Schwere
Elektricität
Und
Magnetismus

Dickstein

SCHWERE,

ELEKTRICITÄT UND MAGNETISMUS.

Inw

Kat

SCHWERE,
ELEKTRICITÄT UND MAGNETISMUS.

NACH DEN VORLESUNGEN

VON

BERNHARD RIEMANN

BEARBEITET

VON

KARL HATTENDORFF.

MIT 50 HOLZSCHNITTEN IM TEXT.

HANNOVER.
CARL RÜMPLER.
1876.

Dickstein

Druck von August Grimpe in Hannover.

Vorrede.

Dies Buch ist aus den Vorlesungen hervorgegangen, welche Riemann über Schwere, Elektricität und Magnetismus im Sommersemester 1861 in Göttingen gehalten hat. Abgesehen von einigen ganz kurzen Notizen ist von Riemann selbst ein Manuscript über diese Vorlesungen nicht vorhanden. Für die Darstellung bin ich also allein verantwortlich.

Die freundliche Aufnahme, welche meine Bearbeitung von Riemann's Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen bei allen Sachverständigen gefunden, lässt mich hoffen, dass auch das vorliegende Buch den Freunden Riemann's und den Studirenden der Mathematik nicht unwillkommen sein werde.

Wie bei den partiellen Differentialgleichungen so haben wir auch hier Lejeune Dirichlet's zu gedenken. Neben seinen grossen Verdiensten um die Fortentwicklung der Wissenschaft darf nicht vergessen werden, dass er es gewesen ist, der zuerst auf deutschen Universitäten über partielle Differentialgleichungen und über das Potential vorgetragen hat. Diese Vorlesungen sind mit seinem Tode nicht eingegangen. Sie bilden jetzt auf fast allen deutschen Universitäten einen regelmässigen Bestandtheil des Programms. So hat auch Riemann nach Dirichlet diese Vorlesungen übernommen. Bei der Uebereinstimmung des Gegenstandes ist es natürlich, dass in der Anlage und Ausführung vieles mit Dirichlet übereinstimmt. Aber Riemann hat sich nicht darauf beschränkt, einfach die Erbschaft seines grossen Vorgängers anzutreten. Der Kenner wird finden, dass er eine Fülle des Eigenthümlichen hinzugegeben hat.

Aachen, den 24. Juni 1875.

K. Hattendorff.

Inhalt.

Erster Theil.

Schwere. Allgemeine Sätze über die Potentialfunction und das Potential.

Erster Abschnitt. **Die Potentialfunction.**

Zweiter Abschnitt. **Der Satz von Green.**

Dritter Abschnitt. **Hülfssätze aus der Mechanik.**

Zweiter Theil.

Elektricität und Magnetismus.

Vierter Abschnitt. **Elektrostatik.**

Fünfter Abschnitt. **Galvanische Ströme.**

Sechster Abschnitt. **Magnetismus, Elektromagnetismus und Elektrodynamik.**

Siebenter Abschnitt. **Induction.**

Achter Abschnitt. **Das Grundgesetz der elektrischen Wechselwirkung.**

Neunter Abschnitt. **Erdmagnetismus.**

Erster Theil.

Schwere. Allgemeine Sätze über die Potentialfunction und das Potential.

Erster Abschnitt.

Die Potentialfunction.

§. 1.

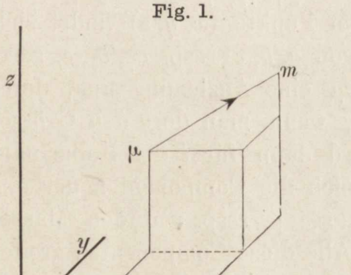
Newton's Gravitationsgesetz.

Die Theorie der Schwere beschäftigt sich mit der Untersuchung der gegenseitigen Anziehung ponderabler Körper. Dieser Untersuchung liegt als Hypothese das allgemeine Gravitationsgesetz von Newton zu Grunde. Dasselbe lautet:

Zwei mit ponderabler Masse erfüllte Punkte üben eine Anziehungskraft auf einander aus. Die Richtung dieser Kraft wird durch die gerade Verbindungslinie der beiden Punkte angegeben. Die Grösse der Kraft ist direct proportional dem Producte der beiden Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung.

Es sei k die Grösse der Kraft, mit welcher zwei Masseneinheiten einander anziehen, wenn ihre Entfernung gleich der Längeneinheit ist. Dann üben nach Newton's Gesetze zwei Massen μ und m, die in zwei Punkten von der Entfernung r concentrirt sind, eine Anziehungskraft auf einander aus, deren Grösse

Fig. 1.



$$(1) \qquad = k \cdot \frac{\mu m}{r^2}$$

ist. Es seien (**Fig. 1**) x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes von der Masse μ und a, b, c die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes von der Masse m. Die Entfernung r dieser beiden Punkte ist

$$r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}, \tag{2}$$

und die von dem Punkte (x, y, z) nach dem Punkte (a, b, c) gerichtete gerade Linie von der Länge r schliesst mit den positiven Coordinatenaxen Winkel ein, deren Cosinus die Werthe haben

$$\begin{aligned} \cos(rx) &= \frac{a-x}{r}, \\ \cos(ry) &= \frac{b-y}{r}, \\ \cos(rz) &= \frac{c-z}{r}. \end{aligned} \tag{3}$$

Die Kraft, mit welcher die Masse μ von der Masse m angezogen wird, ist von dem Punkte (x, y, z) nach dem Punkte (a, b, c) hin gerichtet. Die Componenten dieser Kraft parallel den Coordinatenaxen sind demnach resp.

$$\begin{aligned} &k\mu \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \frac{a-x}{r}, \\ &k\mu \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \frac{b-y}{r}, \\ &k\mu \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \frac{c-z}{r}. \end{aligned} \tag{4}$$

Es werde ferner die Masse μ von mehreren Massen m_1, m_2, $m_3, \ldots m_n$ angezogen. Irgend eine dieser anziehenden Massen werde mit m_i bezeichnet. Sie sei im Punkte (a_i, b_i, c_i) concentrirt. Der Abstand r_i dieses Punktes von dem Punkte (x, y, z) findet sich, indem man in (2) an die Stelle von a, b, c resp. a_i, b_i, c_i setzt. Die Masse m_i übt auf die Masse μ eine Anziehung aus, deren Componenten aus (4) hervorgehen, wenn man dort den Grössen m, a, b, c, r den Index i gibt. Wird dann für i der Reihe nach $1, 2, 3, \ldots n$ gesetzt, so ergeben sich die Componenten der einzelnen Kräfte, mit welchen die Masse μ resp. von den Massen $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$ angezogen wird. Alle diese Componenten greifen im Punkte (x, y, z) an. Handelt es sich um die Gesammtwirkung, so hat man nur die gleichnamigen Componenten zu summiren. Die Masse μ wird also durch eine Gesammtkraft P in Anspruch genommen, deren Componenten parallel den Coordinatenaxen sich berechnen:

$$X = k\mu \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i (a_i - x)}{r_i^3},$$

(5) $$Y = k\mu \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i (b_i - y)}{r_i^3},$$

$$Z = k\mu \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i (c_i - z)}{r_i^3}.$$

Die Gesammtkraft P selbst ist

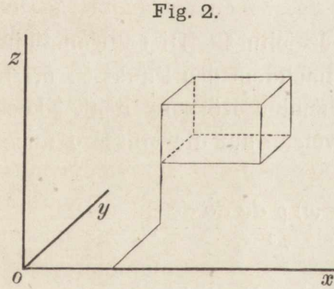
(6) $$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Sie greift im Punkte (x, y, z) an, und ihre Richtung schliesst mit den positiven Coordinatenaxen Winkel ein, deren Cosinus die Werthe haben

(7) $$\frac{X}{P}, \quad \frac{Y}{P}, \quad \frac{Z}{P}.$$

Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, dass die Anziehung nicht von einzelnen getrennt liegenden Massenpunkten ausgeübt wird, sondern von den sämmtlichen Molekülen eines physischen Körpers. Dann ist ein Raum von endlichem Volumen mit einer Masse von endlicher Grösse erfüllt, ein unendlich kleines Raumelement mit einer unendlich kleinen Masse. Dagegen enthalten Punkte, Linien und Flächen keine anziehende Masse. In diesem Falle treten in den Ausdrücken (5) Integrale an die Stelle der Summen. Wir betrachten im Innern des Raumes, welchen die anziehende Masse erfüllt, ein unendlich kleines Parallelepipedon (**Fig. 2**), dessen Kanten den Coordinatenaxen parallel laufen. Der dem Anfangspunkte der Coordinaten zunächst gelegene Eckpunkt habe die Coordinaten a, b, c. Die Länge der von ihm ausgehenden Kanten sei resp. da, db, dc. Die Masse dieses Parallelepipedon ist unendlich klein. Wir bezeichnen sie mit dm. Da alle drei Dimensionen des Parallelepipedon unendlich klein sind, so darf man seine Masse als in einem Punkte desselben concentrirt ansehen, z. B. in dem Eckpunkte (a, b, c). Der Factor ρ, mit welchem man das Volumen

