. trzydzieści), liczby od sta do tysiąca wyrażano albo trzema znakami (np. trzysta piętnaście), albo dwoma (np. trzysta dwadzieścia, trzysta pięć), albo nawet jednym znakiem (np. trzysta), i t. d.

5. Wszystkie takie sposoby przedstawiania liczb, jako zaznaczające oddzielnie części liczby, będące skupieniem dziesięciu jedności i t. d., a więc, jako ściśle (choć niejednakowo) odtwarzające liczenie słowne dziesiątkowe, są systematami dziesiątkowymi pisania liczb, t. j. podstawą ich jest dziesięć.

Z nich jednak systemat rzymski pisania liczb, jako wprowadzający osobliwe znaki na przedstawienie liczb pięć, pięćdziesiąt, pięćset, jest systematem mieszanym, dziesiątkowo-pięćdziesiątkowym, w którym jednak przeważa znacznie podstawa dziesięć (bo niema znaku na liczbę: pięć razy pięć, pięć razy dwadzieścia pięć i t. d.).

6. W tych wszystkich systematach wartość znaku, przedstawiającego jakąś część liczby, nie zależy od miejsca, na którym ten znak się znajduje.

Tak np. według sposobu rzymskiego pisania liczb, w liczbach:

sześćdziesiąt siedem	LXVII
osiemdziesiąt osiem	LXXXVIII
sto sześćdziesiąt	CLX
dwa tysiące pięćdziesiąt	MML

znak L zawsze oznacza pięćdziesiąt, niezależnie od tego, na którym miejscu się znajduje.

często używać w Atenach), oraz trzy litery dawniej używane (a nie, jak chcą niektórzy, wprost fenickie), t. z. episemy, dostarczyły znaków dla pisania liczb od 1 do 999, a dla odróżnienia stawiano nad tymi literami kręskę poziomą. Tysiące oznaczano tymi samymi literami, co liczby od 1 do 9, dodając z lewej strony u dołu kręskę, w rodzaju przecinka. Dziesiątki tysięcy i części większe oznaczano znów tymi samymi literami, dopisując po nich albo przed nimi, albotóż nad nimi Mo, lub M. W pierwszym razie zastępowano często znak M. przez samą kropkę (co dało powód do błędnego mniemania, jakoby kropka miała znaczenie pozycyjne). — Tak np. $\omega\lambda\alpha = 831$, ale $\omega\lambda\alpha = 800031$. — Niezależnie od tego używano (powstałego spółcześnie z tykoko opisanym) przedstawiania 24 pierwszych liczb przez 24 litery alfabetu jofskiego. (W ten właśnie sposób policzbowano później w Aleksandryi pieśni Homera.)

Arabowie pierwotnie oznaczali podobnie oddzielnymi literami liczby do 400, a 500 i t. d. pisali tak, jak początkowo Żydzi, t. j. 400, 100 i t. d. W tym przedstawianiu liczb panował jednak nieporządek: litera, która w Bagdadzie oznaczała 90, na północy Afryki przedstawiała 60 i t. d.

Starosłowiańskie pisanie liczb powstało bezpośrednio z greckiego.

Aby jednak uprościć pisanie takich liczb, jak IIII, VIIII, XIII, ..., XXXX, XXXIII, ..., LXXX i t. d., Rzymianie używali skrótowania, opartego na takiej umowie: jeżeli znak I postawimy przed znakiem V lub X, to rozumieć należy liczbę pięć, lub dziesięć o jedność zmniejszoną, czyli: IV — cztery, IX — dziewięć; podobnie, gdy postawimy X przed L lub C, oznaczamy tym, że pięćdziesiąt, lub sto o dziesięć są zmniejszone: XL — czterdzieści, XC — dziewięćdziesiąt; również, gdy C stanie przed D lub M, to zmniejsza się wartość tych znaków o sto: CD — czterysta, CM — dziewięćset ¹⁾).

Tak np. czterdzieści dziewięć Rzymianie pisali: albo XXXXVIII, albo krócej XLIX, dziewięćset czternaście: albo DCCCXIII, albo krócej CMXIV.

Gdy więc napiszemy liczby

XI i IX,

to widzimy, że I po X powiększa, a I przed X zmniejsza dziesięć o jedność. Podobnie, gdy napiszemy

DC i CD,

to C po D powiększa, a C przed D zmniejsza pięćset o sto.

Skrócenie to sprawiło, iż w rzymskim sposobie pisania liczb wartość napisanej liczby zależała niekiedy od porządku, w jakim znaki użyte po sobie następowały. (Powtarzamy: odnosi się to tylko do znaku I względem znaków V i X, do znaku X względem znaków L i C i do znaku C względem znaków D i M.)

7. Znacznie później, bo już w kilka wieków po Chrystusie, powstał u Indusów ²⁾ (w Azji południowej) ten sposób piśmiennego

¹⁾ Bardzo rzadko, spotyka się jednak IIX, jako osiem. Etruskowie większy użytek robili z takiej samej zasady: stawiali dwa, a nawet trzy znaki zmniejszające przed pewnym znakiem. — Należy zauważyć, że chociaż w sanskrycie, w językach greckim, łacińskim (jak również np. w mowie wielu plemion indyjskich w Ameryce), w ten sposób wypowiada się wiele liczb, to jednak znalazło to swoje odtworzenie w liczeniu piśmiennym tylko u Etrusków i u Rzymian.

²⁾ Z posiadanych dotąd różnorodnych wskazówek wypada, że:

a. Indusowie używali wielu rozmaitych sposobów przedstawiania liczb (tak np. jeszcze na początku wieku XIX, na wyspie Cejlon, choć lud używał cyfr takich, jakich powszechnie dziś używamy, to jednak miejscowi uczeni używali osobnych 9-u znaków dla 1—9, osobnych 9-u znaków dla dziesiątków od 10 do 90, oddzielnego znaku dla sta i oddzielnego dla tysiąca, pisząc np. siedemset w ten sposób, iż znak dla sta poprzedzali znakiem dla siedmiu).

b. Używane w Indyjach w wieku II po Chr. litery na oznaczenie liczb przeszły do Aleksandryi, a stąd w zastosowaniu do rachowania kolumnami do Rzymu, a także do północno-zachodniej Afryki, ulegając pewnym zmianom.

c. Wprowadzenie zera, a tym samym ścisłej zależności wielkości części liczby, przedstawionej przez cyfrę, od miejsca, na którym się ona znajduje, mogło nastąpić po II stuleciu po Chr.

d. Do wprowadzenia przedstawiania pozycyjnego liczb mogły się przyczynić nazwy wielkich liczb, używane w księgach religijnych (por. str. 12, odsyłacz ³⁾).

e. Ostatecznie jako epokę wprowadzenia zera (sunja) uważać należy mniej więcej rok 400 po Chr.

f. Kształt dzisiejszych cyfr powstał z liter indyjskich używanych przez Arabów Zachodu, o których mowa pod b., ulegał różnym zmianom, a ustalił się z wynalezieniem druku.

przedstawiania liczb, którego dziś powszechnie używamy ¹⁾. Dlatego nazywamy go indyjskim ²⁾.

Znaki używane w tym sposobie przedstawiania liczb nazywamy cyframi ³⁾. Cyfra więc jest to każdy oddzielny znak, służący do przedstawienia liczby.

Wszystkich cyfr różnych jest tylko dziesięć.

Dziewięć spośród nich, zwane cyframi znaczącymi ⁴⁾, oddzielnie stojąc, przedstawiają pierwsze dziewięć liczb: 1 (jeden), 2 (dwa), ..., 9 (dziewięć).

8. Gdy mamy większą liczbę, np. pięćdziesiąt sześć, czyli 5 dziesiątków i 6 jedności, to, aby ją napisać, wypadłoby postawić cyfrę 5, rozumiejąc, że ona ma nam przedstawić dziesiątki zawarte w naszej liczbie, a prócz tego cyfrę 6, jako przedstawienie pozostałych jedności. Gdy te dwie cyfry napiszemy obok siebie w takim porządku, w jakim one były w wyrażeniu

5 dziesiątków 6 jedności,

t. j. gdy napiszemy

56,

i gdy to zestawimy z przedstawieniem liczby pięć (jedności)

5,

to widzimy, że dla oznaczenia pięciu dziesiątków, możemy używać tej samej cyfry 5, co dla oznaczenia pięciu jedności, byle ją postawić tak jak w liczbie

56,

¹⁾ Arabowie Zachodu nauczyli go w swych szkołach od wiekn VIII. — Od Arabów przedostał się on do świata chrześcijańskiego w wieku XII. — Ten sposób pisania liczb, dość powoli jednak, usuwał z powszechnego użycia tak liczby rzymskie, jak i mechaniczne metody wykonywania rachunków.

²⁾ Do tego, cośmy już powiedzieli o powstaniu tego sposobu pisania liczb, dodamy jeszcze, że Arabowie pisali w kierunku od prawej ku lewej; w takim też kierunku pisali liczby według pierwotnego swego (por. str. 17, odsyłacz) sposobu, poczynając od większych części (por. str. 15, odsyłacz ¹⁾). Pisząc zaś liczby według sposobu, który sami nazywają indyjskim, pisali je od lewej ku prawej, jak Indusowie: musieli więc go przyjąć już dobrze wyrobionym, kiedy go nie przyswoili sobie więcej, nie zastosowali doń kierunku, w którym pisali dawniejsze swoje znaki liczebne.

³⁾ Zero nazywane było przez Arabów as-sifr (puste, próżne), jako tłumaczenie wyrazu sunja, oznaczającego zero u Indusów. Z tego wyrazu arabskiego pochodzi widocznie nazwa: cyfra. Tak np. w arytmetykach u nas wydanych wyraz zero spotyka się poraz pierwszy w arytmetyce łacińskiej Höll'a (1760, Poznań, przedruk wydania klausenburskiego), gdy we wcześniejszych, a nawet w kilku późniejszych w znaczeniu zera używa się stale wyraz: cyfra. (Cyfry zaś znaczące nazywano: figurami, numerami, charakterami, albo nawet wprost liczbami.)

O powstaniu kształtów cyfr mówiliśmy wyżej. Nie jest więc cyfra obrazem liczby. Dlatego też chęć dopatrzenia w kształcie cyfry odpowiedniej liczby części linii łamanej jest tylko... sztuczką łamaną.

⁴⁾ «Chiffres significatifs».

t. j. na miejscu drugim, licząc miejsca ¹⁾ od strony prawej. — Podobnie trzydzieści siedem, albo osiemnaście, t. j. liczby, w których mamy

3 dziesiątki 7 jedności, 1 dziesiątek 8 jedności,

napiszemy:

37,

18.

9. Ale jak napisać liczbę np. trzydzieści, lub liczbę dziesięć?

Liczba trzydzieści, t. j.

3 dziesiątki,

podług tego, jak pisaliśmy liczby 56, 37, 18, powinna być wyrażona przez cyfrę 3 postawioną na drugim miejscu (licząc od strony prawej). Gdy cyfra 3 ma się znaleźć na miejscu drugim, to aby miejsce, przez nią zajęte, było drugim, trzeba żeby pierwsze miejsce było przynajmniej naznaczone, przez coś zajęte. — Jeżeliby w naszej liczbie, prócz 3 dziesiątków, były jedności (jak np. w liczbie 37), to mielibyśmy co (mianowicie: te właśnie jedności) postawić na miejscu pierwszym. — Ale gdy w naszej liczbie trzydzieści, prócz 3 dziesiątków, niema już jedności, to, aby 3 mogło zająć miejsce drugie, wypadnie nam na miejscu pierwszym postawić jakikolwiek umówiony znaczek, któryby nam wskazywał, że w naszej liczbie niema niczego takiego do postawienia na tym miejscu, co na nim bywa stawiane w liczbie np. 37, albo 56. Oznaczmy w ten sposób, że z naszej liczby trzydzieści, po oddzieleniu z niej dziesiątków, nie pozostało się już żadnych jedności dla postawienia ich na miejscu pierwszym. — Owóż, jako taki właśnie znaczek używa się:

0,

zero

tak, iż liczbę trzydzieści i podobnie liczbę dziesięć, czyli liczby, w których mamy:

3 dziesiątki żadnych jedności, 1 dziesiątek żadnych jedności,
napiszemy:

30,

10.

10. Stosując to postępowanie (us. 8, 9) przy pisaniu większych liczb, liczbę np. pięćset dwadzieścia sześć, czyli liczbę, w której mamy:

5 setek 2 dziesiątki i 6 jedności

napiszemy:

526,

tak, iż cyfra 5, postawiona na miejscu trzecim (licząc od strony prawej), przedstawia setki. Liczbę zaś: pięćset sześć, t. j. liczbę, w której mamy: 5 setek żadnych dziesiątków 6 jedności, napiszemy: 506, gdzie znowu postawiliśmy 0 na miejscu drugim dlatego, żeby to drugie miejsce zając, zaznaczyć, aby tamsamym można było cyfrę 5.

¹⁾ Jak Arabowie.

jako przedstawiającą setki, postawić na miejscu trzecim. Podobnie: pięćset wypadnie nam napisać: 500; sto zaś: 100, i t. d.

Taksamo sobie wytłomaczmy, dlaczego np. liczbę dwa tysiące trzysta dziewięć napiszemy: 2309; dwa tysiące: 2000; tysiąc: 1000, a tym samym, dlaczego tysiące stają na miejscu czwartym.

Również liczbę: trzydzieści sześć tysięcy cztery, czyli liczbę, w której mamy: 3 dziesiątki tysięcy 6 tysięcy żadnych setek żadnych dziesiątków 4 jedności, napiszemy: 36004, i dostrzeżemy, że dziesiątki tysięcy oznaczają się cyfrą, znajdującą się na miejscu piątym.

Podobnie setki tysięcy oznaczamy cyfrą na miejscu szóstym, miliony cyfrą na miejscu siódmym, dziesiątki milionów cyfrą na miejscu ósmym i t. d.

W ten sposób liczby mniejsze od 10 przedstawiają się jedną cyfrą; liczby od 10 do 99 (zawsze) dwiema cyframi, liczby od 100 do 999 trzema cyframi i t. d.

11. Widzieliśmy tu, że w tym sposobie pisania liczb bardzo jest nam użyteczny znak 0 (zero), który stanowi dziesiątą cyfrę systemu indyjskiego.

Z tego zaś, w jaki sposób robimy z niego użytek, wypada, że

Zero jestto cyfra, służąca przy pisaniu liczby tylko do zajęcia pewnego miejsca, aby inne cyfry (znaczące) można było postawić na takim z porządku miejscu, na którym one postawione być mają,

albo innymi słowy:

Zero wskazuje nam, że w liczbie niema tych części liczby, które bywają oznaczane na miejscu, przez zero zajętym.

12. Zauważmy tu, że czy powiemy: trzysta pięć, co napiszemy 305, czytóż powiemy, że w téj liczbie nie mamy żadnych dziesiątków tysięcy, żadnych tysięcy, 3 setki, żadnych dziesiątków, 5 jedności, co napiszemy

00305,

— to zawsze wyjdzie na jedno. Tę samą również liczbę będziemy mieli, gdy napiszemy 0305, lub 0000305. Wogóle więc: *liczba się nie zmieni, jeżeli z lewej strony, przed pierwszą cyfrą znaczącą, dopiszemy ilekółwiek zer.* Dlatego też zer na początku liczby, jako niepotrzebnych, nie piszemy, ale dopisać je możemy ilekroć toby było pożyteczne.

13. Gdy zestawimy ze sobą np. liczby

3524

18046

495

524087

to widzimy, że w każdą z nich wchodzi cyfra 4, ale w pierwszej oznacza 4 jedności, w drugiej 4 dziesiątki, w trzeciej 4 setki i t. d., t. j., że *wartość części liczby, przedstawionej przez cyfrę, zależy od miejsca, na którym ta cyfra jest postawiona.*

Ta zależność wartości części liczby, przedstawionej przez cyfrę, od miejsca czyli «pozycyi» — którejto zależności, jak widzieliśmy (us. 5, 6), niema, wogóle mówiąc, w innych sposobach pisania liczb — sprawa, iż systemat dziesiątkowy indyjski pisania liczb nazywa się także *pozycyjnym*.

14. Zastanawiając się nad tym, jak możemy przedstawiać coraz większe liczby, łatwo dochodzimy do wniosku, że przy pomocy dziesięciu cyfr

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

jesteśmy w stanie, dzięki zeru, przedstawić wszystkie liczby, jakie tylko pomyśleć możemy, w sposób do pewnego stopnia podobny do tego, w jaki przy pomocy ograniczonej liczby liter abecadła przedstawiamy całą rozmaitość wyrazów naszej mowy — z tą wszakże różnicą, że nie każde zgrupowanie liter przedstawia wyraz istniejący w mowie, gdy tymczasem wszelkie zgrupowanie cyfr zawsze przedstawi liczbę.

15. Zauważymy jeszcze, że, przedstawiając jakąkolwiek liczbę, na pierwszym (licząc od strony prawej) miejscu oznaczamy jedności, na drugim dziesiątki, t. j. części liczby 10 razy od jedności większe, na trzecim setki, t. j. części liczby 10 razy większe od dziesiątków, na czwartym tysiące, t. j. części liczby 10 razy większe od setek, na piątym dziesiątki tysięcy, t. j. części liczby 10 razy większe od tysięcy, i t. d. Węcnp. w liczbie

682307

każda z oddzielnych części liczby, przedstawionych przez cyfrę np. 2, jest 10 razy większa od każdej z części liczby, przedstawionych przez cyfrę 3, a 10 razy mniejsza od każdej z części liczby, przedstawionych przez cyfrę 8; każda znów z części liczby, przedstawionych przez cyfrę np. 3, jest 10 razy większa od części liczby, oznaczanych na miejscu, zajętem przez zero, a 10 razy mniejsza i t. d.

16. Ze wszystkiego, cośmy mówili o powszechnie teraz używanym sposobie pisania liczb, wypada, że:

W systemacie dziesiątkowym, ogólnie teraz stosowanym przy pisaniu liczb, wyrobionym pierwotnie przez Indusów, posługujemy się tylko dziesięciu znakami, zwanymi cyframi; jedna z nich służy tylko do zaznaczania miejsca, niezajętego przez odpowiednią część liczby, każda zaś z pozostałych dziewięciu cyfr, może przedstawiać różne części liczby, zależnie od miejsca, na którym jest postawiona, tak, iż oddzielne części liczby, oznaczone

przez cyfrę, stojącą na jakimkolwiek miejscu, są dziesięć razy większe od części liczby, wyrażonych przez cyfrę, stojącą obok tamtej z prawej strony¹⁾.

17. CZYTANIE I PISANIE LICZB. Z tego, cośmy już poprzednio (us. 8, 9, 10) mówili o pisaniu liczb, wprost wypada, że: *gdy napisana liczba ma niewięcej niż cztery cyfry, to, czytając ją, wymawiamy, zaczynając z lewej strony, każdą cyfrę znaczącą oddzielnie i przy każdej dodajemy zaraz nazwanie części liczby, jakie bywają oznaczane na miejscu, które ta cyfra zajmuje.* Np. 2357 czytamy: *dwa tysiące trzysta pięćdziesiąt siedem* (dodajemy: *jedności* tylko wtedy, gdy idzie nam o szczególną dobitność); 307 czytamy: *trzysta siedem*.

Podobnie, *gdy mamy napisać liczbę niewiekszą od 9999, to w myśli wystawiamy ją sobie rozłożoną na składowe części: tysiące, setki, dziesiątki i pozostałe jedności i, zaczynając od największych części, piszemy cyfry oznaczające, ile jest oddzielnych takich części, a w braku części do oznaczenia już po cyfrze znaczącej piszemy na odpowiednich miejscach zera, jak to szczegółowo objaśnione było w ustępach 9-ym i 10-ym.*

18. W taki sam sposób postępowałibyśmy z większymi liczbami gdyby w naszej mowie były oddzielne nazwy na dziesięć tysięcy, sto tysięcy, dziesięć milionów i t. d. Gdy jednak tych nazw nie posiadamy, a zamiast mówić np. *trzysta tysięcy i pięćdziesiąt tysięcy i siedem tysięcy*, krócej, a jednak równie dokładnie możemy powiedzieć: *trzysta pięćdziesiąt siedem tysięcy*, więc np. liczbę

357 307

przeczytamy: *trzysta pięćdziesiąt siedem tysięcy trzysta siedem (jedności)*. Podobnie liczbę

26 350 027

przeczytamy: *dwadzieścia sześć milionów, trzysta pięćdziesiąt tysięcy, dwadzieścia siedem (jedności)*. W ostatnim przykładzie przeczytaliśmy 26, jakby liczbę oddzielną, a później dodaliśmy: *milionów*, t. j. nazwę części liczby, oznaczanych na miejscu, zajętem przez ostatnią cyfrę liczby 26, t. j. przez cyfrę 6; podobnie dalej wymówiliśmy 350, jakby liczbę oddzielną, a później dodaliśmy: *tysięcy*, t. j. nazwę części liczby, oznaczanych na miejscu zajętem przez 0, t. j. przez ostatnią cyfrę téj liczby 350. A więc:

¹⁾ Gdy wypada pisać liczby porządkowe, to zwykle stawia się końcówkę przy liczbie, np. ustęp 16-y (szesnasty) § 3-go (trzeciego). Ale także często zaznacza się, że pewna liczba jest porządkowa, przez postawienie po téj liczbie kropki. Tak np. na zaleceniu przez Komisję Edukacyjną *Arytmetyki dla szkół narodowych* do użytku w ówczesnych zakładach naukowych znajdujemy: dnia 2. października roku 1778. — Przy imionach panujących liczby porządkowe piszą się zawsze znakami rzymskimi, których zwykle używa się także dla przedstawienia liczb porządkowych na tablicach pamiątkowych.

Przy czytaniu liczb większych patrzymy na liczbę napisaną tak, jak gdyby ona była podzielona, od strony prawej, na grupy trzycyfrowe *), a każdą taką grupę, poczynając od strony lewej, czytamy oddzielnie, jak gdyby liczbę osobną, dodając tylko nazwę części liczby, oznaczanych na miejscu, zajętym przez ostatnią cyfrę tej grupy ¹⁾. Tak np., gdy mamy napisane: 41560000724 dukatów, czyli 41 560 000 724 dukatów, to przeczytamy: 41 miliardów 560 milionów 724 dukatów.

Jeżeli rozumiemy (§ 2, us. 8) bilion, trylion i t. d. w ten sposób jak Francuzi, to powyższe правило rościąga się na jakkolwiek wielkie liczby. Np. liczbę 5 514 102 345 678 901 przeczytamy: 5 kwatrylionów 514 trylionów 102 biliony 345 milionów 678 tysięcy 901 (jedności). Jeżeli zaś rozumić te nazwy będziemy na sposób niemiecki, to na czytanie liczb większych od 999 999 999 правило tak się przedstawi: trzeba wystawić sobie liczbę podzieloną od strony prawej na grupy sześciocyfrowe i każdą grupę, poczynając od strony lewej, czytać oddzielnie, jak gdyby liczbę osobną, dodając nazwę części liczby, oznaczanych na miejscu zajętym przez cyfrę ostatnią tej grupy. Np. liczbę 5514 102345 678901 przeczytamy: 5514 bilionów 102345 milionów 678901 (jedności).

Gdy mamy przed oczyma liczbę złożoną z bardzo wielu cyfr, to, aby dać o nią pojęcie, zwykle jako dostateczne uważamy zaznaczenie, z ilu cyfr ona się składa i jakie są jej początkowe (t. j. od strony lewej) cyfry. Np. gdy mamy przeczytać: Ziemia waży w przybliżeniu 5 955 625 500 000 000 000 000 000 kilogramów, to powiemy: Ziemia waży w przybliżeniu taką liczbę kilogramów, która się wyraża 25-u cyframi, z początkowymi cyframi: 5, 9, 5, 5. Również, gdy, obliczając, ile będzie ziarn na wszystkich 64 polach szachownicy, wraze, jeżeli położymy na jednym polu 1 ziarno, na drugim 2 ziarna, na trzecim 4 ziarna, na czwartym 8 ziarn i t. d. (wciąż podwajając liczbę ziarn), znajdziemy, że na szachownicy będzie ziarn

18 446 744 073 709 551 615,

to, aby dać pojęcie o tej liczbie słowami, powiemy: ilość ziarn będzie przedstawiona liczbą dwudziestocyfrową, z początkowymi cyframi 1, 8, 4. — Samo się przez się rozumie, że ilość wypowiedzianych początkowych cyfr zależy od tego, jak dalece chcemy (i niekiedy: jak dalece możemy) dać dokładne pojęcie o podobnie wielkiej liczbie. Gdy zaś możemy i pragniemy przedstawić komuś tak wielką liczbę zupełnie ściśle, to daleko praktyczniej nie wypowiadać jej słuchającemu, ale mu ją napisać.

19. Gdy słyszymy wypowiedzaną liczbę większą od 10 000, to w przypadku, gdy w liczbie niema milionów, a są tysiące, zauważywszy naprzód, ile jest tych tysięcy, wypisujemy liczbę tysięcy, jak gdyby osobną liczbę;

*) Ostatnia więc grupa (t. j. pierwsza od strony lewej) może zawierać niekiedy dwie lub jedną cyfrę.

¹⁾ To правило obejmuje w sobie правило §-u 17-go, jako przypadek szczególny.

jeżeli w daną liczbę jest jeszcze część mniejsza od tysiąca, to (w razie potrzeby uzupełniwszy tę część z początku jednym lub dwoma zerami (us. 12) tak, aby się ona stała liczbą trzycyfrową) piszemy ją całą obok tysięcy ze strony prawej; jeżeli zaś słyszymy wypowiedziane tylko tysiące, to, napisawszy liczbę tysięcy, jakby osobną liczbę, dopisujemy ze strony prawej trzy zera. Np., gdy nam dyktują: dwieście osiem tysięcy sześć, to powinniśmy sobie w myśli tak tę liczbę przedstawić: 208 tysięcy 006 (jedności) i skutkiem tego napiszemy 208 006; gdy zaś nam mówią trzydzieści tysięcy, to, napisawszy 30, dopiszemy trzy zera i mieć będziemy 30 000.— Podobnie postępujemy, gdy w daną do napisania liczbę są miliony. Np. trzydzieści sześć milionów osiem tysięcy sześćdziesiąt pięć; przedstawiamy sobie tę liczbę jako: 36 milionów 008 tysięcy 065 (jedności) i piszemy: 36 008 065. Taksamo: trzy miliony dziewięćdziesiąt pięć, t. j. 3 miliony żadnych (a więc: 000) tysięcy 095 (jedności), czyli 3 000 095. Również: 208 milionów, ponieważ nie więcej nie słyszymy, napiszemy: 208 000 000.

Gdy w dyktowanej liczbie słyszymy biliony, tryliony i t. d. ¹⁾, to, umiając wprawnie pisać różne (aż do dziewięciocyfrowych) liczby i zorientowawszy się, jak dyktujący rozumie znaczenie bilijona, trylijona i t. d. (§ 2, us. 8), łatwo, pisząc uważnie, możemy te liczby dobrze napisać, bacząc tylko na to, cośmy wyżej (us. 18) mówili o czytaniu takich liczb.

20. Ta okoliczność, że, skutkiem braku oddzielnych nazw dla dziesięciu tysięcy, sta tysięcy, dziesięciu milionów i t. d. (§ 2, us. 6, 7), zachodzi potrzeba, przy czytaniu liczb większych, wystawiania ich sobie, jako podzielonych na trzycyfrowe (a przy uwzględnianiu bilionów i t. d., pojmowanych po niemiecku, na sześciocyfrowe) grupy, sprawiła to, iż wielu utrzymuje i naucza, że w liczbie są trzycyfrowe (lub sześciocyfrowe) klasy — więc: klasa jedności, klasa tysięcy, klasa milionów i t. d. (lub: klasa jedności, klasa milionów, klasa bilionów i t. d.) — a następnie: jedności proste, jedności tysięcy, jedności milionów (por. str. 12 odsyłacz ⁵⁾) i t. d. (lub jedności proste, jedności milionów i t. d.), dziesiątki proste i t. d. ²⁾

Taki podział nie leży w naturze liczby, a pozornie wynika, jakeśmy wdziali, z braku nazw oddzielnych na dziesiątki tysięcy i t. d. Jako dowód posłużyć nam może to, że Grecy, posiadając nazwę na dziesięć tysięcy (por. str. 12), wypowiadali większe liczby w ten sposób, iż odpowiednio do tego wypadłoby do liczb, według sposobu teraz używanego napisanych, wprowadzić

¹⁾ Takich liczb w niższych klasach szkół dyktować nie należy (por. str. 12 odsyłacz ³⁾).

²⁾ Nawet często, ucząc pisania liczb, naprzód wykładają dogmatycznie cały ten nie-naturalny aparat, wprowadzający nie istniejące pojęcia o rzekomych jednościach tysięcy i t. d., albo o «jednościach różnego rzędu», a następnie, przystępując do uczenia liczenia, wymagają od uczącego się, aby ten schemat miał on ciągle na myśli, choć uczeń pojąć nie może, skąd się to wzięło. Jest to pozostałością z dawnego mechanicznego wykonywania rachunków. Sprawia ona jednak, że, ściśle rzecz biorąc, liczenie piśmienne właściwie poprzedza liczenie słowne.

podział na czterocyfrowe klasy ¹⁾. W sanskrycie zaś podobny podział byłby zgoła niemożliwy (por. str. 12 odsyłacz ³⁾).

21. Gdy mamy liczbę np. 3675 i mamy odpowiedzieć na pytanie: ile w niej jest (wszystkich) set? to zauważymy, że w tej liczbie mamy 3 tysiące, a tysiąc jestto dziesięć set, więc 3 tysiące jestto *trzy* razy *dziesięć* set, albo (§ 2, us. 4) *trzydzieści* set, a że nadto w liczbie jest *sześć*set, więc razem mamy: *trzydzieści sześć* set, t. j. tyle set, ile otrzymamy, przeczytawszy początkowe cyfry danej liczby do cyfry, stojącej na trzecim (odpowiadającym setkom) miejscu (włącznie), jakby przedstawiające liczbę oddzielną. — Podobnie znajdziemy, że, z uwagi, iż każde sto jestto dziesięć dziesiątków, 36 set jest 36 razy dziesięć dziesiątków, i taksamo, jak np. 5 razy dziesięć jest 50, zamiast: 36 razy dziesięć, możemy powiedzieć: 360, czyli 36 set jest to samo, co 360 dziesiątków. Gdy nadto w naszej liczbie jest jeszcze 7 dziesiątków, to w danej liczbie mamy (wszystkich) dziesiątków 367, t. j. tyle, ile wypadnie, gdy, zatrzymawszy się na cyfrze 7, stojącej na drugim miejscu (odpowiadającym dziesiątkom), przeczytamy wszystkie od początku cyfry, jakby przedstawiające liczbę osobną. — Tak np. w liczbie

8 406 275

mamy: milionów 8, (wszystkich): setek tysięcy 84, dziesiątków tysięcy 840, tysięcy 8406, setek 84062, dziesiątków 840627, jedności 8406275.

(Zadania arytmetyczne § 1).

¹⁾ Archimedes, aby ująć w pewien systemat przedstawianie liczb większych od zwykle używanych, wprowadza oktady, tak, iż pierwszą oktadę stanowić miały wszystkie liczby mniejsze od myriady myriad, 10000.10000, czyli od 100 000 000, drugą oktadę wszystkie liczby, poczynając od myriady myriad, mniejsze od liczby, którą dziś przedstawiany przez 1 z 16-ma zerami, i t. d., aż do myriady myriad oktad, t. j. aż do 1 z 800 000 000 zer; te zaś wszystkie liczby, mniejsze od tej 1 z 800 000 000 zer, tworzyły peryjod pierwszy. Po tym następował peryjod drugi liczb i t. d.

ROZDZIAŁ II.

DODAWANIE I ODEJMOWANIE LICZB CAŁKOWITYCH.

§ 4. DODAWANIE.

1. Jeżeli mając dwie liczby, np. 5 i 3, chcemy je złączyć w jedną, t. j. chcemy znaleźć liczbę, która byłaby skupieniem tylu jedności, ile jest ich razem w obu danych liczbach 5 i 3, to, aby dobrze zrozumieć, czym jest właściwie odszukiwanie owęj jednéj liczby, musimy się zastanowić nad tym, jak radziliśmy sobie z takim zadaniem w pa cholęcym wieku, gdyśmy nie nabyli jeszcze wprawy w prędkie wypowiedzanie liczby szukanéj. — Robiliśmy tak: liczbę 3 wystawiliśmy sobie przedstawioną czyto trzema np. ziarnami, czytóż trzema wyprostowanymi palcami; następnie z téj liczby 3 oddzieliliśmy naprzód (pierwszą) jedność i, wystawiając sobie, że ją dołączamy do liczby 5, powiedzieliśmy (głośno, lub w myśli): 5 i 1 jest 6; dołączając podobnie (drugą) jedność, powiedzieliśmy: 6 i 1 jest 7; nakoniec dołączając (trzecią, ostatnią) jedność, powiedzieliśmy: 7 i 1 jest 8. Do 5 więc doliczyliśmy po jednéj (wszystkie) jedności liczby 3. — Takie postępowanie, zapomocą którego, mając dwie liczby dane, do jednéj z nich doliczamy jedności drugieję z tych liczb i odnajdujemy liczbę, która jest skupieniem tylu jedności, ile ich jest razem w obu danych liczbach, jest najprostszym w arytmetyce działaniem, zwanym dodawaniem (porównaj us. 6-y). Możemy więc powiedzieć, że:

Zapomocą dodawania doliczamy do jednéj z danych dwu liczb jedności liczby drugieję. Przez to więc jedna z danych liczb powiększa się o tyle jedności, ile ich ma druga, czyli: powiększa się o drugą liczbę, tak, iż często, zamiast mówić np.: do 5 dodać 3, mówimy: 5 powiększyć o 3.

2. W przytoczonym przykładzie, uskuteczniając dodawanie, mówiliśmy: pięć i jeden, sześć; sześć i jeden, siedem; siedem i jeden, osiem, głośniej wymawiając wyrazy: pięć, sześć, siedem, osiem, t. j. liczyliśmy (§ 1, us. 7). Liczenie to zaczęliśmy od 5 (jednej z danych liczb), a przerwaliśmy je na 8, t. j. na liczbie w szeregu liczb naturalnych

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 i t. d.

zajmującej po 5 trzecie miejsce, t. j. takie z porządku miejsce, ile druga z danych liczb, t. j. liczba 3, ma jedności.

Dopóki nie wprawiliśmy się w prędsze wykonywanie, dopóty w taki sposób dodawaliśmy dane dwie liczby do siebie. Dopiero później, kiedyśmy nabyli należytej wprawy, znaleźliśmy się w możności odrazu mówić: 5 i 3 jest 8, albo 6 i 7 jest 13. Że takie prędkie wykonywanie dodawania jest tylko skutkiem wprawy, o tym przekonywa nas najlepiej ta okoliczność, że jeżeliby ktoś nam zaprzeczył, iż z dodania np. 4 i 5 wypada 9, to dla przekonania go o tym sposobem najprostszym, będziemy do 4 doliczać po jedności wszystkie jedności liczby 5. Zatem istotnie: *w dodawaniu idzie nam o liczenie, które się zaczyna od jednej z danych dwu liczb, a przerywa na liczbie, zajmującej po niej w szeregu liczb naturalnych to z porządku miejsce, które wskazuje liczba jedności w drugiej z liczb danych.*

Gdy zaś, skutkiem nabytj wprawy, mówimy odrazu 5 i 3 jest 8, 6 i 7 jest 13 i t. d. ¹⁾, to dodawanie, będąc zawsze liczeniem, przedstawia się jako *liczenie skrócone, zapomocą którego w szeregu liczb naturalnych od jednej z danych do dodawania liczb przechodzimy odrazu do liczby, zajmującej po niej miejsce, wskazane przez liczbę jedności drugiej z danych liczb.*

3. Mając do 5-ciu dodać 3, doliczamy do 5-ciu wszystkie jedności liczby 3, tak, iż otrzymana liczba 8, prócz jedności liczby 5, zawiera jeszcze jedności liczby 3 — jest skupieniem tylu jedności, ile ich jest w obu danych do dodania liczbach. Liczba więc 8, otrzymana z dodania liczb 5 i 3, składa się z jedności liczby 5 i jedności liczby 3. Dlatego liczby 5 i 3, t. j. liczby dane do dodania, nazywają się składnikami. Co się zaś tyczy liczby 8, t. j. liczby szukanj, którą otrzymać mamy z dodania składników, to ona złąciska nazywa się sumą. A ponieważ suma jest skupieniem tylu jedności, ile ich jest w obu danych do dodania liczbach, więc: *suma jest większa od każdego ze składników.*

W dodawaniu więc naszym, mając dwie liczby, 5 i 3, zwane składnikami, odnaleźliśmy liczbę 8, będącą skupieniem jedności obu składników, zwaną sumą. Zatem:

Dodawanie jestto działanie, za pomocą którego, mając dwie liczby, zwane składnikami, odnajdujemy liczbę, która jest skupieniem jedności obu składników, zwaną sumą. (Por. us. 6-ty.)

4. Dla oznaczenia, że dwie liczby mamy dodać do siebie, piszemy jedną obok drugiej, stawiając między nimi znak +, który wy-mawiamy: więćej, albo: i, albotjż (us. 1): powiększone o, np. $5 + 3$ czytamy: 5 więćej 3, albo: 5 i 3, albotjż: 5 powiększone o 3.

Dla połączenia ze sobą dwu różnyh postacią wyrażen tēj samj liczby (albo często umyślnie dla wskazania, iż dwa, postacią różniące się wyrażenia, przedstawiają tēj samj liczbę), używamy zna-

¹⁾ Jakotjż, gdy przy dodawaniu większyh liczb używamy (us. 12, 14) krótszego sposobu postępowania.

ku =, który się czyta: równa się, a niekiedy: jest to samo, co, lub przez skrócenie: jest.

Możemy więc napisać np.

$$5+3=8,$$

co przeczytamy: 5 więcej 3 równa się 8, albo: 5 i 3 jest 8.

Ponieważ zaś $5+3$ przedstawia tę samą liczbę, co 8, suma liczb 5 i 3, więc także $5+3$ nazywamy często sumą liczb 5 i 3, t. j. wyrażenie, powstałe przez połączenie składników znakiem +, nazywamy często ich sumą, czyli: *wskazane dodawanie składników nazywamy często sumą.*

5. Przy pomocy tych znaków, zamiast: 3 jesto 1 i 1 i 1, możemy napisać:

$$3=1+1+1;$$

podobnie *)

$$5=1+1+1+1+1,$$

a tymsamym $5+3$ możemy napisać $1+1+1+1+1+3$, a pisząc tu jeszcze $1+1+1$ zamiast 3, widzimy, że $1+1+1+1+1+1+1+1+1$ przedstawia tę samą liczbę, co $5+3$, więc

$$5+3=1+1+1+1+1+1+1+1+1.$$

Jeżeli tu ostatnie pięć jedności podkreślimy np. u dołu, a pozostałe trzy jedności zakreślimy z góry

$$5+3=\overline{1+1+1}+ \underline{1+1+1+1+1}$$

i jedności oznaczone każdą z tych krósek poziomych skupimy w oddzielne liczby, t. j. $1+1+1$ zastąpimy przez 3, a $1+1+1+1+1$ zastąpimy przez 5, to wypadnie nam

$$5+3=3+5.$$

To, cośmy teraz otrzymali, wskazuje nam, że $5+3$ jest to samo, co $3+5$, czyli, że jest wszystko jedno, czy 3 dodać do 5-u, czytóż 5 dodać do 3-ch. Możemy więc powiedzieć:

Suma dwu składników nie zależy od ich porządku.

6. Jeżeli kilka liczb danych, np. 5, 3, 6, 2 i 7, chcemy złączyć w jedną liczbę, t. j. chcemy znaleźć liczbę, która byłaby skupieniem tylu jedności, ile ich jest razem w liczbach 5, 3, 6, 2 i 7, to trzeba najprzód do liczby 5 doliczyć jedności liczby 3, t. j. do 5-u *dodać* 3, i powiemy: 5 i 3 jest 8 (czyli: piszemy $5+3=8$); następnie do otrzymanej liczby 8 doliczyć jedności liczby 6, t. j. do 8-u *dodać* 6, i powiemy: 8 i 6 jest 14 (czyli: $8+6=14$); później podobnie do 14

*) Zamiast więc mówić: jedność i każde skupienie jedności nazywamy liczbą całkowitą (§ 1, us. 5), możemy powiedzieć: jedność i wszelką sumę jedności nazywamy liczbą całkowitą.

dodać 2, więc: 14 i 2 jest 16 (czyli: $14+2=16$), i znowu do 16 dodać 7, więc: 16 i 7 jest 23 (czyli $16+7=23$).

Widziny więc, że postępowanie to złożone jest z dodawań (po dwa składniki):

$$5+3=8; 8+6=14; 14+2=16; 16+7=23.$$

Jeżeli w dodawaniu ostatnim, t. j. w: $16+7=23$, zamiast liczby 16 napiszemy poprzednie jej wyrażenie (gdyż 16 jest to samo, co $14+2$), to mieć będziemy *)

$$14+2+7=23,$$

a jeżeli tu zamiast liczby 14 napiszemy poprzednie jej wyrażenie: $8+6$, to

$$8+6+2+7=23,$$

a gdy na koniec jeszcze teraz zamiast 8-u napiszemy $5+3$, to

$$5+3+6+2+7=23.$$

Dwa zaś te różne postacią wyrażenia, jedno $5+3+6+2+7$, drugie 23, jako połączone znakiem $=$, przedstawiają tę samą liczbę, są sobie równe, t. j. liczba 23 jest skupieniem jedności liczb danych: 5, 3, 6, 2 i 7, o co właśnie nam szło.

Postępowanie to, jak widzieliśmy, rozpada się na kilka dodawań po dwa składniki, czyli: jest dodawaniem złożonym. Dodawanie złożone zwykle wprost dodawaniem nazywamy. Wszystkie liczby dane nazywamy składnikami, a liczbę, która jest skupieniem jedności składników, sumą. Powiemy więc ogólnie:

Dodawanie jestto działanie, za pomocą którego, mając dwie lub więcej liczb danych, zwanych składnikami, odnajdujemy liczbę, zwaną sumą, która jest skupieniem jedności składników.

Zasadniczym więc jest dodawanie tylko dwu składników. Dodawanie większej liczby składników sprowadza się do kilku dodawań po dwa składniki.

Dodawanie wielu składników, jako złożone z dodawań po dwa składniki z szeregu liczb naturalnych, doprowadza (us. 2) do pewnej liczby (sumy) w szeregu liczb naturalnych; t. j. *suma liczb z szeregu liczb naturalnych jest także liczbą tego szeregu.*

Zadanie więc nasze mogliśmy tak wysłowić: wykonać dodawanie liczb 5, 3, 6, 2, 7. Te liczby były składnikami; sumą ich była liczba 23.

Zauważymy jeszcze, że często wskazane dodawanie składników nazywamy sumą (us. 4); tak np. możemy mówić: suma $5+3+6+2+7$.

*) Pisząc krędą na tablicy, możemy, zmazawszy 16, zamiast tej liczby napisać $14+2$ i t. d.

7. Gdy mamy sumę np.

$$5+3+6+2+7,$$

to tę sumę pięciu składników możemy uważać jako złożoną np. ze składnika 5, składnika przedstawionego przez (us. 4) sumę 3+6 i składników 2 i 7. Wiemy, że suma dwu składników nie zależy od porządku, w jakim je piszemy (us. 5), zatem $3+6=6+3$. Gdy więc liczba 3+6 jest to samo, co liczba 6+3, przeto liczba przedstawiona wyrażeniem: $5+3+6+2+7$, jest to samo, co liczba $5+6+3+2+7$, t. j. dwa te różne postacią wyrażenia przedstawiają tę samą liczbę; można więc je połączyć (us. 4) znakiem = tak, iż

$$5+3+6+2+7=5+6+3+2+7.$$

Podobnie rozumując, mogliśmy w sumie $5+6+3+2+7$ przedstawić między sobą np. składniki sumy 5+6, a wyrażenie $6+5+3+2+7$ przedstawiłoby tę samą liczbę, co poprzednie wyrażenia, tak iż

$$5+3+6+2+7=6+5+3+2+7$$

I podobnie, w sumie $6+5+3+2+7$ przedstawiając między sobą składniki sumy 3+2, otrzymamy odmienne od poprzednich wyrażenie tej samej liczby, mianowicie $6+5+2+3+7$, tak iż

$$5+3+6+2+7=6+5+2+3+7,$$

i t. d. Porównywając ze sobą te i inne wyrażenia, które w ten sposób otrzymywać możemy przez kolejne przestawianie dwu obok siebie stojących składników, i przypatrując się rozmaitemu porządkowi, w jakim te same składniki w różnych wyrażeniach sumy po sobie następują, widzimy, że możemy składniki sumy dowolnie przestawić, czyli, że w ogóle:

Suma nie zależy od porządku składników.

8. Ściśle można to uzasadnić w taki sposób. Dowiedliśmy już (us. 5), że

a. *Suma dwu składników nie zależy od ich porządku.*

Na mocy tego łatwo wyprowadzić, że wogóle:

b. *Suma nie zmienia się, gdy zmieniamy porządek dwu jej pierwszych składników.*

Np. $5+3+6+2$ ma być tą samą liczbą, co $3+5+6+2$. W pierwszym bowiem razie do liczby, przedstawionej sumą 5+3, mamy dodać 6, a do tego, co otrzymamy, dodać 2; w drugim zaś razie do liczby, przedstawionej sumą 3+5, mamy dodać 6, a do tego, co otrzymamy, dodać 2. Że jednak, według a., sumy 5+3 i 3+5 przedstawiają tę samą liczbę, więc dodajemy 6 a następnie 2 w obu razach do tej samej liczby, a zatem dojdziemy do tej samej liczby, t. j.

$$5+3+6+2=3+5+6+2.$$

c. *Suma nie zmienia się, gdy zmieniamy porządek dwu ostatnich składników.*

Np. $5+3+6+2+4$ ma być tą samą liczbą, co $5+3+6+4+2$. Ponieważ $2=1+1$, a $4=1+1+1+1$, więc

$$5+3+6+2+4=5+3+6+\overline{1+1+1+1+1},$$

gdzie możemy oddzielnie skupić piérwsze cztery jedności, któreśmy oznaczyli kręską u góry, i oddzielnie dwie dalsze jedności, któreśmy oznaczyli kręską u dołu. Dokonywając tego, otrzymujemy to, czegośmy pragnęli:

$$5+3+6+2+4=5+3+6+4+2.$$

d. *Suma nie zmienia się, gdy przestawimy między sobą dwa którekolwiek składniki sąsiednie.* Np. chcemy okazać, że $5+3+6+2+4+7$ jest tą samą liczbą, co $5+3+2+6+4+7$. Na mocy własności c. mamy: $5+3+6+2=5+3+2+6$, t. j. obie te sumy przedstawiają tę samą liczbę. Do tych dwu więc wyrażzeń jednéj liczby, dodając po 4, a następnie po 7, dojdziemy do téj saméj liczby, t. j.

$$5+3+6+2+4+7=5+3+2+6+4+7.$$

e. *Nie zmieniając sumy, możemy którykolwiek jéj składnik sprowadzić na miejsce piérwsze, którykolwiek z pozostałych na drugie i t. d.* Opiérając się bowiem na własności d., możemy dopóty pewien składnik, który chcemy sprowadzić na miejsce piérwsze, wciąż przestawiać z każdym składnikiem, który obok niego z lewéj strony znajdować się będzie, dopóki on na piérwszym miejscu nie stanie. Podobnie będziemy postępować ze składnikiem, który chcemy widzieć na miejscu drugim i t. d. W taki sposób zawsze możemy w dowolnym porządku składniki sumy ustawić, bez zmieniania jéj wartości, czyli:

Suma nie zależy od porządku składników.

9. Z téj własności wypada, że

Aby do sumy dodać pewną liczbę, można tę liczbę dodać do któregoś z jéj składników. Np., aby do sumy $5+3+2+6+9=25$ dodać 4, można np. do składnika 3 dodać 4, bo, gdy $5+3+2+6+9+4=25+4$, to z uwagi, że suma niezależy od porządku składników, zamiast $5+3+2+6+9+4$ możemy napisać $5+3+4+2+6+9$, a w tym wyrażeniu uważać (us. 4) sumę $3+4$ za jednę liczbę. Mamy więc:

$$5+3+\overline{4+2+6+9}=5+7+2+6+9=25+4.$$

Tutaj nad $3+4$ postawiliśmy kręskę na oznaczenie, że 4. ma być dodane do 3, tak, że suma $3+4$ ma być uważana jako przedstawienie jednéj liczby, t. j. nie mamy do 5 dodać 3, a dopiero do tego, co wypadnie, dodać 4, ale mamy do 5 dodać liczbę wypadłą z dodawania $3+4$ (zob. Uwaga).

I nawzajem: *jeżeli do któregoś z składników sumy dodajemy pewną liczbę, to tym samym do téj sumy dodajemy też samą liczbę*, bo jeżeli $5+3+2+6+7=23$, to

$$5+\overline{3+4+2+6+7}=5+3+4+2+6+7=5+3+2+6+7+4=$$

$$=5+3+2+6+7+4=23+4.$$

Jeżeli zamiast mówić: dodać, powiemy: powiększyć o (us. 1), to powyższe własności możemy tak wypowiedzieć: *aby sumę powiększyć*

o pewną liczbę, można którykolwiek z jej składników powiększyć o tę liczbę, i: jeżeli którykolwiek składnik sumy powiększymy o pewną liczbę, to skutkiem tego suma powiększy się o tę liczbę.

Wypada to zresztą wprost z tego, że suma jest skupieniem jedności składników (us. 6). Jeżeli więc sumę kilku liczb chcemy powiększyć o jakąś liczbę, czyli o jedności, których zebraniem jest ta liczba, to można to sprawić, doliczając te jedności do któregośkolwiek składnika, czyli powiększając go o tę samą liczbę (us. 1), o którą chcemy powiększyć sumę. I nawzajem, jeżeli którykolwiek składnik powiększymy o jakąś liczbę, t. j. doliczymy jej jedności do tego składnika, to w sumie będzie o tyleż jedności więcej, czyli suma powiększy się o tę samą liczbę.

UWAGA. Zamiast zakreślać wyrażenie złożone (wchodzące w skład wyrażenia jeszcze więcej złożonego), które chcemy uważać jako jedną liczbę, wobec tego, że takie zakreślenie jest często niedogodne, albo niewyraźne, rozpowszechniło się używanie w tym celu nawiasu, t. j. ujmuje się w nawias to, co chcemy razem uważać jako liczbę jedną. Zamiast więc pisać np.

$$5 + \overline{3+4} + 2 + 6 + 7 = 23 + 4$$

możemy napisać

$$5 + (3+4) + 2 + 6 + 7 = 23 + 4.$$

Przez takie zatym zamknięcie sumy $3+4$ w nawiasie zaznaczamy dobitnie, że uważamy 4 nie za liczbę, która ma być dodana do sumy $5+3$, ale za liczbę, która ma być dodana wprost do składnika 3, a stąd dopiero powstała suma $3+4=7$ -ma być następnie dodana do składnika 5.

10. Gdy więc mamy np. do sumy liczb 5 i 3 dodać liczbę 6, to możemy tę liczbę 6 dodać albo wprost do sumy $5+3$, albotóż do jednego z jej składników, a do liczby stąd otrzymanej dodać drugi składnik. Te sposoby otrzymywania liczby, przedstawionej przez sumę $5+3+6$, możemy, przy pomocy nawiasów, tak uwydatnić:

$$(5+3)+6; \quad 5+(3+6); \quad (5+6)+3.$$

Liczba tych sposobów przedstawiania i otrzymywania sumy $5+3+6$ znacznie się powiększy, gdy przedstawiać będziemy między sobą składniki, mianowicie:

$$(5+3)+6; \quad (3+5)+6; \quad 6+(5+3); \quad 6+(3+5); \\ 5+(3+6); \quad 5+(6+3); \quad (3+6)+5; \quad (6+3)+5; \\ (5+6)+3; \quad (6+5)+3; \quad 3+(5+6); \quad 3+(6+5).$$

Gdybyśmy do tego mieli jeszcze dodać liczbę np. 2, to z jednego wyrażenia, np. z wyrażenia $5+(3+6)$ wypadłoby nam wprost (bez przedstawiania składników między sobą):

$$5+(3+6)+2; \quad 5+(\overline{3+6+2}); \quad 5+(3+\overline{6+2}); \quad 5+(\overline{3+2+6}); \quad (5+2)+\overline{(3+6)},$$

a w każdym z tych wyrażeń przestawiając jeszcze składniki, mielibyśmy:

$5+(3+6)+2$; $5+(6+3)+2$; $(3+6)+5+2$; $(6+3)+5+2$; $(3+6)+2+5$;
i t. d., i t. d.

Z tego widzimy, że dodawanie trzech lub więcej składników może być uskutecznione przy pomocy dodawań częściowych którychkolwiek składników, wziętych w jakimkolwiek porządku.

UWAGA. Mieliśmy tu np. $5+(3+\overline{6+2})$, to znaczy, że liczbę, którą otrzymamy, gdy do 3 dodamy sumę $6+2$, co więc powinniśmy tak oznaczyć $3+(6+2)$, że tedy tę liczbę $3+(6+2)$ mamy dodać do liczby 5; możnaby więc wyraźniej zamiast $5+(3+\overline{6+2})$ napisać $5+(3+(6+2))$. Tu jednak dwa podobne nawiasy czynią przedstawienie takie niezręcznym. Dlatego, zamiast nawiasu (), mającego objąć $3+(6+2)$, użyjemy, dla wyraźniejszego przedstawienia, innego nawiasu, np. [], i rzeczywiście, gdy napiszemy

$$5+[3+(6+2)],$$

wtedy to, o co nam idzie, przedstawi się wyraźniej.

Gdybyśmy tę sumę mieli dodać np. do liczby 7, to, aby rzecz wyraźnie przedstawić, najlepiejby było wprowadzić jeszcze nawias np. { }; wtedy przedstawilibyśmy to tak:

$$7+\{5+[3+(6+2)]\}$$

Jeżeli mamy np. wyrażenie

$$(3+2)+\{8+[5+(6+7)]+(9+1)\},$$

to ono oznacza, że do sumy, otrzymanej z dodawania $3+2$, mamy dodać odrazu całą liczbę, otrzymaną z dodania do 8 naprzód sumy, wypadłej z dodania do 5 liczby, powstałej z wykonania dodawania $6+7$, a następnie sumy liczb 9 i 1.

Przy pomocy nawiasów moglibyśmy postępowanie uskutecznione w początku ustępu 6-go, t. j. dodawanie liczb 5, 3, 6, 2 i 7, tak przedstawić:

$$\{[(5+3)+6]+2\}+7=23.$$

Podobnie przedstawilibyśmy wyraźnie np. sposób powstawania liczby np. 6 w szeregu liczb naturalnych:

$$6=\{[(1+1)+1]+1\}+1.$$

11. Wyraziwszy jakąkolwiek liczbę, większą od jedności, jako sumę jedności (us. 5), np.

$$7=1+1+1+1+\bar{1}+1+1,$$

możemy te jedności rozmaicie dodawać częściowo (us. 10). Mićć więc będziemy np.

$$\begin{aligned}
 7 &= (1+1+1+1) + (1+1+1) = 4+3 \\
 &= (1+1) + (1+1+1+1+1) = 2+5 \\
 &= (1+1+1+1) + 1 + (1+1) = 4+1+2 \\
 &\text{i t. d.}
 \end{aligned}$$

Widzimy więc, że liczbę 7 możemy przedstawić jako sumę składników: 4 i 3; lub: 2 i 5; lub: 4, 1 i 2; lub: 3, 3 i 1, i t. d. — Podobnie, gdyby była dana jakakolwiek inna liczba. A więc:

Każdą liczbę możemy rozmaicie rozkładać na składniki (na części).

Tak np. $35 = 10 + 25 = 12 + 23 = 20 + 15 = 3 + 32 = 11 + 24 = 30 + 5$ i t. d.; podobnie np. $692 = 500 + 140 + 48 + 4 = 600 + 90 + 2$ i t. d.

Wrazie więc potrzeby, przy wykonywaniu jakiegokolwiek działania, mamy prawo każdą liczbę zupełnie dowolnie rozłożyć na składniki. Samo się przez się rozumie, że wrazie potrzeby tak rozłożymy liczbę na składniki (na części), jak nam to będzie najdogodniej.

12. Gdy mamy dodać do siebie liczby np. 24 i 35, to należałoby do liczby 24 doliczać po jednej wszystkie jedności liczby 35 (us. 1). Byłoby to jednak postępowanie zbyt długie, nużące uwagę i, skutkiem tego, łatwo prowadzące do omyłek.

Zastanowiwszy się nad tym, że nam tu idzie o znalezienie liczby, któraby była skupieniem tylu jedności, ile ich jest razem w obu liczbach: 24 i 35, czyli o wyrażenie sumy $24 + 35$ przez jedną liczbę, możemy, mając do tego prawo, rozłożyć dane do dodania liczby na części w najdogodniejszy sposób (us. 11). Następnie zaś, dodawanie tak rozłożonych na części liczb uskutecznić przy pomocy dodawań częściowych (us. 10) w sposób taki, iżby postępowanie stało się najkrótszym i najpewniejszym.

Ponieważ ta jedna liczba, której szukamy, będzie wiadomą, gdy odnajdziemy jej dziesiątki i jedności, więc dodawania częściowe powinny być takie, aby jedno z nich dało nam dziesiątki, drugie zaś jedności sumy. A więc i dane do dodania liczby najdogodniej będzie rozłożyć na części, oddzielając ich dziesiątki od pozostałych jedności, t. j. $24 = 20 + 4$, $35 = 30 + 5$, tak iż

$$24 + 35 = 20 + 4 + 30 + 5.$$

A że to dodawanie $20 + 4 + 30 + 5$ możemy zastąpić przez dodawania częściowe, łącząc składniki, jak nam się podoba (us. 10), a nadto chcemy, żeby jedno dodawanie częściowe dało nam dziesiątki sumy, drugie zaś ję jedności, więc trzeba oddzielnie dodać 20 i 30, a oddzielnie 4 i 5. Przy pomocy nawiasów (us. 9) oznaczymy to wyraźnie, pisząc

$$20 + 4 + 30 + 5 = (20 + 30) + (4 + 5),$$

a więc

$$24 + 35 = 20 + 4 + 30 + 5 = (20 + 30) + (4 + 5) = 50 + 9 = 59.$$

Również, gdy mamy dodać np. 323 i 564, to, zamiast do liczby 323 doliczać po jednej wszystkie jedności liczby 564, postąpimy w sposób podobny, jak w zadaniu poprzednim, t. j. rozłożymy liczby 323 i 564 na części, mianowicie na setki, dziesiątki i jedności tak, iż

$$323 + 564 = 300 + 20 + 3 + 500 + 60 + 4.$$

Zastąpimy następnie to dodawanie przez dodawania częściowe, dodając setki do setek, dziesiątki do dziesiątków, pozostałe jedności do jedności, t. j. $(300 + 500) + (20 + 60) + (3 + 4)$, co wykonawszy mieć będziemy $800 + 80 + 7$, części składowe liczby 887. Całe więc to postępowanie da się piśmiennie tak przedstawić:

$$\begin{aligned} 323 + 564 &= 300 + 20 + 3 + 500 + 60 + 4 = \\ &= (300 + 500) + (20 + 60) + (3 + 4) = 800 + 80 + 7 = 887. \end{aligned}$$

Zupełnie taksamo rozumując przy dodawaniu liczb 263, 501, 4125, tak zaznaczymy to postępowanie piśmiennie:

$$\begin{aligned} 263 + 501 + 4125 &= 200 + 60 + 3 + 500 + 1 + 4000 + 100 + 20 + 5 = \\ &= 4000 + (200 + 500 + 100) + (60 + 20) + (3 + 1 + 5) = \\ &= 4000 + 800 + 80 + 9 = 4889. \end{aligned}$$

Gdy mamy dodać np. 88 i 47, to w ten sposób objaśniając i odpowiednio zaznaczając postępowanie, mieć będziemy naprzód:

$$88 + 47 = 80 + 8 + 40 + 7 = (80 + 40) + (8 + 7) = 120 + 15;$$

ponieważ zaś każdą liczbę możemy rozłożyć na części, jak nam się podoba, więc dalej: $120 + 15 = 100 + 20 + 10 + 5 = 100 + (20 + 10) + 5 = 100 + 30 + 5 = 135$.

W ten sam sposób, gdy mamy dodać liczby np. 365, 7497, 966, odpowiednio rozumując, tak przedstawiamy to postępowanie:

$$\begin{aligned} 365 + 7497 + 966 &= 300 + 60 + 5 + 7000 + 400 + 90 + 7 + 900 + 60 + 6 = \\ &= 7000 + (300 + 400 + 900) + (60 + 90 + 60) + (5 + 7 + 6) = \\ &= 7000 + 1600 + 210 + 18 = \\ &= (7000 + 1000) + (600 + 200) + (10 + 10) + 8 = 8000 + 800 + 20 + 8 = 8828. \end{aligned}$$

Widzimy więc, że to postępowanie, t. j. *wykonywanie dodawania polega na tym, aby liczby dane do dodania w najdogodniejszy sposób rozłożyć na części, odpowiednie części oddzielnie do siebie dodać, a sumy, wypadłe z tych dodawań częściowych, znów dodać do siebie, aby otrzymać jedną liczbę, sumę szukaną liczb danych.*

13. To postępowanie, któreśmy tykoko objaśnili, w zupełności odtwarza pamięciowe wykonywanie dodawania. Tak np., gdy mamy w pamięci dodać liczby: 24 i 35, to mówimy tak: 24 jestto 20 i 4; 35 jestto 30 i 5; dodają: 20 i 30 jest 50; 4 i 5 jest 9, a 50 i 9 jest 59. Podobnie, gdy mamy dodać np. 286 i 47, to mówimy: 286 jestto 200 i 80 i 6; 47 jestto 40 i 7; mam naprzód 200; dodają 80 i 40 jest sto dwadzieścia, zaś dwieście i sto dwadzieścia jest trzysta dwadzieścia;

6 i 7 jest 13, czyli dziesięć i trzy; trzysta dwadzieścia i dziesięć (dwadzieścia i dziesięć jest trzydzieści) jest 330, a jeszcze 3, razem: 333.

Przy wykonywaniu pamięciowym dodawania trzech lub więcej liczb, naprzód dodajemy w ten sposób dwie liczby do siebie, do ich sumy dodajemy trzecią i t. d. (porów. us. 6-y).

14. Ze względu na pośpiech i na wyraźność rachunku (§ 1; us. 9), zwykle w piśmienne przedstawienie dodawania wprowadzamy pewne skrócenia.

Nie wypisujemy więc, przedewszystkim, rozkładu danych do dodania liczb na części (jak to robiliśmy w ustępie 12-ym); gdy bowiem mamy napisaną liczbę, to ten rozkład łatwo sobie przedstawiamy, nie wypisując go jednak: wiemy przecież dobrze, że w liczbie np. 564 jest 5 setek (500), 6 dziesiątków (60) i 4 jedności, a tym samym w rachunku wypisywanie tych części byłoby zbyt ciężkie.

Chcemy jednak, nie wypisując tych rozkładów liczb na części, móc odpowiednie części oddzielnie do siebie dodawać, t. j. dziesiątki do dziesiątków, jedności do jedności, setki do setek i t. d. (us. 12). W tym tedy celu, *aby odpowiednie części składników mieć blisko siebie, podpisujemy składniki pod sobą tak, żeby jedności znalazły się pod jednościami*, a tysamym dziesiątki pod dziesiątkami i t. d. W zadaniach więc ustępu 12-ego wypadnie je tak wypisać:

$$\begin{array}{r}
 24 \qquad 323 \qquad 263 \qquad 88 \qquad 365 \\
 +35 \qquad +564 \qquad +501 \qquad +47 \qquad +7497 \\
 \qquad \qquad \qquad +4125 \qquad \qquad \qquad +966
 \end{array}$$

Należy teraz wykonać dodawania częściowe: dziesiątki dodać do dziesiątków i t. d. Gdzie jednak pisać wypadki tych częściowych dodawań? Oczywiście, że *będzie najrzeczniej i najwyraźniej, gdy wypadek z częściowego dodawania dziesiątków napiszemy pod dziesiątkami, wypadek z częściowego dodawania jedności napiszemy pod jednościami i t. d.* — Aby jednak nie mieszać liczb danych z tą, która nam z dodawania wypadnie, aby odróżnić je od siebie, t. j. *aby oddzielić składniki od sumy, przeprowadzamy pod wypisanymi pod sobą liczbami, danymi do dodania, kręskę poziomą **, pod którą będziemy pisać to, co z dodawań częściowych otrzymamy.

W pierwszych trzech przykładach **) możemy dodawania wykonać, zaczynając je czyto od strony lewej, czytóż od strony prawej ***):

*) Moglibyśmy tej kręski nie stawiać, jeżeli bylibyśmy pewni, że, przeglądając później te rachunki (§ 1, us. 9), sami nie zapomnimy, a inni się domyślą, że ostatnia liczba jest sumą liczb nad nią będących.

**) Gdy mamy pod sobą podpisane trzy lub więcej składników, nie potrzeba już pisać znaku +, bo wtedy nie może być wątpliwości co do rodzaju działania, które mamy wykonać.

***) Albo nawet, jak w przykładach drugim i trzecim, ze środka.

$$\begin{array}{r} 24 \\ +35 \\ \hline 59 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 323 \\ +564 \\ \hline 887 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 263 \\ 501 \\ \hline 4125 \\ 4889 \end{array}$$

— w każdym razie cyfry, otrzymane z podpisania wypadków z dodawań częściowych pod dodawanymi częściami, razem uważane, wprost przedstawiają szukaną sumę danych składników.

Inaczej rzecz się ma z zadaniem :

$$\begin{array}{r} 88 \\ +47 \\ \hline 125 \\ 3 \end{array}$$

Gdy zaczniemy ze strony lewej wykonywać dodawanie, to na-przód otrzymamy dziesiątków 12; podpiszmy je. Gdy zaś następnie dodamy jedności — wypadnie nam 15 — podpiszemy 5 pod jednościami, a 1 dziesiątek trzeba będzie dołączyć do dziesiątków (porównaj to zadanie w us. 12-ym), czyli napisaną już pod dziesiątkami cyfrę 2 zamienić na 3. A więc, jeżelibyśmy dodawanie wykonywali od strony lewej, wypadłoby nam zmieniać tu raz postawioną cyfrę, co by pozabawiło rachunek pożądanęj (§ 1, us. 9) czystości. — Jeżeli zaś zaczynamy dodawanie od strony prawej, to, z dodania 8 i 7 otrzymawszy 15 (jedności), napiszemy pod jednościami 5, a 1 dziesiątek wypadnie dodać do tego, co otrzymamy z dodania 8 i 4. Ale ponieważ $(8+4)+1=(1+4)+8$ (us. 10), więc możemy, po napisaniu 5 (jedności), do pozostałego (z dodania jedności) 1-ego dziesiątka dodać 4, a następnie do tego dodać 8 dziesiątków; otrzymawszy 13 dziesiątków, podpiszemy tę liczbę dziesiątków tak, aby cyfra 3 była na miejscu drugim od strony prawej. W ten sposób, nie zmieniając cyfry raz postawionęj, dzięki wykonywaniu działania od strony prawej, mamy odrazu

$$\begin{array}{r} 88 \\ +47 \\ \hline 135 \end{array}$$

Widzimy więc, że częściowe dodawania dlatego wykonywamy zaczynając od strony prawej, że, gdybyśmy je wykonywali od strony lewej, mogłaby zająć potrzeba, przy wykonywaniu dodawań częściowych, zmienienia cyfry raz napisanej.

Zamiast tu mówić: 1 dziesiątek i 4 dziesiątki jest 5 dziesiątków, zaś 5 dziesiątków i 8 dziesiątków jest 13 dziesiątków, zauważywszy, że cyfry 1, 4 i 8 są na miejscu drugim, co w czasie roboty mamy na oku, jakoteż, że wypadające 13 ma być tak napisane, żeby cyfra 3 znalazła się na miejscu drugim, możemy znacznie skrócić poprzedni

sposób wyrażania się, mówiąc wprost: 1 i 4 jest 5; 5 i 8 jest 13, a samo się przez się rozumie, że tu jest mowa o dziesiątkach.

Tak np. w zadaniu:

3 0 6 5	postąpimy tak: znajdziemy $8+7+5=20$; pod
7 4 0 9 7	kolumną cyfr dodanych (zob. Uwaga), aby zająć
9 0 6 8	miejsce (§ 3, us. 11), postawimy 0, a 2 dodamy
8 6 2 3 0	do cyfr następnej (od strony prawej) kolumny;

znalazszy $2+6+9+6=23$, napiszemy 3 pod kolumną cyfr tyłkoco dodanych, a 2 pozostaje nam do dodania do cyfr następnej kolumny, lecz gdy w tej kolumnie cyfr znaczących niema *), więc obok napisanej już cyfry 3 piszemy 2 (gdyż oprócz tych 2-u niema niczego innego do zaznaczenia na tym miejscu); znalazzmy następnie $3+4+9=16$, stawiamy pod cyframi dodanymi 6, a 1 dodamy do 7 w następnej kolumnie; $7+1=8$, a te 8 piszemy (pod kręską) pod 7.

UWAGA. Gdy jest mowa o liczbie jednocyfrowej, to zwykle zamiast powiedzieć: liczba przedstawiona przez cyfrę, mówimy krócej, wprost: cyfra. Tak np., znalazzmy $8+7+5=20$, zamiast mówić: pod kolumną cyfr dodanych, ściślej się wyrażając, należałoby powiedzieć: pod kolumną cyfr przedstawiających jedności dodane. — Podobnie, zamiast powiedzieć jednocyfrowa liczba dziesiątków, mówimy często: cyfra dziesiątków, i t. d.

15. Widzimy więc wogóle, że zwykle postępowanie przy dodawaniu da się ująć w takie prawidło:

Aby dodać do siebie składniki, podpisujemy je jedne pod drugimi (w jakimkolwiek porządku) tak, żeby jedności znalazły się pod jednościami, a pod ostatnim składnikiem prowadzimy kręskę poziomą i dodajemy do siebie cyfry pierwszej od strony prawej kolumny, następnie drugiej i t. d.; jeżeli z takiego dodawania częściowego wypadnie nie więcej niż 9, to wypadek podpiszemy pod kręską, pod kolumną cyfr dodanych; jeżeli zaś z takiego dodawania częściowego wypadnie więcej niż 9, to z otrzymanej liczby oddzielamy dziesiątki, pozostałą część podpisujemy pod kolumną cyfr dodanych, a cyfrę dziesiątków dodajemy do cyfr następującej kolumny (uważając ją w dalszym postępowaniu za cyfrę do owej kolumny należącą).

W dodawaniu do siebie wielu liczb, skutkiem wprawy nabytej, przy wykonywaniu posuwając pióro (lub krędę) tak, aby kolejno stawało przy dodawanych cyfrach, nie wymawiamy cyfr dodawanych (przy których w danym momencie trzymamy pióro, czytóż krędę), lecz odrazu wypowiadamy sumę wypadającą z dodania tej cyfry. Tak np. w zadaniu:

*) Gdyby w pierwszej od strony prawej kolumnie (lub w kilku sąsiednich kolumnach poczynając od pierwszej) były same zera, to: ponieważ niema nic do postawienia na tym miejscu pod kręską, a ze względu na cyfry znaczące, jakie następnie pod kręską wypadnie postawić, miejsce to zajęte być winno, piszemy na nim zero (§ 3, us. 11).

7 5 3 2 6	odrazu mówimy (odpowiednio pióro przesuwając):
8 2 7	5, 12, 13, 13, 20, 26; piszę 6; 2, 6, 8, 8, 10, 12,
3 3 2 0	14; piszę 4; 1, 4, 9, 12, 20, 23; piszę 3; 2, 2, 5, 10;
4 0 5 0 1	piszę 0; 1, 5, 12; piszę 12; otrzymałem sumę:
2 7	120 346.
3 4 5	
<u>1 2 0 3 4 6</u>	

16. Jeżeli nam wypadnie wykonać dodawanie składników, ustawionych w poziomym wierszu, to niekiedy wykonywamy w ten sam sposób dodawanie, nie podpisawszy składników pod sobą, przekreślając tylko cyfry, w miarę ich dodania. Tak np., gdy mamy:

$$285 + 42 + 30 + 5967,$$

to mówimy: 7 (przekreślając je), 7 (przekreślając 0), 9 (przekreślając 2), 14 (przekreślając 5), i (postawiwszy znak =, w przyzwoitej po nim odległości) piszemy 4,

$$28\bar{5} + 42 + 30 + 5967 = 4;$$

następnie 1, 7 (przekreślając 6), 10 (przekreślając 3) i t. d., tak iż działanie stopniowo będzie przyjmować piśmiennie takie postaci:

$$28\bar{5} + 42 + 30 + 5967 = 24; (1, 7, 10, 14, 22)$$

$$28\bar{5} + 42 + 30 + 5967 = 324; (2, 11, 13)$$

$$28\bar{5} + 42 + 30 + 5967 = 6324. (1, 6)$$

17. Chcąc sprawdzić, czy dodawanie jest dobrze wykonane, t. j. chcąc wykonać próbę ¹⁾ dodawania, możemy tę próbę oprzeć na tym, że suma nie zależy od porządku składników (us. 7). Możemy więc jakkolwiek inaczej uporządkować składniki i dodać je do siebie; otrzymana suma winna być też sama, co poprzednio. (Przypuszczamy tu, że omyłki, którąśmy mogli popełnić przy dodawaniu składników w początkowo przyjętym porządku, nie popełnimy przy innym ich zestawieniu, t. j. przy innym porządku składników dodawanych.) Taka próba jest próbą dodawania przez dodawanie.

Najprościej (bo bez ponownego wypisywania składników) można wykonać próbę w ten sposób: jeżeliśmy w dodawaniu sprawdzanym cyfry kolumn poprzednio dodawali, zaczynając z dołu i wciąż ku górze postępując, to, przy sprawdzaniu, możemy cyfry kolumn dodawać z góry wciąż ku dołowi. Jest bowiem prawdopodobieństwo, że przy odmiennym porządku cyfr dodawanych w oddzielnych kolumnach nie popełnimy omyłki, którąby się w ten sam sposób na sumie odbić miała, jak omyłka w pierwotnym dodawaniu — jeżeliśmy ją zrobili.

¹⁾ Próbą działania nazywamy nowe działanie, mające na celu sprawdzenie wypadku działania poprzedniego.

18. Gdy mamy wykonać dodawanie liczb mianowanych prostych, to, aby można je było skupić w jedną liczbę, sumę, wszystkie dane liczby mianowane, t. j. składniki, winny być wyrażone przy pomocy téj samej jednostki (§ 1, us. 11), przy pomocy której wyrazimy sumę, jako jedną liczbę mianowaną prostą. Gdy więc mamy np. dodać do siebie 3 godziny, 11 godzin, 5 godzin, to z doliczenia godzin do godzin wypadną nam godziny, których będzie tyle, ile otrzymamy z dodania liczb 3, 11, 5, t. j. liczba wszystkich godzin będzie wyrażoną przez sumę $3+11+5$. Widzimy więc z tego, że:

Ażby dane liczby mianowane proste dodać do siebie i otrzymać z tego dodawania liczbę mianowaną prostą, potrzeba, aby wszystkie składniki były wyrażone przy pomocy téj samej jednostki.

Suma, wypadająca z dodawania liczb mianowanych prostych, jest wyrażoną przy pomocy téj samej jednostki, co składniki. Liczba oderwana, zachodząca w sumie, powstaje przez dodanie do siebie liczb oderwanych składników, tak, iż, aby dodać 3 godziny, 11 godzin, 5 godzin, wykonamy: $3+11+5=19$,

3 godz.	a ponieważ skupialiśmy z sobą godziny, więc
11 godz.	otrzymana liczba 19 jest liczbą godzin; dlatego
5 godz.	pod kręską podpisujemy: 19 godzin.
<u>19 godz.</u>	

Podobnie, mając zadanie: dodać do siebie 2056 funtów, 405 funtów, 14 funtów, 40527 funtów, podpiszemy pod sobą te składniki, nie zapominając oznaczenia jednostek, podkreślimy, liczby oderwane do siebie dodamy sposobem wiadomym i przy sumie, powstałej z dodania liczb oderwanych, postawimy oznaczenie téj samej jednostki, przy pomocy której są wyrażone składniki. Będzie więc:

$$\begin{array}{r}
 2056 \text{ fun.} \\
 405 \text{ fun.} \\
 14 \text{ fun.} \\
 40527 \text{ fun.} \\
 \hline
 43002 \text{ fun.}
 \end{array}$$

Odpowiedź: z dodawania otrzymamy 43002 funty.

(Zadania arytmetyczne. § 2.).

¹⁾ Bardzo jest pożytecznie przy uczeniu arytmetyki przestrzegać, aby uczniowie wypisywali przy każdej liczbie mianowanej nazwanie jednostki. Takie zaznaczanie systematyczne liczb mianowanych i oderwanych, ciągle ich rozróżnianie pobudza do ścisłego nadania miejsca właściwego każdej liczbie w rozumowaniu przeprowadzanym, co, jak to zobaczymy w ciągu dalszym, prowadzi za sobą ważne następstwa.

§ 5. ODEJMOWANIE.

1. Przypuśćmy, że z dodawania dwu składników, z których jeden był np. 5, otrzymaliśmy sumę, np. 8, a chcemy się dowiedzieć, jaki był drugi składnik. Przypomnijmy sobie, że wtedy, gdyśmy odpowiedniej wprawy nie posiadali, aby znaleźć ów drugi składnik, postępowaliśmy tak: pięć i *jeden*, sześć (a tę jedność zaznaczaliśmy np. odchyleniem jednego palca); sześć i *jeden*, siedem (jeszcze odchyłamy następny palec), siedem i *jeden*, osiem (znow odchyłamy palec). Aby więc z liczby 5 otrzymać 8, trzeba było do 5-u dodać $1+1+1=3$, czyli szukany składnik drugi jest 3. Takim przeto postępowaniem, mając sumę dwu składników i jeden składnik, wynaleźliśmy składnik drugi. Działanie to nazywa się odejmowaniem. Możemy więc powiedzieć:

W odejmowaniu mamy na celu z danych: sumy dwu składników i jednego z tych składników — wyznaczenie drugiego składnika téj sumy.

2. Ponieważ tu do 5-u doliczaliśmy po jedności dopóty, dopóki nie doszliśmy do 8-u, więc właściwie odejmowanie wykonywa się zapomocą doliczania do mniejszej z danych liczb tylu jedności, ilu ich potrzeba, aby od téj mniejszej z danych liczb dojść do drugiej, większej. Zebranie zaś doliczonych jedności przedstawia liczbę szukaną.

Tak, że gdybyśmy w szeregu liczb naturalnych

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 i t. d.

odrzućmy tyle początkowych cyfr, ile wskazuje 5, mniejsza z danych liczb, a następnie prowadzili liczenie nanowo, zaczynając od 1 (więc: pokazując na 6, mówilibyśmy 1, i t. d.), to, przerywając je na miejscu, zajętem przez większą z liczb danych, przez to nowe liczenie doszlibyśmy właśnie do liczby szukanéj 3. Możemy więc powiedzieć, że:

Odejmowanie staje się liczeniem, jeżeli, odrzućwszy w szeregu liczb naturalnych wszystkie liczby początkowe aż do mniejszej z danych do odjęcia liczb włącznie, na pozostałych liczbach prowadzimy nanowo liczenie od jedności i przerywamy je na miejscu, zajętem przez drugą z liczb danych.

Dopóki, skutkiem wprawy, nie nabyliśmy możności pędszego wykonywania odejmowania, t. j. mówienia odrazu: 5 od 8-u jest 3, 6 od 13-u jest 7 i t. d., dopóty wykonywaliśmy odejmowanie, doliczając wciąż po jedności do mniejszej liczby danéj, aż do otrzymania większej z liczb danych. Tym właśnie sposobem udowodnić możemy najłatwiej, że z odjęcia np. 5-u od 8-u wypada 3 — jeżeliby kto temu zaprzeczał.

3. Powiedzieliśmy, że w odejmowaniu, mając sumę dwu składników i jeden składnik, odnajdujemy drugi składnik. Owóż ta suma dana, czyli większa (§ 4, us. 3) z liczb danych nazywa się w odejmowaniu odjemną, druga zaś z liczb danych, czyli wiadomy składnik,

nazywa się odjemnikiem. Liczba szukana, którą otrzymujemy z wykonania odejmowania, nazywa się resztą. A ponieważ odjemna jest sumą dwu składników, z których jeden (wiadomy) jest odjemnikiem, drugi zaś (szukany) jest resztą, więc *z dodania reszty do odjemnika wypadnie odjemna*, t. j. (§ 4, us. 4)

$$\text{reszta} + \text{odjemnik} = \text{odjemnej.}$$

Mając to na względzie i używając powyższych nazw dla liczb wchodzących do odejmowania, możemy to, cośmy w ustępie 1-ym o odejmowaniu powiedzieli, wysłowić w ten sposób:

Odejmowanie jestto działanie, w którym, mając dane dwie liczby: odjemną i odjemnik, poszukujemy liczby, zwanój resztą, po której dodaniu do odjemnika otrzymujemy odjemną.

W naszym zadaniu: od 8-u odjąć 5, liczba 8 jest odjemną, a 5 odjemnikiem; otrzymana liczba 3 jest resztą, bo $5+3=8$, co możemy (§ 4, us. 5) jeszcze inaczej wysłowić: bo $3+5$ jest 8.

4. Ponieważ z dodania reszty do odjemnika otrzymujemy odjemną, więc reszta, wskazująca nam, ile trzeba do odjemnika doliczyć jedności, aby otrzymać odjemną, pokazuje nam oile odjemna jest większa od odjemnika (§ 4, us. 1, 3), oile się od niego różni, czyli: reszta pokazuje nam: jaka jest różnica między odjemną i odjemnikiem. Dlatego resztę nazywają różnicą i mówią, że *odejmowanie jestto działanie, za pomocą którego, mając dwie liczby: odjemną i odjemnik, dowiadujemy się, oile odjemna jest większa od odjemnika*. Gdy bowiem suma jest większa od każdego ze składników (§ 4, us. 3), więc *odjemna jest większa od odjemnika* o różnicę, czyli resztę. Mówimy jeszcze: w odejmowaniu odjemną zmniejszamy o odjemnik i otrzymujemy resztę. Więc zamiast mówić: od 8 odjąć 5, możemy mówić: 8 zmniejszyć o 5.

5. Zamiast resztą lub różnicą, liczbę wypadającą z odejmowania nazywamy także nadmiarem, lub niedomiarem, mianowicie: nadmiar odjemnej nad odjemnik, a: niedomiar odjemnika do odjemnej. Więc np., gdy mamy liczby 8 i 5, to: nadmiar 8-u nad 5 jest 3; niedomiar 5-u do 8-u jest 3.

6. Dla oznaczenia, że dwie liczby mamy od siebie odjąć, piszemy naprzód odjemną, a po niej odjemnik, kładąc między nimi znak —, który czytamy mniój, albo bez np. $8-5$ czytamy: 8 mniój 5, albo 8 bez 5-ciu. Używając zaś jeszcze znaku = (§ 4 us. 4), możemy to odejmowanie tak przedstawić:

$$8 - 5 = 3.$$

Ponieważ wyrażenie $8-5$ przedstawia liczbę 3, więc możnaby także wyrażenie $8-5$ nazywać resztą lub różnicą; (§ 4, us. 4, 6).

Upowszechniło się jednak nazywanie wyrażenia $8-5$ tylko różnicą; a więc: *wskazane odejmowanie nazywamy często różnicą liczb, do tego odejmowania wchodzących.*

7. Zastanawiając się nad tym, cośmy mówili w ustępach 1-ym i 3-im, widzimy, że odejmowanie jest związane z dodawaniem tak, iż z liczb wchodzących do dodawania, np. $3+5=8$, możemy ułożyć dwa odejmowania: $8-5=3$ i $8-3=5$. Zestawiając to ze sobą:

$$3+5=8,$$

$$8-5=3,$$

$$8-3=5,$$

widzimy, że ta liczba, której szukaliśmy w dodawaniu, jest daną w odejmowaniu, i odwrotnie, liczba szukana w odejmowaniu jest daną w dodawaniu; możemy więc powiedzieć, że ¹⁾

Odejmowanie jest działaniem odwrotnym dodawaniu dwu składników.

Ponieważ w odejmowaniu odjemna jest większa od odjemnika, więc w szeregu liczb naturalnych zajmuje miejsce dalsze niż odjemnik (jeden składnik) o tyle miejsc, ile wskazuje drugi składnik (§ 4, us. 2), t. j. różnica, będąca sama także liczbą tego szeregu. Powiemy więc o naszym odejmowaniu, że różnica dwu liczb z szeregu liczb naturalnych, jest także liczbą tego szeregu ²⁾.

Oczywiście, że, gdy do pewnej liczby wypada nam jakąś liczbę dodać i tę samą liczbę odjąć, np. mając 8, dodać 3 i odjąć 3 (albo: odjąć 3 i dodać 3), liczba dana nie zmieni się: o tyle bowiem liczbę 8 powiększamy (§ 4, us. 1), dodając 3, o ile ją zmniejszamy (us. 4), odejmując 3. Zwykle wtedy mówimy: *dodanie i odjęcie tej samej liczby, jako działania uprost sobie odwrotne, wzajemnie się znoszą.*

8. W § 4-m ustępie 9-ym widzieliśmy, że

a. *Jeżeli do któregośkolwiek składnika sumy dodajemy pewną liczbę, to tym samym do tej sumy dodajemy też samą liczbę.*

b. *Aby do sumy dodać pewną liczbę, można tę liczbę dodać do któregośkolwiek z jej składników.*

Z tego, że suma jest skupieniem jedności składników (§ 4, us. 6), wypada, że jeżeli jeden ze składników sumy rozłożymy na dwa (§ 4, us. 11) i zamiast całego początkowo danego składnika weźmiemy tylko jedną z tych dwu jego części, t. j. od tego składnika odejmiemy liczbę, będącą drugą jego częścią, to jedności tej liczby nie wejdą w skład su-

¹⁾ Dlaczego niema działania odwrotnego dodawaniu trzech lub więcej składników? Odpowiedź na to łatwa. Dodawanie trzech lub więcej składników jest działaniem złożonym z kilku dodawań po dwa składniki (§ 4, us. 6). Dodawanie zaś może mieć odwrotne sobie działanie proste, gdy ono samo jest działaniem niezłożonym, a więc: tylko dodawanie dwu składników.

²⁾ Łatwo zauważyć, że to ma miejsce tylko dzięki temu, że odjemna jest większą od odjemnika.

my nowój, czyli suma początkowo dana stanie się o tę samą liczbę mniejsza; innymi słowy:

c. Jeżeli od któregośkolwiek składnika sumy odejmujemy pewną liczbę, to tym samym odejmujemy ją od sumy.

Gdy od sumy kilku składników chcemy odjąć jakąś liczbę, t. j. chcemy, aby suma była skupieniem mniejszej liczby jedności, mniejszej o tyle jedności, ile ich jest w owój liczbie, to, jeżeli pośród składników sumy jest składnik większy od owój liczby, możemy go rozłożyć na dwie części: jedną równą owój liczbie, drugą część pozostałą, i tę ostatnią właśnie wziąć zamiast całego tego składnika. Wtedy bowiem, na zasadzie własności c., od sumy odejmujemy owę liczbę *). A zatem

*d. Aby od sumy odjąć pewną liczbę, można ją odjąć od jednego z jej składników, większych od tej liczby **).*

Z zestawienia ze sobą własności a. i c., albotóż własności b. i d. wypada, że suma składników się nie zmienia, jeżeli do jednego składnika dodamy pewną liczbę, a od innego odejmiemy tę samą liczbę; wtedy bowiem dodajemy do sumy i od niej odejmujemy tę samą liczbę, skutkiem czego ta suma się nie zmienia (us. 7). Możemy więc powiedzieć:

e. Jeżeli do jednego ze składników sumy dodajemy pewną liczbę, a od innego jednocześnie odejmujemy tę samą liczbę, to suma się nie zmienia.

Możemy też inaczej wysłowić (por. § 4, us. 9) własności c., d. i e., mówiąc «zmniejszyć o», «powiększyć o», zamiast «odjąć» (us. 4), «dodać».

9. Jeżeli więc mamy sumę dwu składników i chcemy, nie zmieniając jednego składnika, do tej sumy dodać, lub od niej odjąć pewną liczbę, to, według własności b. i d., należy do drugiego składnika (bo innego już niema) odpowiednio dodać, lub od niego odjąć tę samą liczbę. Tak np. jeżeli mamy sumę dwu składników, $13+5=18$, i, nie zmieniając składnika 5, dodajemy do sumy 18 liczbę np. 4, to tym samym do drugiego składnika, do 13-u, wypadnie dodać tę liczbę 4, t. j. $(13+4)+5=18+4$.

Ponieważ zaś odjemna jest sumą reszty i odjemnika (us. 3), t. j.

$$\text{reszta} + \text{odjemnik} = \text{odjemnej},$$

więc

aa. Jeżeli do odjemnej dodajemy, lub od niej odejmujemy pewną liczbę, nie zmieniając odjemnika, to wypadnie odpowiednio do reszty dodać,

*) Łatwo można to i poprzednie rozumowanie przeprowadzić na przykładach liczebnych.

**) Albo opuścić składnik równy tej liczbie, jeżeli taki składnik w sumie danej się znajduje.

lub od niej odjąć tę samą liczbę. Tak np., gdy mając $18 - 5 = 13$, do odjemnej dodamy np. 4, to do reszty 13 wypadnie także dodać 4, i rzeczywiście: $22 - 5 = 17$; również, gdy mając $18 - 5 = 13$, od 18 odejmiemy 2, to skutkiem tego od reszty 13 wypadnie także odjąć 2, i rzeczywiście: $16 - 5 = 11$.

Podobnie, gdy sumy dwu składników nie zmieniamy, a do jednego ze składników dodajemy pewną liczbę, to, według własności e., od drugiego składnika wypadnie odjąć też samą liczbę. Więc:

bb. *Jeżeli odjemnej nie zmieniamy, a do odjemnika dodajemy, lub od niego odejmujemy pewną liczbę, to skutkiem tego tę samą liczbę wypadnie odpowiednio od reszty odjąć, lub do niej dodać.* Np., gdy mając $18 - 5 = 13$, do odjemnika 5 dodamy 1, to od reszty 13 wypadnie odjąć 1, jakoż: $18 - 6 = 12$; jeżeli zaś, mając $18 - 5 = 13$, od odjemnika 5 odejmiemy 4, to do reszty 13 wypadnie dodać 4, i rzeczywiście: $18 - 1 = 17$.

Gdy nakoniec, do odjemnej i do odjemnika dodamy jednocześnie tę samą liczbę, to wskutek dodania jej do odjemnej, do reszty, według własności aa., wypadnie dodać tę liczbę, wskutek zaś dodania jej do odjemnika, wypadnie od reszty, według własności bb., odjąć tę samą liczbę, zatem (us. 7) reszta zmianie nie ulegnie. Toż samo ma miejsce, gdy tak od odjemnej, jak i od odjemnika tę samą liczbę odejmiemy. A więc:

cc. *Jeżeli jednocześnie albo do odjemnej i odjemnika dodajemy tę samą liczbę, albo od odjemnej i od odjemnika odejmujemy tę samą liczbę, to reszta się nie zmienia.* Np., gdy mamy $18 - 5 = 13$, to, dodając do odjemnej 18 i do odjemnika 5 tę samą liczbę, np. 2, otrzymamy resztę niezmienną 13, i rzeczywiście $20 - 7 = 13$; podobnie, jeżeli $18 - 5 = 13$ i tak od odjemnej 18 jak i od odjemnika 5 odejmiemy np. 4, to otrzymamy resztę także 13, i rzeczywiście: $14 - 1 = 13$. (Tę własność moglibyśmy taksamo wyprowadzić, jak powyżej własność aa.).

Możemy również inaczej wysłowić własności powyższe, mówiąc: «zmniejszyć o», «powiększyć o», zamiast «odjąć», «dodać».

Przy pomocy nawiasów (§ 4, us. 9) nasze przykłady możemy wyraźniej przedstawić w ten sposób:

$$18 - 5 = 13.$$

$$\text{aa.} \quad (18+4) - 5 = 13+4; \quad (18-2) - 5 = 13-2.$$

$$\text{bb.} \quad 18 - (5+1) = 13-1; \quad 18 - (5-4) = 13+4.$$

$$\text{cc.} \quad (18+2) - (5+2) = 13; \quad (18-4) - (5-4) = 13.$$

Z własności bb. wypada, że gdy do odjemnika w odejmowaniu np. $18 - 5 = 13$ dodawać będziemy np. naprzód 1, później 4, następnie 3, dalej 2, to różnica o też liczby odpowiednio będzie się zmniejszała:

$$18 - (5+1) = 13 - 1,$$

$$18 - (5+1+4) = 13 - 1 - 4,$$

$$18 - (5+1+4+3) = 13 - 1 - 4 - 3,$$

$$18 - (5+1+4+3+2) = 13 - 1 - 4 - 3 - 2.$$

Jeżeli tu zamiast 13 napiszemy tę samą liczbę, przedstawioną (us. 6) przez różnicę $18-5$, to mieć będziemy

$$18 - (5+1+4+3+2) = 18 - 5 - 1 - 4 - 3 - 2,$$

t. j. gdy od pewnej liczby mamy odjąć sumę kilku składników, to możemy od liczby danej odjąć naprzód jeden składnik, od otrzymanej liczby drugi składnik i t. d., czyli: *gdy mamy od pewnej liczby odjąć sumę dwu lub więcej składników, to możemy to odejmowanie wykonać, uskuteczniając odejmowania częściowe oddzielnych składników.*

10. Gdybyśmy np. mieli od 59 odjąć 24, to zgodnie z tym, cośmy zauważyli o wykonywaniu pierwotnym odejmowania (us. 1, 2), należałoby do 24 doliczać po jedności dopóty, dopókiibyśmy niedoszli do liczby 59; zebranie zaś wszystkich doliczonych jedności przedstawiłoby szukaną resztę.

Takie postępowanie byłoby zbyt długie i łatwoby do omyłek prowadziło.

Gdy idzie o rachunek pamięciowy (który się zawsze wyrabia przed piśmiennym), to do krótszego wykonania tego odejmowania doprowadziła nas myśl dodawania do odjemnika odrazu całych dziesiątków, a więc: 24 i 10 jest 34; 34 i 10 jest 44; 44 i 10 jest 54; teraz już nie możemy dodać całego dziesiątka (bo wypadłoby 64, więcej niż odjemna 59); dodaliśmy 30 i mamy 54; aby z 54 otrzymać 59, trzeba do 54 doliczyć 5 jedności; więc szukana liczba składa się z 30 i 5, czyli jest nią 35. — To postępowanie jeszcze skracamy, skutkiem nabytej wprawy, i mówimy tak: mam odjąć 24 od 59; 24 od 54 jest 30; 54 od 59 jest 5; 30 i 5 jest 35. — Podobnie, gdy mamy od 887 odjąć 564, to: 564 od 864 jest 300; pozostaje odjąć 864 od 887; 864 od 884 jest 20 (zatem 300 i 20 jest 320); 864 od 887 (albo krócej: i 4 od 7) jest 3; razem 323. — W przypadku, gdy mamy od 132 odjąć 47, tak rozumiemy: (nie mogąc powiedzieć 47 od 137, bo 137 większe od odjemnej 132, mówimy) 47 od 127 jest 80; 127 od 132 jest 5; razem 85.

11. Aby obmyśleć krótsze postępowanie przy piśmiennym wykonywaniu odejmowania, łatwo, wobec związku zachodzącego między odejmowaniem a dodawaniem, chcieć, podobnie jak to robiliśmy w dodawaniu ¹⁾, *odejmowanie zadane zastąpić przez odejmowania częściowe:*

¹⁾ I do pewnego stopnia w odejmowaniu pamięciowym.

jedności od jedności, dziesiątków od dziesiątków i t. d. — Aby te części odjemnej i odjemnika, które oddzielnie będziemy od siebie odejmować, mieć blisko siebie *), *podpisujemy odjemnik pod odjemną tak, żeby jedności były pod jednościami, a tysamym dziesiątki pod dziesiątkami i t. d., podobnie jak to robiliśmy w dodawaniu.* — Co się tyczy pisania reszt z odejmowań częściowych, to, również jak w dodawaniu, będzie najrzęczniejsz i najwyraźniejsz, gdy *resztę z częściowego odejmowania jedności napiszemy pod jednościami i t. d.* — Aby zaś oddzielić dane liczby od szukanęjsz, *pod odjemnikiem prowadzimy kręskę poziomą, pod którą pisać będziemy to, co z odejmowań częściowych otrzymamy.* — Wykonajmy więc np. odejmowania $59 - 24$; $887 - 564$; $6829 - 3128$,

$$\begin{array}{r} 59 \\ -24 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 887 \\ -564 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6829 \\ -3128 \\ \hline \end{array}$$

Tutaj wypadki odejmowań częściowych, czyto wykonywać je będziemy od strony prawej, czytęz od strony lewej, razem uważane, wprost przedstawiają szukaną resztę

$$\begin{array}{r} 59 \\ -24 \\ \hline 35 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 887 \\ -564 \\ \hline 323 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6829 \\ -3128 \\ \hline 3701. \end{array}$$

Zauważymy tu, że, podobnie jak w dodawaniu, zamiast mówić: 2 dziesiątki od 5 dziesiątków jest 3 dziesiątki; lub 5 setek od 8 setek jest 3 setki, mówimy wprost: 2 od 5 jest 3 i piszemy 3 pod odejmowanymi cyframi, lub: 5 od 8 jest 3 i piszemy to 3 pod odejmowanymi cyframi, gdyż wczasie roboty mamy wciąż na oku, na których odpowiednio miejscach są odejmowane cyfry i na których piszemy wypadki z ich odjęcia.

W ostatnim przykładzie, gdy nam z odejmowania dziesiątków: 2 od 2-u, $2 - 2$, nic nie zostało, napisaliśmy pod kręską 0, zgodnie z tym, cośmy o zerze mówili w § 3-im w ustępie 11-ym. Dlategotęz mówimy: $2 - 2 = 0$, przez co pozornie możemy mieć resztę w tym także przypadku, gdy *odjemnik jest równy odjemnej.*

Dlatego także, jeżeli mamy np. wskazane odejmowanie dwu równych sobie liczb, to, podpisując je pod sobą, jak w poprzedzających przykładach, pod kręską piszemy 0, które nam wyraźnie wskazuje, iż już zauważyliśmy, że reszty z tego odejmowania nie otrzymujemy; np.

$$\begin{array}{r} 256 \\ -256 \\ \hline 0. \end{array}$$

*) Nie wypisując rozkładu odjemnej i odjemnika na części, t. j. na ... setki, dziesiątki, jedności.

Pozornie więc można wykonać odejmowanie, gdy odjemnik jest równy odjemnej i otrzymać wtedy resztę, t. j. zero (oznaczające, ściśle mówiąc, brak liczby).

Skutkiem tego, zamiast mówić: w odejmowaniu odjemna jest większa od odjemnika (us. 4), powinniśmy to tak powiedzieć, żeby w tym wyrażeniu się naszym objąć tak przypadek, gdy odjemna jest większa od odjemnika, jak i przypadek, gdy odjemna jest równa odjemnikowi. Zrobimy to właśnie, wysławiając się w ten sposób: *odjemna jest nie mniejsza od odjemnika.*

Jeżeli mamy np. wykonać odejmowanie $53 - 28$, to tu nie możemy wykonać częściowego odejmowania jedności: $3 - 8$, bo tu odjemna jest mniejsza od odjemnika. Lecz mamy prawo rozłożyć liczbę na składniki w najdogodniejszy sposób (§ 4, us. 11); możemy więc naszą odjemną 53 tak rozłożyć na części, dziesiątki i jedności, aby te części odjemnej były nie mniejsze od części odjemnika i aby z każdego częściowego odejmowania (dziesiątków od dziesiątków i jedności od jedności) wypadła jednocyfrowa liczba, tak, aby te reszty częściowych odejmowań, razem przeczytane, odrazu przedstawiły jedną liczbę. Nie możemy np. odjemnej tak rozłożyć: $53 = 42 + 9$, bo odejmując od tego $28 = 2$ dziesiątki + 8, mielibyśmy wprawdzie jedno odejmowanie jedności od jedności, $9 - 8$, ale drugie: $42 - 2$ dzies. nie byłoby odejmowaniem dziesiątków od dziesiątków. Nie moglibyśmy również odjemnej tak rozłożyć: $53 = 3$ dziesiątki + 23 (jedności), bo odejmując od tego $28 = 2$ dzies. + 8, otrzymalibyśmy z odjęcia jedności $23 - 8 = 15$, liczbę dwucyfrową (a nie jednocyfrową), która wraz z resztą częściowego odejmowania dziesiątków $3 - 2 = 1$ (dziesiątek) nie utworzyłaby odrazu szukanej reszty, a trzeba by dopiero zbierać: 1 dziesiątek + 15 = 1 dzies. + 1 dzies. + 5 = 2 dzies. + 5. Próbując tak różnych rozkładów odjemnej, przekonamy się, że najdogodniejszym (i jedynym takim) jest rozkład $53 = 4$ dziesiątki + 13 (jedności), bo wtedy odejmując $28 = 2$ dziesiątki + 8 (jedności) otrzymujemy z częściowych odejmowań: 2 od 4 jest 2 (dziesiątki), a: 8 od 13 jest (5 jedności); te reszty częściowe 2, 5, podpisane pod odejmowanymi cyframi, razem uważane, odrazu przedstawiają liczbę jedną: 25.

Podobnie, gdy mamy np. wykonać odejmowanie $7646 - 1278$

$$\begin{array}{r} 7646 \\ -1278 \\ \hline \end{array}$$

to nie możemy wykonać ani odejmowania częściowego jedności: $6 - 8$, ani odejmowania częściowego dziesiątków: $4 - 7$, bo w każdym z tych odejmowań odjemna jest mniejsza od odjemnika, co być nie może.

Łatwo jednak temu zaradzić, jeżeli odjemną 7646 tak właśnie rozłożymy na części, aby, popiérwsze, dziesiątki odjemnej były większe od dziesiątków odjemnika i jedności odjemnej większe od jedności odjemnika, i powtóre, aby wtedy częściowe reszty postawione pod kręską, razem uważane, odrazu przedstawiały jedną liczbę. Próbując różnych roskładów liczby 7646, przekonamy się, że obu tym warunkom zadosyć uczyni tylko taki roskład: 7 tysięcy, 5 setek, 13 dziesiątków, 16 jedności, tak, że gdy go nadpiszemy nad odjemną i od odpowiednich części tak rozłożonej odjemnej będziemy odejmowali części odjemnika w jakimkolwiek porządku, np. od strony lewej: 1 od 7 jest 6 (piszę); 2 od 5 jest 3; 7 od 13 jest 6; 8 od 16 jest 8, to wtedy te reszty (6 tysięcy 3 setki 6 dziesiątków 8 jedności), razem uważane, przedstawiają szukaną resztę: 6368.

$$\begin{array}{r} 7\ 51316 \\ 7\ 648 \\ -1278 \\ \hline 6\ 368 \end{array}$$

części tak rozłożonej odjemnej będziemy odejmowali części odjemnika w jakimkolwiek porządku, np. od strony lewej: 1 od 7 jest 6 (piszę); 2 od 5 jest 3; 7 od 13 jest 6; 8 od 16 jest

Podobnie, gdy mamy np. 650588—25679, to tak postąpimy: ponieważ 8 jedności jest mniejsze od 9 jedności, trzeba w odjemnej rozłożyć 8 dziesiątków na 7 dziesiątków i 1 dziesiątek, a ten 1 dziesiątek wyrazić jako 10 jedności, co razem z 8 jednościami da nam 18 jedności, które nadpisuję nad jednościami; pozostałe 7 dziesiątków, jako nie mniejsze od 7 dziesiątków w odjemniku, zostawiam (a więc z odejmowania częściowego dziesiątków reszty nie będzie); ponieważ dalej 5 setek odjemnej jest mniej niż 6 setek odjemnika, a w odjemnej niema tysięcy na czwartym miejscu, więc roskładamy 5 dziesiątków tysięcy na 4 dziesiątki tysięcy i 1 dziesiątek tysięcy, który wyrażam jako 10 tysięcy; z nich 9 tysięcy zostawiam, a 1 tysiąc wyrażam jako 10 setek, co razem z 5 setkami stanowi 15 setek. W ten sposób odjemna 50588 została rozłożoną na 6 setek tysięcy, 4 dziesiątki tysięcy, 9 tysięcy, 15 setek, 7 dziesiątków i 18 jedności. Tak rozłożywszy odjemną na części, mogę rozpocząć odejmowanie z którejkolwiek strony (choćby ze środka); zaczynając od strony prawej, mam: 9 od 18 jest 9; 7 od 7, żadnej reszty, ale piszę 0, aby zająć miejsce drugie, gdyż będą cyfry do postawienia na miejscu trzecim i dalszych; 6 od 15 jest 9; 5 od 9 jest 4; 2 od 4 jest 2; a gdy od 6 nie mam nic do odjęcia *), więc piszę 6. Mam więc resztę 624909.

$$\begin{array}{r} 6\ 4915718 \\ 650588 \\ -25679 \\ \hline 624909 \end{array}$$

18 jedności, które nadpisuję nad jednościami; pozostałe 7 dziesiątków, jako nie mniejsze od 7 dziesiątków w odjemniku, zostawiam (a więc z odejmowania częściowego dziesiątków reszty

Widzimy więc, że to postępowanie, t. j. *wykonywanie odejmowania polega na rozłożeniu odjemnej na części tak, aby każda część odjemnej była nie większą od odpowiedniej części odjemnika i aby reszty, wypadłe*

*) Mogliśmy także tak powiedzieć: przed 2 możemy sobie wyobrazić zero (§ 3, us. 12), więc 0 od 6, jest 6.

po wykonaniu oddzielnych odejmowań odpowiednich części, razem uważane, odrazu utworzyły jedną liczbę.

12. Gdybyśmy, wykonywając odejmowanie, zawsze nadpisywali nad odjemną jęj rozkład, który nam pozwala w tak dogodny sposób zadane odejmowanie zastąpić przez odejmowania częściowe, to przygotowanie takie odjemnej zajmowało by nam nieco czasu, a co ważniejsze, pozbawiałoby rachunek czystości, której musimy przestrzegać (§ 1, us. 9). Osobliwie jest to niedogodne, gdy np. odjemna wypada nam jako suma kilku liczb, od której mamy odjąć odjemnik, np. gdy mamy zadanie: od sumy liczb 256, 1342, 2766 odjąć liczbę 2689.

256	Gdzież tu nad odjemną 4364 nadpisać odpowiedni
1342	jęj rozkład? Trzebaby chyba umyślnie ją powtórnie
2766	w innym miejscu napisać i tam dopiéro wykonywać
4364	odejmowanie, poprzednio przygotowawszy ów rozkład
—2689	odjemnej. Moglibyśmy wprowadzić ten rozkład w pa-
1675	mięci zrobić, ale przy większych liczbach nie można-

by się na to spuszczać. Dlatego w praktyce ani tego rozkładu nie nadpisujemy nad odjemną, ani go całego nie utrzymujemy w pamięci. Postępujemy zaś w następujący sposób. Ponieważ, przygotowując rozkład odjemnej na części, dla pewności (t. j. dla niepoprawiania się późniejszego) zaczynamy od strony prawej, więc, nie dokonywając odrazu całego rozkładu odjemnej, wykonywać go będziemy (od strony prawej) częściowo, w miarę potrzeby dla wyznaczenia cyfry reszty. Tak w naszym zadaniu, wykonywając odejmowanie, powiemy: 9 większe od 4, więc rozkładam ¹⁾ 6 dziesiątków na 5 dziesiątków, które zostawiam, i 1 dziesiątek, który wyrażam jako 10 jedności, a one wraz z 4 jednościami stanowią 14 jedności: 9 od 14 jest 5; i t. d. Albo, opuszczając nazwy: dziesiątki, jedności i t. d. (us. 11), mówić będziemy: 9 większe od 4; rozkładam 6 na 5 i 1; 1 na drugim miejscu jest 10 na pierwszym, więc 9 od 14 jest 5; 8 większe od 5; rozkładam 3 na 2 i 1; 1 na trzecim jest 10 na drugim; 8 od 15 jest 7; 6 większe od 2; rozkładam 4 na 3 i 1; 1 na czwartym jest 10 na trzecim; 6 od 12 jest 6; 2 od 3 jest 1; reszta: 1675.—Gdyby było np.

¹⁾ Używają tu «pożyczam», chociaż «zwracanie pożyczonego» później miejsca niema. Jak widzieliśmy, objaśnienie i wyrażanie się, zgodne z istotnym sposobem wykonywania rozkładu odjemnej, nie przedstawia żadnej trudności do wprowadzenia ich w użycie — wobec niczym nieusprawiedliwionego «pożyczania».

Francuzi postępują inaczej. Gdy np. mają wykonać odejmowanie

4 3 6 4	to rozumują w ten sposób: 9 większe od 4; dodają do odjemnej i odjemni-
—2 6 3 9	ka tę samą liczbę (us. 9), t. j. do odjemnej 10 jedności, do odjemnika
1 7 2 5	1 dziesiątek; więc: 9 od 14 jest 5; 4 od 6 jest 2, i podobnie dalej: 6 więk-

sze od 3, więc 6 od 13 jest 7, a 3 od 4 jest 1; reszta: 1725. (Nadto zamiast mówić: odjemna, mówią: liczba większa, a: odjemnik rozumieją przez: liczbę mniejszą).

4067	to mówilibyśmy: 7 od 7 piszę 0; 8 większe od 6, więc
—2687	roskładałam 4 na 3 i 1; 1 na czwartym jest 10 na
1380	trzecim, które roskałam na 9 i 1; 1 na trzecim jest

10 na drugim; 8 od 16 jest 8; 6 od 9 jest 3; 2 od 3 jest 1. Przed nabyciem odpowiedniej wprawy, przy cyfrach, jak w tym zadaniu 4, 0, które winniśmy sobie wystawiać, jako zastąpione przez cyfry 3, 9, stawiamy zwykle u góry kropki, lub kręski. Później, wprawiwszy się, tego nie robimy.

Z przykładów tego i poprzedzającego ustępów widzimy, że *dla tego rozpoczynamy wykonywanie odejmowania od strony prawej, że nie roskałamy uprzednio całej odjemnej odpowiednio na części, ale skuteczniamy ten rozkład częściowo, wmiarę potrzeby wyznaczenia cyfry reszty.*

(Rozpoczynanie od strony lewej wyznaczania cyfr reszty, a tym samym i roskładu częściowego odjemnej, prowadziłoby niekiedy za sobą zmienianie tak cyfr reszty, jak i części roskładu odjemnej).

13. Widzimy więc, że zwykle postępowanie przy odejmowaniu da się ująć w takie prawidło:

*Aby odjąć od siebie dane dwie liczby, podpisujemy odjemnik pod odjemną tak, żeby jedności znalazły się pod jednościami, a pod odjemnikiem prowadzimy kręskę poziomą; następnie, zaczynając od strony prawej, odejmujemy cyfry piérwszej, drugiej i t. d. kolumn od siebie, wykonywając jednocześnie, wmiarę potrzeby wyznaczenia cyfry reszty, roskład odjemnej na części tak, aby każda część odjemnej nie była mniejszą od odpowiedniej części odjemnika i aby reszty wypadły z odjęcia jedności do jedności, dziesiątków od dziesiątków i t. d., podpisane pod kręską, pod cyframi, z odjęcia których powstały, razem uważane, odrazu utworzyły jedną liczbę *), resztę. W tym celu, jeżeli która z cyfr odjemnika jest większa od odpowiedniej cyfry odjemnej, to tę część odjemnej powiększamy o 10, stojącą zaś obok (ze strony lewej) cyfrę odjemnej zmniejszamy o 1; głyby tą cyfrą było zero, to zamiast zera wystawiamy sobie 10, a poprzedzającą (od strony lewej) zmniejszamy o 1 i t. d.*

14. Chcąc wykonać próbę odejmowania, możemy ją oprzeć na tym, że (us. 3)

$$\text{reszta} + \text{odjemnik} = \text{odjemnej};$$

więc, jeżeli dobrze wykonaliśmy odejmowanie, to po dodaniu znalezionej reszty do odjemnika, powinniśmy otrzymać odjemną. Np.

*) Jeżeli w którym z tych odejmowań częściowych część odjemnej równa jest odpowiedniej części odjemnika (us. 11), a także, gdy nad zerem odjemnika, po roskładzie odjemnej na części, znajdzie w niej także brak oddzielnej odpowiedniej części, zaznaczony przez zero, to w reszcie, ze względu na otrzymać się mające później cyfry znaczące reszty, na odpowiednim miejscu, aby je zająć (§ 3, us. 11), piszemy zero.

$$\begin{array}{r}
 \text{jeżeli:} \quad 4364 \quad \text{to:} \quad 1675 \quad \text{albo (§ 4, us. 5):} \quad 2689 \\
 \quad \quad \quad \underline{-2689} \quad \quad \quad \underline{+2689} \quad \quad \quad \underline{+1675} \\
 \quad \quad \quad 1675, \quad \quad \quad 4364 \text{ (dobrze),} \quad \quad \quad 4364 \text{ (dobrze).}
 \end{array}$$

(Wszelkie próby, które prowadzą za sobą pisanie liczb nowych, albo w innym porządku, winniśmy pisać na boku, albotóż na osobnym kawałku papieru, aby nie zmniejszać wyraźności rachunku głównego, § 1 us. 9.). Jest to więc próba odejmowania przez dodawanie.

Opiérając się zaś na tym, cośmy mówili w ustępie 7-ym, że z liczb wchodzących do dodawania dwu składników można utworzyć dwa odejmowania (jeżeli $8-5=3$, to $8-3=5$, bo oba te odejmowania są odwrotne temuż dodawaniu $5+3=8$), możemy wykonać próbę odejmowania przez odejmowanie. Jeżeli bowiem odejmowanie jest dobrze wykonane, to, po odjęciu reszty od odjemnej, otrzymać powinniśmy poprzedni odjemnik, np.

$$\begin{array}{r}
 \text{jeżeli:} \quad 4364 \quad \text{to:} \quad 4364 \\
 \quad \quad \quad \underline{-2689} \quad \quad \quad \underline{-1675} \\
 \quad \quad \quad 1675, \quad \quad \quad 2689 \text{ (dobrze).}
 \end{array}$$

15. Ponieważ odejmowanie jest działaniem odwrotnym dodawaniu dwu składników (us. 7), więc moglibyśmy wykonać próbę dodawania dwu składników przez odejmowanie, od znalezionej sumy odejmując jeden (którykolwiek) ze składników; wtedy, powinniśmy otrzymać, jako resztę, drugi składnik. Więć np.

$$\begin{array}{r}
 \text{jeżeli:} \quad 323 \quad \text{to:} \quad 887 \\
 \quad \quad \quad \underline{+564} \quad \quad \quad \underline{-323} \\
 \quad \quad \quad 887, \quad \quad \quad 564 \text{ (dobrze).}
 \end{array}$$

Do tegoż się sprowadza próba dodawania wielu składników przez odejmowanie. Mianowicie: wszystkie składniki sprawdzanego dodawania zastępujemy przez dwa, za jeden uważając którykolwiek z danych składników, a za drugi przyjmując sumę pozostałych składników, którą oddzielnie znaleźć trzeba. Odjąwszy zaś ją od sumy sprawdzanego dodawania, powinniśmy jako resztę otrzymać ów oddzielnie uważany składnik tego dodawania. Albowiem, jeżeli sumę $5+3+4+7+6=25$ uważać będziemy jako sumę dwu składników, z których jeden jest np. 7, to:

$$25 = 5+3+4+7+6 = 7+(5+3+4+6) = 7+18$$

i otrzymamy $25-18=7$. Więć np.

$$\begin{array}{r}
 \text{jeżeli:} \quad 75326 \quad \text{to, gdy np.} \quad 75326 \quad \text{otrzymamy:} \\
 \quad \quad \quad 827 \quad \quad \quad 827 \quad \quad \quad 120346 \\
 \quad \quad \quad 3320 \quad \quad \quad 3320 \quad \quad \quad \underline{-79845} \\
 \quad \quad \quad 40501 \quad \quad \quad 27 \quad \quad \quad \underline{40501} \text{ (dobrze).} \\
 \quad \quad \quad 27 \quad \quad \quad 345 \\
 \quad \quad \quad \underline{345} \quad \quad \quad \underline{79845}, \\
 \underline{120346},
 \end{array}$$

Możemy także zrobić próbę dodawania przez dodawanie przy pomocy odejmowań częściowych w następujący sposób. Tak np. w powyższym przykładzie znajesz sumę 120346;

$\overline{120346}$ dodajemy też same składniki, wykonywając jednak dodawanie 12120 (czyto z góry na dół, czytóż odwrotnie) od strony lewej (§ 4, us. 14). Po dodaniu cyfr pierwszej (od strony lewej) kolumny mamy 11, które odejmujemy od liczby 12 znalezionej sumy, pozostaje 1, które piszemy na boku (lub na kawałku papieru położonego pod znalezionej sumą; § 1, us. 9). To 1 z następującym zerem znalezionej sumy tworzy liczbę 10. Dodawszy cyfry drugiej kolumny, mamy 8, które od powyższych 10 odejmujemy; pozostaje 2; przekreśliwszy 1 piszę obok 2. To 2 z następującą cyfrą 3 sumy przedstawia liczbę 23. Dodawszy cyfry trzeciej kolumny, mamy 22; po odjęciu tej liczby od 23, pozostaje 1; przekreśliwszy 2, piszę obok 1. Ta cyfra wraz z następującą cyfrą 4 sumy daje nam liczbę 14. Dodawszy cyfry przedostatniej kolumny, otrzymaną sumę częściową 12 odejmujemy od powyższej liczby; pozostaje 2; przekreśliwszy 1 piszę 2. To 2 z ostatnią cyfrą sumy daje liczbę 26. Dodawszy do siebie cyfry ostatniej kolumny i dostrzegszy, że otrzymana stąd liczba 26 jest tą samą liczbą, co powyższa, przekreśliwszy 2 i ¹⁾ widzimy, że nasze dodawanie jest dobrze zrobione, albowiem suma cyfr każdej kolumny wraz z dziesiątkami, wydzielonymi z dodania cyfr następującej (ze strony prawej) kolumny (§ 4, us. 15), jest należycie uwzględniona w otrzymanej sumie.

16. Gdy mamy wykonać odejmowanie liczb mianowanych prostych, to, ponieważ (us. 3)

$$\text{odjemna} = \text{odjemnikowi} + \text{reszcie},$$

a w dodawaniu liczb mianowanych prostych (§ 4, us. 18), suma jest wyrażona przy pomocy tej samej (jednej) jednostki, przy pomocy której są wyrażone składniki, więc:

Ażeby z odejmowania liczb mianowanych prostych otrzymać liczbę mianowaną prostą, potrzeba, aby odjemna i odjemnik były wyrażone przy pomocy tej samej jednostki.

Reszta, wypadająca z odejmowania liczb mianowanych prostych, jest wyrażona przy pomocy tej samej jednostki, co odjemna i odjemnik.

Gdy zatem mamy np. od 67 funtów odjąć 29 funtów, to w reszcie otrzymamy funty. Liczba zaś tych funtów będzie $67 - 29 = 38$, a więc liczba oderwana, zachodząca w reszcie, powstaje z odjęcia liczby oderwanej odjemnika od liczby oderwanej odjemnej. A więc: mając zadanie: od 67 funtów odjąć 29 funtów, podpiszemy 29 funtów pod 67 funtami, podkreśliśmy, odejmiemy liczbę oderwaną odjem-

¹⁾ Dla wyraźnego oznaczenia, że z odjęcia od 26 sumy liczb ostatniej kolumny nie się nie pozostanie, możemy przekreśliwszy 2, napisać: 0.

nika od liczby oderwanej odjemnej i przy reszcie, stąd otrzymanej, dopiszemy miano jednoski, téj saméj, jaką mamy w odjemnej i odjemniku:

$$\begin{array}{r} 67 \text{ fun.} \\ - 29 \text{ fun.} \\ \hline 37 \text{ fun.} \end{array}$$

Odpowiedź: z odejmowania otrzymamy 38 funtów.

17. Gdy mamy od pewnej liczby odjąć różnicę dwu liczb, np. od 23 odjąć (us. 6) różnicę $15 - 6$, co przy pomocy nawiasu (§ 4, us. 9) da się przedstawić: $23 - (15 - 6)$, to, aby znaleźć prawidłę postępowania, możemy rozumować w ten sposób. Jeżelibyśmy mieli od 23 odjąć 15, to z tego odejmowania wypadłaby pewna reszta, czyli różnica, którą możemy przedstawić (us. 6), pisząc $23 - 15$. Gdy zaś w zadaniu danym, zamiast odjemnika 15 (jak w zadaniu drugim), mamy odjemnik $15 - 6$, to możemy powiedzieć, że w odejmowaniu: od 23 odjąć 15, mamy zmniejszyć odjemnik 15 o 6. Skutkiem tego, jak wiemy (us. 9), reszta z tego odejmowania, t. j. różnica $23 - 15$, powiększy się o 6, t. j. będzie $(23 - 15) + 6$. To zaś wyrażenie oznacza, że od 23 mamy odjąć 15, a do liczby, stąd otrzymanej dodać 6, co także wprost wypada z wyrażenia bez nawiasu $23 - 15 + 6$; więc ¹⁾:

$$23 - (15 - 6) = 23 - 15 + 6,$$

t. j. *aby od pewnej liczby odjąć różnicę dwu liczb, należy od owej liczby odjąć odjemną różnicy i do tego dodać odjemnik różnicy.*

18. DOPEŁNIENIE ARYTMETYCZNE. Gdy mamy daną jakąkolwiek liczbę, to spośród liczb utworzonych przez 1 z zerami, większych od liczby danej, jest jedna najbliższa, t. j. najmniejsza z nich. Tak np., dla liczby 6982 najbliższa z większych liczb utworzonych przez 1 z zerami jest 10 000.

Dopełnieniem arytmetycznym liczby danej nazywamy różnicę między najbliższą z większych liczb, utworzonych przez 1 z zerami, a liczbą daną.

Gdy więc mamy znaleźć dopełnienie arytmetyczne liczby 5 692 800, to należałoby ją odjąć od 10 000 000, t. j. wykonać odejmowanie:

¹⁾ Albo nieco inaczej: według własności bb. w ustępie 9-ym, z odejmowania $23 - 15 = 8$ mamy

$$23 - (15 - 6) = 8 + 6;$$

jeżeli tu zamiast 8-u napiszemy tę samą liczbę, ale w postaci (us. 6) różnicy $23 - 15$, to mieć będziemy

$$23 - (15 - 6) = 23 - 15 + 6,$$

skąd widzimy, że: aby od pewnej liczby i t. d.

$$\begin{array}{r} 10000000 \\ - 5692800 \\ \hline \end{array}$$

Nadpisując nad odjemną cały rozkład jęj na części nie mniejsze od odpowiednich części odjemnika (us. 11), mieć będziemy cyfry 9 nad cyframi danęj liczby 5, 6, 9, 2, nad ostatnią zaś (od strony lewéj) znaczącą cyfrą, t. j. nad 8, mieć będziemy 10. Zamiast więc wykonywać odejmowanie od strony prawéj, możemy je wykonywać od strony lewéj, a nawet całkiem nie nadpisywać odjemnéj, tylko mając przed oczyma liczbę daną 5692800 wypisywać odrazu cyfry, powstające z odejmowania każdéj z początkowych (od strony lewéj) cyfr liczby danęj od 9, prócz ostatniéj cyfry znaczącéj, którą odejmiemy od 10, a nadto dopisać tyle zer, ile ich jest na końcu liczby danęj. Patrząc się więc na liczbę, wypowiadać będziemy wprost częściowe reszty 4, 3, 0, 7, 2, 0, 0 i w tym samym porządku je pisać, tak, że te cyfry utworzą nam szukane dopełnienie arytmetyczne liczby naszéj, t. j. 4 307 200. Podobnie, gdy mamy np. liczbę 939 409, patrząc się na nią wypowiadać będziemy odrazu częściowe reszty i zaraz je pisać: 0 (na początku, więc możemy go nie pisać, chyba, że i ono jest potrzebne), 6, 0, 5, 9, 1, tak, iż szukany dopełnieniem naszéj liczby będzie liczba 60 591.

(Zadania arytmetyczne. § 3.)

ROZDZIAŁ III.

MNOŻENIE I DZIELENIE LICZB CAŁKOWITYCH.

§ 6. MNOŻENIE.

1. «Zadanie. Pewna osoba cztery łokcie sukna kupiła, płacąc za każdy łokieć po złotych 6; wieleż dała za cztery łokcie?

Liczba złotych, którą ma zapłacić, składać się powinna z cztery razy 6, a zatem ta liczba równa będzie sumie liczb czterech jednokrotnych, z których każda wyrażała 6 złotych:

6 zł.

6 zł.

6 zł.

6 zł.

suma: $\overline{24}$ zł.

Gdyby ta osoba, zamiast łokci czterech sukna, więcej daleko była kupiła, trzeba by wiele czasu i miejsca do napisania 6 tyle razy, ile było łokci, a dopieroż do zebrania tego wszystkiego w jedną sumę. Do tak długiej roboty ciężkoby równie natężonej bacności przyłożyć i omyłki się w niej uchronić. A trafiłoby się nawet mogło, że życie człowieka nie wystarczyłoby na dokończenie takim sposobem podobnej roboty.

Szukano więc, jakby skrócić takowe dodawanie; równość liczb, mających się dodawać, skrócenie to łatwym uczyniła.»¹⁾

Podobnych zadań, np.

Rodzina robotnika potrzebuje dziennie 4 funty chleba; ile potrzebuje funtów chleba w ciągu roku, który ma 365 dni?

Sprzedaje ktoś pszenicę, po 54 złp. korzec; po wymierzeniu okazało się pszenicy 25 korcy; ile sprzedający otrzyma złotych za tę pszenicę?

i t. d., nikt nie rozwiązuje zapomocą dodawania. Wykonywanie bowiem dodawania jednakowych składników zostało znacznie ułatwionym przez wprowadzenie różnych skrótów, które były możliwe właśnie dlatego, że składniki były jednakowe.

Ponieważ zaś takie zadania, które doprowadzają do dodawania jednakowych składników, bardzo często się zdarzają, więc postępowanie

¹⁾ *Arytm. dla sz. nar.*, str. 32.

skrócone w tym przypadku dodawania jest nader ważne i dlatego uważa się je za osobne działanie, zwane mnożeniem. Możemy więc powiedzieć, że:

Zapomocą mnożenia krócej wykonywamy dodawanie jednakowych składników.

2. Gdy więc mamy np. dodawanie $6+6+6+6$, to mamy tu do zauważenia: powtarzający się składnik, t. j. liczbę 6, i jeszcze to, że ta liczba 6 jest wzięta jako składnik 4 razy, t. j. mamy do zauważenia drugą liczbę, wskazującą nam, ile razy 6 jest wzięte jako składnik. Powtarzający się składnik nazywamy *mnożną*; liczbę, wskazującą nam, ile razy mnożna jest wzięta jako składnik, nazywamy *mnożnikiem*; liczbę zaś, którą z mnożenia otrzymamy, t. j. sumę, która wypadłaby z dodawania, zastąpionego przez mnożenie, nazywamy *w mnożeniu iloczynem*.

Gdy więc np. dodawanie $6+6+6+6$, t. j. dodawanie 4-ch składników, z których każdy jest 6, zastępujemy przez mnożenie, to mnożną jest liczba 6, mnożnikiem jest liczba 4, a iloczynem liczba 24, t. j. suma tego dodawania, zastąpionego przez mnożenie 6-u przez 4.

Zamiast mówić: *mnożę 6 przez 4*, z uwagi, że iloczyn (jako suma) jest zebraniem 4 razy tylu jedności, ile ich jest w mnożnej 6, mówimy często: *6 powiększam 4 razy**, albotóż: (mam, biorę, ile będzie?) *4 razy po 6 jedności*, lub krócej¹⁾: *4 razy 6*. Powiemy zatem: *mnożąc 6 przez 4, otrzymam 24*, albo: *4 razy 6 jest 24*.

Dla oznaczenia, że dwie liczby mamy przez siebie pomnożyć, piszemy naprzód mnożną, a po niej mnożnik, kładąc między nimi znak \times albo $.$ (kropkę w części dolnej wiersza). Tak więc 6×4 , czyli 6.4 czytamy: *6 pomnożone przez 4*, albo: *4 razy 6*. I napiszemy: $6 \times 4 = 24$.

Ponieważ zaś wyrażenie 6×4 przedstawia liczbę 24, iloczyn liczb 6 i 4, więc także 6×4 nazywamy często iloczynem liczb 6 i 4, t. j. wyrażenie, powstałe przez połączenie mnożnej i mnożnika znakiem \times lub $.$, nazywamy także iloczynem, czyli *wskazane mnożenie nazywamy często iloczynem liczb*, do tego mnożenia wchodzących.

UWAGA. Mnożną piszemy przed mnożnikiem dlatego, że ważniejszym jest wiedzieć, *co* mamy, od tego, *ile* razy to mamy, tak, iż np. 6×4 niewłaściwie jest czytać: *6 razy 4*, ale należy**) czytać: *4 razy 6*, albowiem 6

*) Należy się chronić błędnego wyrażania się: 6 powiększam o 4 razy. — Zamiast pomnożyć przez 2, pomnożyć przez 3, mówimy często: *podwoić, potroić*.

**) Mogło na to skrócenie oddziaływać także to, że mówimy: *pomnożyć pewną liczbę razy*; np. ktoś pracą a oszczędnością pomnożył swój majątek 4 razy.

1) Gdy mówimy: *4 razy 6*, dlatego naprzód wypowiadamy mnożnik 4, że niezręcznie jest powiedzieć: *sześć cztery razy*, czego nawet przy pomocy cyfr napisać nie można, bo między cyframi 6 i 4 niema powodu kłaść przecinka.

razy 4 jestto: $4+4+4+4+4+4=4\times 6$, gdy 4 razy 6 jest: $6+6+6+6=6\times 4$ (por. us. 5).

3. Jeżeli więc mamy pomnożyć 6×4 , to mamy dane dwie liczby: mnożną 6 i mnożnik 4; powinniśmy zaś znaleźć iloczyn, t. j. liczbę, która by powstała z dodawania $6+6+6+6$, t. j. którąbyśmy otrzymali, biorąc mnożną jako składnik tyle razy, ile jedności jest w mnożniku. Możemy więc powiedzieć:

Mnożenie jestto działanie, zapomocą którego, mając dane dwie liczby, mnożną i mnożnik, odnajdujemy liczbę, zwaną iloczynem, którą otrzymalibyśmy z mnożnej, biorąc ją jako składnik tyle razy, ile jest jedności w mnożniku.

Według tego, mnożnik może być jakąkolwiek liczbą z szeregu liczb naturalnych (§ 1, us. 6); może zatem w szczególnym przypadku być jednością. Mamy wtedy mnożną wziąć raz jako składnik, aby utworzyć iloczyn, np. $7\times 1=7$, jest więc wtedy iloczyn = mnożnej¹⁾. —

Ponieważ mnożenie jest skróconym dodawaniem jednakowych składników, więc objaśnienie mnożenia winno być oparte na tym, iż, wychodząc z dodawania jednakowych składników, dopatrywać będziemy skrótów, jakie w tym dodawaniu zrobić będzie można.

Zauważymy tu jeszcze, że rozważane tu mnożna i mnożnik są liczbami z szeregu liczb naturalnych; z tego zaś, że dodawanie składników, będących liczbami tego szeregu, doprowadza nas do sumy (iloczynu), będącego liczbą tego szeregu (§ 4, us. 2 i 6), wypada, że *iloczyn dwu liczb z szeregu liczb naturalnych jest także liczbą tego szeregu.*

4. Jednak w przypadku, gdy *mnożna i mnożnik są liczbami jednocyfrowymi*, odszukiwanie iloczynu musi się odbywać wprost przez dodawanie. Tak np., gdy pytamy się: ile będzie 4 razy 8, to, aby odnaleźć iloczyn, postąpimy tak, jakeśmy robili, będąc dziećmi: odnajdziemy sumę $8+8+8+8=32$.

W ten sposób odnajdując iloczyny liczb jednocyfrowych, t. j. wykonując dodawania, w których mnożna jest wzięta jako składnik tyle razy, ile jedności ma mnożnik, nabywamy takięj wprawy, iż z czasem jesteśmy w stanie odrazu wypowiedzieć (bez namysłu): 4 razy 8 jest 32, albo: 5 razy 9 jest 45, i t. d.

Ponieważ zaś przy mnożeniu liczb większych iloczyny liczb jednocyfrowych wciąż nam są potrzebne, więc winniśmy się starać przede wszystkim o to, aby rzeczywiście nabyć wprawy należytej w wypowiedzaniu bez namysłu iloczynów liczb jednocyfrowych.

¹⁾ Gdyby mnożna była jednością, np. 1×7 , to, chociaż $1\times 7=1+1+1+1+1+1+1=7$, niezawsze możemy powiedzieć, że iloczyn = mnożnikowi, gdyż to będzie miało miejsce tylko wtedy, gdy mnożna 1 jest liczbą oderwaną (por. us. 6).

Iloczyny liczb jednocyfrowych są zestawione w tak zwaną tabliczkę mnożenia:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

W tej tabliczce liczby, znajdujące się w którymkolwiek wierszu poziomym (lub w którejkolwiek kolumnie pionowej), powstają każda z poprzedzającej, przez dodanie liczby, w tym wierszu (lub kolumnie) pierwszej*). Tak np., w wierszu siódmym, pierwszą liczbą jest 7; $7+7=14$ i dlatego drugą liczbą jest 14; $14+7=21$ i dlatego trzecią liczbą jest 21 i t. d. (taksamo w kolumnie siódmej). Takim sposobem w wierszu siódmym, są liczby 7, $7+7$, $7+7+7$, $7+7+7+7$, i t. d., t. j. 7×1 , 7×2 , 7×3 , 7×4 , i t. d., t. j. iloczyny pierwszej liczby siódmego wiersza przez pierwsze liczby pierwszej, drugiej, trzeciej, czwartej i t. d. kolumn. Podobnie w kolumnie siódmej są postawione iloczyny pierwszej liczby siódmej kolumny przez pierwsze liczby pierwszego, drugiego, trzeciego, czwartego i t. d. wierszy. A więc, aby znaleźć iloczyn dwu liczb jednocyfrowych [czyli, jak mówimy przez skrócenie (§ 4, us. 14): iloczyn dwucyfr], należy go szukać na przecięciu się wiersza, którego pierwszą liczbą jest jedna z tych cyfr, z kolumną, której pierwszą liczbą jest druga z tych cyfr. Tak np., iloczyn 8×6 znajdziemy albo na przecięciu się wiersza, zaczynającego się od liczby 8, z kolumną, zaczynającą się od liczby 6, albotóż na przecięciu się kolumny, zaczynającej się od liczby 8, z wierszem, zaczynającym się od liczby 6**).

* *) W pierwszym zaś wierszu i w pierwszej kolumnie są pokolei wypisane liczby od 1 do 9.

***) Pomysł tabliczki mnożenia przypisują filozofowi starożytniej Grecji, Pitagorasowi, i dlatego nazywają ją tabliczką Pitagorasa.

5. Zauważymy tu, że w mnożeniu *mnożnik ma odmienne znaczenie od mnożnej*. Gdy *mnożna jest składnikiem*, pewnym, że tak powiemy, przedmiotem, to mnożnik oznacza tylko, ile razy mnożną mamy wziąć jako składnik, czyli *mnożnik wskazuje działanie*, które mamy wykonać na mnożnej. Iloczyn zaś, jako suma, ma ten sam charakter, co mnożna. Zastępując mnożenie przez dodawanie, moglibyśmy skutecznie rachunek, nie wypisując zgoła mnożnika, gdyż jeżeli np. mnożną jest 6, a mnożnikiem 4, to możemy znaleźć iloczyn, nie pisząc w rachunku mnożnika, mianowicie: $\text{iloczyn} = 6 + 6 + 6 + 6 = 24$, gdy tymczasem bez wypisania mnożnej obejść się nie możemy (por. us. 2, Uwaga).

6. Widoczniej to się jeszcze przedstawi, gdy weźmiemy zadanie na mnożenie liczb mianowanych prostych. Np. pewna osoba kupiła 4 łokcie sukna, płacąc za każdy łokieć po złotych 6; wieleż dała za kupione sukno? Rozumować będziemy tak: ponieważ za jeden łokieć płaciła 6 złotych, to za 4 łokcie zapłaciła 4 *razy* więcej (niż 6 złotych), a więc trzeba 6 *złotych* wziąć jako składnik 4 *razy*, czyli 6 *złotych* pomnożyć przez 4. Gdy mówimy: pomnożyć przez 4, to nie można tu dodać: łokcie; ta liczba 4 jest niezależną od tego, że w zadaniu odpowiadała liczbie kupionych łokci. Gdybyśmy np. kupowali nie 4 łokcie sukna, ale np. 4 kaczki, płacąc za każdą po złotych 6, to również powiedzielibyśmy: trzeba 6 złotych pomnożyć przez 4. Jest więc nam wszystko jedno w mnożeniu, czemu odpowiada nasz mnożnik 4 (łokciom, czy kaczkom). — Gdy mówimy: mnożę 6 złotych przez 4, to nie możemy przy 4-ch wypowiedzieć nazwania jednostki (§ 1, us. 10), a tymczasem przy mnożnej: 6 złotych, wypowiedzieliśmy wyraźnie: złotych — mnożnik bowiem 4 oznacza właściwie działanie, mianowicie: ile razy mnożną mamy wziąć jako składnik. Z tego wypada, że *w mnożeniu liczb mianowanych mnożnik jest liczbą oderwaną*.

Gdy pomnożę 6 złotych przez 4,

$$6 \text{ zł.} \times 4 = 6 \text{ zł.} + 6 \text{ zł.} + 6 \text{ zł.} + 6 \text{ zł.} = 24 \text{ zł.},$$

to w iloczynie, jako sumie liczb mianowanych prostych (§ 4, us. 18), wypadły nam złote, t. j. iloczyn 24 zł., jest wyrażony przy pomocy tej samej jednostki, co mnożna, 6 zł. A więc: *w mnożeniu liczb mianowanych iloczyn jest liczbą mianowaną, wyrażoną przy pomocy tej samej jednostki, co mnożna*¹⁾. Liczba oderwana, zachodząca w iloczynie (§ 1, us. 10), jak np. w powyższym przykładzie: 24, jako iloczyn 6×4 , jest niezależna od nazwania jednostki, t. j. jest iloczynem liczby oderwanej mnożnej, 6-u, przez mnożnik 4.

7. Gdy w mnożeniu liczb oderwanych, mamy na myśli tylko liczbę, którą otrzymamy jako iloczyn t. j. gdy nie zaznaczamy wyraźnie,

¹⁾ Tak, iż moglibyśmy napisać $6 \text{ zł.} \times 4 = (6 \times 4) \text{ zł.}$

która z liczb mnożonych jest mnożną, a tym samym która jest mnożnikiem, wtedy ogólnie i mnożną i mnożnik nazywamy czynnikami iloczynu.

Właściwie istnieje tylko mnożenie dwu czynników, podobnie jak zasadniczym jest tylko dodawanie dwu składników (§ 4, us. 6). Ale liczbę, wypadającą np. z mnożenia 6×4 , możemy sobie wystawić przedstawioną (us. 2) przez ten niewykonany iloczyn, a tym samym tę liczbę 6×4 możemy pomnożyć jeszcze np. przez 3, t. j. $6 \times 4 \times 3$, co wyraźniej przy pomocy nawiasu przedstawilibyśmy: $(6 \times 4) \times 3$. Jeżeli liczbę, która stąd wypadnie, wystawimy sobie jeszcze pomnożoną np. przez 5, to będziemy mieli: $6 \times 4 \times 3 \times 5$, albo wyraźniej: $[(6 \times 4) \times 3] \times 5$. I t. d. Takie wskazane kolejne mnożenia: $6 \times 4 \times 3$, $6 \times 4 \times 3 \times 5$ i t. d. nazywamy*): iloczynami wielu czynników, rozumiejąc przez to liczbę, która po skutecznieniu działań wypadnie; postępowanie zaś, mające na celu otrzymanie liczby, przedstawionej przez iloczyn wielu czynników, nazywamy mnożeniem wielu czynników. Ono, jak widzieliśmy, sprowadza się do kilku mnożeń po dwa czynniki przez siebie — jest więc działaniem złożonym, tak, iż zasadniczym jest tylko mnożenie dwu czynników.

8. Samo się przez się rozumié, że, gdy z zadań, doprowadzających do mnożenia liczb mianowanych, nie wykonywając od razu mnożeń, otrzymamy iloczyn wielu czynników, jeden tylko z czynników iloczynu może być liczbą mianowaną i że przy pomocy téj saméj jednostki, w którój on jest wyrażony, jest również wyrażony cały iloczyn. Weźmy np. zadanie: Sążen ma 3 łokie; łokiec ma 2 stopy; stopa ma 12 cali; ile sążen ma cali? Kiedy jedna stopa ma 12 cali, to 2 stopy, czyli łokiec, ma cali 2 razy więcej, t. j. $12 \text{ cali} \times 2$, a sążen, jako mający 3 łokie, ma 3 razy więcej cali niż łokiec, t. j. 3 razy więcej niż 12 cali $\times 2$, czyli sążen ma cali: $12 \text{ cali} \times 2 \times 3$. Tutaj mamy (us. 6) naprzód $12 \text{ cali} \times 2 = 24 \text{ cale}$, a następnie $24 \text{ cale} \times 3 = 72 \text{ cale}$, więc:

$$12 \text{ cali} \times 2 \times 3 = 72 \text{ cale.}$$

9. Jeżeli mamy np. 6×4 , to mamy 6 wziąć jako składnik 4 razy, czyli, ponieważ 6 jest skupieniem 6-u jedności, mamy każdą z 6-u jedności wziąć jako składnik 4 razy, a w ten sposób z każdéj jedności (liczby 6) powstanie liczba 4, czyli mieć będziemy 6 razy liczbę 4, czyli liczbę 4 pomnożoną przez 6, t. j. 4×6 . A więc $6 \times 4 = 4 \times 6$, t. j.

Iloczyn dwu czynników nie zależy od ich porządku,

co mamy rozumiéć w ten sposób, iż przy mnożeniu dwu liczb (oderwanych) 4 i 6 przez siebie, otrzymamy tę samą liczbę z pomnożenia 6-u przez 4, co z pomnożenia 4-ch przez 6.

*) Podobnie, jak wskazane mnożenie dwu czynników nazywamy ich iloczynem (us 2).

Rozumowanie powyższe możemy piśmiennie tak przedstawić:

$$\begin{array}{r}
 6 \times 4 = 6 + 6 + 6 + 6 = \quad 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \times 6
 \end{array}$$

[6×4 oznacza, że liczbę 6 mamy wziąć jako składnik 4 razy, co piszemy; każdy składnik 6 jest sumą 6-u jedności, co wypisujemy, pisząc składniki pod sobą*); ponieważ suma nie zależy od porządku składników, więc te jedności możemy dodawać do siebie w dowolnym porządku; dodając je kolumnami, otrzymamy $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$, t. j. 6 razy 4, czyli 4×6].

