$AD \sin A = DP$

$BD \sin B = DP$

$2DP = AD \sin A + BD \sin B$

$DP = DC \cos C$

$\cancel{DC \cos}$

$2DC \cos C = AD \sin A + BD \sin B$

Afrazkiewicz

fl.

ALGIEBRA

PODŁUG

LACROIX

NA SZKOŁY WOIEWODZKIE.

W KRAKOWIE 1819.
w Drukarni Akademickiey.

KOMMISSYA RZĄDOWA WYZNAN RELIG i OSW. PUBL.

Dzieło pod tytułem: *Algiebra podług Lacroix* ułożone przez JX. Antoniego Dąbrowskiego S. P Professora Matematyki i t. d. po roztrząśnieniu prze Towarzystwo Elementarne, potwierdza i Szkołom Woiewodzkim, ninieyszém zaleca.

Dan w Warszawie dnia 17. Marca 1818.

Minister Prezyduiący

STANISŁAW POTOCKI.

Sekretarz Jeneralny

Głuszyński.

ALGIEBRA

ROZDZIAŁ I.

Wiadomości poprzednicze.

1. W każdém zagadnieniu arytmetycznem, iak to łatwo postrzedz można, muszą być dwie przynaymniey liczby wiadome, a trzecia niewiadoma, ktorą znaleźć potrzeba. Liczba ta niewiadoma iest zawsze albo summą, albo różnicą, albo iloczynem, albo ilorazem liczb wiadomych do zagadnienia wchodzących; i kto ma wprawę w dodawanie, odeymowanie, mnożenie i dzielenie liczb całkowitych i ułomkowych, wszelkie zagadnienie arytmetyczne z łatwością rozwiąże byleby wprzód uważył, którego z tych czterech fundamentalnych działań ma użyć do wynalezienia liczby niewiadomey. Mieliśmy iuż i takie zagadnienia, których rozwiązanie zależy od kilku razem działań arytmetycznych rozmaicie z sobą powiązanych. Zagadnienia takowe zdaią się częstokroć na pierwsze weyrzenie bardzo trudne zwłaszcza, gdy są długie i w samem wysłowieniu zawikłane. Lecz trudność ta zniknie natychmiast, kiedy przez ciąg porządnych, iasnych i krótkich rozumowań z warunków zagadnienia wyciągnionych; wskazaną będzie droga, któréy w rozwiązaniu trzymać się należy. Weźmy na przykład zagadnienie następuiące:

Dwom zasłużonym żołnierzom wyznaczono summę 974 zł. którą podzielić się maią, w ten sposób, aby starszy z nich dostał 126 zł. więcey niż młodszy: ileż się każdemu dostanie?

W zagadnieniu tém, iak widzimy, dwie są liczby niewiadome, które wynaleźć trzeba: lecz iednę z nich znalazłszy, z łatwością doydziemy drugiey. Wiedząc *np.* ile się dostanie w podziale żołnierzowi młodszemu, dodawszy do działu tego 126 zł. mielibyśmy dział żołnierza starszego. Dwa te działy dodane do siebie powinny być równe wyznaczoney summie 974 zł.

Dział zatem żołnierza młodszego, więcey tenże sam dział, więcey, 126 zł. równy iest 974 zł. czyli

Dział młodszego żołnierza dwa razy wzięty, więcéy 126 zł. równy iest 974 zł. A zatem

Dział młodszego żołnierza dwa razy wzięty, równy iest 974 zł. mniey 126 zł. czyli

Dział młodszego żołnierza dwa razy wzięty równy iest 848 zł. więc.

Dział młodszego żołnierza raz wzięty równy iest połowie 848; czyli

Dział młodszego żołnierza równy iest 424 zł.

Młodszy zatem dostanie . . . . . 424 zł.

Starszy 424 więcéy 126 zł. czyli . 550

Rozwiązanie to czyni zadosyć warunkom zagadnienia: gdyż starszy bierze 126 zł. więcéy niż młodszy, a obadwa razem biorą wyznaczoną summę 974 zł.

2. Rozumowanie za pomocą, którego zagadnienie to rozwiązaliśmy, iest wprawdzie oczywiste i dosyć łatwe; częste iednak powtarzanie tychże samych wyrazów, iakiemi są *równy iest*, *więcey* etc. i razi ucho i przeszkadza uwadze: coby się ieszcze widoczniey okazało, gdyby nam przyszło rozwiązywać iakie zagadnienie dłuższe i trudnieysze. Jako więc cyfry na mieysce wyrazów liczebnych wprowadzone, znacznie ułatwiły i skróciły zwyczayne działania arytmetyczne; tak też końcem ułatwienia i skrócenia trudnieyszych i dłuższych zagadnień, starano się wprowadzić więcey ieszcze znaków skróconych na mieysce innych także wyrazów, które w roz-

wią-

wiązywaniu tych zagadnień często powtarzać trzeba.

I tak na oznaczenie dodawania używa się znak taki : $+$; *np.* $424 + 126$, znaczy 424 więcey 126.

Znak odeymowania iest taki : $-$; *np.* $974 - 126$, znaczy 974 mniey 126.

Znak mnożenia iest taki : $\times$; *np.* 424×2, znaczy 424 *rozmnożone* przez 2.

Dzielenie oznacza się tak iak w ułomkach za pomocą liniyki poziomey odłączaiącey liczbę dzielną od dzielnika *np.* $\frac{848}{2}$, znaczy 848 *podzielone* przez 2.

Na oznaczenie, że dwie liczby lub iakiekolwiek ilości są sobie równe, używa się znak taki : $=$; *np.* $8+3=11$; znaczy 8 więcey 3 *równe są* 11.

Na oznaczenie, że iedna ilość większa iest od drugiey, używa się znak taki : $>$; *np.* $8+3>9$, znaczy 8 więcey 3 *większe są* niż 9.

Na oznaczenie, że iedna ilość mnieysza iest od drugiey, używa ten sam znak, lecz w położeniu odwrotnem, *np.* $9<8+3$, znaczy 9 *mnieysze* iest niż 8 więcey 3.

Ilości niewiadome, których szukamy, oznaczaią się końcowemi głoskami abecadła z, y, x i t. d. Są ieszcze inne znaki skrócone, które na swoiem mieyscu wyłożymy.

Chcąc za pomocą tych skróconych znaków rozwiązać powyższe zagadnienie, oznaczmy dział młodszego żołnierza przez x. Ponieważ starszy powinien dostać 126 zł. więcey niż młodszy, kiedy więc dział młodszego iest x, dział starszego będzie $x+126$. Mamy zatem oznaczone obadwa działy, to iest:

dział młodszego $= x$.

dział starszego $= x+126$.

Summa tych dwóch działów tym sposobem oznaczonych iest

$x+x+126$: czyli $2x+126$.

Aże podług zagadnienia summa do podziału wyznaczona iest 974 zł.; będzie więc

$2x+126=974$.

Od dwóch summ równych odiąwszy części równe reszty pozostaną równe. Odeymiymyż 126 tak od $2x+126$, iako też od 974; zostanie

$2x+126-126=974-126$; czyli

$2x=848$.

Dwie summy równe podzieliwszy przez iednęż liczbę, wypadną dwa ilorazy równe. Podzielmyż tak $2x$, iako też 848 przez 2, będzie

$\frac{2x}{2}=\frac{848}{2}$; czyli

$x=424$.

Aże przez x oznaczyliśmy dział żołnierza młodszego, młodszy zatem dostanie 424 zł. a tem samem starszy, którego dział oznaczyliśmy przez $x+126$, dostanie $424+126$ czyli 550 zł. i t. d.

3. Porównawszy z sobą dwa te sposoby, których użyliśmy do rozwiązania danego zagadnienia, postrzeżemy tę tylko między niemi różnicę, że co w pierwszym wyraża się przez słowa, to w drugim wyrażaią skrócone znaki. Pierwszy sposób iest arytmetyczny: bo się nie rożni od tych, których używamy w Arytmetyce: drugi *Algiebraiczny*. Algiebrą bowiem zowiemy umieiętność podaiącą sposoby rozwiązywania zagadnień za pomocą skróconych znaków: później nabędziemy o niey dokładnieyszego wyobrażenia.

4. Znalezione działy dwóch żołnierzy, to iest 424 i 550 w ten czas tylko maią mieysce, kiedy summa dana do podzielenia iest 974 a rożnica między działami 126 zł. Sposób zaś za pomocą, którego rozwiązaliśmy to zagadnienie iest zawsze ten sam iakakolwiek dana będzie do podzielenia

sum-

summa, i iakakolwiek między działami wyznaczona rożnica. Możnaby więc zamiast liczb 974 i 126 użyć znaków ogólnych żadnéy ważności szczególnéy nie maiących, iakiemi są *np*. głoski abecadła, na mieysce, których można będzie w każdym przypadku szczególnym położyć ważność danéy summy i danéy między działami rożnicy; przez coby się nie mało pracy i czasu oszczędziło: bo raz tym sposobem rozwiązane zagadnienie, posłuży do prędkiego rozwiązania wszelkich innych tego rodzaiu zagadnień. Zamieńmy więc powyższe zagadnienie w następuiące:

Dwom zasłużonym żołnierzom wyznaczono summę s. którą podzielić się maią w ten sposób, aby starszy z nich dostał a złotych więcey, niż młodszy: ileż się każdemu dostanie?

Oznaczywszy dział młodszego przez x,

Dział starszego będzie . . . . . . $x+a$

Summa obudwu działów tym sposobem oznaczonych będzie

$$x+x+a\text{; czyli } 2x+a.$$

Aże summa podług zagadnienia iest s, będzie więc

$$2x+a=s.$$

Odiąwszy a tak od $2x+a$ iako też od s, zostanie

$$2x+a-a=s-a\text{; czyli}$$
$$2x=s-a.$$

Podzieliwszy tak $2x$, iako też $s-a$ przez 2, będzie

$$\frac{2x}{2}=\frac{s-a}{2}\text{; czyli}$$

$$x=\frac{s}{2}-\frac{a}{2}\text{; czyli } x=\tfrac{1}{2}s-\tfrac{1}{2}a.$$

Wyrażenie to algiebraiczne wysłowiwszy sposobem zwyczaynym, otrzymamy następuiące prawidło do wynalezienia ważności działu mnieyszego; *od połowy summy danéy do podzielenia od-*

odiąwszy połowę różnicy wyznaczoney między działami, reszta będzie działem żołnierza młodszego.

Prawidło to zastosowawszy do danego zagadnienia, w którem dana summa do podzielenia iest . . , , ... $s=974$.
rożnica między działami . . . . $a=126$;
łatwo znaydziemy, że dział młodszego żołnierza wynosi zł. . . . . 424.

Ten sam wypadek otrzymalibyśmy kładąc w znalezionem wyrażeniu algiebraicznem działu tego żołnierza zamiast głosek s i a liczby, których mieysce głoski te zastępuią. Tym sposobem wyrażenie to zamieni się w następuiące:

$$x=\frac{974}{2}-\frac{126}{2}; \text{ czyli}$$

$$x=487-65; \text{ czyli}$$

$x=424$. dział młodszego żołnierza, który maiąc wiadomy, łatwo będzie wyrachować dział żołnierza starszego, wiedząc iaka między temi działami zachodzi rożnica.

Gdyby była summa do podziału wyznaczona czyli $s=500$, $a=54$; położywszy ważności te zamiast głosek s, a w powyższem wyrażeniu algiebraicznem działu żołnierza młodszego, wyrażenie to zamieni się w następuiące:

$$x=\frac{500}{2}-\frac{54}{2}=250-27=223 \text{ i t. d.}$$

5. Oznaczyliśmy tu przez x dział żołnierza młodszego, skąd potem złatwością doszliśmy działu żołnierza starszego. Lecz można otrzymać ten sam wypadek oznaczaiąc przez x dział żołnierza starszego, z tą tylko różnicą, że ponieważ młodszy ma dostać złotych a mniey niż starszy; kiedy więc dział starszego iest x, dział młodszego będzie $x-a$. Mamy zatem oznaczone innym sposobem dwa szukane działy; to iest:

dział starszego $=x$

dział młodszego $=x-a$

Summa $=x+x-a$, czyli

$2x-a$.

Aże podług zagadnienia summa $= s$, będzie więc

$$2x - a = s.$$

Do dwóch ilości równych dodawszy tę samę ilość, summy dwie, które stąd wypadną będą równe. Dodaymyż a tak do $2x-a$, iako też do s będzie

$$2x-a+a=s+a\text{; czyli}$$
$$2x=s+a.$$

Podzieliwszy tak $2x$ iako też $s+a$ przez 2 będzie

$$\frac{2x}{2} = \frac{s+x}{2}\text{; czyli}$$

$$x = \frac{s}{2} + \frac{a}{2}\text{; czyli } x = \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}a.$$

To iest: *chcąc otrzymać ważność działu żołnierza starszego, trzeba do połowy summy daney do podzielenia, dodać połowę wyznaczoney między działami rożnicy.*

Prawidło to zastósowawszy do danego zagadnienia, albo też w znalezionem wyrażeniu algiebraicznem działu starszego żołnierza zamiast głosek s, a, położywszy liczby w zagadnieniu tem naznaczone; znaydziemy

$x=550$, od czego odiąwszy naznaczoną między działami rożnicę, to iest 126, zł. zostanie 424 dział żołnierza młodszego.

6. Ważność tę działu żołnierza starszego, to iest $\frac{s}{2}+\frac{a}{2}$ można także wyprowadzić z ważnosci działu żołnierza młodszego, która iest $\frac{s}{2} - \frac{a}{2}$ (4). Ponieważ bowiem żołnierz starszy ma dostać złotych a więcey niż młodszy, dodawszy zatem a do ważności działu żołnierza młodszego, będzie dział żołnierza starszego

$$\frac{s}{2} - \frac{a}{2} + a\text{; czyli}$$

$$\frac{s}{2} - \frac{a}{2} + \frac{2a}{2} \text{ czyli } \frac{s - a + 2a}{2}$$

Wyrażenie to znaczy, że od s trzeba naprzód odiąć a, a potem dodać $2a$ i podzielić przez 2. od s odiąwszy a a dodawszy $2a$, będzie $s + a$. Dział zatem żołnierza starszego będzie $s + a$. Dział zatem żołnierza starszego będzie $\frac{s+a}{2}$, czyli $\frac{s}{2} + \frac{a}{2}$; który maiąc wiadomy, łatwo będzie znaleźć dział żołnierza młodszego.

7. Wiedząc, że dział większy $= \frac{s}{2} + \frac{a}{2}$ dział mnieyszy $= \frac{s}{2} - \frac{a}{2}$; iakakolwiek będzie dana do podzielenia summa, iakakolwiek między działami naznaczona rożnica; zawsze łatwo będzie wynaleźć obadwa szukane działy, kładąc w dwóch znalezionych ważnościach ogólnych zamiast s naznaczoną w liczbach summę, zamiast a naznaczono w liczbach między działami różnicę.

Lecz nie tylko ważności te ogólne dwóch szukanych działów służą do prędkiego rozwiązania zagadnień, o podzieleniu daney summy pieniężney na dwie osoby podług wyznaczoney między działami różnicy; można ich także wygodnie użyć do rozwiązania nieskończoney liczby zagadnień innych, na pozor zupełnie od poprzedzaiącego rożniących się. I tak weźmy zagadnienie następuiące:

Oyciec i Syn maią razem lat 52. Oyciec od Syna starszy iest 24 laty: ileż ma lat Oyciec, a ile Syn?

Zagadnienie to lubo zdaie się od poprzedzaiącego wcale odmienne, w istocie iednak iest zupełnie do niego podobne: i możnaby ie bez naymnieyszego nadwerężenia dwóch liczb szukanych tak odmienić: *daną summę* 52 *zł. podzielić*

na

na dwie osoby w ten sposób, ażeby starsza miała 24 zł. więcey niż młodsza: ileż się każdey dostanie?

Wiedząc zatem z poprzedzaiącego zagadnienia, że *np.* dział większy iest $\frac{s}{2}+\frac{a}{2}$ wiedząc nadto z warunków drugiego zagadnienia, że $s=52$, $a=24$; łatwo będzie wyrachować, że Oyciec ma lat $\frac{52}{2}+\frac{24}{2}=\frac{76}{2}=38$ i t. d.

Toż mówić o następuiących zagadnieniach:

Dla dwóch oddziałów woyska dano 100,000 racyy chleba; ieden oddział ma dostać 27000 racyy więcey niż drugi: ileż racyy dostanie się każdemu oddziałowi?

Za parę koni dano 89 cz. zł. ieden z nich 15 cz. zł. więcey kosztuie niż drugi: iakaż iest cena każdego?

1344 *kul armatnych ułożone są we dwa stosy, w iednym iest kul 64 więcey niż w drugim? ileż kul znayduie się w każdym stosie?*

Do ulania armaty ważącey funtów $12566\frac{1}{2}$ *użyto miedzi 10096 funtów więcey niż cyny: iakaż ilość miedzi i cyny znayduie się w tey armacie?*

W iedney grzywnie czyli w 16 łotach srebra dwunastey proby iest czystego srebra 8 łotów więcey niż miedzi: ileż w mieszaninie tey znayduie się łotów czystego srebra, ile miedzi i t. d.

Wszystkie te zagadnienia rożnią się tylko między sobą wysłowieniem; w rzeczy zaś samey są sobie zupełnie podobne: w każdem albowiem z nich tak iak w zagadnieniu pierwszém, dana iest summa do podzielenia na dwie części i dana rożnica między temi częściami zachodząca i gdybyśmy w każdem z tych zagadnień daną summę dwóch liczb szukanych oznaczyli przez s, a rożnicę przez a, i odbyli działanie iak w zagadnieniu pierwszém, zawsze większa z dwóch liczb szukanych wypadłaby $\frac{s}{2}+\frac{a}{2}$, mnieysza $\frac{s}{2}-\frac{a}{2}$

8.

8. Dwa te wyrażenia ogólne wysłowiwszy ięzykiem zwyczaynym, wypadnie następuiące prawidło dla wynalezienia dwóch liczb niewiadomych, których dana iest summa i rożnica: *liczba większa rowna się połowie summy, więcey połową rożnicy; liczba mnieysza równa się połowie summy mniey połową rożnicy.* Prawidło to posłuży do prędkiego rozwiązania wszelkich zagadnień, w których rzecz idzie o wynalezienie dwóch liczb nierównych, których summa i różnica iest dana. I tak *np.* w zagadnieniu ostatniem, w ktorem summa dwóch liczb szukanych, to iest liczba łotów czystego srebra i miedzi znayduiących się w grzywnie srebra dwunastéy proby, iest 16 łotów, a ich różnica 8 łotów; będzie podług prawidła powyższego liczba większa to iest liczba łótów czystego srebra $\frac{16}{2}+\frac{8}{2}=12$, liczba mnieysza, to iest liczba łotów miedzi $\frac{16}{2}-\frac{8}{2}=4$.

9. Gdyby trzeba było wynaleźć trzy liczby nierówne, których summa iest dana, i dane są różnice między niemi zachodzące, sposób postępowania w szukaniu liczb niewiadomych tem by się tylko od poprzedzaiącego różnił, iż byłby cokolwiek dłuższy. Jakoż niech będzie zagadnienie następuiące:

Trzem zasłużonym żołnierzom wyznaczono summę 2840 zł. którą podzielić się maią w ten sposób, aby naystarszy z nich dostał 200 zł. więcey niż średni, ten zaś 120 zł. więcey niż naymłodszy: ileż się każdemu dostanie?

Zagadnienie to, lubo iest bardziéy zawikłane niż poprzedzaiące, może być iednak z łatwością rozwiązane sposobem arytmetycznym, ieżeli się dobrze nad iego warunkami zastanowimy. Są tu wprawdzie trzy liczby niewiadome; lecz iednę z nich znalazłszy, doydziemy z łatwością dwóch

po-

pozostałych. Wiedząc *np.* ile się dostanie w podziale żołnierzowi naymłodzemu, dodawszy do tego działu 120 zł. mielibyśmy dział żołnierza średniego, albo też do działu żołnierza naymłodszego dodawszy 120 i 200 czyli 320, mielibyśmy dział żołnierza naystarszego. Trzy te działy dodane do siebie powinny uczynić wyznaczoną summę 2840 zł. a zatem

Dział żołnierza naymłodszego, więcey tenże sam dział powiększony 120 złotemi, więcey tenże sam dział powiększony 320 złotemi równy iest 2840 zł. czyli

Dział naymłodszego żołnierza trzy razy wzięty, więcéy 120 zł. więcéy 320 zł. równy iest 2840 zł. czyli

Dział naymłodszego żołnierza trzy razy wzięty, więcéy 440 zł. równy iest 2840 zł. a zatém

Dział naymłodszego żołnierza trzy razy wzięty, równy iest 2840 zł. mniey 440 zł. czyli

Dział naymłodszego żołnierza trzy razy wzięty, równy iest 2400 zł. więc dział naymłodszego żołnierza raz wzięty równy iest trzeciéy części 2400 zł. czyli

Dział naymłodszego żołnierza równy iest 800 zł.

Naymłodszy zatem żołnierz dostanie 800 zł.
Średni 800 więcey 120 czyli . . . 920;
Naystarszy 920 więcey 200 czyli . 1120.

Rozwiązanie to czyni zadosyć warunkom zagadnienia: gdyż naystarszy bierze 200 zł. więcey niż średni; ten zaś 120 zł. więcey niż naymłodszy; a wszyscy trzéy biorą wyznaczoną summę 2840 zł.

10. Chcąc zagadnienie to rozwiązać za pomocą skróconych znaków oznaczmy dział żołnierza naymłodszego przez x. Ponieważ średni powinien dostać 120 zł. więcéy niż naymłodszy, kiedy więc dział naymłodszego iest x, dział średniego będzie $x + 120$. A że naystarszy powinien wziąć 200 zł więcey niż średni, będzie więc dział

nay-

naystarszego $x + 120 + 200$ czyli $x + 320$. Mamy zatem oznaczone wszystkie trzy działy.

Dział naymłodszego $= x$, średniego $= x + 120$, naystarszego $= x + 320$.

Summa tych trzech działów tym sposobem oznaczonych, iest $x + x + 120 + x + 320$; czyli $3x + 440$. Aże podług zagadnienia summa do podziału wyznaczona iest 2840 zł. będzie więc,

$$3x + 440 = 2840.$$

Odiąwszy 440 tak od $3x + 440$, iako też od 2840, zostanie

$$3x + 440 - 440 = 2840 - 440; \text{ czyli}$$
$$3x = 2400.$$

Podzieliwszy tak $3x$ iako też 2400 przez 3, wypadnie.

$$\frac{3x}{3} = \frac{2400}{3}; \text{ czyli } x = 800.$$

Aże przez x oznaczyliśmy dział naymłodszego żołnierza, naymłodszy zatem dostanie 800 zł. i t. d.

11. Abyśmy otrzymali wypadek ogólny, któryby służył do prędkiego rozwiązania wszelkich tego rodzaiu zagadnień, iakakolwiek będzie naznaczona summa i iakiekolwiek między trzema szukanemi liczbami dane różnice; oznaczmy summę do podzielenia daną przez s, różnicę między działem naywiększym i średnim przez a, różnicę między działem średnim i naymnieyszym przez b. Oznaczmy nadto dział naymnieyszy przez x; dział zatem średni będzie $x + b$, a naywiększy $x + b + a$. Summa wszystkich tych trzech działów tym sposobem oznaczonych, iest $x + x + b + x + b + a$; czyli $3x + 2b + a$. Aże summa podług zagadnienia iest s będzie więc.

$$3x + 2b + a = s.$$

Odiąwszy a tak od $3x + 2b + a$, iako też od s, zostanie

$$3x + 2b + a - a = s - a, \text{ czyli}$$
$$3x + 2b = s - a.$$

Odiąwszy $2b$ tak od $3x + 2b$ iako też od $s - a$, zostanie

3x

$3x+2b-2b=s-a-2b$; czyli
$3x=s-a-2b$.

Podzieliwszy tak $3x$, iako też $s-a-2b$ przez 3, będzie

$$\frac{3x}{3}=\frac{s-a-2b}{3}\text{; czyli } x=\frac{s-a-2b}{3}$$

Wyrażenie to algiebraiczne wysłowiwszy sposobem zwyczaynym, otrzymamy następuiące prawidło dla wynalezienia ważności działu naymnieyszego: *Od summy daney do podzielenia odiąć naprzód rożnicę pierwszą, potem rożnicę drugą dwa razy wziętą, i resztę podzielić przez 3.*

Prawidło to zastosowawszy do danego zagadnienia, w którem wyznaczona summa do podzielenia iest $s=2840$, różnica pierwsza $a=200$, różnica druga $b=120$, a tem samem różnica ta dwa razy wzięta $2b=240$; łatwo znaydziemy, że dział naymłodszego żołnierza wynosi 800 zł.

Ten sam wypadek otrzymalibyśmy kładąc w znalezionem wyrażeniu algiebraicznem działu tego żołnierza, zamiast głosek s, a i $2b$ liczby, których mieysce głoski te zastępuią. Tym sposobem wyrażenie to zamieniłoby się w następuiące;

$$x=\frac{2840-200-240}{3}=\frac{2840-440}{3}=\frac{2400}{3}=800$$

Gdybyśmy przez x oznaczyli dział żołnierza średniego, ponieważ naystarszy ma zł. a więcey niż średni, kiedy więc dział średniego iest x, dział naystarszego będzie $x+a$; aże naymłodszy ma zł. b mniey niż średni; będzie więc dział naymłodszego $x-b$. Trzy zatem działy są: średni $=x$, naywiększy $=x+a$, naymnieyszy $=x-b$, a summa ich iest $x+x+a+x-b$, czyli $3x+a-b$.

Aże podług zagadnienia summa $=s$; będzie więc

$3x+a-b=s$.

Odiąwszy a tak od $3x+a-b$ iako też od s, zostanie

$3x+a-b-a=s-a$, czyli $3x-b=s-a$.

Dodawszy b tak do $3x-b$, iako też do $s-a$, będzie

$3x-b+b=s-a+b$; czyli $3x=s-a+b$.

Podzieliwszy tak $3x$ iako też $s-a+b$ przez 3, wypadnie

$\frac{3x}{3}=\frac{s-a+b}{3}$; czyli $x=\frac{s-a+b}{3}$; to iest:

Chcąc otrzymać ważność działu żołnierza średniego, trzeba od summy daney do podzielenia, odiąć różnicę pierwszą, a do reszty dodać różnicę drugą i podzielić przez 3.

Prawidło to zastósowawszy do danego zagadnienia, albo też w znalezionem wyrażeniu algiebraicznem działu średniego żołnierza, zamiast głosek s, a i b położywszy liczby w zagadnieniu naznaczone, znayduiemy $x=920$, poczem łatwo będzie wyznaczyć dwa działy pozostałe.

Ważność tę działu żołnierza średniego to iest $\frac{s-a+b}{3}$, można także wyprowadzić z ważności działu żołnierza naymłodszego, która iest $\frac{s-a-2b}{3}$: ponieważ bowiem różnica między działem naymłodszego i średniego, iest b; dodawszy zatem b do ważności działu żołnierza naymłodszego, będzie dział średniego $\frac{s-a-2b}{3}+b$; czyli $\frac{s-a-2b}{3}+\frac{3b}{3}$ czyli $\frac{s-a-2b+3b}{3}$. Wyrażenie to oznacza, że od $s-a$ odiąwszy $2b$ a potém dodać $3b$ i podzielić przez 3. Od $s-a$ odiąwszy $2b$ a dodawszy $3b$, będzie $s-a+b$. Dział zatem żołnierza średniego będzie $\frac{s-a+b}{3}$.

Podobnymże sposobem z ważności tego ostatniego działu, można wyprowadzić dział żołnierza naystarszego: ponieważ bowiem różnica między

ędzy temi dwoma działami iest a, dodawszy zatém a, czyli co na iedno wychodzi $\frac{3a}{3}$ do działu żołnierza średniego, to iest do $\frac{s-a+b}{3}$ będzie dział naystarszego.

$\frac{s-a+b}{3}+\frac{3a}{3}=\frac{s-a+b+3a}{3}=\frac{s+2a+b}{3}$, to iest: do *summy wyznaczonéy dodawszy różnicę pierwszą dwa razy wziętą, a drugą poiedynczą, i wszystko podzieliwszy przez 3, wypadnie dział żołnierza naystarszego.*

Postąpiwszy tym samym sposobem, którego wyżey użyliśmy dla wyznaczenia w liczbach działu żołnierza naymłodszego, znaydziemy $x=1120$ dział żołnierza naystarszego. Wreście to samo wyrażenie ogólne działu żołnierza naystarszego otrzymalibyśmy, oznaczaiąc dział ten przez x a dwa inne działy stosownie do warunków zagadnienia, iak się o tém łatwo przekonać można.

12. Wiedząc że dział naywiększy $=\frac{s+2a+b}{3}$ średni $=\frac{s-a+b}{3}$, naymnieyszy $=\frac{s-a-2b}{3}$, można będzie z łatwością rozwiązać nie tylko wszystkie zagadnienia maiące za cel podzielenie daney summy pienięźney na trzy osoby podług wyznaczonych między działami różnic; ale też nieskończoną liczbę zagadnień innych wysłowieniem tylko od poprzedzaiącego różniących się, lecz w istocie zupełnie do niego podobnych, iak są następuiące:

Na seymiku złożonym z 1200 osób głosuiących ieden ze trzech staraiących się o tenże sam urząd miał za sobą 14 głosów więcey, niż drugi; ten zaś miał głosów 27 więcey niż trzeci: ileż głosów miał każdy?

Mat-

Matka i dwie iey córki maią razem lat 67$\frac{1}{2}$; matka ma 18 lat więcey, niż córka starsza; ta zaś córka ma dwa lata więcey niż iey siostra: ileż lat ma każda z nich?

W trzech oddziałach woyska iest razem 14250 głów: w iednym oddziale iest głów 537 więcey niż w drugim; w tym zaś iest głów 384 więcey niż w trzecim: ileż głów iest w każdym oddziale?

Do przewiezienia 29 cetnarów towaru, używa kupiec wołu, muła i konia; lecz chciałby na wołu ułożyć dwa cetnary więcey niż na muła, na muła zaś 3 cetnary więcey niż na konia: iakże ciężar ten ma rozdzielić?

W zwierciadle metallowém 37 funtów ważącém znayduie się miedzi 11 funtów więcey niż cyny; cyny zaś ieden funt więcey niż arszeniku: ileż funtów na zrobienie tego zwierciadła użyto miedzi, cyny i arszeniku?

W 100 funtach prochu armatniego iest 62$\frac{1}{2}$ funtów więcey saletry a niżeli siarki; a węgli tyle ile siarki: ileż funtów saletry, siarki i węgli wchodzi do składu tego prochu? i t. d.

We wszystkich tych zagadnieniach wynaleźć potrzeba trzy liczby, których summa iest dana, i dane są różnice między temi liczbami zachodzące: a lubo w zagadnieniu ostatniem nie masz żadney różnicy między drugą liczbą szukaną i trzecią, czyli, co na iedno wychodzi, różnica ta iest $= 0$, gdyż ilości węgli i siarki do prochu wchodzące są równe; iednakże i w tym przypadku znalezione wyżéy ogólne ważności dla każdey z trzech liczb szukanych są do rozwiązania dostateczne: trzeba tylko w każdey z nich zamiast *b*, przez które oznaczona iest różnica między drugą i trzecią liczbą szukaną zachodząca, położyć zero; tym sposobem ważność np. liczby naywiększéy, która iest $\frac{s+2a+b}{3}$, zamieni się w następuiącą:

$\frac{s+2a+0}{3}$; czyli $\frac{s+2a}{3}$. A że podług zagadnienia $s=100$, $a=62\frac{1}{2}$; będzie więc naywiększa liczba szukana, czyli ilość saletry $\frac{100+133}{3}=73$ funtów i t. d.

13. Gdyby daną summę s potrzeba było podzielić na czterech żołnierzy tak, aby naystarszy wziął a zł. więcey niż drugi; drugi b zł. więcey niż trzeci; trzeci c złotych więcéy niż czwarty: oznaczywszy dział któregokolwiek żołnierza przez x a inne działy stósownie do warunków zagadnienia, i odbywszy działanie takie iak wyżéy, znaleźlibyśmy dział naywiększy $=\frac{s+3a+2b+c}{4}$, dział drugi $=\frac{s-a+2b+c}{4}$, dział trzeci $=\frac{s-a-2b+c}{4}$ dział czwarty $=\frac{s-a-2b-3c}{4}$ iak się o tém łatwo przekonać można.

14. Te same ważności ogólne czterech szukanych liczb w zagadnieniu ostatniem, możnaby także bezpośrednio wyprowadzić z trzech ważności znalezionych w zagadnieniu poprzedzaiącém: Jakoż porównawszy z sobą dwa te zagadnienia, postrzeżemy niektóre warunki w obudwu iednakowe, niektóre odmienne: skąd wniesiemy, że tak sposób postępowania w rozwiązaniu tych dwóch zagadnień, iako też znalezione ważności szukanych działów pod niektóremi względami, będą w obudwu zagadnieniach iednakowe, pod niektóremi odmienne, Tak w poprzedzaiącem iak w ostatniem zagadnieniu trzeba podzielić daną summę na części nierówne podług wyznaczonych między temi częściami różnic: lecz w zagadnieniu powyższem liczba tych części iest 3, i dla téy przyczyny mianownikiem każdéy z trzech znalezionych ważności iest liiczba 3; w

zagadnieniu ostatniem liczba szukanych części iest 4, a tem samem i mianownikiem czterech szukanych ważności powinna być liczba 4. W zagadnieniu powyższem wyznaczonych między działami rożnic iest dwie: iedna *a* między działem naywiększym i średnim, druga *b* między działem średnim i naymnieyszym; obie też różnice te wchodzą do liczników znalezionych ważności. W zagadnieniu ostatniem trzy są wyznaczone różnice, iedna *a* między działem naywiększym i drugim, druga *b* między działem drugim i trzecim, trzecia *c* między działem drugim i trzecim, trzecia *c* między działem trzecim i czwartym: w licznikach zatém szukanych działów tego zagadnienia, wszystkie trzy różnice znaydować się powinny. W liczniku naywiększey części zagadnienia powyższego, różnica *a* znayduie się dwa razy wzięta: bo też naystarszy żołnierz raz ma złotych *a* więcey niżeli średni, drugi raz złotych *a* i *b* więcey niż naymłodszy: w zagadnieniu ostatniem żołnierz naystarszy raz ma złotych *a* więcéy niż drugi, 2*re* złotych $a+b$ więcéy niż trzeci, nakoniec złotych *a*, *b* i *c* więcéy niż naymłodszy. W liczniku zatém ważności działu naywiększego w ostatniem zagadnieniu różnica *a* będzie trzy razy wzięta, różnica *b* dwa razy wzięta, różnica *c* raz wzięta.

Z tych uwag wniesiemy 1*od*, że szukanych ważności w zagadnieniu ostatniem iest 4; 2*re*, że każdéy ważności mianownikiem będzie liczba 4; 3*cie*, że do liczników wchodzić będą nie tylko summa *s*, różnica pierwsza *a*, różnica druga *b*. ale też i różnica trzecia *c*; 4*te*, że nakoniec ponieważ żołnierz *np.* naystarszy ma naprzód *a* złotych więcéy niż drugi, potem złotych *a* i *b* więcey niż trzeci, nakoniec złotych *a*, *b* i *c* więcey niż czwarty; więc w liczniku ważności działu tego żołnierza będzie różnica *a* wzięta trzy razy, różnica *b* wzięta dwa razy, a różnica *c* wzięta raz ieden. Dział zatem żołnierza naystarszego będzie

s+

$\frac{s+3a+2b+c}{4}$; od którego odiąwszy a czyli $\frac{4a}{4}$ zostanie dział żołnierza drugiego $\frac{s+3a+2b+c}{4} - \frac{4a}{4}$ czyli $\frac{s-a+2b+c}{4}$ i t. d.

15. Gdyby daną summę potrzeba było podzielić na części nierównych 3, 6, 7 i t. d. stósownie do wyznaczonych między niemi różnic; rozwiązanie tych zagadnień samą tylko liczbą szukanych części od poprzedzaiącego rożniących się nie podpadłoby żadney trudności. Możnaby nawet daną liczbę części oznaczyć przez iaką głoskę z abecadła, i zagadnienie to uczynić tak ogólném, aby raz rozwiązane, służyło do wszystkich przypadków iakie tylko w tym rodzaiu zagadnień wydarzyć się mogą. Tym sposobem zagadnienie to zamieniłoby się w następuiące:

Daną summę s *podzielić na* m *części nierównych, i takich, aby różnica między częścią pierwszą i drugą była* a, *między drugą i trzecią* b, *między trzecią i czwartą* c; *i t. d. iakież będą te części.* Lecz rozwiązanie tego zagadnienia wymaga większéy cokolwiek wprawy, niż ią dotąd mieć możemy. Wprawa ta posłuży nam także do łatwego i prędkiego rozwiązania innych zagadnień nierównie zawilszych niż są poprzedzaiące: a nawet w zagadnieniach poprzedzaiących sposób postępowania może być znacznie skróconym i ułatwionym, gdy się ze znakami ogólnemi lepiey obeznamy.

16. Wyrażenia te: $3x+410=28$[illegible], $3x+2a+b=s$, i tym podobne, zowią się *równaniami, aequationes.* Ilości $3x$, $2a$, b, s, 410 i t. d. oddzielone od siebie znakiem $+$ lub $-$, zowią się *wyrażami, termini.* Wyrazy składaiące równanie oddzielone od siebie znakiem $=$, nazywaią się *stronami, równania, membra.* W równaniu $3x+2a+b=s$ pierwsza strona ma trzy wyrazy, to iest $3x$, $+2a$ i $+b$,

B 2 dru-

druga zaś strona ma tylko ieden wyraz *s*. Podobnież równanie $8x-12=\frac{2x}{3}+32$. ma z obu stron po dwa wyrazy: $8x$ i -12 są dwa wyrazy strony pierwszey, $\frac{2x}{3}$ i $+32$ są dwa wyrazy strony drugiey.

Każde równanie uważać potrzeba iako zagadnienie napisane znakami algiebraicznemi w ten sposób, ażeby wszelkie względy czyli stosunki podług warunków zagadnienia między ilościami niewiadomemi i wiadomemi zachodzące były wyrażone, i oznaczona równość, która podług tychże warunków między ilościami iednemi i drugiemi zachodzić musi. I tak równanie ostatnie $8x-12=\frac{2x}{3}+32$, którośmy przypadkiem wzięli dla przykładu, wysłowione sposobem zwyczaynym, zamieni się w następuiące zagadnienie: *znaleźć liczbę* x, *któraby wzięta razy* 8, *i zmnieyszona* 12, *tyle uczyniła, ile czyni ta sama liczba wzięta razy* 2, *podzielona potem przez* 3 *i powiększona* 32. Podobnież równanie

$$\frac{x\times m}{a}-\frac{p+q}{b-c}=\frac{x-r}{d+e}+s$$

iest wyrażeniem algiebraicznem następuiącego zagadnienia: *znaleźć liczbę* x, *ktoraby rozmnożona przez liczbę* m, *potem podzielona przez* a, *i zmnieyszona summa dwoch liczb* p *i* q *podzieloną przez różnicę dwoch liczb* b *i* c, *tyle czyniła, ile czyni ta sama liczba* x *zmnieyszona liczbą* r, *potem podzielona przez summę dwoch liczb* d *i* e, *i powiększona liczbą* s.

Wreście zawsze łatwiey będzie dane równanie wysłowić ięzykiem zwyczaynym i zamienić ie w zagadnienie, aniżeli dane zagadnienie napisać znakami algiebraicznemi i zamienić ie w równanie. Naywięcey w tey mierze znaczy wprawa, któ-

rey

rey nabyć można rozwiązuiąc rozmaitego gatunku zagadnienia, iakie niżey podamy.

17. Zagadnienie w ten czas iest rozwiązane, kiedy się znaydzie ważność ilości niewiadoméy: co w równaniu w ten czas ma mieysce, kiedy z iedney strony równania iest sama ilość niewiadoma, a z drugiey same tylko ilości wiadome. Znaleźć w równaniu ważność ilości niewiadoméy, czyli zamienić równanie na inne, w któremby z iedney strony była sama tylko ilość niewiadoma, a z drugiey same tylko ilości wiadome, zowie się *rozwiązaniem* tego równania. Że zaś w równaniu ilość niewiadoma zwyczaynie iest rozmaicie połączona z wiadomemi, iak widzieć można w równaniach powyższych; ażeby więc równanie rozwiązać, trzeba ilość niewiadomą *uwolnić* od wiadomych z nią połączonych. Działanie do tego potrzebne podlega pewnym prawidłom, które w krótce wyłożymy.

18. Ponieważ w równaniu iedna strona iest równa drugiey, więc do obu stron dodawszy, lub też od obu stron odiąwszy tęż samę liczbę, w pierwszym przypadku wypadną dwie summy, w drugim dwie różnice równe. Podobnież obiedwie strony równania rozmnożywszy, lub też obiedwie podzieliwszy przez tęż samę liczbę, w pierwszym przypadku wypadną dwa iloczyny, w drugim dwa ilorazy równe. I tak ieżeli *np.* $x=18$, będzie 1*od.* $x+3=18+3=21$; 2*re.* $x-3=18-3=15$; 3*cie.* $x\times3$ czyli $3x=18\times3=64$. 4*te.* $\frac{x}{3}$ czyli $\frac{1}{3}x$ $=\frac{18}{3}=6$.

Ten sam wypadek miałby mieysce, gdybyśmy zamiast liczb 3 i 18, użyli innych liczb iakichkolwiek.

Uwaga ta, sama przez się widoczna posłuży nam do uwolnienia ilości niewiadoméy od wiadomych z nią połączonych. Jakoż ilość niewiadomą z wiadomemi może być czworakim sposobem połączona;

icd.

1od. przez dodawanie, *np.* $x+3=21$;
2re. przez odcynowanie *np.* $x-3=15$;
3cie. przez mnożenie *np.* $3x=54$.
4te. przez dzielenie *np.* $\frac{x}{3}=6$.

W pierwszym przypadku ilość niewiadoma uwolni się od wiadomey przez odjęcie, w drugim przez dodanie po obu stronach równania liczby wiadomey 3; w trzecim przez podzielenie, w czwartym przez rozmnożenie obu stron równania przez liczbę wiadomą 3; i będzie:

1od. $x+3-3=21-3$; czyli $x=18$;
2re. $x-3+3=15+3$; czyli $x=18$;
3cie. $\frac{3x}{3}=\frac{54}{3}$; czyli $x=18$;
4te. $\frac{x}{3}\times 3=6\times 3$, czyli $x=18$.

Podług tych uwag chcąc rozwiązać równanie powyższe

$$8x-12=\frac{2x}{3}+32\ (16);$$

trzeba 1od po obu stronach równania dodać po 12; tym sposobem równanie to zamieni się w następujące:

$$8x-12+12=\frac{2x}{3}+32+12;\ \text{czyli}$$

$$8x=\frac{2x}{3}+44.$$

2re. W ostatniém równaniu odjąwszy po obu stronach $\frac{2x}{3}$, zostanie

$$8x-\frac{2x}{3}=\frac{2x}{3}+44-\frac{2x}{3};\ \text{czyli}$$

$$8x-\frac{2x}{3}=44.$$

$3x$ znaczy to samo, co $\frac{24x}{3}$; ostatnie więc równanie zamienić można w następuiące:

$$\frac{24x}{3}-\frac{2x}{3}=44; \text{ czyli } \frac{22x}{3}=44.$$

3cie. W ostatniem równaniu obie strony rozmnożywszy przez 3, będzie

$$\frac{22x}{3}\times 3=44\times 3; \text{ czyli}$$

$$\frac{66x}{3}=132; \text{ czyli } 22x=132.$$

Nakoniec obie strony ostatniego równania podzieliwszy przez 22 wypadnie

$$\frac{22x}{22}=\frac{132}{22}; \text{ czyli } x=6.$$

Liczba zatém szukana iest 6: iakoż 6 wzięte 8 razy i zmnieyszone 12, czyni 36; 6 wzięte 2 razy, podzielone potem przez 3 i powiększone 32, czyni także 36.

19. Gdyby w równaniach oprócz ilości niewiadomych zawsze były znaki liczebne, iak iest równanie poprzedzaiące, iużbyśmy łatwo mogli wyprowadzić prawidła na uwolnienie ilości niewiadomey od wiadomych. Lecz w Algiebrze zamiast znaków liczebnych używaią się znaki ogólne, to iest głoski abecadła, z któremi potrzeba odbywać te same działania, iakie się odbywaią ze znakami liczebnemi. Chcąc *np.* rozwiązać równanie powyższe (16),

$$\frac{2x\times m}{a}-\frac{p+q}{b-c}=\frac{x-r}{d+e}+s;$$

potrzeba 1*od*, po obu stronach dodać $\frac{p+q}{b-c}$; 2*re*. odiąć $\frac{x-r}{d+e}$; 3*cie*, rozmnożyć obie strony przez $b-c$, i przez $d+e$; 4*te* podzielić obie strony przez m i t. d. Działań takowych nie moglibyśmy uskuteczni nieznaiąc sposobu iakim się one odbywaią. Chcąc zatem rozwiązywać równania algiebraiczne, trzeba pierwey poznać sposób dodawania, odeymowania, mnożenia i dzielenia za pomocą znaków ogólnych: co wyłożymy w następuiącym rozdziale.

ROZDZIAŁ II.

O Dodawaniu, Odeymowaniu, Mnożeniu i Dzieleniu ilości algiebraicznych.

1. *Dodawanie ilości algiebraicznych.*

20. Ilości algiebraiczne, równie iak liczby w Arytmetyce, są albo *poiedyncze*, to iest z iednego wyrazu złożone, *np.* a, $3b$ $27cd$ i t. d. albo *wielorakie*, to iest z dwóch, trzech lub więcey wyrazów złożone, *np.* $a-b$, $3b+6c-1\,12d$. Ilości algiebraiczne nadto mogą być albo *podobne*, to iest iednakowemi głoskami oznaczone, *np.* $3a$ i $12a$, $7b$ i $8b$, $21cd$ i cd i t. d.; albo też *niepodobne*, to iest odmiennemi głoskami oznaczone, *np.* $3a$ i $3b$, $3a$ i $3ac$, $7bc$ i $8cm$ i t. d.

21. Na dodawanie ilości niepodobnych ten tylko Algiebra podaie sposób: *ilości niepodobne napisać przy sobie w iednym wierszu i złączyć ie znakiem +.* I tak dwie ilości poiedyncze $8a$ i $14b$ dodane do siebie czynią $8a+14b$; podobnież dwie ilości wielorakie $4a-5b$ i $2c-3a+e$ dodane do siebie czynią $4a-5b+2c-3d+e$ i t. d.

22. Co się tyczy ilości podobnych, w dodawaniu tych zachodzą niektóre skrócenia, iak to w następuiących przykładach obaczymy.

1od. a dodane do a czyni $a+a$, czyli $2a$.

2re. $3a$ dodane do $4a$ czynią $4a+3a$ czyli $7a$.

3cie. $5a+3b$ dodane do $4a+2b$, czynią $5a+3b+4a+2b$; czyli $9a+5b$.

4te.

4te. $a+b$ dodane do $a-b$, czyni $a-b+a+b$, czyli $2a-b+b$, czyli $2a$.

5te. $5a-4b$ dodane do $3a+4b$, czynią $3a+4b+5a-4b$, czyli $8a+4b-4b$, czyli $8a$.

6te. $7a-2b$ dodane do $2a+6b$, czynią $2a+6b+7a-2b$; czyli $9a+6b-2b$, czyli $9a+4b$.

7me. $a-7b$ dodane do $3a+3b$, czynią $3a+3b+a-7b$, czyli $4a+3b-7b$, czyli $4a-4b$.

8me. $4a-3b$ dodane do $2a-4b$, czynią $2a-4b+4a-3b$, czyli $6a-4b-3b$, czyli $6a-7b$ i t. d.

Pierwsze trzy przykłady nie potrzebuią żadnego obiaśnienia: pięć ostatnich są także oczywiste: bo w przykładzię 4tym dodawszy $a+b$ do $a-b$, będzie summa $2a-b+b=2a$; co znaczy, że $2a$ powiększywszy i zmnieyszywszy tą samą ilością b, zostanie $2a$. Toż mówić o przykładzie 5tym, w którym $8a+4b-4b=8a$. W przykładzie 6tym summa $9a+6b-2b=9a+4b$, znaczy, że do $9a$ dodawszy naprzód $6b$, a potém odiąwszy, $2b$ zostanie $9a+4b$. Podobnież w przykładzie 7mym summa $4a+3b-7b=4a-4b$, znaczy, że do $4a$ dodawszy naprzód $3b$, a potém odiąwszy $7b$, zostanie $4a-4b$.

Nakoniec w przykładzie 8mym summa $6a-4b-3b=6a-7b$, znaczy, że od $6a$ odiąwszy naprzód $4b$, a potém $3b$, zostanie $6a-7b$.

Zastanowiwszy się pilnie nad temi przykładami, wyciągniemy z nich następuiące uwagi:

1od. Dodaiąc ilości podobne, głoski nie podlegaią żadney zmianie, lecz tylko znaki i liczby przed głoskami będące które się zowią *spółczynniki, coëfficientes.*

2re. Spółczynniki te czasem się od siebie odeymuią, iak iest w przykładzie 6tym i 7mym, czasem się do siebie dodaią, iak w przykładzie 2gim, 3cim i 8mym, tudzież w przykładzie 1szym, gdzie a dodane do a, czyni $2a$ i w przykładzie 7mym gdzie a dodane do $3a$ czyni $4a$: spółczynnik bowiem, gdy iest 1 opuszcza się w pisaniu,

lecz

lecz iest domyślny: i tak a, b, x i t. d. znaczy znaczy to samo co $1a$, $1b$, $1x$ i t. d.

3cie. Spółczynniki ilości podobnych w ten czas się do siebie dodaią, kiedy przed temi ilościami są iednakowe znaki, to iest: albo przed obiema znak —, iak w przykładzie 8mym, albo przed obiema znak + iak w przykładzie 3cim, i iak iest we wszystkich przykładach przed wyrazem pierwszym, przed którym znak + opuszcza się, lecz iest zawsze domyślny.

4te. Spółczynniki ilości podobnych w ten czas się od siebie odeymuią, kiedy przed temi ilościami są znaki odmienne, to iest: przed iedną znak +, przed drugą znak —, iak w przykładzie 6tym i 7mym.

5te. Kiedy się spółczynniki od siebie odeymuią, pozostała reszta albo ma przed sobą znak + iak w przykładzie 6tym; albo znak —, iak w przykładzie 7mym; albo nakoniec nie masz żadney pozostałey reszty, iak w przykładzie 4tym i 5tym.

6te. Po odięciu od siebie spółczynników przed pozostałą resztą daie się znak taki, iaki iest przed ilością maiącą spółczynnik większy: ieżeli zaś spółczynniki te są równe, na ten czas reszta mieysca mieć nie będzie.

Z uwag tych możemy ustanowić następuiące prawidło dodawania ilości podobnych:

Spółczynniki ilości podobnych maiących przed sobą iednakowe znaki dodaią się; spółczynniki ilości podobnych maiących przed sobą odmienne znaki odeymuią się daiąc przed resztą znak spółczynnika większego.

25. Gdyby przyszło 3, 4 lub więcey ilości podobnych do siebie dodać, na ten czas trzeba *wziąć iednę summę ilości podobnych maiących przed sobą znak +, drugą summę tychże ilości maiących przed sobą znak —, i mnieyszą z tych dwóch summ odiąć od większey, a przed resztą dać znak summy większey.*

Po-

Pdług tego prawidła dodawszy do siebie następuiące ilości.

$$7a + 2b - 5c + 2d$$
$$3b + 6c - 4d - 8a$$
$$3a - 4b + 2c + 5d$$
$$a - 3b - 2c - 3d \text{ ; będzie summa}$$
$$11a - 8a + 5b - 7b + 8c - 7c + 7d - 7d \text{ , czyli}$$
$$3a - 2b + c.$$

Działanie to zależące na zebraniu ilości podobnych w ieden wyraz, czyli na sprowadzeniu ich do iednego wyrazu, zowie się *sprowadzeniem*, *reductio*, i ma mieysce nie tylko w dodawaniu ilości algiebraicznych; ale też w ich odeymowaniu, mnożeniu i dzieleniu, iak to obaczymy niżey.

II. *Odeymowanie ilości algiebraicznych.*

24. Na oznaczenie, że iedna ilość ma być odięta od drugiey, używa się, iakośmy iuż powiedzieli, znak odeymowania $-$; i tak $a - b$ znaczy, że od liczby oznaczoney przez a trzeba odiąć liczbę oznaczoną przez b.

A zatem od a odiąwszy $b + c$, to iest, od liczby oznaczoney przez a odiąwszy dwie liczby iedną oznaczoną przez b, drugą przez c, zostanie reszta $a - b - c$. Podobnież od a odiąwszy $b + c + d$, zostanie reszta $a - b - c - d$.

Stąd wniesiemy, że *w ilościach maiących się odeymować wszystkie znaki + tak wyraźne iak domyślne zamieniaią się na znaki* $-$. I tak od $3a - 2b + 4c$ odiąwszy $5d + 7e + m + x$, zostanie $3a - 2b + 4c - 5d - 7e - m - x$.

Gdyby przyszło od a odiąć $b - c$, abyśmy to odeymowanie łatwiey uskutecznili, naznaczmy dla a, b i c szczególne ważności iakiekolwiek. Niech będzie $a = 12$, $b = 8$, $c = 3$. A zatem od a odiąć $b - c$, iest teraz to samo, co od liczby 12 odiąć liczbę 8 zmnieyszoną trzema iednościami; czyli od 12 odiąć $8 - 3$. Odiąwszy 8 od 12, zostanie $12 - 8 = 4$. Lecz pozostała reszta 4 iest mniey-

sza

sza niż być powinna: bośmy też od 12 odięli liczbę większą niż potrzeba. Należało w rzeczy samey odiąć mniey niż 8 trzema iednościami; i zostanie przeto więcey niż 4 trzema iednościami; i będzie $12 - 8 + 3 = 4 + 3 = 7$. Położywszy teraz zamiast liczb naznaczonych znaki ogólne, wniesiemy, że od a odiąwszy $b - c$, zostanie $a - b + c$.

Jakiekolwiek ważności szczególne naznaczymy dla a, b i $-c$, zawsze trzeba będzie liczbę oznaczoną przez $-c$ dodać do pozostałey z odięcia liczby oznaczoney przez b, od liczby oznaczoney przez a. Stąd wniesiemy, że *odeymuiąc ilości maiące przed sobą znak —, trzeba znak ten — zamienić na znak +.*

Abysmy się o tey ważney prawdzie tém widoczniey przekonali, wyłożymy ią ieszcze następuiącym sposobem: Od 12 odiąwszy 8 zostanie 4. Jeżeli tak do 12 iako do 8 dodamy *np.* 3, i drugą summę, to iest, 11 odeymiemy od summy pierwszey, to iest od 15, zostanie także 4. Jezeli tak do 12 iak do 8 dodamy po 4, po 5 i t. d, i summę mnieyszą odeymiemy od większey, zawsze zostanie ta sama reszta, to iest 4. Gdybyśmy zamiast liczb 12 i 8 wzięli do odeymowania inne dwie liczby iakiekolwiek, i tak do większey iak do mnieyszéy dodawszy iednęż liczbę, summę drugą odięli od pierwszey, zawszeby się pozostała ta sama reszta, iakaby wypadła bez takowego dodania. Oznaczmy więc liczbę większą przez a, liczbę mnieyszą przez $b - c$ i odeymiymy drugą od pierwszey: ponieważ dodanie iakieykolwiek liczby do obu tych liczb przez a i przez $b - c$ oznaczonych, nie ma żadnego wpływu na resztę z odięcia iedney od drugiey zostaiącą; dodaymy więc liczbę c tak do a, iako też do $b - c$: w tym przypadku zamiast odeymowania $b - c$ od a, potrzeba od $a + c$ odiąć $b - c + c$; czyli od $a + c$ odiąć b: gdyż $b - c + c = b$. Odiąwszy b od $a + c$, zostanie $a + c - b$.

Sposób inny. Ponieważ od b odiąwszy b nic

się

się nie zostanie, czyli $b-b=o$, podobnież $c-c=o$, będzie więc

$$a=a+b-b+c-c.$$

Tym albowiem sposobem ilość a nie zmieniła się co do ważności; nadaliśmy iey tylko inną postać przez przydanie do niey cztérech ilości, $+b-b+c-c$, których summa czyni o.

Jeżeli teraz uważymy, że przekreślić którąkolwiek z tych cztérech ilości do a przydanych, iest to samo co ilość tę odiąć od a; wniesiemy, iż w powyższem wyrażeniu z piérwszey strony odiąwszy $b-c$ a z drugiey strony przekreśliwszy $+b-c$, reszty pozostałe będą równe. Że zaś po takowém działaniu z piérwszéy strony zostać powina szukana reszta z odięcia $b-c$ od a wypadaiąca; a z drugiey strony zostanie $a-b+c$; więc tą szukaną resztą iest $a-b+c$; to iest: od a odiąwszy $b-c$, zostanie $a-b+c$.

Wreście dla sprobowania czy w odeymowaniu nie zaszła iaka omyłka, do pozostałey reszty $a-b+c$ dodawszy ilość odiętą $b-c$ będzie summa $a-b+c+b-c=a$: co dowodzi, że znaleziona reszta iest prawdziwa.

Z uwag tych wypada następuiące prawidło odeymowania ilości algiebraicznych: *w ilości maiącey być odiętą wszystkie znaki + zamieniwszy na —, i wszystkie znaki — zamieniwszy na +, napisać ią w iednym wierszu po prawey stronie drugiey ilości daney.*

Podług prawidła tego odiąwszy $d-2e+8m-x$, od $5a-2b+3c$ zostanie $5a-2b+3c-d+2e-8m+x$ i t. d.

Jeżeli w pozostałey reście znayduią się ilości podobne, należy ie sprowadzić do iednego wyrazu podług prawidła podanego wyżey. (22); *np.* od $7a-4b+8c$ odiąwszy $5a-4b+7c$, zostanie $7a-4b+8c-5a+4b-7c$, czyli $2a+c$ i t. d.

25. Czasem dosyć iest tylko ostrzedz, że ilość iednę od drugiey odiąć trzeba. Na ten czas ilość maiąca być odiętą bierze się w nawias bez żadney zmia-

zmiany znaków przed iéy wyrazami będących; lecz przed nawiasem daie się znak —. I tak wyrażenie to: $7a - 4b + 8c - (5a - 4b + 7c)$, znaczy, że od $7a - 4b + 8c$ trzeba odiąć $5a - 4b + 7c$. Ile razy więc w wyrażeniu iakiém przed nawiasem iest znak —, chcąc wyrażenie to napisać bez nawiasu, trzeba wszystkie znaki ilości będącey w nawiasie zamienić + na —, i znaki — na +; *np.* wyrażenie następuiące: $3a + 2b - (7a + 5b - 4c - 8d)$, znaczy to samo, co $3a + 2b - 7a - 5b + 4c + 8d$; czyli

$$-4a - 3b + 4c + 8d.$$

26. W ostatnim przykładzie pozostała reszta $-4a - 3b + 4c + 8d$ znaczy, że od summy dwóch ilości $4c$ i $8d$ trzeba odiąć dwie ilości $4a$ i $3b$. Ilości te: $+4c$, $+8d$, i wszystkie inne, przed któremi iest znak dodawania + wyraźny lub domyślny, zowią się ilościami *dodaynemi*, *quantitates additivae*; ilości zaś te $-4c$, $-3b$ i wszystkie inne, przed któremi iest znak odeymowania —, zowię się ilościami *odiemnemi*, *subtractivae*.

W każdém wyrażeniu algiebraiczném na pierwszém mieyscu kładzie się zwyczaynie ilość dodayna z domyślnym znakiem +, iakośmy iuż powiedzieli (22). Jeżeliby zaś wyrażenie iakie zaczynało się od ilości odiemney, na ten czas przed ilością tą trzeba dać wyraźny znak —, *np.* od $3a + 4b$ odiąwszy $8a + 9b$, zostanie $3a + 4b - 8a - 9b$, czyli $-5a - 5b$,. Podobnież od $6a - 7b$ odiąwszy $7a - 7b$ zostanie $6a - 7b - 7a + 7b$, czyli $-a$ i t. d.

W przykładach tych dwie pozostałe reszty, to iest: $-5a - 5b$, i $-a$ składaią się tylko z samych ilości odiemnych. Wiemy iuż, że *np.* wyrażenie to: $a - b$ znaczy, iż od liczby oznaczoney przez a odiąć potrzeba liczbę oznaczoną przez b. Ale co znaczy wyrażenie to: $-a$, $-5a - 5b$, i wszelkie inne z samych tylko ilości odiemnych złożone, które nie tylko z odeymowania, ale też, iak się okaże wkrótce, z mnożenia także i dzielenia ma ilości algiebraicznych wypaść mogą, to wyłożymy na innem mieyscu.

III. Mnożenie ilości algiebraicznych.

27. Chcąc dwie ilości poiedyncze przez siebie rozmnożyć, dość iest między niemi dać znak mnożenia ×. I tak $a \times b$ iest iloczynem dwóch czynników a i b; to iest, znaczy, że liczba oznaczona przez a powinna być rozmnożoną przez liczbę którą oznaczą b. Zamiast znaku ×, daie się częstokroć między czynnikami kropka; co zwyczaynie w ten czas ma mieysce, gdy czynniki są liczebne, *np.* 5. 4, znaczy 5 rozmnożone przez 4, Nayczęściey iednak czynniki ogólne piszą się przy sobie bez żadnego znaku, *np.* ab znaczy a rozmnożone przez b i t. d.

Mnożąc więc ab przez c, wypadnie iloczyn abc; mnożąc ab przez cd, wypadnie iloczyn $abcd$; mnożąc ax przez bc, wypadnie iloczyn $axbc$ i t. d.

Stąd można wyprowadzić następuiące prawidło mnożenia ilości algiebraicznych poiedynczych: *iloczyn ilości poiedynczych składa się ze wszystkich czynników bez żadnego znaku, przy sobie położonych.*

A iako iloczyn czterech *np.* czynników liczebnych 2, 3, 4 i 5, lub innych iakichkolwiek, zawsze iest ten sam, iakikolwiek zachowany będzie porządek w ich mnożeniu; tak też iloczyn złożony z czynników ogólnych mieysce liczb zastępuiących, zawsze iest ten sam, w iakimkolwiek porządku czynniki te są w nim umieszczone. I tak, $axbc$, $acxb$, i t. d. zawsze iest ten sam iloczyn utworzony z rozmnożenia czterech czynników a, b, c i x. Zwyczaynie iednak piszą się głoski w iloczynie takim porządkiem, iakim po sobie następuią w abecadle.

Co się tycze spółczynników liczebnych, które przy czynnikach ogólnych znaydować się mogą,

te

te mnożą się sposobem zwyczaynym, *np.* $6a \times 5b$, czynią $30ab$, $4x \times 8c$, czynią $32cx$ i t. d,

28. Mnożąc *a* przez *a*, podług powyższego prawidła wypadnie iloczyn *aa*; mnożąc *aa* przez *a*, wypadnie *aaa*; mnożąc *aa* przez *aa*, wypadnie *aaaa* i t. d.

W takim przypadku pisze się raz tylko ilość *a* lub inna iakakolwiek; a z prawéy strony u góry daie się znak liczebny maiący tyle iedności, ile razy ilość ta wzięta iest za czynnik. I tak zamiast *aa*, *aaa*, *aaaa* i t. d. pisze się a^2, a^3, a^4 i t. d. co przez skrócenie wymawia się *a dwa*, *a trzy*, *a cztery* i t. d. Liczby te 2, 3, 4, znaczą, że w iloczynie a^2, ilość *a* wzięta iest 2 razy za czynnik; w iloczynie a^3 ilość *a* wzięta iest 3 razy za czynnik; w iloczynie a^4 ilość *a* wzięta iest 4 razy za czynnik i t. d. Liczby takowe zowią się *wykładniki*, *exponentes*.

Trzeba tu zastanowić się należycie nad różnicą iaka zachodzi między spółczynnikiem i wykładnikiem. W ilościach tych $2a$, $3a$, $4a$ i t. d. spółczynniki 2, 3, 4 znaczą, że ilość *a* rozmnożona iest przez 2, 3, 4 iedności, czyli że ilość *a* dodana iest do siebie 2, 3, 4 razy, i zamiast $2a$ możnaby napisać $a+a$, zamiast $3a$, możnaby napisać $a+a+a$ i t. d. W ilościach zaś tych a^2, a^3, a^4 i t. d. wykładniki 2, 3, 4 znaczą, że ilość *a* wzięta iest za czynnik 2, 3, 4 razy, i zamiast a^2 można napisać $a \times a$, zamiast a^3 można napisać $a \times a \times a$ i t. d. Daymy, że $a=5$, będzie $2a=2.5=10$, $3a=3.5=15$ i t. d. $a^2=5.5=25$; $a^3=5.5.5=125$ i t. d.

29. Wszelki iloczyn, którego czynniki są między sobą równe, czyli który iest utworzony z mnożenia iednéyże ilości przez siebie samę, zowie się *potęgą* téy ilości *potentia*. I tak a^2 iest drugą potęgą ilości *a*, i zowie się inaczéy kwadratem; a^3 iest trzecią potęgą ilości *a*, i zowie się inaczéy *sześcianem*. Inne wszystkie potęgi maią nazwiska od liczby iedności ich wykładników, I tak a^4, a^5, a^6 i t. d.

i t. d iest 4tą, 5tą, 6tą i t. d. potęgą ilości *a*. Sama ilość *a* iest potęgą pierwszą, ilość bowiem *a* może być uważana iakoby raz ieden wzięta była za czynnik, i iakoby miała za wykładnik 1; lecz wykładnik będący iednością opuszcza się, ale iest zawsze domyślny, i tak a, b, c i t. d. iest to samo co a^1, b^1, c^1 i t. d.

30. Z tego cośmy dotąd powiedzieli o mnożeniniu ilości poiedyczych, wypada co następuie:

$a^2 \times a^3 = aa \times aaa = aaaaa = a^5 = a^{2+3}$;

$ab^4 \times a^2b^2 = a^1b^4 \times a^2b^2 = abbbb \times aa\ bb = a^3b^6 = a^{1+2}\ b^{4+2}$ i t. d.

Skąd wniesiemy, że *mnożąc przez siebie czynniki maiące te same głoski z wykładnikami, wykładniki głosek tych tak wyraźne iak domyślne dodaią się.*

31. Zebrawszy razem wszystkie uwagi, któreśmy nad mnożeniem ilości poiedynczych uczynili, wyprowadzimy z nich następuiące prawidło ogólne do mnożenia tych ilości *spółczynniki mnożą się sposobem zwyczaynym; wykładniki głosek iednakowych tak wyraźne iak domyslne dodaią się; a wszystkie głoski piszą się przy sobie bez żadnego znaku porządkiem abecadła.* I tak iloczyn trzech czynników $5ab^2c^3d \times 4ab^3c^2 \times 3ab^2\ c^4\ e = 60a^3\ b^7\ c^9\ de$ i t. d.

32. Jako potęgi różnią się między sobą liczbą czynników równych potęgi te tworzących; tak iloczyny podług rozmaitey liczby swoich czynników iakichkolwiek są rozmaite. I tak *ab* iest iloczynem drugiego *stopnia*; *abc* iest iloczynem trzeciego stopnia; *abcd* iest iloczynem 4go stopnia i t. d. gdyż 1wszy utworzony iest z dwóch czynników, drugi z trzech, 3ci ze czterech i t d. $15a^2b^3c$ iest iloczynem szóstego stopnia, ma bowiem sześć czynników, to iest: dwa czynniki *a*, trzy czynniki *b* i ieden czynnik *c*; czynniki liczebne czyli spółczynniki nie uważaią się w naznaczaniu stopnia ilościom algiebraicznym; i tak 123 *ab* iest iloczynem stopnia 2go.

Zastanowiwszy z uwagą nad iloczynem czynników poiedynczych, postrzeżemy, że stopień tego iloczynu równy iest summie stopni wszystkich iego czynników. I tak $a^2bc \times cd = a^2bc^2d$, iloczyn ten iest szóstego stopnia, a ieden iego czynnik a^2bc iest stopnia 4go, 2gi cd stopnia 2go i t. d.

33. Dotąd zatrudnialiśmy się mnożeniem ilości algiebraicznych poiedynczych: obaczmy teraz, iak się mnożą ilości wielorakie. A naprzód uważać tu potrzeba, że iako w Arytmetyce mnożąc *np.* 26, czyli 20 + 6 przez 3, mnożymy i 6 iedności i 2 dziesiątki przez 3; tak też mnożąc *np.* $a+b$, lub $a-b$ przez c trzeba rozmnożyć i b i a przez c. Podobnież iako w Arytmetyce mnożąc *np.* 37 przez 24, mnożymy naprzód 7 iedności i 3 dziesiątki przez 4, a potém 7 iedności i 3 dziesiątki przez 2; równie też i w Algiebrze mnożąc *np.* $a+b$, lub $a-b$ przez $c+d$, lub przez $c-d$, trzeba rozmnożyć b i a przez d, a potém toż samo b i a przez c; z tą tylko odmianą, że w Arytmetyce zaczyna się mnożenie od prawey ręki: gdyż z rozmnożenia iedności przez iedności, mogą wypaść dziesiątki i t. d. co w mnożeniu ilości algiebraicznych mieysca mieć nie może. Przeto też mnożąc ilości algiebraiczne trzymamy się w mnożeniu tego porządku, którego trzymać się nawykliśmy w pisaniu; to iest mnożenie rozpoczynamy od lewey ręki postępuiąc ku prawéy. I tak mnożąc *np.* $a+b$ przez c mnożymy naprzód a przez c, potém b przez c.

Druga uwaga, którą tu uczynimy, iest następuiąca, iloczyn dwóch liczb iakichkolwiek równa się zawsze iednemu z czynników tyle razy do siebie dodanemu, czyli tyle razy wziętemu, ile czynnik drugi ma iedności. I tak iloczyn *np.* 50 utworzony z rozmnożenia 10 przez 5, równa się czynnikowi 5 dodanemu do siebie, czyli wziętemu razy 10; albo też równa się czynnikowi 10 dodanemu do siebie czyli wziętemu razy 5. Podobnież iloczyn ab równa się czynnikowi a wziętemu tyle razy, ile czynnik b ma iedności; albo też równa się czyn-

czynnikowi b wziętemu tyle razy, ile czynnik a ma iedności.

Z tey prawdy przez się widoczney wypada ten ważny wniosek, że powiększywszy lub zmnieyszywszy ieden z czynników iakąkolwiek ilością, iloczyn ich powiększy się albo zmnieyszy drugim czynnikiem tyle razy wziętym ilu iednościami czynnik pierwszy iest powiększony lub zmnieyszony.

34. Po tych uwagach przystąpmy iuż do mnożenia.

Przykład	1.	2.	3.
Mnożny	$a+b$	$a-b$	$a+b.$
Mnożnik	c	c	$c+d.$
iloczyn	$ac+bc.$	$ac-bc.$	$ac+bc+ad+bd.$

4.

$a-b.$

$c-d.$

$ac-bc-ad+bd.$

W przykładzie 1wszym i 2gim, gdyby czynnik pierwszy był a do rozmnożenia przez c, wypadłby iloczyn ac; lecz czynnik pierwszy a w 1wszym przykładzie iest powiększony, w 2gim zmnieyszony ilością b; więc iloczyn ac powinien być w 1wszym przykładzie powiększony, w drugim zmnieyszony czynnikiem drugim c wziętym razy b, czyli rozmnożonym przez b; wypadnie więc iloczyn w 1wszym przykładzie $ac+bc$, w drugim $ac-bc$.

W przykładzie 3cim, gdyby drugi czynnik był c, iloczyn podług przykładu 1wszego byłby $ac+bc$; aże czynnik drugi c iest powiększony ilością d, więc iloczyn $ac+bc$ powinien być powiększony czynnikiem pierwszym $a+b$ wziętym razy d, czyli rozmnożonym przez d. Aże rozmnożywszy $a+b$ przez d, wypadnie podług przykładu 1wszego $ad+bd$; więc iloczyn $ac+bc$ powinien być powiększony iloczynem $ad+bd$. Całkowity zatem iloczyn będzie $ac+bc+ad+cd$.

Nakoniec w przykładzie 4tym, gdyby drugi czynnik był c, iloczyn podług przykładu 2go wypadłby $ac-bc$. Aże czynnik drugi c iest zmnieyszony ilością d; więc iloczyn $ac - bc$ powinien bydź zmnieyszony czynnikiem pierwszym $a - b$ wziętym razy d, czyli rozmnożonym przez d. Że zaś rozmnożywszy $a - b$ przez d, wypadnie podług przykładu 2go $ad - bd$; więc iloczyn $ac - bc$ powinien bydź zmnieyszony iloczynem $ad - bd$; zmnieyszyć zaś iloczyn $ac - bc$ iloczynem $ad - bd$, iest to iloczyn $ad - bd$ odiąć od iloczynu $ac - bc$; będzie więc podług prawideł odeymowania (24) całkowity iloczyn $ac - bc - ad + bd$.

W przykładzie 4tym zastanowiwszy się nad całkowitym iloczynem złożonym ze czterech iloczynów cząstkowych, i porównawszy go z czynnikami, z których powstał; postrzeżemy 1od, że pierwszy iloczyn cząstkowy ac, który iest dodayny, powstał z rozmnożenia ilości dodayney a przez ilość dodayną c: stąd wniesiemy, że ilość dodayną rozmnożywszy przez drugą ilość dodayną, wypadnie iloczyn dodayny, czyli $+ a \times + c = + ac$.

2re. Drugi iloczyn cząstkowy $- bc$, który iest odiemny, powstał z rozmnożenia ilości odiemney $- b$, przez ilość dodayną c: stąd wniesiemy, że ilość odiemną rozmnożywszy przez dodayną, wypadnie iloczyn odiemny; czyli że $- b \times c = - bc$.

3cie. Trzeci iloczyn cząstkowy $- ad$, który iest odiemny, powstał z rozmnożenia ilości dodayney a przez odiemną $- d$: stąd wniesiemy, że ilość dodayną rozmnożywszy przez odiemną, wypadnie iloczyn odiemny; czyli $+ a \times - d = - ad$

4te. Czwarty nakoniec iloczyn cząstkowy $+ bd$, który iest dodayny, powstał z rozmnożenia ilości odiemney $- b$ przez odiemną $- d$; stąd wniesiemy, że ilość odiemną rozmnożywszy przez odiemną, wypadnie iloczyn dodayny; czyli $- b \times - d = + bd$.

Widzimy tu, że kiedy obadwa czynniki są dodayne, lub obadwa odiemne, iloczyn iest dodayny; kiedy zaś ieden czynnik iest dodayny drugi odiemny, iloczyn iest odiemny. Stąd możemy ustanowić następuiące prawidło na znaki w mnożeniu ilości wielocakich: *czynniki z iednakowemi zna-*

znakami daią iloczyn dodayny: czynniki z odmiennemi znakami daią iloczyn odiemny.

35. Lubo prawidło to widocznie wypływa z uwag nad czterema powyższemi przykładami; abyśmy się iednak tem lepiey o tey ważney prawdzie przekonali, wyłożymy ią ieszcze sposobem następuiącym:

Daymy, że potrzeba rozmnożyć $a - a$ przez $+b$. Ponieważ $a - a$ znaczy to samo, co zero, szukany zatem iloczyn powinien bydź zero: iloczyn bowiem iest zawsze zerem, gdy ieden z tworzących go czynników iest zero. Aże mnożąc a przez $+b$ wypadnie ab, czyli $+ab$; więc mnożąc $-a$ przez $+b$ powinno wypaść $-ab$: i będzie całkowity iloczyn $ab - ab = 0$. Stąd wniesiemy, że $-a \times +b = -ab$.

2re. Mnożąc b przez $a - a$, wypadnie także iloczyn $ab - ab$: bo gdy czynnik $a - a$ równy zeru, iloczyn także powinien być zero; a zatem drugi wyraz tego iloczynu powinien być odiemny, aby tym sposobem zniknął pierwszy wyraz dodayny. Stąd wniesiemy, że $+b \times -a = -ab$.

Nakoniec mnożąc $a - a$ przez $-b$, pierwszy wyraz iloczynu podług tego co poprzedziło, będzie $-ab$; drugi więc wyraz tegoż iloczynu powinien być $+ab$, aby tym sposobem zniknął wyraz pierwszy $-ab$: całkowity bowiem iloczyn powinien być równy zeru, kiedy ieden czynnik $a - a$ iest zerem. Stąd wniesiemy, że $-a \times -b = +ab$.

36. Dla wprawy przytoczymy tu kilka przykładów mnożenia, z któremi trzeba się należycie obeznać: gdyż w dalszym ciągu często się do nich odwoływać będziemy.

1.

$$\begin{array}{l} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ \quad -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2. \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ \quad +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2. \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{l} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ \quad -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2. \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{l} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ \quad +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \end{array}$$

5.

$$\begin{array}{l} a^2-2ab+b^2 \\ a-b \\ \hline a^3-2a^2b+ab^2 \\ \quad -a^2b+2ab^2-b^3 \\ \hline a^3-3a^2b+3ab^2-b^3. \end{array}$$

6.

$$\begin{array}{l} 5a^4-2a^3b+4a^2b^2 \\ a^3-4a^2b+2b^3 \\ \hline 5a^7-2a^6b+4a^5b^2 \\ \quad -20a^6b+8a^5b^2-16a^4b^3 \\ \qquad +10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5 \\ \hline 5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5. \end{array}$$

W przykładzie 1wszym mnoży się summa dwóch iakichkolwiek ilości $a+b$ przez ich różnicę $a-b$, i wypada na iloczyn a^2-b^2, to iest różnica kwadratów tychże ilości. Ztąd wniesiemy 1ód, że *summa dwóch ilości rozmnożona przez ich różnicę daie na iloczyn różnicę kwadratów tychże ilości*; 2re, że *różnica kwadratów dwóch ilości uważana być może za iloczyn pochodzący z rozmnożenia ich summy przez ich różnicę. np.* x^2-c^2 pochodzi z rozmnożenia $x+c$ przez $x-c$.

Przykład 2gi. 3ci, 4ty i 5ty okazuią z iakich części składa się potęga druga czyli kwadrat, i potęga trzecia czyli sześcian summy dwóch iakichkolwiek ilości $a+b$ i ich różnicy $a-b$.

W przykładzie 6tym mnożą się następnie wszystkie trzy wyrazy mnożnego $5a^2-2a^3b+4a^2b^2$ przez pierwszy wyraz mnożnika, to iest przez a^3.

Dwa

Dwa wyrazy $5a^4$ i a^3 maią iednakowe znaki (22): a zatém iloczyn ich będzie miał znak +, który się na początku opuszcza. Mnożę potém spółczynniki tych dwóch wyrazów, to iest 5 spółczynnik ilości a^4 mnożę przez 1, który iest domyślnym spółczynniczynnikiem ilości a^3, i mam 5 spółczynnik wyrazu 1wszego w iloczynie. Nakoniec mnożąc a^4 przez a^3 (30), dodaie ich wykładniki, i mam a^7. A zatém pierwszy wyraz iloczynu iest $5a^7$.

Potém 2gi wyraz mnożnego $-2a^3b$ mnożę przez a^3. Ponieważ dwa te wyrazy maią odmienne znaki (34), iloczyn ich będzie miał znak —. Mnożę potém spółczynniki tych dwóch wyrazów. Nakoniec a^3b mnożę przez a^3; i mam drugi wyraz iloczynu $-2a^6b$.

Podobnież rozmnożywszy $+4a^2b^2$ przez a^3, będzie 3ci wyraz iloczynu $+4a^5b^2$.

Rozmnożywszy wszystkie trzy wyrazy mnożnego przez 1wszy wyraz mnożnika, trzeba ie potém mnożyć przez 2gi wyraz mnożnika, to iest przez $-4a^2b$, daiąc zawsze baczność naprzód na znaki, powtóre na spółczynniki, potrzecie na głoski i ich wykładniki: skąd powstaną drugie trzy wyrazy iloczynu $-20a^6b+8a^5b^2-16a^4b^3$.

Naostatek podług tychże prawideł rozmnożywszy wszystkie trzy wyrazy mnożnego przez trzeci wyraz mnożnika, to iest przez $+2b^3$ będę miał ostatnie trzy wyrazy iloczynu, $+10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$. A zatem całkowity iloczyn składać się będzie z 9 iloczynów cząstkowych:

$$5a^7-2a^6+4a^5b^2-20a^6b+8a^5b^2-16a^4b^3+10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5.$$

W tym iloczynie wyrazy niektóre są sobie podobne, to iest złożone z tych samych głosek i maiące iednakowe wykładniki: a zatem podług tego co się wyżey powiedziało (23) sprowadziwszy ie, będzie iloczyn szukany

$$5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5.$$

37. W przykładzie pierwszym, 2gim i 3cim wyrazy tak mnożnych iak mnożników są stopnia pier-

pierwszego (22); a wyrazy iloczynu są stopnia 2go. W przykładzie 4tym i 5tym wyrazy mnożnych są stopnia 2go; wyrazy mnożników stopnia pierwszego; a wyrazy iloczynów są stopnia 3go. Nakoniec w przykładzie 6tym wszystkie wyrazy w mnożnym są stopnia 4go; a wyrazy iloczynu są stopnia 7go; właśnie też tak, być powinno stosownie do uwagi, którąśmy wyżey uczynili (35): stąd wniesiemy, że ieżeli wyrazy mnożnego są iednegoż stopnia, i wyrazy mnożnika iednegoż stopnia; wyrazy iloczynu będą także iednegoż stopnia, który oznaczy summa dwóch liczb iedney, oznaczaiącey stopień wyrazów mnożnego, drugiey oznaczaiącey stopień wyrazów mnożnika.

Wszelkie wyrażenie algiebraiczne złożone z wyrazów iednego stopnia, zowie się wyrażeniem *rownostopniowem, albo równoczynnikowem, expressio homogenea*, dla różnicy od wyrażeń *różnostopniowych*, które się składaią z wyrazów różnego stopnia. Powyższa uwaga posłuży do upatrzenia, czy w znalezionym iloczynie wyrażeń równostopniowych nie zaszła iakowa omyłka przez opuszczenie, którego z czynników w mnożeniu wyrazów poiedynczych.

38. Wreście mnożenie ilości algiebraicznych wielorakich w tenczas tylko odbywa się podług wskazanych wyżey prawideł, kiedy iest tego potrzeba nieuchronna. Nayczęściéy przestaiemy na wskazaniu, że ilości te powinny być przez siebie rozmnożone. Na ten koniec wszystkie czynniki wielorakie biorą się w nawias; czynniki zaś poiedyncze piszą się przed nawiasem z lewey lub z prawey strony. I tak wyrażenia te: $(a+b)(a-b)$; $(3a+2bc-4dm)(a+5b)(x-c)$; $x(a+b-1)$; $(a^2+2ab+b^2)m$ i t. d. znaczą, że w przykładzie 1wszym dwa czynniki wielorakie, w 2gim trzy takież czynniki, w 3cim zaś i 4tym ieden czynnik wieloraki a drugi poiedynczy powinny być przez siebie rozmnożone podług prawideł powyższych. Podobnież wyrażenia te: $(a+b)^2$, $(a-b)^3$ i t. d.

[wszystkie wyrazy mnożnika są stopnia 3go] i t. d. znaczą, że z dwóch ilości $a+b$, $a-b$, 1wsza powinna być podniesiona do kwadratu, 2ga do sześcianu.

39. Często się trafia w działaniach algiebraicznych, że dany iloczyn potrzeba rozłożyć na czynniki, z których on powstał. I tak chcąc rozłożyć na czynniki iloczyn $ax+am+bx+bm$, uważać potrzeba, że ponieważ dwóch pierwszych wyrazów spólnym czynnikiem iest a, dwóch drugich spólnym czynnikiem b; będzie $ax+am=a(x+m)$;

$$bx+bm=b\ (x+m).$$

Strony odpowiadaiące w tych dwóch równaniach dodawszy do siebie, wypadnie $ax+am+bx+bm=a\ (x+m)+b\ (x+m)$.

W równaniu tem z drugiey strony czynnik wieloraki $x+m$ raz powinien być rozmnożony przez a, drugi raz przez $+b$: będzie więc

$$ax+am+bx+bm=(x+m)\ (a+b).$$

Podobnież chcąc iloczyn $ax-am-bx+bm$, rozłożyć na czynniki, uważać potrzeba, że ponieważ dwa pierwsze wyrazy tego iloczynu maią spólny czynnik a, będzie więc $ax-am=a\ (x-m)$. Dla teyże przyczyny $bx+bm=b\ (x+m)$. Ale że w danym iloczynie wyraz 3ci bx iest odiemny, a 4ty bm iest dodayny, będzie więc podług tego cośmy powiedzieli wyżey (29), $-bx+bm=-b\ (x-m)$. Dwa te równania: $ax-am=a\ (x-m)$, i $-bx+bm=-b\ (x-m)$ dodawszy do siebie, wypadnie

$$ax-am-bx+bm=a\ (x-m)-b\ (x-m).$$

W równaniu tem z drugiey strony czynnik wieloraki $x-m$ powinien być rozmnożony raz przez a, drugi raz przez $-b$: będzie więc, $ax-am-bx+bm=(x-m)\ (a-b)$.

Trzeba tu także uważać na spółczynniki domyślne. I tak w wyrażeniu tem: $3a^2x+2b^3x-x$, w pierwszym i drugim wyrazie spółczynniki ilości x, są wyraźne; w trzecim zaś wyrazie iest spół-

czyn-

czynnik domyślny (22). Wyrażenie więc to rozłożone na czynniki zamieni się w następuiące : $x(3a^2 + 2b^3 - 1)$. Podobnież wyrażenie $x - \frac{2}{7}ax + \frac{5}{8}bx^2$, rozłożone na czynniki zamieni się w następuiące: $x(1 - \frac{2}{7}a + \frac{5}{8}bx)$ i t. d.

IV. *Dzielenie ilości Algiebraicznych.*

40. Iloraz dwóch ilości, iakośmy iuż powiedzieli, oznacza się przez ułomek, którego licznikiem iest dzielna, a mianownikiem dzielnik. I tak ułomek ten $\frac{ab}{a}$ iest ilorazem ilości ab podzielony przez a, to iest, znaczy, że liczbę oznaczoną przez ab podzielić potrzeba przez liczbę oznaczoną przez a.

Dzielna w Algiebrze równie iak w Arytmetyce, powinna być uważana iako iloczyn dwóch czynników, z których ieden iest danym dzielnikiem, drugi szukanym ilorazem. Rozmnożywszy zatém znaleziony iloraz przez dany dzielnik, powinna wypaść na iloczyn ilość dzielna.

Podług téy uwagi podzieliwszy ab przez a, powinno na iloraz wypaść b: iakoż znaleziony iloraz b rozmnożywszy przez dany dzielnik a, wypadnie na iloczyn ilość dzielna ab. Podobnież podzieliwszy $abcx$ przez bx, wypadnie na iloraz ac: iakoż rozmnożywszy znaleziony iloraz ac przez dany dzielnik bx, wypadnie na iloczyn ilość dzielna $abcx$ i t. d.

A stąd wyprowadzić można następuiące prawidło dzielenia ilości algiebraicznych poiedynczych: *czynniki spólne dzielnéy i dzielnikowi przekreśliwszy, reszta będzie szukanym ilorazem*: *np.* $\frac{mpqrx}{prx} = mq$, i t. d.

Prawidło to obeymuie także i spółczynniki; *np.* $\frac{2ab}{2a} = b$, $\frac{5abcd}{5ab} = cd$ i t. d.

41.

41. Abyśmy prawidło to łatwiéy zastosować mogli do wszystkich przypadków dzielenia ilości algiebraicznych poiedynczych, uważać potrzeba, że dzielnik może bydź złożony albo ze wszystkich tychże samych czynników, które się znayduią w dzielnéy, iak iest w przykładach powyższych; albo z niektórych tylko czynników spólnych dzielnéy, a z innych odmiennych, np. $\frac{abc}{cm}$, $\frac{a^2bcd}{a^2bmx}$ i t. d.; albo nakoniec ze wszystkich czynników odmiennych od czynników dzielney, np. $\frac{3a^2bc}{7dmp}$ i t. d.

W przypadku piérwszym gdy wszystkie czynniki dzielnika znayduią się w dzielney, na ten czas, ieżeli liczba czynników dzielnika mnieysza iest od liczby czynników dzielney, czyli, co na iedno wychodzi, ieżeli dzielnik mnieyszy iest od dzielnéy, po zachowaniu powyższego prawidła ilorazem będzie ilość całkowita, iakośmy iuż widzieli w przykładach powyższych, gdzie $\frac{abcx}{bx}=ac$ i t. d. Jeżeli w dzielniku więcéy iest czynników niż w dzielnéy, czyli ieżeli dzielnik większy iest od dzielney, iloraz będzie ułomkiem, którego licznikiem iest spółczynnik dzielney wyraźny lub domyślny, a mianownikiem czynniki w dzielniku pozostałe po zachowaniu powyższego prawidła, np. $\frac{7a}{abc}=\frac{7}{bc}$, $\frac{ac}{5abcd}=\frac{1}{5bd}$, $\frac{abx}{abcx}=\frac{1}{c}$ i t. d.

Nakoniec ieżeli tak dzielna iak i dzielnik maią równą liczbę czynników, czyli są sobie równe, ilorazem będzie iedność: wszelka bowiem ilość sama w sobie mieści się raz ieden, np. $\frac{abc}{abc}=1$, $\frac{3a^2b^3c}{3a^2b^3c}=1$, i t. d. Co też i z tego względu iest rzeczą widoczną, że w ułomku np. $\frac{abc}{abc}$ przekreśliwszy

czyn-

czynniki spólne dzielnéy i dzielnikowi, zostanie się na iloraz ułomek, którego licznikiem i mianownikiem iest domyślny spółczynnik dzielnéy i dzielnika, to iest iedność, iloraz zatém szukany będzie $\frac{1}{1} = 1$.

W przypadku drugim, gdy dzielnik składa się z niektórych tylko czynników spólnych dzielnéy, a z innych odmiennych, na ten czas po zachowaniu powyższego prawidła ilorazem będzie ułomek, którego licznikiem są czynniki dzielnéy, mianownikiem czynniki dzielnika pozostałe po przekreśleniu czynników spólnych dzielnéy i dzielnikowi; *np.* $\frac{3abc}{7bcd} = \frac{3a}{7d}$, $\frac{2abcx}{5amp} = \frac{2bcx}{5mp}$, i t. d.

Nakoniec w przypadku trzecim, gdy dzielnik składa się ze wszystkich czynników odmiennych od czynników dzielnéy, na ten czas ilorazem będzie ułomek, którego licznikiem iest dana dzielna, mianownikiem dany dzielnik; *np.* $\frac{abc}{mpq}$, i t. d.

42. Częstokroć na piérwsze weyrzenie zdaie się, że dzielna i dzielnik nie maią żadnego czynnika spólnego: *np.* $\frac{72a^5 b^7 c^6 d^2}{9a^3 b^4 c^2 d}$: w ilorazie tym żaden z czynników dzielnéy nie ma sobie równego między czynnikami dzielnika. Lecz zważywszy, że $72 = 9.8$, $a^5 = a^3 \times a^2$ (30), $b^7 = b^4 \times b^3$, $c^6 = c^2 \times c^4$, $d^2 = d \times d$; wniesiemy, że

$$\frac{72a^5 b^7 c^6 d^2}{9a^3 b^4 c^2 d}$$
$$= \frac{9.8a^3 \times a^2 b^4 \times b^3 c^2 \times c^4 d \times d.}{9a^3 b^4 c^2 d}$$

Przekreśliwszy więc podług powyższego prawidła, czynniki spólne dzielnéy i dzielnikowi, zostanie iloraz szukany $\frac{72a^5 b^7 c^6 d^2}{9a^3 b^4 c^2 d} = 8\, a^2 b^3 c^4 d$.

Porównawszy czynniki tego ilorazu z czynnikakami dzielnéy i dzielnika, postrzeżemy 1ód, że czynnik liczebny czyli spółczynnik ilorazu to iest 8 powstał z podzielenia czynnika liczebnego dzielnéy, którym iest 72, przez czynnik liczebny dzielnika, którym iest 9: (gdyż $\frac{72}{9} = 8$. 2re że drugim czynnikiem ilorazu iest taż sama głoska *a*, która się znayduie w dzielnéy i w dzielniku, lecz ma za wykładnik 2, który pozostanie z odięcia liczby 3 będącey wykładnikiem głoski *a* w dzielniku, od liczby 5 będącey wykładnikiem teyże głoski *a* w dzielnéy: iakoż $a^3 = a^{5-2}$: 3cie że trzecim czynnikiem ilorazu iest taż sama głoska *b*, która się znayduie w dzielnéy i w dzielniku, lecz ma za wykładnik 3, który pozostanie z odięcia liczby 4 będącey wykładnikiem głoski *b* w dzielniku od liczby 7 będącey wykładnikiem teyże głoski *b* w dzielnéy: iakoż $b^3 = b^{7-4}$, toż mówić o dwoch ostatnich czynnikach ilorazu, z których pierwszy $c^4 = c^{6-2}$, drugi *d* czyli $d^1 = d^{2-1}$.

Stąd wniesiemy 1od, że w dzieleniu ilości algiebraicznych poiedynczych, czynniki liczebne czyli spółczynniki dzielą się sposobem zwyczaynym. 2re że czynniki będące potęgami tychże samych głosek dzielą się przez siebie odeymuiąc wykładnik dzielnika od wykładnika dzielnéy, np. $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-2} = a^2$: gdyż $\frac{a^5}{a^3} = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2 = a^{5-3}$ i t. d.