Fig. 2.



des Parallelepipedon $da\,db\,dc$ multipliciren muss, um seine Masse dm zu erhalten, wird die Dichtigkeit genannt, und zwar die Dichtigkeit im Punkte (a, b, c). Im allgemeinen ändert sich die Dichtigkeit, wenn der Punkt (a, b, c) an eine andere Stelle rückt. Es ist also ρ eine Function des Ortes

$$\rho = f(a, b, c). \tag{8}$$

Wenn nichts anderes ausdrücklich festgesetzt wird, soll diese Function im Innern des anziehenden Körpers überall endlich und stetig variabel sein. Ausserhalb des anziehenden Körpers ist sie Null. Die Masse des betrachteten Parallelepipedon ist

$$dm = \rho\, da\, db\, dc.$$

Sie übt auf die im Punkte (x, y, z) befindliche Masse μ eine Anziehung aus

$$= k\mu \frac{\rho\, da\, db\, dc}{r^2},$$

deren Componenten parallel den Coordinatenaxen die Werthe haben

$$k\mu \frac{(a-x)\rho\, da\, db\, dc}{r^3},$$

$$k\mu \frac{(b-y)\rho\, da\, db\, dc}{r^3},$$

$$k\mu \frac{(c-z)\rho\, da\, db\, dc}{r^3}.$$

Die Oberfläche des anziehenden Körpers werde ausgedrückt durch die Gleichung

$$W = 0, \tag{9}$$

wobei W eine Function von a, b, c bezeichnet. Diese Function habe negative oder positive Werthe, je nachdem der Punkt (a, b, c) im Innern oder ausserhalb des anziehenden Körpers liegt. Die Componenten der Gesammtanziehung, welche auf die Masse μ ausgeübt wird, sind

$$\begin{aligned} X &= k\mu \int\int\int \frac{(a-x)\rho\, da\, db\, dc}{r^3}, \\ Y &= k\mu \int\int\int \frac{(b-y)\rho\, da\, db\, dc}{r^3}, \\ Z &= k\mu \int\int\int \frac{(c-z)\rho\, da\, db\, dc}{r^3}. \end{aligned} \tag{10}$$

Die dreifache Integration erstreckt sich auf alle Werthen-Combinationen a, b, c, für welche

$$W \leqq 0$$

ist.

§. 2.
Die Potentialfunction.

Wir wollen der Einfachheit wegen $\mu = 1$ und $k = 1$ setzen. In dem angezogenen Punkte (x, y, z) soll also die Masseneinheit sich befinden, und das Maass der Kraft ist so gewählt, dass zwei Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung sich mit der Einheit der Kraft anziehen.

Sind die anziehenden Massen in einzelnen getrennt liegenden Punkten concentrirt, so hat man für die Componenten der auf den Punkt (x, y, z) ausgeübten Kraft die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} X &= \sum \frac{m\,(a-x)}{r^3}, \\ Y &= \sum \frac{m\,(b-y)}{r^3}, \\ Z &= \sum \frac{m\,(c-z)}{r^3}. \end{aligned} \tag{1}$$

Das Zeichen $\sum$ ist so zu verstehen, dass der dahinter stehende Ausdruck der Reihe nach für jeden einzelnen anziehenden Massenpunkt gebildet und dann die Summirung der sämmtlichen entstehenden Werthe vorgenommen werden soll. Die Gleichungen (1) zeigen, dass X, Y, Z Functionen von den Coordinaten x, y, z des Punktes sind, in welchem die angezogene Masse sich befindet. Lagrange hat bemerkt, dass diese Functionen X, Y, Z sich ausdrücken lassen als die partiellen Derivirten einer einzigen Function von x, y, z. Es ist nemlich

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{a-x}{r}, \qquad \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} = \frac{a-x}{r^3},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{b-y}{r}, \qquad \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} = \frac{b-y}{r^3},$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{c-z}{r}, \qquad \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} = \frac{c-z}{r^3}.$$

Wenn also die anziehenden Massen in einzelnen getrennt liegenden Punkten concentrirt sind, so hat man

$$X = \sum m \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x},$$

$$Y = \sum m \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y},$$

$$Z = \sum m \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}.$$

Wir bezeichnen mit V die Function

$$V = \sum \frac{m}{r}. \tag{2}$$

Dann zeigt sich, dass X, Y, Z die partiellen Derivirten von V sind:

$$X = \frac{\partial V}{\partial x},\quad Y = \frac{\partial V}{\partial y},\quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}. \tag{3}$$

Die Function V und ihre ersten Derivirten sind endlich und stetig variabel, so lange der angezogene Punkt (x, y, z) in endlicher, wenn auch noch so kleiner, Entfernung von jedem der anziehenden Massenpunkte sich befindet. Fällt er in einen dieser Punkte hinein, so wird in (1) und in (2) einer der Summanden unendlich gross. Die Function V wird dann also unendlich wie $\frac{1}{r}$, und ihre ersten Derivirten werden unendlich wie $\frac{1}{r^3}$.

Wenn die anziehende Masse einen körperlichen Raum stetig ausfüllt, so lauten die Ausdrücke für die Componenten der Anziehung:

$$
(4) \qquad
\begin{aligned}
X &= \int\!\!\int\!\!\int \frac{a-x}{r^3}\,\rho\, da\, db\, dc,\\
Y &= \int\!\!\int\!\!\int \frac{b-y}{r^3}\,\rho\, da\, db\, dc,\\
Z &= \int\!\!\int\!\!\int \frac{c-z}{r^3}\,\rho\, da\, db\, dc.
\end{aligned}
$$

Auch hier sind X, Y, Z die partiellen Derivirten einer Function V, und es gelten die Gleichungen (3). Die Function V ist aber in diesem Falle

$$
(5) \qquad V = \int\!\!\int\!\!\int \frac{\rho\, da\, db\, dc}{r}.
$$

Die Grenzen der Integration in (4) und (5) sind dieselben wie in den Ausdrücken (10) des vorigen Paragraphen.

Die Function V, welche durch die Gleichung (2), resp. durch die Gleichung (5) definirt wird, nennt man die Potentialfunction des anziehenden Massensystems auf den angezogenen Punkt.

Es ist nun leicht, den Satz in Worte zu fassen, der sich in den Gleichungen (3) ausspricht. Er lautet:

Soll die Componente der Anziehung in der Richtung einer der Coordinatenaxen berechnet werden, so hat man den angezogenen Punkt in dieser Richtung um eine unendlich kleine Strecke zu verschieben und die daraus hervorgehende Aenderung der Potentialfunction durch die Grösse der Verschiebung zu dividiren. Der Quotient ist die gesuchte Componente.

Bisher ist über die Lage des Coordinatensystems keine besondere Voraussetzung gemacht. Man kann die Axen legen, wie man will. Handelt es sich also um die Componente der Anziehung in irgend einer Richtung, so braucht man nur ein Coordinatensystem zu Hülfe zu nehmen, von welchem eine Axe dieser Richtung parallel gelegt ist. Auf diese Weise gelangt man zu dem erweiterten Satze:

Soll die Componente der Anziehung in irgend einer Richtung berechnet werden, so hat man den angezogenen Punkt in dieser Richtung um eine unendlich kleine Strecke zu verschieben und die daraus hervorgehende Aenderung der Potentialfunction durch die Grösse der Verschiebung zu dividiren. Der Quotient ist die gesuchte Componente.

Der Fall, dass die anziehende Masse in einzelnen getrennt liegenden Punkten concentrirt ist, wird in der Folge nur ausnahmsweise vorkommen. Bis auf weiteres halten wir die Voraussetzung fest, dass sie einen körperlichen Raum stetig ausfüllt.

§. 3.

Die Gleichung von Laplace.

Wir bilden die zweiten partiellen Derivirten der Function V:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \int\int\int \rho \, da \, db \, dc \left(-\frac{1}{r^3} + 3\frac{(a-x)^2}{r^5}\right),\\
(1)\quad &\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \int\int\int \rho \, da \, db \, dc \left(-\frac{1}{r^3} + 3\frac{(b-y)^2}{r^5}\right),\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \int\int\int \rho \, da \, db \, dc \left(-\frac{1}{r^3} + 3\frac{(c-z)^2}{r^5}\right).
\end{aligned}$$

Daraus findet sich unmittelbar durch Addition

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Diese Gleichung, welche zuerst Laplace*) gefunden hat, wird nach ihm die Gleichung von Laplace genannt.

Sie gilt jedoch nur, wenn der angezogene Punkt ausserhalb der anziehenden Masse liegt. Laplace hielt sie für allgemein gültig. Diesen Irrthum hat Poisson später berichtigt.**)

Liegt nemlich der angezogene Punkt ausserhalb der anziehenden Massen, so ist für jeden Punkt (a, b, c) des mit Masse erfüllten Raumes die Function $\frac{1}{r}$ eine endliche und stetig veränderliche Function von (x, y, z). Dasselbe gilt von allen ihren De-

---

*) Théorie des attractions des Sphéroïdes et de la figure des Planètes. Par M. de la Place. (Histoire de l'Académie des Sciences 1782.)

