
RUDZKI
ASTRONOMIA
TEORETYCZNA
II

T. N. W

905

ASTRONOMIA TEORETYCZNA

~~GABINET MATEMATYCZNY
Instytutu Naukowego Warszawskiego~~

984

ASTRONOMIA TEORETYCZNA

Jun
M. P. RUDZKI *Kart*

ASTRONOMIA TEORETYCZNA

TOM II

~~GABINET MATEMATYCZNY~~
~~Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~
L. inw. 836

W KRAKOWIE
NAKŁADEM AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI
G. GEBETHNER I SP. W KRAKOWIE — GEBETHNER I WOLFF W WARSZAWIE
1914

opis nr 47654



4836

Kraków. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarz. J. Filipowskiego.

S. M. II. 263/II.

SPIS RZECZY

zawartych w tomie II-gim.

ROZDZIAŁ XVIII. Inne metody wyznaczania orbit. — Poprawianie pierwotnych elementów. — Wyznaczenie orbit gwiazd podwójnych i rojów meteorytowych.

1. Metoda analityczna. — 2. Dowód, że w przypadku paraboli zawsze tylko jedno rozwiązanie czyni zadość wszystkim warunkom zadania. — 3. Metoda Pontécoulanta. Wyznaczenie elementów. — 4. Metoda O. Leuschnera. — 5. Metoda waryacji odległości. — 6. Metoda współczynników różniczkowych. Metoda Tietjena. — 7. Metoda Tietjena. Wzory na G i t. d. — 8. Metoda Tietjena. Określenie poprawek dQ oraz di . Drugie przybliżenie. — 9. Wyznaczenie orbit gwiazd podwójnych. — 10. Wyznaczenie drogi roju meteorytów. Droga w atmosferze. — 11. Wyznaczenie elementów drogi roju naokoło słońca z położenia radyantu. — Literatura str. 1—63

ROZDZIAŁ XIX. Zadanie trzech ciał i teoria perturbacji.

1. Zadanie n ciał. Płaszczyzna niezmienna. Stałość systemu słonecznego. — 2. Zadanie trzech ciał. — 3. Metoda waryacji stałych dowolnych. — 4. Metoda Lagrange'a. — 5. Równania Lagrange'a. — 6. Rozwinięcie funkcji perturbacyjnej. — 7. Podstawienie funkcji perturbacyjnej w równania różniczkowe i całkowanie tych ostatnich. — 8. Wiekowe perturbacje. — 9. Równania i zmienne kanoniczne. — Literatura str. 64—132

ROZDZIAŁ XX. Perturbacje specjalne.

1. Całkowanie mechaniczne. — 2. Wzory różnicowe. — 3. Zbieżność szeregów służących do mechanicznego całkowania. Wskazówki praktyczne. Klasyfikacja metod służących do obliczenia perturbacji specjalnych. — 4. Metoda Encke'go. — 5. Przykład. — 6. Przekształcenie do innych płaszczyzn fundamentalnych. Obliczenie nowych elementów ściśle stycznych. — 7. Porównanie z obserwacjami. Efemerydy. Miejsca normalne. Orbity ostateczne. — Literatura str. 133—176

ROZDZIAŁ XXI. Teorya ruchu księżycy.

1. Równania ruchu. — 2. Osie kręcące się. — 3. Pierwsze przybliżenie. Wyrazy rzędu zero. Orbita pośrednia. — 4. Całkowanie równań (15 bis). — 5. Określenie współczynnika A . — 6. Ruch węzła. Zasadnicze równanie. — 7. Całkowanie równania:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \theta z = 0.$$

8. Obliczenie stałej g i współczynników b_1 . — 9. Obliczenie wyznacznika D_0 . — 10. Rozwiązanie równania (32). Obliczenie współczynników b_2 . — 11. Ruch perigaeum. Wyprowadzenie równań. — 12. Łatwiejszy wyznacznik na c . — 13. Znaczenie stałej c . — 14. Kilka słów o innych teoriach księżycy. — 15. Ogólne uwagi o teorii księżycy. — Literatura str. 177—230

ROZDZIAŁ XXII. Zaćmienia.

1. Opis zaćmienia słońca. — 2. Warunki zaćmień słońca i księżycy. — 3. Ruch węzłów orbity księżycy. Saros. — 4. Bliższa analiza Sarosu. — 5. Znaczenie Sarosu dla przepowiedni zaćmień słońca w starożytności. — 6. Znaczenie zaćmień dla chronologii i dla teorii księżycy. — 7. Warunki, aby zaćmienie słońca było całkowite i długotrwałe. — 8. Efemerydy, kanony zaćmień i t. d. — 9. Współrzędne prostej środków. — 10. Zasadnicze równanie. — 11. Graniczenia i półcienia. — 12. Linia środkowego zaćmienia i pas całkowitego zaćmienia. — 13. Przepowiednia zaćmienia słońca w danym miejscu. — 14. Przykład. — 15. Zaćmienia księżycy. — Literatura str. 231—284

ROZDZIAŁ XXIII. Dynamiczna teorya precesyi i nutacy
oraz Eulerowskiej perturbacyi.

1. Równanie różniczkowe. — 2. Obliczenie momentów sił zewnętrznych. — 3. Przekształcenie równań precesyi. — 4. Całkowanie równań Poissona. — 5. Eulerowska perturbacya , str. 285—315

ROZDZIAŁ XXIV. Figury równowagi ciała ciekłego, obracającego się.

1. Zasadnicze założenia. — 2. Warunek graniczny. — 3. Kula i elipsoida. — 4. Potencjał przyciągania wewnątrz elipsoidy. — 5. Warunki równowagi. — 6. Elipsoidy obrotowe. — 7. Elipsoidy Jacobiego. — 8. Pierścień. — 9. Inne figury równowagi. — 10. Stałość równowagi. Teorya Poincarégo. — 11. Stałość pierścieni. — 12. Ciekły satelita. Teorya E. Roche'a. — 13. Równowaga ciała ciekłego, niejednorodnego. — Teorya Clairaut'a. — 14. Wnioski str. 316—371

ROZDZIAŁ XVIII.

Inne metody wyznaczenia orbit. Poprawianie pierwotnych elementów. Wyznaczenie orbit gwiazd podwójnych i rojów meteorytowych.

1. Metoda analityczna.

Metoda, której zamierzamy poświęcić słów kilka, nazywa się analityczną z następującego powodu. Już Newton wykazał, że można z obserwacji wyznaczyć paraboliczną orbitę, zaś matematycy drugiej połowy XVIII wieku podjęli to zadanie i rozszerzyli je na orbity eliptyczne, ale posługując się nie metodą *geometryczną* jak Newton a metodami *analitycznymi*. Stąd nazwa „metody analitycznej“ uczepiła się do metody stworzonej przez Lagrange'a i Laplace'a a w dalszym ciągu rozwijanej i doskonalonej przez francuskich matematyków i astronomów: Cauchy'ego, Binet'a, Yvon'a Villarceau, Pontécoulant'a i t. d. Stosunki pomiędzy polami trójkątów, które odgrywają tak ważną rolę w metodach Gaussa i Olbersa, równanie Eulera, na którym metoda Olbersa głównie polega, nie odgrywają tu żadnej roli; ale zasadnicze założenie, że planeta czy kometa krąży dookoła słońca po przecięciu stożkowem wedle praw ruchu Keplerowskiego pozostaje bez zmiany. Co więcej zakładamy, że ziemia także krąży po elipsie wedle praw ruchu Keplerowskiego [w metodach Gaussa i Olbersa nie robi się żadnych założeń co do natury ruchu ziemi]. To ostatnie założenie należy uważać za wadę metody analitycznej, bo można jeszcze od biedy przypuścić, że środek masy systemu: ziemia-księżyc krąży po elipsie Keplerowskiej, ale środek ziemi ciągle zbacza od toru środka masy systemu to w tę to w drugą stronę, правда, że nie więcej jak o $\frac{3}{4}$ promienia równikowego ziemi. Na uniewinnienie można przytoczyć chyba to, że i planeta z pewnością nie

kraży po elipsie Keplerońskiej, wszak niektóre z nich podlegają silnym perturbacjom ze strony Jowisza. Aby usunąć tę wadę H. Bruns obmyślił metodę „barycentryczną“, w której tak pozycje słońca jak planety [czy komety] przywodzą się do środka masy ziemi i księżycy. Jednak można wykonać tę redukcję dopiero wtedy, gdy odległości już są znane, wskutek czego zawsze trzeba robić dwa przybliżenia: jedno bez poprawek, drugie po wyznaczeniu odległości z poprawkami na aberację planetarną, parallaksę i redukcję do środka masy księżycy i ziemi.

W celu zapoznania się z metodą analityczną weźmiemy za punkt wyjścia równania

$$(1) \quad \begin{cases} x = X + \xi \\ y = Y + \eta \\ z = Z + \zeta, \end{cases}$$

w których x, y, z , są to heliocentryczne, ekliptyczne współrzędne planety, X, Y, Z także *współrzędne ziemi*, a ξ, η, ζ geocentryczne ekliptyczne współrzędne planety. Jeżeli oznaczymy dostawy kierunkowe prostej łączącej środek ziemi ze środkiem planety przez l, m, n , t. j. jeżeli położymy

$$l = \cos \beta \cos \lambda, \quad m = \cos \beta \sin \lambda, \quad n = \sin \beta,$$

to oznaczając, jak wprzód, odległość od ziemi do planety przez Δ będziemy mieli

$$(2) \quad \xi = l\Delta, \quad \eta = m\Delta, \quad \zeta = n\Delta$$

a równania (1) przejdą na

$$(1 \text{ bis}) \quad \begin{cases} x = X + l\Delta \\ y = Y + m\Delta \\ z = Z + n\Delta. \end{cases}$$

Napiszmy teraz równania ruchu Keplerońskiego dla planety i dla ziemi wprowadzając zamiast zwykłego czasu — używany już w poprzednich rozdziałach — czas $\tau = k(t - t_0)$

$$(3) \quad \frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{x}{r^3} = 0, \dots$$

$$(4) \quad \frac{d^2X}{d\tau^2} + \frac{X}{R^3} = 0, \dots$$

Jeżeli podstawimy wyrażenia¹⁾ na x, y, z z równań (1 bis) w równania (3) a potem wyrugujemy $\frac{d^2X}{d\tau^2} \dots$ i t. d. przez równania (4), to otrzymamy²⁾

$$l \frac{d^2\Delta}{d\tau^2} + 2 \frac{dl}{d\tau} \cdot \frac{d\Delta}{d\tau} + \frac{d^2l}{d\tau^2} \Delta = \frac{X}{R^3} - \frac{x}{r^3}$$

Tu znowu rugujemy x, y, z przez równania (1 bis), poczem otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned} l \frac{d^2\Delta}{d\tau^2} + 2 \frac{dl}{d\tau} \cdot \frac{d\Delta}{d\tau} + \left(\frac{d^2l}{d\tau^2} + \frac{l}{r^3} \right) \Delta &= X \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right) \\ m \frac{d^2\Delta}{d\tau^2} + 2 \frac{dm}{d\tau} \cdot \frac{d\Delta}{d\tau} + \left(\frac{d^2m}{d\tau^2} + \frac{m}{r^3} \right) \Delta &= Y \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right) \\ n \frac{d^2\Delta}{d\tau^2} + 2 \frac{dn}{d\tau} \cdot \frac{d\Delta}{d\tau} + \left(\frac{d^2n}{d\tau^2} + \frac{n}{r^3} \right) \Delta &= Z \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Równania (5) są liniowe względem Δ , $\frac{d\Delta}{d\tau}$ i $\frac{d^2\Delta}{d\tau^2}$; rozwiążemy je tak jak każdy inny system równań liniowych. Nastęrczają się przytem rozmaite uproszczenia: przedewszystkiem we wszystkich wyznacznikach oprócz jednego będzie czynnik: 2, który można skrócić, następnie we wszystkich wyznacznikach stojących w licznikach będzie czynnik: $\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}$, który można wyprowadzić za znak mianownika, wreszcie we wszystkich wyznacznikach oprócz jednego niektóre wyrazy będą znosić się. Np. wedle znanych twier-

¹⁾ Ponieważ założyliśmy, że ruch jest Keplerowski oraz że współrzędne są ekliptyczne, więc powinniśmy napisać

$$Z = 0, \quad \frac{d^2Z}{d\tau^2} = 0,$$

ale dla symetrii pozostawiamy obie wielkości.

²⁾ W następnym wywodzie aż do równania (8) włącznie trzymamy się V. Charliera. Die analytische Lösung des Bahnbestimmungsproblems. Arkiv f. Matematik (szwedzki), tom VII, Nr. 5.

dzeń [dla skrócenia pisaniny użyjemy znakowania Newtona, t. j. położymy:

$$\left[\frac{dl}{dt} = \dot{l}, \quad \frac{d^2l}{dt^2} = \ddot{l} \right]$$

$$\left| \begin{array}{ccc} l, \dot{l}, \ddot{l} + lr^{-3} \\ m, \dot{m}, \ddot{m} + mr^{-3} \\ n, \dot{n}, \ddot{n} + nr^{-3} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} l, \dot{l}, \ddot{l} \\ m, \dot{m}, \ddot{m} \\ n, \dot{n}, \ddot{n} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} l, \dot{l}, lr^{-3} \\ m, \dot{m}, mr^{-3} \\ n, \dot{n}, nr^{-3} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} l, \dot{l}, \ddot{l} \\ m, \dot{m}, \ddot{m} \\ n, \dot{n}, \ddot{n} \end{array} \right|$$

W ten sposób, kładąc jeszcze dla krótkości

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} l, \dot{l}, \ddot{l} \\ m, \dot{m}, \ddot{m} \\ n, \dot{n}, \ddot{n} \end{array} \right| = D \\ \left| \begin{array}{ccc} X, \dot{l}, \ddot{l} \\ Y, \dot{m}, \ddot{m} \\ Z, \dot{n}, \ddot{n} \end{array} \right| = D_1, \quad \left| \begin{array}{ccc} l, X, \ddot{l} \\ m, Y, \ddot{m} \\ n, Z, \ddot{n} \end{array} \right| = D_2, \quad \left| \begin{array}{ccc} l, \dot{l}, X \\ m, \dot{m}, Y \\ n, \dot{n}, Z \end{array} \right| = D_3, \end{array} \right.$$

otrzymamy równania na Δ , $\frac{d\Delta}{dt}$ i $\frac{d^2\Delta}{dt^2}$ w następującym kształcie:

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} D \cdot \Delta = D_3 \cdot \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right) \\ D \cdot \frac{d\Delta}{dt} = \frac{1}{2} D_2 \cdot \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right) \\ D \cdot \frac{d^2\Delta}{dt^2} = \left(D_1 - \frac{1}{r^3} D_1 \right) \cdot \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right). \end{array} \right.$$

W powyższych równaniach l, m i n są znane wprost z obserwacji, pochodne ich można także wyznaczyć z obserwacji, o czym będzie mowa dalej. W każdym razie możemy je uważać za znane.

Zatem równania (7) zawierają tylko cztery niewiadome: Δ , $\frac{d\Delta}{dt}$, $\frac{d^2\Delta}{dt^2}$

i r . Potrzebujemy jeszcze czwartego równania. Aby je otrzymać, podnieśmy równania (1 bis) do kwadratu i dodajmy do siebie a otrzymamy równanie

$$(8) \quad r^2 = R^2 + 2\Delta(lX + mY + nZ) + \Delta^2,$$

które nie zawiera żadnej nowej zmiennej. Rozpatrzmy to równanie wraz z pierwszym równaniem (7). Widzimy, że oba nie zawierają pochodnych Δ , przeto można odrazu rugować między nimi czy to Δ czy r . Tak w jednym jak w drugim razie otrzymamy wypadkowe równanie ósmego stopnia. To nas naprowadza na myśl, że to równanie jest identyczne z równaniem (21) poprzedniego rozdziału. Rzeczywiście można je nawet przyprowadzić do tego samego kształtu pisząc dla tego samego trójkąta: ziemia, słońce, planeta, do którego odnosi się równanie (8), związki (22) poprzedniego rozdziału. Zważywszy, że

$$\Delta = \frac{\rho}{\cos \beta}$$

będziemy mieli

$$r = \frac{R \sin \psi}{\sin z}, \quad \Delta = R \frac{\sin(z + \psi)}{\sin z}. \quad (9)$$

Równania (9) są równoważne równaniu (8), bo

$$lX + mY + nZ = -R \cos \psi,$$

(gdzie ψ jest to kąt przy ziemi). Wskutek tego nawet wcale nie trzeba rugować r , czy Δ pomiędzy równaniami (8) i pierwszym (7); dość jest podstawić r i Δ w pierwsze równanie (7). Otrzymamy wtedy

$$\frac{D_3}{D} \frac{\sin^4 z}{(R \sin \psi)^3} = \frac{D_3}{D} \cdot \frac{1}{R^3} \sin z - R \sin(z + \psi).$$

Położmy teraz

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_3}{D} \frac{1}{R^3} - R \cos \psi &= \eta_0 \cos q \\ R \sin \psi &= \eta_0 \sin q \\ \frac{D_3}{D} \cdot \frac{1}{(R \sin \psi)^3} &= m_0 \eta_0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

i podstawmy w poprzednie równanie. Przejdzie ono natychmiast w

$$\sin(z - q) = m_0 \sin^4 z, \quad (11)$$

t. j. w równanie (21) poprzedniego rozdziału. Jasną jest rzeczą, że η_0 , q i m_0 mogą być obliczone z równań (10), skoro tylko l , m , n oraz ich pierwsze i drugie pochodne będą znane. Wtedy równanie (11) da z a skoro będziemy mieli z , to natychmiast otrzymamy

tak r jak Δ z równań (9). Ponieważ równanie (11) jest identyczne z równaniem (21) poprzedniego rozdziału, więc dyskusja równania (21) w § 2 poprzedniego rozdziału¹⁾ stosuje się także tutaj. Pierwiastek odnoszący się do ziemi to pierwiastek $\Delta=0$. Ponieważ po odpowiednim przekształceniu można skrócić równanie, wynikające z rugowania r pomiędzy pierwszym równaniem (7) a równaniem (8), przez Δ , więc można powiedzieć, że zadanie o wyznaczeniu orbity sprowadza się do równania siódmego stopnia. Równania tego ominąć nie można, wypływa ono w każdej metodzie.

Ponieważ tak Δ jak R i r są z natury rzeczy dodatnie, więc zależnie od tego, czy

$$\frac{D_3}{D} \geq 0$$

musi być $r > R$, albo $r < R$. W pierwszym razie planeta (czy kometa) znajduje się dalej od słońca niż ziemia, a w drugim bliżej.

Nie wyjaśniliśmy dotąd pytania, skąd wziąć pochodne

$$\frac{dl}{dr}, \dots, \frac{d^2l}{dr^2}.$$

Dostawy są dane przez obserwacje, zaś ich pochodne można także obliczyć z obserwacji. Załóżmy np., że mamy trzy obserwacje, wtedy, używając wciąż tego zamego znakowania, co w poprzednich rozdziałach, możemy napisać:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} l_2 = l_2 + \left(\frac{dl_2}{dr}\right) r_1 + \left(\frac{d^2l_2}{dr^2}\right) \frac{r_1^2}{2} + \dots \\ l_1 = l_2 - \left(\frac{dl_2}{dr}\right) r_3 + \left(\frac{d^2l_2}{dr^2}\right) \frac{r_3^2}{2} - \dots \\ \text{i t. d.} \quad \text{i t. d.} \end{array} \right.$$

Jeżeli pominiemy dalsze wyrazy, to, ponieważ l_1 , l_2 i l_3 są znane z obserwacji, powyższe dwa równania wystarczą do obliczenia

$$\frac{dl_2}{dr} \quad \text{i} \quad \frac{d^2l_2}{dr^2}.$$

¹⁾ Najbardziej szczegółowa dyskusja równania ósmego stopnia w tym kształcie, w którym było tu podane, znajduje się w rozprawie L. Picart'a p. t. „Sur une équation du calcul des orbites“. Bull. astr., tom XXIX, str. 161—167.

Z analogicznych równań obliczymy

$$\frac{dm_2}{dt} \text{ i } \frac{d^2m_2}{dt^2}, \quad \frac{dn_2}{dt} \text{ i } \frac{d^2n_2}{dt^2}.$$

Spostrzegamy jednak, że wartości pochodnych, osobiwie drugich nie będą dokładne, bo w równaniach (12) pominęliśmy wszystkie wyrazy wyższych rzędów. Drugą przyczyną niedokładności będą błędy obserwacyi, które, jeśli l_2 , l_1 i l_3 nie są znacznie od siebie różne, mogą bardzo niekorzystnie wpłynąć na rezultaty. Gdybyśmy atoli mieli więcej obserwacyi niż trzy, to moglibyśmy skorzystać ze wzorów interpolacyjnych § 3 rozdz. II-go i określić pochodne pierwsze i drugie z większą dokładnością. Wogóle im więcej będziemy mieli obserwacyi, tem dokładniej wyznaczmy pochodne dostaw kierunkowych. Z tego powodu metoda analityczna, która w przypadku, gdy mamy tylko trzy obserwacje, okazuje się zawodną, daje dobre rezultaty właśnie wtedy, gdy mamy wiele obserwacyi do rozporządzenia. Rozumie się, że rachunki muszą być długie, tem dłuższe, im więcej obserwacyi.

2. Dowód, że w przypadku paraboli zawsze tylko jedno rozwiązanie czyni zadość wszystkim warunkom zadania.

Spełnimy teraz obietnicę daną w § 4 rozdz. XVI-go i dowiedzimy, że zawsze istnieje tylko jedna orbita paraboliczna spełniająca wszystkie warunki zadania. Możemy powiedzieć, że przy wyznaczeniu orbity metodą Olbersa otrzymujemy niekiedy trzy rozwiązania zamiast jednego dlatego, że nie wyzyskujemy wszystkich możebnych związków. Jeżeli weźmiemy w uwagę niektóre nadkompletowe związki, to okaże się, że tylko jedno rozwiązanie jest dopuszczalne. Tu, za przykładem Charlier'a weźmiemy do pomocy równania metody analitycznej wyłożone w poprzednim paragrafie. Weźmiemy równanie Lagrange'a, t. j. pierwsze równanie (7) i równanie (8), położymy dla prostoty

$$\frac{\Delta}{R} = u, \quad \frac{r}{R} = v, \quad \frac{D_3}{DR^4} = \lambda$$

$$lX + mY + nZ = Rh,$$

poczem te równania przybiorą postać

$$(7, I \text{ bis}) \quad u = \lambda (1 - v^{-2})$$

$$(8 \text{ bis}) \quad v^2 = 1 + 2hu + u^2.$$

Zauważymy mimochodem, że

$$h = -\cos \psi,$$

jak to zaraz widać, skoro porównamy równanie (8) z ostatniem równaniem przed równaniami (8) rozdz. XVI-go. Równanie (8 bis) jest czysto geometryczne, od wszelkich teorii dynamicznych niezależne; równania (7) są dynamiczne, oparte na teorii ruchu Keplerowskiego, stosują się zaś do wszystkich orbit bez względu na wartość mimośrod. Weźmy jeszcze równanie, odnoszące się specjalnie do ruchu parabolicznego, mianowicie równanie (55) rozdz. XIII-go. Jeżeli wprowadzimy doń czas τ zamiast czasu t , to będziemy mogli napisać

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = \frac{2}{r}.$$

Podstawmy tu zamiast współrzędnych heliocentrycznych komety x, y, z ich wartości wzięte z równań (1 bis), a otrzymamy

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Delta}{d\tau}\right)^2 + \Delta^2 \left[\left(\frac{dl}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dm}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dn}{d\tau}\right)^2 + 2\frac{d\Delta}{d\tau} \left[l \frac{dX}{d\tau} + m \frac{dY}{d\tau} + n \frac{dZ}{d\tau} \right] + \right. \\ \left. + 2\Delta \left[\frac{dl}{d\tau} \cdot \frac{dX}{d\tau} + \frac{dm}{d\tau} \cdot \frac{dY}{d\tau} + \frac{dn}{d\tau} \cdot \frac{dZ}{d\tau} \right] + \left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2 = \frac{2}{r} \end{aligned}$$

Możemy znacznie przekształcić to równanie. Tak np. dzieląc drugie równanie (7) przez pierwsze otrzymamy związek

$$\frac{d\Delta}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{D_2}{D_3} \Delta,$$

za pomocą którego wyrugujemy $\frac{d\Delta}{d\tau}$. Z drugiej strony zauważmy, że

$$\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2$$

to nie innego jak kwadrat prędkości ziemi po orbicie.

Na podstawie tego samego równania (55) rozdz. XIII-go, pamiętając o tem, że wprowadziliśmy czas τ zamiast czasu t oraz

pomijając małą różnicę między promieniem wodzącym orbity ziemskiej a połową jej wielkiej osi możemy przyjąć

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dt}\right)^2 = \frac{1}{R}.$$

Jeżeli jeszcze pomnożymy całe równanie przez R , to będziemy mogli napisać równanie na kwadrat prędkości komety w kształcie

$$a^2 u^2 + 2bu + 1 = \frac{2}{v}, \quad (13)$$

przyczem

$$a^2 = \left[\left(\frac{1}{2} \frac{D_2}{D_3} \right)^2 + \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dm}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dn}{dt} \right)^2 \right] R^2$$

$$b = \left[\frac{1}{2} \frac{D_2}{D_3} \cdot \left(l \frac{dX}{dt} + m \frac{dY}{dt} + n \frac{dZ}{dt} \right) + \frac{dl}{dt} \frac{dX}{dt} + \frac{dm}{dt} \frac{dY}{dt} + \frac{dn}{dt} \frac{dZ}{dt} \right] R^2.$$

Zaraz widać, że współczynniki a i b zawierają tylko wyrazy wiadome. Zresztą można będzie położyć $R=1$ i wogóle przy obliczeniu współczynników a i b pozwolić sobie na niektóre uproszczenia. Współczynnik a^2 jest oczywiście zawsze dodatni, co więcej musi być

$$a^2 > b^2.$$

Łatwo zrozumieć, dlaczego ta nierówność musi być spełniona. Wszak wyrażenie po lewej stronie równania (13) to kwadrat prędkości komety względem słońca, przedstawionej jako wypadkowa z prędkości ziemi na orbicie (przyjętej tu za jedną) i prędkości komety względem ziemi. Możnaby więc lewą stronę równania napisać w kształcie

$$a^2 u^2 - 2au \cos \varphi + 1,$$

przyczem φ byłby to kąt pomiędzy kierunkiem prędkości ziemi na orbicie a kierunkiem prędkości komety względem ziemi. Stąd widzimy, że rzeczywiście musi być

$$a^2 > b^2.$$

Podstawmy teraz wartość na v wziętą z równania (13) w równanie (8 bis); wyniknie stąd równanie szóstego stopnia

$$(u^2 + 2hu + 1)(a^2 u^2 + 2bu + 1) = 4$$

identyczne z owym równaniem Oppolzera, o którym wspominaliśmy w § 4 rozdz. XVI-go. Wprawdzie Oppolzer doszedł do równania szóstego stopnia rugując v między geometrycznym równaniem (8 bis) a równaniem Eulera, ale to wychodzi w gruncie rzeczy na jedno i to samo, albowiem Oppolzer uprościł równanie Eulera w taki sposób, że właściwie wziął ds zamiast s (s oznacza cięciwę), zaś my doszliśmy tu do równania szóstego stopnia rugując v między tem samym równaniem (8) a równaniem (13), które jest niezem innym jak inną formą równania na kwadrat prędkości

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2}{r}.$$

Lecz oprócz równania Oppolzera możemy otrzymać inne równanie, także szóstego stopnia rugując u pomiędzy równaniem (13) a równaniem Lagrange'a (7, I bis).

Z tego rugowania wynika równanie

$$(14) \quad (a^2\lambda^2 + 2b\lambda + 1)v^6 - 2v^5 - 2(a^2\lambda^2 + b\lambda)v^3 + a^2\lambda^2 = 0.$$

Wskutek nierówności $a^2 > b^2$ współczynnik przy v^6 jest koniecznie dodatni; współczynnik przy v^5 jest naturalnie zawsze odjemny a wyraz od v niezależny zawsze dodatni. Zatem jeżeli trzeci wyraz ma znak —, to mamy dwie przemiany znaków. Z drugiej strony jeżeli trzeci wyraz ma znak +, to liczba przemian jest znowu 2, więc czy w tym, czy w drugim razie mogą być co najwyżej dwa pierwiastki dodatnie. Ponieważ zaś wyraz od v niezależny jest dodatni, więc liczba pierwiastków dodatnich musi być parzystą i ostatecznie równanie (14) może mieć dwa pierwiastki dodatnie [chodzi nam tylko o dodatnie pierwiastki, bo tylko one mają fizyczne znaczenie]. Zresztą łatwo przekonać się, że równanie (14) posiada dwa pierwiastki dodatnie i łatwo znaleźć granice, w których te pierwiastki są położone, bo

$$\begin{array}{cccccccc} \text{dla } v = & 0 & \text{lewa strona równania (14) przywodzi się do } & a^2\lambda^2 & & & & \\ \text{" } v = & 1 & \text{" } & \text{" } & \text{" } & \text{" } & \text{" } & -1 \\ \text{" } v = & +\infty & \text{" } & \text{" } & \text{" } & \text{" } & \text{" } & +\infty. \end{array}$$

Tedy jeden dodatni pierwiastek jest położony pomiędzy $v=0$ a $v=1$, a drugi między $v=1$ a $v=+\infty$.

Spójrzmy teraz na równanie Lagrange'a (7, I bis). Ponieważ u jest z natury rzeczy dodatnie, więc gdy $\lambda > 0$ [to jest to

samo kryterium $\frac{D_3}{D} \geq 0$, o którym mówiliśmy w poprzednim paragrafie] to musi być $v > 1$ a drugi pierwiastek równania (14), t. j. ten, który jest mniejszy od jedności, jest wykluczony. Odwrotnie, gdy $\lambda = \frac{D_3}{DR^4} < 0$, to tylko pierwiastek mniejszy od jedności jest dopuszczalny, a drugi większy od jedności jest wykluczony. Można to wyrazić także w taki sposób, że równanie Lagrange'a ma tylko jeden pierwiastek wspólny z równaniem Oppolzera. Zatem tylko jeden pierwiastek równania (14) i tylko jeden system elementów spełnia wszystkie warunki i tylko ten jeden odpowiada rzeczywistości.

Pozostaje jeszcze pytanie, jak zastosować to kryterium do konkretnego przypadku. Czornyj, który stosował je do komety Crulsa, postąpił tak: z trzech systemów obliczył r_2 [jak się to robi, to wiemy z rozdz. XVI-go] i znalazł:

$$\begin{array}{r} \log r_2 = 9,80940 \quad 9,42205 \quad 9,18264 \\ - \log R_2 = -0,00171 \quad -0,00171 \quad -0,00171 \\ \hline \log v_2 = 9,80769 \quad 9,42034 \quad 9,18093 \end{array}$$

Z drugiej strony obliczył logarytmy współczynników równania (14) i znalazł

$$\begin{array}{r} \log \text{współczynnika przy } v^6 = 9,99489 \\ \text{ " " " } v^5 = 0,30268 \text{ n } ^1) \\ \text{ " " " } v^3 = 8,06382 \\ \text{ " " " } v^0 = 5,98130 \end{array}$$

Teraz podstawiał kolejno trzy wartości v_2 w równanie (14) i znalazł następujące wartości lewej strony tego równania:

$$-0,14683, \quad -0,00190, \quad -0,00001.$$

Ponieważ prawa strona równania jest zerem, więc dwie pierwsze wartości v_2 nie sprawdzają go, sprawdza go tylko trzecia [drobna różnica o jedną stotysięczną pochodzi z niedokładności rachunku, wszak Czornyj liczył 5-cyfrowymi logarytmami]. Zatem tylko trzeci system elementów daje prawdziwe rozwiązanie zadania, co

¹⁾ Czornyj obliczył dokładniej ten współczynnik. Gdyby przyjął nań wartość -2 , to logarytm byłby 0,30130 n.

zresztą w danym razie stwierdzono także przez porównanie drugiej pozycyi obliczonej kolejno z trzech systemów elementów z obserwowaną drugą pozycją oraz przez porównanie efemerydy z dalszemi obserwacyami.

3. Metoda Pontécoulanta. Wyznaczenie elementów.

Aby, o ile można, uniknąć wpływu błędów obserwacji Pontécoulant¹⁾ nie wprowadza pochodnych dostaw kierunkowych, pisze równania (1) dla wszystkich trzech pozycyi i wyraża współrzędne pierwszej i trzeciej przez współrzędne drugiej posługując się wzorami (28 bis) rozdz. XV-go. Zważywszy zaś, że ruch ziemi ma być Keplerowski oraz że współrzędne są ekliptyczne [por. uwagę na str. 3] kładzie $Z = 0$ i pisze równania:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 x_2 - b_1 \frac{dx_2}{dt} - X_1 = \Delta_1 \cos \beta_1 \cos \lambda_1 \\ a_1 y_2 - b_1 \frac{dy_2}{dt} - Y_1 = \Delta_1 \cos \beta_1 \sin \lambda_1 \\ a_1 z_2 - b_1 \frac{dz_2}{dt} = \Delta_1 \sin \beta_1 \\ x_2 - X_2 = \Delta_2 \cos \beta_2 \cos \lambda_2 \\ y_2 - Y_2 = \Delta_2 \cos \beta_2 \sin \lambda_2 \\ z_2 = \Delta_2 \sin \beta_2 \\ a_3 x_2 + b_3 \frac{dx_2}{dt} - X_3 = \Delta_3 \cos \beta_3 \cos \lambda_3 \\ a_3 y_2 + b_3 \frac{dy_2}{dt} - Y_3 = \Delta_3 \cos \beta_3 \sin \lambda_3 \\ a_3 z_2 + b_3 \frac{dz_2}{dt} = \Delta_3 \sin \beta_3. \end{array} \right.$$

W równaniach tych a_1, b_1, a_3, b_3 są to szeregi (30) rozdziału XV-go, a więc np.:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - \frac{1}{2} \frac{r_3^2}{r_2^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{r_3^3}{r_2^4} \cdot \frac{dr_2}{dt} + \dots \\ b_1 &= r_3 - \frac{1}{6} \frac{r_3^3}{r_2^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{r_3^4}{r_2^4} \cdot \frac{dr_2}{dt} - \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

¹⁾ Théorie analytique du système du monde, tom II, część III.

Dziewięć równań (13) zawierają dziewięć niewiadomych:

$$x_2, y_2, z_2, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, \frac{dz_2}{dt}, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3,$$

zatem mamy tyle równań, ile potrzeba do określenia wszystkich niewiadomych. Zresztą o ile będziemy uważać a_1, b_1, a_3 i b_3 za wiadome, to równania (15) będą liniowe względem wyliczonych wyżej niewiadomych. Po *Pontécoulant* traktuje je jako takie i rozwiązuje względem niewiadomych; wyrażenia na $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ pozostawia na boku, bo uważa je za zbędne przy dalszej analizie i bierze pod uwagę tylko wyrażenia na $x_2 \dots \frac{dx_2}{dt} \dots$. Ale po prawej stronie ostatnich wyrażen figurują wśród innych wielkości także współczynniki a_1, b_1, a_3, b_3 ; te zaś są, jak wiemy, zależne od $r_2, \frac{dr_2}{dt}$ i $\frac{d^2r_2}{dt^2}$, a więc są same funkcjami niewiadomych¹⁾ $x_2, \dots \frac{dx_2}{dt}$. Tedy w gruncie rzeczy owe wyrażenia są przestępne, bo szeregi $a_1, b_1 \dots$ są nieskończone a dalsze ich wyrazy zawierają coraz to wyższe dodatnie i ujemne potęgi niewiadomych. Wobec tego *Pontécoulant* zatrzymuje początkowo w szeregach a_1, b_1 i t. d. tylko po dwa pierwsze wyrazy zawierające prócz odstępów czasu jedynie r^{-3} i ruguje tę wielkość w następujący sposób. Najpierw zamiast $X_1, Y_1 \dots$ i t. d. wprowadza wyrażenia analogiczne do tych, które posłużyły do wyrugowania $x_1, y_1 \dots$, a więc kładzie

$$X_1 = A_1 X_2 - B_1 \frac{dX_2}{dt}, \dots$$

gdzie $A_1, B_1, A_3, B_3 \dots$ są to szeregi zupełnie podobne do $a_1, b_1 \dots$, w których atoli zamiast r_2 wszędzie figuruje R_2 . Właściwie ta zamiana nie jest potrzebną, bo X_1 i t. d. są wiadome z efemeryd, ale chodzi o pewną symetrię, szczególnie zaś o to, aby po pe-

¹⁾ Przypominamy, że $\frac{d^2r_2}{dt^2}$ wyraża się przez x_2, y_2, z_2 oraz przez ich pierwsze i drugie pochodne, ale drugie pochodne wyrażają się na mocy równań (3) znowu przez x_2, y_2 i z_2 i t. d., zatem szeregi a_1, b_1, a_3 i b_3 są funkcjami tylko odstępów czasu i sześciu zmiennych:

$$x_2, y_2, z_2, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, \frac{dz_2}{dt}.$$

wnych przeróbkach otrzymać w równaniach na $x_2 \dots$ i t. d. tę samą różnicę: $\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3}$, która figurowała w równaniach (5). Wreszcie Pontécoulant przyjmuje, że $\tau_1 = \tau_3$ ¹⁾, przez co naturalnie zyskuje pewne uproszczenie. Po tych przygotowaniach pisze równanie na z_2 . Przedstawia się ono w kształcie:

$$z_2 = M \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3} \right),$$

gdzie M oznacza funkcję wiadomych wielkości, którą bliżej określać nie potrzebujemy. Jeżeli tu znowu zamiast z_2 podstawimy jego wartość ze szóstego równania (15), to otrzymamy równanie

$$(16) \quad \Delta_2 = \frac{M}{\sin \beta_2} \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3} \right).$$

Poznajemy w niem pierwsze równanie (7) i widzimy, że znowu musimy dojść do owego równania 8-go [względnie 7-go] stopnia, o którym już wiemy, że go ominąć nie można. Pontécoulant łączy je z równaniem (8) i ze systemu równań (16) i (8)²⁾ oblicza r_2 i Δ_2 , a podstawivszy r_2 w równania na $x_2 \dots \frac{dx_2}{dt} \dots$ otrzymuje te sześć wielkości i przystępuje do obliczenia elementów. Właściwie należałoby przedtem wprowadzić poprawki na parallaxę, ku czemu trzebaby obliczyć także Δ_1 i Δ_2 , co jest możliwe, bo mamy gotowe ku temu równania [patrz wyżej] i posiadamy już r_2 .

Ale przejdźmy do obliczenia elementów.

Ze wzorów (55) rozdz. XIII-go, jeżeli pominiemy masę planety, jeżeli masę słońca przyjmiemy za jedność i jeżeli wprowadzimy czas τ wynika

$$(17) \quad \frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right].$$

Dalej ze wzorów (27) rozdz. XIII-go w połączeniu ze wzorami (68 bis) tegoż rozdziału wynikają wzory:

¹⁾ Przypadek, gdy $\tau_1 \geq \tau_3$ Pontécoulant rozpatruje tylko dla paraboli. Charlier we wyżej cytowanej rozprawie rozpatruje ten przypadek zupełnie ogólnie [metoda jego jest bardzo podobna do metody Pontécoulanta] — ale nam chodzi tylko o przykład metody analitycznej.

²⁾ Bo dogodniej jest nie dokonywać rugowania a natomiast rozwiązywać oba równania razem.

$$\begin{aligned} y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= c \sin i \sin \varrho \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= -c \sin i \cos \varrho \\ x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= c \cos i. \end{aligned}$$

Wedle wzorów (34) rozdz. XIII-go

$$c = k \sqrt{(m + m_1) a (1 - e^2)}.$$

Jeżeli stąd podstawimy c w poprzednie trzy równania i znowu zrobimy te same założenia co powyżej, to otrzymamy wzory:

$$\left. \begin{aligned} y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= \sqrt{a(1 - e^2)} \sin i \sin \varrho \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= -\sqrt{a(1 - e^2)} \sin i \cos \varrho \\ x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= \sqrt{a(1 - e^2)} \cos i. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Z czterech wzorów (17) i (18) możemy określić cztery elementy: a , ϱ , i oraz e . Następnie ze wzoru (38) rozdz. XIII-go, t. j. ze wzoru

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (19)$$

otrzymamy anomalie mimośrodową E a z tej przez równanie Keplera

$$M = E - e \sin E \quad (20)$$

anomalie średnią M . Z drugiej strony z równania (61 bis) rozdziału XIII-go możemy zaraz obliczyć średni ruch n . Pisząc to równanie trzeba przyjąć, że m_1 jest znikome a $m = 1$, t. j. trzeba położyć

$$n = \frac{k}{a^{3/2}}. \quad (21)$$

Skoro obliczymy n , to z równania

$$\frac{M}{n} = (t - t_0) \quad (22)$$

otrzymamy „epokę“ t_0 , bo M , n i czas drugiej obserwacji są wiadome. Wreszcie obliczymy stałą ω chociażby w następujący sposób.

Wiemy, że

$$(23) \quad \hat{\omega} = u - v.$$

Argument szerokości u obliczymy np. ze wzoru (37) rozdziału XIII-go, t. j. ze wzoru

$$(24) \quad \text{tang } u = \text{tang } (l - \odot) \sec i.$$

Wprawdzie do tego potrzeba mieć długość heliocentryczną l , ale tę łatwo obliczyć ze wzorów (35) rozdz. XVII-go, które zaraz dają:

$$(25) \quad \text{tang } (l - \odot) = \frac{\rho \sin (\lambda - \odot)}{\rho \cos (\lambda - \odot) - R}.$$

W równaniu (23) pozostaje jeszcze do określenia v , ale skoro mamy E , to przez wzór (40) rozdz. XIII-go, t. j. przez wzór

$$(26) \quad \text{tang } \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \text{ tang } \frac{1}{2} E$$

otrzymamy także wartość anomalii rzeczywistej v , poczem ze wzoru (23) określimy szósty i ostatni element $\hat{\omega}$.

Naszkieciliśmy tu jeden z wariantów metody analitycznej. Dużo dałoby się powiedzieć o innych jej wariantach, o tem, jak posunąć się dalej w przybliżeniach, jak przystosować do różnych przypadków, jak postępować w razie, gdy mamy więcej obserwacji. Ale nie mając na to wszystko miejsca odsyłamy ciekawych do wymienionych w spisie literatury na końcu tego rozdziału dzieł Kowalczyka, Yvon'a Villarceau, Charliera, Akessona i t. d.

Wedle zgodnej opinii praktyków metoda analityczna jest mniej dogodna od metod Olbersa i Gaussa.

4. Metoda O. Leuschnera.

Nietylko omówione tu, ale wogóle wszystkie dotychczasowe metody wychodzą ze zasadniczego założenia, że ruch ciała, którego orbitę mamy wyznaczyć, jest Keplerski. O ile chodzi o małe planety i komety, założenie powyższe okazuje się zazwyczaj dopuszczalnym. Wprawdzie i te ciała podlegają niekiedy znacznym perturbacjom ze strony wielkich planet, ale pospolicie można sobie jakoś z tem poradzić: można wyznaczyć pierwszą orbitę, potem,

gdy nazbiera się więcej obserwacji. wyznacza się dokładniejszą orbitę, potem uwzględnia się perturbacje [o tem wszystkim będzie mowa w dalszych rozdziałach]. Niekiedy jednak zdarzają się pewne trudności. Największe trudności zdarzają się przy wyznaczeniu orbit nowo odkrytych satelitów, bo tu perturbacje pochodzą od samego słońca. Centralne ciało, planeta znajduje się wprawdzie bliżej niż słońce, ale zato masa słońca ogromnie przemaga nad masą planety. Hypoteza, że satelita porusza się ruchem Keplerowskim okazuje się nazbyt daleką od rzeczywistości. Zdarzyło się to z 9-tym księżycem Saturna oraz z 6-tym i 7-mym satelitą Jowisza. Są to satelity stosunkowo dalekie od planety (por. rozdz. XIV) a w dodatku około czasu odkrycia podlegały znacznym perturbacjom. Zresztą także dla księżyca ziemi hipoteza ruchu Keplerowskiego jest nazbyt daleka od rzeczywistości; ale w tym przypadku nie potrzebujemy określać „pierwszej“ orbity. — Metodę przystosowaną do przypadku, gdy trzeba wyznaczyć „pierwszą orbitę“, podał A. O. Leuschner. Obmyślił on pewną modyfikację metody Laplace'a (analitycznej) znacznie dogodniejszą od pierwowzoru i rozszerzył ją na przypadek, w którym satelita porusza się wprawdzie wedle praw grawitacji, ale nie Keplerowskim ruchem. Pomiędzy metody Leuschnera¹⁾ służące do wyznaczenia orbit komet i planet, zato postaramy się pokrótce wyłożyć metodę służącą do wyznaczenia orbit satelitów.

Jako fundamentalną płaszczyznę Leuschner obiera płaszczyznę równika. Okoliczność ta niema żadnego głębszego znaczenia; poprostu L. przekonał się, że w danem zadaniu dogodniej jest wziąć za płaszczyznę fundamentalną płaszczyznę równika niż płaszczyznę ekliptyki. Stosownie do założenia, że satelita krąży naokoło planety wedle praw grawitacji, ale nie ruchem Keplerowskim, L. pisze zasadnicze równania ruchu w kształcie

$$\frac{d^2x}{dt^2} + mk^2 \frac{x}{r^3} = -k^2 \left\{ \frac{[x]}{[r]^3} - \frac{(x)}{(r)^3} \right\} \quad (27)$$

W równaniach (27) x, y, z oznaczają prostokątne współrzędne satelity względem planety, m oznacza masę planety; $[x], [y], [z]$,

¹⁾ W III-ciem wydaniu „teoretycznej astronomii“ Klinkerfuesa H. Buchholz wyłożył metody Leuschnera wedle wskazówek samego autora.

GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

oznaczają prostokątne współrzędne satelity względem słońca; (x) , (y) , (z) współrzędne planety względem słońca. Oprócz tego X , Y , Z oznaczają współrzędne geocentryczne słońca a ξ , η , ζ współrzędne geocentryczne planety. Widzimy, że po prawej stronie równań (27) stoją składowe różnice między przyciąganiem słońca na satelitę i tem przyciąganiem, które słońce wywierałoby na satelitę, gdyby znajdował się na miejscu planety. Wyjaśnienia tu nie potrzeba, bo jasną jest rzeczą, że nie co innego jak właśnie ta różnica jest przyczyną perturbacyi w ruchu satelity. Jednocześnie widzimy, na czem polega zasadnicze przeciwieństwo z innymi metodami, bo gdybyśmy założyli, że ruch satelity jest Keplerowski, to musielibyśmy po prawej stronie równań (27) napisać poprostu zera.

Aby porównać równania (27) z obserwacyami, trzeba wprowadzić do nich współrzędne satelity względem ziemi. Możemy to uczynić za pomocą różnych związków pomiędzy współrzędnymi. Tak np. współrzędne satelity względem planety są równe różnicom między geocentrycznymi współrzędnymi a takiemiż współrzędnymi planety, zaś geocentryczne współrzędne planety są równe sumom heliocentrycznych współrzędnych planety i geocentrycznych współrzędnych słońca i t. d. Za pomocą tych związków rugujemy x , y , z ... $[x]$, $[y]$, $[z]$ i przyspieszenia $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$. Odległości satelity od planety r i od słońca $[r]$ nie rugujemy: pozbędziemy się ich później w inny sposób. Pomijamy te rugowania, bo nie przedstawiają nic trudnego, ani osobliwego, a zajęłyby dużo miejsca; powiemy tylko, że rugując przyspieszenia satelity względem planety, t. j. rugując $\frac{d^2x}{dt^2}$... tem samym wprowadzamy inne przyspieszenia, mianowicie przyspieszenia: $\frac{d^2(x)}{dt^2}$... planety względem słońca i przyspieszenia $\frac{d^2X}{dt^2}$ słońca względem ziemi. Te przyspieszenia są znane; moglibyśmy je wyrazić zupełnie dokładnie z uwzględnieniem wszelkich perturbacyi, ale popolicie wystarczy założyć, że planeta krąży naokoło słońca ruchem Keplerowskim a słońce krąży naokoło ziemi takim samym ruchem. Położymy zatem dla słońca

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{k^2X}{R^3}$$

.

i tak samo dla planety

$$\frac{d^2(x)}{dt^2} = - \frac{k^2(1+m)(x)}{(r)^3}$$

.....

Po wyrugowaniu przyspieszeń przejdziemy jeszcze od współrzędnych prostokątnych do biegunowych, zamiast zwykłego czasu wprowadzimy czas $\tau = kt$, poczem otrzymamy następujące równania:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{d\tau^2} + \sigma \left[\frac{1}{r^3} - \left(\frac{d\alpha}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{[r]^3} \right] &= \frac{\sigma}{r^3} \cos[(\alpha) - \alpha] + \\ &+ \frac{S}{m} \left[\frac{1}{[r]^3} - \frac{1}{R^3} \right] \cos[A - \alpha] - \frac{S}{(r)^3} \cos[(\alpha) - \alpha], \\ 2 \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{d\alpha}{d\tau} + \sigma \frac{d^2\alpha}{d\tau^2} &= \frac{(\sigma)}{r^3} \sin[(\alpha) - \alpha] + \\ &+ \frac{S}{m} \left[\frac{1}{[r]^3} - \frac{1}{R^3} \right] \sin(A - \alpha) - \frac{S}{(r)^3} \sin[(\alpha) - \alpha], \\ \frac{d^2\sigma}{d\tau^2} \text{tang } \delta + 2 \frac{d\sigma}{d\tau} \cdot \frac{d}{d\tau} (\text{tang } \delta) + \\ &+ \sigma \left[\frac{\text{tang } \delta}{r^3} + \frac{\text{tang } \delta}{m[r]^3} + \frac{d^2}{d\tau^2} (\text{tang } \delta) \right] = \\ &= (\sigma) \frac{\text{tang } (\delta)}{r^3} + \frac{S}{m} \left[\frac{1}{[r]^3} - \frac{1}{R^3} \right] \text{tang } D - \frac{(s) \text{ tang } (d)}{(r)^3}. \end{aligned} \right\} (28)$$

W równaniach (28) α , δ , ϱ są to geocentryczne, równikowe współrzędne satelity, $\sigma = \varrho \cos \delta$ jest to jego „skrócona“ odległość od ziemi; (α) , (δ) , (ϱ) i $(\sigma) = (\varrho) \cos(\delta)$ są to geocentryczne, równikowe współrzędne planety oraz jej „skrócona“ odległość od ziemi; (a) , (d) , (r) i $(s) = (r) \cos(d)$ są to heliocentryczne, równikowe współrzędne planety i jej „skrócona“ odległość od słońca; $[a]$, $[d]$, $[r]$ i $[s] = [r] \cos[d]$ są to heliocentryczne, równikowe współrzędne satelity i jego „skrócona“ odległość od słońca; A , D , R i $S = R \cos D$ są to geocentryczne współrzędne słońca i jego „skrócona“ odległość od ziemi, wreszcie m oznacza, jak poprzednio, masę planety. Większa część wchodzących do równań (28) wielkości jest wiadoma, mianowicie wiadome są:

$$m, \alpha, \delta, \frac{d\alpha}{d\tau}, \frac{d\delta}{d\tau}, \frac{d^2\alpha}{d\tau^2}, \frac{d^2\delta}{d\tau^2}, (\sigma), (\alpha) (\delta), (r), (a), (d), (s), R, A, D, S,$$

niewiadome są tylko:

$$\sigma, \frac{d\sigma}{dt}, \frac{d^2\sigma}{dt^2} \text{ oraz } r \text{ i } [r].$$

Podobnie jak równania (5) są liniowe względem Δ oraz jego pierwszej i drugiej pochodnej, tak samo równania (28) są liniowe względem σ oraz jego pierwszej i drugiej pochodnej; możemy przeto rozwiązać je zwykłymi metodami. Równań na pochodne pisać nie potrzebujemy, zato napiszemy równanie na σ , albo raczej na $\varrho = \sigma \sec \delta$ [δ jest znane z obserwacji]. Równanie to ma kształt następujący:

$$(29) \quad \varrho = \frac{E}{r^3} + \frac{F}{[r]^3} + G.$$

E, F, G są to funkcyje samych wiadomych wielkości, mianowicie

$$E = \frac{(x)}{\cos \delta}, \quad F = \frac{x}{m \cos \delta}, \quad G = -F \left[\frac{1}{R^3} + \frac{m[x]}{x(r)^3} \right],$$

zaś

$$\begin{aligned} x &= -\frac{S}{\Delta} \left\{ (\tan \delta \cos [A - \alpha] - \tan D) \frac{d\alpha}{dt} + \sin [A - \alpha] \frac{d}{dt} (\tan \delta) \right\} \\ (x) &= -\frac{(\sigma)}{\Delta} \left\{ (\tan \delta \cos [(\alpha) - \alpha] - \tan(\delta)) \frac{d\alpha}{dt} + \sin [(\alpha) - \alpha] \frac{d}{dt} (\tan \delta) \right\} \\ [x] &= -\frac{(s)}{\Delta} \left\{ (\tan \delta \cos [(a) - \alpha] - \tan(d)) \frac{d\alpha}{dt} + \sin [(a) - \alpha] \frac{d}{dt} (\tan \delta) \right\}, \end{aligned}$$

wreszcie

$$\Delta = \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^3 \tan \delta - \frac{d^2\alpha}{dt^2} \cdot \frac{d}{dt} (\tan \delta) + \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{d^2}{dt^2} (\tan \delta).$$

Ażeby wyrugować r i $[r]$ z równania (29), bierzemy dwa trójkąty, jeden: ziemia, satelita, planeta, drugi: ziemia, satelita, słońce. Jeżeli oznaczymy wiadomy kąt przy ziemi w pierwszym trójkącie przez ψ a w drugim przez $[\psi]$, to będziemy mieli:

$$(30) \quad \begin{cases} r^2 = (\varrho)^2 + \varrho^2 - 2(\varrho)\varrho \cos \psi \\ [r]^2 = R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho \cos [\psi]. \end{cases}$$

Widzimy stąd, że, podobnie jak w tamtych metodach, rozwiązanie skoncentrowało się około pewnego systemu równań, tylko nie około systemu dwóch, a około systemu trzech równań, mianowicie około równań (29) i (30). Gdybyśmy zechcieli rugować niewiadome,

to otrzymalibyśmy równania algebraiczne nazbyt wysokiego stopnia, z którymi niewiadomo co począć. Wobec tego trzeba uciec się do kolejnych przybliżeń. Przy obliczeniu orbity 7-go księżycy Jowisza — zapewne wedle wskazówek Leuschnera — R. T. Crawford i A. J. Champreux zaczynają od sformowania równania na r , które jest małą wielkością w porównaniu z ϱ i $[r]$. Kładą oni

$$H = \frac{F}{[r]^3} + G \quad (31)$$

i początkowo do prawej strony równania (31) zamiast $[r]$, t. j. zamiast odległości satelity od słońca — wstawiają (r) , t. j. odległość planety od słońca. W ten sposób równanie (29) przechodzi w

$$\varrho = \frac{E}{r^3} + H, \quad (32)$$

przyczem H jest wielkością przybliżenie wiadomą. Teraz rugują ϱ między pierwszym równaniem (30) a równaniem (32) i otrzymują po elementarnych przekształceniach

$$r^8 - \{[(\varrho) \cos \psi - H]^2 + (\varrho)^2 \sin^2 \psi\} r^6 + 2E[(\varrho) \cos \psi - H] r^3 - E^2 = 0,$$

a więc równanie tylko 8-go stopnia, które zresztą można napisać w postaci

$$r^3 = \frac{E \pm r^3 \sqrt{r^2 - (\varrho)^2 \sin^2 \psi}}{(\varrho) \cos \psi - H}. \quad (33)$$

W pierwszym przybliżeniu Crawford i Champreux zaniedbują wyraz zawierający pierwiastek kwadratowy i kładą

$$r^3 = \frac{E}{(\varrho) \cos \psi - H},$$

następnie podstawiają otrzymaną stąd wartość na r w prawą stronę równania (33) i otrzymują naturalnie dwie wartości na r , które znowu podstawiają w prawą stronę tegoż samego równania (33) i otrzymują cztery wartości na r . Z nich zatrzymują tylko te dwie, które są bliskie do pierwszych dwóch przybliżonych wartości. Znowu podstawiają w prawą stronę równania (33) i tak w kółko dopóty, aż wreszcie otrzymują prawie te same wartości, co za przedostatnim razem. Ale te ostateczne wartości na r — powiedzmy — r_1 i r_2

nie są jeszcze ściśle, bo cały rachunek został wykonany z przybliżoną wartością na H . Tedy Crawford i Champreux obliczają ρ z równania (32) a $[r]$ z drugiego równania (30) i naturalnie otrzymują tak na ρ jak na $[r]$ po dwie wartości. Wogóle trzeba wciąż prowadzić dwa rachunki, więc np. z równania (31) wynikną też dwie wartości na H . Trzeba wrócić z niemi do równania (33) i podstawić raz r_1 i odpowiednie H_1 , drugi raz r_2 i odpowiednie H_2 . Znowu tak samo jak poprzednio i wciąż prowadząc dwa rachunki trzeba przez kolejne przybliżenia określić nowe dwie wartości na r — powiedzmy — r'_1 i r'_2 , czyniące ściśle zadość równaniu (33) przy wartościach H_1 i H_2 na H . Ale H_1 i H_2 jeszcze nie są ściśle, trzeba więc na nowo obliczać nowe wartości na H — powiedzmy H'_1 i H'_2 , trzeba znowu szukać odpowiednich wartości na r i tak w kółko dopóty, dopóki nie otrzymamy wartości na H i r tak ściśle czyniących zadość równaniom (33), (32) i drugiemu (30), że przy powtórzeniu rachunków otrzymamy te same wartości, co poprzednio. Naturalnie można wykonać te kolejne przybliżenia różnemi metodami, np. Leuschner obmyślił metodę polegającą na obliczeniu kolejnych poprawek.

Z powyższego opisu wynika, że otrzymujemy odrazu r , ρ i $[r]$. Mając ρ znajdziemy zaraz oba σ ze wzoru:

$$\sigma = \rho \cos \delta,$$

bo δ jest wiadome, potem z drugiego równania (28) obliczymy oba $\frac{d\sigma}{d\tau}$. Dalej obliczymy ξ , η , ζ ze wzorów

$$\xi = \sigma \cos \alpha, \quad \eta = \sigma \sin \alpha, \quad \zeta = \sigma \operatorname{tang} \delta,$$

zaś x , y , z ze wzorów

$$x = \xi - X, \quad y = \eta - Y, \quad z = \zeta - Z.$$

Z kolei obliczymy $\frac{dx}{d\tau}$... i t. d. ze wzorów

$$\frac{dx}{d\tau} = a_x \sigma - \frac{dX}{d\tau}, \quad \frac{dy}{d\tau} = a_y \sigma - \frac{dY}{d\tau}, \quad \frac{dz}{d\tau} = a_z \sigma - \frac{dZ}{d\tau}.$$

Z tablic prostokątnych współrzędnych słońca, które znajdują się w kalendarzach astronomicznych, z łatwością obliczymy pochodne geocentrycznych współrzędnych słońca stosując interpola-

cyjne (różnicowe) wzory (8) rozdz. II-go; co zaś do a_x , a_y , a_z , to obliczymy je ze wzorów

$$\begin{aligned} a_x &= \cos \alpha \frac{\lambda}{x} - \sin \alpha \frac{d\alpha}{d\tau} \\ a_y &= \sin \alpha \frac{\lambda}{x} + \cos \alpha \frac{d\alpha}{d\tau} \\ a_z &= \operatorname{tang} \delta \frac{\lambda}{x} + \frac{d}{d\tau} (\operatorname{tang} \delta), \end{aligned}$$

w których

$$\frac{\lambda}{x} = -\frac{1}{2} \frac{C_1 \frac{d^2\alpha}{d\tau^2} + C_2 n}{C_1 \frac{d\alpha}{d\tau} + C_2 \frac{d}{d\tau} (\operatorname{tang} \delta)}.$$

Tu znowu:

$$\begin{aligned} C_1 &= \operatorname{tang} \delta \cdot \cos (A - \alpha) - \operatorname{tang} D \\ C_2 &= \sin (A - \alpha) \\ n &= \operatorname{tang} \delta \left(\frac{d\alpha}{d\tau} \right)^2 + \frac{d^2}{d\tau^2} (\operatorname{tang} \delta). \end{aligned}$$

Posiadając planetocentryczne współrzędne x , y , z i prędkości \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} obliczymy elementy za pomocą wzorów § 3 obecnego rozdziału, albo też za pomocą wzorów § 6 rozdz. XX-go.

Rozstrzygnąć, która z dwu otrzymanych orbit odpowiada rzeczywistości, można przez porównanie z obserwacjami, naturalnie nie temi, które służyły do wyznaczenia orbity. Ale może zdarzyć się, ba! nawet zdarzyło się z 8-mym księżycem Jowisza, że nie można rozpoznać, czy obserwowane ciało jest satelitą wielkiej planety, czy małą planetą. Wtedy trzeba z owych dwu wartości na σ i $\frac{d\sigma}{d\tau}$ obliczyć nie tylko planetocentryczne, ale także heliocentryczne orbity. W ten sposób otrzymamy cztery orbity. Rozpoznamy pomiędzy niemi rzeczywistą również przez porównanie z obserwacjami bądź nowemi, bądź dawnemi, ale przy wyznaczeniu orbity niezużytkowanemi. Można też obliczyć siły przyciągające planety i słońca; jeżeli przemaga przyciąganie planety, to tylko planetocentryczne orbity są możebne, jeżeli zaś przemaga przyciąganie słońca, to możebnemi są tylko heliocentryczne orbity.

Załóżmy, że już rozpoznaliśmy, która orbita odpowiada rzeczywistości, oraz, że jest to orbita planetocentryczna. Wtedy z jej

elementami, najlepiej metodą Encke'go [patrz rozdz. XX-ty], obliczamy „perturbacje specjalne“ współrzędnych i prędkości i odejmujemy je od $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Do uwolnionych od perturbacji współrzędnych i prędkości stosujemy czy to jedną z dawniejszych metod poprawiania orbit [o tych metodach będzie mowa w obecnym rozdziale, tylko nieco dalej], czy też własną metodę Leuschnera. Dla braku miejsca wyłożyć jej nie możemy, powiemy tylko, że odnośne wzory znajdują się w 3 ciem wydaniu teoretycznej astronomii Klinkerfuesa [patrz spis literatury na końcu rozdziału] na str. 1004 i następnych, objaśnienia zaś są zamieszczone na str. 477 i następnych. Tamże można poinformować się o poprawkach na parallaksę i aberację.

5. Metoda waryacji odległości.

Metody, które dotychczas opisywaliśmy, służą do obliczenia pierwszej orbity. Teraz pokrótce powiemy, jak poprawić taką pierwszą orbitę przed wyznaczeniem orbity ostatecznej. Metod, służących do poprawiania jest kilka: opiszemy przedewszystkiem metodę waryacji odległości; na czym zaś ona polega, to zaraz zobaczymy.

Wyobraźmy sobie, że mamy elementy orbity oraz trzy nowe obserwacje w chwilach czasu t_1, t_2, t_3 . Ponieważ posiadamy elementy, więc możemy dla tych momentów czasu obliczyć odległości od ziemi $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, z pomocą tych ostatnich możemy poprawić nasze obserwacje na aberację planetarną i na parallaksę a następnie z poprawionych obserwacji i z obliczonych odległości możemy obliczyć nowe elementy. Weźmy mianowicie skrajne pozycje: ze sześciu wielkości $\Delta_1, \alpha_1, \delta_1, \Delta_3, \alpha_3, \delta_3$ możemy obliczyć wszystkie sześć elementów. Zazwyczaj obliczamy od razu trzy systemy elementów [dlaczego trzy, to wprędce zobaczymy]: jeden z $\Delta_1, \alpha_1, \delta_1$ i $\Delta_3, \alpha_3, \delta_3$, drugi z $\Delta_1 + \eta_1, \alpha_1, \delta_1$ oraz $\Delta_3, \alpha_3, \delta_3$, trzeci z $\Delta_1, \alpha_1, \delta_1$ oraz $\Delta_3 + \eta_3, \alpha_3, \delta_3$, przy czem η_1 i η_3 są to pewne małe, dowolne¹⁾ przyrosty. Naturalnie elementy wszystkich trzech nowych systemów będą nieco różnić się od danych pierwotnych elementów, ale jeżeli obliczymy z któregokolwiek systemu skrajne pozycje planety, to obliczone pozycje muszą być iden-

¹⁾ W praktyce zazwyczaj zmieniają logarytmy odległości o 0,001 lub 0,002.

tyczne z obserwowanemi, bo przecie same elementy zostały z tych właśnie obserwacji obliczone. Natomiast jeżeli obliczymy współrzędne α i δ w drugiej pozycji, to obliczone współrzędne czy to α_2^I i δ_2^I z pierwszego, czy α_2^{II} i δ_2^{II} z drugiego, czy α_2^{III} i δ_2^{III} z trzeciego systemu będą i między sobą i z obserwowanemi współrzędnymi α_2 , δ_2 niezgodne, bo te ostatnie wcale nie weszły do rachunku. Jednakże któraś z obliczonych pozycji będzie do obserwowanej bliższa niż dwie pozostałe. Zakładamy, że najbliższą jest właśnie pierwsza i rozumiemy w następujący sposób: ponieważ zmieniliśmy tylko skrajne odległości, więc zmiany obliczonych współrzędnych są funkcjami zmian Δ_1 i Δ_3 , zatem

$$\left. \begin{aligned} d\alpha_2 &= \frac{\partial \alpha_2}{\partial \Delta_1} d\Delta_1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \Delta_3} d\Delta_3 \\ d\delta_2 &= \frac{\partial \delta_2}{\partial \Delta_1} d\Delta_1 + \frac{\partial \delta_2}{\partial \Delta_3} d\Delta_3. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Dalsze wyrazy szeregu Taylora pomijamy, bo przypuszczamy, że przyrosty $d\Delta_1$ i $d\Delta_3$ są o tyle małe, iż można pominąć kwadraty i wyższe potęgi. Lecz skoro zamiast Δ_1 wzięliśmy $\Delta_1 + \eta_1$, a Δ_3 pozostawiliśmy bez zmiany, to α_2^I przeszło w α_2^{II} a δ_2^I w δ_2^{II} , zatem wedle wzorów (34)

$$\alpha_2^{II} - \alpha_2^I = \frac{\partial \alpha_2}{\partial \Delta_1} \eta_1, \quad \delta_2^{II} - \delta_2^I = \frac{\partial \delta_2}{\partial \Delta_1} \eta_1.$$

Znowu, gdy Δ_1 pozostawało bez zmiany a Δ_3 wzrosło o η_3 , to α_2^I przeszło w α_2^{III} a δ_2^I w δ_2^{III} , przeto

$$\alpha_2^{III} - \alpha_2^I = \frac{\partial \alpha_2}{\partial \Delta_3} \eta_3, \quad \delta_2^{III} - \delta_2^I = \frac{\partial \delta_2}{\partial \Delta_3} \eta_3.$$

W powyższych wzorach wszystko jest wiadome oprócz cząstkowych pochodnych $\frac{\partial \alpha_2}{\partial \Delta_1} \dots$ i t. d., można więc określić z nich właśnie pochodne cząstkowe. Mianowicie otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \Delta_1} &= \frac{\alpha_2^{II} - \alpha_2^I}{\eta_1}, & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \Delta_3} &= \frac{\alpha_2^{III} - \alpha_2^I}{\eta_3} \\ \frac{\partial \delta_2}{\partial \Delta_1} &= \frac{\delta_2^{II} - \delta_2^I}{\eta_1}, & \frac{\partial \delta_2}{\partial \Delta_3} &= \frac{\delta_2^{III} - \delta_2^I}{\eta_3}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Teraz spostrzegamy, w jakim celu obliczaliśmy aż trzy systemy elementów: chodziło o to, aby mieć skąd obliczyć wartości pochodnych cząstkowych α_2 i δ_2 . Skoro je otrzymamy, to utworzymy różnice między obserwowanymi współrzędnymi α_2 i δ_2 a współrzędnymi α_2^I i δ_2^I , które wedle założenia różnią się od obserwowanych mniej niż pozostałe. Wedle wzorów (34) mamy

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 - \alpha_2^I = \frac{\partial \alpha_2}{\partial \Delta_1} d\Delta_1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \Delta_3} d\Delta_3 \\ \delta_2 - \delta_2^I = \frac{\partial \delta_2}{\partial \Delta_1} d\Delta_1 + \frac{\partial \delta_2}{\partial \Delta_3} d\Delta_3. \end{array} \right.$$

We wzorach (36) wyrazy po lewej stronie są znane, pochodne cząstkowe figurujące po prawej stronie są też znane, bo możemy je obliczyć ze wzorów (35); jedynymi niewiadomymi są przyrosty $d\Delta_1$ i $d\Delta_3$ odpowiadające różnicom między obserwowanymi a obliczonymi współrzędnymi. Określamy tedy $d\Delta_1$ i $d\Delta_3$ ze wzorów (36) i w ten sposób dowiadujemy się, o ile trzeba zmienić Δ_1 i Δ_3 , aby poprawiona orbita przechodziła także przez środkową pozycję. Wreszcie z poprawionymi odległościami $\Delta_1 + d\Delta_1$ i $\Delta_3 + d\Delta_3$ i temi samymi obserwowanymi α_1 i δ_1 , α_2 i δ_2 , którymi posługiwaliśmy się poprzednio, obliczamy czwarty i ostatni system elementów. Jeżeli tylko $d\Delta_1$ i $d\Delta_3$ nie są zbyt duże, to obliczona z tego czwartego systemu druga pozycja — np. α_2^{IV} , δ_2^{IV} — będzie zupełnie ściśle zgadzać się z obserwowaną pozycją α_2 , δ_2 , jeżeli zaś $d\Delta_1$ i $d\Delta_3$ są duże, to może pozostać jeszcze pewna niezgodność, bo wzory (34), (35) i (36) jako polegające na przypuszczeniu, że można poprzestać na liniowych wyrazach szeregu Taylora, okażą się wtedy niedość dokładnymi; ale wtedy można z czwartymi elementami postąpić tak jak przedtem z pierwotnymi i przez nowe próby i rachunki można osiągnąć zupełną zgodność.

Jeżeli obserwowane α_2 i δ_2 są zawarte pomiędzy obliczonymi, co zresztą można zawsze osiągnąć odpowiednio dobierając próbne przyrosty η_1 i η_3 ; to można sobie ułatwić obliczenie czwartego, ostatecznego systemu elementów przez interpolację. Rzeczywiście, jeżeli α_2 , δ_2 jest zawarte między α_2^I , δ_2^I a α_2^{II} , δ_2^{II} , to ostateczne elementy będą zawarte między elementami pierwszego i drugiego systemu. Swoją drogą można interpolować tylko wtedy, gdy różnice są małe; — gdyby były duże, to nie mając skąd utworzyć drugich i trzecich różnic nie moglibyśmy interpolować dokładnie.

Założyliśmy tutaj, że z pomiędzy trzech obliczonych par współrzędnych pierwsza była najbliższa do obserwowanych, ale tak samo mogłaby być najbliższą druga lub trzecia. Naturalnie wszystkie nasze rozumowania pozostałyby bez zmiany, tylko biorąc za punkt wyjścia drugą parę współrzędnych otrzymalibyśmy jako poprawione skrajne odległości $\Delta_1 + \eta_1 + d\Delta_1$ i $\Delta_3 + d\Delta_3$, a biorąc za punkt wyjścia trzecią parę obliczonych współrzędnych otrzymalibyśmy poprawione skrajne odległości: $\Delta_1 + d\Delta_1$ i $\Delta_3 + \eta_3 + d\Delta_3$.

Natychmiast spostrzegamy, że powyższa metoda nadaje się nietylko w przypadku, gdy mamy trzy nowe obserwacje, ale także w przypadku, gdy mamy ich cztery, pięć..., wogóle dowolnie wiele. Założmy zatem, że mamy n obserwacji [$n=3, 4, \dots$ i t. d.]. Bierzemy dwie z nich, niekoniecznie skrajne i postępujemy zupełnie tak, jak to było powyżej opisane, a potem tworzymy równania (36) dla wszystkich $n-2$ pozostałych obserwacji. Liczba tych równań będzie $2n-4$, ponieważ zaś równania zawierają tylko dwie niewiadome $d\Delta_1$ i $d\Delta_3$, więc za wyjątkiem wyżej opisanego przypadku, w którym $n=3$, liczba ich będzie większa niż liczba niewiadomych i trzeba będzie uciec się do metody najmniejszych kwadratów.

Zauważymy, że w celu zapewnienia równaniom jednorodności, należy mnożyć wszystkie równania zawierające da_2 przez odpowiedni $\cos \delta_2$.

Naturalnie należy wybierać owe dwie zasadnicze obserwacje, których odległości mają podlegać waryacyom, pomiędzy najpewniejszemi i najlepszemi, można np. utworzyć dwa miejsca normalne i te użyć jako zasadnicze obserwacje. Należy wystrzegać się, żeby różnica anomalii mimośrodowych między dwoma zasadniczemi obserwacyami nie była równa, albo bliska do 180° lub 360° . Wytrawni rachmistrze umieją tak dobierać zasadnicze obserwacje, że z danego szeregu spostrzeżeń otrzymują możliwie dokładne poprawki elementów. Umieją też tak dobrać η_1 i η_3 , żeby ich absolutne wartości były nieznacznie większe od absolutnych wartości szukanych poprawek $d\Delta_1$ i $d\Delta_3$, przez co umożliwiają interpolację elementów. Zauważymy wreszcie, że obserwacje w czasie opozycyi dają najpewniejsze rezultaty.

6. Metoda współczynników różniczkowych. Metoda Tietjena.

Zastanawiając się nad wyłożoną w poprzednim paragrafie metodą wnet spostrzegamy, że jest to metoda nieco wadliwa. Rzeczywiście, teoretyczne pozycje planety, czy komety zależą od sześciu elementów, jeżeli więc chcemy dopasować elementy do obserwacji, to musimy zmieniać wszystkie elementy; dopiero porównanie z obserwacjami rozstrzygnie, który z pierwotnych elementów był dokładniejszy, a który mniej dokładny, który z nich należy więcej zmienić, a który mniej. Zresztą jeżeli operowanie samymi elementami jest niedogodne, to można wziąć sześć niezależnych od siebie funkcji elementów, ale bądź co bądź zmianom powinno podlegać sześć parametrów. Tymczasem w poprzednio wyłożonej metodzie zmieniamy tylko dwie odległości. Te dwie odległości są wprawdzie funkcjami elementów, więc dzięki ich zmianom zmieniają się także elementy, ale ponieważ zmieniają się tylko dwie funkcje, więc rezultat jest taki sam, jak gdybyśmy pomiędzy sześciu elementami ustanowili cztery dowolne związki. Mianowicie zmiany elementów zależą nie tylko od różnic między obserwowanymi a obliczonymi pozycjami planety, ale także od owych dowolnych związków. Zato metoda „waryacji odległości“ nie wymaga tak długich rachunków jak metoda „współczynników różniczkowych“, w której poddajemy zmianom wszystkie sześć elementów. Dlatego to tę ostatnią metodę zachowujemy dla wyznaczenia ostatecznej orbity, a metodą „waryacji odległości“ posługujemy się przy poprawianiu „pierwszych“ elementów. Naturalnie nie jest to żadne obowiązujące prawo; przeciwnie, niektórzy astronomowie używają „współczynników różniczkowych“ już przy poprawianiu elementów osobiście, jeżeli obserwacje są liczne i dobre.

Jasną jest rzeczą, że nie można używać „współczynników różniczkowych“, póki nie mamy trzech kompletnych obserwacji, bo mamy do określenia sześć niewiadomych; ale w praktyce liczba obserwacji jest zawsze o tyle znaczna, że mamy dużo więcej równań niż niewiadomych i musimy stosować metodę najmniejszych kwadratów. Ponieważ zaś trzeba formować sześć równań normalnych, więc rachunki są dość długie. Co więcej, do rachunków, wynikających ze samej metody, dołączają się jeszcze inne, ze samą metodą nie wspólnego nie mające, które jednakże musimy wykonać, aby zastosowanie metody nie było bezowocnem. Oto wzory, którymi bę-

dziemy posługiwać się, opierają się także na założeniu, że planeta porusza się ruchem Keplerowskim po elipsie; tymczasem wiemy, że tak nie jest a ponieważ do rachunku wciągamy większą ilość obserwacji rozrzuconych po znacznej części obwodu orbity, więc odstępstwa od ruchu Keplerowskiego muszą przejawiać się mniej lub więcej dobitnie. Jakże tu wyprowadzić eliptyczne elementy z pozycyi nie leżących na elipsie? Sprzeczności wystąpią tem wyraźniej, że metoda „współczynników różniczkowych“ jest zdolna do niemałej dokładności. Trzeba przeto wyrugować przynajmniej ważniejsze perturbacje. Obliczenie perturbacji jest możebne, bo przecie znamy już orbitę w sposób przybliżony. Tak tedy do innych rachunków dołącza się obliczenie ważniejszych perturbacji planety. O perturbacjach będziemy mówić na innem miejscu, tu zajmujemy się wyprowadzeniem wzorów służących do poprawiania elementów. Wyłożymy metodę F. Tietjen'a pomimo tego, że do pewnego stopnia wykracza przeciw wyżej wygłoszonym zasadom, bo w celu ułatwienia rachunków rozdziela wyznaczenie poprawek elementów na dwa stadya. Najpierw wyznacza poprawki czterech elementów: du , dn , $d\omega$ i $d\varphi$ (t. j. de) a potem oddzielnie poprawki dwóch pozostałych $d\Omega$ i di , podczas gdy właściwie należałoby odrazu wyznaczyć wszystkie sześć poprawek. [Zresztą wśród samego wykładu okaże się, jak wyglądałoby rozwiązanie, gdyby określać odrazu sześć poprawek]. Tietjen korzysta z tego, że oznaczenie elementów Ω i i z reguły wypada o wiele dokładniej niż oznaczenie pozostałych. Skoro tak jest, to można spodziewać się, że wśród danych przybliżonych elementów Ω i i będą dokładniejsze niż inne, że więc $d\Omega$ i di będą bardzo małe. Tietjen przyjmuje płaszczyznę przybliżonej orbity za płaszczyznę fundamentalną, co daje mu możność podzielić równania na dwie grupy, jedną, w której za pominięciem pewnych wyrazów bez wątpienia bardzo małych, jeżeli $d\Omega$ i di są bardzo małe, — pozostają tylko cztery inne elementy, — oraz drugą, w której figurują Ω i i . Dzięki temu podziałowi rachunki są prostsze i krótsze. Co więcej równania są tak ukształtowane, że można bez szkody dla dokładności obliczać współczynniki różniczkowe za pomocą pięcio-cyfrowych logarytmów. Wyrażenia na współrzędne heliocentryczne prostokątne, odniesione do przybliżonej płaszczyzny orbity jako płaszczyzny xy , będą zupełnie takie same jak wyrażenia (73) roz-

działu XIII-go, ale dla odróżnienia od tamtych kątów napiszemy U , K i J zamiast u , ϱ i i . Będziemy więc mieli

$$(37) \quad \begin{cases} x = r [\cos U \cos K - \sin U \sin K \cos J] \\ y = r [\cos U \sin K + \sin U \cos K \cos J] \\ z = r \sin U \sin J. \end{cases}$$

Kąt K to długość węzła orbity rzeczywistej na orbicie przybliżonej, J nachylenie orbity rzeczywistej do orbity przybliżonej. Wiemy już, że ten ostatni kąt musi być bardzo mały, jeżeli zatem za pomocą znanego wzoru

$$\cos J = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} J$$

przekształcimy wzory (37) na

$$(37 \text{ bis}) \quad \begin{cases} x = r \cos(U + K) + 2r \sin U \sin K \sin^2 \frac{1}{2} J \\ y = r \sin(U + K) - 2r \sin U \cos K \sin^2 \frac{1}{2} J \\ z = r \sin U \sin J, \end{cases}$$

to w w pierwszym i drugim wzorze (37 bis) drugie wyrazy będą tak małe w porównaniu z pierwszymi, że można będzie je pominać.

Z drugiej strony, jeżeli oznaczymy przez g kąt analogiczny do deklinacji a przez G kąt analogiczny do rektascensyi, to w tym systemie współrzędnych geocentryczne współrzędne planety będą:

$$(38) \quad \begin{cases} \xi = \Delta \cos g \cos G \\ \eta = \Delta \cos g \sin G \\ \zeta = \Delta \sin g. \end{cases}$$

Zatem podstawiając ze wzorów (37 bis) i (38) w znane związki

$$\xi = x + X \text{ i t. d.}$$

i pomijając owe małe wyrazy zawierające $\sin^2 \frac{1}{2} J$ otrzymamy:

$$(39) \quad \begin{cases} r \cos(U + K) = \Delta \cos g \cos G - X \\ r \sin(U + K) = \Delta \cos g \sin G - Y \\ r \sin U \sin J = \Delta \sin g - Z. \end{cases}$$

Z dwóch pierwszych równań (39) wynika

$$(40) \quad \text{tang } G = \frac{r \sin(U + K) + Y}{r \cos(U + K) + X}.$$

Rozważmy bliżej to równanie! Po prawej stronie stoją geocentryczne współrzędne słońca X i Y , naturalnie w nowym systemie, oprócz tego stoi r i funkcye kołowe kąta $U + K$. Ale ten kąt to jest ten sam argument szerokości u , z którym tylekroć spotykaliśmy się, tylko liczony od innego punktu niż zwykle. Z teorii ruchu Keplerowskiego wiadomo, że ani promień wodzący na orbicie, ani argument szerokości od długości węzła i od nachylenia orbity nie zależą; tedy kąt G także od tych dwóch elementów nie zależy i różnice pomiędzy kątami G obliczonymi z przybliżonych elementów i obliczonymi wprost z obserwacji będą zależne tylko od błędów w pozostałych czterech elementach. Metoda Tietjena polega właśnie na tem, aby poprawki owych czterech elementów wyprowadzić z różnic pomiędzy obserwowanymi a obliczonymi kątami G . Wynika stąd, że musimy mieć co najmniej cztery G a więc co najmniej cztery obserwacje. Ponieważ kąt G występuje tylko w dwóch pierwszych równaniach (39), więc te równania rzeczywiście rozpadają się na dwie grupy: jedną (pierwsze i drugie równanie), z której wyprowadzamy równania służące do wyznaczenia czterech elementów i drugą [trzecie równanie (39)], z której wyprowadzamy równania służące do oznaczenia poprawek $d\Omega$ i $d\dot{i}$. Przypominamy jednak, że doszliśmy do równań (39) pomijając wyrazy zawierające $\sin^2 \frac{1}{2} J$, co jest o tyle dozwolone, o ile $d\Omega$ i $d\dot{i}$ są rzeczywiście małe, t. j. o ile płaszczyzna przybliżonej orbity jest bliska do płaszczyzny rzeczywistej orbity.

Tworzymy teraz równania służące do wyznaczenia poprawek czterech elementów. Zadawalniamy się wzorami różniczkowymi, t. j. inaczej mówiąc zatrzymujemy tylko pierwsze wyrazy szeregów Taylora, bo przypuszczamy, że wszystkie różnice i poprawki są już o tyle małe, że można pominąć kwadraty, iloczyny i wyższe potęgi. Zresztą gdyby to przypuszczenie okazało się nieusprawiedliwionem, to można powtórnie wykonać rachunki z elementami otrzymanymi w pierwszym rachunku. Różniczkując wzory pierwszy i drugi (39), przyczem naturalnie należy uważać współrzędne słońca za stałe i kładąc dla krótkości $U + K = u$ otrzymamy

$$d(\Delta \cos g) \cos G - \Delta \cos g \sin G dG = \cos u dr - r \sin u du$$

$$d(\Delta \cos g) \sin G + \Delta \cos g \cos G dG = \sin u dr + r \cos u du.$$

Stąd znanym i wielokrotnie używanym sposobem wynikają wzory:

$$(41) \quad \begin{cases} \Delta \cos g \cdot dG = r \cos(G - u) du - \sin(G - u) dr \\ d(\Delta \cos g) = r \sin(G - u) du + \cos(G - u) dr. \end{cases}$$

Ale u i r są funkcyami czterech elementów: $\tilde{\omega}_1$, t_0 , a i e , zamiast których dogodnie jest obrać $\tilde{\omega}_1$, M , n i φ . Co do ostatniego elementu, to wiemy, że $e = \sin \varphi$; M to średnia anomalia w epoce t_0 [nie piszemy przy niej znaczku $^{\circ}$, aby zarezerwować go sobie dla innej potrzeby]; podawaliśmy ją już jako element w rozdz. XVII-tym, § 7, a wiemy, że jest proporcjonalna do czasu; $n = ka^{-3/2}$ a więc zastępuje a ; wreszcie co do $\tilde{\omega}_1$ możemy mieć pewną wątpliwość, bo kąt $u = U + K$ jest wprawdzie także argumentem szerokości, ale liczonym nie od węzła, a od innego punktu; jednakże wątpliwość zniknie, skoro zważymy, że dla wyznaczenia poprawki $d\tilde{\omega}$ stała różnica między $\tilde{\omega}_1$ a $\tilde{\omega}$ niema żadnego znaczenia. Po tych wyjaśnieniach korzystając jeszcze ze związku

$$u = v + \tilde{\omega}_1,$$

i pamiętając o tem, że promień wodzący od $\tilde{\omega}$ nie zależy, możemy napisać:

$$(42) \quad \begin{cases} du = d\tilde{\omega}_1 + \frac{\partial v}{\partial M} dM + \frac{\partial v}{\partial n} dn + \frac{\partial v}{\partial \varphi} d\varphi \\ dr = \frac{\partial r}{\partial M} dM + \frac{\partial r}{\partial n} dn + \frac{\partial r}{\partial \varphi} d\varphi. \end{cases}$$

Podstawivszy wartości na du i dr z równań (42) w pierwsze równanie (41) otrzymamy równanie służące do wyznaczenia poprawek $d\tilde{\omega}_1$, dM i t. d.; podstawimy je także w drugie równanie (41), ale nie po to, aby równanie miało służyć do wyznaczenia poprawek, a po to, aby z poprawek $d\tilde{\omega}_1$, dM i t. d. ... obliczyć poprawkę $d(\Delta \cos g)$. Zanim jednakże wykonamy te podstawienia, wprzód musimy podać wzory służące do obliczenia kąta G , współczynników różniczkowych $\frac{\partial v}{\partial M}$... i t. d. ...

7. Metoda Tietjena. Wzory na G i t. d.

Zamiast różniczki dG figurującej po lewej stronie pierwszego równania (41) podstawiamy różnicę pomiędzy kątem G wynikającym z obserwacji a kątem G wynikającym z danych przybliżonych elementów. Od tej chwili będziemy oznaczać pierwszy kąt

przez G a drugi przez G_0 ; wogóle wartości danych przybliżonych elementów i wprost z nich obliczone wielkości będziemy oznaczać przez litery ze znacznikiem 0 .

Zajmiemy się najpierw kątem G . Współrzędne sferyczne g i G są odniesione do płaszczyzny przybliżonej orbity. Ta płaszczyzna jest nachylona do płaszczyzny ekliptyki pod kątem i_0 , zaś długość jej węzła na ekliptyce jest Ω_0 . Zatem związki między g i G z jednej strony a współrzędnymi ekliptycznymi z drugiej będą takie same jak związki (5) w rozdz. VI-tym, tylko zamiast λ trzeba pisać $\lambda - \Omega_0$, bo we wzorach (5) długość węzła równika była zerem, a tu jest różna od zera, powtóre zamiast ε trzeba pisać $-i_0$, bo ε jest to nachylenie ekliptyki do równika, a i_0 jest to nachylenie płaszczyzny przybliżonej orbity do ekliptyki, więc kąty ε i i_0 są liczone w przeciwne strony. Tedy

$$\left. \begin{aligned} \cos g \cos G &= \cos \beta \cos(\lambda - \Omega_0) \\ \cos g \sin G &= \cos \beta \sin(\lambda - \Omega_0) \cos i_0 + \sin \beta \sin i_0 \\ \sin g &= -\cos \beta \sin(\lambda - \Omega_0) \sin i_0 + \sin \beta \cos i_0. \end{aligned} \right\} (43)$$

O tem, jak te wzory przekształcić na wzory nadające się do logarytmicznego rachunku, mówić nie potrzebujemy, bo było to wyłożone w tymże samym § 10 rozdz. VI-go, w którym znajdują się wzory (5). Symbole Ω_0 i i_0 oznaczają, — jak to już wiemy, — przybliżone elementy, zaś λ i β obserwowane współrzędne ekliptyczne. Ponieważ atoli obserwujemy nie λ i β , a α i δ , więc trzeba obliczyć λ i β z α i δ tak samo jak w § 2 rozdz. XV-go. Tietjen podał wzory ¹⁾, za pomocą których można z obserwowanych α i δ obliczyć wprost g i G . Z powodu braku miejsca nie będziemy powtarzać wywodu, wzory jednak podajemy. Najpierw ze wzorów

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{1}{2} i_1^0 \sin \frac{1}{2} (\Omega_1^0 + q) &= \sin \frac{1}{2} \Omega_0 \cos \frac{1}{2} (i_0 - \varepsilon) \\ \cos \frac{1}{2} i_1^0 \cos \frac{1}{2} (\Omega_1^0 + q) &= \cos \frac{1}{2} \Omega_0 \cos \frac{1}{2} (i_0 + \varepsilon) \\ \sin \frac{1}{2} i_1^0 \sin \frac{1}{2} (\Omega_1^0 - q) &= \sin \frac{1}{2} \Omega_0 \sin \frac{1}{2} (i_0 - \varepsilon) \\ \sin \frac{1}{2} i_1^0 \cos \frac{1}{2} (\Omega_1^0 - q) &= \cos \frac{1}{2} \Omega_0 \sin \frac{1}{2} (i_0 + \varepsilon) \end{aligned} \right\} (44)$$

obliczamy nachylenie płaszczyzny przybliżonej orbity do równika i_1^0 , rektascensę jej węzła na równiku Ω_1^0 i kąt pomocniczy q . Symbol ε

¹⁾ Berliner Jahrbuch f. 1878, dodatek, str. 3 i 4.

oznacza jak zawsze nachylenie ekliptyki do równika. Następnie ze wzorów¹⁾

$$(45) \begin{cases} \cos g \cos G_1 = \cos \delta \cos (\alpha - \varrho_1^0) \\ \cos g \sin G_1 = \cos \delta \sin (\alpha - \varrho_1^0) \cos i_1^0 + \sin \delta \sin i_1^0 \\ \sin g = -\cos \delta \sin (\alpha - \varrho_1^0) \sin i_1^0 + \sin \delta \cos i_1^0. \end{cases}$$

obliczamy g i kąt pomocniczy G_1 . Wreszcie ze wzoru

$$(46) \quad G = G_1 - g$$

wyznaczamy G .

Przechodzimy teraz do obliczenia kąta G_0 . Służą do tego wzory analogiczne do (39), mianowicie

$$(47) \quad \begin{cases} \Delta_0 \cos g_0 \cos G_0 = r_0 \cos u_0 + X \\ \Delta_0 \cos g_0 \sin G_0 = r_0 \sin u_0 + Y, \end{cases}$$

z których otrzymamy

$$\Delta_0 \cos g_0 \text{ i } G_0.$$

Wszędzie napisaliśmy znaczki ⁰, aby zaznaczyć, że trzeba brać r_0 i u_0 wynikające wprost z przybliżonych elementów. Jak obliczyć promień wodzący i argument szerokości, nad tem rozwozić się nie potrzebujemy, bo była o tem już kilkakrotnie mowa, ale musimy podać wzory na współrzędne słońca, bo przecie to nie są ani współrzędne ekliptyczne, ani równikowe słońca, a współrzędne odniesione do specjalnego systemu współrzędnych, w którym płaszczyzną x, y jest płaszczyzna przybliżonej orbity. W użytym przez nas systemie współrzędnych współrzędne geocentryczne słońca są

$$(48) \quad \begin{cases} X = R \cos (\odot - \varrho_0) \\ Y = R \sin (\odot - \varrho_0) \cos i_0 + RB'' \sin 1'' \sin i_0 \\ Z = -R \sin (\odot - \varrho_0) \sin i_0 + RB'' \sin 1'' \cos i_0. \end{cases}$$

Wzory (48) objaśnienia nie potrzebują, ale nie od rzeczy będzie powiedzieć, że B'' oznacza szerokość słońca w sekundach a

$$\sin 1'' = \frac{1}{206264,8\dots}$$

¹⁾ Że i te wzory można przywieść do kształtu dogodnego do logarytmowania, o tem chyba mówić nie potrzeba.

Obliczywszy G i G_0 tworzymy

$$dG = G - G_0,$$

mnożymy je przez $\Delta_0 \cos g_0$, które otrzymaliśmy ze wzorów (47) i podstawiamy w lewą stronę pierwszego równania (41).

Teraz przechodzimy do wzorów na współczynniki różniczkowe. Zaczynamy od

$$\frac{\partial v}{\partial M} = \frac{\partial v}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial M}.$$

Ze wzorów § 5 rozdz. XIII-go znajdziemy: z pierwszego wzoru na str. 249 I-go tomu

$$\frac{\partial v}{\partial E} = \frac{a}{r} \sqrt{1 - e^2} = \frac{a}{r} \cos \varphi,$$

a ze wzorów (42) i (38)

$$\frac{\partial E}{\partial M} = \frac{1}{1 - e \cos E} = \frac{a}{r}; \quad (\text{A})$$

tedy

$$\frac{\partial v}{\partial M} = \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi. \quad (\text{B})$$

W dalszym ciągu

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial n},$$

przyczem, jeżeli przyjmiemy $t_0 = 0$, to

$$\frac{\partial M}{\partial n} = t;$$

zatem

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial M} \cdot t = \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi \cdot t. \quad (\text{C})$$

Pochodną $\frac{\partial v}{\partial \varphi}$ obliczyć oddzielnie nie można, bo wzór (35) rozdz. XIII-go, w którym występuje $v = u - \tilde{\omega}$, zawiera jednocześnie r , które także zależy od φ . Musimy zatem jednocześnie obliczać $\frac{\partial v}{\partial \varphi}$ i $\frac{\partial r}{\partial \varphi}$. W tym celu bierzemy równanie (35) i piszemy je ze względu na to, że $p = a(1 - e^2)$, w kształcie

$$r(1 + \sin \varphi \cos v) = a \cos^2 \varphi, \quad (\text{D})$$

następnie, ponieważ z jednego równania dwóch niewiadomych określić nie można, bierzemy do pomocy równania: drugie (36) i (37), oba z rozdz. XIII-go. Rugując z nich anomalię mimośrodową E otrzymamy równanie

$$(E) \quad \left(\frac{r \sin v}{\cos \varphi}\right)^2 + (r \cos v + a \sin \varphi)^2 = a^2.$$

Różniczkując równania (D) i (E) względem zmiennej niezależnej φ [przyczem a nie zmienia się] otrzymamy dwa równania liniowe względem $\frac{\partial v}{\partial \varphi}$ i $\frac{\partial r}{\partial \varphi}$, z których zwykłą drogą otrzymamy

$$(F) \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\sin v}{\cos \varphi} (2 + \sin \varphi \cos v) = \frac{\sin v}{\cos \varphi} \cdot \frac{(p+r)}{r}$$

$$(G) \quad \frac{\partial r}{\partial \varphi} = -a \cos \varphi \cos v.$$

Dalej korzystając ze wzoru (A) możemy napisać

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{\partial r}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial M} = \frac{a}{r} \frac{\partial r}{\partial E},$$

określając zaś $\frac{\partial r}{\partial E}$ ze wzoru (38) i rugując $\sin E$ za pomocą wzoru (36)¹⁾ otrzymamy

$$(H) \quad \frac{\partial r}{\partial M} = a \operatorname{tang} \varphi \sin v.$$

Wreszcie

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial n}.$$

Pochodną $\frac{\partial r}{\partial M}$ określiliśmy przed chwilą, przedtem znaleźliśmy $\frac{\partial M}{\partial n} = t$, dalej z równania (38) wypada

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{r}{a},$$

wreszcie ze związku

$$a^{2/n} = \frac{k}{n}$$

¹⁾ Wciąż cytujemy wzory rozdz. XIII-go.

wynika

$$\frac{da}{dn} = -\frac{2}{3} k^{2/3} n^{-5/3} = -\frac{2}{3} \frac{a}{n};$$

tedy ostatecznie

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial M} t - \frac{2}{3} \frac{r}{n} = a \operatorname{tang} \varphi \sin v \cdot t - \frac{2}{3} \frac{r}{n} (206264,8 \dots)^{1)}. \quad (\text{I})$$

Rozumie się samo przez się, że poczynając od (A) należy obliczać wszystkie wzory z wartościami wyprowadzonymi z przybliżonych elementów. Nie pisaliśmy jednak znaczków ^o, aby skrócić pisaninę.

Jeżeli teraz zbierzemy rezultaty wyrażone we wzorach: (B), (C), (F), (G), (H) i (I) i jeżeli podstawimy je we wzory (42), to otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} du &= d\tilde{\omega}_1 + \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi (dM + t dn) + \frac{p+r}{r} \cdot \frac{\sin v}{\cos \varphi} d\varphi \\ dr &= a \operatorname{tang} \varphi \sin v dM + \left(a \operatorname{tang} \varphi \sin v \cdot t - \frac{2}{3} \frac{r}{n} \right) dn - \\ &\quad - a \cos \varphi \cos v d\varphi. \end{aligned} \right\} (49)$$

Teraz podstawimy du i dr we wzory (41), uporządkujemy, poczem wzory te przywiodą się do postaci

$$\left. \begin{aligned} \Delta \cdot \cos g \cdot (G - G_0) &= A_1 dM + B_1 d\tilde{\omega}_1 + C_1 dn + D_1 d\varphi \\ d(\Delta \cos g) &= A_1 dM + B_1 d\tilde{\omega}_1 + C_1 dn + D_1 d\varphi. \end{aligned} \right\} (50)$$

Wzorów na $A_1 \dots$ i t. d. pisać nie będziemy, bo czytelnik łatwo je sam napisze; powiemy zato, że dogodnie jest wprowadzić pomocnicze kąty kładąc

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial M} &= A \sin A', & r \frac{\partial v}{\partial M} &= A \cos A' \text{ i t. d.} \\ \frac{\partial r}{\partial n} &= C \sin C', & r \frac{\partial v}{\partial n} &= C \cos C' \\ \frac{\partial r}{\partial \varphi} &= D \sin D', & r \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= D \cos D'. \end{aligned}$$

¹⁾ $\log \frac{1}{3} (206264,8 \dots) = \log \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sin 1''} \right) = 5,13833.$

Wtedy współczynniki A_c i t. d. przedstawia się w kształcie

$$A_c = A \cos (G - u + A') \dots \text{ i t. d.}$$

Do kontroli można użyć wzory

$$\text{tang } A' = \frac{r \text{ tang } \varphi \cdot \sin v}{a \cos \varphi} = \text{tang } \varphi \sin E$$

$$C_c = C \cos (G - u + C') = A_c t + \frac{2r \sin (G - u)}{3n \sin 1''}$$

$$D_c = D \cos (G - u + D') = a \sin E \cos (G - u) + \\ + a \cos \varphi \sin (G - \bar{\omega}_1).$$

W myśl tego, co było wyżej powiedziane, tylko pierwsze równanie (50) służy do wyznaczenia poprawek dM , $d\bar{\omega}_1$ i t. d., zatem koniecznie trzeba mieć co najmniej cztery obserwacje. Jeżeli jest więcej obserwacji niż cztery, a zatem więcej równań typu pierwszego równania (50), to uciekamy się do metody najmniejszych kwadratów. Skoro obliczymy poprawki i dodamy je do odpowiednich elementów, to wypadnie wykonać próbę. W tym celu możemy obliczyć G na dwa sposoby: możemy z poprawionymi elementami obliczyć ponownie r , v i u i podstawić we wzory (47), przez co otrzymamy nowe poprawione wartości na G . Ale można też obliczyć poprawione G w inny sposób: mianowicie mając poprawki dM, \dots i t. d. można podstawić je napowrót w pierwsze równanie (50), obliczyć zeń poprawkę dG ¹⁾ i dodać do G_0 . Otóż ta nowa wartość $G_0 + dG$ powinna zgadzać się z tą również nową, która wynika z równań (47). Jeżeli zgodność okaże się dobrą [różnice w ułamkach sekund są dopuszczalne], to znaczy, że rachunki zostały poprawnie wykonane, że przeto można przystąpić do obliczenia pozostałych elementów. Gdyby jednak oba systemy poprawionych G_0 będąc między sobą zgodne źle godziły się z niektórymi kątami G obliczonymi przez równania (43) wprost z obserwacji, to oznaczałoby, że w samych obserwacjach tkwią jakieś błędy.

¹⁾ Ponieważ obliczaliśmy poprawki dM_0, \dots i t. d. metodą najmniejszych kwadratów, więc ta poprawka dG nie będzie równa różnicy $G - G_0$, która stoi we wiadomym wyrazie pierwszego równania (50). Byłaby jej równą tylko w takim razie, gdyby liczba równań [t. j. liczba obserwacji] ograniczała się do czterech.

8. Metoda Tietjena. Określenie poprawek $d\Omega$ oraz di . Drugie przybliżenie.

Już wiemy, że do określenia poprawek $d\Omega$ oraz di służy trzeci wzór (37 bis). Piszemy w nim $u - K$ zamiast U a jednocześnie zastępujemy $\sin g$ przez $\cos g \tan g$ [dlaczego, to zaraz zobaczymy]. Mimochodem zauważymy, że kąt g jest zawsze bardzo mały. Otrzymujemy w ten sposób wzór:

$$r \sin(u - K) \sin J = \Delta \cos g \tan g - Z. \quad (51)$$

Powinnibyśmy tu zamiast Δ i g wstawić wartości obliczone z nowymi, poprawionymi elementami M , $\tilde{\omega}_1$, φ i n , ale aby uniknąć nowych rachunków napiszemy

$$\Delta \cos g = \Delta_0 \cos g_0 + d(\Delta \cos g). \quad (52)$$

$\Delta_0 \cos g_0$ weźmiemy z równań (47) a $d(\Delta \cos g)$ obliczymy za pomocą drugiego równania (50). Jednocześnie [patrz załączoną rycinę]¹⁾ mamy

$$\sin i \sin(\Omega - \Omega_0) = \sin K \sin J.$$

Lecz $\Omega - \Omega_0 = d\Omega$ jest bardzo małe, przeto zamiast $\sin u$ a możemy napisać kąt. Tedy

$$\sin i d\Omega = \sin K \sin J. \quad (K)$$

Tak samo jeżeli z punktu Ω spuścimy prostopadłą OM na przeciwległy bok, to (przybliżenie)²⁾ $MK = \Omega K$. Możemy tedy napisać

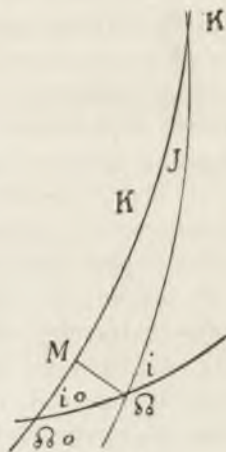
$$\Omega_0 K - \Omega K = -d\tilde{\omega} = \cos i_0 d\Omega. \quad (L)$$

Wreszcie [wzory (8) rozdz. I]

$$\sin J \cos K = \sin i_0 \cos(180_0 - i) + \sin(180_0 - i) \cos i_0 \cos d\Omega.$$

Przyjmując $\cos d\Omega = 1$, co jest oczywiście dozwolone, otrzymamy stąd

$$\sin J \cos K = \sin(i - i_0).$$



Ryc. 30.

¹⁾ Na naszej figurze K oznacza węzeł prawdziwej orbity na przybliżonej a zarazem bok $\Omega_0 K$ i t. d.

²⁾ Błąd jest małą wielkością drugiego rzędu.

Naturalnie zamiast $\sin(i - i_0)$ możemy napisać $i - i_0 = di$, przeto

$$(M) \quad di = \sin J \cos K$$

Zbierając wzory: (K), (L) i (M) i podstawiając we wzór (51), dalej podstawiając $\Delta \cos g$ ze wzoru (52), wreszcie podstawiając $d(\Delta \cos g)$ z drugiego wzoru (50), otrzymamy

$$(53) \quad r \sin u di - r \cos u \sin i \cdot d\Omega = \\ = \operatorname{tang} g [\Delta_0 \cos g_0 + A, dM + B, d\omega + C, dn + D, d\varphi] - Z.$$

Po prawej stronie stoją same wiadome wielkości, współczynniki różniczkowe przy di i $d\Omega$ są również wiadome, przeto wzór (53) nadaje się do określenia poprawek di i $d\Omega$. Ponieważ najmniejsza liczba obserwacji, z którymi można wykonać poprawki, wynosi cztery, więc zawsze będą co najmniej cztery równania i zawsze wypadnie stosować metodę najmniejszych kwadratów.

