ŠOUREK, NAUKA O ČTYŘSTĚNU

1478

O OBSAHU ČTYRSTĚNU.

Od téhož spisovatele vyšly jazykem bulharským:

1. **Праволинейна Тригонометрия** за горнитѣ классове на реалнитѣ и гимназиални училища. Пловдивъ 1883. Издание и печать на **Хр. Г. Дановъ.**

2. **Стереометрия** за горнитѣ классове на реалнитѣ и гимназиални училища.

3. **Логаритмически таблици** отъ професора **Дра. Студничка.**

4. **Аналитическа Геометрия** за горнитѣ классове на реалнитѣ училища.

5. **Методическо изяснение на краснописанието.** За училищата изобще.
   1. Часть първа: Малка българска и латинска азбука.
   2. Часть втора: Голѣма българска и латинска азбука.

6. **Руководство къмъ първата часть на: „Методическото изяснение на краснописанието.“**

Všechny uvedené spisy byly vynesením „Řiditelstva národního vyučování“ schváleny pro střední školy Bulharské.

NAUKA

O ČTYRSTĚNU.

SEPSAL

ANTONÍN V. ŠOUREK,

T. Č. PROFESSOR PŘI VYŠŠÍM REALNÉM GYMNASII V PLOVDIVĚ VE VÝCHODNÍ RUMELII.

ČÁST PRVNÍ:

O OBSAHU ČTYRSTĚNU.

S JEDNOU TABULKOU LIT.

V PRAZE.

NAKLADATEL FR. A. URBÁNEK, KNIHKUPEC

pro literaturu paed. i hudební a pomůcky učebné.

1886.

Tiskem Karla Bellmanna v Praze.

VELECTĚNÉMU

UČITELI A DOBRODINCI SVÉMU

TOMÁŠI DRŮBKOVI,

PROFESSORU PŘI VYŠŠÍCH REALNÍCH ŠKOLÁCH V PÍSKU,

VĚNUJE

NA DŮKAZ SVÉ STÁLÉ VDĚČNOSTI

SPISOVATEL.

PŘEDMLUVA.

Toto dílko měla by vlastně předcházeti část, kteráž by o vlastnostech tetraedru a úkonech rohů vůbec pojednávala, ku prométným vlastnostem svazků a čtyrstěnu zvláště přihlížela a ukázala, jak jich lze při některých plochách užiti.

Ač ku této části od několika roků sbírám material, přec nebylo mi lze připraviti ji k tisku, jelikož, vzdálen jsa vlasti, postrádám o tomto předmětu bohatých dat, uložených v různých mathematických časopisech. Svým časem, až poměry budou mi snad příznivějšími, pokusil bych se o vydání této druhé části.

Vydávaje svůj spisek, měl jsem na zřeteli seznámiti mladší naše mathematiky s tělesem, jehož důležitosť nepotřebuji zvláště dokazovati, jakož i pobídnouti jich ku zkoumání na pohled i nepatrných předmětů, jak mne před lety k týmž pozorováním přiměl prof. Dr. G. Blažek, čímž tuto mu vzdávám své povinné díky.

Dosáhnu-li účelu svrchu dotčeného, bude s dostatek odměněna tato první práce má jazykem mateřským sepsaná.

V Plovdivě ve Vých. Rumelii r. 1884.

A. V. Šourek.

Úvod.

Čím planimetrii trojúhelník, tím stereometrii — **čtyrstěn.** Čtyrstěnem nazýváme část prostoru výhradně čtyřmi rovinami omezeného. Části rovin, jimiž čtyrstěn ohraničen jest, slují **stěny** a poněvadž jsou čtyři, odtud pochodí i jméno jeho — čtyrstěn.

Stěny tohoto tělesa jsou trojúhelníky, průsečnice těchto omezujících ploch jsou **hranami** a koncové body hran — **vrcholy** jeho.

Čtyrstěn, nejjednodušší to mnohostěn, je základem všech ostatních, poněvadž lze každý mnohostěn rozděliti ve čtyrstěny a platí tudíž proň tytéž věty, jako pro polyedry vůbec. Lze ukázati, že čtyrstěn mimo své čtyry stěny, z nichž lze každou za základnu považovati, má též čtyři vrcholy a šest hran. Hrany uzavírají dvakrát šest **hranových** úhlů, jichž součet činí osm pravých. Úhlů **stranových**, kteréž jsou odchylkami dvou stěn a leží v rovinách kolmo ku hranám položeným, jest šest, kterýchž součet větší jest než čtyři, menší však než šest pravých.

V každém čtyrstěnu lze vyhledati výšky, t. j. kolmice spuštěné s vrcholů na protilehlé stěny, které jsou čtyři. Dále lze do čtyrstěnu osm koulí vepsati a jednu témuž tělesu obepsati; konečně pak lze v některém čtyrstěnu takovou kouli vyhledati, kteráž by se dotýkala veškerých jeho hran. Vidíme tedy, že útvar tento lze mnohými částkami určiti, není však nutno všech užiti při určování tohoto tělesa.

Čtyrstěn, vynikající svou jednoduchostí, byl, podobně jako trojúhelník, již v dobách nejstarších znám a slavní staří mathematikové zmiňují se nejednou o tomto omezeném prostoru. Jakým způsobem lze určiti obsah a výšku čtyrstěnu, známo bylo již starým Egypťanům. V zachovaném a v britském museu uloženém spise: „Papyrus", „jenž principie veličin" obsahuje, nalezáme dosti úloh obsah pyramidy řešících. Škoda však, že v zachovaném tomto zbytku někdejší slávy egyptské není naznačen způsob, jakým se vyhledávání obsahu jehlance konalo, nýbrž, jak S. Birch vypravuje, veškeré výpočty prostě čísly udány jsou.

Obrovské jehlany blíže vesnice Gizeh byly nejednou předmětem studií mladých mathematiků alexandrinských. Známo, že v staroslavné škole města Alexandrie dostalo se prvního vzdělání učencům, jakými byli: v století VII. př. K. Thales, v VI. Oinopides a Pythagoras, v V. Demokrit a ve IV. Plato; skutečně pak i tito se zaměstnávali výpočtem jehlance, jak o tom se zmiňuje Hieronymus Rhodský a sám Plutarch, tvrdíce, že slavný Mileťan Thales určoval výšku pyramidy z jejího stínu. Plutarch kromě toho udává, že Bias a, dle Psellusa, i slavný Archimedes úkolem tímto se obírali.

Známý Pythagoras ze Sama konstruoval prý pravidelné polyedry a původce našich mathematických učebnic, Euklid, rozeznával pravidelný a nepravidelný čtyrstěn. Tak čteme v knize XI., v poznámce 26., o pravidelném a v knize XIII. o nepravidelném čtyrstěnu. Rozdíl obou, jak známo, závisí na nestejné délce hran: pravidelný má všechny hrany rovně dlouhé a nepravidelný — nerovné délky.

Byliť sice i později slavní mathematikové, ale žádný, pokud nám známo, neměl zření ku čtyrstěnu zvláště. Mnohá a mnohá století minula, aniž by byl kdo pojednával o dotčeném tělese.

Až konečně v XV. století uvádí frater Lucas de Burgo Sancti Sepulchri ve své „Arithmetica et Geometria" příklad, jak lze stanoviti výšku nepravidelného jehlance.

Lucas Patiolus zmiňuje se v díle svém: „Divina proportione Opera" o čtyrstěnu a rozeznává: plochý, plný a prázdný. Prázdným nazval pouze kostru tetraedru, totiž jeho šest hran. Kromě toho činí zmínku o tom, jak možno vyhledati obsah trojstěnného jehlance a mluví o kouli, kterou lze ve čtyrstěn vepsati.

V XVI. století vůbec, kdy nejvíce překládány a vykládány byly spisy Euklidovy, hleděno bylo k tomu, aby ony pravdy, v dílech slavného učence uložené, probrány a prozkoumány byly a nelze tudíž diviti se tomu, že není možno všechny ony muže jmenovati, kteří více nebo méně o předmětě našem pracovali. Podotknouti však dlužno, že po celou tu dobu od Euklida až ku konci XVI., ano i XVII. století, žádného samostatného pojednání o čtyrstěnu nebylo.

Ač století XVII. mnohými učenými mathematiky honositi se může, nemá přece mužů, kteří by byli učinili předmětem svých studií tetraedr. Tomu nelze se diviti, neboť nalezení logarithmů, vyhledávání poměrů mezi obvodem a průměrem kruhu, řešení rovnic, praktická geometrie i astronomie, zaměstknávaly problemy svými slavné muže, jako: Ludolfa, Napiera, Bryggsa, Vlacga, Huygenia, Fermata, De Billy-a, Harriota, Girarda, Kepplera a více jiných; z těchto pouze Girard hovoří poněkud o rozdělení čtyrstěnu.

Šťastnějším bylo století XVIII. V době této proslavil se hlavně Lagrange, jenž v pojednání svém: „Solutions analytiques de quelques problèmes sur les Pyramides triangulaires“, v memoirech královské akademie r. 1773. a v Berlíně r. 1775. uveřejněném, pěkným a důmyslným způsobem čtyrstěn koordinatami jeho čtyř vrcholů ustanovil. Vynašelť se zvláštní lehkostí vzorce pro povrch a obsah čtyrstěnu, vypočítal poloměr vepsané i opsané koule a určil polohu středů těchto koulí, jakož i těžiště čtyrstěnu.

Slavný učenec Euler ve svých dílech v Petrohradě sepsaných vzpomenul i mimochodem tetraedru. — Roku 1786. vydal v Paříži abbé de Gua spis nazvaný: „Propositions neuves et non moins utiles que curieuses sur le Tetraèdre ou Essai de Tetraèdrométrie“, v němž vyhledává nejkratší vzdálenosť dvou hran počtem differencialným.

Brzo potom, roku 1806., uveřejnil věhlasný státník a mathematik L. N. M. Carnot pojednání: „Mémoire sur la relation, qui existe entre les distances respectives de cinq points pris arbitrairement dans l'espace“, kteréž Schumacherem přeloženo do němčiny a jako dodatek k jeho překladu: „Géométrie de position“ v Altoně r. 1810. uveřejněno bylo. Ve svrchu dotčeném spisku stanovil Carnot vzorce pro obsah, výšku, poloměry všech koulí, jakož i pro polohu těžiště a vyjádřil je délkami šesti hran, čímž nemalých zásluh o toto těleso si získal. Dále naznačil způsob, jakým možno vyhledati obsah ze dvou protilehlých hran, z jejich nejkratší vzdálenosti a z úhlu, jejž tyto hrany uzavírají.

Roku 1827. vydal v Norimberce Dr. Karel Vilém Feuerbach, známý svým kruhem devíti bodů, spis s nápisem: „Grundriss zu analytischen Untersuchungen der dreieckigen Pyramide.“ Jest to, jak Junghann tvrdí, výňatek z většího, v rukopise ukončeného díla, opírajícího se o větu r. 1825. Feuerbachem v Okenově „Isis“ uveřejněnou a vyjadřující: „známa-li jest vzdálenosť jednoho z pěti libovolných bodů od jakékoliv roviny a násobíme-li tuto vzdálenosť obsahem jehlance, kterýž tvoří ostatní čtyři bodové, jest pak algebraický součet těchto pěti součinů roveň nulle.“

Téhož roku 1827. vyšla kniha „Das geradlinige Dreieck und die dreiseitige Pyramide nach allen Analogien dargestellt“ od Schulze von Stražnický, kteráž spracována dle Lagrange-a užívá vyšší mathematiky.

Crelle byl také z těch, kteří o čtyrstěnu pracovali. Řiditel v Gothě, J. H. F. Müller, pojednává pak o 44 určovacích částech, jejich trigonometrických relacích, které až dosud málo zpracovníků byly nalezly, v brožuře: „Betrachtungen über das Tetraeder mit seinen Berührungskugeln“, kteráž obsahuje 34 stránek. Mnohé krásné věty o čtyrstěnu lze se dočísti též v knize Jacobi-ho: „Elemente der Geometrie von wan Swinden.“

Největších zásluh o čtyrstěn získal si Dr. Gustav Junghann, jenž upotřebiv Standtova sinu rožného a Brettschneiderem*) poprve zavedeného názvu „modul vrcholový“ znamenitě vzorce čtyrstěnu zjednodušil a vlastnosti tetraedru vylíčil. Spisovatel tento uložil veškeré tyto poučky v knize nazvané: „Tetraedrometrie“ a ve dvou dílech roku 1862. a 1863. v Gothě

*) Crellův: Journal XIII. pag. 85.

u E. F. Thienemanna vydané. Spisu právě zmíněného nejvíce bylo užito při sepisování spisku tohoto.

Literatura česká nemůže se sice vykázati podobnými pracemi, jako literatury sousedních národů, nicméně ani v této nejsme bez pracovníků. Z těch vzpomínáme hlavně: univ. prof. Dra. F. J. Studničky: „Úvod do analytické geometrie“ a prof. vysokých škol technických Dra. G. Blažka, jenž uveřejnil v Časopise českých mathematiků ročníku III. pag. 272.: „dva vzorce obsah čtyrstěnu vyjadřující“, kteréž jednoduchostí a užitím determinantů vynikají a daleko předčí nad ony vzorce, jimiž tutéž úlohu Grunert, Crelle, Klein a j. řešili.

Literatura německá i francouzská velkou řadou pojednání, k témuž předmětu hledících, se vyznamenává. Téměř každý mathematický časopis obsahuje jeden neb více článků o čtyrstěnu jednajících. Tak na příklad první číslo známého Grunertova: „Archiv der Mathematik und Physik“ uvádí studii professora C. A. Bretschneidera v Gothě:

„Beiträge zur Untersuchung der dreiseitigen Pyramide.“

Tamtéž čteme:

ve svazku XVI. pag. 125. od Dra. Baltzera: „Ueber den Zusammenhang einiger das Tetraeder betreffenden Aufgaben“; dále

ve svazku XVIII. pag. 239. od Dra. Grunerta: „Leichte Bestimmung des Inhaltes der dreiseitigen Pyramide“; pak

ve svazku XXIII. pag. 284. od téhož: „Aphoristische Bemerkungen über die dreiseitige Pyramide“;

ve svazku XIV. pag. 162. od Hesela: „Ueber Bestimmung des Inhaltes der dreiseitigen Pyramide“;

ve svazku III. pag. 213. od Hoppe: „Eine Formel für die dreiseitige Pyramide“;

ve svazku X. pag. 198. od Luchterhandta: „Ueber einige Relationen zwischen zweien Tetraeder“;

ve svazku XIX. pag. 121. od Maura: „Entfernungsörter des Tetraeders“;

ve svazku XXXVI. pag. 356. od Grunerta: „Merkwürdiger Ausdruck für die dreiseitige Pyramide“;

ve svazku XXXI. pag. 41. od Heisa: „Sätze über das irreguläre Tetraeder“;

ve svazku XL. pag. 447. od Junghanna: „Eigenschaften der Tetraeder“;

ve svazku XXXIV. od téhož: „Beiträge zur Tetraedrometrie“;

ve svazku XXVIII. pag. 97. od Unferdingera: „Ueber die dreiseitige Pyramide“;

ve svazku XLV. pag. 121. od Gretschela: „Einige geometrische Sätze, welche sich auf Dreiecksflächen und Tetraedervolumen beziehen“;

ve svazku LIII. pag. 317. od Grunerta: „Flächeninhalt des Dreiecks etc.“;

ve svazku XLV. pag. 121. od téhož: „Analytischer Beweis eines bekannten Satzes vom Inhalte des Tetraeders“;

ve svazku LI. pag. 354. od Unferdingera: „Theorie des Tetraeders“;

ve svazku LVII. od Dostara: „Le Trièdre et le tetraèdre.“

Pojednání tuto jmenovaných, jakož i svrchu uvedených, použito bylo u větší neb menší míře při spisování tohoto spisku; kromě toho nahlédnuto bylo i v Crellův: „Journal der Mathematik“ a všímáno si bylo studií:

Crellovy: „Bemerkungen über Inhalt der Pyramide“, sv. 6., sešit 4., str. 414.; dále

Schulzovy: „Allgemeine Berechnung der fünf regulären Körper“, sv. 28., str. 108. a

Dra. Staudta: „Ueber die Inhalte der Polyeder und Polygone“, sv. 24.

Mimo uvedené prameny nalezli jsme pomůcky v knihách Dra. F. Studničky, ve spise: „Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes“ od Salmona-Fiedlera, v A. M. Legendrea: „Elemente der Geometrie“, přeložené od Crellea, dále v pěkné stati Dra. Dostara: „Le tétraèdre“, uveřejněné v jeho: „Éléments de la théorie des Déterminants“ (1877) a konečně v „Geometrie der Stellung“ od Carnota v překladu Schumacherově. Historických dat čerpáno ze spisů: Kästner: „Geschichte der Mathematik“, Montucla: „Hist. des Mathém.“, Dr. Herm. Hankel: „Zur Geschichte der Mathematik“, jakož Moritz Cantor: „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.“

Část první

Věty pomocné.

§ 1. Označení čtyrstěnu.

Celá naše rozprava soustředití se bude kol tělesa jediného a proto jest velmi důležito, abychom jednou pro vždy volili patřičné znaky a symboly.

Čtyrstěn, který pozorovati chceme, budiž $ABCD$ v obr. 1., v němž bodové A, B, C, D jsou jeho vrcholy. Stěny, těleso omezující, jsou trojúhelníky: ABC, BCD, ADC a ADB, jež jmenujeme $\triangle$, $\triangle_1$, $\triangle_2$ a $\triangle_3$. Trojúhelníky tyto jsou omezeny stranami, kteréž označíme písmeny: a, b, c, d, e, f, z nichž a, b, c jsou stranami základny ABC a hrany ve vrcholu D se sbíhající buďtež d, e, f.

Úhly hranové při vrcholu D jmenujeme a_0, b_0, c_0, na rozdíl od hran za index nullu přivěšujíce; dále hranové úhly při A buďtež: a_1, b_1, c_1, ony při B nechť jsou: a_2, b_2, c_2, konečně při C: a_3, b_3, c_3.

Úhly stranové, úhlům hranovým protilehlé, nazývejme

při vrcholu D . . . . α, β, γ,
„ „ A . . . . α, β_1, γ_1,
„ „ B . . . . α_1, β, γ_1,
„ „ C . . . . α_1, β_1, γ,

dle toho jsou α_1, β_1, γ_1 úhly, jež uzavírají stěny $\triangle_1$, $\triangle_2$ a $\triangle_3$ se základnou $\triangle$.

Každému z řečených trojúhelníků lze vepsati a opsati kruh.

Poloměry kruhů stěnám $\triangle$, $\triangle_1$, $\triangle_2$ a $\triangle_3$ opsané buďtež ϱ, ϱ_1, ϱ_2 a ϱ_3.

Dále písmeny R, r u ϱ' označujtež poloměr koule čtyrstěnu opsané, vepsané a hran jeho se dotýkající.

Výšky, které lze s vrcholů ku stěnám protilehlým spustiti, nechť slovou: v, v_1, v_2 a v_3.

Tím prozatím označíme náš čtyrstěn a budeme-li potřebovati jiného pojmenování, položíme je na svém místě.

§ 2. O rozdělení čtyrstěnu.

Jak svrchu řečeno bylo, rozeznával již Euklid dva čtyrstěny: pravidelný a nepravidelný. Onen omezen jest čtyřmi rovnostrannými trojúhelníky, omezující pak plochy tohoto jsou nerovnostrannými trojúhelníky. V pravidelném čtyrstěnu jsou: $a = b = c = d = e = f$, kdežto v nepravidelném jsou jmenované hrany nerovně dlouhy. Jestli však tři hrany v témže vrcholu se sbíhající rovnou délku mají, pravíme, že čtyrstěn takový jest — přímý.

Někteří němečtí spisovatelé užívají ještě jiných jmen. Tak na př. čteme ve spisu: „Elemente der Geometrie von wan Swinden", Jakobim vydaném, slova: „kolmohranný" (rechtkantig) a „rovnohranný" (gleichkantig). Rozumějíť kolmohranným onen tetraeder, v němž úhel dvou protilehlých hran 90° činí a rovnohranným čtyrstěnem pak jmenují onen, jehož protilehlé hrany sobě jsou rovny. Čtyrstěn v obrazci 1. byl by na př. rovnohranným, kdyby $a = d$, $b = e$ a $c = f$.

Grunert v rozpravách ve svém časopise roztroušených užívá názvu pravoúhlý pro onen čtyrstěn, v němž úhly hranové, týž vrchol tvořící, vesměs pravé jsou; tak muselo by býti $a_0 = b_0 = c_0$, aby V, jak chceme krátce obsah i čtyrstěn sám nazývati, byl pravoúhlým*).

Majíce zření ku hranám, rozeznáváme: pravidelný, nepravidelný, přímý a rovnohranný čtyrstěn.

Podle hranových neb protilehlými hranami uzavřených úhlů, rozeznáváme opět: pravoúhlý a kolmohranný tetraeder.

Všechny tyto zde uvedené čtyrstěny lze odvoditi, jak již řečeno bylo, z nepravidelného tetraedru a proto bude úkolem řešiti tento. Prve nežli ku tomuto bude nám lze přistoupiti, jest zapotřebí ještě předeslati:

---

*) Jiné rozdělení, jak v úvodu podotknuto, pochází od Lucas Patiolusa.

§ 3. Sinus rožný a sinus polárního rohu.

Pozorujíce vrchol D v obr. 1., opišme kouli poloměrem jedna se středem v D. Tím vznikne sferický trojúhelník LMN, o němž platí ve sferické trigonometrii odvozený základní vzorec, totiž:

$$\cos a_0 = \cos b_0 \cos c_0 + \sin b_0 \sin c_0 \cos \alpha\,^{*}), \quad . \; . \; . \; (1)$$

z kteréžto rovnice, jsou-li ostatní veličiny známy, lze vyhledati

$$\cos \alpha = \frac{\cos a_0 - \cos b_0 \cos c_0}{\sin b_0 \sin c_0}$$

a poněvadž $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \cos \alpha}\,\sqrt{1 + \cos \alpha}$, můžeme též psáti buď

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{(\cos a_0 - \cos b_0 \cos c_0)^2}{\sin^2 b_0 \sin^2 c_0}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sin^2 b_0 \sin^2 c_0 - (\cos a_0 - \cos b_0 \cos c_0)^2}}{\sin b_0 \sin c_0}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a_0 - \cos^2 b_0 - \cos^2 c_0 + 2 \cos a_0 \cos b_0 \cos c_0}}{\sin b_0 \sin c_0}$$

nebo $\sin \alpha \sin b_0 \sin c_0 =$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 a_0 - \cos^2 b_0 - \cos^2 c_0 + 2 \cos a_0 \cos b_0 \cos c_0}\,; \quad . \; . \; (2)$$

anebo, jestliže píšeme

$$\sin \alpha = \sqrt{\left(1 - \frac{\cos a_0 - \cos b_0 \cos c_0}{\sin b_0 \sin c_0}\right)\left(1 + \frac{\cos a_0 - \cos b_0 \cos c_0}{\sin b_0 \sin c_0}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\sin b_0 \sin c_0 + \cos a_0 - \cos b_0 \cos c_0}}{\sin b_0 \sin c_0} \times$$

$$\sqrt{\sin b_0 \sin c_0 - \cos a_0 + \cos b_0 \cos c_0}.$$

První činitel veličiny pod kořenem je roven

$$\cos a_0 - \cos (b_0 + c_0),$$

druhý pak se rovná výrazu

$$\cos (b_0 - c_0) - \cos a_0\,;$$

---

*) Viz Dra. Studničky: Základové sferické trigonometrie, pag. 8.

poněvadž ale:

$$\cos a_0 - \cos (b_0 + c_0) = 2 \sin \frac{a_0 + b_0 + c_0}{2} \sin \frac{b_0 + c_0 - a_0}{2} \text{ a}$$

$$\cos (b_0 - c_0) - \cos a_0 = 2 \sin \frac{a_0 + b_0 - c_0}{2} \sin \frac{a_0 - b_0 + c_0}{2},$$

bude $\sin \alpha =$

$$\frac{2\sqrt{\sin\frac{a_0+b_0+c_0}{2}\sin\frac{a_0+b_0-c_0}{2}\sin\frac{a_0-b_0+c_0}{2}\sin\frac{-a_0+b_0+c_0}{2}}}{\sin b_0 \sin c_0}$$

čili $\sin \alpha \sin b_0 \sin c_0 =$

$$2\sqrt{\sin\frac{a_0+b_0+c_0}{2}\sin\frac{-a_0+b_0+c_0}{2}\sin\frac{a_0-b_0+c_0}{2}\sin\frac{a_0+b_0-c_0}{2}}.$$

Položíme-li $a_0 + b_0 + c_0 = 2s$, bude:

$$-a_0 + b_0 + c_0 = 2(s - a_0)$$

$$a_0 - b_0 + c_0 = 2(s - b_0) \text{ a}$$

$$a_0 + b_0 - c_0 = 2(s - c_0),$$ obdržíme pro týž součin

$$\sin \alpha \sin b_0 \sin c_0 = 2\sqrt{\sin s \sin (s - a_0) \sin (s - b_0) \sin (s - c_0)} \quad (4)$$

Poněvadž cyklickou záměnou písmen lze ze vzorce (1) odvoditi

$$\cos b_0 = \cos a_0 \cos c_0 + \sin a_0 \sin c_0 \cos \beta,$$

$$\cos c_0 = \cos a_0 \cos b_0 + \sin a_0 \sin b_0 \cos \gamma$$

a podobně jako nahoře, lze ukázati, že

$$\sin \beta \sin a_0 \sin c_0 = \sin \gamma \sin a_0 \sin b_0 =$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 a_0 - \cos^2 b_0 - \cos^2 c_0 + 2 \cos a_0 \cos b_0 \cos c_0}$$

následovně je součin

$$\sin \alpha \sin b_0 \sin c_0 = \sin \beta \sin a_0 \sin c_0 = \sin \gamma \sin a_0 \sin b_0 \quad (5)$$

veličina stálá, kterouž Staudt pro velikou analogii se sinem rovinného trojúhelníka nazval sinem rohu, a poněvadž za vrchol volil střed koule, jenž písmenem O znamenal, zavedl symbol:

$$\sin [O] = \sin [D] =$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 a_0 - \cos^2 b_0 - \cos^2 c_0 + 2 \cos a_0 \cos b_0 \cos c_0}$$

Junghann ve své „Tetraedrometrie“ pag. 2. užívá písmene P pro tutéž veličinu a píše

$$\sin\alpha \sin b_0 \sin c_0 = \sin\beta \sin a_0 \sin c_0 = \sin\gamma \sin b_0 \sin a_0$$
$$= 2P,$$
tak že $\sin[O] = 2P$. . . . . (6)

Mimo uvedené tu vzorce můžeme sinu rožnému též jiný tvar dáti. Za tím účelem pozorujme v obr. (1.) výšku AA_1, kterouž proložme rovinu kolmou ku hraně e a povstalý průsečík F spojme s vrcholem A. Z trojúhelníka AA_1F vysvítá:

$AA_1 = AF \sin\beta$, ale $AF = d \sin c_0$, což plyne z trojúhelníka DFA; následovně

$AA_1 = d \sin\beta \sin c_0$; z trojúhelníka ADA_1 jest ale zřejmo, že $AA_1 = d \sin(d, \triangle_1)$

následovně $\sin(d, \triangle_1) = \sin\beta \sin c_0$

a rovněž $\sin a_0 \sin(d, \triangle_1) = \sin a_0 \sin c_0 \sin\beta$

a také $\sin b_0 \sin(e, \triangle_2) = \sin\gamma \sin a_0 \sin b_0$

a podobně $\sin c_0 \sin(f, \triangle_3) = \sin\alpha \sin b_0 \sin c_0$

odkud

$$\sin a_0 \sin(d, \triangle_1) = \sin b_0 \sin(e, \triangle_2) = \sin c_0 \sin(f, \triangle_3) = 2P, \quad (7)$$

což pro každý vrchol platí, ale s patřičnými záměnami.

Konečně můžeme vzorec (4.) zavedením známého sferického excessu*) $e = 180 - s$, ve tvar

$\sqrt{\sin e \sin(a_0 + e) \sin(b_0 + e) \sin(c_0 + e)}$ přeměniti. . . (8)

Sestavíme-li konečně veškeré takto odvozené vzorce ve přehledný celek, obdržíme pro sinus rohu D:

$$P = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \cos^2 a_0 - \cos^2 b_0 - \cos^2 c_0 + 2\cos a_0 \cos b_0 \cos c_0}$$
$$= \sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(a_0 + b_0 + c_0) \sin\tfrac{1}{2}(-a_0 + b_0 + c_0)} \times$$
$$\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(a_0 - b_0 + c_0) \sin\tfrac{1}{2}(a_0 + b_0 - c_0)}$$
$$= \sqrt{\sin s \sin(s - a_0) \sin(s - b_0) \sin(s - c_0)}$$
$$= \sqrt{\sin e \sin(a_0 + e) \sin(b_0 + e) \sin(c_0 + e)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sin\alpha \sin b_0 \sin c_0 = \tfrac{1}{2}\sin\beta \sin a_0 \sin c_0 = \tfrac{1}{2}\sin\gamma \sin a_0 \sin b_0$$
$$= \tfrac{1}{2}\sin a_0 \sin(d, \triangle_1) = \tfrac{1}{2}\sin b_0 \sin(e, \triangle_2) = \tfrac{1}{2}\sin c_0 \sin(f, \triangle_3)$$

---

*) Viz téhož pag. 51.

Podobným způsobem mohli bychom stanoviti siny rohů pro ostatní vrcholy.

Jak ale ve sferické trigonometrii ukázáno, patří ku každému sferickému trojúhelníku jiný zvláštní trojúhelník, jehož vrcholy jsou poly stran původního, jenž jmenuje se **polární***) a jehož úhly doplňují se s úhly druhého na 180°. Podobně i v případu našem patří ku LMN jiný trojúhelník, jehož strany buďtež veličiny $a_0'\ b_0'\ c_0'$ a úhly $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$; pro tento nový trojúhelník platí opět vzorec (1.) totiž:

$$\cos a_0' = \cos b_0' \cos c_0' + \sin b_0' \sin c_0' \cos \alpha';$$

ale poněvadž $a_0' = 180 - \alpha$, $b_0' = 180 - \beta$, $c_0' = 180 - \gamma$ a $\alpha' = 180^0 - \alpha$, najdeme, že

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a_0 \quad \ldots\ldots (9)$$

a cyklickou záměnou písmen

$$\cos \beta = -\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos b_0$$

a $$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c_0.$$

Místo $\cos a_0$ můžeme však vyvinouti sinus, píšíce:

$$\sin a_0 = \sqrt{1 - \cos^2 a_0} = \sqrt{(1 - \cos a_0)(1 + \cos a_0)}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{(\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma)^2}{\sin^2 \beta \sin^2 \gamma}} =$$

$$= \frac{1}{\sin \beta \sin \gamma} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma},$$

anebo

$$\sin a_0 \sin \beta \sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$$

nebo též $$\sin a_0 = \sqrt{\left(1 - \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}\right)\left(1 + \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{(\sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha)(\sin \beta \sin \gamma + \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha)}}{\sin \beta \sin \gamma}$$

první součinitel $= -[\cos \alpha + \cos(\beta + \gamma)]$,

druhý pak $= \cos \alpha + \cos(\beta - \gamma)$

a protože

$$\cos \alpha + \cos(\beta - \gamma) = 2 \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma)$$

a $$\cos(\beta + \gamma) + \cos \alpha = 2 \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \cos \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha).$$

*) Téhož pag. 12.

tudíž $\sin a_0 =$

$$= \frac{2}{\sin\beta \sin\gamma}\sqrt{-\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}$$

neboli $\sin a_0 \sin\beta \sin\gamma =$

$$= 2\sqrt{-\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}$$

Jestli však $\alpha + \beta + \gamma = 2\sigma$,

$-\alpha + \beta + \gamma = 2(\sigma - \alpha)$,

podobně $\alpha - \beta + \gamma = 2(\sigma - \beta)$

a konečně $\alpha + \beta - \gamma = 2(\sigma - \gamma)$ tudíž

$$\sin a_0 \sin\beta \sin\gamma = 2\sqrt{-\cos\sigma \cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}.$$

Podobným způsobem jako svrchu obdržíme:

$$\Pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \qquad (10)$$

$$= \sqrt{-\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}} \qquad (11)$$

$$= \sqrt{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)} \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

$$= \tfrac{1}{2}\sin\alpha\sin\beta\sin c_0 = \tfrac{1}{2}\sin\alpha\sin\gamma\sin b_0 = \tfrac{1}{2}\sin\beta\sin\gamma\sin a_0 \qquad (13)$$

$$= \tfrac{1}{2}\sin\alpha\sin(d, \triangle_1) = \tfrac{1}{2}\sin\beta\sin(e, \triangle_2) = \tfrac{1}{2}\sin\alpha\sin(f, \triangle_3) \qquad (14)$$

Součin $\sin\alpha\sin\beta\sin c_0 = \sin\alpha\sin\gamma\sin b_0 = \sin\beta\sin\gamma\sin a_0$

$$= \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = 2\Pi \qquad (15)$$

jest opět veličina stálá hledě k vrcholu D a Junghann jmenuje polu součin tento sinus polárního rohu*) a označuje jej písmenem Π.