**) Bulletin de la société philomatique. Tome 3, Page 368. — Ferner: Poisson. Mémoire sur la théorie du magnétisme en mouvement. (Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France. Tome 6, Page 463.) — Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes. (Connaissance des temps. 1829. Page 360.)

rivirten. Ebenso sind die Functionen V, X, Y, Z des vorigen Paragraphen [Gleichungen (4) und (5)] endliche und stetig veränderliche Functionen von (x, y, z). Sollen von der Function V die ersten Derivirten nach x, nach y, nach z gebildet werden, so darf man die Differentiation unter dem Integralzeichen vornehmen, weil ihr Resultat einen durchaus bestimmten endlichen Werth hat. Darauf beruht die Gültigkeit der Gleichungen (3) des vorigen Paragraphen. Auch die Herstellung der zweiten Derivirten und aller Derivirten höherer Ordnung kann durch Differentiation unter dem Integralzeichen ausgeführt werden, weil die Resultate dieser Differentiation bestimmte endliche Werthe haben, die bei einer stetigen Verschiebung des Punktes (x, y, z) sich ebenfalls stetig ändern.

Wenn aber der Punkt (x, y, z) im Innern der anziehenden Masse liegt, so behalten zwar, wie später (§§. 6. 10.) gezeigt werden soll, die durch die Gleichungen (4) und (5) des §. 2 definirten Functionen V, X, Y, Z bestimmte endliche Werthe, und es gelten deshalb auch noch die Gleichungen (3) desselben Paragraphen. Aber die Integrale auf der rechten Seite der Gleichungen (1) des gegenwärtigen Paragraphen haben dann gar keine Bedeutung, weil in einem Element der Integration ein unendlich grosser Factor auftritt. Liegt also der angezogene Punkt (x, y, z) im Innern der anziehenden Masse, so sind die Gleichungen (1) nicht gültig und ebenso wenig die Gleichung (2). Für diesen Fall ist vielmehr eine besondere Untersuchung anzustellen.

§. 4.

Specieller Fall: Anziehung einer Kugelschale, deren Dichtigkeit nur vom Radius vector abhängt.

Wir wollen zunächst die Gleichung von Laplace benutzen, um in einem speciellen Falle die Potentialfunction zu berechnen.

Die anziehende Masse sei stetig vertheilt im Innern einer Kugelschale, d. h. des Raumes zwischen zwei concentrischen Kugelflächen. Den Anfangspunkt der Coordinaten legen wir in den Mittelpunkt der Kugeln. Die Dichtigkeit der anziehenden Masse sei dieselbe in allen Punkten einer zu der Begrenzung concentrischen Kugelfläche. Sie ändere sich nur mit dem Abstande vom Mittelpunkte. Dann ist auch die gesuchte Potentialfunction V nur abhängig von dem Radius vector s, und die partielle Differentialgleichung (2) des vorigen Paragraphen vereinfacht sich zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung.

Es ist

(1) $$s^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und

(2) $$V = F(s).$$

Daraus findet man durch Differentiation

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{ds} \cdot \frac{\partial s}{\partial x}$$

und

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{d^2 V}{ds^2}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \frac{dV}{ds}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}.$$

Berechnet man in derselben Weise $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$, so ergibt sich durch Addition

(3) $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$
$$= \frac{d^2 V}{ds^2}\left\{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2\right\}$$
$$+ \frac{dV}{ds}\left\{\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right\}.$$

Die partiellen Derivirten von s sind aus der Gleichung (1) herzuleiten. Man erhält

$$s\frac{\partial s}{\partial x} = x, \qquad \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + s\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 1,$$
$$s\frac{\partial s}{\partial y} = y, \qquad \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + s\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = 1,$$
$$s\frac{\partial s}{\partial z} = z, \qquad \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 + s\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = 1.$$

Hiernach ergibt sich ohne weiteres

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 = 1,$$
$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{2}{s}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (3) ein, so geht sie über in folgende

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{d^2 V}{ds^2} + \frac{2}{s}\frac{dV}{ds}.$$

Die Gleichung von Laplace lautet demnach hier

$$(4) \qquad \frac{d^2 V}{ds^2} + \frac{2}{s}\frac{dV}{ds} = 0.$$

Dividirt man auf beiden Seiten dieser Differentialgleichung durch $\frac{dV}{ds}$, so lässt eine Integration sich ausführen. Sie ergibt

$$\lg \frac{dV}{ds} + 2 \lg s = \lg \text{const.}$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt:

$$(5) \qquad \frac{dV}{ds} = \frac{\text{const.}}{s^2} = -\frac{\alpha}{s^2}.$$

Dabei ist mit $-\alpha$ die willkürliche Integrationsconstante bezeichnet. Die Gleichung (5) lässt sich unmittelbar weiter integriren. Man erhält

$$(6) \qquad V = \frac{\alpha}{s} + \beta,$$

wobei unter β eine neue Integrationsconstante verstanden ist.

Die Gleichung (6), welche zwei willkürliche Constanten α und β enthält, ist das vollständige Integral der Differentialgleichung (4). Es kommt nur noch darauf an, den Grössen α und β solche Werthe beizulegen, wie das vorliegende Problem sie erfordert. Dabei ist zu unterscheiden, ob die angezogene Masseneinheit in einem Punkte des inneren Hohlraumes sich befindet, oder in dem von anziehender Masse nicht erfüllten Raume ausserhalb.

Die Begrenzungsflächen der anziehenden Masse seien ausgedrückt durch die Gleichungen

$$s = p \quad \text{und resp.} \quad s = q,$$

und es sei $q > p$.

E r s t e n s. Die angezogene Masseneinheit befinde sich in einem Punkte des inneren Hohlraumes, also in einem Punkte, für welchen $s < p$ ist. In diesem Falle berechnen wir zunächst direct die Anziehung, welche die Masseneinheit im Anfangspunkte der Coordinaten erfährt. Zu dem Zwecke denken wir uns die Kugelschale, welche die anziehende Masse enthält, in unendlich dünne Elementarschalen zerlegt. Eine solche, deren Begrenzungsflächen die Radien s und $s + ds$ haben, kann als ein Cylinder mit der kugelförmigen Basis $4 s^2 \pi$ und der Höhe ds angesehen werden. Ihre Masse ist also

$$4 \rho \pi s^2 \, ds.$$

Dividirt man durch s, so ergibt sich die Potentialfunction der Elementarschale auf den Anfangspunkt der Coordinaten. Um die Potentialfunction der gesammten anziehenden Masse zu erhalten, hat man in Beziehung auf s zwischen den Grenzen p und q zu integriren. Diese ist demnach

(7) $$V_0 = 4 \pi \int_p^q \rho \, s \, ds.$$

Das Integral hat einen endlichen Werth, wenn die Dichtigkeit, wie wir voraussetzen, an keiner Stelle unendlich gross ist.

Soll auf der anderen Seite V_0 aus dem vollständigen Integral (6) berechnet werden, so hat man dort $s = 0$ zu setzen. Dadurch würde aber V_0 unendlich gross werden, wenn nicht in (6) die Constante $\alpha = 0$ gesetzt wird. Und da, wie bewiesen, V_0 nicht unendlich gross ist, so muss $\alpha = 0$ sein. Hierdurch geht die Gleichung (6) über in

(8) $$V = \beta.$$

Die Potentialfunction auf einen Punkt im inneren Hohlraume ist also constant, und da ihr Werth für den Anfangspunkt bereits berechnet ist, so hat man überhaupt für jeden Punkt (x, y, z) im inneren Hohlraume

(9) $$V = 4 \pi \int_p^q \rho \, s \, ds.$$

Ist die Dichtigkeit ρ constant, so ergibt sich speciell

(10) $$V = 2 \pi \rho \, (q^2 - p^2).$$

Die Derivirten von V sind gleich Null. Die Kugelschale übt also auf einen Punkt im inneren Hohlraume gar keine Anziehung aus.

Zweitens. Die angezogene Masseneinheit befinde sich in einem Punkte des äusseren Raumes, d. h. in einem Punkte, für welchen $s > q$ ist.

In diesem Falle ist der Werth leicht zu bestimmen, den V annimmt für $s = \infty$. Wenn nemlich wie hier kein Theil der anziehenden Masse in unendlicher Entfernung liegt, so ergibt sich unmittelbar aus der Definition [§. 2, Gleichung (5)], dass $V = 0$ ist für $s = \infty$. Folglich ist jetzt $\beta = 0$. Um α zu bestimmen, stellen wir folgende Betrachtung an.