Gdyby poprawione kąty $G_0 + dG$ [por. wyżej] okazały się niedostatecznie zgodne z odpowiednimi kątami G obliczonymi z obserwacji przez równania (43) [dopuszczalną jest niezgodność w ułamkach sekund], to należy wykonać drugie przybliżenie, przyczem można zatrzymać te same współczynniki różniczkowe, które służyły w pierwszym przybliżeniu [wzory na współczynniki są oznaczone literami (B) i t. d.]. Zdarza się jednakże, że któreś G nie godzi się z odpowiednim $G_0 + dG$ nawet przy drugim przybliżeniu. Jest to znak, że odpowiednia obserwacja (właściwie normalne miejsce, bo w tego rodzaju zadaniach bierze się normalne miejsca) jest niedokładna.

Z powyższego wykładu metody Tietjena można łatwo wyrobić sobie pojęcie o innych metodach, w których odrazu obliczamy poprawki wszystkich sześciu elementów. Naturalnie w tamtych metodach nie obliczamy kątów G i g , lecz obliczamy wprost geocentryczne (biegunowe) współrzędne.

Brak miejsca nie pozwala nam rozpatrzyć specjalny przypadek, gdy pierwotne elementy były paraboliczne a wyznaczając poprawioną orbitę jednocześnie przechodzimy do orbity eliptycznej. Musimy odesłać czytelników bądź do dzieła J. Kowalczyka, bądź do dzieła J. Bauschingera¹⁾.

Do opisanego powyżej poprawienia orbity względnie, jak je

¹⁾ Die Bahnbestimmung der Himmelskörper, Lipsk 1906.

nazywają, do ostatecznego wyznaczenia orbity przystępujemy dopiero wtedy, gdy planeta była obserwowana w kilku opozycjach. Za podstawę rachunku bierzemy elementy już poprawione bądź metodą waryacji odległości, bądź zresztą tą samą metodą współczynn timeróżniczkowych, o której mówiliśmy w paru ostatnich paragrafach. Naturalnie taka „ostateczna“ orbita nie jest ściśle biorąc ostateczną, bo z pewnością po dłuższym lub krótszym szeregu lat okaże się, że trzeba ją znowu poprawić. Jednakże „ostateczna“ orbita powinna w ciągu dziesiątków lub setek lat dawać poprawne pozycje planety naturalnie, o ile odliczymy perturbacje. Że przy wyznaczeniu ostatecznej orbity trzeba rugować perturbacje, o tem mówiliśmy już wyżej. Jak się to robi, to będziemy mogli powiedzieć dopiero wtedy, gdy przejdziemy do teorii perturbacji. tu wskażemy tylko, że przy obliczeniu perturbacji można obliczać albo zmiany pozycji planety, t. j. zmiany współrzędnych, albo zmiany elementów.

9. Wyznaczenie orbit gwiazd podwójnych.

Do wyznaczania orbit gwiazd podwójnych możnaby zastosować i stosowano nawet nieco zmodyfikowane wzory służące do wyznaczania orbit planetarnych; ale to metoda niepraktyczna i niedogodna, bo warunki zadania są zgoła inne. Zmiany pozycji ziemi nie mają żadnego znaczenia oprócz pewnego wyjątku, o którym będzie mowa poniżej; do znajomości współrzędnych satelity względem ciała głównego nie potrzeba dochodzić przez pośrednictwo współrzędnych geocentrycznych, bo obserwujemy bezpośrednio rzuty względnych współrzędnych na sklepienie niebieskie. Wogóle z punktu widzenia analizy zadanie przedstawia się dość łatwym; natomiast obserwacje są trudne. Nawet widziane we wielkich refraktorach orbity gwiazd podwójnych są tak malutkie, że błędy obserwacji bywają nie tylko porównywalne, ale niekiedy większe od mierzonych wielkości; wskutek tego rezultaty obserwacji są niepewne.

Wielkie trudności sprawia rugowanie błędów osobistych; zato z powodu ogromnego oddalenia i, co za tem idzie, małych różnic pomiędzy współrzędnymi obu ciał systemu [wszak gołem okiem nawet nie można „oddzielić“ jednej gwiazdy od drugiej] odpadają zupełnie poprawki na refrakcję, aberację, parallaksę i nutację. Jedyna poprawka, którą trzeba uwzględnić, to poprawka kątów po-

zycyjnych z powodu precesyi. Kątem pozycyjnym nazywamy kąt między kołem godzinowym przechodzącym przez ciało uważane za środkowe a łukiem wielkiego koła przechodzącego przez toż ciało centralne i przez towarzysza. [Zwykle liczą kąty pozycyjne od północnej strony koła godzinowego ku wschodowi i dalej w tym samym kierunku]. Ponieważ obserwacje rozciągają się na szeregi lat, więc tymczasem wskutek precesyi zmienia się położenie równika a z niem także położenie kół godzinowych. Moznaby obrazowo powiedzieć, że platforma, z której obserwujemy system podwójny, chyli się. Stosuje się tu wzór (11 bis) z rozdz. XII-go, bo kąt H , o którym tam była mowa, to właśnie kąt pozycyjny. Całkując tak, jak gdyby α i δ były stałe, co oczywiście w danym przypadku jest dozwolone, otrzymamy z pomienionego wzoru:

$$(54) \quad H - H_0 = n \sin \alpha \sec \delta \cdot (t - t_0).$$

Jak wiadomo [por. uwagę na str. 206 tomu I-go], n wynosi około $20,05$, t. j. około $0,0056$ rocznie. Ze wzoru (54) wynika, że przez samą precesyę kąt pozycyjny wzrasta w ciągu czasu $t - t_0$ o $n \sin \alpha \sec \delta (t - t_0)$. Żeby więc kąty mierzone w różnych czasach były ze sobą porównywalne, trzeba je sprowadzić do jednej epoki. Niech t_0 będzie ową epoką, do której sprowadzamy wszystkie kąty pozycyjne. Oczywiście trzeba od mierzonych kątów pozycyjnych *odjąć*

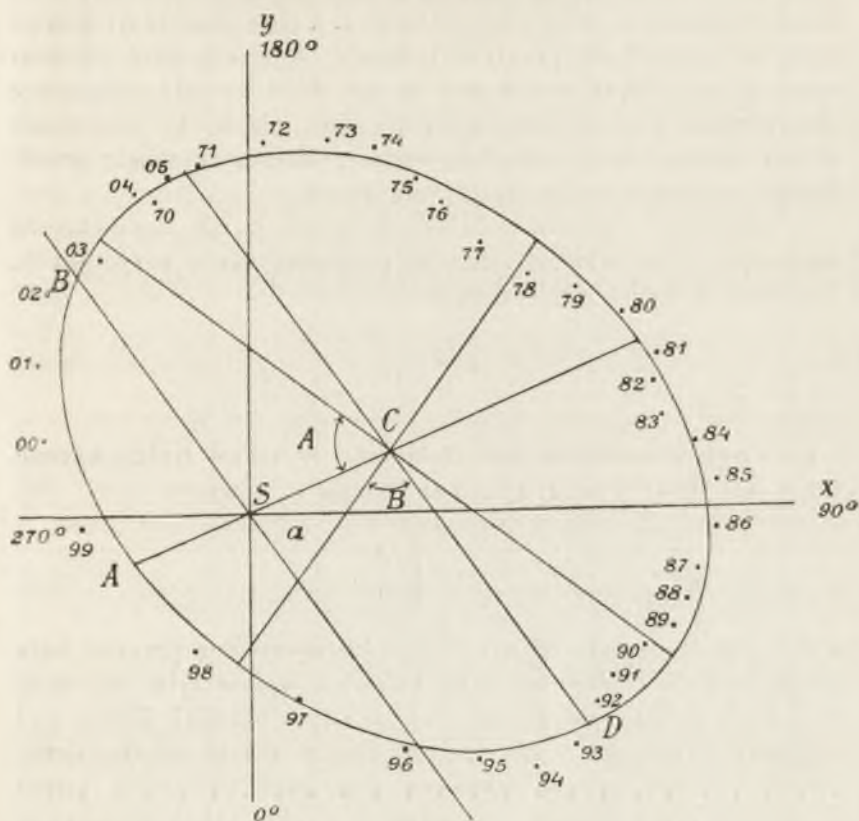
$$n \sin \alpha \sec \delta \cdot (t - t_0).$$

Pomiary mikrometryczne dają nam katowe odległości między ciałem centralnem a towarzyszem [naturalnie wszystko jedno, które ciało nazwiemy centralnem a które towarzyszem, ale skoro raz nazwiemy ciało A centralnem, to musimy trzymać się tego] i kąty pozycyjne, t. j. względne współrzędne biegunowe, płaskie. Nie są to współrzędne prawdziwej orbity, bo widzimy nie samą orbitę, a jej rzut na sklepienie niebieskie, ale właśnie najważniejszym i najbardziej mozolnem zadaniem jest wyznaczenie „widomej“ orbity. Skoro ta jest wyznaczona, to łatwo przejść do orbity rzeczywistej.

Trudności we wyznaczeniu orbity „widomej“ nie są teoretycznej, lecz czysto rachunkowej natury. Zakładamy, że prawdziwa orbita jest elipsą Keplerowską. O ile w danym systemie niema

jakiegoś dużego ciemnego, a więc niewidzialnego ciała, to hipoteza powyższa jest usprawiedliwiona, bo wedle wszelkiego prawdopodobieństwa we wszechświecie panują te same prawa grawitacji, co

Widoma orbita ζ Herculis.



Ryc. 31.

Punkty numerowane oznaczają obserwowane pozycje satelity a numera lata, np. 70 oznacza rok 1870. [Właściwie obserwacje były robione w różnych porach roku, ale przez interpolację i tworzenie średnich wyprowadzono „normalne miejsca“ dla początku każdego roku]. Punkt S oznacza ciało centralne. Średnica ASC oznacza rzut wielkiej, CD rzut małej osi, SB rzut „latus rectum“, A rzut periastrum.

(Wedle Th. Lewis'a, Observatory, tom XXXI str. 311).

w systemie słonecznym. Skoro atoli prawdziwa orbita jest elipsą, to rzut jej na sklepienie niebieskie jest także elipsą. Ognisko widomej elipsy nie jest identyczne z ogniskiem orbity prawdziwej,

a więc nie leży w środku ciała centralnego, który przyjmujemy za *środek współrzędnych*; ale to jest okoliczność bez znaczenia. Mając odległości i kąty pozycyjne (poprawione wyżej opisanym sposobem), możemy oznaczyć tyle punktów widomej orbity, ile jest obserwacji. Ponieważ równanie elipsy zawiera pięć niezależnych od siebie parametrów, więc pięć punktów, t. j. pięć obserwacji powinnyby wystarczyć, ale praktyka pokazuje, że trzeba mieć ich znacznie więcej. Błędy obserwacji są tak duże, że gdy połączymy obserwowane punkty widomej orbity linią ciągłą, to otrzymamy mocno pociętą nieregularną krzywą [por. załączony rysunek; przedstawia on stosunkowo korzystny przypadek].

Herschel uważał pomiary odległości za tak niepewne, że wyznaczał orbitę widomą tylko na podstawie kątów pozycyjnych. Ponieważ w ruchu Keplеровskim

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c,$$

i ponieważ własność ta jest zachowana w rzucie (tylko wartość stałej jest inna), więc Herschel obliczał r ze wzoru

$$r = K \sqrt{\frac{\Delta t}{\Delta \theta}},$$

w którym Δt oznacza odstęp czasu, $\Delta \theta$ odpowiedni przyrost kąta pozycyjnego a K dowolną stałą, która ma wpływ tylko na skalę rysunku¹⁾. Jednak połowę wielkiej osi elipsy określał Herschel z pomiarów odległości. Za naszych czasów dzięki udoskonaleniu narzędzi można polegać także na pomiarach odległości; przeto w dalszym ciągu będziemy zakładać, że punkty orbity widomej są wyznaczone zarówno przez kąty pozycyjne jak przez odległości. Założmy tedy, że mamy odległości i kąty pozycyjne n ($n > 5$) punktów orbity widomej. Trzeba obliczyć jej równanie. W tym celu ze współrzędnych biegunowych przez wzory

$$x = r \cos H, \quad y = r \sin H$$

¹⁾ Oczywiście jest rzeczą, że można użyć powyższy wzór Herschla zarówno do kontroli obserwacji jak do sprawdzenia, czy hipoteza, iż orbita jest elipsą Keplеровską, jest w danym razie dopuszczalną.

[r odległość, H kąt pozycyjny] obliczamy współrzędne prostokątne n punktów i podstawiamy je w najogólniejsze równanie elipsy

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + 1 = 0. \quad (55)$$

W ten sposób otrzymamy n równań, w których współrzędne $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ są wiadome, a stałe A, H i t. d. niewiadome. Równania (55) są liniowe względem A, H i t. d., zatem można bezpośrednio stosować metodę najmniejszych kwadratów. Ponieważ mamy aż pięć niewiadomych a liczba równań jest z reguły dużo większa niż 5 [nieraz mamy dla jednego systemu paręset obserwacyi, ale tworzymy z nich „miejsca normalne“ i w ten sposób zmniejszamy liczbę danych], więc rachunki muszą być długie.

Mniej ścisłą, ale krótszą jest następująca droga. Wyrównujemy graficznie krzywą i doprowadzamy ją do eliptycznego kształtu, poczem stosujemy wzory Glaserappa. Kładziemy $y = 0$, dzięki czemu równanie (55) przywodzi się do

$$Ax^2 + 2Gx + 1 = 0.$$

Jeżeli oznaczymy pierwiastki tego równania przez x_1 i x_2 , to jak wiadomo

$$x_1 x_2 = \frac{1}{A}, \quad x_1 + x_2 = -\frac{2G}{A},$$

skąd

$$A = \frac{1}{x_1 x_2}, \quad G = -\frac{1}{2}(x_1 + x_2) x_1 x_2.$$

Ale x_1 i x_2 można wymierzyć na rysunku, bo to są współrzędne tych punktów, w których oś x -ów przecina elipsę [jedna ze współrzędnych musi być ujemna!]. Tak samo kładąc $x = 0$ otrzymamy

$$By^2 + 2Fy + 1 = 0,$$

skąd

$$B = \frac{1}{y_3 y_4}, \quad F = -\frac{1}{2}(y_3 + y_4) y_3 y_4.$$

Mając A, B, F i G łatwo znajdziemy piątą i ostatnią stałą H . Wymierzmy współrzędne dowolnego punktu $x_5 y_5$. Należy wziąć punkt taki, aby tak x_5 , jak y_5 było jak największe, poczem znajdziemy H z równania

$$H = -\frac{1 + Ax_5^2 + By_5^2 + 2Gx_5 + 2Fy_5}{2x_5 y_5}.$$

Oczywiście można określić H z kilku punktów a potem wziąć średnią.

Dla przykładu przytoczymy stałe A , B i t. d. dla orbity ζ Herculis¹⁾ [w dowolnych jednostkach]

$$A = -1,524, \quad B = -1,265, \quad 2G = -0,998, \quad 2F = 1352, \\ 2H = 0,807.$$

Oczywiście wszystko tu zależy od graficznego wyrównania, t. j. od procesu w gruncie rzeczy dowolnego. O ile zaś wyrównanie w tym lub owym przypadku było udatne, to bardzo trudno osądzić. Metoda najmniejszych kwadratów w każdym razie prowadzi do pewniejszych rezultatów.

Mając równanie orbity widomej przystępujemy do wyznaczenia orbity rzeczywistej. Pozostanie tu zawsze pewna wątpliwość. Płaszczyzna orbity widomej to płaszczyzna styczna do sfery niebieskiej w ciele centralnem [a więc prostopadła do promienia widzenia, idącego od ziemi ku ciału centralnemu], płaszczyzna ta przecina się z płaszczyzną orbity rzeczywistej wzdłuż pewnej prostej (linii węzłów), przeto jedna strona orbity znajduje się pomiędzy nami a płaszczyzną orbity widomej a druga znajduje się poza tą płaszczyzną; ale która, tego rozstrzygnąć nie możemy. Wskutek tego właściwie nie wiemy, który węzeł jest wstępujący a który zstępujący. Dopiero badania spektroskopiczne pozwalają rozstrzygnąć tę wątpliwość²⁾, ale to rzecz oddzielna, z obecnem zażaniem nie wspólnego nie mająca. Oznaczamy przez i kąt pomiędzy normalną do płaszczyzny rzeczywistej orbity, skierowaną ku wnętrzu sfery niebieskiej, a promieniem widzenia; jest to zatem nachylenie płaszczyzny prawdziwej orbity do widomej. Następnie z pomiędzy dwu węzłów (których zresztą jeszcze nie znamy) obieramy ten, którego kąt pozycyjny (por. definicyę kąta pozycyjnego) jest mniejszy; nazywamy ten kąt pozycyjny długością węzła i oznaczamy go przez Ω . O ile pominiemy wątpliwość, o której była wyżej mowa, to Ω i i wyznaczają płaszczyznę orbity rzeczywistej. Położenie elipsy w jej własnej płaszczyźnie będzie określone przez kąt ω między linią węzłów a tą stroną wielkiej osi, która idzie ku *periastrum* [analogicznie do *perihelium*], rozmiary i kształt przez po-

¹⁾ Wedle tegoż Th. Lewisa, l. c., str. 341.

²⁾ Bo można z nich określić prędkość w kierunku promienia widzenia.

łową wielkiej osi a i mimośród e . Żeby zaś określić położenie towarzysza na orbicie, musimy znać epokę przejścia przez periastrum t_0 i peryod obiegu T . Razem potrzeba znać siedm elementów. ŁpTwo zrozumieć, dlaczego, gdy chodzi o gwiazdy podwójne, trzeba mieć o jeden element więcej niż wtedy, gdy chodzi o małe planety. Ponieważ masa małej planety jest znikoma wobec masy słońca, więc trzecie prawo Keplera sprowadza się do związku

$$n = \frac{k}{a^{3/2}}.$$

Znając a odrazu otrzymujemy średni ruch n czyli, co na jedno wychodzi, peryod obiegu $T = \frac{2\pi}{n}$. Tu zaś trzecie prawo Keplera sprowadza się do kształtu.

$$n = \frac{k\sqrt{m+m_1}}{a^{3/2}}. \quad (56)$$

Ponieważ nie znamy $m+m_1$, więc nie możemy obliczyć n nawet wtedy, gdy umiemy wyrazić a w jednostkach długości. Trzeba określić n z obserwacyi. mianowicie z obserwacyi można otrzymać peryod T , ten zaś jest związany ze średnim ruchem przez prosty związek $T = \frac{2\pi}{n}$. Zato znając peryod i połowę wielkiej osi orbity można obliczyć $m+m_1$.

Objasnimy teraz zastrzeżenie co do wyrażenia a przez jednostki długości. Z orbity widomej możemy wyliczyć a tylko w sekundach kątowych. Dopiero wtedy, gdy parallaksa jest znana, można sekundy kątowe zamienić na astronomiczne jednostki długości, mianowicie jeżeli oznaczymy połowę wielkiej osi orbity towarzysza, wyrażoną w sekundach, przez a'' a parallaksę, także wyrażoną w sekundach, przez p , to w astronomicznych jednostkach długości a wyrazi się przez wzór

$$a = \frac{a''}{p}. \quad (57)$$

Po tem wyjaśnieniu powracamy do wyznaczenia elementów prawdziwej orbity. Można je dokonać kilku metodami [są nawet metody graficzne, np. Z wiersa], ale najbardziej elegancką i prostą jest metoda M. Kowalskiego. Wyobraźmy sobie w płaszczyźnie orbity rzeczy wistej osie prostokątne; niechaj oś x będzie iden-

tyczna z wielką, a oś y z małą osią elipsy. Wtedy, jak wiadomo, równanie elipsy jest

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Jeżeli przesuniemy środek współrzędnych do tego ogniska, w którym znajduje się ciało centralne, to wszystkie x wzrosną o ae , przeto w nowym systemie współrzędnych równanie elipsy będzie.

$$\frac{(x + ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Obróćmy teraz osie współrzędnych o kąt $-\tilde{\omega}$ tak, aby oś x stała się identyczną z linią węzłów. Jeżeli oznaczymy nowe współrzędne literami x' i y' , to

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \tilde{\omega} + y' \sin \tilde{\omega} \\ y &= -x' \sin \tilde{\omega} + y' \cos \tilde{\omega} \end{aligned}$$

i w nowym systemie współrzędnych równanie elipsy będzie:

$$(58) \quad \frac{(x' \cos \tilde{\omega} + y' \sin \tilde{\omega} + ae)^2}{a^2} + \frac{(-x' \sin \tilde{\omega} + y' \cos \tilde{\omega})^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Spostrzegamy, że system współrzędnych $x'y'$ ma wspólny środek z tym systemem osi współrzędnych, który znajduje się w płaszczyźnie orbity widomej. Przypominamy, że w tym drugim systemie oś y jest identyczna z północną stroną stycznej do koła godzinowego przechodzącego przez ciało centralne. Przyjmujemy w drugim systemie promień widzenia, mianowicie tę jego stronę, która jest ku nam zwrócona, za oś z , następnie okręcamy osie drugiego systemu o kąt \mathcal{Q} naokoło osi z tak, aby oś x stała się również identyczną z linią węzłów. Wtedy, jeżeli oznaczymy nowe współrzędne przez x_1 i y_1 , to¹⁾

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos \mathcal{Q} - y_1 \sin \mathcal{Q} \\ y &= x_1 \sin \mathcal{Q} + y_1 \cos \mathcal{Q} \\ z &= z_1. \end{aligned}$$

¹⁾ Widzimy, że Kowalski obraca drugi system w kierunku dodatnim, podczas gdy obracał pierwszy w kierunku ujemnym. Jest to zupełnie racjonalne, bo chcąc doprowadzić dwa systemy współrzędnych do koincydencji trzeba obracać je „na spotkanie”; więc jeżeli obracamy jeden system od prawej strony ku lewej, to musimy obracać drugi od lewej ku prawej.

Teraz obróćmy jeszcze osie y_1 i z_1 naokoło osi x_1 (naokoło linii węzłów) o kąt i tak, aby oś z_1 stała się identyczna z normalną do płaszczyzny orbity prawdziwej. Jeżeli oznaczymy nowe współrzędne przez x' , y' i z' , to otrzymamy

$$\begin{aligned} x_1 &= x' \\ y_1 &= y' \cos i - z' \sin i \\ z_1 &= y' \sin i + z' \cos i, \end{aligned}$$

a podstawiając te wartości we wyrażenia na x, y, z otrzymamy:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varrho - y' \sin \varrho \cos i + z' \sin \varrho \sin i \\ y &= x' \sin \varrho + y' \cos \varrho \cos i - z' \cos \varrho \sin i. \end{aligned}$$

Podstawmy teraz te ostatnie wyrażenia w równanie elipsy widomej (55) a otrzymamy

$$\begin{aligned} &A(x' \cos \varrho - y' \sin \varrho \cos i + z' \sin \varrho \sin i)^2 + \\ &+ 2H(x' \cos \varrho - y' \sin \varrho \cos i + z' \sin \varrho \sin i)(x' \sin \varrho + y' \cos \varrho \cos i \dots \\ &+ \dots + \dots - 1 = 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Współrzędne x', y', z' są w obu równaniach (58) i (59) jednakowe [dlatego to pod koniec obu przekształceń wprowadziliśmy jednakowe symbole]; są to współrzędne, w których oś x' jest identyczna z linią węzłów, oś y' leży w płaszczyźnie rzeczywistej orbity i przecina prostopadle oś x' w samym ciełe środkowym, wreszcie oś z' jest prostopadła do obu poprzednich. Równanie (58) to jest równanie walca, którego poprzecznem przecięciem jest orbita widoma [oś jego jest równoległa do promienia widzenia]. Walec ten przecina się z płaszczyzną $x'y'$ właśnie wzdłuż orbity rzeczywistej. Gdy zatem w równaniu (59) położymy $z' = 0$, to z równania walca otrzymamy równanie samej orbity rzeczywistej:

$$\begin{aligned} &A(x' \cos \varrho - y' \sin \varrho \cos i)^2 + \\ &+ 2H(x' \cos \varrho - y' \sin \varrho \cos i)(x' \sin \varrho + y' \cos \varrho \cos i) + \\ &+ B(x' \sin \varrho + y' \cos \varrho \cos i)^2 + 2G(x' \cos \varrho - y' \sin \varrho \cos i) + \\ &+ 2F(x' \sin \varrho + y' \cos \varrho \cos i) + 1 = 0. \end{aligned} \quad (60)$$

Równania (58) i (60), jako dwa równania tej samej krzywej w tych samych współrzędnych, mogą różnić się od siebie tylko jakimś czynnikiem. Pomnożmy przeto równanie (58) przez nieokre-

ślony tymczasem czynnik λ i przyrównajmy do siebie współczynniki przy tych samych potęgach zmiennych x' , y' , z' a otrzymamy sześć równań między wiadomymi A , B i t. d. z jednej a niewiadomymi: czynnikiem λ i elementami rzeczywistej orbity Ω , i , $\tilde{\omega}$, a i e z drugiej strony, mianowicie

$$\begin{aligned} \lambda \left(\frac{\cos^2 \tilde{\omega}}{a^2} + \frac{\sin^2 \tilde{\omega}}{b^2} \right) &= A \cos^2 \Omega + H \sin 2\Omega + B \sin^2 \Omega \\ \lambda \left(\frac{\sin^2 \tilde{\omega}}{a^2} + \frac{\cos^2 \tilde{\omega}}{b^2} \right) &= \cos^2 i (A \sin^2 \Omega - H \sin 2\Omega + B \cos^2 \Omega) \\ \lambda \sin \tilde{\omega} \cos \tilde{\omega} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) &= \cos i \left[-\frac{(A-B)}{2} \sin 2\Omega + H \cos 2\Omega \right] \\ \lambda \frac{e}{a} \cos \tilde{\omega} &= G \cos \Omega + F \sin \Omega \\ \lambda \frac{e}{a} \sin \tilde{\omega} &= \cos i [-G \sin \Omega + F \cos \Omega] \\ \lambda (e^2 - 1) &= 1 \end{aligned}$$

Z ostatniego równania zaraz otrzymamy

$$\lambda = -\frac{1}{1 - e^2}.$$

Rugując jeszcze a i b przez p (parametr) i e , t. j. kładąc

$$(61) \quad a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}},$$

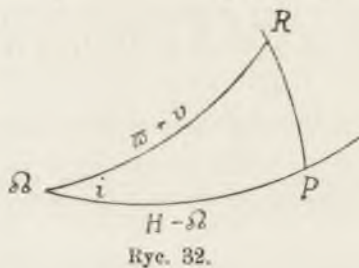
po łatwych przekształceniach otrzymamy następujące równania:

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\tan^2 i \sin 2\Omega}{p^2} &= -2(FG - H) \\ \frac{\tan^2 i \cos 2\Omega}{p^2} &= F^2 - G^2 + A - B \\ \frac{2}{p^2} + \frac{\tan^2 i}{p^2} &= F^2 + G^2 - (A + B) \\ e \sin \tilde{\omega} &= -p(F \cos \Omega - G \sin \Omega) \cos i \\ e \cos \tilde{\omega} &= -p(F \sin \Omega + G \cos \Omega). \end{aligned} \right.$$

W równaniach (62) wielkości niewiadome są tak ugrupowane, że obliczenie ich nie przedstawia żadnej trudności a liczba równań równa się liczbie niewiadomych. Obliczywszy z równań (62) Ω ,

$i, p, \tilde{\omega}$ i e przejdziemy do pierwszego równania (61) i otrzymamy a . W ten sposób będziemy mieli pięć elementów.

Potrzeba jeszcze obliczyć czas przejścia przez periastrum t_0 i peryod obiegu T . Do tego potrzebujemy pewnego wzoru, który łatwo otrzymać w następujący sposób. Zatoczmy dokoła centralnego ciała kulę o promieniu jedność i rozpatrzmy ślady płaszczyzn orbity widomej i rzeczywistej na powierzchni owej kuli. Niechaj ΩR będzie śladem orbity rzeczywistej a ΩP widomej, kąt przy Ω jest to kąt nachylenia i . Niechaj punkt P będzie rzutem punktu R , wtedy kąt przy P jest prosty. Naturalnie Ω oznacza węzeł. W trójkącie sferycznym $\Omega R P$ łuk $\Omega R = \tilde{\omega} + v$, gdzie v oznacza anomalię rzeczywistą, a łuk $\Omega P = H - \Omega$, gdzie H oznacza kąt pozycyjny punktu P (rzutu punktu R). Ponieważ trójkąt $\Omega R P$ jest prostokątny, więc



$$\text{tang}(H - \Omega) = \text{tang}(\tilde{\omega} + v) \cos i. \quad (63)$$

W periastrum $v = 0$, jeżeli przeto oznaczymy odpowiedni kąt pozycyjny na orbicie widomej przez H_0 , to

$$\text{tang}(H_0 - \Omega) = \text{tang} \tilde{\omega} \cos i. \quad (64)$$

Ponieważ $\Omega, \tilde{\omega}$ i i są wiadome, więc ze wzoru (64) znajdziemy kąt pozycyjny H_0 odpowiadający periastrum a następnie z obserwowanych kątów pozycyjnych i z czasów obserwacji wyinterpolujemy czas odpowiadający kątowi H_0 . Będzie to czas przejścia przez periastrum t_0 . Średni ruch a więc i peryod możemy określić także z tego samego równania (63). Jeżeli weźmiemy dwa kąty pozycyjne P_1 i P_2 zmierzone w chwilach czasu t_1 i t_2 [należy obrać takie chwile, aby odstęp czasu $t_2 - t_1$ był jak najdłuższy] i podstawimy najpierw jeden a potem drugi w równanie (63), to znajdziemy odpowiednie anomalie rzeczywiste v_1 i v_2 . Następnie za pomocą wzoru

$$\text{tang} \frac{1}{2} E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \text{tang} \frac{1}{2} v$$

znajdziemy odpowiednie anomalie mimośrodowe E_1 i E_2 . Z tych znowu przez równanie Keplera [patrz rozdz. XIII-ty, § 6] znajdziemy anomalie średnie M_1 i M_2 odpowiadające chwilom czasu t_1 i t_2 . Wreszcie określimy n i T przez równanie

$$(65) \quad n = \frac{360^\circ}{T} = \frac{M_2 - M_1}{t_2 - t_1}.$$

Dla przykładu przytoczymy elementy orbity rzeczywistej ζ Herculis wedle Th. Lewisa¹⁾

$$\begin{aligned} Q &= 46^\circ 0' \\ i &= 50 32 \\ \dot{\omega} &= 254 44 \\ e &= 0.528 \\ a &= 1,40 \\ t_0 &= 1898,3 \\ T &= 35,1 \text{ lat.} \end{aligned}$$

Należy zauważyć, że łatwo otrzymać mimośród e wprost z widomej orbity następującym sposobem. Odcinek CA [ryc. 31] jest rzutem połowy wielkiej osi orbity a , zaś odcinek CS jest rzutem tak zwanego liniowego mimośrodu ae . Ponieważ rzuty są proporcjonalne do rzuconych wielkości, więc

$$(66) \quad \frac{CS}{CA} = \frac{ae}{a} = e.$$

Naturalnie można użyć ten wzór do kontroli e otrzymanego ze wzorów (62).

10. Wyznaczenie drogi roju meteorytów. Droga w atmosferze.

Gwiazdy spadające czyli meteoryty są to drobne ciała krążące rojami naokoło słońca. Oddzielne meteoryty są rozsypane nieregularnie wzdłuż całej orbity, przeto rój meteorytów tworzy coś w rodzaju olbrzymiego, bardzo wydłużonego wieńca dokoła słońca. Powiedzieliśmy „wydłużonego“, bo — o ile wiadomo — drogi me-

¹⁾ l. c. str. 342.

teorytów są elipsami równie wydłużonemi jak elipsy, po których krążą komety. Niektóre z tych wieńców przecinają się ze ziemią orbitą, wskutek czego ziemia co roku o tej samej porze natrafia na rój. Ponieważ zaś kąt między orbitą ziemi a orbitą roju pozostaje z roku na rok prawie ściśle ten sam, więc wydaje się, że ten sam rój co roku wychodzi z tej samej konstelacyi. Stąd to pochodzą nazwy: Perseidów [od konstelacyi Perseusza], Leonidów [od konstelacyi Lwa] i t. d., które ponadawano rozmaitym rojom.

Meteoryty są tak drobnemi ciałami, że spotkanie z rojem możemy skonstatować tylko w nocy [o aerolitach spadających na ziemię wśród dnia z hukiem i trzaskiem nie mówimy, bo nie będziemy zajmować się sposobem określenia ich dróg] dzięki zjawisku świetlnemu, które towarzyszy ich przelotowi przez atmosferę. Z powodu tarcia o powietrze meteoryty rozpalają się, świecą a nawet zupełnie ulatniają się lub rozsypują¹⁾. Świetlana pręga pozostająca poza meteorytem, to nic innego jak rozpalone powietrze może z dodatkiem rozpalonych gazów pochodzących z ulotnienia się meteorytu. Wężykowaty kształt niektórych dróg meteorytów także tłumaczy się przez opór powietrza.

Gdyby nie przyciąganie ziemi i nie opór powietrza, to na krótkiej przestrzeni dostępnej obserwacyi możnaby uważać drogi meteorytów za równoległe i prostoliniowe. Wtedy obserwatorom ziemskim zdawałoby się, że meteoryty danego roju wylatują nie tylko z jednej okolicy, ale z jednego punktu nieba, z tak zwanego „radyantu“. Oczywiście kierunek ku radyantowi to kierunek stycznej do drogi roju; przeto oznaczając położenie radyantu oznaczylibyśmy jednocześnie kierunek stycznej. Sposób wyznaczenia „radyantu“ nasuwa się sam przez się: skoro przedłużymy wstecz świecące drogi meteorytów, to przedłużenia powinny przeciąć się w radyancie. Naturalnie ze względu na błędy obserwacyi nie można oczekiwać, aby wszystkie przedłużenia przecinały się dokładnie w jednym punkcie, ale to okoliczność mniejszej wagi. Ważniejszem jest to, że z powodu przyciągania ziemi i oporu powietrza drogi meteorytów w atmosferze nie są ani dokładnie równoległe, ani prostoliniowe.

¹⁾ Wątpliwą jest rzeczą, czy meteoryty spalają się. Na tych wysokościach, na których meteoryty świecą, zawartość tlenu w powietrzu jest prawdopodobnie bardzo mała.

Właściwie zadanie o przelocie meteorytu mimo ziemi jest specjalnym przypadkiem zadania trzech ciał [słońce, ziemia, meteoryt], ale nie warto stosować tę tak trudną teorię do przypadku, w którym z jednej strony można dojść do celu metodami przybliżonemi a z drugiej ze względu na naturę obserwacji, na których opieramy się, nie można osiągnąć wielkiej dokładności.

Powiedzieliśmy już, że roje meteorytów krążą naokoło słońca prawdopodobnie¹⁾ po wydłużonych elipsach. Niekiedy można z gruba określić rozmiary wielkich osi tych elips. Listopadowe Leonidy występują osobliwie rzęsiście co 33 lub 34 lata. Tłómaczymy to sobie w ten sposób, że peryod obiegu wynosi $33\frac{1}{4}$ lat (mniej więcej) i że w roju jest pewne skupienie, na które ziemia natrafia co 33 lub 34 lata. Peryodowi $33\frac{1}{4}$ -letniemu odpowiada połowa większej osi około 10,3 razy większa niż połowa wielkiej osi orbity ziemskiej.

Nie wdając się w kwestyę, o ile ów $33\frac{1}{4}$ -letni peryod jest dokładnie oznaczony, widzimy, że w przypadku Leonidów mamy pewne dane, na których można oprzeć określenie wielkiej osi. Podobne dane istnieją w niektórych innych przypadkach, ale są także takie przypadki, w których niema żadnej podstawy do oceny rozmiarów wielkiej osi.

Nie mogąc dokładnie określić rozmiarów i kształtu elips zakładamy, że meteoryty lecą z prędkością paraboliczną. Przeceniamy w ten sposób prędkość: np. dla Leonidów w chwili spotkania ze ziemią prędkość paraboliczna jest o 2,5% większa od prędkości eliptycznej, odpowiadającej hipotezie $a=10,3$. Ale właśnie z tego przykładu widzimy, że przecenienie nie jest znowu tak wielkie. Przyjmiemy tedy w dalszym ciągu, że prędkość jest paraboliczna.

¹⁾ Nie twierdzimy, aby wszystkie roje, które ziemia napotykała lub napotka w swym biegu, stałe należały do systemu słonecznego. Być może, że niekiedy, choć zapewne zrzadka wpada z międzyświatowych przestrzeni jakiś rój po to, aby przeleciawszy przez system słoneczny powędrować dalej. Nie możemy wykluczyć tej możliwości choćby dlatego, że pomiędzy samotnymi meteorytami zdarzają się — i to często — meteoryty obdarzone prędkością względem ziemi większą nawet niż ta maksymalna prędkość 71,8... km na sek. (patrz dalej), którą mogą osiągnąć meteoryty leące z prędkością paraboliczną naokoło słońca. Naturalnie mówimy tu o prędkości w czasie lotu, a nie w chwili spadku, albowiem ta ostatnia jest zawsze dużo mniejsza.

Ze wzoru (55) w § 8 rozdz. XIII-go otrzymamy na prędkość paraboliczną wyrażenie:

$$k\sqrt{\frac{2}{R}}.$$

Przyjęliśmy tu astronomiczne jednostki; masę meteorytu naturalnie pominęliśmy. Ponieważ zaś w chwili spotkania meteoryty znajdują się na tej samej odległości od słońca co ziemia, ponieważ w tego rodzaju przybliżonych rachunkach można przyjąć, że orbita ziemi jest kołem; więc kładziemy $R = 1$ i znajdujemy, że paraboliczna prędkość meteorytów w ich ruchu naokoło słońca jest $\sqrt{2}k$. Jednocześnie przy tych samych założeniach prędkość ziemi będzie poprostu k . Stąd największa prędkość meteorytu względem ziemi, gdy oba ciała biegną wprost naprzeciw siebie, będzie $(\sqrt{2} + 1)k$, a najmniejsza względna prędkość, gdy meteoryt dogania ziemię, będzie $(\sqrt{2} - 1)k$. Otóż nawet ta najmniejsza względna prędkość jest jeszcze nieco większa niżli ta prędkość, która wystarcza, aby przelatujące koło ziemi ciało nie zostało przez nią pojmane. Rzeczywiście obliczmy prędkość paraboliczną w ruchu naokoło ziemi dla ciała przelatującego tuż koło jej powierzchni. Wracamy do wzoru (55) § 8 rozdz. XIII-go i piszemy

$$u_0 = k\sqrt{\frac{2m}{r}}, \quad (67)$$

przyczem r oznacza średni promień ziemi a m jej masę.

Wedle rozdz. XIII-go, § 3

$$m = \frac{1}{331613}, \quad r = \frac{8,806}{206264,8}.$$

Podstawiając te wartości we wzór (67) otrzymamy

$$u_0 = 0,3758 \dots k,$$

podczas gdy ¹⁾

$$(\sqrt{2} - 1)k = 0,4142 \dots k.$$

¹⁾ Jeżeli zamiast astronomicznej jednostki długości wprowadzimy kilometr a zamiast doby średniej słonecznej sekundę, to prędkość ziemi na orbicie wyrazi się liczbą 29,75... km. na sek. a graniczne prędkości meteorytów wyrażą się przez 71,82... [górną granicę] i 12,32... [dolną granicę] km. na sek., zaś paraboliczna prędkość względem ziemi wyrazi się przez 11,18... km. na sek.

Ale obliczyliśmy graniczne prędkości meteorytów względem ziemi przypuszczając, że biegną dokoła słońca ruchem parabolicznym. Gdybyśmy założyli, że poruszają się ruchem eliptycznym, to otrzymalibyśmy niższe wartości tak na górną jak na dolną granicę, np. kładąc $a=8$ otrzymalibyśmy na dolną granicę wartość już nieco niższą od parabolicznej prędkości względem ziemi, to jest niższą od $u_0 = 0,3758...k$. Jasną jednak jest rzeczą, że procent meteorytów, które z tej racyi mogą zostać pojmane¹⁾ przez ziemię, jest bardzo mały. Ważniejszą rolę odgrywa opór powietrza. Ma on wpływ dwojaki: zmniejsza prędkość meteorytu i, powtóre, zmienia kształt jego drogi. Zmniejszenia prędkości obliczyć nie umiemy. Schiaparelli próbował zużytkować niektóre wzory balistyki, ale cyfry, które otrzymał ze wzoru Didiona, nie zgadzają się z temi, które otrzymał ze wzoru St. Roberta²⁾. Nic w tem dziwnego. Oba wzory są czysto empiryczne, oparte na doświadczeniach z pociskami działowymi. Stosując je do meteorytów ekstrapolujemy poza wszelkie granice możliwości, bo po pierwsze prędkości meteorytów są po kilkadziesiąt lub kilkanaście razy większe od prędkości pocisków, po drugie gęstość powietrza, w którym odbywa się lot meteorytów, jest wiele razy mniejsza niż gęstość dolnych warstw atmosfery, w których odbywa się lot pocisków. Pomimo tego nie ulega wątpliwości, że meteoryty tracą swą prędkość osobliwie, gdy dojdą do gęstszych dolnych warstw powietrza: poprostu grzezną w atmosferze. Przecie rozgrzanie samego meteorytu i powietrza [światlana pręga pozostająca za meteorystem], huk [ten ostatni słyszemy tylko wtedy, gdy meteoryt znajduje się już blisko powierzchni ziemi] wszystko to wytwarza się na koszt energii ruchu postępowego. Dlatego to meteoryty, których początkowa prędkość względem ziemi wielokrotnie przewyższała paraboliczną prędkość lotu naokoło ziemi u_0 , tracą tyle ze swej energii ruchu postępowego, że

¹⁾ Mówimy o meteorytach, które mogłyby minąć ziemię, ale zostają wciągnięte w jej sferę atrakcyi.

²⁾ N. Herz [Kometen u. Meteore. W. Valentiner'a Handwörterbuch der Astronomie, t. II str. 156] oblicza, że gdyby kula żelazna ważąca 15000 kg [tyle ważył żelazny aerolit (holosyderyt), który znaleziono w Otumpa] spadała wprost ze zenitu z początkową prędkością 72000 metrów na sek., to w chwili uderzenia o ziemię posiadałaby już tylko prędkość 1007 metrów na sek. Liczba ta wypada ze wzoru Didiona; ze wzoru St. Roberta wypada jeszcze mniej, bo tylko 539,8 metrów na sek.

prędkość spada poniżej owej granicy u_0 , poczem meteoryty zostają pojmane przez ziemię.

Ponieważ teoria ruchu Keplerowskiego odnosi się do ruchu w próżni, więc nie stosuje się do lotu meteorytów w powietrzu. Zupełnie tak samo jak drogi pocisków — drogi meteorytów w atmosferze nie są ani przecięciami stożkowemi, ani krzywemi symetrycznemi, ani nawet krzywemi płaskimi. Kształtu ich dokładnie nie znamy, bo nie umiemy całkować równań ruchu z uwzględnieniem oporu powietrza. Nie powinniśmy zatem mówić ani o hyperbolach, ani o elipsach, tylko o drogach mijających ziemię i idących dalej w międzyplanetarne przestrzenie, lub o drogach okrążających ziemię [i przecinających się w końcu z jej powierzchnią]. Wpływem oporu powietrza [zapewne częstokroć w połączeniu z wpływem stanowiska obserwatora] tłómaczą się obserwowane od czasu do czasu dziwne skręty i zawroty. Jednakże w niektórych zadaniach dotyczących lotu meteorytów w powietrzu z musu uważamy ich drogi za kawałki hyperbol mających ognisko w środku ziemi. Dlatego hyperbol, a nie elips, że obserwowane prędkości świecących meteorytów są z reguły dużo większe od parabolicznej prędkości lotu naokoło ziemi [t. j. od prędkości $u_0 = 0,3784\dots k$].

11. Wyznaczenie elementów drogi roju meteorytów naokoło słońca z położenia radyantu.

Wyznaczenie elementów orbity roju meteorytów różni się zasadniczo od wyznaczenia elementów orbity planety lub komety, bo nie mamy trzech obserwacji, tylko położenie¹⁾ „radyantu“, t. j. kierunku stycznej do drogi. Zato mamy odrazu położenie węzła na ekliptyce, bo gdy rój spotyka ziemię, to znaczy, że przechodzi przez ekliptykę, a więc długość węzła jest ta sama, co długość ziemi w chwili spotkania. Chodzi tylko o to, czy to węzeł wstępujący, czy zstępujący. Łatwo odpowiedzieć na to pytanie, bo gdy szerokość radyantu b jest dodatnia, to rój idzie od dodatnich szerokości ku odjemnym; przeto węzeł jest zstępujący, jeżeli zaś szerokość radyantu jest odjemna, to rój idzie od odjemnych szerokości ku dodatnim i węzeł jest wstępujący. Oprócz tych danych mamy

¹⁾ Widome położenie radyantu zależy w części od obrotu ziemi (rodzaj aberacji). Omawiać tego niezbyt znacznego wpływu nie będziemy.

jeszcze odległość roju od słońca, bo w chwili spotkania ta odległość jest identyczna z odległością ziemi od słońca, wreszcie mamy czas obserwacji.

Oznaczmy współrzędne ekliptyczne radyantu przez l i b ; dostawy kierunkowe stycznej do drogi będą

$$\begin{aligned} & - \cos b \cos l \\ & - \cos b \sin l \\ & - \sin b. \end{aligned}$$

Piszemy znak —, bo kierunek prędkości jest wręcz przeciwny kierunkowi radyantu. Oznaczmy absolutną wielkość prędkości względem ziemi przez γk , gdzie γ jest to pewien czynnik tymczasem nieoznaczony, bo nie możemy skorzystać z obserwowanych prędkości lotu w powietrzu, jako już zmienionych przez tarcie o powietrze. Tedy składowe prędkości roju¹⁾ względem ziemi są:

$$(68) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= - \gamma k \cos b \cos l \\ \frac{d\eta}{dt} &= - \gamma k \cos b \sin l \\ \frac{d\zeta}{dt} &= - \gamma k \sin b. \end{aligned} \right.$$

Gdy do tych prędkości dodamy składowe prędkości ziemi względem słońca, to otrzymamy składowe prędkości roju względem słońca:

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dX}{dt} + \frac{d\xi}{dt} = \frac{dX}{dt} - \gamma k \cos b \cos l \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dY}{dt} + \frac{d\eta}{dt} = \frac{dY}{dt} - \gamma k \cos b \sin l \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{d\zeta}{dt} = - \gamma k \sin b. \end{aligned} \right.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 &= \\ &= \left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 - 2\gamma k \cos b \left(\frac{dX}{dt} \cos l + \frac{dY}{dt} \sin l\right) + \gamma^2 k^2. \end{aligned}$$

¹⁾ Mówimy o prędkości roju, bo wyobrażamy sobie, że wszystkie meteoryty lecą równoległe, prostoliniowo i z jednakową prędkością.

Po lewej stronie stoi kwadrat prędkości roju względem słońca. Jest to wielkość wiadoma, bo wedle założenia zrobionego w poprzednim paragrafie rój leci z prędkością paraboliczną. Zatrzymując te same jednostki, któremi posługiwaliśmy się w poprzednim paragrafie i naturalnie pomijając masy meteoroidów możemy zatem napisać

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2k^2}{R}.$$

Tak samo suma dwóch pierwszych kwadratów po prawej stronie to nic innego jak kwadrat prędkości ziemi po orbicie. Pomijając masę ziemi wobec masy słońca i kładąc $a=1$, co jest dozwolone, bo a prawie nie różni się od astronomicznej jednostki długości, możemy napisać:

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 = k^2 \left(\frac{2}{R} - 1\right).$$

Po tych podstawieniach otrzymamy

$$k^2 (\gamma^2 - 1) - 2\gamma k \cos b \left(\frac{dX}{dt} \cos l + \frac{dY}{dt} \sin l\right) = 0. \quad (70)$$

Wyregulujemy składowe prostokątne prędkości ziemi względem słońca $\frac{dX}{dt}$ i $\frac{dY}{dt}$ za pomocą wzorów (13) rozdz. X-go. Trzeba tylko położyć $\varepsilon=0$, bo nasze współrzędne prostokątne są to współrzędne ekliptyczne. Z drugiej strony w celu ujednostajnienia wzorów wprowadzimy zamiast n jego wartość $\frac{k}{a^{3/2}}$ [masę ziemi pomijamy wobec masy słońca], albo ponieważ przyjmujemy, że $a=1$, poprostu k . W ten sposób otrzymamy następujące wyrażenia na składowe prędkości ziemi

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{k}{\cos \varphi} (\sin \odot + \sin \varphi \sin \pi) \\ \frac{dY}{dt} &= -\frac{k}{\cos \varphi} (\cos \odot + \sin \varphi \cos \pi). \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Skoro to podstawimy we wzory (70), to zaniedbując jeszcze mimośród orbity ziemskiej i skracając przez k^2 otrzymamy następujące bardzo proste równanie na γ

$$\gamma^2 - 2\gamma \cos b \sin (l - \odot) - 1 = 0. \quad (70 \text{ bis})$$

Równanie na γ jest kwadratowe, ma ono zawsze [nietylko w tym uproszczonym kształcie ale i w ogólniejszym] jeden pierwiastek dodatni a drugi ujemny. Wobec poczynionych wyżej założeń powinniśmy wziąć dodatni pierwiastek.

Skoro mamy γ , to „eo ipso“ mamy przez wzory (68) wszystkie trzy prędkości roju względem ziemi a przez wzory (69) z uwzględnieniem wzorów (71) wszystkie trzy prędkości roju względem słońca. Oprócz tego mamy współrzędne roju względem słońca w chwili spotkania, bo są one identyczne ze współrzędnymi ziemi względem słońca, t. j.

$$x = X, \quad y = Y, \quad z = Z = 0.$$

W ścisłym rachunku trzeba by uwzględnić mimośród orbity ziemskiej, ale zazwyczaj wystarczy przyjąć orbitę kołową, t. j. wystarczy położyć

$$(72) \quad \begin{aligned} x &= -\cos \odot \\ y &= -\sin \odot. \end{aligned}$$

Jak wiadomo zasada zachowania pól wyraża się wzorem

$$(73) \quad r^2 \frac{dv}{dt} = k \sqrt{p},$$

albo jeżeli weźmiemy rzuty prędkości wycinkowej na trzy płaszczyzny współrzędnych, wzorami

$$\begin{aligned} y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= \cos \alpha \cdot k \sqrt{p} \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= \cos \beta \cdot k \sqrt{p} \\ x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= \cos \gamma \cdot k \sqrt{p}, \end{aligned}$$

gdzie [por. np. wzory (69) rozdz. XIII-go]

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \sin \varrho \sin i \\ \cos \beta &= -\cos \varrho \sin i \\ \cos \gamma &= \cos i. \end{aligned}$$

Zważywszy, że w danym razie $z = 0$ i podstawivszy wartości na pozostałe współrzędne ze wzorów (72) a na prędkości ze wzorów (69) z uwzględnieniem wzorów (71) otrzymamy

$$\begin{aligned} \gamma \sin \odot \sin b &= \sin \varrho \sin i \sqrt{p} \\ \gamma \cos \odot \sin b &= -\cos \varrho \sin i \sqrt{p} \\ 1 + \gamma \cos b \sin (l - \odot) &= \cos i \sqrt{p}. \end{aligned}$$

Stosownie do uczynionej na początku tego paragrafu uwagi, gdy $b > 0$, to $180^\circ + \varrho$ równa się długości ziemi, gdy zaś $b < 0$, to ϱ równa się długości ziemi. Ale długość ziemi jest o 180° większa od długości słońca, więc w pierwszym razie $\varrho = \odot$ a w drugim $\varrho = 180^\circ + \odot$. Tedy dwa pierwsze równania przywodzą się do

$$\sqrt{p} \sin i = \pm \gamma \sin b,$$

przyczem należy wziąć znak $+$, gdy $b > 0$, a $-$, gdy $b < 0$. } (74)

Trzecie równanie pozostaje bez zmiany:

$$\sqrt{p} \cos i = 1 + \gamma \cos b \sin (l - \odot).$$

Oczywiście wzory (74) wystarczają do określenia p oraz i , bo wszystko, co stoi po prawej stronie tych wzorów, jest wiadome. Mamy więc obecnie już trzy elementy: ϱ , p i i . W celu oznaczenia argumentu szerokości perihelium trzeba określić prawdziwą anomalię v . Z równania [równ. (45) rozdz. XIII-ty]

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v}$$

trudno wyznaczyć anomalię prawdziwą, bo niewiadomo, jaki znak ma mieć $\cos \frac{1}{2} v$, ale różniczkując to równanie otrzymamy

$$\frac{dr}{dt} = \text{tang } \frac{1}{2} v \cdot r \frac{dv}{dt}.$$

Rugując stąd $\frac{dv}{dt}$ z pomocą równania (73) otrzymamy

$$\text{tang } \frac{1}{2} v = \frac{r \frac{dr}{dt}}{k \sqrt{p}} = \frac{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}}{k \sqrt{p}} = \frac{\gamma}{\sqrt{p}} \cos b \cos (l - \odot). \quad (75)$$

Ze wzoru (75) możemy określić $\frac{1}{2} v$ bez żadnej wątpliwości, bo wiadomo, że ten kąt musi być zawarty między 0 a 180° .

Z drugiej strony argument szerokości u jest zerem, jeżeli rój meteorytów jest we wstępującym węźle, t. j. jeżeli $b < 0$, zaś $u = 180^\circ$, jeżeli rój jest w zstępującym węźle, t. j. jeżeli $b < 0$. Zatem argument szerokości perihelium jest

$$(76) \quad \begin{cases} \dot{\omega} = u - v = 180^\circ - v, & \text{jeżeli } b > 0 \\ \dot{\omega} = u - v = -v, & \text{jeżeli } b < 0, \end{cases}$$

zaś długość perihelium jest w obu przypadkach

$$(77) \quad \pi = 180^\circ - v + \odot.$$

Ponieważ oddzielne meteoryty przechodzą przez perihelium w różnych chwilach czasu, więc wyznaczanie epoki przejścia przez perihelium nie miałyby sensu.

Literatura do rozdziałów XV, XVI, XVII i XVIII.

- B. Baillaud: Cours d'Astronomie, tom II, Paryż, 1896.
 J. Bauschinger: Die Bahnbestimmung der Himmelskörper, Lipsk, 1906.
 J. Boccardi: Guide du calculateur. Paryż, 1902.
 H. Bruns: Der Lambertsche Satz. Astr. Nachr., CXVIII, str. 241.
 O. Callandreaux: Aperçu des méthodes pour la détermination des orbites. Annales de l'Observatoire de Paris, tom XXIII (1902 r.).
 C. V. A. Charlier: Die analytische Lösung des Bahnbestimmungsproblems. Arkiv f. Matematik, tom VII, Nr 5, 10, 16.
 — Die Mechanik des Himmels, tom II, Lipsk, 1907.
 — Determination of orbits from three observations. Monthly Notices R. A. S., tom LXXI, str. 454.
 S. D. Czornyj (Tscherny, Черный): Zur Frage... Astr. Nachr., tom CLXXV, str. 233.
 — Mehrfache Lösungen des Kometenproblems, *ibidem*, t. CLXXVI, str. 365.
 — Auflösung der Eulerschen Gleichung, *ibidem*, t. CLXXIX, str. 117.
 J. F. Encke: Über die Olbers'sche Methode... Berliner astr. Jahrbuch f. 1833.
 — Über die Bestimmung einer elliptischen Bahn. Berl. astr. Jahrb. f. 1854.
 C. F. Gauss: Theoria motus, tłumaczenie na niemiecki język C. Haase'go, Hannover, 1865.
 W. A. Hamilton: On the convergency of the Series... Astron. Journal, tom XXIII, str. 49.
 P. Harzer: Über die Bestimmung... der Bahnen von Himmelskörpern. Publikationen der Sternwarte in Kiel, tom XI, Lipsk, 1901.
 — Ueber eine allgemeine Methode der Bahnbestimmung. Astr. Nachr., tom CXLI, str. 177.
 — Ueber die geometrische Methode zur Bestimmung der Bahnen. Astr. Nachr., tom CLXXXIV, str. 105.

N. Herz: Kometen und Meteore, artykuł we *Valentinerer Handwörterbuch der Astronomie*, tom II.

W. Klinkerfues: *Theoretische Astronomie*, 3-cie wydanie na nowo opracowane przez H. Buchholza, Brunświk, 1912.

J. Kowalczyk: O sposobach wyznaczenia biegu ciał niebieskich, *Kraków*, 1889.

J. L. de Lagrange: *Nouvelle méthode pour déterminer l'Orbite des Comètes*. *Berl. astr. Jahrbuch* na 1785 r. i *Connaissance des Temps* na 1821 r.

P. S. de Laplace: *Traité de mécanique céleste*, księga II, rozdz. IV w I-szym tomie „*Oeuvres complètes de Laplace*“, Paryż, 1878.

A. O. Leuschner: Versuch der Bahnbestimmung mit sofortiger Berücksichtigung der Störungen. *Vierteljahresschrift der astron. Gesellschaft*. 43 rocznik, 4 zeszyt (Lipsk, 1908), str. 330.

Th. Lewis: *Double Star astronomy*. *Observatory*, tom XXXI (1908).

F. R. Moulton: A general method of determining the elements of orbits. *Astron. Journal*, tom XXII, str. 43.

— The true Radii of Convergence, *ibidem*, tom XXIII, str. 93.

Th. v. Oppolzer: *Lehrbuch der Bahnbestimmung*, dwa tomy, Lipsk, 1882 i 1880.

— Ueber die Kriterien des Vorhandenseins dreier Lösungen. *Sitzb. Akad. der Wiss.* Wien, tom LXXXVI, str. 885.

L. Picart: Sur une équation du calcul des orbites. *Bull. astr.*, tom XXIX, str. 161.

H. Poincaré: Sur la détermination des orbites par la méthode de Laplace. *Bull. astr.*, tom XXIII, str. 161.

G. de Pontécoulant: *Théorie analytique du système du Monde*, tom II, Paryż, 1829.

G. V. Schiaparelli (w tłumaczeniu J. v. Bogusławskiego): Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen, *Szczecin*, 1871.

T. J. J. See: *Researches on the Evolution of Stellar Systems*, tom I, Lynn Mass., 1896.

F. Tietjen: Ueber Verbesserung von Planetenbahnbestimmungen. *Berliner astr. Jahrbuch*, f. 1878.

— Zusammenstellung aller f. die Berechnung einer Planetenbahn... erforderlichen Formeln. *Berl. astr. Jahrbuch* f. 1879.

F. Tisserand: *Leçons sur la détermination des orbites redigées par J. Perchot*. Paryż, 1899.

A. J. Yvon-Villarceau: Détermination des Orbites. *Annales de l'Observatoire de Paris*, tom III, Paryż, 1857.

J. C. Watson: *Theoretical astronomy*. Filadelfia, 1869.

ROZDZIAŁ XIX.

Zadanie trzech ciał i teoria perturbacji.

1. Zadanie n ciał. Płaszczyzna niezmienna. Stałość systemu słonecznego.

Dotychczas zajmowaliśmy się tylko ruchem dwóch ciał wzajemnie przyciągających się wedle prawa Newtona; lecz do systemu słonecznego należy wiele ciał a wszystkie te ciała przyciągają się wzajemnie. Aby stworzyć ścisłą teorię ruchów zachodzących w słonecznym systemie, powinniśmy rozwiązać teoretyczne zadanie o ruchu n ciał wzajemnie przyciągających się wedle prawa Newtona. W zadaniu tem chodzi tylko o ruchy postępowe, przeto można zastąpić wszystkie ciała przez punkty materialne o masach równych masom samych ciał. Wprawdzie niektóre małe perturbacje w ruchu postępowym zależą od figury ciał przyciągających; ale i bez nich zadanie przedstawia się jako niesłychanie trudne, wprost przechodzące siły analizy. Poczóż więc pomnażać trudności?

Oznaczmy masy n punktów materialnych przez m_1, m_2, \dots, m_n , ich absolutne współrzędne przez $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$, odległość pomiędzy punktami i i j przez r_{ij} , t. j. położmy

$$r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2.$$

Napiszmy równania ruchu, np. dla punktu m_i : po lewej stronie napiszemy przyspieszenia pomnożone przez masę punktu:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2},$$

po prawej składowe przyciągania wszystkich innych punktów na punkt m_i . Tak na przykład:

$$-k^2 m_i m_j \frac{(x_i - x_j)}{r_{ij}^3}, \quad -k^2 m_i m_j \frac{(y_i - y_j)}{r_{ij}^3}, \quad -k^2 m_i m_j \frac{(z_i - z_j)}{r_{ij}^3}$$

będą to składowe przyciągania punktu m_i . W każdym równaniu wypadnie napisać $n - 1$ takich wyrazów kładąc kolejno $j = 1, 2, \dots, n$ oprócz $j = i$. Jeżeli dla prostoty przyjmiemy, że stała przyciągania równa się jedności, to równania ruchu i -tego punktu będą wyglądać tak:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = - \sum_{j=1}^{j=n} m_i m_j \frac{(x_i - x_j)}{r_{ij}^3} \quad (1)$$

.....

przyczem należy pamiętać, że w sumowaniu po prawej stronie trzeba opuścić $j = i$. Nie potrzebujemy chyba dodawać, że będziemy mieć ogółem $3n$ równań kształtu (1). Wyobraźmy sobie, żeśmy je wypisali i żeśmy dodali do siebie (stronami odpowiedniami) osobno n równań odnoszących się do składowej x , n równań odnoszących się do składowej y i n równań odnoszących się do składowej z . Po prawej stronie otrzymamy sumy identycznie równe zeru, bo do każdego wyrazu:

$$\frac{x_i^2 - x_j^2}{r_{ij}^3} \dots \text{ i t. d.}$$

znajdzie się odpowiedni wyraz:

$$\frac{x_j^2 - x_i^2}{r_{ij}^3} \dots \text{ i t. d.}$$

który zniesie się z tamtym. Otrzymamy tą drogą trzy równania

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = 0. \quad (2)$$

Jeżeli zatem weźmiemy punkt o współrzędnych:

$$x_0 = \frac{\sum_1^n m_i x_i}{\sum_1^n m_i}, \quad y_0 = \frac{\sum_1^n m_i y_i}{\sum_1^n m_i}, \quad z_0 = \frac{\sum_1^n m_i z_i}{\sum_1^n m_i}, \quad (3)$$

to okaże się, że te współrzędne czynią zadość równaniom

$$(4) \quad \frac{d^2x_0}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y_0}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z_0}{dt^2} = 0.$$

Lecz punkt: x_0, y_0, z_0 to „środek masy“ systemu n punktów; tedy z równań (4) wynika, że środek masy systemu punktów materialnych porusza się prostoliniowo i jednostajnie. Należy jednak zastrzedz się, że nie wzięliśmy w uwagę żadnych sił zewnętrznych, tylko wzajemne przyciąganie n punktów systemu. Przeto twierdzenie wyrażone przez równania (4) stosuje się do słonecznego systemu tylko o tyle, o ile przypuścimy, że przyciągania gwiazd na system słoneczny mniej więcej znoszą się. Zresztą dotąd nie wykryto żadnej krzywizny w drodze systemu słonecznego; można więc powyższe twierdzenie uważać za przybliżenie słuszne.

Ruch absolutny jest fikcyjną. Korzystamy z własności środka masy, aby od ruchu absolutnego przejść do ruchu względem czegoś, co daje się oznaczyć. Bierzemy współrzędne prostokątne ξ, η, ζ , których początek znajduje się w środku masy systemu a osie mają kierunki dowolne, ale stałe. Ponieważ wszystko jedno, jakie kierunki obierzemy, więc dla prostoty przyjmujemy, że nowe osie są równoległe do dawnych absolutnych i piszemy:

$$x_i = x_0 + \xi_i, \quad y_i = y_0 + \eta_i, \quad z_i = z_0 + \zeta_i.$$

Zanim wprowadzimy te nowe współrzędne do wzorów (1), wprzód zapoznamy się z pewną własnością współrzędnych środka masy. Jeżeli mianowicie napiszemy powyższe równania dla wszystkich n punktów materialnych systemu, jeżeli pomnożymy je przez odpowiednie masy i zesumujemy, to uwzględniając wzory (3) otrzymamy związki

$$(5) \quad \Sigma m_i \xi_i = 0, \quad \Sigma m_i \eta_i = 0, \quad \Sigma m_i \zeta_i = 0.$$

Teraz podstawiamy nowe współrzędne we wzory (1), uwzględniamy związki (4) i otrzymujemy

$$m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = - \Sigma m_i m_j \frac{(\xi_i - \xi_j)}{r_{ij}^3},$$

$$\dots$$

$$\dots$$

przyczem

$$r_{ij}^2 = (\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2.$$

Widzimy stąd, że równania ruchu względem środka masy są zupełnie tego samego kształtu co równania ruchu we współrzędnych absolutnych. Możemy więc nawet powrócić do symbolów x, y, z , bylebyśmy pamiętali o tem, że odtąd te symbole oznaczać mają współrzędne odniesione do środka masy systemu n punktów materialnych.

Podobnie jak w teorii ruchu dwóch ciał wprowadzamy potencyał przyciągania

$$W = \sum \frac{m_i m_j}{r_{ij}}.$$

W sumie stojącej po prawej stronie należy wziąć wszystkie możebne kombinacje liczb i i j , przeto suma ta będzie zawierać $\frac{n(n+1)}{2}$ wyrazów. Ponieważ

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = - \sum m_i m_j \frac{(x_i - x_j)}{r_{ij}^3}, \text{ i t. d. } \dots, \quad (6)$$

przyczem w sumie stojącej po prawej stronie j będzie mieć po kolei wszystkie wartości od $j=1$ do $j=n$ oprócz $j=i$, więc można napisać równania ruchu w kształcie

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial z_i}. \quad (7)$$

Napiszmy te równania dla $i=1, i=2$ i t. d. ... aż do $i=n$, pomnóżmy pierwsze trzy równania: równanie dla kierunku x przez $\frac{dx_1}{dt}$, równanie dla kierunku y przez $\frac{dy_1}{dt}$, równanie dla kierunku z przez $\frac{dz_1}{dt}$; dalej pomnóżmy następne trzy równania przez $\frac{dx_2}{dt}$, względnie przez $\frac{dy_2}{dt}$, względnie przez $\frac{dz_2}{dt}$ i t. d. i t. d.; wreszcie dodajmy wszystkie $3n$ równań do siebie stronami odpowiedniemi a otrzymamy równanie:

$$\begin{aligned} \sum_1^n m_i \left[\frac{dx_i}{dt} \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \frac{dy_i}{dt} \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \frac{dz_i}{dt} \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right] &= \\ &= \sum_1^n \left[\frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial W}{\partial z_i} \frac{dz_i}{dt} \right]. \end{aligned}$$

Ze samego kształtu lewej strony ostatniego równania widać, że to jest pochodna zupełna względem czasu. To samo można powiedzieć o prawej stronie; wszelką zaś wątpliwość usuniemy przez uwagę, że W zależy od czasu tylko przez pośrednictwo współrzędnych $x_1, y_1, z_1, \dots, x_2, y_2, z_2, \dots$ i t. d. Po scałkowaniu otrzymamy całkę „zachowania energii“

$$(8) \quad \sum_1^n m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right] = 2W + h,$$

gdzie h jest to stała. Dla słonecznego systemu h jest odjemne.

Teraz znaną metodą tworzymy „równania momentów“. Bierzemy w tym celu równania (7), ale zamiast pochodnych potencjału przyciągania piszemy ich wartości wzięte z równań (6)

$$\begin{aligned} m_k \left(y_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} - z_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} \right) &= - m_k \sum_j m_j \frac{(z_k - z_j) y_k - (y_k - y_j) z_k}{r_{jk}^3} \\ &= + m_k \sum_j m_j \frac{(z_j y_k - y_j z_k)}{r_{jk}^3}. \end{aligned}$$

Napiszmy powyższe równania dla $k = 1, 2, \dots, n$ i dodajmy je do siebie stronami odpowiednimi a otrzymamy

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k \left(y_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} - z_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} \right) = \sum_{k=1}^{k=n} m_k \sum_j m_j \frac{(z_j y_k - y_j z_k)}{r_{jk}^3}.$$

Otóż suma stojąca po prawej stronie będzie identycznie równa zeru, bo do każdego wyrazu

$$m_k m_j \frac{(z_j y_k - y_j z_k)}{r_{jk}^3}$$

znajdzie się zawsze odpowiedni wyraz

$$m_j m_k \frac{(z_k y_j - y_k z_j)}{r_{jk}^3},$$

który się z nim zniesie.

Mamy tedy ogólnie

$$\Sigma m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = 0$$

$$\Sigma m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = 0$$

$$\Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = 0.$$

Stąd zaś zaraz wynikają trzy całki „zachowania pól“, mianowicie:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) &= c_1 \\ \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) &= c_2 \\ \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) &= c_3. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Wynika stąd, że wektor, którego składowe są

$$\Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right), \quad \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right), \quad \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right),$$

jest co do wielkości i kierunku stały. Płaszczyznę prostopadłą do pomienionego wektora, specjalnie zaś tę, która przechodzi przez środek masy, nazywamy „płaszczyzną niezmienną“ systemu.

Mamy więc trzy całki (9) i jedną całkę (8), razem 4 całki na $3n$ równań. Przenosząc środek współrzędnych do jednego z ciał m_1, m_2, \dots możemy zmniejszyć ilość równań o trzy. Ponieważ to są równania drugiego stopnia, więc dla $3n - 3$ równań powinniśmy mieć $6n - 6$ całek, tymczasem mamy tylko cztery, brakuje więc $6n - 10$ całek. Otóż tych brakujących całek nie znamy nawet w najprostszym przypadku, gdy $n = 3$ a $6n - 10 = 8$, bo choć umiemy całkować równania ruchu w zadaniu trzech ciał, ale tylko w niektórych szczególnych przypadkach. Co więcej wiadomo, że w ogólnym przypadku całek jednowartościowych wcale niema. Wskutek tego nie posiadamy ściślej teorii słonecznego systemu, nie wiemy nawet, czy system słoneczny jest stały, czy nie. Z całki zachowania energii (8) możemy wywnioskować tylko tyle, że wszystkie planety nie mogą jednocześnie oddalić się w nieskończoność.

Aby ułatwić rozumowanie, napiszmy równanie (8) w trochę innym kształcie. Suma po lewej jego stronie to suma kwadratów prędkości planet pomnożonych przez masy; napiszmy więc zamiast niej Σmv^2 , dalej napiszmy zamiast $2W$ jawne wyrażenie potencjału, wreszcie ponieważ h jest odjemne połączmy

$$h = -q^2,$$

przyczem q^2 będzie wielkością stałą i dodatnią. Przetawiawszy nieco wyrazy otrzymamy równanie:

$$2 \Sigma \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = q^2 + \Sigma m_i v_i^2.$$

Załóżmy, że system słoneczny rozłązi się, że planety oddalają się w nieskończoność; wtedy

$$\Sigma \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

zmniejsza się, ale zerem stać się nie może, bo gdybyśmy nawet założyli, że jednocześnie wszystkie prędkości zmniejszają się i że Σmv^2 zdąży do zera, to pozostałoby

$$\Sigma \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = q^2,$$

a więc przynajmniej jedna odległość musiałaby pozostać skończoną. Zatem cały system słoneczny rozleść się nie może, muszą w nim pozostać przynajmniej dwa ciała.

Potrąciliśmy w ten sposób o stałość systemu słonecznego. Odnosnym zadaniem zajmował się już swego czasu Lagrange i dowiódł, że wielkie osie orbit dają się wyrazić przez szeregi funkcyj kołowych czasu. Wynikałoby stąd, że żadna z planet nie może uciec ze systemu słonecznego, podczas gdy z całki zachowania energii wynika tylko, że nie mogą uciec wszystkie planety. Jednakże nawet ze stanowiska Lagrange'a ani upadek na słońce, ani zderzenia między planetami nie są wykluczone; mogłoby się bowiem zdarzyć, że peryodyczne zmiany osi orbit są tak duże, iż jedna orbita wkracza na drugą. Co więcej, doniosłość twierdzenia Lagrange'a jest mocno ograniczona, bo w braku ogólnych całek Lagrange użył metody przybliżonej, pominął kwadraty [i wyższe potęgi] mas. Mówią zazwyczaj, że Poisson rozszerzył dowód

Lagrange'a, bo pominął tylko sześciany [i wyższe potęgi] mas. Ale twierdzenie Poissona nie jest bynajmniej identyczne z twierdzeniem Lagrange'a: wedle Lagrange'a wyrażenia na wielkiej osie orbit mają kształt $\Sigma A \sin(\alpha t + \beta)$, gdzie α i β są to stałe, zaś wedle Poissona wyrażenia te mogą zawierać też wyrazy kształtu $\Sigma A t \sin(\alpha t + \beta)$. Zatem wedle P. rozmiary wielkich osi zmieniają się peryodycznie, przyczem owe peryodyczne zmiany wzrastają nieograniczenie z czasem: nietylko upadek planety na słońce jest możliwy, możliwym jest, że planeta odbiegnie kiedyś dowolnie daleko od słońca. Jeżeli zaś trzymając się tych samych metod, co Lagrange i Poisson, weźmiemy w uwagę także sześciany mas, to we wyrażeniach wielkich osi pojawią się wyrazy wprost proporcjonalne do czasu a nie posiadające peryodycznego współczynnika. Okazał to p. Spiru-Haretu.

2. Zadanie trzech ciał.

Nie umiejąc całkować równań ruchu wielu ciał ograniczamy się do najprostszego po przypadku dwóch ciał zadania o ruchu trzech ciał. Wspominaliśmy już, że nawet w tem zadaniu ogólnych całek nie znamy, że jednakże umiemy rozwiązać je w niektórych specjalnych przypadkach. Dwa takie rozwiązania znalazł Lagrange: w jednym trzy ciała poruszają się w taki sposób, że ich wzajemne odległości wciąż tworzą trójkąt równoboczny, w drugim wszystkie trzy ciała wciąż znajdują się na jednej (ruchomej) prostej, przyczem stosunki między ich wzajemnymi odległościami są stałe i zależne od wszystkich trzech mas. To znaczy, że jeżeli dowolnie obierzemy odległość między dwoma ciałami, to trzecie nie może znajdować się gdziekolwiek, tylko w pewnych określonych punktach położonych na prostej łączącej dwa pierwsze punkty. Załóżmy np., że masy punktów materialnych są m_1, m_2 i m_3 , przyczem $m_1 > m_2 > m_3$; załóżmy dalej, że dane są pozycje mas m_1 i m_2 ; wtedy na owej ruchomej prostej będą trzy zupełnie określone punkty: L_1 , pomiędzy m_1 i m_2 , L_2 poza m_2 i L_3 poza m_1 , w których może znajdować się owa trzecia masa m_3 . Zarówno w przypadku, gdy trzy punkty materialne tworzą równoboczny trójkąt, jak w przypadku, gdy znajdują się na jednej prostej, orbity są przecięciami stożkowymi leżącymi w jednej płaszczyźnie i posiadającymi wspólne ognisko w środku masy systemu trzech punktów.

Początkowo uważano te rozwiązania — sam Lagrange był tego zdania — za pewnego rodzaju „curiosa“. Obecnie jednak inaczej zapatrujemy się na tę sprawę, bo znamy już cztery planetoidy tak zwanej trojańskiej grupy: Achillea (588) i Patrokla (617) odkrytych w 1906 r., Hektora (624) odkrytego w 1907 r. i Nestora (659) odkrytego w 1908 r., które wciąż trzymają się niedaleko od wierzchołków obu równobocznych trójkątów wystawionych na prostej: słońce-Jowisz. Widzimy zatem, że przynajmniej jedno z odkrytych przez Lagrange'a rozwiązań jest przybliżenie zrealizowane w systemie słonecznym. Że jest zrealizowane właśnie w kombinacji: słońce, Jowisz, planetoida, to nie dziwnego, bo słońce i Jowisz są największymi ciałami słonecznego systemu; przeto do systemu: słońce, Jowisz, planetoida stosują się przybliżenie prawa ruchu trzech ciał, zaś przyciągania innych planet odgrywają rolę perturbacyi.

Owe rozwiązania Lagrange'a mają też nie małe teoretyczne znaczenie: stoją one w związku z pewną kategorią peryodycznych rozwiązań zadania trzech ciał. Weźmy owe punkty L_1 , L_2 i L_3 , o których mówiliśmy powyżej, weźmy następnie wierzchołki L_4 i L_5 obu równobocznych trójkątów wystawionych na prostej m_1 , m_2 . Przy spełnieniu pewnych warunków punkty L_1 , L_2 , L_3 , L_4 i L_5 , czyli, jak je nazwał H. Gylden, punkty „libracyi“ mają podobną własność jak w statyce pozycje stałej równowagi. Jeżeli w którymkolwiek z nich znajdzie się ciało m_3 obdarzone odpowiednią prędkością równoległą do płaszczyzny, w której poruszają się ciała m_1 i m_2 , to musi wiecznie w nim pozostać. Jeżeli zaś ciało m_3 znajdzie się bądź nie w samym punkcie libracyi, tylko w pobliżu, bądź z niewłaściwą co do wielkości lub kierunku, ale mało od właściwej różną prędkością, to musi wiecznie krążyć dokoła punktu libracyi peryodycznym ruchem.

Potrąciliśmy tu o rozwiązania peryodyczne. Umyślnie mówimy „rozwiązania“, bo to nie są całki ogólne zawierające kompletną ilość stałych dowolnych. W zadaniu o ruchu dwóch ciał względem trzeciego ogólne całki powinny zawierać dwanaście stałych dowolnych. Takich całek nie znamy. Znamy tylko rozwiązania o mniejszej ilości stałych. Pomimo tego są one bardzo ważne. Wprowadził je do mechaniki nieba, specjalnie do teorii księżyca, G. W. Hill a H. Poincaré stworzył ogólną ich teorię. Ze samego pojęcia peryodyczności wynika, że po pewnym stałym okresie czasu [pe-

ryodzie] wszystkie trzy ciała powracają do tych samych wzajemnych pozycji, do tych samych względnych prędkości.

Pomiędzy peryodycznymi rozwiązaniami jest jedno, w którym analiza jest względnie łatwiejszą. Jest to tak zwany, wedle nomenklatury Poincarégo, „problème restreint“. Zakładamy, że jedno ciało (słońce) ma masę bardzo wielką, drugie (planeta) masę skończoną, ale małą w porównaniu z masą pierwszego, zaś trzecie (satelita) ma masę nieskończenie małą. W „zadaniu ograniczonym“ przyciąganie trzeciego ciała nie ma żadnego wpływu na ruch dwóch pierwszych i planeta krąży naokoło słońca po elipsie Keplerowskiej. Pozostaje więc tylko znaleźć ruch satelity. W celu dalszego ułatwienia zakładamy, że orbita planety jest prosto kołem oraz, że satelita porusza się w płaszczyźnie orbity planety. Pomimo tych ułatwień pozostają wielkie analityczne trudności, które jednak G. W. Hill pokonał. Obecnie „zadanie ograniczone“ jest o tyle wyrobione, że jest zupełnie przydatne do zastosowań praktycznych. Zapoznamy się z niem niebawem w teorii księżycy.

Z powyższych uwag widzimy, że podstawowe dla teorii planet i satelitów zadanie o ruchu n ciał nie jest rozwiązane. Tymczasem teoria planet i satelitów Keplerowskim ruchem obejść się może; wypracowano tedy pewne przybliżone metody, do rozpatrzenia których zaraz przystąpimy.

3. Metoda waryacji stałych dowolnych.

Zasadniczą myśl metody waryacji stałych dowolnych można interpretować geometrycznie w następujący sposób.

Wskutek przyciągania innych planet droga danej planety nie jest elipsą, ani nawet krzywą płaską. Pomimo tego możemy uważać ją za złożoną z nieskończenie małych łuków coraz to innych elips. Każda następna elipsa różni się tylko nieskończenie mało od poprzedniej. To znaczy, że jeżeli weźmiemy dwa nieskończenie bliskie momenty czasu t i $t + dt$, to w chwili $t + dt$ planeta porusza się po łuku innej elipsy niż w chwili czasu t , ale elipsa z chwili $t + dt$ różni się nieskończenie mało od elipsy z chwili t . Dopiero wtedy, gdy weźmiemy elipsy odpowiadające chwilom różniącym się od siebie o skończony odstęp czasu, to okaże się, że te elipsy różnią się od siebie o skończone wielkości.

Do odpowiednich wzorów dochodzimy w następujący sposób.

Weźmy równania ruchu względem środka masy systemu i nie zmieniając kierunków osi przenieśmy początek ich do jednego z punktów systemu, np. do punktu: m_s, x_s, y_s, z_s ; wtedy współrzędne jakiegokolwiek innego punktu systemu m_i względem nowych osi będą

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_i = x_i - x_s, \\ y'_i = y_i - y_s, \\ z'_i = z_i - z_s. \end{array} \right.$$

Teraz w równaniach ruchu względem środka masy systemu, t. j. w równaniach (7) wypisujemy prawe strony „*explicite*“ na podstawie wzorów (6). Otrzymamy w ten sposób równania

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = - \sum m_k \frac{(x_i - x_k)}{r_{ik}^3}, \dots \text{ i t. d.}$$

Następnie wedle równań (10) podstawiamy

$$x_i = x'_i + x_s, \quad x_k = x'_k + x_s, \dots \text{ i t. d.}$$

i otrzymujemy

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} + \frac{d^2x_s}{dt^2} = - \sum m_k \frac{(x'_i - x'_k)}{r_{ik}^3}, \dots \text{ i t. d.}$$

Zauważmy przytem, że ponieważ odległości zależą tylko od różnic współrzędnych, więc

$$\begin{aligned} r_{ik}^2 &= (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 = \\ &= (x'_i - x'_k)^2 + (y'_i - y'_k)^2 + (z'_i - z'_k)^2. \end{aligned}$$

Trzeba teraz wyrugować przyspieszenia ruchu słońca względem środka masy systemu

$$\frac{d^2x_s}{dt^2}, \dots \text{ i t. d.}$$

Użyjemy w tym celu tychże samych równań (7), w których atoli wyrażenia sił stojące po prawej stronie także napiszemy „*explicite*“ podstawiając wartości pochodnych potencjału W z równań (6). W ten sposób kładąc $i = s$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_s}{dt^2} &= - \sum m_k \frac{(x_s - x_k)}{r_{ks}^3}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

albo z uwagi na równania (10)

$$\frac{d^2x_s}{dt^2} = \sum m_k \frac{x'_k}{r_{ks}^3} \quad (11)$$

.....

przyczem

$$r_{ks}^2 = x'_k{}^2 + y'_k{}^2 + z'_k{}^2.$$

Zatem ostatecznie otrzymamy równania ruchu względem punktu m , w postaci

$$\frac{d^2x'_i}{dt^2} + \sum m_k \frac{x'_k}{r_{ks}^3} = - \sum m_k \frac{(x'_i - x'_k)}{r_{ik}^3}$$

.....
.....

Przekształcimy nieco te równania oddzielając po prawej stronie wyraz, w którym współczynnikiem jest masa słońca, t. j. ten, w którym $k = s$

$$\frac{d^2x'_i}{dt^2} + \sum m_k \frac{x'_k}{r_{ks}^3} = - \sum m_k \frac{(x'_i - x'_k)}{r_{ik}^3} - m_s \frac{x'_i}{r_{is}^3}.$$

We wyrazie zawierającym masę słońca m_s w liczniku stoi tylko x'_i , albowiem skoro przenieśliśmy początek osi do punktu m , to

$$x'_s = y'_s = z'_s = 0.$$

Teraz przenosimy wyraz zawierający m_s z prawej strony na lewą a sumę

$$\sum m_k \frac{x'_k}{r_{ks}^3} \text{ i t. d.}$$

z lewej strony na prawą za wyjątkiem tego wyrazu, w którym $k = i$, opuszczamy kreski jako już niepotrzebne i piszemy równania

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} + (m_s + m_i) \frac{x_i}{r_{is}^3} = - \sum m_k \frac{(x_i - x_k)}{r_{ik}^3} - \sum m_k \frac{x_k}{r_{ks}^3} \quad (12)$$

.....

Lecz można napisać pierwszy wyraz po prawej stronie w postaci

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{m_k}{r_{ki}} \right)$$

a drugi w postaci

$$- \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left[m_k \frac{(x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k)}{r_{ik}^3} \right];$$

wreszcie można położyć

$$(13) \quad \Omega_i = \text{const} + \sum m_k \left[\frac{1}{r_{ki}} - \frac{(x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k)}{r_{ki}^3} \right],$$

poczem będziemy mogli napisać nasze równania w postaci

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{dt^2} + (m_i + m_i) \frac{x_i}{r_{ii}^3} &= \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i} \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

Są to równania ruchu punktu m_i względem punktu m , przyjętego za środek współrzędnych. Oczywiście pod m , należy rozumieć masę słońca, pod m_i masę uważanej planety a pod x_i, y_i, z_i i r_{ii} , jej współrzędne i odległość od słońca. Gdyby Ω_i było zerem, to równania (14) przywiodłyby się do równań Keplerskich, ale Ω_i zerem nie jest, przeto ruch nie jest Keplerskim.

Ω_i nosi nazwę „funkcyi perturbacyjnej“. Kształt funkcyi perturbacyjnej jest jednakowy dla wszystkich planet, ale wchodzące w nią wielkości zmieniają się od planety do planety. Ze wzoru (13) widać, że pierwsza suma, czyli tak zwana „część główna“ funkcyi perturbacyjnej zawiera odwrotne odległości pozostałych planet od danej planety, a druga, czyli „część uzupełniająca“ oprócz powtarzających się w każdym wyrazie współrzędnych danej planety zawiera odległości pozostałych planet od słońca i ich współrzędne. Przytem odległość danej planety od słońca wcale nie wchodzi w skład funkcyi perturbacyjnej.

Całkujemy równania (14) znaną metodą waryacji stałych dowolnych. Należy najpierw całkować równania (14) kładąc $\Omega_i = 0$. Otrzymamy naturalnie zwykle całki Keplerskie. Współrzędne planety m_i przedstawiają się nam jako funkcyje czasu i sześciu elementów eliptycznych, albo sześciu, dowolnych zresztą, funkcyi tychże elementów. Następnie przechodzimy do całkowania równań (14) przy założeniu, że Ω_i jest od zera odmienne. We funkcyę Ω_i podstawiamy współrzędne planety m_i wzięte z pierwszego całkowania [t. j. z całek Keplerskich] a współrzędne innych planet

uwazamy za dane, np. przyjmujemy, że pozostałe planety poruszają się po wiadomych Keplerowskich elipsach, albo bierzemy je wprost z tablic.

Elementy planety m_i uważamy teraz za funkcyę czasu. Aby jednakże określić sześć funkcyi czasu, musimy do trzech równań (14) dodać jeszcze trzy — dowolne zresztą — równania.

Możemy np. wziąć równania wyrażające warunki, aby $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ były tego samego kształtu, co w ruchu Keplerowskim. Dzięki tym założeniom elipsa posiadająca stałe elementy równe chwilowym wartościom zmiennych elementów a, e i t. d. jest „ściśle styczna (oskulacyjna)“ do drogi planety. Dlatego to na początku tego paragrafu powiedzieliśmy, że wyobrażamy sobie drogę planety jako złożoną z nieskończenie małych łuków coraz to innych elips.

4. Metoda Lagrange'a.

W myśl powyższych wskazówek wyprowadzimy teraz te równania różniczkowe, którym czynią zadość elementy uważane jako funkcyę czasu. Aby nie pisać nieustannie tylu znaczków, napiszmy w równaniach (14) zamiast m_i, x_i, y_i, z_i i r_i , poprostu m, x, y, z i r :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (m + m_s) \frac{x}{r^3} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}. \quad (14 \text{ bis})$$

.

Weźmy najpierw ruch Keplerowski. Położmy $\Omega = 0$ a oprócz tego dla ułatwienia położmy tymczasowo

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w \\ Q = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - \frac{(m + m_s)}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Wtedy równania Keplerowskie można napisać w kształcie

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{dv}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \\ \frac{dw}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Oprócz tego można napisać trzy równania wynikające wprost z równań (15):

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial Q}{\partial u} = 0 \\ \frac{dy}{dt} - \frac{\partial Q}{\partial v} = 0 \\ \frac{dz}{dt} - \frac{\partial Q}{\partial w} = 0. \end{array} \right.$$

Równania (16) i (17) mają kształt równań tak zwanych „kanonicznych“, o których będzie mowa w § 9.

Załóżmy teraz, że $\Omega \geq 0$ i połóżmy tymczasowo

$$(18) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} = -X, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = -Y, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = -Z.$$

Oczywiście możemy napisać równania (14 bis) w postaci

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial x} + X = 0 \\ \frac{dv}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial y} + Y = 0 \\ \frac{dw}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial z} + Z = 0. \end{array} \right.$$

Oprócz tego znowu piszemy równania (17) wynikające wprost z równań (15) w postaci

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial Q}{\partial u} - U = 0 \\ \frac{dy}{dt} - \frac{\partial Q}{\partial v} - V = 0 \\ \frac{dz}{dt} - \frac{\partial Q}{\partial w} - W = 0, \end{array} \right.$$

przyczem U, V, W są to wielkości stale równe zeru, które piszemy tylko dla symetrii.

Załóżmy teraz, żeśmy scałkowali 6 równań Keplerowskich (16) i (17) we wiadomy sposób i że otrzymaliśmy już x, y, z oraz prędkości

u, v, w jako funkcyje czasu i sześciu stałych dowolnych — powiedzmy — a, b, c, d, e, f ; mamy więc

$$\left. \begin{aligned} x &= F_1(t, a, b, \dots, f) \\ y &= F_2(t, \dots, \dots) \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Skoro założymy, że a, b, c, d, e, f są funkcyjami czasu, to

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{\partial x}{\partial b} \cdot \frac{db}{dt} + \dots \\ &\dots \\ \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{\partial u}{\partial b} \cdot \frac{db}{dt} + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Zamiast stojących po lewej stronie pochodnych całkowitych:

$$\frac{dx}{dt}, \frac{du}{dt} \text{ i t. d.}$$

możemy podstawić ich wartości z równań (19) i (20)¹⁾, poczem otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial u} + U &= \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \dots \\ &\dots \\ -\frac{\partial Q}{\partial x} - X &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \dots \end{aligned}$$

Ale wedle równań (16) i (17)

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial u} \text{ i t. d.,} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \text{ i t. d.,}$$

bo w ruchu Keplerowskim a, b, c, \dots są stałe, zatem pochodne całkowite względem czasu są identyczne z cząstkowymi. Dzięki temu poprzednie równania przywodzą się do sześciu równań:

¹⁾ W ten sposób elementy a, b, c, \dots i t. d. będą ściśle styczne.

Wziąwszy w uwagę równania (18) a z drugiej strony to, że $U = V = W = 0$, możemy prawą stronę nowo utworzonego równania napisać w postaci

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a}$$

W ten sposób otrzymamy pierwsze z następujących sześciu równań

$$\left. \begin{array}{l} [ab] \frac{db}{dt} + [ac] \frac{dc}{dt} + \dots [af] \frac{df}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial a} \\ [ba] \frac{da}{dt} + [bc] \frac{dc}{dt} + \dots [bf] \frac{df}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial b} \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\} \quad (24)$$

Pozostałe pięć równań otrzymujemy tą samą metodą co pierwsze.

Z równań (23) zaraz widać, że współczynniki $[ab] \dots$ i t. d. figurujące w równaniach (24) czynią zadość następującym związkom:

$$\begin{aligned} [aa] &= [bb] = \dots = 0 \\ [ab] &= -[ba], \quad [ac] = -[ca], \dots \text{ i t. d.} \end{aligned}$$

Oprócz tego współczynniki $[ab] \dots$, uważane jako funkcje a, b, \dots i t. d. oraz czasu t , nie zawierają czasu jawnie. Aby to udowodnić, dość jest wykazać, że skoro będziemy uważać a, b, c, d, e, f za stałe, to pochodne współczynników $[ab] \dots$ i t. d. względem czasu znikną. Utwórzmy pochodną współczynnika $[ab]$ względem czasu

$$\frac{\partial [ab]}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial a \partial t} \frac{\partial u}{\partial b} - \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial t} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial^2 u}{\partial b \partial t} \frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial^2 x}{\partial b \partial t} \frac{\partial u}{\partial a} + \dots$$

Dalszych wyrazów nie piszemy, bo — aby je otrzymać — dość jest zastąpić x przez y a potem przez z oraz jednocześnie napisać v , ewentualnie w zamiast u . Oczywiście można powyższy wzór napisać w kształcie:

$$\frac{\partial [ab]}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial u}{\partial t} \right] + \frac{\partial}{\partial b} \left[\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial a} \right] + \dots$$

Ale jeżeli uważamy a, b, c i t. d. za stałe, to możemy zastosować wzory (16) i (17) i z ich pomocą wyrugować prędkości i przyspieszenia. Otrzymamy wtedy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [ab]}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial Q}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial b} \right] - \frac{\partial}{\partial b} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial Q}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{\partial Q}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial Q}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial b} \right] - \frac{\partial}{\partial b} \left[\frac{\partial Q}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial Q}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial a} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{\partial Q}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\partial Q}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial b} \right] - \frac{\partial}{\partial b} \left[\frac{\partial Q}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial Q}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial a} \right]. \end{aligned}$$

Jeżeli po prawej stronie zbierzemy razem wyrazy dodatnie i tak samo wyrazy ujemne, to otrzymamy:

$$\frac{\partial [ab]}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial Q}{\partial b} \right) - \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{\partial Q}{\partial a} \right) = 0 \quad Q. E. D.$$

Tą samą drogą można dowieść, że pozostałe współczynniki też nie zależą jawnie od czasu.

Wróćmy teraz do równań (24). Jeżeli rozwiążemy je względem pochodnych $\frac{da}{dt}$... i t. d., to otrzymamy sześć równań, które możemy napisać w kształcie

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = (aa) \frac{\partial \Omega}{\partial a} + (ab) \frac{\partial \Omega}{\partial b} + \dots (af) \frac{\partial \Omega}{\partial f} \\ \frac{db}{dt} = (ba) \frac{\partial \Omega}{\partial a} + \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

Współczynniki (ab) i t. d. są oczywiście funkcjami współczynników $[ab]$... i t. d.; wskutek czego także nie mogą zawierać czasu w sposób jawny. Poisson okazał, że można wyrazić współczynniki (ab) ... i t. d. przez pochodne a, b ... względem x ... u ... w zupełnie taki sam sposób, jak współczynniki $[ab]$... i t. d. są wyrażone przez pochodne x ... u ... względem a, b ... Ponieważ atoli ta forma współczynników (ab) nie będzie nam w dalszym ciągu potrzebna, więc wywodu Poissona powtarzać nie będziemy,

powiemy tylko, że współczynniki (ab) ... mają te same własności, co współczynniki $[ab]$... i t. d., więc

$$(aa) = (bb) = (cc) = \dots = 0$$

$$(ab) = -(ba), \quad (ac) = -(ca) \dots \text{ i t. d.}$$

5. Równania Lagrange'a.

Założymy teraz, że wielkości a, b, \dots, f są to te same elementy eliptyczne, o których już była mowa w rozdz. XIII-tym, a które potem w następnych rozdziałach także często występowały. Nie weźmiemy tylko epoki przejścia przez perihelium t_0 , która, o ile chodzi o ruch po elipsie, jest niedogodną. Już w rozdz. XVII-tym (w przykładzie) widzieliśmy, że zamiast epoki przejścia przez perihelium astronomowie podają średnią anomalię w pewnej, zresztą dowolnej, epoce. Tu jako szósty element weźmiemy „średnią długość planety w orbicie“ l_0 związaną z anomalią średnią równaniem

$$l_0 = \pi + M_0. \quad (26)$$

Jest to więc suma długości perihelium π i średniej anomalii w pewnej epoce M_0 , liczy się zaś tak samo jak π od punktu porównania dnia z nocą do węzła — w ekliptyce, stamtąd zaś w orbicie planety.

Poszukujemy wyrażen na współczynniki $[ab]$ i t. d. we wzorach (24) a jednocześnie rozwiązujemy te wzory względem pochodnych $\frac{da}{dt}$ i t. d.

Równanie zachowania energii w ruchu Keplerowskim

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (m_* + m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

pozostaje bez zmiany, bo skoro przyjęliśmy elementy ściśle styczne [oskulatoryjne], to wyrażenia na prędkości są w ruchu zakłóconym takie same jak w ruchu Keplerowskim. Przeróżniczkujemy to równanie względem czasu uważając a za wielkość od czasu zależną, a otrzymamy

$$\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \frac{d^2z}{dt^2} = (m_* + m) \left(-\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} + \frac{1}{2a^2} \frac{da}{dt}\right).$$

Rugujemy stąd przyspieszenia za pomocą wzorów (14 bis), poczem poprzednie równanie przechodzi w następujące:

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \frac{m_1 + m}{2a^2} \cdot \frac{da}{dt},$$

albowiem pozostałe wyrazy znoszą się na mocy równości

$$r \frac{dr}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt}.$$

Możemy otrzymanemu przed chwilą równaniu przydać nieco inną postać korzystając z tego, że wedle naszych założeń współrzędne x, y, z zależą od czasu tak samo, jak w ruchu Keplerowskim, t. j. tylko przez pośrednictwo anomalii mimośrodowej. Wskutek tego

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= \\ &= \left[\frac{\partial \Omega}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dE} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dE} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dE} \right] \frac{dE}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial E} \cdot \frac{dE}{dt}. \end{aligned}$$

Ale z równania (26) wynika

$$dt = \frac{dM}{n} = \frac{dl_0}{n},$$

przeto

$$\frac{dE}{dt} = n \frac{dE}{dl_0}$$

i możemy napisać nasze równanie w kształcie

$$\frac{m_1 + m}{2a^2} \frac{da}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial E} n \frac{dE}{dl_0} = n \frac{\partial \Omega}{\partial l_0}.$$

Wreszcie ponieważ położyliśmy stałą przyciągania równą jedności, więc równanie (61 bis) rozdz. XIII-go przychodzi się do

$$m_1 + m = n^2 a^3,$$

wskutek czego równanie nasze przychodzi się ostatecznie do postaci

$$(27) \quad \frac{n}{2} a \frac{da}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial l_0}.$$

Oczywiście jest to równanie kształtu (24). Jeżeli np. położymy $a = a$, $b = l_0$, to będzie to poprostu drugie równanie (24). Z porównania obu równań wynika [zamiast ogólnych symbolów $a, b \dots f$ piszemy symbole oznaczające elementy eliptyczne]

$$\left. \begin{aligned} [l_0 a] &= \frac{1}{2} na \\ [l_0 e] = [l_0 \varrho] &= [l_0 i] = [l_0 \pi] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Weźmy teraz całki pól. W ruchu Keplerowskim

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = c_1,$$

.

przyczem c_1, c_2, c_3 są to stałe. Tu wedle założenia będą to wielkości zależne od czasu, zatem różniczkując względem czasu otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{dt} &= y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{dc_2}{dt} &= z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2} \\ \frac{dc_3}{dt} &= x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2}. \end{aligned}$$

Rugujemy stąd przyspieszenia za pomocą wzorów (14 bis), poczem otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned} \frac{dc_1}{dt} &= y \frac{\partial \Omega}{\partial z} - z \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \frac{dc_2}{dt} &= z \frac{\partial \Omega}{\partial x} - x \frac{\partial \Omega}{\partial z} \\ \frac{dc_3}{dt} &= x \frac{\partial \Omega}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Utwórzmy teraz

$$\frac{\partial \Omega}{\partial i}.$$

Ponieważ Ω zależy od i tylko przez pośrednictwo współrzędnych, więc

$$\frac{\partial \Omega}{\partial i} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial i} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial i} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial i};$$

ale wedle wzorów (73) rozdz. XIII go

$$(30) \begin{cases} x = r [\cos(\pi + v - \varrho) \cos \varrho - \sin(\pi + v - \varrho) \sin \varrho \cos i] \\ y = r [\cos(\pi + v - \varrho) \sin \varrho + \sin(\pi + v - \varrho) \cos \varrho \cos i] \\ z = r \sin(\pi + v - \varrho) \sin i, \end{cases}$$

albowiem $u = \pi + v - \varrho$ [$\pi + v$ nazywają „prawdziwą długością w orbicie“]. Stąd

$$\frac{\partial x}{\partial i} = r \sin(\pi + v - \varrho) \sin \varrho \sin i = z \sin \varrho$$

$$\frac{\partial y}{\partial i} = -r \sin(\pi + v - \varrho) \cos \varrho \sin i = -z \cos \varrho$$

$$\frac{\partial z}{\partial i} = r \sin(\pi + v - \varrho) \cos i = y \cos \varrho - x \sin \varrho.$$

Podstawiając to we wzór na $\frac{\partial \Omega}{\partial i}$ otrzymamy po uporządkowaniu

$$\frac{\partial \Omega}{\partial i} = \left(z \frac{\partial \Omega}{\partial x} - x \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) \sin \varrho + \left(y \frac{\partial \Omega}{\partial y} - z \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) \cos \varrho,$$

albo na mocy równań (29)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial i} = \frac{dc_1}{dt} \cos \varrho + \frac{dc_2}{dt} \sin \varrho.$$

Lecz wedle równań (68 bis) rozdz. XIII-go

$$c_1 = c \sin i \sin \varrho$$

$$c_2 = -c \sin i \cos \varrho.$$

Skoro to podstawimy w poprzednie równanie, to otrzymamy

$$\frac{\partial \Omega}{\partial i} = c \sin i \frac{d\varrho}{dt}.$$

Wreszcie rugujemy stałą pól c za pomocą równania (43) rozdziału XIII-go, wedle którego

$$(31) \quad c = na^2 \sqrt{1 - e^2}$$

i piszemy:

$$(32) \quad na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i \frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial i}.$$

Znowu mamy równanie tego samego typu co równania (24). Rozumując tak samo jak z okazji równania (27) przychodzimy do wniosku, że

$$\left. \begin{aligned} [i\Omega] &= na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i \\ [ia] &= [ic] = [ix] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

O tem, że $[il_0] = 0$, wiemy już z równań (28).

Tworzymy teraz równanie, do którego wchodzi $\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho}$. Spojrzawszy na wzory (30) widzimy, że ta pochodna będzie składać się z dwóch części: jednej, do której wejdą te części pochodnych x, y, z , które zależą od argumentu ϱ i drugiej, do której wejdą te części pochodnych, które zależą od argumentu $v - \varrho$. Przeto można napisać

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho} \right) - \frac{\partial \Omega}{\partial v}.$$

Ale jeżeli ignorujemy ϱ w argumencie $v - \varrho$, to ze wzorów (30) wynika:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varrho} \right) = -y, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial \varrho} \right) = x, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho} \right) = 0;$$

przeto

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho} \right) = x \frac{\partial \Omega}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{dc_3}{dt}$$

[wedle trzeciego wzoru (29)].

Z drugiej strony z tychże samych wzorów (30) wynikają następujące wyrażenia:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -y \cos i - z \cos \varrho \sin i$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = x \cos i - z \sin \varrho \sin i$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = (x \cos \varrho + y \sin \varrho) \sin i;$$

przeto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial v} &= \cos i \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) - \sin i \cos \varrho \left(z \frac{\partial \Omega}{\partial x} - x \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) + \\ &\quad + \sin i \sin \varrho \left(y \frac{\partial \Omega}{\partial z} - z \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

t. j. wedle wzorów (29)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} = \sin i \sin \varrho \frac{dc_1}{dt} - \sin i \cos \varrho \frac{dc_2}{dt} + \cos i \frac{dc_3}{dt}.$$

Wreszcie jeżeli zważymy, że wedle wzorów (68 bis) rozdz. XIII-go

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 = c \sin i \sin \varrho \\ c_2 = -c \sin i \cos \varrho \\ c_3 = c \cos i, \end{array} \right.$$

to zaraz spostrzeżemy, że

$$(35) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v} = \frac{c_1}{c} \frac{dc_1}{dt} + \frac{c_2}{c} \frac{dc_2}{dt} + \frac{c_3}{c} \frac{dc_3}{dt} = \frac{dc}{dt}.$$

Zatem łącząc ze sobą obie składowe otrzymamy

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho} = \frac{dc_3}{dt} - \frac{dc}{dt}.$$

Trzeba tu jeszcze podstawić c_3 z ostatniego wzoru (34) a c ze wzoru (31). Po podstawieniu, zróżniczkowaniu i uporządkowaniu, uwzględniając jeszcze związek

$$(36) \quad \frac{dn}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{n}{a} \frac{da}{dt}$$

wynikający ze związku

$$n^2 a^3 = \text{stałej},$$

otrzymamy wreszcie wzór

$$(37) \quad -na \sqrt{1-e^2} \sin^2 \frac{i}{2} \cdot \frac{da}{dt} + \\ + \frac{2na^2e}{\sqrt{1-e^2}} \sin^2 \frac{i}{2} \cdot \frac{de}{dt} - na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i \frac{di}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho}.$$

Oto trzeci wzór typu równań (24). Przez porównanie wzoru (37) ze wzorami (24) dochodzimy do wzorów:

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\varrho a] = -na \sqrt{1-e^2} \sin^2 \frac{i}{2}, \quad [\varrho e] = \frac{2na^2e}{\sqrt{1-e^2}} \sin^2 \frac{i}{2} \\ [\varrho \pi] = 0. \end{array} \right.$$

O tem, że $[\Omega l_0] = 0$, wiemy już z równań (28), a o tem, że

$$[\Omega i] = -na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i,$$

wiemy już z równań (33).