43. Z tego ostatniego wniosku wypadaią dwa inne. Pierwszy, że kiedy dzielna i dzielnik są iednéyże głoski potęgami równego stopnia, czyli maią wykładniki równe, na ten czas odiąwszy wykładnik dzielnika od wykładnika dzielnéy, dla ilorazu zostanie na wykładnik zero; np. $\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0$, $\frac{a^7}{a^7} = a^{7-7} = a^0$ i t. d. Aże $\frac{a^5}{a^5} = 1$. $\frac{a^7}{a^7} = 1$

(41; (

więc $a^0 = 1$. To iest: *wszelka ilość maiąca za wykładnik zero znaczy to samo co iedność.*

Drugi wniosek z dzielenia przez siebie potęg wypadaięcy iest ten, że kiedy dzielnik iest potęgą wyższego stopnia aniżeli dzielna, czyli kiedy wykładnik dzielnika większy iest niż wykładnik dzielney, na ten czas odiąwszy wykładnik dzielnika od wykładnika dzielnéy, zostanie dla ilorazu wykładnik odiemny; np. $\frac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1}$; $\frac{a^7}{a^8} = a^{7-8}$ $= a^{-1}$; $\frac{a^2}{a^4} = a^{2-4} = a^{-2}$; $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$ i t. d.

Aże $\frac{a^2}{a^3} = \frac{a^2}{a^2 \times a} = \frac{1}{a}$ (41), podobnież $\frac{a^7}{a^8} = \frac{1}{a}$ $\frac{a^2}{a^4} = \frac{1}{a^2}$; $\frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^3}$ i t. d. Stąd wniesiemy, że a^{-1} $= \frac{1}{a}$, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ i t. d. To iest: *wszelka ilość maiąca wykładnik odiemny znaczy to samo co ułomek, którego licznikiem iest iedność, a mianownikięm taż sama ilość z tymże wykładnikiem lecz dodaynym.*

44. W powyższym przykładzie (42), w którym iloraz wypadł całkowity, spółczynnik dzielnika mieści się zupełnie w spółczynniku dzielnéy i wykładniki wszystkich głosek w dzielniku mnieysze są od wykładników tychże głosek w dzielnéy. Przykład następuiący iest pod tymi dwoma względami od tamtego odmienny, i ma ieszcze prócz tego niektóre czynniki właściwe saméy dzielnéy, niektóre właściwe samemu dzielnikowi.

$$\frac{27a^3b^5c^2dmx}{36a^8b^7c^6d^4ef}$$

W tym także przykładzie żaden czynnik dzielnika nie ma sobie równego między czynnikami dzielnéy; lecz ponieważ $27 = 9 \cdot 3$. $36 = 9 \cdot 4$, $a^8 = a^3 \times a^5$, $b^7 = b^5 \times b^2$, $c^6 = c^2 \times c^4$, $d^4 = d \times d^3$ wniesiemy, że

27

$$\frac{27\,a^3b^5c^2dmx}{36\,a^8b^7c^6d^4ef}$$

$$=\frac{9\cdot 3a^3b^5c^2dmx}{9\cdot 4a^3\times a^5b^5\times b^2c^2\times c^4d\times d^3\,ef}$$

Przekreśliwszy czynniki spólne dzielnéy i dzielnikowi, wypadnie

$$\frac{27a^3b^5c^2dmx}{36a^8b^7c^6d^4ef}=\frac{3mx}{4a^5b^2c^4d^3\,ef}$$

Porównawszy iloraz ten z dzielną i dzielnikiem, postrzeżemy 1śd, że spółczynnik dzielney to iest 3, i spółczynnik dzielnika to iest 4 powstały z podzielenia liczb 27 i 36 przez ich spólny dzielnik to iest przez liczbę 9: 2re, że drugi czynnik dzielnéy, którym iest a^3, zniknął, drugi zaś czynnik dzielnika pozostał, lecz ma za wykładnik liczbę 5 pozostaiącą z odięcia liczby 3 będącey wykładnikiem głoski *a* w dzielnéy, od liczby 8 będącéy wykładnikiem teyże głoski *a* w dzielniku; toż mówić o czynniku 3cim, 4tym i 5tym, które w dzielnéy zniknęły, w dzielniku pozostały, lecz z wykładnikami odmiennemi, z których każdy równa się różnicy między wykładnikiem głoski znayduiącey się w dzielniku, i wykładnikiem teyże głoski znayduiącey się w dzielnéy; 3cie że nakoniec dwa ostatnie czynniki dzielnéy *mx*, i dzielnika *ef* pozostały na swoiém mieyscu.

Stąd wniesiemy, że w takim przypadku dzieląc ilości algiebraiczne poiedyncze 1od czynniki liczebne tak w dzielnéy iak w dzielniku dzielą się przez naywiększy spólny dzielnik: 2re że czynniki będące potęgami iednychże głosek dzielą się odeymuiąc wykładnik każdey głoski będącey czynnikiem w dzielney, od wykładnika teyże głoski będącéy czynnikiem w dzielniku. Co się tycze czynników odmiennych w dzielnéy i w dzielniku znayduiących się, te iakośmy iuż powiedzieli, żadnéy zmianie w dzieleniu nie podpadaią, lecz pierwsze pozostaią w liczniku iako czynniki dzielnéy, drugie iako czynniki dzielnika pozostaią w mianowniku.

45. Zbierzmy teraz wkrótkości wszystko to cośmy dotąd o dzieleniu ilości algiebraicznych poiedynczych powiedzieli. Iloraz ilości tych może być albo całkowity, albo ułomkowy. Ażeby iloraz był całkowity, potrzeba 1*od*, aby spółczynnik dzielnika mieścił się zupełnie w spółczynniku dzielney, 2*ie*, ażeby wszystkie głoski znayduiące się w dzielniku, znaydowały się także w dzielney; 3*cie*, ażeby wykładnik każdey głoski w dzielniku nie był większy od wykładnika teyże głoski w dzielney. Chcąc w tym przypadku otrzymać iloraz, trzeba.

1*od* *Podzielić spółczynnik dzielney przez spółczynnik dzielnika, a iloraz liczebny będzie spółczynnikiem ilorazu szukanego.*

2*ie*. *Przekreślić w dzielney głoski, które iey są spólne z dzielnikiem, ieżeli głoski te tak w dzielney iak w dzielniku maią równe wykładniki; ieżeli zaś wykładniki ich nie są równe, odiąć wykładnik dzielnika od wykładnika dzielney, reszta będzie wykładnikiem teyże głoski w ilorazie.*

3*cie* *Napisać w ilorazie wszystkie głoski dzielney, które się nie znayduią w dzielniku*; np.

$$\frac{144\,a^7\,b^5\,c^3\,dx}{72\,a^5\,b^2\,c^3} = 2\,a^2\,b^3\,dx \text{ i t. d.}$$

Jeżeli zaś albo spółczynnik dzielnika nie mieści się zupełnie w spółczynniku dzielney; albo głoski będące w dzielniku są odmienne od głosek będących w dzielney; albo nakoniec ieżeli większa iest liczba głosek w dzielniku niż w dzielney, lub głosek dzielnika większe są wykładniki niż tychże głosek w dzielney, chociażby głoski dzielney i dzielnika były iednakowe; na ten czas iloraz szukany będzie miał postać ułomkową. Chcąc w tym przypadku otrzymać iloraz, trzeba

1*ód*. *Spółczynnik dzielney i dzielnika podzielić przez spólny ich dzielnik, ieżeli to być może.*

2*ie*. *Przekreślić głoski spólne dzielney i dzielnikowi, ieżeli głoski te tak w dzielney iak w dzielni-*

ni-

niku maią równe wykładniki; ieżeli zaś wykładniki ich są nie równe, trzeba odiąć wykładnik mnieyszy od większego, a reszta będzie wykładnikiem teyże głoski, która pozostaie w tym wyrazie ułomka, w którym miała wykładnik większy;

3cie. głoski odmienne tak dzielney iak dzielnika zostawić bez żadney zmiany pierwsze w liczniku, drugie w mianowniku ułomka będącego ilorazem; np.

$$\frac{48a^3b^7c^5dm}{64a^3b^4c^7ex} = \frac{3b^3dm}{4c^2ex} \text{ i t. d.}$$

46. We wszystkich przykładach dzielenia, któreśmy dotąd przytoczyli, tak dzielna i dzielnik, iako też ich iloraz, są ilościami dodaynemi. Obaczmyż teraz iaki będzie iloraz, kiedy dzielna i dzielnik są ilości odiemne, albo iedna z nich dodayna druga odiemna.

1od. $\frac{+ab}{-a} = -b$; gdyż znaleziony iloraz $-b$ rozmnożywszy przez dany dzielnik $-a$, wypadnie iloraz $+ab$ (34), który odiąwszy od daney dzielney $+ab$, zostanie podług prawideł odeymowania (24) $+ab-ab=0$; co dowodzi, że znaleziony iloraz $-b$ iest prawdziwy (40).

2re. $\frac{-ab}{+a} = -b$: gdyż znaleziony iloraz $-b$ rozmnożywszy przez dany dzielnik $+a$, wypadnie iloczyn $-ab$, który odiąwszy od daney dzielney $-ab$, zostanie $-ab+ab=0$.

3cie. $\frac{-ab}{-a} = +b$: gdyż znaleziony iloraz $+b$ rozmnożywszy przez dany dzielnik $-a$, wypadnie iloczyn $-ab$, który odiąwszy od dzielney $-ab$, zostanie $-ab+ab=0$.

Gdybyśmy zaś dzieląc np. $-ab$ przez $-a$, zamiast ilorazu $+b$, wzięli przez omyłkę za iloraz $-b$; omyłka ta zaraz dałaby się postrzedz: mnożąc bowiem znaleziony iloraz $-b$ przez dany dzielnik $-a$, wypadłby iloczyn $+ab$, który odiąwszy od dzielnéy $-ab$, zostanie $-ab-ab = -2ab$; co dowodzi, że znaleziony iloraz $-b$ iest fałszywy: dzielnik bowiem $-a$ mieści się widocznie w pozostałéy reście $-2ab$.

Stąd się okazuie, że iloraz iest dodayny czyli ma przed sobą znak $+$, kiedy obiedwie dane do dzielenia ilości są dodayne, lub obiedwie odiemne; kiedy zaś iedna z nich iest dodayna, druga odiemna, iloraz ma przed sobą znak $-$, czyli iest odiemny.

Można więc ustanowić następuiące prawidło na znaki w dzieleniu: *ieżeli dzielnik i dzielna są z iednakowemi znakami, iloraz będzie dodayny: ieżeli dzielnik i dzielna są z odmiennemi znakami, iloraz będzie odiemny.*

47. Pozostało ieszcze dzielenie ilości wielorakich, czyli z kilku wyrazów złożonych. W dzieleniu takowych ilości wypada dzielić albo ilość poiedynczą przez wieloraką, np. $\frac{x}{a+2b-3c}$; albo ilość wieloraką przez poiedynczą np. $\frac{a+b-c}{x}$; albo wieloraką przez wieloraką, np. $\frac{a+b-c}{d-m+q}$. W pierwszym i drugim przypadku dzielenie oznacza się zwyczaynie sposobem ułomka: iednakże w przypadku drugim można czasem użyć prawidła podanego wyżéy (40), lecz w ten czas tylko, kiedy każdy wyraz dzielnéy składa się z wyrazu dzielnika, np. $\frac{ax+2bx-3cx}{x} = a+2b-3c$. Jakoż ponieważ w dzielnéy wszystkich wyrazów iest spolnym czynnikiem x, rozłożywszy więc dzielną naczynniki (39), będzie

$$\frac{ax+2bx-3cx}{x} = \frac{x(a+2b-3c)}{x} = a+2b-3c \ (40).$$

To

To samo prawidło przystósować czasem można i do przypadku trzeciego, kiedy głoski spólne dzielnéy i dzielnikowi znayduią się we wszystkich wyrazach znakami + i — od siebie oddzielonych: *np.*

$\frac{a^5+4a^2b-5a^2b^5}{a^3-5a^2b}$. W przykładzie tym czynnik a^2 znayduie się we wszystkich wyrazach dzielnéy i dzielnika; rozłożywszy więc tak dzielną iak dzielnik na czynniki, będzie

$$\frac{a^5+4a^2b-5a^2b^5}{a^3-5a^2b}$$
$$=\frac{a^2(a^3+4b-5b^5)}{a^2(a-5b)}=\frac{a^3+4b-5b^5}{a-5b}.$$

Czasem dosyć iest rozłożyć same tylko dzielną, lub sam tylko dzielnik na czynniki: *np.*

$$\frac{a^2-x^2}{a+x}=\frac{(a+x)(a-x)}{a+x}=a-x \text{ (36).}$$

W innych przypadkach dzielenia ilości wielorakich przez wielorakie, iak sobie postąpić należy, podamy na to prawidła na innem mieyscu; nie iżby wiadomość ta była od poprzedzaiących trudnieysza; lecz że potrzebuie obszernieyszego wykładu, a do zrozumienia tego, co w początkach Algiebry wyłożoném być powinno, nie będzie nam potrzebna.

V. O ułomkach algiebraicznych.

48. Ułomki algiebraiczne tém się tylko od liczebnych różnią, że co w tych wyrażaią liczby, to w tamtych wyraża się przez głoski: znaiąc więc dokładnie cztéry działania arytmetyczne z ułomkami liczebnémi, łatwo ie zastósować można do ułomków algiebraicznych. I tak

1ód. Ułomek ten $\frac{a}{c}=\frac{ac}{c^2}=\frac{ab}{bc}=\frac{a^2+ab}{ac+bc}$

$= \frac{ad - am}{cd - cm}$ i t. d. mnożąc licznik i mianownik przez tęż samę iłość c, b, $a+b$, $d-m$ i t. d.

2re. Ułomki $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{m}$ sprowadzone do iednakowego mianownika, zamienią się w następuiące: $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$, mnożąc w piérwszym ułomku obadwa wyrazy przez d, w 2gim obadwa wyrazy przez b. Podobnież ułomki $\frac{m}{a}$, $\frac{n}{b}$, $\frac{x}{c}$, sprowadzone do iednakowego mianownika, zamienią się w następuiące: $\frac{bcm}{abc}$, $\frac{acn}{abc}$, $\frac{abx}{abc}$, mnożąc obadwa wyrazy w ułomku 1wszym przez b i c, w 2gim przez a i c, w 3cim przez a i b i t. d.

3cie. Dodawszy $\frac{a}{b}$ do $\frac{c}{d}$, będzie $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$. Podobnież $\frac{a}{b} + m = \frac{a}{b} + \frac{bm}{b} = \frac{a+bm}{b}$ i t. d.

4te. Odiąwszy $\frac{c}{d}$ od $\frac{a}{b}$; Zostanie $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$. Podobnież $\frac{a}{b} - m = \frac{a}{b} - \frac{bm}{b} = \frac{a-bm}{b}$.

$$a - \frac{c}{b} = \frac{ab}{b} - \frac{c}{b} = \frac{ab-c}{b};$$

$$\frac{a}{b} - \frac{a-2c}{a-b} = \frac{a^2-ab}{ab-b^2} - \frac{ab-2bc}{ab-b^2}$$

$$= \frac{a^2-ab-ab+2bc}{ab-b^2} = \frac{a^2-2ab+2bc}{ab-b^2} \text{ i t. d.}$$

5te.

5te. Rozmnożywszy $\frac{a}{b}$ przez m, wypadnie $\frac{am}{b}$; rozmnożywszy $\frac{a}{b}$ przez $\frac{c}{d}$, wypadnie $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; $m + \frac{a}{b}$ rozmnożywszy przez $x - \frac{c}{d}$, wypadnie $\left(m + \frac{a}{b}\right)\left(x - \frac{c}{d}\right) = \left(\frac{bm+a}{b}\right)\left(\frac{dx-c}{d}\right) = \frac{bdmx + adx - bcm - ac}{bd}$; i t. d.

6te Ułomek $\frac{a}{b}$ podzieliwszy przez c, wypadnie $\frac{a}{bc}$.

Podzieliwszy c przez $\frac{a}{b}$, wypadnie $\frac{bc}{a}$.

Podzieliwszy $\frac{a}{b}$ przez $\frac{c}{d}$, wypadnie $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Podzieliwszy $a + \frac{b}{c}$ przez $d - \frac{x}{m}$, wypadnie $\frac{ac+b}{c} \times \frac{m}{dm-x} = \frac{acm+bm}{cdm-cx}$ i t. d.

7me. Wyrażenie to $\frac{\frac{a}{m}}{\frac{r}{p}}$, znaczy, że ułomek $\frac{a}{m}$ podzielić trzeba przez ułomek $\frac{r}{p}$; a zatém wyra-

żenie

żenie to zamienić można w następuiące: $\frac{a}{m} \times \frac{p}{r} = \frac{ap}{mr}$. Podobnież

$$\frac{\frac{m}{c}+a}{b-\frac{p}{q}} = \frac{\frac{m+ac}{c}}{\frac{bq-p}{q}} = \frac{m+ac}{c} \times \frac{q}{bq-p} = \frac{mq+acq}{bcq-cp} \text{ i t. d.}$$

49. Tych samych skróceń, które się używaią w ułomkach liczebnych, można czasem wygodnie użyć w ułomkach algiebraicznych. i tak: chcąc sprowadzić do iednakowego mianownika dwa ułomki $\frac{a}{m}$ i $\frac{c}{mx}$, zamiast mnożenia wyrazów 1wszego ułomka przez mx, drugiego przez m, dosyć iest rozmnożyć wyrazy 1wszego ułomka przez x; tym sposobem ułomek ten zamieni się w następuiący: $\frac{ax}{mx}$, którego mianownik iest ten sam co w ułomku 2gim. Podobnież dwa ułomki $\frac{a}{bc}$, $\frac{d}{bm}$, będą sprowadzone do iednakowego mianownika, gdy obadwa wyrazy w 1wszym ułomku, rozmnożymy przez m, w drugim przez c; iakoż tym sposobem ułomki te zamienią się w następuiące: $\frac{am}{bcm}$, $\frac{cd}{bcm}$ i t. d.

W ogólności chcąc krótszym sposobem sprowadzić ułomki do iednakowego mianownika, trzeba *zebrać w ieden iloczyn wszystkie odmienne czynniki znayduiące się w mianownikach danych ułomków: iloczyn, ten będzie spólnym dla ułomków danych mianownikiem; licznik zaś każdego z danych* ułom-

ułomków rozmnożyć przez czynniki tego iloczynu nie znayduiące się w mianowniku tegoż ułomka, np. Niech będą ułomki $\frac{m}{bc}$, $\frac{p}{ab}$, $\frac{q}{cd}$, $\frac{r}{ae}$, których mianowniki maią pięć odmiennych czynników a, b, c, d i e; iloczyn zatem $abcde$ będzie spólnym dla wszystkich mianownikiem: rozmnożywszy potem licznik 1wszego ułomka przez ade, 2go przez cde, 3go przez abe, 4go przez bcd, wypadną ułomki

$$\frac{adem}{abcde}, \frac{cdep}{abcde}, \frac{abeq}{abcde}, \frac{bcdr}{abcde}.$$

Chcąc ułomek $\frac{a+b-z}{m(x-c+d)}$ rozmnożyć przez $x-c+d$, zamiast mnożenia licznika $a+b-z$ przez $x-c+d$ podług prawidła zwyczaynego, można iego mianownik $m(x-c+d)$ podzielić przez $x-c+d$, i wypadnie iloczyn szukany $\frac{a+b-z}{m}$.

Chcąc ułomek $\frac{(c+dm)x}{a+b}$ podzielić przez $c+dm$, zamiast mnożenia mianownika $a+b$ przez $c+dm$ podług zwyczaynego prawidła dzielenia ułomków przez całkowite, można iego licznik $(c+dm)x$ podzielić przez $c+dm$; i wypadnie iloraz $\frac{x}{a+b}$ i t. d.

50. Ponieważ ułomek co do ważności swoiéy iest ilorazem wypadaiącym z podzielenia licznika przez mianownik; a iloraz iest zawsze dodayny, gdy dzielna i dzielnik maią przed sobą iednakowe znaki, zawsze odiemny, gdy dzielna i dzielnik maią przed sobą odmienne znaki (46); idzie zatem, że w ułomku odmieniwszy znaki licznika i mianownika, ważność się ułomka nie odmieni. I tak ułomek $\frac{+ab}{+a} = \frac{-ab}{-a}$: iakoż ważnością o-

obudwu iest iloraz $+b$. Podobnież $\frac{-ab}{+a} = \frac{+ab}{-a}$ gdyż ważnością obudwu tych ułomków iest iloraz $-b$. Toż mówić o ułomkach $\frac{a+m-x}{c-d-q}$

$$= \frac{-a-m+x}{-c+d-q} \text{ i t. d;}$$

Prawdę tę okazać także można sposobem następuiącym : ponieważ, rozmnożywszy obadwa wyrazy ułomka przez iednęż liczbę, ważność się iego nie odmieni, w ułomku więc *np.* tym, $\frac{a+m-x}{c-d+q}$, rozmnożmy obadwa wyrazy przez -1, tym sposobem tak w liczniku iak w mianowniku, wszystkie znaki $+$ zamienią się na $-$, a znaki $-$ na $+$ (34).

Chcąc zatem sprowadzić do iednakowego mianownika *np.* te dwa ułomki: $\frac{mp-px}{ab-cd}$, $\frac{rs-nx}{cd-ab}$; dosyć będzie w ułomku *np.* drugim odmienić znaki tak w liczniku iak w mianowniku, przez co ułomek ten zamieni się w następuięcy: $\frac{-rs+nx}{-cd+ab}$ $= \frac{nx-rs}{ab-cd}$, którego mianownik iest taki iak w ułomku pierwszym.

51. Wszystkie te działania z ułomkami ogólnemi opieraią się na tych samych zasadach, które są wyłożone w Arytmetyce dla ułomków liczebnych. Można ie także z łatwością wyprowadzić z uwag nad dzielną, dzielnikiem i ilorazem liczb całkowitych, z których dzielenia wypadaią ułomki. I tak zważywszy *np.* że iloraz wcale się nie odmienia, gdy dzielną i dzielnik rozmnożymy przez iednęż liczbę; wiedząc prócz tego, że ułomek co do ważności swoiey iest wskazanym ilorazem, którby wypadł z podzielenia licznika

przez

przez mianownik; wnieślibyśmy, że ułomek co do swoiey ważności wcale się nie odmienia, gdy iego licznik i mianownik rozmnożymy przez iednęż liczbę, na czem zasadza się sprowadzanie ułomków do iednakowego mianownika. Ta sama uwaga doprowadziłaby do ustanowienia prawidła na dzielenie całkowitéy lub ułomka przez ułomek. Jakoż chcąc *np.* podzielić całkowitą a prze ułomek $\frac{b}{c}$, ponieważ rozmnożenie dzielnéy i dzielnika przez iednęż liczbę nie czyni żadnéy zmiany w szukanym ilorazie; rozmnożmy tak dzielną a, iako też dzielnik $\frac{b}{c}$ przez c: w tym przypadku potrzeba będzie podzielić ac przez $\frac{bc}{c} = b$ (40). Podzieliwszy zaś ac przez b, wypadnnie $\frac{ac}{b} = a \times \frac{c}{b}$.

Podobnież chcąc podzielić ułomek $\frac{a}{b}$ przez ułomek $\frac{c}{r}$, rozmnożywszy przez br tak dzielną $\frac{a}{b}$, iako też dzielnik $\frac{c}{r}$, trzeba będzie $\frac{abr}{b}$, czyli ar, podzielić przez $\frac{bcr}{r}$ czyli przez bc. Podzieliwszy zaś ar przez bc, wypadnie iloraz $\frac{ar}{bc} = \frac{a}{b} \times \frac{r}{c}$ i t. d.

ROZ-

ROZDZIAŁ III.

Zastósowanie wiadomości poprzedzaiących do rozwiązywania równań stopnia pierwszego.

I. *O skróceniach, których w rozwiązywaniu równań stopnia pierwszego użyć można.*

52. Wiadomości w poprzedzaiącym rozdziele wyłożone są dostateczne do rozwiązywania wszelkich *równań stopnia pierwszego* (32), w których ilości niewiadome nie są rozmnożone ani same przez siebie, iak iest *np.* x^2, y^3, z^2 i t. d. ani przez inne niewiadome iak *np.* xy, xyz i t. d. Lecz nim równania takowe rozwiązywać zaczniemy, podamy pierwey niektóre sposoby służące do ułatwienia i skrócenia działań potrzebnych dla uwolnienia ilości niewiadomych od wiadomych z niemi połączonych, na czém, iakośmy iuż uważali (17), rozwiązywanie równań zależy. Weźmy *np.* równanie następuiące;

$4x+a-5b=3x+2c$ . . . . (1).

w którem ilości 4, a, $5b$, 3 i $2c$, są wiadome; ilość x niewiadoma. W tem równaniu ponieważ pierwsza strona równa iest drugiéy, odiąwszy zatem po obu stronach tę same ilość a, reszty pozostałe będą równe. Równanie więc to zamieni się w następuiące:

$4x+a-5b-a=3x+2c-a$;

czyli, $4x-5b=3x+2c-a$; . . . . (2)

W równaniu ostatniem dodawszy $5b$ po obu stronach, będzie

$4x-5b+5b=3x+2c-a+5b$,

czyli, $4x=3x+2c-a+5b$; . . . . (3)

Odiąwszy $3x$ po obu stronach, zostanie

$4x-3x=3x+2c-a+5b-3x$

czyli, $4x-3x=2c-a+5b$ . . . . (4)

czyli, $x=2c-a+5b$ . . . . (5)

W równaniu (1) ilość niewiadoma x znayduie

się

się z obu stron pomieszana z wiadomemi: trzeba więc było 1*od* ilość wiadomą $+ a$ przenieść ze strony lewéy na prawą i wypadło równanie (2), w którém ilość a iest z prawéy strony, lecz z odmienionym znakiem dodaynym na odiemny. 2*re* przenieśliśmy ilość wiadomą $-5b$, ze strony lewéy na prawą, i wypadło równanie (3), w którém ilość $5b$ znayduie się na prawéy stronie, lecz z odmienionym znakiem odiemnym na dodayny. 3*cie* Przenieśliśmy ilość niewiadomą $3x$ ze strony prawéy na lewą, i wypadło równanie (4), w którém ilość $3x$ znayduie się na lewéy stronie, lecz z odmienionym znakiem dodaynym, który tu iest domyślny, na odiemny. Nakoniec odięliśmy $3x$ od $4x$, i wypadło równanie (5), w którém z iedney strony iest sama ilość niewiadoma x, a z drugiey same ilości wiadome. Lecz można było działanie to skrócić, i w równaniu (1) przenieść od razu $+ a$, $- 3b$ ze strony lewéy na prawą, a $3x$ ze strony prawéy na lewą, odmieniwszy w ilościach tych znak $+$ na $-$, i znak $-$ na $+$; a tym sposobem równanie (1) zamieniłoby się od razu na równanie (5).

Uwagi te względem przenoszenia wyrazów z iedney strony równania na drugą, służące wszekim innym równaniom, którebyśmy wybrać mogli na przykład podaią następuiące prawidło:

Chcąc przenieść iakikolwiek wyraz równania z iedney strony na drugą, trzeba wyraz ten przekreślić na tey stronie, na którey się znayduie, a napisać go na drugiey stronie z odmienionym znakiem + na —, i — na +; pamiętaiąc na to, że wyrazy będące bez żadnego znaku, maią zawsze przed sobą znak domyślny $+$. I tak równanie

$$7x + 3 = 63 - 5x,$$

podług tego prawidła zamieni się w następuiące:

$$7x + 5x = 63 - 3\ ;\ \text{czyli}\ 12x = 60.$$

Podobnież równanie $3x - 8 = 4x - 12$, podług tegoż prawidła zamieni się na $3x - 4x = 8 - 12$; czyli $-x = -4$.

Równanie to stąd powstało, żeśmy w danem równaniu $5x - 8 = 4x - 12$, wyrazy niewiadome przenieśli na stronę lewą, a wiadome na stronę prawą: tym sposobem wypadło ilość większą $4x$ odeymować od ilości mnieyszey $3x$, i zostało się $- x$. Przeniosłszy zaś ilości niewiadome na stronę prawą, a wiadome na stronę lewą, dane równanie zamieni się w następuiące: $12 - 8 = 4x - 3x$; czyli $4 = x$.

Lecz przypadkowa ta okoliczność w niczém nie nadweręża powyższego prawidła: iakoż w równaniu $- x = - 4$ rozmnożywszy obie strony przez $- 1$, wypadnie $x = 4$,

53. Skąd wniesiemy, że ieżeli po zachowaniu powyższego prawidła wypadnie w równaniu ilość niewiadoma odiemna, na ten czas trzeba z obu stron równania wszystkie znaki $-$ zamienić na $+$, i ieśliby się znaydowały, wszystkie znaki $+$ na $-$; przez co równość między stronami nie zginie: gdyż działanie to zasadza się na rozmnożeniu obu stron równania przez tęż samę ilość to iest przez $- 1$.

54. W równaniu $12x = 60$, podzieliwszy obie strony przez iednę liczbę 12, wypadnie $\frac{12x}{12} = \frac{60}{12}$; czyli $x = 5$. Podobnież w równaniu $ax = b$ podzieliwszy obie stron przez a, wypadnie $\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$, czyli $x = \frac{b}{a}$, i t. d,

Stąd wniesiemy, że kiedy w równaniu z iednéy strony iest ilość niewiadoma z czynnikiem liczebnym lub ogólnym, a z drugiey strony znayduią się same ilości wiadome; chcąc ilość niewiadomą od wiadomey uwolnić, trzeba zachować następuiące prawidło:

Napisać z iedney strony równania samę ilość niewiadomą. a stronę drugą podzielić przez czynnik tey ilości niewiadomey. I tak

$15x = 45$; więc $x = \frac{45}{15} = 3$. Podobnież

abx

$abx = pq$; więc $x = \frac{pq}{ab}$, $mx = a + b - c$; więc $x = \frac{a+b-c}{m}$; i t. d.

55. Często się trafia, że po przeniesieniu ilości niewiadomych na iednę, a wiadomych na drugą stronę równania, ilość niewiadoma iest kilka razy powtórzona z odmiennemi czynnikami. Itak równanie $ax - ac + bc = cx - bx$, podług powyższego prawidła (52) zamienia się w następuiące:

$$ax - cx + bx = ac - bc,$$

w którém ilość niewiadoma x w 1wszym wyrazie iest rozmnożona przez a, w 2gim przez $-c$, w 3cim przez $+b$. Pierwszą więc stronę można rozłożyć na czynniki (39); i wyrazić równanie to sposobem następuiącym:

$$(a - c + b)\ x = ac - bc.$$

W tém równaniu czynnikiem ilości x iest $a - c + b$; zatém podług ostatniego prawidła będzie

$$x = \frac{ac - bc}{a - c + b}.$$

Podobnież równanie $mx + px - x = a$, zamieniwszy na $(m + p - 1)\ x = a$, wypadnie podług tegoż prawidła $x = \frac{a}{m + p - 1}$ i t. d.

W takim więc przypadku zachować należy następuiące prawidło: *napisać samę ilość niewiadomą z iedney strony, a drugą stronę podzielić przez wszystkie spółczynniki ilości niewiadomey tak wyraźne iak domyślne, daiąc przed niemi te same znaki, które miały przedtem* np. $x - abx + c^2dx = m + p$; więc $x = \frac{m+p}{1 - ab + c^2d}$ i t. d.

56. Czasem wszystkie wyrazy równania są podzielne przez iednę ilość: np. w równaniu

$$6abx - 9bcd = 12bdx + 15abc.$$

uwa-

Uważam 1ód że liczby 6, 9, 12 i 15 są podzielne przez 3, podzieliwszy więc obie strony równania przez 3, wypadnie $2abx - 3bcd = 4bdx + 5abc$.

Uważam 2re, że w ostatniém równaniu wszystkie wyrazy maią spólny czynnik b. Podzieliwszy więc wszystkie wyrazy przez b, wypadnie

$$2ax - 3cd = 4dx + 5ac.$$

Równanie to podług prawideł powyższych zamieni się

1ód na $2ax - 4dx = 5ac + 3cd$ (52);

2re na $x = \frac{5ac + 3cd}{2a - 4d}$, (55).

Podobnież w równaniu: $8cmx = 12ac + 20c^2$, w którém wszystkie wyrazy maią spolny czynnik $4c$, podzieliwszy każdy wyraz przez $4c$, wypadnie $2mx = 3a + 5c$, więc $x = \frac{3a + 5c}{2m}$ i t. d.

57. Prawidło powyższe (54) dla uwolnienia ilości niewiadoméy od czynnika, służy także i w ten czas, kiedy czynnik ten iest ułomkiem. I tak w równaniu $\frac{3}{5}x = 60$, podzieliwszy obie strony przez $\frac{3}{5}$ będzie

$$x = 60 \times \tfrac{5}{3} = \frac{300}{3} = 100.$$

Jakoż w równaniu $\frac{3}{5}x = 60$, rozmnożywszy obie strony przez 5, abyśmy tym sposóbem *znieśli mianownik* spółczynnika ilości niewiadoméy równanie to zamieni się w następuiące: $\frac{15}{5}x = 300$; czyli $3x = 300$; więc $x = 100$ (54).

Podobnież w równaniu $\frac{m}{q}x = a$, dla zniesienia mianownika q, rozmnożywszy obie strony przez q, będzie $\frac{mq}{q}x$, czyli $mx = aq$; więc $x = \frac{aq}{m}$.

Weźmy ieszcze równanie

$$\frac{x}{a}+m-\frac{n}{b}=p+\frac{qx}{c}-r,$$

w którém znayduią się ułomki i całkowite. Abyśmy w tém równaniu łatwiey uwolnić mogli niewiadomą od wiadomych z nią złączonych rozmnożmy 1ód wszystkie iego wyrazy przez mianownik a, aby tym sposobem mianownik ten był zniesiony: równanie więc to zamieni się w następuiące:

$$\frac{ax}{a}+am-\frac{an}{b}=ap+\frac{aqx}{c}-ar, \text{ czyli}$$

$$x+am-\frac{an}{b}=ap+\frac{aqx}{c}-ar.$$

2re. Dla zniesienia mianownika b, rozmnożmy wszystkie wyrazy ostatniego równania przez b; będzie

$$bx+abm-\frac{abn}{b}=abp+\frac{abqx}{bc}-abr, \text{ czyli}$$

$$bx+abm-an=abp+\frac{abqx}{c}-abr.$$

3cie. Dla zniesienia mianownika c w ostatniém równaniu, rozmnożmy wszystkie wyrazy przez c, będzie

$$bcx+abcm-acn=abcp+\frac{abcqx}{c}-abcr: \text{ czyli,}$$

$$bcx+abcm-acn=abcp+abqx-abcx.$$

Zastanowiwszy się nad równaniem pierwszém i ostatniém, w którém wszystkie mianowniki równania pierwszego są zniesione, i z którego łatwo iest podług prawideł powyższych otrzymać ważność ilości niewiadomey; postrzeżemy, że licznik x równania pierwszego rozmnożony iest w ostatniém przez mianowniki b i c dwóch innych ułomków; licznik n rozmnożony iest przez mianowniki a i c dwóch innych ułomków; i licznik qx rozmnożony iest przez mianowniki a i b dwóch ułom-

ułomków pozostałych, całkowite zaś m, p i r równania pierwszego, są w ostatniem rozmnożone przez mianowniki a, b i c wszystkich trzech ułomków.

Uwaga ta maiąca mieysce we wszystkich innych równaniach, podaie następuiące prawidło: *chcąc w równaniu znieść mianowniki, trzeba licznik każdego ułomka rozmnożyć przez mianowniki innych ułomków: a każdą całkowitą rozmnożyć przez mianowniki wszystkich ułomków, i napisać równanie bez mianowników.* Tak np. w równaniu $\frac{dx}{a} - q = \frac{mx}{b} - \frac{p}{c}$, mnożę 1od licznik dx przez b i c mianowniki dwóch innych ułomków; i mam $bcdx$ 1wszy wyraz równania. Mnożę potém całkowitą $-q$ przez a, b i c mianowniki wszystkich trzech ułomków, i mam $-abcq$ 2gi wyraz równania. Mnożę daléy licznik mx przez a i c mianowniki dwóch innych ułomków i mam $acmx$ 3ci wyraz równania. Nakonieć mnożę licznik $-p$ przez a i b mianowniki dwóch innych ułomków, i mam $-abp$ 4ty wyraz równania. Tym sposobem równanie dane zamieni się w następuiące:

$$bcdx - abcq = acmx - abp;$$

z którego podług powyższych prawideł wypadnie

1od. $bcdx - acmx = abcq - abp$; (52),

2re. $x = \frac{abcq - abp}{bcd - acm}$ (55) i t. d.

58. Prawidła powyższe znacznie skrócą i ułatwią rozwiązywanie wszelkich zagadnień sposobem algiebraicznym, to iest za pomocą równań i znaków ogólnych. Pozostanie tylko ta iedynie trudność, iak dane zagadnienie ułożyć w równanie, do czego, iakośmy iuż powiedzieli, wprawa na różnych zagadnieniach, iakie niżey podamy, naywięcey dopomoże. Następuiące także prawidło gruntownie rozważone, będzie w tey mierze wielce użyteczne:

Wskazać za pomocą znaków algiebraicznych na ilościach wiadomych czyto liczbami, czyli też głoskami oznaczonych, i na ilościach niewiadomych, które się zawsze oznaczaią głoskami, te same rozumowania i działania, którebv należało uskutecznić, chcąc sprawdzić ważność ilości niewiadomey, gdyby ważność ta była dana.

Chcąc prawidła tego użyć, trzeba pierwey pilnie wyznaczyć, iakie są działania, które wysłowienie danego zagadnienia w sobie zamyka wyraźnie lub niewyraźnie: lecz właśnie na tém zależy cała trudność w ułożeniu zagadnienia w równanie.

59. Dla zastósowania tak prawidła powyższego, na ułożenie zagadnieú w równania, iako też prawideł innych, któreśmy w dwóch ostatnich rozdziałach wyłożyli, przytaczamy tu niektóre zagadnienia.

II. *Zagadnienia z iedną niewiadomą.*

Zagadnienie I. *Woda iednem korytem płynąca napełnia iednę sadzawkę w przeciągu godzin $2\frac{1}{2}$; innem zaś korytem puszczona do teyże sadzawki, napełniłaby ią w przeciągu godzin $3\frac{3}{4}$; za ileż godzin sadzawka być może napełniona, gdy woda obiema korytami do niey puszczona będzie?*

Rozwiązanie. Gdybym znalazł liczbę godzin szukaną, sprawdziłbym ią sposobem następuiącym: naprzód sadzawki obiętość, którą tu iest 1, gdyż o iednéy tylko sadzawce iest w zagadnieniu mowa, podzieliłbym raz przez $2\frac{1}{2}$, drugi raz przez $3\frac{3}{4}$; pierwszy z dwóch znalezionych ilorazów, oznaczyłby ile przez iednę godzinę wpływa wody do sadzawki korytem pierwszém, drugi ile iéy w tymże czasie wpływa korytem drugiém. Potém oba te ilorazy rozmnożyłbym przez znalezioną liczbę godzin szukanych, a dwa powstaiące stąd iloczyny dodane do siebie okazałyby ilość wody wpuszczoney obiema korytami do sadzawki w przeciągu godzin szukanych. Jeśliby summa tych dwóch iloczynów wyrównywała obiętości sadzawki, byłoby to dowodem, że znaleziona liczba godzin iest prawdziwa.

Oznaczmyż liczbę szukaną godzin przez x, i za pomocą znaków algiebraicznych uskuteczniymy te same działania, któreśmy w powyższem rozumowaniu wysłowili: a dla uniknienia działań z ułomkami, iako też dla tego, aby znaleziona ważność ilości szukanéy nie zależała od liczb szczególnych do zagadnienia wchodzących, uczyńmy $2\frac{1}{2} = a$, $3\frac{3}{4} = b$.

Podzieliwszy obiętość sadzawki czyli 1 raz przez $2\frac{1}{2}$ czyli przez a, drugi raz przez $3\frac{3}{4}$ czyli przez b, dwa ilorazy $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ oznaczą ilość wody, która przez iednę godzinę wpływa do sadzawki korytem pierwszém i drugiém.

Rozmnożywszy dwa te ilorazy przez liczbę godzin szukaną, czyli przez x, dwa iloczyny $\frac{1}{b} \times x$ czyli $\frac{x}{a}$, $\frac{1}{b} \times x$, czyli $\frac{x}{b}$, okażą całą ilość wody wpuszczonéy do sadzawki w przeciągu godzin, których liczba iest x. Aże ilość ta wody powinna wyrównywać obiętości sadzawki, będzie więc równanie $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$, z którego wypadnie 1ód $bx + ax = ab$ (57); 2re $x = \frac{ab}{a+b}$ (55).

Równanie to podaie następuiące prawidło na rozwiązanie tego zagadnienia we wszystkich przypadkach szczególnych: *iloczyn dwóch liczb oznaczaiących liczbę godzin potrzebnych do napełnienia sadzawki każdém z osobna korytem, podzieliwszy przez summę tychże dwoch liczb, iloraz okaże liczbę godzin potrzebnych do napełnienia teyże sadzawki obiema razem korytami.*

Za-

Zastósowawszy prawidło to do danych liczb w zagadnieniu powyższém, wypadnie

$$x = \frac{2\frac{1}{2} \times 3\frac{3}{4}}{2\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4}} = \frac{3}{2}.$$

Że zaś w przeciągu iednéy godziny wpływa do sadzawki wody iednem korytem $\frac{1}{a} = \frac{1}{2\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$, drugiem $\frac{1}{b} = \frac{1}{3\frac{3}{4}} = \frac{4}{15}$; dwie te liczby, $\frac{2}{5}$ i $\frac{4}{15}$ rozmnożywszy przez znalezioną liczbę godzin $\frac{3}{2}$, dwa powstaiace stąd iloczyny dodane do siebie, powinny wyrównać obiętości sadzawki; co też iest nie zawodnie: gdyż $\frac{6}{15} \times \frac{3}{2} + \frac{4}{15} \times \frac{3}{2} = 1$; co dowodzi, że znaleziona liczba godzin iest prawdziwa.

Tę samę probę możnaby odbyć wygodniey ze znakami ogólnemi. Jakoż ponieważ

$$x = \frac{ab}{a+b}; \text{ więc}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{a+b}; \quad \frac{x}{b} = \frac{a}{a+b} \ (49); \text{ a zatém}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1. \ (41).$$

60. W iakimkolwiek sposobie wysłowimy powyższe zagadnienie, iakiekolwiek w niém naznaczymy dwie liczby; zawsze prawidło z ważności x ogólnéy wyprowadzone, posłuży do znalezienia liczby szukanéy. I tak niech będzie zagadnienie.

Do wykarczowania pewnéy zarośli robotnik ieden potrzebuie tygodni 23 i dni 4; drugi ukończytby tę samę robotę za tygodni 15 i dni 5: w iakimże czasie obadwa razem zarośl tę wykarczuią?

Uczyniwszy $a = 23$ tygodni i 4 dniom
$b = 15$ - - 5;

wypadnie, iak w zagadnieniu poprzedzaiącem $x = \frac{ab}{a+b}$: odbywszy działanie wskazane w tem równaniu, lub w prawidle, któreśmy z równania tego wyprowadzili, łatwo będzie znaleźć liczbę tygodni szukaną. Toż mówić o wszystkich innych tego rodzaiu zagadnieniach.

Dla tey przyczyny równania takowe, w których ważność ilości niewiadomych wyznaczona iest samemi głoskami i znakami algiebraicznemi, nazywaią się *formuły*

Wziąwszy zagadnienie cokolwiek odmienne, w którémby *np.* woda nie dwiema lecz trzema lub czterema i t. d. korytami do sadzawki wpływała; sposób postępowania w rozwiązaniu tego zagadnienia témby się tylko od poprzedzaiącego różnił, iż byłby cokolwiek dłuższy, i otrzymana w końcu formuła nie co od poprzedzaiącey odmienna, iak sprobować można na zagadnieniu następuiącem:

Do ukończenia iedneyże roboty ieden rzemieślnik potrzebuie 3 tygodnie i 5 dni, drugi 4 tygodni i 3 dni, trzeci 5 tygodni i 2 dni; za ileż tygodni wszyscy trzey razem tę robotę ukończą?

61. Zagadnienie II. *Pan przyymuiąc sługę umawia się z nim, że mu za każdy dzień dopełnionych należycie obowiązków służby zapłaci zł. 1, gr. 6; za każdy zaś dzień zaniedbania tychże obowiązków, wytrąci mu z iego zasług gr. $22\frac{1}{2}$. Po upłynieniu 30 dni sługa dostał zł. 6, gr. $22\frac{1}{2}$; tyle mu się też podług umowy należało: przez ileż dni należycie dopełniał obowiązków służby?*

Gdybym znalazł szukaną liczbę dni dopełnionych obowiązków, czy liczba ta iest prawdziwa, doszedłbym tego sposobem następuiącym: naprzód liczbę tę odiąłbym od 30, i wypadłaby na różnicę druga liczba dni zaniedbanych obowiązków służby. Potém pierwszą z tych dwóch liczb rozmnożyłbym przez zł. 1 gr. 6, drugą przez gr. $22\frac{1}{2}$; i miałbym dwa iloczyny, z których pierwszy oznacza, ileby się należało słudze za dni dopełnionych obowiązków; drugi ile mu potrzeba z tych zasług wytrącić za dni zaniedbania tychże obowiązków. Nakoniec iloczyn drugi odiąłbym od pierpiérwszego; a ieśliby wypadaiąca różnica czyniła zł. 6 gr. $22\frac{1}{2}$, byłoby to dowodem, że znaleziona liczba dni iest prawdziwa.

Oznaczmyż liczbę tę przez x, i uczyniwszy zł. 1, gr. $6 = a$, gr. $22\frac{1}{2} = b$, dni $30 = c$, zł. 6 gr. $22\frac{1}{2} = d$; uskuteczniymy za pomocą znaków algiebraicznych te same działania, ktoreśmy w powyższem rozumowaniu wysłowili.

Odiąwszy x od 30 czyli od c, zostanie $c - x$ liczba dni zaniedbanych obowiązków służby.

Rozmnożywszy x. przez zł. 1 gr. 6, czyli przez a, wypadnie ax należytość sługi za dni dopełnionych obowiązków.

Rozmnożywszy $c - x$ przez gr. $22\frac{1}{2}$ czyli przez b, wypadnie iloczyn $bc - bx$ okazuiący, ile mu potrzeba z iego zasług wytrącić za dni zaniedbanych obowiązków służby.

Drugi iloczyn $bc - bx$ odiąwszy od pierwszego ax, różnica $ax - bc + bx$ (24) okazuie, ile rzeczywiście należy zapłacić słudze. Że zaś sługa dostaie zł. 6 gr. $22\frac{1}{2}$ czyli d; będzie więc równanie $ax - bc + bx = d$, z którego podług powyższych prawideł wypadnie naprzód $ax + bx = bc + d$, potém $x = \dfrac{bc + d}{a + b}$ (57).

Formuła ta ogólna wskazuie, iakie działania odbyć potrzeba z liczbami danemi a, b, c i d dla znalezienia niewiadoméy x; można więc albo ią wysłowić ięzykiem zwyczaynym dla otrzymania prawidła ogólnego na rozwiązywanie tego rodzaiu zagadnień; albo też położyć w niey na mieysce głosek a, b, c i d liczby do zagadnienia wchodzące głoskami temi oznaczone. Używszy drugiego sposobu, formuła ta zamieni się w naszępuiące równanie: $x = \dfrac{\frac{3}{4}30 + 6\frac{3}{4}}{1\frac{1}{5} + \frac{3}{4}} = 15$.

To iest: liczba dni dopełnionych obowiązków iest 15. Liczba zatem zaniedbanych obowiązków będzie $30 - 15 = 15$. Dwie te liczby czynią

za-

zadosyć warunkom zagadnienia: gdyż pierwszą rozmnożywszy przez zł. 1 gr. 6, drugą przez $22\frac{1}{2}$ gr. i drugi iloczyn to iest 15 X gr. $22\frac{1}{2} = 11\frac{1}{4}$ zł. odiąwszy od iloczynu pierwszego, który iest 15 X zł. 1 gr. 6 = 18 zł., zostanie na różnicę zł. 6 gr. $22\frac{1}{2}$. Co dowodzi, że znalezione liczby są prawdziwe.

Ta sama formuła służy do łatwego rozwiązania wszelkich tego rodzaiu zagadnień w iakimkolwiek bądź sposobie wysłowionych; iak tego doświadczyć można na zagadnieniach następuiących:

Rybak dla zachęcenia swego syna obiecuie mu płacić po 5 gr. za każde wyciągnienie sieci z połowem: lecz za każdą razą, kiedy sieć na próżno zapuszczona będzie, syn powróci oycu 3 grosze. Za 12tym wyciągnieniem sieci rachuią się, i oyciec płaci synowi 28 groszy. Ileż razy sieć była zapuszczana korzystnie?

Zgodzono rzemieślnika po zł. 5 gr. 15 za każdy dzień roboty, i prócz tego obiecano mu codzień stół; za każdy iednak dzień, któregoby nie pracował, miano mu za stół wytrącić zł. 1 gr. 18. Po upłynieniu 7 tygodni, i dni 3, roboty została ukończona. Gdy przyszło do porachunku, okazało się, że należy rzemieślnikowi zapłacić zł. 100 gr. 24. Ileż dni pracował nad tą robotą? 100 gr 24.

62 Zagadnienie III. *Do dwóch czar srebrnych iest iedna pokrywka: czara iedna waży 12 uncyy, a razem z pokrywką ma ciężar dwa razy większy niżeli czara druga; czara zaś druga razem z pokrywką waży uncyy trzy razy więcey, niż pierwsza: ileż uncyy waży pokrywka?*

Gdybym liczbę wyrażaiącą ciężkość pokrywki miał wiadomą, czy liczba ta iest prawdziwa, doszedłbym tego sposobem następuiącym: dodałbym naprzód liczbę tę do ciężaru czary pierwszey, to iest do 12 uncyy, i summy tey wziąwszy połowę, miałbym ciężkość drugiey czary. Potém tę samę liczbę dodałbym do znalezioney

ciężkości

ciężkości czary drugiéy; a ieśliby ta summa była trzy razy większa od ciężkości czary pierwszéy, to iest od 12 uncyy, byłoby to dowodem, że znalezione ważności niewiadomych są prawdziwe.

Oznaczmyż liczbę uncyy, które waży pokrywka przez x: liczbę tę dodawszy do 12, będzie $12+x$; połowa téy summy, to iest $6+\frac{1}{2}x$, oznacza ciężkość drugiéy czary, do któréy dodawszy x, będzie $6+\frac{1}{2}x+x$ ciężkość czary drugiéy i pokrywki; aże podług zagadnienia summa ta iest 3 razy większa od 12, będzie więc

$6+\frac{1}{2}x+x=36$; czyli $6+\frac{3}{2}x=36$; a zatem $\frac{3}{2}x=36$; $x=20$ (54); i t. d.

Zagadnienie to iest szczególnym przypadkiem następuiącego zagadnienia ogólnego:

Maiąc daną liczbę a, *znaleźć dwie inne, z których pierwsza dodana do liczby* a *iest* m *razy większa od drugiéy: dodana zaś do liczby drugiéy iest* n *razy większa od liczby* a: *iakaż iest iedna z dwoch liczb szukanych?*

Oznaczywszy pierwszą z liczb szukanych przez x, będzie $a+x$ summa m razy większa od liczby drugiéy: druga zatem liczba będzie $\frac{a+x}{m}$, do któréy dodawszy liczbę pierwszą x, summa $\frac{a+x}{m}+x$, powinna być n razy większa od liczby danéy a. Będzie zatem $\frac{a+x}{m}+x=an$: więc $a+x+mx=amn$; a tém samém $x=\frac{amn-a}{1+m}$ i t. d.

63. Zagadnienie IV. *Matka iest 6 razy starsza od swoiéy córki: za lat 12. matka będzie tylko 2 razy starsza od córki: ileż ma lat córka?*

Oznaczywszy wiek córki przez x, matki wiek będzie $6x$; a za lat 12 córka mieć będzie lat $x+12$, matka $6x+12$: i ieżeli wiek matki to iest $6x+12$, iest dwa razy większy od wieku córki, to iest od

$x+12$, będzie to dowodem, że zagadnienie iest dobrze rozwiązane. Będzie zatem równanie

$$6x+12=2x+24, \text{ i t. d.}$$

Zagadnienie to możnaby tak wysłowić ogólnie:

Znaleźć dwie liczby, z których pierwsza iest m *razy większa od drugiey: a dodawszy do obudwu po* a, *będzie pierwsza od drugiey* n *razy większa.*

Oznaczywszy drugą liczbę przez x, pierwsza będzie mx. Dodawszy do obudwu po a, będzie druga $x+a$, pierwsza $mx+a$.

Że zaś po takowem dodaniu liczba pierwsza iest n razy większa od drugiey, rozmnożywszy zatem liczbę drugą to iest $x+a$ przez n, iloczyn $n(x+a)$ równy być powinien liczbie pierwszey. Będzie więc równanie

$$mx+a=n(x+a): \text{ a zatém } x=\frac{an-a}{m-n} \quad . \quad . \quad A.$$

Gdybyśmy powyższe zagadnienie ogólne tak odmienili: *znaleźć dwie liczby, z których pierwsza iest* m *razy większa od drugiey; odiąwszy zaś od obudwu po* a, *będzie pierwsza* n *razy większa od drugiey*; na ten czas, oznaczywszy drugą liczbę przez x, piérwsza będzie mx; a odiąwszy od obudwu po a, będzie druga $x-a$, pierwsza $mx-a$: Aże podług warunków zagadnienia, liczba $mx-a$ iest n razy większa od liczby $x-a$; rozmnożywszy więc liczbę $x-a$ przez n, iloczyn $n(x-a)$ powinien być równy liczbie $mx-a$; będzie więc równanie

$$n(x-a)=mx-a, \text{ a zatém } x=\frac{an-a}{n-m}.$$

Porównawszy formułę tę z formułą oznaczoną przez A, postrzeżemy różnicę tylko w ich mianownikach: pierwszey bowiem mianownikiem iest $m-n$, drugiey $n-m$, licznikiem zaś obudwu $an-a$. Jeżeli w naznaczaniu szczególnych ważności liczebnych dla głosek m, n i a, damy dla n ważność całkowitą, zawsze będzie licznik ilo-

ścią

4cią dodayną: będzie bowiem iloczyn an większy od a. Jeżeli więc ważność dla x ma być liczbą dodayną, powinien być także i mianownik dodayny (46); w pierwszym zatem przypadku trzeba dać ważność liczebną dla m większą niż dla n, w drugim dla n większą niż dla m. W obudwu formułach odmieniwszy znaki licznika i mianownika, przez co się ważność ułomka nie odmieni (42), formuły te zamienią się w następuiące:

$$1\text{wsza } x = \frac{a-an}{n-m}, \quad 2\text{ga } x = \frac{a-an}{m-n};$$

w których, gdy ważnością n iest liczba całkowita, licznik $a-an$ iest ilością odiemną: Jeżeli więc ważność dla x ma być dodayna, mianowniki także powinny być odiemne; co w ten czas tylko może mieć mieysce, gdy w formule pierwszéy m iest większe od n, w drugiey zaś n większe od m.

Dla sprawdzenia formuły drugiey weźmy następuiące zagadnienie:

Maiątek osoby A *iest* 3 *razy większy od maiątku osoby* B; *straciły obie po zł.* 12000; *poczem maiątek osoby* A *iest* 5 *razy większy od maiątku osoby* B; *iakież są te maiątki?*

Porównawszy zagadnienie to z ostatniém zagadnieniem ogólném, postrzeżemy, że trzeba uczynić $m=3$, $n=5$, $a=12000$. Ważności te położywszy zamiast głosek w otrzymanéy formule, znaydziemy $x=24000$ i t. d.

To samo zagadnienie ogólne możnaby ieszcze następuiącemi sposobami odmienić.

Znaleźć dwie liczby, z których pierwsza iest m *razy większa od drugiey: a dodawszy do pierwszey* a, *od drugiey zaś odiąwszy* a, *będzie pierwsza od drugiey* n *razy większa*; albo *do pierwszey dodawszy* a, *do drugiey* b, *będzie pierwsza równa drugiey*;

albo *od pierwszey odiąwszy* a *do drugiey dodawszy* b, *będzie druga* n, *razy większa od pierwszey* i t. d.

W tych i tym podobnych przypadkach łatwo będzie wynaleźć formuły ogólne sposobem podobnym do tego, któryśmy iuż wyłożyli.

64. Zagadnienie V. *Pewien chce dać każdemu z ubogich, których spotkał, po gr. 15; lecz mu nie dostaie gr. 5; daie więc po gr. 13, zostało mu gr. 9; ileż było ubogich.*

Gdyby liczba ubogich była wiadoma, rozmnożyłbym naprzód liczbę tę przez 15, i od tego iloczynu odiąwszy 5, różnica okazałaby ilość pieniędzy przeznaczonych na iałmużnę. Potem tę samę liczbę ubogich rozmnożyłbym przez 13, i do tego iloczynu dodawszy 9, summa ta okazałaby także ilość pieniędzy przeznaczonych na iałmużnę. Jeśliby ostatnia summa równa była powyższey różnicy, byłoby to dowodem, że znaleziona liczba ubogich iest prawdziwa.

Oznaczmyż więc liczbę ubogich przez x, będzie $15x - 5$ pierwsze wyrażenie ilości pieniędzy przeznaczonych na iałmużnę.

$13x + 9$ drugie teyże ilości pieniędzy wyrażenie. A zatem $15x - 5 = 13x + 9$; $x = 7$ i t. d.

Chcąc zagadnienie to zamienić na ogólne, uczyńmy $15 = a$, $13 = b$, $5 = m$, $9 = n$.

Tym sposobem dwa wyrażenia ilości pieniędzy przeznaczonych na iałmużnę, to iest $15x - 5$, i $13x + 9$, zamienią się w następuiące: $ax - m$, $bx + n$. A zatem

$$ax - m = bx + n;\ \text{więc}\ x = \frac{m + n}{a - b}\ \text{i t. d.}$$

65. Zagadnienie VI. *Trzey bracia kupili dobra za* 50000 *cz. zł. Naystarszy mógłby sam zapłacić to kupno, lecz mu nie dostaie połowy tych pieniędzy, które ma średni; ten zaś samby wszystko zapłacił, gdyby mu naystarszy pożyczył trzeciey części swego maiątku. Naymłodszy zaś chcąc dla siebie samego nabyć tychże dobr, potrzebo-*

bowałby 4tey części maiątku brata naystarszego. Ileż każdy z nich ma pieniędzy?

Niech x oznacza maiątek, którego kolwiek z trzech braci *np.* naystarszego. Ponieważ średni mógłby sam za te dobra zapłacić 50000 cz. zł. gdyby mu naystarszy pożyczył 3ciey części swego maiątku, średniego więc maiątek musi być $50000 - \frac{1}{3}x$.

Aże naymłodszy samby spłacił te dobra, gdyby mu naystarszy pożyczył 4tey części swego maiątku, naymłodszego więc maiątek musi być $50000 - \frac{1}{4}x$.

Wreście ponieważ naystarszy spłaciłby sam te dobra, gdyby miał połowę maiątku brata średniego, maiątek zatem brata naystarszego to iest x, powiększony połową maiątku brata średniego, to iest $\frac{50000 - \frac{1}{3}x}{2} = 25000 - \frac{1}{6}x$ równym być musi 50000 cz. zł. Będzie zatem równanie

$x + 25000 - \frac{1}{6}x = 50000$; więc $x = 30000$ i t. d.

66. Zagadnienie VII. *Dyofantes Autor naydawnieyszego dzieła Algiebry, które czasów naszych doszło, przepędził w dzieciństwie 6tą część całego życia, 12tą część w młodości, a potem się ożenił, i przepędziwszy w związku małżeńskim 7mą część swego życia i nadto ieszcze lat 5, doczekał się syna, którego przeżył 4ma laty, i który dożył tylko połowy wieku Oyca swego. Ileż lat żył Dyofantes?*

Szukana liczba lat składa się z następuiących części: 1od z $\frac{1}{6}$ części tych lat przepędzonych w dzieciństwie; 2re z $\frac{1}{12}$ części tychże lat przepędzoney w młodości; 3cie z $\frac{1}{7}$ części tychże lat powiększonéy 5cią laty, które przeżył Dyofantes aż do czasu narodzenia się syna; 4te z $\frac{1}{2}$ tychże lat przepędzonéy wraz z synem; nakoniec ze 4 lat przepędzonych po śmierci syna. Oznaczywszy zatem szukaną liczbę lat przez x, będzie równanie

$x = \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4$. A zatem $x = 84$.

67.

67. Zagadnienie VIII. *Mieszanina dwóch metalów złota i srebra wynosi 12 calów sześciennych i waży uncyy 100: ieden cal sześcienny czystego złota waży uncyy $12\frac{2}{3}$; ieden cal sześcienny czystego srebra waży uncyy $6\frac{8}{9}$: ileż w mieszaninie tey znayduie się calow sześciennych złota lub srebra?*

Gdybym znalazł szukaną liczbę calów sześciennych złota, sprawdziłbym ią sposobem następuiącym: naprzód liczbę tę odiąłbym od 12 calów sześciennych, które wynosi cała mieszanina, a pozostała reszta okazałaby liczbę calów sześciennych srebra w mieszaninie będącego. Potém liczbę calów sześciennych złota rozmnożyłbym przez $12\frac{2}{3}$ uncyy, a liczbę calów sześciennych srebra przez $6\frac{8}{9}$ uncyy; piérwszy z dwóch tych iloczynów okazałby, ile waży samo złoto, drugi ile waży samo srebro znayduiące się w mieszaninie. Nakoniec dwa te iloczyny dodałbym do siebie, a ieśliby summa ich uczynila 100 uncyy, byłoby to dowodem, że znalezione dwie liczby są prawdziwe.

Oznaczmyż więc liczbę calów sześciennych złota przez x, a tak dla uniknienia działań z ułomkami, iako też dla otrzymania formuły ogólney na zagadnienia tego rodzaiu, uczyńmy 12 calów sześciennych $= a$, 100 uncyy $= b$, $12\frac{2}{3}$ uncyy $= c$, $6\frac{8}{9}$ uncyy $= d$. Będzie zatém,

liczba calów sześciennych złota $= x$,
liczba calów sześciennych srebra $= a - x$,
waga samego złota - - - - $= cx$
waga samego srebra - - - - $= ad - dx$;

a tém samém $cx + ad - dx = b$, więc $x = \frac{b - ad}{c - d} = 3$; i t. d.

III. *Zagadnienia z kilku niewiadomemi.*

68. Do wszystkich zagadnień, któreśmy dotąd rozwiązali, wchodziła iedna tylko niewiadoma; lubo niektóre mogą być łatwo rozwiązane

za pomocą dwóch niewiadomych. Tak *np.* w zagadnieniu ostatniém, oznaczywszy przez x liczbę calów sześciennych złota, przez y liczbę calów sześciennych srebra, będzie cx waga samego złota, dy waga samego srebra znayduiącego się w mieszaninie. Aże mieszanina ta wynosi calów sześciennych a, i waży uncyy b, będzie więc

$$x+y=a,\ cx+dy=b.$$

Żadne z tych dwóch równań nieda ważności dla niewiadomych; z piérwszego wypada

$$x=a-y,\ y=a-x,$$

z drugiego $x=\frac{b-dy}{c}$, $y=\frac{b-cx}{d}$,

Widzimy tu, że tak w dwóch ważnościach dla x, iako też w dwóch ważnościach dla y, znayduie się druga niewiadoma. Lecz dwie ważności znalezione dla x zrównawszy z sobą, będzie

$$a-y=\frac{b-dy}{c}.$$

Równanie to maiące iednę tylko niewiadomą rozwiązawszy podług prawideł podanych wyżéy, znaydziemy

$$y=\frac{b-ac}{d-c}=\frac{ac-b}{c-d}\ (50).$$

Podobnież zrównawszy z sobą dwie znalezione ważności dla y, otrzymamy równanie z iedną tylko niewiadomą

$$a-x=\frac{b-cx}{d},$$

Które przerobiwszy sposobem zwyczaynym, będzie

$$x=\frac{b-ad}{c-d}.$$

Możnaby działanie to skrócić sposobem następuiącym:

Ponieważ z równania $x+y=a$ wypada $x=a-y$; będzie więc $cx=ac-cy$. Ważność tę położywszy zamiast cx w równaniu drugiém, które iest $cx + dy = b$, równanie to zamieni się w następuiące:

$$ac - cy + dy = b. \text{ A zatém}$$

$$y = \frac{b - ac}{d - c} = \frac{ac - b}{c - d}.$$

Ważność tę y położywszy znowu zamiast y w równaniu piérwszém, które iest $x + y = a$, będzie

$$x + \frac{ac - b}{c - d} = a. \text{ Skąd wypadnie}$$

1ód $cx - dx + ac - b = ac - ad$ (48);
2re $cx - dx = b - ad$ (52);
3cie $x = \frac{b - ad}{c - d}$ (55).

Weźmy ieszcze iedno z zagadnień rozwiązanych w rozdziale piérwszym: *znaleźć dwie liczby, których summa iest* s, *różnica* a (4). Oznaczywszy większą z liczb szukanych przez x mnieyszą przez y, będzie ich summa $x + y$, ich różnica $x - y$; aże podług zagadnienia summa równa iest s: różnica równa a, będą więc dwa nastęspuiące równania:

$$x + y = s$$
$$x - y = a.$$

Dwa te równania mogą być łatwo rozwiązane którymkolwiek z dwóch sposobów użytych do rozwiązania poprzedzaiącego zagadnienia: lecz można ie także wygodnie rozwiązać sposobem następuiącym:

1ód Strony odpowiadaiące tych dwóch równań do siebie dodawszy, wypadnie

$$2x = s + a; \text{ więc } x = \frac{s + a}{2};$$

2re Strony równania drugiego odiąwszy od stron równania piérwszego, zostanie

$$2y = s - a; \text{ więc } y = \frac{s - a}{2}.$$

69. Dwa te przykłady są dostateczne do okazania iak wygodnie można częstokroć użyć dwóch niewiadomych, do rozwiązania zagadnień, które także za pomocą iednéy niewiadoméy mogą być rozwiązane; lecz zagadnienia te powinny zamykać koniecznie dwa warunki wyraźne lub domyślne dla ułożenia dwóch równań; iedno bowiem równanie z dwiema niewiadomemi nie może dać ważności dla żadnéy, iakośmy to widzieli.

Są też i takie zagadnienia, które za pomocą iednéy niewiadoméy rozwiązane być nie mogą, iak iest *np.* następuiące:

70. *Zakupiono u gospodarza dwie fury zboża: na iednéy znaydowało się żyta korcy* $4\frac{1}{2}$, *pszenicy korcy* $3\frac{1}{4}$, *za co zapłacono zł.* 173 *i gr.* 5; *na drugiéy znaydowało się* 2 *korce żyta i* 5 *korcy pszenicy, za co dano zł.* 175 *i groszy* 10. *Jakaż iest cena iednego korca żyta i iednego korca pszenicy?*

Oznaczywszy cenę iednego korca żyta przez x, cenę iednego korca pszenicy przez y, i uczyniwszy zadosyć warunkom zagadnienia, wypadną dwa równania

$$4\tfrac{1}{2}x + 3\tfrac{1}{4}y = \text{zł. } 173 \text{ i gr } 5.$$
$$2x + 5y = \quad 175 \quad 10.$$

Dla uniknienia działań z ułomkami i dla otrzymania wypadku ogólnego, uczyńmy $4\frac{1}{2} = a$, $3\frac{1}{4} = b$, $2 = c$, $5 = d$, zł. 173 gr. $5 = p$, zł. 175 gr. $10 = q$. Tym sposobem dwa ostatnie równania zamienią się w następuiące:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{array}\right] \quad \ldots \quad A.$$

Podług piérwszego z tych dwóch równań wypada

$x = \dfrac{p - by}{a}$, podług drugiego $x = \dfrac{q - dy}{c}$. Dwie te ważności x zrównawszy z sobą wypadnie równanie

$$\frac{p - by}{a} = \frac{q - dy}{c}$$

zniosłżniosłszy mianowniki, będzie $cp - bcy = aq - ady$ z tego zaś równania otrzymamy 1ód $ady - bcy = aq - cp$, (52) 2re $y = \frac{aq - cp}{ad - bc}$ (55).

Podobnymże sposobem za pomocą dwóch równań oznaczonych głoską A znaydziemy ważność dla x. Jakoż podług pierwszego z tych dwóch równań wypada

$y = \frac{p - ax}{b}$, podług drugiego $y = \frac{q - cx}{d}$. Zrównawszy z sobą dwie te ważności niewiadoméy y, będzie

$$\frac{p - ax}{b} = \frac{q - cx}{d}.$$ Skąd wypadnie

1ód: $dp - adx = bq - bcx$;
2re: $bcx - adx = bq - dp$;
3cie $x = \frac{bq - dp}{bc - ad}$.

W znalezionych ważnościach ogólnych dla x i y zamiast głosek a, b, c, d, p i q położywszy ich ważności liczebne wyrażone w zagadnieniu, znaydziemy $x = 18\frac{1}{2}$, $y = 27\frac{2}{3}$ Dwie te znalezione ważności są prawdziwe: gdyż czynią zadosyć warunkom zagadnienia, iak się o tém łatwo można przekonać: rozmnożywszy bowiem $4\frac{1}{2}$ korcy żyta przez $18\frac{1}{2}$, a $3\frac{1}{4}$ korcy pszenicy przez $27\frac{2}{3}$, i dwa te iloczyny do siebie dodawszy, summa ich wynosi zł. 175 i gr. 5. Podobnież 2 korce żyta rozmnożywszy przez $18\frac{1}{2}$, a 5 korcy pszenicy przez $27\frac{2}{3}$ i dwa te iloczyny dodawszy, summa ich wynosi zł. 175 gr. 10 iak iest w zagadnieniu.

Można także tę samę probę odbyć za pomocą znaków ogólnych ieżeli bowiem znalezione ważności ogólne są prawdziwe, tedy rozmnożywszy ważność x przez a, ważność y przez b, i dwa te iloczyny do siebie dodawszy, summa ich powinna być równa p, podobnież ważność x rozmnożyżywszy przez c, ważność y przez d, summa dwóch tych iloczynów powinna być równa q. Lecz że te znalezione ważności maią mianowniki odmienne, trzeba ie pierwey sprowadzić do iednakowego mianownika, co łatwo uskutecznić można zamieniwszy *np.* w ważności x w liczniku i mianowniku wszystkie znaki + na —, i — na + (50. Tym sposobem dwie znalezione ważności będą

$x = \frac{dp - bq}{ad - bc}$, $y = \frac{aq - cp}{ad - bc}$. Będzie więc

$ax = \frac{adp - abq}{ad - bc}$; $by = \frac{abq - bcp}{ad - bc}$; a tém samém

$$ax + by = \frac{adp - abq + abq - bcp}{ad - bc}$$

$$= \frac{adp - bcp}{ad - bc} = p\left(\frac{ad - bc}{ad - bc}\right) = p.$$ Podobnież $cx = \frac{cdp - bcq}{ad - bc}$; $dy = \frac{adq - cdp}{ad - bc}$. Więc

$$cx + dy = \frac{cdp - bcq + adq - cdp}{ad - bc} = \frac{adq - bcq}{ad - bc}$$

$$= q\left(\frac{ad - bc}{ad - bc}\right) = q.$$

Co dowodzi, że znalezione ważności dla x i dla y, są prawdziwe.

Możnaby także zagadnienie to rozwiązać sposobem następuiącym:

Podług pierwszego z równań oznaczonych głoską A iest $x = \frac{p - by}{a}$; więc $cx = \frac{cp - bcy}{a}$; ważność tę położywszy zamiast cx w równaniu drugiém, będzie $\frac{cp - bcy}{a} + dy = q$. Skąd wypadnie

zkąd $cp - bcy + ady = aq$,

zatem $ady - bcy = aq - cp$;

3cie $y = \frac{aq - cp}{ad - bc}$; A zatém

$by = \frac{abq - bcp}{ad - bc}$. Ważność tę położywszy zamiast by w pierwszém z dwóch równań A, będzie

$ax + \frac{abq - bcp}{ad - bc} = p$. Skąd wypadnie

1sze $a^2dx - abcx + abq - bcp = adp - bcp$ (57);
2re $a^2dx - abcx = adp - abq$ (52);
3cie $adx - bcx = dp - bq$ (56);
4te $x = \frac{dp - bq}{ad - bc}$ (55).

Albo tak: Wszystkie wyrazy pierwszego z równań A rozmnożywszy przez c, drugiego przez a, dwa te równania zamienią się w następujące:

$$acx + bcy = cp,$$
$$acx + ady = ap.$$

Strony równania drugiego odiąwszy od stron równania pierwszego, zostanie

$bcy - ady = cp - aq$; więc

$$y = \frac{cp - aq}{bc - ad} = \frac{aq - cp}{ad - bc}.$$

Co się tycze niewiadomey x, tę znaydziemy albo kładąc w którąkolwiek z dwóch równań A zamiast niewiadomey y znalezioną iey ważność, albo też w równaniach tych niewiadomą y *sprowadzaiąc do iednakowego spółczynnika*; co nastąpi, gdy pierwsze z tych dwóch równań rozmnożymy przez d, drugie przez b; tym sposobem równania te zamienią się w następuiące:

$$adx + bdy = dp,$$
$$bcx + bdy = bq;$$

z których drugie odiąwszy od pierwszego, zostanie

$adx - bcx = dp - bq$; więc $x = \frac{dp - bq}{ad - bc}$.

Gdy-

Gdyby stosownie do warunków zagadnienia wypadły dwa równania takie:

$$ax + by = p, \quad cx - dy = q;$$

lub takie: $ax - by = p, \quad cx - dy = q;$ łatwobyśmy znaleźli ważność niewiadomych sposobem którymkolwiek z trzech podanych wyżey, z niektóremi tylko mnieyszey wagi odmianami; które żadney trudności nie sprawią.

71. Wszystkie te trzy sposoby, iako też inne, które wyłożymy niżey, do tego dążą, ażeby z dwóch danych równań otrzymać iedno, w którémby iedna tylko znaydowała się niewiadoma. Działanie takowe, za pomocą którego iedna z dwóch niewiadomych znosi się czyli ginie, nazywa się *eliminatio*; po polsku można ie nazwać *rugowaniem* albo *zniesieniem* niewiadomey.

Gdyby zagadnienie zamykało 3, 4, 5 i t. d. wyraźnych warunków, i tyleż niewiadomych; na ten czas uczyniwszy zadosyć warunkom zagadnienia, otrzymalibyśmy 3, 4, 5 i t. d. równań, w których sposobem którymkolwiek z podanych wyżey, znosząc naprzód iednę niewiadomą, potem drugą, trzecią i t. d. przyślibyśmy nakoniec do równania iednego z iedną tylko niewiadomą, którey ważność znalazłszy, łatwo się znaydą ważności innych niewiadomych. Weźmy naprzykład następuiące zagadnienie.

72. *Naiemnik zgodzony do przenoszenia szklannych naczyń troiakiey wielkości zobowiązał się tyle płacić za każde naczynie stłuczone, ile za przeniesienie onego w całości miał dostać w nagrodę.*

Dano mu naprzód 2 naczynia małe, 4 średnie a 9 dużych: potłukł średnie, inne wszystkie oddał w całości, i zapłacono mu zł. 28.

Drugi raz dano mu 7 naczyń małych, 3 średnie a 5 dużych: tą razą oddał w całości małe i średnie a duże potłukł, i dostał tylko 3 złote.

Nakoniec dano 9 naczyń małych, 10 średnich, a 11 dużych: potłukł wszystkie duże i dostał tylko 4 złote.

Ileż mu płacono za przeniesienie iednego naczynia każdéy wielkości?

Oznaczmy przez x zapłatę od przeniesienia iednego naczynia małego, przez y zapłatę od średniego a przez z od dużego. Rzeczą iest widoczną, że całkowita zapłata, którą naiemnik odbiera, równa iest różnicy między tą summą, która mu się należy za naczynia przeniesione w całości, a między tą summą, którą mu właściciel naczyń wytrąca za naczynia potłuczone. I tak pierwszą razą zapłacono mu za przeniesienie w całości naczyń małych $2x$, a $9z$, za przeniesienie w całości naczyń dużych; za stłuczone zaś naczynia średnie wytrącono mu $4y$. Że zaś tą razą dostał zł. 28, będzie więc następuiące równanie: $2x - 4y + 9z = 28$. Tym sposobem rozumuiąc daléy, otrzymamy trzy następuiące równania:

$$2x - 4y + 9z = 28.$$
$$7x + 3y - 5z = 3.$$
$$9x + 10y - 11z = 4.$$

Z piérwszego z tych trzech równań wypada

$$x = \frac{28 + 4y - 9z}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad A.$$

Ważność tę x położywszy w równaniu drugiém i trzeciém zamiast $7x$ i $9x$, równania te zamienia się w następuiące:

$$\frac{196 + 28y - 63z}{2} + 3y - 5z = 3.$$

$$\frac{252x + 36y - 81z}{2} + 10y - 11z = 4.$$

Zniosłszy w tych dwóch równaniach mianowniki, wypadnie

$$196 + 28y - 63z + 6y - 10z = 6$$
$$252 + 36y - 81z + 20y - 22z = 8.$$

Z piérwszéy strony w obu równaniach sprowadziwszy wyrazy podobne, będzie

$$196 + 34y - 73z = 6$$
$$252 + 56y - 103z = 8.$$

W

W piérwszém z tych dwóch równań wziąwszy ważność y, będzie

$$y = \frac{73z - 190}{34} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad B.$$

Ważność tę położywszy w równaniu drugiém zamiast $56y$, równanie to zamieni się w następuiące:

$$252 + 56 \times \frac{73z - 190}{34} - 103z = 8.$$

zniosłszy mianownik wypadnie

$$252.\ 34 + 56.\ 73z - 56.\ 190 - 34.\ 103z = 8.\ 34 \text{ : czyli}$$

$$8568 + 4088z - 10640 - 3502z = 272.$$

Z pierwszey strony sprowadziwszy wyrazy podobne będzie

$$586z - 2072 = 272 \text{ ; więc } z = \frac{2344}{586} \text{ : czyli } z = 4.$$

Ważność tę z położywszy w równaniu oznaczoném głoską B zamiast $73z$, równanie to zamieni się w następuiące;

$$y = \frac{73.\ 4 - 190}{34} = \frac{120}{34} \text{ : czyli } y = 3.$$

Nakoniec znalezioną ważnośc dla y, i dla z położywszy w równaniu oznaczoném głoską A, równanie to zamieni się w następuiące:

$$x = \frac{28 + 4.\ 3 - 9.\ 4}{2} = \tfrac{4}{2} \text{ czyli } x = 2.$$

Płacono więc po 2 zł. od przeniesienia każdego z naczyń małych, po 3 zł. od każdego z naczyń średnich, a po 4 zł. od każdego z dużych.

Ten sam wypadek otrzymalibyśmy używszy do rozwiązania innych dwóch sposobów, któreśmy wyżey podali.

Przykład ten iest dostateczny do okazania iak sobie postąpić należy we wszystkich innych zagadnieniach o iakićykolwiek liczbie ilości niewiadomych.

73. Często się przytrafia, że wszystkie niewiado-

dome nie wchodzą razem do każdego z równań, okoliczność ta małą zmianę w działaniu czyniąca, nie może sprawić żadnéy trudności, dosyć iest tylko zastanowić się należycie nad związkiem między niewiadomemi zachodzącym, ażeby od iedney niewiadomey przyyść do innych. Weźmy na przykład następuiące zagadnienie.

Dano 940 zł. do podzielenia między cztéry osoby A, B, C i D w ten sposób, aby dział osoby A równy był $\frac{2}{3}$ działu osoby B; dział osoby B równał się $\frac{3}{4}$ działu osoby C; a dział osoby C równał się $\frac{3}{5}$ działu osoby D: ileż się każdey dostanie?

Oznaczywszy dział osoby pierwszéy przez u, drugiéy przez x, trzeciéy przez y, czwartey przez z, i uczyniwszy zadosyć warunkom zagadnienia; otrzymamy cztery następuiące równania:

1wsze $u + x + y + z = 940$.

2gie $u = \frac{2}{3} x$; 3cie $x = \frac{3}{4} y$; 4te $y = \frac{3}{5} z$.

Ponieważ $u = \frac{3}{5} z$ więc $\frac{1}{4} y = \frac{3}{20} z$, a $\frac{3}{4} y = \frac{9}{20} z$. Aże $\frac{3}{4} y = x$ podług warunków zagadnienia, więc $x = \frac{9}{20} z$

Podobnież ponieważ $x = \frac{9}{20} z$, więc $\frac{1}{3} x = \frac{3}{20} z$, a $\frac{2}{3} x = \frac{6}{20} z$. Aże $\frac{2}{3} x = u$, więc $u = \frac{6}{20} z$.

Doszedłszy, że $u = \frac{6}{20} z$, $x = \frac{9}{20} z$ a podług zagadnienia $y = \frac{3}{5} z$; położmy ważności te w równaniu pierwszém ze czterech danych, tym sposobem równanie to zamieni się w następuiące:

$\frac{6}{20} z + \frac{9}{20} z + \frac{3}{5} z + z = 940$; czyli

$\frac{6}{20} z + \frac{9}{20} z + \frac{12}{20} z + \frac{20}{20} z = 940$; czyli

$\frac{47}{20} z = 940$. Więc $47z = 18800$; a tém samem

$z = 400$. Więc $\frac{1}{5} z = 80$; a $\frac{3}{5} z = 240$; że zaś $\frac{3}{5} z = y$; więc

$y = 240$; a tém samem $\frac{1}{4} y = 60$; a $\frac{3}{4} y = 180$; aże $\frac{3}{4} y = x$; więc

$x = 180$. Podobnież $\frac{1}{3} x = 60$; a $\frac{2}{3} x = 120$. Aże $\frac{2}{3} x = u$, więc $u = 120$.

Cztéry te znalezione działy czynią zadosyć warunkom zagadnienia: gdyż summa ich czyni 940; a dział osoby pierwszey, to iest 120, równa się $\frac{2}{3}$ działu osoby drugiey; dział zaś osoby drugiey, [...]

grey, to iest 180, równa się $\frac{3}{4}$ działu osoby trzeciey, nakoniec dział osoby trzeciey, to iest 240 równa się $\frac{3}{5}$ działu osoby czwartey.

74. Weźmy ieszcze cztery następuiące równania:

1sze; $3u - 2y = 2$, 3cie, $5x - 7z = 11$,
2gie; $2x + 3y = 39$, 4te, $4y + 3z = 41$.

Z drugiego z tych czterech równań wypada $x = \frac{39 - 3y}{2}$. Ważność tę położywszy w równaniu trzeciém zamiast $5x$, będzie

$$5 \times \frac{39 - 3y}{2} - 7z = 11; \text{ czyli}$$
$$195 - 15y - 14z = 22; \text{ czyli}$$
$$-195 + 15y + 14z = -22 \ (53); \text{ czyli}$$
$$15y + 14z = 173.$$

Dwa równania $15y + 14z = 173$, i $4y + 3z = 41$ rozwiązawszy sposobem, którymkolwiek z podanych wyżey, znaydziemy $y = 5$, $z = 7$.

Znalezioną ważność dla y położywszy w równaniu $x = \frac{39 - 3y}{2}$, będzie $x = \frac{39 - 3.5}{2} = \frac{24}{2}$; czyli $x = 12$.

Że zaś podług piérwszego z czterech danych równań wypada $u = \frac{2 + 2y}{2}$; będzie zatem

$$u = \frac{2 + 2.5}{3} = \frac{12}{3}; \text{ czyli } u = 4.$$

Liczby zatem szukane są 4, 12, 5 i 7.

75. Czasem wygodnie można wprowadzić nową niewiadomą oprócz tych, które się iuż znayduią w zagadnieniu. Weźmy naprzykład zagadnienie:

Maiątki trzech osób A, B, C są takie, że maiątek osoby A z połową maiątków dwóch osób innych czyni zł. 50; maiątek osoby B z trzecią częścią maiątku osoby A i C czyni zł. 50; maiątek osoby

soby C *z czwartą częścią maiątku osoby* A *i* B *czyni zł. 46. Jakież są te maiątki?*

Oznaczywszy maiątek osoby *A* przez x, B przez y, C przez z, i uczyniwszy zadosyć warunkom zagadnienia, wypadną trzy równania.

$$x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z = 50.$$
$$\tfrac{1}{3}x + y + \tfrac{1}{3}z = 36$$
$$\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}y + z = 46.$$

Uczyńmy $x + y + z = u$. Będzie więc

$$x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}x$$
$$\tfrac{1}{3}x + y + \tfrac{1}{3}z = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{3}z + \tfrac{2}{3}y = \tfrac{1}{3}u + \tfrac{2}{3}y.$$
$$\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}y + z = \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{4}z + \tfrac{3}{4}z = \tfrac{1}{4}u + \tfrac{3}{4}z.$$

Trzy więc dane równania zamienią się w następuiące:

$\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}x = 50$, $\tfrac{1}{3}u + \tfrac{2}{3}y = 36$, $\tfrac{1}{4}u + \tfrac{3}{4}z = 46$.

Zniosłszy mianowniki, będzie

$$\left.\begin{aligned} u + x &= 100 \\ u + 2y &= 108 \\ u + 3z &= 184 \end{aligned}\right\} \text{ - - - - - - - - - } A.$$

Piérwsze z tych trzech równań rozmnożywszy przez 6, drugie przez 3, trzecie przez 2, abyśmy tym sposobem niewiadome x, y, z, sprowadzili do iednakowego spółczynnika, będzie $6u + 6x = 600$, $3u + 6y = 324$, $2u + 6z = 368$.

Dodawszy do siebie strony odpowiadaiące, wypadnie

$$11u + 6x + 6y + 6z = 1292.$$

Aże podług przypuszczenia $6x + 6y + 6z = 6u$, będzie więc $11u + 6u = 1292$, czyli $17u = 1292$. A zatém $u = 76$.

W równaniach oznaczonych głoską *A*, zamiast u położywszy 76, znaydziemy $x = 24$, $y = 16$, $z = 36$.

Tymże sposobem rozwiązać można następuiące zagadnienia; *Maiątki trzech osób* A, B, C *są takie, że summa maiątków osoby* A *i* B, *większa iest* 7 *złotemi od maiątku osoby* C; *summa podwoyna maiątków osoby* A *i* C *większa iest* 15 *złotemi od maiątku osoby* B; *summa potroyna maiątków o-*

soby

soby B i C większa iest 21 złotemi od maiątku osoby A, ileż ma każda osoba?

Summa maiątku osoby A i podwoynego maiątku osoby B i C czyni zł. 62; summa maiątku osoby B i potroynego maiątku osoby A i C czyni zł. 84; Summa maiątku osoby C i poczwórnego maiątku osoby A i B czyni zł. 102. Jakież są te maiątki?

76. Przytoczymy tu ieszcze kilka innych zagadnień, które na wzór powyższych rozwiązywać potrzeba, ażeby nabyć wprawy i łatwości w działaniach ze znakami ogólnemi.

Dwie paki A i B ważą po kilka cetnarów: gdyby od paki B odięty był 1 cetnar a dodany do paki A, na ten czas paka A byłaby dwa razy cięższa od paki B, gdyby zaś od A był odięty 1 cetnar i dodany do paki B, na ten czas paka B byłaby trzy razy cięższa od paki A: po ileż cetnarów iest w każdey pace?

Liczbę cetnarów paki *A* oznaczywszy przez x, paki *B* przez y, i uczyniwszy zadosyć dwom warunkom zagadnienia, będzie

1*o*d w pace *A* cetnarów $x+1$, w pace B cetnarów $y-1$. Aże w tym przypadku paka *A* iest dwa razy cięższa od *B*, będzie więc pierwsze równanie $x+1=2y-2$.

2,*e* w pace *A* będzie cetnarów $x-1$, w pace B, $y+1$. Aże w tym przypadku paka *B* iest trzy razy cięższa od A, będzie więc drugie równanie $3x-3=y+1$.

Dwa te równania rozwiązawszy podług sposobów podanych wyżey, znaydziemy $x=2\frac{1}{5}$, $y=2\frac{3}{5}$.

77. *Jeden dłużnik dał wierzycielowi 12 luidorów i 17 cz. zł. dla umorzenia długu wynoszącego 769 zł. pol. Drugi dłużnik w celu umorzenia długu 694 zł. pol. wynoszącego, dał 25 luidorów, a wierzyciel wrócił mu 18 cz. zł. Po czemuż tu rachowano ieden luidor i ieden cz. zł.*

Oznaczywszy ważność iednego luidora przez x, iednego dukata przez y, i uczyniwszy zadosyć

wa-

warunkom zagadnienia, otrzymamy dwa równania
$12x + 17y = 769$, $5x - 18y = 694$,
z których wypadnie $x = 40$, $y = 17$.

78. *Trzey gracze A; B, C po pierwszey partyi rachuią pieniądze: gracz A przegrał, drudzy dway wygrali, każdy tyle, ile miał siadaiąc do gry. W drugiey partyi gracz B przegrał do dwóch innych, z których każdy tyle wygrał, ile miał zaczynaiąc drugą partyą. W trzeciey partyi przegrał gracz C, dway drudzy wygrali, każdy tyle ile miał zaczynaiąc trzecią partyą. Poprzestali gry, a każdy odszedł ze 120 cz. zł. po ileż mieli zaczynaiąc grę?*

Oznaczywszy szukaną ilość pieniędzy gracza A przez x, gracza B przez y, gracza C przez z, znaydziemy, że po pierwszey partyi gracz
$A = x - y - z$; $B = 2y$; $C = 2z$.

Po drugiey partyi
$A = 2x - 2y - 2z$; $B = 3y - x - z$; $C = 4z$.

Po trzeciey partyi
$A = 4x - 4y - 4z$; $B = 6y - 2x - 2z$;
$C = 7z - x - y$.

Aże po skończeniu trzeciéy partyi maią po 120 cz; więc
$4x - 4y - 4z = 120$, $6y - 2x - 2z = 120$,
$7z - z - y = 120$.

Odbywszy działanie sposobem którymkolwiek z podanych wyżey, znaydziemy $x = 195$, $y = 105$, $z = 60$.

79 *Rzemieślnik zgodzony do pewney roboty, ukończył ią za dwoma nawrotami; Pierwszą razą pracował przez dni 12, w ciągu których żona wraz z synem osobno zgodzona pomagała mu przez dni 7, za co im zapłacono 74 zł. Drugą razą pracował przez dni 8, w ciągu których żona wraz z synem pomagała mu przez dni 5, za co dostali zł. 50. Po ileż na dzień płacono rzemieślnikowi, a po ile iego żonie wraz z synem?*

Oznaczywszy zapłatę dzienną męża przez x, żony wraz z synem przez y, i uczyniwszy zadość syć warunkom zagadnienia, otrzymamy dwa równania:

$$12x+7y=74,\quad 8x+5y=50$$

Które rozwiązawszy sposobem którymkolwiek z podanych wyżey, znaydziemy $x=5$, $y=2$.

80. Gdyby summa pierwszą razą im zapłacona wynosiła zł. 46, drugą razą zł. 30, a inne wszystkie okoliczności były te same iak w zagadnieniu poprzedzaiącém; na ten czas uczyniwszy zadosyć warunkom, wypadłyby następuiące równania:

$$12x+7y=46,\quad 8x+5y=30.$$

Z piérwszego równania wypada $y=\frac{46-12x}{7}$; a tém samém $5y=\frac{230-60x}{7}$. Ważność tę położywszy w równaniu drugiem zamiast $5y$, będzie

$8x+\frac{230-60x}{7}=30$ zniosłszy mianownik,

$56x+230-60x=210$; więc

$-4x=-20$, czyli $4x=20$ (55); $x=5$;

W równaniu $y=\frac{46-12x}{7}$, zamiast $12x$ położywszy znalezioną ważność, to iest $5.12=60$, będzie

$y=\frac{46-60}{7}$; czyli $y=\frac{-14}{7}=-2$ (24).

Jakże teraz mamy rozumieć znak $-$ znayduiący się przed iłością poiedynczą 2? Wiemy, co znaczą dwie ilości złączone z sobą znakiem $-$, kiedy ilość maiąca być odiętą mnieysza iest niż ta, od któréy ią odiąć trzeba. Ale od czego odiąć ilość, która sama iedna tylko znayduie się na iednéy stronie równania?

Abyśmy trudność tę obiaśnili, zastanowmy się nad równaniami warunki zagadnienia wyrażaiącemi: te bowiem maiąc ścisły związek z wysłowieniem zagadnienia, dadzą nam poznać okoliczności,

ści, z których trudność ta wynikła. Weźmy więc równanie $12x + 7y = 46$.

Zamiast x położywszy iego ważność 5, równanie to zamieni się w następuiące:

$$60 + 7y = 46.$$

Z piérwszego weyrzenia na to równanie widać w niem zaraz niepodobieństwo. Jakoż rzeczą iest niepodobną otrzymać summę 46 przez dodanie iakiey ilości do liczby 60: która iuż sama przewyższa liczbę 46.

Weźmy także drugie równanie $8x + 5y = 30$.

Położywszy 5 zamiast x, wypadnie

$$40 + 5y = 30$$

to samo niepodobieństwo co wyżéy, gdyż liczba 30 nie może wypaść przez dodanie czego do liczby 40.

Lecz ilości $12x$ czyli 60 w równaniu piérwszém i $8z$, czyli 40 w równaniu drugiém, wyrażaią zarobek samego rzemieślnika: ilości $7y$ i $5y$ oznaczaią zarobek przyznany iego żonie i synowi: liczby zaś 46 i 30 oznaczaią summę daną w zapłatę spólną tym trzem osobom. Tu iuż łatwo postrzedz na czem zależy to niepodobieństwo.

Podług wysłowienia rzemieślnik sam ieden więcey by zarobił, niż przy pomocy żony i syna: rzeczą więc iest niepodobną uważać pieniądze przyznane żonie i synowi iako powiększaiące zarobek rzemieślnika.