Der angezogene Punkt, welcher vom Anfangspunkte der Coordinaten um die Strecke s entfernt ist, hat von den einzelnen Punkten der Kugelschale verschiedene Abstände. Der grösste Abstand ist $s + q$, der kleinste $s - q$. Man hat also die doppelte Ungleichung

$$\frac{1}{s-q} > \frac{1}{r} > \frac{1}{s+q}.$$

Wir multipliciren an allen drei Stellen mit $\rho \, da \, db \, dc$ und integriren über die gesammte anziehende Masse. An der mittleren Stelle ist das Resultat $= V$. An den beiden äusseren Stellen kann man die Nenner $s - q$ und $s + q$, die bei der Integration constant bleiben, vor das Integralzeichen nehmen. Beachtet man also, dass

$$\int\int\int \rho \, da \, db \, dc = M,$$

d. h. gleich der gesammten anziehenden Masse ist, so ergibt sich

$$\frac{M}{s-q} > V > \frac{M}{s+q}.$$

Nun ist aber $V = \frac{\alpha}{s}$, folglich

$$\frac{1}{1-\frac{q}{s}} > \frac{\alpha}{M} > \frac{1}{1+\frac{q}{s}}.$$

Diese Ungleichung gilt für jedes s, das grösser als q ist, also auch für $s = \infty$. Sie geht aber für $s = \infty$ über in die Gleichung

$$\frac{\alpha}{M} = 1.$$

Folglich ist die Potentialfunction der Kugelschale von der Masse M in Beziehung auf einen Punkt im äusseren Raume

$$V = \frac{M}{s}. \tag{11}$$

In der Richtung des Radius vector wirkt die Kraft

$$-\frac{M}{s^2},$$

und in jeder Richtung, die zum Radius vector rechtwinklig liegt ($s =$ const.), ist die Componente gleich Null.

Demnach fällt die gesammte Kraft, welche die Kugelschale auf einen Punkt im äusseren Raume ausübt, in die Richtung des Radius vector, und da sie negativ ist, in die Richtung des abnehmenden Radius vector. Es ist also eine anziehende Kraft, und zwar dieselbe, die sich ergeben würde, wenn die gesammte anziehende Masse in dem Mittelpunkte der die Schale begrenzenden Kugelflächen concentrirt wäre.

Die Gleichung (11) behält für einen Punkt im äusseren Raume ihre Gültigkeit auch für $p = 0$, d. h. wenn die anziehende Masse eine volle Kugel ist.

§. 5.

Anziehung einer homogenen Kugel.

Die im vorigen Paragraphen gewonnenen Resultate können dazu dienen, bei constanter Dichtigkeit die Anziehung zu berechnen, welche eine kugelförmige Masse auf einen Punkt im Innern derselben ausübt. Man hat nur zu bemerken, dass die Gleichung (10) für den angezogenen Punkt im inneren Hohlraume und die Gleichung (11) für den angezogenen Punkt im äusseren Raume gültig ist, wie nahe derselbe auch der Begrenzungsfläche der anziehenden Masse liegen möge. Die Gleichungen gelten also selbst dann noch, wenn der angezogene Punkt der Begrenzungsfläche unendlich nahe, oder mit anderen Worten, wenn er auf der Begrenzungsfläche liegt.

Die Oberfläche der anziehenden kugelförmigen Masse habe den Radius q, der angezogene Punkt sei vom Mittelpunkte der Kugel um die Strecke s entfernt, und s sei kleiner als q.

Dann zerlegen wir die anziehende Masse in zwei Theile, nemlich eine mit der Gesammtmasse concentrische Kugel vom Radius s und die Schale, durch welche diese Kugel zu der Gesammtmasse ergänzt wird. Für die Kugel vom Radius s ist der angezogene Punkt im äusseren Raume gelegen, speciell auf der Begrenzungsfläche. Die Potentialfunction ist also nach §. 4, Gleichung (11) zu berechnen. Die Masse M ist hier $= \frac{4}{3} \pi \rho s^3$, folglich die Potentialfunction

$$\frac{4}{3} \pi \rho s^2.$$

Für die Kugelschale liegt der angezogene Punkt im inneren Hohlraume, speciell auf der inneren Begrenzung. Folglich ist die Potentialfunction nach §. 4, Gleichung (10) zu berechnen und s an die Stelle von p zu schreiben.

Die Potentialfunction der gesammten anziehenden Kugel vom Radius q auf einen i n n e r e n Punkt $(s < q)$ ist also

$$V = \frac{4}{3} \pi \rho s^2 + 2 \pi \rho (q^2 - s^2)$$

oder kürzer

$$V = 2 \pi \rho q^2 - \frac{2}{3} \pi \rho s^2. \tag{1}$$

Dagegen ist die Potentialfunction derselben kugelförmigen Masse auf einen ä u s s e r e n Punkt $(s > q)$

$$V = \frac{4 \pi \rho q^3}{3 s}, \tag{2}$$

wie sich unmittelbar aus §. 4, Gleichung (11) ergibt. Der Ausdruck für V ist also durchaus verschieden, je nachdem der angezogene Punkt innerhalb oder ausserhalb der anziehenden Kugel liegt. Ebenso weichen auch die Ausdrücke für die ersten Derivirten ab. Denn es ist für $s < q$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{4}{3} \pi \rho s \frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{4}{3} \pi \rho x, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{4}{3} \pi \rho s \frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{4}{3} \pi \rho y, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{4}{3} \pi \rho s \frac{\partial s}{\partial z} = -\frac{4}{3} \pi \rho z. \end{aligned} \tag{3}$$

Dagegen hat man für $s > q$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{4}{3} \pi \rho q^3 \frac{x}{s^3}, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{4}{3} \pi \rho q^3 \frac{y}{s^3}, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{4}{3} \pi \rho q^3 \frac{z}{s^3}. \end{aligned} \tag{4}$$

Es ist nicht überflüssig zu bemerken, dass für $s = q$ die beiden Ausdrücke für V in (1) und (2) d e n s e l b e n W e r t h geben, und ebenso die Ausdrücke für die gleichnamigen Derivirten in (3) und in (4). Obgleich also die Function V durch zwei ganz verschiedene analytische Ausdrücke dargestellt wird, je nachdem der Punkt (x, y, z) innerhalb oder ausserhalb der anziehenden Masse liegt, so hat sie doch überall einen endlichen Werth, der sich stetig ändert, wenn der Punkt (x, y, z) sich stetig bewegt, auch dann noch, wenn er durch die Oberfläche der anziehenden Masse hindurchgeht. Dasselbe gilt von den ersten Derivirten $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$. Es gilt aber nicht von den zweiten Derivirten. Man erhält nemlich für $s < q$.

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -\frac{4}{3}\pi\rho, & \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= -\frac{4}{3}\pi\rho, & \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= -\frac{4}{3}\pi\rho, & \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Dagegen ergibt sich für $s > q$:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -\frac{4}{3}\pi\rho q^3\left(\frac{1}{s^3} - \frac{3x^2}{s^5}\right), & \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} &= 4\pi\rho q^3\,\frac{yz}{s^5}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= -\frac{4}{3}\pi\rho q^3\left(\frac{1}{s^3} - \frac{3y^2}{s^5}\right), & \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x} &= 4\pi\rho q^3\,\frac{zx}{s^5}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= -\frac{4}{3}\pi\rho q^3\left(\frac{1}{s^3} - \frac{3z^2}{s^5}\right), & \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} &= 4\pi\rho q^3\,\frac{xy}{s^5}. \end{aligned}$$

Hier geben auch für $s = q$ die Ausdrücke der gleichnamigen Derivirten in (5) und in (6) nicht dieselben Werthe. D i e z w e i t e n D e r i v i r t e n v o n V ä n d e r n s i c h a l s o s p r u n g w e i s e, w e n n d e r P u n k t (x, y, z) d u r c h d i e O b e r f l ä c h e d e r a n z i e h e n d e n M a s s e h i n d u r c h g e h t.

Zu bemerken ist noch, dass für $s > q$ sich ergibt

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Dies ist die Gleichung von Laplace, die wir für einen Punkt ausserhalb der anziehenden Masse bereits allgemein bewiesen haben.

Für $s < q$, d. h. wenn der angezogene Punkt innerhalb der anziehenden Kugel liegt, erhalten wir

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho.$$

Diese Gleichung ist hier vorläufig nur für einen Specialfall bewiesen. Der allgemeine Fall soll ausführlich behandelt werden.

§. 6.

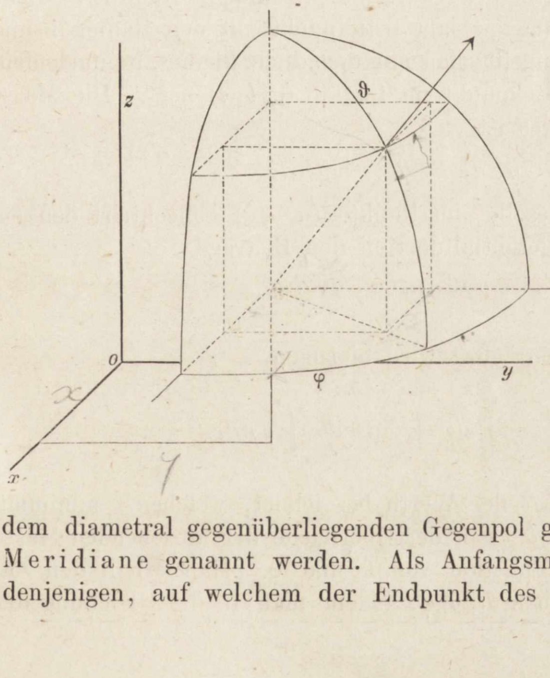
Die Function V und ihre ersten Derivirten für einen inneren Punkt.