Przechodzimy do obliczenia $\frac{\partial \Omega}{\partial \pi}$. Funkcja perturbacyjna zależy od π najpierw dlatego, że we wzorach (30) na współrzędne x, y, z zmienna π występuje jawnie w argumencie: $\pi + v - \Omega$, powtóre dlatego, że anomalia rzeczywista v jest funkcją anomalii mimośrodowej E , ta zaś przez równanie Keplera zależy od π . Rzeczywiście, ponieważ zamiast anomalii średniej wprowadziliśmy średnią długość w orbicie $l_0 = M_0 + \pi$, więc musimy pisać równanie Keplera w kształcie

$$E - e \sin E = l_0 - \pi;$$

stąd zaś zaraz widać, że E a zatem i v jest funkcją π , następnie widać, że

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \pi} = \frac{\partial \Omega}{\partial v} - \frac{\partial \Omega}{\partial l_0}.$$

Obie pochodne stojące po prawej stronie już są obliczone. Pierwszą mamy we wzorze (35), drugą we wzorze (27), możemy więc napisać

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \pi} = \frac{dc}{dt} - \frac{n}{2} a \frac{da}{dt}.$$

Trzeba tu jeszcze podstawić c ze wzoru (31). Po łatwych rachunkach pamiętając o równości (36) otrzymamy wzór

$$-\frac{na}{2} \left[1 - \sqrt{1 - e^2} \right] \frac{da}{dt} - \frac{na^2 e}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{de}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \pi}. \quad (39)$$

Jest to czwarty wzór typu równań (24). Przez porównanie tego wzoru ze wzorami (24) oprócz wzorów potwierdzających już dawniej otrzymane znajdziemy trzy nowe, mianowicie

$$[\pi a] = -\frac{na}{2} (1 - \sqrt{1 - e^2}), \quad [\pi e] = -\frac{na^2 e}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad [\pi i] = 0. \quad (40)$$

Jeżeli teraz rozpatrzmy się we wzorach (28), (33), (38) i (40), to łącznie spostrzeżemy, że już wszystkie współczynniki: [...] są

znane oprócz jednego [ae]. Obliczenie tego ostatniego współczynnika sprawia niemało kłopotu, bo trzeba go obliczać wprost ze wzoru typu (23), t. j. ze wzoru

$$(41) \quad [ae] = \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial u}{\partial e} - \frac{\partial x}{\partial e} \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial v}{\partial e} - \frac{\partial y}{\partial e} \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial a} \frac{\partial w}{\partial e} - \frac{\partial z}{\partial e} \frac{\partial w}{\partial a}.$$

Trzeba tu podstawić współrzędne i prędkości ze wzorów (30). Aby ułatwić rachunki, przekształcamy nieco wzory (30): rozwijamy funkcje kołowe argumentu $\pi + v - \varrho$ oddzielając $\pi - \varrho = \tilde{\omega}$ od v , zbieramy oddzielnie wyrazy zawierające $\cos v$, a oddzielnie wyrazy zawierające $\sin v$, kładziemy:

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} r \cos v = \xi, \quad r \sin v = \eta, \\ \cos \tilde{\omega} \cos \varrho - \sin \tilde{\omega} \sin \varrho \cos i = \alpha_1, \\ \cos \tilde{\omega} \sin \varrho + \sin \tilde{\omega} \cos \varrho \cos i = \alpha_2, \\ \sin \tilde{\omega} \sin i = \alpha_3, \\ -\sin \tilde{\omega} \cos \varrho - \cos \tilde{\omega} \sin \varrho \cos i = \beta_1, \\ -\sin \tilde{\omega} \sin \varrho + \cos \tilde{\omega} \cos \varrho \cos i = \beta_2, \\ \cos \tilde{\omega} \sin i = \beta_3, \end{array} \right.$$

poczem kładąc jeszcze dla krótkości

$$\frac{d\xi}{dt} = \dot{\xi}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \dot{\eta}$$

piszemy

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta & u = \alpha_1 \dot{\xi} + \beta_1 \dot{\eta} \\ y = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta & v = \alpha_2 \dot{\xi} + \beta_2 \dot{\eta} \\ z = \alpha_3 \xi + \beta_3 \eta & w = \alpha_3 \dot{\xi} + \beta_3 \dot{\eta}. \end{array} \right.$$

Co do prędkości u, v, w , to należy zaznaczyć, że skoro przyjęliśmy, że elementy są ściśle styczne, to prędkości muszą mieć ten sam kształt co w ruchu Keplerowskim. Dlatego to we wyrażeniach na prędkość musimy traktować elementy, a więc także współczynniki α i β jako wielkości od czasu niezależne.

Łatwo jest sprawdzić, że

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 \\ \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0. \end{array} \right.$$

Ze wzorów (42) widać, że współczynniki α i β ani od a , ani od e nie zależą, przeto skoro podstawimy x, y, z, u, v i w ze wzorów (43) we wzór (41), to otrzymamy:

$$[ae] = \left(\alpha_1 \frac{\partial \xi}{\partial a} + \beta_1 \frac{\partial \eta}{\partial a} \right) \left(\alpha_1 \frac{\partial \xi}{\partial e} + \beta_1 \frac{\partial \eta}{\partial e} \right) - \\ - \left(\alpha_1 \frac{\partial \xi}{\partial e} + \beta_1 \frac{\partial \eta}{\partial e} \right) \left(\alpha_1 \frac{\partial \xi}{\partial a} + \beta_1 \frac{\partial \eta}{\partial a} \right) + \left(\alpha_2 \frac{\partial \xi}{\partial a} + \dots \right)$$

Stąd wykonując mnożenia i porządkując otrzymamy najpierw

$$[ae] = \left(\frac{\partial \xi}{\partial a} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial e} - \frac{\partial \xi}{\partial e} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial a} \right) \Sigma a^2 + \\ + \left(\frac{\partial \eta}{\partial a} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial e} - \frac{\partial \eta}{\partial e} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \xi}{\partial a} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial e} - \frac{\partial \xi}{\partial e} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial a} \right) \Sigma a \beta + \left(\frac{\partial \eta}{\partial a} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial e} - \frac{\partial \eta}{\partial e} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial a} \right) \Sigma \beta^2$$

a następnie biorąc w uwagę wzory (44):

$$[ae] = \left(\frac{\partial \xi}{\partial a} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial e} - \frac{\partial \xi}{\partial e} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial a} \right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial a} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial e} - \frac{\partial \eta}{\partial e} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial a} \right). \quad (45)$$

Zatem zadanie nasze sprowadziło się do obliczenia wyrażenia analogicznego do wyrażenia (41) zawierającego jednak inne współrzędne i w dodatku krótszego, bo składającego się nie z trzech, tylko z dwóch nawiasów. Przystępujemy teraz do obliczenia prawej strony wzoru (45). Zaraz widać, że ξ i η są to współrzędne prostokątne w płaszczyźnie orbity, zupełnie takie same [por. dwa pierwsze wzory (42)] jak te, którymi posługiwaliśmy się w rozdz. XIII-tym. Można tu odrazu zastosować wzory: drugi (36) oraz wzór (37) rozdziału XIII-go i napisać

$$\left. \begin{aligned} \xi &= r \cos v = a (\cos E - e) \\ \eta &= r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

skąd

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = -a \sin E \frac{dE}{dt} \\ \dot{\eta} = \frac{d\eta}{dt} = a \sqrt{1 - e^2} \cos E \frac{dE}{dt}.$$

Atoli z równania Keplera mamy

$$(1 - e \cos E) \frac{dE}{dt} = n.$$

Podstawiając stąd wartość na $\frac{dE}{dt}$ we wzory na $\dot{\xi}$ i $\dot{\eta}$ znajdziemy

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi} = -\frac{na \sin E}{1 - e \cos E} \\ \dot{\eta} = \frac{na \sqrt{1 - e^2} \cos E}{1 - e \cos E} \end{array} \right.$$

Aby ułatwić dalszy rachunek, skorzystamy z tego, że wedle wyżej dowiedzionego twierdzenia współczynniki [...] nie zależą od czasu, że przeto wszystko jedno, jaką wartość weźmiemy na czas. Weźmy np. tę chwilę czasu, gdy planeta przechodzi przez perihelium, bo wtedy $v = M = E = 0$ i wzory znacznie upraszczają się. Przedewszystkiem ponieważ wedle równania Keplera

$$\frac{dE}{de} = \frac{\sin E}{1 - e \cos E},$$

więc dla $E = 0$ otrzymamy

$$\frac{dE}{de} = 0.$$

Przy sposobności przypominamy, że E zależy także od a , bo M , które stoi po prawej stronie równania Keplera, jest proporcjonalne do n a $na^{3/2} = \text{stałej}$. Różniczkujemy tedy ξ i η [wzory (46)] względem a i względem e , po zróżniczkowaniu kładziemy $E = 0$ i otrzymujemy

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} = 1 - e, \quad \frac{\partial \xi}{\partial e} = -a, \quad \frac{\partial \eta}{\partial a} = a \sqrt{1 - e^2} \frac{\partial E}{\partial a}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial e} = 0 \quad [\text{dla } E = 0].$$

Widzimy stąd, że ostatni wyraz po prawej stronie równania (45) musi zniknąć bez względu na wartość pochodnej $\frac{\partial \eta}{\partial a}$. Zatem możemy wcale nie obliczać tej ostatniej pochodnej, zato musimy obliczyć trzy pozostałe pochodne ξ i η [wzory (47)] względem a i e :

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} = -\frac{an}{1 - e} \cdot \frac{\partial E}{\partial a}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial e} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial e} = \frac{na}{(1 - e)\sqrt{1 - e^2}} \quad [\text{dla } E = 0].$$

Widzimy stąd, że pierwszy wyraz po prawej stronie równania (45) także znika, pozostaje więc

$$[ae] = -\frac{\partial \xi}{\partial e} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial a} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial e}.$$

Ale skoro tu podstawimy wartości na pochodne stojące po prawej stronie, to znajdziemy

$$[ae] = 0. \quad (48)$$

Teraz możemy napisać wszystkie sześć równań Lagrange'a. Równania (27), (32), (37) i (39) poprostu przepisujemy a pozostałe dwa piszemy wedle wzorów (24), bo współczynniki [...] już są wszystkie wiadome z równań (28), (33), (38), (40) i (48). Otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned} \frac{n}{2} a \cdot \frac{da}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial l_0} \\ na^2 \sqrt{1-e^2} \sin^2 i \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial i} \\ -na \sqrt{1-e^2} \sin^2 i \frac{da}{dt} + \\ + \frac{2na^2e}{\sqrt{1-e^2}} \sin^2 i \frac{de}{dt} - na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i \frac{di}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \Omega} \\ -\frac{na}{2} [1 - \sqrt{1-e^2}] \frac{da}{dt} - \frac{na^2e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{de}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \pi} \\ -\frac{na}{2} \frac{dl_0}{dt} + \frac{na}{2} [1 - \sqrt{1-e^2}] \frac{d\pi}{dt} + na \sqrt{1-e^2} \sin^2 i \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial a} \\ \frac{na^2e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d\pi}{dt} - \frac{2na^2e}{\sqrt{1-e^2}} \sin^2 i \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial e}. \end{aligned} \right\} (49)$$

Łatwo wyprowadzić stąd równania na pochodne elementów względem czasu. Po bardzo prostych rachunkach otrzymamy sześć równań

$$(50) \left\{ \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{an} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial l_0} \\ \frac{dQ}{dt} &= \frac{1}{a^2 n \sqrt{1-e^2} \sin i} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial i} \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2 n e} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial \pi} + (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{\partial \Omega}{\partial l_0} \right] \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{a^2 n \sqrt{1-e^2}} \left[\frac{1}{\sin i} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial Q} + \operatorname{tang} \frac{1}{2} i \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \pi} + \frac{\partial \Omega}{\partial l_0} \right) \right] \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2 n e} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial e} + \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} i}{a^2 n \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial i} \\ \frac{dl_0}{dt} &= -\frac{2}{an} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial a} + \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} i}{a^2 n \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial i} + \frac{(1 - \sqrt{1-e^2}) \sqrt{1-e^2}}{a^2 n e} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial e} \end{aligned} \right.$$

Łatwo sprawdzić, że

$$(51) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial e} \cdot \frac{de}{dt} + \dots + \frac{d\Omega}{dl_0} \cdot \frac{dl_0}{dt} = 0.$$

Do równania (51) można też dojść na podstawie wzorów (25) w połączeniu ze związkami

$$(aa) = (bb) = (cc) = \dots = 0, \quad (ab) + (ba) = (ac) + (ca) \dots = 0.$$

Musimy tu zrobić pewną uwagę co do pochodnej $\frac{\partial \Omega}{\partial a}$ występującej w szóstym równaniu (50). Pochodna ta zależy od a w dwójaki sposób: najpierw dlatego, że samo a jawnie występuje we funkcji perturbacyjnej, następnie dlatego, że l_0 zależy od a . Rzeczywiście wedle wzoru (26)

$$l_0 = \pi + M_0;$$

ale $M = nt$, zaś n jest — jak wiadomo — odwrotnie proporcjonalne do $a^{3/2}$. Z tego powodu

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial a} \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial l_0} \cdot \frac{dl_0}{da} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial a} \right) + \frac{\partial \Omega}{dl_0} t \cdot \frac{dn}{da}.$$

Przez $\left(\frac{\partial \Omega}{\partial a} \right)$ oznaczyliśmy tę część pochodnej, która powstaje z wyrazów wprost od a zależnych.

Skoro podstawimy powyższe wyrażenie pochodnej $\frac{\partial \Omega}{\partial a}$ w ostatnie równanie (50), to otrzymamy

$$\frac{dl_0}{dt} = -\frac{2}{an} \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial a} \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial l_0} t \frac{dn}{da} \right] + \dots$$

Ale wedle pierwszego równania (50)

$$\frac{2}{an} \cdot \frac{\partial \Omega}{dl_0} = \frac{da}{dt},$$

więc przenosząc odpowiedni wyraz na lewą stronę możemy napisać szóste równanie (50) w postaci:

$$\frac{dl_0}{dt} + t \frac{dn}{da} \frac{da}{dt} = \frac{dl_0}{dt} + t \frac{dn}{dt} = -\frac{2}{an} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial a} \right) + \dots$$

Możemy oczywiście zamiast elementu l_0 wprowadzić jako zmienną

$$(l_0) = l_0 + \int t dn = l_0 + nt - \int n dt \quad (52)$$

i napisać szóste równanie (50) w postaci

$$\begin{aligned} \left(\frac{dl_0}{dt} \right) = & -\frac{2}{an} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial a} \right) + \frac{\text{tang } \frac{1}{2} i}{a^2 n \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial i} + \\ & + \frac{(1 - \sqrt{1-e^2}) \sqrt{1-e^2}}{a^2 n e} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial e}, \end{aligned} \quad (50, \text{VI bis})$$

przyczem należy pamiętać, że pochodne

$$\left(\frac{dl_0}{dt} \right) \quad \text{i} \quad \left(\frac{\partial \Omega}{\partial a} \right)$$

mają powyżej wyłuszczone znaczenie. Na inne równania powyższa substytucja niema żadnego wpływu, bo $\frac{\partial \Omega}{\partial a}$ w innych równaniach nie występuje a z drugiej strony

$$\frac{\partial \Omega}{(\partial l_0)} = \frac{\partial \Omega}{\partial l_0},$$

albowiem zależność Ω od (l_0) jest taka sama jak zależność od l_0 . Może atoli wydać się komu dziwnem, poco wogóle robimy tę sub-

stytucję. Oto dlatego, że gdybyśmy jej nie podjęli, to w szóstym równaniu (50) figurowałby wyraz wprost do czasu proporcjonalny. Wskutek tego w równaniach całkowych wystąpiłyby też wyrazy wzrastające z czasem; tego zaś, jak to w dalszym ciągu zobaczymy, należy unikać.

6. Rozwinięcie funkcyi perturbacyjnej.

Porównawszy wzór (13) ze wzorami (50) i (50, VI bis) zaraz spostrzeżemy, że tu i tam figurują inne zmienne; zatem przed podstawieniem funkcyi perturbacyjnej, czy raczej jej pochodnych w równania (50) trzeba wprzód wyrazić współrzędne prostokątne przez elementy i czas. Z rozdziału XIII-go, § 9 wiemy jednak, że współrzędne prostokątne nie dają się wyrazić przez funkcyę skończone czasu, tylko przez nieskończone szeregi funkcyi peryodycznych. Argumentem w tych szeregach nie jest zresztą sam czas, tylko anomalia średnia, ale to na jedno wychodzi, bo anomalia średnia jest proporcjonalna do czasu. Skoro atoli współrzędne prostokątne wyrażają się przez nieskończone szeregi, to po podstawieniu funkcyi perturbacyjnej przedstawi się także w postaci szeregu nieskończonego. Chodzi o to, jak ją rozwinąć w szereg. We wykonaniu tego zadania kierowano się przekonaniem, że system słoneczny jest stały, że przeto można wyrazić Ω przez funkcyę peryodyczną. Tu już okazuje się, dlaczego zastąpiono element l_0 przez (l_0) . Prostu chciano uniknąć wyrazów nieperyodycznych.

Aby uprościć dalsze rozważania, skorzystajmy z tego, że funkcyja perturbacyjna jest sumą wyrazów zależnych od oddzielnych planet sprawiających perturbacje, a między sobą zupełnie podobnych. Dość tedy rozważać jeden ze składników sumy, bo wszystko, co odnosi się do jednego ze składników, stosuje się bez zmiany do pozostałych. Odtąd więc będziemy postępować tak, jak gdyby była tylko jedna planeta sprawiająca perturbacje.

Ze względu na symetryczność funkcyi Ω względem współrzędnych planety doznającej perturbacji i planety sprawiającej perturbacje dogodnie jest rozwinąć ją też symetrycznie względem zmiennych dotyczących obu planet. Możemy zresztą z tego skorzystać i postawić zadanie na gruncie ogólniejszym: możemy założyć, że zmienne dotyczące planety sprawiającej perturbacje są również nieznanne. Zadanie nasze obróci się wtedy w zadanie trzech

ciał. Jednakże trzeba będzie dopisać drugie tyle równań dla drugiej planety.

Wracamy do wzoru (13), oznaczamy masę planety doznającej perturbacji przez m a jej współrzędne heliocentryczne przez x, y, z , masę planety sprawiącej perturbację oznaczamy przez m_1 a jej współrzędne heliocentryczne przez x_1, y_1, z_1 . Odpowiednio do tego odległość pierwszej planety od słońca oznaczamy przez r a drugiej przez r_1 , wreszcie oznaczamy odległość jednej planety od drugiej przez Δ i piszemy

$$\Omega = m_1 \left[\frac{1}{\Delta} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^3} \right]. \quad (53)$$

Przypominamy, że gdybyśmy chcieli uwzględnić perturbacje zależne od przyciągania kilku planet, to musielibyśmy napisać tyle wyrazów w rodzaju (53), ile jest planet. Możemy napisać wyrażenie (53) w nieco innym kształcie korzystając ze znanych związków:

$$\Delta^2 = r^2 - 2rr_1 \cos H + r_1^2, \quad xx_1 + yy_1 + zz_1 = rr_1 \cos H, \quad (54)$$

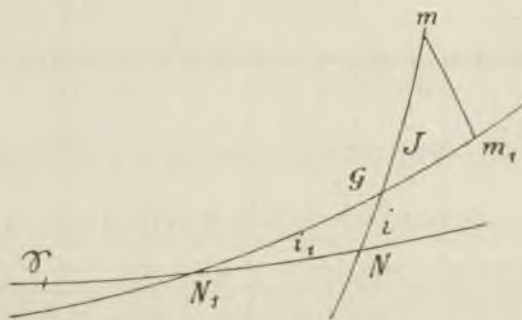
gdzie H jest to kąt przeciwległy bokowi łączącemu obie planety w trójkącie: słońce i planety m i m_1 , mianowicie możemy napisać

$$\Omega = m_1 \left[\frac{1}{\Delta} - \frac{r \cos H}{r_1^2} \right]. \quad (55)$$

Głównie rozchodzi się o rozwinięcie Δ^{-1} w szereg. W swej teorii księżyca Delaunay rozwija Δ^{-1} w szereg funkcyj sferycznych¹⁾ wedle wzrastających potęg stosunku $\frac{r}{r_1}$. Wogóle w teorii satelitów używają astronomowie rozwinięcia wedle wzrastających potęg $\frac{r}{r_1}$, bo przedstawia ono niemałe dogodności. Tam (w teorii satelitów) planeta jest ciałem środkowym, satelita odgrywa rolę planety doznającej perturbacji a słońce rolę planety sprawiącej perturbację. Przeto Δ oznacza odległość satelity od słońca, r odległość satelity od planety a r_1 odległość planety od słońca. Wskutek tego $\frac{r}{r_1}$ jest małym ułamkiem; nawet w przypadku ziemskiego

¹⁾ Por. rozdział V, § 2.

księżycą stosunek $\frac{r}{r_1}$ wynosi tylko około $\frac{1}{400}$. Dzięki temu rozwinięcie w szereg postępujący wedle potęg $\frac{r}{r_1}$ jest zawsze szybko zbieżne. Ale w teorii planet, gdzie r i r_1 oznaczają odległości planet od słońca, tego rodzaju rozwinięcia są nieprzydatne. Naprzykład w teorii małych planet, gdzie planetą sprawiającą najważniejsze perturbacje jest Jowisz, $\frac{r}{r_1}$ nie jest małym ułamkiem. Tak samo w przypadku, gdy planeta sprawiająca perturbacje jest bliższa do



Ryc. 33.

słońca niż planeta doznająca perturbacji, $\frac{r}{r_1}$ zazwyczaj nie jest małym ułamkiem.

Jeżeli nachylenie jednej orbity do drugiej [oznaczymy je za przykładem Tisseranda literą J] jest małe, to rozwijamy Δ^{-1} w szereg uporządkowany wedle potęg $\sin^2 \frac{1}{2} J$. Dochodzimy do tego szeregu w następujący sposób: Niech $\gamma N_1 N$ będzie ekliptyką, NGm orbitą planety m a¹⁾ $N_1 G m_1$ orbitą planety m_1 . Zatem N i N_1 są to węzły jednej i drugiej orbity na ekliptyce a G węzeł jednej orbity na drugiej, m i m_1 są to jednoczesne pozycje planet m i m_1 . Jeżeli oznaczymy długość rzeczywistą pierwszej planety przez L a drugiej przez L_1 , to $\gamma N + Nm = L$, $\gamma N_1 + N_1 m_1 = L_1$. Oznaczmy

¹⁾ Na rycinie 33 kąt przy m_1 wygląda jak prosty. Jest to dzieło przypadku; kąt ten może być jakikolwiek.

dalej długość punktu G na orbicie planety m przez τ a długość tego samego punktu na orbicie planety m_1 przez τ_1 , t. j. położmy

$$\gamma N + NG = \tau, \quad \gamma N_1 + N_1 G = \tau_1;$$

wtedy w trójkącie sferycznym Gmm_1

$$Gm = L - \tau, \quad Gm_1 = L_1 - \tau_1, \quad mm_1 = H,$$

wreszcie $\sphericalangle mGm_1 = J$.

Stąd

$$\left. \begin{aligned} \cos H &= \cos(L - \tau) \cos(L_1 - \tau_1) + \\ &\quad + \sin(L - \tau) \sin(L_1 - \tau_1) \cos J \\ &= \cos(L_1 - L - \tau_1 + \tau) - \\ &\quad - 2 \sin(L - \tau) \sin(L_1 - \tau_1) \sin^2 \frac{1}{2} J. \end{aligned} \right\} (56)$$

Podstawmy to wyrażenie na $\cos H$ w pierwszy wzór (54) położmy dla krótkości

$$\left. \begin{aligned} r^2 - 2rr_1 \cos(L_1 - L - \tau_1 + \tau) + r_1^2 &= p \\ 4rr_1 \sin(L - \tau) \sin(L_1 - \tau_1) &= q \\ \sin^2 \frac{1}{2} J &= v \end{aligned} \right\} (57)$$

a używając wzoru dwumianowego będziemy mogli napisać

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{p + qv}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{q}{p} v + \frac{3}{8} \frac{q^2}{p^2} v^2 - \dots \right] (58)$$

Widzimy zatem, że stosownie do zapowiedzi Δ^{-1} zostało rozwinięte w szereg postępujący wedle potęg $\frac{q}{p} \sin^2 \frac{1}{2} J$.

Jeżeli $\sin^2 \frac{1}{2} J$ nie jest dostatecznie mały, to w niektórych konfiguracjach planet m i m_1 iloczyn $\frac{q}{p} \sin^2 \frac{1}{2} J$ bywa większy niż jedność a szereg (58) bywa z pewnością rozbieżny. Tisserand wykazał to dowodnie na przykładzie Jowisza i Pallady ($J = 34^{\circ}3$). Zatem gdy wzajemne nachylenie orbit nie jest dostatecznie małe, to trzeba posługiwać się innem rozwinięciem, które wskazał już Leverrier a opracował F. Tisserand. Dodamy tu, że H. Gylden także posługiwał się tem samem rozwinięciem, choć zresztą

metoda jego znacznie odbiega od metody Tisseranda. Wiadomo, że Δ^{-1} daje się rozwinąć w szereg Fouriera

$$(59) \quad \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos H + A_2 \cos 2H + \dots + A_n \cos nH + \dots,$$

przyczem

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\psi d\psi}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \psi}}.$$

Lecz trzeba jeszcze rozwinąć $\cos H$, $\cos 2H$... i t. d., Tisserand robi to w następujący sposób. Wzór (56) można napisać w kształcie

$$(60) \quad \cos H = \cos(L_1 - L - \tau_1 + \tau) \cos^2 \frac{1}{2} J + \\ + \cos(L_1 + L - \tau_1 - \tau) \sin^2 \frac{1}{2} J.$$

Położmy

$$(61) \quad \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{2} J = \mu, & \sin^2 \frac{1}{2} J = \nu \\ L_1 - L - \tau_1 + \tau = x, & L_1 + L - \tau_1 - \tau = y. \end{cases}$$

Z tem nowem znakovaniem

$$(60 \text{ bis}) \quad \cos H = \mu \cos x + \nu \cos y.$$

Z tego wzoru Tisserand wyprowadza rozwinięcie

$$(62) \quad \cos nH = Q_{00}^{(n)} + 2 \sum Q_{i0}^{(n)} \cos ix + 2 \sum Q_{0j}^{(n)} \cos jy + \\ + 4 \sum Q_{ij}^{(n)} \cos ix \cos jy,$$

w którym współczynniki Q są wielomianami zawierającymi tylko μ i ν . Zresztą niektóre z tych współczynników są równe zero. Skoro wyrugujemy ze wzoru (59) $\cos H$, $\cos 2H$... i t. d. przez wyrażenia kształtu (62), skoro potem zastąpimy iloczyny $\cos ix \cdot \cos jy$ przez $\frac{1}{2} [\cos(ix + jy) + \cos(ix - jy)]$, skoro wreszcie pościągamy razem wszystkie wyrazy zawierające jednakowe argumenty, to otrzymamy

$$\frac{1}{\Delta} = \sum \sum P_{ij} \cos(ix + jy),$$

przyczem na i i j należy kłaść wszelkie całe, dodatnie i ujemne wartości. Oczywiście P_{ij} są funkcjami nie tylko μ i ν , ale także r i r_1 , bo składają się zarówno ze współczynników Q , jak ze współ-

Zamiast rzeczywistych długości Leverrier wprowadza średnie, które zupełnie tak samo jak średnie anomalie różnią się od rzeczywistych tylko o równanie środka [por. rozdz. XIII-ty, § 9].

Oznaczając równania środka przez Y i Y_1 a przez l i l_1 średnie długości możemy napisać

$$L = l + Y, \quad L_1 = l_1 + Y_1,$$

skąd

$$x = l_1 - l + Y_1 - Y - \tau_1 + \tau.$$

Leverrier wprowadza jeszcze symbol

$$\lambda = l + \tau_1 - \tau$$

i pisze

$$(66) \left\{ \begin{array}{l} x = l_1 - \lambda + Y_1 - Y, \\ L - \tau = l + Y - \tau, \quad L_1 = l_1 + Y_1 - \tau_1, \\ \text{wreszcie kładzie} \\ r = a(1 + X), \quad r_1 = a_1(1 + X_1). \end{array} \right.$$

Tak X i X_1 , jak Y i Y_1 są to funkcyje mimośrodu i anomalii średniej [por. rozdz. XIII-ty, § 9].

Początkowo Leverrier zaniedbuje wszędzie X i X_1 , Y i Y_1 , t. j. pisze średnie długości zamiast rzeczywistych oraz połowy wielkich osi zamiast promieni, zamienia potęgi i iloczyny funkcyi kołowych przez funkcyje kołowe sum i różnic, porządkuje na nowo szereg (65) w taki sposób, że łączy ze sobą wszystkie wyrazy zawierające tę samą funkcyję kołową, poczem otrzymuje

$$\frac{1}{\Delta_0} = \Sigma M_i \cos i(l_1 - \lambda) + \Sigma N_i \cos [i(l_1 - \lambda) + 2(\lambda - \tau_1)] + \\ + \Sigma P_i \cos [i(l_1 - \lambda) + 4(\lambda - \tau_1)] + \Sigma Q_i \cos [i(l_1 - \lambda) + 6(\lambda - \tau_1)].$$

Opatrzyliśmy Δ znaczkami $^{\circ}$, aby przypomnieć, że w szeregu po prawej stronie pominięto X , X_1 , Y i Y_1 , że zatem szereg ten nie daje właściwej wartości na Δ . Następnie Leverrier wprowadza X i X_1 , Y i Y_1 , t. j. pisze $a(1 + X)$ zamiast a , $a_1(1 + X_1)$ zamiast a_1 , $\lambda + Y$ zamiast l i $l_1 + Y_1$ zamiast l_1 . Podobnie jak współczynniki A_n w rozwinięciu Tisseranda — współczynniki M_i , N_i i t. d. są funkcyjami jednorodnymi rzędu -1 połów

wielkich osi a i a_1 [oprócz tego zależą też od $\nu = \sin^2 \frac{1}{2} J$]. Zakładając, że r_1 jest wciąż większe od r , możemy więc napisać

$$M_i \text{ etc.} \dots = F[a(1+X), a_1(1+X_1)] = \frac{1}{1+X_1} F\left[a\left(\frac{1+X}{1+X_1}\right), a_1\right] \\ = \frac{1}{1+X_1} F\left[a\left(1+\frac{X-X_1}{1+X_1}\right), a_1\right].$$

Teraz Leverrier rozwija funkcyę F , t. j. współczynniki M_i i t. d. w szeregi Taylora traktując $\frac{X-X_1}{1+X_1}$ jako przyrost a potem wydziela z argumentów funkcyi kołowych Y i Y_1 , więc pisze np.

$$\cos i(l_1 - \lambda + Y_1 - Y) = \\ = \cos i(l_1 - \lambda) \cos i(Y_1 - Y) - \sin i(l_1 - \lambda) \sin i(Y_1 - Y).$$

W ten sposób powstają różne funkcyę X i X_1 oraz Y i Y_1 . Wszystkie one zależą tylko od mimośrodków i anomalii średnich. Leverrier rozwija je w szeregi Fouriera, w których argumentami są anomalie średnie M i M_1 a współczynnikami funkcyę mimośrodków e i e_1 . Spostrzegamy, że w ten sposób powstaną iloczyny funkcyi kołowych z argumentami typu kM , k_1M_1 i funkcyi kołowych z argumentami typu $i(l_1 - \lambda)$ i t. d., gdzie k , k_1 i t. d. są to liczby całe. Leverrier zastępuje te iloczyny przez funkcyę kołowe sum i różnic, podstawia jeszcze

$$M = l - \pi, \quad M_1 = l_1 - \pi_1, \\ \omega = \pi + \tau_1 - \tau$$

i otrzymuje ostatecznie rozwinięcie, które można ogólnie napisać tak:

$$\frac{1}{\Delta} = \Sigma C' \cos [hl_1 + i\lambda + j\pi_1 + k\omega + n\tau_1].$$

Znowu możemy powiedzieć to samo, co poprzednio mówiliśmy o rozwinięciu Tisseranda, mianowicie, że przez dołączenie części uzupełniającej funkcyi perturbacyjnej charakter rozwinięcia nie zmieni się. Przeto otrzymamy ostatecznie rozwinięcie

$$\Omega = \Sigma C \cos [hl_1 + i\lambda + j\pi_1 + k\omega + n\tau_1]. \quad (67)$$

W tem rozwinięciu współczynniki C są oczywiście funkcjami a, a_1, e, e_1 i $\nu = \sin^2 \frac{1}{2} J$. Liczby h, i, j, k i n występujące w argumentach są to liczby białe, zresztą dowolne, zarówno dodatnie, jak odjemne, zawsze jednak spełniające warunek

$$(68) \quad h + i + j + k + n = 0.$$

Warunek ten musi być zawsze spełniony dlatego, że wedle wzorów (54) i (55) funkcya perturbacyjna nie zależy od położenia tego punktu na ekliptyce, od którego liczymy długości. Gdyby warunek (68) nie był spełniony, to np. przesunąwszy początek długości o kąt α wstecz powiększilibyśmy wszystkie pięć kątów o α , wskutek czego argument wyrazu ogólnego we wzorze (67) powiększyłby się o

$$(h + i + j + k + n) \alpha.$$

Stąd jasno wynika nieodzowność warunku (68).

Widzimy też, że rozwinięcie (67) zawiera same cosinusy. I ta cecha objaśnia się przez naturę funkcji perturbacyjnej. Jeżeli zamiast danych długości weźmiemy długości równe im co do absolutnej wartości, ale o przeciwnych znakach, to [por. wzory (54), (55) i (56)] funkcya perturbacyjna będzie miała tę samą wartość co poprzednio. Stąd wynika, że rozwinięcie jej musi składać się ze samych funkcji parzystych, a więc z „cosinusów“.

7. Podstawienie funkcji perturbacyjnej w równania różniczkowe i całkowanie tych ostatnich.

Obecnie, gdy już posiadamy rozwinięcie funkcji perturbacyjnej w szereg (67), należy podstawić je w równania różniczkowe (50) [przypominamy, że zamiast ostatniego równania (50) trzeba wziąć równanie (50 VI bis)]. Wypadnie więc tworzyć pochodne cząstkowe funkcji Ω względem elementów. Ze względu na zastrzeżenie zrobione w końcu § 5 należy — tworząc pochodną $\frac{\partial \Omega}{\partial a}$ — ograniczyć się do różniczkowania współczynników C , które zawierają a w sposób jawny. Tak samo tworząc $\frac{\partial \Omega}{\partial e}$ trzeba różniczkować tylko współczynniki, bo argumenty cosinusów zupełnie od e nie zależą. Odwrotnie elementy l i π zupełnie nie wchodzą do współczynników,

zato wchodzą do argumentów cosinusów. Wprawdzie ich tam nie widać, ale wiadomo, że

$$l = \lambda - \tau_1 + \tau, \quad \pi = \omega - \tau_1 + \tau, \quad (69)$$

przyczem ani τ_1 ani τ od l i π nie zależą. Mamy więc poprostu

$$\frac{\partial \Omega}{(\partial l_0)} = \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \pi} = \frac{\partial \Omega}{\partial \omega}$$

i tworząc te pochodne mamy różniczkować tylko cosinusy. Wreszcie elementy i i Ω nie występują jawnie ani we współczynnikach, ani w argumentach cosinusów, zato $\nu = \sin^2 \frac{1}{2} J$ figurujące we współczynnikach C oraz τ_1 i τ figurujące w argumentach cosinusów są funkcyami tych dwóch elementów. Można by przez nowe przekształcenia wprowadzić Ω i Ω_1 do argumentów cosinusów, ale Leverrier tego nie robi. Wskutek tego w jego rozwinięciu argumenty cosinusów przedstawiają się jako liniowe funkcy sześciu zmiennych $l_1, \pi_1, l, \pi, \tau_1$ i τ a poszukiwane pochodne są

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial i} &= \frac{\partial \Omega}{\partial J} \cdot \frac{\partial J}{\partial i} + \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial i} + \frac{\partial \Omega}{\partial \tau_1} \cdot \frac{\partial \tau_1}{\partial i} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \Omega} &= \frac{\partial \Omega}{\partial J} \cdot \frac{\partial J}{\partial \Omega} + \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \Omega} + \frac{\partial \Omega}{\partial \tau_1} \cdot \frac{\partial \tau_1}{\partial \Omega} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Na podstawie różniczkowych wzorów (19) rozdz. I-go łatwo jest otrzymać z trójkąta w rycinie 33

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial i} &= \cos(\tau - \Omega), & \frac{\partial J}{\partial \Omega} &= \sin i \sin(\tau - \Omega), \\ \frac{\partial \tau}{\partial i} &= -\frac{\sin(\tau - \Omega)}{\text{tang } J}, & \frac{\partial \tau}{\partial \Omega} &= 1 + \frac{\sin i_1}{\sin J} \cos(\tau_1 - \Omega_1), \\ \frac{\partial \tau_1}{\partial i} &= -\frac{\sin(\tau - \Omega)}{\sin J}, & \frac{\partial \tau_1}{\partial \Omega} &= \frac{\sin i}{\sin J} \cos(\tau - \Omega). \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Ponieważ J występuje tylko we współczynnikach, a τ i τ_1 tylko w argumentach cosinusów, więc pochodna Ω względem J składa się ze samych cosinusów, a pochodne względem τ i τ_1 ze samych sinusów. Skoro więc wstawimy wartości na $\frac{\partial J}{\partial i}$ i t. d.

ze wzorów (71) we wzory (70) i znowu zastąpimy iloczyny funkcyj kołowych¹⁾ przez funkcyje kołowe sum i różnice argumentów, to okaże się, że $\frac{\partial \Omega}{\partial t}$ składa się ze samych cosinusów, a $\frac{\partial \Omega}{\partial \Omega}$ ze samych sinusów. Z drugiej strony ponieważ tworząc pochodne względem a i e różniczkujemy tylko współczynniki, a tworząc pochodne względem l i π tylko cosinusy, więc ostateczne trzy pochodne względem a , e i i składają się ze samych cosinusów, a trzy pochodne względem Ω , l i π ze samych sinusów. Jeżeli teraz powrócimy do równań (50) i podstawimy w nie wyrażenia pochodnych Ω , to zaraz spostrzeżemy, że $\frac{da}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, $\frac{di}{dt}$ wyrażają się przez szeregi złożone ze samych sinusów, zatem przez szeregi funkcyj peryodycznych bez wyrazu stałego, podczas gdy $\frac{d\Omega}{dt}$, $\frac{d\pi}{dt}$ i $\frac{dl_0}{dt}$ wyrażają się przez szeregi cosinusów, zatem przez funkcyje peryodyczne i przez wyrazy stałe, bo wśród rozmaitych argumentów znajdują się też argumenty stale równe zeru.

Załóżmy teraz, że zamiast funkcyj perturbacyjnej zależnej od jednej planety wzięliśmy funkcyję perturbacyjną kompletną, t. j. zawierającą składniki zależne od wszystkich pozostałych planet. Uwagi powyższe co do kształtu równań (50) pozostaną w swej sile, bo funkcyja perturbacyjna kompletna jest sumą składników jednakowych co do kształtu i natury. Oprócz tego założmy, że ruch innych planet nie jest dany, że zatem elementy innych planet są tak samo zmienne jak elementy planety uważanej i odpowiednio do tego napiszmy równania (50) dla wszystkich planet. Wiadomo, że te równania pochodzą od równań (14), które ze swej strony są tylko pewną formą równań ruchu systemu n ciał. Ponieważ przy wyprowadzeniu równań (50) nie robiliśmy żadnych uproszczeń, zatem te ostatnie równania są także równaniami ruchu n ciał i gdybyśmy wypisawszy te równania dla wszystkich planet, całkowali je przy założeniu, że elementy wszystkich planet są zmienne, to otrzymalibyśmy ogólne całki zadania o ruchu n ciał. Ten wniosek wydaje się nam nieco dziwnym, bo wiemy już, że nie można otrzy-

¹⁾ Przytem jednakże nie należy wprowadzać ani $\sin t$, ani $\sin i$, ani $\sin J$ do argumentów cosinusów względnie sinusów, należy włączyć je do współczynników C .

mać ogólnych całek równań ruchu n ciał, ale chwilowo nie zastanawiamy się nad tem przeciwieństwem i próbujemy wyciągnąć pewne wnioski ze samego kształtu równań różniczkowych. We wszystkich grupach równań pochodne:

$$\frac{da}{dt}, \frac{de}{dt}, \frac{di}{dt}$$

t. j. pochodne [względem czasu] tych trzech elementów, od których zależą: rozmiary, kształt i nachylenie orbity, wyrażają się przez szeregi samych sinusów, a pochodne pozostałych elementów wyrażają się przez szeregi cosinusów z dodatkiem wyrazów stałych. Zatem pochodne pierwszych trzech elementów powinny przybierać na przemiany to wartości dodatnie, to wartości ujemne. Co więcej, jeżeli założymy, że można oznaczyć taką skończoną górną granicę — powiedzmy — p , której żaden z peryodów szeregu nie przekracza; to, uważając okresy czasu dłuższe od owej granicy p , możemy powiedzieć, że średnie wartości pochodnych zdążają do zera w miarę tego, jak powiększamy uważany okres czasu. Nawiasem mówiąc, to ostatnie założenie zapewne nigdy nie bywa ściśle spełnione; ale założmy chwilowo, że jest spełnione przybliżenie ¹⁾. Przyjdziemy wtedy do wniosku, że same funkcje a , e , i nie powinny ani bezgranicznie wzrastać, ani bezgranicznie zmniejszać się, że powinny podlegać tylko pewnym fluktuacyom. To znaczy, że rozmiary, kształty i nachylenia orbit powinnyby podlegać tylko pewnym fluktuacyom. Przez analogiczne rozumowanie dochodzimy do wniosku, że pozostałe elementy Ω , π i l wyznaczające położenie węzłów, periheliów i samych planet podlegają nietylko fluktuacyom, ale także wiekowym zmianom, t. j. bezgranicznie wzrastają lub zmniejszają się. To jest właśnie treść twierdzenia o stałości systemu słonecznego, o którym mówiliśmy już w § 1, bo gdyby rozmiary, kształty i nachylenia orbit planetarnych mogły zmieniać się tylko w pewnych granicach, to system słoneczny musiałby zawsze pozostać mniej więcej takim, jakim jest obecnie: żadna planeta nie mogłaby go opuścić. Tylko co do zderzeń z innymi planetami nie można tą drogą dojść do żadnego pozytywnego wniosku.

Ale aby dowieść powyższę twierdzenie, nie dość jest wyka-

¹⁾ Chcemy przez to powiedzieć, że współczynniki wyrazów nie czyniących zadość powyższemu założeniu są znikomo małe.

zać, że pochodne względem czasu połów wielkich osi, mimośrodów i nachyleń składają się ze samych sinusów; trzeba dowieść, że te szeregi są zbieżne. Otóż tego właśnie dowieść nie można. Mówimy to zupełnie ogólnie, t. j. nietylko o wyłożonej tu metodzie stałych dowolnych, ale także o innych metodach, np. o metodach Newcomba, Lindstedta, Gyldèna i t. d. Niezależnie od metody, niezależnie od tego, czy weźmiemy elementy eliptyczne, czy inne równoważne im zmienne, czy wyrażenia współrzędnych i t. d. zawsze okaże się, że w ciągu całkowania natrafimy na wyrazy stale wzrastające z czasem. Jeżeli zaś przez odpowiednie wybiegi takich wyrazów unikniemy, to okaże się, że otrzymane przez nas szeregi funkcyj peryodycznych nie są zbieżne. Właśnie najważniejsze odkrycie Poincarégo w mechanice nieba polega na tem, że wykazał rozbieżność¹⁾ owych szeregów funkcyj kołowych. Ponieważ nie możemy nawet w skróceniu podać wywodu Poincarégo, więc postaramy się wytłómaczyć, o co tu chodzi. Znamy niektóre szeregi, w których z początku wyrazy szybko ubywają, potem zaś wzrastają bezgranicznie. Bierzemy bijący w oczy przykład podany przez samego Poincarégo²⁾. Oto dwa szeregi

$$\sum_1^{\infty} \frac{1000^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \quad \text{i} \quad \sum_1^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1000^n}.$$

W pierwszym szeregu wyrazy wzrastają aż do tysięcznego wyrazu z początku bardzo szybko, potem powolniej; odtąd zmniejszają się z początku wolno a potem coraz to szybciej. Łatwo przekonać się o tem zważywszy, że stosunek między n -tym wyrazem a poprzednim jest

$$\frac{1000}{n}.$$

¹⁾ Zastrzegamy się, że twierdzenie Poincarégo dotyczy tylko szeregów funkcyj kołowych, wyrażających elementy eliptyczne, lub inne równoważne zmienne. Sama funkcyj perturbacyjna może być rozwinięta w zbieżny szereg funkcyj kołowych. Rzeczywiście, jeżeli wyłączymy przypadek, gdy drogi uważanych ciał przecinają się, to funkcyj perturbacyjna będzie zawsze skończoną, peryodyczną funkcyj kątów L i L_1 , τ i τ_1 [por. wzory (55) i (56)] a taka funkcyj powinna wedle ogólnych zasad teoryi funkcyj dać się rozwinąć w zbieżny szereg funkcyj kołowych z argumentami L i L_1 , τ i τ_1 .

²⁾ Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tom II, Paryż 1893, str. 1.

Gdy n jest wielkie, to stosunek ten jest bardzo mały, np. dla $n = 1000000$ wartość stosunku wynosi już tylko $\frac{1}{1000}$. Wskutek tego pierwszy szereg jest bezwzględnie zbieżny. Zajmijmy się teraz drugim szeregiem. Tu odwrotnie, z początku wyrazy ubywają bardzo szybko, potem coraz powolniej, zaś począwszy od tysięcznego wyrazu poczynają wzrastać i wzrastają bezgranicznie aż do nieskończoności. Łatwo przekonać się o tem zważywszy, że stosunek między n -tym wyrazem a poprzednim jest

$$\frac{n}{1000}.$$

Tak więc np. milionowy wyraz jest tysiąc razy większy od 999999-go i szereg jest z pewnością rozbieżnym. Otóż owe szeregi funkcyj peryodycznych służące do wyrażenia współrzędnych, elementów eliptycznych lub innych równoważnych zmiennych mają podobny charakter. Z początku wyrazy szybko ubywają a potem wzrastają bezgranicznie. Stąd jednak nie wynika, aby owe szeregi były zupełnie bezużyteczne¹⁾. Wprawdzie nie można oprzeć na nich żadnych ogólnych wniosków odnoszących się do nieograniczonych odstępów czasu, ale poprzestając na początkowych wyrazach szeregów, zatem na tej ich części, w której wyrazy szybko ubywają, można przedstawić czy to współrzędne, czy to elementy, czy inne zmienne w ciągu pewnego skończonego i niezbyt długiego czasu z ograniczonym, ale częstokroć zupełnie wystarczającym przybliżeniem. Wykroczyć poza ten czas nie można, bo nie można tak, jak to się dzieje ze szeregami zbieżnymi, powiększyć dokładność przez uwzględnienie dalszych wyrazów. Tego rodzaju szeregi Poincaré nazwał „asymptotycznymi“. Nazywają je też „napół zbieżnymi“ (*semi-convergent*).

W dalszym ciągu nie będziemy zajmować się uśłowianiami, aby przedstawić współrzędne, czy elementy (czy inne zmienne) przez szeregi funkcyj peryodycznych. Tylko dla informacji powiemy, że te szeregi mają zawsze jednakowy wygląd. Współczynniki przedstawiają się jako nieskończone szeregi uporządkowane

¹⁾ Naprzykład metoda H. Gyldena w opracowaniu M. Brendla (*Theorie der kleinen Planeten*) okazała się bardzo użyteczną i dogodną do przepowiadania pozycji małych planet w ciągu jakich stu lat.

wedle potęg mimośrodów i nachyleń a zawierające także połowy wielkich osi. Co zaś do samych funkcyi peryodycznych, to ich argumenty są liniowemi funkcyami średnich długości samych planet, ich węzłów i periheliów.

Pamiętając o tem, że wszystkie nasze wnioski i rozumowania są ważne tylko dla ograniczonego czasu, chociaż wynoszącego setki i tysiące lat, przechodzimy do klasycznych przybliżonych metod całkowania, w których nie usiłowano osiągnąć peryodycznego kształtu we wyrażeniach na wielkie osie, mimośrody i nachylenia. Wracamy tedy do równań (50), ale dla ogólności zakładamy, że elementy innych planet są także zmienne. Jednocześnie atoli korzystamy z tej okoliczności, że we większości konkretnych przypadków najważniejszą rolę odgrywa reakcyja tylko jednej planety i upraszczamy zadanie przywodząc je do przypadku trzech ciał. Rozpatrujemy tedy wzajemne oddziaływanie tylko dwu planet m i m_1 , ale nie łatwiejszego jak uogólnienie wywodów do przypadku, w którym ilość planet jest dowolną.

Powinniśmy napisać dla planety m_1 drugich sześć takich równań jak równania (50), ale ze względu na zupełne podobieństwo obu systemów równań możemy to zaniechać. Zakładamy, że można napisać wyrażenia na elementy w kształcie

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = a_0 + \delta'a + \delta''a + \dots \\ e = e_0 + \delta'e + \delta''e + \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

przyczem $a_0, e_0 \dots$ i t. d. są to stałe, zaś $\delta'a, \delta''a \dots \delta'e, \delta''e \dots$ są to tak zwane „perturbacje pierwszego, drugiego i t. d. ... rzędu“, albowiem są to wielkości pierwszego, drugiego i t. d. ... rzędu względem mas m i m_1 . Podstawiamy te wyrażenia w równania (50) i w odpowiednie równania dla drugiej planety, poczem przyrównujemy do siebie wyrazy jednakowego rzędu względem mas. [Naturalnie wyobrażamy sobie, że po prawej stronie równań (50) już zastąpiono symbole

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a}, \frac{\partial \Omega}{\partial e} \dots \text{i t. d.}$$

przez odpowiednie pochodne szeregu (67)]. Zaraz zajmiemy się samem całkowaniem, ale wprzód jeszcze wspomnimy o niektórych, gwoli wygody często używanych przekształceniach. Spojrzawszy

na równania (50) zaraz widzimy, że w niektórych mianownikach figuruje mimośród e . Tymczasem wiadomo, że mimośrodory orbit planetarnych są po większej części małe, a z drugiej strony wiadomo, że we wszystkich wzorach, w które mamy podstawiać liczbowe wartości, należy unikać małych mianowników [przyczynę tłómaczyliśmy już kilkakrotnie]. Aby usunąć e (względnie e_1) z mianowników, wprowadzamy pomocnicze zmienne

$$h = e \sin \pi, \quad f = e \cos \pi, \quad h_1 = e_1 \sin \pi_1, \quad f_1 = e_1 \cos \pi_1,$$

skąd

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \sin \pi \frac{de}{dt} + e \cos \pi \frac{d\pi}{dt} \\ \frac{df}{dt} &= \cos \pi \frac{de}{dt} - e \sin \pi \frac{d\pi}{dt}. \end{aligned} \right\} (73)$$

Jeżeli tu zamiast $\frac{de}{dt}$ i $\frac{d\pi}{dt}$ podstawimy ich wyrażenia wzięte z równań (50), to otrzymamy analogiczne do tychże równań nowe równania na pochodne $\frac{dh}{dt}$ i $\frac{df}{dt}$. Widzimy stąd, że w dalszych rachunkach h i f będą odgrywać tę samą rolę co elementy. Naturalnie trzeba wyrugować e i π z prawych stron równań na pochodne $\frac{dh}{dt}$ i $\frac{df}{dt}$ za pomocą tych samych wzorów (73), ale to jest rzecz łatwa, zyskujemy zaś to, że e figurujące jako współczynnik przy $\frac{d\pi}{dt}$ skraca się z e stojącym w mianownikach. W podobny sposób wprowadzając

$$\left. \begin{aligned} p &= \sin i \sin Q, & q &= \sin i \cos Q, \\ p_1 &= \sin i_1 \sin Q_1, & q_1 &= \sin i_1 \cos Q_1 \end{aligned} \right\} (74)$$

możemy pozbyć się małego mianownika $\sin i$ (lub $\sin i_1$) w razie, gdy jeden, lub drugi, czy wreszcie oba są nazbyt małe.

Przechodzimy teraz do całkowania. Wiemy już — długo zresztą o tem rozprawialiśmy — że pochodne elementów względem czasu wyrażają się ostatecznie przez szeregi cosinusów, względnie sinusów, których argumenty w rozwinięciu Leverriera mają kształt

$$hl_1 + i\lambda + j\pi_1 + k\omega + n\tau_1,$$

przyczem

$$h + i + j + k + n = 0.$$

Lecz

$$\lambda = l + \tau_1 - \tau,$$

zaś

$$l = M + \pi = nt + \pi, \quad l_1 = M_1 + \pi_1 = n_1 t + \pi_1, \quad \omega = \pi + \tau_1 - \tau.$$

Tedy można powyższe argumenty napisać w kształcie

$$(in + hn_1)t + (k + i)\pi + (h + j)\pi_1 - k\tau + (k + n)\tau_1.$$

Wiemy też, że przez odpowiednie przekształcenie [por. to, co było powiedziane we wzorze (67)] można te argumenty doprowadzić do kształtu

$$\begin{aligned} il + i_1 l_1 + j \varrho + j_1 \varrho_1 + k\pi + k_1 \pi_1 = \\ = (in + i_1 n_1)t + j \varrho + j_1 \varrho_1 + (k + i)\pi + (k_1 + i_1)\pi_1, \end{aligned}$$

w którym naturalnie liczby całe $i, i_1 \dots$ nie są te same, co w argumentach rozwinięcia Leverriera. Ale mniejsza o to, który kształt obierzemy, bo zawsze dojdziemy do tego samego wyniku. Obierzmy np. drugi; wtedy współczynniki przy funkcyjach kołowych będą funkcyjami a i a_1, e i e_1, i i i_1 . Doświadczenie poucza nas, że tak te ostatnie wielkości, jak długości węzłów i periheliów zmieniają się bardzo powoli; tylko l i l_1 , t. j. nt i $n_1 t_1$ zmieniają się stosunkowo szybko. Zatem w pierwszym przybliżeniu można przyjąć, że oprócz nt i $n_1 t_1$ wszystkie elementy tak jednej, jak drugiej planety są stałe. Otrzymamy w ten sposób perturbacje „pierwszego rzędu“. Rzeczywiście równania (50) przybiorą wtedy postać

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = \Sigma \Sigma A_u \sin [(in + i_1 n_1)t + D_u] \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Rozpatrzmy prawe strony: D_u i A_u są to stałe. Stałe D_u nie mają żadnego wpływu na rząd funkcyj, co zaś do A_u , to zważmy, że prawe strony naszych równań (50) są liniowymi funkcyjami cząstkowych pochodnych funkcyj perturbacyjnej, ta zaś zawiera we współczynniku masę m_1 [por. wzór (13)]. Stąd wynika, że wszystkie A_u , zatem i prawe strony równań są proporcjonalne do pierwszych potęg mas.

a więc także

$$2in + 2i_1n_1 = 0, \quad 3in + 3i_1n_1 = 0 \dots \text{i t. d.}$$

Będzie więc cały szereg wyrazów wiekowych, które zresztą można ze sobą złączyć, bo wszystkie są jednakowo proporcjonalne do czasu. Jednakże dla przyczyn, nad którymi trudno nam tu roz-
wodzić się, należy w tym przypadku inaczej poprowadzić całą analizę.

O ile chodzi o większe planety i o olbrzymią większość ma-
łych, to nie znamy przypadku wymierności pomiędzy ich ruchami
średnimi. Ale średnie ruchy czterech małych planet trojańskiej
grupy, o których mówiliśmy w § 2, są — jak się zdaje — równe
średniemu ruchowi Jowisza. Oprócz tego jeszcze Laplace wykazał,
że średnie ruchy pierwszych trzech satelitów Jowisza czynią za-
dość związkowi

$$(78) \quad n_1 - 3n_2 + 2n_3 = 0.$$

Jest to przypadek wymierności trochę więcej skomplikowanej
aniżeli ten, o którym mówiliśmy przed chwilą, bo do związku (78)
wchodzi nie dwa, a trzy ruchy średnie; ale oczywistą jest rzeczą,
że wymierność dwóch ruchów średnich, to tylko specjalny przy-
padek ogólniejszych liniowych związków pomiędzy ruchami śre-
dnimi kształtu

$$m_1n_1 + m_2n_2 + \dots + m_kn_k = 0,$$

w których $m_1, m_2 \dots$ i t. d. są to liczby całe, dodatnie, lub od-
jemne. Jeżeli taki związek zachodzi pomiędzy ruchami średnimi k
planet ($k \leq n$), to przyrównując do zera współczynniki przy pozost-
stałych $n - k$ ruchach średnich otrzymamy wyrazy wiekowe.

Łatwo przekonać się, że w pierwszym przybliżeniu
wielkie osie orbit nie mają wiekowych perturbacji, t. j. że $A_{0,0} = 0$.
Weźmy mianowicie pod uwagę pierwsze równanie (50)

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \Omega}{\partial l}.$$

Gdy położymy $i = 0, i_1 = 0$, to tem samem przyjmiemy, iż
dany wyraz szeregu nie zależy ani od M , ani od M_1 . Ale M i M_1

różnią się od l i l_1 tylko o stałe, więc wyraz niezależny od M i M_1 nie zależy także od l i l_1 . Zatem, o ile chodzi o wyrazy wiekowe,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial l} = 0;$$

stąd zaś na mocy pierwszego równania (50) wynika

$$\frac{da}{dt} = 0.$$

Więc o ile chodzi o wiekowe zmiany, to wielkie osie są niezmiennie. To jest właśnie owo twierdzenie Laplace'a, o którym już kilkakrotnie wspominaliśmy. Tu zaś dowodnie widzimy, że ma ono charakter przybliżony, ograniczony, bo wynika z przybliżonych, niekompletnych wzorów.

Przechodzimy teraz do innego, z tamtym spokrewnionego przypadku. Oto gdy n i n_1 nie są wymierne, to wprawdzie $in + i_1n_1$ nie może być zerem, ale może być bardzo małą wielkością. Rozwińmy np. n/n_1 w ułamek łańcuchowy a potem kładźmy i równe licznikom, zaś i_1 równe mianownikom wziętym z przeciwnymi znakami [naturalnie można też odwrotnie brać liczniki z przeciwnymi, a mianowniki z właściwymi znakami] kolejnych „reduktów“ ułamka łańcuchowego. Otrzymamy w ten sposób szereg coraz to mniejszych wartości na $in + i_1n_1$. Są to właśnie owe „małe dzielniki“ [czy „małe mianowniki“], które w teorii perturbacji sprawiały i sprawiają astronomom tyle kłopotu. Oczywiście jest rzeczą, że choćby nawet współczynniki A_{u_i} lub B_{u_i} były bardzo małe, to, dzięki „małemu dzielnikowi“ $in + i_1n_1$, współczynniki

$$\frac{A_{u_i}}{in + i_1n_1}, \quad \frac{B_{u_i}}{in + i_1n_1}$$

mogą mieć duże wartości, a więc odpowiednie perturbacje

$$\frac{A_{u_i}}{in + i_1n_1} \cos [(in + i_1n_1)t + D_{u_i}], \quad \frac{B_{u_i}}{in + i_1n_1} \sin [(in + i_1n_1)t + H_{u_i}].$$

mogą odgrywać ważną rolę. Peryod odpowiedniej perturbacji jest tem dłuższy, im $in + i_1n_1$ jest mniejsze, bo peryod jest odwrotnie proporcjonalny do współczynnika przy t . Tedy owe „małe dzielniki“ dają powód do „długoperyodycznych perturbacji“. Znamy

niemało przykładów perturbacji o długich peryodach, tak np. średni dzienny ruch Jowisza wynosi 299'1, a Saturna 120'5. Stąd oznaczając średni ruch Jowisza przez n , a Saturna przez n_1 mamy

$$2n - 5n_1 = -4'3.$$

W tym razie „mały dzielnik“ jest 70 razy mniejszy niż średni ruch Jowisza a 28 razy mniejszy niż średni ruch Saturna. Ponieważ zaś

$$\frac{4.3}{206265} = \frac{1}{48000} \text{ (około),}$$

więc peryod perturbacji wynosi $2\pi \times 48000$ dni, t. j. około 830 lat. Moglibyśmy przytoczyć wiele podobnych przykładów tak z teorii ruchów wielkich, jak małych planet.

Największy wpływ mają „małe dzielniki“ na długość. Wedle wzoru (52)

$$l = l_0 + nt = (l_0) + \int n dt.$$

Zatem jeżeli w n znajduje się wyraz

$$\frac{K}{in + i_1 n_1} \cos [(in + i_1 n_1)t + D_u],$$

to w l pojawia się wyraz

$$\frac{K}{(in + i_1 n_1)^2} \sin [(in + i_1 n_1)t + D_u],$$

którego współczynnik jako odwrotnie proporcjonalny do $(in + i_1 n_1)^2$ jest bardzo wielki. Np. omawiana perturbacja w ruchu Saturna może zmienić jego heliocentryczną długość o całe 50'.

Natrafiliśmy przy całkowaniu na wyrazy „wiekowe“, t. j. proporcjonalne do czasu. Jasną atoli jest rzeczą, że pojawienie się ich jest spowodowane przez przybliżoną metodę całkowania. Gdybyśmy nie założyli, że wszystkie parametry oprócz l i l_1 są stałe, to kąty D_{ii} i H_{ii} nie byłyby stałe; przeto ani wtedy, gdy $i = i_1 = 0$, ani wtedy, gdy n i n_1 są wymierne, nie mielibyśmy pod znakiem całkowania wyrazów kształtu: Cdt , tylko same *cosinusy* i *sinusy* ze skomplikowanymi funkcjami czasu w argumentach. Swoją drogą

nie moglibyśmy wprost całkować tych cosinusów i sinusów, więc musielibyśmy rozwijać je w szeregi, a wtedy otrzymalibyśmy te same wyrazy pierwszego, drugiego i t. d. rzędu, co poprzednio.

„Małe dzielniki“, o których mówiliśmy przed chwilą, mają niekorzystny wpływ za zbieżność szeregów (76). Jednakże C. V. L. Charlier¹⁾ twierdzi, że szeregi (76) są nie tylko napół zbieżne (patrz wyżej), ale zupełnie, choć nie bezwzględnie zbieżne. Wedle terminologii Weierstrassa mają to być szeregi warunkowo zbieżne [*bedingt convergent*]. To znaczy, że promień zbieżności zmniejsza się w miarę tego, jak czas wzrasta, a dla $t = \infty$ staje się zerem. Reszty podobnych szeregów wzrastają z czasem i pomiędzy szeregiem a funkcją, którą ten szereg ma wyrażać, powstaje różnica wzrastająca proporcjonalnie do czasu, a gdy chodzi o średnią długość l , to różnica wzrasta nawet proporcjonalnie do kwadratu czasu. Wskutek tego można używać owe szeregi tylko w ciągu ograniczonego czasu. W dowodzeniu Charliera widzę pewną lukę: przyjmuje on bez dowodu, że szeregi współczynników $\Sigma\Sigma A_n$ i $\Sigma\Sigma B_n$ są bezwzględnie zbieżne. Ale mniejsza o to, bo zarówno wtedy, gdy szeregi (76) są „napół zbieżne“, jak wtedy, gdy są „warunkowo zbieżne“ — możemy ich używać tylko w ciągu ograniczonego czasu.

8. Wiekowe perturbacje²⁾.

Aby otrzymać wiekowe perturbacje pierwszego rzędu, dość jest wziąć tę część rozwinięcia funkcji perturbacyjnej, która nie zależy od l i l_1 ³⁾ i podstawić ją w równania (50). Naturalnie nie otrzymamy w ten sposób wszystkich wiekowych perturbacji, bo przecie inne elementy figurujące w argumentach także przyczyniają się do wiekowych perturbacji, ale w pierwszym przybliżeniu to wystarcza. Z drugiej strony, skoro metoda nasza już z innych powodów ścisłą nie jest, to nie warto silić się na ścisłość w uwzględnieniu wszystkich możebnych wiekowych perturbacji. Z tego samego powodu zatrzymamy tylko wyrazy drugiego rzędu wzglę-

¹⁾ Mechanik des Himmels, tom II (Lipsk, 1907), rozdz. X, § 4, 5 i 6.

²⁾ W tym paragrafie trzymamy się przeważnie dzieła B. Baillaud: Cours d'Astronomie, II (Paryż, 1896).

³⁾ To znaczy, że bierzemy z rozwinięcia te wyrazy, w których przy l i l_1 stoi jako współczynnik zero.

dem mimośrodów i nachyleń a pominiemy wszystkie wyrazy wyższych rzędów. Opuszczając wywód odrazu napiszemy

$$(79) \quad [\Omega] = km_1 \left\{ \frac{1}{2} A_0 + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} aa_1 B_1 [e^2 + e_1^2 - \sin^2 i - \sin^2 i_1 + 2 \sin i \sin i_1 \cos (\varrho - \varrho_1)] - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} aa_1 B_2 e e_1 \cos (\pi - \pi_1) \right\}.$$

Wzięliśmy symbol funkcyi perturbacyjnej w nawias na znak, że to jest tylko część funkcyi perturbacyjnej ogólnej, z drugiej strony przywróciliśmy stałą przyciągania, którą opuściliśmy jeszcze na początku rozdziału. Co do stałych A_0 , B_1 i B_2 , to powiemy, że to są te same stałe, które już występowały we wzorach (64) i (65). Wypisywać ich nie mamy potrzeby, powiemy tylko, że wyrażają się one przez całki eliptyczne.

Skoro we wyrażeniu funkcyi perturbacyjnej pominęliśmy wyrazy wyższych rzędów względem e , e_1 , $\sin i$ i $\sin i_1$, to musimy pominąć je także w równaniach (50). Np. trzecie równanie (50) przywiedzie się do

$$\frac{de}{dt} = - \frac{1}{na^2e} \frac{\partial [\Omega]}{\partial \pi}.$$

Drugi wyraz odpadł zupełnie, bo wedle równania (79)

$$\frac{d[\Omega]}{dt} = 0.$$

Z drugiej strony w rozwinięciu pierwiastka $\sqrt{1 - e^2}$ pominęliśmy wszystkie dalsze potęgi, bo $\frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial \pi} [\Omega]$ jest pierwszego rzędu względem e , a więc dalsze wyrazy byłyby trzeciego, piątego i t. d. rzędu, co wszystko pomijamy. Tak samo zamiast piątego równania (50) napiszemy:

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{1}{na^2e} \frac{\partial [\Omega]}{\partial e}.$$

Podstawiamy pochodne cząstkowe funkcyi $[\Omega]$ wedle wzoru (79), ale przy tej okazji rozszerzamy nasz wywód od przypadku dwóch planet na przypadek n planet, bo oczywiście funkcyja $[\Omega]$ wyrażająca wpływy wszystkich pozostałych planet będzie prosto sumą $n - 1$ wyrazów tego samego kształtu co (79). Piszemy tedy odrazu

$$\left. \begin{aligned} \frac{de}{dt} &= -\frac{1}{4} k \left[m_1 \frac{aa_1}{na^2} B_2 e_1 \sin(\pi - \pi_1) + \dots \right] \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{1}{4} k \left[m_1 \frac{aa_1}{na^2} \left(B_1 - B_2 \frac{e_1}{e} \cos(\pi - \pi_1) \right) + \dots \right] \end{aligned} \right\} (80)$$

Kropki oznaczają podobne wyrazy dla planet $m_2, m_3 \dots$ i t. d. Naturalnie we wyrazach odnoszących się do planet $m_2, m_3 \dots$ należy wszędzie, a więc także we współczynnikach B_1 i B_2 ¹⁾, napisać $a_2, a_3 \dots$ i t. d. zamiast a_1 . Połóżmy dla krótkości

$$\left. \begin{aligned} \frac{k}{4n} \frac{aa_1}{a^2} m_1 B_1(a_1, a) &= x_{01}, & \frac{k}{4n} \frac{aa_2}{a^2} m_2 B_1(a_2, a) &= x_{02} \dots \\ \frac{k}{4n} \frac{aa_1}{a^2} m_1 B_2(a_1, a) &= \lambda_{01}, & \frac{k}{4n} \frac{aa_2}{a^2} m_2 B_2(a_2, a) &= \lambda_{02} \dots \end{aligned} \right\} (81)$$

a będziemy mogli napisać równania (80) w kształcie

$$\left. \begin{aligned} \frac{de}{dt} &= -\lambda_{01} e_1 \sin(\pi - \pi_1) - \lambda_{02} e_2 \sin(\pi - \pi_2) - \dots \\ \frac{d\pi}{dt} &= x_{02} - \lambda_{02} \frac{e_1}{e} \cos(\pi - \pi_1) + x_{02} - \lambda_{02} \frac{e_2}{e} \cos(\pi - \pi_2) + \dots \end{aligned} \right\} (80 \text{ bis})$$

Naturalnie możemy napisać analogiczne równania dla $\frac{de_1}{dt}, \frac{d\pi_1}{dt}, \frac{de_2}{dt}, \frac{d\pi_2}{dt} \dots$ i t. d. Teraz należy usunąć e z mianowników przez wprowadzenie pomocniczych wielkości h i f [por. wzory (73)], h_1, f_1 i t. d. W tym celu trzeba pomnożyć pierwsze równanie (80 bis) przez $\sin \pi$, drugie przez $e \cos \pi$ i dodać. potem pomnożyć pierwsze przez $\cos \pi$ a drugie przez $-e \sin \pi$ i znów dodać i t. d. W ten sposób po oczywistych redukcjach otrzymamy równania

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= (x_{01} + x_{02} + \dots) f - \lambda_{01} f_1 - \lambda_{02} f_2 - \dots \\ \frac{df}{dt} &= -(x_{01} + x_{02} + \dots) h + \lambda_{01} h_1 + \lambda_{02} h_2 + \dots \\ \frac{dh_1}{dt} &= (x_{10} + x_{12} + x_{13} + \dots) f_1 - \lambda_{10} f - \lambda_{12} f_2 - \dots \\ \frac{df_1}{dt} &= -(x_{10} + x_{12} + x_{13} + \dots) h_1 + \lambda_{10} h + \lambda_{12} h_2 + \dots \end{aligned} \right\} (82)$$

¹⁾ Zresztą:

$$B_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha da}{\sqrt{a^2 + a_1^2 - 2aa_1 \cos \alpha}}, \quad B_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos 2\alpha da}{\sqrt{a^2 + a_1^2 - 2aa_1 \cos \alpha}}.$$

Widzimy, że „wiekowe perturbacje“ wyraziły się przez funkcyje peryodyczne zresztą o bardzo długich peryodach, bo dla systemu słonecznego stałe k i λ są bardzo małe, wskutek czego wszystkie pierwiastki równania (85) są bardzo małe. Ale nie możemy stąd wyciągnąć żadnych daleko idących wniosków, bo podobnie jak w poprzednim paragrafie opieramy się na przybliżonych wzorach. Tam wzięliśmy inne przybliżenie i inną metodę rachunku; w rezultacie otrzymaliśmy wyrazy proporcjonalne do czasu; tu znowu wzięliśmy inne przybliżenie i inną metodę; w rezultacie otrzymaliśmy funkcyje kołowe czasu o bardzo długich peryodach.

Powiedzieliśmy wyżej, że pierwiastki równania (85) są zawsze rzeczywiste i zazwyczaj nierówne, ale swoją drogą może się zdarzyć, że równanie (85) ma jeden lub więcej pierwiastków podwójnych, potrójnych i t. d. Otóż wiadomo, że gdy chodzi o jedną zmienną zależną, określoną przez liniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu ze stałymi współczynnikami, a równanie zasadnicze (85) posiada pierwiastki równe, to w całkach muszą pojawić się wyrazy pomnożone przez t . Ale jeżeli mamy tak jak tu system n równań liniowych pierwszego rzędu ze stałymi współczynnikami, to równym pierwiastkom równania zasadniczego niekoniecznie odpowiadają wyrazy, w których czas występuje poza znaki \cos i \sin . Specyjalnie w obecnym przypadku [całki (83 bis)], jak to dowiódł jeszcze Laplace, czas nie występuje poza argumenty funkcyi kołowych.

W zastosowaniu do systemu słonecznego rozwiązanie równania algebraicznego (85) przedstawia niemałe trudności. Wszak to jest równanie ósmego stopnia, a ponieważ przedstawia się w postaci wyznacznika, więc samo wyliczenie współczynników przy kolejnych potęgach g wymagałoby niesłychanie długiego rachunku. Astronomowie ułatwili sobie zadanie w ten sposób, że oddzielnie obliczali perturbacje Marsa, Ziemi, Wenusy i Merkurego a oddzielnie Jowisza, Saturna, Uranusa i Neptuna. Jednym słowem zamiast jednego systemu rozpatrywali dwa. Dzięki specjalnej konfiguracyi systemu słonecznego ta napozór tak gruba metoda daje wcale zadowalniające wyniki. Ale istnieje o wiele doskonalsza metoda podana przez Jacobiego a polegająca na kolejnych przekształceniach wyznacznika (85), dzięki którym wyrazy stojące poza główną przekątnią wciąż zmniejszają się. Łatwo zrozumieć o co tu chodzi.

Gdyby wszystkie wyrazy stojące poza główną przekątnią były równe zero, to wyznacznik (85) przywiódłby się do iloczynu

$$(g - g_1)(g - g_2) \dots (g - g_n) = 0$$

i kolejne pierwiastki byłyby: $g_1, g_2, g_3 \dots g_n$. Jeżeli więc pozmnijemy wyrazy stojące poza główną przekątnią i jeżeli w ostatnim przekształceniu na głównej przekątnej pozostaną wyrazy:

$$g - \gamma_1, \quad g - \gamma_2 \dots \text{i t. d.},$$

to $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots$ i t. d. będą przybliżonami wartościami pierwiastków równania (85) i to tem więcej przybliżonami, im wyrazy stojące poza główną przekątnią więcej zostały zmniejszone. Naturalnie za każdym przekształceniem kierujemy rachunki tak, aby usunąć największy z pomiędzy wyrazów stojących poza główną przekątnią. Metoda Jacobiego stosuje się do wyznacznika symetrycznego, ale to nic nie szkodzi, bo trzymając się innej metody, aniżeli ta, która tu była wyłożona (por. § 9). można otrzymać równanie (85) w postaci wyznacznika symetrycznego.

Z całek (83 bis) wynikają pewne wnioski. Wedle równań (73)

$$e^2 = h^2 + f^2, \quad e_1^2 = h_1^2 + f_1^2 \dots$$

Podstawmy zamiast $h, f, h_1, f_1 \dots$ i t. d. ich wartości wzięte z równań (83 bis), a otrzymamy

$$(86) \quad e^2 = M_1^2 + M_2^2 + \dots + 2M_1M_2 \cos [(g_1 - g_2)t + (\beta_1 - \beta_2)] + \\ + 2M_1M_3 \cos [(g_1 - g_3)t + (\beta_1 - \beta_3)] + \dots$$

Oczywiście prawa strona tego równania osiągnęłaby największą wartość wtedy, gdyby wszystkie cosinusy miały jednocześnie wartości $+1$ lub -1 tak dobrane, aby wszystkie podwójne iloczyny były dodatnie. Jeżeli więc oznaczymy przez $|M_1|, |M_2| \dots$ i t. d. absolutne wartości współczynników $M_1, M_2 \dots$ i t. d., to wolno będzie napisać

$$e^2 < [|M_1| + |M_2| + \dots + |M_n|]^2,$$

t. j.

$$(87) \quad e < |M_1| + |M_2| + \dots + |M_n|.$$

To znaczy, że możemy wyznaczyć górną granicę, której mimośród przekroczyć nie może. Oto owe granice wedle Stockwella:

dla Merkurego	$e < 0,2317\ 185$
„ Wenerzy	0,0706 329
„ Ziemi	0,0677 352
„ Marsa	0,1396 547
„ Jowisza	0,0608 274
„ Saturna	0,0843 289
„ Uranusa	0,0779 652
„ Neptuna	0,0145 066

Nierówność (87) jest jedną z tych, na których opiera się twierdzenie o stałości naszego systemu słonecznego, ale wynika ona z nieścisłej teorii, więc, jak to było kilkakrotnie podnoszone, doniosłość jej jest ograniczona. Następnie na mocy tychże samych wzorów (83) i (83 bis)

$$e \sin \pi = M_1 \sin (g_1 t + \beta_1) + M_2 \sin (g_2 t + \beta_2) + \dots$$

$$e \cos \pi = M_1 \cos (g_1 t + \beta_1) + M_2 \cos (g_2 t + \beta_2) + \dots$$

Otóż może się zdarzyć i zdarza się często, że absolutna wartość jednego ze współczynników, np. współczynnika M_1 jest większa od sumy absolutnych wartości wszystkich pozostałych współczynników. Pomnóżmy pierwsze równanie przez $\sin (g_1 t + \beta_1)$, a drugie przez $\cos (g_1 t + \beta_1)$ i dodajmy je do siebie. Otrzymamy

$$e \cos (\pi - g_1 t - \beta_1) = M_1 + M_2 \cos [(g_2 - g_1) t + \beta_2 - \beta_1] + \dots \quad (88)$$

Ponieważ wedle założenia absolutna wartość M_1 jest większa niż suma absolutnych wartości wszystkich pozostałych współczynników, więc $\cos (\pi - g_1 t - \beta_1)$ ma stale ten sam znak co M_1 . Stąd zaś wynika, że $\pi - g_1 t - \beta_1$ jest wciąż zawarte w granicach $+90^\circ$ i -90° , jeżeli $M_1 > 0$, zaś w granicach 90° i 270° , jeżeli $M_1 < 0$. Innemi słowy w pierwszym razie kąt π chwieje się około argumentu $g_1 t + \beta_1$ (przypominamy, że β_1 jest stałe) to w jedną, to w drugą stronę, ale nie może ani go wyprzedzić więcej jak o 90° , ani też pozostać za nim w tyle więcej jak o 90° . W drugim razie ($M_1 < 0$) kąt π chwieje się tak samo naokoło kąta $g_1 t + \beta_1 + 180^\circ$. Mówimy wtedy, że π (długość perihelium) ma „średni ruch“ g_1 , bo rzeczywiście w ciągu długiego czasu π wzrasta średnio o $g_1 t$. Wedle Stockwella perihelium Merkurego ma średni ruch roczny $5,463803^1$)

¹⁾ Mojem zdaniem tak tu, jak w poprzedniej tabliczce odnoszącej się do granicy mimośrodów, Stockwell pisze za wiele dziesiątych.

t. j. wykonuje jeden całkowity obieg w 237197 lat. Perihelium Marsa ma średni ruch $17''784456$, Jowisza $3''716607$, Saturna $22''460848$, Uranusa $3''716607$ ¹⁾, Neptuna $0''616685$. Ani u ziemi, ani u Wenerzy żadne M [raczej jego absolutna wartość] nie jest większe od sumy absolutnych wartości pozostałych współczynników. Wskutek tego nie możemy tą drogą zbadać, czy perihelia orbit tych dwóch planet mają średnie ruchy, czy nie; podejrzujemy jednak, że także posiadają średni ruch, tylko odbiegają od średniej wartości więcej niż o 90° w jedną i drugą stronę.

W tych razach, w których jeden ze współczynników M ma absolutną wartość większą niż suma absolutnych wartości pozostałych współczynników, można też określić dolną granicę mimośrodów. Ze wzoru (88) zaraz widać, że e nie może być w żadnym razie mniejsze od różnicy między absolutną wartością największego współczynnika a sumą absolutnych wartości pozostałych. Zatem jeżeli tym największym współczynnikiem jest np. M_r , to dolna granica mimośrodów określa się przez wzór:

$$(89) \quad e > |M_r| - \sum |M_i|.$$

Z tej nierówności Stockwell określił następujące dolne granice mimośrów:

dla Merkurego . . .	0,1214 943
„ Marsa	0,0184 753
„ Jowisza	0,0254 928
„ Saturna	0,0123 719
„ Uranusa	0,0117 576
„ Neptuna	0,0055 712

Co do Ziemi i Wenerzy, to dolną granicą ich mimośrów jest zero.

W zupełnie taki sam sposób można traktować wiekowe nierówności nachylenia i długości węzła. Podobnie jak we wzorach (74) kładziemy

$$p = \sin i \sin \Omega, \quad q = \sin i \cos \Omega,$$

¹⁾ Zwracamy uwagę na to, że średnie ruchy periheliów Uranusa i Jowisza są jednakowe.

Stockwella górne granice nachyleń do „płaszczyzny niezmiennnej“ są:

dla Merkurego	$i < 9^{\circ} 10' 41''$
„ Wenerzy	3 16 18
„ Ziemi	3 6 0
„ Marsa	5 56 2
„ Jowisza	0 28 56
„ Saturna	1 0 39
„ Uranusa	1 7 10
„ Neptuna	0 47 21

Znów rozumując tak samo, jak wprzód o długościach periheliów, znajdziemy, że węzły mają następujące średnie wsteczne¹⁾ ruchy na „płaszczyźnie niezmiennnej“. (Liczby wedle Stockwella)

Węzeł Merkurego ma średni ruch roczny ²⁾	— 5,126112
Węzły Jowisza i Saturna mają śr. ruch ³⁾	— 25,934567
Węzeł Uranusa	— 2,916082
„ Neptuna	— 0,661666

Co do węzłów orbit Wenerzy, Ziemi i Marsa, to nie możemy powiedzieć nic określonego, bo ani jeden ze współczynników M nie przewyższa sumy pozostałych. [Mówimy naturalnie o absolutnych wartościach współczynników].

Ale powróćmy do tych planet, u których jeden ze współczynników czyni zadość powyższemu warunkowi; możemy wtedy oznaczyć także dolną granicę nachylenia do „niezmiennnej płaszczyzny“ tym samym sposobem, którym oznaczyliśmy poprzednio minimum mimośrodu. Oto liczby Stockwella

dolna granica i dla Merkurego	$4^{\circ} 44' 27''$
„ „ „ „ Jowisza	0 14 23
„ „ „ „ Saturna	0 47 16
„ „ „ „ Uranusa	0 54 25
„ „ „ „ Neptuna	0 33 43

¹⁾ Dlatego to w następującej tabliczce wszystkie ruchy średnie mają znak —.

²⁾ Znowu musimy powiedzieć, że Stockwell pisze za dużo dziesiętnych.

³⁾ Zwracamy uwagę na identyczność ruchu węzłów tych dwóch planet. Jest to już drugi przykład „libracji“ odkryty przez Stockwella. Pierwszym była identyczność śr. ruchów periheliów Jowisza i Uranusa.

Co do Wenusy, Ziemi i Marsa, to ze względu na to, że prawa strona równania analogicznego do (89) jest odjemna, dolna granica nachylenia jest zerem.

Te ograniczenia nachylenia również należą do szeregu nierówności, na których opiera się twierdzenie o stałości systemu słonecznego. Aby z niem skończyć, przypomnimy jeszcze jedno równanie, o którym już była wyżej mowa. Ponieważ $[\Omega]$ wcale nie zależy od długości, więc wedle pierwszego równania (50)

$$\frac{da}{dt} = 0. \quad (91)$$

To znaczy, że wielkie osie orbit wcale nie podlegają „wielokowym“ zmianom. Równanie (91) jest ostatniem z równań i nierówności, z których składa się twierdzenie o stałości systemu słonecznego. Co myśleć o tem twierdzeniu, już wiemy, więc nie potrzebujemy powtarzać różnych zastrzeżeń i ograniczeń.

Chcąc otrzymać $\left(\frac{dl}{dt}\right)$ trzeba podstawić $[\Omega]$ w ostatnie równanie (50), albo raczej w równanie (50, VI bis). Po podstawieniu $[\Omega]$ ze wzoru (79), zaniedbując wyrazy czwartego i wyższych rzędów, otrzymamy rezultat kształtu

$$\left(\frac{dl}{dt}\right) = A + Be^2 + Ce_1^2 + Dee_1 \cos(\pi - \pi_1) + E \sin^2 i + F \sin^2 i_1 + G \sin i \sin i_1 \cos(\Omega - \Omega_1).$$

Podstawimy tu e^2 ze wzoru (86), zaś e_1^2 ze wzoru, który łatwo napisać na podobieństwo wzoru (86), następnie podstawimy $ee_1 \cos(\pi - \pi_1)$ ze wzoru

$$ee_1 \cos(\pi - \pi_1) = hh_1 + ff_1 = M_1 M_{11} + M_2 M_{12} + \dots + (M_2 M_{11} + M_1 M_{12}) \cos[(g_2 - g_1)t + (\beta_2 - \beta_1)] + \dots$$

W podobny sposób wyrazimy też $\sin^2 i$, $\sin^2 i_1$ i t. d. ..., przez co ostatecznie otrzymamy wyrażenie kształtu:

$$\left(\frac{dl}{dt}\right) = H + \Sigma J \cos(rt + \varrho).$$

Po scałkowaniu otrzymamy stąd:

$$(l) = \text{const.} + Ht + \Sigma \frac{J}{r} \sin(rt + \varrho). \quad (92)$$

Podstawiając to we wzór na średnią długość otrzymamy w dalszym ciągu:

$$l = (l) + \int n dt = (l) + nt = \text{const.} + (n + H)t + \Sigma \frac{J}{r} \sin(rt + \varrho).$$

Widzimy stąd, że średni ruch, który otrzymujemy z obserwacji, jest $(n + H)$, a więc nieco różny od tego średniego ruchu

$$n = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{3/2}},$$

który wynika z definicji przyjętej w ruchu Keplerowskim. Nie w tem dziwnego, wszak stosując wzory Keplerowskie do planet dopuszczamy się ekstrapolacji, wszak przenosimy wzory teorii ruchu dwóch ciał do teorii ruchu n ciał.

9. Równania i zmienne kanoniczne.

Posługiwaliśmy się dotychczas klasycznym aparatem teorii perturbacji: elementami eliptycznymi. Trudno pominąć go w podręczniku, bo starsze dzieła, tablice, schematy rachunku i t. d. są po większej części doń przystosowane; następnie trudno go pominąć także dlatego, że metoda wariacji elementów eliptycznych stoi w najbliższym związku z teorią ruchu Keplerowskiego; ale w badaniach teoretycznych o wiele dogodniejszemi są metody posługujące się zmiennymi kanonicznymi. Aby wyjaśnić co to są zmienne „kanoniczne“, pójdziemy drogą wskazaną przez H. Poincaré'go w jego „Leçons de mécanique céleste“ [tom I, Paryż, 1905 r.], bo wydaje się nam najłatwiejszą. Weźmy zwyczajne równania ruchu n punktów materialnych i załóżmy, że istnieje potencjał sił, albowiem przypadek ogólniejszy, gdy siły nie posiadają potencjału, nie przedstawia dla nas żadnego interesu. Podobnie jak Poincaré oznaczmy współrzędne pierwszego punktu materialnego przez x_1, x_2, x_3 drugiego przez $x_4, x_5, x_6 \dots$ i t. d., następnie oznaczmy masę pierwszego punktu przez m_1, m_2, m_3 , drugiego przez $m_4, m_5, m_6 \dots$ i t. d. Trzeba tylko zapamiętać, że $m_1 = m_2 = m_3 = m_1, m_4 = m_5 = m_6 = m_2$ i t. d. oraz że chcąc przejść do zwykłego znakowania należy położyć: $x_1 = x_1, x_2 = y_1, x_3 = z_1, x_4 = x_2, x_5 = y_2, x_6 = z_2 \dots$ i t. d.

W tem nowem znakowaniu energia cynetyczna systemu, którą oznaczamy przez T , wyraża się przez równanie:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2.$$

Energię potencjalną systemu oznaczamy przez U . Energia ta równa się poprostu potencyałowi sił wziętemu z przeciwnym znakiem. Energia całkowita systemu, którą oznaczamy przez F , będzie

$$F = T + U,$$

zaś równania ruchu będą:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = - \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad [i = 1, 2 \dots 3n]. \quad (93)$$

Dotychczas, oprócz znakowania, nie wprowadziliśmy nic nowego, ale teraz wprowadzimy momenty ilości ruchu

$$y_i = m_i \frac{dx_i}{dt},$$

więc np. y_1, y_2, y_3 będą to momenty ruchu pierwszego punktu masy w trzech głównych kierunkach. Wprowadzając momenty ruchu możemy napisać

$$T = \frac{1}{2} \sum \frac{y_i^2}{m_i}$$

oraz

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{y_i}{m_i} = \frac{\partial T}{\partial y_i}. \quad (94)$$

Z drugiej strony można teraz napisać równania (93) w postaci

$$\frac{dy_i}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial x_i}. \quad (93 \text{ bis})$$

Ponieważ T nie zależy od x -ów a U nie zależy od y -ów, więc

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial y_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i}$$

i można napisać równania (94) i (93 bis) w postaci

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial x_i}. \quad (95)$$

Równania (95) to równania kanoniczne Hamiltona. Widzimy, że kształt ich jest bardzo prosty: zawierają one tylko pierwsze pochodne względem czasu, ale zato liczba ich jest dwa razy większa niż liczba zwykłych równań dynamiki.

W tym przypadku „współrzędnymi kanonicznymi“ x i y , były zwykle prostokątne współrzędne oraz momenty ruchu, ale możemy zamiast nich wprowadzić nowe współrzędne prosto czy krzywoliniowe, a pomimo tego utrzymać „kanoniczny“ kształt równań. Oznaczmy nowe współrzędne przez q_1, q_2, \dots, q_n oraz p_1, p_2, \dots, p_n . Podczas gdy q_1, q_2, \dots i t. d. odgrywają tę samą rolę co x_1, x_2, \dots i t. d., p_1, p_2, \dots, p_n odgrywają rolę y_1, y_2, \dots i t. d. Jeżeli tylko

$$(96) \quad \Sigma q dp - \Sigma x dy = dS,$$

gdzie dS oznacza różniczkę zupełną, to nowe równania ruchu będą też „kanonicznymi“, mianowicie będą miały kształt

$$(95 \text{ bis}) \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}.$$

Współrzędne p i q czyniące zadość warunkowi (96) noszą nazwę „kanonicznych“. W teorii księżycy spotkamy się ze współrzędnymi Jacobiego, które też należą do „kanonicznych“; zatem nie potrzebujemy podawać przykładu. Natomiast poświęcimy kilka słów uzasadnieniu warunku (96).

Można napisać równania „kanoniczne“ (95) w innym kształcie. Wyobraźmy sobie, żeśmy scałkowali równania (95). Wtedy x i y wyrażą się przez czas t i przez $6n$ stałych $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{6n}$. Napiszmy identyczne równania

$$(97) \quad \frac{d}{dt} \Sigma x \frac{dy}{\partial \alpha_k} - \frac{d}{d\alpha_k} \Sigma x \frac{dy}{dt} = \Sigma \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{\partial \alpha_k} - \Sigma \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dx}{\partial \alpha_k}.$$

gdzie α_k oznacza którąkolwiek ze stałych $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{6n}$. Zresztą

$$(98) \quad \frac{dF}{d\alpha_k} = \Sigma \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha_k} + \Sigma \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{\partial \alpha_k}.$$

Na mocy równań (95) prawe strony równań (97) i (98) są między sobą równe, mamy tedy

$$(99) \quad \frac{d}{dt} \Sigma x \frac{dy}{\partial \alpha_k} - \frac{d}{d\alpha_k} \Sigma x \frac{dy}{dt} = \frac{dF}{d\alpha_k}.$$

Ponieważ dla każdego α_k można napisać podobne równanie, więc ogółem można napisać $6n$ takich równań jak (99). — Wyprowadziliśmy równania (99) z równań (97) i (98), ale odwrotnie, jeżeli dane są równania (99), to prawe strony równań (97) muszą być równe prawym stronom równań (98); można więc napisać $6n$ równań kształtu

$$\Sigma \left(\frac{dx}{dt} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha_k} - \Sigma \left(\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial \alpha_k} = 0,$$

liniowych względem niewiadomych:

$$\frac{dx}{dt} - \frac{\partial F}{\partial y}, \quad - \left(\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x} \right).$$

Wyznacznik tych $6n$ liniowych równań to wyznacznik funkcyjny x -ów i y -ów względem parametrów α_k . Wyznacznik ten nie może być równy zeru, bo pomiędzy pochodnymi x -ów i y -ów względem α nie powinien zachodzić żaden stały związek. Stąd wynika, że same niewiadome w liczbie $6n$ muszą być równe zeru. Ale skoro przyrównamy je do zer, to otrzymamy właśnie równania (95). W ten sposób okazaliśmy, że równania (99) są równoważne równaniom (95).

Założmy teraz, że wzięliśmy nowe zmienne, np. q i p i że związki pomiędzy temi nowemi zmiennemi a dawnemi są tego rodzaju, iż warunek (96), t. j. warunek, aby

$$\Sigma q dp - \Sigma x dy = dS$$

było różniczką zupełną, jest spełniony. Skoro tak jest, to będzie spełnione równanie

$$\Sigma q \frac{dp}{dt} - \Sigma x \frac{dy}{dt} = \frac{dS}{dt}$$

a jednocześnie spełnionemi będą równania

$$\Sigma q \frac{dp}{d\alpha_k} - \Sigma x \frac{dy}{d\alpha_k} = \frac{dS}{d\alpha_k}.$$

Z równań tych wynikają tożsamości

$$\frac{d}{dt} \Sigma x \frac{dy}{d\alpha_k} - \frac{d}{d\alpha_k} \Sigma x \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \Sigma q \frac{dp}{d\alpha_k} - \frac{d}{d\alpha_k} \Sigma q \frac{dp}{dt}. \quad (100)$$

Ale z równań (95) wynikają, jak wiemy, równania (99), z tych znowu na mocy tożsamości (100) otrzymamy równania

$$(99 \text{ bis}) \quad \frac{d}{dt} \sum q \frac{dp}{da_i} - \frac{d}{da_i} \sum q \frac{dp}{dt} = \frac{\partial F}{\partial a_i},$$

różniące się od równań (99) tylko tem, że zamiast dawnych zmiennych x i y zawierają nowe zmienne q i p . Zatem podobnie jak z równań (99) można otrzymać równania (95) — tak samo z równań (99 bis) można otrzymać analogiczne do (95) równania (95 bis), t. j. równania „kanoniczne“ w nowych zmiennych:

$$(101) \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial q_i}.$$

Literatura.

S. Newcomb: General integrals of planetary motion. Smithsonian Contributions to Knowledge. Nr. 281. Washington, 1874.

N. Herz: Mechanik des Himmels. Valentinera: Handwörterbuch der Astronomie, tom II, Wrocław, 1898.

H. Poincaré: Leçons de mécanique céleste, tom I, Paryż, 1905.

— Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, tom I, Paryż, 1892 i II, Paryż, 1893.

C. V. L. Charlier: Mechanik des Himmels, dwa tomy, Lipsk, 1902 i 1907¹⁾.

B. Baillaud: Cours d'Astronomie, tom II, Paryż, 1896.

U. J. Le Verrier: Recherches astronomiques. Annales de l'Observatoire de Paris, tomy I i II.

F. Tisserand: Mémoire sur le développement de la fonction perturbatrice... Annales de l'Observatoire de Paris, tomy XV i XVIII.

J. N. Stockwell: Memoir on the secular Variations of the orbits of the eight principal planets. Smithsonian Contributions to Knowledge, tom XVIII (1873).

H. v. Zeipel: Entwicklung der Störungsfunktion. Encyklopedya nauk matematycznych, tom VI, 2, str. 557—666²⁾, Lipsk, bez daty (1912).

¹⁾ Z dzieła Charlier'a należy korzystać ostrożnie, zawiera bowiem liczne błędy i niedokładności.

²⁾ Zeipel przytacza obszerną literaturę.

ROZDZIAŁ XX.

Perturbacje specjalne.

1. Całkowanie mechaniczne.

Teorię „perturbacji ogólnych“ traktowaliśmy nieco pobieżnie, bo po pierwsze jest to temat tak obszerny, że chcąc go wyczerpać, musielibyśmy poświęcić mu cały oddzielny tom, po drugie sądzimy, że to gałąź mechaniki niebieskiej skazana na uschnięcie. Samo rozwinięcie funkcji perturbacyjnej, osobliwie gdy mimośrod i nachylenia nie są małe, wymaga ogromnej pracy. Nie żałowalibyśmy jej, gdyby w końcu można było osiągnąć doniosłe rezultaty. Tymczasem z powodu rozbieżności szeregów, przez które wyrażają się elementy eliptyczne lub równoważne im zmienne¹⁾, żadnych ogólnych wniosków postawić nie możemy. Pozostaje więc cel praktyczny: przepowiadanie pozycji planet i komet w ciągu krótszego lub dłuższego czasu. Otóż tu znowu okazuje się, że warto stosować teorię perturbacji tylko wtedy, gdy chodzi o przepowiednie na kilkadziesiąt lub kilkaset lat naprzód; gdy chodzi o krótsze okresy czasu: kilka lub kilkanaście lat, to pospolicie dogodniej jest posługiwać się łatwiejszymi i krótszych rachunków wymagającymi metodami. Do omówienia tych łatwiejszych metod, służących do obliczenia „perturbacji specjalnych“, przystąpimy obecnie. Tłumaczyć nazwy nie będziemy, bo ze samego wykładu okaże się, o co tu właściwie chodzi.

Przy obliczeniu „perturbacji specjalnych“ (szczególnych) posługujemy się ustawicznie metodą „całkowania mechanicznego“. Pod tą nazwą rozumiemy wyznaczenie liczbowej wartości całek bez analitycznego całkowania. Rzecz prosta, że „mechaniczne cał-

¹⁾ Przypominamy, że twierdzenie Poincarégo o rozbieżności szeregów nie dotyczy rozwinięcia samej funkcji perturbacyjnej w szereg.

„kowanie“ jest jedyną możebną metodą w razie, gdy mając dane liczbowe wartości całkowanej funkcji nie znamy jej analitycznego kształtu. Zdarza się jednak, że nawet wtedy, gdy analityczne wyrażenie całkowanej funkcji jest znane, ale analityczne całkowanie wymaga nazbyt długich rachunków, dogodniej jest całkować mechanicznie.

Niektóre metody „całkowania mechanicznego“ są dogodniejsze w tych przypadkach, w których odstęp między argumentami odpowiadającymi danym wartościom całkowanej funkcji są niejednakowe, inne znowu są dogodniejsze wtedy, gdy odstęp między argumentami są równe. Najpierw powiemy kilka słów o metodach nadających się w tym razie, gdy odstęp pomiędzy argumentami zmiennej niezależnej są nierówne. Oznaczmy zmienną niezależną przez t a funkcję podlegającą całkowaniu przez $f(t)$. Jeżeli, co w dalszym ciągu wciąż będziemy przypuszczać, $f(t)$ jest w całym interesującym nas obszarze funkcją rozwijalną w szereg potęgowy t o tyle szybko zbieżny, że urywając go na n -tym wyrazie otrzymamy dostatecznie dokładne przybliżenie; to możemy zamiast funkcji $f(t)$ napisać szereg o n wyrazach

$$(1) \quad a + bt + ct^2 + \dots + ht^{n-1}$$

a jako wyrażenie całki:

$$\int_{t_1}^{t_n} f(t) dt$$

możemy przyjąć skończony szereg:

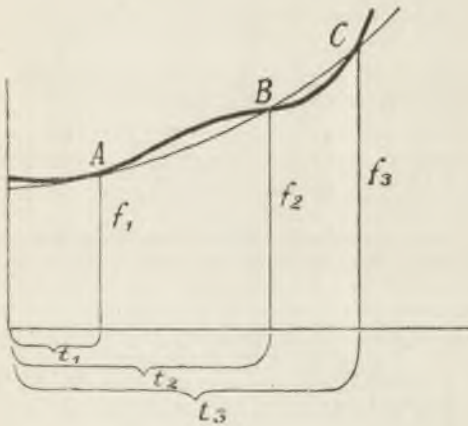
$$(2) \quad a(t_n - t_1) + \frac{b}{2}(t_n^2 - t_1^2) + \dots + \frac{h}{n}(t_n^n - t_1^n).$$

Współczynniki a, b, c, \dots, h są tymczasem nieznaczone, ale możemy je określić z n równań

$$(3) \quad \begin{cases} a + bt_1 + ct_1^2 + \dots + ht_1^{n-1} = f_1 \\ a + bt_2 + ct_2^2 + \dots + ht_2^{n-1} = f_2 \\ \dots \\ a + bt_n + ct_n^2 + \dots + ht_n^{n-1} = f_n \end{cases}$$

W równaniach tych f_1, f_2, \dots, f_n oznaczają liczbowe wartości funkcji $f(t)$, odpowiadające argumentom t_1, t_2, \dots, t_n . W tych przypadkach, w których $f(t)$ jest funkcją parzystą, albo nieparzystą, trzeba naturalnie nieco zmodyfikować powyższe szeregi i równania, ale to rzecz tak łatwa, że pozostawiamy ją czytelnikowi.

Często zdarza się, że pomimo tego, iż posiadamy n wartości funkcji $f(t)$ danych przez obserwację, to jednakże chcąc, o ile można, wyrugować błędy obserwacji określamy nie n współczynników a, b, c, \dots i t. d., ale mniejszą ilość, np. m (przyczem $m < n$) i traktujemy równania (3) metodą najmniejszych kwadratów. Wtedy naturalnie szeregi (1) i (2) będą składać się też tylko z m wyrazów. Zresztą metoda nie ulegnie żadnej radykalnej zmianie¹⁾.



Ryc. 34.

Jeżeli wyznaczamy n współczynników: a, b, c, \dots z równań (3), to wtedy parabola $n-1$ stopnia, której równanie jest

$$y = a + bt + ct^2 + \dots + ht^{n-1}$$

ma n punktów wspólnych z krzywą $f(t)$. Jeżeli te punkty są odpowiednio rozłożone, to oczywiście szereg (1) może wcale dobrze przedstawiać krzywą $f(t)$ w odstępnie od $t = t_1$ do $t = t_n$ (ale nie poza temi granicami!). Np. na załączonym rysunku (ryc. 34) całkę

$$\int_{t_1}^{t_n} f(t) dt$$

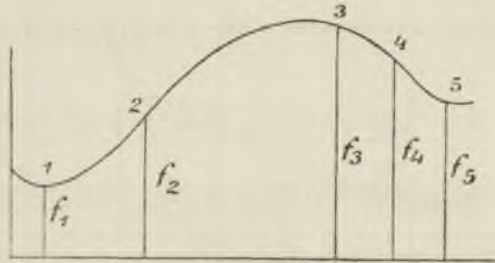
¹⁾ Tylko znaczenie rezultatów będzie trochę odmienne.

przedstawia pole ograniczone kawałkiem krzywej ABC [gruba linia], osią odciętych i rzędnymi w A i C , zaś funkcję

$$a(t_3 - t_1) + \frac{b}{2}(t_3^2 - t_1^2) + \frac{c}{3}(t_3^3 - t_1^3)$$

przedstawia pole ograniczone parabolą ABC (cienka linia) i tymi samymi odcinkami prostych, co poprzednio. Drugie pole różni się nieco od pierwszego, ale zależnie od natury krzywej $f(t)$, od rozkładu, wreszcie od ilości punktów wspólnych krzywej $f(t)$ i paraboli różnica może być mniejsza, lub większa.

Ponieważ rozwiązanie równań (3) względem współczynników a, b, c, \dots i t. d. jest tem łatwiejsze, im mniej wyrazów zawiera



Ryc. 35.

szereg (1), więc dogodnie jest stosować powyższą metodę w następujący sposób. Załóżmy, że 1, 2, 3... i t. d. są to te punkty krzywej $f(t)$, dla których znamy odpowiednie rzędne: $f_1, f_2, f_3 \dots$; przez punkty 1, 2 i 3 przeprowadzamy parabolę drugiego stopnia:

$$a_1 + b_1 t + c_1 t^2;$$

przez punkty 3, 4 i 5 przeprowadzamy drugą parabolę drugiego stopnia:

$$a_2 + b_2 t + c_2 t^2;$$

przez punkty 5, 6 i 7 przeprowadzamy trzecią parabolę także drugiego stopnia i t. d. Następnie obliczamy pola

$$a_1(t_3 - t_1) + \frac{b_1}{2}(t_3^2 - t_1^2) + \frac{c_1}{3}(t_3^3 - t_1^3)$$

$$a_2(t_5 - t_3) + \frac{b_2}{2}(t_5^2 - t_3^2) + \frac{c_2}{3}(t_5^3 - t_3^3)$$

.....

Suma tych pól będzie przybliżenie równa polu przedstawionemu przez całkę

$$\int_{t_1}^{t_n} f(t) dt.$$

Tak łatwo jest napisać równania odpowiadające równaniom (3), że pozostawiamy to, — zarówno jak inne szczegóły, — czytelnikowi.

Przechodzimy teraz do przypadku, w którym odstęp pomiędzy argumentami t_1, t_2, \dots, t_n są równe między sobą. Wtedy najdogodniej jest użyć wzorów „różnicowych“.