Lecz ieżeli pieniądze przyznane żonie i synowi uważać będziemy nie iako zarobek, ale iako wydatek ze szkodą rzemieślnika; na ten czas pieniądze te potrzeba będzie odiąć od tych, któreby rzemieślnik sam był zarobił; a w tym przypadku nie byłoby żadney sprzeczności w równaniach: gdyż dwa te równania zamieniłyby się w następuiące:

$$60 - 7y = 46;\quad 40 - 5y = 30.$$

Z obu tych równań wypada $y = 2$. Skąd wniesiemy, że rzemieślnik zyskuie na dzień po 5 zł. a na żonę i syna wydaie przez dzień po 2 zł. co też można sprawdzić następuiącym sposobem.

Za

Za 12 dni pracy dostaie rzemieślnik 5×12 czyli 60.

Wydatek na żonę i syna przez dni 7 iest $2 \times 7 = 14$; zostanie mu więc zł. 46.

Za 8 dni pracy dostaie rzemieślnik złotych 5×8 czyli 40. Przez 5 dni wydaie na żonę i syna zł. 2×5 czyli 10, zostanie mu więc zł. 30.

Rzeczą iest teraz widoczną, że chcąc aby zagadnienie było podobnem do prawdy, wysłowienie iego powinno być następuiące:

Rzemieślnik zgodzony do pewney roboty ukończył ią za dwoma nawrotami. Pierwszą razą pracował przez dni 12, w ciągu których, przez 7 dni poniosł wydatek na utrzymanie żony i syna, i zostało mu się z iego zarobku zł. 46. Drugą razą pracował przez 8 dni, w ciągu których Przez 5 dni, miał przy sobie żonę i syna, których kosztem swoim utrzymywał, i dostał zł. 30. Ileż co dzień zyskiwał, ile wydawał co dzień na utrzymanie żony i syna?

Oznaczywszy przez x zarobek dzienny, przez y wydatek dzienny na utrzymanie żony i syna, i uczyniwszy zadosyć warunkom zagadnienia, będzie

$$12x - 7y = 46; \; 8x - 5y = 30.$$

Równania te rozwiązawszy sposobem, którymkolwiek z podanych wyżey, znaydziemy $x = 5$ zł. $y = 2$ zł.

81. We wszystkich przypadkach, w których znaydziemy na ważność dla niewiadomey liczbę ze znakiem —, można będzie sprostować wysłowienie zagadnienia sposobem podobnym do poprzedzaiącego, szukaiąc pilnie ilości, która z dodayney, iaką była w wysłowieniu pierwszém, powinna się zamienić na odiemną w wysłowieniu drugiem. Lecz Algiebra uwalnia od podobnych w tey mierze badań, gdy sposób działania z ilościami odiemnemi iest wiadomy; ponieważ bowiem wyrażenia odiemne wypadaią z równań; idzie zatem, że ważności te powinny *zadosyć czynić* równaniom; to iest: odbywszy z niemi działania

wska-

wskazane w równaniach, powinna wypaść iedna strona równania równa drugiey, I tak wyrażenie $\frac{-14}{7}$ wyprowadzone z równań

$$12x + 7y = 46,\ 8x + 5y = 30,$$

powinno łącznie z ważnością $x = 5$ wyprowadzoną z tychże równań, sprawdzić obadwa te równania.

W równaniach tych położywszy naprzód ważność x, będzie

$$60 + 7y = 46;\ 40 + 5y = 30.$$

Potrzeba teraz zamiast y położyć w tych równaniach znalezioną ważność $\frac{-14}{7}$, a tym końcem trzeba wyrażenie to rozmnożyć przez 7 i przez 5.

Podług prawideł podanych wyżey wypada $\frac{-14}{7} = -2$ (24).

$$7 \times -2 = -14,\ 5 \times -2 = -10 \ (34),$$

Równania więc $60 + 7y = 46$, $40 + 5y = 30$, zamienią się w następujące;

$$60 - 14 = 46,\ 40 - 10 = 30;$$

a tym sposobem sprawdzenie ich zależy, nie na dodawaniu dwóch wyrazów strony pierwszey, lecz na odięciu wyrazu drugiego od pierwszego.

Widzimy tu, że warunki zagadnienia w artykule 80 nie pozwoliły rozwiązać go w znaczeniu pierwszego wysłowienia, to iest przez dodawanie czyli przez uważanie pieniędzy przyznanych żonie i synowi za dzienny zarobek; drugie też wysłowienie nie służy zagadnieniu rozwiązanemu w art. 79. Gdybyśmy w tém zagadnieniu chcieli y uważać iako wydatek, z równań

$$12x - 7y = 74,\ 8x - 5y = 50,$$

któreby na ten czas wypadły, otrzymalibyśmy $x = 5$, $y = \frac{-14}{7}$; a położywszy w nich ważność x, byłoby

$$60 - 7y = 74;\ 40 - 5y = 50;$$

nie

niepodobieństwo tego wypadku iest właśnie przeciwne niepodobieństwu, któreśmy widzieli wyżey: gdyż idzie tu o to, aby od liczb 60 i 40 odiąwszy $7y$ i $5y$, wypadły reszty większe niż są te liczby.

Nie tylko znak $-$ znayduiący się przed wyrażeniem ilości y okazuie niepodobieństwo, lecz że nawet poprawia: gdyż podług prawideł podanych wyżey na znaki (24), $\frac{-14}{7} = -2$.

Ważność tę położywszy w dwóch równaniach powyższych zamiast $7y$, $5y$, będzie

$$60 - 7 \times -2 = 74; \text{ czyli } 60 + 14 = 74.$$
$$40 - 5 \times -2 = 50; \text{ czyli } 40 + 10 = 50.$$

Równania te sprawdzaią się przez dodawanie, a tem samem ilości $-7y$, $-5y$ zamienione na $+14$, $+10$ wyrażaią nie wydatek lecz rzeczywisty zarobek rzemieślnika, a oraz pokazuią, iakie powinno być prawdziwe wysłowienie tego zagadnienia.

82. Weźmy ieszcze następuiące zagadnienie: *Kupiec prowadzący troiaki handel, zyskał na wszystkich trzech: Zysk z pierwszego powiększony zyskiem z drugiego wynosi 1200 cz. zł. zysk z pierwszego powiększony zyskiem z trzeciego wynosi 600 cz. zł. Zysk z drugiego powiększony zyskiem z trzeciego wynosi 400 cz. zł. Jakiż miał zysk z każdego handlu?*

Oznaczywszy zysk z handlu pierwszego przez x, z drugiego przez y, z trzeciego przez z, wypadną podług warunków zagadnienia trzy następuiące równania:

$$x + y = 1200,\ x + z = 600,\ y + z = 400.$$

Dodawszy strony odpowiadaiące tych trzech równań, będzie $2x + 2y + 2z = 2200$. Podzieliwszy obie strony przez 2, wypadnie

$$x + y + z = 1100.$$

Od tego równania odiąwszy naprzód równanie

nie trzecie, potém drugie, nakonieo pierwsze z trzech równań danych, znaydziemy

$$x = 700,\ y = 500,\ z = -100.$$

Kupiec zatém w handlu pierwszym zyskał 700, w drugim 500, w trzecim zaś — 100 cz. zł. Abyśmy poznali, co ma znaczyć ten tak nazwany zysk w handlu trzecim, weźmy dwa równania.

$$x + y = 1200\quad x + y + z = 1100.$$

Za pierwszém weyrzeniem na te dwa równania można zaraz postrzedz niepodobieństwo: summa albowiem dwóch zysków z handlu pierwszego i drugiego większa iest o 100 cz. zł. aniżeli summa wszystkich trzech. Kiedy więc zysk z handlu trzeciego dodany do dwóch pierwszych z mnieysza ie o 100 cz. zł. rzeczą iest widoczną, że ten mniemany zysk iest rzeczywiście stratą, którą kupiec w trzecim handlu poniosł, i dla nagrodzenia którey, musi 100 cz. zł. odiąć od zysku z dwóch handlów pierwszych. Skąd się okazuie, że wysłowienie tego zagadnienia powinno być sprostowane w następuiący sposób:

Kupiec prowadzący troiaki handel, na dwóch zyskał, na trzecim stracił. Zysk z pierwszego powiększony zyskiem z drugiego wynosi 200 cz. zł. Zysk z pierwszego z mnieyszony stratą z trzeciego wynosi 600 cz zł. Zysk z drugiego zmnieyszony stratą z trzeciego wynosi 400 cz. zł. Jakiż miał zysk w handlu pierwszym i drugim, a iaką stratę w handlu trzecim?

Oznaczywszy zysk z handlu pierwszego przez x, zysk z drugiego przez y, a stratę z trzeciego przez z, i uczyniwszy zadosyć warunkom zagadnienia, otrzymamy trzy następuiące równania:

$$x + y = 1200,\ x - z = 600,\ y - z = 400;$$

które rozwiązawszy sposobem którymkolwiek z podanych wyżey, znaydziemz $x = 700$, $y = 500$, $z = 100$.

Kupiec zatém w pierwszym handlu zyskał 700, w drugim zyskał 500, w trzecim stracił 100 cz. zł.

83.

83. Przykłady te okazuią, *w wysłowieniu zagadnień stopnia pierwszego mogą się znaydować niektóre sprzeczności, które Algiebra nie tylko daie poznać, lecz nawet podaie sposób na ich sprostowanie, zamieniaiąc niektóre ilości na odiemne chociaż w zagadnieniu uważane były iako dodayne, i przeciwnie; ilości niektore uważane iako odiemne, zamieniaiąc na dodayne. albo daiąc przed ważnościami niewiadomych znak —.*

Ile razy więc po rozwiązaniu zagadnienia stopnia pierwszego, otrzymamy ważność niewiadoméy ze znakiem —, będzie to dowodem; że zagadnienie to nie może być rozwiązane w znaczeniu takiem, iakiego wymaga iego wysłowienie, lecz w znaczeniu przeciwnem. Dla téy przyczyny rozwiązania te, w których znalezione ważności są odiemne, zowią się *solutiones negativae; rozwiązania przeczące* W ogólności każda ilość maiąca przed sobą znak — nazywa się *quantitas negativa*, ilość przecząca, dla różnicy od ilości maiących przed sobą przeciwny znak +, które się nazywaią *quantitates positivae, ilości twierdzące.*

ROZDZIAŁ IV.

O Proporcyi Arytmetyczney i Jeometryczney.

I. *o Proporcyi w ogólności.*

84. Reguła trzech, iak wiadomo z Arytmetyki, nie mało przynosi ułatwienia w rozwiązywaniu trudnieyszych zagadnień Arytmetycznych: abyśmy iey z korzyścią użyć mogli w Algiebrze, wyłożymy ią tu w ogólnieyszym i więcey szczegółów obeymuiącym widoku, niżeliśmy ią mieli wyłożoną w Arytmetyce.

Kiedy porównywamy między sobą dwie liczby

czby lnb inne iakiekolwiek ilości w zamiarze dowiedzenia się, ile razy iedna iest większa lub mnieysza od drugiéy, czyli, iak odtąd mówić będziemy, iaki między niemi zachodzi *stosunek*; na ten czas iednę z nich dzielimy przez drugą, a iloraz iest wypadkiem szukanym. Gdy są cztéry ilości *a*, *b*, *c* i *d* takie, że iloraz dwóch piérwszych równy iest ilorazowi dwóch drugich przez siebie podzielonych; na ten czas ilerazy ilość piérwsza *a* iest większa lub mnieysza od drugiéy *b*, tyle też razy ilość trzecia *c* iest większa lub mnieysza od czwartéy *d*; czyli, krócey to samo wyrażaiąc, *stosunek ilości* a *do* b, *rowny iest stosunkowi ilości* c *do* d. Cztéry takowe ilości składaią *proporcyą*, i zowią się *proporcyonalnemi* między sobą. Proporcya zatém między czterema ilościami *a*, *b*, *c* i *d* zachodząca powinnaby się algiebraicznie oznaczać

$$\text{albo tak: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\text{; albo tak: } \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Zwyczaynie iednak proporcya oznacza się sposobem następuiącym:

$$a : b :: c : d\text{; albo, } a : b = c : d.$$

Wyrażenie takowe obeymuie w sobie obadwa wyrażenia powyższe, i znaczy zarówno *a* podzielone przez *b* równa się *c* podzielonemu przez *d*, iakoteż *b* podzielone przez *a* równa się *d* podzielonemu przez *c*. Pospolicie iednak dla krótkości mówimy: *a ma się do* b *iak* c *do* d.

Cztéry wyrazy składaiące proporcyą maią swoie szczególne nazwiska. Wyrazy *a* i *d* zowią się *skraynemi*, *extremi*: wyrazy, *c* i *b* *średniemi*, *medii*. Wyrazy *a* : *b* składaią *pierwszy stosunek*, *ratio*; wyrazy *c* : *d* drugi stosunek proporcyi. Wyraz *a* iest *poprzednikiem*, *antecedens*, wyraz *b* *następnikiem*, *consequens* piérwszego stosunku; wyraz *c* iest poprzednikiem, wyraz *d* iest następnikiem drugiego stosunku. W proporcyi zatem tak się ma poprzednik pierwszego stosunku do swego na-

następnika, iak poprzednik drugiego stosunku do swego następnika. Tu iuż łatwo postrzedz można, że poprzednik i następnik iest to samo co dzielna i dzielnik, albo co licznik i mianownik, stosunek zaś to samo co iloraz albo ważność ułomka.

85. Częstokroć porównywaiąc między sobą dwie iakie ilości, iednę od drugiéy odeymuiemy w celu dowiedzenia się czém iedna drugą przewyższa, czyli iaka między niemi, zachodzi różnica. Daymy, że *np.* iedna liniia ma 3 cale więcéy niż druga: na ten czas wziąwszy dwie iakiekolwiek liczby, między któremi zachodzi różnica 3, *np.* 13 i 10, mówimy, że między temi dwiema liniiami taka zachodzi rożnica, iaka iest między liczbami 13 i 10; albo że te liniie maią się do siebie, iak liczby 13 i 10, albo nakoniec, że liniie te są do siebie w takim stosunku, iaki zachodzi między liczbami 13 i 10

Stosunek taki z odięcia iednéy ilości od drugiéy pochodzący, nazwano stosunkiem *Arytmetycznym*, dla różnicy od stosunku poprzedzaiącego, który wypada z podzielenia iedney ilości przez drugą, i który się nazywa stosunkiem *Jeometrycznym*. A iako dwa równe stosunki jeometryczne składaią proporcyą jeometryczną; tak dwa równe stosunki arytmetyczne składaią proporcyą arytmetyczną: i ieżeli między dwiema ilościami *a* i *b* taka zachodzi różnica, iaka iest między drugiemi dwiema *c* i *d*, na ten czas mówimy: *tak się ma poprzednik* a *do swego następnika* b *w pierwszym stosunku, iak poprzednik* c *do swego następnika* d *w drugim stosunku*, albo krócéy; tak się ma *a* do *b*, iak *c* do *d*.

Proporcyą zatém arytmetyczną moznaby tak wyrazić: $a - b = c - d$, lub $b - a = d - c$; zwyczaynie iednak wyraża się tak: $a.\ b: c.\ d$; albo tak: $a.\ b = c.\ d$.

86. Trafić się może w proporcyi tak arytmetycznéy iako też jeometrycznéy, że następnik

pierwszego stosunku równy iest poprzednikowi stosunku drugiego, *np.*

$$7.\,5 = 5.\,3 \qquad a.\,b = b.\,c.$$
$$6 : 12 = 12 : 24. \qquad a : b = b : c.$$

Proporcya taka zowie się proporcyą *ciągłą* arytmetyczną lub jeometryczną, *proportio continua.* Następnik stosunku pierwszego, który iest razem poprzednikiem stosunku drugiego, zowie się *średnim arytmetycznie* lub *jeometrycznie* proporcyonalnym. Algiebraicznie proporcya ciągła tak się wyraża:

$$\div\, 7.\,5.\,3. \qquad \div\, a.\,b.\,c.$$
$$\because\!\!\div\, 6 : 12 : 24. \qquad \because\!\!\div\, a : b : c.$$

Wiedząc iuż co rozumiemy przez proporcyą arytmetyczną i jeometryczną, łatwo będzie poznać inne ich własności.

II. *o Proporcyi Arytmetyczney.*

87. Proporcya arytmetyczna $a.\,b = c.\,d$, podług tego cośmy powiedzieli wyżey (85), może być tak wyrażona; $a - b = c - d$. W równaniu tem dodawszy po obu stronach b i d, będzie $a + d = b + c$. To iest: *w proporcyi arytmetyczney summa wyrazów skraynych rowna się summie wyrazów średnich.*

W równaniu $m + r = p + q$ odiąwszy po obu stronach r i q, zostanie $m - q = p - r$, ostatnie to równanie podług tego cośmy powiedzieli wyżey, może być tak wyrażone: $m.\,q = p.\,r$. To iest: ieżeli summa dwóch ilości równa iest summie dwóch innych ilości; cztery te ilości można ułożyć w proporcyą arytmetyczną, biorąc dwie pierwsze ilości za wyrazy skrayne, dwie drugie za wyrazy średnie; lub odwrotnie; *np.* $10 + 5 = 8 + 7$, więc $10.\,8 = 7.\,5$; albo $8.\,5 = 10.\,7$.

88. Z tych głównieyszych prawd łatwo iest wyprowadzić następuiące;

1od. W proporcyi arytmetyczney ciągłey summa wyrazów skraynych równa iest średniemu dwa razy wziętemu; *np.* $a.\,b = b.\,c$; czyli $a - b = b$

$-c$, dodawszy po obu stronach b i c, wypadnie $a+c=2b$,

2re. Kiedy summa dwóch ilości równa iest trzeciey dwa razy wziętéy, ilość trzecia iest średnią arytmetycznie proporcyonalną między dwiema ilościami pierwszemi; *np.* $a+p=2m$; odiąwszy p i m po obu stronach, będzie $a-m=m-p$; czyli $a.\ m=m.\ p$.

3cie. W proporcyi arytmetycznéy wyraz czwarty równy iest summie wyrazów średnich zmnieyszonéy wyrazem pierwszym; *np.* $a.\ b=c.\ x$; więc $a+x=b+c$ (87); a tém samém $x=b+c-a$. Tymże samym sposobem okazać można, że w proporcyi arytmetyczney wyraz trzeci równy summie dwóch skraynych żmnieyszonéy wyrazem drugim i t. d.

4te. W proporcyi arytmetycznéy ciągłey wyraz ostatni równy iest średniemu dwa razy wziętemu i zmnieyszonemu wyrazem pierwszym; *np.* $a.\ b=b.\ x$; więc $a+x=2b$, a tém samém $x=2b-a$.

5te. Wyraz średni arytmetycznie proporcyonalny równy iest połowie summy dwóch wyrazów skraynych; *np.*

$a.\ x=x.\ b$, więc $a+b=2x$, a tém samém $\frac{a+b}{2}=x$.

6te. Kiedy ilość iaka równa iest połowie summy dwóch ilości innych, ilość pierwsza iest średnią arytmetycznie proporcyonalną między dwiema innemi ilościami; *np.*

$$8=\frac{9+7}{2},\ \text{więc}\ 9.\ 8=8.\ 7;\ \text{i t. d.}$$

III. o *Proporcyi jeometrycznéy.*

89. Proporcya jeometryczna $a:b=c:d$, iakośmy wyżey (84) powiedzieli, może być tak wyrażona: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

W

W tém równaniu zniosłszy mianowniki, będzie $ad=bc$ (57). To iest: *w proporcyi jedmetryczney iloczyn wyrazów skraynych równy iest iloczynowi wyrazów średnych*; np.

$14:7=10:5$ więc $14\times5=7\times10$,

Prawdę tę można także okazać sposobem następuiącym;

Daymy, że $\frac{a}{b}=m$ będzie też $\frac{c}{d}=m$. W dwóch tych równaniach zniosłszy mianowniki, wypadnie

$a=bm$, $c=dm$.

W daney zatém proporcyi $a:b=c:d$, zamiast a i c położywszy znalezione ważności, to iest bm i dm, proporcya ta zamieni się w następuiącą: $bm:b=dm:d$, w którey widocznie iloczyn skraynych równy iest iloczynowi średnich: gdyż obadwa składaią się z tychże samych czynników bdm.

W równaniu np. tém, $mr=pq$ podzieliwszy obie strony przez rq, będzie $\frac{m}{q}=\frac{p}{r}$ (40); a zatém $m:q=p:r$ (84). To iest: ieżeli iloczyn dwóch iakichkolwiek czynników mr, równy iest drugiemu iloczynowi dwóch innych czynników pq, można z tych czterech czynników ułożyć proporcyą jeometryczną, biorąc dwa czynniki iednego iloczynu za wyrazy skrayne, dwa czynniki drugiego iloczynu za wyrazy średnie proporcyi; np $7\times4=14\times2$, będzie więc $7:2=14:4$.

90. W proporcyi jeometryczney ciągłey, iloczyn wyrazów skraynych równy iest kwadratowi wyrazu średniego. Jakoż w proporcyi $a:b=b:c$, iest $ac=bb$ (89), czyli $ac=b^2$.

W równaniu $mq=a^2$ podzieliwszy obie strony przez aq, będzie $\frac{m}{a}=\frac{a}{q}$ (40); czyli $m:a=a:q$. To iest: kiedy iloczyn dwóch czynników równy iest kwadratowi, ilość z którey przez siebie rozmnomnożoney powstał kwadrat, iest średnią jeometrycznie proporcyonalną między dwoma czynnikami iloczynu; *np.* $8 \times 2 = 4^2$; więc $8 : 4 = 4 : 2$.

91. Proporcyą $a : b = c : d$ zamieniwszy na równanie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; ponieważ ważność ułomka nie odmienia się, gdy obadwa iego wyrazy rozmnożą się lub podzielą przez tęż samę ilość: w równaniu więc powyższem rozmnożywszy lub podzieliwszy przez iakąkolwiek ilość m tak liczniki iak mianowniki po obu stronach, będą dwa następuiące równania:

$$\frac{am}{bm} = \frac{cm}{dm}; \quad \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}} = \frac{\frac{c}{m}}{\frac{d}{m}}: \text{ czyli}$$

$$am : bm = cm : dm; \quad \frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}.$$

Dwie te proporcye porównawszy z proporcyą daną $a : b = c : d$, wniesiemy, że w proporcyi jeometryczney wszystkie wyrazy rozmnożywszy lub podzieliwszy przez iaką ilość, proporcya się nie zepsuie.

Podobnymże sposobem okazać można, że dwa pierwsze wyrazy proporcyi rozmnożywszy lub podzieliwszy przez iednę ilość, a dwa drugie przez inną ilość; albo dwa pierwsze wyrazy rozmnożywszy przez iednę ilość, a dwa drugie podzieliwszy przez tęż samę lub przez inną ilość, proporcya się nie zepsuie.

W témże równaniu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, rozmnożywszy lub podzieliwszy obiedwie strony przez iakąkolwiek ilość m, otrzymamy dwa następuiące równania:

$$\frac{am}{b} = \frac{cm}{d}; \quad \frac{a}{bm} = \frac{c}{dm}: \text{ A zatem}$$

$$am : b = cm : d; \quad a : bm = c : dm.$$

Dwie te proporcye porównawszy z proporcyą daną $a:b=c:d$, wniosiemy, że w proporcyi jeometryczney rozmnożywszy same tylko poprzedniki, lub same tylko następniki przez iaką ilość, proporcya się nie zepsuie.

Podobnymże sposobem okazać można, że podzieliwszy same tylko poprzedniki lub same tylko następniki przez iaką ilość, albo też podzieliwszy lub rozmnożywszy poprzedniki przez iednę ilość, a następniki przez inną ilość; albo nakoniec rozmnożywszy poprzedniki przez iednę ilość, a następniki podzieliwszy przez tę samę lub przez inną ilość, proporcya się nie zepsuie.

92. W równaniu $ad=bc$ podzieliwszy obiedwie strony 1ód przez bd, 2re przez cd, 3cie przez ab, 4te przez ac; otrzymamy cztery następuiące równania:

1wsze $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; 3cie $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$;

2gie $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; 4te $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$;

w których odmieniwszy mieysce stronom, kładąc stronę pierwszą na mieysce drugiey, a stronę drugą na mieyscu pierwszéy; będą znowu cztery równania:

5te $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$; 7me $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$;

6te $\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$; 8me $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.

Z ośmiu tych równań powstaią następuiące ośm proporcyy:

1wsza $a:b=c:d$; 5ta $c:d=a:b$;
2ga $a:c=b:d$; 6ta $b:d=a:c$;
3cia $d:b=c:a$; 7ma $c:a=d:b$;
4ta $d:c=b:a$: 8ma $b:a=d:c$.

To iest: w każdéy proporcyi jeometryczney można ośm razy odmienić mieysce poprzednikom i następnikom bez nadwerężenia proporcyi.

93.

93. Niech będą dwie proporcye:
$a : b = c : d$, $m : p = q : r$. Będzie zatém
$ad = bc$, $mr = pq$ (89).

Podzieliwszy strony równania pierwszego przez strony odpowiadaiące w równaniu drugiem, wypadnie

$$\frac{ad}{mr} = \frac{bc}{pq}.$$

Rozłożywszy obie strony na czynniki (39), będzie

$$\frac{a}{m} \times \frac{d}{r} = \frac{b}{p} \times \frac{c}{q}.$$ A zatém

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{p} = \frac{c}{q} : \frac{d}{r} \text{ (89).}$$

Proporcyą te porównawszy z dwiema proporcyami danemi, wniesiemy, że we dwóch proporcyach jeometrycznych wszystkie wyrazy iedney podzieliwszy przez odpowiadaiące wyrazy drugiey, cztery ilorazy stąd wypadaiące będą składały proporcyą.

Z tych samych dwóch proporcyy danych wypadaią następuiące równania:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{m}{p} = \frac{q}{r},$$

w których rozmnożywszy strony równania pierwszego przez odpowiadaiące strony w równaniu drugiem, będzie

$$\frac{am}{bp} = \frac{cq}{dr}$$; a zatém $am : bp = cq : dr$.

Proporcyę tę porównawszy z dwiema proporcyami danemi, wniesiemy, że we dwóch proporcyach jeometrycznych wszystkie wyrazy iedney rozmnożywszy przez odpowiadaiące wyrazy drugiey, cztery iloczyny stąd wypadaiące będą składały proporcyą.

A zatém we dwóch proporcyach
$$a : b = c : d, \quad b : m = d : r,$$

roz-

rozmnożywszy wyrazy odpowiadaiące sobie, będzie proporcya

$$ab : bm = cd : dr,$$

w ktorey dwa pierwsze wyrazy podzieliwszy przez b, dwa drugie przed d, wypadnie (91)

$$a : m = c : r.$$

Ostatnią proporcyą porównawszy z dwiema danemi, wniesiemy, że przekreśliwszy w nich wyrazy spólne obudwom, pozostałe wyrazy składać będą proporcyą.

Ta sama własność służy proporcyom następuiącym:

$a : b = c : d$, $a : b = c : d$, $a : b = c : d$,
$m : a = r : c$; $b : m = r : c$; $m : b = r : d$; i t. d.

Jakoż w dwóch np. ostatnich proporcyach iest

$ad = bc$; $md = br$ więc $\frac{ad}{md} = \frac{bc}{br}$; czyli

$\frac{a}{m} = \frac{c}{r}$; więc $a : m = c : r$; i t. d.

94. Z proporcyi $a : b = c : d$, wypada równanie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; w którém po obu stronach raz dodawszy, drugi raz odiąwszy iakąkolwiek ilość m, i tak dwie równe summy, iak dwie równe różnice w iednymże wierszu napisawszy, będzie $\frac{a}{b} \pm m = \frac{c}{d} \pm m$; obróciwszy całkowitą na ułomek, wypadnie

$$\frac{a \pm bm}{b} = \frac{c \pm dm}{d},$$

Obie strony rozmnożywszy 1ód przez b, a potém podzieliwszy przez $c \pm dm$, wypadnie

$$\frac{a \pm bm}{c \pm dm} = \frac{b}{d}$$

Że zaś ważność ilości m zależy od naszéy woli, uczyniwszy więc $m = 1$; ostatnie równanie zamieni się w następuiące:

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d}.$$

Wziąwszy osobno summę, osobno różnicę, będzie

$$1\acute{o}d,\quad \frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d};\ 2re,\ \frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d}.$$

W tych dwóch równaniach drugie strony są sobie równe, a zatém i strony pierwsze muszą być sobie równe. Będzie więc

$3cie$, $\dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{a-b}{c-d}$. Że zaś $\dfrac{b}{d} = \dfrac{a}{c}$ (92), dwa zatém pierwsze równania zamienić można w następuiące:

$$4te,\quad \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c};\ 5te,\ \frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c}.$$

Z tych pięciu równań wypadaią następuiące proporcye:

1. $a+b : c+d = b : d$;
2. $a-b : c-d = b : d$;
3. $a+b : c+d = a-b : c-d$;
4. $a+b : c+d = a : c$;
5. $a-b : c-d = a : c$;

które porównawszy z proporcyą daną $a : b = c : d$, wniesiemy 1*ód*, z proporcyi 1wszey i 4tey, że w każdęy proporcyi jeometryczney summa dwóch pierwszych wyrazów tak się ma do summy dwóch drugich wyrazów, iak następnik do następnika, lub iak poprzednik do poprzednika:

2*re*, z proporcyi drugiey i piątey wypada, że różnica dwóch pierwszych wyrazów do różnicy dwóch drugich wyrazów, iak następnik do następnika, lub iak poprzednik do poprzednika.

3*cie*, z proporcyi trzeciey wypada, że summa dwóch pierwszych wyrazów, do summy dwóch drugich wyrazów, iak różnica dwóch pierwszych, do różnicy dwóch drugich.

W proporcyi $a : b = c : d$, odmieniwszy mieysce wyrazów, będzie (92), $a : c = b : d$; A zatem

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

W tém równaniu raz dodawszy drugi raz odiąwszy po obu stronach ilość iakąkolwiek m, i odbywszy działanie takie iak wyżey, otrzymamy równanie $\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{c}{d}$, z którego wyprowadzimy następuiące proporcye:

1. $a + c : b + d = c : d$;
2. $a - c : b - d = c : d$;
3. $a + c : b + d = a - b : c - d$;
4. $a + c : b + d = a : b$;
5. $a - c : b - d = a : b$.

To iest: w każdey proporcyi ieometryczney iest 1ód summa poprzedników do summy następników, iak którykolwiek poprzednik do swego następnika; 2re różnica poprzedników do różnicy następników, iak którykolwiek poprzednik do swego następnika; 3cie Summa poprzedników do summy następników, iak różnica poprzedników do różnicy następników.

95. Niech będzie $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$.

Trzy te ułomki uważane iako stosunki równe (84) daią następuiące proporcye:

$$A : a = B : b;\ B : b = C : c.$$

Z piérwszéy, podług tego co poprzedziło wypada, $A + B : a + b = B : b$ a tém samém $\frac{A+B}{a+b} = \frac{B}{b}$. Że zaś $\frac{B}{b} = \frac{C}{c}$ podług założenia, więc $\frac{A+B}{a+b} = \frac{C}{c}$; będzie więc proporcya

$$A + B : a + b = C : c;$$

w któréy wziąwszy summę poprzedników i następników, będzie podług wniosków poprzedzaiących

$$A + B + C : a + b + c = C : c.$$

To iest: ieżeli są trzy stosunki równe, summa trzech poprzedników tak się ma do summy trzech następników, iak którykolwiek poprzednik do swego następnika.

Tym

Tym samym sposobem okazać można, że iakkolwiek będzie liczba stosunków równych, zawsze summa wszystkich poprzedników do summy wszystkich następników, iak którykolwiek poprzednik do swego następnika.

Prawdę tę można także okazać sposobem następuiącym. Niech będą *np.* cztery stosunki równe:

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d}.$$

Uczyniwszy $\frac{A}{a} = m$, będzie też $\frac{B}{b} = m$, $\frac{C}{c} = m$, $\frac{D}{d} = m$.

W ostatnich czterech równaniach zniosłszy mianowniki, będzie

$$A = am,\ B = bm,\ C = cm,\ D = dm.$$

W tych równaniach dodawszy strony sobie odpowiadaiące, będzie

$A + B + C + D = am + bm + cm + dm$; czyli $A + B + C + D = m\,(a + b + c + d)$ 59). A zatem

$\frac{A + B + C + D}{a + b + c + d} = m$. Że zaś $\frac{A}{a} = m$; więc

$\frac{A + B + C + D}{a + b + c + d} = \frac{A}{a}$; a tém samém

$A + B + C + D : a + b + c + d = A : a$.

96. W równaniu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ podniosłszy obie strony do kwadratu (28), będzie $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \times \frac{c}{d}$; czyli $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$; a tém samém $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$. To iest: ieżeli cztery iakiekolwiek ilości są w proporcyi, będą też i kwadraty ich w proporcyi.

Podobnymże sposobem okazać można, że ieżeli cztery kwadraty są w proporcyi, będą też w proporcyi cztery ilości, z których przez siebie

roz-

rozmnożonych powstały te kwadraty; że cztery iakiekolwiek ilości proporcyą składaiące podniosłszy do 3ciey, czwartey i t. d. potęgi, proporcya się nie zepsuie; i t. d.

97. Są ieszcze inne własności proporcyi jeometryczney, iako to: ieżeli poprzednik pierwszy równy poprzednikowi drugiemu, będzie też następnik pierwszy równy następnikowi drugiemu; ieżeli dwa pierwsze wyrazy proporcyi są sobie równe, będą też dwa drugie wyrazy sobie równe; ieżeli trzy wyrazy iedney proporcyi równe są trzem odpowiadaiącym wyrazom proporcyi drugiéy, czwarty wyraz pierwszéy, równy będzie czwartemu wyrazowi drugiey; i t. d.

Te i tym podobne własności łatwo okazać można za pomocą dwóch równań, z których pierwsze powstaie z rozmnożenia przez siebie wyrazów skraynych i średnich, drugie z podzielenia wyrazu pierwszego przez drugi, a trzeciego przez czwarty, lub też drugiego przez pierwszy a czwartego przez trzeci.

98. Te same dwa równania służą także do znalezienia wyrazu czwartego proporcyi, gdy są dane trzy pierwsze. Jakoż niech będzie proporcya $a : b = c : x$, w którey wyraz tylko czwarty x iest niewiadomy. Ponieważ $ax = bc$ (90), więc $x = \frac{bc}{a}$. Tymże sposobem znaleźć można wyraz 1wszy, 2gi lub 3ci. gdy są dane trzy inne. Podobnież w proporcyi ciągłéy maiąc wiadome dwa pierwsze wyrazy, znaleźć można wyraz trzeci. Jakoż z proporcyi tey $a : b = b : x$, w którey wyraz tylko x iest niewiadomy, wypada $ax = b^2$; więc $x = \frac{b^2}{a}$. Z równą łatwością znaleźć można w proporcyi ciągłéy wyraz pierwszy, gdy są wiadome dwa ostatnie.

99. Lecz nie zawsze łatwo iest znaleźć w proporcyi jeometryczney ciągłey wyraz średni. gdy dwa

dwa skrayne są wiadome. I tak w proporcyi $a : x = x : b$, ponieważ iloczyn skraynych równy iest kwadratowi wyrazu średniego (90), będzie więc $x^2 = ab$. Tu uważać potrzeba, że iako x iest ilością, z którey przez się rozmnożonéy powstał kwadrat x^2; tak też ważnością dla x powinna być ilość taka, któraby przez siebie rozmnożona, czyli podniesiona do kwadratu równała się iloczynowi ab Jeżeli iloczyn ab znaczy *np.* 16, albo 25, albo 36 i t. d. łatwo będzie domyśleć się, że ważnością dla x iest 4, 5, albo 6, i t. d. Ale ieżeli iloczyn ab znaczy *np* 729, nie tak łatwo pomiarkować można, że liczba ta iest kwadratem powstałym z rozmnożenia 27 przez 27. Ażeby więc w proporcyi jeometryczney ciągłéy zawsze można było znaleźć wyraz średni, gdy dwa skrayne są wiadome, trzeba pierwéy poznać sposób rozwiązania następuiącego zagadnienia: *znaleźć liczbę, któraby sama przez siebie rozmnożona równała się liczbie daney*; czyli, co na iedno wychodzi, maiąc dany kwadrat, znaleźć liczbę, z którey kwadrat ten powstał; i która nazywa się *pierwiastkiem kwadratowym*. Wiadomość o wynaydowaniu, czyli, iak się zwyczaynie mówi, o *wyciąganiu* pierwiastków kwadratowych, do rozwiązania wielu ważnych zagadnień istotnie potrzebną, wyłożymy w następuiącym rozdziele.

ROZDZIAŁ V.

O podnoszeniu liczb do kwadratu i wyciąganiu pierwiastku kwadratowego.

100. Abyśmy dokładnie poznali sposób wyciągania pierwiastku kwadratowego, trzeba naprzód uważyć iakim zmianom podlegaią liczby, gdy ie podnosimy do kwadratu. W podnoszeniu pierwszych dziesięciu liczb do kwadratu nie zachodzi żadna trudność: lecz ponieważ kwadraty liczb tych po-

potrzebne nam będą tak do podnoszenia liczb innych do kwadratu, iako też do wyciągania pierwiastków, położymy tu w dwóch następuiących rzędach i liczby i odpowiadaiące im kwadraty, które potrzeba znać na pamięć:

liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
kwadraty: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Uważać tu potrzeba, że kwadrat liczby, iednocyfrowey nie może się składać z więcey cyfr iakże dwóch: liczba 10 naymnieysza z liczb dwucyfrowych ma w swoim kwadracie 100 trzy cyfry. A stąd wniesiemy, że ieżeli dany kwadrat ma cyfr więcey niż dwie, pierwiastkiem iego nie może być liczba iednocyfrowa, lecz przynaymniey dwucyfrowa.

Chcąc poznać iak się wyciągaią pierwiastki z kwadratów liczb dwucyfrowych, trzebaby naprzód uważyć, iakim sposobem liczby te wchodzą do składu kwadratów. Lecz sposób zwyczayczayny podnoszenia liczb do kwadratu zależący na mnożeniu daney liczby przez siebie samę, w niczém nie ułatwia sposobu wyciągania pierwiastków. Kwadrat *np*, liczby 47 iest $47 \cdot 47 = 2209$. W kwadracie tym nie masz żadnego śladu cyfr składaiących pierwiastek: cyfry bowiem te przez mnożenie 47 przez 47 zamieniaią się na inne, i nie podobna dostrzedz w iakim sposobie wchodzą do składu kwadratu 2209 Ale głoski abecadła tey niedogodności nie podlegaią: obaczmy więc naprzód na głoskach, w iakim sposobie ilości składaiące pierwiastek wchodzą do składu kwadratu.

101, Kwadrat z ilości dwuwyrazowey czyli *dwumienney* $a+b$, iakośmy iuż powiedzieli (56) iest

$$(a+b)\ (a+b) = a^2 + 2ab + b^2.$$

Przypatrzywszy się temu kwadratowi z uwagą i porównawszy go z iego pierwiastkiem, postrzeżemy, *że kwadrat dwoch ilości* $a+b$ *składa się z trzech części*: 1od *z kwadratu* a^2 *ilości pierwszey*; 2re *z podwoynego iloczynu* $2ab$ *ilości pierwszey i drugiey*; 3cie *z kwadratu* b^2 *ilości drugiey*. Liczba

[li]czba 47 składa się ze 4 dziesiątków i 7 iedności; i może być tak wyrażoną: 40 + 7. Uczyniwszy $a = 40$ czyli 4 dziesiątkom, $b = 7$ iednościom, będzie

47. $47 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$.

To iest kwadrat 47 składać się będzie 1*ód* z kwadratu a^2 czterech dziesiątków czyli 40 iedności; 2*re* z podwoynego iloczynu $2ab$ czterech dziesiątków i siedmiu iedności; 3*cie* z kwadratu b^2 siedmiu iedności

Kwadrat czterech dziesiątków czyli 40 iest = 1600
Podwoyny iloczyn 4 dziesiątków i 7 ied: = 560
Kwadrat 7 iedności - - - - - - - - - - = 49
Summa $a^2 + 2ab + b^2$ - - - - - - - = 2209.

102. Chcąc liczby tey 2209 znaleźć pierwiastek 47, uważmy naprzód, że iako w kwadracie czterech dziesiątków czyli w 1600 ostatnie dwa znaki liczebne iako zera nie maią żadney ważności; tak w całym kwadracie 2209 ostatnie dwie cyfry nie wchodzą do kwadratu dziesiątków: a zatem kwadrat dziesiątków zamykać się tylko będzie we 22 stach czyli we 2200.

2*re*. Przypatrzywszy się kwadratom piérwszych liczb dziesięciu, postrzeżemy, że naybliższy kwadrat 22 set czyli 2200, iest 16 set czyli 1600: iakoż liczba 22 większa iest od 16 czyli od kwadratu ze 4, a mnieysza od 25 czyli od kwadratu z 5, tak iak liczba 47 większa iest od 4 dziesiątków czyli od 40, a mnieysza od 5 dziesiątków czyli od 50. Szukaiąc więc naywiększego kwadratu zawartego w liczbie 22 dziesiątków, znaydziemy 16, którego pierwiastek 4 wyrażać będzie dziesiątki szukanego pierwiastku. Odiąwszy 16 set czyli 1600 od 2209, reszta 609 zamykać ieszcze będzie podwoyny iloczyn dziesiątków i iedności, to iest 560, i kwadrat iedności, który iest 49.

3*cie*. A iako w podwoynym iloczynie 4 dziesiątków i 7 iedności, to iest w liczbie 560 ostatnia cyfra iako zero nie ma żadney ważności liczebney; tak w pozostałey reszcie 609 ostatnia cyfra 9 nie wchodzi do podwoynego iloczyn dziesiątków i iedności: więc podwoyny ten iloczyn zamykać się tylko będzie w 60 dziesiątkach czyli w 600 iednościach, które prócz tego zamykaią ięszcze dziesiątki będące w kwadracie z 7 iedności.

4te. Podzieliwszy iloczyn przez ieden z czynników, wypadnie na iloraz czynnik drugi. Podzieliwszy zatém 60 dziesiątków czyli 600 przez podwoyne dziesiątki, to iest przez 8, iloraz 7 okaże iedności szukanego pierwiastku.

5te. Rozmnożywszy 8 dziesiątków przez 7 iedności, iloczyn 56 dziesiątków czyli 560 będzie podwoynym iloczynem 4 dziesiątków przez 7 iedności. Odiąwszy ten iloczyn od piérwszéy reszty 609, druga reszta 49 będzie i iest w istocie kwadratem 7 iedności.

Działanie to odbywa się podług następuiącego wzoru:

22,09'	47
16	87
60,9	
60,9	
000	

Pisze się liczba dana, iak gdyby ią potrzeba było dzielić przez inną, przeznaczaiąc dla szukanego pierwiastku mieysce należące się dzielnikowi. Potem iedności i dziesiątki oddzielaią się przecinkiem od dwóch piérwszych cyfr po lewéy stronie będących, które zamykaią w sobie kwadrat dziesiątków. Daléy bierze się kwadrat naywiększy, który w tych dwóch cyfrach mieścić się może: kwadratem tym iest 16, którego pierwiastek 4 napisawszy na przeznaczonem dla niego mieyscu, odeymuie się 16 od 22. Przy pozostałéy reszcie 6 piszą się dwie inne cyfry 09 daney liczby; a ostatnia 9 iako nie wchodząca do podwoynego iloczynu dziesiątków i iedności oddziela się przecinkiem od innych, które podzieliwszy przez podwoyne dziesiątki pierwiastku, to

iest

iest przez 8, iloraz 7 iedności pisze się na swoiem mieyscu: a dla utworzenia od razu dwóch innych części kwadratu, to iest podwoynego iloczynu dziesiątków i iedności, i kwadratu iedności, które to dwie części zamykać się powinny w pozostałey reszcie 609, pisze się 7 obok 8; skąd powstaie liczba 87 równa summie podwoynych dziesiątków i poiedynczych iedności szukanego pierwiastku, to iest równa $2a+b$, którą rozmnożywszy przez 7 czyli przez b, wypadnie $609 = 2ab + b^2$, czyli podwoyny iloczyn dziesiątków i iedności, więcey kwadrat iedności. Po odięciu, nic się nie zostaie; co dowodzi, że pierwiastkiem liczby 2209 iest 47.

Weźmy ieszcze liczbę 324, z którey potrzeba wyciągnąć pierwiastek kwadratowy. Urządzam działanie, iak następuie:

$$\begin{array}{r|l} 3,24 & 18 \\ 1 & \\ \hline 22,4 & 28 \\ 22,4 & \\ \hline 000 & \end{array}$$

i podług tego, co się powiedziało wyżey, znayduię 1 na dziesiątki pierwiastku; dziesiątki te podwoione daią mi liczbę 2, przez którą podzielić trzeba dwie pierwsze cyfry 22 pozostałey reszty Liczba 2 we 22 mieści się w prawdzie 11 razy; lecz nie można wziąć za pierwiastek ani liczby większey niż 10, ani samey liczby 10; a nawet liczba 9 wzięta za pierwiastek iedności byłaby w ninieyszym przypadku za wielka: napisawszy bowiem 9 obok 2, i rozmnożywszy 29 przez 9, iak wymaga prawidło, wypadnie iloczyn 261, którego nie można odiąć od 224. Biorę więc na iloraz liczbę mnieyszą od 9, to iest liczbę 8, i napisawszy ią tak w pierwiastku na mieyscu iedności, iak obok dzielnika 2, mnożę 28 przez 8, i mam iloczyn 224 równy pozostałey reszcie; co dowodzi, że pierwiastkiem szukanym iest liczba 18.

Utworzywszy trzy części kwadratu z liczby 18, wypadnie

$$a^2 = 100$$
$$2ab = 160$$
$$b^2 = 64$$
$$\text{Summa} = 324 = 18 \times 18.$$

Tu iuż łatwo postrzedz można, że 6 dziesiątków, które zamyka kwadrat iedności, dodane do 160 podwoynego iloczynu dziesiątków i iedności, powiększaią ten iloczyn: podzieliwszy zatém przez podwóyne dziesiątki iloczyn tak powiększony, nie mogą na iloraz wypaść same iedności.

103. Nim przystąpimy do wyciągania pierwiastków złożonych z trzech, czterech i t. d. cyfr, uczynimy piérwey tę istotną uwagę: że każda liczba mnieysza od 100 nie może mieć w swoim kwadracie cyfr więcéy nad cztery: gdyż kwadrat ze 100 iest 10000, a liczba ta iest naymnieysza ze wszystkich liczb z pięciu cyfr złożonych.

104. Po téy uwadze, abyśmy doszli iakim sposobem tworzy sią kwadrat z liczby większéy od 100, z liczby *np.* 473 rozłożmy liczbę tę na 470+3, czyli na 47 dziesiątków więcey 3 iednosci. Chcąc wyprowadzić kwadrat liczby téy z formuły $a^2 + 2ab + b^2$, uczyńmy $a = 47$ dziesiątkom $= 470$ iednościom, $b = 3$ iednościom. Będzie więc

$$a^2 = 220900,$$
$$2ab = 2820,$$
$$b^2 = 9,$$
$$\text{Summa} = 223729 = 473 \times 473.$$

Widzimy w tym przykładzie, że w kwadracie dziesiątków ostatnie dwie cyfry nie mają żadney ważności, iako zera: to samo w ogólności ma mieysce w każdym innym przykładzie: dziesiątki bowiem rozmnożone przez dziesiątki daią na iloczyn sta.

W kwadracie zatém 223729 oddzieliwszy przecinkiem dziesiątki i iedności, w pozostałey części 2237 szukać potrzeba kwadratu dziesiątków. A iako

iako liczba 473 większa iest od 47 dziesiątków czyli od 470, a mnieysza od 48 dziesiątków czyli od 480; tak też liczba 2237 powinna być większa od kwadratu ze 47, a mnieysza od kwadratu ze 48: skąd się okazuie, że naywiększy kwadrat, który mieścić się może w 2237 iest kwadrat ze 47, czyli kwadrat z dziesiątków pierwiastku. Rzeczą iest przez się widoczną, że dla znalezienia tych dziesiątków trzeba odbyć to samo działanie, iakieby odbyć należało z liczbą 2237 chcąc z niey wyciągnąć pierwiastek kwadratowy; lecz na końcu oprócz wypadku szukanego pozostałaby ieszcze reszta zamykaiąca sta utworzone z podwoynego iloczynu 47 dziesiątków rozmnożonych przez iedności.

Abyśmy działanie to odbyli porządnie, rozłożmy, iak następuie:

```
  22, 37, 29 | 473
  16         |-----
 ------------| 87
  63, 7      | 943
  60, 9      |
--------------
   282,9
   282,9
--------------
        0
```

Naprzód oddzielaią się dwie ostatnie cyfry 29, a dla wyciągnienia pierwiastku z liczby 2237, która pozostaie ze strony lewéy, oddzielaią się w niey znowu dwie ostatnie cyfry 37; tym sposobem liczba dana rozłożona iest na oddziały, z których każdy ma po dwie cyfry idąc od strony prawéy ku lewéy. Z dwoma piérwszemi oddziałami 22, 37, odbywa się działanie zupełnie takie, iakieśmy odbyli wyżéy (102) z liczbą 2209: skąd powstaią dwie pierwsze cyfry pierwiastku, to iest 47, i pozostaie reszta 28, do którey przyłączywszy dwie cyfry ostatniego oddziału, to iest 29, liczba 2829 zamyka podwoyny iloczyn 47 dziesiątków rozmnożonych przez iedności, i kwadrat iedności. Od-

dzie-

dzieliwszy cyfrę 9 iako nie mogącą wchodzić do podwoynego iloczynu dziesiątków i iedności, liczbę 282 dzielimy przez podwoyne dziesiątki, to iest przez 94: a iloraz 3 napisawszy tak obok 47, iako też obok 94, i rozmnożywszy 943 przez 3, wypada na iloczyn liczba 2829 zupełnie równa ostatniéy reszcie, poczém działanie iest ukończone.

Weźmy ieszcze liczbę 2239182,4. Jakikolwiek iest pierwiastek téy liczby, zawsze go można uważać, iakoby był rozłożony na iedności i dziesiątki, iak w przykładach poprzedzaiących. Aże w kwadracie dziesiątków ostatnie dwie cyfry nie maią żadnéy ważności liczebney iako zera, więc w liczbie danéy dwie ostatnie cyfry 24 nie mogą wchodzić do kwadratu dziesiątków: odciąwszy ie więc przecinkiem, szukaymy naywiększego kwadratu mogącego się mieścić w części 223918, która z lewey ręki pozostała. Część ta pozostała ma cyfr więcéy niż dwie: co dowodzi: że liczba wyrażaiąca dziesiątki szukanego pierwiastku ma cyfr więcéy niż iednę (100); i można ią więc znowu rozłożyć na dziesiątki i iedności: że zaś kwadrat tych dziesiątków nie wchodzi do ostatnich dwóch cyfr w części 2239,18, odciąwszy więc dwie te cyfry, szukać go należy w pozostałych cyfrach 2239, Aże liczba 2239 ma ieszcze więcéy niż dwie cyfry, więc kwadrat naywiększy mogący się w niey mieścić musi mieć przynaymniey dwie cyfry w swoim pierwiastku: liczba zatem wyrażaiąca szukane dziesiątki mieć będzie więcéy niż iednę cyfrę. Skąd się okazuie, że we 22 trzeba szukać kwadratu liczby téy, która wyraża iedności rzędu naywyższego w szukanym pierwiastku. Z tego ciągu rozumowań, który można posunąć tak daleko, iak się podoba, okazuie się, że liczbę daną trzeba rozłożyć na oddziały po dwie cyfry maiące zaczynaiąc od ręki prawéy do lewéy. Ostatni iednak oddział z lewey ręki może mieć często iednę tylko cyfrę, iakośmy iuż widzieli wyżéy (102) na liczbie 324.

Roz-

Rozłożywszy zatem daną liczbę na oddziały, i urządziwszy podług przyłączonego tu wzoru, z pierwszemi trzema oddziałami postępuie się iak w przykładzie poprzedzaiącym; a znalazłszy trzy pierwsze cyfry pierwiastku, które są 473, obok reszty 189 pisze się czwarty oddział 24; i liczba 18924 uważa się iaką złożona z podwoynego iloczynu znalezionych 473 dziesiątków przez szukane iedności, i z kwadratu tychże iedności: odciąwszy potem ostatnią cyfrę 4, pozostałe z lewey ręki 1892 dzielą się przez znalezione dziesiątki dwa razy wzięte, to iest przez 946; poczem znaleziony iloraz 2 sprawdza się iak w działaniach powyższych.

```
22,39,18,24 | 4732
16          |------
----------- | 87
  63,9      | 943
  60,9      | 9462
----------- |
   3018     |
   2829
   --------
    1892, 4
    1892  4
    -------
        0
```

Na tem się kończy działanie w tym przykładzie: lecz łatwo iest domyśleć się, że gdyby dana liczba miała ieszcze iednym oddziałem więcey, znalezione cztery cyfry 4732 wyrażałyby dziesiątki pierwiastku, którego iedności należałoby szukać, i że tem samem przez te dziesiątki dwa razy wzięte trzebaby dzielić pozostałą resztę z przyłączoną do niey iedną cyfrą oddziału następnego: toż mówić o innych oddziałach, które następnie piszą się obok reszt pozostałych.

105. Z tego, cośmy dotąd powiedzieli, łatwo iest uczynić wniosek, że na ile oddziałów rozłożyć można dany kwadrat, z tylu cyfr składać się będzie szukany pierwiastek. Pierwszy oddział z prawey ręki daie w pierwiastku iedności rzędu pierwszego; drugi iedności rzędu drugiego czyli dziesiątki, trzeci iedności rzędu trzeciego, czyli sta, i tak daley aż do oddziału ostatniego z lewey ręki, który daie w pierwiastku iedności rzędu naywyższego. Stąd iuż łatwo domyśleć się można, że gdyby po spuszczeniu oddziału, reszta z przyłączoną cyfrą tego oddziału mnieysza była nad

dwa

dwa razy wzięte cyfry w pierwiastku znalezione, na ten czas w pierwiastku pisze się zero: w tym albowiem przypadku pierwiastek mieć nie będzie iedności tego rzędu. Gdyby po spuszczeniu oddziału następnego, cyfry znalezione w pierwiastku dwa razy wzięte nie mieściły się ieszcze w liczbie do dzielenia przeznaczonéy, na ten czas położywszy w pierwiastku drugie zero spuściłby się oddział następny, iak to widzieć można w następuiących przykładach:

49, 42, 09	703
49	1403
4,20,9	
4209	
0	

4, 02, 80, 49	2007
4	4007
28,049	
28 049	
0	

106. Lecz nie wszystkie dane liczby są zupełnemi kwadratami; Przypatruiąc się kwadratom dziesięciu liczb początkowych, (100), widać między niemi znaczne przerwy, które można zapełnić liczbami nie maiącemi pierwiastków: tak *np.* między liczbą 64, która iest kwadratem z 8, i liczbą 81, która iest kwadratem z 9, nie dostaie 16 liczb pośrednich, iakie są 65, 66 i t. d. które nie są kwadratami. Nayczęściéy więc zdarzyć się może, iż dana liczba nie będzie kwadratem zupełnym; lecz wyciągnąwszy z niéy pierwiastek sposobem zwyczaynym, otrzymamy wypadek, który będzie pierwiastkiem kwadratu naywiększego, iaki w téy liczbie znaydować się może. Szukaiąc *np.* pierwiastku liczby 2276, znaydziemy wypadek 47 z pozostałą resztą 67; co okazuie, że naywiększy kwadrat zawarty w liczbie 2276 iest kwadrat z liczby 47, to iest 2209.

107. Dla zapewnienia się czy pozostała w takowym przypadku reszta nie iest za wielka, a tém samém czy znaleziony pierwiastek nie iest za mały, można go powiększyć iednością i potém podnieść do kwadratu: a ieżeli kwadrat ten iest

wię-

większy od liczby daney, będzie to dowodem, że znaleziony pierwiastek nie iest za mały. I tak w przykładzie poprzedzaiącym znaleziony pierwiastek 47 powiększywszy iednością, będzie 48, z czego kwadrat 2304 iest większy od liczby daney; a zatem znaleziony pierwiastek 47 nie iest za mały. Można też o tem zapewnić się sposobem następuiącym:

Znaleziony pierwiastek oznaczywszy przez a, iego kwadrat będzie a^2, kwadrat zaś z ilości $a+1$ iest a^2+2a+1; różnica między temi dwoma kwadratami iest $2a+1$; to iest, kwadrat drugi większy iest od pierwszego pierwiastkiem dwa razy wziętym i powiększonym iednością. A zatem ieżeli znaleziony pierwiastek powinien być powiększony iednością lub więcéy niż iednością, kwadrat tego pierwiastku odiąwszy od liczby daney, powinna się zostać reszta przynaymniéy równa temu pierwiastkowi dwa razy wziętemu i powiększonemu iednością. Ilę razy okoliczność ta nie ma mieysca, znaleziony pierwiastek będzie niezawodnie pierwiastkiem kwadratu naywiększego, który się zamyka w daney liczbie. I tak w przykładzie powyższym podwoyny iloczyn znalezionego pierwiastku 47 powiększony iednością wynosi 95, co iest większe od pozostałéy reszty 67; a zatem znaleziony pierwiastek nie iest za mały.

108. Często wydarza się potrzeba ostrzeżenia, że z daney liczby ma być wyciągniony pierwiastek kwadratowy. W tym razie używa się znak taki: $\sqrt{\ }$; np. $\sqrt{ab}$, $\sqrt{\frac{m}{r}}$ i t. d. znaczy, że z liczb oznaczonych przez ab, $\frac{m}{r}$ i t. d. trzeba wyciągnąć pierwiastek kwadratowy.

Ponieważ odtąd często używać będziemy znaku pierwiastkowego ostrzedz tu wypada, że dla oznaczenia pierwiastku liczby z wielu cyfr złożoney czyli z ilości wielorakiey trzeba, albo przed tą ilością dać znak pierwiastkowy, i prawe iego ramie przedłużyć nad całą ilością; albo też wziąć ilość daną w nawias, a z lewey strony przed nawiasem dać znak pierwiastkowy. I tak dwa te wyrażenia $\sqrt{4a^2b - 2b^3 + c^3}$, i $\sqrt{}(4a^2b - 2b^3 + c^3)$ znaczą to samo, to iest wskazuią, że trzeba wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z całey ilości $4a^2b - 2b^3 + c^3$, czyli z liczby przez tę ilość oznaczoney.

Podobnież ze czterech tych wyrażeń

$$\sqrt{\frac{200}{100}},\ \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{100}},\ \frac{\sqrt{200}}{100},\ \frac{200}{\sqrt{100}},$$

pierwsze znaczy, że trzeba wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z ułomka $\frac{200}{100}$, drugie, że trzeba podzielić pierwiastek licznika przez pierwiastek mianownika, trzecie, że pierwiastek licznika powinien być podzielony przez mianownik, czwarte, że licznik powinien być podzielony przez pierwiastek mianownika.

109. Ponieważ iloczyn ułomka przez ułomek równa się iloczynowi ich liczników podzielonemu przez iloczyn ich mianowników; a zatem iloczyn ułomka przez siebie samego, czyli kwadrat ułomka równy iest kwadratowi iego licznika podzielonemu przez kwadrat mianownika. Skąd wypada, że chcąc otrzymać pierwiastek kwadratowy z ułomka, trzeba go osobno wyciągnąć z licznika osobno z mianownika. I tak $\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}$ i t. d.

Uwaga ta ułatwia podnoszenie ułomków dziesiętnych do kwadratu i wyciąganie z nich pierwiastku kwadratowego. I tak

$(0,5)^2 = (\frac{5}{10})^2 = \frac{25}{100} = 0,25.$
$(0,07)^2 = (\frac{7}{100})^2 = \frac{49}{10000} = 0,0049.$
$(0,011)^2 = (\frac{11}{1000})^2 = \frac{121}{1000000} = 0,000121.$

$(3,0005)^2$

$(3,0005)^2 = \left(\frac{30005}{10000}\right)^2 = \frac{900300025}{100000000} = 9,00300025$ i t. d.

Podobnież $\sqrt{0,64} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{100}} = \frac{8}{10} = 0,8$.

$\sqrt{0,0016} = \sqrt{\frac{16}{10000}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{10000}} = \frac{4}{100} = 0,04$ i t. d.

110. Zastanowiwszy się nad kwadratami i pierwiastkami ułomków dziesiętnych, postrzeżemy, że kwadrat ułomków tych ma zawsze cyfr dwa razy więcey, niż ich znayduie się w pierwiastku. Jakoż z prawideł mnożenia wypada, że iloczyn dwóch ułomków dziesiętnych przez siebie rozmnożonych powinien się składać z tylu cyfr dziesiętnych, ile się ich znayduie w obudwu czynnikach: a zatem iloczyn ułomka dziesiętnego przez siebie samego, czyli kwadrat ułomka dziesiętnego powinien mieć cyfr dwa razy więcey, niż pierwiastek; i odwrotnie pierwiastek kwadratowy ułomka dziesiętnego powinien mieć cyfr dwa razy mniey, niż ich znayduie się w kwadracie. Że zaś w ułomkach dziesiętnych domyślny mianownik ma zawsze iedność z przydanemi zerami, a liczba takowa przez siebie samę rozmnożona daie zawsze na iloczyn iedność z podwóyna liczbą zer; kiedy więc ułomka dziesiętnego domyślny mianownik iest 10, 100, 1000 i t. d. w kwadracie ułomka tego domyślnym mianownikiem będzie w przypadku 1wszym 100, w 2gim 10000, w 3cim 1000000 i t. d; i odwrotnie ieżeli domyślny mianownik w kwadracie ułomka dziesiętnego iest 100, 10000, 1000000 i t. d. w pierwiastku będzie domyślny mianownik 10, 100, 1000 i t. d. to iest iedność i dwa razy mniey zer niż ich było w kwadracie.

I tak ponieważ $7^2 = 49$: więc $(0,7)^2 = 0,49$; $(0,07)^2 = 0,0049$; $(0,007)^2 = 0,000049$. Podobnież ponieważ $\sqrt{144} = 12$; więc $\sqrt{1,41} = 1,2$; $\sqrt{0,0144} = 0,12$; $\sqrt{0,000144} = 0,012$, i t. d.

111. Zrozumiawszy należycie to cośmy dotąd o pierwiastkach kwadratowych wyłożyli, nie trudno będzie poiąć sposób, za pomocą którego z liczby nie będącey prawdziwym kwadratem wyciąga się pierwiastek przybliżony, to iest tak bliski prawdziwego, iak się podoba. Daymy, że trzeba wynaleść pierwiastek przybliżony liczby 2: ponieważ

$$2=\tfrac{200}{100}=\tfrac{20000}{10000}=\tfrac{2000000}{1000000} \text{ i t. d. więc}$$

$$\sqrt{2}=\sqrt{\tfrac{200}{100}}=\sqrt{\tfrac{20000}{10000}}=\sqrt{\tfrac{2000000}{1000000}} \text{ i t. d. czyli}$$

$$\sqrt{2}=\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{100}}=\frac{\sqrt{20000}}{\sqrt{10000}}=\frac{\sqrt{2000000}}{\sqrt{1000000}} \text{ i t.d. czyli}$$

$$\sqrt{2}=\frac{\sqrt{200}}{10}=\frac{\sqrt{20000}}{100}=\frac{\sqrt{2000000}}{1000} \text{ i t. d.}$$

Wyciągnąwszy sposobem zwyczaynym pierwiastek naywiększego kwadratu zawartego w każdym liczniku ułomków poprzedzaiących, znaydziemy, że

$$\frac{\sqrt{200}}{10}=\tfrac{14}{10}=1,4;\ \frac{\sqrt{20000}}{100}=\tfrac{141}{100}=1,41;\frac{\sqrt{2000000}}{1000}$$
$$=\tfrac{1414}{1000}=1,414.$$

Przybliżony zatém pierwiastek liczby 2 iest 1ód 1, 4; 2re 1, 41; 3cie 1, 414 i t. d. Trzy te znalezione pierwiastki podniosłszy do kwadratu, będzie 1ód $(1,4)^2=1,96$; 2re $(1,41)^2=1,9881$; 3cie $(1,414)^2=1,999396$. Z trzech tych kwadratów ostatni naybliższy iest kwadratu danego, to iest liczby 2: bo mu tylko nie dostaie 0,000604 do tego, aby wyrównał liczbie 2; gdy tym czasem kwadrat drugi czyli 1,9881 mnieyszy iest od liczby 2 ilością 0,0119 = 0,011900; kwadrat zaś pierwszy czyli 1,96, mnieyszy iest od liczby 2, ilością 0,04 = 0,040000. W ogólności znaleziony pierwiastek tem bliższy będzie prawdziwego, im większa w nim będzie liczba cyfr dziesiętnych. U-

$2 = \frac{200000000000000}{100000000000000}$, i wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy tak z licznika iak z mianownika znaydziemy $\sqrt{2} = \frac{14142135}{10000000} = 1{,}4142135$. Pierwiastek ten podniesiony do kwadr. czyni 1,99999962148225 kwadratowi temu nie dostaie tylko 0,00000037851775 do tego, aby wyrównał liczbie 2 biorąc zaś tylko siedm cyfr dziesiętnych, różnica między liczbą 2 a kwadratem znalezionego pierwiastku będzie 0,0000003; to iest kwadrat znalezionego pierwiastku mnieyszy iest od liczby 2 trzema tylko iednościami dziesiętnemi siodmego rzędu. Posunąwszy to samo działanie daley, otrzymalibyśmy pierwiastek ieszcze bliższy: lecz nigdy nie doydziemy do pierwiastku takiego, któryby podniesiony do kwadratu uczynił zupełnie 2.

Ten sam iest sposób postępowania w szukaniu przybliżonego pierwiastku wszystkich innych liczb nie będących kwadratami zupełnemi. Chcąc *np.* znaleźć pierwiastek przybliżony liczby 227 trzeba liczbę tę obrócić na ułomek dziesiętny, któregoby mianownik był kwadratem zupełnym, iakie są 100, 10000, 1000000 i t. d. a potem z licznika wyciągnąć pierwiastek przybliżony, a z mianownika pierwiastek prawdziwy. I tak liczbę daną 227 obróciwszy na ułomek $\frac{227\,00\,0000}{1\,000000}$, w ułomku tym przybliżony pierwiastek licznika iest 15066, a prawdziwy pierwiastek mianownika iest 1000: będzie zatem przybliżony pierwiastek liczby 226 równy $\frac{15066}{1000} = 15{,}066$.

W działaniach zwyczaynych mianowniki się opuszczaią, lecz tylko do daney liczby przydaie się parzysta liczba zer, i wyciągnąwszy z niey sposobem zwyczaynym pierwiastek przybliżony, w pierwiastku tym z prawéy strony odcinamy cyfr dwa razy mniey, niż przydaliśmy zer do liczby daney.

112. Gdyby trzeba było wyciągnąć przybliżony pierwiastek kwadratowy z ułomka dziesiętnego, na ten czas do licznika przydaie się tyle zer, ile potrzeba, ażeby liczba wszystkich cyfr dziesiętnych była parzysta. Chcąc *np.* wyciągnąć przybliżony pierwiastek kwadratowy z ułomka 0,2, przydalibyśmy do tego ułomka zero iedno, lub trzy, lub 5, lub 7, i t. d. a tym sposobem mianownikiem znalezionego pierwiastku w przypadku 1wszym byłaby liczba 10, w 2gim 100, w 3cim 1000, w 4tym 10000, i t. d.

113. Chcąc otrzymać perwiastek kwadratowy z ułomka zwyczaynego, którego licznik i mianownik nie iest kwadratem prawdziwym, trzeba wyciągnąć przez przybliżenie pierwiastek osobno z licznika, osobno z mianownika. Lecz działanie to można przez połowę skrócić, zamieniwszy ułomek dany na inny, któregoby mianownik był kwadratem prawdziwym, co nastąpi, mnożąc obadwa wyrazy danego ułomka przez mianownik; a potém bierze się pierwiastek prawdziwy mianownika, przybliżony zaś pierwiastek licznika szuka się sposobem zwyczaynym *np.*

$$\sqrt{\tfrac{3}{7}} = \sqrt{\tfrac{21}{49}} = \frac{4,582}{7} = 0,654 \text{ i t. d.}$$

114. Częstokroć kwadrat większy od daney liczby iest bardziey do niey przybliżony, aniżeli kwadrat od niey mnieyszy. I tak kwadrat z 6, to iest 36 bliższy, iest liczby 35 aniżeli kwadrat z 5, czyli 25. Liczba zatem 6 iest pierwiastkiem bardziey przybliżonym do prawdziwego pierwiastku liczby 35, aniżeli liczba 5 która iest pierwiastkiem naywiększego kwadratu zawartego w daney liczbie 35. W wyciąganiu zatem pierwiastków kwadratowych przez przybliżenie trzeba i na tę okoliczność mieć uwagę, który pierwiastek iest bliższy prawdziwego, czy od niego mnieyszy czyli też większy. Tak *np.* znaleziony wyżéy pierwiastek liczby 2, to iest 1,4142135, lubo iest tak do prawdzi-

wdziwego przybliżony, że kwadrat tego pierwiastku mnieyszy iest od liczby 2 trzema tylko iednościami dziesiętnemi siodmego rzędu; pierwiastek iednakże 1,4142136, większy od prawdziwego, iest ieszcze bliższy; gdyż podniosłszy go do kwadratu, postrzeżemy, że kwadrat ten większy iest od liczby daney 2, iedną tylko iednością dziesiętną siodmego rzędu.

115. Zwyczaynie pierwiastki przybliżone wyciągaią się za pomocą ułomków dziesiętnych iako wygodnieyszych niż są ułomki zwyczayne. Lecz można także otrzymać pierwiastek przybliżony za pomocą ułomków zwyczaynych, wyrażaiąc daną liczbę w postaci ułomka zwyczaynego, któregoby mianownik był kwadratem prawdziwym. Tak np. liczbę 2 wyraziwszy przez ułomek $\frac{288}{144}$, którego prawdziwym pierwiastkiem mianownika iest 12, a przybliżonym pierwiastkiem licznika iest 17, będzie pierwiastkiem przybliżonym liczby 2 ułomek zwyczayny $\frac{17}{12}$: iakoż ułomek ten podniesiony do kwadratu, iest $\frac{289}{144}$, który przewyższa liczbę 2 tylko $\frac{1}{144}$ i t d.

Można też wyciągnąć pierwiastek przybliżony za pomocą ułomków zwyczaynych następuiącym sposobem:

Daymy, że trzeba znaleźć przybliżony pierwiastek liczby 20. Ponieważ kwadrat ze 4 iest 16, kwadrat 5 iest 25; więc pierwiastek liczby 20 powinien być większy od 4, mnieyszy od 5; to iest pierwiastkiem liczby 20 będzie liczba 4 i ułomek. Oznaczywszy ułomek ten przez p, prawdziwy zaś pierwiastek liczby 20 przez x, a tem samem 20 przez x^2; będzie

$$x = 4 + p \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad (1).$$

Podniosłszy obie strony do kwadratu, wypadnie $x^2 = 16 + 8p + p^2$. Aże $x^2 = 20$ więc $16 + 8p + p^2 = 20$, a tem samem $8p + p^2 = 4$.

Że zaś p iest ułomkiem właściwym, to iest ilością mnieyszą od iedności, a ułomek takowy podniesiony do kwadratu staie się ilością mnieyszą

szą nie równie od pierwiastku; w działaniu więc w którém rzecz idzie o wynalezienie tylko pierwiastku przybliżonego, można ułomek ten iako ilość bardzo małą opuścić; a tém samem równanie powyższe zamieni się w następuiące: $8p = 4$; więc $p = \frac{1}{2}$. Ważność tę położywszy w równaniu (1), będzie $x = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$; a tém samém $\sqrt{20} = \frac{9}{2}$.

Pierwiastek ten iest znacznie bliższy prawdziwego niżeli 4: iakoż $(\frac{9}{2})^2 = \frac{81}{4} = 20 + \frac{1}{4}$, gdy tym czasem $4^2 = 16$.

Niech będzie ieszcze $x = \frac{9}{2} + p$ . . (2).

Podniosłszy obie strony do kwadratu, będzie $x^2 = \frac{81}{4} + 9p + p^2$. Aże $x^2 = 20 = \frac{80}{4}$, więc $\frac{81}{4} + 9p + p^2 = \frac{80}{4}$.

Opuściwszy p^2 iako ilość bardzo małą, odiąwszy po obu stronach $\frac{81}{4}$, i podzieliwszy obie strony przez 9, wypadnie $p = -\frac{1}{36}$. Położywszy ważność tę w równaniu (2), będzie $x = \frac{9}{2} - \frac{1}{36} = \frac{161}{36}$; czyli $\sqrt{20} = \frac{161}{36}$.

Pierwiastek ten iest nierównie bliższy prawdziwego niż był poprzedzaiacy; o czem łatwo przekonać się podniosłszy go do kwadratu, i porównawszy kwadrat ten z kwadratem danym, to iest z liczbą 20.

Gdybyśmy chcieli otrzymać pierwiastek ieszcze bliższy prawdziwego; uczynićby należało znowu $x = \frac{161}{36} + p$ . . . . . . (3).

A zatém $x^2 = \frac{25921}{1296} + \frac{322}{36}p + p^2 = 20$. Odbywszy działanie iak wyżey, znaydziemy

$p =$

$p = -\frac{1}{11592}$. Ważność tę położywszy w równaniu (3), wypadnie

x czyli $\sqrt{20} = \frac{161}{36} - \frac{1}{11592} = \frac{51841}{11592} = 4 + \frac{5474}{11592}$.

Pierwiastek ten tak iest bliski prawdziwego, że go można wziąć za szukany: iakoż podniosłszy go do kwadratu, znaydziemy różnicę między kwadratem tym, a kwadratem danym równą $\frac{1}{134374464}$; a wypadłby pierwiastek ieszcze bliższy, gdybyśmy działanie to daléy posunęli; nigdybyśmy iednak nie doszli do pierwiastku takiego, któryby podniesiony do kwadratu uczynił zupełnie 20.

116. Skad się okazuie, że pierwiastek liczby 20, równie iak wszelkiéy innéy nie będącéy kwadratem, iest ilością taką, która ani zapomocą ułomków dziesiętnych żupełnie w liczbach wyrażoną być nie może Prawda ta, o któréy teraz z samego tylko doświadczenia na liczbach poiedynczych przekonać się możemy, na innem mieyscu będzie oczywiście w ogólności okazana.

Wyciaganie zatém pierwiastków kwadratowych z liczb nie będacych prawdziwemi kwadratami daie początek liczbom nowego rodzaiu, tak iak dzielenie daie początek ułomkom, lecz ta iest istotna różnica między ułomkami i przybliżonemi pierwiastkami, że ułomki składaiace się zawsze z pewnéy liczby cząstek iedności, maia z tą iednościa *miarę spólną*, i stosunek ich do iedności może być zawsze wyrażony w liczbach całkowitych; czego pierwiastki przybliżone nie maią. Wystawiwszy iedność podzieloną *np.* na 5 cząstek, 9 takowych cząstek wyrażaią iloraz wypadaiący z podzielenia 9 przez 5, czyli $\frac{9}{5}$: $\frac{1}{5}$ mieszczaca się 5 razy w iedności, a 9 razy w $\frac{9}{5}$, iest spolną mia-

I rą

rą iedności i ułomka $\frac{9}{5}$; a stosunek iedności do $\frac{9}{5}$ równa się stosunkowi liczb całkowitych 5 do 9.

Ponieważ liczby całkowite i ułomki maią z iednością *miarę spolną*, nazwano ie ilościami *spolmiernemi*, *commensurabiles*, aże stosunek ich do iedności może być zawsze wyrażony w liczbach całkowitych, nazwano także liczby całkowite i ułomki ilościami *stosunkowemi*, *rationales*. Przeciwnie pierwiastki liczb nie będących prawdziwemi kwadratami zowią się ilości *niespolmierne*, albo *niestosunkowe*, *incommensurabiles*. *irrationales*: gdyż ponieważ wyrazić ich nie można żadnym ułomkiem, idzie zatem, że na iakakolwiek liczbę cząstek podzielimy iedność, cząstki te nigdy nie będą tak małe, aby służyły razem za spólną miarę i iedności i tym pierwiastkom.

117. Wyciąganie pierwiastków kwadratowych do rozwiązywania wielu ważnych zagadnień iest istotnie potrzebne: należy więc starać się o nabycie iak naywiększey w takowem działaniu wprawy: tym końcem trzeba wyciągać pierwiastki tak prawdziwe iak przybliżone różnych liczb będących i nie będących kwadratami, iak są *np.* liczby 3, 5, 6, 7, 8, 10 i t. d.; do czego także posłużą niektóre z następuiących zagadnień.

Niektóre zagadnienia stosowne do dwóch ostatnich rozdziałów.

Zagadnienie I. *Znaleźć pierwiastek przybliżony do 7 cyfr dziesiętnych kwadratu dwa razy większego niż iest kwadrat z liczby* 37,9.

Kwadrat z liczby 37,9 iest $37,9 \times 37,9$; kwadrat ten dwa razy wzięty iest: $2 \times 37,9 \times 37,9$; którego pierwiastek przybliżony równy iest 53,5986940.

Zagadnienie II. *Znaleźć wyraz średni geometrycznie proporcyonalny w proporcyi ciągłey, którey dwa wyrazy skrayne są* 576 *i* 225.

Oznaczywszy wyraz szukany przez x, i uczyniwszy zadosyć warunkom zagadnienia, będzie $\div 576 : x = x : 225$; więc $x^2 = 576 . 225$ i t. d.

Zagadnienie III. *Znaleźć trzy liczby, z których*

rych pierwsza rozmnożona przez drugą a podzielona przez trzecią czyni a; *pierwsza rozmnożona przez trzecią a podzielona przez drugą czyni* b; *druga rozmnożona przez trzecią a podzielona przez pierwszą czyni* c.

Oznaczywszy pierwszą liczbę szukaną przez x, drugą przez y, trzecią przez z, i uczyniwszy zadosyć warunkom zagadnienia, otrzymamy trzy następuiące równania:

$$1\text{wsze } \frac{xy}{z} = a;\ 2\text{gie } \frac{xz}{y} = b,\ 3\text{cie } \frac{yz}{x} = c.$$

Trzy te równania można rozwiązać którymkolwiek sposobem z podanych wyżéy. Lecz możnaby także użyć sposobu następuiącego: strony równania pierwszego podzieliwszy przez strony odpowiadaiące w równaniu drugiem, będzie

$$\frac{\frac{xy}{z}}{\frac{xz}{y}} = \frac{a}{b};\ \text{czyli } \frac{xy}{z} : \frac{xz}{y} = a : b\ (84).$$

W proporcyi téy dwa pierwsze wyrazy rozmnożywszy przez yz, a potém podzieliwszy przez x, będzie $y^2 : z^2 = a : b$.

Dwa drugie wyrazy rozmnożywszy przez a, wypadnie $y^2 : z^2 = a^2 : ab$; więc $y : z = a : \sqrt{ab}$. (95).

Że zaś $\frac{xy}{z} = a$, podług założenia, a tém samem $xy = az$; czynniki tych dwóch iloczynów równych ułożywszy w proporcyą (90), będzie $y : z = a : x$. Proporcyą tę porównawszy z poprzedzaiącą, postrzeżemy, że pierwsze trzy wyrazy w iednéy, równe są trzem odpowiadaiącym wyrazom w drugiéy: a zatém wyraz czwarty iednéy równy iest wyrazowi czwartemu drugiéy (97). Będzie więc $x = \sqrt{ab}$.

Z trzech równań danych wziąwszy naprzód

równanie pierwsze i trzecie, potém drugie i trzecie, i ułożywszy ie w proporcye, będzie

$$\frac{xy}{z} : \frac{yz}{x} = a : c;\quad \frac{xz}{y} : \frac{yz}{x} = b : c.$$

Z proporcyami temi odbywszy działanie podobne do poprzedzaiącego, znaydziemy $y = \sqrt{ac}$, $z = \sqrt{bc}$.

Niech będzie $a=3$, $b=12$, $c=27$. Znaydziemy $x=6$, $y=9$, $z=18$ i t. d.

Zagadnienie IV. *Znaleźć liczbę do którey naprzód dodawszy* 13, *potém* 17, *dwie summy stąd powstaiące miałyby się do siebie iak* 4 *do* 5.

Oznaczywszy liczbę szukaną przez x, i uczyniwszy zadosyć warunkom zagadnienia, będzie $x+13 : x+17 = 4 : 5$ i t. d.

Zagadnienie V. *W mieszaninie używaney do faierwerków, znayduie się* 15 *funtow saletry, a* 2 *funty siarki: ileż funtów przydać należy saletry chcąc otrzymać innego gatunku mieszaninę, w któreyby na* 17 *funtach mieszaniny znaydowało się tylko* $\frac{1}{2}$ *funta siarki?*

Oznaczywszy przez x ilość saletry, którą przydać potrzeba do mieszaniny pierwszéy, mieszaniny drugiéy będzie funtów $17+x$. Podług warunków zagadnienia w całéy téy mieszaninie iest 2 funty siarki, a w 17 funtach mieszaniny iest $\frac{1}{2}$ funta siarki. A zatém cała druga mieszanina tak się ma do saméy siarki w niéy znayduiącey się, iak 17 funtów mieszaniny do ilości siarki znayduiącéy się w tych 17 funtach, to iest $\frac{1}{2}$ funta; czyli

$$17+x : 2 = 17 : \tfrac{1}{2} : \text{więc } x = 51.$$

Albo tak: Podług warunków zagadnienia w całéy téy mieszaninie iest 2 funty saméy siarki, a $x+15$ funtów saméy saletry; w 17 zaś funtach teyże mieszaniny iest $\frac{1}{2}$ funta siarki, $16\frac{1}{2}$ funtów saletry: będzie więc sama saletra w drugiéy mieszaninie znayduiąca się czyli $x+15$. do saméy siarki czyli do 2, iak sama saletra znayduiąca się w 17 funtach mieszaniny czyli iak $16\frac{1}{2}$, do saméy

siarki

siarki w tychże 17 funtach znayduiącey się czyli do $\frac{1}{2}$; to iest $x + 15 : 2 : 16\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$, i t. d.

Zagadnienie VI. *Na składzie w trzech sąsiekach znayduie się pomieszane troiakiego gatunku zboże, pszenica, żyto i ięczmień. Na* 100 *korcach, w pierwszym sąsieku iest pszenicy korcy* 80, *żyta korcy* 12, *ięczmienia korcy* 8; *w drugim sąsieku pszenicy korcy* 75, *żyta korcy* 15 *ięczmienia korcy* 10; *w trzecim sąsieku pszenicy korcy* 60, *żyta korcy* 20, *ięczmienia korcy* 20. *Ileż korcy zboża trzeba wziąć z każdego sąsieka, aby otrzymać* 100 *korcy zboża, w któremby znaydowało się* 73 *korcy pszenicy,* 15 *korcy żyta a* 12 *korcy ięczmienia?*

Oznaczywszy liczbę korcy, które wziąć potrzeba z pierwszego sąsieka przez x, z drugiego przez y, z trzeciego przez z; ponieważ na 100 korcach zboża w pierwszym sąsieku znayduiącego się iest 80 korcy pszenicy, więc ilość pszenicy znayduiącey się w liczbie korcy x tegoż zboża otrzymamy przez następuiącą proporcyą:

$$100 : 80 = x : \frac{80x}{100} = \frac{4}{5}x.$$

Podobnież, ponieważ na 100 korcach zboża znayduiącego się w pierwszym sąsieku iest żyta korcy 12, więc ilość żyta znayduiącego się w liczbie korcy x tegoż zboża otrzymamy przez następuiącą proporcyą:

$$100 : 12 = x : \frac{12x}{100} = \frac{3}{25}x;$$

Nakoniec ponieważ w 100 korcach zboża będącego w pierwszym sąsieku iest 8 korcy ięczmienia, więc ilość ięczmienia znayduiącego się w liczbie korcy x tegoż zboża otrzymamy przez następuiącą proporcyą:

$$100 : 8 = x : \frac{8x}{100} = \frac{2}{25}x.$$

Tym sposobem postępuiąc daléy znaydziemy, że w liczbie korcy y zboża wziętego z drugiego są-

sąsieka znayduie się pszenicy korcy $\frac{3}{4}y$, żyta korcy $\frac{3}{20}y$, ięczmienia korcy $\frac{1}{10}y$. W liczbie zaś korcy z zboża wziętego z trzeciego sąsieka iest pszenicy korcy $\frac{3}{5}z$, żyta korcy $\frac{1}{5}z$, ięczmienia korcy $\frac{1}{5}z$.

Aże w 100 korcach mieszaniny czwartego gatunku, ma być pszenicy korcy 73, żyta korcy 15, ięczmienia korcy 12; będzie więc
$\frac{4}{5}x + \frac{3}{4}y + \frac{3}{5}z = 73$; $\frac{3}{25}x + \frac{3}{20}y + \frac{1}{5}z = 15$, $\frac{2}{25}x + \frac{1}{10}y + \frac{1}{5}z = 12$.

Rozwiązawszy równania te sposobem, którymkolwiek z podanych wyżéy, znaydziemy $x = 50$, $y = 20$, $z = 30$.

Zagadnienie VII. *Bankier ma dwa gatunki monety: ie ney trzeba sztuk* 10 *na ieden cz. zł. drugiey sztuk* 20 *Żądaiącemu zmieniać złoto dał za* 3 *cz. zł. sztuk* 51 *obu gatunków monety. Ileż dał sztuk z każdego gatunku?*

Oznaczywszy liczbę sztuk pierwszego gatunku przez x, drugiego będzie $51 - x$: Przez następuiącą proporcyą doydziemy ile ważą czerwonych złotych dwie te liczby.

$$10 : 1 = x : \frac{x}{10} \ (91);\quad 20 : 1 = 51 - x : \frac{51 - x}{20}.$$

$$\text{A zatém } \frac{x}{10} + \frac{51 - x}{20} = 3. \text{ i t d.}$$

ROZDZIAŁ VI.

O równaniach stopnia drugiego.

113. Rozwiązywanie niektórych zagadnień w poprzedzaiącym rozdziale przytoczonych doprowadziło do równań, w których niewiadoma była albo podniesiona do kwadratu, albo przez drugą niewiadomą rozmnożona. Równania takowe nazywaią się równaniami *stopnia drugiego*. Wiadomości w poprzedzaiącym rozdziale wyłożone, ułatwią

twią sposób rozwiązywania wszelkich tego gatunku równań. Jakoż przeniosłszy kwadrat ilości niewiadoméy na iednę, a ilości wiadome na drugą stronę równania, dla znalezienia niewiadoméy dosyć będzie wyciągnąć pierwiastek z drugiey strony, i tak w równaniu następuiącem:

$$\tfrac{3}{4}x^2 - 7 = 44 - \tfrac{2}{3}x^2,$$

zniosłszy naprzód mianowniki, a potém przeniosłszy niewiadome na iednę a wiadome na drugą stronę, będzie

$$17x^2 = 612. \quad \text{Więc } x^2 = \frac{612}{17}; \text{ czyli } x^2 = 36.$$

W ostatniém równaniu wyciągnąwszy z obu stron pierwiastek kwadratowy, znaydziemy $x=6$.

Podobnież w równaniu głoskowem $ax^2 + b^3 = cx^2 + d^3$, przeniosłszy niewiadome na iednę a wiadome na drugą stronę, będzie

$$ax^2 - cx^2 = d^3 - b^3. \quad \text{Więc}$$

$$x^2 = \frac{d^3 - b^3}{a - c}; \; x = \sqrt{\left(\frac{d^3 - b^3}{a - c}\right)}.$$

W ogólności wszelkie równanie stopnia drugiego, ieżeli iest takiego gatunku, iak dwa poprzedzaiące, może być wyrażone w następuiącym kształcie:

$$\frac{px^2}{q} = a.$$

Ułomek $\frac{p}{q}$ oznacza iakikolwiek spółczynnik ilości x^2. Z równania tego wypada

$$x^2 = \frac{aq}{p}, \; x = \sqrt{\left(\frac{aq}{p}\right)}.$$

119. Ponieważ podług prawideł mnożenia, iloczyn iest zawsze dodayny, czy to obadwa czynniki z których powstał są dodayne czyli też obadwa odiemne, wypada stąd 10d, że kwadrat, który iest iloczynem teyże samey ilości przez siebie rozmnożoney, musi być zawsze dodayny czyli ilość ta ma przed sobą znak +, czyli znak —;

zre że każde równanie stopnia 2go może mieć podwóyne rozwiązanie; iedno w którem szukany pierwiastek ilości niewiadomey ma przed sobą znak $+$ drugie w którem tenże pierwiastek ma przed sobą znak $-$. I tak w równaniu liczebném $x^2 = 36$, ponieważ ważnością x iest ilość, która podniesiona do kwadratu czyni 36; ilość ta może być algiebraicznie uważana iako dodayna lub iako odiemna: bo czyto ią oznaczymy przez $+6$, czyli też przez -6, zawsze będzie iey kwadrat $+6 \times +6 = +36$, i $-6 \times -6 = +36$.

Można więc wziąć $x = +6$, albo $x = -6$.

Podobnież w równaniu ogólném $x^2 = \sqrt{\left(\frac{aq}{p}\right)}$, można wziąć $x = +\sqrt{\left(\frac{aq}{p}\right)}$ albo $x = -\sqrt{\left(\frac{aq}{p}\right)}$. Dwoiakie to wyrażenie oznacza się sposobem następuiącym:

$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{aq}{p}\right)}.$$

W wyrażeniu tém znak podwóyny $\pm$ oznacza, że ważność liczebna ilości $\sqrt{\left(\frac{aq}{p}\right)}$ może być wzięta albo dodaynie, albo odiemnie.

Ztąd wypada ogólne prawidło, że *przed pierwiastkiem kwadratowym trzeba dawać podwóyny znak* $\pm$.

Tu mógłby kto uczynić zapytanie, czemu się nie daie podwóyny znak $\pm$ przed x, które iest także pierwiastkiem kwadratu x^2, tak iak ± 6 iest pierwiastkiem kwadratu 36, i czemu nie pisze się tak: $\pm x = \pm 6$? Lecz to ostatnie wyrażenie kształtem tylko różni się od wyrażenia $x = \pm 6$; w istocie zaś obadwa znaczą to samo. Jakoż wyrażenie to $x = \pm 6$, daie dwa oddzielne równania, które są: $x = +6$, $x = -6$. Wyrażenie zaś to $\pm x = \pm 6$, daie cztéry następuiące równania:

1wsze, $+x = +6$; 2gie, $+x = -6$;

3cie,

3cie, $-x=-6$; 4te, $-x=+6$;
z których dwa pierwsze niczem się od poprzedzaiących nie różnią, w dwóch zaś ostatnich zamieniwszy znaki $+$ na $-$, i znaki $-$ na $+$, równanie 3cie zamieni się na 1wsze, równanie zaś 4te na 2gie.

120 Ponieważ kwadrat nie może być ilością odiemną, iakośmy iuż uważali (119), wypada stąd, że gdyby druga strona w równaniu ogólnem $x^2=\frac{a}{p}$ była ilością odiemną, równanie takowe byłoby niepodobném do rozwiązania. I tak weźmy *np* równanie $x^2+25=9$, z którego wypada $x^2=-16$: rzeczą iest widoczną, że nie masz żadnéy liczby, którąby przez siebie samę rozmnożona uczyniła -16. Iloczyn wprawdzie liczby $+4$ rozmnożonéy przez -4, iest -16; lecz dwie te liczby maiące przed sobą odmienne znaki, nie są równe: iakoż różnica między niemi zachodząca iest 8 (24). Iloczyn zatém ich nie iest kwadratem. Ponieważ więc ilości odiemne nie maią pierwiastku kwadratowego, dla téy przyczyny pierwiastki takowe nazwano ilościami *bezistotnemi*, *albo uroionemi*, *quantitates imaginariae*. Trafić się one mogą dosyć często przy rozwiązywaniu równań drugiego stopnia, iak obaczymy niżey.

121. Nie wszystkie równania stopnia drugiego są tak proste, iak te któreśmy dotąd mieli, w których iedna strona iest kwadratem niewiadoméy, a strona druga ma same ilości wiadome. Nayczęściéy równania stopnia tego są *mieszane*, to iest zamykaią w sobie trzy gatunki wyrazów: 1*o* wyrazy w których się znayduie kwadrat niewiadoméy; 2*re* wyrazy w których się znayduie pierwszy stopień niewiadoméy; 3cie wyrazy wiadome: takie są równania następuiące:

$$x^2-4x=12;\quad 4x-\tfrac{1}{5}x^2=4-2x.$$

Piérwsze z tych dwóch równań iest nieco prościeysze od drugiego: gdyż ma tylko trzy wyrazy

zy,

zy, a kwadrat niewiadoméy x iest w niém dodayny i niema żadnego spółczynnika wyraźnego. Taki kształt każdemu równaniu tego gatunku nadać potrzeba pierwéy, nim się przystąpi do rozwiązywania. Wszelkie równanie *mieszane*, czyli iak ie częściéy zowią *zupełne* stopnia drugiego, sprowadzone do tego kształtu można będzie wyrazić w następuiącey formule:

$$x^2 + px = q;$$

w któréy p i q są ilości wiadome dodayne lub odiemne.