Wir kehren zu der allgemeinen Untersuchung der Potentialfunction zurück. Der angezogene Punkt soll im Innern der anziehenden Masse liegen, die über einen körperlichen Raum stetig vertheilt ist. Das Integral

$$(1) \qquad V = \iiint \frac{\rho \, da \, db \, dc}{r},$$

welches in §. 2, Gleichung (5) als Definition der Potentialfunction aufgestellt ist, enthält dann ein Element, für welches $\frac{1}{r}$ unendlich gross ist. Es fragt sich, ob dabei das Integral einen endlichen Werth behält oder nicht. Um diese Frage zu untersuchen, führen wir Kugel-Coordinaten ein. Der Punkt (x, y, z) werde zum Mittelpunkt (**Fig. 3**) einer Kugelfläche vom Radius 1 gemacht. Auf ihr nehmen wir als Pol den Endpunkt desjenigen Radius, welcher parallel zur positiven z Axe läuft. Halbe grösste Kreise, welche vom Pol aus nach dem diametral gegenüberliegenden Gegenpol gezogen sind, sollen Meridiane genannt werden. Als Anfangsmeridian wählen wir denjenigen, auf welchem der Endpunkt des zur positiven x Axe

Fig. 3.



parallelen Radius liegt. Die vom Punkte (x, y, z) nach dem Punkte (a, b, c) gezogene gerade Linie r schneidet die Kugel in einem Punkte, welcher durch seine Poldistanz θ und seine geographische Länge φ eindeutig festgelegt wird. Die Poldistanz des Punktes ist sein sphärischer Abstand vom Pol. Seine geographische Länge ist der sphärische Winkel, welchen sein Meridian mit dem Anfangsmeridian einschliesst. Irgend ein Punkt im Innern der anziehenden Masse wird dann einerseits durch seine rechtwinkligen Coordinaten a, b, c, andererseits durch seine Kugel-Coordinaten r, θ, φ festgelegt. Zur Transformation der Coordinaten dienen die Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} a &= x + r \sin\theta \cos\varphi, \\ b &= y + r \sin\theta \sin\varphi, \\ c &= z + r \cos\theta. \end{aligned}$$

Auf der Kugel vom Radius 1 wählen wir vier Punkte mit den sphärischen Coordinaten

$$(\theta, \varphi), \quad (\theta + d\theta, \varphi), \quad (\theta + d\theta, \varphi + d\varphi), \quad (\theta, \varphi + d\varphi)$$

und ziehen durch sie vom Punkte (x, y, z) aus vier Strahlen, welche die Kanten einer vierseitigen Ecke bilden. Aus dieser Ecke schneiden die um (x, y, z) als Mittelpunkt mit den Radien r und $r + dr$ gelegten Kugelflächen ein unendlich kleines Raumelement aus, dessen einer Eckpunkt im Punkte (a, b, c) liegt. Die Masse dieses Raumelementes ist

$$\rho \,.\, dr \,.\, r\, d\theta \,.\, r \sin\theta\, d\varphi.$$

Man kann sich dieselbe im Punkte (a, b, c) concentrirt denken. Sie liefert zu der Potentialfunction den Beitrag

$$(3) \qquad \frac{\rho\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi}{r}.$$

Die Potentialfunction selbst wird hiernach

$$(4) \qquad V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{R} \rho\, r\, dr.$$

Darin ist mit R der Werth bezeichnet, welchen r annimmt, wenn der Punkt (a, b, c) in der Oberfläche der anziehenden Masse liegt. R ist eine Function von θ und φ. Man erhält den Zusammenhang zwischen R, θ, φ, indem man in die Gleichung der

Oberfläche statt a, b, c die Variabeln r, θ, φ einführt und R für r an die Stelle setzt.

Aus (3) geht hervor, dass man zu der Potentialfunction den Beitrag Null erhält, wenn man den anziehenden Punkt (a, b, c) mit dem angezogenen Punkte zusammenfallen lässt. Damit ist bewiesen, dass V auch dann eine endliche Function von x, y, z ist, wenn der angezogene Punkt im Innern der anziehenden Masse liegt.

Ebenso lässt sich zeigen, dass unter derselben Voraussetzung die Ausdrücke für die Componenten der auf den Punkt (x, y, z) ausgeübten Anziehung bestimmte endliche Werthe geben. Es sind dies die Ausdrücke (4) des §. 2. Sie gehen durch Einführung von Kugel-Coordinaten über in

$$
(5) \qquad
\begin{aligned}
X &= \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta^2 \, d\theta \int_0^R \rho \, dr, \\
Y &= \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta^2 \, d\theta \int_0^R \rho \, dr, \\
Z &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \int_0^R \rho \, dr.
\end{aligned}
$$

Auch hier erhält man zu den Integralen einen unendlich kleinen Beitrag, wenn der anziehende Punkt (a, b, c) mit dem angezogenen Punkte zusammenfällt. Sämmtliche Elemente in den Integralen (5) sind unendlich klein von der dritten Ordnung, auch diejenigen, welche von Massenelementen herrühren, die dem Punkte (x, y, z) unendlich nahe liegen. Daher haben die Integrale bestimmte, endliche Werthe, und die durch sie ausgedrückten Componenten X, Y, Z sind endliche Functionen von x, y, z, auch wenn der angezogene Punkt im Innern der anziehenden Masse sich befindet.

Die Transformation der Coordinaten, welche die Gleichungen (4) und (5) liefert, ist auch dann noch zulässig und führt zu denselben Resultaten, wenn der angezogene Punkt in der Oberfläche des mit Masse erfüllten Körpers liegt. Nur ist zu beachten, dass in diesem Falle das Integrationsgebiet in Beziehung auf θ und φ sich einschränkt, weil nicht für alle Werthe von θ und φ die obere Grenze R von Null verschieden ist.

Damit ist bewiesen, dass die Integrale in den Gleichungen (4) und (5) des §. 2 je einen bestimmten, endlichen Werth liefern, wo auch der Punkt (x, y, z) liegen möge. Die Ausdrücke (4) des §. 2 sind aber die partiellen Differentialquotienten von V, so lange die unter dem Integralzeichen vorgenommene Differentiation bestimmte, eindeutige Resultate liefert. Da dies, wie jetzt bewiesen, unter allen Umständen der Fall ist, so gelten die Gleichungen (3) des §. 2 ganz allgemein, der angezogene Punkt mag ausserhalb oder innerhalb des anziehenden Körpers oder in seiner Oberfläche liegen.

Will man die zweiten partiellen Derivirten $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ dadurch herleiten, dass man in den Ausdrücken [§. 2, (4)] für X, Y, Z die Differentiation unter dem Integralzeichen ausführt, so haben die Resultate nur dann eine bestimmte, klare Bedeutung, wenn der angezogene Punkt ausserhalb des anziehenden Körpers liegt. Denn diese Resultate sind ausgesprochen in den Gleichungen (1) des §. 3. Sie gehen durch Einführung der Kugel-Coordinaten in folgende über

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \int\int\int \rho \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr \left\{\frac{-1 + 3\sin\theta^2 \cos\varphi^2}{r}\right\}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \int\int\int \rho \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr \left\{\frac{-1 + 3\sin\theta^2 \sin\varphi^2}{r}\right\}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= \int\int\int \rho \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr \left\{\frac{-1 + 3\cos\theta^2}{r}\right\}. \end{aligned}$$

Die Integration ist zuerst nach r auszuführen. Liegt der Punkt (x, y, z) im Innern des anziehenden Körpers oder in seiner Oberfläche, so ist die untere Integrationsgrenze gleich Null. An ihr wird die Function unter dem Integral unendlich gross, und das Integral selbst wird unendlich wie $\lg r$ für $r = 0$.

Schliessen wir um den Punkt (x, y, z) herum von dem Gebiete der Integration einen beliebig kleinen Raum aus, dessen Oberfläche den Radius vector ε hat, so bleibt das Integral

$$(7)\qquad \int_{\varepsilon}^{R} \rho \, \frac{dr}{r}$$

vollständig unbestimmt, weil die Oberfläche des ausgeschlossenen

Raumes ganz beliebig gewählt werden kann, oder — was dasselbe sagt — in der Gleichung dieser Oberfläche

$$\varepsilon = f(\vartheta, \varphi)$$

die Function f völlig willkürlich ist. Bezeichnet man mit ρ_1 den grössten, mit ρ_2 den kleinsten Werth, welchen die Dichtigkeit ρ überhaupt annimmt, so findet sich

$$\rho_1 (\lg R - \lg \varepsilon) > \int_\varepsilon^R \rho \frac{dr}{r} > \rho_2 (\lg R - \lg \varepsilon).$$

Der zu grosse und der zu kleine Werth sind unbestimmt, so lange ε endlich bleibt. Fragt man aber nach dem Grenzwerthe für ein unendlich abnehmendes ε, so kann von einem solchen nicht die Rede sein, weil $\lim \lg \varepsilon = -\infty$ ist für $\lim \varepsilon = 0$.