10. Gdy mamy iloczyn wielu czynników, np.

$$6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2,$$

to ten iloczyn możemy uważać jako złożony z czynnika 6, czynnika przedstawionego (us. 2) przez iloczyn 4×3 i czynników 5 i 2. A ponieważ iloczyn dwu czynników nie zależy od porządku, w jakim piszemy czynniki, więc $4 \times 3 = 3 \times 4$, a tym samym

$$6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2 = 6 \times 3 \times 4 \times 5 \times 2,$$

Podobnie rozumując, moglibyśmy w iloczynie $6 \times 3 \times 4 \times 5 \times 2$ przestawić między sobą np. czynniki 6 i 3; wyrażenie $3 \times 6 \times 4 \times 5 \times 2$ przedstawiałoby tę samą liczbę, co poprzednie wyrażenia, tak, iż

$$6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2 = 3 \times 6 \times 4 \times 5 \times 2,$$

i t. d. Porównywając ze sobą te i różne inne wyrażenia iloczynu, jakie otrzymalibyśmy przez kolejne przestawianie dwu obok siebie stojących czynników, przypatrując się rozmaitemu porządkowi, w jakim te same czynniki w dwu różnych wyrażeniach po sobie następują, widzimy, że wogóle

Iloczyn nie zależy od porządku czynników.—

Jeżeli mamy np. iloczyn $6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 7$, a chcemy w nim częściowy iloczyn np. $4 \times 3 \times 2$ zastąpić przez wykonany iloczyn $4 \times 3 \times 2 = 24$ i postawić go np. po czynniku 5, to możliwość zrobienia tego udowodnimy w sposób następujący. Wiemy, że iloczyn nie zależy od porządku czynników, oraz, że, mając wskazany iloczyn kilku czynników, należy właściwie (us. 7) pierwszy jego czynnik pomnożyć przez drugi, otrzymany iloczyn przez trzeci i t. d. Mamy zatem:

$$\begin{aligned}
 6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 7 &= 4 \times 3 \times 2 \times 6 \times 5 \times 7 = 12 \times 2 \times 6 \times 5 \times 7 = \\
 &= 24 \times 6 \times 5 \times 7 = 6 \times 5 \times 24 \times 7.
 \end{aligned}$$

*) Moglibyśmy wszystkie te jedności wypisać obok siebie, a następnie każde cztery jedności (zaczynając od początku, lub końca) zastąpić przez liczbę 4.

Podobnie, jeżeli w danym iloczynie chcemy czynniki 6, 3 i 2 zastąpić przez ich iloczyn wykonany, stawiając go na końcu, i mieć jednocześnie na początku iloczyn 5-u i 4-ch, to możemy uzasadnienie tego tak przeprowadzić:

$$6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 7 = 6 \times 3 \times 2 \times 5 \times 4 \times 7 = 18 \times 2 \times 5 \times 4 \times 7 = \\ = 36 \times 5 \times 4 \times 7 = 5 \times 4 \times 7 \times 36 = 20 \times 7 \times 36,$$

t. j. $6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 7 = (5 \times 4) \times 7 \times (6 \times 3 \times 2) = 20 \times 7 \times 36$.

Widzimy więc, że w iloczynie (wskazanym) kilku czynników, możemy dowolnie wybrane czynniki zastępować przez wykonane ich iloczyny.

11. Tego, że iloczyna nie zależy od porządku czynników, można ściśle dowieść w sposób następujący. Dowiedliśmy już (us. 9), że

a. *Iloczyn dwu czynników nie zależy od ich porządku.*

Na mocy tego łatwo będzie wyprowadzić, że

b. *Iloczyn nie zmienia się, gdy zmieniamy porządek dwu jego pierwszych czynników.* Np. $6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2$ ma być tą samą liczbą, co $4 \times 6 \times 3 \times 5 \times 2$.

W pierwszym bowiem razie mamy liczbę, przedstawioną przez iloczyn 6×4 , pomnożyć pokolei przez czynniki 3, 5, 2; w drugim zaś razie mamy liczbę, przedstawioną przez iloczyn 4×6 , pomnożyć w tej samej kolei przez też same czynniki 3, 5, 2. A że iloczyny 6×4 i 4×6 , na mocy własności a., przedstawiają tę samą liczbę, więc mnożymy przez 3, 5, 2 w obu razach tę samą liczbę, przez co dochodzimy w obu razach do tej samej liczby, t. j.

$$6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2 = 4 \times 6 \times 3 \times 5 \times 2.$$

c. *Iloczyn trzech czynników nie zmienia się, gdy przedstawimy między sobą dwa ostatnie jego czynniki.* Np. $6 \times 3 \times 4$ ma być tą samą liczbą, co $6 \times 4 \times 3$. W iloczynie $6 \times 3 \times 4$ liczbę 6×3 możemy uważać jako mnożną, liczbę zaś 4 jako mnożnik; więc iloczyn $6 \times 3 \times 4$ oznacza, iż liczbę 6×3 mamy wziąć cztery razy jako składnik. Każdy znowu z tych czterech iloczynów 6×3 , jako iloczyn mnożnej 6 przez mnożnik 3, oznacza, iż mnożna 6 ma być wzięta trzy razy jako składnik. Mamy więc, pisząc każdy z czterech składników 6×3 , po zastąpieniu go przez sumę, w oddzielnym wierszu, a następnie, (na zasadzie, że suma nie zależy od porządku składników), po zebraniu wypisanych składników kolumnami:

$$\begin{array}{r} 6 \times 3 \times 4 = 6 \times 3 + 6 \times 3 + 6 \times 3 + 6 \times 3 = \\ \quad \quad 6 \quad +6 \quad +6 \\ \quad +6 \quad +6 \quad +6 \\ \quad +6 \quad +6 \quad +6 \\ \quad +6 \quad +6 \quad +6 \\ \hline \quad 6 \times 4 + 6 \times 4 + 6 \times 4 = 6 \times 4 \times 3 \end{array}$$

(bo wypadło nam, że liczbę 6×4 mamy wziąć 3 razy jako składnik). Zatem $6 \times 3 \times 4 = 6 \times 4 \times 3$.

d. *Iloczyn nie zmienia się, gdy przedstawimy między sobą dwa ostatnie jego czynniki.* Np. $6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2$ ma być tą samą liczbą, co $6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 5$. W obu razach mamy 6 pomnożyć przez 4, a następnie przez 3; liczbę, którą w ten

sposób otrzymamy, nazwijmy L . Raz więc trzeba liczbę L pomnożyć przez 5, a później przez 2, t. j. $L \times 5 \times 2$, drugim zaś razem trzeba tę samą liczbę L pomnożyć przez 2, a później przez 5, t. j. $L \times 2 \times 5$. Lecz na mocy własności c. jest $L \times 5 \times 2 = L \times 2 \times 5$. Że zaś w obu tych wyrażeniach liczba L jest tym samym, mianowicie liczbą, przedstawioną przez iloczyn $6 \times 4 \times 3$, więc zamiast L pisząc to jej wyrażenie, mamy

$$6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2 = 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 5.$$

e. Iloczyn nie zmienia się, gdy przestawimy między sobą którekolwiek dwa czynniki sąsiednie. Np. $6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 7$ ma być tą samą liczbą, co $6 \times 4 \times 5 \times 3 \times 2 \times 7$. Na mocy własności d. mamy $6 \times 4 \times 3 \times 5 = 6 \times 4 \times 5 \times 3$, t. j. oba te iloczyny przedstawiają tę samą liczbę. Mnożąc te dwa wyrażenia tej samej liczby przez 2, a następnie przez 7, dojdziemy do tej samej liczby, t. j.

$$6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 7 = 6 \times 4 \times 5 \times 3 \times 2 \times 7.$$

f. *Nie zmieniając iloczynu, możemy którykolwiek jego czynnik sprowadzić na miejsce pierwsze, którykolwiek z pozostałych na drugie i t. d.* Opiérajac się bowiem na własności e., możemy dopóty pewien czynnik, który chcemy sprowadzić na miejsce pierwsze, wciąż przemieszczać z każdym czynnikiem, który obok niego z lewej strony znajdować się będzie, dopóki się on nie znajdzie na pierwszym miejscu. Podobnie będziemy postępować z czynnikiem, który chcemy widzieć na miejscu drugim i t. d. W taki sposób zawsze możemy ustawić czynniki iloczynu w dowolnym porządku, nie zmieniając jego wartości, czyli

Iloczyn nie zależy od porządku czynników.

12. Z tej własności (us. 10) wypada, że

Aby iloczyn pomnożyć przez pewną liczbę, można przez tę liczbę pomnożyć którykolwiek z jego czynników. Np., aby iloczyn $6 \times 4 \times 3 \times 5 = 360$ pomnożyć przez 2, można np. składnik 4 pomnożyć przez 2, bo, gdy $6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2 = 360 \times 2$, to, z uwagi, że iloczyn nie zależy od porządku czynników, zamiast $6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2$ możemy napisać $6 \times 4 \times 2 \times 3 \times 5$, a w tym wyrażeniu uważać (us. 2) iloczyn 4×2 za jedną liczbę. Mamy więc

$$6 \times (4 \times 2) \times 3 \times 5 = 6 \times 8 \times 3 \times 5 = 360 \times 2.$$

I nawzajem: *jeżeli którykolwiek czynnik iloczynu mnożymy przez pewną liczbę, to tym samym ten iloczyn przez tę liczbę mnożymy*, bo jeżeli np. $6 \times 4 \times 3 \times 5 = 360$, to

$$6 \times (4 \times 2) \times 3 \times 5 = 6 \times 4 \times 2 \times 3 \times 5 = 6 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2 = \\ = (6 \times 4 \times 3 \times 5) \times 2 = 360 \times 2.$$

Jeżeli zamiast, mówić «pomnożyć przez pewną liczbę», powiemy «powiększyć pewną liczbę razy» (us. 2), to powyższe własności możemy tak wysłować: *aby iloczyn powiększyć pewną liczbę razy, można którykolwiek z jego czynników powiększyć tę samą liczbę razy*, i: *jeżeli którykolwiek czynnik iloczynu powiększamy pewną liczbę razy, to skutkiem tego iloczyn powiększa się tę samą liczbę razy.*

13. Gdy więc mamy np. iloczyn liczb 5 i 3 pomnożyć przez liczbę 6, to możemy przez tę liczbę 6 pomnożyć albo wprost liczbę, przedstawioną przez iloczyn 5×3 , albowież przez 6 pomnożyć jeden z jego czynników, a liczbę, stąd otrzymaną, pomnożyć przez drugi czynnik. Te sposoby otrzymywania liczby, przedstawionej przez iloczyn $5 \times 3 \times 6$, możemy, przy pomocy nawiasów, tak uwydatnić:

$$(5 \times 3) \times 6 = 5 \times (3 \times 6) = (5 \times 6) \times 3.$$

Liczba tych sposobów przedstawienia i otrzymania iloczynu $6 \times 4 \times 5$ znacznie się powiększy, gdy przedstawiać będziemy między sobą czynniki (jako łatwo widzieć przez zastąpienie w § 4 ustępie 10-ym znaków + przez znaki \times). — Liczba sposobów otrzymania iloczynu czterech czynników będzie znacznie większą. I t. d. — Moglibyśmy (podobnie jak w dodawaniu, § 4, us. 10) powiedzieć: *mnożenie trzech lub więcej czynników możemy uskutecznić przy pomocy mnożeń częściowych którychkolwiek czynników, wziętych w jakimkolwiek porządku* (porównaj drugą część us. 10-go, str. 64).

14. Jeżeli np. liczbę, przedstawioną przez sumę $4+5+6=15$, mamy pomnożyć przez 3, t. j. *) $(4+5+6) \times 3$, to należy sumę $4+5+6$ wziąć 3 razy jako składnik: $4+5+6+4+5+6+4+5+6$; a że dodawanie wielu składników może być uskutecznione przy pomocy częściowych dodawań którychkolwiek składników, wziętych w jakimkolwiek porządku (§ 4, us. 10), więc tę sumę możemy zastąpić przez sumy częściowe: jedną składników 4, drugą składników 5, trzecią składników 6, co przedstawimy, ujmując dla większej wyraźności oddzielne sumy częściowe w nawiasy, tak: $(4+4+4)+(5+5+5)+(6+6+6)$; ale: $4+4+4=4 \times 3$; $5 \times 5 \times 5 = 5 \times 3$; $6+6+6=6 \times 3$, tak, iż zastąpiwszy sumy częściowe przez te iloczyny, zamiast naszej sumy mieć będziemy: $4 \times 3 + 5 \times 3 + 6 \times 3$. Postępowanie to tak się piśmiennie przedstawi:

$$15 \times 3 = (4+5+6) \times 3 = 4+5+6+4+5+6+4+5+6$$

$$= (4+4+4) + (5+5+5) + (6+6+6) = 4 \times 3 + 5 \times 3 + 6 \times 3$$

(i rzeczywiście $15 \times 3 = 12 + 15 + 18$). Zadanie więc nasze: sumę $4+5+6$ pomnożyć przez 3 sprowadziliśmy do sumy iloczynów każdego z oddzielnych składników danej sumy przez tę liczbę 3, t. j. $(4+5+6) \times 3 = 4 \times 3 + 5 \times 3 + 6 \times 3$. A więc:

*Aby sumę pomnożyć przez pewną liczbę**), można wszystkie składniki sumy pomnożyć przez tę liczbę.*

Jeżeli w iloczynach $(4+5+6) \times 3$, 4×3 , 5×3 , 6×3 zmienimy porządek czynników (us. 9), to otrzymamy: $3 \times (4+5+6) = 3 \times 4 + 3 \times 5 + 3 \times 6$, czyli:

Aby liczbę daną pomnożyć przez sumę kilku liczb, można liczbę daną pomnożyć przez każdy ze składników tej sumy i otrzymane iloczyny do siebie dodać.

*) Gdybyśmy bez nawiasu napisali $4+5+6 \times 3$, toby to nie oznaczało, że liczbę $4+5+6$ mamy pomnożyć przez 3, lecz tylko: liczbę 6 pomnożyć przez 3 i ten iloczyn dodać do sumy $4+5$.

**) Albo: powiększyć pewną liczbę razy.

Nawzajem: jeżeli wszystkie składniki sumy mnożymy przez pewną (tę samą) liczbę, to skutkiem tego sumę przez tę liczbę mnożymy, a także: jeżeli daną liczbę mnożymy przez każdy ze składników pewnej sumy i te iloczyny do siebie dodamy, to tym samym liczbę daną mnożymy przez tę sumę. Bo np. jeżeli, mając sumę $4+5+6=15$, pomnożymy każdy jej składnik np. przez 3, to $4\times 3+5\times 3+6\times 3=4+4+4+5+5+5+6+6+6=(4+5+6)+(4+5+6)+(4+5+6)=(4+5+6)\times 3=15\times 3$,
 t. j. $4\times 3+5\times 3+6\times 3=(4+5+6)\times 3$,
 a także (us. 9) $3\times 4+3\times 5+3\times 6=3\times(4+5+6)$.

15. Z dodawania dwu składników, np. $4+2=6$, możemy przejść do odejmowania (§ 5, us. 7), np. $6-4=2$. Na mocy zaś dowiedzionych w ustępie poprzedzającym własności, mamy np. $4\times 8+2\times 8=6\times 8$; z tego zaś dodawania dwu składników: $(4\times 8)+(2\times 8)=(6\times 8)$ możemy przejść do odejmowania: $(6\times 8)-(4\times 8)=(2\times 8)$, czyli, pisząc bez nawiasów (któreśmy dodali tylko dla uwydatnienia, że tak w dodawaniu, jak i w odejmowaniu, zachodzą tylko trzy liczby), $6\times 8-4\times 8=2\times 8$. Jeżeli zaś tu w iloczynie 2×8 zamiast liczby 2 napiszemy (powyżej przywiedzione) jej wyrażenie przez liczby odejmowania pierwotnego, t. j. napiszemy (§ 5, us. 6) różnicę $6-4$, to ostatnie odejmowanie możemy napisać tak:

$6\times 8-4\times 8=(6-4)\times 8$, albo: $(6-4)\times 8=6\times 8-4\times 8$,
 t. j. jeżeli odjemną i odjemnik mnożymy przez tę samą liczbę, to skutkiem tego różnicę przez tę liczbę mnożymy, i: aby różnicę dwu liczb pomnożyć przez pewną liczbę, można odjemną i odjemnik pomnożyć przez tę liczbę.

Z tej własności robimy niekiedy użytek przy wykonywaniu mnożenia. Tak np., gdy mamy liczbę 2359 pomnożyć przez 9, to z uwagi, że $9=10-1$,

$$2359\times 9=2359\times(10-1)=2359\times 10-2359, \text{ albo np.}$$

$$8995\times 7=(9000-5)\times 7=9000\times 7-5\times 7,$$

$$4326\times 998=4326\times(1000-2)=4326\times 1000-4326\times 2, \text{ i t. d.}$$

16. Mamy dwie sumy, np. jedną $4+5+6$, drugą $8+9$; chcemy je przez siebie pomnożyć: $(4+5+6)\times(8+9)$. Jeżeli jedną z nich, $4+5+6$, będziemy uważać (§ 4, us. 6) jako przedstawienie liczby, to, aby tę liczbę pomnożyć przez sumę $8+9$, można ją pomnożyć przez każdy ze składników sumy $8+9$ i otrzymane iloczyny do siebie dodać (us. 14), t. j. $(4+5+6)\times 8+(4+5+6)\times 9$. W tych iloczynach mamy sumę $4+5+6$ pomnożyć raz przez liczbę 8, a drugim razem przez liczbę 9, co możemy skutecznie, mnożąc każdy składnik sumy $4+5+6$ przez te liczby (us. 14), tak iż otrzymamy $4\times 8+5\times 8+6\times 8+4\times 9+5\times 9+6\times 9$. Mamy więc:

$$(4+5+6)\times(8+9)=4\times 8+5\times 8+6\times 8+4\times 9+5\times 9+6\times 9$$

(i rzeczywiście $15\times 17=32+40+48+36+45+54$), t. j. aby dwie sumy przez

siebie pomnożyć, można każdy składnik jednej sumy pomnożyć przez każdy składnik drugiej, a otrzymane iloczyny częściowe do siebie dodać ¹⁾).

Gdybyśmy mieli trzy lub więcej sum przez siebie pomnożyć, to sumę częściowych iloczynów, otrzymaną z pomnożenia dwu tych sum, pomnożylibyśmy w ten sam sposób przez trzecią i t. d.

17. Gdy idzie o wykonywanie mnożenia, to, jakżeśmy mówili (us. 4), należy przedewszystkiem postarać się o to, aby nabrać należytej wprawy w wypowiadanie odrazu iloczynów liczb jednocyfrowych.

Gdy zaś już tę wprawę posiadamy, to tym samym wiedzieć będziemy, że np. 5 dziesiątków $\times 7$ jest 35 dziesiątków, t. j., że gdy mamy 50×7 , trzeba 35 tak napisać, aby cyfra 5 znalazła się na miejscu drugim (od strony prawej) (§ 3, us. 9), a więc na miejscu pierwszym należy postawić zero (§ 3, us. 11); jest więc: $50 \times 7 = 350$. Podobnie, gdy mamy np. 800×4 , czyli 8 setek $\times 4$, to otrzymamy 32 setki (§ 3, us. 10), więc $800 \times 4 = 3200$. Taksamo $5000 \times 8 = 40000$ i t. d. ²⁾).

Mieliśmy tu pomnożyć przez siebie dwie liczby, z których jedna była wyrażona przez cyfrę znaczącą z zerami, np. 800, druga zaś była liczbą jednocyfrową, np. 4. Iloczyn wyrażony został przez liczbę otrzymaną z pomnożenia cyfry znaczącej jednego czynnika przez czynnik jednocyfrowy, $8 \times 4 = 32$, do której to liczby dopisaliśmy dwa zera, t. j. zera, znajdujące się przy cyfrze znaczącej w czynniku pierwszym; otrzymaliśmy 3200. A zatym wogóle,

Aby pomnożyć liczbę, wyrażoną przez cyfrę znaczącą z zerami, przez liczbę jednocyfrową, do (wiadomego z tabliczki mnożenia) iloczynu czynnika jednocyfrowego i cyfry znaczącej dopisujemy zera, znajdujące się przy tej cyfrze.

18. Weźmy zadanie na mnożenie jakiegokolwiek liczby wielocyfrowej przez jednocyfrową, np. 692×4 . Mamy więc tu znaleźć (us. 3) liczbę, którą otrzymalibyśmy z mnożnej 692, biorąc ją 4 razy jako składnik. Wykonajmy to dodawanie (§ 4, us. 15):

692	oczywiście, że, wprawiawszy się już w wypowia-
692	danie odrazu iloczynów liczb jednocyfrowych,
692	zamiast dodawać do siebie powoli 4 składniki
692	2, mówimy odrazu: 4 razy 2 jest 8, a tę cyfrę
2768	8 podpisujemy pod kręską, pod cyframi dodanej

kolumny, t. j. pod cyframi 2 (składników); podobnie dalej, zamiast dodawać do siebie 4 składniki 9, mówimy odrazu: 4 razy 9 jest 36, pod-

¹⁾ Na tej własności ogólniej opiera się wykonywanie mnożenia (por. us. 20, 24).

²⁾ Można tu powiedzieć: ponieważ iloczyn nie zależy od porządku czynników (us. 9), więc i: $7 \times 50 = 350$; $4 \times 800 = 3200$ i t. d.; ten przypadek jednak, obecnie jeszcze nam niepotrzebny, będzie ogólniej traktowany w ustępie 23-im.

pisujemy 6 pod cyframi 9 (składników), a 3 dodajemy wraz z cyframi kolumny trzeciój, przy dodawaniu których znów mówimy krótko: 4 razy 6 jest 24; $24+3=27$, co podpisujemy tak, aby 7 było pod cyframi 6.

Jeżeli zaś zamiast wypisywać składnik 692 cztery razy, napiszemy go raz, a pod nim (aby była blisko) napiszemy *) liczbę 4, która nam oznaczać będzie, że powinniśmy sobie w umyśle wystawić liczbę 692 podpisaną pod sobą 4 razy, czyli 4 razy wziętą jako składnik (t. j. pod mnożną 692 podpisujemy mnożnik 4), a pod liczbą 4 poprowadzimy kręskę poziomą (jak w dodawaniu, t. j. dla oddzielenia liczb danych od szukanój) i zupełnie taksamo będziemy postępować, jak poprzednio,

$$\begin{array}{r} 692 \\ \times 4 \\ \hline 2768 \end{array}$$

to mówić będziemy: 4 razy 2 jest 8, piszę 8 pod cyfrą 2 (mnożną); 4 razy 9 jest 36, piszę 6 pod cyfrą 9 (mnożną), a 3 dodam do tego,

co otrzymam z uwzględnienia cyfry 6; 4 razy 6 jest 24; $24+3=27$. Widzimy więc, że mnożenie liczby wielocyfrowej przez jednocyfrową wykonywa się zupełnie tak, jak dodawanie kilku jednakowych składników. Tylko: w dodawaniu mamy te składniki wyraźnie wypisane wszystkie, gdy tymczasem w mnożeniu skraccamy sobie postępowanie, pisząc raz tylko (powtarzający się) składnik i pod nim podpisując liczbę, oznaczającą, ile takich składników powinniśmy sobie wystawić wypisanych pod sobą. Tym się także objaśnia, dlaczego to mnożenie zaczynamy tak jak dodawanie (§ 4, us. 14): od strony prawej.

Podobnie: mnożenie np. 740593×5 jest takim samym postępowaniem, jak dodawanie 5-u składników 740593:

$$\begin{array}{r} 740593 \\ 740593 \\ 740593 \\ 740593 \\ 740593 \\ \hline 3702965 \end{array} \quad \begin{array}{r} 740593 \\ \times 5 \\ \hline 3702965 \end{array}$$

tak w jednym bowiem, jak i w drugim działaniu mówimy: 5 razy 3 jest 15, piszę 5 pod 3, a 1 pozostaje do dodania dalszego; 5 razy 9 jest 45, $45+1=46$, piszę 6 pod 9, a 4 pozostaje do dodania; 5 razy 5 jest 25, $25+4=29$, piszę 9 pod 5, a 2 pozostaje do dodania dalszego, lecz stawiamy to 2 odrazu obok (t. j. pod 0), bo prócz tych 2-u niema niczego innego do oznaczenia na tym miejscu; dalej: 5 razy 4 jest 20, stawiam 0 (§ 3, us. 11) pod 4, a 2 pozostaje do dodania, 5 razy 7 jest 35, $35+2=37$, którąto liczbę piszę tak, aby jej cyfra 7 była pod 7.

*) Wszystko jest jedno, pod którą cyfrą mnożnej podpiszemy mnożnik, bo on nam tylko symbolizuje dodawanie, odmienne ma od mnożnej znaczenie (us. 5); zwykle jednak mnożnik jednocyfrowy piszemy pod pierwszą od strony prawej cyfrą znaczącą mnożnej.

19. Widzimy więc wogóle, że postępowanie przy mnożeniu liczby wielocyfrowej przez jednocyfrową możemy ująć w następujące правило:

Aby pomnożyć liczbę wielocyfrową przez jednocyfrową, podpisujemy mnożnik pod mnożną i, przeprowadziwszy pod mnożnikiem kręskę poziomą, mnożymy, zaczynając od strony prawej, każdą cyfrę znaczącą mnożnej przez mnożnik; jeżeli z takiego mnożenia częściowego wypadnie iloczyn nie większy od 9, to podpisujemy go pod kręską pod mnożoną cyfrą mnożnej; jeżeli zaś ten iloczyn jest większy od 9, to z otrzymanej liczby oddzielamy dziesiątki, a pozostałą część podpisujemy pod kręską pod mnożoną cyfrą mnożnej, cyfrę zaś dziesiątków dodamy do iloczynu powstałego z mnożenia następującej cyfry mnożnej przez mnożnik; na niezajętych zaś miejscach (jeżeli one będą), piszemy zera.

20. Możemy dojść do tegoż pravidła, nie posilkując się sposobem wykonywania dodawania, ale bezpośrednio, opierając się na tym, cośmy o mnożeniu (us. 3) powiedzieli.

Mamy np. pomnożyć 697×4 , t. j. wziąć 697 cztery razy jako składnik: $697 + 697 + 697 + 697$; a ponieważ możemy każdą liczbę tak rozłożyć na składniki, jak nam to będzie najdogodniej (§ 4, us. 11), więc możemy każdy z tych składników rozłożyć (najprościej) na setki, dziesiątki i jedności: $697 = 600 + 90 + 7$, a podstawivszy te rozkłady, możemy wskazane dodawanie wykonać przy pomocy dodawań częściowych którychkolwiek składników, wziętych w jakimkolwiek porządku (§ 4, us. 10); oddzielnie więc możemy wykonać dodawania częściowe setek, oddzielnie dziesiątków, oddzielnie jedności, a otrzymane wypadki do siebie dodać; przedstawimy to w ten sposób:

$$\begin{array}{r}
 697 \times 4 = 697 + 697 + 697 + 697 = \quad 600 \quad +90 \quad +7 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad +600 \quad +90 \quad +7 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad +600 \quad +90 \quad +7 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad +600 \quad +90 \quad +7 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 600 \times 4 + 90 \times 4 + 7 \times 4
 \end{array}$$

(wykonywając częściowe dodawanie setek, mieliśmy 600 wziąć 4 razy jako składnik, a więc napisaliśmy 4 razy 600: taksamo powstało 90×4 i 7×4). A więc:

$$697 \times 4 = 600 \times 4 + 90 \times 4 + 7 \times 4,$$

t. j., aby pomnożyć 697×4 , należy, wogóle mówiąc, 697 rozłożyć w najdogodniejszy sposób na części, każdą z tych części pomnożyć przez 4 i otrzymane iloczyny częściowe do siebie dodać ¹⁾.

Możemy więc powiedzieć, że *wykonywanie mnożenia w przypadku, gdy mnożna jest liczbą wielocyfrową, a mnożnik jednocyfrową, polega na*

¹⁾ Na mocy dowiedzionego w ustępie 14-ym możemy wprost powiedzieć: mając 697×4 , rozkładam (§ 4, us. 11) na części $697 = 600 + 90 + 7$, i sprowadzam rzecz do (us. 14): $697 \times 4 = (600 + 90 + 7) \times 4 = 600 \times 4 + 90 \times 4 + 7 \times 4$.

rozłożeniu mnożnej w najdogodniejszy sposób na części, pomnożeniu każdej części mnożnej przez mnożnik i dodaniu do siebie otrzymanych iloczynów częściowych ¹⁾).

Należy nam tu wykonać częściowe mnożenia: 600×4 , 90×4 i 7×4 , a iloczyny stąd powstałe do siebie dodać; mamy więc (us. 17):

$$\begin{array}{r} 600 \times 4 = 2400 \\ 90 \times 4 = 360 \\ 7 \times 4 = 28 \\ \hline 2788 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{czyli} \\ 697 \\ \times 4 \\ \hline 2400 \\ 360 \\ 28 \\ \hline 2788 \end{array}$$

Tak właśnie wykonywamy pamięciowe mnożenie; mając pomnożyć 697×4 mówimy: mam 697 pomnożyć przez 4, t. j. 600 pomnożyć przez 4, 90 pomnożyć przez 4 i 7 pomnożyć przez 4, a to, co otrzymamy, dodać do siebie; więc 600 przez 4 jest 2400; 90 przez 4 jest 360; 2400 i 360 jest 2760; 7 przez 4 jest 28; 2760 i 28 jest 2788, a więc z pomnożenia 697-u przez 4 otrzymuję 2788.

Wracając się do piśmiennego wykonywania mnożenia, zauważymy, że w wypisanym dodawaniu nad cyfrą 8 mamy zera innych składników, więc cyfra ta znajdzie się w sumie, t. j. pierwsza cyfra (od strony prawej) szukanego iloczynu zależy od pierwszej cyfry iloczynu częściowego cyfry 7 mnożnej przez mnożnik; podobnie, druga cyfra szukanego iloczynu zależy od liczby dziesiątków, które pozostały z mnożenia częściowego cyfry 7 mnożnej przez mnożnik i od pierwszej cyfry iloczynu częściowego cyfry 9 mnożnej przez mnożnik, i t. d. *). Nie mamy więc potrzeby wypisywania oddzielnie składników 2400, 360, 28, ale, zaczynając od mnożenia 7-u przez 4 i mnożąc następnie 9 (na drugim miejscu) przez 4, a potem 6 (na trzecim) przez 4, wypiszemy odrazu sumę, t. j. szukany iloczyn 2788; a więc rachunek krótko i wyraźnie przedstawimy (§ 1, us. 9), pisząc

$$\begin{array}{r} 697 \\ \times 4 \\ \hline 2788 \end{array}$$

co nas doprowadza do prawidła już wypowiedzianego (us. 19).

21. Gdy mamy jakąkolwiek liczbę pomnożyć przez 10, np. 305×10 , to mamy 305 jedności wziąć jako składnik 10 razy, czyli każda jedność z tych 305-u jedności, jako wzięta 10 razy jako składnik, stanie się sumą dziesięciu jedności, t. j. dziesiątkiem. Otrzymujemy więc

¹⁾ Jestto inne wyrażenie pierwszej z własności dowiedzionych w ustępie 14-tym, a zarazem szczególnym przypadkiem własności dowiedzionj w ustępie 16-ym.

*) Objaśnia się tym bezpośrednio, dlaczego to mnożenie zaczynamy od strony prawej.

305 dziesiątków, które trzeba napisać tak, aby cyfra 5 była na miejscu drugim od strony prawej; aby więc zająć pierwsze miejsce, potrzeba na nim umieścić zero. Jest więc $305 \times 10 = 3050$, t. j., aby liczbę pomnożyć przez 10, należy do niej dopisać zero. Jeżeli mamy 305×100 , to podobnie należy 305 jedności wziąć jako składnik 100 razy; każda więc z 305-u jedności, jako wzięta sto razy jako składnik, stanie się sumą stu jedności, t. j. setką. Otrzymujemy zatem 305 setek. Aby zaś tę liczbę napisać, trzeba się postarać o to, aby cyfra 5 znalazła się na miejscu trzecim od strony prawej, i dlatego na pierwszych dwu miejscach, aby je zająć, należy napisać zera. Jest więc $305 \times 100 = 30500$, t. j., aby liczbę pomnożyć przez 100, należy do niej dopisać dwa zera *). I t. d.

Z tego, cośmy mówili w us. 17-m i 19-ym, łatwo wyprowadzić, że **) $10 \times 227 = 2270$; $10000 \times 350 = 3500000$ i t. d.

Możemy więc powiedzieć, że:

*Aby pomnożyć przez siebie dwa czynniki, z których jeden jest przedstawiony przez jedność z zerami, należy przypisać wszystkie jego zera do drugiego czynnika z prawej strony ***)*.

22. Z tego jeszcze wypada, że liczbę np. 40 możemy uważać jako powstałą z pomnożenia 4 przez 10, a więc $40 = 4 \times 10$; podobnie $1000 = 100 \times 10 = 10 \times 10 \times 10$; $14500 = 1450 \times 10 = 145 \times 100 = 145 \times 10 \times 10$, i t. d.

Jeżeli więc, mając np. liczbę 30568, przedstawimy ją jako (§ 4, us. 11) sumę, $30568 = 30000 + 500 + 60 + 8$, a do trzech pierwszych części zastosujemy tu powyższe wyrażenia, to mieć będziemy

$$30568 = 3 \times 10000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 8,$$

$$30568 = 3 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 + 5 \times 10 \times 10 + 6 \times 10 + 8,$$

albo jeszcze (us. 3)

$$30568 = 3 \times 10000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 8 \times 1,$$

$$30568 = 3 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 + 5 \times 10 \times 10 + 6 \times 10 + 8 \times 1.$$

23. Gdy mamy wykonać mnożenie jakiegokolwiek liczby przez liczbę wyrażoną przez cyfrę znaczącą z zerami, np. 305×700 , to, ponieważ $700 = 7 \times 100$, zadanie nasze sprowadza się do odszukania iloczynu $305 \times 7 \times 100$, t. j. trzeba naprzód (us. 7) wykonać mnożenie 305×7 , a iloczyn, stąd otrzymany, pomnożyć przez 100 ****), czyli do iloczynu $305 \times 7 = 2135$ dopisać (us. 21) dwa zera; otrzymujemy 213500.

*) Przy wykonywaniu pamięciowym powiemy również: mam 305 pomnożyć przez sto, będzie więc 305 setek, czyli 30 500.

**) Wyprowadzić zaś to można także z tego, co tu (us. 21) wyżej mówimy, opierając się na tym, że iloczyn nie zależy od porządku czynników.

***) Mówimy także: aby liczbę powiększyć np. 10 000 razy, należy do niej dopisać cztery zera i t. d.; i jeżeli do liczby dopiszemy np. dwa zera, to ją powiększamy 100 razy i t. d.

****) Tak właśnie będziemy wykonywali pamięciowe mnożenie 305-u przez 700.

Możemy to nieco inaczej objaśnić w ten sposób. Mamy 305×700 , t. j. 305 wziąć jako składnik 700 razy. Wyobraźmy sobie, żeśmy wypisali tę sumę 700-t składników 305. Ponieważ dodawanie wielu składników możemy zastąpić przez dodawania częściowe (§ 4, us. 10), więc możemy oddzielnie do siebie dodać pierwsze 7 składników, oddzielnie dalsze 7 i t. d., t. j. nasze dodawanie zastąpimy przez 100 dodawań częściowych, z których każde, jako dodawanie 7-u składników 305, może być zastąpione przez mnożenie 305-u przez 7; iloczyn zaś ten $305 \times 7 = 2135$ mamy wziąć 100 razy jako składnik, czyli pomnożyć go przez 100, a więc (us. 21) dopisać doń dwa zera; otrzymujemy 213500.

Gdy w tym przypadku podpisujemy mnożnik pod mnożną dla wykonania mnożenia, zwykle podpisujemy go tak, aby cyfra znacząca mnożnika była pod jednościami mnożnej *):

$$\begin{array}{r} 305 \\ \times 700 \\ \hline 213500 \end{array}$$

i mnożymy naprzód przez cyfrę znaczącą mnożnika, t. j. przez 7 (us. 19), a następnie do otrzymanego stąd iloczynu, t. j. do 2135, dopisujemy dwa zera.

Podobnie, gdy mamy np. pomnożyć 697 przez 40000, to napiszemy:

$$\begin{array}{r} 697 \\ \times 40000 \\ \hline 27880000 \end{array}$$

pomnożymy 697 przez 4 i do otrzymanego iloczynu 2788 dopiszemy cztery zera mnożnika.

Możemy więc powiedzieć, że:

Abym pewną liczbę pomnożyć przez cyfrę znaczącą z zerami, mnożymy ją naprzód przez tę cyfrę znaczącą, a do otrzymanego iloczynu dopisujemy z prawej strony tyle zer, ile ich jest przy tej cyfrze w mnożniku

Gdy więc mamy np. 697×40000 , to powyższe правило możemy tak (us. 7) przedstawić: $(697 \times 4) \times 10000$. Lecz (us. 20) wiemy, że $697 \times 4 = 600 \times 4 + 90 \times 4 + 7 \times 4$, więc

$697 \times 40000 = (697 \times 4) \times 10000 = (600 \times 4 + 90 \times 4 + 7 \times 4) \times 10000$, co dokładnie przedstawia szczegóły postępowania przy wykonywaniu mnożenia 697-u przez 40000 ¹⁾.

Gdy chcemy np. 400×60 , to (us. 22, 10):

$$\begin{aligned} 400 \times 60 &= 4 \times 100 \times 6 \times 10 = 4 \times 6 \times 100 \times 10 = 4 \times 6 \times 1000 = \\ &= 24 \times 1000 = 24000, \end{aligned}$$

*) Możemy bowiem tak podpisywać mnożnik pod mnożną, jak nam to najdogodniej (por. us. 18 i 5).

¹⁾ Moglibyśmy także wprost tak powiedzieć: liczbę 697 rozkładamy na składniki (§ 4, us. 11), $697 = 600 + 90 + 7$, a według dowiedzionego w ustępie 14-ym, mamy $697 \times 40000 = (600 + 90 + 7) \times 40000 = 600 \times 40000 + 90 \times 40000 + 7 \times 40000$, t. j. zamiast przypisywania czterech zer do iloczynu 697×4 , możemy je odrazu uwzględnić przy mnożeniu części mnożnej przez mnożnik.

t. j. aby pomnożyć przez siebie dwie liczby, z których każda jest przedstawiona przez cyfrę znaczącą z zerami, możemy pomnożyć przez siebie cyfry znaczące i do otrzymanego iloczynu dopisać z prawej strony zera obu czynników.

Jeżeli mamy np. 69700×4000 , to podobnie możemy zamiast 69700 napisać (us. 22): 697×100 i zamiast 4000 napisać 4×1000 , a tym samym $69700 \times 4000 = 697 \times 100 \times 4 \times 1000$. Iloczyn nie zależy od porządku czynników (us. 10), więc:

$$69700 \times 4000 = 697 \times 100 \times 4 \times 1000 = 697 \times 4 \times 100 \times 1000 = \\ = 697 \times 4 \times 10000.$$

A zatem możemy naprzód wykonać 697×4 i do otrzymanego iloczynu 2788 dopisać pięć zer, t. j. dwa zera mnożnej i trzy zera mnożnika. Zwykle w podobnych przypadkach przedstawiamy rachunek w ten sposób:

69700	<i>Jeżeli mnożna ma na końcu zera, a mnożnik jest liczbą,</i>
<u>× 4000</u>	<i>przedstawioną przez cyfrę znaczącą z zerami, to</i>
278800000.	<i>wykonywamy mnożenie tak, jakgdyby tych zer nie</i>

*było, a do iloczynu otrzymanego dopisujemy z prawej strony końcowe zera mnożnej i mnożnika *).*

24. Weźmy zadanie na mnożenie liczb wielocyfrowych przez siebie, np. 7256×348 . Mamy tutaj (us. 3) mnożną 7256 wziąć 348 razy jako składnik. Wystawmy sobie, żeśmy rzeczywiście wypisali

$$7256 + 7256 + 7256 + 7256 + \text{i t. d. (348 razy)}.$$

Ponieważ to dodawanie możemy uskutecznić przy pomocy częściowych dodawań składników (§ 4, us. 10), więc możemy oddzielnie dodać pierwszych 300 składników, oddzielnie dalszych 40 i na koniec oddzielnie 8 pozostałych:

$$\begin{array}{ccc} \underline{7256 + 7256 + \text{i t. d.} + 7256 + 7256 + \text{i t. d.} + 7256 + 7256 \text{ i t. d.}} & & \\ \text{300 razy} & \text{40 razy} & \text{8 razy} \end{array}$$

Tu pierwsza część, t. j. 300 jednakowych składników 7256, może być zastąpiona przez iloczyn 7256×300 ; podobnie, zamiast drugiej części możemy napisać 7256×40 i zamiast trzeciej 7256×8 , tak, iż **)

$$7256 \times 348 = 7256 \times 300 + 7256 \times 40 + 7256 \times 8.$$

Z tego widzimy, że mnożenie liczby wielocyfrowej przez wielocyfrową polega na rozłożeniu mnożnika w najdogodniejszy sposób na części, pomnożeniu mnożnej przez każdą z tych części mnożnika i dodaniu do siebie tak otrzymanych iloczynów częściowych.

Należy tu nam wykonać częściowe mnożenia: 7256×300 , 7256×40 , 7256×8 , i tak otrzymane iloczyny do siebie dodać.

*) Ogólniej w us. 26-ym.

**) Na mocy dowiedzionego w ustępie 14-ym, możemy wprost powiedzieć: 7256×348 ; rozkładamy (§ 4, us. 11) na części $348 = 300 + 40 + 8$ i sprowadzamy rzecz do mnożenia liczby 7256 przez sumę $300 + 40 + 8$ (us. 14), t. j.:

$$7256 \times 348 = 7256 \times (300 + 40 + 8) = 7256 \times 300 + 7256 \times 40 + 7256 \times 8.$$

Według us. 19-ego: $7256 \times 8 = 7000 \times 8 + 200 \times 8 + 50 \times 8 + 6 \times 8$: według zaś ustępu 23-ego (str. 73, ¹odsyłacz¹): $7256 \times 300 = 7000 \times 300 + 200 \times 300 + 50 \times 300 + 6 \times 300$; $7256 \times 40 = 7000 \times 40 + 200 \times 40 + 50 \times 40 + 6 \times 40$. Podstawiając te wyrażenia częściowych iloczynów w otrzymane powyżej wyrażenie szukanego iloczynu:

$$7256 \times 348 = 7256 \times 500 + 7256 \times 40 + 7256 \times 8,$$

mieć będziemy:

$$\begin{aligned} 7256 \times 348 = & 7000 \times 300 + 200 \times 300 + 50 \times 300 + 6 \times 300 \\ & + 7000 \times 40 + 200 \times 40 + 50 \times 40 + 6 \times 40 \\ & + 7000 \times 8 + 200 \times 8 + 50 \times 8 + 6 \times 8 \end{aligned}$$

(to nam także wypada bezpośrednio z dowiedzionego w ustępie 16-ym, gdy sumę $7000+200+50+6$ pomnożymy przez sumę $300+40+8$), t. j. wraźe, gdy chcemy wyraźnie uwzględnić wykonywanie każdego mnożenia całej mnożnej przez oddzielne części mnożnika, należałoby powiedzieć, że *mnożenie liczby wielocyfrowej przez wielocyfrową polega na rozłożeniu tak mnożnej, jak i mnożnika, w najdogodniejszy sposób na części, wykonaniu częściowych mnożeń każdej części mnożnej przez każdą część mnożnika i dodaniu do siebie otrzymanych w ten sposób iloczynów.*

Wykonywając częściowe mnożenia według wiadomych (us. 19, 23) prawideł i dodając otrzymane iloczyny, mamy

$$\begin{array}{r} 7256 \\ \times 300 \\ \hline 2176800 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7256 \\ \times 40 \\ \hline 290240 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7256 \\ \times 8 \\ \hline 58048 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2176800 \\ 290240 \\ 58048 \\ \hline 2525088. \end{array}$$

Takie postępowanie jest jednak zbyt długie (§ 1, us. 9). Postarajmy się je skrócić, oile tylko można.

Widzimy przedewszystkim, że tu trzy razy wypisywaliśmy mnożną, a liczby: 2176800, 290240, 58048 każdą dwa razy. Urządźmy więc postępowanie tak, aby mnożną napisać raz tylko i również raz tylko pisać iloczyny częściowe. Jeżeli te iloczyny częściowe mamy pisać raz tylko, to musimy je tak pisać jedne pod drugimi, jak to być powinno przy dodawaniu; a tym samym oznaczenia mnożenia mnożnej przez 300, przez 40 i przez 8 wszystkie powinny się znajdować nad składnikami dodawania. Osiągniemy to, pisząc nad składnikami *)

$$\begin{array}{r} 7256 \\ \times 348 \\ \hline \end{array}$$

co rozumić będziemy w ten sposób, że mnożymy 7256 nie odrazu przez 348, ale oddzielnie przez części mnożnika, t. j. przez 300, 40, 8, a te iloczyny częściowe podpiszemy pod kręską, nakreśloną dlatego, aby oddzielić liczby dane, od liczb, które następnie do siebie dodać trzeba będzie.

*) Gdy mnożna i mnożnik nie kończą się zerami, to zwykle tak piszemy mnożnik pod mnożną, aby jedności były pod jednościami. (Por. us. 26).

Zauważymy tu, że możemy mnożną mnożyć przez części mnożnika, albo w porządku, jak wyżej: 300, 40, 8, albotóż w porządku odwrotnym: 8, 40, 300, bo to zmieni tylko porządek składników sumy (§ 4, us. 7). Z tych dwu sposobów:

$$\begin{array}{r} 7256 \\ \times 348 \\ \hline 2176800 \\ 290240 \\ 58048 \\ \hline 2525088 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7256 \\ \times 348 \\ \hline 58048 \\ 290240 \\ 2176800 \\ \hline 2525088 \end{array}$$

wyberzemy ten, który okaże się dogodniejszym. Gdybyśmy żadnych już więcej skrótów nie robili, to jeden z tych sposobów byłby równie dobry jak drugi. Ale pragniemy porobić wszelkie możliwe skrócenia, któreby zachowywały rachunek wyraźnym (§ 1, us. 9). Zauważymy tu, że gdy mnożymy mnożną przez setki mnożnika, to w częściowym stąd iloczynie będą zawsze dwa zera na końcu (us. 23); ponieważ one zawsze będą, więc zrobimy godziwe skrócenie, nie pisząc ich, ale zostawiając dwa miejsca niezajęte, tak, iż na tych miejscach wyobrażać sobie powinniśmy zera; podobnież możemy nie pisać zera, zawsze znajdującego się na końcu iloczynu mnożnej przez dziesiątki mnożnika. Będziemy więc mieli

$$\begin{array}{r} 7256 \\ \times 348 \\ \hline 21768 \\ 29024 \\ 58048 \\ \hline 2525088 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7256 \\ \times 348 \\ \hline 58049 \\ 29024 \\ 21768 \\ \hline 2525088, \end{array}$$

co pozwala nam, zamiast mówić: mnożymy mnożną przez 300, powiedzieć: mnożymy mnożną przez 3, ale za to pisać musimy otrzymany iloczyn mnożnej przez 3 tak, aby pierwsza (od strony prawej) cyfra tego iloczynu była na trzecim miejscu, t. j. pod cyfrą 2 mnożnej, albo, gdy jedności mnożnika są pod jednościami mnożnej, — pod cyfrą 3 mnożnika; podobnież nie będziemy mówić: mnożę przez 40, ale przez 4, a otrzymany iloczyn postawimy tak, aby pierwsza jego cyfra była pod cyfrą 4 mnożnika. — Każde z tych częściowych mnożeń mnożnej przez cyfrę mnożnika uskuteczniamy, zaczynając działanie od strony prawej (us. 18, 19, 20). Z tego więc powodu, będzie zręczniej mnożyć mnożną pokolei przez oddzielne cyfry mnożnika, zaczynając także od téj samej strony, t. j. od prawej, niż mnożyć mnożną przez kolejne cyfry mnożnika, zaczynając od strony lewej, a każde częściowe mnożenie wykonywać od strony prawej.

W ten sposób objaśniliśmy, dlaczego rachunek mnożenia 7256 przez 348 tak się zwykle piśmiennie przedstawia:

$$\begin{array}{r} 7256 \\ \times 348 \\ \hline 58048 \\ 29024 \\ 21768 \\ \hline 2525088. \end{array}$$

Podobnie, jeżeli mamy np. 302175×14023 , to mnożenie to tak wykonamy:

$$\begin{array}{r} 302175 \\ \times 14023 \\ \hline 906525 \\ 604350 \\ 1208700 \\ 302175 \\ \hline 4237400025 \end{array}$$

pomnożymy mnożną przez 3 i podpiszemy iloczyn pod kręską tak, aby pierwsza jego (od strony prawej) cyfra, t. j. 5, znalazła się pod cyfrą mnożnika, przez którąśmy mnożyli, t. j. pod 3; następnie pomnożymy mnożną przez 2 i ten iloczyn tak pod poprzednim podpisujemy, aby pierwsza jego cyfra, t. j. 0, znalazła się pod cyfrą 2 mnożnika (następna cyfra mnożnika, 0, służy tylko do zajęcia miejsca; niema więc w mnożniku na trzecim miejscu części, przez którąbyśmy mieli mnożyć mnożną); mnożymy później mnożną przez cyfrę 4 mnożnika, a otrzymany iloczyn podpisujemy w dalszym ciągu tak, aby pierwsza jego cyfra, t. j. 0, znalazła się pod cyfrą 4 mnożnika; nakoniec mnożymy mnożną przez cyfrę 1 mnożnika (us. 3), a iloczyn (równy mnożnej) podpisujemy pod poprzednim tak, aby pierwsza jego cyfra, t. j. 5, znalazła się pod tą cyfrą 1 mnożnika. Tak wypisane iloczyny częściowe dodajemy do siebie, rozumiejąc na niezajętych miejscach zera, a otrzymana suma jest iloczynem liczb danych. — (W tym przykładzie wypadło nam napisać zera na końcu iloczynów częściowych mnożnej przez 2 i przez 4; takie zera piszemy, bo one nie zawsze będą; nie byłoby ich na tych miejscach, gdyby w mnożniku, zamiast cyfr 2 i 4, były np. 5, lub 7.)

25. Widzimy więc wogóle, że postępowanie przy mnożeniu liczby wielocyfrowej przez wielocyfrową możemy ująć w następujące правило:

Aby pomnożyć liczbę wielocyfrową przez wielocyfrową, podpisawszy mnożnik pod mnożną i poprowadziwszy pod mnożnikiem kręskę poziomą, mnożymy mnożną pokolei przez każdą znaczącą cyfrę mnożnika, poczynając od strony prawej, według wiadomego pravidła (us. 19); otrzymane iloczyny częściowe podpisujemy pod kręską jeden pod drugim tak, iżby pierwsza od strony prawej cyfra każdego iloczynu częściowego była pod tą cyfrą mnożnika, przez którą dla otrzymania tego iloczynu mnożyliśmy mnożną, a następnie tak wypisane iloczyny częściowe do siebie dodajemy, wyobrażając sobie zera na miejscach niezajętych.

26. Wrazie, gdy w mnożnej, albo w mnożniku, albotóż jednocześnie w mnożnej i w mnożniku znajdują się zera na końcu, mamy (us. 22, 10):

$$342100 \times 215 = 3421 \times 100 \times 215 = 3421 \times 215 \times 100,$$

$$3421 \times 205000 = 3421 \times 205 \times 1000 = 3421 \times 205 \times 1000,$$

$$341200 \times 215000 = 3412 \times 100 \times 215 \times 1000 = 3412 \times 215 \times 100000,$$

a więc ogólnie (21, 23): jeżeli mamy pomnożyć przez siebie dwie liczby, z których jedna, lub obie są zakończone zerami, to możemy je naprzód pomnożyć przez siebie, jakgdyby tych zer nie było, a do otrzymanego iloczynu dopisać z prawej strony końcowe zera czynników. Rachunek wtedy zwykle tak przedstawimy:

342100	3421	341200
× 215	× 20500	× 215000
17105	17105	17060
3421	6842	3412
6842	70130500,	6824
73551500,		73358000000,

27. Zdarza się niekiedy, że w mnożnej jest znacznie mniej cyfr (znaczących), niż w mnożniku. Prędziej (§ 1, us. 9) wtedy wykonamy mnożenie, mnożąc mnożnik przez cyfry mnożnej; a że przez to zachowujemy się tak, jakbyśmy przestawili między sobą czynniki, więc (us. 9) dochodzimy do tej samej liczby w iloczynie, co w razie ścisłego trzymania się prawidła (us. 25). Taktóż zwykle w tym przypadku postępujemy. Np.

42	1002
× 5167	× 3417
10334	6834
20668	3417
217014,	3423834.

Wrazie, gdy mamy pomnożyć przez siebie dwie liczby oderwane i gdy nie mamy potrzeby zaznaczać wyraźnie, która z mnożonych przez siebie liczb jest np. mnożną, to w tym przypadku, jeżeli chcemy, możemy liczbę, w której jest mniej cyfr znaczących, napisać jako mnożnik (us. 9).— Jeżeli jednak rozumowanie, doprowadzające do mnożenia dwu liczb oderwanych przez siebie, wymaga, aby jedną z tych liczb uważać np. za mnożną (us. 5), albo jeżeli w mnożeniu liczb mianowanych (us. 6) sam charakter dwu liczb mnożonych przez siebie wyraźnie wskazuje, która z nich jest np. mnożną (us. 6), to nie można w rachunku napisać mnożnej zamiast mnożnika i nawzajem.

Z uwagi jednak, że samo wykonanie mnożenia ma na celu tylko odszukanie iloczynu (tak, iż tego rachunku drobiazgowego nie robiłbyśmy, gdybyśmy byli w stanie odrazu wypowiedzieć szukany iloczyn), jest dla nas rzeczą obojętną, czy my tym, czytóż innym sposobem otrzymujemy iloczyn, tymwięcej, że nawet w mnożeniu liczb mianowanych możemy

się oprzeć na tym, że liczba oderwana, zachodząca w iloczynie, jest niezależna od nazwania jednostki i powstaje z pomnożenia liczby oderwanej mnożnej przez mnożnik (us. 6.) Nie przedstawiając więc w rachunku mnożnej z mnożnikiem między sobą, możemy jednak wykonywać mnożenie, mnożąc mnożnik przez cyfry znaczące mnożnej (według odpowiednio zmienionego prawidła us. 25), gdyż skutkiem tej zmiany w postępowaniu nie zmieni się liczba oderwana w iloczynie (us. 9); przy mnożeniu liczb mianowanych do tak otrzymanego iloczynu dopiszemy nazwanie jednostki mnożnej (us. 6).

Np. stopa ma 12 cali; ile 4356 stóp ma cali? Ponieważ jedna stopa ma 12 cali, to 4356 stóp ma cali 4356 razy więcej, i dlatego należy 12 cali pomnożyć przez (liczbę oderwaną) 4356; napiszemy:

$\begin{array}{r} 12 \text{ cali} \\ \times 4356 \\ \hline 8712 \\ 4356 \\ \hline 52272 \text{ cale} \end{array}$	zamiast jednak mnożyć (us. 25) kolejno 12×6 , 12×5 , 12×3 i 12×4 i zająć tymi iloczynami 4 wiersze, możemy wykonać 4356×2 , 4356×1 (us. 3) i otrzymane iloczyny częściowe pomieścić w dwu tylko wierszach (§ 1, us. 9). Do otrzymanej z dodania liczby: 522272 dopiszemy nazwanie jednostki mnożnej (us. 6), t. j. cale.
---	--

Opowiedz: 4356 stóp ma 52272 cale. Odpowiedź: 4356 stóp ma 52272 cale.

28. Samo się przez się rozumie, że próbę mnożenia moglibyśmy wykonać przez dodawanie (us. 1, 3) i robimy to, ale tylko wtedy, gdy mnożnik jest bardzo małą liczbą.

Możemy jednak sprawdzenie liczby, otrzymanej jako iloczyn, oprzeć na tym, że iloczyn nie zależy od porządku czynników (us. 9). Będzie to więc próba mnożenia przez mnożenie. Mianowicie: liczbę, która w mnożeniu sprawdzanym była mnożnikiem, pomnożymy według prawidła podanego w us. 25, przez poprzednią mnożną; jeżeli w iloczynie otrzymamy tę samą co poprzednio liczbę, to jest prawdopodobne, żeśmy sprawdzane mnożenie dobrze wykonali. Np.

$\begin{array}{r} 3421 \\ \times 215 \\ \hline 17105 \\ 3421 \\ 6842 \\ \hline 735515, \end{array}$	$\begin{array}{r} 215 \\ \times 3421 \\ \hline 215 \\ 430 \\ 860 \\ 645 \\ \hline 735515 \text{ (dobrze).} \end{array}$
---	---

29. Weźmy dwa iloczyny, każdy złożony z dwu czynników, i niech te iloczyny mają po jednym czynniku spólnym—pozostałe zaś ich czynniki niech będą od siebie różne. Np. 235×79 i 45×235 . Przetawmy np.¹⁾ czynniki

¹⁾ Moglibyśmy przestawić między sobą czynniki pierwszego iloczynu; wtedy rozumowanie byłoby nieco odmienne.

drugiego iloczynu (us. 9); wtedy oba iloczyny 235×79 i 235×45 mieć będą tę samą liczbę 235 jako mnożną. Pierwszy iloczyn przedstawia sumę, którą otrzymalibyśmy, gdybyśmy liczbę 235 wzięli 79 razy jako składnik (us. 3), drugi zaś iloczyn przedstawia sumę, którą otrzymalibyśmy, biorąc tę samą liczbę 235 tylko 45 razy jako składnik. Ponieważ zaś suma jest zebraniem jedności składników (§ 4, us. 6), więc w pierwszej sumie, prócz jedności 45-u składników 235, t. j. prócz wszystkich jedności drugiej sumy, są jeszcze jedności 46-ego składnika 235, 47-ego składnika 235 i t. d., czyli pierwsza suma jest większa od drugiej, a tym samym iloczyn 235×79 jest większy od iloczynu 45×235 . Czyli: z dwu iloczynów dwuczynnikowych, mających jeden czynnik spólny, ten jest większy, którego pozostały czynnik jest większy.

Jeżeli zaś mamy dwa iloczyny dwuczynnikowe i oba czynniki jednego iloczynu są większe od czynników drugiego iloczynu tak, iż większy czynnik pierwszego iloczynu jest większy od większego z czynników drugiego iloczynu i pozostały czynnik pierwszego iloczynu większy od pozostałego czynnika drugiego iloczynu, np. 235×479 i 375×228 (tu 479 większe od 375 i 235 większe od 228), to możemy utworzyć iloczyn pomocniczy, powstały z pomnożenia mniejszego czynnika iloczynu większych czynników przez większy czynnik iloczynu mniejszych czynników, t. j. 235×375 . A wtedy, na mocy poprzedniego, iloczyn 235×479 jest większy od iloczynu 235×375 , ten zaś iloczyn 235×375 jest większy od iloczynu 375×228 , a więc tym samym iloczyn 235×479 jest większy od iloczynu 375×228 , t. j. jeżeli mamy dwa iloczyny dwuczynnikowe i większy czynnik np. pierwszego iloczynu jest większy od większego z czynników drugiego iloczynu, a pozostały czynnik pierwszego iloczynu jest większy od pozostałego czynnika drugiego iloczynu, to iloczyn czynników większych jest większy od iloczynu czynników mniejszych.

30. Jeżeli, mając wykonać np. 52401×367 , chcemy zgóry wiedzieć, z ilu cyfr będzie złożony iloczyn, który otrzymamy po wykonaniu tego mnożenia, to utwórmy dwa iloczyny dwu liczb, z których każda jest jednością z zerami, najbliższych czynników naszego iloczynu, mianowicie jeden iloczyn liczb większych, drugi zaś liczb mniejszych. Ponieważ dla liczby 52401 najbliższymi liczbami, utworzonymi przez jedność z zerami, są liczby 10000 i 100000, a dla 367-u liczby 100 i 1000, więc iloczyn większych liczb, t. j. 100000×1000 , jest większy od naszego iloczynu, a iloczyn liczb mniejszych, t. j. 10000×100 , jest mniejszy od naszego iloczynu:

$$\begin{aligned} 100000 \times 1000 &= 100000000 \\ 52401 \times 367 & \\ 10000 \times 100 &= 1000000, \end{aligned}$$

a tym samym dany iloczyn będzie miał nie więcej cyfr*), niż iloczyn $100000 \times 1000 = 100000000$, a nie mniej, niż iloczyn $10000 \times 100 =$

*) W naszym sposobie pisania liczb, jakakolwiek liczbą w szeregu liczb naturalnych nie ma więcej cyfr od żadnej z dalszych liczb tego szeregu.

$= 1\ 000\ 000$. Liczba $100\ 000\ 000$ jest wprawdzie liczbą dziewięciocyfrową, ale najmniejszą ze wszystkich liczb dziewięciocyfrowych; więc nasz iloczyn, jako od téj liczby mniejszy, nie może mieć 9-u cyfr, ale conajwięcej cyfr 8. A gdy znowu $1\ 000\ 000$ jest najmniejszą liczbą siedmiocyfrową, więc nasz iloczyn, jako od niéj większy, nie może mieć wprawdzie mniej niż 7 cyfr, ale może ich mieć także 7. Z tego widzimy, że o naszym iloczynie 52401×367 (liczby 5-cyfrowej przez 3-cyfrową), nie wykonywając jeszcze mnożenia, powiedziéć możemy, że on będzie miał albo 8 cyfr, albotéż 7. — Zauważmy tu, że czynniki iloczynu miały cyfr: jeden 5, drugi 3; iloczyn zaś albo $8 = 5 + 3$, albo $7 = (5 + 3) - 1$, t. j. *iloczyn dwu liczb ma albo tyle cyfr, ile ich jest w mnożnej i mnożniku razem, albo o jedną mniej*¹⁾.

31. Jeżeli mamy przez siebie pomnożyć kilka liczb (us. 7), to należałoby piérwszą pomnożyć według wiadomych prawideł przez drugą, otrzymany iloczyn przez trzecią i t. d. Ponieważ jednak iloczyn nie zależy od porządku czynników (us. 10), więc, korzystając z tego, staramy się wmiarę wprawy, o ile można tylko, rachunek skrócié (§ 1, us. 9). Skrócenia te zależą od szczególnych przypadków, jakie dane do mnożenia czynniki przedstawiają. Możemy tu tylko parę ogólnych podać wskazówek.

Tak, dla skrócenia sobie roboty, mnożymy naprzód przez siebie czynniki największe, otrzymany iloczyn przez czynnik największy z pozostałych i t. d. Przez takie postępowanie będziemy mieli mnożenia końcowe przez małe liczby, a unikniemy mnożenia wielkiéj liczby przez wielką. Robić zaś tak możemy dlatego, że mamy prawo tak zmienić porządek czynników, aby piérwszym był największy, drugim największy z pozostałych i t. d.

Możemy także, w razie, gdy upatrzymy, że częściowy iloczyn niektórych czynników da nam liczbę dogodniejszą w mnożeniu, zastąpić go przez tę liczbę, gdyż w iloczynie wskazanym kilku czynników możemy dowolnie wybrane czynniki zastępować przez wykonane ich iloczyny (us. 10); zwykle przytym zera końcowe czynników oddzielamy i, przypisawszy je do jedności (us. 22), uważamy tak powstałą liczbę jako ostatni czynnik iloczynu. Np.

$$\begin{aligned} 3 \times 8 \times 37 \times 2 \times 17 \times 40 \times 125 \times 6008 \times 300 \times 75 &= 6008 \times (125 \times 8) \times \\ &\times (75 \times 4) \times (37 \times 3) \times (17 \times 3 \times 2) \times 1000 = 6008 \times 1000 \times 300 \times \\ &\times 111 \times 102 \times 1000 = 6008 \times 102 \times 111 \times 3 \times 100000000 = \\ &= 612816 \times 333 \times 100000000 = 20406772800000000. \end{aligned}$$

32. Gdybyśmy mieli wogóle dwa iloczyny o jednakowéj liczbie czynników, posiadające wszystkie, prócz jednego, wspólne czynniki, to częściowy

¹⁾ Wogóle: jeżeli liczbę cyfr mnożnej nazwiemy m , a liczbę cyfr mnożnika nazwiemy n , to iloczyn ma cyfr albo $m+n$ albotéż $m+n-1$.

iloczyn wszystkich spólnych czynników w jednym i drugim iloczynie mogliśmy uważać jako przedstawienie jednój liczby (us. 10, 7) i w ten sposób sprowadzilibyśmy rzecz do przypadku rostrząsanego w ustępie 29-ym. Zatem: z dwu iloczynów jednakowej liczby czynników, posiadających wszystkie, prócz jednego, spólne czynniki, ten jest większy, którego ów pozostały czynnik jest większy.

Stąd wypada, że gdy o dwu iloczynach jednakowej liczby czynników wiemy, że są sobie równe (czyli, że one przedstawiają tę samą liczbę), i gdy wiemy o wszystkich, prócz jednego, czynnikach jednego iloczynu, że są one jednocześnie czynnikami drugiego iloczynu, to i pozostały czynnik jednego iloczynu jest równy pozostałemu czynnikowi drugiego iloczynu. Gdyby bowiem te czynniki były od siebie różne, to, według poprzedzającego, iloczyny dane nie przedstawiałyby tej samej liczby, co się sprzeciwia temu, cośmy co do tych iloczynów tu przyjęli.

33. Figura¹⁾, utworzona przez cztery linije proste równe, z których każda spotyka się tylko z dwiema z pozostałych linij i jest względem nich jednakowo nachylona, nazywa się *k w a d r a t e m*. Każda z tych linij prostych nazywa się *b o k i e m* kwadratu. Mówimy, że dwa boki kwadratu, spotykając się, tworzą *kąt prosty*.



Wogóle, gdy jakiegokolwiek dwie linije proste, spotykając się, tworzą kąt taki, jak kąt utworzony przez dwa spotykające się boki kwadratu, to taki kąt nazywamy *prostym*. Mogą bowiem dwie linije proste, spotykające się, tworzyć kąt inny, *nieprosty*. Np. figura, którą tu mamy naryso-



waną, jest utworzona przez cztery linije proste równe, ale żadna z nich, spotykając się z sąsiednią, nie tworzy kąta prostego. Chociaż więc wszystkie cztery boki są równe, to jednak którykolwiek bok jest inaczej nachylony względem jednego z boków sąsiednich, niż względem drugiego; dlatego ta figura nie jest kwadratem (nosi ona nazwę: romb).



Jeżeli bok kwadratu jest długi na stopę, to mówimy, że pole tego kwadratu jest *stopą kwadratową* (albo krócej, że ten kwadrat jest *stopą kwadratową*). Powiemy więc: *stopa kwadratowa* jest to pole kwadratu, którego bok jest długi na stopę. I podobnie: *cał kwadra-*

¹⁾ Staram się tu podać przystępne dla początkujących wprowadzenie pojęć kwadratu, prostokąta, sześciąnu i prostopadłościąnu. Wrazie odpowiedniego przygotowania i dostatecznego na to czasu, a także, rozumie się, przy powtórzeniu całego kursu, należy wprowadzić określenia, podane w tomie IV seryi III «Biblijoteki mat.-fiz.»

to wy jestto pole kwadratu, którego bok ma długości cal; metr kwadratowy jestto pole kwadratu, którego bok równa się metrowi, i t. d. ¹⁾

Jeżeli zaś chcemy wyraźnie zaznaczyć, że mamy na myśli np. stopę, cal, metr, które możemy przedstawić długością linii, to wtedy mówimy: stopa linijowa, cal linijowy, metr linijowy i t. d.

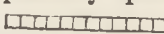
W tym znaczeniu zamiast «linijowy» używają niekiedy wyrażenia «bieżący» ²⁾. Gdy więc słyszymy np. «łokieć bieżący», to przez to wyrażenie rozumiąć mamy: łokieć linijowy.




34. Jeżeli bok kwadratu, który tu mamy obok narysowany, przedstawia ³⁾ nam stopę (linijową), to pole tego kwadratu przedstawi stopę kwadratową. Stopę (linijową) dzielimy zwykle na 12 równych części; wtedy każda z tych części nazywa się calem. Po-

dzielimy na cale dwa przeciwległe boki tego kwadratu i odpowiadające punkty podziału połączmy z sobą linijami prostymi. Wtedy ta stopa kwadratowa rozłożoną zostanie na 12 części równych, z których każda ma postać pasa *)



szerekiego na jeden cal, a długiego na stopę, czyli na 12 cali. Ten pas możemy w podobny sposób rozłożyć na 12 równych części ,

z których każda  jest kwadratem, mającym bok długi na cal, t. j. przedstawia nam cal kwadratowy; zatem w każdym takim pasie jest 12 cali kw. Widzimy więc, że możemy kwadrat, przedstawiający stopę kw., rozłożyć na 12 równych części (pasów), z których każdy ma 12 cali kw. Gdy więc jedna część (jeden pas) ma 12 cali kw., to stopa kw., jako równa 12-u takim częściom (pasom), ma cali kw. 12 razy

12 c. kw. więcej. Więc, aby się dowiedzieć, ile stopa kwadratowa ma cali kwadratowych, należy 12 cali kwadratowych pomnożyć przez (liczbę oderwaną) 12; a zatem stopa kw. ma 144 cali kw. Podobnie, gdy, wiedząc, że metr (linijowy) ma 10 de-

$$\begin{array}{r} \times 12 \\ 24 \\ 12 \\ \hline 144 \text{ c. kw.} \end{array}$$

¹⁾ Ogólniej: powierzchnią, równoważną z kwadratem, którego bok jest długi na stopę, nazywamy stopą kwadratową; i t. d.

²⁾ Niewłaściwie zaś jest mówić «łokieć zwyczajny», bo łokieć kwadratowy, lub sześcienny niczego nadzwyczajnego nie przedstawiają.

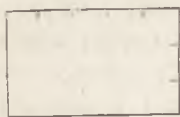
³⁾ Dobrze jest przy wykładzie kręślić rysunki, oile można, naturalnej wielkości, posilkując się starannie zrobionym wzorem miar. (Są w sprzedaży pręty drewniane, z zakończeniami mosiężnymi, wysokie na metr, mające na jednej stronie podział na decymetry i t. d., na drugiej na cale nowopolskie i t. d., na trzeciej na cale angielskie, czyli rosyjskie, a na czwartej na werszki.)

*) Powtarzając to po przejściu ustępu 35-go, można już, zamiast: ma postać pasa, mówić: jest prostokątem.

cymetrów, chcemy się dowiedzieć, ile metr kw. ma decymetrów kw., należy w taki sam sposób kwadrat, którego bok jest długi na metr, rozłożyć na 10 równych pasów, szerokich na decymetr, długich zaś na metr, czyli na 10 decymetrów, i każdy taki prostokąt w podobny sposób rozłożyć na 10 równych części, z których każda jest decyme-

10 dm. kw. trem kw. I znajdziemy, że, *aby się dowiedzieć, ile metr kwadratowy ma decymetrów kwadratowych, należy 10 decymetrów kwadratowych pomnożyć przez (liczbę oderwaną) 10*; a zatem metr kw. ma 100 decymetrów kw. — I t. d.

35. Figura, utworzona przez cztery linije proste, z których każda spotyka się tylko z dwiema z pozostałych, tworząc z nimi kąty proste, nazywa się prostokątem*). (Każdą z tych linij prostych nazywamy bokiem prostokąta.) Przypuśćmy, że



ten prostokąt ma jeden bok długi na 5 stóp, a sąsiedni długi na 3 stopy, czyli, jak zwykle mówimy, że długość tego prostokąta jest 5 stóp, a szerokość 3 stopy¹⁾. Aby się dowiedzieć, ilu stopom kw. równe jest pole tego prostokąta, nie będziemy do tego prostokąta przykładać kwadratu, przedstawiającego nam stopę kw., ale będziemy rozumować w sposób podobny, jak poprzednio. Mianowicie: ten prostokąt możemy



rozłożyć na 5 części równych, z których każda jest prostokątem, mającym jeden bok długi na jedną stopę, a sąsiedni na 3 stopy; każdy zaś taki prostokąt (mniejszy) możemy rozłożyć na 3 części równe, z których każda jest kwadratem, mającym bok długi na stopę, czyli jest stopą kw.

Widzimy więc, że dany prostokąt możemy rozłożyć na 5 prostokątów mniejszych równych, z których każdy ma trzy stopy kw.; a zatem dany prostokąt ma stóp kw. 5 razy więcej niż jeden

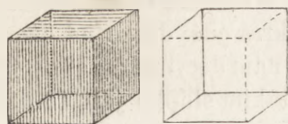
3 st. kw. z tych prostokątów mniejszych, t. j. *aby się dowiedzieć, ile dany prostokąt ma stóp kwadratowych, należy 3 stopy kwadratowe pomnożyć przez (liczbę oderwaną) 5*. Dany więc prostokąt ma 15 stóp kw., t. j. pole tego prostokąta jest 15 razy większe od stopy kw. (A więc tu stopa kwadratowa służyła nam za jednostkę do wyrażenia pola prostokąta danego; por. § 1, us. 1.)

36. Figura zamknięta kwadratami nazywa się sześcianiem.

*) Kwadrat więc jest szczególnym przypadkiem prostokąta.

¹⁾ Albo: podstawa i wysokość.

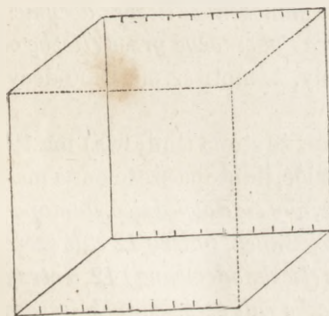
Każdy z tych kwadratów nazywa się ścianą sześcianu; sześcián ma ścian sześć^{*)}. Liniją prostą, według której przecinają się dwie którekolwiek sąsiednie ściany sześcianu, nazywamy jego krawędzią. Sześcián ma 12 krawędzi. Ponieważ którykolwiek bok któregośkolwiek kwa-



dratu, stanowiącego ścianę sześcianu, jest jednocześnie bokiem kwadratu stanowiącego ścianę sąsiednią sześcianu, i t. d., więc wszystkie boki tych kwadratów, czyli wszystkie krawędzi sześcianu są sobie równe.

Jeżeli krawędź sześcianu jest długa na stopę, to mówimy, że objętość tego sześcianu jest stopą sześcienną (albo krócej, że ten sześcián jest stopą sześcienną). Powiemy więc: stopa sześcienna jestto objętość¹⁾ sześcianu, którego krawędź jest długa na stopę. I podobnie: cal sześcienny jestto objętość sześcianu, którego krawędź ma długości cal; metr sześcienny jestto objętość sześcianu, którego krawędź równa się metrowi, i t. d.

37. Jeżeli krawędź sześcianu, który mamy tu obok narysowany²⁾,



przedstawia nam metr (linijowy), to objętość tego sześcianu przedstawi metr sześcienny. Metr (linijowy) ma 10 decymetrów. Podzielmy na decymetry trzy krawędzi sześcianu, będące przeciwległymi bokami dwu sąsiednich kwadratów, np. te, które są na naszym rysunku podzielone, i przez odpowiadające punkty podziału przesunmy płaszczyzny.

Wtedy ten metr sześcienny zostanie rozłożony na 10 części równych, warstw^{**)}, z których każda jest szeroka na jeden decymetr, a długa i wysoka na metr, czyli na 10 decymetrów. Tę warstwę możemy znowu w podobny sposób rozłożyć na 10 równych części, słupków^{***)}, z których każdy ma na szeroko-

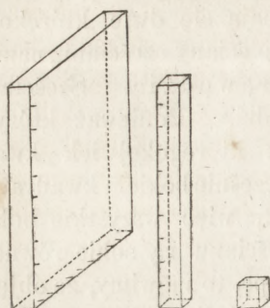
*) Nie każda jednak figura, która ma sześć ścian, jest sześcianiem. (Należy uczniom pokazać jakiegokolwiek sześciociąony, które nie są sześcianami.)

1) Ogólniej: objętość równa objętości sześcianu i t. d.

2) Lepiej jest przy wykładzie używać sześcianu drewnianego, przepiłowanego na równe sześcianniki (np. na 1000, lub na 1728). Warstwy pionowe i słupki można łatwo odśwacać. Z tych sześcianników można ustawiać większe sześcianny i prostopadłościanny.

) *) Powtarzając to po przejściu ustępu 38-ego, można, zamiast warstwa, słupek, mówić: prostopadłościán.

kość i długość jeden decymetr, a na wysokość 10 decymetrów. Na koniec i ten słupek możemy w takiż sam sposób rozłożyć na 10



równych części, z których każda jest sześciannem, mającym krawędź długą na decymetr, t. j. przedstawia nam decymetr sześcienny; zatem w każdym takim słupku jest 10 decymetrów sz. Widzimy więc, że możemy sześciann, przedstawiający metr sześcienny, rozłożyć na 10 równych warstw, a każdą z tych warstw na 10 równych słupków, z których każdy ma 10 dm. sz. Gdy więc jeden słupek ma 10 decymetrów sz., to jedna warstwa, jako złożona z 10 takich słupków, ma decymetrów sz. 10 razy więcej, a więc 10 dm. sz. $\times 10$, t. j. 100 dm. sz.

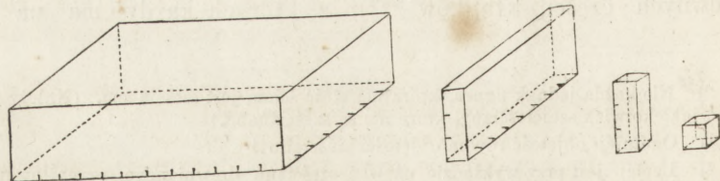
Metr zaś sz., jako równy 10 takim warstwom, ma decymetrów sz. 10 razy więcej, a więc trzeba 100 dm. sz. $\times 10$. Zatem, aby się dowiedzieć, ile metr sześcienny ma decymetrów sześciennych, należy 10 decymetrów sześciennych pomnożyć przez (liczbę oderwaną) 10, a otrzymaną z tego mnożenia liczbę decymetrów sześciennych jeszcze raz pomnożyć przez (liczbę oderwaną) 10; znajdziemy, że metr sz. ma 1000 decymetrów sz.

$$\begin{array}{r} 10 \text{ dm. sz.} \\ 10 \times \\ \hline 100 \text{ dm. sz.} \\ \times 10 \\ \hline 1000 \text{ dm. sz.} \end{array}$$

Podobnie należy postąpić, gdy, wiedząc, że stopa (linijowa) ma 12 cali, chcemy się dowiedzieć, ile stopa sześcienna ma cali sześciennych. A więc, aby się dowiedzieć, ile stopa sześcienna ma cali sześciennych, należy 12 cali sześciennych pomnożyć przez (liczbę oderwaną) 12, a otrzymaną z tego mnożenia liczbę cali sześciennych jeszcze raz pomnożyć przez (liczbę oderwaną) 12; zatem stopa sz. ma 1728 cali sz.—I t. d.

$$\begin{array}{r} 12 \\ \hline 24 \\ 12 \\ \hline 144 \text{ c. sz.} \\ 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \text{ c. sz.} \end{array}$$

38. Figura zamknięta prostokątami nazywa się prostopadłościannem. (Každy z tych



prostokątów jest ścianą prostopadłościannu; linią prostą, według której przecinają się dwie sąsiednie ściany, nazywamy zawsze krawędzią.)

Przypuśćmy, że długość tego prostopadłościanu jest 12 decymetrów, szerokość 8 decymetrów, a wysokość 3 decymetry. Aby się dowiedzieć, ilu decymetrom sześciennym równa jest objętość tego prostopadłościanu, podobnie rozłożymy go na 12 prostopadłościanów mniejszych, równych sobie, a każdy z nich na 8 jeszcze mniejszych prostopadłościanów, równych sobie. Każdy z tych najmniejszych prostopadłościanów ma 3 decymetry sz.; a więc każdy z poprzednich prostopadłościanów ma decym. sz. 8 razy więcej, t. j. 3 dm. sz. $\times 8 = 24$ dm. sz.; dany zaś prostopadłościan, jako złożony z 12-u prostopadłościanów, z których każdy ma objętości 24 dm. sz. ma dm. sz. 12 razy więcej, t. j. 24 dm. sz. $\times 12$. Zatem, aby się dowiedzieć, ilu decymetrom sześciennym jest równa objętość danego prostopadłościanu, należy 3 decymetry sześciennie pomnożyć przez (liczbę oderwaną) 8, a otrzymaną z tego mnożenia liczbę decymetrów sześciennych pomnożyć przez (liczbę oderwaną) 12. Dany więc prostopadłościan ma 288 dm. sz., t. j. jego objętość jest 288 razy większa od decymetra sześciennego. (A więc tu decymetr sześcienny służył nam za jednostkę do wymierzenia objętości prostopadłościanu danego.)

$$\begin{array}{r} 3 \text{ dm. sz.} \\ \times 8 \\ \hline 24 \text{ dm. sz.} \\ \times 12 \\ \hline 48 \\ \hline 24 \\ \hline 288 \text{ dm. sz.} \end{array}$$

ścianów, z których każdy ma objętości 24 dm. sz. ma dm. sz. 12 razy więcej, t. j. 24 dm. sz. $\times 12$. Zatem, aby się dowiedzieć, ilu decymetrom sześciennym jest równa objętość danego prostopadłościanu, należy 3 decymetry sześciennie pomnożyć przez (liczbę oderwaną) 8, a otrzymaną z tego mnożenia liczbę decymetrów sześciennych pomnożyć przez (liczbę oderwaną) 12. Dany więc prostopadłościan ma

39. ILOCZYN JEDNAKOWYCH CZYNNIKÓW. Jeżeli wszystkie czynniki iloczynu są tą samą liczbą, to taki iloczyn nazywamy potęgą liczby, będącej powtarzającym się czynnikiem, np. $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$; — i nazywamy taki iloczyn potęgą drugą, trzecią, czwartą i t. d. liczby, zależnie od tego, ile razy ta liczba wchodzi w uważany iloczyn jako czynnik. Tak np. iloczyn $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ jest piątą potęgą liczby 3.

Skracając sobie pisanie takich iloczynów, umawiamy się, aby pisać jeden tylko czynnik, a liczbę oznaczającą, z ilu takich jednakowych czynników składa się nasz iloczyn, piszemy przy tym czynniku u góry z prawej strony. Tak więc 5-ą potęgę liczby 3, t. j. iloczyn $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$, napiszemy 3^5 , tak iż 3^5 i $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ przedstawiają tę samą liczbę: $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$. Podobnie iloczyn $207 \times 207 \times 207 \times 207 = 207^4$, t. j. jest 4-ą potęgą liczby 207. Liczbę taką, jak w pierwszym przykładzie 5, a w drugim 4, oznaczającą, ile razy liczba, przy której ona się znajduje, zwana podstawą potęgi ma być wzięta jako czynnik, nazywamy wykładnikiem potęgi; mieliśmy tu podstawę 3 z wykładnikiem 5, oraz podstawę 207 z wykładnikiem 4.

Drugą potęgę liczby nazywamy także kwadratem liczby, tak $8 \times 8 = 8^2$ nazywamy albo: drugą potęgą liczby 8, albo: kwadratem liczby 8; trzecią zaś potęgę liczby nazywamy także sześciannem liczby; np. $5 \times 5 \times 5 = 5^3$ nazywamy albo: potęgą trzecią liczby 5, albotóż: sześciannem liczby 5. Liczby, które dadzą się wyrazić jako kwadrat lub jako

sześcian liczby, nazywają niekiedy liczbami kwadratowymi lub odpowiednio liczbami sześciennymi. Tak np. liczby 64, 36, 144 są liczbami kwadratowymi, bo $64=8^2$, $36=6^2$, $144=12^2$; liczby zaś 8, 64, 343 są liczbami sześciennymi, bo $8=2^3$, $64=4^3$, $343=7^3$.

Korzystając z tego sposobu oznaczania iloczynów jednakowych czynników, możemy znacznie krócej pisać niektóre iloczyny (us. 10); np.

$$\begin{aligned} 3 \times 7 \times 7 \times 52 \times 4 \times 3 \times 31 \times 7 \times 31 \times 31 \times 7 \times 11 &= \\ &= 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 52 \times 4 \times 31 \times 31 \times 31 \times 11 = \\ &= 3^2 \times 7^4 \times 52 \times 4 \times 31^3 \times 11. \end{aligned}$$

Zauważymy tu, że liczby, przedstawione przez 1 z dwoma lub więcej zerami (us. 22), są potęgami liczby 10:

$$100=10 \times 10=10^2, 1000=10 \times 10 \times 10=10^3,$$

$$10000=10 \times 10 \times 10 \times 10=10^4, \text{ i t. d.}$$

Więc np. $700 \times 3 \times 70 \times 70 \times 50 \times 51 \times 3000 \times 70$ możemy (us. 31) przedstawić tak: $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 3 \times 3 \times 5 \times 51 \times 1000000000=7^4 \times 3^2 \times 5 \times 51 \times 10^9$.

40. Jeżeli mamy pomnożyć np. 3^4 przez 3^5 , to (us. 10)

$$\begin{aligned} 3^4 \times 3^5 &= (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) = \\ &= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^9 = 3^{4+5}; \end{aligned}$$

podobnie łatwo dowieść, że np. $3^4 \times 3^5 \times 3^2 = 3^{4+5+2} = 3^{11}$, t. j. że iloczyn dwu lub więcej potęg tej samej liczby jest także potęgą tej liczby, a jej wykładnik jest sumą wykładników czynników.—Ponieważ np. $3^5 \times 3 = 3^6 = 3^{5+1}$, więc drugi czynnik danego iloczynu, t. j. 3, możemy uważać za potęgę pierwszą liczby 3, gdyż ten czynnik zachowuje się w tym iloczynie tak, jakgdyby było napisane 3^1 . Każdą więc liczbę możemy uważać za jej pierwszą potęgę, więc np. $10 = 10^1$.

Odwrotnie (us. 10)

$$3^9 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3) = 3^5 \times 3^4$$

$$3^9 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = (3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3) \times 3 = 3^3 \times 3^2 \times 3^3 \times 3^1$$

t. j. potęgę pewnej liczby możemy rozłożyć na czynniki, z których każdy jest potęgą tej liczby; suma wykładników czynników jest równą wykładnikowi danej potęgi.

41. Jakąkolwiek liczbę, np. 30568, możemy tak przedstawić (§ 4, us. 11; § 6, us. 22):

$$30568 = 30000 + 500 + 60 + 8 =$$

$$= 3 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 + 5 \times 10 \times 10 + 6 \times 10 + 8 \times 1,$$

czyli (us. 39, 40): $30568 = 3 \times 10^4 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 8 \times 1$.

Podobnie $856724 = 8 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 1$, t. j. dziesiątki, setki i t. d. każdej liczby przedstawiają iloczyn liczby jednocyfrowej przez potęgę liczby 10. Jest to następstwem tego, że nasz systemat pisania liczb jest dziesiętkowym, t. j. ma za podstawę liczbę 10.

42. Gdybyśmy więc przy wypowiedaniu i pisaniu liczb przyjęli inną liczbę za podstawę, np. 6, to mielibyśmy systemat szóstkowy; podobnie moglibyśmy mieć systematy ósemkowe, dwójkowe, dwunastkowe i t. d. Wtedy, podobnie jak w systemacie dziesiętkowym, liczba jakakolwiek rozkładałaby się na części, z których każda byłaby iloczynem liczby mniejszej od 6-u (jak w dziesiętkowym: liczby jednocyfrowej, t. j. mniejszej od 10-u) przez pewną potęgę podstawy 6. Dla przedstawienia więc liczby używalibyśmy tylko cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Tak np., jeżeli się umówimy, aby przez ujęcie liczby w nawias [] i dodanie z prawej strony u dołu, jako znaczka, liczby przyjętej za podstawę, oznaczać przedstawienie liczby w innym, niż dziesiętkowy, systemacie, to

$$[250413]_6 = 2 \times 6^5 + 5 \times 6^4 + 4 \times 6^3 + 1 \times 6^2 + 3 \times 6^1;$$

$$[67245]_6 = 6 \times 8^4 + 7 \times 8^3 + 2 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 5 \times 1;$$

$$[12302]_5 = 1 \times 5^4 + 2 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 2 \times 1;$$

$$[1011011]_2 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 1.$$

Gdybyśmy przyjęli za podstawę liczbę większą od 10, np. liczbę 12, to wypadłoby mieć oddzielne (jednocyfrowe) znaki dla wszystkich liczb mniejszych od 12, czyli wprowadzić cyfry na oznaczenie liczb dziesięć i jedenaście. Jeżeli np. dziesięć oznaczmy cyfrą a , zaś jedenaście cyfrą b , to np.

$$[49a3b5]_{12} = 4 \times 12^5 + 9 \times 12^4 + a \times 12^3 + 3 \times 12^2 + b \times 12^1 + 5.$$

43. Jeżeli chcemy liczbę, napisaną w innym, niż dziesiętkowy, systemacie, przedstawić w systemacie dziesiętkowym¹⁾, to należy ją w powyższy (us. 42) sposób rozłożyć na części, wynałéć iloczyny częściowe i następnie wziąć sumę tych iloczynów, która przedstawi nam daną liczbę, napisaną w systemacie dziesiętkowym. Tak więc:

$$[250413]_6 = 2 \times 7776 + 5 \times 1296 + 4 \times 36 + 6 + 3 = 22185;$$

$$[67245]_6 = 2835; [12302]_5 = 952; [1011011]_2 = 91;$$

$$[49a3b5]_{12} = 4 \times 12^5 + 9 \times 12^4 + 10 \times 12^3 + 3 \times 12^2 + 11 \times 12 + 5 = 1199801.$$

(Zadania arytmetyczne. § 415.)

§ 7. DZIELENIE.

1. Podobnie jak, mając sumę dwu składników i jeden jéj składnik, mogliśmy wynałéć drugi składnik téj sumy (§ 5, us. 1), — możemy mając iloczyn dwu czynników i jeden jego czynnik, wynałéć drugi czynnik tego iloczynu. Tak np., jeżeli wiemy, że z pomnożenia przez siebie dwu czynników, z których jeden był 3, otrzymaliśmy iloczyn 12, to możemy odszukać drugi z czynników tego iloczynu.

Wtedy, kiedyśmy jeszcze odpowiedniej wprawy nie posiadali, zadanie to rozwiązywaliśmy, szukając stopniowo liczby takiej, iżby iloczyn jéj

¹⁾ Zadanie odwrotne w § 7, us. 29.

i czynnika 3 był 12. Mówiliśmy więc: *raz* 3 jest 3 (zamało), *2* razy 3 jest 6 (mało), *3* razy 3 jest 9 (mało), *4* razy 3 jest (właśnie) 12; zatem: szukana liczba jest 4.

Postępowanie, zapomocą którego, mając iloczyn dwu czynników i jeden z tych czynników, wynajdujemy drugi czynnik tego iloczynu, przedstawia działanie, zwane dzieleniem. Możemy więc powiedzieć:

Zapomocą dzielenia, mając iloczyn dwu czynników i jeden z tych czynników, wynajdujemy czynnik drugi.

2. Z powyższego przykładu widzimy, że dzielenie polega na dobieraniu różnych liczb dotąd, dopóki nie natrafimy na taką, iżby iloczyn jej i czynnika wiadomego był właśnie drugą liczbą daną, oraz, że postępowanie to jest właściwie próbowaniem. W tym próbowaniu zaś wydaje się najpewniejszym brać po kolei liczby 1, 2, 3, 4 i t. d., aż do wynalezienia liczby szukanej.

Gdy mamy liczbę jednocyfrową, lub dwucyfrową podzielić przez jednocyfrową, to znakomitym jest dla nas ułatwieniem należyte przyswojenie sobie tabliczki mnożenia (§ 6, us. 4). Jeżeli bowiem dobrze pamiętamy iloczyny liczb jednocyfrowych, to np., mając iloczyn dwu czynników, 42, i jeden jego czynnik 6, dla odnalezienia czynnika drugiego nie będziemy próbować liczb 1, 2, 3 i t. d., ale odrazu powiemy: 7, bo $6 \times 7 = 42$.

Jak zaś to odszukiwanie drugiego czynnika sobie ułatwić, gdy dane są inne, większe liczby, — mówić będziemy później.

3. Dany iloczyn dwu czynników nazywa się w dzieleniu dzielną, czynnik wiadomy nazywa się dzielnikiem, a czynnik szukany ilorazem. Mając to na względzie i używając powyższych nazw dla liczb, wchodzących do dzielenia, możemy to, cośmy w ustępie 1-ym o dzieleniu powiedzieli, wysłowić w ten sposób:

Dzielenie jestto działanie, zapomocą którego, mając dwie liczby: dzielną i dzielnik, odnajdujemy liczbę, zwaną ilorazem, taką, iżby iloczyn dzielnika i ilorazu przedstawił dzielną.

W zadaniu: podzielić 12 przez 3, liczba 12 jest dzielną, a 3 dzielnikiem; otrzymana liczba 4 jest ilorazem, bo iloczyn 3-ch i 4-ch jest 12. Jeżeli wiemy, że liczba 3 jest tu mnożną (§ 6, us. 5, 2), to zamiast mówić: bo iloczyn 3-ch i 4-ch jest 12, powiemy: bo $3 \times 4 = 12$; jeżeli zaś liczba 3 jest mnożnikiem, powiemy: bo $4 \times 3 = 12$. Mamy więc¹⁾ albo:

$$\text{dzielnik} \times \text{iloraz} = \text{dzielnej},$$

albo:

$$\text{iloraz} \times \text{dzielnik} = \text{dzielnej}.$$

UWAGA. Niekiedy idzie nam tylko o liczebną wartość ilorazu, a jest dla nas rzeczą obojętną, czy on w mnożeniu byłby mnożnikiem, czy-

¹⁾ Ogólnie: iloczyn dzielnika i ilorazu równa się dzielnej.

tęż mnożną (a tysamym, czy dzielnik ma charakter mnożnej, czy mnożnika); wtedy iloraz i dzielnik uważamy wogóle za czynniki (§ 6, us. 7) dzielnej (jako ich iloczyn) i wtedy wszystko jest jedno, w jakim porządku (§ 6, us. 9) te czynniki w powyższym iloczynie piszemy.

4. Dla oznaczenia, że mamy dwie liczby przez siebie podzielić, piszemy naprzód dzielną, a po niej dzielnik, stawiając między nimi znak: Tak więc np. $12:3$ czytamy 12 podzielone przez 3. I napiszemy

$$12:3=4.$$

Ponieważ wyrażenie $12:3$ przedstawia liczbę 4, iloraz, więc możemy je także nazwać ilorazem, t. j. *wskazane dzielenie nazywamy często ilorazem* liczb, w to wyrażenie wchodzących¹⁾.

5. Zastanawiając się nad tym, cośmy powiedzieli w ustępach 1-ym i 3-cim, widzimy, że dzielenie jest związane z mnożeniem tak, iż z liczb wchodzących do mnożenia np. $3 \times 4 = 12$, możemy ułożyć dwa dzielenia $12:3=4$ i $12:4=3$. Zestawiając to ze sobą:

$$3 \times 4 = 12,$$

$$12 : 3 = 4,$$

$$12 : 4 = 3,$$

zauważyć możemy, że ta liczba, której szukaliśmy w mnożeniu, jest daną w dzieleniu, i odwrotnie, liczba szukana w dzieleniu jest daną w mnożeniu. Możemy więc powiedzieć, że *dzielenie jest działaniem odwrotnym mnożeniu dwu²⁾ czynników³⁾*.

6. Ponieważ w mnożeniu różny jest charakter mnożnej i mnożnika (§ 6, us. 5) — mnożna jest składnikiem, a mnożnik wskazuje na działanie, t. j. oznacza, ile razy mnożna ma być wzięta jako składnik — więc w dzieleniu dzielnik, jako wogóle jeden z dwu czynników iloczynu, odpowiadać może albo mnożnej, albotóż mnożnikowi, co zasługuje na bliższe rospatrzenie.

Jeżeli dzielnik odpowiada mnożnej (składnikowi), to szukamy ilorazu, odpowiadającego mnożnikowi, który nam wskaże, ile razy dzielnik należy wziąć jako składnik, aby otrzymać dzielną. Innymi słowy: tu iloraz wskaże nam, ile razy dzielnik mieści się w dzielnej.

Jeżeli zaś dzielnik odpowiada mnożnikowi, to szukamy ilorazu odpowiadającego mnożnej, t. j. chcemy znaleźć liczbę, którą biorąc jako składnik tyle razy, ile nam wskazuje dzielnik, otrzymamy dzielną. Czyli, mamy znaleźć liczbę, która byłaby częścią dzielnej taką, że biorąc tych części tyle, ile jest jedności w dzielniku, mieć będziemy dzielną. Idzie więc

¹⁾ Częściej w innej nieco postaci przedstawiamy wskazane dzielenie (por. § 17, us. 5).

²⁾ Na pytanie: dlaczego niema działania odwrotnego mnożeniu trzech lub więcej czynników? mamy odpowiedź: zasadniczym jest tylko mnożenie dwu (§ 6, us. 7) czynników. (Por. § 5, us. 7.)

³⁾ Por. us. 9.

nam tu o to, aby dzielną rozłożyć na tyle równych części, ile jest jedno-
ści w dzielniku, i przez to oznaczyć jedną taką część.

Możemy więc powiedzieć, że mamy dwa przypadki w dzie-
leniu:

*Jeżeli dzielnik odpowiada mnożnej, to idzie nam o to, aby się dowie-
dzić, ile razy dzielnik mieści się w dzielnej.* (W tym przypadku: dzielnik
 \times iloraz = dzielnej.)

*Jeżeli dzielnik odpowiada mnożnikowi, to idzie nam o to, aby rozłożyć
dzielną na tyle równych części, ile jest jedności w dzielniku, i oznaczyć przez
to jedną taką część.* (W tym przypadku: iloraz \times dzielnik = mnożnej.)

Widzimy więc, że istnieją dwa wzajem się wykluczające przypadki
w działaniu odwrotnym mnożeniu¹⁾, tak, że gdy mamy dzielenie, to za-
danie, które nas do tego dzielenia doprowadziło, samo nam wyznacza,
jaki mamy przypadek przed sobą.

Jeżeli jednak jest ogólnie powiedziane tylko: podzielić np. 12 przez
3, to tu nie wiemy, czy w mnożeniu (uś. 3) dwu czynników: dzielnika 3
i szukanego ilorazu, mamy dzielnik 3 uważać za mnożną, czytóż za mnoż-
nik. Mając więc $12:3=4$, powiemy ogólnie: z podzielenia 12-u przez
3 otrzymujemy 4, a na szczegółowsze pytanie: co ta liczba 4 oznacza?
możemy równie dobrze odpowiedzieć: iloraz 4 wskazuje nam, iż w dziel-
nej 12 dzielnik 3 mieści się 4 razy, jakotóż: iloraz 4 wskazuje nam,
że, rozkładając dzielną 12 na 3 równe części, jako jedną taką część otrzy-
mujemy 4 (albo innymi słowy: że 3-ą częścią 12-u jest 4).

Czy jednak dzielnik odpowiada mnożnej, czytóż mnożnikowi, to
liczba (oderwana), którą otrzymujemy w ilorazie, jest ta sama w obu przy-
padkach — znaczenie jej tylko bywa różne, ze względu na to, o co nam
w tym dzieleniu idzie.

7. Widoczniej się to jeszcze przedstawi, gdy weźmiemy zadanie
na działanie odwrotne mnożeniu liczb mianowanych (§ 6, us. 6). Tak
np., względem zadania:

Pewna osoba kupiła 4 łokcie sukna, płacąc za każdy łokieć po
złotych 6; wiele dała za kupione sukno?

$$6 \text{ zł.} \times 4 = 24 \text{ zł.}$$

Odp. Za kupione sukno dała 24 złote.,
mogą być dwa zadania odwrotne:

a. Pewna osoba za kupione sukno dała 24 złote, płacąc za każ-
dy łokieć po złotych 6; ile kupiła łokci?

Dla znalezienia odpowiedzi, rozumować będziemy w ten sposób.
Jeżeli za każdy łokieć ta osoba płaciła zł. 6, a za wszystko sukno

¹⁾ W działaniu odwrotnym dodawaniu, t. j. w odejmowaniu jest tylko jeden przy-
padek, bo w dodawaniu składniki nie mają różnego znaczenia, gdy tymczasem w mnożeniu
mnożnik ma znaczenie odmienne od mnożnej.

zapłaciła 24 zł., to kupiła tyle łokci, ile razy 6 zł. mieści się w 24 zł.; $24 \text{ zł.} : 6 \text{ zł.} = 4$; znaleźliśmy więc, że 6 zł. mieści się w 24 zł. razy 4; że zaś powiedzieliśmy, iż ta osoba kupiła «tyle łokci, ile razy 6 zł. mieści się w 24 zł.», więc łokci było także 4:

$$24 \text{ zł.} : 6 \text{ zł.} = 4; \quad 4 \text{ łok.}$$

Odp. Kupiła 4 łokeie.

b. Pewna osoba za 4 łokcie kupionego sukna dała 24 złote; po ile złotych zapłaciła za każdy łokieć sukna?

Tu rozumować wypadnie w ten sposób. Ponieważ za 4 łok. sukna ta osoba zapłaciła 24 zł., to za jeden (czyli: za każdy) łokieć sukna zapłaciła 4-ą część 24-ch zł.; trzeba więc 24 zł. rozłożyć na 4 równe części i tym samym dowiedzieć się, jaką jest jedna taka część; $24 \text{ zł.} : 4 = 6 \text{ zł.}$; 4-a więc część 24 zł. jest 6 zł.; więc za łokieć sukna zapłaciła 6 zł.

$$24 \text{ zł.} : 4 = 6 \text{ zł.}$$

Odp. Za każdy łokieć sukna płaciła po 6 złotych.

Przyglądając się uważnie powyższemu zadaniu na mnożenie i dwu, wprowadzonym z niego, zadaniom na dzielenie liczb mianowanych prostych, widzimy, że w zadaniu a. dzielnik 6 zł. odpowiada mnożnej, a przeto jest liczbą mianowaną, wyrażoną przy pomocy tej samej jednostki, co dzielna (§ 6, us. 6); wtedy iloraz, jako odpowiadający mnożnikowi, jest liczbą oderwaną. W zadaniu zaś b., odwrotnie: dzielnik jest liczbą oderwaną, a więc iloraz jest liczbą mianowaną, wyrażoną przy pomocy tej samej jednostki, co dzielna. Możemy więc o tych dwu przypadkach w dzieleniu liczb mianowanych*) powiedzieć:

Jeżeli dzielnik jest mianowany, to jest on wyrażony przy pomocy tej samej jednostki, co dzielna; w tym przypadku dzielenia idzie nam o to, aby się dowiedzieć, ile razy dzielnik mieści się w dzielnej. Na to właśnie wskazuje iloraz, który jest liczbą oderwaną i, stosownie do warunków zadania, może odpowiadać liczbie mianowanej, jak np., w zadaniu a. otrzymany iloraz 4 (liczba oderwana) odpowiadał liczbie mianowanej: 4-m łokciom.

Jeżeli dzielna jest liczbą mianowaną, a dzielnik oderwaną, to w tym przypadku dzielenia idzie nam o to, aby rozłożyć dzielną na tyle równych części, ile jest jedności w dzielniku, i oznaczyć przez to jedną taką część. Tę właśnie część wyznacza nam iloraz, który jest liczbą mianowaną, wyrażoną przy pomocy tej samej jednostki, co dzielna.

Zauważymy tu jednak, że w jakichkolwiek jednostkach są wyrażone liczby, dane do podzielenia, byle liczby oderwane, zachodzące w tych liczbach mianowanych (§ 1, us. 10), były te same, np.

*) Dzielna w dzieleniu liczb mianowanych, jako odpowiadająca iloczynowi (§ 6, us. 6), jest zawsze mianowana.

$$24 \text{ zł.} : 6 = 4 \text{ zł.},$$

$$24 \text{ zł.} : 6 \text{ zł.} = 4,$$

$$24 \text{ łok.} : 6 \text{ łok.} = 4,$$

zawsze liczba (oderwana), otrzymywana w ilorazie, jest ta sama, ja kto z określenia dzielenia wypada. Stosownie zaś do tego, czy po niej ma być postawione miano jednostki, czy też nie, nabiera ona znaczenia, odpowiadającego jednemu lub drugiemu przypadkowi dzielenia.

8. W tym przypadku dzielenia, gdy idzie nam o to, aby się dowiedzieć, ile razy dzielnik mieści się w dzielnej¹⁾ (t. j. kiedy dzielnik odpowiada mnożnej), możemy także powiedzieć, że idzie nam o to, aby się dowiedzieć, *ile razy dzielna jest większa od dzielnika**, czyli: chcemy tu *dzielnikiem wymierzyć dzielną* (§ 1, us. 1). — A ponieważ w mnożeniu (§ 6, us. 2), powiększając mnożną (którą tu przedstawia dzielnik) pewną liczbę razy, otrzymujemy iloczyn (t. j. dzielną), więc możemy powiedzieć, że (odwrotnie) w tym przypadku dowiadujemy się, *ile razy trzeba zmniejszyć dzielną, aby z niej otrzymać dzielnik*.

W przypadku zaś, gdy idzie nam o to, aby dzielną rozłożyć na tyle równych części, ile jedności jest w dzielniku i oznaczyć jedną taką część (t. j. gdy dzielnik odpowiada mnożnikowi), chcemy właśnie znaleźć tę liczbę (mnożną — iloraz), którą powiększając (§ 6, us. 2) tyle razy, ile jedności jest w dzielniku, otrzymamy dzielną, a więc (odwrotnie), idzie nam tu o to, aby *otrzymać liczbę tyle razy od dzielnej mniejszą, ile jest jedności w dzielniku*, czyli innymi słowy, aby *dzielną zmniejszyć tyle razy, ile jest jedności w dzielniku***).

1) Niektórzy ten przypadek takdalece wyróżniają, iż rozważają osobne (?) działanie «mieszcząc się», albo «mierzenie», i nawet obmyślają oddzielny na nie znak. Nacisk jednak taki, którego nawet nie można ściśle przeprowadzić w dalszych częściach arytmetyki, jest przesada, której być nie powinno przy nauczaniu poważnym. Tymwięcej, że wtedy często uwalniałoby się ucznia od należytego rozważenia warunków zadania w celu zrozumienia, który przypadek dzielenia ma on przed sobą, gdyż sam widok znaku naprowadzałby go mechanicznie na formułowanie odpowiedzi. Z tej kwestyi jasno już sobie zdawano u nas sprawę przed stu laty:

«Trzeba także wytłomaczyć dzieciom, że... w dzieleniu dwa cele sobie założyć można, bo albo chcemy wiedzieć, ile razy jedna liczba w drugiej zawiera się, co wtenczas ma miejsce, gdy tak liczba dzieląca, jako i podzielna, wielość jednego gatunku rzeczy oznacza: na przykład, gdy i ta i tamta znaczy czerwone złote, albo złote, i t. d., i wtenczas wieloraz będzie wyrażał liczbę samę przez się, to jest oznaczającą tylko, że tyle, a nie więcej razy, inne dwie liczby jedna w drugiej się znajdowała; albotędź liczby danej do podzielenia szukamy części jakiej, na przykład połowy, trzeciej części, czwartej i t. d., i natenczas liczba dzieląca żadnego gatunku rzeczy nie znaczy, albo przynajmniej tak jest uważana; a zaś wieloraz wyraża liczbę znaczącą wielość tego samego rzeczy gatunku, który i liczba podzielna wyrażała... Tę różnicę przy każdym dopiero przykładzie pokazywać mają Nauczyciele uczniom swoim, doświadczać ich piérwój przez pytanie, czyli wieloraz w podanym im przykładzie, będzie znaczył jaki gatunek rzeczy, czyli nie?» (*Arytm. dla sz. nar.*, str. 49).

*) Tak np. $24 \text{ zł.} : 6 \text{ zł.} = 4$ możemy przeczytać: 24 złote jest większe od 6-u złotych 4 razy, albo: wymierzając 24 złote 6-u złotymi, otrzymuję liczbę 4.

**) Tak np. $24 \text{ zł.} : 4 = 6 \text{ zł.}$ możemy przeczytać: zmniejszając 24 złote 4 razy, otrzymuję 6 złotych.

9. Oczywiście, że gdy pewną liczbę wypadła nam przez jakąś liczbę pomnożyć i przez tę samą liczbę podzielić, np. 12 pomnożyć przez 3 i podzielić przez 3, to liczba dana nie zmieni się: tyle bowiem razy powiększamy (§ 6, us. 2) liczbę 12, mnożąc ją przez 3, ile razy ją zmniejszamy (us. 8), dzieląc ją przez 3, czyli dana liczba 12 pozostanie bez zmiany. Zwykle wtedy mówimy *pomnożenie i podzielenie przez tę samą liczbę, jako działania wprost odwrotne sobie, wzajemnie się znoszą*.

To dzielenie, o którym tu jest mowa, winno być istotnie wprost odwrotne mnożeniu przez ów mnożnik, t. j. mowa tu jest o tym przypadku dzielenia, kiedy dzielnik odpowiada mnożnikowi. W działaniach więc na liczbach mianowanych wzajemnie się znoszą: mnożnik (liczba oderwana, § 6, us. 6) i dzielnik oderwany (us. 7). Np. $(24 \text{ zł.} \times 6) : 6 = 24 \text{ zł.}$ i podobnie $(24 \text{ zł.} : 6) \times 6 = 24 \text{ zł.}$ — Gdybyśmy jednak mieli np. $(24 \text{ zł.} : 6 \text{ zł.}) \times 6$, to tu liczbę wypadłą z podzielenia 24 zł. przez 6 zł., t. j. (us. 7) liczbę oderwaną 4, mamy pomnożyć przez 6 i otrzymamy (liczbę oderwaną) 24, a nie liczbę daną: 24 zł. Jest zatem $(24 \text{ zł.} : 6 \text{ zł.}) \times 6 = 24$. (Zawsze jednak liczba oderwana pozostaje bez zmiany)

10. Weźmy teraz zadanie następujące: Pewna osoba kupiła 4 łokcie sukna; sukiennik chciał za nie (po 6 złotych za łokieć, t. j.) 24 złote, po targu jednak oddał to sukno za 22 złote; po ile złotych ta osoba płaciła za każdy 4 łokieć sukna? — Gdyby płaciła po 6 zł., toby zapłaciła za 4 łokcie 6 zł. $\times 4 = 24 \text{ zł.}$, co jest więcej niż 22 zł.; płaciła więc za łokieć mniej niż 6 złotych. Gdyby płaciła po 5 zł., toby zapłaciła za 4 łokcie 5 zł. $\times 4 = 20 \text{ zł.}$, co jest mniej niż 22 zł.; płaciła więc za łokieć więcej niż 5 złotych. Ponieważ płaciła mniej niż 6, a więcej niż 5 złotych, zatem ilość złotych, które płaciła za łokieć sukna wyraża się liczbą pośrednią między 5 i 6. W każdym jednak razie ta osoba zapłaciła za łokieć sukna 5 złotych i prócz tego kwotę mniejszą od jednego złotego. — Ponieważ za wszystko sukno, t. j. za 4 łokcie, zapłaciła 22 złote, a rachując łokieć po 5 zł. należałoby zapłacić 20 złotych, więc aby wiedzieć dokładnie, ile zapłaciła za łokieć, trzeba by jeszcze pozostałe 22 zł. — 20 zł. = 2 zł. podzielić przez 4. Mieliśmy tutaj dzielenie liczby 2 przez 4, t. j. liczby mniejszej przez większą (por. us. 8), czym szczegółowo później się zajmiemy ¹⁾. Teraz zaś będziemy tylko zaznaczać, że pozostała nam z dzielnej liczba mniejsza od liczby będącej w dzielniku, którą należałoby jeszcze podzielić przez dzielnik. Powiemy więc w odpowiedzi na pytanie postawione w naszym zadaniu, że ta osoba za łokieć sukna płaciła 5 złotych i jeszcze to, co wypadnie z podzielenia 2-u złotych przez 4.

¹⁾ Por. § 16.

Gdybyśmy zaś mieli zadanie: Pewna osoba zapłaciła za sukno 22 złote, płacąc za każdy łokieć 4 złote; ile kupiła łokci? — to należałoby rozumować w ten sposób. Kupiła tyle łokci sukna, ile razy 4 złote mieści się w 22 złotych; a że 4 zł. mieści się w 22 złotych więcej niż 5, a mniej niż 6 razy, a nadto gdyby kupiła tylko 5 łokci, to za nie zapłaciłaby 4 zł. $\times 5 = 20$ zł., więc kupiła 5 łokci i prócz tego mniej niż jeden łokieć sukna, za któreto sukno należy się 22 zł. — $20 \text{ zł.} = 2 \text{ zł.}$

11. Weźmy ogólne zadanie: podzielić 22 przez 4. Ilorazem nie jest liczba 5, bo $4 \times 5 = 20$, mniej niż dzielna; nie jest nim również 6, bo $4 \times 6 = 24$, więcej niż dzielna. Iloraz więc jest większy od 5, a mniejszy od 6, czyli jest liczbą pośrednią między 5 i 6, a tym samym liczbą nienależącą do szeregu liczb naturalnych (§ 1, us. 6). Ilorazem więc jest tu liczba 5 wraz z tym, co wypadnie, gdy $22 - (4 \times 5) = 2$ podzielimy przez dzielnik 4.

Taką liczbę, jak powyżej 5, posiadającą tę cechę, że iloczyn jej i dzielnika jest mniejszy od dzielnej, a jednocześnie iloczyn tej liczby, powiększonej o jedność, i dzielnika, byłby już większy od dzielnej, nazywamy ilorazem niezupełnym ¹⁾. Liczbę zaś, pozostającą z dzielnej po odjęciu od niej iloczynu dzielnika i ilorazu niezupełnego, a więc mniejszą zawsze od dzielnika, którą należałoby jeszcze podzielić przez dzielnik ²⁾, t. j. taką liczbę, jak powyżej 2, nazywamy resztą dzielenia, albo krócej: resztą. (Samo się przez się rozumie — jak to z resztą widzieliśmy w przykładach ustępu poprzedzającego — że, jeżeli dzielna jest liczbą mianowaną, to i reszta jest liczbą mianowaną, wyrażoną przy pomocy tej samej jednostki, co dzielna.)

W powyższym przykładzie mieliśmy $22 - 4 \times 5 = 2$, czyli (§ 5, us. 3) $4 \times 5 + 2 = 22$, t. j.

$$\text{dzielnik} \times \text{iloraz niezupełny} + \text{reszta} = \text{dzielnej.}$$

Jeżeli zaś z dzielenia nie otrzymujemy reszty, np. przy dzieleniu 12-u przez 3, to często dla dobitności wyrażamy się, że resztą dzielenia jest zero, albo że po podzieleniu 12-u przez 3 otrzymujemy w reszcie zero, lub jeszcze, że 12 dzieli się bez reszty przez 3. — Jeżeli reszta dzielenia jest zero, to iloczyn dzielnika i ilorazu = dzielnej (us. 3) i dlatego możnaby wtedy otrzymany iloraz nazywać ilorazem zupełnym.

¹⁾ Quotient incomplet (Legendre).

²⁾ «Można także na początku zaraz tego Rozdziału (jak tu §-u) przygotowywać dzieci do pojęcia łatwiejszego nanki o liczbach łamanych, albo ułomkach... nie jednak o tych ułomkach jeszcze im nic wspominając, ale powiadając tylko, że podzielić liczbę jaką przez 2 jest to wziąć jej połowę, podzielić ją przez 3 jest to wziąć jej trzecią część i t. d. i że trafia się często dzielić liczby jedne przez drugie, które kilka lub więcej razy w tamtych się zawierają, ale jeszcze pozostaje od nich jaka liczba mniejsza od tej, którą ją dzielić powinna. Np. 2 znajduje się w 5 razy 2 i jeszcze zostaje 1 do podzielenia przez 2, liczbę większą.» (Arytm. dla sz. nar., str. 46.)

Jednak iloraz zupełny nazywamy wprost: ilorazem, tak iż wtedy tylko mamy na uwadze iloraz niezupełny, gdy to wyraźnie wypowiadamy.

Jeżeli dana liczba dzieli się bez reszty przez jakąś liczbę, to mówimy, że dana liczba jest przez ową liczbę podzielna. Tak np., liczba 12 jest podzielna przez 3, jest podzielna przez 4; liczba 24 jest podzielna przez 6, przez 8, przez 12, i t. d. — Wrazie, gdy z podzielenia liczby daniej przez jakąś liczbę otrzymujemy resztę (różną od zera), to mówimy, że dana liczba nie jest podzielna, albo: jest niepodzielna przez tę liczbę. Np. liczba 22 jest niepodzielna przez 4; liczba 12 jest niepodzielna ani przez 8, ani przez 5, i t. d.

Jakąkolwiek liczbę, np. 14, zawsze możemy przedstawić (§ 6, us. 3, 4) jako 14×1 , tak iż $14 = 14 \times 1$, a tymsamym (us. 5, 6) $14 : 14 = 1$; $14 : 1 = 14$. Podobnie, gdy mamy np. liczbę 5, to $5 : 5 = 1$ i $5 : 1 = 5$, i t. d. Czyli: *każda liczba jest podzielna przez samę siebie i przez jedność.*

12. Widzieliśmy, że dodawanie (§ 4, us. 2, 6), odejmowanie (§ 5, us. 7) i mnożenie (§ 6, us. 3) liczb z szeregu liczb naturalnych doprowadzało nas zawsze do liczby tego szeregu, gdy tymczasem dzielnik niekiedy przez siebie (jak w poprzednim ustępie $22 : 4$) dwie liczby z szeregu liczb naturalnych, otrzymujemy liczbę, do tego szeregu nie należącą. Skąd to pochodzi?

Ponieważ dodawanie jest skróconym liczeniem (§ 4, us. 2), a mnożenie, jako skrócone dodawanie jednakowych składników (§ 6, us. 3), jest tymsamym także skróconym liczeniem, więc oba te działania, wykonywane na liczbach z szeregu liczb naturalnych, bezwarunkowo zawsze doprowadzą nas do liczby, do tego szeregu należącej, gdyż w liczeniu (§ 1, us. 7) z nimi tylko mamy do czynienia.

W odejmowaniu, działaniu odwrotnym, przy dowolnie wziętej liczbie z szeregu liczb naturalnych, jako odjemnej, odjemnikiem mogła być tylko liczba mniejsza (§ 5, us. 4), t. j. znajdująca się w tym szeregu przed odjemną.

Drugie działanie odwrotne, dzielenie, jako działanie odwrotne mnożeniu, t. j. dodawaniu jednakowych składników, wtedy tylko przy dowolnie wybranej liczbie z szeregu liczb naturalnych, jako dzielniku, doprowadzić może do ilorazu należącego do tegoż szeregu, jeżeli dzielna zajmuje w tym szeregu miejsce albo dwa, albo trzy, albo cztery i t. d. (wogóle całkowitą liczbę) razy dal-sze (licząc od 1), niż dzielnik.

Wogóle więc, iloraz liczb z szeregu liczb naturalnych niezawsze jest liczbą tego szeregu.

13. W § 6-ym ustępie 12-ym widzieliśmy, że

a. *Aby iloczyn pomnożyć przez pewną liczbę, można przez tę liczbę pomnożyć którykolwiek z jego czynników.*

b. Jeżeli którykolwiek czynnik iloczynu mnożymy przez pewną liczbę, to tym samym ten iloczyn przez tę liczbę mnożymy.

Jeżeli, mając np. iloczyn $5 \times 3 \times 4 \times 2 \times 6$, chcemy go podzielić przez jeden z jego czynników, np. przez 4, to zważmy, że (§ 6, us. 10)

$$5 \times 3 \times 4 \times 2 \times 6 = 5 \times 3 \times 2 \times 6 \times 4 = (5 \times 3 \times 2 \times 6) \times 4.$$

W ostatnim iloczynie, który możemy uważać jako iloczyn dwu czynników, jednego $5 \times 3 \times 2 \times 6$, a drugiego 4, możemy czynnik 4 przyjąć jako dzielnik, gdy dzielną przedstawiać będzie ten iloczyn dwu czynników (us. 1, 2). Wtedy ilorazem będzie pozostały czynnik, t. j. liczba przedstawiona (§ 6, us. 7) przez iloczyn $5 \times 3 \times 2 \times 6$, a więc

$$(5 \times 3 \times 4 \times 2 \times 6) : 4 = 5 \times 3 \times 2 \times 6,$$

t. j. aby iloczyn podzielić przez jeden z jego czynników, należy wziąć iloczyn czynników pozostałych, czyli — należy ów czynnik opuścić.

Opiérając się na tym, jeżeli mamy np. iloczyn $5 \times 12 \times 7$ podzielić przez liczbę np. 3, przez którą jest podzielny czynnik 12 tego iloczynu, mamy

$$(5 \times 12 \times 7) : 3 = (5 \times 3 \times 4 \times 7) : 3 = 5 \times 4 \times 7 = 5 \times (12 : 3) \times 7, \text{ t. j.}$$

c. Aby iloczyn podzielić przez pewną liczbę, przez którą jeden z jego czynników jest podzielny, można ów czynnik przez tę liczbę podzielić. I nawzajem:

d. Jeżeli czynnik iloczynu podzielimy przez liczbę (przez którą ten czynnik jest podzielny), to skutkiem tego iloczyn przez tę liczbę będzie podzielony, bo jeżeli np. mamy iloczyn $5 \times 12 \times 7$, to po pomnożeniu iloczynu $5 \times (12 : 3) \times 7 = 5 \times 4 \times 7$ przez 3, na mocy własności a., mieć będziemy

$$(5 \times 4 \times 7) \times 3 = 5 \times 12 \times 7,$$

a tu możemy uważać (us. 1, 2) iloczyn $5 \times 4 \times 7 = 5 \times (12 : 3) \times 7$ jako iloraz w dzieleniu, w którym dzielną jest liczba $5 \times 12 \times 7$, a dzielnikiem 3, t. j.

$$5 \times (12 : 3) \times 7 = (5 \times 12 \times 7) : 3.$$

Gdybyśmy zamiast mówić «podzielić przez pewną liczbę», mówili «zmniejszyć pewną liczbę razy» (us. 8), to moglibyśmy inaczej wyśłowić powyższe własności.

Z zestawienia ze sobą własności a. i c., albotóż własności b. i d., wypada, że iloczyn (t. j. liczba przezeń przedstawiona) się nie zmienia, jeżeli jeden jego czynnik pomnożymy przez pewną liczbę, a inny przez tę samą liczbę podzielimy, albowiem wtedy iloczyn zostaje jednocześnie pomnożony i podzielony przez tę samą liczbę, a więc (us. 9) zmianie nie ulega. Zatem

e. Jeżeli jeden czynnik iloczynu mnożymy przez pewną liczbę, a inny jego czynnik jednocześnie przez tę samą liczbę dzielimy ¹⁾, to iloczyn się nie zmienia.

14. Przyjmijmy na uwagę dzielenie w przypadku, gdy reszta dzielenia jest różną od zera (us. 11). Podzielmy np. 22 przez 4; w ilorazie niezupełnym otrzymamy 5 a w reszcie 2, i

$$22 = 4 \times 5 + 2,$$

dzielna = dzielnik \times iloraz niezupełny + reszta (us. 11).

W drugiej części mamy tu sumę dwu składników (jeden jest 4×5 , drugi 2), przedstawiającą liczbę 22, którą, po wykonaniu dodawania, otrzymujemy jako sumę. Jeżeli więc chcemy tę sumę pomnożyć przez 3, to możemy (§ 6, us. 14) oba jej składniki przez 3 pomnożyć,

$$22 \times 3 = (4 \times 5) \times 3 + 2 \times 3,$$

albo, na mocy własności a.,

$$22 \times 3 = (4 \times 3) \times 5 + 2 \times 3.$$

Ponieważ liczba 2×3 jest mniejsza ²⁾ od liczby 4×3 , więc, jeżeli liczbę 22×3 podzielimy przez 4×3 , to otrzymamy (us. 11) jako iloraz niezupełny liczbę 5, zaś jako resztę dzielenia liczbę 2×3 . Zestawiając zaś ze sobą

$$22 = 4 \times 5 + 2 \quad \text{i} \quad (22 \times 3) = (4 \times 3) \times 5 + (2 \times 3),$$

widzimy, że

A. Jeżeli dzielną i dzielnik pomnożymy jednocześnie przez tę samą liczbę, to iloraz niezupełny się nie zmienia, a reszta zostanie przez tę samą liczbę pomnożona.

Mając: $22 \times 3 = 4 \times 3 \times 5 + 2 \times 3$ i $22 = 4 \times 5 + 2$, zastąpmy w pierwszym iloczynie 22×3 , 4×3 i 2×3 przez liczby, które one przedstawiają, $22 \times 3 = 66$, $4 \times 3 = 12$, $2 \times 3 = 6$. Stąd zaś wypada (us. 1, 2): $22 = 66 : 3$, $4 = 12 : 3$, $2 = 6 : 3$, co napiszmy zamiast tych liczb 22, 4, 2 w wyrażeniu $22 = 4 \times 5 + 2$. Mićc będziemy:

$$66 = 12 \times 5 + 6 \quad \text{i} \quad (66 : 3) = (12 : 3) \times 5 + (6 : 3),$$

skąd widzimy, że

B. Jeżeli dzielną i dzielnik podzielimy jednocześnie przez tę samą liczbę, wraze, gdy tak dzielna, jak i dzielnik są przez tę liczbę podzielne, to iloraz niezupełny się nie zmieni, a reszta zostanie przez tę samą liczbę podzielona.

15. Wraze, gdy dzielna jest podzielna przez dzielnik (us. 11, 2),
dzielna = dzielnikowi \times iloraz.

Jeżeli chcemy iloczyn, t. j. dzielną, pomnożyć przez pewną liczbę,

¹⁾ Przyjmujemy tu na uwagę tylko przypadek, kiedy ów czynnik jest przez tę liczbę podzielny. (Ogólniej w § 20, us. 8.)

²⁾ § 6, us. 29.

a jeden z czynników, dzielnik, pozostawić bez zmiany, to pozostały czynnik, iloraz, na mocy własności a. (us. 13),^r wypadnie przez tę samą liczbę pomnożyć. Jeżeli zaś chcemy dzielną przez pewną liczbę podzielić, a dzielnik pozostawić bez zmiany, to podobnie, na mocy własności c., wypadnie podzielić iloraz *) przez tę samą liczbę. Powiemy więc:

aa. *Jeżeli dzielną mnożymy lub dzielimy przez pewną liczbę, nie zmieniając dzielnika, to tym samym iloraz odpowiednio mnożymy lub dzielimy przez tę samą liczbę.*

Jeżeli dzielną nie zmienimy, a jeden z jej czynników, dzielnik, mnożymy lub dzielimy przez pewną liczbę, to pozostały jej czynnik, iloraz, na mocy własności e. (§ 13), wypadnie odpowiednio pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę. A więc:

bb. *Jeżeli dzielną nie zmieniamy, a dzielnik mnożymy lub dzielimy przez pewną liczbę, to tym samym iloraz odpowiednio dzielimy lub mnożymy przez tę samą liczbę.*

Jeżeli nakoniec dzielną i dzielnik jednocześnie mnożymy lub jednocześnie dzielimy przez tę samą liczbę, to z zestawienia własności aa. i bb. wypada, że (us. 9) iloraz zmianie nie ulegnie. A więc:

cc. *Jeżeli dzielną i dzielnik albo jednocześnie mnożymy, albo jednocześnie dzielimy przez tę samą liczbę, to iloraz się nie zmienia. (Tę własność mogliśmy taksamo wyprowadzić, jak pierwszą z własności w tym ustępie.)*

Własności te można inaczej wysłowić, mówiąc «powiększyć pewną liczbę razy», «zmniejszyć pewną liczbę razy», zamiast «pomnożyć przez pewną liczbę», «podzielić przez pewną liczbę».

Jeżeli więc mamy np.

$$48 : 4 = 12,$$

to

$$\text{aa.} \quad (48 \times 2) : 4 = 12 \times 2; \quad (48 : 2) : 4 = 12 : 2.$$

$$\text{bb.} \quad 48 : (4 \times 2) = 12 : 2; \quad 48 : (4 : 2) = 12 \times 2.$$

$$\text{cc.} \quad (48 \times 2) : (4 \times 2) = 12; \quad (48 : 2) : (4 : 2) = 12.$$

Jeżeli więc np. $480 : 4 = 120$, to mnożąc dzielnik kolejno np. przez 3, 5, 2 mieć będziemy (bb.)

$$480 : (4 \times 3) = (120 : 3)$$

$$480 : (4 \times 3 \times 5) = (120 : 3) : 5$$

$$480 : (4 \times 3 \times 5 \times 2) = \{ (120 : 3) : 5 \} : 2$$

A jeżeli tu jeszcze zamiast 120 napiszemy tę liczbę w postaci (us. 4) ilorazu $480 : 4$, to mieć będziemy:

$$480 : (4 \times 3 \times 5 \times 2) = \{ ([480 : 4] : 3) : 5 \} : 2,$$

t. j. *gdy mamy pewną liczbę podzielić przez iloczyn dwu lub więcej czynników, to możemy*

*) Trzeba tu dzielić przez taką liczbę, aby nie tylko dzielną, ale i iloraz były przez nią podzielne.

liczbę daną podzielić przez jeden czynnik, otrzymany iloraz przez drugi czynnik, ten zaś iloraz przez trzeci czynnik iloczynu i t. d. ¹⁾).

Z własności: gdy dzielną i dzielnik podzielimy przez tę samą liczbę, to iloraz się nie zmieni, wypada, że *gdy mamy podzielić przez siebie dwa iloczyny kilku czynników, to wspólne czynniki możemy w tych iloczynach opuścić*; np. mając podzielić iloczyn $15 \times 6 \times 8 \times 7 \times 11$ przez iloczyn $3 \times 11 \times 2 \times 6$, możemy opuścić wspólne czynniki 6 i 11 i dzielić $15 \times 8 \times 7$ przez 3×2 ; że zaś znowu $15 = 3 \times 5$, a $8 = 2 \times 4$, więc, wstawiając te wyrażenia dla liczb 15 i 8, mamy dzielić $3 \times 5 \times 2 \times 4 \times 7$ przez 3×2 , czyli $5 \times 4 \times 7$ dzielić przez 1:

$$(15 \times 6 \times 8 \times 7 \times 11) : (3 \times 11 \times 2 \times 6) = (15 \times 8 \times 7) : (3 \times 2) = \\ = (3 \times 5 \times 2 \times 4 \times 7) : (3 \times 2) = (5 \times 4 \times 7) : 1 = 140.$$

16. Gdy idzie o wykonanie dzielenia, to należy przedewszystkim, jakeśmy już mówili (us. 2), umieć korzystać z tabliczki mnożenia, t. j. nabrać wprawy w tym, aby przy danym iloczynie i jednym czynniku wypowiadać od razu czynnik drugi. Tak np., iloczyn 6-u i jakiej liczby jest 48?, a następnie inaczej: ile razy 6 mieści się w 48-u? oraz: jak wielka jest 6-a część 48-u? (us. 6, 8).

Później zaś, biorąc liczbę jedno lub dwucyfrową i dzieląc ją przez taką liczbę jednocyfrową, iżby iloraz niepełny był mniejszy od dziesięciu (us. 11), przy pomocy tabliczki mnożenia od razu będziemy w stanie powiedzieć, że, dzieląc np. 8 przez 3, otrzymamy 2 wraz z tym, co wypadnie z podzielenia 2 (bo 2 razy 3, czyli 6, jest mniejsze od 8 o 2) przez 3, że, dzieląc np. 52 przez 6, otrzymamy 8 wraz z tym, co wypadnie z podzielenia 4 (bo $52 - 48 = 4$) przez 6 i t. d. Piśmiennie zwykle w taki sposób to działanie przedstawiamy: obok dzielnej piszemy z prawej strony dzielnik, oddzieliwszy je od siebie kręską pionową, nieco u dołu przeciągniętą, pod dzielnikiem prowadzimy kręskę poziomą, pod którą będziemy pisać iloraz (albo iloraz niepełny)

dzielna		dzielnik
iloraz, albo iloraz niepełny.		

Gdy więc mamy np. podzielić 52 przez 6, to mieć będziemy jako iloraz niepełny liczbę 8; aby otrzymać resztę dzielenia, wypadnie iloczyn 6×8 , t. j. liczbę 48, odjąć od dzielnej 52; z odjęcia wypadnie nam reszta 4. Napiszemy ²⁾ więc:

¹⁾ W tym ustępie, gdy była mowa o dzieleniu pewnej liczby przez inną liczbę, przyjmowaliśmy na uwagę tylko przypadek, w którym odpowiednie dzielenie skutecznia się bez reszty. O uogólnieniu własności, wyprowadzonych w tym ustępie, mówić będziemy w § 17, us. 7 i w § 20, us. 6.

²⁾ Niektórzy jednak, osobliwie w Niemczech, piszą dzielnik z lewej, a iloraz z prawej strony dzielnej, oddzielając te liczby od siebie kręskami pionowymi:

$$\begin{array}{r} 52 \mid 6 \\ -48 \mid 8 \\ \hline 4. \end{array}$$

W podobny sposób przedstawimy i dzielenie w przypadku, gdy dzielna jest podzielna przez dzielnik (us. 11), a dla wyraźności w przedstawieniu, na tym miejscu, na którym w poprzednim przypadku postawiliśmy resztę, piszemy 0 (por. § 5, us. 11), co jest dla nas widoczną właśnie wskazówką, że dzielna dzieli się przez dzielnik bez reszty. Napiszemy więc, gdy mamy np. $48 : 6$,

$$\begin{array}{r} 48 \mid 6 \\ -48 \mid 8 \\ \hline 0. \end{array}$$

17. Gdy znajomość tabliczki mnożenia nie wystarcza nam dla wykonania dzielenia, t. j. gdy widzimy, że otrzymać powinniśmy liczbę większą od dziewięciu, np. gdy mamy $25438 : 6$, to należałoby (us. 1, 2) próbować pokolei liczb 10, 11, 12 i t. d. Postępowanie jednak takie byłoby zbyt długie i nużące—należy obmyślić inne. Zauważmy, że gdy mamy zgadnąć jakąś liczbę, to naprzód staramy się wyrozumieć, między jakimi liczbami szukana liczba może się zawierać, to jest wybadujemy, od jakiej liczby jest większa i od jakiej mniejsza. Naturalnie, że przy tym wyznaczaniu liczby mniejszej i większej od szukanej, staramy się wybierać takie liczby, iżby przekonanie się o tym, czy one są mniejsze lub większe od szukanej, niewiele nas pracy kosztowało. Oczywiście, najdogodniejszymi będą liczby przedstawione przez jedność z zerami: bo właśnie najłatwiej jest mieć iloczyn takiej liczby i dzielnika.

Próbujmy więc. Gdybyśmy, mając

$$25438 \mid 6$$

wzięli jako iloraz liczbę 10, byłoby ¹⁾ $10 \times 6 = 60$, mniej niż dzielna, więc 10 jest zamało; gdybyśmy wzięli 100, to $100 \times 6 = 600$, mniej niż dzielna, więc 100 jest zamało; gdybyśmy wzięli 1000, to $1000 \times 6 = 6000$, mniej niż dzielna, więc 1000 jest zamało; gdybyśmy wzięli 10000, to $10000 \times 6 = 60000$ jest już więcej niż dzielna, więc 10000 jest zawiele. Szukana więc liczba jest większa niż 1000, a mniejsza niż 10000, skąd zarazem wypada, iż szukana liczba jest czterocyfrowa, t. j. złożona z tysięcy, setek, dziesiątków i jedności.

dzielnik	dzielna	iloraz;	więc np. 6	$\begin{array}{r} 52 \mid 8 \\ -48 \mid \\ \hline 4. \end{array}$
----------	---------	---------	------------	---

(Wprowadzała to swego czasu do nas *Arytm. dla sz. nar.*)

¹⁾ Starając się o bezwzględną dokładność powinniśmy tu (i podobnie dalej) mówić byłby iloczyn 10-u i 6-u równy 60-u. Z uwagi jednak, że idzie nam tu tylko o liczebność wartości ilorazu, możemy (us. 3, 6) w tym postępowaniu tak się wyrażać, jak nam dogodnie.

Starajmy się bliżej podejść do liczby szukaney, próbując liczb większych od 1000, a mniejszych od 10000. Wybiierając z nich, podobnie jak poprzednio, liczby, których iloczynny przez dzielnik łatwo się otrzymują, weźmiemy pod uwagę liczby przedstawione przez cyfrę znaczącą z zerami. Gdybyśmy wzięli *) 2000, to $2000 \times 6 = 12000$, mniej niż dzielna, więc 2000 zamało; gdybyśmy wzięli 3000, to $3000 \times 6 = 18000$, mniej niż dzielna, więc 3000 zamało; gdybyśmy wzięli 4000, to $4000 \times 6 = 24000$, mniej niż dzielna, więc 4000 zamało; gdybyśmy jednak wzięli 5000, to $5000 \times 6 = 30000$, jest już więcej niż dzielna, więc 5000 zawiele. Szukana zatem liczba jest większa od 4000, a mniejsza od 5000, — jest więc ona złożona z liczby 4000 i pewnej liczby mniejszej od tysiąca (t. j., wogóle mówiąc, z setek, dziesiątków i jedności), czyli: jesteśmy pewni, że w liczbie szukaney tysięcy mamy 4.

Wyznaczyliśmy więc tysiące ilorazu — w sposób dość dogodny. Chcielibyśmy móc w ten sam sposób znaleźć następującą część liczby, t. j. setki.

Zważmy, że w dzielnej zawarty jest iloczyn ilorazu przez dzielnik (us. 3, 11). Ponieważ w ilorazie mieć mamy liczbę czterocyfrową, którą możemy rozłożyć na tysiące, setki dziesiątki i jedności, więc (§ 6, us. 20) w dzielnej zawarte są iloczyny częściowe: tysiący ilorazu przez dzielnik, setek ilorazu przez dzielnik, dziesiątków ilorazu przez dzielnik i jedności ilorazu przez dzielnik. Powyżej wyznaczyliśmy tysiące ilorazu, t. j. największą część ilorazu. Jeżeli więc chcemy w ten sam sposób wyznaczyć setki ilorazu, to należy nasze dzielenie sprowadzić do innego, w którymby największą częścią ilorazu były setki. To zaś osiągnąć jesteśmy w stanie, zmniejszając dzielną o część zależną od tysięcy ilorazu, czyli odejmując od dzielnej iloczyn częściowy tysięcy ilorazu przez dzielnik, t. j. liczbę $400 \times 6 = 24000$. W pozostałej z tego odejmowania reszcie, t. j. w liczbie 1438, jest zawarty tylko iloczyn setek ilorazu przez dzielnik, dziesiątków ilorazu przez dzielnik i jedności ilorazu przez dzielnik, czyli ta reszta 1438 jest nową dzielną, po podzieleniu której przez

$$\begin{array}{r|l} 25438 & 6 \\ - 24000 & 4000 \\ \hline & 1438 \end{array}$$

dzielnik 6, otrzymamy w ilorazie liczbę trzycyfrową. Postępując więc podobnie jak poprzednio, w celu wyznaczenia największej części, t. j. setek, weźmiemy naprzód w ilorazie 100, wtedy $100 \times 6 = 600$, mniej niż 1438, więc 100 jest zamało; gdybyśmy wzięli 200, to $200 \times 6 = 1200$, zamało; gdybyśmy wzięli 300, to $300 \times 6 = 1800$, zawiele; więc szukana teraz liczba trzycyfrowa jest zawarta między 200 i 300; jest przeto ona

*) Możemy nie próbować ponownie liczby 1000, bo z poprzedniego wiemy, że iloraz jest większy od 1000.

złożona z liczby 200 i pewnej liczby, mniejszej od sta, t. j. dziesiątków i jedności; jesteśmy jednak pewni, że w szukaney liczbie mamy 2 setki.

Aby w podobny sposób wyznaczyć pozostałą część ilorazu, należy od liczby 1438, w której są zawarte iloczyny częściowe setek ilorazu przez dzielnik, dziesiątków ilorazu przez dzielnik i jedności ilorazu przez dzielnik, odjąć część zależną od znalezionych już setek ilorazu, t. j. iloczyn częściowy setek ilorazu przez dzielnik, $200 \times 6 = 1200$. W pozo-

$$\begin{array}{r|l} 25438 & 6 \\ \hline -24000 & 4000 \\ \hline 1438 & 200 \\ -1200 & \\ \hline 238 & \end{array}$$

stałej z tego odejmowania reszcie, t. j. wliczbie 238, jest zawarty tylko iloczyn dziesiątków ilorazu przez dzielnik i jedności ilorazu przez dzielnik; jest więc ta liczba 238 nową dzielną, po podzieleniu której przez dzielnik 6, otrzymamy liczbę dwucyfrową. W celu

wyznaczenia jęj dziesiątków tworząc znowu iloczyny $10 \times 6 = 60$; $20 \times 6 = 120$; $30 \times 6 = 180$; $40 \times 6 = 240$, widzimy, że szukana teraz liczba dwucyfrowa jest zawarta między 30 i 40,—jest więc ona złożona z 30-u i pewnej liczby mniejszej od dziesięciu, t. j. jedności; jesteśmy jednak pewni, że w szukaney liczbie mamy dziesiątków 3. I gdy znów od liczby 238 odejmiemy iloczyn częściowy dziesiątków ilorazu przez dzielnik, $30 \times 6 = 180$, to pozostała z tego odejmowania reszta 58 przedstawia iloczyn jedności ilorazu przez dzielnik, któreto jedności możemy tu, z powodu, że dzielnik jest jednocyfrowy, wyznaczyć bezpośrednio (us. 16); wogóle jednak (przy dwa lub więcejcyfrowym dzielniku) postąpić winiśmy tak: $1 \times 6 = 6$, $2 \times 6 = 12$, ..., $9 \times 6 = 54$.

$$\begin{array}{r|l} 25438 & 6 \\ \hline -24000 & 4000 \\ \hline 1438 & 200 \\ -1200 & 30 \\ \hline 238 & 9 \\ -180 & 4239 \\ \hline 58 & \\ -54 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

Chociaż i ten ostatni iloczyn częściowy jest mniejszy od 58, lecz ponieważ z poprzedniego wiemy, że szukana część ilorazu jest mniejszą od dziesięciu,—więc będzie nią 9 i, po odjęciu od 58-u częściowego iloczynu $9 \times 6 = 54$, pozostanie nam, jako reszta dzielenia, liczba 4. W ten sposób znaleźliśmy, że w ilorazie niepełnym tego dzielenia mamy: 4 tysiące, 2 setki, 3 dziesiątki i 9 jedności, czyli liczbę 4239. Tak iż, zamiast podpisywać pod sobą oddzielnie części tego ilorazu niepełnego, moglibyśmy, znalazwszy, że tysięcy będzie 4, podpisać pod dzielnikiem tę cyfrę, a następnie, po oznaczeniu, że setek jest 3, postawić obok 4 z prawej strony cyfrę 3 i t. d. *)—Znaleźliśmy więc, że iloraz z podzielenia 25438 przez 6, jest 4239 wraz z tym, co otrzymamy, gdy 4 podzielimy przez 6.