Chcąc dane równanie stopnia drugiego sprowadzić do tego stanu, trzeba 1*szé* przenieść na iednę stronę równania wszystkie wyrazy do których wchodzi ilość niewiadoma x; 2*re* ieżeli kwadrat niewiadoméy x iest odiemny, uczynić go dodaynym zamieniaiąc w równaniu wszystkie znaki + na — i — na + (53); 3*cie* podzielić wszystkie wyrazy przez mnożnik ilości x^2 (54), lub wszystkie wyrazy rozmnożyć przez iéy dzielnik, ieżeli ilość ta iest rozmnożona, lub podzielona przez ilości wiadome. Zastósowawszy to do równania

$$4x - \frac{3}{5}x^2 = 4 - 2x,$$

będzie 1*szé* przeniosłszy wyrazy niewiadome na iednę stronę

$$-\frac{3}{5}x^2 + 6x = 4;$$

2*re* zamieniwszy znaki w całém równaniu,

$$\frac{3}{5}x^2 - 6x = -4;$$

3*cie* rozmnożywszy wszystkie wyrazy przez dzielnik 5,

$$3x^2 - 30x = -20;$$

4*te* podzieliwszy wszystkie wyrazy przez mnożnik 3,

$$x^2 - 10x = -\frac{20}{3}.$$

Równanie to porównawszy z formułą ogólną $x^2 + px = q$ znaydziemy w tym szczególnym przypadku

$$p = -10, \; q = -\frac{20}{3}.$$

122. Chcąc równanie do tego kształtu sprowadzone rozwiązać. trzeba sobie przypomnieć to cośmy wyżéy (101) powiedzieli, że kwadrat ilości złożonéy z dwóch wyrazów zamyka zawsze kwadrat wyrazu piérwszego, podwóyny iloczyn wyrazu piérwszego przez drugi, i kwadrat wyrazu drugiego, i że tém samém piérwsza strona równania

$$x^2+2ax+a^2=b,$$

w którem a i b są ilości wiadome, iest zupełnym kwadratem, którego pierwiastek iest $x+a$ Wziąwszy więc pierwiastek kwadratowy piérwszey strony, a oznaczywszy go ze strony drugiéy, wypadnie $x+a=\pm\sqrt{b}$; więc $x=-a\pm\sqrt{b}$

Równanie więc drugiego stopnia byłoby łatwe do rozwiązania, gdyby piérwsza iego strona była zupełnym kwadratem, iak iest w równaniu $x^2+2ax+a^2=b$. Lecz w równaniu ogólnem

$$x^2+px=q,$$

piérwsza strona zamyka iuż dwa wyrazy, które uważać można za dwie piérwsze części kwadratu ilości z dwóch wyrazów złożony; to iest: x^2 za kwadrat piérwszego wyrazu x, i px za podwóyny iloczyn wyrazu piérwszego i drugiego. Podwóyny ten iloczyn wyrazu piérwszego i drugiego podzieliwszy przez wyraz piérwszy dwa razy wzięty, to iest przez $2x$, będzie $\frac{px}{2x}$ czyli $\frac{1}{2}p$ (40) wyraz drugi szukanego pierwiastku. Aże $x+\frac{1}{2}p$ podniesione do kwadratu czyni $x^2+px+\frac{1}{4}p^2$; do pierwszéy zatém strony równania ogólnego $x^2+px=q$ dodawszy $\frac{1}{4}p^2$, strona ta będzie zupełnym kwadratem, którego pierwiastkiem iest $x+\frac{1}{2}p$. Lecz dodaiąc $\frac{1}{4}p^2$ do strony piérwszéy dla dopełnienia kwadratu, trzeba także tę samę ilość dodać do strony drugiéy dla utrzymania między stronami równości. Tym sposobem równanie ogólne $x^2+px=q$, zamieni się w następuiące:

$$x^2+px+\frac{1}{4}p^2=q+\frac{1}{4}p^2.$$

Wy-

Wyciągnąwszy pierwiastek z obu stron, będzie

$x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$; więc $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$; to iest:

$x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$; $x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}$.

Weźmy ieszcze równanie $x^2 - px = q$.

Uważaiąc dwa wyrazy pierwszéy strony tego równania za dwie pierwsze części kwadratu ilości złożoney z dwóch wyrazów, to iest: x^2 za kwadrat wyrazu pierwszego x, i $-px$ za podwóyny iloczyn wyrazu pierwszego i drugiego; podwóyny ten iloczyn podzieliwszy przez wyraz pierwszy dwa razy wzięty, to iest przez $+2x$, będzie $\frac{-px}{+2x}$, czyli $-\frac{1}{2}p$ (46) wyraz drugi szukanego pierwiastku. Aże $x - \frac{1}{2}p$ podniesione do kwadratu czyni

$$x^2 - px + \frac{1}{4}p^2,$$

do pierwszéy zatém strony równania danego $x^2 - px = q$, dodawszy $\frac{1}{4}p^2$, strona ta będzie zupełnym kwadratem, którego pierwiastkiem iest $x - \frac{1}{2}p$. Lecz dodaiąc $\frac{1}{4}p^2$ do strony pierwszéy dla dopełnienia kwadratu, trzeba także tę samę ilość dodać do strony drugiéy dla utrzymania między stronami równości. Tym sposobem równanie dane $x^2 - px = q$, zamieni się w następuiące:

$$x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2.$$

Wyciągnąwszy pierwiastek z obu stron, będzie $x - \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$. A zatém $x = \frac{1}{2}p \pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$.

Działanie to niczém się nie różni od wyciągania pierwiastku sposobem zwyczaynym podług prawideł wyżéy wskazanych (102). Jakoż niech będzie równanie $x^2 + 6x = 40$.

Rzeczą iest widoczną, że chcąc równanie to roz-

rozwiązać, czyli chcac znaleźć ważność dla x, trzeba z obu stron wyciągnąć pierwiastek kwadratowy: gdyż inaczey strona pierwsza tego równania zamykaiąca w sobie ilość kwadratową x^2 nie może się zamienić na x. Będzie zatem $\sqrt{x^2+6x} = \sqrt{40}$.

Wyciągaiąc z pierwszéy strony pierwiastek kwadratowy sposobem zwyczaynym, znaydziemy pierwszą część szukanego pierwiastku x, i pozostałą resztę $+6x$. Którą podzieliwszy przez pierwszą część pierwiastku dwa razy wziętą, to iest przez $+2x$, iloraz $+3$ będzie drugą częścią szukanego pierwiastku: Przez tę część drugą pierwiastku to iest przez $+3$ rozmnożywszy $2x+3$, iak wymaga działanie zwyczayne, iloraz $+6x+9$, nie może być od pozostałéy reszty, to iest od $+6x$ odciagnięty, iako od niey 9 iednościami większy; skąd wnosimy, że piérwsza strona danego równania powiększona 9 iednościami będzie zupełnym kwadratem pierwiastku $x+3$. Dodawszy zatem 9 do pierwszey strony dla dopełnienia kwadratu, a do drugiey dla utrzymania między stronami równości, równanie dane zamieni się w następuiące:

$$x^2+6x+9=49.$$

Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy z obu stron będzie

$$x+3=\pm 7 \text{ i t. d.}$$

Gdyby było równanie $x^2-6x=40$ działanie w témby się tylko od poprzedzaiącego różniło, że po znalezieniu pierwszey części pierwiastku, która iest x, pozostałą resztę $-6x$ podzieliwszy przez tę część piérwszą dwa razy wziętą, to iest przez $+2x$; iloraz -3 będzie drugą częścią szukanego pierwiastku: reszta iak wyżéy.

Skąd się okazuie, że *chcąc rozwiązać równanie stopnia drugiego, trzeba naprzód dopełnić kwadratu strony pierwszey następuiącym sposobem: wziąć połowę wiadomego mnożnika pierwszey potęgi*

tęgi ilości niewiadomey, podnieść ią do kwadratu, i kwadrat ten dodać do obu stron daiąc przed drugą stroną znak podwóyny $\pm$. *Pierwiastek strony pierwszey zawsze się składa z ilości niewiadomey* x, *i z połowy ilości wiadomey mnożącey w drugim wyrazie ilość niewiadomą* x, *wziętey z takim znakiem, iaki iest przed drugim wyrazem danego równania.*

123. Możnaby także ten sam wypadek otrzymać zamieniaiąc równanie drugiego stopnia mieszane, na równanie proste, następuiącym sposobem: niech będzie równanie $x^2 + px = q$.

Uczyńmy $x = y - \frac{1}{2}p$; będzie więc $px = py - \frac{1}{2}p^2$, $x^2 = y^2 - py + \frac{1}{4}p^2$.

Ważności te położywszy w równaniu piérwszém zamiast x^2 i px, równanie to zamieni się w następuiące:

$$y^2 - py + \tfrac{1}{4}p^2 + py - \tfrac{1}{2}p^2 = q \text{; czyli}$$

$$y^2 - \tfrac{1}{4}p^2 = q\text{, więc } y^2 = \tfrac{1}{4}p^2 + q\text{; } y = \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 + q}.$$

Aże $x = y - \frac{1}{2}p$, a tém samém $y = x + \frac{1}{2}p$; powyższe więc równanie zamieni się w następuiące:

$$x + \tfrac{1}{2}p = \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 + q}\text{, a zatém } x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 + q}.$$

Gdyby było równanie $x^2 - px = q$, zamienilibyśmy ie na równanie proste tym samym sposobem, z tą tylko odmianą, że trzeba uczynić $x = y + \frac{1}{2}p$.

Przykłady. *Znaleźć liczbę, którey kwadrat powiększony tą samą liczbą wziętą razy 7 czyni 44.*

124. Oznaczywszy liczbę szukaną przez x, będzie podług warunków zagadnienia równanie

$x^2 + 7x = 44$,

w którem połowę liczby 7 mnożącey niewiadomą x w drugim wyrazie podniosłszy do kwadratu, i kwadrat ten, który iest $\frac{49}{4}$, dodawszy po obu

stro-

stronach, równanie to zamieni się w następuiące:

$$x^2+7x+\frac{49}{4}=44+\frac{49}{4}=\frac{225}{4}.$$

Pierwiastek strony pierwszéy, podług prawidła powyższego (123), iest $x+\frac{7}{2}$; pierwiastek zaś strony drugiey znaleziony sposobem zwyczaynym iest $\frac{15}{2}$, będzie więc

$x+\frac{7}{2}=\pm\frac{15}{2}$; a zatém $x=-\frac{7}{2}\pm\frac{15}{2}$; to iest:

$x=-\frac{7}{2}+\frac{15}{2}=4$, $x=-\frac{7}{2}-\frac{15}{2}=-11$.

Piérwsza ważność x, to iest 4 rozwiązuie zagadnienie w znaczeniu iego wysłowienia; gdyż $x^2=16$; $7x=28$; $x^2+7x=16+28=44$.

Co się tycze ważności drugiéy, ta ponieważ iest odiemna, wyraz $7x=7\times-11=-77$, trzeba od x^2 odiąć; a w tym przypadku wysłowienie zagadnienia powinno być następuiące:

Znaleźć liczbę, któréy kwadrat zmnieyszywszy tą samą liczbą wziętą razy 7; zostanie reszta 44.

Stosownie do tego wysłowienia wypadnie następuiące równanie:

$$x^2-7x=44.$$

z którém odbywszy działanie takie, iak wyżéy, będzie

$$x^2-7x+\frac{49}{4}=44+\frac{49}{4}=\frac{225}{4};$$

$x-\frac{7}{2}=\pm\frac{15}{2}$; więc $x=\frac{7}{2}\pm=\frac{15}{2}$; to iest

$x=\frac{7}{2}+\frac{15}{2}=11$, $x=\frac{7}{2}-\frac{15}{2}=-4$,

Tu ważność odiemna x zamieniła się na dodayną, dodayna zaś na odiemna: gdyż piérwsza czyni zupełnie zadosyć warunkom drugiego wysłowienia, druga zaś z niemi się nie zgadza.

125.

125. Częstokroć obiedwie znalezione ważności czynią zupełnie zadosyć warunkom wysłowienia. Takie iest zagadnienie następuiące:

Znaleźć liczbę, do którey kwadratu dodawszy 15, summa ta równa będzie tey samey liczbie wziętey razy 8.

Oznaczywszy przez x liczbę szukaną będzie równanie

$$x^2+15=8x,$$

w którém ułożywszy wyrazy podług formuły ogólnéy $x^2+px=q$, będzie $x^2-8x=-15$. Dopełniwszy kwadratu, wypadnie

$x^2-8x+16=16-15=1$; więc $x-4=\pm 1$; a tém samém

$x=4\pm 1$; to iest: $x=4+1=5$; $x=4-1=3$.

A zatem dwie są liczby 5 i 3, które czynią zadosyć warunkom wysłowienia.

126 Czasem obiedwie znalezione ważności są odiemne, co dowodzi, że dane zagadnienie ani przez iednę ani przez drugą ważność nie może być sprawdzone w właściwem znaczeniu swoiego wysłowienia. Takie iest równanie następuiące:

$$x^2+5x+6=2,$$

które oznacza, że trzeba *znaleźć liczbę, którey kwadrat, powiększony naprzód tą samą liczbą wziętą razy 5, a potém liczbą 6, powinien uczynić summę równą liczbie 2.* Samo wysłowienie okazuie, że zagadnienie to nie może być sprawdzone przez dodawanie: rzecz bowiem iest nie podobna, aby liczba 6, która iest większa od 2, dodana do iakiéy liczby czyniła 2. Jakoż z równania tego wypada,

$$x^2+5x=-4,\ x^2+5x+\frac{25}{4}=\tfrac{9}{4},\ x+\tfrac{5}{2}=\pm\tfrac{3}{2};$$

$x=-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}$, to iest: $x=-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=-1$, $x=-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=-4$.

Znalezione ważności obie odiemne oznaczaią, że wyraz $5x$ powinien być od innych odięty, i że tém samém wysłowienie należy sprostować w następuiący sposób;

Zna-

Znaleźć liczbę, którey kwadrat zmnieyszony tą samą liczbą wziętą razy 5 i powiększony liczbą 6 czyni 2.

Podług tego wysłowienia wypadnie równanie $x^2 - 5x + 6 = 2$, z którego otrzymamy dla x dwie ważności dodayne 1 i 4.

127. Weźmy ieszcze zagadnienie następuiące: *Podzielić liczbę* p *na dwie części, którychby iloczyn równał się ilości* q.

Oznaczywszy iednę z szukanych części przez x, druga będzie $p - x$, a ich iloczyn $(p - x)x = px - x^2$. Będzie więc równanie

$px - x^2 = q$, czyli $x^2 - px = -q$ (53).

Równanie to rozwiązawszy sposobem zwyczaynym, znaydziemy

$x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$.

Niech będzie $p = 10$, $q = 21$. Będzie więc

$x = 5 \pm \sqrt{25 - 21} =$

$5 = \sqrt{4} = 5 \pm 2$, czyli $x = 5 + 2 = 7$; albo $x = 5 - 2 = 3$.

To iest: pierwsza z części szukanych iest 7, a druga tem samem będzie $10 - 7 = 3$. Wziąwszy zaś za część pierwszą szukaną 3, druga będzie $10 - 3 = 7$. Widzimy tu, że zagadnienie to stosownie do wysłowienia ma tylko właściwie mówiąc iedno rozwiązanie: gdyż w rozwiązaniu drugiem są te same dwie części tylko w odmiennym porządku.

Uczyńmy znowu $p = 10$, $q = 30$. Znaydziemy

$x = 5 \pm \sqrt{25 - 30} = 5 \pm \sqrt{-5}$. To iest:

$x = 5 + \sqrt{-5}$, albo $x = 5 - \sqrt{-5}$.

Znaleźliśmy tu dwie ważności dla x, do których wchodzi ilość bezistotna (120),

Abyśmy doszli skąd ta ilość bezistostna wzięła początek; przypatrzmy się z uwagą równaniu

$$x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q};$$

a postrzeżemy, że nie można na pamięć naznaczać ważności liczebnych dla p i q: bo ieżeli ważność q większa będzie od $\frac{1}{4}p^2$, to iest od kwadratu $\frac{1}{2}p$, ilość $\frac{1}{4}p^2 - q$ będzie odiemna, a tem samem wyraz $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ będzie bezistotny, iak iest w przykładzie ostatnim, gdzie ważność q czyli 30 większa iest od $\frac{1}{4}p^2$, to iest od 25.

Jakoż żadna liczba nie może być na takie dwie części podzielona, którychby iloczyn większy był od kwadratu z połowy teyże liczby. Na okazanie tego oznaczmy przez r różnicę między dwiema szukanemi częściami, których summę oznacza liczba p. Ponieważ z dwóch ilości nierównych większa równa się połowie ich summy więcey połową różnicy, a mnieysza równa się połowie summy mniéy połową różnicy (8), będzie więc $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r$ część większa, $\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}r$ część mnieysza, a iloczyn ich $(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r)(\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}r) = \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}r^2$: skąd się okazuie, że iloczyn dwóch iakichkolwiek części liczby daney zawsze iest mnieyszy od $\frac{1}{4}p^2$, czyli od kwadratu z połowy ich summy, póki tylko r będzie miało iaką ważność; a kiedy $r = 0$, na ten czas każda z tych części $= \frac{1}{2}p$, iloczyn zaś ich iest $\frac{1}{4}p^2$. Rzecz więc iest nie podobna, chcieć aby iloczyn dwóch części iakiéy liczby większy był od kwadratu z połowy ich summy; iak iest w przykładzie powyższym, gdzie chcieliśmy znaleźć dwie części liczby 10, których iloczyn 30 większy iest od kwadratu z połowy ich summy, to iest: od 25. W tym więc razie wypadek bezistotny ostrzega, że to czegośmy w zagadnieniu szukali, nie ma mieysca.

128 Wszystkie zagadnienia drugiego stopnia, któreśmy dotąd rozwiązali, łatwe były do ułożenia w równanie algiebraiczne. Następuiące będą pod tym względem nieco trudnieysze. Lecz prawidło podane wyżéy (58) na zagadnienia stopnia piérwszego i tu także przyniesie znaczne ułatwienie.

Za-

Zagad. I. 175 *cz. zł podzielić miano zarówno na pewną liczbę osob, ktorych 2 ubyło, przez co dział każdey z pozostałych powiększył się* 10 *cz. zł. Ileż było osób, i ile się każdey dostało?*

Znalazłszy liczbę szukaną osób, chcąc potém dowiedzieć się czy ta liczba iest prawdziwa, doszedłbym tego sposobem następuiącym. Naprzód 175 cz zł. podzieliłbym przez początkową liczbę osób, a iloraz okazałby ile każda z nich miała dostać póki były wszystkie. Potém te same 175 cz. zł. podzieliłbym przez liczbę osób zmnieyszoną 2; iloraz okazałby ile każda ma dostać po ubyciu 2 osób: a ieśliby drugi iloraz był większy 10 cz zł od pierwszego, byłoby to dowodem, że znaleziona liczba osób iest prawdziwa. Oznaczmy więc szukaną liczbę osób przez x, i za pomocą znaków algiebraicznych wskażmy te same rozumowania i działania, któreśmy dopiero wysłowili.

Będzie naprzód $\frac{175}{x}$ dział każdéy z osób póki były wszystkie. Potém $\frac{175}{x-2}$ dział każdéy z osób po ubyciu 2. Aże podług warunku zagadnienia dział powtórny iest 10 cz. zł. większy od piérwszego, będzie więc równanie

$$\frac{175}{x} + 10 = \frac{175}{x-2}.$$

w którém zniosłszy mianowniki podług powyższego prawidła (57) i odbywszy inne działania potrzebne do uwolnienia niewiadoméy od wiadomych, otrzymamy równanie drugiego stopnia $x^2 - x = 35$, które rozwiązawszy sposobem podanym wyżéy (22), znaydziemy
$x - 1 = \pm 6$ To iest $x = 7$, albo $x = -5$.

Ważność x dodayna sprawdza zagadnienie podług iego wysłowienia; ważność zaś odiemna należy do innego zagadnienia, które tem się od poprzedzaiącego różni, że liczba osób nie zmnieysza się, ale się powiększa 2, i że dział powtórny mnieyszy iest 10 cz. zł. od pierwszego.

Zagad. II. *Zgodzono dwóch rzemieślników na różną zapłatę dzienną: pierwszy po upłynieniu pewney liczby dni dostał 96 zł.. drugi, który w tymże przeciągu czasu 6 dni próżnował; dostał zł. 54. Gdyby drugi pracował był cały czas, a pierwszy 6 dni próżnował, na ten czas obadwa byliby równą summę dostali w zapłacie: Po ileż dni każdy z nich pracował, i iaka iest każdego zapłata dzienna?*

Znalazłszy liczbę dni, które pracował rzemieślnik pierwszy, sprawdziłbym ią sposobem następuiącym: naprzód przez tę liczbę dni podzieliłbym 96 zł. a iloraz okazałby zapłatę dzienną rzemieślnika pierwszego; potem przez tę samę liczbę dni zmnieyszoną 6 podzieliłbym zł. 54, a iloraz okazałby zapłatę dzienną rzemieślnika drugiego. Nakoniec rozmnożyłbym zapłatę dzienną rzemieślnika drugiego przez cała liczbę dni, zapłatę zaś dzienną rzemieślnika pierwszego przez liczbę dni zmnieyszoną 6; a iesliby dwa te iloczyny były równe, byłoby to dowodem, że znaleziona liczba dni iest prawdziwa. Oznaczywszy zatem liczbę dni, które pracował rzemieślnik pierwszy przez x, liczba dni, które pracował drugi, będzie $x-6$. Zapłata dzienna pierwszego będzie $\frac{96}{x}$; zapłata dzienna drugiego $\frac{54}{x-6}$.

Gdyby rzemieślnik drugi pracował przez dni x, zapłata iego całkowita byłaby $x \times \frac{54}{x-6} = \frac{54x}{x-6}$; a pierwszy pracuiąc tylko przez dni $x-6$, byłby dostał całkowitey zapłaty $(x-6)\frac{96}{x} = \frac{96(x-6)}{x}$.

Aże podług zagadnienia dwa te iloczyny są równe, będzie więc 54x

$\frac{54x}{x-6} = \frac{96\ (x-6)}{x}$. Zniosłszy mianowniki będzie

$$54x^2 = 96\ (x-6)\ (x-6).$$

Równanie to łatwo rozwiązać można sposobem zwyczaynym : lecz można także użyć następuiącego skrócenia :

Podzieliwszy obie strony przez 6, będzie $9x^2 = 16\ (x-6)\ (x-6)$.

W tém równaniu obie strony są widocznie kwadratami : $9x^2$ ma za pierwiastek $3x$, $16\ (x-6)$ $(x-6)$ ma za pierwiastek $4\ (x-6)$, będzie więc $3x = \pm\ 4\ (x-6)$; a tém samem $x = 24$; albo $x = \frac{24}{7}$.

Podług pierwszego rozwiązania rzemieślnik pierwszy pracował przez dni 24, a zatém brał na dzień po zł. $\frac{96}{24} = 4$: drugi zaś pracował tylko przez dni 18, i brał na dzień po zł. $\frac{54}{18} = 3$.

Drugie rozwiązanie należy do innego zagadnienia liczebnego.

Zagad. III. *Dano bankierowi dwa wexle, ieden na* 550 *cz. zł. drugi na* 720 *cz. zł. pierwszy ma być wykupiony za* 7 *miesięcy, drugi za* 4 *miesiące. Bankier dał na nie* 1200 *cz. zł. Jakiż potrącił sobie procent roczny?*

Dla uniknienia ułomków, oznaczmy procent roczny od 100 cz. zł. przez $12x$; będzie więc x procent miesięczny. Podług prawideł arytmetycznych na odtrącenie procentu, wartość teraźnieyszą wexlu pierwszego znaydziemy przez następuiącą proporcyą :

$$100 + 7x : 100 = 550 : \frac{55000}{100+7x}.\ (98).$$

Wartość teraźnieysza drugiego wexlu wypadnie z następuiącey proporcyi :

$$100 + 4x : 100 = 720 : \frac{72000}{100+4x}.$$

Do-

Dodawszy dwie te wartości, będzie równanie:

$$\frac{55000}{200+7x}+\frac{72000}{100+4x}=1200.$$

Podzieliwszy obie strony przez 200, będzie

$$\frac{275}{100+7x}+\frac{360}{100+4x}=6;$$ więc

$275\,(100+4x)+360\,(100+7x)=6\,(100+7x)\,(100+4x)$; czyli $27500+1100x+3600+2520x=60000+6600x+168x^2$ czyli $168x^2+2980x=3500$.

Podzieliwszy obie strony przez 2, będzie

$84x+1490x=1750$. A zatém

$$x^2+\frac{1490}{84}x=\frac{1750}{84}.$$

Dopełniwszy kwadratu sposobem wyżéy podanym, i odbywszy inne działania zwyczayne znaydziemy

$$x=-\frac{745}{84}\pm\sqrt{\frac{745\cdot745}{84\cdot84}+\frac{1750}{84}}.$$

Ułomki będące pod znakiem pierwiastkowym sprowadziwszy do iednakowego mianownika, będzie

$$\frac{745\cdot745+1750\cdot84}{84\cdot84}=\frac{702025}{84\cdot84}.$$

W ułomku tym mianownik iest kwadratem zupełnym: wyciągnąwszy zatém pierwiastek z licznika przestaiąc tylko na trzech dziesiętnych, znaydziemy 837,,869 na pierwiastek liczby 702025. Ważności zatém x będą

$$x=-\frac{745}{84}+\frac{837{,}869}{84}=\frac{92{,}869}{84};$$

$$x=-\frac{745}{84}-\frac{837{,}869}{84}=-\frac{1582{,}869}{84}.$$

Pierwsza tylko z tych ważności rozwięzuie zagadnienie stosownie do iego wysłowienia. Będzie zatém procent od 100 roczny czyli za 12 miesięcy

$$12x = \frac{92,869}{7} = 13,267.$$

ROZDZIAŁ VII.

O postępach Arytmetycznych i Jeometrycznych.

I. o Postępach arytmetycznych.

129. Wszystko to cośmy dotąd powiedzieli: nie iest ieszcze dostateczne do rozwiązania wielkiéy liczby zagadnień z wielu względów nader ważnych, iak są *np.* zagadnienia o procentach składanych czyli o procentach od procentów i tym podobnych: wiadomości w tym i w następuiącym rozdziele wyłożone ułatwią do tego drogę.

Weźmy *np.* łatwe zagadnienie *daną ilość podzielić na pełną liczbę części takich, ażeby rożnica między każdą częścią i drugą po niey następuiącą była zawsze ta sama, i rownała się liczbie daney.*

Niech będzie *np.* liczba 28 dana do podzielenia na 7 części takich, ażeby różnica między częścią pierwszą i drugą, między drugą i trzecią, między trzecią i czwartą i t. d. równała się iedności. Oznaczywszy część 1wszą przez x, 2ga będzie $= x + 1$, 3cia $= x + 2$, 4ta $= x + 3$, 5ta $= x + 4$, 6ta $= x + 5$, 7ma $= x + 6$; a summa wszystkich $= 7x + 21$. Że zaś summa tych części powinna czynić 28, będzie więc równanie

$$7x + 21 = 28;\ \text{a zatem}\ 7x = 7:\ x = 1.$$

Części więc szukane są: 1, 2. 3. 4, 5. 6. 7.

Możnaby także oznaczywszy część 1wszą przez x, 2gą oznaczyć przez $x - 1$, 3cią przez $x - 2$, 4tą przez $x - 3$, 5tą przez $x - 4$, 6tą przez $x - 5$, 7mą przez $x - 6$. W tym przypadku summa wszystkich części iest $7x - 21$, i będzie równanie

$$7x - 21 = 28;\ \text{więc}\ 7x = 49,\ x = 7.$$

A zatem szukane części są: 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.

Dwa te znalezione szeregi liczb tem się tylko mię-

między sobą różnią, że każdy wyraz w pierwszym iest większy od poprzedzaiącego, w drugim mnieyszy od poprzedzaiącego z resztą obadwa czynią zadosyć warunkom zagadnienia: gdyż summa wszystkich części tak w pierwszym iak w drugim równa się liczbie daney 28, a różnica między dwoma po sobie następuiącemi wyrazami iest zawsze iednakowa i równa się 1.

Wszelki szereg liczb takich, że różnica między dwiema liczbami przyległemi iest zawsze ta sama, zowie się *Postępem arytmetycznym*, *progressio arithmetica*. Postęp: w którym każdy wyraz większy iest od poprzedzaiącego, nazywa się postępem *rosnącym*, *crescens*; postęp, w którem każdy wyraz mnieyszy iest od poprzedzaiącego, zowie się postępem *zmnieyszaiącym się* lub *maleiącym*, *decrescens*.

Stosunek arytmetyczny, iakośmy powiedzieli (85), iest to samo, co różnica między dwiema liczbami zachodząca, a proporcya arytmetyczna ciągła składa się z dwóch stosunków równych i takich, że następnik stosunku iednego równy iest poprzednikowi stosunku drugiego. Skąd iuż łatwo uczynić wniosek, że proporcya arytmetyczna ciągła iest postępem z trzech tylko wyrazów złożonym, i że każdy postęp arytmetyczny tak rosnący iak maleiący iest złożony z pewney liczby stosunków równych i takich, że następnik każdego stosunku iest równy poprzednikowi stosunku następnego. Dla tego też różnica między wyrazami postęp składaiącemi zachodząca zowie się *stosunkiem* postępu. Algiebraicznie postęp arytmetyczny wyraża się tak:

$$\div 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5. \text{ i t. d.}$$

130. W ogólności niech będzie postęp arytmetyczny iakikolwiek

$$\div a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f. \text{ i t. d.}$$

którego stosunek, czyli różnica między wyrazami zachodząca iest r. Postęp ten może być albo rosnący, albo maleiący.

W

W pierwszym przypadku ponieważ każdy wyraz większy iest różnicą r od swego poprzednika, będzie więc,
$b-a=r$; $c-b=r$, $d-c=r$, $e-d=r$, $f-e=r$ i t. d. Skąd wypadnie
1ód $b=a+r$; 2re $c=b+r$; 3cie $d=c+r$; 4te $e=d+r$; i t. d.

W 2giem z tych równań zamiast b położywszy iego ważność z równania pierwszego, będzie $c=a+2r$.

Tę ważność c położywszy w równaniu 3ciem, będzie $d=a+3r$.

Tę ważność d położywszy w równaniu 4tem, będzie $e=a+4r$ i t. d.

To iest: w postępie arytmetycznym rosnącym wyraz drugi b równy iest wyrazowi pierwszemu a powiększonemu różnicą r raz wziętą; wyraz trzeci c równy pierwszemu powiększonemu różnicą wziętą dwa razy; wyraz czwarty d równy pierwszemu powiększonemu różnicą wziętą trzy razy. I tak daley wyraz *np* 10ty równy pierwszemu powiększonemu różnicą wziętą razy 9: w ogólności, wyraz zastępuiący mieysce n, czyli, iak się zwyczaynie mówi, wyraz *nty*, równy iest pierwszemu powiększonemu różnicą wziętą razy $n-1$; czyli, oznaczywszy przez l wyraz zastępuiący mieysce *nte*, będzie

$$l=a+(n-1)r \quad - - - - - - - \quad (1)$$

Niech będzie *np.* postęp ÷ 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17 i t. d. w którym $a=3$, $r=2$: znaydziemy podług powyższéy formuły wyraz osmy $=3+(8-1)2=17$ i t. d.

W przypadku drugim, kiedy postęp iest maleiący, w którym każdy wyraz mnieyszy iest różnicą od swego następnika, na ten czas w równaniach $b-a=r$, $c-b=r$, $d-c=r$, ilość r ma ważność odiemną, iako pozostała reszta z odięcia liczby większéy od mnieyszéy. Chcąc więc powyższéy formuły użyć dla znalezienia wyrazu l zastępuiącego mieysce *nte* w postępie maleiącym,

trze-

trzeba dla r dać ważność odiemną. I tak niech będzie postęp

$$\div\ 21.\ 18.\ 15.\ 12.\ 9.\ 6\ \ 3.\ \text{i t. d.}$$

w którym $a = 21$, $r = -3$: znaydziemy podług teyże formuły, stosownie do poprzedzaiącéy uwagi wyraz siodmy $= 21 + (7-1) \times -3 = 3$; szukaiąc zaś dalszych wyrazów tegoż postępu znaydziemy wyraz osmy $= 0$, wyraz dziewiąty $= -3$, wyraz dziesiąty $= -6$; i t. d.

131. Niech będą dwa postępy

$$\div\ a.\ b.\ c.\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ i.\ k.\ l,$$
$$\div\ l.\ k.\ i.\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ c.\ b.\ a;$$

w których przerwa kropkami oznaczona może być zapełnioną tylu wyrazami ile się podoba. Jeżeli pierwszy z tych dwóch postępów iest rosnący, drugi być musi maleiącym: gdyż wyrazy drugiego idą w porządku odwrotnym wyrazów pierwszego. Oznaczywszy przez s summę wszystkich wyrazów ieden postęp składaiących, będą dwa równania

$$s = a + b + c\ -\ -\ -\ -\ -\ + i + k + l;$$
$$s = l + k + i\ -\ -\ -\ -\ -\ + c + b + a.$$

Dodawszy do siebie strony odpowiadaiące tych dwóch równań, będzie

$$2s = (a+l) + (b+k) + (c+i)\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ + (i+c) + (k+b) + (l+a).$$

Że zaś $a + r = b$, $b + r = c$, $i + r = k$, $k + r = l$,

$$l - r = k,\ k - r = i;\ c - r = b,\ b - r = a.$$

W równaniach tych dodawszy strony odpowiadaiące sobie, wypadnie

$$a + r + l - r = b + k, \text{ czyli } a + l = b + k;$$
$$b + r + k - r = c + i, \text{ czyli } b + k = c + i;$$
$$i + r + c - r = k + b, \text{ czyli } i + c = k + b; \text{ i t. d.}$$

Równanie zatem powyższe zamienić można w następuiące:

$$2s = (a+l) + (a+l) + (a+l)\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ + (a+l) + (a+l) + (a+l).$$

Rzecz iest przez się widoczna, że summa dwóch wyrazów skraynych w postępie, to iest summa $a + l$, powinna być z drugiey strony tego ró-

równania tyle razy powtórzona, ile postęp ma wyrazów. Oznaczywszy więc przez n liczbę wyrazów postęp składaiących, powyższe równanie zamieni się w następuiące;

$2s = (a+l)n$. A zatém $s = \frac{(a+l)n}{2}$. (2).

Tó iest: *summa wszystkich wyrazów postęp arytmetyczny składaiących, równa się summie wyrazów skraynych rozmnożoney przez liczbę wyrazów i podzieloney przez 2.*

I tak w postępie ÷ 7. 10. 13. 16. 19. 21. 24. 27, iest $s = \frac{(7+27)8}{2} = 136$.

132. Za pomocą dwóch powyższych równań

$$l = a + (n-1)r \quad - - - \quad (1)$$
$$s = \frac{(a+l)n}{2} \quad - - - - \quad (2)$$

w których znayduią się pięć ilości, to iest: a wyraz pierwszy, r stosunek, l wyraz ostatni, n liczba wyrazów i s summa tychże wyrazów, można łatwo wynaleźć dwie którekolwiek z tych pięciu ilości, gdy trzy inne są wiadome. Jakoż w równaniu 1wszém wziąwszy 1*od* ważność a, 2*re* ważność l, 3*cie* ważność n, i ważności te położywszy następnie w równaniu 2giem, otrzymamy następuiące równania:

$$2s = 2ln - rn(n-1) \quad - - - - \quad (3)$$
$$2s = 2an + rn(n-1) \quad - - - - \quad (4)$$
$$2rs = l^2 - a^2 + ar + lr \quad - - - - \quad (5)$$

Za pomocą tych pięciu równań łatwo będzie rozwiązać następuiące zagadnienia:

1*wsze Maiąc wiadome* r, l, n, *albo* r, l, s, *albo* r, n, s, *albo* l, n, s, *znaleźć* a. 2*gie maiąc wiadome* a, l, s, *albo* a, l, n, *albo* a, n, s, *albo* l, n, s, *znaleźć* r. 3*cie Maiąc wiadome* a, r, n, *albo* a, r, s, *albo* a, n, s, *albo* r, n, s, *znaleźć* l. 4*te Maiąc wiadome* a, r, l, *albo* a, r, s, *albo* a, l, s, *albo* r, l, s, *znaleźć* n.

5te

ste *Maiąc wiadome* a, r, l, *albo* a, r, n, *albo* s, l, n, *albo* r, l, n, *znaleźć* s.

Każde z tych dwudziestu zagadnień łatwo być może rozwiązane za pomocą iednego z pięciu powyższych równań, I tak *np.* zagadnienie to: *maiąc wiadome* l, r, s, *znaleźć* a, rozwiążemy za pomocą równania (5), w którém znayduią się wszystkie cztéry ilości wchodzące do zagadnienia. Jakoż w równaniu tém przeniosłszy niewiadome na iednę a wiadome na drugą stronę, będzie

$$a^2 - ra = l^2 + lr - 2rs; \text{ więc}$$

$$a^2 - ra + \tfrac{1}{4}r^2 = l^2 + lr + \tfrac{1}{4}r^2 - 2rs. \quad (122)$$

Drugą stronę rozmnożywszy i podzieliwszy przez 4,

$$a^2 - ra + \tfrac{1}{4}r^2 = \frac{4l^2 + 4lr + r^2 - 8rs}{4}.$$

Że zaś $4l^2 + 4lr + r^2 = (2l + r)^2$; więc

$$a^2 - ra + \tfrac{1}{4}r^2 = \frac{(2l + r)^2 - 8rs}{4}; \text{ A zatém}$$

$$a - \tfrac{1}{2}r = \pm\frac{\sqrt{(2l + r)^2 - 8rs}}{2}; \text{ a tém samém}$$

$$a = \frac{r \pm \sqrt{(2l + r)^2 - 8rs}}{2}.$$

Tym samym sposobem z tegoż równania znaydziemy następuiącą ważność dla l, kiedy a, r i s są dane:

$$l = \frac{-r \pm \sqrt{(2a - r)^2 + 8rs}}{2}$$

Podobnież chcąc znaleźć ważność dla n, gdy są dane s, r, a z równania (4) wyprowadzimy następnie

$$rn^2 + 2an - rn = 2s;$$

$$n^2 + \frac{2an - rn}{r} = \frac{2s}{r};$$

$$n^2 + \left(\frac{2a - r}{r}\right)n = \frac{2s}{r};$$

n^2

$$n^2 + \left(\frac{2a - r}{r}\right) n + \frac{(2a - r)^2}{4r^2}$$
$$= \frac{(2a - r)^2 + 8rs}{4r^2};$$
$$n = \frac{-2a + r \pm \sqrt{(2a - r)^2 + 8rs}}{2r},$$

Nakoniec chcąc znaleźć ważność dla n, gdy są dane l, r, s, znaydziemy za pomocą zrównania (3) sposobem podobnym do poprzedzaiącego,

$$n = \frac{2l + r \pm \sqrt{(2l + r)^2 - 8rs}}{2r}.$$

W innych wszystkich przypadkach szukane ważnosci są w stopniu piérwszym, iak się o tém łatwo przekonać można.

Niech będzie *np.* postęp $\div$ 1. 3. 5. 7. 9. 11, w którym $a = 1$, $r = 2$, $l = 11$, $s = 36$. Chcąc sprawdzić formułę poprzedzaiącą, trzeba w niey zamiast głosek l, r i s położyć liczby 11, 2 i 36, i będzie

$$n = \frac{2.\,11. + 2 \pm \sqrt{(2.\,11. + 2)^2 - 8.\,2.\,36}}{2.\,2}$$

$$= \frac{24 \mp \sqrt{576 - 576}}{4} = 6, \text{ i t. d.}$$

II. O *Postępach Jeometrycznych.*

233. Postępy jeometryczne tém się od arytmetycznych różnią, że w nich nie różnica między wyrazami, ale iloraz każdego wyrazu przez wyraz poprzedzaiący podzielonego iest zawsze iednakowy. Dwa następuiące szeregi liczb

$\because$ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : i t. d.

$\because$ 45 : 15 : 5 : $\frac{5}{3}$: $\frac{5}{9}$: i t. d.

są postępy ieometryczne: w pierwszym iloraz czyli stosunek iest 3, w drugim $\frac{1}{3}$; pierwszy nazywa się rosnącym, drugi maleiącym. Obadwa złożone są ze stosunków ieometrycznych równych i takich, że następnik każdego stosunku, iest poprzednikiem stosunku następnego: dla tego też algiebraicznie oznaczaią się takim sposobem, iakiego używamy na oznaczenie stosunku jeometrycznego.

W ogólności niech będzie postęp ieometryczny iakikolwiek

$$\div\; a : b : c : d : e : f : \text{i t. d.}$$

Daymy, że $\frac{b}{a} = q$; będzie też $\frac{c}{b} = q$, $\frac{d}{c} = q$, $\frac{e}{d} = q$, $\frac{f}{e} = q$ i t. d.

W równaniach tych zniosłszy mianowniki, będzie

$$b = aq;\; c = bq;\; d = cq;\; e = dq;\; f = eq.$$

W równaniu drugiem zamiast b położywszy iego ważność z równania pierwszego; będzie $c = aq \times q$; czyli $c = aq^2$

Tymże sposobem znaydziemy $d = aq^3$; $e = aq^4$; $f = aq^5$. Dany zatem postęp zamieni się w następuiący:

$$\div\; a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : \text{i t. d.}$$

To iest: w postępie jeometrycznym wyraz drugi równy iest 1wszemu rozmnożonemu przez stosunek podniesiony do potęgi 1szey; wyraz 3ci równy 1wszemu rozmnożonemu przez stosunek podniesiony do potęgi 2giey, wyraz 4ty równy pierwszemu rozmnożonemu przez stosunek podniesiony do potęgi 3ciey; i tak daley. Wyraz *np.* 10ty równy 1wszemu rozmnożonemu przez stosunek podniesiony do potęgi 9tey; wyraz *n*ty równy 1wszemu rozmnożonemu przez stosunek podniesiony do potegi $n-1$; czyli oznaczywszy przez l wyraz zastępuiący mieysce n, będzie

$$l = aq^{n-1} \quad \text{- - - - - -} \quad (1).$$

Za pomocą téy formuły w każdym postępie jeometrycznym, którego wyraz pierwszy i stosunek iest dany, znaleźć można iakikolwiek wyraz, nieprzechodząc przez wyrazy między piérwszym i szukanym środkuiące. Tak *np.* w postępie $\div\!\div$ 2 : 6 : i t. d wyraz 10ty $= 2 . 3^9 = 39366$.

Podobnież w postępie $\div\!\div$ 8 : 4 : i t. d. wyraz 10ty $= 8 \times (\frac{1}{2})^9 = 8 \times \frac{1}{512} = \frac{1}{64}$ i t. d.

134. Niech będzie postęp

$\div\!\div\, a : b : c : d - - - - - - - - - - k : l$,

którego stosunkiem iest q. Będzie więc

$b = aq,\ c = bq,\ d = cq - - - - - - l = kq.$

Strony odpowiadaiące tych równań dodawszy do siebie, będzie

$b + c + d + e \,..\, + l = aq + bq + cq + dq \,..\, + kq$; czyli

$b + c + d + e \,..\, + l = (a + b + c + d + \,..\, k)\, q.$

Oznaczywszy summę wszystkich wyrazów postęp dany składaiących przez s, będzie

$b + c + d + e - - - - + l = s - a.$

$a + b + c + d - - - - + k = s - l.$

W drugiém równaniu obie strony rozmnożywszy przez q, będzie

$(a + b + c + d \,.\, + k)\, q = (s - l)\, q.$ Że zaś

$(a + b + c + d \,.\, + k)\, q = b + c + d + e - - - - - + l = s - a$: więc

$(s - l)\, q = s - a$; czyli, $qs - lq = s - a$; czyli, $qs - s = lq - a$; czyli, $s\,(q - 1) = lq - a$; a tém samém

$$s = \frac{lq - a}{q - 1} \quad - - - \quad (2).$$

To iest: *chcąc znaleźć summę wszystkich wyrazów postęp jeometryczny składaiących, trzeba wyraz ostatni rozmnożyć przez stosunek; odiąć od tego iloczynu wyraz piérwszy, i resztę podzielić przez stosunek zmnieyszony iednością.*

Te samę formułę można także otrzymać sposobem następuiącym:

W postępie $\div\!\div\, a : b : c. - - - - - - - - - l$ każdy wyraz iest poprzednikiem wyłączywszy ostatni l: i każdy wyraz iest następnikiem wyłączywszy pierwszy a. Jeżeli więc s oznacza summę wszystkich tych wyrazów, $s-l$ będzie summa poprzedników, $s-a$ summa następników. Aże w stosunkach równych summa wszystkich poprzedników tak się ma do summy wszystkich następników, iak którykolwiek poprzednik do swego następnika (95); będzie więc

$s-l : s-a = a : b$; czyli

$s-l : s-a = a : aq$: gdyż $b = aq$. Więc

$(s-l)\, aq = (s-a)\, a$ (90).

Wykonawszy z obu stron mnożenie wskazane; podzieliwszy potem obiedwie strony przez a, i odbywszy inne działania potrzebne dla znalezienia ważności niewiadomey s; wypadnie iak wyżey $s = \frac{lq-a}{q-1}$.

Podług tey formuły summa 10ciu wyrazów postępu $\div$ 2 : 6 : 18 : : i t. d. iest $= \frac{2 . 3^{10} - 2}{3-1}$ $= \frac{2 . 3^{10} - 2}{2} = 59048$.

Podobnież summa 10ciu wyrazów postępu maleiącego

$\div$ 8 : 4 : 2 : 1 i t. d. iest $= \frac{8\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 8}{\frac{1}{2} - 1} = 15\frac{63}{64}$.

135. Za pomocą dwóch powyższych rownań

$l = aq^{n-1}$ - - - - - - - - - - - - (1)

$s = \frac{ql-a}{q-1}$ - - - - - - - - - - - - (2)

do których wchodzą ilości a, l, s, q, n: chcąc znaleźć dwie którekolwiek z tych pięciu ilości, gdy trzy inne są dane, trzeba w iednem z nich znaleźć ważności dla a, q, l, i pokłaść ie następnie w równaniu drugiem. W równaniu np. $s = \frac{ql-a}{q-1}$ zniosłszy mianownik, będzie

$qs - s = ql - a$. Z tego równania znaydziemy

$l =$

$$l = \frac{qs - s + a}{q};\ q = \frac{s - a}{s - l};\ a = ql - qs + s.$$

Abyśmy trzy te znalezione ważności przenieść mogli do równania (1), uważyć tu pierwey potrzeba, że ieżeli *np.* $n = 5$, na ten czas będzie $q^{n-1} = q^4$. W tém równaniu rozmnożywszy obie strony przez q, będzie $q^{n-1} \times q = q^4 \times q$, czyli $q^{n-1} \times q = q^5$; aże podług założenia $q^5 = q^n$; więc $q^{n-1} \times q = q^n$.

Po téy uwadze znalezioną wyżéy ważność l położywszy w równaniu $l = aq^{n-1}$, będzie $\frac{qs - s + a}{q} = aq^{n-1}$. Zniosłszy mianownik wypadnie

$$qs - s + a = aq^n \quad \text{- - - - - - - - - - - - -} \quad (3)$$

W témże równaniu $l = aq^{n-1}$ położywszy znalezioną wyżéy ważność dla a, będzie $l = (ql - qs + s)\ q^{n-1}$; czyli $l = lq^n - sq^n + sq^{n-1}$; więc

$$lq^n - sq^n - l + sq^{n-1} = 0 \quad \text{- - - - - - - - - - -} \quad (4)$$

Nakoniec w témże równaniu $l = aq^{n-1}$ zamiast q położywszy iego ważność, będzie

$$l = a\left(\frac{s - a}{s - l}\right)^{n-1}:$$

Zniosłszy mianownik, wypadnie

$$l(s - l)^{n-1} = a(s - a)^{n-1} \text{ więc}$$

$$l(s - l)^{n-1} - a(s - a)^{n-1} = 0 \quad \text{- - - - -} \quad (5)$$

Za pomocą tych pięciu równań rozwiązując dwadzieścia zagadnień, iakie podaliśmy wyżey (132) na postępy arytmetyczne, znaydziemy niektóre z nich łatwe do rozwiązania; iak iest *np.* następuiące: *Maiąc wiadome* q, l, s, *znaleźć* a i t. d; drugie łatwe wprawdzie do rozwiązania, lecz w sprawdzeniu na iakim postępie szczególnym częstokroć wiele czasu zabieraiące, iakie iest *np.* zagadnienie następuiące: *maiąc wiadome* a, q, n, *znaleźć* s. Rozwiązawszy zagadnienie to za pomocą równania (3) znaydziemy $s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$. Tę ważność ogólną chcąc zastósować do postępu, w którym $n = 64$, trzeba ważność q podnieść do 64tey potęgi, co postępuiąc sposobem zwyczaynym, zabrałoby nie mało czasu i mieysca. Nakoniec znaleźlibyśmy i takie zagadnienia, do których rozwiązania wyłożone dotąd wiadomości nie są dostateczne: iak iest *np.* następuiace: *maiąc wiadome* a, q, l, *znaleźć* n. Rozwiązuiąc to zagadnienie za pomocą równania (1), znaydziemy $q^{n-1} = \frac{l}{a}$.

W równaniu tém ilość szukana n iest wykładnikiem; gdy tym czasem we wszystkich zagadnieniach, któreśmy dotąd rozwiązywali, wykładnik był zawsze ilością wiadomą, i wszystkie sposoby dotąd wyłożone nie są dostateczne na rozwiązanie równania, w którém wykładnik iest ilością niewiadomą.

Z tegoż równania $q^{n-1} = \frac{l}{a}$, chcąc znaleźć ważność dla q, trzeba z drugiey strony $\frac{l}{a}$ wyciągnąć pierwiastek potęgi wskazaney przez ilość $n-1$.; gdy tym czasem dotąd podaliśmy tylko sposób wyciągania pierwiastku potęgi drugiey czyli kwadratu, Wiadomości w następuiącym rozdziele wyłożone ułatwią rozwiązywanie tych i tym podobnych zagadnień.

ROZDZIAŁ VIII.

o *Logarytmach.*

136. Z tego cośmy powiedzieli o mnożeniu i dzieleniu ilości maiących wykładniki (30,42), łatwo iest uczynić wniosek, że wszelka liczba, wyłączywszy 1, podnoszona nastąpnie do rozmaitych po-

potęg dodaynych i odiemnych, przybiera rożmaite ważności co raz większe lub mnieysze od 1. Jakoż ieżeli a iest liczbą większą od 1, i znaczy *np.* 10, na ten czas,

$a^1 = 10$, $a^2 = 100$, $a^3 = 1000$, $a^4 = 10000$ i t. d.

$a^0 = 1$, $a^{-1} = \frac{1}{a} = \frac{1}{10}$; $a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{100}$; $a^{-3} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{1000}$ i t. d.

Jeżeli zaś a iest liczbą mnieyszą od 1, i znaczy *np.* $\frac{1}{2}$ na ten czas

$a^1 = \frac{1}{2}$, $a^2 = \frac{1}{4}$, $a^3 = \frac{1}{8}$; i t. d.

$a^0 = 1$, $a^{-1} = \frac{1}{a} = 2$; $a^{-2} = \frac{1}{a^2} = 4$; $a^{-3} = \frac{1}{a^3} = 8$; i t. d.

To iest liczba większa od 1, podnoszona do potęg dodaynych coraz większych, ma coraz większe ważności, podnoszona do potęg odiemych coraz większych, ma coraz mnieysze ważności; przeciwnie zaś liczba mnieysza od 1, w pierwszym przypadku przybiera coraz mnieysze, w drugim coraz większe ważności. Własność ta iest spólna wszystkim liczbom, wyłączywszy 1, która do wszelkiey potęgi podniesiona iest zawsze iednością.

157. Dla oznaczenia, że liczba a iest nie zmienna, i że za zmianą iéy wykładnika zmienia się iéy ważność, oznaczmy wykładniki przez x, x' i t. d. a ważności odpowiadaiące przez y, y' i t. d. będą więc równania $a^x = y$, $a^{x'} = y'$ i t. d. w których ważnościom y, y' i t. d. odpowiadaią inne ważności x, x' i t. d; tak, że iedna z tych ważności może bydź wyznaczona przez drugą.

Aże $a^3 \times a^2 = a^{3+2}$ (50), $\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2}$ (42) więc kiedy $a^x = y$, $a^{x'} = y'$, będzie $yy' = a^x \times a^{x'} = a^{x+x'}$; $\frac{y}{y'} = \frac{a^x}{a^{x'}} = a^{x-x'}$.

To iest: chcąc dwie ważności odpowiadaiące iedneyże liczbie a do dwóch odmiennych potęg podniesionéy przez siebie rozmnożyć lub podzielić, dosyć iest wykładniki liczby a w pierwszym przypadku do siebie dodać, w drugim od siebie odiąć.

Aże potęga 2ga, 3oia, 4ta i t. d. każdey ilości równa się teyże ilości wziętey za czynnik razy 2, 3, 4 i t. d. (28) ieżeli więc $a^x = y$, będzie

$$y^2 = a^x \times a^x = a^{x+x} = a^{2x};$$
$$y^3 = a^x \times a^x \times a^x = a^{x+x+x} = a^{3x}.$$
$$y^m = (a^x)^m = a^{mx}.$$

To iest. chcąc liczbę iakąkolwiek y podnieść do potęgi 2, 3, 4 i t. d. dosyć iest x wykładnik liby a odpowiadaiący liczbie y rozmnożyć przez 2, 3, 4 i t. d.

Że zaś wyciąganie pierwiastków iest działaniem odwrotnem podnoszeniu ilości do potęg, chcąc zatém z liczby iakieykolwiek y wyciągnąć pierwiastek potęgi drugiéy, 3ciéy, czwartey i t. d. dosyć iest x wykładnik liczby a odpowiadaiący liczbie y podzielić przez 2, 3, 4 i t d. I tak ieżeli $a^x = y$, będzie pierwiastek kwadratowy liczby y czyli $\sqrt{y} = a^{\frac{x}{2}}$.

Podobnież pierwiastek trzeciéy potęgi y, czyli $\sqrt[3]{y} = a^{\frac{x}{3}}$ i t d.

Tu iuż łatwo postrzedz można, że gdybyśmy mieli tablicę taką, w któreyby obok każdey liczby y znaydowały się odpowiadaiące iéy ważności x, tak że maiąc daną liczbę y, możnaby było znaleźć x, i odwrotnie; na ten czas mnożenie dwóch liczb iakichkolwiek y, y' możnaby uskutecznić przez dodawanie: bo zamiast działania na tych liczbach, dodalibyśmy ważności x, x' liczbom tym odpowiadaiące, a liczba w tablicy znayduiąca się, którey ta summa odpowiada, byłaby szukanym iloczynem. Iloraz dwóch liczb iakichkolwiek znaleźlibyśmy w teyże tablicy w prost różnicy między ważnościami x, x danym liczbom odpowiadaiącemi; a tym sposobem dzielenie skończyłoby się na odeymowaniu. Chcąc liczbę iaką y podnieść do potęgi 2, 3, 4 i t. d; ważność x liczbie y odpowiadaiącą rozmnożylibyśmy przez 2, 3, 4 i t. d; a liczba iloczynowi temu odpowiadaiąca byłaby szukaną potęgą; tym sposobem podnoszenie do potęg skończyłoby się na mnożeniu iedney liczby przez 2 albo 3, albo 4 i t. d. Nakoniec chcąc z liczby iakieykolwiek y wyciągnąć pierwiastek potęgi 2giey, 3ciey, 4tey i t. d. ważność x liczbie y odpowiadaiącą podzielilibyśmy przez 2, 3, 4 i t d; a liczba ilorazowi temu odpowiadaiąca byłaby szukanym pierwiastkiem.

Pierwszy Nepper uznał potrzebę takowych tablic i one do skutku przyprowadził. Ważności x nazwane w nich są *logarytmami*. Logarytmy zatém są to wykładniki poteg, do ktorych trzeba podnieść liczbę niezmienną a, ażeby z niey wyprowadzić następnie wszelkie ważności liczebne. Liczba ta niezmienna zowie się *zasadą*, *basis*, układu Logarytmów.

138. Ponieważ własności logarytmów nie zależą od szczególnéy ważności téy liczby, która iest ich zasadą, wypada stąd, że może być nieskończona liczba tablic czyli układów logarytmowych, biorąc za ich zasadę wszelkie liczby większe lub mnieysze od iedności. Wziąwszy np. np. $a = 10$, będzie

$10^0 = 1.$	$10^{-1} = \frac{1}{10}$
$10^1 = 10$	$10^{-2} = \frac{1}{100}$
$10^2 = 100$	$10^{-3} = \frac{1}{1000}$
$10^3 = 1000$	$10^{-4} = \frac{1}{10000}$
$10^4 = 10000$	$10^{-5} = \frac{1}{100000}$ i t. d.
$10^5 = 100000$	
$10^6 = 1000000$ i t. d.	

Wykładniki 0, 1, 2, i t. d. są logarytmami liczb im odpowiadaiących, które się z prawéy strony znayduią; 0 iest logarytmem iedności; iedność iest logarytmem liczby 10; 2 iest logarytmem liczby 100, i t d. — 1 iest logarytmem ułomku $\frac{1}{10}$; — 2 iest logarytmem $\frac{1}{100}$ i t. d. Tu iuż mo-

można sprawdzić to, cośmy wyżey powiedzieli o logarytmach, że służą do ułatwienia i skrócenia działań arytmetycznych naytrudnieyszych, iakiemi są mnożenie i dzielenie liczb większych, podnoszenie ich do potęg i wyciąganie pierwiastków. Jakoż dodawszy 1 logarytm liczby 10 do 2 logarytmu liczby 100, wypadnie 3 logarytm liczby 1000, która iest iloczynem 100 i 10. Odiąwszy 4 logarytm liczby 10000, od 6 logarytmu liczby 1000,000, zostanie 2 logarytm liczby 100, która iest ilorazem wypadaiącym z podzielenia 1000,000 przez 10000, i t. d.

139. Z postępu jeometrycznego $\div\div a : b : c : d : e : f :$ wypada

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \frac{e}{d} = \frac{f}{e} \text{ i t. d.}$$

Logarytmy ilości a, b, c i t. d. oznaczywszy przez la, lb, lc, i t. d. powyższy ciąg równań zamieni się w następuiący:

$lb - la = lc - lb = ld - lc = le - ld = lf - le$ i t. d. (137).

Z równań tych wypada następuiący postęp arymetyczny:

$$\div\, la.\ lb.\ lc.\ ld.\ le.\ lf.\ (129).$$

Stąd wniesiemy, że logarytmy liczb będących w postępie jeometrycznym składaią postęp arytmetyczny. Co też postrzeżemy w powyższey tablicy (138), gdzie liczby 1, 10, 100, 1000 i t. d. składaią postęp jeometryczny, a odpowiadaiące im logarytmy 0, 1, 2, 3 i t. d. składaią postęp arytmetyczny. Uwaga ta posłuży do okazania iakim sposobem wynaleźć można logarytmy liczb środkuiących między 1 i 10, między 10 i 100, między 100 i 1000 i t. d.

140. Między pierwszemi dwoma wyrazami postępu jeometrycznego, to iest między 1 i 10, znaydźmy średnią jeometrycznie proporcyonalną (99), która iest 3,16227700, i między dwoma pierwsze-

wszemi wyrazami postępu arytmetycznego, to iest między 0 i 1 znaydźmy średnią arytmetycznie proporcyonalną, która iest $\frac{1}{2}$ (89). Otrzymamy dwa następuiące postępy;

$$\div\div\ 1 : 3,16227766 : 10\ ;$$
$$\div\ 0 . \quad \tfrac{1}{2} . \quad 1\ ;$$

w których każdy wyraz postępu jeometrycznego ma za logarytm odpowiadaiący sobie wyraz w postępie arytmetycznym

Znaydźmy znowu średnią jeometrycznie proporcyonalną tak między 1 i 3,16227766, iako też między 3,16227766 i 10, pierwsza z tych dwóch liczb szukanych iest 1,77827941, druga 5,62341319. Znaydźmy także średnią arytmetycznie proporcyonalną tak między 0 i $\frac{1}{2}$, iako też między $\frac{1}{2}$ i 1; pierwsza z nich iest $\frac{1}{4}$, druga $\frac{3}{4}$. Otrzymamy zatem następuiący postęp jeometryczny i arytmetyczny:

$$\div\div\ 1 : 1,77827941 : 3,16227766 ; 5,62341319 : 10\ ;$$
$$\div\ 0 . \quad \tfrac{1}{4} . \quad \tfrac{2}{4} . \quad \tfrac{3}{4} \quad 1\ ;$$

w których każdy wyraz postępu jeometrycznego ma za logarytm odpowiadaiący sobie wyraz w postępie arytmetycznym

Gdybyśmy potém w powyższych postępach znaleźli średnią jeometrycznie i arytmetycznie proporcyonalną między wyrazem pierwszym i drugim, między drugim i trzecim, między trzecim i czwartym, między czwartym i piątym, otrzymalibyśmy postęp jeometryczny i arytmetyczny maiące po 9 wyrazów, w których każdy wyraz postępu jeometrycznego, miałby za logarytm odpowiadaiący sobie wyraz w postępie arytmetycznym.

Tym samym sposobem postępuiąc daléy, gdybyśmy między 1 i 10 umieścili *np.* 10000000 średnich jeometrycznie proporcyonalnych, i tyleż średnich arytmetycznie proporcyonalnych między 0 i 1; otrzymalibyśmy dwa ogromne postępy jeometryczny zaczynaiący się od 1, a kończący się na 10, arytmetyczny zaczynaiący się od 0, a koń-

czaczący się na 1, w których każdy wyraz postępu jeometrycznego miałby za logarytm odpowiadaiący sobie wyraz w postępie arytmetycznym.

W tak wielkiéy liczbie wyrazów postępu jeometrycznego, z których każdy, dwa skrayne wyłączywszy, większy byłby od 1 a mnieyszy od 10, znalazłyby się niektóre wyrazy tak mało od liczb 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 różniące się, że ie bez znacznego uchybienia, wziąćby można za te liczby, a odpowiadaiące im wyrazy w postępie arytmetycznym za logarytmy tychże liczb. Tak *np.* znaleźlibyśmy w postępie jeometrycznym wyrazy 1,9999999; 2,0000001; 2,9999999; 3,0000001; 3,9999999; 4,0000001; i t. d.: z tych piérwszy lub drugi może być wzięty za liczbę 2, trzeci lub czwarty za liczbę 3, piąty lub szósty za liczbę 4 i t. d. a odpowiadaiące im wyrazy w postępie arytmetycznym za logarytmy liczb 2, 3, 4 i t. d. Tym sposobem znaleźlibyśmy logarytmy liczb środkuiących między 1 i 10.

Podobnież między 10 i 100 umieścilibyśmy 10000000 średnich jeometrycznie proporcyonalnych, i tyleż średnich arytmetycznie proporcyonalnych między 1 i 2; a wyrazy postępu jeometrycznego naybliższe liczb 11, 12, 13..99, wzięlibyśmy za te liczby, odpowiadaiące zaś im wyrazy postępu arytmetycznego za logarytmy tychże liczb, i t. d.

141. Działanie to staie się nierównie krótsze, gdy idzie o wynalezienie logarytmu iedney iakiey liczby. Niechby *np.* trzeba było znaleźć logarytm liczby 2, która znayduie się między dwoma piérwszemi wyrazami 1 i 10 powyższego fundamentalnego postępu jeometrycznego.

Znaydźmy naprzód średnią jeometrycznie proporcyonalną między 1 i 10 i średnią arytmetycznie proporcyonalną między 0 i 1; piérwsza liczba szukana iest, iak iuż powiedzieliśmy, 3,16227766, druga $\frac{1}{2}$. Znaleziona liczba średnia jeometrycznie proporcyonalna iest większa od liczby 2; liczba

za-

zatem 2 mieścić się będzie między 1 i tą średnią jeometrycznie proporcyonalna 3,16227766; a logarytm liczby 2 mieścić się będzie między 0 i $\frac{1}{2}$.

Znaydźmy powtóre średnią jeometrycznie proporcyonalną między 1 i 3,16227766, tudzież średnią arytmetycznie proporcyonalną między 0 i $\frac{1}{2}$: pierwsza z tych dwóch liczb szukanych iest 1,77827941, druga $\frac{1}{4}$. Znaleziona powtórnie średnia jeometrycznie proporcyonalna mnieysza iest od liczby 2; a zatem liczba 2 mieścić się będzie między tą średnią jeometrycznie proporcyonalną, i między 3,16227766, która iest od liczby 2 większa; a logarytm liczby 2 mieścić się będzie między $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{2}$.

Znaydźmy znowu średnią jeometrycznie proporcyonalną między 1,77827941 i między 3,16227766, tudzież średnią arytmetycznie proporcyonalną między $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{2}$: pierwsza z dwóch tych liczb szukanych iest 2,37137370, druga $\frac{3}{8}$. Znaleziona po trzeci raz średnia jeometrycznie proporcyonalna iest większa od liczby 2; a zatem liczba 2 mieścić się będzie między 1,77827941 i między 2,37137370, z których pierwsza iest mnieysza a druga większa od liczby 2; logarytm zaś liczby 2 mieścić się będzie między $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{8}$.

Tym samym sposobem postępuie się daléy, szukaiąc zawsze średniey jeometrycznie proporcyonalnéy między dwiema pierwey znalezionemi, z których iedna iest mnieysza, druga większa od liczby 2, lecz tak iedna, iak druga iest naybliższa liczby 2, a przy każdem działaniu szuka się także średnia arytmetycznie proporcyonalna między dwiema pierwey znalezionemi, które dwom średnim jeometrycznie proporcyonalnym do tegoż działania wchodzącym odpowiadaią. Nakoniec za 26 działaniem znaydziemy średnią jeometrycznie proporcyonalną 2,0000001, a odpowiadaiącą iey średnią arytmetycznie proporcyonalną 0,3010300. Liczba 2,0000001 różni się tylko od liczby 2 iedną iednością dziesiętną siodmego rzędu: można ią więc bez znacznego uchybienia wziąć za liczbę 2, a odpowiadaiącą iey średnią arytmetycznie proporcyonalną za logarytm liczby 2.

Logarytm 0,0301300 uważany iako wykładnik liczby 10 wziętey za zasadę, znaczy, że liczbę 10 podniosłszy do potęgi wskazaney przez licznik 3010300, a z wypadku tego wyciągnąwszy pierwiastek wskazany przez mianownik 10000000, znaydziemy liczbę bardzo blizką liczby 2; czyli że

$$(10)^{\frac{3010300}{10000000}} = 2.$$

Piérwsza strona równania tego iest cokolwiek od liczby 2 większa; lecz liczba $(10)^{\frac{3010299}{10000000}}$ iest nieco od liczby 2 mnieysza.

142. Są także inne sposoby wynaydowania logarytmów; lecz do zrozumienia ich potrzebne są wyższe wiadomości z Algiebry: ieden tylko następuiący może tu być wyłożony;

Chcąc znaleźć logarytm liczby 2, trzeba rozwiązać następuiące równanie:

$$(10)^x = 2 \quad - \; - \; - \; - \quad (1),$$

w którém niewiadoma x iest logarytmem szukanym.

Ponieważ $(10)^0 = 1$, a $(10)^1 = 10$; więc liczba szukana x musi być większa od 0, a mnieysza od 1; to iest liczba x musi być ułomkiem. Niech będzie więc $x = \frac{1}{p}$ ważność tę zamiast x położywszy w równaniu (1), będzie

$$(10)^{\frac{1}{p}} = 2.$$

Podniosłszy obie strony do potęgi p będzie (137)

$$(10)^{\frac{p}{p}} = 2^p \text{ czyli } (10)^1 = 2^p \quad - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \quad (2).$$

Że zaś $2^3 = 8$; a $2^4 = 16$, (28); stąd wnosimy, że w równaniu (2) ważność p musi być większa od 3, a mnieysza od 4. Niech będzie więc $p = 3 + \frac{1}{q}$; ważność tę położywszy zamiast p w równaniu (2) będzie

$$2^{3+\frac{1}{q}} = 10; \text{ czyli, } 2^3 \times 2^{\frac{1}{q}} = 10 \quad (30).$$

Po-

Podzieliwszy obie strony przez 2^3 czyli przez 8, będzie

$2^{\frac{1}{q}}=\frac{5}{4}$;

Podniosłszy obie strony do potęgi q, będzie

$2=(\frac{5}{4})^q$ - - - - - - - - - - - - - - (3).

Że zaś ułomek $\frac{5}{4}$ podniesiony do potęgi 3ciéy czyni liczbę mnieyszą od 2, a podniesiony do potęgi 4téy czyni liczbę większą od 2; w równaniu zatem (3) ważność q musi być większa od 3, a mnieysza od 4. Uczyńmy więc $q=3+\frac{1}{r}$: ważność tę położywszy zamiast q w równaniu (3), będzie

$(\frac{5}{4})^{3+\frac{1}{r}}=2$; czyli $(\frac{5}{4})^3\times(\frac{5}{4})^{\frac{1}{r}}=2$.

Podzieliwszy obie strony przez $(\frac{5}{4})^3$ czyli przez $\frac{125}{64}$, będzie

$(\frac{5}{4})^{\frac{1}{r}}=2\times\frac{64}{125}=\frac{128}{125}$.

Podniosłszy obie strony do potęgi r, będzie

$\frac{5}{4}=(\frac{128}{125})^r$. - - - - - - - - - - - - - - (4).

Ułomek $\frac{128}{125}$ podnosząc następnie do potęgi 2, 3, 4 i t. d. znaydziemy, że ułomek ten podniesiony do potęgi 9téy mnieyszy iest od $\frac{5}{4}$, a podniesiony do potęgi 10téy większy iest od $\frac{5}{4}$: stąd wnosimy, że w równaniu (4) ważność r iest większa od 9, a mnieysza od 10. Moglibyśmy więc uczynić $r=9+\frac{1}{s}$; i położywszy ważność tę zamiast r w równaniu (4), posunąć działanie daley. Ale że nam idzie nie o wynalezienie logarytmu liczby 2, lecz o pokazanie iakim sposobem logarytm ten wynaleziony być może, przestańmy na tem cośmy znaleźli dotąd, i daymy że $r=9$.

Ponieważ $q=3+\frac{1}{r}$, a $r=9$, więc $q=3+\frac{1}{9}=\frac{28}{9}$. A że $p=3+\frac{1}{q}$; a $q=\frac{28}{9}$; więc $p=3+\frac{9}{28}=\frac{93}{28}$. Że zaś $x=\frac{1}{p}$; a $p=\frac{93}{28}$; więc $x=\frac{28}{93}$.

Ważność tę położywszy zamiast x w równaniu (1), będzie

$$(10)^{\frac{28}{93}} = 2.$$

Ułomek $\frac{28}{93}$ obróciwszy na dziesiętny wypadnie

$$(10)^{0,30107} = 2.$$

Logarytm zatem liczby 2 iest 0,30107. Logarytm ten zgadza się z logarytmem teyże liczby wyżey (141) znalezionym w czterech pierwszych cyfrach dziesiętnych; a byłby ieszcze dokładnieyszy, gdybyśmy powyższe działanie daley posunęli.

143. Logarytm liczby 2 mnożąc następnie przez 2; 3, 4 i t. d. otrzymamy logarytmy liczb 4, 8, 16 i t. d. które są potęgą 2gą, 3cią, 4tą i t. d. liczby 2.

Logarytm liczby 2 dodawszy do logarytmu liczby 10, 100, 1000 i t. d. otrzymamy logarytmy liczb 20, 200, 2000 i t. d. W reszcie dosyć będzie mieć logarytmy liczb *pierwszych*, ażeby otrzymać logarytmy wszystkich liczb *złożonych*, które są potęgami, lub iloczynami liczb pierwszych (*a*). I tak ponieważ $25 = 5^2$; więc logarytm liczby 25 równy będzie logarytmowi liczby 5 rozmnożonemu przez 2; czyli $l\,25 = 2\,l\,5$. Podobnież ponieważ $210 = 2 . 5 . 7 . 3$; więc $l\,210 = l2 + l5 + l7 + l3$; i t. d.

Nie-

(*a*) *Liczby* 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 *i wszystkie inne nie będące ani potęgami, ani iloczynami liczb innych przez siebie rozmnożonych zowią się* liczbami pierwszemi. *Te zaś liczby, które są albo potęgami albo iloczynami liczb pierwszych, zowią się liczbami* złożonemi; *iakie są* $9 = 3^2$, $21 = 7 . 3$, *i t. d. W ogólności liczbami* między sobą pierwszemi *zowiemy te, które nie maią inney miary spolney tylko iedność. I tak liczby* 20 *i* 27 *maiące tylko iedność za spolną miarę są między sobą pierwsze.*

Niektórych nawet liczb *pierwszych* można będzie otrzymać logarytmy tym samym sposobem. I tak ponieważ $5 = \frac{10}{2}$, więc $l5 = l10 - l2$; i t. d.

144. Logarytmy, które zwyczaynie wyrażaią się ułomkami dziesiętnemi, złożone są z dwóch części przecinkiem od siebie oddzielonych: część po lewéy stronie przecinka będąca, iest zawsze albo zerem, albo liczbą całkowitą, część będąca po prawéy stronie przecinka iest ułomkiem dziesiętnym. Pierwsza część zowie się *cechą* logarytmu, *characteristica*; gdyż daie poznać do którego rzędu iedności należy, czyli z ilu cyfr składa się liczba, któréy dany iest logarytm. Jedności pierwszego rzędu czyli liczby iednocyfrowe maią w w logarytmie cechę 0; iedności drugiego rzędu czyli liczby dwucyfrowe maią za cechę 1; iedności trzeciego rzędu czyli liczby trzycyfrowe maią za cechę 2; i t d. W ogólności ieżeli cecha danego logarytmu ma iedności n, liczba temu logarytmowi odpowiadaiąca składa się z cyfr $n + 1$; i odwrotnie, ieżeli dana liczba ma cyfr n, cecha logarytmu liczbie téy odpowiadaiącego ma iedności $n - 1$.

145. Logarytmy liczb dziesięciokrotnych czyli dziesięć razy od siebie większych lub mnieyszych, maią drugą część po prawéy stronie przecinka znayduiącą się iednakową, i tylko cechę odmienną. *np.* liczba 5436o ma za logarytm - - 4,7352794.

5436 - - - - - - - - - -	3,7352794.
543,6 - - - - - - - - -	2,7362794.
54,36 - . - - - - - -	1,7352794.
5,436 - - - - - - - -	0,7352794.

bo gdy każda z tych liczb iest ilorazem poprzedzaiącey przez 10 podzieloney, wypada ztąd, że chcąc otrzymać logarytm iednéy, trzeba od logarytmu drugiéy odiąć logarytm liczby 10 czyli 1 (137); a tym sposobem cecha logarytmu liczby poprzedzaiącéy zmnieyszy się iednością, część zaś logarytmu po prawéy stronie przecinka będąca zostanie ta sama.

146. Ponieważ ułomek iest ilorazem licznika podzielonego przez mianownik, a dzielenie za pomocą logarytmów odbywa się przez odięcie logarytmu dzielnika od logarytmu dzielney; chcąc więc otrzymać logarytm ułomka, trzeba od logarytmu licznika odiąć logarytm mianownika. Kiedy licznik iest mnieyszy od mianownika, będzie też logarytm licznika mnieyszy od logarytmu mianownika; odeymuiąc przeto drugi od pierwszego reszta wypadnie odiemna. Skąd się okazuie, że logarytmy ułomków są odiemne.

Chcąc *np.* znaleźć logarytm ułomka $\frac{1}{2}$, trzeba od logarytmu iedności, którym iest 0, odiąć logarytm liczby 2, którym iest 0,3010300 i będzie $l\frac{1}{2} = 0 - 0{,}3010300 = -0{,}3010300$.

Odiąwszy od 0 liczbę 1,3010300, która iest logarytmem 20, znaydziemy logarytm ułomka $\frac{1}{20}$ równy $-1{,}3010300$.

Ponieważ $l\,3 = 0{,}4771213$ a $l\,2 = 0{,}3010300$; więc logarytm $\frac{2}{3} = 0{,}3010300 - 0{,}4771213 = -0{,}1760913$ i t d.

A zatem chcąc *np* liczbę 36 rozmnożyć przez ułomek $\frac{2}{3}$, trzeba do logarytmu liczby 36, którym iest 1,5563025, dodać logarytm ułomka $\frac{2}{3}$, którym iest $-0{,}1760913$; aże drugi logarytm iest odiemny, więc go od pierwszego należy odiąć; i będzie $36 \times \frac{2}{3} = l\,36 + l\,\frac{2}{3} = 1{,}5563025 - 0{,}1760913$.

Skąd się okazuie, że mnożenie liczby całkowitey przez ułomek za pomocą logarytmów odbywa się przez odięcie logarytmu ułomka od logarytmu całkowitey; gdy tym czasem mnożenie liczb całkowitych, iakośmy iuż okazali, odbywa się zawsze przez dodanie logarytmów liczbom tym odpowiadaiących. Przeciwnie dla podzielenia liczby 36 przez ułomek $\frac{2}{3}$, należałoby, odciągaiąc odiemny logarytm ułomka $\frac{2}{3}$ od logarytmu całkowitey 36, podług prawideł odeymowania (24), logarytm ułomka dodać do logarytmu całkowitey; gdy tym czasem dzielenie liczb całkowitych odbywa się przez odięcie logarytmów do liczb

tych

tych należących. Ta nieiednostayność działań za pomocą logarytmów zdawać się może na pierwsze weyrzenie szczególnieyszą. Lecz zgłębiwszy rzecz należycie, przekonamy się, że zawsze odeymonie logarytmów odpowiada dzieleniu liczb, a dodawanie logarytmów odpowiada mnożeniu liczb, czy liczby te są całkowite czy ułomkowe. Jakoż dla otrzymania logarytmu ułomka $\frac{2}{3}$. odeymuiemy logarytm licznika 2 od logarytmu mianownika 3, a przed pozostałą resztą daiemy znak —. Nie zważaiąc zatem na znak —, logarytm ułomka $\frac{2}{3}$ iest właściwie mówiąc logarytmem ilorazu wypadaiącego z podzielenia mianownika 3 przez licznik 2, i należy do ułomka $\frac{3}{2}$. Mnożyć zaś liczbę 36 przez $\frac{2}{3}$ iest to samo, co ią podzielić przez $\frac{3}{2}$: obudwóch bowiem działań wypadkiem iest 24.

147. Lecz można z łatwością uniknąć logarytmów odiemnych w działaniach z ułomkami, iak pospolicie czynić się zwykło: dosyć iest tym końcem cechę logarytmu licznika powiększyć tylu iednościami ile się podoba, byleby od tak powiększonego logarytmu licznika mógł być odiętym logarytm mianownika; a w znalezionym ostatecznym wypadku odciąć z prawey strony tyle cyfr, ile iedności dodało się do cechy logarytmu licznika. I tak chcąc *np.* znaleźć logarytm ułomka $\frac{3}{8}$, do cechy logarytmu licznika 3, który iest 0,4771213, dodawszy *np.* 3 iedności, będzie 3,4771213, logarytm liczby 1000 razy większey niż iest licznik 3 (145). Od tego logarytmu odiąwszy logarytm mianownika 8, który iest 0,9030900, zostanie 2,5740313 logarytm liczby 1000 razy większey niż ułomek $\frac{3}{8}$. Logarytmowi temu odpowiada w tablicy liczba 375: liczba zatem ta podzielona przez 1000 będzie ważnością ułomka $\frac{3}{8}$. I w rzeczy samey ułomek $\frac{3}{8}$ obrócony na ułomek dziesiętny czyni 0,375. Gdyby trzeba było mnożyć ułomek $\frac{3}{8}$ przez całkowitą 36; do powyższego logarytmu 2,5740313, dodawszy logar. liczby 36, który iest 1,5563025, będzie 4,1303338 logarytm, któremu od-

odpowiada w tablicy liczba 13500 tysiąc razy większa niż iloczyn szukany. Iloczyn więc ten będzie 13,500, czyli 13,5. i t. d.

Skąd się okazuie, że odeymowanie logarytmów można zamienić na ich dodawanie, iak się pospolicie czyni, równie dla iednostayności w działaniach z logarytmami, iako też dla ułatwienia tychże działań: odeymowanie bowiem liczb wielkich wymaga większéy uwagi aniżeli dodawanie. Chcąc np. podzielić 186 przez 31, trzeba od logarytmu dzielney, który iest 2,2695129, odiąć logarytm dzielnika, to iest 1,4913616, a reszta 0,7781513 iest logarytmem ilorazu. Lecz zamiast odeymowania logarytmu dzielnika od logarytmu dzielney, można logarytm pierwszy odiąć np. od liczby 10. Odeymowanie to nie wielkiey wymaga uwagi: gdyż wszystkie cyfry logarytmu poczynaiąc od strony lewey odeymuią się od 9; a ostatnią od 10; tym sposobem różnica między liczbą 10 i logarytmem 1,4913616, znayduie się bardzo łatwo, i pisze się pod logarytmem dzielney; potém oba te logarytmy dodaią się, a od ich summy odeymuie się liczba 10, reszta iest logarytmem szukanego ilorazu; będzie zatém

Logarytm dzielnéy - - - - - - - -	2,2695129.
Różnica między 10 i log. dzielnika - -	8,5086384.
Summa	10,7781513.

Od téy summy odiąwszy liczbę 10, będzie 0,7781513 logarytm szukanego ilorazu.

Sposób takowy postępowania zgadza się zupełnie z wyłożonemi zasadami działań algiebraicznych. Jakoż odeymuiąc np. zwyczaynym sposobem ilość b od ilości a; zostaie $a-b$; gdy zaś pierwéy ilość b odeymuie się od 10, i pozostała reszta $10-b$ doda się do ilości a, będzie summa $a+10-b$, od którey odiąwszy 10, zostanie reszta $a-b$ iak wyżey.

Różnica między danym logarytmem a liczbą 10, 100; i t. d. nazywa się *dopełnieniem arytmetycznym* tego logarytmu. 148,

148. Częstokroć się przytrafia, że po odbytém działaniu wypadnie logarytm taki, który się nie znayduie w tablicach. Sposób, podług którego znaleźć można liczbę logarytmowi temu odpowiadaiącą, wyłożymy w następuiącym przykładzie: chcąc za pomocą logarytmów rozmnożyć 354 przez $7\frac{3}{4}$ czyli przez $\frac{31}{4}$; będzie

$l\left(354 \times \frac{31}{4}\right) = l354 + l31 - l4 = 3{,}4383050.$ Logarytm ten w tablicach się nie znayduie: lecz z dwóch naybardziey do niego przybliżaiących się większy iest 3,4383841, który odpowiada liczbie 2744, mnieyszy zaś iest 3,4382258, który odpowiada liczbie 2743. Skąd wnoszę, że liczba odpowiadaiąca logarytmowi 3,4383050 musi być 2743 i ułomek. Dla oznaczenia tego ułomka biorę naprzód różnicę między logarytmami liczb 2744 i 2743, potem różnicę między logarytmem danym 3,438305o i logarytmem liczby 2743; piérwsza z tych różnic iest 0,0001583, druga 0,0000792. Aże różnice logarytmów mało co od siebie odmiennych, mogą być uważane za proporcyonalne różnicom liczb tym logarytmom odpowiadaiących, w działaniach zwłaszcza w których nayczęściéy rzecz idzie o wynalezienie ważności przybliżonych; układam więc następuiącą proporcyą: iak się ma różnica między logarytmami odpowiadaiącemi dwóm liczbom 2744 i 2743 do różnicy tychże liczb; to iest do 1, tak się ma różnica między logarytmem liczby szukanéy i liczby 2743 do różnicy tychże liczb. Różnica zatém między liczbą szukaną i liczbą 2743, będzie czwartym wyrazem następuiącéy proporcyi: $0{,}0001583 : 1 = 0{,}0000792 : x$; czyli (91) $1583 : 1 = 792 : x = \frac{792}{1583} = 0{,}5$ Ułomek ten dodawszy do 2743, będzie 2743,5 liczbą odpowiadaiącą logarytmowi 3,4383050.

Czasem nie tylko cyfry dziesiętne, lecz i cecha danego logarytmu nie zgadza się z logarytmami tablic. I tak chcąc *np.* wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby 28 za pomocą logarytmów, będzie $\sqrt{28} = \frac{l\,28}{2} = 0{,}7235790$. Logarytm ten wzięty z cechą 3 naybliższy iest dwóch logarytmów 3,7236198, i 3,7235378, które odpowiadaią liczbom 5292 i 5291. A zatém logarytm pierwiastku liczby 28 wzięty z cechą 3 odpowiadać będzie liczbie mnieyszéy od 5292, a większéy od 5291; to iest, liczba logarytmowi temu odpowiadaiąca będzie 5291 i ułomek. Abyśmy ten ułomek oznaczyli, weźmy naprzód różnicę między logarytmami liczb 5292 i 5291; potém różnicę między logarytmem pierwiastku liczby 28 wziętym z cechą 3, i logarytmem liczby 5291: pierwsza z tych różnic wynosi 0,0000820, druga 0,0000412. Ułomkiem zatém szukanym będzie czwarty wyraz następuiącéy propor: $0{,}0000820 : 1 = 0{,}0000412 : x = \frac{412}{820} = 0{,}502$.

Ułomek ten dodawszy do liczby 5291, będzie 5291,502 liczba, któréy logarytmem iest 3,7235790. Cyfry dziesiętne tego logarytmu zgadzaią się zupełnie z cyframi dziesiętnemi w znalezionym logarytmie pierwiastku kwadratowego liczby 28; lecz ostatni ma za cechę 0, co dowodzi że liczba temu logarytmowi odpowiadaiąca iest iednocyfrowa (144): pierwiastkiem przeto szukanym będzie liczba 5,291502: taki też iest pierwiastek liczby 28 znaleziony sposobem zwyczaynym.

149. Tablice logarytmów iakich zwyczaynie w działaniach używamy, co do rozległości swoiéy są rozmaite: naypospolitsze rozciagaią się tylko do liczby 10000 lub 20000. Można iednak z łatwością znaleźć logarytm wszelkiéy liczby tak wielkiéy, iak się podoba, za pomocą logarytmów liczb tablicą obiętych, a to sposobem następuiącym: Daymy, że potrzeba znaleźć logarytm liczby 879653 za pomocą tablicy rozciągaiącéy się tylko do 10000. Odciąwszy w liczbie daney dwie

osta-

ostatnie cyfry będzie liczba 8796,53 sto razy mnieysza od liczby daney. Część całkowita tey liczby, to iest 8796, znayduie się w tablicy, i ma za logarytm 3,9442852. Biorę potém z tablicy różnicę logarytmów dwóch liczb po sobie następuiących, to iest 8796 i 8797; różnica ta iest 0,0000494. A że różnice liczb mało co między sobą różniących się mogą być uważane za proporcyonalne różnicom logarytmów liczbom tym odpowiadaiących, iakośmy iuż to uważali; układam więc następuiącą proporcyą: iak się ma 1 różnica dwóch liczb 8797 i 8796, do różnicy ich logarytmów, to iest do 0,0000494, tak się ma 0,53 różnica dwóch liczb 8796,53 i 8796, do różnicy ich logarytmów. A zatém ta ostatnia różnica będzie czwartym wyrazem następuiącéy proporcyi:

$$1:0,0000494 = 0,53: x = 0\ 000026182\ ;$$

opuściwszy dwie ostatnie cyfry dziesiętne, będzie $x = 0,0000261$. Dodawszy liczbę tę do 3,9442852 logar liczby 8796, będzie 3,9443113 logarytm liczby 8796,53 Że zaś liczba ta iest 100 razy mnieysza od liczby daney 879653, więc dodawszy dwie iedności do cechy powyższego logarytmu, będzie logarytm szukany 5,9443113.

150. To cośmy dotąd o logarytmach powiedzieli, dostateczne iest do okazania, iakim sposobem tablic logarytmowych do rachunku używać należy. Prócz tego tablice te maią na wstępie nie tylko wykład porządku podług którego są rozłożone, i który iest w każdem niemal dziele tablic logarytmowych odmienny; ale też podaią różne sposoby i skrócenia w działaniach z logarytmami używane. Wstęp więc takowy pierwey odczytać należy nim się do używania tablic logarytmowych przystąpi.

Odczytuiąc takowe wstępy, natrafiamy częstokroć na wyrażenie, że *logarytm zero równy iest liczbie nieskończoney wziętey ze znakiem odiemnym.* Abyśmy to wyrażenie zrozumieli, uważać potrzeba, że logarytmy równie iak odpowiadaiące im liczby, powiększaią się bez granic, i mogą być nieskończenie wielkie. Aże kiedy liczba y iest ułomkiem, logarytm iéy x ma zawsze przed sobą znak odiemny, i iest ilością tem większą, im mnieyszą ma ważność liczba y, iakośmy to wyżéy uważali (138) iest więc rzeczą oczywistą, że w tym przypadku nie podobna dla x naznaczyć ważności tak wielkiey, ażeby ważność ta wzięta ze znakiem odiemnym, czyniła liczbę y zupełnie równą zeru; a tém samem logarytmem zera musi być liczba nieskończóna wzięta ze znakiem odiemnym.

151 Układ logarytmów liczbę 10 za zasadę maiących, o których dotąd mówiliśmy, zowie się układem logarytmów *pospolitych*, dla różnicy od innych układów logarytmowych podług inney zasady wyrachowanych i maiących inne nazwiska. W każdym układzie logarytmem iedności iest zero: gdyż iakakolwiek będzie ważność zasady a, zawsze iest $a^0 = 1$. Wszystkie inne liczby, iedność wyłączywszy, maią w każdym układzie inne logarytmy; rzeczą bowiem iest widoczną, że ieżeli a i A są dwie różne zasady dwóch układów logarytmowych, i ieżeli iest w iednym układzie $a^x = y$, w drugim $A^{x_{\prime}} = y$: wykładnik x będący logarytmem liczby y w układzie pierwszym musi być koniecznie odmienny od wykładnika $x_{\prime}$ będącego logarytmem teyże samey liczby y w układzie drugim. Lecz maiąc logarytm liczby iakieykolwiek y podług zasady a wyrachowany, łatwo iest otrzymać logarytm teyże liczby stosowny do inney iakieykolwiek zasady przez A oznaczoney. Jakoż z dwóch równań $a^x = y$, $A^{x_{\prime}} = y$, wypada $A^{x_{\prime}} = a^x$. Oznaczywszy przez l logarytmy maiące za zasadę a; będzie $lA^{x_{\prime}} = la^x$.

Że zaś podług założenia $la^x = ly$; a $lA^{x_{\prime}} = x_{\prime}lA$ 137); będzie więc $x_{\prime}lA = ly$; a tem samem

$$x_{\prime} = \frac{ly}{lA}.$$

Lecz

Lecz uważaiąc A za zasadę, $x_{\prime}$ iest logarytmem liczby y w układzie drugim: oznaczywszy zatém logarytmy tego drugiego układu przez L, będzie $LA^{x_{\prime}} = Ly$; czyli $x_{\prime} = Ly$. W powyższém więc równaniu zamiast $x_{\prime}$ położywszy Ly, będzie

$$Ly = \frac{ly}{lA}.$$

To iest: *chcąc znaleść logarytm liczby* y *w układzie drugim, trzeba iey logarytm wzięty z układu pierwszego podzielić przez takiż logarytm zasady układu drugiego.*

Z równania poprzedzaiącego wypada także

$$\frac{ly}{Ly} = lA$$

Skąd sie okazuie, że iakakolwiek iest liczba y, zawsze między iey logarytmami ly i Ly zachodzi stosunek nieodmienny i równy lA.

152. Abyśmy się z używaniem logarytmów oswoili, rozwiążemy za ich pomocą naprzód niektóre formuły ogólne, potém zagadnienia liczebne.

Z definicyi logarytmów i z tego cośmy o nich dotąd powiedzieli wypada, że

1ód, $l(AB) = lA + lB$. 2re, $l\left(\frac{A}{B}\right) = lA - lB$.

3cie, $lA^m = m\,lA$. 4te, $lA^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\,lA$.

Stosuiąc prawidła te do formuły:

$$\frac{A^2\sqrt{B^2 - C^2}}{C\sqrt[5]{D^3EF}},$$ znaydziemy

$$l(A^2\sqrt{B^2 - C^2}) = l[A^2\sqrt{(B+C)(B-C)}]$$
$$= 2lA + \tfrac{1}{2}l(B+C) + \tfrac{1}{2}l(B-C)$$
$$l(C\sqrt[5]{D^3EF}) = lC + \tfrac{3}{5}lD + \tfrac{1}{5}lE + \tfrac{1}{5}lF.$$

Dana więc formuła zamieni się w następuiącą:

$$2lA + \tfrac{1}{2}l(B+C) + \tfrac{1}{2}l(B-C) - lC - \tfrac{3}{5}lD - \tfrac{1}{5}lE - \tfrac{1}{5}lF$$

Równanie $b^z = c$ chcąc rozwiązać za pomocą logarytmów będzie

$lb^z = lc$; ażeli $lb^z = z\,lb$, więc $z\,lb = lc$, a tém samém

$$z = \frac{lc}{lb}.$$

Podobnież chcąc za pomocą logarytmów rozwiązać równanie $b^{c^z} = d$, w którém z wykładnik wykładnika c iest ilością niewiadomą; trzeba naprzód uczynić $c^z = u$ tym sposobem równanie dane zamieni się w następuiące: $b^u = d$; więc $lb^u = ld$; czyli $u\,lb = ld$; a tem samem

$u = \frac{ld}{lb}$, czyli $c^z = \frac{ld}{lb}$: gdyż $u = c^z$ podług przypuszczenia. W tém równaniu wziąwszy znowu logarytm obu stron, będzie

$$z\,lc = l\left(\frac{ld}{lb}\right) = ll\,d - ll\,b: \text{ więc}$$

$$z = \frac{ll\,d - ll\,b}{lc}.$$

W tem ostatniém wyrażeniu wyraz $ll\,d$ znaczy logarytm logarytmu ilości d, i otrzymuie się uważaiąc logarytm ilości d iako liczbę pospolitą.

Ilości b^z, b^{c^z} i tym podobne, zowią się *wykładnicze*, *exponentiales*.

153. Zagadnienie I. *W postępie jeometrycznym maiąc wiadomy wyraz pierwszy* a, *ostatni* l, *i liczbę wyrazów* n, *znaleźć stosunek* q; *albo też maiąc wiadome* a, l *i* q, *znaleźć* n.