Obě veličiny P i Π jsou při pozorování našem důležity a s nimi častěji se setkáme.

§ 4. Modul vrcholový a čtyrstěnný.

Dělíme-li vzorec 15. součinem $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, obdržíme:

$$\frac{\sin a_0}{\sin\alpha} = \frac{\sin b_0}{\sin\beta} = \frac{\sin c_0}{\sin\gamma} = \frac{2\Pi}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}; \; . \; . \; . \; (16)$$

tento poměr nazývá se **modulem sferickým nebo modulem vr-**

---

*) Viz: Dr. G. Junghann, Tetraedrometrie pag. 2.

cholovým a označuje se dle svého vynálezce prof. Bretschneidera*) písmenem M. Dle toho jest

$$M = \frac{\sin a_0}{\sin \alpha} = \frac{\sin b_0}{\sin \beta} = \frac{\sin c_0}{\sin \gamma} \quad \ldots\ldots (16^1)$$

modulem vrcholu D.

Podobným způsobem mohli bychom stanoviti moduly vrcholů A, B, C, jež chceme M_1, M_2, M_3 jmenovati. Byl by modul

$$\left.\begin{array}{lll} \text{pro vrchol} & A \ldots & M_1 = \frac{\sin a_1}{\sin \alpha} = \frac{\sin b_1}{\sin \beta_1} = \frac{\sin c_1}{\sin \gamma_1} \\ \text{podobně pro} & B \ldots & M_2 = \frac{\sin a_2}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin b_2}{\sin \beta} = \frac{\sin c_2}{\sin \gamma_1} \\ \text{a konečně pro} & C \ldots & M_3 = \frac{\sin a_3}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin b_3}{\sin \beta_1} = \frac{\sin c_3}{\sin \gamma} \end{array}\right\} \ldots (17)$$

Z rovnic 16. však následuje, že

$$M \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = 2\, \Pi \quad \text{čili}$$

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{2\, \Pi}{M} \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

Rovněž můžeme obdržeti, dělíme-li vzorec (6.) součinem $\sin a_0 \sin b_0 \sin c_0$,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a_0} = \frac{\sin \beta}{\sin b_0} = \frac{\sin \gamma}{\sin c_0} = \frac{2\, P}{\sin a_0 \sin b_0 \sin c_0} = \frac{1}{M}$$

odkud:

$$\sin a_0 \sin b_0 \sin c_0 = 2\, M\, P \quad \ldots\ldots (19)$$

Dělením rovnice 18. s 19. dospějem ku

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin a_0 \sin b_0 \sin c_0} = \frac{\Pi}{M^2\, P} \quad \ldots\ldots (20)$$

poněvadž však $\sin a_0 = M \sin \alpha$, $\sin b_0 = M \sin \beta$, $\sin c_0 = M \sin \gamma$, tudíž

$$\sin a_0 \sin b_0 \sin c_0 = M^3 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

nabude rovnice (20.) tvaru

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{M^3 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} = \frac{\Pi}{M^2\, P}$$

a z toho

$$M = \frac{P}{\Pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

*) Viz: Crelle, Journal XIII. pag. 25.

Pomocí rovnice této můžeme součin

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma &= \frac{2\,\Pi}{M} = \frac{2\,\Pi^2}{P} \\ \text{a} \quad \sin a_0 \sin b_0 \sin c_0 &= 2\,M P = \frac{2\,P^2}{\Pi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (22)$$

vyjádřiti.

Mimo tento modul sferický, jenž Junghann jinou cestou vyhledal, upotřebuje týž ještě tak zvaný **modul tetraedrový**, analogický s Bretschneiderovým modulem trojúhelníkovým.

Mysleme si základně ABC (obr. 2.) obepsaný kruh, jehož střed budiž bod O. Spojíme-li O s B a prodloužíme-li tuto přímku do G, vznikne pravoúhelný trojúhelník BCG, v němž $BC = BG \sin a_1$, jelikož $\sphericalangle BGC = a_1$ poněvadž jsou to úhly na témže oblouku, nebo

$$\left.\begin{aligned} a &= 2\,\varrho \sin a_1 \\ \text{rovněž} \quad b &= 2\,\varrho \sin b_2 \\ \text{a podobně} \quad c &= 2\,\varrho \sin c_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

z kterýchž rovnic je zřejmo, že

$$2\,\varrho = \frac{a}{\sin a_1} = \frac{b}{\sin b_2} = \frac{c}{\sin c_3}$$

jest veličina pro $\triangle\,ABC$ stálá, kteráž se nazývá modul trojúhelníkový.

O modul tento se opíraje, zavedl Junghann jiný modul*), nazvaný **čtyrstěnný (tetraedrový)**, **) jenž označuje písmenou μ a jím vyjadřuje stálý poměr průměru kruhu stěnám čtyrstěnu obepsaných a k těmto přináležejících modulů vrcholových, t. j.

$$\mu = \frac{2\,\varrho}{M} = \frac{2\,\varrho_1}{M_1} = \frac{2\,\varrho_2}{M_2} = \frac{2\,\varrho_3}{M_3} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Správnosť tohoto výrazu lze snadno dovoditi. Víme totiž, že v $\triangle\,ABC$ strana

---

*) Slovem „modul“ vůbec jmenujeme sestavení určitých veličin (u tetraedru: určovacích částí), která nemění svou cenu, zaměníme-li je jinými jim rovnými veličinami.

**) Viz: Dr. G. Junghann, Tetraedrometrie II. pag. 46.

$$a = 2\,\varrho \sin a_1,$$

z $\triangle BCD$ jde $\quad a = 2\,\varrho_1 \sin a_0,$

následovně $\quad 2\,\varrho \sin a_1 = 2\,\varrho_1 \sin a_0$

a jelikož $\quad \frac{\sin a_0}{\sin \alpha} = M \quad$ a $\quad \frac{\sin a_1}{\sin \alpha} = M_1$

jest $\quad 2\,\varrho\, M_1 \sin \alpha = 2\,\varrho_1\, M \sin \alpha$

tudíž $\quad \frac{2\,\varrho}{M} = \frac{2\,\varrho_1}{M_1}$

což lze dokázati i o druhých dvou, čímž nahoře uvedená věta jest odůvodněna.

Z rovnice 24. jest jasno, že

$$\mu = \frac{2\,\varrho}{M}, \quad \text{ano} \quad M = \frac{\sin a_0}{\sin \alpha}, \quad \text{bude} \quad \mu = \frac{2\,\varrho \sin \alpha}{\sin a_0},$$

a jelikož ze 23. jde, že

$$2\,\varrho = \frac{a}{\sin a_1},$$

jest $$\mu = \frac{a \sin \alpha}{\sin a_0 \sin a_1}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

ale zavedeme-li moduly, obdržíme

$$\mu = \frac{a}{M M_1 \sin \alpha}.$$

Rovněž po témž způsobu lze ukázati, že

$$\mu = \frac{2\,\varrho}{M}$$

a poněvadž $\quad 2\,\varrho = \frac{b}{\sin b_2}$

jest $\quad \mu = \frac{1}{M} \cdot \frac{b}{\sin b_2} \frac{\sin \beta}{\sin \beta} = \frac{b}{M M_2 \sin \beta};$

podobně i $\quad \mu = \frac{c}{M M_3 \sin \gamma}.$

Provedeme-li totéž při hranách d, e, f, užívajíce při tom rovnic (17.), můžeme konečně psáti:

$$\mu = \frac{a}{M M_1 \sin \alpha} = \frac{b}{M M_2 \sin \beta} = \frac{c}{M M_3 \sin \gamma}$$

$$= \frac{d}{M_2 M_3 \sin \alpha_1} = \frac{e}{M_1 M_3 \sin \beta_1} = \frac{f}{M_1 M_2 \sin \gamma_1} . \quad . (26)$$

Odvodivše nejdůležitější věty, jichž při dalších svých pozorováních potřebovati budeme, přistoupíme nyní ku vlastnímu úkolu svému.

Část druhá.

O obsahu čtyrstěnu.

§ 5. Věta základní.

První a hlavní věta, na kteréž veškerá svá pojednání stavíme, jest bez odporu již Euklidovi známá poučka, jež zní:

Krychlový obsah čtyrstěnu rovná se třetině součinu z jeho základny a výšky, čili

$$V = \tfrac{1}{3} p v,$$

značí-li p základnu neboli podstavu a v výšku. Větu tuto lze mnohým způsobem dokázati:

1. Důkaz. *)

Nejprve ukážeme, že každý čtyrstěn je roven třetině hranolu téže výšky a základny. Proto pozorujme v obr. 3. čtyrstěnný jehlanec $ABCD$, jejž doplňme známým způsobem v trojboký hranol, vedouce totiž vrcholem A rovinu rovnoběžnou se základnou, protnouce tuto rovinou položenou hranou BD rovnoběžně ku AC a doplníce stěny ADC a ABC. Dále proložme vrcholem A a úhlopříčnou rovnoběžníku $BDEF$ t. j. DF rovinu ADF. Tím rozdělíme hranol na tři jehlance $ABCD$, $ABDF$ a $ADEF$. Oba jehlancové $ABCD$ a $ADEF$ mají tutéž výšku a tuže základnu $BCD = AEF$ a jsou tudíž, dle známé stereometrické poučky, sobě rovny, t. j.

$$ABCD = ADEF \quad . \; . \; . \; \alpha)$$

Rovněž jehlancové $ADEF$ a $ADBF$ mají, jako první dva, týž základ $BDF = DFE$ a rovnou výšku a proto jest:

$$ADEF = ADBF \quad . \; . \; . \; \beta)$$

Z rovnic (α) a (β) plyne

$$ABCD = ABDF = ADEF = V.$$

---

*) Viz: V. Jandečky: „Geometria pro vyšší gymnasia“ II. pag. 71. nebo A. B. Шоурекъ: „Стереометрия“ pag. 69.

Jest tedy hranol $AEFBCD$, jenž zkrátka H označovati chceme, roven třem jehlancům V, t. j.

$$H = 3\,V \text{ neboli } V = \tfrac{1}{3}\,H.$$

Ale poněvadž stereometrie učí, že krychlový obsah hranolu se obdrží, násobíme-li podstavu výškou

$$H = pv, \text{ proto jest } V = \tfrac{1}{3}\,pv.$$

2. Důkaz.*)

Abychom dokázali svrchu uvedenou větu, pozorujme přímý trojboký hranol (obr. 4.), stranu základny jmenujme a a její výška budiž h, hrany $AF = BE = CD = v$, tím jest $FED \cong ACB$ a má tudíž $\triangle FED$ týž obsah a výšku jako $\triangle ABC$.

Body B, D, F proložme rovinu FDB, kteráž hranol ve dva jehlance rozděluje. Povstane totiž jehlanec $DEFB$ se základnou EFD a jehlanec $ACDFB$ s podstavou $ACDF$.

Krychlový obsah jehlance rovná se jakémusi dílu obsahu hranolu. Nazýváme-li tento díl x, jest obsah jehlance roven x násobenému obsahu hranolu. Dle toho bude obsah jehlance:

$$DEFB = x\,.\,\triangle EFD\,.\,EB = x\,.\,\tfrac{1}{2}\,ah\,.\,v,$$

a druhého jehlance

$$ACDFB = x\,.\,AFDC\,.\,BG = x\,.\,av\,.\,h.$$

Obsah celého hranolu $H = \frac{1}{2}\,ah\,.\,v$, následovně

$$\tfrac{1}{2}\,ah\,.\,v = \tfrac{1}{2}\,ahv\,.\,x + ahv\,.\,x$$

čili $$\frac{x}{2} + x = \tfrac{1}{2}$$

a hledaný díl $$x = \tfrac{1}{3}$$

a protož $V = x\,.\,pv = \frac{1}{3}\,pv$, jakož bylo dokázati.

3. Důkaz.

Učebné knihy naše**) uvádějí jiný důkaz věty v čele tohoto odstavce postavené. Důkaz tento v mnohém podobá se předešlému, ale má tu vlastnosť, že nevychází od hranolu, a lehce obr. 5. dá se vysvětliti.

---

*) Důkaz ten, myslím, že pochází od Littrowa.

**) Nebo spisovatelovo: „Стереометрия" pag. 70.

4. Důkaz.

Zajímavý jest též následující důkaz, jejž lze čísti v Hofmanna-Nataniho: „Mathematisches Wörterbuch“: Buďtež p základna a v výška daného čtyrstěnu (obr. 6.). Tuto výšku rozdělíme v libovolný počet stejných dílů, na př. v n od vrcholu D počínaje. Dělícími body vedeme roviny rovnoběžné se základnou a tím rozdělíme čtyrstěn na n dílů.

Pozorujme takový řez u vzdálenosti $\frac{m-1}{n}v$ a $\frac{m}{n}v$. Řezy ty buďtež $\triangle abc$ a $\triangle a_1b_1c_1$. Tehdy můžeme tvrditi, že těleso $abca_1b_1c_1$ se mezi dvěma hranoly nalezá, jež sestrojíme, považujeme-li totiž $a_1b_1c_1$ za základnu hranolu komolému jehlanci obepsaného a abc za podkladnu hranolu vepsaného jehlanci komolému. Z podobnosti jehlanců $abcD$ a $ABCD$ plyne:

$$\triangle ABC : \triangle abc = v^2 : \left(\frac{m-1}{n}\right)^2 v^2$$

čili
$$p : \triangle abc = 1 : \left(\frac{m-1}{n}\right)^2$$

následovně
$$\triangle abc = \left(\frac{m-1}{n}\right)^2 p.$$

Rovněž i z podobnosti řezu u vzdálenosti $\frac{m}{n}v$ vedeného a základny vysvítá,

že
$$\triangle a_1 b_1 c_1 = \frac{m^2}{n^2} p.$$

Rozdíl výšek DO_1 a DO t. j. $OO_1 = \frac{m}{n}v - \frac{m-1}{n}v = \frac{1}{n}v.$

Bude pak obsah hranolu vnitřního

$$h = p\frac{(m-1)^2}{n^2} \cdot \frac{v}{n} = pv\frac{(m-1)^2}{n^3}$$

a obsah vnějšího hranolu

$$H = pv\frac{m^2}{n^3}.$$

Mezi oběma leží úsek našeho jehlance, jehož obsah jmenujeme j_m. Jak z obrazu zřejmo, jest:

$$pv\frac{m^2}{n^3} > j_m > pv\frac{(m-1)^2}{n^3}.$$

Zasadíme-li za m čísla naší číslořady, obdržíme pro jednotlivé úseky tyto nerovnosti:

$$pv\frac{1}{n^3} > j_1 > \frac{0}{n^3}pv$$

$$pv\frac{2^2}{n^3} > j_2 > \frac{1}{n^3}pv$$

$$pv\frac{3^2}{n^3} > j_3 > \frac{2^2}{n^3}pv$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

a konečně
$$pv\frac{n^2}{n^3} > j_n > \frac{(n-1)^2}{n^3}pv.$$

Sečteme-li tyto výrazy, najdeme:

$$\frac{1+2^2+3^2+..+n^2}{n^3}pv > j_1+j_2+..+j_n > \frac{1+2^2+3^2+..+(n-1)^2}{n^3}pv$$

jelikož
$$j_1+j_2+j_3+..+jn = J.$$

I bude

$$\frac{1+2^2+3^2+..+n^2}{n^3}pv > J > \frac{1+2^2+3^2+..(n-1)^2}{n^3}pv \quad (1)$$

Poněvadž ale víme, že

$$\frac{1+2^2+3^2+..+n^2}{n^3} > \tfrac{1}{3} > \frac{1+2^2+3^2+..+(n-1)^2}{n^3},$$

následovně

$$\frac{1+2^2+3^2+..+n^2}{n_3}pv > \tfrac{1}{3}pv > \frac{1+2^2+3^2+..+(n-1)^2}{n^3}pv \quad (2)$$

Pozorujeme-li rovnici 1. a 2., spatřujeme, že veličiny J a $\frac{1}{3}pv$ mezi těmitéž mezemi se pohybují a poněvadž n nekonečně malým voleno býti může, musí $J=\frac{1}{3}pv$ jakož bylo dokázati.

5. Důkaz.

Týž vzorec obdržíme cestou nejjednodušší pomocí počtu integrálního.

Jako dříve vedeme u vzdálenosti x od vrcholu D řez rovnoběžný ku základně. Z podobnosti $\triangle ABC$ a $\triangle abc$ (obr. 6.) dá se odvoditi věta, o níž stereometrie jedná a kterouž vyjadřuje slovy: „ploské obsahy řezů základně podobných jsou ve čtverečném poměru jich vzdáleností od vrcholů.“ Dle věty té jest:

$$\triangle abc : \triangle ABC = x^2 : v^2$$

čili

$$df : p = x^2 : v_2$$

neboli

$$df = \frac{p}{v^2} x^2.$$

Hranol s nekonečně malou výškou bude míti obsah

$$df \, . \, dx = \frac{p}{v^2} x^2 \, dx.$$

Počet integralní nás učí, že sečítáním veškerých takových hranůlků od 0 až ku v obdržíme obsah jehlance žádaného, což naznačujeme:

$$V = \int_{x=0}^{x=v} \frac{p}{v^2} x^2 \, dx = \frac{p}{v^2} \int_{x=0}^{x=v} x^2 \, dx = \frac{p}{v^2} \cdot \frac{v^3}{3}$$

čili

$$V = \tfrac{1}{3} pv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

§ 6. Rozdělení úkolu.

Takto odvodili jsme základní vzorec čtyrstěnu vůbec; další řešení bude záležeti v tom, že za veličiny v základní rovnici přicházející zavedeme jiné hodnoty, které pomocí planimetrie, stereometrie, trigonometrie a analytické geometrie vyhledati můžeme. Ve vzorci 27. přicházejí veličiny dvě, totiž základna a výška; proto rozpadne se úkol náš na tři oddíly a to:

1. na vyhledávání základny,
2. na vypočítávání výšky i
3. na stanovení obsahu.

Promluvíme nyní o těchto oddílech.

§ 7. Vypočítávání základny.

Základna jest rovinným trojúhelníkem, jehož obsah ustanoviti lze mnohými způsoby.

Planimetrie vyjadřuje obsah jeho buď stranami nebo výškami, buď poloměrem vepsaného neb opsaného kruhu a p.

Vycházejíce od věty: „čtverec ležící v trojúhelníku naproti úhlu ostrému rovná se součtu čtverců ostatních dvou stran odejmouc dvojnásobný obdélník, sestrojený z jedné těchto stran a průmětu druhé strany na tuto," odvoditi můžeme planimetrickou poučku obsah trojúhelníku vyjadřující. Lehkým způsobem ukázati lze, promítneme-li stranu a na stranu c orthogonálně, že v $\triangle ABC$ (obr. 7.) výška CM t. j.

$$h_3 = \frac{1}{2c}\sqrt{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}$$

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

a tudíž $\frac{h_3 c}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$

čili $$\triangle = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4} \quad \ldots (28)$$

a rozvedením veličin pod odmocnítkem, dospějeme ku

$$\triangle = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \; {}^{*)} \qquad (29)$$

neboli $\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,

jestliže $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$s - a = \frac{1}{2}(-a+b+c)$ atd.

Použijeme-li rovnice

$$\triangle = \frac{ah_1}{2} = \frac{bh_2}{2} = \frac{ch_3}{2},$$

z které $b = a\frac{h_1}{h_2}, \qquad c = a\frac{h_1}{h_3},$

---

*) Vzorec tento pochází od Tartalea; byl však prý již v osmém století Heronu mladšímu znám.

můžeme snadno vyjádřiti rovnici (29.) výškami trojúhelníka ABC, totiž

$$\triangle = \frac{(h_1 h_2 h_3)^2}{\sqrt{N}} \quad . \; . \; (29')$$

pakliže

$$N = (h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3)(h_1 h_2 + h_1 h_3 - h_2 h_3)$$
$$(h_1 h_2 - h_1 h_3 + h_2 h_3)(-h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3)$$

a jestliže h_1, h_2, h_3 jsou výškami $\triangle ABC$.

Označíme-li s t_1, t_2, t_3 příčky trojúhelníka, bude

$$\triangle = \tfrac{1}{3}\sqrt{(t_1+t_2+t_3)(t_1+t_2-t_3)(t_1+t_3-t_2)(t_2+t_3-t_1)} \quad . \; (29'')$$

což lehko dokázati lze.

Nazveme-li poloměr jmenovanému trojúhelníku obepsaného kruhu písmenem ϱ, jest, dle známé věty,

$$\triangle = \frac{abc}{4\varrho} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (30)$$

Pro poloměr r vepsaného kruhu máme

$$\triangle = \tfrac{1}{2} r (a + b + c) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (31)$$

---

b) Ale i trigonometricky můžeme obsah trojúhelníka vyjádřiti. Známa je rovnice

$$\triangle = \frac{ab \sin c_3}{2} = \frac{ac \sin b_2}{2} = \frac{bc \sin a_1}{2} \; . \; . \; . \; . \; (32)$$

Plochu trojúhelníka ABC můžeme vypočítati také z poloměrů ϱ, r a úhlů a_1, b_2, c_3. Víme totiž, že

$$a = 2\varrho \sin a_1 , \quad b = 2\varrho \sin b_2 , \quad c = 2\varrho \sin c_3$$

následovně $\quad abc = 8\varrho^3 \sin a_1 \sin b_2 \sin c_3$,

kterýžto součin, do rovnice 30. dosazen, dává

$$\triangle = 8\frac{\varrho^3 \sin a_1 \sin b_2 \sin c_3}{4\varrho} = 2\varrho^2 \sin a_1 \sin b_2 \sin c_3 \quad (33)$$

podobně $\triangle = r^2 \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} a_1 \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} b_2 \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} c_3$.

Další vzorec pro obsah $\triangle ABC$ obdržeti můžeme promítáním stěn $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ na stěnu $\triangle$. Dejme tomu, že by D_1 (v obr. 1.) byl průmět orthogonální bodu D na rovině ABC, jenž spojen s vrcholy, rozděluje plochu ABC ve tři trojúhelníky AD_1B, AD_1C a BD_1C, z nichž

$$BD_1C = \triangle_1 \cos\alpha_1, \quad AD_1C = \triangle_2 \cos\beta_1 \quad \text{a} \quad AD_1B = \triangle_3 \cos\gamma_1$$

tak že $$\triangle = \triangle_1 \cos\alpha_1 + \triangle_2 \cos\beta_1 + \triangle_3 \cos\gamma_1 \ldots \quad (34)$$

Opírajíce se o modul vrcholový, můžeme také stěny čtyrstěnu, z nichž každou za základnu lze míti, i tímto zavedením kratčeji psáti.

Na str. 19. ve vzorci 26. vyjádřili jsme modul tetraedrový, z něhož naopak opět strany a, b, c, d, e, f vyhledati lze. Tak jest $a = \mu MM_1 \sin\alpha$, $b = \mu MM_2 \sin\beta$ a $c = \mu MM_3 \sin\gamma$

tedy $$abc = \mu^3 M^3 M_1 M_2 M_3 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

poněvadž ale podle rovnice 22.

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \frac{2\Pi}{M},$$

jest $$\triangle = \frac{abc}{4\varrho} = \frac{\mu^3 M^3 M_1 M_2 M_3}{4\varrho} \cdot \frac{2\Pi}{M}$$

nebo $$\triangle = \frac{\mu^3 M^2 M_1 M_2 M_3 \Pi}{2\varrho}$$

a jelikož opět z 24. plyne, že $\mu = \dfrac{2\varrho}{M}$

bude $$\triangle = \mu^2 M M_1 M_2 M_3 \Pi \ldots \quad (35)$$

nebo, ano $M = \dfrac{2\varrho}{\mu}$ a $M_1 = \dfrac{2\varrho_1}{\mu}$,

jest $$\triangle = 4\varrho\varrho_1 M_2 M_3 \Pi \ldots \quad (36)$$

jenž konečně, zasadíme-li $M_2 = \dfrac{2\varrho_2}{\mu}$ a $M_3 = \dfrac{2\varrho_3}{\mu}$ transformovati lze v $\triangle = \dfrac{16\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3\Pi}{\mu^2}$ jako vzorec ..... (37)

Součin abc, tudíž i trojúhelník ABC, lze vyjádřiti netoliko, jak jsme viděli, funkcí Π, nýbrž také veličinou P. Jest totiž

$$abc = \mu^3 . MM_1 M_2 M_3 . M^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

ale $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \dfrac{2\Pi^2}{P}$ a jelikož dle vzorce 21. $M = \dfrac{P}{\Pi}$, musí $$abc = \mu^3 M M_1 M_2 M_3 \cdot \frac{P^2}{\Pi^2} \cdot \frac{2\Pi^2}{P}$$

čili $$abc = 2\mu^3 M M_1 M_2 M_3 P$$

následovně $$\triangle = \frac{2\mu^3 M M_1 M_2 M_3 P}{4\varrho} = \frac{\mu^3 M M_1 M_2 M_3 P}{2\varrho}.$$

Dále nám známo, že $\mu = \frac{2\varrho}{M}$, následovně

$$\triangle = \mu^2 \cdot \frac{2\varrho}{M} \cdot \frac{M M_1 M_2 M_3 P}{2\varrho} = \mu^2 M_1 M_2 M_3 P, \quad (37')$$

použijeme-li

$$M_1 = \frac{2\varrho_1}{\mu}, \quad M_2 = \frac{2\varrho_2}{\mu} \quad \text{a} \quad M_3 = \frac{2\varrho_3}{\mu},$$

obdržíme $$\triangle = \frac{8\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 P}{\mu}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

nebo též, zasadíme-li za $\mu = \frac{2\varrho}{M}$,

bude $$\triangle = \frac{4\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 M P}{\varrho}. \quad \ldots\ldots \quad (38')$$

---

c) Nejenom planimetrie a trigonometrie ale i analytická geometrie vede nás k elegantním vzorcům obsah trojúhelníka vyjadřujícím.

Mysleme si, že A, B, C dány jsou souřadnicemi a sice bod

$$A = \begin{cases} x_1 \\ y_1, \\ z_1 \end{cases} \quad B = \begin{cases} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{cases} \quad \text{a} \quad C = \begin{cases} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{cases}$$

předpokládajíce trojosou pravoúhelnou koordinatní soustavu.

Abychom vyhledali ploský obsah trojúhelníka ABC, upotřebíme věty, jež zní: „čtverec obsahu rovinné plochy rovná se součtu čtverců průmětů do tří na vzájem kolmých rovin.“ Jsou-li průměty trojúhelníka $\triangle$ veličiny T_1 na rovině XY, T_2 na YZ a T_3 na XZ, zní tato věta

$$\triangle^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 \text{ *)}.$$

*) Analogie Pythagorejské věty, byla poprvé uveřejněna v letopisech akademie pařížské Tinseauem. (Mém. présentes. Tom. IX.), později jí

Plocha trojúhelníka T_1 dá se též vyjádřiti souřadnicemi svých vrcholů. Pro ploský obsah tohoto trojúhelníka obdržíme, dle pravidel analytické geometrie rovinné, rovnici

$$T_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}, \text{ jejíž odvození neprovádíme. *)}$$

Rovněž platí pro průmět T_2:

$$T_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{a podobně i pro}$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{a dosazením těchto výrazů v rovnici hořejší:}$$

$$\triangle^2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \frac{1}{4}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \frac{1}{4}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2$$

neboli
$$\triangle = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2}, \quad \ldots \quad (39)$$

kterýžto vzorec by se sice zjednodušiti dal, avšak necháme jej v této formě.

Poznámka 1.

Pro krátkost označuje Junghann konstantní veličinu $\frac{\triangle}{\Pi}$, kterouž můžeme ze vzorců 35, 36, 37 vyhledati, písmenem $\mathfrak{M}$ a píše:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{M} = \frac{\triangle}{\Pi} = \mu^2 M M_1 M_2 M_3 = 4 \varrho \varrho_1 M_2 M_3 = \frac{16 \varrho \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3}{\mu^2}. \\ \text{Toto} \qquad \mathfrak{M} = \frac{\triangle}{\Pi} = \frac{\triangle_1}{\Pi_1} = \frac{\triangle_2}{\Pi_2} = \frac{\triangle_3}{\Pi_3}, \\ \text{jsou-li } \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \text{ polární sinusy rohů } A, B \text{ a } C. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (40)$$

Poznámka 2.

Důležito je též znáti rovnici roviny procházející body A, B, C. Analytická geometrie prostoru vyjadřuje rovinu vzorcem:

---

užil a nově ji vyvinul de Gua ve svém pojednání „Essai de Tetraèdrometrie“ v r. 1783. v mém. de l'academie.

*) Viz: pag. 41. Dr. K. Zahradníka: „Prvých počátků nauky o determinantech.“

$$ax + by + cz + d = 0,$$

má-li však rovina tato procházeti bodem A, musí souřadnice téhož tuto rovnici opět na nullu přivésti, t. j.

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0,$$

rovněž totéž musí provésti souřadnice bodu B i C a máme tudíž

$$ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0$$

$$ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0.$$

Neznámé a, b, c, d rovnice jsou homogenní a stačí tedy k jejich vypočítání. Jestliže ze všech čtyř rovnic eliminujeme a, b, c, d, obdržíme pro rovinu, procházející třemi body, rovnici:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

nebo, rozvedeme-li tento determinant

$$\left.\begin{aligned} & x\,[y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) + y_3(z_1 - z_2)] + y\,[z_1(x_2 - x_3) + \\ & z_2(x_3 - x_1) + z_3(x_1 - x_2)] + z\,[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + \\ & x_3(y_1 - y_2)] = x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_2(y_3 z_1 - y_1 z_3) + \\ & + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1). \end{aligned}\right\} \quad (41')$$

Z rovnice této můžeme snadno vyhledati čemu se veličiny a, b, c, d rovnají. Jest totiž

$$a = y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) + y_3(z_1 - z_2)$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \text{ dále}$$

$$b = z_1(x_2 - x_3) + z_2(x_3 - x_1) + z_3(x_1 - x_2)$$

$$= - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ pak}$$

$$c = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \text{ podobným způsobem ukázati možno, že}$$

$$d = -[x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_2(y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1)]$$

$$= - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

O důležitosti poznámky této se přesvědčíme při stanovení obsahu čtyrstěnu.

---

§ 8. Určování výšky.

Probravše nejpotřebnější poučky o základu, přistoupíme nyní ku vyšetření velikosti výšky. Výškami ve čtyrstěnu, jak známo, jmenujeme kolmice spuštěné s vrcholů jeho na protilehlé stěny, kteréž jmenovati chceme v, v_1, v_2, v_3. Výšky tyto stanoviti můžeme mnohými způsoby.

α) Jako dříve základnu stranami určiti jsme hleděli, budeme se snažiti, abychom po příkladu Crellově, i výšku tetraedru jeho šesti hranami a, b, c, d, e, f vyjádřili.

Za tím účelem pozorujme omezený a často jmenovaný prostor náš v obr. 8. Veďme DD_1 kolmo na ABC a položme $DD_1 = v$, dále sestrojme $D_1F \perp AB$ a ve vrcholu C veďme rovnoběžku CE s DF. Povstalé úseky BF a BE označme písmeny x a m a klaďme $D_1F = y$ a $CE = n$.

Z trojúhelníku DD_1B a D_1BF obdržíme

$$x^2 + y^2 + v^2 = e^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \; (1)$$

dále, obrátíme-li zření k $\triangle AD_1F$ a ku $\triangle AD_1D$, najdeme

$$\overline{AF}^2 + y^2 + v^2 = d^2, \quad \text{jelikož } AF = c - x,$$

bude $\quad x^2 + y^2 + v^2 - 2cx + c^2 = d^2,$

nebo $\quad e^2 - 2cx + c^2 = d^2,$

z čehož opět plyne $\quad x = \dfrac{c^2 - d^2 + e^2}{2c} \quad . \quad . \quad . \quad . \; (2).$

Konečně z trojúhelníku DD_1C jde:

$$\overline{DD_1}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{D_1C}^2,$$

poněvadž $\quad \overline{D_1C}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{D_1G}^2 \quad$ a jelikož $\quad CG = n - y$

a $\quad D_1G = x - m$

bude $\quad \overline{D_1C}^2 = (n - y)^2 + (x - m)^2,$

následovně $\quad \overline{DD_1}^2 = f^2 - (n - y)^2 - (x - m)^2$

neboli $\quad (x - m)^2 + (n - y)^2 + v^2 = f^2$

$x^2 - 2mx + m^2 + n^2 + y^2 - 2ny + v^2 = f^2$

čili $\quad e^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 = f^2 \quad . \quad . \; (3).$

V těchto rovnicích neznáme ani x, y, v, ani m a n a jest nám tyto veličiny určiti.