*) Dla udogodnienia, zbadawszy na początku, przy pomocy próbowania liczb 10, 100 i t. d., ile cyfr będzie w ilorazie, dobrze jest postawić w ilorazie odpowiednią liczbę kropek, aby przy pisaniu na miejscu pierwszej, drugiej i t. d. kropki odpowiednich cyfr, pozostałe kropki, przy tworzeniu iloczynów częściowych, uważać jako przedstawiające zero.

$$\begin{array}{r} 25224 \overline{)6} \\ - 24000 \overline{)42} \\ \hline 1224 \\ - 1200 \\ \hline 24 \end{array}$$

Wrazie, gdybyśmy mieli naprzykład $25224 : 6$, i wyznaczyli już, jak powyżej, 4 tysiące i 2 setki w ilorazie, to, prowadząc działanie dalej, powiemy, że w liczbie, którą otrzymamy po odjęciu od 1224 iloczynu częściowego setek ilorazu przez dzielnik, $200 \times 6 = 1200$, t. j. w liczbie 24, znajdują się iloczyn pozostałych części ilorazu przez dzielnik, t. j. dziesiątków ilorazu przez dzielnik i jedności ilorazu przez dzielnik. W celu wyznaczenia dziesiątków, utworzywszy iloczyn $10 \times 6 = 60$; widzimy, że otrzymujemy więcej niż 24, t. j. że w ilorazie pozostała część (dwucyfrowa) jest mniejsza od 10, czyli, że w ilorazie nie ma dziesiątków do oznaczenia ich na miejscu, które one obok setek z prawej strony powinny zajmować; napiszemy więc na tym miejscu zero, a liczba 24 posłuży nam do wyznaczenia jedności, co zrobimy sposobem wiadomym. — Iloraz więc z podzielenia 25224 przez 6 jest 4204.

Podobnie, jeżeli mamy $62496 \overline{)124}$ zauważymy naprzód, że gdybyśmy wzięli jako iloraz liczbę 10, to $124 \times 10 = 1240$, zamało; gdyby wzięli 100, to $124 \times 100 = 12400$, zamało; a gdy weźmiemy 1000, to $124 \times 1000 = 124000$, zawiele. Iloraz więc jest zawarty między 100 i 1000, czyli jest liczbą trzycyfrową, a więc liczbą, którą można uważać, jako złożoną z setek, dziesiątków i jedności.

W celu wyznaczenia setek próbujmy: $124 \times 100 = 12400$, zamało, jak już wiemy; $124 \times 200 = 24800$, zamało; $124 \times 300 = 37200$, zamało; $124 \times 400 = 49600$, zamało; $124 \times 500 = 62000$, zamało, lecz $124 \times 600 = 74400$, zawiele, więc i t. d.—mamy w ilorazie 5 setek.

Rozumując tak, jak w poprzednim przykładzie, uzasadnimy, że obok 5 setek wypadnie postawić na miejscu dziesiątków 0, a tym samym, że liczba 496 zawiera w sobie iloczyn jedności ilorazu przez dzielnik. Tworząc więc pokolei iloczyny $124 \times 1 = 124$; $124 \times 2 = 248$; $124 \times 3 = 372$; $124 \times 4 = 496$, widzimy że w ilorazie obok zera należy na miejscu jedności postawić 4, a nadto, że, po podzieleniu dzielnej 62496 przez dzielnik 124, otrzymamy jako iloraz liczbę 504.

Gdy zastanowimy się tu jeszcze nad takim postępowaniem, łatwo spostrzeczemy, że np. w pierwszym przykładzie, szukając iloczynu liczb 25438 i 6,

$$\begin{array}{r} 62496 \overline{)124} \\ - 62000 \overline{)504} \\ \hline 496 \\ - 496 \\ \hline 0 \end{array}$$

naprzód dowiedzieliśmy się, że ten iloczyn zawiera się między liczbami 1000 i 10000, następnie, że jest zawarty między liczbami 4000 i 5000, później, że między 4200 i 4300, potem, że między 4230 i 4240, i nakoniec (us. 11), że między 4239 i 4240, t. j. widzimy, że postępowanie to polega właściwie na wyznaczeniu dwu liczb, jako liczb krańcowych, między którymi szukany iloraz się zawiera, i na stopniowym (metodycznym) zbliżaniu do siebie tych liczb (krańcowych), obejmujących szukany iloraz.

Dzielenie jest jedynym z czterech działań arytmetycznych, które wykonywamy od strony lewej, a nie od prawej. Wykonywając dzielenie od strony prawej, możemy wypisywać cyfry ilorazu odrazu dobre, t. j. bez potrzeby zmieniania ich następnego, tylko wtedy, gdy dzielnik jest liczbą jednocyfrową i każda znacząca cyfra dzielnej, osobno uważana, przedstawia liczbę przez ten dzielnik podzielną, np. $690309 : 3$. We wszystkich zaś innych przypadkach, jak łatwo się o tym przekonać, musielibyśmy zmieniać raz postawione cyfry; często nie uniknelibyśmy nawet potrzeby wykonywania dzielenia (częściowego) właśnie ze strony lewej, a nadto suma reszt częściowych dzieleni może wypaść większa niż dzielnik, co wywołuje nową potrzebę zmiany cyfr ilorazu.

Widzimy więc, że to postępowanie, t. j. *wykonywanie dzielenia polega na tym, aby z części ilorazu: jedności, dziesiątków, setek, tysięcy i t. d., wyznaczyć naprzód część największą przy pomocy próbowania; następnie, odjąwszy od dzielnej iloczyn znalezionej największej części ilorazu przez dzielnik, otrzymaną resztę uważać za nową dzielną, a tynsamym z części ilorazu, któryby wypadł z jej podzielenia przez (ten sam) dzielnik, t. j. z jedności, dziesiątków, setek i t. d., wyznaczyć znowu przez próbowanie część największą, i t. d., dopóki nie zostaną wyznaczone najmniejsze części w ilorazie, t. j. jedności, a otrzymane w ten sposób części ilorazu do siebie dodać.*

18. W tym piśmiennym wykonywaniu dzielenia, któreśmy powyżej na przykładach przedstawili, możemy porobić wszelkie możliwe skrócenia, byleby rachunek pozostał wyraźnym (§ 1, us. 9). Zauważyć więc naprzód możemy, że w częściowych iloczynach, np. tysięcy ilorazu przez dzielnik, są na końcu trzy zera (§ 6, us. 23), które zawsze będą, jakikolwiek jest dzielnik i jakakolwiek jest cyfra tysięcy w ilorazie; możemy więc te zera, podobnie jak w mnożeniu (§ 6, us. 24), jako łatwo domyślne, opuścić. Podobnie możemy opuścić dwa końcowe zera, zawsze się zjawiające w iloczynie częściowym setek ilorazu przez dzielnik. I t. d. Wtedy piśmienne przedstawienie wykonywania dzielenia w przykładach poprzedzającego ustępu tak się przedstawi:

$$\begin{array}{r|l}
 25438 & 6 \\
 \hline
 -24 & 4239 \\
 \hline
 1438 & \\
 -12 & \\
 \hline
 238 & \\
 -18 & \\
 \hline
 58 & \\
 -54 & \\
 \hline
 4 &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 25224 & 6 \\
 \hline
 -24 & 4204 \\
 \hline
 1224 & \\
 -12 & \\
 \hline
 24 & \\
 -24 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 62496 & 124 \\
 \hline
 -620 & 504 \\
 \hline
 496 & \\
 -496 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

W ostatnim dzieleniu zostało zero w częściowym iloczynie 620, gdyż to zero jest przypadkowe, nie zawsze tu bywa: niebyłoby go, gdyby w ilorazie zamiast 5-u setek było np. 6 setek.

Przypatrując się jeszcze tym skróconym przedstawieniom wykonywania dzielenia, widzimy, że w pierwszych dwu dzieleniach końcowe cyfry dzielnej przepisujemy kilkakrotnie, chociaż one tylko wtedy są potrzebne w rachunku, gdy pod nimi są pozostałe tu, po opuszczeniu zer, cyfry iloczynów częściowych. Ponieważ te cyfry znajdują się w dzielnej, więc mamy je wciąż na widoku, a tym samym (§ 1, us. 9) możemy je opuścić wszędzie, gdzie pod nimi są domyślne opuszczone zera częściowych iloczynów. Robiąc to, mamy:

$$\begin{array}{r|l}
 25438 & 6 \\
 \hline
 -24 & 4239 \\
 \hline
 14 & \\
 -12 & \\
 \hline
 23 & \\
 -18 & \\
 \hline
 58 & \\
 -54 & \\
 \hline
 4 &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 25224 & 6 \\
 \hline
 -24 & 4204 \\
 \hline
 12 & \\
 -12 & \\
 \hline
 24 & \\
 -24 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Ten zaś tak znacznie skrócony sposób przedstawiania piśmiennego dzielenia pozwala nam również skrócić sposób wyrażania się przy wykonywaniu tego rachunku, osobiwie, gdy zważymy, że, jak widać z tych przykładów, w miarę użycia następujących po sobie cyfr dzielnej wyznaczamy następujące po sobie cyfry ilorazu: tak np., w ostatnim dzieleniu pierwsze dwie cyfry dzielnej, t. j. liczba 25, odpowiadają cyfrze 4 ilorazu, następująca cyfra dzielnej 2 odpowiada cyfrze 2 ilorazu, następujące dwie cyfry dzielnej 2 i 4 odpowiadają następnym znowu dwu cyfrom ilorazu 0 i 4. Skutkiem tego, wyznaczwszy w ilorazie cyfrę pierwszą, t. j. 4, nie potrzebujemy zastanawiać się nad tym, jakie części liczby ta cyfra nam przedstawia: dość tylko wiedzieć, że jest pierwszą (od strony lewej) cyfrą ilorazu; cyfrę ilo-

razu, którą wyznaczmy przy pomocy następującej cyfry dzielnej, uważać będziemy za następującą, po wyznaczonej poprzednio, cyfrę ilorazu, i t. d.

Zastanówmy się nad tym, jak, wraze, gdy rachunek dzielenia np. liczby 25224 przez liczbę 6, prowadzić będziemy odrazu w (ostatniej) skróconej postaci, możemy wyznaczać kolejne cyfry ilorazu. Innymi słowy: w jaki sposób (będąc zupełnie w zgodzie z objaśnieniem, które szczegółowo podaliśmy w ustępie 17-ym) możemy wyrażanie się znacznie przez to skrócić, iż w czasie prowadzenia rachunku mówić będziemy tylko o tych liczbach, które pozostały w tej skróconej postaci piśmiennego wykonywania dzielenia? Ponieważ z poprzedniego objaśnienia wiemy już dobrze, co te liczby przedstawiają, więc o tym nie będziemy już teraz wspominać. Idzie więc nam tylko o to, jak mamy, nie przeprowadzając poprzedniego rozumowania odrazu przeprowadzić cały ten skrócony rachunek, a tym samym wyznaczyć kolejno wszystkie cyfry w ilorazie.

Widzimy, że tu tak się zachowujemy, jakgdybyśmy naprzód od liczby 25 odejmowali liczbę 24, t. j. iloczyn dzielnika 6 przez pierwszą (z lewej strony) cyfrę ilorazu. Wystawmy sobie, że rozpoczynamy dopiero działanie. Oddzielamy więc przedewszystkim początkowe dwie cyfry dzielnej i uważamy je jako liczbę oddzielną. Ta liczba 25 jest większa od dzielnika. Gdybyśmy się ograniczyli na pierwszej cyfrze dzielnej, 2, to przedstawiłaby nam ona liczbę mniejszą od dzielnika, a gdybyśmy wzięli liczbę 252, to ta liczba trzycyfrowa byłaby większa od dwucyfrowej 25, która już jest większa od dzielnika. Widocznie więc, oddzielnie uważamy liczbę przedstawioną przez tyle początkowych cyfr dzielnej, ile ich najmniej potrzeba, aby ta liczba była większa od dzielnika (por. niżej). — Od tej liczby mamy odjąć iloczyn dzielnika przez pierwszą cyfrę dzielnej. Jak wyznaczyć tę cyfrę, aby jej iloczyn przez dzielnik mógł odjąć od 25 i aby tej cyfry później już nie trzeba było zmieniać? Łatwo jest nie wziąć tej cyfry zbyt wielkiej, bo wtedy jej iloczynowi przez dzielnik nie można byłoby odjąć od 25. Trzeba więc wziąć taką cyfrę, aby jej iloczyn przez dzielnik nie był większy od 25 (§ 5, us. 11). Aby zaś nie trzeba było później tej liczby powiększać, t. j. aby nie wziąć jej zbyt małej, należy wziąć taką, aby reszta po wykonaniu tego odejmowania była mniejszą od dzielnika (us. 11). — Tu nasuwa się uwaga, że gdybyśmy mieli $6224:6$ (t. j. na początku dzielnej zamiast 25 mieli 6), to jeszcze iloczyn dzielnika 6 przez jednocyfrową liczbę, czyli przez pierwszą cyfrę w ilorazie, którąby wtedy była 1, nie byłby większy od liczby przedstawionej przez pierwszą cyfrę dzielnej, 6. Z te-

go widzimy, że, mając zadanie: $6224:6$, dla wyznaczenia cyfry pierwszej w ilorazie, oddzielnie uważać należy liczbę przedstawioną przez tyle, wogóle mówiąc ¹⁾, początkowych cyfr dzielnój, ile ich potrzeba, aby ta liczba była równa dzielnikowi. Gdy więc ta liczba ma być w tym przypadku równa dzielnikowi, a w poprzednim od niego większa, to mówić będziemy ogólnie, że: oddzielnie uważamy liczbę, przedstawioną przez tyle początkowych cyfr dzielnój, ile ich najmniej potrzeba, aby ta liczba była już nie mniejsza od dzielnika. — Wracając się do naszego zadania, powiemy: oddzielnie uważając liczbę, utworzoną przez tyle, ile można najmniej, początkowych cyfr dzielnój 25224, aby ta liczba była już nie mniejsza od dzielnika 6, t. j. liczbę 25, szukamy takiej największej jednocyfrowej liczby, iżby iloczyn jęj i dzielnika był nie większy od 25. Tą największą z liczb jednocyfrowych (znajdziemy ją, wogóle mówiąc, przez próbowanie) jest tu liczba 4. Jest ona pierwszą (z lewej strony) cyfrą ilorazu; podpisujemy ją więc pod dzielnikiem. — Iloczyn dzielnika przez tę cyfrę, $6 \times 4 = 24$, podpisujemy pod 25 i od 25

$$\begin{array}{r|l} 25224 & 6 \\ -24 & 4 \\ \hline 12 & \end{array}$$

odejmujemy. Do otrzymanej reszty przypisujemy ²⁾ następującą cyfrę dzielnój, t. j. 2. Ta liczba 12 ma nam posłużyć do wyznaczenia następującej cyfry w ilorazie. Mamy więc znaleźć cyfrę w ilorazie, której iloczyn przez dzielnik nie byłby większy od 12. Taką cyfrą

$$\begin{array}{r|l} 25224 & 6 \\ -24 & 420 \\ \hline 12 & \\ -12 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

jest 2, którą piszemy obok poprzedniej cyfry ilorazu, t. j. obok 4-ch. Iloczyn jęj i dzielnika, $6 \times 2 = 12$, odejmujemy od 12. Z tego odejmowania nie otrzymujemy reszty. Piszemy więc następującą cyfrę dzielnój, 2, która powinna nam posłużyć do wyznaczenia następującej cyfry ilorazu. Lecz ponie-

waż ta liczba 2 jest mniejsza od dzielnika, więc nie otrzymamy cyfry znaczącej w ilorazie, odpowiadającej tej cyfrze 2 dzielnój. Piszemy więc w ilorazie, obok znalezionych już cyfr, 0. — Do tej cyfry 2 dopisujemy następującą cyfrę dzielnój, 4, a ta liczba 24 ma nam służyć do wyznaczenia następującej (ostatniej, bo już przypisaliśmy ostatnią cyfrę dzielnój) cyfry ilorazu. Szukamy więc znowu takiej cyfry, żeby mnożąc przez nią dzielnik, otrzymać iloczyn nie większy od 24. Tą cyfrą jest 4, którą piszemy w ilorazie po zerze. Od 24 odejmu-

¹⁾ Np. w zadaniu $2285:12$ oddzielnie uważamy liczbę, przedstawioną przez pierwsze dwie cyfry dzielnój, dla wyznaczenia pierwszej cyfry w ilorazie.

²⁾ To przypisanie cyfry zastępuje odejmowanie zera (domyślnego po 24) od cyfry 2 dzielnój. Podobnie i dalej. Dla tego staramy się przypisywane w ten sposób cyfry stawiać pod tymiż cyframi dzielnój. Niewłaściwie, zamiast: przypisuję cyfrę, mówią często: «spuszczam», albo «składam» cyfrę.

jemy iloczyn $6 \times 4 = 24$ i ponieważ z tego odejmowania żadnej nie otrzymujemy reszty, a niema więcej cyfr dzielnój, na miejscu reszty piszemy *) zero (us. 16), które nam wyraźnie wskazuje, że dzielna jest przez dzielnik podzielną.

Gdy mamy ¹⁾ np. 17040690:567, to ponieważ liczba utworzona przez tyle początkowych cyfr dzielnój, ile ich ma dzielnik, t. j. liczba trzycyfrowa 170, jest mniejsza od dzielnika, więc wypadnie nam mieć naprzód na uwadze liczbę utworzoną przez pierwsze cztery cy-

$$\begin{array}{r|l}
 17040690 & 567 \\
 -1701 & \hline
 \hline
 3069 & \\
 -2835 & \\
 \hline
 2340 & \\
 -2268 & \\
 \hline
 72 &
 \end{array}$$

fry dzielnój, t. j. 1704. Szukamy teraz największej jednocyfrowej liczby, przez którą mnożąc dzielnik, otrzymalibyśmy iloczyn nie większy od 1704.

Gdy $567 \times 1 = 567$, $567 \times 2 = 1134$,
 $567 \times 3 = 1701$, $567 \times 4 = 2268$,

widzimy, że powinniśmy w ilorazie, jako pierwszą (z lewej strony) cyfrę, napisać 3. Odejmując iloczyn 1701

od liczby 1704, otrzymujemy w reszcie 3, do czego przypisujemy następującą cyfrę dzielnój, 0. Liczba 30 jest mniejsza od dzielnika: piszemy więc w ilorazie, jako drugą, cyfrę 0. Do liczby zaś 30 przypisujemy następującą cyfrę dzielnój, 6. Liczba 306 jest jeszcze mniejsza od dzielnika: piszemy więc znowu w ilorazie, jako następującą, cyfrę 0, a do liczby 306 przypisujemy następującą cyfrę dzielnój, 9. Ta liczba 3069 nie jest już mniejsza od dzielnika. Szukamy więc jednocyfrowej liczby, przez którą mnożąc dzielnik, otrzymalibyśmy iloczyn nie większy od 3069. Z poprzednio wypisanych iloczynów dzielnika przez jednocyfrowe liczby, widzimy, że ostatni, t. j.

*) Rospowszechnione pisanie kręsek poziomych, albotóż przecinków, tak tu, jak i w poprzednich odejmowaniach (gdy niema nic do oznaczenia pod odejmowanymi od siebie cyframi) nie jest niczym usprawiedliwione i jest zbyteczne.

¹⁾ «Ponieważ dzielenie liczby trudniejsze jest od poprzedzających trzech działań, należy użyć Nauczycielom wszystkich sposobów, któreby naukę o tymże dzieleniu ułatwiały... Że zaś trudność w dzieleniu liczby po większej części pochodzi z niepewności w nassegnieniu wielorazu, w którejto niepewności dopóty dzieci zostawać będą, póki długim wprawianiem się nie nabędą łatwości w zgadnieniu bez zawodu, ilekroć liczba, którą dzielić mają, zamyka w sobie tę, która ją dzieli: przeto szczególnym będzie staranie Nauczycielów, aby podali sposób uczniom swoim, którym najłatwiej i najprędzej natrafić mogliby na prawdziwy wieloraz, wypadający z podzielenia liczby jedną przez drugą. Osobliwie zaś w pa-mięci mieć to mają, gdy przyjdą do liczb dzielących złożonych z dwóch znaków. Tam naprzód zabawić się trzeba nad przykładami takimi, gdzie znak jedności jest mały względem znaku dziesiątków, naprzykład 81... Postąpią dalej do przykładów, w którychby znowu znak dziesiątków był bardzo mały względem znaku jedności, naprzykład 18... Potym wynajdywać będą takie liczby dzielące, których liczba, jedności wyrażająca, coraz bardziejby zbliżała się do liczby dziesiątków. Takdługo zaś liczb dzielących, z więcej jak ze dwóch znaków złożonych, podawać nie będą uczniom swoim, póki ci bez omyłki nie nauczą się zga-dywać wielorazów w tych liczbach podzielných, których dzielące liczby ze dwóch tylko znaków składać się będą.» (*Arytm. dla sz. nar.*, str. 45).

iloczyn $567 \times 4 = 2269$, jest mniejszy od téj liczby 3069. Tworzymy inastępne iloczyny:

$$567 \times 5 = 2835, \quad 567 \times 6 = 3402;$$

wypadnie zatem w ilorazie postawić, jako następującą, cyfrę 5. Odejmując iloczyn 2835 od liczby 3069, otrzymujemy w reszcie liczbę 234, do której przypisujemy następującą (ostatnią) cyfrę dzielną, 0. Liczba 2340 nie jest mniejsza od dzielnika. Szukając odpowiedniej cyfry ilorazu, możemy skorzystać z wypisanych już iloczynów dzielnika przez jednocyfrowe liczby. Widzimy, że iloczyn $567 \times 5 = 2268$ jest mniejszy od téj liczby, zaś iloczyn $567 \times 6 = 2835$ jest już większy. Napiszemy więc w ilorazie, jako ostatnią, cyfrę 4. Odjąwszy nakoniec iloczyn 2268 od liczby 2340, otrzymujemy, jako resztę dzielenia, liczbę 72. — Powiemy więc: z podzielenia 17 040 690 przez 567 otrzymujemy 30 054 wraz z tym, co wypadnie z podzielenia 72-u przez 567.

Widzimy nadto z tego dzielenia, że wraze, gdy dzielnik jest liczbą, której iloczynów przez jednocyfrowe liczby odrazu sobie przedstawić nie jesteśmy w stanie, korzystnym jest wypisywanie na boku, lub na nałożonej oddzielnej kartce (§ 1, us. 9), tych iloczynów, wmiarę potrzeby ich tworzenia. Tu np. wypadłoby nam w ten sposób wypisać naprzód iloczyny od 567×2 do 567×4 , a następnie dopisać jeszcze iloczyny 567×5 i 567×6 . (Por. us. 19). —

W zadaniu np. 9600741:24, wyznaczwszy już pierwszą cyfrę

$$\begin{array}{r|l} 9600741 & 24 \\ -96 & \hline 0074 & 400030 \\ -72 & \\ \hline 21 & \end{array}$$

ilorazu, 4, widzimy, że z odejmowania 96—96 nie otrzymujemy żadnej reszty. Nie piszemy jednak zera (§ 5, us. 11), gdyż wypadnie nam w dalszym ciągu postawić cyfrę dzielną (§ 3, us. 12); brak więc wszelkiej cyfry pod odejmowanymi liczbami, wobec

postawionej w tymże wierszu następującej cyfry dzielną dostatecznie nam wskaże, żeśmy z tego odejmowania nie otrzymali reszty. Piszemy tylko w tym wierszu (w innych przypadkach bywa w nim reszta) następującą cyfrę dzielną. Jest nią 0, więc i w ilorazie odpowiednią cyfrą *) jest 0. Piszemy obok następną cyfrę dzielną, 0; znowu więc w ilorazie 0. Piszemy obok następną cyfrę 7; mamy więc teraz (§ 3, us. 12) liczbę 7, która jest mniejsza od dzielnika; piszemy więc znowu w ilorazie 0. Przypisując zaś do liczby 7 następującą cyfrę dzielnika 4, otrzymujemy liczbę 74, która jest już większa od dziel-

*) Można to jeszcze dosadniej objaśnić, postępując tak, jak w us. 17.

nika. Wyznaczywszy cyfrę 3 w ilorazie i dopisawszy do reszty z odjęcia 72 od 74, t. j. do 2, następującą cyfrę dzielną, 1, otrzymujemy liczbę, mniejszą od dzielnika. Piszemy więc w ilorazie, jako odpowiednią (ostatnią) cyfrę, 0, a liczba 21 przedstawi nam teraz resztę dzielenia. Otrzymaliśmy więc jako wypadek dzielenia: 400 030 wraz z tym, co wypadnie z podzielenia 21 przez 24.

19. Widzimy więc wogóle, że postępowanie przy dzieleniu liczb możemy ująć w następujące prawidło:

*Aby podzielić dane liczby przez siebie, piszemy naprzód dzielną, a obok niej, z prawej strony, dzielnik, oddzielając te liczby od siebie kręską pionową, nieco na dół przedłużoną *), pod dzielnikiem zaś prowadzimy kręską poziomą **), pod którą pisać będziemy cyfry ilorazu. Zauważywszy naprzód, jakby osobną, liczbę, utworzoną przez tyle początkowych cyfr dzielną, ile ich najmniej potrzeba, aby ta liczba była nie mniejszą od dzielnika, szukamy takiej największej cyfry, przez którą mnożąc dzielnik, otrzymalibyśmy iloczyn nie większy od tej zauważonej liczby. Ta cyfra będzie pierwszą cyfrą ilorazu. Mnożymy przez nią dzielnik i otrzymany iloczyn odejmujemy od owęj liczby, przedstawionej przez początkowe cyfry dzielną, podpisawszy go pod tą liczbą. Do wypadkij z tego odejmowania reszty przypisujemy następującą cyfrę dzielną i znowu, mając tak powstałą liczbę, nie mniejszą od dzielnika, w taki sam sposób wyznaczamy następującą cyfrę ilorazu. I t. d. Jeżeli przypisawszy do reszty, otrzymanej z odejmowania, następującą cyfrę dzielną, mamy liczbę mniejszą od dzielnika, to w ilorazie piszemy 0, a do owęj liczby przypisujemy jeszcze następującą cyfrę dzielną, w celu wyznaczenia następującej cyfry ilorazu, i t. d. Wyznaczone w ten sposób cyfry, razem uważane, przedstawiają nam liczbę szukaną, a liczba, otrzymana po odjęciu iloczynu dzielnika przez ostatnią cyfrę w ilorazie, będzie resztą dzielenia.*

Gdy mamy wykonać dzielenie, w którym dzielnik jest dość wielką liczbą, a spodziewamy się wielu cyfr w ilorazie, to korzystnym jest, dla ułatwienia sobie następnie tak wyznaczania cyfr ilorazu, jak i tworzenia iloczynów częściowych dzielnika przez cyfry ilorazu, wypisać uprzednio na boku, lub na oddzielnij kartce (§ 1, us. 9), iloczyny dzielnika przez kolejne liczby jednocyfrowe, tymwięcej, że taką tabliczkę łatwo tworzyć możemy przez dodawanie dzielnika do tegoż dzielnika i do kolejno w ten sposób otrzymywanych sum. Tak np., gdy mamy 25 807 156 427 podzielić przez 3742, utworzymy tabliczkę iloczynów dzielnika przez jednocyfrowe liczby:

*) Aby oddzielić iloraz od podpisanych pod dzielną liczb, osobiwie w przypadku jednocyfrowego ilorazu (zob. us. 16).

***) Aby oddzielić iloraz szukaną od danego dzielnika.

	3 742	1
(3742+3742)	7 484	2
(7484+3742)	11 226	3
(11226+3742)	14 968	4
(14968+3742)	18 710	5
(18710+3742)	22 452	6
(22452+3742)	26 194	7
(26194+3742)	29 936	8
(29936+3742)	33 678	9,

przy pomocy której widać odrazu, że pierwszą cyfrą w ilorazie jest 6, że od 25807 odjąć należy 22452, i t. d.

Możemy wraze, gdy w dzielniku jest większa liczba, np. gdy mamy 25807156:3742, postępować w ten sposób. Idzie o wyznaczenie pierwszej cyfry w ilorazie, t. j. ilorazu z podzielenia liczby 25807 przez 3742. Ten iloraz nie może być większy od ilorazu z podzielenia 25 przez 3, więc, conajwyżej, może być liczbą 8; nie może zaś być mniejszy od ilorazu z podzielenia 25 przez 4, a więc, conajmniej, może być liczbą 6. Należy więc tu próbować liczb 8, 7, 6. Gdyby ilorazem miało być 8, to ósma część liczby 25807 nie mogłaby w żadnym razie być mniejszą od dzielnika, że zaś biorąc ósmą część liczby 25807, otrzymujemy: 32..., więc mniej niż dzielnik, zatem 8 jest zbyt wielką, jako pierwszą, cyfrą ilorazu. Bierzemy siódmą część liczby 25807: otrzymujemy 36..., mniej niż dzielnik, więc i 7 jest zbyt wiele. Śmiało więc możemy powiedzieć, że należy w ilorazie napisać pozostałą już jedyną z możliwych cyfr, t. j. 6 (i rzeczywiście, szósta część liczby 25807 jest 4..., niemniej niż dzielnik). Podobnie postępować wypada przy wyznaczaniu następujących cyfr ilorazu.

20. Jeżeli mamy np. liczbę kończącą się zerami podzielić przez liczbę przedstawioną przez jedność z zerami, którychto zer jest niewięcej niż końcowych zer w dzielnej, np. 54260000:1000, to w ilorazie otrzymamy 54260, bo (us. 3; § 6, us. 21) $1000 \times 54260 = 54260000$, t. j. w ilorazie otrzymamy liczbę, powstałą z dzielnej wskutek opuszczenia trzech jej zer końcowych, t. j. tyłu, ile jest zer przy jedności w dzielniku 1000, a więc: *aby liczbę kończącą się zerami podzielić przez liczbę, przedstawioną przez jedność z zerami, wraze gdy tych zer przy jedności jest niewięcej niż końcowych zer w dzielnej, należy wziąć jako iloraz liczbę powstałą z dzielnej przez opuszczenie tyłu jej zer końcowych, ile ich jest przy jedności w dzielniku.*

Jeżeli mamy np. 1704069000:56700, to, gdy dzielną i dzielnik podzielimy przez 100, iloraz niezupełny, jak wiemy, zmianie nie ulegnie, reszta tylko skutkiem tego zmniejszy się 100 razy (us. 14). Możemy zatem, zamiast dzielić 1704069000 przez 56700, wykonać

dzielenie 170469:567; to, co otrzymamy w ilorazie, będzie tysamym, co byśmy otrzymali, dzieląc przez siebie pierwotnie dane liczby; resztę tylko, jeżeli będzie, wypadnie nam powiększyć 100 razy. Tak np.

$$\begin{array}{r|l} 1704069000 & 56700 \\ -1701 & 30554 \\ \hline 3069 & \\ -2835 & \\ \hline 2340 & \\ -2268 & \\ \hline 72 & \times 100 = 7200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 62499000 & 1240000 \\ -6200 & 50 \\ \hline 499 & \times 1000 = 499000 \\ \\ 48300 & 230 \\ -46 & 210 \\ \hline 23 & \\ -23 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Stąd widzimy, że, *gdy mamy podzielić przez siebie liczby zakończone zerami, to, wykonywając działanie, możemy jednakową liczbę zer końcowych w dzielnej i dzielniku opuścić, przypisując tylko do reszty, jeżeli ona będzie, tyleż zer, ileśmy ich opuścili w każdej z danych liczb.*

Zauważmy, że nawet w przypadku, gdy dzielnik jest zakończony zerami, a ostatnia cyfra dzielnej nie jest zerem, możemy, z uwagi, że w każdym razie tyle ostatnich cyfr dzielnej, ile jest końcowych zer dzielnika, znajdzie się zawsze w reszcie, opuścić w czasie wykonywania dzielenia końcowe zera dzielnika i nie zważać na tyleż końcowych cyfr dzielnej, które dopiero, po wyznaczeniu ilorazu, przypiszemy do reszty dzielenia. Tak np.

$$\begin{array}{r|l} 25438 & 600 \\ -24 & 42 \\ \hline 14 & \\ -12 & \\ \hline 238 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 483567 & 23000 \\ -46 & 21 \\ \hline 23 & \\ -23 & \\ \hline 567 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 62499 & 1240 \\ -620 & 50 \\ \hline 499 & \end{array}$$

Widzimy więc, że wogóle, *gdy dzielnik jest zakończony zerami, w czasie wykonywania dzielenia możemy opuścić tak te zera dzielnika, jak i taką samą liczbę końcowych cyfr dzielnej, byle tylko do otrzymanej reszty przypisać opuszczone cyfry dzielnej.*

Wykonywanie piśmienne dzielenia przez liczbę jednocyfrową, gdy już posiadamy dostateczną wprawę, zwykle sobie skracamy znacznie pisząc tylko cyfry ilorazu i ostatnią (jeżeli jest) resztę. Np., gdy mamy podzielić

57803543 przez 9
6422615 iloraz
z resztą 8

postępujemy tak: 9 w 57-u 6 razy (piszę 6 pod 7-ką), $9 \times 6 = 54$, zostaje 3, 9 w 38-u 4 razy (piszę 4 pod 8-ką), ..., 9 w 53-ch 5 razy (piszę 5 pod 3-ką), $9 \times 5 = 45$, pozostaje reszta dzielenia 8.

21. Próbę dzielenia możemy oprzeć na tym, że (us. 3, 11)
 ilorz \times dzielnik = dzielnej,
 ilorz niezupełny \times dzielnik + reszta = dzielnej.

Jeżeli więc dzielenie dobrze wykonaliśmy, to, po pomnożeniu przez siebie liczby, otrzymanej w ilorazie, i dzielnika, i dodaniu do tego iloczynu reszty, jeżeliśmy ją otrzymali, wypaść nam powinna dzielna. Np.

$$\begin{array}{r}
 7500339 \overline{) 25} \\
 \dots\dots\dots \overline{) 300013} \\
 \dots\dots\dots \\
 \hline
 14 \\
 \\
 48300 \overline{) 230} \\
 \underline{-46} \\
 23 \\
 \underline{-23} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 300013 \\
 \times 25 \\
 \hline
 1500065 \\
 600026 \\
 \hline
 7500325 \\
 + 14 \\
 \hline
 7500339 \text{ (dobrze).} \\
 \\
 230 \\
 \times 210 \\
 \hline
 23 \\
 46 \\
 \hline
 48300 \text{ (dobrze).}
 \end{array}$$

Jest to więc próba dzielenia przez mnożenie.

Jeżeli mamy np. $230 \times 210 = 48300$, to gdy iloczyn 48300 będziemy uważać jako dzielną, możemy, z uwagi, że iloczyn nie zależy od porządku czynników, przyjąć którykolwiek z czynników za dzielnik, np. 210, wtedy (us. 3) pozostały czynnik, 230, będzie ilorazem; widzimy więc, że gdy poprzedni ilorz przyjmujemy za dzielnik, to jako ilorz otrzymać powinniśmy poprzedni dzielnik. Podobnie, gdy np. $7500339 = 300013 \times 25 + 14$, to po odjęciu od sumy 7500339 jednego składnika, 14, otrzymamy (§ 7, us. 3) drugi składnik (300013×25), tak iż

$$7500339 - 14 = 300013 \times 25;$$

przyjmując więc liczbę ($7500339 - 14$) jako dzielną, a czynnik 300013 jako dzielnik, otrzymamy jako ilorz liczbę 25. A ponieważ w odejmowaniu

$$7500339 - 14 = (25 \times 300013)$$

odjemna = reszcie + odjemnik, więc

$$7500339 = 25 \times 300013 + 14,$$

z czego widzimy, że gdy liczbę 7500339 podzielimy przez liczbę 300013, poprzedni ilorz niezupełny, to otrzymamy, jako ilorz niezupełny liczbę 25, poprzedni dzielnik, i resztę 14, tę samą co poprzednio.—Opierając się na tym, możemy wykonać próbę dzielenia przez dzielenie¹⁾, dzieląc dzielną przez tę liczbę, którąśmy otrzymali w ilorazie. Tak np. powyższe dzielenia sprawdzimy, wykonywając dzielenia

¹⁾ Próba mnożenia i dzielenia przez 9 w § 13, us. 17.

$$\begin{array}{r|l} 48300 & 210 \\ -42 & \hline 63 & \\ -63 & \hline 0 & \text{(dobrze).} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 7500339 & 300013 \\ -600026 & \hline 1500079 & \\ -1500065 & \hline 14 & \text{(dobrze).} \end{array}$$

22. Ponieważ dzielenie jest działaniem odwrotnym do mnożenia dwu czynników (us. 5), więc możemy wykonać próbę mnożenia przez dzielenie, znalezionej iloczynu dzieląc czyto przez mnożną, czytęz przez mnożnik; wtedy w ilorazie otrzymać powinniśmy odpowiednio poprzedni mnożnik, lub mnożną, reszty zaś żadnej wypaść nam nie powinno. Np.

$$\begin{array}{r} 342100 \\ \times 215 \\ \hline 17005 \\ 3421 \\ 6842 \\ \hline 73551500 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 73551500 & 342100 \\ -6842 & \hline 5151 & \\ -3421 & \hline 17105 & \\ -17105 & \hline 0 & \text{(dobrze).} \end{array}$$

23. Gdy mnożymy przez siebie dwie liczby, to nie możemy ściśle zgóry oznaczyć, wiele będzie cyfr iloczynu: wiemy tylko, że ich będzie albo tyle, ile jest w mnożnej i w mnożniku razem, albo o jedną mniej (§ 6, us. 30).

Gdy mamy podzielić liczbę np. 8-cyfrową przez 3-cyfrową, to w razie, gdy początkowe 3 cyfry dzielnej tworzą liczbę nie mniejszą od dzielnika (us. 18), posłużą już one do wyznaczenia jednej (pierwszej) cyfry w ilorazie; że zaś w miarę użycia (przypisywania do reszt) następujących cyfr dzielnej wyznaczamy następujące cyfry w ilorazie (us. 18), więc w tym przypadku, prócz tej 1-jej cyfry, będzie cyfr tyle, ile jeszcze pozostało cyfr dzielnej, czyli tyle, o ile jest więcej cyfr w dzielnej niż w dzielniku, t. j. $8-3$. Wszystkich więc cyfr w ilorazie będzie $(8-3)+1=6$. — Jeżeli zaś początkowe 3 cyfry dzielnej przedstawiają liczbę mniejszą od dzielnika, to dopiero z początkowych $3+1=4$ cyfr dzielnej (us. 18) wyznaczmy pierwszą cyfrę w ilorazie, a więc w tym przypadku będzie w ilorazie cyfr o jedną mniej niż poprzednio, t. j. $8-3=5$ cyfr. A więc: *w ilorazie otrzymujemy tyle cyfr, o ile jest ich więcej w dzielnej niż w dzielniku, albo o jedną więcej* ¹⁾. Odrazu jednak, mając dane liczby, łatwo ściśle oznaczyć możemy, który z tych dwu przypadków miejsce mieć będzie, t. j. dokładnie powiedzieć, ile cyfr w ilorazie otrzymamy.

¹⁾ Wogóle: jeżeli liczbę cyfr dzielnej nazwiemy p , a liczbę cyfr dzielnika q , to w ilorazie otrzymujemy cyfr $p-q$, albo $p-q+1$.

24. Weźmy dzielenie w przypadku, gdy dzielna nie jest podzielna przez dzielnik, np. $104 : 6$. Otrzymamy iloraz niezupełny 17 i resztę 2, a więc (us. 11)

$$104 = 6 \times 17 + 2$$

dzielna = dzielnikowi \times iloraz niezupełny + reszta.

Ponieważ reszta jest mniejsza od dzielnika, więc można znaleźć liczbę, którą dodając do reszty, otrzymamy dzielnik: $6 - 2 = 4$. Stąd $6 = 4 + 2$ i (§ 5, us. 7) $6 - 4 = 2$. Możemy więc tę liczbę 2 zastąpić przez (§ 5, us. 6) różnicę $6 - 4$ i napisać

$$104 = 6 \times 17 + 6 - 4.$$

Tu mamy $6 \times 17 + 6$ i od liczby, stąd otrzymanej, odjąć 4. Lecz iloczyn 6×17 jest sumą (§ 6, us. 2) siedemnastu składników 6; do niej mamy tu jeszcze dodać ten sam składnik 6. Liczba więc $6 \times 17 + 6$ przedstawia sumę osiemnastu składników 6, czyli iloczyn 6×18 . Od tej zaś liczby $6 \times 17 + 6 = 6 \times 18$ odejmując liczbę 4, otrzymujemy 104, t. j.

$$104 = 6 \times 18 - 4.$$

Tę liczbę 4, o którą reszta różni się od dzielnika, t. j. liczbę, którą należy dodać do reszty, aby otrzymać dzielnik, nazywać będziemy: dopełnieniem reszty do dzielnika, albo krócej: dopełnieniem reszty. Jest więc:

$$2 + 4 = 6, \quad \text{reszta} + \text{dopełnienie reszty} = \text{dzielnikowi}.$$

Zauważmy jeszcze, że ponieważ $18 = 17 + 1$, a 17 jest ilorazem niezupełnym naszego dzielenia, więc liczba 18 przedstawia: iloraz niezupełny + 1. A więc to, cośmy powyżej napisali,

$$104 = 6 \times 18 - 4,$$

możemy tak ogólnie przedstawić.

dzielna = dzielnikowi \times (iloraz niezupełny + 1) -- dopełnienie reszty.

Gdy więc, wykonywając dzielenie $1000 : 7$, otrzymujemy resztę 6, to dopełnieniem reszty będzie tu liczba 1, bo $6 + 1 = 7$, i możemy napisać:

$$1000 = 7 \times 142 + 6 \quad \text{i} \quad 1000 = 7 \times 143 - 1.$$

25. Mając kilka liczb danych, możemy szukać takiej liczby, którą biorąc zamiast każdej z danych liczb, otrzymujemy tę samą sumę, co z dodania liczb danych. Np., gdy mamy dane liczby: 5, 8, 27 i 16, to liczba 14 jest taką właśnie liczbą, bo

$$5 + 8 + 27 + 16 = 56,$$

$$14 + 14 + 14 + 14 = 56,$$

a więc

$$14 + 14 + 14 + 14 = 5 + 8 + 27 + 16.$$

Taką liczbę, jak tu 14, t. j. liczbę, którą biorąc zamiast każdej z danych liczb, otrzymujemy tę samą sumę, co z dodania danych liczb, nazywamy *średnią arytmetyczną* ¹⁾ liczb danych.

¹⁾ W znaczeniu średniej arytmetycznej odniedawna używają niekiedy wyrazu „przeciętna”.

Ponieważ $14+14+14+14=14\times 4$ (§ 6, us. 2), więc

$$14\times 4=5+8+27+16,$$

skąd, uważając ilość $5+8+27+16$ jako dzielną, a czynnik 4, który nam przedstawia ilość liczb danych, jako dzielnik, mamy (us. 5)

$$(5+8+27\times 16):4=14,$$

t. j., aby otrzymać średnią arytmetyczną liczb danych, należy sumę tych liczb podzielić przez ich ilość.

Jeżeli np. było w południe jednego dnia 15° (stopni) ciepła, drugiego 18° , trzeciego 12° , czwartego 10° , piątego 8° , szóstego 10° , siódmego 11° , to średnia arytmetyczna stanu ciepła w południe w ciągu tego tygodnia jest

$$(15^{\circ}+18^{\circ}+12^{\circ}+10^{\circ}+8^{\circ}+10^{\circ}+11^{\circ}):7=84^{\circ}:7=12^{\circ}.$$

Np. Ktoś skupił cztery kawałki gruntu; za jeden, mający 4 morgi, płacił po 180 rs. za mórg; za drugi, mający 2 morgi, po 240 rs. za mórg; za trzeci, mający 3 morgi, po 225 rs. za mórg; nakoniec za czwarty, mający mórg obszaru, zapłacił 315 rs. Po ile płacił średnio za mórg? — Mamy tu znaleźć średnią arytmetyczną 10-u liczb: 4-ch liczb 180 rs., 2-u liczb 240 rs., 3-ch liczb 225 rs. i liczby 315 rs., a więc:

$$(180 \text{ rs.} \times 4 + 240 \text{ rs.} \times 2 + 225 \text{ rs.} \times 3 + 315 \text{ rs.}):10=2190 \text{ rs.}:10=219 \text{ rs.}$$

Odp. Płacił średnio za mórg 219 rs.

26. Uzupełnimy nieco to, cośmy w zakończeniu poprzedzającego §-u mówili o potęgach liczb.

Jeżeli mamy np. $3^9:3^4$, to z uwagi, że (§ 6, us. 40) $3^9=3^4\times 3^5$, możemy nasze dzielenia tak przedstawić ($3^4\times 3^5$): 3^4 . Mamy tu iloczyn dwu czynników 3^4 i 3^5 podzielić przez jeden z tych czynników; otrzymamy więc (us. 13) jako iloraz czynnik pozostały, t. j. liczbę 3^5 ; więc $3^9:3^4=3^5$. Nadto widzimy tu, że wykładnik ilorazu, 5, powstał z wykładników dzielnej i dzielnika, 9 i 5-wskutek odjęcia od wykładnika dzielnej wykładnika dzielnika, $5=9-4$. Więc $3^9:3^4=3^5=3^{9-4}$, t. j. iloraz dwu potęg tej samej liczby jest także potęgą tej liczby, której wykładnik jest różnicą wykładników dzielnej i dzielnika.

27. Jeżeli zastosujemy to do przypadku szczególnego, gdy dzielna i dzielnik są tymi samymi potęgami tej samej liczby, to będziemy mieli w wykładniku różnicę liczb równych sobie (§ 5, us. 11), t. j. zero, np. $3^4:3^4=3^{4-4}=3^0$. Z drugiej strony, dzieląc liczbę przez nią samą, otrzymujemy (us. 11) jedność $3^4:3^4=1$. Więc 3^0 jest to samo co 1; również $10^0=1$ i t. d. *Jakąkolwiek liczbę z wykładnikiem zero możemy uważać za przedstawienie jedności.*

28. Skutkiem tego możemy liczby np. 30568, 856724 (§ 6, us. 41) tak przedstawić:

$$30568 = 3 \times 10^4 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 8 \times 10^0,$$

$$856724 = 8 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0,$$

i podobnie, np. (§ 6, us. 42)

$$[250413]_6 = 2 \times 6^5 + 5 \times 6^4 + 4 \times 6^2 + 1 \times 6^1 + 3 \times 6^0, \text{ i t. d.}$$

29. Jeżeli chcemy liczbę np. 22185 przedstawić w systemacie szóstkowym, to, ponieważ na pierwszym z prawej strony miejscu ma być postawiona część liczby, jaka się zostanie po oddzieleniu z liczby 22185 wszystkich szóstek, należy wynaléść resztę z podzielenia 22185 przez 6. Iloraz niezupełny przedstawiać nam będzie szóstki; aby znaleźć tę część liczby, którą wypadnie oznaczyć na miejscu drugim (z prawej strony), trzeba z tych szóstek oddzielić wszystkie kwadraty liczby sześć, t. j. ten iloraz niezupełny podzielić jeszcze przez 6, a wtedy reszta będzie tym, co na miejscu drugim napisać nam wypadnie, iloraz zaś niezupełny przedstawi nam ile razy w danej liczbie jest wszystkich $6^2 = 36$. I t. d. Więc

$$\begin{array}{r}
 221856 \\
 \dots\dots | 3697 | 6 \\
 \dots\dots\dots | 616 | 6 \\
 \quad 3 \dots\dots | 102 | 6 \\
 \quad \quad 1 \dots\dots | 17 | 6 \\
 \quad \quad \quad 4 \dots\dots | 2 \\
 \quad \quad \quad \quad 0 \quad 5
 \end{array}$$

mamy więc tu:

$$22185 = 3697 \times 6 + 3$$

$$= (616 \times 6 + 1) \times 6 + 3 = 616 \times 6^2 + 1 \times 6^1 + 3$$

$$= (102 \times 6 + 4) \times 6^2 + 1 \times 6^1 + 3 = 102 \times 6^3 + 4 \times 6^2 + 1 \times 6^1 + 3$$

$$= (17 \times 6) \times 6^3 + 4 \times 6^2 + 1 \times 6^1 + 3 = 17 \times 6^4 + 4 \times 6^2 + 1 \times 6^1 + 3$$

$$= (2 \times 6 + 5) \times 6^4 + 4 \times 6^2 + 1 \times 6^1 + 3 = 2 \times 6^5 + 5 \times 6^4 + 4 \times 6^2 + 1 \times 6^1 + 3$$

$$= [250413]_6.$$

W podobny sposób, aby liczbę np. 1199801 przedstawić w systemacie np. dwunastkowym, wykonamy kolejne dzielenia przez podstawę 12, a oznaczysz 10 przez cyfrę np. *a* i 11 przez cyfrę np. *b*, mamy $1199801 = [49a3b5]_{12}$.

W takito sposób możemy liczbę przedstawioną w systemacie dziesiętkowym wyrazić w innym systemacie.

Zadania arytmetyczne. § 6, 7.)

ROZDZIAŁ IV.

MIARY. DZIAŁANIA NA LICZBACH WIELORAKICH.

§ 8. M I A R Y.

1. «Rzeczy do ważenia mogą być cięższe, albo lżejsze; mierzyć przypada czasem mniej, a czasem więcej; jedne rzeczy trzeba płacić drożej, inne taniej. Z tego powodu rozmaite wagi, miary i pieniądze postanowiono. Drobne naprzykład pieniądze wygodne są do wypłacania sum małych, nie zaś wielkich. Wagi, dostateczne na pomiarkowanie ciężarów w prostych towarach, nie są dostateczne ¹⁾ na zważenie rzeczy droższych, gdzie uchybienie małe szkodęby znaczną kupującemu, albo sprzedającemu przyniosło. Trzeba więc było wielorakie mieć pieniądze, wagi i miary; trzeba było podzielić najwyższe gatunki na niższe, których więcej albo mniej jeden wyższy gatunek składałoby, aby tym sposobem wygodzie i potrzebie ludzkiej dogodzić.» ²⁾

Rozmaite narody wytwarzały sobie dla swych potrzeb różne miary. Początkowo odnoszono wymiary różnych rzeczy do pewnych przedmiotów powszechnie znanych, jak np. do ziarn zboża, do długości wziętych z ciała ludzkiego i t. d. Ponieważ jednak te przedmioty mogły się od siebie różnić, a rozwijające się stosunki wymagały miar jednostajniejszych, więc starano się określić dokładniej to, według czego mierzyć miano w pewnym kraju. Tak więc np. przy wymiarach, wziętych z ciała ludzkiego, miano na uwadze osoby, ważne stanowisko w narodzie zajmujące, które zwykle fizycznie bywały wówczas silnie rozwinięte; dlatego np. stopa, miara od najdawniejszych czasów używana, u rozmaitych ludów nieco odmienna, jest jednak zawsze większa od zwykłej teraz stopy ludzkiej ³⁾.

¹⁾ «nie są dosyć».

²⁾ *Arytm. dla sz. nar.*, str. 79.

³⁾ U Egipcyan i Żydów np. były między innymi miary: palec (t. j. szerokość palca), piędź (szerokość dłoni), stopa, krok, droga jednego dnia i t. d. — Podobnie w Anglii, według postanowienia Henryka I z r. 1101, gyrd (odpowiadający terazniejszemu yardowi), miara długości do powszechnego użycia, jest długością ramienia tego króla do końca trzeciego palca. Miara ta dzieli się na trzy stopy, stopa na 12 cali, wielkość zaś cala wyznacza długość trzech wzdłuż ustawionych ziarn jęczmienia. Według różnych postanowień (ostatnie z r. 1494), ciężar 32 suchych ziarn pszenicy stanowił pennę (pennyweight), których 20 tworzyło uncję, 12

Z czasem coraz więcej uczuwać się dawała w każdym społeczeństwie potrzeba ujednostajnienia miar, t. j. posiadania pewnych stałych wzorów i rozciągnięcia kontroli nad kopijami tych wzorów, będącymi w powszechnym użyciu. Mimo, że w oddzielnych państwach takie wzory miar ustanawiano, że starano się o wyrób kopij dokładnych, że za używanie miar niedokładnych określano kary, doszło w wieku XVIII do tego, że w każdym prawie mieście oddzielnego państwa ¹⁾ znajdowały się inne miary, a niekiedy nawet w tym samym mieście bywały różne miary do rozmaitych przedmiotów ²⁾. Było to bardzo niedogodne dla handlujących: rachunki stawały się kłopotliwymi, a nadużycia łatwymi. Niedogodności te więcej się jeszcze uczuwać dawały w stosunkach wzajemnych różnych narodów, chociaż niekiedy porównywano ze sobą dość starannie miary uważane za obowiązujące w różnych państwach i ogłaszano tablice zamiany miar.

2. Potrzeba było mieć miary dokładne i stałe, niezienne, a nadto tak dogodne, iżby wiele narodów, jeżeli nie wszystkie, przyjął je zechciały za swoje. Należało więc obmyśleć miary takie, żeby zasada, na której miary są oparte, zmianie nie ulegała, tak iż, wrazie zatracenia wyrobionych wzorów, możnaby je zawsze nanowo odtworzyć dokładnie, a nadto, żeby ta zasada była tak wybraną, iżby nie była wzięta z warunków właściwych pewnemu jednemu krajowi, ale mogła być uważana za odnoszącą się równie dobrze do warunków jakiegokolwiek kraju i narodu.

Taki właśnie układ miar opracowali w ostatnich latach XVIII stulecia uczeni francuscy. Oparli oni ten układ na niezmiennających się wymiarach ziemi. Wymierzywszy część łuku południka ziemskiego, wnieśli z niej o długości całego południka. Czwierć tej długości południka wystawić sobie należy podzieloną na 10 000 000 równych części. Tę część nazwali *metrem* *).

Aby zaś jednocześnie wprowadzić ułatwienie we wszelkie rachunki z miarami, postanowiono, że przy podziałach wszędzie użytą będzie

zaś uncyj funt (pound); miara objętości: gallon zawierała 8 funtów pszenicy czyli mieściła 61440 ziarn pszenicy.—Stopa francuska dawna, t. z. pied du roi, albo «paryska», ma być, według podania, długością stopy Karola Wielkiego.

¹⁾ Miało to miejsce nie tylko w Niemczech, we Włoszech, w Polsce, we Francji i t. d., ale nawet w Anglii, w której jeszcze Charta magna libertatum (r. 1215) zastrzegła jednakowe wagi w całym państwie, co różnymi czasy było ponawiane, i w której wyrabianie wiarogodnych kopij wzorów miary długości i ciężaru (odlanych z rozkazu Elżbiety i w r. 1588 złożonych w skarbcu) dozwolane było tylko za osobnym przywilejem.

²⁾ W Paryżu np., prócz zwykłego łokcia («aune»), istniał inny dla jedwabiu, mniejszy dla sukna, a jeszcze mniejszy dla płótna.—Liczba różnych miar do mierzenia powierzchni gruntu, używanych w północnej Francji, wydawaćby się dziś mogła prawie bajeczną: były wsi, które miały po kilka własnych miar.

*) Należy uczniom pokazać wielkość metra i jego części (por. str. 83) Również dalej pokazywać jednostki średniej wielkości, porównywać je z sobą i t. d.

liczba 10. Dla nazwania miary 10 razy większej od metra przystawili na początku do wyrazu metr wyraz *deka* (zgrecka: 10), tak iż *dekametr* oznacza 10 metrów. Dla nazwania miary 10 razy większej od dekametra, czyli 100 razy większej od metra, użyli wyrazu *hekto* (zgrecka: 100), skąd *hektometr*. Podobnie dla nazwania miary 10 razy większej od hektometra, użyli dodatku *kilo* (zgrecka: 1000), skąd *kilometr*. Również na oznaczenie miary 10 000 razy większej od metra, przy pomocy dodatku *myria* (zgrecka: 10 000), utworzono *myryjometr*.—Co się zaś tyczy miar mniejszych od metra, to na oznaczenie części dziesiątej, setnej, tysięcznej użyto odpowiednio dodatków *deci*, *centi* i *mili* (odpowiadających łacińskiemu nazwom 10, 100 i 1000), tak iż *decymetr* oznacza 10-ą część metra, *centymetr* oznacza 10-ą część decymetra, czyli 100-ą metra, a *milimetr* oznacza 10-ą część centymetra, czyli 1000-ą metra.

Nadal, dla skrócenia, będziemy zamiast metr pisać często m., oraz

Dm. zamiast dekametr, dm. zamiast decymetr,

Hm. zamiast hektometr, cm. zamiast centymetr,

Km. zamiast kilometr, mm. zamiast milimetr.

Mm. zamiast myryjometr,

Są to więc

Miary długości czyli miary liniowe.

m. = 10 dm. = 100 cm. = 1000 mm.

dm. = 10 cm. = 100 mm.

cm. = 10 mm.

Dm. = 10 m. = 100 dm. = 1000 cm. = 10 000 mm.

Hm. = 10 Dm. = 100 m. = 1000 dm. i t. d

Km. = 10 Hm. = 100 Dm. = 1000 m. i t. d.

Mm. = 10 Km. = 100 Hm. = 1000 Dm. = 10 000 m. i t. d.

Na milę geograficzną¹⁾ liczy się 7407 i prawie pół metra.

Miary powierzchni.

Przy wymierzaniu powierzchni różnych przedmiotów używają się:

m. kwadratowy *), dm. kw., cm. kw., mm. kw.,

a przy mierzeniu rozległości prowincyi, kraju i t. d.

Mm. kw., Km. kw.

Przy obliczaniu jednak powierzchni pola ornego, łąki, pastwiska, lasu, sadu i t. d., wogóle—gruntu **), używa się jako jednostki Dm. kw., który wtedy nazywa się

ar,

¹⁾ O mili geograficznej zobacz niżej koniec ustępu 3-go.

[Francuskie «lieu» na łądzie ($\frac{1}{25}$ stopnia) = $\frac{1}{9}$ Mm., na morzu ($\frac{1}{20}$ st.) = $\frac{5}{9}$ Mm.]

*) Por. § 6, us. 33, 34.

**) Ale grunt pod budowlę, a także często powierzchnie ogrodów w miastach oblicza się na m. kw.

jak również używa się miary większej: 100 arów, która więc nazywa się hekto-ar, czyli h e k t a r; oznaczać ją będziemy krócej Har.

M i a r y o b j ę t o ś c i.

Przy mierzeniu objętości różnych przedmiotów używa się miar: m. sześcienny *), dm. sz., cm. sz., mm. sz.

Ale przy wymierzaniu objętości ¹⁾ zboża, owoców, a także cieczy w handlu, uważa się za jednostkę dm. sz., który wtedy nazywa się

litr;

przy większych objętościach zboża lub cieczy w handlu, jest używany z większych miar głównie h e k t o l i t r, t. j. 100 litrów, oraz niekiedy d e k a l i t r, t. j. 10 litrów; z miar zaś mniejszych od litra używane są niekiedy na oznaczenie objętości cieczy w handlu: d e c y l i t r, t. j. 10-a część litra, i c e n t y l i t r, t. j. setna część litra. Nazwy te piszą się zwykle krócej, mianowicie Hl., Dl., dl., cl., a także l. zamiast litr.

M i a r y c i ęż a r u, czyli w a g i.

Przy nagrzewaniu lub oziębianiu jakiegokolwiek przedmiotu zmienia się jego objętość **), a tym samym dwie jednakowe objętości tego samego przedmiotu przy różnej temperaturze bywają niejednakowo ciężkie. Należy więc dla oznaczenia jednostki ciężaru wybrać taki przedmiot, którego objętość przy pewnej temperaturze szczególnie się różniła od objętości przy wszelkiej innej temperaturze, a nadto taki, któryby łatwo można było mieć wszędzie ***) i bez trudności otrzymać go w stanie czystym ****). Te wszystkie własności posiada woda. Jest ona wszędzie, a skądkolwiek czerpana, po oczyszczeniu przez dystylację *), jest zawsze jednakowa. Nadto przy pewnej temperaturze **), którą zwyczajnymi środkami otrzymać można, ma objętość najmniejszą, t. j. jest najgęstsza, najściślejszą ***). Dlatego woda najwięcej się nadaje,

*) Por. § 6, us. 36, 37.

¹⁾ Jednostką przy wymierzaniu drzewa opałowego jest we Francji m. sz., który się wtedy nazywa «stère»; używa się tam także «decistère».

**) Np. woda z naczyń, które wypełnia, przy znacznym ogrzaniu (jeszcze przedtem, nim wrzść zacznie) wylewa się, a coraz więcej marznąca sprawia pęknięcie gontów, rozsądza kamienie, butelki i t. d. Z tejże przyczyny części szyn, mostów żelaznych niezupełnie do siebie przystają. I t. d.

***) Żelazo, złoto, srebro i t. d. w niewielu tylko miejscowościach się dobywa.

****) Złoto, srebro, a osobliwie żelazo trudno mieć w stanie zupełnie czystym

*) Przyrząd do dystylowania wody znajduje się np. w każdej aptece. Dystylacja polega na przeprowadzeniu wody w stan pary i skropleniu tej pary w części chłodnej przyrządu.

**) Przy 4 stopniach ciepła termometru Celsjusza, czyli przy 3-ch i jednej-piątej stopnia ciepła termometru Réaumur'a.

****) Tak, iż w razie, gdy następnie wodę będziemy albo wciąż ogrzewać albo wciąż oziębiać, to jej objętość będzie się wciąż powiększać, czyli gęstość wody będzie się wciąż zmniejszać.

aby jćj ciężar w pewnych warunkach uważać za jednostkę wagi. Przyjęto więc, że ciężar jednego cm. sz. wody dystylowanćj przy takićj jćj temperaturze, przy którćj woda jest najgęstsza, uważa się za jednostkę miar ciężaru, czyli wag; ciężar ten nazywa się

gram.

Miary większe i mniejsze tworzą się podobnie, jak poprzednio. Mamy więc dekagram t. j. 10 gramów, hektogram t. j. 100 gramów, kilogram t. j. 1000 gramów; decygram t. j. 10-a część grama, centygram t. j. 100-a część grama i miligram t. j. 1000-a część grama. Dla skrócenia będziemy pisząc używać oznaczeń: g., Dg., Hg., Kg., dg., cg., mg.—Prócz tego większe ciężary liczy się na centnary metryczne ¹⁾ po 100 Kg., oraz na beczki czyli tonny ²⁾ po 1000 Kg.—Według powszechnego dziś zwyczaju tam, gdzie te miary są w użyciu, pół kilograma w drobnym handlu nazywa się funtem.

Widzimy, że wszystkie te miary liniowe, powierzchni, objętości, oraz ciężaru, oparte są na tćj samćj zasadniczćj mierze, t. j. na metrze. Dlatego ten układ miar nazywa się układem metrycznym, albo systematem metrycznym, a miary te nazywają się miarami metrycznymi.

Układ ten miar, przyjęty we Francyi w końcu wieku XVIII, został już teraz także wprowadzony w wielu państwach stałego lądu Europy, a w tćj liczbie w Niemczech ³⁾ (r. 1875), w Austro-Węgrzech ⁴⁾ (r. 1876), jakotćż w wielu państwach pozaeuropejskich. Nadto we wszystkich dziełach naukowych wszelkie wymiary są przedstawiane w systemacie metrycznym.

3. We Francyi sprawę ujednostajnienia miar podjęła jeszcze Rada Filipa Długiego w r. 1321, lecz te usiłowania, jak i inne późniejsze, wobec krzyżujących się interesów osób wpływowych, speliły na niczym. Dopiero w l. 1778 i 1789, w różnych miastach Francyi, przy wybieraniu deputowanych, stanowczo domagano się od nich obalenia różnorakich miar, «będących tylko powodem do nieporozumień, oszustw, a nawet ucisku». W skutek tego w r. 1790 zajęto się energicznie kwestyją ustalenia miar.

Ówczesni uczeni wskazywali dwa sposoby rozwiązania tćj kwestyi, za-

¹⁾ Centnar metryczny czyli kental metryczny («quintal métrique».)

²⁾ Tonna—«tonne», «tonneau».

³⁾ W Niemczech dodano nazwy (które już dziś, prócz funta, rzadko się spotykają): m.=Stab; dm.=Neuzoll; mm.=Strich; Dm.=Keite; litr.=Kanne; połowa litra.=Schoppen; Hl.=Fass; 50 litrów.=Scheffel; 10 g.=Neuloth; 500 g.=Pfund; 50 Kg.=Centner., ale tona 1000 Kg. Nadto 7500 m. uznano za miłę.

⁴⁾ Prawnie w Austro-Węgrzech używa się następujących podziałów: Mm, Km, m., dm., cm., mm.; Mar., Har., ar., m. kw., dm. kw., mm. kw.; m. sz., dm. sz., cm. sz., mm. sz., Hl., l., dl., cl.; beczka, Kg., Dg., g., dg., cg., mg., a nadto dla drobnego handlu funt=500 g.

projektowane przeszło sto lat przedtym.—Myśl jednego z nich powziął Huyghens, twórca teorii wahadła, który w r. 1664 zalecał, jako stopę zasadniczą, czyli «stopę czasu» (pes horarius) przyjmując trzecią część wahadła prostego, bijącego sekundy. Gdy zaś się okazało, że ta długość zależy od szerokości geograficznej miejsca, w którym bije wahadło, projektowano przyjmując zawsze za zasadę długość wahadła bijącego sekundy, ale już w pewnym miejscu oznaczonym, jak np. w Paryżu, albotież na równiku ¹⁾, lub nakoniec pod 45° szerokości geograficznej.—Inny sposób podał astronom Mouton z Lijonu w r. 1670, zalecając przyjmując za zasadę długość południka ziemskiego, a mianowicie długość łuku jednej jego minuty, któraby się dzieliła na 10, 100, 1000 i t. d. rozmaicie nazwanych przezeń części.—Nadto w r. 1790 Bonné zaprojektował ²⁾ przyjęcie za zasadę miar określonej części łuku równika, jako «stopy równikowej».

W r. 1790 w Zgromadzeniu ustawodawczym Talleyrand przedstawił żądanie ustalenia miar, skutkiem czego uchwalono, aby komisarze akademii nauk w Paryżu wspólnie z członkami, wybranymi z towarzystwa naukowego w Londynie, «pod szerokością 45°, lub inną, którąby za odpowiedniejszą uznali, wyznaczyli długość wahadła i z niej wyprowadzili wzór niezmienny dla wszystkich miar i wag». Akademia paryska wybrała komisję, do której weszli uczeni Borda, Lagrange, Laplace, Monge i Condorcet; komisja ta 19 marca r. 1791 postawiła takie wnioski. Chociaż długość wahadła sekundowego pod szer. 45° przedstawia się jako średnia długości pod innymi szerokościami, to jednak jest ona wogóle zależną od innego elementu, czasu, oraz od dowolnego podziału dnia na sekundy, a prócz tego jest ona zbyt małą, aby było właściwym przez nią wyrażać odległości miejsc znacznie od siebie oddalonych. Nadto jeszcze, nader ważnym jest wzgląd na to, że mniejszą może być niedokładność przy wyznaczaniu zasadniczej miary ze starannie mierzonego dość wielkiego łuku południka lub równika, niż z najstaranniej wymierzonej tak niewielkiej długości wahadła. Z dwu zaś pozostałych do wyboru długości: równika i południka, równik nie zaleca się większą prawidłowością od południków. A więc, z uwagi, że wyznaczenie długości mniej ściśle daje się wykonać, niż wyznaczenie szerokości, oraz, że pod równikiem niewielu ludzi przebywa, gdy tymczasem przez każdą miejscowość przechodzi południk, komisja zaleca, aby «jednostką rzeczywistą» miar była ćwiartka południka ziemskiego, jej zaś dziesięciomilionowa ³⁾ część «jednostką do użycia powszechnego», a za zasadę przy wyznaczeniu jednostki wag przyjmując pewien

¹⁾ Wielkimi zwolennikami tej zasady byli Bouguer i Lacedamine, którzy wymierzili (1735—1746) część łuku Peruwii (dł. geog. 298°44'0" od —3°4'32" do +0°2'31" sz. g. Kazali oni długość wahadła sekundowego pod równikiem wykuć w kamieniu z napisem: «Mensurae naturalis exemplar, utinam et universalis».

²⁾ Artykuł Muncke'go *Mass* w Gehler'a *Physikalisches Wörterbuch* (VII, 1836).

³⁾ Przez to uczyniono ją niezależną od podziału koła na stopnie, minuty i sekundy.

ciężar wody dystylowanej, ważonej w próżni przy tej temperaturze, przy której ona przechodzi ze stanu stałego w ciekły. W tym celu należy wymierzyć część łuku południka paryskiego od Dunkierki do Barcelony, która przedstawia więcej niż $90\frac{1}{2}$, przecina równoleżnik średni (t. j. 45°) i kończy się tak z jednej jak z drugiej strony u poziomu morza. Nadto należałoby wyznaczyć liczbę wahań, któreby miara ustanowić się mająca robiła w ciągu doby, w próżni, przy poziomie morza i temperaturze lodu topniejącego, pod 45° sz., aby w danym razie można było odtworzyć tę miarę przy pomocy wahadła. W ten sposób (jak się wyraża komisya) «gdyby pamięć tych prac się zatarła, a tylko same ich wyniki się zachowały, nie przedstawiałyby one niczego, co by posłużyć mogło do poznania, który mianowicie naród powziął tę ideę i przeprowadził jej wykonanie».

Ten projekt Zgromadzenie narodowe przyjęło 26 marca tegoż roku, a król w cztery dni później go zatwierdził. Zajęto się natychmiast w akademii nauk najrozmaitszymi studjami przygotowawczymi do dokładnego doprowadzenia do skutku prac, pomyślanych według tak obszernego planu ¹⁾, a następnie utworzono osobną komisją, mającą wykonać zamierzone roboty.—Po rozwiązaniu akademii w sierpniu r. 1793 ustanowiono w kwietniu r. 1795 osobną Komisją wag i miar, którą składali Berthollet, Borda, Brisson, Coulomb, Delambre, Haüy, Lagrange, Laplace, Méchain, Monge, Prony i Vandermonde, oraz (później weszli) Darcet i Lefèvre-Gineau.—W czerwcu r. 1792 Méchain i Delambre rozpoczęli obserwacje różnych stacyj dla późniejszego obliczenia trójkątów, pierwszy dla południowej, drugi dla północnej części południka—wśród bardzo niesprzyjających warunków, jako następstwa ówczesnego położenia Francyi. Zwalczając najrozmaitsze przeszkody, zmuszeni nawet przez pewien czas zawiesić swe prace, przeprowadzili je ze wszelką starannością i dokładnością możliwą. Do brania kątów użyto koła powtarzającego Bordy, które dozwalało wyznaczać dowolną wielokrotność kąta, a tym samym w odpowiednim stosunku zmniejszać nieuniknione niedokładności, tak iż one prawie znikaly. Na 90 trójkątów, łączących krańcowe punkty, było aż 36 takich, w których błąd sumy trzech kątów był mniejszy od $1''$, a największy taki błąd w trzech trójkątach nie dochodził tylko do $5''$, t. j. nie dochodził do $\frac{1}{120}$ jednego stopnia. Obserwacje azymutu (a także szerokości geog.) były czynione nietylko w obu punktach krańcowych, ale i w trzech punktach pośrednich; różnice wypadły z rozmaitego ich uwzględniania w rachunkach nie wyniosły $\frac{1}{24000}$ długości mierzonego łuku. Wymierzeniem dwu ²⁾ podstaw, jednej przy Melun, a drugiej blisko Perpignan, zajął się Delambre i skutecznie te pomiary z uwzględnieniem najdrobiazgowszym

¹⁾ W tych pracach przygotowawczych brali udział: prócz osób, które weszły później w skład Komisji wag i miar, Lavoisier, Meunier i Tillet (wkrótce zmarli).

²⁾ Drugą podstawę wymierzono tylko dla sprawdzenia dokładności pomiarów.

wszelkich okoliczności zapomocą linijałów (prętów, nazwanych «modules») platynowych, redukując odczytaną długość do 130 R., czyli 16⁰/₄ C., wymierzając kąty pochyłości linijałów, aby zapomocą rachunku wynależć ich długość poziomą. Długość tych podstaw wyrażono w sążniach peruwijańskich («toise de Pérou»), t. j. przyjęto ¹⁾ za jednostkę w tych wymiarach długość tego sążnia żelaznego, który był użyty przy mierzeniu części łuku w Peruwii (pos. str. 125, odsyłacz). Po zredukowaniu do poziomu morza, długość podstawy przy Melun wyniosła 6075^a,90, a długość podstawy blisko Perpignan 6006^a,249; wyprawdzając zaś tę ostatnią z poprzedniej rachunkiem zapomocą łańcucha 53 trójkątów, je łączących, otrzymano więcej tylko o 0^a,160, t. j. o 11,52 cala, gdy odległość tych podstaw od siebie wynosiła około 33 000 s. Te obserwacje i pomiary zostały ukończone w listopadzie r. 1798.

Wobec tak przeciągających się robót, wskutek postanowienia Konwentu, jeszcze z d. 7 kwietnia r. 1795, zaprowadzono we Francyi metr tymczasowy (prowizoryczny), oraz ustanowiono nazwy (us. 2) tak miar liniowych, powierzchni i objętości, jak i mających się w przyszłości oznaczyć miar ciężaru ²⁾. W lipcu tegoż roku Borda i Brisson wyznaczyli ów metr tymczasowy jako długość wzoru miedzianego przez 10⁰C. równą 443,44 linii sążnia (żelaznego) peruwijańskiego przy 130 R.

W końcu r. 1798 zjechali się do Paryża uczeni państw wówczas Francyi przyjaznych, aby wziąć udział w sprawdzaniu robót dokonanych i w pracach dalszych Komisji. Niektórzy z nich, jak holender Van Swinden, szwajcar Trallès, włosi Fabbioni, Mascheroni i Vassali byli wielce czynni i pomocni. Nadto mechanicy paryscy Lenoir i Fortin, dokładnością w wykonczeniu przyrządów i pomysłowością w obmyśleniu niektórych z tych narzędzi, dla całej sprawy od jej początku wciąż świadczyli ważne usługi.—Po drobiazgowym sprawdzeniu dotychczasowych rachunków, obliczono długość mierzonej części południka od Dunkierki do Monjouy koło Barcelony (stanowiącej 9⁰,67380), po zredukowaniu do poziomu morza, na 551584,72 sążnia peruwijańskiego. Z tego, jakoteż z rezultatów pomiaru łuku w Peruwii, wniesiono, że spłaszczenie (iloraz z podzielenia różnicy średnicy równika i osi ziemi przez średnicę równika) południka ziemskiego jest $\frac{1}{334}$; na zasadzie zaś tego wypadła długość ćwierci południka ziemskiego 5 130 740 sążni per., a zatem metr = 0,513074 sążnia per., czyli 443,295936 linii sążnia per., przy jego temperaturze 130 R., czyli 16¹/₄ C., gdyż przy tej temperaturze wymierzo-

¹⁾ Dlatego także wszelkie późniejsze obrachowania długości łuków różnych południków dokonywają się w tychże sążniach. (Sążeń = 6 stopom, peds du roi, czyli «paryskim»; stopa = 12 calom; cal = 12 linijom).

²⁾ Metr pochodzi od μέτρον, miara: ar od łacińskiego «arare», orać; litr wyprowadzają od wyrazu greckiego λίτρα, ciężar funta, choć była w użyciu we Francyi odpowiednia miara objętości, zwana «litron»; gram od γράμμα, gramma, oznaczająca pewien niewielki ciężarek, a «stère» od στερεός, twardy.

no podstawy. Postanowiono więc, że wzór metra, wyrobiony z platyny ma mieć przy temperaturze lodu topniejącego długość równą 443,296 linii sążnia peruwijańskiego (żelaznego), przy jego temperaturze $160\frac{1}{4}^{\circ}\text{C}$. — Borda i Cassini za pomocą nader starannych wyznaczeń znaleźli, że długość wahadła sekundowego w próżni w Obserwatoryjum paryskim przy $160\frac{1}{4}^{\circ}\text{C}$. wynosi 440,5593 lin. per., czyli 0,993977 metra ¹⁾. — oznaczeniem miar ciężaru zajęli się Lefèvre-Gineau i Fabbroni. Z uwagi, że nader trudno otrzymać i utrzymać wodę w temperaturze lodu topniejącego, t. j. ściśle w temperaturze 0°C . lub R., jak również, że wtedy, ze względu na bliskość przejścia wody w stan stały, może zachodzić dość znaczna zmiana gęstości, a tym samym zmiana ciężaru danej objętości wody, jakoteż z uwagi, że z szeregu doświadczeń, robionych wspólnie z Trallès'em, okazało się, że woda przy 4°C . jest najgęstsza ²⁾, wybrano wodę w tej właśnie temperaturze, jako mającą posłużyć do wyznaczenia wzoru ciężaru. Z wielu doświadczeń, przy pomocy drobiazgowych rachunków wyznaczono ciężar platynowy, który w próżni równoważy ciężar decymetra sześciennego wody dystylowanej, mającej temperaturę 4°C ., i ten ciężar przyjęto jako kilogram ³⁾. — Sprawozdanie ostateczne o wyliczeniu długości południka i wyznaczeniu z niej długości metra, opracowane przez Van Swinden'a, Komisya przyjęła 30 kwietnia r. 1799, a sprawozdanie Trallès'a o jednostce wag 30 maja. Po odczytaniu raportu ogólnego Van Swinden'a na pełnym posiedzeniu Instytutu narodowego nauk i sztuk 17 czerwca, Komisya przedstawiła (stosownie do wzmiankowanego wyżej postanowienia Konwentu z d. 7 kwietnia r. 1795) w d. 22 czerwca (r. 1799) prototypy platynowe metra i kilograma ⁴⁾ obu izbom Ciała prawodawczego i złożyła je tegoż dnia w archiwum państwowym. Dlatego te wzory noszą nazwę metra archiwowego i kilograma archiwowego. Te wzory ⁵⁾ winny być używane tylko w przypadkach szczególniej ważności ⁶⁾.

Z obliczeń pomiarów niektórych południków, jakie następnie były do-

1) Everett, *Units and physical constants* (1879), przyjmuje tu długość równą 0,99390 m., a długość wahadła sekundowego pod 45° szer. 0,99356 m.

2) Nowsze badania wykazały, że woda jest najgęstsza przy $4^{\circ},08\text{C}$.

3) Lefèvre-Gineau, porównyując ciężar kilograma z funtem, nazywanym «la pile de Charlesmagne» (wzorem z początku wieku XIV, starannie zachowanym), znalazł, że Kg. = 18827, 15 ziarna («grain, poids de marc»), których ten funt zawierał 9216. Stopa («*pieu du roi*») szcścienna wody dystylowanej temperatury 4°C . ważyła w próżni tych funtów 70 i 223 ziarna. Kg. archiwoy ma kształt walca, którego wysokość jest równa średnicy podstawy.

4) Niezależnie od tego Komisya poleciła wykonać z równą starannością kilka metrów żelaznych z zakończeniami z mosiądzu, równych metrowi archiwowemu przy temperaturze lodu topniejącego, oraz kilka kilogramów z mosiądzu, ważących w próżni tyleż, co kilogram archiwoy — mających służyć do sprawdzania miar do użycia rozpowszechnianych.

5) Wszystkie zaś rękopisy oryginalne złożył Delambre, po wydrukowaniu dzieła, o którym niżej, w obserwatoryjum paryskim.

6) W r. 1806 metr i kilogram platynowe, porównane z archiwowymi (wraz ze wszystkimi przyrządami, przy wszelkich robotach używanymi) złożono w obserwatoryjum paryskim, aby umożliwić poza archiwum sprawdzanie naukowe miar.

7) Wszystkie dane, obliczenia, raporty i t. d. są zestawione w dziele Delambre'a *Base du système métrique décimal* (3 tomy, 1806—1810), z którego tu korzystałem.

konane ¹⁾, wypada ²⁾, że średnia ³⁾ długość ćwierci południka jest 10 000 205 metrów ⁴⁾. — Właściwie więc nie należy metra uważać za jedną-dziesięciomilijonową część ćwiartki południka, ale jako długość, która, według najnowszych obliczeń, mieści się w ćwierci średniego południka ziemskiego 10 000 205 razy.

W latach 1870, 1872 i 1875 odbywały się w Paryżu narady delegatów wielu państw w celu utworzenia instytucji, czuwającej nad zachowaniem oryginałów metra i kilograma i wyrabiającej dokładne ich kopije. Wskutek powyższych uchwał powstał w r. 1875 w Paryżu, wspólnie przez różne państwa utrzymywany, stały Komitet międzynarodowy wag i miar.

4. Różnorakie miary, używane w Polsce ⁵⁾, usiłowano ujednostajnić na sejmie w r. 1565. Konstytucja tego sejmu łokieć miary krakowskiej na cały kraj stanowi. Co do korca, który był najrozmaitszej (wielce od siebie różnej) objętości, kazano tymczasowo we wszystkich województwach Korony, wraz z Mazowszem i Rusią, trzymać się miary, jakiej główne miasto każdego województwa używa; co do trunków jednak polecono, iż one mają być w całej Koronie kwartą krakowską mierzone, a 4 kwarty mają iść na garniec,

1) Z pomiarów południków, różnymi czasy dokonanych, uważają się za najważniejsze pomiary: południka w Peruwii, o którym poprzednio była mowa; południka francuskiego od Dunkierki do Montjouy, a dalej (częścią przez Méchain) do Formentery przez Biot i Arago, tak iż południka tego, dług. geogr. 209°0', wymierzono (1792—1806) część od 51°2'8",50 do 38°39'56",11 szer. g.; południka Indj Wschodnich, dł. 95°20'0", przez (1802—1843) Lambton'a i Everest'a część od 89°32',30 do 20°30'48",89 sz.; południka Rosyi, dł. 44°23'14", przez (1820—1853) Struve'go, Hansteen'a, Selander'a i Tennera część od 70°40'11",3 do 45°20'2",8 sz. (przewodniczącym oddziału, wymierzającego część od 52° do 46°, był Adam Prazmowski); południka pruskiego, dł. 38°9'40", przez (1831—1834) Bessela i Bayer'a część od 54°13'11",466 do 55°43'40",446.

2) Według Listing'a artykułu w *Astronomische Nachrichten*, r. 1878, N. 2228.

3) Południki nie są równe sobie; równik ziemski nie jest kołem, lecz elipsą, której spłaszczenie jest znacznie mniejsze od spłaszczenia elips różnych południków. Wogóle kształt ziemi nie może być uważany za bryłę foremną; szczególny kształt, ziemi właściwy, nazwano geojdą.

4) Listing obrachowywa bryłę (elipsoidę obrotową) o kołowym równiku i (równych sobie) eliptycznych południkach, mającą tę samą objętość, co ziemia. W tej bryle spłaszczenie południka wypada $\frac{1}{288,4800}$, połowa średnicy równika 6 377 377 m.; połowa osi ziemskiej 6 355 270 m.; długość ćwierci południka 10 000 205 m.; długość ćwierci równika 10 017 560 m.; promień kuli, mającej objętość równą objętości ziemi, 6 370 000 m.; długość wahadła sekundowego pod 45° sz. g. 0,9935721 m.; długość mili geograficznej $\left(\frac{1}{5400}\right)$ obwodu równika) 7420,415 m.

Najczęściej długość mili geograficznej wyprowadzają jako piętnastą część średniego stopnia południka ziemskiego, więc

$$\frac{10\,000\,000}{90,15} \text{ m.} = 7407,407 \text{ m.} = 4286,695 \text{ sześnia nowopolskiego.}$$

5) Przy opracowywaniu tego ustępu miałem pod ręką: Czackiego (1800—1801) *O literalskich i polskich prawach* (wydanie z l. 1843—1844); *Volumina legum*, t. VII; W. A. Maciejowskiego *Historja dawnych polskich miar i wag w zarysie* (*Ekonomista*, r. 1868); J. Kolobrzega-Kolberga *Porównanie miar i wag...* (wydanie 2-gie, 1838); artykuł Pauker'a w *Jahrbuch'u Schumacher'a* z r. 1836, i t. d.

garnicy zaś 72 na beczkę¹⁾. Funt, czyli dwie grzywny, ma zawierać 32 łuty, albo 48 skojców²⁾. Inna zaś była grzywna, używana w Koronie, a inna na Litwie³⁾; funtów 32 tworzą kamień, a 5 kamieni przedstawiają centnar (= 160 funtom). Nawoływano również na tym sejmie o ujednostajnienie różnych wielkością lanów (od r. 1374 bowiem płacono po 2 «grosze» z lanu), oraz o określenie innych miar gruntu, jak: włóka, srebie, ślad — lecz tego nie załatwiono wtedy.—W Litwie miary były jednostajniejsze. Długo jednak nie była określona, używana od najdawniejszych czasów, miara objętości beczką zwana. Drugi (1564) a wyraźniej trzeci (1588) statuty litewskie stanowią, iż beczka powinna mieć miarę czterech korcy krakowskich⁴⁾.—Uchwały, powzięte na sejmie r. 1565, miały być wprowadzone w ten sposób: wszystkie miary i wagi, na sejmie wycechowane, dano pod dozór wojewodom, a każdy z nich zjechawszy zaraz po sejmie do głównego miasta swego województwa, winien był je oddać urzędowi starościńskiemu z nakazem, aby były na ratuszu każdego miasta i miasteczka chowane i wydawane tym, którzyby podobne sprawić sobie zechcieli; kopije, uznane za sprawiedliwe, burmistrz powinien ocechować i do użytku oddać interesantowi.—Postanowienia te jednak, osobiwie w Koronie, nie były wykonywane, a z czasem powiększyły ilość używanych przedtym miar. Były więc najrozmaitsze łokcie⁵⁾ i stopy⁶⁾, znacznie bardzo różniące się od siebie korce używane w różnych miejscowościach⁷⁾, przeróżne miary powierzchni, oraz rozmaite wagi. Wogóle, miary «nietylko co powiat, ale co miasteczko różniły się»⁸⁾.

Dopiero wskutek postanowienia sejmu w r. 1764 na wniosek Komisji skarbu koronnego uporządkowano miary w Koronie «cum provinciis annexis». — Łokieć, który był zachowany na ratuszu warszawskim, jako równy krakowskie-

1) A 24 garnce na baryłę.—Konstytucja sejmu w r. 1598 pozwoliła województwu krakowskiemu mieć beczki do piwa o 62 garncach.

2) Skojcami także aż do początku wieku XVI nazywano podwójne «grosze».

3) Za Kruse'm (1784) i Gerhard'tem (1791) podaje Czacki grzywnę koronną=4198 assom holenderskim, a litewską (równą królewieckiej), za Kruse'm, = 4076 a. h. (Grzywna holenderska = 5120 a. h. = 246,0839 grama.)

4) Toż samo stwierdza uchwała sejmowa r. 1613.

5) «Łokcie lwowski, ile z różnych ulamków rejestrów za Zygmunta Augusta, Stefana Batorego i Zygmunta III widzieć można, miał 1 $\frac{1}{4}$ łokcia krakowskiego. Rozumiem, że arszyn, miara tatarska, którą Rusini używali, będąc miarą w handlu tego rodzaju, dał egzystencyja temu lwowskiemu łokciowi.» (Cz.)

6) Niezawsze 2 stopy, używane w pewnej miejscowości, stanowiły łokieć tamże

7) Tak np. w r. 1660 stwierdzono, że korzec pilecki ma półtora korca krakowskiego, że korczyk olsztyński ma korczyków krakowskich (po 14 garnicy) trzy i t. d. Według dokumentów z r. 1569, korcy 4 oświęcimskich = 5 krakowskim, ćwiertnia poznańska dzieliła się na 4 wiertele po 18 garnicy (dotąd w kaliskim liczą zboże na «wirtle» po 16 garnicy); kościuska ćwiertnia miała 2 toruńskie. I t. d.—Łaszt oddawna na Mazowszu ma 30 korcy, czyli 60 półkorcy (korczyków), jednak w *Arytm. dla sz. nar.* i wydanym również przez Komisję Edukacyjną *Elementarzu dla szkół parafjalnych narodowych* (1785) podano: «łaszt zawiera w sobie korcy warszawskich 27».

8) «Nie naszego tylko kraju ta była wada.» (Cz.).—O różnorakich u nas miarach można częściowo powziąć pojęcie z dzieła Czackiego i table Kolberga. Tu przytaczam tylko ważniejsze.

mu ¹⁾, przyjęto za normalny ²⁾, z podziałem: sążeń = 3 łokciom, ł. = 2 stopom; stopa = 12 calom; cal = 12 linijom, linija = 12 punktóm. Długość tego łokcia przedstawia 264 linij ³⁾ stopy paryskiej (= 0,595539 metra).—Jako korzec obowiązujący ogłoszono korzec warszawski, czyli mazowiecki z podziałem na 4 ćwierci, albo 32 garnce (ale korczyk gdański = 16 garncom), a garniec = 4 kwartóm = 16 kwaterkom. Do płynów zaś beczka = $14\frac{2}{3}$ konwi = 72 garncom ⁴⁾, z dalszym podziałem garnca na kwarty i kwaterki. Ten garniec (koronny) obejmuje 190 cali sześciennych paryskich [jest więc kwarta ⁵⁾ koronna = 0,942228 litra].—Za funt dla Korony przyjęty został funt wrocławski; podziały: centnar = 5 kamieniom, kamień = 32 funtom; funt = 2 grzywnóm = 32 łutom, a nadto funt okrętowy, szyfunt («szafunt») = 13 kamieniom. Funt koronny miał przedstawiać ciężar 8442 assów holenderskich; garniec wody dystylowanej, przy 10°R. i przy $27\frac{3}{4}$ cala par. ciężenia atmosfery, ma ważyć 9,3055 tych funtów, czyli łokieć sz. wody 480 funtów. [Poszukiwania Eitelwein'a okazały, że funt wrocławski, a więc i koronny ⁶⁾, = 405,228 grama.] — Sejm polecił rozesłać po kraju nacechowane wzory, a nadto wiarogodne egzemplarze złożyć tak na ratuszu warszawskim, jak i w archiwum skarbowym.

Miary dla Litwy ustanowiono ostatecznie, na wniosek Komisji skarbowej litewskiej, na sejmie r. 1766.—Łokieć pozostał dawny, ogólnie na Litwie używany od wieku XIII, doskonale równy dwu stopom paryskim, czyli 288 linijom ⁷⁾ par. (= 0,649679 m.).—Jako podstawę miar objętości, bardzo dobrze określono garniec (mały) litewski, który w kształcie walcowym mieć

¹⁾ W tablicach Kolberga łokieć wolnego miasta Krakowa = 0,616969 m., a stopa = 0,356421 m., ł. zaś lwowski = 2 stopom = 0,593931 m.—Obecnie w Galicyi przyjmuje się (używane przed wprowadzeniem w r. 1876 systematu metrycznego): ł. krak. = 0,616399 m., st. krak. = 0,298011 m., ł. lw. = 0,594272 m., st. lw. = 0,296799 m., nadto arszyn (we Lwowie) = 0,817058 m. (według tablicy w *Arytmetyce* Bączalskiego, wydanej we Lwowie w r. 1875).

²⁾ «Nie wzruszając miary prętowej starodawniej co do włók». — Należy łaskę mierniczą, czyli wierzbę, uważać jako początkowo równą 15 łokciom chełmińskim starym, o których niżej.

³⁾ «Komisya edukacyjna, potwierdzając dzieła klasyczne o geometrii wydane, zdała się uprawnić mniemanie, że stopa miała 1308 $\frac{1}{2}$ linij dziesiątkowych (—t. j. dziesiątych części linii—) stopy paryskiej, a tak łokieć miałby 2615 linij dziesiątkowych... Łokieć, który w magistracie miasta Warszawy zachowany został i który komisya skarbową koronna w 1764 r. wzięła za prawidło, składał się z linij (sic) 2640; inne łokcie były $2\frac{1}{2}$ dziesiątkowymi (sic) linijami mniejsze, lecz to brano za omyłkę.» (Cz.) Prawdopodobnie wyraz dziesiątkowe jest w tym zdaniu przestawiony: powinno być «z linij dziesiątkowych 2640; inne łokcie były $2\frac{1}{2}$ linijami mniejsze».

⁴⁾ Wprawdzie to postanowienie sejmowe mówi wyraźnie o wzorach kłody, miary kłodowej, ale ich niczym nie określa. A nawet Czacki wyraźnie mówi, że nie wie, jakie to były miary.—Używany antał (antałek) jest czwartą częścią tej beczki, a więc zawiera 18 garnce.—Dojnica, używana na Ukrainie i Litwie, miewała od 8 garnce do 2 korcy.—Koniuszka = 2 garncom.

⁵⁾ Kwarta krak. = 0,960953 l., a lw. = 0,96132 l. (Ar. B.)

⁶⁾ Funt krak. = 405,493 g., a lw. = 420,045 g. (Ar. B.)

⁷⁾ Zatem łokieć litewski = $\frac{12}{11}$ łokcia koronnego.

powinien wewnątrznie $7\frac{5}{8}$ cali litewskich (czyli paryskich) głębokości, a $4\frac{7}{8}$ cali w średnicy; garniec = 4 kwartom = 8 półkwartówkom. Do zboża i wogóle ciał sypkich przyjęto następujący podział: beczka = 4 ćwierciom = 8 ósmynom = 16 szesnastkom = 144 garncem (małym) ¹⁾, do płynów zaś beczka dzieli się na 72 garnce cechowe (czyli duże, t. j. ma także 144 garney małych); czasza do miodów ma 6 garncy cechowych czyli 12 małych. [Garniec więc mały (szynkowy), zwykle później wprost garncem litewskim nazywany, jako objętość $\frac{1}{142,32426}$ cali sz. par., = $2,823199$ litra ²⁾.]—Funt litewski został określony, jako cztery-piąte funta berlińskiego. Centnar ma 5 kamieni, kamień 40 funtów, funt 32 łuty (jednak funt rzeźniczy na mocy zwyczaju miał 50 łutów). [Ponieważ funt berliński = 468,53588 grama, więc funt litewski ³⁾ = 374,8287 g.]

Co do miar powierzchni gruntów, istniało wprawdzie w ustawie ekonomicznej r. 1557 opisanie ⁴⁾ włóki, czyli ⁵⁾ łanu. Z tego opisania wypada, że sznur = 75 łokciom = 10 prętom, mórg ⁶⁾ = 3 sznurów kw. = 300 prętów kw., włóka = 30 morgom. — Przytoczonymi wyżej postanowieniami sejmowymi nie ujęto później powierzchni gruntów w oznaczone miary. Używano więc wciąż najróżnorodniejszych miar. Czacki z urzędu obrachowywał niektóre z używanych miar gruntowych i ułożył odpowiednią tablicę. Rezultaty jego obliczenia z protokółów referendaryi koronnej przeszły do różnych dzieł. Zauważyć tu należy, że przyjętą na Mazowszu w r. 1576 włókę chełmińską (jjej podział: włóka = 30 morgom; mórg = 300 prętów kw.; pręt kw. = 100 pręcików kw.; pręcik kw. = 100 ławkom kw., przy pręcie równym $7\frac{1}{2}$ łokciom, tak iż włóka = 506 250 łokciom kw.) z czasem wymierzano, uważając za podstawę łokieć warszawski (późniejszy koronny), a nie chełmiński ⁷⁾, a mimoto utrzymano dla niej nazwę włóki cheł-

¹⁾ Na łaśzt królewiecki szło beczek litewskich 8 i ćwierci 3, a na łaśzt rygski (który miał 45 purów rygskich) beczek 8 i ósmia.—Pur żmujdzki, używany dotąd na Litwie i na Białorusi, = 24 garncem lit., tak iż beczka litewska = 6 purów żm. Używany zaś dawniej w niektórych okolicach na Białorusi pur białyniecki (od: «Białynicze») = 71 gar. lit., tak iż becz. lit. = 2 p. b. i 2-garncem.—Z używanych przedtem na Polesiu i Podlasiu szaneków, szanek dawny = 48 gar. lit., a nowy = 24 gar. lit. Obecnie na Polesiu będące w użyciu szanki są równe 32 gar. «rządowym», a 4 szanki idą na beczkę; że zaś tamże przyjmują 8 g. «rząd.» jako równe 9 g. «komisyjnym», zatem ta beczka odpowiada litewskiej.

²⁾ Jeden więc garniec litewski = 3 kwartom koronnym, będąc nieznacznie od nich mniejszy. Dlatego przyjmuje się 4 gar. lit. = 3 gar. kor., a więc beczkę litewską równą 3 korcom koronnym i 12 garucem kor.

³⁾ Zatem funt koronny = 1,056493 funta litewskiego.

⁴⁾ «To jest uroczysty i prawny przepis pomiaru: z zapomnieniem ustawy ekonomicznej, zapomniano o prawdziwych pomiaru prawidłach.» (Cz.)

⁵⁾ «Łan i włóka niezym się od siebie nie różnią, tylko nazwiskiem.» (Zaborowskiego *Jeometrya praktyczna*, r. 1786.) — «Włóki było zarobne pole, łany zaś do zarobienia były przeznaczone. (Cz.)

⁶⁾ «Murgi seu jutrzyny», «morgi sive jutrzyny» (Długosz, *Liber beneficiorum* III). Początkowo mórg oznaczał obszar, który można zorać w ciągu dnia, od rana, od «jutra».

⁷⁾ Łokieć chełmiński stary = 255,44 linii par., ł. cheł. nowy = 259,43 l. p. (gdy ł. warsz., jak widzieliśmy, = 264 l. p.).

mińskięj; dodano tylko podział morga na 3 sznury kwadratowe. Owóż, przy pomocy tych miar, mających za podstawę łokieć koronny, a nazywanych chełmińskimi, a niekiedy chełmińsk-o-polskimi, z obliczeń Czackiego wypada, że z używanych miar:

Łan frankoński większy	= 1 włóce 20 morg. 1 sznur. kw. 38 pręt. kw.
" " mniejszy	= 1 " 10 " 1 " 10 " 40 pręcik. kw.
" teutoński ¹⁾ inaczej	
niemiecki	= 1 " 13 " 60 " "
" kmiecy większy	= 21 " 1 " 51 " 20 "
" " mniejszy	= 6 " 2 " 48 " "
" rewizorski ²⁾	= 3 włókom.

Z tablic zaś Kolberga wynika, że inne w Polsce używane miary można przez także, tak zwane chełmińskie ³⁾, miary tak wyrazić ⁴⁾:

włóka chełmińska stara	= 28 morgom	26 pręt. kw.
" " nowa	= 28 " 2 sz. kw. 91	" 15 pręcik. kw.
" litewska ⁵⁾	= 1 włóce 5 " 2 " 10	" 74 "
mórg magdeburski (180 prętów ⁶⁾ kw.)	= 1 " 27	" 98 "
włóka magdeburska (30 morgów mag.)	= 12 " 2 " 39	" 44 "
mórg (Joch) wiedeński (1600 sążni w. ⁷⁾ kw.)	= 2 " 88	" 51 "

5. Na zalety układu metrycznego miar zwrócono u nas bardzo wczesnie uwagę. Już w r. 1802 Aleksander Sapieha wydał: *Tablice stosunku nowych miar i wag francuzkich z litewskimi i polskimi miarami i wagami*; później Aleksander Chodkiewicz w r. 1811 ogłosił: *Tablice stosunku dawnych miar i wag francuzkich i koronno-litewsko-polskich z miarami i wagami nowemi a przyjętymi we Francyi.* ⁸⁾

1) W województwie sieradzkim, według dekretów starościńskich z lat 1762 i 1778, srebro równało się łaNOWI teutońskiemu.

2) Przy rewizyi wójtostw. Łan ten pisarze sądowi nazywali łanem chełmińskim co z czasem przez niebaczność sądy powtarzały (Cz.) — Bywały zwyczajem poświęcone inne jeszcze miary. Tak np. w okolicach Żarnowca kieliszek pola był 128-ą częścią łaNU (Cz.). Staje łaNU frankońskiego jest długością 217¹/₂ łokcia kor.; staje łaNU kmiecego większego = 84 ł. k., mniejszego = 100 ł. k. (Związek staja z łaNem opisuje Czacki.)

3) Jedna taka włóka równa się w miarach nowopolskich 1 włóce, 2 morgom, 20 prętom, kw. i 94,8596 pręcika kw.

4) Opuszczając ułamki pręcika kwadratowego.

5) Miała taki sam podział jak chełmińska z dodaniem sznura kw. = 100 prętom kw. (Więc wł. lit. = także 506 250 ł. lit. kw.) Włóka litewska osadna = 33 morgom litewskim.

6) Pręt tej miary = 12 stóp reńskich. Stopa reńska (czyli pruska r. 1816) = 139,13 l. par. = 0,3138535 metra.

Takich 120 prętów kw. tworzyło używany u nas w niektórych dzielnicach mórg reński polny, zaś 160 tych prętów kw. liczono na mórg reński leśny, choć w tym ostatnim przyjmowano niekiedy za podstawę pręt liniowy = 16 stopom reńskim.

7) Sążeń wiedeński = 840,76 l. par. Przyjmuje się sąż. w. = 1,896484 m. (Ar. B.)

8) W obu tych pracach wyrachowania są oparte na przytoczonym wyżej dziele Czackiego.

Zmiany polityczne w końcu XVIII i na początku XIX wieku, przeistaczały miary koronne coraz na inne, wskutek wprowadzenia w niektórych częściach kraju ówczesnych miar pruskich i austriackich. Stało się to powodem nowego zamieszania w użyciu miar w księstwie warszawskim i późniejszym królestwie polskim.

Z inicjatywy i przy ciągłym spółdziale Staszica, deputacja Towarzystwa przyjaciół nauk w Warszawie ¹⁾, wyznaczona w r. 1816, zajęła się uporządkowaniem miar. Myśl związania miar z miarami układu metrycznego wywołała obmyślenie nowego systematu. Na bezpośrednie wprowadzenie układu metrycznego nie odważono się wtedy, z uwagi na trudności, jakieby to wobec zakorzenionych zwyczajów nastęrczało. Ówczesnie zresztą w żadnym państwie o tym nie myślano ²⁾.—Postanowiła więc deputacja zatrzymać miejscowe nazwy, podziały i mniejszej tej samej wielkości jednostek, zmieniając je tylko o tyle, aby one dały się wyrazić całkowicie i dogodnie przez miary systematu metrycznego. Mianowicie: określono łokieć jako długość 576 milimetrów, kwartę jako równą litrowi, a funt jako równy 405 504 miligramom ³⁾.—Projekt ten wskutek postanowienia Rady administracyjnej z d. 13 czerwca r. 1818 został zatwierdzony, a miary te stały się obowiązującymi w Królestwie od d. 1 stycznia r. 1819. — Te miary, dla odróżnienia od dawniejszych, nazywają miarami nowopolskimi ⁴⁾.

¹⁾ Deputacją składali: kasztelan A. Chodkiewicz (prezylujący), profesorowie królewsko-warszawskiego uniwersytetu: J. Celiński, A. Dąbrowski, J. Hoffman M. Kado, A. Kitajewski, K. Szaniawski, oraz rektor szkół pijarskich J. Bystrzycki. (Protokołów obrad deputacyi, mimo usilnych starań, odnaléć nie mogłem.)

²⁾ Nawet we Francyi w r. 1812 pozwolono czasowo używać miar zbliżonych nazwami i mniejszej wymiarami do dawniejszych; te miary przejściowe były określone jako pewne części jednostek metrycznych, a wzory wszystkie winny były mieć odpowiednie napisy. Z owych czasów datuje się dotąd używany we Francyi funt («la livre»), równy połowie kilograma (us. 1).

³⁾ Z zestawienia tych miar z miarami z lat 1764 i 1766 wypada:

łokieć n.-p. = 0,967191 ł. kor. = 0,886592 ł. lit. (= 255,33846 linii par.)

garniec n.-p. = 1,061314 g. kor. = 1,416830 g. lit.

funt n.-p. = 1,000680 f. kor. = 1,081840 f. lit.

Widzimy więc, że z miar poprzednich (koronnych) uległy największej stosunkowo zmianie miary do wymierzania zboża i ciecicy, a starano się o największą zgodność co do funta.

Ustanowiono nadto miary drożne: mila = 8 staj milowych, przyjmując staje milowe = 1852 łok. + 1 c. + 6,46 linii. Chciano długość staja milowego uczynić równą długości wersty rosyjskiej, iżby mila była równą 8 werstom. Wskutek niedokładnego wówczas wyrachowania stosunku miary rosyjskiej do metra, staje to jest nieco dłuższe od wersty. Z przyczyny zaś, że urzędy pocztowe liczyły w Królestwie na milę werst 7, co się powoli upowszechniło, mila prawna została zupełnie zaniedbaną.

Dawniej mila nie była u nas żadnym (oile wiem) postanowieniem prawnym określona. Czacki w swych wyrachowaniach rozległości kraju i jego części liczy mil 20 na stopień i przyjmuje, że mila = 9328 łokciom koronnym. Kolberg w swych tablicach zaznacza, że: «Mil używano dwojakich w Polsce: geograficznych, czyli większych, których idzie 15 na 1 stopień, i mniejszych, których liczono 20 na 1 stopień.» «Mil litewskich szło 12,44 na stopień geograficzny», ale nie objaśnia na czym oparł tę daną co do mil litewskich.

⁴⁾ Ten układ miar przedstawia pierwsze poza Francją wprowadzenie zasad systematu metrycznego.

Miary nowopolskie.

Miary długości czyli miary liniowe.

Sażen = 3 łokciom; łokieć = 2 stopom = 4 ćwierciom; stopa = 12 calom; cal = 12 linijom; linija = 2 milimetrom.

Miary miernicze: sznur = 10 prętom = 75 łokciom; pręt = 10 pręcikom; pręcik ¹⁾ = 10 ławkom. (Jest więc pręt równy 15 stopom.)

Miary powierzchni.

Sażen kwadratowy; łokieć kw.; stopa kw.; cal kw.; linija kw.; milimetr kw.

Miary większych obszarów gruntu: włoka = 30 morgom; mórg = 3 sznurom kw. = 300 prętom kw. ²⁾; pręt kw. = 100 pręcikom kw.; pręcik kw. = 100 ławkom kw.

Miary objętości.

Sażen sześcienny, łokieć sz.; stopa sz.; cal sz.; linija sz.; milimetr sz.

Miary do ciał sypkich: korzec = 4 ćwierciom; ćwierć = 8 garncom; garniec = 4 kwartom (kwarta równa litrowi).

Miary do płynów: garniec = 4 kwartom; kwarta = 4 kwaterkom; kwaterka = 2 półkwaterkom. Beczka = 25 garncom ³⁾.

Miary ciężaru czyli wagi.

Centnar = 4 kamieniom ⁴⁾; kamień = 25 funtom; funt = 32 łutom; łut = 12672 miligramom.

Właściwie ustanowiono taki podział funta: funt = 16 uncyjom; uncyja = 2 łutom; łut = 4 drachmom; drachma = 3 skrupułow; skrupuł = 24 granom; gran = 5½ granikom; granik = 8 miligramom. Jednak w ogólnym handlu uncyje, drachmy, skrupuły, grany i graniki nie przyjęły się.

Jako funt aptekarski utrzymywał się wciąż dawny, funt norymberski ($= \frac{23}{15}$ grzywny kolońskiej = 358 510,6 miligrama = 28 łutom + 1 drachmie + 11 granom + 42,626 mg. wagi n.-p.), z podziałem: funt = 12 uncyjom; uncyja = 8 drachmom; drachma = 3 skrupułow; skrupuł = 20 granom.

Według postanowienia z d. 1 grudnia r. 1815 dla mennicy, jako waga

¹⁾ Pręcik, albo «stopa geometryczna», = 432 mm.

²⁾ Mórg taki (300-prętowy, przy stopie n.-p. jako podstawie) nazywają teraz chełmińskim, albo niekiedy nowochełmińskim. Przy robocie polnej na wymiar przyjmuje się za mórg powierzchnią 200 prętów kw.; taki mórg 200-prętowy nazywają często morgiem magdeburским.

³⁾ Postanowienie późniejsze Komisji rząd. spraw wewnętrznych. Więc beczka n.-p. = Hl. — Liczą także na oksefty po 60 garncey, na stąg wie po 50 garncey.

⁴⁾ Przy tranzakcyjach na niektóre towary, kamienie mają zwyczajem uświęconą inną liczbę funtów. Tak np. kamień mydła, świec, wosku ma 32 funty, a 4 takie kamienie przedstawiają centnar wełny = 128 funtom. Kamień siana ma 24 funty, a 5 takich kamieni stanowią centnar siana = 120 funtom. — Używana niekiedy miara oko = 3 funtom.

złota i srebra przepisana została grzywna kolońska (4864,677... assów hol.), której ciężar = 233,8123 grama, czyli 0,576596 funta n.-p., albo 18 łutom + 1 drachmie + 2 skrupułam + 9,92 grana wagi n.-p., z podziałem: grzywna = 16 łutom ¹⁾, łut = 18 granom (mennicznym).

Przy wyrobach jubilerskich używa się oddawna karatu angielskiego = 0,20528 grama ²⁾. Karat dzieli się na 12 granów karatowych.

6. W d. 14 marca r. 1848 Rada administracyjna Królestwa postanowiła, aby, stosownie do ukazu z d. 1 lutego tegoż roku «we wszystkich czynnościach tak rządowych jak i prywatnych w królestwie polskim, poczynając od d. 1 maja r. 1849, mają być używane miary i wagi w Rosyi istniejące». «Wszakże przy rozgraniczeniach i wogólności przy pomiarach gruntów, winny być na planach i rejestrach pomiarowych wymierzone przestrzenie, obok miar rosyjskich, oznaczone zarazem i na miary miejscowe, dotąd używane, jako konieczne do rostrzygnięcia zachodząc mogących sporów.» ³⁾

Miary rosyjskie są związane z długością stopy angielskiej ⁴⁾, która została przyjęta za miarę rosyjską za panowania Piotra I. Odpowiedniego ukazu nie odnaleziono, lecz wiadomym jest, iż sażeń, według tego postanowienia została określona jako długość 7 takich stóp, a więc arszyn, jako długość 28 cali angielskich. Ukaz 11 (23) października r. 1835 ⁵⁾ uregulował układ miar rosyjskich.

Według tego ukazu: zasadą miary rosyjskiej liniowej jest sażeń równa 7 spółczesnym stopom angielskim z podziałem na 3 arszyny po 28 cali, czyli

1) Zupełnie czyste srebro nazywano 16-łutowym, albo 16-jej próby.

2) Zupełnie czyste złoto nazywają 24-karatowym.

3) Artykuł 5 tego postanowienia R. ad.

4) Aktem parlamentu z r. 1824 uznano długość sztaby metalicznej, wyrobionej w r. 1760 przez Bird'a (i złożonej przez ówczesną komisją parlamentarną do rewizji miar i wag w archiwum parlamentu), przy 62° Fahrenheit'a (czyli 130¹/₃R., albo 16⁰²/₃C.), za typ yarda dla całego państwa. Na mocy tegoż aktu, wraz z zatracenia lub uszkodzenia tego typu, należało do yard przyjąć długość 36 cali, których 39,1393 ma przedstawiać długość wahadła, bijącego sekundy w próżni u poziomu morza, pod szerokością geograficzną Londynu, przy 62°F. Po zniszczeniu jednak tego wzoru w czasie pożaru parlamentu w r. 1826, nie przystąpiono do wyznaczenia, według wskazań tego aktu, nowego yarda normalnego, lecz od r. 1836 zaczęto zbierać w państwie całym długości niezaprzeczone różnych przedmiotów, a z nich z wielkim prawdopodobieństwem odtworzono yard zatracony, który przez postanowienie parlamentu z r. 1855 został uznany za normalny. Nie podano jednak wskazówek, jak postąpić wraz z zatracenia lub uszkodzenia tego nowego wzoru, przedstawiającego obecnie wielkość prawną yarda, tak, iż określeniem yarda jest teraz wyłącznie długość owej sztaby z r. 1855. (Yard = 3 stopom.)

Ogólnie dotąd (od r. 1819) przyjmuje się, iż przy temperaturze 16⁰²/₃C. wzorów angielskich, a 0°C. wzorów metrycznych:

metr = 39,37079 c. ang.; stopa ang. = 0,3047944 m.

Everett (zob. wyżej str. 128) przyjmuje za Clarke'm (1866):

Metr = 39,370432 c. ang.; st. ang. = 0,304797 m.; yard = 0,914392 m.

[Tenże: mila ang. (ładowa) = 1609,33 m., morska = 1852,30 m.; pound avoirdupois = 453,59265 g.; ton, czyli beczka ang., = 1016,05 Kg.]

5) Полное собрание законов российской империи, zbiór drugi, t. X, N. 8459.

16 werszków; zasadniczą jednostką wag rosyjskich jest wzór funta, przedstawiający ciężar 25,019 cali sześciennych ¹⁾ wody dystylowanej w próżni przy $13^{01}/_3R.$, zupełnie równy funtowi połączanemu mennicy petersburskiej, zrobionemu w r. 1747; funt aptekarski jest $\frac{1}{8}$ funta rosyjskiego; dla ciał cieklekich wiadro obejmuje w próżni 30 funtów wody dystylowanej, przy $13^{01}/_3R.$, czyli przedstawia objętość 750,57 cala sz., dla ciał zaś sypkich cztercierek obejmuje w takichże warunkach 64 funty wody, czyli przedstawia objętość 1601,22 cala sz.; sażeń i funt, jako główne zasady miar i wag, dla trwałości, należy zrobić z platyny i zachowywać oddzielnie we właściwym miejscu ²⁾).

Miary rosyjskie.

Miary długości czyli miary liniowe.

Sażen = 3 arszynom; arszyn = 16 werszkom.

Sażen = 7 stopom; stopa = 12 calom; cal = 10 linijom. (Stopa ros. ma prawie 305 milimetrów.)

Miara drożna: wersta = 500 sażeniom. Na milę przyjmuje się 7 werst.

Miary powierzchni.

Sażen kwadratowa; arszyn kw.; werszek kw.; stopa kw.; cal kw.; linija kw.

Miary większych obszarów gruntu: diesiatyna = 2400 sażeniom kw.; wersta kw.

Miary objętości.

Sażen sześcienna; arszyn sz.; werszek sz.; stopa sz.; cal sz.; linija sz.

Miary do ciał sypkich: czetwiert = 2 ośminom = 8 czetwierykom; czetwieryk = 8 garncom ^{**}). (Czetwieryk ma nieco więcej niż 1601 cali sz. ros., oraz nieco więcej niż 26 litrów.)

Miary do płynów. Beczka = 40 wiadrom; wiadro = 8 sztofom = 10 kruzkom; kruzka = 10 czarkom. (Wiadro ma nieco więcej niż 750 i pół c. sz. ros., jak również nieco więcej niż 12 i ćwierć litra.)

Drew sażeń ma na długość i wysokość sażeń, na szerokość zaś najczęściej 12 werszków ^{***}), a niekiedy 8 lub 10 werszków.

¹⁾ Jestto liczba przybliżona, zamiast 25,01893 c. sz., znalezionej przez Kupffer'a, prowadzącego prace przygotowawcze do tego ukazu. (Skutkiem tego czetwieryk powinienby obejmować 1601,21152 c. sz. ros.)

²⁾ Wnosząc z wzmiankowanego wyżej postanowienia R. ad. (art. 3), sażeń jest zachowana w twierdzy petersburskiej.

^{*}) Stopa ros. jest większa od stopy n.-p. prawie o 17 mm.

^{**}) Garniec ros. obejmuje 3 kwarty i niewieleco więcej, niż kwaterek n.-p.

^{***}) Wtedy więc cztery takie sażenie drew tworzą sażeń sześcienną.

Miary ciężaru, czyli wagi.

Berkowiec = 10 pudom; pud = 40 funtom; funt = 32 1/2 funtom; łut = 3 złotnikom; złotnik = 96 dolom. [Funt ros. przedstawia ciężar nieco większy od 25-u cali sz. ros. wody dystylowanój, oraz stanowi prawie tyle, co 409 i pół grama *); 64 funty wody wchodzą w czteryk, a w wiadro wchodzi wody 30 funtów.]

Wagi aptekarskie: funt aptekarski (przedstawiający ciężar 28 łutów ros.) ma 12 uncyj; uncya' = 8 drachmom; drachma = 3 skrupu-łom; skrupuł = 20 granom.

Związek miar rosyjskich z metrycznymi wynika z tego, że przy 13⁰1/3 R. wzorów rosyjskich, a 0⁰R. wzorów metrycznych

$$\text{stopa ros.} = 0,3047944 \text{ m.},$$

czyli, że

$$\text{m.} = 39,37079 \text{ cala ros.}$$

Jest więc ¹⁾

$$\text{arszyn} = 0,7111870 \text{ m.}; \text{ wersta} = 1,066780 \text{ Km.};$$

$$\text{diesiatyna} = 1,0924997 \text{ Hara};$$

$$\text{czetwiert} = 2,0990175 \text{ Hl.}; \text{ wiadro} = 12,298931 \text{ l.};$$

$$\text{funt. ros.} = 0,409497 \text{ Kg.}$$

Związek miar rosyjskich z nowopolskimi urzędownie określają *Tabliczami zamiany miar i wag rosyjskich na polskie i nawzajem, w Komitecie miar i wag ułożone, a z mocy artykułu 7-go postanowienia Rady administracyjnej Królestwa z dnia 2/14 Marca 1848 roku przez Kommissyę rządową spraw wewnętrznych i duchownych dla powszechnego użytku wydane* ²⁾. Według tych tablic,

$$\text{stopa n.-p.} = 0,9448989600 \text{ st. ros.}; \text{ st. ros.} = 1,0583142138 \text{ st. n.-p.}$$

$$\text{sążen} = 0,8099133943 \text{ sażeni}; \text{ sażeń} = 1,2346999161 \text{ sążnia}; \text{ (takiż związek łokcia i arszyzna)}$$

$$\text{wersta} = 617 \text{ sążni} + 2 \text{ stopy} + 1 \text{ cal} + 2,4 \text{ linii n.-p.};$$

$$\text{pręt} = 2,0247834857 \text{ sażeni}; \text{ sażeń} = 0,4938799665 \text{ pręta};$$

$$\text{mórg} = 0,5124685201 \text{ diesiatyny} = 1229 \text{ sażen. kw.} + 45 \text{ st. kw.} + 42 \text{ c. kw.} + 91,36 \text{ linii k. r.};$$

$$\text{diesiatyna} = 1,9513393761 \text{ morga} = 1 \text{ morgowi} + 285 \text{ pręt. kw.} + 40 \text{ pręc. kw.} + 18,11 \text{ ławkik.}$$

$$\text{sażeń sz.} = 0,5312705522 \text{ sażenia sz.}; \text{ sażeń sz.} = 1,8822801224 \text{ sążnia sz.};$$

$$\text{garniec n.-p.} = 1,2196110769 \text{ garnca ros.}; \text{ garniec ros.} = 3,2797340690 \text{ kwarty n.-p.};$$

$$\text{czetwiert} = 1,8448504138 \text{ korca} = 1 \text{ korcowi} + 2 \text{ ćwierciom} + 4 \text{ garn.} + 1 \text{ kwar.} + 3,6 \text{ kwaterek};$$

$$\text{korzec} = 4,8784443078 \text{ czteryk} = 4 \text{ czterykom} + 7,03 \text{ garnca ros.}$$

$$\text{garniec n.-p.} = 0,3252304330 \text{ wiadra}; \text{ wiadro} = 3,0747430087 \text{ garnca n.-p.}$$

$$\text{funt n.-p.} = 0,9902137997 \text{ funta ros.}; \text{ funt ros.} = 1,0098329164 \text{ funta n.-p.}$$

(Zadania arytmetyczne. § 8.)

*) Funt rosyjski jest cięższy od funta n.-p. prawie o 4 gramy.

¹⁾ Петрушевскій и Еремьевъ, *Сравнительныя таблицы десятичныхъ и русскихъ мѣръ* (1868). Te właśnie tablice są obecnie powszechnie używane przy obliczeniach odpowiednich.

²⁾ R. 1849. W tablicach tych niema objaśnienia, na jakiej podstawie były oparte wyliczenia, które doprowadziły do tak wielu cyfr dziesiętnych....

§ 9. WYRAŻANIE LICZBY WIELKORAKIEJ JAKO LICZBY MIANOWNEJ PROSTĘJ, I ODWROTNIE.

1. Jeżeli mamy liczbę wieloraką (§ 1, us. 11), np. 15 łok. + 1 st. + 8 cali, więc wyrażoną w jednostkach: łokieć, stopa, cal, a chcemy ją wyrazić w najdrobniejszej z tych jednostek, t. j. w calach *), to wypadnie nam rozumować w sposób następujący. Ponieważ łok. ma 2 st., więc 15 ł. mieć będzie stóp 15 *razy więcej*; trzeba zatem *liczbę mianowaną* 2 st. pomnożyć przez liczbę oderwaną 15; otrzymamy liczbę mianowaną 30 st. (wyrażoną przy pomocy tej samej jednostki, co mnożna, § 6, us. 6). Zamiast więc 15-u łok. mamy 30 st., a że w danej liczbie wielorakiej mamy prócz tego 1 st., przeto, dodawszy do 30 st. tę 1 st., otrzymamy 31 st. Ponieważ st. ma 12 c., więc 31 st. ma cali 31 *razy więcej*; dlatego trzeba 12 c. pomnożyć przez *liczbę oderwaną* 31. Do otrzymanych zaś w iloczynie 372 c. należy jeszcze dodać 8 c.; otrzymamy 380 c.

$$\begin{array}{r} 2 \text{ st.} \\ \times 15 \\ \hline 30 \text{ st.} \\ \times 1 \text{ st.} \\ \hline 31 \text{ st.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \text{ c.} \\ \times 31 \\ \hline 12 \\ 36 \\ \hline 372 \text{ c.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 8 \text{ c.} \\ \hline 380 \text{ c.} \end{array}$$

Odp. 15 ł. + 1 st. + 8 c. = 380 c.

Podobnie rozumować będziemy wraze, gdy np. 2 morgi + 240 pr. kw. + 85 st. kw. mamy wyrazić w st. kw. Rachunek zaś tak przedstawimy:

300 pr. kw.	225 st. kw.
× 2	× 840
600 pr. kw.	900
+ 240 pr. kw.	1800
840 pr. kw.	189000 st. kw.
	+ 85 st. kw.
	189085 st. kw.

Odp. 2 m. + 240 pr. kw. + 85 st. kw. = 189085 st. kw.

2. Jeżeli mamy liczbę, wyrażoną w jednostkach układu metrycznego, np.

$$3 \text{ Km.} + 8 \text{ m.} + 6 \text{ dm.} + 5 \text{ cm.}$$

przedstawić w cm., to albo postępować będziemy w ten sposób:

$$3 \text{ Km.} = 1000 \text{ m.} \times 3 = 3000 \text{ m.}; 3000 \text{ m.} + 8 \text{ m.} = 3008 \text{ m.};$$

$$3008 \text{ m.} = 10 \text{ dm.} \times 3008 = 30080 \text{ dm.}; 30080 \text{ dm.} + 6 \text{ dm.} = 30086 \text{ dm.}$$

$$30086 \text{ dm.} = 10 \text{ cm.} \times 30086 = 300860 \text{ cm.}; 300860 \text{ cm.} + 5 \text{ cm.} = 300865 \text{ cm.};$$

*) Mówi się także: zamienić 15 ł. + 1 st. + 8 c. na cale (ale nie: zamienić liczbę i t. d.)

[O przedstawianiu liczby mianowanej prostęj w jednostkach drobniejszych, niż te, które wchodzą w dane wyrażenie tej liczby, mówiliśmy już poprzednie w § 6, us. 27.]

albotóż, zważywszy, że $\text{Km.} = 1000 \text{ m.} = 100\,000 \text{ cm.}$, powiemy krócej że 3 Km. to 3 setki tysięcy cm., 8 m. to 8 setek cm., 6 dm. to 6 dziesiątków cm., i mieć będziemy

$$3 \text{ Km.} + 8 \text{ m.} + 6 \text{ dm.} + 5 \text{ cm.} = 300\,000 \text{ cm.} + 800 \text{ cm.} + 60 \text{ cm.} + 5 \text{ cm.} \\ = 300\,865 \text{ cm.}$$

Podobnie, jeżeli chcemy np. 3 m. sz. + 86 dm. sz. + 250 cm. sz. wyrazić w cm. sz., to, zważywszy, że m. sz. = 1000 dm. sz., a dm. sz. = 1000 cm. sz., tak iż m. sz. = 1000 000 cm. sz., mamy

$$3 \text{ m. sz.} + 86 \text{ dm. sz.} + 250 \text{ cm. sz.} = 3\,000\,000 \text{ cm. sz.} + 86\,000 \text{ cm. sz.} + 250 \text{ cm. sz.} \\ = 3\,086\,250 \text{ cm. sz.}$$

3. Jeżeli mamy liczbę mianowaną prostą, t. j. wyrażoną przy pomocy jednej jednostki, i taką, że w niej jest tych jednostek więcej, niż ich się mieści w jednorodnej jednostce większej, to możemy dla wyrażenia danej liczby mianowanej prostej użyć tej większej jednostki. Powstaje wtedy często *) liczba wieloraka. Tak np. gdy mamy 3378 cali n.-p., to w tej liczbie jest więcej cali, niż ich jest w stopie; możemy więc dla wyrażenia tej liczby użyć stopy. Ponieważ stopa ma 12 c., więc w liczbie 3378 c. będzie *tyle stóp, ile razy 12 c.*, mieści się w 3378-u

$$\begin{array}{r|l} 3378 \text{ c.} & 12 \text{ c.} \\ -24 & 281 \\ \hline 97 & 281 \text{ st.} \\ -96 & \\ \hline 18 & \\ -12 & \\ \hline 6 & \end{array}$$

c. Należy więc podzielić 3378 c. przez 12 c. Otrzymamy w ilorazie (§ 7, us. 7) *liczbę oderwaną* 281, która nam wskazuje, ile razy 12 c. mieści się w 3378 c. Ale powiedzieliśmy, że «będzie tyle stóp, ile razy 12 c. mieści się w 3378 c.»; znalazłszy więc, że «mieści się 281 razy», widzimy, że «jest 281 c.» (Otrzymana więc bezpośrednio z dzielenia *liczba oderwana* 281 *odpowiada liczbie mianowanej*

281 c.) W liczbie więc 3373 c. jest 281 st.; lecz nadto zostaje (w reszcie dzielenia) 6 c.; zatem, możemy daną liczbę mianowaną prostą 3378 c. wyrazić, jako 281 st. + 6 c., t. j. jako liczbę wieloraką.—Ponieważ jednak 281 st. jest więcej niż 2 st., które tworzą już jednostkę jednorodną większą, łokieć, możemy więc jeszcze liczbę 281 st. wyrazić przy pomocy tej jednostki, t. j. łokcia. Łok. ma 2 st., więc w 281 st. będzie tyle łokci, ile razy 2 st. mieszczą się w 281 st. Dzieląc więc 281 st. przez 2 st., otrzymamy w ilorazie liczbę oderwaną 140, która odpowiada licz-

$$\begin{array}{r|l} 281 \text{ st.} & 2 \text{ st.} \\ \dots & 140 \\ \hline 1 \text{ st.} & 140 \text{ ł.} \end{array}$$

bie mianowanej 140 ł. Że zaś ponad te łokcie jest jeszcze w tej liczbie 1 st., więc $281 \text{ st.} = 140 \text{ ł.} + 1 \text{ st.}$ —Ponieważ

*) Mówimy «często», bo wyrażając niekiedy liczbę mianowaną prostą, np. 20 kwart, przy pomocy jednorodnej jednostki większej, jak tu garnca, mieć będziemy liczbę mianowaną prostą, a nie wieloraką, jak np. tu: 5 garncey.

140 ł. jest więcéj niż 3 ł., które stanowią jednorodną jednostkę większą, sążeń; więc możemy znowu 140 ł. wyrazić przy pomocy sążnia.

140 ł.	3 ł.	W 140 ł. będzie tyle sążni ile razy 3 ł. mieszczą
...	46	się w 140 ł.; mieszczą się 46 razy, więc sążni jest
2 ł.	46 sąż.	46; a gdy nam zostało nadto 2 ł., więc 140 ł.

= 46 sąż. + 2 ł. — Mamy więc:

3378 c. = 281 st. + 6 c.; ale 281 st. = 140 ł. + 1 st.; zatem:

3378 c. = 140 ł. + 1 st. + 6 c.; że zaś 140 ł. = 46 sąż. + 2 ł., więc ostatecznie:

Odp. 3378 c. n.-p. = 46 sąż. + 2 ł. + 1 st. + 6 c. *)

Podobnie rozumując wrazie, gdy mamy np. 3 147 000 cali sz. ros., przedstawimy rachunek w ten sposób:

3 147 000 c. sz.	1728 c. sz.	1821 st. sz.	343 st. sz.
.....	1821	1715	5
312 c. sz.	1821 st. sz.	106 st. sz.	5 sąż. sz.

Odp. 3 147 000 c. sz. ros. = 5 sąż. sz. + 106 st. sz. + 352 c. sz.

4. Jeżeli chcemy liczbę mianowaną prostą, wyrażoną przy pomocy jednostki układu metrycznego, np. 28 342 021 mg., wyrazić w większych jednostkach: g. i Kg., to również ponieważ g. = 1000 mgr., to w liczbie 28 342 021 mg. będzie tyle g., ile razy 1000 mg. mieści się w 28 342 021 mg.; mieści się (§ 7, us. 20) 28 342 razy, a nadto zostaje 21 mg.; w danéj więc liczbie jest 28 342 g. + 21 mg. Gdy zaś Kg. ma 1000 g., to w 28 342 g. będzie tyle Kg., ile razy 1000 g. mieści się w 28 342 g.; w liczbie 28 342 g. 1000 g. mieści się 28 razy, a nadto zostaje 42 g.; jest więc w niej 28 Kg. + 342 g. Możemy więc powiedzieć, że 28 342 021 mg. = 28 Kg. + 342 g. + 21 mg. — Możemy tu także inaczej rozumować. Ponieważ Kg. = 1000 g., a g. = 1000 mg., a tym samym Kg. = 1 000 000 mg., więc w liczbie 28 342 021 mg. tyle jest Kg., ile jest milionów mg., a nadto tyle g., ile w pozostałej liczbie jest tysięcy mg., przyczym będzie jeszcze tyle mg., ile w danéj liczbie ich pozostanie, po oddzieleniu (wszystkich) tysięcy mg. Gdy więc w danéj liczbie jest 28 milionów mg., a nadto 342 tysięcy mg. i prócz tego 21 mg., to

$$28\,342\,021\text{ mg.} = 28\text{ Kg.} + 342\text{ g.} + 21\text{ mg.}$$

(Zadania arytmetyczne. § 9, 10.)

*) O naszej liczbie łatwiej sobie wyrobimy pojęcie, gdy ją przedstawimy w postaci: 46 sąż. + 2 ł. + 1 st. + 6 c., niż wrazie, gdy mamy ją daną w postaci: 3378 c.

W miarach zaś układu metrycznego jest to prawie obojętnym.

§ 10. DODAWANIE I ODEJMOWANIE LICZB WIELORAKICH.

1. Gdy mamy dodać do siebie liczby wielorakie, np.

a) 3 dnie *)+18 godzin+50 minut+45 sekund; b) 4 d.+19 g + +54 m.; c) 7 d.+15 m.+24 s. i d) 6 d.+4 g.+44 m.+8 s., to należy nam tu znaleźć liczbę, któraby zawierała w sobie wszystkie części składników. Ta suma będzie, wogóle mówiąc, wyrażoną przy pomocy jednostek: dzień, godzina, minuta, sekunda—będzie liczbą wieloraką. Ponieważ w jój wyrażenie wejda dnie, więc w tym wyrażeniu, obok dni, liczba godzin nie może być 24, ani większą; podobnie, liczba minut w tym wyrażeniu sumy nie może być 60, ani większą. Liczbę dni w sumie otrzymamy z dodania dni składników, liczbę godzin w sumie otrzymamy z dodania godzin składników, i t. d.; należy więc oddzielnie wykonać częściowe dodawania dni, godzin, minut i sekund składników, i dlatego składniki dane tak pod sobą podpiszemy, aby dnie były pod dniami i t. d. Wrazie, gdy z takiego dodawania częściowego (godzin, minut, sekund) wypadnie nam tych jednostek więcej, niż ich się mieści w większej jednostce (dniu, godzinie, minucie), to otrzymaną w sumie częściowój liczbę mianowaną prostą wyrazić wypadnie jako liczbę wieloraką (§ 9, us. 3) przy pomocy tój właśnie jednostki większej. Ponieważ część tój (częściowój) sumy, wyrażona przy pomocy jednostki większej, np. dnie, otrzymane z dodania godzin, nie mogą w ostatecznej sumie oddzielnie być zaznaczone, więc wypadnie je dodać do liczby dni, otrzymanych z dodania dni składników. Aby więc odrazu w ostatecznej sumie wypisać np. liczbę dni i nie potrzebować tój liczby zmieniać wskutek tego, że z dodania godzin możemy otrzymać dnie, należy skutecznić dodawanie godzin przed dodawaniem dni; podobnie dodawanie minut, przed dodawaniem godzin, oraz dodawanie sekund przed dodawaniem minut. Widzimy więc, że wogóle częściowe dodawania należy wykonywać, poczynając od części składników wyrażonych przy pomocy najmniej-

3 d. +18 g.+30 m.+45 s.	szęj z jednostek. Dodając
4 d.**) +19 g.+54 m.	więc sekundy do siebie, o-
7 d. +15 g. +24 s.	trzymamy 77 s.; nie podpi-
6 d. + 4 g.+44 m.+ 8 s.	sując tój liczby pod doda-
22 d. +10 g.+29 m.+17 s.	nymi częściami składników,
	gdź ta liczba sekund oczy-
	wicie nie jest mniejszą od
	1 minuty, na stronie znaj-

77 s. 60 s.	149 m. 60 m.	58 g. 24 g.
-60 1	-120 2	-48 g. 2
17 s. 1 m.	9 m. 2 g.	10 g. 2 d.

*) Właściwie: doby.

**) Zamiast ponownie wypisywać d., g., m., s. (i podobnie w innych zadaniach) stawić można znaczki: „, albo — (kréski).

dujemy jęj wyrażenie, jako liczby wielorakięj, przy pomocy jednostek: minuta i sekunda. Otrzymawszy 1 m.+17 s., podpisujemy 17 s. pod sekundami składników, a 1 m. dodajemy wraz z minutami składników, i t. d.; w ten sposób wprost pod kręską, oddzielającą liczby dane od szukanęj, podpisujemy odrazu ostateczne wyrażenie sumy.

2. Podobnie:

$$2 \text{ Km. kw.} + 46 \text{ Hm. kw.} + 920 \text{ m. kw.}$$

$$3 \text{ Km. kw.} + 88 \text{ Hm. kw.} + 380 \text{ m. kw.} \quad (\text{Hm. kw.} = 10\,000 \text{ m. kw.})$$

$$10 \text{ Km. kw.} + 92 \text{ Hm. kw.} + 325 \text{ m. kw.}$$

$$17 \text{ Km. kw.} + 26 \text{ Hm. kw.} + 1625 \text{ m. kw.}$$

Moglibyśmy także każdy ze składników wyrazić w m. kw. (§ 9, us. 2) wtedy przedstawiłobyśmy to dodawanie w ten sposób:

$$2460920 \text{ m. kw.}$$

$$3880380 \text{ m. kw.}$$

$$10920325 \text{ m. kw.}$$

$$17261625 \text{ m. kw.,}$$

a tę liczbę przedstawiłobyśmy jako liczbę wieloraką (§ 9, us. 4) przy pomocy tych samych jednostek, które wchodzą do zadania, t. j. Km. kw., Hm. kw. i m. kw.

$$17\,261\,625 \text{ m. kw.} = 17 \text{ Km. kw.} + 26 \text{ Hm. kw.} + 1625 \text{ m. kw.}$$

Weźmy jeszcze dodawanie:

$$14 \text{ Kg.} + 82 \text{ g.} + 45 \text{ cg.} + 6 \text{ mg.} \quad 20 \text{ mg.} = 2 \text{ cg.}$$

$$12 \text{ Kg.} + 43 \text{ g.} + 15 \text{ cg.} + 9 \text{ mg.} \quad 144 \text{ dg.} = 1 \text{ g.} + 44 \text{ cg.}$$

$$4 \text{ Kg.} \quad + 82 \text{ cg.} + 5 \text{ mg.}$$

$$30 \text{ Kg.} + 126 \text{ g.} + 44 \text{ cg.}$$

Widzimy z tego, że przy dodawaniu liczb wielorakich, wyrażonych w układzie metrycznym, postępuje się podobnie, jak przy dodawaniu liczb oderwanych. Ponieważ jednostka większa ma jednostek mniejszych 10, 100, ..., więc możemy odrazu w wyrażeniu sumy pod dodawanymi kolumnami cyfr podpisywać odpowiednią cyfrę. (Tak np. dodając tu centygramy, możemy tak mówić: 4, 9, 14; piszę 4; 9, 10, 14; piszę 4; setka zaś centygramów stanowi gram; a dalej: 4, 6; piszę 6; 4, 12; piszę 2; Kg. ma tysiąc g., więc obok 26 g. piszę także i 1 setkę gramów.)

Wyrażając zaś wszystkie składniki w miligramach, możemy tak wykonać to działanie:

$$14082456 \text{ mg.}$$

$$12043159 \text{ mg.}$$

$$4000825 \text{ mg.}$$

$$30126440 \text{ mg.} = 30 \text{ Kg.} + 126 \text{ g.} + 44 \text{ cg.}$$

3. Jeżeli w zadaniu, które nas doprowadza do dodawania, składnik jest wyrażony jako data, to należy tę datę przedstawić jako czas upłyniony.

Np. Ktoś wyjechał z pewnego miejsca 4 maja r. 1880 o godzinie 3-iej minut 45 po południu, a powrócił po upływie 2 lat 10 miesięcy 29 dni 13 godzin 30 minut; kiedy więc wrócił?—Trzeba tu datę: 4 maja r. 1880 o godzinie 3-iej minut 45 po południu wyrazić jako czas upłyniony. Był rok 1880-y, a więc od narodzenia Chrystusa przeszło lat 1879; był miesiąc maj, piąty w roku, a więc prócz tych lat, skończyło się miesięcy 4; był dzień 4-y piątego miesiąca, a więc przeszło już od końca miesiąca czwartego dni 3; była godzina 3 po południu, a więc w tym dniu od północy przeszło godzin 12+3, t. j. 15 godzin, a nadto minut 45. Możemy więc tę datę tak wyrazić jako czas upłyniony: 1879 l.+4 m.+3 d.+15 g.+45 m. Więc:

$$\begin{array}{r}
 1879 \text{ l.} + 4 \text{ m.} + 3 \text{ d.} + 15 \text{ g.} + 45 \text{ m.} \\
 + \quad 2 \text{ l.} + 10 \text{ m.} + 29 \text{ d.} + 13 \text{ g.} + 30 \text{ m.} \\
 \hline
 1882 \text{ l.} + 3 \text{ m.} + 2 \text{ d.} + 5 \text{ g.} + 15 \text{ m.}
 \end{array}$$

Po częściowym dodaniu dni, 1+29+3=33 dnie, nie możemy odrazu oddzielić dnie od miesiąca, bo nie wiemy,

któryto będzie miesiąc, wypadły z tych dni, nie wiemy mianowicie, wiele dni on zawierać będzie. Dlatego, zanotowawszy na stronie 33 dnie, widzimy, że z dodania 10 m. i 4 m. otrzymamy 14 m.; czyli rok i 2 m.; tym więc miesiącem, który wypadnie z dodania dni, będzie miesiąc trzeci w roku, marzec, mający dni 31. Z dodania więc dni otrzymamy 1 miesiąc i 2 dnie. Otrzymałą liczbę 1882 l.+3 m.+2 d.+5 g.+15 m. wypadnie wyrazić jako datę; będzie więc rok (bieżący) 1883-ci, miesiąca 4-go, więc kwietnia, dzień 3-ci, o godzinie 5 minut 15 rano.—Odp. Wrócił do tego miejsca 3-go kwietnia r. 1883-go o godzinie 5-iej minut 15 rano.

Gdybyśmy zamiast 29 dni mieli 27 dni, to z wykonania dodawania częściowego dni otrzymalibyśmy 31 dni, t. j. tyle właśnie dni, ile ich jest w wypadającym tu z dodania dni miesiącu, marcu; tak iż w otrzymanej sumie nie byłoby dni. Zamieniając zaś tę sumę na datę, mielibyśmy w niej: 1-y kwietnia.

Gdybyśmy zaś, mając w tym zadaniu np. 27 dni, mieli jednak zamiast 10-u 9-ć miesięcy, to, zaznaczywszy na stronie, że z dodania dni, otrzymujemy dni 31 i przeszedszy do częściowego dodawania miesięcy, mieć będziemy 4 m.+9 m.=13 m.=1 r.+1 m. Tym więc miesiącem, który wypadnie z dodania częściowego dni, będzie miesiąc drugi w roku, luty, który mieć może albo 28, albo 29 dni. Wskazówkę tego, którą z tych dwu liczb mamy tu uwzględnić, dostarczy nam dopiero dodanie lat. 1+2+1879=1882 lata, a więc będzie to miesiąc luty roku 1883-go, zwyczajnego, i mieć będzie 28 dni. W tym przeto przy-

padku dni $31 = 1 \text{ m.} + 3 \text{ dniom}$; w sumie będziemy mieli $2 \text{ m.} + 3 \text{ dnie}$, a w dacie: 4-y marca.

4. Jeżeli mamy np. od $10 \text{ sąż. kw.} + 5 \text{ łok. kw.} + 2 \text{ st. kw.} + 46 \text{ cali kw.}$ odjąć $4 \text{ sąż. kw.} + 4 \text{ ł. kw.} + 3 \text{ st. kw.} + 82 \text{ cale kw.}$, to odejmowanie to należy uskutecznić przy pomocy odejmowań częściowo

$10 \text{ sąż. kw.} + 5 \text{ ł. kw.} + 2 \text{ st. kw.} + 46 \text{ c. kw.}$	wych, t. j. sążni
$4 \text{ sąż. kw.} + 4 \text{ ł. kw.} + 3 \text{ st. kw.} + 82 \text{ c. kw.}$	kw. od sążni kw.,
$6 \text{ sąż. kw.} \qquad + 2 \text{ st. kw.} + 108 \text{ c. kw.}$	łokci kw. od ł. kw. i t. d. Aby

zaś te odejmowania częściowe można było wykonać, potrzeba, aby w każdym z nich odjemna nie była mniejszą od odpowiedniego odjemnika. Należy więc daną odjemną tak przedstawić, t. j. tak rozłożyć na części, aby każda część odjemnej nie była mniejsza od odpowiedniej części odjemnika. Gdybyśmy uprzednio ten rozkład odjemnej wykonali i nadpisali go nad odjemną, to moglibyśmy odejmowania częściowe wykonywać w jakimkolwiek porządku. Ponieważ jednak chcemy ten rozkład odjemnej uskutecznić częściowo, tylko w miarę potrzeby, a niezmieniac już tego, co raz napiszemy w reszcie, więc zaczynamy z prawej strony, t. j. od odejmowania najmniejszych jednostek. — 82 c. kw. jest więcej niż 46 c. kw. . Więc 2 st. kw. rozkładam na 1 st. kw. , którą zostawiam, i 1 st. kwad. , którą wyrażam jako 144 c. kwad. ; $144 \text{ c. kw.} + 46 \text{ c. kw.} = 190 \text{ c. kwad.}$; odejmę więc 82 c. kwad. od 190 c. kw. *); pozostanie 108 c. kw. , które podpisuję pod kręską pod c. kwadratowymi . 3 st. kw. jest większe od 1 st. kw. ; rozkładam więc 5 ł. kw. na 4 ł. kw. , które zostawiam, i 1 ł. kw. , który wyrażam jako 4 st. kw. ; $4 \text{ st. kw.} + 1 \text{ st. kw.} = 5 \text{ st. kw.}$; 3 st. kw. od 5 st. kw. jest 2 st. kw. , które piszę pod stopami kwadratowymi. Mam teraz odjąć 4 ł. kw. od 4 ł. kw. ; nie będzie więc w reszcie łokci kwadratowych. 4 sąż. kw. od 10 sąż. kw. jest 6 sąż. kw. , które podpisuję pod sąż. kw. — Odp. $6 \text{ sąż. kw.} + 2 \text{ st. kw.} + 108 \text{ c. kw.}$

5. Wrazie, gdy mamy np. od 30 Kg. , 26 g. i 446 mg. odjąć 15 Kg. , 68 g. i 684 mg. ,

$30 \text{ Kg.} + 26 \text{ g.} + 446 \text{ mg.}$	to, z uwagi, że w układzie metrycznym
$15 \text{ Kg.} + 68 \text{ g.} + 684 \text{ mg.}$	każda jednostka większa ma jednostek
$14 \text{ Kg.} + 957 \text{ g.} + 762 \text{ mg.}$	mniejszych 10, albo 100, albo i t. d.,
	t. j. wogóle liczbę przedstawioną przez
	jedność z zerami, możemy przy wyko-
	nywaniu częściowych odejmowań odrazu stawić cyfry pod kolumnami
	cyfr odejmowanych. Tak odejmując tu mg. , mam 4 od 6-u 2, które

*) Wrazie, gdyby były większe liczby (np. przy miarach sześciennych), przestrzegając czystości w wykonaniu rachunków, zamiast nadpisywać, jakby tu np. nad $46 \text{ liczbę } 190$, lepiej pisać na stronie częściowe takie odejmowanie, jak tu 82 c. kw. od 190 c. kw.

zaraz mogę napisać (bo ta cyfra już się nie zmieni) pod kręską; podobnie dalej: 8 od 14-stu 6 (piszę je); 6 od 13-stu 7 (piszę); użyty tu 1 tysiąc mg. został wzięty z gramów odjemnej przez zamienienie 1 g. na mg. (gr. ma 1000 mg.); mam więc w odjemnej już tylko 25 g. Odejmując dalej, mam 8 od 15-u 7 (piszę); 6 od 11-u 5 (piszę); użyta tu 1 setka gr. została wzięta z kilogramów, przez zamienienie 1 Kg. na g.; ale Kg. ma 1000 g., t. j. 10 setek; zostało więc z nich jeszcze 9 setek g., które napiszę przed 5 dziesiątkami. Odejmując na koniec 15 Kg. od 29 Kg., mieć będziemy w reszcie 14 Kg. — Odp. 14 Kg. + 957 g. + 762 mg.