Z równania $l = aq^{n-1}$ (133) wypada

$q^{n-1} = \frac{l}{a}$; czyli $(n-1)\log. q = \log. l - \log. a$;

więc $\log. q = \frac{\log. l - \log. a}{n-1}$: $n = 1 + \frac{\log. l - \log. a}{\log. q}$.

Chcąc *np.* między dwiema liczbami 3 i 192 umieścić pięć średnich jeometrycznie proporcyonalnych, trzeba ułożyć postęp jeometryczny, którego wyraz pierwszy iest 3, ostatni 192, a liczba wyrazów 7. Postęp takowy łatwo będzie ułożyć znalazłszy stosunek. Położywszy więc w powyższém

szém równaniu 192 zamiast l, 3 zamiast a, 6 zamiast $n-1$, będzie

$$\log. q = \frac{\log. 192 - \log. 3}{6} = 0{,}3010300.$$

Logarytm ten odpowiada liczbie 2; więc $q=2$. Postęp zatem szukany będzie $\div$ 3: 6: 12: 24: 48: 96: 192.

Podobnież chcąc rozwiązać zagadnienie następuiące: *z beczki obeymuiącey* 100 *garcy wina, utoczono garniec wina, a wlano garniec wody; utoczono znowu garniec tey mieszaniny, a wlano garniec wody; i t. d: iluż razy działanie to powtórzyć należy, aby w ostatniey mieszaninie w beczce znayduiącey się woda z winem na pół była zmieszana?* trzeba uważać, że za każdém działaniem ubywa setna część wina w beczce się znayduiącego; liczby zatem wyrażaiące ilość wina w beczce będącego składaią postęp jeometryczny maleiący, którego wyraz pierwszy iest 100, drugi 99, ostatni 50, stosunek zaś $\frac{99}{100}$. Postęp ten zamienić można na postęp rosnący, którego pierwszy wyraz iest 50, ostatni 100, a stosunek $\frac{100}{99}$. Liczba wyrazów postęp ten składaiących iest widocznie iednością większa od liczby działań do otrzymania żądaney mieszaniny potrzebnych: gdyż oprócz wyrazów oznaczaiących ilość wina po każdém działaniu w beczce pozostałą, iest ieszcze wyraz ostatni 100 oznaczaiący ilość wina znayduiącego się w beczce przed rozpoczęciom działań. W równaniu zatém

$$n = 1 + \frac{\log. l - \log. a}{\log. q},$$ odiąwszy po obu stronach 1, i położywszy 100 zamiast l, 50 zamiast a, a $\frac{100}{99}$ zamiast q, będzie

$$n-1 = \frac{\log. 100 - \log. 50}{\log. 100 - \log. 99} = \frac{0{,}3010300}{0{,}0043648} = 68{,}9.$$

To iest: potrzeba było utoczyć z beczki blisko 69 garcy.

Ten sam iest sposób postępowania we wszystkich innych zagadnieniach, w iakimkolwiek bądź kształcie wysłowionych, które z wiadomości o postępach jeometrycznych ułożyć można, iakie są *np.* następuiące:

Właściciel wartuiącey kilka kroć stotysięcy maiętności oświadcza przyiaciołom, że maiętność tę podzielił na 32 akcyy równych, które chciałby sprzedać w następuiacy sposób: pierwszą akcyą za 1 grosz miedziany, drugą za 2 grosze, trzecią za 4 grosze, czwartą za 8 groszy i t. d. lecz z tym istotnym warunkiem dla początkowych akcyonistów, że póty akcyy swoich nie zaymą w posiadłość, póki mu kupców nie wynaydą na wszystkie. Ileż będzie kosztowała ostatnia akcya, i ileby dostał właściciel za maiętność tym sposobem sprzedaną?

Dłużnik winnym będąc 54000 zł. umawia się z wierzycielem, że ieśli mu długu tego nie wypłaci na oznaczonym terminie, tedy za pierwszy miesiąc przetrzymaney wypłaty, zapłaci od każdego sta po 1 denarze, za drugi po 2 denary, za trzeci po 4 denary i t. d. Wypłata długu przetrzymana była lat 8 i 4 miesiące; iakąż summę prócz kapitału winien iest dłużnik wierzycielowi?

W pierwszém z tych dwóch zagadnień idzie o wynalezienie wyrazu ostatniego i summy wszystkich wyrazów składaiących postęp jeometryczny, którego wyraz pierwszy iest 1, stosunek 2, a liczba wyrazów 32. W równaniach zatem

$$l = aq^{n-1},\ s = \frac{ql - a}{q - 1} \quad (135)$$

uczyniwszy $a = 1$, $q = 2$, $n = 32$, będzie $l = 2^{31}$ $s = 2 . 2^{31} - 1 = 2^{32} - 1$. Odbywszy działanie za pomocą logarytmów znaydziemy $l = 2147483648$ groszy $s = 4294967295$ groszy czyli $l = 3976821$ cz. zł. 10 zł. i groszy 8.

$s =$

$s = 7953643$ cz. zł. 1 złote i groszy 15.

Zagadnienie drugie tem się różni od pierwszego, że w niem potrzeba znaleźć summę postępu jeometrycznego złożonego ze 100 wyrazów, w którym wyraz piérwszy iest złoty ieden, wyraz drugi złotych 2 i t. d. rachuiąc na ieden grosz miedziany denarów 18, Będzie zatém $s = 2^{100} - 1$.

To iest: liczbę 2 podniosłszy do potęgi setnéy i od wypadku odiąwszy iedność, reszta będzie summą złotych, którą dłużnik oprócz kapitału winien wierzycielowi. Będzie więc
$2^{100} = \log. 2 \times 100 = 0,3010300 \times 100 = 30,1030000.$

Ponieważ ten logarytm ma za cechę 30 iedności, summa zatem szukana składa się ze 31 cyfr (144). i t. d.

154. Zagad. II. *Kapitał a umieszczony w banku na lat* n *iaki będzie na końcu ostatniego roku wraz z procentem, bioręc procent składany, czyli rachuiąc procent od procentu?*

Procent roczny od kapitału, iak wiadomo z Arytmetyki, dwoma sposobami odtrącić można: albo liczbę set w kapitale zawartych mnożąc przez procent roczny od iednego sta; albo liczbę iedności kapitał składaiących mnożąc przez procent roczny od iednego złotego. W pierwszym przypadku procent roczny równa się kapitałowi podzielonemu przez 100, a rozmnożonemu przez liczbę wyrażaiącą procent roczny od sta; w drugim przypadku *procent roczny rowna się kapitałowi rozmnożonemu przez liczbę wyrażaiocą procent roczny od* 1.

Oznaczywszy zatém procent roczny od 1 przez r, procent roczny od kapitału a umieszczonego w banku, podług powyższego prawidła, będzie $= ar$. Że zaś podług zagadnienia, wierzyciel przyłącza procent do kapitału, dodawszy zatém procent ar do kapitału początkowego a, kapitał wraz z procentem na końcu roku piérwszego będzie

$$a + ar = a(1 + r).$$

Ka-

Kapitał ten zostawiony w banku na rok drugi, przyniesie rocznego procentu, podług powyższego prawidła, $ar(1+r)$, który dodawszy do kapitału $a(1+r)$, będzie kapitał wraz z procentem na końcu roku drugiego.
$a(1+r)+ar(1+r)=(a+ar)(1+r)=a,(1+r)(1+r)=a(1+r)^2$.

Kapitał znowu ten zostawiony w banku na rok trzeci, przyniesie procentu rocznego $ar(1+r)^2$, który dodawszy do kapitału $a(1+r)^2$, będzie kapitał wraz z procentem na końcu roku trzeciego
$a(1+r)^2+ar(1+r)^2=(a+ar)(1+r)^2=a(1+r)(1+r)^2=a(1+r)^3$.

Tym sposobem postępuiąc daléy, znaydziemy, że kapitał wraz z procentem na końcu roku czwartego będzie $a(1+r)^4$; na końcu roku piątego $a(1+r)^5$ i t. d. na końcu roku ostatniego czyli n, $a(1+r)^n$.

Poozątkowy zatem kapitał a wraz z kapitałami na końcu roku 1go, 2go, 3go... $n$go składa następuiący postęp jeometryczny:
$\div a : a(1+r) : a(1+r)^2 : a(1+r)^3$ - - - - $a(1+r)^n$,
w którym $1+r$ iest stosunkiem, liczba wyrazów $n+1$, a wyraz ostatni $a(1+r)^n=A$.

Zwyczayny procent iest po 5 od sta, w tym więc przypadku będzie
$r=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$: a tem samém $1+r=1+\frac{1}{20}=\frac{21}{20}$.
Chcąc się *np.* dowiedzieć w iaką summę urośnie na końcu 25 roku kapitał 1000 zł dany na takowy procent po 5 od sta, trzeba w równaniu $A=a(1+r)^n$ uczynić $a=1000$, $r=\frac{1}{20}$, $n=25$; tym sposobem równanie to zamieni się w następuiące:

$A=1000\left(\frac{21}{20}\right)^{25}$; co rozwiązawszy za pomocą logarytmów będzie $lA=l1000+(l21-l20)\times 25=3,5297322$.

Logarytm ten w tablicach odpowiada liczbie 3386,353 blisko. To iest: 1000 zł. dane na takowy procent na końcu 25 roku urosłyby w summę 3386,353.

Gdy-

Gdyby summa zostawała w banku przez lat 100, znaleźlibyśmy $A = 1000\ (\frac{21}{20})^{100} = 1000 \times 131{,}5 = 131500$ blisko.

To iest: 1000 zł dane na takowy procent na końcu 100 roku urosłyby w summę 131500. Skąd się okazuie iak szybko rosną kapitały przez przydawanie do nich procentów składanych.

Z równania $A = a\,(1+r)^n$, można wyprowadzić cztery zagadnienia: 1. *Maiąc wiadomy kapitał początkowy* a, *procent roczny* r, *i liczbę lat pobieranych procentów* n; *znaleźć kapitał ostateczny* A. Zagadnienie to rozwiązaliśmy wyżéy.

2. *Maiąc wiadome* a, A *i* n, *znaleźć* r.

W rownaniu $A = a\,(1+r)^n$ podzieliwszy obie strony przez a będzie $(1+r)^n = \frac{A}{a}$ czyli $\mathrm{l}(1+r) \times n = \mathrm{l}A - \mathrm{l}a$; więc

$$\mathrm{l}\,(1+r) = \frac{\log.A - \log.a}{n}.$$

np. *Dłużnik maiąc za lat* 12 *zapłacić summę* 20122 *zł. chce dla pozbycia się tego długu oddać natychmiast wierzycielowi* 10000 *zł. iakiż potrąca sobie procent?*

W powyższéy formule położywszy 20122 zamiast A, 10000 zamiast a, 12 zamiast n, będzie

$$\mathrm{l}(1+r) = \frac{\mathrm{l}20122 - \mathrm{l}10000}{12} = \frac{0{,}3036711}{12} = 0{,}0253059$$

Logarytm ten wzięty z cechą 2, w tablicy odpowiada liczbie 106: ten sam więc logarytm wzięty z cechą 0 odpowiadać będzie liczbie 100 razy mnieyszéy: a tém samem $1 + r = 1{,}06$ więc $r = 0{,}06$; to iest: dłużnik potrąca sobie po 6 od sta.

3. *Maiąc wiadome* A, r *i* n, *znaleźć* a.

Z równania $A = a\,(1+r)^n$ wypada $a = \frac{A}{(1+r)^n}$; czyli $\mathrm{l}a = \mathrm{l}A - \mathrm{l}\,(1+r) \times n$.

np. *Dłużnik za lat* 15 *winien iest zapłacić* 100000 *zł. bez procentu: iakąż summę ma teraz* od-

oddać wierzycielowi dla pozbycia się tego długu, z potrąceniem sobie procentu po 5 od sta?

Uczyniwszy $100000 = A$, $15 = n$, $\frac{1}{20} = r$, a tém samém $\frac{21}{20} = 1 + r$; powyższa formuła zamieni się w następuiącą:

$$\mathrm{l}\,a = \mathrm{l}\,100000 - \mathrm{l}\left(\tfrac{21}{20}\right) \times 15.$$

Że zaś $\mathrm{l}\left(\frac{21}{20}\right) = \mathrm{l}\,21 - \mathrm{l}\,20$, trzeba więc różnicę tych dwóch logarytmów rozmnożyć przez 15, iloczyn ten odiąć od logarytmu liczby 100000; reszta będzie logarytmem liczby szukanéy.

4. *Maiąc wiadome* A *a* i r, *znaleźć* n.

Z równania $A = a\,(1 + r)^n$, wypada $\mathrm{l}A = \mathrm{l}a + \mathrm{l}\,(1 + r) \times n$: więc

$$n = \frac{\mathrm{l}A - \mathrm{l}a}{\mathrm{l}\,(1 + r)}.$$

Chcąc *np.* dowiedzieć się za ile lat kapitał *a* dany na procent po 5 od sta, zostanie podwoiony, w równaniu $A = a\,(1 + r)^n$ położywszy naznaczone ważności, będzie

$$2a = a\left(\tfrac{21}{20}\right)^n \text{ czyli } 2 = \left(\tfrac{21}{20}\right)^n; \text{ więc}$$

$$\mathrm{l}\,2 = (\mathrm{l}\,21 - \mathrm{l}\,20) \times n, \text{ a tém samém}$$

$$n = \frac{\mathrm{l}\,2}{\mathrm{l}\,21 - \mathrm{l}\,20} = 14,2 \text{ blisko};$$

to iest: kapitał umieszczony w banku na procent składany po 5 od sta rocznie, podwoiony zostanie za lat 14, miesięcy 2 i dni blisko 15.

155. Zagadnienie III. *Umieszczono w banku piérwszego roku summę* a, *drugiego roku przydano summę* b, 3go *summę* c, 4go *summę* d; *ostatniego roku summę* k, *na procent składany: i t. d; iakiż będzie kapitał wraz z procentami na końcu roku* n?

Piérwsza summa *a* leżąc w banku przez liczbę lat *n*, urośnie na końcu w kapitał $a\,(1 + r)^n$ (154).

Druga summa *b* leżąc w banku przez lat $n-1$ urośnie w kapitał $b\,(1 + r)^{n-1}$.

Trzecia summa *c* leżąc w banku przez lat $n-2$ urośnie w kapitał $c\,(1 + r)^{n-2}$ i t. d. Nakoniec o-

sta-ostatnia summa k leżąc w banku przez ieden tylko rok urośnie w kapitał $k(1+r)$; Będzie więc kapitał ostateczny, czyli

$$A = a(1+r)^n + b(1+r)^{n-1} + c(1+r)^{n-2} + \ldots k(1+r).$$

Znalazłszy ważność każdego wyrazu strony drugiey tego równania, znaydziemy kapitał ostateczny A.

Działanie to iest nierównie łatwieysze, gdy iest

$a = b = c = d \ldots = k$; gdyż na tenczas wypadnie

$$A = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \ldots + a(1+r).$$

Druga strona tego równania składa postęp jeometryczny, w którym wyraz piérwszy iest $a(1+r)$, wyraz ostatni $a(1+r)^n$ stosunek $1+r$. A zatém summa postępu tego będzie (134).

$$\frac{a(1+r)^n(1+r) - a(1+r)}{r}$$

$$= \frac{a(1+r)^{n+1} - a(1+r)}{r}; \text{ czyli}$$

$$\frac{a(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r} = A.$$

Z równania tego można także wyprowadzić cztéry zagadnienia takie iakieśmy wyprowadzili z równania $A = a(1+r)^n$.

156. Zagadnienie IV. *Dłużnik winnym będąc summę* A, *umawia się z wierzycielem, że mu dług ten wraz z procentem ratami wypłacać będzie. Na mocy tey umowy wierzyciel przy końcu każdego roku dostaie od dłużnika summę* a. *Tym sposobem przez lat* n *dług wraz z procentami od procentów umorzony został. Ileż wynosiła summa* a*?*

Początkowy kapitał A zostaiąc w ręku dłużnika przez rok piérwszy, na końcu roku tego urośnie w summę $A(1+r)$, a po oddaniu wierzycielowi summy a, na początku roku drugiego zostanie u dłużnika $A(1+r) - a = B$.

Ka

Kapitał B zostaiąc w ręku dłużnika przez rok drugi, na końcu roku tego urośnie w summę $B(1+r)$, a po oddaniu wierzycielowi summy a na początku roku trzeciego, zostanie u dłużnika $B(1+r)-a$; czyli, zamiast B położywszy iego ważność, $A(1+r)^2-a(1+r)-a=C$.

Kapitał C zostaiąc w ręku dłużnika przez rok trzeci, na końcu roku tego zamieni się w summę $C(1+r)$; a po oddaniu wierzycielowi summy a, na początku roku czwartego zostanie u dłużnika $C(1+r)-a$; czyli zamiast C położywszy iego ważność,

$A(1+r)^3-a(1+r)^2-a(1+r)-a$.

Tu iuż łatwo pomiarkować, że na końcu roku n po oddaniu wierzycielowi summy a zostanie u dłużnika

$$A(1+r)^n-a(1+r)^{n-1}-a(1+r)^{n-2} \cdots -a(1+r)-a.$$

Że zaś podług warunków zagadnienia dług na ten czas będzie zaspokoiony; będzie więc

$$A(1+r)^n-a(1+r)^{n-1}\ldots-a(1+r)-a=0 \text{ czyli}$$

$$A(1+r)^n-a-a(1+r)-a(1+r)^2 \cdots -a(1+r)^{n-1}=0, \text{ czyli}$$

$$A(1+r)^n-a\left[1+(1+r)+(1+r)^2 \cdots +(1+r)^{n-1}\right]=0.$$

Wyrazy przez które ilość a iest rozmnożona, składaią postęp jeometryczny, którego wyraz pierwszy iest 1, ostatni $(1+r)^{n-1}$ a stosunek $1+r$: summa zatem postępu tego będzie (134)

$$\frac{(1+r)^{n-1}\times(1+r)-1}{r}=\frac{(1+r)^n-1}{r}. \ (135):$$

Powyższe więc równanie zamieni się w następu:

$$A(1+r)^n-\frac{a\left[(1+r)^n-1\right]}{r}=0; \text{ a tém samém}$$

$$A(1+r)^n=\frac{a\left[(1+r)^n-1\right]}{r}. \text{ więc}$$

$$a=\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

Chcąc

Chcąc *np.* dowiedzieć się ile należy rocznie płacić dla umorzenia w przeciągu 12 lat długu wynoszącego zł. 100 pożyczonych na 5 od sta rocznie, trzeba w równaniu ostatniem uczynić $A = 100$, $n = 12$, $r = \frac{1}{20}$, a tem samem będzie $(1+r)^n = (\frac{21}{20})^{12} = 1{,}79586$. Ważności te położywszy w równaniu powyższem na mieysou głosek, równanie to zamieni się w następuiące:

$$a = \frac{100 \cdot \frac{1}{20} \cdot 1{,}79586}{1{,}79586 - 1} = \frac{5 \cdot 1{,}79586}{0{,}79586} = 11{,}2826$$

To iest: dla umorzenia w przeciągu 12 lat długu wynoszącego zł. 100 i procentów od niego rachowanych po 5 od sta rocznie, trzeba co rok wierzycielowi płacić zł. 11, 28.

Z równania $A(1+r)^n = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r}$ można wyprowadzić cztéry następuiące zagadnienia:

1. *Maiąc wiadome* A, r, n, *znaleźć* a; 2. *Maiąc wiadome* a, r, n, *znaleźć* A; 3. *Maiąc wiadome* A, a, n, *znaleźć* r; 4. *Maiąc wiadome* A, a, r, *znaleźć* n.

Piérwsze z tych cztérech zagadnień rozwiązaliśmy wyżéy; podobnym sposobem można rozwiązać drugie i trzecie: chcąc rozwiązać czwarte, trzeba się udać do logarytmów, a naprzód ilość niewiadomą $(1+r)^n$ uwolnić potrzeba od wiadomych. W równaniu

$A(1+r)^n = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r}$, zniosłszy mianownik, i *rozwinąwszy* licznik drugiéy strony, to iest wykonawszy mnożenie wskazane, będzie

$$Ar(1+r)^n = a(1+r)^n - a.$$

Dodawszy a po obu stronach, i odiąwszy $Ar(1+r)^n$ będzie

$a(1+r)^n - Ar(1+r)^n = a$; rozłożywszy na czynniki,

$(a - Ar)(1+r)^n = a$, więc $(1+r)^n = \frac{a}{a - Ar}$.

Ró-

Równanie to przez użycie logarytmów zamieni się w następuiące:

$l(1+r) \times n = la - l(a - Ar)$ A zatém

$$n = \frac{la - l(a - Ar)}{l(1+r)}$$

Gdyby było *np.* zagadnienie: *Zaciągniono długu* 10000 *cz. zł. na* 6 *od sta, z warunkiem że dłużnik wypłacać będzie co rok wierzycielowi po* 1000 *cz. zł. póty, póki się zupełnie z długu nie uiści; za ileż lat dług wraz z procentami i od procentów umorzony będzie?*
w powyższéy formule uczyniwszy $A = 10000$; $a = 1000$, $r = 0{,}06$; znaydziemy $n = 15{,}7$.

157 Wyłożone wyżéy trzy głównieysze gatunki zagadnień o procentach składanych należycie zrozumiane, ułatwią rozwiazywanie innych tegoż rodzaiu zagadnień w rozmaitym sposobie ułożonych, iak są *np.* następuiące:

Kupiec ma w iednym handlu 100000, *w drugim* 120000; *kapitał pierwszy przynosi mu rocznie* 15, *drugi* 12 *od sta: procenta te przyłącza do kapitałów: za ileż lat dwa te kapitały będą sobie równe?*

Oznaczywszy liczbę szukaną lat przez n, kapitał pierwszy na końcu tego roku wraz z procentami będzie $100000\,(\frac{115}{100})^n$, drugi zaś będzie $120000\,(\frac{112}{100})^n$. Aże podług zagadnienia dwa te ostateczne kapitały maią być sobie równe będzie,

$$100000\,(\tfrac{115}{100})^n = 120000\,(\tfrac{112}{100})^n.$$

Podzieliwszy obie strony przez 100000 będzie

$$(\tfrac{115}{100})^n = 1{,}2\,(\tfrac{112}{100})^n.$$

Zniosłszy mianownik 100^n i podzieliwszy obie strony przez 112^n wypadnie

$(\frac{115}{112})^n = 1{,}2$, czyli $(l\,115 - l\,112) \times n = l\,1{,}2$; więc

$$n = \frac{l\,1{,}2}{l\,115 - l\,112} = \frac{0{,}0792811}{0{,}0114798} = 6{,}9 \text{ blisko.}$$

Inne zagadnienie. *Jedna osoba daie na procent składany* 12000 *zł. po* 6 *od sta rocznie, druga* *ga zaś dała także na procent składany 11800 zł. po $\frac{1}{2}$ od sta miesięcznie: za ileż lat dwa te kapitały będą równe?*

W piérwszym kapitale procent roczny od 1 wypada $\frac{6}{100}$, w drugim procent miesięczny od 1 iest $\frac{1}{200}$. Oznaczywszy zatém liczbę szukaną lat przez n, a tém samem liczbę szukaną miesięcy przez $12n$, powyższe dwa kapitały przy końcu tego czasu zamienią się piérwszy w summę $12000\,(\frac{106}{100})^n$, drugi w summę $11800\,(\frac{201}{200})^{12n}$ (:54); i będzie podług warunków zagadnienia.

$$12000\,(\tfrac{106}{100}) = 11800\,(\tfrac{201}{200})^{12n};$$
$$60\,(\tfrac{106}{100})^n = 59\,(\tfrac{201}{200})^{12n}; \text{ czyli}$$
$$l\,60 + l\tfrac{106}{100} \times n = l\,59 + l\tfrac{201}{200} \times 12n, \text{ więc}$$
$$l\tfrac{201}{200} \times 12n - l\tfrac{106}{100} \times n = l\,60 - l\,59, \text{ czyli}$$
$$n\,(12\,l\tfrac{201}{200} - l\tfrac{106}{100}) = l\,60 - l\,59; \text{ a tém samém}$$
$$n = \frac{l\,60 - l\,59}{12\,l\frac{201}{200} - l\frac{106}{100}}; \text{ i t. d.}$$

Rejestr głównieyszych wiadomości.

ROZDZIAŁ IX.

Zawieraiący obszernieyszy wykład niektórych wiadomości dotąd wyłożonych.

158. Wszystko to, cośmy w poprzedzaiących rozdziałach wyłożyli, uważać należy iako piérwszy kurs Algiebry Elementarnéy, w którym rzeczy tylko łatwieysze i do początków istotnie należące mieścić się powinny. Opuściliśmy wiele wiadomości wyższych, z wyłożonemi dotąd ścisły związek maiących, które wymagaiąc głębszego zastanowienia i obszernieyszych wykładów, nie iednego z poczynaiących mogłyby odstręczyć, a które będąc dopiero w dalszey Algiebrze potrzebnemi, wyłożone na właściwszem dla siebie mieyscu; opozniłyby wykład wiadomości w początkowéy Algiebrze naypotrzebnieyszych; i same mogłyby pierwéy z pamięci wypaść, nimby przyszło do oswoienia się z niemi przez częste ich używanie w rozwięzywaniu zagadnień trudnieyszych po większéy części, nie są podane dotąd. Wszystkie takie wiadomości razem zebrane umieściliśmy w tym i w następuiącym rozdziele, które pod tym względem za przydatek do rozdziałów póprzedzaiących uważać należy.

I. *Dzielenie ilości algiebraicznych wielorakich.*

159. Ze czterech działań arytmetycznych znakami ogólnemi odbywaiących się, pozostało ieszcze do wyłożenia dzielenie ilości algiebraicznych wielorakich. Dzielenie to, bez którego początkowa Algiebra łatwo obeyść się może, do zrozumienia dalszych iéy wiadomości będzie istotnie potrzebne: teraz ie więc wykładamy.

Ponieważ dzielnik rozmnożony przez iloraz daie iloczyn równy dzielnéy, dzielna zatem powinna w sobie zamykać wszystkie cząstkowe iloczyny każdego wyrazu dzielnika rozmnożonego przez każdy wyraz ilorazu; i gdyby można było rozpoznać te iloczyny cząstkowe w dzielnéy zawarte, dzieląc ie przez wiadome wyrazy dzielnika, znaleźlibyśmy wyrazy ilorazu, tak iak w Arytmetyce znayduią się wszystkie cyfry ilorazu dzieląc następnie przez dzielnik liczby uważane za cząstkowe iloczyny tegoż dzielnika rozmnożonego przez wszystkie cyfry ilorazu. Ale w liczbach cząstkowe te iloczyny łatwo można rozpoznać: następuią one po sobie porządnie zaczynaiąc od iedności umieszczonych w ostatnim rzędzie po lewéy stronie. gdyż iedności każdéy cyfry w liczbie dzielnéy zależą od rzędu, który cyfra ta zastępuie: co w wyrażeniach algiebraicznych nie ma mieysca; lecz się temu zaradza układaiąc wyrazy dzielnéy i dzielnika w takim porządku, aby wykładniki potęg iednéyże głoski były coraz mnieysze zaczynaiąc od lewéy ręki ku prawéy, iak iest w dwóch następuiących ilościach:

$5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$,

$5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$,

z których piérwsza iest iloczynem, druga mnożnikiem w przytoczonym wyżéy (36) przykładzie mnożenia, a w obudwóch wykładniki głoski *a* są coraz mnieysze idąc od lewéy ręki do prawéy; ułożenie takowe wyrazów dzielnéy i dzielnika nazywa się *uporządkowaniem* danych ilości.

Gdy dwie dane ilości są tym sposobem uporządkowane, rzeczą iest widoczną, że iakikolwiek iest czynnik, przez który mnożyć należy drugą dla otrzymania piérwszéy, wyraz $5a^7$, od którego zaczyna się piérwsza, powstał z rozmnożenia wyrazu $5a^4$, od którego zaczyna się druga, przez wyraz w którym głoska *a* ma naywyższy wykładnik w czynniku szukanym, i od którego zaczynać się musi tenże czynnik szukany, gdy w nim wyrazy są uporządkowane podług wykładnika głoski *a*. Podzieliwszy zatém $5a^7$ przez $5a^4$, iloraz a^3 (42) będzie piérwszym wyrazem szukanego

czyn-

czynnika. Aże podług prawideł mnożenia, całkowity iloczyn powinien w sobie zamykać rozmaite iloczyny cząstkowe powstaiące z rozmnożenia wszystkich wyrazów mnożnéy przez każdy wyraz mnożnika; wypada stąd, że ilość wzięta tu za dzielną powinna zamykać iloczyny wszystkich wyrazów dzielnika, który iest $5a^4 - 2a^3 b + 4a^2 b^2$, przez pierwszy wyraz ilorazu, to iest przez a^3, i że tem samem odiąwszy od dzielnéy te cząstkowe iloczyny, które są: $5a^7 - 2a^6 b + 4a^5 b^2$, reszta

$$-20a^6 b + 8a^5 b^2 - 6a^4 b^3 - 4a^3 b^4 + 8a^2 b^5,$$

zamykać w sobie będzie te tylko cząstkowe iloczyny, które pozostaią z rozmnożenia wszystkich wyrazów dzielnika przez drugi, trzeci i t. d. wyraz szukanego ilorazu.

Pozostała zatém reszta może być uważana iako cząstkowa dzielna, a piérwszy iéy wyraz, w którym głoska a ma naywyższy wykładnik, nie mógł inaczéy powstać, iak tylko z rozmnożenia piérwszego wyrazu w dzielniku przez wyraz drugi w szukanym ilorazie: podzieliwszy zatem piérwszy wyraz pozostałéy reszty, to iest $-20a^6 b$, przez piérwszy wyraz dzielnika, to iest przez $5a^4$, znaleziony iloraz $-4a^2 b$ (46) będzie drugim wyrazem szukanego ilorazu. Przez ten drugi wyraz rozmnożywszy wyrazy dzielnika, i powstałe stąd iloczyny cząstkowe odiąwszy od reszty, druga reszta $+10a^4 b^3 - 4a^3 b^4 + 8a^2 b^5$, zamykać w sobie będzie te tylko cząstkowe iloczyny, które powstaią z rozmnożenia wszystkich wyrazów dzielnika przez wyraz trzeci i t. d szukanego ilorazu.

Tę drugą pozostałą resztę uważaiąc znowu iako drugą cząstkową dzielną, piérwszy iéy wyraz $10a^4 b^3$ nie mógł powstać innym sposobem, iak tylko z rozmnożenia piérwszego wyrazu w dzielniku przez trzeci wyraz w szukanym ilorazie: podzieliwszy zatém piérwszy wyraz drugiéy reszty, który iest $10a^4 b^3$, przez piérwszy wyraz dzielnika, to iest przez $5a^4$, iloraz $2b^3$ będzie trzecim wyrazem szukanego ilorazu. Przez ten trzeci wyraz rozmnożywszy wszystkie wyrazy dzielnika, i cząstkowe iloczyny z rozmnożenia tego wynikłe odiąwszy od drugiéy reszty, nic się nie zostanie: co dowodzi, że szukany iloraz ma tylko trzy wyrazy.

161. Chcąc działanie to porządnie odbyć, trzeba zachować następuiące prawidła:

1*od* Uporządkowawszy wyrazy dzielney i dzielnika podług wykładników iedneyże głoski, to iest tak, aby wykładniki te coraz się zmnieyszały zaczynaiąc od ręki lewey ku prawey stronie pisze się dzielnik obok dzielney po prawey stronie, i między dwiema temi ilościami daie się liniyka pionowa.

2*re*. Dzieli się piérwszy wyraz dzielney przez piérwszy wyraz dzielnika podług prawideł na dzielenie ilości poiedynczych, a znaleziony iloraz pisze się na przeznaczonem dla niego mieyscu w drugim wierszu pod dzielnikiem.

3*cie*. Mnożą się wszystkie wyrazy dzielnika przez znaleziony wyraz piérwszy ilorazu, a wypadaiący iloczyn pisze się pod dzielną w drugim wierszu i od niéy się odeymuie pozostała zaś reszta pisze się w wierszu trzecim.

4*te*. Dzieli się piérwszy wyraz pozostałéy reszty przez piérwszy wyraz dzielnika, a znaleziony wypadek pisze się na swoiém mieyscu iako drugi wyraz szukanego ilorazu: z wyrazem tym postępuie się tak, iak się wyżey postąpiło z wyrazem piérwszym. I to samo działanie póty się powtarza, aż póki wszystkie wyrazy dzielney nie zostaną zniszczone: maiąc zawsze uwagę naprzód na znaki wyrazów, powtóre na spółczynniki, potrzecie na głoski i ich wykładniki.

WZÓR

WZÓR DZIELENIA.

Dzielna	*Dzielnik*
$5a^7 - 22a^5b + 12a^5b^2$	$5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$
$- 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$	*Iloraz*
$- 5a^7 + 2a^6b - 4a^5b^2$	$a^3 - 4a^2b + 2b^3.$
Reszta 1. $- 20a^6b + 8a^5b^2 - 6a^4b^3 - 48^3b^4 + 8a^2b^5;$	
$+ 20a^6b - 8a^5b^2 + 16a^4b^3$	
R. 2. $+ 10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5;$	
$- 10a^4b^2 + 4a^3b^4 - 8a^2b^5$	
R. 3. · 0 0	

Pierwszy wyraz dzielnéy, to iest $5a^7$ podzielony przez pierwszy wyraz dzielnika, to iest przez $5a^4$, daie na iloraz a^3, który się pisze pod dzielnikiem. Przez ten iloraz rozmnożywszy trzy wyrazy dzielnika, i w trzech cząstkowych iloczynach z rozmnożenia tego wynikłych odmieniwszy znaki wypadnie $- 5a^7 + 2a^6b - 4a^5b^2$. Ilość ta pisze się pod dzielną i od niey się odeymuie; poczem zostaie reszta 1wsza $- 20a^6b + 8a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$.

Pierwszy wyraz téy reszty to iest $- 20a^6b$ podzielony przez pierwszy wyraz dzielnika to iest przez $+ 5a^4$, daie na iloraz $- 4a^2b$, który się pisze na swoiém mieyscu iako drugi wyraz szukanego ilorazu. Przez ten drugi wyraz rozmnożywszy trzy wyrazy dzielnika, i w trzech cząstkowych iloczynach z rozmnożenia tego wynikłych odmieniwszy znaki, wypadnie ilość $+ 20a^6b - 8a^5b^2 + 16a^4b^3$, która się pisze pod pierwszą resztą i od niéy się odeymuie: poczem zostaie reszta druga, to iest $+ 10a^4b^3 - 4ab^4 + 8a^2b^5$;

Pierwszy wyraz drugiey reszty to iest $+ 10a^4b^3$ podzielony przez pierwszy wyraz dzielnika, to iest

iest przez $5a^4$, daie na iloraz $+2b^3$, który się pisze na swoiem mieyscu iako trzeci wyraz szukanego ilorazu. Przez ten trzeci wyraz rozmnożywszy trzy wyrazy dzielnika, i w trzech cząstkowych iloczynach z rozmnożenia tego wynikłych odmieniwszy znaki, wypadnie ilość $-10a^4b^3 + 4a^3b^4 - 8a^2b^5$, którą odiąwszy od drugiéy reszty, nic się nie zostaie, co okazuie, że $+2b^3$ iest wyrazem ostatnim szukanego ilorazu, i że tem samem iloraz ten iest $a^3 - 4a^2b + 2b^3$.

161. Częstokroć w ciągu dzielenia mnożąc dzielnik przez różne wyrazy ilorazu powstaią takie cząstkowe iloczyny, które się nie znayduią w dzielnéy, i które potem dzielić potrzeba przez piérwszy wyraz dzielnika. Iloczynami temi są te, które maiąc przed sobą odmienne znaki i będąc sobie równe, zniknąć musiały, kiedy się formowała dzielna przez rozmnożenie dwóch iey czynników ilorazu i dzielnika. Niech będzie *np.* $a^3 - b^3$ do podzielenia przez $a - b$.

Dzielenie.

$$\begin{array}{r|l} a^3 - b^3 & a - b \\ \cline{2-2} -a^3 + a^2b & a^2 + ab + b^2 \\ \hline +a^2b - b^3 & \\ -a^2b + ab^2 & \\ \hline +ab^2 - b^3 & \\ -ab^2 + b^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Mnożenie.

$$\begin{array}{l} a - b \\ a^2 + ab + b^2 \\ \hline a^3 - a^2b \\ +a^2b - ab^2 \\ +ab^2 - b^3 \\ \hline a^3 - b^3 \end{array}$$

Piérwszy wyraz dzielnéy, który iest a^3 podzielony przez piérwszy wyraz dzielnika, to iest przez a, daie na iloraz a^2; rozmnożywszy dzielnik przez ten iloraz i ódmieniwszy znaki w dwóch cząstkowych iloczynach, wypadnie $-a^3 + a^2b$: wyraz piérwszy $-a^3$ dodany do wyrazu piérwszego dzielnéy, zniknie; lecz pozostaie wyraz drugi $+a^2b$, który z początku nie znaydował się w dzielnéy. Ponieważ wyraz ten zamyka głoskę a, można go dzielić przez piérwszy wyraz dzielni-

ni-

nika i wypada na iloraz $+ab$. Rozmnożywszy dwa wyrazy dzielnika przez ten iloraz, i odmieniwszy znaki w iloczynach, wypadnie $-a^2b+ab^2$; wyraz $-a^2$ dodany do pierwszego wyrazu pozostałéy reszty zniknie, lecz zostaie wyraz $+ab^2$, który także nie znaydował się w dzielnéy. Podzieliwszy go przez a; wypadnie na iloraz b^2; przez ten cząstkowy iloraz rozmnożywszy dwa wyrazy dzielnika, i odmieniwszy znaki w iloczynach, wypadnie $-ab^2+b^3$: pierwszy wyraz $-ab^2$ dodany do pierwszego wyrazu drugiey reszty niknie, i drugi wyraz $+b^3$ dodany do ostatniego wyrazu $-b^3$, który pozostaie z dzielnéy, niknie także.

Dla tém lepszego obięcia tego mechanizmu dzielenia, dosyć iest rzucić okiem na mnożenie dzielnika $a-b$ przez iloraz a^2+b^2, umieszczone obok poprzedzaiącego dzielenia: postrzeżemy, że wszystkie wyrazy nowo powstałe w dzieleniu są te, które nikną w wypadku mnożenia.

162. Czasem się przytrafia, że głoska, podług któréy porządkuią się dwie ilości dane, w kilku wyrazach znayduie się z iednymże wykładnikiem, czy to w dzielnéy czy to w dzielniku. W przypadku tym trzeba te wyrazy umieścić w iednéy kolumnie, albo też napisać ieden po drugim, porządkuiąc ie podług wykładnika innéy głoski. Niech będzie np. ilość $-a^4b^2+b^2c^4-a^2c^4-a^6+2a^4c^2+b^6+2b^4c^2+a^2b^4$, którą podzielić trzeba przez $a^2-b^2-c^2$.

Porządkuiąc pierwszą z tych ilości podług głoski a, umieścimy w iednéy kolumnie dwa wyrazy $-a^4b^2$ i $+2a^4c^2$, w innéy kolumnie wyrazy $+a^2b^4$ i $-a^2c^4$, nakoniec w ostatniey kolumnie trzy wyrazy $+b^6+2b^4c^2+b^2c^4$, porządkuiąc ie podług wykładnika głoski b, iak to widzieć można w przyłączonym wzorze.

Wzór

Wzór działania.

$$\begin{array}{l|l}
-a^6-a^4b^2+a^2b^4+b^6 & a^2-b^2-c^2 \\
+2a^4c^2-a^2c^4+2b^4c^2 & \overline{-a^4-2a^2b^2-b^4} \\
\qquad\qquad +b^2c^4 & +a^2c^2-b^2c^2 \\
+a^6-a^4b^2 & \\
\quad -a^4c^2 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{Reszta 1.} & -2a^4b^2+a^2b^4+b^6 \\
& +a^4c^2-a^2c^4+2b^4c^2 \\
& \qquad\qquad +b^2c^4 \\
& +2a^4b^2-2a^2b^4 \\
& \qquad -2a^2b^2c^2 \\
\hline
\text{Reszta 2.} & +a^4c^2-a^2b^4+b^6 \\
& -2a^2b^2c^2+2b^4c^2 \\
& -a^2c^4+b^2c^4 \\
& -a^4c^2+a^2b^2c^2 \\
& \qquad +a^2c^4 \\
\hline
\text{Reszta 3.} & -a^2b^4+b^6 \\
& -a^2b^2c^2+2b^4c^2 \\
& \qquad\qquad +b^2c^4 \\
& +a^2b^4-b^6 \\
& \qquad -b^4c^2 \\
\hline
\text{Reszta 4.} & -a^2b^2c^2+b^4c^2 \\
& \qquad\qquad +b^2c^4 \\
& +a^2b^2c-b^2c^4 \\
& \qquad\qquad -b^2c^4 \\
\hline
& \qquad 0
\end{array}$$

Piérwszy wyraz dzielnéy, to iest $-a^6$ podzielony przez piérwszy wyraz dzielnika, to iest przez a^2, daie na piérwszy wyraz ilorazu $-a^4$: rozmnożywszy wszystkie wyrazy dzielnika przez ten iloraz, i w iloczynie stąd wynikłym odmieniwszy znaki, aby go można było odiąć od dzielney, mieszcząc w iedneyże kolumnie wyrazy maiace tę samę potęgę głoski a, pozostanie 1wsza reszta, która się bierze za drugą dzielną cząstkową.

Piérwszy wyraz tey nowey dzielney, który iest $-2a^4b^2$, podzielony przez a^2 daie na drugi wy-

wyraz ilorazu $-2a^2b^2$; rozmnożywszy wszystkie wyrazy dzielnika przez ten drugi wyraz ilorazu, i w iloczynach odmieniwszy znaki dla odięcia ich od cząstkowey dzielney, mieszcząc w iedneyże kolumnie wyrazy maiące tę samę potęgę głoski a, po odięciu zostanie druga reszta, która się bierze za trzecią dzielną cząstkową.

Odbywszy to samo działanie z resztą drugą i następnemi, znaydziemy ieszcze trzy wyrazy na iloraz. Ostatni rozmnożony przez wszystkie wyrazy dzielnika daie iloczyny, które odiąwszy od 4téy reszty, nic się nie zostaie: dzielnik więc mieści się zupełnie w dzielney, a tém samem iest iéy czynnikiem.

Czasem można ułatwić dzielenie rozkładaiąc dzielną na czynniki, które częstokroć na samo weyrzenie upatrzyć można. Tak *np.* gdyby przyszło ilość $8a^6 - 4a^3b^2 + 4a^3 + 2a^3 - b^2 + 1$, podzielić przez $2a^3 - b^2 + 1$; ponieważ dzielnik ten składa ostatnie trzy wyrazy dzielney, dosyć będzie sprobować, czy nie iest także czynnikiem trzech pierwszych wyrazów dzielney. Trzy te wyrazy maią widocznie za spólny czynnik $4a^3$: gdyż $8a^6 - 4a^3b^2 + 4a^3 = 4a^3(2a^3 - b^2 + 1)$. Dzielną zatém można wyrazić w następuiącym kształcie: $4a^3(2a^3 - b^2 + 1) + 2a^3 - b^2 + 1$; czyli $(2a^3 - b^2 + 1)(4a^3 + 1)$,
i dzielenie można odbyć bez długiego zachodu; przekreśliwszy bowiem dzielnik i pierwszy czynnik dzielney, który iest zupełnie równy dzielnikowi, drugi czynnik $4a^3 + 1$ będzie szukanym ilorazem.

Wprawa podaie wiele podobnych sposobów, przez które znacznie skrócić można zwyczayne działanie.

II. O *naywiększym spólnym dzielniku dwóch ilości algiebraicznych*

163. Kiedy dzielenie dwóch ilości algiebraicznych nie może być wykonane, na ten czas iloraz

raz zostaie pod postacią ułomka, którego licznikiem iest dzielna a mianownikiem dzielnik. Chcąc potém wyrazy ułomka tego zmnieyszyć, trzeba uważać czy licznik i mianownik nie maią iakiego czynnika spólnego, przez który można ie podzielić. Lecz gdy wyrazy ułomka są ilościami wielorakiemi, spólny ich dzielnik nie tak łatwo być może upatrzony, iak w ilościach poiedynczych: w ogólności szukać go należy sposobem takim, iaki iuż widzieliśmy w Arytmetyce, szukaiąc naywiększego dzielnika spólnego dwom liczbom danym. Działanie to zasadza się na następuiącéy prawdzie:

Wszelki dzielnik spólny dwom liczbom iest także dzielnikiem reszty pozostałéy z podzielenia iednéy liczby przez drugą.

Daymy, że dwóch liczb iakichkolwiek spólny dzielnik, który oznaczamy przez D, mieści się zupełnie w iednéy z nich razy A, w drugiey razy B Ponieważ dzielnik rozmnożony przez iloraz daie na iloczyn dzielną, pierwsza zatém z dwóch danych liczb iest AD, druga BD. Niech Q oznacza całkowity iloraz z podzielenia liczby pierwszéy przez drugą wypadaiący, a R, całkowitą resztę z dzielenia pozostałą: będzie więc

$$\frac{AD}{BD} = Q + \frac{R}{BD}.$$

Zniosłszy mianownik, i obiedwie strony podzieliwszy przez D, wypadnie

$$A = BQ + \frac{R}{D}.$$

Pierwsza strona tego równania iest liczbą całkowitą podług założenia, więc i druga musi być także liczbą całkowitą: a że wyraz pierwszy drugiéy strony iest liczbą całkowitą, więc i drugi wyraz $\frac{B}{D}$ musi być liczbą całkowitą, a tém samém R iest podzielne przaz D; to iest pozostała re-

reszta z podzielenia dwóch ilości danych iest podzielna przez spólny dzielnik tychże ilości.

Zastosuymy to naprzód do przykładu liczebnego. Niech będą dwie liczby dane 637 i 143. Naywiększy spólny dzielnik tych dwóch liczb widocznie przechodzić nie może liczby mnieyszéy 143: wypada więc naprzód sprobować czy liczba ta, sama siebie dzieląca, nie iest szukanym spólnym dzielnikiem. Liczba 143 sama w sobie mieści się raz 1, w liczbie zaś 637 mieści się 4 razy, i pozostaie reszta 65: co dowodzi, że liczba 143, nie iest szukanym dzielnikiem.

Żę zaś wszelki dzielnik spólny dwom ilościom iest także dzielnikiem reszty z podzielenia ilości iednéy przez drugą pozostałéy, spólny zatem dzielnik dwóch liczb 637 i 143 powinien być także dzielnikiem tak liczby 143, iako też liczby 65, która iest resztą z podzielenia pozostałą. Naywiększy spólny dzielnik dwóch liczb 143 i 65 nie może być większym od liczby 65: trzeba zatem sprobować, czy liczba 65 nie iest szukanym dzielnikiem. Liczba 65 sama w sobie mieści się raz 1, w liczbie zaś 143 mieści się razy 2, i pozostaie reszta 13: co dowodzi, że liczba 65 nie iest szukanym dzielnikiem. Lecz spólny dzielnik liczb 143 i 65 powinien być także spólnym dzielnikiem tak dla liczby 65, iako też dla pozostałéy reszty 13: trzeba więc szukać naywiększego spólnego dzielnika liczb 65 i 13. Naywiększy spólny dzielnik tych dwóch liczb nie może bydź większy od liczby mnieyszéy, to iest od 13: należy więc sprobować, czyli 13 nie iest tym dzielnikiem. Liczba 13 mieści się sama w sobie raz 1; w liczbie zaś 65 mieści się 5 razy zupełnie.

Liczba zatem 13 dzieląca liczby 65 i 13, dzieli także liczbę $143 = 65 . 2 + 13$; ta sama liczba 13 dzieląca liczby 65 i 143, dzieli także liczbę $637 = 143 . 4 + 65$: więc liczba ta iest spólnym dzielnikiem dwóch liczb danych. Że zaś ten spólny dzielnik nie może być większym od 13, to się oka-

okazuie z samego działania, podług którego szukany dzielnik powinien mieścić się zupełnie w liczbie 13.

Tym samym sposobem postępuie się szukaiąc naywiększego spólnego dzielnika dwóch ilości algiebraicznych: *probuię się naprzód czy iedna z dwóch danych ilości nie iest dzielnikiem drugiey: a ieżeli z dzielenia pozostaie reszta, przez tę resztę dzieli się pierwszy dzielnik, potem pierwszą resztą dzieli się przez drugą, i tak daley; aż póki się nie przyydzie do takiey reszty, która poprzedzaiącą dzieli zupełnie: reszta ta będzie naywiększym spólnym dzielnikiem dwóch ilości danych.*

164. Nim przystąpimy do przykładów, uczynić tu pierwey potrzeba następuiącą uwagę: że naywiększy spólny dzielnik dwóch ilości nie podpada żadnéy zmianie, gdy się iedna z nich rozmnoży lub podzieli przez ilość, która nie iest dzielnikiem drugiey, i która nie ma żadnego spólnego czynnika z drugą. I tak *np.* dwie ilości *ab* i *ac* maią *a* za spólny dzielnik: rozmnożywszy *ab* przez *d* będzie ilość *abd*, która z drugą ilością *ac* ma tenże sam spólny dzielnik, iaki iest między *ab* i *ac*.

Inaczey się rzecz ma, gdy rozmnożymy *ab* przez ilość będącą dzielnikiem ilości drugiey *ac*, czyli któraby miała spólny czynnik z ilością *ac*. Rozmnożywszy *np.* *ab* przez *c*, będzie *abc*: ilość ta ma z ilością *ac* za spólny dzielnik *ac*. Podobnież rozmnożywszy *ab* przez ilość *cd*, która ma spólny czynnik z ilością *ac*, będzie ilość *abcd*, która z ilością *ac* ma za spólny dzielnik *ac*.

Wniesiemy stąd *ród* że ieżeli szukaiąc naywiększego spólnego dzielnika dwóch ilości postrzeżemy w ciągu działania, że dzielnik albo dzielna ma iaki czynnik, który nie iest czynnikiem ilości drugiéy, można się go będzie pozbyć dzieląc przezeń iednę z dwóch ilości danych; *zre* że można iednę z dwóch danych ilości rozmnożyć przez iakąkolwiek liczbę, byleby liczba ta nie była

dziel-

dzielnikiem drugiey ilości daney, i nie miała żadnego spolnego z nią czynnika.

Po takowem przygotowaniu przystąpmy iuż do przykładów. Weźmy dwie ilości takie, któreby miały niektóre głoski spólne, gdyż inaczey nie mogłyby mieć spólnego dzielnika. Niech będą *np.* dwie ilości

$$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3, \text{ i } 4a^2b - 5ab^2 + b^3,$$

w których wyrazy uporządkowane są podług wykładników głoski a, iak wymaga dzielenie. Piérwszą weźmy za dzielną drugą za dzielnik: lecz zaraz zachodzi trudność, która w ilościach liczebnych mieysca nie ma; to iest, że piérwszy wyraz dzielnika nie mieści się zupełnie w pierwszym wyrazie dzielnéy, z przyczyny dwóch czynników 4 i b, które znayduią się w iednym, a w drugim ich nie masz. Ale że głoska b iest spólnym czynnikiem wszystkich wyrazów dzielnika, a niektórych tylko wyrazów dzielnéy; można się więc iey pozbyć w dzielniku, dzieląc go przez b, przez co, podług uwagi powyższéy, szukany spólny dzielnik dwóch danych ilości w niczém się nie zmieni. Podzieliwszy drugą ilość przez b wypadnie $4a^2 - 5ab + b^2$. Idzie więc teraz o to, ażeby znaleźć naywiększy spólny dzielnik dwóch następuiących ilości:

$$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3, \text{ i } 4a^2 - 5ab + b^2.$$

Lecz ieszcze pierwszy wyraz dzielnika, to iest $4a^2$ nie mieści się zupełnie w piérwszym wyrazie dzielnéy, który iest $3a^3$, gdyż liczba 4 będąca spółczynnikiem piérwszego, większa iest od liczby 3 będącey spółczynnikiem drugiego. Ale można rozmnożyć pierwszą ilość daną przez iakąkolwiek liczbę, byleby liczba ta nie była spólnym czynnikiem wszystkich wyrazów ilości drugiey, co, podług uwagi powyższey, w niczém nie zmieni naywiększego dzielnika spólnego dwóch ilości danych. Rozmnożmy więc ilość pierwszą przez liczbę 4, która nie iest czynnikiem ilości drugiey: tym sposobem potrzeba będzie ilość.

$12a^3 - 12a^2b + 4ab^2 - 4b^3$ podzielić przez $4a^2 - 5ab + b^2$:
iloraz cząstkowy z podzielenia tego wypada $3a$. Rozmnożywszy dzielnik przez ten iloraz, i odiąwszy iloczyn od dzielnéy, zostanie reszta

$$3a^2b + ab^2 - 4b^3.$$

Ilość ta podług tego cośmy powiedzieli wyżéy, powinna mieć z ilością $4a^2 - 5ab + b^2$ tenże sam naywiększy spólny dzielnik, co ilość pierwsza. Korzystaiąc z powyższych uwag, dzielę pozostałą resztę przez b, i mnożę ią przez 4, aby tym sposobem pierwszy wyraz iey stał się zupełnie podzielnym przez pierwszy wyraz dzielnika: będzie zatem dzielna $12a^2 + 4ab - 16b^3$, dzielnik zaś $4a^2 - 5ab + b^2$, a cząstkowy iloraz 3. Rozmnożywszy dzielnik przez ten iloraz, i od dzielnéy odiąwszy iloczyn, zostaie reszta $19ab - 19b^2$, i cała rzecz idzie o to, aby wynaleźć naywiększy spólny dzielnik tey reszty i ilości $4a^2 - 5ab + b^2$.

Że zaś głoska a, podług któréy odbywa się dzielenie, w pozostałéy reszcie iest stopnia piérwszego, w dzielniku zaś stopnia drugiego; dzielnik więc należy wziąć za dzielną, a pozostałą resztę za dzielnik.

Przed zaczęciem tego nowego dzielenia, dzielnik $19ab - 19b^2$ dzielę przez $19b$: gdyż ilość ta iest spólnym czynnikiem wszystkich iego wyrazów, a nie iest czynnikiem dzielney: mam więc na dzielną ilość

$4a^2 - 5ab + b^2$ a na dzielnik ilość $a - b$.

Odbywszy dzielenie żadna reszta nie pozostaie: a zatem $a - b$ iest szukanym naywiększym spólnym dzielnikiem Jakoż pierwsza ilość dana podzielona przez $a - b$, daie na iloraz $3a^2 + b^2$; druga ilość dana podzielona przez $a - b$ daie na iloraz $4a - b$.

165. Kiedy ilość wzięta za dzielnik składa się z kilku wyrazów maiących ten sam stopień głoski, podług któréy wyrazy zostały uporządkowane, na ten czas, postępuiąc drogą zwyczayną, dzia-

działanie nie miałoby końca. Wezmy *np.* dwie ilości

$$a^2b + dc^2 - d^3, \text{ i } ab - ac + d^2:$$

przygotowawszy działanie iak do zwyczaynego dzielenia, będzie

$$\begin{array}{l|l} a^2b + ac^2 - d^3 & ab - ac + d^2 \\ \cline{2-2} -a^2b + a^2c - ad^2 & a \\ \hline a^2c + ac^2 - ad^2 - d^3, & \end{array}$$

dzieląc naprzód a^2b przez ab, wypada iloraz a; przez który rozmnożywszy dzielnik i odiąwszy iloczyn od dzielnéy, w reszcie znayduie się nowy wyraz, w którym a iest drugiego stopnia, to iest a^2c, powstaiący z rozmnożenia $-ac$ przez a. Wziąwszy resztę $a^2c + ac^2 - ad^2 - d^3$ za dzielną i rozmnożywszy ią przez b, aby tym sposobem można ią było podzielić przez ab, będzie

$$\begin{array}{l|l} a^2bc + abc^2 - abd^2 - bd^3 & ab - ac + d^2 \\ \cline{2-2} -a^2bc + a^2c^2 - acd^2 & ac \\ \hline a^2c^2 + abc^2 - acd^2 - abd^2 - bd^3 & \end{array}$$

w reszcie téy znowu przybył nowy wyraz a^2c^2, w którym a iest drugiego stopnia: to samo miałoby ciągle mieysce w dalszém działaniu.

Dla uniknienia téy nieprzyzwoitości, trzeba uważać, że dzielnik $ab - ac + d^2 = a(b - c) + d^2$; uczyniwszy dla skrócenia $b - c = m$, dzielnik zamieni się na $am + d^2$; lecz w tym przypadku trzeba dzielną $a^2b + ac^2 - d^3$, rozmnożyć przez m, ażeby w nowéy dzielnéy tym sposobem utworzonéy pierwszy wyraz podzielny był przez ilość am, będącą pierwszym wyrazem dzielnika: będzie zatem działanie

$$\begin{array}{l|l} a^2bm + ac^2m - d^3m & am + d^2 \\ \cline{2-2} -a^2bm - abd^2 & ab + c^2 \\ \hline 1.\ \text{reszta} - abd^2 + ac^2m - d^3m & \\ \qquad - ac^2m - c^2d^2 & \\ \hline 2\ \text{reszta} - abd^2 - c^2d^2 - d^3m; & \end{array}$$

teraz wyrazy maiące głoskę a w drugim stopniu zniknęły w dzielnéy, i pozostały tylko wyrazy ma-

maiące a w pierwszym stopniu. Abyśmy ie znieśli, podzielmy naprzód ac^2m przez am, wypadnie iloraz c^2; rozmnożywszy dzielnik przez iloraz, i odiąwszy iloczyn od dzielney, pozostanie 2ga reszta: wziąwszy tę drugą resztę za dzielną, i podzieliwszy ią przez d^2, które nie iest czynnikiem dzielnika, będzie $-ab-c^2-dm$, co rozmnożywszy przez m, wypadnie

$$\begin{array}{l|l} -abm - c^2m - dm^2 & am + d^2 \\ \underline{+abm + bd^2} & \overline{-b} \\ +bd^2 - c^2m - dm^2. & \end{array}$$

Ponieważ reszta $bd^2 - c^2m - dm^2$ nie zamyka w sobie głoski a, wypada stąd, że ieżeli dwie dane ilości maią między sobą spólny dzielnik, dzielnik ten nie zależy od głoski a. Doszedłszy do tego punktu, nie można iuż kończyć dzielenia podług głoski a; lecz uważać potrzeba, że ieżeli znayduie się spólny dzielnik niezależący od głoski a między ilościami $bd^2 - c^2m - dm^2$ i $am + d^2$, dzielnik ten powinien z osobna dzielić oba wyrazy dzielnika am i $+d^2$: gdyż w ogólności, ieżeli ilość iaka uporządkowana iest stosownie do potęg głoski a, wszelki dzielnik tey ilości nie zależący od a powinien dzielić z osobna ilości, które mnożą różne potęgi tey głoski.

Aby się o tem przekonać, dosyć iest uważyć, że w tym przypadku każda z ilości danych powinna być iloczynem ilości zależącey od a rozmnożoney przez spólny dzielnik, który od a nie zależy. Jakoż niech będzie np. wyrażenie

$$Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E.$$

w którem głoski A, B, C, D, E oznaczaią ilości iakiekolwiek nie zależące od a; rozmnożywszy wyrażenie to przez ilość M także od a nie zależącą, wypadnie iloczyn

$$MAa^4 + MBa^3 + MCa^2 + MDa + ME:$$

iloczyn ten uporządkowany podług a, zamyka ieszcze te same potęgi głoski a iak pierwey; lecz spółczynnik każdey z tych potęg iest podzielny przez M.

Po

Po takowém przygotowaniu, w dwóch ilościach

$$bd^2 - c^2m - dm^2\,,\ am + d^2$$

przywróciwszy zamiast m ilość $(b-c)$, którą głoska ta wyraża, będzie

$bd^2 - c^2(b-c) - d(b-c)^2$, i $a(b-c) + d^2$

i rzeczą iest widoczną, że w dzielniku ilości $b-c$ i d^2 nie maią żadnego spólnego czynnika: więc dwie dane ilości spólnego dzielnika nie maią.

Gdyby na samo weyrzenie nie można było poznać, że nie masz spólnego dzielnika między $b-c$ i d^2, należałoby szukać naywiększego spólnego ich dzielnika, porządkuiąc ie podług iedneyże głoski, a potem sprobować czy dzielnik ten mieści się zupełnie w ilości

$$bd^2 - c^2(b-c) - d(b-c)^2.$$

166. Zawsze iednak wygodniéy iest zaraz na początku działania szukać naywiększego spólnego dzielnika nie zależącego od głoski, podług któréy są uporządkowane wyrazy: gdyż odkładaiąc szukanie to na koniec działania, częstokroć reszty wypadaią coraz bardziéy zawikłane i rachunek staie się coraz trudnieyszy.

Niech będą np. ilości

$$a^4b^2 + a^3b^3 + b^4c^2 - a^4c^2 - a^3bc^2 - b^2c^4,\ a^2b + ab^2 + b^3 - a^2c - abc - b^2c.$$

Uporządkowawszy ie podług głoski a, wypadnie

$$(b^2 - c^2)\,a^4 + (b^3 - bc^2)\,a^3 + b^4c^2 - b^2c^4$$
$$(b - c)\,a^2 + (b^2 - bc)\,a + b^3 - b^2c.$$

Uważam naprzód, że ieżeli dwie te ilości maią spólny dzielnik nie zawisły od a, dzielnik ten powinien zupełnie mieścić się osobno w każdéy z ilości mnożących rozmaite potęgi głoski a (155), iako też w ilościach $b^4c^2 - b^2c^4$ i $b^3 - b^2c$, które nie maią głoski a.

Idzie więc tylko oto, ażeby znaleźć spólne dzielniki dwóch ilości $b^2 - c^2$ i $b - c$, i sprobować potem, czy między temi dzielnikami nie

znayduie się taki, któryby razem był dzielnikiem następuiących ilości:
$b^3 - bc^2$, i $b^2 - bc$ tudzież $b^4c^2 - b^2c^4$ i $b^3 - b^2c$.

Podzieliwszy $b^2 - c^2$ przez $b - c$ wypada iloraz $b + c$: a zatem $b - c$ iest dzielnikiem spólnym ilości $b^2 - c^2$ i $b - c$, które widocznie mieć nie mogą innych dzielników; gdyż ilość $b - c$ może tylko być podzielona przez siebie samę i przez 1. Trzeba się więc zapewnić, czy $b - c$ dzieli także inne ilości wyżey wymienione, albo też czy ilość ta dzieli także dwie ilości dane, co ma mieysce w samey rzeczy: gdyż podzieliwszy dwie te ilości przez $b - c$, wypadną ilorazy
$(b + c)\ a^4 + (b^2 + bc)\ a^3 + b^3c^2 + b^2c^3,\ a^2 + ba + b^2.$

Dwie ostatnie ilości chcąc sprowadzić do prostszego ieszcze wyrażenia, należy sprobować czy pierwsza nie iest podzielna przez ilość $b + c$, która nie iest czynnikiem ilości drugiéy $a^2 + ba + b^2$: odbywszy dzielenie, znaydziemy iloraz zupełny, pozostanie tylko szukać spólnego dzielnika dwóch następuiących ilości:

$$a^4 + ba^3 + b^2c^2 \text{ i } a^2 + ba + b^2.$$

Przystąpiwszy do działania podług podanego wyżey sposobu, za drugiem dzieleniem wypadnie reszta zawieraiąca głoskę a w pierwszym stopniu: przez tę resztę dzieląc dwie dane ilości przekonamy się, że ona nie iest ich spólnym dzielnikiem; skąd wniesiemy, że głoska a nie wchodzi do spólnego dzielnika, którego szukamy, i że tem samem dzielnik ten składa się tylko z iednego czynnika $b - c$.

Gdyby oprócz tego spólnego dzielnika nie zawisłego od głoski a znalazł się drugi do którego wchodzi ta głoska, należałoby dwa te dzielniki przez siebie rozmnożyć, a iloczyn ich byłby naywiększym spólnym dzielnikiem szukanym.

Uwagi te przy należytey wprawie w rachunku algiebraicznym będą dostateczne do wynalezienia w każdym przypadku naywiększego spólnego dzielnika.

Pray-

Przytaczamy tu kilka przykładów dla wprawy.

1; $x^4-3ax^3-8a^2x^2+18a^3x-8a^4$,
$x^3-ax^2-8a^2x+6a^3$

2; $6a^4+4a^3b-9a^2b^2-3ab^3+2b^4$,
$4a^4-4a^2b^2+4ab^3-b^4$.

3; $6a^3-6a^2y+2ay^2-2y^3$, $12a^2-15ay+3y^2$.

4; $5a^3-18a^2+11ab^2-6b^3$, $7a^2-23ab+6b^2$.

5; $6a^5+15a^4b-4a^3c^2-10a^2bc^2$,
$9a^3b-27a^2bc-6abc^2+18bc^3$.

6; $2a^4+2a^3b-ab^2d-ab^2d$, $3a^3+3a^2b$
$+4ab^2+4b^3$.

Z pierwszemi czterema przykładami odbywszy działanie zwyczayne, znaydziemy naywiększy spólny dzielnik w przykładzie 1wszym $-x^2-2ax+2a^2$, czyli $x^2+2ax-2a^2$; w 2gim $2a^2+2ab-b^2$; w 3cim $a-y$; w 4tym $a-3b$.

W przykładzie 5tym podzieliwszy ilość pierwszą przez a^2, drugą przez $3b$, będzie

$$\begin{array}{l|l} 6a^3+15a^2b-4ac^2-10bc^2 & 3a^3-9a^2c \\ -6a^3+18a^2c+4ac^2-12c^3 & -2ac^2+6c^3 \\ \cline{2-2} & 2 \\ \hline 15a^2b+18a^2c-10bc^2-12c^3. & \end{array}$$

Że zaś ta reszta mnieysza iest od dzielnika, będzie więc

$$\begin{array}{l|l} 3a^3-9a^2c-2ac^2+6c^3 & 15a^2b+18a^2c \\ & -10b^2c-12c^3. \\ \hline & \end{array}$$

Rozłożywszy dzielnik na czynniki, będzie

$$\begin{array}{l|l} & 3a^2(5b+6c) \\ 3a^3-9a^2c-2ac^2+6c^3 & -2c^2(5b+6c). \end{array}$$

Podzieliwszy dzielnik przez $5b+6c$, i resztę działania odbywszy sposobem zwyczaynym, znaydziemy $3a^2-2c^2$ naywiększy spólny dzielnik dwóch ilości danych.

W przykładzie 6, pierwszą ilość daną podzieliwszy przez a, rozmnożywszy przez 3 i odbywszy dzielenie, znaydziemy iloraz 2 z pozostałą resztą $-8ab^2-3abd-8b^3-3b^4d$, którą rozłożywszy na czynniki będzie $-a(8b^2+3bd)-b$

 $(8b^2$

$(8b^2 + 3bd)$. Reszta ta iako mnieysza od drugiey ilości daney, będzie dzielnikiem: podzieliwszy ią zatém przez czynnik $8b^2 + 3bd$, wypadnie dzielić drugą ilość daną przez $-a-b$. Odbywszy dzielenie sposobem zwyczaynym, otrzymamy iloraz bez żadney reszty. A zatém naywiększym spólnym dzielnikiem dwóch danych ilości iest $-a-b$, czyli, co na iedno wychodzi, $a+b$.

Czasem dwie dane ilości można zaraz rozłożyć na czynniki: i tak z dwóch danych ilości $a^2d^2 - a^2c^2 + c^4 - c^2d^2$, i $4a^2d - 2ac^2 - 4acd + 2c^3$, piérwszą można rozłożyć na dwa następuiące czynniki: $a^2(d^2 - c^2) - c^2(d^2 - c^2)$. Druga podzielona przez 2 daie się także rozłożyć na dwa czynniki $a(2ad - c^2) - c(2ad - c^2)$.

Podzieliwszy zatém ilość piérwszą przez $d^2 - c^2$, drugą przez $2ad - c^2$, pozostanie dzielić $a^2 - c^2$ przez $a - c$. Odbywszy dzielenie otrzymamy iloraz bez żadney reszty. A zatém naywiększy spólny dzielnik dwóch danych ilości iest $a - c$.

Podobnież gdyby były dwie dane ilości $3bcq + 30mp + 18bc + 5mpq$, i $24ad - 7fgq - 42fg + 4adq$; piérwszą i drugą rozłożywszy na czynniki znaydziemy:
$q(3bc + 5mp) + 6(3bc + 5mp)$, i $q(4ad - 7fg) + 6(4ad - 7fg)$.

Piérwszą zatém ilość podzieliwszy przez $3bc + 5mp$, drugą przez $4ad - 7fg$, i odbywszy działanie zwyczayne, znaydziemy, że naywiększym spólnym dzielnikiem dwóch danych ilości iest $q + 6$.

III. *O wyciąganiu pierwiastku kwadratowego z ilości algiebraicznych.*

167. Powiedzieliśmy wyżey (108), że kiedy z ilości iakiey nie można wyciągnąć pierwiastku kwadratowego, na ten czas przed ilością tą daie się znak pierwiastkowy $\sqrt{\ }$. Często się trafia, że nie-

niektóre czynniki ilości będących pod znakiem pierwiastkowym, są kwadratami: *np.* $\sqrt{a^2m}$: w takowym przypadku ilość pod znakiem pierwiastkowym będąca może być sprowadzona do wyrazu prostszego. Jakoż podniosłszy do kwadratu iakikolwiek iloczyn bcd, będzie $bcd \times bcd = b^2c^2d^2$: skąd wnosimy, że kwadrat iloczynu iest iloczynem kwadratów z iego czynników, a tém samem pierwiastek kwadratu $b^2c^2d^2$ iest iloczynem pierwiastków b, c i d z czynników b^2c^2 i d^2. Zastosowawszy uwagę tę do iloczynu a^2m, wniesiemy, że pierwiastek iego powinien być iloczynem z a, które iest pierwiastkiem pierwszego czynnika a^2, przez $\sqrt{m}$ pierwiastek drugiego czynnika m będzie zatém $\sqrt{a^2m} = a\sqrt{m}$.

Podobnież $\sqrt{abc^2d^2} = cd\sqrt{ab}$.

W ogólności prawidło, które w tym razie zachować należy, iest następuiące: *wziąć osobno pierwiastki wszystkich czynników będących kwadratami, i napisać ie przed znakiem pierwiastkowym iako mnożniki tegoż znaku pierwiastkowego, pod którym zostawuią się tak, iak są czynniki nie będące kwadratami.*

168. Dla zachowania tego prawidła potrzeba, pierwéy poznać sposób, podług którego można osądzić, czy ilość algiebraiczna iest kwadratem: a do tego potrzeba rozróżnić ilości poiedyncze od wielorakich.

Z prawidła mnożenia ilości maiących wykładniki, wypada, że *druga potęga iakieykolwiek ilości ma zawsze wykładnik dwa razy większy od wykładnika tey ilości.* Jakoż

$a^1 \times a^1 = a^2$; $a^2 \times a^2 = a^4$, $a^3 \times a^3 = a^6$ i t. d.

Skąd wypada, że *wszelki czynnik będący kwadratem powinien mieć wykładnik parzysty, i że chcąc otrzymać pierwiastek tego czynnika, trzeba go napisać z wykładnikiem dwa razy mnieyszym niż był początkowy;* np.

$\sqrt{a^2} = a^1 = a$; $\sqrt{a^4} = a^2$; $\sqrt{a^6} = a^3$ i t. d.

Co się tycze czynników liczebnych, z tych wyciągaią się pierwiastki, ieśli to być może, sposobem zwyczaynym.

Podług tych uwag ponieważ w wyrażeniu $\sqrt{64a^6b^4c^2}$ czynniki a^6, b^4, c^2 są kwadratami, i liczba 64 iest także kwadratem z 8; wyrażenie więc to, iako iłoczyn czynników kwadratowych, będzie miało za pierwiastek iloczyn pierwiastków każdego z tych czynnikow. A zatm

$$\sqrt{64a^6b^4c^2} = 8a^3b^2c.$$

169. Gdy okoliczność ta nie ma mieysca, trzeba starać się *rozłożyć iloczyn dany na dwa inne, z ktorychby ieden zamykał same czynniki kwadratowe, drugi same czynniki nie kwadratowe.* Niech będzie *np.*

$$\sqrt{72a^4b^3c^5}.$$

Łatwo iest dostrzedz, że pomiędzy dzielnikami liczby 72 niektóre są kwadratami zupełnemi, to iest: 4, 9 i 36, wziąwszy z nich naywiększy, będzie

$$72 = 36 \times 2.$$

Czynnik a^4 iest kwadratem zupełnym z a^2.

Czynnik b^3 maiący wykładnik nieparzysty, nie iest wprawdzie kwadratem zupełnym; lecz go można rozłożyć na dwa inne b^2 i b, z których pierwszy iest kwadratem: będzie więc $b^3 = b^2 \times b$.

Podobnież $c^5 = c^4 \times c$. Tym samym sposobem postąpilibyśmy ze wszystkiemi głoskami maiącemi wykładniki nieparzyste. Wypadnie zatem

$$72a^4b^3c^5 = 36 \times 2a^4b^2 \times bc^4 \times c.$$

Zebrawszy osobno czynniki kwadratowe, druga strona równania tego będzie $36a^4b^2c^4 \times 2bc$. Wreszcie wziąwszy pierwiastek czynnika pierwszego, a oznaczywszy go w drugim, wypadnie

$$\sqrt{72a^4b^3c^5} = 6a^2bc^2\sqrt{2bc}.$$

Inna

Inne przykłady.

$$1.\ \sqrt{\left(\frac{a^3}{b}\right)} = \sqrt{\left(a^2 \times \frac{a}{b}\right)} = a\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)}$$

$$= a\sqrt{\left(\frac{ab}{b^2}\right)} = \frac{a}{b}\sqrt{ab}$$

$$2.\ 6\sqrt{\left(\frac{75}{98}ab^2\right)} = 6\sqrt{\left(\frac{25}{49}\cdot\frac{3ab^2}{2}\right)}$$

$$= 6\sqrt{\left(\frac{25b^2 \cdot 3a}{49 \cdot 2}\right)} = \frac{6 \cdot 5}{7}b\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)}$$

$$= \frac{30b}{7}\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)}.$$

$$3.\ \sqrt{\left(\frac{a^2m^2}{n^2} + \frac{a^2m}{n}\right)} = \sqrt{\left(\frac{a^2m^2 + a^2mn}{n^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a^2}{n^2}(m^2 + mn)\right)} = \frac{a}{m}\sqrt{m^2 + mn} \text{ i t. d.}$$

170. Póydźmyż teraz do wyciągania pierwiastków kwadratowych z ilości wielorakich, czyli iak ie zwyczaynie zowią, z *wielomianow*, a naprzód przypomnieć tu potrzeba, że żaden *dwumian*, czyli ilość z dwóch wyrazów złożona, nie może być kwadratem zupełnym ilość bowiem poiedyncza podniesiona do kwadratu iest także ilością poiedynczą; a kwadrat ilości dwumienney zamyka zawsze trzy części (101). Tak *np.* $a^2 + b^2$. nie iest kwadratem z $a + b$, chociaż a iest pierwiastkiem kwadratu a^2, b pierwiastkiem kwadratu b^2: gdyż kwadrat z $a + b$, który iest $a^2 + 2ab + b^2$, zamyka ieszcze wyraz $+ 2ab$, który się nie znayduie w ilości daney $a^2 + b^2$.

Weźmy więc ilość z trzech wyrazów złożoną

$$24a^2b^3c + 16a^4c^2 + 9b^6.$$

Abyśmy w tém wyrażeniu znaleźli trzy czę-

ści

ści składaiące kwadrat, którego pierwiastek iest dwumienny, uporządkuymy wyrazy podług wykładnika któréykolwiek głoski *np.* głoski a: będzie więc

$$16a^4c^2+24a^2b^3c+9b^6.$$

Jakikolwiek iest pierwiastek szukany, byleby tylko był uporządkowany podług téy samey głoski a, kwadrat piérwszego w nim wyrazu musi być piérwszym wyrazem w danéy ilości, to iest musi być wyrazem $16a^4c^2$; podwóyny iloczyn piérwsego wyrazu w szukanym pierwiastku przez iego wyraz drugi, musiał dać początek drugiemu wyrazowi w danéy ilości, to iest wyrazowi $24a^2b^3c$; nakoniec kwadrat drugiego wyrazu w tymże pierwiastku powinien być ostatnim wyrazem $9b^6$ w danéy ilości. Po tych uwagach przystąpmy do działania.

$$\begin{array}{r|l}
16a^4c^2+24a^2b^3c+9b^6 & 4a^2c+3b^3 \\
-16a^4c^2 \qquad\qquad\qquad & \overline{8a^2c+3b^3} \\
\hline
+24a^2b^3c+9b^6 & \\
-24a^2b^3c-9b^6 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Biorę naprzód pierwiastek kwadratowy z wyrazu piérwszego $16a^4c^2$, a wypadek $4a^2c$ (168) iest piérwszym wyrazem szukanego pierwiastku, który się pisze po prawéy stronie danéy ilości w tym samym wierszu.

Odeymuię potém kwadrat piérwszéy części pierwiastku od danéy ilości, po czém zostaną tylko dwa wyrazy $+24a^2b^3c+9b^6$.

Ponieważ wyraz $24a^2b^3c$ iest podwoynym iloczynem pierwszego wyrazu $4a^2c$ przez wyraz drugi szukanego pierwiastku, otrzymam więc ten drugi wyraz, dzieląc $24a^2b^3c$ przez dwa razy wzięty wyraz pierwszy, to iest przez $8a^2c$, który się pisze pod pierwiastkiem w drugim wierszu; iloraz $3b^3$ iest drugim wyrazem szukanego pierwiastku.

Pierwiastek iest iuż znaleziony: lecz aby się prze-

przekonać czy iest prawdziwy, trzeba uważyć, czy kwadrat drugiego wyrazu iest $9b^6$, albo też czy wyraz pierwszy dwa razy wzięty, to iest $8a^2c$ powiększony drugim znalezionego pierwiastku wyrazem, który iest $3b^3$, i rozmnożony przez tenże wyraz drugi, daie na iloczyn dwa ostatnie wyrazy danego kwadratu. A zatem obok $8a^2c$ z prawey strony piszę $+ 3b^3$, i mnożę $8a^2c + 3b^3$ przez $3b^3$: iloczyn stąd wypadaiący odiąwszy od dwóch ostatnich wyrazów danego kwadratu, nic się nie zostaie: co dowodzi, że znaleziony pierwiastek $4a^2 + 3b^3$ iest prawdziwy.

Rzeczą iest przez się widoczną, że to samo rozumowanie i ten sam sposób postępowania zastosować można do wszelkiéy ilości z trzech tylko wyrazów złożonéy, czyli *trzymiennéy*.

171. Kiedy ilość, którey szukamy pierwiastku kwadratowego, ma więcéy wyrazów niż trzy, pierwiastek szukany będzie miał więcéy wyrazów niż dwa. Przypuściwszy, że pierwiastek ten ma trzy wyrazy $m + n + p$, i uczyniwszy $m + n = l$, będzie $m + n + p = l + p$, a tem samém ilość dana równą będzie kwadratowi z $l + p$, który iest

$$l^2 + 2lp + p^2.$$

W kwadracie tym $l^2 = m^2 + 2mn + n^2$. A zatém uporządkowawszy ilość daną podług wykładnika iedneyże głoski, pierwszy wyraz tey ilości będzie widocznie kwadratem z pierwszego wyrazu w pierwiastku, a wyraz drugi zawierać będzie podwoyny iloczyn wyrazu pierwszego przez drugi tegoż pierwiastku: drugi zatém wyraz znaydziemy dzieląc drugi wyraz ilości danéy przez dwa razy wzięty wyraz piérwszy pierwiastku. A maiąc dwa pierwsze wyrazy szukanego pierwiastku, kwadrat ich wyrażony tu przez l^2 odiąwszy od ilości danéy zostanie $2lp + p^2$; to iest: podwóyny iloczyn dwóch piérwszych wyrazów $m + n$ pierwiastku, rozmnożonych przez wyraz trzeci, i kwadrat wyrazu trzeciego.

We-

Weźmy *np.* ilość
$64a^2bc + 25a^2b^2 - 40a^3b + 16a^4 + 64b^2c^2 - 80ab^2c$, z któréy potrzeba wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, Uporządkowawszy wyrazy podług wykładników głoski a, przystępuię do działania:

$$
\begin{array}{l|l}
16a^4 - 40a^3b + 25a^2b^2 & 4a^2 - 5ab + 8bc \\
\quad + 64b^2c^2 - 80ab^2c & \overline{8a^2 - 5ab} \\
\qquad\qquad + 64a^2bc & 8a^2 - 10ab + 8bc \\
- 16a^4 & \\
\hline
- 40a^3b + 25a^2b^2 - 80ab^2c + 64b^2c^2 & \\
\qquad\qquad + 64a^2bc & \\
\qquad + 40a^3b - 25a^2b^2 & \\
\hline
+ 64a^2bc - 80ab^2c + 64b^2c^2 & \\
- 64a^2bc + 80ab^2c - 64b^2c^2 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Wyciągam naprzód pierwiastek kwadratowy z pierwszego wyrazu $16a^4$, i mam $4a^2$ pierwszy wyraz szukanego pierwiastku; podnoszę go do do kwadratu i odeymuię od ilości daney.

Podwaiam potem pierwszy wyraz pierwiastku, i wypadek $8a^2$ piszę w drugim wierszu pod pierwiastkiem: przez $8a^2$ dzielę $-40a^3b$ pierwszy wyraz pierwszéy reszty, i mam $5ab$ drugi wyraz szukanego pierwiastku, który piszę obok $8a^2$ po prawey stronie, i mnożę tak $8a^2$ iako i $-5ab$ przez ten drugi wyraz, a iloczyn odeymuię od pierwszéy reszty.

Tym sposobem odiąłem od daney ilości kwadrat dwumianu $4a^2 - 5ab$: a że druga reszta zamyka tylko w sobie podwóyny iloczyn tego dwumianu przez trzeci wyraz szukanego pierwiastku, i kwadrat tegoż wyrazu trzeciego; podwaiam więc ilość $4a^2 - 5ab$, i wypadek $8a^2 - 10ab$ napisawszy pod $8a^2 - 5ab$, dzielę tę drugą resztę $8a^2 - 10ab$. Pierwszy wyraz ilorazu, to iest $8bc$, iest trzecim wyrazem szukanego pierwiastku. Piszę go także obok $8a^2 - 10ab$, i mnożę $8a^2 - 10ab + 8bc$ przez ten trzeci wyraz, a wypadaiący iloczyn odiąwszy od dru-

drugiey reszty, nic nie zostaie: co dowodzi, że pierwiastek daney ilości iest $4a^2 - 5ab + 8bc$.

Wreszcie działanie to zupełnie podobne do wyciągania pierwiastku kwadratowego z ilości liczebnych, łatwo iest zastosować do wszelkich ilości algiebraicznych, z których wyciągnąć chcemy pierwiastek kwadratowy.

IV. *O wyciąganiu pierwiastku z innych potęg wyższych od stopnia drugiego, tak z ilości liczebnych iako też z algiebraicznych.*

172. Działanie arytmetyczne, od którego zależy rozwiązywanie równań stopnia drugiego, i za pomocą którego maiąc dany kwadrat dochodzimy iego pierwiastku, iest tylko szczególnym przypadkiem działania ogólnieyszego, służącego do znalezienia liczby, którey wiadoma iest potęga iakiegokolwiek stopnia, i którą także zowiemy pierwiastkiem, lecz z przydaniem stopnia z którego pochodzi. Działanie to, od którego zależy rozwiązywanie równań stopni wyższych, podaie także sposób wynaydowania logarytmów nierownię krótszy i łatwieyszy, niż są dwa wyłożone wyżey. Lubo więc za pomocą logarytmów łatwo otrzymać można pierwiastek liczebny każdego stopnia, wypada iednak podać tu sposób zwyczayny wyciągania tych pierwiastków, abyśmy i nowy sposób wynaydowania logarytmów wyłożyć mogli, i obeznawszy się z działaniem tem na liczbach, łatwiey ie potem do ilości algiebraicznych zastosowali, i nakoniec dopełnili wiadomości o wyciąganiu pierwiastków, którąśmy dotąd na drugi tylko stopień podali.

173. Chcąc wyciągać z liczb pierwiastki sześcienne czyli trzeciego stopnia, trzeba naprzód poznać sześciany liczb iednocyfrowych: liczby te i sześciany im odpowiadaiące umieszczamy w dwóch następuiących wierszach:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	27	64	125	216	343	512	729.

Aże sześcian liczby naymnieyszéy dwucyfrowéy, to iest sześcian z 10 iest 1000: wszelka zatém liczba z trzech cyfr złożona nie może być sześcianem liczby dwucyfrowéy, lecz iednocyfrowéy.

Liczba dwucyfrowa, to iest z dziesiątków i iedności złożona, podnosi się do sześcianu sposobem takim, iakim ią podnosimy do kwadratu: gdyż rozłożywszy ią na dziesiątki i iedności, i oznaczywszy dziesiątki przez a, iedności przez b, będzie

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Skąd się okazuie, *że sześcian czyli trzecia potęga liczby złożoney z dziesiątków i iedności, zamyka cztéry części; to iest: sześcian dziesiątków, potróyny kwadrat dziesiątków rozmnożony przez iedności, potróyny kwadrat iedności rozmnożony przez dziesiątki i sześcian iedności.*

Niech będzie liczba 47, którą trzeba podnieść do potęgi trzeciey; uczyńmy $a = 4$ dziesiątkom czyli 40, $b = 7$ iednościom.

$$\begin{aligned} \text{Będzie}\quad a^3 &= 64000 \\ 3a^2b &= 33600 \\ 3ab^2 &= 5880 \\ b^3 &= 343 \\ \text{Summa}\ 103823 &= 47.\ 47.\ 47. \end{aligned}$$

174. Chcąc teraz z danego sześcianu 103823 doyść iego pierwiastku, uważać naprzód potrzeba, że w sześcianie 4 dziesiątków, to iest w liczbie 64000 ostatnie trzy cyfry z prawéy ręki iako zera nie maią żadney ważności liczebney; szukaiąc przeto sześcianu dziesiątków, można w liczbie daney 103823 oddzielić przecinkiem trzy ostatnie cyfry, a szukać go w pozostałych liczbach ze strony lewéy. Poczém rozporządziwszy działanie iak do wyciągania pierwiastku kwadratowego, po trzeciéy cyfrze z prawéy strony

dądaię się przecinek, naywiększy sześcian mogący się mieścić w liczbie 103 z lewey ręki pozostałéy będzie sześcianem z dziesiątków szukanego pierwiastku.

103,823	47
64	48
398,23	

Przypatruiąc się sześcianom liczb iednocyfrowych wyżey umieszczonym, postrzegam, że naywiekszy sześcian iaki mieścić się może w liczbie 103, iest 64, którego pierwiastek iest 4. Napisawszy więc 4 na mieyscu przeznaczonem dla pierwiastku, odeymuię liczbę 64 od 103, a obok pozostałéy reszty 39 piszę ostatnie trzy cyfry danego sześcianu. Pozostała reszta 39823 zawiera w sobie ieszcze trzy części sześcianu, to iest: potróyny kwadrat dziesiątków rozmnożony przez iedności, czyli $3a^2b$; potróyny kwadrat iedności rozmnożony przez dziesiątki czyli $3ab^2$, i sześcian iedności czyli b^3. Gdyby ważność iloczynu $3a^2b$ była wiadoma, podzieliwszy iloczyn ten przez $3a^2$ ilość wiadomą, znaleźlibyśmy na iloraz b czyli iedności szukanego pierwiastku: ale chociaż ważność iloczynu $3a^2b$ nie iest wiadoma, wiemy przecięż, że w iloczynie tym ostatnie dwie cyfry z prawéy strony nie mogą mieć żadney ważności liczebney: iloczyn albowiem ten ma ieden czynnik a^2 wyrażaiący kwadrat dziesiątków, a tem samem zakończony iest na dwa zera. Iloczyn zatem $3a^2b$ znaydować się musi w części 398, która zostaie z liczby 39823 po odłączeniu od niey dziesiątków i iedności, i która prócz tego zawiera ieszcze w sobie sta wypadaiące z potróynego iloczynu dziesiątków przez kwadrat iedności, i z sześcianu iedności.

Dzieląc 398 przez potróyny kwadrat 4 dziesiątków, to iest przez 48, wypada na iloraz 8; ale pierwéy należy sprobować, czy trzy części sześcianu pozostałe w reszcie 39823 nie będą za wielkie, przypuściwszy, że szukane iedności czyli $b = 8$. Jakoż znaydziemy

$3a^2b$

$$3a^2b = 38400$$
$$3ab^2 = \ \ 7680$$
$$b^3 = \ \ \ \ 512$$
$$\text{Summa} = 46592.$$

Wypadek ten większy od pozostałéy reszty 30823, dowodzi, że trzeba zmnieyszyć liczbę 8 wziętą za iedności szukanego pierwiastku. Odbywszy tę samę probę z liczbą 7, okaże się, że liczba ta czyni zadosyć warunkom: więc szukanym pierwiastkiem będzie 47.

Zamiast sprawdzania takiego iakie iest powyższe, źwyczaynie podnosi się zaraz do sześcianu liczba, którą wyrażaią dwie cyfry znalezione. Działanie to odbywszy z liczbę 48, znaydziemy

$$48.\ 48.\ 48 = 110592;$$

a liczba ta iako większa od daney 103823 dowodzi, że w pierwiastku cyfra 8 iest za wielka.

Tym samym sposobem postępuię się z każdą liczbą maiaca cyfr więcey niż trzy, a mniéy niż siedm. Oddzieliwszy trzy pierwsze cyfry po prawéy stronie, bierze się naywiększy sześcian zawarty w cyfrach pozostałych z lewéy strony; pierwiastek tego sześcianu pisze się na mieyscu dla niego przeznaczoném, a sam sześcian odeymuie się od tey liczby, pod którą iest podpisany; obok pozostałéy reszty piszą się trzy ostatnie cyfry, z których dwie pierwsze z prawéy strony odłączywszy przecinkiem, pozostałe ze strony lewéy dzielą się przez potróyny kwadrat znalezionych na pierwiastek dziesiątków; lecz przed napisaniem ilorazu na mieyscu przeznaczoném, trzeba go pierwéy sprawdzić, podnosząc do sześcianu dwie cyfry na pierwiastek znalezione: ieżeli sześcian ten większy iest od liczby daney, cyfrę maiącą w pierwiastku wyrażać iedności potrzeba zmnieyszyć, i przystąpić do sprawdzenia powtórnego. Sprawdzanie to póty się powtarza, póki otrzymany sześcian nie wypa-

pa-

padnie równy daney liczbie, albo też od niéy mnieyszy, ieżeli dana liczba nie iest zupełnym sześcianem; a w przypadku tym, pierwiastek znaleziony iest pierwiastkiem sześcianu naywiększego, który się zawiera w daney liczbie. Ponieważ częstokroć po odięciu sześcianu tego od daney liczby pozostaią znaczne reszty, czy znaleziony pierwiastek nie iest za mały, przekonać się można sposobem następuiącym:

$$(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1.$$

Sześcian ten większy iest ód sześcianu a^3 ilością $3a^2 + 3a + 1$. Skąd wypada, że kiedy reszta po wyciagnieniu pierwiastku sześciennego pozostała, mnieysza iest aniżeli potróyny kwadrat znalezionego pierwiastku, więcéy trzy razy wzięty tenże pierwiastek więcéy 1, znaleziony pierwiastek nie będzie za mały.

175 Chcąc wyciągnąć pierwiastek sześcienny z liczby 1058238 7, uważać naprzód potrzeba, że iakakolwiek iest liczba cyfr w szukanym pierwiastku, rozłożywszy go na iedności i dziesiątki, sześcian dziesiątków nie może wchodzić do trzech ostatnich cyfr po prawéy stronie będących, a tém samém znaydować się musi w liczbie 105823. Lecz naywiększy sześcian zawarty w liczbie 105823 musi mieć więcéy niż iednę cyfrę w swoim pierwiastku, który tém samem można będzie znowu rozłożyć na iedności i dziesiątki: aże sześcian tych dziesiątków nie może wchodzić do ostatnich trzech cyfr po prawey stronie, odłączywszy zatem trzy te cyfry przecinkiem, w pozostałey liczbie 105 trzeba szukać tego sześcianu. Gdyby po takowem odłączeniu tych trzech cyfr zostało się ieszcze więcey niż trzy cyfry po lewey stronie, należałoby powtórzyć znowu powyższe rozumowanie; a tak oznaczylibyśmy mieysce sześcianowi z iedności rzędu naywyższego, rozkładaiąc daną liczbę na oddziały trzycyfrowe począwszy od ręki prawéy ku

lolewey: ostatni iednak oddział po lewey stronie może mieć cyfr mniey a niżeli trzy.

Po takowem przygotowaniu rozporządziwszy działanie iak zwyczaynie, szukam naprzód podług prawideł w poprzedzaiącym artykule wyłożonych pierwiastku sześciennego dwóch pierwszych oddziałów z lewey ręki; i mam na wypadek 47; odiąwszy sześcian tey liczby od dwóch oddziałów, które go w sobie zawieraią; obok reszty 2000 piszę oddział następuiący 817; a liczba 2000817 powinna ieszcze w sobie zawierać trzy ostatnie części sześcianu z liczby, w którey 47 wyrażaią dziesiątki, a którey iedności są szukane: znaydziemy zatém te iedności iak w przykładzie artykułu poprzedzaiącego, oddzielaiąc dwie ostatnie cyfry z prawey strony od innych, a część z lewey strony pozostałą dzieląc przez potróyny kwadrat ze 47, to iest przez 6627. Znaleziony iloraz 3 należy sprawdzić podnosząc 473 do sześcianu, a wypadek okaże się równym liczbie daney: gdyż liczba ta iest zupełnym sześcianem.