Neznámou x stanovili jsme rovnicí 2). Odečtením rovnice 1. ode 3. přejdeme ku:

$$m^2 + n^2 - 2\,m\,x - 2\,n\,y = f^2 - e^2,$$

jelikož z $\triangle BEC$ plyne, že

$$m^2 + n^2 = a^2,$$

bude $a^2 + e^2 - f^2 - 2\,m\,x = 2\,n\,y$ a dosazením za x hodnoty

$$a^2 + e^2 - f^2 - \frac{m}{c}(c^2 - d^2 + e^2) = 2\,n\,y$$

odkud $$\frac{(a^2 + e^2 - f^2)\,c - m\,(c^2 - d^2 + e^2)}{2\,c\,n} = y\ .\ .\ .\ (4).$$

Ze vzorce (1) ale vysvítá, že

$$v^2 = e^2 - x^2 - y^2$$

a užitím 2. a 4. obdržíme

$$v^2 = e^2 - \frac{(c^2 - d^2 + e^2)^2}{4\,c^2} - \frac{[(a^2 + e^2 - f^2)\,c - m\,(c^2 - d^2 + e^2)]^2}{4\,c^2\,n^2}$$

čili

$$4\,c^2\,n^2\,v^2 = 4\,c^2\,e^2\,n^2 - n^2\,(c^2 - d^2 + e^2)^2 - (a^2 + e^2 - f^2)^2\,c^2$$
$$- m^2\,(c^2 - d^2 + e^2)^2 + 2\,m\,c\,(a^2 + e^2 - f^2)\,(c^2 - d^2 + e^2)$$

neboli

$$4\,c^2\,n^2\,v^2 = 4\,c^2\,e^2\,n^2 - (n^2 + m^2)\,(c^2 - d^2 + e^2)^2 - c^2(a^2 + e^2 - f^2)^2 +$$
$$+ 2\,m\,c\,(a^2 + e^2 - f^2)\,(c^2 - d^2 + e^2)$$
$$= 4\,c^2\,e^2\,n^2 - a^2\,(c^2 - d^2 + e^2)^2 - c^2\,(a^2 + e^2 - f^2)^2 +$$
$$+ 2\,m\,c\,(a^2 + e^2 - f^2)\,(c^2 - d^2 + e^2).$$

Abychom nyní ještě odstranili neznámé n a m, kteréž v této poslední rovnici se objevují, třeba jest, upamatovati se na větu v § 7. z počátku vyslovenou. Dle planimetrické této poučky jest:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,c\,m, \quad \text{z toho} \quad m = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2\,c},$$

poněvadž však $m^2 + n^2 = a^2$ a

$$n^2 = a^2 - m^2, \quad \text{bude} \quad n^2 = a^2 - \frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{4\,c^2}.$$

Hodnoty tyto do hořejšího vzorce zasazeny převádějí nás ku

$$4\,n^2\,c^2\,v^2 = 4\,c^2\,e^2\left[a^2 - \frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4\,c^2}\right] - a^2\,(c^2-d^2+e^2)^2 -$$
$$c^2\,(a^2+e^2-f^2)^2 + (a^2+c^2-b^2)\,(a^2+e^2-f^2)\,(c^2-d^2+e^2).$$

Víme však, že plocha trojúhelníka $A\,B\,C$

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\,A\,B\,.\,C\,E = \tfrac{1}{2}\,c\,n,$$

následovně $\qquad c\,n = 2\,\triangle \quad$ a tudíž

$$\left.\begin{aligned} 16\,\triangle^2.\,v^2 = 4\,a^2\,c^2\,e^2 - c^2\,(a^2+c^2-b^2)^2 - a^2\,(c^2-d^2+e^2)^2 \\ -c^2(a^2+e^2-f^2)^2 + (a^2+c^2-b^2)\,(a^2+e^2-f^2)\,(c^2-d^2+e^2) \end{aligned}\right\} \quad (42')$$

neboli

$$\left.v = \sqrt{\frac{\begin{gathered}4\,a^2\,c^2\,e^2 - e^2\,(a^2+c^2-b^2)^2 - a^2\,(c^2-d^2+e^2)^2 \\ -\,c^2(a^2+e^2-f^2)^2 + (a^2+c^2-b^2)\,(a^2+e^2-f^2) \\ (c^2-d^2+e^2)\end{gathered}}{4\,\triangle}}\;\right\} \quad (42)$$

Násobíme-li rovnici 42′. dvěma, najdeme

$$32\,\triangle^2\,v^2 = 8\,a^2\,c^2\,e^2 - 2\,e^2\,(a^2+c^2-b^2)^2 - 2\,a^2\,(c^2-d^2+e^2)^2 -$$
$$2\,c^2\,(a^2+e^2-f^2)^2 + 2\,(a^2+c^2-b^2)\,(a^2+e^2-f^2)\,(c^2-d^2+e^2),$$

kterýžto výraz pravé strany lze na souměrný determinant stupně třetího převésti, totiž:

$$\begin{vmatrix} 2\,a^2, & a^2+c^2-b^2, & c^2-d^2+e^2 \\ a^2+c^2-b^2, & 2\,c^2, & a^2+e^2-f^2 \\ c^2-d^2+e^2, & a^2+e^2-f^2, & 2\,e^2, \end{vmatrix}$$

následovně jest

$$\triangle^2\,v^2 = \tfrac{1}{32}\begin{vmatrix} 2\,a^2, & a^2+c^2-b^2, & c^2-d^2+e^2 \\ a^2+c^2-b^2, & 2\,c^2, & a^2+e^2-f^2 \\ c^2-d^2+e^2, & a^2+e^2-f^2, & 2\,e^2 \end{vmatrix} \;.\;.\;(43)$$

Rozvedeme-li v 42. naznačené mocniny a tvoříme-li oněch 46 členů, kteréž násobením povstanou, a zjednodušíme-li výrazy ty, obdržíme

$$\left.v = \sqrt{\frac{\begin{gathered}-a^4d^2 - a^2d^4 - b^4e^2 - b^2e^4 - c^4f^2 - c^2f^4 + \\ +a^2b^2c^2 + a^2d^2c^2 + a^2c^2f^2 + a^2b^2d^2 + a^2d^2f^2 + \\ +b^2c^2e^2 + b^2c^2f^2 + b^2d^2e^2 + a^2e^2d^2 + c^2d^2f^2 + \\ +b^2e^2f^2 + c^2f^2e^2 - a^2b^2c^2 - a^2e^2f^2 - b^2d^2f^2 - \\ c^2d^2e^2\end{gathered}}{4\,\triangle}}\;\right\} \;.\;.\;(44)$$

Vzorcům 42. a 44. můžeme dáti jiný tvar, jenž je poněkud vkusnější činí. K tomu účelu sestavme veličiny pod kořenem se nalezající následovně:

$$\begin{gathered}[(-a^4d^2+a^2b^2e^2+a^2c^2f^2)+(-a^2d^4+b^2d^2e^2+c^2d^2f^2)]\\ +[(a^2b^2d^2-b^4e^2+b^2c^2f^2)+(a^2e^2d^2-b^2e^4+c^2f^2e^2)]+\\ [(a^2d^2c^2+b^2c^2e^2-c^4f^2)+(a^2d^2f^2+b^2e^2f^2-c^2f^4)]\\ -a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2d^2f^2-c^2d^2e^2,\end{gathered}$$

anebo po náležitém zjednodušení, obdržíme

$$v=\sqrt{\frac{\begin{gathered}(a^2+d^2)(-a^2d^2+b^2e^2+c^2f^2)+(b^2+e^2)\\ (a^2d^2-b^2e^2+c^2f^2)+(c^2+f^2)(a^2d^2+b^2e^2\\ -c^2f^2)-a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2d^2f^2-c^2d^2e^2\end{gathered}}{4\triangle}}\quad . \quad . \; (45)$$

Vzorec tento lze velmi lehce si pamatovati, neboť hrany a a d, b a e, c a f jsou, jak z obrazce patrno, hrany protilehlé a součiny abc, aef, bdf, cde jsou součiny ze stran trojúhelníků čtyrstěn omezujících.

Velmi pěkný tvar lze vzorcům těmto dáti, seřadíme-li následovně členy:

$$\begin{gathered}(-a^4d^2+a^2b^2d^2+a^2d^2c^2-a^2d^4+a^2d^2e^2+a^2d^2f^2)\\ +(a^2b^2e^2-b^4e^2+b^2c^2e^2+b^2e^2d^2-b^2e^4+b^2e^2f^2)+\\ (c^2d^2f^2+c^2e^2f^2-c^2f^4-a^2c^2f^2+c^2f^2b^2-c^4f^2)\\ -a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2d^2f^2-c^2d^2e^2\end{gathered}$$

a na základě toho bude výška v po vyjmutí a zjednodušení míti tvar:

$$v=\sqrt{\frac{\begin{gathered}a^2d^2(-a^2+b^2+c^2-d^2+e^2+f^2)+b^2e^2(a^2-\\ -b^2+c^2+d^2-e^2+f^2)+c^2f^2(a^2+b^2-c^2+d^2+\\ +e^2-f^2)-a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2d^2f^2-c^2d^2e^2\end{gathered}}{4\triangle}}\quad . \quad . \; (46)$$

Vzorec tento lze si opět lehce zapamatovati; ad, be, cf jsou součiny z protilehlých hran a $(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$ jest součet všech čtverců hran, v němž vždy dva členové jsou záporní, a sice ti, z kterýchž součin utvořen byl, na př. při součinu a^2d^2 musí v součtu všech čtverců hran a^2 a d^2 záporno býti; součiny abc, aef, bdf, cde jsou součiny ze stran trojúhelníků čtyrstěn omezujících.

Velké trpělivosti jest zajisté k tomu potřebí na zmíněné cestě, kteráž jak již podotknuto od Crelleho pochází a přesně stereometrická jest, chtíti výšku stanoviti. Nejkratší jest řešení dle Carnota, jež vedle toho z historické stránky, t. j. že prvním bylo, zasluhuje povšimnutí.

Postup celého řešení, kteréž v „Mémoire sur les relations atd.“ obsaženo, jest asi následující:

Mysleme si sestrojený pravoúhlý průmět vrcholu D na rovině ABC. Tento průmět D_1 spojme s vrcholy daného trojúhelníka a tím povstalé úhly při D_1 nazývejme φ, φ_1, φ_2 píšíce

$$\sphericalangle A D_1 B = \varphi, \quad \sphericalangle B D_1 C = \varphi_1 \quad \text{a} \quad \sphericalangle C D_1 A = \varphi_2.$$

Součet těchto úhlů činí 360^0, t. j.

$$\varphi = 360^0 - (\varphi_1 + \varphi_2)$$

a

$$\cos\varphi = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

nebo

$$\cos\varphi = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2.$$

Zdvojnásobíme-li výraz tento, obdržíme:

$$\begin{aligned}\cos^2\varphi &= \cos^2\varphi_1 \cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_1 \sin^2\varphi_2 - 2\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \\ &= \cos^2\varphi_1 \cos^2\varphi_2 - 2\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + (1-\cos^2\varphi_1) \\ &\quad (1-\cos^2\varphi_2) \\ &= 1 - \cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi_2 + 2\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \\ &\quad - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) \quad \text{neboli} \\ &= 1 - \cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi_2 + 2\cos\varphi \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \quad \text{následovně}\end{aligned}$$

$$1 - \cos^2\varphi - \cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi_2 + 2\cos\varphi \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1$$

Tyto cosiny úhlů φ, φ_1, φ_2 můžemeť vyjádřiti stranami trojúhelníků, v nichž přicházejí. Spojnice bodu D_1 s vrcholy A, B, C nejsou nic jiného než pravoúhlé průměty hran d, e, f na rovině základu, kteréž též dle těchto hran označiti chceme přivěšujíce index jedna. Víme však dle věty Carnotovy, že

v trojúhelníku $A D_1 B$ jest $\cos\varphi = \dfrac{a_1^2 + e_1^2 - c^2}{2 a_1 e_1}$,

dále v trojúhelníku $B D_1 C$ jest $\cos\varphi_1 = \dfrac{e_1^2 + f_1^2 - a^2}{2 e_1 f_1}$,

konečně v trojúhelníku $A D_1 C$ jest $\cos\varphi_2 = \dfrac{a_1^2 + f_1^2 - b^2}{2 a_1 f_1}$, kteréžto veličiny v rovnici (1) zasazeny přivádějí nás ku vzorci:

$$4a_1^2e_1^2f_1^2-f^2(a_1^2+e_1^2-c^2)^2-a_1^2(e_1^2+f_1^2-a^2)^2-$$
$$-e_1^2(a_1^2+f_1^2-b^2)^2+(a_1^2+e_1^2-c^2)(e_1^2+f_1^2-a^2)$$
$$(a_1^2+f_1^2-b^2)=0.$$

Provedením naznačených výkonů nabudeme výrazu:

$$(a^2d_1^4-a^2d_1^2e_1^2-a^2d_1f_1^2+a^2e_1^2f_1^2)+(b^2e_1^4-b^2e_1^2f_1^2-$$
$$-b^2d_1^2e_1^2+b^2d_1^2f_1^2)+(c^2f_1^4-c^2d_1^2f_1^2-c^2e_1^2f_1^2+$$
$$+c^2e_1^2d_1^2)+(a^4d_1-a^2b^2d_1-a^2c^2d_1^2)+(b^4e_1^2-b^2c^2e_1^2-$$
$$-a^2b^2e_1^2)+(c^4f_1^2-a^2c^2f_1^2-c^2b^2f_1^2)+a^2b^2c^2=0$$

a náležitě ho zjednodušivše obdržíme

$$a^2(d_1^2-f_1^2)(d_1^2-e_1^2)+b^2(e_1^2-f_1^2)(e_1^2-d_1^2)+c^2(f_1^2$$
$$-d_1^2)(f_1^2-e_1^2)+a^2d_1(a^2-b^2-c^2)+b^2e_1^2(b^2-c^2-a^2)+$$
$$+c^2f_1^2(c^2-a^2-b^2)+a^2b^2c^2=0.$$

Nyní jest zapotřebí, abychom průměty d_1, e_1, f_1 vyjádřili hranami d, e, f a výškou v. Dle známé a často užité již poučky planimetrické jest

$d^2-v^2=d_1^2$, $e^2-v^2=e_1^2$ a $f^2-v^2=f_1^2$, z toho
$d_1-f_1^2=d^2-f^2$, $d_1^2-e_1^2=d^2-e^2$ rovněž
$e_1^2-f_1^2=e^2-f^2$, $f_1^2-d_1^2=f^2-d^2$, $f_1^2-e_1^2=f^2-e^2$
a $e_1^2-d_1^2=e^2-d^2$,

kteréž jsouce uvedeny ve vzorec předešlý vedou ku rovnici:

$$a^2(d^2-f^2)(d^2-e^2)+b^2(e^2-f^2)(e^2-d^2)+c^2(f^2-d^2)(f^2-e^2)+$$
$$+a^2d^2(a^2-b^2-c^2)+b^2e^2(b^2-c^2-a^2)+c^2f^2(c^2-a^2-b^2)+$$
$$+a^2b^2c^2=v^2(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2).$$

Poněvadž však dle vzorce 28. součinitel od v^2 není než záporný šestnácteronásobný obsah základny, proto jest celou rovnici negativní jedničkou násobiti.

Nazveme-li k vůli krátkosti levou zápornou stranu písmenem T, nabudeme

$$\left.\begin{array}{c} v^2(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4)=-T \\ \text{nebo}\quad 16\triangle^2v^2=-T\quad\text{nebo též} \end{array}\right\}\quad . \; . \; (47)$$

$$\left.\begin{array}{l} 16\triangle^2 v^2 = a^2(e^2-d^2)(d^2-f^2)+b^2(d^2-e^2)(e^2-f^2) \\ \quad + c^2(e^2-f^2)(f^2-d^2)+a^2d^2(-a^2+b^2+c^2)+ \\ \quad + b^2e^2(a^2-b^2+c^2)+c^2f^2(a^2+b^2-c^2)-a^2b^2c^2, \end{array}\right\} \quad . \; . \; (48)$$

kterážto rovnice pouze sestavením členů se liší od předešlých. Jiný úhledný a přehledný vzorec obdržíme, užijeme-li theorie determinantů, o čemž později promluvíme.

Poznámka.

Dejme tomu, že by byly hrany ve vrcholu D se sbíhající rovně dlouhé, t. j. $DA = DB = DC$ čili $d = e = f$; tehdy nabude vzorec poslední tohoto tvaru:

$$\left.\begin{array}{l} 16\triangle^2 v^2 = 2a^2c^2d^2 + 2a^2b^2d^2 + 2b^2c^2d^2 - a^4d^2 \\ \qquad - b^4d^2 - c^4d^2 - a^2b^2c^2. \end{array}\right\} \quad . \; . \; (49)$$

Pro pravidelný tetraeder, ve kterém jest $a = b = c = d = e = f$, bylo by

$$16\triangle^2 v^2 = 2a^6$$

a jelikož základna jest trojúhelník rovnostranný, jehož obsah

$$\triangle = \frac{a^2}{4}\sqrt{3},$$

bude

$$v^2 = \frac{2a^6}{16\triangle^2} = \frac{a^6}{8\triangle^2}$$

čili

$$v = \frac{a^3\sqrt{2}}{\triangle} \quad \text{nebo-li} \quad v = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; (50)$$

Pravili jsme v úvodu, že rozeznáváme ještě tak zvaný rovnohranný čtyrstěn, v němž protilehlé hrany na vzájem sobě jsou rovny; pak bychom obdrželi, předpokládajíce, že $a = d$, $b = e$, $c = f$, rovnici

$$v = \frac{\sqrt{\begin{array}{c} 2a^2(-a^4+b^4+c^4)+2b^2(a^4-b^4+c^4)+ \\ 2c^2(a^4+b^4-c^4)-4a^2b^2c^2 \end{array}}}{4\triangle} \quad . \; . \; (51)$$

β) Vyjádřivše naznačeným způsobem výšku čtyrstěnu hranami, hleďme nyní jiné vzorce pro tutéž veličinu vyhledati. Řešme nejprve tento úkol:

Dány jsou ve vrcholu D se sbíhající hrany a jimi sevřené úhly, vypočítejme z toho výšku tetraedru.

K tomu konci proložme výškou AA_1 (v obr. 1.) roviny kolmé ku hranám f a e, jež sečeny jsou od těchto v bodech F a G. Spojením těchto bodů s bodem A a průmětu A_1

s bodem D, obdržíme tři pravoúhelné trojúhelníky $A A_1 F$, $A A_1 G$ a $A A_1 D$, z nichž

$$\overline{A A_1}^2 = \overline{A G}^2 - \overline{A_1 G}^2 \quad . \quad . \quad . \text{(1.}$$

Pro krátkosť označme úhel $A_1 D F$ s φ a $\sphericalangle A_1 D G$ s ψ. V trojúhelníku $A_1 D F$ jest $A_1 F = D F \, tgs \, \varphi$, poněvadž $D F$ v trojúhelníku $D F A$ rovno jest $d \cos c_0$, bude

$$A_1 F = d \cos c_0 \, tgs \, \varphi,$$

a z trojúhelníka prvního vysvítá, že

$$A_1 F = A_1 D \sin \varphi,$$

následovně $\quad A_1 D \sin \varphi = d \cos c_0 \, tgs \, \varphi.$

Podobně obdržíme z trojúhelníků $A_1 D G$ a $G D A$

$$A_1 G = d \cos b_0 \, tgs \, \psi = A_1 D \sin \psi,$$

načež dělením obou posledních rovnic dospíváme ku

$$\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \frac{\cos b_0 \, tgs \, \psi}{\cos c_0 \, tgs \, \varphi} = \frac{\cos b_0}{\cos c_0} \frac{\dfrac{\sin \psi}{\cos \psi}}{\dfrac{\sin \varphi}{\cos \varphi}}$$

čili $$1 = \frac{\cos b_0 \cos \varphi}{\cos c_0 \cos \psi}.$$

Jelikož však $\quad \varphi + \psi = a_0 \quad$ a $\quad \varphi = a^0 - \psi,$

bude $$1 = \frac{\cos b_0 \cos (a_0 - \psi)}{\cos c_0 \cos \psi}$$

nebo $$\cos c_0 = \cos b_0 \frac{\cos a_0 \cos \psi - \sin a_0 \sin \psi}{\cos \psi}$$

$$\cos c_0 = \cos a_0 \cos b_0 - \sin a_0 \cos b_0 \, tgs \, \psi,$$

odkud $$tgs \, \psi = \frac{\cos c_0 - \cos a_0 \cos b_0}{\sin a_0 \cos b_0}$$

a tím $$A_1 G = d \cos b_0 \, tgs \, \psi = d \frac{\cos c_0 - \cos a_0 \cos b_0}{\sin a_0}$$

a poněvadž $\quad A G = d \sin b_0 \quad$ jest

$$\overline{A A_1}^2 = d^2 \sin^2 b_0 - d^2 \frac{(\cos c_0 - \cos a_0 \cos b_0)^2}{\sin^2 a_0} =$$

$$= \frac{d^2}{\sin^2 a_0} \left[\sin^2 a_0 \sin^2 b_0 - (\cos c_0 - \cos a_0 \cos b_0)^2 \right]$$

čili, provedouce naznačené výkony, obdržíme

$$\overline{AA_1}^2 = v_1^2 = \frac{d^2}{sin^2 a_0}(1 - cos^2 a_0 - cos^2 b_0 - cos^2 c_0 + 2 cos\, a_0 cos\, b_0 cos\, c_0)$$

čili

$$v_1 = \frac{d}{sin\, a_0}\sqrt{1 - cos^2 a_0 - cos^2 b_0 - cos^2 c_0 + 2 cos\, a_0\, cos\, b_0\, cos\, c_0}. \quad (52)$$

Z této rovnice nabýváme proměnou

$$v_1 = \frac{2d}{sin\, a_0}\sqrt{sin\frac{a_0 + b_0 + c_0}{2} sin\frac{-a_0 + b_0 + c_0}{2} sin\frac{a_0 - b_0 + c_0}{2} sin\frac{a_0 + b_0 - c_0}{2}} \quad (53)$$

nebo

$$v_1 = \frac{2d}{sin\, a_0}\sqrt{sin\, s\, sin\,(s - a_0)\, sin\,(s - b_0)\, sin\,(s - c_0)},$$

jestliže učiníme $\quad a_0 + b_0 + c_0 = 2\,s.$

Vedle tohoto elementárního způsobu lze úlohu tuto řešiti pomocí sferické trigonometrie. Víme totiž, že

$$A\,A_1 = A\,F\, sin\,(A_1\,F\,A)$$

neboli $\quad A\,A_1 = d\, sin\, c_0\, sin\, \beta.$

Sinus úhlu β lze odvoditi z prvního hlavního vzorce sferické trigonometrie, totiž z

$$cos\, b_0 = cos\, a_0\, cos\, c_0 + sin\, a_0\, sin\, c_0\, cos\, \beta,$$

z toho $\quad cos\,\beta = \dfrac{cos\, b_0 - cos\, a_0\, cos\, c_0}{sin\, a_0\, sin\, c_0}$

a z toho opět dle odvození v § 3.,

$$sin\,\beta = \frac{1}{sin\, a_0 sin\, c_0}\sqrt{1 - cos^2 a_0 - cos^2 b_0 - cos^2 c_0 + 2 cos\, a_0\, cos\, b_0\, cos\, c_0}$$

a následovně

$$A\,A_1 = v_1 = \frac{d}{sin\, a_0}\sqrt{1 - cos^2 a_0 - cos^2 b_0 - cos^2 c_0 + 2\, cos\, a_0 cos\, b_0 cos\, c_0}$$

tatáž rovnice jako (52).

Pozorujeme-li místněji odmocninu, shledáváme, že je tatáž, kterouž jsme v odstavci 3. sinusem rohu D jmenovali, označujíce ji dle Junghanna písmenem $2\,P$. Můžeme tedy vzorci (52) dáti všeobecný tvar:

$$v_1 = \frac{2\,d}{sin\, a_0} P \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (54)$$

Analogicky mohli bychom dokázati, nazýváme-li siny rohu A, B, C písmeny P_1, P_2, P_3, že

$$v = \frac{2d}{\sin a_1} P_1, \quad \text{dále} \quad v_2 = \frac{2aP_3}{\sin a_3} \quad \text{a konečně} \quad v_3 = \frac{2aP_2}{\sin a_2}.$$

Snadno lze odvoditi následující výrazy pro výšky:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{2dP_1}{\sin a_1} = \frac{2eP_2}{\sin b_2} = \frac{2fP_3}{\sin c_3}, \\ v_1 &= \frac{2dP}{\sin a_0} = \frac{2cP_2}{\sin c_2} = \frac{2bP_3}{\sin b_3}, \\ \text{rovněž} \quad v_2 &= \frac{2aP_3}{\sin a_3} = \frac{2cP_1}{\sin c_1} = \frac{2eP}{\sin b_0}, \\ \text{podobně} \quad v_3 &= \frac{2aP_2}{\sin a_2} = \frac{2bP_1}{\sin b_1} = \frac{2fP}{\sin c_0}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (55)$$

Jelikož $v = \dfrac{2dP_1}{\sin a_1}$, $v = \dfrac{2eP_2}{\sin b_2}$ a konečně $v = \dfrac{2fP_3}{\sin c_3}$,

jest nutno
$$v^3 = \frac{8 P_1 P_2 P_3 d e f}{\sin a_1 \sin b_2 \sin c_3}.$$

Ve vzorci 33. jsme ukázali, že

$$\triangle = 2\varrho^2 \sin a_1 \sin b_2 \sin c_3,$$

odtud
$$\sin a_1 \sin b_2 \sin c_3 = \frac{\triangle}{2\varrho^2}$$

následovně
$$v^3 = \frac{16\varrho^2 P_1 P_2 P_3 d e f}{\triangle} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (56)$$

Rovnici (51.) lze, upotřebíme-li v době novější tak často užívané theorie determinantů, dáti ladnější podobu. Sinus rožní můžeme převésti ve tvar determinantní. Jest totiž

$$1 - \cos^2 a_0 - \cos^2 b_0 - \cos^2 c_0 + 2\cos a_0 \cos b_0 \cos c_0 = 4P^2 \quad \text{čili}$$

$$4P^2 = \begin{vmatrix} 1, & \cos a_0, & \cos b_0 \\ \cos a_0, & 1, & \cos c_0 \\ \cos b_0, & \cos c_0, & 1 \end{vmatrix}$$

a tudíž
$$v_1 = \frac{2dP}{\sin a_0} = \frac{2d}{\sin a_0} \begin{vmatrix} 1, & \cos a_0, & \cos b_0 \\ \cos a_0, & 1, & \cos c_0 \\ \cos b_0, & \cos c_0, & 1. \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \quad (57)$$

Ze vzorce 52. lze jinou rovnici obdržeti, jestliže za $\cos a_0$, $\cos b_0$, $\cos c_0$ jiné veličiny zavedeme. Víme totiž, že v trojúhelníku BCD jest $2\triangle_1 = ef\sin a_0$, dále z $\triangle ACD$ následuje $2\triangle_2 = df\sin b_0$ a z $\triangle ABD$ plyne $2\triangle_3 = de\sin c_0$. Z těchto rovnic opět vysvítá, že $\sin a_0 = \frac{2\triangle_1}{ef}$ a $\cos a_0 = \sqrt{1 - \frac{4\triangle_1^2}{e^2f^2}} = \frac{\sqrt{e^2f^2 - 4\triangle_1^2}}{ef}$,

pak $\sin b_0 = \frac{2\triangle_2}{df}$ a $\cos b_0 = \sqrt{1 - \frac{4\triangle_2^2}{d^2f^2}} = \frac{\sqrt{d^2f^2 - 4\triangle_2^2}}{df}$,

konečně $\sin c_0 = \frac{2\triangle_3}{de}$ a $\cos c_0 = \sqrt{1 - \frac{4\triangle_3^2}{d^2e^2}} = \frac{\sqrt{d^2e^2 - 4\triangle_3^2}}{de}$,

následovně bude výška

$$v_1 = \frac{d}{\sin a_0}\sqrt{1 - \frac{e^2f^2 - 4\triangle_1^2}{e^2f^2} - \frac{d^2f^2 - 4\triangle_2^2}{d^2f^2} - \frac{d^2e^2 - 4\triangle_3^2}{d^2e^2} + \frac{2\sqrt{(d^2e^2 - 4\triangle_3^2)(d^2f^2 - 4\triangle_2^2)(e^2f^2 - 4\triangle_1^2)}}{d^2e^2f^2}}$$

a náležitým zjednodušením obdržíme

$$v_1 = \frac{1}{ef\sin a_0}\sqrt{\begin{aligned}&4d^2\triangle_1^2 + 4e^2\triangle_2^2 + 4f^2\triangle_3^2 - 2d^2e^2f^2\\ &+ 2\sqrt{(d^2e^2 - 4\triangle_3^2)(d^2f^2 - 4\triangle_2^2)(e^2f^2 - 4\triangle_1^2)}\end{aligned}} \quad (58)$$

jak patrno výška jest vyjádřena hranami a stěnami ve vrcholu D se sbíhajícími.

γ) Mysleme si nyní, že by místo úhlů hranových dány byly vedle hran vrcholu D ještě úhly stranové. Tyto úhly buďtež α, β, γ a jsou obsaženy v rovinách ku hranám DA, DB, DC kolmých.

Ze sferické trigonometrie*) víme, máme-li zření k polárnímu trojhranu, že

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a_0$$

anebo

$$\cos\beta = -\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos b_0$$

---

*) Odvození viz na str. 14. v § 3.

odkud dále $\cos\gamma = -\cos\beta\cos\alpha + \sin\alpha\sin\beta\cos c_0$

z toho $\cos c_0 = \dfrac{\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$

následovně $\cos^2 c_0 = \dfrac{\cos^2\gamma + \cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$

tedy i

$$1-\cos^2 c_0 = \sin^2 c_0 = \frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta - \cos^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

Zavedouce za $\sin\alpha$ a $\sin\beta$ cosiny těchže úhlů, můžeme psáti

$$\sin c_0 = \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

Dale jest známo, že výška

$$AA_1 = v_1 = d\sin\beta\sin c_0$$

tedy dosazením hodnoty $\sin c_0$ najdeme

$$v_1 = \frac{d}{\sin\alpha}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \quad . \ . \ (59)$$

Tuto odmocninu lze transformacemi v § 3. provedenými jinak ještě psáti a dle toho bude výška

$$v_1 = \frac{2d}{\sin\alpha}\sqrt{-\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}} \quad (60)$$

nebo-li

$$v_1 = \frac{2d}{\sin\alpha}\sqrt{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)} \quad . \ . \ . \ . \ (60')$$

anebo

$$v_1 = \frac{2d\Pi}{\sin\alpha} \quad . \ (61)$$

tato rovnice jest rovnicí všeobecnou, neboť z ní dají se ostatní v (γ) uvedené odvoditi.