Die Integrale in (6) haben also gar keine Bedeutung, wenn der Punkt (x, y, z) im Innern der anziehenden Masse liegt.

Wollte man in (4) und (5) bei der Integration nach r zunächst ε als untere Grenze nehmen, so fände sich

$$\frac{1}{2} \rho_1 (R^2 - \varepsilon^2) > \int_\varepsilon^R \rho\, r\, dr > \frac{1}{2} \rho_2 (R^2 - \varepsilon^2)$$

und ferner

$$\rho_1 (R - \varepsilon) > \int_\varepsilon^R \rho\, dr > \rho_2 (R - \varepsilon).$$

Auch hier sind die zu grossen und die zu kleinen Werthe unbestimmt, so lange ε endlich bleibt. Diese Unbestimmtheit fällt aber bei unendlich abnehmendem ε weg, weil das von ε Abhängige den Grenzwerth Null hat.

Um die zweiten Derivirten von V auch für den Fall zu ermitteln, dass der angezogene Punkt (x, y, z) im Innern der anziehenden Masse liegt, wollen wir zunächst die Ausdrücke für $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ transformiren und erst nachher die neue Differentiation vornehmen.

§. 7.

Transformation von $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$.

Der Ausdruck für $\frac{\partial V}{\partial x}$ lautet:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int\int\int \frac{a - x}{r^3} \rho \, da \, db \, dc.$$

Nun ist aber, wie man leicht sieht:

$$\frac{a - x}{r^3} = \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} = - \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial a}.$$

Folglich kann man schreiben

$$(1) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = \int\int\int \rho \frac{\partial \left(- \frac{1}{r}\right)}{\partial a} da \, db \, dc.$$

Die dreifache Integration ist über den ganzen mit anziehender Masse erfüllten Raum auszudehnen. Wir bemerken darüber das Folgende. Das Coordinatensystem sei so gelegt, dass für jeden Punkt im Innern und in der Oberfläche der anziehenden Masse die Coordinaten a, b, c positiv sind. Nöthigenfalls lässt sich dies durch parallele Verschiebung der Coordinaten-Ebenen erreichen. In der yz Ebene zeichnen wir ein unendlich kleines Rechteck, dessen Seiten von der Länge db und resp. dc den Axen der y und resp. der z parallel laufen. Der dem Anfangspunkt zunächst gelegene Eckpunkt habe die Coordinaten $0, b, c$. Ueber diesem Rechteck als Basis soll ein gerades Prisma errichtet werden, dessen Seitenkanten parallel zur Axe der x laufen. Die Lage des Punktes $(0, b, c)$ wird so gewählt, dass dieses Prisma den mit Masse erfüllten Raum durchdringt. Wir bezeichnen mit a_1 und resp. a_2 die auf der x Axe gezählten Coordinaten der Eintritts- und der Austrittsstelle. Tritt das Prisma öfter ein und aus, so sollen $a_1, a_3, \dots a_{2n-1}$ die Abscissen der Eintrittsstellen, $a_2, a_4, \dots a_{2n}$ die Abscissen der Austrittsstellen sein, und zwar so, dass

$$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{2n-1} < a_{2n}.$$

Die Bestandtheile des Elementarprisma, welche innerhalb der anziehenden Masse liegen, zerschneiden wir in unendlich viele gerade

Parallelepipeda, jedes vom Inhalte $da\,db\,dc$. Der Inhalt eines solchen Parallelepipedon werde multiplicirt mit dem Werthe, welchen die Function $\rho \frac{\partial\left(-\frac{1}{r}\right)}{\partial a}$ in seinem einen Eckpunkte (a, b, c) hat. Das Product

$$\rho \frac{\partial\left(-\frac{1}{r}\right)}{\partial a} da\,db\,dc$$

ist das Element des Integrals. Die Integration nach a wird ausgeführt, indem man dieses Product für alle parallelepipedischen Bestandtheile des Elementarprisma bildet, welche innerhalb der anziehenden Masse liegen, und sämmtliche Producte addirt. Die Integration nach b und nach c besteht darin, dass man die eben besprochene Summe von Producten für alle Elementarprismen herstellt, welche die anziehende Masse überhaupt treffen, und alle diese Summen wiederum durch Addition verbindet.

Wir wollen zunächst die Integration nach a ausführen. Das unbestimmte Integral

$$\int \rho \frac{\partial\left(-\frac{1}{r}\right)}{\partial a} da.$$

lässt sich umformen durch Integration nach Theilen, nemlich

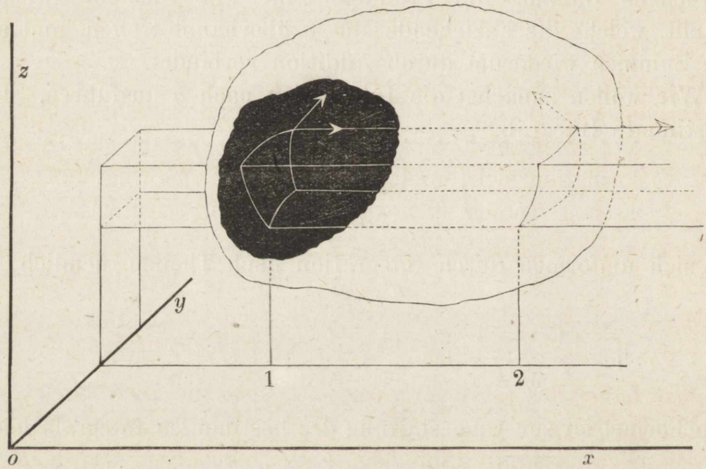
$$(2) \qquad \int \rho \frac{\partial\left(-\frac{1}{r}\right)}{\partial a} da = -\frac{\rho}{r} + \int \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial a} da$$

Diese Formel ist zur Umgestaltung des bestimmten Integrals leicht zu benutzen, wenn die Function $\frac{\rho}{r}$ innerhalb der Integrationsgrenzen überall endlich und stetig ist. Die Integrale auf der linken und auf der rechten Seite der Gleichung (2) sind dann zwischen denselben Grenzen zu nehmen und von dem freien Gliede $-\frac{\rho}{r}$ hat man die Summe aller Werthe an den oberen Grenzen der Integration zu vermindern um die Summe aller Werthe an den unteren Grenzen. Wir bezeichnen die Werthe von ρ und r an den Grenzen der Reihe nach durch Anhängung der betreffenden Indices. Für die Integration nach b und nach c erhält man demnach das Element

$$db\,dc \left\{ \frac{\rho_1}{r_1} - \frac{\rho_2}{r_2} + \frac{\rho_3}{r_3} - + \ldots - \frac{\rho_{2n}}{r_{2n}} \right\} + db\,dc \int \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial a}\, da.$$

Das Integral $\int \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial a}\, da$ ist über alle die Theile des Elementarprisma zu erstrecken, welche innerhalb der anziehenden Masse liegen. Wir bezeichnen nun mit $d\sigma_1, d\sigma_2, \ldots d\sigma_{2n}$ die unendlich kleinen Flächenstücke, welche das Elementarprisma aus der Oberfläche des mit Masse erfüllten Raumes bei seinem Ein- und Austritt herausschneidet und mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n}$ die Winkel, welche die nach dem Innern dieses Raumes zu auf $d\sigma_1, d\sigma_2, \ldots d\sigma_{2n}$ errichteten Normalen mit der Axe der positiven x einschliessen. Es ist zu bemerken, dass die Cosinus dieser Winkel an den Ein-

Fig. 4.



trittsstellen positiv, an den Austrittsstellen negativ sind. (**Fig. 4.**) Demnach findet sich

$$db\,dc = \cos\alpha_1\, d\sigma_1 = \cos\alpha_3\, d\sigma_3 = \ldots = \cos\alpha_{2n-1}\, d\sigma_{2n-1}$$
$$= -\cos\alpha_2\, d\sigma_2 = -\cos\alpha_4\, d\sigma_4 = \ldots = -\cos\alpha_{2n}\, d\sigma_{2n},$$

und das Element der Integration nach b und nach c lautet jetzt

$$\sum \frac{\rho}{r} \cos\alpha\, d\sigma + db\,dc \int \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial a}\, da.$$

Die Summe $\sum \frac{\rho}{r} \cos\alpha\, d\sigma$ bezieht sich auf alle die Stellen, an denen das Elementarprisma in den anziehenden Körper ein- und aus ihm austritt. Führt man nun die Integration nach b und nach c aus, so ergibt sich

$$(3) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = \int \frac{\rho}{r} \cos\alpha \, d\sigma + \int\int\int \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial a} \, da \, db \, dc.$$

Das dreifache Integral auf der rechten Seite ist über den ganzen mit Masse erfüllten Raum, das Integral $\int \frac{\rho}{r} \cos\alpha \, d\sigma$ über seine gesammte Oberfläche zu erstrecken.