105,823,817	473
64	48
418,23	6627
103823	
20008,17	
105823817	

Wyłożenie przykładu powyższego może zastąpić mieysce ogólnego prawidła. Gdyby dana liczba miała cztery oddziały, z oddziałem czwartym należałoby odbyć takie działanie, iakie się odbyło z trzecim; a kiedy potróyny kwadrat z cyfr na pierwiastek znalezionych nie mieści się w reszcie po odłączeniu od niey dwóch cyfr pierwszych z prawey strony, na ten czas napisawszy w pierwiastku zero, przyłącza się do reszty oddział następuiący, i z tą resztą postępuie się tak iak z poprzedzaiącą.

176. Ponieważ sześcian ułomka otrzymuie się mnożąc ułomek ten przez iego kwadrat, czyli co na iedno wychodzi podnosząc do sześcianu iego licznik i dzieląc go przez sześcian mianownika,

wy-

wypada stąd, że chcąc otrzymać pierwiastek sześcienny ułomka, trzeba osobno wyciągnąć pierwiastek z licznika i z mianownika. I tak sześcian ułomka $\frac{5}{6}$ iest $\frac{125}{216}$: wziąwszy pierwiastek sześcienny liczb 125 i 216, wypadnie pierwiastek $\frac{5}{6}$.

Sposobu tego trzymać się należy, gdy tak licznik iak mianownik iest zupełnym sześcianem: lecz gdy okoliczność ta nie ma mieysca, zamiast wyciągania pierwiastku osobno z licznika osobno z mianownika, mnożą się wyrazy danego ułomka przez kwadrat mianownika; tym sposobem ułomek dany zamienia się na inny, którego mianownik będzie zupełnym sześcianem z mianownika początkowego; i dosyć będzie wziąć tylko pierwiastek naywiększego sześcianu zawartego w liczniku. Gdyby przyszło *np.* wyciągnąć pierwiastek sześcienny z ułomka; $\frac{3}{5}$ rozmnożywszy oba wyrazy tego ułomka przez kwadrat mianownika, to iest przez 25, wypadnie $\frac{75}{5.5.5}$. W ułomku tym pierwiastek mianownika iest 5; co się zaś tycze licznika 75 ponieważ naywiększy sześcian w liczniku tym mieszczący się iest 64, którego pierwiastek iest 4, wniesiemy, że $\frac{4}{5}$ iest przybliżonym pierwiastkiem sześciennym ułomka $\frac{3}{5}$; iakoż różnica między sześcianem danym, a sześcianem znalezionego pierwiastku wynosi tylko $\frac{11}{125}$. Chcąc mieć pierwiastek bliższy prawdziwego, trzeba z liczby 75 wyciągnąc pierwiastek przez przybliżenie podług sposobu, który podamy niżey.

Jeżeli mianownik danego ułomka iest już kwadratem, dosyć będzie obadwa wyrazy ułomka rozmnożyć przez pierwiastek kwadratowy mianownika. Chcąc *np.* znaleźć pierwiastek sześcienny ułomka $\frac{4}{9}$, rozmnożywszy obadwa wyrazy ułomka przez pierwiastek kwadratowy mianownika, to iest przez 3, będzie $\frac{12}{3.3.3}$. Nay-większy sześcian mieszczący się w liczniku iest 8, którego pierwiastek iest 2; pierwiastek zaś sześcienny mianownika iest 3: a zatém ułomek $\frac{2}{3}$ iest pierwiastkiem naywiększego sześcianu zawartego w ułomku $\frac{4}{9}$.

177. Możnaby wyciągać przybliżone pierwiastki sześcienne za pomocą ułomków zwyczaynych sposobem podobnym do podanego wyżey (115) na przybliżone pierwiastki kwadratowe; to iest: trzeba liczbę daną obrócić na ułomek, któregoby mianownik był sześcianem zupełnym. Tak *np.* chcąc otrzymać pierwiastek sześcienny z liczby 22, wyrażam liczbę tę w kształcie ułomka następuiącego:

$\frac{22.125}{125} = \frac{2750}{125}$. Pierwiastek naywiększego sześcianu mogącego się mieścić w liczniku iest 14; pierwiastek zaś mianownika iest 5: będzie więc $\frac{14}{5}$ czyli $2\frac{4}{5}$ pierwiastkiem sześciennym liczby 22.

Zwyczaynie iednak wyciągaią się przybliżone pierwiastki sześcienne za pomocą ułomkow dziesiętnych, obracaiąc liczbę daną na ułomek dziesiętny taki, któregoby mianownikiem był sześcian zupełny. Lecz obaczmy pierwéy, iak się tworzą sześciany liczb dziesiętnych.

$(1,2)^3 = 1,2 \times 1,2 \times 1,2 = 1,728.$

$(0,12)^3 = 0,001728.$

$(1,25)^3 = 1,953125.$

$(0,125)^3 = 0,001953125$; i t. d.

Widzimy tu, że w sześcianie zawsze iest cyfr dziesiętnych trzy razy więcéy niż ich ma pierwiastek. Jakoż wszelki iloczyn powinien mieć tyle cyfr dziesiętnych, ile ich iest w iego czynnikach: sześcian zatém iako iloczyn trzech czynników między sobą równych, powinien mieć

cyfr

cyfr dziesiętnych trzy razy więcéy, niż ich ma ieden iego czynnik, to iest pierwiastek.

Skąd wniesiemy, że obracaiąc liczbę daną na ułomek dziesiętny, trzeba iéy przydać zer trzy razy więcey, niż mieć chcemy cyfr dziesiętnych w iéy pierwiastku sześciennym.

Chcąc *np.* z liczby 2 otrzymać pierwiastek sześcienny przybliżony do trzech cyfr dziesiętnych, przydaię do liczby téy dziewięć zer czyli mnożę ią przez 1000000000, i zamieniam ią w ułomek nastepuiący: $\frac{2000000000}{1000000000}$, będzie więc

$$\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{\frac{2000000000}{1000000000}}=\frac{\sqrt[3]{2000000000}}{1000}.$$

Wyciągam potém sposobem wyłożonym wyżéy pierwiastek z licznika

2,000,000,000	1,259
1	
10,00	3
1728	
2720,00	432
1953125	
468750,00	46875
1995616979	
4383021	

A zatém $\sqrt[3]{2}=1,259$: iakoż $(1,259)^3 = 1,995616979$; liczba zaś $(1,260)^3=2,000376000$.

To iest 1*sze* przydaię do liczby 2 po prawéy stronie dziewięć zer, gdyż chcę mieć w pierwiastku trzy cyfry dziesiętne; 2*re* wypadek rozkładam na oddziały trzycyfrowe poczynaiąc od ręki prawéy ku lewéy; 3*cie* wyciągam pierwiastek sześcienny z pierwszego po lewéy ręce oddziału, który iest 2, i pierwiastek, którym iest 1, piszę na mieyscu dla niego przeznaczoném; 4*te* od piérwszego oddziału odeymuię sześcian znalezionego pierwiastku, i obok pozostałéy reszty, która iest 1, piszę trzy zera składaiące od-

 dział

dział drugi, skąd powstaie liczba 1000; 5*te* w liczbie téy odłączam dwa pierwsze zera z prawéy strony, a liczbę pozostałą ze strony lewey, to iest 10, dzielę przez potróyny kwadrat znalezionego pierwiastku, to iest przez 3; 6*te* przed napisaniem ilorazu, którym iest 3 na mieyscu swoiem pierwéy go sprawdzam podnosząc 13 do sześcianu; a że ten sześcian wypada większy od liczby z którą działam, to iest od 2000, zmnieyszam więc ten iloraz iednością, i piszę w pierwiastku 2; 7*me* sześcian z 12, to iest 1728, odeymuię od dwóch pierwszych oddziałów wchodzących do działania, a obok reszty, która iest 272, piszę oddział następuiący, i mam liczbę 272000; 8*me* w liczbie téy odłączywszy dwa ostatnie zera z prawéy strony, liczbę pozostałą ze strony lewéy, to iest 2720, dzielę przez potróyny kwadrat z 12, czyli przez 432, i mam na iloraz 6; lecz przed napisaniem ilorazu tego w pierwiastku, probuię czy nie iest za wielki: podniosłszy 126 do sześcianu, znayduię wypadek większy niż 2000000; zmnieyszam więc iloraz ten iednością, i piszę 5 obok dwóch pierwszych cyfr w pierwiastku; 9*te* sześcian ze 125, to iest 1953125 odeymuię od trzech oddziałów do działania wchodzących, to iest od 2000000, i obok pozostałéy reszty, która iest 46875, piszę trzy zera oddział czwarty składaięce, tym sposobem mam liczbę 46875000, w któréy odłączywszy dwa zera po prawéy stronie, część pozostałą ze strony lewéy, to iest 468750, dzielę przez potróyny kwadrat znalezionego dotąd pierwiastku, a iloraz 9 piszę na swoiem mieyscu w pierwiastku, i mam liczbę 1259, w któréy odłączywszy trzy ostatnie cyfry, będzie szukany pierwiastek sześcienny 1,259; 10*te*. Nakoniec podnoszę do sześcianu tak pierwiastek znaleziony, iako też liczbę 1,260, i postrzegam, że pierwiastek sześcienny liczby 2 większy iest od 1,259, a mnieyszy od 1,260. Liczba iednak 1,260 bliższa

iest

iest prawdziwego pierwiastku liczby 2, niżeli liczba 1,259: gdyż różnica między sześcianem liczby 1,260 i sześcianem danym iest mnieysza aniżeli różnica między tymże sześcianem danym i sześcianem liczby 1,259, o czem łatwo przekonać się można.

178. Gdyby liczba dana miała iuż cyfry dziesiętne, przydać do niey należy tyle zer, aby liczba wszystkich cyfr dziesiętnych w niey będących była trzy razy większa od liczby cyfr dziesiętnych, którąśmy zamierzyli w szukanym pierwiastku. Chcąc *np.* z liczby 1,25 wyciągnąć pierwiastek sześcienny z dwiema cyframi dziesiętnemi, powinien sześcian szukanego pierwiastku mieć cyfr dziesiętnych sześć: aże ich ma iuż dwie, potrzeba więc przypisać cztery zera po prawey stronie liczby 1,25, i sposobem zwyczaynym wyciągnąć pierwiastek sześcienny z liczby 1250000. Po odbytem działaniu znaydziemy, że pierwiastek liczby tey przypada między 105 i 106, pierwiastek zatem liczby 1,25 przypadać będzie między 1,05 i 1,06.

179. Wreszcie im więcey zer przydamy do liczby daney, tem pierwiastek otrzymany bliższy będzie prawdziwego; nigdy iednak nie będzie zupełnie równy prawdziwemu, choćby działanie to iak naydaley posunięte było: i pierwiastek sześcienny liczby, która nie iest zupełnym sześcianem, równie iak pierwiastek kwadratowy liczby nie będącey zupełnym kwadratem, nie może być wyrażony przez żaden ułomek, choćby też mianownik iego był tak wielki, iak tylko być może. Abyśmy się o tey prawdzie widocznie przekonali, trzeba pierwey okazać, że nie tylko kwadraty i sześciany ułomków właściwych są zawsze ułomkami, iakośmy to uważać mogli; ale też *wszelka liczba ułomkowa nie mogąca być sprowadzoną do mnieyszych*

wy-

wyrazów, czyli składaiąca się z dwóch liczb między sobą pierwszych (143), *podnoszona do kwadratu, sześcianu, i t. d. daie zawsze wypadek, ułomkowy nie mogący być sprowadzonym do mnieyszych wyrazów.*

Prawda ta zasadza się na następuiącey: *Wszelka liczba pierwsza* P *dzieląca zupełnie iloczyn dwóch liczb* A *i* B, *dzielić także musi iedne z tych liczb.*

Daymy, że liczba ta nie dzieli zupełnie liczby B, i że B iest większa od P, oznaczywszy przez q iloraz całkowity, a przez B' pozostałą resztę, będzie

$$B = Pq + B';$$

rozmnożywszy obie strony przez A, wypadnie

$$AB = APq + AB'.$$

Podzieliwszy obie strony przez P, będzie

$$\frac{AB}{P} = Aq + \frac{AB'}{P}.$$

Że zaś pierwsza strona równania tego iest liczbą całkowitą, gdyż podług założenia iloczyn AB iest podzielny przez P; druga więc strona być powinna także liczbą całkowitą; a gdy wyraz pierwszy drugiey strony iest liczbą całkowitą z założenia, więc i drugi, wyraz $\frac{AB'}{P}$ musi być liczbą całkowitą; a tem samem iloczyn AB' musi być podzielny przez P.

B' iako reszta pozostała z dzielenia B przez P iest mnieysza od P; nie mogąc zatem dzielić B' przez P, podzielmy P przez B', a otrzymany iloraz całkowity oznaczmy przez q', pozostałą zaś resztę przez B''; dzielmy potem P przez B'', a otrzymany iloraz oznaczmy przez q'', pozostałą zaś resztę przez B'''; i tak daley, aż póki na resztę nie zostanie 1; co nastąpić musi: gdyż P iest liczba *pierwsza*. Tym sposobem otrzymamy następuiące równania:

$$P = B'q' + B''; \quad P = B''q'' + B''' \text{ i t. d.}$$

Roz-

Rozmnożywszy obie strony każdego równania przez A, będzie
$AP = AB'q' + AB''$; $AP = AB''q'' + AB'''$ i t. d.

Podzieliwszy przez P, wypadnie

$$A = q' \frac{AB'}{P} + \frac{AB''}{P};\ A = q'' \frac{AB''}{P} + \frac{AB'''}{P}$$ i t. d.

Wypadki te okazuią, że ponieważ AB' iest podzielne przez P, iloczyny także AB'', AB''' i t. d. powinny być podzielne przez P. Że zaś pozostałe reszty B', B'', B''' i t. d. są coraz mnieysze, aż nakoniec za ostatniem dzieleniem wypadnie na resztę 1; ostatni zatem iloczyn będzie $A \times 1$, który także być musi podzielny przez P; to iest P dzielić musi liczbę A.

Stąd wypada, że ieżeli liczba pierwsza P niedzieląca zupełnie podług założenia liczby B niedzieli zupełnie liczby A; nie może także zupełnie dzielić ich iloczynu AB.

Jeżeli zatem ułomek $\frac{b}{a}$ nie może być sprowadzonym do mnieyszych wyrazów, nie masz żadney liczby pierwszey, któraby razem dzielić mogła liczbę b i a; ażę podług tego co poprzedziło, wszelka liczba pierwsza, która nie dzieli liczby a nie może także dzielić iloczynów $a \times a$, $a \times a \times a$ i t. d. czyli a^2, a^3 i t. d. i że każda liczba pierwsza, która nie dzieli zupełnie b, nie dzieli także iloczynów $b \times b$ czyli b^2, $b \times b \times b$, czyli b^3 i t. d. rzeczą iest widoczną, że ułomki $\frac{b^2}{a^2}$, $\frac{b^3}{a^3}$ i t. d. nie mogą być sprowadzonemi do wyrazów mnieyszych, tak iak i ułomek $\frac{b}{a}$, a tem bardziey nie mogą zamienić się w liczby całkowite.

Z tey ostatniey prawdy wypada, że wszystkie liczby całkowite, które nie są zupełnemi kwadratami lub sześcianami i t. d. nie maią pierwiastków nie tylko w liczbach całkowitych, ale też w liczbach ułomkowych. 180.

180. Ilość, którey wyrazić nie można ani w liczbie całkowitey ani w ułomkowey, nie może mieć spólney miary z iednością lub z iakową iey częscią: Pierwiastki zatém sześcienne liczb nie będących zupełnemi sześcianami, tak iak pierwiastki kwadratowe liczb nie będących zupełnemi kwadratami, są niespółmierne czyli bezstosunkowe (116).

Ponieważ pierwiastek sześcienny liczby *np.* 64 iest 4, a pierwiastek kwadratowy liczby 16 iest także 4; więc pierwiastek sześcienny liczby 64, równy iest pierwiastkowi kwadratowemu liczby liczby 16; czyli $\sqrt[3]{64} = \sqrt{16}$.

Pierwiastek sześcienny liczby 43 większy iest od 3, a mnieyszy od 4; pierwiastek kwadratowy liczby 12 większy iest od 3, a mnieyszy od 4. Mógłby zatém kto rozumieć, że pierwiastek sześcienny liczby 43 równy iest pierwiastkowi kwadratowemu liczby 12; czyli że $\sqrt[3]{43} = \sqrt{12}$. Lecz równanie, to iest fałszywe: gdyż pierwsza strona podniesiona do sześcianu czyni 43; druga zaś strona podniesiona do sześcianu wynosi $\sqrt{12}.\sqrt{12}.\sqrt{12} = 12\sqrt{12}$ (167). Skąd się okazuie, że pierwiastki sześcienne liczb nie będących zupełnemi sześcianami stanowią ilości niespółmierne innego gatunku niż pierwiastki liczb nie będących kwadratami; gdyż nayczęściey rzeczą iest nie podobną iedne wyrazić przez drugie.

181. Poznawszy sposób wyciągania pierwiastków kwadratowych i sześciennych z ilości liczebnych, łatwo go można będzie zastosować do wyciągania pierwiastków wszelkiego stopnia. Lecz pierwey nim ten sposób wyłożymy, uczynić tu wypada niektóre uwagi nad wyciąganiem pierwiastków z potęg, których wykładniki są podzielne przez 2 lub 3.

Pierwiastek czwartey potęgi otrzymać mo-

żna

żna przez podwóyne wyciągnienie pierwiastku kwadratowego: gdyż wziąwszy pierwiastek kwadratowy ilości podniesioney do potęgi 4téy *np.* a^4, wypadnie kwadrat a^2, z którego wyciągnąwszy znowu pierwiastek kwadratowy, wypadnie a pierwiastek szukany.

Podobnież potróyne wyciągnienie pierwiastku kwadratowego odpowiada wyciaganiu pierwiastku osméy potęgi: gdyż *1ód* $\sqrt{a^8} = a^4$; *2re* $\sqrt{a^4} = a^2$; *3cie* $\sqrt{a^2} = a$.

Tu iuż łatwo postrzedz można, że przez następne wyciąganie pierwiastku kwadratowego, można będzie otrzymać pierwiastek wszelkiey potęgi, któréy wykładnikiem iest iedna z liczb 4, 8, 16, 32 i t d.

Pierwiastki, których wykładniki nie są liczbami pierwszemi, mogą być sprowadzone do innych niższego stopnia: tak *np.* pierwiastek stopnia szóstego można otrzymać przez wyciągnienię naprzód pierwiastku kwadratowego, a potém sześciennego: iakoż $\sqrt{a^6} = a^3$ $\sqrt[3]{a^3} = a$ i t. d.

182. Obaczmy teraz, iak się wyciągaią pierwiastki potęg, których wykładniki są liczbami pierwszemi. Niech będzie *np.* liczba 231554007, z któréy potrzeba wyciągnąć pierwiastek stopnia piątego. Uważam naprzód, że ponieważ naymnieysza z liczb dwucyfrowych, to iest 10 ma w piątéy swoiéy potędze sześć cyfr, gdyż $10^5 = 100000$; więc pierwiastek piątego stopnia liczby daney musi mieć przynaymniey dwie cyfry: oznaczywszy zatém dziesiątki szukanego pierwiastku przez a, iedności przez b, ilość $a + b$ oznaczać będzie pierwiastek szukany: liczbę więc daną można wyrazić następuiącym sposobem:

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 = 231554007$.

Po takowem przygotowaniu, uważam, że

po-

ponieważ w a^5 czyli w piątey potędze dziesiątków tego pierwiastku ostatnie pięć cyfr z prawey strony iako zera nie maią żadney ważności liczebney, oddzielam więc przecinkiem te pięć cyfr; gdyby w pozostałey części z lewey strony przecinka znaydowało się ieszcze więcey niż pięć cyfr, przystosowałbym do nich to samo rozumowanie, iakie iest poprzedzaiące; i tym sposobem daną liczbę rozłożyłbym na oddziały pięciocyfrowe, poczynaiąc od ręki prawey ku lewey; ostatni oddział po lewey stronie zamykać będzie piątą potęgę iedności rzędu naywyższego w szukanym pierwiastku.

Podnosząc liczby iednocyfrowe do potęgi piątey, postrzegam, że pierwszy oddział daney liczby, to iest 2315, przypada między piątą potęgą liczby 4 i 5: gdyż piąta potęga pierwszey z tych dwóch liczb iest 1024, drugiey 3125: biorę więc 4 za dziesiątki szukanego pierwiastku, a odiąwszy piątą potęgę tey liczby, to iest 1024 od pierwszego oddziału liczby daney, obok pozostałey reszty, którą iest 1291, piszę oddział następuiący.

$$\begin{array}{l|l} 2315,54007 & 47 \\ 1024 & \overline{1280} \\ \hline 12915,4007 & \end{array}$$

Liczba stąd wypadaiąca powinna w sobie zamykać wyrazy $5a^4b + 10a^3b^2 +$ i t. d. które pozostaią w ilości $(a+b)^5$, po odięciu od niey piątey potęgi dziesiątków czyli a^5. Gdyby ważność liczebna iloczynu $5a^4b$ była wiadoma, podzieliwszy ważność tę przez $5a^4$, miałbym na iloraz b iedności szukanego pierwiastku. Lecz chociaż ważność iloczynu tego nie iest wiadoma, wiem atoli, że ostatnie cztery iego cyfry z prawey strony nie maią żadney ważności znaczącey: gdyż ieden iego czynnik a^4, który iest czwartą potęgą dziesiątków, kończy się na cztery zera. Odłączywszy przeto w pozostałey reszcie cztery ostatnie cyfry z prawey strony, część pozostała ze strony lewey, to iest 12915 zamykać będzie iloczyn $5a^4b$, czyli pięć razy wziętą po-

tę-

tęgę czwartą znalezionych na pierwiastek dziesiątków, rozmnożoną przez iedności, i prócz tego dziesiątki tysięcy należące do iloczynów $10a^3b^2$ + i t. d.

Czwarta potęga liczby 4 wzięta pięć razy wynosi 1280; dzieląc 12915 przez 1280, wypada na iloraz 10; lecz w pierwiastku nie można położyć więcey nad 9: a i tak ieszcze sprobować należy, czy i ta cyfra nie iest za wielka, podnosząc do potęgi piątey znaleziony pierwiastek czyli liczbę 49. Proba takowa okaże, że cyfrą maiącą w szukanym pierwiastku wyrażać iedności powinna być liczba 7, i że tem samem pierwiastek ten iest 47, gdyż potęga piąta liczby 48 większa iest od liczby daney; potęga zas piąta liczby 47 iest 229345007 mnieysza od teyże liczby daney.

Gdyby dana liczba miała iednym oddziałem więcey, przyłączyłbym go do reszty pozostałey z odięcia potęgi piątey znalezionego pierwiastku od dwóch pierwszych oddziałów liczby daney; a z całkowitą resztą odbyłbym to samo działanie, iak z poprzedzaiącą; i tak daley.

Wreszcie prawidła podane na wyciąganie pierwiastków kwadratowych i sześciennych z ułomków i liczb nie będących zupełnemi kwadratami i sześcianami, z łatwością być mogą zastosowane do wyciągania pierwiastków stopnia piątego.

183. Na tych samych zasadach polega sposób wyciągania tychże pierwiastków z ilości algiebraicznych. Lecz nim to okażemy na przykładach z ilościami wielorakiemi, wypada pierwey cokolwiek wspomnieć o poiedynczych.

Ponieważ w iloczynie każda głoska ma za wykładnik summę wykładników, które się znaydują w każdym czynniku (30), wypada stąd, że *potęga ilości poiedynczey otrzymuie się mnożąc wykładnik każdego czynnika przez wykładnik potęgi szukaney.*

I tak

I tąk trzecią *np* potęgę iłości a^2b^3c otrzymamy mnożąc wykładniki 2, 3 i 1 należące do głosek a, b i c przez liczbę 3, która iest potęgą szukaną: będzie więc $a^6b^9c^3$. Jakoż $(a^2b^3c)^3 = a^2b^3c \times a^2b^3c \times a^2b^3c = a^{2\cdot3}b^{3\cdot3}c^{1\cdot3} = a^6b^9c^3$.

Gdyby dana iłość miała spółczynnik liczebny, trzeba go także podnieść do potęgi żądaney: i tak czwarta potęga iłości $3ab^2c^5$ iest $81a^4b^8c^{20}$.

184. Co się tycze znaków przed iłościami poiedynczemi będących, trzeba uważać, że *wszelkie potęgi, których wykładnik iest parzysty, maią przed sobą znak +: wszelkie zaś potęgi, których wykładnik iest nieparzysty, maią przed sobą ten sam znąk, iaki się znayduie przed iłościami, z których potęgi te powstaią.*

Jakoż potęga stopnia parzystego iest iloczynem iłości rozmnożoney przez siebie samę czyli wziętéy za czynnik razy 2, 4, 6, 8 i t. d. iloczyn zaś ma zawsze przed sobą znak + kiedy liczba odięmnych czynników iłoczyn ten składaiących iest 2, 4, 6, 8 i t. d. (34). Przeciwnie potęga stopnia nieparzystego z iłości odiemnéy będąca iłoczynem iłości tey wziętey za czynnik razy 3, 5, 7, 9 i t. d. musi mieć zawsze przed sobą znak —: gdyż iloczyn ma zawsze przed sobą znak — kiedy liczba odiemnych czynników iłoczyn ten składaiących iest 3, 5, 7, 9 i t. d. iąk to łatwo wnieść z tego, cośmy wyżey powiedzieli o mnożeniu (34).

185. A iako wyciąganie pierwiastków iest działaniem odwrotnem podnoszeniu iłości do potęg; tak też chcąc daney potęgi wynaleźć pierwiastek, trzeba się trzymać prawidła powyższemu odwrotnego, to iest *podzielić wykładnik każdey głoski przez wykładnik oznaczaiący stopień pierwiastku żądanego.*

Tym sposobem znaydziemy pierwiastek sześcienny iłości $a^6b^3c^9$ dzieląc wykładniki 6, 3 i 9 przez 3, i będzie pierwiastek szukany a^2bc^3.

Gdy dana iłość ma spółczynnik liczebny,

rzeba także wziąć iego pierwiastek maiący być spółczynnikiem dla pierwiastku sposobem powyższym otrzymanego. Chcąc mieć *np.* pierwiastek stopnia czwartego z ilości $81a^4b^8c^{12}$; ponieważ 81 iest potęgą czwartą liczby 3, podzieliwszy zatém wykładniki głosek przez 4, będzie szukany pierwiastek $3ab^2c^3$.

Jeżeli wykładniki głosek nie są podzielne przez wykładnik szukanego pierwiastku, na ten czas przed ilością daie się znak pierwiastkowy, nad którym u góry pisze się liczba stopień szukanego pierwiastku wyrażaiąca: iakośmy to iuż widzieli wyżey.

186. Wyrażenia maiące przy sobie znak pierwiastkowy iakiegokolwiek stopnia mogą być czasem do prostszych sprowadzone. Jakoż z tego cośmy wyżéy (167) powiedzieli, łatwo iest uczynić wniosek, że *potęga iakakolwiek iloczynu iest iloczynem każdego z czynników do teyże potęgi podniesionego; i że tém samém pierwiastek iakikolwiek iloczynu iest iloczynem pierwiastków tegoż stopnia każdego z czynników.* Skąd wypada, że *ieżeli ilość będąca pod znakiem pierwiastkowym ma niektóre czynniki będące potęgami tegoż stopnia, iakiego iest znak pierwiastkowy; można będzie wziąć osobno pierwiastki tych czynników i iloczyn ich rozmnożyć przez wskazany pierwiastek innych czynników.*

Niech będzie *np.* $\sqrt[5]{96a^5b^7c^{11}}$.

Ponieważ $96 = 32.\ 3 = 2^5.\ 3$; a^5 iest piątą potęgą ilości a; $b^7 = b^5 \times b^2$; $c^{11} = c^{10} \times c$: będzie więc $96a^5b^7c^{11} = 2^5a^5b^5c^{10} \times 3b^2c$. A zatém

$$\sqrt[5]{96a^5b^7c^{11}} = 2abc^2\sqrt[5]{3b^2c}.$$

187. Ponieważ wszelka potęga parzysta powinna mieć przed sobą znak $+$ (184), żadna więc ilość odiemna nie może być potęga stopnia parzystego, i nie może mieć pierwiastku w tymże stopniu. Skąd wypada, że *wszelki znak pierwiastkowy stopnia parzystego znayduiący się*

przed

przed ilością odiemną iest wyrażeniem bezistotnem. I tak $\sqrt[4]{-a}$, $\sqrt[6]{-b}$, $b+\sqrt[8]{-c}$, i t. d. są wyrażenia bezistotne.

Pierwiastki zatem czy to prawdziwe czy przybliżone potęg parzystych, w ten czas tylko mogą być wyznaczone, gdy potęgi te są dodayne. Przed pierwiastkami temi daie się tak iak przed kwadratowemi podwóyny znak $\pm$, gdyż nie można wiedzieć, czy dana potęga powstała z pierwiastku dodaynego czy z odiemnego, kiedy tak pierwszy iak drugi podniesiony do potęgi parzystey daie wypadek ze znakiem $+$.

Inaczey się rzecz ma w potęgach nieparzystych, które maią zawsze przed sobą ten sam znak, iaki iest przed ich pierwiastkiem (184): przed pierwiastkiem potęg takowych trzeba zawsze dawać znak taki, iaki iest przed potęgami, i w tym przypadku ilości bezistotne mieysca nie maią.

188. Zamiast znaku pierwiastkowego, można czasem wygodnie użyć wykładników ułomkowych; á to na fundamencie prawidła powyższego (185), że chcąc wyciągnąć pierwiastek danéy potęgi, trzeba podzielić wykładnik każdey głoski przez wykładnik oznaczaiący stopień pierwiastku szukanego. Tym sposobem będzie

$$\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2;\ \sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{5}{3}} = a^{\frac{3+2}{3}} = a \times a^{\frac{2}{3}};$$
$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} \text{ i t. d.}$$

189. Póydźmyż teraz do wyciągania pierwiastków iakieykolwiek potęgi z ilości algiebraicznych wielorakich. Sposób postępowania w téy mierze dosyć będzie okazać na iednym tylko przykładzie: gdyż to, cośmy dotąd o wyciąganiu pierwiastków powiedzieli, łatwo iest zastosować do wszelkich przypadków. Daymy, że trzeba wyciągnąć pierwiastek szóstego stopnia z ilości następuiący:

$$\begin{array}{l|l} 64x^{18} - 960a^3x^{15} + 6000a^6x^{12} & 2x^3 - 5a^3 \\ \quad - 20000a^9x^9 + 37500a^{12}x^6 & \overline{192x^{15}} \\ \quad - 37500a^{15}x^3 + 15625a^{18} & \\ - 64x^{18} & \\ \hline \text{Reszta} - 960a^3x^{15} + \text{i t. d.} & \end{array}$$

Ponieważ ilość dana uporządkowana iest podług wykładnika głoski x, wypada ztąd, że pierwszy iey wyraz musi być szóstą potęgą wyrazu pierwszego w szukanym pierwiastku podług teyże głoski x uporządkowanym: wziąwszy zatém szósty pierwiastek ilości $64x^{18}$ podług prawideł podanych wyżéy (185) będzie wypadek $2x^3$.

Wypadek ten podniosłszy do potęgi szóstéy, i odiąwszy od ilości danéy, pierwszy wyraz pozostałéy reszty musi być wyrazem drugim w szóstéy potędze dwóch pierwszych wyrazów szukanego pierwiastku: dwa te wyrazy oznaczywszy przez $a+b$ i ilość tę podniosłszy do potęgi szóstéy (28), będzie

$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

Piérwszy zatém wyraz pozostałéy reszty iest iloczynem sześć rázy wziętym piątéy potęgi wyrazu piérwszego w pierwiastku przez drugi wyraz tegoż pierwiastku: podzieliwszy go zatém przez $6a^5$, iloraz będzie drugim wyrazem b.

Piąta potęga piérwszego wyrazu w pierwiastku, to iest wyrazu $2x^3$ rozmnożona przez 6, iest $6 \times 32x^{15} = 192x^{15}$, przez co podzieliwszy piérwszy wyraz pozostałéy reszty, który iest $-960a^3x^{15}$, iloraz $-5a^3$ iest drugim wyrazem szukanego pierwiastku. Dla sprawdzenia znalezionego pierwiastku $2x^3 - 5a^3$ trzeba go podnieść do potęgi szóstéy, a wypadek okaże się równy ilości danéy.

Gdyby pierwiastek miał iednym wyrazem więcéy, odbywszy działanie powyższe, zostałaby druga reszta, w któréy wyraz pierwszy byłby sześć razy wziętym iloczynem piątéy potęgi

dwóch

dwóch pierwszych wyrazów pierwiastku, przez wyraz trzeci. a zatem pierwszy ten wyraz drugiéy reszty podzieliwszy przez 6 $(2x^3 - 5a^3)^5$, iloraz byłby trzecim wyrazem szukanego pierwiastku; a dla sprawdzenia tego wyrazu należałoby podnieść do potęgi szóstey trzy wyrazy na pierwiastek otrzymane. Tym samym sposobem postąpićby należało, chcac znaleźć następne wyrazy w pierwiastku, iakabykolwiek była ich liczba.

V. *O podnoszeniu ilości wielorakich do potęg i o kombinacyach.*

190. Rozwiiaiąc potęgę szóstą dwumianów $a+b$, $2x^3-5a^3$ w poprzedzaiącym artykule, łatwo mogliśmy pomiarkować, że podnoszenie ilości wielorakich do potęg drogą zwyczayną wykonywane, to iest biorąc ie za czynnik tyle razy, ile wykładnik szukanéy potęgi ma iedności, zabierać musi nie mało czasu i mieysca, zwłaszcza kiedy potęga szukana iest wysokiego stopnia. Przypatrzenie się z głębszą uwagą rozmaitym potęgom wielomianów i okolicznościom rozwiianiu tych potęg towarzyszącym, dało początek pewny prawidłom, które długie to i częstym omyłkom podpadaiące działanie znacznie skracaią. Lecz prawidła te zasadzaią się w części na sposobach rozmaitago porządkowania głosek któremi się ilości oznaczaią: takowe więc sposoby porządkowania, czyli iak się zwyczaynie mówi, *kombinowania* głosek, pierwey wyłożyć potrzeba, nim przystąpimy do podania prawideł na rozwiianie potęg ilości wielorakich.

191. Trzy są gatunki *kombinacyy*: naprzód piszą się przy sobie głoski maiące być kombinowanémi w takim porządku w iakim ie tylko pisać można, powtarzaiąc w iedneyże kombinacyi tę samę głoskę: *np.* trzy głoski *a*, *b*, *c*, daią *dwukrotnich* czyli dwugłoskowych tego gatunku kom-

kombinacyy sześć, które są: *ab*, *ac*, *ba*, *bc*, *ca*, *cb*.

W trzecim gatunku kombinacyy nie tylko się nie powtarza ta sama głoska w iedneyże kombinacyi, iak w kombinacyach gatunku piérwszego; ale też nie maią mieysca kombinacye złożone z tychże samych głosek, lubo w odmiennym porządku umieszczonych, iak iest w kombinacyach gatunku drugiego. I tak trzy głoski *a*, *b* *c* daią dwukrotnych tego gatunku kombinacyy trzy, które są: *ab*, *ac*, *bc*.

192 *Pierwszy gatunek kombinacyy.* Niech będą *np.* cztéry głoski *a*, *b*. *c*, *d*, maiące być kombinowanemi. Rzeczą naprzód iest widoczną, że kombinacyy iednokrótnych czyli iednogłoskowych iest 4, które są: *a* *b*, *c*, *d*.

2re. Napisawszy głoskę *a* po lewéy stronie każdey ze czterech kombinacyy iednokrótnych, będzie kombinacyy dwukrotnych cztéry, z których każda zaczyna się od *a*, i które są *aa*, *ab*, *ac*, *ad*. Napisawszy drugą głoskę *b* po lewey stronie każdey kombinacyi iednokrótney, przybędzie drugich czterykombinacyy dwukrotnych, z których każda zaczyna się od głoski *b*, i które są, *ba*, *bb*, *bc*, *bd*. Podobnież napisawszy naprzód głoskę *c* potem *d* po lewey stronie każdéy kombinacyi iednokrótnêy, przybędzie ośm kombinacyy dwukrotnych, z których cztéry zaczynaią się od *c*, a cztery od *d*, i które są; *ca*, *cb*, *cc*, *cd*, *da*; *db*, *dc*, *dd*.

Cztéry zatem głoski *a*, *b*, *c*, *d* daią kombinacyy dwukrotnych $4 \times 4 = 4^2 = 16$, z których cztery zaczynaia się od *a*, cztéry od *b*, cztery od *c*, i cztéry od *d*.

3cie. Napisawszy każdą ze czterech głosek do kombinowania danych po lewéy stronie każdęy ze 16 kombinacyy dwukrotnych, otrzymamy 4 razy 16, czyli 4^3 kombinacyy trzykrotnych, czyli trzygłoskowych, z których 16 zaczynaią się od *a*, 16 od *b*, 16 od *c*, i 16 od *d*.

Q 4te.

4te. Napisawszy każdą ze czterech głosek do kombinowania danych po lewéy stronie każdey kombinacyi trzykrótney, otrzymamy kombinacyy czterokrótnych, czyli czterogłoskowych cztéry razy więcéy niż było trzykrótnych; ąże liczba trzykrótnych iest $= 4^3$, więc liczba czterokrótnych będzie $= 4^3 \times 4 = 4^4$ i t. d

W ogólności niech liczba głosek do kombinowania danych będzie m: kombinacyy iednokrótnych będzie m; dwukrótnych m^2, trzykrótnych m^3, czterokrótnych m^4, pięciokrótnych m^5, -- n krótnych czyli złożonych z liczby głosek n będzie m^n. To iest: trzeba liczbę głosek do kombinowania danych podnieść do potęgi, któreyby wykładnik miał tyle iedności, po ile głosek ma się znaydować w kombinacyach szukanych. Siedm głosek *np.* daią tego gatunku kombinacyy dwukrótnych 7^2, trzykrótnych 7^3, czterokrótnych 7^4 i t. d.

Kombinacyy tego gatunku, które się także nazywaią *waryacyami*, mamy przykład w układzie liczenia, gdzie dziesęć znaków liczebnych, daią wszelkie liczby, iakie tylko być mogą. Uważać tu iednak potrzeba, że ponieważ zero po lewéy stronie cyfry napisane nie odmienia iey ważności, przeto te 10 znaków liczebnych nie daią kombinacyy dwukrótnych 10^2 czyli 100, lecz tylko 90: gdyż 01, 02, 03 i t. d. znaczą to samo co 1, 2, 3 i t. d. Podobnież kombinacyy trzykrótnych te same 10 znaków liczebnych daią tylko 900, lubo podług prawidła powinnoby ich być $10^3 = 1000$ i t d.

Niektóre gry iak tryktrak są przykładem tego gatunku kombinacyy Możnaby tu także wspomnieć głoski abecadła i odmienne dźwięki głosu ludzkiego, które tym sposobem między sobą kombinowane daią rozmaite słowa pisane i wymawiane, toż mówić o znakach muzycznych i t. d. Wreszcie gatunek ten kombinacyy nie tak często używa się w praktyce iak dwa następuiące.

193.

195. *Drugi gatunek kombinacyy.* Niech będą te same cztery głoski a, b, c, d do kombinowania. Rzeczą iest widoczną, że kombinacyy iednokrótnych będzie 4, które są a, b, c, d.

Napisawszy a po lewéy stronie każdéy kombinacyi iednokrótney, będzie kombinacyy dwukrótnych od a zaczynaiących się tylko $3 = 4 - 1$, które są: ab, ac. ad; kombinacya bowiem aa w tym gatunku mieysca nie ma (191). Podobnież postąpiwszy z głoskami b, c i d, otrzymamy trzy kombinacye dwukrótne zaczynaiące się od b, trzy zaczynaiące się od c, i trzy zaczynaiące się od d. A zatem cztéry głoski a, b, c, d daią dwukrótnych tego gatunku kombinacyy $12 = 4.\ 3 = 4\ (4 - 1)$.

Podobnymże sposobem postępuiąc daléy, okaże się, że te sama cztéry głoski daią kombinacyy

trzykrótnych $24 = 4.\ 3.\ 2 = 4\ (4 - 1)\ (4 - 2$;

czterokrótnych $24 = 4\ 3.\ 2.\ 1 = 4\ (4 - 1)\ (4 - 2)\ (4 - 3)$; i t. d.

W ogólności, niech będzie liczba głosek do kombinowania danych m: postępuiąc sposobem podobnym do poprzedzaiącego, wypadnie zawsze liczba kombinacyy

iednokrótnych $= m$;
dwukrótnych $= m\ (m - 1)$;
trzykrótnych $= m\ (m - 1)\ (m - 2)$;
czterokrótnych $= m\ (m - 1)\ (m - 2)\ (m - 3)$;
pięciokrótnych $= m\ (m - 1)\ (m - 2)\ (m - 3)\ (m - 4)$;

\- -

n krótnych $= m\ (m - 1)\ (m - 2)\ .\ .\ .\ (m - n + 1)$.

I tak pięć głosek słowa *robak* daią tego gatunku kombinacyy iednokrótnych 5, dwukrótnych $5.\ 4 = 20$, trzykrótnych $= 5\ 4\ 3 - 60$, 4krótnych $5\ 4.\ 3.\ 2 = 120$, 5krótnych $5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1 = 120$, 6krótnych $5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1.\ 0 = 0$. Właśnie też tak być powinno: bo słowo z pięciu głosek złożone w tenczas tylko może dać kombinacyą sześciokrotną, kiedy iedna głoska w iedneyże kombinacyi będzie dwa razy powtórzona, a takowe kombinacye należące do gatunku pierwszego, w drugim mieysca nie maią.

Piszący *Logogryfy* i *Anagrammata* (*) mogą z tego gatunku kombinacyy korzystać. *Extrakty* także determinowane Loteryi liczbowey należą do kombinacyy tego gatunku. Kombinacye te nazywaią się także *permutacye*, albo iloczyny *równoważne*.

194. *Trzeci gatunek kombinacyy.* W tym gatunku kombinacyy iakośmy powiedzieli, maią mieysce same tylko iloczyny z odmiennych czynników złożone, czyli różną ważność maiące, gdy tym

(*) *Słowo iakie przerobione na inne ze wszystkich tychże samych głosek, w odmiennym tylko porządku będących złożone, zowie się* Anagramma. *Tak ze słowa* Sigismundus *zrobiono anagramma*, dignus Musis. *Kiedy zaś z iakiego słowa biorą się wszystkie znaczące kombinacye z iedney, dwóch, trzech i t. d. głosek złożone, zbiór, takowych kombinacyy zowie się* Logogryfem *tego słowa.* „*Fraszki te pracowite, mówi* Francoeur, *przestały iuż zatrudniać uczonych, pomimo wielu szczęśliwych w tey mierze wypadków. Z nazwiska zaboycy Henryka Wielkiego, to iest ze słów* Frère Jacques Clemens, *zrobiono Anagramma* c'est l'enfer qui m'a crée. *Jabłoński dla Stanisława Leszczyńskiego, który późniey był Królem Polskim, ze słów*, Domus Lescinia, *wyprowadził* anagrammata *następuiące*: Ades incolumis; Omnis es lucida; Mane sidus loci; Sis columna Dei, I scande solium. *Ostatnie zasługuie na uwagę z tego względu, iż zamykało w sobie przepowiedzenie późniey ziszczone*" Cours complet des Math. *Tom* II. p. 8.

tym czasem do poprzedzaiącego gatunku należą iloczyny złożone z tychże samych czynników w odmiennym tylko porządku umieszczonych. I tak ze 12 kombinacyy dwukrótnych drugiego gatunku, które daią cztery głoski *a*, *b*, *c* i *d*, i które są: *ab*, *ac*, *ad*, *ba*, *bc*, *bd*, *ca*, *cb*, *cd*, *da*, *db*, *dc*, następuiące tylko sześć *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd* i *cd*, iako iloczyny różnoważne są kombinacyami dwukrótnemi trzeciego gatunku: pozostałe sześć iako iloczyny równoważne z pierwszemi mieysca tu nie maią. Liczba zatem dwukrótnych kombinacyy gatunku trzeciego czterech głosek *a*, *b*, *c*, *d*, może być następuiącym sposobem wyrażona:

$$\frac{4\,(4-1)}{1.\ 2}=\frac{12}{2}=6.$$

Podobnież przypatruiąc się 24 kombinacyom trzykrotnym drugiego gatunku, które daią te same 4 głoski *a*, *b*, *c*, *d*, postrzeżemy między niemi cztery tylko iloczyny różnoważne, które są *abc*, *abd*, *acd*, *bcd*: inne wszystkie iako z tychże samych czynników w odmiennym tylko porządku umieszczonych złożone, mieysca tu mieć nie mogą. Liczba zatem kombinacyy trzykrótnych gatunku trzeciego ze czterech głosek *a*, *b*, *c*, *d* może być tak wyrażona:

$$\frac{4\,(4-1)\,(4-2)}{1.\ 2.\ 3}=\frac{24}{6}=4.$$

Nakoniec między 24 kombinacyami czterokrótnemi gatunku drugiego ze czterech głosek *a*, *b*, *c*, *d*, znaydziemy ieden tylko iloczyn różnoważny, *abcd*; inne wszystkie z tychże samych czynników w odmiennym tylko porządku umieszczonych złożone, są iloczynami równoważnemi. Liczba zatem kombinacyy czterokrótnych gatunku trzeciego ze 4 głosek *a*, *b*, *c*, *d*, może być tak wyrażona:

$$\frac{4\,(4-1)\,(4-2)\,(4-3)}{1.\;\;2.\;\;3.\;\;4} = \frac{24}{24} = 1.$$

Z tego rozumowania, które można zastosować do iakieykolwiek liczby głosek do kombinowania danych, łatwo iest ustanowić prawidło ogólne.

Niech będzie *m* liczba głosek do kombinowania danych: będzie liczba kombinacyy gatunku trzeciego

iednokrótnych $= m = \frac{m}{1}$,

dwukrótnych $= \frac{m\,(m-1)}{1.\;2}$,

trzykrótnych $= \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1.\;\;2.\;\;3}$,

sztérokrótnych $= \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{1.\;\;2.\;\;3.\;\;4}$,

pięciokrótnych $= \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,(m-4)}{1.\;\;2.\;\;3.\;\;4.\;\;5}$,

- -

n krótnych $= \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots\,(m-n+1)}{1.\;\;2.\;\;3.\ldots\ldots\ldots\; n}$.

Loterya liczbowa iest przykładem tego gatunku kombinacyy: z 90 liczb wyciąga się zwyczaynie pięć. Te 90 liczb daią 1od 90 kombinacyy iednokrótnych zwanych *extrakty*.

2rz $\frac{90.\;89}{1.\;2} = 4005$ kombinacyy dwukrótnych zwanych *amba*.

3cie $\frac{90.\;89.\;88}{1.\;\;2.\;\;3} = 117480$ kombinacyy trzykrótnych zwanych *terna*.

4te $\frac{90.\ 89.\ 88.\ 87}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 2555190$ kombinacyy czteirokrótnych zwanych *kwaterna.*

5te $\frac{90.\ 89.\ 88.\ 87.\ 86}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} = 43949268$ kombinacyy pięciokrótnych zwanych *kwinterna.*

Łatwo iest zatem wyrachować, iak się ma pewność wygraney do pewności przegraney na Loteryi liczbowey. Stawiąc *np.* trzy liczby na samo terno, ponieważ z 90 liczb do ciągnienia wziętych może wyyść ternów 117480, a wygrywa iedno tylko terno stawione; a zatem pewność wygraney do pewności przegraney ma się iak 1 do 117480; to iest: 117480 razy pewnieysza iest pregrana niż wygrana.

195. Poznawszy kombinacye gatunku trzeciego, łatwiey można będzie wyłożyć sposób krótszy rozwiiania potęg-ilości wielorakich.

Naypierwsza z takowych ilości iest ilość dwuwyrazowa czyli dwumian, iaki iest *np.* $x + a$. Dwumian ten podnoszony sposobem zwyczaynym do potęgi drugiey, trzeciey, czwartey i t. d. daie następuiące wypadki;

$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$

$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3.$

$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$ i t. d.

Przypatrzywszy się z uwagą tym i innym potęgom dwumianu $x + a$, łatwo byłoby ustanowić prawidło, iakie maią być wykładniki dla x i dla a, tudzież iaka bydź powinna liczba wyrazów w każdey potędze; lecz nie tak iest łatwo domyśleć się, iakie maią być spółczynniki liczebne wyrazów każdey potęgi. Jakoż spółczynniki te biorą początek z dodawania do siebię wyrazów podobnych, które wypadaią w podnoszeniu ilości do potęg, i których liczba w rozmaitych potęgach iest rozmaita, iak się o tem łatwo przekonać można zastanowiwszy nieco uwagę, nad mnożeniem z którego potęgi powstaią. Dla zapobieżenia tey niedogodnosci weźmy czynniki odmienne, iakie są *np.* $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$ i t. d. i szukaymy ich iloczynów, porządkuiąc w nich wyrazy podług wykładników głoski x.

1od. Iloczyn dwóch czynników $x+a$, $x+b$, iest

$$\begin{array}{l} x^2 + ax + ab \\ \quad + bx. \end{array}$$

2re. Iloczyn trzech czynników $x+a$, $x+b$, $x+c$. iest

$$\begin{array}{l} x^3 + ax^2 + abx + abc. \\ \quad + bx^2 + acx \\ \quad + cx^2 + bcx \end{array}$$

3cie. Iloczyn czterech czynników $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, iest

$$\begin{array}{l} x^4 + ax^3 + abx^2 + abcx + abcd. \\ \quad + bx^3 + acx^2 + abdx \\ \quad + cx^3 + adx^2 + acdx \\ + dx^3 + bcx^2 + bcdx \\ \qquad + bdx^2 \\ \qquad + cdx^2 \end{array}$$

W iloczynach tych, wszystkie wyrazy w iedneyże kolumnie umieszczone, w których x ma tenże sam wykładnik, biorąc za ieden wyraz, postrzeżemy 1od, że wykładnik głoski x zmnieysza się iednością w każdym wyrazie zacząwszy od pierwszego, w którym wykładnik ten równa się liczbie czynników iloczyn składaiących, aż do ostatniego, w którym $x^0 = 1$ iest domyślne.

2re. Że spółczynnik pierwszego wyrazu iest 1; spółczynnik drugiego wyrazu iest równy summie drugich wyrazów a, b. c i t. d. znayduiących się w czynnikach; spółczynnik trzeciego wyrazu iest równy summie iloczynów różnoważnych dwukrotnych z tychże głosek a, b, c i. d. spółczynnik czwartego wyrazu iest równy summie iloczynów trzykrotnych różnoważnych z tychże głosek a, b c i t d.

Jakoż w iloczynie czterech czynników wyraz drugi x^3 ma za spółczynnik summę $a+b+c+d$, któ-

która wyraża summę iloczynow iednokrótnych czterech głosek a, b, c, d; wyraz trzeci x^2 ma za spółczynnik summę $ab + ac + ad + bc + bd + cd$, która iest summa dwukrótnych iloczynów różnoważnych z tychże czterech głosek a, b, c, d (194). Wyraz czwarty x ma za spółczynnik summę $abc + abd + acd + bcd$, która iest summą trzykrótnych iloczynów różnoważnych z tychże czterech głosek a, b, c, d. Nakoniec spółczynnik ostatniego wyrazu, w którym domyśla się $x^0 = 1$, równa się iloczynowi czterokrótnemu tychże głosek a, b, c, d.

196. Tu iuż łatwo wnieść można, że kształt tych iloczynów powinien podlegać tym samym prawom, iakakolwiek będzie liczba czynników: lecz wniosek ten, na domyśle oparty, może być także następuiącym sposobem dowiedziony.

Rzeczą naprzód iest widoczną, że wszelki iloczyn tego gatunku, powinien w sobie zamykać wszystkie potęgi głoski x, zacząwszy od potęgi, którey wykładnik równy iest liczbie czynników iloczyn składaiących, aż do potęgi, którey wykładnikiem iest 0. Abyśmy wypadek wyrazili ogólnie, niech m oznacza liczbę czynników: potęgi głoski x następnie po sobie idące będą x^m, x^{m-1}, x^{m-2} i t. d.

Daymy, że głoski A, B, C. . . . Y są ilościami potęgi te mnożącemi zacząwszy od x^{m-1}; lecz ponieważ liczba wyrazów zależąca od ważności szczególney wykładnika m iest niewyznaczona póty, póki wykładnik ten nie iest dany w liczbach; możemy tylko napisać wyrazy początkowe i ostatnie szukany iloczyn składaiące; a na mieysce wyrazów domyślnych położymy kropki: tym sposobem otrzymamy następuiącą formułę:

$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots . Y$,

która wyraża iloczyn powstały z liczby iakieykolwiek m czynników dwuimiennych $x + a$, $x + b$, $x + c$, i t. d.

Roz-

Rozmnożywszy iloczyn ten przez nowy czynnik $x+l$, będzie (50).

$$x^{m+1} + Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$lx^m + lAx^{m-1} + lBx^{m-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots lY.$$

Tu iuż rzeczą iest widoczną 1óď że ieżeli ilość A iest summą głosek a, b, c i t. d będących drugiemi wyrazami czynników dwumiennych, których liczba iest m, ilość $A+l$ będzie summą tychże głosek $a, b, c \ldots\ldots l$, których summa iest $m+1$; i że tém samém ieżeli A iest prawdziwym spółczynnikiem drugiego wyrazu w iloczynie stopnia m, $A+l$ będzie także prawdziwym spółczynnikiem drugiego wyrazu w iloczynie stopnia $m+1$.

2rę. Jeżeli B iest summą dwukrótnych iloczynów różnoważnych głosek a, b, c i t. d. których liczba iest m, $B+lA$ wyrażać będzie summę dwukrótnych iloczynów różnoważnych z tychże głosek $a, b, c \ldots\ldots l$, których liczbą iest $m+1$: bo kiedy $A = a + b + c +$ i t. d. będzie $lA = l$ $(a + b + c +$ i t. d.) A zatém ieżeli B iest prawdziwym spółczynnikiem wyrazu trzeciego w iloczynie stopnia m, $B+lA$ będzie także prawdziwym spółczynnikiem trzeciego wyrazu w iloczynie stopnia $m+1$.

3cie. Jeżeli C iest summą trzykrótnych iloczynów różnoważnych głosek a, b, c i t. d. których liczba iest m, $C+lB$ będzie summą trzykrótnych iloczynów różnoważnych z głosek $a, b, c \ldots\ldots l$, których liczba iest $m+1$: bo gdy $B = ab + ac + ad +$ i t. d. będzie $lB = l$ $(ab + ac + ad +$ i t. d.) Jeżeli więc C iest prawdziwym spółczynnikiem wyrazu czwartego w iloczynie stopnia m, $C+lB$ będzie także prawdziwym spółczynnikiem wyrazu czwartego w iloczynie stopnia $m+1$.

Ten sam sposób rozumowania rozciągnąć można do wszystkich wyrazów; i ieżeli Y iest iloczynem wszystkich głosek a, b, c i t. d. których liczba iest m, lY musi być iloczynem tychże głosek

sek powiększonych głoską l, których tém samém liczba iest $m+1$.

Jeżeli więc uwagi czynione wyżéy (195) nad iloczynem stopnia czwartego maią mieysce, muszą mieć także mieysce nad iloczynem stopnia piątego, szóstego i wszystkich innych.

Wypada stąd, że kiedy iloczyn czynników dwumiennych $x+a$, $x+b$, $x+c$, i t. d. których liczba równa się m, iest wyrażony w następuiącym kształcie:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{i t. d.}$$

A, będzie zawsze summą głosek a, b, c i t. d. których liczba iest m: B summą dwukrótnych iloczynów różnoważnych z tychże głosek: C, summą trzykrótnych iloczynów różnoważnych z tychże głosek, i tak daléy.

Abyśmy prawo, któremu to wyrażenie podlega, zamknęli w iednym wyrazie, weźmy wyraz umieszczony w mieyscu niewyznaczoném, który dla téy przyczyny oznaczmy przez Nx^{m-n}. Wyraz ten będzie drugim, ieżeli uczynimy $n=1$; trzecim ieżeli $n=2$, iedynastym ieżeli $n=10$. i t. d. W pierwszym przypadku głoska N będzie summą głosek a, b, c i t d których liczba iest m, w drugim summą dwukrótnych iloczynów różnoważnych tychże głosek a, b, c i t. d. w trzecim summą dziesięćkrótnych iloczynów różnoważnych tychże głosek i t. d.

197 Chcąc iloczyny powyższe (195) $(x+a)(x+b)$, $(x+a)(x+b)(x+c)$, $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ i t. d. zamienić na potęgi dwumianu $x+a$; $(x+a)^2$, $(x+a)^3$, $(x+a)^4$ i t. d. dosyć iest w iloczynach tych uczynić

$$a=b,\quad a=b=c,\quad a=b=c=d \text{ i t. d.}$$

Na ten czas wszystkie ilości mnożące tę samę potęgę głoski x będą między sobą równe: a tak spółczynnik wyrazu drugiego, który w iloczynie $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$, iest $a+b+c+d$, zamieni się na $4a$.

Spół-

Spółczynnik wyrazu trzeciego, który w tymże iloczynie iest

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd,$$

zamieni się na $6a^2$.

Spółczynnik wyrazu czwartego, który w tymże iloczynie iest $abc + abd + acd + bcd$, zamieni się na $4a^3$. A stąd łatwo iest pomiarkować; że spółczynniki rozmaitych potęg głoski x, zamienią się na iednę potęgę głoski a, wziętą tyle razy, ile iest w tych spółczynnikach wyrazow, i oznaczoną przez liczbę czynników wyrazy te składaiących. A tak spółczynnikiem N mnożącym potęgę x^{m-n} w powyższym iloczynie ogólnym, będzie potęga $n$ta głoski a, czyli a^n wzięta tyle razy, ile otrzymać można iloczynów różnoważnych n krótnych, z głosek których liczba iest m.

Podług teoryi kombinacyi liczba głosek m daie różnowanych iloczynów n krótnych

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\ldots\ldots n} \quad (194).$$

Biorąc następnie 1, 2, 3, 4 i t. d. zamiast n będzie $\frac{m}{1}$ spółczynnikiem liczebnym wyrazu drugiego; $\frac{m(m-1)}{1.\ 2.}$ spółczynnikiem liczebnym wyrazu trzeciego; $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3.}$ spółczynnikiem liczebnym wyrazu czwartego; a w ogólności

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\ldots\ldots\ldots n}$$

spółczynnikiem liczebnym dla wyrazu zastępuiącego mieysce $n+1$. Szukana zatém formuła będzie

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.\quad 2.}a^2x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\quad 2.\quad 3}a^3x^{m-3} + \text{i t. d.}$$

Z

Z formuły tey wyprowadzić można prawidło następuiace: *Chcąc z iednego wyrazu otrzymać wyraz następuiący, trzeba spółczynnik liczebny rozmnożyć przez wykładnik głoski* x *danego wyrazu; podzielić przez liczbę oznaczaiącą mieysce tegoż wyrazu; wykładnik głoski* a *powiększyć iednością a wykładnik głoski* x *zmnieyszyć iednością.*

I tak, chcąc *np.* wyraz x^m, który iest piérwszy, przerobić na wyraz drugi, trzeba iego spółczynnik liczebny, którym iest 1, rozmnożyć przez wykładnik głoski x, którym iest m, i podzielić przez liczbę oznaczaiącą mieysce tego wyrazu, którą iest 1; tym sposobem utworzy się dla drugiego wyrazu spółczynnik liczebny $\frac{m}{1}$; potém wykładnik głoski x zmnieysza się iednością i będzie x^{m-1}, wykładnik zaś głosek a, który tu iest 0, powiększa się iednością, i będzie a^1: wyraz zatém drugi będzie $\frac{m}{1}\,ax^{m-1}$.

Ten znowu drugi wyraz chcąc przerobić na trzeci, trzeba spółczynnik iego liczebny $\frac{m}{1}$ rozmnożyć przez wykładnik głoski x, to iest przez $m-1$, i podzielić przez liczbe 2, która oznacza mieysce tego wyrazu; i będzie $\frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}$ spółczynnik liczebny dla wyrazu trzeciego: zmnieyszywszy potém wykładnik głoski x iednością, a wykładnik głoski a powiększywszy iednością, będzie wyraz trzeci $\frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,a^2x^{m-2}$.

Tymże sposobem postępuiąc znaydziemy wyraz czwarty $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}\,a^3x^{m-3} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^3x^{m-3}$ i t. d. Lubo w téy formule nie można wyznaczyć liczby wyrazów, chyba nadawszy dla m ważność szczególną, nie trudno iednak będzie wynaleźć wyraz zastępuiący mieysce w iakieykolwiek odległości od pierwszego będące. Wyraz *np.* zastępuiący mieysce $n+1$ podług powyższey formuły będzie

$$\frac{m(m-1)(m-2)\text{------}(m-n+1)}{1.\quad 2.\quad 3\text{-----------}n}\,a^n x^{m-n}$$

Ostatnia ta formuła zowie się wyrazem ogólnym ciągu $x^m + \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}a^2x^{m-2} +$ i t. d. gdyż czyniąc następnie $n=1$, $n=2$, $n=3$ i t. d. formuła ta daie wszystkie wyrazy tego ciągu.

198. Chcąc podług prawidła w poprzedzaiącym artykule wyprowadzonego podnieść dwumian $x+a$ do potęgi *np.* dziesiątey, będzie

Wyraz	1szy	$= x^{10}$, czyli a^0x^{10};
	2gi	$= \frac{10}{1}a^1x^9 = 10ax^9$;
	3ci	$= \frac{10}{1} \times \frac{9}{2}a^2x^8 = 45a^2x^8$;
	4ty	$= 45 \times \frac{8}{3}a^3x^7 = 120a^3x^7$;
	5ty	$= 120 \times \frac{7}{4}a^4x^6 = 210a^4x^6$;
	6ty	$= 210 \times \frac{6}{5}a^5x^5 = 252a^5x^5$;
	7my	$= 252 \times \frac{5}{6}a^6x^4 = 210a^6x^4$;
	8my	$= 210 \times \frac{4}{7}a^7x^3 = 120a^7x^3$;
	9ty	$= 120 \times \frac{3}{8}a^8x^2 = 45a^8x^2$;
	10ty	$= 45 \times \frac{2}{9}a^9x^1 = 10a^9x$;
	11ty	$= 10 \times \frac{1}{10}a^{10}x^0 = x^{10}$; więc

$$(x+a)^{10} = x^{10} + 10ax^9 + 45a^2x^8 + 120a^3x^7 + 210a^4x^6 + 252a^5x^5 + 210a^6x^4 + 120a^7x^3 + 45a^8x^2 + 10a^9x + a^{10}.$$

Widzimy tu, że wyraz piérwszy od początku, to iest x^{10}, i piérwszy od końca, to iest a^{10}, maią te same spółczynniki i te same wykładniki; lecz liczba 10 w piérwszym wyrazie od początku iest wykładnikiem dla x, w piérwszym zaś od końca iest wykładnikiem dla a: podobnież w wyrazie drugim od początku, który iest $10ax^9$, i w dru-

drugim od końca, który iest $10a^9x$,' te same są spółczynniki i wykładniki; lecz w drugim od początku liczba 9 iest wykładnikiem dla x, liczba 1 iest wykładnikiem dla a; w drugim zaś od końca liczba 9 iest wykładnikiem dla a; liczba 1 iest wykładnikiem dla x: toż mówić o innych wszystkich wyrazach. Jeżeli, iak iest w przykładzie poprzedzaiącym, wykładnik szukaney potęgi iest parzysty, a tém samém liczba wyrazów potęgę tę składaiących nieparzysta, na ten czas w wyrazie mieysce średnie trzymaiącym iak tu iest $252a^5x^5$ równie od początku i od końca oddalonym głoski a i x maią tenże sam wykładnik, który iest równy połowie wykładnika potęgi szukaney.

Podług uwag tych, chcąc *np.* dwumian $x+a$ podnieść do potęgi szóstey, dosyć iest wynaleźć cztéry piérwsze wyrazy szukaney potęgi; ostatnie trzy łatwo będzie wyprowadzić z trzech wyrazów piérwszych.

199. Formułę w artykule powyższym umieszczoną z łatwością zastosować do wynalezienia potęg wszelkiego dwumianu. Chcąc *np.* podnieść do potęgi szóstey dwumian $2x^3 - 5a^3$: dosyć będzie w formule wspomnionéy położyć $2x^3$ zamiast x, a $-5a^3$ zamiast a. Jakoż uczyniwszy $2x^3 = x'$, $-5a^3 = a'$, będzie

$$(2x^3 - 5a^3)^6 = (x' + a')^6 = x'^6 + 6a'x'^5 + 15a'^2x'^4 + 20a'^3x'^3 + 15a'^4x'^2 + 6a'^5x' + a'^6.$$

Zamiast a', x' położywszy ilości, których mieysce głoski te zastępuią, będzie

$$(2x^3 - 5a^3)^6 = (2x^3)^6 + 6(-5a^3)(2x^3)^5 + 15(-5a^3)^2(2x^3)^4 + 20(-5a^3)^3(2x^3)^3 + 15(-5a^3)^4 (2x^3)^2 + 6(-5a^3)^5(2x^3) + (-5a^3)^6$$ czyli

$$(2x^3 - 5a^3)^6 = 64x^{18} - 960a^3x^{15} + 6000a^6x^{12} - 20000a^9x^9 + 37500a^{12}x^6 - 37500a^{15}x^3 + 15625a^{18}.$$

Widzimy tu, że wyrazy są na przemiany raz dodayne, drugi raz odiemne. Ilekroć w danym dwumianie wyraz drugi iest odiemny, wyrazy w rozwiniętey potędze zastępuiące mieysce

zgie,

2gie, 4te, 6te i w ogólności mieysce parzyste zawsze są odiemne: gdyż w tych wyrazach wykładnikami ilości w danym dwumianie odiemney są liczby nieparzyste; a wszelka potęga ilości odiemney maiaca za wykładnik liczbę nieparzystą ma zawsze przed sobą znak — (184). Przeciwnie, wyrazy które w rozwiniętey potędze zastępuią mieysce nieparzyste iakie iest 1wsze, 3cie, 5te i t. d. są zawsze dodayne: gdyż w tych wyrazach wykładnikami ilości w danym dwumianie odiemney sa liczby parzyste; a wszelka potęga z wykładnikiem parzystym ma zawsze przed sobą znak +, czyli to ilość do tey potęgi podniesiona iest dodayna, czyli też odiemna.

200 Ponieważ $x^{m-1} = \frac{x^m}{x}$, $x^{m-2} = \frac{x^m}{x^2}$ i t. d. (43), można zatém powyższą formułę (197 zamienić w następuiącą:

$$(x + a)^m = x^m + \frac{ma}{1x} x^m + \frac{m(m-1)a^2}{1.\ 2.\ x^2} x^m \frac{m(m-1)(m-2)a^3}{1.\ 2.\ 3.\ x^3} x^m + \text{i t. d.}$$

Rozłożywszy drugą stronę na czynniki, będzie

$$(x + a)^m = x^m \left(1 + \frac{ma}{1.\,x} + \frac{m(m-1)a^2}{1.\ 2.\ x^2} + \frac{m(m-1)(m-2)a^3}{1.\ 2.\ 3.\ x^3} + \text{i t. d}\right).$$

Chcąc podług tey formuły otrzymać szukaną potęgę danego dwumianu, trzeba ułożyć następuiący ciąg liczb:

$$\frac{m}{1}, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4}, \frac{m-4}{5} \text{ i t. d.}$$

Pierwsza z tych liczb, to iest $\frac{m}{1}$ mnoży się przez ułomek $\frac{a}{x}$, potém wypadek ten, który iest $\frac{ma}{1.\,x}$ mno-

mnoży się przez drugą liczbę $\frac{m-2}{2}$ i przez ułomek $\frac{a}{x}$ potém wypadek ten, który iest $\frac{m(m-1)a^2}{1.\ 2.\ x^2}$ mnoży się przez trzecią liczbę $\frac{m-2}{3}$ i przez ułomek $\frac{a}{x}$, i tak daléy: zebrawszy razem wszystkie te wypadki i dodawszy 1, cała summa mnoży się przez x^m.

W przykładzie $(2x^3-5a^3)^6$ trzeba napisać 6 zamiast m, $-\frac{5a^3}{2x^3}$ zamiast $\frac{a}{x}$ a $(2x^3)^6$ czyli $64x^{18}$ zamiast x^m: tym sposobem podług ostatniego prawidła znaydziemy $(2x^3-5a^3)^6 = 64x^{18}$ $\left(1-\frac{15a^3}{x^3}+\frac{375a^6}{4x^6}-\frac{7500a^9}{24x^9}+ \text{i t. d.}\right)$

201. Rozwiianie potęg innych ilości wielorakich łatwo iest podciągnąć pod prawidła powyższe na rozwiianie potęg dwumianu, iak to okażemy na przykładzie następuiącym:

Niech będzie trzymian $a+b+c$, który podnieść potrzeba do potęgi trzeciéy. Uczyńmy naprzód $b+c=m$; będzie więc

$(a+b+c)^3=(a+m)^3=a^3+3a^2m+3am^2+m^3$.

Położywszy potém $b+c$ zamiast m znaydziemy $(a+b+c)^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$.

Rozwinąwszy potęgi dwumianu $b+c$, wypadnie

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 = a^3 &+ 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\ &+ 3a^2c + 6abc + 3b^2c\\ &+ 3ac^2 + 3bc^2\\ &+ c^3.\end{aligned}$$

202. Zastanowiwszy się z uwagą nad sposobem, za pomocą którego wyprowadziliśmy powyższą formułę (197) na rozwiianie potęg dwumia-

mianu, postrzeżemy, że wykładnik m szukanéy potęgi powinien mieć ważność całkowitą i dodayną. Chcąc zatém doświadczyć, czy formuła tą i w ten czas ma mieysce, kiedy wykładnik żądanéy potęgi iest ułomkiem, albo też ma przed sobą znak —, trzeba do iéy wyprowadzenia użyć innego sposobu, w którymby ważność wykładnika szukanéy potęgi była rzeczą oboiętną. Taki iest sposób, który niżey podamy wyłożywszy pierwey iednę prawdę, bez którey sposób ten wyłożonym być nie może, i która w dalszey Algiebrze często będzie potrzebna. Prawda tâ iest następuiąca:

Wszelki dwumian taki, iak są np. $x-a$, x^2-a^2, x^3-a^3, *i w ogólności* x^m-a^m, *byleby wykładnik* m *był liczbą całkowitą i dodayną, iest podzielny przez* $x-a$.

Ze dwumian $x-a$ iest podzielny przez $x-a$, prawda ta iest sama przez się widoczna. Co do dwumianu x^2-a^2, ten rozłożyć można na czynniki $(x-a)(x+a)$; iloczyn zaś ten iest widocznie podzielny przez $x-a$. Dzieląc x^3-a^3 przez $x-a$, znaydziemy na iloraz x^2+ax+a^2. Toż mówić o wszelkich innych tego gatunku dwumianach, w których x i a maią wykładniki liczebne: dwumiany takie dzieląc przez $x-a$, znaydziemy zawsze iloraz całkowity, w którym wykładniki głoski x zmnieyszaią się ciągle iednością aż do zera, wykładniki zaś głoski a ciągle się iednością powiększaią.

Podobnież dziąc x^m-a^m przez $x-a$, znaydziemy na iloraz $x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+a^3x^{m-4}+$ i t. d. w którym wykładniki głoski x zawsze się zmnieyszaią iednością, wykładniki zaś głoski a zawsze się iednością powiększaią: wyraz zatem ostatni tego ilorazu musi być a^{m-1}; przedostatni zaś $a^{m-2}x$. Abyśmy się o prawdzie tey przekonali, weźmy od razu równanie

x^m

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; a^{m-2}x + a^{m-1}.$$

Rozmnożywszy obie strony przez mianownik $x - a$, z pierwszey strony zostanie sam licznik czyli dzielna $x^m - a^m$; druga zaś strona zamieni się w następuiącą:

$$\begin{array}{l} x^m + ax^{m-1} + a^2x^{m-2} + \cdot \cdot \cdot \, a^{m-2}x^2 + a^{m-1}x \\ \quad - ax^{m-1} - a^2x^{m-2} - a^3x^{m-3} - \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a^{m-1}x - a^m. \end{array}$$

Summa dwóch tych wyrażeń składa się tylko z wyrazu pierwszego w pierwszym wierszu, i z ostatniego w wierszu drugim, czyli równa iest dwumianowi $x^m - a^m$: wszystkie inne wyrazy obu wierszów różniące się od siebie tylko znakami, w dodawaniu znikną. Kiedy więc druga strona równania powyższego, rozmnożona przez dzielnik $x - a$ daie na iloczyn dzielną, iest to dowodem, że ta druga strona iest ilorazem wypadaiącym z podzielenia $x^m - a^m$ przez $x - a$.

Uważać tu potrzeba, że po wyrazie a^2x^{m-2} w wierszu pierwszym następować powinien wyraz a^3x^{m-3}, który dodany do odpowiadaiącego sobie wyrazu w drugim wierszu zniknie; i że podobnież w drugim wierszu przed wyrazem $- a^{m-1}x$, znaydować się powinien wyraz $- a^{m-2}x^2$; który dodany do odpowiadaiącego sobie wyrazu w wierszu pierwszym zniknie. Wyrazy te nie są napisane, lecz ich domyśleć się należy w przerwie oznaczoney kropkami.

203. Przystąpmy teraz do wyłożenia drugiego sposobu na rozwiianie potęg dwumianu. A naprzód uważać potrzeba, że ponieważ $x + a = x\left(1 + \frac{a}{x}\right)$ a tém samém $\left(x + a\right)^m$; $= x^m\left(1 + \frac{a}{x}\right)^m$; zamiast więc rozwiiania dwu-

mianu $(x + a)^m$, można rozwinąć dwumian $x^m \left(1 + \frac{a}{x}\right)^m$, albo też dwumian $x^m(1+y)^m$ czyniąc $\frac{a}{x} = y$.

Przypatruiąc się początkowym potęgom dwumianu $1 + y$, postrzeżemy, że rozwinięcie iakieykolwiek potęgi tego dwumianu powinno być zawsze następuiącego kształtu:

$1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + \text{- - - - - - -}$

gdzie spółczynniki A, B, C, D, E, i t. d. są liczbami nie zależącemi bynaymniey od ważności głoski y, lecz iedynie od wykładnika tey potęgi, do którey podniesiony iest dwumian $1 + y$ (*). Po takowém przygotowaniu, niech będzie

$(1 + y)^m = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \text{- - - -}$

$(1 + z)^m = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{- - - -}$

Odiąwszy drugie równanie od pierwszego zostanie

$(1 + y)^m - (1 + z)^m = A(y - z) + B(y^2 - z^2) + C(y^3 - z^3) + D(y^4 - z^4) + \text{- - - - - - - - -}$

Uczyniwszy $1 + y = u$, $1 + y = v$, $(1 + y)^m = u^m$, $(1 + z)^m = v^m$; będzie

u^m

(*) *W rozwinięciu potęgi stopnia* m *dwumianu* y + 1, *wykładnik głoski* y *zmnieyszałby się w każdym wyrazie iednością; w żadnym iednak wyrazie wykładnik ten nie może być odiemny; bo gdyby był* np. *wyraz iaki w kształcie następuiącym:* $Ry^{-r} = \frac{R}{y^r}$ *założywszy, że* y = o, *wyraz ten zamieniłby się na* $\frac{R}{o}$, *co iak obaczymy niżey, oznacza ilość nieskończenie wielką; gdy tym czasem to samo założenie czyni wszelkie potęgi dwumianu* y + 1 *czyli* 1 + y, *równemi iedności.*

$u^m - v^m = A(y-z) + B(y^2-z^2) + C(y^3-z^3) + D(y^4-z^4) + \dots$

Że zaś $1+y=u$, $1+z=v$, a tém samém $y-z=u-v$; podzieliwszy zatém piérwszą stronę ostatniego równania przez $u-v$, drugą przez $y-z$, znaydziemy (202)

$u^{m-1} + u^{m-2}v + u^{m-3}v^2 + \dots uv^{m-2} + v^{m-1} = A + B(y+z) + C(y^2+yz+z^2) + D(y^3 + y^2z + yz^2 + z^3) + \dots$

Ponieważ to ostatnie równanie zawsze powinno mieć mieysce, iakiekolwiek będą ważności dane dla y i z, więc utrzyma się także, kiedy uczynimy $y=z$, a tém samém $u=v$. W tym zaś przypadku z piérwszéy strony tego równania wyraz drugi $u^{m-2}v$ zamieni się na $u^{m-2}u = u^{m-1}$ (30); toż mówić o innych wszystkich wyrazach stronę piérwszą składaiących; aże liczba tych wyrazów musi być koniecznie równa liczbie iedności w wykładniku m znayduiących się, o czém łatwo przekonać się można, zastanowiwszy się z uwagą nad dzieleniem dwumianu $x^m - a^m$ przez $x-a$; piérwsza zatém strona równania tego zamieni się na mu^{m-1}. Z drugiéy zaś strony przez przypuszczenie że $y=z$, czynnik $y+z$ zamieni się na $2y$; czynnik y^2+yz+z^2 zamieni się na $3y^2$ i t. d. Równanie więc to zamieni się w następuiące:

$mu^{m-1} = A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 + \dots$

Rozmnożywszy obie strony przez u, wypadnie

$mu^m = u(A + 2By + 3Cy2 + 4Dy^3 + \dots)$

Że zaś podług przypuszczenia $u = 1+y$, będzie więc

$m(1+y)^m = (1+y)(A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 + \dots)$.

Ze strony piérwszéy zamiast $(1+y)^m$ położywszy ważność założoną, która iest $1 + Ay + By^2 + Cy^3 + \dots$ i z obu stron odbywszy mnożenie wskazane przez nawiasy; będzie

$m + mAy + mBy^2 + mCy^3 + mDy^4 + mEy^5 + \dots = A + (A+2B)y + (2B+3C)y^2 + (3C+4D)y^3 + \dots$

Przeniosłszy wszystkie wyrazy na piérwszą stro-

stronę i uporządkowawszy ie podług wykładników głoski y; wypadnie

$$m - A + (mA - A - 2B)y + (mB - 2B - 3C)y^2 + (mD - 3C - 4D)y^3 + \cdots = 0.$$

Nadawszy dla y ważność rzeczywistą iakąkolwiek, pierwsza strona równania tego nie może być inaczey równa zeru, chyba w ten czas tylko, kiedy spółczynniki mnożące wszystkie potęgi głoski y będą równe zeru. Wypada zatém
$m - A = 0$; $mA - A - 2B = 0$; $mB - 2B - 3C = 0$; i t. d. Więc

$$A = m = \frac{m}{1},$$

$$B = \frac{mA - A}{2} = \frac{A(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{1.\ 2};$$

$$C = \frac{mB - 2B}{3} = \frac{B(m-2)}{3} = \frac{m(m-1)}{1.\ 2.}\frac{(m-2)}{3}; \text{ i t. d.}$$

Będzie zatém $1 + Ay + By^2 + Cy^3 + \cdots$, czyli

$$(1+y)^m = 1 + \frac{m}{1}y + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\ 2.\ 3}y^3 + \cdots$$

Że zaś podług założenia $y = \frac{a}{x}$, będzie więc

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)^m \text{ czyli } \left(\frac{x+a}{x}\right)^m, \text{ czyli}$$

$$\frac{(x+a)^m}{x^m} = 1 + \frac{m}{1}\frac{a}{x} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}\frac{a^3}{x^3} + \cdots$$

Ponieważ m iest liczba całkowita, z drugiéy stro-

strony równania tego, wyraz zastępuiący mieysce oznaczone liczbą $m+1$ będzie ostatnim: gdyż w następuiącym wyrazie byłby ieden czynnik $m-m$ czyli o. Rozmnożywszy obie strony równania tego przez x^m, wypadnie formuła taka sama, iakąśmy otrzymali wyżéy (200).

204. Ten sam iest sposób postępowania, kiedy wykładnik szukanéy potęgi dwumianu iest ułomkiem albo też liczbą odiemną. Jakoż w piérwszym przypadku weźmy dwa równania

$$(1+y)^{\frac{m}{n}} = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \text{-} \text{-} \text{-} \text{-}$$

$$(1+z)^{\frac{m}{n}} = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{-} \text{-} \text{-} \text{-}$$

Uczyniwszy $(1+y)^{\frac{1}{n}} = u$, $(1+z)^{\frac{1}{n}} = v$, będzie $(1+y)^{\frac{m}{n}} = u^m$, $(1+z)^{\frac{m}{n}} = v^m$ (183); a tém samém
$u^m - v^m = A(y-z) + B(y^2-z^2) + C(y^3-z^3)$
$+ D(y^4 - z^4 + \text{-} \text{-} \text{-} \text{-} \text{-} \text{-} \text{-} \text{-} \text{-} \text{-} \text{-} \text{-})$

Że zaś podług przypuszczenia $(1+y) = u^n$, $(1+z) = v^n$; wypada stąd, że $y-z = u^n - v^n$, a tém samém

$$\frac{u^m - v^m}{u^n - v^n} = \frac{A(y-z)}{y-z} + \frac{B(y^2-z^2)}{y-z}$$
$$+ C\,\frac{(y^3-z^3)}{y-z} + \text{-} \text{-} \text{-} \text{-}$$

Ponieważ zaś podług tego cośmy powiedzieli wyżéy (202) iest
$u^m - v^m = (u-v)\,(u^{m-1} + u^{m-2}v + \text{-} \text{-} \text{-} \text{-} \text{-} \text{-}$
$uv^{m-2} + v^{m-1})$;
$u^n - v^n = (u-v)\,(u^{n-1} + u^{n-2}v + \text{-} \text{-} \text{-} \text{-} \text{-} \text{-}$
$uv^{n-2} + v^{n-1})$;
w powyższém więc równaniu odbywszy z drugiéy strony dzielenie przez $y-z$, a ze strony piérwszéy zamiast licznika i mianownika położywszy znalezione ich ważności, i podzieliwszy tak licznik iak mianownik przez spólny czynnik $u-v$; równanie to zamieni się w następuiące:

u^m

$$\frac{u^{m-1} + u^{m-2}v + \cdots \cdots uv^{m-2} + v^{m-1}}{u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots \cdots uv^{n-2} + v^{n-1}}$$
$$= A + B\,(y + z) + C\,(y^2 + yz + z^2) + D\,(y^3 + y^2z + yz^2 + z^3) \cdots \cdots \cdots$$

Uczyniwszy $y = z$, a tem samem $1 + y = 1 + z$, i $u = v$; równanie ostatnie zamieni się w następuiące:

$$\frac{mu^{m-1}}{nu^{n-1}} = A + 2By^2 + 3Cy^3 + 4Dy^4 + \cdots \; ; \; (V)$$

Rozmnożywszy z pierwszéy strony licznik i mianownik przez u, a obie strony rozmnożywszy przez u^n, będzie

$$\frac{m}{n}\, u^m = u^n (A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 + \cdots \cdots)$$

Zamiast u^m, i u^n położywszy ich ważności, które są $(1+y)^{\frac{m}{n}}$ I $1+y$, wypadnie

$$\frac{m}{n}(1+y)^{\frac{m}{n}} = (1 + y)\,(A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 + \cdots \cdots \cdots \cdots)$$

Ze strony pierwszéy zamiast czynnika $1+y)^{\frac{m}{n}}$ położywszy iego ważność, która iest: $1 + Ay + By^2 + Cy^3 + \cdots$, i z obu stron wykonawszy mnożenie wskazane przez nawiasy, będzie

$$\frac{m}{n} + \frac{m}{n}Ay + \frac{m}{n}By^2 + \frac{m}{n}Cy^3 + \cdots \cdots$$
$$= \left[\begin{array}{l} A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 + 5Ey^4 + \cdots \cdots \\ \quad + Ay + 2By^2 + 3Cy^3 + 4Dy^4 + \cdots \cdots \end{array}\right.$$

W równaniu tem przeniosłszy wszystkie wyrazy na stronę pierwszą i spółczynniki mnożące wszystkie potęgi głoski y uczyniwszy równe zeru, iak wyżéy (203), znaydziemy

$$A = \frac{m}{n}\,;\; 2B = \frac{m}{n}A - A\,;\; 3C = \frac{m}{n}B - 2B\,;$$

i t. d. a stąd

B=

$$B=\frac{\frac{m}{n}A-A}{1.\ \ 2}=\frac{A\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.\ \ 2}$$

$$=\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.\ \ 2};$$

$$C=\frac{\frac{m}{n}B-2B}{3}=\frac{B\left(\frac{m}{n}-2\right)}{3}$$

$$=\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{1.\ \ 2.\ \ 3},\ \text{i t. d.}$$

Ważność te położywszy w pierwszém z dwóch danych równań zamiast A, B, C i t. d. będzie

$$(1+y)^{\frac{m}{n}}=1+\frac{m}{n}y+\frac{\frac{m}{n}}{1}y+\frac{\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.\ \ 2}y^2$$

$$+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{1.\ \ 2.\ \ 3}y^3+\text{- - - - - - - - -}$$

Zamiast y położywszy iego ważność, która iest $\frac{a}{x}$, i odbywszy inne działania, iak wyżéy (203), znaydziemy formułę na rozwiianie potęgi ułomkowey dwumianu $x+a$.

Uważać tu potrzeba 1od, że w ostatniem równaniu ciąg wyrazów drugą stronę składaiących nie może mieć końca: ponieważ liczby m i n są między sobą *pierwsze*, żaden zatém z czynników rozmaite potęgi głoski y mnożących przez odięcie od niego liczb 1, 2, 3, 4.... nie może się za-

zamienić na zero; 2re że z rozwinięcia dwumianu $(1+y)^{\frac{m}{n}}$, otrzymać można rozwinięcie dwumianu $(1+y)^m$, uczyniwszy $n=1$; a tym sposobem formuła druga zamieni się na pierwszą w poprzedzaiącym artykule otrzymaną; i odwrotnie formułę pierwszą zamienić można na drugą kładąc w pierwszey $\frac{m}{n}$ zamiast m.

205. Pozostało ieszcze okazać, iaka iest formuła na rozwinięcie dwumianu, kiedy wykładnik m iest odiemny; tym końcem dosyć iest w równaniu (V), z którego w poprzedzaiącym artykule wyprowadziliśmy formułę na rozwiianie dwumianu z wykładnikiem ułomkowym, zamienić m na $-m$. A tu uważać potrzeba, że

$$u^{-m}-v^{-m}=\frac{1}{u^m}-\frac{1}{v^m}=\frac{v^m-u^m}{u^m v^m} \text{ (43 i 48).}$$

Stąd zaś wypada

$$\frac{u^{-m}-v^{-m}}{u^n-v^n}=\frac{1}{u^m v^m}\left(\frac{v^m-u^m}{u^n-v^n}\right)=$$

$$-\frac{1}{u^m v^m}\left(\frac{u^m-v^m}{u^n-v^n}\right), \text{ (25).}$$

Aże podług tego co poprzedziło ilość $\frac{u^m-v^m}{u^n-v^n}$ zamieni się na $\frac{mu^{m-1}}{nu^{n-1}}$, kiedy $v=u$; będzie więc w tymże przypadku

$$\frac{u^{-m}-v^{-m}}{u^n-v^n}=\frac{-1}{u^{2m}}\times\frac{mu^{m-1}}{nu^{n-1}}=\frac{-mu^{-m-1}}{nu^{n-1}} \text{ (39 i 42).}$$

Druga strona równania (V) wcale nie odmienia swego kształtu, będzie zatem

$$-\frac{mu^{-m-1}}{nu^{n-1}}=A+2By+3Cy^2+4Dy^3+\ldots\ldots$$

Ró-

Równanie to różni się iedynie od równania (V) znakiem głoski m; powinno zatem doprowadzić do tych samych wypadków, którebyśmy otrzymali z równania $(V)'$, zamieniaiąc w niem m na $-m$.

206. Formuły dwumianu można użyć do wyciągania pierwiastków wszelkiego stopnia. Jakoż

ponieważ $\sqrt[m]{a+b} = (a+b)^{\frac{1}{m}}$ (188); chcąc zatem wyciągnąć pierwiastek stopnia m z dwumianu tego dosyć iest rozwinąć iego potęgę stopnia oznaczonego przez ułomek $\frac{1}{m}$.

Daymy, że z liczby wyrażonéy przez $a+b$ trzeba wyciągnąć piprwiastek stopnia piątego. Ponieważ

$$(x+a)^m = x^m \left(1 + \frac{m}{1}\,\frac{a}{x} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2.}\,\frac{a^2}{x^2} + \frac{m(m-1)\ (m-2)\ a^3}{1.\ 2.\ 3.\ x^3}\right)$$

trzeba więc w formule téy x zamienić na a, a zamienić na b, i zamiast m położyć $\frac{1}{5}$: tym sposobem formuła ta zamieni się w następuiącą:

$$(a+b)^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{5}}\left\{1 + \frac{\frac{1}{5}b}{1.\,a} + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)\ b^2}{1.\ 2\ \ a^2} + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)\ (\frac{1}{5}-2)\ b^3}{1.\ 2.\ 3.\ a^3} + \text{- - - - - - - - -}\right\}$$

$$= a^{\frac{1}{5}}\left\{1 + \frac{1.\,b}{5.\,a} - \frac{1.\ 4.\ \ b^2}{2.\ 5^2\ a^2} + \frac{1.\ 4.\ 9.\ b^3}{2.\ 3.\ 5^3\ a^3} - \frac{1.\ 4.\ 9.\ 14\ b^4}{2.\ 3.\ 4.\ 5^4\ a^4} + \text{- - - - - - - - - - -}\right\}$$

Chcąc użyć formuły téy do wyciągania przybliżonego pierwiastku stopnia piątego liczby danéy, trzeba rozłożyć liczbę tę na dwie części tak, ażeby część większa była zupełnie potęgą piątą, i część tę oznaczyć przez a, pozostała zaś

część

przez *b*. Niech będzie *np*. liczba 260: rozłożmy ią na 243+17, gdyż 243 iest piątą potęgą liczby 3, i uczyńmy $a = 243$, $b = 17$, skąd wypadnie $a^{\frac{1}{5}} = 3$, $\frac{b}{a} = \frac{17}{243}$.

Położywszy liczby te w poprzedzaiącéy formule, otrzymamy na szukany pierwiastek ciąg ułomków coraz mnieyszych; a zamiast sprowadzania ułomków tych do iednakowego mianownika, lepiéy iest obrócić ie na ułomki dziesiętne. W ogólności, im większa zachodzi różnica między liczbami oznaczonemi przez *a* i *b*; tém bardziey ułomki ciąg ten składaiące zmnieyszać się będą, i tém prędsze będzie zbliżanie się do pierwiastku prawdziwego. W przykładzie tym ponieważ liczba *b* iest mnieysza od $\frac{1}{14}$ liczby *a*, wyrazy zastępuiące w ciągu mieysce 6te, 7me i t. d. są tak małe, że ie można opuścić, i przestać na piérwszych pięciu. Wyrazy-te, z których każdy iest utworzony za pomocą wyrazu poprzedzaiącego (200) są następuiące:

1wszy wyraz - - - - - $+ 1{,}0000000$

2gi $1 \times \frac{b}{5a} = \frac{17}{1215} = A = + 0{,}0139918$

3ci $A \times 2\frac{b}{5a} = - \quad B = \ldots - 0{,}0003915$

4ty $B \times 3\frac{b}{5a} = \quad C = + 0{,}0000164$

5ty $C \times \frac{7}{2}\frac{b}{5a} = \quad - D = \ldots - 0{,}0000008$

$1{,}0140082 - 0{,}0003923.$

Odiąwszy summę wyrazów odiemnych od summy dodaynych, wypadnie reszta 1,0136159 wyrażaiąca summę pięciu wyrazów ciąg ten składaiących, którą rozmnożywszy przez $a^{\frac{1}{5}}$ czyli przez 3, iak wymaga powyższa formuła,

czyli

znaydziemy 3,0408477 na pierwiastek piątéy potęgi liczby 260; lecz lubo wypadek ma 7 cyfr dziesiętnych, dokładność iednak dochodzi tylko do cyfry szóstéy.

Tym samym sposobem postępuie się zawsze iakikolwiek iest stopień szukanego pierwiastku. Chcąc *np.* wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby 101, albo z liczby 99; w pierwszym przypadku liczbę daną trzeba rozłożyć na 100 + 1, w drugim na 81 + 18, albo też na 100 — 1; położywszy potém w formule dwumianu 100 zamiast x, 1 zamiast a, $\frac{1}{2}$ zamiast m, znaydziemy

$$\sqrt{101} = 10\,(1 + 0{,}005 - 0{,}0000125 + 0{,}0000000625 - 0{,}0000000039 + \text{i t. d.}) = 10{,}049875621.$$

$$\sqrt{99} = \sqrt{100-1} = 10\,(1 - 0{,}005 - 0{,}0000125 - 0{,}000000625 - 0{,}0000000039 - \text{i t. d.}) = 9{,}94987437 1.$$

VI. *Działania z ilościami pierwiastkowemi wszelkiego stopnia, i z ilościami maiącemi wykładniki.*

207. Wielka liczba przypadków, w których nie można wyciągnąć pierwiastków zupełnych, i długość działania potrzebnego do ich otrzymania przez przybliżenie, była powodem do szukania sposobów, za pomocą których można by było z ilościami będącemi pod znakiem pierwiastkowym odbywać działania fundamentalne, którym pierwiastki te podlegaią; aby tym sposobem dopiero na końcu wypadło działanie naybardziéy zawikłane, iakiem iest wyciąganie pierwiastków przez przybliżenie, i ażeby działanie to odbyć się mogło z liczbami naymnieyszemi, lub z wyrażeniami nayprostszemi, do iakich tylko dane zagadnienia sprowadzić można.

Dodawanie i odeymowanie ilości pierwiastkowych niepodobnych, mogą być tylko wskazanemi przez znaki + i —.

I tak

I tak summy $\sqrt[3]{a}+\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, tudzież różnica $\sqrt[3]{a}-\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$, inaczey wyrażone być nie mogą.