2. Wzory różnicowe¹⁾.

Oznaczamy stały odstęp między kolejnymi wartościami argumentu, dla których wartość funkcji jest wiadoma, przez ω , następnie oznaczamy tę wartość argumentu, od której poczynamy liczyć równe odstępny, przez a i odpowiednio do tego piszemy

$$f(t) = f(a + n\omega).$$

Gdy n przybiera wartości 1, 2, 3... i t. d., to otrzymujemy po kolei te wartości argumentu $t = a + \omega, t = a + 2\omega \dots$ i t. d., dla których wartość funkcji f jest znana, ale oprócz tego n może w sposób ciągły przybierać wszelkie inne wartości; — jednym słowem, — n jest nową zmienną. Tedy

$$dt = \omega dn,$$

$$\int f(t) dt = \omega \int f(a + n\omega) dn.$$

Rozwijając $f(a + n\omega)$ w szereg Taylora otrzymamy

$$f(a + n\omega) = f(a) + \frac{n\omega}{1} \frac{df(a)}{da} + \frac{n^2\omega^2}{1.2} \frac{d^2f(a)}{da^2} + \dots$$

Całkując to równanie względem n otrzymamy

$$\int_{n_1}^{n_2} f(a + n\omega) dn = \frac{(n_2 - n_1)}{1} f(a) + \frac{n_2^2 - n_1^2}{1.2} \omega \frac{df(a)}{da} + \frac{(n_2^3 - n_1^3)}{1.2.3} \omega^2 \frac{d^2f(a)}{da^2} + \dots \quad (4)$$

¹⁾ Niniejszy paragraf jest prawie cały z małemi zmianami napisany wedle Watsona.

Ponieważ pospolicie nie znamy kształtu funkcji f i wskutek tego nie możemy utworzyć pochodnych, więc wprowadzamy „różnice”. Bierzymy wzory (8) rozdziału II-go. Zakładając, że argumentowi $t = a$ odpowiada w tablicy A (§ 2 rozdz. II-go) wiersz 0-ty, napiszemy

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega \frac{df(a)}{da} &= \Delta_0^I - \frac{1}{6} \Delta_0^{III} + \frac{1}{30} \Delta_0^V - \frac{1}{140} \Delta_0^{VII} + \dots \\ \omega^2 \frac{d^2f(a)}{da^2} &= \Delta_0^{II} - \frac{1}{12} \Delta_0^{IV} + \frac{1}{90} \Delta_0^{VI} - \frac{1}{560} \Delta_0^{VIII} + \dots \\ \omega^3 \frac{d^3f(a)}{da^3} &= \Delta_0^{III} - \frac{1}{4} \Delta_0^V + \frac{7}{120} \Delta_0^{VII} - \dots \\ \omega^4 \frac{d^4f(a)}{da^4} &= \Delta_0^{IV} - \frac{1}{6} \Delta_0^{VI} + \frac{7}{240} \Delta_0^{VIII} - \dots \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

Przypominamy, że $\Delta_0^I, \Delta_0^{III}$ i wogóle Δ nieparzystego rzędu oznaczają nie różnice, a średnie arytmetyczne różnic, mianowicie

$$(6) \quad \Delta_0^I = \frac{1}{2} (\Delta_{i_2}^I + \Delta_{-i_2}^I), \quad \Delta_0^{III} = \frac{1}{2} (\Delta_{i_2}^{III} + \Delta_{-i_2}^{III}) \dots \text{ i t. d.}$$

Gdy podstawimy wyrażenia na pochodne ze wzorów (5) we wzór (4), to ten ostatni przybierze kształt następujący:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{n_1}^{n_2} f(a + n\omega) dn &= (n_2 - n_1) f(a) + \\ &+ \frac{(n_2^2 - n_1^2)}{2} \left[\Delta_0^I - \frac{1}{6} \Delta_0^{III} + \frac{1}{30} \Delta_0^V - \frac{1}{140} \Delta_0^{VII} + \dots \right] \\ &+ \frac{(n_2^3 - n_1^3)}{6} \left[\Delta_0^{II} - \frac{1}{12} \Delta_0^{IV} + \frac{1}{90} \Delta_0^{VI} - \frac{1}{560} \Delta_0^{VIII} + \dots \right] \\ &+ \frac{(n_2^4 - n_1^4)}{24} \left[\Delta_0^{III} - \frac{1}{4} \Delta_0^V + \frac{7}{120} \Delta_0^{VII} - \dots \right] \\ &+ \frac{(n_2^5 - n_1^5)}{120} \left[\Delta_0^{IV} - \frac{1}{6} \Delta_0^{VI} + \frac{7}{240} \Delta_0^{VIII} - \dots \right] \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

Możemy znacznie uprościć wzór (7), jeżeli weźmiemy granice $+n_2 = -n_1$, wtedy bowiem znikną zupełnie te wyrazy, w których n występuje w potęgach parzystych. Zresztą należy wziąć

wedle możności ciasne granice, bo im n jest mniejsze, tem więcej szans, żeby szereg (4) był szybko zbieżnym. Ponieważ jednak granice całkowania muszą obejmować przynajmniej jeden odstęp ω , więc położymy $n_2 = \frac{1}{2}$ i otrzymamy

$$\int_{-1/2}^{+1/2} f(a+n\omega) dn = f(a) + \frac{1}{24} \left[\Delta_0^{II} - \frac{1}{12} \Delta_0^{IV} + \frac{1}{90} \Delta_0^{VI} - \frac{1}{560} \Delta_0^{VIII} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{1920} \left[\Delta_0^{IV} - \frac{1}{6} \Delta_0^{VI} + \frac{7}{240} \Delta_0^{VIII} - \dots \right] \right.$$

Ściągając jednakowe wyrazy i porządkując otrzymamy stąd wzór:

$$\int_{-1/2}^{+1/2} f(a+n\omega) dn = f(a) + \\ + \frac{1}{24} \Delta_0^{II} - \frac{17}{5760} \Delta_0^{IV} + \frac{367}{967680} \Delta_0^{VI} - \frac{27859}{464486400} \Delta_0^{VIII} + \dots \quad (8)$$

Granice całki (8) obejmują tylko jeden odstęp ω , ale to nie nie szkodzi, bo można utworzyć takie same całki dla dalszych odstępów zawartych między $n = \frac{1}{2}$ i $n = \frac{3}{2}$, $n = \frac{3}{2}$ i $n = \frac{5}{2}$ i t. d... Oczywiście w tych następnych całkach będą figurować argumenty $a + \omega$, $a + 2\omega$ i t. d. oraz różnice stojące we wierszach: 1-szym, 2-gim, 3-cim i t. d. tablicy (A) [rozd. II-gi, § 2]. Wogóle rozumiejąc pod i liczbę całą będziemy mieli

$$\int_{i-1/2}^{i+1/2} f(a+n\omega) dn = f(a+i\omega) + \frac{1}{24} \Delta_i^{II} - \frac{17}{5760} \Delta_i^{IV} + \dots$$

Sumując wszystkie tym sposobem otrzymane równania aż do — powiedzmy — $n = k$, przyczem k jest liczbą całą, otrzymamy nareszcie wzór:

$$\int_{-1/2}^{k+1/2} f(a+n\omega) dn = \\ = \sum_0^k f(a+n\omega) + \frac{1}{24} \sum_0^k \Delta_i^{II} - \frac{17}{5760} \sum_0^k \Delta_i^{IV} + \frac{367}{967680} \sum_0^k \Delta_i^{VI} - \dots$$

Porównawszy ten wzór z tablicą (A) [rozdz. II-gi, § 2] zaraz spostrzeżemy, że można tu wprowadzić pewne uproszczenia, mianowicie

$$(9) \quad \sum_0^k \Delta_i^{\text{II}} = \Delta_{k+\frac{1}{2}}^{\text{I}} - \Delta_{-\frac{1}{2}}^{\text{I}}, \quad \sum_0^k \Delta_i^{\text{IV}} = \Delta_{k+\frac{1}{2}}^{\text{III}} - \Delta_{-\frac{1}{2}}^{\text{III}} \dots \text{ i t. d.}$$

Dla symetrii można też położyć

$$(10) \quad \sum_0^k f(a + n\omega) = {}^1f(a + (k + \frac{1}{2})\omega) - {}^1f(a - \frac{1}{2}\omega).$$

Ponieważ daną jest tylko lewa strona równania (10) [jest to właśnie suma danych wartości funkcji f], więc z pomiędzy dwóch stałych: ${}^1f(a + (k + \frac{1}{2})\omega)$ i ${}^1f(a - \frac{1}{2}\omega)$ można obrać jedną dowolnie; wtedy druga będzie określona przez równanie (10). Otóż przy obliczeniu perturbacji zwykle obieramy początkowe elementy w taki sposób, aby były „ściśle styczne“ w epoce $t = a - \frac{1}{2}\omega$, t. j. właśnie w tej, którą obraliśmy za dolną granicę całkowania. Stąd wynika, że trzeba obrać ${}^1f(a - \frac{1}{2}\omega)$ w taki sposób, aby wyrazy odnoszące się do dolnej granicy całkowania znikły, t. j. trzeba położyć

$$(11) \quad -{}^1f(a - \frac{1}{2}\omega) - \frac{1}{24} \Delta_{-\frac{1}{2}}^{\text{I}} + \frac{17}{5760} \Delta_{-\frac{1}{2}}^{\text{III}} - \frac{367}{967680} \Delta_{-\frac{1}{2}}^{\text{V}} + \dots = 0.$$

Jeżeli przekształcimy wyrażenie naszej całki za pomocą wzorów (9) i (10), jeżeli wprowadzimy warunek (11) a wkońcu pomnożymy cały wzór przez ω , to będziemy mogli napisać:

$$(12) \quad \int_{a-\frac{1}{2}\omega}^{a+(k+\frac{1}{2})\omega} f(t) dt = \omega \int_{-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} f(a + n\omega) dn = \\ = \omega {}^1f(a + (k + \frac{1}{2})\omega) + \frac{\omega}{24} \Delta_{k+\frac{1}{2}}^{\text{I}} - \frac{17\omega}{5760} \Delta_{k+\frac{1}{2}}^{\text{III}} + \frac{367\omega}{967680} \Delta_{k+\frac{1}{2}}^{\text{V}} - \dots$$

Można zawsze tak obrać odstęp ω i argumenty funkcji f , żeby wzór (12) dał potrzebną całkę bądź wprost, bądź przez interpolację; ale można też wyprowadzić wzory odpowiadające innym granicom. Naprzykład w praktyce często bywa potrzebnym wzór na całkę wziętą w granicach $n = -\frac{1}{2}$ i $n = k$, gdzie k jest liczbą całą.

Aby go otrzymać, utworzymy całkę wziętą między granicami k i $k + \frac{1}{2}$ i odejmiemy ją od całki (12). Najpierw tworzymy całkę między granicami 0 i $\frac{1}{2}$. Wracamy do wzoru (7), wstawiamy granice $n = 0$ i $n = \frac{1}{2}$ i porządkujemy:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(a + n\omega) dn = \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{8} \Delta_0^I + \frac{1}{48} \Delta_0^{II} -$$

$$- \frac{7}{384} \Delta_0^{III} - \frac{17}{11520} \Delta_0^{IV} + \frac{163}{46080} \Delta_0^V + \frac{367}{1935360} \Delta_0^{VI} - \dots$$

Analogiczna całka między granicami k i $k + \frac{1}{2}$ będzie mieć te same współczynniki, ale po prawej stronie zamiast argumentu a będzie figurować $a + k\omega$, co zaś do Δ , to zamiast dolnego wskaźnika 0 trzeba napisać k . Tedy

$$\int_k^{k+\frac{1}{2}} f(a + n\omega) dn =$$

$$= \frac{1}{2} f(a + k\omega) + \frac{1}{8} \Delta_k^I + \frac{1}{48} \Delta_k^{II} - \frac{7}{384} \Delta_k^{III} - \frac{17}{11520} \Delta_k^{IV} + \dots$$

Zamiast średnich arytmetycznych $\Delta_k^I, \Delta_k^{III}, \Delta_k^V \dots$ i t. d. piszemy ich wartości

$$\left. \begin{aligned} \Delta_k^I &= \frac{1}{2} (\Delta_{k+\frac{1}{2}}^I + \Delta_{k-\frac{1}{2}}^I) \\ \Delta_k^{III} &= \frac{1}{2} (\Delta_{k+\frac{1}{2}}^{III} + \Delta_{k-\frac{1}{2}}^{III}) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

następnie podobnie jak we wzorze (12) piszemy

$$\left. \begin{aligned} f(a + k\omega) &= {}^I f(a + (k + \frac{1}{2})\omega) - {}^I f(a + (k - \frac{1}{2})\omega) \\ \Delta_k^{II} &= \Delta_{k+\frac{1}{2}}^I - \Delta_{k-\frac{1}{2}}^I \\ \Delta_k^{IV} &= \Delta_{k+\frac{1}{2}}^{III} - \Delta_{k-\frac{1}{2}}^{III} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

i po łatwych redukcjach otrzymujemy

$$\int_k^{k+\frac{1}{2}} f(a + n\omega) dn = \frac{1}{2} {}^I f(a + (k + \frac{1}{2})\omega) - \frac{1}{2} {}^I f(a + (k - \frac{1}{2})\omega) +$$

$$+ \frac{1}{12} \Delta_{k+\frac{1}{2}}^I + \frac{1}{24} \Delta_{k-\frac{1}{2}}^I - \frac{61}{5760} \Delta_{k+\frac{1}{2}}^{III} - \frac{11}{1440} \Delta_{k-\frac{1}{2}}^{III} + \dots$$

Teraz mnożymy prawą i lewą stronę przez ω i odejmujemy od całki (12) Ściągnąwszy jednakowe wyrazy i uporządkowawszy znowu wprowadzamy symbole średnich arytmetycznych [por. wzory (13)], poczem otrzymujemy

$$(15) \quad \int_{a-\frac{1}{2}\omega}^{a+\frac{1}{2}\omega} f(t) dt = \omega \int_{-1/2}^k f(a+n\omega) dn = \\ = \frac{\omega}{2} [{}^1f(a+(k+\frac{1}{2})\omega) + {}^1f(a+(k-\frac{1}{2})\omega)] \\ - \frac{\omega}{12} \Delta_k^I + \frac{11\omega}{720} \Delta_k^{III} - \frac{191\omega}{60480} \Delta_k^V + \dots$$

Przypominamy, że

$${}^1f(a+(k+\frac{1}{2})\omega)$$

jest określone przez równania (10) i (11), w których wszystkie wielkości oprócz

$${}^1f(a+(k+\frac{1}{2})\omega) \quad \text{i} \quad {}^1f(a-\frac{1}{2}\omega)$$

są znane. Z drugiej strony

$${}^1f(a+(k-\frac{1}{2})\omega)$$

jest określone przez pierwsze równanie (14), w którym wszystko oprócz tej jednej niewiadomej jest znane.

Wzór (15) zawiera różnice, dla utworzenia których trzeba mieć wartości całkowanej funkcji leżące poza granicami całkowania. Można go przekształcić w taki sposób, żeby zawierał tylko te różnice, do utworzenia których wystarcza znajomość wartości funkcji f wewnątrz granic całkowania. Mianowicie na podstawie wzorów (13) i tablicy (A) [rozd. II gi, § 2] łatwo znajdziemy

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_k^I = \Delta_{k-1/2}^I + \frac{1}{2} [\Delta_{k-1}^{II} + \Delta_{k-3/2}^{III} + \Delta_{k-2}^{IV} + \Delta_{k-5/2}^V + \dots] \\ \Delta_k^{III} = \Delta_{k-3/2}^{III} + \frac{1}{2} [3\Delta_{k-2}^{IV} + 4\Delta_{k-3/2}^V + 5\Delta_{k-3}^{VI} + \dots] \\ \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

Podstawiając wartości średnich arytmetycznych ze wzorów (16) we wzór (15) otrzymamy po uporządkowaniu wzór zawierający tylko takie różnice, do utworzenia których wystarcza znajomość wartości

funkcyi f wewnątrz granic całkowania. Jednakże wzór ten jest więcej zależny od błędów obserwacyi aniżeli wzór (15); dlatego też lepiej jest posługiwać się tym ostatnim wzorem, tylko naturalnie trzeba urządzić się w taki sposób, aby mieć odpowiednią ilość wartości funkcyi f poza granicami całkowania.

Przy obliczeniu perturbacyi musimy zazwyczaj całkować dwukrotnie. Przejdziemy więc do wyprowadzenia wzoru służącego do obliczenia całek podwójnych. Ponieważ

$$dt^2 = \omega^2 dn^2,$$

więc

$$\int \int f(t) dt^2 = \omega^2 \int \int f(a + n\omega) dn^2.$$

Wedle wzoru (7)

$$\int_0^a f(a + n\omega) dn = nf(a) + \frac{n^2}{1.2} [A_0^I - \frac{1}{6} A_0^{III} + \dots] + \\ + \frac{n^3}{1.2.3} \left[A_0^{II} - \frac{1}{12} A_0^{IV} + \frac{1}{90} A_0^{VI} - \dots \right]$$

Dodajemy po obu stronach

$$\int_{-1/2}^0 f(a + n\omega) dn,$$

poczem otrzymujemy

$$\int_{-1/2}^a f(a + n\omega) dn = \int_{-1/2}^0 f(a + n\omega) dn + nf(a) + \\ + \frac{n^2}{1.2} \left[A_0^I - \frac{1}{6} A_0^{III} + \dots \text{ i t. d.} \right]$$

Mnożymy obie strony przez dn i powtórnie całkujemy względem n :

$$\int_{n_1}^{n_2} \int_{-1/2}^n f(a + n\omega) dn^2 = (n_2 - n_1) \int_{-1/2}^0 f(a + n\omega) dn + \\ + \frac{n_2^2 - n_1^2}{1.2} f(a) + \frac{n_2^3 - n_1^3}{1.2.3} \left[A_0^I - \frac{1}{6} A_0^{III} + \frac{1}{30} A_0^{V} - \dots \right] \\ + \frac{n_2^4 - n_1^4}{1.2.3.4} \left[A_0^{II} - \frac{1}{12} A_0^{IV} + \frac{1}{90} A_0^{VI} - \dots \right] \\ + \dots \dots \dots \quad (17)$$

Kładziemy

$$n_1 = -\frac{1}{2}, \quad n_2 = \frac{1}{2},$$

poczem wzór nasz przechodzi w

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^n f(a + n\omega) dn^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(a + n\omega) dn +$$

$$+ \frac{1}{24} \left[\Delta_0^I - \frac{1}{6} \Delta_0^{III} + \frac{1}{30} \Delta_0^V - \dots \right]$$

$$+ \frac{1}{1920} \left[\Delta_0^{III} - \frac{1}{4} \Delta_0^V + \dots \right]$$

$$\dots \dots \dots$$

Ze wzoru (15) łatwo znajdziemy:

$$(18) \quad \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(a + n\omega) dn = {}^1f(a) - \frac{1}{12} \Delta_0^I + \frac{11}{720} \Delta_0^{III} - \frac{191}{60480} \Delta_0^V + \dots$$

Tu przez analogię ze średnimi arytmetycznymi różnic położyliśmy:

$$(19) \quad {}^1f(a) = \frac{1}{2} {}^1f(a + \frac{1}{2}\omega) + \frac{1}{2} {}^1f(a - \frac{1}{2}\omega)$$

Skoro podstawimy wartość całki od $-\frac{1}{2}$ do 0 ze wzoru (18) w ostatni wzór na podwójną całkę, to po uporządkowaniu otrzymamy

$$(20) \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^n f(a + n\omega) dn^2 =$$

$$= {}^1f(a) - \frac{1}{24} \Delta_0^I + \frac{17}{1920} \Delta_0^{III} - \frac{367}{193536} \Delta_0^V + \dots \text{ i t. d.}$$

Stąd przez analogię wynika

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^n f(a + n\omega) dn^2 =$$

$$= {}^1f(a + i\omega) - \frac{1}{24} \Delta_i^I + \frac{17}{1920} \Delta_i^{III} - \frac{367}{193536} \Delta_i^V + \dots,$$

przyczem i jest to liczba cała.

Jeżeli położymy $i=1, 2, 3 \dots k$ i jeżeli zesumujemy wszystkie w ten sposób otrzymane wyrażenia a także wzór (20), to otrzymamy

$$\int_{-1/2}^{k+1/2} \int_{-1/2}^n f(a+n\omega) dn^2 = \sum_{n=0}^{n=k} f(a+n\omega) - \frac{1}{24} \sum_{n=0}^{n=k} \Delta_n^I +$$

$$+ \frac{17}{1920} \sum_{n=0}^{n=k} \Delta_n^{III} - \frac{367}{193536} \sum_{n=0}^{n=k} \Delta_n^V + \dots \text{ i t. d.}$$

Lecz zważywszy, że

$$\Delta_n^I = \frac{1}{2} [\Delta_{n+1/2}^I + \Delta_{n-1/2}^I] = \frac{1}{2} f(a+(n+1)\omega) - \frac{1}{2} f(a+n\omega) +$$

$$+ \frac{1}{2} f(a+n\omega) - \frac{1}{2} f(a+(n-1)\omega)$$

$$= \frac{1}{2} f(a+(n+1)\omega) - \frac{1}{2} f(a+(n-1)\omega)$$

znajdziemy:

$$\sum_{n=0}^{n=k} \Delta_n^I = \frac{1}{2} f(a+(k+1)\omega) + \frac{1}{2} f(a+k\omega) - \frac{1}{2} f(a) - \frac{1}{2} f(a-\omega).$$

Tak samo znajdziemy:

$$\sum_{n=0}^{n=k} \Delta_n^{III} = \frac{1}{2} \Delta_{k+1}^{III} + \frac{1}{2} \Delta_k^{III} - \frac{1}{2} \Delta_0^{III} - \frac{1}{2} \Delta_{-1}^{III}$$

$$\sum_{n=0}^{n=k} \Delta_n^V = \frac{1}{2} \Delta_{k+1}^V + \frac{1}{2} \Delta_k^V - \frac{1}{2} \Delta_0^V - \frac{1}{2} \Delta_{-1}^V$$

.....
i t. d. i t. d.

Funkcja $f(a+n\omega)$ jest również średnią arytmetyczną, mianowicie podobnie jak we wzorze (19)

$$f(a+n\omega) = \frac{1}{2} f(a+(n+\frac{1}{2})\omega) + \frac{1}{2} f(a+(n-\frac{1}{2})\omega).$$

Ale możemy uważać ją także jako różnicę innych funkcji, a więc możemy napisać zupełnie tak samo jak wyżej dla Δ_n^I

$$f(a+n\omega) = \frac{1}{2} f(a+(n+1)\omega) - \frac{1}{2} f(a+(n-1)\omega).$$

Wskutek tego otrzymamy

$$\sum_{n=0}^{n=k} f(a+n\omega) = \frac{1}{2} f(a+(k+1)\omega) +$$

$$+ \frac{1}{2} f(a+k\omega) - \frac{1}{2} f(a) - \frac{1}{2} f(a-\omega).$$

Skoro podstawimy to wszystko we wyrażeniu na podwójną całkę, to ta ostatnia przejdzie w

$$\int_{-1/2}^{k+1/2} \int_{-1/2}^n f(a+n\omega) dn^2 =$$

$$= \frac{1}{2} {}^{II}f(a+(k+1)\omega) + \frac{1}{2} {}^{II}f(a+k\omega) - \frac{1}{2} {}^{II}f(a) - \frac{1}{2} {}^{II}f(a-\omega)$$

$$- \frac{1}{48} [f(a+(k+1)\omega) + f(a+k\omega) - f(a) - f(a-\omega)]$$

$$+ \frac{17}{3840} [\Delta_{k+1}^{II} + \Delta_k^{II} - \Delta_0^{II} - \Delta_{-1}^{II}] - \dots \text{ i t. d.}$$

Teraz wprowadzamy pewne uproszczenia. Przedewszystkiem

$$\begin{aligned} {}^{II}f(a) + {}^{II}f(a-\omega) &= 2 {}^{II}f(a-\omega) + {}^I f(a-\frac{1}{2}\omega) \\ f(a) + f(a-\omega) &= 2f(a) - \Delta_{-1/2}^I \\ \Delta_0^{II} + \Delta_{-1}^{II} &= 2\Delta_0^{II} - \Delta_{-1/2}^{III} \\ \Delta_0^{IV} + \Delta_{-1}^{IV} &= 2\Delta_0^{IV} - \Delta_{-1/2}^V \\ &\dots \end{aligned}$$

następnie wedle wzoru (11)

$$- \frac{1}{2} f^I(a-\frac{1}{2}\omega) - \frac{1}{48} \Delta_{-1/2}^I + \frac{17}{11520} \Delta_{-1/2}^{III} - \frac{367}{1935360} \Delta_{-1/2}^V + \dots = 0.$$

Jeżeli uwzględnimy powyższe związki, to nasza podwójna całka przywiedzie się do następującego kształtu:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} [{}^{II}f(a+(k+1)\omega) + {}^{II}f(a+k\omega)] - {}^{II}f(a-\omega) \\ &- \frac{1}{48} [f(a+(k+1)\omega) + f(a+k\omega)] + \frac{1}{24} f(a) \\ &+ \frac{17}{3840} [\Delta_{k+1}^{II} + \Delta_k^{II}] - \frac{17}{1920} \Delta_0^{II} + \frac{17}{5760} \Delta_{-1}^{III} \\ &- \frac{367}{387072} [\Delta_{k+1}^{IV} + \Delta_k^{IV}] + \frac{367}{193536} \Delta_0^{IV} - \frac{367}{483840} \Delta_{-1}^V \\ &\dots \end{aligned}$$

Korzystając z tego, że jedna z funkcji ${}^{II}f$ jest dowolna, możemy teraz położyć:

$$(21) \quad 0 = - {}^{II}f(a-\omega) + \frac{1}{24} f(a) - \frac{17}{1920} \Delta_0^{II} + \frac{17}{5760} \Delta_{-1}^{III} +$$

$$+ \frac{367}{193536} \Delta_0^{IV} - \frac{367}{483840} \Delta_{-1}^V + \dots$$

Zresztą ponieważ:

$$\Delta_{-1/2}^{III} = \Delta_0^{II} - \Delta_{-1}^{II}, \quad \Delta_{-1/2}^V = \Delta_0^{IV} - \Delta_{-1}^{IV} \dots \text{ i t. d.}$$

to można napisać równanie (21) w kształcie

$$f(a - \omega) = \frac{1}{24} f(a) - \frac{17}{5760} (2\Delta_0^{II} + \Delta_{-1}^{II}) + \frac{367}{967680} (3\Delta_0^{IV} + 2\Delta_{-1}^{IV}) - \dots \quad (20 \text{ bis})$$

Po uwzględnieniu równania (21), czy, co wszystko jedno, (21 bis) i po pomnożeniu przez ω^2 całka podwójna przybierze postać następującą:

$$\begin{aligned} \int_{a-\frac{1}{2}\omega}^{a+(k+\frac{1}{2})\omega} \int_{a-\frac{1}{2}\omega}^{a+n\omega} f(t) dt^2 &= \omega^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{k+\frac{1}{2}}{n}} \int_{-\frac{1}{2}}^n f(a+n\omega) dn^2 = \\ &= \frac{\omega^2}{2} [{}^{II}f(a+(k+1)\omega) + {}^{II}f(a+k\omega)] - \\ &- \frac{\omega^2}{48} [f(a+(k+1)\omega) + f(a+k\omega)] \\ &+ \frac{17\omega^2}{3840} [\Delta_{k+1}^{II} + \Delta_k^{II}] - \frac{367\omega^2}{387072} [\Delta_{k+1}^{IV} + \Delta_k^{IV}] + \dots \quad (22) \end{aligned}$$

Równanie (21), dzięki któremu doprowadziliśmy podwójną całkę do kształtu (22), nie oznacza nic innego jak to, że w dolnej granicy całka znika, a to bywa wtedy, gdy w epoce odpowiadającej dolnej granicy, t. j. w epoce $a - \frac{1}{2}\omega$ dane elementy są „ściśle styczne“. Gdyby to założenie nie było spełnione, to nie moglibyśmy korzystać ani z równania (11), ani z równania (21). Atoli w tych razach, gdy elementy nie są ściśle styczne, wartość pojedynczej całki w dolnej granicy, t. j. inaczej mówiąc wartość wyrażenia (11) bywa dana i trzeba dodać ją do prawej strony wzoru (12). Tak samo daną bywa także wartość podwójnej całki w dolnej granicy i trzeba dodać ją do prawej strony wzoru (22).

Znowu przechodzimy do całki podwójnej w granicach $-\frac{1}{2}$ i i . W tym celu tworzymy najpierw na podstawie wzoru (17) całkę podwójną

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^n f(a+n\omega) dn^2 &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(a+n\omega) dn + \\ &+ \frac{1}{8} f(a) + \frac{1}{48} \left[\Delta_0^I - \frac{1}{6} \Delta_0^{III} + \frac{1}{30} \Delta_0^V - \dots \right. \\ &+ \frac{1}{384} \left[\Delta_0^{II} - \frac{1}{12} \Delta_0^{IV} + \frac{1}{90} \Delta_0^{VI} - \dots \right. \\ &+ \frac{1}{3840} \left[\Delta_0^{III} - \frac{1}{4} \Delta_0^V + \dots \right. \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Jeżeli we wzorze (15) położymy $k=0$ a jednocześnie skorzystamy ze wzoru (19), t. j. jeżeli wprowadzimy symbol średniej arytmetycznej ${}^1f(a)$, to otrzymamy

$$\frac{1}{2} \int_{-1/2}^0 f(a+n\omega) dn = \frac{1}{2} {}^1f(a) - \frac{1}{24} \Delta_0^I + \frac{11}{1440} \Delta_0^{III} - \frac{191}{120960} \Delta_0^V + \dots$$

Przypominamy, że ${}^1f(a)$, Δ_0^I , Δ_0^{III} i t. d. wszystko to są średnie arytmetyczne [por. wzory (13) i (19)]. — Skoro podstawimy otrzymane przed chwilą wyrażenie we wzór na całkę podwójną i ściągniemy jednakowe wyrazy, to otrzymamy:

$$(23) \int_0^{1/2} \int_{-1/2}^n f(a+n\omega) dn^2 = \\ = \frac{1}{2} {}^1f(a) + \frac{1}{8} f(a) - \frac{1}{48} \Delta_0^I + \frac{1}{384} \Delta_0^{II} + \frac{17}{3840} \Delta_0^{III} - \\ - \frac{1}{5120} \Delta_0^{IV} - \frac{367}{387072} \Delta_0^V + \frac{787}{30965760} \Delta_0^{VI} + \dots$$

Ale

$${}^1f(a) = \frac{1}{2} [{}^1f(a + \frac{1}{2}\omega) + {}^1f(a - \frac{1}{2}\omega)] = {}^1f(a + \frac{1}{2}\omega) - \frac{1}{2} f(a)$$

i tak samo

$$\Delta_0^I = \Delta_{1/2}^I \quad - \frac{1}{2} \Delta_0^{II}$$

$$\Delta_0^{III} = \Delta_{1/2}^{III} \quad - \frac{1}{2} \Delta_0^{IV}$$

.....

Zatem można napisać wzór (23) w postaci:

$$\int_0^{1/2} \int_{-1/2}^n f(a+n\omega) dn^2 = \frac{1}{2} f(a + \frac{1}{2}\omega) - \frac{1}{8} f(a) - \\ - \frac{1}{48} \Delta_{1/2}^I + \frac{5}{384} \Delta_0^{II} + \frac{17}{3840} \Delta_{1/2}^{III} - \frac{37}{15360} \Delta_0^{IV} \dots$$

Stąd przez analogię od razu wynika:

$$(24) \int_k^{k+1/2} \int_{-1/2}^n f(a+n\omega) dn^2 = \\ = \frac{1}{2} {}^1f(a + (k + \frac{1}{2})\omega) - \frac{1}{8} f(a + k\omega) - \frac{1}{48} \Delta_{k+1/2}^I + \\ + \frac{5}{384} \Delta_k^{II} + \frac{17}{3840} \Delta_{k+1/2}^{III} - \frac{37}{15360} \Delta_k^{IV} - \frac{367}{387072} \Delta_{k+1/2}^V + \frac{15467}{30965760} \Delta_k^{VI} + \dots$$

Mnożymy wzór (24) przez ω^2 i odejmujemy go od wzoru (22).
Przy odejmowaniu korzystamy jeszcze z równości

$$\begin{aligned} f(a + (k + \frac{1}{2})\omega) &= {}^{II}f(a + (k + 1)\omega) - {}^{II}f(a + k\omega) \\ \Delta_{k+\frac{1}{2}}^I &= f(a + (k + 1)\omega) - f(a + k\omega) \\ \Delta_{k+\frac{1}{2}}^{III} &= f^{III}(a + (k + 1)\omega) - f^{III}(a + k\omega) \\ &\dots \end{aligned}$$

i znajdujemy ostatecznie po łatwych redukcjach¹⁾

$$\begin{aligned} \int_{a-\frac{1}{2}\omega}^{a+\frac{1}{2}\omega} \int_{a-\frac{1}{2}\omega}^{a+\frac{1}{2}\omega} f(t) dt^2 &= \omega^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(a + n\omega) dn^2 = \\ &= \omega^2 \left\{ {}^{II}f(a + k\omega) + \frac{1}{12}f(a + k\omega) - \frac{1}{240}\Delta_k^{II} + \frac{31}{60480}\Delta_k^{IV} - \dots \right\} \quad (25) \end{aligned}$$

Oprócz wzorów (12) i (15) dla całek pojedynczych oraz wzorów (22) i (25) dla całek podwójnych moglibyśmy wyprowadzić rozmaite analogiczne wzory dla różnych specjalnych przypadków, ale nie mamy na to miejsca. Poinformować się o różnych szczegółach można we wielokrotnie cytowanym dziele Th. v. Oppolzera: „Lehrbuch der Bahnbestimmung“, tom II-gi i w innych dziełach.

3. Zbieżność szeregów służących do mechanicznego całkowania. Wskazówki praktyczne. Klasyfikacya metod służących do obliczenia perturbacyi specjalnych.

Liczbowe współczynniki w szeregach służących do mechanicznego całkowania zmniejszają się tak szybko, że jeżeli dobierzemy odpowiednio odstęp ω , to zazwyczaj można poniechać już różnice czwartego rzędu nie mówiąc naturalnie o różnicach wyższych rzędów. Nie należy atoli stąd wnosić, żeby te szeregi były zbieżne; przeciwnie mają one podobny charakter, jak inne szeregi napotymane w teoryi perturbacyi, t. j. przedłużone do nieskończoności stają się wogóle rozbieżnymi. Naprzykład można wyprowadzić wzory odnoszące się do całek pojedynczych ze wzoru sumacyjnego Eulera. Otóż szereg Eulera przedłużony do nieskończoności jest wogóle

¹⁾ Przy których ustawicznie korzystamy ze związków:

$$\Delta_{k+1}^{II} = \Delta_k^{II} + \Delta_{k+\frac{1}{2}}^{III}, \quad \Delta_{k+1}^{IV} = \Delta_k^{IV} + \Delta_{k+\frac{1}{2}}^V \text{ i t. d.}$$

rozbieżny: wyrazy szeregu z początku zmniejszają się, potem atoli poczynają wzrastać i wzrastają bezgranicznie. Jeżeli ograniczymy się do skończonej ilości wyrazów, to reszta szeregu da się wyrazić przez pewną całkę, którą można oszacować za pomocą znanych z teorii całkowania metod. Wartość tej całki (wartość reszty) jest skończona, ale nie zdąża do zera. Przeciwnie, jeżeli będziemy wciąż dalej rozwijać szereg i wciąż tworzyć całki wyrażające nowe reszty, to okaże się, że skoro minimy najmniejszy wyraz szeregu, to reszta pocznie wzrastać i będzie wzrastać bezgranicznie. Wynika stąd, że za pomocą szeregu Eulera i podobnych mu szeregów można osiągnąć tylko pewną określoną, ograniczoną ścisłość. Tę możliwie największą ścisłość osiągamy wtedy, gdy zatrzymujemy się na wyrazie stojącym tuż przed najmniejszym wyrazem, bo wtedy reszta jest najmniejsza. Przez dodawanie dalszych wyrazów już nie zwiększamy ścisłości, przeciwnie znowu zmniejszamy ją.

O ile wiadomo, szeregi służące do mechanicznego całkowania mają tę samą własność, wskutek czego nietylko nie można opierać na nich żadnych ogólnych wniosków, ale przy obliczeniu perturbacyi nawet należy ograniczyć się do pewnego skończonego, stosunkowo niewielkiego odstępu czasu. W praktyce to ograniczenie nie wadzi, bo używamy owych szeregów tylko do obliczenia perturbacyi w ciągu kilku, kilkunastu, lub najwyżej kilkudziesięciu lat, wskutek czego nigdy nie dochodzimy do najmniejszych wyrazów szeregów: wystarcza wziąć kilka pierwszych wyrazów.

Wzory tu podane są tego rodzaju, że dla obliczenia wchodzących w nie różnic trzeba mieć wartości funkcyi poza granicami całkowania. Ile ich mieć potrzeba, to naturalnie zależy od rzędu różnic, które jeszcze bierzemy w rachubę. Jeżeli np. wciągamy w rachubę różnice czwartego rzędu, to, jak to zaraz widać z tablicy A (rozdz. II-gi, § 2), trzeba mieć po dwie wartości funkcyi poza granicami całkowania. Rząd wciąganych w rachubę różnic, t. j. ilość wyrazów szeregu, które bierzemy¹⁾, zależy z jednej strony od ścisłości, którą zamierzamy osiągnąć, z drugiej zaś strony od wielkości odstępu ω . Im ten odstęp jest mniejszy, tem „*ceteris paribus*“ różnice są mniejsze i tem niższym jest rząd różnic, które

¹⁾ Naturalnie ze względu na powyższe uwagi zakładamy, że jeszcze nie doszliśmy do tego kresu, od którego reszta szeregu poczyną wzrastać.

jeszcze trzeba wciągnąć w rachubę. Zdawałoby się więc, że należy brać jak najmniejszy odstęp ω . Naturalnie lepiej w tym kierunku przesadzić niż nie dociągnąć, ale nie można obierać nazbyt małego odstępu, bo im mniejszy odstęp ω , tem „*ceteris paribus*“ dłuższe rachunki. Długoletnie doświadczenie pokazało, że przy obliczeniu perturbacyi małych planet wystarcza odstęp czterdziestodniowy, ale gdy chodzi o perturbacye komet w tych częściach orbity, gdzie krzywizna jest znaczna, albo gdzie szybko się zmienia, a więc w okolicy perihelium, albo w pobliżu wielkich planet, trzeba brać o wiele krótsze odstępy. Zato w aphelium oraz daleko od głównych planet można brać o wiele dłuższe odstępy.

Wartości pierwszych i drugich pochodnych, do których stosujemy całkowanie mechaniczne, są właściwie funkcyjami współrzędnych zmienionych przez perturbacye. Ale jeszcze nie znamy współrzędnych zmienionych: zadaniem naszym jest właśnie obliczenie zmian współrzędnych. Musimy przeto z początku posługiwać się współrzędnymi wynikającymi z „elementów ściśle stycznych“. W pobliżu epoki, do której odnoszą się elementy ściśle styczne, perturbacye są jeszcze bardzo nieznaczne, przeto błędy pochodzące z przedstawienia współrzędnych niezmienionych przez perturbacye zamiast zmienionych są znikome. W miarę tego, jak oddalamy się od epoki, do której odnoszą się „elementy ściśle styczne“, błędy wzrastają i trzeba uciekać się do kolejnych przybliżeń. Jak się to robi, zobaczymy później.

Można podzielić metody służące do obliczenia „perturbacyi specjalnych“ na trzy grupy. Do pierwszej zaliczamy wszelkie warianty metody „waryacyi elementów“, do drugiej metody Bonda i Encke'go, w których obliczamy perturbacye współrzędnych prostokątnych, do trzeciej metody Hansena i Tietjena, w których obliczamy perturbacye współrzędnych biegunowych. Każda z tych metod ma swoje zalety i wady; dla braku miejsca wyłóżymy tylko metodę Encke'go jako, ze względu na symetryę wzorów, dla początkujących najłatwiejszą do zrozumienia.

W metodzie „waryacyi elementów“ posługujemy się wprost wzorami Lagrange'a [patrz rozdz. XIX] na pochodne elementów. Na podstawie danych elementów ściśle stycznych, współrzędnych planety podlegającej perturbacyom i współrzędnych planet sprawiających perturbacye obliczamy wartości na $\frac{dh}{dt}$ [h oznacza którykolwiek

ściśle styczne. Na mocy tego założenia współrzędne x_0, y_0, z_0 czynią zadość równaniom Keplerowskim

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x_0}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x_0}{r_0^3} &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Gdy odejmiemy równania (28) od równań (26), to otrzymamy równania różniczkowe, którym zadość czynią $\delta x, \delta y, \delta z$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\delta x}{dt^2} + k^2(1+m)\left(\frac{x}{r^3} - \frac{x_0}{r_0^3}\right) &= \frac{\partial Q}{\partial x} = \Sigma k^2 m_k \left(\frac{x_k - x}{\Delta_k^3} - \frac{x_k}{r_k^3}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Zadaniem naszym będzie obliczenie [przez mechaniczne całkowanie] „perturbacji“ $\delta x, \delta y, \delta z$ z powyższych równań. Dla ułatwienia możemy wprowadzić pewne przekształcenie. Przenosimy drugi wyraz z lewej strony na prawą, następnie korzystając z tego, że $x_0 = x - \delta x$ i t. d., piszemy:

$$\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} = \frac{1}{r_0^3} \left(x - \delta x - x \frac{r_0^3}{r^3}\right) = \frac{1}{r_0^3} \left[\left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right)x - \delta x\right];$$

ale

$$r^2 = r_0^2 + 2(x_0\delta x + y_0\delta y + z_0\delta z) + \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2;$$

przeto

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 = 1 + 2q,$$

gdzie

$$q = \frac{(x_0 + \frac{1}{2}\delta x)\delta x + (y_0 + \frac{1}{2}\delta y)\delta y + (z_0 + \frac{1}{2}\delta z)\delta z}{r_0^2}.$$

Stąd zaś

$$\frac{r_0^3}{r^3} = (1 + 2q)^{-3/2} = 1 - 3q + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 2} q^2 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} q^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} q^4 - \dots$$

Skoro to podstawimy, to otrzymamy

$$\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} = \frac{1}{r_0^3} (fqx - \delta x) \text{ i t. d.,}$$

gdzie

$$(29) \quad f = 3 \left(1 - \frac{5}{2} q + \frac{5.7}{2.3} q^2 - \frac{5.7.9}{2.3.4} q^3 - \dots \right)$$

W XXXIV-tym tomie „Astr. Nachr.“ Encke podał tablicę logarytmów f sięgającą od $q = -0,021$ do $q = +0,021$. W podręczniku Watsona znajduje się podobna tablica (Nr XVII) sięgająca od $q = -0,03$ do $q = +0,03$.

Po tem przekształceniu napiszemy wzory różniczkowe w kształcie

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \delta x}{dt^2} = X + k^2 \frac{(1+m)}{r_0^3} (f q x - \delta x) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

przyczem

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{\partial \Omega}{\partial x} = k^2 \Sigma m_k \left(\frac{x_k - x}{\Delta_k^3} - \frac{x_k}{r_k^3} \right) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Spojrzawszy na wzory (30) łatwo domyśleć się, w jaki sposób można z nich otrzymać δx , δy , δz . Oczywiście trzeba obliczyć prawe strony równań (30) dla równoodległych epok a potem zastosować wzór (25). Z pomiędzy wielkości figurujących po prawej stronie równań (30) większa część, np. x_k , y_k , z_k , r_k są to wielkości znane, ale δx , δy , δz są jeszcze nieznanne [zauważmy mimochodem, że $x = x_0 + \delta x$, $y = y_0 + \delta y$, $z = z_0 + \delta z$, a więc x , y , z także zawierają nieznanne jeszcze przyrosty]; przeto musimy uciekać się do kolejnych przybliżeń. Pomimo tego rachunki postępują (stosunkowo do innych metod) szybko. Zato perturbacje szybko wznoszą, różnice stają się wprędce nieregularne a rezultaty niepewne. Wskutek tego trzeba po pewnym czasie przerwać rachunek, z otrzymanych perturbacji obliczyć nowe elementy ściśle styczne dla epoki mało odległej od początkowej i z tymi nowymi elementami liczyć perturbacje dla nowego okresu czasu. Skoro perturbacje znowu wzrosną, trzeba znów obliczyć nowe elementy dla nowej epoki i tak dalej. Wzory Enckego są zupełnie ogólne, stosują się do jakichkolwiek prostokątnych współrzędnych; ale rachunki stają się do pewnego stopnia łatwiejsze i krótsze, jeżeli odpowiednio wybierzemy płaszczyznę fundamentalną, t. j. płaszczyznę x, y . Jeżeli weźmiemy jako płaszczyznę x, y płaszczyznę orbity Keplerowskiej w chwili początko-

Stąd przez wzory rozdziału XIII-go znajdujemy następujące współrzędne prostokątne i logarytm promienia wodzącego Eurynome.

Tablica A.

Czas śr. berliński:		x_0	y_0	z_0	$\log r_0$
1863	Grudnia . . . 12,0	+ 1,53616	+ 1,23012	— 0,03312	0,294 084
1864	Stycznia . . . 21,0	1,15097	1,59918	0,07369	0,294 837
—	— Marca . . . 1,0	0,69518	1,87033	0,10978	0,300 674
—	— Kwietnia . . . 10,0	+ 0,19817	2,03141	0,13936	0,310 864
—	— Maja . . . 20,0	— 0,31012	2,08092	0,16134	0,324 298
—	— Czerwca . . . 29,0	0,80326	2,02602	0,17523	0,339 745
—	— Sierpnia . . . 8,0	1,26055	1,87959	0,18122	0,356 101
—	— Września . . . 17,0	1,66729	1,65711	0,17990	0,372 469
—	— Października . . . 27,0	2,01414	1,37473	0,17209	0,388 214
—	— Grudnia . . . 6,0	2,29597	1,04766	0,15870	0,402 894
1865	Stycznia . . . 15,0	— 2,51077	+ 0,68978	— 0,14066	0,416 240

Podobnie jak elementy, współrzędne są odniesione do ekliptyki i do średniego porównania dnia z nocą 1860.0. Odstęp ω wynosi jak zwykle 40 dni, a epoka, dla której są podane elementy ściśle styczne, przypada na sam środek pierwszego odstępu.

Teraz widzimy, dlaczego w § 2 wprowadziliśmy dolną granicę $a — \frac{1}{2} \omega$. Dolna granica całkowania to właśnie 1864 r., Styczeń 1,0, zaś a to 1864, Styczeń 21,0 i t. d.

Oprócz współrzędnych Eurynome potrzebujemy też mieć równoczesne współrzędne Jowisza i jego odległości Δ od Eurynome. Oto są te odległości i współrzędne odniesione do tej samej ekliptyki i porównania dnia z nocą 1860,0, co współrzędne Eurynome

Tablica B.

Czas śr. berliński:		x_1	y_1	z_1	$\log r_1$	$\log \Delta$
1863	Grudnia . . . 12,0	— 4,09683	— 3,55184	+ 0,10533	0,73425	0,86866
1864	Stycznia . . . 21,0	3,89630	3,76053	0,10152	0,73368	0,86713
—	— Marca . . . 1,0	3,68416	3,95803	0,09744	0,73305	0,86292
—	— Kwietnia . . . 10,0	3,46098	4,14366	0,09304	0,73237	0,85622
—	— Maja . . . 20,0	3,22739	4,31684	0,08839	0,73164	0,84732
—	— Czerwca . . . 29,0	2,98405	4,47693	0,08346	0,73086	0,83666
—	— Sierpnia . . . 8,0	2,73162	4,62343	0,07827	0,73003	0,82428
—	— Września . . . 17,0	2,47085	4,75576	0,07284	0,72915	0,81077
—	— Października . . . 27,0	2,20247	4,87345	0,06720	0,72823	0,79628
—	— Grudnia . . . 6,0	1,92728	4,97606	0,06134	0,72726	0,78098
1865	Stycznia . . . 15,0	— 1,64600	— 5,06301	+ 0,05531	0,72625	0,76498

Masę Eurynome można naturalnie zaniedbać. Na masę Jowisza Watson przyjmuje wartość

$$m_1 = \frac{1}{1047,819}$$

Odpowiednio do tego będziemy mieli ¹⁾

$$\begin{aligned} \omega^2 m_1 k^2 &= 0,000\,451\,827 \\ \omega^2 k^2 (1 + m) &= 0,47346 \dots, \end{aligned}$$

zaś równania (32) przywiodą się do

$$\begin{aligned} \omega^2 \frac{d^2 \delta x}{dt^2} &= 0,000\,451\,827 \left(\frac{x_1 - x_0}{\Delta^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right) + \\ &+ \frac{0,47346 \dots}{r_0^3} \left(3 \frac{x_0}{r_0} \varrho - \delta x \right) \dots \quad (32 \text{ bis}) \end{aligned}$$

Najpierw obliczamy pierwsze wyrazy po prawej stronie. Wszystkie wielkości, które w nich figurują, są podane w poprzednich tablicach, trzeba tylko podstawić i wykonać rachunki. Aby nie powtarzać ciągle zer, wyrazimy wszystkie liczby w jednostkach siódmego miejsca dziesiętnego, poczem otrzymamy następującą tabliczkę:

Tablica C.

Data:	argument:	$\omega^2 X_0$	$\omega^2 Y_0$	$\omega^2 Z_0$
1863 Grudnia . . . 12,0	$a - \omega$	+ 53,00	+ 47,09	- 1,43
1864 Stycznia . . . 21,0	a	53,71	46,31	0,91
— Marca . . . 1,0	$a + \omega$	+ 54,23	+ 45,18	- 0,37
— Kwietnia . . . 10,0	$a + 2\omega$	+ 54,69	+ 43,59	+ 0,22
— Maja . . . 20,0	$a + 3\omega$	55,23	41,51	0,70
— Czerwca . . . 29,0	$a + 4\omega$	56,06	38,96	1,19
— Sierpnia . . . 8,0	$a + 5\omega$	57,30	35,92	1,66
— Września . . . 17,0	$a + 6\omega$	59,09	32,47	2,08
— Października . . . 27,0	$a + 7\omega$	61,55	28,60	2,43
— Grudnia . . . 6,0	$a + 8\omega$	64,85	24,34	2,69
1865 Stycznia . . . 15,0	$a + 9\omega$	+ 69,09	+ 19,78	+ 2,83

¹⁾ Przypominamy, że $k = 0,017\,202\,099$
oraz, że $\omega = 40$.

Tablicy drugich wyrazów z prawej strony równania (32 bis) odrazu ułożyć nie możemy, bo zawierają one perturbacje współrzędnych δx , δy , δz i δr , które dopiero poszukujemy. Trzeba więc uciec się do kolejnych przybliżeń. Możemy skorzystać z tego, że epoka elementów ściśle stycznych leży pośrodku między dwoma pierwszymi argumentami, zatem tak 12 Grudnia 1863 r., jak 21 Stycznia 1864 r. δx , δy , δz i δr i tak samo drugie wyrazy w równaniach (32 bis) są bardzo nieznaczące. W tym więc okresie możemy całkować pomijając drugie wyrazy po prawej stronie. Do całkowania użyjemy wzoru (25), ale spojrzawszy nań spostrzegamy, że nie posiadamy jeszcze stałych ${}^{II}f$. Trzeba więc przedewszystkiem obliczyć te stałe. Wykonamy rachunek „*in extenso*“ tylko dla kierunku x . Z równania (21) — opuszczając wszystkie Δ jako bardzo małe — otrzymamy

$${}^{II}f(a - \omega) = \frac{1}{24}f(a) = \frac{1}{24}53,71 = 2,24.$$

Potrzebujemy jeszcze ${}^{II}f(a)$. Możemy je obliczyć ze wzoru

$${}^{II}f(a) = {}^{II}f(a - \omega) + {}^I f(a - \frac{1}{2}\omega),$$

ale tu znowu nie znamy jeszcze ${}^I f(a - \frac{1}{2}\omega)$. Do obliczenia tej wielkości posłuży nam wzór (11), w którym także opuścimy wszystkie różnice wyższych rzędów oprócz różnicy pierwszego rzędu. Wedle tak skróconego wzoru (11)

$${}^I f(a - \frac{1}{2}\omega) = -\frac{1}{24}\Delta^1_{-1,1},$$

ale

$$\Delta^1_{-1,1} = f(a) - f(a - \omega) = 53,71 - 53,00 = 0,71,$$

przeto

$${}^I f(a - \frac{1}{2}\omega) = -\frac{0,71}{24} = -0,03,$$

zaś

$${}^{II}f(a) = {}^{II}f(a - \omega) + {}^I f(a - \frac{1}{2}\omega) = 2,24 - 0,03 = 2,21.$$

Mając już stałe ${}^{II}f(a - \omega)$ i ${}^{II}f(a)$ możemy zastosować wzór (25). Pominiemy wszystkie dalsze wyrazy oprócz dwóch pierwszych i położymy najpierw $k = -1$; wtedy:

$$12,0 \text{ Grudnia } \delta x = {}^{II}f(a - \omega) + \frac{1}{12}f(a - \omega) = 2,24 + \frac{53,00}{12} = 6,66.$$

$$\begin{aligned} \Delta_{-1/2}^I &= f(a - \omega) - f(a) = 54,23 - 53,86 = 0,37 \\ {}^I f(a - \frac{1}{2}\omega) &= -\frac{1}{24} \Delta_{-1/2}^I = -\frac{0,37}{24} = -0,02 \\ {}^I f(a + \frac{1}{2}\omega) &= {}^I f(a - \frac{1}{2}\omega) + f(a) = -0,02 + 54,23 = 54,21 \\ {}^{II} f(a - \omega) &= \frac{1}{24} f(a) = \frac{54,23}{24} = 2,26 \\ {}^{II} f(a) &= {}^{II} f(a - \omega) + {}^I f(a - \frac{1}{2}\omega) = 2,26 - 0,02 = 2,24 \\ {}^{II} f(a + \omega) &= {}^{II} f(a) + {}^I f(a + \frac{1}{2}\omega) = 2,24 + 54,21 = 56,45. \end{aligned}$$

Licząc w ten sam sposób dla kierunków y i z i zestawiając wyniki otrzymamy na ${}^{II} f(a + \omega)$ następujące wartości:

$$\text{dla } x: 56,45, \quad \text{dla } y: 49,26, \quad \text{dla } z: -1,04.$$

Musimy teraz obliczyć $f(a + \omega)$. Nowe $\Delta_{1/2}^I$ dla trzech kierunków są:

$$0,37, \quad -0,51, \quad 0,49.$$

Ze względu na ciągłość $\Delta_{1/2}^I$ nie mogą znacznie różnić się od $\Delta_{-1/2}^I$. Przyjmując chwilowo $\Delta_{1/2}^I = \Delta_{-1/2}^I$ i dodając je do $f(a)$ otrzymamy na $f(a + \omega)$ dla trzech kierunków:

$$\begin{aligned} 54,23 + 0,37 &= 54,60, & 47,25 - 0,51 &= 46,74, \\ & & -0,96 + 0,49 &= -0,47. \end{aligned}$$

Zaokrąglając te liczby, jako nieco niepewne, przyjmujemy na $f(a + \omega)$ następujące wartości dla trzech kierunków:

$$54,6, \quad 46,7, \quad -0,5.$$

Teraz stosujemy wzór (25) naturalnie ograniczając się do dwóch pierwszych wyrazów i piszemy dla 1,0 Marca

$$\delta x = 56,45 + \frac{54,6}{12} = 61,00$$

$$\delta y = 49,26 + \frac{46,7}{12} = 53,15$$

$$\delta z = -1,04 - \frac{0,5}{12} = -1,08$$

wreszcie z pomocą wzoru (33) znajdujemy

$$\delta r = 71,03.$$

Teraz podstawiamy te przybliżone wartości na δx , δy , δz , δr w drugie wyrazy po prawej stronie równań (32 bis), podstawiamy odpowiednie x_0 , y_0 , z_0 , r_0 z tablicy A i znajdujemy na owe drugie wyrazy wartości: 0,78, 8,68, — 0,63. Bierzymy z tablicy C wartości pierwszych wyrazów po drugiej stronie równań (32 bis), mianowicie: 54,23, 45,18 i — 0,37, dodajemy do przed chwilą znalezionych drugich wyrazów i otrzymujemy

1,0 Marca 1864 r.

$$\omega^2 \frac{d^2 \delta x}{dt^2} = 55,01, \quad \omega^2 \frac{d^2 \delta y}{dt^2} = 53,86, \quad \omega^2 \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = -1,00.$$

Teraz stosujemy wzór (25) wciąż ograniczając się do dwóch pierwszych wyrazów i znajdujemy:

$$\delta x = 56,45 + \frac{55,01}{12} = 61,03, \quad \delta y = 49,26 + \frac{53,86}{12} = 53,75,$$

$$\delta z = -1,04 - \frac{1,00}{12} = -1,12.$$

Nowe wartości na δx , δy , δz tak mało różnią się od poprzednio znalezionych, przybliżonych, że możnaby już nie obliczać ponownie drugich wyrazów po prawej stronie równań (32 bis); jednakże obliczymy je jeszcze raz podstawiając nowe wartości na δx , δy , δz i znajdziemy: 0,81, 8,73, — 0,63. Dodając do tych samych pierwszych wyrazów, t. j. do 54,23, 45,18 i — 0,37 otrzymamy ostatecznie

1,0 Marca 1864 r.

$$\omega^2 \frac{d^2 \delta x}{dt^2} = 55,04, \quad \omega^2 \frac{d^2 \delta y}{dt^2} = 53,91, \quad \omega^2 \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = -1,00.$$

Teraz przechodzimy do 10,0 Kwietnia i licząc zupełnie tak samo, jak poprzednio liczyliśmy dla 1,0 Marca, znajdujemy

10,0 Kwietnia 1864 r.

$$\omega^2 \frac{d^2 \delta x}{dt^2} = 48,06, \quad \omega^2 \frac{d^2 \delta y}{dt^2} = 63,19, \quad \omega^2 \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = -1,54.$$

Następnie przechodzimy do 20,0 Maja i t. d. i t. d. Zbierając wszystkie poszczególne rezultaty formujemy wreszcie

Tablicę D.

	$\omega^2 \frac{d^2 \delta x}{dt^2} = + 53,86,$	$\omega^2 \frac{d^2 \delta y}{dt^2} = + 47,76,$	$\omega^2 \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = - 1,45$
12,0 Grudnia 1863			
21,0 Stycznia 1864	54,23,	47,25,	0,96
1,0 Marca —	55,04,	53,91,	1,00
10,0 Kwietnia —	48,06,	63,19,	1,54
20,0 Maja —	32,85,	65,40,	2,07
29,0 Czerwca —	16,74,	54,48,	1,75
8,0 Sierpnia —	8,62,	31,39,	- 0,36
17,0 Września —	14,20,	+ 2,09,	+ 1,86
27,0 Paźdz. —	34,84,	- 26,32,	4,44
6,0 Grudnia —	68,79,	47,87,	6,86
15,0 Stycznia 1865	+ 112,64,	- 58,39,	+ 8,68

Mamy teraz ostateczne wartości $f(u + k\omega)$ dla wszystkich kolejnych dat, możemy więc utworzyć tablicę różnic pierwszego, drugiego i t. d. rzędu [por. rozdz. II-gi], poczem możemy zastosować wzór (25) już nie ograniczając się do pierwszych dwóch wyrazów, ale biorąc w uwagę także dalsze wyrazy. Oprócz tego możemy obliczyć całki dla dat pośrednich, a więc dla 1,0 Stycznia, 10,0 Lutego i t. d. za pomocą wzoru (22). Otrzymamy w ten sposób następującą tablicę „perturbacji prostokątnych współrzędnych“ zawsze w jednostkach siódmego miejsca dziesiętnego:

Tablica E.

Czas śr. berliński:		δx	δy	δz
1863	Grudnia 12,0	+ 6,7	+ 5,9	- 0,2
1864	Stycznia 1,0	0,0	0,0	0,0
—	— 21,0	+ 6,8	+ 5,9	- 0,1
—	Lutego 10,0	27,1	23,5	0,5
—	Marca 1,0	61,0	53,7	1,1
—	— 21,0	108,9	97,4	2,0
—	Kwietnia . . . 10,0	169,7	155,7	3,1
—	— 30,0	242,7	229,9	4,7
—	Maja 20,0	325,7	320,3	6,7
—	Czerwca 9,0	417,1	427,2	9,3
—	— 29,0	514,6	549,1	12,3
—	Lipca 19,0	616,1	684,9	15,7
—	Sierpnia 8,0	720,8	831,4	19,5
—	— 28,0	827,4	986,0	23,4
—	Września 17,0	936,8	1144,6	27,0
—	Października . . 7,0	1049,4	1303,8	30,2
—	— 27,0	1168,2	1460,0	32,6

Czas śr. berliński:	δx	δy	δz
1864 Listopada 16,0	1295,4	1609,4	33,9
— Grudnia 6,0	1435,6	1749,6	33,8
— — 26,0	1592,8	1877,6	32,0
1865 Stycznia 15,0	+ 1772,6	+ 1992,3	— 28,2

Tablica E potwierdza to, co powiedzieliśmy w poprzednim paragrafie, mianowicie, że „perturbacje“ prostokątnych współrzędnych wzrastają szybko. Pochodzi to stąd, że na prostokątnych perturbacjach odbijają się nietylko zmiany rozmiarów i kształtu orbity, ale także zmiany w położeniu osi absydów. Powolniej wzrasta tylko δz , którego zmiany zależą przeważnie od zmian nachylenia.

W danym razie wzory (32) są zupełnie wystarczające, bo ściślejsze wzory (30) dałyby prawie to samo. Gdyby jednak chodziło o perturbacje w ciągu kilku lat, to wzory (32) okazałyby się nie dość dokładnymi: trzeba użyć wzorów (30).

6. Przekształcenie do innych płaszczyzn fundamentalnych. Obliczenie nowych elementów ściśle stycznych.

Jeżeli zechcemy przejść od perturbacji współrzędnych prostokątnych, ekliptycznych do perturbacji współrzędnych równikowych z tej samej daty, to dokonamy tego przez wzory

$$\left. \begin{aligned} \delta x' &= \delta x \\ \delta y' &= \cos \epsilon \delta y - \sin \epsilon \delta z \\ \delta z' &= \sin \epsilon \delta y + \cos \epsilon \delta z. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ oznaczają perturbacje współrzędnych prostokątnych równikowych, a ϵ nachylenie średniej ekliptyki do średniego równika.

Jeżeli chcemy zamienić perturbacje δx , δy , δz , odniesione do śr. ekliptyki w epoce t_0 na perturbacje δx_1 , δy_1 , δz_1 , odniesione do śr. ekliptyki w epoce t_1 , to możemy użyć wzorów

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= \cos(x, x_1) \delta x + \cos(y, x_1) \delta y + \cos(z, x_1) \delta z \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

przystosowanych do danego przypadku.

Oznaczmy przez θ długość węzła zstępującego ekliptyki z epoki t_1 na ekliptyce z epoki t_0 , przez J wzajemne nachylenie

obu ekliptyk, wreszcie przez p precesję w ciągu czasu $t_1 - t_0$, a pomienione równania przywiodą się do postaci:

$$\begin{aligned} \delta x_1 = & \delta x [\cos \theta \cos (\theta + p) + \sin \theta \sin (\theta + p) \cos J] + \\ & + \delta y [\sin \theta \cos (\theta + p) - \cos \theta \sin (\theta + p) \cos J] + \\ & + \delta z \sin (\theta + p) \sin J \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta y_1 = & \delta x [\cos \theta \sin (\theta + p) - \sin \theta \cos (\theta + p) \cos J] + \\ & + \delta y [\sin \theta \sin (\theta + p) + \cos \theta \cos (\theta + p) \cos J] - \\ & - \delta z \cos (\theta + p) \sin J \end{aligned}$$

$$\delta z_1 = -\delta x \sin \theta \sin J + \delta y \cos \theta \cos J + \delta z \cos J.$$

Ale J jest zawsze bardzo małym kątem, przeto można zawsze położyć $\cos J = 1$, $\sin J = J$, przyczem naturalnie trzeba wyrazić J w mierze łukowej [to znaczy, że trzeba wyrazić J w sekundach i podzielić przez 206264,8...]. Po tem uproszczeniu równania nasze przywiodą się do

$$(36) \quad \begin{cases} \delta x_1 = \delta x \cos p - \delta y \sin p + \delta z J \sin (\theta + p) \\ \delta y_1 = \delta x \sin p + \delta y \cos p - \delta z J \cos (\theta + p) \\ \delta z_1 = -\delta x J \sin \theta + \delta y \cos \theta + \delta z. \end{cases}$$

Można też wyprowadzić wzory służące do przejścia od ekliptyki z jednej epoki do równika z drugiej epoki lub odwrotnie, ale dogodniej jest wykonać to przekształcenie na dwa tempa. Tak np. jeżeli chcemy przejść od ekliptyki z epoki t_0 do równika z epoki t_1 , to wprzódby przechodzimy za pomocą wzorów (36) do ekliptyki z epoki t_1 a potem za pomocą wzorów (35) do równika z tejże epoki.

Mówiliśmy już o tem, że w metodzie Encke'go nie można zbyt długo liczyć perturbacje na podstawie tych samych elementów ściśle stycznych. Jakże obliczyć nowe elementy ściśle styczne? W bardzo prosty sposób. Trzeba wziąć współrzędne i prędkości planety, czy komety w chwili, którą przyjmujemy za epokę nowych elementów ściśle stycznych i obliczyć z nich nowe elementy. Załóżmy np., że liczyliśmy perturbacje z elementami odnoszącymi się do epoki t_0 , załóżmy dalej, że nowa epoka, dla której chcemy obliczyć elementy ściśle styczne, jest t . Obliczamy z da-

wnych elementów współrzędne Keplerowskie x_0, y_0, z_0 i perturbacje $\delta x, \delta y, \delta z$ dla czasu t . Wedle definicji

$$x = x_0 + \delta x, \quad y = y_0 + \delta y, \quad z = z_0 + \delta z$$

są to współrzędne planety w chwili t . Następnie również z dawnych elementów obliczamy prędkości

$$\frac{dx_0}{dt}, \quad \frac{dy_0}{dt}, \quad \frac{dz_0}{dt}$$

oraz ich przyrosty

$$\frac{d\delta x}{dt}, \quad \frac{d\delta y}{dt}, \quad \frac{d\delta z}{dt}$$

dla tego samego czasu t . Do obliczenia $\frac{d\delta x}{dt} \dots$ i t. d. używamy wzoru (15), ewentualnie (12). Należy przytem pamiętać, że te wzory zawierają ω tylko w pierwszej potędze. Zatem jeżeli postąpiliśmy tak jak w przykładzie w § 5, t. j. jeżeli pomnożyliśmy prawe strony równań ruchu przez ω^2 , to chcąc przejść do zwykłych jednostek musimy podzielić wyniki całkowania przez ω . Dopiero potem można dodać

$$\frac{d\delta x}{dt} \text{ do } \frac{dx_0}{dt}, \quad \frac{d\delta y}{dt} \text{ do } \frac{dy_0}{dt} \text{ i t. d.}$$

Wedle definicji

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{d\delta x}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + \frac{d\delta y}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz_0}{dt} + \frac{d\delta z}{dt}$$

są to prędkości planety (czy komety) w chwili t . Mając współrzędne i prędkości obliczamy elementy ze wzorów rozdz. XVIII-go, § 3, albo jeszcze krócej w następujący sposób. Ze wzorów

$$\begin{aligned} k\sqrt{p} \cos i &= x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \\ k\sqrt{p} \sin i \sin Q &= y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \\ -k\sqrt{p} \sin i \cos Q &= z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

obliczamy ϱ , i oraz p , potem ze wzorów

$$r \cos u = x \cos \varrho + y \sin \varrho$$

$$r \sin u = (-x \sin \varrho + y \cos \varrho) \cos i + z \sin i$$

r i u , zaś ze wzoru

$$r \frac{dr}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt}$$

$\frac{dr}{dt}$. Wtedy znowu ze wzorów

$$\sin \varphi \sin v = \frac{\sqrt{p}}{k} \frac{dr}{dt}$$

$$\sin \varphi \cos v = \frac{p}{r} - 1$$

obliczamy $e = \sin \varphi$ i v . Następnie przez wzór

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} E = \operatorname{cotg} (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi) \operatorname{tang} \frac{1}{2} v$$

obliczamy anomalię mimośrodkową E a przez równanie Keplera

$$M = E - e \sin E$$

anomalię średnią M . Dalej ze wzorów

$$\tilde{\omega} = u - v$$

$$\pi = \tilde{\omega} + \varrho$$

obliczamy $\tilde{\omega}$ i π a ze wzoru

$$a = \frac{p}{\cos^2 \varphi}$$

znajdujemy a , wreszcie ze wzoru

$$n = k^2 a^{-3/2}$$

określamy n . Aby otrzymać średni ruch w sekundach kątowych, trzeba w tym ostatnim wzorze pomnożyć prawą stronę przez 206264,8. Jeżeli orbita ma bardzo wielki mimośród, to trzeba określić odległość w perihelium oraz czas przejścia przez perihelium. Odległość w perihelium q obliczamy ze wzoru

$$q = \frac{p}{1+e} = \frac{p}{1+\sin \varphi},$$

zaś czas przejścia przez perihelium określamy z anomalii prawdziwej v i mimośrodu e . Osobne tablice ułatwiają to ostatnie zadanie.

7. Porównanie z obserwacjami. Efemerydy. Miejsca normalne. Orbity ostateczne.

Wiadomo, że z powodu „perturbacji” sprawionych przez przyciąganie innych ciał słonecznego systemu drogi planet i komet nie są elipsami. Ale jeżeli wyeliminujemy perturbacje, to otrzymamy elipsy Keplerowskie. Właśnie po to obliczamy perturbacje, powiedzmy „perturbacje specjalne”, aby ową eliminację wykonać. Otrzymana po eliminacji elipsa nie jest realną; ciało niebieskie nie bieży po niej. Jednakże jest to fikcja w zastosowaniu praktycznym pożyteczna, albowiem mając taką, jak ją nazywamy: „ostateczną orbitę” możemy przepowiadać pozycje planety. Dość jest do współrzędnych Keplerowskich w chwili, dla której mamy postawić przepowiednię, dodać odpowiednie perturbacje, aby otrzymać te współrzędne, które planeta w owej chwili posiadać powinna.

Przepowiednie tego rodzaju sprawdzają się z początku bardzo dobrze, potem coraz to gorzej. Nie w tem dziwnego, bo przecie określamy „ostateczną orbitę” z obserwacji, obserwacje zaś, choćby najlepsze, zawierają błędy. Z drugiej strony niema możności wyeliminować perturbacje z absolutną dokładnością. Gdy „ostateczna orbita” pocznie dawać nazbyt niedokładne przepowiednie, to nastąpi chwila, w której trzeba wypracować „teorię” owej małej planety, czy komety. Ale to kwestya, w którą tu wdawać się nie możemy; ograniczymy się do skromniejszego zadania, do określenia zwykłej „ostatecznej orbity”.

Korzystamy z tego, że zawsze już wiadome są elementy ściśle styczne, oraz z tego, że te elementy są zawsze dosyć bliskie do elementów ostatecznej orbity; przeto zamiast odejmować perturbacje od obserwowanych współrzędnych i zamiast obliczać orbitę wprost z tym sposobem poprawionych współrzędnych, obliczamy tylko poprawki elementów ściśle stycznych, t. j. różnice między elementami ostatecznymi a ściśle stycznymi. Zyskujemy w ten sposób niemałe uproszczenie i ułatwienie, bo owe poprawki są małe, przeto można pominąć ich kwadraty i wyższe potęgi.

Nasamprzód układamy efemerydę. To znaczy, że z najlepszych, jakie posiadamy, elementów ściśle stycznych obliczamy Keplerowskie współrzędne dla tych dat, z których posiadamy obserwacje. Tu można odrazu uwzględnić aberację planetarną. Wiadomo, że w chwili t obserwujemy nie tę pozycję, którą planeta fakty-

cznie w chwili t zajmuje, ale tę, którą zajmowała w chwili $t - \tau$, gdzie τ oznacza czas, którego potrzebowało światło, aby przebiegł od planety do obserwatorium. Do Keplerowskich współrzędnych dodajemy perturbacje obliczone dla tych samych dat co współrzędne, albowiem wszystko jedno, czy odejmiemy perturbacje od obserwowanych współrzędnych, czy też dodamy je do obliczonych Keplerowskich. Otrzymane w ten sposób heliocentryczne współrzędne zamienimy wreszcie na geocentryczne. Ale i te ostatnie nie są jeszcze gotowe do porównania z obserwacjami, bo obserwacje dają współrzędne widome. Trzeba więc jeszcze metodami wyłożonemi w rozdz. XII-tym przejść od współrzędnych geocentrycznych do widomych. Listę obliczonych tym sposobem pozycyi planety nazywamy „efemerydą“. Zazwyczaj efemerydy podają pozycye planety w równych, krótkich odstępach czasu, np. co cztery dni.

Następnie odejmujemy współrzędne wzięte z efemerydy od obserwowanych, przez co otrzymujemy szereg różnic [w sensie obs. — rach.], które dla krótkości nazwiemy: $h_1, h_2 \dots h_n$. Różnice te są oczywiście funkcjami poprawek $\Delta a, \Delta \pi$ i t. d. elementów i to funkcjami znikającemi, gdy te poprawki znikają. Ponieważ, jak to wyżej zauważyliśmy, poprawki $\Delta a \dots$ i t. d. są o tyle małe, iż można pominąć ich kwadraty i wyższe potęgi; przeto napiszemy równania liniowe kształtu

$$(37) \quad h = Ad\Omega + Bd\pi + Cdi + Ddq + EdM_0 + Fdn.$$

Zwykle porównujemy sferyczne współrzędne. Ponieważ każda kompletna obserwacja daje dwie sferyczne współrzędne, więc ilość równań jest wogóle dwa razy większa od ilości obserwacji. Ale pospolicie liczba obserwacji jest tak znaczna [niekiedy kilkaset], że trudno podołać mnóstwu równań. Łączymy przeto po kilka i kilkanaście sąsiednich (co do czasu) obserwacji w jedną fikcyjną obserwację. Mianowicie różnice h mogą być wyrażone przez szeregi Taylora uporządkowane wedle potęg czasu. Jeżeli tylko obserwacje są dobre a efemeryda nieźle przedstawia rzeczywistą drogę planety, to w ciągu dość znacznych odstępów czasu można ograniczyć się do wyrazów liniowych. Zatem można napisać:

$$\begin{aligned} h_1 &= c(t_1 - T_0) \\ h_2 &= c(t_2 - T_0) \\ &\dots \dots \dots \\ h_n &= c(t_n - T_0) \end{aligned}$$

W tych wzorach t_1, t_2, \dots, t_n oznaczają momenty czasu, w których zostały dokonane odnośne obserwacje, zaś T_0 jest to pewna epoka, której zresztą wyznaczać nie potrzebujemy. Utwórzmy średnią arytmetyczną

$$h_m = \frac{h_1 + \dots + h_n}{n} = c \left[\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} - T_0 \right] = c (t_m - T_0).$$

Widzimy, że nie różni się ona niczem od wyrażenia na poszczególne różnice; możemy przeto uważać h_m jako różnicę między pewną fikcyjną obserwacją wykonaną w chwili t_m a efemerydą. Jeżeli przydajemy obserwacjom rozmaite wagi, to zamiast zwykłej średniej arytmetycznej weźmiemy średnią, obliczoną z uwzględnieniem wag

$$h_m = \frac{p_1 h_1 + p_2 h_2 + \dots + p_n h_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = c [t_m - T_0],$$

przyczem

$$t_m = \frac{p_1 t_1 + p_2 t_2 + \dots + p_n t_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}.$$

Znowu więc czas fikcyjnej obserwacji jest średnią arytmetyczną z czasów poszczególnych obserwacji, przyczem czasy obserwacji mają te same wagi co obserwacje. Epoka T_0 może, jak to już wyżej powiedzieliśmy, pozostać nieoznaczoną.

W niektórych przypadkach trzeba w szeregu Taylora uwzględnić także kwadratowy wyraz. Łatwo domyśleć się, jakie wtedy trzeba wprowadzić modyfikacje.

Każdą parę fikcyjnych współrzędnych odnoszących się do tego samego czasu t_m nazywamy „miejszem normalnem“.

Jeżeli mamy n kompletnych obserwacji, lub miejsc normalnych, to możemy napisać $2n$ równań kształtu (37). Ponieważ mamy sześć niewiadomych, a liczba $2n$ jest zawsze większa niż 6, więc do rozwiązania równań (37) zawsze musimy stosować metodę najmniejszych kwadratów.

Obserwacje dają rektascensję i deklinację; przeto równania (37) są dwóch typów: w równaniach jednego typu

$$h = \cos \delta (\alpha_{\text{obs.}} - \alpha_{\text{efem.}}), \quad A = \cos \delta \frac{\partial \alpha}{\partial \Omega}, \quad B = \cos \delta \frac{\partial \alpha}{\partial \pi} \dots \text{ i t. d.}$$

z których wynikają następujące wzory na pochodne rektascensyi i deklinacyi względem heliocentrycznych, równikowych, prostokątnych współrzędnych planety

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= -\frac{\sin \alpha}{\Delta}, & \frac{\partial \delta}{\partial x} &= -\frac{\cos \alpha \sin \delta}{\Delta} \\ \cos \delta \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= \frac{\cos \alpha}{\Delta}, & \frac{\partial \delta}{\partial y} &= -\frac{\sin \alpha \sin \delta}{\Delta} \\ \cos \delta \frac{\partial \alpha}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial \delta}{\partial z} &= \frac{\cos \delta}{\Delta}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Zatem pierwsza część zadania jest wykonana. Aby znaleźć pochodne x, y, z względem Ω, i oraz π , weźmiemy równania (74) rozdz. XIII-go, t. j. równania

$$\left. \begin{aligned} x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) \\ y &= r(\cos u \sin \Omega \cos \varepsilon + \sin u \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin u \sin i \sin \varepsilon) \\ z &= r(\cos u \sin \Omega \sin \varepsilon + \sin u \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin u \sin i \cos \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

przyczem

$$u = v + \pi - \Omega. \quad (41)$$

Zmienna r wcale nie zależy od zmiennych stojących w nawiasach. — Bacząc na równanie (41) otrzymamy z równań (40)

$$\frac{\partial x}{\partial \Omega} = -r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) - \frac{\partial x}{\partial u}$$

.

Ale porównawszy wyraz w nawiasie z równaniami (40) spostrzeżemy, że to nie innego jak

$$y \cos \varepsilon + z \sin \varepsilon.$$

Napiszemy więc

$$\frac{\partial x}{\partial \Omega} = -(y \cos \varepsilon + z \sin \varepsilon) - \frac{\partial x}{\partial u}.$$

Tak samo znajdziemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \Omega} &= x \cos \varepsilon - \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial \Omega} &= x \sin \varepsilon - \frac{\partial z}{\partial u}. \end{aligned}$$

Następnie ze wzoru (41) wyprowadzimy związki

$$\frac{\partial x}{\partial \pi} = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial \pi} = \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial \pi} = \frac{\partial z}{\partial u},$$

zaś ze wzorów (40) związki

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial i} &= r \sin u \sin \varrho \sin i \\ \frac{\partial y}{\partial i} &= r (-\sin u \cos \varrho \sin i \cos \varepsilon - \sin u \cos i \sin \varepsilon) \\ \frac{\partial z}{\partial i} &= r (-\sin u \cos \varrho \cos i \sin \varepsilon + \sin u \cos i \cos \varepsilon). \end{aligned}$$

Moglibyśmy utworzyć $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ na podstawie równań (40), tak np. otrzymalibyśmy

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -r (\sin u \cos \varrho + \cos u \sin \varrho \cos i),$$

ale umyślnie pozostawiliśmy tymczasowo te pochodne w ogólnej formie, albowiem dla skrócenia rachunków dogodnie jest utworzyć $\frac{\partial x}{\partial u}$ i t. d. nie ze wzorów (40), a ze wzorów (74 bis) rozdz. XIII-go, w których jednakże zamiast a, b, c napiszemy $\sin a, \sin b, \sin c$

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = r \sin a \sin (A + u) \\ y = r \sin b \sin (B + u) \\ z = r \sin c \sin (C + u). \end{array} \right.$$

Ze wzorów (42) wynikają następujące wyrażenia pochodnych względem u :

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial u} = r \sin a \cos (A + u) = x \cotg (A + u) \\ \frac{\partial y}{\partial u} = = y \cotg (B + u) \\ \frac{\partial z}{\partial u} = = z \cotg (C + u). \end{array} \right.$$

Podstawimy $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ ze wzorów (43); jednocześnie zaś uprościmy wzory na $\frac{\partial x}{\partial i}, \frac{\partial y}{\partial i}$ i $\frac{\partial z}{\partial i}$ za pomocą wzorów, które łatwo jest wyprowadzić ze wzorów (77) rozdziału XIII-go, mianowicie

$$\left. \begin{aligned} \sin \Omega \sin i &= \cos a \\ -\cos \Omega \sin i \cos \varepsilon - \cos i \sin \varepsilon &= \cos b \\ -\cos \Omega \sin i \sin \varepsilon + \cos i \cos \varepsilon &= \cos c \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

i napiszemy ostatecznie:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \pi} &= x \cotg(A+u), \quad \frac{\partial y}{\partial \pi} = y \cotg(B+u), \quad \frac{\partial z}{\partial \pi} = z \cotg(C+u) \\ \frac{\partial x}{\partial \Omega} &= -x \cotg(A+u) - y \cos \varepsilon - z \sin \varepsilon \\ \frac{\partial y}{\partial \Omega} &= -y \cotg(B+u) + x \cos \varepsilon \\ \frac{\partial z}{\partial \Omega} &= -z \cotg(C+u) + x \sin \varepsilon \\ \frac{\partial x}{\partial i} &= r \sin u \cos a, \quad \frac{\partial y}{\partial i} = r \sin u \cos b, \quad \frac{\partial z}{\partial i} = r \sin u \cos c. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Mamy więc już dziewięć pochodnych x, y, z względem elementów π, Ω i i . Pozostają jeszcze do utworzenia pochodne względem elementów φ, M_0 i n . Współrzędne heliocentryczne, prostokątne x, y, z zależą od tych ostatnich elementów przez pośrednictwo r i v ; tedy np.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial x}{\partial M_0} = \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial M_0} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial M_0}, \\ \frac{\partial x}{\partial n} &= \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial n}. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Wzory na pochodne y i z różnią się od wzorów (46) tylko tem, że na miejscu x stoi y , względnie z . Co do pochodnych względem r , to wiadomo, że

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{z}{r}, \quad (47 a)$$

co zaś do pochodnych względem v , to ze wzoru (41) wynikają związki

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial u}. \quad (47 b)$$

Stąd na podstawie wzorów (43) znajdujemy

$$(48) \quad \frac{\partial x}{\partial v} = x \operatorname{cotg}(A + u), \quad \frac{\partial y}{\partial v} = y \operatorname{cotg}(B + u), \quad \frac{\partial z}{\partial v} = z \operatorname{cotg}(C + u).$$

Pozostaje jeszcze do utworzenia sześć pochodnych

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial r}{\partial M_0}, \quad \frac{\partial r}{\partial n}, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial M_0}, \quad \frac{\partial v}{\partial n},$$

ale możemy oszczędzić sobie tego trudu, bo obliczyliśmy te pochodne w rozdz. XVIII-tym, § 7 [wzory B, C, F, G, H, J]. Znaleźliśmy tam

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial r}{\partial \varphi} = -a \cos \varphi \cos v \\ \frac{\partial r}{\partial M_0} = a \operatorname{tang} \varphi \sin v \\ \frac{\partial r}{\partial n} = a \operatorname{tang} \varphi \sin v \cdot (t - T) - \frac{2r}{3n} 206\,264,8\dots \\ \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \left(\frac{2}{\cos \varphi} + \operatorname{tang} \varphi \cos v \right) \sin v \\ \frac{\partial v}{\partial M_0} = \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi \\ \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi \cdot (t - T). \end{array} \right.$$

Skoro podstawimy we wzory (46) wartości pochodnych wzięte ze wzorów (47), (48) i (49), to otrzymamy następujące wyrażenia pochodnych x , y , z względem φ , M_0 i n

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -x \left[\frac{a}{r} \cos \varphi \cos v + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \operatorname{cotg}(A + u) \left(\frac{2}{\cos \varphi} + \operatorname{tang} \varphi \cos v \right) \sin v \right] \\ \frac{\partial x}{\partial M_0} = x \left[\frac{a}{r} \operatorname{tang} \varphi \sin v + \operatorname{cotg}(A + u) \cdot \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi \right] \\ \frac{\partial x}{\partial n} = x \left[\frac{a}{r} \operatorname{tang} \varphi \sin v \cdot (t - T) - \frac{2}{3n} 206\,264,8\dots + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \operatorname{cotg}(A + u) \cdot \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi \cdot (t - T) \right]. \end{array} \right.$$

Wzorów na pochodne y i z nie piszemy, bo różnią się od wzorów (50) tylko tem, że zamiast x przed nawiasem stoi y , względnie z , a zamiast $\cotg(A + u)$ stoi $\cotg(B + u)$, względnie $\cotg(C + u)$. — Należałoby jeszcze pochodne wzięte ze wzorów (39), (45) i (50) podstawić we wzory (38); otrzymalibyśmy wtedy ostateczne wzory na

$$\cos \delta \frac{\partial \alpha}{\partial Q}, \quad \cos \delta \frac{\partial \alpha}{\partial i} \dots \text{ i t. d.,}$$

razem dwanaście wzorów na współczynniki równań (37) obu typów. Napisać je łatwo, ale ponieważ są to nazbyt długie wzory, więc oszczędzimy sobie trudu pisania. Zresztą dogodniej jest wyliczać wzory (39), (45) i (50) i podstawiać w równania (38) gotowe liczbowe wartości pochodnych

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} \dots \text{ i t. d.,} \quad \frac{\partial x}{\partial Q} \dots \text{ i t. d.}$$

W razie, gdy mimośród jest bardzo wielki, powyższe wzory są niedogodne, bo wartości liczbowe zbyt zależą od błędów. Gdy zaś orbita jest paraboliczna albo hyperboliczna, to samo przez się rozumie się, że wzory powyższe stosowanemi być nie mogą. O hyperboli możemy zupełnie przemilczeć, zaś o paraboli i o elipsach z bardzo wielkim mimośrodem wystarczy powiedzieć, że należy położyć $\sin \varphi = 1$ a zamiast elementów M_0 i n wprowadzić czas przejścia przez perihelium T i odległość w perihelium q . Wskutek tego trzeba wzory (49) i (50) zastąpić przez inne, których tu jednak wyprowadzać nie będziemy. Chcących poinformować się co do rzeczonych wzorów, jak również tych, którzy chcą dokładniej zapoznać się z teorią perturbacyi, odsyłamy do dzieł specjalnych, przedewszystkiem zaś do dzieła ś. p. Dra Jana Kowalczyka pod tytułem: „O sposobach obliczania przeszkód w biegu ciał niebieskich“ [Warszawa, 1901].

Literatura.

J. C. Watson: Theoretical astronomy. Filadelfia, 1869.

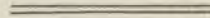
J. Kowalczyk: O sposobach wyznaczania przeszkód w biegu ciał niebieskich. Warszawa, 1901.

P. A. Hansen: Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kl. Planeten. Trzy rozprawy w „Abhandlungen der kg. sächs. Ges. der Wissenschaften. Math.-phys. kl.“, tomy V, VI i VII.

J. F. Encke: Ueber mechanische Quadratur. Berliner astron. Jahrbuch f. 1837.

— Uber die Berechnung der speciellen Störungen. Berliner astr. Jahrbuch f. 1837 i f. 1838.

B. Baillaud: Cours d'astronomie. II tom, Paryż, 1896.



ROZDZIAŁ XXI.

Teorya ruchu księżycyca.

1. Równania ruchu.

Ruch księżycyca naokoło ziemi nie jest łatwy do opisanía: najzwyklejsze obserwacye instrumentalne już w ciągu jednego miesiąca okazują, że orbita księżycyca nie jest ani krzywą płaską, ani zamkniętą. Długość węzła wstępującego na równiku zmienia się o przeszło stopień w ciągu jednego obiegu. Chcąc osiągnąć jaką taką dokładność nie można zadowolnić się prawami Keplera; trzeba uwzględnić perturbacye zależne od przyciągania słońca. Naturalnie trzeba także uwzględnić perturbacye sprawione przez przyciąganie planet i przez spłaszczenie ziemi, ale tak jedne, jak drugie są nieznaczne i wolno uwzględnić je dopiero w dalszych przybliżeniach.

Jeżeli ograniczymy się do wpływu słońca, to teorya ruchu księżycyca będzie oczywiście specjalnym przypadkiem zadania trzech ciał. Wiemy, jakie trudności przedstawia to zadanie, wiemy, że ogólne całki są nieznanne. Jeżeli w przypadku księżycyca możemy to zadanie rozwiązać wprawdzie nie ściśle, ale ze zadawalniającem z teoretycznego punktu widzenia przybliżeniem; to głównie dlatego, że odległość słońca od księżycyca jest blisko 400 razy większa, niż odległość księżycyca od ziemi.

Możemy tu odrazu stosować wzory (7) rozdz. XIX-go, w których środek współrzędnych prostokątnych jest identyczny ze środkiem masy systemu:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \frac{\partial W}{\partial x_1}, & m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= \frac{\partial W}{\partial y_1}, & m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= \frac{\partial W}{\partial z_1} \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= \frac{\partial W}{\partial x_2}, & \dots & & \dots & \\ m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} &= \frac{\partial W}{\partial x_3}, & \dots & & \dots & \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

przyczem

$$W = \frac{m_1 m_2}{R_{12}} + \frac{m_1 m_3}{R_{13}} + \frac{m_2 m_3}{R_{23}}.$$

R_{ik} oznacza odległość pomiędzy punktami i i k , zaś m_i, m_k są to masy punktów materialnych; co do stałej przyciągania, to przyjęliśmy czasowo, że jest równa jedności. Załóżmy, że x_1, y_1, z_1 są to współrzędne ziemi, m_1 jej masa oraz, że symbole m_2, x_2, y_2, z_2 odnoszą się do księżycy, a m_3, x_3, y_3, z_3 do słońca. Przenieśmy środek współrzędnych do środka ziemi, położmy $x_2 - x_1 = x$ i t. d. $x_3 - x_1 = x'$ i t. d., a otrzymamy z równań (1), przez zupełnie oczywiste i łatwe działania, następujące równania ruchu księżycy, odniesione do osi poruszających się razem ze ziemią, ale mających stałe kierunki

$$(2) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{m_2} \frac{\partial W}{\partial x_2} - \frac{1}{m_1} \frac{\partial W}{\partial x_1} = - (m_1 + m_2) \frac{x}{R_{12}^3} - m_3 \frac{x'}{R_{13}^3} - m_3 \frac{(x - x')}{R_{23}^3}$$

Zamiast R_{12}, R_{13} wprowadzamy nowe oznaczenia

$$(3) \quad \begin{cases} R_{12}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ R_{13}^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2 \\ R_{23}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = \Delta^2. \end{cases}$$

Chcąc całkować równania (2) musimy uważać współrzędne słońca x', y', z' za dane funkcyje czasu. Ale warto je wyrazić przez współrzędne odniesione do wspólnego środka masy księżycy i ziemi, albowiem ruch słońca względem tego ostatniego punktu odbywa się po elipsie Keplerowskiej¹⁾, wskutek czego wyrażenia współrzędnych słońca względem wspólnego środka masy księżycy i ziemi są stosunkowo proste. Oznaczmy ten wspólny środek masy księżycy i ziemi przez G . Leży on na prostej, łączącej środki mas księżycy i ziemi, ale jeszcze wewnątrz ziemi na odległości około

¹⁾ Naturalnie przy założeniu, że istnieją tylko trzy ciała. Gdyby było więcej ciał, to ruch nie byłby ściśle Keplerowskim. Jednakże perturbacje ruchu słońca sprawiane przez inne planety są tak małe, że tu, gdzie chodzi o ruch księżycy, a nie o ruch słońca, — wolno je zupełnie pominąć.

$\frac{3}{4}$ promienia równikowego od jej środka masy. Współrzędne punktu G względem środka masy ziemi są

$$x \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad y \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad z \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Tedy współrzędne słońca względem punktu G są

$$x_0 = x' - x \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad y_0 = y' - y \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

$$z_0 = z' - z \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

(4)

Stąd odwrotnie wynika

$$x' = x_0 + x \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \dots \text{ i t. d.}$$

$$R_{13}^2 = r'^2 = r_0^2 + 2rr_0 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos \gamma_0 + r^2 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2,$$

(4 bis)

przyczem

$$rr_0 \cos \gamma_0 = xx_0 + yy_0 + zz_0.$$

Tak samo

$$x - x' = x - x_0 - x \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} x - x_0,$$

stad zaś

$$R_{13}^2 = \Delta^2 = r_0^2 - 2rr_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos \gamma_0 + r^2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2. \quad (5)$$

Należy zauważyć, że x, y, z, x_0, y_0, z_0 są to tak zwane współrzędne Jacobi'ego. Gdybyśmy wprowadzili jeszcze momenty ilości ruchu (por. rozdz. XIX-ty, § 9)

$$\mu \frac{dx}{dt}, \quad \mu \frac{dy}{dt}, \quad \mu \frac{dz}{dt}; \quad \mu_0 \frac{dx_0}{dt}, \quad \mu_0 \frac{dy_0}{dt}, \quad \mu_0 \frac{dz_0}{dt};$$

przyczem

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu_0 = \frac{m_2 (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

i położyli

$$q_1 = x, \quad q_2 = y \dots \text{ i t. d.}$$

$$p_1 = \mu \frac{dx}{dt}, \quad p_2 = \mu \frac{dy}{dt} \dots \text{ i t. d.,}$$

to otrzymalibyśmy „kanoniczne współrzędne“ Jacobiego (por. § 9 rozdz. XIX-go).

Powracamy do poprzednich równań. Przedewszystkiem wiadomym sposobem rozwijamy

$$\frac{1}{R_{13}}, \quad \frac{1}{R_{23}}$$

w szeregi funkcyj kulistych¹⁾:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R_{13}} = \frac{1}{r'} = \frac{1}{r_0} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{r}{r_0^3} \cos \gamma_0 + \\ \qquad \qquad \qquad + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{r^2}{r_0^5} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \gamma_0 - \frac{1}{2} \right) - \dots \\ \frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r_0} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{r}{r_0^3} \cos \gamma_0 + \\ \qquad \qquad \qquad + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{r^2}{r_0^5} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \gamma_0 - \frac{1}{2} \right) + \dots \end{array} \right.$$

Szeregi te są szybko zbieżne, bo $\frac{r}{r_0}$ wynosi tylko około $\frac{1}{400}$.

Teraz podstawiamy nowe wyrażenia współrzędnych słońca ze wzorów (4 bis) w prawe strony wzorów (2), piszemy (wedle wzorów (3)) r zamiast $R_{12} \dots$ i t. d., poczem otrzymujemy

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} = -(m_1 + m_2) \frac{x}{r^3} - \frac{m_3}{r'^3} \left(x_0 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x \right) + \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{m_3}{\Delta^3} \left(x_0 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} x \right) \\ \dots \dots \dots \\ \text{i t. d. i t. d.} \end{array} \right.$$

Zaraz widać, że powyższe równania mają kształt

$$(7 \text{ bis}) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial z},$$

¹⁾ Por. rozdz. V-ty, § 2.

przyczem

$$F = \frac{m_1 + m_2}{r} + \frac{m_3}{r'} \frac{m_1 + m_2}{m_2} + \frac{m_3}{\Delta} \frac{m_1 + m_2}{m_1}. \quad (8)$$

Widzimy więc, że F jest to pewien potencjał. Można go rozwinąć w szereg funkcyj kulistych, trzeba tylko we wzorze (8) zastąpić

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{R_{13}} \quad \text{i} \quad \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{R_{23}}$$

przez rozwinięcia w szeregi podane we wzorach (6). Po podstawieniu zobaczymy zaraz, że można opuścić wyraz

$$\frac{m_3}{r_0} (m_1 + m_2) \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right),$$

jako wcale nie zawierający współrzędnych księżyca. Przekonamy się także, że wyraz zawierający $\cos \gamma_0$ ma współczynnik równy zeru. Wskutek tego rozwinięcie potencjału F w szereg funkcyj sferycznych przybierze następującą postać:

$$F = \frac{m_1 + m_2}{r} + \frac{m_3}{r_0} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \gamma_0 - \frac{1}{2} \right) + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^3 \left(\frac{5}{2} \cos^3 \gamma_0 - \frac{3}{2} \cos \gamma_0 \right) + \dots \right] \quad (9)$$

2. Osie kręcące się.

Z dawniejszych autorów Euler posługiwał się kręcącemi się osiami, z nowszych G. W. Hill. W rękach Hilla a następnie Poincarégo zastosowanie kręcących się osi doprowadziło do pierwszorzędných odkryć.

Zakładamy, że osie x i y obracają się naokoło osi z ze stałą kątową prędkością n' . Wskutek tego równania (7 bis) przechodzą w równania

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n' \frac{dy}{dt} - n'^2 x &= \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n' \frac{dx}{dt} - n'^2 y &= \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial F}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

w których współrzędne księżycy oznaczyliśmy znowu przez x, y, z , aby nie wprowadzać nowych symbolów. Funkcja F nie zmienia się przez przekształcenie do kręcących się osi, albowiem zawiera tylko wzajemne odległości trzech punktów.

Kładąc

$$(11) \quad F' = F + \frac{1}{2} n'^2 (x^2 + y^2)$$

nadajemy równaniom (10) postać:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n' \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F'}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n' \frac{dx}{dt} = \frac{\partial F'}{\partial y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial F'}{\partial z} \end{array} \right.$$

następnie zakładamy, że płaszczyzna x, y jest identyczna z płaszczyzną tej elipsy¹⁾, po której słońce porusza się naokoło punktu G . Stąd wynika, że współrzędne słońca są $x_0, y_0, 0$. Następnie zakładamy, że n' jest to tak zwany średni ruch słońca, inaczej mówiąc, kładziemy

$$n' = \frac{2\pi}{T'}$$

gdzie T' oznacza rok gwiazdowy. Gdyby droga słońca naokoło punktu G była kołem, to n' byłoby rzeczywistą kątową prędkością słońca i możnaby założyć, że jedna z osi ekliptycznych, np. x stale przechodzi przez słońce, tak zaś przechodzić będzie nie przez samo słońce, a przez fikcyjny ruchomy punkt, zwany (pierwszem) średnim słońcem (por. rozdz. VII-my, § 1).

Ponieważ nie znamy żadnej metody, któraby dawała od razu ogólne wyrażenia współrzędnych księżycy w ruchu zakłóconym przez słońce, więc musimy uciec się do metod okólnych. Wszystkie okólne metody można podzielić na dwie kategorie: do jednej należą te metody, w których uważamy ruch jako chwilowo eliptyczny, ale zakładamy, że elementy elipsy wciąż zmieniają się; jest to metoda „waryacyi stałych dowolnych⁴⁾”, o której była mowa w rozdziale XIX-tym; do drugiej te metody, w których założenia, że

¹⁾ Choć to nie odpowiada ściśle rzeczywistości, będziemy nazywać tę płaszczyznę ekliptyką.

tor księżycy jest elipsą, nie robimy, natomiast staramy się uczynić zadość równaniom różniczkowym przez kolejne przybliżenia. Odpowiednio do tego wprowadzamy z początku pewne upraszczające założenia, które następnie kolejno odrzucamy. W danym razie wypada nam trzymać się drugiej metody, bo gdybyśmy zechcieli trzymać się pierwszej, to stracilibyśmy rozmaite dogodności i korzyści, wynikające z użycia współrzędnych prostokątnych. Wyobrażamy sobie wyrażenia na współrzędne księżycy i słońca rozwinięte w szeregi postępujące wedle potęg małych stałych: e , e' , γ i a'^{-1} i w kolejnych przybliżeniach wprowadzamy współczynniki coraz to wyższych potęg tych małych stałych. Pierwsze dwie stałe są to tak zwane „mimośrodory orbit“ księżycy i słońca. Nazwa „mimośród orbity słońca“ jest zupełnie odpowiednia, bo w naszej teorii droga słońca naokoło punktu G jest rzeczywiście elipsą, ale nazwa „mimośród orbity księżycy“ nie jest odpowiednia, bo orbita księżycy nie jest elipsą, a w dalszych przybliżeniach nie jest nawet krzywą zamkniętą. Jednakże ponieważ zdawna przyzwyczajono się stosować terminologię elipsy do orbity księżycy, przeto i my nie odstępimy od zwyczaju. Musimy tylko wytłómaczyć, co właściwie należy rozumieć pod „mimośrodem orbity księżycy“.

Różni autorowie przyjmują różne definicje stałej e podyktowane przez pewne względy praktyczne. Roztrząsać tych definicji nie możemy, bo to zaprowadziłoby nas nazbyt daleko; powiemy tylko tyle, że e ma zawsze znaczenie mało różne od tego znaczenia, które posiada w przypadku elipsy; to znaczy, że gdybyśmy w jakiejkolwiek chwili wzięli elipsę „ściśle styczną“ t. j. tę, która w danej chwili najlepiej przystaje do orbity księżycy, to jej mimośród różniłby się od stałej e tylko o wielkości wyższego rzędu.

Przejdźmy teraz do stałych γ i $\frac{1}{a'}$. Pierwsza stała, to nie innego jak styczna kąta nachylenia orbity księżycy do ekliptyki, t. j.

$$\gamma = \text{tang } i.$$

Co do a' , to ta stała jest określona przez równanie:

$$m_1 + m_2 + m_3 = n'^2 a'^3. \quad (13)$$

Liczbowa jej wartość różni się bardzo nieznacznie od połowy wielkiej osi orbity słońca względem ziemi, czyli, co na jedno wychodzi, orbity ziemi naokoło słońca.

3. Pierwsze przybliżenie. Wyrazy rzędu zero. Orbita pośrednia [*Orbite intermédiaire, Intermediate orbit, intermediate Bahn*].

W dawniejszych metodach po większej części zaniehdywano w pierwszym przybliżeniu przyciąganie słońca; wskutek tego zadanie przywodziło się do zadania dwu ciał i ruch stawał się eliptrycznym. W ten sposób orbita pośrednia [nazwę tę wprowadził Gyldeń dla oznaczenia przybliżonej orbity] była elipsą o tyle tylko nieokreśloną, że jej linia węzłów i linia absydalna, t. j. prosta, łącząca perigaeum z ogniskiem, nie były stałe, ale poruszały się w pewien dowolny sposób. Zakładano mianowicie, że obie te linie poruszają się z pewnemi stałemi prędkościami kątowemi, które określano przy dalszych przybliżeniach. G. W. Hill wychodzi ze zupełnie odmiennego założenia. Zaniehdbuje tylko część perturbacyi sprawionych przez słońce i otrzymuje orbitę pośrednią odrazu różną od elipsy.

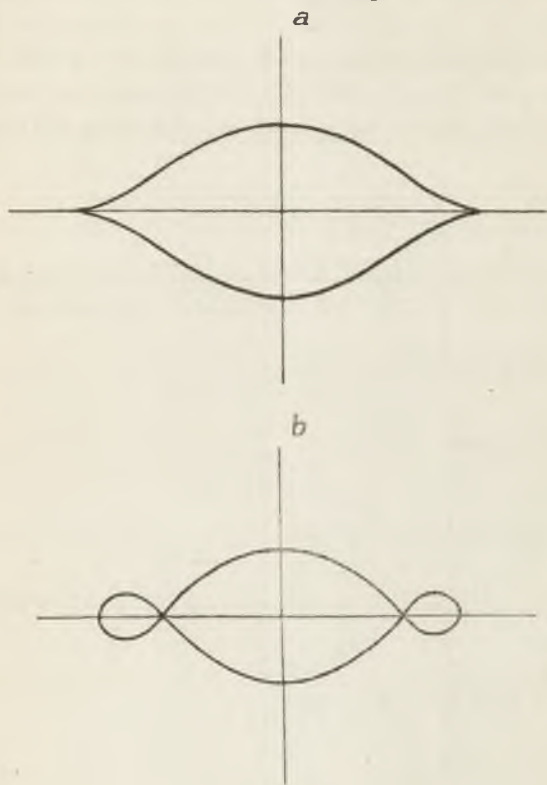
Orbita pośrednia Hilla jest krzywą zamkniętą względem osi kręcących się razem ze średnim słońcem i symetryczną zarówno względem osi x jak osi y .

Przy małych wartościach m (dla księżycy $m = \frac{1}{12}$ mniej więcej) krzywa ta jest dość podobna do elipsy. Gdy m osiągnie wartość 1,78, to krzywa ta ma na osi x [na której znajduje się słońce] punkty zwrotu (ostrza) jak na ryc. 36 *a*. Hill zatrzymał się na tym rezultacie, ale Poincaré poprowadził badanie dalej i okazał, że jeszcze większym wartościom m odpowiadają krzywe z dwoma punktami podwójnymi (jak na ryc. 36 *b*) na osi x , oraz, że gdy m wciąż dalej wzrasta, to owe punkty podwójne najpierw schodzą się w początku współrzędnych a potem znikają, zaś krzywa znów staje się krzywą zamkniętą bez punktów podwójnych i bez punktów zwrotu, ale księżyc przebiega ją w kierunku wstecznym.

Orbita pośrednia Hilla wynika z pewnego specjalnego rozwiązania zadania trzech ciał, które więcej zbliża się do rzeczywistości niż ruch Keplerowski. Swoją drogą orbita pośrednia Hilla nie odpowiada ogólnym całkom uproszczonych równań ruchu, — te bowiem pozostają nieznanne; odpowiada ona pewnemu specjalnemu rozwiązaniu tych równań, zawierającemu niepełną ilość stałych dowolnych.