Jsou-li Π_1, Π_2 a Π_3 siny polární rohů A, B i C, budeme moci $v = \dfrac{2d\Pi_1}{\sin\alpha}$ a ostatní výšky vyjádřiti následovně

$$v_2 = \frac{2a\Pi_3}{\sin\alpha} \quad \text{a} \quad v_3 = \frac{2a\Pi_2}{\sin\alpha_1}.$$

Pro tyto výšky můžeme opět obdržeti vzorce:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{2\,d\,\Pi_1}{\sin\alpha} = \frac{2\,e\,\Pi_2}{\sin\beta} = \frac{2\,f\,\Pi_3}{\sin\gamma} \\ v_1 &= \frac{2\,b\,\Pi_3}{\sin\beta_1} = \frac{2\,c\,\Pi_2}{\sin\gamma_1} = \frac{2\,d\,\Pi}{\sin\alpha} \\ v_2 &= \frac{2\,a\,\Pi_3}{\sin\alpha} = \frac{2\,c\,\Pi_1}{\sin\gamma_1} = \frac{2\,e\,\Pi}{\sin\beta} \\ \text{a}\quad v_3 &= \frac{2\,a\,\Pi_2}{\sin\alpha_1} = \frac{2\,b\,\Pi_1}{\sin\beta_1} = \frac{2\,f\,\Pi}{\sin\gamma} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (62)$$

Z rovnice první plyne

$$v = \frac{2\,d\,\Pi_1}{\sin\alpha},\quad v = \frac{2\,e\,\Pi_2}{\sin\beta}\quad \text{a}\quad v = \frac{2\,f\,\Pi_3}{\sin\gamma}$$

následovně, když tyto výrazy spolu násobíme, najdeme,

$$v^3 = \frac{8\,\Pi_1\,\Pi_2\,\Pi_3\,d\,e\,f}{\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma},$$

poněvadž $\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma = \frac{2\,\Pi}{M}$,

bude $v^3 = \frac{8\,\Pi_1\,\Pi_2\,\Pi_3\,d\,e\,f}{\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma} = \frac{4\,\Pi_1\,\Pi_2\,\Pi_3\,d\,e\,f\,M}{\Pi}$

jelikož jest $M = \frac{P}{\Pi}$,

proto $v^3 = \frac{4\,\Pi_1\,\Pi_2\,\Pi_3\,P\,d\,e\,f}{\Pi^2}$ . . . . (63)

kterýžto vzorec Junghann jinou cestou byl stanovil.

Z obrazce (1.) jest patrno, že výška $D\,D_1 = v$ z $\triangle\,D\,H\,D_1$ jest $v = D\,H\sin\beta_1$;

z trojúhelníku $D\,A\,H$ opět jde $D\,H = d\sin c_1$,

tedy $v = d\sin c_1\,\sin\beta_1$. . . . . (63′)

Ku konci § 4. ve vzorci 26. jsme však ukázali, že modul čtyrstěnný

$$\mu = \frac{d}{M_2\,M_3\sin\alpha_1},\ \text{čili}\ \mu = \frac{e}{M_1\,M_3\sin\beta_1},\ \text{dále}\ \mu = \frac{f}{M_1\,M_2\sin\gamma_1},$$

tudíž $\quad d = \mu\, M_2\, M_3 \sin \alpha_1, \quad e = \mu\, M_1\, M_3 \sin \beta_1$

a konečně $\quad f = \mu\, M_1\, M_2 \sin \gamma_1,$

následovně $\quad v = \mu\, M_2\, M_3 \sin \alpha_1 \sin c_1 \sin \beta_1 \ldots\ldots \quad (64)$

Poněvadž se rovnice nezmění, násobíme-li ji a zároveň dělíme-li ji touže veličinou, proto můžeme též psáti

$$v = \mu\, M_2\, M_3 \frac{\sin c_1}{\sin \gamma_1} \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1$$

a jelikož
$$\frac{\sin c_1}{\sin \gamma_1} = M_1$$

bude $\quad v = \mu\, M_1\, M_2\, M_3 \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1 \ldots\ldots \quad (64')$

Svrchu uvedené vzorce pozorujme bedlivěji. Víme totiž, že

$$v_1 = \frac{2\, d\, \Pi}{\sin \alpha} \quad \text{čili} \quad v_2 = \frac{2\, e\, \Pi}{\sin \beta} \quad \text{a} \quad v_3 = \frac{2\, f\, \Pi}{\sin \gamma},$$

následovně součin $\quad v_1\, v_2\, v_3 = \dfrac{8\, d\, e\, f\, \Pi^3}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}$

čili $\quad v_1\, v_2\, v_3 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = 8\, d\, e\, f\, \Pi^3$

neboli $\quad v_1\, v_2\, v_3 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = 4\, d\, e\, f\,.\, 2\, \Pi^2\,.\, \Pi.$

Na stránce 17. jsme ale ukázali, že součin

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{2\, \Pi^2}{P},$$

následovně $\quad v_1\, v_2\, v_3 = 4\, d\, e\, f\, \Pi\, P$

a jelikož $\quad P = M\, \Pi,$

máme dále $\quad v_1\, v_2\, v_3 = d\, e\, f\, M\,.\, 4\, \Pi^2$

a proto $\quad d\, e\, f\, M = \dfrac{v_1\, v_2\, v_3}{4\, \Pi^2}.$

Výše naznačili jsme, čemu se hrany d, e, f rovnají. Součin jejich jest pak:

$$d\, e\, f = \mu^3 M_1{}^2 M_2{}^2 M_3{}^2 \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1 \quad \text{tedy i}$$

$$d\, e\, f\, M = \mu\,.\, \mu^2 M\, M_1\, M_2\, M_3\,.\, M_1\, M_2\, M_3 \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1;$$

dříve však jsme dokázali, že

$$\mu^2\, M\, M_1\, M_2\, M_3$$

rovná se, dle Junghanna, symbolu $\mathfrak{M}$ a upotřebíme-li rovnice (62), obdržíme

$$d\,e\,f\,M = \mathfrak{M}\,.\,v$$

a poněvadž
$$d\,e\,f\,M = \frac{v_1\,v_2\,v_3}{4\,\Pi^2}$$

bude následovně
$$v = \frac{v_1\,v_2\,v_3}{4\,\mathfrak{M}\,\Pi^2} \quad \ldots\ldots\ldots (65)$$

rovněž

$$v_1 = \frac{v\,v_2\,v_3}{4\,\mathfrak{M}\,\Pi_1{}^2}, \quad v_2 = \frac{v\,v_1\,v_3}{4\,\mathfrak{M}\,\Pi_2{}^2} \quad \text{a konečně} \quad v_3 = \frac{v\,v_1\,v_2}{4\,\mathfrak{M}\,\Pi_3{}^2}.$$

Pozorujme dále jen rovnice

$$v_2 = \frac{2\,e\,\Pi}{\sin\beta} \quad \text{a} \quad v_3 = \frac{2\,f\,\Pi}{\sin\gamma}.$$

Násobme je spolu, součin jejich

$$v_2\,v_3 = \frac{4\,e\,f\,\Pi^2}{\sin\beta\,\sin\gamma} = \frac{4\,e\,f\,\Pi^2\sin\alpha}{\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma},$$

jelikož
$$\frac{2\,\Pi^2}{\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma} = P \quad \text{a} \quad P = M\,\Pi$$

máme $v_2\,v_3 = 2\,M\,\Pi\,e\,f\sin\alpha$ čili $\dfrac{v_2\,v_3}{2\,\Pi\sin\alpha} = M\,e\,f$

zavedeme-li v tuto rovnici hodnoty za $e\,f$ ze 26., nabudeme

$$\frac{v_2\,v_3}{2\,\Pi\sin\alpha} = M\,.\,\mu\,M_1\,M_3\sin\beta_1\,.\,\mu\,M_1\,M_2\sin\gamma_1$$

čili
$$\frac{v_2\,v_3}{2\,\Pi\sin\alpha} = \mu^2\,M\,M_1\,M_2\,M_3\,.\,M_1\sin\beta_1\sin\gamma_1$$

a dle poznámky první v § 7. můžeme psáti

$$\frac{v_2\,v_3}{2\,\Pi\sin\alpha} = \mathfrak{M}\,.\,M_1\sin\beta_1\sin\gamma_1,$$

z toho
$$M_1\sin\beta_1\sin\gamma_1 = \frac{v_2\,v_3}{2\,\mathfrak{M}\,\Pi\sin\alpha}.$$

Nyní jedná se ještě o levou stranu této rovnice. Známe totiž, že výška

$$D\,D_1 = d\sin\beta_1\sin c_1$$

neboli
$$D\,D_1 = v = d\,\frac{\sin c_1}{\sin\gamma_1}\sin\beta_1\sin\gamma_1$$

čili
$$v = d\,M_1\sin\beta_1\sin\gamma_1 \quad \ldots\ldots\ldots (66)$$

a z toho $$M_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1 = \frac{v}{d},$$

následovně bude $$\frac{v}{d} = \frac{v_2 v_3}{2\, \mathfrak{M}\, \Pi \sin \alpha}$$

a z toho $$v = \frac{v_2 v_3 d}{2\, \mathfrak{M}\, \Pi \sin \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (67)$$

δ) Výšku v, o kteréž dále tuto pojednáváme, můžeme i jiným způsobem vyhledati a jinými veličinami vyjádřiti.

Spustíme kolmici DD_1 s vrcholu D na protilehlou stěnu ABC a patou D_1 kolmice této veďme normaly ku stranám trojúhelníku ABC. Kolmice tyto označme k_1, k_2, k_3 a spojíme-li průsečné body H, E, J s D_1, obdržíme z trojúhelníků takto povstalých následující rovnice

$$k_1 = v \cot g\, \alpha_1, \quad k_2 = v \cot g\, \beta_1 \quad \text{a} \quad k_3 = v \cot g\, \gamma_1.$$

Ale poněvadž $\triangle = AD_1B + BD_1C + CD_1A$ a jelikož

$$2\,AD_1B = c\,k_3 = c\,v \cot g\, \gamma_1$$
$$2\,BD_1C = a\,v \cot g\, \alpha_1$$

a konečně $$2\,AD_1C = b\,v \cot g\, \beta_1;$$

jest tedy $$2\triangle = a\,v \cot g\, \alpha_1 + b\,v \cot g\, \beta_1 + c\,v \cot g\, \gamma_1$$

a
$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{2\triangle}{a \cot g\, \alpha_1 + b \cot g\, \beta_1 + c \cot g\, \gamma_1} \\ &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2\,(a \cot g\, \alpha_1 + b \cot g\, \beta_1 + c \cot g\, \gamma_1)} \end{aligned}\right\} \quad (68)$$

Vzorec tento vyjadřuje výšku stranami základny a úhly stranovými ku základně přilehlými.

ε) Z tohoto vzorce, který jsme právě odvodili, obdržíme jiný.

Předpokládejme, že by dán byl poloměr základny $\triangle$, její tři úhly a_1, b_2, c_3 a konečně úhly stěn při podstavě. Víme totiž, že

$$a = 2\,\varrho \sin a_1, \quad b = 2\,\varrho \sin b_1 \quad \text{a} \quad c = 2\,\varrho \sin c_3.$$

Plocha trojúhelníka ABC t. j.

$$\triangle = \frac{a\,c\,sin\,b_2}{2} \quad \text{neboli}$$

$$2\triangle = 2\,\varrho\,sin\,a_1\,.\,2\,\varrho\,sin\,c_3\,.\,sin\,b_2 = 4\,\varrho^2\,sin\,a_1\,sin\,b_2\,sin\,c_3.$$

Vložíme-li hodnoty tyto do 68., obdržíme provedouce redukce

$$v = \frac{2\,\varrho\,sin\,a_1\,sin\,b_2\,sin\,c_3}{sin\,a_1\,cotg\,\alpha_1 + sin\,b_2\,cotg\,\beta_1 + sin\,c_3\,cotg\,\gamma_1}. \qquad (69)$$

Tuto rovnici odvodil poprve, pokud mi známo, Grunert, uveřejniv ji ve svém časopise. Odvození jeho mnohem jest složitější a předpokládá mnohé věty analytické geometrie.

Postup **Grunertova** výpočtu jest asi následující:

Vrcholy čtyrstěnu $ABCD$ (obr. 9.) dány buďtež souřadnicemi, kteréž sluší však vyjádřiti danými v úkolu veličinami. Dejme tomu, že by byly souřadnice bodů

$$A \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \\ z = 0 \end{cases} \quad B \equiv \begin{cases} x_1 = 2\,\varrho\,sin\,c_3\,{}^{*)} \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 0 \end{cases}$$

a konečně
$$C \equiv \begin{cases} x_2 = 2\,\varrho\,cos\,a_1\,sin\,b_2\,{}^{**)} \\ y_2 = 2\,\varrho\,sin\,a_1\,sin\,b_2 \\ z_2 = 0 \end{cases},$$

souřadnice vrcholu D nazývejme x_4, y_4, z_4, při čemž podotýkáme, že $z_4 = v$, jelikož předpokládáme pravoúhlý trojosý system souřadnic, jehož počátkem jest bod A a osou úseček strana AB.

Hranou AB proložíme rovinu, kteráž s rovinou ABC úhel γ_1 uzavírá. Pro tuto rovinu platí rovnice

$$z_4 = y_4\,tgs\,\gamma_1 \quad \text{nebo} \quad z_4\,cos\,\gamma_1 = y_4\,sin\,\gamma_1$$

čili
$$x_4\,.\,0 + y_4\,sin\,\gamma_1 - z_4\,cos\,\gamma_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Podobně můžeme stanoviti rovnici i pro rovinu hranou BC procházející a s rovinou XY úhel α_1 uzavírající. Za účelem tím volíme vrchol B za počátek a hranu BC za osu X'. Hledíce k tomuto novému systemu, jmenujme souřadnice bodu D s x_4', y_4', z_4'. Rovnice roviny BCD jest

$$z_4\,cos\,\alpha_1 = y_4'\,sin\,\alpha, \quad \text{jelikož} \quad z_4' = z_4.$$

Nyní jde o to, abychom tyto souřadnice x_4' a y_4' vyjádřili původními souřadnicemi x_4, y_4, z_4. Zde jest nám přeměniti pravoúhelný system v jinou pravoúhelnou soustavu. Dle známých formulí transformačních jest

$$x_4 = c + x_4'\,cos\,(180^0 - b_2) - y_4'\,sin\,(180^0 - b_2)$$

---

*) Vzorec tento odvodili jsme v § 4. ve vzorci 23.

**) Víme totiž, že $x_2 + b\,cos\,a$, ale $b = 2\,\varrho\,sin\,b_2$ následovně $x_2 = 2\,\varrho\,sin\,b_2\,cos\,a_1$ a poněvadž $y_2 = b\,sin\,a_1$ bude $y_2 = 2\,\varrho\,sin\,a_1\,sin\,b_2$.

a $\quad y_4 = x_4' \sin(180 - b_2) + y_4' \sin(180 - b_2)$,

tudíž $\quad x_4' \cos b_2 + y_4' \sin b_2 = -x_4 + c$

a $\quad x_4' \sin b_2 - y_4' \cos b_2 = y_4$.

Užijeme-li determinantů, lze neznámou x_4' a y_4' stanoviti. Jmenovatelem těchto proměnných jest determinant

$$J = \begin{vmatrix} \cos b_2 & \sin b_2 \\ \sin b_2 & -\cos b_2 \end{vmatrix} = -\cos^2 b - \sin^2 b = -1$$

a neznámá $\quad x_4' = \dfrac{-(-x_4 + c)\cos b_2 - y_4 \sin b_2}{-1}$

nebo $\quad x_4' = -(x_4 - c)\cos b_2 + y_4 \sin b_2$.

Rovněž pro veličinu druhou obdržíme, užijeme-li téže nauky, rovnici:

$$y_4' = -(x_4 - c)\sin b_2 - y_4 \cos b_2.$$

Bude pak rovnice roviny BDC

$$x_4 \sin \alpha_1 \sin b_2 + y_4 \sin \alpha_1 \cos b_2 + z_4 \cos \alpha_1 = c \sin b_2 \sin \alpha_1 \quad . (2)$$

Konečně můžeme i vrchol C považovati za počátek souřadnic a stranu AC lze voliti za osu x. Označíme-li souřadnice libovolného bodu, na př. bodu D, vzhledem ku této nové soustavě x_4'', y_4'', $z_4'' = z_4$, bude rovnice roviny ACD $\quad z_4 = y_4'' \, tg \, \beta_1$ čili $z_4 \cos \beta_1 = y_4'' \sin \beta_1$

a po vykonání transformací tohoto systému na soustavu souřadnic bodu A obdržíme:

$$x_4 = x_4'' \cos \alpha_1 - (-y_4'') \sin \alpha_1$$

a $\quad y_4 = x_4'' \sin \alpha_1 + (-y_4'') \cos \alpha_1$

čili $\quad x_4 = x_4'' \cos \alpha_1 + y_4'' \sin \alpha_1$

$$y_4 = x_4'' \sin \alpha_1 - y_4'' \cos \alpha_1.$$

Z těchto rovnic jde:

$$x_4'' = x_4 \cos \alpha_1 + y_4 \sin \alpha_1$$

$$y_4'' = x_4 \sin \alpha_1 - y_4 \cos \alpha_1,$$

následovně pro rovinu ACD máme:

$$x_4 \sin \alpha_1 \sin \beta_1 - y_4 \cos \alpha_1 \sin \beta_1 - z_4 \cos \beta_1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . (3)$$

Sestavme si nyní veškeré takto ustanovené vzorce:

$$x_4 \, . \, 0 + y_4 \sin \gamma_1 - z_4 \cos \gamma_1 = 0$$

$$x_4 \sin \alpha_1 \sin b_2 + y_4 \sin \alpha_1 \cos b_2 + z_4 \cos \alpha_1 = c \sin \alpha_1 \sin b_2$$

$$x_4 \sin \beta_1 \sin \alpha_1 - y_4 \sin \beta_1 \cos \alpha_1 - z_4 \cos \beta_1 = 0.$$

Mohli bychom z nich stanoviti sice x_4, y_4, ale toho nepotřebujeme, nýbrž, jak jsme pravili, z_4 totiž výšku hledati musíme. Jmenovatel této neznámé jest

$$J = \begin{vmatrix} 0, & \sin \gamma_1, & -\cos \gamma_1 \\ \sin \alpha_1 \ \sin b_2, & \sin \alpha_1 \ \cos b_2, & \cos \alpha_1 \\ \sin \beta_1 \ \sin \alpha_1, & -\sin \beta_1 \ \cos \alpha_1, & -\cos \beta_1 \end{vmatrix}$$

a čitatel $\check{C} = \begin{vmatrix} 0, & sin\,\gamma_1, & 0 \\ sin\,\alpha_1\,sin\,b_2, & sin\,\alpha_1\,cos\,b_2, & c\,sin\,b_2\,sin\,\alpha_1 \\ sin\,a_1\,sin\,\beta_1, & -cos\,a_1\,sin\,\beta_1 & 0 \end{vmatrix} =$

$c\,sin\,a_1\,sin\,b_2\,sin\,\alpha_1\,sin\,\beta_1\,sin\,\gamma_1$ poněvadž ale $c = 2\,\varrho\,sin\,c_3$,

jest $$\check{C} = 2\,\varrho\,sin\,a_1\,sin\,b_2\,sin\,c_3\,sin\,\alpha_1\,sin\,\beta_1\,sin\,\gamma_1.$$

Rozvedením determinantu J obdržíme:

$$\begin{aligned} J &= sin\,\alpha_1\,sin\,\beta_1\,cos\,\gamma_1\,sin\,b_2\,cos\,a_1 + sin\,a_1\,cos\,\alpha_1\,sin\,\beta_1\,sin\,\gamma_1 + \\ &+ sin\,a_1\,cos\,b_2\,sin\,\alpha_1\,sin\,\beta_1\,cos\,\gamma_1 + sin\,b_2\,sin\,\alpha_1\,cos\,\beta_1\,sin\,\gamma_1 \\ &= sin\,a_1\,cos\,\alpha_1\,sin\,\beta_1\,sin\,\gamma_1 + sin\,b_2\,sin\,\alpha_1\,cos\,\beta_1\,sin\,\gamma_1 \\ &+ sin\,\alpha_1\,sin\,\beta_1\,cos\,\gamma_1\,(sin\,a_1\,cos\,b_2 + cos\,a_1\,sin\,b_2). \end{aligned}$$

Z goniometrie jest nám však známo, že

$$sin\,(a_1 + b_2) = sin\,a_1\,cos\,b_2 + cos\,a_1\,sin\,b_2$$

a jelikož $a_1 + b_2 + c_3 = 180$, z toho $a_1 + b_2 = 180 - c_3$,

následovně $sin\,(a_1 + b_2) = sin\,c_3$, tím

$$\begin{aligned} J &= sin\,a_1\,cos\,\alpha_1\,sin\,\beta_1\,sin\,\gamma_1 + sin\,b_2\,sin\,\alpha_1\,cos\,\beta_1\,sin\,\gamma_1 \\ &+ sin\,c_3\,sin\,\alpha_1\,sin\,\beta_1\,cos\,\gamma_1. \end{aligned}$$

Obdržíme tedy pro výšku

$$v = z_4 = \frac{\check{C}}{J} = \frac{2\,\varrho\,sin\,a_1\,sin\,b_2\,sin\,c_3\,sin\,\alpha_1\,sin\,\beta_1\,sin\,\gamma_1}{sin a_1 cos\alpha_1 sin\beta_1 sin\gamma_1 + sin b_2 sin\alpha_1 cos\beta_1 sin\gamma_1 + sin c_3 sin\alpha_1 sin\beta_1 cos\gamma_1}$$

a po zjednodušení

$$v = \frac{2\,\varrho\,sin\,a_1\,sin\,b_2\,sin\,c_3}{sin\,a_1\,cotg\,\alpha_1 + sin\,b_2\,cotg\,\beta_1 + sin\,c_3\,cotg\,\gamma_1} \quad \text{t. j.}$$

táž rovnice jako 69., ale postup, jímž jsme ji určili, ač důmyslný a pěkný, přece velmi dlouhý jest.

Poznámka.

V pravidelném čtyrstěnu, kde základnou jest rovnostranný trojúhelník, v němž $a_1 = b_2 = c_3 = 60^0$, jest $sin\,a_1 = sin\,60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ a $cos\,60^0 = \frac{1}{2}$ a pomocí sferické trigonometrie lehko lze ukázati, že

$$cos\,\alpha_1 = cos\,\beta_1 = cos\,\gamma_1 = \tfrac{1}{3} \quad \text{a} \quad sinus\,\alpha_1 = sin\,\beta_1 = sin\,\gamma_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

dále $$cotg\,\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{pak} \quad \varrho = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

následovně bude $$v = \frac{a\sqrt{6}}{3} \quad \text{co rovnice 50.}$$

ζ) Předpokládejme, že by k určení výšky dány byly stěny dvě: $\triangle$ a $\triangle_1$, úhel jimi uzavřený α_1 a společná oběma stěnám hrana $BC = a$.

Spustíme výšku DD_1 a položíme jí rovinu kolmou ku hraně a. Z trojúhelníku DD_1E jde $DD_1 = v = DE \sin \alpha_1$. Přímka DE jest výškou v trojúhelníku BCD, jehož ploský obsah

$$\triangle_1 = \frac{BC \cdot DE}{2} = \frac{a}{2} \cdot DE,$$

z této pak $\qquad DE = \frac{2\triangle_1}{a}$

a následovně výška čtyrstěnu, kterouž jsme hledali, bude

$$v = \frac{2\triangle_1}{a} \sin \alpha_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (70)$$

Pomocí tohoto vzorce můžeme dáti výšce jiný tvar. Víme totiž z planimetrie, že obsah trojúhelníka rovná se základně násobené poloviční výškou. Nazveme-li tudiž výšku v trojúhelníku BCD s vrcholu D na stranu BC spuštěnou h_1, jest plocha téhož, dle uvedené poučky, rovna

$$\frac{ah_1}{2} \text{ t. j. } \triangle_1 = \frac{ah_1}{2},$$

následovně ve vzorec 70. vložena, dává

$$v = h_1 \sin \alpha_1 ; \ldots\ldots\ldots\ldots (71)$$

což přímo z obrazce lze vyčísti.

Poznámka.

Položíme-li ve vzorci 70. $\triangle_1 = \frac{a e \sin c_2}{2}$

obdržíme $\qquad v = e \sin c_2 \sin \alpha_1,$

již dávno nám známý vzorec.

η) Mysleme si sestrojený průmět hrany d na rovině ABC a jmenujme úhel těchto dvou útvarů $(d, \triangle)$. Spojme orthogonální průmět bodu D na rovině $\triangle$ t. j. bod D_1 s bodem A, tím vznikne trojúhelník D_1AD v němž, dle známé věty, jest výška

$$v = DD_1 = d \sin (d, \triangle). \ldots\ldots (72)$$

ϑ) Dejme tomu, že by byly dány stěny $\triangle$, $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ a úhly jimi uzavřené α, β, γ, α_1, β_1, γ_1.

Víme totiž, promítneme-li vrchol A na rovinu BCD do bodu A_1, že $\qquad AA_1 = AG \sin \gamma$

a v trojúhelníku AFA_1, že jest $AA_1 = AF \sin\beta$. Dále vidíme, v obrazci 1., že přímky AG a AF jsou výškami trojúhelníků zmíněných, jichž ploské obsahy

$$\triangle_2 = \tfrac{1}{2} AG . DC \quad \text{a} \quad \triangle_3 = \tfrac{1}{2} BD . AF.$$

Neznáme však hran DC a AF a proto položíme první rovnu x a druhou $= y$, bude pak

$$\triangle_2 = \frac{AG . x}{2} \quad \text{a} \quad \triangle_3 = \frac{AF . y}{2},$$

z toho $$AG = \frac{2\triangle_2}{x} \quad \text{a} \quad AF = \frac{2\triangle_3}{y},$$

následovně tím nabude výška AA_1 tvaru

$$v_1 = \frac{2\triangle_2}{x}\sin\gamma \quad \text{a} \quad v_1 = \frac{2\triangle_3}{y}\sin\beta,$$

neboli $\quad v_1 x = 2\triangle_2 \sin\gamma$ a $v_1 y = 2\triangle_3 \sin\beta$,

tudíž $\quad v_1{}^2 xy = 4\triangle_2\triangle_3 \sin\beta\sin\gamma.$

Součin neznámých xy lze však vyjádřiti plochou. Víme z trigonometrie, že

$$2\triangle_1 = xy\sin a_0 \quad \text{odkud} \quad xy = \frac{2\triangle_1}{\sin a_0},$$

tedy $\quad v_1{}^2 . 2\triangle_1 = 4\triangle_2\triangle_3 \sin a_0 \sin\beta\sin\gamma$ čili

$$v_1{}^2\triangle_1 = 2\triangle_2\triangle_3 \sin a_0 \sin\beta\sin\gamma.$$

Z této rovnice musíme ještě vyloučiti neznámou veličinu a_0. Ze sferické trigonometrie však víme, že

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a_0$$

a po zjednodušení

$$\sin a_0 = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Bude tedy

$$v_1{}^2\triangle_1 = 2\triangle_2\triangle_3\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Odmocnina tato není než známé nám 2Π, následovně

$$v_1{}^2 = \frac{4\triangle_2\triangle_3\Pi}{\triangle_1} = \frac{4\triangle_1\triangle_2\triangle_3\Pi}{\triangle_1{}^2}$$

a proto $$v_1 = \frac{2}{\triangle_1}\sqrt{\triangle_1\triangle_2\triangle_3\Pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (73)$$

anebo, jestliže neupotřebíme symbolu Π, obdržíme

$$v_1 = \frac{1}{\triangle_1}\sqrt{2\,\triangle_1\,\triangle_2\,\triangle_3\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}\;.\;.\quad(74)$$

Poznámka 1.

Jestliže úhel $\beta=\gamma=90^0$, pak by

$$v_1 = \frac{1}{\triangle_1}\sqrt{2\,\triangle_1\,\triangle_2\,\triangle_3 \sin\alpha}$$

a konečně, kdyby $\alpha = 90^0$, tedy pro pravoúhelný čtyrstěn, by byla

$$v_1 = \frac{1}{\triangle_1}\sqrt{2\,\triangle_1\,\triangle_2\,\triangle_3}.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(75)$$

Poznámka 2.

Veličinu kořenovou můžeme však jinak vyjádřiti. V příčině té promítejme vždy tři stěny na čtvrtou a tím nabudeme rovnic

$$\left.\begin{array}{ll}
1. & \triangle = \triangle_1 \cos\alpha_1 + \triangle_2 \cos\beta_1 + \triangle_3 \cos\gamma_1 \\
2. & \triangle_1 = \triangle \cos\alpha_1 + \triangle_2 \cos\gamma + \triangle_3 \cos\beta \\
3. & \triangle_2 = \triangle \cos\beta_1 + \triangle_1 \cos\gamma + \triangle_3 \cos\alpha \\
4. & \triangle_3 = \triangle \cos\gamma_1 + \triangle_1 \cos\beta + \triangle_2 \cos\alpha.
\end{array}\right|$$

Rovnice tyto se nezmění, jestliže je následovně píšeme

$$\begin{array}{l}
\triangle - \triangle_1 \cos\alpha_1 - \triangle_2 \cos\beta_1 - \triangle_3 \cos\gamma_1 = 0 \\
\triangle_1 - \triangle_2 \cos\gamma - \triangle_3 \cos\beta - \triangle \cos\alpha_1 - 0 \cos\beta_1 - 0 \cos\gamma_1 = 0 \\
\triangle_2 - \triangle_1 \cos\gamma - \triangle_3 \cos\alpha - 0 \cos\alpha_1 - \triangle \cos\beta_1 - 0 \cos\gamma_1 = 0 \\
\triangle_3 - \triangle_1 \cos\beta - \triangle_2 \cos\alpha - 0 \cos\alpha_1 - 0 \cos\beta_1 - \triangle \cos\gamma_1 = 0.
\end{array}$$

Z těchto po eliminaci $-\cos\alpha_1$, $-\cos\beta_1$, $-\cos\gamma_1$, obdržíme

$$\begin{vmatrix}
\triangle & \triangle_1, & \triangle_2, & \triangle_3 \\
\triangle_1 - \triangle_2 \cos\gamma - \triangle_3 \cos\beta, & \triangle, & 0, & 0 \\
\triangle_2 - \triangle_1 \cos\gamma - \triangle_3 \cos\alpha, & 0, & \triangle, & 0 \\
\triangle_3 - \triangle_1 \cos\beta - \triangle_2 \cos\alpha, & 0, & 0, & \triangle
\end{vmatrix} = 0,$$

z čehož následuje, že

$$\triangle^2 = \triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2 - 2\,\triangle_2\,\triangle_3 \cos\alpha - 2\,\triangle_1\,\triangle_3 \cos\beta - 2\,\triangle_1\,\triangle_2 \cos\gamma.$$

Známá tato poučka pochází od Crelle-a, jenž ji uvádí ve své „Sammlung mathematischer Aufsätze.“ Z ní plyne

$$\cos\alpha = \frac{\triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2 - \triangle^2 - 2\,\triangle_1\,\triangle_3 \cos\beta - 2\,\triangle_1\,\triangle_2 \cos\gamma}{2\,\triangle_2\,\triangle_3},$$

následovně $\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma =$

$$\frac{\triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2 - \triangle^2 - 2\,\triangle_1\,\triangle_3 \cos\beta - 2\,\triangle_1\,\triangle_2 \cos\gamma + 2\triangle_2\,\triangle_3 \cos\beta\cos\gamma}{2\,\triangle_2\,\triangle_3}$$

dále pak: $\sin^2\beta \sin^2\gamma - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta \cos^2\gamma)^2$

$$= \frac{4\triangle_2^2\triangle_3^2 \sin^2\beta \sin^2\gamma - [\triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2 - \triangle^2 - 2\triangle_1\triangle_3 \cos\beta - 2\triangle_1\triangle_2 \cos\gamma + 2\triangle_2\triangle_3 \cos\beta \cos\gamma]^2}{4\triangle_2^2\triangle_3^2}.$$

Čitatel jest rozdíl dvou čtverců, a poněvadž levá strana veličinou $4\Pi^2$ jest, bude

$$4\Pi^2 = -[\triangle_1^2+\triangle_2^2+\triangle_3^2-\triangle^2-2\triangle_1\triangle_3\cos\beta-2\triangle_1\triangle_2\cos\gamma+2\triangle_2\triangle_3\cos(\beta-\gamma)].$$
$$[\triangle_1^2+\triangle_2^2+\triangle_3^2-\triangle^2-2\triangle_1\triangle_3\cos\beta-2\triangle_1\triangle_2\cos\gamma+2\triangle_2\triangle_3\cos(\beta+\gamma)].$$
$$\frac{1}{4\triangle_2^2\triangle_3^2},$$

následovně přejde výška v ve tvar:

$$v_1 = \frac{1}{\triangle_1}\sqrt{\triangle_1}\sqrt[4]{\begin{matrix} -[\triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2 - \triangle^2 - 2\triangle_1\triangle_3\cos\beta - \\ -2\triangle_1\triangle_2\cos\gamma+2\triangle_2\triangle_3\cos(\beta-\gamma)][\triangle_1^2+\triangle_2^2+\triangle_3^2 \\ -\triangle^2-2\triangle_1\triangle_3\cos\beta-2\triangle_1\triangle_2\cos\gamma+2\triangle_2\triangle_3\cos \\ (\beta+\gamma)] \end{matrix}} \quad (76)$$

ι) Dostatečně, myslím, ukázali jsme, jak lze stereometrie a trigonometrie zvlášť při určování podstatných částí čtyrstěnu upotřebiti. Nyní chceme míti zření k analytické geometrii prostoru a pomocí této ustanoviti výšku.