Czasem iednak i tu zmiana iakowa prostsza nastąpić może *np.*

$4a\sqrt[3]{2b}+\sqrt[3]{16a^3b}-\frac{5c}{ad}\sqrt[3]{2a^6b}$, w wyrażeniu tem, ilości pierwiastkowe mogą się stać podobnemi, podług tego cośmy powiedzieli wyżey (186). Jakoż

$$\sqrt[3]{16a^3b}=\sqrt[3]{8a^3.\,2b}=2a\sqrt[3]{2b};$$

$$\sqrt[3]{2a^6b}=\sqrt[3]{a^6.\,2b}=a^2\sqrt[3]{2b}.$$

Ilość więc dana zamieni się w następuiącą:

$$4a\sqrt[3]{2b}+2a\sqrt[3]{2b}-\frac{5a^2c}{ad}\sqrt[3]{2b}\ \text{czyli}$$

$$6a\sqrt[3]{2b}-\frac{5ac}{d}\sqrt[3]{2b}=\left(6a-\frac{5ac}{d}\right)\sqrt[3]{2b}=\left(\frac{6ad-5ac}{d}\right)\sqrt[3]{2b}=\frac{a}{d}(6d-5c)\sqrt[3]{2b}$$

208. Co się tycze innych działań ze znakami pierwiastkowemi, te zasadzaią się na prawdzie wyżey okazaney, że *podniosłszy wszystkie czynniki iloczynu do iedneyże potęgi, iloczyn ten będzie podniesiony do teyże samey potęgi* (186). Z drugiey srony wiadomo iest, że ilość pierwiastkowa podnosi się do potęgi tegoż wykładnika, którego iest znak pierwiastkowy, przekreśliwszy ten znak; *np.* $\sqrt[7]{a}$ podniesione do siodmey potęgi iest a; gdyż działanie to odwrotne działaniu wskazanemu przez $\sqrt[7]{a}$ przywraca ilość a do pierwotnego stanu.

A zatem ieżeli *np.* w wyrażeniu $\sqrt[7]{a}\times\sqrt[7]{b}$ zniesiemy znaki pierwiastkowe, wypadek ab będzie siódmą potęgą iloczynu danego, a wziąwszy pierwiastek siódmy, wniesiemy, że

$$\sqrt[7]{a} \times \sqrt[7]{b} = \sqrt[7]{ab}.$$

Rozumowanie to maiące mieysce we wszystkich przypadkach okazuie, że *chcąc przez siebie rozmnożyć dwa wyrażenia pierwiastkowe iednegoż stopnia, trzeba ilości będące pod znakiem pierwiastkowym przez siebie rozmnożyć, i przed iloczynem dać znak pierwiastkowy tegoż stopnia.*

Podług tego prawidła będzie

1ód $3\sqrt{2a^2b^3} \times 7\sqrt{5a^2bc} = 21\sqrt{10a^4b^4c} = 21a^2b^2\sqrt{10c}$.

2re $4\sqrt{a^2-b^2} \times \sqrt{a^2+b^2} = 4\sqrt{(a^2-b^2)(a^2+b^2)} = 4\sqrt{a^4-b^4}$.

3cie $\sqrt[5]{\dfrac{2a^9-a^3b^8}{a^4-b^4}} \times \sqrt[5]{\dfrac{a^2b^3c^2+b^5c^2}{d^2}}$

$$= \sqrt[5]{\frac{2a^9-a^3b^8}{a^4-b^4} \times \frac{a^2b^3c^2+b^5c^2}{d^2}}$$

$$= \sqrt[5]{\frac{a^3(2a^6-b^8)}{(a^2+b^2)(a^2-b^2)} \times \frac{b^3c^2(a^2+b^2)}{d^2}}$$

$$= \sqrt[5]{\frac{a^3b^3c^2(2a^6-b^8)}{d^2(a^2-b^2)}}.$$

209. Ponieważ siodma prtęga wyrażenia $\dfrac{\sqrt[7]{a}}{\sqrt[7]{b}}$ iest $\dfrac{a}{b}$ będzie więc $\dfrac{\sqrt[7]{a}}{\sqrt[7]{b}} = \sqrt[7]{\dfrac{a}{b}}$.

Skąd wypada, że *chcąc podzielić przez siebie dwie ilości pierwiastkowe iednegoż stopnia, trzeba przed ich ilorazem dać znak pierwiastkowy tegoż stopnia.* Będzie więc podług tego prawidła.

1ód

1ód $\frac{\sqrt{6ab}}{\sqrt{3a}} = \sqrt{\frac{6ab}{3a}} = \sqrt{2b}$.

2re $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a+b}}$

$= \sqrt{\frac{(a+b)\ (a-b)}{a+b}} = \sqrt{a-b}$.

3cie $\frac{\sqrt[5]{a^4b}}{\sqrt[5]{b^3c^2}} = \sqrt[5]{\frac{a^4b}{b^3c^2}} = \sqrt[5]{\frac{a^4}{b^2c^2}}$, i t. d.

210. Z prawidła mnożenia ilości pierwiastkowych iednegoż stopnia (191) wypada, że *chcąc podnieść ilość pierwiastkową do iakieykolwiek potęgi, dosyć iest ilość będącą pod znakiem pierwiastkowym podnieść do tey potęgi, a przed wypadkiem dać tenże sam znak pierwiastkowy.* Jakoż

$$\left(\sqrt[5]{ab}\right)^3 = \sqrt[5]{ab} \times \sqrt[5]{ab} \times \sqrt[5]{ab};$$

aże wszystkich trzech czynników znaki pierwiastkowe są iednegoż stopnia, trzeba więc ilości pod temi znakami będące rozmnożyć przez siebie, a przed iloczynem dać tenże sam znak pierwiastkowy. Będzie więc $\left(\sqrt[5]{ab}\right)^3 = \sqrt[5]{a^3b^3}$.

Podobnież $\left(\sqrt[7]{a^2b^3}\right)^4 = \sqrt[7]{a^8b^{12}} = ab\sqrt[7]{ab^5}$ i t. d.

Trzeba tu także uważać; że *gdy wykładnik znaku pierwiastkowego iest podzielny przez wykładnik potęgi, do ktorey się ilość dana podnosi, na ten czas wykładnik pierwszy dzieli się przez drugi* np.

$$\left(\sqrt[6]{a}\right)^2 = \sqrt[3]{a}; \text{ gdyż } \tfrac{6}{2} = 3.$$

Ja-

Jakoż ponieważ wykładniki 2, 3, 4 i t. d. będące przy ilościach, znaczą, że ilości te podnieść należy do potęgi 2giéy, 3ciéy, 4téy i t. d: a te same wykładniki nad znakiem pierwiastkowym położone znaczą, że z ilości pod temi znakami będących trzeba wyciągnąć pierwiastek stopnia 2go, 3go, 4go i t. d.; wykładniki zatem ilości i znaków pierwiastkowych maią znaczenie odwrotne. Jako więc dzieląc wykładnik ilości przez 2, 3, 4 i t. d. wyciągamy z ilości téy pierwiastek stopnia 2go, 3go, 4go i t. d.; tak odwrotnie *dzieląc wykładnik znaku pierwiastkowego przez 2, 3, 4 i t. d. podnosiemy ilość pod tym znakiem będącą do potęgi* 2giéy, 3ciéy, 4téy i t. d

211. Dla teysze przyczyny iako mnożąc wykładnik ilości przez 2, 3, 4 i t. d. ilość tę podnosimy do potęgi 2giéy, 3ciéy, 4téy i t. d. tak odwrotnie *mnożąc wykładnik znaku pierwiastkowego przez 2, 3, 4 i t. d. z ilości pod tym znakiem będącey wyciągamy pierwiastek stopnia 2go, 3go, 4go i t. d.*

Skąd wypada, że *chcąc z ilości pod znakiem pierwiastkowym będącéy wyciągnąć pierwiastek iakiegokolwiek stopnia, trzeba wykładnik znaku pierwiastkowego rozmnożyć przez wykładnik żądanego pierwiastku. I. tak*

$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}$. Podobnież $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^4}} =$ $\sqrt[15]{a^4}$ i t. d.

Jeżeli iednak wykładniki ilości będących pod znakiem pierwiastkowym podzielne są przez wykładnik żądanego pierwiastku, działanie odbędzie się podług prawidła wyżey podanego (185), dzieląc wykładniki ilości będących pod znakiem pierwiastkowym przez wykładnik żądanego pierwiastku *np.*

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^6}} = \sqrt[5]{a^2}\,;\ \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^4b^8}}$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^4b^8}} = \sqrt[3]{ab^2}.$$

212. Ponieważ mnożąc wykładnik ilości będącéy pod znakiem pierwiastkowym przez m, podnosi się ilość ta do potęgi m; a mnożąc przez m wykładnik znaku pierwiastkowego wyciąga się z wypadku pierwiastek stopnia m; wypada stąd, że to drugie działanie przywraca ilosć daną do iéy pierwotnego stanu.

I tak wyrażenie, $\sqrt[5]{a^3}$ zamienić można w następuiące: $\sqrt[35]{a^{21}}$, które wypada z rozmnożenia wykładników 5 i 3 przez 7; gdyż mnożyć przez 7 wykładnik ilości a^3, iest to ilość tę podnieść do potęgi 7méy, i będzie $\sqrt[5]{a^{21}}$; a mnożyć przez 7 wykładnik 5 znaku pierwiastkowego ilości $\sqrt[5]{a^{21}}$, iest to wyciągnąć pierwiastek 7my z wypadku: drugie więc to działanie niszczy skutek piérwszego.

Przez to podwoyne działanie sprowadzaią się do iednakowego stopnia wszystkie ilości pierwiastkowe stopni różnych, mnożąc tak wykładnik każdego znaku pierwiastkowego, iak wykładniki ilości pod tym znakiem będących przez iloczyn wykładników wszystkich innych znaków pierwiastkowych. Podług tego prawidła dwie ilości $\sqrt[5]{a^3b^2}$, $\sqrt[7]{c^4d^3}$ sprowadzone do iednakowego wykładnika znaku pierwiastkowego, zamienią się w następuiące: $\sqrt[35]{a^{21}b^{14}}$, $\sqrt[35]{c^{28}d^{21}}$.

Przez podobneż działanie trzy ilości $\sqrt[3]{ab^2}$,

$\sqrt[5]{}$

$\sqrt[5]{a^2c^3}$, $\sqrt[7]{b^4c^3}$, zamienią się w następuiące: $\sqrt[105]{a^{35}b^{70}}$, $\sqrt[105]{a^{42}b^{63}}$, $\sqrt[105]{b^{60}c^{45}}$.

Gdyby pod znakami pierwiastkowemi znaydowały się liczby, te także podnieść trzeba do potęgi wskazanéy przez iloczyn wykładników innych znaków pierwiastkowych.

213. Można także przenieść pod znak pierwiastkowy czynnik znayduiący się za tym znakiem, podnosząc go do potęgi wskazaney przez wykładnik znaku pierwiastkowego: *np.*

$a^2\sqrt[5]{b}=\sqrt[5]{a^{10}b}$; podobnież $2a\sqrt[3]{b}=$ $\sqrt[3]{8a^3b}$ i t. d.

Sprowadziwszy podług powyższego prawidła do iednegoż stopnia iakiekolwiek znaki pierwiastkowe, łatwo można będzie zastosować do nich podane wyżey (208) prawidła mnożenia i dzielenia ilości pierwiastkowych iednegoż stopnia.

Niech będzie w ogólności

$$\sqrt[m]{a^pb^q}\times\sqrt[n]{b^rc^s}.$$

Będzie naprzód podług prawidła (212)

$\sqrt[m]{a^pb^q}=\sqrt[mn]{a^{pn}b^{nq}}$; $\sqrt[n]{b^rc^s}=\sqrt[mn]{b^{mr}c^{ms}}$; a potém podług prawidła (208) wypadnie

$$\sqrt[mn]{a^{np}b^{nq}}\times\sqrt[mn]{b^{mr}c^{ms}}=\sqrt[mn]{a^{np}b^{nq+mr}c^{ms}}.$$

Podobnież podług powyższego prawidła (209) będzie

$$\frac{\sqrt[m]{a^pb^q}}{\sqrt[n]{b^rc^s}}=\frac{\sqrt[mn]{a^{np}b^{nq}}}{\sqrt[mn]{b^{mr}c^{ms}}}=\sqrt[mn]{\frac{a^{np}b^{nq}}{b^{mr}c^{ms}}}\text{ i t. d.}$$

214. Prawidła pod które podciągnęliśmy dzia-

 ła-

łania ze znakami pierwiastkowemi łatwo być mogą użyte do ilości rzeczywistych; lecz mogłyby wprowadzić w błąd w działaniach z ilościami bezistotnemi, gdybyśmy nie połączyli z niemi niektórych uwag wynikaiących z wiadomości wyżey wyłożonych. Tak *np.* z prawidła powyższego (208) wypada, że

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{-a \times -a} = \sqrt{a^2} = a.$$

Wypadek ten iest widocznie fałszywy: bo ponieważ iloczyn $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ iest kwadratem ilości $\sqrt{-a}$, będzie więc iloczyn ten $-a$ (208).

Trudność tę wyłuszczyć można sposobem następuięcym: kiedy iest niewiadomo, iakim sposobem utworzył się kwadrat a^2, którego szukamy pierwiastku, na ten czas pierwiastek iego będzie podwóyny $+a$ i $-a$. Lecz kiedy iest wiadomo, która z tych dwóch ilości rozmnożona przez siebie dała początek kwadratowi a^2, na ten czas nie można brać za pierwiastek drugiéy. W wyrażeniu tém: $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{a^2}$, wiadomo iest, że kwadrat a^2 umieszczony pod znakiem pierwiastkowym powstał z rozmnożenia ilości $-a$ przez $-a$: wszelka zatém wątpliwość ustaie, względem znaku przed pierwiastkiem tego kwadratu i będzie $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{a^2} = -a$.

Ta sama trudność miałaby mieysce względem iloczynu $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$, gdybyśmy nie uważali, że ponieważ w wyrażeniu tém $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2}$ nie masz znaku $-$, trzeba więc wziąć ważność tylko dodayną ilości $\sqrt{a^2}$: w przypadku bowiem tym kwadrat a^2 powstał z rozmnożenia $+a$ przez $+a$, a tém samem pierwiastek będzie $+a$.

215. Działania z ilościami maiącemi wykładniki łatwo być mogą wyprowadzone z tego cośmy dotąd o ilościach tych na różnych mieyscach powiedzieli. Jakoż wiemy iuż, że

10d,

1ód, $a^m \times a = a^{m+1}$ (30); 2re, $\frac{a^m}{a} = a^{m-1}$ (42); 3cie, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (43); 4te, $(a^m)^n = a^{mn}$; $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = a^{\frac{n}{m}}$ (183); 5te, $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. (185).

Stąd naprzód wypada, że

$\frac{a^2b^3}{c^4} = a^2b^3 \times \frac{1}{c^4} = a^2b^3 \times c^{-4} = a^2b^3c^{-4}$; podobnież

$\frac{a^2}{b^3c^5} = a^2 \times \frac{1}{b^3} \times \frac{1}{c^5} = a^2 \times b^{-3} \times c^{-5} = a^2b^{-3}c^{-5}$

i t. d.

To iest: *wszystkie czynniki mianownika można przenieść do licznika daiąc przed ich wykładnikami znak —.*

Odwrotnie, *kiedy ilość iaka ma czynniki z wykładnikami odiemnemi, można ie przenieść do mianownika daiąc przed ich wykładnikami znak +.* I tak $a^2b^5c^{-2}d^{-3} = \frac{a^2b^5}{c^2d^3}$ i t. d.

216. Ponieważ mieysce znaków pierwiastkowych zastąpić mogą wykładniki ułomkowe (188); w działaniach zatem użycie wykładników ułomkowych powinno doprowadzić do tych samych wypadków, iakie się otrzymuią odbywaiąc działania te za pomocą znaków pierwiastkowych. Jakoż

1ód; Poniważ $\sqrt[5]{a^3b^2} = a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}$, $\sqrt[5]{a^3c^2} = a^{\frac{3}{5}}c^{\frac{2}{5}}$; więc

$\sqrt[5]{a^3b^2} \times \sqrt[5]{a^3c^2} = a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}} \times a^{\frac{3}{5}}c^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{6}{5}}b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{2}{5}}$.

Zważywszy zaś, że $\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$, a tém samém $a^{\frac{6}{5}} = a^{1+\frac{1}{5}} = a \times a^{\frac{1}{5}}$; i że $a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{ab^2c^2}$; wniesiemy, że

$\sqrt[5]{a^3b^2} \times \sqrt[5]{a^3c^2} = a\sqrt[5]{ab^2c^2}$. Weźmy ieszcze przykład ogólny

$$\sqrt[m]{a^pb^q} \times \sqrt[n]{b^rc^s} = a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}} \times b^{\frac{r}{n}}c^{\frac{s}{n}}$$

$$= a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}+\frac{r}{n}}c^{\frac{s}{n}}$$

Dodawszy ułomki $\frac{q}{m}$ i $\frac{r}{n}$, i wszystkie wykładniki sprowadziwszy do iednakowego mianownika, druga strona równania tego zamieni się w następuiącą:

$$a^{\frac{np}{mn}}b^{\frac{nq+mr}{mn}}c^{\frac{ms}{mn}}.$$ A zatém

$$\sqrt[m]{a^pb^q} \times \sqrt[n]{b^rc^s} = \sqrt[mn]{a^{np}b^{nq+mr}c^{ms}}.$$

2re; $$\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[5]{a^4c}} = \frac{a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{4}{5}}c^{\frac{1}{5}}} = \frac{b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{4}{5}-\frac{3}{5}}c^{\frac{1}{5}}} = \frac{b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{1}{5}}c^{\frac{1}{5}}}.$$ A zatém

$$\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[5]{a^4c}} = \sqrt[5]{\frac{b^2}{ac}}.$$ W ogólności

$$\frac{\sqrt[m]{a^pb^q}}{\sqrt[n]{b^rc^s}} = \frac{a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}}}{b^{\frac{r}{n}}c^{\frac{s}{n}}} = \frac{a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}-\frac{r}{n}}}{c^{\frac{s}{n}}}.$$

Sprowadziwszy do iednakowego mianownika wykładniki ułomkowe, będzie

$$\frac{\sqrt[m]{a^pb^q}}{\sqrt[n]{b^rc^s}} = \frac{a^{\frac{np}{mn}}b^{\frac{nq-mr}{mn}}}{c^{\frac{ms}{mn}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np}b^{nq-mr}}{c^{ms}}}$$

Łatwo iest postrzedz, że sprowadzenie wykładników ułomkowych do iednakowego miano-
wni-

wnika zastępuie tu mieysce sprowadzenia znaków pierwiastkowych do iednakowego stopnia i prowadzi do tychże samych wypadków.

3cie; I to iest także rzeczą widoczną, że

$$\left(\sqrt[m]{a^r}\right)^n = \left(a^{\frac{r}{m}}\right)^n = a^{\frac{nr}{m}} = \sqrt[m]{a^{nr}};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^r}} = \sqrt[n]{a^{\frac{r}{m}}} = a^{\frac{r}{mn}} \sqrt[mn]{a^r}, \text{ i t. d.}$$

VII. *Przydatek do teoryi postępów arytmetycznych.*

217 Podaliśmy wyżey (131) formułę na otrzymanie summy wszystkich wyrazów postęp arytmetyczny składaiących. Wystawmy sobie teraz, że w postępie arytmetycznym

$$\div a.\ b\ c.\ d - - - - - - - k.\ l,$$

którego liczba wyrazów iest n, a stosunek r, każdy wyraz podniesiony iest do iedneyże potęgi iakieykolwiek oznaczoney przez m; i że potrzeba znaleźć summę tych wszystkich potęg.

Z postępu danego wypadaią następuiące równania (130).

$$b = a + r,\ c = b + r,\ d = c + r,\ - - - - l = k + r.$$

Podniosłszy obie strony każdego z tych równań do stopnia m, będzie (197).

$$b^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} r + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} a^{m-2} r^2 + ^m - - - -$$

$$c^m = b^m + \frac{m}{1} b^{m-1} r + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} b^{m-2} r^2 + - - -$$

$$d^m = c^m + \frac{m}{1} c^{m-1} r + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} c^{m-2} r^2 + - - - -$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$l^m = k^m + \frac{m}{1} k^{m-1} r + \frac{m(m-1)}{1.\ 2.} k^{m-2} r^2 + - - -$$

Strony odpowiadaiące tych równań dodawszy do siebie, przekreśliwszy potem z obu stron wyrazy

razy spólne, i a^m ze strony drugiéy przeniosłszy na pierwszą; wypadnie

$$l^m - a^m = \frac{m}{1} r\,(a^{m-1} + b^{m-1} + c^{m-1} + \ldots\ldots k^{m-1})$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.\ 2} r^2\,(a^{m-2} + b^{m-2} + c^{m-2} + \ldots\ldots k^{m-2})$$

$$+ \frac{m(m-1)\ (m-2)}{1.\ \ 2.\ \ 3} r^3 (a^{m-3} + b^{m-3} + c^{m-3} + \ldots k^{m-3})$$

$$+ \ldots\ldots$$

Niech będzie

$$a + b + c + d + \ldots\ldots\ldots\ldots k + l = S_1$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots k^2 + l^2 = S_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^m + b^m + c^m + d^m + \ldots\ldots\ldots k^m + l^m = S_m$$

Będzie więc

$$a + b + c + d + \ldots\ldots\ldots k = S_1 - l;$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots\ldots\ldots k^2 = S_2 - l^2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^m + b^m + c^m + d^m + \ldots\ldots\ldots k^m = S_m - l^m.$$

Równanie więc powyższe zamieni się w następuiące:

$$l^m - a^m = \frac{m}{1}\ r\ (S_{m-1} - l^{m-1}) +$$

$$\frac{m(m-1)}{1.\ 2} r^2\,(S_{m-2} - l^{m-2})$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ \ 2.\ \ 3} r^3\,(S_{m-3} - l^{m-3}) + \ldots\ldots \quad (V).$$

Uczyńmy iod $m = 1$: równanie (V) zamieni się w następuiące;

$$l - a = r\,(S_0 - l^0):$$

gdyż w wyrazie drugim, trzecim i t. d. drugiéy strony równania (V) znayduie się czynnik $m - 1 = 0$.

Że zaś $S_0 = a^0 + b^0 + c^0 + \ldots\ldots k^0 + l^0 = n$; będzie więc $l - a = r\,(n - 1)$: a tém samém,

$$l = a + r\,(n - 1);$$

wła-

właśnie też tak być powinno podług tego cośmy powiedzieli wyżéy (130).

Uczyńmy 2re $m = 2$: równanie (V) zamieni się w następuiące:

$$l^2 - a^2 = 2r\,(S_1 - l) + r^2\,(S_0 - l^0).$$

Zamiast dwumianu $S_0 - l^0$, położywszy iego ważność wziętą z powyższego równania $l - a = r\,(S_0 - l^0)$; będzie

$$l^2 - a^2 = 2r\,(S_1 - l) + r\,(l - a). \text{ Więc}$$

$$S_1 = \frac{l^2 - a^2 + rl + ra}{2r} = \frac{(l - a + r)(l + a)}{2r}.$$

Że zaś podług powyższego równania $l - a = r\,(n - 1)$ wypada $l - a + r = rn$; będzie więc

$$S_1 = \frac{n\,(l + a)}{2}.$$

Właśnie też tak być powinno podług podanego wyżéy prawidła (131).

Uczyńmy 3cie $m = 3$: równanie (V) zamieni się w następuiące:

$$l^3 - a^3 = 3r\,(S_2 - l^2) + 3r^2\,(S_1 - l) + r^3\,(S_0 - l^0).$$

Aże podług powyższych równań $S_0 - l^0 = \frac{l - a}{r}$,

$S_1 - l = \frac{l^2 - a^2 - r\,(l - a)}{2r}$; ważności te położywszy w ostatniem równaniu, będzie

$$l^3 - a^3 = 3r\,(S_2 - l^2) + \frac{3r\,(l^2 - a^2) - 3r^2\,(l - a)}{2}$$

$+ r^2\,(l - a)$; czyli

$$l^3 - a^3 = \frac{6r\,(S_2 - l^2) + 3r\,(l^2 - a^2) - r^2\,(l - a)}{2};$$

więc

$$S_2 = l^2 + \frac{2\,(l^3 - a^3) - 3r\,(l^2 - a^2) + r^2\,(l - a)}{6r};$$

czyli

$$S_2 = \frac{2\,(l^3 - a^3) + 3r\,(l^2 + a^2) + r^2\,(l - a)}{6r}.$$

Tym samym sposobem znaleźć można S_3, S_4 i t. d

Chcąc *np.* znaleźć ważność S_2 w postępie liczb naturalnych 1. 2. 3... .*n*, trzeba w ostatniem równaniu zamiast *l*, położyć *n*, a zamiast *a* i *r* położyć iedność, będzie więc

$$S_2 = \frac{2n^3 - 2 + 3n^2 + 3 + n - 1}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)\ (2n+1)}{1.\ 2.\ 3}$$

218. Za pomocą tey formuły można wyrachować liczbę kul ułożonych w ostrogran, iakie po składach artylleryczńych widzieć się daią. Ostrogany te są troiakiego kształtu: iedne z podstawami kwadratowemi, drugie z podstawami troykątnemi, trzecie z podstawami prostokątnemi.

Co do gatunku piérwszego, ostrograny te w swoiéy wysokości podzielone są na warszty kwadratowe, które, idąc od wierzchołka ku podstawie, składaią ciąg kwadratów z liczb naturalnych. Jakoż w pierwszey warszcie od wierzchołka iest tylko iedna kula. Kula ta opiera się na 4 innych w kwadrat ułożonych składaiących drugą warsztę. Te 4 kule opieraią się na 9 innych w kwadrat ułożonych składaiących trzecią warsztę: podobnież w 4 warszcie iest kul 16, w 5tey 25 i t. d. A zatem liczba kul w warszcie 1wszey $= 1 = 1^2$, w 2giéy $= 4 = 2^2$, w 3ciéy $= 9 = 3^2$, w 4téy $= 16 = 4^2$.... ostatniey czyli ntey $= n^2$.

Summa więc wszystkich kul ostrogran składaiących równa się summie kwadratów z liczb naturalnych zacząwszy od 1 aż do liczby *n* oznaczaiącey liczbę warszt, która także wyraża liczbę kul będących w każdym boku podstawy ostogranu. Oznaczywszy przez *S* liczbę wszystkich kul ostrogran składaiących będzie podług powyższey formuły:

$S =$

$$s = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{1.\quad 2.\quad 3.}$$

Gdyby *np.* ostrogran był złożony z 10 warszt, czyli, co na iedno wychodzi, gdyby w iednym boku podstawy ostrogranu było kul 10, należałoby uczynić $n = 10$, a tém samém byłoby

$$s = \frac{10.\quad 11.\quad 21}{1.\quad 2.\quad 3} = 5.\ 11.\ 7 = 385.$$

Następuiaca tablica, którą łatwo rozciągnąć można tak daleko, iak się podoba, może zastąpić mieysce powyższéy formuły i służyć razem do iéy sprawdzenia:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	5	14	30	55	91	140	204	285	385

Piérwszy wiersz oznacza liczbę warszt, albo liczbę kul znayduiących się w iednym boku każdéy warszty; drugi wyraża liczbę kul będących w każdéy warszcie; trzeci wskazuie summę kul znayduiących się w warsztach następnie do siebie dodawanych. I tak liczba 140 na 7mém mieyscu leżąca, okazuie, że w siedmiu piérwszych od wierzchołka warsztach, czyli w ostrogranie z siedmiu warszt złożonym, znayduie się kul 140.

219. W ostrogranach troykątnych warszty są troykątami równobocznemi, wyłączywszy piérwszą od góry, która ma tylko iednę kulę; każdy bok warszty 2giéy ma po 2, 3ciéy po 3, 4téy po 4,.... ntéy po n kul.

Piérwsza warszta złożona z iednéy kuli oparta iest na 3 kulach drugą warsztę składaiących ułożonych w troykąt dzielący się na dwa rzędy kul, z których ieden ma dwie kule, drugi iednę. Te trzy kule oparte są na 6 innych trzecią warsztę składaiących, ułożonych w troykąt dzielący się na 3 rzędy, z których ieden ma 3 kule, drugi 2, trzeci 1 kulę. Te 6 kul oparte są na 10 innych czwartą warsztę składaiących, ułożonych

w

w troykąt dzielący się na 4 rzędy, z których ieden ma 4 kule, drugi 3, trzeci 2, czwarty 1 kulę. Podobnież warszta 5ta iest troykątem dzielącym się na 5 rzędów, z których ieden ma 5 kul, drugi 4, trzeci 3, czwarty 2, piąty 1 kulę, to iest: liczba kul warszty 5tey równa się summie postępu arytmetycznego liczb naturalnych zacząwszy od 1 aż do 5. Toż mówić o innych wszystkich warsztach; w 10tey *np.* warszcie liczba kul równa się summie postępu arytmetycznego liczb naturalnych zacząwszy od 1 aż do 10. Liczba zatém kul znayduiących się w warszcie

1széy, $= 1$ - - - - - - - - - - - $= (1^2 + 1)\frac{1}{2}$
2giéy, $= 1 + 2$ - - - - - - - - - $= (2^2 + 2)\frac{1}{2}$
3ciéy, $= 1 + 2 + 3$ - - - - - - - - $= (3^2 + 3)\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - - - - - - - -
ntéy $= 1 + 2 + 3 + 4 +$ - - - - - - - $n = (n^2 + n)\frac{1}{2}$

Oznaczywszy zatém przez S liczbę kul ostrogran składaięcych, będzie

$S = (1^2 + 1)\frac{1}{2} + (2^2 + 2)\frac{1}{2} + (3^2 + 3)\frac{1}{2} + \cdots$
$(n^2 + n)\frac{1}{2}$; czyli
$S = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2)\frac{1}{2} + (1 + 2 + 3 + \cdots n)\frac{1}{2}$
czyli

$$S = \tfrac{1}{2}\left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{n^2 + n}{2}\right)$$

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{n\ (n + 1)\ (n + 2)}{1.\ \ 2.\ \ 3}.$$

Jeżeli *np.* $n = 10$, będzie $S = \frac{10.\ 11.\ 12}{1.\ 2.\ 3} = 220.$

Następuiąca tablica dostatecznie rozciągnięta może zastąpić mieysce formuły lub służyć do iéy sprawdzenia:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220

Piérwszy wiersz oznacza liczbę warszt ostrogran składaiących albo liczbę kul umieszczonych w iednym boku każdéy warszty, drugi wskazuie li-

liczbę kul znayduiących się w rozmaitych warsztach Wiersz ten powstaie z następnego dodawania liczb naturalnych zacząwszy od iedności aż do liczby wyrażaiącey mieysce warszty. Trzeci wiersz powstaie z następnego dodawania liczb umieszczonych w wierszu drugim, a tem samem oznacza summę kul we wszystkich warsztach czyli w całym ostrogranie będących.

220. W ostrogranach prostokątnych warszty są prostokątami. Pierwsza warszta od góry składa się tylko z iednego rzędu kul, których liczba może być rozmaita; druga składa się z dwóch rzędów, z których każdy ma iednę kulę więcey, niż iest w rzędzie warszty pierwszey, trzecia składa się z trzech rzędów, z których każdy ma iedną kulę więcey, niż ich iest w każdym rzędzie warszty drugiey, czwarta składa się ze czterech rzędów, z których każdy ma iedną kulę więcey, niż ich iest w każdym rzędzie warszty poprzedzaiącey, i tak daley. Jeżeli więc m iest liczba kul rzędu w pierwszey warszcie, w każdym z dwóch rzędów warszty drugiey będzie kul $m+1$, w każdym z trzech rzędów warszty trzeciey będzie kul $m+2$, w każdym ze 4 rzędów warszty 4tey będzie kul $m+3, \ldots$ i w każdym z n rzędów warszty ostatniey czyli $n$tey będzie kul $m+n-1$. Liczba zatem kul warszty

1wszey, $= m = m + 1^2 - 1$

2giey, $= (m+1)\,2 = 2m + 2 = 2m + 2^2 - 2.$

3ciey, $= (m+2)\,3 = 3m + 6 = 3m + 3^2 - 3.$

4tey, $= (m+3)\,4 = 4m + 12 = 4m + 4^2 - 4.$

. - - - - - - - - - - - - - - - - - .

$n$tey $= (m+n-1)\,n = nm + n^2 - n.$

Oznaczywszy więc przez S liczbę kul cały ostrogran składaiących, będzie

$$S = m + 2m + 3m + \ldots nm + 1^2 + 2^2 + 3^2 + n^2 - 1 - 2 - 3 - \ldots n : \text{czyli}$$

$$S = m\,(1 + 2 + 3 + \ldots n) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2) - (1 + 2 + 3 + \ldots n);\ \text{czyli}$$

$S =$

$$S = m \times \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n^3+3n^2+n}{6} - \frac{n^2+n}{2};$$

czyli

$$S = \frac{n^2+n}{2} \times (m-1) + \frac{2n^3+3n^2+n}{6}.$$

Odbywszy działania wskazane, i wypadek rozłożywszy na czynniki, znaydziemy

$$S = \frac{n(n+1)(3m+2n-2)}{1.\quad 2.\quad 3}.$$

Jeżeli *np.* $m=5$, $n=10$, będzie

$S = \frac{10.\ 11.\ 33}{1.\ 2.\ 3} = 605$. Dla zastąpienia lub sprawdzenia téy formuły można ułożyć następuiącą tablicę, w któréy dla m naznacza się za ważność liczba kul pierwszą warsztę składaiących, iaką iest w tym przykładzie liczba 5:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	12	21	32	45	60	77	96	117	140
5	17	38	70	115	175	252	348	465	605

Piérwszy wiersz oznacza liczbę warszt i liczbę rzędów każdéy warszty, iako też mieysce, które ta warszta w ostrogranie zastępuie, drugi wiersz wskazuie liczbę kul znayduiących się w rozmaitych warsztach: wiersz ten powstaie z wyłożonéy wyżéy formuły $n(m+n-1)$, czyniąc w niéy $m=5$, $n=$ liczbie oznaczaiącéy mieysce warszty. Wiersz trzeci powstaie, z dodawania do siebie liczb w drugim wierszu umieszczonych, a tém samém wyraża liczbę wszystkich kul warszty te czyli ostrogran dany składaiących.

221. Gdy ostrogran iest ścięty czyli nie cały, należy go dopełnić w myśli, potém wyrachować osobno liczbę kul ostrogranu całego i przydanego w myśli: różnica między temi dwiema liczbami okaże liczbę kul składaiących ostogran ścięty.

Niech będzie *np.* ostrogran ścięty z podstawą kwadratową z siedmiu warszt złożony, w którym

rym bok podstawy ma kul 12. Ostogran ten gdyby był cały, składałby się z 12 warszt (218), i miałby kul $\frac{12.\ 13.\ 25}{1.\ 2.\ 3} = 2.\ 13.\ 25 = 650$. W ostrogranie z 5 warszt złożonym, który w myśli dodaie się do ściętego, znaydowałoby się kul $\frac{5.\ 6.\ 11}{1.\ 2.\ 3} = 5.\ 11 = 55$. A zatém w ostrogranie ściętym znayduie się kul $650 - 55 = 595$.

Niech będzie ostrogran ścięty z podstawą troykątną z 9 warszt złożony, w którym bok podstawy, ma kul 15. Ostrogran ten, gdyby był cały, składałby się z 15 warszt (219), i miałby kul $\frac{15.\ 16.\ 17}{1.\ 2.\ 3} = 5.\ 8.\ 17 = 680$. W ostrograniu z 6 warszt złożonym, który w myśli dodaie się do ściętego, byłoby kul $\frac{6.\ 7.\ 8}{1.\ 2.\ 3} = 56$. A zatém w ostrogranie ściętym iest kul $680 - 56 = 624$.

Niech będzie nakoniec ostrogran ścięty z 7 warszt złożony z podstawą prostokątną, w którey ieden bok ma kul 20, drugi 12: podstawa zatém czyli ostatnia warszta tego ostrogranu składa się z 12 rzędów, i ma w sobie kul 240. A zatém $nm + n^2 - n = 240$, (220). Że zaś ostrogran ten gdyby był cały, składałby się z 12 warszt, iak to okazuie liczba rzędów warszty ostatniey, będzie więc $12m + 144 - 12 = 240$; a tém samém $m = 9$, to iest: pierwsza tego ostrogranu warszta miałaby kul 9. Liczba zatém wszystkich kul ostrogranu całego byłaby $\frac{12.\ 13.\ 49}{1.\ 2.\ 3} = 1274$. W ostrogranie z 5 warszt złożonym, który w myśli dodaie się do ściętego, iest kul $\frac{5.\ 6.\ 35}{1.\ 2.\ 3} = 175$. A zatém w ostrogranie ściętym znayduie się kul 1099.

222.

222. Chcąc znaleźć liczbę warszt ostrogranu z podstawą kwadratową, kiedy wiadoma iest liczba kul cały ostrogran składaiących, trzeba w równaniu $S = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$, (118) znieść mianownik i podzielić obie strony przez 2; będzie więc

$3S = n^3 + \frac{3}{2} n^2 + \frac{1}{2} n$: skąd wniesiemy, że $n^3 < 3S$; a tem samem $n < \sqrt[3]{3S}$.

Aże $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$; więc $(n+1)^3 > 3S$; a tém samem $n + 1 > \sqrt[3]{3S}$

Skąd się okazuie, że n czyli szukana liczba warszt iest pierwiastkiem sześciennym naywiększego sześcianu zawartego w liczbie $3S$.

Co do ostrogranów troykątnych ponieważ u iest $S = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$ (119), będzie $6S = n^3 + 3n^2 + 2n$; a zatém $n^3 < 6S$, $(n+1)^3 > 6S$: liczba więc n iest pierwiastkiem sześciennym naywiększego sześcianu zawartego w liczbie $6S$.

Nakoniec w ostrogranie prostokątnym, ponieważ równanie $S = \frac{n(n+1)(3m+2n-2)}{6}$ (120), zamyka trzy ilości różne; trzeba mieć dwie wiadome *np.* S i m ażeby znaleźć trzecią n.

W reszcie w każdym przypadku liczba szukanych warszt może być łatwo znaleziona za pomocą tabliczek dostatecznie rozciągniętych, których wzory podaliśmy wyżéy.

VIII. O *postępach jeometrycznych maleiących.*

223. W postępie jeometrycznym, którego wyraz pierwszy $= a$, stosunek $= q$, liczba wyrazów $= n$, a ich summa $= s$, iest iakośmy już powiedzieli wyżey (135).

$S =$

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Kiedy q iest liczbą całkowitą, ilość q^n będzie tém większa, im większa będzie liczba n, i S może być większa od wszelkiéy ilości naznaczonéy, daiąc dla n przyzwoitą ważność, to iest biorąc dostateczną liczbę wyrazów postęp jeometryczny składaiących. Lecz ieżeli q iest ułomkiem, oznaczywszy ułomek ten przez $\frac{1}{m}$, równanie powyższe zamieni się w następuiące:

$$S = \frac{a\left(\frac{1}{m^n} - 1\right)}{\frac{1}{m} - 1} = \frac{a\left(\frac{1}{m^n} - 1\right)}{\frac{1 - m}{m}}$$

$$= a\left(\frac{1}{m^n} - 1\right)\left(\frac{m}{1 - m}\right) = \frac{am\left(\frac{1}{m^n} - 1\right)}{1 - m}$$

$$= \frac{am\left(1 - \frac{1}{m^n}\right)}{m - 1} = \frac{am - \frac{am}{m^n}}{m - 1}.$$

Że zaś w ułomku $\frac{am}{m^n}$ podzieliwszy oba wyrazy przez m, będzie $\frac{a}{m^{n-1}}$, więc

$$S = \frac{am - \frac{a}{m^{n-1}}}{m - 1}.$$

Aże ułomek ma tém mnieyszą ważność, im iest większy iego mianownik; im większa zatém będzie liczba wyrazów n, tém mnieyszy będzie

T wy-

wyraz $\frac{a}{m^{n-1}}$, a tém samém ważność S tém bardziéy przybliżać się będzie do ilości $\frac{am}{m-1}$. Może być nawet różnica między summą S a ilością $\frac{m}{m-1}$, mnieysza od wszelkiéy ilości naznaczonéy; lubo ściśle biorąc rzeczy, summa S ilości téy nigdy zupełnie równą nie będzie.

Ilość zatém $\frac{am}{m-1}$, którą oznaczać będziemy przez L, iest *granicą*, do któréy summy cząstkowe oznaczone przez S tém bardziéy zbliżać się będą, im będzie większa liczba wyrazów postęp jeometryczny składaiących.

Stosuiąc uwagi te do postępu $\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} :$ i t. d. będzie $a = 1$, $q = \frac{1}{m} = \frac{1}{2}$, a zatém $m = 2 : L = \frac{am}{m-1} = 2$; a im więcéy weźmiemy wyrazów w postępie powyższym, tém bardziéy summa ich przybliżona będzie do liczby 2. Jakoż

$$1 = 1 = 2 - 1$$
$$1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} = 2 - \tfrac{1}{2}$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{7}{4} = 2 - \tfrac{1}{4}$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{15}{8} = 2 - \tfrac{1}{8} \text{ w ...}$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{31}{16} = 2 - \tfrac{1}{16} \text{ i t. d.}$$

Wyrażenie granicy L może być uważane iako summa postępu jeometrycznego, w którym liczba wyrazów iest nieskończona: i zwyczaynie summa ta wyraża się tym sposobem; lecz aby mieć dokładne iéy wyobrażenie, trzeba ią sobie wystawić nie iako prawdziwą summę wszystkich wyrazów, ale iako granicę, do któréy tém bardziéy summa ta iest przybliżona, im iest większa liczba wyrazów.

224.

224. Z wyrażenia $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ można wyprowadzić wszystkie wyrazy składaiące postęp jeometryczny, których summę wyraźenie to wystawia: gdyż podzieliwszy q^{n-1}, przez $q - 1$, znaydziemy podług tego cośmy powiedzieli wyżéy (202)

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots q^{n-1}.$$

Ważność tę położywszy w równaniu $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$, będzie $S = a\,(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots q^{n-1}) = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots aq^{n-1}$.

To samo wypadnie z ważności $L = \frac{am}{m - 1}$ gdy się uskuteczni dzielenie ilości m przez $m - 1$, podług następuiącego wzoru:

$$\begin{array}{l|l}
m & m - 1 \\ \cline{2-2}
-m + 1 & 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \text{i t. d.} \\ \cline{2-2}
\quad -1 + \frac{1}{m} & \\
\qquad -\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} & \\
\qquad\qquad -\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3}\ \text{i t. d.} &
\end{array}$$

Dzieli się naprzód m sposobem zwyczaynym przez piérwszy wyraz dzielnika; wypada na iloraz 1; mnoży się iloraz ten przez dzielnik, i odiąwszy iloczyn od dzielnéy, pozostała reszta 1 dzieli się przez piérwszy wyraz dzielnika, i wypada iloraz $\frac{1}{m}$: iloraz ten rozmnożony przed

 dziel-

dzielnik daie iloczyn $\frac{m}{m} - \frac{1}{m}$, czyli $1 - \frac{1}{m}$, który odiąwszy od pierwszéy reszty, zostaie reszta druga $\frac{1}{m}$: z tą resztą odbywa się to samo działanie iak z poprzedzaiącą. Postępuiąc tym samym sposobem daléy, łatwo iest postrzedz prawo, któremu podlegaią wszystkie ilorazy cząstkowe, i że iloraz wypadaiący z podzielenia m przez $m-1$ składa szereg $1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^4} + \cdots$ którego liczba wyrazów iest nieskończona. Będzie więc

$$\frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \text{i t. d.}$$

rozmnożywszy obie strony przez a, będzie

$$\frac{am}{m-1} = L = a\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \right).$$

Zamiast m położywszy ważność, która iest $\frac{1}{q}$, będzie

$$L = a(1 + q + q^2 + q^3 + \text{- - - - - -}); \text{ czyli}$$

$$L = a + aq + aq^2 + aq^3 + \text{- - - - - - - - - -}$$

225. Szereg $1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \text{- - - -}$ bierze się za ważność ułomka $\frac{m}{m-1}$, ilekroć szereg ten iest *schodzący się* czyli *zbieżny*, *convergens*, to iest: kiedy wyrazy szereg ten składaiące są tém mnieysze, im bardziéy się oddalaią od wyrazu pierwszego

Jakoż poprzedzaiące dzielenie przerwawszy po reszcie pierwszéy, drugiéy, trzeciéy i t. d. znaydziemy.

Ilo-

Iloraz pierwszy 1	reszta 1
drugi $1 + \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}$
trzeci $1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}$	$\frac{1}{m^2}$
i t. d.	i t. d.

Widzimy tu, że ilorazy tém bardziéy przybliżaią się do prawdziwéy ważności, im są mnieysze odpowiadaiące im reszty: lecz okoliczność ta ma w ten czas tylko mieysce, kiedy m większe iest od iedności. W każdym innym przypadku nie można zaniedbywać pozostaiących reszt, które coraz bardziéy rosnąc daią poznać, że ilorazy oddalaią się coraz bardziéy od prawdziwéy ważności.

Abyśmy to przykładem obiaśnili, uczyńmy naprzód $m = 2$. będzie więc $\frac{m}{m-1} = 2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$ Szereg drugą stronę równania tego składaiący, iakośmy iuż uważali, co raz bardziéy przybliża się do 2.

Uczyńmy powtóre $m = 1$, będzie więc

$$\frac{m}{m-1} = \frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$$

Druga strona równania tego ciągnąca się bez końca iest wprawdzie ilością nieskończoną, iak tego wymaga ułomek $\frac{1}{0}$ pierwszą stronę składaiący, który oznacza ilość nieskończoną, iak to wkrótce obaczymy (233); lecz gdybyśmy nie uważali na pozostaiące reszty, wypadłoby niepodobieństwo: gdyż ponieważ dzielnik rozmnożony przez iloraz powinien być iloczynem równym dzielnéy, byłoby więc $(1 + 1 + 1 + 1 + \cdots) 0 = 1$. W równaniu tém pierwsza strona iest zerem: wypadłoby więc $1 = 0$, co być nie może.

Uczyniwszy potrzecie $m = \frac{1}{2}$, będzie

m

$$\frac{m}{m-1} = -1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$$ co także być nie może.

Sprzeczności te nikną, gdy uważymy, że w drugim przypadku każda z pozostałych w dzieleniu reszt iest równa iedności, i że ponieważ reszty te nie zmnieyszaią się, nie można ich zaniedbywać, choćby też szereg był naydaley rozciągnięty. Przydawszy więc iednę z tych reszt do drugiéy strony równania $1 = (1 + 1 + 1 + 1 + \cdots)0$, równanie to będzie zupełne.

W przypadku trzecim pozostaiące reszty, 1, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{m^2}$, $\frac{1}{m^3}$ i t. d. składaią postęp rosnący 1, 2, 4, 8, 16 i t. d. a dodawszy do każdego ilorazu ułomek będący resztą ilorazowi temu odpowiadaiącą, ściśle wyrażenia ułomka $\frac{m}{m-1}$ będą następuiące:

$$1 + \frac{1}{m-1};$$

$$1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m(m-1)};$$

$(m-1)$ $\frac{1}{m^2(m-1)}$

$$1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2(m-1)}, \text{ i t. d.}$$

z których każde czyni -1, kiedy $m = \frac{1}{2}$.

Uczyniwszy $m = -n$, ułomek $\frac{m}{m-1}$ zamieni się w następuiący: $\frac{-n}{-n-1} = \frac{n}{n+1}$: podzieliwszy licznik przez mianownik znaydziemy na iloraz następuiący szereg:

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} - \text{i t. d.}$$

a uczyniwszy $n = 1$, wypadnie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{i t. d.}$$

Do-

Dodaiąc następnie wyrazy szereg ten składaiące, wypadkiem będzie na przemiany raz 1, drugi raz 0: pierwszy wypadek iest większy, drugi mnieyszy od prawdziwéy ważności ułomka $\frac{n}{n+1}$, która w przypadku tym iest $\frac{1}{2}$: ale że powyższy szereg nie iest schodzący się; nie może dać tey prawdziwey ważności, i na iakimkolwiek zatrzymamy się wyrazie, trzeba także rachować pozostałą resztę.

Uczyniwszy $n=2$, szereg powyższy zamieni się w następuiący:

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}-\text{i t. d.}$$

w którym summy cząstkowe 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ i t. d. są na przemiany raz większe, drugi raz mnieysze od prawdziwéy ważności ułomka $\frac{n}{n+1}$, która w tym przypadku iest $\frac{2}{3}$, lecz do któréy summy te co raz bardziéy przybliżaią się: gdyż dany szereg iest schodzący się.

Lubo szeregi *rozchodzące się, divergentes*, to iest takie, których wyrazy są tém większe, im są bardziéy od piérwszego oddalone, co raz więcey oddalaią się od prawdziwéy ważności wyrażenia tego, z którego biorą początek; uważane iednak iako wyrażenia te rozwinięte, daią poznać te przynaymniey ich własności, które nie zależą od dodawania ich wyrazów.

IX. *Przydatek do teoryi Logarytmów.*

226. Chcąc otrzymać logarytm iakieykolwiek liczby y, trzeba iakośmy iuż okazali wyżéy, rozwiązać równanie $(10)^x = y$, w którém wykładnik x iest niewiadomy. Aże wynalezienie ważności dla x iest niezmiernie długie i pracowite, w liczbach zwłaszcza większych, obaczmy, czyby nie była krótsza droga postępuiąc porządkiem odwrotnym, to iest: naznaczaiąc ważności dla x, a szukaiąc odpowiadaiących ważności dla y, któreby ułożone w tablice służyć mogły do wyznaczenia x przez y.

W

W równaniu $(10)^x = y$, uczyniwszy $x = \frac{1}{10}$ będzie $(10)^{\frac{1}{10}} = y$.

Abyśmy znaleźli ważność dla y, kiedy liczba 10 ma za wykładnik $\frac{1}{10}$ wyciągniymy naprzód pierwiastek kwadratowy z liczby 10; będzie

$\sqrt{10} = (10)^{\frac{1}{2}} = (10)^{\frac{5}{10}} = 3{,}162277660.$

Z wypadku tego wyciągnąwszy pierwiastek stopnia piątego znaydziemy

$\sqrt[5]{(10)^{\frac{5}{10}}} = (10)^{\frac{1}{10}} = 1{,}258925412 \cdots (1).$ Że zaś $\left((10)^{\frac{1}{10}}\right)^2 = (10)^{\frac{2}{10}}$; $\left((10)^{\frac{1}{10}}\right)^3 = (10)^{\frac{3}{10}}$ i t. d. (183), w równaniu zatém (1) podnosząc drugą stronę do potęgi 2, 3, 4 --- 9, znaydziemy ważności dla y odpowiadaiące liczbie 10 podniesioney do potęgi $\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10} \cdots \frac{9}{10}$.

Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy z obu stron równania (1), będzie

$\sqrt{(10)^{\frac{1}{10}}} = (10)^{\frac{1}{20}} = (10)^{\frac{5}{100}} = 1{,}122018454$; z czego wyciągnąwszy pierwiastek piątey potęgi, wypadnie

$\sqrt[5]{(10)^{\frac{5}{100}}} = (10)^{\frac{1}{100}} = 1{,}023292991.$

Drugą stronę tego równania podnosząc do potęgi 2, 3, 4 --- 9, znaydziemy ważności dla y odpowiadaiące liczbie 10 podniesioney do potęgi $\frac{2}{100}, \frac{3}{100}, \frac{4}{400} \cdots \frac{9}{100}$.

Tym samym sposobem postępuiąc daléy, znaydziemy ważności dla y odpowiadaiące liczbie 10 podniesioney do potęgi $\frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}$ i t. d. Idąc potém do potęgi 2, 3, 4 --- 9, otrzymamy ważności dla y odpowiadaiące liczbie 10 podniesioney do potęgi $\frac{2}{100}, \frac{3}{100}, \frac{4}{100} \cdots \frac{9}{100}$; tudzież $\frac{2}{1000}, \frac{3}{1000}, \frac{4}{1000} \cdots \frac{9}{1000}$ i t. d. Tym sposobem można będzie ułożyć następuiącą tablicę;

Lo-

Logarytmy	Licz. Natur.	Logarytmy	Licz. Natur
0,9	7,943282347	0,00009	1,000207254
8	6,309573445	8	1,000184224
7	5,011872336	7	1,000161194
6	3,981071706	6	1,000138165
5	3,162277660	5	1,000115136
4	2,511886432	4	1,000092106
3	1,995262315	3	1,000069080
2	1,584893193	2	1,000046053
1	1,258925412	1	1,000023026
0,09	1,230268771	0,000009	1,000020724
8	1,202264435	8	1,00001842
7	1,174897555	7	1,000016118
6	1,148153621	6	1,000013816
5	1,122018454	5	1,000011513
4	1,096478196	4	1,000009210
3	1,017529305	3	1,000006908
2	1,047128548	2	1,000004605
1	1,023292992	1	1,000002302
0,009	1,020939484	0,0000009	1,000002072
8	1,018591388	8	1,000001842
7	1,016248694	7	1,000001611
6	1,013911386	6	1,00000138
5	1,011179454	5	1,000001151
4	1,009252886	4	1,000000921
3	1,006931669	3	1,000000690
2	1,004615794	2	1,000000460
1	1,002305238	1	1,000000230
0,0009	1,002074475	0,00000009	1,000000207
8	1,001843766	8	1,000000184
7	1,001613109	7	1,000000161
6	1,001382506	6	1,000000138
5	1,001151956	5	1,000000115
4	1,000921459	4	1,000000092
3	1,000691015	3	1,000000069
2	1,000460623	2	1,000000046
1	1,000230285	1	1,000000023

227. Chcąc za pomocą téy tablicy znaleźć logarytm liczby *np.* 2549, dzielę naprzód tę liczbę przez $(10)^3$ czyli przez 1000: gdyż ta iest nay-większa potęga liczby 10, która w daney liczbie mieścić się może. Znaleziony iloraz 2,549 roz-mnożywszy przez dzielnik $(10)^3$, iloczyn wypadnie równy daney liczbie. Będzie więc

$$2,549 = (10)^3 \times 2,549.$$

2re. Szukam w tablicy naywiększéy potęgi liczby 10, któraby się mieściła w czynniku 2,549. Potęgą tą iest $(10)^{\frac{4}{10}} = 2,511886432$. Przez tę potęgę podzieliwszy 2,549, i otrzymany iloraz roz-mnożywszy przez dzielnik znaydziemy

$$2,549 = (10)^{0,4} \times 1,014775177.$$

3cie. Szukam w tablicy naywiększéy potęgi liczby 10, którąby się mieścić mogła w czynniku 1,014775177 Potęgą tą iest $(10)^{0,006} = 1,013911386$. Przez tę potęgę podzieliwszy iloraz poprzedza-iący 1,014775177, i otrzymany iloraz trzeci roz-mnożywszy przez dzielnik, wypadnie

$$1,014775177 = (10)^{0,006} \times 1,000851939.$$

4te. Szukam w tablicy naywiększéy potęgi liczby 10, którąby się mieścić mogła w trzecim ilorazie, potęgą tą iest $(1'0)^{0,0003} = 1,000691015$. Przez tę potęgę podzieliwszy iloraz trzeci, i o-trzymany iloraz czwarty rozmnożywszy przez dzielnik, wypadnie

$$1,000851939 = (10)^{0,0003} \times 1,000160812.$$

5te. Szukam w tablicy naywiększéy potęgi liczby 10, którąby się mieścić mogła w ilorazie czwartym: potęgą tą iest $(10)^{0,00006} = 1,000138165$. Przez tę potęgę podzieliwszy iloraz czwarty, i o-trzymany iloraz piąty rozmnożywszy przez dzielnik, wypadnie

$$1,000160812 = (10)^{0,00006} \times 1,000022645.$$

Widzimy tu, że ilorazy za każdém działaniem otrzymane coraz bardziéy zbliżaią się do iedności: postępuiąc więc tym samym sposobem daley, można będzie otrzymać iloraz tak mało różniący się

się od iedności, iak się podoba; za siodmém *np.* działaniem otrzymany iloraz w pierwszych siedmiu cyfrach dziesiętnych nie różni się od iedności.

Przestaiąc na tém cośmy dotąd znaleźli, to iest, biorąc za iedność iloraz piąty, który od niey większy iest dwiema tylko iednościami dziesiątnemi piątego rzędu, liczbę daną można będzie rozłożyć na pięć czynników będących różnemi potęgami liczby 10: wypadnie bowiem
$2549 = (10)^3 \times (10)^{0,4} \times (10)^{0,006} \times (10)^{0,0003}$ $\times (10)^{0,00006}$; czyli $2549 = (10)^{3,40636}$ (30).

Skąd się okazuie, że 3,40636 iest logarytmem liczby 2549 (138).

Chcąc otrzymać logarytm téy liczby o siedmiu cyfrach dziesiętnych, trzeba powyższe działanie powtórzyć ieszcze dwa razy; przez co do pięciu czynników poprzedzaiących przybędą dwa nowe czynniki będące potęgami liczby 10, to iest: $(10)^{0,000009}$, i $(10)^{0,0000008}$; a zatem logarytm o siedmiu cyfrach dziesiętnych liczby 2549 będzie 3,4063698; taki też znayduie się w tablicach logarytmowych.

Sposób ten postępowania łatwo zastosować można do wyrachowania logarytmu wszelkiey liczby, iaka tylko dana być może. Wielkość liczby daney, iak to łatwo pomiarkować można, nie ma żadnego wpływu na długość czasu potrzebnego do wyrachowania iey logarytmu. Często nawet większéy liczby logarytm nie równie prędzéy wyrachowany być może, a niżeli mnieyszéy, iak tego doświadczyć można szukaiąc logarytmów liczb 25124, 63103, 100937 i t. d. tudzież liczb 79, 19, 7, i t. d.

ROZ-

ROZDZIAŁ X.

Obszernieyszy wykład teoryi równań stopnia pierwszego i drugiego.

I. *Niektóre szczególnieysze wypadki w rozwiązywaniu rownań stopnia pierwszego trafić się mogące.*

228. Rozwiązuiąc zagadnienia stopnia pierwszego wypadaią częstokroć wyrażenia ilości szukanych zupełnie od zwyczaynych odmienne, tak dalece, że z pierwszego weyrzenia zdaie się rzeczą niepodobną osądzić, co te wyrażenia znaczyć mogą

Lecz trudność ta zniknie natychmiast, gdy się należycie rozważą okoliczności z zagadnieniem połączone. Mieliśmy iuż tego przykład w zagadnieniu powyższém (80), w którém ważność niewiadoméy otrzymana ze znakiem —, iakkolwiek z początku zdawała się do zrozumienia trudna, za rozważeniem iednak okoliczności z zagadnieniem połączonych ułatwioną została: następuiące zagadnienie dostarczy nam więcey tego rodzaiu wypadków:

Zagadnienie. *Dway gońce wysłani o iedneyże godzinie z dwóch miast, których odległość iest* a, *iadą na przeciw siebie: ieden przez godzinę uieżdża mil* b, *drugi w tymże czasie uieżdża mil* c: *po ileż mil uiadą nim się z sobą spotkaią?*

A ———————————— B

S

Niech linia AB wyraża wiadomą odległość a dwóch miast. Daymy, że punkt S iest punktem spotkania się dwóch gońców, i że goniec pierwszy uieżdża drogę AS, drugi BS.

Oznaczywszy drogę uiechaną od pierwszego przez x, od drugiego przez y, będzie $x = AS$, $y = BS$: aże $AS + BS = AB$, a podług zagadnienia $AB = a$; będzie więc

$$x + y = a.$$

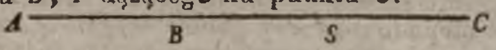
Że zaś droga przebyta podzielona przez prędkość, czyli przez liczbę mil na godzinę uiechanych, równa się liczbie godzin na przebycie drogi łożonych; pierwszy zatém goniec przed spotkaniem bawił w drodze godzin $\frac{x}{b}$, drugi godzin $\frac{y}{c}$. Aże obadwa o iedneyże godzinie z mieysc swoich wyieżdżaiąc bawili w drodze równą liczbę godzin, będzie więc drugie równanie

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}.$$

Dwa te równania rozwiązawszy, znaydziemy $x = \frac{ab}{b+c}$, $y = \frac{ac}{b+c}$.

Ponieważ do znalezionych ważności dla x, y, nie wchodzi znak $-$, rzeczą iest widoczną, że iakiekolwiek liczby weźmiemy zamiast głosek a, b, c, zawsze dla x i y wypadną ważności dodayne, i że tém samém dane zagadnienie będzie zawsze rozwiązane w znaczeniu zgodnem z iego wysłowieniem. Jakoż nie trudno sobie wystawić, że w każdym przypadku, gdy dway gońce iadą razem na przeciw sobie, muszą się koniecznie spotkać.

229. Przypuśćmy teraz, że obadwa gońce iadą w iednymże kierunku, i że goniec odchodzący z punktu A ściga gońca odchodzącego z punktu B, i dążącego ku punktu C.



Rzeczą iest widoczną, że w tym przypadku goniec ścigaiący nie może inaczéy dogonić uchodzącego, chyba że prędkość pierwszego większa iest od prędkości drugiego, i że punkt spotkania S nie może być między punktami A i B, lecz między punktem B i C. Goniec zatém ścigaiący, nim doścignie drugiego, przebyć musi drogę AS, go-

goniec uchodzący drogę BS. Że zaś $AS - BS = AB$; oznaczywszy zatem drogę przebytą od gońca pierwszego przez x, drogę przebytą od gońca drugiego przez y, a odległość dwóch miast AB przez a, będzie równanie pierwsze

$$x - y = a.$$

Drugie równanie będzie tak iak w przypadku pierwszym

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c},$$

które wyraża równość czasu łożonego przez obu gońców na przebycie swoich dróg, i w którym ilości b i c oznaczaią liczbę mil uiechanych na iedną godzinę przez gońca pierwszego i drugiego.

Dwa te równania rozwiązawszy znaydziemy

$$x = \frac{ab}{b - c},\ y = \frac{ac}{b - c}.$$

Tu ważności znalezione dla x i y w ten czas tylko będą dodayne, gdy będzie b większe od c, to iest, gdy prędkość gońca ścigaiącego większa iest od prędkości gońca ściganego. Uczyniwszy np. $b = 4$, $c = 2$, znaydziemy $x = 2a$, $y = a$.

Skąd się okazuie, że w tym przypadku odległość punktu spotkania S od punktu A iest dwa razy większa a niżeli AB.

Założywszy potem, że b mnieysze iest od c, i że np. $b = 2$, $c = 4$; znaydziemy $x = -a$, $y = -2a$.

Ważności te maiące przed sobą znak $-$ okazuią, że zagadnienie to nie może być rozwiązane w znaczeniu iego wysłowienia (80). Jakoż rzeczą iest niepodobną, aby goniec ścigaiący, 2 mile tylko na godzinę uieżdżaiąc, mógł doścignąć gońca uchodzącego, który 4 mile na godzinę uieżdża.

230. Jednakże te same ważności rozwiązuią zagadnienie w pewném znaczeniu: gdyż położywszy ie zamiast x i y w równaniach $x - y = a$,

$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$, znaydziemy podług prawideł na znaki w odeymowaniu (24)

$$-a+2a=a;\ \frac{-a}{2}=\frac{-2a}{4}$$

Znalezione zatém ważności czynią zadosyć równaniom: gdyż w obudwu strona pierwsza równa iest stronie drugiey.

Jeżeli się z uwagą zostanowimy nad znakami wyrazów składaiących pierwsze z tych dwóch ostatnich równań, postrzeżemy w iakim sposobie należy zmienić wysłowienie tego zagadnienia, aby w niém wytknięte wyżéy niepodobieństwo mieysca nie miało. Jakoż ponieważ droga przebyta od gońca ścigaiącego, która iest $-a$, ma być odiętą od drogi przebytéy przez gońca ściganego, to iest od $+2a$; wypada stąd, że goniec podług wysłowienia ścigaiący, iest w istocie ściganym przez drugiego, który podług wysłowienia iest ściganym, i że ten drugi goniec z punktu B odchodzący ściga pierwszego, który odchodzi z punktu A.

Za takową zmianą w wysłowieniu, następuie także zmiana w kierunku drogi gońców: nie mogą iuż dążyć ku punktowi C, lecz w przeciwną stronę ku punktowi C', iak okazuie figura,

C'.......———————————————C. a
S' A B S

punkt spotkania iest S', wypada stąd, że $BS'-AS' = AB$. a tem samem $y-x=a$. Drugie zaś równanie iest zawsze to samo, to iest $\frac{x}{b}=\frac{y}{c}$.

Odbywszy działanie potrzebne, znaydziemy

$$x=\frac{ab}{c-b}=\frac{2a}{4-2}=a;$$

$$y=\frac{ac}{c-b}=\frac{4a}{4-2}=2a;$$

dwie

dwie ważności dodatne, które rozwiązuią zagadnienie w znaczeniu iego wysłowienia.

231. Uczyniwszy $c = o$, to iest przypuściwszy, że goniec ścigany zostaie na mieyscu, rzeczą iest widoczną, że goniec ten żadnéy drogi nie przebędzie, i że spotkanie się z pierwszym w ten czas będzie miało mieysce, gdy pierwszy goniec przebędzie drogę AB czyli a.

Uczyniwszy znowu $b = o$, to iest przypuściwszy, że goniec ścigaiący zostaie na mieyscu, rzeczą iest widoczną, że droga przez niego przebyta powinna być równa o, i że goniec ten z drugim inaczéy spotkać się nie może chyba w ten czas, kiedy drugi goniec w kierunku odwrotnym przebędzie drogę AB czyli a; co też w rzeczy saméy wypada: położywszy bowiem zero zamiast b w równaniach

$$x = \frac{ab}{b-c}\ ;\ y = \frac{ac}{b-c},\ \text{będzie}$$

$$x = \frac{a \times o}{o - c} = \frac{o}{-c} = o.$$

$$y = \frac{ac}{o-c} = \frac{ac}{-c} = -a.$$

Te same ważności w obu przypadkach czynią także zadosyć równaniu $x - y = a$; iak się o tém łatwo przekonać można. Co się tycze równania drugiego $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$, równanie to mieysca mieć nie może w tych przypadkach, kiedy ieden tylko z gońców puszcza się w drogę, a drugi zostaie na mieyscu.

Właśnie też tak wypada: położywszy bowiem zero zamiast c w równaniach

$$x = \frac{ab}{b-c},\ y = \frac{ac}{b-c},\ \text{będzie}$$

$$x = \frac{ab}{b} = a : y = \frac{a \times o}{b} = \frac{o}{b}.$$

To

To iest: goniec ścigaiący powinien przebyć drogę równą a, ażeby doścignął drugiego; goniec zaś ścigany przebywa drogę $\frac{0}{b} = 0$.]

232. *Może tu być ieszcze taki przypadek*, w którym zagadnienie to iest zupełnie niepodobnem. Przypadek ten ma w ten czas mieysce, gdy się naznacza dla obu gońców iednakową prędkość: rzeczą iest przez się widoczną, że w iakąkolwiek na ten czas iadą stronę, nie mogą się nigdy z sobą spotkać, gdyż zawsze są od siebie w takiey odległości, w iakiey się znaydowali w chwili ruszenia w drogę. Niepodobieństwo to, któremu żadne przekształcenie wysłowienia zapobieżeć nie może, wydaie się oczywiście w równaniach.

Jakoż ponieważ podług zagadnienia obadwa gońce równą liczbę mil uieżdżaią na godzinę: będzie więc $b = c$, a tem samém równanie $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$ zamieni się w następuiące: $\frac{x}{b} = \frac{y}{b}$ i zniosłszy mianownik, będzie $x = y$. Równanie zatem $x - y = a$, zamieni się w następuiące: $x - x = a$; czyli $0 = a$.

Wypadek ten iest niepodobny: gdyż podług niego ilość a oznaczaiąca odległość dwóch mieysc, z których puszczaią się gońce w drogę, powinna być poczytana za zero.

233, Niepodobieństwo to okazuie się w sposobie osobliwszym w dwóch ważnościach ilości niewiadomych.

$$x = \frac{ab}{b-c},\ y = \frac{ac}{b-c}.$$

Ponieważ bowiem z założenia iest $b = c$, będzie więc

$$x = \frac{ab}{0},\ y = \frac{ab}{0}.$$

Nie tak łatwo iest pomiarkować, iaki może być iloraz, kiedy dzielnik iest zero postrzedz tylko można, że gdyby ilość b bardzo mało różniła się od c, ważności dla x i y wypadłyby bardzo wielkie. Abyśmy się o tem przekonali, weźmy naprzód $b = 4$, $c = 3{,}9$: będzie więc

$$b - c = 4 - 3{,}9 = 0{,}1 \text{ a tem samem}$$

$$x = \frac{4a}{0{,}1} = 40a\,;\; y = \frac{3{,}9a}{0{,}1} = 39a.$$

Uczyńmy potém $b = 4$, $c = 3{,}99$: będzie więc

$$b - c = 4 - 3{,}99 = 0{,}01\,; \text{ a tém samém}$$

$$x = \frac{4a}{0{,}01} = 400a;\; y = \frac{3{,}99a}{0{,}01} = 399a.$$

Ząd się okazuie, że im mnieysza weźmie się różnica między ilościami b i c, tem mnieyszy wypada mianownik dla szukanych ważności, i tém większe wypadaią te ważności.

Lęcz ponieważ iakakolwiek ilość choćby też naymnieysza nie może być nigdy równa zeru, wypada ząd, że choćbyśmy naymnieyszą naznaczyli różnicę między liczbami oznaczonemi przez b i c, choćbyśmy tem samém otrzymali naywiększe ważności dla x i y, nigdy iednak ważności te nie mogą być tak wielkie, iakieby wypadły w ten czas, kiedy między liczbami oznaczonemi przez b i c nie masz żadney różnicy, czyli kiedy $b = c$.

Ostatnie te ważności nie mogące być oznaczonemi przez żadną liczbę, choćby też naywiększą, iaka tylko być może, nazwane są ilościami *nieskończonemi*, *infinitae*, i wszelkie wyrażenie w kształcie $\frac{m}{0}$, którego mianownik iest zero, uważa się za ilość nieskończoną.

Możnaby tu zapytać, iakim sposobem ważności $x = \frac{ab}{0}$, $y = \frac{ac}{0}$ czynią zadosyć danym równaniom: gdyż ta iest własność istotna Algegiebry, że ważności niewiadomych w iakimkolwiek kształcie wyrażone zawsze czynią zadosyć równaniom zagadnienia, gdy poddane będą działaniom wskazanym.

Ważności te położywszy w równaniach $x-y=a$, $\frac{x}{b}=\frac{y}{b}$, które odpowiadaią przypadkowi temu, gdy $b=c$, równania te zamienią się w następuiące:

$$\frac{ab}{o}-\frac{ab}{o}=a\text{, czyli }\frac{ab-ab}{o}=a\text{; więc}$$

$$ab-ab=a\times o\text{; czyli } o=o.$$

Drugie równanie w tym przypadku zamienia się na

$$\frac{ab}{o\times b}=\frac{ab}{o\times b}\text{, czyli }\frac{a}{o}=\frac{a}{o}.$$

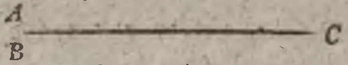
Ponieważ tak w pierwszém iak w drugiém równaniu obie strony są sobie równe, ważności zatém znalezione czynią zadosyć tym równaniom.

Uważać tu ieszcze potrzeba, że na liczbę godzin, których gońce potrzebuią nim się spotkaią, wypada także ilość nieskończonaa $\frac{a}{o}$; właśnie też tak być powinno: bo kiedy droga, którą maią przebyć nim się spotkaią nie ma końca, liczba godzin do przebycia téy drogi potrzebnych końca także mieć nie powinna.

Te same ważności niewiadomych poprawuią sprzeczność i niepodobieństwo wypadku otrzymanego wyżey (2?2), podług którego $a=o$. Jakoż w równaniu $x-y=a$, podzieliwszy obie strony przez x, będzie $1-\frac{y}{x}=\frac{a}{x}$. Aże z równania $\frac{x}{b}=\frac{y}{b}$ wypada $x=y$; równanie zatém

$1 - \frac{y}{x} = \frac{a}{x}$ zamieni się w następuiące: $1 - \frac{x}{x} = \frac{a}{x}$; czyli $1 - 1 = \frac{a}{x}$; czyli $0 = \frac{a}{x}$. W tém równaniu uchybienie zależy na ilości $\frac{a}{x}$, któ-ra druga strona przewyższa stronę pierwszą: lecz uchybienie to będzie tem mnieysze, im większa weźmie się liczba na ważność dla x. Słusznie więc w przypadku tym algiebra daie dla x ważność tak wielką, że iey żadna liczba choćby też naywiększa wyrazić nie może.

234. Gdyby dway gońce iadąc z iednakową prędkością i w iednymże kierunku, puścili się w drogę z iednegoż punktu, na ten czas spotkanie się ich miałoby mieysce na każdym punkcie tey drogi, którą przebyć maią. Obaczmy, iakie w tym przypadku wypadną ważności dla niewiadomych x i y.



Ponieważ punkta A i B znayduią się razem, będzie więc w tym przypadku $a = 0$; aże prędkość gońców iest iednakowa, więc $b = c$. Ważności te położywszy w równaniach:

$$x = \frac{ab}{b-c};\quad y = \frac{ac}{b-c},\ \text{będzie}$$

$$x = \frac{0 \times b}{0} = \frac{0}{0};\quad y = \frac{0 \times c}{0} = \frac{0}{0}.$$

Abyśmy poznali, iaką mieć może ważność iloraz, kiedy dzielna i dzielnik iest zero, weźmy dwa równania dane $x - y = a$, $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$.

W pierwszém położywszy 0 zamiast a, będzie $x - y = 0$, a tem samem $x = y$. Ważność tę położywszy zamiast x w równaniu drugiém, będzie $\frac{y}{b} = \frac{y}{b}$: gdyż $b = c$.

Równanie ostatnie, którego obiedwie strony są *też same*, *identica*, to iest złożone z tychże samych wyrazów maiących przed sobą te same znaki, zawsze będzie sprawdzone iakakolwiek ważność naznaczymy dla y, a tém samém rzeczą iest niepodobną wyznaczyć w szczególności tę niewiadomą. Prócz tego równanie drugie $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$ daie $x = y$, tak iak i równanie piérwsze $x - y = 0$, z którego także wypada $x = y$. Okazuie się tylko z równania iednego i drugiego, że dwa gońce będą zawsze razem: gdyż drogi przebyte x i y zaczynaią się obiedwie w punkcie A i są zawsze równe, lecz ich wyznaczyć nie można. Wyrażenie zatém $\frac{0}{0}$ iest znakiem ilości *niewyznaczoney indeterminata*.

235. Są iednak przypadki, w których dana ilość zdawać się może ilością niewyznaczoną, lubo w istocie wyznaczyć ią można. I tak wyrażenie

$$\frac{a(a^2 - b^2)}{b(a - b)}$$

zamienia się na $\frac{0}{0}$, ieżeli iest $a = b$: gdy tym czasem rozłożywszy licznik na czynniki, wypadnie

$$\frac{a(a^2 - b^2)}{b(a - b)} = \frac{a(a - b)(a + b)}{b(a - b)} = \frac{a(a + b)}{b}$$

$$= \frac{a(a + a)}{a} = 2a.$$

Skąd wniesiemy, że gdy się trafi wyrażenie, które zamienić można na $\frac{0}{0}$, dla zapewnienia się, czy wyrażenie to iest rzeczywiście ilością niewyznaczoną, trzeba pierwey uważyć, czy licznik i mianownik nie maią iakiego czynnika spólnego, po zniesieniu którego można będzie otrzymać prawdziwą ważność danego wyrażenia.

236. To cóśmy dotąd powiedzieli, okazuie widocznie, że rozwiązania algiebraiczne albo zupeł-

pełnie czynią zadosyć wysłowieniu zagadnienia, gdy iest podobne; albo wskazuią, iakie zmiany uczynić należy w wysłowieniu, gdy między danemi w zagadnieniu ilościami zachodzą sprzeczności, którym zaradzić można; albo nakoniec daią poznać zupełne niepodobieństwo, kiedy nie masz żadnego sposobu, ażeby dane zagadnienie z temi samemi ilościami wiadomemi mogło być rozwiązane tak w znaczeniu właściwem iego wysłowienia, iak w znaczeniu podobnem do wysłowienia danego.

237. W rozwiązywaniu przez różne przypadki zagadnienia poprzedzaiącego uważać należy że zmiana znaku niewiadomych x i y odpowiada zmianie w kierunku dróg, które te niewiadome oznaczaią. Kiedy w przypadku pierwszym (228 niewiadoma y brana była od B ku A, miała przed sobą w równaniu $x+y=a$ znak $+$, a w przypadku drugim (229) przybrała znak $-$, gdyśmy ią wzięli w stronę przeciwną od B ku C: w tym bowiem przypadku wypadło równanie pierwsze $x-y=a$. Uczyniwszy tę samę zmianę znaku w równaniu drugiem $\frac{x}{b}=\frac{y}{c}$, będzie $\frac{x}{b}=-\frac{y}{c}$: wypadek ten nie zgadza się z tym, któryśmy otrzymali wyżey; lecz uważać tu potrzeba, że c oznacza drogę przez drugiego gońca w iedney godzinie przebytą, i że droga ta powinna mieć ten sam kierunek, i tenże sam znak iaki ma droga y: będzie zatem równanie drugie

$$\frac{x}{b}=\frac{-y}{-c}; \text{ czyli } \frac{x}{b}=\frac{y}{c}.$$

Sama więc zmiana znaków dostateczna iest, do zawarcia drugiego przypadku zagadnienia tego w przypadku pierwszym. Skąd się okazuie, że Algiebra daie razem rozwiązanie wielu zagadnień do siebie podobnych; iakośmy to iuż uważali rozwiązuiąc zagadnienia stopnia drugiego (128).

238. Rozwiązaliśmy to zagadnienie za pomocą dwóch niewiadomych: lecz ie łatwo także rozwiązać można przez iednę tylko niewiadomą.

A ———————————— *B*
S

Jakoż ieżeli x oznacza drogę AS przebytą od gońca, który wyjeżdża z punktu A, będzie $BS = AB - AS = a - x$ droga przebyta przez gońca drugiego. Aże dwie te drogi odbyte są w iednymże czasie, a prędkość gońca pierwszego iest b, drugiego c, będzie więc

$$\frac{x}{b} = \frac{a-x}{c}. \text{ A zatém } x = \frac{ab}{b+c}, \text{ i t. d.}$$

239. Częstokroć do zagadnienia w artykule 228 podanego, przydaie się następuiąca okoliczność:

A ———————————————— B
S C

Daymy, że goniec odchodzący z punktu B ku A, puścił się w drogę d godzinami pierwey, niż nastąpił wyiazd gońca z punktu A ku B.

W przypadku tym goniec uieżdżaiący na godzinę mil c, przez liczbę godzin d uiedzie mil cd. Niech będzie $cd = BC$. Goniec zatém odchodzący z punktu B znaydować się będzie na punkcie C w chwili, kiedy goniec drugi rusza z mieysca: a zatém odległość mieysc, z których gońce wyieżdżaią w iednymże czasie na przeciwko siebie iest

$$AC = AB - BC = a - cd.$$

W równaniu zatem $\frac{x}{b} = \frac{a-x}{c}$ (238) zamiast a położywszy $a - cd$, będzie

$$\frac{x}{b} = \frac{a - cd - x}{c};\ x = \frac{ab - bcd}{b+c}.$$

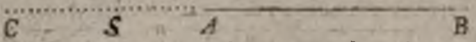
Jeżeli gońce iadą w kierunku iednakowym

A ———————————————— *S*
B C

droga przebyta od gońca wyieżdżaiącego z punktu tu A iest AS; droga zaś przebyta od gońca drugiego iest $CS = AS - AC = AS - AB - CB = x - a - cd$. Równanie zatém $\frac{x}{b} = \frac{a-x}{c}$, zamieni się w następuiące:

$$\frac{x}{b} = \frac{x-a-cd}{c};\ x = \frac{ab+bcd}{b-c}.$$

240. Wysłowione tym sposobem zagadnienie zamyka ieden przypadek, w którym znaleziona ważność odiemna dla x nie łatwa iest do zrozumienia; to iest, kiedy przypuszczaiąc kierunek przeciwny w drodze gońców, naznacza się dla liczby d ważność taka, że droga BC wyrażona przez cd iest większa od a czyli od AB:



w ten czas bowiem goniec z punktu B wyieżdżaiący znayduie się na punkcie C z drugiéy strony punktu A leżącym, w chwili, kiedy drugi goniec rusza z punktu A ku B. Niepodobieństwo zatém iest przypuszczać, aby tym sposobem dway gońce spotkać się z sobą mogli.

Gdyby było np. $a = 100$ mil, $b = 3$ mile, $c = 2$ mile $d = 60$ godzin: wypadłoby zatém $cd = 120$ mil, a tém samem punkt C byłby o 20 mil za punktem A, względem punktu B. Lecz w przypadku tym położywszy naznaczone ważności w równaniu $x = \frac{ab - bcd}{b+c}$ (239) będzie $x = \frac{100.\,3 - 3.\,2.\,60}{3+2} = -12$.

A zatém spotkanie się gońców miałoby mieysce w punkcie S leżącym o 12 mil z drugiéy strony punktu A, lecz między punktami A i C, ohociaż zdaie się że goniec odiechawszy z punktu B maiac odbywać drogę daléy za punktem C, nie może spotkać się z drugim gońcem gdzieindziéy iak za punktem C.

Aby-

Abyśmy zrozumieli zagadnienie w tym przypadku, połóżmy zamiast x liczbę odiemną $-m$. Równanie

$\frac{x}{b} = \frac{a - cd - x}{c}$ zamieni się w następuiące:

$-\frac{m}{b} = \frac{a - cd + m}{c}$, odmieniwszy znaki w całem równaniu, będzie $\frac{m}{b} = \frac{cd - a - m}{c}$.

Tu iuż widzimy, że droga przebyta od gońca wyieżdżaiacego z punktu B iest $cd - a - m$, czyli $BC - AB - AS = CS$, i że $CA = BC - AB = cd - a$: co wypada na to, iak gdyby goniec drugi miał wyieżdżać z punktu C: na którym znayduie się w chwili wyiazdu gońca pierwszego: aże iadą w kierunku przeciwnym, spotkanie ich nastąpić musi w przeciągu drogi AC. Przypadek więc ten iest zupełnie taki, iaki iest pierwszy w artykule powyższym (239), gdzie dosyć iest $a - cd$ zamienić na $cd - a$, ażeby otrzymać ważność dla m w przypadku teraźnieyszym.

II. *Formuły ogólne na rozwiązywanie równań stopnia pierwszego z iakąkolwiek liczbą niewiadomych.*

241 Sposoby podane wyżey (72) na rozwiązywanie równań stopnia pierwszego z dwiema lub więcey niewiadomemi zależą w ogólności na tem, że niewiadome znoszą się następnie iedna po drugiey poty, póki nie wypadnie równanie, z iedną tylko niewiadomą, którą znalazłszy, łatwo znayduią się inne Sposób, który teraz wyłożyć mamy, tem się od innych różni, że nie następnie iedna po drugiey, ale razem wszystkie niewiadome, iakabykolwiek była ich liczba, znoszą się oprócz iedney, i od razu otrzymuie się równanie z tą tylko niewiadomą, którey ważność naypierwey znaleźć chcemy. Lubo sposób ten po-

potrzebny iest tylko do rozwiązywania zagadnień z trzema, czterema i t. d. niewiadomemi, abyśmy go iednak w zupełności tem lepiey obiąć mogli, zaczniemy od równań z dwiema niewiadomemi.

A naprzód ostrzedz tu należy, że dla uniknienia wielości głosek, których użyć potrzeba na ogólne oznaczenie ilości danych, gdy liczba równań i niewiadomych większa iest od dwóch, zgodzono się oznaczać tąż samą głoską wszystkie spółczynniki iedneyże niewiadomey, a dla ostrzeżenia, że głoska ta w każdem równaniu ma inną ważność liczebną, daie się nad nią znamie iedno lub więcey podług liczby równań i niewiadomych. Równania ogólne z dwiema niewiadomemi piszą się tak:

$$ax + by = c;\; a'x + b'y = c'.$$

Obadwa spółczynniki niewiadomey x są oznaczone przez a, spółczynniki zaś niewiadomey y przez b; ale znamie położone nad głoskami drugiego równania ostrzega, że ważność ich w tem równaniu nie iest ta sama iaka w pierwszem.

Trzy równania piszą się tak:

$$ax + by + cz = d;$$
$$a'x + b'y + c'z = d',$$
$$a''x + b''y + c''z = d''.$$

Gdy są cztery równania, głoski zastępuiące mieysce wiadomych w pierwszem równaniu nie maią żadnego nad sobą znamienia, w drugiem maią po iednem znamieniu, w trzeciem po dwa, w czwartem po trzy i t. d.

Weźmyż teraz dwa równania:

$$ax + by = c,\; a'x + b'y = c'.$$

Pierwsze rozmnożywszy przez iakąkolwiek ilość m i od niego odiawszy drugie, będzie

$$amx - a'x + bmy - b'y = cm - c';\text{ czyli}$$
$$x\,(am - a') + y\,(bm - b') = cm - c'\;(A).$$

Ponieważ ważność ilości m zależy od upodobania, daymyż iey taką ważność, aby było $bm = b'$, a tem samem $bm - b' = 0$; co będzie zawsze

wsze rzeczą podobną czy to $b < b'$, czyli też $b > b'$ czyli nakoniec $b = b'$: w pierwszym przypadku m ważyć powinno więcey niż iedność, w drugim mniey niż iedność, w trzecim zaś będzie równe iedności.

W równaniu zatém oznaczoném głoską A będzie wyraz drugi $y\ (bm - b') = 0$: zostanie więc $x\ (am - a') = cm - c'$, a zatém $x = \frac{cm - c'}{am - a'}$

Że zaś $bm = b'$; a tem samem $m = \frac{b'}{b}$; w znalezioney więc ważności dla x położywszy $\frac{b'}{b}$ zamiast m, będzie

$$x = \frac{\frac{cb'}{b} - c'}{\frac{ab'}{b} - a'} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Przypuśćmy znowu, że m ma taką ważność, iż $am = a'$, a tem samem $am - a' = 0$. W równaniu zatém (A) wyraz pierwszy iako maiący zero za czynnik zniknie; i zostanie

$y\ (bm - b') = cm - c'$; a zatém $y = \frac{cm - c'}{bm - b'}$.

Że zaś z przypuszczenia $am = a'$ a tem samem $m = \frac{a'}{a}$; w znalezioney więc ważności dla y położywszy $\frac{a'}{a}$ zamiast m, znaydziemy

$$y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'} = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \quad (53).$$

242. Weźmy znowu trzy równania

$$ax + by + cz = d$$
$$a'x + b'y + c'z = d'$$
$$a''x + b''y + c''z = d''.$$

Pierw-

Pierwsze z tych równań rozmnożywszy przez ilość iakąkolwiek m, drugą przez ilość iakąkolwiek n, i dodawszy ie do siebie a równanie trzecie od nich odiąwszy będzie
$amx + a'nx - a''x + bmy + b'ny - b''y + cmz + c'nz - c''z = dm + d'n - d''$.
Czyli $x\,(am + a'n - a'') + y\,(bm + b'n - b'') + z\,(cm + c'n - c'') = dm + d'n - d''$. (A)

Ponieważ ważność ilości m i n zależy od upodobania, przypuśćmy więc, że
$am + a'n = a''$, $bm + b'n = b''$. Będzie więc
$am + a'n - a'' = 0$ $bm + b'n - b'' = 0$. W równaniu zatem (A) wyrazy pierwszy i drugi maiące za czynniki zero, znikną, i zostanie
$z\,(cm + c'n - c'') = dm + d'n - d''$. A zatem

$$z = \frac{dm + d'n - d''}{cm + c'n - c''}.$$

W dwóch równaniach $am + a'n = a''$, $bm + b'n = b''$, łatwo iest znaleźć ważności niewiadomych m i n, za pomocą wypadków otrzymanych w artykule poprzedzaiącym: uczyniwszy bowiem $m = x$, $n = y$ a zamiast głosek a, b c, a', b', c', położywszy odpowiadaiące im głoski
a, a', a''; b, b', b'' ; dwa równania

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'},\quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

zamienią się w następuiące:

$$m = \frac{a''b' - b''a'}{ab' - ba'},\quad n = \frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'}.$$

Ważności te położywszy zamiast m i n w znalezioney ważności dla z, i wszystkie wyrazy sprowadziwszy do iednakowego mianownika, wypadnie

$$z = \frac{d\,(b'a'' - a'b'') + d'\,(ab'' - ba'') - d''\,(ab' - ba')}{c\,(b'a'' - a'b'') + c'\,(ab'' - ba'') - c''\,(ab' - ba')}$$

Podobnież uczyniwszy $am + a'n = a''$, $cm + c'n = c''$ a tém samém $am + a'n - a'' = 0$, cm
$+ c'n$

$+c'n-c''=0$, w równaniu (A) zniknie wyraz pierwszy i trzeci, i zostanie tylko
$y(bm+b'n-b'')=dm+d'n-d''$; więc

$$y=\frac{dm+d'n-d''}{bm+b'n-b''}.$$

Znalazłszy potém ważność dla m i n za pomocą dwóch równań $am+a'n=a''$, $cm+c'n=c''$, i odbywszy działanie iak poprzedzaiące, znaydziemy

$$y=\frac{d(c'a''-a'c'')+d'(ac''-ca'')-d''(ac'-ca')}{b(c'a''-a'c'')+b'(ac''-ca'')-b''(ac'-ca')}$$

Nakonice uczyniwszy $bm+b'n=b''$, $cm+c'n=c''$ w równaniu (A) zniknię wyraz drugi i trzeci, i zostanie tylko

$$x=\frac{dm+d'n-d''}{am+a'n-a''}.$$

Zamiast m i n położywszy ich ważności znalezione za pomocą równań $bm+b'n=b''$, $cm+c'n=c''$, i odbywszy działanie iak powyższe znaydziemy

$$x=\frac{d(c'b''-b'c'')+d'(bc''-cb'')-d''(bc'-cb')}{a(c'b''-b'c'')+a'(bc''-cb'')-a''(bc'-cb')}$$

W trzech znalezionych ważnościach dla z, y, x uskuteczniwszy mnożenie wskazane przez nawiasy, odmieniwszy znaki licznika i mianownika w ważności z i x, i ułożywszy wyrazy takim porządkiem, aby były na przemian dodayne i odiemne, wypadnie

$$z=\frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}$$

$$y=\frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}$$

$$x=\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}$$

243. Gdyby były cztery równania i cztery niewiadome u, x, y, z, pierwsze równanie rozmno-

mnożylibyśmy przez m, drugie przez n, trzecie przez p: dodawszy potem trzy te równania, a czwarte odiąwszy, i odbywszy działanie podobne do poprzedzaiącego, łatwobyśmy znaleźli cztery szukane ważności; lecz głębsza uwaga nad wypadkami powyższemi poda łatwy sposób znaydowania tych ważności bez długiego zachodu,

Weźmy naprzód równanie $ax = b$; będzie więc $x = \frac{b}{a}$ Tu postrzegam że licznikiem znalezioney ważności iest wyraz wiadomy danego równania, a mianownikiem spółczynnik a niewiadomey.

Z dwóch równań $ax + by = c$, $a'x + b'y = c'$, wypadło

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}\quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

Tu mianownik znalezionych ważności składa się także z głosek a, a', b b', które są społczynnikami niewiadomych, a to w następuiącym sposobie: pisze się naprzód głoska a po lewey stronie głoski b; skąd wypada ab; potem odmienia się mieysce tym dwom głoskom, i powstaie ba: dwa te wyrazy łączą się znakiem —, i będzie $ab - ba$: nakoniec dawszy w obudwu wyrazach znamie nad głoską drugą, wypada $ab' - ba'$ spólny mianownik dla szukanych ważności.

Co się tycze licznika, ten w obu ważnościach tak co do liczby wyrazów, iako też co do znaków i znamion nad głoskami podobny iest mianownikowi; lecz w ważności x mieysce spółczynnika tey niewiadomey, którym iest a, zastępuie c wyraz wiadomy do danych równań wchodzący: w ważności y mieysce spółczynnika tey niewiadomey, którym iest b' zastępuie tenże wyraz wiadomy c. W równaniach zatem z dwiema niewiadomemi *licznik tworzy się z mianownika, zamieniaiąc spółczynnik niewiadomey szukaney na*

wy-

wyraz wiadomy w danych rownaniach znayduiący się, zachowuiąc z resztą znamiona takie iak są w mianowniku.

Przypatrzywszy się znalezionym ważnościom z równań o trzech niewiadomych, postrzeżemy 1*ód*, że mianownik składa się z samych tylko spółczynników ilości niewiadomych *x*, *y*, *z*; 2*ie* że sześć wyrazów mianownika połączone są znakami na przemian — i +; 3*cie* że każdy z tych wyrazów iest iloczynem trzech czynników ilości niewiadomych; 4*te* że licznik tak co do liczby wyrazów, iako też co do znaków i znamion nad głoskami, podobny iest do mianownika, z tą tylko różnicą, że do niego wchodzi wyraz wiadomy w danych równaniach znayduiący się, i zastępuie mieysce głoski będącey spółczynnikiem tey niewiadomey, którey ważności szukamy. Ułożenie zatem licznika nie podpadnie żadney trudności skoro pierwey będzie ułożony mianownik. Pilnieysza uwaga nad wyrazami składaiącemi mianownik podaie do ułożenia go następuiący sposób:

Dwa pierwsze spółczynniki *a* i *b* napisawszy raz w porządku prostym, drugi raz w porządku odwrotnym, powstaną dwa wyrazy *ab* i *ba*.