Moglibyśmy tu łatwo wyrazić odjemną i odjemnik jako liczby mianowane proste wyrażone w jednostce najmniejszej, mg.; po wykonaniu zaś odejmowania należałoby resztę wyrazić jako liczbę wieloraką przy pomocy jednostek wchodzących w zadanie. Byłoby więc:

$$\begin{array}{r} 30026446 \text{ mg.} \\ - 15068684 \text{ mg.} \\ \hline \end{array}$$

$$14957762 \text{ mg.} = 14 \text{ Kg.} + 957 \text{ g.} + 762 \text{ mg.}$$

3. Jeżeli w zadaniu, które nas doprowadza do odejmowania, odjemna lub odjemnik jest dany jako data, to należy tę datę wyrazić jako czas upłyniony.

Np. Ktoś, po niebytności w pewnym miejscu przez 2 lata + 9 miesięcy + 29 dni + 13 godzin + 30 minut, powrócił 6 marca r. 1884 o godzinie 5 minut 15 rano; kiedy więc z tego miejsca wyjechał. — Zamieniając wchodzącą tu datę na czas upłyniony, otrzymamy 1883 l. + 2 m. + 5 d. + 5 g. + 15 m.; wypadnie więc wykonać odejmowanie:

$$\begin{array}{r} 1883 \text{ l.} + 2 \text{ m.} + 5 \text{ d.} + 5 \text{ g.} + 15 \text{ m.} \\ - 2 \text{ l.} + 9 \text{ m.} + 27 \text{ d.} + 13 \text{ g.} + 30 \text{ m.} \\ \hline 1880 \text{ l.} + 4 \text{ m.} + 6 \text{ d.} + 15 \text{ g.} + 45 \text{ m.} \end{array}$$

Otrzymawszy w reszcie 45 m., a następnie 15 g., wypada nam tu odjąć 27 d. od 4 d. Roskładam więc 2 m. na 1 m.,

który zostawiam, i 1 miesiąc, który zamieniam na dzień. Ten miesiąc jest drugi w roku, luty; mieć on może albo 28, albo 29 dni. Ponieważ to jest luty roku 1884-go (przestępnego), więc ma 29 dni; 29 d. + 4 d. = 33 d.; 33 d. — 27 d. = 6 d., które piszę w reszcie. Następnie otrzymamy 4 m. i 1880 l. Wypadłą resztę trzeba jeszcze wyrazić jako datę. — Odp. Wyjechał z tego miejsca 7 maja r. 1881 o godz. 3-ój minut 45 po południu.

Weźmy zadanie, w którym tak odjemna, jak i odjemnik są przedstawione jako daty. Np. Ktoś wyjechał z pewnego miejsca 7 maja r. 1881 o godzinie 3-ój minut 45 po południu, a wrócił 6 marca r. 1884 o godz. 5-ój minut 15 rano; ile trwała jego nieobecność w tym miejscu?

Wyraziwszy te daty, jako czas upłyniony od początku nasz \acute{e} j ery, mi \acute{e} ć b \acute{e} dziemy odejmowanie:

$$\begin{array}{r} 1883 \text{ l.} + 2 \text{ m.} + 5 \text{ d.} + 5 \text{ g.} + 15 \text{ m.} \\ \underline{1880 \text{ l.} + 4 \text{ m.} + 6 \text{ d.} + 15 \text{ g.} + 45 \text{ m.}} \\ 2 \text{ l.} + 9 \text{ m.} + 27 \text{ d.} + 13 \text{ g.} + 30 \text{ m.} \end{array}$$

29 d. + 4 d. = 33 d.; 33 d. — 6 d. = 27 d. — Odp. Jego nieobecno \acute{s} c w tym miejscu trwa \acute{l} a 2 l. + 9 m. + 27 d. + 13 g. + 30 m.

Możemy w takich zadaniach przy wyrażaniu obu dat, jako czasu upłynionego, nie używać jednostki miesiąca, ale po latach wystawić wprost liczbę wszystkich dni upłynionych od początku roku bieżącego. Tak np., w powyższym zadaniu od początku r. 1881 (zwyčajnego) do 7 maja przeszło dni 31 + 28 + 31 + 30 + 6 = 126 dni; od początku zaś r. 1884 (przest \acute{e} pnego) do 6 marca upłynęło dni 31 + 29 + 5 = 65 dni.

$$\begin{array}{r} 1883 \text{ l.} + 65 \text{ d.} + 5 \text{ g.} + 15 \text{ m.} \\ \underline{1880 \text{ l.} + 126 \text{ d.} + 15 \text{ g.} + 45 \text{ m.}} \\ 2 \text{ l.} + 303 \text{ d.} + 13 \text{ g.} + 30 \text{ m.} \end{array}$$

— 303 d. — Gdybyśmy się tak przedstawioną odpowiedzią: 2 l. + 303 d. + 13 g. + 30 m. nie zadowalali, a chcieli z tych 303 d. oddzielić miesiące, to należałoby przyjąć tu pod uwagę, że w t \acute{e} j liczbie 303 dnie, miesiące liczą się ponad 2 lata od chwili wyjazdu, t. j. że je liczyć należy od 7 maja r. 1883-ego; wchodzą więc tu miesiące: maj *) (31 dni), czerwiec (30 dni) i t. d. **). W każdym razie liczba 303, jako znacznie wi \acute{e} ksza od 270, obejmuje 9 miesięcy. Suma zaś dni tych 9-u miesięcy b \acute{e} dzie tu: 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 = = 276 dni; 303 dnie — 276 d. = 27 d. W warunkach więc naszego zadania ¹⁾ 303 dnie = 9 m. + 27 dni.

Wogóle w zadaniach tak na dodawanie, jak i na odejmowanie, w kt \acute{o} re wchodzą daty, należą być bardzo ostrożnym ²⁾.

(Zadania arytmetyczne. § 11, 12.)

*) Właściwie: od 7 maja do 7 czerwca; od 7 czerwca do 7 lipca, i t. d., ale możemy się wprost wyrażać: maj, czerwiec i t. d., bo tu idzie tylko o ostatni dzień miesiąca.

**) Gdyby był luty (albo racz \acute{e} j miesiąc od pewnego dnia lutego do tegoż dnia marca), to trzeba by zważać na to, jaki rok bieżący odpowiada odjemnej.

¹⁾ W innych warunkach mogłoby 303 dni, przy 9 miesiącach, przedstawiać inną liczbę dni (28 d., 29 d., a nawet 30 d.).

²⁾ Niewłaściwym jest obchodzenie pozornych trudno \acute{s} c przy wykonywaniu podobnych zadań przez przyjmowanie w nich, iż każdy miesiąc ma dni 30. Starannym wyjaśnieniem można przecie \acute{z} trudno \acute{s} c pokonać. Bł \acute{e} dny \acute{m} zaś rezultatem zadawał \acute{a} ć się nie należy.

§ 11. MNOŻENIE I DZIELENIE LICZB WIELORAKICH.

1. Postępowanie przy mnożeniu liczb wielorakich bezpośrednio wynika z tego, cośmy mówili o dodawaniu liczb wielorakich (§ 10, 1), bo mnożenie jestto skrócone dodawanie jednakowych składników. Np.

$$\begin{array}{r}
 3 \text{ mor.} + 186 \text{ pr. kw.} + 64 \text{ st. kw.} \\
 3 \text{ mor.} + 186 \text{ pr. kw.} + 64 \text{ st. kw.} \\
 3 \text{ mor.} + 186 \text{ pr. kw.} + 64 \text{ st. kw.} \\
 3 \text{ mor.} + 186 \text{ pr. kw.} + 64 \text{ st. kw.} \\
 \hline
 14 \text{ mor.} + 145 \text{ pr. kw.} + 31 \text{ st. kw.}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 3 \text{ mor.} + 186 \text{ pr. kw.} + 64 \text{ st. kw.} \\
 \qquad \qquad \qquad \times 4 \\
 \hline
 14 \text{ mor.} + 145 \text{ pr. kw.} + 31 \text{ st. kw.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 256 \text{ st. kw.} & 225 \text{ st. kw.} \\
 225 & \hline
 31 \text{ st. kw.} & 1 \text{ pr. kw.}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 745 \text{ pr. kw.} & 300 \text{ pr. kw.} \\
 600 & \hline
 145 \text{ pr. kw.} & 2 \text{ m.}
 \end{array}$$

Z tego naprzód widzimy, że mnożnik, jako oznaczający, ile razy mnożna ma być wzięta jako składnik, jest zawsze liczbą oderwaną. Jeżeli np. to mnożenie wypadło nam z zadania: «Ktoś sprzedał cztery równe place; w każdym było po 3 morgi, 186 pr. kw. i 64 st. kw.; ile razem sprzedał?» — to do tego mnożenia doszliśmy zapomocą takiego rozumowania: kiedy jeden sprzedany plac obejmował 3 morgi + 186 pr. kw. + 64 st. kw., to 4 takie place obejmowały 4 razy więcej; trzeba więc 3 morgi + 186 pr. kw. + 64 st. kw. pomnożyć przez liczbę oderwaną 4.

Mnożenie zaś samo, podobnie jak dodawanie (i dla tych samych powodów), uskuteczniamy, poczynając od najmniejszych jednostek. Mnożymy więc 64 st. kw. $\times 4$; otrzymamy 256 st. kw.; ponieważ zaś większa jednostka, pr. kw., ma 225 st. kw., więc należy liczbę mianowaną prostą 256 st. kw. przedstawić jako liczbę wieloraką przy pomocy jednostek pręta kw. i stopy kw. (§ 9, 1); otrzymujemy 1 pr. kw. + 31 st. kw.; 31 st. kw. podpisujemy pod stopami kw. mnożnej, a 1 pr. kw. dodajemy do iloczynu powstałego z pomnożenia prętów kw. mnożnej przez mnożnik. I t. d.

2. Moglibyśmy to działanie wykonać inaczej, mianowicie: liczbę wieloraką 3 m. + 186 pr. kw. + 64 st. kw. wyrazić jako liczbę mianowaną prostą, t. j. wyrazić w st. kw.; tę liczbę stóp kw. pomnożyć przez liczbę oderwaną 4, a otrzymaną w iloczynie liczbę mianowaną prostą (st. kw.) wyrazić znowu jako liczbę wieloraką:

300 pr. kw.	244414 st. kw.	977656 st. kw.	225 st. kw.
<u>× 3</u>	<u>× 4 st. kw.</u>	<u>776</u>	<u>4345</u>
900 pr. kw.	977656 st. kw.	<u>1015</u>	4345 pr. kw.
+ 186 pr. kw.		<u>1156</u>	
1086 pr. kw.		31 st. kw.	
225 st. kw.		4345 pr. kw.	300 pr. kw.
<u>× 1086</u>		<u>1345</u>	<u>14</u>
1350		145 pr. kw.	14 morgów.
1800			
<u>225</u>			
244350 st. kw.			
+ 64 st. kw.			
244414 st. kw.	Odp. 14 morgów + 145 pr. kw. + 31 st. kw.		

Z tego widzimy, iż ten sposób postępowania jest znacznie dłuższy od poprzednio podanego, w którym nadto z mniejszymi liczbami mamy do czynienia.

3. Niedogodności te znikają jednak, gdy mamy do czynienia z liczbami danymi w układzie metrycznym; wtedy bowiem tak wyrażanie liczby wielorakięj jako mianowanęj prostęj, jak i postępowanie odwrotne odbywają się bardzo prędko. Np. Łut n.-p. waży tyleż, co 12 g. + 672 mg.; wiele w centnarze (stufuntowym) jest Kg., g. i t. d. — Tu należy przedewszystkiem znaleźć, ile centnar ma łutów. Ponieważ c. = 100 fun., a f. = 32 ł., więc c. = 32 ł. × 100 = 3200 ł. A gdy ł. = 12 g. + 672 mg., zatem, aby znaleźć wyrażenie c. w wagach metrycznych, należy 12 g. + 672 mg., czyli 12672 mg. pomnożyć przez liczbę oderwaną 3200, i

$$\begin{array}{r}
 12672 \text{ mg.} \\
 \times 3200 \\
 \hline
 25344 \\
 38016 \\
 \hline
 40550400 \text{ mg.} = 40 \text{ Kg.} + 550 \text{ g.} + 400 \text{ mg.}
 \end{array}$$

4. W powyższym przykładzie widzieliśmy, że należy koniecznie mnożnik odnieść do tego pojęcia, któremu odpowiada mnożna: trzeba było centnar wyrazić w łutach, bo mnożna odpowiadała łutowi.

Podobnież wypadnie postąpić, gdy będziemy mieli np. zadanie:

Ktoś kazał równo obsiać żytem pole, mające 5 włók + 16 morgów obszaru, i osobiście sprawdził, że na obsianie morga wyszło: 1 korzec + 2 ćwierci + 3 garnce; ile potrzeba żyta na obsianie całego pola? — Potrzeba żyta tyle *razy* więcej niż 1 k. + 2 ć. + 3 g., ile *razy*

obszar 5 w.+16 m. jest większy od obszaru morga. Należy więc liczbę wieloraką 5 w.+16 m. wyrazić w morgach; otrzymamy 160 morgów. Potrzeba zatem żyta 160 *razy* więcej niż 1 k.+2 ć.+3 g., t. j. tę liczbę wieloraką trzeba pomnożyć przez liczbę oderwaną 160. Rachunek tak się przedstawi:

$$\begin{array}{r} 30 \text{ m.} \\ \times 5 \\ \hline 150 \text{ m.} \\ + 16 \text{ m.} \\ \hline 166 \text{ m.} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \text{ k.} + 2 \text{ ć.} + 3 \text{ g.} \\ \times 166 \\ \hline 264 \text{ k.} + 2 \text{ ć.} + 2 \text{ g.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 498 \text{ g.} \mid 8 \text{ g.} \\ \dots \mid 62 \\ \hline 2 \text{ g.} \quad 62 \text{ ć.} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 332 \text{ ć.} \\ + 62 \text{ ć.} \\ \hline 394 \text{ ć.} \mid 4 \text{ ć.} \\ \dots \mid 98 \\ \hline 2 \text{ ć.} \quad 98 \text{ k.} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 166 \text{ k.} \\ + 98 \text{ k.} \\ \hline 264 \text{ k.} \end{array}$$

5. W dzieleniu, jako w działaniu odwrotnym mnożeniu dwu czynników, dzielna odpowiada iloczynowi, dzielnik zaś jednemu z czynników, t. j., albo mnożnej, albo mnożnikowi (§ 6, us. 6). Skutkiem więc tego, w dzieleniu liczb wielorakich będą dwa przypadki, zależnie od tego, czy dzielnik jest liczbą wieloraką *), czy też liczbą oderwaną.

Tak np., jeżeli: Posiadacz placu, mającego obszaru 14 morgów +145 pr. kw.+31 st. kw., podzielił go na równe części tak, iż każda część obejmowała 3 m.+186 pr. kw.+64 st. kw.; na ile części on ten plac podzielił? — to powiemy, iż podzielił na tyle części, ile *razy* 14 m.+145 p.kw.+31 st.kw. jest większe od 3 m.+186 p.kw.+64 st.kw. Dzielenie więc będzie miało na celu oznaczenie, ile razy dzielna jest większa od dzielnika. Otrzymana zaś liczba oderwana (odpowiadająca w mnożeniu mnożnikowi) przedstawi liczbę sprzedanych placów.

Jeżelibyśmy zaś mieli zadanie: Posiadacz placu, mającego obszaru 14 morgów + 145 pr. kw. + 31 st. kw., sprzedając, podzielił go na cztery równe place; jak wielki był każdy ze sprzedanych placów? — to tu, oczywiście, w dzieleniu idzie nam o to, aby liczbę wieloraką 14 m.+145 pr. kw.+31 st. kw. rozłożyć na cztery równe części i wyznaczyć, jak wielką jest każda z tych części. Otrzymana w ilorazie liczba wieloraka — wogóle mówiąc, mianowana — przedstawi nam właśnie, jak wielką jest jedna taka część.

Osobno rozważymy te dwa przypadki.

*) Wogóle: mianowaną. (Por. § 7, us. 7, 8.)

6. Gdy dzielna jest liczbą wieloraką, a dzielnik liczbą wieloraką lub mianowaną prostą (wogóle: liczbą mianowaną), to, mając się dowiedzieć, ile razy dzielnik mieści się w dzielnej, czyli wymierzyć dzielną dzielnikiem, najdogodniej możemy to uskutecznić, wyrażając dzielną i dzielnik jako liczby mianowane proste w tój samėj jednostce — a więc w najdrobniejszėj z jednostek, wchodzących w wyrażenia liczb danych ¹⁾. Dzielenie więc to sprowadzamy do dzielenia dwu liczb mianowanych prostych, wyrażonych przy pomocy tój samėj jednostki (§ 7, us. 7).

Np. Ile z 78 cent. + 75 f. ołowiu zrobić można kul ważących po 2 f. + 6 ł.? — Kul zrobić można tyle, ile razy ciężar 78 c. + 75 f. jest większy od ciężaru 2 f. + 6 ł., t. j. ile razy 2 f. + 6 ł. pomieści się w 78 c. + 75 f. Aby więc ostatni ciężar wymierzyć ciężarem 2-u f. + 6-u ł., wyrazimy tak dzielną, jak i dzielnik jako liczby mianowane proste przy pomocy najdrobniejszėj z wchodzących tu jednostek, t. j. łuta.

$$\begin{array}{r}
 100 \text{ f.} \quad 32 \text{ ł.} \quad 252000 \text{ ł.} \quad | \quad 70 \text{ ł.} \\
 78 \quad \quad \quad \times 2 \quad \quad \quad | \quad 3600 \\
 \hline
 7800 \text{ f.} \quad 64 \text{ ł.} \quad \quad \quad \quad \quad \quad | \quad 3600 \text{ kul.} \\
 +75 \text{ f.} \quad +6 \text{ ł.} \\
 \hline
 7875 \text{ f.} \quad 70 \text{ ł.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 32 \text{ ł.} \\
 \times 7875 \\
 \hline
 252000 \text{ ł.}
 \end{array}$$

Oczywiście, że, gdy mamy do czynienia z liczbami systematu metrycznego, postępujemy taksamo. Np. Na ile placów można podzielić Km. kw., jeżeli w każdym placu ma być 62 ary + 50 m. kw.

$$\text{Km. kw.} = 1000000 \text{ m. kw.}; \quad 62 \text{ ary} + 50 \text{ m. kw.} = 6250 \text{ m. kw.}$$

$$\begin{array}{r}
 1000000 \text{ m. kw.} \quad | \quad 6250 \text{ m. kw.} \\
 \dots\dots\dots \quad \quad | \quad 16 \\
 \hline
 0 \quad \quad \quad \quad \quad | \quad 16 \text{ placów.}
 \end{array}$$

7. Gdy dzielna jest liczbą wieloraką, a dzielnik liczbą oderwaną, to moglibyśmy podobnie, wyraziwszy dzielną jako liczbę mianowaną prostą, sprowadzić działanie do dzielenia mianowanėj prostėj przez oderwaną, otrzymaną zaś w ilorazie liczbę mianowaną prostą (wyrażoną przy pomocy tój samėj jednostki, co dzielna) przedstawić jako liczbę wieloraką.

¹⁾ Inne postępowanie wymagałoby rozumowania wielce drobiazgowego, prowadziłoby często do nader złożonych rachunków i pociągałoby za sobą mogło potrzebę zmieniania cyfr wyznaczanych w ilorazie.

Tak mianowicie postępujemy zwykle przy dzieleniu liczb, wyrażonych w systemacie metrycznym. Np. Jeżeli 2 cent. metr. + 12 Kg. + 500 g. prochu użyto do 68 wystrzałów działowych, to ile średnio użyto prochu na jeden wystrzał? Należy 2 c. m. + 12 Kg. + 500 g. rozłożyć na 68 równych części i oznaczyć jak wielką jest jedna taka część,

$$2 \text{ c. m.} + 12 \text{ Kg.} + 500 \text{ g.} = 212500 \text{ g.}$$

$$\begin{array}{r|l} 212500 \text{ g.} & 68 \\ \hline \dots\dots & 3125 \text{ g.} = 3 \text{ Kg.} + 125 \text{ g.} \\ 0 & \end{array}$$

Postępujemy więc wtedy odwrotnie, niż przy mnożeniu liczb wielorakich w us. 2 i 3.

Mając jednak wykonać dzielenie liczby wielorakięj, wyrażonej nie w systemacie metrycznym, możemy odrazu w ilorazie wyznaczyć szukaną liczbę wieloraką przez postępowanie odwrotne temu, któregośmy używali przy mnożeniu liczb wielorakich w us. 1 i 4, t. j., na-przód wyznaczmy część ilorazu wyrażoną przy pomocy największej jednostki; pozostałą resztę dzielnęj wyrazimy w mniejszej (następującej) jednostce i wyznaczmy odpowiadającą część ilorazu, i t. d.

Np. Plac, mający obszaru 14 morgów + 145 pr. kw. + 31 st. kw., sprzedany został w czterech równych częściach; jak wielki był każdy ze sprzedanych placów?

$$\begin{array}{r|l} 14 \text{ m.} + 145 \text{ pr. kw.} + 31 \text{ st. kw.} & 4 \\ \hline - 12 & 3 \text{ m.} + 186 \text{ pr. kw.} + 64 \text{ st. kw.} \\ \hline 2 \text{ m.} = 600 \text{ pr. kw.} & \\ + 145 \text{ pr. kw.} & \\ \hline 745 \text{ pr. kw.} & \\ 34 & \\ \hline 25 & \\ 1 \text{ pr. kw.} = 225 \text{ st. kw.} & \\ + 31 \text{ st. kw.} & \\ \hline 256 \text{ st. kw.} & \\ 16 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Tu dzieląc 14 m. przez liczbę oderwaną 4, otrzymujemy w ilorazie 3 m. wraz z tym, co wypadnie z podzielenia 2-u morgów przez 4. Ale, gdy mórg = 300 pr. kw., to z podzielenia 2 m. przez 4 otrzymamy tyleż, co z podzielenia 300 pr. kw. $\times 2 = 600$ pr. kw. przez 4. Że zaś, prócz otrzymać się stąd mających pr. kw. w ilorazie, otrzymamy jeszcze pręty kw. z podzielenia 145 pr. kw. dzielnęj przez 4, więc w ilo-

razie pręty kwadratowe otrzymamy z podzielenia 600 pr. kw. + 145 p. k. =
= 745 pr. kw. I t. d.

(Wrazie, gdyby w dzielnój nie było 31 st. kw., ale np. 34 st. kw.; to wyznaczywszy w ilorazie 64 st. kw., mielibyśmy jeszcze 3 st. kw. do podzielenia przez 4, czyli 144 cał. kw. $\times 3$, t. j. 432 c. kw. przez 4, coby nam dało jeszcze w ilorazie 108 cał. kw.— W takich zadaniach, wrazie, gdy, po wyznaczeniu części ilorazu, wyrażonej w najdrobniejszej jednostce dzielnój, zostaje jeszcze reszta, należy, jeżeli można, wyrażać resztę przy pomocy jeszcze drobniejszych jednostek, dla wyznaczenia odpowiednich części w ilorazie.)

(Zadania arytmetyczne. § 13, 14, 15.)

ROZDZIAŁ V.

PODZIELNOŚĆ LICZB.

§ 12. DZIELNIK I WIELOKROTNA LICZBY DANÉJ. LICZBY PIÉRWSZE.

1. Jeżeli liczba dana ¹⁾ dzieli się przez pewną drugą bez reszty, to, jak wiemy (§ 7, us. 11), nazywamy ją podzielną przez tę drugą liczbę; np. 24 jest podzielne przez 6. Liczba zaś, która dzieli liczbę daną bez reszty, nazywa się dzielnikiem liczby danéj. W powyższym przykładzie liczba dana 24 ma np. dzielnik 6, dzielnik 8 i t. d. A zatem

Dzielnikiem liczby danéj nazywamy liczbę, przez którą liczba dana jest podzielna.

Oczywiście, że dzielnik jakiegokolwiek liczby nie może być od niej większy.

Dzielnik liczby danéj jest téż jéj czynnikiem. Daną bowiem liczbę możemy przedstawić jako iloczyn tego dzielnika przez liczbę, wypadłą z podzielenia liczby danéj przez ten właśnie dzielnik (§ 7, us. 3, 11); tak np. $24 = 6 \times 4$. Dlatego wyrażenia: «czynnik liczby danéj», «dzielnik liczby danéj» są jednoznaczne.

2. Liczbę, przez którą należy pomnożyć dzielnik liczby danéj, aby jako iloczyn otrzymać właśnie liczbę daną, nazywać będziemy dzielnikiem dopełniającym ów dzielnik, albo dzielnikiem dopełniającym liczbę daną. Jeżeli więc 6 jest dzielnikiem 24-ch, to 4 jest dzielnikiem dopełniającym ów dzielnik, bo $6 \cdot 4 = 24$. Oczywiście, dzielnik dopełniający jest ilorazem z podzielenia liczby danéj przez odpowiedni dzielnik, a nadto sam jest dzielnikiem ²⁾ liczby danéj, gdyż jest jéj czynnikiem.

Każdy dzielnik liczby danéj ma odpowiedni dzielnik dopełniający. Np. liczba 24 ma dzielniki 6, 8, 4, 1 i t. d.; odpowiadające im dzielniki dopełniające są 4, 3, 6, 24 i t. d.

¹⁾ W tym rozdziale przez «liczbę» należy rozumieć zawsze liczbę całkowitą (§ 1, us. 5).

²⁾ Euklides, *Elementa*, księga VII, podanie 40.

3. Jeżeli mamy pewną liczbę daną, np. 6, to liczba, przez tę daną liczbę podzielna, jak np. 24, nazywa się jej (liczbą) wielokrotną ¹⁾, bo można tę liczbę utworzyć, kilkakrotnie *) biorąc liczbę daną jako składnik. Tak np. $24 = 6 + 6 + 6 + 6$.

Liczbą wielokrotną liczby danej nazywamy liczbę, podzielną przez liczbę daną, albo, mówiąc ogólnie ²⁾: liczbą wielokrotną liczby danej nazywamy liczbę, która może być wyrażona jako suma składników równych liczbie danej, albo jeszcze (§ 6, us. 3): liczbą wielokrotną liczby danej nazywamy liczbę, która powstaje z danej, wskutek pomnożenia jej przez jakąś liczbę ³⁾.

Gdy więc np. 6 jest dzielnikiem 24-ch, to nawzajem, 24 jest wielokrotną 6-u.

Ponieważ, mnożąc liczbę daną przez jakąkolwiek liczbę, otrzymujemy wielokrotną liczbę danę, a liczb (przez które mnożyć możemy liczbę daną) jest nieskończenie wiele (§ 1, us. 6) więc jest nieskończenie wiele wielokrotnych liczby danęj.

Każda liczba jest dzielnikiem i wielokrotną samęj siebie; tak np. 24 jest dzielnikiem 24-ch i wielokrotną 24-ch, bo $24 = 24 \cdot 1$ (§ 6, us. 3). — Każda liczba ma dzielniki: liczbę 1 i samę siebie.

4. Jeżeli, zaznaczywszy, że liczba dana, np. 24 ma dzielnik 6, zauważymy następnie, że znowu ten dzielnik, t. j. liczba 6, ma dzielnik 3, to, gdy dzielnikiem, dopełniającym dzielnik 6 liczby 24, jest 4, a dzielnikiem, dopełniającym dzielnik 3 liczby 6, jest 2, mamy:

$$24 = 6 \cdot 4, \quad \text{gdzie } 6 = 3 \cdot 2,$$

czyli (§ 6, us. 7, 10)

$$24 = (3 \cdot 2) \cdot 4 = 3 \cdot (2 \cdot 4) = 3 \cdot 8,$$

t. j. 3 jest też dzielnikiem liczby danęj 24. A więc: *dzielnik dzielnika liczby danęj jest też dzielnikiem liczby danęj*, albo, zauważywszy, że liczba 24 jest wielokrotną 6-u, — *dzielnik liczby danęj jest dzielnikiem wielokrotnęj téj liczby*.

5. Każdą liczbę można przedstawić jako iloczyn dwu różnych czynników, np. $24 = 4 \cdot 6$; $7 = 7 \cdot 1$; $35 = 5 \cdot 7$; $37 = 1 \cdot 37, \dots$, a więc: *każda liczba ma conajmniej dwa dzielniki*.

Liczba może mieć jednak więcej dzielników, np. 24 ma osiem dzielników: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; liczba 81 ma dzielników pięć: 1, 3, 9, 27, 81. Jednak liczby np. 7, 37, 11, 23 i t. d. mają każda tylko dwa dzielniki: jedność i samę siebie. Takie liczby nazywamy

1) Przymiotnika «wielokrotna» używa się taksamo, jak: odjemna, mnożna i t. d.

*) Kilkunastokrotnie,...

2) W szczególnym przypadku wielokrotna liczby danęj może być jej równa.

3) (Całkowitą.)

liczbami pierwszymi. Liczby zaś, które mają dzielników więcej, jak np. 24, 81, 35 i t. d., nazywamy liczbami złożonymi.

Liczbą pierwszą nazywamy liczbę, podzieloną tylko przez jedność i przez samą siebie.

Liczba podzielna przez inną jeszcze liczbę, prócz jedności i samej siebie, nazywa się liczbą złożoną.

Liczbę 1 zalicza się do liczb pierwszych.

Liczby podzielne przez 2 nazywają się parzystymi; liczby przez 2 niepodzielne nazywają się nieparzystymi¹⁾.

Wszystkie liczby pierwsze, z wyjątkiem 2-u, są nieparzyste.

6. *Każda liczba (zaczynając od 2) ma co najmniej jeden dzielnik, będący liczbą pierwszą²⁾ różną od 1.*

Jeżeli dana liczba jest pierwsza, to, oczywiście, tym dzielnikiem jest ona sama.

Jeżeli zaś dana liczba jest złożona, to ma dzielnik różny (większy) od 1, a zarazem różny (mniejszy) od niej samej. Jeżeli ten dzielnik jest liczbą pierwszą — twierdzenie nasze jest okazane. Jeżeli zaś ten dzielnik jest liczbą złożoną, to ma on znów dzielnik, mniejszy od siebie, a większy od 1, który jest też (us. 4) dzielnikiem liczby danej. Jeżeli ten dzielnik jest pierwszy, twierdzenie jest okazane; jeżeli zaś jest liczbą złożoną, to ma znów dzielnik, mniejszy od siebie, a większy od 1, który, jako dzielnik dzielnika liczby danej, jest jej dzielnikiem. Jeżeli ten dzielnik jest pierwszy i t. d. Postępując w ten sposób, otrzymujemy zawsze dzielniki liczby danej wciąż zmniejszające się, ale zawsze większe od 1; liczba tych zmniejszających się dzielników jest ograniczona (gdyż i liczba dana jest ograniczona). Jest więc w tym ciągu dzielników dzielnik ostatni. Gdyby on był liczbą złożoną, to miałby znów dzielnik od siebie mniejszy, a większy od jedności; nie byłby więc ostatnim. Ostatni przeto z tych dzielników liczby danej jest liczbą pierwszą.

7. Gdyby szereg liczb pierwszych,

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, . . . ,

był ograniczony, to niech np. 19 będzie największą liczbą pierwszą, o możliwości istnienia której jesteśmy przekonani. — Utwórzmy iloczyn wszystkich,

¹⁾ Euklides, ks. VII, definicje 6, 7.

[Każda liczba nieparzysta jest sumą czterech kwadratów, z których dwa są sobie równe, np. $67 = 5^2 + 5^2 + 4^2 + 1^2 = 8^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 7^2 + 3^2 + 3^2 + 0^2 = 7^2 + 4^2 + 1^2 + 1^2$; $5 = 2^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$, a wogóle: aby utworzyć jakąkolwiek liczbę, potrzeba, co najwięcej, czterech kwadratów, np. $10 = 3^2 + 1^2$; $16 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$.]

[Z rozkładu bezpośredniego wielu liczb parzystych na dwa składniki (nie ma zaś dotąd na to dowodu matematycznego) wypada, że każda liczba parzysta jest sumą dwu liczb pierwszych, np. $16 = 13 + 3$; $18 = 13 + 5$; w takim razie każda liczba nieparzysta jest sumą trzech liczb pierwszych, z których jedną jest 1.]

²⁾ Euklides, ks. VII, podanie 33: «każda liczba złożona jest podzielna przez pewną liczbę pierwszą»; pod. 34: «każda liczba jest albo pierwsza, albo podzielna przez liczbę pierwszą». Przytoczone wyżej dowodzenie jest parafrazą euklidesowego.

przy tym przypuszczeniu, liczb pierwszych, i do tego iloczynu dodajmy 1. Ta liczba

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 + 1$$

nie będzie podzielna ani przez 19, ani przez żadną różną od 1 liczbę pierwszą, mniejszą od 19, gdyż, dzieląc przez którąkolwiek z nich, zawsze otrzymamy resztę dzielną: 1. A gdy nasza liczba, jak każda, ma dzielnik, będący liczbą pierwszą (ns. 6), to tym dzielnikiem może być tylko liczba pierwsza ¹⁾ większa od 19. Istnieje więc, wbrew przypuszczeniu, liczba pierwsza, większa od 19. Podobnie możemy dowieść, że istnieje zawsze liczba pierwsza, większa od jakkolwiek wielkiej oznaczonej liczby pierwszej ²⁾. A więc

Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

8. Gdy chcemy się dowiedzieć, czy dana liczba jest pierwsza, czy złożona, to dosyć jest dowiadywać się, czy jest ona podzielna tylko przez liczby pierwsze. Gdy bowiem pewna liczba ma, jako dzielnik, liczbę złożoną, to jest także podzielna przez liczby pierwsze,

1) Wprawdzie początkowe takie liczby $1 \cdot 2 + 1$, $1 \cdot 2 \cdot 3 + 1$, i t. d. są pierwsze, lecz już $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$.

2) Euklides, ks. IX, pod. 20: «ilość liczb pierwszych jest większa od jakiejkolwiek danej ich ilości». Taką zasadą dowodzenia. —

Gdy jakąkolwiek liczbę dzielimy np. przez liczbę 4, to jako resztę dzielenia otrzymać możemy (§ 7, us. 11) albo 1, albo 2, albo 3, albo 0. Gdy więc iloraz niepełny oznaczymy dla ogólności literą np. a , to jakąkolwiek liczbę (dzielną) można zawsze przedstawić (§ 7, us. 11, 3) zapomocą jednego z 4-ch wzorów

$$4a + 1, \quad 4a + 2, \quad 4a + 3, \quad 4a.$$

Wtedy wszystkie liczby możemy rozdzielić na 4 klasy, odpowiadające tym wzorom. Każdy z tych wzorów obejmuje klasę liczb, napisanych w odpowiednim pionowym wierszu tablicy

{	1,	5,	9,	13,	17,	21,	25, ...
	2,	6,	10,	14,	18,	22,	26, ...
	3,	7,	11,	15,	19,	23,	27, ...
	4,	8,	12,	16,	20,	24,	28, ...

(obejmującej wszystkie liczby). Wszystkie te klasy (a więc i wszystkie liczby) można też wyrazić jednym wzorem ogólnym

$$4a + b,$$

jeżeli się umówimy aby litera b przybierać mogła wartości 0, 1, 2, 3. — Taksamo jakąkolwiek liczbę można przedstawić zapomocą wzoru

$$10a + b,$$

w którym więc b może mieć wartości 0, 1, 2, ..., 9; wtedy wszystkie liczby można rozdzielić na 10 klas; oddzielną klasę utworzą liczby, dające przy dzieleniu przez 10 tę samą resztę, t. j. odpowiadające tej samej wartości na b . — Również np. liczby parzyste są postaci $2a$, liczby nieparzyste postaci $2a + 1$. — Podobnie jak powyżej według liczb 4, 10, 2, możemy wszystkie liczby dzielić na klasy według jakiejkolwiek liczby, tak iż, gdy przez m oznaczymy pewną dowolnie wybraną liczbę, wszystkie liczby możemy przedstawić zapomocą wzoru

$$m \cdot a + b,$$

w którym więc b otrzymywać może wartości 0, 1, 2, ..., $m - 2$, $m - 1$, a liczby, odpowiadające tej samej wartości na b , utworzą oddzielną klasę. —

[Lejeune-Dirichlet dowiódł, że jeżeli liczby m i b są pierwsze względem siebie (§ 14, us. 2), to istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, należących do klasy $m \cdot a + b$.]

[Każda liczba pierwsza postaci $4a + 1$ jest sumą dwu kwadratów; np. $13 = 4 \cdot 3 + 1 = 3^2 + 2^2$; $109 = 4 \cdot 27 + 1 = 10^2 + 3^2$. Każda liczba pierwsza postaci $8a + 3$ jest sumą trzech kwadratów; np. $67 = 8 \cdot 8 + 3 = 7^2 + 3^2 + 3^2$.]

będące dzielnikami owego dzielnika złożonego; tak np. liczba 36 ma dzielnik 12, ale $12 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot 6$; gdy więc 12 jest dzielnikiem 36-u, to liczby 2 i 3, dzielniki liczby 12, są też dzielnikami liczby 36. Jeżeli więc znaleźliśmy, że liczba np. 847 nie jest podzielna przez 2, to nie mamy czego próbować, czy ona jest podzielna przez 4, 6, 8, 10, 12 i t. d. (bo musiałaby być wtedy podzielną przez 2); podobnie, dowiedziawszy się następnie, że ta liczba 847 nie jest podzielna przez 3, nie mamy czego próbować, czy jest podzielna przez 9, 15, 21, 27 i t. d.

Gdy więc, dla oznaczenia, czy dana liczba jest pierwsza, czy złożona, będziemy badać, czy ona jest podzielna przez liczby pierwsze, to prowadzić możemy owo poszukiwanie, zaczynając od liczb pierwszych mniejszych, aby przez to zachować w tym poszukiwaniu pewien ład, a nadto często ułatwić ¹⁾ je sobie. Mając więc daną liczbę, dowiadywać się będziemy naprzód, czy ma ona dzielnik 2. Jeżeli przez 2 dzieli się bez reszty, to oczywista już, że jest liczbą złożoną. Jeżeli nie, to należy zbadać, czy jest podzielną przez 3. Jeżeli nie, to należy oznaczyć, czy jest podzielną przez 5. Jeżeli i przez 5 nie, to czy przez 7, i t. d.

Gdyby liczba dana miała jakiś dzielnik, to mogłaby być przedstawiona jako iloczyn tego dzielnika przez dzielnik dopełniający (us. 2). Wiemy zaś, że, jeżeli w iloczynie dwu czynników jeden czynnik powiększamy, to drugi się zmniejsza (§ 7, us. 13). Gdy więc, dzieląc liczbę daną kolejno przez liczby pierwsze 2, 3, 5, 7, 11, ... i znajdując, że ona przez żadną z tych liczb nie jest podzielna, dojdziemy do takiej liczby pierwszej, iż z podzielenia danej liczby przez tę liczbę pierwszą otrzymujemy w ilorazie liczbę od niej (t. j. od dzielnika tego dzielenia) mniejszą, to już możemy zaniechać dalszego poszukiwania. Gdyby bowiem dana liczba była podzielna przez ową liczbę pierwszą, lub przez inną, od niej większą, to dzielnikiem dopełniającym byłaby liczba, od owjej liczby pierwszej mniejsza. A więc liczba dana miałaby dzielnik (us. 2) mniejszy od owjej liczby pierwszej, a przecież z poszukiwania dotychczasowego już wiemy, że to być nie może. A zatem:

Jeżeli, mając daną liczbę, badamy pokolci, czy ona jest podzielna przez każdą z liczb pierwszych 2, 3, 5, 7, 11, . . . , i jeżeli znajdujemy, że ona przez żadną z tych liczb nie jest podzielna, a postępowanie to doprowadziliśmy do tego, że w pewnym dzieleniu liczby danej przez którąś z tych

¹⁾ Gdy bowiem mamy np. liczbę 303 i, nie zbadawszy, czy ona jest podzielna przez 3, próbować będziemy, czy jest podzielna przez większe liczby pierwsze, np. przez 5, 7, 11, 13, 17 i t. d., to poszukiwania te byłyby dość mozolne, a całkiem niepotrzebne, bo $303 = 3 \cdot 101$, a 101 jest liczbą pierwszą, więc tysamym liczba nasza nie jest podzielna przez żadną z liczb między 3 i 101.

liczb piérwszych wypadła nam już w ilorazie liczba mniejsza od dzielnika, to dana liczba jest liczbą piérwszą¹⁾.

Tak np., chcemy zbadać, czy 101 jest liczbą piérwszą;

$\frac{101}{\dots}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{101}{\dots}$	$\frac{3}{33}$	$\frac{101}{\dots}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{101}{\dots}$	$\frac{7}{14}$	$\frac{101}{\dots}$	$\frac{11}{9}$ (mn. niż dz-k);
1		2		1		3		2	

liczba więc 101 jest piérwszą.

9. Aby utworzyć tablicę początkowych liczb piérwszych, możemy postąpić w taki sposób. W szeregu liczb naturalnych 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 i t. d. przekreślmy codrugą liczbę, zostawiając jednak 2; pozbędziemy się w ten sposób wszystkich liczb (4, 6, 8, 10 i t. d.), podzielnych przez 2. Obok 2 jest liczba nieprzekreślona 3; zostawiając ją, przekreślmy każdą z liczb, zajmujących dalej cotrzecie miejsce, która jeszcze nie była przekreślona, jako już podzielne przez 2. Obok 3 piérwsza nieprzekreślona jest 5; zostawiając ją, przekreślmy każdą z liczb, zajmujących dalej copiąte miejsce, która jeszcze przekreślona nie była. Obok 5 piérwsza nieprzekreślona liczba jest 7*); zostawiając ją, przekreślmy i t. d. Pozostaną więc nieprzekreślonymi, liczby, które przez żadną liczbę mniejszą od siebie, prócz 1, nie są podzielne, t. j. liczby podzielne tylko przez jedność i przez samę siebie, czyli liczby piérwsze.

Jeżeli tu, zamiast przekreślać (lub zmazywać) różne liczby z szeregu liczb naturalnych, będziemy w miejscach, przez nie zajętych, wywiercać otwory, to w ten sposób otrzymamy tak zwane sito Eratostenesa.

Jeżeli np., przekreśliwszy już w ten sposób codrugą, cotrzecią, copiątą, cosiódma i cojedenaśc liczbę, zatrzymaliśmy się, to wszystkie pozostałe liczby, mniejsze od liczby $13 \cdot 13 = 169$ są piérwszymi, bo jakakolwiek z tych nieprzekreślonych liczb, a więc niepodzielna przez 2, 3, 5, 7, 11, np. 167 nie może się dzielić przez większą liczbę piérwszą (t. j. przez 13, lub większą), bo gdy 167 jest liczbą mniejszą od 169, a $169 : 13 = 13$, to, dzieląc 167 przez 13, otrzymamy liczbę mniejszą od 13, jak również, gdybyśmy 167 dzielili przez liczbę większą od 13. Jeżeliby więc liczba 167 była podzielną przez 13 lub przez większą liczbę, to byłaby podzielną przez różną od 1 liczbę piérwszą,

¹⁾ Wychodzi to na to samo, co: jeżeli liczba dana nie jest podzielną przez żadną z liczb piérwszych, mniejszych od takiej liczby, której kwadrat (§ 6, us. 39) jest od danej liczby większy, to dana liczba jest piérwszą. Np. liczba 211 jest mniejsza od $15^2 = 225$ i nie jest podzielna przez liczby piérwsze, mniejsze od 15, t. j. przez liczby 2, 3, 5, 7, 11 i 13; jest więc liczbą piérwszą.

*) Zostawiamy 3, 5, 7, . . . , gdyż one są liczbami piérwszymi, jako niepodzielne przez żadną, prócz jedności, z liczb mniejszych (poprzedzających).

mniejszą od 13 (us. 8), t. j. przez jedną z liczb 2, 3, 5, 7, 11, co być nie może. Zatem: jeżeli, tworząc sito Eratostenesa, przekreśliśmy w szeregu liczb naturalnych liczby podzielne przez kilka początkowych liczb pierwszych, to wszystkie nieprzekreślone liczby, mniejsze od iloczynu następującej liczby pierwszej przez siebie (t. j. mniejsze od kwadratu następującej liczby pierwszej), są liczbami pierwszymi.

Widzieliśmy (us. 8), jak wielu niekiedy potrzeba wyliczeń, aby się przekonać, czy dana dość wielka liczba, jest pierwszą, czy też złożoną. Dlatego od dawnych czasów układano tablice liczb pierwszych. Najwięcej rozpowszechnioną jest tablica Burckhardt'a, obejmująca wszystkie liczby pierwsze, mniejsze od 3 036 000, a także najmniejsze dzielniki liczb złożonych ¹⁾.

Podajemy tu tablicę liczb pierwszych, mniejszych od 1500.

1	89	223	359	503	659	827	997	1163	1321
2	97	227	367	509	661	829	1009	1171	1327
3	101	229	373	521	673	839	1013	1181	1361
5	103	233	379	523	677	853	1019	1187	1367
7	107	239	383	541	683	857	1021	1193	1373
11	109	241	389	547	691	859	1031	1201	1381
13	113	251	397	557	701	863	1033	1213	1399
17	127	257	401	563	709	877	1039	1217	1409
19	131	263	409	569	719	881	1049	1223	1423
23	137	269	419	571	727	883	1051	1229	1427
29	139	271	421	577	733	887	1061	1231	1429
31	149	277	431	587	739	907	1063	1237	1433
37	151	281	433	593	743	911	1069	1249	1439
41	157	283	439	599	751	919	1087	1259	1447
43	163	293	443	601	757	929	1091	1277	1451
47	167	307	449	607	761	937	1093	1279	1453
53	173	311	457	613	769	941	1097	1283	1459
59	179	313	461	617	773	947	1103	1289	1471
61	181	317	463	619	787	953	1109	1291	1481
67	191	331	467	631	797	967	1117	1297	1483
71	193	337	479	641	809	971	1123	1301	1487
73	197	347	487	643	811	977	1129	1303	1489
79	199	349	491	647	821	983	1151	1307	1493
83	211	353	499	653	823	991	1153	1319	1499

¹⁾ *Table des diviseurs* i t. d., Paryż, 1817.

Zamiast w takiej tablicy wypisywać wszystkie liczby, jedno pod drugimi (oczywiście ograniczamy się liczbami nieparzystymi), możemy jedności (1, 3, 5, 7, 9) liczby nadpisać u góry w jednym wierszu poziomym, a dziesiątki z lewej strony tablicy w kolumnie pionowej. Zyskuje się tym sposobem wiele na objętości tablicy. Wtedy liczbie np. 45 odpowiada w tablicy miejsce, należące do tego wiersza poziomego, w którym na początku postawiono 4 (dziesiątki), a zarazem do tego wiersza pionowego w którym u góry oznaczone są 5 (jedności). Na tym właśnie miejscu znajdujemy liczbę 3, t. j. najmniejszy, nie licząc 1, dzielnik liczby 45.

	1	3	5	7	9
	3
1	.	.	3	.	.
2	3	.	5	3	.
3	.	3	5	.	3
4	.	.	3	.	7
5	3	.	5	3	.

i t. d.

Jest więc 26 liczb pierwszych mniejszych od 100, 169 mniejszych od 1000, 240 mniejszych od 1500 i t. d. ¹⁾

§ 13. CECHY PODZIELNOŚCI.

1. Jeżeli mamy danych kilka liczb, np. 15, 30, 20, z których każda ma ten sam dzielnik 5, czyli kilka takich liczb, z których każda jest wielokrotną (§ 12, us. 3) 5-u, to każda z danych liczb może być przedstawiona jako suma składników 5. A więc i suma tych liczb, $15+30+20$, jest też sumą składników 5, czyli liczbą wielokrotną 5-u, a zatem liczbą, mającą także dzielnik 5. Widzimy więc, że ²⁾

Dzielnik każdej z kilku liczb jest dzielnikiem sumy, czyli: suma kilku wielokrotnych pewnej liczby jest wielokrotną tej liczby ³⁾.

2. Podobnie, gdy mamy dwie liczby, np. 35 i 21, z których każda ma dzielnik 7, czyli jest wielokrotną 7-u, to, gdy od pierwszej $35=7+7+7+7+7$ odejmiemy drugą $21=7+7+7$, (z uwagi, że od składników 7 odejmując składniki 7, mieć będziemy w reszcie składniki 7) otrzymamy $35-21=7+7$, liczbę wielokrotną 7-u, czyli podzielną przez 7. Zatem:

Dzielnik każdej z dwu liczb jest dzielnikiem ich różnicy, czyli: różnica dwu wielokrotnych pewnej liczby jest wielokrotną tej liczby.

Stąd wypada, że *dzielnik sumy dwu składników i jednego z tych składników jest dzielnikiem drugiego składnika ⁴⁾.* Gdy np. $60=36+24$, to liczba 12, będąca dzielnikiem (sumy) 60 i (jednego składnika) 36,

Na miejscu, odpowiadającym liczbie np. 37, znajdujemy kropkę, wskazującą, iż liczba 37 jest pierwszą. — Liczbie np. 243 odpowiadają miejsce tego poziomego wiersza, w którym na początku postawiono 24, i tego pionowego, w którym u góry jest 3.

¹⁾ Jest 1230 liczb pierwszych od 10 000; 9592 pierwszych od 100 000; 78 493 pierwszych od 1 000 000.

[Jeżeli literą a oznaczymy jakąkolwiek liczbę większą od 3, to między liczbami a i $2a-2$ jest, conajmniej, jedna liczba pierwsza (twierdzenie Bertrand'a).]

[Prawo następstwa liczb pierwszych jest nieznanne. — Wielomian o jednej zmiennej nie może, przy różnych wartościach na zmienną, przedstawiać samych tylko liczb pierwszych (Legendre); np. jeżeli wielomian $a+bx+cx^2$ przy $x=a$ przedstawia liczbę pierwszą p , to liczba, którą ten wielomian przedstawia przy $x=a+py$, gdzie y ma jakąkolwiek wartość całkowitą, t. j. liczba $a+ba+ca^2+bp+2acpy+cp^2y^2=p+p(by+2acy+cpy^2)$, jest przez p podzielna, a więc nie jest liczbą pierwszą; taksamo z wielomianem stopnia wyższego.]

²⁾ Euklides, ks. V, pod. 1: «jeżeli każda z kilku liczb jest takąż wielokrotną odpowiednią z kilku innych (w takiejże ilości) liczb, to suma pierwszych jest takąż wielokrotną sumy drugich.»

³⁾ Stąd wprost wypada własność, wypowiedziana w § 12, us. 4-ym, bo gdy 24 jest wielokrotną 6 u a 3 jest dzielnikiem 6-u, to dzielnik każdego ze składników sumy $6+6+6+6$ jest dzielnikiem sumy (wielokrotną) 24-ch.

⁴⁾ Euklides, ks. 5, pod. 5.

jest też dzielnikiem ich różnicy $60 - 36 = 24$, t. j. drugiego składnika sumy — 24-ch.

3. Jeżeli liczba dana jest wyrażona jako suma dwu składników, z których jeden jest podzielny przez pewną liczbę, a drugi nie, to i dana liczba nie jest przez nią podzielna, a wtedy reszta z podzielenia liczby danej jest też sama, co reszta z podzielenia tego właśnie niepodzielnego ję składnika. Jeżeli np. $86 = 60 + 26$, gdzie 60 jest podzielne przez 12, a 26 nie, to i 86 nie jest podzielne przez 12. Suma bowiem liczb $60 = 12 + 12 + 12 + 12 + 12$ i $26 = 12 + 12 + 2$ nie da się wyrazić jako suma składników 12, gdyż prócz nich wejdzie w nią jeszcze składnik 2, który był resztą z podzielenia $26 : 12$, a jest także resztą z podzielenia $86 : 12$, gdyż $86 = (12 + 12 + 12 + 12 + 12) + (12 + 12 + 2) = 12 \cdot 7 + 2$.

4. Gdy potrzeba dowiedzieć się, czy dana liczba jest przez pewną liczbę podzielna, albo, jeżeli jest niepodzielna, jaka, po uskuteczeniu dzielenia, wypadnie reszta, to w niektórych przypadkach możemy znaleźć odpowiedź prościej, niż przez bezpośrednie dzielenie tych liczb. Odpowiednie ku temu wskazówki, oparte na tyłkoco dowiedzionych własnościach, nazywają się cechami podzielności liczby danej przez pewne liczby ¹⁾.

5. Gdy mamy liczbę daną, np. 3347, podzielić przez 2, to łatwo zauważymy, że ponieważ każdy dziesiątek jest podzielny przez 2, przeto i 334 dziesiątki liczby danej (t. j. część ję 3340) są podzielne przez 2 (us. 1), tak, że gdy naszą liczbę przedstawimy jako sumę

$$3347 = 3340 + 7,$$

to pierwszy ję składnik jest przez 2 podzielny. Stosownie więc do tego, czy drugi składnik (7) jest podzielny przez 2, czy też nie, będzie także (us. 1, 3) ich suma, t. j. liczba dana, przez 2 podzielna lub niepodzielna, a w ostatnim razie reszta z podzielenia liczby danej przez 2 będzie też sama, co reszta z podzielenia tego drugiego składnika przez 2. Tym zaś drugim składnikiem jest liczba, przedstawiona przez ostatnią cyfrę (licząc od strony lewej) danej liczby. Powiemy więc wogóle:

Reszta z podzielenia liczby przez 2 jest też sama, co z podzielenia liczby, przedstawionej przez ostatnią ję cyfrę.

Z tabliczki zaś mnożenia wiemy, że z liczb jednocyfrowych podzielne są przez 2 liczby 2, 4, 6, 8. Nadto, dana liczba jest oczywiście podzielna przez 2, gdy ostatnia ję cyfra nie przedstawia żadnej liczby, t. j. gdy ostatnia cyfra jest zerem; np. liczba 3340 (gdyż

¹⁾ Warunki podzielności przez 6, 12, 15 i t. d. w § 15, us. 11 (a także w § 14, us. 18).

wtedy jest ona sumą samych tylko 10-ów, podzielnych przez 2 (us. 1).
Widzimy więc, że można powiedzieć:

Liczba jest podzielna przez 2, gdy się kończy na 0, albo 2, albo 4, albo 6, albo 8.

Liczby, podzielne przez 2, nazywają się, jak wiemy (§ 12, us. 5), parzystymi. Liczby 2, 4, 6, 8 są parzyste ¹⁾. Powiedzieć więc jeszcze możemy, że *)

Liczba jest parzystą, gdy się kończy na 0, lub gdy ostatnia jej cyfra przedstawia liczbę parzystą.

Ponieważ 10 jest podzielne przez 5, więc taksamo rozkładając liczbę daną na dziesiątki i pozostałą część, a następnie podobnie rozumując, znajdziemy, że:

Reszta z podzielenia liczby przez 5 jest też sama, co reszta z podzielenia liczby, przedstawionej przez jej ostatnią cyfrę.

Liczba dzieli się przez 5 bez reszty, gdy jej ostatnią cyfrą jest 0 albo 5.

6. Gdy chcemy znaleźć cechę podzielności przez 4, to nie możemy już liczby np. 3347, tak rozkładać na dwa składniki, jak poprzednio, bo 10 nie jest podzielne przez 4 (niezawsze więc dziesiątki liczby będą przez 4 podzielne). Lecz zważmy, że 100 ma dzielnik 4; możemy więc naszą liczbę tak rozłożyć na składniki: na setki i na pozostałą część,

$$3347 = 3300 + 47.$$

Ponieważ każda setka jest podzielna przez 4, więc i 33 setki, t. j. pierwszy składnik 3300, są podzielne przez 4. Drugi zaś składnik (47) jest liczbą, przedstawioną przez dwie ostatnie cyfry liczby danej. A więc:

Reszta z podzielenia liczby przez 4 jest też sama, co reszta z podzielenia liczby, przedstawionej przez dwie jej ostatnie cyfry.

*Liczba jest podzielna przez 4, jeżeli liczba, którą przedstawiają ostatnie jej dwie cyfry, jest podzielna przez 4, lub jeżeli jest zakończona na dwa zera **).*

Ponieważ nadto 100 jest podzielne również przez 25, a więc:

Reszta z podzielenia liczby przez 25 jest też sama, co reszta z podzielenia liczby, przedstawionej przez dwie ostatnie jej cyfry.

Liczba dzieli się przez 25, gdy się kończy na dwa zera, lub gdy dwie jej ostatnie cyfry przedstawiają liczbę 25, albo 50, albo 75.

¹⁾ Gdy, jak np. w algiebrze, i 0 uważamy jako liczbę, to wypadła przyjąć, że i ono jest parzyste (jak również podzielne przez jakąkolwiek liczbę).

*) Albo: liczba jest parzystą, gdy się kończy na 0, 2, 4, 6, 8. (Ale nie można mówić: liczba jest podzielna przez 2, gdy jest parzysta.)

**) A nie: jeżeli ostatnie dwie jej cyfry są podzielne przez 4.

7. Liczba 8, przez którą 100 nie jest podzielne, jest dzielnikiem liczby 1000; więc gdy liczbę np. 1213597 rozłożymy na tysiące i pozostałą część:

$$1213597 = 1213000 + 597,$$

to pierwszy składnik jest podzielny przez 8. A zatem:

Reszta z podzielenia liczby przez 8, jest taż sama, co reszta z podzielenia liczby, przedstawionej przez trzy ostatnie ję cyfry.

Liczba jest podzielna przez 8, jeżeli trzy ję ostatnie cyfry przedstawiają liczbę podzielną przez 8. Np. liczba 82301738 nie jest podzielna przez 8, bo liczba 738 nie jest podzielna przez 8.

Podobnie dla liczby 125, która jest także dzielnikiem ¹⁾ liczby 1000.

8. Można warunek podzielności przez 8 inaczej jeszcze, dogodniej wyrazić. Parzysta liczba setek (jako suma liczb 200, us. 1) jest podzielna przez 8, nieparzysta zaś liczba setek daje resztę 4 (bo $100 = 8 \cdot 12 + 4$, a każda nieparzysta liczba setek może być rozłożoną na parzystą liczbę setek + 100, a więc da zawsze tęż samę resztę, co 100; us. 3). Gdy więc mamy liczbę o parzystych setkach, np. 520672, to w sumie

$$520672 = 520600 + 72$$

pierwszy składnik jest podzielny przez 8; gdy zaś mamy liczbę o nieparzystych setkach, np. 215728, to ją możemy tak przedstawić (§ 5, us. 8):

$$215728 = 215700 + 28 = (215700 - 4) + (28 + 4),$$

a tu pierwszy składnik: $215700 - 4$ jest również podzielny przez 8. Więc:

Liczba jest podzielna przez 8 wrazie gdy liczba ję setek jest parzysta, jeżeli dwie ję ostatnie cyfry przedstawiają liczbę podzielną przez 8; wrazie zaś, gdy liczba ję setek jest nieparzystą, — jeżeli dwie ostatnie ję cyfry przedstawiają liczbę, która, powiększona o 4, staje się podzielną przez 8.

9. Ponieważ ani 10, ani 100, ani 1000 i t. d., t. j. wogóle liczba, przedstawiona przez jedność z zerami, nie jest podzielna przez 3, więc nie możemy korzystać z rozkładów, podobnych powyższym (us. 5, 6, 7), dla wyprowadzenia cechy podzielności przez 3. Ale, przekonywając się właśnie o tym, t. j. dzieląc 10, 100, 1000 i t. d. przez 3,

$$10 = 3 \cdot 3 + 1, \quad 100 = 3 \cdot 33 + 1, \quad 1000 = 3 \cdot 333 + 1, \dots,$$

sposstrzegamy, że te liczby 10, 100, 1000 i t. d. mogą być rozłożone

¹⁾ Liczba np. 50 jest też dzielnikiem liczby 1000, ale cecha podzielności przez nią zależy tylko od dwu ostatnich cyfr liczby, gdyż 50 jest już dzielnikiem liczby 100.

na dwa składniki: jeden wielokrotny 3-ch (jak 3.3; 3.33;...), a drugi 1, t. j.

$$10 = 9 + 1, 100 = 99 + 1, 1000 = 999 + 1, \dots$$

Jeżeli więc chcemy znaleźć cechę podzielności przez 3, to powinniśmy z tego właśnie skorzystać. Jeżeli mamy np. liczbę 2456 to, jak wiemy (§ 6, us. 22), możemy ją tak przedstawić:

$$2456 = 2 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6$$

Ponieważ $10 = 9 + 1$ i, aby sumę kilku liczb pomnożyć przez pewną liczbę, można wszystkie jej składniki pomnożyć przez tę liczbę (§ 6, us. 14), więc $5 \cdot 10 = 5 \cdot 9 + 5 \cdot 1 = 5 \cdot 9 + 5$; podobnie, gdy $100 = 99 + 1$, to $100 \cdot 4 = 99 \cdot 4 + 4$, i gdy $1000 = 999 + 1$, to $2 \cdot 1000 = 2 \cdot 999 + 2$, a zatem

$$2456 = 2 \cdot 999 + 2 + 4 \cdot 99 + 4 + 5 \cdot 9 + 5 + 6$$

Suma nie zależy od porządku składników (§ 4, us. 7), więc

$$2456 = 2 \cdot 999 + 4 \cdot 99 + 5 \cdot 9 + 2 + 4 + 5 + 6$$

Dodawanie może być uskutecznione przy pomocy częściowych dodawań składników (§ 4, us. 10); możemy zatem oddzielnie, jako jedną liczbę, uważać sumę $2 \cdot 999 + 4 \cdot 99 + 5 \cdot 9$, a oddzielnie, jako drugą, sumę $2 + 4 + 5 + 6$:

$$2456 = (2 \cdot 999 + 4 \cdot 99 + 5 \cdot 9) + (2 + 4 + 5 + 6)$$

Nasza liczba jest teraz rozłożona na dwa składniki, z których pierwszy, jako suma wielokrotnych liczby 3, jest też (us. 1) wielokrotną 3-ch, zatem (us. 3) podzielność liczby danej przez 3 zależy od podzielności drugiego składnika: $2 + 4 + 5 + 6$ przez 3. Składnik zaś ten jest utworzony przez sumę liczb, przedstawionych przez oddzielne cyfry liczby danej; tę sumę nazywamy: sumą cyfr ¹⁾ danej liczby. A więc:

Reszta z podzielenia liczby przez 3 jest też sama, co reszta z podzielenia sumy jej cyfr.

Liczba jest podzielna przez 3, jeżeli suma jej cyfr jest podzielna przez 3.

10. Ponieważ

$$10 = 9 + 1, 100 = 99 + 1, 1000 = 999 + 1, 10000 = 9999 + 1, \dots,$$

a składniki 9, 99, 999 i t. d. są wielokrotne 9-u, więc, rozumując podobnie, jak w ustępie poprzedzającym, znajdziemy, że:

Reszta z podzielenia liczby przez 9 jest też sama, co reszta z podzielenia sumy jej cyfr.

Liczba jest podzielna przez 9, jeżeli suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

¹⁾ Niechym nie daje się usprawiedliwić zastępowanie w niektórych nowszych naszych podręcznikach tego utartego terminu przez przetłomaczony żywcem z niemieckiego: «suma poprzeczna» (Quersumme) liczby danej.

11. Przerabiając powyższe wyprowadzenie cechy podzielności przez 3 i 9 na różnych liczbach, łatwo nam się nasunąć może pod uwagę, że 99 jest wielokrotne 11-u, że choć 999 nie jest podzielne przez 11, ale znów 9999 jest wielokrotne 11-u i t. d. Może więc na zasadzie téj własności, że każdą z liczb 100, 10 000, 1 000 000, ... można rozłożyć na część wielokrotną 11-u i 1, dałoby się oprzeć wyprowadzenie cechy podzielności przez 11? Rzeczywiście, daną liczbę, np. 2 819 091, możemy rozłożyć na setki, dziesiątki tysięcy, miliony (setki milionów, ...) i pozostałą część,

$$2819091 = 2.1000000 + 81.10000 + 90.100 + 91,$$

albo

$$\begin{aligned} 2819091 &= 2.999999 + 2 + 81.9999 + 81 + 90.99 + 90 + 91 \\ &= (2.999999 + 81.9999 + 90.99) + (2 + 81 + 90 + 91), \end{aligned}$$

skąd widzimy, że:

Reszta z podzielenia liczby danej przez 11 jest taż sama, co reszta z podzielenia sumy oddzielnych liczb, stanowiących w liczbie danej, licząc od strony prawej, grupy dwucyfrowe.

Liczba jest podzielna przez 11, jeżeli, podzieliwszy ją od strony prawej na grupy dwucyfrowe, otrzymamy, jako sumę liczb, stanowiących te grupy, liczbę podzielną przez 11.

12. Tę cechę podzielności przez 11 oparliśmy ¹⁾ na tym, że liczby 100, 10 000, 1 000 000 i t. d., po podzieleniu przez 11, dają wszystkie resztę 1. Dzieląc zaś liczby 1 000, 100 000, 10 000 000 i t. p. przez 11, dostrzeżemy, że one dają wszystkie tę samą resztę: 10. Jeżelibyśmy więc do tych liczb (a także i do liczby 10) dodali po 1, to otrzyimalibyśmy wielokrotne 11-u. Aby jednak liczb tych nie zmienić, dodajemy ²⁾ do nich i odejmujemy (§ 5, us. 8) po 1:

$10 = 10 + 1 - 1 = 11 - 1$; $1000 = 1001 - 1$; $100000 = 100001 - 1$
i t. d. Gdy więc mamy daną np. liczbę 92829, to, przedstawiwszy ją tak

$$92829 = 9.10000 + 2.1000 + 8.100 + 2.10 + 9$$

i zważywszy, że (§ 6, us. 14, 15)

$9.10000 = 9.9999 + 9$; $2.1000 = 2.1001 - 2$; $8.100 = 8.99 + 8$; $2.10 = 2.11 - 2$,
mieć będziemy

$$\begin{aligned} 92829 &= 9.9999 + 9 + 2.1001 - 2 + 8.99 + 8 + 2.11 - 2 + 9 \\ &= (9.9999 + 2.1001 + 8.99 + 2.11) + 9 - 2 + 8 - 2 + 9 \end{aligned}$$

¹⁾ Ponieważ 999, 999 999, ... są liczbami podzielnymi przez 37, więc podobnie, podzielność liczby przez 37 zależy od podzielności sumy liczb, stanowiących grupy trzycyfrowe liczby danej (licząc zawsze od strony prawej).

²⁾ Korzystając z dopełnienia reszty (§ 7, us. 24), możnaby wprost powiedzieć: dzieląc 10, 1000, 100 000 i t. d. przez 11, wprowadźmy dopełnienia reszt; wtedy każda z tych liczb rozłoży się na część wielokrotną 11-u i dopełnienie reszty 10-u, t. j. 1, którą od części wielokrotnej 11-u należy odjąć.

Ponieważ liczba, ujęta w nawias, jest wielokrotną 11-u i do niej dodajemy liczby 9, 8, 9, t. j. sumę $9+8+9$, czyli sumę cyfr, znajdujących się w liczbie danej na miejscach nieparzystych (licząc zawsze od strony prawej), a odejmujemy liczby 2 i 2, t. j. sumę $2+2$, czyli sumę cyfr, znajdujących się na miejscach parzystych, więc możemy powiedzieć, że

Liczba jakakolwiek może być wyrażona przez wielokrotną 11-u, powiększoną o sumę cyfr, znajdujących się w niej na miejscach nieparzystych, a zmniejszona o sumę cyfr, znajdujących się na miejscach parzystych.

Ponieważ liczba nasza

$$92829 = \text{wielokrotnej } 11\text{-u} + (9+8+9) - (2+2),$$

zatem podzielność jej przez 11 zależy od podzielności tej jej części, która jest przedstawiona przez różnicę $(9+8+9) - (2+2)$. Jeżelibyśmy jednak mieli np. liczbę 908492, to odpowiedniego odejmowania $(2+4) - (9+8+9)$ wykonaćby nie można (§ 5, us. 4, 11). Zawszeby jednak było

$$908492 = \text{wielokrotnej } 11\text{-u} + (2+4) - (9+8+9).$$

W tym przypadku wypadnie postąpić tak, jak wogóle przy wykonywaniu odejmowania (§ 5, us. 11), t. j. oddzielimy z tego, co jest przedstawione przez «wielokrotna 11-u» taką (najmniejszą) wielokrotną 11-u, aby już ona, wraz z sumą $2+4$, była nie mniejsza od sumy $9+8+9$. Tu należy oddzielić 2.11 (pozostanie zawsze: wielokrotna 11-u; us. 2). Mamy więc

$$908492 = \text{wielokrotnej } 11\text{-u} + (2+4+2.11) - (9+8+9).$$

Podzielność zatem naszej liczby przez 11 zależy od podzielności różnicy $(2+4+2.11) - (9+8+9)$. Widzimy więc, że:

Reszta z podzielenia liczby danej przez 11 jest taż sama, co reszta z podzielenia różnicy, wypadłej z odjęcia od sumy cyfr, znajdujących się w liczbie danej na miejscach nieparzystych, sumy cyfr na miejscach parzystych, przyczym wrazie, gdy pierwsza z tych sum jest mniejsza od drugiej, należy ją powiększyć o taką wielokrotną 11-u, aby stała się nie mniejszą od drugiej.

Liczba jest podzielna przez 11, jeżeli różnica, otrzymana z odjęcia od sumy cyfr, zajmujących w niej miejsca nieparzyste (lub od tej sumy, powiększonej o pewną wielokrotną 11-u), sumy cyfr, znajdujących się w tej liczbie na miejscach parzystych, jest 0 albo liczba podzielna przez 11.

13. Podobnie rzecz się ma z podzielnością przez 7 — trzeba tylko wziąć pod uwagę grupy trzycyfrowe. Jakoż $1000 = 7.142 + 6$, albo, wprowadzając dopełnienie reszty (§ 7, us. 24), $1000 = 7.143 - 1 = 1001 - 1$; następnie $1000000 = 7.142857 + 1 = 999999 + 1$; $1000000000 =$

$$\begin{aligned}
 &= 7.142857142 + 6 = 7.142857143 - 1 = 1000\,000\,001 - 1 \text{ i t. d., t. j.} \\
 &1 \text{ z 3-a, 9-u, 15-u i t. d. zerami daje dopełnienie reszty 1, zaś 1 z 6-u, 12-u} \\
 &\text{i t. d. zerami daje resztę 1. Jeżeli więc mamy np. liczbę } 23\,056\,784\,921, \text{ to} \\
 &23056784921 = 23.1000000000 + 56.1000000 + 784.1000 + 921 \\
 &= 23.1000000001 - 23 + 56.9999999 + 56 + 784.1001 - 784 + 921 \\
 &= \text{wielokrotnej } 7\text{-u} + (56 + 921) - (23 + 784).
 \end{aligned}$$

Zauważmy, że taksamo rzecz się ma z podzielnością przez 13, albowiem $1000 = 13.76 + 12$; $1000000 = 13.76923 + 1$ i t. d., tak iż np.

$$23056784921 = \text{wielokrotnej } 13\text{-u} + (56 + 921) - (23 + 784).$$

Liczba jest podzielna przez 7 lub 13, jeżeli, podzieliwszy ją od strony prawej na grupy ¹⁾ trzycyfrowe i oddzielnie dodawszy liczby tworzące pierwszą (z prawej strony), trzecią i t. d. grupy, a oddzielnie liczby tworzące drugą, czwartą i t. d. grupy, otrzymamy, jako różnicę między pierwszą (powiększoną, jeżeli potrzeba, o pewną wielokrotną odpowiednio 7-u lub 13-u) i drugą z tych sum, 0, albo liczbę podzielną odpowiednio przez 7 lub 13 ²⁾.

14. Powyższe cechy podzielności przez 3 i 9, przez 11, przez 37, przez 7 i 13, można, przy pomocy wiadomości z algiebrzy, tak wprost uzasadnić.

Gdy mamy np. liczbę 723456, to możemy ją tak przedstawić (§ 6, us. 35):

$$\begin{aligned}
 723456 &= 7.10^5 + 2.10^4 + 3.10^3 + 4.10^2 + 5.10 + 6 \\
 &= 7.(10^5 - 1) + 2.(10^4 - 1) + 3.(10^3 - 1) + 4.(10^2 - 1) + 5.(10 - 1) + \\
 &\quad + 7 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6.
 \end{aligned}$$

Każdy z dwumianów $10^5 - 1$, $10^4 - 1$ i t. d. jest podzielny przez $10 - 1 = 9$ i przez 3, dzielnik 9-u (§ 12, us. 4), a więc podzielność przez te liczby zależy od sumy $7 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ i t. d. (us. 9, 10).

Podobnież

$$\begin{aligned}
 723456 &= 7.(10^5 + 1) + 2.(10^4 - 1) + 3.(10^3 + 1) + 4.(10^2 - 1) + 5.(10 + 1) - \\
 &\quad - 7 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6,
 \end{aligned}$$

a tu każdy z wypisanych dwumianów jest podzielny przez $10 + 1 = 11$, więc i t. d. (us. 12).

Również

$$\begin{aligned}
 9723456 &= 9.10^6 + 72.10^4 + 34.10^2 + 56 \\
 &= 9.(10^6 - 1) + 72.(10^4 - 1) + 34.(10^2 - 1) + 9 + 72 + 34 + 56,
 \end{aligned}$$

a każdy z tych dwumianów jest podzielny przez $10^2 - 1 = 99$ i przez dzielnik 99-u, t. j. przez 11; więc i t. d. (us. 11).

Taksamo

$$\begin{aligned}
 3056784901 &= 3.10^9 + 56.10^6 + 784.10^3 + 901 \\
 &= 3.(10^9 - 1) + 56.(10^6 - 1) + 784.(10^3 - 1) + 3 + 56 + 784 + 901.
 \end{aligned}$$

¹⁾ Albo ²⁾: jeżeli podzieliwszy na grupy sześciocyfrowe, otrzymamy, jako sumę liczb, stanowiących te grupy, liczbę podzielną odpowiednio przez 7 lub 13 (por. us. 11).

²⁾ Również reszta z podzielenia i t. d.

Każdy z tych dwumianów jest podzielny przez $10^3 - 1 = 999$, a zatem i przez dzielnik tej liczby, t. j. przez 37; więc i t. d. (us. 11, odsyłacz).

Jeszcze:

$23056784901 = 23 \cdot (10^9 + 1) + 56 \cdot (10^6 - 1) + 784 \cdot (10^3 + 1) - 3 + 56 - 784 + 901$; tu dwumiany są podzielne przez $10^3 + 1 = 1001$, a zatem i przez dzielniki tej liczby, 7 i 13 (oraz przez 11); więc i t. d. (us. 13).

15. Przy pomocy własności (niżej: § 14, us. 13): gdy liczbę, mającą pewien dzielnik, podzielimy przez liczbę pierwszą względem tego dzielnika, to iloraz otrzymany jest przez ów dzielnik także podzielny — możemy otrzymać inną jeszcze cechę podzielności przez 7. Przedstawmy liczbę w postaci (§ 12, us. 8, odsyłacz) $10 \cdot a + b$. Odejmijmy od niej liczbę wielokrotną 7-u, przez co warunek podzielności przez 7 się nie zmieni (us. 2, 3); odejmijmy mianowicie $21 \cdot b$. Pozostanie w reszcie $10 \cdot a - 20b$, co gdy podzielimy przez 10, liczbę pierwszą względem 7-u, otrzymamy $a - 2b$. A więc liczba $10 \cdot a + b$ jest podzielna przez 7, pod warunkiem, aby $a - 2b$ było podzielne przez 7. Np. liczba 33292 jest podzielna przez 7, jeżeli liczba $3329 - 2 \cdot 2 = 3325$ jest podzielna przez 7; to znowu zależy od podzielności liczby $332 - 2 \cdot 5 = 322$ przez 7, i t. d. Zatem, chcąc zbadać, czy liczba dana jest podzielna przez 7, należy od ilości jej dziesiątków odjąć podwojone jednostki, z otrzymaną resztą taksamo postąpić i t. d., a stosownie do tego, czy tą drogą dojdziemy do liczby podzielnej, czy też do niepodzielnej przez 7, liczba dana będzie również podzielna, lub nie, przez 7.

$$\begin{array}{r} 33292 \\ - 4 \\ \hline 3325 \\ - 10 \\ \hline 322 \\ - 4 \\ \hline 28 \end{array}$$

W sposób podobny można udowodnić analogiczne cechy podzielności przez inne liczby (pierwsze względem 10-u), wychodząc z postaci danej liczby $10 \cdot a + b$. Mianowicie:

Dla 3-ch i 9-u warunek: $a + b$ (do $10 \cdot a + b$ dodając $9 \cdot b$ i dzieląc sumę przez 10)¹⁾.

Dla 11-u warunek: $a - b$ (od $10 \cdot a + b$ odejmując $11 \cdot b$ i dzieląc resztę przez 10)²⁾.

Dla 13-u warunek: $a + 4 \cdot b$ (do $10 \cdot a + b$ dodając $3 \cdot 13 \cdot b = 39 \cdot b$ i dzieląc sumę przez 10).

Dla 17-u warunek: $a - 5 \cdot b$ (od $10 \cdot a + b$ odejmując $3 \cdot 17 \cdot b = 51 \cdot b$ i dzieląc resztę przez 10).

Dla 19-u warunek: $a + 2 \cdot b$ (do $10 \cdot a + b$ dodając $19 \cdot b$ i dzieląc sumę przez 10).

Dla 23-ch warunek: $a + 7 \cdot b$ (do $10 \cdot a + b$ dodając $3 \cdot 23 \cdot b = 69 \cdot b$ i dzieląc sumę przez 10).

Dla 29-u warunek: $a + 3 \cdot b$ (do $10 \cdot a + b$ dodając $29 \cdot b$ i dzieląc sumę przez 10).

I t. d.

Te cechy podzielności wyprowadził Antoni Żbikowski z dowiedzionych przez siebie twierdzeń o podzielności wogóle przez liczbę pierwszą względem

1) Ta cecha wychodzi na jedno z podaną w us. 9 i 10.

2) Ta cecha wychodzi na jedno z podaną w us. 12.

10-u ¹⁾. Z uwagi zaś, że przed ogłoszeniem (r. 1860) owych twierdzeń i jednocześnie wyprowadzeniem z nich, jako przypadków szczególnych, cech powyższych ²⁾, one (prócz, rozumie się, dawno rozpowszechnionych cech podzielności przez 3, 9 i 11) nie były znane — słusznie te cechy podzielności przez 7, 13, 17 i t. d. nazwać możemy cechami Żbikowskiego.

16. Należy jeszcze rozważyć, w jaki sposób rozkład liczby według potęg 10-u (§ 6, us. 41) mógłby dostarczyć cech podzielności przez różne liczby.

Dla ogólności, oddzielne cyfry liczby danej, którą nazwijmy L , oznaczmy literami c ze znaczkami (wskaźnikami) liczebnymi, oznaczającymi miejsce (licząc od strony prawej) przez nie zajmowane, tak, iż np. c_3 oznaczy cyfrę na trzecim miejscu, a c_n cyfrę na n -ym miejscu. Weźmy wogóle liczbę n -cyfrową. Jak wiemy (§ 7, us. 28)

$L = c_n c_{n-1} \dots c_3 c_2 c_1 = c_n \cdot 10^{n-1} + \dots + c_4 \cdot 10^3 + c_3 \cdot 10^2 + c_2 \cdot 10^1 + c_1 \cdot 10^0$,
albo (§ 7, us. 27; § 4, us. 8)

$$L = c_1 + c_2 \cdot 10 + c_3 \cdot 10^2 + c_4 \cdot 10^3 + \dots + c_n \cdot 10^{n-1}.$$

Szukając cechy podzielności przez liczbę, którą nazwijmy d , podzielmy przez nią obie strony tej równości. W sumie po prawej, dzieląc każdy ze składników (§ 18, us. 3) przez d , dzielimy w nim przez d , (poczynając od drugiego składnika) czynnik (§ 7, us. 13; § 20, us. 8), przedstawiający potęgę 10-u; otrzymamy wtedy warunek podzielności niezależny od cyfr danej liczby, o co nam właśnie idzie. Będzie więc

$$\frac{L}{d} = \frac{c_1}{d} + c_2 \cdot \frac{10}{d} + c_3 \cdot \frac{10^2}{d} + c_4 \cdot \frac{10^3}{d} + \dots + c_n \cdot \frac{10^{n-1}}{d}.$$

Całkowitą część ilorazu z dzielenia k -cyfrowej liczby, przedstawionej przez 1 z zerami przez d , t. j. z dzielenia $10^{k-1} : d$, nazwijmy i_k , a resztę dzielenia r_k ; wtedy (oczywiście $i_1 = 0, r_1 = 1$)

$$\begin{aligned} \frac{L}{d} &= \frac{c_1}{d} + c_2 \cdot \left(i_2 + \frac{r_2}{d} \right) + c_3 \cdot \left(i_3 + \frac{r_3}{d} \right) + \dots + c_n \cdot \left(i_n + \frac{r_n}{d} \right) \\ &= c_2 \cdot i_2 + c_3 \cdot i_3 + c_4 \cdot i_4 + \dots + c_n \cdot i_n + \frac{c_1 + c_2 \cdot r_2 + c_3 \cdot r_3 + \dots + c_n \cdot r_n}{d}. \end{aligned}$$

Ponieważ suma $c_2 \cdot i_2 + c_3 \cdot i_3 + \dots + c_n \cdot i_n$ jest liczbą całkowitą, więc liczba L będzie przez d podzielna pod warunkiem, żeby (us. 3) suma $c_1 + c_2 \cdot r_2 + c_3 \cdot r_3 + \dots + c_n \cdot r_n$ była przez d podzielna. Należy więc przedewszystkim dla każdej

1) Zobacz na końcu książki: Przypisek I.

2) Elementarny dowód dr. Żbikowski ogłosił tylko dla 7-u (r. 1868): gdy do liczby $10.a + b$ dodamy i od niej odejmiemy $20.b$, to otrzymamy $10.a + b + 20.b - 20.b = 10.(a - 2.b) + 21.b$; ponieważ $21.b$ jest podzielne przez 7, więc jeżeli $a - 2.b$ jest podzielne przez 7, to liczba dana jest podzielna przez 7. (Grudzień, 1862 r.)

[P. Żbikowski, w odpowiedzi na zakomunikowane mu podane tu w tekście uzasadnienia, nadesłał mi obecnie (kwiecień, 1883) elementarne dowody dla innych liczb, analogiczne do powyższego dla 7-u.]

liczby d wyznaczyć liczby r_2, r_3, r_4, \dots , t. j. reszty z dzielenia $10, 10^2, 10^3, \dots$ przez d , a wtedy łatwo już będzie odkryć warunek podzielności przez d .

$d=2$. Wtedy $r_2=r_3=r_4=\dots=0$; więc warunek podzielności przez 2 wypada z $\frac{c_1}{2}$ (us. 5).

$d=3$. Wtedy $r_2=r_3=r_4=\dots=1$; więc warunek podzielności przez 3 wypada z $\frac{c_1+c_2+c_3+\dots}{3}$ (us. 9).

$d=4$. Wtedy $r_2=2, r_3=r_4=\dots=0$; mamy więc warunek $\frac{c_1+2c_2}{4}$, t. j. aby suma pierwszej cyfry i dwa razy wziętej drugiej była podzielna przez 4. (Jeżeli do tej sumy dodamy liczbę podzielną przez 4, mianowicie $8 \cdot c_2$, to przedstawimy ten warunek inaczej: $\frac{c_1+10 \cdot c_2}{4} = \frac{c_2 c_1}{4}$, us. 6.)

$d=5$. Warunek $\frac{c_1}{5}$ (us. 5).

$d=6$ 1). Wtedy: $r_2=r_3=r_4=\dots=4$, a warunek $\frac{c_1+4c_2+4c_3+\dots}{6}$

$d=7$. Wtedy: $r_1=1, r_2=3, r_3=2, r_4=6, r_5=4, r_6=5, r_7=1, r_8=3$, i t. d.; reszty więc te, powtarzając się, tworzą peryjod 1, 3, 2, 6, 4, 5. Należy więc cyfry 1-ą, 7-ą, 13-ą i t. d. zostawić bez zmiany, 2-ą, 8-ą, 14-ą i t. d. pomnożyć przez 3, i t. d., a jeżeli ta suma $c_1+3 \cdot c_2+2 \cdot c_3+6 \cdot c_4+4 \cdot c_5+5 \cdot c_6+c_7+3 \cdot c_8+\dots$ jest podzielna przez 7, to i dana liczba jest podzielna przez 7. Wprowadzając dopełnienia reszt (§ 7, us. 24) liczb 6, 4, 5, moglibyśmy powiedzieć, że warunkiem jest podzielność sumy $c_1+3 \cdot c_3+2 \cdot c_5-c_4-3 \cdot c_6-2 \cdot c_7+3 \cdot c_8+\dots$; poszukiwanie wtedy nieco się upraszcza, ale zawsze złożonym być nieprzestaje 2).

$d=8$. Wtedy $r_2=2, r_3=4, r_4=r_5=\dots=0$. Warunek $\frac{c_1+2 \cdot c_2+4 \cdot c_3}{8}$. (Jeżeli dodamy liczbę podzielną przez 8, mianowicie $8 \cdot c_2+96 \cdot c_3$, to ten warunek przedstawimy inaczej, mianowicie: $\frac{c_1+10 \cdot c_2+100 \cdot c_3}{8} = \frac{c_3 c_2 c_1}{8}$, us. 7.)

$d=9; r_2=r_3=\dots=1$; warunek $\frac{c_1+c_2+\dots}{9}$ (us. 10).

$d=10; r_2=r_3=\dots=0$; warunek $c_1=0$.

$d=11; r_1=1, r_2=10, r_3=1, r_4=10$, i t. d.; warunek $\frac{c_1+10 \cdot c_2+c_3+10 \cdot c_4+c_5+10 \cdot c_6+\dots}{11} = \frac{c_2 c_1+c_4 c_3+c_6 c_5+\dots}{11}$ (us. 11).

1) Co do warunku podzielności przez 6, 12 i t. d., patrz niżej w § 14, us. 18.

2) I tu dodając i cdejmując odpowiednie wielokrotne 7-u, doszlibyśmy do cech podanych w us. 13.

$$d = 12; r_1 = 1, r_2 = 10; r_3 = r_4 = \dots = 4, \text{ a więc}$$

$$\frac{e_1 + 10 \cdot e_2 + 4 \cdot e_3 + 4 \cdot e_4 + 4 \cdot e_5 + \dots}{12}$$

I t. d.

17. PRÓBY MNOŻENIA I DZIELENIA PRZEZ 9. Mamy dowieść następującego twierdzenia ogólnego:

Reszta, otrzymana z podzielenia iloczynu dwu ¹⁾ czynników przez pewną liczbę, jest też sama, co reszta, wypadła z podzielenia przez nią iloczynu reszt, otrzymanych z podzielenia obu czynników oddzielnie przez tę liczbę.

Dowiedzimy, że np. reszta, otrzymana z podzielenia iloczynu 88.35 (t. j. liczby 3080) przez 12, jest też sama, co reszta wypadła z podzielenia iloczynu reszty z dzielenia 89:12 przez resztę z dzielenia 35:12. Wiemy (§ 6, us. 14), że

$$88.35 = (12.7 + 4).35 = 12.7.35 + 4.35$$

i że (us. 3) reszta z podzielenia liczby 88.35 przez 12 jest też sama, co reszta z podzielenia liczby 4.35 przez 12. Lecz znów $4.35 = 4.(12.2 + 11) = 4.12.2 + 4.11$, więc

$$88.35 = (12.7.35 + 12.4.2) + 4.11,$$

i znów (us. 3) reszta z podzielenia iloczynu 88.35 przez 12, jest równa reszcie z podzielenia iloczynu 4.11 przez 12, t. j. iloczynu reszty z podzielenia czynnika 88 przez 12 i reszty z podzielenia czynnika 35 przez 12.

Jeżeli więc chcemy, opierając się na tym twierdzeniu, przy pomocy dzie-

$$\begin{array}{r} 88 \quad 7 \\ \times 35 \quad 8 \\ \hline 440 \quad 1; \\ 264 \\ \hline 3080 \quad 1. \end{array}$$

lenia przez 9, sprawdzić mnożenie wypisane, to tak postąpić możemy: $8+8=16$, więc reszta z podzielenia 88:9 (us. 10) jest 7; $3+5=8$, reszta z podzielenia 35:9 jest 8; iloczyn reszt $7.8=56$; $5+6=11$; więc reszta z podzielenia (iloczynu reszt) 56:9 jest 2. Szukamy teraz reszty z dzielenia znalezionej iloczynu (3080) przez 9; $3+8=11$; z dzielenia 11:9 otrzymujemy resztę 2, tę samą, co z dzielenia iloczynu reszt przez 9.

Możemy więc z pewnym prawdopodobieństwem wnosić, że to mnożenie jest dobrze wykonane. Oczywiście, ta próba nie wykryje omyłki w iloczynie (nadmiaru lub niedomiaru) o wielokrotną 9-u (us. 3), jak również nie wykryje tego, że np. jedna cyfra jest za wielką o tyle jedności, o ile druga jest za małą.

$$\begin{array}{r} 17040690 \quad | \quad 567 \\ \dots \quad | \quad 30054 \\ \dots \quad | \\ \hline \quad \quad \quad 72 \\ \hline 17040618 \end{array}$$

Aby sprawdzić dzielenie przy pomocy dzielenia przez 9, odejmujemy resztę dzielenia od dzielnej; otrzymana liczba jest iloczynem dzielnika przez iloraz; więc reszta otrzymana z jej podzielenia przez 9 jest też sama, co reszta iloczynu reszt wypadłych z podzielenia

¹⁾ Lub: ilukolwiek.

dzielnika przez 9 i z podzielenia ilorazu przez 9. Tu $5+6+7=18$; reszta 0; jakkolwiek więc będzie reszta z podzielenia ilorazu, będzie iloczyn 567.30054 wielokrotny 9-u; więc i reszta z podzielenia 17040618 powinna być 0. Jakoż $1+7+4+6+1+8=27$. Możemy więc z pewnym prawdopodobieństwem wnosić, że to dzielenie jest dobrze wykonane.

Podobnie możnaby wykonywać próbę mnożenia lub dzielenia przez 11 (us. 11, 12), lecz to, jak i dzielenie przez pewne inne liczby (np. przez 7 i t. d.) nie byłoby tak dogodnie w zastosowaniu, jak dzielenie przez 9.

Teoretycznie możnaby podobne próby wykonywać zapomocą dzielenia przez jakiegokolwiek liczby. Lecz dzielenie przez 2, 5, 10 mogłoby wykryć tylko błąd w ostatniej cyfrze; przez 4, 25, 100 tylko w dwu ostatnich cyfrach; przez 3 byłoby mniej korzystne niż przez 9, bo nie wykrywałoby nadmiarów lub niedomiarów wielokrotnych 3-ch, które wraze, gdy nie są wielokrotne 9-u, mogłyby być wykryte próbą przez 9. I t. d.

(Zadania arytmetyczne. § 15.)

§ 14. SPÓLNY DZIELNIK KILKU LICZB. NAJWIĘKSZY SPÓLNY DZIELNIK KILKU LICZB. DWIE LICZBY PIÉRWSZE WZGLÉDEM SIEBIE.

1. *Liczba, przez którą jednocześnie jest podzielna każda z danych liczb, nazywa się spólnym dzielnikiem tych liczb danych.* Np. liczby 36, 84, 672 i 120 są wszystkie podzielne przez 1, 2, 3, 4, 6, 12; każda więc z liczb 1, 2, 3, 4, 6, 12 jest spólnym dzielnikiem liczb 36, 84, 672 i 120.

Jeden z tych spólnych dzielników liczb danych jest największy; nazywa się go największym spólnym dzielnikiem liczb danych. Tak np. 12 jest największym spólnym dzielnikiem liczb 36, 84, 672 i 120.

Największym spólnym dzielnikiem kilku liczb danych nazywamy największą ze wszystkich liczb, przez które jednocześnie jest podzielna każda z liczb danych.

Nadal, przez skrócenie, zamiast: największy spólny dzielnik, pisać często będziemy: nsd.

2. *Dwie liczby, nie mające żadnego spólnego dzielnika, prócz jedności, nazywają się liczbami piérwszymi względem siebie.* Np. liczby 24 i 35, z których piérsza ma dzielniki: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, a druga: 1, 5, 7, 35, nie mają żadnego spólnego dzielnika, prócz 1-ci. Możemy więc jeszcze powiedzieć, że dwie liczby piérsze względem siebie mają nsd. 1.

3. *Jeżeli dwie liczby nie są piérwszymi względem siebie, to mają, conajmniej, jeden spólny dzielnik, będący liczbą piérwszą, różną od jedności.* Spólny bowiem ich

dzielnik, różny od 1, jeżeli nie jest liczbą pierwszą, jest sam podzielny przez liczbę pierwszą (§ 12, us. 6), która więc (§ 12, us. 4) jest dzielnikiem tak jedynę, jak i drugiej z danych liczb, czyli jest ich wspólnym dzielnikiem.

4. a. *Dwie liczby pierwsze, są pierwszymi względem siebie*, np. 7 i 37, bo każda z nich ma tylko dzielnik 1 i samę siebie, a one są od siebie różne — żadnego przeto wspólnego dzielnika, prócz 1, mieć nie mogą.

b. *Liczba pierwsza i liczba, przez tamtą niepodzielna, są pierwszymi względem siebie* ¹⁾; np. 11 i 56, bo jeżeli liczba 56 jest niepodzielna przez liczbę pierwszą 11, która ma tylko dzielniki 1 i 11, to liczby 11 i 56 nie mogą mieć żadnego wspólnego dzielnika, prócz 1.

5. *Jeżeli z dwu liczb jedna jest przez drugą podzielna, to mniejsza jest największym wspólnym dzielnikiem tych dwu liczb* ²⁾. Np. z dwu liczb 8 i 56 druga jest podzielna przez pierwszą, a więc 8 jest dzielnikiem 8-u i 56-u, t. j. jest ich wspólnym dzielnikiem, i jest nadto nsd.-em tych liczb 8 i 56, gdyż 8 przez liczbę większą od 8-u nie jest podzielne.

6. Dowiedliśmy (§ 13, us. 2), że dzielnik sumy dwu składników i jednego ze składników jest dzielnikiem drugiego składnika. Jeżeli więc, mając dwie liczby, np. 132 i 36, podzielimy pierwszą przez drugą, to

$$132 = 36 \cdot 3 + 24$$

i każdy wspólny dzielnik liczb 132 i 36, a więc i (§ 12, us. 4) wielokrotniej 36-u, t. j. liczby 36.3, jako dzielnik sumy dwu składników (132) i jednego składnika (36.3), jest dzielnikiem drugiego składnika, 24-ch, reszty z dzielenia 132:36. Możemy więc powiedzieć, że każdy wspólny dzielnik liczb 132 i 36, jako dzielnik 24-ch, jest też wspólnym dzielnikiem liczb 36 i 24.

Nawzajem, każdy wspólny dzielnik dwu liczb 36 i 24, jako dzielnik każdego ze składników 36.3 i 24, jest dzielnikiem ich sumy (§ 13, us. 1), t. j. liczby 132, a tym samym jest wspólnym dzielnikiem liczb 132 i 36.

Gdy więc każdy wspólny dzielnik liczb 132 i 36 jest wspólnym dzielnikiem liczb 36 i 24 i nawzajem, każdy wspólny dzielnik liczb 36 i 24 jest wspólnym dzielnikiem liczb 132 i 36, to *wszystkie wspólne dzielniki liczb 132 i 36 są tymiż samymi, co wszystkie wspólne dzielniki liczb 36 i 24*, a zatem i nsd. liczb 132 i 36 jest jednocześnie nsd.-em liczb 36 i 24. Powiemy więc:

Jeżeli z dwu liczb jedna nie jest przez drugą podzielna, to one mają

¹⁾ Euklides, ks. VII, pod. 31.

²⁾ Euklides, ks. VII, pod. 2, przypadek 1-y zadania: znaleźć nsd. (miarę) dwu liczb, które nie są pierwszymi względem siebie.

ten sam największy spólny dzielnik, co: mniejsza z tych liczb i reszta z podzielenia większej z nich przez mniejszą.

7. Chciejmy odnaleźć nsd. dwu liczb, np. 945 i 360. Szukany nsd. jest zarazem (us. 4) nsd.-em liczby 360 i reszty z dzielenia $945:360$; $945=2 \cdot 360+225$. Zamiast więc szukać nsd.-a liczb 945 i 360, możemy szukać nsd.-a liczb 360 i (tęj reszty) 225. Lecz znowu, dzieląc 360 przez 225, otrzymamy $360=1 \cdot 225+135$. Zamiast więc szukać nsd.-a liczb 360 i 225, możemy szukać nsd.-a liczb 225 i 135. I t. d. Ponieważ tu wciąż coraz mniejsze otrzymujemy liczby (§ 7, us. 11), więc liczba takich dzieleni jest ograniczona ¹⁾. Dojdziemy nakoniec do reszty 0, t. j. do takich dwu liczb, z których jedna jest przez drugą podzielna, a więc (us. 5) ich nsd.-em będzie mniejsza z nich, t. j. dzielnik ostatniego dzielenia. Ten więc dzielnik ostatniego dzielenia, jako nsd. dwu liczb, mających ten sam nsd., co każde dwie poprzednio dzielone przez siebie liczby, jest też nsd.-em liczb danych ²⁾.

Przedstawimy tu rachunek poszukiwania nsd.-a a) liczb 945 i 360, b) liczb 35 i 1136.

$$\begin{array}{r}
 \text{a) } 945 \left| \begin{array}{l} 360 \\ \hline 720 \\ \hline 225 \end{array} \right. \\
 360 \left| \begin{array}{l} 225 \\ \hline 225 \\ \hline 1 \end{array} \right. \\
 225 \left| \begin{array}{l} 135 \\ \hline 135 \\ \hline 1 \end{array} \right. \\
 135 \left| \begin{array}{l} 90 \\ \hline 90 \\ \hline 0 \end{array} \right. \text{ nsd.} \\
 90 \left| \begin{array}{l} 45 \\ \hline 45 \\ \hline 0 \end{array} \right. \text{ nsd.} \\
 45 \left| \begin{array}{l} 2 \\ \hline 2 \\ \hline 0 \end{array} \right. \text{ nsd.}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \text{b) } 1136 \left| \begin{array}{l} 35 \\ \hline 105 \\ \hline 86 \\ \hline 70 \\ \hline 16 \\ \hline 3 \\ \hline 1 \end{array} \right. \text{ nsd.} \\
 1136 \left| \begin{array}{l} 35 \\ \hline 35 \\ \hline 0 \end{array} \right. \text{ nsd.} \\
 35 \left| \begin{array}{l} 16 \\ \hline 16 \\ \hline 0 \end{array} \right. \text{ nsd.} \\
 16 \left| \begin{array}{l} 3 \\ \hline 3 \\ \hline 0 \end{array} \right. \text{ nsd.} \\
 3 \left| \begin{array}{l} 1 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \end{array} \right. \text{ nsd.}
 \end{array}$$

¹⁾ Ilość dzieleni, które należy uskutecznić przy poszukiwaniu nsd.-a dwu liczb, jest nie większą od 5 razy wziętej ilości cyfr mniejszej z liczb danych (Lamé w protokołach akademii nauk w Paryżu, 1844).

Szereg liczb, w którym początkowymi są liczby 1, 2, a każda następująca jest sumą dwu poprzedzających, t. j. szereg

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, ..., posiada tę własność, iż, przy poszukiwaniu nsd.-a dwu liczb, z których mniejsza nie jest większą od pewnej liczby tego szeregu, ilość dzieleni nie jest większą od ilości dzieleni, potrzebnych dla odnalezienia nsd.-a owej właśnie liczby z tego szeregu i liczby następującej po niej w tym szeregu. Np., niewielej potrzeba dzieleni dla odnalezienia nsd.-a liczb 945 i 360, niż dla liczb 377 i 610.

Tyłu zaś potrzeba dzieleni dla odnalezienia nsd.-a dwu liczb tego szeregu, ile wskazuje miejsce zajęte w tym szeregu przez mniejszą z tych liczb. Np., dla odnalezienia nsd.-a liczb 144 i 89, jak i np. 1597 i 89, potrzeba 10-u dzieleni, bo 89 jest w tym szeregu na 10-ym miejscu.

²⁾ Euklides, ks. VII, pod. 2, przyp. 2.

W pierwszym przykładzie poszukiwanie nsd.-a liczb 945 i 360 prowadziło się kolejno do poszukiwania (us. 6) nsd.-a liczb 360 i 225, liczb 225 i 135, liczb 135 i 90, liczb 90 i 45, z których już pierwsza była podzielna przez drugą; więc mniejsza z nich, t. j. 45 (dzielnik ostatniego dzielenia), jest nsd.-em każdej pary dzielonych tu przez siebie liczb, a więc i liczb danych 945 i 360. W drugim zaś przykładzie otrzymaliśmy tą samą drogą, jako nsd. liczb 1136 i 35, liczbę 1; więc (us. 2) te liczby dane są pierwsze względem siebie ¹⁾. Powiemy więc:

Aby odnalźć największy spólny dzielnik dwu liczb, należy liczbę większą podzielić przez mniejszą, mniejszą przez resztę pierwszą, resztę pierwszą przez resztę drugą i t. d., dopóki nie wypadnie reszta 0; wtedy ostatni dzielnik jest poszukiwanym największym spólnym dzielnikiem dwu liczb danych.

Ponieważ, jak wiemy, w tym poszukiwaniu nsd.-a pewnych dwu danych liczb, dwie którekolwiek dzielone przez siebie liczby mają ten sam nsd., co dane dwie liczby, więc jeżeli, prowadząc to poszukiwanie, dojdziemy do dzielenia przez siebie liczb, o których wiemy, że są pierwsze względem siebie, to nie mamy co działania dalej prowadzić, gdyż wtedy i dane liczby są pierwszymi względem siebie. Tak np., poszukując powyżej nsd.-a liczb 1136 i 35 doszliśmy do dzielenia liczb 16 i 3, z których ostatnia jest pierwsza, a poprzednia nie jest przez nią podzielna (us. 4); możemy więc zaprzestać dalszego rachunku, gdyż już widoczna, że także liczby 1136 i 35 są pierwszymi względem siebie.

8. Poszukując w ten sposób nsd.-a różnych liczb, łatwo możemy dostrzec, że do powiedzianego w ustępie 4-ym możemy teraz dodać:

c. *Dwie liczby po sobie następujące w szeregu liczb naturalnych są pierwszymi względem siebie (gdyż ich nsd. jest jednocześnie nsd.-em mniejszej z tych liczb i reszty 1; jest on więc 1). Np. 25 i 24, albo 38 i 39.*

d. *Dwie liczby nieparzyste, po sobie następujące w szeregu liczb naturalnych, są pierwszymi względem siebie (gdyż ich nsd. jest nsd.-em mniejszej z tych liczb i reszty 2, przez którą tamta, jako nieparzysta, jest niepodzielna (us. 4, b.). Np. 25 i 27, albo 117 i 119.*

9. Na zasadzie dowiedzionego w us. 6, wiemy, że wszystkie spólne dzielniki liczb 945 i 360 (us. 7) są też same, co liczb 360 i 225, jak również też same, co liczb 225 i 135, co liczb 135 i 90, co na koniec liczb 90 i 45. Lecz 90 jest wielokrotną 45, więc dzielniki liczby

¹⁾ Euklides, ks. VII, pod. 1.

90 i 45, a więc i liczb 945 i 360, są dzielnikami liczby 45, nsd.-a liczb 945 i 360. A zatym ¹⁾,

Spólne dzielniki dwu liczb są też same, co dzielniki ich największego spólnego dzielnika.

10. Mamy znaleźć nsd. kilku liczb, np. czterech liczb 945, 360, 60 i 95.

Ponieważ każdy spólny dzielnik tych czterech liczb jest spólnym dzielnikiem dwu liczb: 945 i 360, a zarazem (us. 9) dzielnikiem nsd.-a tych dwu liczb, t. j. (jakeśmy znaleźli us. 7) liczby 45, więc każdy spólny dzielnik wypisanych czterech liczb jest spólnym dzielnikiem trzech liczb 45, 60, 95.

Nawzajem, każdy spólny dzielnik tych trzech liczb, jako dzielnik 45-u, jest też dzielnikiem liczb 945 i 360, wielokrotnych 45-u (§ 12, us. 4), czyli: jest spólnym dzielnikiem początkowo danych czterech liczb. Z tego wypada, że wszystkie spólne dzielniki liczb 945, 360, 60 i 95 są tymiż samymi, co wszystkie spólne dzielniki liczb 45, 60 i 95, a zatym i nsd. liczb 945, 360, 60 i 95 jest ten sam, co nsd. liczb 45, 60 i 95. — Podobnie rozumując, znajdziemy, że znowu nsd. liczb 45, 60 i 95 jest nsd.-em liczb 15 (nsd.-a 45-u i 60-u) i 95. Największy zaś spólny dzielnik liczb 15 i 95 jest 5. Więc 5 jest nsd.-em liczb 945, 360, 60 i 95. — Możemy więc powiedzieć:

Aby wyznaczyć największy spólny dzielnik trzech lub więcej liczb danych, należy, odnalazszy go dla dwu ²⁾ z danych liczb, poszukiwać następnie największego spólnego dzielnika dwu liczb, z których jedną jest znaleziony już największy spólny dzielnik dwu danych liczb, a drugą trzecia ³⁾ z danych liczb, i t. d. ⁴⁾.

11. Wiemy (§ 7, us. 14), że gdy dzielną i dzielnik albo jednocześnie pomnożymy, albo jednocześnie podzielimy przez tę samą liczbę, to reszta dzielenia będzie przez tę liczbę odpowiednio albo pomnożona, albo podzielona. Jeżeli więc, odnalazszy (us. 7) nsd. dwu danych liczb, pomnożymy je obie przez tę samą liczbę i ponownie poszukiwać będziemy największego spólnego dzielnika tak zmienionych liczb, to wszystkie kolejne reszty będą przez tę samą liczbę pomnożone, a tym samym będzie przez nią pomnożony poprzedni nsd., jako jedna z tych reszt. Również, jeżelibyśmy obie dane liczby podzielili przez tę samą liczbę, to wszystkie kolejne reszty będą przez tę liczbę podzielone i, jako nsd., otrzymalibyśmy nsd. liczb danych, przez tę samą liczbę podzielony. A więc:

¹⁾ Euklides, ks. VII, pod. 2, wniosek.

²⁾ Którychkolwiek.

³⁾ Którakolwiek z pozostałych.

⁴⁾ Euklides, ks. 7, pod. 3.

Jeżeli dwie liczby albo jednocześnie pomnożymy albo jednocześnie podzielimy przez pewną liczbę, to skutkiem tego największy ich wspólny dzielnik będzie przez tę liczbę odpowiednio pomnożony, albo podzielony.

12. Z tego bezpośrednio wypada, że

Gdy dwie liczby podzielimy przez ich największy wspólny dzielnik, to otrzymamy liczby pierwsze względem siebie, gdyż, skutkiem tego, ich nsd. stanie się 1-scią. Tak np., liczby 108 i 48 mają nsd. 12; gdy liczby 108 i 48 podzielimy przez ten nsd. 12, to jednocześnie ich nsd. dzielimy przez siebie i, jako nsd. nowych liczb, otrzymujemy 1; jakoż, 9 i 4 są liczbami pierwszymi względem siebie.

13. *Jeżeli iloczyn dwu czynników jest podzielny przez liczbę pierwszą względem jednego czynnika, to czynnik pozostały jest przez tę liczbę podzielny¹⁾. Jeżeli np. iloczyn 44.105 jest podzielny przez liczbę 35, pierwszą względem czynnika 44, to należy dowiedzieć, że drugi czynnik 105 jest podzielny przez 35. Ponieważ 44 i 35 są liczby pierwsze względem siebie, przeto ich nsd. jest 1. Jeżeli więc te liczby pomnożymy przez 105, to (us. 11) nsd. liczb 44.105 i 35.105 jest $1 \times 105 = 105$. Iloczyn 44.105, według założenia, jest podzielny przez 35; iloczyn 35.105, jako wielokrotny 35-u, jest podzielny przez 35, a więc (us. 9) i ich nsd., t. j. liczba 105, jest podzielna przez 35.*

Z tego wypada, że (§ 7, us. 13):

$$(44.105):35 = 44.(105:35),$$

t. j. iloraz z podzielenia liczby 44.105 przez 35, liczbę pierwszą względem jej dzielnika 44, posiada dzielnik 44. Czyli: *gdy liczbę, mającą pewien dzielnik, podzielimy przez liczbę pierwszą względem tego dzielnika, to iloraz otrzymany jest przez ów dzielnik także podzielny.*

14. *Jeżeli iloczyn kilku czynników jest podzielny przez liczbę pierwszą, to przynajmniej jeden z jego czynników jest przez tę liczbę podzielny²⁾.*

Jeżeli mamy iloczyn dwu czynników, np. 44.105, podzielny przez liczbę pierwszą 7, to wrazie, gdyby przez tę liczbę był podzielny pierwszy czynnik iloczynu, prawdziwość naszego twierdzenia byłaby oczywistą. Wrazie zaś, gdy, jak tu, czynnik 44 nie jest podzielny przez 7, to (us. 4, b.) liczby 7 i 44 są pierwszymi względem siebie, a skutkiem tego (us. 13) drugi czynnik 105 jest podzielny przez 7.

Gdybyśmy mieli iloczyn kilku czynników, np. 44.25.72.105 podzielny przez liczbę pierwszą 7, to, uważając ten iloczyn jako iloczyn dwu czynników: 44 i liczby 25.72.105, na zasadzie powyższego widzimy, że ponieważ 44 nie jest podzielne przez 7, drugi czynnik 25.72.105, jest podzielny przez 7. Gdy zaś ten iloczyn 25.72.105 dwu czynników: 25 i liczby 72.105 jest po-

¹⁾ Euklides, ks. VII, pod. 25: liczba, która jest dzielnikiem jednej z dwu liczb pierwszych względem siebie, jest pierwszą względem drugiej z tych liczb.

²⁾ Euklides, ks. VII, pod. 32.

dzielny przez 7, a czynnik jego pierwszy nie jest podzielny przez 7, to drugi czynnik, 72.105, jest podzielny przez 7. I t. d.

15. Z powyższego wypada:

a. *Gdy liczba pierwsza jest dzielnikiem potęgi pewnej liczby, to jest dzielnikiem tej liczby* ¹⁾, gdyż jeżeli np. 5 jest dzielnikiem 25^3 , to jest (§ 6, us. 39) dzielnikiem iloczynu $25 \cdot 25 \cdot 25$, a więc (us. 14) dzieli czynnik tego iloczynu, t. j. liczbę 25.

b. *Gdy dwie liczby są pierwsze względem siebie, to i jakiekolwiek ich potęgi są także liczbami pierwszymi względem siebie* ²⁾. Np. 8 i 21 są liczbami pierwszymi względem siebie; należy okazać, że np. 8^9 i 21^{12} są też pierwszymi względem siebie. Gdyby bowiem liczby 8^9 i 21^{12} nie były pierwszymi względem siebie, to miałyby (us. 3) spólny dzielnik, będący liczbą pierwszą, który, będąc dzielnikiem 8^9 , byłby, według a., dzielnikiem 8, a będąc dzielnikiem 21^{12} , byłby dzielnikiem 21, czyli byłby spólnym dzielnikiem liczb 8 i 21, co być nie może.

16. *Liczba pierwsza względem każdej z kilku liczb jest pierwsza względem ich iloczynu* ³⁾. Gdyby bowiem np. liczba 25, pierwsza względem każdej z liczb: 24, 36, 48, 56, nie była pierwszą względem ich iloczynu $24 \cdot 36 \cdot 48 \cdot 56$, to ten iloczyn i liczba 25 miałyby (us. 3) spólny dzielnik będący liczbą pierwszą, która byłaby (us. 14) dzielnikiem jednego z czynników iloczynu, a więc ten czynnik i liczba 25 nie byłyby liczbami pierwszymi względem siebie.

17. *Liczba podzielna przez dwie liczby pierwsze względem siebie, lub przez kilka liczb, z których każde dwie są pierwszymi względem siebie, jest podzielna przez ich iloczyn.*

Np. Liczba 1800 jest podzielna przez liczby 4, 5, 9, z których tak liczby 4 i 5, jak liczby 5 i 9, jakoteż liczby 4 i 9 są, oddzielnie uważane, dwiema liczbami pierwszymi względem siebie; chcemy dowieść, że liczba 1800 jest podzielna przez iloczyn $4 \cdot 5 \cdot 9 = 180$.

Ponieważ 1800 jest podzielne przez 4, więc (§ 12, us. 2) $1800 = 4 \cdot 450$. Gdy 1800 jest podzielne przez 5, to i iloczyn $4 \cdot 450$ jest podzielny przez 5; że zaś czynnik 4 jest pierwszy względem 5, to (us. 13) czynnik 450 jest podzielny przez 5 i $450 = 5 \cdot 90$, a więc $1800 = 4 \cdot 5 \cdot 90$. Gdy znowu 1800 jest podzielne przez 9, to i iloczyn $4 \cdot 5 \cdot 90$ jest podzielny przez 9; że zaś 9 jest liczbą pierwszą tak względem 4 jak i względem 5, więc jest liczbą pierwszą względem (us. 16) iloczynu $4 \cdot 5$, tak iż, uważając iloczyn $4 \cdot 5 \cdot 90$ jako iloczyn dwu czynników: jednego $4 \cdot 5$, drugiego 90, widzimy, że ten iloczyn jest podzielny przez liczbę 9, pierwszą względem czynnika $4 \cdot 5$, skutkiem

¹⁾ Na mocy tego, można uogólnić to, co powiedziano w ustępie 8 d., dowodząc, że *Dwie liczby nieparzyste, których różnica jest potęgą liczby 2, są pierwsze względem siebie*; np. 25 i 33, 27 i 91, i t. d.

²⁾ Euklides, ks. VII, pod. 27, 29.

³⁾ Euklides, ks. VII, pod. 26.

czego (us. 13) drugi jego czynnik 90 jest podzielny przez 9. Zatem, wyrażając 90 jako iloczyn 9-u przez dzielnik dopełniający, mamy $90 = 9 \cdot 10$, a tym samym $1800 = 4 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 10 = (4 \cdot 5 \cdot 9) \cdot 10$, z czego widoczna, że liczba 1800 jest podzielna przez iloczyn $4 \cdot 5 \cdot 9 = 180$.

18. Z powyższego wypadu bezpośrednio 1):

Jeżeli liczba jest podzielna przez 2 i przez 3, to jest podzielna przez 6.

Jeżeli liczba jest podzielna przez 3 i przez 4, to jest podzielna przez 12.

Jeżeli liczba jest podzielna przez 3 i przez 5, to jest podzielna przez 15.

Jeżeli liczba jest podzielna przez 3 i przez 8, to jest podzielna przez 24.

I t. d. 2).

§ 15. ROSKŁAD LICZBY NA CZYNNIKI PIĘRWSZE.

WSZYSTKIE DZIELNIKI LICZBY. SPÓLNA WIELOKROTNA KILKU LICZB.
NAJMNIEJSZA SPÓLNA WIELOKROTNA KILKU LICZB.

1. Jeżeli pewna liczba jest złożona, t. j. ma dzielnik różny od samej siebie i od 1, to możemy ją wyrazić jako iloczyn dwu czynników różnych od 1: tego dzielnika i dzielnika dopełniającego (§ 12, us. 2). Jeżeli następnie jeden z czynników tego iloczynu (lub oba) nie jest liczbą pierwszą, to możemy go znów w tym iloczynie zastąpić przez iloczyn dwu czynników różnych od 1. I t. d. Postępowanie to będziemy mogli prowadzić dotąd, dopóki wszystkie czynniki iloczynu, przedstawiającego daną liczbę, nie będą już wyłącznie liczbami pierwszymi. Tak np.

$$450 = 10 \cdot 45 = 2 \cdot 5 \cdot 45 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3.$$

Takie wyrażenie liczby danej przez iloczyn czynników, będących wyłącznie liczbami pierwszymi, nazywa się rozkładem liczby na czynniki pierwsze.

Rozłożyć liczbę na czynniki pierwsze jestto znaleźć takie liczby pierwsze, których iloczyn przedstawia liczbę daną.

Zwykle te czynniki pierwsze wypisuje się w rozkładzie w porządku liczb rosnących; więc $450 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$.

1) Te cechy wyprowadzone są także niżej w § 15, us. 11.

2) Wyprowadzony w § 13, us. 16 warunek podzielności przez 6 jest sumą tam podanych warunków podzielności przez 2 i 3. We wzór ogólny (ostatni na $\frac{L}{d}$) wprowadźmy dopełnienia reszt, t. j. wszystkie i powiększmy o 1; wtedy dla $d = 6$ dopełnieniem reszły będzie

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 + \dots - \frac{c_1 + 4 \cdot c_2 + 4 \cdot c_3 + \dots}{6} &= \frac{5 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + \dots}{6} = \\ &= \frac{3 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + \dots}{6} = \frac{c_1}{2} + \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \dots}{3}. \end{aligned}$$

Podobnie z warunkiem (tamże) podzielności przez 12, i t. d.

2. *Każda liczba, która nie jest piérwszą, jest iloczynem liczb piérwszych.*

Jak wiemy (§ 12, us. 6), każda liczba, jeżeli nie jest piérwszą, ma dzielnik, będący liczbą piérwszą różną od 1. Jeżeli zatem liczbę daną wyrazimy jako iloczyn tego dzielnika przez dzielnik dopełniający (§ 12, us. 2), to, w razie gdy ten dzielnik dopełniający jest liczbą piérwszą, prawdziwość twierdzenia jest tymsamym okazana. Jeżeli zaś jest on liczbą złożoną, to w tym iloczynie możemy go zastąpić znowu przez iloczyn: jego dzielnika, będącego liczbą piérwszą różną od 1, przez odpowiedni jego dzielnik dopełniający. Jeżeli ten ostatni nie jest liczbą piérwszą, to jeszcze zastąpimy go przez iloczyn i t. d. Ponieważ każdy z tych dzielników dopełniających jest dzielnikiem poprzedniego, mniejszym od niego, a większym od jedności, więc ciąg tych dzielników jest ograniczony. Ostatni z tych dzielników nie jest liczbą złożoną, bo inaczej możnaby go znowu wyrazić przez iloczyn liczby piérwszej, różnej od 1, i dzielnika dopełniającego, więc nie byłby ostatnim. Zatem ostatni z tych dzielników dopełniających jest téż liczbą piérwszą. A że wszystkie pozostałe czynniki iloczynu, przedstawiającego liczbę daną, są liczbami piérwszymi, więc zawsze liczbę złożoną możemy wyrazić jako iloczyn czynników, będących liczbami piérwszymi.

3. *Jeden jest tylko możliwy roskład liczby na czynniki piérsze.*

Przypuśmy, że, jako roskład liczby danéj na czynniki piérsze, otrzymaliśmy $2 \times 5 \times 5 \times 7 \times 31$ i że innym jakimś sposobem jesteśmy w stanie otrzymać jeszcze odmienny od powyższego roskład téjże saméj liczby danéj na czynniki piérsze. Czynniki 2 piérszego iloczynu, jako dzielniki liczby danéj, dzieli także drugi iloczyn, przedstawiający tę samą liczbę; że zaś 2 jest liczbą piérwszą i drugi iloczyn jest przez nią podzielny, więc przez 2 jest podzielny (§ 14, us. 14) przynajmniej jeden z jego czynników. Gdy zaś te czynniki są liczbami piérwszymi, a liczba piérsza, prócz 1, jest podzielna tylko przez samą siebie, więc podzielny przez 2 czynnik drugiego iloczynu jest właściwie liczbą 2. Podobnież okażemy, że z pozostałych czynników (tworzących pewien iloczyn) piérszego roskładu czynnik 5 ma sobie równy czynnik 5 w drugim roskładzie, że znowu z pozostałych czynników piérszego roskładu czynnik 5 ma sobie równy między pozostałymi czynnikami drugiego roskładu czynnik 5 i t. d. Więc dwa te iloczyny czynników piérszych, przedstawiające tę samą liczbę, są utworzone przez te same czynniki, wchodzące do owych iloczynów tę samą liczbę razy.

Z tego także wypada, że roskład liczby na czynniki piérsze nie zależy od sposobu, jakim go otrzymujemy.

4. Gdy chcemy rozłożyć na czynniki piérsze liczbę np. 17 050, to będziemy naprzód poszukiwali mniejszych jéj czynników piérszych. Korzystając bowiem z cech podzielności (§ 13), możemy łatwo dostrzec czynniki mniejsze, a nadto, mieć wtedy będziemy dzielenia przez mniejsze liczby, co jest dla nas ważne z tego względu,

iż chcemy (jeżeli można) odrazu wypisywać dzielniki dopełniające (us. 1), t. j. ilorazy tych dzieleń. Tak, z uwagi, że nasza liczba kończy się na 0, wnosimy, że jest podzielna przez 2. Dzielenie wypiszemy tak (§ 7, us. 20):

$$\begin{array}{r|l} 17050 & 2 \\ 8525 & \end{array}$$

Więc $17050 = 2 \cdot 8525$. Należy czynnik 8525 (jeżeli on jest złożony) zastąpić przez iloczyn czynników pierwszych. Liczba 8525 kończy się na 5, więc jest niepodzielna przez 2; suma jej cyfr jest $8+5+2+5=20$, więc ta liczba nie jest podzielna przez 3; kończy się na 5, więc jest podzielna przez 5. Dzielmy więc przez 5:

$$\begin{array}{r|l} 8525 & 5 \\ 1705 & \end{array}$$

Zatym $8525 = 5 \cdot 1705$, skutkiem czego $17050 = 2 \cdot 5 \cdot 1705$. W tym znów wyrażeniu należy liczbę 1705 zastąpić przez iloczyn liczb pierwszych. Ona nie może już być podzielna ani przez 2, ani przez 3, bo poprzednia liczba 8525, jej wielokrotna, (§ 12, us. 4) nie była przez te liczby podzielna. Próbowujemy więc dalej, poczynając od 5. Jest przez 5 podzielna. Więc:

$$\begin{array}{r|l} 1705 & 5 \\ 341 & \end{array}$$

i $1705 = 5 \cdot 341$, a tym samym $17050 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 341$. Chcąc liczbę 341 zastąpić przez iloczyn liczb pierwszych, zaczynamy od badania jej podzielności przez 5. Przez 5 jest niepodzielna, bo się kończy na 1. Dzielimy ¹⁾ 341 przez 7 (na stronie); otrzymujemy resztę 5, więc ta liczba nie jest podzielna przez 7. Przez 11; tu $41+3=44$ (albo: $1+3=4$; $4-4=0$), więc nasza liczba jest podzielna przez 11. Dzielimy:

$$\begin{array}{r|l} 341 & 11 \\ 31 & \end{array}$$

więc $341 = 11 \cdot 31$ i $17050 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31$. Otrzymała liczba 31 jest pierwszą (bo jest mniejsza od 6.6 i nie jest podzielna przez 2, 3, 5; § 12, us. 8). Ostatnie zatym wyrażenie liczby jest jej rozkładem na czynniki pierwsze.

Przyglądając się temu postępowaniu, łatwo dostrzeżemy, że możemy je łącznie tak przedstawić:

$$\begin{array}{r|l} 17050 & 2 \\ 8825 & 5 \\ 1705 & 5 \\ 341 & 11 \\ 31 & \end{array} \quad 17050 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31.$$

Aby liczbę rozłożyć na czynniki pierwsze, należy naprzód znaleźć tę najmniejszą z liczb pierwszych, przez którą dana liczba jest podzielna; uskutecznić dzielenie przez tę liczbę i, jeżeli ten iloraz nie jest liczbą pierwszą,

¹⁾ Albo (§ 13, us. 15): $34 - 2 \cdot 1 = 32$ jest niepodzielne przez 7, więc i liczba 341 jest niepodzielna przez 7.

znowu znaleźć najmniejszą z liczb pierwszych, przez którą on jest podzielny; wykonawszy to dzielenie, jeżeli nowy iloraz nie jest liczbą pierwszą, należy jeszcze znaleźć najmniejszą liczbę pierwszą, przez którą on jest podzielny, i t. d., dopóki nie otrzymamy ilorazu będącego liczbą pierwszą. Iloczyn wszystkich tych dzielników i ostatniego ilorazu przedstawia rozkład na czynniki pierwsze liczby danej.

Jeżeli dostrzegamy, że liczba jest iloczynem dwu lub więcej liczb znanych, to można postępowanie uprościć, rozkładając każdą z tych liczb oddzielnie, a iloczyn wszystkich ich czynników (us. 1) przedstawi ¹⁾ rozkład danej liczby na czynniki pierwsze. Tak np. powyższa liczba $17\ 050 = 1705 \cdot 10$,

$$\begin{array}{r|l} 10 = 2, 5; & 1705 & | & 5 \\ & 341 & | & 11 \\ & 31 & & \end{array} \quad 17\ 050 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31.$$

Podobnie np. $99\ 900 = 9 \cdot 111 \cdot 100$

$$\begin{array}{r|l} 9 = 3 \cdot 3; & 111 & | & 3 & 100 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5, \\ & 37 & & & i\ 99\ 900 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 37. \end{array}$$

Wprowadzając potęgi (§ 6, us. 39), możemy każdy czynnik raz tylko wypisać z właściwym wykładnikiem. Wtedy:

$$17\ 050 = 2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 31; \quad 99\ 900 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 37.$$

5. Chcemy znaleźć wszystkie dzielniki pewnej liczby.

Rozłożymy ją na czynniki pierwsze.

Dzielniki pierwsze liczby danej są czynnikami tego rozkładu. Gdy bowiem liczba dana jest podzielna przez liczbę pierwszą, to można ją wyrazić jako iloczyn tej liczby pierwszej przez dzielnik dopełniający, który znowu rozkładając taksamo dalej (us. 1), otrzymamy nasz ¹⁾ rozkład liczby danej na czynniki pierwsze. Do tego przeto rozkładu wchodzi ów dzielnik pierwszy liczby danej.

Co się tyczy dzielników złożonych liczby danej, to naprzód, różne czynniki pierwsze, wchodzące do rozkładu takiego dzielnika na czynniki pierwsze, jako dzielniki dzielnika liczby danej (§ 12, us. 4), są dzielnikami (pierwszymi) liczby danej; a więc znajdują się pośród czynników rozkładu liczby danej. — Każdy zaś z tych różnych czynników pierwszych dzielnika wchodzi do rozkładu liczby danej conajmniej tyle razy, ile do rozkładu dzielnika. Jeżeli np. dzielnik liczby danej w swym rozkładzie ma czynnik pierwszy 3 dwa razy, t. j. $3 \cdot 3$, to ten dzielnik może być wyrażony jako iloczyn liczby $3 \cdot 3 = 9$ przez pewną liczbę (§ 12, us. 1); liczba więc 9 jest dzielnikiem dzielnika liczby danej, a zatem jest (§ 12, us. 4) dzielnikiem liczby danej.

¹⁾ Us. 3.

Przeto i liczba dana może być wyrażona jako iloczyn 9 przez pewien dzielnik dopełniający. Gdy zaś w tym wyrażeniu liczby danej liczbę 9 zastąpimy przez 3.3, a dzielnik dopełniający przez jego rozkład na czynniki pierwsze (us. 1), to otrzymamy rozkład naszej liczby na czynniki pierwsze ¹⁾, pośród których są, conajmniej, dwa czynniki 3. Gdy więc wszystkie czynniki pierwsze, na które może być rozłożony jakikolwiek dzielnik złożony liczby danej, znajdują się pośród czynników rozkładu liczby danej, to, aby otrzymać jej dzielniki złożone, należy z czynników jej rozkładu utworzyć różne (wszystkie możliwe) iloczyny, biorąc te czynniki po dwa, po trzy i t. d. — A więc,

Aby mieć wszystkie dzielniki liczby danej, należy, rozłożywszy ją na czynniki pierwsze, a) wybrać z nich wszystkie różne, b) utworzyć z nich wszystkie różne iloczyny, biorąc te czynniki po dwa, po trzy i t. d., oraz c) dołączyć dzielnik 1 (na który rozkład liczby danej na czynniki pierwsze bezpośrednio nie naprowadza).

Gdy więc chcemy wypisać wszystkie dzielniki liczby np. 540, to możemy postąpić w następujący sposób. Rozłożywszy daną liczbę na czynniki pierwsze

$$540 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

i napisawszy dzielnik:

1,

weźmiemy, jako dzielniki, różne czynniki

pierwsze rozkładu: 2, 3, 5,

i każdy dzielnik wciąż mnożyć będziemy przez wszystkie inne czynniki rozkładu, nie mniejsze od największego z czynników już wchodzących do owego dzielnika; otrzymamy w ten sposób, jako dzielniki, wszystkie różne iloczyny, do których wejda:

po dwa czynniki rozkładu: 2.2, 2.3, 2.5,
3.3, 3.5,
po trzy czynniki rozkładu: 2.2.3, 2.2.5,
2.3.3, 2.3.5,
3.3.3, 3.3.5,
po cztery czynniki rozkładu: 2.2.3.3, 2.2.3.5,
2.3.3.3, 2.3.3.5,
3.3.3.5,
po pięć czynników rozkładu: 2.2.3.3.3, 2.2.3.3.5,
2.3.3.3.5,
sześć czynników rozkładu: 2.2.3.3.3.5.

Uskuteczniwszy zaś wskazane mnożenia, otrzymujemy wszystkie dzielniki liczby danej: 1, 2, 3, 5, 4, 6, 10, 9, ..., 270, 540.

6. Możemy inaczej tak otrzymać te dzielniki. Mamy

$$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5.$$

Uwzględniając naprzód 1 i tylko czynniki 2, mamy dzielniki

1, 2, 2²;

¹⁾ Us. 3.

Uwzględniając następnie czynniki 3, mieć będziemy dzielniki: naprzód, tylkoco wypisane (albo, inaczej mówiąc, otrzymane z tylkoco wypisanych przez pomnożenie ich przez 1), a następnie, z nich powstałe przez pomnożenie ich oddzielnie przez 3, oddzielnie przez 3^2 i oddzielnie przez 3^3 . Uwzględniając jeszcze czynnik 5, mieć będziemy dzielniki: naprzód, wszystkie dotąd otrzymane (czyli: otrzymane z dotąd wypisanych przez pomnożenie ich przez 1), a następnie, powstałe z tamtych przez pomnożenie ich przez 5. Otrzymujemy więc w ten sposób dzielniki:

1,	2,	2^2 ,
3,	2.3,	$2^2.3$,
3^2 ,	2.3^2 ,	$2^2.3^2$,
3^3 ,	2.3^3 ,	$2^2.3^3$,
5,	2.5,	$2^2.5$,
3.5,	2.3.5,	$2^2.3.5$,
$3^2.5$,	$2.3^2.5$,	$2^2.3^2.5$,
$3^3.5$,	$2.3^3.5$,	$2^2.3^3.5$.

Z tego widzimy, że wszystkie dzielniki naszój liczby mogą być przedstawione przez składniki ¹⁾ sumy, wypadłej z mnożenia (§ 6, us. 16)

$$(1 + 2 + 2^2) \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3) \cdot (1 + 5),$$

gdy każdy składnik pierwszój sumy pomnożymy przez każdy drugiej, a każdy składnik sumy tych iloczynów częściowych przez każdy składnik trzeciój sumy (i t. d., gdyby było więcej sum).

Dzielników tych będzie tyle, ile otrzymamy z pomnożenia przez siebie powiększonych o jedność wykładników wszystkich (różnych) czynników rozkładu. Tu np. mamy dzielników

$$(2 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot (1 + 1) = 24,$$

Sumę ich przedstawia oczywiście iloczyn ²⁾

$$(1 + 2 + 2^2) \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3) \cdot (1 + 5) = 1680.$$

Jeżeli liczba równa się sumie wszystkich swoich dzielników, mniejszych od niej samój ³⁾, to nazywa się liczbą doskonałą ⁴⁾. Początkowe liczby doskonałe są następujące:

¹⁾ Czyli, wyrażając się, jak w algiebrze, — przez oddzielne wyrazy tego iloczynu.

²⁾ Każda z sum, wchodzących jako czynnik do tego iloczynu, może być wyrażona jako ilorzaz z podzielenia różnicy jednakowych potęg dwu liczb, przez różnicę pierwszych potęg tychże liczb. Gdy więc wogóle, w przypuszczeniu, że a, b, c , są różnymi od siebie liczbami pierwszymi, mamy np. liczbę

$$a^m \cdot b^n \cdot c^p,$$

to suma jój

$$(m+1) \cdot (n+1) \cdot (p+1)$$

dzielników jest

$$(1+a+a^2+\dots+a^m) \cdot (1+b+b^2+\dots+b^n) \cdot (1+c+c^2+\dots+c^p) = \\ = \frac{a^{m+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{n+1}-1}{b-1} \cdot \frac{c^{p+1}-1}{c-1}.$$

³⁾ T. j. z wyłączeniem dzielnika równego liczbie danój.

⁴⁾ Euklides, ks. VII, def. 22.

$$\begin{aligned}
 6 &= 2 \cdot 3, & (1+2) \cdot (1+3) - 6 &= 1+2+3=6; \\
 28 &= 2^2 \cdot 7, & (1+2+2^2) \cdot (1+7) - 28 &= 1+2+4+7+14=28; \\
 496 &= 2^4 \cdot 31, & (1+2+2^2+2^3+2^4) \cdot (1+31) - 496 &= \\
 & & &= 1+2+4+8+16+31+62+124+248=496.
 \end{aligned}$$

Wszystkie dotąd znane liczby doskonałe dadzą się przedstawić zapomocą wzoru

$$(2^m - 1) \cdot 2^{m-1}$$

przy założeniu, że $2^m - 1$ jest liczbą pierwszą. Łatwo dowieść, że liczba, którą ten wzór przedstawia, jest doskonałą ¹⁾.

Ponieważ $2^m - 1$ jest liczbą pierwszą ²⁾, zatem suma wszystkich dzielników liczby, przedstawionej przez wzór powyższy, jest ³⁾

$$(1 + [2^m - 1]) \cdot (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{m-1}) = 2^m \cdot (2^m - 1),$$

a odejmując od niej dzielnik, równy liczbie danej, otrzymamy

$$2^m \cdot (2^m - 1) - (2^m - 1) \cdot 2^{m-1} = (2^m - 1) \cdot 2^{m-1},$$

czego należało dowieść. Liczbami więc doskonałymi ⁴⁾ są:

$$(2^2 - 1) \cdot 2 = 6; (2^3 - 1) \cdot 2^2 = 28; (2^5 - 1) \cdot 2^4 = 496; (2^7 - 1) \cdot 2^6 = 8128 \text{ it. d.}$$

Jeżeli suma wszystkich dzielników jednej liczby, od niej mniejszych, równa się drugiej liczbie, i nawzajem, to takie dwie liczby ⁵⁾ nazywają się liczbami zaprzyjaźnionymi ⁶⁾. Np.

$$220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11; (1+2+2^2) \cdot (1+5) \cdot (1+11) - 220 = 284, \text{ a}$$

$$284 = 2^2 \cdot 71; (1+2+2^2) \cdot (1+71) - 284 = 220;$$

zatem liczby 220 i 284 są ⁷⁾ parą liczb zaprzyjaźnionych. Inną parę tworzą liczby ⁸⁾

$$17296 \text{ i } 18416,$$

inną jeszcze liczby ⁹⁾

$$9363584 \text{ i } 9437056$$

i t. d. ¹⁰⁾.

¹⁾ Euklides już dowiódł tej własności, którą wysłowił (ks. IX, pod 36) w ten sposób: biorąc tyle, od 1 zaczawszy, liczb, powstających jedna z drugiej wskutek podwojenia, żeby ich suma stała się liczbą pierwszą, mieć będziemy, jako iloczyn tej sumy przez ostatnią z owych liczb, liczbę doskonałą.

²⁾ Ma więc dzielniki: 1 i $2^m - 1$.

³⁾ Mnożąc różnicę $2 - 1$ (to jest 1) przez liczbę, przedstawioną przez sumę $1 + 2 + \dots + 2^{m-1}$ (§ 6, us. 15, 14), otrzymamy $1 + 2 + \dots + 2^{m-1} = 2^m - 1$.

⁴⁾ Badaniem własności liczb doskonałych zajmował się u nas w wieku XVII Jan Brożek (Broscius). Zob. na końcu książki: Przypisek II.

⁵⁾ Można by je tak określić: dwie liczby takie, iż suma wszystkich (bez wyłączenia żadnego) dzielników każdej z nich oddzielnie jest równa sumie obu tych liczb, tworzą parę liczb zaprzyjaźnionych.

⁶⁾ Pierwszy na nie miał zwrócić uwagę Pitagoras.

⁷⁾ Ta tylko para była znana starożytnym.

⁸⁾ Tę parę ogłosił Brożek w roku 1652.

⁹⁾ Tę parę ogłosił Schooten w roku 1656.

¹⁰⁾ Zob. na końcu książki: Przypisek II.

7. Liczba jest wielokrotną każdego ze swych dzielników (§ 12, us. 3); tak np. liczba 540 jest wielokrotną każdego ze swych dzielników, np. 90, 60, 270. Inaczej możemy powiedzieć, że liczba 540 jest spólną wielokrotną liczb 90, 60, 270.

Spólną wielokrotną kilku liczb danych nazywamy liczbę, podzieloną przez każdą z liczb danych.

Dla jakichkolwiek liczb danych istnieje nieskończenie wiele spólnych wielokrotnych, gdyż, mnożąc którąkolwiek ich wielokrotną przez jakąkolwiek liczbę (§ 12, us. 3), otrzymamy również wielokrotną liczb danych (§ 12, us. 4). Jedną atoli z nich wszystkich jest najmniejszą spólną wielokrotną liczb danych.

Najmniejszą spólną wielokrotną kilku liczb danych nazywamy najmniejszą z liczb podzielnych jednocześnie przez każdą z liczb danych.

Nadal, przez skrócenie, zamiast: najmniejsza spólna wielokrotna, pisać często będziemy: nsw.

8. Jeżeli mamy znaleźć nsw-ą np. liczb 7056, 1620, 119 070, to możemy, rozłożywszy je na czynniki pierwsze,

$$7056 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7,$$

$$1620 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5,$$

$$119\,070 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7,$$

tak rozumować. Ponieważ każda z liczb danych jest dzielnikiem liczby szukanéj, więc (us. 5) wszystkie czynniki pierwsze każdej liczby wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby szukanéj. Tak np., czynników 2 wchodzi do rozkładu piérwszój liczby cztery, drugiej dwa, trzeciej jeden, więc do rozkładu liczby szukanéj wejdą cztery czynniki 2, bo gdyby ich było mniej, to nie możnaby z czynników jéj rozkładu utworzyć iloczynu, któryby przedstawiał jéj dzielnik 7056. Podobnie dostrzeżemy, że do rozkładu liczby szukanéj wejdzie pięć czynników 3, jeden czynnik 5 i dwa czynniki 7. Z czynników tego iloczynu

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 952\,560$$

można utworzyć częściowe iloczyny, które przedstawia (us. 5) liczby dane 7056, 1620, 119 070; więc ten iloczyn przedstawia spólną wielokrotną liczb danych. Przedstawia on nadto nsw-ą liczb danych, gdyż opuszczenie w nim choćby jednego któregokolwiek czynnika nie dozwoliloby na utworzenie z pozostałych czynników jednéj lub więcej liczb danych. (Tak np., gdybyśmy opuścili czynnik 2, nie moglibyśmy z pozostałych utworzyć iloczynu równego liczbie 7056; gdybyśmy zaś opuścili czynnik 5, nie utworzylibyśmy z pozostałych ani liczby 1620, ani też 119 070.) Możemy więc powiedzieć:

Aby odnaleść najmniejszą spólną wielokrotną kilku liczb danych, można, rozłożywszy je na czynniki pierwsze, każdy z czynników wziąć tyle razy, ile razy on najwięcej wchodzi do któregokolwiek z tych rozkładów,

a iloczyn tych czynników przedstawi najmniejszą spólną wielokrotną liczb danych.

(Wykonywając mnożenie wybranych czynników, należy zaczynać od większych; § 6, us. 31.)

Gdybyśmy mieli znaleźć nsw.-ą np. liczb

$$7056, 810, 1620, 119070, 11907, 90,$$

to, z uwagi, że liczby 810 i 90 są dzielnikami liczby 1620, a liczba 11907 jest dzielnikiem liczby 119070, możemy przy odszukiwaniu nsw.-ej nie zważać na te liczby 810, 90, 11907, gdyż 810 i 90, jako dzielniki liczby 1620, a 11907, jako dzielnik liczby 119070, są dzielnikami (§ 12, us. 4) spólnej wielokrotnej liczb 1620 i 119070, a więc odnaleziona nsw. liczb 7056, 1620 i 119070 jest téż nsw.-ą wszystkich danych tu sześciu liczb.

9. Jeżeli tak przedstawimy te rozkłady :

$$7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2,$$

$$1620 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5,$$

$$119070 = 2 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2,$$

to nsw. $= 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2$. A więc aby znaleźć najmniejszą spólną wielokrotną kilku liczb, można, rozłożywszy je na czynniki pierwsze, wziąć iloczyn wszystkich różnych czynników, wchodzących do owych rozkładów, nadając każdemu wykładnik największy z tych, które ów czynnik w tych rozkładach posiadał.

10. Gdy dwie liczby są pierwsze względem siebie, to ich iloczyn jest ich najmniejszą spólną wielokrotną ¹⁾, gdyż te liczby nie mają spólnego dzielnika prócz jedności; czynniki więc pierwsze, na które może się rozłożyć jedna z tych liczb, są wszystkie różne od czynników rozkładu drugiej, a więc wszystkie czynniki tak jednej, jak i drugiej z nich wejść do rozkładu nsw.-ej. Np.

$$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7; \quad 45 = 3 \cdot 3 \cdot 5;$$

$$\text{nsw.} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = (2 \cdot 2 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 5) = 28 \cdot 45.$$

Gdy więc dostrzeżemy, że dwie liczby, których nsw.-ą mamy znaleźć, są pierwsze względem siebie, to dla otrzymania ich nsw.-ej należy wprost je przez siebie pomnożyć.