Dejme tomu, že by vrcholy čtyrstěnu dány byly souřadnicemi. Vrchol D (obr. 10.) považován v případu tomto za počátek a náležejí mu tudíž souřadnice (0, 0, 0); bod A buď

stanoven $\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$ a vrchol B $\begin{cases} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{cases}$

a konečně C má souřadnice x_2, y_2, z_2.

Výšku obdržíme, pakliže spustíme v obrazci 10. kolmici s vrcholu A na plochu DBC. Body A, B, C spojme s vrcholem D, tím obdržíme průvodiče d, e, f, kteréž vzhledem k pravoúhelnému systemu určeny jsou úhly λ, μ, γ; λ_1, μ_1, γ_1; λ_2, μ_2, γ_2. Kromě toho vztyčme ve vrcholu D na rovinu DBC kolmici N, kteráž s rovinami souřadnými uzavírá úhly l, m, n, jichž cosiny jsou:

$$\cos l = \frac{\cos\lambda \cos\nu_1 - \cos\nu \cos\lambda_1 \text{ *)}}{\sin a_0}$$

je-li a_0 úhel hran e a f; rovněž tak

$$\cos m = \frac{\cos\nu \cos\lambda_1 - \cos\lambda \cos\nu_1}{\sin a_0}$$

a konečně $$\cos n = \frac{\cos\lambda \cos\mu_1 - \cos\lambda_1 \cos\mu}{\sin a_0};$$

to jsou cosiny úhlů, jež rovina DBC s rovinami YZ, XZ a XY uzavírá.

Výška $AA_1 = d \sin ADA_1$; úhel ADA_1 bude nám vyjádřiti úhly jednotlivých hran d, e a f. Nazveme-li pak úhel, jejž normala N s hranou d tvoří, písmenou σ, a uvážíme-li, že tento úhel uzavírají směry λ_2, μ_2, γ_2 a l, m, n, bude

$$\cos\sigma = \cos\lambda_2 \cos l + \cos\mu_2 \cos m + \cos\nu_2 \cos n$$

---

*) Důkaz.

Přímky DB a DC (obr. 11.) stanoví rovinu; nazveme-li úhly, jež tato s rovinami yz, zx a xy uzavírá l, m, n, vneseme-li na tyto přímky od 0 délku = jedničce míry a označíme-li úhel sevřený přímkami DB a DC písmenem a_0, obdržíme pro obsah trojúhelníka DBC, jehož $BD = DC = 1$, rovnici $P = \frac{1}{2} \sin a_0$. Dále víme, že průmět tohoto trojúhelníka na rovině yz jest $P_{yz} = P \cos l$, na ostatních pak

$$P_{zx} = P \cos m \quad \text{a} \quad P_{xy} = P \cos n,$$

z čehož opět plyne

$$\cos l = \frac{P_{yz}}{P}, \quad \cos m = \frac{P_{zx}}{P} \quad \text{a} \quad \cos l = \frac{P_{xy}}{P}$$

ale obsah $\triangle$ jest pak:

$$P_{zx} = \tfrac{1}{2} (\cos\mu \cos\nu_1 - \cos\mu_1 \cos\nu),$$

dále $$P_{yz} = \tfrac{1}{2} (\cos\lambda_1 \cos\nu - \cos\lambda \cos\nu_1)$$

a $$P_{xy} = \tfrac{1}{2} (\cos\lambda \cos\mu_1 - \cos\mu \cos\lambda_1)$$

a proto $$\cos l = \frac{P_{yz}}{P} = \frac{\cos\mu \cos\nu_1 - \cos\nu \cos\mu_1}{\sin a_0}$$

rovněž $$\cos m = \frac{\cos\nu \cos\lambda_1 - \cos\lambda \cos\nu_1}{\sin a_0}$$

$$\cos m = \frac{\cos\lambda \cos\mu_1 - \cos\lambda_1 \cos\mu}{\sin a_0}$$

jak bylo dokázati.

a jelikož $\sigma + ADA_1 = 90^0$,

jest $\cos\sigma = \sin ADA_1$,

následovně, položíme-li za $\cos l$, $\cos m$ a $\cos n$ hodnoty, obdržíme

$$\sin ADA_1 = \frac{\cos\lambda_2(\cos\mu\cos\nu_1 - \cos\mu_1\cos\nu)}{\sin a_0} +$$

$$\frac{\cos\mu_2(\cos\nu\cos\lambda_1 - \cos\lambda\cos\nu_1) + \cos\nu_2(\cos\lambda\cos\mu_1 - \cos\lambda_1\cos\mu)}{\sin a_0}.$$

Pozorujeme-li čitatele tohoto zlomku, shledáváme, že jest determinantem stupně třetího:

$$\sin ADA_1 = \frac{1}{\sin a^0}\begin{vmatrix} \cos\lambda, & \cos\mu, & \cos\nu \\ \cos\lambda_1, & \cos\mu_1, & \cos\nu_1 \\ \cos\lambda_2, & \cos\mu_2, & \cos\nu_2 \end{vmatrix}.$$

Dosadíme-li hodnotu tuto do výrazu pro výšku, obdržíme:

$$v_1 = \frac{d}{\sin a_0}\begin{vmatrix} \cos\lambda, & \cos\mu, & \cos\nu \\ \cos\lambda_1, & \cos\mu_1, & \cos\nu_1 \\ \cos\lambda_2, & \cos\mu_2, & \cos\nu_2 \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; (77)$$

Jest nám ale známo, že

$$x = d\cos\lambda, \quad y = d\cos\mu \quad \text{a} \quad d\cos\nu = z,$$

podobné rovnice platí pro e a f a z těchto vysvítá, že

$$\cos\lambda = \frac{x}{d}, \quad \cos\mu = \frac{y}{d}, \quad \cos\nu = \frac{z}{d},$$

kteréž v 77. vloženy, přivádějí nás ku

$$v_1 = \frac{d}{\sin a_0}\begin{vmatrix} \frac{x}{d}, & \frac{y}{d}, & \frac{z}{d} \\ \frac{x_1}{e}, & \frac{y_1}{e}, & \frac{z_1}{e} \\ \frac{x_2}{f}, & \frac{y_2}{f}, & \frac{z_2}{f} \end{vmatrix},$$

čili

$$v_1 = \frac{1}{e f \sin a_0}\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (78)$$

Netřeba právě předpokládati, že by bod D byl počátkem soustavy souřadnic. Mysleme si, že by čtyrstěn $DABC$ se úplně v prostoru nalézal. Jednoduchou transformací převedeme případ tento na předešlý. Jmenujme souřadnice bodu D (xyz), druhých pak s xyz označujme přivěšujíce patřičné přípony. Pošiňme system XYZ rovnoběžně do vrcholu D. Bude míti každý bod vzhledem ku této nové osnově $X_1\ Y_1\ Z_1$ souřadnice menší o koordinaty bodu D, a obdržíme pro:

$$\begin{array}{llccc}
D & \text{souřadnice} & 0, & 0, & 0, \\
A & \quad " & x_1 - x, & y_1 - y, & z_1 - z, \\
B & \quad " & x_2 - x, & y_2 - y, & z_2 - z \\
\text{a } C & \quad " & x_3 - x, & y_3 - y, & z_3 - z.
\end{array}$$

Poněvadž vrchol D jest počátkem nového systému, nalezneme dle 78., že výška

$$v_1 = \frac{1}{e f \sin a_0} \begin{vmatrix} x_1 - x, & y_1 - y, & z_1 - z \\ x_2 - x, & y_2 - y, & z_2 - z \\ x_3 - x, & y_3 - y, & z_3 - z \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; (79)$$

a protože „každý determinant lze uvésti na stupeň vyšší připojením jednoho řádku, na jehož prvním místě stojí jednička a jehož ostatní prvky jsou veličiny libovolné a připojením sloupce, jenž má s řádkem jednici co prvek společnou, kteréhož ostatní prvky však jsou nuly,“ můžeme psáti

$$v_1 = \frac{1}{e f \sin a_0} \begin{vmatrix} 1, & x, & y, & z \\ 0, & x_1 - x, & y_1 - y, & z_1 - z \\ 0, & x_2 - x, & y_2 - y, & z_2 - z \\ 0, & x_3 - x, & y_3 - y, & z_3 - z \end{vmatrix}$$

neb užitím pravidla, že hodnota determinantu se nemění, přičteme-li neb odečteme-li od jednoho jeho řádku nebo sloupce druhý řádek nebo sloupec, najdeme:

$$v_1 = \frac{1}{e f \sin a_0} \begin{vmatrix} 1, & x, & y, & z \\ 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (80)$$

Mimo tento výraz můžeme ještě jinou rovnici pro výšku obdržeti, pokračujeme-li:

V § 7. v poznámce 2. jsme ukázali, že pro rovinu třemi body ABC procházející platí rovnice

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Délku kolmice spuštěné s bodu (x_0, y_0, z_0) na rovinu vůbec, na př. na

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

vyjadřuje analytická geometrie jak známo tím, že klade místo proměnných souřadnic x, y, z souřadnice bodu stálého a tento součet t. j.

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

dělí druhou odmocninou ze součtu čtverců součinitelů neznámých x, y, z, tak že délka kolmice se rovná

$$\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \ldots\ldots \quad (81)$$

V našem případu spouštíme kolmici s vrcholu D, jehož souřadnice jsou (x_0, y_0, z_0), na rovinu bodů A, B, C; jest tedy pouze zapotřebí v této (viz rovnici 41'.) místo x, y, z psáti x_0, y_0, z_0; tudíž délka kolmice

$$\left\{\begin{array}{l} \quad x_0 [y_1 (z_2 - z_3) + y_2 (z_3 - z_1) + y_3 (z_1 - z_2)] \\ + y_0 [z_1 (x_2 - x_3) + z_2 (x_3 - x_1) + z_3 (x_1 - x_2)] \\ + z_0 [x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)] \\ - [x_1 (y_2 z_2 - y_3 z_2) + x_2 (y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3 (y_1 z_2 - y_2 z_1) \end{array}\right\} : J$$

Jmenovatel J je při tom

$$= \sqrt{\begin{array}{r} [y_1 (z_2 - z_3) + y_2 (z_3 - z_1) + y_3 (z_1 - z_2)]^2 + [z_1 (x_2 - x_3) + \\ + z_3 (x_3 - x_1) + z_3 (x_1 - x_2)]^2 + [x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + \\ + x_3 (y_1 - y_2)]^2. \end{array}}$$

Čitatel není než nahoře napsaný determinant a jednotliví sčítanci v jmenovateli jsou též determinanty, proto můžeme psáti

$$v=\frac{\begin{vmatrix} x_0, & y_0, & z_0, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1, & z_1, & 1 \\ y_2, & z_2, & 1 \\ y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}^2}} \quad . \; . \; (82)$$

Rovnice tato se nezmění, jestliže v ní místo x_0, y_0, z_0 píšeme souřadnice x, y, z.

Tak probrali jsme základnu i výšku. Nyní přikročme ku oddílu třetímu, totiž ku:

§ 9. Stanovení krychlového obsahu čtyrstěnu.

Pozorujeme-li základní vzorec

$$V=\tfrac{1}{3}\,p\,v=\tfrac{1}{3}\,\triangle\,.\,v,$$

seznáváme, že vložením hodnot za výšku a základnu, kteréž jsme v § 7. a § 8. stanovili, můžeme konečně žádaných rovnic se dodělati.

Známa jest nám z rovnic (42.—51.) výška, kteráž jest vyjádřena hranami čtyrstěnu.

Dáme-li hodnoty ty do rovnice

$$V=\tfrac{1}{3}\triangle v,$$

obdržíme následující rovnice krychlový obsah čtyrstěnu vyjadřující.

α) Upotřebením 42. přicházíme ku:

$$V=\tfrac{1}{12}\sqrt{\left\{\begin{matrix} 4a^2c^2e^2-e^2(a^2+c^2-b^2)^2-a^2(c^2-d^2+e^2)^2 \\ -c^2(a^2+e^2-f^2)^2+(a^2+c^2-b^2)(a^2+e^2-f^2) \\ (c^2-d^2+e^2) \end{matrix}\right\}} \quad (83)$$

užitím 43. najdeme

$$288\,V^2=\begin{vmatrix} 2a^2, & a^2+c^2-b^2, & a^2+e^2-f^2 \\ a^2+c^2-b^2, & 2c^2, & c^2-d^2+e^2 \\ a^2+e^2-f^2, & c^2-d^2+e^2, & 2e^2. \end{vmatrix} \quad . \; . \; (84)$$

Hledíce ku rovnici (44.), obdržíme

$$V = \tfrac{1}{12}\sqrt{\left.\begin{aligned}&-a^4d^2-a^2d^4-b^4e^2-b^2e^4-c^4f^2-c^2f^4\\&+a^2b^2e^2+a^2d^2c^2+a^2c^2f^2+a^2b^2d^2+a^2d^2f^2\\&+b^2c^2e^2+b^2c^2f^2+b^2d^2e^2+a^2d^2e^2+c^2d^2f^2\\&+b^2e^2f^2+c^2f^2e^2-a^2b^2c^2-b^2d^2f^2-c^2d^2e^2\\&\qquad\qquad-a^2e^2f^2\end{aligned}\right\}} \qquad (85)$$

Rovnici předešlou můžeme též psáti

$$V = \tfrac{1}{12}\sqrt{\left.\begin{aligned}&(a^2+d^2)(-a^2d^2+b^2e^2+c^2f^2)+(b^2+e^2)\\&(a^2d^2-b^2e^2+c^2f^2)+(c^2+f^2)(a^2d^2+b^2e^2\\&-c^2f^2)-a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2d^2f^2-c^2d^2e^2\end{aligned}\right\}} \qquad (86)$$

nebo

$$V = \tfrac{1}{12}\sqrt{\left.\begin{aligned}&a^2d^2(-a^2+b^2+c^2-d^2+e^2+f^2)+b^2e^2\\&(a^2-b^2+c^2+d^2-e^2+f^2)+c^2f^2(a^2+b^2-c^2\\&+d^2+e^2-f^2)-a^2b^2c^2-a^2c^2f^2-b^2d^2f^2\\&\qquad-c^2d^2e^2\end{aligned}\right\}} \qquad (87)$$

Jak známo, lze si tyto poslední dva vzorce velmi lehce pamatovati.

Upotřebením relace (47.), obdržíme

$$144\,V^2 = -T \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (88)$$

čili

$$\left.\begin{aligned}144\,V^2 = {}&a^2(e^2-d^2)(d^2-f^2)+b^2(d^2-e^2)(c^2-f^2)\\&+c^2(e^2-f^2).(f^2-d^2)+a^2d^2(-a^2+b^2+c^2)\\&+b^2e^2(a^2-b^2+c^2)+c^2f^2(a^2+b^2-c^2)-a^2b^2c^2\end{aligned}\right\} \quad (89)$$

Poznámka.

Pro čtyrstěn přímý máme

$$\left.\begin{aligned}144\,V^2 = {}&2a^2c^2d^2+2a^2b^2d^2+2b^2c^2d^2-a^4d^2-b^4d^2\\&-c^4d^2-a^2b^2c^2;\end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\; (90)$$

rovnici tuto lze psáti též

$$144\,V^2 = d^2(2a^2c^2+2a^2b^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4)-a^2b^2c^2$$

a máme-li zření ku rovnici 28. a ku výrazu $abc = 4\varrho\triangle$, obdržíme

$$9\,V^2 = (d^2-\varrho^2)\triangle^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (91)$$

Pravidelného čtyrstěnu jest pak obsah

$$V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}, \text{ užijeme-li pro } v = \frac{a\sqrt{6}}{3} \text{ a } \triangle = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \;.\; (92)$$

Konečně máme obsah rovnohranného čtyrstěnu

$$V = \tfrac{1}{12}\sqrt{\left.\begin{aligned}&2a^2(-a^4+b^4+c^4)+2b^2(a^4-b^4+c^4)\\&\quad+2c^2(a^4+b^4-c^4)-4a^2b^2c^2\end{aligned}\right\}} \;.\;.\; (93)$$

K důležitým vzorcům přijdeme též následovně. Pozorujíce tvar

$$288\,V^2 = \begin{vmatrix} 2\,a^2, & a^2+c^2-b^2, & a^2+e^2-f^2 \\ a^2+c^2-b^2, & 2\,c^2, & c^2-d^2+e^2 \\ a^2+e^2-f^2, & c^2-d^2+e^2, & 2\,e^2 \end{vmatrix}$$

vidíme, že jej lze pomocí vlastností determinantů zjednodušiti. V té příčině násobme řádek první, druhý a třetí negativní jednicí, t. j. celou rovnici nutno násobiti tudíž $(-1)^3$, čímž nabude hořejší determinant tohoto tvaru:

$$-288\,V^2 = \begin{vmatrix} -2\,a^2, & -a^2-c^2+b^2, & -a^2-e^2+f^2 \\ -a^2-c^2+b^2, & -2\,c^2, & -c^2+d^2-e^2 \\ -a^2-e^2+f^2, & -c^2+d^2-e^2, & -2\,e^2 \end{vmatrix}$$

Poněvadž každý determinant stupně nižšího lze převésti na stupeň vyšší, užijeme-li téhož pravidla, jako v odstavci (8.), obdržíme

$$288\,V^2 = -\begin{vmatrix} 1, & a^2, & c^2, & e^2 \\ 0, & -2\,a^2, & b^2-c^2-a^2, & -a^2-e^2+f^2 \\ 0, & -a^2-c^2+b^2, & -2\,c^2, & -c^2+d^2-e^2 \\ 0, & -a^2-e^2+f^2, & -c^2+d^2-e^2, & -2\,e^2 \end{vmatrix}$$

nebo, tvoříme-li determinant stupně pátého,

$$288\,V^2 = -\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & a^2, & c^2, & e^2 \\ a^2, & 0, & -2\,a^2, & b^2-c^2-a^2, & -a^2-e^2+f^2 \\ c^2, & 0, & -a^2-c^2+b^2, & -2\,c^2, & -c^2+d^2-e^2 \\ e^2, & 0, & -a^2-e^2+f^2, & -c^2+d^2-e^2, & -2\,e^2 \end{vmatrix}$$

a jelikož determinant mění své znaménko, zaměníme-li pospolu dva sloupce, tedy shledáme, že přeměnou prvních dvou sloupců

$$288\,V^2 = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & a^2, & c^2, & e^2 \\ 0, & a^2, & -2\,a^2, & b^2-c^2-a^2, & -a^2-e^2+f^2 \\ 0, & c^2, & -a^2-c^2+b^2, & -2\,c^2, & -c^2+d^2-e^2 \\ 0, & e^2, & -a^2-e^2+f^2, & -c^2+d^2-e^2, & -2\,e \end{vmatrix}$$

Uživše známého pravidla, že hodnota determinantu se nemění, přičteme-li jeden řádek ku druhému, obdržíme, přičteme-li druhý řádek k ostatním pod ním stojícím:

$$288\,V^2 = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & a^2, & c^2, & e^2 \\ 1, & a^2, & -a^2, & b^2-a^2, & -a^2+f^2 \\ 1, & c^2, & -c^2+b^2, & -c^2, & -c^2+d^2 \\ 1, & e^2, & -e^2+f^2, & -e^2+d^2, & -e^2 \end{vmatrix}$$

a přičteme-li druhý sloupec ku ostatním v pravo od něho postaveným, nabudeme konečně výsledku

$$288\,V^2 = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & a^2, & c^2, & e^2 \\ 1, & a^2, & 0, & b^2, & f^2 \\ 1, & c^2, & b^2, & 0, & d^2 \\ 1, & e^2, & f^2, & d^2, & 0 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (94)$$

to jest velmi důležitý vzorec, jenž možno za hlavní pokládati, poněvadž z něho všechny ostatní odvoditi můžeme.

β) V odstavci 8. jsme viděli, že výšku vyjádřiti lze netoliko hranami nýbrž i úhly hranovými, stranovými a jinými veličinami. Tak jsme na př. stanovili rovnici 52., dle níž

$$v_1 = \frac{d}{\sin a_0}\sqrt{1-\cos^2 a_0 - \cos^2 b_0 - \cos^2 c_0 + 2\cos a_0 \cos b_0 \cos c_0}$$

a jelikož

$\triangle_1 = \dfrac{e\,f\sin a_0}{2}$, bude následovně obsah čtyrstěnu

$$V = \tfrac{1}{6}\,d e f\sqrt{1-\cos^2 a_0 - \cos^2 b_0 - \cos^2 c_0 + 2\cos a_0 \cos b_0 \cos c_0} \qquad (95)$$

a jelikož lze tuto odmocninu různě transformovati, bude V buď

$$V = \tfrac{1}{3}\,def\sqrt{\sin\frac{a_0+b_0+c_0}{2}\sin\frac{-a_0+b_0+c_0}{2}\sin\frac{a_0-b_0+c_0}{2}\sin\frac{a_0+b_0-c_0}{2}} \quad (96)$$

nebo

$$V = \tfrac{1}{3}\,d\,e\,f\sqrt{\sin s\,.\,\sin(s-a_0)\sin(s-b_0)\sin(s-c_0)} \quad .\ .\ (97)$$

a užijeme-li Junghannova označení, můžeme krátce rovnice 95. až 97. vyjádřiti výrazem:

$$V = \tfrac{1}{3}\,d\,e\,f\,P, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (98)$$

rovněž $V = \frac{1}{3}\,b\,c\,d\,P_1$, pak $V = \frac{1}{3}\,a\,c\,e\,P_2$,

konečně $V = \frac{1}{3}\,a\,b\,e\,P_3$,

t. j. obsah čtyrstěnu se vypočte, jestliže třetinu součinu hran, v jednom vrcholu čtyrstěnu se sbíhajících, násobíme sinem téhož rohu.

Víme však, že elementy geometrie vyjadřují odmocninu rovnice 95. determinantem stupně třetího; na základě toho bude obsah

$$V = \frac{1}{6}\, d e f \begin{vmatrix} 1, & \cos c_0, & \cos b_0 \\ \cos c_0, & 1, & \cos a_0 \\ \cos b_0, & \cos a_0, & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

čili, mocníme-li na druhou,

$$36\, V^2 = d^2 e^2 f^2 \begin{vmatrix} 1, & \cos c_0, & \cos b_0 \\ \cos c_0, & 1, & \cos a_0 \\ \cos b_0, & \cos a_0, & 1 \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; (99)$$

anebo násobíme-li první řádek a první sloupec d, druhý sloupec i řádek veličinou e, třetí řádek i sloupec písmenou f, obdržíme:

$$36\, V^2 = \begin{vmatrix} d^2, & d e \cos c_0, & d f \cos b_0 \\ d e \cos c_0, & e^2, & e f \cos a_0 \\ d f \cos b_0, & e f \cos a_0, & f^2 \end{vmatrix} \quad . \; . \; (100)$$

Poznámka 1.

Z tohoto determinantu můžeme přijíti ku rovnici 94., násobíme-li řádky determinantu 100. po sobě — dvěma, tedy celý determinant $(-2)^3$, a zavedeme-li, dle věty Carnotovy, z trojúhelníků ABD, ACD, BCD snadno stanovené:

$$-2\, d e \cos c_0 = c^2 - d^2 - e^2,$$

pak $$-2\, d f \cos b_0 = b^2 - d^2 - f^2$$

a konečně $$-2\, e f \cos a_0 = a^2 - e^2 - f^2$$

a převedeme-li tím povstalý determinant stupně třetího na stupeň pátý, zaměnivše zároveň první dva sloupce.

Poznámka 2.

Budiž $d = e = f$, pak by

$$V = \frac{1}{6}\, d^3 \,. \begin{vmatrix} 1, & \cos c_0, & \cos b_0 \\ \cos c_0, & 1, & \cos a_0 \\ \cos b_0, & \cos a_0, & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; (101)$$

a jelikož v pravidelném čtyrstěnu úhly

$$a_0 = b_0 = c_0 = 60^0, \quad \text{tudíž} \quad \cos a_0 = \cos b_0 = \cos c_0 = \cos 60 = \frac{1}{2}$$

a mimo to $$d = e = f = a,$$

jest $V = \frac{1}{6} a^3 . \begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & 1, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 1 \end{vmatrix} = \frac{a^3}{6} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}.$

P o z n á m k a 3.

Mysleme si, že bychom měli p r a v o ú h l ý č t y r s t ě n, t. j. onen, ve kterémž

$$a_0 = b_0 = c_0 = 90^0,$$

pak jest $\quad cos\, a_0 = cos\, b_0 = cos\, c_0 = cos\, 90 = 0$

čili
$$\begin{vmatrix} 1, & cos\, a_0, & cos\, b_0 \\ cos\, a_0, & 1, & cos\, c_0 \\ cos\, b_0, & cos\, c_0, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = 1$$

následovně jeho obsah $\quad V = \frac{1}{6} d e f$ . . . . (102)

Jestliže $d = e = f$, byl by to r o v n o r a m e n n ý p r a v o ú h e l n ý č t y r s t ě n o obsahu $V = \frac{1}{6} d^3$.

γ) Vyhledávajíce výšku přišli jsme ku rovnici

$$v^3 = \frac{16 \varrho^2 P_1 P_2 P_3 d e f}{\triangle}$$

pomocí které lze též obsah tetraedru vyjádřiti. Poněvadž

$$3\, V = d e f P$$

a jelikož
$$3\, V = \triangle\, v$$

jest i $\quad d e f P = \triangle . v \quad$ neboli $\quad d e f = \frac{\triangle . v}{P},$

následovně
$$v^3 = 16\, \varrho^2 \frac{P_1 P_2 P_3 \triangle v}{\triangle P}$$

neboli
$$v^2 = 16\, \varrho^2 \frac{P_1 P_2 P_3}{P}$$

a
$$v = 4\, \varrho \sqrt{\frac{P_1 P_2 P_3}{P}}$$

a proto obsah čtyrstěnu

$$3\, V = \triangle v = 4 \triangle . \varrho \sqrt{\frac{P_1 P_2 P_3}{P}}.$$

Ale i tento výraz lze jednodušeji psáti, víme totiž, že

$$\triangle = \frac{a b c}{4 \varrho}$$

tudíž
$$3\, V = a b c \sqrt{\frac{P_1 P_2 P_3}{P}}$$

čili
$$\left.\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{3}\,abc\sqrt{\frac{P_1P_2P_3}{P}} = \tfrac{1}{3}\,aef\sqrt{\frac{PP_2P_3}{P_1}} \\ &= \tfrac{1}{3}\,bdf\sqrt{\frac{PP_1P_3}{P_2}} = \tfrac{1}{3}\,cde\sqrt{\frac{PP_1P_2}{P_3}}, \end{aligned}\right\} \qquad (103)$$

což vyjadřujeme slovy: Obsah čtyrstěnu je roven třetině součinu ze stran jednu stěnu tvořících násobenému druhou odmocninou ze součinu sinů rohů této stěně přilehlých, dělenému sinem rohu této stěně protilehlého.

δ) Jak známo, vyjádřili jsme v § 8. výšku hranami a stěnami vrcholu D, při čemž nalezli jsme

$$v_1 = \frac{1}{ef\sin a_0}\sqrt{\begin{aligned}&4\,d^2\triangle_1{}^2 + 4\,e^2\triangle_2{}^2 + 4\,f^2\triangle_3{}^2 - 2\,d^2e^2f^2\\ &+2\sqrt{(d^2e^2-4\triangle_3{}^2)(d^2f^2-4\triangle_2{}^2)(e^2f^2-4\triangle_1{}^2)}\end{aligned}}$$

a jelikož základna $\qquad \triangle_1 = \dfrac{ef\sin a_0}{2},$

bude obsah $\qquad V = \tfrac{1}{3}\triangle_1 v =$

$$\left.\tfrac{1}{6}\sqrt{\begin{aligned}&4\,d^2\triangle_1{}^2 + 4\,e^2\triangle_2{}^2 + 4\,f^2\triangle_3{}^2 - 2\,d^2e^2f^2\\ &+2\sqrt{(d^2e^2-4\triangle_3{}^2)(d^2f^2-4\triangle_2{}^2)(e^2f^2-4\triangle_1{}^2)}\end{aligned}}\right\} \qquad (104)$$

ε) Mimo to ukázali jsme, že

$$v_1 = \frac{d}{\sin\alpha}\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

dále pak, že $\qquad \triangle_1 = \dfrac{ef}{2}\sin a_0$

a jelikož $\qquad v_1\triangle_1 = 3\,V,$

bude

$$V = \tfrac{1}{6}\,def\frac{\sin a_0}{\sin\alpha}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \qquad (105)$$

aneb, ježto stálý poměr $\dfrac{\sin a_0}{\sin\alpha} = M,$ obdržíme

$$\left.\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{6}\,defM\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\\ V &= \tfrac{1}{3}\,defM\sqrt{-\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}\\ &\text{rovněž}\\ V &= \tfrac{1}{3}\,defM\sqrt{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)} \end{aligned}\right\} \qquad (106)$$

nebo všeobecně $V = \frac{1}{3} def M\Pi$ . . . . (107)

t. j. obsah čtyrstěnu rovná se třetině součinu hran v jednom vrcholu se sbíhajících násobenému modulem toho vrcholu a jemu náležejícím sinem polarního rohu.

ζ. Z rovnice $v^2 = \frac{4 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 P def}{\Pi^2}$

lze po odstranění *def* jednoduchý výraz pro výšku a obsah tetraedru vypočítati. Známoť, že

$$def P = 3V \quad \text{a} \quad 3V = \triangle v,$$

tedy $\triangle v = def P$ a z toho $def = \frac{\triangle v}{P}$

proto $$v^2 = \frac{4 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \triangle}{\Pi^2},$$

následovně $$v^2 \triangle^2 = 4 \triangle^2 . \frac{\triangle . \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3}{\Pi^2}$$

a tudíž $$\left.\begin{aligned} 3V &= \frac{2\triangle}{\Pi}\sqrt{\triangle \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3} = \frac{2\triangle_1}{\Pi_1}\sqrt{\triangle_1 \Pi \Pi_2 \Pi_3} \\ &= \frac{2\triangle_2}{\Pi_2}\sqrt{\triangle_2 \Pi \Pi_1 \Pi_3} = \frac{2\triangle_3}{\Pi_3}\sqrt{\triangle_3 \Pi \Pi_1 \Pi_2} \end{aligned}\right\} \quad (108)$$

což znamená slovy: trojnásobný obsah tetraedru rovná se dvojnásobné základně dělené sinem polarního rohu základně protilehlého, násobenému druhou odmocninou ze součinu základny a sinů polárních rohů základně přilehlých.

Ale poněvadž v § 7. v poznámce první jsme ukázali, že

$$\frac{\triangle}{\Pi} = \frac{\triangle_1}{\Pi_1} = \frac{\triangle_2}{\Pi_2} = \frac{\triangle_3}{\Pi_3} = \mathfrak{M}$$

a označíme-li za příčinou krátkosti stálou odmocninu

$$\sqrt{\triangle \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3} = \sqrt{\triangle_1 \Pi \Pi_2 \Pi_3} = \sqrt{\triangle_2 \Pi \Pi_1 \Pi_3} = \sqrt{\triangle_3 \Pi \Pi_1 \Pi_2} = \omega$$

nabude nahoře uvedená rovnice všeobecného tvaru

$$3V = 2\mathfrak{M} . \omega \quad . . . . (109)$$

η) Pokračujeme-li v pozorováních svých dále, přicházíme ku vzorci

$$v = \frac{v_1 v_2 v_3}{4 \mathfrak{M} \Pi^2}$$

a prohlížíme-li formulky v odstavci sedmém vyvinuté, spatřujeme, že

$$\triangle = \mu^2 M M_1 M_2 M_3 \Pi = \mathfrak{M} \Pi,$$

protož

$$\triangle v = \frac{v_1 v_2 v_3}{4 \Pi},$$

nebo-li

$$V = \frac{v_1 v_2 v_3}{12 \Pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (110)$$

t. j.: Obsah čtyrstěnu rovná se součinu tří jeho výšek, dělenému dvanácteronásobným sinem rohu čtvrté výšky.