Do rozwiązania, o którym mowa, dochodzimy w następujący sposób:

Nie rozróżniamy punktu G od środka masy ziemi, wskutek czego $r' = r_0$. Ponieważ to założenie jest równoważne założeniu, że masa księżyca jest znikoma wobec masy ziemi, przeto w rozwinięciu funkcji F [wzór (9)] kładziemy $\frac{m_2}{m_1} = 0$. Oprócz tego wpro-



Ryc. 36.

wadzamy jeszcze inne uproszczenia. Po pierwsze zakładamy, że orbita słońca jest kołem, t. j. że $e' = 0$, zaś $r' = r_0 = a'$, gdzie a' jest to stała. Po drugie zakładamy, że księżyc krąży w ekliptyce, t. j. kładziemy $z = 0$, $\text{tang } i = \gamma = 0$. Po trzecie zakładamy, że można zaniedbać stosunek a/a' , który, jak wiadomo, wynosi około $\frac{1}{400}$.

Zobaczmy teraz, jak przy tych założeniach będą wyglądać równania (12). Oczywiście trzecie równanie (12) będzie identycznie spełnione; pozostaną tylko dwa pierwsze, w tych zaś funkcya F' znacznie się uprości. Z równania (11) wiemy, że F' zawiera funkcję F , której rozwinięcie w szereg było podane we wzorze (9). W szeregu tym nie będziemy uwzględniać dalszych wyrazów, bo wobec poczynionych uproszczeń nie miałyby to sensu; zatrzymamy tylko dwa pierwsze wyrazy. Pierwszy z nich pozostawiamy niezmiennym, drugi zaś przekształcamy w następujący sposób. W równaniu (13) m_3 jest przeszło 300 000 razy większe od sumy pozostałych dwóch mas, można tedy na mocy równania (13) napisać

$$\frac{m_3}{a'^3} = n'^2.$$

Przy obecnych założeniach słońce wciąż znajduje się na osi x , ponieważ zaś kąt γ_0 jest to kąt między promieniem wodzącym księżycy a osią x , tedy

$$r \cos \gamma_0 = x.$$

Z drugiej strony

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

zatem można napisać

$$F = \frac{m_1 + m_2}{r} + n'^2 (x^2 - \frac{1}{2} y^2) + \dots \text{ wyrazy, które pomijamy.}$$

Stąd zaś

$$(14) \quad F' = \frac{m_1 + m_2}{r} + n'^2 \frac{3}{2} x^2 + \dots$$

a równania (12) przechodzą w:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n' \frac{dy}{dt} = 3n'^2 x - \frac{m_1 + m_2}{r^3} x \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n' \frac{dx}{dt} = - \frac{m_1 + m_2}{r^3} y. \end{array} \right.$$

Teraz chodzi o to, żeby znaleźć peryodyczną całkę tych dwóch równań. Gdy x i y będą funkcjami peryodycznymi czasu, to droga punktu względem kręcących się osi będzie zamkniętą. Hill podał

kompletne rozwiązanie tego zadania. Do równań (15) wprowadza nową jednostkę czasu kładąc

$$dt = \frac{d\tau}{n - n'} = \frac{m}{n'} d\tau.$$

Symbole n i n' oznaczają, jak zwykle, średnie ruchy księżyca i słońca, zaś

$$m = \frac{n'}{n - n'}$$

jest to nie innego, jak stosunek miesiąca do roku.

Położmy jeszcze dla krótkości

$$\frac{m_1 + m_2}{(n - n')^2} = (m_1 + m_2) \frac{m^2}{n'^2} = k,$$

a będziemy mogli napisać równania (15) w kształcie

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m \frac{dy}{d\tau} - 3m^2x + \frac{kx}{r^3} &= 0 \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2m \frac{dx}{d\tau} + \frac{ky}{r^3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15 \text{ bis})$$

4. Całkowanie równań (15 bis).

Napiszmy te równania w kształcie:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m \frac{dy}{d\tau} &= \frac{\partial F''}{\partial x} = 3m^2x - \frac{kx}{r^3} \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2m \frac{dx}{d\tau} &= \frac{\partial F''}{\partial y} = -\frac{ky}{r^3}, \end{aligned} \right\} \quad (15 \text{ ter})$$

przyczem

$$F'' = \frac{k}{r} + \frac{3}{2} m^2 x^2.$$

Odrzućmy, że równania (15 ter) mają całkę

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 \right] = F'' + C = C + \frac{k}{r} + \frac{3}{2} m^2 x^2. \quad (16)$$

Z trzech równań (15 ter) i (16) wyrugujemy $\frac{k}{r}$ i w ten sposób otrzymamy dwa równania jednorodne. Za pierwszym razem

pomnożymy pierwsze równanie przez x , drugie przez y , trzecie przez 1 i dodamy do siebie; za drugim pomnożymy pierwsze przez y , drugie przez $-x$, a trzecie przez 0 i znów dodamy. Wtedy — pamiętając jeszcze o tem, że: $x^2 + y^2 = r^2$ oraz używając dla krótkości znakowania Newtona, t. j. pisząc \dot{x} zamiast $\frac{dx}{dt}$ i t. d. — otrzymamy równania:

$$(17) \quad \begin{cases} x\ddot{x} + y\ddot{y} + 2m(y\dot{x} - x\dot{y}) + \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{9}{2}m^2x^2 = C \\ y\ddot{x} - x\ddot{y} - 2m(y\dot{y} + x\dot{x}) - 3m^2xy = 0. \end{cases}$$

Wprowadzimy jeszcze nowe zmienne:

$$u = x + iy, \quad s = x - iy,$$

gdzie

$$i = \sqrt{-1}.$$

Stąd wynika zaraz

$$x = \frac{1}{2}(u + s), \quad y = -\frac{1}{2}i(u - s)$$

a równania (17) przechodzą na równania

$$\begin{aligned} u\ddot{s} + \ddot{u}s + \dot{u}\dot{s} - 2mi(u\dot{s} - s\dot{u}) - \frac{9}{4}m^2(u + s)^2 &= 2C \\ u\ddot{s} - \ddot{u}s - 2mi(u\dot{s} + s\dot{u}) - \frac{3}{2}m^2(u^2 - s^2) &= 0, \end{aligned}$$

co można zaraz napisać w kształcie:

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}(us) - \dot{u}\dot{s} - 2mi(u\dot{s} - s\dot{u}) - \frac{9}{4}m^2(u + s)^2 = 2C \\ \frac{d}{dt}(u\dot{s} - s\dot{u} - 2mius) - \frac{3}{2}m^2(u^2 - s^2) = 0. \end{cases}$$

Ponieważ całki mają być funkcyjami peryodycznymi, więc spróbujemy uczynić zadość równaniom (18) przez szeregi

$$(19) \quad u = A\zeta \sum_j a_{2j} \zeta^{2j}, \quad s = A\zeta^{-1} \sum_{-j} a_{-2j} \zeta^{2j},$$

gdzie

$$\zeta = e^{it},$$

zaś j może przybierać wszelkie całe wartości poczynając od $-\infty$ aż do $+\infty$. Oczywiście można uczynić zadość równaniom (18)

przez powyższe całki, o ile uda się wyznaczyć stałą A oraz stałe a_{2j} , a_{-2j} tak, aby szeregi były zawsze zbieżne. Podstawmy tedy wartości na u i s ze wzorów (19) we wzory (18). Oczywiście możemy napisać

$$u = A \Sigma a_{2j} \zeta^{2j+1}, \quad s = A \Sigma a_{-2k-2} \zeta^{2k+1}.$$

Stąd

$$us = A^2 \Sigma \Sigma a_{2j} a_{-2k-2} \zeta^{2j+2k+2},$$

następnie ze względu na to, że

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{d}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\tau} = i e^{i\tau} \frac{d}{d\zeta} = i \zeta \frac{d}{d\tau}$$

$$\dot{u} = i A \Sigma (2j+1) a_{2j} \zeta^{2j+1}, \quad \dot{s} = i A \Sigma (2k+1) a_{-2k-2} \zeta^{2k+1}$$

$$u\dot{s} - s\dot{u} = i A^2 \Sigma \Sigma (2k-2j) a_{2j} a_{-2k-2} \zeta^{2j+2k+2}$$

$$u\dot{s} = -A^2 \Sigma \Sigma (2j+1)(2k+1) a_{2j} a_{-2k-2} \zeta^{2j+2k+2}.$$

Otrzymamy tedy następujące dwa równania warunkowe

$$A^2 \Sigma \Sigma \left\{ [-(2j+2k+2)^2 + (2j+1)(2k+1) + 2m(2k-2j)] a_{2j} a_{-2k-2} - \frac{9}{4} m^2 [a_{2j} a_{2k} + 2a_{2j} a_{-2k-2} + a_{-2j-2} a_{-2k-2}] \right\} \zeta^{2j+2k+2} = 2C \quad 1)$$

oraz

$$A^2 \Sigma \Sigma \left\{ [-(2k+1)^2 - (2j+1)^2] + 2m(2j+2k+2) \right\} a_{2j} a_{-2k-2} - \frac{3}{2} m^2 (a_{2j} a_{2k} - a_{-2j-2} a_{-2k-2}) \zeta^{2j+2k+2} = 0.$$

Współczynniki przy kolejnych potęgach ζ muszą być oddzielnie równe zero, oprócz współczynnika przy potędze zero w pierwszym równaniu, który ma być równy stałej $2C$. Zatem każdy współ-

1) Nawias przy $\frac{9}{4} m^2$ otrzymujemy w ten sposób:

$$(u+s)^2 = (u+s)(u+s) = A^2 \Sigma (a_{2j} \zeta^{2j+1} + a_{-2j-2} \zeta^{2j+1}) (a_{2k} \zeta^{2k+1} + a_{-2k-2} \zeta^{2k+1}).$$

2) bo

$$(2k-2j)(2j+2k+2) =$$

$$= [(2k+1) - (2j+1)] [2k+1] + (2j+1) = (2k+1)^2 - (2j+1)^2.$$

czynnik daje warunkowe równanie za wyjątkiem współczynnika przy potędze zero w drugim równaniu, który jest identycznie równy zeru.

Oddzielając te wyrazy, w których

$$j + k + 1 = 0,$$

otrzymujemy dwa równania, mianowicie:

$$(20) \quad \Sigma \left\{ (2j+1)(2j+1+4m) + \frac{9}{2} m^2 \right\} a_{2j}^2 + \\ + \frac{9}{2} m^2 a_{2j} a_{-2j-2} \Big\} = -\frac{2C}{A^2}$$

i

$$0 = 0,$$

oddzielając zaś kolejno wyrazy, w których

$$j + k + 1 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{ i t. d.},$$

otrzymamy szereg równań, które można napisać ogólnie w postaci

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \left[4p^2 + (2j+1)(2j-2p+1) + \right. \\ \quad \left. + 4m(2j-p+1) + \frac{9}{2} m^2 \right] a_{2j} \cdot a_{2j-2p} + \\ \quad \left. + \frac{9}{4} m^2 \Sigma a_{2j} (a_{2p-2j-2} + a_{-2p-2j-2}) = 0 \right. \\ \text{oraz} \\ 4p \Sigma (2j-p+1+m) a_{2j} a_{2j-2p} - \\ \quad \left. - \frac{3}{2} m^2 \Sigma a_{2j} (a_{2p-2j-2} - a_{-2p-2j-2}) = 0. \right.$$

W równaniach tych położyliśmy dla prostoty

$$j + k + 1 = p.$$

Chcąc tedy otrzymać kolejne równania należy podstawić na p kolejne wartości $p = \pm 1, \pm 2$ i t. d. Jak widzimy, ilość równań warunkowych jest nieskończenie wielka, a każde z nich składa się z nieskończonej ilości wyrazów, bo sumowanie względem j rozciąga się od $-\infty$ do $+\infty$. Porządek w określeniu współczynników jest

taki: najpierw określa się współczynniki a_{2j} , potem A , wreszcie C . Oczywiście nie możemy obliczyć współczynników a_{2j} inaczej, jak przez kolejne przybliżenia.

Z równań (21) można wyprowadzić inne, dogodniejsze do rachunku, mnożąc drugie równanie (21) przez $\frac{2m+1}{2p}$ i odejmując od pierwszego oraz dzieląc drugie równanie (21) przez $4p$. W ten sposób otrzymamy równania:

$$\left. \begin{aligned} & \Sigma [4p^2 - 1 + 4j^2 - 4pj - 2m + \frac{1}{2} m^2] a_{2j} a_{2j-2p} + \\ & + \left[\frac{9}{4} + \frac{3}{4} \frac{(2m+1)}{p} \right] m^2 \Sigma a_{2j} a_{2p-2j-2} + \\ & + \left[\frac{9}{4} - \frac{3}{4} \frac{(2m+1)}{p} \right] m^2 \Sigma a_{2j} a_{-2p-2j-2} = 0 \end{aligned} \right\} (22)$$

oraz

$$\begin{aligned} & \Sigma [(2j - p + 1) + m] a_{2j} a_{2j-2p} - \\ & - \frac{3}{8} \frac{m^2}{p} \Sigma (a_{2j} a_{2p-2j-2} - a_{2j} a_{-2p-2j-2}) = 0. \end{aligned}$$

Przypatrzwszy się tym równaniom spostrzegamy, że wszystkie współczynniki a muszą być funkcjami parametru m , a skoro poczniemy je obliczać, to przekonamy się, że współczynniki a_{2j} i a_{-2j} są co najmniej rzędu m^{2j} . Zresztą można to dowieść zupełnie ściśle. Dowód podał Poincaré, ale powtórzyć go tu nie możemy, bo jest nazbyt długi i trudny. Natomiast pokażemy, jak faktycznie przez kolejne przybliżenia obliczyć współczynniki a_{2j} i a_{-2j-1} .

Ponieważ mamy do rozporządzenia stałą A , przez którą cały szereg jest pomnożony, więc możemy położyć $a_0 = 1$. W ten sposób jednocześnie uczynimy zadość postulatowi, aby współczynnik a_0 był rzędu m^0 . Następnie weźmiemy ogólne wzory (22), położymy $p = 1$ i otrzymamy równania:

$$\begin{aligned} & \dots + \left(3 - 2m + \frac{1}{2} m^2 \right) (a_2 a_0 + a_0 a_{-2}) + \\ & + \left(11 - 2m + \frac{1}{2} m^2 \right) (a_4 a_2 + a_{-2} a_{-4}) + \dots \\ & + \left(3m^2 + \frac{3}{2} m^3 \right) [a_0^2 + 2a_2 a_{-2} + 2a_4 a_{-4} + \dots] + \\ & + \left(\frac{3}{2} m^2 - \frac{3}{2} m^3 \right) [a_{-2}^2 + 2a_0 a_{-4} + 2a_2 a_{-6} + \dots] = 0 \end{aligned}$$

oraz

$$\dots (-2 + m) a_{-2} a_{-4} + m a_0 a_{-2} + (2 + m) a_2 a_0 + (4 + m) a_4 a_2 + \dots \\ - \frac{3}{8} m^2 [a_0^2 - a_{-2}^2 + 2 a_2 a_{-2} - 2 a_0 a_{-4} + 2 a_4 a_{-4} - 2 a_2 a_{-6} + \dots] = 0.$$

Dołączmy jeszcze dwa podobne równania dla $p=2$, zatrzymajmy we wszystkich czterech równaniach tylko wyrazy do rzędu m^4 włącznie; wtedy pomnąc, że $a_0=1$, będziemy mogli napisać następujące cztery równania:

$$\text{I. } \left(3 - 2m + \frac{1}{2} m^2\right) (a_2 + a_{-2}) + 3m^2 + \frac{3}{2} m^3 = 0$$

$$\text{II. } m a_{-2} + (2 + m) a_2 - \frac{3}{8} m^2 = 0$$

$$\text{III. } 15(a_4 + a_{-4}) + 11 a_2 a_{-2} + \frac{21}{4} m^2 a_2 = 0$$

$$\text{IV. } -a_{-4} + a_2 a_{-2} + 3 a_4 - \frac{3}{8} m^2 a_2 = 0.$$

Z dwóch pierwszych równań otrzymamy natychmiast:

$$a_2 = \frac{18m^2 + 36m^3 + 27m^4}{16(6 - 4m + m^2)} = \frac{3}{16} m^2 + \frac{1}{2} m^3 + \frac{7}{12} m^4 + \dots$$

$$a_{-2} = -\frac{114m^2 + 84m^3 + 27m^4}{16(6 - 4m + m^2)} = -\frac{19}{16} m^2 - \frac{5}{3} m^3 - \frac{43}{36} m^4 - \dots,$$

podstawiawszy zaś te wartości na a_2 i a_{-2} w równania III-cie i IV-te, znajdziemy zaraz

$$a_4 = \frac{25}{16^2} m^4 + \dots$$

$$a_{-4} = 0 + \dots \text{ wyrazy wyższego rzędu,}$$

bo współczynnik przy m^4 jest zerem.

Chcąc otrzymać dalsze przybliżenie, musimy w równaniach (22) położyć $p=3$, poczem otrzymamy dwa nowe równania. Będziemy więc teraz mieć sześć równań. We wszystkich sześciu równaniach zatrzymujemy tylko wyrazy aż do rzędu m^6 włącznie, przyczem naturalnie uważamy a_0 za wielkość rzędu m^0 , a_2 i a_{-2} za wielkości rzędu m^2 , a_4 i a_{-4} za wielkości rzędu m^4 i t. d. W ten sposób

$2(4p^2 - 1) - 4m + m^2$, szybko wzrastające wraz z liczbą p : najmniejszy z nich, odpowiadający $p = \pm 1$ ma wartość $6 - 4m + m^2$, a więc blisko 6, następny odpowiadający $p = \pm 2$ ma już wartość prawie 30, dalszy odpowiadający $p = \pm 3$ wynosi blisko 70 i t. d.

Znaleźliśmy, że

$$a_0 = 1, \quad a_2 = 0,001373 \dots, \quad a_{-2} = -0,008695 \dots$$

Współczynnik a_0 daje główny wyraz równania orbity niezakłóconej; następne współczynniki a_2 i a_{-2} odpowiadają głównym wyrazom wielkiej nierówności, znanej pod nazwą „waryacji“ a odkrytej przez Tycho na Brahego¹⁾.

Dotychczas otrzymaliśmy atoli nie same wartości współczynników, a jedynie wartości ich stosunków, bo dowolnie położyliśmy $a_0 = 1$, zaś wspólny wszystkim wyraz szeregu współczynników A pozostał dotąd nieokreślony.

5. Określenie współczynnika A .

Aby określić A , trzeba powrócić do pierwotnych równań (15 ter), w których figuruje k . Równania te zawierają zmienne x i y , związane z u i s przez równania:

$$x = \frac{1}{2}(u + s), \quad y = -\frac{i}{2}(u - s).$$

Trzeba najpierw podstawić wartości na u i s w powyższe równania, potem podstawić otrzymane w ten sposób wyrażenia na x i y

¹⁾ Gdyby wszystkie a były równe zero prócz a_0 , a_{-2} i a_2 , to byłoby

$$u = A\zeta [a_{-2}\zeta^{-2} + a_0 + a_2\zeta^2]$$

$$s = A\zeta^{-1} [a_{-2}\zeta^2 + a_0 + a_2\zeta^{-2}],$$

skąd

$$x = A [(a_0 + a_{-2}) \cos \tau + a_2 \cos 3\tau]$$

$$y = A [(a_0 - a_{-2}) \sin \tau + a_2 \sin 3\tau].$$

Dla $a_{-2} = a_2 = 0$ byłoby

$$x = A \cos \tau, \quad y = A \sin \tau,$$

to jest koło. Pamiętać należy, że orbita jest odniesiona do osi kręcących się ze stałą prędkością n' , t. j. kręcących się razem ze średniem słońcem.

w którekolwiek z pomiędzy równań (15 ter), poczem otrzymamy równanie, z którego można będzie określić A . Ale jeszcze lepiej postąpić tak: pomnożmy drugie równanie (15 ter) przez $i = \sqrt{-1}$ i dodajmy do pierwszego; otrzymamy wtedy równanie

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + 2mi \frac{du}{d\tau} = 2 \frac{\partial F'}{\partial s}. \quad (23)$$

W prawą stronę tego równania podstawimy pochodną względem s funkcji F' wziętej ze wzoru

$$F' = \frac{k}{(us)^{1/2}} + \frac{3}{8} m^2 (u + s)^2,$$

poczem po obu stronach równania wyrazimy u i s przez szeregi (19). W ten sposób otrzymamy równanie, z którego można będzie określić A jako funkcję parametrów k i m . Ponieważ to równanie musi być spełnione dla wszelkich wartości ζ , przeto najdogodniej położymy (naturalnie po zróżniczkowaniu) $\tau = 0$, $\zeta = 1$; wtedy zaś (t. j. dla $\tau = 0$) okaże się, że

$$u = s = r = x.$$

Samego podstawienia wykonywać nie będziemy, podamy tylko gotowy rezultat:

$$\frac{k}{A^3} \cdot \frac{1}{[\Sigma a_{2j}]^2} = \Sigma [(2j + 1 + m)^2 + 2m^2] a_{2j}.$$

Przypomnijmy sobie, że

$$k = (m_1 + m_2) \frac{m^2}{n^2}$$

oraz że

$$\frac{m}{n'} = \frac{1}{n - n'} = \frac{n}{n(n - n')} = \frac{1 + m}{n}.$$

Stąd wynika

$$k = (m_1 + m_2) \frac{(1 + m)^2}{n^2}.$$

Jeżeli teraz podstawimy to wyrażenie na k w powyższe równanie i jeżeli rozwiążemy je względem A , to otrzymamy:

$$A = \left(\frac{m_1 + m_2}{n^2} \right)^{1/2} (1 + m)^{2/2} \cdot \{ \Sigma [(2j + 1 + m)^2 + 2m^2] a_{2j} \}^{-1/2} \cdot [\Sigma a_{2j}]^{-2/2}.$$

Przypominamy, że m_1 i m_2 oznaczają masy ziemi i księżyca, że $m = \frac{n'}{n - n'}$, przyczem n i n' są to średnie ruchy księżyca i słońca, oraz że stała przyciągania jest równa jedności.

Skoro obliczymy A , to z pierwszego równania (20) obliczymy także stałą C .

Na zakończenie tego paragrafu wyprowadzimy wyrażenia na współrzędne x i y . Mamy

$$x = \frac{u + s}{2}, \quad y = \frac{u - s}{2i}.$$

przeto

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} A \sum (a_{2j} + a_{-2j-2}) \zeta^{2j+1} \\ y &= \frac{1}{2} \frac{A}{i} \sum (a_{2j} - a_{-2j-2}) \zeta^{2j+1}, \quad j = -\infty \dots +\infty \end{aligned}$$

Połączmy teraz ze sobą wyrazy, w których ζ jest podniesione do pewnej potęgi dodatniej, z wyrazami, w których ζ jest podniesione do tejże samej potęgi ujemnej, a otrzymamy po uporządkowaniu i po łatwych przekształceniach

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= A \sum_{j=0}^{j=\infty} (a_{2j} + a_{-2j-2}) \cos(2j+1) \tau \\ y &= A \sum_{j=0}^{j=\infty} (a_{2j} - a_{-2j-2}) \sin(2j+1) \tau, \end{aligned} \right.$$

przyczem

$$\tau = (n - n')(t - t_0).$$

6. Ruch węzła. Zasadnicze równanie.

Podobnie jak w poprzednich paragrafach zaniedbujemy mimośród orbity słonecznej e' , podobnie jak tam uważamy stosunek a/a' za znikomy, t. j. przyjmujemy, że rozmiary orbity księżyca są wobec rozmiarów orbity słońca bardzo małe. Wogóle przyjmujemy wszystkie upraszczające założenia poprzednich paragrafów, ale już nie kładziemy $z=0$, t. j. nie zakładamy, że księżyc krąży w ekliptyce, natomiast przyjmujemy, że droga jego tworzy z ekliptyką pewien skończony kąt. Wskutek tego zamiast

$$r^2 = x^2 + y^2$$

mamy obecnie

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Równania (15), (15 bis) i t. d. pozostają bez zmiany (tylko r ma inne, nowe znaczenie), ale równanie dla zmiennej z nie jest już identycznie spełnione przez założenie $z=0$, $\frac{\partial F'}{\partial z} = 0$: natomiast podobnie jak w równaniach (12) mamy

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial F'}{\partial z}.$$

Ponieważ związek

$$r \cos \gamma = x$$

pozostaje i teraz w swej mocy, więc jeżeli ograniczymy się do tych samych wyrazów rozwinięcia F' w szereg, które pisaliśmy poprzednio, to będzie:

$$F' = \frac{m_1 + m_2}{r} + n'^2 \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{r^2}{2} \right) + \dots \text{ wyrazy pomijane}$$

oraz

$$F' = \frac{m_1 + m_2}{r} + n'^2 \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} z^2 \right) + \dots \text{ wyrazy pomijane.}$$

Tedy trzecie równanie ruchu będzie:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = - (m_1 + m_2) \frac{z}{r^3} - n'^2 z,$$

albo z tem samym znakowaniem co poprzednio

$$\frac{d^2z}{dt^2} = - \frac{kz}{r^3} - m^2 z,$$

albo wreszcie

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \Theta z = 0, \tag{25}$$

jeżeli dla krótkości położymy

$$\Theta = m^2 + \frac{k}{r^3}.$$

GABINET MATEMATYCZNY
Instytut Matematyczny Uniwersytetu Warszawskiego

W rzeczywistości z zawsze pozostaje małe, przeto jeżeli ograniczymy się do wyrazów tego samego rzędu co pierwsza potęga nachylenia, to możemy we funkcji Θ zaniedbać kwadrat nachylenia, t. j. z^2 . Przeto możemy w niej przyjąć po staremu

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

i jednocześnie pozostawić na x i y poprzednio znalezione wartości.

Można sobie ułatwić obliczenie odjemnej potęgi promienia wodzącego, figurującej we wyrażeniu funkcji Θ , korzystając z równania (16) wyrażającego całkę Jacobiego. Równanie to daje nam

$$\frac{k}{r} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 \right] - \frac{3}{2} m^2 x^2 - C. \quad (26)$$

Skoro zaś otrzymamy $\frac{k}{r}$, to łatwo obliczymy $\frac{k}{r^3}$ a potem $\Theta = m^2 + \frac{k}{r^3}$. Spoznajemy zaraz, że $\frac{k}{r^3}$ a tak samo i Θ zawiera tylko parzyste, dodatnie i odjemne potęgi ζ ; z drugiej strony gdy zmienimy τ na $-\tau$, albo ζ na ζ^{-1} , to u zmieni się na s i odwrotnie, zaś ani r ani Θ , jako symetryczne względem u i s , nie doznają żadnej zmiany. Stąd wynika, że jeżeli napiszemy

$$\Theta = \sum \Theta_k \zeta^{2k},$$

to będzie

$$\Theta_{-k} = \Theta_k,$$

stąd zaś znowu wynika, że można połączyć wyrazy zawierające ζ^{2k} z wyrazami zawierającymi ζ^{-2k} i napisać

$$\Theta = \Theta_0 + 2\Theta_1 \cos 2\tau + 2\Theta_2 \cos 4\tau + \dots \quad (27)$$

Ze względu na to, że funkcyja Θ powstaje ze znanych już funkcji, współczynniki Θ_k są z góry dane: są to funkcyje współczynników a_{2j} i A z § 4 i 5. Podobnie jak współczynniki a_{2j} są one tem wyższego rzędu względem m , im k jest większe, mianowicie współczynnik Θ_{k+1} jest względem m zawsze co najmniej o dwa rzędy wyższy niż współczynnik Θ_k .

7. Całkowanie równania

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \Theta z = 0.$$

Wiadomo, że w przypadku, gdy Θ jest funkcją peryodyczną w rodzaju (27), to powyższe równanie posiada następujące dwie całki:

$$z = e^{i\omega t} \psi(\tau), \quad z = e^{-i\omega t} \psi(-\tau),$$

gdzie ψ jest to funkcją peryodyczną kształtu:

$$\psi(\tau) = \sum b_k \zeta^{2k} \quad [\zeta = e^{i\tau}, k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots].$$

Możemy tedy napisać dwa rozwiązania:

$$i \quad \left. \begin{aligned} z = F(\tau) &= e^{i\omega t} \psi(\tau) + e^{-i\omega t} \psi(-\tau) \\ z = f(\tau) &= \lambda [e^{i\omega t} \psi(\tau) - e^{-i\omega t} \psi(-\tau)]. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Oczywiście $F(\tau)$ jest funkcją parzystą, a $f(\tau)$ nieparzystą, ponieważ zaś $\psi(\tau)$ zawiera pewien stały współczynnik a λ jest to stała dowolna, więc można wprowadzić pewne warunki, mianowicie można założyć, że

$$F(0) = 1, \quad \frac{dF}{d\tau}(0) = 0,$$

$$f(0) = 0, \quad \frac{df}{d\tau}(0) = 1$$

i odpowiednio do tego

$$\psi(0) = \frac{1}{2}.$$

Oczywiście

$$F(\tau) = \sum b_k \cos(g + 2k)\tau, \quad k = -\infty \dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots +\infty.$$

Z drugiej strony ponieważ funkcja $\psi(\tau)$ jest peryodyczna i zawiera tylko parzyste potęgi $e^{i\tau}$, przeto peryod jej jest π , a wskutek tego:

$$\psi(\pi) = \psi(0) = \frac{1}{2}, \quad \psi(-\pi) = \psi(0) = \frac{1}{2},$$

jednocześnie zaś na mocy pierwszego równania (28)

$$F(\pi) = \cos g\pi.$$

Stała g ma niemałe znaczenie w teorii księżyca, albowiem od niej zależy ruch węzła orbity księżycowej na ekliptyce. Aby to okazać, napiszmy całkę naszą nieco ogólniej wprowadzając do argumentu dowolną stałą $\tilde{\omega}$

$$z = E \sum_0^{\infty} b_k \cos(g\tau + 2k\tau + \tilde{\omega}).$$

Ponieważ, jak to później zobaczymy, szereg jest szybko zbieżny, więc pierwszy wyraz, w którym $k=0$, ma współczynnik w porównaniu z następnymi bardzo duży, a wskutek tego punkty, w których z staje się zerem, leżą bardzo blisko punktów, w których

$$b_0 \cos(g\tau + \tilde{\omega})$$

staje się zerem. Stąd wynika, że węzły orbity księżyca leżą w pobliżu punktów

$$g\tau + \tilde{\omega} = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3}{2}\pi, \pm \frac{5}{2}\pi, \dots,$$

oraz że τ wzrasta od jednego węzła wstępującego do następnego mniej więcej o $\frac{2\pi}{g}$. Jeżeli zaś weźmiemy dłuższy odstęp, np. od p -go węzła wstępującego do $p+q+1$ -go węzła wstępującego, to dokładność powiększy się i będziemy mogli powiedzieć, że τ wzrosło prawie dokładnie o $\frac{2\pi q}{g}$. Możemy tedy powiedzieć, że $\frac{2\pi}{g}$ jest to średni odstęp pomiędzy dwoma przejściami księżyca przez ten sam węzeł.

Jak wiadomo, zmienna $\tau = (n - n')t + \text{const.}$ jest to nic innego, jak różnica średnich długości księżyca i słońca. Możemy więc powiedzieć, że od jednego przejścia księżyca przez węzeł do następnego przejścia przez ten sam węzeł różnica długości wzrasta średnio o $\frac{2\pi}{g}$. Ponieważ atoli odnosimy wszystkie zjawiska niebieskie do pewnego czasu, więc zamiast zmiennej τ napowrót wprowadzimy zmienną t i napiszemy:

$$g\tau + \tilde{\omega} = g(n - n')t + \tilde{\omega}'.$$

Tu ω' oznacza nową stałą. Aby zbliżyć się do pospolitego w innych teoriach znakowania, położmy

$$g'n = g(n - n').$$

Nowa stała g' będzie określona przez równanie

$$g' = g \frac{n - n'}{n} = \frac{g}{1 + m},$$

argument głównego wyrazu w szeregu na z będzie

$$g'nt + \omega',$$

zaś średni odstęp czasu upływający między jednym przejściem księżyca przez węzeł a następnym przejściem przez ten sam węzeł, czyli tak zwany miesiąc drakoniczny (smoczy) będzie

$$\frac{2\pi}{g'n}.$$

W tych samych jednostkach średni okres czasu, w ciągu którego księżyc opisuje 360° , czyli tak zwany miesiąc gwiazdowy wyraża się przez

$$\frac{2\pi}{n};$$

ponieważ zaś miesiąc „gwiazdowy“ liczy 27,321 661 średnich dni słonecznych, ponieważ dalej:

$$g = 1,0851\ 714\ 265 \dots, \quad m = 0,0808\ 489\ 338 \dots,$$

ponieważ wreszcie

$$g' = \frac{1,0851\ 714 \dots}{1,08\ 084 \dots} = 1,004 \dots,$$

więc miesiąc „smoczy“ liczy

$$\frac{27,321\ 661 \dots}{1,004 \dots} = 27,212\ 222 \dots \text{ śr. dni słonecznych.}$$

Widzimy stąd, że miesiąc „smoczy“ jest krótszy od gwiazdowego i możemy powiedzieć, że węzły posuwają się po ekliptyce jakby na spotkanie księżyca, t. j. w kierunku przeciwnym kierun-

kowi jego obiegu. Możemy dojść do tego samego wniosku trochę inną drogą. Napiszmy argument $g'nt + \tilde{\omega}'$ w następujący sposób:

$$g'nt + \tilde{\omega}' = nt + \tilde{\omega}' - (1 - g')nt.$$

Gdyby było

$$g' = 1,$$

to *cosinus* argumentu $g'nt + \tilde{\omega}'$ stawałby się zerem dla wartości:

$$g'nt + \tilde{\omega}' = nt + \tilde{\omega}' = \pm \frac{1}{2}\pi, \pm \frac{3}{2}\pi \dots \text{ i t. d.},$$

a ponieważ peryod obiegu gwiazdowego wynosi średnio $\frac{2\pi}{n}$, to węzły przypadałyby — przynajmniej średnio — na te same punkty ekliptyki. Inaczej mówiąc, gdyby $g' = 1$, to węzły byłyby nieruchome na ekliptyce. Skoro jednak

$$1 - g' < 0,$$

to *cosinus* powyższego argumentu staje się zerem dla wartości:

$$nt + \tilde{\omega}' - (1 - g')nt = \pm \frac{1}{2}\pi, \pm \frac{3}{2}\pi \dots \text{ i t. d.}$$

przypadających na coraz to inne punkty ekliptyki i możemy powiedzieć, że węzły posuwają się po ekliptyce. Prędkość tego ruchu [właściwie średnia prędkość węzłów, bo rzeczywista prędkość wyraża się więcej skomplikowanym wzorem] jest oczywiście

$$(1 - g')n = -0,004 \dots n;$$

jest tedy ujemna, co oznacza, że węzły posuwają się w kierunku przeciwnym kierunkowi obiegu księżyca. Prędkość $(g' - 1)n$ wynosi tylko około 0,004... średniego ruchu księżyca, a więc odwrotnie czas, w ciągu którego węzeł opisuje kąt 360° , musi być około 250 razy dłuższy niż ten czas, w ciągu którego księżyc opisuje kąt 360° , t. j. musi wynosić około 250 miesięcy gwiazdowych. 250 miesięcy gwiazdowych to prawie dokładnie 6803,3 dni, ale jeżeli wykonamy ścisły rachunek i uwzględnimy niektóre poprawki, to znajdziemy, że obieg węzła trwa 6793,4 dni, t. j. około 18,6 lat a zarazem o 9,9 dni krócej niż 250 miesięcy gwiazdowych.

rają nieskończoną liczbę wyrazów oraz że wyznacznik ich składa się z nieskończonej ilości wierszy i kolumn. Trzeba tedy dowodzić zbieżność równań i wyznacznika. Dowody te zostały przeprowadzone, ale z powodu braku miejsca nie możemy powtórzyć ich w całości, możemy tylko pokrótce wskazać bieg dowodzenia i rachunków.

Przedewszystkiem dzielimy każde równanie (29) przez

$$\Theta_0 - (2j + g)^2,$$

poczem otrzymujemy szereg równań kształtu:

$$\begin{aligned} \dots + \frac{\Theta_{-2} b_{j+2}}{\Theta_0 - (2j + g)^2} + \frac{\Theta_{-1} b_{j+1}}{\Theta_0 - (2j + g)^2} + b_j + \frac{\Theta_1 b_{j-1}}{\Theta_0 - (2j + g)^2} + \\ + \frac{\Theta_2 b_{j-2}}{\Theta_0 - (2j + g)^2} + \dots = 0 \end{aligned}$$

Wedle zasad teorii równań liniowych wyznacznik tych równań musi być równy zeru, piszemy tedy

$$(30) D = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \frac{\Theta_{-1}}{\Theta_0 - (-2 + g)^2} & 1 & \frac{\Theta_1}{\Theta_0 - (-2 + g)^2} & \frac{\Theta_2}{\Theta_0 - (-2 + g)^2} & \dots \\ \dots & \frac{\Theta_{-2}}{\Theta_0 - g^2} & \frac{\Theta_{-1}}{\Theta_0 - g^2} & 1 & \frac{\Theta_1}{\Theta_0 - g^2} & \dots \\ \dots & \frac{\Theta_{-3}}{\Theta_0 - (2 + g)^2} & \frac{\Theta_{-2}}{\Theta_0 - (2 + g)^2} & \frac{\Theta_{-1}}{\Theta_0 - (2 + g)^2} & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} =$$

Powstaje przedewszystkiem pytanie, o ile ten wyznacznik ma sens, o ile wyraża coś określonego. Możemy go uważać jako granicę, do której zdąża pewien wyznacznik o skończonej liczbie wyrazów. Jeżeli okaże się, że wyznacznik nieskończony czyni zadość pewnym warunkom, to może mieć zupełnie określoną wartość i może być przedstawiony przez pewne zbieżne szeregi. Otóż przedewszystkiem ponieważ elementy głównej przekątnej są wszystkie równe jedności, więc wartość głównego wyrazu wyznacznika rozwiniętego w szereg równa się także jedności. Następnie można dowieść, że wyznacznik jest zbieżny, jeżeli szereg ¹⁾

¹⁾ Ramki: || oznaczają, jak zwykle, wartości absolutne.

$$2 \sum | \Theta_j | \sum \frac{1}{[\Theta_0 - (2j + g)^2]}$$

jest zbieżny. Ale na podstawie tego, co wiadomo o wartościach współczynników Θ_j , łatwo można dowieść, że powyższy szereg jest zbieżny i to szybko zbieżny za wyjątkiem tylko tego przypadku, gdy które

$$(2j + g)^2 - \Theta_0 = 0, \quad (31)$$

bo wtedy wyznacznik D staje się nieskończonym. Jednakże można dowieść, że ten przypadek wcale nie zachodzi, t. j. można dowieść, że wyznacznik D jest zawsze zbieżny.

Zważmy teraz, że wszystkie stałe Θ_k są dane, więc skoro przyrównamy D do zera, jak tego wymaga równanie (30), to otrzymamy równanie z jedną niewiadomą g . Atoli zaraz widać, że równanie (30), t. j. równanie

$$D = 0 \quad (30 \text{ bis})$$

jest przestępne, że zatem może posiadać nieskończoną ilość pierwiastków rzetelnych i powstaje pytanie, który z tych niezliczonych pierwiastków należy przyjąć na g .

Ta ostatnia trudność a zarazem wątpliwość rozwiewa się przy bliższem rozpatrzeniu równania (30). Odrazu widać, że jeżeli to równanie ma pierwiastek g_0 , to ma także pierwiastek $-g_0$, bo skoro zastąpimy $+g_0$ przez $-g_0$ a jednocześnie, licząc środkowy wiersz za 0-ty, przestawimy każdy $-k$ -ty wiersz z $+k$ -tym oraz, licząc środkową kolumnę za 0-tą, przestawimy każdą $-j$ -tą kolumnę z $+j$ -tą, to otrzymamy wyznacznik identyczny z pierwotnym. Zatem pierwiastki występują parami: każdemu pierwiastkowi $+g_0$ towarzyszy pierwiastek $-g_0$.

Następnie spostrzegamy, że jeżeli $+g_0$ jest pierwiastkiem równania (30), to tak samo pierwiastkiem jest: $g_0 \pm 2k$, gdzie k jest jakakolwiek liczba cała, albowiem gdy zamiast g_0 podstawimy $g_0 \pm 2k$ a jednocześnie przesuniemy wszystkie wiersze o k miejsce w górę, względnie w dół, a wszystkie kolumny o k miejsce w lewo, względnie w prawo, to wyznacznik nie zmieni się w niczem.

Z tych dwóch uwag wynika, że jeżeli równanie (30) posiada pierwiastek g_0 , to posiada także pierwiastki:

$$g_0, \quad g_0 + 2, \quad g_0 + 4, \dots \text{ i t. d.}, \text{ następnie} \\ g_0 - 2, \quad g_0 - 4, \dots \text{ i t. d.}, \text{ dalej}$$

pierwiastki: $-g_0, -g_0 - 2, -g_0 - 4, \dots$ i t. d., wreszcie
 $-g_0 + 2, -g_0 + 4, \dots$ i t. d.

Ale to są pierwiastki równania

$$\cos g\pi - \cos g_0\pi = 0,$$

a więc wyznacznik D zawiera czynnik

$$\cos g\pi - \cos g_0\pi.$$

Z drugiej strony znaleźliśmy [równanie (31)!], że gdy

$$g_0 \pm 2k = \sqrt{\theta_0},$$

to D przybiera nieskończoną wartość. Stąd wyprowadzamy wniosek, że bieguny funkcji D są pierwiastkami równania

$$\cos g\pi - \cos \sqrt{\theta_0}\pi = 0,$$

a w dalszym ciągu wyprowadzamy wniosek, że

$$D = K \frac{\cos g\pi - \cos g_0\pi}{\cos g\pi - \cos \sqrt{\theta_0}\pi}.$$

Wreszcie można okazać, że

$$K = 1.$$

Rzeczywiście mamy pewną funkcję zmiennej g wyrażoną w dwóch formach: jedna to wyznacznik (30), druga przed chwilą znaleziona

$$D = K \frac{\cos g\pi - \cos g_0\pi}{\cos g\pi - \cos \sqrt{\theta_0}\pi},$$

przyczem K jest to czynnik dotąd nieoznaczony. Aby go oznaczyć, trzeba mieć przynajmniej jedną wartość funkcji D nierówną zeru. Załóżmy na przykład, że wszystkie współczynniki θ oprócz θ_0 są równe zeru, wtedy wyznacznik przybierze wartość: jedność, a więc w tym specjalnym przypadku musi być

$$K \frac{\cos g\pi - \cos g_0\pi}{\cos g\pi - \cos \sqrt{\theta_0}\pi} = 1.$$

To ostatnie równanie ma dwa rozwiązania: jedno

$$K = \frac{\cos g\pi - \cos \sqrt{\Theta_0}\pi}{\cos g\pi - \cos g_0\pi}$$

i drugie

$$g_0 = \sqrt{\Theta_0}, \quad K = 1.$$

Gdybyśmy przyjęli pierwsze rozwiązanie, to po podstawieniu wartości K we wyrażenie na D okazałoby się, że nietylko wtedy, gdy wszystkie Θ oprócz Θ_0 są zerami, ale zawsze funkcya D jest równa jedności. Oczywiście nie możemy przyjąć tego rozwiązania; możemy przyjąć tylko drugie rozwiązanie. Kładziemy tedy $K = 1$ i otrzymujemy jako ostateczne wyrażenie funkcji D

$$D = \frac{\cos g\pi - \cos g_0\pi}{\cos g\pi - \cos \sqrt{\Theta_0}\pi}.$$

Skoro tak jest, to równanie (30), t. j. równanie

$$D = 0$$

przywodzi się do równania

$$\cos g\pi - \cos g_0\pi = 0;$$

ale, aby rozwiązać to ostatnie równanie, trzeba obliczyć g_0 . W tym celu założmy chwilowo, że $g = 0$ i oznaczmy odpowiednią wartość funkcji D przez D_0 ; otrzymamy:

$$D_0 = \frac{1 - \cos g_0\pi}{1 - \cos \sqrt{\Theta_0}\pi} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} g_0\pi}{\sin^2 \frac{1}{2} \sqrt{\Theta_0}\pi},$$

skąd

$$\sin^2 \frac{1}{2} g_0\pi = D_0 \sin^2 \frac{1}{2} \sqrt{\Theta_0}\pi. \quad (32)$$

To ostatnie równanie zawiera po prawej stronie tylko wiadome wielkości, bo Θ_0 jest znane, a D_0 jest to znana funkcya znanych współczynników $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3 \dots$ i t. d., mianowicie:

$$D_0 = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \frac{\Theta_{-1}}{\Theta_0 - 4}, & 1, & \frac{\Theta_1}{\Theta_0 - 4}, & \frac{\Theta_2}{\Theta_0 - 4}, & \frac{\Theta_3}{\Theta_0 - 4}, & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \frac{\Theta_{-2}}{\Theta_0}, & \frac{\Theta_{-1}}{\Theta_0}, & 1, & \frac{\Theta_1}{\Theta_0}, & \frac{\Theta_2}{\Theta_0}, & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \frac{\Theta_{-3}}{\Theta_0 - 4}, & \frac{\Theta_{-2}}{\Theta_0 - 4}, & \frac{\Theta_{-1}}{\Theta_0 - 4}, & 1, & \frac{\Theta_1}{\Theta_0 - 4}, & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Wyliczenie wyznacznika D_0 , acz dość żmudne, nie przedstawia wielkich trudności, bo szereg, w który go można rozwinąć, jest szybko zbieżny.

9. Obliczenie wyznacznika D_0 .

Rozumie się, że przy rozwinięciu wyznacznika D_0 należy ograniczyć się do tych wyrazów, w których figurują iloczyny skończonej ilości elementów nienależących do głównej przekątnej, bo iloczyny nieskończonej ilości elementów nienależących do głównej przekątnej będą tego samego rzędu, co nieskończenie wysokie potęgi liczby m , a ponieważ $m < 1$ ($m = \text{około } \frac{1}{12}$), więc wartości takich iloczynów są nieskończenie małe. Trzeba zaczynać rozwinięcie od iloczynu elementów głównej przekątnej, a następnie brać iloczyny, zawierające po jednym, po dwa, po trzy i t. d. elementy nienależące do głównej przekątnej.

Można dogodnie wykonać rozwinięcie w następujący sposób. Uważajmy środkowy element za środek współrzędnych, uważajmy we wierszach kierunek od lewej ku prawej stronie, a w kolumnach kierunek z dołu w górę za dodatni. Miejsca we wierszach oznaczmy literami i , a w kolumnach literami j , więc np. $\frac{\Theta_{ij}}{\Theta_0 - 4}$ oznaczmy przez $[2, 1]$, a $\frac{\Theta_{-2j}}{\Theta_0 - 4}$ przez $[-1, -1]$. Oczywiście przy tem znakowaniu elementy głównej przekątnej są: $[0, -0]$, $[1, -1]$, $[2, -2]$, ... $[-1, 1]$, $[-2, 2]$, ... wogóle $[i, -i]$, przyczem i może przybierać wszelkie wartości od $i = -\infty$ do $i = +\infty$. Możemy więc symbolicznie napisać iloczyn elementów głównej przekątnej w postaci:

$$\dots [i, -i] \cdot [i+1, -i-1] \dots [i+k, -i-k] \dots = 1.$$

Z tego iloczynu otrzymamy wyraz, zawierający możliwie małą ilość elementów nienależących do głównej przekątnej, jeżeli dokonamy jedną zamianę wskaźników stojących w nawiasach na drugim miejscu (tak samo moglibyśmy robić zamiany między wskaźnikami, stojącymi na pierwszym miejscu; tu wybieramy tamten sposób i skorośmy go raz obrali, musimy trzymać się go do końca).

Weźmy np. wyrazy $[i, -i]$ oraz $[i+k, -i-k]$ i wykonajmy zamianę, a otrzymamy elementy:

$$[i, -i-k] \text{ oraz } [i+k, -i],$$

poczem odpowiedni wyraz w rozwinięciu wyznacznika będzie:

$$\dots [i, -i-k][i+1, -i-1] \dots [i+k-1, -i-k+1] \cdot [i+k, -i] \dots = \\ = -[i, -i-k] \cdot [i+k, -i],$$

bo wszystkie czynniki tego iloczynu, jako elementy głównej przekątnej, są równe jedności, za wyjątkiem dwóch, które powstały przez zamianę wskaźników i , przedstawiających elementy nienależące do głównej przekątnej a zatem od jedności różne. Znak postawiliśmy odjemny, bo wedle znanych zasad teoryi wyznaczników jedna zamiana wskaźników sprowadza zmianę znaku. Ile jest możliwych zamian wskaźników, tyle otrzymamy wyrazów, zawierających iloczyn dwóch elementów, nienależących do głównej przekątnej. Wyrazy te będą rozmaitego rzędu, bo Θ_i figurujące w tych iloczynach są rozmaitego rzędu względem m , ale najniższy rząd jest m^4 , bo Θ_i są co najmniej rzędu m^2 . Otrzymamy tedy przez jedną zamianę wskaźników sumę:

$$-\sum_i \sum_k [i, -i-k] \cdot [i+k, -i]. \quad (i = -\infty \dots +\infty, k = 1 \dots \infty).$$

Tak samo przez dwie zamiany wskaźników między trzema elementami otrzymamy sumę:

$$\sum_i \sum_k \sum_{k'} \{ [i, -i-k] \cdot [i+k, -i-k-k'] \cdot [i+k+k', -i] + \\ + [i, -i-k-k'] \cdot [i+k, -i] \cdot [i+k+k', -i-k] \},$$

dalej przez dwie zamiany pomiędzy czterema wskaźnikami otrzymamy poczwórną sumę i t. d. . . .

Przejdźmy teraz do obliczenia tych wyrażeń. Główna przekątnia daje: $+1$; wyrazy, pochodzące z jednej zamiany wskaźników, dają sumę:

$$-\sum_i \sum_k [i, -i-k] \cdot [i+k, -i] = -\sum_i \sum_k \frac{\Theta_k}{[\Theta_0 - 4i^2]} \cdot \frac{\Theta_{-k}}{[\Theta_0 - 4(i+k)^2]}.$$

Ale, jak to było powiedziane jeszcze w § 6,

$$\Theta_{-k} = \Theta_k,$$

tedy można sumę naszą napisać w postaci:

$$\begin{aligned}
 & - \theta_1^2 \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \frac{1}{\theta_0 - 4i^2} \cdot \frac{1}{\theta_0 - 4(i+1)^2} - \\
 & - \theta_2^2 \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \frac{1}{\theta_0 - 4i^2} \cdot \frac{1}{\theta_0 - 4(i+2)^2} - \dots \text{ i t. d.}
 \end{aligned}$$

Ponieważ θ_1 jest co najmniej rzędu m^2 , θ_2 co najmniej rzędu m^4 , θ_3 co najmniej rzędu m^6 i t. d., więc pierwszy wyraz jest co najmniej rzędu m^4 , drugi co najmniej rzędu m^8 , trzeci co najmniej rzędu m^{12} i t. d. Widzimy zatem, że stosownie do tego, jakie chcemy osiągnąć przybliżenie, należy wziąć mniej lub więcej wyrazów. Gdybyśmy np. chcieli pominąć wyrazy rzędu 12-go i wyższych, to należałoby uwzględnić tylko dwa pierwsze wyrazy. Ta sama uwaga stosuje się naturalnie także do wyrazów, które powstają przez dwie, lub więcej, zamiany wskaźników.

We wszystkich wyrazach powyższej sumy figurują pewne szeregi. Szeregi te są wszystkie jednego kształtu i wszystkie dają się zesumować za pomocą znanego wzoru:

$$\pi \cotg \pi \alpha = \sum \frac{1}{\alpha + i} \quad (i = -\infty \dots + \infty);$$

trzeba tylko położyć

$$\theta_0 = 4\alpha^2$$

i napisać

$$\frac{1}{\theta_0 - 4i^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\alpha^2 - i^2}, \quad \frac{1}{\theta_0 - 4(i+k)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\alpha^2 - (i+k)^2}, \dots \text{ i t. d.}$$

Po łatwych przekształceniach, podstawivszy napowrót θ_0 , znajdziemy, że owe szeregi dają się wyrazić przez wzory kształtu:

$$\frac{1}{4\sqrt{\theta_0}} \cdot \frac{1}{\theta_0 - k^2} \cdot \pi \cotg \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\theta_0} \right),$$

przyczem 1-szemu szeregowi odpowiada $k=1$, 2-mu $k=2$ i t. d.

Jeżeli zatem ograniczymy się do wyrazów pochodzących z jednej zamiany wskaźników, to

$$D_0 = 1 - \frac{\pi \cotg \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\theta_0} \right)}{4\sqrt{\theta_0}} \cdot \left[\frac{\theta_1^2}{\theta_0 - 1} + \frac{\theta_2^2}{\theta_0 - 4} + \dots \right]$$

W podobny sposób można także obliczyć wyrazy pochodzące z dwu i więcej zamian wskaźników, ale tych dalszych rachunków przytaczać nie będziemy, powiemy tylko, że Hill obliczył D_0 aż do wyrazów 16 stopnia „exclusive“, t. j. wyrazów rzędu m^{16} już nie uwzględnił.

10. Rozwiązanie równania (32). Obliczenie współczynników b_k .

Posiadając D_0 wracamy do równania (32), t. j. do równania

$$\sin^2 \frac{\pi}{2} g_0 = D_0 \sin^2 \frac{\pi}{2} \sqrt{\Theta_0}, \quad (32 \text{ bis})$$

w którym obecnie oba czynniki, stojące po prawej stronie, są znane, i obliczamy g_0 . Ostatnie obliczenie g_0 wykonał Cowell i znalazł

$$g_0 = 1,085\ 171\ 426\ 558 \dots$$

Wiemy już, że pierwiastki równania $D = 0$, są:

$$g = g_0, \quad g_0 \pm 2, \quad g_0 \pm 4 \dots \text{ i t. d.}, \quad \text{oraz} \quad -g_0, \quad -(g_0 \pm 2), \\ -(g_0 \pm 4) \dots \text{ i t. d.}$$

Chcąc obliczyć współczynniki b_k musimy powrócić do równań (29), bo obliczenie za pomocą wyznaczników byłoby nazbyt trudne. Naturalnie równania (29) dają nam tylko stosunki pozostałych współczynników b_k do jednego z nich, np. do b_0 . Wobec tego równanie, odpowiadające przypadkowi $j=0$, zostawiamy tymczasem na boku, a dopiero na końcu, gdy inne współczynniki zostaną już wyznaczone jako funkcje b_0 , podstawimy je w równanie (29) odpowiadające przypadkowi $j=0$ i określimy b_0 . Obliczamy współczynniki b_k przez kolejne przybliżenia podobnie, jak obliczaliśmy współczynniki a_k w poprzednim rozdziale, przyczem tak samo korzystamy z tego, że współczynnik b_k jest co najmniej rzędu $2k$ względem m .

11. Ruch perigaeum. Wyprowadzenie równań.

Rozwiązanie podane w § 5 zawierało tylko wyrazy rzędu zero, t. j. zależne tylko od stosunku $m = \frac{n'}{n - n'}$, przyczem współrzędna z była zerem. W następnych paragrafach przeszliśmy do

drugiego przybliżenia, ale tylko co do współrzędnej z , mianowicie — uwzględniając nachylenie orbity księżycy do ekliptyki — znaleźliśmy wyrazy pierwszego rzędu, t. j. drugie przybliżenie na z . Teraz przejdziemy do wyrazów pierwszego rzędu, t. j. do drugiego przybliżenia na współrzędne x i y . Przewodnia idea, którą kierujemy się przy poszukiwaniu tego drugiego przybliżenia, jest następująca. Jeżeli zaniedbujemy przyciąganie słońca, to droga księżycy jest elipsą a współrzędne względem osi nieruchomych wyrażają się przez funkcyje peryodyczne [por. rozdz. XIII-ty, § 9]:

$$(33) \quad \begin{cases} x = \Sigma A \cos q nt \\ y = \Sigma B \sin q nt; \end{cases}$$

jeżeli zaś zaniedbujemy mimośród orbity księżycy, ale uwzględniamy przyciąganie słońca tak, jakśmy to uczynili na początku tego rozdziału, to otrzymujemy orbitę symetryczną względem kręcących się osi a współrzędne wyrażają się przez funkcyje peryodyczne o innym peryodzie:

$$(34) \quad \begin{cases} x = \Sigma A' \cos(2q + 1)(n - n')(t - t_0) \\ y = \Sigma B' \sin(2q + 1)(n - n')(t - t_0). \end{cases}$$

To, że w pierwszym razie osie są nieruchome, a w drugim kręcą się, nie stanowi zasadniczej różnicy, bo chcąc przejść od drugich osi do pierwszych dość jest założyć, że prędkość obrotu n' zmniejsza się stopniowo i w końcu znika.

Kierując się analogią z całkami (33) i (34) przypuszczamy, że w przypadku ogólniejszym, gdy uwzględnimy jednocześnie mimośród orbity księżycowej i zakłócenia sprawione przez słońce, t. j. gdy założymy, że e i n' są jednocześnie różne od zera, współrzędne powinny dać się wyrazić przez szeregi funkcyi kołowych o argumentach skombinowanych z argumentów obu szeregów (33) i (34). Nastąpi przytem pewna zmiana, na którą naprowadza nas prosty przykład z teoryi równań różniczkowych. Weźmy równanie

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0;$$

całka jego jest:

$$x = A \cos kt + B \sin kt$$

z peryodem $\frac{2\pi}{k}$.

Weźmy teraz równanie

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = a \cos \lambda t;$$

całka jego

$$x = \frac{a}{k^2 - \lambda^2} \cos \lambda t$$

jest także peryodyczna, ale peryod $\frac{2\pi}{\lambda}$, różni się od poprzedniego.

Coś podobnego zachodzi i tutaj: gdy przechodzimy od ruchu eliptycznego do zakłóconego i gdy wprowadzamy funkcję perturbacyjną do równań, to peryod właściwy ruchowi eliptycznemu zmienia się. Wyrażamy tę zmianę wprowadzając do wszystkich argumentów, pochodzących ze szeregu (32), stały czynnik, powiedzmy c' . Odpowiednio do tego piszemy

$$\begin{aligned} x &= \Sigma \Sigma A_{kq} \cos [(2k+1)(n-n')(t-t_0) + c'qn(t-t_1)] \\ y &= \Sigma \Sigma B_{kq} \sin [(2k+1)(n-n')(t-t_0) + c'qn(t-t_1)] \end{aligned}$$

albo też, wprowadzając znowu zmienną $\tau = (n-n')(t-t_0)$ oraz analogiczną zmienną $\tau_1 = (n-n')(t-t_1)$, wreszcie kładąc

$$c = \frac{c'n}{n-n'};$$

piszemy

$$\left. \begin{aligned} x &= \Sigma \Sigma A_{kq} \cos [(2k+1)\tau + cq\tau_1] \\ y &= \Sigma \Sigma B_{kq} \sin [(2k+1)\tau + cq\tau_1]. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Spójrzmy na wzory (35); po prawej stronie stoją podwójne sumy, bo z każdą całą wartością na q możemy kombinować wszystkie całe wartości na k poczynając od $-\infty$ aż do $+\infty$. Szeregi, odpowiadające wartości $q=0$, już otrzymaliśmy w § 5. Oznaczmy je przez x_0 i y_0 . Z pozostałych szeregów, odpowiadających wartościom

$$q = 1, 2, \dots,$$

weźmiemy tylko dwa pierwsze, w których $q=1$. Są to szeregi najważniejsze, bo mają w porównaniu z dalszymi największe współczynniki. Możemy założyć, że ich współczynniki są proporcjonalne do pierwszej potęgi mimośrodoru orbity księżycowej, współczynniki innych szeregów będą proporcjonalne do mimośrodoru orbity słońca

i do stosunku $\frac{a}{a'}$, dalej do wyższych potęg mimośrodków, stosunku $\frac{a}{a'}$ i t. d. Tych dalszych szeregów obliczać nie będziemy, powiemy tylko, że metoda obliczenia jest podobna do tej, którą będziemy posługiwać się przy obliczeniu obu szeregów odpowiadających hipotezie $q = 1$.

Oznaczamy te dwa szeregi przez Δx i Δy i piszemy

$$(36) \begin{cases} \Delta x = Ae \sum b_k [\cos(2k+1)\tau + c\tau_1] \\ \Delta y = Ae \sum c_k [\sin(2k+1)\tau + c\tau_1] \quad k=0, \pm 1, \pm 2 \dots \end{cases}$$

Możemy też przedstawić te same szeregi w innej postaci, mianowicie w postaci:

$$(36 \text{ bis}) \begin{cases} \Delta x + i\Delta y = Ae [\zeta_1^i \sum b'_k \zeta_1^{2k+1} + \zeta_1^{-i} \sum c'_k \zeta_1^{-(2k+1)}] \\ \Delta x - i\Delta y = Ae [\zeta_1^i \sum c'_k \zeta_1^{2k+1} + \zeta_1^{-i} \sum b'_k \zeta_1^{-(2k+1)}], \end{cases}$$

przyczem

$$\zeta_1 = e^{i\tau_1}, \quad b'_k = \frac{1}{2}(b_k + c_k), \quad c'_k = \frac{1}{2}(b_k - c_k).$$

Ponieważ uważamy Δx i Δy za przyrosty do otrzymanych w § 5 wartości x_0 i y_0 , więc możemy napisać

$$x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y$$

i podstawić w równania (15 bis), t. j. w równania

$$(15 \text{ ter}) \begin{cases} \ddot{x} - 2m\dot{y} - 3m^2x + k \frac{x}{r^3} = 0 \\ \ddot{y} + 2m\dot{x} + k \frac{y}{r^3} = 0. \end{cases}$$

Po podstawieniu skorzystamy z tego, że x_0 i y_0 właśnie czynią zadość powyższym równaniom, następnie skorzystamy z tego, że Δx i Δy są małe w porównaniu z x_0 i y_0 , a więc rozwinięszy

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^3} &= [(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2]^{-3/2} = \\ &= \{[x_0 + \Delta x + i(y_0 + \Delta y)][x_0 + \Delta x - i(y_0 + \Delta y)]\}^{-3/2} \end{aligned}$$

w szereg

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{r_0^3} \left[1 - 3 \frac{x_0 \Delta x + y_0 \Delta y}{r_0^2} + \dots \right]$$

pominiemy wyrazy rzędów wyższych, poczem otrzymamy równania różniczkowe:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \ddot{x} - 2m\Delta \dot{y} - 3m^2\Delta x + A\Delta x + B\Delta y &= 0 \\ \Delta \ddot{y} + 2m\Delta \dot{x} &+ B\Delta x + C\Delta y = 0, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

w których dla krótkości położyliśmy

$$A = -3kx_0^2r_0^{-5}, \quad B = -3kx_0y_0r_0^{-5}, \quad C = -3ky_0^2r_0^{-5}.$$

Ponieważ względem Δx i Δy równania (37) są liniowymi równaniami drugiego stopnia, więc powinny mieć cztery pary całek, t. j. prócz całek (36 bis) powinny mieć jeszcze dwie pary¹⁾, które można utworzyć w następujący sposób: x_0 i y_0 zawierają tylko zmienną $\tau = (n - n')t$ i stałą m ; jeżeli do t dodamy pewną stałą, to x_0 i y_0 nie przestaną zadość czynić równaniom (15 bis); możemy tedy przyjąć:

$$\begin{aligned} x_0 &= \varphi [(n - n')(t + \varepsilon), m] = \varphi \left[\frac{n'}{m}(t + \varepsilon), m \right] \\ y_0 &= \varphi_1 [(n - n')(t + \varepsilon), m] = \varphi_1 \left[\frac{n'}{m}(t + \varepsilon), m \right]. \end{aligned}$$

Ale w takim razie, jeżeli rozwiniemy te całki w szeregi Taylora wedle potęg ε , to

$$\Delta x = \varepsilon \frac{dx_0}{d\varepsilon}, \quad \Delta y = \varepsilon \frac{dy_0}{d\varepsilon},$$

a jeżeli rozwiniemy wedle potęg m , to

$$\Delta x = m \frac{dx_0}{dm}, \quad \Delta y = m \frac{dy_0}{dm}$$

będą także czynić zadość równaniom waryacyjnym (37), będą to zatem całki tych równań. Ale wróćmy do całek (36).

Aby oznaczyć współczynniki b_k i c_k oraz stałą c , należy podstawić całki (36) w równania (37). W rezultacie otrzymamy nieskończoną ilość par równań o nieskończonej ilości niewiadomych. Wyznacznik tych równań musi być równy zero. Skoro go porównamy do zera, to otrzymamy równanie przestępne na c . Po

¹⁾ Całki (36 bis) dają parę rzetelnych całek (36) i parę urojonych.

określeniu stałej c wrócimy do pierwotnych równań i przez kolejne przybliżenia wyznaczymy niewiadome stałe b_k i c_k . Niestety tak równania, jak wyznacznik są dużo trudniejsze niż te, z którymi mieliśmy do czynienia w poprzednich paragrafach, albowiem w § 7 było jedno równanie, tu zaś mamy dwa. Jednakże zamiast trudnego wyznacznika, można, jak to pokazał Hill, otrzymać łatwiejszy; tylko droga, która do niego prowadzi, jest dość długa.

12. Łatwiejszy wyznacznik na c .

W dotychczasowych rozważaniach za punkt wyjścia służyły nam równania (15 bis), które w poprzednim paragrafie oznaczyliśmy numerem (15 ter). Równania te mają tak zwaną całkę Jacobiego:

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{3}{2}m^2x^2 - \frac{k}{r} = C,$$

którą oczywiście można wziąć za punkt wyjścia tak samo, jak równania (15 ter).

Utwórzmy równanie waryacyjne, podobne do równań (37), podstawiając $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, zaniedbując wyrazy rzędu wyższego ponad pierwszy, wreszcie korzystając z równania:

$$\frac{1}{2}(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) - \frac{3}{2}m^2x_0^2 - \frac{k}{r_0} = C.$$

Otrzymane równanie wygląda tak:

$$\dot{x}_0\Delta\dot{x} + \dot{y}_0\Delta\dot{y} - 3m^2x_0\Delta x + \frac{k}{r_0^3}(x_0\Delta x + y_0\Delta y) = 0.$$

Tu znowu można wyrugować $\frac{k}{r_0^3}$ za pomocą równań (15 ter), którym całki x_0 i y_0 czynią zadość, poczem otrzymamy ostateczne równanie

$$(38) \quad \dot{x}_0\Delta\dot{x} + \dot{y}_0\Delta\dot{y} - (\ddot{x}_0 - 2m\dot{y}_0)\Delta x - (\ddot{y}_0 + 2m\dot{x}_0)\Delta y = 0.$$

Wprowadźmy nowe zmienne określone przez związek:

$$\xi + i\eta = \frac{\Delta x + i\Delta y}{\dot{x}_0 + i\dot{y}_0},$$

z którego zaraz wynika

$$\begin{aligned} \Delta x &= \xi \dot{x}_0 - \eta \dot{y}_0, & \Delta y &= \xi \dot{y}_0 + \eta \dot{x}_0, \\ \Delta \dot{x} &= \xi \ddot{x}_0 - \dot{\eta} \dot{y}_0 + \dot{\xi} \dot{x}_0 - \eta \ddot{y}_0 & \text{i t. d.} \dots \end{aligned}$$

Po podstawieniu tych wartości na Δx i Δy w równanie (38) otrzymamy

$$\xi = 2\eta \left[\frac{\dot{x}_0 \ddot{y}_0 - \dot{y}_0 \ddot{x}_0}{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2} + m \right]. \quad (39)$$

Podstawmy teraz nowe zmienne w równania (37) a otrzymamy dwa równania różniczkowe zawierające pochodne $\ddot{\xi}$, $\ddot{\eta}$, $\dot{\xi}$ i $\dot{\eta}$ oraz same zmienne ξ i η . Po uporządkowaniu spostrzeżemy, że współczynniki przy ξ w obu równaniach są równe zeru. Rzeczywiście te współczynniki są: w pierwszym równaniu:

$$\ddot{x}_0 - 2m\ddot{y}_0 - 3m^2\dot{x}_0 + A\dot{x}_0 + B\dot{y}_0,$$

a w drugim

$$\ddot{y}_0 + 2m\ddot{x}_0 + B\dot{x}_0 + C\dot{y}_0,$$

t. j. mają kształt lewych stron równań (37). Tymczasem znaleźliśmy wyżej, że równania (37) mają całki

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx_0}{d\varepsilon} &= \varepsilon \frac{dx_0}{dt} = \varepsilon (n - n') \frac{dx_0}{d\tau} \\ \varepsilon \frac{dy_0}{d\varepsilon} &= \varepsilon \frac{dy_0}{dt} = \varepsilon (n - n') \frac{dy_0}{d\tau}; \end{aligned}$$

zatem pomijając stały współczynnik $\varepsilon (n - n')$ znajdziemy, że funkcje

$$\frac{dx_0}{d\tau} = \dot{x}_0, \quad \frac{dy_0}{d\tau} = \dot{y}_0$$

czynią zadość równaniom (37). Stąd zaś wynika, że powyżej podane współczynniki przy ξ są na mocy równań (37) równe zeru. Zresztą równania (37) przybiorą po podstawieniu nowych zmiennych kształt:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} \dot{x}_0 - \ddot{\eta} \dot{y}_0 + 2(\dot{\xi} \dot{x}_0 - \dot{\eta} \dot{y}_0) - 2m(\dot{\xi} \dot{y}_0 + \dot{\eta} \dot{x}_0) - \eta [\dots]^1 &= 0 \\ \ddot{\xi} \dot{y}_0 + \ddot{\eta} \dot{x}_0 + 2(\dot{\xi} \dot{y}_0 + \dot{\eta} \dot{x}_0) + 2m(\dot{\xi} \dot{x}_0 - \dot{\eta} \dot{y}_0) + \eta [\dots] &= 0. \end{aligned}$$

¹⁾ Nie piszemy wyrazów stojących w ostatnich nawiasach, bo są nazbyt długie.

Mnożąc pierwsze z tych równań przez $-\dot{y}_0$ a drugie przez \dot{x}_0 i dodając do siebie otrzymamy równanie:

$$\ddot{\eta}(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + 2\dot{\eta}(\dot{x}_0\ddot{x}_0 + \dot{y}_0\ddot{y}_0) + 2\dot{\xi}[\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \dot{y}_0\ddot{x}_0 + m(x_0^2 + y_0^2)] + \eta[\dots] = 0$$

nie zawierające już ani ξ ani ξ . Wreszcie możemy wyrugować jeszcze $\dot{\xi}$ za pomocą równania (39), poczem otrzymamy równanie zawierające już tylko zmienną η i jej pochodne

$$(40) \quad \ddot{\eta}(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + 2\dot{\eta}(\dot{x}_0\ddot{x}_0 + \dot{y}_0\ddot{y}_0) + \eta M = 0,$$

w którym dla krótkości położyliśmy:

$$(41) \quad M = 4[\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \dot{y}_0\ddot{x}_0 + m(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)]^2 + \dot{x}_0\ddot{x}_0 + \dot{y}_0\ddot{y}_0 - 2m(\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \dot{y}_0\ddot{x}_0) - 3m^2\dot{y}_0^2 + A\dot{y}_0^2 + C\dot{x}_0^2.$$

Widzimy stąd, że η czyni zadość równaniu różniczkowemu drugiego stopnia, w którym współczynnikami są wiadome funkcje zmiennej τ . Rzeczywiście pomienione współczynniki zawierają tylko wiadome funkcje x_0 i y_0 oraz ich pochodne względem τ . Lecz funkcje x_0 i y_0 oraz ich pochodne są peryodyczne; stąd zaś wynika, że współczynniki równania (38) są peryodyczne. Pozostaje nam tylko przekształcić równanie (38). Połóżmy

$$(42) \quad \eta = \varrho\varphi,$$

przyczem

$$(43) \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}}.$$

Po podstawieniu przekonamy się, że ϱ czyni zadość równaniu różniczkowemu:

$$(44) \quad \ddot{\varrho} + \Theta\varrho = 0.$$

Co do współczynnika Θ , to posilując się związkim (43) zaraz wyprowadzimy z równania (40) wzór:

$$(45) \quad \Theta = \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} - \frac{2\dot{\varphi}^2}{\varphi^2} + M\varphi^2.$$

Równanie (44) jest zupełnie podobne do równania (25). Podobieństwo jest nietylko formalne, ale rzeczywiste, bo, podobnie jak tam, funkcja Θ jest funkcją peryodyczną zmiennej τ o pe-

ryodzie π . Istotnie współczynniki A , B i C w równaniach (37) są peryodyczne i posiadają peryod π , całki równań (37) są także peryodyczne, peryodycznymi są wreszcie funkcje ξ i η oraz współczynniki równania (40). Wskutek tego funkcja Θ jest również peryodyczna. Co więcej, tak φ , jak Θ są parzyste. Obliczyć Θ można z równania (45). Zresztą w dziełach Hilla i Browna są podane sposoby obliczenia Θ jak najkrótszą drogą. Tedy obecna funkcja Θ i funkcja Θ z równania (25) są do siebie zupełnie podobne, tylko współczynniki mają inne wartości i jeżeli rozwiniemy Θ w szereg:

$$\Theta = \Theta_0 + 2\Theta_1 \cos 2\tau + 2\Theta_2 \cos 4\tau + \dots, \quad (46)$$

to zaraz zobaczymy, że tu Θ_1 jest znacznie większe niż w § 6.

Ze względu na podobieństwo równania różniczkowego i funkcji Θ stojącej we współczynniku przy niewiadomej możemy do obliczenia stałej c użyć wyznacznika zupełnie podobnego do tego, który poprzednio służył do obliczenia stałej g ; zobaczymy jednak, że, głównie z powodu większego współczynnika Θ_1 , rozwinięcie wyznacznika w szereg jest powolniej zbieżne niż rozwinięcie funkcji Θ z § 6.

Mając c możemy przejść do wyznaczenia stałych b_k i c_k . W tym celu podstawimy całki (36) w równania (37) i przyrównamy do zera współczynniki przy kolejnych potęgach ζ . Otrzymamy nieskończoną ilość par równań, zawierających współczynniki b_k i c_k . Rozwiążemy te równania przez kolejne przybliżenia, korzystając z tego, że wartości b_k i c_k szybko zmniejszają się w miarę tego, jak liczba porządkowa k wzrasta. Równania, o których mówimy, są dość zawile [patrz E. Brown: „Motion of the Moon“ w „Memoirs of the Roy. Astr. Soc.“, tom LIII] można jednak zastąpić je przez inne równania, wyprowadzone ze związków pomiędzy całkami (36) [patrz Poincaré: „Leçons de mécanique céleste“, tom II, cz. II, str. 69] i całkami:

$$\frac{dx_0}{d\varepsilon}, \quad \frac{dy_0}{d\varepsilon}, \quad \frac{dx_0}{dm}, \quad \frac{dy_0}{dm}.$$

Niektóre z pomiędzy współczynników b_k i c_k , mające duże liczbowe wartości, odpowiadają ważnym nierównościami, np. współczynnikiem b_0 i c_0 odpowiada tak zwane „równanie środka“, a współczynnikiem b_{-1} i c_1 tak zwana „ewekeya“.

Nietylko inne wyrazy pierwszego rzędu, ale także wyrazy za-

wierające wyższe potęgi parametrów e, e', i oraz $\alpha = \frac{1}{a'}$ określamy w podobny sposób jak wyrazy rzędu pierwszego proporcjonalne do e , t. j. za pomocą równań waryacyjnych w rodzaju równań (37) obecnego rozdziału; jednakże zadanie jest z reguły o tyle trudniejsze, że trzeba obliczać nie tylko nowe przybliżenia trzech współrzędnych x, y i z , ale także dwóch stałych c i g . Obliczamy tedy nie trzy niewiadome, jak w pierwszym przybliżeniu, a pięć.

13. Znaczenie stałej c .

Powiedzieliśmy już, że stała c jest w związku z ruchem *perigaeum*, a wyżej już podaliśmy związek

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{t. j.} \\ c(n - n') = c'n, \\ c' = \frac{c}{1 + m}. \end{array} \right.$$

Przekonamy się niebawem, że

$$(48) \quad (1 - c')n$$

jest to prędkość ruchu *perigaeum*. że zatem związek między c, c' i prędkością ruchu *perigaeum* jest zupełnie podobny do związku między g, g' a prędkością ruchu węzła.

Aby rozpoznać naturę tego związku, powrócimy na chwilę do orbity pośredniej, o której była mowa w § 3. Orbita ta jest odniesiona do osi kręcących się ze stałą kątową prędkością n' . Jest to krzywa płaska, symetryczna względem osi x i y o kształcie nieco podobnym do kształtu elipsy. Ziemia znajduje się w jej środku, najkrótsza średnica ma kierunek osi x , możemy tedy powiedzieć, że orbita pośrednia z § 3 posiada dwa *perigaea*, po jednym na każdym końcu najkrótszej średnicy. Ponieważ zaś cała krzywa jest zamknięta i nieruchoma, więc oba *perigaea* są nieruchome.

Co się stanie, gdy do współrzędnych orbity pośredniej dodamy przyrosty Δx i Δy znalezione w obecnym rozdziale? Aby to dobrze wyrozumieć, załóżmy chwilowo, że stała c , która, jak wiemy, jest trochę większa od jedności, — ma wartość ściśle równą jedności. Innych całych wartości na c nie potrzebujemy rozważać,

bo wszystkie parzyste całe wartości na c dają ten sam wynik co hipoteza $c = 0$, gdy zaś $c = 0$, to poprostu powracamy do pierwszego przybliżenia i przyrosty Δx i Δy stają się zbędne. Z drugiej strony wszystkie nieparzyste całe wartości na c dają ten sam wynik co hipoteza $c = 1$. Lecz gdy $c = 1$, to

$$\Delta x = \Sigma M_k \cos [2(k+1)\tau + \lambda], \quad \Delta y = \Sigma N_k \sin [2(k+1)\tau + \lambda],$$

gdzie λ oznacza pewną stałą. Peryod wyrazów Δx i Δy jest dwa razy krótszy niż peryod wyrazów x_0 i y_0 , ale ponieważ jest z peryodem tamtych wyrazów wymierny, więc chociaż krzywa zmienia swój kształt, jednakże pozostaje nieruchomą i zamkniętą, a księżyc za każdym obiegiem opisuje tę samą drogę. Elementarne rozważania zaraz pokażą nam, że krzywa nie jest już symetryczną względem osi x i y , że ziemia nie znajduje się w jej środku, że wreszcie jest już tylko jedno perigaeum. Naturalnie to perigaeum jest nieruchome, znajduje się ono po stronie bardziej od słońca oddalonej.

Weźmy teraz c trochę większe od jedności i napiszmy argumenty funkcyi kołowych we wyrażeniach na Δx i Δy w kształcie

$$2(k+1)\tau + (c-1)\tau + c\lambda.$$

Peryody oddzielnych funkcyi kołowych są niewymierne tak z 2π , jak między sobą; krzywa o współrzędnych $x_0 + \Delta x$ i $y_0 + \Delta y$ jest wprawdzie podczas każdego oddzielnego obiegu księżyca podobna do krzywej odpowiadającej przypadkowi $c = 1$, ale za każdym nowym obiegiem przechodzi przez inne punkty. Jest to więc krzywa niezamknięta o nieskończonej ilości zwojów przecinających się między sobą i wkraczających na siebie. Wskutek tego i *perigaeum* wciąż zmienia swą pozycyę. Musimy przeto uważać je za ruchome, a prędkość, z którą *perigaeum* przesuwa się, jest oczywiście funkcyą różnicy $c - 1$ i to znikającą wraz z $c - 1$. Przypuszczamy, że funkcyja ta daje się rozwinąć w zbieżny szereg potęgowy o potęgach całych i dodatnich, a ponieważ $c - 1$ jest bardzo małe, więc przyjmujemy, że można urwać szereg na pierwszym wyrazie i że średnia prędkość ruchu *perigaeum* jest

$$v = K(c - 1).$$

Współczynnik K powinien być liczbą absolutną, bo argumenty funkcyi kołowych są liczbami absolutnemi; skoro zatem podzielimy argument przez τ , to otrzymamy prędkość kątową, stosunek zaś

między tą prędkością kątową a v , które jest także prędkością kątową musi być liczbą absolutną. Zresztą liczba K może być tylko $+1$ lub -1 , bo $c-1$ ma wszędzie w argumentach współczynnik 1, chodzi więc tylko o znak $+$ lub $-$. Spostrzegamy zaraz, że znak musi być $-$, albowiem perigaeum cofa się. Aby wyrazić to cofanie się bierzemy funkeye kołowe o argumentach

$$2(k+1) + c\lambda + (c-1)\tau,$$

jako wzrastające i zmniejszające się prędzej niż funkeye kołowe o argumentach

$$2(k+1)\tau + \lambda.$$

Jeżeli Δx i Δy składają się z wyrazów o argumentach pierwszego typu, to $x_0 + \Delta x$ i $y_0 + \Delta y$ wcześniej osiągają najmniejsze, względnie największe wartości, aniżeli wtedy, gdy Δx i Δy składają się z wyrazów drugiego typu. Przeto w pierwszym razie prędzej dojdziemy do minimalnej wartości promienia, t. j. do *perigaeum* niż w drugim razie. Lecz w drugim razie *perigaeum* jest nieruchome, a więc w pierwszym razie cofa się. Jeżeli atoli *perigaeum* cofa się, to

$$v = -(c-1) = 1 - c.$$

Skoro zaś od prędkości kątowej liczonej w jednostkach zmiennej τ przejdziemy do zwykłych jednostek czasu, to będziemy musieli napisać

$$(49) \quad v = (1-c)(n - n').$$

Wreszcie ponieważ prędkość v jest obliczona względem osi kręcących się z prędkością kątową n' , to chcąc otrzymać prędkość kątową względem osi nieruchomych, położonych także w płaszczyźnie ekliptyki, musimy dodać prędkość kątową obrotu osi. Zatem prędkość kątową względem osi nieruchomych będzie:

$$(50) \quad V = (1-c)(n - n') + n'.$$

Mimoходом zauważymy, że podczas gdy $v < 0$, to $V > 0$. Podstawmy wreszcie w ostatni wzór (50) wartość na c wziętą ze wzoru (47), a otrzymamy

$$V = (1 - c')n.$$

Tą samą metodą, która służyła do obliczenia g , oraz kładąc

$$m = 0,08084 \ 89338 \ 08312$$

Hill znalazł, że

$$e = 1,07158\ 32774\ 16012,$$

stąd zaś na mocy związku (47)

$$e' = 0,99142\ 74269\ 95135$$

a

$$1 - e' = 0,00857\ 25730\ 04864.$$

Tedy średni ruch perigaeum $(1 - e')n$ jest 0,00857... razy mniejszy niż średni ruch księżycyca n a czas, w ciągu którego perigaeum zakreśla całe 360°, wynosi

$$\frac{27,321\ 661}{0,00857\dots} \text{ dni,}$$

t. j. około 3187 dni, albo o 100 dni mniej niż 9 lat, bo 9 lat, to prawie dokładnie 3287 dni. Rzeczywisty ruch *perigaeum* nie jest jednostajny: w dokładnej teorii prędkość zawierałaby także pewne wyrazy peryodyczne, które można i należy pominąć, gdy chodzi o średni ruch. Okres czasu, który upływa od jednego przejścia przez perigaeum do drugiego, jest niejednostajny, ale średnio wynosi 27,554600 dni. Jest to tak zwany miesiąc anomalistyczny. Jeżeli oznaczymy długość miesiąca gwiazdowego (= 27,321661 dni) przez T , a anomalistycznego przez T_a , to

$$T_a = \frac{1}{e'} T.$$

Kierunek ruchu perigaeum jest ten sam, co kierunek ruchu księżycyca — rozumie się — wtedy, gdy odnosimy oba ruchy do osi nieruchomych, bo, jak to wyżej widzieliśmy, gdy odnosimy oba ruchy do osi kręcących się za średnim słońcem, to ruch *perigaeum* jest wsteczny.

14. Kilka słów o innych teoriach księżycyca.

Wyłożyliśmy tu pokrótce w najogólniejszych zarysach tę teorię księżycyca, która posługuje się współrzędnymi prostokątnymi. Możemy ją uważać za nową, bo choć już Euler używał współrzędnych prostokątnych, jednak dopiero w nowszych czasach w rękach Hilla i Poincarégo teoria ta nie tylko znacznie się rozwinęła, ale nawet prześcignęła inne.

W dawniejszych teoriach używano współrzędnych biegunowych: promienia wodzącego, długości i szerokości księżycy. W pierwszym przybliżeniu zupełnie zaniedbywano przyciąganie słońca, wskutek czego naturalnie otrzymywano orbitę eliptyczną, Keplerowską; ziemia znajdowała się w jednym z ognisk a perigaeum, podobnie jak cała orbita, było nieruchome względem osi posiadających stałe kierunki. Skoro zupełnie zaniedbywano przyciąganie słońca, to naturalnie nie było żadnego powodu uważać płaszczyznę orbity księżycy za identyczną z ekliptyką, zakładano tedy od samego początku, że ta płaszczyzna jest do ekliptyki nachylona.

Weźmy rozwinięcia w szeregi promienia wodzącego, długości i stycznej szerokości księżycy [zazwyczaj biorą nie samą szerokość, a jej „tangens“, bo to dogodniejsze]. W ruchu Keplerowskim, eliptycznym rozwinięcia te są:

$$(51) \left\{ \begin{array}{l} f = nt + \varepsilon + (2e - \frac{1}{4}e^3 + \dots) \sin M + (\frac{3}{8}e^2 + \dots) \sin 2M + \\ \quad + (\frac{1}{24}e^3 + \dots) \sin 3M + \dots \\ \quad - (\frac{1}{4}\gamma^2 + \dots) \sin 2\eta_0 - (\frac{1}{2}e\gamma^2 + \dots) \sin (M - 2\eta_0) - \\ \quad - (\frac{1}{2}e\gamma^2 + \dots) \sin (M + 2\eta_0) + \dots \\ \frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 + \dots - (e - \frac{3}{8}e^3 + \dots) \cos M - \\ \quad - (\frac{1}{2}e^2 + \dots) \cos 2M - (\frac{3}{8}e^3 + \dots) \cos 3M - \dots \\ s = (1 - e^2 - \frac{1}{8}\gamma^2 \dots) \gamma \sin \eta_0 + (e\gamma + \dots) \sin (M - \eta_0) + \\ \quad + (e\gamma + \dots) \sin (M + \eta_0) + (\frac{1}{8}e^2 + \dots) \sin (2M - \eta_0) + \\ \quad + (\frac{3}{8}e^2\gamma + \dots) \sin (2M + \eta_0) - (\frac{1}{8}\gamma^3 + \dots) \sin 3\eta_0 + \dots \end{array} \right.$$

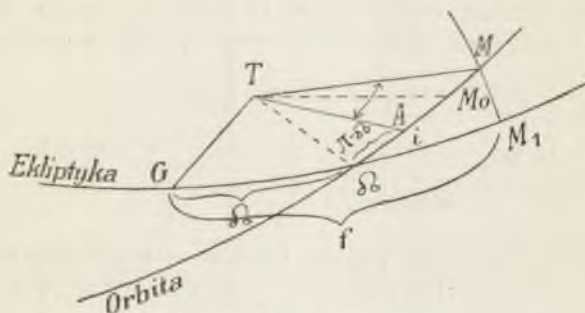
We wzorach tych f oznacza długość, s tangens szerokości księżycy, e mimośród, $\gamma = \tan i$, gdzie i oznacza nachylenie płaszczyzny orbity księżycy do ekliptyki, zaś

$$M = nt + \varepsilon - \pi, \quad \eta_0 = nt + \varepsilon - \Omega.$$

Te dwa ostatnie kąty noszą nazwy „średniej anomalii“ i „średniego argumentu szerokości“. Aby lepiej zrozumieć znaczenie zmiennych M i η_0 oraz stałych ε^1), π , Ω , rozpatrzmy załączony tu rysunek, na którym przedstawiono przecięcia płaszczyzn ekliptyki i orbity księżycy ze sferą niebieską.

1) Symbol ε odgrywa tu tę samą rolę, co l_0 w rozdziale XIX.

T oznacza środek ziemi, G ten punkt na ekliptyce, od którego liczymy długości, t. j. wiosenne porównanie dnia z nocą, A oznacza *perigaeum*, Ω wstępujący węzeł orbity, M punkt, w którym promień wodzący, idący do rzeczywistego, M_0 punkt, w którym promień wodzący, idący do fikcyjnego średniego księżyca, przebija sferę niebieską. MM_1 jest to kawałek koła szerokości, zatem MM_1 jest prostopadle do ekliptyki. Kąt $ATM = v =$ prawdziwej anomalii, $\Omega =$ długości węzła wstępującego, $i =$ nachyleniu orbity do ekliptyki, $\Omega M_0 = nt + \varepsilon - \Omega$, $\pi = G\Omega + \Omega A = \Omega + \Omega A =$ długości *perigaeum* (kąty liczymy częścią wzdłuż ekliptyki, częścią wzdłuż orbity), $f = GM_1 =$ długości rzutu księżyca na ekliptykę,



Ryc. 37.

$nt + \varepsilon = G\Omega + \Omega M_0$, a więc ε to jest wartość tego kąta w chwili $t = 0$. Anomalia średnia M liczy się, tak samo jak anomalia prawdziwa v , od *perigaeum*, a więc

$$M = nt + \varepsilon - \pi = \sphericalangle M_0TA.$$

Z drugiej strony zaraz widać, że

$$\eta_0 = nt + \varepsilon - \Omega = \sphericalangle M_0T\Omega.$$

Ale wróćmy do równań (51). Widzimy, że szeregi stojące po prawej stronie składają się z funkcyj kołowych, w których argumentami są M i η_0 , ich wielokrotności oraz sumy i różnice tychże argumentów i ich wielokrotności. Współczynnikami przy funkcejach kołowych są szeregi potęgowe małych wielkości ε i γ , przyczem im argument funkcyj kołowej jest wyższego rzędu, tem wyższą jest potęga, od której zaczyna się szereg stojący we współczynniku. Wspomniane szeregi są wogóle tak szybko zbieżne, że można zawsze

ograniczyć się do pierwszych paru wyrazów. Tu we wzorach (51) ograniczyliśmy się do wyrazów trzeciego stopnia włącznie.

W ruchu nieeliptycznym, zakłóconym przez przyciąganie słońca rozwijamy współrzędne r, f i s w szeregi podobne do szeregów (51), ale zamiast argumentów M i η_0 wprowadzamy argumenty:

$$\Phi = c'nt + \varepsilon - \pi, \quad \eta = g'nt + \varepsilon - \Omega.$$

Stałe c' i g' są bliskie jedności, przyczem, jak to już wiemy, $c' < 1$ a $g' > 1$. Odrazu widać, że dzięki tej modyfikacyi orbita księżycy przestaje być elipsą a zarazem przestaje być niezmienną i nieruchomą. Charakter zmian można rozpoznać przez następujące rozważania. Weźmy wyrażenie na promień wodzący r z drugiego wzoru (51) ograniczając się do pierwszej potęgi mimośrodu:

$$r = a(1 - \varepsilon \cos M).$$

Oczywiście *perigaeum* przypada na punkty, w których

$$M = 0, 2\pi, 4\pi, \dots \text{ i t. d.}$$

t. j. na jeden i ten sam punkt. To samo otrzymalibyśmy zresztą ze ścisłego wzoru (51) (drugi wzór). Natomiast w ruchu zakłóconym, nieeliptycznym z tem samym przybliżeniem:

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \Phi),$$

przeto *perigaeum* przypada na punkty, w których

$$\Phi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots \text{ i t. d.},$$

mające coraz to inne długości. Stąd wnosimy, że *perigaeum* przesuwają się. Prędkość przesuwania się znajdziemy pisząc Φ w nieco odmiennym od poprzedniego kształcie:

$$\Phi = nt + \varepsilon - [\pi + (1 - c')nt].$$

Możemy powiedzieć, że średni ruch księżycy n jest ten sam, co w ruchu eliptycznym, ale długość *perigaeum* zamiast mieć stałą wartość $\bar{\omega}$, jak w ruchu eliptycznym, ma zmienną wartość: $\pi + (1 - c')nt$. Oczywiście prędkość *perigaeum*, albo, jak mówią, średni ruch *perigaeum* jest $(1 - c')n$. Wiemy już z poprzedniego paragrafu, że $(1 - c')n$ ma małą dodatnią wartość; zatem *perigaeum* posuwa się powoli w tym samym kierunku co księżyc, wskutek czego miesiąc

anomalistyczny (por. poprzedni paragraf) jest trochę dłuższy od gwiazdowego. Stosując podobne rozumowania do argumentu η znajdziemy, że węzły księżyca poruszają się z prędkością $(1 - g')n$, ponieważ zaś $(1 - g')n$ ma małą odjemną wartość, więc wynika stąd, że węzły cofają się powoli oraz że miesiąc smoczy jest trochę krótszy od gwiazdowego.

15. Ogólne uwagi o teorii księżyca.

Posuwając się coraz dalej w kolejnych przybliżeniach dojdziemy wreszcie do tego momentu, w którym wszystkie ważniejsze perturbacje zostaną uwzględnione. Jest to moment, w którym należy podstawić liczbowe wartości i porównać teorię z obserwacjami. Tymczasem Hansen podstawia liczbowe wartości już w pierwszych stadyach rachunku. Zasadniczo ta metoda jest niewątpliwie wadliwa, bo raz popełniony błąd rachunkowy odbija się na dalszych rachunkach a odnaleźć go bardzo trudno; następnie jeżeli okaże się, że któraś z przyjętych stałych była niedokładna, to prawie niema możności wprowadzić odpowiednie poprawki. A jednak trudno postąpić inaczej, bo obliczenie wszystkich wyrazów we formie algebraicznej wymaga ogromnej pracy i bardzo długiego czasu. Dość powiedzieć, że Delaunay poświęcił dwadzieścia kilka lat na wypracowanie swojej teorii. Dzieło jego to dwa grube tomy: same wzory ostateczne na długość, szerokość i parallaxę księżyca [parallaksa jest równoważna odległości] zajmują 121 stronice pomimo tego, że brak w nich wyrazów zależnych od przyciągania planet i od figury ziemi¹⁾. Również algebraiczna teoria Plany zapełnia trzy ogromne tomy.

Może najtrafniejszą, bo jednocześnie zadawalniającą praktyczne i teoretyczne postulaty, jest metoda, której trzymał się E. W. Brown²⁾ w swej stosunkowo nowej, bo dopiero w 1908 r. ukończonej teorii księżyca. Brown wyprowadza wszędzie algebraiczne wzory, tylko liczebne wartości na n i n' , t. j. na średnie ruchy księżyca i słońca, jako bardzo dokładnie znane, podstawia już w pierwszych stadyach rachunku, przez co osiąga znaczne uproszczenie i skrócenie dalszych rachunków.

¹⁾ Delaunay utonął nie dokończywszy swego dzieła: brak trzeciego tomu, który miał być poświęcony wymienionym w tekście perturbacjom.

²⁾ Teoria Brown'a opiera się na teorii Hilla.

Z powyższych wzmianek widzimy, że teoria księżycy jest ogromnie zawiłą i trudną, że chcąc osiągnąć dostateczną ścisłość musimy obliczać olbrzymie wzory; wobec tego wolno spytać, czy odpowiedni skutek wieńczy dzieło, czy osiągnięta dokładność jest zupełnie zadawalniająca? Trudno dać ostateczną odpowiedź na to pytanie, bo nie wiemy jeszcze, jak przygotowywane obecnie, a oparte na jego teorii, tablice Browna wytrzymają próbę praktyki; ale to wiemy napewno, że wydane w 1857 r. a uważane swego czasu za rodzaj arcydzieła tablice Hansena już dziś dają pozycyę księżycy często o pół minuty i więcej błędne.

Skąd to pochodzi? Z pewnością nie z błędów w samych tablicach, bo te są nazbyt małe, aby mogły spowodować tak znaczne różnice między pozycyami podanemi przez tablice a obserwowanemi. Z drugiej strony wydaje się, że uwzględniamy wszystkie siły grawitacyjne, mogące wchodzić w rachubę. Przyciąganie małych planet, rojów meteorytowych i różnych innych drobnych ciał należących do słonecznego systemu, o ile można sądzić na podstawie próbných rachunków, nie może sprawić żadnej większej perturbacyi. Tak samo tarcie towarzyszące przypływowi oceanicznym i ziemskim wydaje się zanadto słabem, aby w ciągu kilkudziesięciu lat wywołać widoczne zmiany w ruchu księżycy. Zdaje się tedy, że trzeba szukać przyczyny w innym kierunku.

O ile wykluczymy zadanie dwóch ciał oraz niektóre specjalne przypadki zadania trzech ciał, mianowicie przypadki wskazane przez Lagrange'a oraz pewne rozwiązania peryodyczne, jedno z których wyłożyliśmy w pierwszych paragrafach (1—5) obecnego rozdziału; — szeregi używane w mechanice niebieskiej mają wadę, o której mówiliśmy już w rozdz. XIII-tym: brak im zbieżności, wskutek czego nie jesteśmy pewni, czy wyliczone przez nas sumy kilku lub kilkunastu pierwszych wyrazów zbliżają się do jakiej określonej granicy. Na tę wadę cierpiały dawniejsze teorie księżycy. Z drugiej strony nie mamy pewności, czy Newtonowskie prawo przyciągania jest ściśle, czy tylko we wysokim stopniu przybliżone. Gdyby było tylko przybliżone, to znaczyłoby, że w rzeczywistości wciąż zaniedbujemy jakieś nieznanne nam małe wyrazy, które może w ruchu ciała tak stosunkowo bliskiego, jak księżycy, odgrywają pewną rolę.

Zresztą kto wie, czy nie istnieją jakieś inne przyczyny, jakieś

nieznane nam siły, które, acz w małym stopniu, współdziałają ze siłą ciężkości.

Wspomnieliśmy tu o tarcu towarzyszącem przyływowi. Na to tarcie powoływano się głównie w celu objaśnienia pewnego niewytłómaczonego przyspieszenia w ruchu księżycy. Sprawa ta ma całą historję, którą postaramy się przedstawić w kilku słowach.

Jeszcze w końcu XVII wieku przez porównanie ówczesnych zaćmień księżycy ze starożytnymi obserwacyami zaćmień podanymi przez Ptolomeusza i z obserwacyami arabskich astronomów Halley znalazł pewne przyspieszenie w ruchu księżycy. W sto lat później Laplace wykazał, że przyczyną przyspieszenia są powolne zmiany mimośrodu drogi ziemi naokoło słońca. Zdawało się, że kwestya jest ostatecznie wyjaśnioną, aliści w 1853 r. Adams odkrył, że przyspieszenie spowodowane przez zmiany mimośrodu wynosi tylko połowę przyspieszenia podanego przez Laplace'a. Różnica między Laplace'm a Adams'em pochodzi stąd, że pierwszy zadowolnił się przybliżonem obliczeniem, a drugi wykonał je z większą ściśłością. Wkrótce potem Delaunay i inni stwierdzili rezultat otrzymany przez Adamsa. W ten sposób kwestya przyspieszenia ruchu księżycy stała się znowu aktualną, bo przyspieszenie teoretyczne okazało się mniejszem niż obserwowane. Powstała cała literatura dotycząca przyspieszenia i zaćmień obserwowanych w starożytności. Delaunay postawił hipotezę, że przyczyną pozostałego, niewytłómaczonego przyspieszenia może być tarcie towarzyszące przyływowi, albowiem tarcie zmniejsza prędkość obrotu ziemi, a więc zwiększa długość dnia gwiazdowego, który służy za miarę czasu. Skoro zaś miara czasu staje się coraz to dłuższą, to odwrotnie ruchy ciał niebieskich a więc i księżycy muszą wydawać się przyspieszone. Hipotezę Delaunay'a podjął później G. H. Darwin i osnuł naokoło niej całą teorię ewolucyi księżycy. Lecz spór o przyspieszenie ruchu księżycy nie skończył się na tem. Parę lat temu z powodu prac Cowella angielscy i amerykańscy astronomowie znowu wiedli obszerną dyskusję nad tą kwestyą, jednakże nie doszli do ostatecznego rezultatu.

Być może — takim jest przynajmniej zdanie Charliera — że owo niewytłómaczone przyspieszenie pochodzi poprostu z niedostatecznej zbieżności, czy raczej z rozbieżności szeregów używanych w mechanice niebieskiej, o której mówiliśmy kilkakrotnie w rozdz. XIX-tym i XX-tym. W każdym razie godnym uwagi

jest fakt, że w ostatnich czasach astronomowie znajdują mniejsze wartości na owo niewytlómaczone przyspieszenie niż — powiedzmy — dwadzieścia lat temu. Lecz nie należy stąd wysnuwać nazbyt optymistycznych wniosków, należy poczekać z ostatecznym sądem do chwili, gdy zostaną wydane nowe tablice E. Brown'a oparte na nowej (tu wyłożonej) teorii księżycy. Zobaczymy, czy i jak długo przepowiadane przez nie pozycje księżycy będą zgadzać się z obserwowaniami.

Literatura.

J. Plana: *Théorie du mouvement de la Lune*, 3 tomy, Turyn, 1832.

E. Delaunay: *Théorie du mouvement de la Lune*. *Mémoires de l'Académie des Sciences*, tom XXVIII i XXIX, Paryż, 1860 i 1867.

E. W. Brown: *An introductory Treatise to the Lunar Theory*. Cambridge, 1896.

— *Theory of the Motion of the Moon*. *Memoirs R. A. S.*, tomy LIII, LIV, LVII i LIX.

H. Poincaré: *Leçons de mécanique céleste*, tom II, zeszyt 2-gi, Paryż, 1909.

G. W. Hill: Szereg rozpraw, między którymi najważniejsze są: „*Researches in the Lunar Theory*” i „*On the Part of the Motion of the Lunar Perigee...*”. Rozprawy te porzucane w „*Annals of Mathematics*”, „*Astronomical Journal*”, „*Acta mathematica*”, „*Transactions of the American astronomical Society*”, „*Astronomical Papers for the Use of the American Ephemeris*” i t. d. zostały zebrane i wydane przez „*Carnegie Institution*” pod tytułem „*Collected Works of G. W. Hill*” [4 tomy, Washington, 1905—1908].

ROZDZIAŁ XXII.

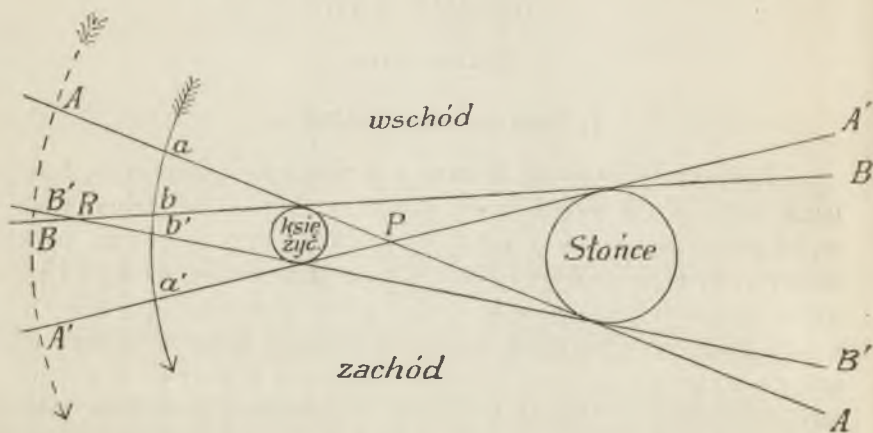
Zaćmienia.

1. Opis zaćmienia słońca.

Rozpatrzmy przebieg zaćmienia słońca i to całkowitego. Najpierw zachodnia krawędź tarczy słonecznej dotyka wschodniej krawędzi tarczy księżycowej, potem słońce stopniowo zasuwa się poza księżyc, wreszcie znika zupełnie. Po krótkim czasie, najwyżej po kilku minutach zachodnia krawędź tarczy słonecznej pojawia się z poza zachodniej krawędzi tarczy księżycowej, poczem słońce stopniowo wysuwa się z poza księżyc. Zaćmienie kończy się w chwili, gdy krawędzie — tym razem wschodnia słońca i zachodnia księżycy — już tylko stykają się ze sobą. Chwile, w których obie tarcze stykają się krawędziami różnoimiennymi, a więc zachodnią ze wschodnią, lub odwrotnie to są chwile zetknięć (kontaktów) zewnętrznych, zaś chwile, w których obie tarcze stykają się jednoimiennymi krawędziami, a więc wschodnią ze wschodnią, lub zachodnią ze zachodnią to są chwile zetknięć wewnętrznych. W czasie kontaktów zewnętrznych obserwator znajduje się w powierzchni „stożka półcieniowego“ AA' , stycznego do księżycy i słońca, którego wierzchołek znajduje się w P , między księżycem a słońcem. W czasie kontaktów wewnętrznych obserwator znajduje się w powierzchni „stożka cieniowego“ BB' , którego wierzchołek R znajduje się poza księżycem od strony ziemi.

Ponieważ chodzi tylko o pozory zjawiska, więc możemy rozumować tak, jak gdyby słońce i księżyc a z nimi razem oba stożki były nieruchome, zaś tylko obserwatorium przносиło się z miejsca na miejsce. Pierwszy kontakt zewnętrzny [między zachodnią krawędzią słońca a wschodnią księżycy] następuje wtedy, gdy obserwatorium wchodzi do stożka półcieniowego w punkcie a .