Die vorgenommene Transformation ist nur dann zulässig, wenn die Function $\frac{\rho}{r}$ innerhalb des mit anziehender Masse erfüllten Raumes an keiner Stelle unstetig wird. Findet an einzelnen Stellen eine Aenderung sprungweise statt, so hat man von dem Integrationsgebiete zunächst solche Raumtheile auszuschliessen, welche die Unstetigkeitsstellen völlig in sich enthalten. Dann wird man das Integral (1) auf die ausgeschlossenen Raumtheile nicht mit erstrecken und darf deshalb die Transformation vornehmen. Nachher ist die Frage zu beantworten, welchem Grenzwerthe das Resultat der Transformation sich annähert, wenn man die Oberflächen der ausgeschlossenen Gebiete den Unstetigkeitsstellen unendlich nahe rückt.

§. 8.

Fortsetzung.

Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, dass die Dichtigkeit ρ des anziehenden Körpers eine endliche und stetige Function des Ortes sei. Diese Voraussetzung soll jetzt noch beibehalten werden. Liegt der angezogene Punkt ausserhalb der anziehenden Masse, so ist $\frac{\rho}{r}$ für jeden Punkt (a, b, c) in ihrem Innern endlich und stetig, und daher kann man die Transformation des vorigen Paragraphen ohne weiteres vornehmen.

Wenn aber der angezogene Punkt (x, y, z) im Innern der anziehenden Masse liegt, so wird die Function $\frac{\rho}{r}$ für ein Element der Integration unendlich gross. Deshalb machen wir den Punkt (x, y, z) zum Mittelpunkte einer Kugelfläche vom Radius ε und schliessen den von ihr begrenzten inneren Raum zunächst von der

Integration aus. Dadurch wird die Transformation des vorigen Paragraphen zulässig und man erhält

$$(1) \int\int\int \rho \frac{\partial\left(-\frac{1}{r}\right)}{\partial a} da\, db\, dc = \int \frac{\rho}{r} \cos\alpha\, d\sigma + \int\int\int \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial a} da\, db\, dc.$$

Die dreifachen Integrationen erstrecken sich auf den anziehenden Körper mit Ausnahme der den Punkt (x, y, z) enthaltenden Kugel. Das Integral $\int \frac{\rho}{r} \cos\alpha\, d\sigma$ ist auszudehnen über die Oberfläche der anziehenden Masse und über die Oberfläche des ausgeschlossenen kugelförmigen Gebietes. Bezeichnen wir mit ρ_1 den grössten Werth von ρ auf dieser Kugelfläche und beachten, dass $\cos\alpha$ in den äussersten Fällen $= \pm 1$ sein kann, so findet sich, dass der von der Kugel herrührende Beitrag zu dem Oberflächen-Integral einen Werth hat, der absolut genommen kleiner ist als

$$\rho_1 \int \frac{d\sigma}{r},$$

d. h. kleiner als

$$\frac{\rho_1}{\varepsilon} \int d\sigma,$$

oder, was dasselbe sagt, kleiner als

$$4\pi\, \rho_1\, \varepsilon.$$

Folglich wird dieser Beitrag zu Null für $\varepsilon = 0$. Nun behalten aber die dreifachen Integrale in (1) bestimmte, endliche Werthe, wenn man den Radius ε der ausgeschlossenen Kugel zu Null macht. Von dem Integrale links ist dies in §. 6 bewiesen. Für das Integral rechts ergibt sich der Beweis auf demselben Wege, wenn man beachtet, dass $\frac{\partial \rho}{\partial a}$ im Innern des Integrationsgebietes überall endlich ist. Folglich gilt die Gleichung (1) auch dann noch, wenn man die dreifachen Integrale über den ganzen anziehenden Körper erstreckt und das Integral $\int \frac{\rho}{r} \cos\alpha\, d\sigma$ über seine Oberfläche. D. h. die Gleichung (3) des vorigen Paragraphen bleibt gültig, wenn der angezogene Punkt (x, y, z) im Innern der anziehenden Masse liegt. Auf entsprechende Weise kann man auch die Ausdrücke für $\frac{\partial V}{\partial y}$ und $\frac{\partial V}{\partial z}$ transformiren. Bezeichnen α, β, γ die drei Winkel, welche die auf dem Oberflächen-Element $d\sigma$ des anziehenden Körpers nach seinem Innern zu errichtete Normale mit den positiven Coordinatenaxen einschliesst, so lauten die Resultate der Transformation:

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= \int \frac{\rho}{r} \cos\alpha \, d\sigma + \int\int\int \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial a} \, da \, db \, dc, \\
\frac{\partial V}{\partial y} &= \int \frac{\rho}{r} \cos\beta \, d\sigma + \int\int\int \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial b} \, da \, db \, dc, \\
\frac{\partial V}{\partial z} &= \int \frac{\rho}{r} \cos\gamma \, d\sigma + \int\int\int \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial c} \, da \, db \, dc.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen sind gültig, der angezogene Punkt mag ausserhalb oder innerhalb der anziehenden Masse liegen. Denn für beide Fälle ist die Zulässigkeit der Transformation nachgewiesen. Die einzige Bedingung, die erfüllt sein muss, besteht darin, dass die Dichtigkeit der anziehenden Masse im Innern des von ihr erfüllten Raumes eine stetige Function des Ortes sei.

§. 9.

Die zweiten Derivirten von V für einen inneren Punkt.

Nun ist es leicht, die zweiten partiellen Derivirten $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ in einer Form herzustellen, die bestimmte endliche Werthe liefert, der angezogene Punkt mag ausserhalb oder innerhalb der anziehenden Masse liegen. Man erhält

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \int \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} \rho \cos\alpha \, d\sigma + \int\int\int \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial a} \, da \, db \, dc, \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \int \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} \rho \cos\beta \, d\sigma + \int\int\int \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial b} \, da \, db \, dc, \\
\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= \int \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} \rho \cos\gamma \, d\sigma + \int\int\int \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial c} \, da \, db \, dc.
\end{aligned}
$$

Diese Ausdrücke gehen durch Differentiation aus den Gleichungen (2) des vorigen Paragraphen hervor. Auf der rechten Seite ist die Differentiation unter dem Integralzeichen vorgenommen. Das darf geschehen, weil die Integrale, die daraus hervorgehen, durchaus bestimmte, endliche Werthe besitzen. Bei den über die Oberfläche ausgedehnten Integralen auf der rechten Seite der Gleichungen (1) sind nemlich sämmtliche Elemente unendlich klein wie $d\sigma$, weil wir den angezogenen Punkt ausserhalb oder innerhalb der anziehenden Masse in endlicher, wenn auch noch so kleiner, Entfernung von der Oberfläche voraussetzen. Dass die sämmtlichen Elemente der dreifachen Integrale unendlich klein von dritter Ordnung sind, erkennt man ohne weiteres, wenn der Punkt (x, y, z) ausserhalb der anziehenden Masse liegt. Für einen inneren Punkt beweist man es auf dem in §. 6 vorgezeichneten Wege.

Legt man den Punkt (x, y, z) in die Oberfläche des anziehenden Körpers, so behalten die Integrale, durch welche die Function V und ihre ersten Derivirten ausgedrückt sind, bestimmte, endliche Werthe. Anders ist es aber mit den Integralen auf der rechten Seite der eben hergestellten Gleichungen (1). Die dreifachen Integrale haben zwar auch jetzt noch bestimmte, endliche Werthe. Aber die über die Oberfläche ausgedehnten Integrale verlieren alle Bedeutung. Soll also von den Derivirten $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ die Rede sein für einen Punkt (x, y, z) in der Oberfläche des anziehenden Körpers, so ist darüber noch eine besondere Untersuchung anzustellen.

Die Transformation, welche zu den Gleichungen (2) des vorigen Paragraphen geführt hat und also auch für die Gleichungen (1) dieses Paragraphen die Grundlage bildet, ist nur dann zulässig, wenn die Dichtigkeit ρ der anziehenden Masse eine durchweg stetige Function des Ortes ist. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass der anziehende Körper aus einzelnen Bestandtheilen zusammengesetzt ist, so dass in jedem von ihnen die Dichtigkeit endlich und stetig variabel ist, aber beim Uebergange aus einem Bestandtheile in den andern sich sprungweise ändert. Die Trennungsflächen der einzelnen Bestandtheile sind dann Unstetigkeitsstellen der Dichtigkeit. Wir betrachten nun einen Punkt im Innern des anziehenden Körpers. Es ist zu unterscheiden, ob er in endlicher, wenn auch noch so kleiner, Entfernung von den Unstetigkeitsstellen sich befindet oder ob er in eine solche Stelle hineinfällt. Im ersten Falle kann man die anziehende Masse in zwei Bestandtheile zerlegen. Der erste Bestandtheil wird so gewählt, dass er den angezogenen Punkt (x, y, z) in sich enthält, aber keine Unstetigkeitsstelle der Dichtigkeit, und dass der Punkt (x, y, z) nicht in die Begrenzung dieses Bestandtheils fällt. Was nach Ausschluss des ersten Bestandtheils an Masse noch übrig ist, bildet den zweiten Bestandtheil. Er enthält alle Stellen, an denen die Dichtigkeit sich sprungweise ändert. Dem entsprechend zerfällt auch die Potentialfunction V in zwei Bestandtheile

$$V = V_1 + V_2,$$

so dass V_1 nur von dem ersten, V_2 nur von dem zweiten Bestandtheile der anziehenden Masse herrührt. Für den ersten Bestandtheil der Masse ist die Zulässigkeits-Bedingung der Transformation erfüllt. Die Function V_1, ihre ersten und ihre zweiten Derivirten können also durch die Gleichung (4) des §. 6, die Gleichungen (2) des §. 8 und resp. die Gleichungen (1) des §. 9 ausgedrückt werden. Für den zweiten Bestandtheil der anziehenden Masse ist der Punkt (x, y, z) ein äusserer Punkt. Die Function V_2 und ihre Derivirten der ersten und der zweiten Ordnung werden demnach durch die Gleichungen (5) und (4) des §. 2 und resp. die Gleichungen (1) des §. 3 unzweideutig ausgedrückt. Folglich haben auch die Function V und ihre partiellen Derivirten der ersten und der zweiten Ordnung bestimmte, angebbare, endliche Werthe für jede Lage des inneren Punktes $(x; y, z)$, in welcher er in endlicher, wenn auch noch so kleiner, Entfernung von den Unstetigkeitsstellen der Dichtigkeit bleibt.