Podobnie, gdy liczby dane są takie, że każde dwie z nich są pierwsze względem siebie, to ich iloczyn jest ich najmniejszą spólną wielokrotną. Wszystkie bowiem czynniki rozkładu którejkolwiek z danych liczb są różne od czynników rozkładu każdej z pozostałych. Tak więc :

$$\text{nsw. } 35, 8, 27, 121 \text{ jest } 35 \cdot 8 \cdot 27 \cdot 121.$$

Opierając się na dowiedzionym w § 14, us. 16, łatwo możemy ten przypadek sprowadzić do poprzedniego. Nsw. liczb 35 i 8, jako liczb pierwszych względem siebie, jest 35 · 8. Ten iloczyn 35 · 8, liczb pierwszych względem

¹⁾ Euklides, ks. VII, pod. 36, przyp. 1.

27, jest liczbą pierwszą względem 27; zaś nsw. dwu liczb 35.8 i 27, jako liczb pierwszych względem siebie, jest 35.8.27, i t. d.

11. Wszystkie wspólne wielokrotne liczb danych powstać mogą z ich nsw.-ej wskutek pomnożenia téj ostatniej przez pewne liczby. W rozkładzie bowiem jakiegokolwiek wspólnej wielokrotnej na czynniki pierwsze znajdują się wszystkie czynniki pierwsze rozkładu nsw.-ej (gdyż, wbraku któregośkolwiek, owa liczba nie byłaby wielokrotną jedną lub kilku liczb danych; us. 8). Innymi słowy: wspólne wielokrotne liczb danych są wielokrotnymi najmniejszej wspólnej wielokrotnej tych liczb. Albo jeszcze: *liczby podzielne przez kilka liczb są podzielne przez ich najmniejszą wspólną wielokrotną* ¹⁾. A więc np.

Liczby podzielne jednocześnie przez 2 i 3 są podzielne przez 6.

Liczby podzielne jednocześnie przez 4 i 3 są podzielne przez 12.

Liczby podzielne jednocześnie przez 3 i 5 są podzielne przez 15.

Liczby podzielne jednocześnie przez 2, 3 i 7 są podzielne przez 42 I t. d. *).

12. Ponieważ różne od 1 dzielniki liczby są (us. 5) albo oddzielnymi czynnikami rozkładu liczby na czynniki pierwsze, albo iloczynami tych czynników, przeto różne od jedności wspólne czynniki kilku liczb są albo oddzielnymi czynnikami wchodzącymi jednocześnie do wszystkich rozkładów tych liczb, albo iloczynami takich czynników. A więc największy wspólny dzielnik kilku liczb jest iloczynem wszystkich czynników, jednocześnie znajdujących się we wszystkich rozkładach liczb danych na czynniki pierwsze. Tak np., gdy

$$3150 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7,$$

$$1800 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5,$$

$$4950 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11,$$

to nsd. $= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 450$.

Aby znaleźć największy wspólny dzielnik kilku liczb, można, rozłożyćwszy je na czynniki pierwsze, wziąć iloczyn wszystkich czynników, wchodzących jednocześnie do każdego z tych rozkładów.

Jeżeli zaś te rozkłady tak przedstawimy:

$$3150 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7; \quad 1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2; \quad 4950 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11,$$

to nsd. $= 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, t. j., *aby znaleźć największy wspólny dzielnik kilku liczb, można, rozłożywszy je na czynniki pierwsze, wziąć iloczyn różnych czynników, wspólnych wszystkim rozkładom, nadając każdemu czynnikowi wykładnik najmniejszy z tych, które on w tych rozkładach posiadał.*

13. Najmniejsza wspólna wielokrotna dwu liczb: $1800 = 450 \cdot 4$ i $4950 = 450 \cdot 11$, jest (§ 7, us. 9)

¹⁾ Euklides, ks. VII, pod. 37 (por. także ks. IX, pod. 14).

*) Liczby podzielne przez 6 i 4 są podzielne przez 12; liczby podzielne przez 4 i 8 są podzielne przez 8, i t. d.

$2.2.2.3.3.5.5.11 = 450.4.11 = (450.4.450.11) : 450 = (1800.4950) : 450$,
t. j. najmniejsza wspólna wielokrotna dwu liczb równa się ich iloczynowi, podzielonemu
przez największy wspólny dzielnik tych liczb ¹⁾).

Mając więc nsd. dwu liczb, można, dla znalezienia ich nsw.-ej, pomnożyć
jedną z tych liczb przez dzielnik drugiej, dopełniający nsd. ²⁾).

Gdy mamy kilka liczb danych, to ³⁾, znalazzszy w ten sposób nsw.-ą dwu
liczb, znajdziemy ją dla liczby tylkoco otrzymanej i dla trzeciej z liczb da-
nych, i t. d.

Jeżeli więc tu nsd. odnajdywać będziemy zapomocą kolejnego dzielenia
(§ 14, us. 7), to, według powyższych wskazań, mamy możność wyznaczenia
nsw.-ej kilku liczb danych, bez roskładania ich na czynniki pierwsze.

(Zadania arytmetyczne. § 16.)

¹⁾ Można by tego wprost dowieść ogólnie przed wprowadzeniem roskładu na czyn-
niki pierwsze, opierając się na prawdach dowiedzionych w § 14, w sposób podobny do uży-
tego w § 14 us. 6 (t. j. dowodząc, że wszystkie wspólne wielokrotne liczb 1800 i 4950 są wie-
lokrotnymi liczby 450, 4, 11, i nawzajem). Szczególnym tego przypadkiem przedstawi się
własność dowiedziona tu w us. 10.

²⁾ Euklides, ks. VII, pod. 36, przyp. 2.

³⁾ Podobnie, jak w § 14, us. 10.

ROZDZIAŁ VI.

LICZBY UŁAMKOWE.

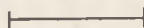
§ 16. UZUPEŁNIENIE NAUKI O DZIELENIU LICZB CAŁKOWITYCH, CZYLI: O POWSTAWANIU UŁAMKA.

1. a. Pewna osoba kupiła 23 łokcie taśmy i zapłaciła za nie 4 złote; za ile łokci zapłaciła jeden złoty?

Ponieważ ¹⁾ za 4 złote kupiła 23 łokcie, więc za jeden złoty kupiła 4 razy mniej niż 23 ł., t. j. 4-ą część 23-ch łokci; trzeba więc 23 ł. zmniejszyć 4 razy, czyli (§ 7, us. 7, 8) 23 ł. rozłożyć na 4 części równe i wyznaczyć jedną taką część. Wykonajmy to dzielenie:

$\begin{array}{r} 23 \text{ ł.} \\ -20 \\ \hline 3 \text{ ł.} \end{array}$	$\left \begin{array}{l} 4 \\ 5 \text{ ł.} \end{array} \right.$	Ta osoba zatem (§ 7, us. 10, 11) za jeden złoty kupiła 5 łokci wraz z tym ²⁾ , co wypadnie, gdy jeszcze 3 ł. : 4, t. j. gdy 3 ł. rozłożymy na 4 części równe i weźmiemy jedną taką część. Jeżeli łokieć przed-
--	---	---

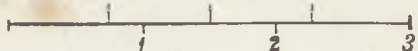
stawimy tu kręską



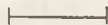
to trzy łokcie będą



Podzielmy je na 4 części równe



i weźmy jedną taką część



Owóż, tak wielka właśnie długość, wzięta razem z 5-ciu łokciami, (które to 5 łokci są ilorazem niezupełnym) przedstawi nam iloraz zupełny, t. j. będzie rozwiązaniem naszego zadania.

¹⁾ «Na początku tej części ostrzec mi przychodzi Nauczycieliów, aby szczególną na to baczność mieli, żeby ich uczniowie, nie napamięć i za samymi tylko regułami idąc, uczyli się rachunku na liczbach łamanych, ale przy każdym przykładzie, im podanym, zastanawiali się i uważali, jakby ich sam rozum do tego, a nie innego sposobu rachowania prowadził, choćby żadnych prawideł na to nie było, które zapewne nie skądinąd się wzięły, tylko z pilnego uważania i rostrząsania natury każdego w szczególności działania.» *Arytm. dla sz. nar.*, str. 106.

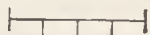
²⁾ Gdyby uczeń chciał pozostałą część ilorazu wyrazić tu w calach, to można zwrócić jego uwagę, że tu nie o to idzie, i stwierdzić to zamianą tego zadania na inne, w którymby dzielnik był np. 5. «Choćby ten łokieć kto chciał obrócić na stopy, ćwierci, lub jakiekolwiek inne mniejsze części, na które łokieć zwykł się dzielić, nie natrafiłby jednak na liczbę części łokcia oznaczającą, którąby liczba 5 zupełnie i bez reszty dzieliła.» *Arytm. dla sz. nar.*, str. 107.

Jak tę długość, którą trzeba brać razem z 5-u łóckiami dla przedstawienia ilorazu zupełnego, wyrazić bezpośrednio zapomocą naszej jednostki, łockia?

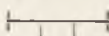
Zważmy, że jeżeli nasz łokieć



podzielimy na 4 części równe



to (ponieważ na 4 części teraz dzielimy *jeden* łokieć, a poprzednio dzieliliśmy *trzy* łockie) każda taka czwarta część łockia jest *trzy razy* mniejsza, niż czwarta część 3-ch łocki; aby więc mieć tyleż, co poprzednio, trzeba już wziąć nie jedną, ale *trzy* części czwarte ¹⁾ łockia:



Widzimy więc, że wypadek z podzielenia 3 ł.: 4 możemy wyrazić, jako 3 czwarte części łockia. Zwykle mówi się krócej: trzy-czwarte łockia. — Dzieląc liczby przez siebie, otrzymujemy liczbę, iloraz. Więc i trzy-czwarte łockia jest liczbą, a mianowicie: trzy-czwarte łockia jest liczbą mianowaną, a trzy-czwarte — liczbą oderwaną.

Liczba taka nazywa się ułamkiem.

Jak napisać tę liczbę trzy-czwarte? — Co tu mamy? 4-te części. Ile ich jest? 3. — Widzimy więc, że mamy tu części jedności, które się nazywają: 4-te; podobnie, mogłyby być i inne części jedności, które się nazywać będą: 5-te, 6-te, 11-te i t. d. Pisząc zatem naszą liczbę: trzy-czwarte, musimy nazwę tych części wyraźnie zaznaczyć. W przedstawieniu więc piśmiennym liczby: trzy-czwarte, wejdzie liczba 4, jako wskazanie nazwy, miana, tych części; tę liczbę nazywamy mianownikiem ułamka. Części tych jest tu 3. Ta liczba 3, jako wynik odbytego policzenia czwartych części jedności, nazywa się licznikiem ułamka i również wejść winna do piśmiennego przedstawienia naszej liczby trzy-czwarte, gdyż mogłaby być inna liczba, np. dwie-czwarte. Ułamek tak się pisze: nad mianownikiem piszemy licznik, oddzieliwszy je od siebie poziomą *) kręską. Zatem: trzy-czwarte napiszemy: $\frac{3}{4}$

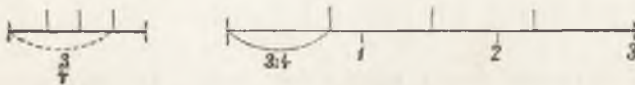
Gdy zaś mamy przeczytać napisany ułamek, to, wymówiwszy

1) Wrazie potrzeby można to jeszcze dostępniej przedstawić, układając zadania odpowiednie, np. z 3-ch łocki wstążki zrobiono 4 jednakowe kokardki; jak, mając łokieć wstążki, odciąć tyle, ile potrzeba na jedną taką kokardkę? albo: 4-ej robotnicy, mają wieczorem oprócz wynagrodzenia pieniężnego, otrzymać razem 3 bochenki chleba; jeden robotnik ukończył swą robotę w południe i chce odejść; dają mu zapłatę pieniężną, lecz chleb jeszcze nieupieczony — jest jednak bochenek dawniejszego chleba; czy można i jak z tego bochenka wydzielić robotnikowi odchodzącemu jego porcję chleba? i t. d.

*) Pisze się także często kręską pochyłą od prawej ku lewej, kładąc licznik z lewej u góry, a mianownik z prawej u dołu, jak np. $\frac{3}{4}$. Niedogodne to jest jednak przy większych rachunkach z ułamkami.

liczbę znajdującą się w liczniku (jeżeli odpowiedni liczebnik główny odmienia się przez rodzaje) w rodzaju żeńskim (gdyż domyśla się wyrazu: część, lub: części), wypowiadamy mianownik jako liczebnik porządkowy, zgadzając go z wymówionym już licznikiem. Jednak $\frac{1}{2}$ czyta się także pól, a $\frac{1}{4}$ ćwierć.

Wracając do naszego zadania, widzimy, że choć inne jest postępowanie przy dzieleniu 3 łokci przez 4, niż przy odnajdywaniu $\frac{3}{4}$ łokcia,



to jednak wypadek jest ten sam. Dlatego możemy powiedzieć, że z rozłożenia 3 ł. na 4 części równe otrzymujemy, jako jedną taką część, $\frac{3}{4}$ łokcia,

$$3 \text{ ł.} : 4 = \frac{3}{4} \text{ ł.},$$

a tym samym, że z rozłożenia 23 ł. na 4 części równe otrzymujemy, jako jedną taką część, 5 ł. + $\frac{3}{4}$ ł. Zwykle nie pisze się tu znaku +, ale wprost: 5 $\frac{3}{4}$ ł. (a mówi się: pięć i trzy-czwarte łokcia),

$$23 \text{ ł.} : 4 = 5 \frac{3}{4} \text{ ł.}$$

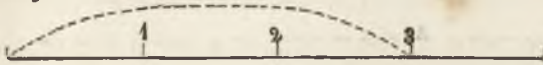
Odpowiedź. Ta osoba za złoty kupiła 5 $\frac{3}{4}$ łokcia taśmy.

b. Pewna osoba kupiła 23 łokcie taśmy, płacąc złoty za 4 łokcie; ile złotych zapłaciła za wszystkie 23 łokcie taśmy?

Ponieważ za 4 ł. płaciła złoty, więc za 23 ł. zapłaciła tyle złotych, ile razy 4 ł. mieści się w 23 ł. Trzeba zatem 23 ł. podzielić przez 4 ł., a otrzymana liczba oderwana odpowie liczbie złotych (§ 7, us. 7, 10).

Dowiedzieliśmy się, że 4 ł. mieści się w 23 ł. więcej niż 5 razy, a mniej niż 6 razy. 5 jest ilorazem niepełnym, gdyż jeszcze potrzeba 3 ł. : 4 ł. Zapłaciła zatem 5 złotych i prócz tego tyle, ile się należy za 3 ł., gdy się płaci złoty za 4 ł. Ponieważ jeden złoty należy się za 4 ł., więc za 3 ł. należy się mniej niż jeden złoty. Należć się będzie taka część złotego, jaką częścią 4-ch łokci jest 3 łokcie. Aby zaś znaleźć, jaką częścią 4-ch ł. jest 3 ł., trzeba za jednostkę, którą mamy wymierzyć 3 łokcie, przyjąć 4 łokcie. Mając więc łokieć

—|—————| nakreślimy linią, przedstawiającą 4 łokcie, t. j. naszą jednostkę



Wtedy możemy 3 ł. uważać jako powstałe z tej linii (jednostki), wskutek podzielenia jej na 4 części równe i oddzielenia 3-ch takich części. Więc 3 ł. przedstawiają $\frac{3}{4}$ tej linii, t. j. 3 ł. stanowią $\frac{3}{4}$ części 4-ch łokci (jednostki). A zatem, wymierzając 3 łokcie 4-ma łokciami, otrzymujemy (§ 1, us. 1) liczbę $\frac{3}{4}$. Widzimy przeto, że

$$3 \text{ ł.} : 4 \text{ ł.} = \frac{3}{4}.$$

Liczba $\frac{3}{4}$ oznacza tu tylko, jaką część 4-ch ł. przedstawiają 3 ł., t. j. wyniku z podzielenia 3 ł. przez 4 ł. (taksamo, jak np. z podzielenia 3 funtów przez 4 funty); jest ona niezależną od tego, w jakich jednostkach są wyrażone liczby mianowane, które dzielimy przez siebie, jest liczbą oderwaną (§ 7, us. 7) — jest to więc $\frac{3}{4}$ *jedności*. Skutkiem tego

$$23 \text{ ł.} : 4 \text{ ł.} = 5 \frac{3}{4}.$$

Jeżeli mówimy, że zapomocą dzielenia 23 ł. : 4 ł. dowiadujemy się, ile razy 4 ł. mieści się w 23 ł., to wypadnie powiedzieć: mieści się $5 \frac{3}{4}$ raza ¹⁾. Mówiliśmy zaś, że ta osoba zapłaciła tyle złotych, ile razy 4 ł. mieści się w 23 ł.; mieści się $5 \frac{3}{4}$ raza, a więc:

Odpowiedź. Ta osoba zapłaciła za kupione 23 łokcie taśmy $5 \frac{3}{4}$ złotego ²⁾. —

Oczywista już teraz, że gdy mamy dzielenie liczb oderwanych w przypadku, gdy dzielna nie jest podzielną (§ 7, us. 11) przez dzielnik, np. 23 : 4, to (objaśniając czyto jak pod a., czytóż jak pod b.) otrzymamy

$$23 : 4 = 5 \frac{3}{4}.$$

Widzimy więc, że, wskutek wprowadzenia ułamków, jesteśmy w stanie w każdym przypadku wyznaczyć dokładnie iloraz z podzielenia dwu jakichkolwiek liczb całkowitych.

2. Wyrażenia, używane w arytmetyce, powstały przy wykonywaniu zadań najprostszych, to jest takich, w których liczby tak dane, jak i wypadające z skutecznionych działań, były całkowite. Dlatego ma miejsce niekiedy niezgodność znaczenia pewnego wyrażenia w arytmetyce ze znaczeniem jego w zwykłym użyciu, a mia-

¹⁾ Mówią niekiedy niewłaściwie: $5 \frac{3}{4}$ razy (choć: $5 \frac{3}{4}$ złotego, a nie: złotych). Wszakże nie można powiedzieć półtora razy?; nie można więc uniknąć używania formy *raza*.

²⁾ Podobnie, gdy mamy np. 12 łutów wymierzyć ciężarem funta, czyli ciężarem 32 łutów, to otrzymamy taką część funta, jaką częścią 32-u łutów jest 12 łutów. Otrzymamy liczbę oderwaną $\frac{12}{32}$, czyli $\frac{3}{8}$. A więc 12 łutów jest $\frac{3}{8}$ funta (§ 1, us. 3).

nowicie, znaczenie, w jakim się je stosuje w arytmetyce, jest często obszerniejsze. Chociaż więc w powszednim użyciu wyraz «razy» stosuje się tylko do liczb całkowitych, to jednak powszechnie przyjęto, iż się go używa i wtedy, gdy wypadnie, jak np. w powyższym zadaniu, powiedzieć: 4 łokcie mieści się w 23 łokciach $5\frac{3}{4}$ raza.

3. Gdy dzielimy dwie liczby oderwane przez siebie, to zawsze, choćby dzielna nie była podzielna przez dzielnik, otrzymamy iloraz. Jeżeli zaś zadanie pewne doprowadza nas do dzielenia, to niezawsze ułamek w ilorazie przedstawia wprost zrozumiałą ¹⁾ odpowiedź na pytanie; nieraz nawet ten ułamek może wskazywać, że zadanie jest niemożliwe do rozwiązania, a niekiedy, że ono jest tylko niejasno postawione.

Weźmy np. znane zadanie o kołach zębatych. Wiadomo, że jeżeli zęby dwu kół zębatych o siebie się zaczepiają, to w czasie ruchu koło, mające zębów więcej (a więc większe), tyle razy wolniej się obraca od drugiego, ile razy liczba jego zębów jest większa od liczby zębów koła mniejszego. Zadanie: ktoś, mając koło zębate o 100 zębach, poleca dorobić dla połączenia z nim drugie koło, któreby obracało się dokładnie 8 razy prędzej; ile ono ma mieć zębów? Ponieważ to koło ma się obracać 8 razy prędzej, więc ma mieć 8 razy mniej zębów. $100 \text{ z.} : 8 = 12\frac{1}{2} \text{ z.}$ Ten ułamek wskazuje, że zadanie jest niemożliwe.

Weźmy teraz takie zadanie: Piotr i Paweł strzelali do tarczy i dali razem 10 strzałów; wiemy, że po jednym strzale Piotra Paweł daje zawsze dwa strzały; ile razy strzelał Piotr? Tu wypadłoby rozumować w ten sposób. Ponieważ 1 strzał Piotra przypada na 2 strzały Pawła, t. j. z trzech razem przez obu danych strzałów jeden jest Piotra, więc Piotr strzelił tyle razy, ile razy 10 strzałów ich obu jest większe od 3 strzałów, również przez obu danych. $10 \text{ s.} : 3 \text{ s.} = 3\frac{1}{3}$, t. j. Piotr dał $3\frac{1}{3}$ strzałów, co niema sensu. Zadanie jednak jest możliwe — nie jest ono tylko należyte wysłowione, t. j. niedomówiono w nim, jak oni zaczęli strzelać. Jeżeliby np. dodać: Paweł zaczynał i po dwu jego strzałach Piotr dał swój pierwszy strzał, albo: Paweł zaczynał i po jednym jego strzale Piotr dał swój pierwszy strzał, to 10-y strzał należał do Pawła, a Piotr strzelał $(10 - 1) \text{ s.} : 3 \text{ s.} = 3$ razy; jeżeliby zaś było powiedziane: zaczynał Piotr, to 10-y strzał należał do Piotra i Piotr strzelał $[(10 - 1) \text{ s.} : 3 \text{ s.}] + 1 = 4$ razy.

Dzielenia zaś liczb oderwanych, odpowiadające tak pierwszemu zadaniu, niemożliwemu, jak i drugiemu, niedość jasno wysłowionemu, prowadzą zawsze do dokładnych i zrozumiałych wypadków liczebnych,

$$100 : 8 = 12\frac{1}{2}, \quad 10 : 3 = 3\frac{1}{3},$$

¹⁾ Np. ułamki osób w rachunkach statystycznych.

choć otrzymywane ułamki wskazują, że te ilorazy nie odpowiadają pojęciom rzeczywistym, do których się one w owych zadaniach odnoszą.

§ 17. O LICZBACH UŁAMKOWYCH WOGÓLE.

1. Widzieliśmy (§ 16, us. 1), że ułamek $\frac{3}{4}$ powstał z jednośc, wskutek rozłożenia ję na 4 równe części i zebrania 3-ch takich części. Podobnie, $\frac{5}{8}$ powstało z rozłożenia jednośc na 8 równych części i wzięcia 5-u takich części, $\frac{1}{7}$ (jedna-siódma) powstała z rozłożenia jednośc na 7 równych części i wzięcia jednęj z nich i t. d. Powiemy więc ogólnie ¹⁾:

Ułamkiem nazywamy jednę lub więcj razem wziętych części, otrzymanych z rozłożenia jednośc na części równe. Mianownik ułamka wskazuje, na ile równych części jednośc została rozłożoną, a licznik — ile takich części wzięto.

2. W przeciwstawieniu ułamkom, jednośc i liczby, będące skupieniem samych tylko jednośc, np. 5, 24, nazywamy liczbami całkowitymi (§ 1, us. 5).

Liczbę taką, jak np. $5\frac{3}{4}$, t. j. przedstawiającą skupienie jednośc i ję części, powstałych z jednośc wskutek rozłożenia ję na części równe, nazywamy całkowitą z ułamkiem.

Tak ułamek, jak i całkowitą z ułamkiem nazywamy wogóle liczbą ułamkową.

*W arytmetyce *) mamy do czynienia z liczbami całkowitymi i ułamkowymi.*

3. Oczywiście, że jeżeli jednośc rozłożymy np. na 5 części równych i weźmiemy tych piątych części pięć, t. j. $\frac{5}{5}$, to otrzymamy znowu naszą jednośc; jest więc $1 = \frac{5}{5}$. Podobnie $1 = \frac{7}{7}$ i t. d. A więc jednośc możemy przedstawiać w postaci ułamka, którego licznik jest równy mianownikowi.

Taksamo liczbę np. 3 możemy przedstawić, jako 3 razy po 5 piątych jednośc, czyli 15 piątych, $\frac{15}{5}$, albo np. jako $3\frac{21}{7}$ i t. d. Z tego

¹⁾ Częścią jednośc jest wogóle wszelka liczba mniejsza od jednośc, lecz gdy mówimy np. 7-ma część jednośc, to rozumiemy część jednośc, którą otrzymujemy, rozkładając jednośc na 7 równych części. W arytmetyce przez «ułamek» rozumić należy tylko taką część jednośc, którą z tej jednośc otrzymać można przez rozłożenie ję na części równe i, mówiąc wogóle, przez skupienie razem pewnej ilości tych części — a nie np., część jednośc z tą jednością niespółmierną. — Już Euklides (ks. VII, def. 3 i 4) tak pojmował ułamek.

*) § 1, us. 8.

widzimy, że gdy chcemy liczbę 3 przedstawić w postaci ułamka z pewnym mianownikiem, to należy za licznik wziąć liczbę 3 razy większą od mianownika, $3 = \frac{5 \cdot 3}{5} = \frac{15}{5}$, $3 = \frac{7 \cdot 3}{7} = \frac{21}{7}$ i t. d., t. j. całkowitą można przedstawić w postaci ułamka z dowolnym mianownikiem, biorąc za jego licznik iloczyn mianownika przez tę całkowitą.

Gdy mamy całkowitą z ułamkiem, np. $5 \frac{3}{4}$, to, wyrażając całkowitą także w 4-ych częściach jednośc, mieć ich będziemy $4 \cdot 5 = 20$; zamiast więc mówić: $5 \text{ i } \frac{3}{4}$, możemy powiedzieć: dwadzieścia - czwartych i trzy-czwarte. Mamy więc tu 4-e części, a tych 4-yh części mamy 20 i 3, czyli 23; a więc

$$5 \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 5 + 3}{4} = \frac{23}{4}.$$

Wyraziliśmy tu całkowitą z ułamkiem w postaci ułamka, mającego za mianownik mianownik ułamka danego; nazywa się to włączeniem całkowitej z ułamkiem w ułamek. A więc, aby całkowitą z ułamkiem włączyć w ułamek, należy za mianownik ułamka wziąć mianownik ułamka danego, a za licznik sumę iloczynu mianownika przez całkowitą i licznika ułamka danego.

Przywykliśmy pojmować, że «ułamek» czegoś jest od tego «czegoś» mniejszy. Dlatego liczbę nie mniejszą od jednośc (t. j. jednośc, lub liczbę od jednośc większą), wyrażoną w postaci ułamka, nazywamy ułamkiem niewłaściwym. W przeciwstawieniu temu, ułamek mniejszy od jednośc nazywamy ułamkiem właściwym. Więc np. liczby $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{8}$ i t. d. są ułamkami właściwymi, gdy tymczasem liczby $\frac{7}{7}$, $\frac{128}{5}$, $\frac{44}{11}$ i t. d. są ułamkami niewłaściwymi.

Ułamek niewłaściwy ma licznik nie mniejszy od mianownika.

Widoczna, że ułamek niewłaściwy, przedstawiający czyto całkowitą z ułamkiem, czytóż całkowitą, jest liczbą ułamkową (us. 2); możemy więc wogóle powiedzieć, że: liczbą ułamkową nazywamy liczbę wyrażoną w częściach otrzymanych z rozłożenia jednośc na części równe. Liczba np. 4 jest całkowitą; dopóki jednak rozważamy ją w postaci np. $\frac{44}{11}$, dopóty jest ona liczbą ułamkową, gdyż jest wyrażona przy pomocy 11-yh części jednośc.

Gdy mówimy «całkowitą z ułamkiem», to przez ułamek rozumiemy wtedy zawsze ułamek właściwy.

4. Gdy mamy ułamek niewłaściwy, to, oczywiście, możemy go wyrazić czyto jako całkowitą, czytóż jako całkowitą z ułamkiem. Tak gdy mamy np. $\frac{49}{11}$, to tu z 49-u jedenastych, każde 11-cie przed-

stawiają 1; będzie więc tyle jedności, ile razy z 49-u jedenastych można oddzielić po 11 jedenastych, t. j. jaką (całkowitą) liczbę razy mieści się 11 w 49-u. Trzeba więc $49:11$; otrzymany iloraz niezupełny 4 wskazuje, ile w ułamku niewłaściwym $\frac{49}{11}$ jest jedności. Te 4 jedności stanowią 44 jedenastych; pozostaje więc jeszcze 5 jedenastych, $\frac{5}{11}$. Zatem

$$\frac{49}{11}; \quad \begin{array}{r} 49 \quad | \quad 11 \\ -44 \quad | \quad 4 \\ \hline 5 \end{array} \quad \frac{49}{11} = 4 \frac{4}{11}.$$

Jeżeli zaś mamy np. $\frac{44}{11}$, to podobnie, dzieląc $44:11$, otrzymujemy 4, a tu te 4 jedności stanowią właśnie 44 jedenastych, zatem $\frac{44}{11} = 4$. Takie wyrażanie ułamka niewłaściwego jako całkowitej lub jako całkowitej z ułamkiem nazywa się *wyciąganiem całkowitej z ułamka niewłaściwego*. Powiemy więc ogólnie: *aby z ułamka niewłaściwego wyciągnąć całkowitą, należy jego licznik podzielić przez mianownik; iloraz niezupełny przedstawia całkowitą, a reszta dzielną jest licznikiem ułamka o tym samym mianowniku, co mianownik ułamka danego*. Jeżeli licznik danego ułamka niewłaściwego jest podzielny przez mianownik, to iloraz jest całkowitą, którą przedstawiał dany ułamek niewłaściwy.

Zwykle, otrzymawszy skutek wykonanych działań ułamek niewłaściwy, wyciągamy z niego całkowitą, gdyż przez to wyraźniej pojmujemy wielkość tej liczby.

5. Zupełnie w ten sam sposób, jak w § 16, us. 1, moglibyśmy tu wprost dowieść, że jakiegokolwiek dzielenie dwu liczb doprowadza nas do rezultatu, który możemy przedstawić zapomocą ułamka, mającego dzielnik jako mianownik, a dzielną jako licznik.

Tak np., wypadek z dzielenia $49:5$, w tym razie, gdy nam idzie o to, aby wyznaczyć 5-tą część liczby 49, t. j. gdy mamy liczbę 49 rozłożyć na 5 części równych i wyznaczyć jedną taką część, jest ten sam, co wtedy, gdy tylko 1 rozłożymy na 5 równych części, lecz za to weźmiemy takich części 49. Więc tu $49:5 = \frac{49}{5}$.

Podobnie, chciąc przez dzielenie $49:5$ dowiedzieć się, ile razy 5 mieści się w 49-u, wychodzi na to samo, co chciąc wymierzyć liczbę 49 liczbą 5, t. j. wyznaczyć ile w liczbie 49 jest jednostek równych liczbie 5 i ile prócz tego jest 5-ych części tej jednostki (§ 16, us. 1, b.), albo: ile liczba 49 zawiera w sobie 5-ych części jednostki, za którą przyjmujemy liczbę 5. I tu więc $49:5 = \frac{49}{5}$.

Dlatego, aby oznaczyć, że mamy np. liczbę 49 podzielić przez 5, można przedstawiać to albo (§ 7, us. 4):

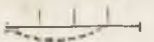
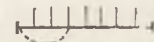
$$49 : 5,$$

albotóż

$$\frac{49}{5}.$$

Zauważymy tu jeszcze, że gdy mamy dzielenie liczb mianowanych, np. $49 \text{ zł.} : 5$, to podobnie możemy je przedstawić tak: $\frac{49 \text{ zł.}}{5}$; albo, z uwagi, że otrzymamy tu wypadek mianowany (§ 7, us. 7), t. j., że otrzymamy złote, których będzie $\frac{49}{5}$, możemy także tak napisać: $\frac{49}{5} \text{ zł.}$ Taksamo dzielenie $49 \text{ zł.} : 5 \text{ zł.}$ możemy przedstawić $\frac{49 \text{ zł.}}{5 \text{ zł.}}$, albo, z uwagi, że tu otrzymamy liczbę oderwaną, wprost: $\frac{49}{5}$.

Z tego wszystkiego wypada, że *na ułamek możemy patrzeć, jako na wskazane dzielenie, w którym dzielną jest licznik, dzielnikiem mianownik, a ilorazem wartość ułamka* (t. j. liczba, którą jest ten ułamek).

6. Ponieważ mianownik ułamka oznacza, na ile części równych jedność została podzielona, więc w razie, gdy, nie zmieniając licznika, mianownik powiększamy, powiększa się ilość części, na które jedność jest podzielona, a tym samym, oddzielne części stają się mniejsze. Ze zaś tych części bierzemy tyleż, co poprzednio (bo licznika nie zmieniamy), więc wartość ułamka staje się mniejszą — i tyle razy mniejszą, ile razy mianownik stał się większym. Tak np., gdy, mając pewną jedność, wyznaczymy ułamek $\frac{3}{4}$ , a następnie tylko jego mianownik powiększymy np. 2 razy, to ułamek $\frac{3}{8}$  będzie od poprzedniego 2 razy mniejszy. Również np. od ułamka $\frac{3}{4}$ ułamek $\frac{3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$ jest 5 razy mniejszy. A więc:

a. *Jeżeli, nie zmieniając licznika ułamka, powiększamy jego mianownik pewną liczbę razy, to wskutek tego wartość ułamka tyleż razy się zmniejsza.*

Podobnie znajdziemy, że jeżeli w danym ułamku tylko jego mianownik zmniejszymy, wówczas części jedności staną się większe; a więc, biorąc ich tyleż, ile ich było w danym ułamku, otrzymujemy ułamek, którego wartość jest od poprzedniego większa — i większa tyleż razy, ile razy części jedności stały się większe, t. j. ile razy zmniejszyliśmy mianownik. Zatem od ułamka $\frac{3}{20}$ ułamek $\frac{3}{20 : 5} = \frac{3}{4}$ jest 5 razy większy, t. j.

b. *Jeżeli, nie zmieniając licznika ułamka, zmniejszamy jego mianownik pewną liczbę razy, to wskutek tego wartość ułamka tyleż razy się powiększa.*

Jeżeli mianownika ułamka nie zmieniamy, a jego licznik powiększamy, to oczywiście ilość takich samych części ułamka staje się większą i wartość ułamka powiększa się tyle razy, ile razy więcej mamy teraz takich części, t. j. ile razy powiększamy licznik. Np. od ułamka $\frac{3}{17}$ ułamek $\frac{3 \cdot 5}{17}$ jest 5 razy większy. A więc:

c. *Jeżeli, nie zmieniając mianownika ułamka, powiększamy jego licznik pewną liczbę razy, to wskutek tego wartość ułamka tyleż razy się powiększa.*

Taksamo znajdziemy, że np. od ułamka $\frac{8}{15}$ ułamek $\frac{8 \cdot 4}{15} = \frac{2}{15}$ jest 4 razy mniejszy, t. j.

d. *Jeżeli, nie zmieniając mianownika ułamka, zmniejszamy jego licznik pewną liczbę razy, to wskutek tego wartość ułamka tyleż razy się zmniejsza.*

Zestawiając z sobą własności a. i c., widzimy, że jeżeli jednocześnie licznik i mianownik ułamka powiększymy jednakową liczbę razy, to wartość ułamka tyle razy się powiększy wskutek powiększenia się licznika, ile razy się zmniejszy wskutek powiększenia się mianownika, a więc (por. § 7, us. 9) zmianie nie ulegnie. Np. $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$. Podobnie z zestawienia własności b. i d. wypadnie, że np. $\frac{15}{35} = \frac{15 : 5}{35 : 5} = \frac{3}{7}$. A zatem:

e. *Jeżeli licznik i mianownik ułamka albo jednocześnie powiększamy, albo jednocześnie zmniejszamy jednakową liczbę razy, to wartość ułamka się nie zmienia.*

7. Ponieważ możemy ułamek uważać jako wskazane dzielenie (us. 5), więc w powyższych (us. 6) własnościach możemy, zamiast:

licznika, mianownika, wartości ułamka,

rozumieć odpowiednio:

dzielną, dzielnik, iloraz.

Zauważymy jednak, że te własności wyprowadziliśmy tu (us. 6) dla wszelkich ułamków; możemy je zatem odnieść do przypadku, gdy dzielna (licznik) nie jest podzielna przez dzielnik (mianownik), a nawet gdy jest od niego mniejszą, wyrażając wtedy iloraz zupełny tego dzielenia (§ 16, us. 1; § 17, us. 4) odpowiednio przez całkowitą z ułamkiem, lub przez ułamek właściwy. Z tego wypada, że własności, wypowiedziane w us. 7-ym § 15-go, są własnościami ogólnymi ¹⁾, choć

¹⁾ Zawsze jednak, gdy tu (us. 6, 7) mówimy o zmniejszeniu pewną liczbę razy (dzielenia przez pewną liczbę), czyto dzielnej (licznika) czy też dzielnika (mianownika), przyjmujemy na uwagę tylko przypadek, kiedy odpowiednie dzielenie uskutecznia się bez reszty. Ogólniej w § 20, us. 6, 7.

tam mogliśmy je wyprowadzić tylko dla przypadku, gdy dzielna była podzielna przez dzielnik ¹⁾).

8. Wiemy, że wartość ułamka się nie zmienia, gdy jego licznik i mianownik mnożymy przez tę samą liczbę. Jeżeli więc mamy ułamek np. $\frac{36}{48}$, to, mnożąc licznik i mianownik jednocześnie kolejno przez 2, 3, 4, 5 i t. d., otrzymujemy ułamki

$$\frac{72}{96}, \frac{108}{144}, \frac{144}{192}, \frac{180}{240} \text{ i t. d.}$$

Wszystkie nieskończenie wiele ułamków, któreby można w ten sposób otrzymać, posiadają tę samą wartość, przedstawiają tę samą liczbę. Są to więc różne postaci tej samej liczby, tego samego ułamka. Tę samą jednak liczbę, którą przedstawiliśmy tu w postaciach $\frac{36}{48}$, $\frac{72}{96}$ i t. d., można jeszcze inaczej przedstawić. Wszakże możemy licznik i mianownik ułamka $\frac{36}{48}$ dzielić przez tę samą liczbę, mianowicie przez ich wspólne dzielniki 2, 3, 4, 6, 12; otrzymamy więc jeszcze postaci tej samej liczby

$$\frac{18}{24}, \frac{12}{16}, \frac{9}{12}, \frac{6}{8}, \frac{3}{4}.$$

I tak jednak nie wyczerpaliśmy jeszcze wszystkich postaci tej liczby, bo np. z postaci $\frac{18}{24}$ (którą otrzymaliśmy dzieląc licznik i mianownik danego ułamka $\frac{36}{48}$ przez 2), mnożąc jej licznik i mianownik przez liczby pierwsze względem 2, np. przez 3, 5, 7, 11, 13, 15 i t. d., otrzymamy znowu odmienne postaci tej samej liczby, mianowicie

$$\frac{54}{72}, \frac{90}{120}, \frac{126}{168} \text{ i t. d.};$$

podobnie z postaci $\frac{12}{16}$ otrzymamy jeszcze inne postaci tej samej liczby, mnożąc licznik i mianownik przez różne liczby pierwsze względem 3, i t. d.

Z tego widzimy, jak rozmaicie powstają różne postaci ułamka z takiej jego postaci, jak np. $\frac{36}{48}$. Czy nie ma postaci, z którejby wszystkie inne powstać mogły w sposób jednostajny? (us. 10.)

9. Gdy licznik i mianownik ułamka podzielimy przez ich wspólny dzielnik, to otrzymamy w ten sposób inną postać ułamka, wyrażoną przy pomocy liczb mniejszych, a więc prostszą. Tak np., dzieląc licznik

¹⁾ Z tego bezpośrednio wypada, że własności us. 6-go nie mogą być uważane jako prosty wynik z wyprowadzonych w nauce o dzieleniu liczb całkowitych własności us. 15-go w § 7-ym, gdyż są ogólniejsze. Często jednak na to nie zważają.

i mianownik ułamka $\frac{90}{120}$ przez ich spólny dzielnik, np. 10, otrzymamy postać prostszą $\frac{9}{12}$. Takie postępowanie, prowadzące do zastąpienia danej postaci ułamka przez inną, wyrażoną przy pomocy liczb mniejszych, nazywa się skracaniem ułamka. Zatem *skrócić ułamek jest to wyrazić go w innej postaci zapomocą liczb mniejszych*. I mówi się: skracając ułamek $\frac{90}{120}$ przez 10 możemy go zastąpić przez $\frac{9}{10}$.

Skróciwszy ułamek $\frac{90}{120}$ przez 10 otrzymaliśmy $\frac{9}{12}$. Lecz i w tym ułamku licznik i mianownik mają jeszcze spólny dzielnik 3; możemy go więc jeszcze skrócić przez 3; otrzymamy $\frac{3}{4}$. Tę postać nie możemy już zastąpić prostszą, bo licznik i mianownik są liczbami pierwszymi względem siebie. Ta więc postać nie może być już dalej skracaną — jest postacią nieskracalną. Oczywiście, z ułamka danego $\frac{90}{120}$ moglibyśmy wprost otrzymać postać jego nieskracalną, podzieliwszy jego licznik i mianownik przez ich największy spólny dzielnik 30 (§ 14, us. 12).

Ponieważ postać nieskracalna ułamka jest jego najprostszą postacią, więc (§ 1, us. 9), jeżeli tylko niema wyraźnej potrzeby przedstawiania go w pewnej szczególniej postaci (por. us. 13), zawsze powinniśmy go doprowadzić do postaci nieskracalnej i w takiej go w rachunkach podawać. Tak np. jeżeli po rozwiązaniu jakiegoś zadania w ostatecznym wypadku otrzymujemy ułamek, to zawsze powinniśmy go przedstawić w postaci nieskracalnej.

Aby ułamek skrócić, należy odnaléść spólny dzielnik licznika i mianownika i przezń je podzielić. Pomocnymi nam w tym są cechy podzielności (§ 13; § 15, us. 11).

Aby dany ułamek doprowadzić do postaci nieskracalnej, należy dla licznika i mianownika odnaléść największy spólny dzielnik i przezń je podzielić. Można to niekiedy osiągnąć, korzystając z cech podzielności i stopniowo skracając ułamek. Np.

$$\frac{630}{840} = \frac{63}{84} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}, \quad \frac{396}{352} = \frac{99}{88} = \frac{9}{8}.$$

W niektórych jednak razach koniecznie trzeba się ucieć do odszukania wprost nsd.-a licznika i mianownika (przez kolejne dzielenie; § 14, us. 7). Tak np., gdy mamy ułamek $\frac{50803}{106636}$, to znane cechy podzielności nie dają nam wskazówki, czy licznik i mianownik mają spólny dzielnik, czytóż są liczbami pierwszymi względem siebie, a tym samym, czy ten ułamek jest już w postaci nieskracalnej. Aby stanowczo na to odpowiedzieć, trzeba poszukiwać nsd.-a. Jakoż, znaj-

dziemy, że jest nim liczba 503, przez którą skróciwszy, otrzymamy postać nieskracalną $\frac{101}{212}$.

Jeżeli mamy np. ułamek $\frac{12}{3}$, to, skróciwszy go przez 3, mieć będziemy $\frac{12}{3} = \frac{4}{1} = 4$ (us. 3), t. j. gdy wskutek działań wykonywanych wypada nam ułamek o mianowniku 1, to możemy odrazu pisać jako całkowitą licznik tego ułamka. Z tego jeszcze wypada, że, nawzajem, *zawsze możemy uważać całkowitą jako ułamek o mianowniku równym jedności.*

10. Zastanówmy się teraz nanowo nad otrzymywanymi w us. 8-m różnymi postaciami ułamka $\frac{36}{48}$. Nieskracalną postacią tego ułamka jest postać $\frac{3}{4}$, otrzymana wskutek podzielenia licznika i mianownika przez nsd. 12. Nawzajem więc, postać $\frac{34}{48}$ powstaje z postaci $\frac{3}{4}$ przez pomnożenie jęj licznika i mianownika przez 12. Wszystkie zatym postaci, które powstały z postaci $\frac{36}{48}$ przez pomnożenie licznika i mianownika kolejno przez 2, 3, 4, 5 i t. d., powstają z postaci nieskracalnej wskutek pomnożenia jęj licznika i mianownika przez 12. 2, 12. 3, 12. 4 i t. d. — Postać $\frac{18}{24}$ powstała z postaci $\frac{36}{48}$ wskutek skrócenia przez 2, dzielnik liczby 12 (§ 14, us. 9); powstaje więc ona z postaci $\frac{3}{4}$ przez pomnożenie jęj licznika i mianownika przez dzielnik liczby 12, dopełniający dzielnik 2. Te zatym postaci, które powstają z postaci $\frac{18}{24}$ przez pomnożenie jęj licznika i mianownika przez liczby 3, 5, 7, 11, 15 i t. d., powstają z postaci nieskracalnej $\frac{3}{4}$ przez pomnożenie jęj licznika i mianownika przez 6. 3, 6. 5, 6. 7, 6. 11, 6. 15 i t. d. — I t. d. — Widzimy więc, że *każda postać ułamka powstaje z jego postaci nieskracalnej wskutek pomnożenia jęj licznika i mianownika przez tęż samę liczbę.*

To, cośmy tu dotąd mówili, opiera się na tym, że jeżeli dwie liczby mnożymy lub dzielimy przez pewne też same liczby, to skutkiem tego ich nsd. zostaje przez też liczby odpowiednio pomnożony lub podzielony (§ 14, us. 11). A więc, mając postaci ułamka, z których jedne powstają z innych wskutek pomnożenia lub podzielenia licznika i mianownika przez pewne też same liczby, dojdziemy zawsze z któręjkolwiek z tych postaci, wskutek podzielenia jęj licznika i mianownika przez ich nsd., do tęj samęj postaci nieskracalnej tego ułamka, gdyż zawsze w liczniku i mianowniku otrzymamy też same dwie liczby pierwsze względem siebie (§ 14, us. 11, 12).

Należy jeszcze dla większej ścisłości udowodnić, że jakiegokolwiek wogóle są dane postaci tego samego ułamka, to, dzieląc licznik i mianownik każdej z tych postaci przez ich nsd., otrzymujemy tę samą postać nieskracalną. Inny mi słowy: należy udowodnić, że jeżeli dwa ułamki w postaciach nieskracalnych są równe ¹⁾, to ich liczniki, jak również ich mianowniki są tymiż samymi liczbami. Jakoż, przypuśćmy, że ułamek w postaci nieskracalnej np. $\frac{5}{8}$ jest równy innemu ułamkowi w postaci nieskracalnej: $\frac{l}{m}$. Przyjmujemy więc, że tak liczby 5 i 8, jak i liczby (całkowite) l i m są pierwsze względem siebie i że $\frac{l}{m} = \frac{5}{8}$. Te ułamki są równe, t. j. przedstawiają tę samą liczbę; gdy zatem każdy z nich powiększymy m razy, to otrzymamy również dwa wyrażenia pewnej téj saméj liczby, a więc równe:

$$l = \frac{5 \cdot m}{8}.$$

Ponieważ liczba l jest całkowitą, więc iloczyn $5 \cdot m$ jest podzielny przez 8. Gdy zaś 8 jest liczbą pierwszą względem czynnika 5, zatem czynnik pozostały, m , jest podzielny przez 8 (§ 14, us. 13). Jeżeli przeto dzielnik liczby m , dopełniający jéj dzielnik 8, nazwiemy n , to

$$m = 8 \cdot n \quad \text{i} \quad l = \frac{5 \cdot 8 \cdot n}{8} = 5 \cdot n,$$

t. j. liczby l i m mają spólny dzielnik n . Ponieważ zaś przyjęliśmy, że liczby l i m są pierwsze względem siebie, zatem ich spólny dzielnik $n = 1$, wskutek czego

$$m = 8 \quad \text{i} \quad l = 5$$

— istnieje więc jedna tylko postać nieskracalna ułamka.

Ponieważ każda postać ułamka powstaje z jego postaci nieskracalnej wskutek pomnożenia jéj licznika i mianownika przez odpowiednią tę samą liczbę, a licznik i mianownik mnożyć możemy przez jakiegokolwiek liczby, zatem ogólnie:

Różne postaci ułamka powstają z jego postaci nieskracalnej wskutek jednoczesnego pomnożenia jéj licznika i mianownika przez oddzielne liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6 i t. d., t. j. przez oddzielne liczby z szeregu liczb naturalnych. Ze zaś ten szereg liczb jest nieograniczony, zatem: istnieje nieskończenie wiele postaci każdego ułamka.

11. Ponieważ każda postać ułamka powstaje z postaci nieskracalnej wskutek pomnożenia jéj licznika i mianownika przez tę samą liczbę, zatem możemy powiedzieć, że licznik i mianownik jakiegokolwiek postaci ułamka są «równokrotne» odpowiednio licznika i mianownika jego postaci nieskracalnej.

Tak np. $\frac{12}{15} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{4+4+4}{5+5+5}$.

¹⁾ T. j. przedstawiają tę samą liczbę.

Gdy więc, mając np. dane dwie postaci tegoż ułamka, np. $\frac{20}{25}$ i $\frac{12}{15}$, utworzymy ułamek, którego licznikiem jest suma liczników tych postaci, a mianownikiem suma ich mianowników, $\frac{20+12}{25+15}$, lub ułamek, którego licznikiem jest różnica ich liczników, a mianownikiem różnica ich mianowników, $\frac{20-12}{25-15}$, to oczywiście licznik i mianownik każdego z takich ułamków są również równo-
krotnymi odpowiednio licznika i mianownika nieskracalnej postaci $\frac{4}{5}$ tegoż ułamka. A więc: takie ułamki są także postaciami tegoż samego ułamka, co dane postaci. Możemy to tak wyrazić: jeżeli np.

$$\frac{20}{25} = \frac{12}{15},$$

to

$$\frac{20+12}{25+15} = \frac{20}{25} = \frac{12}{15} \quad \text{i} \quad \frac{20-12}{25-15} = \frac{20}{25} = \frac{12}{15}.$$

12. Jeżeli licznik i mianownik ułamka (właściwego) podzielimy przez licznik, to w liczniku otrzymamy 1, w mianowniku zaś całkowitą z ułamkiem. Dzielać np. licznik i mianownik ułamka $\frac{35}{1136}$ przez 35, otrzymamy w liczniku 1, a w mianowniku $32\frac{16}{35}$, czyli $32 + \frac{16}{35}$. Mamy więc

$$\frac{35}{1136} = \frac{1}{32 + \frac{16}{35}}.$$

Jeżeli postąpimy taksamo z ułamkiem $\frac{16}{35}$, to otrzymamy

$$\frac{16}{35} = \frac{1}{2 + \frac{3}{16}},$$

co pisząc w wyrażeniu poprzednim, zamiast $\frac{16}{35}$, mieć będziemy

$$\frac{35}{1136} = \frac{1}{32 + \frac{1}{2 + \frac{3}{16}}}.$$

Postępując dalej podobnie, mamy jeszcze $\frac{3}{16} = \frac{1}{5 + \frac{1}{3}}$, a tym samym

$$\frac{35}{1136} = \frac{1}{32 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3}}}}.$$

Taka, jak powyższa postać ułamka nazywa się ułamkiem ciągłym i mówimy, żeśmy ułamek $\frac{35}{1136}$ «rozwinęli na ułamek ciągły». — Widzimy, że tu, dla otrzymania ułamka ciągłego, przedstawiającego ułamek $\frac{35}{1136}$, należało po-

dzielić 1136 przez 35, następnie 35 przez resztę poprzedniego dzielenia 16, a później 16 przez resztę poprzedzającego dzielenia 3, t. j. postępować tak, jak przy wyszukiwaniu największego wspólnego dzielnika liczb 1136 i 35 [por. § 14, us. 7, b.), a stopniowo w ten sposób otrzymywane ilorazy niepełne 32, 2, 5, 3 wypisywać jako części całkowite mianowników kolejnych.

Badanie własności ułamków ciągłych, tak podobnych powyższemu, jak i ogólniejszych, wchodzi w zakres algebry ¹⁾.

13. Mając danych kilka ułamków, np. $\frac{5}{12}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{11}{18}$, zważmy, że pierwsza z tych liczb jest wyrażona w 12-ych, druga w 16-ych, trzecia w 18-ych częściach jedności. Jeżelibyśmy zaś chcieli wyrazić wszystkie te liczby w jednakowych częściach jedności, to należałoby naszym ułamkom nadać takie postaci, aby ich mianowniki były tą samą liczbą; mianownik bowiem wskazuje, na ile — a więc i na jakie — części jedność została podzielona. Nazywa się to sprowadzaniem ułamków do wspólnego mianownika. Zatem

Sprowadzić ułamki do wspólnego mianownika jestto wyrazić je w postaciach, mających tę samą liczbę w mianowniku.

Zwykle każdy z ułamków, które mamy sprowadzić do wspólnego mianownika, mamy dany w postaci nieskracalnej; jeżeli zaś nie, to wyrażamy go w niej uprzednio. Jakakolwiek zresztą jest postać każdego z danych ułamków, to możemy z niej wyprowadzić inne, mnożąc jej licznik i mianownik przez też same liczby. Aby więc dane ułamki wyrazić w postaciach, mających tę samą liczbę w mianowniku, należy licznik i mianownik każdego z danych ułamków pomnożyć przez tak dobraną liczbę, iżby mianowniki otrzymanych stąd postaci wszystkich ułamków były tą samą liczbą. Ten zatem wspólny mianownik, jako powstający z każdego z mianowników, wskutek pomnożenia go przez pewną liczbę (a więc przezeń podzielny), jest wspólną wielokrotną (§ 15, us. 7) mianowników ułamków danych. Tak np., aby ułamki $\frac{5}{12}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{11}{18}$ sprowadzić do wspólnego mianownika, należy naprzód wyznaczyć wspólną wielokrotną mianowników 12, 16, 18. Moglibyśmy za-

¹⁾ W § 20, us. 5 będzie tylko wzmianka najelementarniejsza o zadaniu odwrotnym powyższemu, t. j. o tym, jak, mając podobny ułamek ciągły, otrzymać ułamek, którego rozwinięciem jest ten właśnie ułamek ciągły.

[Wprawdzie ułamki ciągłe skończone (jako wyrażenia skończone ułamków zwyczajnych) mają cechy, kwalifikujące je do tego, aby ich własności były rostrząsane w arytmetyce, to jednak, z uwagi, że ważność teorii ułamków ciągłych polega na zastosowaniu jej wyników do liczb niewymiernych, a tym samym nieliczne możliwe zastosowania jej do rozwinięć ułamków zwyczajnych, są zgoła podrzędne; jak również z uwagi, że przy wykładzie w arytmetyce własności ułamków ciągłych najważniejszej, określającej prawo tworzenia stopniowego ułamków zbliżonych (reduktów), udowodnić nie można — słusznie czynią rozmaici poważni autorowie, wyłączając z zakresu arytmetyki jakiegokolwiek badanie własności ułamków ciągłych.]

danie nasze rozwiązać, biorąc jakąkolwiek spólną wielokrotną — możemy jednak *najprościej* *) je rozwiązać, biorąc najmniejszą spólną wielokrotną mianowników. Znajdziemy, jako nsw.-ą (§ 15, us. 8) mianowników 12, 16, 18 liczbę 144; ta więc liczba będzie spólnym mianownikiem. Należy zatem dane ułamki $\frac{5}{12}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{11}{18}$ wyrazić w postaciach, mających za mianownik liczbę 144, czyli licznik i mianownik każdego z tych ułamków pomnożyć przez taką liczbę, iżby w mianowniku znalazła się liczba 144, a więc np. licznik i mianownik ułamka $\frac{9}{16}$ pomnożyć przez dzielnik liczby 144, dopełniający jęj dzielnik 16 (t. j. przez iloraz z podzielenia mianownika spólnego przez mianownik ułamka). A więc:

$$\begin{array}{l} \frac{5}{12}, \frac{9}{16}, \frac{11}{18}; \\ 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ 16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ \hline 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 144; \\ 144 : 12 = 12, \quad \frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 12}{144} = \frac{60}{144}; \\ 144 : 16 = 9, \quad \frac{9}{16} = \frac{9 \cdot 9}{144} = \frac{81}{144}; \\ 144 : 18 = 8, \quad \frac{11}{18} = \frac{11 \cdot 8}{144} = \frac{88}{144}. \end{array}$$

Aby dane ułamki sprowadzić do spólnego mianownika, (wyraziwszy je w postaciach nieskracalnych) odnajdujemy najmniejszą spólną wielokrotną ich mianowników, którą przyjmujemy za mianownik każdego ułamka, a za jego licznik bierzemy iloczyn poprzedniego licznika przez iloraz z podzielenia spólnego mianownika przez mianownik poprzedni tego ułamka.

W przypadku, gdy mianowniki ułamków danych są takimi liczbami, iż każda jest pierwszą względem każdej z pozostałych, to ich nsw.-ą jest ich iloczyn (§ 15, us. 10), a tym samym licznikiem postaci danego ułamka, mającęj tę spólną wielokrotną za mianownik, będzie iloczyn jego licznika i mianowników wszystkich ułamków pozostałych. Np.

$$\begin{array}{l} \frac{3}{8}, \frac{4}{9}, \frac{6}{7}, \frac{9}{25}; \\ \text{nsw. liczb } 8, 9, 7, 25 \text{ jest } 8 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 25 = 12600; \text{ zatem:} \end{array}$$

*) Dlatego właśnie wyrażamy uprzednio każdy z danych ułamków w postaci nieskracalnęj.

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 25}{12600} = \frac{4725}{12600}, \quad \frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 25}{12600} = \frac{5600}{12600} \text{ i t. d.}$$

Podobnie, sprowadzając np. $\frac{3}{8}$ i $\frac{4}{9}$ do spólnego mianownika, otrzymamy

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 9}{72} = \frac{27}{72}, \quad \frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 8}{72} = \frac{32}{72}.$$

14. Wypada nam niekiedy oznaczyć, który z dwu danych ułamków jest większy, t. j. dwa dane ułamki z sobą porównać.

a. Jeżeli dane dwa ułamki mają jednakowe mianowniki, to oczywiście ten z nich jest większy, w którym większą jest ilość tych samych części jedności, to jest którego licznik jest większy. Tak np. z ułamków $\frac{5}{9}$ i $\frac{7}{9}$ drugi jest większy. Na oznaczenie, że jedna liczba jest większa od drugiej używamy znaku $>$, pisząc liczbę większą po stronie roztwartości tego znaku. Napiszemy więc $\frac{7}{9} > \frac{5}{9}$, co czytamy: $\frac{7}{9}$ większa od $\frac{5}{9}$; albowiem napiszemy: $\frac{5}{9} < \frac{7}{9}$, co przeczytamy: $\frac{5}{9}$ mniejsza od $\frac{7}{9}$.

b. Jeżeli dane dwa ułamki mają jednakowe liczniki, to, oczywiście, ten z nich jest większy, który przedstawia tę samą ilość większych części jedności; części zaś jedności są tym większe, im na mniej części jedność została podzieloną, czyli im mianownik ułamka jest mniejszy. Z dwu więc np. ułamków $\frac{5}{8}$ i $\frac{5}{11}$ jest $\frac{5}{8} > \frac{5}{11}$.

c. Jeżeli zaś mamy dane dwa ułamki o różnych tak licznikach, jak i mianownikach, to, aby wyznaczyć, który z nich jest większy, sprowadzamy je do spólnego mianownika *), a tym samym ten przypadek do przypadku a. Tak np. $\frac{5}{12}$ i $\frac{7}{15}$; tu $\frac{5}{12} = \frac{25}{60}$, $\frac{7}{15} = \frac{28}{60}$, a więc $\frac{28}{60} > \frac{25}{60}$, czyli $\frac{7}{15} > \frac{5}{12}$. Jeżeliby tu zaś z dwu liczb jedna była ułamkiem niewłaściwym, a druga ułamkiem właściwym, to pierwsza oczywiście jest większą. Tak np. $\frac{9}{8} > \frac{356}{378}$.

Gdy, mając kilka ułamków, chcemy je uporządkować według ich wielkości, zaczynając np. od największego, a ułamki te nie mają (wszystkie) ani jednakowego mianownika, ani jednakowego licznika, to należy je uprzednio sprowadzić do spólnego mianownika. Trzeba to zrobić nawet w przypadku, kiedy mamy dane np. takie ułamki:

*) Niekiedy dogodniej sprowadzić je do spólnego licznika, co się odbywa podobnie jak sprowadzanie do spólnego mianownika. Np.

$$\frac{4}{237} \text{ i } \frac{6}{355}; \quad \frac{4}{237} = \frac{12}{237 \cdot 3} = \frac{12}{711}; \quad \frac{6}{355} = \frac{12}{355 \cdot 2} = \frac{12}{710}; \quad \text{więc } \frac{4}{237} < \frac{6}{355}.$$

$\frac{7}{12}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{8}{13}$, gdyż tu nie widać, który z dwu ułamków $\frac{8}{15}$ i $\frac{7}{12}$, który z dwu ułamków $\frac{7}{12}$ i $\frac{8}{13}$, jak również, który z dwu ułamków $\frac{7}{15}$ i $\frac{8}{13}$ jest większy. Sprowadziwszy je tedy do wspólnego mianownika, mamy

$$\frac{7}{12} = \frac{455}{780}, \quad \frac{7}{15} = \frac{364}{780}, \quad \frac{8}{15} = \frac{416}{780}, \quad \frac{8}{13} = \frac{480}{780};$$

więc $\frac{8}{13} > \frac{7}{12} > \frac{8}{15} > \frac{7}{15}$.

15. Jeżeli, mając dwa ułamki nierówne, np. $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{7}$, utworzymy ułamek, którego licznik jest sumą liczników ułamków danych, a mianownik sumą ich mianowników, $\frac{3+5}{4+7}$, to jaką jest wartość tego ułamka względem wartości ułamków danych?

Porównajmy ułamek $\frac{3+5}{4+7}$ z ułamkiem $\frac{3}{4}$. Według powyższego (c.), należy te ułamki sprowadzić do wspólnego mianownika. Czyniąc to, mamy

$$\frac{3+5}{4+7} = \frac{(3+5) \cdot 4}{(4+7) \cdot 4} = \frac{3 \cdot 4 + 5 \cdot 4}{(4+7) \cdot 4}, \quad \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot (4+7)}{(4+7) \cdot 4} = \frac{3 \cdot 4 + 3 \cdot 7}{(4+7) \cdot 4}.$$

Ponieważ $3 \cdot 7 > 5 \cdot 4$, więc i $3 \cdot 4 + 3 \cdot 7 > 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4$, skutkiem czego (a.) $\frac{3}{4} > \frac{3+5}{4+7}$. Porównując podobnie ułamek $\frac{3+5}{4+7}$ z ułamkiem $\frac{5}{7}$, znajdziemy, że $\frac{3+5}{4+7} > \frac{5}{7}$. Jest więc

$$\frac{3}{4} > \frac{3+5}{4+7} > \frac{5}{7},$$

t. j. wartość ułamka $\frac{3+5}{4+7}$ jest pośrednią między wartościami ułamków danych $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{7}$. (Por. us. 11.)

Jeżeli mamy kilka ułamków, np. $\frac{7}{12}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{8}{13}$, i uporządkujemy je, zaczynając np. od największego, więc (us. 14): $\frac{8}{13} > \frac{7}{12} > \frac{8}{15} > \frac{7}{15}$, to, na mocy powyższego, wypada nam, iż $\frac{8}{13} > \frac{8+7}{13+12} > \frac{7}{12}$; a że $\frac{7}{12} > \frac{8}{15}$, więc także

$$\frac{8}{13} > \frac{8+7}{13+12} > \frac{8}{15}.$$

Biorąc zaś dwa ostatnie ułamki, t. j. $\frac{8+7}{13+12}$ i $\frac{8}{15}$, mamy znowu

$\frac{8+7}{13+12} > \frac{8+7+8}{13+12+15} > \frac{8}{15}$, a że $\frac{8}{13} > \frac{8+7}{13+12}$ i $\frac{8}{15} > \frac{7}{15}$, więc mamy także

$$\frac{8}{13} > \frac{8+7+8}{13+12+15} > \frac{7}{15}.$$

Biorąc znowu dwa ostatnie z tych ułamków i podobnie z nimi postępując, znajdziemy, że

$$\frac{8}{13} > \frac{8+7+8+7}{13+12+15+15} > \frac{7}{15}.$$

A zatem: *gdy, mając danych dwa lub więcej ułamków, utworzymy ułamek, którego licznik jest sumą liczników ułamków danych, a mianownik jest sumą ich mianowników, to ten ułamek jest większy od najmniejszego, a mniejszy od największego z ułamków danych.*

16. Zastosujemy to do przypadku, gdy z dwu ułamków jeden jest jednością, przedstawioną w postaci ułamka (us. 3). Weźmy np. $\frac{8}{13}$ i $1 = \frac{6}{6}$ i jeszcze np. $\frac{13}{8}$ i $1 = \frac{6}{6}$; według powyższego, mieć będziemy:

$$1 > \frac{8+6}{13+6} > \frac{8}{13} \quad \text{i} \quad \frac{13}{8} > \frac{13+6}{8+6} > 1.$$

Z tego zaś, iż

$$\frac{8+6}{13+6} > \frac{8}{13} \quad \text{i} \quad \frac{13+6}{8+6} < \frac{13}{8},$$

widzimy, że jeżeli jednocześnie do licznika i do mianownika ułamka właściwego dodamy tę samą liczbę, to wartość ułamka się powiększy, i jeżeli jednocześnie do licznika i do mianownika ułamka niewłaściwego, większego od jedności, dodamy tę samą liczbę, to wartość ułamka się zmniejszy.

Zamiast $8 + 6$ i $13 + 6$ pisząc odpowiednio 14 i 19 , a wskutek tego (§ 5, us. 6) zamiast 8 i 13 pisząc odpowiednio $14 - 6$ i $19 - 6$, mieć będziemy zamiast poprzedniego:

$$\frac{14}{19} > \frac{14-6}{19-6} \quad \text{i} \quad \frac{19}{14} < \frac{19-6}{14-6},$$

t. j. jeżeli jednocześnie od licznika i mianownika ułamka właściwego odejmiemy tę samą liczbę, to wartość ułamka się zmniejszy, i jeżeli jednocześnie od licznika i mianownika ułamka niewłaściwego większego od jedności odejmiemy tę samą liczbę, to wartość ułamka się powiększy.

(Zadania arytmetyczne. § 17.)

§ 18. DODAWANIE I ODEJMOWANIE LICZB UŁAMKOWYCH.

1. Jak wiemy (§ 4, us. 6), dodawanie liczb całkowitych jest działaniem, zapomocą którego odnajdujemy jedną liczbę, zwaną sumą, któraby była skupieniem wszystkich jedności składników. Gdy zaś pośród danych liczb są liczby ułamkowe, to podobnie, działanie, doprowadzające nas do jednej liczby, będącej skupieniem wszystkich danych liczb, a więc skupieniem wszystkich części liczb danych (czyli wogóle

mówiąc, jedności i części jedności tych składników), nazwiemy także dodawaniem, a owę liczbę — ich sumą. Powiemy więc teraz ogólnie:

Dodawanie jestto działanie, zapomocą którego, mając dwie lub więcej liczb danych, zwanych składnikami, odnajdujemy liczbę, zwaną sumą, która jest skupieniem jedności składników.

2. Weźmy np. zadanie: dodać do siebie ułamki: $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{15}$ i $\frac{5}{12}$,

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{15} + \frac{5}{12}.$$

Idzie tu o odnalezienie jednej liczby, sumy, któraby była skupieniem wszystkich części składników, t. j. trzech-piątych, czterech-piętnastych i pięciu-dwunastych. Ta zaś (jedna) liczba szukana będzie wyrażona w pewnych jednakowych częściach jedności, którychto części pewna ilość przedstawi pierwszy, inna drugi, a pozostała trzeci składnik. Z tego wypada, że suma może być wyrażona w takich pewnych częściach jedności, w jakich może być też wyrażony każdy ze składników. Innymi słowy: mianownikiem sumy będzie spólny mianownik składników. Należy więc dane ułamki sprowadzić do spólnego mianownika (§ 17, us. 13). Tu (najmniejszym) spólnym mianownikiem jest mianownik 60; mamy więc

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{15} + \frac{5}{12} = \frac{36}{60} + \frac{16}{60} + \frac{25}{60}.$$

Skupiając teraz 36-sześćdziesiątych, 16-sześćdziesiątych i 25-sześćdziesiątych w jedną liczbę, otrzymamy oczywiście sześćdziesiąte części, których będzie 36 + 16 + 25, a więc

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{15} + \frac{5}{12} = \frac{36}{60} + \frac{16}{60} + \frac{25}{60} = \frac{36+16+25}{60} = \frac{77}{60} = 1\frac{17}{60}.$$

Podobnie np.

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} + \frac{4}{15} + \frac{5}{12} + \frac{1}{120} &= \frac{72}{120} + \frac{32}{120} + \frac{50}{120} + \frac{1}{120} = \frac{72+32+50+1}{120} = \frac{145}{120} = \\ &= 1\frac{45}{120} = 1\frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Oczywiście, że, gdyby dane do dodania ułamki posiadały już jednokowe mianowniki, postępowanie z nimi byłoby prostsze. Tak np.

$$\frac{3}{32} + \frac{5}{32} + \frac{15}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3+5+15+1}{32} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}.$$

Aby dodać do siebie dane ułamki, należy, wrazie, gdy ich mianowniki są różne, sprowadzić je do spólnego mianownika, a liczniki tych postaci dodać do siebie: otrzymana stąd liczba jest licznikiem sumy, mianownikiem zaś jój tenże sam mianownik spólny.

Taksamo postępowalibyśmy, gdyby dane ułamki były niewłaściwe. Zwykle jednak z ułamków niewłaściwych, przed przystąpię-

nieniem do ich dodawania, wyciągamy całkowite, tak iż rzecz sprowadza się do przypadku, gdy między składnikami są całkowite z ułamekami.

$$3. \text{ Wiemy z powyższego, że np. } \frac{35}{32} + \frac{5}{32} + \frac{147}{32} + \frac{64}{32} = \frac{35+5+147+64}{32}$$

Z tego zaś wypada, iż nawzajem

$$\frac{35+5+147+64}{32} = \frac{35}{32} + \frac{5}{32} + \frac{147}{32} + \frac{64}{32}.$$

A jeżeli na każdy z tych ułamków (w liczniku pierwszego mamy liczbę wyrażoną przez sumę) będziemy patrzeć jako na wskazane dzielenie (§ 17, us. 5), to możemy to także inaczej tak napisać:

$$(35 + 5 + 147 + 64) : 32 = 35 : 32 + 5 : 32 + 147 : 32 + 64 : 32,$$

t. j. ¹⁾ aby sumę podzielić przez pewną liczbę, można wszystkie składniki podzielić przez tę liczbę (por. § 6, us. 14).

4. Weźmy przypadek, gdy składnikami są, wogóle mówiąc, całkowite z ułamekami, np.

$$\frac{3}{5} + 5\frac{13}{15} + 1\frac{5}{6} + 4.$$

Ponieważ nam tu idzie o to, aby znaleźć liczbę, która jest skupieniem jedności i części jedności składników, zatym sama przez się nasuwa się tu potrzeba skupienia z sobą oddzielnie jedności, a oddzielnie części jedności składników, a więc należy dodać do siebie oddzielnie całkowite i oddzielnie ułamki.

Aby takie postępowanie uzasadnić, należy uprzednio dowiedzieć, że suma nie zależy od porządku składników i w tym także przypadku, gdy składniki są liczbami ułamkowymi, oraz, że można dane dodawanie wykonać przy pomocy dodawań częściowych, a mianowicie: jednego dodawania całkowitych i drugiego dodawania ułamków.

a. Na powyższym zadaniu starajmy się dowiedzieć, że suma nie zależy od porządku składników. Włączając całkowite z ułamekami w ułamki (§ 17, us. 3), sprowadzając ułamki do wspólnego mianownika, wyrażając całkowitą w postaci ułamka z tymże wspólnym mianownikiem i korzystając z tego, cośmy uzasadnili w ustępie 2-im, mamy kolejno

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} + 5\frac{13}{15} + 1\frac{5}{6} + 4 &= \frac{3}{5} + \frac{88}{15} + \frac{11}{6} + 4 \\ &= \frac{18}{30} + \frac{176}{30} + \frac{55}{30} + 4 \\ &= \frac{18}{30} + \frac{176}{30} + \frac{55}{30} + \frac{120}{30} \\ &= \frac{18 + 176 + 55 + 120}{30}. \end{aligned}$$

¹⁾ Tej własności możnaby dowiedzieć inaczej w nauce o liczbach całkowitych, ale tylko dla przypadku, gdy każdy ze składników sumy jest przez ową liczbę podzielny.

Otrzymaliśmy tu w liczniku sumę $18 + 176 + 55 + 120$. W tej sumie liczb całkowitych możemy zmienić dowolnie porządek składników (§ 4, us. 7, 8). Pisząc więc tę sumę np. tak: $120 + 176 + 18 + 55$, mamy

$$\frac{3}{5} + 5\frac{13}{15} + 1\frac{5}{6} + 4 = \frac{120 + 176 + 18 + 55}{30},$$

albo (us. 3)

$$\frac{3}{5} + 5\frac{13}{15} + 1\frac{5}{6} + 4 = \frac{120}{30} + \frac{176}{30} + \frac{18}{30} + \frac{55}{30},$$

skąd na koniec, po wyciągnięciu całkowitych (§ 17, us. 4) i skróceniu ułamków, mamy

$$\frac{3}{5} + 5\frac{13}{15} + 1\frac{5}{6} + 4 = 4 + 5\frac{13}{15} + \frac{3}{5} + 1\frac{5}{6}.$$

Widzimy więc, że wogóle, jakimikolwiek są składniki, czy liczbami całkowitymi, czy też liczbami ułamkowymi, zawsze *suma nie zależy od porządku składników*. —

b. Wiemy, że w naszym zadaniu $5\frac{13}{15}$ i $1\frac{5}{6}$ są skróceniami, zastępującymi $5 + \frac{13}{15}$ i $1 + \frac{5}{6}$ (por. str. 193), tak iż

$$\frac{3}{5} + 5\frac{13}{15} + 1\frac{5}{6} + 4 = \frac{3}{5} + 5 + \frac{13}{15} + 1 + \frac{5}{6} + 4,$$

albo, po sprowadzeniu ułamków do wspólnego mianownika 30 i wyrażeniu całkowitych w postaci ułamków z tymże mianownikiem 30,

$$\frac{3}{5} + 5\frac{13}{15} + 1\frac{5}{6} + 4 = \frac{18}{30} + \frac{150}{30} + \frac{26}{30} + \frac{30}{30} + \frac{25}{30} + \frac{120}{30},$$

czyli (us. 2)

$$\frac{3}{5} + 5\frac{13}{15} + 1\frac{5}{6} + 4 = \frac{18 + 150 + 26 + 30 + 25 + 120}{30}.$$

Ponieważ wskazane w liczniku dodawanie składników (całkowitych) może być uskutecznić przy pomocy dodawań częściowych którychkolwiek składników, wziętych w jakimkolwiek porządku (§ 4, us. 10), zatem

$18 + 150 + 26 + 30 + 25 + 120 = (150 + 30 + 120) + (18 + 26 + 25)$,
wskutek czego

$$\frac{3}{5} + 5\frac{13}{15} + 1\frac{5}{6} + 4 = \frac{(150 + 30 + 120) + (18 + 26 + 25)}{30},$$

lub (us. 3)

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} + 5\frac{13}{15} + 1\frac{5}{6} + 4 &= \frac{150 + 30 + 120}{30} + \frac{18 + 26 + 25}{30} \\ &= \left(\frac{150}{30} + \frac{30}{30} + \frac{120}{30}\right) + \left(\frac{18}{30} + \frac{26}{30} + \frac{25}{30}\right), \end{aligned}$$

albo na koniec, wyciągając całkowite i skracając ułamki,

$$\frac{3}{5} + 5\frac{13}{15} + 1\frac{5}{6} + 4 = (5 + 1 + 4) + \left(\frac{3}{5} + \frac{13}{15} + \frac{5}{6}\right),$$

t. j. gdy w dodawaniu, które mamy wykonać, są, wogóle mówiąc, całkowite z ułkami, to możemy dodawać do siebie oddzielnie całkowite, a oddzielnie ułamki, a suma liczb, otrzymanych z tych dwu dodawań częściowych, przedstawi sumę danych składników.

Ponieważ w naszym zadaniu $\frac{3}{5} + 5\frac{13}{15} + 1\frac{5}{6} + 4$ idzie nam o wyznaczenie liczby, któraby była skupieniem jedności, więc 5-u, 1-niej i 4-ch jedności, i części jedności, więc $\frac{3}{5}$, $\frac{13}{15}$ i $\frac{5}{6}$, zatem należy wykonać oddzielnie dodawanie tych całkowitych i oddzielnie dodawanie tych ułamków, a dwie te sumy częściowe, razem wzięte, dadzą szukaną sumę składników. Mamy więc

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} + 5\frac{13}{15} + 1\frac{5}{6} + 4 &= (5 + 1 + 4) + \left(\frac{3}{5} + \frac{13}{15} + \frac{5}{6}\right) \\ &= 10 + \frac{18+26+25}{30} = 10 + \frac{69}{30} = 10 + 2\frac{3}{10} \\ &= (10 + 2) + \frac{3}{10} = 12\frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Widzimy z tego, że, aby nie zmieniać już raz otrzymanej sumy z dodania całkowitych, praktyczniej będzie zacząć od dodawania ułamków (które zwykle piśmiennie wykonywamy na stronie); jeżeli zaś z tego dodawania otrzymamy ułamek niewłaściwy, to wyciągniemy zaraz z niego całkowitą i dodawać ją będziemy wraz z całkowitymi składnikami, a do otrzymanej stąd liczby przypiszemy pozostały ułamek (właściwy) częściowej sumy ułamków. A więc, mając dane powyższe zadanie, postąpimy w ten sposób:

$$\frac{3}{5} + 5\frac{13}{15} + 1\frac{5}{6} + 4^* = 12\frac{3}{10}.$$

$$\frac{3}{5} + \frac{13}{15} + \frac{5}{6} = \frac{18+26+25}{30} = 2\frac{9}{30} = 2\frac{3}{10};$$

* oznacza, że to, co jest po gwiazdce, piszemy dopiero po ukończeniu rozumowania, które nas do tego doprowadziło.

a następnie wykonywamy odrazu (§ 4, us. 16): $2 + 5 + 1 + 4 = 12$ i piszemy tam, gdzie *, $= 12\frac{3}{10}$. Powiemy więc ogólnie:

Aby wykonać dodawanie danych liczb ułamkowych, oddzielnie dodajemy naprzód do siebie ułamki, z tej częściowej sumy, jeżeli ona jest ułamkiem niewłaściwym, wyciągamy całkowitą, którą dodajemy następnie wraz z całkowitymi składnikami: otrzymana stąd liczba całkowita, wraz z ułamkiem właściwym, otrzymanym poprzednio w częściowej sumie ułamków, przedstawi sumę liczb danych.

Podobnie np.

$$\begin{array}{r}
 3542 \frac{7}{8} \\
 2561 \frac{1}{2} \\
 379 \frac{5}{6} \\
 \hline
 6484 \frac{5}{24}
 \end{array}
 \quad
 \frac{7}{8} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{21+12+20}{24} = \frac{53}{24} = 2 \frac{5}{24};$$

5. Z tego, że własność: «suma nie zależy od porządku składników» odnosi się tak do liczb całkowitych, jak i do liczb ułamkowych (us. 4 a.), wypada także, że to wszystko, o czym mówiliśmy w § 4-ym, us. 9, 10 i 11, stosuje się nie tylko do liczb całkowitych, ale i do liczb ułamkowych, jak o tym podobnie przeprowadzając rozumowanie na przykładach liczebnych ¹⁾, łatwo przekonać się można.

6. Odejmowanie, jako działanie odwrotne dodawaniu dwu składników, ma na celu z danych: sumy dwu składników i jednego z tych składników wyznaczenie drugiego składnika tej sumy. To zadanie istnieć może niezależnie od tego, czy składniki są liczbami całkowitymi, czy też ułamkowymi. Podane więc w us. 3-im § 5-go określenie odejmowania jest ogólne. Zatem wogóle:

Odejmowanie jestto działanie, w którym, mając dane dwie liczby, odjemną i odjemnik, poszukujemy liczby, zwanéj resztą, po której dodaniu do odjemnika otrzymujemy odjemną.

Odjemna jest nie mniejsza od odjemnika (§ 5, us. 4 i 11).

7. Ponieważ odjemna jest sumą odjemnika i reszty, więc, jeżeli od ułamka mamy odjąć ułamek, to odjemną możemy uważać (us. 2), jako skupienie równych części jedności, którychto części pewna ilość jest przedstawiona przez odjemnik, a pozostała przez resztę szukaną. Szukana więc reszta może być wyrażona w takich częściach jedności, w jakich można wyrazić odjemną i odjemnik, a przeto za mianownik reszty możemy wziąć spólny mianownik odjemnej i odjemnika. Gdy więc mamy np.

$$\frac{5}{6} - \frac{5}{9},$$

to należy te ułamki sprowadzić do spólnego mianownika, co uskuteczniając, mamy

$$\frac{5}{6} - \frac{5}{9} = \frac{15}{18} - \frac{10}{18}.$$

¹⁾ Dla ogólności dobrze jest wybierać przykłady, w które wchodzi tak liczby całkowite, jak i ułamkowe. Oszczędzając miejsca, nie przeprowadzamy tu tego: droga wskazana w us. 4-ym w alineach a. i b.

Odejmując zaś od piętnastu-osiemnastych, dziesięć-osiemnastych, otrzymamy oczywiście osiemnaste części, których będzie 15—10; więc

$$\frac{5}{6} - \frac{5}{9} = \frac{15}{18} - \frac{10}{18} = \frac{15-10}{18} = \frac{5}{18}.$$

Oczywiście, że gdyby dane do odjęcia ułamki posiadały już jednakowe mianowniki, to postępowanie z nimi byłoby prostsze. Tak np.

$$\frac{11}{12} - \frac{7}{12} = \frac{11-7}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Aby odjąć od siebie dwa dane ułamki, należy, wraze gdy ich mianowniki są różne, sprowadzić je do wspólnego mianownika, a liczniki tych postaci odjąć od siebie; otrzymana stąd liczba jest licznikiem reszty, mianownikiem zaś jej tenże sam mianownik wspólny.

Z tego, że np. $\frac{24}{7} - \frac{5}{7} = \frac{25-5}{7}$, wypada nawzajem

$$\frac{24-5}{7} = \frac{24}{7} - \frac{5}{7},$$

czyli (§ 17, us. 5)

$$(24 - 5) : 7 = 24 : 7 - 5 : 7,$$

t. j. ¹⁾ aby różnicę dwu liczb podzielić przez pewną liczbę, można odjemną i odjemnik podzielić przez tę liczbę (por. § 6, us. 15).

8. a. Jeżeli od całkowitej z ułamkiem mamy odjąć całkowitą z ułamkiem, to, podobnie jak w dodawaniu, zastąpimy to odejmowanie przez odejmowania częściowe: osobno wykonamy odejmowanie ułamków, osobno całkowitych, a suma tych reszt częściowych przedstawi resztę liczb danych. Aby jednak te odejmowania częściowe można było skutecznie, potrzeba, aby w każdym odjemna była nie mniejszą od odjemnika. Całkowita odjemnej nie może być mniejszą od całkowitej odjemnika, gdyż inaczej dana odjemna byłaby mniejszą od danego odjemnika, co być nie może. Ale zdarzyć się może, że ułamek odjemnej jest mniejszy (§ 17, us. 14) od ułamka odjemnika.

Weźmy np.

$$8\frac{5}{6} - 3\frac{5}{9}.$$

tu $\frac{5}{6} > \frac{5}{9}$, więc, gdy $\frac{5}{6} - \frac{5}{9} = \frac{15-10}{18} = \frac{5}{18}$, a $8 - 3 = 5$, mamy

$8\frac{5}{6} - 3\frac{5}{9} = 5\frac{5}{18}$. Piśmiennie ten rachunek tak przedstawiamy:

$$8\frac{5}{6} - 3\frac{5}{9}^* = 5\frac{5}{18}.$$

$$\frac{5}{6} - \frac{5}{9} = \frac{15-10}{18} = \frac{5}{18};$$

* oznacza, że to, co jest po gwiazdce, piszemy dopiero po ukończeniu rozumowania, które nas do tego doprowadziło.

¹⁾ Można tu zrobić taką samą uwagę, jak przy us. 3.

a następnie, wykonawszy wprost odejmowanie całkowitych ($8 - 3 = 5$), piszemy tam, gdzie *, $= 5 \frac{5}{18}$.

Jeżeli jednak mamy zadanie

$$8 \frac{5}{9} - 3 \frac{5}{6},$$

to tu nie możemy od $\frac{5}{9}$ odjąć $\frac{5}{6}$; należy więc odjemną tak rozłożyć na części, iżby w odjemnej znalazł się ułamek większy od ułamka odjemnika. Łatwo się przekonać, iż będzie najdogodniej, gdy z całkowitych odjemnej oddzielimy jedność i tę jedność wraz z ułamkiem odjemnej włączymy (§ 17. us. 3) w ułamek: $8 \frac{5}{9} = 7 + 1 \frac{5}{9} = 7 + \frac{14}{9}$ wtedy, wykonywając częściowe odejmowanie ułamków,

$$\frac{14}{9} - \frac{5}{6} = \frac{28 - 15}{18} = \frac{13}{18},$$

otrzymujemy ułamek właściwy ¹⁾, który dopisując do reszty z częściowego odejmowania całkowitych: $7 - 3 = 4$, otrzymujemy, jako różnicę liczb danych: $4 \frac{13}{18}$. Postępowanie to piśmiennie tak przedstawimy:

$$8 \frac{5}{9} - 3 \frac{5}{6} * = 4 \frac{13}{18}.$$

* oznacza tu i dalej toż samo, co poprzednio.

$$\frac{5}{9} - \frac{5}{6} = \frac{10 - 15}{18},$$

$$1 \frac{5}{9} - \frac{5}{6} = \frac{28 - 15}{18} = \frac{13}{18},$$

a następnie, wykonawszy wprost odejmowanie całkowitych ($7 - 3 = 4$), piszemy tam, gdzie *, $= 4 \frac{13}{18}$.

b. Od całkowitej z ułamkiem odjąć ułamek (rozumiemy tu, oczywiście, ułamek właściwy), np. (rozumowanie także jak w poprzednim przypadku)

$$5 \frac{3}{8} - \frac{3}{5} * = 4 \frac{31}{40}.$$

$$5 \frac{3}{5} - \frac{3}{8} * = 5 \frac{9}{40}.$$

$$1 \frac{3}{8} - \frac{3}{5} = \frac{55 - 24}{40} = \frac{31}{40},$$

$$\frac{3}{5} - \frac{3}{8} = \frac{24 - 15}{40} = \frac{9}{40};$$

Jeżeli w tym lub poprzednim przypadku w odjemnej i w odjemniku mamy jednakowe ułamki, np. $8 \frac{5}{9} - 3 \frac{5}{9}$, to reszta, jako liczba, po której dodaniu do odjemnika otrzymać mamy odjemną.

¹⁾ Ta reszta + ułamek odjemnika = 1 + ułamek (dany) odjemnej. Ponieważ ułamek odjemnika jest większy od ułamka odjemnej, więc ta reszta jest mniejsza od jedności.

zawierającą ułamek $\frac{5}{9}$, który jest już w odjemniku, będzie właściwie liczbą, którą tylko trzeba dodać do całkowitej odjemnika, aby otrzymać całkowitą odjemną, to jest reszta będzie liczbą całkowitą. Jakoż, $8\frac{5}{9} - 3\frac{5}{9} = 5$; podobnie np. $5\frac{3}{8} - \frac{3}{8} = 5$. Możemy więc powiedzieć: jeżeli ułamki odjemnej i odjemnika są jednakowe, to reszta jest całkowita.

c. Od całkowitej odjąć całkowitą z ułamkiem, np.

$$8 - 3\frac{4}{7}.$$

Mamy tu znaleźć resztę, t. j. taką liczbę, iż dodając ją do $3\frac{4}{7}$ otrzymalibyśmy 8; w reszcie więc będzie ułamek, który razem z $\frac{4}{7}$ stanowić będzie 1-ść, a ta 1-ść wraz z całkowitymi odjemnika i reszty wyda 8. Należy więc z 8-u jednościami odjemnej oddzielić jedną, od niej odjąć $\frac{4}{7}$, a ułamek, jaki stąd otrzymamy, dopisać do reszty, wypadłej z odejmowania $7 - 3$. Aby zaś od 1 odjąć $\frac{4}{7}$, przedstawimy 1 w postaci ułamka (§ 17, us. 3) z tymże mianownikiem 7. A więc

$$8 - 3\frac{4}{7} = 4\frac{3}{7}.$$

$$1 - \frac{4}{7} = \frac{7-4}{7} = \frac{3}{7};$$

d. Od całkowitej odjąć ułamek (rozumowanie także, jak w poprzednim przypadku), np.

$$9 - \frac{7}{16} = 8\frac{9}{16}.$$

$$1 - \frac{7}{16} = \frac{16-7}{16} = \frac{9}{16};$$

e. Gdy zaś mamy od całkowitej z ułamkiem odjąć całkowitą, np. $8\frac{3}{5} - 5$, to mamy tu znaleźć liczbę, która dodana do 5 daje $8\frac{3}{5}$; w liczbę więc szukaną wejdzie ułamek $\frac{3}{5}$, obok tego, co wypadnie z odejmowania całkowitych, a więc

$$8\frac{3}{5} - 5 = 3\frac{3}{5}.$$

Zbierając to wszystko, powiemy ogólnie:

Aby wykonać odejmowanie dwu danych liczb ułamkowych, odejmujemy od siebie oddzielnie ułamki i oddzielnie całkowite, a resztę z częściowego odejmowania ułamków przypisujemy do reszty z częściowego odejmowania całkowitych. Jeżeliby jednak ułamek odjemnej był mniejszy od

ułamka odjemnika, to uprzednio całkowitą odjemną zmniejszamy o jedność, którą z ułamkiem odjemnej włączamy w ułamek; jeżeliby zaś odjemna była liczbą całkowitą, to podobnie, zmniejszamy uprzednio tę całkowitą o jedność, którą przedstawiamy w postaci ułamka z takim mianownikiem, jaki mu ułamek odjemnika.

9. Można łatwo okazać, że własności sumy i reszty, wyprowadzone w § 5, us. 8 i 9, (podobnie jak własności, o których mowa wyżej w us. 5) mają miejsce również i dla liczb ułamkowych.

(Zadania arytmetyczne. § 18.)

§ 19. MNOŻENIE LICZB UŁAMKOWYCH.

1. Gdy mamy pomnożyć przez siebie dwie liczby całkowite, np. 8×3 , to, jak wiemy (§ 6, us. 3), aby otrzymać iloczyn, możemy mnożną wziąć jako składnik tyle razy, ile jedności jest w mnożniku. Jeżeli jednak chcemy na liczbach ułamkowych skuteczniej działać, odpowiadające mnożeniu liczb całkowitych, natenczas, w przypadku, gdy mnożnik jest liczbą ułamkową, np. gdy chcemy pomnożyć 8 przez $\frac{3}{4}$,

$$8 \times \frac{3}{4},$$

nie może być mowy o tym, abyśmy mieli 8 wziąć $\frac{3}{4}$ raza jako składnik. Wypowiedziane przeto w ten sposób, jak powyżej, powstawanie iloczynu z mnożnej nie może się stosować do tego przypadku.

Abymy więc pojąć, jakie znaczenie mieć powinno: $8 \times \frac{3}{4}$ zgodnie z tym, co oznacza: 8×3 , należy nam jeszcze raz się zastanowić nad mnożeniem liczb całkowitych i tak wysłowić się o powstawaniu iloczynu z mnożnej, aby to mogło się także odnosić do przypadku, gdy mnożnik jest liczbą ułamkową.

Powiedzieliśmy, że w mnożeniu liczb całkowitych, np. 8×3 , otrzymujemy iloczyn z mnożnej, biorąc ją jako składnik tyle razy, ile w mnożniku jest jedności. Aby zaś wyraźnie zaznaczyć, ile w mnożniku jest jedności, należy (§ 4, us. 5) mnożnik przedstawić jako sumę jedności, więc $3 = 1 + 1 + 1$. A gdy «mnożenie jestto działanie, za pomocą którego, mając dane dwie liczby, mnożną i mnożnik, odnajdujemy liczbę, zwaną iloczynem, którą otrzymalibyśmy z mnożnej, biorąc ją jako składnik tyle razy, ile jest jedności w mnożniku», przeto możemy powiedzieć:

$$\begin{aligned} \text{ponieważ mnożnik } & 3 = 1 + 1 + 1, \\ \text{więc iloczyn} & = 8 + 8 + 8 = 24. \end{aligned}$$

Przyglądając się temu, widzimy, że dla utworzenia mnożnika z jedności, trzeba było *jedność wziąć jako składnik trzy razy*, i taksamo, dla utworzenia iloczynu z mnożnej, trzeba *mnożną wziąć jako składnik trzy razy*; możemy więc powiedzieć, że «iloczyn powstaje z mnożnej w taki sam sposób, w jaki mnożnik powstał z jedności». Tak się wyrażając o powstawaniu iloczynu z mnożnej, w niczym nie naruszamy naszego pojęcia o mnożeniu: toż samo, co poprzednio, innymi tylko słowy teraz wyrażamy.

Moglibyśmy nawet tak się wyrażać o powstawaniu iloczynu z mnożnej odrazu, t. j. wtedy, gdyśmy zaczynali mówić o mnożeniu liczb całkowitych. Nie robiliśmy zaś tak poprzednio tylko z tego powodu, że w mnożeniu liczb całkowitych powstawanie iloczynu z mnożnej w taki sposób, w jaki mnożnik powstał z jedności, wychodzi na jedno z tym, że iloczyn otrzymujemy z mnożnej, biorąc ją jako składnik tyle razy, ile jedności jest w mnożniku; ten zaś ostatni sposób wyrażania się był dosadniejszy i, w każdym razie, przy początku nauki łatwiej zrozumiąły.

To, że «iloczyn tak powstaje z mnożnej, jak mnożnik powstał z jedności» możemy odnieść i do przypadku, gdy mnożnik jest liczbą ułamkową. Tak np., gdy mamy $8 \times \frac{3}{4}$, to, ponieważ mnożnik $\frac{3}{4}$ powstał z jedności w taki sposób (§ 16, us. 1), iż 1 zmniejszyliśmy 4 razy i to, co stąd wypadło, t. j. $\frac{1}{4}$, wzięliśmy 3 razy jako składnik, aby podobnie utworzyć iloczyn z *mnożnej*, należy mnożną 8 zmniejszyć 4 razy, a otrzymawszy wskutek tego 2, wziąć to 2 jako składnik 3 razy; będziemy więc mieli $2 + 2 + 2 = 6$; jest zatem $8 \times \frac{3}{4} = 6$.

Możemy więc powiedzieć ogólnie:

Mnożenie jestto działanie, zapomocą którego, mając dwie liczby, mnożną i mnożnik, odnajdujemy liczbę, zwaną iloczynem, którą możemy otrzymać z mnożnej w taki sam sposób, w jaki mnożnik powstaje z jedności.

2. Rzecz prosta, że początkowo uskuteczniiono mnożenie na liczbach całkowitych; później, dopiero mnożono przez siebie liczby ułamkowe. Tym się objaśnia nazwa tego działania: «mnożenie», jednoznaczna z powiększaniem. Rzeczywiście, gdy liczbę daną mnożymy przez 2, 3, i t. d. (wogóle, przez liczbę większą od 1), to otrzymujemy liczbę większą od danej. Gdy zaś, jak wyżej *mnożyliśmy* np. liczbę 8 przez $\frac{3}{4}$ (przez ułamek mniejszy od 1), to otrzymaliśmy liczbę 6, *mniejszą* od mnożnej 8, którąśmy pomnożyli przez $\frac{3}{4}$. Okazuje to, iż działanie dobrze już znane, uskuteczniane na liczbach

całkowitych i słusznie wtedy zwane mnożeniem, stosowano później także i w tym przypadku, gdy mnożnik był wogóle ułamekowy, choćby mniejszy od jedności, pozostawiając dlań zawsze nazwę: «mnożenie» i używając słowa: «mnożę» nawet wtedy, gdy skutek tego działania, (przy mnożniku mniejszym od 1) w rzeczywistości liczba się zmniejszała.

Dlatego w arytmetyce wyrazy: «mnożę», «mnożenie» mają niekiedy znaczenie niezgodne z ich zwykłym rozumieniem; skutek tego «mnożyć» niezawsze znaczy: powiększyć (por. us. 9).

3. Wiemy, że całkowitą z ułamkiem możemy włączyć w ułamek (§ 17, us. 2), a całkowitą przedstawić w postaci ułamka o mianowniku równym 1 (§ 17, us. 9), więc zadanie np. $2\frac{3}{5} \times \frac{3}{4}$ możemy sprowadzić do zadania $\frac{13}{5} \times \frac{3}{4}$ podobnie zadanie np. $\frac{8}{11} \times 6$ do zadania $\frac{8}{11} \times \frac{6}{1}$. Mnożenie więc jakichkolwiek liczb ułamkowych może być zawsze sprowadzone do mnożenia ułamka przez ułamek.

Aby jednak wprost przeprowadzić rozumowanie także wtedy, kiedy, czyto mnożna, czytóż mnożnik są liczbami całkowitymi, oddzielnie rozważymy mogące się tu zdarzyć przypadki *).

a. Pomnożyć ułamek przez całkowitą, np. $\frac{5}{7} \times 4$. Otrzymaliśmy mnożnik 4 z jedności, biorąc ją 4 razy jako składnik, $4 = 1 + 1 + 1 + 1$; więc iloczyn powstanie z mnożnej $\frac{5}{7}$, gdy weźmiemy ją jako składnik 4 razy; $\frac{5}{7} + \frac{5}{7} + \frac{5}{7} + \frac{5}{7} = \frac{5+5+5+5}{7}$ (§ 18, us. 2). Tu w liczniku mamy 5 wziąć 4 razy jako składnik, a to dodawanie jednakowych składników możemy zastąpić (§ 6, us. 2) przez mnożenie 5×4 , a więc nasz iloczyn jest $\frac{5 \times 4}{7}$, t. j.

$$\frac{5}{7} \times 4 = \frac{5 \times 4}{7}.$$

Aby ułamek pomnożyć przez całkowitą, należy licznik pomnożyć przez całkowitą: otrzymana stąd liczba jest licznikiem iloczynu, mianownikiem zaś mianownik danego ułamka. Mówi się często krócej: aby ułamek pomnożyć przez całkowitą należy jego licznik przez tę całkowitą pomnożyć.

Wykonywając w naszym przykładzie mnożenie w liczniku, otrzymujemy w iloczynie $\frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}$. — Przeprowadzając to rozumowanie np. na tablicy, dobrze jest jednocześnie jego ślad zaznaczyć w ten sposób:

*) Zaczniemy od tego, w którym rozumowanie jest najprostsze.

$$\frac{5}{7} \times 4^* = \frac{5 \times 4}{7} = \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}.$$

* oznacza, iż to, co jest po gwiazdce, piszemy dopiero po ukończeniu rozumowania, które nas do tego doprowadziło.

mnożnik $4 = 1 + 1 + 1 + 1$

$$\text{iloczyn} = \frac{5}{7} + \frac{5}{7} + \frac{5}{7} + \frac{5}{7} = \frac{5+5+5+5}{7} = \frac{5 \times 4}{7}$$

Taksamo rozumować będziemy, mając do pomnożenia ułamek niewłaściwy przez całkowitą, np. $\frac{17}{3} \times 4$.

b. Pomnożyć całkowitą przez ułamek np. $6 \times \frac{3}{8}$. Tu mnożnik $\frac{3}{8}$ powstał z jedności w taki sposób, iż 1 zmniejszyliśmy 8 razy i otrzymawszy $\frac{1}{8}$ wzięliśmy tę część jedności jako składnik 3 razy, $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$; należy więc w tenże sam sposób utworzyć iloczyn z mnożnej 6, t. j. mnożną 6 zmniejszyć 8 razy i otrzymaną (§ 16, us. 1; § 17, us. 5) liczbę $\frac{6}{8}$ wziąć jako składnik także 3 razy, $\frac{6}{8} + \frac{6}{8} + \frac{6}{8}$. Lecz to $= \frac{6+6+6}{8}$. W liczniku mamy dodawanie jednakowych składników, $6 + 6 + 6$; można je zastąpić przez mnożenie 6×3 . Nasz więc iloczyn jest $\frac{6 \times 3}{8}$, t. j.

$$6 \times \frac{3}{8} = \frac{6 \times 3}{8}.$$

Aby całkowitą pomnożyć przez ułamek, należy całkowitą pomnożyć przez licznik: otrzymana stąd liczba jest licznikiem iloczynu, mianownikiem zaś mianownik ułamka danego.

Przeprowadzając to rozumowanie, dobrze jest jednocześnie ślad jego zaznaczać piśmiennie, np. w ten sposób:

$$6 \times \frac{3}{8}^* = \frac{6 \times 3}{8} = \frac{18}{8} = 2\frac{1}{4}. \quad * \text{ oznacza tu i dalej toż samo, co poprzednio.}$$

mnożnik $\frac{3}{8}$ 1 zmn. 8 r.; otrzym. $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$

iloczyn 6 zmn. 8 r.; otrzym. $\frac{6}{8}$; $\frac{6}{8} + \frac{6}{8} + \frac{6}{8} = \frac{6+6+6}{8} = \frac{6 \times 3}{8}$

Taksamo rozumować będziemy, gdyby było np. $7 \times \frac{5}{3}$.

c. Pomnożyć ułamek przez ułamek, np. $\frac{4}{5} \times \frac{3}{8}$. Tu mnożnik.. (jak wyżej); należy więc w tenże sam sposób utworzyć iloczyn z mnożnej $\frac{4}{5}$, t. j. mnożną $\frac{4}{5}$ zmniejszyć 8 razy, co uskutecznimy, (§ 17, us. 6, a.) mnożąc przez 8 jej mianownik, $\frac{4}{5 \times 8}$, i wziąć tę liczbę 3 razy jako składnik, $\frac{4}{5 \times 8} + \frac{4}{5 \times 8} + \frac{4}{5 \times 8}$. Lecz to $= \frac{4+4+4}{5 \times 8}$; zastępując zaś w liczniku dodawanie jednakowych składników przez mnożenie, $4 + 4 + 4 = 4 \times 3$, otrzymujemy $\frac{4 \times 3}{5 \times 8}$, t. j.

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{4 \times 3}{5 \times 8}.$$

Aby ułamek pomnożyć przez ułamek, należy za licznik iloczynu wziąć iloczyn liczników danych ułamków, a za mianownik iloczyn ich mianowników ¹⁾. Mówi się często krócej: aby ułamek pomnożyć przez ułamek, należy pomnożyć licznik przez licznik, a mianownik przez mianownik.

W ciągu tego rozumowania, możemy jednocześnie ślad jego zaznaczać, pisząc np.

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{4 \times 3}{5 \times 8} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}.$$

mnożnik $\frac{3}{8}$ 1 zmn. 8 r.; otrzym. $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$

iloczyn $\frac{4}{5}$ zmn. 8 r.; otrzym. $\frac{4}{5 \times 8}$; $\frac{4}{5 \times 8} + \frac{4}{5 \times 8} + \frac{4}{5 \times 8} =$
 $= \frac{4+4+4}{5 \times 8} = \frac{4 \times 3}{5 \times 8}.$

Taksamo rozumować będziemy, gdyby było np. $\frac{17}{3} \times \frac{3}{8}$, $\frac{6}{7} \times \frac{5}{3}$, $\frac{5}{1} \times \frac{3}{4}$ i t. d.

d. *Wrazie, gdy albo mnożna, albo mnożnik, albo mnożna i mnożnik jednocześnie, są całkowitymi z uławkami, włączamy je w ułamki, przez co sprowadzamy rzecz do jednego z poprzedzających przypadków ²⁾.*

4. Jeżeli mamy znaleźć iloczyn trzech lub więcej liczb, pośród których są ułamkowe, np.

$$\frac{55}{63} \times \frac{3}{4} \times \frac{14}{15} \times 3 \times 12 \frac{1}{2} \times \frac{1}{7},$$

czyli, mówiąc wyraźniej, jeżeli mamy $\frac{55}{63}$ pomnożyć przez $\frac{3}{4}$, otrzymany stąd iloczyn pomnożyć przez $\frac{14}{15}$, a ten iloczyn pomnożyć następnie przez 3 i t. d., to według prawideł, podanych w poprzedzającym ustępie, mamy:

$$\frac{55}{63} \times \frac{3}{4} = \frac{55 \times 3}{63 \times 4}$$

$$\frac{55 \times 3}{63 \times 4} \times \frac{14}{15} = (*) \frac{55 \times 3 \times 14}{63 \times 4 \times 15}$$

$$\frac{55 \times 3 \times 14}{63 \times 4 \times 15} \times 3 = \frac{55 \times 3 \times 14 \times 3}{63 \times 4 \times 15}$$

$$\frac{55 \times 3 \times 14 \times 3}{63 \times 4 \times 15} \times 12 \frac{1}{2} = \frac{55 \times 3 \times 14 \times 3}{63 \times 4 \times 15} \times \frac{25}{2} = \frac{55 \times 3 \times 14 \times 3 \times 25}{63 \times 4 \times 15 \times 2}$$

$$\frac{55 \times 3 \times 14 \times 3 \times 25}{63 \times 4 \times 15 \times 2} \times \frac{1}{7} = (**) \frac{55 \times 3 \times 14 \times 3 \times 25}{63 \times 4 \times 15 \times 2 \times 7},$$

1) To prawidło widocznie obejmuje w sobie prawidła a. i b., jako przypadki szczególne.

2) Por. niżej us. 7.

(*) Licznik mnożnej, t. j. liczbę przedstawioną (§ 6, us. 2) przez iloczyn 55×3 , mnożny przez licznik mnożnika, t. j. przez 3, a mianownik mnożnej i t. d.

(**) $55 \times 3 \times 14 \times 3 \times 25 \times 1 = 55 \times 3 \times 14 \times 3 \times 25$ (§ 6, us. 3).

a więc

$$\frac{55}{63} \times \frac{3}{4} \times \frac{14}{15} \times 3 \times 12 \frac{1}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{55}{63} \times \frac{3}{4} \times \frac{14}{15} \times 3 \times \frac{25}{2} \times \frac{1}{7} =$$

$$= \frac{55 \times 3 \times 14 \times 3 \times 25}{63 \times 4 \times 15 \times 2 \times 7},$$

t. j., aby znaleźć iloczyn kilku czynników pośród których są ułamkowe, należy, włączwszy całkowite z uławkami (jeżeli są) w ułamki, za licznik iloczynowi wziąć iloczyn liczników i całkowitych, a za jego mianownik iloczyn mianowników.

Należałoby następnie wykonać mnożenia, wskazane w liczniku i mianowniku ułamka $\frac{55 \times 3 \times 14 \times 3 \times 25}{63 \times 4 \times 15 \times 2 \times 7}$, później zaś, jeżeli można, ułamek skrócić, t. j. liczby przedstawione przez te iloczyny w liczniku i mianowniku podzielić przez tę samą liczbę. Lecz wiemy, że, aby iloczyn kilku czynników podzielić przez pewną liczbę, możemy jeden z jego czynników przez tę liczbę podzielić (§ 7, us. 13); więc, zamiast naprzód skutecznie wskazać mnożenia w liczniku i mianowniku, a dopiero tak otrzymane liczby dzielić przez ich wspólne dzielniki, będzie korzystniej, gdy, przed wykonaniem tych mnożeń, podzielimy jednocześnie jeden czynnik licznika i jeden mianownika przez ich wspólny dzielnik, taksamo postąpimy z drugą, trzecią, i t. d. parą takich czynników, dopóki nie dojdziemy do tego, że każdy czynnik licznika będzie liczbą pierwszą względem każdego czynnika mianownika ¹⁾. Możemy więc tu np. tak postąpić: czynnik licznika 55 i czynnik mianownika 15 podzielimy przez 5, w zmienionych iloczynach czynniki 3 l. i 3 m. podzielimy przez 3, następnie czynniki 14 l. i 7 m. przez 7, czynniki 2 l. i 2 m. przez 2, czynniki 3 l. i 63 m. przez 3,

$$\frac{55 \times 3 \times 14 \times 3 \times 25}{63 \times 4 \times 15 \times 2 \times 7} = \frac{11 \times 3 \times 14 \times 3 \times 25}{63 \times 4 \times 3 \times 2 \times 7} = (*) \frac{11 \times 14 \times 3 \times 25}{63 \times 4 \times 2 \times 7} = \frac{11 \times 2 \times 3 \times 25}{63 \times 4 \times 2} =$$

$$= \frac{11 \times 3 \times 25}{63 \times 4} = \frac{11 \times 25}{21 \times 4} = \frac{275}{84} = 3 \frac{23}{84}.$$

Zwykle nie wypisujemy tak, jak tu zrobiliśmy, tych postaci ułamka iloczynowi, lecz przekreślamy skracane czynniki licznika i mianownika ułamka $\frac{55 \times 3 \times 14 \times 3 \times 25}{63 \times 4 \times 15 \times 2 \times 7}$, lub częścię, co na jedno wychodzi, odrazu przekreślamy w iloczynie $\frac{55}{63} \times \frac{3}{4} \times \frac{14}{15} \times 3 \times \frac{25}{2} \times \frac{1}{7}$ licznik któregokolwiek ułamka, lub czynnik całkowity, z mianownikiem innego, jak tylko dostrzeżemy, że one mają wspólny dzielnik (możemy

¹⁾ Wtedy i ich iloczyny będą liczbami pierwszymi względem siebie (§ 14, us. 16), t. j. skuteczniejszy mnożenie, otrzymamy nieskracalną postać ułamka, przedstawiającego iloczyn liczb danych.

(*) «Aby iloczyn podzielić przez jeden z jego czynników, należy wziąć iloczyn czynników pozostałych, czyli należy ów czynnik opuścić» (§ 7, us. 13).

powiem z téj pary liczb uważać jedną jako czynnik licznika, a drugą jako czynnik mianownika iloczynu), a nad nimi piszemy te liczby, które wypadają po podzieleniu ich przez ten spólny dzielnik *). Wypadających w ten sposób jedności nie piszemy; jeżeli jednak wszystkie czynniki licznika iloczynu się skrócą, to należy napisać w liczniku iloczynu 1 (która jest iloczynem jedności wypadłych wskutek częściowych skracañ), np. $\frac{6}{55} \times \frac{11}{18} = \frac{6 \times 11}{55 \times 18} = \frac{1}{11 \times 3} = \frac{1}{33}$; podobnie jeżeli wszystkie czynniki mianownika iloczynu się skrócą, to wypadłoby napisać w mianowniku 1, — lecz wtedy (§ 18, us. 9) otrzymujemy całkowitą, np. $\frac{3}{4} \times 24 \times 1 \frac{2}{3} = \frac{3 \times 24 \times 5}{4 \times 3} = \frac{6 \times 5}{1} = 6 \times 5 = 30$.

5. Jeżeli w iloczynie dwu lub więcej czynników, pośród których są ułamkowe, np. w iloczynie $\frac{55}{63} \times \frac{3}{4} \times \frac{14}{15} \times 3 \times 12 \frac{1}{2} \times \frac{1}{7}$, przestawimy jakkolwiek czynniki, to skutkiem tego w liczniku i mianowniku ułamka $\frac{55 \times 3 \times 14 \times 3 \times 25}{63 \times 4 \times 15 \times 2 \times 7}$, do którego dany iloczyn się sprowadza, zajdzie zmiana porządku czynników. Ponieważ zaś tak iloczyn $55 \times 3 \times 14 \times 3 \times 25$, jak i iloczyn $63 \times 4 \times 15 \times 2 \times 7$ od porządku czynników nie zależy (§ 6, us. 10), więc wszelkie przestawienie czynników danego iloczynu nie zmienia liczby, którą ten iloczyn przedstawia. Widzimy więc, że wogóle:

Iloczyn nie zależy od porządku czynników.

6. Z tego zaś wypada, że własności iloczynu, wypowiedziane w § 6 (druga część ustępu 10, ustęp 12) są ogólne, t. j. że one stosują się do iloczynów tak liczb całkowitych, jak i ułamkowych.

7. Wróćmy jeszcze do mnożenia dwu czynników, w przypadku, gdy jeden z nich, lub oba są całkowitymi z ułamkami. Na mocy własności, o których mowa wyżej w ustępach 3 i 5, oraz tego, co wiemy o dodawaniu liczb ułamkowych (§ 18, us. 4, 2, 3, 5), łatwo przeprowadzimy rozumowanie, którego tutaj ślad tylko (oszczędzając miejsca) zaznaczamy.

$$\begin{aligned} \text{a. } 5 \frac{2}{7} \times 3 &= 5 \frac{2}{7} + 5 \frac{2}{7} + 5 \frac{2}{7} = 5 + \frac{2}{7} + 5 + \frac{2}{7} + 5 + \frac{2}{7} = \\ &= (5 + 5 + 5) + \left(\frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \right) \\ &= 5 \times 3 + \frac{2}{7} \times 3. \end{aligned}$$

*) Trudności druku nie pozwalają nam tu tego przedstawić.

$$\begin{aligned}
 \text{b. } 5\frac{2}{7} \times \frac{3}{4} &= \frac{37}{7 \times 4} + \frac{37}{7 \times 4} + \frac{37}{7 \times 4} = \frac{35+2}{7 \times 4} + \frac{35+2}{7 \times 4} + \frac{35+2}{7 \times 4} \\
 &= \left(\frac{35}{7 \times 4} + \frac{35}{7 \times 4} + \frac{35}{7 \times 4} \right) + \left(\frac{2}{7 \times 4} + \frac{2}{7 \times 4} + \frac{2}{7 \times 4} \right) \\
 &= \left(\frac{5^{(*)}}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} \right) + \frac{2 \times 3}{7 \times 4} \\
 &= \frac{5 \times 3}{4} + \frac{2 \times 3}{7 \times 4}, \text{ a to wychodzi na to samo, co} \\
 &= 5 \times \frac{3}{4} + \frac{2}{7} \times \frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c. } 5\frac{2}{7} \times 2\frac{3}{4} &= 5\frac{2}{7} \times \frac{11}{4} = 5 \times \frac{11}{4} + \frac{2}{7} \times \frac{11}{4} \text{ na mocy b.), lecz to (us. 5)} \\
 &= \frac{11}{4} \times 5 + \frac{11}{4} \times \frac{2}{7} = 2\frac{3}{4} \times 5 + 2\frac{3}{4} \times \frac{2}{7}, \text{ co, według a. i b.,} \\
 &= 2 \times 5 + \frac{3}{4} \times 5 + 2 \times \frac{2}{7} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{7} \\
 &= 5 \times 2 + \frac{2}{7} \times 2 + 5 \times \frac{3}{4} + \frac{2}{7} \times \frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

Powiemy więc wogóle, że *gdy mamy całkowitą z ułamkiem pomnożyć przez całkowitą z ułamkiem, to możemy utworzyć częściowe iloczyny: całkowitej mnożnej przez całkowitą mnożnika, ułamka mnożnej przez całkowitą mnożnika, całkowitej mnożnej przez ułamek mnożnika, ułamka mnożnej przez ułamek mnożnika, i wziąć sumę tych iloczynów.* Bywa to niekiedy dogodnym. Np.

$$101\frac{1}{36} \times 360\frac{25}{101} = 36360 + 10 + 25 + \frac{25}{3636} = 36395\frac{25}{3636}.$$

$$101 \times 360 = 36360; \frac{1}{36} \times 360 = 10; 101 \times \frac{25}{101} = 25; \frac{1}{36} \times \frac{25}{101} = \frac{3636}{25};$$

8. Jeżeli mówimy np. «trzy-czwarte dwudziestu», to mamy tu na myśli liczbę, którą otrzymamy, gdy 20 rozłożymy na 4 części równe i takich części weźmiemy 3. Winniśmy więc tutaj uskutecznić toż samo z liczbą 20, aby otrzymać $\frac{3}{4}$ dwudziestu, co trzeba zrobić z jednością, aby otrzymać $\frac{3}{4}$ jedności (§ 16, us. 1). A więc: $\frac{3}{4}$ liczby 20 taksamo powstaje z 20-u, jak $\frac{3}{4}$ z 1-ści. A więc (us. 1), mówiąc «trzy-czwarte dwudziestu», mamy na myśli liczbę, którą przedstawia iloczyn $20 \times \frac{3}{4}$ (mnożna 20, mnożnik $\frac{3}{4}$), t. j. liczbę 15. Podobnie np. $\frac{3}{4}$ liczby $2\frac{1}{2}$ jest $2\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$; $\frac{19}{8}$ liczby $2\frac{2}{3}$ jest $2\frac{2}{3} \times \frac{19}{8} = 6\frac{1}{3}$; i t. d.

(*) § 17, us. 6 e.

Ułamek liczby danej jest liczbą, którą otrzymamy z danej, gdy ją przez ten ułamek pomnożymy.

Zamiast mówić: $\frac{19}{8}$ liczby $2\frac{2}{3}$, moglibyśmy powiedzieć: $2\frac{3}{8}$ liczby $2\frac{2}{3}$. Zwykle jednak wtedy mówimy albo: $\frac{19}{8}$ liczby $2\frac{2}{3}$ albotóż: 2 liczby $2\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{8}$ liczby $2\frac{2}{3}$.

Podobnie, jeżeli powiemy np. «dwie-piąte trzech-czwartych dwudziestu», to ponieważ «trzy-czwarte dwudziestu» oznacza liczbę, przedstawioną przez iloczyn $20 \times \frac{3}{4}$, więc $\frac{2}{5}$ tej liczby jest $(20 \times \frac{3}{4}) \times \frac{2}{5} = 20 \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$. Zatem przytoczone wyrażenie oznacza liczbę $20 \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = 6$.

9. Jeżeli jakąkolwiek liczbę daną mamy pomnożyć przez ułamek właściwy, np. przez $\frac{5}{6}$, to, na mocy powyższego, możemy powiedzieć, że mamy wziąć $\frac{5}{6}$ -ych liczby danej, a więc nie weźmiemy wszystkich sześciu szóstych części, razem stanowiących tę liczbę, ale tylko 5 z tych części, a więc niecałą liczbę. Skutkiem tego, po pomnożeniu, otrzymamy liczbę mniejszą od danej. Powiemy więc, że (por. us. 2)

Mnożąc jakąkolwiek liczbę przez ułamek właściwy, zmniejszamy ją.

Podobnie znajdziemy, że mnożąc jakąkolwiek liczbę przez liczbę większą od 1, zwiększamy ją.

10. W przypadku szczególnym, mieć będziemy np. $\frac{5}{7}$ liczby $\frac{7}{5}$; co oznacza $\frac{7}{5} \times \frac{5}{7} = 1$; podobnie: $\frac{1}{7}$ liczby 7 oznacza $7 \times \frac{1}{7} = 1$, 9 liczb $\frac{1}{9}$ oznacza $\frac{1}{9} \times 9 = 1$, $\frac{3}{8}$ liczby $2\frac{2}{3}$ oznacza $2\frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{8}{3} \times \frac{3}{8} = 1$. Widzimy z tego, że, aby z liczby danej, wskutek pomnożenia jej przez pewien czynnik, otrzymać 1, należy za ten czynnik przyjąć liczbę, której licznik jest mianownikiem liczby danej, a mianownik licznikiem liczby danej (stosuje się to także np. do drugiego przykładu, bo $7 = \frac{7}{1}$).

Gdy mówimy $\frac{5}{7}$ liczby $\frac{7}{5}$, to liczba $\frac{7}{5}$ przedstawia części jedności; moglibyśmy więc powiedzieć: «pięć-siódmich siedmiu-piątych jedności jest jedność» (podobnie: jedna-siódma siedmiu jedności jest jedność). To jest, mając jedność, wzięwszy jej $\frac{7}{5}$ -ych części, a tego, cośmy przez to otrzymali, biorąc $\frac{5}{7}$ -ych części, dochodzimy znowu do jedności. Skutek więc pierwszego działania, dokonanego na jedności, znieśliśmy przez działanie drugie, tak iż znowu mamy jedność. Dlatego

każde takie dwie liczby jak $\frac{5}{7}$ i $\frac{7}{5}$, jak $\frac{1}{7}$ i 7, jak 9 i $\frac{1}{9}$, jak $\frac{3}{8}$ i $2\frac{2}{3}$, nazywają się jedna odwrotnością drugiej. Jest więc liczba $\frac{5}{7}$ odwrotnością liczby $\frac{7}{5}$ i, nawzajem, liczba $\frac{7}{5}$ odwrotnością liczby $\frac{5}{7}$, i t. d.

11. W mnożeniu dwu liczb idzie nam o to, aby z mnożnej otrzymać iloczyn w taki sposób, w jaki mnożnik powstaje z jednośc. Inne więc jest znaczenie mnożnej niż mnożnika. Gdy mnożna jest pewnym, że tak powiemy, przedmiotem, *mnożnik wskazuje na działanie*, które mamy wykonać na mnożnej. Iloczyn zaś ma ten sam charakter, co mnożna. Tak np. gdy mamy 8 pomnożyć przez $\frac{3}{4}$, to mnożnik $\frac{3}{4}$ wskazuje tylko na działanie, które mamy wykonać na liczbie 8: rozłożyć ją na 4 równe części i takich części wziąć 3. (Por. § 6, us. 5).

12. Widoczniej się to przedstawi, gdy weźmiemy mnożenie liczb mianowanych. — Np. Łokieć sukna kosztuje $9\frac{2}{3}$ złotego; ile kosztuje $\frac{3}{4}$ łokcia? Ponieważ jeden łokieć kosztuje $9\frac{2}{3}$ zł., więc $\frac{3}{4}$ łokcia kosztują trzy-czwarte $9\frac{2}{3}$ złotego, t. j. (us. 9) należy $9\frac{2}{3}$ zł. $\times \frac{3}{4} = \frac{29}{3}$ zł. $\times \frac{3}{4} = \frac{29 \cdot 3}{3 \cdot 4}$ zł. $= \frac{29}{4}$ zł. $= 7\frac{1}{4}$ zł. W mnożeniu tym mnożnik $\frac{3}{4}$ wskazał nam, co należy zrobić z mnożną, aby otrzymać iloczyn. — Podobnie, gdy mamy np. zadanie: Łokieć sukna kosztuje $9\frac{2}{3}$ złotego; ile kosztuje $3\frac{3}{4}$ łokcia?, to zauważymy, że gdy jeden łokieć kosztuje $9\frac{2}{3}$ zł., to $3\frac{3}{4}$ łokcia kosztuje $3\frac{3}{4}$ raza (§ 16, us. 2) więcej, t. j. należy $9\frac{2}{3}$ złotego pomnożyć przez $3\frac{3}{4}$; $9\frac{2}{3}$ zł. $\times 3\frac{3}{4} = \frac{29}{3}$ zł. $\times \frac{15}{4} = \frac{29 \cdot 15}{3 \cdot 4}$ zł. $= 36\frac{1}{4}$ zł. — Z tego jeszcze wynika, że zawsze (por. § 6, us. 6) *w mnożeniu liczb mianowanych mnożnik jest liczbą oderwaną, a iloczyn jest liczbą mianowaną, wyrażoną przy pomocy tej samej jednostki, co mnożna.*

13. Przerobimy tu kilka zadań na mnożenie liczb mianowanych ułamkowych, podając je jaknajprościej ¹⁾.

1) Zwykle w zadaniach przytaczamy różne okoliczności, aby uczeń, wnikając w nie, sam rozumowaniem doszedł do wskazania, jakie mianowicie i nad którymi liczbami należy wykonać działania. Tu zaś idzie nam tylko o to, aby wskazać, jak się uskutecznia samo mnożenie.

a. $\frac{3}{5}$ godziny wyrazić w minutach. — Godzina ma minut 60, więc $\frac{3}{5}$ godziny jest to samo, co $\frac{3}{5}$ -te 60-u minut; trzeba więc $60 \text{ m.} \times \frac{3}{5} = \frac{60 \cdot 3}{5} \text{ m.} = 36 \text{ m.}$ Odp. $\frac{3}{5}$ godziny = 36 minutom.

b. $\frac{3}{5}$ doby wyrazić w godzinach. — Rozumując taksamo, mieć będziemy $24 \text{ g.} \times \frac{3}{5} = \frac{24 \cdot 3}{5} \text{ g.} = 14 \frac{2}{5} \text{ g.}$ Odp. $\frac{3}{5}$ doby = $14 \frac{2}{5}$ godziny.

c. $\frac{3}{5}$ doby wyrazić w godzinach i minutach. — Znaleźliśmy już, że $\frac{3}{5}$ doby = $14 \frac{2}{5}$ g.; należy więc jeszcze ułamek godziny wyrazić w minutach; $\frac{2}{5} \text{ g.} = 60 \text{ m.} \times \frac{2}{5} = \frac{60 \times 2}{5} \text{ m.} = 24 \text{ m.}$ Odp. $\frac{3}{5}$ doby = $14 \text{ g.} + 24 \text{ m.}$

d. $\frac{3}{7}$ doby wyrazić w godzinach, minutach i sekundach. —

$$\frac{3}{7} \text{ d.} = 24 \text{ g.} \times \frac{3}{7} = \frac{24 \cdot 3}{7} \text{ g.} = 10 \frac{2}{7} \text{ g.}$$

$$\frac{2}{7} \text{ g.} = 60 \text{ m.} \times \frac{2}{7} = \frac{60 \cdot 2}{7} \text{ m.} = 17 \frac{1}{7} \text{ m.}$$

$$\frac{1}{7} \text{ m.} = 60 \text{ s.} \times \frac{1}{7} = \frac{60}{7} \text{ s.} = 8 \frac{4}{7} \text{ s.}$$

Odp. $\frac{3}{7}$ d. = $10 \text{ g.} + 17 \text{ m.} + 8 \frac{4}{7} \text{ s.}$

e. W 4 morgach + $42 \frac{2}{3}$ pręta kwadratowego ile jest stóp kw.?—

$$4 \text{ m.} + 42 \frac{2}{3} \text{ p. k.} = 300 \text{ p. k.} \times 4 + 42 \frac{2}{3} \text{ p. k.} = 1242 \frac{2}{3} \text{ p. k.}$$

$$\text{p. k.} = 225 \text{ s. k.}$$

$$1242 \frac{2}{3} \text{ p. k.} = 225 \text{ s. k.} \times 1242 \frac{2}{3} = \frac{225 \cdot 3728}{3} \text{ s. k.} =$$

$$= (75 \times 3728) \text{ s. k.} = 279600 \text{ s. k.}$$

Odp. W 4 mor. + $42 \frac{2}{3}$ pr. kw. jest 279600 st. kw.

f. Metr. = $3 \frac{17}{36}$ stopy nowopolskiej; ile w hektarze jest stóp kw.?—

$$\text{Har} = 10000 \text{ m. k.} = \frac{125 \times 125 \times 10000}{36 \times 36} \text{ st. k.} = \frac{9765625}{81} \text{ s. k.} =$$

$$= 120563 \frac{22}{81} \text{ st. kw.}$$

Odp. W hektarze jest $120563 \frac{22}{81}$ stopy kw. nowopolskiej.

g. Znaléść $\frac{3}{5}$ liczby wielorakiój 18 sąż. + 2ł. + 8 cali. — Trzeba $18 \text{ s.} + 2 \text{ ł.} + 8 \text{ c.}$ rozłóżyć na 5 równych części i takich części wziąć 3, czyli: daną liczbę podzielić przez 5, a to, co otrzymamy, pomnożyć przez 3.

$$\begin{array}{r}
 18 \text{ s.} + 2 \text{ ł.} + 18 \text{ c.} \\
 \underline{-15} \\
 3 \text{ s.} = 9 \text{ ł.} \\
 \quad + 2 \text{ ł.} \\
 \quad \quad 11 \text{ ł.} \\
 \underline{-10} \\
 \quad \quad 1 \text{ ł.} = 24 \text{ c.} \\
 \quad \quad \quad + 18 \text{ c.} \\
 \quad \quad \quad \quad 42 \text{ c.} \\
 \quad \quad \quad \underline{-40 \text{ c.}} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 2 \text{ c.}
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 5 \\
 \hline
 3 \text{ s.} + 2 \text{ ł.} + 8 \frac{2}{5} \text{ c.} \\
 \hline
 \times 3 \\
 \hline
 11 \text{ s.} + 1 \text{ ł.} + 1 \frac{1}{5} \text{ c.}
 \end{array} \right.
 \quad \begin{array}{l}
 8 \frac{2}{5} \text{ c.} \times 3 = \frac{42 \cdot 3}{5} \text{ c.} = 25 \frac{1}{5} \text{ c.} \\
 25 \frac{1}{5} \text{ c.} = 1 \text{ ł.} + 1 \frac{1}{5} \text{ c.}
 \end{array}$$

Odp. $\frac{3}{5}$ liczby 18 sąż. + 2 ł. + 8 c. jest 11 sąż. + 1 ł. + $1\frac{1}{5}$ cala.

h. Gdybyśmy mieli np. te 18 s. + 2 ł. + 8 c. pomnożyć przez $3\frac{2}{5}$, co możemy tak oznaczyć

$$(18 \text{ s.} + 2 \text{ ł.} + 8 \text{ c.}) \times 3\frac{2}{5},$$

to albo ($3\frac{2}{5} = \frac{17}{5}$) mnożną podzielimy przez 5 i otrzymany iloraz pomnożylibyśmy przez 17, albotóż oddzielnie wykonalibyśmy $(18 \text{ s.} + 2 \text{ ł.} + 8 \text{ c.}) \times 3$, a oddzielnie, jak w g., pomnożylibyśmy też mnożną przez $\frac{2}{5}$, i wzięli sumę tych iloczynów częściowych.

(Zadania arytmetyczne. § 19.)

§ 20. DZIELENIE LICZB UŁAMKOWYCH.

1. Dzielenie, jako działanie odwrotne mnożeniu dwu czynników ma na celu z danych: iloczynu dwu czynników i jednego z tych czynników wyznaczenie drugiego czynnika tego iloczynu. To zadanie istnieć może niezależnie od tego, czy czynniki są liczbami całkowitymi, czy też ułamkowymi. Podane więc w us. 3-im § 7-go określenie dzielenia jest ogólne. Zatem wogóle:

Dzielenie jestto działanie, zapomoć którego, mając dwie liczby: dzielną i dzielnik, odnajdujemy liczbę, zwaną ilorazem, taką, iżby iloczyn dzielnika i ilorazu przedstawił dzielną.

Gdy więc np. mamy $8 : \frac{1}{2}$, to mamy tu znaleźć taką liczbę, którą mnożąc przez $\frac{1}{2}$, otrzymamy 8, t. j. taką liczbę, której $\frac{1}{2}$ jest liczbą 8. Jeżeli więc $\frac{1}{2}$ liczby szukanéj jest 8, to cała liczba jest 2 razy większa od 8, t. j. szukaną liczbą jest $8 \times 2 = 16$, więc $8 : \frac{1}{2} = 16$.

Zadanie, w którym mając daną pewną część liczby, szukamy téj liczby, np. zadanie:

$\frac{3}{4}$ pewnej liczby jest 6; jakato jest liczba?,

jako zadanie, w którym, mając jeden z dwu czynników iloczynu i iloczyn (por. § 19, us. 8), szukamy drugiego czynnika, sprowadza się do dzielenia danéj liczby przez liczbę, wskazującą, jaką częścią szukanej liczby jest ta dana liczba — jak tu np. do dzielenia $6 : \frac{3}{4}$.

2. Ponieważ, jak widzieliśmy (§ 19, us. 2, 9), wyrazy: «mnożyć», «mnożenie» mają w arytmetyce niekiedy obszerniejsze znaczenie niż w użyciu zwykłym, więc i ściśle związane z nimi znaczenie wyrazów: «dzielić», «dzielenie» winno również w odpowiednich przypadkach niezgadzać się z pospolitym ich rozumieniem. Rzeczywiście, według zwykłego pojmowania, gdy dzielimy jakiś przedmiot, to go zmniejszamy; tymczasem widzieliśmy tylkoco, że *dzieląc* 8 przez $\frac{1}{2}$ otrzymaliśmy 16, t. j. liczbę *większą* od dzielnej *). A więc «podzielić» niezawsze znaczy: zmniejszyć (por. us. 4).

To, cośmy wyżej powiedzieli, odnosi się do tego tylko przypadku (§ 7, us. 6, 7, 8) dzielenia, kiedy dzielnik odpowiada mnożnikowi (§ 19, us. 1, 11, 12). Gdy bowiem dzielnik odpowiada mnożnej, t. j. gdy nam idzie o to, ile razy dzielnik mieści się w dzielnej, to wtedy powiemy: liczba 8 jest od liczby $\frac{1}{2}$ większa 16 razy ¹⁾.

3. Włączając całkowitą z ułamkiem w ułamek, a całkowitą przedstawiając w postaci ułamka z mianownikiem 1, moglibyśmy zawsze dzielenie dwu liczb ułamkowych sprowadzić do dzielenia ułamka przez ułamek. Aby jednak wprost przeprowadzić rozumowanie także wtedy, kiedy, czyto dzielna, czytóż dzielnik są liczbami całkowitymi, oddzielnie rozważymy trafić się tu mogące przypadki.

Właściwie w każdym z mogących tu być przypadków należałoby oddzielnie przeprowadzać dwa rozumowania: raz przyjmując, że dzielnik odpowiada, mnożnikowi, drugi raz przyjmując, że on odpowiada mnożnej. Rozumowanie w drugim przypuszczeniu byłoby zawilsze, niż w pierwszym. Z uwagi więc, że liczba (oderwana), którą jako iloraz otrzymamy (bez względu na to, któremu czynnikowi iloczynu ona odpowiada), zawsze wypadnie ta sama, a tylko zna-

*) Np. możemy podzielić 8 jabłek przez 4 albo przez 16, nie potrzebując dla wykonania działania i okazania ilorazu więcej jabłek, niż dane. Gdy tymczasem nie możemy, mając tylko 8 jabłek, pokazać tyle jabłek, ile wypada z podzielenia 8 jabł. : $\frac{1}{2}$, t. j. tyle, ile trzeba, aby, po pomnożeniu ich przez $\frac{1}{2}$, otrzymać 8 jabłek.

¹⁾ Związek z obszerniejszym rozumieniem wyrazu «mnożyć» okazałby się wtedy np. w zadaniu 8 łok. : 16 łok. (O tym była już mowa w § 16, us. 1 b., 2.)

czenie jęj będzie różne, zależnie od tego, o co nam w tym dzieleniu idzie (por. także § 7, us. 6, 7), zadowalamy się rozumowaniem łatwiejszym ¹⁾, t. j. przeprowadzonym w przypadku, gdy dzielnik odpowiada mnożnikowi.

a. Podzielić ułamek przez całkowitą, np. $\frac{3}{4} : 5$. Mamy tu znaleźć liczbę (iloraz), która pomnożona przez dzielnik da dzielną; a więc iloraz pomnożony przez 5 (czyli 5 ilorazów) równa się $\frac{3}{4}$; sam zatem iloraz jest 5 razy mniejszy od $\frac{3}{4}$. Aby przeto otrzymać iloraz, trzeba ułamek $\frac{3}{4}$ zmniejszyć 5 razy, co uskutecznimy (§ 17, us. 6, a.), mnożąc przez 5 jego mianownik, $\frac{3}{4 \times 5}$. Jest więc

$$\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 \times 5}.$$

Aby ułamek podzielić przez całkowitą, należy mianownik pomnożyć przez całkowitą: otrzymana liczba jest mianownikiem ilorazu, licznikiem zaś licznik danego ułamka. Mówi się często krócej: aby ułamek podzielić przez całkowitą należy jego mianownik przez tę całkowitą pomnożyć.

Przeprowadzając to rozumowanie, możemy jednocześnie ślad jego piśmiennie tak zaznaczać:

$$\frac{3}{4} : 5 * = \frac{3}{4 \times 5} = \frac{3}{20}.$$

* oznacza, iż to, co jest po gwiazdce, piszemy dopiero po ukończeniu rozumowania, które nas do tego doprowadziło.

$$5 \text{ ilorazów} = \frac{3}{4}$$

$$\text{iloraz} = \frac{3}{4 \times 5};$$

Taksamo rozumowalibyśmy, gdyby było np. $\frac{23}{7} : 8$, lub np. $\frac{20}{27} : 5$.

Gdy jednak mamy np. $\frac{20}{27} : 5$, to zamiast tego, żeby, dla zmniejszenia 5 razy ułamka $\frac{20}{27}$, mnożyć przez 5 jego mianownik ($\frac{20}{27 \cdot 5}$), możemy (§ 17, us. 6 d.) jego licznik podzielić przez 5, przez co odrazu iloraz otrzymamy w postaci $\frac{20 : 5}{27}$ (do której doszlibyśmy z postaci $\frac{201}{27 \cdot 5}$, skracając ją przez 5). Więc: *jeżeli mamy podzielić ułamek przez cał-*

¹⁾ Przeprowadzimy owo rozumowanie na takim np. zadaniu: 8 łok. : $\frac{3}{5}$ łok. Wypadnie nam w ilorazie liczba oderwana, przez którą mnożąc $\frac{3}{5}$ ł., otrzymamy 8 ł. Więc: jeżeli $\frac{3}{5}$ ł. pomnożone przez iloraz = 8 łokciom, to $\frac{1}{5}$ ł. pomnożona przez iloraz = $\frac{8}{3}$ ł., a 1 łokieć pomnożony przez iloraz [czyli: iloraz (liczba oderwana) z dodaniem miana — łokieć (§ 6, us. 3)] = $\frac{8 \cdot 5}{3}$ łokcia; sam zatem iloraz = $\frac{8 \cdot 5}{3}$.

kowitą, a licznik ułamka jest przez tę całkowitą podzielny, to dzielimy jego licznik przez tę całkowitą.

b. Całkowitą podzielić przez ułamek, np. $6 : \frac{5}{8}$. Ponieważ iloraz, pomnożony przez $\frac{5}{8}$, wyda liczbę 6; więc $\frac{5}{8}$ ilorazu jest liczbą 6. Gdy 5-ósmych ilorazu jest liczbą 6, to 1-ósma ilorazu, jako liczba 5 razy mniejsza od 6-u, może być przedstawiona (§ 17, us. 5) przez $\frac{6}{5}$. Jeżeli zaś 8-a część ilorazu jest $\frac{6}{5}$, to sam iloraz jest liczbą 8 razy większą od $\frac{6}{5}$; aby więc mieć iloraz, należy $\frac{6}{5}$ powiększyć 8 razy, t. j. (§ 17, us. 6.c.) licznik tego ułamka przez 8 pomnożyć, $\frac{6 \times 8}{5}$. Jest zatem

$$6 : \frac{5}{8} = \frac{6 \times 8}{5}.$$

Aby całkowitą podzielić przez ułamek, należy całkowitą pomnożyć przez mianownik: otrzymana stąd liczba jest licznikiem ilorazu, mianownikiem zaś licznik ułamka danego.

Ślad tego rozumowania tak zaznaczymy

$$6 : \frac{5}{8} * = \frac{6 \times 8}{5} = \frac{48}{5} = 9 \frac{3}{5}.$$

* oznacza tu i dalej toż samo, co poprzednio.

$$\frac{5}{8} \text{ ilorazu} = 6$$

$$\frac{1}{8} \text{ ilorazu} = \frac{6}{5}$$

$$\text{iloraz} = \frac{6 \times 8}{5};$$

Taksamo rozumowalibyśmy, gdybyśmy mieli np. $8 : \frac{24}{5}$, lub np. $1 : \frac{3}{7}$.

c. Ułamek podzielić przez ułamek, np. $\frac{3}{4} : \frac{5}{8}$. Tu iloraz, pomnożony przez $\frac{5}{8}$, wyda liczbę $\frac{3}{4}$; więc $\frac{5}{8}$ ilorazu jest liczbą $\frac{3}{4}$. Gdy $\frac{5}{8}$ ilorazu jest liczbą $\frac{3}{4}$, to $\frac{1}{8}$ ilorazu jest liczbą 5 razy mniejszą od $\frac{3}{4}$, więc, aby mieć $\frac{1}{8}$ ilorazu, należy ułamek $\frac{3}{4}$ zmniejszyć 5 razy, t. j. jego mianownik przez 5 pomnożyć, $\frac{3}{4 \times 5}$. Jeżeli zaś $\frac{1}{8}$ ilorazu jest liczbą $\frac{3}{4 \times 5}$, to iloraz jest liczbą 8 razy większą; więc, aby mieć iloraz, należy ułamek $\frac{3}{4 \times 5}$ powiększyć 8 razy, t. j. jego licznik przez 8 pomnożyć, $\frac{3 \times 8}{4 \times 5}$. Jest zatem

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{8} = \frac{3 \times 8}{4 \times 5}.$$

Aby ułamek podzielić przez ułamek, należy za licznik ilorazu wziąć iloczyn licznika dzielnej przez mianownik dzielnika, a za mianownik ilorazu mianownika dzielnej przez licznik dzielnika.

Ślad tego rozumowania tak zaznaczymy:

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{8} = \frac{3 \times 8}{4 \times 5} = \frac{3 \times 2}{5} = \frac{6}{5} = 1 \frac{1}{5}.$$

$$\frac{5}{8} \text{ ilorazu} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{8} \text{ ilorazu} = \frac{3}{4 \times 5}$$

$$\text{iloraz} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5};$$

Taksamo rozumowalibyśmy, gdybyśmy mieli np. $\frac{17}{3} : \frac{3}{8}$, $\frac{6}{7} : \frac{5}{3}$, $\frac{5}{1} : \frac{3}{4}$ i t. d.