Pierwszy kontakt wewnętrzny [słońce znika stykając się swą wschodnią krawędzią ze wschodnią krawędzią księżyca] następuje wtedy, gdy obserwatorium wchodzi w b we wnętrze stożka cieniowego. Drugi kontakt wewnętrzny [słońce wysuwa się z poza księżyca stykając się swą zachodnią krawędzią ze zachodnią krawędzią księżyca] następuje wtedy, gdy obserwatorium wychodzi z cienia w punkcie b' . Wreszcie drugi kontakt zewnętrzny (słońce rozłącza się z księżycem stykając się swą wschodnią krawędzią ze zacho-



Ryc. 38.

dnia krawędzią księżyca) następuje wtedy, gdy obserwatorium wychodzi w a' ze stożka półcieniowego.

Mówiliśmy dotąd o zaćmieniu całkowitem, gdy księżyc wydaje się większym od słońca i całkowicie je zakrywa. Bywa to wtedy, gdy wierzchołek stożka cieniowego R sięga poza obserwatorium. Jeżeli wierzchołek stożka cieniowego nie dosięga obserwatorium, to księżyc wydaje się mniejszy niż słońce i nawet w środku zaćmienia widzimy naokoło księżyca błyszczącą krawędź słońca. Zaćmieniu obrączkowemu odpowiada na rysunku droga oznaczona przerywaną strzałką. Zaraz widać, że przy zaćmieniach obrączkowych kontakty wewnętrzne są inne niż przy całkowitych zaćmieniach. W czasie całkowitego zaćmienia obserwator przecina wprzód tworzącą BB a potem tworzącą $B'B'$, przy obrączkowym przeciwnie. Wskutek tego przy zaćmieniu całkowitem w czasie pierwszego wewnętrznego kontaktu stykają się wschodnie krawędzie obu ciał, a w czasie drugiego zacho-

dnie; natomiast przy zaćmieniu obrączkowym w czasie pierwszego wewnętrznego kontaktu stykają się zachodnie krawędzie obu ciał, a w czasie drugiego wschodnie. Zewnętrzne kontakty mają jednakowy wygląd przy wszystkich zaćmieniach.

Dopóki obserwatorium znajduje się w stożku półcieniowym, zaćmienie jest częściowe, bo tylko część słońca jest zakryta. Jeżeli obserwatorium przechodzi w pewnej chwili przez samą prostą środków księżyca i słońca, to mówimy, że miało zaćmienie środkowe. Środkowemi mogą być zaćmienia tak całkowite, jak obrączkowe. Jasnym jest, że to samo zaćmienie rozmaicie przedstawia się na rozmaitych obserwatoryach. Prosta środków, o ile wogóle natrafia na powierzchnię ziemi, znaczy na niej ślad, pewną linię, wzdłuż której zaćmienie jest środkowe. Jeżeli przytem wierzchołek stożka cieniowego sięga poza powierzchnię ziemi, to po obu stronach linii środkowego zaćmienia ciągnie się pas mniej, lub więcej wąski, wyznaczony przez kolejne przecięcia powierzchni ziemi ze stożkiem cieniowym. Punkty leżące wewnątrz tego pasa mają, stosownie do odległości od brzegu pasa, krótsze, lub dłuższe całkowite zaćmienie. Po obu stronach pasa całkowitego zaćmienia ciągnie się szerszy pas wyznaczony przez kolejne przecięcia powierzchni ziemi ze stożkiem półcieniowym, w którym zaćmienie jest tylko częściowe. Tak bywa przy zaćmieniach całkowitych; przy zaćmieniach obrączkowych mamy pas, w którym zaćmienie jest obrączkowym, i pas, w którym jest częściowem. Zresztą zdarza się nieraz, że zaćmienie jest w pewnej części swego przebiegu obrączkowym, a w drugiej całkowitem. Zdarza się też często, że ziemia przechodzi tylko przez stożek półcieniowy; wtedy pewna część powierzchni ziemi ma zaćmienie częściowe, a zaćmienia całkowitego, lub obrączkowego wcale nie ma.

2. Warunki zaćmień słońca i księżyca.

Weźmy współrzędne geocentryczne, ekliptyczne. Jeżeli długości dwóch ciał niebieskich są jednakowe, to mówimy, że te dwa ciała niebieskie są w konjunkcyi; jeżeli zaś ich długości różnią się między sobą o 180° , to mówimy, że oba ciała są w opozycyi. Specyalnie konjunkcya księżyca ze słońcem nazywa się „nowiem“, a opozycya „pełnią“. W czasie nowiu oba ciała znajdują się na tej samej stronie nieba, a ponieważ słońce jest dalej od ziemi niż księżyc, więc oświeca tę stronę księżyca, która jest od ziemi

odwrócona. Dlatego to w czasie nowiu księżyc jest ciemny, niewidzialny. W czasie pełni oba ciała znajdują się na przeciwnych stronach nieba, oświetlona jest ta strona księżyca, która jest zwrócona do ziemi. Dlatego to widzimy całą tarczę księżyca jasną. Pierwsze dwie fazy, nów i pełnię razem wzięte, nazywamy „syzygiami“; te zaś dwie fazy księżyca, w których jego długość jest od długości słońca o 90° , względnie o 270° różna, nazywamy „kwadrami“ (pierwsza i ostatnia kwadra).

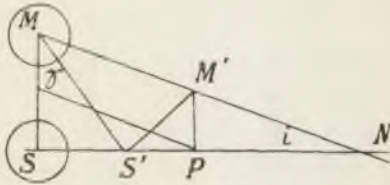
Oczywiście zaćmienia słońca mogą zdarzać się tylko około nowiu, bo tylko wtedy księżyc może znaleźć się między ziemią a słońcem, zaś zaćmienia księżyca mogą zdarzać się tylko około pełni, bo tylko wtedy ziemia może znaleźć się między księżycem a słońcem.

Gdyby księżyc krążył naokoło ziemi w płaszczyźnie ekliptyki, to w ciągu każdego miesiąca musiałyby zdarzyć się dwa zaćmienia: jedno zaćmienie słońca na nowiu i jedno zaćmienie księżyca na pełni, bo tak w czasie konjunkcji, jak w czasie opozycji środki wszystkich trzech ciał znajdowałyby się chwilowo prawie na jednej prostej. Mówimy „prawie“ dlatego, że środek słońca krąży nie w samej ekliptyce, ale wychyla się z niej to w jedną, to w drugą stronę, zresztą bardzo nieznacznie, zaledwo trochę więcej niż o sekundę. Naturalnie wszystkie cechy zaćmień byłyby takie same, jak obecnie, ale zaćmienia słońca byłyby widzialne tylko w okolicach międzyzworotnikowych.

W rzeczywistości droga księżyca przecina ekliptykę pod kątem wynoszącym około 5° . Wskutek tego środki księżyca, ziemi i słońca mogą tylko wtedy znaleźć się na jednej prostej, gdy czy to nów, czy pełnia zdarzy się w chwili przejścia księżyca przez jeden z węzłów, t. j. przez jeden z tych punktów, w których droga księżyca przecina ekliptykę. Jednak do zaćmienia wcale nie potrzeba, aby środki wszystkich trzech ciał znajdowały się na jednej prostej. Ponieważ rozmiary wszystkich trzech ciał są skończone, więc nawet dla całkowitego zaćmienia słońca wystarcza, aby jakaś część powierzchni ziemi znalazła się wewnątrz stożka cieniowego księżyca. Zato zaćmienie słońca bywa zawsze widzialne tylko na pewnej części powierzchni ziemi. Tak samo dla zaćmienia księżyca dość jest, aby księżyc, lub pewna jego część znalazła się wewnątrz stożka cieniowego ziemi. Środkowe zaćmienia księżyca bywają widzialne na całej półkuli zwróconej do księżyca, w dodatku ponieważ

ziemia w czasie zaćmienia obraca się, więc okolica, w której środkowe zaćmienie księżycy jest widzialne, jest z reguły większa od połowy powierzchni ziemi.

Rozpatrzmy bliżej warunki, w których zaćmienia są możliwe. Zaczniemy od zaćmień słońca. Załóżmy, że położenia środków księżycy i słońca na nowiu, widziane ze środka ziemi¹⁾, są M i S , że zatem MS jest to szerokość księżycy na nowiu; załóżmy dalej, że N jest to węzeł drogi księżycy, że SN to przecięcie ekliptyki ze sferą niebieską, że wreszcie MN jest rzutem drogi księżycy na sferę niebieską. Następnie oznaczmy przez M' i S' położenia środków księżycy i słońca w chwili, gdy widoma ich odległość jest najmniejsza. Oznaczmy MS , t. j. szerokość księżycy przez U , nachylenie



Ryc. 39

orbity księżycy do ekliptyki, jak zwykle, przez i , spuścimy $M'P$ prostopadle do ekliptyki i połączmy M z S' . Oznaczmy przez k stosunek $SP : SS'$; zaraz widać, że

$$k = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dv'}{dt},$$

gdzie v i v' oznaczają długości księżycy i słońca. Oznaczmy wreszcie najkrótszą odległość $S'M'$ przez q a kąt SMS' przez γ . Z ryciny zaraz widać, że

$$SS' = U \tan \gamma,$$

skąd

$$SP = kU \tan \gamma,$$

a zatem

$$S'P = SP - SS' = U(k - 1) \tan \gamma.$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} M'P &= MS - SP \tan i \\ &= U(1 - k \tan \gamma \tan i). \end{aligned}$$

¹⁾ Wywód ten nie jest absolutnie ścisły, ale dostatecznie przybliżony.

Wreszcie z trójkąta prostego $S'PM'$

$$\overline{S'M'}^2 = \overline{S'P}^2 + \overline{M'P}^2$$

to jest

$$(1) \quad q^2 = U^2 [(k-1)^2 \tan^2 \gamma + (1 - k \tan \gamma \tan i)^2].$$

Z pomiędzy wielkości figurujących po prawej stronie ostatniego wzoru tylko γ może zmieniać się, bo pozostałe są z góry dane. Najmniejszą wartość osiąga q wtedy, gdy

$$(k-1)^2 \tan \gamma - k(1 - k \tan \gamma \tan i) \tan i = 0,$$

to jest wtedy, gdy

$$(2) \quad \tan \gamma = \frac{k \tan i}{(k-1)^2 + k^2 \tan^2 i}.$$

Podstawmy tę wartość na $\tan \gamma$ we wzór (1), a po oczywistych skróceniach otrzymamy:

$$q^2 = \frac{U^2 (k-1)^2}{(k-1)^2 + k^2 \tan^2 i}.$$

Wprowadźmy jeszcze pomocniczy kąt i' określony przez równanie

$$(k-1) \tan i' = k \tan i,$$

a po łatwych przekształceniach będziemy mogli napisać:

$$(3) \quad q = \pm U \cos i'.$$

Ponieważ q może być tylko dodatnie, więc znak — należy brać wtedy, gdy U jest odjemne (południowa szerokość). Oczywiście w dalszym ciągu wystarczy rozważać tylko przypadek, gdy U jest dodatnie a znak stojący przed wyrażeniem jest +.

Atoli q jest to kątowa odległość środków księżyca i słońca widziana ze środka ziemi. Widziana zaś z powierzchni ziemi może być większa, albo mniejsza niż q . Spójrzmy np. na załączoną rycinę. Zaraz widać, że kątowa odległość punktów S i L widziana z punktu P_1 jest:

$$q_1 = q + \tilde{\omega} - \tilde{\omega}' = U \cos i' + \tilde{\omega} - \tilde{\omega}',$$

a widziana z P_2 jest

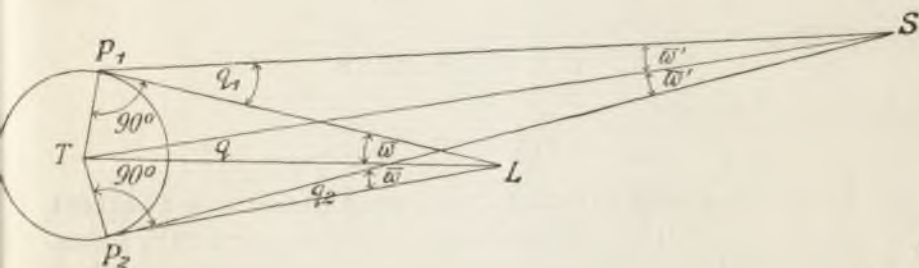
$$q_2 = q - \tilde{\omega} + \tilde{\omega}' = U \cos i' - \tilde{\omega} + \tilde{\omega}',$$

gdzie $\tilde{\omega}$ oznacza parallaksę księżycą a $\tilde{\omega}'$ parallaksę słońca.

Zaćmienie częściowe, lub całkowite zdarza się wtedy, gdy widoma odległość środków jest mniejsza od sumy promieni księżycą i słońca. Tedy w punkcie P_1 mielibyśmy warunek:

$$q_1 < r + r'.$$

Zaraz widzimy, że ten warunek nie może być spełniony. Rzeczywiście r wynosi co najwyżej $16' 46''$, r' najwyżej $16' 18''$,



Ryc. 40.

więc suma ich wynosi co najwyżej $33', 4''$. Tymczasem parallaksa księżycą $\tilde{\omega}$ wynosi co najmniej $52' 50''$, podczas gdy parallaksa słońca $\tilde{\omega}'$ nie dochodzi do $9''$. Zatem, gdyby nawet q było zerem (odjemnem być nie może), to nierówność nie byłaby możliwą. Widzimy tedy, że możliwym jest tylko drugi przypadek, t. j.

$$q_2 < r + r',$$

Podstawiając wartość q_2 , przenosząc różnicę $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'$ na drugą stronę nierówności i dzieląc obie jej strony przez $\cos i'$ możemy napisać powyższy warunek w kształcie:

$$U < (r + r' + \tilde{\omega} - \tilde{\omega}') \sec i'. \quad (4)$$

Wszystkie wielkości stojące po prawej stronie tej nierówności są w pewnych granicach zmienne, mianowicie r między $14' 24''$ i $16' 46''$, r' między $15' 45''$ i $16' 18''$, $\tilde{\omega}$ między $52' 50''$ a $61' 32''$; tylko na $\tilde{\omega}'$ można przyjąć stałą wartość $8'', 8$, a w tego rodzaju rachunkach nawet $9''$; wreszcie i' zmienia się w granicach $5^\circ 17'$ i $5^\circ 52'$. Przyjmując na r , r' , $\tilde{\omega}$ i i' najmniejsze wartości otrzymamy jako

wartość prawej strony nierówności (4) $1^{\circ} 23' 11''$, przyjmując zaś największe otrzymamy $1^{\circ} 34' 57''$. Możemy więc powiedzieć, że jeżeli na nowiu szerokość księżycy jest mniejsza niż $83'$, to gdzieś na powierzchni ziemi będzie bodaj częściowe zaćmienie słońca, jeżeli jest większa niż $95'$, to zaćmienia napewno nie będzie; jeżeli zaś jest zawarta między $83'$ i $95'$, to można orzec coś pewnego dopiero po podstawieniu tych wartości na r , r' i $\tilde{\omega}$, które te wielkości przybiorą w czasie samego zaćmienia.

Z trójkąta na ryc. 39 wynika:

$$\sin NM = \frac{\sin U}{\sin i}.$$

Położmy

$$U = 83', \quad i = 5^{\circ} 8',8,$$

a znajdziemy

$$NM = 15^{\circ} 612 \dots$$

Ponieważ długość księżycy wzrasta o 360° średnio w 27,321661 dni, więc o $15^{\circ} 612 \dots$ wzrośnie mniej więcej w ciągu $28\frac{1}{2}$ godzin. Obliczać dokładnie nie warto, bo prędkość księżycy jest w szerokich granicach zmienna; jednakże już na podstawie powyższego przybliżonego rachunku można powiedzieć, że jeżeli nów zdarzy się na mniej niż 28 godzin przed, lub po przejściu księżycy przez węzeł, to zaćmienie słońca bodaj częściowe jest pewne.

Oczywiście warunek zaćmień księżycy jest:

$$q < R + r,$$

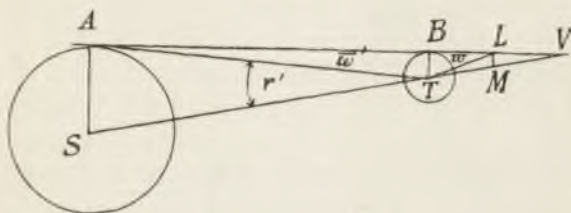
gdzie R oznacza połowę średnicy cienia ziemi. Ponieważ wszyscy obserwatorowie znajdujący się na półkuli zwróconej do księżycy prawie jednocześnie widzą, jak księżyc wchodzi w cień ziemi, więc osobnych warunków dla różnych punktów powierzchni ziemi wprowadzać nie potrzeba. Swoją drogą parallaksy księżycy i słońca wejdą do nierówności wyrażającej warunek zaćmienia księżycy, bo od nich zależy R . Jeżeli środek księżycy jest w M , słońca w S , a ziemi w T , to połowa średnicy cienia ziemi jest LM , a widzimy ją ze środka ziemi pod kątem LTM . Zaraz (ryc. 41) widać, że

$$\begin{aligned} R &= \sphericalangle LTM = \sphericalangle BLT - \sphericalangle TVL \\ &= BLT - (ATS - TAB), \end{aligned}$$

ale $\sphericalangle BLT$ to horyzontalna parallaksa księżycy $\tilde{\omega}$, $\sphericalangle TAB$ to horyzontalna parallaksa słońca $\tilde{\omega}'$, $\sphericalangle ATS$ to kąt, pod którym widzimy połowę średnicy słońca ze ziemi, wreszcie $\sphericalangle ATS = r'$ (w mierze kątowej!), przeto

$$R = \sphericalangle LTM = \tilde{\omega} + \tilde{\omega}' - r'.$$

Widzimy stąd, że te same parallaksy i te same połowy średnic księżycy i słońca, które wchodziły do warunku dla zaćmień słońca, wchodzi też do warunku dla zaćmień księżycy, tylko w nieco innej kombinacyi. Prócz tego, ponieważ wskutek obecności atmosfery średnica cienia ziemi jest powiększona mniej więcej o jedną



Ryc. 41.

pięćdziesiątą, mnożymy kąt LTM przez czynnik $\frac{51}{50}$ i piszemy warunek:

$$U < \sec i' \left[\frac{51}{50} (\tilde{\omega} - r' + \tilde{\omega}') + r \right]. \quad (5)$$

Podstawiając skrajne graniczne wartości znajdziemy, że gdy $U < 63,9$, to zaćmienie księżycy jest możebne, a gdy $U < 52,1$, to pewne. Widzimy, że granice, w których zaćmienia księżycy są bądź pewne, bądź możebne, są ciaśniejsze niż odpowiednie granice dla zaćmień słońca. Pochodzi to głównie stąd, że tam w sumie $r + r' + \tilde{\omega} - \tilde{\omega}'$ tylko stosunkowo mała wielkość $\tilde{\omega}'$ ma znak odjemny; tu zaś w sumie $\frac{51}{50} (\tilde{\omega} + \tilde{\omega}' - r') + r$ z odjemnym znakiem stoi r' , które jest około czterdziestu razy większe od $\tilde{\omega}'$.

Podobnie jak w poprzednim zadaniu łatwo znajdziemy, że jeżeli pełnia zdarzy się średnio na mniej niż 17 godzin przed, lub po przejściu księżycy przez węzeł, to zaćmienie jego jest pewne.

3. Ruch węzłów orbity księżycy. Saros¹⁾.

Chcąc przepowiedzieć zaćmienia, które mają zdarzyć się w pewnym roku, musimy naturalnie zbadać, w czasie których nowiów, względnie pełni powyżej podane warunki będą spełnione. O ile chodzi o najbliższe lata, to potrzebne do tego daty można znaleźć w tablicach księżycy; ale gdy chodzi o odległe epoki, dla których nie posiadamy tablic, to dogodnie jest posługiwać się pewnymi prawidłami dotyczącymi powtarzania się zaćmień w pewnych odstępach czasu, a pozwalającymi przepowiadać zaćmienia niezależnie od dynamicznych teorii ruchu księżycy.

Weźmy najpierw przypadek fikcyjny: przypuśćmy, że rok równa się dokładnie dwunastu. miesiącom synodycznym, oraz że orbita księżycy zajmuje stałe położenie względem ekliptyki; wtedy wszystkie względne pozycje słońca, księżycy i ziemi a więc także zaćmienia powtarzałyby się regularnie co roku. Wiemy, że tak nie jest: ani miesiąc synodyczny nie jest wymierny z rokiem, ani też orbita księżycy nie zajmuje stałego położenia względem ekliptyki; przeciwnie, tak zwane „węzły“, t. j. punkty, w których droga księżycy przecina się z ekliptyką, zmieniają nieustannie swe położenie. Oczywiście ruch węzłów musi mieć pierwszorzędny wpływ na terminy zaćmień, bo wiemy już, że zaćmienia mogą zdarzać się tylko w pobliżu węzłów.

Węzły drogi księżycy poruszają się po ekliptyce ruchem wstecznym, t. j. ze wschodu na zachód, jak gdyby szły na spotkanie księżycy. Wskutek tego czas, który upływa między jednym przejściem księżycy przez węzeł i następnem przejściem przez ten sam węzeł, jest krótszy aniżeli ten, w ciągu którego długość księżycy wzrasta o 360° . Tak jeden, jak drugi odstęp czasu nie są zresztą stałe, niezmiennie, ale średnio pierwszy z nich liczy obecnie 27,212 222 dni, a drugi 27,321 661 dni. Te średnie odstępy czasu noszą nazwy: pierwszy miesiąca smoczego (drakonicznego), drugi miesiąca gwiazdowego (sideralnego), oba zaś są krótsze od tego okresu czasu, który średnio upływa między dwoma po sobie

¹⁾ Nazwa ta nie jest właściwa, bo sar u Babilończyków oznaczał okres 3600 lat. Kompilator bizantyński Suidas — zdaje się przez pomyłkę — użył tej nazwy dla oznaczenia okresu 223-miesięcznego i odtąd jeden autor za drugim powtarza ją.

następującymi konjunkcjami (nowiami), lub opozycjami (pełniami) księżyc a który nosi nazwę miesiąca synodycznego (lunacyi) i wynosi 29,530 588 dni¹⁾. Możemy powiedzieć, że lunacya jest średnim okresem obiegu księżyc względem osi geocentrycznych, kręcących się razem ze średnim słońcem, a miesiąc gwiazdowy jest średnim okresem obiegu względem osi geocentrycznych nieruchomych.

Powiedzieliśmy już, że węzły cofają się na ekliptyce. W ciągu miesiąca smoczego cofają się o kąt, powiedzmy, x , który księżyc przebiegłby średnio w 0,109 439 dni, bo o tyle właśnie miesiąc smoczy jest krótszy od gwiazdowego. Ale 360° księżyc przebiega średnio w ciągu miesiąca gwiazdowego, t. j. w ciągu 27.321 661 dni, więc mamy proporcję

$$x : 360^\circ = 0,109\ 439 : 27,321\ 661,$$

skąd $x = 1^\circ 44 \dots$, t. j. mniej więcej $\frac{1}{250}$ obwodu koła. Stąd wynika, że całe koło węzły powinny obejść w ciągu mniej więcej 250 miesięcy smoczych. Dokładny rachunek okazuje, że okres obiegu węzłów wynosi trochę mniej niż 250 miesięcy smoczych, bo tylko 6793,391 dni, t. j. 18,5997 lat, podczas gdy 250 miesięcy smoczych wynoszą około 6803,3 dni.

Ale okres ten ma dla zaćmień tylko pośrednie znaczenie. Zaćmienia zdarzają się wtedy, gdy przejście przez węzeł schodzi się ze szygium. Chodzi więc nie o stosunek miesiąca gwiazdowego do smoczego, a o stosunek miesiąca synodycznego do smoczego.

Otóż jeżeli rozwiniemy ten stosunek w ułamek łańcuchowy, to otrzymamy:

¹⁾ Ptolemeusz podaje, że Hipparch z babilońskich obserwacji obliczył długość miesiąca synodycznego na 29,530 597 dni (naturalnie P. podaje tę liczbę w dniach, godzinach, minutach i t. d.). Dziś wiemy, że tę samą długość lunacyi znali również babilońscy astronomowie. Wedle Newcomba za czasów Hipparcha lunacya wynosiła 29,350 590 dni, była tedy nieznacznie dłuższą niż obecna. Lunacya babilońska jest jeszcze nieco dłuższa, jednakże wartość jej jest tak dokładna [różnica z wartością obliczoną przez Newcomba wynosi tylko 0,6 sekundy!], że przynosi zaszczyt babilońskim astronomom.

$$(6) \frac{29,530589\dots}{27,212222\dots} = 1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{11 + \frac{1}{1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}} + \frac{1}{3 + \frac{1}{6}} + \dots$$

Kolejne „reduktuy“ będą tedy:

$$1, \frac{12}{11}, \frac{13}{12}, \frac{38}{35}, \frac{51}{47}, \frac{242}{223}, \frac{777}{716}, \dots$$

Wiadomo, że coraz to dalsze reduktuy coraz to dokładniej zbliżają się do wartości rozwijanego ułamka, ale dla pewnych przyczyn, które niebawem wyjaśnimy, najlepiej zatrzymać się na szóstym redukcje, który zresztą daje już weale dokładne przybliżenie, bo 223 lunacye to 6585,3213... dni, a 242 miesiące smocze to 6585,3577... dni, przeto od 223 lunacyi do 242 miesięcy smoczych brakuje tylko 0,036377... dni, t. j. 52 min. i 23 sek. Jeżeli zaś w ciągu 242 miesięcy smoczych księżycy wykonał tylko 223 obiegi względem osi kręcących się razem ze słońcem, to dlatego, że samo słońce wykonało w ciągu tego samego czasu $242 - 223 = 19$ obiegów względem węzła drogi księżycowej. Ten okres wynoszący 223 lunacye to ów „Saros“ znany już babilońskim astronomom.

Potrójny Saros, t. j. okres obejmujący przybliżenie 19756 dni, Grecy nazywali „ἐξελιγμός“, co znaczy „uwolnienie“, bo przypuszczali, że Saros liczy dokładnie $6585\frac{1}{3}$ dni, przeto mnożąc przez 3 „uwolniali“ się od ułamka. Dla przepowiedni zaćmień w danem miejscu „ἐξελιγμός“ ma jeszcze większe znaczenie niż sam Saros.

Wiemy już, że Saros liczy 6585,3213 dni. Jest więc tylko o niespełna 11 dni — dokładniej o 10,962... dni — dłuższy od 18 lat tropicznych. Od 18 lat kalendarzowych Saros jest większy o 11,32 dni, jeżeli wśród danych 18 lat są 4 lata przestępne, zaś o 10,32 dni, jeżeli wśród danych 18 lat jest 5 lat przestępnych. Jednocześnie Saros jest przybliżenie współmierny z miesiącem anomalistycznym, to jest z tym okresem czasu, który średnio upływa pomiędzy dwoma kolejnymi przejściami księżycy przez perigaeum, albo przez apogaeum. Miesiąc anomalistyczny ma 27,554600 dni; przeto 239 mie-

sięcy anomalistycznych to prawie dokładnie 6585,55 dni, czyli tylko kilka godzin [niespełna sześć godzin] więcej niż Saros. Ta nieco gruba współmierność Sarosu z rokiem tropicznym i znacznie dokładniejsza współmierność z miesiącem anomalistycznym ogromnie podnoszą jego praktyczną wartość i dają mu przewagę nad dłuższymi okresami odpowiadającymi dalszym reduktom ułamka (6), np. nad okresem obejmującym 716 lunacyi. Przekonamy się o tem, skoro weźmiemy w uwagę rzeczywiste ruchy księżyca i słońca. Wskutek zmian prędkości długość rzeczywistego słońca może różnić się od długości średniego o 2°, a długość rzeczywistego księżyca może różnić się od długości średniego o 5°. Wskutek tego łatwo może zdarzyć się, że podczas gdy średnie słońce i średni księżyc są w opozycyi, albo w konjunkcyi, to tymczasem rzeczywisty księżyc i rzeczywiste słońce są dalekie od opozycyi, względnie konjunkcyi. Ale zmiany prędkości rzeczywistego słońca i jego zboczenia od średniego słońca mają peryod roczny, a ponieważ Saros liczy tylko o 11 dni więcej niż 18 lat, więc zboczenia rzeczywistego słońca od średniego powtarzają się po upływie Sarosu chociaż niezupełnie dokładnie. Z drugiej strony prędkość księżyca jest w bezpośrednim związku z jego odległością od ziemi: w perigaeum jest największa a w apogaeum najmniejsza i okres czasu, po którym powtarzają się te same, albo prawie te same prędkości, to właśnie miesiąc anomalistyczny. Ponieważ zaś Saros jest prawie dokładnie wielokrotnością miesiąca anomalistycznego, więc po upływie Sarosu powtarzają się prawie te same prędkości i prawie te same zboczenia rzeczywistego od średniego księżyca.

Dzięki tym przybliżonym współmiernościom to samo zaćmienie powtarza się po upływie Sarosu, ale, jak to dalej zobaczymy, nie nieograniczenie, tylko w ciągu kilkunastu wieków.

Inne analogiczne okresy odpowiadające dalszym przybliżeniom do ułamka łańcuchowego, figurującego we wzorze (6), np. obejmujące po 716, 3803, 4519 i t. d. lunacyi, są mniej dokładnymi wielokrotnościami roku i miesiąca anomalistycznego niżli Saros, a wskutek tego zboczenia ruchów rzeczywistych od średnich, zdarzające się po upływie tamtych okresów, są większe, niż po upływie Sarosu. Zresztą tamte okresy, jako dłuższe, są w praktyce mniej dogodnie niż Saros.

Tak samo mniej dogodnymi są cykle oparte na współmiernościach bezpośrednio z ułamkiem (6) nie związanych. Np. znany

w starożytności cykl Kallippa, obejmujący 76 lat, nadaje się dobrze do przepowiedni zaćmień księżycy, ale do przepowiedni zaćmień słońca jest nieprzydatny. Cykl o miesiąc od cyklu Kallippa krótszy, właściwie cykl obejmujący 27 730 dni równa się prawie dokładnie 939¹⁾ lunacyom lub 1019 miesiącom smoczym. Cykl ten nadaje się do przepowiedni zaćmień słońca, ale mniej dobrze niż pojedynczy, albo potrójny Saros.

4. Bliższa analiza Sarosu.

W obecnym paragrafie będziemy mówić przeważnie o zaćmieniach słońca jako o ważniejszych, zresztą większa część naszych uwag będzie mieć zastosowanie także do zaćmień księżycy.

Ponieważ Saros ma 6585¹/₃ dni (przybliżenie), więc zaćmienie słońca, powtarzające się po upływie Sarosu, jest widzialne nie na tych samych miejscach, co poprzednie, ale mniej więcej o 120° dalej na zachód. Dopiero po trzech Sarosach [t. j. po jednym „ἑξελγμός“] zaćmienie powraca prawie na te same południki. Z drugiej strony miejsca widzialności po upływie jednego Sarosu przesuwają się bądź na południe, bądź na północ. Jeżeli umówimy się uważać zaćmienia powtarzające się po upływie jednego Sarosu za należące do tej samej seryi, to z jednej strony spostrzeżemy, że każda serya zaćmień w końcu przestaje być widzialną, bo miejsce jej widzialności wysunęło się przez którąś ze stref podbiegunowych poza ziemię, zaś z drugiej strony spostrzeżemy, że pojawiają się nowe serye zaćmień wkraczające na powierzchnię ziemi także przez którąś z podbiegunowych stref. Przyczynę tego zjawiska zaraz wyjaśnimy.

Uważajmy węzły za nieruchome na orbicie i, ograniczając się tymczasem do ruchów średnich, zapytajmy, gdzie leżą te punkty orbity, w których zdarzają się konjunkcje i opozycje. Ponieważ lunacya jest dłuższa niż miesiąc smoczy, więc każda nowa konjunkcja, względnie opozycja zdarza się w innym (dalszym) punkcie niż poprzednia i kolejne punkty konjunkcji i opozycji są rozrzucone po orbicie. Gdyby 223 lunacye równały się 242 miesiącom smoczym, to po upływie Sarosu każda nowa konjunkcja, względnie opozycja zdarzałaby się znowu w tym samym punkcie, w którym

¹⁾ 939 = 223 + 716, 1019 = 242 + 777, zatem ten cykl jest kombinacją 6-go i 7-go reduktu ułamka (6).

przed Sarosem zdarzyła się jej poprzedniczka. Orbita byłaby podzielona na 223 równe odstępę przez 223 punkty konjunkcyi i tak samo na 223 równe odstępę przez 223 punkty opozycyi. Wszystkie zaćmienia słońca powtarzające się po upływie Sarosu, a więc, wedle naszej umowy, wszystkie zaćmienia należące do tej samej seryi zdarzałyby się w jednym i tym samym nieruchomym względem węzła punkcie orbity. Lecz ponieważ 223 lunacye nie są wymierne z 242 miesiącami smoczymi, więc, chcąc utrzymać pozostałe nasze twierdzenia co do punktów konjunkcyi, musimy porzucić założenie, że są one nieruchome względem węzłów, musimy założyć, że posuwają się one po orbicie i że kolejno przechodzą przez węzły. Zaraz obliczymy prędkość tego ruchu.

Ponieważ Saros jest tylko o 0,036 377 dnia krótszy od 242 miesiące smoczycy, więc możemy powiedzieć, że po upływie Sarosu księżyc spaźnia się o 0,036 377 dnia względem węzła. Ten odstęp czasu odpowiada kątowni

$$\frac{360^\circ \times 0,036\ 377}{27,212\ 222}$$

bo tu chodzi o ruch księżycy względem węzła, a obieg smoczy trwa średnio 27,212 222 dni. Odwrotnie możemy powiedzieć, że w ciągu Sarosu punkty konjunkcyi odsunęły się od węzłów o taki sam kąt. Stąd zaś przyjmując, że Saros wynosi 18,03 lat, znajdziemy, że trzeba ¹⁾

$$\frac{18,03 \times 27,212\ 222}{0,036\ 377} = (\text{przybliżenie})\ 13480 \text{ lat}$$

na to, aby dany punkt konjunkcyi, względnie opozycyi opisał całe koło i znów powrócił do tego samego węzła. Ponieważ zaś są 223 punkty konjunkcyi i ponieważ, o ile chodzi o ruchy średnie, wolno uważać te punkty za równoodległe od siebie, to co $\frac{13480}{223}$, t. j. mniej więcej co 61 lat nowy punkt konjunkcyi przechodzi przez węzeł. Podajemy tu tylko przybliżone, zaokrąglone liczby, bo dokładnych rachunków przeprowadzać nie warto. Teorya, którą tu wykładamy,

¹⁾ Ponieważ długość Sarosu i prędkość punktów konjunkcyi z czasem zmieniają się, więc obliczony z obecnej prędkości okres obiegu nie jest dokładny.

jest przybliżona; na dokładną nie mamy ani miejsca, ani czasu, ale gdybyśmy ją wyłożyli, to przekonaliśmy się, że wskutek długo-okresowych perturbacji w ruchu księżycy rozmaite wchodzące w rachubę okresy doznają powolnych zmian. Już wyżej w uwadze wspomnieliśmy, że za czasów Hipparcha lunacya była nieco dłuższa niż obecnie, tak samo i miesiąc smoczy i gwiazdowy były nieco dłuższe. Znaleźlibyśmy też, że prędkość ruchu punktów konjunkcyi była dawniej nieco mniejsza niż obecnie, np. przed 2500 laty okres czasu, upływający między przejściem danego punktu konjunkcyi przez węzeł a przejściem następnego punktu konjunkcyi przez ten sam węzeł, wynosił nie około 61, lecz około 63,6 lat.

Póki dany punkt konjunkcyi znajduje się daleko od węzła, pomyślnie zaćmienie słońca nie może zdarzyć się w nim, bo (por. § 2) z powodu nachylenia orbity księżycy do ekliptyki cień księżycy mija ziemię, ale skoro zbliży się na mniej więcej 18° do węzła, to, jak to znaleźliśmy w § 2, zaćmienie staje się możebne. Oczywiście początkowe zaćmienia danej seryi są częściowe, co więcej są widzialne tylko w północnej, względnie w południowej podbiegunowej strefie, bo zdarzają się przy znacznej, bliskiej do granicznej, szerokości księżycy. W miarę tego, jak dany punkt konjunkcyi coraz bardziej zbliża się do węzła, szerokość księżycy, przy której przytrafia się zaćmienie, staje się coraz to mniejszą, a okolica, w której zaćmienie częściowe jest widzialne, przysuwa się ku równikowi; gdy zaś punkt konjunkcyi zbliży się na jakie 10° — 12° do węzła, to zaćmienie staje się środkowem¹⁾ [całkowitem, lub obrączkowym stosownie do okoliczności].

Ponieważ punkty konjunkcyi opisują całe koło w ciągu mniej więcej 15500 do 14000 lat, więc w ciągu jednego Sarosu średnio opisują kąt

$$\frac{18,03 \times 360^\circ}{13500} = (\text{około}) 0,48.$$

Widzimy stąd, że w środku każdej seryi, t. j. około czasu przejścia danego punktu konjunkcyi przez węzeł musi zdarzyć się jedno lub dwa zaćmienia, w czasie których odległość między węzłem a punktem konjunkcyi jest mniejsza niż ćwierć stopnia. Przy tak małej kątownej odległości słońce, księżyc i ziemia znajdują się prawie

¹⁾ To znaczy, że prosta środków księżycy i słońca natrafia na powierzchnię ziemi.

na jednej prostej. Jednocześnie widzimy, że jeżeli dana serya, należąca do pewnego punktu konjunkcyi, zaczęła się np. zaćmieniem częściowym, widzialnem w północnej podbiegunowej strefie, to pas, w którym zaćmienie należące do tej seryi jest widzialne, wędruje powoli z północy na południe dopóty, aż serya zaćmień skończy się zaćmieniem częściowym, widzialnem w południowej podbiegunowej strefie. Odwrotnie serya, która zaczęła się w południowej podbiegunowej strefie, kończy się w północnej. Cały odstęp, w którym dany punkt konjunkcyi może dawać zaćmienia, wynosi około 36° , a czas, w ciągu którego punkt konjunkcyi przebiega ten odstęp, wynosi około 1350 lat. Tak więc jedna serya zaćmień istnieje w ciągu trzynastu do czternastu stuleci, t. j. w ciągu mniej więcej 75 Sarosów, obejmuje przeto około 75 zaćmień, w tem zaś około 45 środkowych i około 30 częściowych, mianowicie mniej więcej po piętnaście częściowych na początku i na końcu seryi.

Stąd, że odstęp, w którym mogą zdarzać się zaćmienia słońca, sięga do mniej więcej 18° w jedną i drugą stronę każdego węzła, wynika jeszcze jedna konsekwencya. Trzydzieści sześć stopni koło jednego węzła i tyleż koło drugiego to razem około piątej części obwodu koła. Na tej przestrzeni może pomieścić się 44 lub 45 punktów konjunkcyi, a więc co najwyżej tyleż seryi zaćmień może istnieć równocześnie. Atoli liczby powyższe, otrzymane z przybliżonych wzorów i nieściśłych rachunków, nie są dokładne. Naprzykład obecnie mamy tylko 42 takich punktów i 42 serye zaćmień. Co do zaćmień księżycy, to ponieważ graniczne odległości od węzła, wewnątrz których mogą zdarzać się zaćmienia, są mniejsze niż graniczne odległości dla zaćmień słońca, więc ilość punktów opozycyi, w których zdarzają się zaćmienia księżycy, i tak samo ilość seryi zaćmień księżycowych jest mniejsza: obecnie tylko 29. Wreszcie jeżeli na jeden Saros przypadają 42 zaćmienia słońca, to na jeden rok powinny przypadać 2, lub 3, mogą zaś niekiedy przypaść nawet 4 zaćmienia słońca; zaś jeżeli na jeden Saros przypada 29 zaćmień księżycy, to na jeden rok przypada tylko jedno, lub dwa, a nawet zdarza się niekiedy, że w danym roku nie ma ani jednego zaćmienia księżycy.

Pomiędzy 42 obecnie istniejącymi seryami zaćmień słońca jest jedna nowa, która rozpoczęła się zaćmieniem 17 Czerwca 1909 r. w północnej podbiegunowej strefie; następne zaćmienie tej seryi 29 Czerwca 1927 r. będzie widzialne w Szkocyi i północnej Anglii.

5. Znaczenie Sarosu dla przepowiedni zaćmień słońca w starożytności.

Astronomowie babilońscy wykryli i sprawdzili Saros zapewne na podstawie obserwacji zaćmień księżyca, albowiem ilość zaćmień księżyca widzialnych w danym obserwatorium jest bez porównania większa niż ilość widzialnych zaćmień słońca. Pochodzi to stąd, że zaćmienia księżyca są widzialne na znacznie większej części powierzchni ziemi, niż zaćmienia słońca. Środkowe zaćmienia księżyca są widzialne na całej półkuli zwróconej do księżyca, a nawet więcej niż na całej półkuli, bo ziemia obraca się o pewien skończony kąt w ciągu tego czasu, w ciągu którego księżyc pozostaje w cieniu ziemi. Ogromna większość zaćmień słońca, które zdarzyły się w starożytności, musiała pozostać nieznaną ówczesnym obserwatorom. Takie np. trzy zaćmienia słońca, jak zaćmienia z 30 Listopada na 1 Grudnia 1891 r., 12 Grudnia 1909 r. i 24 Grudnia 1927 r., jako widzialne tylko na południowej półkuli (zresztą wszystkie trzy częściowe), w starożytności musiałyby ująć uwagi astronomów. Nawet z pomiędzy zaćmień, widzialnych w umiarkowanej strefie północnej półkuli wiele mogło i musiało ująć uwagi starożytnych z powodu, że pas widzialności przesuwają się co Saros o 120° na Zachód. Tak np. zaćmienia słońca 18 Lipca 876 r. przed Chr. i 20 Sierpnia 822 r. przed Chr. były widzialne w Babilonie, ale zaćmienie 29 Lipca 858 r. i zaćmienie 9 Sierpnia 840 r.¹⁾ przed Chr. były niewidzialne. W danym razie czwarte zaćmienie było widzialne na tem samym miejscu, co pierwsze; ale częstokroć bywa inaczej. Z powodu przesuwania się pasa widzialności z północy na południe, względnie w odwrotnym kierunku, zaćmienie powracające po potrójnym Sarosie na te same południki bywa częstokroć o tyle przesunięte z północy na południe, lub odwrotnie z południa na północ, że przestaje być widzialnym nie tylko w danym mieście, ale nawet w danym kraju. Jednakże dla przepowiedni lokalnej potrójny Saros („ἑξελγμός“) mógł mieć duże znaczenie, jak to zaraz zobaczymy z następującego przykładu podanego przez Ginzla. Ginzl [Kanon der Finsternisse] bierze pod uwagę Małą Azyę, ściślej mówiąc,

¹⁾ Te same lata wedle rachuby astronomicznej będą: — 875, — 821, — 857 i — 839, bo rok 1-szy przed nar. Chr. liczy się w rachubie astronomicznej za rok 0.

terytorium zawarte między 25° i 42° długości wschodniej (od Greenw.) oraz 36° i 42° szerokości płn. i rozważa pytanie, ile zaćmień można było przepowiedzieć w tym kraju z pomocą Sarosu zwyczajnego, lub potrójnego w czasie od 900 do 1 r. przed Chr. W ciągu tego czasu było 128 zaćmień widzialnych w Małej Azji. Jako widzialne uważa Ginzel zaćmienia co najmniej 9-calowe¹⁾. Wśród tych 128 zaćmień było tylko 5 takich, które powtórzyły się po upływie jednego Sarosu; zato 27 takich, które powtórzyły się po upływie potrójnego Sarosu; dalej 8 takich, które powtórzyły się raz po trzech Sarosach, a drugi raz po sześciu; 3 takie, które powróciły trzy razy po trzech Sarosach, a więc po 3, 6 i 9 Sarosach; wreszcie jedno, które powróciło cztery razy, t. j. po 3, 6, 9 i 12 Sarosach: razem było więc 56 zaćmień, które można było trafnie przepowiedzieć z pomocą potrójnego Sarosu. Doliczając jeszcze pierwsze zaćmienia, t. j. te, które służyły za punkt wyjścia przepowiedni, znajdziemy 95 zaćmień sprawdzających regułę. Na tych samych małoazyatyckich zaćmieniach Ginzel okazuje, że 4-krotny, 5-krotny Saros, cykl Kallippa i inne cykle dają mniej korzystne rezultaty niż potrójny Saros.

6. Znaczenie zaćmień dla chronologii i dla teorii księżyca.

Dzieła klasycznych autorów zawierają niekiedy wzmianki o zaćmieniach. Te dawne zaćmienia dają nam możliwość kontrolować chronologię starożytną oraz, co jeszcze ważniejsze, służą do sprawdzenia teorii księżyca. Największą wagę mają zaćmienia słońca a to dlatego, że okolica, w której zaćmienie słońca jest widzialne, jest ograniczona, zaś pas, w którym zaćmienie jest całkowite, bywa zazwyczaj tak wąski, że setki lat mijają, zanim w pewnym danym miejscu, lub nawet kraju zdarzy się całkowite zaćmienie. Np. w Anglii ostatnie całkowite zaćmienie było w 1724 r., a najbliższe będzie dopiero w 1927 r.

Tymczasem przy obliczeniu zaćmienia mała zmiana w przyjętych elementach sprawia znaczne przesunięcie pasa, w którym zaćmienie jest całkowite, a zatem przez porównanie teorety-

¹⁾ Dzielimy średnicę słońca na 12 równych części. Jeżeli w czasie maximum zaćmienia były zakryte, 1, 2, 3... części średnicy, to mówimy, że zaćmienie było jedno, dwu, trzy-calowe i t. d.... Oczywiście dwunasto-calowe zaćmienie jest całkowite.

cznych obliczeń z obserwacją mamy możliwość skontrolować małe nawet błędy teorii. Kontrola jest tem dokładniejszą, im rozpatrywane zaćmienie jest starsze, — więc zaćmienia z czasów greckorzymskich mają „*ceteris paribus*“ większą doniosłość, niż zaćmienia średniowieczne.

Niestety wiadomości o zaćmieniach słońca, przechowane przez starożytnych autorów, tylko wyjątkowo bywają dostatecznie ścisłe. W niektórych razach miejsce, gdzie zaćmienie było obserwowane, jest dokładnie wskazane, ale nie można z opisu wywnioskować, czy było całkowite, czy częściowe. Za innym razem widać z opisu, że zaćmienie było całkowite, ale zato miejsce, gdzie je widziano jest niedość dokładnie wskazane. Np. zaćmienie, które widział Agatokles i jego marynarze na morzu 15 Sierpnia 310 r. przed Chr., było z pewnością całkowite, bo gwiazdy były widzialne wśród dnia; ale na podstawie tekstu Diodora nie można w żaden sposób rozstrzygnąć, czy Agatokles widział je u północnych, czy u południowych wybrzeży Sycylii. Niektóre znów wzmianki u autorów starożytnych, pospolicie interpretowane jako wzmianki o zaćmieniach, prawdopodobnie dotyczą innych zjawisk. Tak np. twierdzą, że zaćmienie słońca 19 Maja 557 r. przed Chr. było widzialne w Larissie nad Tygrem, a to na podstawie następującej wzmianki u Ksenofonta. „Gdy Cyrus oblegał Larissę nad Tygrem, chmura zakryła słońce. Podczas gdy słońce było zakryte, mieszkańcy uciekli, poczem Cyrus zajął opuszczone miasto“. Konstatuje, że Ksenofont wyraźnie mówi o chmurze (*νεφέλη*), następnie podnoszę to, że gęste chmury mogą wśród dnia sprawić ciemność prawie taką, jaka bywa w nocy. Przykład tego mieliśmy w jednym z dni Listopada 1909 r. w Paryżu: wśród białego dnia musiano i to na kilka godzin zapalić latarnie na ulicach. Z drugiej strony trudno zrozumieć, jak mieszkańcy choćby małego miasteczka mogli uciec w ciągu kilku minut całkowitego zaćmienia. Natomiast ciemności, sprawione przez gęste chmury, mogły trwać przez kilka kwadransów, nawet przez kilka godzin, więc mieszkańcy mieliby dosyć czasu, aby zebrać się i uciec z miasta.

Jeszcze dalej wstecz, niż wzmianki u autorów greckich i rzymskich, sięgają wiadomości o zaćmieniach obserwowanych w Babilonie, bo aż do XI wieku przed Chr. Niestety identyfikacja tych zaćmień przedstawia jeszcze większe trudności, niż identyfikacja zaćmień wspomnianych przez autorów klasycznych. P. H. P. Co-

well identyfikuje najdawniejsze znane nam zaćmienie babilońskie ze zaćmieniem 31 Lipca 1063 r. przed Chr. — o ile trafnie — tego nie umiem powiedzieć.

7. Warunki, aby zaćmienie słońca było całkowite i długotrwałe.

Warunki, aby zaćmienie słońca było długotrwałe, są po części te same, co warunki, aby było całkowite. Np. dla całkowitego zaćmienia potrzeba, aby widoma średnica księżycy była większa niż widoma średnica słońca. To zaś wymaga, aby księżyc był jak najbliżej ziemi, a słońce jak najdalej. Ten sam warunek musi też być spełniony, żeby zaćmienie słońca było długotrwałe, albowiem im księżyc jest bliżej ziemi a słońce dalej, tem cień księżycy jest większy i trzeba więcej czasu, aby przesunął się przez obserwatorium. Oczywiście najkorzystniej składają się okoliczności, gdy 1) księżyc jest w „perigaeum“, a 2) słońce jednocześnie w „apogaeum“, t. j. gdy prawdziwa anomalia księżycy jest zerem, a słońca = 180°. Oba te warunki mogą być jednocześnie spełnione.

Należy jednak zauważyć, że gdy księżyc jest w perigaeum, to jego liniowa prędkość jest największą. Zatem cień księżycy sunie stosunkowo szybko. Ale w danym razie wpływ rozmiarów cienia zawsze przemaga nad wpływem zwiększonej prędkości, przeto bliskość księżycy jest jednym z koniecznych warunków długotrwałości zaćmienia. Wpływ odległości księżycy jest donioślejszy niż wpływ odległości słońca, bo odległość księżycy zmienia się w procentowo szerszych granicach niż odległość słońca.

3) Ponieważ cień księżycy jest stożkiem, więc rozmiary jego zależą także od tego, czy zacieniona część powierzchni ziemi znajduje się dalej lub bliżej od księżycy niż inne. Największym jest cień wtedy, gdy prosta środków księżycy i słońca przechodzi także przez środek ziemi. Ale wtedy obserwatorowie, dla których zaćmienie jest środkowym, widzą je w zenicie. Tedy 3-ci warunek jest, aby zaćmienie miało miejsce w zenicie obserwatorium. Ponieważ atoli słońce bywa w zenicie tylko w krajach międzyzworotnikowych, więc 3-ci warunek może być spełniony tylko między zworotnikami.

4) Cień księżycy sunie po powierzchni ziemi zawsze ze zachodu na wschód, t. j. w kierunku jej dziennego obrotu. Prędkość, z którą cień posuwa się, jest większa niż liniowa prędkość nawet

tych punktów powierzchni ziemi, które znajdują się na równiku. Stąd odwrotnie wynika, że im liniowa prędkość obserwatorium jest większa, tem szybciej nadaża ono za cieniem i tem dłużej trwa zaćmienie. Ponieważ liniowa prędkość jest największa na równiku, więc 4-ty warunek może być najlepiej spełniony na równiku.

5) Wreszcie trzeba, żeby ós cienia posuwała się wzdłuż równoleżnika obserwatorium, wtedy bowiem obserwatorium może „*ceteris paribus*“ najdłużej pozostawać w cieniu.

Gdyby księżyc i słońce krążyły dokoła ziemi w płaszczyźnie równika, to warunki 3-ci, 4-ty i 5-ty byłyby wciąż spełnione i czas trwania zaćmienia zależałby tylko od tego, o ile warunki 1-szy i 2-gi są, lub nie są spełnione. Ponieważ atoli księżyc i słońce nie krążą w płaszczyźnie równika, więc różne warunki bywają w różnym stopniu spełnione a koincydencya najkorzystniejszych warunków jest nawet zgoła nieprawdopodobną. Można jednak obmyśleć takie kombinacye, przy których czas trwania zaćmienia jest już prawdopodobnie bliski do „*maximum maximorum*“. Du Séjour znajduje, że całkowite zaćmienie byłoby najdłuższem, gdyby zdarzyło się 2 Lipca w samo południe na równiku w czasie, gdy księżyc jest w perigaeum, i oblicza, że trwałoby 7 m. 58 sek. C. T. Whitmell¹⁾ powtórzył rachunek Du Séjour'a z nowszemi datami, przyczem otrzymał tę samą liczbę. Że owo najdłuższe zaćmienie Du Séjour'a ma miejsce na równiku, to znaczy, że warunek 4-ty jest spełniony; że ma miejsce 2 Lipca, to znaczy, że czyni zadość 2-mu warunkowi, bo za czasów Du Séjour'a (XVIII wiek) apogaeum słońca przypadało na 2 Lipca [w r. 1913 przypada między 3 a 4 Lipca]; wreszcie ma miejsce w samo południe, bo w południe ruch słońca jest równoległy do równoleżnika danego obserwatorium. Zaćmien trwających prawie 8 minut jeszcze nigdy nie obserwowano. Bodaj najdłuższe zaćmienie obserwował w r. 1868 Hennessy na Borneo: trwało ono 6 m. i 13 sek. Ale Hennessy obserwował je nie w południe. Whitmell oblicza, że w tym punkcie, w którym zaćmienie przypadało na samo południe, trwało ono 6 m. 49 sek. W XX wieku²⁾ najdłuższem będzie zaćmienie 20 Czerwca 1955 r.:

¹⁾ The Maximum Duration possible for a Total Solar Eclipse. Monthly Notices, tom LX, str. 435—441. Zapożyczam u Whitmella tylko liczby niezależne od jego wywodów, które wydają mi się nieco bałamutne.

²⁾ Wedle A. C. D. Crommelin'a. Whitmell, loc. cit.

w tym punkcie [117° E, 15° N.]. w którym zdarzy się o południu, będzie trwało 7 m. 24¹/₂ sek. Punkt ten leży na południowo-chińskim morzu na zachód od Manilli.

8. Efemerydy, kanony zaćmień i t. d.

Na podstawie wyżej wyłożonych zasad można, znając zaćmienia słońca i księżyca w ciągu jednego Sarosu, przepowiedzieć dalsze zaćmienia na długi szereg lat. Mając zaś zaćmienia, które zdarzyły się w ciągu kilku minionych Sarosów, oraz biorąc w uwagę przesuwanie się punktów konjunkcyi, można nawet rozpoznać, czy która serya zaćmień nie zakończy się w przyszłości, lub czy nie pojawi się nowa serya. Dopiero przy dokładniejszej przepowiedni różnych szczegółów zaćmienia nie można obejść się bez pomocy teorii ruchów księżyca. Swoją drogą rzadko kiedy zdarza się, aby kto musiał rozwiązywać odnośne zadania zupełnie samoistnie, albowiem istnieje cały szereg środków pomocniczych, ogromnie ułatwiających zadanie. Jeżeli chodzi o rok bieżący, lub następny, to dość jest wziąć którykolwiek z kalendarzy astronomicznych: „Berliner Jahrbuch“, „Connaissance des Temps“, „American Ephemeris“, lub „Nautical Almanac“. W każdym z nich znajdziemy mapy zaćmień oraz tabliczki, z których można powziąć wszystkie potrzebne wiadomości co do pasa środkowego zaćmienia, co do granicy widzialności, co do czasu, o którym zaćmienie zaczyna się i kończy się i t. d. Czego niema na mapie, lub w tablicach, to można łatwo obliczyć z pomocą załączonej w kalendarzu instrukcyi. Dla zaćmień historycznych i dla zaćmień, które mają zdarzyć się w ciągu kilkuset najbliższych lat, istnieją osobne tablice. Newcoma „Recurrence of Solar Eclipses“ obejmuje czas od 700 r. przed Chr. do 2300 po Chr.; Oppolzera „Kanon der Finsternisse“ podaje elementy i różne pomocnicze dane dla zaćmień od 1208 (— 1207) r. przed Chr. do 2161 r. po Chr.; Ginzla „Spezieller Kanon der Finsternisse“ obejmuje tylko okres czasu od 900 r. przed Chr. do 600 r. po Chr., ale jest z wielu względów dokładniejszy niż kanon Oppolzera; dalej mamy „Tablice zaćmień“ (Ekliptische Tafeln) Hansena i t. d.

Tablice i kanony podają wszystkie dane potrzebne dla obliczenia zaćmienia, od położenia obserwatorium niezależne, więc podają: czas prawdziwej konjunkcyi [zazwyczaj bywa podany czas

greenwichski], wspólną długość księżycą i słońca, szerokości obu ciał (szerokość słońca jest zawsze bardzo mała), horyzontalne ekwatoryalne parallaksy, nachylenie ekliptyki, średnicę rzutu cienia na płaszczyznę prostopadłą do linii środków a przechodzącą przez środek ziemi, kąt otworu stożka cieniowego i t. d. Wszystkie te wielkości są podane bądź oddzielnie, bądź odrazu w tych kombinacjach, w których wchodzi do rachunku, wszystkie zaś są podane dla chwili prawdziwej koniunkcji.

Lecz ponieważ zaćmienie trwa pewien czas, więc trzeba mieć te wielkości nie tylko dla chwili prawdziwej koniunkcji, ale także dla kilku momentów przedtem i potem. Hansen bierze dla przykładu zaćmienie 18 Lipca 1860 r. i oblicza elementy dla następujących momentów:

18,00 d.
 18,05 „
 18,10 „
 18,15 „
 18,20 „

Środkowy moment 18,10 jest bardzo bliski do momentu koniunkcji, która nastąpiła 18,096 Lipca 1860 r.

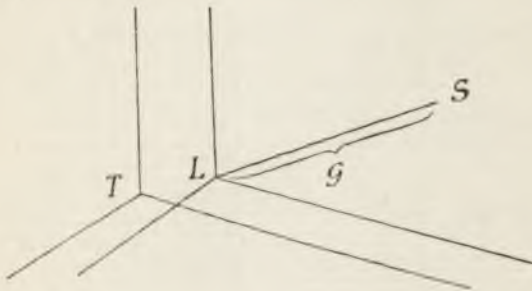
Następujące się w dalszym ciągu zadania można rozwiązywać różnymi metodami. Najlepszymi są metody Hansena i Bessla, obie zasadniczo podobne, ale różne tem, że każda z nich posługuje się innym systemem współrzędnych: Hansen używa współrzędnych ekliptycznych, a Bessel równikowych. Współrzędne ekliptyczne są dogodnie stąd, że w kanonach i tablicach podane są długości i szerokości, niedogodne zaś stąd, że trzeba rugować współrzędne zenitu obserwatorium. Z drugiej strony równikowe współrzędne są niedogodne tem, że w tych razach, w których używamy nie efemeryd, a tablic, musimy obliczać rektascensye i deklinacje z długości i szerokości. My tu będziemy trzymać się metody Bessla zmodyfikowanej przez W. Chauveneta.

Założymy, że rektascensye i deklinacje już są obliczone.

9. Współrzędne prostej środków.

Oznaczmy przez a i d geocentryczną rektascensyę i geocentryczną deklinacyę tego punktu, w którym prosta, przechodząca

przez środki księżycy i słońca, przebija sferę niebieską. Współrzędne prostej równoległej do prostej środków a przechodzącej przez środek ziemi, będą naturalnie także a i d , bo sfera niebieska jest nieskończenie wielka. Oznaczmy przez G odległość środka słońca od środka księżycy, dalej przez α , δ i Δ geocentryczną rektascensję, geocentryczną deklinację i odległość środka księżycy od środka ziemi, oraz przez α' , δ' i Δ' takie same współrzędne słońca. Oznaczmy przez x , y , z geocentryczne, równikowe, prostokątne współrzędne środka księżycy, a przez x' , y' , z' takie same współrzędne środka słońca, przyczem, jak zwykle, dodatnia oś x będzie skierowana ku wiosennemu porównaniu dnia z nocą.



Ryc. 42.

Oznaczmy wreszcie przez X , Y , Z prostokątne, selenocentryczne współrzędne środka słońca, równoległe do geocentrycznych. Mamy oczywiście:

$$\left. \begin{aligned} X &= x' - x \\ Y &= y' - y \\ Z &= z' - z \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

a jednocześnie

$$\left. \begin{aligned} x' &= \Delta' \cos \delta' \cos \alpha' & x &= \Delta \cos \delta \cos \alpha \\ y' &= \Delta' \cos \delta' \sin \alpha' & y &= \Delta \cos \delta \sin \alpha \\ z' &= \Delta' \sin \delta' & z &= \Delta \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

oraz

$$\begin{aligned} X &= G \cos d \cos a \\ Y &= G \cos d \sin a \\ Z &= G \sin d. \end{aligned}$$

GABINET MATEMATYCZNY
Instytut Matematyki Uniwersytecki

Rugując z równań (7) współrzędne prostokątne za pomocą równań (8) otrzymamy równania

$$(9) \quad \begin{cases} G \cos d \cos a = \Delta' \cos \delta' \cos \alpha' - \Delta \cos \delta \cos \alpha \\ G \cos d \sin a = \Delta' \cos \delta' \sin \alpha' - \Delta \cos \delta \sin \alpha \\ G \sin d = \Delta' \sin \delta' - \Delta \sin \delta. \end{cases}$$

Ponieważ chodzi o wyznaczenie położenia prostej środków, więc trzeba przedewszystkiem określić a i d . Najpierw wyprowadzimy z równań (9) równania:

$$(9 \text{ bis}) \quad \begin{cases} G \cos d \cos(a - \alpha') = \Delta' \cos \delta' - \Delta \cos \delta \cos(a - \alpha') \\ G \cos d \sin(a - \alpha') = -\Delta \cos \delta \sin(a - \alpha') \\ G \sin d = \Delta' \sin \delta' - \Delta \sin \delta \end{cases}$$

Stąd zaś, t. j. z dwóch pierwszych równań (9 bis) otrzymamy przez dzielenie:

$$\text{tang}(a - \alpha') = - \frac{\Delta \cos \delta \sin(a - \alpha')}{1 - \frac{\Delta \cos \delta}{\Delta' \cos \delta'} \cos(a - \alpha')}.$$

Jak wiadomo

$$\Delta : \Delta' = \sin \pi' : \sin \pi,$$

gdzie π i π' oznaczają horyzontalne równikowe parallaksy księżyca i słońca, można więc wprowadzić stosunek parallaks zamiast stosunku odległości. Ale ponieważ w efemerydach zazwyczaj podana jest odległość słońca na każdy dzień, więc dogodnie jest usunąć Δ , ale niedogodnie usuwać Δ' . Z tego powodu postępujemy tak: piszemy

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\sin \pi'}{\sin \pi},$$

następnie przyjmujemy średnią odległość słońca od ziemi za jedność, piszemy

$$\Delta' \sin \pi' = \sin \pi'_0,$$

gdzie π'_0 oznacza średnią parallaksę słońca ¹⁾ i przyjmujemy

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\sin \pi'_0}{\Delta' \sin \pi},$$

¹⁾ Obecnie przyjmujemy $\pi'_0 = 8''.8\dots$

wreszcie przekształcamy poprzednie równanie na

$$\operatorname{tang}(a - \alpha') = - \frac{\frac{\sin \pi_0'}{\Delta' \sin \pi} \cdot \frac{\cos \delta}{\cos \delta'} \sin(\alpha - \alpha')}{1 - \frac{\sin \pi_0'}{\Delta' \sin \pi} \cdot \frac{\cos \delta}{\cos \delta'} \cos(\alpha - \alpha')} \quad (10)$$

Wszystkie wielkości figurujące po prawej stronie tego równania są znane. Skoro obliczymy $\operatorname{tang}(a - \alpha')$, to zaraz otrzymamy $a - \alpha'$, a więc także a , bo α' jest znane.

Przechodzimy teraz do obliczenia $\operatorname{tang}(d - d')$. Gdybyśmy chcieli zachować zupełną ścisłość, to musielibyśmy napisać bardzo skomplikowane wzory, ale ponieważ chodzi o zaćmienie, więc możemy skorzystać z tego, że podczas zaćmienia współrzędne księżyca, słońca i prostej środków są mało od siebie różne i możemy przyjąć

$$\cos(\alpha - \alpha') = 1, \quad \sin(\alpha - \alpha') = 0.$$

Wtedy możemy napisać pierwszy i trzeci wzór (9 bis) w kształcie

$$G \cos d = \Delta' \cos \delta' - \Delta \cos \delta$$

$$G \sin d = \Delta' \sin \delta' - \Delta \sin \delta;$$

skąd zaraz wynika

$$\left. \begin{aligned} G \cos(d - \delta') &= \Delta' - \Delta \cos(\delta - \delta') \\ G \sin(d - \delta') &= -\Delta \sin(\delta - \delta'); \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

stąd zaś po takich samych przekształceniach jak te, których dokonaliśmy ze wzorem (10),

$$\operatorname{tang}(d - \delta') = - \frac{\frac{\sin \pi_0'}{\Delta' \sin \pi} \cos(\delta - \delta')}{1 - \frac{\sin \pi_0'}{\Delta' \sin \pi} \cos(\delta - \delta')} \quad (12)$$

Podobnie jak we wzorze (10) i tu po prawej stronie stoją same znane wielkości.

Lecz można jeszcze skorzystać z tego, że $a - \alpha'$, $d - \delta'$, $\alpha - \alpha'$ i $\delta - \delta'$ są to wszystko małe wielkości i można przybliżenie położyć

$$\cos(\alpha - \alpha') = \cos(\delta - \delta') = 1, \quad \frac{\cos \delta}{\cos \delta'} = 1,$$

wreszcie można skorzystać z tego, że $\frac{\sin \pi'_0}{\Delta' \sin \pi}$ jest to także mała wielkość i zamiast wzorów (10) i (12) można do rachunku użyć uproszczonych wzorów:

$$(10 \text{ bis}) \quad a = \alpha' - \frac{\sin \pi'_0}{\Delta' \sin \pi} (\alpha - \alpha')$$

$$(12 \text{ bis}) \quad d = \delta' - \frac{\sin \pi'_0}{\Delta' \sin \pi} (\delta - \delta').$$

Z drugiej strony kładąc w pierwszym wzorze (11)

$$\cos(d - \delta') = \cos(\delta - \delta') = 1$$

otrzymamy wzór

$$(13) \quad G = \Delta' - \Delta = \Delta' \left(1 - \frac{\sin \pi'_0}{\Delta' \sin \pi} \right),$$

z którego można obliczyć przybliżoną wartość na G .

10. Zasadnicze równanie.

Wiemy już z § 1, że w chwili zetknięcia tarcz księżycy i słońca obserwatorium znajduje się w powierzchni pewnego stożka stycznego do obu ciał. Wiemy dalej, że są dwa stożki: półcieniowy A i cieniowy B . Oba stożki są krągłe. Biorąc prostą środków za oś z -ów, a płaszczyznę prostopadłą do prostej środków, przechodzącą przez środek ziemi, za płaszczyznę xy , możemy napisać równanie obu stożków w postaci:

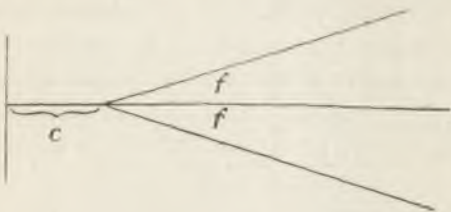
$$(14) \quad X^2 + Y^2 = (c - Z)^2 \tan^2 f,$$

gdzie (patrz ryc. 43) c jest to odległość wierzchołka stożka od płaszczyzny xy , zaś f jest to kąt między tworzącą stożka a prostą środków. Kierunek osi stożka jest już znany: znaleźliśmy go w poprzednim paragrafie. Teraz trzeba tylko wprowadzić warunek, aby obserwatorium znajdowało się w powierzchni stożka.

Bierzemy współrzędne prostokątne, mające środek w środku ziemi, oś z równoległą do prostej środków, oś x położoną w płaszczyźnie równika i skierowaną na wschód od osi z , wreszcie oś y

prostostopadłą do tamtych dwóch a skierowaną ku północnej stronie nieba.

(Obliczmy najpierw współrzędne księżyca. Gdybyśmy obrócili osie z i y o kąt $-d$ naokoło osi x , to oś z znalazłaby się w płaszczczyźnie równika, oś y byłaby identyczna z osią obrotu, mielibyśmy tedy współrzędne geocentryczne, równikowe tem tylko od zwyczajnych różne, że nazwy osi są pomieniane i że żadna oś nie jest skierowana ku punktowi wiosennego porównania dnia z nocą. Możemy jednak liczyć rektascensye od tego punktu, w którym dodatnia oś z przecina równik, tylko ponieważ ta oś sama posiada



Ryc. 43.

rektascensyę a , przeto musimy zmniejszyć rektascensyę o a . Zatem w owym czasowym, przechodowym systemie współrzędnych mamy:

$$\left. \begin{aligned} z &= \Delta \cos \delta \cos (\alpha - a) \\ x &= \Delta \cos \delta \sin (\alpha - a) \\ y &= \Delta \sin \delta. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Jeżeli teraz napowrót obrócimy osie z i y o kąt $+d$ naokoło osi x , to wrócimy do tego systemu osi, o który nam chodzi, t. j. do tego systemu, w którym oś z jest równoległa do prostej środków. Przez ten obrót współrzędna x nie ulegnie zmianie, zaś pozostałe dwie współrzędne będą:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y \cos d - z \sin d \\ z_1 &= y \sin d + z \cos d. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Podstawiając tu wartości na y i z z równań (15) i opuszczając niepotrzebne już znaczki znajdziemy następujące współrzędne księżyca:

$$\left. \begin{aligned} z &= \Delta [\cos \delta \cos d \cos (\alpha - a) + \sin \delta \sin d] \\ y &= \Delta [-\cos \delta \sin d \cos (\alpha - a) + \sin \delta \cos d] \\ x &= \Delta \cos \delta \sin (\alpha - a). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Przy obliczeniu współrzędnych zazwyczaj biorą promień ziemski równikowy za jedność, to znaczy, że biorą jednostkę długości w stosunku $\sin \pi_0'$ mniejszą, niż w poprzednim paragrafie. Ponieważ zaś wedle definicyi

$$\Delta \sin \pi = \text{promieniowi równikowemu},$$

więc skoro przyjmiemy ten promień za jednostkę długości, to będziemy musieli przyjąć:

$$(18) \quad \Delta = \frac{1}{\sin \pi}.$$

Parallaksę wprowadzamy dlatego, że właśnie parallaksy są podane w efemerydach. Wskutek tego, że obraliśmy prostą, równoległą do prostej środków za oś z -ów, współrzędne x' i y' środka słońca są identyczne ze współrzędnymi środka księżycy x i y , co zaś do współrzędnej z' , to ta jest tylko o G większa od z ; mamy tedy

$$(19) \quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z + G,$$

dalej mamy z dane przez pierwsze równanie (17) a G przez równanie (13). Trzeba tylko pamiętać o tem, żeby wyrazić wszystkie długości w tych samych jednostkach.

Z kolei obliczamy współrzędne obserwatorium. Odległość obserwatorium od środka ziemi oznaczamy przez ϱ . Ponieważ przyjęliśmy promień równikowy za jedność, przeto ϱ będzie z reguły trochę mniejsze od jedności. Deklinacja obserwatorium to nic innego, jak jego geocentryczna szerokość φ' , rektascensya obserwatorium to czas gwiazdowy w danem obserwatorium, który oznaczamy przez Θ . Oznaczając tedy współrzędne obserwatorium przez ξ , η , ζ możemy odrazu przez analogię do równań (17) napisać:

$$(20) \quad \begin{cases} \xi = \varrho [\cos \varphi' \cos d \cos (\Theta - \alpha) + \sin \varphi' \sin d] \\ \eta = \varrho [-\cos \varphi' \sin d \cos (\Theta - \alpha) + \sin \varphi' \cos d] \\ \zeta = \varrho \cos \varphi' \sin (\Theta - \alpha). \end{cases}$$

Jeżeli teraz zamiast osi geocentrycznych weźmiemy osie mające tę samą płaszczyznę xy , osie x i y równoległe do poprzednich, a oś z nie tylko równoległą do, a identyczną z prostą środków, to wtedy współrzędne obserwatorium względem nowych osi będą

$$\xi - x, \quad \eta - y, \quad \zeta,$$

jednocześnie zaś w nowym systemie oś z będzie identyczna z osią stożków cieniowego i półcieniowego. Wracając teraz do równania (14) widzimy, że

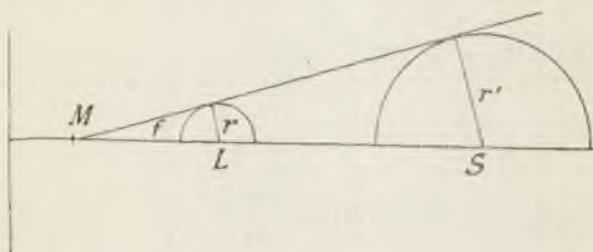
$$X = \xi - x, \quad Y = \eta - y, \quad Z = \zeta,$$

a zatem widzimy, że warunek, aby obserwatorium znajdowało się w powierzchni jednego z tych stożków, jest

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = (c - \zeta)^2 \operatorname{tang}^2 f. \quad (21)$$

To jest „równanie zasadnicze” teorii Bessla.

W chwili, w której współrzędne obserwatorium ξ, η, ζ czynią zadość równaniu zasadniczemu, kontakt jest właśnie widzialny



Ryc. 44.

w obserwatorium. Figurujące w równaniu (21) wielkości x, y, ξ, η, ζ są dane przez wzory (17) i (20). Zresztą x, y, ξ, η, ζ są zależne od wielkości albo dla danego obserwatorium stałych jak ϱ i φ' , albo takich, które można obserwować jak Θ , albo takich, które są dane przez efemerydy i tablice jak α i δ , albo wreszcie takich, które można obliczyć za pomocą wzorów (10 bis) i (12 bis). Trzeba tylko jeszcze wyrazić c i f przez znane wielkości.

Kąt f daje się łatwo wyrazić. Rzeczywiście spojrzymy na rycinę a spostrzeżemy odrazu, że dla stożka cieniowego

$$\frac{r}{ML} = \frac{r'}{MS} = \sin f.$$

Stąd znowu wynika

$$r' - r = (MS - ML) \sin f = G \sin f,$$

gdzie G jest dane przez wzór (13). Możemy więc napisać:

$$(22) \quad \sin f_1 = \frac{r' - r}{G}.$$

Podobnie dla stożka półcieniowego znaleźlibyśmy łatwo

$$(22 \text{ bis}) \quad \sin f_2 = \frac{r' + r}{G}.$$

Naturalnie wzór (22) powinien być stosowany do zetknięć zewnętrznych, a wzór (22 bis) do wewnętrznych.

Z drugiej strony dla stożka cieniowego

$$MR = c, \quad LR = z = MR + ML = c + ML,$$

a dla stożka półcieniowego

$$z = c - ML.$$

Lecz

$$ML = \frac{r}{\sin f},$$

zaś z jest dane przez jeden ze wzorów (17); więc możemy napisać dla stożka cieniowego

$$(23) \quad c = z - \frac{r}{\sin f_1} = z - \frac{Gr}{r' - r},$$

a dla stożka półcieniowego

$$(23 \text{ bis}) \quad c = z + \frac{r}{\sin f_2} = z + \frac{Gr}{r' + r}.$$

Dla półcienia c (odległość płaszczyzny xy od wierzchołka stożka) jest duże, większe niż odległość ziemi od księżyca, przeto $c - \zeta$ jest zawsze dodatnie; ale dla cienia c jest albo małe, albo nawet odjemne, przeto $c - \zeta$ może być dodatnie lub odjemne. Jeżeli $c - \zeta > 0$, to wierzchołek stożka cieniowego nie dosięga obserwatorium, zaćmienie jest obrączkowe; jeżeli zaś $c - \zeta < 0$, to cień sięga poza obserwatorium, zaćmienie jest zupełne.

Pospolicie kładą:

$$\left. \begin{aligned} c \operatorname{tang} f &= \left(z \pm \frac{r}{\sin f} \right) \operatorname{tang} f = l \\ \operatorname{tang} f &= \lambda \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

i piszą równanie zasadnicze w kształcie

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (l - \lambda \zeta)^2. \quad (21 \text{ bis})$$

11. Granice cienia i półcienia.

Oczywistą jest rzeczą, że jeżeli weźmiemy na x, y, a, d, l i λ wartości odpowiadające pewnej chwili greenwichskiego czasu, to zasadnicze równanie (21 bis) wraz z równaniem powierzchni ziemi wyznaczy krzywą, wzdłuż której stożek cieniowy lub półcieniowy w tejże chwili czasu przecina się z powierzchnią ziemi. Ponieważ l i λ mają po dwie wartości, więc, aby uniknąć zamieszania, w dalszym ciągu założymy, że l i λ mają te wartości, które odpowiadają stożkowi cieniowemu. Zamiast równania (21 bis) dogodnie jest napisać dwa równania

$$\left. \begin{aligned} (l - \lambda \zeta) \sin Q &= x - \xi \\ (l - \lambda \zeta) \cos Q &= y - \eta \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

i przyjąć Q za zmienną niezależną. Równanie powierzchni ziemi [właściwie elipsoidy ziemskiej]

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \varrho^2, \quad (26)$$

w którym ϱ jest funkcją φ' , sprawia pewne trudności. Nie można — osobliwie gdy chodzi o zaćmienia we wyższych szerokościach — przyjąć $\varrho = 1$, bo wynikające z tego założenia błędy są nazbyt duże; trzeba więc uciec się albo do kolejnych przybliżeń albo też, co o wiele lepsze i dogodniejsze, do wybiegu obmyślonego przez Bessla, który pozwala wziąć spłaszczenie w rachubę od samego początku. Wybieg Bessla polega na tem, aby zamiast równania (26) traktować równanie

$$\xi^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = 1. \quad (27)$$

Wchodzące w to równanie nowe zmienne η_1 i ζ_1 są naturalnie związane ze współrzędnymi η i ζ a tak dobrane, że ζ_1 bardzo mało

różni się od ζ . Wskutek tego w równaniach (25) w małym wyrazie $\lambda\zeta$ można poprostu zastąpić ζ przez ζ_1 .

Do związków, o których mowa, dochodzimy w następujący sposób. Wiadomo z rozdz. IX-go [wzory 4], że jeżeli φ oznacza geograficzną szerokość, to

$$\varrho \cos \varphi' = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \varrho \sin \varphi' = \frac{(1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Otóż Bessel wprowadza nowy kąt φ_1 określony przez równania

$$\cos \varphi_1 = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \sin \varphi_1 = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Z tych określających równań z jednej strony wynika:

$$\text{tang } \varphi_1 = \sqrt{1 - e^2} \text{ tang } \varphi,$$

a z drugiej wynikają związki

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 &= \varrho \cos \varphi' \\ \sqrt{1 - e^2} \sin \varphi_1 &= \varrho \sin \varphi'. \end{aligned}$$

Zaraz wprowadzimy φ_1 do równań (20), wprzód jednak zauważymy, że w $\Theta - a$ właściwą zmienną jest zachodnia długość L . Rzeczywiście, jeżeli oznaczymy liczony od południka greenwichskiego kąt godzinowy punktu, w którym prosta środków przebija sferę niebieską, przez μ , to

$$(28) \quad \Theta - a = \mu - L.$$

Rzecz jasna, że μ jest jednakowe dla całej powierzchni ziemi, zaś L zmienia się od południka do południka. Dla ułatwienia rachunków μ bywa podawane w tablicach zaćmień (w kalendarzach astronomicznych) razem z a , d , x , y i t. d. w krótkich odstępach czasu. Odtąd w równaniach (20) będziemy pisać $\mu - L$ zamiast $\Theta - a$. Piszemy tedy

$$\begin{aligned} \xi &= \cos \varphi_1 \sin (\mu - L) \\ \eta &= \sqrt{1 - e^2} \sin \varphi_1 \cos d - \cos \varphi_1 \sin d \cos (\mu - L) \\ \zeta &= \sqrt{1 - e^2} \sin \varphi_1 \sin d + \cos \varphi_1 \cos d \cos (\mu - L). \end{aligned}$$

Ale nie dość na tem. Położmy jeszcze

$$\left. \begin{aligned} \sin d &= \varrho_1 \sin d_1, & \sqrt{1-e^2} \sin d &= \varrho_2 \sin d_2 \\ \sqrt{1-e^2} \cos d &= \varrho_1 \cos d_1, & \cos d &= \varrho_2 \cos d_2. \end{aligned} \right\} (29)$$

Nowe pomocnicze zmienne ϱ_1 , ϱ_2 , d_1 i d_2 są oczywiście wspólne całej powierzchni ziemi i zależne tylko od czasu greenwichskiego. Można więc obliczyć tablicę wartości na ϱ_1 , ϱ_2 , d_1 i d_2 dla tych samych momentów czasu, dla których podane są a , d , x , y , μ i t. d. w kalendarzu astronomicznym. Okazuje się przytem, że ϱ_1 i ϱ_2 są prawie stałe dla całego czasu zaćmienia. Po podstawieniu tych nowych zmiennych równania (20) przybiorą postać

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \cos \varphi_1 \sin (\mu - L) \\ \eta &= \varrho_1 \sin \varphi_1 \cos d_1 - \varrho_2 \cos \varphi_1 \sin d_1 \cos (\mu - L) \\ \zeta &= \varrho_2 \sin \varphi_1 \sin d_2 + \varrho_2 \cos \varphi_1 \cos d_2 \cos (\mu - L). \end{aligned} \right\} (30)$$

Otóż pomocnicze zmienne η_1 i ζ_1 są określone przez analogiczne do równań (30) równania

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \cos \varphi_1 \sin (\mu - L) \\ \eta_1 &= \sin \varphi_1 \cos d_1 - \cos \varphi_1 \sin d_1 \cos (\mu - L) \\ \zeta_1 &= \sin \varphi_1 \sin d_1 + \cos \varphi_1 \cos d_1 \cos (\mu - L). \end{aligned} \right\} (31)$$

Odrązu widać, że ξ , η_1 i ζ_1 sprawdzają równanie (27), zaś z porównania drugiego równania (31) z drugim równaniem (30) zaraz widać, że

$$\eta = \varrho_1 \eta_1. \quad (32)$$

Oprócz tego z drugiego i trzeciego równania (31) wynikają związki

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 \cos (\mu - L) &= -\eta_1 \sin d_1 + \zeta_1 \cos d_1 \\ \sin \varphi_1 &= \eta_1 \cos d_1 + \zeta_1 \sin d_1. \end{aligned}$$

Skoro podstawimy te wartości na $\sin \varphi_1$ i $\cos \varphi_1 \cos (\mu - L)$ w trzecim równaniu (30), to otrzymamy

$$\zeta = \varrho_2 \zeta_1 \cos (d_1 - d_2) - \varrho_2 \eta_1 \sin (d_1 - d_2). \quad (33)$$

Zatem skoro znajdziemy η_1 i ζ_1 , to z pomocą równań (32) i (33) zaraz otrzymamy η i ζ .

Wracamy teraz do równań (25) i (27). Ponieważ ζ_1 mało różni się od ζ , więc w małym wyrazie $\lambda\zeta$ piszemy ζ_1 zamiast ζ , następnie rugujemy η za pomocą równania (32) i otrzymujemy równania

$$(34) \quad \begin{cases} (l - \lambda\zeta_1) \sin Q = x - \xi \\ (l - \lambda\zeta_1) \cos Q = y - \varrho_1\eta_1. \end{cases}$$

Łącznie z równaniem (27), t. j. z równaniem

$$(27 \text{ bis}) \quad \xi^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = 1$$

równania (34) wystarczają do wyznaczenia wartości na ξ , η_1 i ζ_1 dla każdej dowolnie obranej wartości Q , albowiem ϱ_1 już zostało naprzód obliczone. Rozwiązujemy równania (34) i (27 bis) następującym sposobem. Kładziemy

$$(35) \quad \begin{cases} x - l \sin Q = \sin \beta \sin \gamma \\ \frac{y - l \cos Q}{\varrho_1} = \sin \beta \cos \gamma. \end{cases}$$

Lewe strony równań (35) zawierają same dane wielkości. W celu zupełnego określenia kątów β i γ założymy jeszcze, że β leży w pierwszym kwadrancie; wtedy kwadrant, w którym ma leżeć γ , będzie zupełnie określony. Skoro podstawimy wartości z równań (35) w równania (34), to po uporządkowaniu otrzymamy

$$(36) \quad \begin{cases} \xi = \sin \beta \sin \gamma + \lambda\zeta_1 \sin Q \\ \eta_1 = \sin \beta \cos \gamma + \lambda\frac{\zeta_1}{\varrho_1} \cos Q. \end{cases}$$

Następnie podstawiając wartości na ξ i η_1 z równań (36) w równanie (27 bis) i porządkując otrzymamy na ζ_1 kwadratowe równanie

$$(37) \quad \zeta_1^2(1 + \lambda^2 h^2) + 2\lambda k \zeta_1 \sin \beta - \cos^2 \beta = 0,$$

w którym

$$(38) \quad \begin{cases} h^2 = \sin^2 Q + \frac{1}{\varrho_1^2} \cos^2 Q \\ k = \sin \gamma \sin Q + \frac{1}{\varrho_1} \cos \gamma \cos Q. \end{cases}$$

Wprowadźmy pomocniczy kąt χ określony przez równanie ¹⁾

$$\cotg \chi = \frac{\lambda k \operatorname{tang} \beta}{\sqrt{1 + \lambda^2 h^2}} \quad (39)$$

a równanie kwadratowe przybierze postać:

$$\zeta_1^2 (1 + \lambda^2 h^2) + 2\zeta_1 \cotg \chi \cdot \lambda \sqrt{1 + \lambda^2 h^2} \cos \beta - \cos^2 \beta = 0.$$

Stąd

$$\zeta_1 = - \frac{\cotg \chi \cos \beta \pm \cos \beta \sqrt{\cotg^2 \chi + 1}}{\sqrt{1 + \lambda^2 h^2}}.$$

Po oczywistych redukcjach jeden pierwiastek przywiedzie się do

$$\zeta_1 = \frac{\cos \beta \operatorname{tg} \frac{1}{2} \chi}{\sqrt{1 + \lambda^2 h^2}},$$

a drugi do

$$\zeta_1 = - \frac{\cos \beta \cotg \frac{1}{2} \chi}{\sqrt{1 + \lambda^2 h^2}}.$$

Tylko dodatni pierwiastek ma fizyczne znaczenie ²⁾, bo odjemna wartość ζ_1 odnosi się do przeciwnej strony powierzchni ziemi, gdzie zaćmienie jest niewidzialne. Zobaczmy więc, który pierwiastek jest dodatni. Umówiliśmy się, żeby β leżało w pierwszym kwadrancie, zatem $\cos \beta > 0$, $\operatorname{tang} \beta > 0$. Stąd wynika, że $\operatorname{tang} \chi$ [por. równanie (39)] ma ten sam znak co k . Gdy $k > 0$, to przyjmiemy $0 < \chi < 90^\circ$; gdy $k < 0$, to przyjmiemy $90^\circ < \chi < 180^\circ$. Zawsze jednak będzie: $0 < \frac{1}{2} \chi < 90^\circ$. Przeto pierwszy pierwiastek jest dodatni i jedyne możebne rozwiązanie jest:

$$\zeta_1 = \frac{\cos \beta \operatorname{tg} \frac{1}{2} \chi}{\sqrt{1 + \lambda^2 h^2}}. \quad (40)$$

Ze względu na to, że otrzymaliśmy równanie (37) pomijając małą różnicę między ζ a ζ_1 , możemy a nawet powinniśmy pominąć małe wielkości figurujące w równaniu (40). Ponieważ q_1 mało różni

¹⁾ Cf. W. Auhagen: Note on Chauvenets Theory of solar Eclipses. Astr. Journ. tom XXII, str. 105.

²⁾ Przy tej sposobności przypominamy, że tylko ξ , η_1 i ζ_1 zawarte między -1 a $+1$ mogą mieć realne znaczenie.

się od jedności, więc z pierwszego równania (38) wynika, że h^2 jest bliskie jedności, a z drugiego, że k jest prawie równe $\cos(Q - \gamma)$. Przyjmując

$$h^2 = 1, \quad k = \cos(Q - \gamma)$$

oraz pomnąc, że

$$\lambda = \operatorname{tang} f$$

łatwo przyprowadzimy równania (39) i (40) do kształtu

$$(41) \quad \begin{cases} \operatorname{cotg} \chi = \sin f \cos(Q - \gamma) \operatorname{tang} \beta \\ \xi_1 = \cos f \cos \beta \operatorname{tang} \frac{1}{2} \chi. \end{cases}$$

Zresztą kąt f jest zawsze tak mały, że $\cos f$ jest prawie równy jedności¹⁾.

Mając ξ_1 obliczymy ξ i η_1 z równań (36). Z równań (32) i (33) możemy obliczyć η i ζ , ale nie potrzebujemy zadawać sobie tego trudu, bo tak samo, jak z równań (30), można też obliczyć φ_1 i $\mu - L$ wprost z równań (31). Jak rozwiązać te równania względem φ_1 i $\mu - L$, nad tem nie potrzebujemy się zastanawiać, bo już wielokrotnie rozwiązywaliśmy podobne systemy równań. Skoro znajdziemy $\mu - L$, to natychmiast otrzymamy L , bo μ jest dla obranego momentu greenwichskiego czasu znane; następnie za pomocą wzoru

$$(42) \quad \operatorname{tang} \varphi = \frac{\operatorname{tang} \varphi_1}{\sqrt{1 - e^2}}$$

znajdziemy geograficzną szerokość φ tego samego punktu.

Kładąc na Q po kolei coraz to inne wartości od 0 aż do 360° wyznaczmy szereg punktów leżących na granicy cienia, a łącząc je krzywą ciągłą otrzymamy samą granicę w obranej chwili czasu. Gdyby chodziło o granicę półcienia, to należałoby postępować tak samo, tylko na l i λ trzeba by wziąć wartości odpowiadające stożkowi półcieniowemu.

Wyłożyliśmy tu metodę Bessla, zmodyfikowaną przez Chauveneta z dodatkiem poprawek Auhagena. Jak widzimy, metoda nie jest całkiem ścisłą, bo polega na substytucji ξ_1 zamiast ξ . Gdy-

¹⁾ Pomijając λ^2 łatwo jest sprowadzić drugi wzór (41) do wzoru Chauveneta:

$$\xi_1 = \cos \beta - \lambda \sin \beta \cos(Q - \gamma).$$

byśmy postępowali zupełnie ściśle, t. j. gdybyśmy podstawili ξ ze wzoru (33) we wzory (25), to te ostatnie przybrałyby postać:

$$\begin{aligned}\xi + B \eta_1 + C \xi_1 + D &= 0 \\ B' \eta_1 + C' \xi_1 + D' &= 0,\end{aligned}$$

przyczem

$$\begin{aligned}B &= -\lambda \varrho_2 \sin(d_1 - d_2) \sin Q, & B' &= \varrho_2 - \lambda \varrho_2 \sin(d_1 - d_2) \cos Q \\ C &= -\lambda \varrho_2 \cos(d_1 - d_2) \sin Q, & C' &= -\lambda \varrho_2 \cos(d_1 - d_2) \cos Q \\ D &= l \sin Q - x, & D' &= l \cos Q - y.\end{aligned}$$

Stąd otrzymalibyśmy

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{(BC' - B'C) \xi_1 + BD' - B'D}{B'} \\ \eta_1 &= -\frac{(C' \xi_1 + D')}{B'}.\end{aligned}$$

Podstawivszy to we wzór (27) znowu otrzymalibyśmy kwadratowe równanie na ξ_1 tylko o współczynnikach więcej skomplikowanych, aniżeli współczynniki kwadratowego równania (37). Zresztą dalszy bieg rozwiązania byłby „*mutatis mutandis*“ taki sam jak tutaj, tylko naturalnie nie możnaby robić żadnych upraszczających hipotez. Przy tak ściśłem analitycznem rozwiązaniu zadania musielibyśmy też postarać się o ścisłość w innych kierunkach: musielibyśmy z jednej strony uwzględnić refrakcyę, a z drugiej tę okoliczność, że fizyczna powierzchnia ziemi nie jest obrotową elipsoidą, t. j. musielibyśmy uwzględnić lokalne wzniesienia nad poziomem morza. Jednem słowem rachunki stałyby się o wiele dłuższe i bardziej skomplikowane.

Moglibyśmy tu nawiązać cały szereg zadań odnoszących się do wyznaczenia granic pasa cieniowego, pasa półcieniowego i t. d.; ale to wszystko są zadania, któremi zajmują się tylko członkowie biur wydających kalendarze astronomiczne. Przeciętny astronom prawie nigdy nie rozwiązuje tych zadań, bo w kalendarzach astronomicznych znajduje gotowe mapki zaćmień, w których podane są owe granice i wiele innych szczegółów. Przeciętny astronom zazwyczaj zajmuje się tylko przepowiednią zaćmienia w pewnem określonym miejscu. (Będzie o tem mowa w § 13). Nawet zadanie, którem zajmowaliśmy się w tym paragrafie, mało go obchodzi. Jeżeli

więc wyłożyliśmy je, to głównie dlatego, aby dać pojęcie o tem, w jaki sposób przygotowują się owe mapy i tablice zaćmień, które widzimy w kalendarzach astronomicznych. Tak samo li tylko gwoli informacyi omówimy tu jeszcze jedno zadanie pokrewne z tylko co wyłożonem.

12. Linia środkowego zaćmienia i pas całkowitego zaćmienia.

Linia środkowego (centralnego) zaćmienia to poprostu ślad prostej środków na powierzchni ziemi. Ponieważ możemy tę prostą, która jest jednocześnie wspólną osią stożków: cieniowego i półcieniowego, także uważać za stożek, ale o nieskończeniu małym otworze wierzchołkowym, więc w równaniu (21) kładziemy $f=0$, poczem to równanie rozpada się na następujące trzy równania:

$$\xi = x, \quad \eta = y$$

oraz

$$l = \lambda = 0.$$

Wskutek tego równania (35) przywodzą się do równań

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \beta \sin \gamma = x \\ \varrho_1 \sin \beta \cos \gamma = y, \end{array} \right.$$

z których możemy zaraz określić β i γ . Jednocześnie ze wzoru (32) otrzymamy

$$(44) \quad \eta_1 = \frac{y}{\varrho_1} = \sin \beta \cos \gamma.$$

Ale skoro

$$\begin{aligned} \xi &= \sin \beta \sin \gamma \\ \eta_1 &= \sin \beta \cos \gamma, \end{aligned}$$

to z równania (27) wynika

$$(45) \quad \zeta_1 = \cos \beta.$$

Więc wszystkie trzy współrzędne ξ , η_1 i ζ_1 są wyznaczone. Ale z równań (31) wynikają równania

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \varphi_1 \sin (\mu - L) = \xi \\ \cos \varphi_1 \cos (\mu - L) = -\eta_1 \sin d_1 + \zeta_1 \cos d_1 \\ \sin \varphi_1 = \eta_1 \cos d_1 + \zeta_1 \sin d_1, \end{array} \right.$$

z których, znając ξ , η_1 i ζ_1 , wyznaczamy φ_1 i L [przypominamy, że d_1 i μ są z góry obliczone dla całego szeregu równoodległych momentów czasu greenwichskiego], poczem za pomocą wzoru (42) wyznaczamy φ . Wyobraźmy sobie, że wykonaliśmy te rachunki dla równoodległych momentów czasu t_1, t_2, \dots, t_n , dla których posiadamy gotowe wartości na $x, y, \mu \dots$ i t. d., a otrzymamy szereg punktów, w których prosta środków w chwilach t_1, t_2, \dots, t_n przebija powierzchnię ziemi. Łącząc je linią ciągłą otrzymamy „linię środkowego zaćmienia“. Chodzi tylko jeszcze o oba końce tej linii, t. j. o punkty, w których prosta środków już nie przebija powierzchnię ziemi, tylko jest do niej styczna. Oczywiście w tych punktach zaćmienie ma miejsce o wschodzie, względnie o zachodzie słońca. Gdy prosta środków jest styczna do powierzchni ziemi w punkcie — powiedzmy — A , to punkt, w którym ta prosta przebija sferę niebieską, leży w horyzoncie punktu A . Zatem jeżeli przez Z oznaczymy odległość między punktem, w którym prosta środków przebija sferę niebieską, a zenitem punktu A , to musi być: $Z = 90^\circ$. Stąd

$$\cos Z = \sin \varphi \sin d + \cos \varphi \cos d \cos (\mu - L) = 0.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{\sin \varphi_1}{\sqrt{1 - e^2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \\ \cos \varphi &= \cos \varphi_1 \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}, \end{aligned}$$

więc możemy napisać ostatnie równanie w postaci

$$\sin \varphi_1 \sin d + \cos \varphi_1 \sqrt{1 - e^2} \cos d \cos (\mu - L) = 0,$$

albo na mocy wzorów (29) w postaci

$$\sin \varphi_1 \sin d_1 + \cos \varphi_1 \cos d_1 \cos (\mu - L) = 0.$$

Porównawszy to równanie z ostatnim wzorem (31) widzimy, iż nie oznacza ono nic innego, jak to, że $\zeta_1 = 0$. Zwracamy uwagę na tę charakterystyczną dla pomocniczej współrzędnej ζ_1 równość.

Ale wedle wzoru (45), gdy $\zeta_1 = 0$, to $\cos \beta = 0$ a $\sin \beta = 1$ ¹⁾ i równania (43) i (44) przywodzą się do

$$\sin \gamma = x, \quad \cos \gamma = \frac{y}{e_1}. \quad (47)$$

¹⁾ Przypominamy, że wedle umowy, zrobionej w poprzednim paragrafie, β leży w pierwszym kwadrancie.

Teraz znajdziemy czas początku i końca zaćmienia środkowego. Oba wynikną z jednego i tego samego równania, ale dla krótkości będziemy przez pewien czas wyrażać się tak, jak gdyby chodziło tylko o koniec zaćmienia. Pomiędzy momentami t_1, t_2, \dots, t_n , dla których mamy gotowe daty, obierzemy pewien moment T_0 przypadający, jak się nam zdaje, mniej więcej na środek zaćmienia (mówimy o zaćmieniu na całej ziemi). Oznaczamy chwilę końca zaćmienia przez T i piszemy

$$T = T_0 + \tau,$$

przyczem τ jest niewiadome. Bierzemy z tablicy gotowych dat x_0, y_0, ϱ_{10} odpowiadające momentowi T_0 , następnie bierzemy \dot{x}_0, \dot{y}_0 , gdzie \dot{x}_0, \dot{y}_0 oznaczają cogodzinne zmiany x i y (t. j. prosto pochodne x i y względem czasu). Ze szeregu Taylora urwanego na drugich wyrazach wynika, że x i $\frac{y}{\varrho_1}$ odpowiadające chwili T wyrażą się w następujący sposób:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \dot{x}_0 \tau \\ \frac{y}{\varrho_1} &= \frac{y_0}{\varrho_{10}} + \frac{\dot{y}_0}{\varrho_{10}} \tau. \end{aligned}$$

Położmy teraz

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} m \sin M &= x_0, & n \sin N &= \dot{x}_0 \\ m \cos M &= \frac{y_0}{\varrho_{10}}, & n \cos N &= \frac{\dot{y}_0}{\varrho_{10}}, \end{aligned} \right.$$

a poprzednie równania przybiorą kształt:

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= m \sin M + n \tau \sin N \\ \cos \gamma &= m \cos M + n \tau \cos N. \end{aligned}$$

Stąd wiadomym sposobem otrzymamy

$$\begin{aligned} \sin(\gamma - N) &= m \sin(M - N) \\ \cos(\gamma - N) &= m \cos(M - N) + n \tau. \end{aligned}$$

W pierwszym równaniu wszystko, co stoi po prawej stronie, jest wiadome, zatem odrazu znajdziemy $\gamma - N$. Załóżmy np., że $\gamma - N = \psi$. Przechodzimy do drugiego równania, rozwiązujemy je względem τ i piszemy

$$\tau = \frac{\cos \psi - m \cos (M - N)}{n}. \quad (49)$$

Znowu wszystko, co stoi po prawej stronie, jest wiadome, więc wnet otrzymamy poszukiwany czas τ . Ponieważ atoli w pierwszym równaniu ψ jest określone tylko przez sinus, więc zawsze będą dwa kąty odpowiadające temu samemu sinusowi, mianowicie ψ i $180^\circ - \psi$. Odpowiednio do tego trzeba w równaniu (49) wziąć $\cos \psi$ raz ze znakiem $+$, drugi raz ze znakiem $-$. W ten sposób otrzymamy na τ dwie wartości: większą odpowiadającą końcowi i mniejszą odpowiadającą początkowi zaćmienia. Chcąc osiągnąć ściśle rezultaty należy powtórzyć rachunki ale nie z poprzednią wartością na T_0 , tylko z nowymi wartościami jak najbliższymi do momentów końca i początku, albowiem odpowiednie gotowe daty: x_0, y_0 i t. d., jako bardziej zbliżone do x, y i t. d. odpowiadających chwili końca względnie początku zaćmienia, będą dokładniejsze. Naturalnie jeżeli weźmiemy T_0 bliskie końca, to tylko τ odpowiadające końcowi będzie dokładne, drugie τ odpowiadające początkowi będzie właśnie bardzo niedokładne; ale też uwzględnić należy tylko pierwsze, drugie trzeba odrzucić.

Gdy już dokładnie wyznaczymy czasy początku i końca zaćmienia, np. T_1 i T_2 , to bądź wprost obliczymy, bądź wyinterpolujemy z tablic odpowiadające momentom T_1 i T_2 wartości na x, y i q_1 , poczem metodą nieco wyżej opisaną znajdziemy współrzędne L i φ punktów, w których środkowe zaćmienie zaczyna się i kończy, t. j. znajdziemy końcowe punkty linii środków.

Jeżeli rozpatrywane zaćmienie jest całkowite, to mając linię środkowego zaćmienia możemy niewielkim trudem nakreślić granice pasa „całkowitości“. Korzystamy z tego, że rozmiary cienia na powierzchni ziemi zmieniają się stopniowo i nieznacznie a przytem zawsze pozostają bardzo małe w stosunku do rozmiarów ziemi. Metodą wyłożoną w poprzednim paragrafie wyznaczamy granice cienia w kilku odpowiednio obranych momentach czasu. Naturalnie nie cały kontur cienia jest potrzebny: potrzebne są tylko te części, wśród których leżą punkty styczności z granicą pasa całkowitości. Wszak granice pasa północna i południowa są to owijające kolejnych cieniów. Nakreśliwszy granice cieniów kreślimy od ręki styczne do nich granice pasów, bacząc na to, aby odstępy między granicami pasa i linią środkowego zaćmienia zmie-

niały się w sposób ciągły. Stosownie do dokładności, którą zamierzamy osiągnąć, i do natury rozpatrywanego zaćmienia trzeba kreślić raz mniej, drugi raz więcej konturów poszczególnych cieniów. Jeżeli, jak to np. zdarzyło się ze zaćmieniem 17 Kwietnia 1912 r., zaćmienie jest w ciągu pewnej części swego przebiegu obrączkowe, a w ciągu innej całkowite, to trzeba kreślić więcej poszczególnych cieniów, trzeba wyznaczyć na linii środkowego zaćmienia ten punkt, w którym zaćmienie przechodzi z obrączkowego w całkowite, lub odwrotnie i t. d. Odpowiednich analitycznych zadań rozpatrywać nie będziemy.

13. Przepowiednia zaćmienia słońca w danym miejscu.

Będziemy wciąż rozumować tak, jakby chodziło tylko o stożek cieniowy, ale te same rozumowania stosują się też do stożka półcieniowego, trzeba tylko wziąć na l i λ odpowiadające półcieniowi wartości.

Wiemy już, że w chwili kontaktu

$$(50) \quad (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (l - \lambda \zeta)^2.$$

Gdy lewa strona tego równania jest większa od prawej, to dany punkt powierzchni ziemi znajduje się poza obrębem cienia, gdy jest mniejsza, to dany punkt jest wewnątrz cienia, zaćmienie jest całkowite. Dla praktyki najważniejszą rzeczą jest określić z pomocą warunku (50) te momenty czasu, w których w danym miejscu widać kontakty, t. j. te momenty czasu, w których równanie (50) jest przy danych ξ , η i ζ spełnione. Dochodzimy do określenia owych momentów czasu przez kolejne przybliżenia w sposób podobny do tego, którym posługiwaliśmy się w poprzednim paragrafie; zatem piszemy zamiast równania (50) równania

$$(51) \quad \begin{cases} (l - \lambda \zeta) \sin Q = x - \xi \\ (l - \lambda \zeta) \cos Q = y - \eta, \end{cases}$$

w których Q jest to pewien kąt pomocniczy. Tak samo, jak w poprzednim paragrafie, za pomocą efemeryd, map i t. d. obieramy moment T_0 dostatecznie bliski do czasu zetknięcia i tak samo, jak tam, zakładamy, że czas kontaktu jest $T_0 + \tau$. Również zakładamy, że momentowi T_0 odpowiadają wartości x_0 , y_0 , d_0 , l_0 i λ_0 a momentowi $T_0 + \tau$ wartości x , y , d , l i λ i oznaczamy tak samo, jak

w poprzednim paragrafie, średnie cogodzinne przyrosty współrzędnych x i y przez \dot{x} i \dot{y} . Dla ułatwienia rachunku te przyrosty bywają podane w efemerydach.