Vzorec tento odvodil způsobem jiným, velmi pěkným, prof. Dr. G. Blažek a uveřejnil jej v „Časopisu českých mathematiků“ ve sv. 3. pag. 274., s tím rozdílem, že často jmenovaný sinus polarního rohu, totiž

$$\tfrac{1}{4}(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$$
$$= -\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma),$$

označuje jen Π, kdežto my, po příkladě Junghannově, dovolili jsme si tutéž veličinu Π^2 nazývati, píšíce:

$$2\Pi = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

ϑ) Vedle toho stanovili jsme výšku vzorcem 67., dle něhož jest:

$$v = \frac{v_2 v_3 d}{2 \mathfrak{M} \Pi \sin\alpha}$$

a jelikož

$$\triangle = \mathfrak{M} \Pi,$$

obdržíme

$$V = \frac{v_2 v_3 d}{6 \sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (111)$$

Podobně

$$V = \frac{v v_1 a}{6 \sin\alpha_1} = \frac{v v_2 b}{6 \sin\beta_1} = \frac{v_1 v_2 f}{6 \sin\gamma} = \frac{v_1 v_3 e}{6 \sin\beta} = \frac{v v_3 c}{6 \sin\gamma_1}$$

což praví: krychlový obsah čtyrstěnu rovná se šestině součinu dvou výšek a hrany, kteráž jest průsečnicí k výškám příslušných stěn, dělenému sinem úhlu, jejž uzavírají obě zmíněné roviny.

ι) Jelikož ale z rovnice

$$v = \frac{2\triangle}{a\,cotg\,\alpha_1 + b\,cotg\,\beta_1 + c\,cotg\,\gamma_1}$$

čili
$$v = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2\,(a\,cotg\,\alpha_1 + b\,cotg\,\beta_1 + c\,cotg\,\gamma_1)}$$

a poněvadž

$$\triangle = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)},$$

jest tudíž

$$\left.\begin{aligned} 3V &= \frac{2\triangle^2}{a\,cotg\,\alpha_1 + b\,cotg\,\beta_1 + c\,cotg\,\gamma_1} \\ &= \tfrac{1}{8}\,\frac{(a+b+c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b-c)}{a\,cotg\,\alpha_1 + b\,cotg\,\beta_1 + c\,cotg\,\gamma_1} \\ &= \frac{2\,s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{a\,cotg\,\alpha_1 + b\,cotg\,\beta_1 + c\,cotg\,\gamma_1} \end{aligned}\right\} \quad (112)$$

Tuto větu můžeme vyjádřiti slovy: trojnásobný obsah čtyrstěnu rovná se dvojnásobnému čtverci základny dělenému součtem součinů stran základny a cotangent úhlů stranových v hranách základny obsažených.

$\varkappa$) Vyjádříme-li strany a, b, c poloměrem základně opsaného kruhu, najdeme:

$$v = \frac{2\,\varrho\,sin\,a_1\,sin\,b_2\,sin\,c_3}{sin\,a_1\,cotg\,\alpha_1 + sin\,b_2\,cotg\,\beta_1 + sin\,c_3\,cotg\,\gamma_1}$$

a poněvadž $\triangle = \dfrac{a\,b\,c}{4\,\varrho}$

a jelikož $a\,b\,c = 8\,\varrho^3\,sin\,a_1\,sin\,b_2\,sin\,c_3$,

bude $\triangle = 2\,\varrho^2\,sin\,a_1\,sin\,b_2\,sin\,c_3$

a tudíž
$$3V = \frac{4\,\varrho^3\,sin^2\,a_1\,sin^2\,b_2\,sin^2\,c_3}{sin a_1\,cotg \alpha_1 + sin b_2\,cotg \beta_1 + sin c_3\,cotg \gamma_1} \quad (113)$$

t. j. obsah čtyrstěnu rovná se čtyřem třetinám součinu ze třetí mocniny poloměru kruhu podstavě opsaného a čtverců sinů všech úhlů základny, dělenému součtem součinu sinů úhlů základny a cotangent jim protilehlých úhlů stranových.

Tuto poučku můžeme též psáti:

$$3V = \frac{\triangle^2}{\varrho\,(\sin a_1 \cot g\,\alpha_1 + \sin b_2 \cot g\,\beta_1 + \sin c_3 \cot g\,\gamma_1)} \quad (114)$$

λ) Kromě uvedených zde vzorců vypočítali jsme výšku

$$v = \frac{2\triangle_1}{a} \sin \alpha_1,$$

následovně
$$v\triangle = \frac{2\triangle\triangle_1}{a} \sin \alpha_1$$

a tudíž
$$V = \frac{2\triangle\triangle_1 \sin\alpha_1}{3a} = \tfrac{2}{3}\frac{\triangle\triangle_2 \sin\beta_1}{b} = \tfrac{2}{3}\frac{\triangle\triangle_3 \sin\gamma_1}{c} \text{ atd.} \quad (115)$$

t. j. krychlový obsah čtyrstěnu rovná se součinu dvou stěn a sinu úhlu těmito stěnami uzavřeného, dělenému 3násobnou, oběma stěnám společnou hranou.

μ) Pomocí této věty můžeme vyhledati jinou poučku krychlový obsah tetraedru vyjadřující.

Známo jest, označíme-li výšky v stěnách $\triangle$ a $\triangle_1$ ku hraně a vedené h a h_1, že

$$\triangle = \frac{ha}{2};$$

podle 71. však
$$v = h_1 \sin \alpha_1,$$

protož
$$V = \tfrac{1}{6}\, a h h_1 \sin \alpha_1 \quad \ldots\ldots\ldots (116)$$

což znamená: krychlový obsah čtyrstěnu se vypočte, pakliže jednu šestinu libovolné hrany násobíme výškami (stěn) kolmo k této hraně vedenými a to pak násobíme sinem úhlu sklonu obou stěn ve zmíněné hraně se sbíhajících.

ν) Jelikož víme, že $v = e \sin c_2 \sin \alpha_1$

$$\text{a} \quad \triangle = \frac{a c \sin b_2}{2}$$

následovně
$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{a c e \sin b_2 \sin c_2 \sin \alpha_1}{6} \\ &= \frac{d e f \sin a_0 \sin b_0 \sin \gamma}{6} = \frac{b c d \sin a_1 \sin b_1 \sin \gamma_1}{6} \end{aligned}\right\} \quad (117)$$

atd., z čehož plyne věta: **Obsah čtyrstěnu jest roven šestině součinu hran v jednom vrcholu se sbíhajících, sinů úhlů, které tvoří jedna z těchto hran s oběma ostatními a sinu sklonu obou rovin ve zmíněné hraně se protínajících.**

ξ) Myslíme-li si sestrojený průmět hrany d na rovině $ABC = \triangle$ a je-li úhel obou těchto útvarů $(d, \triangle)$, tedy jest dle 72.

$$v = d \sin (d, \triangle)$$

a poněvadž
$$\triangle = \frac{b c \sin a_1}{2},$$

jest tudíž
$$V = \tfrac{1}{6} b c d \sin a_1 \sin (d, \triangle), \quad \ldots\ldots (118)$$

kterýžto vzorec vyjadřuje poučku: „**Obsah čtyrstěnu jest roven šestině součinu hran v jednom vrcholu se sbíhajících, sinu úhlu sklonu hrany jedné na rovině druhých dvou a sinu úhlu, jejž tyto dvě hrany uzavírají.**

---

o) Důležita zajisté jest následující věta. Z rovnice 73. vysvítá

$$v_1 = \frac{2}{\triangle_1} \sqrt{\triangle_1 \triangle_2 \triangle_3 \Pi} \quad \text{a} \quad \triangle_1 = \triangle_1;$$

následovně
$$\left.\begin{aligned} V &= \tfrac{2}{3} \sqrt{\triangle_1 \triangle_2 \triangle_3 \Pi} = \tfrac{2}{3} \sqrt{\triangle \triangle_1 \triangle_2 \Pi_3} \\ &= \tfrac{2}{3} \sqrt{\triangle \triangle_2 \triangle_3 \Pi_1} = \tfrac{2}{3} \sqrt{\triangle \triangle_1 \triangle_3 \Pi_2} \end{aligned}\right\} . \quad (119)$$

to znamená slovy: „**krychlový obsah čtyrstěnu rovná se dvěma třetinám druhé odmocniny ze součinu tří stěn a čtvrté stěně protilehlého sinu polarního rohu.**“

Poznámka 1.

Tato věta dá se zavedením hodnoty pro sinus polar. rohu též psáti:

$$V=\tfrac{1}{3}\sqrt{2\triangle_1\triangle_2\triangle_3}\,.\,\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}. \quad (120)$$

Poznámka 2.

Kdybychom měli pravoúhelný tetraeder, tedy víme, že

$$v_1=\frac{1}{\triangle_1}\sqrt{2\triangle_1\triangle_2\triangle_3}$$

a tudíž obsah

$$V=\tfrac{1}{3}\sqrt{2\triangle_1\triangle_2\triangle_3}\,. \quad \ldots\ldots\ldots (121)$$

Poznámka 3.

Užijeme-li těchže transformací jako v rovnici (76.), obdržíme:

$$V=\tfrac{1}{3}\sqrt{\triangle_1}\sqrt[4]{\begin{array}{l}-[\triangle_1^2+\triangle_2^2+\triangle_3^2-\triangle^2-2\triangle_1\triangle_3\cos\beta \\ -2\triangle_1\triangle_2\cos\gamma+2\triangle_2\triangle_3\cos(\beta-\gamma)][\triangle_1^2 \\ +\triangle_2^2+\triangle_3^2-\triangle^2-2\triangle_1\triangle_3\cos\beta-2\triangle_1\triangle_2\cos\gamma \\ +2\triangle_2\triangle_3\cos(\beta+\gamma)]\end{array}} \quad . \ . \ (122)$$

Poznámka 4.

Klademe-li v rovnici 119. za veličiny $\triangle_2$ a $\triangle_3$ hodnoty

$$\triangle_2=\triangle\sqrt{\frac{\Pi_2}{\Pi}} \quad \text{a} \quad \triangle_3=\triangle\sqrt{\frac{\Pi_3}{\Pi}},$$

jenž vzájemným dělením těchže rovnic lze vyhledati, obdržíme nám již z 108. známý tvar

$$V=\tfrac{2}{3}\,\frac{\triangle}{\Pi}\sqrt{\triangle\,\Pi_1\,\Pi_2\,\Pi_3}.$$

π) Tak stanovili jsme dle prvního základního vzorce celou řadu rovnic vyjadřujících obsah čtyrstěnu.

Jest nám však ještě o těch výrazech a vzorcích promluviti, k nimž nás analytická geometrie prostoru vede.

Ukázali jsme, že jsou-li úhly λ, μ, ν; $\lambda_1\ \mu_1\ \nu_1$ a $\lambda_2\ \mu_2\ \nu_2$ úhly, jež uzavírají průvodiči DA, DB, DC (obr. 10.) s osami pravoúhlé soustavy souřadnic, jest

$$v_1=\frac{d}{\sin a_0}\begin{vmatrix}\cos\lambda, & \cos\mu, & \cos\nu \\ \cos\lambda_1, & \cos\mu_1, & \cos\nu_1 \\ \cos\lambda_2, & \cos\mu_2, & \cos\nu_2\end{vmatrix}$$

a $\triangle_1=\dfrac{cf\sin a_0}{2}$,

tudíž

$$V = \tfrac{1}{6} def \begin{vmatrix} \cos\lambda, & \cos\mu, & \cos\nu \\ \cos\lambda_1, & \cos\mu_1, & \cos\nu_1 \\ \cos\lambda_2, & \cos\mu_2, & \cos\nu_2 \end{vmatrix} \ldots\ldots (123)$$

Transformací ve vzorci 78. naznačenou, přijdeme ku

$$V = \tfrac{1}{6} \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \end{vmatrix}, \ldots\ldots\ldots\ldots (124)$$

jenž platí pro onen čtyrstěn, jehož jeden vrchol zároveň počátkem jest soustavy souřadnic a kterýž přejde buď v

$$V = \tfrac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 - x, & y_1 - y, & z_1 - z \\ x_2 - x, & y_2 - y, & z_2 - z \\ x_3 - x, & y_3 - y, & z_3 - z \end{vmatrix}, \ldots\ldots (125)$$

anebo v

$$V = \tfrac{1}{6} \begin{vmatrix} 1, & x, & y, & z \\ 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots (126)$$

přihlížíme-li ku vzorcům 79. a 80. majíce zřetel ku tetraedru úplně v prostoru se nalezajícímu.

K témuž vzorci lze přijíti cestou jinou, násobíme-li rovnice 81. a 82. plochou $\triangle$. Dle první jest

$$v = \frac{A x_0 + B y_0 + C z_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

neboli dle druhé

$$v = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}}$$

Pro trojúhelník jsme ale nalezli

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}$$

Následovně jest hledaný obsah čtyrstěnu

$$V = \tfrac{1}{6}(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)$$

nebo $$V = \tfrac{1}{6}(Ax + By + Cz + D) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (127)$$

položíme-li $x_0 = x$, $y_0 = y$ a $z_0 = z$.

Rovněž najdeme násobením obou předcházejících výrazů

$$V = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (127')$$

píšeme-li místo x_0, y_0, z_0 veličiny x, y, z, a tím obdržíme tentýž vzorec jako 126.

Rozvedeme-li ale tento determinant, přijdeme ku tvaru:

$$V = \tfrac{1}{6}\left\{\begin{array}{c} x\,[y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) + y_3(z_1 - z_2)] \\ + y\,[z_1(x_2 - x_3) + z_2(x_3 - x_1) + z_3(x_1 - x_2)] \\ + z\,[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \\ - [x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_2(y_3 z_1 - y_1 z_3) \\ + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1)] \end{array}\right\} \quad . \; (128)$$

K těmto vzorcům lze i jinak dospěti.

Dr. Günther ve svém: „Lehrbuch der Determinanten-Theorie“ vyjadřuje výšku podle Duhamela a přichází k témuž výsledku jako my.

Jiný postup počtu zvolil professor Dr. Fr. Studnička v „Úvodu do analytické geometrie prostoru“, a opět jinak k témuž resultátu přichází Haberle.

ϱ) Mysleme si konečně, že by byly dány čtyři roviny:

1. $a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$
2. $a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$ dále
3. $a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0$ a konečně
4. $a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0.$

Tyto čtyři roviny uzavírají čtyrstěn, jehož obsah určiti budiž naším úkolem.

Za účelem tím jmenujme souřadnice průsečíku rovin

2, 3 a 4, t. j. vrcholu $A = x, y, z,$

dále průsečíku rovin

3, 4 a 1, t. j. vrcholu $B = (x_1, y_1, z_1)$

a opět nazývejme souřadnice průsečíku rovin

4, 1 a 2, t. j. vrcholu $C = (x_2, y_2, z_2)$

a konečně buďtež souřadnice rovin

1, 2 a 3, t. j. vrcholu $D = (x_3, y_3, z_3)$.

Určením těchto souřadnic jeví se obsah, jak jsme poznali,

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1, & x, & y, & z \\ 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix}.$$

Jedná se tedy o tyto souřadnice. Známo jest nám z theorie determinantů, jakým způsobem se neznámé z rovnic vyhledávají. Na základě těch pravidel obdržíme z rovnic 2., 3. a 4.

$$x = \frac{-\begin{vmatrix} d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \\ d_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}} = \frac{A_1}{D_1},$$

rovněž

$$y = \frac{-\begin{vmatrix} a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \\ a_4 & d_4 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}} = \frac{B_1}{D_1},$$

podobně

$$z = \frac{-\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}} = \frac{C_1}{D_1};$$

má tedy vrchol A souřadnice:

$$x = \frac{A_1}{D_1}, \quad y = \frac{B_1}{D_1} \quad \text{a} \quad z = \frac{C_1}{D_1}.$$

Kombinací rovnic 3., 4., 1. nabudeme souřadnic vrcholu B

totiž: $$x_1 = \frac{A_2}{D_2}, \quad y_1 = \frac{B_2}{D_2} \quad \text{a} \quad z_1 = \frac{C_2}{D_2},$$

jestliže
$$A_2 = -\begin{vmatrix} d_3, & b_3, & c_3 \\ d_4, & b_4, & c_4 \\ d_1, & b_1, & c_1 \end{vmatrix}, \qquad B_2 = -\begin{vmatrix} a_3, & d_3, & c_3 \\ a_4, & d_4, & c_4 \\ a_1, & d_1, & c_1 \end{vmatrix}$$

$$C_2 = -\begin{vmatrix} a_3, & b_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & d_4 \\ a_1, & b_1, & d_1 \end{vmatrix} \quad \text{a} \quad D_2 = +\begin{vmatrix} a_3, & b_3, & c_3 \\ a_4, & b_4, & c_4 \\ a_1, & b_1, & c_1 \end{vmatrix}$$

Z rovnic 4., 1., 2. určiti můžeme souřadnice vrcholu C

totiž: $$x_2 = \frac{A_3}{D_3}, \quad y_2 = \frac{B_3}{D_3} \quad \text{a} \quad z_2 = \frac{C_3}{D_3},$$

jestliže položíme

$$A_3 = -\begin{vmatrix} d_4 & b_4 & c_4 \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \qquad B_3 = -\begin{vmatrix} a_4 & d_4 & c_4 \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

pak
$$C_3 = -\begin{vmatrix} a_4 & b_4 & d_4 \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix} \quad \text{a} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_4 & b_4 & c_4 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Konečně snadno lze vyvinouti souřadnice vrcholu D z rovnic 1., 2., 3. Tyto pak budou míti tvary:

$$x_4 = \frac{A_4}{D_4}, \quad y_4 = \frac{B_4}{D_4} \quad \text{a} \quad z_4 = \frac{C_4}{D_4}$$

kdež $$D_4 = (a_1\, b_2\, c_3);$$

ostatní determinanty A_4, B_4 a C_4 mohli bychom jako dříve vyjádřiti. Zavedeme-li tyto souřadnice do rovnice 127.', obdržíme

$$6\,V = \begin{vmatrix} \frac{A_1}{D_1}, & \frac{B_1}{D_1}, & \frac{C_1}{D_1}, & 1 \\ \frac{A_2}{D_2}, & \frac{B_2}{D_2}, & \frac{C_2}{D_2}, & 1 \\ \frac{A_3}{D_3}, & \frac{B_3}{D_3}, & \frac{C_3}{D_3}, & 1 \\ \frac{A_4}{D_4}, & \frac{B_4}{D_4}, & \frac{C_4}{D_4}, & 1 \end{vmatrix}$$

neboli

$$6\,V = \begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1, & D_1 \\ A_2, & B_2, & C_2, & D_2 \\ A_3, & B_3, & C_3, & D_3 \\ A_4, & B_4, & C_4, & D_4 \end{vmatrix} \frac{1}{D_1 D_2 D_3 D_4}$$

anebo, upotřebíme-li druhého označení pro determinanty:

$$6\,V = \frac{(A_1 B_2 C_3 D_4)}{D_1 D_2 D_3 D_4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (129)$$

Poněvadž však

$$D_4 = (a_1 b_2 c_3), \quad D_1 = (a_2 b_3 c_4), \quad D_2 = (a_3 b_4 c_1) \quad \text{a} \quad D_3 = (a_4 b_1 c_2)$$

a jelikož ukázati lze, že čitatel rovnice 129. není, nežli třetí mocnina determinantu $(a_1 b_2 c_3 d_4)$, proto můžeme psáti

$$6\,V = \frac{(a_1 b_2 c_3 d_4)^3}{(a_1 b_2 c_3)(a_2 b_3 c_4)(a_3 b_4 c_1)(a_4 b_1 c_2)}, \quad . \; . \; (130)$$

kterýžto vzorec velmi lehce lze si pamatovati, poněvadž čitatel jest determinantem součinitelů neznámých a stálé veličiny d v daných rovnicích rovin; jmenovatel pak jest součin poddeterminantů čitatele.

Důležitý tento vzorec pochází od Joachimsthala, který jej uveřejnil ve svém pojednání „Sur quelques applications des Determinants à la Géometrie“ ve sv. XL. pag. 25. Crellého „Journal der Mathematik.“ Jiným postupem přišel k téže větě Dr. Dostar v pojednání: „Le trièdre et le tetraèdre.“

Mohli bychom zavedením Hesseových a tetraedrových souřadnic rovnicím tuto odvozeným jiných tvarů dáti, jak to buď Grunert ve svazku 53. pag. 317. v pojednání „Flächeninhalt des Dreieckes etc.“ ukázal, anebo Dr. R. Heger v „Grundformeln der analytischen Geometrie des Raumes in homogenen Coordinaten“ na str. 17.—20. ve svazku 16.: „Zeitschrift der Mathematik und Physik“ od Schlömilcha, uveřejněném provedl, ale tím bychom nepřišli ku žádným hlavním vzorcům a byli bychom nuceni, mnoho pomocných vět předeslati, čímž naše práce příliš rozvláčnou by se stala.

Tím končíme část druhou a přicházíme ku části poslední, jejíž úkolem jest shrnouti jiné vzorce, kteréž přímo nelze odvoditi ze základního vzorce.

Poznámka.

Rovněž pomocí analytické geometrie lze souřadnice vzorce 126. hranami *abcdef* vyjádřiti. Proto násobme rovnici:

$$6V = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & x, & y, & z \\ 0, & 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 0, & 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 0, & 1, & x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix}$$

výrazem

$$6V = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & y & z \\ 1 & 0 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 0 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Čímž obdržíme, označíme-li $x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q = \Sigma x_p x_q$,

$$36V^2 = -\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & \Sigma x_1 x_1, & \Sigma x_2 x_1, & \Sigma x_3 x_1, & \Sigma x_4 x_1 \\ 1, & \Sigma x_1 x_2, & \Sigma x_2 x_2, & \Sigma x_3 x_2, & \Sigma x_4 x_2 \\ 1, & \Sigma x_1 x_3, & \Sigma x_2 x_3, & \Sigma x_3 x_3, & \Sigma x_4 x_3 \\ 1, & \Sigma x_1 x_4, & \Sigma x_2 x_4, & \Sigma x_3 x_4, & \Sigma x_4 x_4 \end{vmatrix}$$

Nyní pokračujme dle Dr. Studničky: „Násobením posledních čtyř řádků s (— 2) a dělíme-li první sloupce (— 2), tedy celý determinant $(-2)^3$, přičteme-li mimo to k prvkům

$$\left.\begin{matrix}\text{druhého}\\ \text{třetího}\\ \text{čtvrtého}\\ \text{pátého}\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}\text{sloupce}\\ \text{řádku}\end{matrix}\right\} \text{ a } \left\{\begin{matrix}\text{druhého}\\ \text{třetího}\\ \text{čtvrtého}\\ \text{pátého}\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}\text{řádku}\\ \text{sloupce}\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}\Sigma x_1 x_1\\ \Sigma x_2 x_2\\ \Sigma x_3 x_3\\ \Sigma x_4 x_4\end{matrix}\right\} \text{ krát}$$

hodnotu prvního $\left\{\begin{matrix}\text{sloupce}\\ \text{řádku}\end{matrix}\right\}$ a prvního $\left\{\begin{matrix}\text{řádku}\\ \text{sloupce}\end{matrix}\right\}$“ obdržíme, pakli že hrany souřadnicemi vyjádříme, rovnici 94., t. j.

$$288\,V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & d^2 & e^2 \\ 1 & b^2 & d^2 & 0 & f^2 \\ 1 & c^2 & e^2 & f^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Část třetí.

Jiné věty obsah čtyrstěnu vyjadřující.

§ 10. O nejkratší vzdálenosti dvou mimoběžek.

Přímka, která dané dvě mimoběžky P_1 a P_2 protíná a k nim kolmo stojí, slove osou těchto dvou mimoběžek a úsečka této osy O mezi přímkami P_1 a P_2 jest jich nejkratší vzdáleností.

Poněvadž učebné knihy naše opomíjejí uváděti tuto větu, bude úkolem naším ukázati, že skutečně tato osa kolmo jest ku daným dvěma mimoběžkám a že jest mezi těmito přímkami nejkratší.*) K tomu konci mysleme si, že by přímky AB a CD (obr. 12.) byly dvě takové mimoběžky, t. j. přímky, které se neprotínají ani ve vzdálenosti konečné ani nekonečné, z nichž první AB nalezej se v průsečnici dvou na sobě kolmých rovin R a R_1, kteréž druhou mimoběžku CD v bodech C a D sekou. V těchto bodech veďme kolmice CA a DB ku průsečnici rovin R a R_1 a doplňme úhel ABD, vedouce $DE \parallel AB$ a $AE \parallel BD$, v obdélník $ABDE$. Spojíme-li E s C, obdržíme CE, jako průsečnici dvou rovin CED a CAE, jež k vůli krátkosti ϱ a ϱ_1 označovati chceme. V rovině ϱ_1 veďme $AF \perp CF$ a v ϱ přímku $FG \parallel DE$ a v průsečíku této s CD veďme $GH \parallel AF$. Pak jest GH osou obou mimoběžek, neboť přímky AB, AC a AE jsou podle konstrukce na sobě kolmy a každá z nich jest tedy kolmá i na rovině dvou prvních; poněvadž přímka AF nalézá se v rovině ϱ_1 přímek AE a AC, jest tedy AB, jsouc kolmo na ϱ_1, kolmo i na AF a jelikož $FG \parallel AB$, jest obrazec $AFGH$ obdelníkem, jelikož strany tohoto obrazce na sobě kolmé jsou. Následovně jest přímka AF kolmá na rovině ϱ a tudíž jest přímka s ní stejnosměrná $GH \perp \varrho$, jakož bylo dokázati.

Že přímka tato jest nejkratší, vysvítá z následujícího. Volme si na přímce CD libovolný bod J a sestrojme v rovině ϱ přímku $JK \parallel DE$ a vzdálenosť J od AB jest AK, poněvadž úhel BAK jest úhlem pravým. Přihlížejíce ku trojúhelníku AFK poznáváme, že jest týž při F pravoúhly a jest již dávno dokázáno, že odvěsna kratší jest přepony, tudíž

*) Jiný a kratší důkaz viz ve spisovatelově: „Стереометрия" pag. 14. nebo Dra. G. A. V. Peschka: „Darstellende und projective Geometrie" pag. 90.

i $AK > AF$, poněvadž každý jiný bod přímky CE s bodem A spojen, takovou přeponu zobrazuje, jest tudíž AF nejkratší z nich i nejkratší vzdáleností obou přímek.

Přihledněme nyní ku čtyrstěnu. Pozorujme na příklad hrany $BC = a$ a hranu $AD = d$. Obě tyto hrany jsou přímky mimoběžné a proto můžeme dle předcházejícího sestrojiti přímku, osu zvanou, kteráž obě v úhlu pravém protíná.

Jmenujeme-li nejkratší vzdálenosť těchto dvou hran veličinou n, bude nám ukázati, jak se této hodnoty užívá při určení krychlového obsahu čtyrstěnu.

§ 11. O obsahu čtyrstěnu nejkratší vzdáleností dvou hran vyjádřeném.

Carnot ve své „Géometrie de position" uveřejnil poprve větu, kteráž v brzku Chaslesem upotřebena byla ve statice. Věta tato, o kterouž nemalých zásluh si získal prof. Dr. G. Blažek v pojednání svém na stránce 272. v „Časopisu českých mathematiků" ročníku III. uveřejněném, a kteráž mimo něho vzbudila pozornosť mathematiků Legendra, Dr. Grunerta, Dr. Günthera, professora Kleina v Erlangách, Oelschlägera, Dr. Stammera v Düsseldorfu a redaktora Hoppeho, zní takto: „Obsah čtyrstěnu rovná se šestému dílu součinu dvou hran protilehlých se sinem sklonu jejich a nejkratší vzdálenosti obou." Jsou-li tyto hrany a a d, úhel jimi uzavřený φ, a vzdálenosť nejkratší jich obou n, zní tato věta též:

$$V = \tfrac{1}{6}\, a\, d\, n \sin \varphi.$$

To chceme dokázati!

Opírajíce se o pojednání Dr. G. Blažka, dovolíme si, úlohu tuto elementárně a analytickou geometrií řešiti.

1.

Daný tetraeder budiž $ABCD$ v obrazci 13. Doplňme tento čtyrstěn v rovnoběžnostěn, jehož obsah rovná se základně násobené výškou. Touto výškou jest ale nejkratší vzdálenosť n hran a a d, neboť tyto nalezají se v rovinách ADE a BCF, kteréž spolu rovnoběžny jsou. Základna pak jest trojúhelníkem, jehož obsah rovná se součinu

$$\frac{FB\,.\,BC\,sin\,FBC}{2}$$

neb, ježto $FB \# AD = d$ a $BC = a$ a úhel $FBC = \varphi$,

jest $$\triangle BFC = \frac{a\,d\,sin\,\varphi}{2}.$$

Poněvadž ale čtyrstěn rovná se třetině hranolu o témže základu a výšce, bude tedy jeho obsah

$$V = \tfrac{1}{6}\,a\,d\,n\,sin\,\varphi \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (131)$$

což bylo dokázati.

Úhel těchto dvou protilehlých hran můžeme ještě hranami čtyrstěnu daného vyjádřiti. Sestrojme podle Carnota v rovině základny rovnoběžku AX s hranou CB (obr. 14.) a bude úhel přímek AD a AX, to jest DAX, hledaným úhlem obou mimoběžek.

Abychom tento úhel stanovili, volme bod A za střed koule a koule ta měj za poloměr jednici. Jest pak sečená v bodech M, N, P, Q od hran AD, AC, AX a AB, nazývejme pak oblouky $MP = (a,\, d)$, dále $MN = c_1$, $NQ = a_1$, $MQ = b_1$ a $NP = 180 - ACB$ čili $NP = \pi - c_3$.

Ve sferickém trojúhelníku jest dle známé první základní věty

$$cos\,(a,\, d) = cos\,c_1\,cos\,(\pi - c_3) + sin\,c_1\,sin\,(\pi - c_3)\,cos\,\beta_1$$

čili $$cos\,(a,\, d) = -\,cos\,c_1\,cos\,c_3 + sin\,c_1\,sin\,c_3\,cos\,\beta_1.$$

V trojúhelníku MNQ jest však

$$cos\,b_1 = cos\,a_1\,cos\,c_1 + sin\,a_1\,sin\,c_1\,cos\,\beta_1$$

z toho $$cos\,\beta_1 = \frac{cos\,b_1 - cos\,a_1\,cos\,c_1}{sin\,a_1\,sin\,c_1}$$

což v hořejší rovnici vloženo, dává zjednodušený tvar

$$cos\,(a,\, d) = -\,cos\,c_1\,cos\,c_3 + \frac{sin\,c_3}{sin\,a_1}\,(cos\,b_1 - cos\,a_1\,cos\,c_1).$$

Jelikož dle věty sinusové

$$sin\,c_3 : sin\,a_1 = c : a,$$

budeť nejprvé

$$\cos(a, d) = -\cos c_1 \cos c_3 + \frac{\sin c_3}{\sin a_1} \cos b_1 - \frac{\sin c_3}{\sin a_1} \cos a_1 \cos c_1$$

nebo-li

$$\cos(a, d) = \frac{\sin c_3}{\sin a_1} \cos b_1 - \cos c_1 \left[\cos c_3 + \cos a_1 \frac{\sin c_3}{\sin a_1}\right]$$

$$= \frac{c}{a} \cos b_1 - \cos c_1 \left[\cos c_3 + \frac{c}{a} \sin a_1\right]$$

a po zjednodušení jest

$$a \cos(a, d) = c \cos b_1 - c \cos a_1 \cos c_1 - a \cos c_1 \cos c_3$$

a poněvadž $\quad b = a \cos c_3 + c \cos a_1,$

tudíž $\quad a \cos(a, d) = c \,.\, \cos b_1 - b \cos c_1.$

Ale poněvadž dle věty Carnotovy jest z trojúhelníků ABD a ACD

$$\cos b_1 = \frac{c^2 + d^2 - e^2}{2cd},$$

dále pak

$$\cos c_1 = \frac{d^2 + b^2 - f^2}{2bd},$$

následovně $2ad \cos(a, d) = c^2 + f^2 - b^2 - e^2$,*) . . . . (132)

a $\sin(a, d) = \dfrac{1}{2ad} \cdot \sqrt{4a^2 d^2 - (c^2 + f^2 - b^2 - e^2)^2},$

kteráž v rovnici 131. uvedena, dává následující výsledek:

$$V = \frac{n}{12} \sqrt{4a^2 d^2 - (c^2 + f^2 - b^2 - e^2)^2} \quad \ldots \quad (133)$$

anebo

$$V = \frac{n}{12} \sqrt{(2ad + c^2 + f^2 - b^2 - e^2)(2ad - c^2 - f^2 + b^2 + e^2)} \quad (134)$$

rozvedeme-li odmocněnce.

Dovolíme si ještě poukázati ku některým důkazům, kteréž pro svou jednoduchosť zajímavými jsou.

1. Na prvním místě zmiňujeme se o důkaze professora Dr. Kleina, uveřejněném Dr. Güntherem.

---

*) Týž vzorec lze pouhým promítáním hran čtyrstěnu a užitím Carnotovy věty nabyti.