Na mocy tego prawidła, gdy mamy jaką liczbę napisaną w postaci ułamka podzielić przez ułamek, to odrazu w liczniku owęj liczby piszemy jako czynnik mianownik dzielnika, a w jej mianowniku piszemy jako czynnik licznik dzielnika. Np.

$$\frac{6 \cdot 3}{5 \cdot 7 \cdot 13} : \frac{11}{9} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 9}{5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11}.$$

Zauważymy jeszcze, że gdy mianowniki dzielnej i dzielnika są jednakowe, np. $\frac{3}{7} : \frac{4}{7}$, to skracając ułamek, który otrzymać mamy w ilorazie, $\frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7}$ przez 7 (t. j. przez spólny mianownik dzielnej i dzielnika), możemy odrazu jako iloraz danego tu dzielenia napisać iloraz z podzielenia liczników, t. j.,

$$\frac{3}{7} : \frac{4}{7} = \frac{3}{4}.$$

Również znajdziemy, że np.

$$\frac{3}{5} : \frac{3}{7} = \frac{7}{5}.$$

d. *Wrazie, gdy albo dzielna, albo dzielnik, albo dzielna i dzielnik jednocześnie są całkowitymi z uławkami, włączamy je w ułamki, przez co sprowadzamy rzecz do jednego z poprzedzających przypadków.*

4. Rozumowania, przeprowadzone w poprzedzającym ustępie, możemy zastąpić nieco odmiennym. Mianowicie:

a. $\frac{3}{4} : 5$. Ponieważ 5 ilorazów jest liczbą $\frac{3}{8}$, to iloraz szukany jest piątą częścią ($\frac{1}{5}$) liczby $\frac{3}{4}$; lecz $\frac{1}{5}$ liczby $\frac{3}{4}$ (§ 19, us. 8) jest $\frac{3}{4} \times \frac{1}{5}$; więc iloraz z podzielenia $\frac{3}{4}$ przez 5 może być przedstawiony przez ilo-

czyn z pomnożenia $\frac{3}{4}$ (t.j. dzielnej) przez $\frac{1}{5}$, t. j. przez odwrotność (§ 19, us. 10) liczby 5 (dzielnika). Zaznaczymy to rozumowanie, pisząc

$$\frac{3}{4} : 5^* = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5}.$$

$$5 \text{ ilorazów} = \frac{3}{4}$$

$$\text{iloraz} = \frac{1}{5} \text{ liczby } \frac{3}{4} = \frac{1}{5} \times \frac{3}{4};$$

b. $6 : \frac{5}{8}$. Gdy $\frac{5}{8}$ ilorazu jest liczbą 6, to $\frac{1}{8}$ ilorazu jest $\frac{1}{5}$ liczby 6, a iloraz jest: 8 razy $\frac{1}{5}$ liczby 6, czyli: $\frac{8}{5}$ liczby 6, t. j. $6 \times \frac{8}{5}$; może zatem on być przedstawiony przez iloczyn dzielnej 6 przez odwrotność dzielnika $\frac{5}{8}$. Zaznaczymy to rozumowanie, pisząc

$$6 : \frac{5}{8}^* = 6 \times \frac{8}{5}.$$

$$\frac{5}{8} \text{ ilorazu} = 6$$

$$\frac{1}{8} \text{ ilorazu} = \frac{1}{5} \text{ liczby } 6$$

$$\text{iloraz} = \frac{8}{5} \text{ liczby } 6 = 6 \times \frac{8}{5};$$

c. $\frac{3}{4} : \frac{5}{8}$. Gdy $\frac{5}{8}$ ilorazu jest liczbą $\frac{3}{4}$, to $\frac{1}{8}$ ilorazu jest $\frac{1}{5}$ liczby $\frac{3}{4}$, a iloraz jest: 8 razy $\frac{1}{5}$ liczby $\frac{3}{4}$ czyli: $\frac{8}{5}$ liczby $\frac{3}{4}$, t. j. $\frac{3}{4} \times \frac{8}{5}$, a więc iloczynem dzielnej $\frac{3}{4}$ przez odwrotność dzielnika $\frac{5}{8}$. Ślad tego rozumowania możemy tak zaznaczyć:

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{8}^* = \frac{3}{4} \times \frac{8}{5}.$$

$$\frac{5}{8} \text{ ilorazu} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{8} \text{ ilorazu} = \frac{1}{5} \text{ liczby } \frac{3}{4};$$

$$\text{iloraz} = \frac{8}{5} \text{ liczby } \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{5}$$

Zauważymy jeszcze, że gdy mamy przez siebie podzielić dwie liczby całkowite, np. $40 : 5$, to podobnie możemy rozumować: 5 ilorazów = 40, więc iloraz jest $\frac{1}{5}$ liczby 40, czyli $40 \times \frac{1}{5}$, t.j. jest iloczynem dzielnej przez odwrotność dzielnika.

Z powyższego wypadu, że ogólnie:

Iloraz może być przedstawiony zapomocą iloczynu dzielnej przez odwrotność dzielnika.

Dlatego można w przypadkach b. i c. ustępu poprzedzającego tak się wyrażać: aby całkowitą podzielić przez ułamek, można całkowitą pomnożyć przez odwrotność ułamka dzielnika; aby ułamek podzielić przez ułamek, można ułamek dzielnej pomnożyć przez odwrotność ułamka dzielnika.

Nawzajem, jeżeli mamy np. iloczyn $\frac{3}{20} \times \frac{11}{7}$, to możemy go zastąpić przez iloraz $\frac{3}{20} : \frac{7}{11}$.

Z tegoż jeszcze wypadu, że *dzieląc jakąkolwiek liczbę przez ułamek właściwy, zwiększamy ją*, wychodzi to bowiem na toż samo, co gdybyśmy ją pomnożyli przez ułamek niewłaściwy (§ 19, us. 9).

5. Jak wiemy (§ 17, us. 5), możemy dzielenie oznaczać, pisząc ułamek, w którego liczniku umieścimy dzielną, w mianowniku zaś dzielnik. Taksamo można postępować w razie, gdy dzielna, lub dzielnik, albo obie te liczby jednocześnie są ułamekami: otrzymamy w ten sposób ułamek o ułamkowym liczniku albo mianowniku. Taki jednak ułamek, stosując prawidła na dzielenie ułamków, możemy sprowadzić do ułamka o liczniku i mianowniku całkowitym. Np.

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{5}} = \frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 \cdot 5}; \quad \frac{5}{\frac{3}{4}} = 5 : \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 4}{3}; \quad \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5}.$$

Podobnie np.

$$\frac{2 \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} \times 1 \frac{4}{7}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{4} \times \frac{11}{7}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 11}; \quad \frac{5 \times \frac{3}{2}}{7 : \frac{11}{2}} = \frac{5 \times \frac{3}{2}}{7 \times \frac{2}{11}} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 11}{2 \cdot 7 \cdot 2}$$

Ułamek, w którego liczniku i mianowniku jest liczba ułamkowa, może być sprowadzony do ułamka, którego licznik i mianownik są liczbami całkowitymi.

W us. 12-ym § 17-go rozwinęliśmy ułamek zwyczajny na ułamek ciągły. Na mocy powyższego, możemy teraz wykonać zadanie odwrotne. Gdy mamy np. ułamek ciągły

$$\frac{1}{32 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3}}}}$$

to kolejno

$$\frac{1}{5 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{16}{3}} = \frac{3}{16}, \quad \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3}}} = \frac{1}{2 + \frac{3}{16}} = \frac{1}{\frac{35}{16}} = \frac{16}{35},$$

$$\frac{1}{32 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3}}}} = \frac{1}{32 + \frac{16}{35}} = \frac{1}{\frac{1136}{35}} = \frac{35}{1136}.$$

6. W us. 7-ym § 17-go widzieliśmy, że własności, wypowiedziane w us. 15-ym §-u 7-go mają miejsce także w przypadku, gdy dzielna nie jest podzielna przez dzielnik, lub jest od niego mniejsza. W obu jednak przytoczonych miejscach mówiliśmy o powiększaniu lub zmniejszaniu całkowitą ilość razy czyto całkowitej dzielnej, czyteliż całkowitego dzielnika, t. j. o mnożeniu lub dzieleniu ich przez liczbę całkowitą, a nadto dzieliliśmy dzielną lub dzielnik tylko przez taką liczbę, przez którą one były podzielne.

Chcemy teraz zbadać, jak się zmienia iloraz, gdy dzielną lub dzielnik, jakimikolwiek są one liczbami: całkowitymi, czy ułamkowymi, mnożymy lub dzielimy przez jakąkolwiek, całkowitą lub ułamkową, liczbę. Gdy zaś całkowitą można przedstawić w postaci ułamka, więc ograniczymy się do liczb ułamkowych, przez co nie zmniejszymy ogólności wypadków.

Jeżeli mamy dzielenie

$$\frac{3}{8} : \frac{5}{2} = \frac{3}{20},$$

to (§ 19, us. 5, 6, 3; § 20 us. 4)

$$\left(\frac{3}{8} \times \frac{7}{11}\right) : \frac{5}{2} = \left(\frac{3}{8} \times \frac{7}{11}\right) \times \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \times \frac{7}{11} \times \frac{2}{5} = \left(\frac{3}{8} \times \frac{2}{5}\right) \times \frac{7}{11} = \frac{3}{20} \times \frac{7}{11};$$

$$\left(\frac{3}{8} : \frac{7}{11}\right) : \frac{5}{2} = \left(\frac{3}{8} \times \frac{11}{7}\right) \times \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \times \frac{11}{7} \times \frac{2}{5} = \left(\frac{3}{8} \times \frac{2}{5}\right) \times \frac{11}{7} = \frac{3}{20} \times \frac{11}{7} = \frac{3}{20} : \frac{7}{11}. \text{ A więc ogólnie:}$$

a. Jeżeli dzielną mnożymy lub dzielimy przez jakąkolwiek, czyto całkowitą, czyteliż ułamkową liczbę, nie zmieniając dzielnika, to tym samym iloraz odpowiednio mnożymy lub dzielimy przez tę samą liczbę. —

$$\frac{3}{8} : \left(\frac{5}{2} \times \frac{7}{11}\right) = \frac{3}{8} : \frac{(5 \times 7)}{(2 \times 11)} = \frac{3}{8} \times \frac{2 \times 11}{5 \times 7} = \frac{3}{8} \times \frac{2}{5} \times \frac{11}{7} = \left(\frac{3}{8} \times \frac{2}{5}\right) \times \frac{11}{7} = \frac{3}{20} : \frac{7}{11};$$

$$\frac{3}{8} : \left(\frac{5}{2} : \frac{7}{11}\right) = \frac{3}{8} : \frac{(5 \times 11)}{(2 \times 7)} = \frac{3}{8} \times \frac{2 \times 7}{5 \times 11} = \frac{3}{8} \times \frac{2}{5} \times \frac{7}{11} = \left(\frac{3}{8} \times \frac{2}{5}\right) \times \frac{7}{11} = \frac{3}{20} \times \frac{7}{11}. \text{ A zatem:}$$

b. Jeżeli dzielnąj nie zmieniamy, a dzielnik mnożymy lub dzielimy przez jakąkolwiek, czyto całkowitą, czytęż ułamkową liczbę, to tym samym iloraz odpowiednio dzielimy lub mnożymy przez tę samą liczbę. —

Z zestawienia tych własności wypada, że

c. Jeżeli dzielną i dzielnik albo jednocześnie mnożymy, albo jednocześnie dzielimy przez jakąkolwiek, czyto całkowitą, czytęż ułamkową liczbę, to iloraz się nie zmienia.

7. Gdy dzielna i dzielnik są tu, w szczególnym przypadku, całkowite, to możemy je uważać (§ 17, us. 5) za licznik i mianownik ułamka, iloraz zaś przedstawia wartość ułamka, t. j. liczbę, którą jest ten ułamek. Moglibyśmy więc z powyższego wnieść o zmianie ułamka wskutek pomnożenia lub podzielenia jego licznika albo mianownika przez jakąkolwiek, czyto całkowitą, czytęż ułamkową liczbę. Wyprowadzimy to jednak wprost. Weźmy np. ułamek $\frac{3}{4}$. Wtedy (§ 19, us. 5, 6, 3; § 20, us. 4, 5):

$$\frac{3 \times \frac{5}{7}}{4} = \left(3 \times \frac{5}{7}\right) : 4 = \left(3 \times \frac{5}{7}\right) \times \frac{1}{4} = 3 \times \frac{5}{7} \times \frac{1}{4} = \left(3 \times \frac{1}{4}\right) \times \frac{5}{7} = \\ = \frac{3}{4} \times \frac{5}{7};$$

$$3 : \frac{5}{7} = \frac{3 \times \frac{7}{5}}{4} = \left(3 \times \frac{7}{5}\right) \times \frac{1}{4} = 3 \times \frac{7}{5} \times \frac{1}{4} = \left(3 \times \frac{1}{4}\right) \times \frac{7}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \\ = \frac{3}{4} : \frac{5}{7}. \text{ A więc ogólnie:}$$

a. Jeżeli, nie zmieniając mianownika, mnożymy lub dzielimy jego licznik przez jakąkolwiek, czyto całkowitą, czytęż ułamkową liczbę, to wskutek tego ułamek zostaje przez tę liczbę odpowiednio pomnożony lub podzielony. —

$$\frac{3}{4 \times \frac{5}{7}} = 3 : \left(4 \times \frac{5}{7}\right) = 3 : \frac{4 \times 5}{7} = \frac{3 \times 7}{4 \times 5} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{3}{4} : \frac{5}{7};$$

$$\frac{3}{4 : \frac{5}{7}} = 3 : \left(4 : \frac{5}{7}\right) = 3 : \frac{4 \times 7}{5} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{7}. \text{ A zatem:}$$

b. Jeżeli, nie zmieniając licznika ułamka, mnożymy lub dzielimy jego mianownik przez jakąkolwiek, czyto całkowitą, czytęż ułamkową liczbę, to wskutek tego ułamek zostaje przez tę liczbę odpowiednio pomnożony lub podzielony.

c. Jeżeli licznik i mianownik ułamka albo jednocześnie mnożymy, albo jednocześnie dzielimy przez tę samą jakąkolwiek, czyto całkowitą, czytęż ułamkową liczbę, to wartość ułamka się nie zmienia.

8. Możemy podobnie uogólnić własności, wyprowadzone w § 7, us. 13. Mamy iloczyn kilku czynników podzielić przez pewną liczbę; np.

$$\left(\frac{4}{5} \times 8 \times \frac{7}{11} \times \frac{13}{15}\right) : \frac{3}{4} = \frac{4}{5} \times 8 \times \frac{7}{11} \times \frac{13}{15} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{5} \times 8 \times \left(\frac{7}{11} \times \frac{4}{3}\right) \times \frac{13}{15} = \\ = \frac{4}{5} \times 8 \times \left(\frac{7}{11} : \frac{3}{4}\right) \times \frac{13}{15}.$$

I nawzajem, z ostatniego wyrażenia możemy przejść do pierwszego.

Aby iloczyn podzielić przez jakąkolwiek, czyto całkowitą, czytóż ułamkową liczbę, można którykolwiek jego czynnik przez tę liczbę podzielić; nawzajem: jeżeli czynnik iloczynu podzielimy przez jakąkolwiek, czyto całkowitą, czytóż ułamkową liczbę, to wskutek tego iloczyn zostaje przez tę liczbę podzielony.

Łącząc te własności iloczynu z wypowiedzianymi w us. 12-ym §-u 6-go, a uogólnionymi w us. 6-ym §-u 19-go, możemy powiedzieć: *jeżeli jeden czynnik iloczynu mnożymy przez jakąkolwiek, czyto całkowitą, czytóż ułamkową liczbę, a inny jego czynnik jednocześnie przez tę samą liczbę dzielimy, to iloczyn się nie zmienia.*

9. Przerobimy tu kilka zadań na dzielenie liczb mianowanych.

a. Za $2\frac{3}{4}$ metra materyi jedwabnej zapłacono $56\frac{5}{6}$ złp.; po czemu płacono metr téj materyi? — Metr sukna kosztował $2\frac{3}{4}$ raza mniej, niż $56\frac{5}{6}$ złp. Należy więc $56\frac{5}{6}$ zł. podzielić przez $2\frac{3}{4}$,

$$56\frac{5}{6} \text{ zł.} : 2\frac{3}{4} = \frac{341}{6} \text{ zł.} : \frac{11}{4} = \frac{341 \cdot 4}{6 \cdot 11} \text{ zł.} = \frac{31 \cdot 2}{3} \text{ zł.} = 30\frac{2}{3} \text{ zł.}$$

Odp. Metr téj materyi kosztuje $30\frac{2}{3}$ zł.

b. Za $\frac{3}{4}$ metra sukna zapłacono $8\frac{2}{3}$ złp.; ile więc zapłaconoby za metr tego sukna? — $\frac{3}{4}$ metra kosztuje $8\frac{2}{3}$ zł. czyli: $\frac{3}{4}$ tego (ilości złotych), co należy zapłacić za metr, jest $8\frac{2}{5}$ zł. Gdy więc $\frac{3}{4}$ szukanej liczby jest $8\frac{2}{5}$ zł., t. j. gdy szukana liczba pomnożona przez $\frac{3}{4}$ równa się $8\frac{2}{5}$ zł., to, aby owę liczbę otrzymać, należy $8\frac{2}{5}$ zł. podzielić przez $\frac{3}{4}$,

$$8\frac{2}{5} \text{ zł.} : \frac{3}{4} = \frac{42}{5} \text{ zł.} \times \frac{4}{3} = \frac{42 \cdot 4}{5 \cdot 3} \text{ zł.} = \frac{56}{5} \text{ zł.} = 11\frac{1}{5} \text{ zł.}$$

Odp. Za metr tego sukna zapłaconoby $11\frac{1}{5}$ zł.

c. Za złoty kupiono $29\frac{1}{3}$ metra sznura; ileby wypadło zapłacić za 110 m. takiego sznura? — Wypadłoby zapłacić tyle złotych,

ile razy 110 m. jest większe od $29\frac{1}{3}$ m. Należy więc 110 m. podzielić przez $29\frac{1}{3}$,

$$110 \text{ m.} : 29\frac{1}{3} \text{ m.} = 110 \text{ m.} : \frac{88}{3} \text{ m.} = \frac{110 \cdot 3}{88} = \frac{15}{4} = 2\frac{3}{4}.$$

Znaleźliśmy, że 110 m. jest większe od $29\frac{1}{3}$ m. $2\frac{3}{4}$ raza. Że zaś powiedzieliśmy, że za 100 m. wypadnie zapłacić tyle złotych, ile razy 110 m. jest większe od $29\frac{1}{3}$ m., zatem: wypadnie zapłacić $2\frac{3}{4}$ zł.

d. Za 110 metrów sznura zapłacono złoty; ile więc jest warte $29\frac{1}{3}$ m. tego sznura? — $29\frac{1}{3}$ m. tego sznura jest warte taką część złotego, jaką częścią 110-u metrów jest $29\frac{1}{3}$ m. Aby się zaś tego dowiedzieć, należy $29\frac{1}{3}$ m. podzielić przez 110 m.,

$$29\frac{1}{3} \text{ m.} : 110 \text{ m.} = \frac{88}{3} \text{ m.} : 110 \text{ m.} = \frac{88}{3 \cdot 110} = \frac{4}{15}.$$

Odp. Wypadnie zapłacić $\frac{4}{15}$ zł.

e. $76\frac{1}{2}$ minuty wyrazić w częściach godziny. — Ponieważ godzina ma 60 m., więc w $76\frac{1}{2}$ m. jest tyle godzin, ile razy $76\frac{1}{2}$ m. jest większe od 60 m.; trzeba więc $76\frac{1}{2}$ m. podzielić przez 60 m.,

$$76\frac{1}{2} \text{ m.} : 60 \text{ m.} = \frac{153}{2} \text{ m.} : 60 \text{ m.} = \frac{153}{120} = \frac{51}{40} = 1\frac{11}{40}; 1\frac{11}{40} \text{ g. } ^1)$$

Odp. $76\frac{1}{2}$ m. = $1\frac{11}{40}$ g.

f. Możemy liczbę wieloraką wyrazić jako liczbę mianowaną prostą nie tylko przy pomocy najmniejszej z jednostek, wchodzących w wyrażenie danej liczby (por. § 9, us. 1, 2). Np.

9 morgów + 180 prętów kw. wyrazić w częściach włóki. —

$$180 \text{ pr. kw.} : 300 \text{ pr. kw.} = \frac{180}{300} = \frac{3}{5}; 180 \text{ pr. kw.} = \frac{3}{5} \text{ morga};$$

$$9\frac{3}{5} \text{ m.} : 30 \text{ m.} = \frac{48}{5} \text{ m.} : 30 \text{ m.} = \frac{48}{5 \cdot 60} = \frac{8}{25}; 9\frac{3}{5} \text{ m.} = \frac{8}{25} \text{ włóki.}$$

Odp. 9 morgów + 180 prętów kw. = $\frac{8}{25}$ włóki.

(Zadania arytmetyczne. § 20.)

¹⁾ Możemy także tak rozumować: minuta jest $\frac{1}{60}$ g., zatem $76\frac{1}{2}$ m. = $\frac{1}{60}$ g. \times $76\frac{1}{2}$ i t. d.

ROZDZIAŁ VII.

LICZBY DZIESIĘTNE.

§ 21. O LICZBACH DZIESIĘTNYCH WOGÓLE.

1. Jeżeli pewną długość mierzymy np. łokciem i znajdujemy, że w niej łokieć mieści się dokładnie np.

682 037

razy, to ta liczba (§ 1, us. 2) składa się z takich części: 6-u setek tysięcy, 8-u dziesiątków tysięcy, 2-u tysięcy, 3-ch dziesiątków i 7-u jedności. W téj liczbie obok setek tysięcy, z prawej ich strony, są oznaczone części liczby 10 razy mniejsze od setek tysięcy (§ 3, us. 15), t. j. dziesiątki tysięcy *). Obok dziesiątków tysięcy, z prawej ich strony, są oznaczone części liczby 10 razy mniejsze, t. j. tysiące. Obok tysięcy byłyby z prawej strony oznaczone części liczby 10 razy mniejsze, t. j. setki, gdyby one były w naszej liczbie; a że ich niema, przeto na miejscu, które przez nie byłoby zajętem, jest napisane zero (§ 3, us. 11). Obok zera, wskazującego tu, że w naszej liczbie niema setek, z prawej jego strony są oznaczone części liczby 10 razy mniejsze od setek, t. j. dziesiątki. Obok dziesiątków, z prawej ich strony, są oznaczone części liczby 10 razy mniejsze, t. j. jedności. Czyli wogóle, obok pewnych części liczby oznaczamy z prawej ich strony części liczby 10 razy od nich mniejsze.

Przypuśmy, że w mierzonej długości łokieć całkowicie mieści się 682 037 razy, i że pozostaje jeszcze jęj część, mniejsza od łokcia, w której dziesiąta część łokcia mieści się np. 9 razy. Wtedy, z uwagi, żeśmy dotąd obok pewnych części liczby z prawej strony wciąż oznaczali części liczby 10 razy mniejsze, moglibyśmy, stosując tę samę zasadę, te 9 części dziesiątych jedności, jako części liczby 10 razy mniejsze od jedności, napisać obok jedności, z prawej ich strony. Byłoby więc ¹⁾:

682 0379

*) Z którychto 8-u dziesiątków tysięcy każdy jest 10 razy mniejszy od każdej z 6-u setek tysięcy.

¹⁾ W tym ustępie i następującym, a niekiedy i w dalszych, po liczbach dziesiętnych niema znaków przestankowych.

Nie możemy jednak tej liczby tak napisanej pozostawić: możnaby bowiem 9 dziesiątych jedności wziąć za 9 jedności, 7 jedności za 7 dziesiątków i t. d. Trzeba oznaczyć, że cyfra 9 nie przedstawia tu jedności, ale dziesiąte jej części (gdy takie oznaczenie wprowadzimy, t. j. gdy wyraźnie wskażemy, że cyfra 9 oznacza dziesiąte części jedności, to tym samym cyfra 7 przedstawiać będzie jedności, cyfra 3 dziesiątki i t. d.). W tym celu po cyfrze, mającej przedstawiać jedności, t. j., jak tu, po cyfrze 7, napiszemy przecinek ¹⁾, tak iż w liczbie

682 037,9

dziesiąte części jedności, oznaczone obok jedności z prawej ich strony, są od jedności oddzielone przecinkiem. Wskutek tego, licząc miejsca od przecinka w lewą stronę, mamy, jak poprzednio, jedności na miejscu pierwszym, dziesiątki na drugim i t. d.

Podobnie, jeżeliby mierzona długość była taką, iż po odmierzeniu 682 037-u łokci i 9-u dziesiątych części łokcia, pozostała jeszcze jej część mniejsza od jednej dziesiątej części łokcia, w którejby część łokcia, 10 razy mniejsza od dziesiątej jego części, t. j. setna część łokcia, mieściła się np. 5 razy, to, postępując według tej samej zasady, możemy te 6 setnych, jako części 10 razy mniejsze od dziesiątych części jedności, napisać obok dziesiątych części z prawej strony, tak iż będzie

682 037,95.

Mamy teraz już po przecinku dwa miejsca zajęte: na miejscu pierwszym po przecinku są oznaczone dziesiąte części jedności, a na miejscu drugim po przecinku części setne jedności.

Gdybyśmy nadto w podobny sposób mieli do oznaczenia części 10 razy mniejsze od setnych części jedności, t. j. tysięczne części jedności, i było ich np. 4, to według tej samej zasady napisalibyśmy

682 037,954

tak iż tysięczne części jedności znalazłyby się na miejscu trzecim po przecinku.

Gdyby jeszcze były do oznaczenia części 10 razy mniejsze od tysięcznych części jedności, t. j. dziesięciotysięczne części jedności, i było ich np. 8, to podobnie oznaczmy je na miejscu czwartym po przecinku, tak iż mieć będziemy

682 037,9548

I t. d. Stotysięczne więc części jedności znajdują się na miej-

¹⁾ Najwięcej dla takiego oznaczania jest rozpowszechnione używanie przecinka, chociaż zdarza się dość często, że po jednościach piszą albo kropkę w dolnej części wiersza, albo kropkę w górnej części wiersza, albo zostawiają tylko po jednościach widoczny odstęp pusty, albo nakoniec wszystkie cyfry po jednościach z prawej strony piszą znacznie mniejsze.

scu piątym po przecinku, milionowe na miejscu szóstym po przecinku i t. d.

Widzimy z tego, że w ten sposób, stosując tę samą zasadę, według której piszemy liczby całkowite, możemy przedstawiać części liczby mniejsze od jedności.

Ponieważ zaś podstawą naszego sposobu pisania liczb całkowitych jest liczba dziesięć, więc taż liczba dziesięć jest podstawą takiego pisania części liczby mniejszych od jedności. Dlatego te części (dziesiąte jedności, dziesiąte dziesiątych jedności czyli setne, dziesiąte setnych czyli tysięczne, ...) w taki sposób wypisane, nazywają się częściami dziesiętnymi, a liczba, w którą wchodzą części dziesiętne, liczbą dziesiętną¹⁾. Powiemy więc:

Liczbą dziesiętną nazywamy liczbę, w której części mniejsze od jedności są napisane według tej samój zasady, według której piszemy liczby całkowite.

Cyfry, znajdujące się w liczbie dziesiętnej po przecinku, nazywamy cyframi dziesiętnymi tej liczby.

2. Jeżeli, mając już

682 037,95

chcemy jeszcze w tej liczbie oznaczyć 8 dziesięciotysięcznych, to cyfrę 8 wypada, jako mającą przedstawiać dziesięciotysięczne części, napisać na miejscu czwartym po przecinku. Dwa miejsca po przecinku są już zajęte, aby więc móc napisać 8 na miejscu czwartym, trzeba zająć miejsce trzecie, na którym bywają oznaczane części tysięczne, cyfrą zero, podobnie, jak to robiliśmy w liczbach całkowitych (§ 3, us. 9, 10, 11). Napiszemy więc

682037,9508

Taksamo, jeżeli liczba składa się z samych tylko części dziesiętnych, np. z części: 9-u dziesiątych, 5-u setnych i 8-u dziesięciotysięcznych, i chcemy tę liczbę napisać jako dziesiętną, to wypadnie 9 napisać na miejscu pierwszym po przecinku, 5 na drugim, a 8 na czwartym. Przecinek zaś piszemy po cyfrze, oznaczającej jedności (us. 1), dla oddzielenia jedności od części mniejszych od jedności. Gdy więc w naszej liczbie niema jedności, po których należy ów przecinek umieścić, napiszemy przed przecinkiem, aby zająć miejsce jedności, cyfrę zero. W ten sposób tak napiszemy naszą liczbę dziesiętną:

0,9508

¹⁾ Może ze względu na to, że mówimy: systemat dziesiątkowy pisania liczb, byłoby odpowiedniej mówić: liczba dziesiątkowa, ale dziś nie czas już zmieniać tego powszechnie przyjętego wyrażenia.

Podobnie, gdy mamy do napisania, jako dziesiętną, liczbę: 8 dziesięciotysięcznych, to należy 8 umieścić na czwartym miejscu po przecinku; a że niema części liczby do oznaczenia na miejscach pierwszym, drugim i trzecim po przecinku, przeto na tych miejscach, aby je zająć, piszemy cyfry zero. Liczbę więc 8 dziesięciotysięcznych tak przedstawimy jako dziesiętną:

$$0,0008$$

Z tego widzimy, że to, cośmy w us. 11-ym § 3-go powiedzieli o cyfrze zero w liczbach całkowitych, stosuje się wprost do liczb dziesiętnych.

3. Mieliśmy tu liczby dziesiętne

$$0,9508 \text{ i } 0,0008$$

mniejsze od jedności. Liczby dziesiętne mniejsze od jedności nazywają się ułamkami dziesiętnymi. Możemy więc powiedzieć albo

Ułamkiem dziesiętnym nazywamy liczbę dziesiętną mniejszą od jedności, albo

Ułamkiem dziesiętnym nazywamy liczbę mniejszą od jedności, napisaną według tej samej zasady, według której piszemy liczbę całkowitą.

4. Gdy mamy np. liczbę dziesiętną 682037,9508, to wszystkie «części dziesiętne» (us. 1) tej liczby przedstawia ułamek 0,9508; prócz tych «części» dziesiętnych, w tej liczbie jest 682037 jedności, czyli, jak zwykle mówimy, 682037 «całkowitych»¹⁾, tak iż

$$682037,9508 = 682037 + 0,9508.$$

Podobnie np. w liczbie 682,00012 mamy 682-ie całkowite, a jej części dziesiętne są przedstawione przez ułamek 0,00012, tak iż

$$682,00012 = 682 + 0,00012.$$

Jeżeli zatem liczba dziesiętna jest większa od jedności, to ją można wyrazić jako sumę liczby całkowitej i ułamka dziesiętnego.

Liczbę całkowitą, która pozostaje z liczby dziesiętnej po oddzieleniu ułamka dziesiętnego, nazywamy także częścią całkowitą tej liczby dziesiętnej. Tak np. częścią całkowitą liczby 682,00012 są: 682 całkowite.

5. Liczbę np.

$$64,0900127$$

możemy tak przeczytać: «64 całkowite, 9 setnych, 1-a stotysięczna, 2 milionowe i 7 dziesięciomilionowych».

Z uwagi jednak, że w liczbie dziesiętnej, części liczby oznaczone na jakimkolwiek miejscu są 10 razy większe od części liczby oznaczonych obok z prawej strony, a tysamym sto razy większe od czę-

¹⁾ Nie można jednak mówić: «całości», bo tu całością jest liczba 682037,9508.

ści oznaczonych z prawej strony na drugim skolei miejscu, 1000 razy większe od części oznaczonych z prawej strony na trzecim skolei miejscu i t. d., możemy o częściach dziesiętnych naszej liczby powiedzieć, że: 9 setnych jest to samo, co 90 tysięcznych, co 900 dziesięciotysięcznych, co 9000 stotysięcznych, co 90000 milionowych, co 900000 dziesięciomilionowych, a 1-na stotysięczna jest to samo, co 10 milionowych, co 100 dziesięciomilionowych, 2 zaś milionowe jest to samo, co 20 dziesięciomilionowych. Części więc dziesiętne naszej liczby przedstawiają $900\,000 + 100 + 20 + 7$ dziesięciomilionowych; czyli 900 127 dziesięciomilionowych, tak iż liczbę naszą możemy tak przeczytać: «64 całkowite i 900 127 dziesięciomilionowych».

Zważywszy jeszcze, że jedność jestto 10 000 000 dziesięciomilionowych, możemy, czytając liczbę naszą, zamiast mówić: 64 całkowite (64 jedności), powiedzieć 640 000 000 dziesięciomilionowych. A że nadto mamy w tej liczbie 900 127 dziesięciomilionowych, zatym możemy ją jeszcze tak przeczytać: «640 900 127 dziesięciomilionowych».

Gdy w liczbie dziesiętnej jest część całkowita, to, jeżeli w niej po przecinku jest niemniej, niż dwie cyfry znaczące (§ 3, us. 7), możemy ją przeczytać trzema sposobami; jeżeli zaś w niej po przecinku jest tylko jedna cyfra znacząca, np. 64,0008, to dwoma sposobami; ułamek zaś dziesiętny można przeczytać odpowiednio dwoma sposobami, np. 0,9508, lub jednym tylko, np. 0,0008. Ogólnie zaś powiemy:

Liczbę dziesiętną możemy przeczytać trzema sposobami: albo, przeczytawszy część całkowitą, wymawiamy oddzielnie pokolei każdą cyfrę znaczącą po przecinku, dodając zaraz nazwanie części liczby, jakie bywają oznaczane na miejscu, które ta cyfra zajmuje; albo, przeczytawszy część całkowitą, czytamy liczbę, przedstawioną przez cyfry, znajdujące się po przecinku, jakgdyby to ich zgrupowanie tworzyło liczbę całkowitą), dodając tylko nazwanie części liczby, oznaczanych na miejscu, zajętem przez ostatnią cyfrę po przecinku; albotóż czytamy tę liczbę jako całkowitą, jakgdyby przecinka nie było, i dodajemy tylko nazwanie części liczby, oznaczanych na miejscu, zajętem przez ostatnią cyfrę po przecinku.*

6. Ułamek np. dziesiętny 0,0900127, przedstawia liczbę 900 127 dziesięciomilionowych (us. 5) jedności, która, jak wiemy (§ 17, us. 1), może być przedstawiona w ten sposób $\frac{900127}{10000000}$. Takie przedstawienie tej liczby, tudzież przedstawienia podobne innych liczb, które dotąd (roz. VI) nazywaliśmy «ułamkami», będziemy, w przeciwstawieniu ułamkom dziesiętnym, nazywać ułamkami z wyciecznymi. Owóż, uła-

*) Por. § 3, us. 12.

mek dziesiętny 0,0900127 przedstawia tę samą liczbę, co ułamek zwyczajny $\frac{900127}{10\,000\,000}$, tak iż

$$0,0900127 = \frac{900127}{10\,000\,000}.$$

Podobnie np. (us. 4; § 16, us. 1 a.)

$$64,0900127 = 64 + 0,0900127 = 64 + \frac{900127}{10\,000\,000} = 64 \frac{900127}{10\,000\,000}.$$

A zatem ułamek dziesiętny możemy zastąpić przez ułamek zwyczajny, pisząc jako jego licznik liczbę, przedstawioną przez cyfry znajdujące się po przecinku, jakgdyby to ich zgrupowanie przedstawiało oddzielną liczbę całkowitą, a jako mianownik liczbę, przedstawioną przez 1 z tylu zerami, ile w danym ułamku jest wszystkich cyfr dziesiętnych ¹⁾.

Podobnie liczba np. dziesiętna 64,0900127, jako przedstawienie 640 900 127-u dziesięciomilionowych (us. 5) jedności, może być zastąpiona przez ułamek zwyczajny, t. j.

$$64,0900127 = \frac{640900127}{10\,000\,000}.$$

A więc ogólnie:

*Liczbę dziesiętną możemy zastąpić przez ułamek zwyczajny, pisząc jako jego licznik liczbę daną, opuściwszy w niej przecinek, a jako mianownik liczbę, przedstawioną przez 1 z tylu zerami, ile w danej liczbie jest wszystkich cyfr dziesiętnych *).*

7. Ponieważ w liczbie dziesiętnej np. 237,9548, prócz 237 całkowitych, mamy 9 dziesiątych, 5 setnych, 4 tysięczne i 8 dziesięciotysięcznych (us. 1, 5), zatem, wyrażając 9 dziesiątych, 5 setnych, 4 tysięczne, oraz 8 dziesięciotysięcznych jako ułamki zwyczajne, możemy naszą liczbę wyrazić jako sumę 237 jedności i tych ułamków zwyczajnych, t. j.

$$237,9548 = 237 + \frac{9}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{8}{10000}.$$

Pisząc jeszcze (§ 6, us. 22), zamiast 237 sumę $2 \times 100 + 3 \times 10 + 7 \times 3$, mieć będziemy

¹⁾ Niewłaściwie mówią: «ułamek dziesiętny jestto ułamek, którego mianownik jest albo 10, albo 100, albo i t. d. — wogóle 1 z zerami», gdyż, jeżeli tylko ułamek ma mianownik, to jednocześnie nie jest już dziesiętnym. Dodać jeszcze można, że takie określenie ułamków dziesiętnych nie obejmuje ułamków dziesiętnych nieskończonych (choćby tylko peryjodycznych).

[J. A. Serret w *Traité d'arithmétique* (wyd. 6-e, 1875), powiedziaławszy uprzednio, że «części dziesiętne jedności są te, które otrzymujemy, dzieląc jedność na 10, 100, 1000, ... części równych», takie podaje określenie: «liczbą dziesiętną nazywa się liczba, która wyraża, ile pewna wielkość zawiera jedności i części dziesiętnych jedności.»]

*) Niekiedy można tak otrzymane ułamki zwyczajne następnie skrócić, np.

$$2,75 = 2 \frac{75}{100} = 2 \frac{3}{4}; \quad 0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}.$$

$$237,9548 = 2 \times 100 + 3 \times 10 + 7 \times 1 + \frac{9}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{8}{10000},$$

albotóż (§ 6, us. 22)

$$237,9548 = 2 \times 10 \times 10 + 3 \times 10 + 7 \times 1 + \frac{9}{10} + \frac{5}{10 \times 10} + \\ + \frac{4}{10 \times 10 \times 10} + \frac{8}{10 \times 10 \times 10 \times 10},$$

co właśnie nam wskazuje, że przy pisaniu naszej liczby dziesiętnej służyła nam jako podstawa liczba 10, gdyż każda z części liczby, oznaczonych w liczbie danej na jakimkolwiek miejscu, jest 10 razy większa od części liczby oznaczonych obok z prawej strony (por. § 3, us. 16).

Pisząc $9 \times \frac{1}{10}$ zamiast $\frac{9}{10}$, $5 \times \frac{1}{10 \times 10}$ zamiast $\frac{5}{10 \times 10}$ i t. d. i wprowadzając wykładniki, możemy liczbę np. 6237,9548 tak przedstawić (§ 6, us. 41, § 7, us. 28):

$$6237,9548 = 6 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 9 \times \frac{1}{10^1} + \\ + 5 \times \frac{1}{10^2} + 4 \times \frac{1}{10^3} + 8 \times \frac{1}{10^4},$$

t. j. *jedności, dziesiątki i t. d. każdej liczby przedstawiają iloczyn liczby jednocyfrowej przez potęgę liczby 10, części zaś jej dziesiąte, setne i t. d. przedstawiają iloczyn liczby jednocyfrowej przez odwrotność (§ 19, us. 10) potęgi liczby 10, co jest następstwem tego, że nasz systemat pisania liczb jest dziesiątkowy*¹⁾.

8. Jeżeli mamy np. 137,028 i po cyfrze ostatniej po przecinku, t. j. po cyfrze 8, napiszemy jedno lub więcej zer, to liczba np.

$$137,028000$$

przedstawiać nam zawsze będzie 137 całkowitych 2 setne i 8 tysięcznych — taksamo, jak poprzednio: 137,028. Możemy więc powiedzieć, że *liczba dziesiętna się nie zmieni, jeżeli po przecinku z prawej strony ostatniej cyfry znaczącej dopiszemy ilekolwiek zer.* (Por. § 3, us. 12.)

Jeżeli mamy liczbę całkowitą, np. 34, to kładąc przecinek po cyfrze, przedstawiającej jedność, t. j. po cyfrze 4, możemy po przecinku napisać zera, gdyż np. liczba 34,0000 także przedstawia 34 jedności; *zatem, mając liczbę całkowitą, możemy po cyfrze, zajmującej miejsce pierwsze, umieścić przecinek, a po nim dopisać ilekolwiek zer.*

Dopisujemy zera, jako końcowe cyfry dziesiętne, ilekroć to w czasie wykonywanego rachunku okazuje się pożytecznym. Nawzajem, jeżeli, wykonywając pewien rachunek, otrzymujemy, jako wypadek tego rachunku, liczbę dziesiętną, w której ostatnimi cyframi dziesiętnymi są zera, to te zera możemy opuścić.

¹⁾ Taksamo moglibyśmy pisać np. ułamki szóstkowe w systemacie szóstkowym i t. d. (por. § 6, us. 42; § 7, us. 28).

9. Jeżeli mamy dwie takie np. liczby dziesiętne:

805,2479 i 80,52479

to możemy powiedzieć, że, przesuwając w pierwszej liczbie przecinek o jedno miejsce (czyli: o jedną cyfrę) wprawo, otrzymujemy z niej liczbę drugą. Wskutek tego przesunięcia przecinka 8 setek powstało 8 dziesiątków, t. j. z każdej setki powstał dziesiątek, czyli każda setka została zmniejszona 10 razy; podobnie z 5 jednościami powstało 5 dziesiątych, t. j. każda jedność została zmniejszona 10 razy; z 2 dziesiątych powstały 2 setne, t. j. każda dziesiąta została zmniejszona 10 razy i t. d. Gdy więc wskutek przesunięcia przecinka o jedno miejsce wprawo każda część liczby została zmniejszona 10 razy, to i cała liczba zmniejszyła się 10 razy. — Nawzajem, moglibyśmy powiedzieć, że pierwszą liczbę otrzymujemy z drugiej, przesuwając w niej przecinek o jedno miejsce wlewo, i podobnie objaśnić, że, wskutek tego, każda część liczby drugiej została powiększona 10 razy, czyli, że wskutek przesunięcia przecinka o jedno miejsce wlewo liczba powiększa się 10 razy.

Podobnie, wprost rozważając np. dwie liczby dziesiętne

805,2479 i 80 524,79

wniesiemy, że, wskutek przesunięcia przecinka o dwa miejsca wprawo, liczba powiększa się 100 razy, a wskutek posunięcia przecinka o dwa miejsca wlewo liczba zmniejsza się 100 razy.

I t. d. Powiemy więc:

Liczbę dziesiętną powiększamy lub zmniejszamy 10, 100, 1000, 10000, . . . razy, gdy przecinek przesuwamy o 1, 2, 3, 4, . . . miejsca odpowiednio wprawo lub wlewo.

Jeżeli np. mamy liczbę 2,37 powiększyć 10 000 razy, to należy w niej przecinek przesunąć o 4 miejsca wprawo. W danej liczbie mamy tylko 2 cyfry dziesiętne; możemy jednak (us. 8) wystawić sobie, że z prawej strony ostatniej cyfry dziesiętnej znajdują się zera, a mianowicie, że jest ich tyle, ile nam potrzeba, aby 4 miejsca po przecinku były zajęte, t. j. że po cyfrze 7 znajdują się dwa zera. Przesuwając więc przecinek o 4 miejsca wprawo, otrzymamy w tym przypadku, jako liczbę od danej 10 000 razy większą, liczbę całkowitą 23 700. — Podobnie, gdybyśmy chcieli też samą liczbę 2,37 zmniejszyć np. 10 000 razy, to wypadłoby przecinek przesunąć o 4 miejsca wlewo. Z lewej strony jest zajęte w naszej liczbie tylko jedno miejsce, ale możemy (§ 3, us. 12) wystawić sobie, że z lewej strony części całkowitej są dopisane zera, mianowicie, że je mamy na miejscach drugim, trzecim i czwartym. Gdy więc przesuniemy przecinek wlewo o 4 miejsca, to wypadnie jeszcze, z uwagi, że wskutek tego otrzymamy liczbę

złożoną tylko z części dziesiętnych, t. j. ułamek dziesiętny, napisać przed przecinkiem cyfrę zero (us. 2). Ostatecznie więc będziemy mieli 0,000237.

Podobnie, chcąc np. liczbę 734 powiększyć np. 100 razy, możemy ją sobie wystawić (us. 8) jako 734,00, tak iż przesuając, przecinek o 2 miejsca wprawo, otrzymamy 73400 *). Również np. 1 zmniejszając 100 razy, otrzymamy 0,01. — A jeżelibyśmy pragnęli liczbę 734 zmniejszyć raz 100, a drugim razem 100 000 razy, to zważymy wprost, że, aby zmniejszyć liczbę 734 razy 100, możemy każdą z 734-ch jedności zmniejszyć 100 razy, wskutek czego mieć będziemy 734 setne części jedności, t. j. (us. 5) liczbę 7,34; zmniejszając zaś ową liczbę 734 razy 100 000, możemy podobnie każdą z jedności tej liczby zmniejszyć 100 000 razy, wskutek czego otrzymamy 734 stotysięczne, t. j. 0,00734. — Gdy np. liczbę 56020 zmniejszymy 100 razy, to otrzymany 560,20 czyli (us. 8) liczbę 560,2.

10. W us. 2-im § 9-go widzieliśmy, jak łatwo liczbę wieloraką, wyrażoną w jednostkach układu metrycznego, przedstawić jako liczbę mianowaną prostą. Mówiliśmy tam jednak o wyrażeniu takiej liczby wielorakię tylko jako mianowanej prostej całkowitej, t. j. przy pomocy najmniejszej z wchodzących jednostek, lubtż jednostki jeszcze mniejszej. Możemy jednak wyrazić tę liczbę w jednorodnych jednostkach metrycznych jakiegokolwiek wielkości.

Tak np. gdy mamy (§ 9, ns. 2) 300 865 cm., a chcemy tę liczbę wyrazić w metrach, to, zważywszy, że cm. jest setną częścią metra, mieć będziemy 3008,65 m. Jeżelibyśmy zaś naszą liczbę 300 865 cm. wyrazić chcieli w kilometrach, to zważywszy, że cm. jest stotysięczną częścią kilometra, mieć będziemy 3,00865 Km. Jest więc

$$300\ 865\ \text{cm.} = 3\ 008,65\ \text{m.} = 3,00865\ \text{Km.}$$

Podobnie, jeżeli chcemy np. 2 Dm. kw. + 5 m. kw. + 8,75 cm. kw. wyrazić w m. kw., to możemy wprost, zważywszy, że Dm. kw. przedstawia setkę m. kw., że dm. kw. jest setną częścią m. kw., a cm. kw. jest dziesięciotysięczną m. kw., napisać

2 Dm. kw. + 5 m. kw. + 15 dm. kw. + 8,75 cm. kw. = 205,150875 m. kw. (tu 7 dziesiątych cm. kw., jako 7 dziesiątych dziesięciotysięcznej m. kw., przedstawia 7 stotysięcznych m. kw., a 5 setnych cm. kw., jako 5 setnych dziesięciotysięcznej m. kw., przedstawia 5 milionowych m. kw.). Gdybyśmy otrzymaną liczbę chcieli wyrazić w Hm. kw., to, z uwagi, że m. kw. jest dziesięciotysięczną częścią Hm. kw., mieć będziemy

$$205,150875\ \text{m. kw.} = 0,0205150875\ \text{Hm. kw.}$$

*) Por. § 6, us. 21.

Podobnie np.

2 dm. sz. + 74,25 mm. sz. = 0,00200007425 m. sz. = 2 000,07425 cm. sz.

Również łatwo możemy wykonywać zadania odwrotne, np.
28 342,021 g. = 28 Kg. + 342 g. + 21 mg.

11. Możemy teraz już rozwiązywać takie np. zadania (por. str. 135, 122):

a. Wyrazić korzec nowopolski przy pomocy hektolitra. — Kwarta n.-p. = litrowi; korzec = 4 kw. $\times 8 \times 4$; a więc:

korzec n.-p. = 128 kwart = 128 l. = 1,28 Hl.

b. Wyrazić funt n.-p. w częściach kilograma. — Łut n.-p. = 12 672 mg., a więc funt n.-p. = 12 672 mg. $\times 32$ i

funt n.-p. = 405 504 mg. = 0,405504 Kg.

c. Wyrazić łokieć n.-p. w częściach ćwierci południka ziemskiego. — Łok. n.-p. = 2 mm. $\times 12 \times 12 \times 2$; ćwierć południka ziemskiego 10 000 000 m.; a więc:

łok. n.-p. = 576 mm. = 0,576 m. = 0,000000576 ćwierci południka ziemskiego.

d. Ile Kg. waży stopa sz. n.-p. wody dystylowanej przy takiej jej temperaturze, przy której woda jest najgęstsza? — Stopa liniowa n.-p. = 2 mm. $\times 12 \times 2$; stopa sz. n.-p. = 288 mm. sz. $\times 288 \times 288$; gram jestto ciężar cm. sz. takiej wody; a więc

stopa sz. n.-p. = 23 887 872 mm. sz. = 23 887,872 cm. sz.

ciężar stopy sz. n.-p. wody = 23 887,872 g. = 23,887872 Kg.

e. Ile włóka n.-p. ma hektarów? — Ar = Dm. kw. = 100 m. kw.; włóka n.-p. = 288 mm. kw. $\times 288 \times 225 \times 300 \times 30$; a więc

włóka n.-p. = 168 061 600 000 mm. kw. = 168 061,6 m. kw.

= 1 680,616 ara = 16,80616 Hara.

12. Gdy mamy dwie liczby całkowite, mające różną ilość cyfr, to liczba, mająca więcej cyfr, jest większą; np. jeżeli mamy liczby całkowite: 3-cyfrową i liczbę 4-ocyfrową, to w ostatniej jest przynajmniej 1 tysiąc, gdy tymczasem pierwsza liczba jest mniejsza od tysiąca. Gdy zaś mamy dwa ułamki dziesiętne, np.

0,64 i 0,59249075,

to możemy zauważyć, że w drugim ułamku mamy, prócz 5-udziesiątych, następujące części: 9 setnych, które przedstawiają mniej niż 10 setnych, czyli mniej niż 1-ę dziesiątą; 2 tysięczne, które przedstawiają mniej niż 1 setną, tak iż 9 setnych wraz z 2-ema tysięcznymi przedstawiają mniej niż 9 setnych + 1 setna, t. j. mniej niż 10 setnych, czyli mniej niż 1 dziesiątą; 4 dziesięciotysięczne, o których podobnie wypadnie nam powiedzieć, że one wraz z 9-u setnymi i 2-ema tysięcznymi przedstawiają liczbę mniejszą od 1 dziesiątej, i t. d.

Drugi więc ułamek przedstawia liczbę mniejszą od 6-u dziesiątych — gdy pierwszy jest liczbą większą *) od 6-u dziesiątych: jest więc

$$0,64 > 0,59249075.$$

Oczywiście, że z dwu liczb: 598,778947 i 1000,012 druga jest większa.

Podobnie, mając dwa ułamki

$$- 0,8062878 \text{ i } 0,80645$$

łatwo spostrzeżemy, że w pierwszym części: 2 dziesięciotysięczne, 8 stotysięcznych, 7 milionowych i 8 dziesięciomilionowych przedstawiają razem mniej niż 3 dziesięciotysięczne, tak iż pierwszy ułamek, jest mniejszy od 8-u dziesiątych, 6-u tysięcznych i 3 dziesięciotysięcznych (razem wziętych), a więc jest mniejszy od drugiego ułamka,

$$0,8062878 < 0,80645.$$

Podobnie

$$405,8062878 < 405,80645,$$

t. j. jeżeli dwie liczby [całkowite **) lub dziesiętne] mają początkowe cyfry na odpowiednich miejscach jednakowe, to ta z tych liczb jest większa, w której pierwsza (licząc od strony lewej) z różnych od siebie cyfr przedstawia więcej części liczby, oznaczanych na odpowiednim miejscu.

Z tego wypada, że: *zgrupowanie ilukolwiek i jakichkolwiek cyfr dziesiętnych na pewnych miejscach przedstawia mniejszą liczbę, niż cyfra 1 napisana na miejscu poprzedzającym to miejsce, na którym się znajduje pierwsza z owych cyfr*; np. $0,000878 < 0,001$; podobnie: $0,00999 < 0,01$.

Powyższe rozważania doprowadzają jeszcze do tego, że pewna liczba jedynym tylko sposobem może być przedstawiona jako dziesiętna. Gdyby bowiem pewna cyfra dziesiętna, t. j. cyfra, znajdująca się na pewnym miejscu, mogła być inną, to odpowiednie dwa wyrażenia owęj liczby różniłyby się przynajmniej o 1-ą część dziesiętną, oznaczaną na owym miejscu, a tej różnicy nie mogłyby pokryć różnice, wynikające z odmiennych cyfr na miejscach dalszych.

13. Niekiedy zapomocą rachunku otrzymujemy takie drobne części liczby, których w rzeczywistości nie mamy co uwzględniać. Np. Piotr kupił 100 łokci materyi, za którą zapłacił rub. 267 i kop. 85, czyli, ponieważ kopiejka jest setną częścią rubla, zapłacił rub. 267,85; jeden łokieć téj materyi odstępuje Pawłowi po cenie kosztu; ile Paweł ma Piotrowi zwrócić za ten łokieć materyi? Ponieważ 100 ł. kosztuje rub. 267,85, więc jeden łokieć kosztuje 100 razy mniej, t. j. rub. 2,6785 (us. 9). Ma więc Paweł zwrócić Piotrowi rub. 2,6785, czyli 2 rub. i 67,75 kop. Ponieważ jednak kopiejka jest najmniejszą z bę-

*) Ogólniej: nie mniejszą od 6-u dziesiątych, gdyż byłoby to samo, gdybyśmy mieli ułamki

$$0,6 \text{ i } 0,59249075.$$

**) Np. 56079 i 56081.

dających w obiegu monet, więc Paweł może zapłacić tylko 2 rub. i 67 kop., czyli tylko 2,67 rub. Tu więc dokładną byłaby liczba 2,6785 rub., ale przy wypłacie można przyjąć zamiast niej liczbę bliską dokładnej, czyli, jak się zwykle mówi, liczbę przybliżoną do dokładnej, mianowicie 2,67 rub. Ta liczba przybliżona różni się tu od dokładnej o to, cośmy opuścili, t. j. o 8 tysięcznych i 5 dziesięciotysięcznych rubla, czyli o 0,0085 rub. Ponieważ zaś różnica tej liczby przybliżonej od dokładnej, t. j. 0,0085 rub., jest mniejsza (us. 12) od 0,01 rub., więc mówimy, że niedokładność, t. j. błąd, wynosi tu mniej niż 0,01, czyli, że liczba 2,67 jest przybliżona do dokładnej (2,6785) więcej niż na 0,01, albo *) krócej: przybliżona na 0,01. — Zamiast mówić: liczba przybliżona (do liczby dokładnej) mówimy często krócej: przybliżenie (liczby dokładnej). Liczbę zaś, od której błąd ma być mniejszy, jak np. tu liczbę 0,01, nazywamy zwykle stopniem przybliżenia ¹⁾.

Popełniliśmy tu błąd 0,0085 rub., który wprawdzie jest mniejszy od 0,01 rub., ale jest już większy od 0,005 rub. (us. 12), t. j. od 0,5 k., czyli od połowy kopiejki. Wskutek tego, biorąc przybliżenie 2,67 rub., opuściliśmy więcej niż połowę kopiejki (czyli więcej niż połowę 0,01 rubla). Gdy tymczasem, gdybyśmy oznaczyli wartość łokcia tej materii o 1 kopiejkę więcej, t. j. oznaczyli ją jako 2,68 rub., to popełnilibyśmy błąd mniejszy od połowy kopiejki. Liczba więc 2,68 rub. jest przybliżeniem liczby dokładnej 2,6785 rub. również na 0,01 rub., ale jest bliższą tej liczby dokładnej niż poprzednie jej przybliżenie 2,67 rub.

Mamy więc tu dwa przybliżenia liczby dokładnej 2,6785 rub., jedno 2,67 rub., drugie 2,68 rub. — oba na 0,01 rub. Piérwsze z tych przybliżeń jest mniejsze od liczby dokładnej; błąd jego trzeba by dodać do niego, aby otrzymać liczbę dokładną; nazywa się ono przybliżeniem z niedomiarem. Drugie zaś przybliżenie jest większe od liczby dokładnej; błąd jego trzeba by odjąć, aby mieć liczbę dokładną; nazywa się ono przybliżeniem z nadmiarem ²⁾. — Jeżeli np. w powyższym zadaniu idzie nam tylko o to, aby błąd nie był większy od 0,01 rub., to wszystko jedno, które z przybliżeń weźmiemy, czy 2,67 rub., czy też 2,68 rub. Jeżeli jednak chcemy, aby błąd nie był większy od połowy 0,01-ój rubla, czyli nie większy od 0,005 rub., to wypadnie tu wziąć przybliżenie z nadmiarem, t. j. 2,68 r.

Przypuścmy jednak, że Piotr zapłacił za owe 100 łokci materii

*) Mówimy także: liczba 2,67 jest wyrażeniem liczby dokładnej 2,6785 «ze ścisłością do 0,01».

¹⁾ Prawie zawsze stopień przybliżenia wyraża się przez 1 z zerami lub 1 na pewnym miejscu po przecinku. Stopnie przybliżenia inaczej wyrażone najczęściej sprowadzamy do poprzednich. Więcej o tym w tomie III seryi III «Bibl. mat.-fiz.».

²⁾ Por. § 5, us. 5.

np. 267,25 rub., to i w tym także przypadku, wraze, gdy idzie tylko o to, aby błąd był mniejszy od 0,01 rub., Paweł może zwrócić Piotrowi albo 2,67 rub., albo 2,68 rub.; wraze jednak, gdy idzie o to, aby z tych dwu przybliżeń wziąć to, w którym błąd jest mniejszy, Paweł powinien zwrócić Piotrowi w tym przypadku 2,67 rub. —

Podobnie np., jeżeli chcemy mieć pewne pojęcie o prędkości roschodzenia się głosu w powietrzu, a z doświadczenia, któreśmy wykonali, wypadło nam, że ta prędkość wynosi np. 1178 stóp n.-p. na sekundę, to jeżeli chcemy tak się wyrazić, żeby nieścisłość była mniejsza od 100 stóp, powiedzieć możemy równie dobrze, że to doświadczenie dało nam, jako prędkość głosu, 1100 stóp n.-p. na sekundę, jak że ono nam dało, jako prędkość głosu, 1200 stóp n.-p. na sekundę. Obie te liczby będą przybliżeniami liczby rzeczywiście z doświadczenia otrzymanej na 100 stóp n.-p., pierwsze z niedmiarem, drugie z nadmiarem. Jeżeli zaś z tych dwu przybliżeń na 100 stóp, chcemy wziąć to, które jest bliższe liczby otrzymanej z doświadczenia, to weźmiemy przybliżenie z nadmiarem, t. j. powiemy, że otrzymaliśmy, jako prędkość głosu, 1200 stóp n.-p. na sekundę.

Znajdujemy np., że, według starannych wyrachowań, stopa rosyjska, czyli angielska = 0,3047944 metra. Jeżeli chcemy, jako długość tej stopy, wziąć liczbę przybliżoną na 1 mm. (t. j. na 0,001 m.) i taką, aby z możliwych zawsze dwu takich liczb, wziąć tę, któraby była bliższa rzeczywistej długości tej stopy (t. j. właściwie wziąć przybliżenie na 0,0005 m.), to, z uwagi, że pierwsza z opuszczonych cyfr jest 7, weźmiemy, jako żądane przybliżenie owej stopy, długość 0,305 m. — Gdy zaś z taką samą ścisłością chcemy wziąć przybliżenie arszyna, a z tablic wiadomo, że arszyn = 0,7111870 m., to, z uwagi, że pierwsza z opuszczonych cyfr 1 (na 4-ym miejscu) jest mniejsza od 5, weźmiemy, jako żądane przybliżenie arszyna, długość 0,711 metra. — Gdy podobnie, wiedząc, że garniec n.-p. = 0,32523 wiadra, chcemy z dwu przybliżeń na 0,01 wiadra, wziąć to, które jest bliższe wielkości rzeczywistej garnca, to z uwagi, że po pierwszej z opuszczonych cyfr, t. j. po cyfrze 5, są cyfry znaczące, tak iż części tej liczby, którą opuszczamy, t. j. liczba 0,00523, jest większa od 0,005, wypadnie wziąć tu jako wielkość garnca n.-p. przybliżenie z nadmiarem, t. j. 0,33 wiadra. — Gdy nakoniec znajdziemy się w tym przypadku, że mamy opuścić jedną tylko cyfrę, a tą jest 5 (albo cyfrę 5 z samymi tylko zerami po niej następującymi), to możemy wziąć dowolnie którekolwiek z dwu przybliżeń; zwykle jednak bierzemy w tym przypadku przybliżenie z nadmiarem. Powiemy więc ogólnie *):

*) Stosuje się to i do liczb przybliżonych na 10, 100 i t. d.; lecz wtedy, zamiast mówić: pierwsza z opuszczonych cyfr, należałoby powiedzieć: pierwsza z cyfr, które zastępujemy przez zera.

Gdy pierwsza z opuszczonych cyfr liczby, której wartością przybliżoną się zadowalamy, przedstawia 5 lub więcej części liczby na tym miejscu oznaczanych, to bierzemy przybliżenie z nadmiarem, t. j. do części, przedstawionych przez ostatnią z pozostających cyfr, dodajemy 1-ę; w innych zaś razach bierzemy przybliżenie z niedomiarem, t. j. pozostających cyfr nie zmieniamy.

Gdy np. mamy wziąć przybliżenie liczby 2,5679965 na 0,00001, to wypadnie wziąć przybliżenie z nadmiarem, t. j. 2,56800. I jeżeli chcemy zaznaczyć, z jaką ścisłością ta liczba jest wzięta, t. j. jeżeli chcemy wyraźnie wskazać, że ta liczba jest przybliżeniem dokładnej na 0,00001, to winniśmy w niej końcowe zera zachować (us. 8). — Dlatego właśnie w jednym z powyższych przykładów mieliśmy: arszyn = 0,7111870 m.

14. Ponieważ liczby dziesiętne możemy zastąpić przez ułamki zwyczajne (us. 6), zatem aby dodać do siebie, odjąć od siebie, pomnożyć lub podzielić przez siebie liczby dziesiętne, moglibyśmy je zastąpić przez całkowite z uławkami zwyczajnymi, lub przez ułamki zwyczajne, i następnie wykonać te działania według wskazówek, podanych w rozdziale poprzedzającym ¹⁾. Z uwagi jednak, że w liczbach dziesiętnych części mniejsze od jednośc są napisane według tej samej zasady, co liczby całkowite, należy wykonywanie tych działań na liczbach dziesiętnych oprzeć wprost na rozumowaniu podobnym do tego, które nas doprowadziło do prawideł wykonywania owych działań na liczbach całkowitych. Dlatego też przy wyprowadzaniu odpowiednich prawideł dla liczb dziesiętnych, możemy przyjąć za wiadome to, co wiemy już o wykonywaniu tych działań na liczbach całkowitych, ale nie będziemy korzystać z tego, że liczby dziesiętne możemy zastąpić przez ułamki zwyczajne, a tymwięcej stosować prawideł dla tych ostatnich już wyprowadzonych.

(Zadania arytmetyczne. § 21, 22.)

§ 22. DODAWANIE I ODEJMOWANIE LICZB DZIESIĘTNYCH.

1. Jak wiemy (§ 4, us. 6), dodawanie liczb całkowitych jest działaniem, zapomocą którego odnajdujemy jedną liczbę zwaną sumą, któraby była skupieniem wszystkich jednośc składników. Gdy zaś pośród danych liczb są dziesiętne, to podobnie, działanie, doprowadzające nas do jednej liczby, będącej skupieniem wszystkich liczb danych, a więc skupieniem wszystkich części liczb danych (czyli,

¹⁾ Co jednak nie mogłoby nas doprowadzić do ilorazu, wyrażonego jako liczba dziesiętna.

wogóle mówiąc, jedności i części jedności tych składników), nazwiemy także dodawaniem, a liczbę ową — ich sumą. Powiemy więc ogólnie:

Dodawanie jestto działanie, zapomocą którego, mając dwie lub więcej liczb danych, zwanych składnikami, odnajdujemy liczbę, zwaną sumą, która jest skupieniem jedności i części jedności składników.

2. Mówiąc o dodawaniu liczb całkowitych, dowodziliśmy, że suma nie zależy od porządku składników, że aby do sumy dodać pewną liczbę, można tę liczbę dodać do któregośkolwiek składnika, i że dodawanie trzech lub więcej składników może być uskutecznione przy pomocy dodawań częściowych którychkolwiek składników, wziętych w jakimkolwiek porządku (§ 4, us. 5—10). Jeżeli zważymy, że, mając np.

$$0,03 + 0,5 + 2,$$

możemy te liczby wyrazić w najmniejszych z wchodzących do téj sumy częściach jedności, t. j. w setnych, że więc: $0,03 = 0,01 + 0,01 + 0,01$; $0,5$ jest równe 50-u takim składnikom, a 2 jest równe 200-u takim składnikom, to możemy tę sumę wyrazić jako sumę samych tylko składników $0,01$. A łącząc oddzielnie naprzód np. pierwszych 50 tych składników w jedną liczbę, następnie dalszych 200 również w jedną liczbę i nakoniec podobnie pozostałe 3 składniki, otrzymamy

$$0,50 + 2,00 + 0,03, \text{ czyli (§ 21, us. 8) } 0,5 + 2 + 0,03,$$

z czego widzimy, że pierwsza z przytoczonych prawd odnosi się i do liczb dziesiętnych. Na tym zaś się opierając, łatwo już dowiedzimy w takiż sam sposób, jak to było zrobione dla liczb całkowitych, że i dwie pozostałe z wypowiedzianych prawd również stosują się do liczb dziesiętnych.

3. Bespośrednio z tego wypada, że to wszystko, cośmy mówili o wykonywaniu dodawania liczb całkowitych (§ 4, us. 14—16), może być odniesione do dodawania liczb dziesiętnych. Nie powtarzając teraz szczegółowo wszystkich podanych wtedy objaśnień, powiemy tu tylko, że mając np. wykonać dodawanie

$$8,846 + 79 + 286,97 + 0,5,$$

(ponieważ suma nie zależy od porządku składników i to dodawanie uskutecznić możemy przy pomocy dodawań częściowych) oddzielnie wyznaczmy najmniejsze, t. j. tysięczne części sumy, oddzielnie setne i t. d. W tym celu podpiszemy składniki pod sobą tak, aby jedności były pod jednościami. Z uwagi, że tu części tysięczne wchodzą tylko do jednego składnika i jest ich 6, w sumie będzie również tysięcznych 6; piszę zatem pod kręską

$$\begin{array}{r} 8,846 \\ 79 \\ 286,97 \\ 0,5 \\ \hline 375,316 \end{array}$$

pod tysięcznymi 6. Setnych jest w jednym składniku 4, w drugim 7; razem setnych 11, czyli 1 dziesiąta i 1 setna; podpisuję więc pod setnymi 1, a 1 dziesiątą dodaję do dziesiątych. Wszystkich więc dziesiątych jest 23, czyli 2 jedności i 3 dziesiąte: pod dziesiątymi piszę 3, a 2 jedności dodam do jedności. Otrzymaawszy z dodania jedności 25 i napisawszy pod jednościami 5, kładę po tej cyfrze, jako oznaczającej *) jedności, przecinek (us. 1), i t. d.

Powiemy więc ogólnie:

Aby dodać do siebie liczby dziesiętne, podpisujemy je jedne pod drugimi tak, żeby jedności znajdowały się pod jednościami, i dodajemy je w ten sam sposób, jakgdybyśmy dodawali liczby całkowite, a w sumie kładziemy przecinek po cyfrze, odpowiadającej tym cyfrom składników, po których znajdują się przecinki.

Przyglądając się powyższemu przykładowi, zauważyć jeszcze możemy, że przy dodawaniu części całkowitych, dodając np. setki, nie zważamy na to, że w składnikach pierwszym i czwartym niema setek; taksamo dodając tu np. setne części, nie zważamy na to, że ich niema ani w składniku drugim, ani w czwartym.

4. Weźmy teraz takie zadanie. Dane są liczby

5,470235 0,002 8,303667 117 3,98267 i 0,00004

a chcemy znaleźć tylko przybliżoną, np. na 0,001 (§ 21, us. 13), wartość sumy tych liczb. Idzie o to, ażeby tę przybliżoną wartość sumy wyznaczyć wprost, t. j. bez wyznaczania takich części sumy, które nie wejdą do owej przybliżonej wartości sumy, lub nie będą miały na nią wpływu. Takie dodawanie, w którym, mając na widoku przybliżoną wartość sumy, odrazu nie wykonywamy tych części rachunku, które następnie okazałyby się mogły niepotrzebnymi, nazywa się dodawaniem skróconym.

Mamy tu składników 6, t. j. mniej niż 10. Gdy więc weźmiemy zamiast

5,470235	
0,002	
8,303667	
117	
3,98267	
0,00004	
134,7584	
134,759	

każdego składnika liczbę doń przybliżoną na 0,0001, to wtedy błąd z powodu wzięcia tych przybliżonych wartości wszystkich składników jest mniejszy od $0,0001 \times 10$, t. j. mniejszy od 0,001. Gdy więc mamy te składniki pod sobą podpisane, to uwzględnimy w nich tylko pierwsze 4 cyfry dziesiętne. Dodając tedy do siebie te przybliżone wartości składników, otrzymamy 134,7584. Ponieważ w składnikach opuściliśmy pewne części, przeto ta suma 134,7584 jest widocznie mniejsza od dokładnej sumy pierwotnie danych składników. Że zaś, jakśmy tyłkoco widzieli, błąd, powstały z zadowolenia się przybliżonymi na 0,0001 wartościami składników, jest

*) Gdyby tu było zero, należałoby powiedzieć: po zerze, zajmującym miejsce, na którym są oznaczone jedności.

mniejszy od 0,001, zatem dokładna suma jest mniejsza od $134,7584 + 0,001$, czyli jest mniejsza od 134,7594. Jest tedy dokładna suma pierwotnie danych składników zawarta między 134,7584 a 134,7594. A gdy różnica między tymi liczbami krańcowymi jest wszystkiego 0,001, to, biorąc jakąkolwiek liczbę pośrednią, np. najdogodniej 134,759, jesteśmy (wogóle mówiąc) tymbliżej dokładnej wartości sumy.

Aby, przy danym stopniu przybliżenia sumy, wykonać skrócone dodawanie nie więcej niż 10-u składników, należy wziąć wartości składników przybliżone na 10-tą część stopnia żadanego przybliżenia sumy, dodać je do siebie i w otrzymanej liczbie, opuściwszy ostatnią cyfrę dziesiętną, do części oznaczonych na ostatnim z pozostałych miejscu dodać 1-nę.

W podobny sposób dojdziemy do tego, że

Aby, przy danym stopniu przybliżenia sumy, wykonać skrócone dodawanie więcej niż 10-u, a mniej niż 100-u składników, należy wziąć wartości składników przybliżone na 100-ną część stopnia żadanego przybliżenia sumy, dodać je do siebie i w otrzymanej liczbie, opuściwszy ostatnie dwie cyfry dziesiętne, do części oznaczanych na ostatnim z pozostałych miejscu dodać 1-nę. — I t. d.

5. Odejmowanie, jako działanie odwrotne dodawaniu dwu składników, ma na celu z danych: sumy dwu składników i jednego z tych składników wyznaczenie drugiego składnika téj sumy. To zadanie istnieć może niezależnie od tego, czy składniki są liczbami całkowitymi, czytż ułamkowymi. Podane więc w us. 3-im § 5-go określenie odejmowania jest ogólne. Zatem wogóle:

Odejmowanie jestto działanie, w którym, mając dane dwie liczby: odjemną i odjemnik, poszukujemy liczby, zwanéj resztą, po której dodaniu do odjemnika otrzymujemy odjemną.

Łatwo dowieść, że wypowiedziane w us. 8-ym i 9-ym § 5-go własności sumy i różnicy danych liczb mają miejsce w przypadku, gdy te liczby są dziesiętne.

6. Wychodząc również z tego, że odejmowanie jest działaniem odwrotnym dodawaniu dwu składników, nie trudno będzie spostrzec, że to wszystko, cośmy mówili o wykonywaniu odejmowania liczb całkowitych (§ 5, us. 11 — 17), może być odniesione do odejmowania liczb dziesiętnych. Nie powtarzając szczegółowo wszystkich podanych wtedy objaśnień, powiemy tu tylko, że, mając wykonać np. obok wypisane odejmowanie, zaczynamy je od wyznaczenia najmniejszych części reszty. Ponieważ w odjemnej jest 6 stotysięcznych, a w odjemniku stotysięcznych nie-

$$\begin{array}{r} 709,23406 \\ -6,28 \\ \hline 702,95406 \end{array}$$

ma, więc te 6 stotysięcznych pozostaną niezmienione, t. j. w reszcie *) będzie stotysięcznych 6, którąto cyfrę piszemy pod stotysięcznymi (postępujemy przeto taksamo, jak później, przy odejmowaniu części całkowitych tych liczb, z ich tysiącami). Podobnie z 4-ma tysięcznymi, i z uwagi, że w reszcie niema dziesięciotysięcznych, na miejscu, któreby one zajęły, t. j. po tysięcznych (gdyż po nich są jeszcze części stotysięczne) piszemy zero (§ 21, us. 2). Aby wyznaczyć w reszcie setne, ponieważ 8 jest mniejsze od 3, roskładamy 2 dziesiąte odjemnej na 1 dziesiątą, którą zostawiamy, i 1 dziesiątą, którą wyrażamy jako 10 setnych; one wraz z 3 setnymi stanowią 13 setnych. Odjawszy 8 od 13-u, otrzymujemy 5, które piszemy pod setnymi. 2 dziesiąte jest więcej niż 1 dziesiątą; roskładamy więc 9 jedności na 8 jedności, które zostawiamy, i jedność, którą wyrażamy jako 10 dziesiątych, i odejmuję 2 od 11; resztę 9 piszemy pod dziesiątymi. 6 od 8 jest 2, które piszemy pod jednościami, a po téj cyfrze 2 kładziemy przecinek (§ 21, us. 1). I t. d. — Taksamo odejmowalibyśmy np. 708,23406 — 39.

Podobnie, jeżeli mamy wykonać np. odejmowanie

$$\begin{array}{r} 8,34 \\ - 2,06723 \\ \hline 6,27277 \end{array}$$

to zauważymy, że dla wyznaczenia najmniejszych, t. j. stotysięcznych **), części reszty, należy 4 setne odjemnej rozłożyć na 3 setne, które zostawimy, i 1 setną, którą wyrazimy jako 10 tysięcznych; te 10 tysięcznych potrzeba znowu rozłożyć na 9 tysięcznych, które zostaną, i 1 tysięczną, którą wyrazimy jako 10 dziesięciotysięcznych; te zaś 10 tysięcznych wypadnie znowu rozłożyć na 9 dziesięciotysięcznych, które pozostaną, i 1 dziesięciotysięczną, którą wyrazimy jako 10 stotysięcznych. Widzimy więc, że wskutek tego roskładu, w tym przypadku ostatnia (licząc od lewej strony) znacząca cyfra 4 zostanie zastąpiona przez 3, nad następującymi cyframi odjemnika 7 i 2 znajdując się w odjemnej cyfry 9, a nad cyfrą 3, ostatnią odjemnika, mieć będziemy 10. Będziemy więc tak wykonywać odejmowanie: 3 od 10-u 7, 2 od 9-u 7, 7 od 9-u 2, 6 od 13-u i t. d. — Taksamo odejmowalibyśmy np. 8 — 0,06723.

Powiemy więc ogólnie:

Aby odjąć od siebie dwie liczby dziesiętne, podpisujemy odjemnik pod

*) Możemy także powiedzieć tak: ponieważ odjemna jest sumą odjemnika i reszty, a w odjemniku niema stotysięcznych, zatem, aby po dodaniu reszty do odjemnika, móc otrzymać te 6 stotysięcznych, które są w odjemnej, powinniśmy je mieć w reszcie, i t. d.

**) Można tu dodać, że one powinny się znaleźć w reszcie; gdyż, gdyby w reszcie nie było stotysięcznych, to po dodaniu reszty do odjemnika, otrzymalibyśmy w odjemnej 3 stotysięczne, których w odjemnej niema. Winno więc w reszcie być tyle stotysięcznych, aby po dodaniu ich do 3 stotysięcznych odjemnika otrzymać tyle stotysięcznych, żeby po wydzieleniu z nich większych części, t. j. dziesięciotysięcznych, nie pozostało już stotysięcznych, czyli, aby było 10 stotysięcznych. I t. d.

odjemną tak, żeby jedności znalazły się pod jednościami, i wykonywamy odejmowanie w ten sam sposób, jakgdybyśmy wykonywali odejmowanie liczb całkowitych, a w reszcie kładziemy przecinek po cyfrze, odpowiadającej tym cyfrom liczb danych, po których znajdują się przecinki. W przypadku więc, gdy w odjemnej jest mniej cyfr dziesiętnych, niż w odjemniku, ostatnią cyfrę dziesiętną odjemnika odejmujemy od 10, każdą pozostałą z tych cyfr, nie mającą nad sobą cyfry w odjemnej, odejmujemy od 9, a ostatnią cyfrę znaczącą w odjemnej zmniejszamy o 1.

7. Gdy chcemy np. wyznaczyć różnicę dwu liczb 43,5672 i 25,89604 przybliżoną na 0,01, to aby wykonać odpowiednie odejmowanie skrócone, należy wziąć przybliżone także na 0,01 wartości odjemnej i odjemnika i odjąć je od siebie:

$$\begin{array}{r} 43,5672 \\ - 25,89604 \\ \hline 17,67 \end{array}$$

Wtedy bowiem tak w odjemnej jak i w odjemniku spełniamy błąd mniejszy od 0,01; zatem w reszcie opuszczamy różnicę między takimi dwiema liczbami, z których każda jest mniejsza od 0,01. Tymwięcej przeto ta różnica (t. j. błąd w różnicy danych liczb) jest mniejsza od 0,01. Różnica więc $43,56 - 25,89 = 17,67$ przedstawia żądane przybliżenie różnicy liczb danych.

Aby, przy danym stopniu przybliżenia różnicy, wykonać skrócone odejmowanie dwu liczb, należy wziąć wartości liczb danych z tymże stopniem przybliżenia i odjąć je od siebie.

(Zadania arytmetyczne. § 23.)

§ 23. MNOŻENIE LICZB DZIESIĘTNYCH.

1. Gdy mamy pomnożyć np. 8 przez 3, to, jak wiemy (§ 6, us. 3), aby otrzymać iloczyn, możemy mnożną wziąć jako składnik tyle razy, ile jest jedności w mnożniku. Jeżeli atoli chcemy pomnożyć 8 np. przez 0,01 lub przez 0,03, to tu nie może być mowy o tym, abyśmy mieli 8 wziąć odpowiednio 0,01 raza lub 0,03 raza jako składnik. Tak więc wypowiedziane, jak powyżej, powstawanie iloczynu z mnożnej nie może się stosować do tych przypadków. Należy więc tak się wysłowić o powstawaniu iloczynu z mnożnej, aby to mogło się także odnosić do przypadku, gdy mnożnik jest liczbą dziesiętną.

Aby 8 pomnożyć przez 3, mamy 8 wziąć jako składnik tyle razy, ile w mnożniku jest jedności, czyli

$$\begin{array}{l} \text{ponieważ mnożnik } 3 = 1 + 1 + 1 \\ \text{więc iloczyn} \quad = 8 + 8 + 8 = 24 \end{array}$$

i możemy ¹⁾ powiedzieć, że «iloczyn powstaje z mnożnej w taki sam sposób, jak mnożnik powstał z jedności».

Gdy więc np. mamy $8 \times 0,01$, to ponieważ mnożnik 0,01 powstał z jedności w taki sposób, iż, 1 zmniejszyliśmy 100 razy (§ 21, us. 9), więc, aby podobnie utworzyć iloczyn z mnożnej, należy tu mnożną 8 zmniejszyć 100 razy, co czyniąc, otrzymamy 0,08; jest zatem $8 \times 0,01 = 0,08$. Również, gdy mamy np. $8 \times 0,03$, to, z uwagi, że mnożnik powstał z jedności w taki sposób, iż 1 zmniejszyliśmy 100 razy i to, cośmy stąd otrzymali, t. j. 0,01, wzięliśmy 3 razy jako składnik, aby podobnie utworzyć iloczyn z mnożnej, należy mnożną 8 zmniejszyć 100 razy, a otrzymawszy wskutek tego 0,08, wziąć te 0,08 jako składnik 3 razy; będziemy więc mieli $0,08 + 0,08 + 0,08 = 0,24$; jest zatem $8 \times 0,03 = 0,24$.

Możemy więc powiedzieć ogólnie:

Mnożenie jestto działanie, zapomocą którego, mając dwie liczby, mnożną i mnożnik, odnajdujemy liczbę, zwaną iloczynem, którą możemy otrzymać z mnożnej w taki sam sposób, w jaki mnożnik powstaje z jedności.

2. Weźmy naprzód pod uwagę przypadek, kiedy mamy liczbę dziesiętną pomnożyć przez liczbę całkowitą, np. $3,207 \times 4$. Tu mnożnik powstał z jedności wskutek tego, żeśmy ją wzięli jako składnik 4 razy; ażeby więc otrzymać iloczyn, należy mnożną 3,207 wziąć jako składnik 4 razy, t. j.

$$\text{gd y mnożnik} = 1 + 1 + 1 + 1$$

$$\text{to iloczyn} = 3,207 + 3,207 + 3,207 + 3,207;$$

a zatem, ten przypadek mnożenia sprowadza się bezpośrednio do dodawania.

$$\begin{array}{r} 3,207 \\ 3,207 \\ 3,207 \\ \underline{3,207} \\ 12,828 \end{array}$$

A że to dodawanie (§ 22, us. 3) skutecznia się tak, jakgdyby składniki były liczbami całkowitymi, a wiemy, że wtedy dodawanie równych składników możemy zastąpić przez mnożenie (§ 6, us. 1), zatem wypadnie wykonać mnożenie:

$$\begin{array}{r} 3,207 \\ \times 4 \\ \hline 12,828 \end{array}$$

tak, jakgdybyśmy mieli mnożyć 3207 przez 4, a tylko w iloczynie, t. j. w sumie poprzedniego dodawania, wypadnie przecinek umieścić po cyfrze, odpowiadającej jednościom składników, a więc

po cyfrze 2.—Gdybyśmy mieli mnożyć nie przez 4, ale np. przez 40, to, po dodaniu do siebie 40-u składników 3,207, otrzymalibyśmy 128,280; w tej liczbie przecinek jest po cyfrze 8, którą otrzymujemy również po

¹⁾ Jeżeli wykład liczb dziesiętnych jest prowadzony przed ułamkami zwyczajnymi to należy cały początek tego ustępu rozwinąć szczegółowiej, jak w us. 1-ym § 19-go.

dodaniu do siebie jedności składników. Możemy to jeszcze tak wypowiedzieć: wypisawszy sumę tak, jakbyśmy to zrobili w razie, gdyby np. składniki były liczbami całkowitymi; czyli: wypisawszy iloczyn tak, jakbyśmy to zrobili w razie, gdyby mnożna była liczbą całkowitą, oddzielamy w nim następnie przecinkiem z prawej strony tyle cyfr na «dziesiątne» (§ 21, us. 1), ile ich było w każdym z tych równych sobie składników, czyli, ile ich było w mnożnej.

Jeżeli w iloczynie końcowe cyfry dziesiątne są zerami, to możemy je następnie opuścić (§ 21, us. 8). Będzie więc np. $3,207 \times 400 = 1282,800 = 1282,8$; $42,865 \times 6 = 257,190 = 257,19$; $3,25 \times 4 = 13,00 = 13$. Widzimy zatem, że, wogóle mówiąc, w iloczynie może być ostatecznie mniej cyfr dziesiątnych, niż w mnożnej.

3. Jeżeli zaś weźmiemy przypadek ogólniejszy, t. j. kiedy mamy liczbę dziesiątną pomnożyć przez liczbę dziesiątną, np.

$$3,207 \times 4,05,$$

to podobnie, wskazówki ku temu, jak tu postąpić należy, dostarczy nam to, cośmy poprzednio powiedzieli (us. 1) o powstawaniu iloczynu. Mnożnik 4,05 powstał z jedności w taki sposób, iż 1-sé zmniejszyliśmy 100 razy i to, cośmy wskutek tego otrzymali, t. j. 0,01, wzięliśmy jako składnik 405 razy. Należy więc również mnożną 3,207 zmniejszyć 100 razy, i to, co wskutek tego otrzymamy (§ 21, us. 9), t. j. 0,03207, wziąć jako składnik 405 razy, t. j.

$$\text{mnożnik} \dots 1 \text{ zmn. } 100 \text{ r.; otrz. } 0,01 \quad ; \quad 0,01 + 0,01 + 0,01 + \dots$$

$$\text{iloczyn} \dots 3,207 \text{ zmn. } 100 \text{ r.; otrz. } 0,03207; \quad 0,03207 + \underbrace{0,03207 + 0,03207 + 0,003207 + \dots}_{405 \text{ razy}}$$

W mnożnej są 3 cyfry dziesiątne, w mnożniku 2; zmniejszyliśmy na-przód mnożną 100 razy, t. j. powiększyliśmy w niej ilość cyfr dziesiątnych o tyle, ile ich jest w mnożniku, tak iż w tej liczbie 0,03207 jest tyle cyfr dziesiątnych, ile ich jest w mnożnej i mnożniku razem (3 + 2). Wtedy już działanie sprowadzone zostało do dodawania 405-u składników 0,03207; czyli do przypadku poprzedzającego, t. j. do mnożenia $0,03207 \times 405$, które, jak wiemy (us. 2), skutecznia się tak, jakgdyby mnożna była całkowitą, t. j. jakgdybyśmy mieli pomnożyć 3207 przez 405,

3,207	a tylko w iloczynie stąd otrzymanym, t. j. w liczbie
× 4,05	1298835, należy z prawej strony oddzielić tyle cyfr
16035	na dziesiątne, ile ich jest w tej liczbie 0,03207. W tej
12828	zaś liczbie, jak widzieliśmy, jest tyle cyfr dziesiąt-
12,98835	nych, ile ich było razem w mnożnej i mnożniku da-

nego zadania. Możemy przeto powiedzieć, że, mając pomnożyć $3,207 \times 4,05$, pomnożymy te liczby przez siebie, jakgdyby one były całkowitymi, t. j. nie zważając na prze-

cinki, a w otrzymanym iloczynie oddzielimy z prawej strony tyle cyfr na dziesiątne, ile ich było w mnożnej i mnożniku razem. Oczywiście, że rozważany tu przypadek obejmuje w sobie tak przypadek poprzedni (us. 2), jak i ten, kiedy mnożna jest liczbą całkowitą, a mnożnik dziesiętną (np. $8 \times 0,03$; us. 1), gdyż w tych przypadkach, oddzielając w iloczynie na dziesiątne tyle cyfr, ile ich było w mnożnej i mnożniku razem, oddzielimy ich tyle, ile ich jest w tym właściwie czynniku danego iloczynu, który jest liczbą dziesiętną. Możemy więc powiedzieć ogólnie:

Aby pomnożyć przez siebie dwie liczby dziesiętne, należy je mnożyć przez siebie, nie zważając na przecinki, jakgdyby liczby całkowite, a w otrzymanym iloczynie oddzielić z prawej strony tyle cyfr na dziesiątne, ile ich było w mnożnej i mnożniku razem.

Ostatnie z tych cyfr dziesiętnych mogą być niekiedy zerami (np. $32,5 \times 0,112 = 3,6400 = 3,64$); w takim razie, po opuszczeniu tych zer końcowych (§ 21, us. 8), otrzymamy ostatecznie w iloczynie mniej cyfr dziesiętnych, niż ich było w mnożnej i mnożniku razem.

4. Łatwo to zastosować do iloczynu iluokolwiek czynników. Tak np. gdy mamy $0,4325 \times 0,032 \times 1,5$, to, rozważając, że mamy pomnożyć naprzód dwa pierwsze czynniki przez siebie, a otrzymany stąd iloczyn częściowy pomnożyć przez czynnik trzeci, dojdziemy do tego, że należy w iloczynie liczb (§ 3, us. 12) $4325 \times 32 \times 15 = 2074500$ oddzielić na dziesiątne z prawej strony 8 cyfr, tak iż szukanym iloczynem jest liczba 0,020745.

5. Wyznamy liczby, przedstawione przez dwa iloczyny:

$$0,4325 \times 0,032 \times 1,5 \times 7 \quad \text{i} \quad 0,032 \times 1,5 \times 7 \times 0,4325,$$

różniące się od siebie tylko porządkiem czynników, gdy, odnalazszy iloczyn

$$4325 \times 32 \times 15 \times 7 \quad \text{i} \quad 32 \times 15 \times 7 \times 4325,$$

oddzielimy tak w jednym, jak w drugim z prawej strony 8 cyfr na dziesiątne. Ze zaś wypisane iloczyny czynników całkowitych, jako różniące się od siebie tylko porządkiem tych czynników, przedstawiają tę samą liczbę (§ 6, us. 10), przeto i dwa iloczyny, mające pośród swych czynników liczby dziesiętne, przedstawiają również tę samą liczbę. Widzimy zatem, że wypowiedziana w us. 10-ym § 6-ego własność iloczynu: «iloczyn nie zależy od porządku czynników», stosuje się również do przypadku, gdy pośród czynników iloczynu są liczby dziesiętne.

Opierając się zaś na tym, łatwo już dowieść możemy, że własności, wypowiedziane w us. 10-ym i 12 -- 15-go § 6-go, mają także miejsce wtedy, kiedy pośród liczb danych są dziesiętne, choćbyśmy je pomnożyli przez liczbę dziesiętną.

6. MNOŻENIE SKRÓCONE. Mamy np. $456,2595731 \times 28,63549329$, a chcemy wyznaczyć wartość iloczynu tylko przybliżoną na 0,01. Gdy np. weźmiemy przybliżoną na 0,00001 wartość mnożnej, to błąd z tego powodu powstały w iloczynie będzie mniejszy od 0,00029; gdy podobnie mnożnik ograniczymy do milionowych części, to, skutkiem tylko tego, błąd powstały w iloczynie będzie mniejszy od 0,000457. Wskutek więc wzięcia jednoczesnego tych przybliżonych wartości tak mnożnej jak i mnożnika, iloczyn będzie miał wartość przybliżoną ¹⁾ na $0,00029 + 0,000457 < 0,001$.—Jeżeli więc, jak w danym zadaniu, suma mnożnej i mnożnika jest mniejsza od 1000, a stopień przybliżenia iloczynu jest 0,01, to najprościej dojrzymy do otrzymania żądanej tu wskazówki postępowania, gdy weźmiemy wartości mnożnej i mnożnika przybliżone na $0,01 : 1000 = 0,00001$. Wypaźnie zatem pomnożyć przez siebie $456,25957 \times 28,63549$; w otrzymanym zaś iloczynie odrzucimy części mniejsze od 0,01, lecz do części oznaczonych na ostatnim miejscu, t. j. do setnych, dodamy 1-ne, gdyż braliśmy wartości tak mnożnej jak i mnożnika przybliżone z niedomiarem.

Ten sposób, wogóle mówiąc, niewiele skraca robotę.

7. Jest jednak inny sposób wykonywania mnożenia skróconego przy danym stopniu przybliżenia iloczynu, znacznie dogodniejszy, sposób Oughtred'a, który teraz wyłożymy.

a. Przypuśćmy, że mamy pomnożyć 45 625,95731 przez 2863,549. Podpiszmy te liczby pod sobą tak, żeby jedności były pod jednościami:

$$\begin{array}{r} 45\ 625,95731 \\ \times 2863,549 \\ \hline \end{array}$$

Zauważmy, że np. jedności w iloczynie wypadną z pomnożenia 5-u jedności mnożnej przez 3 jedności mnożnika, 2-u dziesiątków mnożnej przez 5 dziesiątych mnożnika i t. d., jak również z pomnożenia 9-u dziesiątych mnożnej przez 6 dziesiątków mnożnika i t. d.

Wprawdzie mogą niekiedy wypaść jeszcze jedności z pomnożenia jedności mnożnej przez części dziesiąte mnożnika, dziesiątków mnożnej przez setne mnożnika i t. d., jak również—dziesiątych mnożnej przez jedności mnożnika, setnych mnożnej przez dziesiątki mnożnika i t. d., ale te oddzielnie przyjmiemy później na uwagę; teraz zaś na nie zważać nie będziemy. W takim razie, gdy «ograniczamy iloczyn [do jedności,» zadowolimy się mnożeniem $45\ 625,957 \times 2000$, czyli $45\ 625\ 957 \times 2$, i (podobnie) $4562\ 595 \times 8$, $456\ 259 \times 6$, $45\ 625 \times 3$, 4562×5 , 456×4 , 45×9 . Te więc iloczyny częściowe będą wyrażone w jednościach. Dlatego, jeżeli cyfry mnożnika podpiszemy tak pod cyframi mnożnej, aby każda cyfra mnożnika znalazła się pod pierwszą (od prawej strony) z mnożonych przez nią cyfr mnożnej:

¹⁾ Iloczyn opuszczonej części mnożnej przez opuszczoną część mnożnika będzie tu mniejszy od 0,0000000001.

$$\begin{array}{r}
 45625,95731 \\
 \underline{9453682} \\
 91251914 \\
 36500760 \\
 2737554 \\
 136875 \\
 22810 \\
 1824 \\
 \underline{405} \\
 130652142
 \end{array}$$

(cyfry więc mnożnika następować będą po sobie w porządku odwrotnym), to, gdy drugi iloczyn częściowy tak podpiszemy pod pierwszym, aby pierwsza jego cyfra (0 z pomnożenia 5-u przez 8) znalazła się pod pierwszą cyfrą (4) pierwszego iloczynu, i gdy podobnie podpiszemy dalsze iloczyny częściowe, jako sumę tych częściowych iloczynów, wyrażonych w jednostkach, otrzymamy liczbę 130 652 142, która przedstawia iloczyn danych liczb «ograniczony do jedności».

Gdyby się zdarzyło, że w mnożnej niema dość cyfr, aby nad pierwszą z prawej strony cyfrą odwróconego mnożnika znalazła się cyfra mnożnej (jak tu 7 nad 2), to dopełniamy mnożną zerami; tak np., gdyby w poprzednim przykładzie zamiast danej mnożnej była nią liczba 45 625,9, to możnaby po 9 dopisać dwa zera, mające odpowiadać cyfrom 8 i 2 mnożnika. Gdyby zaś w mnożniku było tu więcej cyfr dziesiętnych niż cyfr w całkowitej części mnożnej, np. gdyby zamiast danej mnożnej była nią liczba 25,95731, to w tym działaniu nie posługivalibyśmy się cyframi 4 i 9 mnożnika, nad którymi nie byłoby cyfr mnożnej.

$$\begin{array}{r}
 76305,403678956 \\
 \underline{8750364452} \\
 152610807356 \\
 38152701835 \\
 3052216144 \\
 305221612 \\
 45783240 \\
 2289162 \\
 38150 \\
 5341 \\
 \underline{608} \\
 194169063,448
 \end{array}$$

Aby w taki sposób w iloczynie np. liczb 76 305,403678956 i 2544,630578 «ograniczonym do tysięcznych», otrzymać częściowe iloczyny (więc również wyrażone w częściach tysięcznych), podpisujemy jednostki mnożnika pod tysięcznymi mnożnej, a tymsamym dalej dziesiątki mnożnika pod dziesięciotysięcznymi mnożnej i t. d., dziesiąte mnożnika pod setnymi mnożnej i t. d. W sumie zaś, otrzymanej z dodania tych iloczynów częściowych, wyrażonych w częściach tysięcznych, oddzielamy 3 cyfry na dziesiętne.

b. Idzie teraz o wyznaczenie, od czego jest mniejszy błąd iloczynu, otrzymanego wskutek takiego mnożenia.—W przykładzie pierwszym mnożąc 45625,957 przez 2000, opuszczamy iloczyn $0,00031 \times 2000$; owóż, jakimikolwiek są opuszczone tu cyfry mnożnej na 4-ym i 5-ym miejscach po przecinku, zawsze ta opuszczona część mnożnej jest mniejsza (§ 21, us. 12) od 0,001, a tymsamym opuszczona wskutek tego część iloczynu jest mniejsza od $0,001 \times 2000 = 2$. Taksamo znajdziemy, że mnożąc $45\,625,95 \times 800$, opu-

szczamy $0,00731 \times 800 < 0,01 \times 800 = 8$. I t. d. Błąd więc będzie mniejszy od $2 + 8 + 6 + 3 + 5 + 4 + 9$ jedności.—Podobnie znajdziemy, że w przykładzie drugim błąd jest mniejszy od $2 + 5 + 4 + 4 + 6 + 3 + 5 + 7 + 8$ tysięcznych części jedności.—Gdybyśmy zaś w ten sposób otrzymali iloczyny $45\ 625,9 \times 2863,549$ i $25,95731 \times 2863,549$, «ograniczone do jedności», to, w pierwszym z tych dwu mnożeń

$$\begin{array}{r} 45625,900 \\ \underline{9453,682} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25,95731 \\ \underline{9453682} \end{array}$$

wykonywając mnożenia przez cyfry 2, 8, 6, mnożylibyśmy przez nie całą mnożną, a więc błąd byłby mniejszy od $3 + 5 + 4 + 9$ jedności. W drugim zaś z tych mnożeń, prócz tego, co opuściliśmy, mnożąc przez oddzielne cyfry mnożnika, a co, według powyższego, jest mniejsze od $2 + 8 + 6 + 3 + 5$, opuściliśmy nadto iloczyn mnożnej przez część 0,049 mnożnika, który jest mniejszy od iloczynu $100 \times 0,05 = 5$, t. j. mniejszy od pierwszej skolei zaniedbanej cyfry mnożnika, powiększonej o 1, tak iż tu błąd sumy iloczynów częściowych jest mniejszy od $2 + 6 + 8 + 3 + 5 + (4 + 1)$ jedności.—Łatwo widzieć, że gdyby w tym ostatnim przykładzie nie było w mnożniku cyfr 9, to błąd ów byłby już mniejszy od $2 + 6 + 8 + 3 + 5 + 4$ jedności.—A zatem ogólnie:

Błąd sumy iloczynów częściowych, wyrażony w tychże, co one, częściach, jest mniejszy od sumy tych cyfr mnożnika, przez które nie były mnożone wszystkie cyfry mnożnej, i pierwszej z zaniedbanych cyfr mnożnika, którąto sumę należy powiększyć o 1, jeżeli w mnożniku takich zaniedbanych cyfr jest więcej niż jedna.

c. Widzieliśmy, że w pierwszym z wykonanych tu w ustępie a. przykładów błąd jest mniejszy od $2 + 8 + \dots + 9 = 37$ jedności, zatem iloczyn jest większy od 130 652 142, a mniejszy od 130 652 179; ostatnie dwie cyfry są niepewne; może więc być mowa tylko o wartości iloczynu przybliżonej na 100 jedności; weźmiemy jako taką (§ 21, us. 13) liczbę 130 652 200. W przykładzie drugim błąd, jak widzieliśmy, jest mniejszy od $2 + 5 + \dots + 44$ tysięcznych; może więc być tylko mowa, o wartości iloczynu przybliżonej na 0,1; jako taką weźmiemy 194 169 063,5.

[Tu w obu razach, z dwu, jakie zdawały się możliwymi, przybliżonych wartości iloczynu, wzięliśmy wartość większą. Robiliśmy to dlatego, że chociaż niekiedy, bez powiększenia ostatnich z zatrzymywanych części iloczynu o 1-nę, wszystkie zatrzymane cyfry mogą być zgodne z odpowiednimi cyframi wartości dokładnej iloczynu, to jednak może się zdarzyć, że nawet po takim powiększeniu otrzymujemy przybliżenie, co do którego nie jesteśmy pewni, czy ono nie jest przybliżeniem z niedomiarem (a nie, jakby się zdawało, koniecznie z nadmiarem). Np. wyznaczając iloczyny częściowe iloczynu $4672,0324 \times 95,876$ w setnych częściach jedności, otrzymujemy, jako sumę

tych iloczynów częściowych, 447 935,69; błąd jest mniejszy od $9 + 5 + 8 + 7 + 6 = 35$ setnych; wiemy zatem tylko, że wartość iloczynu jest większa od 447 935,69, a mniejsza od $447 935,69 + 0,35$, t. j. mniejsza od 447 936,04, tak iż bezpiecziej jako przybliżoną na 1-sć wartość tego iloczynu wziąć nie 447 935, co mogłoby tu być błędnym, ale 447 936.]

Z tego jeszcze wypada, że gdybyśmy chcieli otrzymać wartość iloczynu liczb w pierwszym przykładzie przybliżoną nie na 100, ale np. na 1-sć, to, zważywszy, że suma cyfr mnożnika, wyznaczająca, od czego jest mniejszy błąd sumy iloczynów częściowych, będzie, wogóle mówiąc, nie większa od 100, należy iloczyny częściowe wyrazić w częściach setnych jednościami, a tym samym tak podpisać w odwrotnym porządku cyfry mnożnika pod mnożną, aby jednościami mnożnika były pod częściami setnymi mnożnej. Gdybyśmy zaś chcieli otrzymać wartość iloczynu tychże liczb przybliżoną np. na 0,001, to należałoby tak te cyfry mnożnika podpisać, aby jego jednościami znalazły się pod setnymi częściami mnożnej. I t. d. T. j. jeżeli suma cyfr mnożnika, od której będzie mniejszy błąd sumy iloczynów częściowych, jest, jak w poprzednich przykładach, większa od 10, a nie większa od 100, to tak podpisujemy cyfry mnożnika w odwrotnym porządku pod mnożną, aby jednościami mnożnika znalazły się pod takimi częściami mnożnej, które odpowiadają 100-niej części żądanego stopnia przybliżenia iloczynu, i wtedy w otrzymanej sumie iloczynów częściowych nie zważamy na 2 ostatnie cyfry. Jeżeliby owa suma była nie większa od 10, to dość, aby jednościami mnożnika znalazły się pod częściami mnożnej, odpowiadającymi 10-tój części stopnia żądanego przybliżenia iloczynu, i wtedy w sumie iloczynów częściowych nie zważamy na 1 ostatnią cyfrę. Jeżeliby owa suma była większa od 100, a nie większa od 1000, to należy, aby jednościami mnożnika znalazły się pod częściami mnożnej, odpowiadającymi 1000-niej części stopnia żądanego przybliżenia iloczynu; wtedy w sumie iloczynów częściowych nie zważamy na 3 ostatnie cyfry. I t. d.—Najczęściej w różnych wyliczeniach niewamy ten przypadek, kiedy owa suma cyfr mnożnika, od której ma być mniejszy błąd sumy iloczynów częściowych, jest większa od 10, a nie większa od 100.

d. Powiemy więc ogólnie:

Aby, przy danym stopniu przybliżenia iloczynu, wykonać skrócone mnożenie, tak podpisujemy pod mnożną cyfry mnożnika, iżby, stosownie do tego, czy liczba, od której jest mniejszy błąd sumy iloczynów częściowych (określona wyżej w ustępie b.) jest: nie większa od 10, większa od 10 a nie większa od 100, większa od 100 a nie większa od 1000 i t. d., cyfra jednościami mnożnika znalazła się pod cyfrą mnożnej, oznaczającą takie jej części, jakie wyznacza odpowiednio 10-ta, 100-na, 1000-na i t. d. część stopnia żądanego przybliżenia iloczynu, a inne cyfry mnożnika znalazły się w porządku odwrotnym, t. j. dziesiątki z prawej strony obok jednościami i t. d., dziesiąte z lewej strony obok jednościami i t. d. Mnożymy następnie mnożną oddzielnie przez każdą cyfrę mnożnika, zanedbując jednak w każdym takim mnożeniu cyfry mnożnej, znajdujące się z prawej

strony owej cyfry mnożnika, przez którą mnożymy; częściowe iloczyny, stąd otrzymywane, podpisujemy jedne pod drugimi tak, żeby ich pierwsze (z prawej strony) cyfry były pod sobą. Dodawszy do siebie te iloczyny częściowe, otrzymamy sumę wyrażoną w takich częściach, pod jakimi częściami mnożnej znajduje się cyfra jedności mnożnika. Nie zważając ¹⁾ zaś w tej sumie odpowiednio ²⁾ na 1-nę, 2-e, 3-y i t. d. ostatnie cyfry, a do części, oznaczonych na bezpośrednio poprzedzającym miejscu, dodając 1-nę, otrzymujemy żądaną wartość przybliżoną iloczynu.

Jeżeli więc mamy np. znaleźć wartości dwu iloczynów $4,67843216 \times 45,3285638$ i $4,6784 \times 45,328563$, przybliżone na 0,001, to naprzód zważymy, że suma wszystkich cyfr mnożnika jest mniejsza od 100; mniejszą więc od 100, a prawdopodobnie większą od 10 będzie owa liczba, od której okaże się mniejszym błąd sumy częściowych iloczynów. Dlatego podpisujemy cyfrę jedności mnożnika (5) pod częściami, które nam wyznacza iloraz $0,001 : 100 = 0,00001$, t. j. pod stotysiącnymi częściami mnożnej [tak podpisawszy, zauważyć możemy, że istotnie, jakśmy przewidywali, każda z sum, $4 + 5 + 3 + 2 + 8 + 5 + 6 + (3 + 1)$, $2 + 8 + 5 + 6 + 3$ jest większa od 10-u], i według powyższego pravidła znajdziemy żądane wartości tych iloczynów:

4,67843216	4,678400
836582354	36582354
18713728	18713600
2339215	2339200
140352	140352
9356	9356
3736	3736
230	230
24	24
21206644	21206498
212,067;	212,065.

e. Zważmy jeszcze, że zamiast wyznaczać liczbę, od której jest mniejszy błąd sumy iloczynów częściowych, przy pomocy cyfr mnożnika (ustęp b.), mogliśmy tego dokonać za pomocą cyfr mnożnej. Zrobimy to tu ze względu, iż to będzie nam później (§ 24, us. 10) potrzebne.

W pierwszym z dwu ostatnich przykładów opuściliśmy iloczyny: części mnożnika 0,0000038 i 4-ch jedności mnożnej, któryto iloczyn jest mniejszy od $0,00001 \times 4 = 0,00004$; części mnożnika 0,0000638 i 0,6 mnożnej, który

¹⁾ T. j. opuszczając je, jeżeli to są cyfry dziesiętne, a zastępując je zerami w razie przeciwnym.

²⁾ T. j. zależnie od tego, jak wielką jest wzmiankowana poprzednio liczba, od której jest mniejszy błąd sumy iloczynów częściowych.]

jest mniejszy od $0,0001 \times 0,6 = 0,00006$; $0,0005638 \times 0,07 < 0,00007$, i t. d., $5,3285638 \times 0,000002 < 0,00002$; nakoniec iloczyn całego mnożnika przez $0,00000015$ mnożnej, który jest mniejszy od $100 \times 0,0000002 = 0,00002$. Ostatecznie tedy, błąd sumy wszystkich częściowych iloczynów w tym przykładzie jest mniejszy od $4 + 6 + 7 + 8 + 4 + 3 + 2 + (1 + 1)$ stotysięcznych. Podobnie znajdziemy, że w drugim z tych przykładów ów błąd jest mniejszy od $4 + 6 + 7 + 8 + 4$ stotysięcznych. Jeżeli zaś wyliczamy iloczyny $4627,0534 \times 7592,6$ i $8547,25 \times 86749$, «ograniczone do jedności»,

$$\begin{array}{r} 4627,0534 \\ \underline{62957} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8547,2500 \\ \underline{94768} \end{array}$$

to znajdziemy, że wyrażając liczbę, od której jest mniejszy błąd sumy iloczynów częściowych, przy pomocy cyfr mnożnej, będzie nią odpowiednio:

$$7 + 5 + 3 + 4, \qquad 2 + 5.$$

A zatem ogólnie:

Błąd sumy iloczynów częściowych, wyrażony w tychże, co one, częściach, jest mniejszy od sumy cyfr mnożnej, które nie były mnożone przez wszystkie cyfry mnożnika, i pierwszej z zaniedbanych cyfr mnożnej, którąto sumę należy powiększyć o 1, jeżeli w mnożnej takich zaniedbanych cyfr jest więcej niż jedna.

(Zadania arytmetyczne. § 24.)

§. 24. DZIELENIE LICZB DZIESIĘTNYCH.

1. Dzielenie, jako działanie odwrotne mnożeniu dwu czynników, ma na celu z danych: iloczynu dwu czynników i jednego z tych czynników wyznaczenie drugiego czynnika tego iloczynu. To zadanie istnieć może niezależnie od tego, czy czynniki są liczbami całkowitymi, czy też dziesiętnymi. Podane więc w us. 3-im § 7-go określenie dzielenia jest ogólne. Zatem wogóle:

Dzielenie jestto działanie, zapomocą którego, mając dwie liczby: dzielną i dzielnik, odnajdujemy liczbę, zwaną ilorazem, taką, iżby iloczyn dzielnika i ilorazu przedstawił dzielną.

Gdy więc mamy np. $8 : 0,5$, to mamy znaleźć taką liczbę, którą mnożąc przez $0,5$, otrzymamy 8 , t. j. mamy znaleźć taką liczbę, $0,5$ której jest liczbą 8 . Jeżeli więc $0,5$ liczby szukanej jest 8 , to 5 liczb szukanych jest 80 , a liczba szukana jest $80 : 5 = 20$; więc $8 : 0,5 = 20$.

2. Weźmy naprzód pod uwagę przypadek, kiedy mamy liczbę dziesiętną podzielić przez liczbę całkowitą, np. *)

*) Można zacząć od przykładów jeszcze prostszych, np. $126,936 : 3$, $136,476 : 2$ i t. d.

257,19 : 6. Ponieważ iloczyn ilorazu i dzielnika przedstawi dzielną, w której są części dziesiętne, a dzielnik jest liczbą całkowitą, zatem (§ 23, us. 2) w ilorazie będą części dziesiętne, t. j. iloraz z podzielenia liczby dziesiętnej przez całkowitą będzie liczbą dziesiętną. Ponieważ $6 \times 10 = 60$ jest liczbą mniejszą niż dzielna, a $6 \times 100 = 600$ jest liczbą większą niż dzielna, zatem iloraz jest liczbą większą od 10, a mniejszą od 100, t. j. część całkowita (§ 21, us. 4) ilorazu jest liczbą dwucyfrową (§ 7, us. 17, 23). Wiemy więc, że w części całkowitej ilorazu będą dwie cyfry—ale ile w ilorazie będzie cyfr dziesiętnych, tego przewidzieć nie możemy, gdyż w iloczynie liczby dziesiętnej i całkowitej może być mniej cyfr dziesiętnych, niż w jego czynniku, będącym liczbą dziesiętną (§ 23,

$$\begin{array}{r|l}
 257,19 & 6 \\
 -24 & 42,86 \\
 \hline
 17 & \\
 -12 & \\
 \hline
 51 & \\
 -48 & \\
 \hline
 39 & \\
 -36 & \\
 \hline
 3 &
 \end{array}$$

us. 2). Wykonywając to dzielenie, wyznaczmy początkowe cyfry 4 i 2 ilorazu sposobem wiadomym (§ 7, us. 17—19). Ponieważ, jak wiemy, te dwie cyfry przedstawiają część całkowitą ilorazu, więc po cyfrze 2 wypadnie umieścić przecinek. Zaznaczyć tu zaraz możemy, że przecinek wypadło położyć po tej cyfrze ilorazu, którąśmy wyznaczili, przypisawszy do odpowiedniej reszty ostatnią cyfrę części całkowitej dzielnej. Zauważmy, że, po wyznaczeniu pierwszej cyfry ilorazu, do pozostałej reszty 1 przypisaliliśmy wprost następu-

jącą cyfrę dzielnej 7 dlatego, że owa cyfra 1 (jako odpowiadająca cyfrze dzielnej 5) oznaczała część liczby 10 razy większą od części liczby bezpośrednio obok z prawej strony oznaczonych, jakimi właśnie są części liczby, przedstawione przez tę cyfrę 7. Podobnie, po wyznaczeniu drugiej cyfry ilorazu pozostała reszta 5 przedstawia części liczby 10 razy większe od części liczby, przedstawionej przez cyfrę 1; dlatego przypisawszy tę cyfrę 1 do owęj reszty, wyznaczmy następującą cyfrę ilorazu zupełnie taksamo, jak wyznaczaliśmy dwie jego pierwsze cyfry, t. j. poszukamy takiej największej cyfry (jednocyfrowej liczby), przez którą mnożąc dzielnik 6 otrzymamy iloczyn nie większy od 51. Trzecią więc cyfrą w ilorazie, a więc pierwszą po przecinku, będzie 8. Odjąwszy 48 od 51, otrzymamy nową resztę 3, która przedstawia części liczby dziesięć razy większe od oznaczonych w dzielnej przez następującą cyfrę 9. Przypisawszy więc do tej reszty cyfrę 9, wyznaczmy czwartą, t. j. drugą po przecinku cyfrę w ilorazie, mianowicie 8. Po odjęciu 36 od 39 pozostanie nam reszta dzielenia 3, oznaczająca też same części liczby, co cyfra 9 dzielnej, t. j. setne. Wypadło więc nam, że iloraz z podzielenia $257,19 : 6$ jest 42,86 wraz z tym (§ 7, us. 11), co wypadnie, gdy podzielimy 3 setne przez 6. Będzie więc tu liczba 42,86 ilorazem niepełnym, a liczba 0,03 resztą dzielenia (por. § 7, us. 11).

Gdybyśmy się zadowolili częściami setnymi w ilorazie, t. j. przybliżoną na 0,01 wartością ilorazu (§ 21, us. 13), moglibyśmy tu przyjąć jako iloraz albo 42,86, albotóż 42, 87. Jeżeli jednak nie chcemy poprzestać na tej wartości przybliżonej, to zauważymy, że mamy tu jeszcze do podzielenia 3 (setne) przez dzielnik. Możemy zaś sobie wystawić, że w dzielnej po ostatniej cyfrze dziesiątnej (9) znajdują się zera (§ 21, us. 8; § 23; us. 2). Przypisując więc do tej reszty 3, jako następującą cyfrę dzielnej, 0, wyznaczymy, w taki sam sposób, jak poprzednie, następującą cyfrę ilorazu 5, która, jak widzimy, jest tu ostatnią jego cyfrą. Otrzymaliśmy więc, jako szukany iloraz, liczbę 42,865; rzeczywiście, iloczyn liczb 42,865 i 6 jest 257,190, czyli 257, 19.

Widzimy więc, że, aby podzielić liczbę dziesiątną przez całkowitą, należy dzielenie skutecznie w taki sam sposób, jak dzielenie liczb całkowitych, kładąc w ilorazie przecinek po tej cyfrze, którą w tym dzieleniu wyznaczymy, uwzględnivszy ostatnią przed przecinkiem cyfrę dzielnej, a jeżeli po wyczerpaniu wszystkich cyfr danych w dzielnej pozostaje jeszcze reszta, to możemy działanie dalej prowadzić, przypisując tak do tej reszty, jak i do następnych (jeżeli będą) po zerze.

Gdy mamy np. $2,1 : 4$, to, ponieważ 1×4 jest mniej niż dzielna, w ilorazie nie będzie części całkowitej—składać się on będzie z samych tylko części dziesiątych (§ 21, us. 2), będzie ułamkiem dziesiątnym. Wypadnie więc mówić: 2 jest mniejsze od 4, więc na miejscu całkowitych piszę w ilorazie 0 (przecinek); wystawiam sobie następującą cyfrę dzielnej 1 przypisaną do 2; 4 w 21 mieści się 5 razy, piszę w ilorazie po przecinku 5; $4 \times 5 = 20$; po odjęciu od 21 pozostaje 1; dopisuję zero i t. d.

Jeżeli mamy np. $0,0003 : 4$, to wypadnie mówić: w dzielnej niema całkowitych, niema więc ich i w ilorazie; piszę 0, (przecinek); cyfra dzielnej 3, znajdująca się na 4-ym po przecinku miejscu, jeszcze nie wyznacza cyfry ilorazu; piszę więc w nim na pierwszych 4-ch miejscach po przecinku zera *); do 3-ch zaś dopisuję 0; 30 jest większe od 4; wyznacza więc następującą cyfrę ilorazu 7 i t. d.

*) Albo: w dzielnej niema dziesiątych, setnych, i tysięcznych; nie będzie więc ich w ilorazie, przeto piszę w nim po przecinku trzy zera; cyfra dzielnej 3 nie wyznacza cyfry w ilorazie, piszę więc w nim jeszcze jedno zero i t. d.

3. Weźmy teraz przypadek ogólniejszy: liczbę dziesiętną podzielić przez liczbę dziesiętną, np.

$$2,8719 : 0,06.$$

Mamy tu znaleźć taką liczbę, iloraz, iżby iloczyn ilorazu i dzielnika 0,06 był równy dzielnej 2,5719. Możemy więc powiedzieć, że 0,06 ilorazu jest liczbą 2,5719. Jeżeli 0,06 ilorazu jest liczbą 2,5719, to 6 ilorazów jest liczbą 100 razy większą, t. j. (§ 21, us. 9) 257,19. Ponieważ zaś 6 ilorazów jest liczbą 257,19, to iloraz wypadnie, gdy $257,19 : 6$. To jest

$$0,06 \text{ ilorazu} = 2,5719$$

$$6 \text{ ilorazów} = 2,5719 \times 100 = 257,19$$

$$\text{iloraz} = 257,19 : 6.$$

Widzimy więc, że ten przypadek sprowadza się do przypadku poprzedzającego. Aby więc znaleźć iloraz z podzielenia $2,5719 : 0,06$, należy w dzielnej przesunąć przecinek wprawo o 2 miejsca, t. j. o tyle miejsc, ile jest cyfr dziesiętnych w dzielniku, i $257,19 : 6$, t. j. podzielić tak zmienioną dzielną przez liczbę powstałą z dzielnika wskutek opuszczenia w nim przecinka. Że zaś znaleźliśmy (us. 2), iż $257,19 : 6 = 42,865$, zatem także $2,5719 : 0,06 = 42,865$.—Zauważyć tu jednak należy, że gdybyśmy, otrzymawszy w ilorazie 42,86, przerwali dzielenie, to wtedy wypadek dzielenia przedstawiłby się tak: 42,86 (iloraz niezupełny) wraz z tym, co wypadnie gdy 0,03 podzielimy przez 6, czyli (wprowadzając pierwotnie dany dzielnik) wraz z tym, co wypadnie gdy 0,0003 podzielimy przez dzielnik 0,06. Resztą więc pierwotnie danego dzielenia nie jest 0,03, otrzymane przy wykonywaniu dzielenia pomocniczego $257,19 : 6$, lecz 0,0003, t. j. reszta dzielenia jest wyrażona w najmniejszych częściach jedności, danych w dzielnej.

4. Jeżeli dzielna i dzielnik są liczbami dziesiętnymi, a w dzielniku jest tyle cyfr dziesiętnych, co w dzielnej, lub więcej, to dzielenie sprowadzi się do dzielenia dwu liczb całkowitych, np. dzielenie $1,089 : 0,072$ do dzielenia $1089 : 72$, a dzielenie $10,89 : 0,072$ do dzielenia $10890 : 72$. Wrazie, gdy w takim dzieleniu liczb całkowitych dzielna nie jest podzielna (§ 7, us. 11) przez dzielnik, to w ilorazie znajdzie się część mniejsza od jedności (§ 7, us. 11), którą należy wyrazić (§ 21, us. 1) przy pomocy dziesiątych części jedności. Idzie więc nam teraz o wyznaczenie ilorazu z podzielenia dwu liczb całkowitych przez siebie, jako liczby dziesiętnej.

Zadanie takie sprowadza się bezpośrednio do przypadku, roztrąsanego w ustępie 2-im. Gdy mamy np. $1089 : 72$

$$\begin{array}{r|l}
 1089 & 72 \\
 -72 & 15,125 \\
 \hline
 369 & \\
 360 & \\
 \hline
 90 & \\
 -72 & \\
 \hline
 180 & \\
 -144 & \\
 \hline
 360 & \\
 -360 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

i, wyznaczwszy pierwsze dwie cyfry ilorazu, przekonaliśmy się, że pozostaje reszta 9, to, z uwagi, że możemy w dzielną po cyfrze na pierwszym miejscu (9) umieścić przecinek, a po nim dopisać ilekolwiek zer (§ 21, us. 8), możemy dalej prowadzić dzielenie, jak w przypadku dzielenia liczby dziesiętnej przez całkowitą, t. j. kładąc w ilorazie po cyfrze 5 przecinek, do owej reszty 9 dopisując 0, wyznaczając następującą cyfrę ilorazu i t. d. Otrzymamy $1089 : 72 = 15,125$.— Podobnie znajdziemy, że $10890 : 72 = 151,25$. Wskutek zaś tego także $1,089 : 0,072 = 15,125$, a $10,89 : 0,072 = 151,25$.

Taksamo znajdziemy, że np. $21 : 4 = 5,25$; $3 : 4 = 0,75$; $29 : 1250 = 0,0232$; $0,02 : 0,0005 = 40$; $7 : 0,125 = 56$ i t. d.

5. Zastanawiając się nad dzieleniami, przeprowadzonymi w us. 2—4, możemy powiedzieć:

Aby podzielić liczbę dziesiętną przez liczbę dziesiętną, posuwamy w dzielną przecinek o tyle miejsc w prawo, ile jest cyfr dziesiętnych w dzielniku, a tak zmienioną dzielną dzielimy przez liczbę całkowitą, powstałą z dzielnika wskutek opuszczenia w nim przecinka, t. j. sprowadzamy w ten sposób zadanie do dzielenia albo liczby dziesiętnej przez całkowitą, albotóż całkowitą przez całkowitą.

*Mając liczbę dziesiętną podzielić przez całkowitą, uskuteczniamy dzielenie nie zważając na przecinek, jakgdyby dzielna była również całkowitą, kładąc tylko w ilorazie przecinek po cyfrze, którą wyznaczaliśmy przy pomocy ostatniej cyfry części całkowitej dzielnej, a w razie, gdy, po wyczerpaniu wszystkich danych cyfr dzielnej, pozostaje jeszcze reszta, prowadzimy działanie dalej, przypisując po zerze tak do tej reszty, jak i do reszt następujących *).*

Mając liczbę całkowitą podzielić przez całkowitą, w razie gdy pierwsza jest niepodzielna przez drugą, możemy przyjąć, że w dzielną po cyfrze, zajmującej miejsce pierwsze, znajduje się przecinek, po którym następują zera, i postępować tak, jak przy dzieleniu liczby dziesiętnej przez całkowitą.

6. Weźmy zadanie $70,77 : 11$. Wykonywając to dzielenie, dochodzimy do reszty 4, którąśmy już mieli jako resztę trzecią, tam, gdzie umieszczona jest *. Przypisawszy więc 0, otrzymamy znowu

*) Jeżeli więc po przypisaniu już jednego zera otrzymujemy liczbę mniejszą od dzielnika, to wypadnie w ilorazie napisać zero (por. § 7, us. 17, 18) i do tej reszty przypisać następującą cyfrę dzielnej, t. j. drugie zero, i t. d.

$$\begin{array}{r|l}
 70,77 & 11 \\
 \hline
 -66 & 6,4336 \\
 \hline
 47 & \\
 -44 & \\
 \hline
 37 & \\
 -33 & \\
 \hline
 * 40 & \\
 -33 & \\
 \hline
 70 & \\
 -66 & \\
 \hline
 4 &
 \end{array}$$

w ilorazie cyfrę 3, a następnie znowu resztę 7, do której przypisawszy 0, otrzymamy znowu w ilorazie 7, i t. d. do nieskończoności. Dzielenie więc to będzie się ciągnęło do nieskończoności, gdyż nie dojdziemy do reszty 0, a w ilorazie będziemy mieli nieskończony ciąg powtarzających się dwu cyfr 3 i 6, tak iż

$$70,77 : 11 = 6,4336363636 \dots;$$

tu kropki oznaczają, iż te cyfry 3, 6 wciąż w tymże samym porządku po sobie następują do nieskończoności. Podobnie

$$7077 : 11 = 643,363636 \dots$$

Taksamo znajdziemy, dzieląc 3 : 35,

$$3 : 35 = 0,0857142857142857142 \dots$$

Powiemy więc: jeżeli, przy wyznaczaniu cyfry dziesiętnej ilorazu, otrzymujemy w dzieleniu resztę, którąśmy mieli poprzednio, już po wyczerpaniu wszystkich danych cyfr w dzielnej, to, od tej cyfry począwszy, dalsze cyfry dziesiętne ilorazu będą wciąż następowały po sobie w tymże samym porządku do nieskończoności ¹⁾.

Takie ułamki dziesiętne, jak ostatni, lub jak w poprzedniej liczbie dziesiętnej ułamek 0,43363636..., z uwagi, że w ich wyrażeniu wchodzi nieskończona ilość cyfr dziesiętnych, są ułamekami dziesiętnymi nieskończonymi. W przeciwstawieniu im, o ułamku takim, jak np. 0,525, mówimy, że on jest ułamkiem dziesiętnym skończonym.

7. Wrazie więc, gdy w ilorazie otrzymujemy ułamek dziesiętny nieskończony, nie może być mowy o tym, byśmy mogli w ten sposób otrzymać iloraz zupełny. Zadowolnić się więc wtedy należy wartością przybliżoną ilorazu. Według więc tego, cośmy mówili w us. 13-ym § 21-go, jako wartość ilorazu z podzielenia 70,77 : 11 przybliżoną np. na 0,001 przyjmiemy 6,434, jako wartość przybliżoną na 0,0001 przyjmiemy 6,4336 i t. d.

Po wyczerpaniu w czasie dzielenia wszystkich cyfr pierwotnie danych w dzielnej, wszystkie przybliżone z niedomiarem *) wartości ilorazu odpowiadać będą temu, cośmy (§ 7, us. 11) nazwali «ilorazem niepełnym», a reszty, otrzymywane w czasie dzielenia, odpowiadające tym ilorazom niepełnym (t. j. otrzymywane po wyznaczeniu ostat-

¹⁾ O czytaniu takiej liczby w § 25, us. 5.

*) W poprzedniej więc liczbie jako taką wartość przybliżoną na 0,001 mieć będziemy 6,433.

niej z zatrzymanych cyfr w tych ilorazach), przedstawiają «reszty dzielenia».

8. Opierając się na tym, że tak własność: «iloczyn nie zależy od porządku czynników», jak i własności, wypowiedziane w us. 12-ym § 6-go, mają miejsce również wtedy, kiedy pośród liczb danych są dziesiętne (§ 23, us. 5), łatwo dowieść, że własności, wypowiedziane w us. 13-ym i 15-ym § 7-go, stosują się również do przypadku, kiedy pośród liczb danych są dziesiętne i kiedy mnożymy lub dzielimy przez liczby dziesiętne.—Jeżeli zaś, wykonywając dzielenie liczb dziesiętnych, doszliśmy do pewnego ilorazu niezupełnego i reszty dzielenia (por. us. 2, 3, 7), to własności, wypowiedziane w us. 14-ym § 7-go, mieć tu także będą swoje zastosowanie.

9. DZIELENIE SKRÓCONE. O dzieleniu, odpowiadającym temu mnożeniu, o którym wzmiankowaliśmy w us. 6-ym § 23-go, możemy tu mówić tylko w przypadku, kiedy mamy się zadowolić przybliżoną wartością dzielnej, a dzielnikiem pozostaje dokładna wartość dzielnika danego dzielenia ¹⁾. Jeżeli więc mamy np. liczbę $978,42567134 : 492$ i chcemy otrzymać wartość ilorazu przybliżoną np. na $0,000001$, to, zważywszy, że dzielnik jest liczbą większą od 100 a mniejszą od 1000, weźmiemy wartość dzielnej przybliżoną na $0,000001 \times 100 = 0,0001$, gdyż wtedy opuszczamy w dzielnej część jej mniejszą od 0,0001, a więc w ilorazie część mniejszą od $0,0001 : 492$, a przeto tymwięcej (a fortiori) mniejszą (us. 8) od $0,0001 : 100 = 0,000001$. Wykonywając zatem dzielenie $978,4256 : 492$, możemy je prowadzić aż do 6-jej cyfry dziesiętnej, t. j. do części milionowych ilorazu, do których, z uwagi, żeśmy wzięli wartość dzielnej przybliżoną z niedomiarem, dodamy 1-nę.

10. W ścisłym związku ze sposobem Oughtred'a wykonywania skróconego mnożenia (§ 23, us. 7) jest sposób Guy wykonywania skróconego dzielenia przy danym stopniu przybliżenia ilorazu, który teraz wyłożymy.

Aby sobie zadanie uprościć, zauważmy, że zawsze możemy dane dzielenie przy różnym od jedności stopniu przybliżenia ilorazu zastąpić takim dzieleniem, w którym szukamy ilorazu przybliżonego na jedność. Tak np. gdy chcemy otrzymać wartość ilorazu przybliżoną na 100, to, zmniejszwszy daną dzielną 100 razy i wyznaczyszy wartość ilorazu przybliżoną na 1, powiększając następnie znaleziony iloraz 100 razy, mieć będziemy wartość ilorazu danego dzielenia przybliżoną na 100. Podobnie, gdy mamy znaleźć wartość ilorazu przybliżoną na 0,01, zwiększmy daną dzielną 100 razy i wyznaczmy wartość ilorazu przybliżoną na 1, którą zmniejszając 100 razy, otrzymamy wartość ilorazu danego dzielenia przybliżoną na 0,01. Dlatego nadal mieć będziemy na uwadze tylko wyznaczanie ilorazu przybliżonego na 1.

¹⁾ Inne przypadki w *Teorii przybliżeń liczebnych* (seryja III, tom III «Bibl.-mat.-fiz.»).

Przypuśćmy, że mamy podzielić 271,9425069 przez 0,1451292929 i chcemy wyznaczyć wartość ilorazu przybliżoną na 1. Innymi słowy: chcemy wyznaczyć wszystkie cyfry całkowitej części ilorazu. Trzeba się więc dowiedzieć, ilocyfrową będzie całkowita część ilorazu. Wiemy (us. 3), że

$$271,9425069 : 0,1451292929 = 2\ 719\ 425\ 069\ 000 : 1\ 451\ 292\ 929 ;$$

a więc (§ 7, us. 23) cyfr w całkowitej części ilorazu ¹⁾ będzie $13 - 10 + 1 = 4$. Będziemy więc mieli do wykonania 4 dzielenia cząstkowe. W tych dzieleniach nie będziemy zważali na przecinki; dlatego pozostawiamy je w danych do podzielenia liczbach.

Wyznamy taką liczbę, przedstawioną przez początkowe cyfry dzielnika, aby ona (uważana jako całkowita) była już większą od sumy tyłu jego cyfr, bezpośrednio po tamtych następujących, ile mamy wykonać dzieleń cząstkowych, zwiększonej o jednoś, jeżeli są jeszcze inne cyfry w dzielniku. Widzimy, że tu $14 < 5 + 1 + 2 + (9 + 1)$, lecz już $145 > 1 + 2 + 9 + (2 + 1)$. Ta liczba 145 będzie w tym sposobie wykonywania dzielenia «ostatnim dzielnikiem». Przedostatnim będzie 1451, trzecim od końca 14512, czwartym od końca, czyli, jak tu, «pierwszym dzielnikiem», będzie liczba 145129. Pozostałymi cyframi dzielnika nie będziemy się posługiwali; podkreślamy je zwykle z dołu. Nad ostatnim dzielnikiem poprowadźmy kręskę poziomą. Będziemy więc w dzielniku mieli 0,1451292929. Widzimy z tego, że z ostatniego dzielnika otrzymamy pierwszy, opuszczając w ostatnim o jedną mniej cyfr końcowych, niż jest dzieleń cząstkowych do wykonania.

Ponieważ pierwszą cyfrę ilorazu wyznaczymy, dzieląc liczbę, przedstawioną przez początkowe cyfry dzielnej, przez 145129, a następnie dzielić będziemy przez liczby, które powstają z pierwszego dzielnika wskutek opuszczenia w nim stopniowo po jedną (każdorazowej ostatniej) cyfrze, przeto nie będzie potrzeba przypisywać następujących cyfr dzielnej do reszt, otrzymywanych w czasie wykonywania dzielenia, tak iż tylko tymi cyframi dzielnej będziemy się tu posługiwali, które są potrzebne do wyznaczenia pierwszej cyfry ilorazu. Podobnie więc, jakśmy zrobili z zaniedbanymi cyframi dzielnika, podkreślimy z dołu owe zaniedbywane cyfry dzielnej.

Tak przygotowawszy dzielnik i dzielną, przystąpmy do dzielenia. Dzielimy tedy 271942 przez pierwszy dzielnik 145129; otrzymujemy pierwszą cyfrę ilorazu 1 i resztę 126813. Przekreślamy ostatnią cyfrę (9) pierwszego

1) Gdyby po przesunięciu przecinka o tyle miejsc, ile 2) jest cyfr w dzielniku, pozostały cyfry dziesiętne w dzielnej, toby należało przyjąć pod uwagę ilość cyfr dziesiętnych w całkowitej części dzielnej. Zresztą por. us. 2.

2) Wystarczy przesunięcie przecinka o tyle tylko miejsc, żeby tak w dzielnej, jak i w dzielniku była część całkowita różna od zera. Przesunąwszy tu np. przecinek o jedno miejsce i zważywszy, że dość tyle wziąć początkowych cyfr w dzielnej ile jest w dzielniku, aby otrzymać cyfrę pierwszą ilorazu, znajdziemy, że w jego części całkowitej jest $4 - 1 + 1 = 4$ cyfry.

$$\begin{array}{r}
 271,9425069 \\
 -145129 \\
 \hline
 126813 \\
 -116096 \\
 \hline
 10717 \\
 -10157 \\
 \hline
 560 \\
 -435 \\
 \hline
 125
 \end{array}
 \left| \begin{array}{r}
 0,1451292929 \\
 \hline
 1873
 \end{array}
 \right.$$

560 przez ostatni dzielnik 145; otrzymujemy w ilorazie ostatnią z żądanych cyfr 3 i resztę 125.

Winni jesteście dowód na to, że otrzymany w ten sposób iloraz 1873 jest wartością ilorazu, wynikającego z podzielenia przez siebie pierwotnie danych liczb, przybliżoną na jedności. — Zważmy, że częściowe iloczyny dzielnika przez cyfry ilorazu, które tu stopniowo odejmowaliśmy od dzielnej, są utworzone według prawidła us. 7-go w § 23-im, jeżeli, mnożąc $0,1451292929$ przez 1873 sposobem skróconym, podpiszemy cyfrę jedności mnożnika (3) pod pierwszą z prawej strony cyfrą ostatniego dzielnika (t. j. pod cyfrą 5),

$$\begin{array}{r}
 0,1451292929 \\
 \hline
 3781
 \end{array}$$

I rzeczywiście mnożyliśmy 145129×1 , 14512×8 i t. d. Liczba, od której jest mniejszy błąd sumy owych iloczynów częściowych, wyrachowana zapomocą cyfr dzielnika (to jest mnożnej tego mnożenia; § 23, us. 7, e.), jest $1 + 2 + 9 + (2 + 1) = 15$ takich samych części liczby, w jakich są wyrażone tak iloczyny częściowe, jak i ¹⁾ ostatni dzielnik 145, który wyznaczyliśmy z warunku ²⁾, aby był większy od owej liczby 15. — Z tego wypada bezpośrednio, że iloczyn dokładny danego dzielnika przez iloraz 1873, otrzymany powyżej sposobem skróconym, będąc oczywiście większy od iloczynu wypadającego z powyższego skróconego mnożenia dzielnika przez iloraz, jest mniejszy od tegoż iloczynu, powiększonego o 0,015, a tymwięcej mniejszy od tego iloczynu, powiększonego o ostatni dzielnik 0,145. Z drugiej strony, po odjęciu od danej dzielnej wszystkich części iloczynu, wypadającego ze skróconego mnożenia dzielnika przez iloraz, pozostała nam liczba 0,1255069, mniejsza od ostatniego dzielnika 0,145; dzielna więc, będąc oczywiście większą od iloczy-

¹⁾ Gdy cyfra jedności (3) ilorazu (mnożnika) znajduje się właśnie pod ostatnią cyfrą (5) ostatniego dzielnika.

²⁾ Widzimy z tego, że *działanie skrócone polega na tym, aby jako ostatni dzielnik wziąć liczbę większą od błędów sumy iloczynów częściowych mnożenia skróconego, odpowiadającego temu dzieleniu.*

nu, wypadłego z owego mnożenia skróconego ¹⁾, jest mniejsza. od tegoż iloczynu, powiększonego o 0,145. Obie więc liczby: dzielna i iloczyn dokładny dzielnika danego przez iloraz, otrzymany sposobem skróconym, są zawarte między dwiema liczbami, różniącymi się od siebie o 0,145. Różnica więc danej dzielnej i iloczynu dokładnego dzielnika danego przez iloraz 1873 otrzymany sposobem skróconym, jest tymwięcej mniejsza od liczby 0,145, mniejszej od dzielnika danego 0,1451292929. A więc 1873 jest wartością ilorazu, różniącą się od jego wartości dokładnej mniej niż o 1, czyli jest szukaną wartością ilorazu przybliżoną na jedność.

Ponieważ w naszym przykładzie iloczyn dokładny dzielnika danego przez 1873 jest mniejszy niż iloczyn wypadający ze skróconego mnożenia + 0,015, a dana dzielna równa się temuż iloczynowi (wypadającemu ze skróconego mnożenia) + 0,1255069, więc 1873 jest wartością ilorazu przybliżoną na 1 z niedomiarem ²⁾. — Gdybyśmy zaś wykonali np. dzielenie (szukając przybliżonej na 1 wartości ilorazu):

$$\begin{array}{r|l} 271,8275069 & 0,1451292929 \\ \dots\dots & 1873 \\ \hline 10 & \end{array}$$

to wtedy o iloczynie dokładnym dzielnika danego przez 1873 wypadłoby powiedzieć to samo, co poprzednio, lecz dana dzielna byłaby

równa iloczynowi, wypadającemu ze skróconego mnożenia, + 0,0105069; nie moglibyśmy więc napewno wnieść, czy w tym przypadku wartość 1873 ilorazu, przybliżona na 1, przedstawia przybliżenie z niedomiarem, czytóż z nadmiarem.

Ażeby zapomocą dzielenia skróconego odnaleźć wartość ilorazu przybliżoną na jedność, należy uprzednio oznaczyć ilość cyfr całkowitej części ilorazu, która jednocześnie wyrażać będzie ilość częściowych, mających być wykonanymi. To wiedząc, należy następnie oddzielić tyle początkowych cyfr dzielnika, aby one przedstawiały już liczbę, większą od sumy tylu następnych cyfr dzielnika, ile ma być wykonanych częściowych; ta oddzielona liczba będzie ostatnim dzielnikiem. Z tego ostatniego dzielnika, dołączając doń o jedną mniej następujących w danym dzielniku cyfr, niż jest częściowych do wykonania, otrzymamy pierwszy dzielnik. Zauważywszy zaś, jakie części liczby przedstawia pierwsza z prawej strony cyfra ostatniego dzielnika, opuszczamy w dzielnej wszystkie te cyfry, które w niej przedstawiają mniejsze od tamtych części liczby. Dzieląc liczbę, przedstawioną przez zatrzymane cyfry dzielnej, przez pierwszy dzielnik, otrzymujemy pierwszą cyfrę w ilorazie; pozostałą resztę dzieląc przez dzielnik, powstałą z poprzedniego wskutek opuszczenia w nim pierwszej z prawej strony cyfry,

1) Jest ona bowiem także większą od iloczynu dokładnego danego dzielnika przez iloraz 1873, otrzymany sposobem skróconym.

2) Wyraźniej:

dzielnik \times iloraz przyb. = dzielnikowi przyb. \times iloraz przyb. + liczba mniejsza od 0,015
dzielnia = dzielnik \times iloraz = dzielnikowi przyb. \times iloraz przyb. + 0,1255069,
więc

dzielnik \times iloraz przyb. < dzielnika \times iloraz (dokładny),
czyli 1873 jest wartością ilorazu przybliżoną z niedomiarem.

otrzymamy następną cyfrę w ilorazie, i t. d., póki nie wyznaczymy cyfry przy pomocy ostatniego dzielnika.

Niekiedy zdarza się, że któraś z reszt nie jest mniejsza od pomnożonego przez 10 dzielnika, przez który ona ma być podzielona. Np. gdy wykonywamy skrócone dzielenie $19\ 501\ 757 : 4535,475$ (szukając zawsze przybliżonej

$$\begin{array}{r}
 19501757 \\
 \underline{-181416} \\
 13601 \\
 \underline{-9070} \\
 4531 \\
 \underline{-4077} \\
 454 \\
 \underline{-405} \\
 49
 \end{array}
 \left| \begin{array}{r}
 \overline{4535475} \\
 \underline{4299}
 \end{array}
 \right.$$

na 1 wartości ilorazu), to, po wyznaczeniu cyfry drugiej w ilorazie, otrzymujemy resztę 4531, którą mamy dzielić przez trzeci dzielnik 453. Albo więc jako drugą cyfrę w ilorazie weźmiemy cyfrę 3 i jako cyfry trzecią i czwartą weźmiemy zera, albotóż, pozostawiając cyfrę 2 jako drugą, weźmiemy jako trzecią 9; w takim razie otrzymamy resztę 454, która znowu jest większa od odpowiedniego dzielnika 45 pomnożonego przez 10, i wypadnie jako

ostatnią cyfrę wziąć 9. Zauważymy, że jeżeli przyjmiemy jako iloraz 4299, to dokładny iloczyn dzielnika danego przez 4299 jest mniejszy niż iloczyn, wypadający ze skróconego mnożenia, $+3 + 5 + 4 + (7 + 1)$ takich części liczby, w jakich są wyrażone iloczyny częściowe, t. j. dokładny iloczyn dzielnika danego przez 4299 jest mniejszy niż iloczyn, wypadający ze skróconego mnożenia, $+2000$, gdy tymczasem dzielna równa się owemu iloczynowi $+4957$; liczba więc 4299 jest wartością ilorazu przybliżoną na 1 z niedomiarem. Zatem 4300 będzie wartością tego ilorazu przybliżoną na 1 z nadmiarem. Którakolwiek więc z tych wartości 4299 i 4300 może tu być uważana, jako przedstawiająca żadaną wartość. Zatem, jeżeli w czasie wykonywania dzielenia skróconego otrzymamy resztę nie mniejszą od pomnożonego przez 10 dzielnika, przez który mamy ją podzielić, to należy wtedy w ilorazie jako każdą z cyfr, mających być wyznaczonymi, wziąć 9, albotóż ostatnią z otrzymanych cyfr powiększyć o 1, a jako dalsze wziąć zera.

Zauważymy jeszcze, że gdybyśmy w ten sposób dzielili np. liczby $9\ 294\ 703\ 568 : 73\ 945$, wyznaczając wartość ilorazu przybliżoną na 1, to, mając wyznaczyć 6 cyfr w ilorazie, wzięlibyśmy jako ostatni dzielnik 73, gdyż $73 > 9 + 4 + 5$, a pierwszym dzielnikiem byłaby liczba powstała z dopisania do 73 5-u następujących cyfr danego dzielnika, t. j. byłaby nim liczba $73\ 945,00$ i wypadłoby dzielić $9\ 294\ 703\ 568 : \overline{73945,00}$.

(Zadania arytmetyczne. § 25.)

ROZDZIAŁ VIII.

WYRAŻANIE UŁAMKÓW ZWYCZAJNYCH W POSTACI DZIESIĘTNYCH, I ODWROTNIE. UŁAMKI DZIESIĘTNE PERYJODYCZNE.

§ 25. O LICZBIE DZIESIĘTNEJ, PRZEDSTAWIAJĄCEJ IŁORAZ
Z PODZIELENIA DWU LICZB CAŁKOWITYCH PRZEZ SIEBIE. WYRAŻANIE
UŁAMKÓW ZWYCZAJNYCH W POSTACI DZIESIĘTNYCH.

1. Widzieliśmy (§ 24, us. 4, 6), że

$$1089 : 72 = 15,125; \quad 3 : 4 = 0,75; \quad 29 : 1250 = 0,0232;$$

$$7077 : 11 = 643,3636 \dots; \quad 3 : 35 = 0,0857142857142 \dots,$$

t. j. że, wyrażając iloraz jako liczbę dziesiętną, otrzymujemy w ilorazie niekiedy ułamek dziesiętny skończony, a niekiedy ułamek dziesiętny nieskończony. Owóż, należałoby zbadać, od czego to zależy, t. j. zbadać: kiedy, dzieląc dane dwie liczby całkowite *) przez siebie i wyznaczając iloraz jako liczbę dziesiętną, otrzymamy w ilorazie ułamek dziesiętny skończony, a kiedy nieskończony.