W obecnem zadaniu czas τ bywa rzeczywiście krótki, krótszy aniżeli w zadaniu z poprzedniego paragrafu, więc zupełnie słusznie możemy ograniczyć się do pierwszych dwu wyrazów szeregu Taylora i napisać

$$x = x_0 + \dot{x}_0 \tau, \quad y = y_0 + \dot{y}_0 \tau.$$

W przeciwieństwie do poprzednich zadań w danym razie nie poszukujemy takiego punktu na powierzchni ziemi, któryby w danej chwili spełniał pewne warunki; tu właśnie danym jest pewien określony punkt na powierzchni ziemi — dla krótkości nazywamy go „obserwatorium“. Obliczamy współrzędne obserwatorium ξ_0, η_0 i ζ_0 dla chwili T_0 za pomocą wzorów (20). Obliczenie to jest łatwe, bo ϱ i φ' są dla danego obserwatorium wiadome, zaś a, λ i t. d. już obliczyliśmy zawczasu dla chwili T_0 . Musimy też obliczyć pochodne względem czasu $\dot{\xi}$ i $\dot{\eta}$. Aby przytem obliczeniu mógł używać efemeryd, piszemy tak samo jak w § 11 [równanie (28)]

$$\Theta - a = \mu - L,$$

a zamiast równań (20) piszemy równania

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varrho \cos \varphi' \sin (\mu - L) \\ \eta &= \varrho \sin \varphi' \cos d - \varrho \cos \varphi' \sin d \cos (\mu - L) \\ \zeta &= \varrho \sin \varphi' \sin d + \varrho \cos \varphi' \cos d \cos (\mu - L). \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Różniczkując względem czasu i opuszczając wyrazy, w których figuruje (zawsze) bardzo mała pochodna $\frac{dd}{dt}$, otrzymamy ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= \varrho \cos \varphi' \cos (\mu - L) \frac{d\mu}{dt} \\ \dot{\eta} &= \varrho \cos \varphi' \sin d \sin (\mu - L) \frac{d\mu}{dt} = \dot{\xi} \sin d \frac{d\mu}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

¹⁾ $\dot{\xi}$ jest niepotrzebne.

Możemy teraz napisać równania (51) w postaci:

$$(51 \text{ bis}) \quad \begin{cases} (l - \lambda \zeta) \cos Q = x_0 - \xi_0 + (\dot{x}_0 - \dot{\xi}) \tau \\ (l - \lambda \zeta) \sin Q = y_0 - \eta_0 + (\dot{y}_0 - \dot{\eta}) \tau. \end{cases}$$

Wprowadźmy jeszcze pomocnicze kąty M i N określone przez równania

$$(54) \quad \begin{cases} m \cos M = x - \xi, & n \cos N = \dot{x}_0 - \dot{\xi} \\ m \sin M = y - \eta, & n \sin N = \dot{y}_0 - \dot{\eta}. \end{cases}$$

Ponieważ $x_0, y_0, \xi_0, \eta_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{\xi}_0$ i $\dot{\eta}_0$ są już znane, więc kąty M i N oraz współczynniki m i n mogą być natychmiast obliczone. Kładąc jeszcze

$$l - \lambda \zeta = L$$

możemy napisać

$$\begin{aligned} L \cos Q &= m \cos M + n \tau \cos N \\ L \sin Q &= m \sin M + n \tau \sin N. \end{aligned}$$

Stąd zaś znanym i wielokrotnie używanym sposobem, kładąc dla krótkości

$$Q - N = \psi,$$

znajdziemy

$$\begin{aligned} L \cos \psi &= m \cos(M - N) + n \tau \\ L \sin \psi &= m \sin(M - N), \end{aligned}$$

to jest

$$(55) \quad \begin{cases} \sin \psi = \frac{m \sin(M - N)}{L} \\ \tau = \frac{L \cos \psi}{n} - \frac{m \cos(M - N)}{n}. \end{cases}$$

W ostatnich dwu równaniach po prawej stronie stoją same już przedtem obliczone wielkości, mianowicie jeżeli z pierwszego równania (55) określimy $\sin \psi$, to z drugiego (55) możemy określić τ . Ponieważ jednak ψ jest określone tylko przez sinus, więc musimy na $\cos \psi$ wziąć obie wartości, zarówno dodatnią, jak ujemną. W ten sposób otrzymamy dwie wartości na $T = T_0 + \tau$: mniejszą odpowiadającą początkowi i większą odpowiadającą końcowi zaćmienia. Słowem możemy powtórzyć wszystko to, co było

powiedziane w poprzednim paragrafie z okazji równania (49). Pierwsze przybliżenie może być o kilka minut błędne, ale drugie powinno być dokładne aż do kilku sekund¹⁾.

14. Przykład.

W r. 1913 dnia 6 Kwietnia będzie częściowe zaćmienie słońca, widzialne w północno-wschodniej części oceanu Spokojnego i w północno-zachodniej Ameryce. Z „American Ephemeris“ na r. 1913 zapożyczamy przykład obliczenia początku i końca zaćmienia w Sitce, w Alasce. Ponieważ zaćmienie jest częściowe, więc w rachubę wchodzi tylko stożek półcieniowy. Z mapki zaćmienia (str. 562—563) widzimy, że początek i koniec zaćmienia przypadają mniej więcej na następujące momenty czasu:

początek na 6 Kwietnia 4^h 40^m cz. śr. greenwichskiego
 koniec „ „ „ 6 20 „ „ „

Odrazu wykonamy dwa rachunki przyjmując w jednym $T_0 = 6^h 4^m 40^s$, w drugim $T_0 = 6^h 6^m 20^s$. W ten sposób odrazu otrzymamy niezłe przybliżenia.

Przedewszystkiem obliczamy współrzędne Sitki: ξ , η i ζ dla tych dwóch momentów czasu. Współrzędne geograficzne są:

$$\varphi = + 57^{\circ} 0' 0''$$

$$L = + 135 8 0 \quad (\text{długość zachodnia}).$$

Stąd przez wzory rozdz. IX-go albo, co o wiele krótsze, za pomocą wzorów u dołu str. 716 i tabliczki na str. 717 „American Ephemeris“ znajdujemy

$$\log \rho \sin \varphi' = 9,92 168$$

$$\dots \rho \cos \varphi' = 9,73 715.$$

¹⁾ Naturalnie o ile fundamentalne daty wzięte z tablic księżycy są dokładne. W czasie zaćmienia słońca 28 Kwietnia 1911 r. na wyspach Vavau (Tonga) pierwszy kontakt nastąpił o 20 sekund wcześniej, niż to wypadało z rachunku. Tego rodzaju przypadki nie są bynajmniej rzadkością. Przyczyną ich nie jest niedokładność teorii zaćmień, a niedokładność tablic księżycy.

Następnie w tablicy na str. 563 „Amer. Ephem.“, gdzie $x, y, \mu, \sin d, \cos d$ i l są podane co 10 minut, znajdujemy gotowe wartości μ dla obu obranych momentów, mianowicie:

$$\begin{array}{l} \text{Stąd} \\ \mu - L = -65\ 46\ 12 \quad -40\ 45\ 48. \end{array}$$

Teraz obliczamy ξ, η, ζ ze wzorów (52):

	Początek:	Koniec:
$\log \varrho \cos \varphi'$	9,73715	9,73715
$\log \sin (\mu - L)$	9,95995 n	9,81487 n
$\log \xi$	9,69710 n	9,55202 n
ξ	-0,49786	-0,35647
$\log \varrho \sin \varphi'$	9,92168	9,92168
$\log \cos d^1)$	9,99728	9,99726
$\log \eta_1$	9,91896	9,91894
η_1	+0,82978	+0,82974
$\log \varrho \cos \varphi'$	9,73715	9,73715
$\log \sin d^1)$	9,04724	9,04894
$\log \cos (\mu - L)$	9,61320	9,87933
$\log \eta_2$	8,39759	8,66542
η_2	+0,02498	+0,04628
$\eta = \eta_1 - \eta_2$	+0,80480	+0,78346
$\log \varrho \sin \varphi'$	9,92168	9,92168
$\log \sin d$	9,04724	9,04894
$\log \zeta_1$	8,96892	8,97062
ζ_1	+0,09309	+0,09346
$\log \varrho \cos \varphi'$	9,73715	9,73715
$\log \cos d$	9,99728	9,99726
$\log \cos (\mu - L)$	9,61320	9,87933
$\log \zeta_2$	9,34763	9,61374
ζ_2	+0,22265	+0,41090
$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$	+0,31574	+0,50436

¹⁾ Z tablicy na str. 563 „Amer. Ephem.“.

Teraz obliczamy prędkości $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ ze wzorów (53) przyjmując minutę za jednostkę czasu. Z tą jednostką $\log \frac{d\mu}{dt} = 7,63992^1$, zatem

$\log \frac{d\mu}{dt}$	7,63992	7,63992
$\log \rho \cos \varphi'$	9,73715	9,73715
$\log \cos (\mu - L)$	9,61320	9,87933
$\log \xi$	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 6,99027	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 7,25640
ξ	+ 0,000978	+ 0,001805
$\log \frac{d\mu}{dt}$	7,63992	7,63992
$\log \xi$	9,69710 n	9,55202 n
$\log \sin d$	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 9,04724	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 9,04894
$\log \dot{\eta}$	6,38426 n	6,24088 n
$\dot{\eta}$	- 0,000242	- 0,000174

W tablicy na str. 563 „Amer. Ephem.“ znajdujemy dla $4^h 40^m$ i $6^h 20^m$ gotowe wartości x i y , mianowicie:

	dla $4^h 40^m$	$x = -1,02003$	$y = +0,94526$
Zatem	„ $6 20$	$= -0,26430$	$= +1,34966.$
	$x - \xi =$	$-0,52217$	$+0,09217$
	$y - \eta =$	$+0,14046$	$+0,56620.$

Tak samo z tejże tablicy na str. 563 „Amer. Ephem.“ znajdujemy przez łatwą interpolację:

	$\log \dot{x} = 7,8783$	dla początku a 7,8784	dla końca
	$\log \dot{y} = 7,6070$	„ „ „ 7,6066	„ „ „
przeto	$\dot{x} = 0,007556$	„ „ „ 0,007558	„ „ „
	$\dot{y} = 0,004046$	„ „ „ 0,004042	„ „ „
Zatem	$\dot{x} - \dot{\xi} = +0,006578$		$+0,005753$
	$\dot{y} - \dot{\eta} = +0,004288$		$+0,004216$

¹⁾ Dla porównania przytaczam, że $\log \frac{2\pi}{1440} = 7,63982.$

Teraz wedle wzorów (54)

$\log m \sin M = \log (y - \eta)$	9,71781 n	8,96459
$\dots m \cos M = \dots (x - \xi)$	9,14755	9,75297
$\log \operatorname{tang} M$	0,57026 n	9,21162
M	$- 74^{\circ} 56' 40''$	$9^{\circ} 14' 45''$
$\log m \sin M$	9,71781 n	8,96459
$- \log \sin M$	$- 9,98483$ n	$- 9,20593$
$\log m$	9,73298	9,75866
$\log n \sin N = \log (\dot{y} - \dot{\eta})$	7,81809	7,75989
$\dots n \cos N = \log (\dot{x} - \dot{\xi})$	7,63225	7,62490
$\log \operatorname{tang} N$	0,18584	0,13499
N	$+ 56^{\circ} 54' 4''$	$+ 53^{\circ} 45' 53''$
$\log n \sin N$	7,81809	7,75989
$- \log \sin N$	$- 9,92310$	$- 9,90666$
$\log n$	7,89499	7,85323
$\log \operatorname{tang} f^1)$	7,66941	7,66940
$\log \zeta$	9,49933	9,70274
$\log (\lambda \zeta) = \log (\zeta \operatorname{tang} f)$	7,16874	7,37214
$- \lambda \zeta$	$- 0,00147$	$- 0,00236$
$l^1)$	$+ 0,56512$	$+ 0,56498$
$L = l - \lambda \zeta$	0,56365	0,56262

Teraz wedle wzorów (55):

$M - N$	$+ 228^{\circ} 9' 16''$	$- 44^{\circ} 31' 8''$
$\log \sin (M - N)$	9,87212 n	9,84581 n
$\log m$	0,73298	9,75866
$\operatorname{colog} L$	0,24899	0,24978
$\log \sin \psi$	9,85409 n	9,85425 n
ψ	$- 45^{\circ} 36' 50''$	$- 45^{\circ} 38' 9''$

¹⁾ Z tablicy na str. 563 „Amer. Ephem.“.

kundy i zaokrąglając znajdziemy, że początek zaćmienia w Sitce będzie

6 Kw. o 7^h 35^m 12;2 rano

a koniec

" " " 9^h 17^m 16;4 "

15. Zaćmienia księżycy.

Podaliśmy warunki zaćmień w § 2, teraz pokażemy, jak znaleźć czas, w którym ma nastąpić pewna faza zaćmienia księżycy. Można w tym celu wziąć wzory z analogicznego zadania odnoszącego się do zaćmień słońca, trzeba tylko zamienić role ziemi i księżycy i uważać zaćmienie księżycy jako zaćmienie słońca, widziane z księżycy. Ale można też rozwiązać zadanie innym sposobem, przedej prowadzącym do celu.

Niech (ryc. 45) S będzie tym punktem sfery niebieskiej, który znajduje się naprzeciw środka słońca, t. j. niech S będzie pozorną geocentryczną pozycją środka cienia ziemi, niech dalej M będzie geocentrycznem położeniem środka księżycy, a P biegunem. Pozostawimy wszystkie dawne oznaczenia a oprócz tego oznaczymy $\times PSM$ przez Q , a łuk SM przez L . Współrzędne punktu S są $180^\circ + \alpha'$ i $-\delta'$, gdzie α' i δ' są to, jak zwykle, współrzędne słońca. Z trójkąta PSM otrzymamy

$$(56) \quad \begin{cases} \sin L \sin Q = \cos \delta \sin (\alpha - \alpha' - \pi) = -\cos \delta \sin (\alpha - \alpha') \\ \sin L \cos Q = \sin \delta \cos \delta' + \sin \delta' \cos \delta \cos (\alpha - \alpha'). \end{cases}$$

Zaćmienie zaczyna się lub kończy się wtedy, gdy łuk SM równa się sumie widomych promieni księżycy i cienia. Stąd wynika, że pierwszy i ostatni zewnętrzny kontakt księżycy z półcieniem następuje wtedy, gdy (porównaj § 2)

$$L = \frac{51,8}{50,8} (\pi + r' + \pi') + r.$$

Tak samo wewnętrzne kontakty z półcieniem następują wtedy, gdy

$$L = \frac{51,8}{50,8} (\pi + r' + \pi') - r.$$

Pierwszy i ostatni kontakt zewnętrzny księżycy z cieniem następują wtedy, gdy

$$L = \frac{51,8}{50,8} (\pi - r' + \pi') + r,$$

a pierwszy i ostatni kontakt wewnętrzny z cieniem następują wtedy, gdy

$$L = \frac{51,8}{50,8} (\pi - r' + \pi') - r.$$

Podstawiamy te wartości w równania (56), ale ponieważ granice cienia i półcienia są niewyraźne a kąty wchodzące w rachubę małe, więc można pisać poprostu L zamiast $\sin L$, $\alpha - \alpha'$ zamiast $\sin(\alpha - \alpha')$. Prócz tych uproszczeń zrobimy jeszcze pewne małe przekształcenie, napiszemy mianowicie:

$$\cos(\alpha - \alpha') = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \alpha'),$$

następnie we wyrazie pomnożonym przez małą wielkość $\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')$ nie będziemy rozróżniać δ' od δ a wreszcie napiszemy $\delta + \delta'$ zamiast $\sin(\delta + \delta')$. Wtedy równania (56) przejdą na następujące:

$$\begin{aligned} L \sin Q &= -(\alpha - \alpha') \cos \delta \\ L \cos Q &= \delta + \delta' - \frac{\sin 2\delta \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')}{\sin 1''}. \end{aligned}$$

Oznaczając prawe strony tych równań przez x i y , możemy napisać

$$\begin{aligned} L \sin Q &= x \\ L \cos Q &= y. \end{aligned}$$

Jeżeli w chwili T_0 , x i y mają wartości x_0 i y_0 , to w chwili kontaktu $T = T_0 + \tau$ będzie

$$\begin{aligned} L \sin Q &= x_0 + \dot{x}_0 \tau \\ L \cos Q &= y_0 + \dot{y}_0 \tau. \end{aligned}$$

Dalszy rachunek robi się tak, jak w analogicznem zadaniu, odnosząc się do zaćmień słońca. Naturalnie podstawiamy na L tę z powyżej wyliczonych wartości, która odpowiada temu kon-



Ryc. 45.

taktowi, którego moment poszukujemy. Co do $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$, to naturalnie obliczamy je zawczasu dla różnych momentów T_0 . Kąt Q jest to kąt pomocniczy, do dalszych rachunków niepotrzebny.

Literatura.

- W. Chauvenet: Spherical and practical Astronomy, tom I. Filadelfia, 1871.
W. Anshagen: Note on Chauvenets theory of Solar Eclipses. Astr. Journ., tom XXII, str. 105.
S. Newcomb: On the Recurrence of Solar Eclipses. Astronomical Papers prepared for the use of the American Ephemeris, tom I, Washington, 1882.
F. K. Ginzel: Spezieller Kanon der Sonnen und Mondfinsternisse, Berlin, 1899 r.
-
-

ROZDZIAŁ XXIII.

Dynamiczna teoria precesyi i nutacyi oraz Eule-rowskiej perturbacyi.

1. Równania różniczkowe.

Już w rozdziale XI-tym (§ 1) dowiedzieliśmy się, że przyczyną precesyi i nutacyi jest niecentrobaryczność ziemi [definicja centrobarycznego ciała znajduje się w rozdz. XIII-tym, § 2]. Wnosimy stąd, że w dynamicznej teorii precesyi i nutacyi nie można uważać ziemię za punkt materyalny, że trzeba uważać ją za ciało o rozmiarach skończonych i uwzględnić wewnętrzny rozkład mas. Natomiast możemy uważać słońce i księżyc za punkty materyalne przyciągające. Niecentrobaryczność tych ciał, jako sama przez się bardzo nieznaczna, niema żadnego widomego wpływu na precesyę i nutacyę.

Równania różniczkowe, rządzące zjawiskiem precesyi i nutacyi, wyprowadzimy „*ab ovo*”. Możemy wyobrazić sobie każde ciało jako skupienie punktów materyalnych o nieskończenie małych masach $m_1, m_2, m_3 \dots$ i t. d. Odniesmy ruch ciał do systemu współrzędnych absolutnych, oznaczmy współrzędne punktów $m_1, m_2 \dots$ i t. d. przez $X_1, Y_1, Z_1 \dots$ i t. d., a składowe sił działających na te punkty przez $F_{x_1}, F_{y_1}, F_{z_1}, F_{x_2}, F_{y_2}, F_{z_2} \dots$ i t. d.; wtedy równania ruchu punktu m_1 będą:

$$m_1 \frac{d^2 X_1}{dt^2} = F_{x_1}, \quad m_1 \frac{d^2 Y_1}{dt^2} = F_{y_1}, \quad m_1 \frac{d^2 Z_1}{dt^2} = F_{z_1}.$$

Odpowiednie równania dla innych punktów ciała będą naturalnie miały zupełnie taki sam kształt. Z równań tych wyprowadzimy najpierw równania momentów. Np. dla punktu m_1 równania momentów będą:

$$m_1 \left(Y_1 \frac{d^2 Z_1}{dt^2} - Z_1 \frac{d^2 Y_1}{dt^2} \right) = Y_1 F_{z_1} - Z_1 F_{y_1}$$

$$m_1 \left(Z_1 \frac{d^2 X_1}{dt^2} - X_1 \frac{d^2 Z_1}{dt^2} \right) = Z_1 F_{x_1} - X_1 F_{z_1}$$

$$m_1 \left(X_1 \frac{d^2 Y_1}{dt^2} - Y_1 \frac{d^2 X_1}{dt^2} \right) = X_1 F_{y_1} - Y_1 F_{x_1}$$

Sumując równania momentów dla wszystkich punktów ciała otrzymamy równania momentów dla całego ciała, mianowicie

$$\Sigma m \left(Y \frac{d^2 Z}{dt^2} - Z \frac{d^2 Y}{dt^2} \right) = \Sigma (Y F_z - Z F_y)$$

$$\dots \dots \dots$$

Zauważmy tu, że gdy sumowanie rozciąga się do całego uważanego ciała, to po prawej stronie znoszą się momenty wszystkich sił wewnętrznych, t. j. sił działających pomiędzy różnymi częściami ciała. Jeżeli punkt m_i wywiera na punkt m_j siłę R działającą wzdłuż prostej łączącej oba punkty, to na mocy prawa działania i przeciwdziałania punkt m_j wywiera na m_i siłę $-R$ równą co do absolutnej wielkości i tak samo skierowaną wzdłuż prostej łączącej oba punkty, ale wprost przeciwną. Jeżeli dostawy kierunkowe prostej łączącej punkt m_i z punktem m_j są α, β, γ , to składowe siły wywieranej przez m_i na m_j są: $R\alpha, R\beta, R\gamma$, a składowe siły wywieranej przez m_j na m_i są: $-R\alpha, -R\beta, -R\gamma$. Przeto np. w pierwszym równaniu po prawej stronie będziemy mieli wyraz $R(Y_i\gamma - Z_i\beta)$, zależny od przyciągania punktu m_i na punkt m_j , oraz wyraz $-R(Y_j\gamma - Z_j\beta)$, zależny od przyciągania punktu m_j na punkt m_i . Ale jeżeli D oznacza prostoliniową odległość pomiędzy m_i i m_j , to

$$\alpha = \frac{X_j - X_i}{D}, \quad \beta = \frac{Y_j - Y_i}{D}, \quad \gamma = \frac{Z_j - Z_i}{D}.$$

Przeto możemy napisać powyższe wyrazy w kształcie:

$$\frac{R}{D} [Y_i(Z_j - Z_i) - Z_i(Y_j - Y_i)] \text{ oraz } -\frac{R}{D} [Y_j(Z_j - Z_i) - Z_j(Y_j - Y_i)].$$

Widzimy, że suma tych dwóch wyrazów jest identycznie równa zeru. Powtarzając to samo rozumowanie kolejno dla wszystkich punktów ciała wziętych parami i to nie tylko w pierwszym równa-

Położmy teraz dla krótkości

$$\begin{aligned} \Sigma m \left(\eta \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{d\eta}{dt} \right) &= H_\xi \\ \dots & \dots \\ \Sigma (\eta F_\xi - \xi F_\eta) &= L_\xi \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

Z tem nowem skróconem znakowaniem możemy napisać równania (1) w kształcie

$$\frac{dH_\xi}{dt} = L_\xi, \quad \frac{dH_\eta}{dt} = L_\eta, \quad \frac{dH_\zeta}{dt} = L_\zeta. \quad (1 \text{ bis})$$

Lecz momenty H i L są to takie same wektory, jak np. prędkości, zatem

$$\begin{aligned} H_\xi &= \alpha_1 H_x + \beta_1 H_y + \gamma_1 H_z \\ \dots & \dots \\ L_\xi &= \alpha_1 L_x + \beta_1 L_y + \gamma_1 L_z \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

gdzie $H_x \dots$ i t. d., $L_x \dots$ i t. d. oznaczają takie same momenty obrotu, względnie momenty sił naokoło osi x, y, z , jak $H_\xi \dots$ i t. d., $L_\xi \dots$ i t. d. naokoło osi ξ, η, ζ . Podstawmy więc wartości na H_ξ, L_ξ i t. d. wzięte z ostatnich wzorów w równania (1 bis), a otrzymamy

$$\begin{aligned} \alpha_1 \dot{H}_x + \beta_1 \dot{H}_y + \gamma_1 \dot{H}_z + \dot{\alpha}_1 H_x + \dot{\beta}_1 H_y + \dot{\gamma}_1 H_z &= \alpha_1 L_x + \beta_1 L_y + \gamma_1 L_z \\ \alpha_2 \dot{H}_x + \dots &= \alpha_2 L_x + \dots \\ \alpha_3 \dot{H}_x + \dots &= \alpha_3 L_x + \dots \end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze z tych równań przez α_1 , drugie przez α_2 , trzecie przez α_3 i dodajmy do siebie, potem pomnóżmy je tak samo przez $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ i znów dodajmy, wreszcie pomnóżmy przez $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i znów dodajmy, a otrzymamy na mocy równań (5):

$$\begin{aligned} \frac{dH_x}{dt} + (\alpha_1 \dot{\beta}_1 + \alpha_2 \dot{\beta}_2 + \alpha_3 \dot{\beta}_3) H_y + (\alpha_1 \dot{\gamma}_1 + \alpha_2 \dot{\gamma}_2 + \alpha_3 \dot{\gamma}_3) H_z &= L_x \\ \frac{dH_y}{dt} + (\beta_1 \dot{\gamma}_1 + \beta_2 \dot{\gamma}_2 + \beta_3 \dot{\gamma}_3) H_z + (\beta_1 \dot{\alpha}_1 + \beta_2 \dot{\alpha}_2 + \beta_3 \dot{\alpha}_3) H_x &= L_y \\ \frac{dH_z}{dt} + (\gamma_1 \dot{\alpha}_1 + \gamma_2 \dot{\alpha}_2 + \gamma_3 \dot{\alpha}_3) H_x + (\gamma_1 \dot{\beta}_1 + \gamma_2 \dot{\beta}_2 + \gamma_3 \dot{\beta}_3) H_y &= L_z \end{aligned}$$

W tych równaniach figuruje sześć wielkości kształtu

$$\alpha_1 \dot{\beta}_1 + \alpha_2 \dot{\beta}_2 + \alpha_3 \dot{\beta}_3;$$

lecz jeżeli przeróżniczkujemy trzy ostatnie równania (6), t. j. równania typu

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0,$$

to zaraz spostrzeżemy, że trzy z nich są trzem pozostałym równe co do wielkości, a przeciwne co do znaku, że przeto przywodzą się do trzech niezależnych i różnych między sobą wielkości. Z wymiarów widać, że to są prędkości kątowe, mianowicie są to składowe obroty chwilowego osi ruchomych x, y, z , z którymi spotykaliśmy się już w rozdz. XI tym, § 2. Oznaczając je tak, jak zwykle, przez p, q, r mamy:

$$(7) \quad \begin{cases} \gamma_1 \dot{\beta}_1 + \gamma_2 \dot{\beta}_2 + \gamma_3 \dot{\beta}_3 = -(\beta_1 \dot{\gamma}_1 + \beta_2 \dot{\gamma}_2 + \beta_3 \dot{\gamma}_3) = p \\ \alpha_1 \dot{\gamma}_1 + \alpha_2 \dot{\gamma}_2 + \alpha_3 \dot{\gamma}_3 = -(\gamma_1 \dot{\alpha}_1 + \gamma_2 \dot{\alpha}_2 + \gamma_3 \dot{\alpha}_3) = q \\ \beta_1 \dot{\alpha}_1 + \beta_2 \dot{\alpha}_2 + \beta_3 \dot{\alpha}_3 = -(\alpha_1 \dot{\beta}_1 + \alpha_2 \dot{\beta}_2 + \alpha_3 \dot{\beta}_3) = r. \end{cases}$$

Tedy możemy napisać równania momentów w kształcie:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{dH_x}{dt} - H_y r + H_z q = L_x \\ \frac{dH_y}{dt} - H_z p + H_x r = L_y \\ \frac{dH_z}{dt} - H_x q + H_y p = L_z. \end{cases}$$

Oto są równania, którym kręcenie się ciała naokoło środka masy musi czynić zadość. Przypominamy, że środek współrzędnych x, y, z znajduje się w środku masy, oraz że osie współrzędnych są identyczne z osiami głównymi bezwładności uważanego ciała. Równania (8) są zupełnie ogólne, odnoszą się do wszystkich ciał zarówno sztywnych, jak niesztywnych. Teraz atoli wprowadzimy hipotezę, że ziemia jest sztywna. Jest to hipoteza dozwolona, bo w zjawisku precesyi i nutacyi ziemia zachowuje się prawie tak, jak ciało zupełnie sztywne.

Wedle definicyi

$$H_x = \Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Skoro ziemia jest wedle hipotezy sztywną, to niema ruchów wewnętrznych i prędkość każdego oddzielnego punktu pochodzi tylko ze wspólnego obrotu; możemy przeto skorzystać z równań

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= qz - ry, \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

które wyprowadziliśmy już w rozdz. XI-tym, § 2 [ostatnie równania przed równaniami (1)]. Skoro je podstawimy we wyrażenia momentów H_x, H_y, H_z , to na mocy równań (3) otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} H_x &= p \Sigma m (y^2 + z^2) = pA \\ H_y &= q \Sigma m (z^2 + x^2) = qB \\ H_z &= r \Sigma m (x^2 + y^2) = rC. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Wielkości A, B, C zwane „momentami bezwładności“ są u ciała sztywnego zupełnie stałe.

Skoro podstawimy wartości momentów obrotu z równań (9) w równania (8), to otrzymamy tak zwane równania Eulera

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} - (B - C) qr &= L_x \\ B \frac{dq}{dt} - (C - A) rp &= L_y \\ C \frac{dr}{dt} - (A - B) pq &= L_z, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

na których opiera się teoria precesyi i nutacyi. Przypominamy, że L_x, L_y, L_z oznaczają momenty sił zewnętrznych naokoło ruchomych osi x, y, z . Ponieważ kształt ich jest niezależny od kierunków osi, więc [por. wzory na L_x, \dots i t. d. po wzorach (6)]:

$$\left. \begin{aligned} L_x &= \Sigma (yF_z - zF_y) \\ L_y &= \Sigma (zF_x - xF_z) \\ L_z &= \Sigma (xF_y - yF_x), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

przyczem F_x, F_y, F_z oznaczają składowe sił zewnętrznych w kierunkach osi ruchomych x, y, z . Prędkość obrotu chwilowego, którego składowe są p, q, r , oznaczmy przez ω , t. j. położymy

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}. \quad (12)$$

Oś tego obrotu przechodzi przez początek współrzędnych (przez środek masy). Jej dostawy kierunkowe są:

$$\frac{p}{\omega}, \frac{q}{\omega}, \frac{r}{\omega}.$$

2. Obliczenie momentów sił zewnętrznych.

Siły zewnętrzne, które tu uwzględniamy, są to przyciągania słońca i księżyca. Dość jest przeprowadzić rachunek dla jednego z tych ciał, albowiem wszystkie wyrażenia odnoszące się do drugiego będą miały ten sam kształt, tylko liczbowe wartości będą miały inne. Uważamy tylko słońce, przyczem, jak to było na początku § 1 wyjaśnione, możemy je uważać za punkt materyalny. W myśl tego założenia napiszemy [por. rozdz. XIII-ty, § 2] odrazu potencjał przyciągania słońca na element masy ziemi dm

$$V = m_0 \frac{dm}{R}.$$

Przez V oznaczyliśmy potencjał, przez m_0 masę słońca a przez R odległość środka słońca od uważanego elementu ziemi. Przeto

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

jeżeli x_0, y_0, z_0 oznaczają współrzędne środka słońca.

Z wiadomych związków

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial V}{\partial z},$$

wynika, że zamiast wzorów (11) można napisać wzory:

$$\begin{aligned} L_x &= \Sigma \left(y \frac{\partial V}{\partial z} - z \frac{\partial V}{\partial y} \right) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

które można też napisać w kształcie:

$$\begin{aligned} L_x &= \Sigma \left\{ [y_0 + (y - y_0)] \frac{\partial V}{\partial z} - [z_0 + (z - z_0)] \frac{\partial V}{\partial y} \right\} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Ale

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -m_0 \frac{(x-x_0)}{R^3} dm$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -m_0 \frac{(y-y_0)}{R^3} dm$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -m_0 \frac{(z-z_0)}{R^3} dm.$$

Skoro to podstawimy we wzory na L_x, L_y, L_z , to okaże się, że mamy tożsamościowo

$$\Sigma \left[(y-y_0) \frac{\partial V}{\partial z} - (z-z_0) \frac{\partial V}{\partial y} \right] = 0$$

$$\Sigma \left[(z-z_0) \frac{\partial V}{\partial x} - (x-x_0) \frac{\partial V}{\partial z} \right] = 0$$

$$\Sigma \left[(x-x_0) \frac{\partial V}{\partial y} - (y-y_0) \frac{\partial V}{\partial x} \right] = 0$$

i wzory te przywiodą się do kształtu

$$L_x = y_0 \Sigma \frac{\partial V}{\partial z} - z_0 \Sigma \frac{\partial V}{\partial y}$$

.

Lecz, jak wiadomo, mamy identyczne związki

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z_0};$$

przeto możemy napisać

$$L_x = -y_0 \Sigma \frac{\partial V}{\partial z_0} + z_0 \Sigma \frac{\partial V}{\partial y_0}$$

.

Wreszcie ponieważ sumowanie (właściwe całkowanie) odnosi się do współrzędnych x, y, z , więc można napisać:

$$L_x = -y_0 \frac{\partial}{\partial z_0} (\Sigma V) + z_0 \frac{\partial}{\partial y_0} (\Sigma V)$$

.

Oznaczmy jeszcze ΣV przez W , t. j. połączmy:

$$(13) \quad W = m_0 \Sigma \frac{dm}{R} = m_0 \int \frac{dm}{R},$$

a wzory na L_x, L_y, L_z przybiorą ostatecznie kształt

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_x = -y_0 \frac{\partial W}{\partial z_0} + z_0 \frac{\partial W}{\partial y_0} \\ L_y = -z_0 \frac{\partial W}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial W}{\partial z_0} \\ L_z = -x_0 \frac{\partial W}{\partial y_0} + y_0 \frac{\partial W}{\partial x_0}, \end{array} \right.$$

gdzie x_0, y_0, z_0 są to współrzędne środka słońca.

Trzeba teraz obliczyć W . Kładziemy

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = a^2 \\ xx_0 + yy_0 + zz_0 = ar \cos \gamma. \end{array} \right.$$

Wtedy

$$R^2 = a^2 - 2ar \cos \gamma + r^2.$$

Jeżeli rozwiniemy R^{-1} w szereg wielomianów Legendre'a postępujący wedle potęg $\frac{r}{a}$ [por. rozdz. V, § 2], to będzie to szereg szybko zbieżny; bo nawet wtedy, gdy chodzi o potencjał księżyca, stosunek między r a a , t. j. między odległością uważanego punktu ziemi od jej środka masy a odległością środka masy ziemi od środka masy księżyca wynosi co najwyżej około $\frac{1}{60}$. Piszemy tedy

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{a} \cos \gamma + \left(\frac{r}{a}\right)^2}},$$

stosujemy wzór (8) rozdziału V-go kładąc $\alpha = \frac{r}{a}$, $x = \cos \gamma$ i otrzymujemy:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} + \frac{r}{a^2} X_1 + \frac{r^2}{a^3} X_2 + \frac{r^3}{a^4} X_3 + \dots$$

przyczem $X_1, X_2 \dots$ mają znaczenie podane we wzorach (9) i (10) rozdz. V-go. Podstawiamy powyższe rozwinięcie we wzór (13) i kładąc jeszcze

$$\int dm = M (= \text{masa ziemi}) \quad (16)$$

otrzymujemy

$$W = \frac{m_0 M}{a} + \frac{m_0}{a^2} \int r \cos \gamma dm + \frac{m_0}{a^3} \int r^2 \left(\frac{3}{8} \cos^2 \gamma - \frac{1}{2} \right) dm + \dots$$

Teraz odwrotnie rugujemy r i $r \cos \gamma$ za pomocą pierwszego i trzeciego wzoru (15) i wyprowadzamy za znak całkowania a, x_0, y_0, z_0 jako niezależne od zmiennych podlegających całkowaniu. Po dokonaniu tego działania spostrzegamy, że drugi wyraz po prawej stronie ostatniego wzoru jest równy zeru. Rozpada się on na trzy całki, z których każda jest równa zeru na mocy wzorów (2). Podobnie trzeci wyraz po wyrugowaniu r^2 i $r^2 \cos^2 \gamma$ przez wzory (15) i po wyprowadzeniu a, x_0, y_0 i z_0 za znaki całkowania rozpadnie się na sześć całek, mianowicie przybierze kształt:

$$\frac{m_0}{2a^5} \left\{ (3x_0^2 - a^2) \int x^2 dm + (3y_0^2 - a^2) \int y^2 dm + (3z_0^2 - a^2) \int z^2 dm + \right. \\ \left. + 6x_0 y_0 \int xy dm + 6y_0 z_0 \int yz dm + 6z_0 x_0 \int zx dm \right\}. \quad (17)$$

Ostatnie trzy całki są równe zeru na mocy wzorów (3), zaś pierwsze trzy dają się wyrazić przez momenty bezwładności. Rzeczywiście wedle wzorów (9)

$$\int (y^2 + z^2) dm = A, \quad \int (z^2 + x^2) dm = B, \quad \int (x^2 + y^2) dm = C, \quad (18)$$

skąd zaraz otrzymujemy

$$\int x^2 dm = \frac{B+C-A}{2}, \quad \int y^2 dm = \frac{C+A-B}{2}, \quad \int z^2 dm = \frac{A+B-C}{2}.$$

Skoro to podstawimy we wyrażenie (17) i trochę uporządkujemy, skoro następnie podstawimy wyrażenie (17) w szereg na W , to otrzymamy

$$W = m_0 \frac{M}{a} + \frac{3m_0}{4a^5} \left[x_0^2 (B+C-A) + \right. \\ \left. + y_0^2 (C+A-B) + z_0^2 (A+B-C) - \frac{a^2}{3} (A+B+C) \right] + \dots \quad (19)$$

Dalszych wyrazów szeregu nie uwzględniamy, bo są nazbyt małe.

Utwórzmy teraz pochodne $\frac{\partial W}{\partial x_0}$... i t. d. i podstawmy je we wzory (14). Niektóre wyrazy poznoszą się i pozostanie

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_x = \frac{3m_0}{a^5} y_0 z_0 (C - B) \\ L_y = \frac{3m_0}{a^5} z_0 x_0 (A - C) \\ L_z = \frac{3m_0}{a^5} x_0 y_0 (B - A). \end{array} \right.$$

Jeżeli teraz połączymy równania (20) z równaniami (10), to — dopisując jeszcze po prawej stronie wyrazy odnoszące się do księżyca — otrzymamy:

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr = \frac{3m_0}{a^5} y_0 z_0 (C - B) + \frac{3m_1}{a_1^5} y_1 z_1 (C - B) \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) rp = \frac{3m_0}{a^5} z_0 x_0 (A - C) + \frac{3m_1}{a_1^5} z_1 x_1 (A - C) \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq = \frac{3m_0}{a^5} x_0 y_0 (B - A) + \frac{3m_1}{a_1^5} x_1 y_1 (B - A). \end{array} \right.$$

Tu m_1 oznacza masę, a_1 odległość a x_1, y_1, z_1 współrzędne środka księżyca. Należy pamiętać, że równania (20) i (21) już nie są zupełnie ściśle, bo w rozwinięciu potencjału W pominęliśmy dalsze wyrazy poczynając od wyrazów trzeciego rzędu. Z równań (21) widzimy, że gdyby główne momenty bezwładności ziemi były między sobą równe, to zjawisko precesji nie istniałoby wcale; widzimy dalej, że z obserwowanej precesji można określić stosunki

$$\frac{C - B}{A}, \quad \frac{A - C}{B} \quad \text{i} \quad \frac{B - A}{C};$$

widzimy wreszcie, że siły sprawiające precesję są wprost proporcjonalne do mas przyciągających, a odwrotnie proporcjonalne do trzecich potęg odległości [w mianownikach stoją piąte potęgi odległości, ale w licznikach stoją iloczyny współrzędnych słońca, względnie księżyca].

Momenty A i B naokoło równikowych osi bezwładności ziemi

są prawie równe. Można z tego skorzystać i znacznie uprościć równania (21). Odkładamy to uproszczenie na później, bo musimy przedewszystkiem przekształcić równania (21).

3. Przekształcenie równań precesyi.

Równania (21) są bardzo eleganckie, ale całkować ich nie można, bo po lewej stronie stoją inne zmienne, a po prawej inne. Trzeba przedewszystkiem przyprowadzić je do takiego kształtu, w którym po obu stronach znajdują się te same zmienne. W tym celu wprowadzamy kąty Eulera, o których mówiliśmy już w rozdziale XI-tym, § 2. Możemy bezpośrednio stosować podane tam wzory; trzeba tylko pamiętać, że tam oznaczaliśmy osie mające początek w środku masy ziemi i stałe kierunki przez X, Y, Z , a tu oznaczyliśmy je przez ξ, η, ζ . Z drugiej strony ponieważ nie potrzebujemy rozróżniać pomiędzy nachyleniem równika (ruchomego) do ekliptyki ruchomej a nachyleniem do ekliptyki stałej, bo wchodzi w rachubę tylko nachylenie do ekliptyki stałej, np. z r. 1850, więc zamiast dużej litery, zawadzającej we wzorach, będziemy pisać małą, t. j. będziemy oznaczać nachylenie przez ε . Wzory (4), (5) i (6) rozdz. XI-go dają wszystko, co potrzeba do przekształcenia lewych stron równań (21); ale nad przekształceniem prawych stron tych równań musimy jeszcze zastanowić się. Jeżeli przypomnimy sobie ich pochodzenie, jeżeli np. spojrzymy na równania (14), to przyjdziemy do przekonania, że prawe strony równań (21) muszą

być liniowymi funkcyjami pochodnych potencyału $\frac{\partial W}{\partial \psi}, \frac{\partial W}{\partial \varphi}$ i $\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}$.

Chodzi tylko o to, aby znaleźć współczynniki liniowych związków pomiędzy temi pochodnemi a momentami L_x, L_y, L_z . Jest to rzecz łatwa, bo $\frac{\partial W}{\partial \psi}, \frac{\partial W}{\partial \varphi}$ i $\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}$ są same momentami sił przyciągających około pewnych osi, mianowicie:

$\frac{\partial W}{\partial \psi}$ jest to moment naokoło osi $O\xi$ [w rozdz. XI-tym naokoło osi OZ]

$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}$ " " " " " " ON [jak w rozdz. XI-tym]

$\frac{\partial W}{\partial \varphi}$ " " " " " " Oz [jak w rozdz. XI-tym].

Obliczymy najpierw wyrażenia momentów $\frac{\partial W}{\partial \psi} \dots$ i t. d. przez momenty L_x, L_y, L_z , bo ze względu na to, że osie tych ostatnich momentów są prostokątne, nie potrzeba obliczać kątów pomiędzy osiami. Gdybyśmy zaś obliczali wprost wyrażenia $L_x \dots$ i t. d. przez $\frac{\partial W}{\partial \psi} \dots$ i t. d. to musielibyśmy po drodze obliczać kąty pomiędzy osiami momentów $\frac{\partial W}{\partial \psi} \dots$ i t. d. Pamiętając o tem, że wedle naszego sposobu liczenia $d\psi$ i $d\varepsilon$ są odjemne, mamy:

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \psi} = -L_x \cos(\zeta, x) - L_y \cos(\zeta, y) - L_z \cos(\zeta, z) \\ \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = -L_x \cos(N, x) - L_y \cos(N, y) - L_z \cos(N, z) \\ \frac{\partial W}{\partial \varphi} = L_x \cos(z, x) + L_y \cos(z, y) + L_z \cos(z, z). \end{cases}$$

Wstawiamy teraz wartości na $\cos(\zeta, x) \dots$ i t. d. ze wzorów (5) rozdz. XI-go [przypominamy, że tam Z oznacza to samo, co tu ζ], t. j. kładziemy

$$(23) \quad \begin{cases} \cos(\zeta, x) = -\sin \varepsilon \sin \varphi, & \cos(N, x) = \cos \varphi, & \cos(z, x) = 0 \\ \cos(\zeta, y) = -\sin \varepsilon \cos \varphi, & \cos(N, y) = -\sin \varphi, & \cos(z, y) = 0 \\ \cos(\zeta, z) = \cos \varepsilon, & \cos(N, z) = 0, & \cos(z, z) = 1 \end{cases}$$

i otrzymujemy

$$(22 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \psi} = (L_x \sin \varphi + L_y \cos \varphi) \sin \varepsilon - L_z \cos \varepsilon \\ \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = -L_x \cos \varphi + L_y \sin \varphi \\ \frac{\partial W}{\partial \varphi} = L_z. \end{cases}$$

Rozwiązujemy te ostatnie równania względem L_x, L_y, L_z i otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} L_x &= \frac{\sin \varphi}{\sin \varepsilon} \left(\frac{\partial W}{\partial \psi} + \cos \varepsilon \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) - \cos \varphi \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \\ L_y &= \frac{\cos \varphi}{\sin \varepsilon} \left(\frac{\partial W}{\partial \psi} + \cos \varepsilon \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) + \sin \varphi \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \\ L_z &= \frac{\partial W}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Skoro to podstawimy w równania (10), to te ostatnie przybiorą postać:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= \frac{\sin \varphi}{\sin \varepsilon} \left(\frac{\partial W}{\partial \psi} + \cos \varepsilon \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) - \cos \varphi \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)rp &= \frac{\cos \varphi}{\sin \varepsilon} \left(\frac{\partial W}{\partial \psi} + \cos \varepsilon \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) + \sin \varphi \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= \frac{\partial W}{\partial \varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

przyczem wedle wzorów (6) rozdz. XI-go

$$\left. \begin{aligned} p &= \sin \varepsilon \sin \varphi \frac{d\psi}{dt} - \cos \varphi \frac{d\varepsilon}{dt} \\ q &= \sin \varepsilon \cos \varphi \frac{d\psi}{dt} + \sin \varphi \frac{d\varepsilon}{dt} \\ r &= - \cos \varepsilon \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

O ile chodzi o ciała sztywne, to wzory (25) są zupełnie ogólne, bo możemy pod W rozumieć nie przybliżone, a ściśle wyrażenie potencjału przyciągania. Podstawienie p , q i r ze wzorów (26) we wzory (25) odkładamy na później; przedtem wprowadzimy pewne uproszczenie, o którym wspominaliśmy już poprzednio.

Dla ziemi można położyć $B = A$. Wprawdzie budowa ziemi nie jest dokładnie taką, jaką powinna być budowa ciała obrotowego, ale w każdym razie różnica $B - A$ jest w porównaniu ze samymi momentami bezwładności tak mała, że można ją pominąć. Zresztą gdybyśmy jej nie pominęli, to nie wiedzielibyśmy, co dalej począć. Gdy położymy

$$B - A = 0,$$

to [por. wzory (20)]

$$L_x = \frac{\partial W}{\partial \varphi} = 0,$$

zaś trzecie równanie (25) przywiedzie się do:

$$C \cdot \frac{dr}{dt} = 0,$$

skąd

$$r = \text{stałej} = n \text{ (np.)}$$

Z drugiej strony gdy $B = A$, to pierwsze i drugie równanie (25) przywodzą się do

$$(27) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C - A) nq = \frac{\sin \varphi}{\sin \varepsilon} \cdot \frac{\partial W}{\partial \psi} - \cos \varphi \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \\ A \frac{dq}{dt} - (C - A) np = \frac{\cos \varphi}{\sin \varepsilon} \cdot \frac{\partial W}{\partial \psi} + \sin \varphi \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \end{cases}$$

Jeżeli będziemy uważać te równania jako równania na p i q , to będą to zwykle liniowe równania 1-go rzędu. Wiadomo z teorii równań liniowych, że ogólne ich całki składają się z dwóch części: jednej, którą otrzymujemy całkując zamiast równań (27) analogiczne równania, w których zamiast prawych stron wstawiono zera — i drugiej, którą otrzymujemy całkując dane równania z uwzględnieniem prawych stron. Wiadomo, że można te drugie części otrzymać z pierwszych przez metodę waryacji stałych dowolnych — zakładając, że stałe figurujące w pierwszych całkach są w rzeczywistości funkcyjami czasu. Moglibyśmy i tu użyć tej metody, ale nicbyśmy na tem nie zyskali. Zatem zapamiętamy sobie z tej uwagi tylko to, że kompletne, ogólne całki równań (27) zawierają także całki równań bez prawych stron [t. j. całki równań (27), w których zamiast prawych stron stoją zera]. Te dodatkowe całki przedstawiają tak zwaną „Eulerowską perturbację“. Wrócimy do niej na końcu rozdziału, tu zaś zajmiemy się w dalszym ciągu całkowaniem kompletnych równań (27). Podstawiamy p i q z dwóch pierwszych równań (26) w równania (27), mnożymy pierwsze równanie (27) przez $\sin \varphi$, a drugie przez $\cos \varphi$ i dodajemy, potem pierwsze przez $-\cos \varphi$, a drugie przez $\sin \varphi$ i znów dodajemy. W ten sposób otrzymujemy następujące dwa równania:

$$\begin{aligned} A \left[\frac{d}{dt} \left(\sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} \right) + \frac{d\varepsilon}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right] + (C - A) n \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{1}{\sin \varepsilon} \cdot \frac{\partial W}{\partial \psi} \\ A \left[\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} - \sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right] - (C - A) n \sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \end{aligned}$$

przyczem p i q acz bardzo małe w porównaniu z n i ω , jednak nie są równe zeru. Zatem oś chwilowa choć mało różni się od osi największego momentu, jednak nie jest z nią identyczna: kąt między nimi — to $\arccos \frac{n}{\omega}$. Skoro obserwacje odnoszą się do osi obrotu chwilowego, którą oznaczymy przez I , to powinniśmy przejść od osi z do osi I . Położenie jej względem osi nieruchomych ξ , η , ζ wyznacza się zupełnie tak samo, jak położenie osi z . Dostawy kierunkowe osi z są:

$$\begin{aligned}\cos(z, \xi) &= \sin \varepsilon \sin \psi \\ \cos(z, \eta) &= \sin \varepsilon \cos \psi \\ \cos(z, \zeta) &= \cos \varepsilon.\end{aligned}$$

Tak samo oznaczając odpowiednie kąty Eulera dla osi I przez ψ' i ε' [kąt. φ jest, jak widzimy, niepotrzebny] napiszemy:

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned}\cos(I, \xi) &= \sin \varepsilon' \sin \psi' \\ \cos(I, \eta) &= \sin \varepsilon' \cos \psi' \\ \cos(I, \zeta) &= \cos \varepsilon'.\end{aligned}\right.$$

Ale, aby przejść od osi z do osi I , potrzebujemy jeszcze związków pomiędzy kątami ψ' i ε' a kątami ψ , ε i φ . Dojdziemy do nich następującym sposobem. Możemy te same dostawy kierunkowe osi I wyrazić przez wzory:

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned}\cos(I, \xi) &= \cos(I, x) \cos(x, \xi) + \cos(I, y) \cos(y, \xi) + \\ &\quad + \cos(I, z) \cos(z, \xi) \\ \cos(I, \eta) &= \cos(I, x) \cos(x, \eta) + \cos(I, y) \cos(y, \eta) + \\ &\quad + \cos(I, z) \cos(z, \eta) \\ \cos(I, \zeta) &= \cos(I, x) \cos(x, \zeta) + \cos(I, y) \cos(y, \zeta) + \\ &\quad + \cos(I, z) \cos(z, \zeta).\end{aligned}\right.$$

Ale z jednej strony [por. wzory na samym końcu § 1]

$$(31) \quad \cos(I, x) = \frac{p}{\omega}, \quad \cos(I, y) = \frac{q}{\omega}, \quad \cos(I, z) = \frac{r}{\omega},$$

z drugiej zaś:

$$\left. \begin{aligned}
 \cos(x, \xi) &= \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \cos \varepsilon \\
 \cos(y, \xi) &= -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \varepsilon \\
 \cos(z, \xi) &= \sin \varepsilon \sin \psi \\
 \cos(x, \eta) &= -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \varepsilon \\
 \cos(y, \eta) &= \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \varepsilon \\
 \cos(z, \eta) &= \sin \varepsilon \cos \psi \\
 \cos(x, \zeta) &= -\sin \varepsilon \sin \varphi \\
 \cos(y, \zeta) &= -\sin \varepsilon \cos \varphi \\
 \cos(z, \zeta) &= \cos \varepsilon.
 \end{aligned} \right\} (32)$$

Podstawiając wartości ze wzorów (31) i (32) we wzory (30) a jednocześnie pisząc po lewej stronie zamiast $\cos(I, \xi)$ i t. d. odpowiednie wartości ze wzorów (29) otrzymamy:

$$\omega \sin \varepsilon' \sin \psi' = p (\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \cos \varepsilon) + \\
 + q (-\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \varepsilon) + r \sin \varepsilon \sin \psi$$

$$\omega \sin \varepsilon' \cos \psi' = p (-\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \varepsilon) + \\
 + q (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \varepsilon) + r \sin \varepsilon \cos \psi$$

$$\omega \cos \varepsilon' = -p \sin \varepsilon \sin \varphi - q \sin \varepsilon \cos \varphi + r \cos \varepsilon.$$

Kładziemy $r = n$ i rugujemy p i q przez wzory (26). Po łatwych redukcjach otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned}
 \omega \sin \varepsilon' \sin \psi' &= -\cos \psi \frac{d\varepsilon}{dt} + \sin \psi \sin \varepsilon \left(\cos \varepsilon \frac{d\psi}{dt} + n \right) \\
 \omega \sin \varepsilon' \cos \psi' &= \sin \psi \frac{d\varepsilon}{dt} + \cos \psi \sin \varepsilon \left(\cos \varepsilon \frac{d\psi}{dt} + n \right) \\
 \omega \cos \varepsilon' &= -\sin^2 \varepsilon \frac{d\psi}{dt} + n \cos \varepsilon.
 \end{aligned} \right\} (33)$$

Stąd znanym i wielokrotnie używanym sposobem otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned}
 \omega \sin \varepsilon' \sin (\psi' - \psi) &= -\frac{d\varepsilon}{dt} \\
 \omega \sin \varepsilon' \cos (\psi' - \psi) &= \sin \varepsilon \left(\cos \varepsilon \frac{d\psi}{dt} + n \right),
 \end{aligned} \right\} (34)$$

a stąd

$$(35) \quad \text{tang}(\psi' - \psi) = - \frac{\frac{d\varepsilon}{dt}}{\sin \varepsilon \left(\cos \varepsilon \frac{d\psi}{dt} + n \right)}$$

Ale w drugim równaniu (34) możemy położyć $\cos(\psi' - \psi) = 1$, bo $\psi' - \psi$ jest zawsze bardzo małym kątem. Wtedy

$$\omega \sin \varepsilon' = \sin \varepsilon \cos \varepsilon \frac{d\psi}{dt} + n \sin \varepsilon.$$

Skombinujmy to równanie z trzecim równaniem (33), to jest z równaniem

$$\omega \cos \varepsilon' = - \sin^2 \varepsilon \frac{d\psi}{dt} + n \cos \varepsilon.$$

Z obu ostatnich równań tą samą metodą, co poprzednio, otrzymamy najpierw

$$\omega \sin(\varepsilon' - \varepsilon) = \sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt}$$

$$\omega \cos(\varepsilon' - \varepsilon) = n,$$

a potem

$$(36) \quad \text{tang}(\varepsilon' - \varepsilon) = \frac{\sin \varepsilon}{n} \frac{d\psi}{dt}.$$

W równaniu (35) możemy pominąć małe wyrażenie $\cos \varepsilon \frac{d\psi}{dt}$ wobec n , następnie tak w tym równaniu, jak w równaniu (36) możemy napisać łuki zamiast tangensów, bo $\varepsilon' - \varepsilon$ i $\psi' - \psi$ są bardzo małe. Po tych uproszczeniach napiszemy równania (35) i (36) w kształcie:

$$(35 \text{ bis}) \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = - n \sin \varepsilon (\psi' - \psi)$$

$$(36 \text{ bis}) \quad \sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} = n(\varepsilon' - \varepsilon).$$

Wyrugujmy teraz $\sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt}$ z pierwszego wzoru (28) za pomocą wzoru (36 bis) a $\frac{d\varepsilon}{dt}$ z drugiego wzoru (28) za pomocą wzoru (35 bis).

Jednocześnie opuścimy wyrazy kwadratowe i zmienimy trochę porządek. Po łatwych redukcjach otrzymamy

$$n \left[A \frac{d\varepsilon'}{dt} + (C - A) \frac{d\varepsilon}{dt} \right] = \frac{1}{\sin \varepsilon} \frac{\partial W}{\partial \psi}$$

$$n \sin \varepsilon \left[A \frac{d\psi'}{dt} + (C - A) \frac{d\psi}{dt} \right] = - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} - \Delta n (\psi' - \psi) \frac{d}{dt} (\sin \varepsilon).$$

Pominęliśmy już wyrazy kwadratowe, zaniedbajmy jeszcze małe różnice pomiędzy kątami ψ' i ψ , ε' i ε . Wtedy w drugim równaniu drugi wyraz po prawej stronie zniknie, część wyrazów w nawiasach znieśie się i pozostaną równania Poissona:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{1}{Cn \sin \varepsilon} \frac{\partial W}{\partial \psi} \\ \frac{d\psi}{dt} &= - \frac{1}{Cn \sin \varepsilon} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Należy pamiętać, że równania Poissona są przybliżone, że pod koniec wywodu nietylko pominęliśmy kwadratowe wyrazy, ale także pomięszaliśmy oś największego momentu z osią chwilowego obrotu.

4. Całkowanie równań Poissona.

Chcąc całkować równania Poissona trzeba wyrazić: $\frac{1}{\sin \varepsilon} \frac{\partial W}{\partial \psi}$ i $\frac{1}{\sin \varepsilon} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}$ przez funkcyę czasu. W tym celu trzeba najpierw wyrazić potencyał W przez ψ i ε , utworzyć pochodne, podzielić je przez $\sin \varepsilon$, poczem należy wyrazić wszystkie zmienne przez czas. Za punkt wyjścia obieramy wzór (19), ale po pierwsze w myśl hipotezy przyjętej w poprzednim paragrafie zakładamy, że $B = A$, powtóre przekształcamy tylko tę część potencyału, która zależy od $C - A$, bo ze wzorów (21) widać, że tylko ta część wchodzi w rachubę. Po łatwych przekształceniach, w których posługujemy się równością:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = a^2$$

znajdujemy, że trzeba wyrazić przez ψ i ε tylko wyraz:

$$\frac{3}{2} \frac{m_0}{a^5} (C - A) \left(\frac{1}{3} a^2 - z_0^2 \right).$$

Ale odległość słońca, względnie księżycyca nie zależy ani od φ , ani od ψ , ani od ε , przeto ostatecznie pozostaje tylko wyraz

$$F = - \frac{m_0}{a^3} (C - A) z_0^2,$$

a wyrażenia pochodnych potencyału W przywodzą się do

$$\frac{\partial W}{\partial \psi} = \frac{\partial F}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}.$$

z_0 jest to współrzędna słońca [względnie księżycyca] względem osi ruchomych. Zamiast niej musimy wprowadzić współrzędne względem osi nieruchomych.

Odtąd przestaniemy pisać znaczki \circ : — nie wyniknie stąd żadne nieporozumienie, bo oprócz współrzędnych środka słońca [względnie księżycyca] niema tu żadnych innych współrzędnych. Piśzemy tedy wyrażenie na z w kształcie:

$$z = \xi \cos(z, \xi) + \eta \cos(z, \eta) + \zeta \cos(z, \zeta),$$

albo, biorąc wyrażenia na dostawy kierunkowe ze wzorów (32), w kształcie

$$z = (\xi \sin \psi + \eta \cos \psi) \sin \varepsilon + \zeta \cos \varepsilon.$$

Ale nasze współrzędne nieruchome ξ , η , ζ są to współrzędne ekliptyczne, zatem oznaczając, jak zwykle, długość i szerokość przez λ i β mamy

$$\xi = a \cos \lambda \cos \beta$$

$$\eta = a \sin \lambda \cos \beta$$

$$\zeta = a \sin \beta.$$

Skoro to podstawimy we wzór na z , to otrzymamy go w kształcie

$$z = a [\sin \varepsilon \cos \beta \sin (\lambda - \psi) + \cos \varepsilon \sin \beta],$$

a podstawiając to ostatnie wyrażenie na z we wzór na F otrzymamy

$$(38) \quad F = - \frac{3}{2} \frac{m}{a^3} (C - A) [\sin \varepsilon \cos \beta \sin (\lambda - \psi) + \cos \varepsilon \sin \beta]^2.$$

Stąd zaś wynikają wzory

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sin \varepsilon} \cdot \frac{\partial W}{\partial \psi} &= \frac{3m}{a^3} (C - A) [\sin \varepsilon \cos \beta \sin (\lambda - \psi) + \\ &\quad + \cos \varepsilon \sin \beta] \cos \beta \cos (\lambda - \psi) \\ \frac{1}{\sin \varepsilon} \cdot \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} &= -\frac{3m}{a^3} (C - A) [\sin \varepsilon \cos \beta \sin (\lambda - \psi) + \\ &\quad + \cos \varepsilon \sin \beta] \cdot [\cotg \varepsilon \cos \beta \sin (\lambda - \psi) - \sin \beta]. \end{aligned} \right\} (39)$$

Widzimy po prawej stronie współrzędne ekliptyczne a , λ , β słońca, względnie księżycy. Są to wielkości znane jako funkcje czasu. Obok nich widzimy także ψ i ε , które mamy dopiero określić przez całkowanie równań (37). Jakże pokonać tę trudność? Jedyna możliwa droga to kolejne przybliżenia. Możemy skorzystać z tego, że wiekowe zmiany kąta ε są bardzo powolne, a peryodyczne zawarte w ciasnych granicach i w pierwszym przybliżeniu położyć $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{stałej}$. Co do ψ , to znowu wiemy, że z gruba wzrasta proporcjonalnie do czasu, możemy więc w pierwszym przybliżeniu położyć $\psi = \text{stałej} \times t$. Odpowiednio do tego także we wyrażeniach na współrzędne słońca, czy księżycy należy ograniczyć się do ważniejszych wyrazów. Zresztą za naszych czasów nie potrzebujemy zaczynać od pierwszego przybliżenia, bo teoria precesyi nie jest czemś nowem. Posiadamy wcale dokładne wyrażenia na ψ i ε . W swym „Lehrbuch zur Bahnbestimmung“ Th. Oppolzer przyjmuje jako pierwsze przybliżenie wyrażenia podane przez Leverriera:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= -5037,1 t + 17,3 \sin \Omega + 1,3 \sin 2\odot \\ \varepsilon &= 23^\circ 27' 31,83 + 9,2 \cos \Omega + 0,0719 t^2. \end{aligned} \right\} (40)$$

Tu Ω oznacza długość wstępującego węzła drogi księżycy a \odot długość słońca. Za jednostkę czasu Oppolzer przyjmuje juliańskie stulecie = 36525 śr. dniom, a jako „epokę“ 1850,0. Nie możemy tu przeprowadzić całego bardzo obszernego rachunku, ale pokrótce opiszemy, jak wykonał go Oppolzer. Ponieważ tablice podają długości i szerokości księżycy i słońca względem ruchomego punktu równonocnego, a we wzorach naszych stoją długości i szerokości odniesione do stałej ekliptyki i stałego punktu równonocnego [specjalnie do ekliptyki i porównania dnia z nocą 1850,0 r.]; więc Oppolzer przedewszystkiem przekształca ilo-

czynty: $\cos \beta \cos (\lambda - \psi)$, $\cos \beta \sin (\lambda - \psi)$ i $\sin \beta$ wprowadzając zamiast funkeyi kołowych argumentów λ i β takie same funkeye argumentów — powiedzmy — λ' i β' odniesionych do ruchomej ekliptyki i do ruchomego porównania dnia z nocą. To przekształcenie pociąga za sobą znaczne powiększenie ilości wyrazów. Następnie Oppolzer rozwija funkeye kołowe argumentu ψ i nowo wprowadzonego argumentu $\Delta \varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0$ w szeregi potęgowe ograniczając się atoli do wyrazów drugiego, względnie trzeciego rzędu, więc np. przyjmuje

$$\cos \psi = 1 - \frac{1}{2} \psi^2,$$

potem podstawia ψ i ε ze wzorów (40), długości i szerokości słońca bierze ze wzorów Leverriera a długości i szerokości księżycy ze wzorów Hansena. Wyrażenia długości i szerokości składają się z wielu wyrazów. Wchodzą w nie nowe argumenty, jako to średnie anomalie księżycy i słońca, odległości perigaeów obu ciał od wstępującego węzła księżycy i długość tego węzła. Te nowe argumenty wzrastają wraz z czasem, przyczem czynniki proporcjonalności, t. j. tak zwane „średnie ruchy“ wprawdzie zmieniają się, ale tak powolnie, że można przyjąć je za stałe. Po wykonaniu mnożeń, po odrzuceniu wyrazów wyższych rzędów okazuje się, że $\frac{1}{\sin \varepsilon} \cdot \frac{\partial W}{\partial \psi}$ i $\frac{1}{\sin \varepsilon} \cdot \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}$ wyrażają się przez (długie) szeregi wyrazów następującego kształtu:

$$c, c_1 t, c_2 t^2, \gamma \frac{\sin}{\cos} (\alpha t), \gamma' \frac{\sin}{\cos} (\beta t),$$

przyczem $c, c_1, c_2, \gamma, \gamma', \alpha, \beta$ są to pewne stałe, których liczbowe wartości są z większem lub mniejszem przybliżeniem znane. Wszystkie wyrazy powyższego kształtu są naturalnie bezpośrednio całkowalne, przeto obliczenie ψ i ε ze wzorów (37) jest rzeczą łatwego rachunku. Jednakże natrafiamy tu na pewną trudność nie rachunkową, ani analityczną, a zupełnie innej natury. Oto, jak widać ze wzorów (39), $\frac{1}{\sin \varepsilon} \cdot \frac{\partial W}{\partial \psi}$ i $\frac{1}{\sin \varepsilon} \cdot \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}$ zawierają wspólny czynnik: $C - A$, zatem po podstawieniu we wzory (37) po prawej stronie tych ostatnich pojawi się wspólny czynnik: $\frac{C - A}{C_n}$. Na n możemy bez wahania przyjąć kątową prędkość obrotu ziemi, ale $\frac{C - A}{C}$ nie daje się obli-

czyć bezpośrednio, bo zależy od nieznanego rozkładu mas we wnętrzu ziemi. Wskutek tego można obliczyć stosunek $\frac{C-A}{C}$ tylko ze samej precesyi. Musimy więc początkowo podstawić jego przybliżoną wartość wziętą z dawniejszych obliczeń, a potem przez porównanie teoretycznej precesyi z obserwowaną sprawdzić, czy przyjęta przez nas wartość na $\frac{C-A}{C}$ nie wymaga poprawki.

5. Eulerowska perturbacja.

Teorya precesyi i nutacyi to jest właściwie teorya całek kompletnych równań (27); ale także całki niekompletnych równań, t. j. równań (27), w których zamiast prawych stron stoją zera, mają fizyczne znaczenie. Przedstawiają one tak zwaną „eulerowską perturbację“. Kładziemy więc w równaniach (27) $W=0$ a jednocześnie dla prostoty piszemy

$$\frac{C-A}{A} n = \mu \quad (\mu > 0).$$

Wtedy równania (27) [przypominamy, że w tych równaniach już przyjęto $B-A=0$] przybierają postać

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \mu q &= 0 \\ \frac{dq}{dt} - \mu p &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Całki tych równań są

$$\begin{aligned} p &= h \cos \mu t + k \sin \mu t \\ q &= h \sin \mu t - k \cos \mu t, \end{aligned}$$

przyczem h i k są to stałe całkowania. Odpowiednio dobierając początkowy moment czasu można zawsze sprawić to, że będzie $k=0$ i pozostanie:

$$p = h \cos \mu t, \quad q = h \sin \mu t. \quad (42)$$

Ruch przedstawiony przez te równania jest peryodyczny. Łatwo obliczyć, ile dni wynosi peryod $\frac{2\pi}{\mu}$, bo peryod obrotu ziemi:

doła gwiazdowa jest $\frac{2\pi}{n}$, zatem peryod perturbacyi Eulerowskiej $\frac{2\pi}{\mu} = \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{A}{C-A}$ jest w stosunku $\frac{A}{C-A}$ większy od doby gwiazdowej. Wedle Newcoma

$$\frac{C}{C-A} = 304,825,$$

stąd

$$\frac{A}{C-A} = 303,825.$$

Tedy peryod perturbacyi wynosić powinien tyleż dób gwiazdowych, t. j. prawie 303 doby średnie słoneczne.

Znaleźliśmy peryod; zobaczymy jeszcze, jak wygląda ta perturbacya. Moment wypadkowy obrotu jest

$$K = \sqrt{A^2(p^2 + q^2) + C^2r^2} = \sqrt{A^2h^2 + C^2n^2},$$

osiąwy kierunku we osi wypadkowego momentu względem osi x, y, z są:

$$\frac{Ap}{K}, \quad \frac{Aq}{K}, \quad \frac{Cn}{K},$$

wedle wzorów (42)

$$\frac{Ah}{K} \cos \mu t, \quad \frac{Ah}{K} \sin \mu t, \quad \frac{Cn}{K}.$$

Zatem oś wypadkowego momentu — powiedzmy OK — okrąży oś główną bezwładności Oz ¹⁾ w ciągu 303 dni śr. słonecznych, tocząc się po stożku krągłym, którego oś jest identyczna z Oz a kąt wierzchołkowy $\alpha_1 = \arctang \left(\frac{Ap}{Cn} \right)$. Tak samo prędkość wypadkowego obrotu (chwilowego) jest [por. wzór (12)]:

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \sqrt{h^2 + n^2},$$

a dostawy kierunkowe osi chwilowej OI względem osi x, y, z są

$$\frac{p}{\omega}, \quad \frac{q}{\omega}, \quad \frac{n}{\omega},$$

¹⁾ Punkt O to środek masy ziemi.

t. j. wedle wzorów (42)

$$\frac{h}{\omega} \cos \mu t, \quad \frac{h}{\omega} \sin \mu t, \quad \frac{n}{\omega}.$$

Zatem oś chwilowego obrotu także okrąży oś Oz w ciągu tego samego czasu, co oś wypadkowego momentu, tocząc się także po stożku krągłym, którego osią jest Oz . Co więcej, obie osie: oś wypadkowego momentu i oś chwilowa toczą się razem, to znaczy, że wciąż leżą w jednej i tej samej kręcącej się płaszczyźnie przechodzącej przez oś główną bezwładności Oz . Kąt wierzchołkowy stożka, po którym toczy się oś chwilowa,

jest $\alpha_2 = \arctang \frac{h}{n}$. Z obserwacji wiadomo, że kąty

α_1 i α_2 są bardzo małe [mniejsze od $\frac{1}{2}$ sekundy katowej], przeto można nie rozróżniać tangensów od łuków i przyjąć

$$\alpha_1 = \frac{A h}{C n}, \quad \alpha_2 = \frac{h}{n}.$$

Ponieważ A jest o jaką $\frac{1}{305}$ mniejsze od C , więc α_1 jest także o jaką $\frac{1}{305}$ mniejsze od α_2 . To znaczy, że oś wypadkowego momentu jest położona pomiędzy osią główną bezwładności a osią chwilową, ale kąt $\alpha_2 - \alpha_1$ pomiędzy nią a osią chwilową jest przeszło trzysta razy mniejszy od kąta α_1 , względnie α_2 . Ponieważ samo α_2 dochodzi zaledwo do pół sekundy katowej, więc $\alpha_2 - \alpha_1$ jest tak małym kątem, że można nie rozróżniać osi wypadkowego momentu OK od osi chwilowej OI .

Rozważaliśmy tu ruch osi OK i OI względem osi Oz . Ponieważ ta ostatnia jest sztywnie związana ze ziemią, więc możemy powiedzieć, że opisaliśmy ruch osi chwilowej i osi wypadkowego momentu względem ziemi. Ale w przestrzeni rzecz ma się inaczej. Jeżeli chwilowo wykluczemy precesję i nutację, to okaże się, że oś wypadkowego momentu OK ma stały kierunek w przestrzeni; a więc w przestrzeni właśnie oś OK jest nieruchoma, a oś główna bezwładności Oz krąży naokoło niej tocząc się po stożku krągłym o kącie wierzchołkowym α_1 . Ale ziemia jest sztywnie związana ze systemem osi x, y, z , więc także kręci się, czy, jeśli kto woli, kołysze się naokoło osi OK w podobny sposób, jak nazbyt szeroka



Ryc. 47.

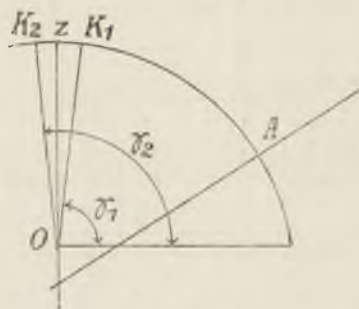
piasta kołysze się dokoła osi wozu. Naturalnie peryod tej perturbacji jest ten sam, co w ruchu względnym, t. j. wynosi prawie 303 doby śr. słoneczne. Jaki stąd będzie skutek? Aby go poznać, znowu będziemy rozważać ruch osi OK względem ziemi.

Weźmy dowolny punkt powierzchni ziemi np. A . Załóżmy, że w pewnej chwili czasu, np. w chwili t_1 os wypadkowego momentu znajduje się w płaszczyźnie OzA (ryc. 48) przechodzącej przez os główną Oz i przez punkt A . Dajmy na to, że os momentu zajmuje właśnie położenie OK_1 pomiędzy osią Oz i punktem A . Jeżeli w chwili t_1 zmierzmy w A szerokość geograficzną, to otrzymamy kąt $90^\circ - \gamma_1$, bo kąt γ_1 pomiędzy pionem w A a stałym w przestrzeni kierunkiem OK dopełnia się z wysokością bieguna [t. j. z szerokością geograficzną] do 90° . Ścisłe biorąc pomiary astronomiczne dają nie kąt γ_1 , a kąt pomiędzy normalną w A i kierunkiem osi chwilowej. Wiemy atoli, że ta ostatnia tak mało różni się od osi wypadkowego momentu, że możemy uważać ją za identyczną z tamtą. Załóżmy następnie, że określamy ponownie szerokość geograficzną punktu A po upływie połowy peryodu perturbacji, np. w chwili t_2 . Wtedy os wypadkowego momentu znowu znajdzie się w płaszczyźnie OzA , ale po przeciwnej stronie osi Oz , np. w pozycji OK_2 , a pomiar astronomiczny da nam szerokość geograficzną $90^\circ - \gamma_2$. Widzimy stąd, że szerokość geograficzna zmierzona w chwili t_1 jest o kąt $\gamma_2 - \gamma_1 = 2\alpha_1$ większa od szerokości geograficznej w chwili t_2 . Więc Eulerowska perturbacja musi mieć wpływ na szerokości geograficzne: dzięki niej geograficzne szerokości wszystkich punktów powierzchni ziemi muszą podlegać peryodycznym zmianom o peryodzie wynoszącym około 303 dni śr. słonecznych. Stąd odwrotnie wynika, że można wykryć ją przez często powtarzane ścisłe pomiary geograficznych szerokości.

Powszechnie wiadomo, że peryodyczne zmiany geograficznych szerokości zostały w ostatniej ćwierci XIX wieku wykryte, oraz że od kilkunastu lat są stale obserwowane. Otóż obserwowana perturbacja Eulerowska bynajmniej nie zgadza się z opisaną tu teoretyczną. Mianowicie szerokości geograficzne podlegają pewnym wciąż powtarzającym się, ale nieregularnym fluktuacjom. Jeżeli weźmiemy średni okres tych fluktuacji, to zamiast około dziesięciu miesięcy, jak wymaga teoria, znajdziemy czternaście. Łatwo objaśnić tę niezgodność obserwowanego peryodu z teoretycznym. Podana tu teoria perturbacji opiera się na z pewnością nieprawdziwej hipotezie, że

ziemia jest absolutnie sztywna. W teorii precesyi ta hipoteza nie prowadzi do większych błędów: precesya nawet całkiem płynnego sferoidu byłaby prawie taka sama, jak precesya absolutnie sztywnej ziemi. Natomiast w teorii Eulerowskiej perturbacji skoro odrzucimy hipotezę absolutnej sztywności i założymy, że ziemia trochę odkształca się wskutek zmian w rozkładzie sił odśrodkowych, zmian spowodowanych przez wędrówki osi chwilowego obrotu wewnątrz ziemi; to, jak to najpierw okazał Newcomb, zaraz znajdziemy, że peryod perturbacji musi być dłuższy, niż u całkiem sztywnego ciała.

Naturalnie skoro odstępimy od hipotezy absolutnej sztywności, to nie będziemy mogli użyć ani wzorów (27), ani wzorów (10); ale ogólne wzory (8) pozostaną w swej sile, bo wzory te obejmują także teorię obrotu odkształcającego się ciała. Jeżeli skombinujemy je w odpowiedni sposób ze wzorami teorii sprężystości dla ciała



Ryc. 48.

jednorodnego, nieściśliwego i postawimy pytanie, jakim musi być współczynnik sztywności, aby peryod perturbacji przedłużył się z 10 miesięcy na 14; to znajdziemy współczynnik sztywności trochę większy niż współczynnik stali.

W tem nowem rozwiązaniu droga bieguna osi chwilowej (czy też osi wypadkowego momentu) naokoło głównej osi bezwładności Oz pozostaje kołem. Jasną jest rzeczą, że inaczej być nie może nietylko w przypadku, gdy rozważamy ciało jednorodne, ale także wtedy, gdy rozważamy ciało regularnie uwarstwowane. Wiemy, że budowa skorupy ziemskiej nie jest bynajmniej regularną, ale czy nieregularność budowy skorupy wystarcza do wytłómaczenia nieregularności obserwowanej drogi bieguna osi chwilowej naokoło bieguna osi bezwładności, to inne pytanie. Droga ta przedstawia jakieś zawroty, — od czasu do czasu zacieśnia się naokoło bieguna osi bezwładności, poczem znowu rozszerza się. Te zawroty, te zacieśnienia i rozszerzenia powtarzają się zanadto często, aby można było wytłómaczyć je przez błędy obserwacji a z drugiej strony trudno przypuścić, żeby nieregularność budowy skorupy mogła je spowodować. Być może, że przyczyną omawianych nieregular-

ności w ruchu bieguna osi chwilowej są ruchy wewnętrzne, jako to przesunięcia przy trzęsieniach ziemi, opady śniegowe i deszczowe, odpływ do morza wód pochodzących z wiosennego tajania śniegów, przesunięcia mas powietrza, zmiany prądów morskich i powietrznych i t. d.; ale, o ile się zdaje, przesuwane przytem masy są pospolicie w porównaniu z masą ziemi za małe, aby mogły mieć widoczny wpływ na drogę bieguna osi chwilowej. Kolejne zacieśnianie się i rozszerzanie się krzywej możnaby tłómaczyć przez zanikanie perturbacyi, względnie przez wznowienie spowodowane przez nowe impulsy, tylko bieda z tem, że powtarza się to za często.

Z powodu zanikania, względnie wznawiania się perturbacyi musimy powiedzieć kilka słów. Zarówno precesya i nutacya, jak Eulerowska perturbacya są to perturbacye w ruchu obrotowym ziemi. Pierwsza jest wymuszona, w zupełności zależna od sił zewnętrznych: nie istniałaby, gdyby te siły nie istniały; druga jest swobodna, od sił zewnętrznych niezależna.

W jaki sposób może powstać taka swobodna perturbacya? Wyobraźmy sobie, że ziemia jest doskonale zrównoważona naokoło osi obrotu, że zatem osie: główna bezwładności, wypadkowego momentu i chwilowa są identyczne a obrót zupełnie stały. Wyobraźmy sobie, że wskutek jakichś deformacyi, jakichś geologicznych procesów zmieniło się rozmieszczenie mas i że oś główna bezwładności zmieniła swe położenie. Naturalnie także oś wypadkowego momentu musi odsunąć się od osi chwilowej chociaż tylko o $\frac{1}{300}$ tego kąta, o który odsunęła się oś główna bezwładności. Z chwilą, w której oś główna bezwładności rozłączyła się z osią wypadkowego momentu, Eulerowska perturbacya musi natychmiast rozpocząć się.

Jeżeli owe geologiczne zmiany odbywają się powoli i stopniowo, to odsuwanie się jednej osi od drugiej także postępuje stopniowo i perturbacya powiększa się stopniowo. Jeżeli zaś deformacya była nagłą, to rozłączenie osi jest też nagłe a perturbacya występuje odrazu jak „*deus ex machina*“ w sposób nagły, nieciągły. Zobaczmy teraz, co się dzieje dalej. Gdyby, podczas gdy perturbacya już jest w toku, ziemia nagle absolutnie zeszywniała, to perturbacya pozostałaby taką, jaką była w chwili zeszywnienia ziemi i trwałaby wiecznie tak, jak np. swobodne drgania systemu pozbawionego tarcia; lecz w rzeczywistości wskutek odkształceń towarzyszących Eulerowskiej perturbacyi, wskutek wewnętrznych tarć towa-

rzyszających odkształceniom i t. d. powinno nastąpić powolne przystosowywanie się ziemi do nowych warunków równowagi, powinny nastąpić odkształcenia zmierzające ku temu, aby oś główna bezwładności, oś obrotu chwilowego i oś wypadkowego momentu znowu stały się identyczne. Jednem słowem perturbacja powinna by powoli zanikać dopóty, dopóki nowe geologiczne procesy nie spowodują nowego jej wzmocnienia. Wiadomo, że procesy geologiczne to swego rodzaju „*perpetuum mobile*”: ledwo jeden skończył się, lub jeszcze nie skończył się, gdy już zaczyna się drugi; — wskutek tego zapewne Eulerowska perturbacja nigdy nie znika zupełnie, tylko w pewnych okresach czasu słabnie, aby wzmocnić się w innych.

ROZDZIAŁ XXIV.

Figury równowagi ciała ciekłego, obracającego się.

1. Zasadnicze założenia.

Teoryą figur równowagi, jako mającą bliski związek z teorią figury ziemi i planet, zajmowano się dużo. Pomimo trudności, a może właśnie dzięki nim, pociągała ona ku sobie matematyków: dość wymienić Newtona i jego ucznia Maclaurina, Clairaut'a, Laplace'a, Dirichleta, Liouville'a, Jacobiego, Poincarégo, G. H. Darwina z pomiędzy nieżyjących i Liapunowa z pomiędzy żyjących.

Z powodu ogromnych trudności ogólna teoria równowagi ciał ciekłych niejednorodnych jest dotychczas bardzo mało wyrobiona. Lepiej wyrobiona, nawet w ogólnych zarysach wykończoną jest teoria równowagi ciał jednorodnych. Najpierw zajmiemy się tą ostatnią; teorię równowagi ciał niejednorodnych odłożymy na koniec rozdziału.

Wyobrażamy sobie ciało ciekłe, jednorodne, izotropowe, nieściśliwe o stałej i we wszystkich częściach jednakowej temperaturze. Zakładamy, że cząsteczki cieczy przyciągają się wzajemnie wedle prawa Newtona, zaś wykluczamy wszelkie inne siły wewnętrzne, czy zewnętrzne. Zatem wyobrażamy sobie nasze ciało jako zupełnie samotne. Nie zmniejsza to doniosłości teorii dla praktycznych zastosowań, bo wzajemne odległości pomiędzy ciałami niebieskimi są tak wielkie, że przyciąganie jednego ciała na drugie prawie zupełnie dokładnie przywodzi się do jednej wypadkowej, przechodzącej przez środek masy ciała, która ma wprawdzie wpływ na ruch po orbicie, ale na kształt ciała nie ma wpływu.

Ruch po orbicie rozważaliśmy w innych rozdziałach, tu możemy go pominąć. Możemy zatem rozumować tak, jak gdyby uważane ciało było samotne. Zresztą w dalszym ciągu rozpatrzemy pewne zadania, w których wpływ przyciągania innych ciał na figurę rozważanego wchodzi w rachubę.

Zakładamy, że kątowna prędkość obrotu naokoło osi jest mała i dla wszystkich cząsteczek cieczy jednakowa, następnie zakładamy, że oś z jest osią obrotu oraz, że dwie pozostałe osie obracają się razem z ciałem. Wskutek tego ciecz znajduje się w spokoju względem osi współrzędnych a hydrodynamiczne równania przywodzą się do:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 x + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \omega^2 y + \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

W tych równaniach ω oznacza stałą prędkość obrotu, V potencjał przyciągania, ρ gęstość a p ciśnienie. Zakładamy, że ciecz jest nieściśliwa, jednorodna oraz, że temperatura jej jest wszędzie jednakowa i stała; wtedy ρ nie zależy ani od czasu, ani od współrzędnych. Z drugiej strony, jeżeli ciecz znajduje się w spokoju względem obracających się osi, to ani p , ani V od czasu nie zależą. Wskutek tego, gdy pomnożymy pierwsze równanie przez dx , drugie przez dy , trzecie przez dz i gdy dodamy je do siebie, to otrzymamy po prawej stronie zero a po lewej różniczkę zupełną. Możemy więc całkować, poczem otrzymamy bardzo proste równanie

$$\frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) + V - \frac{1}{\rho} p = C, \quad (2)$$

w którym C oznacza stałą całkowania a $\frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$ jest to potencjał „siły odśrodkowej“. Kładąc

$$\frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) + V = W, \quad (3)$$

gdzie W oznacza potencjał „siły ciężkości“, możemy napisać równanie (2) w kształcie

$$p = \rho (W - C). \quad (2 \text{ bis})$$

Równanie (2), względnie (2 bis) musi być spełnione w całej cieczy. Powiada ono, że w cieczy ciśnienie jest proporcjonalnie do potencjału siły ciężkości, albowiem można zawsze włączyć stałą C do tego potencjału. Zdawałoby się, że dość przyjąć jakąkolwiek funkcję na W i określić p przez równanie (2 bis), aby warunki równowagi były spełnione. Jednakże pozostaje pewne „ale“.

2. Warunek graniczny.

Rozważmy jeszcze, co dzieje się w powierzchni ciekłego ciała. Naturalnie równanie (2 bis) musi być spełnione także w powierzchni, ale dołącza się doń pewne warunkowe równanie. Oto w powierzchni cieczy ciśnienie nie może być jakiegokolwiek. W danym razie, gdy chodzi o zastosowanie do ciał kosmicznych, powinniśmy przyjąć, że powierzchnia cieczy jest swobodna, t. j. że ciśnienie w powierzchni jest równe zeru. Skoro to przyjmiemy, to równanie (2 bis) obróci się w

$$(4) \quad W - C = 0,$$

to zaś oznacza, że powierzchnia cieczy jest powierzchnią ekwipotencyalną. Powierzchnia ekwipotencyalna jest normalna do siły ciężkości, bo wzdłuż niej mamy we wszystkich kierunkach $\delta W = 0$, stąd zaś wynika, że pochodne potencjału W w kierunkach stycznych do powierzchni są równe zeru. Lecz jeżeli pochodne w kierunkach stycznych, t. j. składowe siły ciężkości w kierunkach stycznych są równe zeru, to siła ciężkości jest identyczna z pochodną potencjału normalną do powierzchni. Więc siła ciężkości jest normalna do powierzchni ekwipotencyalnej i odwrotnie powierzchnia ekwipotencyalna jest normalna do siły ciężkości.

Tu wypływa owo „ale“, o którym mówiliśmy na końcu poprzedniego paragrafu. Równanie warunkowe (4) jest oczywiście nieczem innym, jak równaniem powierzchni ciała, ale funkcja W w niem występująca sama zależy od kształtu powierzchni, bo zależy od niego główny składnik funkcji W : potencjał przyciągania V . Przeto, aby określić V i, co za tem idzie, W , trzeba już znać kształt powierzchni; tymczasem kształt ten ma dopiero wyniknąć z przyrównania funkcji W do stałej. Trudność zadania polega na tem, że trzeba „odgadnąć“ figurę, która miałaby tę własność, że gdy do potencjału przyciągania zawartej wewnątrz niej jednorodnej masy

dodamy potencjał siły odśrodkowej a następnie sumę przyrównamy do stałej, to otrzymamy znowu równanie tej samej figury chociaż może pod innym kształtem. Nie znaczy to jednak, aby systematyczne, analityczne badania nie tu pomódz nie mogły, przeciwnie jednym z największych tytułów Poincarégo do sławy jest właśnie to, że w swej znamienitej rozprawie: „*Sur les figures d'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*“ pokazał, jak można od jednych figur równowagi przejść do innych. Jednakże nie zabiegajmy naprzód: powrócimy do badań Poincarégo w dalszym ciągu. teraz zaś zrobimy przegląd znanych figur równowagi.

3. Kula i elipsoida.

Kula jest oczywiście figurą równowagi w przypadku, gdy prędkość obrotu ω jest zerem. Wtedy warunek równowagi (2) przywodzi się do

$$V = \text{stałej.}$$

Ze samych względów symetrii wynika, że w tym razie V jest funkcją odległości od środka kuli:

$$V = f(r).$$

Zresztą V ma kształt

$$V = A - Br^2.$$

Tedy warunek (4) przywodzi się do

$$f(r) = \text{stałej,}$$

skąd $r = \text{stałej}$; to jest znowu otrzymujemy równanie kuli i warunek graniczny jest spełniony.

Już Newton dowiódł, że elipsoida obrotowa spłaszczona jest figurą równowagi. Co do elipsoid trójosiowych, to długi czas sądzono, że nie mogą one być figurami równowagi; dopiero w r. 1834 Jacobi odkrył, że niektóre elipsoidy trójosiowe są figurami równowagi. Dowodu nie podał, ale ogłosił twierdzenie jako wyzwanie francuskim matematykom. Rękawicę podjął J. Liouville ogłaszając szczegółowy dowód twierdzenia.

Że elipsoidy mogą być figurami równowagi, to wynika stąd, że potencjał przyciągania wewnątrz elipsoidy wyraża się przez wzór:

$$V_0 = Ax^2 + By^2 + Cz^2; \quad (5)$$

albowiem dzięki temu kształtowi potencjału równanie warunkowe w powierzchni ma kształt:

$$(6) \quad \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - Ax^2 - By^2 - Cz^2 - D = 0,$$

zatem jest formą kwadratową tak samo, jak równanie elipsoidy odniesione do osi głównych:

$$(7) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Równania (6) i (7) będą przedstawiać jedną i tę samą powierzchnię, jeżeli będą spełnione równania

$$(8) \quad a^2(-A + \frac{1}{2}\omega^2) = b^2(-B + \frac{1}{2}\omega^2) = -c^2C = D.$$

Ale aby wiedzieć, czy i w jaki sposób mogą być spełnione warunki (8), musimy poznać współczynniki A , B i C ¹⁾. W tym celu musimy poznać potencjał przyciągania wewnątrz elipsoidy.

4. Potencjał przyciągania wewnątrz elipsoidy.

Weźmy współrzędne prostokątne, załóżmy, że oś x jest identyczna z najdłuższą osią główną elipsoidy, oś z z najkrótszą a oś y z pozostałą trzecią osią główną. Oznaczmy przez x , y , z współrzędne punktu przyciąganego, przez x' , y' , z' współrzędne punktów przyciągających, przez ρ gęstość, przez k^2 stałą przyciągania, przez

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

najkrótszą odległość między dwoma punktami, a będziemy mogli napisać

$$(9) \quad V = k^2 \rho \int \frac{dx' dy' dz'}{r},$$

gdzie \int oznacza potrójne całkowanie po całej objętości elipsoidy.

Dogodniej jest rozważać nie sam potencjał, a składowe przyciągania. Z drugiej strony jest to dla naszego zadania obojętne, czy rozważamy potencjał, czy jego pochodne, bo chodzi nam o stałe A , B , C , które wchodzi zarówno do potencjału, jak do jego pochodnych, t. j. do składowych przyciągania.

¹⁾ O stałą D nie chodzi, bo to stała dowolna.

Z równania (9) wynika

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -k^2 \rho \int \frac{(x-x') dx' dy' dz'}{r^3} \quad (10)$$

oraz analogiczne wzory na $\frac{\partial V}{\partial y}$ i $\frac{\partial V}{\partial z}$. Dla przykładu obliczymy całkę (10); pozostałe dwie całki na pochodne względem y i z otrzymamy z pierwszej przez proste przestawienia kołowe. Aby ułatwić rachunek, przeniesiemy środek współrzędnych do punktu przyciąganego x, y, z nie zmieniając jednakże kierunków osi. Oprócz tego zastąpimy współrzędne prostokątne przez biegunowe obierając oś x za oś biegunową. Odpowiednio do tego położymy

$$\left. \begin{aligned} x' - x &= r \cos \theta \\ y' - y &= r \sin \theta \cos \psi \\ z' - z &= r \sin \theta \sin \psi \\ dx' dy' dz' &= r^2 dr \sin \theta d\theta d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Skoro to podstawimy we wzór (10), to otrzymamy:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k^2 \rho \int \sin \theta \cos \theta dr d\theta d\psi.$$

Co do granic całkowania, to jasnym jest, że musimy całkować względem θ od 0 do π , względem ψ od 0 do 2π , względem r od 0 do r' , gdzie r' jest to odległość punktów powierzchni. Oczywiście r' jest funkcją θ i ψ , podczas gdy θ i ψ od r' nie zależą; trzeba więc całkować najpierw względem r , poczem otrzymamy

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k^2 \rho \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r' \sin \theta \cos \theta \cdot d\theta d\psi. \quad (12)$$

r' jest to odległość między przyciąganym wewnętrznym punktem x, y, z i przyciągającym punktem powierzchni x', y', z' . Ten ostatni punkt musi czynić zadość równaniu elipsoidy (7), tedy

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1.$$

Skoro tu podstawimy wartości na x', y', z' z równań (11), to otrzymamy równanie elipsoidy w kształcie:

$$(13) \quad Lr'^2 + 2Mr' + N = 0,$$

gdzie

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = \frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \psi}{b^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \psi}{c^2} \\ M = \frac{x \cos \theta}{a^2} + \frac{y \sin \theta \cos \psi}{b^2} + \frac{z \sin \theta \sin \psi}{c^2} \\ N = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1. \end{array} \right.$$

L jest stałe dodatnie jako suma kwadratów, zaś N jest stałe odjemne, bo x, y, z są to współrzędne punktu położonego wewnątrz elipsoidy, wiadomo zaś, że w punktach wewnętrznych

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1.$$

Stąd, że L jest stałe dodatnie a N stałe odjemne, wynika, że oba pierwiastki równania (13) są rzeczywiste, ale znaków przeciwnych. Ponieważ r' może być tylko dodatnie, więc bierzemy tylko dodatni pierwiastek

$$r' = \frac{\sqrt{M^2 - NL} - M}{L},$$

podstawiamy go we wzór (12) i otrzymujemy

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k^2 \rho \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sqrt{M^2 - LN} - M}{L} \right] \cos \theta \sin \theta d\theta d\psi.$$

Możemy napisać tę całkę w kształcie:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k^2 \rho \int \left[\frac{\sqrt{M^2 - LN} - N}{L} \right] \cos \theta d\sigma.$$

W tym ostatnim wzorze

$$d\sigma = \sin \theta d\theta d\psi$$

oznacza element powierzchni kuli o promieniu równym jedności, całkowanie rozciąga się do całej powierzchni kuli a

$$\frac{\sqrt{M^2 - LN} - N}{L} \cos \theta$$

jest to funkcyą punktu w powierzchni owej kuli. Dogodnie jest rozdzielić powyższą całkę na dwie części. Rozpatrzmy najpierw pierwszą część, w której pod znakiem całkowania stoi wyraz

$$\frac{\sqrt{M^2 - LN}}{L} \cos \theta.$$

Uważajmy elementy leżące względem siebie w antypodach, t. j. elementy, dla których

$$\theta = \theta_1, \quad \psi = \psi_1 \quad \text{oraz} \quad \theta = \pi - \theta_1, \quad \psi = \pi + \psi_1.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \sin(\pi - \theta_1) &= \sin \theta_1, & \cos(\pi - \theta_1) &= -\cos \theta_1 \\ \sin(\pi + \psi_1) &= -\sin \psi_1, & \cos(\pi + \psi_1) &= -\cos \psi_1, \end{aligned}$$

przeto tak L , jak N mają w obu punktach jednakowe wartości absolutne i jednakowe znaki; M wprawdzie zmienia znak, ale wartości absolutne ma w obu punktach jednakowe, przeto M^2 jest w obu punktach dodatnie i ma tę samą absolutną wartość. Stąd

wynika, że $\frac{\sqrt{M^2 - NL}}{L}$ jest w obu punktach i co do wartości i co

do znaku jednakowe; ponieważ zaś $\cos \theta$ ma w obu punktach jednakowe wartości absolutne, ale przeciwne znaki, więc całka zawierająca pierwiastek daje w rezultacie zero i $\frac{\partial V}{\partial x}$ przywodzi się do

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -k^2 \rho \int \frac{M}{L} \cos \theta d\sigma,$$

albo, jeżeli podstawimy wartość na M z drugiego równania (14), do:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -k^2 \rho \int \left[\frac{x \cos \theta}{a^2} + \frac{y \sin \theta \cos \psi}{b^2} + \frac{z \sin \theta \sin \psi}{c^2} \right] \frac{\cos \theta}{L} d\sigma.$$

Oczywiście ta całka rozpada się na trzy części. W drugiej i trzeciej części znoszą się elementy leżące na tym samym równoleżniku, ale odległe od siebie o 180° długości, t. j. elementy, u których

$$\theta = \theta_1, \quad \psi = \psi_1 \quad \text{znoszą się z tymi, u których} \quad \theta = \theta_1, \quad \psi = \pi + \psi_1;$$

pozostaje więc ostatecznie

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -k^2 \rho x \int \frac{\cos^2 \theta}{a^2 L} d\sigma.$$

Porównajmy otrzymaną przed chwilą pochodną z tą, która wynika ze wzoru (5), mianowicie z pochodną

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2Ax;$$

z porównania wynika

$$(15) \quad A = \frac{k^2 \rho}{2} \int \frac{\cos^2 \theta}{a^2 L} d\sigma.$$

We wzorze (15) należy jeszcze podstawić L z pierwszego wzoru (14). Spostrzegamy, że A a tak samo B i C nie zależą od pól a , b , c , tylko od ich stosunków. Ponieważ przytem A , B i C są proporcjonalne do gęstości, więc wszystkie jednorodnie homotetyczne elipsoidy (t. j. takie, u których stosunki między osiami są jednakowe) o jednej i tej samej gęstości mają jednakowe A , B i C . Możemy stąd wyprowadzić pewne interesujące twierdzenie. Weźmy dwie elipsoidy homotetyczne o różnych rozmiarach: większą o gęstości ρ , mniejszą o gęstości $-\rho$, nałóżmy je na siebie tak, żeby osie główne były identyczne. Tam, gdzie gęstość $-\rho$ jest nałożona na gęstość $+\rho$, wytwarza się próżnia, przeto otrzymujemy tym sposobem warstwę ograniczoną przez dwie homotetyczne elipsoidy. Dla obu elipsoid A , B , C mają te same absolutne wartości ale znaki przeciwne, tedy we wewnętrznej próżni przyciąganie jest równe zeru. Mamy więc twierdzenie:

Jednorodna warstwa zawarta między dwoma homotetycznymi, współosiowymi elipsoidami nie wywiera żadnego przyciągania na punkt znajdujący się w jej wnętrzu.

Położmy teraz dla ułatwienia

$$(16) \quad \frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} = \alpha, \quad \frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{c^2} = \beta$$

i korzystając z oklepanej równości:

$$\cos^2 \psi + \sin^2 \psi = 1$$

napiszmy pierwszy wzór (14) w kształcie:

$$L = \alpha \cos^2 \psi + \beta \sin^2 \psi,$$

następnie wypiszmy „*explicite*“ we wzorze (15) wartość elementu powierzchniowego ds i granice całkowania dla obu zmiennych θ i ψ , a otrzymamy

$$A = \frac{k^2 \rho}{2a^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\psi}{\alpha \cos^2 \psi + \beta \sin^2 \psi}.$$

Ponieważ pod znakiem całkowania stoją tylko kwadraty $\cos^2 \psi$ i $\sin^2 \psi$, więc można zastąpić całkowanie wedle ψ od 0 do 360° przez czterokrotne całkowanie od 0 do 90° . Tak samo można zastąpić całkowanie względem θ od 0 do 180° przez dwukrotne całkowanie od 0 do 90° , bo α i β zawierają tylko kwadraty $\cos^2 \theta$ i $\sin^2 \theta$, a $\sin \theta$ od 90° do 180° ma ten sam znak co od 0 do 90° i przybiera te same wartości tylko w odwrotnym porządku. Możemy więc napisać

$$A = \frac{4k^2 \rho}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\psi}{\alpha \cos^2 \psi + \beta \sin^2 \psi}.$$

Wykonajmy teraz całkowanie. Wiadomo, że

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\alpha \cos^2 \psi + \beta \sin^2 \psi} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha\beta}}.$$

Zatem podstawiając jeszcze napowrót wartości na α i β ze wzorów (16) i przyprowadzając wyrażenia stojące po lewej stronie tych wzorów do jednego mianownika otrzymamy

$$A = 2\pi k^2 \rho b c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta d\theta}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{1/2} (a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta)^{1/2}}. \quad (17)$$

Wzorów na B i C nie piszemy, bo łatwo je otrzymać przez kołowe przestawienia.

Moglibyśmy w dalszym ciągu użyć podstawienia Jacobiego

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + u}},$$

gdzie u jest nową zmienną, ale dogodniej będzie użyć innego podstawienia, tego mianowicie, którem posługuje się Tisserand

w „*Traité de mécanique céleste*“. Kto pierwszy je wprowadził, nie wiem, ale spotykałem je w dziełach starszych niż dzieło Tisseranda. Niech będzie

$$a > c, \quad b > c$$

$$a^2 = c^2(1 + \lambda^2), \quad b^2 = c^2(1 + \lambda_1^2)$$

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho abc \text{ (masa elipsoidy).}$$

Oprócz tego położymy we wyrażeniu na A $\cos \theta = \frac{a}{c} \frac{\zeta}{\sqrt{1 + \lambda^2 \zeta^2}}$

„ „ „ „ „ „ „ B „ „ = $\frac{b}{c} \frac{\zeta}{\sqrt{1 + \lambda_1^2 \zeta^2}}$

„ „ „ „ „ „ „ C „ „ = ζ .

Wykonajmy np. pierwszą z powyższych substytucji we wzorze (17) na A . Znajdziemy

$$a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta = \frac{a^2(1 + \lambda_1^2 \zeta^2)}{1 + \lambda^2 \zeta^2}, \quad a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta = \frac{a^2}{1 + \lambda^2 \zeta^2}$$

$$\sin \theta d\theta = -\frac{a}{c} \frac{d\zeta}{(1 + \lambda^2 \zeta^2)^{3/2}}, \quad 2\pi k^2 \rho bc = \frac{3k^2 M}{2a}.$$

Co do granic, to wartości $\theta = 0$ odpowiada $\zeta = 1$, a wartości $\theta = \frac{\pi}{2}$ odpowiada $\zeta = 0$. Skoro to wstawimy we wzór (17) i skoro odwrócimy granice całkowania, skoro następnie wykonamy podstawienia we wzorach na B i C , to otrzymamy:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{3k^2 M}{2c^3} \int_0^1 \frac{\zeta^2 d\zeta}{(1 + \lambda^2 \zeta^2)^{3/2} (1 + \lambda_1^2 \zeta^2)^{3/2}} \\ B = \frac{3k^2 M}{2c^3} \int_0^1 \frac{\zeta^2 d\zeta}{(1 + \lambda^2 \zeta^2)^{3/2} (1 + \lambda_1^2 \zeta^2)^{3/2}} \\ C = \frac{3k^2 M}{2c^3} \int_0^1 \frac{\zeta^2 d\zeta}{(1 + \lambda^2 \zeta^2)^{3/2} (1 + \lambda_1^2 \zeta^2)^{3/2}} \end{array} \right.$$

W ten sposób sprowadziliśmy wyrażenia na A, B, C do możliwie prostego kształtu, bo figurujące po prawej stronie równań (18)

całki są to całki eliptyczne, których na prostsze całki sprowadzić nie można. Oblicza się je za pomocą tablic tak samo, jak funkcje kołowe. Można też rozwijać je w szeregi, z czego we właściwej chwili zrobimy użytek.