Prvé nežli k odvození této věty přijdeme, chceme ukázati, že hrany a a d ve svých směrech pošinouti lze, aniž tím změníme velikosť čtyrstěnu. Mysleme si, že by byl dán čtyrstěn $ABCD$ v obrazci 15. v němž pozorujme hrany a a d. Pošiňme hranu BC ve směru BC do E, učiníce $EF = BC = a$ a spojme body E, F s A, tím povstanou $AEF = ABC$, jež s D spojeny dávají $AEFD = ABCD$.

Dejme tomu, že bychom dle předešlého odstavce sestrojili nejkratší vzdálenosť mimoběžek a a d, kteráž budiž DM, je pak $\sphericalangle BMD = MDA = 90^0$. Učiňme $MN = BC = a$, pak jest $DMNA = ABCD$ a jeho obsah

$$V = \tfrac{1}{3} MND \,.\, AO$$

MND jest při M pravoúhlý a rovný $\dfrac{an}{2}$ a výška $AO = d \sin \varphi$, následovně

$$V = \tfrac{1}{6}\, a d n \sin \varphi.$$

2. Tutéž rovnici možno stanoviti z věty Wittsteinovy, jež zní: „Obsah tetraedru rovná se dvojnásobnému střednímu řezu S násobenému $\frac{1}{3}$ vzdálenosti hran tomuto řezu rovnoběžných“ t. j.

$$V = \tfrac{2}{3}\, n S. \qquad \qquad (135)$$

Tuto větu můžeme přímo ze Simpsonovy odvoditi. Dr. Studnička vyvozuje na stránce 214. druhého dílu své: „Vyšší mathematiky“ větu, jak můžeme obsah tělesa ze středního a jemu rovnoběžných krajních řezů určiti. Jmenujeme-li H výšku obou omezujících spolu rovnoběžných ploch L a P a střední řez S, zní tato věta:

$$V = \frac{H}{6}[L + 4S + P].$$

Vedeme-li hranami a a d čtyrstěnu omezující plochy L a P, bude $L = P = 0$ a píšeme-li (což snadno dokázati můžeme) $H = n$, jest

$$V = \frac{n}{6} \,.\, 4S = \frac{2nS}{3}.$$

Tento střední řez S jest však rovnoběžníkem, neboť povstává, jestliže body M, N, P a Q v obrazci 16., kteréž středy jsou hran AC, AB, BD a DC, rovinu proložíme a o průsečnících této roviny se stěnami lze ukázati, že $MN = PQ = \frac{1}{2} a$, podobně $MQ = NP = \frac{1}{2} d$.

Obsah tohoto řezu jest:

$$S = MN \,.\, MQ \sin\varphi = \frac{a\,d}{4} \sin\varphi,$$

následovně, zavedeme-li hodnotu tuto do 135. rovnice, obdržíme pro obsah

$$V = \frac{2n}{3} \cdot \frac{a\,d}{4} \sin\varphi = \tfrac{1}{6}\, a\,d\,n \sin\varphi.$$

To jest důkaz Oelschlägerův.

Ostatně dokazuje tutéž větu čistě trigonometricky a pak pomocí integralů Hoppe ve svazku 57. Grunertova Archivu, chtěje ukázati Dr. Güntherovi,*) že jeho „nejjednodušší důkaz" téže věty přece není nejjednodušším.

2.

Konečně můžeme větu tuto i analytickou geometrií prostoru odvoditi. Dejme tomu, že by přímky P a Π (obr. 17.) byly dvě mimoběžky. Na první z nich volme si bod M $(x_0\, y_0\, z_0)$, na druhé pak M_1 (x_0', y_0', z_0'). Budiž přímka první úhly α, β, γ, druhá pak $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ v pravoúhelné soustavě souřadnic stanovena.

Nejkratší vzdálenosť obou přímek jmenujme NN_1 a body N a N_1 nechť jsou určeny souřadnicemi (x, y, z) a $(x_1\, y_1\, z_1)$. Tyto souřadnice vyhledáme pomocí souřadnic bodu M a vzdáleností jeho r od bodu N a pak koordinatami bodu N_1 a vzdáleností jeho r_1 od M_1. Jsou pak

$$x = x_0 + r\cos\alpha, \quad y = y_0 + r\cos\beta \quad \text{a} \quad z = z_0 + r\cos\gamma$$

dále $$x_1 = x_0' + r_1 \cos\alpha_1, \quad y_1 = y_0' + r_1\cos\beta_1 \quad \text{a} \quad z = z_0' + r_1\cos\gamma_1.$$

Známe-li r a r_1 známe pak vše. Abychom tyto vyhledali, jmenujme úhly, jež nejkratší vzdálenosť $NN_1 = n$ s osami souřadnic tvoří λ, μ a ν. Pak máme

$$x_1 = x + n\cos\lambda, \quad y_1 = y + n\cos\mu \quad \text{a} \quad z_1 = z + n\cos\nu$$

čili

$$\text{I.} \begin{cases} x_1' + r_1\cos\alpha_1 = x_0 + n\cos\lambda + r\cos\alpha & \text{dále} \\ y_0' + r_1\cos\beta_1 = y_0 + n\cos\mu + r\cos\beta & \text{a} \\ z_1' + r_1\cos\gamma_1 = z_0 + n\cos\nu + r\cos\gamma. \end{cases}$$

*) Jiný důkaz viz ve spisovatelově: Стереометрия pag. 71.

Nyní musíme říci, že NN_1 jest nejkratší vzdáleností, to jest, že přímka NN_1 na P a Π kolmo stojí, čili $(\lambda, \mu, \nu) \perp (\alpha, \beta, \gamma)$ a $(\lambda \mu \nu) \perp (\alpha_1 \beta_1 \gamma_1)$, což znamená

$$\cos\alpha \cos\lambda + \cos\beta \cos\mu + \cos\gamma \cos\nu = 0$$

$$\cos\alpha_1 \cos\lambda + \cos\beta_1 \cos\mu + \cos\gamma_1 \cos\nu = 0$$

konečně
$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\gamma = (\cos\beta \cos\gamma_1 - \cos\gamma \cos\beta_1) : (\cos\gamma \cos\alpha_1 - \cos\alpha \cos\gamma_1) : (\cos\alpha \cos\beta_1 - \cos\beta \cos\alpha_1)$$

Položme
$$\varrho \cos\lambda = \cos\beta \cos\gamma_1 - \cos\gamma \cos\beta_1$$

$$\varrho \cos\mu = \cos\gamma \cos\alpha_1 - \cos\gamma_1 \cos\alpha$$

$$\varrho \cos\nu = \cos\alpha \cos\beta_1 - \cos\beta \cos\alpha_1 .$$

Nyní jedná se o tuto veličinu ϱ. Protož umocníme tyto rovnice a sečteme je, čímž obdržíme

$$\varrho^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - (\cos^2\alpha \cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma \cos^2\gamma_1 + 2\cos\alpha \cos\alpha_1 \cos\beta \cos\beta_1 + 2\cos\alpha \cos\alpha_1 . \cos\gamma \cos\gamma_1 + 2\cos\beta \cos\beta_1 \cos\gamma \cos\gamma_1) = 1 - \cos^2\varphi = \sin^2\varphi,$$

tudíž
$$\varrho = \sin\varphi,$$

a následovně
$$\cos\lambda = \frac{\cos\beta \cos\gamma_1 - \cos\gamma \cos\beta_1}{\sin\varphi},$$

dále
$$\cos\mu = \frac{\cos\gamma \cos\alpha_1 - \cos\gamma_1 \cos\alpha}{\sin\varphi}$$

a
$$\cos\nu = \frac{\cos\alpha \cos\beta_1 - \cos\alpha_1 \cos\beta}{\sin\varphi}.$$

Tyto hodnoty vložíme do I a dostaneme 3 rovnice se třemi neznámými r, r_1 a n. Vzdálenosti r a r_1 netřeba počítati, neboť potřebujeme jen n, které stanovíme v projekci následovně.

Spojme MM_1 a nejkratší vzdálenosť n zvolme za osu, načež jest průmět $MM_1 = NN_1 = n$, místo MM_1 vezmeme složky. Průmět lomené čáry $x_0' - x_0$, $y_0' - y$, $z_0' - z$ rovná se n čili

$$(x_0' - x_0) \cos\lambda + (y_0' - y_0) \cos\mu + (z_0' - z_0) \cos\nu = n$$

neboli

$$n = \left\{ \frac{(x_0' - x_0)(\cos\beta\cos\gamma_1 - \cos\gamma\cos\beta_1)}{\sin\varphi} + \frac{(y_0' - y_0)(\cos\gamma\cos\alpha_1 - \cos\gamma_1\cos\alpha)}{\sin\varphi} + \frac{(z_0' - z_0)(\cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta)}{\sin\varphi} \right.$$

čili

$$n = \frac{1}{\sin\varphi}\begin{vmatrix} x_0' - x_0, & \cos\alpha, & \cos\alpha_1 \\ y_0' - y_0, & \cos\beta, & \cos\beta_1 \\ z_0' - z_0, & \cos\gamma, & \cos\gamma_1 \end{vmatrix}.$$

Mysleme si ale přímku P vedenou bodem M_2 $(x_2\, y_2\, z_2)$ a vzdálenosť MM_2 budiž a, pak veďme přímku Π bodem $M_3 = (x_2'\, y_2'\, z_2')$ a jmenujme $M_1 M_3 = d$; bude

$$\frac{x_0 - x_2}{\cos\alpha} = \frac{y_0 - y_2}{\cos\beta} = \frac{z_0 - z_2}{\cos\gamma} = a$$

a $$\frac{x_0' - x_2'}{\cos\alpha_1} = \frac{y_0' - y_2'}{\cos\beta_1} = \frac{z_0' - z_2'}{\cos\gamma_1} = d,$$

kteréž hodnoty v hořejší vřaděny nás vedou ku

$$n = \frac{1}{a d \sin\varphi}\begin{vmatrix} x_0' - x_0, & x_0 - x_2, & x_0' - x_2' \\ y_0' - y_0, & y_0 - y_2, & y_0' - y_2' \\ z_0' - z_0, & z_0 - z_2, & z_0' - z_2' \end{vmatrix}$$

neboli

$$a d n \sin\varphi = \begin{vmatrix} x_0' - x_0, & x_0 - x_2, & x_0' - x_2' \\ y_0' - y_0, & y_0 - y_2, & y_0' - y_2' \\ z_0' - z_0, & z_0 - z_2, & z_0' - z_2' \end{vmatrix} = 6\,V$$

jakož bylo dokázati.

Jak svrchu řečeno bylo, uveřejnil prof. Dr. G. Blažek poprve tento postup řešení, ač mimo něho o úloze té i Dr. Grunert za zvláštní polohy soustavy souřadnic pojednává.

§ 12. **O kouli do čtyrstěnu vepsané.**

Mysleme si, že bychom uvnitř čtyrstěnu volili si libovolně bod S a bod ten určili vzdálenostmi d_0, d_1, d_2, d_3 od stěn $\triangle_0$, $\triangle_1$, $\triangle_2$ a $\triangle_3$. Spojíme-li střed S s vrcholy tetraedru $ABCD$, rozdělíme tím celý čtyrstěn ve čtyři menší, jejichž obsahy lze dle prvního základního vzorce stanoviti a kteréž jsou

$t_0 = \frac{1}{3} \triangle_0 d_0, \quad t_1 = \frac{1}{3} \triangle_1 d_1, \quad t_2 = \frac{1}{3} \triangle_2 d_2$ a $t_3 = \frac{1}{3} \triangle_3 d_3$,
tak že celý obsah

$$V = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 = \sum_{r=0}^{r=3} t_r \quad \ldots \ldots \ldots (136)$$

nebo dosazením hodnot

$$V = \frac{1}{3} [\triangle_0 d_0 + \triangle_1 d_1 + \triangle_2 d_2 + \triangle_3 d_3] = \frac{1}{3} \sum_{r=0}^{r=3} \triangle_r d_r \quad \ldots (137)$$

Pakli by byl bod S tak volen, že by $d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = r$, byl by obsah

$$V = \frac{1}{3} r [\triangle_0 + \triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3],$$

ale poněvadž $\triangle_0 + \triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3 = P$ t. j. povrchu čtyrstěnu, bude

$$V = \frac{1}{3} r P \quad \ldots \ldots \ldots (138)$$

a vzorec předcházející

$$V = \frac{r}{3} \sum_{r=0}^{r=3} \triangle_r \ldots \ldots \ldots (139)$$

Vidíme tedy, že lze obsah čtyrstěnu poloměrem koule vepsané a stěnami jeho vyjádřiti. Prodloužíme-li stěny přes vrcholy a nazveme-li r_0, r_1, r_2, r_3 poloměry koulí, které čtyrstěnu se dotýkají, obdržíme pro obsah

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{r_0}{3}[\triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3 - \triangle_0] = \frac{r_1}{3}[\triangle_0 + \triangle_2 + \triangle_3 - \triangle_1] = \\ &\frac{r_2}{3}[\triangle_0 + \triangle_1 + \triangle_3 - \triangle_2] = \frac{r_3}{3}[\triangle_0 + \triangle_1 + \triangle_2 - \triangle_3], \end{aligned}\right\} (140)$$

poněvadž v případu prvním koule všech stěn se ve vnitř, stěny $\triangle_0$ ale zevně se dotýká; rovněž platí i pro ostatní koule.

Mimo pět těchto koulí, jež se stěn čtyrstěnu buď zevně buď uvnitř dotýkají, možno určiti ještě tři, které v oněch prostorech leží, jež povstanou na protilehlých hranách rozšířením stěn a jsou-li poloměry těchto koulí ϱ_1, ϱ_2 a ϱ_3, jest

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{\varrho_1}{3}[-\triangle_0 + \triangle_1 - \triangle_2 + \triangle_3] = \frac{\varrho_2}{3}[\triangle_0 - \triangle_1 - \triangle_2 + \triangle_3] \\ &= \frac{\varrho_3}{3}[-\triangle_0 + \triangle_1 + \triangle_2 - \triangle_3] \end{aligned}\right\} (141)$$

Abychom dokázali větu svrchu dotčenou, t. j.

$$V = \frac{r_1}{3} [\triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3 - \triangle_0]$$

sestrojme S_1 (viz obrazec 18.) tak, aby

$$MS_1 = NS_1 = OS_1 = PS_1 = r_1.$$

Spojme vrchol S_1 s body A, C, N, B, D, O a P; tím obdržíme jehlance

$S_1BCN = J_1$, $S_1CBN = J_2$, $S_1CDO = J_3$ a $S_1BDP = J_4$

a pro krátkosť jmenujme

$$S_1BCN = j_1, \quad SPBD = j_2, \quad SOCD = j_3.$$

Pak jest: $S_1ABNC + S_1ABPD + S_1ACOD = V + J + j_1 + j_2 + j_3$,

jelikož však $S_1ABNC = S_1ABC + S_1NBC = \frac{1}{3}\triangle_1 r_1 + j_1$

a $S_1ABPD = S_1ABD + S_1PBD = \frac{1}{3}\triangle_3 r_1 + j_2$,

dále $S_1ABOD = S_1ACD + S_1OCD = \frac{1}{3}\triangle_2 r_1 + j_3$,

následovně součet

$$\frac{r_1}{3}[\triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3] + j_1 + j_2 + j_3 = V + J + j_1 + j_2 + j_3$$

čili $$V + J = \frac{r_1}{3}[\triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3]$$

a jelikož $$J = \frac{\triangle_0 r_1}{3}$$

tudíž $$V = \frac{r_1}{3}[\triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3 - \triangle_0],$$

což bylo hledati.

Totéž dalo by se o všech ostatních poloměrech dokázati. Tyto rovnice mohli bychom buď hranami neb jinými částkami čtyrstěnu vyjádřiti, užijíce vzorců, určujících plochu trojúhelníka.

§ 13. O kouli hran čtyrstěnu se dotýkající.

Jsou tetraedry, do nichž lze koule vepsati, kteréž se dotýkají veškerých hran jejich. Takové čtyrstěny nazval Junghann v pojednání svém: „Eigenschaften der Tetraeder“ čtyrstěny tečen (Tangententetraeder).

Ale každý čtyrstěn není čtyrstěnem tečen. Má-li takým býti, nutno, aby se součty protilehlých hran rovnaly. Tato podmínka zní tedy, užijeme-li téhož označení jako v § 1.,

$$a + d = b + e = c + f.$$

Neboť mysleme si kouli, kteráž se

hrany $AC = b$ v bodu E viz (obrz. 19.),
„ $AB = c$ „ G,
„ $BC = a$ „ F,
„ $AD = d$ „ J,
„ $BD = e$ „ H,
a „ $CD = f$ „ K

dotýká, pak víme, že

$$AE = AJ = AG = m,$$
$$CE = CF = CK = n$$
a $$DH = DJ = DK = q$$
konečně $$BH = BF = BG = p,$$

poněvadž jsou to tangenty s bodů A, B, C a D na kouli vedené a tudíž sobě rovny. Sečteme-li rovnice tyto, obdržíme:

$$AE + EC + DH + HB = AJ + JD + BF + FC = AG + GB + CK + KD$$

nebo, zavedeme-li hodnoty,

$$a + d = b + e = c + f.$$

Tuto podmínku uvádí Crelle na stránce 118. ve „Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen“, ale způsobem složitějším.

Abychom obsah tohoto čtyrstěnu tečen stanovili, přihlížejme ku průřezu $SMFN$ (obr. 20.), jenž povstane, vedeme-li středem S rovinu kolmou ku hraně CB. Řez tento jest čtyrúhelník, v němž úhly při M a N jsou pravými a délky FM a FN nejsou než poloměry kruhů stěn $\triangle$ a $\triangle_1$. Geometrie vyjadřuje úhlopříčnu čtyrúhelníka jmenovaného rovnicí:

$$\varrho^2 \sin^2 \alpha_1 = p^2 + p_1{}^2 - 2\, p\, p_1 \cos \alpha_1,$$

jsou-li ϱ poloměr koule hran se dotýkající, p a p_1 poloměry vepsaných kruhů stěnám $\triangle$ a $\triangle_1$. Stěna $\triangle$ tvořená jest hranami a, b, c, druhá pak přímkami a, e, f a protož

$$p = \frac{2\triangle}{a + b + c} \quad \text{a} \quad p_1 = \frac{2\triangle_1}{a + e + f}.$$

Avšak stereometrie nás učí, že v trojbokém rovnoběžnostěnu, jehož stěny P, P_1 a P_2 a těmito stěnami uzavřené úhly α, β, γ jsou, jest $P_2{}^2 = P^2 + P_1{}^2 - 2\,P\,P_1 \cos\alpha$.

Mysleme si čtyrstěn náš na hranol doplněn a pozorujme stěnu vytvořenou hranami a i d, jejíž obsah jest $a\,d \sin(a, d)$. Dle uvedené poučky bude, ano $P = 2\triangle$, a $P_1 = 2\triangle_1$,

$$a^2 d^2 \sin^2(a, d) = 4\triangle^2 + 4\triangle_1{}^2 - 8\triangle\triangle_1 \cos\alpha_1 .$$

Z této rovnice máme

$$\cos\alpha_1 = \frac{4\triangle^2 + 4\triangle_1{}^2 - a^2 d^2 \sin^2(a, d)}{8\triangle\triangle_1}$$

a jelikož $V = \frac{2}{3}\,\frac{\triangle\triangle_1 \sin\alpha_1}{a}$, tudíž $\sin\alpha_1 = \frac{3\,V a}{2\triangle\triangle_1}$,

což do hořejšího vzorce vloženo nás vede ku

$$\frac{9\,V^2 a^2 \varrho^2}{4\triangle^2\triangle_1{}^2} = \frac{4\triangle^2}{(a+b+c)^2} + \frac{4\triangle_1{}^2}{(a+e+f)^2} - \frac{4\triangle^2 + 4\triangle_1{}^2 - a^2 d^2 \sin^2(ad)}{(a+b+c)(a+e+f)}\,^{*)}$$

Z rovnice 29. následuje, že

$$16\triangle^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c);$$

jelikož pak ze sítě čtyrstěnu (viz obrazec 21.) lze vyčísti

$CF = a - BF = a - (c - AB) = a + b - c - CE$ čili $2\,CF = a + b - c$,

neboli $\qquad 2\,n = a + b - c$

rovněž $\qquad 2\,m = -a + b + c$

$\qquad$ a $\quad 2\,p = a - b + c$

následovně $\quad 2\,(m + n + p) = a + b + c$,

proto $\quad 16\triangle^2 = 2\,(m+n+p)\,.\,2\,m\,.\,2\,n\,.\,2\,p = 16\,(m+n+p)\,m\,n\,p$,

jelikož $\qquad n + p = a$,

bude $\quad \triangle^2 = (a + m)\,m\,n\,p \quad$ a $\quad \triangle_1 = (a + q)\,n\,p\,q$.

Tím obdržíme

$$\frac{9\,V^2 a^2 \varrho^2}{4\triangle^2\triangle_1{}^2} = \frac{\triangle^2}{(a+m)^2} + \frac{\triangle_1{}^2}{(a+q)^2} - \frac{\triangle^2 + \triangle_1{}^2 - \dfrac{a^2 d^2 \sin(a\,d)}{4}}{(a+m)(a+q)}$$

---

*) Měli bychom souhlasně s § 1. psáti ϱ' místo ϱ, ale k vůli možným omylům píšem prostě ϱ.

a zjednodušením nabudeme:

$$\frac{9\,V^2\,a^2\,\varrho^2}{4\,m\,n^2\,p^2\,q} = \tfrac{1}{4}\,a^2\,d^2\,sin^2\,(a\,d) - n\,p\,(q-m)^2.$$

V § 11. v rovnici 132. jsme ukázali, že

$$cos\,(a,d) = \frac{c^2 + f^2 - b^2 - e^2}{2\,a\,d},$$

tudíž pro tečný čtyrstěn, kde $b + e = c + f$, obdržíme přičtouce a odečtouce veličiny $2\,c\,f$ a $2\,b\,e$,

$$cos\,(a,d) = \frac{b\,e - c\,f}{a\,d},$$

následovně $sin^2\,(a,d) = \dfrac{(a\,d + c\,f - b\,e)\,(a\,d + b\,e - c\,f)}{a^2\,d^2}$,

Jelikož pak $a = n + p$, $b = m + n$ a $c = m + p$

dále $d = m + q$, $e = p + q$ a $f = n + q$

tudíž

$$\left.\begin{aligned} a\,d &= n\,m + m\,p + n\,q + p\,q \\ b\,e &= m\,p + n\,p + m\,q + n\,q \\ c\,f &= m\,n + n\,p + m\,q + p\,q \end{aligned}\right\}\ \text{načež}$$

$$a\,d + c\,f - b\,e = 2\,(m\,n + p\,q)$$

a konečně $a\,d + b\,e - c\,f = 2\,(m\,p + n\,q)$,

následovně $a^2\,d^2\,sin^2\,(a,d) = 4\,(m\,n + p\,q)\,(m\,p + n\,q)$

a $\frac{1}{4}\,a^2\,d^2\,sin^2\,(a,d) = m^2\,n\,p + m^2\,p^2\,q + m\,n^2\,q + n\,p\,q^2$

a odečtením $n\,p\,(q-m)^2 = m^2\,n\,p + 2\,m\,n\,p\,q + n\,p\,q^2$,

najdeme

$$\frac{9\,V^2\,a^2\,\varrho^2}{4\,m\,n^2\,p\,q^2} = m\,q\,(p^2 + 2\,n\,p + n^2) = 2\,n\,q\,(p+n)^2 = n\,q\,a^2$$

čili

$$9\,V^2\,\varrho^2 = 4\,m^2\,n^2\,p^2\,q^2$$

z toho plyne tedy obsah čtyrstěnu tečen

$$V = \frac{2\,m\,n\,p\,q}{3\,\varrho}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (142)$$

kdež m, n, p a q představují délky tangent s vrcholů A, B, C a D na kouli vedených, při čemž sluší podotknouti, že dva a dva zmíněných vrcholů na téže jediné přímce leží a čtyrstěn vytvořují.

Místo těchto úseků hran můžeme zavésti celé hrany. K tomu třeba připomenouti si, že

$2m = (d+c-e)$, $2n = (b+f-d)$, $2p = (a+c-b)$ a $2q = (f+e-a)$.

Tím obdržíme obsah

$$3\,V\varrho = \tfrac{1}{8}(d+c-e)(b+f-d)(a+c-b)(f+e-a)$$

čili
$$V = \frac{1}{24\,\varrho}(a+c-b)(b+f-d)(c+d-e)(e+f-a). \qquad (143)$$

Poznámka.

Nehledě k poloměru ϱ této koule můžeme obsah čtyrstěnu vyjádřiti délkami m, n, p a q takto: Víme že $36\,V^2 = d^2 e^2 f^2 \,.\, P^2$

čili
$$36\,V^2 = d^2 e^2 f^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos c_0 & \cos b_0 \\ \cos c_0 & 1 & \cos a_0 \\ \cos b_0 & \cos a_0 & 1 \end{vmatrix}$$

nebo, násobíme-li každý řádek (-1), tedy celý determinant $(-1)^3$, obdržíme

$$36\,V^2 = -\,d^2 e^2 f^2 \,.\begin{vmatrix} -1, & -\cos c_0, & -\cos b_0 \\ -\cos c_0, & -1, & -\cos a_0 \\ -\cos b_0, & -\cos a_0, & -1 \end{vmatrix}.$$

Proměníme-li tento determinant ve čtvrtý stupeň a přičteme-li první sloupec ku všem ostatním, shledáme, že

$$36\,V^2 = -\,d^2 e^2 f^2 \,.\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & 1-\cos c_0, & 1-\cos b_0 \\ 1, & 1-\cos c_0, & 0, & 1-\cos a_0 \\ 1, & 1-\cos b_0, & 1-\cos a_0, & 0 \end{vmatrix};$$

ale poněvadž $\cos c_0 = \dfrac{d^2+e^2-c^2}{2\,d\,e} = \dfrac{(m+q)^2+(p+q)^2-(m+p)^2}{2\,d\,e}$

$$= \frac{2\,d\,e - 4\,m\,p}{2\,d\,e} = 1 - \frac{2\,m\,p}{d\,e}.$$

Rovněž $\cos b_0 = 1 - \dfrac{2\,m\,n}{d\,f}$ a konečně $\cos a_0 = 1 - \dfrac{2\,n\,p}{e\,f}$,

kteréž rovnice dávají

$$1-\cos a_0 = \frac{2\,np}{ef},\quad 1-\cos b_0 = \frac{2\,mn}{df} \quad \text{a} \quad 1-\cos c_0 = \frac{2\,mp}{de}.$$

Vložíme-li hodnoty tyto do hořejší rovnice

$$36\,V^2 = -\,d^2 e^2 f^2 \,.\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & \dfrac{2\,mp}{de}, & \dfrac{2\,mn}{df} \\ 1, & \dfrac{2\,mp}{de}, & 0, & \dfrac{2\,np}{ef} \\ 1, & \dfrac{2\,mn}{df}, & \dfrac{2\,np}{ef}, & 0 \end{vmatrix}$$

a zjednodušením obdržíme

$$36\,V^2 = -\begin{vmatrix} 1, & d, & e, & f \\ d, & 0, & 2mp, & 2mn \\ e, & 2mp, & 0, & 2np \\ f, & 2mn, & 2np, & 0 \end{vmatrix}$$

bychom odstranili ještě číslo dvě, které v mnohých prvcích se objevuje, znásobíme první řádek dvěma a dělíme poslední tři sloupce dvěma, čímž nabudeme:

$$\left.\begin{aligned} 9\,V^2 &= -\begin{vmatrix} 2, & d, & e, & f \\ d, & 0, & mp, & mn \\ e, & mp, & 0, & np \\ f, & mn, & np, & 0 \end{vmatrix} \\ \text{nebo}\quad 9\,V^2 &= -m^2n^2p^2\begin{vmatrix} 2, & \frac{d}{m}, & \frac{e}{p}, & \frac{f}{n} \\ \frac{d}{m}, & 0, & 1, & 1 \\ \frac{e}{p}, & 1, & 0, & 1 \\ \frac{f}{n}, & 1, & 1, & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (144)$$

§ 14. O kouli čtyrstěnu opsané.

V každém čtyrstěnu dá se vyhledati bod S_0, jenž má tu vlastnosť, že jest stejně vzdálen od vrcholů jeho. Tento bod jest středem koule, kteráž vrcholy čtyrstěnu prochází, on jest středem koule tetraedru opsané. I pomocí poloměru této koule, jejž písmenem R označovati budeme, a hran čtyrstěnu lze obsah často jmenovaného našeho tělesa vypočítati. Jest opět, jako v předešlých §§, mnoho method úlohu tu řešících.

První řešení podal Carnot, po něm Crelle, Junghann, Dostar a Salmon, pokud mi známo. Obtížnou cestu ku vyhledání poloměru opsané koule použil Carnot; postup řešení úplně stereometrický provedl Crelle; pomocí polární krychle vyvozuje veličinu tu Junghann a elegantní řešení podává Salmon a Dostar.

Spojíme-li bod S s vrcholy čtyrstěnu, rozdělíme jej tím na čtyři jiné tetraedry: t_0, t_1, t_2 a t_3, kteréž jsou vesměs přímými, poněvadž $AS = BS = CS = DS$. Pro takový čtyrstěn určili jsme v rovnici (90. a 91.) obsah a dle těch obdržíme:

$$144\,t_0{}^2 = R^2(2a^2c^2+2a^2b^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4)-a^2b^2c^2$$
$$=\triangle^2(R^2-\varrho^2),\ \text{dále}$$
$$144\,t_1{}^2 = R^2(2a^2e^2+2a^2f^2+2e^2f^2-a^4-e^4-f^4)-a^2e^2f^2$$
$$=\triangle_1{}^2(R^2-\varrho_1{}^2),$$
$$144\,t_2{}^2 = R^2(2b^2d^2+2b^2f^2+2d^2f^2-b^4-d^4-f^4)-b^2d^2f^2$$
$$=\triangle_2{}^2(R^2-\varrho_2{}^2),$$
$$144\,t_3{}^2 = R^2(2c^2d^2+2c^2e^2+2d^2e^2-c^4-d^4-e^4)-c^2d^2e^2$$
$$=\triangle_3{}^2(R^2-\varrho_3{}^2),$$

kteréž do rovnice $V=t_0+t_1+t_2+t_3$ dosazeny, vedou buď ku

$$\left.\begin{aligned}V&=\triangle\sqrt{R^2-\varrho^2}+\triangle_1\sqrt{R^2-\varrho_1{}^2}+\triangle_2\sqrt{R^2-\varrho_2{}^2}+\triangle_3\sqrt{R^2-\varrho_3{}^2}\\&=\sum_{i=0}^{i=3}\triangle_i\sqrt{R^2-\varrho_i{}^2},\end{aligned}\right\}\quad(145)$$

anebo po pracné redukci přicházíme ku

$$\left.\begin{aligned}576\,R^2V^2 &= 2a^2c^2d^2f^2+2b^2c^2e^2f^2+2a^2b^2d^2e^2\\&\quad-a^4d^4-b^4e^4-c^4f^4\end{aligned}\right\}\quad(146)$$

a transformací pravé strany

$$\left.\begin{aligned}576\,R^2V^2 &= a^2d^2(-a^2d^2+b^2e^2+c^2f^2)+b^2e^2(a^2d^2\\&\quad-b^2e^2+c^2f^2)+c^2f^2(a^2d^2+b^2e^2-c^2f^2)\end{aligned}\right\}\quad(147)$$

nebo seřaděním

$$\left.\begin{aligned}576\,R^2V^2 &= (ad+be+cf)(-ad+be+cf)(ad-be+cf)\\&\quad(ad+be-cf)\end{aligned}\right\}\quad(148)$$

a pro $(ad+be+cf)=2S,$

bude $576\,R^2V^2 = 2S\,.\,2(S-ad)\,.\,2(S-be)\,.\,2(S-cf)$

čili $36\,R^2V^2 = S\,.\,(S-ad)(S-be)(S-cf)$

nebo konečně $6\,RV=\sqrt{S\,.\,(S-ad)(S-be)(S-cf)}$ (149)

a porovnávajíce vzorec tento se známou rovnicí obsah trojúhelníka vyjadřující, můžeme tvrditi, že šesteronásobný součin obsahu čtyrstěnu a poloměru opsané koule rovná se ploskému obsahu trojúhelníka, kterýž má za strany součiny protilehlých hran čtyrstěnu.