Wiemy, że dzielenie dwu liczb całkowitych przez siebie doprowadza nas do rezultatu, który możemy przedstawiać w postaci ułamka zwyczajnego, mającego dzielnik jako mianownik, a dzielną jako licznik (§ 17, us. 5), tak iż np. iloraz z podzielenia $1089 : 72$, t. j. liczba $15,125$, jest tą samą liczbą, którą przedstawia ułamek zwyczajny $\frac{1089}{72}$, albo — ponieważ to jest ułamek niewłaściwy (§ 17, us. 4) — całkowita z ułamkiem: $15 \frac{9}{72}$, czyli (§ 17, us. 9) : $15 \frac{1}{8}$. Stosując toż samo do każdego z powyższych dzieleń, mamy

$$\frac{1089}{72} = 14 \frac{1}{8} = 15,125; \quad \frac{3}{4} = 0,75; \quad \frac{29}{1250} = 0,0232;$$

$$\frac{7077}{11} = 643 \frac{4}{11} = 633,3636 \dots; \quad \frac{3}{35} = 0,0857142857142 \dots$$

*) W dzieleniu liczb dziesiętnych, jak widzieliśmy (§ 24, us. 2 — 6), wyznaczamy cyfry w ilorazie tak, jakgdyby przecinka nie było, czyli, jakgdybyśmy dzielili przez siebie liczby całkowite; jeżeli więc w ilorazie z dzielenia liczb całkowitych otrzymujemy ułamek dziesiętny nieskończony, to on wypadnie również wtedy, kiedy przecinek znajduje się czyto w dzielnej, czyto w dzielniku, czy też w dzielnej i dzielniku jednocześnie.

Stąd widzimy, że ułamek zwyczajny (tak właściwy, jak i niewłaściwy) możemy wyrazić jako liczbę dziesiętną.

A nadto, zamiast rozważać: kiedy, dzieląc dane dwie liczby całkowite przez siebie i wyznaczając iloraz jako liczbę dziesiętną, otrzymamy w ilorazie ułamek dziesiętny skończony, a kiedy nieskończony — możemy zastanawiać się nad tym: kiedy, wyrażając ułamek zwyczajny jako liczbę dziesiętną, otrzymamy w tym wyrażeniu ułamek dziesiętny skończony, a kiedy nieskończony.

Aby jednak, mając ułamek zwyczajny, otrzymać jego wyrażenie w postaci liczby dziesiętnej, korzystamy z tego, że na ułamek zwyczajny możemy patrzeć jako na wskazane dzielenie, w którym dzielną jest licznik, dzielnikiem mianownik, a ilorazem wartość ułamka (§ 17, us. 5). Dzielimy więc licznik (dzielną) przez mianownik (dzielnik), wyznaczając iloraz jako liczbę dziesiętną (§ 24, us. 4). Możemy więc powiedzieć (§ 24, us. 5):

Aby ułamek zwyczajny wyrazić jako liczbę dziesiętną, dzielimy licznik przez mianownik, postępując tak, jak wtedy, kiedy, mając podzielić przez siebie dwie liczby całkowite, wyznaczamy iloraz jako liczbę dziesiętną, t. j. przyjmując, że w czasie tego dzielenia w dzielnej po cyfrze, zajmującej miejsce pierwsze, znajduje się przecinek, po którym następują zera; czyli innymi słowy:

Aby ułamek zwyczajny wyrazić jako liczbę dziesiętną, dzielimy licznik przez mianownik; jeżeli licznik nie jest mniejszy od mianownika, to, wyznaczwszy iloraz niezupełny (§ 7, us. 11), mieć żeń będziemy część całkowitą liczby dziesiętnej, a jeżeli licznik jest mniejszy od mianownika, to piszemy zamiast części całkowitej zero, a licznik uważamy dalej jako resztę dzielenia; do reszty dzielenia przypisujemy zero i, uważając tak powstałą liczbę jako nową dzielną, wyznaczamy pierwszą cyfrę dziesiętną; do reszty, jeżeli ona z tego dzielenia częściowego wypadnie, dopisujemy zero, wyznaczamy z tej liczby drugą cyfrę dziesiętną, i t. d.

Jeżeli dany ułamek zwyczajny jest niewłaściwy, to, jak widzimy, taksamo postępujemy przy wyznaczaniu części całkowitej liczby dziesiętnej, jak przy wyciąganiu całkowitej z ułamka danego (§ 17, us. 4), gdyż w obu razach jest toż samo zadanie; dalsze zaś postępowanie jest wyrażaniem ułamka zwyczajnego w postaci ułamka dziesiętnego, np.

$$\frac{7077}{11} = 643 + \frac{4}{11} = 643,3636\dots = 643 + 0,3636\dots$$

Dlatego tu nadal przypuścimy, że zawsze, ilekroć dany jest ułamek niewłaściwy, całkowita zostaje z niego wyciągnięta, tak iż pozostaje tylko rozważyć: kiedy, wyrażając ułamek zwyczajny właściwy jako dziesiętny, otrzymamy ułamek dziesiętny skończony, a kiedy nieskończony.

2. W us. 6-ym § 21-ego widzieliśmy, że np.

$$0,0900127 = \frac{900127}{10\,000\,000};$$

teraz dodamy, że to, cośmy tam mówili, odnosiło się oczywiście tylko do ułamków dziesiętnych skończonych. Powiemy więc: ułamek dziesiętny skończony możemy zastąpić przez ułamek zwyczajny, pisząc jako jego licznik liczbę, przedstawioną przez cyfry znajdujące się po przecinku, jakgdyby to ich zgrupowanie przedstawiało oddzielną liczbę całkowitą, a jako mianownik liczbę, przedstawioną przez 1 z tylu zerami, ile w danym ułamku jest wszystkich cyfr dziesiętnych.

Jeżeli więc dany ułamek zwyczajny może być wyrażony jako ułamek dziesiętny skończony, to z tego ułamka dziesiętnego mogliśmy wprost otrzymać taką postać danego ułamka zwyczajnego (§ 17, us. 8), której mianownikiem jest liczba, przedstawiona przez 1 z zerami. A więc ułamek zwyczajny wtedy da się wyrazić jako ułamek dziesiętny skończony, kiedy pośród różnych (§ 17, us. 10) postaci danego ułamka zwyczajnego może się znaleźć taka, w której mianowniku jest liczba, przedstawiona przez jedność z zerami.

Wiemy zaś, że wszystkie postaci ułamka zwyczajnego powstają z jego postaci nieskracalnej, wskutek jednoczesnego pomnożenia jej licznika i mianownika przez odpowiednią tę samą *) liczbę (§ 17, us. 10). Aby więc, mając pewien ułamek zwyczajny, móc zgóry powiedzieć, czy, wyrażając go (us. 1) jako dziesiętny, otrzymamy ułamek dziesiętny skończony, czytóż nieskończony, należy przedewszystkim dany ułamek zwyczajny przywieść do postaci nieskracalnej (§ 17, us. 9) wrazie, gdyby on nie był już dany w tej postaci. Jeżeli mianownik nieskracalnej postaci danego ułamka jest taką liczbą, że, mnożąc ją przez odpowiednią liczbę całkowitą, możemy otrzymać liczbę, przedstawioną przez 1 z zerami **), to, mnożąc przez nią licznik i mianownik nieskracalnej postaci, otrzymamy postać, mającą w mianowniku liczbę, przedstawioną przez 1 z zerami, czyli: ułamek dziesiętny, wyrażający dany ułamek zwyczajny, jest skończony. Jeżeli zaś mianownik nieskracalnej postaci danego ułamka jest taką liczbą, że niema żadnej liczby całkowitej, przez którąby mnożąc ów mianownik można było otrzymać liczbę, przedstawioną przez 1 z zerami, to pośród różnych postaci danego ułamka nie może się znaleźć taka, którejby mianownik był liczbą przedstawioną przez 1 z zerami, czyli: nie możemy ułamka danego wyrazić w postaci ułamka dziesiętnego skoń-

*) Całkowitą.

**) Innymi słowy: jeżeli pośród różnych wielokrotnych (§ 12, us. 3) mianownika nieskracalnej postaci danego ułamka niema liczby, przedstawionej przez 1 z zerami.

czony, a tym samym ułamek dziesiętny, wyrażający dany ułamek zwyczajny, jest nieskończony.

Zważmy, że wszelkie liczby przedstawione przez 1 z zerami, t. j. liczby 10, 100, 1000 i t. d., w rozkładzie swoim na czynniki pierwsze (§ 15, us. 1, 4) mają tylko czynniki 2 i 5. Żeby więc, mnożąc mianownik nieskracalnej postaci danego ułamka przez pewną liczbę całkowitą, móc otrzymać liczbę, przedstawioną przez 1 z zerami, trzeba, aby pośród czynników pierwszych, na które się ten mianownik rozkłada, prócz czynników 2 lub 5, nie było innych. Jeżeli bowiem pośród czynników rozkładu owego mianownika na czynniki pierwsze jest czynnik inny, niż 2 lub 5, to, gdy mnożyć będziemy ów mianownik przez jakąkolwiek liczbę całkowitą, zawsze ten czynnik wejdzie do rozkładu otrzymanego iloczynu na czynniki pierwsze, a tym samym tym iloczynem nie może być liczba przedstawiona przez 1 z zerami.

Tak np. gdy mamy dany ułamek $\frac{21}{120}$, to, ponieważ $\frac{21}{120} = \frac{7}{40}$ gdzie $\frac{7}{40}$ jest już postacią nieskracalną, zaś $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$, zatem możemy, mnożąc licznik i mianownik postaci $\frac{7}{40}$ przez liczbę 5.5, otrzymać $\frac{7 \times 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \times 5 \cdot 5} = \frac{175}{1000}$ i $\frac{21}{120} = 0,175$, co otrzymalibyśmy także, dzieląc (us. 1) 21 przez 120. Jeżeli zaś mamy np. ułamek $\frac{5}{6}$, gdzie $6 = 2 \cdot 3$, to niema takiej liczby całkowitej, przez którą mnożąc liczbę 2.3, otrzymalibyśmy liczbę, przedstawioną przez 1 z zerami, a więc ułamek dziesiętny, wyrażający ułamek $\frac{5}{6}$, jest nieskończony; jakoż, dzieląc 5 przez 6, otrzymamy $\frac{5}{6} = 0,8333\dots$ Powiemy przeto:

Jeżeli w rozkładzie mianownika postaci nieskracalnej danego ułamka na czynniki pierwsze niema czynnika, któryby był inną liczbą niż 2 lub 5, to ułamek dziesiętny, wyrażający dany ułamek zwyczajny, jest skończony.

Jeżeli w rozkładzie mianownika postaci nieskracalnej danego ułamka na czynniki pierwsze jest czynnik, inny niż 2 lub 5, to ułamek dziesiętny, wyrażający dany ułamek zwyczajny, jest nieskończony.

3. Jeżeli więc ułamek dziesiętny, wyrażający dany ułamek zwyczajny, ma być skończony, to w rozkładzie mianownika postaci nieskracalnej danego ułamka mogą być tylko czynniki 2 lub 5, t. j. mogą być albo same czynniki 2, albo same czynniki 5, albotóż i czynniki 2 i czynniki 5, ale nie inne.

Ułamek dziesiętny skończony, wyrażający ten dany ułamek zwyczajny, mieć będzie (us. 2) tyle cyfr dziesiętnych (bez końcowych zer),

ile może być najmniej zer przy 1 w mianowniku najprostszej z tych *) postaci ułamka danego, które mają w mianowniku liczbę, przedstawioną przez 1 z zerami. Ponieważ zaś w rozkładach liczb 10, 100, 1000 i t. d. na czynniki pierwsze mamy tyle czynników 2, ile **) czynników 5, zatem, jeżeli w rozkładzie owego mianownika są same czynniki 2 lub same czynniki 5, to, mnożąc przez liczbę, będącą iloczynem tyluż czynników odpowiednio 5 lub 2, otrzymamy liczbę, przedstawioną przez 1 z tyluż zerami. Jeżeli zaś są czynniki 2 i 5 jednocześnie, i jednych, np. czynników 2, jest więcej, to mnożąc przez iloczyn tylu czynników 5, o ile ich jest w rozkładzie mniej, otrzymamy liczbę, przedstawioną przez 1 z tylu zerami, ile było w rozkładzie czynników 2. A więc:

Jeżeli w rozkładzie mianownika postaci nieskracalnej danego ułamka na czynniki pierwsze znajdują się same czynniki 2 lub same czynniki 5, to w ułamku dziesiętnym, wyrażającym dany ułamek zwyczajny, jest tyle cyfr dziesiętnych, ile tych czynników w rozkładzie; jeżeli zaś w owym rozkładzie są tylko czynniki 2 i 5, to w ułamku dziesiętnym, wyrażającym dany ułamek zwyczajny, jest tyle cyfr dziesiętnych, ile razy w tym rozkładzie znajduje się ten czynnik, który większą ilość razy doń wchodzi.

4. Widzieliśmy, że jeżeli w rozkładzie mianownika postaci nieskracalnej danego ułamka jest czynnik inny, niż 2 lub 5, to ułamek dziesiętny, przedstawiający dany ułamek zwyczajny, jest nieskończony. Dzieląc więc licznik przez mianownik (us. 1), nie dojdziemy do reszty 0, t. j. dzielenie będzie się ciągnąć do nieskończoności. Każda z nieskończenie wielu reszt w tym dzieleniu jest mniejsza od dzielnika (§ 7, us. 11); ilość więc różnych reszt jest ograniczona ***), t. j. też same liczby będą się powtarzać w dzieleniu jako reszty. Że zaś z tych reszt dla wyznaczenia następujących cyfr ilorazu tworzymy liczby w sposób jednostajny (mianowicie, dopisując 0), przeto gdy którakolwiek z reszt dzielenia się powtórzy, to powtórzy się również odpowiadająca cyfra w ilorazie. Tak np., odnajdując zapomocą dzielenia wyrażenie ułamka $\frac{3}{35}$ w postaci ułamka dziesiętnego (o którym zgóry wiemy, że będzie nieskończony, bo $35 = 5 \cdot 7$), spostrzeżemy, że ósma reszta jest taż sama, co druga (30); dopisawszy więc do niej zero wyznaczymy w ilorazie tę samą cyfrę 8, co z drugiej reszty po dopisaniu do niej zera. Z tego także wypada, że dziewiąta

*) Może być bowiem takich postaci nieskończenie wiele, np. $\frac{21}{120} = \frac{175}{1000} = \frac{1750}{10000}$ i t. d.

**) Bo $100 = 10 \times 10$; $1000 = 10 \times 10 \times 10$ i t. d., a każdy czynnik takiego (§ 15, us. 1, 4) iloczynu = 2. 5.

***) Reszt różnych może być conajwięcej o jedną mniej, niż jest jedności w dzielniku.

reszta będzie też sama, co trzecia, i t. d., a więc i w ilorazie dziewiąta cyfra też sama, co trzecia, i t. d.,

$$\frac{3}{35} = 0,0857142857142\dots$$

Widzimy więc, że w tym ułamku dziesiętnym nieskończonym grupa cyfr 8, 5, 7, 1, 4, 2 wciąż się powtarza do nieskończoności. Taką grupę cyfr dziesiętnych ułamka dziesiętnego nieskończonego, wciąż w tymże samym porządku po sobie następujących, nazywamy peryjodem ułamka dziesiętnego nieskończonego, a taki zaś ułamek dziesiętny nieskończony nazywamy ułamkiem dziesiętnym peryjodycznym ¹⁾.

Możemy więc, w uzupełnieniu tego, cośmy wyprowadzili w us. 2-im, powiedzieć:

Jeżeli w rozkładzie mianownika postaci nieskracalnej danego ułamka na czynniki pierwsze jest czynnik inny, niż 2 lub 5, to ułamek dziesiętny, wyrażający dany ułamek zwyczajny, jest ułamkiem dziesiętnym peryjodycznym.

5. Widzieliśmy, że

$$\frac{4}{11} = 0,363636\dots; \quad \frac{3}{35} = 0,0857142857142\dots;$$

podobnie znajdziemy np.

$$\frac{65}{185} = \frac{13}{37} = 0,342342\dots; \quad \frac{4339}{33300} = 0,13030030\dots$$

Przyglądając się tym ułamkom dziesiętnym peryjodycznym i dla uwidocznienia podkreślając początkowe cyfry, tworzące peryjód, widzimy, że tu w ułamkach 0,3636... i 0,342342... pierwsza po przecinku cyfra, czyli pierwsza cyfra dziesiętna, już należy do peryjodu, gdy tymczasem w dwu pozostałych ułamkach są «cyfry dziesiętne, nie należące do peryjodu», mianowicie w jednym cyfra 0, a w drugim cyfry 1 i 3. Jeżeli w ułamku dziesiętnym peryjodycznym pierwsza cyfra dziesiętna już należy do peryjodu, to nazywamy ten ułamek ułamkiem dziesiętnym peryjodycznym prostym; jeżeli zaś w ułamku dziesiętnym peryjodycznym są cyfry dziesiętne nie należące do peryjodu, to nazywamy go ułamkiem dziesiętnym peryjodycznym mieszanym.

Moglibyśmy przyjąć, że np. w pierwszym z wypisanych wyżej ułamków, t. j. w ułamku 0,342342342... grupę powtarzających się cyfr tworzą cyfry 4, 2 i 3, albo cyfry 2, 3 i 4, a wtedy moglibyśmy

¹⁾ Niedosć jest mówić «ułamek peryjodyczny», bo są jeszcze ułamki ciągłe peryjodyczne. (Zob. *Algebra*, t. III seryi III «Bibl.-mat.-fiz.»).

[Nb. Ilekroć nadal mówimy o algebrze, to rozumieć przez to będziemy kurs części III «Bibl.-mat.-fiz.»]

ten ułamek dziesiętny peryjodyczny uważać za mieszany. Podobnie w ostatnim z wypisanych ułamków moglibyśmy przyjąć, iż grupy powtarzających się cyfr tworzą cyfry 3, 0 i 0, albo cyfry 0, 0 i 3, a wtedy przyjmowalibyśmy, że w tym ułamku są odpowiednio trzy lub cztery cyfry dziesiętne nie należące do peryjodu. Zwykle jednak tak nie postępujemy. Owszem, chcąc rzecz przedstawić najprościej, jeżeli np., mając ostatni ułamek, zdawałoby się nam, że jako peryjód przyjąć należy grupę cyfr 3, 0 i 0, to zważamy na ostatnią z cyfr tej grupy (0) w początkowych cyfrach (t. j. w pierwszej po przecinku takiej grupie) i porównujemy ją z cyfrą poprzedzającą tę grupę; znajdujemy, że jest nią także cyfra 0, a więc ta cyfra należy już do cyfr peryjodu, i dlatego jako peryjód przyjmujemy grupę cyfr 0, 3 i 0; przed nią jest cyfra 3, odmienna od ostatniej cyfry peryjodu, a więc w tym ułamku dziesiętnym peryjodycznym są dwie cyfry dziesiętne nie należące do peryjodu.

Ułamka dziesiętnego peryjodycznego nie możemy tak czytać, jak czytamy ułamki dziesiętne skończone (§ 21, us. 5), t. j. tak, jakbyśmy mogli przeczytać jego wartość przybliżoną (§ 24, us. 7). Czytając ułamek dziesiętny peryjodyczny, np. wypisane wyżej ułamki 0,342342... lub 0,13030030... mówimy: «zero, przecinek», a następnie albo wypowiadamy pewną ilość cyfr dziesiętnych, nie opuszczając zer, robiąc pewne przerwy [głosu dla oddzielenia peryjodów, t. j. powiemy: «zero, przecinek; trzy, cztery, dwa; trzy, cztery, dwa; i t. d.» i «zero, przecinek; jeden, trzy; zero, trzy, zero; zero, trzy, zero; i t. d.», albotóż, wprowadzając wyraźnie wyraz: peryjód, powiemy: «zero przecinek, i peryjód: trzy, cztery, dwa» i «zero, przecinek; jeden, trzy, i peryjód: zero, trzy, zero». Gdybyśmy mieli np. 643,3636..., to oczywiście, czytając to, powiedzielibyśmy: «643 całkowite», a dalej tak, jak poprzednio, albo: «trzy, sześć; trzy, sześć, i t. d.», albotóż: «i peryjód: trzy, sześć».

Jeżeli o ułamku dziesiętnym peryjodycznym wiemy, jakiego ułamka zwyczajnego jest on wyrażeniem, lub jeżeli mamy już wyrażenie zaznaczony peryjód, np. gdyby w ułamku dziesiętnym nieskończonym peryjodycznym, oddzielnie napisanym, cyfry tworzące peryjód były podkreślone, jak na początku tego ustępu, wówczas żadnej wątpliwości być nie może. Gdybyśmy jednak mieli napisany ułamek dziesiętny:

0,342342342...

a kropki oznaczałyby tylko, że w tym ułamku jest nieskończenie wiele cyfr dziesiętnych, to, choćbyśmy wiedzieli, że ten ułamek dziesiętny jest peryjodycznym, nie moglibyśmy napewno twierdzić, że cyfry 3, 4 i 2 przedstawiają już peryjód. Mogłoby bowiem być np.

0,34234234234773423423423477....

Dlatego, jeżeli, mając ułamek dziesiętny peryjodyczny, nie wiemy, jaki on przedstawia ułamek zwyczajny, jest rzeczą dogodną wyraźnie zaznaczyć peryjód. Robią to dwójako: albo podkreślając cyfry (zwykle początkowe), tworzące peryjód, albotóż ujmując je w klamry nawiasu. Gdy więc mamy napisane:

$$0,\underline{342342} \dots, \text{ albo: } 0,(342) \dots,$$

lub

$$19,13030030 \dots, \text{ albo: } 19,13(030) \dots,$$

to żadnej już wątpliwości być nie może co do tego, które cyfry dziesiętne tworzą peryjód.

6. Widzieliśmy, że jeżeli do rozkładu mianownika postaci nieskracalnej danego ułamka zwyczajnego na czynniki pierwsze wchodzi czynnik inny, niż 2 lub 5, to ułamek dziesiętny, wyrażający dany ułamek zwyczajny, jest peryjodyczny, i mianowicie albo peryjodyczny prosty, albo peryjodyczny mieszany (us. 4, 5). W ustępach 5-ym i 9-ym § 26-ego otrzymamy a posteriori wskazówkę tego, po czym zgóry poznać, czy ułamek dziesiętny będzie peryjodycznym prostym, czytóż mieszanym. Tu zaś podamy inne wyprowadzenie owęj wskazówki.

a. Niech $\frac{l}{m}$ będzie nieskracalną postacią danego ułamka zwyczajnego

i niech m będzie liczbą pierwszą względem 10-u (t. j. do rozkładu liczby m na czynniki pierwsze nie wchodzi czynniki 2 lub 5; § 15, us. 5). Gdy dzielimy $l : m$, to kolejne reszty dzielenia odpowiadają (§ 24, us. 7) dzielnym

$$l, l \cdot 10, l \cdot 10^2, l \cdot 10^3, \dots, l \cdot 10^a, \quad l \cdot 10^{a+1}, \dots, l \cdot 10^{a+b}, \dots$$

Ponieważ (us. 4) te same liczby będą się powtarzać jako reszty, więc pewne dzielne odpowiadają tej samej liczbie jako reszcie. Niech np. dwie dzielne

$$l \cdot 10^a \quad \text{ i } \quad l \cdot 10^{a+b}$$

mają tę samą liczbę r jako reszty, im odpowiadające, a ich ilorazy niezupełne niech będą odpowiednio i_1 i i_2 . Wtedy (§ 7, us. 11)

$$l \cdot 10^a = m \cdot i_1 + r, \quad l \cdot 10^{a+b} = m \cdot i_2 + r,$$

a liczba

$$l \cdot 10^{a+b} - l \cdot 10^a = m \cdot i_2 - m \cdot i_1,$$

t. j. liczba (§ 6, us. 15)

$$10^a \cdot (l \cdot 10^b - l) = m \cdot (i_2 - i_1),$$

jest widocznie podzielna przez liczbę m . Ponieważ założyliśmy, że liczba m jest pierwsza względem 10, więc jest ona także pierwszą względem (§ 14, us. 15, b.) liczby 10^a . Gdy więc liczba $10^a \cdot (l \cdot 10^b - l)$ jest podzielna przez m , przeto jej czynnik $l \cdot 10^b - l$ jest podzielny (§ 14, us. 13) przez m . Wiemy, zaś, że liczba l nie jest podzielna przez m ; aby więc różnica $l \cdot 10^b - l$ była podzielna przez m , trzeba, aby także dzielne

$$l \quad \text{ i } \quad l \cdot 10^b$$

odpowiadały tej samej reszcie dzielenia. Z tego wypada, że reszta, odpowiadająca dzielnój l , t. j. pierwsza reszta, należy już do reszt powtarzających się, a tym samym pierwsza cyfra dziesiętna należy już do peryjodu. Widzimy przeto, że jeżeli mianownik nieskracalnej postaci danego ułamka jest liczbą pierwszą względem 10-u, to ułamek dziesiętny, wyrażający dany ułamek zwyczajny, jest peryjodyczny prosty.

b. Weźmy ułamek zwyczajny, którego postać nieskracalna ma jako mianownik taką liczbę, iż w rozkładzie jej na czynniki pierwsze znajduje się czynnik 2 lub 5 i jednocześnie czynnik inny, niż 2 lub 5. Np. do rozkładu mianownika ułamka $\frac{51}{88}$ (który jest już w postaci nieskracalnej) wchodzi czynnik 2 i jednocześnie wchodzi czynnik 11,

$$88 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11.$$

Zważmy, że taki ułamek możemy wyrazić, wogóle mówiąc, jako sumę lub różnicę dwu ułamków, z których jeden będzie miał w mianowniku liczbę pierwszą względem 10-u, a drugi będzie miał w mianowniku iloczyn samych tylko czynników 2 lub 5. [Gdy bowiem napiszemy

$$\frac{51}{88} = \frac{x}{11} + \frac{y}{8},$$

to, znosząc mianowniki, otrzymujemy

$$51 = 8x + 11y,$$

równanie nieoznaczone stopnia 1-go z dwiema niewiadomymi x i y , dla których, z uwagi, że współczynniki przy x i y są liczbami pierwszymi względem siebie, istnieją zawsze wartości całkowite (z których jedna może być ujemną), zadość czyniące temu równaniu—jak się tego dowodzi w algebrze.] Jakoż,

$$\frac{51}{88} = \frac{5}{11} + \frac{1}{8}.$$

Pierwszy z tych ułamków zwyczajnych, t. j. $\frac{5}{11}$, wyraża się jako ułamek dziesiętny peryjodyczny prosty, drugi zaś, t. j. ułamek $\frac{1}{8}$ jako ułamek dziesiętny skończony. W ich więc sumie cyfry dziesiętne ułamka dziesiętnego skończonego zmieniają początkowe cyfry po przecinku ułamka dziesiętnego peryjodycznego prostego, tak iż otrzymamy ułamek dziesiętny peryjodyczny mieszany, z tyłu cyframi dziesiętnymi, nie należącymi do peryjodu, ile było cyfr dziesiętnych w ułamku dziesiętnym skończonym (por. us. 3),

$$\frac{5}{11} = 0,45454545\dots$$

$$\frac{1}{8} = 0,125$$

$$\frac{51}{88} = 0,57954545\dots$$

$$\text{Podobnie np. } \frac{79}{3150}; 3150 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 63 \cdot 50; \frac{79}{3150} = \frac{23}{63} - \frac{17}{50};$$

$$\frac{23}{63} = 0,365079365079\dots$$

$$\frac{17}{50} = 0,34$$

$$\frac{79}{3150} = 0,02507936507936\dots$$

Widzimy więc ¹⁾, że jeżeli w rozkładzie mianownika nieskracalnej postaci danego ułamka zwyczajnego na czynniki pierwsze znajduje się czynnik 2 lub 5 i jednocześnie czynnik inny, niż 2 lub 5, to ułamek dziesiętny, przedstawiający dany ułamek zwyczajny, jest peryjodyczny mieszany i ma tyle cyfr dziesiętnych, nie należących do peryjodu, ile razy do jego rozkładu wchodzi ten z czynników 2 lub 5, który większą ilość razy w nim się znajduje.

7. Z tego, cośmy dotąd mówili, widoczna, że jeżeli iloraz z podzielenia dwu liczb całkowitych mamy przedstawić jako liczbę dziesiętną ^{*}), a chcemy wiedzieć, czy ułamek dziesiętny, który otrzymamy w ilorazie, będzie skończony, czy też nieskończony (peryjodyczny), to trzeba dzieleniem dzielnej i dzielnika przez ich wspólne dzielniki doprowadzić je do tego, aby dzielna i dzielnik były liczbami pierwszym-względem siebie. Jeżeli wtedy już dzielnik jest podzielny tylko przez liczby pierwsze 2 lub 5, to w ilorazie otrzymamy ułamek dziesiętny skończony; jeżeli zaś jest on wtedy podzielny przez liczbę pierwszą, inną niż 2 lub 5, to w ilorazie otrzymamy ułamek dziesiętny peryjodyczny.

Oczywiście, że jeżeli dany dzielnik (choćby nie był liczbą pierwszą względem dzielnej) jest podzielny tylko przez liczby pierwsze 2 lub 5, to w ilorazie może być tylko ułamek dziesiętny skończony, a w razie, gdy dany dzielnik jest niepodzielny ani przez 2, ani przez 5 (t. j. jest liczbą pierwszą względem 10), to w ilorazie może być tylko ułamek dziesiętny peryjodyczny.

8. W stosunkach handlowych często małe ułamki zwyczajne, dla łatwiejszego ich ze sobą porównania (§ 17, us. 14), przedstawiają w postaciach, których licznikiem jest zawsze 1-ść; doprowadza to niekiedy do ułamka, którego licznikiem jest 1, a mianownikiem liczba dziesiętna. Np. drogi żelazne wożą zboże, pobierając za pełny ładunek od wagonu, w który wchodzi 610 pudów zboża, 10 kopiejek za werstę, czyli wożą zboże «w peł-

¹⁾ Niektórzy, dowodząc tego inaczej, przyjmują, że jeżeli w liczbie dziesiętnej, której ułamek jest peryjodyczny prosty, przesuwamy przecinek o odpowiednią ilość cyfr wlewo, to otrzymujemy ułamek dziesiętny peryjodyczny mieszany; to niezawsze jednak ma miejsce, np. gdy owa liczba dziesiętna wyraża $\frac{2300}{63}$.

^{*}) Przyjmujemy więc, że dzielna nie jest podzielna przez dzielnik.

nych ładunkach po $\frac{1}{61}$ kop. od puda i wersty». Jeżeli np. z powodów konkurencyjnych pewna droga żelazna obniża ową opłatę z 10 kop. na 9 kop., to wypadnie $\frac{9}{610}$ kop. «od puda i wersty». Owoż, dzieląc licznik i mianownik przez licznik, a w mianowniku zatrzymując 2 cyfry dziesiętne (§ 21, us. 13), otrzymamy, iż owa droga wozi zboże po $\frac{1}{67,78}$ kopiejki «od puda i wersty».

(Zadania arytmetyczne. § 26.)

§ 26. WYRAŻANIE UŁAMKÓW DZIESIĘTNYCH W POSTACI ZWYCZAJNYCH.

1. Należy teraz wziąć pod uwagę zadanie odwrotne temu, którym głównie zajmowaliśmy się w § poprzedzającym, t. j. rozważyć wyrażanie ułamków dziesiętnych w postaci zwyczajnych.

Jak już wiemy (§ 21, us. 6), *aby ułamek dziesiętny skończony wyrazić jako ułamek zwyczajny, należy jako licznik napisać liczbę, przedstawioną przez cyfry, znajdujące się po przecinku, jakgdyby to ich zgrupowanie przedstawiało oddzielną liczbę całkowitą, a jako mianownik 1 z tylu zerami, ile w danym ułamku jest wszystkich cyfr dziesiętnych.* Otrzymany ułamek zwyczajny należy następnie, jeżeli można, skrócić (§ 17, us. 9).

Należy więc tylko zbadać, jak wyrażać ułamki dziesiętne peryjodyczne w postaci ułamków zwyczajnych.

2. Weźmy naprzód ułamek dziesiętny peryjodyczny prosty, np. $0,342342\dots$. Zauważmy, że

$$342 = 0,342 \times 1000,$$

lub, jeżeli zamiast 1000 napiszemy $999 + 1$ i zważymy, że: aby liczbę pomnożyć przez sumę dwu liczb, można liczbę daną pomnożyć przez każdy ze składników tej sumy i otrzymane iloczyny do siebie dodać (§ 6, us. 14; § 23, us. 5), możemy zamiast $0,342 \times 1000$ napisać: $0,342 \times 999 + 0,342$, tak iż

$$342 = 0,342 \times 999 + 0,342.$$

Do tegoż samego przyszlibyśmy, gdybyśmy 342 dzielili przez 999 i wyznaczyli w ilorazie pierwsze trzy cyfry dziesiętne; ilorazem niezupełnym jest 0,342, a resztą dzielenia 0,342 (§ 24, us. 7). Innymi słowy (§ 25, us. 1): wyrażając ułamek zwyczajny $\frac{342}{999}$ w postaci ułamka dziesiętnego, znajdziemy, iż pierwsze trzy cyfry dziesiętne są 3, 4, 2, a na-

stępnie znajdziemy, dzieląc w dalszym ciągu resztę 342 przez 999 (t. j. dopisując do tej reszty 0, wyznaczając stąd czwartą cyfrę dziesiętną i t. d.); będziemy zatem teraz znowu w takim samym położeniu, w jakim byliśmy na początku; a więc w ilorazie te trzy cyfry 3, 4 i 2 będą się wciąż w tymże samym porządku powtarzały. A zatem ¹⁾ ułamek zwyczajny $\frac{342}{999}$ jest tym właśnie, który, wyrażony jako dziesiętny, da nam ułamek $0,342342\dots$, t. j.

$$0,342342\dots = \frac{342}{999} = \frac{13}{37}.$$

Podobnie znajdziemy, że np. $0,03600360\dots = \frac{360}{9999} = \frac{40}{1111}$.

Powiemy więc:

Aby ułamek dziesiętny peryjodyczny prosty wyrazić jako ułamek zwyczajny, należy jako licznik napisać liczbę, przedstawioną przez cyfry peryjodu, jakgdyby ich zgrupowanie przedstawiało liczbę całkowitą, a w mianowniku napisać liczbę, przedstawioną przez tyle cyfr 9, ile jest wszystkich cyfr w peryjodzie. Otrzymany ułamek zwyczajny należy następnie, jeżeli można, skrócić.

3. Zauważmy, że z równości

$$342 = 0,342 \times 999 + 0,342$$

wypada, że

$$\frac{342}{999} = 0,342 + \frac{0,342}{999}$$

i następnie

$\frac{342}{999} = 0,342342 + \frac{0,000342}{999}$; $\frac{342}{999} = 0,342342342 + \frac{0,000000342}{999}$ i t. d., skąd wynika, że wmiarę tego, jak coraz więcej uwzględniamy peryjodów, co-

¹⁾ Dowód ten (wzięty z przytoczonej poprzednio arytmetyki J. A. Serret'go) opiera się właściwie na tym samym, co dowód, w którym naprzód rozważamy, iż ułamki $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$,

$\frac{1}{999}$ i t. d. są przedstawione przez ułamki dziesiętne peryjodyczne proste: $0,111\dots$, $0,010101\dots$, $0,001001001\dots$, i t. d., a następnie dane ułamki np. $0,444\dots$; $0,525252\dots$ uważamy jako $4 \times 0,111\dots$; $52 \times 0,010101\dots$. [Zauważmy, że to ostatnie uzasadnienie sposobu wyrażania ułamków dziesiętnych peryjodycznych prostych w postaci ułamków zwyczajnych jest już wyłożone w *Arytmetyce* Konkowskięgo z r. 1811; w późniejszych jednak arytmetykach przeważnie przytaczany jest dowód następujący.]

Najwięcej u nas rozpowszechniony jest dowód taki: od powiększonego 1000 razy ułamka danego $0,342342342\dots$ odejmijmy ułamek dany:

$$\begin{array}{r} 1000 \text{ ułamków danych} = 342,342342\dots \\ \text{ułamek dany} = 0,342342\dots \\ \hline 999 \text{ ułamków danych} = 342 \\ \text{ułamek dany} = \frac{342}{999} \end{array}$$

Jest tu jednak niedogodne z różnych względów takie odejmowanie nieskończonych ciągów cyfr od siebie. Dlatego bardzo wielu autorów obcych wprowadza do tego zmianę, polegającą na tym, że się zadawała ograniczoną ilością peryjodów ułamka danego i w podobny temu sposób zazna-

cza, że wtedy ów ułamek różni się od ułamka $\frac{342}{999}$ o liczbę, która staje się tym mniejszą, im więcej uwzględniamy peryjodów. Takie wprowadzenie rozważania granicy jest jednak zawczesne przy pierwszym wykładaniu uczniom o wyrażaniu ułamków dziesiętnych w postaci zwyczajnych.

raz więcéj zbliżamy się do liczby, którą przedstawia ułamek zwyczajny

$$\frac{342}{999} = \frac{13}{37}$$

Ułamek $0,342342342\dots$ możemy tak wyrazić:

$$0,342342342\dots = \frac{342}{1000} + \frac{342}{1000000} + \frac{342}{1000000000} + \dots,$$

t. j., wyrażając się, jak w algebrze, możemy dany ułamek uważać jako sumę wyrazów postępu geometrycznego nieskończonego malejącego, którego wyrazem pierwszym jest $\frac{342}{1000}$, a wykładnikiem $\frac{1}{1000}$. Dowodzi się w algebrze, że suma skończonej ilości wyrazów początkowych takiego postępu, w miarę uwzględniania coraz większej ilości tych wyrazów, zdąża do liczby stałej, zwanéj granicą, od której może się różnić mniej niż o jakkolwiek małą oznaczoną liczbę, i że ta granica jest ilorazem z podzielenia wyrazu pierwszego przez różnicę 1-sci i wykładnika postępu. Będzie więc tu (§ 20, us. 5):

$$\frac{\frac{342}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{342}{999} = \frac{13}{37}$$

Widzimy więc, że ułamek zwyczajny $\frac{342}{999} = \frac{13}{37}$ jest granicą, do której zdąża ułamek $0,342342\dots342$ w miarę uwzględniania coraz większej ilości peryjodów ¹⁾.

4. Ułamek dziesiętny peryjodyczny prosty $0,999\dots$

posiada tę własność, że gdy bierzemy jego wartości przybliżone z niedmiarem (§ 21, us. 13) na 0,1; 0,01; 0,001 i t. d., to ułamki dziesiętne skończone przedstawiające owe przybliżenia, są większe od wszelkich innych ułamków dziesiętnych skończonych, mających odpowiednio jedną, dwie, trzy i t. d. cyfry dziesiętne (§ 21, us. 12). Każda zaś z wartości przybliżonych z nadmiarem przedstawia tę samą liczbę 1.

Tęż liczbę (gdyż $\frac{9}{9} = 1$) otrzymamy, gdy do ułamka $0,999\dots$, największego ze wszystkich ułamków dziesiętnych peryjodycznych, zastosujemy prawo ustępu 2-go ²⁾, czyli, wyrażając się, jak w drugiej części ustępu 3-go: 1-sć jest granicą, do której zdąża ułamek $0,999\dots9$ w miarę uwzględniania coraz większej ilości peryjodów.

¹⁾ Albo, oznaczając n -ty od początku peryjód zapomocą wskaźnika n , umieszczonęgo przy ostatniej cyfrze peryjodu: ułamek zwyczajny $\frac{342}{999}$ jest granicą, do której zdąża ułamek

$$0,342342\dots342_n$$

w miarę ustawicznego powiększania się liczby n .

²⁾ A więc wzmiankowane wyżej przybliżenia z nadmiarem są tylko pozornie przybliżeniami—one przedstawiają wartość dokładną tej liczby.

Ten więc największy ze wszystkich ułamków dziesiętnych peryjodycznych, a zarazem największy ze wszelkich wogóle ułamków dziesiętnych możliwych, jest właściwie wyrażeniem jedności. Dlatego tego krańcowego ułamka dziesiętnego nie można otrzymać jako ilorazu z podzielenia dwu liczb całkowitych przez siebie (§ 25, us. 1, 7), a szczególności nie można tą drogą ¹⁾ otrzymać owego ułamka, jako wyrażenia ułamka zwyczajnego.

Z tego zaś jeszcze wynika, że, wykonawszy jakikolwiek rachunek, nie otrzymamy w wypadku ułamka dziesiętnego peryjodycznego 0,999...

5. Jak widzieliśmy (us. 2), ułamek zwyczajny, którego wyrażeniem jest ułamek dziesiętny peryjodyczny prosty, może być przedstawiony w postaci, której mianownik jest liczbą przedstawioną wyłącznie przez cyfry 9, a więc liczbą niepodzielną ani przez 2 ani przez 5 (§ 13, us. 5), czyli liczbą pierwszą względem 10-u (§ 15, us. 11). Jeżeli ową postać można skrócić, to mianownik nieskracalnej postaci tego ułamka zwyczajnego jest również liczbą pierwszą względem 10-u. Uzupełniając więc to, cośmy powiedzieli w us. 4-ym § 25-go, dodamy teraz:

*Jeżeli mianownik nieskracalnej postaci danego ułamka zwyczajnego jest liczbą pierwszą względem 10-u *)*, to ułamek dziesiętny, wyrażający dany ułamek zwyczajny, jest peryjodyczny prosty ²⁾.

6. Weźmy teraz pod uwagę ułamek dziesiętny peryjodyczny mieszany, np. ułamek 0,13030030... Zważmy, że

$$\begin{aligned} 0,13030030\dots &= 0,13 + 0,00030030\dots^3) \\ &= 0,13 + \frac{1}{100} \times 0,030030\dots^4) \\ &= \frac{13}{100} + \frac{1}{100} \times \frac{30}{999} \\ &= \frac{13 \times 999 + 30}{99900} \end{aligned}$$

1) Można go otrzymać przez stosowanie równości $9 = 0,9 \times 9 + 0,9$.

*) Albo: jeżeli w rozkładzie mianownika nieskracalnej postaci danego ułamka zwyczajnego na czynniki pierwsze nie ma ani czynnika 2, ani czynnika 5, to i t. d.

2) W peryjodzie zaś jest tyle cyfr, ile najmniej potrzeba cyfr 9, aby one, razem uważane, przedstawiły liczbę podzieloną przez mianownik owej postaci nieskracalnej.

3) Gdybyśmy to tak napisali:

$$0,13030030\dots = 0,13 + 0,0003003\dots,$$

$$\text{to otrzymalibyśmy } \frac{13}{100} + \frac{1}{10} \times \frac{3}{999} = \frac{13 \times 999 + 3 \times 10}{99900} \text{ i t. d.}$$

4) Własność, iż przesuując przecinek wprawo o 2 miejsca, powiększamy liczbę dziesiętną 100 razy, możemy tu zastosować do ułamków dziesiętnych peryjodycznych, gdyż sposób, w jaki to objaśniliśmy (§ 21, us. 9) stosuje się i do tego przypadku: każda cyfra, którekolwiek miejsce zajmująca, staje się o 2 miejsca bliższą przecinka, a więc oznacza części liczby 100 razy większe, niż oznaczała poprzednio.

W liczniku zamiast 999 możemy napisać $1000 - 1$; robiąc to i zważając (§ 6, us. 15), że $13 \times (1000 - 1) = 13 \times 1000 - 13 = 13000 - 13$, mieć będziemy:

$$\begin{aligned} 0,13030030 \dots &= \frac{13000 - 13 + 30}{99900} \\ &= \frac{13030 - 13}{99900} = \frac{13017}{99900} = \frac{4339}{33300} \end{aligned}$$

Podobnie znajdziemy, że np.

$$0,0725454 \dots = \frac{7254 - 72}{99000} = \frac{7182}{99000} = \frac{399}{5500}$$

$$0,0857142857142 \dots = \frac{857142}{9999990} = \frac{3}{35}$$

Aby ułamek dziesiętny peryjodyczny mieszany wyrazić jako ułamek zwyczajny, należy w liczniku napisać liczbę, którą otrzymamy, gdy od liczby, przedstawionej przez cyfry dziesiętne nie należące do peryjodu i wszystkie cyfry peryjodu, odejmiemy liczbę, przedstawioną przez cyfry dziesiętne nie należące do peryjodu, jakgdyby te dwa zgrupowania cyfr przedstawiały liczby całkowite, a w mianowniku napisać liczbę, przedstawioną przez tyle cyfr 9, ile jest wszystkich cyfr w peryjodzie, oraz tyle zer, ile jest wszystkich cyfr dziesiętnych nie należących do peryjodu. Otrzymany ułamek zwyczajny należy następnie, jeżeli można, skrócić.

7. Przedstawiwszy

$$0,13030030 = 0,13 + \frac{1}{100} \times 0,030030 \dots,$$

możemy do ułamka dziesiętnego peryjodycznego prostego $0,030030 \dots$ zastosować to, cośmy mówili na początku ustępu 3-go, wskutek czego wyniknie, że dany ułamek peryjodyczny mieszany, wmiarę tego, jak coraz więcej uwzględniamy peryjodów, coraz więcej się zbliża do liczby, którą przedstawia suma $\frac{13}{100} + \frac{1}{100} \times \frac{30}{999}$, czyli ułamek zwyczajny $\frac{13030 - 13}{99900} = \frac{4339}{33300}$.

Stosując zaś do tegoż ułamka dziesiętnego peryjodycznego prostego to, cośmy powiedzieli w drugiej części ustępu 3-go, będziemy mogli się wyrazić, że wypisany ułamek zwyczajny jest granicą, do której zdąża ułamek $0,13030030 \dots 030$ wmiarę uwzględniania coraz większej ilości peryjodów.

8. Ułamek dziesiętny peryjodyczny mieszany, którego peryjodem jest 9, np.

$$0,527999 \dots$$

może być tak wyrażony

$$0,527999 \dots = 0,527 + \frac{1}{1000} \times 0,999 \dots$$

Wszystko więc, cośmy w ustępie 4-ym mówili o największym ze wszelkich możliwych ułamków dziesiętnych, który tu wchodzi w wypisane wyrażenie, ma tu również swoje zastosowanie. Tak więc:

Ułamek dziesiętny peryjodyczny mieszany $0,527999\dots$ jest największy z tych wszystkich ułamków dziesiętnych, których pierwsze trzy cyfry dziesiętne są pokolei: 5, 2 i 7.

Ten ułamek dziesiętny peryjodyczny mieszany jest właściwie innym wyrażeniem ułamka dziesiętnego skończonego: $0,528$, czyli jest wyrażeniem

$$\text{ułamka zwyczajnego } \frac{5279 - 527}{9000} = \frac{4752}{900} = \frac{528}{1000} = \frac{66}{125}.$$

Taki więc ułamek dziesiętny peryjodyczny mieszany, jak tu rozważany, nie może być otrzymany jako iloraz z podzielenia dwu liczb całkowitych przez siebie, a tymsamym nie można tą drogą otrzymać owego ułamka jako wyrażenia ułamka zwyczajnego.

Z tego jeszcze wynika, że, wykonawszy jakikolwiek rachunek, nie otrzymamy w wypadku ułamka dziesiętnego peryjodycznego mieszanego, któregooby peryjodem było 9.

9. Jak widzieliśmy (us. 6), ułamek zwyczajny, którego wyrażeniem jest ułamek dziesiętny peryjodyczny mieszany, może być przedstawiony w postaci, której mianownik jest liczbą, utworzoną przez tyle cyfr 9, ile jest wszystkich cyfr w peryjodzie, oraz tyle cyfr 0, ile jest wszystkich cyfr dziesiętnych nie należących do peryjodu. Jeżeli owę postać skrócimy, to mianownik postaci nieskracalnej będzie liczbą podzielną przez 2 lub 5, gdyż w przeciwnym razie dany ułamek dziesiętny peryjodyczny byłby prostym (us. 5; § 25, us. 5). Zauważymy nadto, że licznik i mianownik owęj wzmiankowanej wyżej postaci, mającej w mianowniku liczbę przedstawioną przez cyfry 9 i 0, nie mogą mieć wspólnego dzielnika 10, gdyż wtedy (us. 6) ostatnia cyfra dziesiętna nie należąca do peryjodu byłaby takąż samą, jak ostatnia cyfra peryjodu, coby wskazywało, żeśmy niewłaściwą (§ 25, us. 5) grupę cyfr przyjęli jako peryjód. Skracając więc owę postać, jeżeli to będzie możliwe, przez 2, nie będziemy jej mogli skrócić przez 5) a jeżeli będzie ją można skrócić przez 5, to nie będzie można jej skrócić przez 2. Innymi słowy, większa z liczb, wskazujących, ile do rozkładu na czynniki pierwsze mianownika nieskracalnej postaci ułamka zwyczajnego, przedstawiającego ułamek peryjodyczny mieszany, wchodzi czynników 2 i ile czynników 5, przedstawi jednocześnie ilość zer w mianowniku wyżej wzmiankowanej postaci, a tymsamym ilość cyfr dziesiętnych w owym ułamku dziesiętnym peryjodycznym, nie należących do peryjodu. Z tego wynika, że to, cośmy powiedzieli w us. 4-ym § 25-go, możemy teraz uzupełnić (por. us. 5), dodając, iż:

Jeżeli w rozkładzie mianownika nieskracalnej postaci danego ułamka zwyczajnego na czynniki pierwsze znajduje się czynnik 2 lub 5 i jednocześnie czynnik inny, niż 2 lub 5, to ułamek dziesiętny, przedstawiający dany ułamek zwyczajny, jest peryjodyczny mieszany i ma tyle cyfr dziesiętnych, nie należących do peryjodu, ile razy do tego rozkładu wchodzi ten z czynników 2 lub 5, który większą ilość razy w nim się znajduje ¹⁾.

10. Z tego wszystkiego, cośmy tu o ułamkach zwyczajnych i dziesiętnych mówili, wypada, że ułamki dziesiętne różnią się tylko postacią od ułamków zwyczajnych, tak, iż liczbę wyrażoną jako ułamek zwyczajny możemy przedstawić jako ułamek dziesiętny, i nawzajem. Dlatego określenia dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, jak również wszystkie własności, niezwiązane z postacią ułamków, były w rozdziałach VI i VII też same.

Zauważymy tu jeszcze, że przy rozpoczynaniu nauki o ułamkach zwyczajnych, możemy odrazu wszelkie takie ułamki mieć na myśli, gdy tymczasem przy rozpoczynaniu nauki o ułamkach dziesiętnych, możemy z początku rozważać tylko ułamki dziesiętne skończone, odsuwając na później rozważanie tak prostych liczb, jak: jedna-trzecia, pięć-szóstych, dwie-siódme i t. d.

11. Rozważaliśmy tu tylko wyrażanie ułamków dziesiętnych w postaci ułamków zwyczajnych. Gdybyśmy zaś mieli liczbę dziesiętną większą od jedności, to odpowiednie zadanie wykonamy najprościej, gdy oddzielimy ułamek dziesiętny od części całkowitej, ten ułamek dziesiętny przedstawimy według podanych powyżej wskazówek w postaci ułamka zwyczajnego, a ten ułamek zwyczajny napiszemy obok części całkowitej danej liczby.

12. Jeżeli, wykonawszy pewien rachunek, otrzymaliśmy w wypadku ułamek dziesiętny peryjodyczny, to możemy tę postać zachować, jeżeli niema wskazówki, że ów wypadek ostateczny powinien być przedstawiony inaczej, np. z pewnym przybliżeniem.

Jeżeli jednak pośród liczb, które mamy dodać lub odjąć od siebie, albo pomnożyć lub podzielić przez siebie, jest ułamek dziesiętny peryjodyczny (albo, wogóle, liczba dziesiętna, której ułamek jest peryjodyczny), to nie wykonywamy tych działań na ułamkach dziesiętnych nieskończonych, lecz albo bierzemy wartość przybliżoną tej liczby, albotóż, jeżeli chcemy wykonać rachunek dokładnie, ułamek dziesiętny peryjodyczny wyrażamy w postaci ułamka zwyczajnego.

¹⁾ Ilość zaś cyfr peryjodu wyznaczy największy z dzielników mianownika nieskracalnej postaci danego ułamka zwyczajnego, pierwszych względem 10-u. (Por. odsyłacz do ustępu 5-go.)

13. Chociaż ułamek dziesiętny peryjodyczny, jak widzieliśmy (us. 3, 7), jest sumą nieskończenie wielu wyrazów postępu geometrycznego (do której wraze, gdy ten ułamek jest peryjodyczny mieszany, dodaje się pewien ułamek dziesiętny skończony), to jednak granica tej sumy przedstawia albo jedną, albo więcej razem wziętych części, otrzymanych z rozłożenia jedności na części równe (§ 17, us. 1). Dlatego to ułamki dziesiętne peryjodyczne należą do liczb, z którymi mamy do czynienia w arytmetyce (§ 17, us. 2).

14. Jeżeli wystawimy sobie, że mamy liczbę, w której cyfr dziesiętnych jest nieskończenie wiele, ale one, jakkolwiek wiele ich weźmiemy, nie przedstawiają peryjodu, to taka liczba, z uwagi, że jej części mniejsze od jedności są napisane według tej samej zasady, według której piszemy liczby całkowite (§ 21, us. 1), jest liczbą dziesiętną. Nadto powszechnie przyjęto w przypadku, gdy taka liczba jest mniejsza od jedności (a w przeciwnym razie, część jej pozostającą po oddzieleniu części całkowitej), nazywać ją także «ułamkiem» dziesiętnym¹⁾. Będzie to więc «ułamek dziesiętny nieskończony nieperyjodyczny». Ułamki dziesiętne nieskończone nieperyjodyczne wchodzą do liczb, które otrzymujemy w algebrze elementarnej, np. do wyliczanych przy pomocy cyfr dziesiętnych pierwiastków jakiegokolwiek stopnia z liczb całkowitych, które nie dadzą się dokładnie przedstawić jako liczby całkowite²⁾, do logarytmów zwyczajnych tych liczb, które nie są potęgami całkowitymi 10-u i t. d.; wchodzą one do niektórych liczb, wynikających w geometrii elementarnej z wyzniesienia pewnej wielkości inną jednorodną, przyjętą za jednostkę, np. okręgu koła jego średnicą i t. d., jak również do pewnych liczb, wynikających z badań, przeprowadzanych w innych częściach matematyki. — Z tego, cośmy mówili o wyrażaniu ułamka zwyczajnego w postaci dziesiętnej, wynika bezpośrednio, że niema przypadku, w którymby ułamek zwyczajny mógł być wyrażony, jako ułamek dziesiętny nieskończony nieperyjodyczny. Nawzajem, ułamek dziesiętny nieskończony nieperyjodyczny nie może być wyrażony w postaci ułamka zwyczajnego. Innymi słowy, liczba, którą wyraża ułamek dziesiętny nieskończony nieperyjodyczny, nie może być przedstawiona takim sposobem: rozłożyć jedność na pewne części równe i skupić pewną ilość takich części. Albo nieco inaczej, nie można, zapomocą rozłożenia jedności na części równe, wyznaczyć takiej części jedności, aby ta mieściła się dokładnie (bez reszty) w liczbie, przedstawionej przez ułamek dziesiętny nieskończony niepe-

¹⁾ Dlatego podane w § 21 us. 3 określenie ułamków dziesiętnych obejmuje również te liczby.

²⁾ Dowodzimy bowiem w algebrze, że wtedy taki pierwiastek nie jest ułamkiem właściwym, a więc w liczbie dziesiętnej, którą wyliczać możemy, przedstawiającej pierwiastek, część jej, pozostająca po oddzieleniu części całkowitej, nie może być ani ułamkiem dziesiętnym skończonym, ani ułamkiem dziesiętnym peryjodycznym; jest ona przeto ułamkiem dziesiętnym nieskończonym nieperyjodycznym. — I t. d.

O uwzględnianiu w rachunkach ułamków dziesiętnych nieskończonych nieperyjodycznych zob. *Teoryją przybliżeń liczebnych* (t. III, s. III «Bibl.-mat.-fiz.»).

ryjodyczny. Zwykliśmy w takim przypadku mówić, że dla takiej liczby i dla jedności «niema wspólnej miary», czyli, że ta liczba jest «niespółmierną z jednością»; taką liczbę nazywamy «liczbą niewymierną». — Dlatego ułamki dziesiętne nieskończone nieperyjodyczne, jako liczby niewymierne, nie należą już do liczb, z którymi mamy do czynienia w arytmetyce, chociaż i je, według przyjętego zwyczaju, nazywamy «ułamkami» dziesiętnymi.

(Zadania arytmetyczne. § 27.)

ROZDZIAŁ IX.

STOSUNKI. PROPORCYJE.

§ 27. STOSUNKI.

1. *Stosunkiem nazywamy wyrażenie liczby oderwanej zapomocą dwu liczb, albo obu oderwanych, albotóż obu mianowanych jednorodnych, z których pierwszą należałoby podzielić przez drugą, jeżelibyśmy chcieli owę liczbę wyznaczyć.*

Gdy więc np. mówimy: stosunek 12-u do 3-ch, lub: stosunek 12-u metrów do 3-ch metrów, to mamy tu na myśli tę liczbę (oderwaną), która wypadnie, gdy odpowiednio $12 : 3$, lub $12 \text{ m.} : 3 \text{ m.}$, lecz tej liczby (choćbyśmy ją wiedzieli) wyraźnie nie wypowiadamy, a w rachunkach niekiedy nie wyznaczamy, zadowolając się tym, że, gdyby nam o to szło, to moglibyśmy ją wyznaczyć.

Gdybyśmy tę liczbę wyznaczyli *), to: a) ona wskazywałaby, ile razy w pierwszej z liczb, wchodzących do stosunku, mieści się liczba druga; czyli b) ona byłaby liczbą, otrzymaną z wymierzenia pierwszej z tych liczb liczbą drugą, przyjętą za jednostkę; albo c) przez owę liczbę mnożąc drugą z liczb danych, otrzymalibyśmy pierwszą z nich ¹⁾.

2. Możemy mieć np. stosunek 3-ch sążni do 2-u łokci, albo np. stosunek 3 sążni do 2-u łokci + 12-u cali; otrzymamy liczby, wyrażone przez te stosunki, gdy odpowiednio 3 s. : 2 ł., lub 3 s. : (2 ł. + 12 c.). Takie jednak dzielenia sprowadzamy (§ 7, us. 7; § 11, us. 6) do dzielenia dwu liczb mianowanych prostych, wyrażonych przy pomocy tej samej jednostki. Dlatego w czasie wykonywania jakiegokolwiek ra-

*) Por. § 7, us. 6 — 8; § 16, us. 1 b.; § 17, us. 5; § 20 us. 9; § 1, us. 3.

1) Powszechnie przyjmują ową mogącą być wyznaczoną liczbę za określenie stosunku, korzystając z jednego z przytoczonych powyżej trzech odcieni w jej znaczeniu [np. a). Baltzer, *Die Elemente der Mathematik* (1868); b). Bertrand, *Traité d'arithmétique* (1867); b. i c). Serret, l. c.] — Określenie tu wprowadzone nie potrzebuje, zdaje się, szczegółowszego uzasadnienia; może jednak nie będzie zbyt przydatnym zaznaczenie, że np. w geometrii elementarnej dowodzimy naprzód twierdzenia, że stosunek okręgu koła do jego średnicy jest stały, a później dopiero zajmujemy się wyznaczeniem liczby, wyrażonej przez ten stosunek; podobnie np. mówimy, że stosunek obwodów dwu wielokątów podobnych jest równy stosunkowi ich boków odpowiednich, choć liczby, wyrażonej przez te stosunki, nie wyznaczamy.

chunku zastępujemy takie stosunki przez stosunki dwu liczb mianowanych prostych, wyrażonych przy pomocy téj saméj jednostki. Możemy więc np. pierwszy z powyższych stosunków zastąpić przez stosunki 9 łokci do 2 łokci, albo 3 sążni do $\frac{2}{3}$ sążnia, a drugi stosunek przez stosunki 216 cali do 60 cali, albo 9 łokci do 2,5 łokcia, albo 3 sążni do $\frac{5}{6}$ sążnia.

3. Z powodu, że, aby wyznaczyć liczbę, wyrażoną przez jakikolwiek stosunek, należałoby pierwszą z liczb wchodzących do tego stosunku podzielić przez drugą, oznaczamy stosunek w ten sam sposób, co dzielenie dwu liczb przez siebie. A więc np. stosunek 12-u do 3-ch oznaczmy, pisząc albo 12:3, albo (§ 17, us. 5) także $\frac{12}{3}$. Tak samo należałoby oznaczyć stosunek np. 12-u metrów do 3-ch metrów. Z uwagi jednak, że nam tu idzie tylko o liczbę oderwaną, mającą być wypadkiem dzielenia, która jest niezależną od tego, czy dzielnia i dzielnik są wyrażone przy pomocy pewnej (téj saméj w obu liczbach, us. 2) jednostki, czy przy pomocy innéj jednostki, czytéż obie te liczby są oderwane, w piśmiennym przedstawianiu stosunku nie zaznaczamy miana owéj jednostki. Dlatego, choć mówimy: stosunek 12-u metrów do 3-ch metrów, to jednak napiszemy 12:3, albo $\frac{12}{3}$ a w dalszym rachunku postępujemy z tymi liczbami tak, jakgdyby one były oderwane.

Pierwszą z liczb, wchodzących do stosunku, nazywamy poprzednikiem, drugą z nich następnikiem, a liczbę, którą stosunek przedstawia, nazywamy wykładnikiem stosunku. Tak np. w stosunku

$$12 : 3, \text{ czyli } \frac{12}{3}$$

liczba 12 jest poprzednikiem, liczba 3 następnikiem, a liczba 4, którą wyraża ten stosunek, jest wykładnikiem stosunku.

Poprzednik i następnik stosunku nazywają się wyrazami stosunku.

4. Gdy mamy dane dwie liczby, np. 10 i 14, to między nimi istnieć może albo stosunek 10:14, albo stosunek 14:10. Wykładniki tych stosunków, t. j. liczby $\frac{5}{7}$ i $\frac{7}{5}$, są każda odwrotnością drugiéj (§ 19, us. 10), czyli: z dwu stosunków, które między dwiema liczbami istnieć mogą, jeden jest odwrotnym względem drugiego. Oczywiście, że iloczyn liczb, które one wyrażają, jest jednością.

5. Ponieważ, według określenia stosunku, poprzednik odpowia-

da w dzieleniu dzielnej, następnik dzielnikowi, a wykładnik stosunku ilorazowi, przeto

poprzednik : następnik = wykładnikowi stosunku.

A z tego, według określenia dzielenia (§ 7, us. 3; § 20, us. 1), wypada, że

poprzednik = następnikowi \times wykładnik stosunku,
skąd nawzajem (§ 7, us. 5)

następnik = poprzednikowi : wykładnik stosunku.

6. Z tego, że poprzednik odpowiada dzielnej, następnik dzielnikowi, a wykładnik stosunku ilorazowi, wypada jeszcze (§ 7, us. 15; § 17, us. 7; § 20, us. 6, 7):

a. *Jeżeli poprzednik stosunku pomnożymy lub podzielimy przez pewną liczbę, to wskutek tego wykładnik stosunku zostanie przez tę liczbę odpowiednio pomnożony lub podzielony.*

b. *Jeżeli następnik stosunku pomnożymy lub podzielimy przez pewną liczbę, to wskutek tego wykładnik stosunku zostanie przez tę liczbę odpowiednio podzielony lub pomnożony.*

c. *Jeżeli oba wyrazy stosunku albo jednocześnie pomnożymy, albo jednocześnie podzielimy przez pewną tę samą liczbę, to wykładnik stosunku się nie zmieni.*

7. Gdy mamy stosunek dwu liczb, to nam idzie (us. 1) o liczbę (oderwaną), którą ten stosunek wyraża, t. j. o wykładnik stosunku. Wskutek tego ze stosunków, mających ten sam wykładnik, jako wyrażających tę samą liczbę, każdy może być wzięty zamiast innego. Wszystko więc jest jedno, czy pewną liczbę wyrażamy zapomocą stosunku 4 : 8, czy 7 : 14 czyteliż 0,5 : 1, gdyż te stosunki, jako mające ten sam wykładnik ($\frac{1}{2}$), przedstawiają tę samą liczbę; one więc wszystkie są jednoznaczne. Dlatego stosunki, mające ten sam wykładnik, nazywamy stosunkami równymi.

8. Możemy więc ostatnią z własności, wypowiedzianych w ustępie 6-ym, tak wysłowić: stosunek, otrzymany z danego, czyto wskutek jednoczesnego pomnożenia obu jego wyrazów przez tę samą liczbę, czytelż wskutek jednoczesnego podzielenia obu jego wyrazów przez tę samą liczbę, jest równy danemu stosunkowi i może go zastąpić. Gdy więc mamy np. stosunek 0,5 : 1, to możemy go zastąpić stosunkiem liczb całkowitych, mnożąc oba jego wyrazy przez 10, t. j. stosunkiem 5 : 10, a dzieląc tu oba wyrazy przez 5, otrzymany stosunek zastąpimy prostszym 1 : 2. Podobnie możemy stosunek $\frac{7}{6} : \frac{3}{8}$, mnożąc oba jego wyrazy przez 24, zastąpić stosunkiem liczb całkowitych 28 : 9.

9. Jeżeli mamy dwa lub więcej stosunków równych, np.

$$4 : 8; \quad 7 : 14, \quad 0,5 : 1; \quad 5 : 10,$$

a więc mających ten sam wykładnik $\left(\frac{1}{2}\right)$, to (us. 5)

$$4 = 8 \times \frac{1}{2}, \quad 7 = 14 \times \frac{1}{2}, \quad 0,5 = 1 \times \frac{1}{2}, \quad 5 = 10 \times \frac{1}{2}.$$

Wskutek tego, suma $4 + 7 + 0,5 + 5$ przedstawia też samą liczbę, co suma $8 \times \frac{1}{2} + 14 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{1}{2}$, a więc

$$4 + 7 + 0,5 + 5 = 8 \times \frac{1}{2} + 14 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{1}{2},$$

albo (§ 6, us. 14; § 19, us. 6)

$$4 + 7 + 0,5 + 5 = (8 + 14 + 1 + 10) \times \frac{1}{2}$$

a więc stosunek liczby $4 + 7 + 0,5 + 5$ do liczby $8 + 14 + 1 + 10$ wyraża liczbę $\frac{1}{2}$ (us. 1, 7), t. j. tę samą, co stosunki dane, jest im równy, tak iż możemy napisać

$$(4 + 7 + 0,5 + 5) : (8 + 14 + 1 + 10) = 4 : 8 = 7 : 14 = 0,5 : 1 = 5 : 10.$$

Możemy więc powiedzieć: *gdy mamy dwa lub więcej stosunków równych, to stosunek sumy ich poprzedników do sumy ich następników jest równy każdemu z danych stosunków.*

Podobnie, gdy mamy dane dwa stosunki równe, np.

$$7 : 14, \quad 5 : 10,$$

to

$$7 = 14 \times \frac{1}{2}, \quad 5 = 10 \times \frac{1}{2},$$

różnice $7 - 5$ i $14 \times \frac{1}{2} - 10 \times \frac{1}{2} = (14 - 10) \times \frac{1}{2}$ przedstawiają też samą liczbę, a stosunek liczby $7 - 5$ do liczby $14 - 10$ wyraża też liczbę, co stosunki dane, jest im równy, a więc

$$(7 - 5) : (14 - 10) = 7 : 14 = 5 : 10,$$

t. j. *gdy mamy dwa równe stosunki, to stosunek różnicy ich poprzedników do różnicy ich następników jest równy każdemu z danych stosunków* ¹⁾.

§ 28. PROPORCYJE.

1. Gdy wyraźnie zaznaczymy, że pewne dwa stosunki są równe, to mówimy, że mamy proporcję. A więc

Proporcja jestto zaznaczona równość dwu stosunków.

¹⁾ Por. § 17, us. 11.

Tak np. stosunki 5:10 i 7:14 są równe; gdy to zaznaczymy, t. j. gdy napiszemy ¹⁾

$$5:10 = 7:14,$$

to tę równość dwu stosunków nazywamy proporcją ²⁾.

W proporcji mamy (§ 27, us. 3) cztery wyrazy; poprzednik pierwszego stosunku i poprzednik drugiego tworzą dwa poprzedniki proporcji; następnik pierwszego i następnik drugiego są dwoma następnikami proporcji; poprzednik pierwszego stosunku i następnik drugiego, jako znajdujące się z kraju lewego i z kraju prawego, nazywają się wyrazami skrajnymi proporcji; następnik pierwszego i poprzednik drugiego stosunku nazywają się wyrazami średnimi proporcji. Ponieważ stosunki są równe, więc (§ 27, us. 7) liczba, która jest wykładnikiem jednego stosunku, jest także wykładnikiem drugiego; nazywamy ją wykładnikiem stosunków proporcji.

2. Jeżeli mamy cztery liczby i wiemy, że stosunek dwu z nich jest równy stosunkowi dwu pozostałych, to mówimy, że one tworzą proporcję, albo że one są proporcjonalne, wystawiając sobie przytym, że rozważamy je tak uporządkowane, iżby stosunek pierwszjej do drugiej z nich był równy stosunkowi trzeciej do czwartej. Tak np. jeżeli, mając liczby: 5, 10, 14, 7, powiemy o nich, że to są cztery liczby proporcjonalne, to jednocześnie wystawiamy sobie, że one następują po sobie np. w porządku 5, 10, 7, 14.

3. Proporcje np.

$$5:10 = 7:14, \quad 7:5 = 14:10$$

czytamy: «stosunek 5-u do 10-u równa się stosunkowi 7-u do 14-u», «stosunek 7-u do 5-u równa się stosunkowi 14-u do 10-u».

W drugiej proporcji wykładnik stosunków jest większy od jedności, gdyż w tych stosunkach poprzednik jest większy od swego następ-

1) Używają także, jako znaku wiążącego dwa stosunki, dwu dwukropków; więc:

$$5:10::7:14.$$

2) Niektórzy taką proporcję nazywają «proporcją geometryczną», a stosunki do niej wchodzące «stosunkami geometrycznymi», rozważając t. z. stosunki i proporcje «arytmetyczne», t. j. różnice dwu liczb i równość zachodzącą między dwiema takimi różnicami. Ściśle rzecz biorąc, rozwiązywanie zadań arytmetycznych (i, wogóle, żadnych zadań) do takich «proporcji» nie doprowadza. Dlatego cała ich teoria (dość kłopotliwa przy starannym wykładzie ze względu na potrzebę unikania różnic ujemnych), jako do niczego nie prowadząca, powinna być z tych programów szkolnych, w których się jeszcze tuła, stanowczo usunięta. [Powstała ona prawdopodobnie pod wpływem chęci wytworzenia już w nauce o proporcjach czegoś, co odpowiadało dwojakim postępom: arytmetycznym i geometrycznym, których dawniej, przed należytym uwzględnieniem w wychowaniu średnim ogólnym systematycznego wykładu algebry elementarnej, uczono przy arytmetyce.]

[Badaniu stosunków i proporcji, więcj szczegółowemu, niż teraz się je przeprowadza, poświęca Euklides w *Elementach* księgę V (zob. *Euklidesa początków geometrii ciągł osmioro, to jest sześć pierwszych, jedenasta i dwunasta*, tłumaczenie Józefa Czecha, Wilno, 1-sze wyd. r. 1807, 2-ie 1817), oraz częściowo ks. VII i IX].

nika. Możemy więc tu powiedzieć, że liczba, której wyrażeniem jest każdy z tych stosunków, przedstawia zarazem, ile razy jego poprzednik jest większy od następnika (§ 7, us. 8; § 16, us. 2). Dlatego drugą z danych proporcji możemy przeczytać: «tyle razy 7 jest większe od 5-u, ile razy 14 jest większe od 10-u».

Pierwszj zaś z danych proporcji nie możemy czytać: «tyle razy 5 jest mniejsze od 10-u, ile razy 7 jest mniejsze od 14-u»; wtedy bowiem mielibyśmy na myśli liczbę 2, gdy tymczasem wykładnikiem stosunków tój proporcji jest liczba $\frac{1}{2}$ i jąto właśnie wyrażają oba stosunki proporcji; ją więc przy czytaniu mieć mamy na uwadze ¹⁾.

4. Widzieliśmy (§ 27, us. 6 c.), że wskutek jednoczesnego pomnożenia poprzednika i następnika stosunku przez tę samą liczbę wykładnik jego nie zmienia się. Gdy więc mamy np. proporcją

$$7 : 5 = 14 : 10,$$

to jeżeli oba wyrazy pierwszego stosunku pomnożymy przez następnik drugiego, a oba wyrazy drugiego stosunku pomnożymy przez następnik pierwszego, to te stosunki:

$$(7 \times 10) : (5 \times 10) \quad \text{i} \quad (14 \times 5) : (10 \times 5)$$

mają też same wykładniki, co stosunki danj proporcji, t. j. wykładniki wypisanych stosunków są tąż samą liczbą. Następniki zaś tych stosunków, 5×10 i 10×5 , są iloczynami tych samych czynników, wypisanych tylko w innym porządku; że zaś iloczyn nie zależy od porządku czynników (§ 6, us. 9; § 19, us. 5), przeto następniki tych stosunków są tą samą liczbą. Ponieważ następniki tych dwu stosunków są tą samą liczbą, ich wykładniki są tą samą liczbą, a poprzednik stosunku równa się następnikowi pomnożonemu przez wykładnik (§ 27, us. 5), przeto i poprzedniki tych stosunków, t. j. iloczyny

$$7 \times 10 \quad \text{i} \quad 14 \times 5,$$

są tą samą liczbą; a więc

$$7 \times 10 = 14 \times 5.$$

Czynniki pierwszego z wypisanych tu równych sobie iloczynów, 7 i 10, są wyrazami skrajnymi danj proporcji, a czynniki drugiego iloczynu, 14 i 5, są jej wyrazami średnimi; a więc:

Iloczyn wyrazów skrajnych proporcji jest równy iloczynowi jej wyrazów średnich.

¹⁾ Dodać jeszcze można, że, aby się dowiedzieć, ile razy 5 mniejsze od 10, należałoby $10 : 5$, gdy tymczasem mamy tu $5 : 10$.

[Pod wpływem właśnie poczucia tego, że pierwszj z danych proporcji nie można czytać ani: «tyle razy 5 jest mniejsze od 10-u, ile razy 7 mniejsze od 14-u», ani: «tyle razy 5 jest większe od 10-u, ile razy 7 jest większe od 14-u» powstało rozpowszechnione, że tak powiem, nijakie wyrażanie się: «tak się ma 5 do 10-u, jak 7 do 14-u», które nicra żadnej racy bytu.]

Ta własność proporcji nazywa się główną własnością proporcji, gdyż przy pomocy tej własności i odwrotnej własności iloczynów równych (us. 5) można wyprowadzić wiele innych własności proporcji.

5. Widzieliśmy, że proporcja prowadzi za sobą równość dwu iloczynów, z których w każdym są dwa czynniki. Odwrotnie:

Z dwu równych dwuczynnikowych iloczynów można utworzyć proporcję, biorąc czynniki jednego iloczynu za wyrazy skrajne, a czynniki drugiego iloczynu za wyrazy średnie. Jakoż, mając np.

$$3 \times 8 = 4 \times 6,$$

zważmy naprzód, że gdy oba te iloczyny, przedstawiające tę samą liczbę, podzielimy przez pewną tę samą liczbę, mianowicie przez iloczyn jednego czynnika pierwszego iloczynu i jednego czynnika drugiego iloczynu, np. przez liczbę 3×6 , to jako ilorazy otrzymamy również tę samą liczbę. Zatem

$$(3 \times 8) : (3 \times 6) = (4 \times 6) : (3 \times 6).$$

Możemy tu wyrażenia $(3 \times 8) : (3 \times 6)$ i $(4 \times 6) : (3 \times 6)$ uważać jako stosunki, które dlatego są połączone znakiem równości, że wyrażają tę samą liczbę (jednakowy iloraz tych dzieleń), t. j. mają ten sam wykładnik. Wykładnik zaś ich się nie zmieni, gdy oba wyrazy pierwszego stosunku podzielimy przez 3, a oba wyrazy drugiego przez 6 (§ 27, us. 6 c.). Stosunki zatem $8:6$ i $4:3$ mają także ten sam wykładnik, są przeto równe, t. j.

$$8 : 6 = 4 : 3,$$

a w tej proporcji wyrazy skrajne, 8 i 3, są czynnikami jednego z danych iloczynów, a wyrazy średnie, 6 i 4, są czynnikami drugiego.

Gdybyśmy mieli np. $8 \times 7 \times 9 = 6 \times 3 \times 2 \times 14$, a chcieli utworzyć proporcję, to *) moglibyśmy np. iloczyn 7×9 uważać jako przedstawienie pewnej liczby, i podobnie np. iloczyny 6×3 i 2×14 , tak iż, przedstawiając daną równość jako

$$8 \times (7 \times 9) = (6 \times 3) \times (2 \times 14),$$

z tych dwu równych dwuczynnikowych iloczynów możemy utworzyć proporcję

$$8 : (6 \times 3) = (2 \times 14) : (7 \times 9).$$

Podobnie np. z równości $22 = 2 \times 11$ utworzymy $22 : 2 = 11 : 1$.

6. Jeżeli w proporcji jeden wyraz jest niewiadomy, to, opierając się na głównej własności, łatwo możemy go wyznaczyć. Np. jeżeli mamy proporcję

$$8 : x = 4 : 3,$$

*) T. j. na mocy tego, że w iloczynie kilku czynników możemy dowolnie wybrane czynniki zastępować przez ich iloczyny (§ 6, us. 10; § 19, us. 6).

gdzie x oznacza liczbę niewiadomą, to według głównej własności

$$x \times 4 = 8 \times 3;$$

jeżeli zaś liczba x pomnożona przez 4, czyli, jeżeli 4 liczby $x = 8 \times 3$, to liczba x jest cztery razy mniejszą, (§ 17, us. 5)

$$x = \frac{8 \times 3}{4} = 6,$$

t. j. niewiadomy wyraz średni proporcji równa się iloczynowi skrajnych, podzielonemu przez drugi średni. Podobnie

$$8 : 6 = 4 : x; \quad x \times 8 = 6 \times 4; \quad x = \frac{6 \times 4}{8},$$

t. j. niewiadomy wyraz skrajny proporcji równa się iloczynowi średnich, podzielonemu przez drugi skrajny.

7. Z tego wypada, że wogóle trzy wyrazy proporcji, zajmujące oznaczone w niej miejsca, wyznaczają czwarty jęj wyraz, czyli (us. 2), że do trzech liczb, zajmujących w proporcji oznaczone miejsca można znaleźć czwartą liczbę proporcjonalną.

Gdy mamy dane trzy liczby, a nie wiemy, jakie one miejsca w proporcji zająć mogą, to zadanie nie jest jeszcze dostatecznie oznaczone, gdyż mogą być trzy odpowiedzi. Np. gdy mamy liczby 8, 4, 2, to czwarta liczba, która by wraz z tymi trzema danymi tworzyła proporcję, może być, zależnie od tego, jakie miejsca te trzy liczby dane zajmują w proporcji, albo $\frac{8 \times 4}{2} = 16$, albo $\frac{8 \times 2}{4} = 4$, albotóż $\frac{4 \times 2}{8} = 1$, i rzeczywiście odpowiednio albo np. $2 : 4 = 8 : 16$, albo np. $4 : 2 = 8 : 4$, albotóż np. $8 : 4 = 2 : 1$.

8. Gdy mamy proporcję, np.

$$8 : 6 = 4 : 3,$$

to, według głównej własności,

$$8 \times 3 = 6 \times 4.$$

Z tych zaś dwu równych dwuczynnikowych iloczynów (us. 5) możemy utworzyć osiem proporcji. Gdyż możemy czynniki iloczynu 8×3 wziąć albo za wyrazy skrajne, albo za wyrazy średnie, a wtedy czynniki iloczynu 6×4 będą odpowiednio albo wyrazami średnimi, albo wyrazami skrajnymi. W każdym zaś z tych dwu przypadków możemy w proporcji z czynników iloczynu 8×3 albo naprzód napisać czynnik 8, albo czynnik 3. A w każdym z tych czterech przypadków możemy z czynników iloczynu 6×4 naprzód napisać albo czynnik 8, albo czynnik 4. Będziemy więc mieli osiem proporcji:

$$\begin{array}{cccc} 8 : 6 = 4 : 3; & 3 : 6 = 4 : 8; & 8 : 4 = 6 : 3; & 3 : 4 = 6 : 8; \\ 6 : 8 = 3 : 4; & 4 : 8 = 3 : 6; & 6 : 3 = 8 : 4; & 4 : 3 = 8 : 6; \end{array}$$

Porównyując te proporcje z jedną którąkolwiek z nich, np. z pierwszą (która tu jest taka, jak dana), widzimy, że inne powstają z niej

albo wskutek przestawienia wyrazów średnich między sobą, albo wskutek przestawienia średnich ze skrajnymi (czyli odwrócenia obu stosunków), albo wskutek przestawienia skrajnych między sobą, albowtż wskutek jednoczesnego wykonania dwu z powyższych zmian.

Okażemy, że kolejno stosując do jakiegokolwiek proporcji pierwsze dwa z powyższych przestawień wyrazów, t. j. stosując kolejno to, iż

a. *W proporcji można przestawić wyrazy średnie.*

b. *W proporcji można odwrócić oba stosunki.*

wyprowadzimy *) z niej wszystkie powyższe osiem proporcji. Jakoż, niech będzie:

$8 : 6 = 4 : 3$; z niej według a. $8 : 4 = 6 : 3$; z niej według b.

$4 : 8 = 3 : 6$; „ „ $4 : 3 = 8 : 6$; „ „

$3 : 4 = 6 : 8$; „ „ $3 : 6 = 4 : 8$; „ „

$6 : 3 = 8 : 4$; „ „ $6 : 8 = 3 : 4$.

Do wszystkich tych proporcji wchodzi też same liczby; z każdej z nich możemy wyprowadzić wszystkie pozostałe; dlatego uważamy je jako jednoznaczne.

9. Gdy mamy cztery liczby, to rozmaicie je ustawiając, możemy każdą z nich postawić na miejscu pierwszym. Obok każdej z tych 4-ch liczb, zajmującej miejsce pierwsze, możemy umieścić każdą z 3-ch każdorazowo pozostałych liczb; otrzymamy w ten sposób 12 par liczb różniących się albo liczbami albo porządkiem ich następstwa. Obok każdego z tych 12-u par możemy postawić jedną z 2-u pozostałych liczb, a do każdej z tych 24-ch trójek liczb dołączyć czwartą pozostałą. Widzimy więc, że cztery dane liczby możemy 24-ema sposobami ustawić. W ośmiu tylko z tych 24 ustawień dane cztery liczby tworzyć mogą proporcję (us. 2). (Por. us. 7).

10. Wiemy (§ 27, us. 6 c.), że gdy oba wyrazy stosunku pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę, to wykładnik stosunku się nie zmieni. Gdy więc mamy np. proporcję

$$8 : 6 = 4 : 3,$$

to możemy powiedzieć **), że możemy przez tę samą liczbę jednocześnie pomnożyć lub jednocześnie podzielić albo oba wyrazy pierwszego stosunku, albo oba wyrazy drugiego stosunku proporcji.

Jeżeli przestawimy w tej proporcji wyrazy średnie i do proporcji tak powstałej, t. j. do proporcji $8 : 4 = 6 : 3$, zastosujemy powyższą własność, to mieć będziemy np.

*) Rozumię się, że to samoby było, gdybyśmy stosowali kolejno drugie i trzecie z wyluczonych przestawień wyrazów proporcji.

***) Można tu powtórzyć to, co przy podobnej sposobności jest powiedziane w us. 4-ym i 5-ym.

$$(8 \times 5) : (4 \times 5) = 6 : 3; \quad (8 : 5) : (4 : 5) = 6 : 3;$$

$$8 : 4 = (6 \times 5) : (3 \times 5); \quad 8 : 4 = (6 : 5) : (3 : 5).$$

Gdy znowu w tych proporcjach przestawimy wyrazy średnie i proporcje

$$(8 \times 5) : 6 = (4 \times 5) : 3; \quad (8 : 5) : 6 = (4 : 5) : 3;$$

$$8 : (6 \times 5) = 4 : (3 \times 5); \quad 8 : (6 : 5) = 4 : (3 : 5)$$

porównamy z pierwotnie wypisaną proporcją, t. j. z proporcją $8 : 6 = 4 : 3$, to dostrzeżemy, że możemy przez tę samą liczbę jednocześnie pomnożyć lub jednocześnie podzielić albo oba poprzedniki albo oba następniki proporcji *).

Zestawiając z sobą te dwie własności, t. j. zaznaczając dwa wyrazy proporcji, które możemy albo jednocześnie mnożyć albo jednocześnie dzielić przez tę samą liczbę, znajdziemy, iż ogólnie:

Możemy przez tę samą liczbę jednocześnie pomnożyć lub jednocześnie podzielić jeden z wyrazów skrajnych i jeden z wyrazów średnich proporcji.

Z tych własności korzystamy np. wtedy, kiedy chcemy ułamek wyrazy proporcji zastąpić przez całkowite, lub liczby całkowite, wchodzące do proporcji, zastąpić, jeżeli można, przez mniejsze. Np. jeżeli mamy proporcję $0,04 : 0,006 = 5 : x$, to, mnożąc oba wyrazy pierwszego stosunku przez 1000, mieć będziemy $40 : 6 = 5 : x$, a tu, dzieląc oba poprzedniki przez 5, dojdziemy do proporcji $8 : 6 = 1 : x$; dzieląc jeszcze oba wyrazy pierwszego stosunku tej proporcji przez 3, mamy $4 : 3 = 1 : x$. (Tak zwykle postępujemy, gdy mamy wyznaczyć niewiadomy wyraz proporcji, w której można skutecznie podobne uproszczenia.) Ostatniej proporcji już uprościć nie można; wyznaczymy więc z niej $x = 0,75$. Te uproszczenia proporcji są też same, które skutecznielibyśmy w wyrażeniu $x = \frac{0,006 \times 5}{0,04}$, gdybyśmy nie od razu wykonywali wskazane tu działania, lecz uprzednio pierwszy z czynników licznika i mianownik pomnożyli przez 100, następnie drugi czynnik licznika i mianownik podzielili przez 5 i na koniec pierwszy czynnik licznika i mianownik podzielili przez 2. (Por. § 20, us. 5; § 19, us. 4.)

11. Oczywiście, iż jeżeli jeden stosunek jednej proporcji jest taki sam, jak jeden ze stosunków drugiej proporcji, to z pozostałych stosunków tych proporcji można utworzyć proporcję, gdyż one mają tę samą liczbę jako wykładnik. Tak np. jeżeli mamy dane $2 : 5 = 10 : 25$ i $6 : 15 = 2 : 5$, to także $10 : 25 = 6 : 15$.

*) Wskutek pomnożenia tych wyrazów wykładnik stosunku będzie odpowiednio albo pomnożony albo podzielony, a skutek podzielenia odpowiednio albo podzielony albo pomnożony przez tę samą liczbę (§ 27, us. 5).

Jeżeli dwie proporcje mają odpowiednie poprzedniki równe, np.

$$2 : 10 = 5 : 25 \quad \text{i} \quad 2 : 6 = 5 : 15,$$

to, przestawiając wyrazy średnie, otrzymamy

$$2 : 5 = 10 : 25 \quad \text{i} \quad 2 : 5 = 6 : 15, \text{ skąd}$$

$$10 : 25 = 6 : 15, \text{ albo } 10 : 6 = 25 : 15.$$

Podobnie, gdyby następniki były równe. A więc:

Jeżeli dwie proporcje mają też same odpowiednie poprzedniki, to ich następniki tworzą proporcję; jeżeli dwie proporcje mają też same odpowiednie następniki, to ich poprzedniki tworzą proporcję.

12. Gdy do dwu równych stosunków, tworzących proporcję, np.,

$$8 : 4 = 6 : 3,$$

zastosujemy to, cośmy wyprowadzili w us. 9-ym § 27-go, to

$$(8 + 6) : (4 + 3) = 8 : 4 \quad (8 - 6) : (4 - 3) = 8 : 4 \\ = 6 : 3; \quad = 6 : 3, \text{ t. j.}$$

Stosunek sumy albo różnicy poprzedników proporcji odpowiednio do sumy albo różnicy jej następników jest równy stosunkowi któregośkolwiek poprzednika proporcji do swego następnika.

Jeżeli w danej proporcji przestawimy wyrazy średnie i do proporcji tak powstałej, t. j. do proporcji $8 : 6 = 4 : 3$, zastosujemy powyższą własność, to mieć będziemy

$$(8 + 4) : (6 + 3) = 8 : 6 \quad (8 - 4) : (6 - 3) = 8 : 6 \\ = 4 : 3; \quad = 4 : 3.$$

A gdy te proporcje odniesiemy do pierwotnie danej proporcji, t. j. do proporcji $8 : 6 = 4 : 3$, to dostrzeżemy, że

Stosunek sumy albo różnicy wyrazów pierwszego stosunku proporcji odpowiednio do sumy albo różnicy wyrazów drugiego jej stosunku jest równy stosunkowi odpowiednich poprzedników proporcji, lub stosunkowi odpowiednich jej następników.

13. Z tych własności, przy pomocy pierwszej z własności ustępu 11-go, wypada, że, gdy mamy proporcję, np. $8 : 4 = 6 : 3$, to

$$(8 + 6) : (4 + 3) = (8 - 6) : (4 - 3) \quad \text{i} \quad (8 + 4) : (6 + 3) = (8 - 4) : (6 - 3),$$

$$\text{albo, po przestawieniu wyrazów średnich}$$

$$(8 + 6) : (8 - 6) = (4 + 3) : (4 - 3) \quad \text{i} \quad (8 + 4) : (8 - 4) = (6 + 3) : (6 - 3),$$

t. j. *stosunek sumy poprzedników proporcji do ich różnicy jest równy stosunkowi sumy jej następników do ich różnicy; stosunek sumy wyrazów pierwszego stosunku proporcji do ich różnicy jest równy stosunkowi sumy wyrazów jej drugiego stosunku do ich różnicy.*

14. Gdy dwie proporcje mają ten sam wykładnik, np.

$$18 : 9 = 30 : 15 \quad \text{i} \quad 8 : 4 = 6 : 3,$$

to wszystkie cztery stosunki, do tych proporcji wchodzące, jako wyrażające tę samą liczbę, są równe sobie. A zatem (us. 12, lub § 27, us. 9)

gdy $18 : 9 = 8 : 4$, to $(18 + 8) : (9 + 4) = 8 : 4$ i
 $(18 - 8) : (9 - 4) = 8 : 4$;
 gdy $30 : 15 = 6 : 3$, to $(30 + 6) : (15 + 3) = 6 : 3$ i
 $(30 - 6) : (15 - 3) = 6 : 3$.

Że zaś $8 : 4 = 6 : 3$, przeto także

$$(18 + 8) : (9 + 4) = (30 + 6) : (15 + 3) \text{ i}$$

$$(18 - 8) : (9 - 4) = (30 - 6) : (15 - 3),$$

t. j. gdy odpowiednie wyrazy dwu proporcji, mających ten sam wykładnik, albo dodamy do siebie albo od siebie odejmiemy, to cztery tak otrzymane liczby tworzą proporcję (mającą również ten sam wykładnik, co poprzednie). Zwykle mówimy krócej: *dwie proporcje, mające ten sam wykładnik, można odpowiednimi wyrazami dodać do siebie albo je od siebie odjąć*. Również: *ilekolwiek proporcji, mających ten sam wykładnik, możemy odpowiednimi wyrazami dodać do siebie*.

15. Weźmy dwie jakiegokolwiek *) proporcje, np.

$$5 : 10 = 7 : 14 \text{ i } 8 : 6 = 4 : 3.$$

Według głównej własności,

$$5 \times 14 = 10 \times 7 \text{ i } 8 \times 3 = 6 \times 4.$$

Iloczyny 5×14 i 10×7 , jako równe, przedstawiają tę samą liczbę, iloczyny 8×3 i 6×4 również przedstawiają tę samą liczbę; a więc i iloczyny $5 \times 14 \times 8 \times 3$ i $10 \times 7 \times 6 \times 4$ przedstawiają tę samą liczbę, tak iż

$$3 \times 14 \times 8 \times 3 = 10 \times 7 \times 6 \times 4.$$

Ponieważ w iloczynie kilku czynników możemy dowolnie wybrane czynniki zastępować przez ich iloczyny (§ 6, us. 10; § 19, us. 6), przeto możemy napisać

$$(3 \times 8) \times (14 \times 3) = (10 \times 6) \times (7 \times 4)$$

Z tych zaś równych iloczynów dwuczynnikowych tworząc proporcję (us. 5)

$$(3 \times 8) : (10 \times 6) = (7 \times 4) : (14 \times 3)$$

i porównując ją z proporcjami danymi, widzimy, że gdy odpowiednie wyrazy dwu proporcji przez siebie pomnożymy, to 4 tak otrzymane liczby tworzą proporcję. Zwykle krócej mówimy: *możemy dwie proporcje odpowiednimi wyrazami pomnożyć przez siebie*. Wykładnik tej nowej proporcji jest $\frac{3 \times 8}{10 \times 6} = \frac{2}{5}$; liczba zaś ta jest iloczynem (§ 19, us.

3) liczb $\frac{3}{10}$ i $\frac{4}{3}$, t. j. wykładników dwu danych proporcji.

Gdybyśmy mieli trzecią proporcję, np. $11 : 12 = 22 : 24$, to moglibyśmy własność powyższą zastosować do tej proporcji i proporcji, otrzymanej już z pomnożenia przez siebie odpowiednimi wyrazami dwu danych proporcji.—Toż samo, gdyby było więcej proporcji. A więc:

*) T. j. mogące mieć różne wykładniki.

Dwie lub więcej proporcji można odpowiednimi wyrazami przez siebie pomnożyć. Wykładnik proporcji tak powstałej jest iloczynem wykładników proporcji danych.

16. Gdyby dane proporcje były tą samą jedną proporcją, to wtedy, według powyższego, liczby, będące jednakowymi potęgami (§ 6, us. 39) wyrazów proporcji, tworzą proporcją, czyli, jak się często mówi, *można wszystkie wyrazy proporcji podnieść do tej samej potęgi.*

17. Weźmy jeszcze dwie jakiegokolwiek proporcje, np.

$$5 : 10 = 7 : 14 \quad \text{i} \quad 8 : 6 = 4 : 3.$$

Według głównej własności,

$$5 \times 14 = 10 \times 7 \quad \text{i} \quad 8 \times 3 = 6 \times 4.$$

Gdy iloczyny 5×14 i 10×7 , przedstawiające tę samą liczbę, podzielimy odpowiednio przez iloczyny 8×3 i 6×4 , przedstawiające również tę samą liczbę, to ilorazy $(5 \times 14) : (8 \times 3)$ i $(10 \times 7) : (6 \times 4)$ przedstawiają również tę samą liczbę, co wyrazimy pisząc (§ 17, us. 5; § 27, us. 3)

$$\frac{5 \times 14}{8 \times 3} = \frac{10 \times 7}{6 \times 4}.$$

Pierwszą z tych liczb możemy napisać $\frac{5}{8} \times \frac{14}{3}$ (§ 19, us. 3), a drugą: $\frac{10}{6} \times \frac{7}{4}$; mamy więc

$$\frac{5}{8} \times \frac{14}{3} = \frac{10}{6} \times \frac{7}{4}.$$

Z tych zaś dwu równych dwuczynnikowych iloczynów tworząc proporcję

$$\frac{5}{8} : \frac{10}{6} = \frac{7}{4} : \frac{14}{3},$$

którą możemy także tak pisać:

$$(5 : 8) : (10 : 6) = (7 : 4) : (14 : 3),$$

i porównując ją z proporcjami danymi, widzimy, że gdy odpowiednie wyrazy dwu proporcji przez siebie podzielimy, to cztery tak otrzymane liczby tworzą proporcję. Zwykle krócej mówimy:

Można dwie proporcje odpowiednimi wyrazami przez siebie podzielić.

Wykładnik otrzymanej proporcji $\frac{3}{8}$ jest wypadkiem dzielenia $\frac{5}{8} : \frac{10}{6}$; lecz (§ 20, us. 4)

$$\frac{5}{8} : \frac{10}{6} = \frac{5 \times 6}{8 \times 10} = \frac{5 \times 6}{10 \times 8} = \frac{5}{10} : \frac{8}{6} = \frac{1}{2} : \frac{4}{3},$$

a więc wykładnik proporcji otrzymanej jest ilorazem wykładników danych proporcji.

18. Jeżeli w proporcji czyto oba wyrazy skrajne, czytóż oba wyrazy średnie są tą samą liczbą, np.

$$2 : 6 = 6 : 18, \quad 15 : 3 = 75 : 15,$$

to ta liczba nazywa się średnią geometryczną dwu pozostałych liczb; jest więc 6 średnią geometryczną liczb 2 i 18, a 15 średnią geometryczną liczb 3 i 75.

Proporcją, której wyrazy średnie są tą samą liczbą, nazywają proporcją ciągłą. Pierwsza więc z wypisanych dwu proporcji jest proporcją ciągłą.

Z tych proporcji, według głównej własności, mamy

$$6 \times 6 = 2 \times 18, \quad 15 \times 15 = 3 \times 75.$$

Jeżeli w iloczynie dwu czynników oba te czynniki są tą samą liczbą, to taki iloczyn nazywamy kwadratem liczby owej; jest więc 6×6 kwadratem liczby 6, a 15×15 kwadratem liczby 15. Takie iloczyny zwykle tak piszemy: liczbę piszemy raz i przy niej z prawej strony u góry piszemy mniejszą cyfrę 2. Zamiast więc 6×6 możemy napisać 6^2 , a zamiast 15×15 napisać 15^2 . To więc, cośmy powyżej napisali, możemy tak przedstawić:

$$6^2 = 2 \times 18, \quad 15^2 = 3 \times 75$$

i powiemy:

Kwadrat średniej geometrycznej dwu liczb jest równy iloczynowi tych liczb.

W algiebrze będzie mowa o wynajdywaniu średniej geometrycznej dwu jakichkolwiek liczb. W geometrii ma ona ważne zastosowania.

19. Jeżeli za określenie średniej geometrycznej dwu liczb przyjmiemy własność powyższą, t. j. przyjmiemy, że «średnia geometryczna dwu liczb jest to liczba, której kwadrat równa się iloczynowi dwu danych liczb», to takie określenie będziemy mogli uogólnić, a mianowicie powiedzieć: *liczbę, którą biorąc zamiast każdej z danych liczb, otrzymujemy ten sam iloczyn, co z pomnożenia liczb danych, nazywamy średnią geometryczną liczb danych*, co odpowiada określeniu średniej arytmetycznej dwu lub więcej liczb (§ 7, us. 25). Średnia więc geometryczna pewnych n liczb jest to liczba, której n -ta potęga równa się iloczynowi liczb danych. Np. średnia geometryczna czterech liczb: 6, 30, 200 i 360 jest 60, bo $60^4 = 6 \cdot 30 \cdot 200 \cdot 360$.

W algiebrze dowodzi się wogóle, że średnia geometryczna kilku liczb, z których nie wszystkie są sobie równe, jest mniejsza od ich średniej arytmetycznej.

20. W geometrii (zob. t. V seryi III «Bibl. mat. fiz.») występuje jeszcze średnia harmoniczna dwu liczb. Jako jej określenie możemy przyjąć albo własność: «stosunek różnicy większej z danych liczb i średniej harmonicznej do owej większej z danych liczb jest równy stosunkowi różnicy

średniej harmonicznej i mniejszej z danych liczb do tej ostatniej», albotóż własność: «podwójna odwrotność średniej harmonicznej dwu danych liczb jest sumą odwrotności każdej z danych liczb», t. j. jeżeli dane liczby są a i b i $a > b$, a średnia ich harmoniczna jest h , to

$$\frac{a-h}{a} = \frac{h-b}{b}, \text{ albo } \frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Przyjmując jedną którąkolwiek z tych własności za określenie średniej harmonicznej dwu liczb, łatwo z niej można wyprowadzić drugą. [Na mocy czyto jednej, czytóż drugiejj, $h = \frac{2ab}{a+b}$.]

W algebrze dowodzi się, że średnia harmoniczna dwu liczb nierównych jest mniejsza od ich średniej geometrycznej.

Np. dla liczb 10 i 40 średnia arytmetyczna jest 25, średnia geometryczna 20, średnia harmoniczna 16; dla liczb 4 i 16 średnia arytmetyczna jest 10, średnia geometryczna 8, średnia harmoniczna 6,4; dla liczb $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{8}$ średnia arytmetyczna jest $\frac{5}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$, średnia geometryczna $\frac{1}{4}$, średnia harmoniczna $\frac{1}{5}$.

(Zadania arytmetyczne. § 28.)

ROZDZIAŁ X.

REGUŁA TRZECH.

§ 29. O WIELKOŚCIACH PROPORCYJONALNYCH.

1. Wszystko ¹⁾, co może ulegać powiększeniu lub zmniejszeniu, nazywamy wielkością.

Mierzyć wielkość jakąś jestto poszukiwać, ile razy w niej się mieści pewna dowolnie wybrana wielkość, z tamtą jednorodną, a dobrze znana, którą przyjmujemy za jednostkę.

Wypadek takiego mierzenia wielkości przedstawia, jak wiemy (§ 1, us. 1—4), liczbę.

2. Jeżeli dwie wielkości zmieniają się jednocześnie w ten sposób, że stosunek dwu jakichkolwiek wartości jednej z tych wielkości jest równy stosunkowi dwu wartości odpowiadających wielkości pozostałej, to mówimy, że takie dwie wielkości są względem siebie proporcjonalne, albo że one zmieniają się w tymże samym stosunku.

Tak np. zapłata robotnika jest proporcjonalna względem czasu pracy; droga przebieżona przez ciało, poruszające się ze stałą prędkością, jest proporcjonalna względem czasu, w ciągu którego ten ruch się odbywał.

Tak w tych przykładach, jak i w innych, któreby można przytoczyć, przyjmujemy proporcjonalność wielkości uważanych względem siebie jako rzecz znaną lub umówioną. Okazanie, że owe wielkości są względem siebie proporcjonalne, nie należy do założeń arytmetyki; wchodzi ono w zakres tych nauk, w których owe wielkości są badane.

3. Można jednak często przekonać się o proporcjonalności pewnych dwu wielkości względem siebie zapomocą własności, którą tu przedstawimy.

Niech będą dwie wielkości A i B (jednorodne lub niejednorodne), które przyjmujemy jako proporcjonalne względem siebie. Jakiegokolwiek dwa stany, czyli dwie wartości pierwszej wielkości, t. j. wielko-

¹⁾ Ten § przedstawia w znacznej części tłumaczenie odpowiednich ustępów z arytmetyki J. A. Serret'go (powyżej przytoczonej).

ści A , nazwijmy A_1 i A_2 , a wartości im odpowiadające drugiej wielkości, t. j. wielkości B , nazwijmy odpowiednio B_1 i B_2 . Ponieważ przyjeśliśmy, że te wielkości A i B są względem siebie proporcjonalne, przeto (us. 2)

$$A_2 : A_1 = B_2 : B_1.$$

Wykładnik tych stosunków nazwiemy np. w ; wtedy (§ 27, us. 5)

$$A_2 = A_1 \cdot w, \quad B_2 = B_1 \cdot w.$$

A więc, jeżeli dwie wielkości są względem siebie proporcjonalne, to, mnożąc odpowiadające sobie wartości tych wielkości przez tę samą jakąkolwiek liczbę, otrzymamy nowe ich wartości również sobie odpowiadające.

Nawzajem, jeżeli dwie wielkości są takie, że, mnożąc jakiegokolwiek dwie ich wartości sobie odpowiadające przez tę samą liczbę, otrzymujemy również wartości sobie odpowiadające, to te wielkości są proporcjonalne względem siebie; gdyż, jeżeli $A_2 = A_1 \cdot w$ i $B_2 = B_1 \cdot w$, to $A_2 : A_1 = B_2 : B_1$.

Z tego wypada, że

Dwie wielkości są względem siebie proporcjonalne, jeżeli tak są z sobą związane, iż gdy jakąkolwiek wartość jednej z tych wielkości pomnożymy przez pewną liczbę, to wskutek tego wartość odpowiadająca drugiej wielkości jest również przez tę samą liczbę pomnożona.

4. A nadto, dostatecznie, żeby wypowiedziany warunek miał miejsce, gdy jako mnożnik bierzemy liczbę całkowitą, aby stało się jemu zadość również wtedy, kiedy tym mnożnikiem jest liczba ułamkowa albo niewymierna — co znakomicie upraszcza zastosowanie powyższej własności.

Jakoż, niech A_1 i B_1 będą dwiema wartościami sobie odpowiadającymi rozważanych wielkości A i B . Gdy wartość A_1 pomnożymy przez ułamek $\frac{1}{n}$, to otrzymamy wartość $\frac{A_1}{n}$, którą mnożąc przez n (§ 7, us. 9), otrzymamy znowu wartość A_1 . Trzeba więc, według zrobionego tu przypuszczenia, żeby wartość wielkości B , odpowiadająca wartości $\frac{A_1}{n}$, była taką, iżby, mnożąc ją przez n , móc otrzymać wartość B_1 , odpowiadającą wartości A_1 ; tą więc wartością, odpowiadającą wartości $\frac{A_1}{n}$, jest wartość $\frac{B_1}{n}$.

Weźmy teraz jako mnożnik liczbę ułamkową $\frac{m}{n}$. Wypadnie zacząć od mnożenia dwu wartości odpowiadających A_1 i B_1 przez $\frac{1}{n}$; otrzymamy (na mocy poprzedniego) dwie wartości sobie odpowiadające $\frac{A_1}{n}$ i $\frac{B_1}{n}$, które znowu mnożąc przez liczbę całkowitą m , mieć będziemy (według założenia) wartości sobie odpowiadające $\frac{A_1 \cdot m}{n}$ i $\frac{B_1 \cdot m}{n}$.

Przyjmijmy nakoniec, że mnożnikiem jest liczba niewymierna (§ 26, us. 14) r . Ta liczba znajdzie się między dwiema liczbami ułamkowymi $\frac{k}{n}$ i $\frac{k+1}{n}$, t. j. będzie większa od pierwszej, mniejsza od drugiej. Powiększając nadto odpowiednio liczbę n (a wraz z nią liczbę k) można to sprawić, że różnica tych ułamków, t. j. liczba $\frac{1}{n}$, będzie mniejsza od jakkolwiek małej oznaczonej liczby; a fortiori więc mniejsza wtedy będzie różnica między liczbą r i każdą z tych liczb ułamkowych ¹⁾. — Gdy więc dwie wartości A_1 i B_1 sobie odpowiadają, to na mocy poprzedniego wartości $A_1 \cdot \frac{k}{n}$ i $A_1 \cdot \frac{k+1}{n}$ odpowiadają wartościom $B_1 \cdot \frac{k}{n}$ i $B_1 \cdot \frac{k+1}{n}$. Wskutek tego, wartość $A_1 \cdot r$, zawarta między dwiema pierwszymi, odpowie wartości $B_1 \cdot r$, zawartej między dwiema drugimi; gdyż, przy n dostatecznie wielkim, tak owe pierwsze wartości, między którymi przypada wciąż wartość $A_1 \cdot r$, jak i drugie, między którymi znajduje się wciąż wartość $B_1 \cdot r$ (a odpowiadające wciąż tamtym), mogą się od siebie różnić mniej niż o jakkolwiek małą oznaczoną liczbę ²⁾.

5. Wymierzmy każdą z dwu wielkości proporcjonalnych A i B odpowiednimi im jednostkami (us. 1) i oznaczmy przez a_1, a_2, b_1, b_2 liczby oderwane, odpowiadające tym wartościom, któreśmy nazywali odpowiednio A_1, A_2, B_1, B_2 . Wtedy

$$a_2 : a_1 = b_2 : b_1,$$

skąd (por. § 27, us. 3), przedstawiając wyrazy średnie, mamy

$$a_2 : b_2 = a_1 : b_1.$$

Ponieważ odpowiadające sobie wartości A_1 i B_1, A_2 i B_2 były jakiegokolwiek, przeto możemy powiedzieć: *gdy dwie wielkości są względem siebie proporcjonalne, to stosunek liczb oderwanych, wyrażających ich wartości sobie odpowiadające, jest stały*. Tak, iż *gdy przez a i b nazwiemy liczby oderwane, wyrażające jakiegokolwiek sobie odpowiadające wartości dwu wielkości proporcjonalnych względem siebie, to stosunek ³⁾*.

¹⁾ Tak właśnie rozumieć należy stosunek o niewymiernym wykładniku. Np. liczba niewymierna, wyrażająca stosunek okręgu koła do średnicy (3,1415926535...), jest zawarta między liczbami $\frac{21}{7}$ i $\frac{22}{7}$, między liczbami $\frac{354}{113}$ i $\frac{355}{113}$, między liczbami 3,1415926 i 3,1415927 i t. d., a owa liczba różni się od każdej z liczb pierwszej pary mniej niż o $\frac{1}{7}$ (od drugiej z nich mniej niż o $\frac{1}{100}$), od każdej z liczb drugiej pary mniej niż o $\frac{1}{113}$ (od drugiej z nich mniej niż o $\frac{1}{1000000}$), od każdej z liczb trzeciej pary mniej niż o $\frac{1}{1000000}$ i t. d.

²⁾ Gdy np. p jest liczbą nie mniejszą od większej z liczb wyrażających wartości A_1 i B_1 , a chcemy, aby obie te różnice były mniejsze od $\frac{1}{p}$, natenczas będzie to miało miejsce przy każdym n większym od $p \cdot q$.

³⁾ Jeżeli doświadczenie doprowadza do wyznaczenia wartości szczególnych sobie odpowiadających dwu wielkości proporcjonalnych względem siebie, to ich iloraz wyznaczy owę liczbę stałą. Należy zauważyć, że ta stała jest wartością liczebną a , gdy b staje się jednością.

$$\frac{a}{b} = \text{liczbie stałej.}$$

6. Jeżeli dwie wielkości zmieniają się jednocześnie w ten sposób, że stosunek dwu jakichkolwiek wartości jednej z tych dwu wielkości jest równy stosunkowi odwrotnemu (§ 27, us. 4) wartości odpowiadających wielkości pozostałej, to mówimy, że takie dwie wielkości są jedna względem drugiej odwrotnie proporcjonalne, albo że one zmieniają się w stosunku odwrotnym.

Tak np. czas potrzebny na wykonanie pewnej roboty jest odwrotnie proporcjonalny względem liczby pracujących robotników; przeciąg czasu, w ciągu którego ciało poruszające się ruchem jednostajnym przebiega pewną drogę, jest odwrotnie proporcjonalny względem prędkości takiego ruchu; siła, z jaką ziemia i inne planety poruszają się około słońca po swych drogach, jest odwrotnie proporcjonalna względem kwadratu ich odległości od słońca.

Gdy, czyto w zadaniu, czytóż wogóle kiedykolwiek, obok wielkości odwrotnie proporcjonalnych występują (lub mogłyby występować) wielkości, któreśmy w us. 2-im nazwali proporcjonalnymi, to zwykle te ostatnie mianujemy wtedy wprost proporcjonalnymi, w przeciwstawieniu wielkościom odwrotnie proporcjonalnym. (Jeżeli zaś jest mowa o wielkościach i zaznaczono tylko, że one są «proporcjonalne», to wtedy zawsze rozumieć należy wielkości wprost proporcjonalne, tak jak powyżej w us. 2—5-go.)

7. Odpowiednio do tego, cośmy mówili w us. 3-im o wielkościach wprost proporcjonalnych, powiemy teraz, że gdy mamy dwie wielkości odwrotnie proporcjonalne A i B, i jakiegokolwiek dwa stany, czyli dwie wartości wielkości A, nazwiemy A₁ i A₂, wartości zaś im odpowiadające wielkości B nazwiemy B₁ i B₂, to

$$A_2 : A_1 = B_1 : B_2;$$

a gdy przez *w* nazwiemy wykładnik tych stosunków, to jeszcze

$$A_2 = A_1 \cdot w, \quad B_2 = B_1 \cdot \frac{1}{w}.$$

A więc, jeżeli dwie wielkości są odwrotnie proporcjonalne, to mnożąc wartość jednej z tych wielkości przez pewną jakąkolwiek liczbę, a odpowiadającą jej wartość drugiej wielkości dzieląc przez tę samą liczbę, otrzymujemy nowe ich wartości sobie odpowiadające.

Nawzajem, jeżeli dwie wielkości są takie, że mnożąc jakąkolwiek wartość jednej z nich przez pewną liczbę, a odpowiadającą wartość drugiej wielkości dzieląc przez tę samą liczbę, otrzymujemy również wartości sobie odpowiadające, to te wielkości są odwrotnie proporcjonalne; gdyż, jeżeli $A_2 = A_1 \cdot w$, a $B_2 = B_1 \cdot \frac{1}{w}$, to natenczas $A_2 : A_1 = B_1 : B_2$.

Z tego wypada, że

Dwie wielkości są względem siebie odwrotnie proporcjonalne, jeżeli tak są z sobą związane, iż gdy jakkolwiek wartość jednej z tych wielkości pomnożymy przez pewną liczbę, to wskutek tego wartość odpowiadająca drugiej wielkości jest przez tę samą liczbę podzielona ¹⁾.

8. A nadto, dostatecznie, żeby wypowiedziany warunek miał miejsce, gdy jako mnożnik i dzielnik bierzemy liczbę całkowitą, aby stało się jemu zadość również wtedy, kiedy zamiast liczby całkowitej bierzemy liczbę ułamkową lub niewymierną — co znakomicie upraszcza zastosowanie powyższej własności.

Jakoż, niech A_1 i B_1 będą dwiema wartościami sobie odpowiadającymi rozważanych wielkości A i B . Gdy wartość A_1 pomnożymy przez ułamek $\frac{1}{n}$, to otrzymamy wartość $\frac{A_1}{n}$, którą mnożąc przez n otrzymamy znowu wartość A_1 . Trzeba więc, według zrobionego tu przypuszczenia, żeby wartość wielkości B_1 , odpowiadająca wartości $\frac{A_1}{n}$, była taką, iżby, dzieląc ją przez n , móc otrzymać wartość B_1 , odpowiadającą wartości A_1 ; tą więc wartością, odpowiadającą wartości $\frac{A_1}{n}$, jest wartość $B_1 \cdot n$.

Weźmy teraz liczbę ułamkową $\frac{m}{n}$. Gdy dzielimy wartość A_1 przez n , to jednocześnie (na mocy poprzedzającego) wartość B_1 zostaje pomnożona przez n i otrzymujemy dwie wartości sobie odpowiadające $\frac{A_1}{n}$ i $B_1 \cdot n$. Gdy zaś następnie pierwszą z tych wartości mnożymy przez liczbę całkowitą m , wypadnie (według założenia) drugą podzielić przez m , tak iż mieć będziemy wartości odpowiadające sobie $\frac{A_1 \cdot m}{n}$ i $\frac{B_1 \cdot n}{m}$.

Przyjmijmy nakoniec, że mnożymy wartość A_1 przez liczbę niewymierną r . Ta liczba znajdzie się między dwiema liczbami ułamkowymi $\frac{k}{n}$ i $\frac{k+1}{n}$. Według poprzedzającego, wartości $A_1 \cdot \frac{k}{n}$ i $A_1 \cdot \frac{k+1}{n}$ odpowiadają wartościom $B_1 \cdot \frac{n}{k}$ i $B_1 \cdot \frac{n}{k+1}$. Wskutek tego, wartość $A_1 \cdot r$, zawarta między dwiema pierwszymi, odpowie wartości $B_1 \cdot \frac{1}{r}$, zawartej między dwiema drugimi; gdyż, przy n dostatecznie wielkim, tak owe pierwsze wartości, między którymi

¹⁾ Gdyby tak ogólne przeprowadzenie tego i podanego w us. 3-cim rozumowania wydało się trudnym dla uczniów, to nauczyciel może się tu zadowolić przeprowadzeniem według tego wzoru takiego rozumowania na wielkościach nazwanych, np. na ilości kupionego towaru i jego pieniężnej wartości, na ilości dni pracy i ilości godzin codziennej pracy, potrzebnych dla wykonania pewnej roboty, od razu dając liczbowe wartości. Wyłożenie zaś tego ogólne, jak również wyłożenie us. 5-go i 9-go, można dokonać np. po przerobieniu już pewnej ilości zadań na regułę trzech.

przypada wciąż wartość $A_1 \cdot r$, jak i drugie, między którymi znajduje się wciąż wartości $B_1 \cdot \frac{1}{r}$ (a odpowiadające wciąż tamtym), mogą się od siebie różnić mniej niż o jakkolwiek małą oznaczoną liczbę ¹⁾).

9. Wymierzmy każdą z dwu wielkości odwrotnie proporcjonalnych A i B odpowiednimi im jednostkami i oznaczmy przez a_1, a_2, b_1, b_2 liczby oderwane, odpowiadające tym wartościom, któreśmy nazwali odpowiednio A_1, A_2, B_1, B_2 . Wtedy

$$a_2 : a_1 = b_1 : b_2,$$

skąd, według głównej własności proporcji,

$$a_2 \cdot b_2 = a_1 \cdot b_1.$$

Ponieważ odpowiadające sobie wartości A_1 i B_1, A_2 i B_2 były jakiegokolwiek, przeto możemy powiedzieć: *gdy dwie wielkości są względem siebie odwrotnie proporcjonalne, to iloczyn liczb oderwanych, wyrażających ich wartości sobie odpowiadające, jest stały*. Tak, iż *gdy przez a i b nazwiemy liczby oderwane, wyrażające jakiegokolwiek sobie odpowiadające wartości dwu wielkości odwrotnie proporcjonalnych względem siebie, to iloczyn ²⁾*

$$a \cdot b = \text{liczbie stałej.}$$

10. Rzadko się zdarza, aby pewna wielkość zależała wyłącznie od jednej wielkości. Najczęściej wartości pewnej wielkości zależą naraz od wartości kilku innych wielkości; np. ciężar sztab metalicznych zależy jednocześnie od ich długości, szerokości, grubości, jakoteż od gęstości metalu.

Gdy pewna wielkość jest w ten sposób zależną od kilku innych wielkości, a mimo tego mówimy, że owa wielkość jest wprost proporcjonalną lub odwrotnie proporcjonalną względem jednej z tych wielkości, od których zależy, to tym samym przyjmujemy, że pozostałe wielkości, które mogą wpływać na jej wartość, uważamy wtedy jako nie zmieniające się. Tak np. gdy mówimy, że ciężar sztab metalicznych jest proporcjonalny względem ich gęstości, to tym samym przyjmujemy, że objętość tych sztab, zależna od ich długości, szerokości

1) Jeżeli np. p jest liczbą nie mniejszą od większej z liczb wyrażających wartości A_1 i B_1 , a chcemy, aby obie te różnice były mniejsze od liczby $\frac{1}{q}$, natenczas będzie to miało miejsce dla wartości n , przy których wartość k jest taką, iż jednocześnie

$$n > p \cdot q \quad \text{i} \quad \frac{p}{k} < \frac{1}{q}.$$

2) Jeżeli doświadczenie doprowadza do wartości szczególnych sobie odpowiadających dwu wielkości odwrotnie proporcjonalnych względem siebie, to ich iloczyna wyznaczy ową liczbę stałą. Należy zauważyć, że ta stała jest wartością liczebną a , gdy b staje się jednością.

i grubości, jest wtedy też sama, a więc możemy powiedzieć, że rozważamy wtedy sztaby metaliczne jednakowej długości, szerokości i grubości ¹⁾.

§ 30. REGUŁA TRZECH.

1. Jeżeli mamy daną jedną parę odpowiadających sobie wartości dwu wielkości, wprost lub odwrotnie względem siebie proporcjonalnych, to dla każdej innej wartości jednej z tych wielkości możemy znaleźć odpowiadającą jej wartość drugiej wielkości. Dla objaśnienia tego weźmy następujące zadania.

a. Jeżeli za 16 łokci sukna zapłacono 27 rubli, to ile wypadnie zapłacić za 35 łokci tego sukna? — Jeżeli niewiadomą ilość rubli, które wypadnie zapłacić za 35 łokci sukna, nazwiemy x , to zadanie możemy tak wypisać:

$$\begin{array}{r} 16 \text{ łok.} \text{ ——— } 27 \text{ rub.} \\ 35 \text{ „} \text{ ——— } x \text{ „} \end{array}$$

W tym zadaniu mamy dwie wielkości: długość sukna i wartość wszystkiego kupionego każdym razem sukna. Zważmy, że wogóle, jeżeli kupujemy więcej sukna, to tyleż razy więcej wypadnie za nie zapłacić. Powiemy więc: jeżeli długość sukna pomnożymy przez pewną jakąkolwiek liczbę, to wskutek tego wartość jego przez tę samą liczbę zostanie pomnożona, a więc (§ 29, us. 3) te dwie wielkości są względem siebie wprost proporcjonalne. Tych wielkości wprost proporcjonalnych mamy dane: jedną parę odpowiadających sobie wartości, t. j. 16 łok. i 27 rub., oraz drugą wartość jednej z tych wielkości (długości sukna), t. j. 35 łok., a szukamy odpowiadającej jej wartości drugiej wielkości (wartości sukna), t. j. szukamy, jaką jest ilość rubli, odpowiadająca 35-u łokciom. — Te wielkości są wprost proporcjonalne; przeto (§ 29, us. 2) stosunek dwu jakichkolwiek wartości

¹⁾ Dobrze jest wskazać tu uczniom kilka przykładów wielkości, które choć są zależne od siebie, jednak mogą być nieproporcjonalne względem siebie ani wprost, ani odwrotnie. Np. cena masła w dwa dni targowe, przy jednakowym zapotrzebowaniu, a znacznie większym lub znacznie mniejszym dowozie, jest zależną od ilości dowiezionego masła, jest większa, gdy dowóz jest mniejszy, ale nie jest względem niego odwrotnie proporcjonalna; koszt wydania książki nie jest proporcjonalny do ilości odbijanych egzemplarzy; aby punkt taksamo oświetlić niedość na odległości 2, 3, 4, ... razy większej umieścić światło odpowiednio 2, 3, 4, ... razy silniejsze niż początkowo, a więc siła oświetlenia punktu przez źródło światła, choć zależna od odległości, nie jest względem niej odwrotnie proporcjonalna (na to potrzeba światła odpowiednio 4, 9, 16, ... razy silniejszego niż początkowo, a więc owa wielkość jest odwrotnie proporcjonalna względem kwadratu odległości); wysokość barometru zależy od wyniesienia nad poziom morza, szerokości geograficznej, temperatury, ale nie jest ani wprost ani odwrotnie proporcjonalną względem żadnej z tych wielkości, i t. d.

jednej z tych wielkości, a więc stosunek 35 łokci do 16 łokci, jest równy stosunkowi wartości im odpowiadających drugiej wielkości, t. j. ów stosunek jest równy stosunkowi x rubli do 27 rubli. Możemy więc napisać (por. § 27, us. 3):

$$x : 27 = 35 : 16,$$

skąd (§ 28, us. 6)

$$x = \frac{27 \times 35}{16} = 59,0625.$$

Odp. Za 35 łokci sukna zapłacono 59 rubli i 6 kopiejek (por. § 20, us. 13).

b. Pewną robotę można wykonać, pracując w ciągu 5 dni po 4 godziny dziennie; po ile godzin codziennie trzeba pracować, aby tę robotę wykonać w ciągu 3 dni? — Niewiadomą ilość godzin codziennej pracy, potrzebnych dla wykonania tej roboty w ciągu 3 dni, nazwiemy x ; wtedy zadanie możemy tak wypisać:

$$\begin{array}{r} 5 \text{ dni} \text{ — } 4 \text{ godz.} \\ 3 \text{ " } \text{ — } x \text{ " } \end{array}$$

Do tego zadania wchodzić dwie wielkości: ilość dni pracy i ilość godzin codziennej pracy, potrzebnych dla wykonania pewnej roboty. Zważmy, że wogóle, jeżeli na więcej *) dni rozłożymy tę robotę, to codziennie możemy tyleż razy mniej godzin pracować, ile razy więcej mamy dni na wykonanie tej roboty. Powiemy więc: jeżeli ilość dni pracy pomnożymy przez pewną jakąkolwiek liczbę, to ilość godzin codziennej pracy będzie wskutek tego przez tę samą liczbę podzielona; przeto (§ 29, us. 7) te dwie wielkości są względem siebie odwrotnie proporcjonalne. Tych wielkości odwrotnie proporcjonalnych mamy dane: jedną parę wartości sobie odpowiadających, t. j. 5 dni i 4 godziny, oraz drugą wartość jednej z tych wielkości (ilości dni), t. j. 3 dni, a szukamy odpowiadającej jej wartości drugiej wielkości (ilości godzin), t. j. szukamy, jaką jest ilość godzin codziennej pracy, odpowiadająca 3 dniom pracy. — Te wielkości są odwrotnie proporcjonalne; przeto (§ 29, us. 6) stosunek dwu jakichkolwiek wartości jednej z tych wielkości, a więc stosunek 5 dni do 3 dni, jest równy odwrotnemu stosunkowi wartości im odpowiadających drugiej wielkości, t. j. ów stosunek jest równy odwrotnemu stosunkowi 4 godzin do x godzin, czyli (§ 27, us. 4) jest równy stosunkowi x godzin do 4 godzin. Możemy więc napisać (por. § 27, us. 3):

*) Niema co zważać na to, że niekiedy ta wartość jednej wielkości, dla której szukamy odpowiadającej wartości drugiej wielkości, jest mniejsza od tej wartości owej pierwszej wielkości, dla której mamy daną odpowiadającą wartość drugiej wielkości, gdyż mamy na myśli *jakiegokolwiek* (§ 29, us. 2, 6) odpowiadające sobie wartości.

skąd

$$x : 4 = 5 : 3,$$

$$x = \frac{4 \times 5}{3} = 6 \frac{2}{3}.$$

Odp. Aby ową robotę wykonać w ciągu 3 dni, należałoby codziennie pracować po 6 godzin i 40 minut.

Takiego rodzaju zadania oddawna nazywają się zadaniami na regułę trzech. Zatem przez «regułę trzech» ¹⁾ rozumiemy należy zbiór objaśnień i wskazówek rozwiązywania takich zadań.

Powiemy więc:

Zadanie na regułę trzech jestto zadanie, w którym, mając dane: jedną parę odpowiadających sobie wartości dwu wielkości, wprost lub odwrotnie względem siebie proporcjonalnych, oraz drugą wartość jednej z tych wielkości, mamy znaleźć odpowiadającą jej wartość drugiej wielkości.

2. Zestawmy z sobą powyższe zadania i ich rozwiązania:

$$16 \text{ lok.} \text{ — } 27 \text{ rub.}$$

$$35 \text{ " — } x \text{ "}$$

$$x = \frac{27 \times 35}{16};$$

$$5 \text{ dni} \text{ — } 4 \text{ godz.}$$

$$3 \text{ " — } x \text{ "}$$

$$x = \frac{4 \times 5}{3}.$$

Z tego widzimy, że:

*Jeżeli zadanie na regułę trzech wypiszemy w dwu wierszach tak, żeby każde dwie wartości tej samej wielkości były w tym samym rzędzie pionowym, a odpowiadające sobie wartości różnych wielkości znalazły się w tym samym rzędzie poziomym *), to wrazie gdy wielkości, wchodzące do zadania, są względem siebie wprost proporcjonalne, otrzymamy liczbę szukaną, mnożąc liczbę, znajdującą się w tym samym, co szukana, rzędzie pionowym, przez liczbę, znajdującą się w tym samym, co szukana, rzędzie poziomym, i dzieląc ten iloczyn przez pozostałą liczbę; wrazie zaś gdy wielkości, wchodzące do zadania, są względem siebie odwrotnie proporcjonalne, otrzymamy liczbę szukaną, mnożąc liczbę, znajdującą się w tym samym, co szukana, rzędzie pionowym, przez liczbę drugiego rzędu pionowego, lecz znajdującą się w innym, niż szukana, rzędzie poziomym, i dzieląc ten iloczyn przez pozostałą liczbę.*

¹⁾ Niektórzy dotąd jeszcze rozróżniają regułę trzech w tym przypadku, kiedy wielkości, wchodzące do zadania, są wprost proporcjonalne, od reguły trzech w przypadku, kiedy wielkości, wchodzące do zadania, są odwrotnie proporcjonalne względem siebie, jak to robiono zawsze dawniej («Regula Detri» i «Regula Detri conversa», albo «inversa»).

*) Wrazie, gdyby w zadaniu dane wartości którejkolwiek wielkości były wyrażone jako liczby wielorakie, wypisując tu zadanie, należy te wartości wyrazić jako liczby mianowane proste, bacząc jeszcze na to, aby obie wartości tej samej wielkości były liczbami mianowanymi prostymi, wyrażonymi przy pomocy tej samej jednostki (por. § 27, us. 2).

Widzimy z powyższego, jak ważnym jest staranne wyznaczenie tego, czy wielkości, wchodzące do zadania, są wprost, czy też odwrotnie proporcjonalne względem siebie. Wyznaczywszy to uważnie, możemy od razu, według powyższej wskazówki, utworzyć wyrażenie liczby szukaną przez liczby, dane w zadaniu, a następnie ją obliczyć.

3. METODA SPROWADZANIA DO JEDNOŚCI. Mając np. zadanie a. ustępu 1-go i zaznaczywszy tak, jak w us. 1-ym, że dwie wielkości, 16 łok. — 27 rub. wchodzące do tego zadania, 35 " — x " są względem siebie wprost proporcjonalne, możemy je rozwiązać, przeprowadzając dalsze rozumowanie w ten sposób. Ponieważ za 16 łokci zapłacono 27 rubli, więc za 1 łokieć wypadnie zapłacić *) 27 rub. : 16, t. j. (§ 17, us. 5) $\frac{27}{16}$ rub. Ponieważ za 1 łokieć zapłacono $\frac{27}{16}$ rub., to za 35 łokci wypadnie zapłacić **) $\frac{27}{16}$ rub. \times 35, t. j. (§ 19, us. 3, 12) $\frac{27 \times 35}{16}$ rub., czyli 59,0625 rub., t. j. 59 rub. + 6 kop.

Podobnie, mając zadanie b. ustępu 1-go i zaznaczywszy tak, jak w us. 1-ym, że dwie wielkości, 5 dni — 4 godz. wchodzące do tego zadania, 3 " — x " są względem siebie wprost proporcjonalne, możemy następnie tak rozumować. Ponieważ, aby tę robotę wykonać, należało w ciągu 5 dni pracować po 4 godziny dziennie, przeto w ciągu jednego dnia (z uwagi, że te wielkości są odwrotnie proporcjonalne i że 1 dzień jest do 5 dni : 5), należy pracować 4 godz. \times 5, t. j. (§ 6, us. 6) 4×5 godz. ***); ponieważ, aby

*) Wielkości są wprost proporcjonalne; gdy więc wartość: 1 łok. powstaje z wartości: 16 łok. wskutek podzielenia jej przez 16 (albo: pomnożenia przez $\frac{1}{16}$), to wartość ilości rubli, odpowiadająca 1 łokciowi, powstanie również z wartości 27 rub., odpowiadającej 16 łokciom, wskutek podzielenia jej przez 16.

**) Podobnie. [Tak uzasadniając, nie potrzebujemy wprowadzać osobnych ad hoc sposobów wyrażania się, jak to trzebaby było zrobić np. wraze, gdybyśmy chcieli wyrazić: «za 35 łokci wypadnie zapłacić 35 razy więcej» odnieść do przypadku, kiedy w tym zadaniu zamiast 35 łokci byłoby np. $\frac{5}{9}$ łokcia.]

***) Rozumiejac to tak, jakgdyby było napisane (4×5) godz.

[Gdyby w zadaniu zamiast 4 godz. było np. 6 godz., to (6×5) godz. = 30 godzinom, więcej niż ich jest w dobie; w takim razie ta liczba wskazuje, ileby trzeba godzin pracować, nie przerywając pracy.]

tę robotę wykonać w ciągu jednego dnia, należałoby pracować 4×5 godzin, więc aby ją wykonać w ciągu 3 dni, należałoby pracować codziennie (co trzeba objaśnić podobnie, jak wyżej) 4×5 godzin : 3, t. j. $\frac{4 \times 5}{3}$ godz. = $6 \frac{2}{3}$ godz. = 6 godz. + 40 minut.

Taki sposób rozwiązywania zadań na regułę trzech (w nim więc, jak z powyższego widoczna, przechodzimy przez wartość jednostki tej wielkości, której w zadaniu dane są dwie wartości), nazywa się ¹⁾ metodą sprowadzania do jedności.

Oczywiście, że z otrzymanych wypadków wypada toż samo, cośmy wypowiedzieli w ustępie 2-gim.

4. METODA ROSKŁADOWA, czyli tak zwana **PRAKTYKA WŁOSKA**. Niektóre zadania na regułę trzech można dogodnie rozwiązywać w następujący sposób.

Weźmy np. zadanie a. ustępu 1-go. Zamiast odrazu wyszukiwać, jaka jest ilość rubli, odpowiadająca 35 łokciom, możemy z tego, iż wiemy, że za 16 łok. należy się 27 rub., znaleźć oddzielnie, ile wypadnie zapłacić za 32 łok. (mnożąc 27 rub. przez 2), i oddzielnie, ile wypadnie zapłacić za 2 łok. (dzieląc 27 rub. przez 8), a następnie, z tego, ile wypada zapłacić za 2 łokcie, znajdziemy (dzieląc przez 2), ile wypadnie zapłacić za 1 łokieć. Dodawszy zaś do siebie to, co trzeba zapłacić za 32 łok., za 2 łok. i za 1 łok., otrzymamy, iż za 37 łokci wypadnie (§ 21, us. 13) zapłacić 59 rub. + 6 kop.

Robiąc takim sposobem, nieodrazu znaleźliśmy wartość ilości rubli, odpowiadającą 35 łokciom, lecz znajdowaliśmy kolejno wartości ilości rubli, odpowiadające oddzielnym częściom 35 łokci, na które je rozłożyliśmy tak, jak nam się wydało najdogodniej. Taki sposób rozwiązywania zadań przedstawia metodę roskładową, nazywaną także praktyką włoską. Używa się tej metody przeważnie przy wyliczaniu wartości przedmiotów. Przerobimy tu jeszcze według tej metody następujące zadania.

¹⁾ Niektórzy nazywają go «metodą wnioskowania» — niesłusznie, gdyż kurs arytmetyki, gdy jest należycie prowadzony, jest cały metodą wnioskowania.

a. Ile kosztuje $3\frac{1}{8}$ funta towaru, jeżeli za 7,5 funta tego towaru zapłacono 30,96 rubla? — Tu najdogodniej będzie rozłożyć $3\frac{1}{8}$ funta na jedną-trzecią $7\frac{1}{2}$ fun., t. j. na $2\frac{1}{2}$ fun., na jedną-piątą $2\frac{1}{2}$ fun., t. j. na $\frac{1}{2}$ fun., oraz na jedną-czwartą $\frac{1}{2}$ funta, t. j. na $\frac{1}{8}$ f., gdyż $2\frac{1}{2}$ f. + $\frac{1}{2}$ f. + $\frac{1}{8}$ f. = $3\frac{1}{8}$ f. Odpowiednio więc do tego wypadnie kolejno 30,96 rub. : 3; 10,32 rub. : 5 i 2,064 rub. : 4.

Odp. $3\frac{1}{8}$ funta tego towaru kosztuje 12 rub. + 90 kop.

b. Za jeden sążeń kwadratowy placu w mieście chcą 11 rub. + 96 kop.; ile wypadnie zapłacić za 684 sąż. kw. ? —

1 s. kw.	—	11,56	rub.
684 „	—	x	„
<hr/>			
100 s. kw.	—	1156	rub.
500 „	—	5780	„
50 „	—	578	„
10 „	—	115,6	„
20 „	—	231,2	„
4 „	—	46,24	„
<hr/>			
684 s. kw.	—	7907,04	rub.

Odp. Za 684 sążni kw. wypadnie zapłacić 7907 rub. + 4 kop.

W przypadku, gdy, jak w ostatnim zadaniu, jest dana cena jednostki, często tę właśnie cenę rozkładają na części. Tak np. to samo zadanie b. moglibyśmy tak zrobić:

1 sąż. kw.	—	11,56	rub.
684 „	—	x	„
<hr/>			
684 sąż. kw. po 10	rub. —	6840	rub.
„ „ „ 1	„ —	684	„
„ „ „ 0,5	„ —	342	„
„ „ „ 0,05	„ —	34,2	„
„ „ „ 0,01	„ —	6,84	„
<hr/>			
684 sąż. kw. po 11,56	rub. —	7907,84	rub.

Niekiedy w takich zadaniach rozkładają na części tak cenę jednostki, jak i liczbę, wyrażającą ilość kupowanego towaru. Np.

c. Ile kosztuje 39 funtów i 22 łuty towaru, którego funt kosztuje 5 złp. i $27\frac{1}{2}$ grosza? —

39 fun. po 5 zł.	—	195 zł.
„ „ „ 15 gr. (5 zł. : 10)	—	19 „ 15 gr.
„ „ „ 5 „ (15 gr. : 3)	—	6 „ 15 „
„ „ „ 5 „	—	6 „ 15 „
„ „ „ $2\frac{1}{2}$ gr.	—	3 „ 8 „
16 lut. (1 f. : 2)	—	2 „ 29 „
4 „	—	— „ 22 „
2 „	—	— „ 11 „
39 fun. + 22 łuty	—	234 zł. 25 gr.

(Zadania arytmetyczne. § 29.)

§ 31. REGUŁA TRZECH ZŁOŻONA.

1. Jeżeli zadanie dane może być rozłożone na dwa lub więcej zadań na regułę trzech, tak iż, rozwiązując kolejno owe zadania, wyznaczymy nakoniec liczbę, o którą nam idzie w zadaniu danym, to takie zadanie nazywamy zadaniem na regułę trzech złożoną *). Np.

15 tkaczów, pracując po 9 godzin dziennie, w ciągu 32 dni utkało 2400 metrów płótna mającego 1,5 metra szerokości; w ciągu ilu dni 24 tkaczów, pracujących po 8 godzin dziennie, utkać może 3600 metrów płótna tegoż gatunku, lecz mającego szerokości 1,8 metra. — Oznaczywszy literą x liczbę oderwaną, wyrażającą ilość dni, odpowiadającą wartościom: 24 tk., 8 g. dzienniej pracy, 3600 m. długości i 1,8 m. szerokości płótna, zadanie to tak wypiszemy:

15 tk.	—	9 g.	—	2400 m.	—	15 dm.	—	32 d.
24 „	—	8 „	—	3600 „	—	18 „	—	x „

Jeżeli przypuścimy, że tylko ilość tkaczów uległa zmianie, t. j., że zamiast wartości 15 tk. mamy wartość 24 tk., a inne wielkości (t. j. ilość godzin dzienniej pracy, długość i szerokość płótna) zmianie nie uległy (§ 29, us. 10), to wtedy iść nam będzie o taką wartość ilości dni, która odpowie wartościom: 24 tk., 9 g. dzienniej pracy, 2400 m. długości i 15 dm. szerokości. Ta więc liczba odpowiada innym wartościom wchodzących do zadania wielkości, niż owa liczba, którąśmy

*) Zatem przez «regułę trzech złożoną» rozumieć należy zbiór objaśnień i wskazówek rozwiązywania takich zadań.

oznaczyli literą x ; dlatego oznaczmy ją inną literą, np. literą y . Tak iż mamy teraz zadanie:

$$\begin{array}{l} \text{I) } 15 \text{ tk.} \text{ — } 9 \text{ g.} \text{ — } 2400 \text{ m.} \text{ — } 15 \text{ dm.} \text{ — } 32 \text{ d.} \\ \quad 24 \text{ „} \text{ — } 9 \text{ „} \text{ — } 2400 \text{ „} \text{ — } 15 \text{ „} \text{ — } y \text{ „} \end{array}$$

Tu ilość dni pracy jest niezależna od niezmiennających się wielkości: godzin dziennéj pracy, długości i szerokości płótna, a jest zależną tylko od ilości tkaczów. Aby zbadać, jakimi względem siebie są te dwie wielkości: ilość tkaczów i ilość dni pracy, zważmy, że wogóle *) «aby, pracując tę samą ilość godzin codziennie, utkać tę samą ilość metrów płótna téjże saméj szerokości, większa ilość tkaczów potrzebuje tyle razy mniejszój ilości dni, ile razy tkaczów jest więcej». Powiemy więc: jeżeli ilość tkaczów pomnożymy przez pewną jakąkolwiek liczbę, to ilość dni pracy będzie wskutek tego przez tę samą liczbę podzielona; przeto (§ 29, us. 7) te dwie wielkości są odwrotnie proporcjonalne. Tych dwu wielkości mamy parę wartości sobie odpowiadających, t. j. 15 tk. i 32 d., oraz drugą wartość ilości tkaczów, t. j. 24 tk., dla której mamy znaleźć odpowiadającą wartość ilości dni. Jest to więc zadanie na regułę trzech. Moglibyśmy więc je rozwiązać t. j. znaleźć liczbę y (§ 30, us. 2). Dlatego tę liczbę y , choć jej nie wyliczymy (por. niżej piérwszy odsyłacz na str. 328), możemy nadal przyjmować za liczbę już wiadomą.

Mamy liczbę y d., odpowiadającą wartościom: 24 tk., 9 g., 2400 m. i 15 dm. Zmieńmy tylko wartość 9 g. na wartość 8 g. Wtedy liczba, która odpowie wartościom: 24 tk., 8 g., 2400 m. i 15 dm., jest inną od liczb, któreśmy oznaczyli literami x i y ; oznaczmy ją literą np. z . Mić będziemy teraz zadanie:

$$\begin{array}{l} \text{II) } 24 \text{ tk.} \text{ — } 9 \text{ g.} \text{ — } 2400 \text{ m.} \text{ — } 15 \text{ dm.} \text{ — } y \text{ d.} \\ \quad 24 \text{ „} \text{ — } 8 \text{ „} \text{ — } 2400 \text{ „} \text{ — } 15 \text{ „} \text{ — } z \text{ „} \end{array}$$

Objaśniając znowu to zadanie tak szczegółowo, jak poprzednio, wypadnie nam tu zauważyć wogóle, że «taż sama ilość tkaczów, aby utkać tę samą ilość płótna téjże saméj szerokości, pracując więcej **) godzin codziennie, będzie potrzebowała tyle razy mniej dni, ile razy więcej godzin codziennie pracuje», i powiemy: jeżeli ilość godzin dziennéj pracy pomnożymy przez jakąkolwiek liczbę, to ilość dni pracy będzie wskutek tego przez tę samą liczbę podzielona; przeto te dwie wielkości są odwrotnie proporcjonalne. I t. d. Jest to więc zada-

*) Podobne wypowiedzenie bywa najrzęczniejsze i najjaśniejsze, gdy się naprzód mówi o wielkościach nie zmieniających się.

**) Por. odsyłacz na str. 320.

nie na regułę trzech. Liczbę y , choć jęj nie obliczyliśmy, wyznacza zadanie I; dlatego ostatnie zadanie II w zupełności wyznacza liczbę z i możemy ją nadal przyjmować za liczbę już wiadomą.

Liczba z odpowiada wartościom: 24 tk., 8 g., 2400 i 12 dm. Zmieńmy tylko wartość 2400 m. na 3600 m., a liczbę, odpowiadającą wartościom: 24 tk., 8 g., 3600 m. i 15 dm., oznaczmy np. literą w . Przy objaśnianiu zadania:

$$\text{III) } \begin{array}{ccccccccc} 24 \text{ tk.} & \text{—} & 8 \text{ g.} & \text{—} & 2400 \text{ m.} & \text{—} & 15 \text{ dm.} & \text{—} & z \text{ d.} \\ \hline 24 \text{ „} & \text{—} & 8 \text{ „} & \text{—} & 3600 \text{ „} & \text{—} & 15 \text{ „} & \text{—} & w \text{ „} \end{array}$$

zauważymy ogólnie, że «ta sama ilość tkaczów, pracując tę samę ilość godzin codziennie, aby utkać płótna téj samęj szerokości więcj łokci, potrzebuje dni tyle razy więcj, ile razy więcj należy utkać płótna», i powiemy: jeżeli długość płótna pomnożymy przez pewną jakąkolwiek liczbę, to ilość dni pracy będzie wskutek tego przez tęż liczbę pomnożona; przeto (§ 29, us. 3) te dwie wielkości są wprost proporcjonalne. I t. d. Jest to więc zadanie na regułę trzech. I t. d.