5. Warunki równowagi.

Należy teraz powrócić do warunków równowagi (8). O stałą D nie ma co troskać się, bo to stała dowolna, której można zawsze nadać odpowiednią wartość. Ważne są tylko dwa pierwsze równania

$$a^2(A - \frac{1}{2}\omega^2) = b^2(B - \frac{1}{2}\omega^2) = c^2C. \quad (8 \text{ bis})$$

Oznaczmy element trzeciej całki (18) przez dS ; wtedy można napisać:

$$A = \frac{3k^2M}{2c^3} \int_0^1 \frac{dS}{1 + \lambda^2 \zeta^2}, \quad B = \frac{3k^2M}{2c^3} \int_0^1 \frac{dS}{1 + \lambda_1^2 \zeta^2}, \quad C = \frac{3k^2M}{2c^3} \int_0^1 dS.$$

Oczywiście

$$0 < \frac{1}{1 + \lambda^2 \zeta^2} < 1, \quad 0 < \frac{1}{1 + \lambda_1^2 \zeta^2} < 1.$$

Stąd wynika

$$A < C, \quad B < C.$$

Położmy jeszcze „pour fixer les idées” $a > b > c$, wtedy $\lambda^2 > \lambda_1^2$ a wskutek tego $A < B < C$ i jest możność spełnienia równań (8). Trzeba teraz podstawić wyrażenia na A , B , C w równania (8 bis). Aby uprościć pisaninę, położmy jeszcze:

$$\frac{3k^2M}{c^3} = h.$$

Otrzymujemy równania

$$a^2 \left[h \int_0^1 \frac{dS}{1 + \lambda^2 \zeta^2} - \omega^2 \right] = b^2 \left[h \int_0^1 \frac{dS}{1 + \lambda_1^2 \zeta^2} - \omega^2 \right] = c^2 h \int_0^1 dS. \quad (19)$$

Pierwsze z nich można napisać w kształcie:

$$h \int_0^1 \left(\frac{a^2}{1 + \lambda^2 \zeta^2} - \frac{b^2}{1 + \lambda_1^2 \zeta^2} \right) dS = (a^2 - b^2) \omega^2.$$

Korzystając z tego, że

$$a^2 = c^2(1 + \lambda^2), \quad b^2 = c^2(1 + \lambda_1^2),$$

przywodząc do jednego mianownika i nieco porządkując, możemy to napisać w kształcie:

$$(20) \quad (\lambda^2 - \lambda_1^2) \left[h \int_0^1 \frac{(1 - \zeta^2) dS}{(1 + \lambda^2 \zeta^2)(1 + \lambda_1^2 \zeta^2)} - \omega^2 \right] = 0.$$

Weźmy teraz drugie równanie. Za pomocą tych samych podstawień można je przyprowadzić do kształtu:

$$(21) \quad \frac{h}{1 + \lambda_1^2} \int_0^1 \frac{\lambda_1^2 (1 - \zeta^2) dS}{1 + \lambda_1^2 \zeta^2} - \omega^2 = 0.$$

Rugujemy wreszcie ω^2 z równań (21) i (20). Po niektórych przekształceniach otrzymamy równanie

$$(22) \quad (\lambda^2 - \lambda_1^2) \int_0^1 \frac{(1 - \zeta^2)(1 - \lambda^2 \lambda_1^2 \zeta^2) dS}{(1 + \lambda^2)(1 + \lambda^2 \zeta^2)(1 + \lambda_1^2 \zeta^2)} = 0.$$

Oczywiście to równanie rozpada się na dwa: jedno

$$\lambda^2 - \lambda_1^2 = 0,$$

które daje elipsoidy obrotowe i drugie, w którym całka stojąca w równaniu (23) ma być równa zeru, a które daje elipsoidy Jacobiego.

6. Elipsoidy obrotowe.

W przypadku elipsoid obrotowych

$$\lambda_1^2 = \lambda^2, \quad b^2 = a^2, \quad B = A.$$

Całki eliptyczne przechodzą wtedy w całki kołowe. Zaczniemy od całki wchodzącej w C . Całka ta jest

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\zeta^2 d\zeta}{1 + \lambda^2 \zeta^2} &= \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\lambda} \frac{u^2 du}{1 + u^2} = \frac{1}{\lambda^3} \int_0^{\lambda} \frac{(1 + u^2) du - du}{(1 + u^2)} \\ &= \frac{1}{\lambda^3} \int_0^{\lambda} \left(du - \frac{du}{1 + u^2} \right) = \frac{1}{\lambda^3} (\lambda - \operatorname{arctg} \lambda). \end{aligned}$$

Weźmy teraz całkę wchodzącą w skład A , t. j. całkę

$$\int_0^1 \frac{\zeta^2 d\zeta}{(1 + \lambda^2 \zeta^2)^2}.$$

Położmy znowu $\lambda \zeta = u$; wtedy

$$\int_0^1 \frac{\zeta^2 d\zeta}{(1 + \lambda^2 \zeta^2)^2} = \frac{1}{\lambda^3} \int_0^\lambda \frac{u^2 du}{(1 + u^2)^2} = \frac{1}{\lambda^3} \left\{ - \left[\frac{1}{2} \frac{u}{1 + u^2} \right]_0^\lambda + \frac{1}{2} \int_0^\lambda \frac{du}{1 + u^2} \right\},$$

więc

$$\int_0^1 \frac{\zeta^2 d\zeta}{(1 + \lambda^2 \zeta^2)^2} = \frac{1}{2\lambda^3} \left[\operatorname{arctg} \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right].$$

Porównując te rezultaty ze wzorami (18) i kładąc wciąż tak samo:

$$\frac{3k^2 M}{c^3} = h$$

możemy napisać

$$\left. \begin{aligned} B = A &= \frac{h}{4\lambda^3} \left(\operatorname{arctg} \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right) \\ C &= \frac{h}{2\lambda^3} (\lambda - \operatorname{arctg} \lambda). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Skoro przyjęliśmy $\lambda_1 = \lambda$, to jeden z warunków równowagi został spełniony; pozostaje jeszcze drugi. Wszystko jedno, czy weźmiemy równanie (20), czy (21). To ostatnie jest, jak wiadomo, identyczne z drugim równaniem (19), t. j. z równaniem:

$$b^2 (B - \frac{1}{2} \omega^2) = c^2 C.$$

Zatem zamiast wykonywać całkowania figurujące w równaniu (21) bierzemy wartości na B i C z równań (23), podstawiamy w tylko co napisane równanie, korzystamy z równości

$$b^2 = c^2 (1 + \lambda_1^2)$$

i otrzymujemy równanie przestępne, które po uporządkowaniu można napisać tak:

$$(3 + \lambda^2) \operatorname{arctg} \lambda - 3\lambda = \frac{2\omega^2 \lambda^3 (1 + \lambda^2)}{h}.$$

Ale dla elipsoidy obrotowej:

$$h = 4\pi k^2 \rho (1 + \lambda^2),$$

zatem można napisać powyższe równanie w kształcie:

$$(24) \quad \frac{(3 + \lambda^2) \operatorname{arctg} \lambda - 3\lambda}{\lambda^3} = \frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho}.$$

Jest to oczywiście równanie przestępne służące do określenia λ , bo z prawej strony stoją tylko wiadome wielkości a z lewej funkcja przestępna zmiennej λ .

Wiadomo, że pomiędzy $\lambda = -\frac{\pi}{2}$ i $\lambda = +\frac{\pi}{2}$ można rozwinąć $\operatorname{arctg} \lambda$ w szereg

$$\operatorname{arctg} \lambda = \frac{\lambda}{1} - \frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^5}{5} - \dots$$

Podstawmy tę wartość w równanie (24) a po łatwych rachunkach otrzymamy

$$(25) \quad F(\lambda) = 4 \sum \frac{(-1)^{n-1} n \lambda^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho} \dots$$

W równaniu tem prawa strona jest dodatnią, lewa zaś dla $\lambda^2 < 0$ składałaby się wyłącznie z ujemnych wyrazów. Zatem ujemne wartości na λ^2 nie mogą być pierwiastkami równania (24), lub (25). Z drugiej strony pierwiastki urojone są wykluczone jako nie mające fizycznego znaczenia, możebne są tylko dodatnie pierwiastki. Lecz jeżeli $\lambda^2 > 0$, to $a^2 = b^2 > c^2$, co oznacza, że oś obrotu jest mniejsza od równikowej: elipsoida musi być spłaszczone.

Rozpatrzmy teraz dodatnie pierwiastki równania (24). W tym celu trzeba zbadać przebieg funkcji $F(\lambda)$, co znowu wymaga zbadania pochodnej $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$. Ponieważ $F(\lambda)$ jest funkcją parzystą, więc dość jest zbadać $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ między $\lambda = 0$ a $\lambda = +\infty$. Utworzymy pochodną na podstawie wzoru (24), bo jest do tego celu dogodniejszy niż wzór (25). Po łatwych rachunkach znajdziemy

$$(26) \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda^4} \left[\frac{9\lambda + 7\lambda^3}{1 + \lambda^2} - (9 + \lambda^2) \operatorname{arctg} \lambda \right] = \\ = \frac{9 + \lambda^2}{\lambda^4} \left[\frac{9\lambda + 7\lambda^3}{(1 + \lambda^2)(9 + \lambda^2)} - \operatorname{arctg} \lambda \right].$$

Oczywiście znak pochodnej zależy tylko od wyrażenia stojącego w nawiasie. Dla $\lambda = 0$ to wyrażenie staje się zerem, ale tuż po $\lambda = 0$ (t. j. dla małych dodatnich wartości zmiennej λ) jest dodatnie, bo

$$(9\lambda + 7\lambda^3) - (1 + \lambda^2)(9 + \lambda^2) \operatorname{arctg} \lambda = \frac{8}{15} \lambda^5 - \dots \text{wyższe potęgi } \lambda, \dots,$$

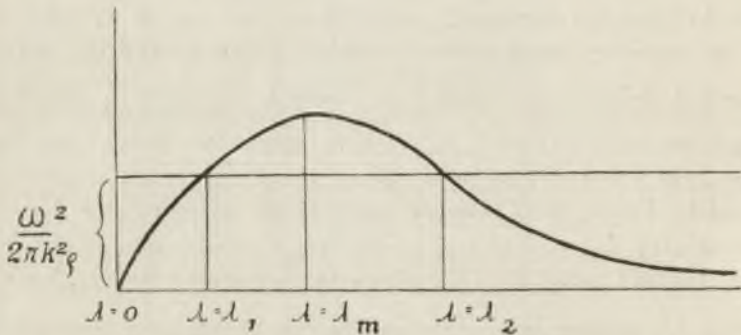
co dla bardzo małych wartości λ jest dodatnie. Zobaczmy teraz, co będzie dalej. Z pomiędzy dwóch wyrazów w nawiasie wzoru (26) pierwszy wciąż pozostaje dodatnim, co więcej z początku wzrasta, ale tylko do pewnego *maximum*, potem zmniejsza się, aż wreszcie dla $\lambda = \infty$ staje się nieskończenie małym. Przeciwnie drugi wyraz, t. j. $\operatorname{arctg} \lambda$ wciąż wzrasta i dla $\lambda = \infty$ przybiera wartość $\frac{\pi}{2}$. Ponieważ $\operatorname{arctg} \lambda$ ma znak ujemny, więc skoro jeszcze weźmiemy w uwagę to, co było przed chwilą powiedziane o znaku wyrazu w nawiasie w pobliżu $\lambda = 0$, to dojdziemy do wniosku, że wyraz ten jest dodatni między $\lambda = 0$, a pewną skończoną wartością na λ , którą możemy oznaczyć przez $\lambda = \lambda_m$, potem zaś jest stale ujemny. Inaczej mówiąc, $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ między 0 a $+\infty$ zmienia znak jeden raz przechodząc od wartości dodatnich do ujemnych.

Wróćmy teraz do samej funkcji $F(\lambda)$. Skoro $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ między 0 a ∞ tylko raz zmienia znak, to $F(\lambda)$ musi wzrastać aż do pewnego *maximum* odpowiadającego pierwiastkowi: $\lambda = \lambda_m$ równania $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$, potem zmniejsza się. Zresztą z wyrażenia po lewej stronie równania (25) zaraz widać, że $F(\lambda) = 0$, gdy $\lambda = 0$, zaś z wyrażenia po lewej stronie równania (24) widać, że dla $\lambda = +\infty$ funkcja $F(\lambda)$ znowu staje się zerem. Łącząc to wszystko razem dochodzimy do wniosku, że $F(\lambda)$ jest zerem dla $\lambda = 0$, następnie wzrasta do pewnego *maximum* a potem znowu spada asymptotycznie do zera, t. j. ma przebieg mniej więcej taki, jak krzywa na ryc. 49.

Przejdźmy teraz do równania przestępnego (24). Po prawej stronie stoi pewna stała. Jeżeli ta stała jest większa, aniżeli *maximum* funkcji $F(\lambda)$, to równanie wcale nie posiada pierwiastków dodatnich; jeżeli jest mniejsza, to są dwie wartości funkcji $F(\lambda)$ równe owej stałej i równanie ma dwa pierwiastki dodatnie.

Naturalnie może się także zdarzyć, że stała $\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho}$ jest właśnie ró-

wna największej wartości funkcji $F(\lambda)$; wtedy oba pierwiastki zlewają się ze sobą. Graficznie możemy to przedstawić kreśląc prostą równoległą do osi γ na odległości równej stałej $\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho}$. Jeżeli ta prosta nie przecina się z krzywą, to pierwiastków dodatnich niema, jeżeli przecina się z nią, to koniecznie przecina się w dwóch punktach odpowiadających dwóm dodatnim pierwiastkom. W przypadku granicznym prosta jest styczna do krzywej w najwyższym jej punkcie.



Ryc. 49.

Za wyjątkiem owego granicznego przypadku są tedy albo dwie elipsoidy czyniące zadość warunkom równowagi, albo niema żadnej. Jeżeli są dwie elipsoidy czyniące zadość warunkom, to ta, która odpowiada mniejszemu pierwiastkowi $\lambda = \lambda_1$, jest mało spłaszczone: — jest to tak zwana „elipsoida planetarna, albo Newtona“; druga odpowiadająca większemu pierwiastkowi $\lambda = \lambda_2$ i więcej spłaszczone jest to tak zwana elipsoida Maclaurina. Już Newton dowiódł, że elipsoida obrotowa może być figurą równowagi, ale dowód jego właściwie odnosił się do planetarnych elipsoid. Dopiero uczeń jego Maclaurin okazał, że także znacznie spłaszczone krążkowate elipsoidy obrotowe mogą być figurami równowagi. Widać zaraz (z ryc. 49), że stosunek między elipsoidami Maclaurina a planetarnymi polega na pewnym kontraście. Drugi pierwiastek jest tem większy, im pierwszy jest mniejszy, a więc im mniej spłaszczoną jest elipsoida planetarna, tem towarzysząca jej elipsoida Maclaurina jest więcej spłaszczoną i odwrotnie.

Widzieliśmy już, że samo istnienie, względnie nieistnienie

pierwiastków równania przestępnego zależy wyłącznie od wartości stałej $\frac{\omega^2}{2\pi k \rho}$; albowiem lewa strona równania nie zależy od żadnych danych fizycznych. Jest to pewna funkcja, która przebiega szereg wartości zupełnie określonych i niezmiennych zupełnie tak jak \cos . lub \sin . Zato stała $\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho}$ zależy od danych fizycznych zadania. Nie zależy od nich 2π , bo to stała matematyczna absolutna, nie zależy od nich także stała Newtonowskiego przyciągania k^2 , bo skoro raz obraliśmy jednostki, to k^2 jest dla wszystkich ciał jednakowe. Zatem możemy powiedzieć, że wartość stałej zależy od stosunku między kwadratem prędkości kątowej ω^2 a gęstością ρ . Jeżeli gęstość jest z góry dana, to stała wzrasta proporcjonalnie do kwadratu prędkości kątowej. Przy małych prędkościach obrotu stała jest mała i możebne są dwie figury równowagi. W miarę tego, jak prędkość obrotu wzrasta, stała też wzrasta a jednocześnie obie elipsoidy obrotowe: planetarna i Maclaurina stają się coraz to więcej do siebie podobne, wreszcie dla pewnej granicznej prędkości stają się identyczne. Jeżeli prędkość obrotu wzrasta jeszcze dalej, to elipsoidy obrotowe przestają być figurami równowagi.

Zapomnieliśmy powiedzieć, że gdy prędkość obrotu jest zerem, to pierwiastki równania przestępnego są $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = \infty$. Pierwszemu z nich odpowiada kula, drugiemu nieskończenie cienki a zarazem nieskończenie wielki krążek. Już w § 3 poznaliśmy kulę, jako figurę równowagi odpowiadającą nieskończenie małej prędkości obrotu, ale nie mogliśmy tam odgadnąć, że obok kuli w tym przypadku istnieje także druga figura równowagi: nieskończenie spłaszczona elipsoida Maclaurina.

Zajmijmy się jeszcze owym skrajnym granicznym przypadkiem, w którym elipsoidy obrotowe przestają być figurami równowagi. W tym celu trzeba obliczyć *maximum* funkcji $F(\lambda)$.

Jeżeli wrócimy na chwilę do wzoru (26), to zaraz spostrzeczemy, że warunek *maximum* jest

$$\frac{9\lambda + 7\lambda^3}{(1 + \lambda^2)(9 + \lambda^2)} - \operatorname{arctg} \lambda = 0. \quad (27)$$

Można rozwiązać to równanie przez kolejne przybliżenia: po dość długim rachunku znajdziemy pierwiastek:

$$\lambda = 2,5293 \dots$$

Skoro podstawimy tę wartość na λ we wyrażenie na $F(\lambda)$, np. we wzór (24), to znajdziemy

$$F(\lambda) = 0,22467 \dots$$

Zatem *maximum*, które może osiągnąć lewa strona równania (24), wynosi 0,22467... i jeżeli prawa strona, t. j. $\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho}$ ma wartość większą od tej granicznej wartości, to równanie realnych pierwiastków nie posiada. To zaś oznacza, że skoro

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho} > 0,22467 \dots,$$

to elipsoida obrotowa figurą równowagi być nie może.

Zastosujmy to do ziemi. Przyciąganie [nie siła ciężkości, ale przyciąganie] w powierzchni ziemi wynosi średnio 9,81 metr. na sek. Stąd, oznaczając średni promień ziemi przez R a masę przez M , znajdziemy

$$\frac{k^2 M}{R^2} = 9,81 \text{ metr. na sek.}$$

Lecz

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho \cdot R^3,$$

jeżeli pod ρ będziemy rozumieć średnią gęstość ziemi. Zatem

$$\frac{4\pi}{3} k^2 \rho R = 9,81 \text{ metr. na sek.,}$$

stąd zaś

$$2\pi k^2 \rho = \frac{3}{2} \frac{9,81}{R}.$$

Ponieważ w sekundach

$$\omega = \frac{2\pi}{86\,164},$$

więc:

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho} = \left(\frac{2\pi}{86\,164} \right)^2 \frac{2R}{3 \times 9,81}.$$

Podstawiając jeszcze

$$R = 6370\,000 \text{ metr.}$$

znajdziemy (dla ziemi)

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho} = (\text{prawie}) 0,0023,$$

a więc wartość o wiele mniejszą od granicznej wartości 0,22467. Widzimy stąd, że we warunkach ziemskich elipsoida obrotowa jest figurą równowagi.

Trzeba jeszcze znaleźć tę elipsoidę, czy raczej te elipsoidy, bo równanie (24) ma dwa pierwiastki. Położmy w niem

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho} = 0,0023 \dots$$

a znajdziemy:

$$\lambda_1 = 0,0932 \dots, \quad \lambda_2 = 681, \dots$$

Weźmy najpierw drugi pierwiastek odpowiadający elipsoidzie Maclaurina. Ponieważ $\frac{a}{c} = \sqrt{1 + \lambda^2}$, więc stosunek $\frac{a}{c}$ ma wartość przeszło 681, ... t. j. elipsoida Maclaurina jest ogromnie spłaszczona: jest to cienki krążek. Wolno spytać, dlaczego takich elipsoid nie ma wśród planet, dlaczego te cienkie krążki nie są zrealizowane w przyrodzie. Uprzedzając to, o czym będzie mowa w dalszym ciągu, powiemy, że elipsoidy Maclaurina nie są figurami stałej równowagi.

Weźmy teraz pierwszy pierwiastek: $\lambda_1 = 0,0932 \dots$ odpowiadający elipsoidzie planetarnej. Ponieważ spłaszczenie wyraża się wzorem:

$$e = \frac{\sqrt{1 + \lambda^2} - 1}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \quad (28)$$

więc po podstawieniu wartości $\lambda = 0,0932 \dots$ znajdziemy:

$$e = \frac{1}{232};$$

tymczasem spłaszczenie ziemi wynosi z pewnością około $\frac{1}{298}$, a więc jest dużo mniejsze od e wynikającego z teorii równowagi ciał ciętkłych jednorodnych. Nic w tem dziwnego, bo ziemia nie jest ciałem jednorodnym.

Do kwestyi, o ile spłaszczenie ziemi odpowiada warunkom równowagi, powrócimy na innem miejscu; tymczasem gwoili infor-

macyi powiemy jeszcze, że przy gęstości równej średniej gęstości ziemi — granicznej wartości na γ_1 , t. j. podwójnemu pierwiastkowi odpowiada czas obrotu 8718 sekund. Wynika to z równania

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho} = 0,22467 \dots,$$

w którym, skoro na ρ przyjmiemy pewną określoną wartość (w danym razie 5,5), wszystkie wielkości oprócz ω będą wiadome. Odpowiednie spłaszczenie otrzymamy ze wzoru (28) kładąc $\lambda = 2,5293 \dots$, poczem znajdziemy

$$e = \frac{1}{1,58 \dots}$$

7. Elipsoidy Jacobiego.

W końcu § 5 przez eliminację otrzymaliśmy równanie (22), które rozpadło się na dwa równania: jedno prowadzące do elipsoid obrotowych, drugie do elipsoid Jacobiego. Opuszczając stały czynnik $(1 + \lambda^2)^{-1}$ możemy napisać to ostatnie równanie w kształcie:

$$(22 \text{ bis}) \quad \int_0^1 \frac{\xi^2 (1 - \xi^2) (1 - \lambda^2 \lambda_1^2 \xi^2) d\xi}{(1 + \lambda^2 \xi^2)^{3/2} (1 + \lambda_1^2 \xi^2)^{3/2}} = 0.$$

Oprócz równania (22 bis) musi być spełnione jedno z pierwotnych równań, wyrażających warunki równowagi, wszystko jedno czy równanie (20), czy (21). Obieramy równanie (20), bo z powodu symetrii względem λ i λ_1 przedstawia ono niektóre dogodności, z których będziemy mogli skorzystać. Równanie to wygląda tak

$$h \int_0^1 \frac{\xi^2 (1 - \xi^2) d\xi}{(1 + \lambda^2 \xi^2)^{3/2} (1 + \lambda_1^2 \xi^2)^{3/2}} = \omega^2.$$

Ponieważ

$$h = 3k^2 \frac{M}{c^3} = 4\pi \rho k^2 \sqrt{1 + \lambda^2} \cdot \sqrt{1 + \lambda_1^2},$$

przeto możemy nadać mu kształt:

$$(20 \text{ bis}) \quad 2\sqrt{1 + \lambda^2} \sqrt{1 + \lambda_1^2} \int_0^1 \frac{\xi^2 (1 - \xi^2) d\xi}{(1 + \lambda^2 \xi^2)^{3/2} (1 + \lambda_1^2 \xi^2)^{3/2}} = \frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho}.$$

Przestępne równania (20 bis) i (22 bis) zawierają dwie niewiadome λ^2 i λ_1^2 , zatem mamy tyleż równań, ile niewiadomych. Ale pomienione równania mają realne i dodatnie pierwiastki tylko dopóty, dopóki $\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho}$ nie przekracza pewnej granicy, albowiem, skoro założymy, że $\lambda^2 > 0$ i $\lambda_1^2 > 0$, to okaże się, że lewa strona równania (20 bis) wogóle pewnego *maximum* przekroczyć nie może. Nam specjalnie chodzi o względne *maximum* lewej strony równania (20 bis) przy jednoczesnem spełnieniu równania (22 bis). Oznaczmy lewą stronę równania (20 bis) przez φ a lewą stronę równania (22 bis) przez ψ . Wiadomo, że warunek *maximum* funkcji φ przy jednoczesnem spełnieniu równania

$$\psi = 0$$

wyraża się wzorem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + q \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 \right) = 0,$$

gdzie q jest to pewien nieokreślony czynnik. Wiadomo dalej, że współczynniki przy $d\lambda$ i $d\lambda_1$ muszą być oddzielnie równe zeru, t. j. wiadomo, że powyższe równanie różniczkowe rozpada się na dwa równania:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + q \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + q \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_1} = 0.$$

Rugując z tych ostatnich równań nieoznaczony czynnik q otrzymamy równanie

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \quad (29)$$

któremu, dzięki symetrii funkcji φ i ψ względem λ i λ_1 , można uczynić zadość kładąc

$$\lambda_1 = \lambda,$$

t. j. przyjmując, że elipsoida jest obrotowa. Wtedy funkcje φ i ψ przywodzą się do

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi = \int_0^1 \frac{\xi^2 (1 - \xi^2) (1 - \lambda^4 \xi^2) d\xi}{(1 + \lambda^2 \xi^2)^3} = 0 \\ \varphi = 2 (1 + \lambda^2) \int_0^1 \frac{\xi^2 (1 - \xi^2) d\xi}{(1 + \lambda^2 \xi^2)^3}. \end{array} \right.$$

Obie całki wyrażają się przez funkcyę kołowe. Aby ułatwić sobie całkowanie, weźmy tożsamość, którą łatwo sprawdzić

$$\begin{aligned} \frac{(1 + 3\lambda^2)}{2} \varphi - (1 - \lambda^2) \psi &= 2\lambda^2 \int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{1 + \lambda^2 \xi^2} + \\ &+ \lambda^2 (1 + \lambda^2) \int_0^1 \frac{(3\xi^2 - (5 + \lambda^2)\xi^4 - \lambda^2 \xi^6) d\xi}{(1 + \lambda^2 \xi^2)^3}. \end{aligned}$$

Z lewej strony tego ostatniego równania $\psi = 0$ na mocy pierwszego równania (30), z prawej zaś druga całka jest równa zeru, albowiem wyraz pod znakiem całkowania jest pochodną względem ξ funkcyi

$$\frac{\xi^3 (1 - \xi^2)}{(1 + \lambda^2 \xi^2)^2},$$

która, gdy w niej podstawimy granice $\xi = 0$ i $\xi = 1$, da w rezultacie zero. Tedy kładąc jeszcze

$$\lambda \xi = u$$

otrzymujemy

$$\frac{1 + 3\lambda^2}{2} \varphi = 2\lambda^2 \int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{1 + \lambda^2 \xi^2} = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{u^2 du}{1 + u^2}.$$

Ponieważ

$$\int_0^\lambda \frac{u^2 du}{1 + u^2} = \int_0^\lambda \left(1 - \frac{1}{1 + u^2}\right) du = \lambda \operatorname{arc} \operatorname{tang} \lambda,$$

przeto

$$(31) \quad \varphi = \frac{4}{1 + 3\lambda^2} \cdot \frac{1}{\lambda} (\lambda - \operatorname{aretg} \lambda).$$

Ale do elipsoidy naszej, jako obrotowej, stosuje się równanie (24); z drugiej zaś strony wedle równania (20 bis)

$$\varphi = \frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho}.$$

Porównując to ostatnie równanie z równaniem (24) a następnie z równaniem (31) możemy napisać

$$\varphi = \frac{(3 + \lambda^2) \operatorname{arctg} \lambda - 3\lambda}{\lambda^3} = \frac{4}{1 + 3\lambda^2} \cdot \frac{1}{\lambda} (\lambda - \operatorname{arctg} \lambda),$$

albo trochę przekształcając i porządkując

$$\operatorname{arctg} \lambda = \frac{3\lambda + 13\lambda^3}{3 + 14\lambda^2 + 3\lambda^4}. \quad (32)$$

Przez rozumowanie podobne jak w § 6 przekonamy się, że równanie (32) ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty, następnie metodą „*falsi*“, lub graficznie znajdziemy, że ten pierwiastek jest $\lambda = 1,395\dots$, wreszcie podstawivszy w równanie (31) znajdziemy

$$\varphi = 0,187\dots$$

Oto jest poszukiwane (względne) *maximum* funkcji φ . Pozostaje jeszcze pytanie, czy oprócz tego *maximum* niema innych. Odpowiedź odkładamy na później, do chwili, gdy będziemy rozważać stałość równowagi. Tymczasem przyjmujemy, że jest tylko jedno *maximum* i wnosimy, że jeżeli przy jednoczesnem spełnieniu równania (2:2 bis) lewa strona równania (20 bis) nie może przekroczyć wartości 0,187..., to równania te mogą mieć realne i dodatnie pierwiastki tylko dopóty, dopóki

$$0 < \frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho} < 0,187\dots$$

Możemy zatem powiedzieć, że w powyższych granicach obok elipsoid obrotowych: planetarnej i Maclaurina figurami równowagi są też elipsoidy Jacobiego. W granicy, gdy

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho} = 0,187\dots$$

elipsoida Jacobiego przechodzi w obrotową. Odtąd aż do

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho} = 0,22467\dots$$

figurami równowagi mogą być już tylko elipsoidy obrotowe. Nie od rzeczy będzie powiedzieć, że spłaszczenie tej elipsoidy, która jest jednocześnie elipsoidą obrotową i elipsoidą Jacobiego, jest

$$\epsilon = \frac{1}{2,396 \dots}$$

Wartość ta wynika ze wzoru (28), skoro weń podstawimy $\lambda = 1,395 \dots$

Wyprowadzimy jeszcze pewną charakterystyczną dla elipsoid Jacobiego nierówność. Spójrzmy na równanie (22 bis). Ponieważ ζ jest zawarte w granicach 0 i 1, więc póki $\lambda^2 \lambda_1^2 < 1$, póty wszystkie elementy całki stojącej po lewej stronie tego równania są dodatnie i całka zera równać się nie może. A zatem musi być koniecznie

$$(33) \quad \lambda^2 \lambda_1^2 > 1.$$

Podstawiając wartości

$$\lambda^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2}, \quad \lambda_1^2 = \frac{b^2 - c^2}{c^2}$$

możemy przyprowadzić nierówność (33) do kształtu

$$(33 \text{ bis}) \quad \frac{1}{c^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Z nierówności (33), względnie (33 bis) wynika, że w elipsoidach Jacobiego oś c , t. j. oś obrotu jest mała w porównaniu z dwoma pozostałymi, albo przynajmniej w porównaniu z jedną z pozostałych. Jeżeli np. założymy, że λ_1 jest małe, t. j. że c i b są prawie równe, to zato λ^2 musi być wielkie a więc a musi być wielkie w porównaniu z b i c . Figur tego rodzaju wśród większych planet nie spotykamy.

Przy danej prędkości obrotu czyniącej zadość warunkowi

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho} < 0,187 \dots$$

istnieje tylko jedna elipsoidala Jacobiego. Właściwie istnieją dwie, bo jeżeli wartości $\lambda = \alpha$ i $\lambda_1 = \beta$ czynią zadość równaniom (20 bis) i (22 bis), to z powodu symetrii tych równań względem λ i λ_1 , czynią im także zadość wartości $\lambda = \beta$ i $\lambda_1 = \alpha$. Ale obie te elipsoidy są identyczne co do kształtu, tylko inaczej zorientowane: podczas gdy najdłuższa oś jednej ma ten sam kierunek, co oś x .

to najdłuższa oś drugiej ma ten sam kierunek, co oś y . Oczywiście należy uważać te dwie identyczne elipsoidy za jedną. Dowodu na twierdzenie, że danej wartości na $\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho}$ odpowiada tylko jedna elipsoida Jacobiego, nie podajemy, bo jest nazbyt długi.

W przypadku ziemi

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho} = 0,0023 \dots,$$

więc wartość tej stałej jest dużo mniejsza od granicznej wartości 0,187... Wynika stąd, że przy tej prędkości obrotu, którą posiada ziemia, oprócz elipsoid obrotowych: planetarnej i Maclaurina może istnieć także elipsoida Jacobiego. Kwestyą, w jakich warunkach elipsoida Jacobiego może być figurą równowagi stałej, zajmiemy się później, teraz zaś przejdziemy do pierścienia.

8. Pierścień.

Istnienie pierścieni Saturna naprowadza na myśl, że pierścień może być figurą równowagi Laplace zajmował się tą kwestyą, a ponieważ chodziło mu właśnie o pierścienie Saturna, więc zakładał, że w środku pierścienia znajduje się masa przyciągająca. W. Thomson (późniejszy lord Kelvin) podał bez dowodu twierdzenie, że samotny pierścień, t. j. pierścień bez środkowej, przyciągającej masy może być figurą równowagi. Dowód podał w dwa lata później Poincaré w swej sławnej rozprawie „Sur l'équilibre d'une masse fluide, animée d'un mouvement de rotation...”. Samotnym pierścieniem zajmował się także Basset w r. 1889. Zadanie Laplace'a podjęła na nowo Zofia Kowalewska w r. 1885. Analiza jej jest znacznie dokładniejsza niż analiza Laplace'a.

H. Poincaré przyjął za podstawę analizy nie wyłożoną tu w § 2 zasadę, że powierzchnia cieczy musi być powierzchnią ekwipotencyjalną, lecz równoważną jej zasadę, że energia potencjalna układu znajdującego się w równowadze musi czynić zadość warunkowi minimum.

Energia potencjalna elementu cieczy o masie dm składa się z dwóch części: jednej zależnej od potencjału przyciągania i drugiej zależnej od potencjału siły odśrodkowej. Jeżeli oznaczymy potencjał przyciągania całego układu na jednostkę masy przez V ,

prędkość kątową obrotu przez ω a odległość od osi obrotu przez $\sqrt{x^2 + y^2}$, to pierwsza część jest

$$dm \cdot V$$

a druga

$$dm \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2),$$

przyczem

$$V = k^2 \int \frac{dm'}{r}.$$

Znak \int oznacza, jak zwykle, całkowanie po całej objętości ciekłego ciała a r oznacza odległość elementu o masie dm' od uważanego elementu o masie dm . Tedy energia potencjalna całego układu, którą oznaczamy przez U , będzie

$$(34) \quad U = k^2 \iint \frac{dm dm'}{r} + \omega^2 \frac{1}{2} I,$$

gdzie

$$I = \int dm (x^2 + y^2),$$

oznacza moment bezwładności całego układu względem osi obrotu. Warunek równowagi wyraża się wzorem

$$(35) \quad \delta U = 0.$$

Pomimo tego, że analiza oparta na zasadzie minimum energii potencjalnej przedstawia rozliczne udogodnienia, pozostają wielkie trudności do pokonania. Żeby je ominąć, trzeba uciec się do ułatwiających założeń. Trzeba założyć, że rozmiary poprzecznego przekroju pierścienia są małe w porównaniu z jego średnicą, wtedy bowiem można pomijać kwadraty, iloczyny i wyższe potęgi stosunków pomiędzy pozostałymi parametrami a średnicą pierścienia i t. d. Tak samo trzeba założyć, że krzywa ograniczająca poprzeczny przekrój nie różni się zbytnio od koła.

Gdy pierścień jest samotny (t. j. gdy niema masy środkowej), to okazuje się, że poprzeczny przekrój ma kształt podobny do elipsy, której większa oś leży w płaszczyźnie równika pierścienia. Im prędkość obrotu jest większa, tem mimośród elipsy jest większy [albo, co na jedno wychodzi, tem spłaszczenie jest większe]; ale nie wiadomo, czy mimośród powiększa się nieograniczenie razem

z prędkością obrotu, bo wzór, na którym opiera się to twierdzenie, został wyprowadzony przy założeniu, że mimośród jest wogóle mały. Dalej okazuje się, że każdej prędkości obrotu odpowiada tylko jeden pierścień czyniący zadość warunkom równowagi, następnie okazuje się, że przy danej masie i gęstości poprzeczny przekrój pierścienia wzrasta razem z prędkością obrotu, ale tylko dopóty, dopóki stosunek $\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho}$ nie przekroczy granicy 0,949...

bo przy dalszym wzroście prędkości obrotu poprzeczny przekrój już zmniejsza się. Możemy zatem powiedzieć, że przy danej masie i gęstości pomiędzy granicami

$$0 < \frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho} < 0,949\dots$$

większej prędkości obrotu odpowiada pierścień mniejszy a grubszy, zaś powyżej

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho} = 0,949\dots$$

większej prędkości obrotu odpowiada pierścień większy a cieńszy. Spostrzegamy, że granica 0,949... jest w porównaniu z temi, które dotąd spotykaliśmy [0,22467..., 0,187...], bardzo wysoka.

Powyższe twierdzenie jest ograniczone w swej doniosłości przez to, że bądź co bądź zostało wyprowadzone nie ze ścisłych, a z przybliżonych wzorów; wszak na początku założyliśmy, że pierścień jest duży a cienki i odpowiednio do tego założenia pominęliśmy różne wielkości jako małe; gdybyśmy zaś założyli, że pierścień jest mały a gruby, to te same wielkości nie byłyby małe, ale porównywalne z temi, które pozostały w równaniach. Zresztą mniejsza o to: zobaczymy w dalszym ciągu, że pierścień nie jest figurą równowagi stałej, przeto teoria jego przedstawia, jeżeli wolno tak wyrazić się, czysto akademicki interes.

Tak Laplace, jak Z. Kowalewska rozpatrując zadanie o równowadze pierścienia, w środku którego znajduje się przyciągająca masa, wyszli ze zasady, że powierzchnia pierścienia jest powierzchnią ekwipotencyjalną. Zatem wzory ich na warunek równowagi wyglądają tak samo, jak wzór (4): trzeba tylko do potencyału przyciągania samego pierścienia dodać potencyał przyciągania środkowego ciała, zamiast którego można postawić potencyał

punktu o masie równej masie środkowego ciała. Ponieważ pierścień jest figurą obrotową, więc dość jest napisać równanie warunkowe dla jednego przekroju. Jeżeli założymy, że środek współrzędnych znajduje się w centralnym przyciągającym punkcie, że płaszczyzna xy jest płaszczyzną równikową a oś z osią obrotu, to np. dla przekroju w płaszczyźnie yz będziemy mieli równanie

$$(36) \quad \frac{k^2 M_1}{\sqrt{y^2 + z^2}} + V + \frac{1}{2} \omega^2 \rho y^2 = C.$$

W równaniu tem V oznacza potencjał przyciągania samego pierścienia, M_1 masę centralnego ciała, y i z są to współrzędne punktu powierzchni pierścienia a C , jak zwykle, stała. Trudności, które napotyka się w tem zadaniu, są jeszcze większe niż w zadaniu Poincarégo. Tłómaczy się to obecnością centralnego ciała. Być jednak może, że gdyby pójść tą samą drogą, co Poincaré, to możnaby uzyskać pewne ułatwienia. Tymczasem z powodu trudności nie można posunąć się w dyskusyi tak daleko, jak w tamtem zadaniu. Jednakże Kowalewska okazała: 1) że warunek równowagi może być spełniony przynajmniej przybliżenie; 2) że poprzeczny przekrój pierścienia posiada symetrię tylko względem płaszczyzny równika, ma bowiem kształt jajowaty. Inaczej mówiąc, krzywizna powierzchni pierścienia jest po stronie zwróconej do ciała środkowego inna, niż po stronie przeciwnej. Właściwie główny rezultat pracy Kowalewskiej polega na wykryciu tej dysymetrii, bo już Laplace wykazał, że pierścień może być figurą równowagi w razie, gdy w środku jego znajduje się ciało przyciągające, ale ponieważ posunął się w przybliżeniach mniej daleko, niż Kowalewska, więc owej dysymetrii nie znalazł. Zresztą Kowalewska ponownie znalazła rezultat, który wykrył już Laplace, mianowicie, że masa ciała centralnego nie powinna przekraczać pewnej granicy, że powinno być

$$M_1 < 4\pi \times 0,0543 \dots$$

Aby zrozumieć istotne znaczenie tej nierówności należy sobie uprzytomnić to, że gęstość pierścienia została przyjęta za jedność oraz, że za jednostkę długości przyjęto R , t. j. odległość środka południkowego przecięcia pierścienia od środka centralnego ciała.

Jeżeli przywrócimy ogólne, nieokreślone jednostki długości i gęstości, to powyższa nierówność przybierze kształt:

$$\frac{M_1}{4\pi R^3} \cdot \frac{1}{\rho} < 0,0543,$$

gdzie ρ oznacza gęstość pierścienia.

Podobnie jak pierścień izolowany, także pierścień z centralną masą jest figurą równowagi niestalej. Wnosimy stąd, że pierścienie Saturna nie mogą być ciałami ciągłymi, gazowymi, lub ciekłymi, nie mogą też być ciałami ciągłymi, stałymi, bo musiałyby wtedy być zrobione z materiału posiadającego niesłychaną wytrzymałość. Być może, że składają się one z mnóstwa drobnych ciałek, jak to przypuszczał już Cassini. Badania spektroskopiczne potwierdzają to przypuszczenie. W ostatnich czasach Birkeland postawił nawet hipotezę, że pierścienie Saturna są zjawiskiem magnetoelektrycznym.

9. Inne figury równowagi.

Wspomnieliśmy już poprzednio, że figury równowagi trzeba poprostu odgadywać. Odgadnięcie elipsoid obrotowych i pierścieni właściwie tak trudnem nie było. Na elipsoidy obrotowe naprowadza kształt poziomu morza. Wprawdzie ziemia nie jest ciałem jednorodnem, ciekłem; ale fakt, że powierzchnia morza ma przybliżenie kształt elipsoidy obrotowej, naprowadza na pytanie, czy ciało całkowicie ciekłe nie powinno mieć elipsoidalnego kształtu. Skoro zaś postawiono sobie to pytanie, to naturalnym biegiem rzeczy, poprostu idąc w kierunku najmniejszego oporu otrzymano najpierw rozwiązanie dla cieczy jednorodnej, bo wtedy analityczne zadanie przedstawia najmniejsze trudności. Tak samo na pierścień naprowadziło istnienie pierścieni Saturna, ale na inne figury równowagi natura sama nie naprowadza. To też na odkrycie, że nietylko elipsoidy obrotowe, ale także niektóre trójosiowe mogą być figurami równowagi, czekano przeszło 150 lat od Newtona do Jacobiego. Jeżeli na odkrycie innych figur równowagi czekano tylko pół wieku, bo tylko od Jacobiego (1834 r.) do (1885 r.), to zawdzięczamy to jedynie geniuszowi Poincarégo. Poincaré okazał że można owe odgadywanie usystematyzować, że można drogą dedukcyi dojść do poznania nowych figur równowagi. Jednocześnie Poincaré okazał, że

istnieje nieskończona ilość figur równowagi, z których atoli większość, raczej ogół z nielicznymi wyjątkami, są to figury równowagi nie-stałej. Jedną z odkrytych przez się figur, figurą gruszkowatą, która wydała się dla kosmogonicznych teorii szczególnie ważną, Poincaré zajmował się specjalnie, a kwestya, czy ta figura jest figurą równowagi stałej, czy niestałej wywołała obszerną, dotąd niezakończoną dyskusję. Do tej figury gruszkowatej powrócimy nieco dalej, bo wprzód zajmijmy się wykładem zasad teorii Poincarégo. Żeby je dobrze zrozumieć, musimy przypomnieć sobie niektóre poprzednio znalezione rezultaty.

Napiszmy dla krótkości

$$(37) \quad \frac{\omega^2}{2\pi k^2 q} = f.$$

Znaleźliśmy, że dopóki $f < 0,187\dots$, to figurą równowagi może być: 1) elipsoida planetarna, 2) elipsoida Maclaurina i 3) elipsoida Jacobiego. Każdej wartości parametru odpowiada jedna elipsoida planetarna, jedna Maclaurina i jedna Jacobiego. Gdy f zmienia się w sposób ciągły, to wymiary tych elipsoid zmieniają się także w sposób ciągły. Możemy więc powiedzieć, że pomiędzy $f = 0$ a $f = 0,187\dots$ istnieją trzy serye figur równowagi. Lecz skoro f przekroczy granicę $0,187\dots$ to elipsoidy Jacobiego stają się niemożliwe: ich serya urywa się, pozostają tylko elipsoidy obrotowe (serye 1 i 2). Zresztą te ostatnie także stają się niemożliwe, gdy f przekroczy granicę $0,22467\dots$. Ale rozważmy, w jaki sposób zakończyła się serya elipsoid Jacobiego?

Oto gdy f jest bardzo małe, to elipsoida Jacobiego jest bardzo wydłużona: wygląda jak igła. W miarę tego jak f wzrasta, elipsoida Jacobiego staje się coraz to więcej podobną do elipsoidy obrotowej, stosunki pomiędzy jej osią obrotu a dwoma pozostałymi zbliżają się do siebie, wreszcie gdy $f = 0,187\dots$, elipsoida Jacobiego przechodzi w elipsoidę obrotową planetarną. Zatem elipsoida obrotowa odpowiadająca wartości $h = 0,187\dots$ jest wspólna seryom 1 i 3. Tę wspólną elipsoidę Poincaré nazwał elipsoidą E_1 ¹⁾.

Jeżeli wśród tych niewielu seryi figur równowagi, które dotychczas poznaliśmy, są takie przejścia, jeżeli istnieją figury wspólne

¹⁾ Spłaszczenie jej jest $0,4173\dots$, zaś stosunek między osią obrotu a równikową $0,5827\dots$

dwóm seryom, to dlaczego zjawisko to nie miałyby być bardziej powszechnem? Zasadnicza idea teoryi Poincarégo polega właśnie na przypuszczeniu, że obok izolowanych, samotnych seryj figur równowagi — taką izolowaną seryą jest naprzykład serya pierścieni, — istnieją inne łączące się ze sobą. W przenośni można powiedzieć, że niektóre serye figur równowagi przecinają się ze sobą. Można zatem przez pośrednictwo figur wspólnych dwóm seryom, jak np. elipsoida E_1 , przejść od jednej seryi do drugiej. Ale po czem poznać, że pewna figura jest wspólna dwóm seryom i jak rozpoznać kształt figur tamtej drugiej seryi? Jeżeli trzeba znowu odgadywać jedno i drugie, to cóż zyskamy przez wprowadzenie pojęcia łączności między oddzielnymi seryami? Wszak np. elipsoida obrotowa E_1 była znana oddawna, ale dopiero dzięki odkryciu Jacobiego dowiedziano się, że ta elipsoida należy jednocześnie do seryi elipsoid Jacobiego. Otóż Poincaré wskazał, poczem można rozpoznać, że ta a nie inna figura jest wspólna dwóm seryom [figury takie Poincaré nazwał „*figures de bifurcation*“] i jak przez jej pośrednictwo przejść od jednej seryi do drugiej. Kryterjum jest w ścisłym związku ze stałością równowagi.

10. Stałość równowagi. Teorya Poincarégo.

Mówimy, że pewien układ jest w równowadze, gdy jego energia potencjalna czyni zadość warunkowi *minimum-maximum*, albowiem wtedy nie działają żadne siły i układ może pozostać niezmiennym. Jeżeli więc oznaczymy energię potencjalną układu przez P a najogólniejsze współrzędne, od których zależy jego kształt i stan, przez $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, to w stanie równowagi

$$\delta P = \frac{\partial P}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial P}{\partial q_n} \delta q_n = 0. \quad (38)$$

Jeżeli wszystkie współrzędne q_1, q_2, \dots, q_n są od siebie niezależne, to równanie powyższe rozpada się na n równań:

$$\frac{\partial P}{\partial q_1} = \frac{\partial P}{\partial q_2} = \dots = \frac{\partial P}{\partial q_n} = 0; \quad (39)$$

jeżeli zaś pomiędzy q_1, q_2, \dots, q_n istnieją pewne związki, to równanie wyrażające warunek *minimum* znowu rozpada się na n równań podobnych do równań (39), ale zawierających także cząstkowe pocho-

dne funkceji wyrażających związki między współrzędnemi. W każdym więc razie otrzymamy n równań, z których można wyznaczyć te wartości współrzędnych, które czynią zadość warunkowi *minimum-maximum*.

Równowaga układu jest stała, jeżeli jego energia potencjalna właśnie osiąga *minimum*, t. j. jeżeli przy $\delta P = 0$ jednocześnie

$$(40) \quad \delta^2 P > 0.$$

Załóżmy, że ten ostatni warunek jest spełniony i wyobraźmy sobie, że nie zmieniając momentu obrotu ωI przeprowadziliśmy układ do jakiegokolwiek sąsiedniej konfiguracyi. Ta sąsiednia konfiguracya nie jest konfiguracją równowagi¹⁾, więc skoro układ znajdzie się w niej, to natychmiast pojawią się siły odkształcające. Ponieważ w pierwotnej konfiguracyi energia potencjalna była najmniejszą, to w nowej jest z konieczności większa od pierwotnej i wszystkie siły są skierowane ku dawnej konfiguracyi, wszystkie dążą ku temu, aby ją przywrócić. Inna rzecz, że układ nasz może będzie oscylować dokoła konfiguracyi równowagi, bo skoro raz rozpocznie się ruch, to musi trwać dopóty, dopóki tarcia nie zniweczą jego cynetycznej energii. Dla nas ważnem jest tylko to, że układ musi oscylować naokoło konfiguracyi równowagi stałej.

Warunek (40) musi być spełniony bezwzględnie, to jest dla wszelkich (małych) wartości przyrostów $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$. Jeżeli można znaleźć bodaj jeden taki układ wartości na przyrosty (np. układ, w którym wszystkie przyrosty δq są równe zeru, albo znikome, tylko jeden ma trochę większą wartość), przy którym $\delta^2 P$ staje się odjemne, to równowaga nie będzie stałą, bo wprawdzie nie po wszelkich, ale po niektórych odkształceniach układ nie powróci do pierwotnej konfiguracyi.

Napiszmy teraz wyrażenie drugiego przyrostu „*explicite*“. Dla prostoty założymy, że wszystkie współrzędne q_1, q_2, \dots, q_n są od siebie niezależne. Gdyby zaś niektóre współrzędne były od innych zależne, to wyrugujemy je za pomocą związków wyrażających ową zależność tak, aby pozostały tylko niezależne współrzędne. Otrzymamy:

¹⁾ Przypadek, gdy sąsiednia konfiguracya jest także konfiguracją równowagi, jest wyjątkowy. Nie potrzebujemy go tu rozważać. Tak samo nie potrzebujemy rozważać przypadku, gdy $\delta^2 P$ znika razem z δP .

$$\delta^2 P = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 P}{\partial q_1^2} \delta q_1^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2^2} \delta q_2^2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q_2} \delta q_1 \delta q_2 + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q_3} \delta q_1 \delta q_3 + \dots + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q_3} \delta q_2 \delta q_3 + \dots \right] \quad (41)$$

Aby upewnić się, że figurująca po prawej stronie forma kwadratowa jest stale dodatnia, trzeba przekształcić ją na sumę kwadratów. Metod ku temu służących nie potrzebujemy tłumaczyć, bo wykład ich znajduje się w każdym podręczniku algebry wyższej w rozdziale o formach kwadratowych. Załóżmy, że nowe współrzędne, przy których $\delta^2 P$ przechodzi w sumę kwadratów, są: h_1, h_2, \dots, h_n . Po przekształceniu otrzymamy

$$\delta^2 P = \frac{1}{2} [H_1 \delta h_1^2 + H_2 \delta h_2^2 + \dots + H_n \delta h_n^2], \quad (42)$$

gdzie

$$H_1 = \frac{\partial^2 P}{\partial h_1^2}, \quad H_2 = \frac{\partial^2 P}{\partial h_2^2} \dots \text{ i t. d.} \quad (43)$$

Aby $\delta^2 P$ mogło pozostawać dodatniem przy wszelkich wartościach przyrostów $\delta h_1, \delta h_2, \dots, \delta h_n$, trzeba aby wszystkie współczynniki H były dodatnie. Od ich znaków zależy stałość równowagi. Z tego powodu Poincaré nazwał je współczynnikami stałości [*coefficients de stabilité*].

Zanim pójdziemy dalej, wpieryw musimy omówić pewną trudność, która powstaje stąd, że, n t. j. liczba parametrów h [względnie q] jest pospolicie nieskończona. Zdawałoby się, że przynajmniej w niektórych przypadkach, np. w przypadku elipsoid, n mogłoby być liczbą skończoną. Wszak elipsoidalna jest zupełnie określona, skoro dane są rozmiary jej trzech osi. Gdy jednak zastanowimy się nad tem bliżej, to spostrzeżemy, że nawet w przypadku elipsoidy liczba parametrów, od których zależy energia potencjalna układu, musi być nieskończona. W istocie, jeżeli chcemy wypróbować stałość równowagi elipsoidy, to nie możemy ograniczyć się do odkształceń, w których tylko rozmiary podlegają zmianom, a kształt elipsoidalny jest zachowany; musimy wypróbować stałość na wszystkie dające się pomyśleć odkształcenia, wtedy zaś musimy wprowadzić nieskończoną ilość parametrów h . Wynika stąd niemała trudność, bo przy przekształceniu formy kwadratowej (41) na sumę kwadratów (42) trzeba rozwiązać równanie algebraiczne n -tego stopnia. Co począć z tem równaniem? Na szczęście można obejść trudność

w następujący sposób. Istnieją dla kuli funkcyje sferyczne, dla elipsoid funkcyje Lamégo, za pomocą których można wyrazić każde dowolne odkształcenie, a które mają tę własność, że wyrażenie na $\delta^2 P$ odrazu przedstawia się w postaci sumy kwadratów. Używając tych funkcyi można przeto obejść się bez przekształcenia formy (41) we formę (42) i „eo ipso“ można obejść się bez rozwiązania równania algebraicznego nieskończenie wysokiego stopnia. Co więcej, K. Schwarzschild okazał, że dla innych figur można utworzyć „funkcyje ortogonalne“ mające takie same własności jak funkcyje sferyczne i Lamégo.

Odkształcenia, którym poddajemy figury równowagi, są dowolne co do rodzaju, ale ograniczone co do rozmiarów, albowiem cała nasza teoria opiera się na założeniu, że przyrosty δq , względnie δh są o tyle małe, że wolno urwać rozwinięcie P w szereg Taylora na drugim przyroście. Gdyby przyrosty współrzędnych nie były małe, to nie możnaby ze znaku drugiego przyrostu wnioskować o tem, czy energia potencjalna w nowej konfiguracji jest większa, czy mniejsza, niż w konfiguracji pierwotnej, bo to zależałoby nietylko od drugiego, ale także od dalszych przyrostów.

Wróćmy teraz do właściwego naszego tematu. Chodzi nam o to, poczem poznać figurę bifurkacyjną, t. j. taką, w której rozpatrywana serya figur równowagi krzyżuje się z inną seryą. Założmy, że rozpatrywana serya figur równowagi jest uporządkowana tak, jak u Poincarégo, wedle odpowiednich wartości momentu obrotu ωI , gdzie I oznacza moment bezwładności względem osi obrotu, albowiem ten porządek jest z pewnych względów najdogodniejszy. Założmy, że w rozpatrywanej przez nas seryi równowaga jest stała, że zatem wszystkie współczynniki H są dodatnie. W miarę tego, jak przechodzimy od jednej wartości momentu obrotu do drugiej i od jednej figury do drugiej, pierwiastki równań (39), t. j. parametry $h_1, h_2 \dots$ i współczynniki H zmieniają się. Otóż jeżeli u figury B zmienia znak który ze współczynników, np. współczynnik H_1 , to rozpatrywana serya przestaje być seryą równowagi stałej, dalsze figury poza figurą B już nie są stałe. Ale to nie znaczy, aby przy dalszej zmianie momentu obrotu ciecz nie mogła przybrać figury równowagi stałej (choć i taki przypadek może się zdarzyć), — to znaczy, że przy dalszej zmianie momentu obrotu ciecz przybiera figurę równowagi stałej należącą nie do rozpatrywanej seryi, a do innej seryi figur stałych. Przejście powinno

być ciągle, więc we figurze B krzyżują się dwie serye figur równowagi; figura B jest „figurą bifurkacyjną“. Aż do figury B pierwsza serya jest seryą równowagi stałej, odtąd własność ta przechodzi na nową seryę. Co więcej, ponieważ — wedle założenia — u figury bifurkacyjnej zmienia znak współczynnik H_k , więc po odkształceniach, w których $\delta h_k = 0$, przyrost $\delta^2 P$ jest dodatni i ciecz powraca do pierwotnego kształtu, natomiast po odkształceniu, w którym inne δh są równe zeru a $\delta h_k \geq 0$, przyrost $\delta^2 P$ jest ujemny i ciecz do dawnego kształtu powrócić nie może. Zatem przejście do nowej seryi odbywa się właśnie przez odkształcenie odpowiadające zmianie współrzędnej h_k i badając to odkształcenie możemy rozpoznać kształt figur nowej seryi.

Weźmy dla przykładu elipsoidy obrotowe. Porządkujemy je na wzór Poincarégo wedle wartości momentu obrotu. Wtedy elipsoidy planetarne i elipsoidy Maclaurina utworzą jeden szereg, bo przy tej samej masie momenty obrotu elipsoid Maclaurina są większe niż momenty obrotu elipsoid planetarnych i można uważać szereg elipsoid Maclaurina za przedłużenie szeregu elipsoid planetarnych. W tym nowym szeregu elipsoidy planetarne następują po sobie w tym samym porządku, co przy uporządkowaniu wedle odpowiednich wartości ω lub f , t. j. większe momenty obrotu odpowiadają większym prędkościom obrotu; natomiast elipsoidy Maclaurina następują po sobie w odwrotnym porządku, bo u nich większym momentom obrotu odpowiadają coraz to mniejsze prędkości obrotu (coraz to mniejsze f). Zatem w tem nowym uporządkowaniu szereg elipsoid obrotowych zaczyna się kulą ($\omega = 0$, $f = 0$, $\omega I = 0$) i postępuje ku coraz to więcej spłaszczonym elipsoidom planetarnym aż do elipsoidy odpowiadającej $f = 0,22467\dots^1$); odtąd idą elipsoidy Maclaurina coraz to więcej spłaszczone aż do nieskończenie cienkich krążków, dla których ω i f są znikome, ale ωI nieskończenie wielkie.

Rozpatrzmy ten szereg poczynając od kuli. Kula jest figurą równowagi stałej, wszystkie jej współczynniki H są dodatnie; następujące po kuli coraz to więcej spłaszczone elipsoidy planetarne są również figurami stałej równowagi, ich współczynniki H są wszystkie dodatnie, ale coraz to mniejsze. Jeżeli uporządkujemy

¹⁾ Spłaszczenie tej elipsoidy jest 0,6323... a stosunek mniejszej osi do większej 0,3676...

współczynniki H wedle ich wielkości, to spostrzeżemy, że najpierw zbliża się do zera najmniejszy z nich H_1 a gdy dojdziemy do elipsoidy E_1 ¹⁾, to H_1 zmieni znak. Na tej figurze serya elipsoid obrotowych traci stałość: wszystkie planetarne elipsoidy poza E_1 i wszystkie bez wyjątku elipsoidy Maclaurina są niestale. Ale elipsoidal E_1 należy jednocześnie do seryi elipsoid Jacobiego, jest to więc ta elipsoidal bifurkacyjna, w której serya elipsoid obrotowych krzyżuje się ze seryą elipsoid Jacobiego.

Pozostaniemy jeszcze przez chwilę przy elipsoidach obrotowych. Współczynniki H dla tej seryi mają stosunkowo dość prosty kształt; jeżeli początkowo uszykujemy je wedle wielkości, poczynając od najmniejszego, to zmieniają one znak w tym samym porządku: najpierw zmienia znak H_1 , potem H_2 ... i t. d. Każda elipsoidal, u której jedno z H zmienia znak, jest „bifurkacyjną“, t. j. w każdej z nich serya elipsoid obrotowych krzyżuje się z nową seryą figur równowagi, ale wszystkie te nowe serye oprócz pierwszej, t. j. oprócz elipsoid Jacobiego są niestale, bo serya elipsoid obrotowych utraciwszy stałość na figurze E_1 już im tej cechy oddać nie może; przeciwnie w miarę tego, jak coraz to nowe współczynniki H zmieniają znak, serya ta staje się coraz to więcej niestalą²⁾. Z tego powodu wszystkie dalsze serye, krzyżujące się ze seryą elipsoid obrotowych, nie przedstawiają wielkiego interesu. Jednakże Poincaré zbadał je pobieżnie i okazał, że to są figury mające pewną ilość płaszczyzn symetrii przechodzących przez oś obrotu, ilość dla coraz to dalszych seryi coraz to większą. Są to zatem figury, których przekroje równikowe mają kształt astroid.

Przejdźmy teraz do elipsoid Jacobiego, których serya skrzyżowała się ze seryą elipsoid obrotowych w elipsoidzie E_1 . Obie gałęzie tej seryi zawierają figury równowagi stałej, bo obie odpowiadają większym momentom obrotu niż moment, któremu odpowiada elipsoidal E_1 . Podobnie, jak u elipsoid Maclaurina, większe momenty obrotu odpowiadają mniejszym prędkościom obrotu i mniejszym f , bo przy mniejszej prędkości obrotu elipsoidal Jacobiego staje się coraz bardziej wydłużoną. Zresztą obie gałęzie zawierają te same figury; tylko naj-

¹⁾ Spłaszczenie elipsoidy E_1 było podane wyżej; odpowiednie $f = 0,187$...

²⁾ Tu należy zauważyć, że współczynniki H elipsoid obrotowych są tak ukształtowane, iż zmieniają znak tylko raz; skoro więc przejdą od wartości dodatniej do ujemnej, to na zawsze pozostają ujemnymi.

dłuższe osie figur jednej gałęzi tworzą z najdłuższymi osiami figur drugiej gałęzi kąt prosty [por. koniec § 7]. — W obu gałęziach wszystkie figury bliższe figury E_1 są zupełnie stałe, wszystkie ich współczynniki H są dodatnie. Deformacja, dla której elipsoida E_1 jest niestała, polegająca na wydłużeniu jednej z osi równikowych, jest nieszkodliwa dla elipsoida Jacobiego, bo właśnie przez tę deformację elipsoida obrotowa przechodzi w elipsoidę trójosiową. Naturalnie pierwsze, t. j. najbliższe do elipsoidy E_1 , elipsoidy Jacobiego są mało wydłużone, współczynniki H są wszystkie dodatnie, ale w miarę tego, jak posuwamy się ku coraz to większym momentom obrotu, wydłużenie powiększa się a współczynniki H zmniejszają się i po kolei przechodzą do wartości ujemnych. W chwili, gdy pierwszy z nich przechodzi przez zero (odpowiednią figurę Poincaré nazwał elipsoidą E_2), elipsoidy Jacobiego tracą swoją stałość a jednocześnie serya ich krzyżuje się z nową seryą figur równowagi; w chwili, gdy drugi współczynnik H przechodzi przez zero, następuje skrzyżowanie z drugą seryą nowych figur równowagi i t. d. i t. d. . . .

Figury pierwszej seryi mają kształt gruszki: trójosiowa elipsoida Jacobiego przechodzi we figurę, w której można rozróżnić dwa wydęcia: większe, przez które przechodzi oś obrotu i mniejsze. Wydęcia są połączone szyją zlekka zwężoną. Figury drugiej seryi mają kształt baryłkowaty: rozróżniamy tu środkowe wydęcie, przez które przechodzi oś obrotu, a po obu stronach dwa mniejsze symetrycznie położone na obu końcach najdłuższej osi i połączone z centralnem zlekka zwężonymi szyjami. Rzecz jasna, że druga, trzecia i dalsze serye figur równowagi krzyżujące się ze seryą elipsoida Jacobiego nie są figurami równowagi stałej, bo skądby mogły nabyć tę własność, gdy elipsoidy Jacobiego począwszy od elipsoidy E_2 już jej nie posiadają; ale możebnem jest, że pierwsza serya krzyżująca się z elipsoidami Jacobiego we figurze E_2 nabywa stałość utraconą przez tamte. Poincaré sądził, że tak jest, t. j. sądził, że owe figury kształtem podobne do gruszki są stałe, ale K. Schwarzschild wykazał, że obie gałęzie seryi figur gruszkowatych idą w stronę zmniejszających się momentów obrotu, a więc wprost przeciwnie jak gałęzie seryi elipsoida Jacobiego i w ten sposób zakwestyonował ich stałość, zaś A. Liapunow nawet podał bezpośredni dowód niestałości. Wprawdzie G. H. Darwin starał się wykazać, że pomimo tego

figury gruszkowate są stałe a dyskusya, która się stąd wywiązała, jeszcze nie jest zakończona, ale wedle zdania piszącego te słowa zakończy się prawdopodobnie na niekorzyść stałości.

Stalość figur gruszkowatych (*pyriformes* — jak je nazwał Poincaré) dlatego wzbudziła takie zainteresowanie, że wydawało się, iż Poincaré odkrył sposób powstawania gwiazd podwójnych i księżyców. G. H. Darwin postawił nawet hipotezę, że księżyc ziemi poprostu oddzielił się od niej: najpierw pierwotna masa przybrała kształt gruszkowaty, potem szyja łącząca oba wydęcia stopniowo zwężała się, aż w końcu nastąpiło rozerwanie na dwa ciała: większe — Ziemię i mniejsze — Księżyc.

Swoją drogą nie należy sądzić, aby przez dowód niestałości figur gruszkowatych hipoteza rozerwania się kosmicznego ciała została zupełnie obaloną. Rozerwanie mogło pomimo tego nastąpić, tylko nie przez powolną, stopniową ewolucję, a przez nagły kataklizm, którego teoria figur równowagi, jako teoria statyczna, objąć nie może. Zresztą należy pamiętać także o tem, że cała teoria Poincarégo dotyczy ciał ciekłych, jednorodnych; tymczasem ciała kosmiczne, — przynajmniej większe, — są z pewnością niejednorodne: gęstość ich wzrasta od powierzchni ku środkowi.

11. Stałość pierścieni.

W poprzednim paragrafie nie natrafiłszy na pierścienie. Jak się zdaje, ani serya elipsoid obrotowych, ani serya elipsoid Jacobiego nigdzie nie krzyżuje się ze seryą pierścieni. Ponieważ niema łączności między elipsoidami a pierścieniami, więc trzeba badać stałość tych ostatnich zupełnie niezależnie od pierwszych. Ale to badanie przedstawia ogromne trudności. Poincaré kilkakrotnie powiada, że pierścienie są figurami niestałymi, ale dowodu nie podaje. J. C. Maxwell badał stałość w przypadku, gdy w środku pierścienia znajduje się ciało przyciągające. Metoda Maxwella jest zupełnie odmienna od metody Poincarégo i niezupełnie ścisła, ale dotąd nic lepszego nie obmyślono. Zakłada on, że po pierścieniu przebiegają fale, bada jego zachowanie się i wykazuje, że muszą być spełnione pewne warunki prowadzące do sprzecznych wniosków: z jednych warunków wynika, że gęstość pierścienia musi być bardzo mała, z drugich zaś, że musi być stosunkowo znaczna. Ostatecznie przychodzi do wniosku, że te sprzeczne

warunki dadzą pogodzić się tylko wtedy, gdy przypuścimy, że pierścień składa się z drobnych ciałek i to niezbyt gęsto rozsianych. Wniosek ten znajduje pewne potwierdzenie w rezultatach, do których doszedł E. Roche w swych badaniach nad stałością ciekłego satelity.

12. Ciekły satelita. Teorya E. Roche'a.

E. Roche zakłada, że satelita jest ciekły, że porusza się po kole dokoła planety mało spłaszczonej, wreszcie zakłada, że podobnie, jak nasz księżyc, wciąż zwraca tę samą stronę ku planecie. Oczywiście jest rzeczą, że w tych warunkach figurą równowagi dla satelity musi być elipsoida trójosiowa, której główna oś jest skierowana ku planecie. Obserwacye nad naszym księżycem dowodzą, że choć z pewnością nie jest cały ciekły, jednak ma kształt czyniący zadość temu postulatowi, tylko ponieważ odległość jego od ziemi jest stosunkowo znaczna, więc oś skierowana ku ziemi jest tylko bardzo nieznacznie dłuższa od pozostałych. Właściwie może być dwie elipsoidy trójosiowe: jedna mało, druga bardzo wydłużona. Na odległości naszego księżyca i przy jego orbitalnej prędkości pierwsza mało różni się od kuli, druga zaś wygląda jak cienka igła. Ale ta druga wydłużona figura jest niestała, więc niema potrzeby zastanawiać się nad nią; należy rozważyć tylko figury mało wydłużone. Wyobraźmy sobie chwilowo, że odległość księżyca zmniejsza się a prędkość jego obrotu naokoło własnej osi zwiększa się. Właściwie te dwa założenia są ściśle ze sobą związane, bo przyjęliśmy, że czas obrotu i czas obiegu są jednakowe, a wedle trzeciego prawa Keplera czas obiegu jest tem krótszy, im odległość mniejsza. Otóż gdy odległość zmniejsza się, to owa stała, mało wydłużona elipsoida coraz bardziej wydłuża się, zaś tamta niestała, mocno wydłużona skraca się, aż wreszcie przy prędkości obrotu, która określa się z równania

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho} = 0,046 \dots$$

obie figury ¹⁾ zlewają się ze sobą. Po przekroczeniu prędkości obrotu

¹⁾ K. Schwarzschild, który badał stałość elipsoid Roche'a metodą Poincarégo, nazwał tę graniczną figurę E_0 . Ciekawą jest rzeczą, że niektóre

wyznaczonej przez powyższą granicę, równowaga jest zupełnie niemożliwa. Odległość księżycy, odpowiadająca owej granicznej prędkości kątowej, określa się wzorem

$$D = 2,44 R \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_m}}$$

w którym D oznacza szukaną odległość, R średni promień planety, ρ_p gęstość planety, ρ_m gęstość księżycy. Zastosujmy ten wzór do ziemi i jej księżycy. Popelnimy w ten sposób pewną extrapolację, bo teoria zakłada, że ów ciekły księżyc jest ciałem jednorodnym, a nasz księżyc jest prawdopodobnie ciałem niejednorodnym, ale to nic nie szkodzi, bo chodzi tylko o przykład.

Kładąc

$$\rho_p = 5,55 \quad \rho_m = 3,44$$

znajdziemy

$$D = 2,86 \dots R.$$

Tedy na odległości mniejszej niż $2,86 \dots R$ księżyc ciekły nie mógłby istnieć, mógłby istnieć tylko księżyc stały i to bardzo mały.

Zaraz wytłómaczymy dlaczego księżyc ciekły nie mógłby istnieć na odległości mniejszej niż $2,86 \dots R$? Oto dlatego, że siła odśrodkowa pochodząca z obrotu wraz z przyciąganiem ziemi przemagałyby nad własnym przyciąganiem księżycy, więc np. w powierzchni księżycy siła ciężkości byłaby skierowana nie ku wnętrzu, a na zewnątrz. Natomiast ciało stałe mogłoby istnieć w tych warunkach, bo spójność cząsteczek przeciwdziałałaby rozrywającym siłom. Jednakże rozmiary jego nie mogłyby przekraczać pewnej granicy, albowiem siła przyciągania wzrasta „*ceteris paribus*“ proporcjonalnie do trzeciej potęgi liniowych rozmiarów ciała, a opór zależny od spójności tylko proporcjonalnie do drugiej potęgi, więc „*ceteris paribus*“ im większe ciało, tem wytrzymałość jego jest stosunkowo mniejsza. Dlatego to powiedzieliśmy, że na odległości mniejszej niż krytyczna, mógłby istnieć księżyc stały, ale małych rozmiarów.

Zastosujmy to samo kryterium do Saturna i jego pierścieni. O gęstości pierścieni Saturna nic pewnego nie wiemy, ale trudno przypuścić, aby ciekłe księżyce mogły mieć gęstość większą niż

współczynniki H stałych elipsoid Roche'a stają się zerami, ale do wartości odjemnych nie przechodzą, tylko powracają do wartości dodatnich.

sama planeta. Połóżmy dla próby $\varrho_p = \varrho_m$, wtedy otrzymamy: $D = 2,44 \dots R$. Tymczasem krawędź wewnętrzna wewnętrznego pierścienia znajduje się na odległości $1,33 \dots R$, a krawędź zewnętrzna zewnętrznego na odległości $2,23 \dots R$, zatem pierścienie leżą wewnątrz krytycznej przestrzeni. To przemawiałoby za twierdzeniem, że to są roje drobnych stałych ciałek. Ale ze względu na nieświadomość gęstości dowód jest bardzo niepewny. O wiele pewniejszym jest dowód innej natury. Oto trudno zrozumieć, w jaki sposób roje drobnych, ciekłych ciałek, albo jednolite cienkie [że są cienkie, to wiemy z obserwacji], ciekłe pierścienie mogłyby od wieków unosić się w zimnych międzyplanetarnych przestrzeniach i nie skrzepnąć.

Przypominamy wreszcie, że nie jest wykluczoną hipoteza Birkelanda, iż pierścienie Saturna są prosto zjawiskiem magneto-elektrycznym.

W naszym słonecznym systemie ogromna większość księżyców krąży daleko poza krytyczną granicą Roche'a; tylko 5-ty księżyc Jowisza krąży na odległości $2,55 R$ a jeden księżyc Marsa: „Phobos“ na odległości $2,70 R$. Ponieważ ani w jednym, ani w drugim przypadku gęstości satelitów nie znamy, więc nie możemy rozstrzygnąć, czy znajdują się wewnątrz, czy zewnątrz krytycznej przestrzeni. Ale jest to kwestya dość obojętna, bo tak 5-ty księżyc Jowisza, jak Phobos są to wedle wszelkiego prawdopodobieństwa małe stałe ciała. Dokładnych rozmiarów podać nie możemy, bo niema mowy o pomiarze tak małych ciał; ale wnosząc z ich wielkości [5-ty księżyc Jowisza przedstawia się jako gwiazdka 13-tej, a Phobos jako gwiazda 10-tej wielkości] przy jednoczesnem uwzględnieniu odległości i innych okoliczności przychodzimy do przekonania, że średnica pierwszego wynosi prawdopodobnie nie więcej jak 300—400, a drugiego nie więcej jak 60 km.

13. Równowaga ciała ciekłego, niejednorodnego.

Teorya Clairaut'a.

Właściwie dla teoryi figury ziemi i innych ciał niebieskich ważną jest nie teorya figur równowagi ciał ciekłych, jednorodnych, a także teorya ciał niejednorodnych. Niestety ta ostatnia jest stosunkowo mało wyrobiona.

Na wstępie musimy zaznaczyć, że wszystko, co dalej powiemy, odnosi się do ciał izotermicznych, albowiem oprócz przy-

padku, gdy ciało jest sferycznie i współśrodkowo uwarstwowane, warunki równowagi dają się pogodzić z równaniami termodynamiki tylko w takim razie, jeżeli temperatura ciała jest stała i wszędzie jednakowa¹⁾. Następnie musimy zaznaczyć, że posiadamy tylko ograniczoną teorię odnoszącą się do ciał o bardzo małym spłaszczeniu, t. j. prawie kulistych. Teorię tę stworzył właściwie Clairaut w XVIII wieku, szczegóły wypracowali później inni uczeni.

Zakładamy, że prędkość obrotu jest mała, że zewnętrzna powierzchnia i powierzchnie oddzielające warstwy o różnej gęstości są mało różne od kul współśrodkowych; będziemy tedy mogli pominąć kwadraty i wyższe potęgi spłaszczenia. Zakładamy, że nasze ciało jest izotermiczne, dzięki czemu warunek termodynamiczny odpada i pozostaje tylko warunek mechaniczny, aby gęstość i ciśnienie były w powierzchniach ekwipotencjalnych stałe. Nie trudno odgadnąć geometryczny kształt powierzchni ekwipotencjalnych czyniących zadość temu warunkowi. Kształt ziemi naprowadza nas na elipsoidy obrotowe. Założmy tedy, że to są współśrodkowe i współosiowe powierzchnie elipsoidalne a zarazem założmy, że ciało składa się ze skończonej ilości warstw o różnej gęstości. Wedle tego założenia gęstość zmienia się w sposób nieciągły, ale można przejść do ciągłego prawa gęstości zakładając, że warstwy o różnej gęstości stają się nieskończenie cienkie a ilość ich wzrasta do nieskończoności.

Ponieważ wiadomo, że stałość równowagi wymaga, aby gęstość wzrastała od powierzchni ku środkowi, więc możemy sobie wyobrazić, że ciało jest zbudowane w następujący sposób. Niech gęstość powierzchniowej warstwy będzie ρ_1 , gęstość następnej ρ_2 , gęstość jeszcze głębszej ρ_3 i t. d., przyczem

$$(44) \quad \rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \dots < \rho_n.$$

Położmy dla prostoty

$$(45) \quad \rho_1 = \eta_1, \quad \rho_2 - \rho_1 = \eta_2, \quad \rho_3 - \rho_2 = \eta_3, \dots$$

Oczywiście na mocy nierówności (44) wszystkie η są dodatnie. Możemy sobie wyobrazić elipsoidę jednorodną o gęstości η_1 zajmującą całe ciało, potem nałożoną na nią mniejszą współosiową elipsoidę o gęstości η_2 , na tę nałożoną trzecią jeszcze mniejszą o gęstości η_3 ... i t. d.

¹⁾ Obszerne uzasadnienie tego nie nowego zresztą, ale często ignorowanego twierdzenia podałem we „Fizyce ziemi“ (Kraków, 1909) w rozdz. I-szym.

Jeżeli powierzchnie graniczne są ekwipotencyalne, to jednocześnie są powierzchniami stałego ciśnienia, bo na mocy równania hydrostatycznego:

$$dp = \rho dW,$$

$dp = 0$, skoro $dW = 0$, t. j. ciśnienie jest stałe, skoro potencjał siły ciężkości W jest stały. Zatem chodzi tylko o to, żeby powierzchnie graniczne były jednocześnie ekwipotencyalnymi, t. j. chodzi o to, żeby w każdej z nich równanie

$$W = V + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) = \text{const.}, \quad (46)$$

w którym V oznacza potencjał przyciągania a ω prędkość obrotu, przywodziło się do równania elipsoidy. Jest to ten sam warunek, co u elipsoidy jednorodnej, ale trudniejszy, nawet, jak to zaraz zobaczymy, nie dający się ściśle spełnić. Weźmy dowolny punkt M w p -tej powierzchni granicznej. Dla elipsoidy o gęstości η_1 jest to punkt wewnętrzny, tak samo jest to punkt wewnętrzny dla elipsoid o gęstości $\eta_2, \eta_3 \dots$ i t. d., wreszcie nawet dla elipsoidy p -tej o gęstości η_p ; ale dla dalszych, bliżej ku środkowi położonych elipsoid jest to punkt zewnętrzny. Wskutek tego potencjał V w równaniu (46) będzie sumą p potencjałów wewnętrznych oraz $n - p$ potencjałów zewnętrznych i równanie to przedstawi się w kształcie:

$$\sum_1^p V_k + \sum_{p+1}^n V_k + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) = \text{const.} \quad (46 \text{ bis})$$

Naturalnie należy sobie wyobrazić, że to równanie jest napisane n razy, t. j. dla każdej powierzchni granicznej oddzielnie.

Wiadomo, że potencjały wewnętrzne V_k mają kształt:

$$V_k = D_k - (A_k x^2 + B_k y^2 + C_k z^2), \quad (47)$$

wiadomo też, że można wyrazić potencjały zewnętrzne V_k przez pewne całki, albo przez szeregi funkcyj Lamégo. Ponieważ w danym razie naprzód wiadomo, że powierzchnie graniczne są obrotowe, więc wypadnie w potencjałach wewnętrznych położyć $B_k = A_k$ a zewnętrzne wyrazić przez obrotowe funkcyjne Lamégo. Dla ułatwienia skorzystajmy z tego, że powierzchnie graniczne mało różnią się od kul współśrodkowych i zamiast funkcyj Lamégo weźmy funkcyjne sferyczne. Wskutek tego wyrażenia na potencjały ze-

wewnętrzne V_k nie będą zupełnie ściśle; ale pocóż starać się o zupełną ścisłość w tem miejscu, gdy wiadomo, że w innych będziemy musieli uciekać się do przybliżeń i zaniedbywać wielkości tego samego rzędu, co wielkości pomijane przy zamianie funkcyi Lamégo na sferyczne. Zresztą ta zamiana jest dozwolona, bo gdybyśmy pozostali przy funkcyach Lamégo, to otrzymalibyśmy wkońcu te same rezultaty, co z funkcyami sferycznymi. Otóż potencjał zewnętrzny wyrażony przez szereg funkcyi sferycznych ma kształt następujący:

$$(48) \quad V_{k,s} = \text{const.} + \frac{K_{0,k}}{r} + \frac{K_{2,k}}{r^3} P_2 + \dots,$$

gdzie

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$K_{0,k}, K_{2,k}, K_{4,k} \dots$ i t. d. są to stałe [$K_{1,k} = 0$], zaś $P_2, P_3 \dots$ i t. d. są to wielomiany Legendre'a (por. rozdz. V-ty, § 2), w których zmienną jest $\cos \theta$. Więć np.:

$$P_2 = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \dots \text{ i t. d.},$$

przyczem θ jest to odległość kątowna od dodatniej strony osi z . Ponieważ

$$\cos^2 \theta = \frac{z^2}{r^2} \quad \text{a} \quad 1 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2},$$

więć można wyrugować $\cos \theta$ i napisać np.:

$$(48 \text{ bis}) \quad V_{k,s} = \text{const.} + \frac{K_{0,k}}{r} + \frac{1}{2} \frac{K_{2,k}}{r^3} (2z^2 - x^2 - y^2) + \dots$$

Otóż spróbujmy przywieść równania warunkowe (46 bis) do kształtu równania elipsoidy obrotowej

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Skoro podstawimy wyrażenia potencjałów wewnętrznych (47) i zewnętrznych (48 bis) w równanie (46 bis), to okaże się, że potencjały wewnętrzne nie dają powodu do trudności, zato potencjały zewnętrzne czynią żądane przywiedzenie niemożliwym z powodu odjemnych potęg r i wyższych potęg współrzędnych x, y, z , występu-

jących we funkcyach sferycznych wyższych rzędów. Podobna trudność okazałaby się także wtedy, gdybyśmy zamiast przybliżonego rozwinięcia w szereg funkcyi sferycznych użyli ścisłego rozwinięcia w szereg funkcyi Lamégo i gdybyśmy zamiast elipsoid obrotowych rozpatrywali trójosiowe. Możemy więc wypowiedzieć zupełnie ogólnie twierdzenie, że „graniczne powierzchnie pomiędzy warstwami o różnej gęstości nie mogą być elipsoidami“. Jeżeli jednak korzystając z tego, że wedle założenia powierzchnie, o których mowa, są podobne do kul współśrodkowych, pominiemy kwadraty i wyższe potęgi spłaszczenia, to będziemy mogli doprowadzić równania (46 bis) do pożądanego kształtu, tylko naturalnie otrzymane w ten sposób powierzchnie graniczne nie będą elipsoidami obrotowymi, a pewnymi do elipsoid obrotowych bardzo podobnymi sferoidami obrotowymi.

Ponieważ dalsze, t. j. po wyrazie ze współczynnikiem $K_{2,k}$ następujące wyrazy szeregu (48), względnie (48 bis) są wyższych rzędów niż pierwsza potęga spłaszczenia e , więc pomijamy je zupełnie a wyrazy zatrzymane przekształcamy w odpowiedni sposób. W danym razie r jest to odległość dowolnego punktu M p -tej powierzchni granicznej — od środka. Lecz wedle założenia ta powierzchnia mało różni się od kuli; można tedy z dostatecznym ¹⁾ przybliżeniem położyć

$$r = R_p [1 + e_p (\frac{1}{3} - \cos^2 \theta)], \quad (49)$$

gdzie R_p jest to średni promień a e_p spłaszczenie p -tej powierzchni granicznej. Stąd pomijając kwadrat i wyższe potęgi spłaszczenia otrzymamy

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_p} [1 - e_p (\frac{1}{3} - \cos^2 \theta)]. \quad (50)$$

Podstawmy to we wzór (48 bis); we wyrazie ze współczynnikiem $K_{2,k}$ można pominąć $e_p (\frac{1}{3} - \cos^2 \theta)$, bo

$$\frac{K_{2,k}}{K_{0,k} R_p^2}$$

¹⁾ Elipsoidę ziemską można w ten sposób przedstawić o tyle dokładnie, że sboczenia będą wynosić nie więcej jak po kilkadziesiąt metrów.

jest tego samego rzędu co spłaszczenie. Rugując jeszcze $\cos^2 \theta$ za pomocą równości

$$\cos^2 \theta = \frac{z^2}{r^2},$$

zatrzymując wszędzie tylko wyrazy tego samego rzędu co spłaszczenie, wreszcie opuszczając dowolną stałą, jako niepotrzebną, przekształcimy wzór (48 bis) na

$$V_a = \frac{K_{0,k}}{R_p} - \frac{1}{R_p^3} \left[\frac{K_{0,k} e_p}{3} - \frac{1}{2} \frac{K_{2,k}}{R_p^2} \right] (x^2 + y^2 - 2z^2).$$

Ale

$$(51) \quad K_{0,k} = k^2 M_k, \quad K_{2,k} = k^2 (C_k - A_k),$$

gdzie k^2 oznacza — jak zwykle — stałą przyciągania, M_k masę k -tej elipsoidy o gęstości η_k , a C_k i A_k jej momenty bezwładności dookoła osi obrotu i osi równikowej. Wprowadzając wartości (51) w poprzednie równanie napiszemy je ostatecznie w kształcie:

$$(52) \quad V_a = \frac{k^2 M_k}{R_p} - \frac{k^2}{R_p^3} \left[\frac{M_k e_p}{3} - \frac{1}{2} \frac{(C_k - A_k)}{R_p^2} \right] (x^2 + y^2 - 2z^2).$$

Podstawimy to w równanie (46 bis), tak samo podstawimy wartości potencjałów wewnętrznych ze wzoru (47), ale przyjmiemy przytem $B_k = A_k$, bo rozważamy figury obrotowe. Stałe D i $k^2 M_k R_p^{-1}$ pominiemy, bo równanie (46 bis) zawiera dowolną stałą. W ten sposób równanie (46 bis) dla p -tej powierzchni granicznej przejdzie w:

$$(53) \quad - \sum_1^p [A_k (x^2 + y^2) + C_k z^2] - \\ - k^2 \sum_{p+1}^n \frac{1}{R_p^3} \left[\frac{1}{3} M_k e_p - \frac{1}{2} \frac{(C_k - A_k)}{R_p^2} \right] (x^2 + y^2 - 2z^2) + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) = \text{const.}$$

Powyższe równanie już ma kształt równania elipsoidy obrotowej, jednak trzeba jeszcze określić współczynniki w odpowiedni sposób. Równanie p -tej elipsoidy obrotowej jest

$$\frac{x^2 + y^2}{a_p^2} + \frac{z^2}{c_p^2} = 1,$$

co ze względu na związek

$$e_p = a_p (1 - e_p)$$

można także napisać w postaci:

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{(1 - e_p)^2} = a_p^2.$$

Pomnóżmy całe to równanie przez $(1 - e_p)^2$ i opuśćmy e_p^2 tak samo, jak gdzieindziej, a będziemy mogli napisać równanie p -tej elipsoidy w kształcie

$$(x^2 + y^2)(1 - 2e_p) + z^2 = a_p^2(1 - 2e_p). \quad (54)$$

Równania (53) i (54) mają być identyczne. Na to wystarczy, żeby współczynniki przy $x^2 + y^2$ i przy z^2 były do siebie proporcjonalne; o prawą stronę równań niema co troskać się, bo w równaniu (53) po prawej stronie stoi stała dowolna. Współczynniki, o których mowa, będą proporcjonalne, jeżeli będzie spełnione równanie:

$$\sum_1^p A_k + \sum_{r+1}^n S_k - \frac{1}{2} \omega^2 = \left[\sum_1^p C_k - 2 \sum_{r+1}^n S_k \right] (1 - 2e_p),$$

w którym dla krótkości położyliśmy:

$$S_k = k^2 \left[\frac{e_p M_k}{3R_p^3} - \frac{(C_k - A_k)}{2R_p^3} \right]. \quad (55)$$

Wykonując mnożenie po prawej stronie, odrzucając iloczyny $S_k e_p$, jako małe wielkości drugiego rzędu i nieco inaczej porządkując otrzymamy

$$\frac{1}{2} \omega^2 + \sum_1^p (C_k - A_k) - 3 \sum_{r+1}^n S_k - 2e_p \sum_1^p C_k = 0. \quad (56)$$

Zanim pójdziemy dalej, wprzód wykonamy niektóre przekształcenia. Z jednej strony wiadomo, że

$$C_k - A_k = \frac{2}{3} a_k^2 M_k e_k;$$

tedy możemy zamiast wzoru (55) napisać wzór

$$S_k = k^2 \frac{M_k}{R_p^3} \left(\frac{1}{3} e_p - \frac{1}{6} \frac{a_k^2}{R_p^2} e_k \right). \quad (57)$$

Z drugiej strony w § 6 mieliśmy wzory (23), mianowicie:

$$B_k = A_k = \frac{h}{4\lambda^3} \left(\operatorname{arctg} \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right)$$

$$C_k = \frac{h}{2\lambda^3} (\lambda - \operatorname{arctg} \lambda),$$

w których

$$h = \frac{3k^2 M_k}{c_k^3}, \quad \lambda^2 = \frac{a_k^2 - c_k^2}{c_k^2} = \frac{1 - (1 - e_k)^2}{(1 - e_k)^2} = 2e_k + 3e_k^2 + \dots,$$

zaś

$$\frac{1}{\lambda^3} \left(\operatorname{arctg} \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \lambda^2 + \frac{8}{7} \lambda^4 \dots,$$

$$\frac{\lambda - \operatorname{arctg} \lambda}{\lambda^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \lambda^2 + \frac{1}{7} \lambda^4 - \dots$$

Gdy rozwiemy $A_k = B_k$ i C_k w szeregi potęgowe λ^2 , gdy wyrazimy λ^2 przez e_k i pominiemy wyższe potęgi spłaszczenia, to otrzymamy:

$$(58) \quad C_k = \frac{3}{2} k^2 \frac{M_k}{c_k^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} e_k \right), \quad C_k - A_k = \frac{3}{2} k^2 \frac{M_k}{c_k^3}.$$

Teraz podstawimy wartości z równań (57) i (58) w równanie (56), skrócimy, co się da, odrzucimy wyrazy rzędów wyższych, podzielimy przez k^2 i połączymy ze sobą obie sumy od 1 do p . Otrzymamy w ten sposób równanie:

$$(59) \quad \sum_1^p \frac{M_k}{c_k^3} (e_p - \frac{2}{3} e_k) + \sum_{r+1}^p \frac{M_k}{R_r^3} \left(e_p - \frac{3}{2} \frac{a_r^2}{R_r^2} e_k \right) - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{k^2} = 0.$$

Następnie podstawimy

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_k = a_k (1 - e_k) \\ R_p = \frac{a_p}{1 + \frac{1}{3} e_p} \quad [\text{wedle wzoru (49)}] \\ M_k = \frac{4\pi}{3} \cdot \eta_k \cdot a_k^2 c_k = \frac{4\pi}{3} \eta_k \cdot a_k^3 (1 - e_k), \end{array} \right.$$

znowu pominiemy wszystkie potęgi spłaszczenia wyższe od pierwszej, wreszcie pomnożymy całe równanie przez $\frac{3}{4\pi}$. W ten sposób ostatecznie otrzymamy:

$$\sum_1^p \eta_k (e_p - \frac{3}{8} e_k) + \sum_{p+1}^n \eta_k \left(\frac{a_k}{a_p}\right)^3 \left[e_p - \frac{3}{8} \left(\frac{a_k}{a_p}\right)^2 e_k \right] - \frac{3}{8\pi} \frac{\omega^2}{k^2} = 0. \quad (61)$$

Liczba równań (61), względnie (59) jest n , t. j. taka sama jak liczba powierzchni granicznych. Są to równania liniowe względem spłaszczeń e . Można więc określić z nich spłaszczenia czyniące zadość warunkom równowagi, skoro dane są długości większych półosi powierzchni granicznych i gęstości kolejnych warstw, bo różnice gęstości η są związane z gęstościami ρ przez równania (45). Ale nawet nie robiąc specjalnych założeń co do kolejnych a i ρ możemy wyciągnąć z równań (61), względnie (59) pewne ogólne wnioski.

14. Wnioski.

I. Odrazu widać, że gdy $\omega = 0$, to wszystkie e muszą zniknąć. Wszystkie graniczne powierzchnie muszą być kulami, jak to było do przewidzenia.

II. Zastosujmy nasze równania do ciała jednorodnego: wszystkie e oprócz e_1 znikają, wszystkie M oprócz M_1 [wszystkie η oprócz η_1] znikają, równania (59) [dogodniej jest wziąć równania (59) niż (61)] przywodzą się do jedyne go równania:

$$\frac{3}{8} \frac{M_1}{c^2} e_1 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{k^2} = 0.$$

Opuszczając jeszcze wskaźniki, jako niepotrzebne, możemy to napisać w kształcie:

$$\frac{3}{8} e = \frac{c \omega^2}{k^2 M},$$

albo też — korzystając z pierwszego równania (60) — w kształcie:

$$\frac{3}{8} \frac{e}{(1-e)^3} = \frac{a \omega^2}{k^2 M},$$

Wiadomo, że $a\omega^2$ to siła odśrodkowa na równiku, zaś $\frac{k^2 M}{a^2}$ to przyciąganie na równiku, wiadomo też, że stosunek tych sił wynosi około $\frac{1}{289,4\dots}$; tedy pomijając wyższe potęgi spłaszczenia napiszemy:

$$\frac{4}{3} e = \frac{(1 - 3e\dots)}{289,4}$$

skąd

$$e = \frac{1}{233,7}.$$

W ten sposób otrzymaliśmy spłaszczenie jednorodnej elipsoidy obrotowej posiadającej gęstość równą średniej gęstości ziemi i obracającej się z tą samą prędkością co ziemia. Liczba, którą otrzymaliśmy, jest [por. § 6] trochę zmała, ale od nieco niedokładnej metody nie można oczekiwać zupełnie dokładnego rezultatu.

III. Napiszmy równanie (61) raz dla p -tej, drugi raz dla $(p+1)$ -ej powierzchni granicznej i odejmijmy drugie od pierwszego; dodając jeszcze niektóre wzajemnie znoszące się wyrazy otrzymamy:

$$(62) \quad (e_p - e_{p+1}) \sum_1^p \eta_k + \sum_{r+1}^n \eta_k \left[\frac{a_k^5}{a_r^3} e_p - \frac{a_k^5}{a_{r+1}^3} e_{p+1} - \frac{3}{8} e_k \left(\frac{a_k^5}{a_r^5} - \frac{a_k^5}{a_{r+1}^5} \right) \right] = 0.$$

Oczywiście możemy napisać $n-1$ takich równań. Ostatnie z nich (dla $p = n-1$) wygląda tak:

$$(e_{n-1} - e_n) \sum_1^{n-1} \eta_k + \eta_n \left[\frac{a_n^5}{a_{n-1}^3} e_{n-1} - \frac{a_n^5}{a_n^3} e_n - \frac{3}{8} e_n \left(\frac{a_n^5}{a_{n-1}^5} - \frac{a_n^5}{a_n^5} \right) \right] = 0.$$

Dodajmy tu identycznie równą zeru wielkość:

$$\eta_n \frac{a_n^5}{a_{n-1}^3} (e_n - e_n),$$

wtedy po oczywistych uproszczeniach będziemy mogli napisać:

$$(e_{n-1} - e_n) \left[\sum_1^{n-1} \eta_k + \frac{a_n^3}{a_{n-1}^3} \eta_n \right] + \eta_n \left[\left(\frac{a_n^3}{a_{n-1}^3} - 1 \right) e_n - \frac{3}{8} e_n \left(\frac{a_n^5}{a_{n-1}^5} - 1 \right) \right] = 0,$$

albo przenosząc drugi wyraz na prawą stronę i znowu upraszczając

$$(e_{n-1} - e_n) \left[\sum_1^{n-1} \eta_k + \frac{a_n^5}{a_{n-1}^3} \eta_n \right] = \eta_n e_n \left(\frac{2}{3} - \frac{a_n^3}{a_{n-1}^3} + \frac{3}{8} \frac{a_n^5}{a_{n-1}^5} \right). \quad (63)$$

Wszystkie η , e i a są dodatnie, przyczem z konieczności

$$a_1 > a_2 > a_3 \dots > a_{n-1} > a_n. \quad (64)$$

Tedy znak różnicy

$$e_{n-1} - e_n$$

musi być ten sam, co znak wyrazu w nawiasie po prawej stronie. Połóżmy teraz

$$a_n = a_{n-1} - \varepsilon, \quad (65)$$

gdzie ze względu na nierówności (64) $\varepsilon > 0$, a otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} - \frac{a_n^3}{a_{n-1}^3} + \frac{3}{8} \frac{a_n^5}{a_{n-1}^5} &= \frac{2}{3} - \left(1 - \frac{\varepsilon}{a_{n-1}}\right)^3 + \frac{3}{8} \left(1 - \frac{\varepsilon}{a_{n-1}}\right)^5 = \\ &= \frac{3\varepsilon^2}{a_{n-1}^2} - \frac{5\varepsilon^3}{a_{n-1}^3} + \frac{3\varepsilon^4}{a_{n-1}^4} - \frac{3\varepsilon^5}{5a_{n-1}^5}. \end{aligned}$$

Ponieważ wszystkie a mogą być tylko dodatnie, więc wedle wzoru (65) ε jest zawsze zawarte między 0 a a_{n-1} ; stąd zaś wynika, że wyrażenie stojące po prawej stronie ostatniego równania jest stałe dodatnie, a wskutek tego dodatnią jest też prawa strona równania (63). Przeto mamy stale

$$e_{n-1} - e_n > 0. \quad (66)$$

Położmy teraz w równaniu (62) $p = n - 2$, a otrzymamy:

$$\begin{aligned} (e_{n-2} - e_{n-1}) \sum_1^{n-2} \eta_k + \eta_{n-1} \left[\frac{a_{n-1}^3}{a_{n-2}^3} e_{n-2} - \frac{a_{n-1}^3}{a_{n-1}^3} e_{n-1} - \frac{3}{8} e_{n-1} \left(\frac{a_{n-1}^5}{a_{n-2}^5} - \frac{a_{n-1}^5}{a_{n-1}^5} \right) \right] \\ + \eta_n \left[\frac{a_n^3}{a_{n-2}^3} e_{n-2} - \frac{a_n^3}{a_{n-1}^3} e_{n-1} - \frac{3}{8} e_n \left(\frac{a_n^5}{a_{n-2}^5} - \frac{a_n^5}{a_{n-1}^5} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Dodajmy identycznie równe zero wyrazy:

$$\eta_{n-1} \frac{a_{n-1}^3}{a_{n-2}^3} (e_{n-1} - e_{n-1}) + \eta_n \frac{a_n^3}{a_{n-2}^3} (e_{n-1} - e_{n-1}),$$

a otrzymamy po oczywistych przestawieniach

$$(67) \quad (e_{n-2} - e_{n-1}) \left[\sum_1^{n-2} \eta_k + \eta_{n-1} \frac{a_{n-1}^3}{a_{n-2}^3} + \eta_n \frac{a_n^3}{a_{n-2}^3} \right] = \\ = \eta_{n-1} e_{n-1} \left[\frac{2}{3} - \frac{a_{n-1}^3}{a_{n-2}^3} + \frac{3}{8} \frac{a_{n-1}^6}{a_{n-2}^6} \right] + \\ + \eta_n \left[\left(\frac{a_n^3}{a_{n-1}^3} - \frac{a_n^3}{a_{n-2}^3} \right) e_{n-1} - \frac{3}{8} \left(\frac{a_n^6}{a_{n-1}^6} - \frac{a_n^6}{a_{n-2}^6} \right) e_n \right].$$

Pierwszy wyraz po prawej stronie jest zupełnie podobny do prawej strony równania (63) i ze zupełnie tych samych co tam powodów jest stale dodatni. Co do drugiego wyrazu, to ten byłby stale dodatnim nawet wtedy, gdyby było

$$e_n = e_{n-1},$$

tembardziej zaś jest dodatnim, gdy $e_n < e_{n-1}$ [por. równanie (66)]. Że byłby dodatnim nawet przy $e_n = e_{n-1}$, o tem łatwo przekonać się w następujący sposób. Połóżmy chwilowo dla krótkości

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = x, \quad \frac{a_n}{a_{n-2}} = y.$$

Przy założeniu, że

$$e_{n-1} = e_n$$

znak drugiego wyrazu po prawej stronie równania (67) zależałby od znaku funkcji

$$x^3 - y^3 - \frac{3}{8} (x^6 - y^6).$$

Lecz ta funkcja jest stale dodatnią, albowiem na mocy nierówności (64) mamy stale

$$0 < y < x < 1.$$

Wnosimy stąd, że drugi wyraz po prawej stronie równania (67) jest także wciąż dodatni. Skoro oba wyrazy po prawej stronie równania (67) są dodatnie, to

$$(68) \quad e_{n-2} - e_{n-1} > 0.$$

Opierając się na nierównościach (66) i (68) można tak samo dowieść, że

$$e_{n-3} - e_{n-2} > 0 \text{ i t. d. i t. d.}$$

Ostatecznie otrzymamy szereg nierówności

$$e_1 > e_2 > e_3 > \dots > e_{p-2} > e_{p-1} > e_p; \quad (69)$$

które oznaczają, że „spłaszczenie powierzchni granicznych wzrasta od środka ku powierzchni zewnętrznej”.

IV Weźmy równanie (61) i zgrupujmy w niem razem wszystkie wyrazy zawierające e_p :

$$e_p \left[\sum_1^p \eta_k + \sum_{p+1}^n \left(\frac{a_k}{a_p} \right)^3 \eta_k \right] - \frac{3}{8} \left[\sum_1^p \eta_k e_k + \sum_{p+1}^n \left(\frac{a_k}{a_p} \right)^5 \eta_k e_k \right] - \frac{3}{8} \frac{\omega^2}{\pi k^2} = 0.$$

Wedle wzorów (45)

$$\sum_1^p \eta_k = e_p.$$

Podstawiając to a następnie przywodząc do jednego mianownika całe wyrażenie, stojące w pierwszym nawiasie i mnożąc przez $\frac{4\pi}{3}$ w liczniku i mianowniku możemy napisać

$$\sum_1^p \eta_k + \sum_{p+1}^n \left(\frac{a_k}{a_p} \right)^3 \eta_k = \frac{\frac{4\pi}{3} e_p a_p^3 + \sum_{p+1}^n \frac{4\pi}{3} \eta_k a_k^3}{\frac{4\pi}{3} a_p^3}.$$

Tu w liczniku stoi suma wszystkich mas zawartych wewnątrz kuli o promieniu a_p , a w mianowniku stoi jej objętość. Tedy wyrażenie powyższe jest średnią gęstością owej kuli, albo pomijając małe wielkości drugiego rzędu średnią gęstością masy zawartej wewnątrz p -tej powierzchni granicznej. Oznaczając tę średnią gęstość przez D_p , podstawiając w nawias przy e_p i przenosząc pozostałe wyrazy na prawą stronę możemy zatem napisać równanie stojące na początku IV w kształcie:

$$e_p D_p = \frac{3}{8} \frac{\omega^2}{\pi k^2} + \frac{3}{8} \left[\sum_1^p \eta_k e_k + \sum_{p+1}^n \left(\frac{a_k}{a_p} \right)^5 \eta_k e_k \right]. \quad (70)$$

Napiszmy teraz takie samo równanie dla $(p+1)$ -ej powierzchni i odejmijmy od niego równanie (70); otrzymamy z łatwością:

$$e_{p+1} D_{p+1} - e_p D_p = \frac{3}{8} \sum_{p+1}^n \eta_k e_k \left[\frac{a_k^5}{a_{p+1}^5} - \frac{a_k^5}{a_p^5} \right].$$

Prawa strona tego ostatniego równania jest dodatnia, bo [por. wzory (64)]

$$a_p > a_{p+1},$$

mamy zatem

$$(71) \quad e_{p+1} D_{p+1} > e_p D_p.$$

Jednocześnie ze wzoru (70) wynika

$$e_p D_p > \frac{3}{8\pi} \frac{\omega^2}{k^2},$$

co można też napisać w kształcie:

$$(72) \quad e_p - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi D_p} \cdot \frac{\omega^2}{k^2} > 0.$$

Pomnożmy w liczniku i mianowniku przez a_p^3 i wykonajmy te same przekształcenia, które wykonaliśmy pod II. Spostrzeżemy zaraz, że drugi wyraz w nierówności (72) to przybliżenie m_p , gdzie przez m_p oznaczyliśmy stosunek siły odśrodkowej na równiku danej powierzchni granicznej do przyciągania na tymże równiku. Możemy więc napisać

$$(73) \quad e_p - \frac{1}{2} m_p > 0$$

i specjalnie dla powierzchni zewnętrznej

$$(74) \quad e_1 - \frac{1}{2} m_1 > 0.$$

Ostatnia nierówność jest spełniona w przypadku ziemi.

Napiszmy teraz zamiast nierówności (74) odpowiednią równość. Otrzymamy ją z równania (70) tą samą drogą, którą otrzymaliśmy nierówność (74), mianowicie otrzymamy

$$e_1 - \frac{1}{2} m_1 = \frac{3}{5 D_1} \left[\eta_1 e_1 + \sum_2^n \left(\frac{a_i}{a_1} \right)^5 \eta_i e_i \right] = \frac{3}{5 D_1} \sum_1^n \left(\frac{a_i}{a_1} \right)^5 \eta_i e_i.$$

Stąd po oczywistych przekształceniach otrzymamy

$$\frac{5}{4} m_1 - e_1 = \frac{3}{2} \frac{1}{D_1} \left[D_1 e_1 - \sum_1^n \frac{a_i^5}{a_1^5} \eta_i e_i \right].$$

Lecz już z poprzedniego wywodu wiemy, że

$$\eta_1 + \sum_2 \frac{a_2^2}{a_1^2} \eta_2 = \sum_1 \frac{a_1^2}{a_1^2} \eta_1 = D_1.$$

Podstawiając tę wartość na D_1 w licznik prawej strony poprzedniego równania i trochę zmieniając porządek otrzymamy równość:

$$\frac{5}{4} m_1 - e_1 = \frac{1}{2} D_1 \sum_1 \eta_1 \left(\frac{a_2^2}{a_1^2} e_1 - \frac{a_4^0}{a_1^0} e_4 \right).$$

Na mocy nierówności (64) i (69) wszystkie wyrazy sumy stojącej po prawej stronie są dodatnie; przeto

$$\frac{5}{4} m_1 - e_1 > 0. \tag{75}$$

I ta nierówność sprawdza się w przypadku ziemi.



~~GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~