Wziąwszy potem trzeci spółczynnik *c*, i napisawszy go tak przy wyrazie *ab*, iako i przy wyrazie *ba* raz na końcu drugi raz we środku, trzeci raz na początku; tym sposobem z wyrazu *ab* powstaną trzy następuiące: *abc*, *acb*, *cab*; i z wyrazu *ba* trzy także *bac*, *bca*, *cba*. Wszystkie te wyrazy, które są równoważnemi iloczynami trzykrotnemi głosek *a*, *b*, *c*, (195), połączywszy z sobą znakami na przemian — i +, będzie $abc - acb + cab - bac + bca - cba$. Nakoniec dawszy nad głoską drugą każdego z tych sześciu wyrazów znamie iedno, a dwa znamiona nad głoską trzecią, będzie

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''$$

spółspólny mianownik dla wszystkich trzech szukanych ważności.

Stąd iuż łatwo uczynić wniosek, że chcąc ułożyć mianownik dla czterech niewiadomych, trzeba do każdego z sześciu wyrazów $abc - acb + cab$ — i t. d. wprowadzić głoskę d będącą spółczynnikiem czwartey niewiadomey, umieszczac ią następnie w każdym wyrazie 1ed na mieyscu czwartem, 2re na mieyscu trzeciem 3cie na mieyscu drugiém, nakoniec na mieyscu pierwszem: tym sposobem z wyrazu np. abc powstaną cztery następuiące.

$$abcd - abdc + adbc - dabc.$$

Odbywszy to samo działanie z pięciu wyrazami pozostałemi, wypadek całkowity składać się będzie ze 24 wyrazów, a w każdym wyrazie głoska druga ma iedno znamie, trzecia dwa znamiona, czwarta trzy znamiona.

Co się tycze licznika dla każdéy niewiadoméy, ten w każdym przypadku łatwo otrzymać można podług powyższey uwagi.

244. Chcąc formuł tych użyć do rozwiązywania równań liczebnych, trzeba porównywać każdy wyraz równania liczebnego z odpowiadaiącym mu wyrazem w równaniu ogólnem.

Chcąc np. rozwiązać trzy następuiące równania:

$$7x + 5y + 2z = 79,$$
$$8x + 7y + 9z = 122,$$
$$x + 4y + 5z = 55;$$

trzeba równania te zbliżyc do równań ogólnych wyżéy (242) podanych, i uważać, które w nich wyrazy są sobie odpowiadaiącemi. Z porównania tego wniesiemy że

$$a = 7,\quad b = 5,\quad c = 2,\quad d = 79,$$
$$a' = 8,\quad b' = 7\quad c' = 9,\quad d' = 122,$$
$$a'' = 1,\quad b'' = 4,\quad c'' = 5,\quad d'' = 55.$$

Położywszy liczby te zamiast głosek wznalezionych ważnościach ogólnych dla x, y, z i odbywszy działania wskazane, znaydziemy $x = 4$, $y = 9$, $z = 3$. Uwa-

Uważyć tu potrzeba, że te same w żności ogólne niewiadomych służą do rozwiązywania równań liczebnych w tenczas nawet, gdy w nich nie wszystkie wyrazy maią przed sobą znak +, iak iest w równaniach ogólnych.

Gdyby było *np.*

$$3x - 9y + 8z = 41,$$
$$-5x + 4y + 2z = -20,$$
$$11x - 7y - 6z = 37;$$

trzeba w porównywaniu wyrazów ogólnych z liczebnemi mieć wzgląd na znaki, które się przed wyrazami temi znayduią. Tu wypadłoby uczynić

$a = +3$, $b = -9$, $c = +8$, $d = +41$.
$a' = -5$, $b' = +4$, $c' = +2$, $d' = -20$,
$a'' = +11$, $b'' = -7$, $c'' = -6$, $d'' = +37$;

i stosownie do prawideł wyżey podanych na znaki (34) uważać, iaki ma być znak przed każdym wyrazem w szukanych ważnościach ilości niewiadomych.

Tym sposobem znaleźlibyśmy, że piérwszy *np.* wyraz spólnego mianownika, to iest $ab'c''$, będzie równy $+3 \times 4 \times -6 = -72$. Daiąc tę samę uwagę uwagę na wyrazy inne tak w mianowniku iak w liczniku, i biorąc osobno summę wyrazów dodaynych, osobno summę wyrazów odiemnych znaydziemy.

$$x = \frac{2771 - 2831}{592 - 622} = \frac{-60}{-30} = +2;$$

$$y = \frac{3022 - 2932}{592 - 622} = \frac{+90}{-30} = -3;$$

$$z = \frac{3859 - 3889}{592 - 622} = \frac{-30}{-30} = +1.$$

IV. *Niektóre szczególnieysze wypadki w rozwiązywaniu równań stopnia drugiego trafić się mogące.*

215. W rozwiązywaniu równań stopnia drugiego, tak iak i w równaniach stopnia piérwsze-

go, wypadaią czasem takie wyrażenia ilości szukanych, że ie nie łatwo zrozumieć i tak z zagadnieniem iak i z wypadkami zwyczaynie otrzymywanemi pogodzić można. Głębsza tylko uwaga do ich prawdziwego znaczenia doprowadzić i zgodność ich z innemi okazać może. Obaczymy to na przykładzie w zagadnieniu następuiącem.

Padzielić daną liczbę na dwie części, którychby kwadraty miały się do siebie w stosunku danym.

Niech będzie a liczba dana, m stosunek kwadratów dwóch iey części. Oznaczywszy iednę część przez x, druga będzie $a-x$, i stosownie do warunku zagadnienia wypadnie

$$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)}=m.$$

Równanie to można rozwiązać dwoma sposobami: albo, nadawszy mu kształt równania ogólnego $x^2+px=q$, rozwiązać ie sposobem zwyczaynym; albo też korzystaiąc z tego, że z pierszey strony licznik i mianownik iest kwadratem, wyciągnąc zaraz z obu stron pierwiastek kwadratowy: tym sposobem wypadnie

$$\frac{x}{a-x}=\pm\sqrt{m}\text{; więc } x=\pm(a-x)\sqrt{m}.$$

Wyrażenie to, iak wiadomo zamyka dwa równania: pierwsze $x=(a-x)\sqrt{m}$; czyli $x=a\sqrt{m}-x\sqrt{m}$, drugie $x=-(a-x)\sqrt{m}$, czyli $x=-a\sqrt{m}+x\sqrt{m}$; a tém samém
$x+x\sqrt{m}=a\sqrt{m}$; czyli $x(1+\sqrt{m})=a\sqrt{m}$
$x-x\sqrt{m}=-a\sqrt{m}$; czyli $x(1-\sqrt{m})=-a\sqrt{m}$. Więc

$$x=\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}};\quad x=\frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}.$$

Podług pierwszéy ważności druga część liczby daney iest

$$a-\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}=\frac{a+a\sqrt{m}-a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}},$$

$$=\frac{a}{1+\sqrt{m}};$$

summa znalezionych dwóch części, które są $\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}$, i $\frac{a}{1+\sqrt{m}}$, równa się liczbie daney a: iakoż

$$\frac{a}{1+\sqrt{m}} + \frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} = \frac{a+a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}$$
$$= \frac{a(1+\sqrt{m})}{1+\sqrt{m}} = a.$$

Kwadraty zaś dwóch tych znalezionych części są:

$$\left(\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}\right)^2 = \frac{a^2m}{1+2\sqrt{m}+m}; \left(\frac{a}{1+\sqrt{m}}\right)^2$$
$$= \frac{a^2}{1+2\sqrt{m}+m}:$$

i widocznie kwadrat piérwszy większy iest m razy od drugiego.

Podług drugiéy ważności, która iest $\frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}$, druga część liczby daney iest

$$a + \frac{a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} = \frac{a-a\sqrt{m}+a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} = \frac{a}{1-\sqrt{m}}:$$

i dwie znalezione części, to iest $\frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}$ i $\frac{a}{1-\sqrt{m}}$, dodane do siebie równaią się także liczbie daney a; lecz ponieważ części te maią przed sobą znaki odmienne, liczba a właściwie mówiąc, nie iest ich summą, ale różnicą.

Uczyniwszy $m=1$, to iest założywszy, że kwadraty dwóch szukanych części są równe, będzie $\sqrt{m}=1$: znalezione zatém dwie części podług pierwszego rozwiązania będą.

$$x = \frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} = \frac{a}{2}; \quad a-x = \frac{a}{1+\sqrt{m}} = \frac{a}{2}$$

to iest: dwie znalezione części są równe. Tak

 też

też właśnie być powinno: lecz drugie rozwiązanie daie dwa wypadki nieskończone.

$$\text{Jakoż } x = \frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} = \frac{-a}{1-1} = \frac{-a}{0};$$

$$a - x = \frac{a}{1-\sqrt{m}} = \frac{a}{1-1} = \frac{a}{0}$$

co także być powinno: bo gdy podług drugiego rozwiązania liczba a iest różnicą dwóch szukanych ilości, stosunek kwadratów ilości tych w ten czas tylko może być poczytanym za równy 1, czyli co na iedno wychodzi, kwadraty te w ten czas tylko mogą być poczytane za równe między sobą, kiedy ilości te są tak wielkie, że różnica ich a może być wzięta za zero, czyli gdy ilości te są nieskończenie wielkie względem swoiey różnicy a.

Jakoż niech będą ilości te x i $x - a$. Stosunek ich kwadratów iest

$$\frac{x^2}{x^2 - 2ax + a^2}.$$

Podzieliwszy licznik i mianownik przez x^2, będzie

$$\frac{1}{1 - \frac{2a}{x} + \frac{a^2}{x^2}}.$$

Tu iuż widocznie się okazuie, że im większa będzie liczba x, tém mnieysze będą ułomki $\frac{2a}{x}$, $\frac{a^2}{x^2}$, i tém bardziéy stosunek ten przybliżać się będzie do $\frac{1}{1}$ czyli do 1.

246. Rozwiązuiąc sposobem zwyczaynym powyższe równanie

$$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)}, \text{ znaydziemy}$$

$$x^2 + \frac{2am}{1-m}x = \frac{a^2 m}{1-m}, \text{ które rozwiązawszy sposo-}$$

bem

bem podanym wyżéy (122), wypadnie

$$x=-\frac{am}{1-m}\pm\sqrt{\frac{a^2m^2}{(1+m)(1-m)}+\frac{a^2m}{1-m}}.$$

Lubo te ważności zdaią się wcale różne od tych, któreśmy otrzymali, za pomocą sposobu pierwszego; w istocie iednak kształtem tylko rożnią się od nich, iak się o tém przekonamy poczyniwszy w nich niektóre zmiany.

A naprzód potrzeba sprowadzić do iednakowego mianownika dwa ułomki będące pod znakiem pierwiastkowym; tym końcem dosyć będzie licznik i mianownik drugiego rozmnożyć przez $1-m$; wypadnie bowiem

$$\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)}+\frac{a^2m}{1-m}=\frac{a^2m^2+a^2m(1-m)}{(1-m)(1-m)}$$
$$=\frac{a^2m^2+a^2m-a^2m^2}{(1-m)(1-m)}=\frac{a^2m}{(1-m)(1-m)}.$$

Ponieważ zaś mianownik ostatniego ułomka iest kwadratem, dosyć więc będzie sam tylko licznik umieścić pod znakiem pierwiastkowym: będzie zatém

$$\sqrt{\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)}+\frac{a^2m}{1-m}}=\frac{\sqrt{a^2m}}{1-m}$$
$$=\pm\frac{a\sqrt{m}}{1-m}.$$

Wypadnie więc $x=-\frac{am}{1-m}\pm\frac{a\sqrt{m}}{1-m}$ to iest:

$$x=-\frac{am+a\sqrt{m}}{1-m};\ x=-\frac{am-a\sqrt{m}}{1-m}.$$

I te ieszcze wyrażenia nie są takie, iakieśmy otrzymali za pomocą sposobu pierwszego; a nawet chcąc ie sprawdzić w przypadku kiedy $m=1$, wypadnie.

$$x=\frac{-a+a}{1-1}=\frac{0}{0},\ x=\frac{-a-a}{1-1}=\frac{-2a}{0}.$$

Osta-

Ostatnie wyrażenie oznacza ilość nieskończoczoną tak iak wyżey; ale pierwsze należy do ilości niewyznaczoney, iakieśmy iuż widzieli w zagadnieniu o gońcach; lecz potrzeba pierwey uważyć, czy wyrażenie to nie iest takie iak w artykule 205, to iest, czy nie ma w nim iakiego czynnika spólnego licznikowi i mianownikowi, który po założeniu że $m = 1$ zamienia się na zero.

W wyrażeniu $\frac{-am + a\sqrt{m}}{1 - m}$ rozłożywszy licznik na czynniki będzie

$$\frac{a(-m + \sqrt{m})}{1 - m} = \frac{a(\sqrt{m} - m)}{1 - m}.$$

Tu iuż łatwo postrzedz można, że licznik dla tego tylko zamienia się na zero, iż iego czynnik $\sqrt{m} - m$ musi być równy zeru. Obaczmy więc czy ten czynnik $\sqrt{m} - m$ nie ma iakiego czynnika spólnego z mianownikiem $1 - m$; a dla ułożenia działania, uczyńmy $\sqrt{m} = n$; a tem samem $m = n^2$; będzie z tem

$$\frac{a(\sqrt{m} - m)}{1 - m} = \frac{a(n - n^2)}{1 - n^2}.$$

Licznik i mianownik ostatniego wyrażenia rozłożywszy na czynniki, będzie

$$\frac{a(n - n^2)}{1 - n^2} = \frac{a[n(1 - n)]}{(1 + n)(1 - n)} = \frac{an}{1 + n}.$$

A że $n = \sqrt{m}$ będzie więc

$\frac{an}{1 + n} = \frac{a\sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}}$: wypadek ten sam iak w artykule poprzedzaiącym.

Podobnymże sposobem postąpić należy z drugą ważnością, która iest

$$x = \frac{-am - a\sqrt{m}}{1 - m}.$$

Rozłożywszy licznik i mianownik na czynniki, będzie

$$\frac{-a\sqrt{m}-am}{1-m}=\frac{-a(1+\sqrt{m})\sqrt{m})}{(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m})}=\frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}.$$

Ogólne to zagadnienie odpowiada następuiącemu szczególnemu: *Na linii łączącey dwa światła znaleźć punkt, który tak iedno światło i k drugie zarówno oświeca.*

Wiadomo z Fizyki, że dzielność światła iest w stosunku odwrotnym kwadratów z odległości; to iest: w odległości dwa razy większey, światło iest 4 razy mnieysze; w odległości 3 razy większéy, światło iest 9 razy mnieysze i t. d.

Kiedy więc podług powyższego zagadnienia x i $a-x$ są dwie odległości punktu szukanego od dwóch danych świateł, ieżeli odległości te są równe, kwadraty ich są także równe; a tem samem stosunek kwadratów czyli $m=1$; co w ten czas tylko być może, kiedy oba światła są równe.

Jeżeli zaś stosunek kwadratów z odległości szukanych, czyli $m=4$, co tylko w ten czas być może, kiedy iedno światło iest 4 razy mocnieysze od drugiego, w przypadku tym odległość iedna musi być dwa razy większa od drugiey: iakoż w znalezionych ważnościach dla x i $a-x$ zamiast $\sqrt{m}$ położywszy $\sqrt{4}=2$, będzie podług pierwszego rozwiązania

$$x=\frac{2a}{3},\quad a-x=\frac{a}{3},$$

podług drugiego

$$x=\frac{-2a}{-1}=2a,\quad a-x=\frac{a}{-1}=-a.$$

Dwa zatem są punkta szukane: ieden, stosownie do wysłowienia znayduie się na linii łączącey dwa światła w odległości dwa razy bliższéy światła słabszego niż mocnieyszego, drugi na przedłużeniu tey linii w odległości od światła słabszego takiey, iaka iest między światłami. Dwa te punkta czynią zadosyć warunkom zagadnienia: gdyż odległość obu od światła słabszego, iest dwa razy mnieysza niż odległość tych-

że

że punktów od światła mocnieyszego; a zatém w obu przypadkach sosunek kwadratów z tych odległości będzie 4.

Kiedy zaś $m = 1$, piérwsze tylko rozwiązanie czyni zadosyć warunkom zagadnienia: gdy bowiem w przypadku tym punkt szukany powinien być w równey odległości od dwóch świateł danych, rzeczą iest niepodobną, aby punkt takowy mógł się znaydować na przedłużeniu linii łączącey te dwa światła, gdzie wszystkie punkta zawsze są w mnieyszéy odległości od światła iednego niż od drugiego

IV. *Równania o dwóch wyrazach.*

247. Wszelkie równanie, w którém znayduie się iedna tylko potęga niewiadoméy połączonéy z ilościami wiadomemi, może być zawsze sprowadzone do dwóch wyrazów, z których w iednym zebrane są razem wszystkie wyrazy niewiadome, w drugim wszystkie wyrazy wiadome. Widzieliśmy to iuż w równaniach stopnia drugiego (118): obaczmy to samo w innych

Niech będzie np. równanie;

$$a^2x^5 - a^5b^2 = b^4c^3 + acx^5;$$

Przeniosłszy wyrazy niewiadome na iednę stronę, będzie

$$a^2x^5 - acx^5 = b^4c^3 + a^5b^2 \text{; czyli}$$
$$x^5(a^2 - ac) = b^4c^3 + a^5b^2.$$

Daymy, że $a^2 - ac = p$, $b^4c^3 + a^5b^2 = q$; powyższe zatem równanie zamieni w następuiącą:

$$px^5 = q \text{; a tém samém } x^5 = \frac{q}{p};\ x = \sqrt[5]{\frac{q}{p}},$$

W ogólności, wszelkie równanie o dwóch wyrazach sprowadziwszy do kształtu $px^m = q$; wypadnie $x = \sqrt[m]{\frac{q}{p}}$.

248. Trzeba tu uważać, że kiedy wykładnik m iest liczbą nieparzystą, znak pierwiastkowy bę-

będzie tylko miał przed sobą ieden znak albo dodayny, kiedy ilość pod nim będąca iest dodayna, albo odiemny, kiedy ilość pod nim będąca iest odiemna (184). Kiedy zaś wykładnik m iest liczbą parzystą, na ten czas znak pierwiastkowy będzie miał przed sobą podwoyny znak $\pm$; i ieżeli ilość $\frac{q}{p}$ iest odiemna, ilość pierwiastkowa iest bezistotna, i zagadnienie będzie niepodobne, iak w równaniach drugiego stopnia. Przytoczmy tu niektóre przykłady.

1. Z równania $x^5 = -1024$, wypada $x = \sqrt[5]{-1024} = -4$: gdyż wykładnik 5 iest nieparzysty.

2. Z równania $x^4 = 625$, wypada $x = \sqrt[4]{625}$, $= \pm 5$: gdyż wykładnik 4 iest parzysty

3. Nakoniec z równania $x^4 = -16$, wypada $x = \pm \sqrt[4]{-16}$: to iest, ważność x iest ilością bezistotna, gdy wykładnik 4 iest parzysty, a ilość będąca pod znakiem pierwiastkowym iest odiemna.

249. W równaniu dwuwyrazowém $x^m = \frac{q}{p}$, uczyniwszy $\sqrt[m]{\frac{q}{p}} = a$, będzie $\frac{q}{p} = a^m$, czyli $x^m = a^m$ więc $x^m - a^m = 0$

Ilość $x^m - a^m$ iest podzielna przez $x - a$, i podług tego cośmy powiedzieli wyżey (202) wypada
$x^m - a^m = (x - a)\ (x^{m-1} + ax^{m-2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + a^{m-2}x + a^{m-1})$.

Przypuściwszy, że $x - a = 0$, obie strony równania tego zamienią się na 0. Lecz druga strona, iako iloczyn dwóch czynników, może być równą 0, tak w ten czas kiedy $x - a = 0$, iak

w

w ten czas kiedy drugi iey czynnik iest równy o: a w tym przypadku będzie
$x^{m-1} + ax^{m-2} - - - - + a^{m-2}x + a^{m-1} = o$ i gdyby była iakowa ważność dla x, któraby czyniła zadosyć temu ostatniemu równaniu, ważność ta czyniłaby także zadosyć równaniu danemu.

Dla znalezienia tey ważności uczyńmy $x = ay$: tym sposobem równanie $x^m - a^m = o$ zamieni się na $a^m y^m - a^m = o$: podzieliwszy obie strony przez a^m, będą $y^m - 1 = o$. Skąd naprzód wypada $y^m = 1$, $y = \sqrt[m]{1}$ czyli $y = 1$.

Podzieliwszy potem $y^m - 1$ przez $y - 1$, wypadnie (202)

$$\frac{y^m - 1}{y - 1} = y^{m-1} + y^{m-2} \cdots + y^2 + y + 1 \text{; aże}$$

$$\frac{y^m - 1}{y - 1} = o, \text{ więc } y^{m-1} + y^{m-2} \cdots + y^2 + y + 1 = o.$$

Z równania tego można wyprowadzić inne ważności dla y, które równie iak ważność wyżey znaleziona to iest 1, powinny zadosyć czynić równaniu $y^m - 1 = o$, czyli $y^m = 1$; to iest: potęga stopnia m tych ważności będzie 1.

Skąd wypada ten osobliwszy na pierwsze weyrzenie wniosek, że iedność może mieć różne pierwiastki między sobą odmienne.

Pierwiastki te, które są bezistotne, często używaią się w dalszey algiebrze: okażemy ie tu na pierwszych czterech stopniach: gdyż podług wiadomości dotąd wyłożonych w tych tylko czterech stopniach można rozwiązać równanie

$$y^{m-1} + y^{m-2} \cdots + y^2 + y + 1 = o,$$

z którego pierwiastki te wypadaią.

Uczyńmy 1od $m = 2$ A zatem równanie $y^m - 1 = o$ zamieni się na $y^2 - 1 = o$; więc $y^2 = 1$; $y = \pm 1$; czyli $y = +1$, $y = -1$. 2re Uczyńmy $m = 3$; równanie $y^m - 1 = o$, zamieni się na $y^3 - 1 = o$, więc $y^3 = 1$, $y = \sqrt[3]{1}$, czyli $y = 1$.

Po-

Podzieliwszy potém $y^3 - 1$ przez $y - 1$, wypadnie

$\frac{y^3 - 1}{y - 1} = y^2 + y + 1$; więc $y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1) = 0$.

Iloczyn dwóch czynników $(y - 1)(y^2 + y + 1)$ może być w dwóch przypadkach równym o: Naprzód kiedy $y - 1 = 0$; skąd wypada $y = 1$, iak wyżey: powtóre kiedy $y^2 + y + 1 = 0$; a tém samem $y^2 + y = -1$.

W równaniu tém dopełniwszy kwadratu (122), i wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy z obu stron, znaydziemy

$$y = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad y = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Mamy więc dla tego stopnia trzy pierwiastki, to iest:

$$y = 1, \quad y = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad y = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2};$$

dwa ostatnie są bezistotne, ale czynią zadosyć równaniu; gdyż podniosłszy ktorykolwiek z nich do sześcianu, otrzymamy na wypadek 1. I tak

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2\sqrt{-3} - 3}{4}$$

$$= \frac{-2 - 2\sqrt{-3}}{4}.$$

Kwadrat znowu ten rozmnożywszy przez iego pierwiastek, będzie

$$\frac{2 + 2\sqrt{-3} - 2\sqrt{-3} - 2 \times -3}{8} = 1.$$

3 *ie*. Uczyniwszy $m = 4$, równanie $y^m - 1 = 0$, zamieni się $y^4 - 1 = 0$. Więc $y^4 = 1$; $1 = 1$. Lecz $y^4 - 1 = (y^2 - 1)(y^2 + 1)$; będzie więc $(y^2 - 1)(y^2 + 1) = 0$. Uczyniwszy naprzód $y^2 - 1 = 0$,

$=0$, będzie $y^2=1$, a tem samem $y=\pm 1$; to iest $y=+1$, $y=-1$. Uczyniwszy potem $y^2+1=0$, będzie $y^2=-1$; a tem samem $y=\pm\sqrt{-1}$; to iest: $y=+\sqrt{-1}$, $y=-\sqrt{-1}$. Mamy zatem w przypadku tym cztery pierwiastki; $y=+1$, $y=-1$, $y=+\sqrt{-1}$, $y=-\sqrt{-1}$.

Z tych czterech ważności dwie tylko są rzeczywiste, drugie dwie są bezistotne, ale każda z nich podniesiona do potęgi czwartey daie na wypadek 1

Widzimy tu, że iedność ma tyle pierwiastków między sobą równych, ile wykładnik danego równania ma iedności. Ucząc się wyższey Algiebry przekonamy się, że w każdem równaniu iakiegokolwiek stopnia niewiadoma zawsze ma tyle ważności, ile ma iedności naywyższy wykładnik niewiadómey w danem równaniu znayduiącey się; a lubo nayczęściey nie wszystkie znalezione ważności czynią zadosyć danemu zagadnieniu, zawsze iednak poddane działaniom wskazanym w równaniu z danego zagadnienia wyprowadzonem, wszystkie temu równaniu czynią zadosyć

V. *O równaniach stopni wyższych, które mogą być rozwiązane na wzor równań stopnia drugiego.*

250. Iekroć równanie dane iakiegokolwiek stopnia ma tylko dwie odmienne potęgi ilości niewiadomey, a wykładnik iedney, dwa razy iest większy od wykładnika drugiey; równanie takowe może być zawsze rozwiazane sposobem takim iakim się rozwiązuią równania stopnia drugiego. I tak weźmy równanie ogólne

$$x^{2m}+px^m=q,$$

w którem p i q są ilości wiadome, a ieden wykładnik niewiadomey $2m$ iest dwa razy większy od wykładnika drugiego m. Abyśmy równanie to rozwiązali uczyńmy $x^m=u$: podniosłszy obie strony do kwadratu będzie $x^{2m}=u^2$. W równaniu danem zamiast x^{2m}, x^m położywszy u^2 i u, będzie, $u^2+pu=q$. Dopełniwszy kwadratu i wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy, będzie

$$u = x^m = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2}.$$

Dwie ważności tego wyrażenia oznaczywszy przez a i a' będzie $x^m = a$, $x^m = a'$: skąd wypadnie $x = \sqrt[m]{a}$, $x = \sqrt[m]{a'}$.

Jeżeli wykładnik m iest parzysty, zamiast dwóch ważności byłoby ich cztery: gdyż w tym przypadku przed obiema znalezionemi ważnościami dać należy podwóyny znak $\pm$ (187), i wypadłoby $x = \pm\sqrt[m]{a}$, $x = \pm\sqrt[m]{a'}$; to iest: $x = \sqrt[m]{a}$, $x = -\sqrt[m]{a}$, $x = +\sqrt[m]{a'}$, $x = -\sqrt[m]{a'}$; i cztéry te ważności byłyby rzeczywiste, gdyby ilości a i a' były dodayne.

Chcąc wszystkie ważności x zamknąć w iedney formulę, trzeba w równaniu $x^m = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$ wyciągnąć z obu stron pierwiastek potęgi m; tym sposobem będzie

$$x = \sqrt[m]{-\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2}}.$$

Następuiące zagadnienia należą do równań tego rodzaiu:

251. Zagadnienie I. *Liczbę 6 rozłożyć na dwa czynniki takie, ażeby summa ich sześcianów czyniła 35*

Oznaczywszy przez x ieden z dwóch czynników szukanych, drugi będzie $\frac{6}{x}$. Sześcian pierwszego iest x^3, sześcian drugiego iest $\frac{216}{x^3}$; ażeby summa tych sześcianów powinna być 35, będzie więc $x^3 + \frac{216}{x^3} = 35$. Zniosszy mianownik wypadnie $x^6 + 216 = 35x^3$; więc $x^6 - 35x^3 = -216$.

Uczyniwszy $x^3 = u$, a tem samem $x^6 = u^2$, ró-

równanie ostatnie zamieni się w następuiące: $u^2 - 35u = -216$.

Dopełniwszy kwadratu i odbywszy zwyczaynie w tym przypadku działania, znaydziemy

$$u = x^3 = \frac{35}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216} = \frac{35}{2} \pm \frac{19}{2}$$ to

iest:

$$x^3 = \frac{35}{2} + \frac{19}{2} = 27 : x^3 = \frac{35}{2} - \frac{19}{2} = 8.$$

Więc $x = 3 : x = 2$.

Podług pierwszéy ważności wypada drugi czynnik $\frac{6}{3} = 2$, podług drugiey ważności drugi czynnik iest $\frac{6}{2} = 3$. A zatem podług pierwszego rozwiązania szukane czynniki liczby 6 są 3 i 2, podług drugiego czynniki te są 2 i 3. Dwa te więc rozwiązania różnią się tylko od siebie porządkiem znalezionych czynników liczby 6.

252. Równanie, za pomocą którego rozwiązaliśmy to zagadnienie, iest stopnia szóstego: podług powyższey zatém uwagi (241) niewiadoma x powinna mieć sześć ważności. Abyśmy te sześć ważności wyprowadzili, weźmy dwa wyżey otrzymane równania stopnia trzeciego $x^3 = 27$, $x^3 = 8$, z których wypada $x = 3$, $x = 2$.

Dwie te znalezione ważności rozmnożywszy przez trzy pierwiastki liczby 1 w stopniu trzecim, które są

$$\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \text{ (249), będzie}$$

$$x = 3; \qquad\qquad x = 2.$$

$$x = \frac{-3 + 3\sqrt{-3}}{2}; \quad x = \frac{-2 + 2\sqrt{-3}}{2};$$

$$x = \frac{-3 - 3\sqrt{-3}}{2}; \quad x = \frac{-2 - 2\sqrt{-3}}{2},$$

z których dwie tylko są rzeczywiste, inne bezistotne, czynią iednak zadosyć warunkom zagadniednienia; iak się o tém łatwo przekonać można przez probę.

25). Zagadnienie 2. *Maiąc wiadomą wstawę i dostawę łuku a, znaleźć wstawę łuku dwa razy mnieyszego*

Podług twierdzenia fundamentalnego Trygonometryi prostokreślney iest

$$wst\ 2a = \frac{2wst.\ a\ dos\ a}{R}\text{; aże } dos\ a = \sqrt{R^2 - wst^2 a},$$

$$\text{więc } wst\ 2a = \frac{2wst\ a\sqrt{R^2 - wst^2 a}}{R}\text{; a tém samém}$$

$$wst^2\ 2a = \frac{4wst^2 a\ (R^2 - wst^2 a)}{R^2}$$

$$= \frac{4R^2 wst^2 a - 4wst^4 a}{R^2}\text{; więc}$$

$4wst^4 a - 4R^2 wst^2 a = - R^2 wst^2 2a$; czyli $wst^4 a - R^2 wst^2 a = -\frac{1}{4}R^2 wst^2 2a$.

Niech będzie $x = wst^2 a$, a tém samém $x^2 = wst^4 a$: równanie więc ostatnie zamieni się w następuiące:

$$x^2 - R^2 x = -\frac{1}{4}R^2 wst^2 2a.$$

Dopełniwszy kwadratu i wziąwszy pierwiastek kwadratowy z obu stron, będzie

$$x = wst^2 a = \frac{1}{2}R^2 \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}R^4 - \tfrac{1}{4}R^2 wst^2 2a}.$$

Ilość będącą pod znakiem pierwiastkowym rozłożywszy na czynniki, będzie

$$wst^2 a = \frac{1}{2}R^2 \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}R^2\,(R^2 - wst^2 2a)}.$$

Aże $R^2 - wst^2 2a = dost^2 2a$; więc

$$wst^2 a = \frac{1}{2}R^2 \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}R^2 dos^2 2a} = \frac{1}{2}R^2 \pm \frac{1}{2}R dos 2a.$$

Uczyńmy $2a = a'$; a tém samém $a = \frac{1}{2}a'$: równanie więc ostatnie zamieni się w następuiące:

$wst^2 \frac{1}{2}a' = \frac{1}{2}R^2 \pm \frac{1}{2}R\ dos\ a'$; a zatém

$$wst\ \tfrac{1}{2}a' = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}R \pm \tfrac{1}{2}R\ dos\ a'}$$

Ilość będącą pod znakiem pierwiastkowym rozmnożywszy i podzieliwszy przez 4, będzie

$$wst\ \tfrac{1}{2}a' = \pm\sqrt{2R^2 \pm 2R\ dos\ a'}$$

$$= \pm \sqrt{2R^2 \mp 2R \,\mathit{dos}\, a'}\text{; czyli}$$
$$\mathit{wst}\tfrac{1}{2}a = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 \pm 2R \,\mathit{dos}\, a'}.$$

VI. *Zagadnienia niewyznaczone stopnia pierwszego i drugiego.*

254. Rozwiązuiąc zagadnienia z dwiema lub więcey niewiadomemi, widzieliśmy, że liczba równań, które zawsze z warunków zagadnienia wypływaia, była w każdem zagadnieniu równa liczbie niewiadomych do niego wchodzących. Zagadnienie, do którego wchodzą dwie *np* niewiadome, a z którego warunków nie można otrzymać więcéy równań iak tylko iedno, inaczey rozwiązane być nie może, tylko naznaczaiąc dla iednéy niewiadomey ważność dowolną Weźmy np. zagadnienie: *znaleźć dwie liczby iakiekolwiek, którychby summa czyniła* 10, oznaczywszy dwie szukane liczby przez x, y będzie $x + y = 10$, a tem samem $x = 10 - y$. Rzeczą iest przez się widoczną, że nie można z równania tego otrzymać ważności dla x, tylko naznaczaiąc ważność iakąkolwiek dla y: a że tę ostatnią ważność od woli naszey zależącą można nieskończenie odmieniać, czyniąc ią dodayną lub odiemną, całkowitą lub ułomkową, więc w takowym przypadku liczba rozwiązań musi być nieskończona i niepodobna *wyznaczyć,* liczb, iakie miał w myśli ten, który to zagadnienie ułożył. To samo ma mieysce we wszystkich zagadnieniach, w których większa iest liczba niewiadomych niż warunków czyli równań Dla tego zagadnienia takowe nazwane *niewyznaczone*, *problemata indeterminata.*

255 Są i takie zagadnienia, z których tyle otrzymać można równań, ile w nich iest niewiadomych, a które iednak są niewyznaczone Pochodzi to stąd, że lubo na pozór liczba warunków wysłowionych, zdaie się być równa liczbie niewiadomych; mnieysza iest iednak w istocie z przy-

przyczyny wzaiemney warunku iednego od drugiego zależności, przez co niektóre warunki zdaiące się być różnemi od innych są rzeczywiście też same, iak się to okazuie w następuiących dwóch równaniach:

$$3x + 6y = 30, \quad 2x + 4y = 20;$$

rozmnożywszy piérwsze równanie przez 2, drugie przez 3, tak piérwsze iak drugie zamieni się w następuiące: $6x + 12y = 60$. Pochodzi to stąd, że każda z trzech liczb wiadomych do równania drugiego wchodzących, równa się dwom trzecim częściom liczby sobie odpowiadaiącey w równaniu pierwszém; a kiedy *np.* 3 korce żyta i 6 korcy pszenicy kosztuią talarów 30, tém samém dwie trzecie części trzech korcy żyta i dwie trzecie części sześciu korcy pszenicy powinny kosztować dwie trzecie części trzydziestu talarów. Warunek zatém drugi, z którego powstało drugie równanie, iest właściwie mówiąc warunkiem pierwszym; a tem samém zagadnienie to maiące dwie niewiadome, a ieden tylko warunek, i przypuszczaiące iedno tylko równanie, iest niewyznaczone. Toż mówić o następuiących trzech równaniach:

$$5x + 3y + 2z = 17,$$
$$8x + 2y + 4z = 20,$$
$$14x + 7y + 6z = 44;$$

w których równanie trzecie powstało z dodania wyrazów równania drugiego przez 2 podzielonego do odpowiadciącycb wyrazów w równaniu piérwszém przez 2 rozmnożonem: trzecie więc równanie będące wypadkiem dwóch piérwszych, nie wyraża żadnego nowego warunku, i zagadnienie, z którego równania te powstały, ma dwa tylko oddzielne waranki w dwóch piérwszych równaniach wyrażone, aże ma trzy niewiadome, więc iest niewyznaczone, iak się o tém przez probę łatwo przekonać można

Weźmy ieszcze dwa następuiące zagadnienia:

Znaleźć liczbę, którąby sama przez siebie podzielona dała na iloraz 1.

Znaleźć liczbę, którą rozmnożywszy przez 2, i iloczyn ten zmnieyszywszy iednością, resztę rozmnożywszy przez 2, i ten drugi iloczyn zmnieyszywszy dwiema iednościami, a tę drugą resztę podzieliwszy przez 4, iloraz będzie iednością mnieyszy od liczby szukaney.

Pierwsze z tych dwóch zagadnień widocznie iest niewyznaczone: każda albowiem liczba sama przez siebie podzielona daie na iloraz 1. Równanie też $\frac{x}{x} = 1$, które z tego zagadnienia wypada, poddane działaniom zwyczaynym, zamienia się na $x = x$, $x - x = 0$, $x(1 - 1) = 0$; $x = \frac{0}{1-1}$, $x = \frac{0}{0}$ (24).

W zagadnieniu drugiém lubo z samego wysłowienia warunków nie tak łatwo dostrzedz można, że każda liczba może być wzięta za szukaną: ułożywszy iednak zagadnienie to w równanie $\frac{2(2x-1)-2}{4} = x - 1$, i równanie to sposobem zwyczaynym rozwiązawszy, otrzymamy na wypadek $x = \frac{0}{0}$ a tem samem zagadnienie to równie iak poprzedzaiące, przyymuie nieskończoną liczbę rozwiązań, i wszelka liczba całkowita lub ułomkowa, dodayna lub odiemna spółmierna lub niespółmierna, a nawet bezistotna czyni zadosyć warunkom zagadnienia.

256. Nie wszystkie iednak zagadnienia niewyznaczone przyymuią nieskończoną liczbę rozwiązań. Częstokroć sama natura zagadnienia, albo iego warunki nie przypuszczaią ważności ułomkowych i odiemnych, a przynaymniey niespółmiernych. I tak gdyby w zagadnieniu niewyznaczonem szło o wynalezienie liczby osób lub bydląt i t. p. zagadnienie takie nie przypu-

szcza-

szczałoby rozwiązań ułomkowych. Podobnież gdyby było zagadnienie: *znaleźć dwie liczby całkowite dodayne, którychby summa czyniła* 10; w równaniu $x = 10 - y$, gdyby tylko liczba y miała być całkowita dodayna, zamiast y moglibyśmy wziąć wszelkie liczby całkowite i dodayne iakie tylko być mogą począwszy od 1, ale że podług warunków zagadnienia liczba także x ma być całkowitą dodayną, wypada stąd, że liczba y nie może być większa nad 10; gdyż inaczéy liczba x stałaby się odiemną, a nawet y nie może być równe 10: gdyż w tym przypadku nie dwie, iak wymaga zagadnienie, ale iedna tylko liczba byłaby znaleziona, a druga równałaby się 0. A zatem następuiące tylko rozwiązania mogą mieć mieysce:

Jeżeli $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$
będzie $x = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$

Aże cztéry ostatnie są te same co cztéry piérwsze, zagadnienie więc to nie przyymuie więcéy rozwiązań iak tylko pięć.

257. Rozwiązanie zagadnienia ostatniego nie podpada żadney trudności. Z równą łatwością rozwiązać można wszelkie inne zagadnienie niewyznaczone tak nieskończoną iak skończoną liczbę rozwiązań przyymuiące, ieżeli w równaniu do którego zagadnienie to prowadzi, albo obiedwie niewiadome, iak w poprzedzaiącym, albo iedna przynaymniey ma za spółczynnik iedność. Niech będzie np zagadnienie: *znaleźć dwie liczby całkowite i dodayne z którychby iedna zmnieyszona drugą trzy razy wziętą czyniła* 11. Oznaczywszy piérwszą niewiadomą przez x, drugą przez y, będzie $x - 3y = 11$; więc $x = 11 + 3y$. W równaniu tém położywszy zamiast y iakąkolwiek liczbę byleby całkowitą i dodayną, zawsze ważność dla x wypadnie całkowita i dodayna, a tém samem liczba rozwiązań, które zagadnienie to przyymuie będzie nieskończona.

Uczyniwszy $y = 1.\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ i t. d.
Znaydziemy $x = 14,\ 17\ 20,\ 23,\ 26$ i t. d.

Podobnież w zagadnieniu: *znaleźć dwie liczby, z których iedna dodana do drugiey trzy razy wziętey czyni* 11 Oznaczywszy pierwszą niewiadomą przez x, drugą przez y, będzie $x+3y=11$, więc $x = 11 - 3y$.

Z równania tego okazuie się, że dla y nie można naznaczyć większéy ważności iak 3: gdyż uczyniwszy np. $y = 4$ będzie $x = 11 - 12 = -1$; co się sprzeciwia warunkom zagadnienia. Dla teyże przyczyny ważność dla y nie może być mnieysza nad 1: gdyż inaczéy liczba y byłaby albo ułomkiem, albo 0, albo ilością odiemną; co się także sprzeciwia warunkom, podług których dwie znalezione liczby powinny być całkowite i dodayne; kiedy więc ważność dla y nie może być ani większa od 3, ani mnieysza od 1, a ważności ułomkowe w tém zagadnieniu mieysca nie maią, wypada stad, że dla y można dać trzy tylko następuiące ważności: $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$.

Jeżeli $y = 1,\ 2,\ 3$. będzie $x = 8,\ 5,\ 2$.

Co się tycze innych zagadnień niewyznaczonych prowadzących do równań, w których spółczynniki obu niewiadomych są różne od 1, rozwiązywanie takowych zagadnień zależy natém, ażeby równania z nich otrzymane przerobić na inne, w którychby iedna z niewiadomych miała za spółczynnik 1. Sposób, podług którego odbywa się to działanie, wyłożymy w następuiących zagadnieniach.

258. Zagadnienie 1. *Pewna liczba kobiet i męższczyzn złożyła się na piknik, męższczyzni zapłacili po 21 zł. kobiety po złotych 16, składka kobiet iest większa iednym złotym od składki męższczyzn. Ileż do składki należało kobiet ile męższczyzn?*

Oznaczywszy liczbę kobiet przez x, liczbę męższczyzn przez y, będzie stosownie do warunków

ków

ków $16x - 25y = 1$; więc $x = \frac{25y + 1}{16}$; czyli $x = y + \frac{9y + 1}{16}$.

Uczyńmy 1od, $\frac{9y + 1}{16} = u$ więc $y = \frac{16u - 1}{9}$, czyli $y = u + \frac{7u - 1}{9}$;

2ie, $\frac{7u - 1}{9} = t$; więc $u = \frac{9t + 1}{7}$; czyli $u = t + \frac{2t + 1}{7}$;

3cie, $\frac{2t + 1}{7} = s$; więc $t = \frac{7s - 1}{2}$, czyli $t = 3s + \frac{s - 1}{2}$;

4te, $\frac{s - 1}{2} = r$, więc $s = 2r + 1$. A zatém

$s = 2r + 1$.

$t = 3s + \frac{s - 1}{2} = 6r + 3 + r = 7r + 3$.

$u = t + \frac{2t + 1}{7} = 7r + 3 + 2r + 1 = 9r + 4$.

$y = u + \frac{7u - 1}{9} = 9r + 4 + 7r + 3 = 16r + 7$.

$x = y + \frac{9y + 1}{16} = 16r + 7 + 9r + 4 = 25r + 11$.

Z dwóch ostatnich równań okazuie się, że dla r nie można mnieyszey ważności naznaczyć, iak o: gdyż uczyniwszy np. $r = -1$, będzie $x = -20 + 11 = -14$; co być nie może. Lecz położywszy zamiast r inną iakąkolwiek liczbę większą od -1, byleby liczba ta była całkowita, ważności dla niewiadomych x, y wypadną za-

zawsze całkowite i dodayne. A zatém zagadnienie to przyymuie nieskończoną liczbę rozwiązań. Czyniąc *np.*

$r = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ i t d. wypadnie
$x = 11,\ 36,\ 61,\ 86,\ 111,\ 136,\ 161,\ 186$ i t d.
$y = 7,\ 23,\ 39,\ 55,\ 71,\ 87,\ 103,\ 119$ i t. d.

Podług pierwszego rozwiązania składka kobiet wynosi 11. 16 = 176 i t. d. składka mężczyzn 7. 25 = 175 zł. i t. d.

259. Zagadnienie 2. *Gospodarz wydał summę A na zakupienie wołow i koni, woły płacił po 21, konie po 31 talarow, ileż kupił wołow ile koni?*

Oznaczywszy przez x liczbę kupionych wołów, przez y liczbę kupionych koni, będzie

$$21x + 31y = A;\ \text{więc}\ x = \frac{A - 31y}{21} = \frac{A - 10y}{21} - y.$$

Uczyniwszy $\frac{A - 10y}{21} = u$, będzie $x = u - y$.

Z równania $\frac{A - 10y}{21} = u$ wypada

$y = \frac{A - 21u}{10} = \frac{A - u}{10} - 2u$; a uczyniwszy
$\frac{A - u}{10} = t$, będzie $y = t - 2u$.

Z równania $\frac{A - u}{10} = t$, wypada $u = A - 10t$.

Mamy więc $u = A - 10t$.
$y = t - 2u = t - 2A + 20t = 21t - 2A$.
$x = u - y = A - 10t - 21t + 2A = 3A - 31t$.

Daymy, że $A = 1770$ talarów; ostatnie zatém dwa równania zamienią się w następuiące:

$$y = 21t - 3540,\quad x = 5310 - 31t.$$

Z ostatniego równania okazuie się, że powinno być $31t < 5310$, czyli $t < \frac{5310}{31}$, czyli $t < 172$: iakoż uczyniwszy $t = 172$, będzie $x = 5310 - 5332$

$= -$

$= -22$, co być nie może. Z równania zaś przedostatniego okazuie się, że powinno być $21t > 3540$, czyli $t > \frac{3540}{21}$, czyli $t > 168$: iakoż uczyniwszy $t = 168$, wypadnie $y = 3528 - 3540 = -12$, co być nie może. Kiedy więc t powinno mieć ważność większą od 168, mnieyszą od 172, a ważności ułomkowe w zagadnieniu ninieyszem mieysca mieć nie mogą, nie można zatem dla t naznaczyć, więcéy ważności, iak tylko trzy następuiące: 169, 170 i 171: a tém samem zagadnienie to więcéy rozwiązań przyiąć nie może, iak tylko trzy.

Uczyniwszy $t = 169, 170, 171$, znaydziemy

$$y = 9, \ 30, \ 51,$$
$$x = 71, \ 40, \ 9.$$

Podług piérwszego rozwiązania summa wydana za woły $21 . 71 = 1491$, summa wydana za konie $31 . 9 = 279$. Dwie te summy czynią razem 1770 i t. d.

260. Zastanowiwszy się z uwagą nad temi dwoma zagadnieniami, z których pierwsze przyymuie liczbę rozwiązań nieskończoną, drugie ograniczoną, wyprowadzimy następuiące postrzeżenia:

1*ód.* W zagadnieniu piérwszém zamiast liczb wiadomych do niego wchodzących, które są: 16, 25 i 1, położywszy głoski a, b, c, równanie $16x - 25y = 1$, zamieni się na $ax - by = c$. Wszystkie tego gatunku zagadnienia przypuszczaiące nieograniczoną liczbę rozwiązań prowadzą do równania takiego, iakie iest powyższe, w którém dwie niewiadome ilości składaiące piérwszą stronę są połączone z sobą znakiem $-$: gdy tym czasem zagadnienie drugie, i wszystkie inne tegoż gatunku, które przyymuią liczbę rozwiązań ograniczoną, prowadzą do równania następuiącego kształtu: $ax + by = c$. Co się tycze trzeciey ilości c wiadoméy do zagadnienia wchodzącey,

ta

ta czasem iest dodayna, iak w dwóch zagadnieniach poprzedzaiących; czasem odiemna, a czasem równa o, iak się okaże w innych zagadnieniach. Uwaga ta posłuży do poznania z samego weyrzenia na równanie, czy zagadnienie, z którego to równanie wzięło początek, przypuszcza liczbę rozwiązań ograniczoną, czyli też nieskończoną.

261. 2re. W równaniach $16x - 25y = 1$, $21x + 31y = 1770$, za pomocą których rozwiązaliśmy dwa poprzedzaiące zagadnienia, spółczynniki niewiadomych tak w iednem iak w drugiem równaniu są liczbami między sobą pierwszemi. Warunek ten iest istotny w zagadnieniach tego rodzaiu; i ieżeli w równaniu $ax \pm by = c$, liczby a i b nie są między sobą pierwsze, równanie to będzie do rozwiązania niepodobne, chybaby trzecia także liczba wiadoma c miała ten sam dzielnik, który iest spólnym dzielnikiem dla a i b. Jakoż gdyby np. było $a = km$, $b = kn$, równanie powyższe zamieniłoby się na $kmx \pm kny = c$, więc $mx \pm ny = \frac{c}{k}$; a tém samém byłoby rzeczą niepodobną, aby liczby x, y były całkowite, gdyby c nie było podzielne przez k, iak tego doświadczyć można na równaniach szczególnych $9x - 15y = 2$ i $9x - 15y = 6$. Uwaga ta przydatna będzie dla tych, którzyby sami chcieli układać tego rodzaiu zagadnienia.

262. 3cie. Przypatruiąc się ważnościom dla x i y w poprzedzaiących dwóch zagadnieniach znalezionym, postrzeżemy, że ważności te składaią dwa postępy arytmetyczne. W postępie obeymuiącym ważności dla x w zagadnieniu pierwszem (258) stosunkiem iest liczba 25 będąca spółczynnikiem niewiadomey y w równaniu $16x - 25y = 1$. W postępie obeymuiącym ważności dla y stosunkiem iest liczba 16 będąca spółczynnikiem niewiadomey x w temże równaniu. Toż mówić oza-

o zagadnieniu drugiém (259), z tą tylko różnica, że z dwóch postępów obeymuiących ograniczoną liczbę ważności dla x i dla y w zagadnieniu drugiém, ieden iest rosnący drugi maleiący; gdy tym czasem w zgadnieniu pierwszém obadwa postępy składaiące nieskończoną liczbę tych że ważności są rosnące, właśnie też tak być powinno: bo gdy w zagadnieniu pierwszém składka kobiet iest większa iednym złotym od składki męższczyzn, rzeczą iest oczywistą, żé im będzie większa liczba męższczyzn, tem większą być powinna liczba kobiet do składki należących: przeciwnie w zagadnieniu drugiém ponieważ za woły i konie zapłacono razem talarów 1770, im większa zatém będzie liczba kupionych wołów, tem mnieysza być musi liczba kupionych koni, i odwrotnie. Okoliczności te we wszystkich zagadnieniach tego rodzaiu maią mieysce. Jakoż daymy, że w zagadnieniu niewyznaczoném znaleziona iest iedna ważność dla x i dla y, i że iest $x=\alpha$, $y=\beta$. Położywszy ważności te w równaniu $ax-by=c$, będzie $a\alpha-b\beta=c$. Równanie to odiąwszy od poprzedzaiacego, zostanie $ax-a\alpha-by+b\beta=0$; czyli $a(x-\alpha)-b(y-\beta)=0$; więc $a(x-\alpha)=b(y-\beta)$, a tém samém $x-\alpha=\frac{b}{a}(y-\beta.)$

Że zaś liczby b i a są między sobą pierwsze (261); druga strona tego równania nie może być liczbą całkowitą, chyba w ten czas tylko, kiedy $y-\beta$ iest podzielne przez a. Daymy, że $\frac{y-\beta}{a}=p$; a w tym przypadku równanie ostatnie zamieni się $x-\alpha=bp$. Dla wyznaczenia zatém niewiadomych x i y mamy dwa równania:

$$x-\alpha=bp,\quad y-\beta=ap;\ \text{więc}$$
$$x=\alpha+bp,\quad y=\beta+ap.$$

Czyniąc następnie $p=1, 2, 3, 4\cdots$, znaydziemy

$x=$

$x = \alpha + b,\ \alpha + 2b;\ \alpha + 3b,\ \alpha + 4b$ - - - - -
$y = \beta + a,\ \beta + 2a,\ \beta + 3a,\ \beta + 4a$ - - - - - -
dwa postępy takie, o iakich mówiliśmy wyżéy.

Odbywszy to samo działanie z równaniem $ax + by = c$, przyymuiącém liczbę rozwiązań ograniczoną, znaydziemy $x = \alpha - bp,\ y = \beta + ap$; i ieżeli $p = 1, 2, 3, 4$ - - -; będzie
$x = \alpha - b,\ \alpha - 2b,\ \alpha - 3b,\ \alpha - 4b$ - - - - -
$y = \beta + a,\ \beta + 2a,\ \beta + 3a,\ \beta + 4a$ - - - - -

Z dwóch tych postępów pierwszy iest maleiący. drugi rosnący: a piérwszego stosunkiem iest b, drugiego a.

Uwaga ta posłuży do prędszego wyrachowania innych ważności dla x i dla y, gdy są początkowe znalezione.

265. 4*te*. Zastanowiwszy się nad sposobem, którym rozwiązaliśmy piérwsze zagadnienie (258), postrzeżemy, że sposób ten zależy na szukaniu naywiększego spólnego dzielnika dwóch liczb 25 i 16, które są spółczynnikami niewiadomych do zagadnienia wchodzących. Jakoż dzieli się 1*od* liczba większa 25 przez mnieyszą 16, i wypada piérwsze równanie *posiłkowe* $x = y + \frac{9y+1}{16}$ czyli $x = y + u$.

2*re*. Dzieli się liczba mnieysza 16 przez piérwszą resztę 9, i wypada drugie równanie posiłkowe $y = u + \frac{7u-1}{9}$; czyli $y = u + t$.

3*cie*. Dzieli się pierwsza reszta 9 przez drugą 7, i wypada trzecie równanie posiłkowe $u = t + \frac{2t+1}{7}$; $u = t + S$.

4*te*. Dzieli się druga reszta 7 przez trzecią 2, i wypada czwarte równanie $t = 3s + \frac{S-1}{2}$ czyli $t = 3s + r$.

5*te*. Dzieli się nakoniec reszta trzecia przez czwartą, i wypada piąte równanie $s = 2r + 1$.

Widzimy tu, że trzecia liczba wiadoma do zagadnienia wchodząca, to iest 1, tey tylko zmianie w tych działaniach podpada, że w posiłkowem równaniu pierwszem, trzeciem i piątem ma przed sobą znak +, to iest taki, iaki się przed nią znayduie w równaniu początkowem $10x = 25y + 1$; w równaniu zaś posiłkowem drugiem i czwartem ma przed sobą znak —, co wypada z natury samego działania: liczba albowiem ta w równaniach posiłkowych na przemiany raz się dodaie, drugi raz się odeymuie po obu stronach. Jeżeli więc liczba równań tych iest nieparzysta, iak w tym przykładzie, w ostatniem równaniu posiłkowem liczba ta mieć musi przed sobą znak +; gdyby zaś liczba tychże równań była parzysta, iak będzie w innych przykładach, w ostatniem równaniu posiłkowem liczba trzecia wiadoma do zagadnienia wchodząca miałaby przed sobą znak —; ale to w ten czas tylko, kiedy w początkowem równaniu przed tą liczbą znayduie się znak +: gdyby albowiem równanie początkowe miało kształt taki: $ax = by - c$, na ten czas liczba c w równaniu pierwszem, trzecie, piątem i t. d. miećby musiała przed sobą znak —; w równaniu zaś drugiem, czwartem i t. d. znak +, co iest przez się widoczna.

Te same uwagi służą także zagadnieniu drugiemu, które przypuszcza liczbę rozwiązań ograniczoną, z tą tylko różnicą, że trzecia liczba wiadoma oznaczona przez A żadney zgoła nie podpada zmianie, i we wszystkich równaniach posiłkowych zawsze ma przed sobą znak taki, iaki ma w równaniu początkowem.

Opuszczaiąc zatem w równaniach posiłkowych liczbę trzecią 1, i tylko ią kładąc w równaniu ostatniem, powyższe działanie można będzie odbyć podług następuiącego wzoru:

$$
\begin{array}{ll}
25 = 1.\ 16 + 9; \text{ czyli} & x = 1.\ y + u. \\
16 = 1.\ 9 + 7; & y = 1.\ u + t. \\
9 = 1.\ 7 + 2; & u = 1.\ t + s.
\end{array}
$$

$7 = 5 . 2 + 1$; czyli $t = 5 . s + r$.
$2 = 2 . 1 + 0$; $s = 2 . r + 1$.

Doszedłszy, że $s = 2r + 1$, łatwo będzie znaleźć ważności dla x i y Uwaga ta podaie prędszy sposób rozwiązywania takowych zagadnień. I tak niech będzie zagadnienie: *Dowodzca twierdzy zapytany; iak liczną ma załogę, odpowiedział: liczba pieszych cztery razy wzięta i powiększona 5, równa się liczbie iezdnych wziętey 7 razy.* Oznaczywszy liczbę żołnierzy pieszych przez x, iezdnych przez y, będzie równanie $4x = 7y - 5$, które rozwiązuiąc podług powyższego wzoru, będzie

$7 = 1 . 4 + 3$; czyli $x = 1 . y + u$.
$4 = 1 . 3 + 1$; $y = 1 . u + t$.
$3 = 3 . 1 + 0$; $u = 3 . t - 5$.

W ostatniem równaniu posiłkowem przed liczbą 5 daliśmy znak taki, iaki się znayduie przed nią w równaniu początkowem: gdyż ostatnie równanie posiłkowe iest trzecie. Doszedłszy, że $u = 3t - 5$, łatwo znaydziemy, że $y = 4t - 5$, $x = 6t - 10$ Z równań tych okazuie się, że naymnieysza ważność, którą dla t naznaczyć można iest 2; i t. d.

264. Dwa poprzedzaiące zagadnienia, które przypuszczaią nieskończoną liczbę rozwiązań można ogólnie tak wysłowić: *znaleźć dwie liczby, z których iedna wzięta razy* a *i powiększona lub zmnieyszona ilością* c *równa się drugiey wziętey razy* b. W reszcie iakiekolwiek będzie wysłowienie zagadnienia tego gatunku, zawsze ie można będzie sprowadzić do równania $ax = by \pm c$, które sposobem podanym wyżey z łatwością rozwiązane być może. Weźmy np. zagadnienie: *znaleźć liczbę, która podzielona przez* 39 *daie reszty* 16, *podzielona zaś przez* 56, *daie reszty* 27.

Niech x oznacza całkowity iloraz wypadaiący z podzielenia liczby szukaney przez 39, y całkowity iloraz wypadaiący z podzielenia teyże liczby przez 56: liczbę więc szukaną oznaczywszy

wszy przez N, będzie stosownie do warunków zagadnienia $N = 39x + 16$ albo $N = 56y + 27$. A zatem $39x + 16 = 56y + 27$; czyli $39x = 56y + 11$. Rozwiązuiąc równanie to podług podanego wyżey wzoru, otrzymamy pięć równań posiłkowych, z których ostatnie iest $s = 2r + 11$. Ważność tę położywszy w innych czterech równaniach posiłkowych, znaydziemy $y = 39r + 176$, $x = 56r + 253$. Dwa te równania ostrzegaią, że naymnieysza ważność, którą dla r naznaczyć można, iest -4; gdyż uczyniwszy $r = -5$, będzie $x = -280 + 253 = -27$, co być nie może. Lecz wszelka inna liczba całkowita, byleby większa od -5, zamiast r położona, da dla x i y ważność całkowitą dodayną. Uczyniwszy np. $r = -4$, znaydziemy $x = 29$. Ważność tę położywszy zamiast x w równaniu $N = 39x + 16$, wypadnie $N = 1147$, naymnieysza liczba szukana czyniąca zadosyć warunkom zagadnienia; i t. d.

265. Ten sam iest sposób postępowania, gdy do zagadnienia wchodzą trzy niewiadome lub więcey. I tak niech będzie zagadnienie: *znaleźć liczbę, która podzielona przez* 11, *daie reszty* 3; *podzielona przez* 19, *daie reszty* 5; *podzielona przez* 29, *daie reszty* 10.

Oznaczywszy przez N liczbę szukaną, a przez x, y, z, ilorazy całkowite wypadaiące z podzielenia tey liczby przez 11, 19 i 29, będzie $N = 11x + 3$; $N = 19y + 5$; $N = 29z + 10$. Więc

$$11x + 3 = 19y + 5; \quad 11x + 3 = 29z + 10: \text{ czyli}$$
$$11x = 19y + 2; \quad 11x = 29z + 7.$$

Pierwsze z tych dwóch równań rozwiązawszy sposobem zwyczaynym znaydziemy $x = 19r + 14$. A zatem $11x = 209r + 154$. Ważność tę położywszy w równaniu drugiem zamiast $11x$, będzie $29z + 7 = 209r + 154$, czyli $29z = 209r + 147$. Równanie to rozwiązuiąc podług podanego wyżey wzoru, wypadnie

$$209 = 7.\ 29 + 6; \text{ czyli } z = 7.\ r + q.$$
$$29 = 4.\ 6 + 5; \qquad r = 4.\ q + p.$$

6 =

$$6 = 1.\ 5 + 1;\ \text{czyli}\ q = 1.\ p + n.$$
$$5 = 5.\ 1 + 0;\qquad p = 5.\ n - 147\ (263).$$

A zatém

$p = 5n - 147$; $q = 6n - 147$; $r = 29n - 735$; $z = 209n - 5292$. Aże $N = 29z + 10$; będzie więc

$N = 29(209n - 5292) + 10 = 6061n - 153458$.

Z równania tego okazuie się, że powinno być $6061n > 153458$, czyli $n > 25$. Naymnieysza zatém ważność, którą dla n naznaczyć można, iest 26; a w tym przypadku będzie $N = 4128$; i t. d.

266 Abyśmy ten sam sposób zastosowali do zagadnień przypuszczaiących liczbę rozwiązań ograniczoną, uważać należy, że w równaniu $21x = A - 31y$ (259), liczba większa 31 iest odiemna; dzieląc zatém liczbę większą przez mnieyszą, która iest dodayna, tak iloraz iak pozostała reszta będą odiemne, dzieląc zaś liczbę mnieyszą dodayną przez piérwszą resztę, która iest odiemna, iloraz będzie odiemny, a pozostała reszta druga dodayna; i tak daley. Co się tycze trzeciéy liczby wiadoméy oznaczonéy przez A, ta iakośmy iuż uważali (263), nie podpada żadnéy zmianie, i iakakolwiek będzie liczba równań posiłkowych, zawsze w ostatniem równaniu ma przed sobą znak +. Po téy uwadze, przystąpmy do działania.

$$-31 = -1.\ 21 - 10;\ \text{czyli}\ x = -1.\ y + u.$$
$$21 = -2.\ -10 + 1;\qquad y = -2.\ u + t$$
$$-10 = -10.\ 1 + 0;\qquad u = -10.\ t + 1770.$$

Więc

$u = 1770 - 10t$. $y = t - 2u = 21t - 3540$;

$x = u - y = 5310 - 31t$, iak wyżéy (259).

Inne zagadnienia. 10d; *Matka dała dwom synom 100 groszy do rozdania między ubogich: starszy dał każdemu ubogiemu po 8 gr. i zostało mu gr. 7, młodszy dał każdemu po gr. 10, i zostało mu także gr. 7: ileż groszy dostał od matki syn starszy, ile młodszy?*

Za-

Zagadnienie to wysłowione ogólniéy zamieni się w następuiące: *liczbę 100 rozdzielić na dwie części, z których pierwsza podzielona przez 8, a druga przez 10, daią reszty po 7; iakież są dwie części szukane?*

Iloraz całkowity wypadaiący z podzielenia piérwszéy liczby szukaney przez 8, oznaczywszy przez x, a przez u iloraz całkowity wypadaiący z podzielenia drugiéy liczby szukanéy przez 10; będzie liczba pierwsza $8x+7$, druga $10y+7$; więc $8x+7+10y+7=100$; czyli

$4x=43-5y$. A zatém

$-5=-1.4-1$; czyli $x=-1.y+u$.

$4=-4.-1+0$; $\quad y=-4.u+43$.

Mamy więc

$y=43-4u$; $x=5u-43$.

Skąd się okazuie, że powinno być $u<11$, $u>8$ i t. d.

2re. *Liczbę 109 rozdzielić na dwie części, z którychby iedna była podzielna przez 5, druga przez 24*

Oznaczywszy przez x i przez y ilorazy wypadaiące z podzielenia dwóch szukanych liczb przez 5 i przez 24, będzie

$5x+24y=109$; czyli $5x=109-24y$. Więc

$-24=-4.5-4$; czyli $x=-4y+u$.

$5=-1.-4+1$; czyli $y=-1.u+t$.

$-4=-4.1+0$; $\quad u=-4.t+109$.

A zatém

$u=109-4t$; $y=5t-109$; $x=545-25t$.

Skąd się okazuie, że powinno być $t>21$, $t<23$. Jedna więc tylko ważność może być dla t naznaczona, to iest $t=22$, i wypadnie $y=1$, $x=17$. Zagadnienie więc to iako przyymuiące iedno tylko rozwiązanie należy do wyznaczonych, chociaż ma postać zagadnienia niewyznaczonego.

3cie. *Dłużnik winnym będąc 853 zł. chce dług ten zapłacić pięcio-złotówkami i talarami sześcio-złotowemi: ileż ma wyliczyć pierwszego i drugiego gatunku pieniędzy na zaspokoienie tego długu?*

Ozna-

Oznaczywszy przez x i przez y liczbę szukaną pięcio złotowek i talarów, będzie
$5x = 853 - 6x$. Więc
$-6 = -1.5 - 1$; czyli $x = -1.y + u$.
$5 = -5.-1 + 0$; $y = -5.u + 853$.
A zatém
$y = 853 - 5u$; $x = 6u - 853$. Skąd się okazuie, że powinno być $u < 171$, $u > 142$. Możnaż więc dla u naznaczyć 28 ważności, które są:
$u = 143, 144, 145, 146 \cdots 170$; będzie zatém
$y = 138, 133, 128, 123 \cdots 3,$
$x = 5, 11, 17, 23 \cdots 167.$

267. Pozostały ieszcze zagadnienia przyymuiące ograniczoną liczbę rozwiązań z trzema lub więcéy niewiadomemi, iakie są następuiące:

Złotnik ma trzy gatunki srebra: iedno czternastey proby, drugie iedenastéy, trzecie dziewiątéy. Po ileż ma wziąć grzywien z każdego gatunku, aby otrzymał massę ważącą 30 grzywien dwunastey proby?

Szukaną liczbę grzywien srebra gatunku piérwszego oznaczywszy przez x, drugiego przez y, trzeciego przez z, będzie równanie pierwsze

$$x + y + z = 30.$$

Że zaś w iednéy grzywnie czyli w 16 łótach srebra czternastéy proby znayduie się 14 łótów czystego srebra, a reszta miedzi; w liczbie zatém grzywien x znaydować się będzie czystego srebra łótów $14x$. Podobnież w liczbie grzywien y drugiego gatunku znaydować się będzie czystego srebra łótów $11y$, w liczbie grzywien z trzeciego gatunku znaydować się będzie czystego srebra łótów $9z$; a we 30 grzywnach dwunastéy proby znayduie się czystego srebra łótów $30.12 = 360$. Będzie więc drugie równanie

$$14x + 11y + 9z = 360.$$

Piérwsze równanie rozmnożywszy przez 9, i odiąwszy od drugiego, będzie
$5x + 2y = 90$ czyli $2y = 90 - 5x$. A zatém
$-5 = -2.2 - 1$; czyli $y = -2.x + u$.

$2 =$

$z = -2.-1+0$; $x = -2.u+90$.
Mamy więc
$x = 90 - 2u$, $y = 5u - 180$.
Że zaś podług równania piérwszego $z = 30 - x - y$; będzie więc

$$z = 120 - 3u.$$

Z równań tych okazuie się, że u nie może mieć ważności ani mnieyszéy od 36, ani większey od 40.

Jeżeli $u = 36, 37, 38, 39, 40$; będzie
$x = 18, 16, 14, 12, 10$;
$y = 0, 5, 10, 15, 20$;
$z = 12, 9, 6, 3, 0$.

Zagadnienie więc to, przypuszczaiąc rozwiązanie piérwsze i ostatnie, do których wchodzą, dwa tylko gatunki srebra przyymuie pięć rozwiązań. Podług rozwiązania *np.* drugiego wypada
$x + y + z = 16 + 5 + 9 = 30$; $14x + 11y + 9z = 14.16 + 11.5. + 9.9 = 360$; co dowodzi, że ta mieszanina srebra iest dwunastey proby: gdyż $\frac{360}{12} = 30$; to iest na iednę grzywnę wypada czystego srebra łótów 12.

268, Tym samym sposobem rozwiązuią się wszystkie inne tego gatunku zagadnienia, które każdy sam sobie układać może byleby zachował przestrogę w następuiącéy uwadze podaną.

Weźmy dwa ogólne równania z trzema niewiadomemi

$$x + y + z = a.$$
$$fx + gy + hz = b.$$

Daymy, że z trzech liczb f, g, h, piérwsza f iest naywiększa ostatnia h iest naymnieysza. Ponieważ $x + y + z = a$, będzie $fx + fy + fz = fa$. Że zaś f iest większe tak od g, iak od h, wypada stąd, że $fx + fy + fz > fx + gy + hz$; a tém samém powinno być $fa > b$, czyli $b < fa$.

Aże nadto $hx + hy + hz = ha$, a liczba h iest mnieysza tak od f, iak od g; będzie więc $hx + hy + hz < fx + gy + hz$; a tém samém powinno być $ha < b$, czyli $b > ha$.

Jeżeli b nie iest mnieysze od fa, a większe od ha, zagadnienie będzie niepodobne do rozwiązania Dwie te ilości fa i ha są dwiema granicami, między któremi ilość b powinna być zawarta, a prócz tego ieszcze ilość b nie powinna się bardzo zbliżać do iednéy lub drugiéy granicy: gdyż w tym przypadku inne głoski nie mogłyby być wyznaczone, okażmy to na przykładzie. *Dla 100 ubogich dano 100 zł., męższczyzni dostali po $3\frac{1}{2}$ zł., kobiety po $1\frac{1}{3}$ zł., dzieci po $\frac{1}{2}$ zł. ileż było mężczyzn, kobiet i dzieci?*

Zagadnienie to prowadzi do następuiących dwóch równań:

$x + y + z = 100$; $3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = 100$, w których $100 = a$. $100 = b$, $3\frac{1}{2} = f$, $1\frac{1}{3} = g$, $\frac{1}{2} = h$. Granice zatém dla b są $100 . 3\frac{1}{2} = 350$, i $100 . \frac{1}{2} = 50$. Aże b nie wychodzi za te granice, ani się bardzo do nich zbliża, zagadnienie to iest podobne do rozwiązania. Lecz położywszy zamiast b liczbę wychodzacą za iednę z dwóch granic, lub do iednéy z nich bardzo zbliżoną; zagadnienie będzie niepodobne do rozwiązania.

Uczyniwszy np. $b = 51$, będzie dwa równania

$$x + y + z = 100, \quad 3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = 51.$$

Zniósłszy mianowniki w równaniu drugiém, a pierwsze rozmnożywszy przez 3 i odiąwszy od drugiego, zostanie $18x + 5y = 6$: co być nie może: gdyż liczby x, y powinny być całkowite.

269. Weźmy ieszcze zagadnienie tego gatunku ze czterema niewiadomemi. *Gospodarz potrzebował 100 rzemieślnikow czworakiego gatunku, i zapłacił im 100 cz. zł. rzemieślnicy iednego gatunku dostali po 10 cz. zł. drugiego po 5, trzeciego po 2, czwartego po $\frac{1}{2}$ cz. zł. Ileż było rzemieślników każdego gatunku?*

Za-

Zagadnienie to prowadzi do następuiących dwóch równań:

$$u + x + y + z = 100.$$
$$10u + 5x + 2y + \tfrac{1}{2}z = 100.$$

Drugie równanie rozmnożywszy przez 2 i odiąwszy od niego pierwsze, będzie $19u + 9x + 3y = 100$, więc $3y = 100 - 9x - 19u$; a uczyniwszy $100 - 9x = c$ wypadnie
$3y = c - 19u$. A zatém

$$-19 = -6 \cdot 3 - 1; \quad \text{czyli } y = -6u + t.$$
$$3 = -3 \cdot -1 + 0; \quad u = -3 \cdot t + c.$$

Mamy więc
$u = c - 3t$; $c = 100 - 9x$; $y = t - 6u$; $z = 100 - u - x - z$, czyli
$u = 100 - 9x - 3t$; $y = 19t + 54x - 600$;
$z = 600 - 46x - 16t$.

Z równań tych okazuie się, że powinno być $9x + 3t < 100$, a $54x + 19t > 600$: gdyż inaczéy znalezione ważności byłyby odiemne. Z resztą można iakąkolwiek ważność naznaczyć dla x i dla t, byleby ten warunek był zachowany. Uczyniwszy np. $x = 1$, wypadnie
$u = 91 - 3t$, $y = 19t - 546$, z których się okazuie, że powinno być $t < 31$, $t > 28$. Kiedy więc $x = 1$, dwie tylko ważności dla t naznaczyć można, to iest: $t = 30$, i $t = 29$. Jeżeli $t = 30$, znaydziemy $u = 1$, $y = 24$, $z = 74$. Kiedy zaś $t = 29$, wypadnie $u = 4$, $y = 5$, $z = 90$.

Czyniąc potem $x = 2, 3, 4, 5$ i t. d. znaydziemy inne rozwiązania tym samym sposobem, iakim znaleźliśmy dwa pierwsze.

270. Naznaczenie ważności dla x i dla t w poprzedzaiącem zagadnieniu zabiera nie mało czasu. Zapobieżeć temu można używaiąc następuiącego sposobu:

Z otrzymanego wyżéy równania $19u + 9x + 3y = 100$, wypada $y = \dfrac{100 - 19u - 9x}{3}$

$= 33 - 6u - 3x + \frac{1-u}{3}$, czyli

$$y = 33 - 6u - 3x - \left(\frac{u-1}{3}\right).$$

Niech będzie $\frac{u-1}{3} = t$, a tem samém $u = 3t + 1$. Ważność tę położywszy w równaniu poprzedzaiącém, będzie $y = 27 - 19t - 3x$.

Równanie to okazuie, że powinno być $19t + 3x < 27$: gdyż inaczéy liczba y byłaby odiemną; z resztą dla t i dla x można dać ważności iakiekolwiek, byleby ten warunek był dopełniony. Uczyńmy więc

1od, $t = 0$; będzie $u = 1$; $y = 27 - 3x$.

2re, $t = 1$; będzie $u = 4$; $y = 8 - 3x$.

3cie, $t = 2$; będzie $u = 7$; $y = -11 - 3x$, co być nie może.

A zatém dla t nie można więcéy ważności naznaczyć, tylko dwie, to iest: $t = 0$, i $t = 1$. W piérwszym przypadku otrzymane równanie $y = 27 - 3x$ ostrzega, że x nie może mieć większéy ważności nad 9: gdyż inaczéy liczba y byłaby odiemna; w drugim przypadku otrzymane równanie $y = 8 - 3x$ ostrzega, że x nie może mieć większéy ważności nad 2. Przypuszczaiąc zatém $t = 0$, można będzie dla x naznaczyć 10 ważności zacząwszy od 0, aż do 9 włącznie, przypuszczaiąc zaś $t = 1$, można będzie dla x naznaczyć trzy tylko ważności, które są: 0, 1, 2 W piérwszym więc przypadku zagadnienie to mieć będzie 10 rozwiązań, w drugim 3. Że zaś w pierwszym przypadku $u = 1$ $y = 27 - 3x$, a w drugim $u = 4$, $y = 8 - 3x$, ważności te położywszy w równaniu $z = 100 - u - x - y$, znaydziemy w piérwszym przypadku $z = 72 + 2x$, w drugim $z = 88 + 2x$.

Mamy zatém następuiące równania:

1od, kiedy $t = 0$; $u = 1$, $x = 0, 1, 2...9$; $y = 27 - 3x$, $z = 72 + 2x$. 2re, ıre, kiedy $t=1$; $u=4$, $x=0, 1, 2$; $y=8-3x$; $z=88+2x$.

A zatém ieżeli $t=0$, będzie

$u=$	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,
$x=$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
$y=$	27,	24,	21,	18,	15,	12,	9,	6,	3,	0,
$z=$	72,	74,	76,	78,	80,	82,	84,	86,	88,	90.

Jeżeli zaś $t=1$, będzie

$u=$	4,	4,	4.
$x=$	0,	1,	2.
$y=$	8,	5,	2.
$z=$	88,	90,	92.

Wszystkich zatém rozwiązań iest 13; a opuszczaiąc te do których wchodzi 0, liczba rozwiązań będzie 10.

Tego samego sposobu użyć wygodnie można do innych zagadnień, osobliwie w ten czas, kiedy trzecia ilość wiadoma do zagadnienia wchodząca iest liczbą wielką, iak iest w zagadnieniach w artykule 259, 267, i t. p.

271. Weźmy ieszcze dwa równania: $3x+5y+7z=560$; $9x+25y+49z=2920$. Pierwsze z nich rozmnożywszy przez 7, i odiąwszy od niego drugie, będzie

$$12x+10y=1000;\ \text{czyli}\ 6x+5y=500.$$

Uczyńmy $x+y=t$; będzie więc $6x+5y=x+5t$, albo $6x+5y=6t-y$. Ważności te położywszy zamiast $6x+5y$ w równaniu poprzedzaiącem, wypadnie

$$x+5t=500;\ \text{więc}\ x=500-5t.$$
$$6t-y=500;\ \text{więc}\ y=6t-500.$$

Ważności znowu te położywszy zamiast x i y w pierwszem *np.* równaniu danem, będzie $7z+15t=1560$; więc $z=\frac{1560-15t}{7}=222-2t+\frac{6-t}{7}$; czyli $z=222-2t-\left(\frac{t-6}{7}\right)$.

Uczy-

Uczyniwszy $\frac{t-6}{7} = s$, będzie $t = 7s + 6$.
Ważność tę położywszy zamiast t w równaniach poprzedzaiących, znaydziemy
$z = 210 - 13s$; $y = 42s - 464$; $x = 470 - 35s$.

Równania te ostrzegaią, że s powinno być mnieysze od 14, a większe od 11; i t. d.

Są także inne sposoby rozwiązywania takowych zagadnień w niektórych przypadkach działania skracaiące, ale sposób wyłożony wyżey (263) tę ma zaletę, że służy do wszystkich przypadków bez wyłączenia.

272 Przytaczamy tu kilka zagadnień niewyznaczonych różnego gatunku, które dla wprawy rozwiązać należy.

Gospodarz po ukończonych żniwach zapłacił żniwiarzom i żniwiarkom 1000 *z,. Żniwiarze dostali po* 19 *zł. żniwiarki po zł.* 13: *ileż było żniwiarzów i żniwiarek?*

132. *Osob znayduiących się na iednem widowisku zapłaciły zł.* 262; *siedzący na mieyscu pierwszem płacili po* 3 *zł. i groszy* 5, *na drugiem po* 2 *zł. i gr* 5, *na trzeciem po* 1 *zł. gr.* 5: *ileż było siedzących na mieyscu pierwszem, drugiem i trzeciem?*

Znaleźć liczbę, która podzielona przez 2, 3, 5, *daie reszty* 1, 2, 3, *albo podzielona przez* 3, 4, 5, *daie reszty* 2, 3, 4, *albo podzielona przez* 3, 4, 5, 7, *daie reszty* 2, 3, 4, 0; *albo znaleźć liczby zupełnie podzielne przez* 11 *i* 32.

Maiąc dany ułomek $\frac{113}{355}$, *który iest przybliżonym stosunkiem średnicy do okręgu, znaleźć ułomek drugi* $\frac{x}{y}$ *taki, aby różnica między temi dwoma ułomkami do iednakowego mianownika sprowadzonemi miała za licznik iedność; i t. d.*

Wszystkie te zagadnienia rozwiązuią się sposobami podanemi wyżey: ostatnie prowadzi do

na-

następuiącego równania $\frac{113}{355} - \frac{x}{y} = \pm \frac{1}{355y}$: ułomek bowiem szukany może być mnieyszy lub większy od danego Gdyby ułomek dany był dziesiętny, trzeba go pierwey obrócić na zwyczayny. Daymy, że liczbę 2,236, która iest przybliżonym pierwiastkiem kwadratowym liczby 5, trzeba zamienić na ułomek zwyczayny przybliżaiący się do tego pierwiastku kwadratawego. Ponieważ $2{,}236 = 2 + \frac{236}{1000} = 2 + \frac{59}{250}$; trzeba zatem rozwiązać następuiące równanie:

$$\frac{59}{250} - \frac{x}{y} = \pm \frac{1}{250y}; \text{ i t. d.}$$

270. Pôydźmy teraz do zagadnień niewyznaczonych stopnia drugiego. Niech będzie zagadnienie: *Znaleźć dwie liczby* x *i* y, *ktoreychby iloczyn powiększony ich summą czynił* 79. Zagadnienie to prowadzi do następuiącego równania: $xy + x + y = 79$. A zatem

$$y = \frac{79 - x}{x + 1} = \frac{-x + 79}{x + 1} = -1 + \frac{80}{x + 1} \text{ (160).}$$

Skąd się okazuie, że $x + 1$ powinno być dzielnikiem liczby 80. Dzielniki liczby 80 są następuiące:

$x + 1 =$ 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80;
więc $x =$ 0, 1, 3, 4, 7, 9, 15, 19, 39, 79;
$y =$ 79, 39, 19, 15, 9, 7, 4, 3, 1, 0.

Zagadnienie więc to przypuszcza 4 tylko rozwiązania to iest:

$$x = 1, 3, 4, 7;\ y = 39, 19, 15, 9.$$

Tym samym sposobem rozwiązać można następuiące zagadnienia: 1ód. *Wyznaczyć w liczbach całkowitych boki prostokąta, ktoregoby powierzchnia zamykała 4 razy więcey stóp kwadratowych, aniżeli obwód ma stóp liniowych.* Ponieważ powierzchnia prostokąta znayduie się mnożąc iego podstawę przez wysokość, oznaczywszy zatem dwa te boki przez x i y, będzie powierzchnia $= xy$,

$= xy$; obwód $= 2x + 2y$: wypadnie więc podług warunków zagadnienia $xy = 8x + 8y$, a tém samém $y = \frac{8x}{x-8} = 8 + \frac{64}{x-8}$. Skąd się okazuie, że $x - 8$ powinno być dzielnikiem liczby 64.

2ie. *Wyznaczyc w liczbach całkowitych rownoległościan prostokątny z podstawą kwadratową, ktoregoby obiętość zawierała 5 razy więcey stop sześciennych, niż iego powierzchnia ma stop kwadratowych.* Ponieważ obiętość równoległościanu znayduie się mnożąc iego wysokość przez podstawę; oznaczywszy zatem wysokość przez x, bok podstawy przez y, będzie obiętość $= xy^2$, powierzchnia dwóch podstaw $= 2y^2$; powierzchnia czterech ścian pobocznych $= 4xy$ i stosownie do warunków zagadnienia wypadnie $xy^2 = 10y^2 + 20xy$, więc

$$y = \frac{20x}{x-10} = 20 + \frac{200}{x-10}, \text{ i t. d.}$$

3cie. *Maiąc daną w liczbie całkowitey oznaczoney przez a krawędź szescianu, wyznaczyć w liczbach całkowitych bok podstawy kwadratowey i wysokość rownoległościanu prostokątnego, ktoregoby obiętość miała się do obiętości sześcianu, iak powierzchnia rownoległościanu do powierzchni sześcianu.* Oznaczywszy przez x wysokość, przez y bok podstawy równoległościanu szukanego, będzie $xy^2 : a^3 = 2y^2 + 4xy : 6a^2$: więc $x = \frac{ay}{3y - 2a}$; a tém samém $3x = \frac{3ay}{3y-2a} = a + \frac{2a^2}{3y-2a}$; i t. d.

274. Weźmy ieszcze równanie

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 = 0,$$

w którém obiedwie niewiadome podniesione są do drugiego stopnia; nadawszy mu następuiący kształt:

y^2

$$y^2 + \left(\frac{ex + c}{f}\right) y = -\frac{a + bx + dx^2}{f},$$

i rozwiązawszy ie sposobem zwyczaynym, będzie

$$y = -\frac{ex + c}{2f} \pm \frac{\sqrt{(ex + c)^2 - 4f(a + bx + dx^2)}}{2f};$$

czyli

$$2fy + ex + c = \pm\sqrt{(ex + c)^2 - 4f(a + bx + dx^2)}.$$

Ilość będącą pod znakiem pierwiastkowym rozwinąwszy, i uporządkowawszy podług wykładników głoski x; będzie

$c^2 - 4af + 2cex - 4bfx + e^2x^2 - 4dfx^2$; uczyniwszy zas

$c^2 - 4af = m$, $2ce - 4bf = n$, $e^2 - 4df = p$; ilość ta wezmie kształt następuiący:

$m + nx + px^2$.

Gdybyśmy chcieli znaleźć dla x i dla y ważności tylko spółmierne czyto całkowite, czyli też ułomkowe, cała trudność rozwiązania zależałaby na znalezieniu takich ważności dla x, któreby ilość $m + nx + px^2$ czyniły kwadratem zupełnym, i kwadrat ten oznaczywszy przez t^2, będzie $2fy + ex + c = \pm t$.

Rozwiązawszy równanie $m + nx + px^2 = t^2$, wypadnie

$$x = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - 4mp + 4pt^2}}{2p}; \text{ więc}$$

$$2px + n = \pm\sqrt{n^2 - 4mp + 4pt^2}.$$

Uczyniwszy $4p = A$, $n^2 - 4pm = B$; będzie

$$2px + n = \pm\sqrt{At^2 + B}.$$

Wy-

Wypadek ten okazuie, że chcąc rozwiązać zagadnienie, trzeba wyznaczyć t w taki sposób, ażeby ilość $\sqrt{At^2+B}$, była kwadratem: bo gdyby tym kwadratem było u^2, dwie niewiadome x i y zależałyby iedynie od następuiących równań stopnia pierwszego:

$$2fy+ex+c=t,\quad 2px+n=u,$$

w których spółczynniki c, e, f, n i p, tudzież ilości t i u są spółmierne.

Wyznaczenie ilości t podług warunku wyżéy podanego, czyli, co na iedno wychodzi rozwiązanie równania $u=\sqrt{At^2+B}$ w liczbach spółmiernych, połączone iest w ogólności z wielą trudnościami. Jeden z przypadków nayłatwieyszych w ten czas ma mieysce, kiedy A iest kwadratem; oznaczywszy kwadrat ten przez α^2, będzie

$u=\sqrt{\alpha^2t^2+B}$; a założywszy, że $u=\alpha t+\gamma$, wypadnie

$\alpha t+\gamma=\sqrt{\alpha^2t^2+B}$; a tém samém

$\alpha^2t^2+2\alpha\gamma t+\gamma^2=\alpha^2t^2+B$; więc $t=\dfrac{B-\gamma^2}{2\alpha\gamma}$.

Wziąwszy zamiast γ liczbę spółmierną, ilości t i u będą spółmierne, równie iak ilości x i y.

Jeżeli B iest kwadratem oznaczonym przez β^2, równanie dane rozwięzuie się z taką samą łatwością, iak w przypadku poprzedzaiącym, założywszy $u=vt+\beta$, będzie

$(vt+\beta)^2=At^2+\beta^2$; skąd wypada $t=\dfrac{2\beta v}{A-v^2}$.

Nakoniec ieżeli ilość At^2+B może być rozłożoną na dwa czynniki spółmierne, *np.* takie

kie: $\alpha t+\beta$, $\alpha' t+\beta'$, a tém sàmém, ieżeli będzie

$$(\alpha t+\beta)\,(\alpha' t+\beta') = At^2+B = u^2,$$

uczyńmy $u = v\,(\alpha t+\beta)$: skąd wypadnie

$$v^2(\alpha t+\beta)^2 = (\alpha t+\beta)\,(\alpha' t+\beta');$$ a tém samém

$$v^2(\alpha t+\beta) = \alpha' t+\beta'),$$ więc

$$t = \frac{\beta'-\beta v^2}{\alpha v^2-\alpha'}.$$

275. Znalazłszy iednę ważność spółmierną dlą t, można z niey łatwo wyprowadzić nieskończoczoną liczbę ważności innych, które czynią zadosyć danemu równaniu. Na okazanie tego niech będzie α ważność dana dla t, a β ważność dla u, z tamtey wypływaiąca: będzie więc

$$\beta = \sqrt{A\alpha^2+B};$$ czyli, $\beta^2 = A\alpha^2+B$.

Równanie to odiąwszy od równania $u^2 = At^2+B$, będzie

$$u^2-\beta^2 = A\,(t^2-\alpha^2);$$ czyli, $u^2 = A\,(t^2-\alpha^2)+\beta^2$.

Uczyńmy $u = (t-\alpha)\,v+\beta$; więc $u^2 = (t-\alpha)^2\,v^2+2\beta v\,(t-\alpha)+\beta^2$.

Ważność tę położywszy zamiast u^2 w równaniu poprzedzaiącém, będzie

$$v^2\,(t-\alpha)^2+2\beta v\,(t-\alpha) = A\,(t^2-\alpha^2);$$ podzieliwszy przez $t-\alpha$.

$$v^2\,(t-\alpha)+2\beta v = A\,(t+\alpha),$$ a tém samém

$$t = \frac{2\beta v-A\alpha-\alpha v^2}{A-v^2}$$

Formuła ta da liczby spółmierne dla t, gdy się weźmą liczby spółmierne zamiast v.

276. Wyprowadzone dotąd formuły mogą być z łatwością zastosowane do rozwiązania rozmaitych zagadnień: przestaniemy tu tylko na

na-

następuiących: *znaleźć dwie libzby* x *i* y *takie, ażeby summa lub rożnica ich kwadratów była równa danemu kwadratowi* β^2. Równania maiące być rozwiązanemi, do których zagadnienie to prowadzi, są:

$y^2+x^2=\beta^2$; $y^2-x^2=\beta^2$, z których wypada

$y=\sqrt{\beta^2-x^2}$; $y=\sqrt{\beta^2+x^2}$.

Wyrażenia te zamknięte są w drugim przypadku artykułu poprzedzaiącego. Uczyńmy $y=vx-\beta$; będzie zatem

$vx-\beta=\sqrt{\beta^2-x^2}$; $vx-\beta=\sqrt{\beta^2+x^2}$; a tém samem

$(vx-\beta)^2=\beta^2-x^2$; $(vx-\beta)^2=\beta^2+x^2$.

Rozwinąwszy dwa te równania, wypadnie z pierwszego $x=\frac{2\beta v}{v^2+1}$, z drugiego $x=\frac{2\beta v}{v^2-1}$.

Ważności te położywszy w równaniu powyższém $y=vx-\beta$, znaydziemy

$$y=\frac{\beta(v^2-1)}{v^2+1};\ y=\frac{\beta(v^2+1)}{v^2-1}.$$

Naznaczaiąc potém ważności spółmierne dla β i dla v, otrzymamy ważności spółmierne dla x i dla y. Wziąwszy *np.* $\beta=5$, dane równania zamienią się w następuiące:

$$y^2+x^2=25;\ y^2-x^2=25;$$

w 1wszém iest $x=\frac{2\beta v}{v^2+1}=\frac{10v}{v^2+1}$;

$y=\frac{\beta(v^2-1)}{v^2+1}=\frac{5(v^2-1)}{v^2+1}$;

w

w 2giém $x = \frac{10v}{v^2 - 1}$; $y = \frac{5(v^2 + 1)}{v^2 - 1}$.

Skąd się okazuie, że naymnieysza ważność, która dla v naznaczyć można, iest 2: gdyż uczyniwszy $v = 1$: byłoby w piérwszym przypadku $y = \frac{0}{2}$, w drugim $y = \frac{10}{0}$. Uczyniwszy

$v = 2, 3, 4 \ldots$ znaydziemy w 1wszém równaniu

$x = 4, 3, \frac{40}{17} \ldots$;

$y = 3, 4, \frac{75}{17} \ldots$; w 2giém zaś równaniu

$x = \frac{20}{3}, \frac{30}{8}, \frac{40}{15} \ldots$

$y = \frac{25}{3}, \frac{50}{8}, \frac{85}{15} \ldots$

W równaniu drugiém nie można otrzymać dla x i dla y ważności całkowitych, kiedy się daie na ważność dla v liczba całkowita. Lecz uczyniwszy $v = \frac{3}{2}$, znaydziemy $x = 12$, $y = 13$.

Rozwiązanie drugiego zagadnienia w liczbach całkowitych nayłatwieysze iest w ten czas, kiedy β^2 iest liczbą nieparzystą: ponieważ bowiem różnica między kwadratami dwóch ilości a i $a + 1$ iest $2a + 1$, dosyć będzie wprowadzić równanie $2a + 1 = \beta^2$, z którego wypada $a = \frac{\beta^2 - 1}{2}$; a wziąwszy $x = a$, $y = a + 1$, wypadnie $y^2 - x^2 = \beta^2$.

W przykładzie danym, gdzie $\beta^2 = 25$, znaydziemy

$a = \frac{24}{2} = 12$; a tém samém $x = 12$, $y = 13$, iak wyżéy.

Po-

Ponieważ w troykącie prostokątnym kwadrat z przeciwprostokatney równy iest summie kwadratów z dwóch boków kątowi prostemu przyległych; m iąc więc dany w liczbie spółmierney którykolwiek bok takiego troykata, można będzie za pomocą powyższych formuł wyznaczyć inne dwa boki w liczbach także spółmiernych. Aże wszelki troykąt iest summą lub różnicą dwóch troykątów prostokątnych utworzonych przez prostopadła z wierzchołka iednego z kątów spuszczoną do boku przeciwnego; maiąc więc dany w liczbie spółmierney bok iakiegokolwiek troykata, można będzie wyznaczyć w liczbach także spółmiernych iego dwa inne boki, wysokość i powierzchnią.

REIESTR

główniejszych wiadomości.