Liczba w d. odpowiada wartościom: 24 tk., 8 g., 3600 m. i 15 dm. Zmieńmy nakoniec wartość 15 dm. na wartość 18 dm. Liczba, odpowiadająca wartościom: 24 tk., 8 g., 3600 m. i 18 dm., jest tą liczbą, którąśmy oznaczyli już literą x . Mięc więc będziemy zadanie:

$$\text{IV) } \begin{array}{ccccccccc} 24 \text{ tk.} & \text{—} & 8 \text{ g.} & \text{—} & 3600 \text{ m.} & \text{—} & 15 \text{ dm.} & \text{—} & w \text{ d.} \\ \hline 24 \text{ „} & \text{—} & 8 \text{ „} & \text{—} & 3600 \text{ „} & \text{—} & 18 \text{ „} & \text{—} & x \text{ „} \end{array}$$

które objaśniając podobnie jak poprzednie, znajdziemy, że ono jest również zadaniem na regułę trzech.

Widzimy więc, że zadanie dane rozłożyliśmy na cztery zadania na regułę trzech. Gdybyśmy je kolejno rozwiązywali, to wyznaczysz z zadania I liczbę y , wyznaczylibyśmy następnie z zadania II liczbę z , później z zadania III liczbę w i nakoniec z zadania IV liczbę x , t. j. tę, o którą nam idzie w zadaniu pierwotnie danym. Dlatego takie zadania, jak pierwotnie tu dane, które można rozwiązać przy pomocy dwu lub więcj zadań na regułę trzech, nazywa się zadaniem na regułę trzech złożoną.

2. Rozwiązując kolejno powyższe zadania na regułę trzech (§ 30, us. 2), otrzymujemy:

$$z \text{ I} \quad y = \frac{32 \times 15}{24};$$

$$z \text{ II} \quad z = y \times \frac{9}{8}, \text{ t. j. } z = \frac{32 \times 15}{24} \times \frac{9}{8} = \frac{32 \times 15 \times 9}{24 \times 8};$$

$$z \text{ III} \quad w = z \times \frac{3600}{2400}, \text{ t. j. } w = \frac{32 \times 15 \times 9 \times 3600}{24 \times 8 \times 2400};$$

$$z \text{ IV} \quad x = w \times \frac{18}{15}, \text{ t. j. } x = \frac{32 \times 15 \times 9 \times 3600 \times 18}{24 \times 8 \times 2400 \times 15};$$

skąd, po wykonaniu skrótów *), otrzymamy 40,5 dnia, co wskazuje, że owych 24 tkaczów powinno pracować po 8 godzin dziennie w ciągu 40-u dni, a nadto 41-ego dnia pracy jeszcze 4 godziny.

Jeżeli otrzymane wyrażenie liczby x przez liczby pierwotnie danego zadania zestawimy z tym zadaniem,

odw.	odw.	wpr.	wpr.	
15 tk.	9 g.	2400 m.	15 dm.	32 d.
24 "	8 "	3600 "	18 "	x "

i uważnie przyjrzymy się temu, jak ta liczba x wyrażoną została przez liczby, dane w zadaniu, to dostrzeżemy, że liczba x równa się **) iloczynowi, którego czynnikami są: liczba znajdująca się nad x -em, liczby, wyrażające wartości wielkości odwrotnie proporcjonalnych, znajdujące się w pierwszym wierszu poziomym, i liczby, wyrażające wartości wielkości wprost proporcjonalnych, znajdujące się w wierszu drugim, podzielonemu przez iloczyn liczb pozostałych. Moglibyśmy jednak tak wypisać to zadanie, żeby wszystkie liczby, które są w wierszu drugim, znalazły się w wierszu pierwszym, i nawzajem. Dlatego powiemy ogólnie:

Jeżeli zadanie na regułę trzech złożoną wypiszemy w dwu wierszach tak, żeby każde dwie wartości tej samej wielkości były w tym samym rzędzie pionowym, a odpowiadające sobie wartości różnych wielkości znalazły się w tym samym rzędzie poziomym, i wyznaczymy, które wielkości są wprost, a które odwrotnie proporcjonalne względem tej wielkości, której jednej wartości szukamy, to liczbę szukaną otrzymamy, mnożąc liczbę, znajdującą się w tym samym, co szukana, rzędzie pionowym, przez liczby wyrażające wartości wielkości wprost proporcjonalnych, znajdujące się w tym samym, co szukana, rzędzie poziomym, i przez liczby wyrażające wartości wielkości odwrotnie proporcjonalnych, znajdujące się w innym, niż szukana, wierszu poziomym, a ten iloczyn dzieląc przez iloczyn liczb pozostałych.

*) Zwykle mniej bywa roboty, gdy, po wykonaniu skrótów dopiero w tym ostatecznym wypadku rozumowania, wyliczamy z niego liczbę x , niż gdybyśmy kolejno wyliczali liczby y , z , w i x , choćby wykonywając przed każdym z tych wyliczeń skrócenia możliwe.

**) Por. odsyłacz drugi na str. 321.

Widzimy z tego, jak ważnym jest staranne wyznaczenie: które z wielkości, wchodzących do zadania, są wprost, a które odwrotnie proporcjonalne względem wielkości, której jednej wartości szukamy. Wyznaczwszy to uważnie, możemy odrazu, według powyższej wskazówki, utworzyć wyrażenie liczby szukanéj przez liczby dane w zadaniu, a następnie ją obliczyć.

3. Z każdego z powyższych czterech zadań na regułę trzech, na które rozłożyliśmy dane zadanie, tworząc tak, jak w us. 1-ym § 30-go, proporcycje, mieć będziemy kolejno:

$$\begin{aligned} \text{z I} & \quad y : 32 = 15 : 24, \\ \text{z II} & \quad z : y = 9 : 8, \\ \text{z III} & \quad w : z = 3600 : 2400, \\ \text{z IV} & \quad x : w = 18 : 15. \end{aligned}$$

Mnożąc te proporcycje przez siebie odpowiednimi wyrazami (§ 28, us. 15), otrzymujemy

$$(y. z. w. x) : (32. y. z. w) = (15. 9. 3600. 18) : (24. 8. 2400. 15).$$

Albo, po podzieleniu obu wyrazów stosunku pierwszego przez liczby y , z i w ,

$$x : 32 = (15. 9. 3600. 18) : (24. 8. 2400. 15).$$

Gdybyśmy z téj proporcji wyrazili wyraz x przez iloczyn wyrazów skrajnych, podzielony przez pozostały wyraz skrajny, to otrzymalibyśmy to wyrażenie liczby x , któreśmy mieli w us. 2-im. Dzieląc jednak jednocześnie przez też same liczby jeden wyraz średni i jeden skrajny, zastąpimy tę proporcycją przez prostszą,

$$x : 1 = 81 : 2,$$

z której znajdziemy $x = 40,5$. Taki sposób rozwiązywania zadań na regułę trzech złożoną nazywają rozwiązywaniem za pomocą proporcji.

4. Zadanie na regułę trzech złożoną można rozwiązać metodą sprowadzania do jedności. Postępowanie to składa się z kolejnego rozwiązywania tą metodą oddzielnych zadań na regułę trzech (§ 30, us. 3), na które dane zadanie się rozkłada. Tych częściowych zadań na regułę trzech nie wypisujemy*), lecz przeprowadzamy odpowiednie rozumowanie, mając przed oczyma dane zadanie na regułę trzech złożoną. Cała robota przedstawi się piśmiennie tak:

*) Jak i przy wynajdywaniu niewiadoméj postępowaniem takim, jak w us. 2-im, albo jak w us. 3-im—gdy już nabędziemy dostatecznéj wprawy w wypowiadaniu wprost z wypisanego zadania na regułę trzech złożoną oddzielnych zadań na regułę trzech, na które dane zadanie może być rozłożone.

odw.	odw.	wpr.	wpr.	
15 tk.	— 9 g.	— 2400 m.	— 15 dm.	— 32 d.
24 „	— 8 „	— 3600 „	— 18 dm.	— x „
15 tk.	— 9 g.	— 2400 m.	— 15 dm.	— 32 d.
1 „	— 1 „	— 1 „	— 1 „	— $\frac{32 \times 15 \times 9}{2400 \times 15}$ d.
24 „	— 8 „	— 3600 „	— 18 „	— $\frac{32 \times 15 \times 9 \times 3600 \times 18}{2400 \times 15 \times 24 \times 8}$ d.
x dni =				$\frac{32 \times 15 \times 9 \times 3600 \times 8}{2400 \times 15 \times 24 \times 8}$ d. = 40,5 dnia.

Wyznaczymy tu, tak jak w ustępie 1-ym, które wielkości są wprost, a które odwrotnie proporcjonalne względem ilości dni, dalsze rozumowanie przeprowadzimy w ten sposób. Ponieważ 15 tk., pracując po 9 g. codziennie, może utkać 2400 m. płótna, szerokiego na 15 dm., w ciągu 32 d., to, jeżeli ma pracować 1 tk. (zamiast 15 tk.), wypadnie ilość dni (32 d.) pomnożyć przez 15 *); jeżeli on ma pracować 1-nę godzinę codziennie (zam. 9-u g.), to wypadnie ilość dni pomnożyć przez 9; jeżeli ma utkać 1 m. (zam. 2400-u m.), to wypadnie ilość dni podzielić przez 2400, a jeżeli to płótno ma być szerokie na 1 dm. (zam. 15 dm.), to wypadnie ilość dni podzielić przez 15. Wiemy więc, że 1 tk., pracując codziennie 1 g., aby utkać 1 m. płótna, szerokiego na 1 dm., potrzebuje $\frac{32 \times 15 \times 9}{2400 \times 15}$ d. **). Wskutek tego, jeżeli ma pracować 24 tk. (zamiast 1-go tk.), to wypadnie ilość dni podzielić przez 24; jeżeli oni mają pracować po 8 g. (zam. po 1-nę g.) dziennie, to wypadnie i t. d.

Oczywiście, że w wypadku, który tu otrzymujemy, dochodzimy do tegoż samego, cośmy wypowiedzieli w us. 2-im.

5. W zadaniu naszym (por. us. 1) druga partyja tkaczy (24 tk.) tkala płótno tego samego gatunku, co pierwsza partyja (15 tk.). Gdyby jednak było jeszcze dodane np. «płótna, które ma wyrobić druga partyja, można utkać 2 m. w ciągu takiego czasu, jaki jest potrzebny dla utkania 3 m. płótna, wyrabianego przez pierwszą partyją tkaczy», to z tego warunku wypada, że dla utkania każdego metra płótna druga partyja potrzebuje $\frac{3}{2}$ tego czasu, co pierwsza. Dlatego, gdyby do naszego zadania ten warunek był dodany, to najdogodniej ***), znalazzsy ilość dni w przypuszczeniu, że obie partyje

*) Por. str. 322.

***) Ułamek dnia mniejszy od jedności będzie w tym razie jednoznaczny z takimże ułamkiem godziny.

***) Można go wprowadzić do zadania, jako dwie wartości wielkości: prędkość w robocie, ale w takich razach rozumowanie często jest bałamutne dla uczniów.

tkają płótno jednakowego gatunku, pomnożyć ją następnie przez tę liczbę $\frac{3}{2}$.

6. Ponieważ zadanie na regułę trzech złożoną jest złożone z zadań na regułę trzech, przeto ogólnie wypowiedziane wyrażenie: «reguła trzech» rozumiemy nadal będziemy, jako obejmujące w sobie regułę trzech złożoną.

Wszystkie ¹⁾ zadania arytmetyczne, oile nie sprowadzają się wyłącznie do dodawania lub odejmowania ²⁾, są zadaniami na regułę trzech. Dlatego też sposoby postępowania, któreśmy tu wyłożyli, są nam już znane z poprzedniej nauki i z przerabianych zadań. Tu tylko z tych sposobów zdaliśmy sobie należytą sprawę.

Zauważymy przy tej sposobności, że, przerabiając rachunki w celu rozwiązania różnych zadań arytmetycznych, wykonywamy na liczbach całkowitych lub ułamkowych (§ 17, us. 2) takie działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie. Dlatego te działania nazywają się czterema działaniami arytmetycznymi.

7. Pośród najrozmaitszych możliwych zadań na regułę trzech są takie, które, ze względu na szczególne swe właściwości, zasługują na oddzielne ich rozważanie. Dlatego z zadań na regułę trzech wydzielimy pewne grupy zadań i rozważymy je oddzielnie. Zbiór objaśnień i wskazówek rozwiązywania takich grup zadań tworzy odpowiednie «reguły» (§ 32—37). Oczywiście, że prócz tych, które tu rozważymy, możnaby wydzielić z zadań na regułę trzech inne grupy, a tym samym objaśnienia i wskazówki rozwiązywania zadań owych grup utworzyłyby mogły inne «reguły». Mówiąc to, chcemy zaznaczyć, że te grupy zadań, które tu rozważymy, lub którebyśmy nadto mogli rozważyć, nie wyczerpią różnych możliwych typów zadań na regułę trzech.

(Zadania arytmetyczne. § 30.)

§ 32. REGUŁA PROCENTU.

1. W niektórych zadaniach na regułę trzech jedna z wartości danych (albo też wartość wprowadzana podczas rachunku dla przedstawienia odpowiedzi) jest zwykle też sama, mianowicie, według zwyczaju powszechnego, jest ona wyrażana jako 100 jednostek. Owóż, takie zadania, w których, według przyjętego zwyczaju, jedna z wartości, albo dana w zadaniu, albo wprowadzana podczas rachunku,

¹⁾ Oczywiście nie mamy tu na myśli zadań na mechaniczne wyliczenia, np. sumę dwu liczb podzielić przez trzecią, od iloczynu odjąć czwartą i t. d., i innych podobnych.

²⁾ Jako działań, sprowadzających się bezpośrednio do liczenia (§ 4, us. 2; § 5, us. 2).

jest wyrażona jako 100 jednostek, nazywamy zadaniami na regułę procentu *).

Tak np., jeżeli obliczamy, ile trzeba papieru drukowego na książkę, mającą 20 arkuszy druku, a odbijaną w 1600 egzemplarzach, to musimy wziąć pod uwagę, że podczas druku pewna ilość arkuszy papieru zepsuje się; gdy pod tym względem umawiamy się z zarządem drukarni, to powiedzą nam, że trzeba na to liczyć np. 5 «od sta», czyli 5 «procent», t. j. że nad każde 100 arkuszy papieru trzeba jeszcze na zepsucie liczyć 5 arkuszy. Jeżeli więc nad 100 arkuszy trzeba liczyć 5, to ile arkuszy trzeba liczyć nad 32000 ark? Rozwiązawszy to zadanie na regułę procentu,

$$\begin{array}{r} 100 \text{ ark.} \text{---} 5 \text{ ark.} \\ 32000 \text{ ,,} \text{---} x \text{ ,,} \\ \hline x = \frac{5 \cdot 32000}{100} = 1600, \end{array}$$

powiemy, że: 5 procent od 32000 ark. jest 1600 ark. Zamiast pisać «procent», albo «od sta», piszemy znak %; owóż, tę odpowiedź napiszemy: 5% od 32000 ark. jest 1600 ark.

Podobnie np. jeżeli chcemy się dowiedzieć, czy w Warszawie umiejętność czytania i pisania jest więcej rozpowszechniona pośród mężczyzn, czy też pośród kobiet, i w jakim stosunku, a chcemy to wyrachowanie oprzeć na liczbach, otrzymanych podczas spisu jednoludniowego ludności Warszawy, dokonanego w d. 9 lutego r. 1882, mianowicie na tym, że pośród ludności **) zamieszkałej w Warszawie (t. j. nie licząc osób czasowo przyjezdnych i wojska) okazało się, iż na 181362 osoby płci męskiej umiało czytać i pisać 94868 mężczyzn, a na 201602 osoby płci żeńskiej umiało czytać i pisać 80664 kobiety, to należy naprzód wyznaczyć, ile na pewną tę samą liczbę osób, czyto płci żeńskiej, czy też męskiej, przypada umiejących czytać i pisać. I w takim wyrachowaniu, jako owę stałą liczbę przyjmujemy zwykle liczbę 100. Znajdziemy więc (§ 21, us. 13), rozwiązując następujące zadania na regułę procentu:

$$\begin{array}{r} 181362 \text{ m.} \text{---} 94868 \text{ m.} \\ 100 \text{ ,,} \text{---} x \text{ ,,} \\ \hline x = \frac{94868 \times 100}{181362} = 52, \end{array} \quad \begin{array}{r} 201602 \text{ k.} \text{---} 80664 \text{ k.} \\ 100 \text{ ,,} \text{---} x \text{ ,,} \\ \hline x = \frac{80664 \times 100}{201602} = 40, \end{array}$$

że w Warszawie pośród mężczyzn jest 52%, a pośród kobiet jest 40% umiejących czytać i pisać, tak iż stosunek rozpowszechnienia

*) Złacińska: «pro cento», od sta.

**) Wraz z dziećmi.

umiejętności czytania i pisania pośród mężczyzn i pośród kobiet w Warszawie ¹⁾ jest 52 : 40, czyli 13 : 10.

2. Najczęściej z zadaniami na regułę procentu spotykamy się przy różnych obrotach pieniężnych, dokonywanych przez przemysłowców, kapitalistów i handlujących tak między sobą, jak i z innymi osobami.

Weźmiemy naprzód pod uwagę zadania, w których nie ma się względu na przeciąg czasu, w jakim ów obrót się dokonywa. Wtedy do zadania wchodzi:

kapitał pewien,

100 jednostek kapitału,

procent (t. j. zarobek, strata, wynagrodzenie i t. p. od 100 jednostek kapitału) i

kwota pieniężna, której stosunek do procentu jest równy stosunkowi owego kapitału do 100 jego jednostek. Nazywają ją zwykle również «procentem» (rozumiejąc przez to: procent od całego kapitału), rzadziej zaś «procentami». Od niejakiego jednak czasu dość często mówią także «odsetki» *); tego wyrazu będziemy tu używali. (¹)odsetki więc dane lub szukane są jedną wartością téjże wielkości, której drugą wartością jest procent, t. j. procent jest szczególną wartością odsetek, odpowiadającą 100 jednostkom kapitału.

Ponieważ odsetki od jakiegokolwiek kapitału przedstawiają kwotę, która powstaje, gdy procent pomnożymy przez tę samą liczbę, przez którą trzeba pomnożyć 100 jednostek kapitału, aby otrzymać wartość kapitału, od którego owe odsetki liczymy, przeto (§ 29, us. 2): *kapitał i odsetki są wielkościami wprost proporcjonalnymi względem siebie.*

Z powyższych czterech liczb jedna (t. j. 100 jednostek kapitału) jest stałą; w odpowiednich więc zadaniach może być niewiadomą jedna z trzech liczb pozostałych, t. j. mogą być niewiadome albo odsetki, albo procent, albo kapitał.

Jeżeli powiemy wogóle, że w kapitale jest k jednostek (takich samych jak w stałej liczbie 100 jednostek), że liczby wyrażające procent

¹⁾ Wyznaczywszy jeszcze np. dwie cyfry dziesiętne, otrzymamy dokładniej 52,31% i 40,01%; t. j. (por. odsyłacz na str. 195), iż na 10000 osób płci męskiej umie czytać i pisać 5231, a na 10000 osób płci żeńskiej umie czytać i pisać 4001.

Inne byłoby zadanie: jaki jest w Warszawie stosunek ilości mężczyzn, umiających czytać i pisać, do ilości kobiet, umiających czytać i pisać (94868 : 80664).

*) Używać więc tu będziemy: procent jako odpowiadający 100 jednostkom kapitału, a odsetki jako odpowiadające jakiegokolwiek ilości jednostek kapitału.

[Nie używamy tego wyrazu w liczbie pojedynczej «odsetka», mającego wtedy zastępować: procent. Mimo bowiem czynionych usiłowań, nie przyjęło się to, jako niezręczne w użyciu. Trudno wyraz procent zastąpić wyrazem odsetka, choćby w tak prostych wyrażeniach: oddał swój kapitał na 5 procent, zarobił na sprzedaży towaru 15 procent.]

i odsetki, są odpowiednio p i o jednostek (takich samych jak poprzednie), to te trzy zadania możemy ogólnie tak przedstawić:

$$\begin{array}{l} \text{A). } \frac{100}{k} \text{ — } p \\ \quad \quad \quad \underline{\quad \quad \quad} \\ \quad \quad \quad x \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{B). } \frac{k}{100} \text{ — } o \\ \quad \quad \quad \underline{\quad \quad \quad} \\ \quad \quad \quad x \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{C). } \frac{p}{o} \text{ — } 100 \\ \quad \quad \quad \underline{\quad \quad \quad} \\ \quad \quad \quad x \end{array}$$

Odsetki i kapitał są wielkościami wprost proporcjonalnymi. Z tych więc zadań wypada (§ 30, us. 2), że odpowiednio

$$\text{A). } x, \text{ t. j. } o = \frac{k \cdot p}{100}; \quad \text{B). } x, \text{ t. j. } p = \frac{100 \cdot o}{k}; \quad \text{C). } x, \text{ t. j. } k = \frac{100 \cdot o}{p}.$$

Z jednej którejkolwiek z tych odpowiedzi można wyprowadzić pozostałe dwie. Tak np. z pierwszej, według której: *odsetki równają się setnej części iloczynu kapitału i procentu* *), wypada, iż 100 razy powiększone odsetki przedstawiają iloczyn dwu czynników, z których jednym jest kapitał, innym zaś procent, a więc (§ 7, us. 5): *procent równa się 100 razy powiększonym odsetkom, podzielonym przez kapitał; kapitał równa się 100 razy powiększonym odsetkom, podzielonym przez procent* **). Np.

1). a. Kupiec kupił towaru za 280 rub., a sprzedając, miał zarobku 15%; ile na tym towarze zarobił?

$$\begin{array}{r} 100 \text{ rub. — } 15 \text{ rub.} \\ 280 \text{ „ — } x \text{ „} \\ \hline x = \frac{15 \cdot 280}{100} = 42. \end{array}$$

Odp. Zarobił na tym towarze 42 rub.

b. Kupiec na towarze, za który zapłacił 280 rub., zarobił 42 rub.; jaki ten zarobek przedstawia procent od kapitału wyłożonego na kupno owego towaru?

c. Kupiec na sprzedaży pewnego towaru zarobił 42 rub., które przedstawiają zarobku 15%; ile on za ten towar zapłacił?

2). Podobnie rozwiązalibyśmy np. zadania.

aa. Kupiec kupił towaru za 280 rub., a sprzedając, poniósł straty 15%; ile na tym towarze stracił?

bb. Kupiec na towarze, za który zapłacił 280 rub., stracił 42 rub.; jaki ta strata przedstawia procent od kapitału, wyłożonego na kupno owego towaru.

cc. Kupiec na sprzedaży pewnego towaru stracił 42 rub., które przedstawiają straty 15%; ile on za ten towar zapłacił?

*) T. j. liczba oderwana, wchodząca w wyrażenie odsetek, równa się setnej części iloczynu liczb oderwanych, wchodzących w wyrażenia danej wartości kapitału i danego procentu. I t. d.

**) Niema co tych wysłowień zapamiętywać: i bez tego bardzo łatwo każde takie zadanie rozwiązać.

3. Niekiedy w takich zadaniach, zamiast kapitału, od którego się liczą odsetki, występuje suma pieniężna, przedstawiająca albo *kapitał wraz z odsetkami*, albotóż *kapitał po potrąceniu z niego odsetek*.

1) Weźmy naprzód pod uwagę pierwszy z tych przypadków, t. j. kiedy w zadaniu jest dana suma pieniężna, przedstawiająca kapitał wraz z odsetkami. Np.

a. Kupiec, sprzedając towar za 322 rub., miał zarobku 15%; ile on na tym towarze zarobił?—Tu summa 322 rub. przedstawia kapitał, wyłożony na kupno towaru, wraz z zarobkiem, osiągniętym przy sprzedaży; a więc tej sumy drugą wartością nie będzie 100 rub., lecz 115 rub. Mamy więc tu zadanie:

115 rub. — 15 rub.	Tu 115 rub. i 322 rub. są wartościami sumy pié-
322 „ — x „	niężnej, złożonej z kapitału, proporcjonalnego
x = $\frac{15 \cdot 322}{115} = 42$.	względem odsetek, i odsetek. Jeżeli więc tę

sumę pieniężną (§ 6, us. 14) pomnożymy przez jakąkolwiek liczbę, to wskutek tego przez tę samą liczbę zostaną pomnożone odsetki; a zatym (§ 29, us. 3), ta *suma pieniężna, przedstawiająca kapitał wraz z odsetkami, i odsetki są wielkościami wprost proporcjonalnymi względem siebie*.—Odp. Zarobek wynosi 42 rub.

Z liczb tego zadania możemy utworzyć jeszcze zadania następujące:

b. Kupiec na towarze, który sprzedał za 322 rub., zarobił 42 rub.; jaki ten zarobek przedstawia procent od kapitału, wyłożonego na kupno owego towaru?

c. Kupiec na sprzedaży pewnego towaru zarobił 42 rub., które przedstawiają zarobek 15%; za ile on ten towar sprzedał?

Może tu być nadto *) zadanie:

115 rub. — 100 rub.	względem siebie. Zamiast więc rozwiązywać
322 „ — x „	zadanie a. i następnie znaleziony zarobek
x = $\frac{100 \cdot 322}{115} = 280$.	(42 rub.) odejmować od sumy danéj w za-

d. Kupiec na towarze, który sprzedał za 322 rub., zarobił 15%; za ile on ten towar kupił?—Rozumując taksamo, jak przy zadaniu a., doszlibyśmy do wniosku że *suma pieniężna, przedstawiająca kapitał wraz z odsetkami, i kapitał są wielkościami wprost proporcjonalnymi* (42 rub.) odejmować od sumy danéj w zadaniu, możemy wprost, ułożywszy zadanie obok wypisane **), rozwiązać je.

*) Zadanie: Kupiec za towar zapłacił 280 rub., a sprzedał go za 322 rub.; jaki procent od wyłożonego kapitału przedstawia zarobek, na sprzedaży towaru osiągnięty?, należy sprowadzić do zadania b., odejmując 280 rub. od 322 rub.

**) Taksamo moglibyśmy rozwiązać także zadanie odwrotne: Kupiec na towarze który kupił za 280 rub., zarobił 15%; za ile on ten towar sprzedał?

Widzimy więc, że rozwiązywanie powyższych zadań nie przedstawia trudności ¹⁾.

2). Weźmy teraz pod uwagę drugi ze wzmiankowanych przypadków, kiedy w zadaniu jest dana suma pieniężna, przedstawiająca *kapitał po potrąceniu z niego odsetek*.

aa. Kupiec, sprzedając towar za 238 rub., poniósł straty 15%; ile on na tym towarze stracił?—Ta suma 238 rub., przedstawia kapitał, wyłożony na kupno towaru, po potrąceniu z niego straty, poniesionej przy sprzedaży; a więc téj sumy drugą wartością nie będzie 100 rub., ale 85 rub. Mamy więc tu zadanie:

85 rub. — 15 rub.	Tu 85 rub, i 238 rub. są wartościami sumy
238 „ — x „	pieniężnej powstałej z kapitału, proporcjonalnego
$x = \frac{15 \cdot 85}{238} = 42.$	względem odsetek, po potrąceniu
	z niego tych odsetek. Jeżeli więc tę sumę pi-

niężną (§ 6, us. 15) pomnożymy przez jakąkolwiek liczbę, to wskutek tego przez tę samą liczbę zostaną pomnożone odsetki; a zatem (§ 29, us. 3) ta *suma pieniężna, przedstawiająca kapitał po potrąceniu odsetek, i odsetki są wielkościami wprost proporcjonalnymi względem siebie*.— Odp. Zarobek wynosi 42 rub.

Z liczb tego zadania możemy utworzyć jeszcze zadania następujące:

bb. Kupiec na towarze, który sprzedał za 238 rub., stracił 42 rub.; jaki ta strata przedstawia procent od kapitału, wyłożonego na kupno owego towaru?

cc. Kupiec na sprzedaży pewnego towaru stracił 42 rub., które przedstawiają straty 15%; za ile on ten towar sprzedał?

Może tu być nadto *) zadanie:

dd. Kupiec na towarze, który sprzedał za 238 rub., stracił 15%; za ile on ten towar kupił?—Rozumując taksamo, jak przy zadaniu aa., doszlibyśmy do wniosku, że *suma pieniężna, przedstawiająca kapitał po potrąceniu z niego odsetek, i kapitał są wielkościami wprost proporcjo-*

¹⁾ Procent w tego rodzaju zadaniach niektórzy od dość już dawna nazywają procentem «na sto» (niemiecka: auf hundert), co rodzi w uczących się myśl, jakgdyby to było coś innego, niż procent od sta. Tymczasem różnica tych zadań od zadań w us. 2 polega nie na różnicy w pojmowaniu procentu, lecz na tym, czy do zadania wchodzi kapitał, czy też kapitał wraz z odsetkami. Dlatego, jeżeli idzie o rozróżnianie tych zadań, to lepiej je scharakteryzujemy, gdy je rozróżnimy według tego, czy w nich mamy rozumieć sam *kapitał*, czy też *kapitał z odsetkami* (odsetki zaś tak w jednym jak w drugim zadaniu przedstawiają zawsze kwotę, powstałą z obliczenia procentu od sta każdego).

*) Zadanie: Kupiec za towar zapłacił 280 rub., a sprzedał go za 238 rub.; jaki procent od wyłożonego kapitału przedstawia strata, przy sprzedaży tego towaru poniesiona?, należy sprowadzić do zadania bb., odejmując 238 rub. od 280 rub.

85 rub. — 100 rub.

238 „ — „ „

$$x = \frac{100 \cdot 238}{85} = 280.$$

nalnymi względem siebie. Zamiast więc rozwiązywać zadanie aa. i następnie znaleźć stratę (42 rub.) dodawać do sumy danej w zadaniu, możemy wprost, ułożywszy zadanie obok wypisane *), rozwiązać je.

Widzimy więc, że i rozwiązywanie powyższych zadań nie przedstawia trudności ¹⁾).

Rozwiążmy jeszcze następujące zadanie złożone:

Jaką cenę powinien naznaczyć kupiec hurtowy za funt towaru, który go kosztuje 2 rub., aby zarobił na nim 20% od ceny kosztu i mógł kupcom detalicznym dać ustępstwa (rabatu) 20% od ceny osiąganęj przy sprzedaży. Rozwiązując tu kolejno zadania **):

100 kop. — 120 kop.

200 „ — „ „

$$x = 240,$$

80 kop. — 100 kop.

240 „ — „ „

$$x = 300,$$

znajdujemy naprzód, że cena funta, w którejby się mieściło zarobku 20% rachowanego od ceny kosztu, a więc cena, po której kupiec hurtowy oddaje detalicznemu funt tego towaru, wynosi 2 rub. i 40 kop., a następnie, że cena, osiągnana przy sprzedaży przez kupca detalicznego, z której po ustępie 20% pozostawałoby 2 rub. i 40 kop., wynosi 3 rub. Należy więc funt tego towaru sprzedawać w handlu detalicznym po 3 ruble.

*) Taksamo moglibyśmy rozwiązać także zadanie odwrotne: Kupiec na towarze, który kupił za 280 rs., stracił 15%; za ile on ten towar sprzedał?

1) Procent w tego rodzaju zadaniach niektórzy odniedawna nazywają procentem «w stu», lub «w sto» (również niemiecka: in hundred), o czym można zrobić podobną uwagę, jak na str. 336 o t. z. procencie «na sto». Chcąc wyróżnić te zadania, lepiej je scharakteryzujemy, mówiąc, że w nich mamy *kapitał po potrąceniu odsetek* (odsetki zaś przedstawiają zawsze kwotę, która powstaje z procentu *od sta*, t. j. od wszystkich setek całego kapitału).

[Sądzę, że nie tracimy, obywając się, podobnie, jak np. Francuzi, bez dziwnych wyrażeń: procent na sto, procent w stu, obliczam procent w stu i t. d. (dziwacznych dlatego, że sam wyraz procent znaczy: od sta), tymwięcej, że rzecz daleko jaśniej się przedstawi, gdy zamiast tego zaznaczać będziemy wyraźnie, iż owę sumę uważamy nie jako kapitał, lecz odpowiednio jako kapitał z odsetkami, lub kapitał po potrąceniu odsetek. Będzie to nadto zgodne z tym, że w rzeczywistości procent jest tylko od sta; używanie zaś wyrażeni bałamutnych: procent na sto, procent w stu może wyjść niekiedy na szkodę interesanta, nie rozumiejącego, że tu idzie nie o inne pojmowanie procentu, lecz właściwie o inne uważanie owej sumy pieniężnej, do czego przyczynia się jeszcze i to, że używający owych nazw dziwnych, kapitałem także niekiedy nazywają kapitał z odsetkami, lub kapitał po potrąceniu odsetek].

***) Można by także, rozwiązawszy zadanie (A.):

100 kop. — 20 kop.

200 „ — „ „

$$x = 40,$$

znaleziono 40 kop. dodać do 200 kop., a następnie, rozwiązawszy zadanie (takie jak wyżej aa.):

80 kop. — 20 kop.

240 „ — „ „

$$x = 60,$$

znaleziono 60 kop. dodać do 240 kop. Otrzymamy więc 3 ruble.

4. Z tego, cośmy tu (us. 1—3) mówili, wypada, że, mając zadanie na obliczanie odsetek, należy się przedewszystkim nad tym zastanowić, czy suma dana w zadaniu przedstawia kapitał, czy kapitał z odsetkami, czytóż kapitał po potrąceniu odsetek.

Aby wykazać, jaka pod tym względem zachodzi różnica, przypuścimy, że od 100 jednostek kapitału otrzymujemy jako odsetki 8 jednostek; wtedy mówimy, że mamy 8% od kapitału. Jeżelibyśmy te 100 jednostek uważali jako kapitał wraz z odsetkami, któreto odsetki wynoszą 8 takichże jednostek, to ta suma 100 jednostek składałaby się

92 ——— 8 z 92 jednostek kapitału i 8 jednostek odsetek. Chcąc
 100 ——— x się tu dowiedzieć: jaki procent przedstawia 8 jedno-
 $x = \frac{8 \cdot 100}{92} = 8 \frac{16}{23}$ stek odsetek od 92 jednostek kapitału, mielibyśmy
 zadanie B. us. 2-go, które rozwiązując, znaleźliby-

śmy, że: 8 jednostek odsetek od 92 jednostek kapitału przedstawia 8 $\frac{16}{23}$ % od kapitału.—Jeżelibyśmy zaś owe 100 jednostek uważali jako kapitał, pozostały po odtrąceniu odsetek, któreto odsetki wynoszą 8 takichże jednostek, to ta suma 100 jednostek byłaby różnicą między kapitałem 108 jednostek i 8 jednostkami odsetek.

108 ——— 8
 100 ——— x
 $x = \frac{8 \cdot 100}{108} = 7 \frac{11}{27}$ Chcąc się tu dowiedzieć: jaki procent przedstawia
 8 jednostek odsetek od 108 jednostek kapitału, mie-
 libyśmy również zadanie B. us. 2-go i znaleźlibyśmy,

że: 8 jednostek odsetek od 108 jednostek kapitału
 przedstawia $7 \frac{11}{27}$ % od kapitału.

W ostatnim np. zadaniu ustępu poprzedzającego 20% od ceny, osiąganey przy sprzedaży przez kupca detalicznego, przedstawia jednocześnie dla niego 25% zarobku od ceny kosztu (t. j. od kapitału, wyłożonego przezeń na kupno funta owego towaru).

5. Jeżeli w zadaniu, w którym odsetki zależą już wprawdzie od przeciągu czasu, za jaki są liczone, przeciąg czasu pozostaje ten sam, nie zmienia się, to zadanie takie sprowadza się oczywiście do zadań poprzednio rozważanych.

Np. Jaki procent rocznie będzie miał ten, kto kupi pięcioprocentowe papiéry publiczne według kursu 84 za 100? [Tu wyraz «pięcioprocentowe» oznacza, że owe papiéry zawsze przynoszą rocznie 5 jednostek «gotówką» od 100 jednostek nominalnej (t. j. wypisanej na nich) wartości; «kurs za 100» oznacza, po jakiej cenie (gotówką) można nabyć każde 100 jednostek nominalnej wartości.]—Wyłożone tu na ich kupno każde

$$\begin{array}{r}
 84 \text{ ——— } 5 \\
 100 \text{ ——— } x \\
 \hline
 x = \frac{5 \cdot 100}{84} = 5 \frac{20}{21}
 \end{array}$$

84 jednostki przyniosą rocznie odsetki 5 jednostek. Mamy więc tu zadanie B. us. 2-go. Rozwiązawszy je, znajdziemy, że nabywca tych papierów będzie miał $5 \frac{20}{21} \%$ od kapitału, wyłożonego na ich kupno.

6. Zadania na regułę procentu, w których się bierze pod uwagę przeciąg czasu, w ciągu którego dokonywa się pewnego obrotu sumą pieniężną, odnoszą się albo do kapitałów, umieszczonych na czas dłuższy w pewnym przedsiębiorstwie, albotóż do wynagrodzenia, które pobiera osoba, udzielająca swego kapitału (wierzyciel), od osoby, biorącej ów kapitał (dłużnika) na pewien czas, za korzystanie przez ten czas z owego kapitału.

Przy obrachunkach tego rodzaju przyjmuje się za podstawę wysokość dochodu od 100 jednostek kapitału zwykle za przeciąg 1 roku*), co się nazywa «stopą procentu». Zatem stopa procentu jest to samo, co procent (us. 2) za przeciąg jednego roku.—Na oznaczenie stopy procentu używa się również znaku $\%$, tak iż np. 5% oznaczać będzie w takich zadaniach toż samo, co «5 jednostek dochodu od 100 jednostek kapitału za 1 rok».

Całkowity dochód od pewnego kapitału za pewien przeciąg czasu nazywają «procentem», «procentami», albo «odsetkami». Używać tu będziemy tego ostatniego wyrazu. (Stopa procentu jest wartością szczególną odsetek, odpowiadającą 100 jednostkom kapitału umieszczonym na 1 rok.)

Jeżeli mamy np. zadanie: Jakie odsetki przyniesie w ciągu 3 lat kapitał 3000 zł. umieszczony po 5% ?, to moglibyśmy naprzód obliczyć (us. 5, 2) odsetki za jeden rok (150 zł.), a następnie, mnożąc znaną liczbę przez 3, otrzymalibyśmy, jako odsetki od owego kapitału za 3 lata, 450 zł.

Widzimy więc, że do tego rodzaju zadań wchodzi trzy wielkości: kapitał, ilość lat i odsetki. Tak w powyższym zadaniu dwiema wartościami kapitału były: 3000 zł. i 100 zł.; dwiema wartościami ilości lat: 3 lata i 1 rok; dwiema wartościami odsetek: 450 zł. i 5 zł. Jedne odpowiadające sobie wartości tych trzech wielkości były tu: 100 zł., 1 rok i 5 zł. a drugie: 3000 zł., 3 lata i 450 zł.

Zważmy, że wogóle (por. § 31. us. 1) w ciągu tego samego czasu od większego kapitału otrzymamy tyle razy więcej odsetek, ile razy kapitał jest większy, tak iż możemy powiedzieć, że jeżeli wtedy (t. j.

*) Niekiedy, przy rachunkach szczególnych (np. kary administracyjne za opóźnienie opłaty podatków, rachunki lichwiarskie i t. d.), za przeciąg 1 miesiąca.

kiedy przeciąg czasu pozostaje ten sam) pomnożymy kapitał przez pewną jakąkolwiek liczbę, to odpowiadające mu odsetki zostaną wskutek tego przez tę samą liczbę pomnożone, a więc (§ 29, us. 3): *kapitał i odsetki są wielkościami wprost proporcjonalnymi względem siebie*. — Podobnie, od tego samego kapitału za większą ilość lat otrzymamy tyle razy więcej odsetek, ile razy liczba lat jest większa. Możemy powiedzieć, że jeżeli ilość lat pomnożymy przez pewną jakąkolwiek liczbę, to odsetki (od niezmienionego kapitału) zostaną wskutek tego przez tę samą liczbę pomnożone, a więc: *ilość lat i odsetki są wielkościami wprost proporcjonalnymi względem siebie*. — Nakoniec, też same odsetki od większego kapitału otrzymujemy za tyle razy mniejszą ilość lat, ile razy kapitał jest większy. Możemy powiedzieć, że jeżeli kapitał zostanie przez pewną jakąkolwiek liczbę pomnożony, to ilość lat (w ciągu których mają być otrzymane też same odsetki) zostanie wskutek tego przez tę samą liczbę podzielona, a więc: *kapitał i ilość lat są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi względem siebie*.

Z sześciu liczb, które, jak widzieliśmy, wchodzą do takiego zadania, dwie (t. j. 100 jednostek kapitału i 1 rok) są stałe; w odpowiednich więc zadaniach może być niewiadoma jedna z czterech liczb pozostałych, t. j. mogą być niewiadome albo odsetki, albo stopa procentu, albo kapitał, alboważ ilość lat.

Jeżeli powiemy wogóle, że w kapitale jest k jednostek (takich samych jak w stałej liczbie 100 jednostek), że liczby, wyrażające stopę procentu i odsetki, są odpowiednio s i o jednostek (takich samych jak poprzednie), i że jest l lat, to te cztery zadania możemy ogólnie tak przedstawić:

$$\text{A). } \begin{array}{cccc} \text{wpr.} & & \text{wpr.} & \\ 100 & \text{—} & l & \text{—} & s \\ & & k & \text{—} & l & \text{—} & x \end{array}$$

$$\text{B). } \begin{array}{cccc} \text{wpr.} & & \text{wpr.} & \\ k & \text{—} & l & \text{—} & o \\ 100 & \text{—} & l & \text{—} & x \end{array}$$

$$\text{C). } \begin{array}{cccc} \text{odw.} & & \text{wpr.} & \\ 1 & \text{—} & s & \text{—} & 100 \\ & & l & \text{—} & o & \text{—} & x \end{array}$$

$$\text{D). } \begin{array}{cccc} \text{odw.} & & \text{wpr.} & \\ 100 & \text{—} & s & \text{—} & 1 \\ & & k & \text{—} & o & \text{—} & x \end{array}$$

Wyznaczywszy na mocy tego, cośmy tu wyżej powiedzieli, które wielkości są wprost, a które odwrotnie proporcjonalne względem tój

wielkości, której jednej wartości szukamy, otrzymujemy *) odpowiednio (§ 31, us. 2):

$$\begin{array}{ll} \text{A). } x, \text{ t. j. } o = \frac{k \cdot l \cdot s}{100}; & \text{B). } x, \text{ t. j. } s = \frac{100 \cdot o}{k \cdot l}; \\ \text{C). } x, \text{ t. j. } k = \frac{100 \cdot o}{s \cdot l}; & \text{D). } x, \text{ t. j. } l = \frac{100 \cdot o}{k \cdot s}. \end{array}$$

Z jednej którejkolwiek z tych odpowiedzi **) można wyprowadzić pozostałe trzy. Tak np. z pierwszej, według której: *odsetki równają się setnej części iloczynu kapitału, ilości lat i stopy procentu ***),* wypada, iż 100 razy powiększone odsetki przedstawiają iloczyn trzech czynników, z których jednym jest kapitał, innym ilość lat, pozostałym zaś stopa procentu. Uważając w tym iloczynie trzech czynników iloczyn dwu z nich jako wyrażenie jednej liczby, otrzymamy stąd (§ 7, us. 5): *stopa procentu równa się 100 razy powiększonym odsetkom, podzielonym przez iloczyn kapitału i ilości lat; kapitał równa się 100 razy powiększonym odsetkom, podzielonym przez iloczyn stopy procentu i ilości lat; ilość lat równa się sto razy powiększonym odsetkom, podzielonym przez iloczyn kapitału i stopy procentu ****).* Np.

Ile przyniosą w ciągu 3 lat 3000 zł., umieszczone po 5%?

wpr.	odwr.	
100 zł.	1 r.	5 zł.
3000 „	3 l.	x „
$x = \frac{5 \times 3000 \times 3}{100} = 450.$		

W ciągu tego samego czasu od większego kapitału i t. d. (jak wyżej), a więc kapitał i odsetki są wielkościami wprost proporcjonalnymi; od tego samego kapitału i t. d., a więc ilość lat i odsetki są wielkościami wprost

proporcjonalnymi. A zatem (§ 31, us. 2) $x = 450$, t. j. odsetki wyniosą 450 zł.

*) Można by te rozwiązania wyprowadzić wprost zapomocą sprowadzenia do jedności (§ 31, us. 4):

<p>A). 100 j. ——— 1 r. ——— s</p> <p style="margin-left: 40px;">1 ——— 1 ——— $\frac{s}{100}$</p> <p style="margin-left: 40px;">k ——— l ——— $\frac{s \cdot l \cdot k}{100} = o;$</p>	<p>B). k ——— l ——— o</p> <p style="margin-left: 40px;">1 ——— 1 ——— $\frac{o}{k \cdot l}$</p> <p style="margin-left: 40px;">100 ——— 1 ——— $\frac{o \cdot 100}{k \cdot l} = s;$</p>
<p>C). s ——— 1 r. ——— 100</p> <p style="margin-left: 40px;">1 ——— 1 ——— $\frac{100}{s}$</p> <p style="margin-left: 40px;">o ——— l ——— $\frac{100 \cdot o}{s \cdot l} = k;$</p>	<p>D). 100 ——— s ——— 1 r.</p> <p style="margin-left: 40px;">1 ——— 1 ——— $\frac{100}{s}$</p> <p style="margin-left: 40px;">k ——— o ——— $\frac{100 \cdot o}{s \cdot k} = l.$</p>

**) Gdy w pierwszych trzech opuścimy czynnik l, to one staną się takimi samymi, jak otrzymane w us. 2-im, gdyż wtedy s oznacza to samo, co tam p.

***) T. j. liczba oderwana, wchodząca w wyrażenie odsetek i t. d. (por. str. 334).

****) Dobrze jest umieć przeczytać powyższe ogólnie wypisane rozwiązania, ale niema co tych wyśłowień zapamiętywać: lepiej, aby uczniowie na każdym tego rodzaju zadaniu przeprowadzali odpowiednie rozumowanie.

wpr.	wpr.	
3000 zł. —	3 l. —	450 zł.
100 „ —	1 r. —	x „

$$x = \frac{450 \times 100}{3000 \times 3} = 5.$$

odw.	wpr.	
1 r. —	5 zł. —	100 zł.
3 l. —	450 „ —	x „

$$x = \frac{100 \times 450}{3 \times 5} = 3000.$$

odw.	wpr.	
100 zł. —	5 zł. —	1 r.
3000 „ —	450 „ —	x l.

$$x = \frac{100 \times 450}{3000 \times 5} = 3.$$

b. Według jakiej stopy umieszczono 3000 zł., które w ciągu 3 lat przyniosły 450 zł?

Odp. Umieszczono po 5%.

c. Jaki kapitał, umieszczony po 5%, przynosi w ciągu 3 lat 450 zł?

Odp. 3000 zł.

d. W ciągu ilu lat 3000 zł., umieszczone po 5%, przynoszą 450 zł.?

Odp. w ciągu 3 lat.

7. Jak widzieliśmy (us. 6), odsetki od tegoż samego kapitału są wprost proporcjonalne względem ilości lat, kapitał zaś, przynoszący też same odsetki, jest odwrotnie proporcjonalny względem ilości lat. Rozważmy, czy będzie można zaznaczyć podobną zależność między sumą pieniężną, przedstawiającą czyto kapitał wraz z odsetkami, czytóż kapitał po potrąceniu z niego odsetek, a ilością lat, za które te odsetki są liczone.

Weźmy najprostszy przykład, kiedy mamy ten sam kapitał; np. 200 zł. umieszczone po 5% przedstawiają wraz z odsetkami po roku 210 zł., a po 3 latach 230 zł. Przy zmieniającej się ilości lat odsetki od pewnego kapitału się zmieniają w tymże samym stosunku, a więc drugi składnik sumy 200 zł. + 10 zł. wskutek tego, że ilość lat została pomnożoną przez 3, został również przez 3 pomnożony (200 zł. + 30 zł.), pierwszy zaś składnik nie uległ zmianie. Zatem (por. § 6, us. 14) suma 200 zł. + 10 zł. nie została jednocześnie pomnożoną przez 3, nie jest więc ona proporcjonalną do ilości lat. Jeżeli zaś mamy sumy pieniężne, powstające z różnych kapitałów przez dołączenie odsetek, rachowanych według tej samej stopy za niejednakową ilość lat, np.

100 zł. —	1 r. —	105 zł.
200 „ —	3 l. —	230 „

to tu nie możemy powiedzieć, aby z tego samego kapitału (§ 29, us. 10; § 31, us. 1) w przeciągu czasu np. 2 razy większego miała powstać wskutek dołączenia do niego odsetek suma pieniężna 2 razy większa, jakśmy to

tylkoco widzieli (nie powstanie też suma 2 razy mniejsza; § 29, us. 7). Nadto kapitał ulega tu zmianie niezależnie od ilości lat, a drugie składniki w sumach: 100 zł. + 5 zł. i 200 zł. + 30 zł. zależą nietylko od ilości lat, ale także od kapitałów (100 zł. i 200 zł.). W żadnym więc razie, w skutek pomnożenia ilości lat przez pewną liczbę, suma pieniężna, przedstawiająca kapitał wraz z odsetkami, nie zostaje w skutek tego przez tę liczbę pomnożona (ani, oczywiście, podzielona; § 29, us. 7).—Toż samo można powiedzieć o sumie pieniężnej, przedstawiającej kapitał po potrąceniu odsetek.—Zatym: *suma pieniężna, przedstawiająca czyto kapitał wraz z odsetkami, czyto kapitał po potrąceniu odsetek, nie jest ani wprost, aniteż odwrotnie proporcjonalną względem ilości lat.* Wskutek tego (zob. us. 3 a., d., aa., dd.) *suma pieniężna, przedstawiająca czyto kapitał wraz z odsetkami, czyteż kapitał po potrąceniu z niego odsetek, jest wtedy tylko (wprost) proporcjonalna względem kapitału, albo względem odsetek, kiedy odsetki są liczone za tenże sam przeciąg czasu.*

Dlatego, jeżeli mamy np. zadanie ¹⁾:

Jaki kapitał, umieszczony po 5%, przedstawi po 3 latach wraz z odsetkami 3450 zł.?

wpr.			
105 zł. —	1 r. —	100 zł.	
3450 „ —	3 l. —	x „	

to nie możemy go wprost rozłożyć na dwa zadania na regułę trzech (§ 31, us. 1; § 29, us. 10), gdyż wprawdzie w ciągu tej samej ilości lat kapitał

wraz z odsetkami jest wprost proporcjonalny do samego kapitału, lecz taż sama suma pieniężna, powstała z dołączenia odsetek do kapitału, nie powstanie w ciągu np. 2 razy większej ilości lat ani z 2 razy większego, aniteż z 2 razy mniejszego kapitału. Z tego właśnie powodu, że tu wchodzi w rozważanie odsetki za różną ilość lat dołączane do kapitału, również *ilość lat nie jest w takim zadaniu ani wprost, ani odwrotnie proporcjonalną względem kapitału.* Tak więc, jak powyżej, wypisane zadanie nie jest bezpośrednio zadaniem na regułę trzech złożoną (§ 31).

Aby to zadanie rozwiązać, przekształcimy je na takie, w którym odsetki byłyby liczone za ten sam przeciąg czasu, mianowicie uprzednio wyliczymy, jaką sumę przedstawi 100 zł., umieszczone po 5%, po 3 latach.

wpr.	Odsetek od 100 zł. po 5% w ciągu 3 lat zbierze się
1 r. — 5 zł.	15 zł.; a więc 100 zł. wraz z odsetkami po 5% za 3
3 l. — x „	lata przedstawi sumę 115 zł.
x = 15.	Teraz możemy już rozwiązać zadanie przekształcone:

¹⁾ Z możliwych takich zadań podane tu jest to, w którym rozumowanie zdaje się przedstawiać najwięcej trudności dla uczącego się.

$$\begin{array}{r} 115 \text{ zł.} \text{ --- } 100 \text{ zł.} \\ 3450 \text{ ,, --- } x \text{ ,,} \\ \hline x = \frac{100 \times 3450}{115} = 3000. \end{array}$$

Odp. Ów kapitał jest 3000.

W taki sam sposób postępować należy z innymi zadaniami podobnymi.

8. Mówiliśmy dotąd (us. 6, 7) o przeciągu czasu wyrażonym jako pewna ilość lat, t. j. tysamym przyjmowaliśmy, że jeżeli w wyrażenie owego czasu, w przeciągu którego kapitał przynosi odsetki, wchodzi albo miesiące, albo tygodnie, albo dni, to przedstawiamy je w ułamku roku. Zauważyć przytym należy, że, przy obliczaniu odsetek od kapitałów umieszczanych w przedsiębiorstwach lub pożyczanych, prawie wszędzie na kontynencie Europy przyjmuje się miesiące wszystkie jako mające tę samą ilość dni, a więc przedstawiające tę samą część roku, tak iż każdy miesiąc jest 12-tą częścią roku; podobnie przyjmuje się każdy tydzień jako 52-gą część roku, każdy dzień jako 30-tą część miesiąca, czyli 360-ą część roku *).

Jeżeli więc mamy np. zadanie: Jakie odsetki przyniesie kapitał

$$\begin{array}{r} \text{wpr.} \quad \quad \text{wpr.} \\ 100 \text{ zł.} \text{ --- } 1 \text{ r.} \text{ --- } 5 \text{ zł.} \\ 3000 \text{ ,,} \text{ --- } 3 \frac{1}{6} \text{ r.} \text{ --- } x \text{ ,,} \\ \hline x = \frac{5 \times 3000 \times 19}{6 \times 100} = 475. \end{array}$$

wyniosą 475 zł.—Moglibyśmy jednak nieco inaczej tu postąpić. Zamiast mówić, że 5 zł. jest odsetkami

$$\begin{array}{r} \text{wpr.} \quad \quad \text{wpr.} \\ 100 \text{ zł.} \text{ --- } 12 \text{ m.} \text{ --- } 5 \text{ zł.} \\ 3000 \text{ ,,} \text{ --- } 38 \text{ ,,} \text{ --- } x \text{ ,,} \\ \hline x = \frac{5 \times 3000 \times 33}{100 \times 12} = 475. \end{array}$$

od 100 zł. za 1 rok, możemy powiedzieć: 5 zł. jest odsetkami za 12 miesięcy. Wtedy wypadnie wyrazić (§ 28, us. 2) również 3 l. + 2 m. jako 38 m.

Odp. Należy się 52 $\frac{1}{12}$ złotego.,

$$\begin{array}{r} \text{wpr.} \quad \quad \text{wpr.} \\ 100 \text{ zł.} \text{ --- } 1 \text{ r.} \text{ --- } 5 \text{ zł.} \\ 3000 \text{ ,,} \text{ --- } \frac{25}{72} \text{ r.} \text{ --- } x \text{ ,,} \\ \hline x = \frac{5 \times 3000 \times 25}{72 \times 100} = 52 \frac{1}{12}. \end{array}$$

lubtóż, wyrażając przeciąg czasu albo w miesiącach, albotóż w dniach, jedno z dwu wyliczeń:

*) Zatem 1 miesiąc + 6 dni = 0,1 roku; 2 m. + 12 dni = 0,2 roku i t. d.

wpr. 100 zł. —	wpr. 12 m. —	5 zł.		wpr. 100 zł. —	wpr. 360 d. —	5 zł.
3000 „ —	4 $\frac{1}{6}$ „ —	x „		3000 „ —	125 „ —	x „
$x = \frac{5 \times 3000 \times 25}{6 \times 100 \times 12} = 52 \frac{1}{2}$.				$x = \frac{5 \times 3000 \times 125}{100 \times 360} = 52 \frac{1}{2}$.		

Taksamo postępowałibyśmy przy innych (us. 6 B., C., D.; us. 7) zadaniach podobnych.

9. Gdy idzie o wyliczenie odsetek za pewną ilość dni, to często używają dogodniejszego sposobu, który tu wyłożymy.

Jeżeli ilość dni, za które mamy obliczyć odsetki o po $s\%$ od kapitału k , oznaczymy literą d , to we wzorze A us. 6-go, zamiast ilości lat l możemy napisać $\frac{d}{360}$ i mieć będziemy

$$o = \frac{k \cdot d \cdot s}{360 \cdot 100}, \text{ czyli } o = \frac{k \cdot d}{\left(\frac{36000}{s}\right)}.$$

Aby więc wyznaczyć owe odsetki, należy ilość jednostek kapitału pomnożyć przez ilość dni, a ten iloczyn podzielić przez iloraz z podzielenia liczby 36 000 przez stopę procentu. Iloczyn ilości jednostek kapitału przez ilość dni, za które mamy obliczyć odsetki, jest niezależny od stopy procentu; nazwiemy go liczbą procentującą¹⁾. Liczba zaś, przez którą należy podzielić liczbę procentującą, aby otrzymać szukane odsetki, t. j. liczba $36\,000 : s$, zależna tylko od stopy procentu, a tym samym stała dla oznaczonej stopy procentu, nazywa się dzielnikiem odpowiadającym stopie procentu.

Z tego wypada, że dzielnik, odpowiadający stopie s , winien przedstawiać kapitał, który po $s\%$ w ciągu 1 dnia przynosi 1 odsetek²⁾. Rzeczywiście, jeżeli w wypisanym tu wzorze przyjmiemy $o = 1$ i $d = 1$, to otrzymamy

$$1 = \frac{k \cdot s}{36\,000}, \text{ skąd } k = \frac{36\,000}{s}.$$

Ponieważ liczba 36 000 jest podzielna przez czynniki pierwsze 2, 3 i 5, więc dla wielu wartości s dzielnik jest liczbą całkowitą; dla niektórych on oczywiście pozostanie ułamkowym. Tak np.

$s =$	1,	1,5,	2,	2,5,	3,	3,5,	4,	4,5,
	dziel. 36000, 24000, 18000, 14400, 12000, (72000:7), 9000, 8000,							
$s =$	5,	5,5,	6,	6,5,	7,	7,5,	8,	
	dziel. 7200, (72000:11), 6000, (72000:13), (36000:7), 4800, 4500.							

¹⁾ Francuzi nazywają go wprost: liczbą (nombre).

²⁾ Odwrotność dzielnika, odpowiadającego stopie s , przedstawia odsetki od jednostki kapitału za jeden dzień.

Weźmy np. zadanie: obliczyć odsetki od kapitału 4200 rub. za przeciąg czasu od 18-go października do 6-go marca roku następnego po 5% i 5,5%. — Miesiące: listopad do lutego włącznie wyrazimy jako 30 dni $\times 4 = 120$ d.; dni zaś w październiku i marcu (jednej z dwu dat, według słusznego zwyczaju, nie włączamy) jest 18; razem 138 dni. Iloczyn $4200 \times 138 = 579600$ jest «liczbą procentującą», którą należy podzielić przez 7200, jeżeli chcemy obliczyć odsetki po 5%, podzielić zaś przez $\frac{72000}{11}$, czyli pomnożyć przez $\frac{11}{72000}$, jeżeli chcemy obliczyć odsetki po 5,5%. Wykonawszy więc

$$579600 : 7200 \quad \text{i} \quad (579600 \times 11) : 72000,$$

znajdziemy, że w pierwszym razie odsetki wyniosą 80 rub. i 50 kop.; w drugim zaś razie 88 rub. i 55 kop. (ostatnią liczbę można było otrzymać w ten sposób: wyliczyć odsetki po 5% i do nich dodać dziesiątą ich część).

10. PROCENT SKŁADANY. Jeżeli pewien kapitał jest tak umieszczony, że odsetki przypadające we właściwych terminach są do kapitału dołączane, a po każdym dołączeniu odsetki obliczają się od kapitału powiększonego o wszystkie poprzednio dołączone odsetki, to mówimy, że kapitał jest umieszczony na «procent składany» *), albo że odsetki są «kapitalizowane».

W takich warunkach umieszczone kapitały wznoszą się o odsetki zwykle albo corocznie, albo co półroczy. Różne zadania, odnoszące się do kapitałów, umieszczonych na procent składany, rozwiązują się bardzo dogodnie przy pomocy pewnych sposobów postępowania, których dostarcza algebrę; przy nauce więc algebry szczegółowiej zajmujemy się tymi zadaniami. Tu zaś przedstawimy tylko wyliczenie sumy piędznej, jaka się utworzy wskutek umieszczenia kapitału na procent składany w ciągu niedługiego przeciągu czasu. Np.

Jaka się utworzy suma z kapitału 20 000 rub., umieszczonego na procent składany po 6% w ciągu 4 lat, 4 miesięcy i 24 dni, jeżeli odsetki są dokładane corocznie?

Zważmy, że od 100 rub. w ciągu 1-go roku narośnie odsetek 6 rubli, tak że w ciągu roku 1-go ze 100 rubli utworzy się 106 rub. Ponieważ zaś kapitał wraz z odsetkami za ten sam przeciąg czasu jest wprost proporcjonalny do kapitału (us. 7), przeto łatwo wyliczymy kolejno, jaki się utworzy kapitał w ciągu 1-go, 2-go, 3-go i 4-go roku (§ 21, us. 13):

Jeżeli idzie o to, żeby wyraźnie zaznaczyć, że kapitał jest umieszczony nie na procent składany, to mówimy, że jest umieszczony na «procent zwykły».

*) Mówią, że wtedy liczy się «procent od procentu».

$$1) \quad \begin{array}{r} 100 \text{ rub.} \text{ — } 106 \text{ rub.} \\ 2000 \text{ " — } x \text{ "} \\ \hline x = \frac{106 \times 2000}{100} = 2120; \end{array}$$

$$2) \quad \begin{array}{r} 100 \text{ rub.} \text{ — } 106 \text{ rub.} \\ 2120 \text{ " — } x \text{ "} \\ \hline x = 2247,2; \end{array}$$

$$3) \quad \begin{array}{r} 100 \text{ rub.} \text{ — } 106 \text{ rub.} \\ 2247,2 \text{ " — } x \text{ "} \\ \hline x = 2382,03; \end{array}$$

$$4) \quad \begin{array}{r} 100 \text{ rub.} \text{ — } 106 \text{ rub.} \\ 2382,03 \text{ " — } x \text{ "} \\ \hline x = 2524,95. \end{array}$$

Następnie wypadnie obliczyć odsetki (zwykle) od 2524,95 rub. za 4 miesiące i 24 dni i dodać je do powyższej sumy; można także (us. 7), obliczywszy, ile się utworzy ze 100 rub. oddanych na 6% w ciągu 4 miesięcy i 24 dni, następnie oznaczyć odrazu szukaną sumę:

$$\begin{array}{r} 360 \text{ dni — } 6 \\ 144 \text{ " — } x \\ \hline x = 2,4; \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 \text{ — } 102,4 \text{ rub.} \\ 2524,95 \text{ — } x \text{ "} \\ \hline x = 2585,55. \end{array}$$

Odp. Utworzy się 2585 rub. i 55 kop. — [Jeżeli mamy pod ręką tablicę*), obejmującą wartości jednostki kapitału, umieszczonej na procent składany przy różnych stopach procentu a corocznym dokładaniu odsetek, to moglibyśmy tu łatwo znaleźć sumę, jaka się utworzy po upływie 4 lat, mnożąc 2000 rub. przez liczbę, która w tych tablicach odpowiada stopie 6% i 4 latom.]

Gdyby w powyższym zadaniu odsetki były dokładane nie corocznie, lecz co pół roku, to naprzód wypadłoby wykonać rachunek, podobny powyższemu, kolejno za 8 półroczy, przyjmując, że w każdym półroczu ze 100 rub. tworzy się 103 rub., a następnie uwzględnić owe 4 miesiące i 24 dni.

(Zadania arytmetyczne. § 31, 32.)

§ 33. REGUŁA ODTRĄCANIA PROCENTU (DYSKONTA).

1. Jeżeli chcemy przyspieszyć zrealizowanie sumy pieniężnej płatnej nie w chwili obecnej, lecz po pewnym dopiero przeciągu czasu, to, przekazując ją nabywcy, na rzecz jego ustępujemy z tej sumy pełną kwotę, która przedstawia odsetki według umówionej stopy procentu za cały przeciąg czasu, mający upłynąć do chwili wypłaty. Owe «odtrącanie procentu» z realizowanej sumy pieniężnej nazywa się «eskontem», albo «dyskontem»¹⁾ tej sumy pieniężnej.

Realizowanie sumy pieniężnej przed datą, w której ta suma jest płatną, dokonywa się zwykle wtedy, kiedy do terminu niewiele brak (mniej

*) Zob. «Zadania arytmetyczne» (§ 32).

¹⁾ Dawniej mówiono u nas «eskont» (escompte); od pewnego jednak czasu stanowczo przemaga wyraz «dyskont» (disconto), skąd: dyskontować, dyskontowy i t. d.

od roku). Dlatego zazwyczaj oblicza się ilość dni, mających upłynąć od *daty* realizowania takiej sumy do *daty*, w której ma być uiszczoną całościwie, t. j. do «terminu». Jedna z tych dwu dat (dni bieżących), według słusznego zwyczaju powszechnego, nie przyjmuje się w rachubę, a drugą datę uważa się jako dzień całkowity, wliczany do ogólnej ilości dni. Co się zaś tyczy wyliczenia ilości dni, pośrednich między tymi dwiema datami, to w rozmaitych krajach różne panują zwyczaje, które przepisy prawne uświęciły. U nas przyjmuje się, że przy tych wyliczeniach rok ma 360 dni, a każdy miesiąc *) roku ma dni 30. We Francyi np. przyjmuje się, że rok ma dni 360, a dni oddzielnych miesięcy wylicza się według rzeczywistej ilości dni w każdym z owych miesięcy; w Anglii zaś przyjmuje się, że rok ma 365 lub (przestępny) 366 dni, a miesiące tyle dni, ile one ich rzeczywiście mają. — Jeżeli jednak u nas na zobowiązaniu piśmiennym, za okazaniem którego we właściwym terminie suma ma być płatną, ów termin jest oznaczony w ten sposób: «za tyleto dni» (od daty wystawienia owego zobowiązania), to, chcąc oznaczyć ów termin jako datę, w której ma nastąpić wypłata, należy przyjmować w każdym miesiącu rzeczywistą ilość jego dni. Taksamo postępować należy w razie, gdy zobowiązanie zaciągnięte było na pewną ilość tygodni. —

Zadanie na obliczenie, ile trzeba potrącić z sumy pieniężnej, płatnej w pewnym terminie, przy realizowaniu jej według oznaczonej stopy procentu przed owym terminem, jest zadaniem na regułę potrącania procentu, czyli zadaniem na regułę dyskonta. Oczywiście, że możemy tu wyliczać, albo ile potrącić należy z owęj sumy realizowanej przed terminem, alboważ wprost, jaka jest wartość téj sumy w dniu jej realizowania.

2. Weźmy np. zadanie:

Ile należy zapłacić za weksel, wystawiony na 5 miesięcy w dniu 7-ym kwietnia r. 1884-ego na sumę 840-u rubli, dyskontując go po 6% w dniu 22-im maja r. 1884-ego?

Od 22-go maja do 7-go września tegoż roku jest 105 dni (t. j. 8 + 30 + 30 + 30 + 7, albo 9 + 30 + 30 + 30 + 6). Z sumy więc, napisanej na wekslu, mamy potrącić odsetki za 105 dni. Zatem w dniu dyskonta téj sumy odsetki są w nią włączone. Należy więc uprzednio (por. § 32, us. 7) obliczyć odsetki od 100 rub. za owe 105 dni:

$$\begin{array}{r} 360 \text{ dni} \text{ ——— } 6 \text{ rub.} \\ 105 \text{ " } \text{ ——— } x \text{ " } \\ \hline x = \frac{6 \times 105}{360} = 1,75. \end{array}$$

*) Połowa więc każdego miesiąca ma 15 dni. — [Por. § 32, us. 8, 9.]

Kupujący przeto weksel od każdych 100 rub., które płaci za weksel, powinien za przeciąg czasu do dnia wypłaty weksłu *), otrzymać odsetek 1,75 rub., tak iż za każde 100 rub., które płaci za weksel, powinien w dniu wypłaty otrzymać wyłożone 100 rub. i odsetek od nich 1,75 rub., t. j. razem 101,75 rub. Jeżeli więc za 101,75 rubla, płatne w terminie weksłu, czyli za 101,75 rubla napisane na wekslu, płaci (w dniu dyskonta) 100 rub., to ile ma zapłacić za 860 rubli napisane na wekslu? (§ 32, us. 7).

$$\begin{array}{r} 101,75 \text{ rub.} \text{ ——— } 100 \text{ rub.} \\ 860 \quad \text{„} \quad \text{—————} \quad x \quad \text{„} \\ \hline x = \frac{100 \times 860}{101,75} = 845,21. \end{array}$$

Odp. Za weksel należy zapłacić 845 rub. i 21 kop., czyli z napisanej na nim sumy należy potrącić 14 rub. i 79 kop.

3. W rzeczywistości nie wykonywa się dyskonta takim sposobem, jakiegośmy powyżej użyli.

Owe 1,75 rubla, przedstawiające odsetki od 100 rubli za 105 dni do terminu, potrąca się z każdych 100 rubli, napisanych na wekslu. Kupujący przeto weksel za każde 100 rub., napisane na wekslu, zapłaci 98,25 rub. Jeżeli więc za 100 rub., napisane na wekslu zapłaci 98,25 rub., to ile ma zapłacić za 860 rub.? (§ 32, us. 7)

$$\begin{array}{r} 100 \text{ rub.} \text{ ——— } 98,25 \text{ rub.} \\ 860 \quad \text{„} \quad \text{—————} \quad x \quad \text{„} \\ \hline x = \frac{98,25 \times 860}{100} = 844,95. \end{array}$$

Odp. Za weksel należy zapłacić 844 rub. i 95 kop., czyli należy z sumy, napisanej na wekslu, potrącić 15 rub. i 5 kop.

4. Sposób dyskontowania, wyłożony w us. 3-im, jest «sposobem handlowym», w przeciwstawieniu sposobowi, wyłożonemu w us. 2-im, który można nazwać »sposobem teoretycznym».

W sposobie handlowym potrąca się odsetki obliczone nie od sumy, wypłacanej w dniu dyskonta, lecz odsetki, które, *nie zważając na wypłacaną sumę*, oblicza się od sumy wypisanej na wekslu. Dlatego takie potrącanie procentu, jak również kwota tak potrącona nazywa się «dyskontem zewnątrz». W przeciwstawieniu temu, potrą-

*) Dyskontując ten weksel tegoż dnia we Francyi, należałoby tu wyliczyć

$$\begin{array}{r} 360 \text{ dni} \text{ ——— } 6 \text{ rub.} \\ 108 \text{ „} \text{ ——— } x \text{ „} \\ \hline \end{array}$$

Dyskontując zaś go w Anglii, należałoby tu wyliczyć (r. 1884-y jest przestępny)

$$\begin{array}{r} 366 \text{ dni} \text{ ——— } 6 \text{ rub.} \\ 108 \text{ „} \text{ ——— } x \text{ „} \\ \hline \end{array}$$

canie procentu, które ma miejsce przy dyskontowaniu sposobem teoretycznym, jak również kwota tak potrącona nazywa się «dyskontem wewnątrz»¹⁾.

Aby zdać sobie sprawę z różnicy, jaka zachodzi między tymi dwoma sposobami dyskonta, zważmy, że, dyskontując powyższy weksel (us. 2, 3) sposobami :

teoretycznym, płacimy $100 = 101,75 - 1,75$ za $101,75$ napisane na wekslu, handlowym, „ $98,25 = 100 - 1,75$ „ 100 „ „ „ „ , gdzie $1,75$ przedstawiają odsetki od 100 . A więc sposobem teoretycznym potrącamy odsetki za przeciąg czasu, jaki ma upłynąć do terminu, obliczone według umówionej stopy procentu od tej sumy pieniędzy, którą nabywca odstępowanej sumy piędziężnej za nią płaci. Sposobem zaś handlowym potrącamy odsetki za przeciąg czasu, jaki ma upłynąć do terminu, obliczone według umówionej stopy procentu od większej sumy piędziężnej, mianowicie od tej, która jest napisana na wekslu, t. j. którą nabywca później otrzyma w terminie, oznaczonym na tym wekslu.

Dyskontując ów weksel sposobem handlowym, nabywca za przeciąg czasu, jaki ma upłynąć do terminu, otrzymuje $1,75$ rub. odsetek od $98,25$ rub., co jest więcej (§ 32, us. 4) niż 6% .

Różnica dyskonta owego wekslu dwoma sposobami wyniosła $0,26$ rub. Co ta kwota przedstawia? — Wartość wekslu, powyżej wyznaczona sposobem teoretycznym, jest przybliżoną na $0,01$ rub. (§ 21, us. 13). Aby należycie wyraźnie przedstawiło się nam znaczenie tej różnicy, wyznaczmy dokładniejsze przybliżenie owej wartości, mianowicie weźmy wartość $845,208845$ rub. Wtedy różnica dyskonta przedstawi się jako $0,258845$ rub. Oczywiście ta różnica przedstawia odsetki od pewnej sumy za owe 105 dni; znajdziemy tę sumę:

$$\begin{array}{r} 1,75 \quad \text{rub.} \quad \text{—} \quad 100 \text{ rub.} \\ 0,258845 \quad \text{„} \quad \text{—} \quad x \quad \text{„} \\ \hline x = \frac{2588,45}{175} = 14,79. \end{array}$$

Otrzymane $14,79$ rub. przedstawia to, co potrącono z sumy, napisanej na wekslu, dyskontując go sposobem teoretycznym (us. 2). A więc owa różnica przedstawia odsetki po 6% od dyskonta wewnątrz za przeciąg czasu, jaki ma upłynąć do terminu. O te więc odsetki od odsetek nabywca wekslu płaci mniej, dyskontując go zewnątrz, niżby zapłacił, dyskontując wewnątrz.

Zwykle, jako przyczyną tego, że dyskontowanie weksli skutecznia się zawsze sposobem handlowym, a nie teoretycznym, podają to, że pierwszym

¹⁾ «Escompte en dehors», «escompte en dedans».

z tych sposobów rachunek łatwiej się wykonywa, niż drugim. Przy wekslach jednak na większe sumy różnica opłaciłaby wykonywanie nieco drobiazgowszego dzielenia, tymwięcej, iż wszyscy, wykonywający w praktyce podobne obliczenia, dobrze rachować umieją. Można by to słuszniej już usprawiedliwić tym, że instytucja kredytowa, dyskontując weksle np. po 6⁰/₀, nie osiągałoby w rzeczywistości 6⁰/₀, gdyż z zatrzymanego dyskonta należałoby potrącić pewną część na utrzymanie tej instytucji (co się też uwzględnia przy wekslach na mniejsze sumy przez ściąganie przy ich dyskontowaniu opłaty dodatkowej, gdyż wtedy różnica dwu sposobów dyskonta, z której swoją drogą owa instytucja korzysta, jest bardzo nieznaczna). Prawdziwą jednak przyczyną jest to, że kupujący weksle znajdują się w położeniu wygodniejszym, niż ci, którzy je sprzedają, i dlatego ci ostatni musieli początkowo przystawać na warunki, jakie pierwsi im stawiali. Następnie zaś powszechny zwyczaj takie postępowanie uprawił.

(Zadania arytmetyczne. § 33.)

§ 34. REGUŁA PODZIAŁU PROPORCYJONALNEGO. REGUŁA SPÓŁKI.

1. Pewne liczby *) nazywamy wtedy liczbami proporcjonalnymi względem liczb danych, kiedy stosunek dwu którychkolwiek z nich jest równy stosunkowi dwu odpowiednich im spośród liczb danych. Tak np. jeżeli mamy dane liczby

2, 5, 7, 10,

to np. liczby

5, 12,5, 17,5, 25

są liczbami względem danych proporcjonalnymi, gdyż

$5 : 12,5 = 2 : 5$; $12,5 : 17,5 = 5 : 7$; $5 : 17,5 = 2 : 7$, i t. d. ¹⁾.

Względem tych samych liczb danych proporcjonalnymi byłyby również np. liczby 6, 15, 21, 30, liczby 10, 25, 35, 50, i t. d., t. j. względem jakichkolwiek liczb danych może być nieskończenie wiele grup liczb proporcjonalnych **).

Nawzajem, pewne liczby mogą być proporcjonalne względem wielu grup liczb; we wszystkich jednak takich grupach stosunki liczb odpowiednich są też same. Np. liczby 5, 12,5, 17,5, 25 są proporcjonalne względem liczb 2, 5, 7, 10, względem liczb 6, 15, 21,

*) Albo wszystkie oderwane, albotż wszystkie mianowane (jednorodne).

¹⁾ Z tego wypada, że

$$5 : 2 = 12,5 : 5 = 17,5 : 7 = 25 : 10$$

t. j. stosunki każdej z liczb (oderwanych), proporcjonalnych względem liczb danych, do odpowiedniej z tych liczb danych są sobie równe. (Tę własność zwykle przyjmują jako określenie liczb proporcjonalnych względem danych).

**) Gdyż, mnożąc wszystkie liczby jednej takiej grupy przez jakąkolwiek liczbę, otrzymujemy liczby proporcjonalne względem liczb danych (§ 27, us. 6 c).

30, względem liczb 0,2, 0,5, 0,7, 1, i t. d.; zawsze jednak np. $5 : 10 = 15 : 30 = 0,5 : 1 =$ i t. d.

Ze względu właśnie na to, że nam tu idzie tylko o stosunki zachodzące między liczbami danymi, względem których mamy mieć liczby proporcjonalne, wypiszemy np. początkowo dane liczby tak :

$$2 : 5 : 7 : 10.$$

Na takie więc wyrażenie liczebne patrzeć będziemy, jako na krótszy sposób oznaczenia, jak tu, stosunków np.

$$2 : 5, 5 : 7, 7 : 10, \text{ jakoteż } 2 : 7, 2 : 10 \text{ i } 5 : 10$$

Gdy więc powiemy: liczby mają być proporcjonalne względem liczb $2 : 5 : 7 : 10$, to przez to rozumić będziemy, że np. stosunek pierwszej z wyznaczyć się mających liczb do drugiej z nich ma być równy stosunkowi $2 : 5$, stosunek drugiej do trzeciej ma być równy stosunkowi $5 : 7$, a stosunek trzeciej do czwartej ma być równy stosunkowi $7 : 10$; z tych zaś stosunków wypada (§ 28, us. 11), że stosunek pierwszej z wyznaczyć się mających liczb do trzeciej z nich jest równy stosunkowi $2 : 7$, i t. d.

2. Z tego wypada, że (§ 27, us. 6 e.) *wszystkie liczby dane, względem których mamy mieć liczby proporcjonalne, możemy jednocześnie pomnożyć lub jednocześnie podzielić przez tę samą liczbę*. Dlatego zwykle, jeżeli pośród liczb danych są ułamkowe, zastępujemy je liczbami całkowitymi, a jeżeli wszystkie liczby dane mają spólny dzielnik, to przezeń je dzielimy. Tak np. gdy mamy wyznaczyć liczby proporcjonalne względem liczb

$$0,2 : 0,05 : 0,6,$$

to zastąpimy je liczbami całkowitymi $20 : 5 : 60$, a te prostszymi

$$4 : 1 : 12.$$

3. Niekiedy nie mamy tak wprost, jak powyżej, danych liczb, względem których mają być wyznaczone liczby proporcjonalne; lecz mamy dane tylko oddzielne stosunki między nimi. Tak np. jeżeli mają być wyznaczone cztery liczby takie, iżby stosunek pierwszej do drugiej był równy stosunkowi $5 : 8$, stosunek drugiej do trzeciej był równy stosunkowi $6 : 7$, a stosunek drugiej do czwartej równy stosunkowi $36 : 35$, to wtedy zastępujemy te stosunki takimi, iżby je można było w powyżej wskazany sposób krócej oznaczyć. W tym celu weźmy naprzód dwa pierwsze stosunki, t. j. $5 : 8$ i $6 : 7$. Wyraz 8 w pierwszym stosunku i wyraz 6 w drugim odpowiadają tej samej, a mianowicie drugiej z mających się wyznaczyć liczb; aby więc te dwa stosunki móc krócej oznaczyć, trzeba je zastąpić takimi, w którychby zamiast owych liczb 8 i 6 zjawiała się pewna też sama liczba. Najmniejsza spólna wielokrotna liczb 8 i 6 jest 24; pomnożymy więc oba wyrazy pierwszego stosunku przez 3, a drugiego przez 4; otrzymamy:

15 : 24 i 24 : 21, czyli 15 : 24 : 21.

Następnie zaś zauważymy, że w tych stosunkach wyraz 24 i w trzecim z danych stosunków, t. j. w stosunku 36 : 35, wyraz 36 odpowiadają tej samej, a mianowicie drugiej z mających się wyznaczyć liczb. Podobnie więc, aby zamiast owych liczb 24 i 36 zjawiała się taż sama liczba, pomnożymy wszystkie wyrazy powyższych dwu stosunków przez 3, a oba wyrazy stosunku 36 : 35 przez 2, i mieć będziemy:

45 : 72 : 63 i 72 : 70, czyli 45 : 72 : 63 : 70.

4. Gdybyśmy mieli zadanie: wyznaczyć liczby proporcjonalne względem pewnych liczb danych, to z uwagi, że grup takich liczb może być nieskończenie wiele (us. 1), mielibyśmy nieskończenie wiele odpowiedzi, t. j. zadanie byłoby «nieoznaczone». W każdej grupie liczb proporcjonalnych względem liczb danych, wszystkie liczby albo są większe, albotóż są mniejsze od odpowiednich liczb innej takiej grupy *). Dlatego suma liczb którejkolwiek grupy, proporcjonalnych względem liczb danych, jest różną od sumy liczb innej takiej grupy. Nawzajem więc, jeżeli dana jest suma owych wyznaczyć się mających liczb, proporcjonalnych względem liczb danych, to wtedy jest możliwa jedna tylko odpowiedź i zadanie możemy tak wysłowić: rozłożyć liczbę daną na części proporcjonalne względem liczb danych. Takie zadanie nazywa się zadaniem na regułę podziału proporcjonalnego.

Weźmy np. zadanie: 15 960 złotych rozdzielić między trzech braci, mających 36, 24 i 16 lat, odwrotnie proporcjonalnie względem ilości ich lat. — Mamy więc tu liczbę 15 960 zł. rozłożyć na trzy części, proporcjonalne względem liczb

$\frac{1}{36} : \frac{1}{24} : \frac{1}{16}$, czyli (us. 2) 4 : 6 : 9.

Ponieważ pierwsza część liczby 15 960 zł., czyli pierwsza liczba szukana, odpowiada liczbie 4, druga liczbie 6, a trzecia liczbie 9, zatem cała liczba dana 15 960 zł. odpowiada tu liczbie $4 + 6 + 9 = 19$. Skoro zaś cała liczba 15 960 zł. odpowiada liczbie 19, a pierwsza jej część, t. j. pierwsza liczba szukana liczbie 4, przeto **) w całej liczbie 15 960 zł. jest 19 takich równych sobie części, jakichto część 4 przedstawi ową pierwszą szukaną część tej liczby 15 960 zł., a więc (§ 19, us. 8) tą szukaną pierwszą częścią jest $\frac{4}{19}$ liczby 15 960

*) Wypada to z określenia liczb proporcjonalnych względem liczb danych (us. 1).

**) Albo: przeto, jeżeli ową pierwszą część liczby 15 960 nazwiemy x , to

$$x : 15960 = 4 : 19,$$

skąd i t. d. Taksamo co do drugiej i trzeciej z owych części. (Znalazszy dwie z tych trzech części liczby 15 960, możemy, odejmując od tej liczby sumę owych dwu jej części, wyznaczyć pozostałą.)

zł., czyli 15 960 zł. $\times \frac{4}{19}$. Taksamo znajdziemy szukane drugą i trzecią części liczby 15 960 zł. Otrzymujemy więc jako części liczby 15 960 zł., proporcjonalne względem liczb 4:6:9, odpowiednio

$$15\,960 \text{ zł.} \times \frac{4}{4+6+9}; \quad 15\,960 \text{ zł.} \times \frac{6}{4+6+9}; \quad 15\,960 \text{ zł.} \times \frac{9}{4+6+9}.$$

Z tych wyrażeń znajdziemy odpowiednio: 3360 zł., 5040 zł. i 7560 zł. Odp. Najstarszy brat otrzyma 3360 zł., średni 5040 zł., a najmłodszy 7560 zł.

Z tego widzimy, że aby liczbę daną rozłożyć na dwie lub więcej części, proporcjonalnych względem tyluż liczb danych, należy ją oddzielić pomnożyć przez każdy z ułamków, w którego liczniku jest jedna z owych liczb danych, a w mianowniku suma tych liczb.

5. Zadanie, w którym mamy pewną liczbę rozłożyć na części proporcjonalne względem liczb, które mamy dopiero wyznaczyć z dwu lub więcej warunków, a te warunki są wyrażone jako proporcjonalne względem liczb danych, łatwo sprowadza się do zwyczajnego zadania takiego rodzaju, jak poprzednie. Np.

Za przewiezienie koleją żelazną partyi zboża, a mianowicie 240 korcy pszenicy, 160 korcy żyta, 320 korcy jęczmienia i 400 korcy owsa zapłacono razem (t. j. za ciężar wszystkiego zboża) 218 rub. 13 kop.; ile zapłacono oddzielnie za przewiezienie pszenicy, żyta, jęczmienia i owsa, jeżeli wiadomo, że korzec pszenicy waży 250 funtów, żyta 225 f., jęczmienia 195 f., a owsa 140 f.? Należy więc tu liczbę 218,13 rub. rozłożyć na cztery części, proporcjonalne względem liczb, które wyznaczymy z danych ilości korcy tych czterech gatunków zboża i z danych ciężarów jednego korca tych gatunków zboża. Ilości korcy (wogóle: tych samych jednostek objętości) tych gatunków zboża są proporcjonalne względem liczb

$$240 : 160 : 320 : 400, \text{ czyli } 6 : 4 : 8 : 10,$$

a odpowiednie ciężary jednego korca (wogóle: téj samej jednostki objętości) tychże gatunków zboża są proporcjonalne względem liczb

$$250 : 225 : 195 : 140, \text{ czyli } 50 : 45 : 39 : 28.$$

Ciężar zaś pewnej ilości, np. korcy, jakiegos zboża jest iloczynem ciężaru jednego korca przez liczbę oderwaną, odpowiadającą owéj ilości korcy; a więc ciężary wszystkiéj przewiezionéj pszenicy, żyta, jęczmienia i owsa, a tymsamym i opłaty za ich przewiezienie, są proporcjonalne względem liczb:

$$(6 \times 50) : (4 \times 45) : (8 \times 39) : (10 \times 28), \text{ czyli } 75 : 45 : 78 : 70.$$

Sprowadziliśmy więc zadanie do takiego, jak poprzednie; rozwiązując

je, znajdziemy, że za przewiezienie pszenicy zapłacono (§ 21, us. 13) 61,04 rub., żyta 36,63 rub., jęczmienia 63,48 rub., owsa 56,97 rub.

Gdyby w tym zadaniu był jeszcze warunek, że pszenica ma być przewieziona do stacyi 6 razy, a żyto do stacyi 4 razy dalej położonej, niż stacyja, do której ma być przewieziony owies, a stosunek dróg, które mają odbyć żyto i jęczmień, jest 6 : 7, to przybyłyby nam warunek do wyznaczenia opłat za te gatunki zboża, mianowicie proporcjonalność dróg przewozu względem liczb (us. 3)

$$18 : 12 : 14 : 3.$$

Wtedy liczby, względem których są proporcjonalne opłaty za przewóz oddzielnych gatunków zboża, należałoby wyznaczyć z warunków, iż ich ciężary i odległości, na jakie mają być przewiezione, są proporcjonalne względem liczb

$$75 : 45 : 78 : 70 \quad \text{i} \quad 18 : 12 : 14 : 3.$$

Moglibyśmy tu albo rozumować podobnie jak poprzednio *), albotóż w taki sposób. Opłata od każdych 75 jednostek ciężaru zboża za każde 18 jednostek odległości jest też sama, co za przewiezienie na jednostkę odległości 75×18 jednostek ciężaru, i t. d., tak iż wypadłoby liczbę 218,13 rub. rozłożyć na części proporcjonalne względem liczb **)

$$(75 \times 18) : (45 \times 12) : (78 \times 14) : (70 \times 3).$$

A dalej, jak poprzednio.

6. Zadanie na regułę podziału proporcjonalnego w tym przypadku, kiedy mamy daną ilość pieniędzy, przypadającą na rzecz dwu lub więcej spółników, rozłożyć na części proporcjonalne względem liczb, które należy wyznaczyć z danych warunków, określających udziały owych spółników, nazywa się zadaniem na regułę spółki.

Np. Na rzecz czterech spółników przypada do podzielenia suma 10800 zł. Suma ta jest zyskiem osiągniętym na przedsiębiorstwie, do którego pierwszy spółnik włożył 2360 zł. na czas 2 lat i 3 miesiące, drugi 4200 zł. na 1 rok i 8 miesięcy, trzeci 4500 zł. na 2 lata, 3 miesiące i 20 dni, a czwarty 3200 zł. na 2 lata i 10 miesięcy. Ostatni z tych spółników, jako inicjator i kierownik tego przedsiębiorstwa, ma zapewnione, iż zysk od jego wniosku względem zysku od wniosków innych spółników ma być liczony w stosunku 9 : 5. Po ile

*) Opłata za przewóz pewnej ilości jednostek ciężaru na pewną ilość jednostek odległości jest iloczynem opłaty za ową ilość jednostek ciężaru na jednostkę odległości przez liczbę oderwaną, odpowiadającą ilości owych jednostek odległości.

***) Odpowiadających ciężarom, rachowanym na jednostkę odległości, czyli wogóle, rachowanym na tę samą odległość.

przypada z owéj sumy na rzecz każdego ze spółników? Mamy tu liczbę 10 800 rozłożyć na cztery części proporcjonalne względé liczb, które mamy wyznaczyć z warunków, iż: ich wnioski piéniężne są proporcjonalne względem liczb

$$2360 : 4200 : 4500 : 3200, \text{ czyli } 118 : 210 : 225 : 160,$$

czasu obrotu tych wniosków proporcjonalne względem liczb (przyjmując rok = 360 dniom; § 32, us. 8)

$$810 : 600 : 830 : 1020, \text{ czyli } 81 : 60 : 83 : 102,$$

a stosunkowa wielkość udziałów przy obliczaniu zysków proporcjonalna względem liczb

$$5 : 5 : 5 : 9.$$

Weźmy naprzód pod uwagę tylko dwa pierwsze warunki. Ten sam udział w ogólnym zysku, który przypada pierwszemu spółnikowi za 118 jednostek kapitału, będących w obrocie w ciągu 81 jednostek czasu, przypadłby od kapitału, będącego w obrocie w ciągu jednostki czasu, w takim razie, kiedyby jednostek kapitału było 81 razy więcej. I t. d. A więc udziały tych spółników będą takie, jakie wyznaczymy z warunku, iż kapitały, będące w obrocie w ciągu tego samego przeciągu czasu, są proporcjonalne względem liczb

$$(118 \times 81) : (210 \times 60) : (225 \times 83) : (160 \times 102).$$

Wskutek zaś trzeciego z danych warunków, każda jednostka kapitału czwartego spółnika jest przy obliczeniu udziałów zysku 1,8 raza więcej warta od każdéj jednostki każdego z pozostałych spółników. A więc ostatecznie udziały tych spółników w osiągniętym zysku są proporcjonalne względem liczb

$$(118 \times 81) : (210 \times 60) : (225 \times 83) : (160 \times 102 \times 1,8).$$

A dalej jak poprzednio.

(Zadania arytmetyczne. § 34.)

§ 35. REGUŁA MIESZANINY.

1. Jeżeli zadanie, w którym jest mowa o mieszaniu dwu lub więcej czyto różnorodnych ciał *), czytóż różnych tylko gatunków pewnego ciała **), sprowadza się albo do wyliczenia własności ***) mieszaniny, albotóż do wyznaczenia stosunków, w jakich do téj mie-

*) Np. o stopie cynku i miedzi, zwanym mosiądzem, o mieszaniu alkoholu i wody, zwanéj wódką, i t. d.

**) Np. o mieszaniu różnych gatunków nasion trawiastych, różnych gatunków tytoniu, i t. d.

***) Niekiedy, wszczeg. ilości, ceny.

szaniny mają być wzięte ilości owych składających ją części, to nazywa się ono zadaniem na regułę mieszaniny.

Tu należą zadania, do których wchodzi t. z. próba złota lub srebra. Próba złota lub srebra nazywamy stosunek wagi czystego metalu szlachetnego w pewnym przedmiocie metalowym do wagi całkowitej tego przedmiotu. Stosunek ten wyraża się w częściach wagi menniczej; wyrażenie więc tego stosunku zależy od owęj wagi, prawnie w pewnym kraju używanęj, a której się dorozumiewa przy wypowiedaniu próby.

U nas dawniej (a od r. 1815 prawnie) wagą menniczą dla wyrobów srebrnych była «grzywna kolońska», dzieląca się na 16 łutów (po 18 granów mennicznych); dlatego próba np. 12-sta srebra oznacza, że w przedmiocie, tą próbą o cechowanym, stosunek wagi czystego srebra do wagi całkowitej przedmiotu jest 12 : 16. Dla wyrobów złotych przyjmowano 24 karaty (po 12 granów karatowych), jako oznaczające czyste złoto, tak iż w wyrobie złotym np. 18-stokaratowym stosunek wagi czystego złota do całkowitej wagi przedmiotu jest 18 : 24.

Od r. 1842 wprowadzono jako wagę menniczą dla wyrobów złotych i srebrnych funt rosyjski z podziałem na 96 zołotników. Zatem np. 72-ga próba wyrobu z metalu szlachetnego oznacza, iż stosunek wagi tego metalu do całkowitej wagi przedmiotu jest 72 : 96.

W krajach, w których systemat metryczny jest w powszechnym użyciu, wyraża się próba srebra i złota w tysięcznych częściach jednostki wagi całkowitej przedmiotu; gdy więc np. mówią: srebro próby 0,950, to oznacza, że stosunek wagi czystego srebra do całkowitej wagi przedmiotu jest 0,950 : 1. —

Dla niektórych mieszanin cieczy istnieją również umówione sposoby oznaczania stosunku, w jakim cieczy z sobą zmieszane zostały. Zwykle jednak odnoszą się one do stosunku objętości. Tak np. wyrażenie: «wódka 65 stopni» oznacza wódkę takiej samej «mocy» jaką, posiada mieszanina 65-u jednostek objętości alkoholu z 35-u (t. j. 100 — 65) jednostkami objętości wody.

2. Weźmiemy naprzód pod uwagę zadania, w których, mając dane własność i ilość każdego z przedmiotów mieszanych, szukamy własności mieszaniny.

Np. Stopiono razem 5 funtów srebra 72-ój, 5 fun. 84-ój, 3 fun. 90-ój próby oraz 1 funt miedzi; jakiej próby jest stop? — Ten stop zawiera srebra

$$72 \times 5 + 84 \times 5 + 90 \times 3$$

zołotników, a waży $5 + 5 + 3 + 1 = 14$ funtów. W jednym więc funcie stopu jest

$$\frac{72 \times 5 + 84 \times 5 + 90 \times 3}{5 + 5 + 3 + 1} = \frac{1050}{14} = 75$$

zołotników srebra. Zatem stosunek wagi czystego srebra do wagi całkowitej stopu jest 75 : 96, czyli ten stop jest 75-ą próbą. — Gdyby w zadaniu zamiast funtów były np. dane luty, t. j. pierwszego gatunku srebra było 5 lutów, drugiego 5 ł., trzeciego 3 ł., a miedzi 1 ł., to rachunek byłby ten sam; nieco by się tylko zmienił sposób objaśnienia. Mianowicie, moglibyśmy powiedzieć tak: w każdej jednostce wagi (lucie) pierwszego gatunku srebra na 96 cząstek jest 72-ie czystego srebra, w każdej drugiego gatunku 84 cząstek, a w każdej trzeciego 90 cząstek; we wszystkich więc $5 + 5 + 3 + 1$ jednostkach wagi stopu na 96×14 cząstek jest czystego srebra $72 \times 5 + 84 \times 5 + 90 \times 3$ takichże cząstek, a przeto w jednostce wagi stopu na 96 cząstek czystego srebra jest $\frac{72 \times 5 + \dots}{5 + \dots} = 75$ cząstek. Zatem stosunek wagi i t. d. (jak poprzednio).

Łatwo spostrzec, że takie zadanie ¹⁾ jest właściwie zadaniem na wyznaczenie średniej arytmetycznej (§ 7, us. 25). —

Jeżelibyśmy mieli np. zadanie: Kupiec zmieszał 10 fun. herbaty po 2 rub., 12 fun. po 2 rub. 50 kop. i 15 fun. po 1 rub. 75 kop.; po czemu ma sprzedawać funt tej mieszanki, jeżeli chce jeszcze na niej zarobić 8 rub.?, to, rozumując podobnie i zważając, że do sumy piędznej, którą on ma otrzymać ze sprzedaży 10 + 12 + 15 funtów tej mieszanki wejdą owe 8 rub., znajdziemy, że ma sprzedawać funt po kopiejek

$$\frac{200 \times 10 + 250 \times 12 + 175 \times 15 + 800}{10 + 12 + 15} = 180$$

3. Zadanie odwrotne powyższemu, t. j. zadanie, w którym, mając dane własność każdego z przedmiotów mieszanych i własność mieszanki, chcemy wyznaczyć stosunki, w jakich mają być wzięte ilości mieszanych przedmiotów, rozważymy naprzód w przypadku, gdy mieszamy dwa tylko przedmioty.

Np. W jakim stosunku należy brać srebro 90-ą i srebro 72-ą próbą, aby otrzymać stop 84-ą próbą? — Każda jednostka wagi srebra pierwszego gatunku ma zawiele 6 cząstek, a każda jednostka

¹⁾ Do tego rodzaju zadań sprowadzają się zadania na oznaczenie «średniego terminu» kilku weksli. Np. Ktoś chce zamiast 3-ch weksli: jednego na 250 rub. płatnego za 40 dni, drugiego na 300 rub. płatnego za 50 dni i trzeciego na 500 rub. płatnego za 70 dni, wystawić jeden weksel za sumę $250 + 300 + 500 = 1050$ rub.; jaki powinien być termin owego wekslu? — Dyskont od pierwszego wekslu jest dziś ten sam, co od sumy (250×40) r. za jeden dzień i t. d.; termin więc owego wekslu na sumę 1050 rub. nastąpi po upływie dni

$$\frac{250 \times 40 + 300 \times 50 + 500 \times 70}{250 + 300 + 500}$$

drugiego gatunku ma zamało 12 cząstek czystego srebra *). Jeżeli na każde 12 jednostek wagi pierwszego gatunku weźmiemy 6 jednostek wagi drugiego, to w tych 12 jednostkach pierwszego gatunku mieć będziemy zawięte 6×12 cząstek, gdy w 6 jednostkach drugiego mieć będziemy zamało 12×6 cząstek, a więc stop 12 jednostek wagi pierwszego gatunku i 6 jednostek wagi gatunku drugiego będzie żądaną próby. Widzimy więc, że stosunek, w jakim mają być wzięte ilości (na wagę) tych dwu gatunków srebra, jest 12:6, czyli 2:1, a zatem jest odwrotny względem stosunku różnic między liczbą, wyrażającą własność mieszaniny, a liczbami, wyrażającymi własności dwu mieszanych przedmiotów **). Ślad tego rozumowania zwykle tak zaznaczamy:

90	84	6 cz.	12 jed.	2 jed.
72		12 cz.	6 jed.	1 jed.

Gdybyśmy, zamiast powyższego, mieli zadanie: Ile trzeba wziąć srebra 90-ój i srebra 72-ój próby, aby utworzyć stop 18 funtów srebra 84-ój próby?, to, znalazszy, jak powyżej, że stosunek, w jakim mają być wzięte ilości tych dwu gatunków jest 2:1, należałoby następnie rozwiązać dodatkowo zadanie na regułę podziału proporcjonalnego (§ 34, us. 4): rozłożyć 18 funtów na dwie części w stosunku 2:1, i znaleźlibyśmy, że należy wziąć gatunku

$$1\text{-ego } 18 \text{ f.} \times \frac{2}{2+1}, \text{ a } 2\text{-go } 18 \text{ f.} \times \frac{1}{2+1}.$$

4. Weźmy teraz przypadek, kiedy w zadaniu tego rodzaju, co poprzednie, mieszamy więcej niż dwa przedmioty.

Np. Mając trzy gatunki tytoniu: na 420, 400 i 300 kopiejek funt, w jakim stosunku powinniśmy je mieszać, aby wartość funta mieszaniny wynosiła 380 kop.? — Wartość funta pierwszego gatunku i funta drugiego jest za wielką odpowiednio o 40 kop. i o 20 kop., wartość zaś funta trzeciego gatunku jest za małą o 80 kop. Na każdy więc funt trzeciego gatunku powinniśmy tyle wziąć pierwszego i drugiego, aby razem wziąć zawięte o 80 kop. Tyle zatem mamy wziąć jednostek pierwszego gatunku i tyle drugiego, aby mnożąc 40 kop. przez liczbę oderwaną, odpowiadającą ilości jednostek pierwszego gatunku, i mnożąc 20 kop. przez liczbę oderwaną, odpowiadającą ilości jednostek gatunku drugiego, otrzymać, jako sumę

*) Gdybyśmy podobnie mieszały np. srebro 90-ój próby z miedzią (moglibyśmy o nęj powiedzieć, że jest próby 0), pragnąc otrzymać stop 84-ój próby, to odpowiednio byłoby zawięte 6 cząstek i zamało 84 cząstki.

***) T. j. względem stosunku (90 — 84):(84 — 72).

tych dwu iloczynów, 80 kop. Czyli mamy tu zadanie: wyznaczyć dwie liczby takie, aby suma iloczynu 40 przez jedną z nich i iloczynu 20-u przez drugą była 80 ¹⁾. Jednej z tych liczb szukanych możemy nadawać różne wartości; gdy bowiem, jako wartości np. pierwszej z nich, przyjmiemy po kolei: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ i t. d., to, gdy

$40 \times 1 + 20 \times \text{drugą} = 80, \quad 40 \times 0,5 + 20 \times \text{drugą} = 80, \text{ i t. d.},$
 mieć będziemy (§ 5, us. 7) odpowiednio: $20 \times \text{drugą} = 80 - 40 \times 1$
 i t. d., skąd (§ 7, us. 5; § 17, us. 5)

$$\text{drugą} = \frac{80 - 40 \times 1}{20} = 2; \text{ albo } = \frac{80 - 40 \times 0,5}{20} = 3;$$

$$\text{albo } = \frac{80 - 40 \times 0,25}{20} = 3,5, \text{ i t. d.}$$

Wypada więc, że te trzy gatunki możemy mieszać z sobą proporcjonalnie względem liczb (§ 34, us. 4, 2)

$$\begin{aligned} & 1 : 2 : 1, \\ \text{albo } & \frac{1}{2} : 3 : 1, \text{ czyli } 1 : 6 : 2, \\ & \text{„ } \frac{1}{4} : 3\frac{1}{2} : 1, \text{ „ } 1 : 14 : 4, \\ & \text{„ } \frac{1}{5} : 3\frac{3}{5} : 1, \text{ „ } 1 : 18 : 5, \\ & \text{„ } \frac{2}{5} : 3\frac{1}{5} : 1, \text{ „ } 2 : 16 : 5, \\ & \text{ i t. d.} \end{aligned}$$

Zadanie więc to może mieć nieskończenie wiele odpowiedzi i dlatego nazywamy je zadaniem nieoznaczonym.

Jeżelibyśmy, zamiast powyższego, mieli np. zadanie: Ile trzeba wziąć tytoniu z gatunków na 420, 400 i 300 kop. funt., aby utworzyć 15 funtów mieszaniny, którejby funt był wart 280 kop.?, to i ono byłoby nieoznaczone, gdyż miałyby nieskończenie wiele rozwiązań, odpowiadających rozłożeniu 15-u funtów na trzy części, proporcjonalne (§ 34, us. 4) albo względem liczb $1 : 2 : 1$, albo względem liczb $1 : 6 : 2$, albo względem liczb $2 : 16 : 5$ i t. d.

Zadania takie byłyby również nieoznaczone w razie, gdyby, zamiast trzech przedmiotów mieszanych, było ich więcej. —

Widzimy więc, że zadanie, w którym, mając dane własności każdego z przedmiotów mieszanych i własność mieszaniny, chcemy

¹⁾ Wyrażając się, jak w algiebrze, gdy pierwszą z liczb szukanych nazwiemy x , a drugą y , mamy rozwiązać w liczbach dodatnich (choćby ułamkowych) równanie nieoznaczone

$$40 \cdot x + 20 \cdot y = 80.$$

wyznaczyć stosunki, w jakich mają być wzięte ilości mieszanych przedmiotów, jest nieoznaczone (t. j. posiada nieskończenie wiele odpowiedzi) w przypadku, gdy mieszamy z sobą więcej niż 2 przedmioty.

Oczywiście, że to zadanie, tak w przypadku, kiedy mieszamy dwa przedmioty, jak i wogóle, kiedy mieszamy ich więcej, jest możliwe tylko wtedy, kiedy własność mieszaniny wyraża się liczbą pośrednią między najmniejszą i największą z liczb, wyrażających własność przedmiotów mieszanych.

(Zadania arytmetyczne. § 35.)

§ 36. REGUŁA ŁAŃCUCHOWA.

1. Jak widzieliśmy (§ 30, us. 1), w zadaniu na regułę trzech, mając daną jedną parę odpowiadających sobie wartości dwu wielkości proporcjonalnych względem siebie, szukamy innej wartości jednej z tych wielkości, odpowiadającej danej (drugiej) wartości drugiej z tych wielkości. Może być jednak, że w zadaniu, w którym mamy znaleźć wartość pewnej wielkości, odpowiadającą danej wartości drugiej wielkości, nie mamy danej pary bezpośrednio sobie odpowiadających innych wartości tychże wielkości ¹⁾. Np.

Ile rubli zapłacono za 3 włóki ziemi, jeżeli za 125 diesiatyn zapłacono 13 020 rubli i jeżeli przy tym wyliczeniu przyjmujemy, że 1000 diesiatyn = 1092,5 hektara (str. 138; § 21, us. 13), a 100 morgów = 56 hektarom (§ 21, us. 11 e.)?

Mamy w tym zadaniu znaleźć pewną ilość rubli, odpowiadającą 3 włókom, ale nie mamy danych bezpośrednio odpowiadających sobie pary innych wartości tych dwu wielkości: ilości rubli i ilości włók. Jeżeli tu dodamy jeszcze to, co w tym zadaniu jest uważane jako wiadome, a mianowicie, że włóka ma 30 morgów, to owych dwu wielkości: ilości rubli i ilości włók mamy w tym zadaniu dane dwie oddzielne wartości, 13 020 rubli i 1 włókę, z których pierwsza odpowiada 125 diesiatynom, a druga 30 morgom. Tych zaś dwu wielkości: ilości diesiatyn i ilości morgów nie mamy tu pary odpowiadających sobie wartości, lecz tylko mamy dane dwie ich oddzielne wartości: 1000 diesiatyn i 100 morgów, z których pierwsza odpowiada 1092,5 hektara, a druga 56 hektarom; te więc dane dwie wartości dwu wielkości: ilości diesiatyn i ilości morgów (1000 dies. i 100 mor.) odpowiadają dwu danym wartościom téj samej wielkości: ilości hektarów. [Gdyby w tym zadaniu np. zamiast 56 hektarów było 5600 arów, to

¹⁾ W podobnych zadaniach jest mowa zawsze o wielkościach wprost proporcjonalnych względem siebie (por. str. 364, odsyłacz).

1092,5 hektara i 5600 arów byłyby dwiema oddzielnymi wartościami dwu wielkości: ilości hektarów i ilości arów, którychto wielkości dwie inne wartości: 1 hektar i 100 arów przedstawiałyby parę odpowiadających sobie wartości.] — Do danego więc zadania wchodzi wielkości: ilość rubli, ilość włók, ilość diesiatyn, ilość morgów i ilość hektarów. Dwie wartości każdej z tych wielkości odpowiadają wartościom dwu różnych wielkości, tak iż w tym zadaniu mamy jakby szereg «ogniw», łączących z sobą różne wielkości, wchodzące do zadania.

W zadaniach takich mamy znaleźć wartość pewnej wielkości, odpowiadającą danej wartości drugiej wielkości, gdy drugie dane wartości tych wielkości nie przedstawiają pary odpowiadających sobie wartości, lecz są dwiema oddzielnymi ich wartościami, odpowiadającymi dwu danym wartościom innej wielkości, lubtż dwu danym wartościom oddzielnym dwu różnych wielkości; w tym ostatnim razie mamy jeszcze dane albo parę odpowiadających sobie wartości tych dwu ostatnich wielkości, albotż dwie ich oddzielne wartości, odpowiadające dwu danym wartościom pewnej innej jeszcze wielkości, lubtż dwu danym wartościom oddzielnym dwu jeszcze innych wielkości; w tym ostatnim razie i t. d.; ostatecznie zaś, albo dane dwie wartości pewnych dwu wielkości sobie odpowiadają, albotż odpowiadają dwu danym wartościom pewnej tój samej wielkości.

Takie zadanie nazywamy zadaniem na regułę łańcuchową. W zadaniu na regułę łańcuchową należy znaleźć wartość pewnej wielkości, odpowiadającą danej wartości drugiej wielkości, gdy inne dane wartości tych dwu wielkości sobie nie odpowiadają, wszystkie zaś dane wartości (jednej lub więcej) innych wielkości są takie, że dwie wartości każdej z wielkości, wchodzących do zadania, odpowiadają wartościom dwu różnych z tych wielkości.

2. Chcąc rozwiązać powyższe zadanie, wypiszemy je uprzednio tak, jak zwykle robiliśmy, t. j. tak, aby dwie wartości tój samej wielkości znalazły się pod sobą. Szukamy niewiadomej ilości rubli; zaznaczmy (najdogodniej) od danej wartości ilości rubli, t. j. od 13020 rubli

13020 rub.	— 125 dies.			
	1000 dies.	— 1092,5 Hara		
		56 Harów	— 100 mr.	
			30 mr.	— 1 wł.
x rub.	_____			3 wł.

Zwykle, oszczędzając miejsca, wypisujemy to zadanie w ten sposób :

13 020 rub.	—	125 dies.
1 000 dies.	—	1092,5 Hara
56 Harów	—	100 mor.
30 mor.	—	1 włóce
3 włóki	—	x rub.

I tu, jak poprzednio, dwie wartości tej samej wielkości wchodzą do dwu następujących po sobie wierszy, tak iż wiersz jeden kończy się, a następujący zaczyna od wartości tej samej wielkości,

a ostatni wiersz kończy się wartością tej wielkości, od której wartości zaczyna się wiersz pierwszy (te więc dwie wartości «zamykają łańcuch»). — Ponieważ mamy znaleźć wartość ilości rubli, odpowiadającą 3 włókom, więc, wychodząc z tego, że 125 diesiatynom odpowiada 13 020 rub., będziemy kolejno, przechodząc przez hektary i morgi, dążyć do znalezienia szukanej liczby. Wypadnie więc *) w ten sposób rozumować:

jeżeli za 125 dies. zapłacono	13020 r., to za 1 dies. zapł.	$\frac{13020}{125}$ r.
„ 1 dies. „	$\frac{13020}{125}$ r., „ 1000 dies. **) zapła-	
	cono	$\frac{13020 \times 1000}{125}$ r.
„ 1092,5 Hara „	$\frac{13020 \times 1000}{125}$ r., „ 1 Har	
	zapłacono	$\frac{13020 \times 1000}{125 \times 1092,5}$ r.
„ 1 Har „	$\frac{13020 \times 1000}{125 \times 1092,5}$ r., to za 56 Harów ***)	
	zapłacono	$\frac{13020 \times 1000 \times 56}{125 \times 1092,5}$ r.
„ 100 mor. „	$\frac{13020 \times 1000 \times 56}{125 \times 1092,5}$ r., to za 1 mórg	
	zapł.	$\frac{13020 \times 1000 \times 56}{125 \times 1092,5 \times 100}$ r.
„ 1 mórg „	$\frac{13020 \times 1000 \times 56}{125 \times 1092,5 \times 100}$ r., to za 30 morgów	
	zapł.	$\frac{13020 \times 1000 \times 56 \times 30}{125 \times 1092,5 \times 100}$ r.
„ 1 włókę „	$\frac{13020 \times 1000 \times 56}{125 \times 1092,5 \times 100}$ r., to za 3 włóki	
	zapł.	$\frac{13020 \times 1000 \times 56 \times 30 \times 3}{125 \times 1092,5 \times 100}$ r.

Znaleźliśmy, ile zapłacono rubli za 3 włóki; że zaś tę ilość rubli nazwaliśmy x , zatem:

$$x = \frac{13020 \times 1000 \times 56 \times 30 \times 3}{125 \times 1092,5 \times 100}$$

*) Nie wykonywamy tu żadnych skrótów w otrzymywanych ułamkach, aby móc wnieść z odpowiedzi, jak ona powstaje z liczb, danych w zadaniu.

**) Czyli, według zadania, 1092,5 Hara.

***) Czyli 100 morgów.

Porównyując ten wypadek z powyższym wypisaniem zadania w dwu kolumnach, możemy ¹⁾ powiedzieć: jeżeli zadanie na regułę łańcuchową, wypiszemy w dwu kolumnach tak, żeby drugi i następne wiersze zaczynały się od wartości tej samej wielkości, której wartością ^{*}) poprzedni wiersz się kończy, i gdy ostatni wiersz kończy się wartością tej wielkości, od której wiersz pierwszy się zaczyna ^{**)}, to liczba szukana równa się iloczynowi wszystkich liczb, znajdujących się w innej, niż liczba szukana, kolumnie, podzielonemu przez iloczyn wszystkich liczb, znajdujących się w tej samej, co liczba szukana, kolumnie.

W tak ułożonym zadaniu którekolwiek dwie liczby, wchodzące do różnych kolumn, są czynnikami jedna dzielną, a druga dzielnika (albo: jedna licznika, a druga mianownika). Dlatego, po takim ułożeniu zadania, albo wypiszemy wprost według powyższej wskazówki wyrażenie szukaną liczbę (por. § 20, us. 5) i dzielić będziemy, jeżeli można, czynnik licznika i czynnik mianownika przez ich spólny dzielnik (§ 19, us. 4), albotóż wykonamy toż samo uprzednio, t. j. w wypisanym zadaniu znieśmy ułamki, mnożąc dwie liczby różnych kolumn przez odpowiednią tę samą liczbę, i następnie dzieląc dwie liczby różnych kolumn przez ich spólny dzielnik.

3. Oczywiście, że mogliśmy tu każde takie zadanie rozłożyć na odpowiednie zadania na regułę trzech (§ 31). Tak np. powyższe zadanie rozłożone być może na następujące:

125 dies. — 13 020 rub.	1092,5 Hara — y rub.
<u>1000 „ — y „</u>	<u>56 „ — z „</u>
100 mor. — z rub.	1 wł. — u rub.
<u>30 „ — u „</u>	<u>3 „ — x „</u>

gdzie y , z , u są liczbami wyrażającymi odpowiednie wartości ilości rubli, które kolejno (por. § 31, us. 1) z tych zadań wyznaczone być mogą. Jeżeli chcemy postąpić tak, jak w us. 3-im § 31-ego, to możemy utworzyć proporcycje

$$\begin{aligned}
 y : 13020 &= 1000 : 125, \\
 z : y &= 56 : 1092,5, \\
 u : z &= 30 : 100, \\
 x : u &= 3 : 1.
 \end{aligned}$$

¹⁾ Gdyby dwie z wchodzących do zadania wielkości były odwrotnie proporcjonalne względem siebie, to wypowiedziane prawidło nie miało by zastosowania.

Zrobimy tu uwagę, że można je zastosować do rozwiązania zadania na regułę trzech (§ 30) w przypadku, kiedy wielkości są wprost proporcjonalne względem siebie.

^{*}) Wyrażoną przy pomocy tej samej jednostki.

^{**)} Można, układając tak zadanie, zacząć je od którejkolwiek z liczb, do niego wchodzących: niema to żadnego wpływu na wypadek. Rozumowanie tylko jest najrzeczniejsze, gdy zadanie jest tak ułożone, jak powyżej.

Mnożąc zaś, jak tam, te proporcycje przez siebie i oba wyrazy pierwszego stosunku dzieląc przez liczby y , z i u , otrzymamy proporcycją

$$x : 13020 = (1000 \times 56 \times 30 \times 3) : (125 \times 1092,5 \times 100),$$

z której wypada

$$x = \frac{13020 \times 1000 \times 56 \times 30 \times 3}{125 \times 1092,5 \times 100},$$

t. j. wyrażenie liczby szukanej, utworzone według wskazówki, podanej w ustępie poprzedzającym.

(Zadania arytmetyczne. § 36.)

§ 37. REGUŁA FAŁSZYWEGO ZAŁOŻENIA.

Zadanie, w którym należy wyznaczyć liczbę z warunku, że pewne dwie liczby, od tamtej zależne, mają być równe sobie, może być rozwiązane zapomocą dwu dowolnie zrobionych przypuszczeń co do liczby szukanej, oraz odpowiadających (oddzielnie każdemu z tych przypuszczeń) wartości różnicy owych dwu liczb, które powinnyby, według zadania, być równe sobie. Taka metoda rozwiązywania tego rodzaju zadań (dawniej wielce rozpowszechniona) nazywa się regułą fałszywego założenia (właściwiejby: fałszywego przypuszczenia).

Np. Za 36 łokci sukna dwu gatunków, jednego po 12 złp. łokieć, a drugiego po 10 złp. łokieć, zapłacono 390 złp.; ile kupiono łokci każdego gatunku? — Jeżeli wyznaczmy np. ilość łokci pierwszego gatunku, to, odejmując tę liczbę od 36 łokci, mieć będziemy liczbę łokci gatunku drugiego. Ta zaś mająca się wyznaczyć ilość łokci pierwszego gatunku ma być taką, aby wartość wszystkich 36-u łokci była równa liczbie 390 złp.

Przypuśćmy, popierwsze, że ilość łokci sukna gatunku pierwszego jest np. 10; w takim razie drugiego gatunku byłoby 26 łokci, i $(12 \text{ złp.} \times 10) + (10 \text{ złp.} \times 26) = 380 \text{ złp.}; 390 \text{ złp.} - 380 \text{ złp.} = 10 \text{ złp.}$

Przypuśćmy, powtóre, że ilość łokci sukna pierwszego gatunku jest np. 12; w takim razie drugiego gatunku byłoby 24 łokcie, i $(12 \text{ złp.} \times 12) + (10 \text{ złp.} \times 24) = 384 \text{ złp.}; 390 \text{ złp.} - 384 \text{ złp.} = 6 \text{ złp.}$

Zauważmy, że różnica w ilości kupionych łokci sukna gatunku pierwszego jest proporcjonalną względem różnicy między odpowiednimi ilościami rubli, należnymi za wszystkie 36 łokci (jak to łatwo sprawdzić, robiąc jakiegokolwiek inne: trzecie, czwarte i t. d. przypuszczenia). Wychodząc więc z któregośkolwiek z tych przypuszczeń, np. z drugiego (12 łokci), przy którym osiągamy o 6 złp. mniej, niż-

by należało, możemy skorzystać z tego, że stosunek różnicy między szukaną ilością łokci sukna gatunku pierwszego i 12 jego łokciami, którą różnicę nazwijmy: r łokci, do różnicy między dwoma zrobionymi przypuszczeniami, t. j. do 2 łokci, jest równy stosunkowi różnicy między wartościami odpowiednimi wszystkich 36 łokci, t. j. stosunkowi

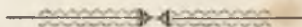
$$(390 \text{ złp.} - 384 \text{ złp.}) : (384 \text{ złp.} - 380 \text{ złp.}),$$

czyli stosunkowi $6 : 4$. Mamy więc

$$r : 2 = 6 : 4, \text{ skąd } r = 3.$$

Szukana więc liczba jest o 3 łokcie większą od ilości łokci w drugim przypuszczeniu (12 łok.); a więc jest nią 15 łok. Znaleźliśmy więc, że pierwszego gatunku sukna kupiono 15 łokci, a drugiego 21 łokci. —

Z powyższego widzimy, że tę metodę rozwiązywania można stosować tylko do takich zadań, w których *zmiana wartości liczby szukanej jest proporcjonalną względem różnicy owych dwu liczb, które powinny, według zadania, być sobie równe*. W każdym przeto danym przypadku należy uprzednio sprawdzić, czy to istotnie ma miejsce.



PRZYPISEK I.

(Zob str. 170.)

WARUNKI PODZIELNOŚCI PRZEZ LICZBY PIĘRWSZE WZGLĘDEM 10-U.

NAPISAAŁ

DR. ANTONI ŻBIKOWSKI,

NAUCZYCIEL ZASŁUŻONY GIMNAZJUM 1-GO W KAZANIU ¹⁾.

1. Jeżeli dziesiątki jakiegokolwiek liczby danój L nazwiemy a , jedności jej zaś nazwiemy b , to możemy ją przedstawić:

$$(1) \quad L = 10a + b.$$

Gdy mamy nadto jakąkolwiek liczbę zakończoną na cyfrę 1 i nazwiemy ją d , a jej dziesiątki n , to ta liczba będzie «postaci»

$$d = 10n + 1.$$

Utwórzmy wyrażenie:

$$a - bn.$$

Ponieważ z (1) wypada $a = \frac{L-b}{10}$, zatem

$$a - bn = \frac{L-b}{10} - bn = \frac{L - (10n+1)b}{10} = \frac{L - bd}{10},$$

skąd otrzymujemy

$$(2) \quad L = 10(a - bn) + bd.$$

Rozłożyliśmy L na sumę dwu składników. Jeden z nich, bd , jest oczywiście podzielny przez d ; aby więc liczba L była podzielna przez d , trzeba, aby jej składnik $10(a - bn)$ był podzielny przez d . Ten zaś składnik jest iloczynem dwu czynników, z których pierwszy, 10 , jest liczbą pierwszą względem liczby

¹⁾ Autor, w zwięzlejszej niż tu formie, w tomie III *Bulletin*'u akademii nauk w Petersburgu (r. 1860), jakoteż w artykule *Ułatwione sposoby rozpoznawania podzielności liczb* (*Dziennik polytechniczny*, wydawany przez B. i M. Marczewskich; r. 1861, poszyt II, Warszawa), ogłosił te twierdzenia dla obu rozpatrywanych przypadków, a dowiódłszy ich, podał, jako szczególne przypadki, cechy podzielności dla wszystkich odpowiednich liczb mniejszych od 100. — W r. 1871 w roczniku II *Zeitschrift*'u für *math. und naturw. Unterricht* Hoffmann'a p. Zerlang ogłosił bez dowodu, uzasadnioną już przez dra Żbikowskiego, cechę podzielności przez 7, którą Niemcy niesłusznie nazywają: cechę Zerlanga. — W roczniku IV tegoż *Zeitschrift*'u (r. 1873) są podane przez innego autora, również bez dowodu, cechy podzielności przez inne liczby, które także były ogłoszone (wraz z ich udowodnieniem) w przytoczonych artykułach dra Żbikowskiego.

Red.

$d = 10n + 1$. Może więc przez d być podzielnym tylko czynnik $a - bn$. I jeżeli wyrażenie $a - bn$ przedstawia liczbę podzielną przez $d = 10n + 1$, to i dana liczba $L = 10a + b$ jest podzielna przez d .

Gdy więc idzie nam o podzielność liczby $L = 10a + b$ przez takie liczby, jak

$$11 = 10 \cdot 1 + 1,$$

$$21 = 10 \cdot 2 + 1,$$

$$31 = 10 \cdot 3 + 1,$$

$$41 = 10 \cdot 4 + 1,$$

i t. d.,

to warunki podzielności będą odpowiednio:

$$a - bn = a - b,$$

$$= a - 2b,$$

$$= a - 3b,$$

$$= a - 4b,$$

i t. d.

2. To wszystko, cośmy, rozważając wyrażenie (2) liczby danéj L , wyprowadzili o podzielności téj liczby przez liczbę $10n + 1$, stosuje się również i do dzielników téj liczby, gdyż dzielnik dzielnika liczby danéj jest dzielnikiem liczby danéj.

Jeżeli więc liczba, którą nazwijmy także d , jest różnym od 1 dzielnikiem liczby $10n + 1$, to również warunkiem podzielności liczby $L = 10a + b$ przez d jest podzielność liczby przedstawionéj przez wyrażenie $a - bn$ przez tę liczbę d .

Gdy więc, mając daną liczbę d , która nie jest postaci $10n + 1$, chcemy wyprowadzić warunek podzielności liczby danéj $10a + b$ przez tę liczbę d , to zadanie nasze polega teraz na tym, aby wyznaczyć taką liczbę postaci $10n + 1$, któraby była podzielną przez tę liczbę d . Znalazszy bowiem taką liczbę $10n + 1$, odrazu mieć będziemy żądany warunek podzielności: $a - bn$. Ten zaś warunek będzie wyrażony najprościej, jeżeli z różnych możliwych wartości na n [gdyż z jednéj liczby postaci $10n + 1$ podzielnéj przez d możemy takich liczb otrzymać nieskończenie wiele ¹⁾] weźmiemy najmniejszą liczebnie, bez względu na to, czy ona jest dodatną, czy też ujemną.

Ponieważ liczba d jest dzielnikiem liczby $10n + 1$, która jest oczywiście liczbą pierwszą względem 10, więc i liczba d jest téż pierwszą względem 10. A gdy liczba n ma być taką, żeby liczba $10n + 1$ była podzielną przez d , przeto idzie nam tu o znalezienie takiej najmniejszej liczebnie wartości dla n , przy której, w założeniu, że d jest liczbą pierwszą względem 10, wyrażenie

¹⁾ Mnożąc ją np. przez 11, 21, 31, 111 i t. d.

$$\frac{10n + 1}{d}$$

przedstawiałoby liczbę całkowitą. Jeżeli tę wartość całkowitą, która może być zresztą jakąkolwiek, oznaczmy przez r ,

$$\frac{10n + 1}{d} = r,$$

to możemy powieść, że idzie nam o to, aby mając równanie nieoznaczone

$$10n - dr = 1,$$

z dwiema niewiadomymi n i r , z rozwiązań w liczbach całkowitych wziąć najmniejszą liczebnie wartość na n . Ponieważ spólczynniki tych niewiadomych, 10 i d , są liczbami piérwszymi względem siebie, zatem istnieją rozwiązania całkowite tego równania, i otrzymamy żadaną wartość na n , nadając w wyrażeniu tej liczby

$$n = \frac{dr - 1}{10}$$

na r taką wartość całkowitą, iżby przy niej n miało wartość całkowitą liczebnie najmniejszą. Wyznaczymy taką liczbę n , mieć będziemy, jako warunek podzielności liczby $10a + b$ przez d , podzielność liczby, przedstawionej przez wyrażenie ¹⁾

$$a - bn.$$

Tak np. jeżeli $d = 7$, to

$$n = \frac{7r - 1}{10},$$

i otrzymujemy najmniejszą liczebnie wartość na n , przyjmując $r = 3$. Wtedy $n = 2$ i warunek podzielności liczby $10a + b$ przez 7 jest

$$a - bn = a - 2b.$$

Jeżeli $d = 13$, to

$$n = \frac{13r - 1}{10};$$

gdly tu na r nadamy wartość $r = 9$, to otrzymamy najmniejszą dodatną wartość $n = 9$, ale biorąc $r = -3$, otrzymujemy liczebnie mniejszą wartość ujemną $n = -4$. Biorąc więc tę ostatnią, mamy jako warunek podzielności liczby $10a + b$ przez 13,

$$a - bn = a + 4b.$$

¹⁾ Dla czytelnika, który posiada znajomość tego, co się zwykle wykłada na początku kursu teorii liczb, dałaby się cała ta część tego ustępu tak krótko przedstawić:

Liczba d , dzielnik liczby $10n + 1$, jest piérwszą względem 10. Porównanie (kongruencyja) więc stopnia 1-go

$$10n + 1 \equiv (\text{mod. } d)$$

ma a zawsze rozwiązanie. Rozumiejac więc przez n najmniejszy liczebnie pierwiastek tego porównania, mieć będziemy, jako warunek podzielności i t. d.

Podobnie np. przy $d=3$ jest

$$n = \frac{3r-1}{10};$$

gdy $r=7$, to $n=+2$, ale przy $r=-3$ otrzymujemy $n=-1$. Zatem przyjmujemy, że warunek podzielności liczby $10a+b$ przez 3 jest

$$a-bn = a+b.$$

Taksamo przy $d=9$.

I t. d.

Wskazówki, jak te cechy stosować, są wyłożone w tej książce w § 13, us. 15.

3. Łącząc tu razem rozbiérane wyżej dwa przypadki, możemy powiedzieć ogólnie:

Liczba $10a+b$ jest podzielna przez jakąkolwiek liczbę d , pierwszą względem 10 -u, pod warunkiem, aby przez d była podzielna liczba, przedstawiona przez wyrażenie

$$a-bn,$$

gdzie n jest taką liczbą całkowitą, iż liczba $10n+1$ jest podzielna przez d . Warunek ten będzie najdogodniejszy w zastosowaniu, gdy na n nadamy liczebnie najmniejszą z wartości możebnych.

Kazań, dnia $\frac{22 \text{ września}}{4 \text{ października}}$ r. 1883.

PRZYPISEK II.

(Zob. str. 186.)

JAN BROŻEK O LICZBACH DOSKONAŁYCH I O LICZBACH ZAPRZYJAŻNIONYCH.

NAPISAL

JAN NEP. FRANKE,

PROFESOR SZKOŁY POLITECHNICZNEJ WE LWOWIE ¹⁾.

Jan Brożek (podpisywał się Ioannes Broscius Curzeloviensis) urodził się w dniu 1 listopada r. 1585 w miasteczku Kurzelowie, w dawnym województwie sieradzkim. W akademii krakowskiej pobierał nauki od r. 1604—1610, w którym został doktorem filozofii i nauk wyzwolonych. W styczniu r. 1614 powołano go do Collegium minus, jako prof. astronomii z tytułem astrologus ordinarius. W r. 1618 odbył podróż do Prus i Warmii, skąd przywiózł wiele pamiątek po Koperniku, z których kilka tylko ogłosił (reszta zaginęła). Od r. 1620—1624 chodził na medycynę w Padwie; po uzyskaniu tamże stopnia doktora medycyny wrócił w r. 1624 do Krakowa. W r. 1626 został dodatkowo profesorem wymowy, a w r. 1629 złożył urząd prof. astronomii, natomiast zaś zaczął wykładać teologiją. Doktorem teologii został w r. 1650. W r. 1652 obrano go rektorem akademii krakowskiej. Tegoż roku umarł podczas zarazy morowej. — Z jego prac matematycznych najważniejsze są: 1) *Arithmetica integrorum...* Cracoviae, 1620 (małe 8-vo, str. szesnaście, 252 i cztery); 2) *De numeris perfectis disceptatio...*, Cracoviae, 1637 (małe 4-to, str. dwanaście), rzecz powtórnie wydana w Amsterdamie w r. 1638 i przedrukowana, również bez zmiany, w dziele (str. 111—120) następującym: 3) *Apologia pro Aristotele et Euclide contra Petrum Ramun et alios...* Dantisci, 1652 (4-to, str. dziesięć, 3—174), wydawanym powtórnie w Amsterdamie w r. 1699.

1. W pracy przytoczonej pod N. 2-im Brożek wykazuje, że między liczbami 10 000 i 10 000 000 niema żadnej liczby doskonałej; że zatył po

¹⁾ Prof. Franke z polecenia akademii uniejętności w Krakowie wygotował obszerną monografią o Brożku i w kwietniu r. 1883 złożył ją akademii, która tę pracę ogłosił ku uczczeniu 300-letniej rocznicy urodzin Brożka, przypadającej w r. 1885. Rzecz ta, drukująca się obecnie, wyjdzie pod tytułem: *Jan Brożek (I. Broscius), akademik krakowski. 1585 — 1652. Jego życie i dzieła, ze szczególnym uwzględnieniem prac matematycznych. Ze źródeł rękopiśmiennych opracował...* (z portretem Brożka). — Z pracy tej streszczone są tu tylko te ustępy, które bezpośrednio się odnoszą do badań naszego matematyka wieku XVII nad liczbami doskonałymi i nad liczbami zaprzyjaźnionymi.

Red.

śród liczb mniejszych od 10 000 000 są tylko cztery liczby doskonałe, podpadające pod znaną regułę Euklidesa (księga IX, podanie 36), a następnie okazuje indukcyjnie, że liczby 130 816 i 2 096 128, z których pierwszą Michał Stifel, a drugą Piotr Bongus ogłosił jako liczby doskonałe, nimi nie są. Donioślejszego znaczenia jest druga część tej pracy Brożka. W niej bez dowodzenia podaje on 10 twierdzeń o podzielności liczb, mających postać $2^m - 1$, a mianowicie, że owe liczby są podzielne (n liczba dowolna całkowita)

przy $m = 2.n, 4.n, 3.n, 10.n, 12.n, 8.n, 18.n, 11.n, 28.n, 5.n$
przez 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31.

Co do tego, zdaje się, wystarczy, gdy tu tylko zaznaczymy, że sławne twierdzenie Fermat'a o podzielności liczb ¹⁾ drukiem zostało ogłoszone dopiero w r. 1674, jakkolwiek Fermat je znał w r. 1640 (t. j. w parę lat po ogłoszeniu tej pracy Brożka).

Dzielo przytoczone pod N. 3-im kończy się oddzielną pracą: *De numeris perfectis disceptatio altera* (121—174). Tu Brożek zadaje sobie naprzód pytanie: czy liczby doskonałe utworzone być mogą wyłącznie tylko sposobem wynikającym z twierdzenia Euklidesa?, któryto sposób przedstawia wiele niedogodności przy poszukiwaniu większych liczb doskonałych ponad znane cztery, głównie ze względu na to, że nie wiadomo, na której z odpowiedniego szeregu liczb zatrzymywać się należy. — Następnie, przytoczywszy 20 liczb doskonałych (aż do 24-cyfrowej), znajdujących się w *Petri Bongii Bergomatis numerorum mysteria* (według wydania z r. 1618; pierwsze jest z r. 1585), usiłuje wynaleść nieomyślny a prosty sposób przekonania się, czy pewna liczba jest doskonałą. W tym celu podaje przedewszystkim tabelarycznie zestawione, a mozolnie wyznaczone, dzielniki pierwsze wszystkich liczb ²⁾ postaci $2^m - 1$ od $m = 1$ aż do $m = 100$. Dla niektórych liczb tak wielkie przytacza dzielniki (np. 131 071 dla $m = 34$; 524 287 dla $m = 38$), że wnosić należy, iż posiadał metodę ogólną ich wyznaczenia, jakkolwiek o tym nie wspomina. — Potym, zaznaczywszy, że każdy wyraz postępu geometrycznego podwójnego (t. j. postępu 1, 2, 2², 2³, ...) zmniejszony o 1 przedstawia sumę wyrazów poprzedzających, i opisawszy powstawanie liczb doskonałych według twierdzenia Euklidesa, objaśnia, że zapomocą działań, które przedstawimy wzorem $2^{(2^m+1)} + 2^m - 2^{2^m}$, można otrzymywać liczby doskonałe bez mnożenia, używając tylko tabliczki wyrazów postępu podwójnego. [Podług Euklidesa liczba

¹⁾ Jeżeli a jest liczbą niepodzielną przez liczbę pierwszą p , to różnica $a^{p-1} - 1$ jest podzielna przez p .

²⁾ W wielu książkach jeszcze powtarzają, że największa z liczb pierwszych, dotąd znanych, jest liczba $2^{31} - 1 = 2 147 483 647$, podana przez Euler'a (1707—1783), gdy tymczasem w tej tablicy Brożek zaznacza już jako liczby pierwsze te, które odpowiadają jeszcze większym wartościom m , mianowicie $m = 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$.

$(2^{2m+1} - 1)$. 2^m jest doskonałą, jeżeli $2^{2m+1} - 1$ jest liczbą pierwszą; możemy przeto, używając tabliczki Brożka, liczby doskonałe otrzymywać w postaci $2^{(2m+1)+2m} - 2^{2m}$.] — Po takim przygotowaniu, Brożek przystępuje do zbadania wzmiankowanych powyżej 20-u liczb Bongus'a. Nie wykonywając żadnych dzieleni i nie szukając dzielników liczb badanych, Brożek, zapomocą prostego zastosowania twierdzenia Euklidesa, należycie przezeń wyzyskanego, tudzież tabliczki wyrazów postępu 1, 2, 2^2 , ..., 2^{100} , okazuje, że spośród owych 20-u liczb, przez Bongus'a za doskonałe podanych, tylko 10 jest doskonałych, a pozostałe nimi nie są. — Widoczny tu postęp w porównaniu z poprzednią pracą Brożka. Gdy tam uciekał się do wykonywania dzieleni dla zbadania rozważanych wtedy dwu liczb, tu obmyślił metodę postępowania, na ogólniej zasadzie opartą.

2. Przejdziemy do badań Brożka nad liczbami zaprzyjaźnionymi.

O liczbach zaprzyjaźnionych Brożek pisał we wzmiankowanej w ustępie poprzedzającym rozprawie *De numeris perfectis disceptatio altera* w drugiej jej części. Przytoczywszy jedyną doówczas znaną, a znaną już starożytnym, parę liczb zaprzyjaźnionych, 220 i 284, Brożek wypowiada, że niema dotąd żadnej reguły tworzenia takich liczb ¹⁾, i podaje własną ku temu metodę, której nie dowodzi ogólnie, lecz tylko ją objaśnia na przykładach. — Weźmy dwie liczby nieparzyste, pierwsze względem siebie, mianowicie 55 i 71. Suma wszystkich dzielników każdej z tych liczb, od niej mniejszych, jest odpowiednio 17 i 1. Tu $71 - 55 = 16 = 17 - 1$, t. j. różnica wziętych liczb jest równa różnicy sum ich dzielników, jeżeli te sumy odejmujemy od siebie w odwrotnym porządku, niż liczby im odpowiadające. Utwórzmy z liczb danych postępy geometryczne:

$$55, 110, 220 \quad \text{i} \quad 71, 142, 284$$

i utwórzmy sumy dzielników tych liczb:

$$17, 106, 284 \quad \text{i} \quad 1, 74, 220.$$

Liczby zatym $2^2 \cdot 55$ i $2^2 \cdot 71$ są zaprzyjaźnione. — Inny przykład. Bierz liczby 1081 i 1151 i postąp z nimi taksamo; otrzymasz liczby:

¹⁾ Właściwie istniała odpowiednia reguła, nieznaną uczonym europejskim (dopiero w r. 1852 ogłosił o niej wiadomość W o e p k e, w *Journal asiatique*), którą podał arabski matematyk w Bagdadzie T á b í t i b n K u r r a (836—901 po Chr.). Reguła ta jest następująca:

Jeżeli trzy liczby:

$$p = 3 \cdot 2^m - 1, \quad q = 3 \cdot 2^{m-1} - 1, \quad r = 9 \cdot 2^{2m-1} - 1$$

są pierwsze, to liczby

$$A = 2^m \cdot p \cdot q \quad \text{i} \quad B = 2^m \cdot r$$

tworzą parę liczb zaprzyjaźnionych.

Tak np. przy $m = 2$ mamy $p = 11$, $q = 5$, $r = 71$, wskutek czego $A = 2^2 \cdot 11 \cdot 5 = 220$ $B = 2^2 \cdot 71 = 284$.

$$2^4 \cdot 1081 = 17\,296 \quad \text{i} \quad 2^4 \cdot 1151 = 18\,416,$$

będące parą liczb zaprzyjaźnionych. (Tę parę podał Brożek pierwszy.)

Że metoda Brożka jest ogólną, można tego tak dowieść. Niech n będzie daną liczbą; rozłóżmy ją na czynniki pierwsze (a, b, c, \dots),

$$n = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \dots$$

Suma dzielników liczby n , od niej mniejszych, jeżeli ją oznaczymy literą s , a literą S sumę jej wszystkich dzielników, jest

$$s = S - n = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \dots - a^\alpha \cdot b^\beta \dots$$

Inną liczbą niech będzie n' , a s' niech oznacza sumę jej dzielników, od niej mniejszych, zaś S' sumę jej wszystkich dzielników. Utwórzmy postępy

$$n, 2 \cdot n, 2^2 \cdot n, \dots, 2^k \cdot n, \dots \quad \text{i} \quad n', 2 \cdot n', 2^2 \cdot n', \dots, 2^k \cdot n', \dots,$$

a odpowiadające tym liczbom sumy ich dzielników, od tych liczb mniejszych, nazwijmy odpowiednio

$$s, s_1, s_2, \dots, s_k, \dots \quad \text{i} \quad s', s'_1, s'_2, \dots, s'_k, \dots$$

Zważmy, że $s = S - n$, $s' = S' - n'$. Jeżeli przeto przyjmujemy, że n i n' są takimi liczbami, iż $s - s' = n' - n$, to $S = S'$. Gdy nadto dodamy warunek, aby obie liczby n i n' były nieparzyste, to

$$s_k = (1 + 2 + \dots + 2^k) \cdot S - 2^k \cdot n = (2^{k+1} - 1) \cdot S - 2^k \cdot n;$$

$$s'_k = (2^{k+1} - 1) \cdot S' - 2^k \cdot n' = (2^{k+1} - 1) \cdot S - 2^k \cdot n'.$$

Jeżeli przypuścimy, że

$$s_k = 2^k \cdot n', \quad \text{czyli} \quad (2^{k+1} - 1) \cdot S - 2^k \cdot n = 2^k \cdot n',$$

to otrzymamy równanie warunkowe

$$2^k = \frac{S}{2S - (n + n')}.$$

Jeżeli to równanie przestępne względem k może mieć miejsce przy wartościach całkowitych dla k , wtedy równanie

$$(2^{k+1} - 1) \cdot S - 2^k \cdot n = 2^k \cdot n' \quad (\text{czyli} \quad s_k = 2^k \cdot n'),$$

które można także tak pisać ($S = S'$):

$$(2^{k+1} - 1) \cdot S' - 2^k \cdot n' = 2^k \cdot n \quad (\text{czyli} \quad s'_k = 2^k \cdot n),$$

ma wogóle miejsce przy całkowitych wartościach liczb n, n' i k , a wtedy, jak widoczna z ostatnich związków, dwie liczby: $2^k \cdot n$ i $2^k \cdot n'$ tworzą parę liczb zaprzyjaźnionych. Możemy więc wypowiedzieć twierdzenie: *«jeżeli obierzemy dwie liczby nieparzyste n i n' takie, że $n' - n = S - S'$, i jeżeli istnieje wartość całkowita k , przy której*

$$\frac{S}{2S - (n + n')} = 2^k,$$

to liczby

$$2^k \cdot n \quad \text{i} \quad 2^k \cdot n'$$

przedstawiają parę liczb zaprzyjaźnionych».

Po Brożku Franciszek Schooten w dziele *Exercitationum mathematicarum libri quinque . . . Lugduni Batavorum, 1656*, według innéj reguły, udzielo-
néj mu przez Descartes'a, różnéj od reguły Brożka, obliczył (liber V, sectio IX) tak parę liczb Brożka, jak i inną jeszcze parę liczb zaprzyjaźnio-
nych, mianowicie 9363584 i 9437056.

Lwów, 1 października r. 1883.

KONIEC.

Redaktor i wydawca czasopisma «Bibl. mat.-fiz.»,
Dr. *Maryjan A. Baraniecki*.