Postup řešení právě tuto naznačeného jest velmi obtížný. Lehčeji a pěkněji řeší úkol ten Dr. Dostar; methoda jeho záleží asi v následujícím:

Mysleme si bod S, určený souřadnicemi $x\,y\,z$ v systému souřadnic, jehož počátkem vrchol D a jehož osami jsou hrany DA, DB a DC. Nazýváme-li úhly, jež tyto osy spolu tvoří a_0, b_0, c_0 a jsou-li úhly α, β, γ, jenž poloměr R obepsané koule s osami souřadnic činí, obdržíme, promítáme-li přímku DO (viz obrazec 22.) a lomenou čáru $OMPD$ buď na DO neb na osy coordinatní, rovnice:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = R$$

$$x + y \cos c_0 + z \cos b_0 = R \cos\alpha$$

$$x \cos c_0 + y + z \cos a_0 = R \cos\beta$$

$$x \cos b_0 + y \cos a_0 + z = R \cos\gamma.$$

Z toho jde, že mezi neznámými x, y, z stává rovnice

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \\ \cos\alpha, & 1, & \cos c_0, & \cos b_0 \\ \cos\beta, & \cos c_0, & 1, & \cos a_0 \\ \cos\gamma, & \cos b_0, & \cos a_0, & 1 \end{vmatrix}.$$

Násobíme-li první řádek a sloupec veličinou $2R$ a tvoříme-li orthogonálné průměty poloměru R na hranách d, e, f, z nichž odvoditi lze

$$\frac{d}{2} = R \cos\alpha, \quad \frac{e}{2} = R \cos\beta, \quad \frac{f}{2} = R \cos\gamma,$$

obdržíme pro tutéž rovnici tvar

$$\begin{vmatrix} 4R^2, & d, & e, & f \\ d, & 1, & \cos c_0, & \cos b_0 \\ e, & \cos c_0, & 1, & \cos a_0 \\ f, & \cos b_0, & \cos a_0, & 1 \end{vmatrix}$$

z něhož lehce nabudeme

$$4R^2P^2 = -\begin{vmatrix} 0, & d, & e, & f \\ d, & 1, & \cos c_0, & \cos b_0 \\ e, & \cos c_0, & 1, & \cos a_0 \\ f, & \cos b_0, & \cos a_0, & 1 \end{vmatrix}$$

rozložíme-li předešlý determinant a upotřebíme-li označení

$$P^2 = \begin{vmatrix} 1, & \cos c_0, & \cos b_0 \\ \cos c_0, & 1, & \cos a_0 \\ \cos b_0, & \cos a_0, & 1 \end{vmatrix}.$$

Násobením posledních tří sloupců předešlého determinantu s $2d$, $2e$, $2f$ a posledních tří řádků s d, e, f a dělením prvního s $\frac{1}{2}$ d, e, f obdržíme, zasadíme-li ještě

$$2\,d\,e\cos c_0 = d^2 + e^2 - c^2, \quad 2\,d\,f\cos b_0 = d^2 + f^2 - b^2$$

a $\quad 2\,f\,e\cos a_0 = e^2 + f^2 - a^2,$

rovnici

$$16\,d^2e^2f^2R^2P^2 = -\begin{vmatrix} 0, & d^2, & e^2, & f^2 \\ d^2, & 2d^2, & 2\,d\,e\cos c_0, & 2\,d\,f\cos b_0 \\ e^2, & 2\,d\,e\cos c_0, & 2e^2, & 2\,e\,f\cos a_0 \\ f^2, & 2\,d\,f\cos b_0, & 2\,e\,f\cos a_0, & 2f^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0, & d^2, & e^2, & f^2 \\ d^2, & 2d^2, & d^2+e^2-c^2, & d^2+f^2-b^2 \\ e^2, & d^2+e^2-c^2, & 2e^2, & e^2+f^2-a^2 \\ f^2, & d^2+f^2-b^2, & e^2+f^2-a^2, & 2f^2 \end{vmatrix}$$

a počínáme-li si s tímto determinantem podobně, jak jsme to v § 8. ukázali, a násobíme-li vedle toho všechny řádky (-1), obdržíme vzorec:

$$576\,R^2V^2 = \begin{vmatrix} 0 & d^2 & e^2 & f^2 \\ d^2 & 0 & c^2 & b^2 \\ e^2 & c^2 & 0 & a^2 \\ f^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} {}^{*)} \quad \ldots\ldots (150)$$

píšeme-li $\quad d^2e^2f^2P^2 = 36\,V^2.$

§ 15. O čtyrstěnu pravidelném.

Ač při pojednání tomto jsme se vždy o tak zvaných zvláštních tetraedrech zmiňovali, nebude nemístno, když tuto zvlášť o čtyrstěnu pravidelném pojednáme.

Čtyrstěn pravidelný jest, jak známo, těleso omezené čtyrmi rovnostrannými trojúhelníky, jejichž obsah určiti možno vzorem

*) Viz též Dra. R. Baltzera: Theorie und Anwendung der Determinanten, pag. 209.

$\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, označíme-li stranu téhož písmenem a. V rovnici 92. vyvinuli jsme vzorec pro obsah jeho, totiž

$$V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}.$$

Veličinu a můžeme však buď poloměrem vepsané, neb opsané, anebo konečně takové koule vyjádřiti, kteráž veškerých hran čtyrstěnu se dotýká.

Ku stanovení hrany a, vyjádřené poloměrem koule, kteráž leží kolem pravidelného mnohostěnu vůbec a čtyrstěnu zvlášť, potřebujeme pouze obrazec 23. pozorovati. Představuj nám K onu kouli, kteráž jest čtyrstěnu $ABCD$ opsána. Ku dalšímu provedení veďme $DE \perp ABC$, tím obdržíme E, jež jest středem kružnice základně ABC opsané. Prodloužíme-li DE až do bodu F na ploše kulové, bude DF průměrem koule a jeho střed O jest středem koule, tudíž i čtyrstěnu. V pravoúhelném trojúhelníku DAF je pak

$$DF : AD = AD : DE$$

čili
$$2R : a = a : \sqrt{a^2 - p^2}$$

a odtud
$$R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - p^2}}.$$

Poněvadž pro poloměr p kružnice opsané základně platí

$$p = \frac{a\,b\,c}{4\,\triangle} = \frac{a\,b\,c}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

a uvážíme-li, že $a = b = c$,

bude tudíž $p = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, protož $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ a z toho $a = \frac{4R}{\sqrt{6}}$

a na základě toho

$$V = \tfrac{1}{12} \cdot \frac{4^3 R^3}{6\sqrt{6}} = \tfrac{64}{72}\,\frac{R^3\sqrt{12}}{6} = \tfrac{8}{27}\,R^3\sqrt{3}. \quad . \; . \; (151).$$

Velmi lehce lze poloměr r koule vepsané stanoviti. Víme totiž, že

$$r^2 = R^2 - p^2,$$

jelikož pak $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ a $p = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

bude $r^2 = \frac{6\,a^2}{16} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{24}$

a z toho $a = 2\,r\sqrt{6}$,

tím nabude V tvaru $V = \frac{a\,3\sqrt{2}}{12} = 8\,r^3\sqrt{3}$. . . . . . (152).

Z úvah o poloměrech koulí opsaných a vepsaných, možno stanoviti i poloměr koule hran čtyrstěnu se dotýkajících.

Poloměr tento lze přímo z pojednání v § 13. odvoditi, ale též i takto lze jej stanoviti. Z obrazce 23. vysvítá

$$\varrho^2 = r^2 + p^2,$$

jelikož p, jsouc poloměrem kruhu stěně vepsaného, rovná se $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ a poněvadž $r^2 = \frac{a^2}{24}$, bude $\varrho^2 = \frac{a^2}{24} + \frac{3\,a^2}{36} = \frac{3\,a^2}{24} = \frac{a^2}{8}$

z toho obráceně $a^2 = 8\,\varrho^2$ a $a = 2\,\varrho\sqrt{2}$,

jež ve vzorec pro krychlový obsah zasazeny, dávají

$$V = \tfrac{8}{3}\,\varrho^3 \ldots\ldots\ldots\ldots (153)$$

Mluvíme tuto stále o čtyrstěnu pravidelném a o takovém pak platí tato stereometrická poučka:

„Krychlový obsah tělesa pravidelného rovná se třetině součinu z jeho povrchu a poloměru vepsané koule.“ Neboť položíme-li středem pravidelného tělesa a veškerými jeho hranami roviny, rozpadne se těleso v n přímých a shodných jehlanců, z nichž každému jest podstavou jedna stěna s tělesa a výškou poloměr vepsané mu koule. Jest tedy obsah pravidelného mnohostěnu $M = n$. jehlancům.

Poněvadž jehlanec vyjadřuje se třetinou základu a výšky, zde tedy $s\frac{r}{3}$, proto $M = n\,s\frac{r}{3}$.

Ale ns dává povrch P', tedy obsah pravidelného mnohostěnu

$$M = P' . \frac{r}{3}$$

následovně náš čtyrstěn

$$V = P' . \frac{r}{3} \qquad (154)$$

Ale povrch pravidelného čtyrstěnu skládá se ze čtyr rovnostranných trojúhelníků, tedy celý povrch

$$P' = 4 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \sqrt{3}$$

a tudíž

$$V = \tfrac{1}{3} a^2 r \sqrt{3} \qquad (155)$$

Rovnici tuto můžeme ale psáti ještě takto

$$V = \tfrac{1}{3} a . a . r \sqrt{3}$$

a poněvadž

$$a = 2 \varrho \sqrt{2} \quad \text{a} \quad a = \frac{4R}{\sqrt{6}},$$

tím nabudeme památného vzorce

$$V = \tfrac{8}{3} r \varrho R \qquad (156)$$

jenž vyjadřuje větu: „Krychlový obsah pravidelného čtyrstěnu rovná se $\frac{8}{3}$ součinu z poloměru opsané, vepsané i hran se dotýkající koule.“

---

§ 16. Přehled vzorců.

U konce našeho pojednání stůjtež ještě vzorce pro krychlový obsah čtyrstěnu. Především mějme zření ku

a) čtyrstěnu vůbec.

Pro tento platí vzorce:

$$V = \tfrac{1}{3} p . v$$

$$= \tfrac{1}{12} \sqrt{\begin{array}{c} 4a^2c^2e^2 - c^2(a^2+c^2-b^2)^2 - a^2(c^2-d^2+e^2)^2 \\ -c^2(a^2+e^2-f^2)^2 + (a^2+c^2-b^2)(a^2+e^2-f^2) \\ (c^2-d^2+e^2) \end{array}} \qquad (83)$$

$$= \frac{1}{12}\sqrt{\begin{matrix}-a^4d^2-a^2d^4-b^4e^2-b^2e^4-c^4f^2-c^2f^4\\+a^2b^2e^2+a^2d^2c^2+a^2c^2f^2+a^2b^2d^2+a^2d^2f^2\\+b^2c^2e^2+b^2c^2f^2+b^2d^2c^2+a^2d^2e^2+c^2d^2f^2\\+b^2e^2f^2+c^2f^2e^2-a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2d^2f^2\\-c^2d^2e^2\end{matrix}} \qquad (85)$$

$$V = \frac{1}{12}\sqrt{\begin{matrix}(a^2+d^2)(-a^2d^2+b^2e^2+c^2f^2)+(b^2+e^2)\\(a^2d^2-b^2e^2+c^2f^2)+(c^2+f^2)(a^2d^2+b^2e^2\\-c^2f^2)-a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2d^2f^2-c^2d^2e^2\end{matrix}} \qquad (86)$$

$$= \frac{1}{12}\sqrt{\begin{matrix}a^2d^2(-a^2+b^2+c^2-d^2+e^2+f^2)+b^2e^2\\(a^2-b^2+c^2+d^2-e^2+f^2)+c^2f^2(a^2+b^2-c^2\\+d^2+e^2-f^2)-a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2d^2f^2\\-c^2d^2e^2\end{matrix}} \qquad (87)$$

neboli

$$144\,V^2 = -T \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (88)$$

$$288\,V^2 = \begin{vmatrix} 2a^2, & a^2+c^2-b^2, & a^2+e^2-f^2 \\ a^2+c^2-b^2, & 2c^2, & c^2-d^2+e^2 \\ a^2+e^2-f^2, & c^2-d^2+e^2, & 2e^2. \end{vmatrix} \; . \; . \qquad (84)$$

$$= \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & a^2, & c^2, & e^2 \\ 1, & a^2, & 0, & b^2, & f^2 \\ 1, & c^2, & b^2, & 0, & d^2 \\ 1, & e^2, & f^2, & d^2, & 0. \end{vmatrix} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (94)$$

Dále

$$V = \tfrac{1}{6}\,def\sqrt{1-\cos^2 a_0-\cos^2 b_0-\cos^2 c_0+2\cos a_0\cos b_0\cos c_0} \qquad (95)$$

$$= \tfrac{1}{3}\,def\sqrt{\sin\frac{a_0+b_0+c_0}{2}\sin\frac{-a_0+b_0+c_0}{2}\sin\frac{a_0-b_0+c_0}{2}\sin\frac{a_0+b_0-c_0}{2}} \qquad (96)$$

$$= \tfrac{1}{3}\,def\sqrt{\sin s\,.\,\sin(s-a_0)\sin(s-b_0)\sin(s-c_0)} \; . \; . \qquad (97)$$

$$= \tfrac{1}{3}\,defP \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (98)$$

$$36\,V^2 = d^2e^2f^2\begin{vmatrix} 1, & \cos c_0, & \cos b_0 \\ \cos c_0, & 1, & \cos a_0 \\ \cos b_0, & \cos a_0, & 1 \end{vmatrix} \; . \; . \; . \; . \qquad (99)$$

$$= \begin{vmatrix} d^2, & de\cos c_0, & df\cos b_0 \\ de\cos c_0, & e^2, & ef\cos a_0 \\ df\cos b_0, & ef\cos a_0, & f^2 \end{vmatrix} \; . \; . \qquad (100)$$

$$\left.\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{3}\,a\,b\,c\sqrt{\frac{P_1\,P_2\,P_3}{P}} = \tfrac{1}{3}\,a\,e\,f\sqrt{\frac{P\,P_2\,P_3}{P_1}} \\ &= \tfrac{1}{3}\,b\,d\,f\sqrt{\frac{P\,P_1\,P_3}{P_2}} = \tfrac{1}{3}\,c\,d\,e\sqrt{\frac{P\,P_1\,P_2}{P_3}}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (103)$$

$$= \tfrac{1}{6}\sqrt{\begin{aligned}&4\,d^2\triangle_1{}^2 + 4\,e^2\triangle_2{}^2 + 4\,f^2\triangle_3{}^2 - 2\,d^2\,e^2\,f^2 \\ &+2\sqrt{(d^2e^2-4\triangle_3{}^2)(d^2f^2-4\triangle^2{}_2)\,(e^2f^2-4\triangle_1{}^2)}\end{aligned}}\ \Bigg\} \quad (104)$$

$$\left.\begin{aligned} &= \tfrac{1}{6}def\frac{sin\ a.}{sin\ \alpha}\sqrt{1-cos^2\alpha-cos^2\beta-cos^2\gamma-2\,cos\,\alpha\,cos\,\beta\,cos\gamma} \\ &= \tfrac{1}{6}def\,M\sqrt{1-cos^2\alpha-cos^2\beta-cos^2\gamma-2\,cos\,\alpha\ cos\,\beta\ cos\,\gamma} \\ &= \tfrac{1}{3}defM\sqrt{-cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}cos\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}} \\ &= \tfrac{1}{3}defM\sqrt{-\,cos\ \sigma\ cos\ (\sigma-\alpha)\ cos\ (\sigma-\beta)\ cos\ (\sigma-\gamma)} \end{aligned}\right\} \quad (106)$$

$$= \tfrac{1}{3}\,d\,e\,f\,M\,\Pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (107)$$

$$\left.\begin{aligned} V &= \tfrac{2}{3}\,\frac{\triangle}{\Pi}\sqrt{\triangle\,\Pi_1\,\Pi_2\,\Pi_3} = \tfrac{2}{3}\,\frac{\triangle_1}{\Pi_1}\sqrt{\triangle_1\,\Pi\,\Pi_2\,\Pi_3} \\ &= \tfrac{2}{3}\,\frac{\triangle_2}{\Pi_2}\sqrt{\triangle_2\,\Pi\,\Pi_1\,\Pi_3} = \tfrac{2}{3}\,\frac{\triangle_3}{\Pi_3}\sqrt{\triangle_3\,\Pi\,\Pi_1\,\Pi_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (108)$$

$$= \tfrac{2}{3}\,\mathfrak{M}\,.\,\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (109)$$

$$V = \frac{v_1\ v_2\ v_3}{12\ \Pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (110)$$

$$= \frac{v\ v_1\ a}{6\ sin\ \alpha_1} = \frac{v\ v_2\ b}{6\ sin\ \beta_1} = \frac{v\ v_3\ c}{6\ sin\ \gamma_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (111)$$

$$\left.\begin{aligned} &= \tfrac{1}{24}\,\frac{(a+b+c)(-a+b+c)\,(a-b+c)(a+b-c)}{a\ cotg\ \alpha_1 + b\ cotg\ \beta_1 + c\ cotg\ \gamma_1} \\ &= \tfrac{2}{3}\,\frac{\triangle^2}{a\ cotg\ \alpha_1 + b\ cotg\ \beta_1 + c\ cotg\ \gamma_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (112)$$

$$= \tfrac{4}{3}\,\frac{\varrho^3\ sin^2\ a_1\ sin^2\ b_2\ sin^2\ c_3}{sin\ a_1\ cotg\ \alpha_1 + sin\ b_2\ cotg\ \beta_1 + sin\ c_3\ cotg\ \gamma_1}\ \Big\} \quad \ldots (113)$$

$$= \frac{\triangle^2}{3\,\varrho\,(sin\ a_1\ cotg\ \alpha_1 + sin\,b_2\ cotg\ \beta_1 + sin\ c_3\ cotg\ \gamma_1)}\ \Big\} \quad \ldots (114)$$

$$V = \frac{2\triangle\triangle_1 \sin\alpha_1}{3a} = \frac{2\triangle\triangle_2 \sin\beta_1}{3b} = \frac{2\triangle\triangle_3 \sin\gamma_1}{3c} \quad \ldots\ldots \quad (115)$$

$$= \tfrac{1}{6}\, a h h_1 \sin\alpha_1 \quad \ldots\ldots \quad (116)$$

$$= \tfrac{1}{6}\, d e f \sin a_0 \sin b_0 \sin\gamma \quad \ldots\ldots \quad (117)$$

$$= \tfrac{1}{6}\, b c d \sin a_1 \sin(d, \triangle), \quad \ldots\ldots \quad (118)$$

$$\left.\begin{aligned} &= \tfrac{2}{3}\sqrt{\triangle_1\triangle_2\triangle_3\Pi} = \tfrac{2}{3}\sqrt{\triangle\triangle_1\triangle_2\Pi_3} \\ &= \tfrac{2}{3}\sqrt{\triangle\triangle_2\triangle_3\Pi_1} = \tfrac{2}{3}\sqrt{\triangle\triangle_1\triangle_3\Pi_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (119)$$

$$= \tfrac{1}{3}\sqrt{2\triangle_1\triangle_2\triangle_3} \cdot \sqrt[4]{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \quad (120)$$

$$= \tfrac{1}{3}\sqrt{\triangle_1}\sqrt[4]{\left.\begin{aligned} &-[\triangle_1{}^2 + \triangle_2{}^2 + \triangle_3{}^2 - \triangle^2 - 2\triangle_1\triangle_3\cos\beta \\ &\quad - 2\triangle_1\triangle_2\cos\gamma + 2\triangle_2\triangle_3\cos(\beta-\gamma)] \\ &[\triangle_1{}^2 + \triangle_2{}^2 + \triangle_3{}^2 - \triangle^2 - 2\triangle_1\triangle_3\cos\beta \\ &\quad - 2\triangle_1\triangle_2\cos\gamma + 2\triangle_2\triangle_3\cos(\beta+\gamma)] \end{aligned}\right\}} \quad (122)$$

$$= \tfrac{1}{6}\, d e f \begin{vmatrix} \cos\lambda, & \cos\mu, & \cos\nu \\ \cos\lambda_1, & \cos\mu_1, & \cos\nu_1 \\ \cos\lambda_2, & \cos\mu_2, & \cos\nu_2 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (123)$$

$$= \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (124)$$

$$= \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x, & y_1 - y, & z_1 - z \\ x_2 - x, & y_2 - y, & z_2 - z \\ x_3 - x, & y_3 - y, & z_3 - z \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (125)$$

$$= \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} 1, & x, & y, & z \\ 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (126)$$

$$= \tfrac{1}{6}\,(Ax + By + Cz + D) \quad \ldots\ldots \quad (127)$$

nebo

$$= \tfrac{1}{6}\left\{\begin{aligned} & x\,[y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) + y_3(z_1 - z_2)] \\ & + y\,[z_1(x_2 - x_3) + z_2(x_3 - x_2) + z_3(x_1 - x_2)] \\ & + z\,[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \\ & \quad - [x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_2(y_3 z_1 - y_1 z_3) \\ & \qquad + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1)] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (128)$$

$$= \tfrac{1}{6}\,\frac{(a_1 b_2 c_3 d_4)^3}{(a_1 b_2 c_3)(a_2 b_3 c_4)(a_3 b_4 c_1)(a_4 b_1 c_2)} \quad \ldots\ldots \quad (130)$$

$$V = \tfrac{1}{6}\, a\, d\, n \sin\varphi \quad \ldots \quad (131)$$

$$= \frac{n}{12}\sqrt{4\, a^2\, d^2 - (c^2 + f^2 - b^2 - e^2)^2} \quad \ldots \quad (133)$$

$$= \frac{2\, n\, S}{3} \quad \ldots \quad (135)$$

$$= \sum_{r=0}^{r=3} t_r \quad \ldots \quad (136)$$

$$= \tfrac{1}{3} \sum_{r=0}^{r=3} \triangle_r\, d_r \quad \ldots \quad (137)$$

$$= \tfrac{1}{3}\, r\, P = \tfrac{1}{3}\, r \sum_{n=0}^{n=3} \triangle_n \quad \ldots \quad (139)$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{r_0}{3}[\triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3 - \triangle_0] = \frac{r_1}{3}[\triangle_0 + \triangle_2 + \triangle_3 - \triangle_1] = \\ &\frac{r_2}{3}[\triangle_0 + \triangle_1 + \triangle_3 - \triangle_2] = \frac{r_3}{3}[\triangle_0 + \triangle_1 + \triangle_2 - \triangle_3], \end{aligned}\right\} \quad (140)$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{\varrho_1}{3}[-\triangle_0 + \triangle_1 - \triangle_2 + \triangle_3] = \frac{\varrho_2}{3}[\triangle_0 - \triangle_1 - \triangle_2 + \triangle_3] \\ &= \frac{\varrho_3}{3}[-\triangle_0 + \triangle_1 + \triangle_2 - \triangle_3] \end{aligned}\right\} \quad (141)$$

$$= \frac{2\, m\, n\, p\, q}{3\, \varrho} \quad \ldots \quad (142)$$

$$= \frac{1}{24\, \varrho}(a + c - b)\,(b + f - d)\,(c + d - e)\,(e + f - a) \quad (143)$$

$$9\, V^2 = - \begin{vmatrix} 2, & d, & e, & f \\ d, & 0, & mp, & mn \\ e, & mp, & 0, & np \\ f, & mn, & np, & 0 \end{vmatrix} \quad \ldots \quad (144)$$

$$V = \sum_{i=0}^{i=3} \triangle_i \sqrt{R^2 - \varrho_i^{\,2}} \quad \ldots \quad (145)$$

$$\left.\begin{aligned} 576\, R^2\, V^2 = {} & 2\, a^2\, c^2\, d^2\, f^2 + 2\, b^2\, c^2\, e^2\, f^2 + 2\, a^2\, b^2\, d^2\, e^2 \\ & - a^4\, d^4 - b^4\, e^4 - c^4\, f^4 \end{aligned}\right\} \quad (146)$$

$$\left.\begin{aligned} = {} & a^2 d^2 (-a^2 d^2 + b^2 e^2 + c^2 f^2) + b^2 e^2 (a^2 d^2 - \\ & b^2 e^2 + c^2 f^2) + c^2 f^2 (a^2 d^2 + b^2 e^2 - c^2 f^2) \end{aligned}\right\} \quad (147)$$

$$576\,R^2 V = \left.\begin{array}{l}(ad+be+cf)(-ad+be+cf)(ad-\\ be+cf)(ad+be-cf)\end{array}\right\} \quad (148)$$

$$6VR = \sqrt{S(S-ad)(S-be)(S-cf)} \quad \ldots\ldots \quad (149)$$

$$576\,R^2 V^2 = \begin{vmatrix} 0 & d^2 & e^2 & f^2 \\ d^2 & 0 & c^2 & b^2 \\ e^2 & c^2 & 0 & a^2 \\ f^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (150)$$

Dále vyjádřeme:

b) Čtyrstěny zvláštní.

α) Čtyrstěn pravidelný.

Pro tento jsme ukázali, že

$$V = \tfrac{1}{12} a^3 \sqrt{2} \quad \ldots\ldots \quad (92)$$

$$= \tfrac{8}{27} R^3 \sqrt{3} \quad \ldots\ldots \quad (151)$$

$$= 8 r^3 \sqrt{3} \quad \ldots\ldots \quad (152)$$

$$= \tfrac{8}{3} \varrho^3 \quad \ldots\ldots \quad (153)$$

$$= \frac{r}{3} P' \quad \ldots\ldots \quad (154)$$

$$= \tfrac{1}{3} a^2 r \sqrt{3} \quad \ldots\ldots \quad (155)$$

$$= \tfrac{8}{3} r \varrho R \quad \ldots\ldots \quad (156)$$

β) Čtyrstěn přímý,

kde jsou hrany $d = e = f$.

$$144\,V^2 = d^2(2a^2c^2 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) - a^2b^2c^2. \quad (90)$$

$$V = \tfrac{1}{3} \triangle \sqrt{\triangle^2 - \varrho^2} \quad \ldots\ldots \quad (91)$$

$$= \tfrac{1}{3} d^3 \begin{vmatrix} 1 & \cos c_0 & \cos b_0 \\ \cos c_0 & 1 & \cos a_0 \\ \cos b_0 & \cos a_0 & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (101)$$

$$= \tfrac{1}{3} d^3 P = \tfrac{1}{3} d M \Pi$$

$$= \tfrac{1}{3} d^3 \begin{vmatrix} \cos\lambda, & \cos\mu, & \cos\nu \\ \cos\lambda_1, & \cos\mu_1, & \cos\nu_1 \\ \cos\lambda_2, & \cos\mu_2, & \cos\nu_2 \end{vmatrix}.$$

γ) Čtyrstěn kolmohranný,

v němž protější hrany úhel pravý vytvořují, tudíž

$$\varphi = 90 \quad a \quad sin\,\varphi = 1.$$
$$V = \tfrac{1}{6}\,a\,d\,n.$$

ϑ) Čtyrstěn rovnohranný,

v němž protilehlé hrany sobě rovny jsou, t. j. $a = d$, $b = e$ a $c = f$.

$$\left.\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{12}\sqrt{\begin{aligned}&2\,a^2(-a^4+b^4+c^4)+2\,b^2(a^4-b^4+c^4)+\\ &2\,c^2(a^4+b^4-c^4)-4\,a^2\,b^2\,c^2\end{aligned}} \\ &= \tfrac{1}{12}\sqrt{\begin{aligned}&2\,a^4(-a^2+b^2+c^2)+2\,b^4(a^2-b^2+c^2)+\\ &2\,c^4(a^2+b^2-c^2)-4\,a^2\,b^2\,c^2.\end{aligned}} \end{aligned}\right\} \quad (93)$$
$$= \tfrac{1}{6}\,a^2\,n\,sin\,\varphi.$$

ε) Čtyrstěn pravoúhlý,

kdež úhly hranové $a_0 = b_0 = c_0 = 90$. Tu pak jest:

$$V = \tfrac{1}{6}\,d\,e\,f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (102)$$
$$= \tfrac{1}{3}\sqrt{2\,\triangle_1\,\triangle_2\,\triangle_3} \quad \ldots\ldots \quad (121)$$

Poznámka: Čísla jdoucí po vzorcích, ukazují místo jejich v pojednání.

Doplňky a opravy.

Str. 1. řádek 13. shora místo čtyry čti čtyři.

„ 3. Vojtěcha Girarda: „Nouvelle invention en Algébre“ (1629).

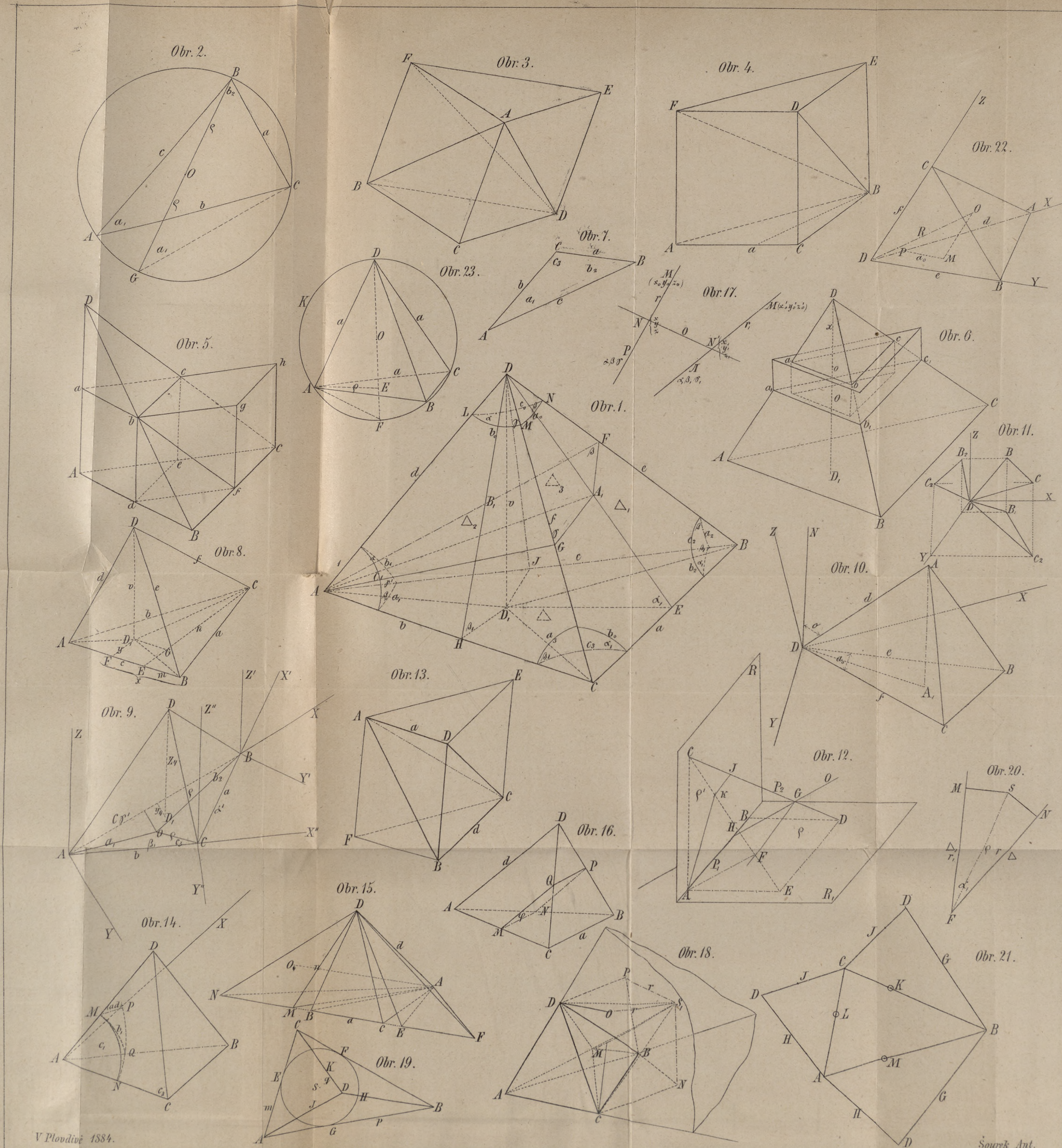
„ 6. řádek 15. shora místo tetraèdre piš tétraèdre.

„ 26. „ 17. „ v jmenovateli místo n_3 piš n^3.

„ 91. „ 11. „ místo $V=\frac{r}{3}\sum_{r=0}^{r=3}\triangle_r$ piš $V=\frac{r}{3}\sum_{n=0}^{n=3}\triangle_n$.

„ 103. K § 15. sluší podotknouti, že poloměr koule pravidelnému čtyrstěnu vepsané a opsané určil Euklid v knize XIII. 13.

OBSAH.



Nakladatel Fr. A. Urbánek, český knihkupec v Praze. 1886.