Fällt aber der Punkt (x, y, z) in eine Unstetigkeitsstelle der Dichtigkeit, so behalten zwar die Function V und ihre ersten Derivirten bestimmte, endliche Werthe. Aber die Ausdrücke für die zweiten Derivirten sind unbestimmt. Denn es ist in diesem Falle nicht möglich, um den Punkt herum einen Raum abzugrenzen, für welchen die Transformation des §. 8 zulässig wäre. Die Integrale auf der rechten Seite der Gleichungen (1) des §. 3 oder der Gleichungen (1) des §. 9 sind dann ohne alle Bedeutung.

Handelt es sich also um die Werthe der zweiten Derivirten $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ für den Fall, dass der angezogene Punkt in eine Unstetigkeitsstelle der Dichtigkeit hineinfällt, so ist jedenfalls noch eine besondere Untersuchung anzustellen.

§. 10.

Stetigkeit der Function V und ihrer ersten Derivirten. Unterbrechungen in der Stetigkeit der zweiten Derivirten.

Die Function V und ihre ersten Derivirten $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ werden durch Integrale ausgedrückt, die — wie bewiesen — je einen bestimmten endlichen Werth haben, wo auch der angezogene Punkt (x, y, z) liegen möge. Dagegen ist von den Integralen, welche die zweiten Derivirten $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ ausdrücken, dieselbe Eigenschaft bis jetzt nur bewiesen, wenn der angezogene Punkt in endlicher, wenn auch noch so kleiner, Entfernung von der Oberfläche des anziehenden Körpers und von den Unstetigkeitsstellen der Dichtigkeit sich befindet. Daraus folgt, dass V im ganzen unendlichen Raume eine stetig veränderliche Function von x, y, z ist, und dass $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ sich stetig ändern, so lange der Punkt (x, y, z) in endlicher, wenn auch noch so kleiner Entfernung von der Oberfläche des anziehenden Körpers und von den Unstetigkeitsstellen der Dichtigkeit bleibt. Wir wollen nun beweisen, dass die ersten Derivirten $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ auch dann noch eine stetige Aenderung erleiden, wenn der Punkt (x, y, z) durch die Oberfläche des anziehenden Körpers oder durch eine Unstetigkeitsstelle der Dichtigkeit hindurchgeht oder in ihnen verschoben wird. Der Beweis soll zunächst für $\frac{\partial V}{\partial x}$ geführt werden.

Der Punkt (x, y, z) liege in einer Fläche, in welcher die Dichtigkeit sich sprungweise ändert, oder in der Oberfläche des anziehenden Körpers. Wir umschliessen ihn mit einer Kugelfläche vom Radius ε und bezeichnen mit T_1 den Raum, welchen diese aus dem anziehenden Körper ausschneidet. Der übrige Theil des anziehenden Körpers sei T_2. Dem entsprechend zerlegen wir auch die Potentialfunction in zwei Bestandtheile

$$V = V_1 + V_2, \tag{1}$$

so dass V_1 nur von der Masse in dem Raume T_1 und V_2 nur von der Masse in dem Raume T_2 herrührt. Für den Raum T_2 ist der Punkt (x, y, z) ein äusserer Punkt, und daher sind die ersten Derivirten $\frac{\partial V_2}{\partial x}$, $\frac{\partial V_2}{\partial y}$, $\frac{\partial V_2}{\partial z}$ stetige Functionen von (x, y, z). Es ist also jedenfalls

(2) $$\lim d\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\right) = 0.$$

Die Derivirte $\frac{\partial V_1}{\partial x}$ wird ausgedrückt durch das Integral

$$\int\int\int \frac{a - x}{r^3} \rho \, da \, db \, dc,$$

wenn man die Integration über den Raum T_1 ausdehnt. Dieses Integral kann — wie bewiesen — nicht unendlich gross werden, wohin man auch den Punkt (x, y, z) im Innern der Kugel vom Radius ε verlegen möge. Es hat vielmehr einen endlichen Werth, der um so kleiner ist, je kleiner ε genommen wird. Man kann demnach ε so klein wählen, dass für jede Lage des angezogenen Punktes im Innern jener Kugel der Werth von $\frac{\partial V_1}{\partial x}$ kleiner bleibt als eine beliebig kleine Grösse δ. Verschiebt man also den Punkt (x, y, z) beliebig im Innern der Kugel vom Radius ε, so wird die Aenderung, welche $\frac{\partial V_1}{\partial x}$ dadurch erfährt, ebenfalls kleiner sein als δ. Man kann aber δ kleiner werden lassen als irgend eine angebbare Zahl. Es ist damit nur eine unendliche Abnahme des Radius ε verbunden.

Folglich ist

(3) $$\lim d\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right) = 0.$$

Aus (3) und (2) ergibt sich ohne weiteres

(4) $$\lim d\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \lim d\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right) + \lim d\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\right) = 0,$$

d. h. $\frac{\partial V}{\partial x}$ ist eine überall stetig variable Function.

Auf demselben Wege wird der Beweis für $\frac{\partial V}{\partial y}$ und $\frac{\partial V}{\partial z}$ geführt. Die Function V und ihre ersten Derivirten sind also überall endliche und stetige Functionen. Sie erleiden unendlich kleine Aenderungen bei einer unendlich kleinen Verschiebung des Punktes (x, y, z), mag diese Verschiebung innerhalb oder ausserhalb oder in der Oberfläche der anziehenden Masse vorgenommen werden oder durch die Oberfläche hindurchführen.

Der Beweis ist noch anwendbar auf die zweiten partiellen Derivirten, aber nur für solche Lagen des Punktes (x, y, z), für welche die Gleichungen (1) des vorigen Paragraphen gelten. D. h. die zweiten partiellen Derivirten ändern sich stetig bei allen Verschiebungen des Punktes (x, y, z) ausserhalb oder innerhalb des anziehenden Körpers, die in endlicher, wenn auch noch so kleiner Entfernung sowohl von der Oberfläche, als auch von den Unstetigkeitsstellen der Dichtigkeit vorgenommen werden.

Errichtet man nun gegen die Oberfläche des anziehenden Körpers in irgend einem Punkte derselben die Normale nach innen und nach aussen, so darf man auf der inneren wie auf der äusseren Normale den Punkt (x, y, z) unendlich nahe an die Oberfläche heranrücken lassen, ohne dass die Functionen V, $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ aufhören, endliche und stetig variable Werthe anzunehmen. Für zwei Lagen des Punktes (x, y, z) auf der inneren und auf der äusseren Normale in unendlich kleinem Abstande von der Oberfläche hat jede der vier Functionen zwei Werthe, die nur unendlich wenig abweichen von dem Werthe, welchen sie in dem Fusspunkte der Normale auf der Oberfläche selbst besitzt. Aus diesem Verhalten der Functionen $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ folgt, dass die zweiten Derivirten von V nicht unendlich gross werden können, wenn der Punkt (x, y, z) auf der inneren oder auf der äusseren Normale unendlich nahe an die Oberfläche heranrückt oder in den Fusspunkt der Normale auf der Oberfläche selbst übergeht. In diesem letztgenannten Punkte verlieren die Ausdrücke, welche wir für die zweiten Derivirten gefunden haben, alle Bedeutung. Das weist darauf hin, dass jede der zweiten Derivirten sich sprungweise ändert, wenn der Punkt (x, y, z) beim stetigen Durchlaufen der Normale durch die Oberfläche des anziehenden Körpers von innen nach aussen oder von aussen nach innen hindurchgeht. In dem Beispiele des §. 5 ist diese Eigenschaft der zweiten Derivirten von V direct nachgewiesen. Sie lässt sich aber für eine beliebig gestaltete Oberfläche des anziehenden Körpers beweisen. Man hat zu dem Ende, was $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ anlangt, die Integrale auf der rechten Seite der Gleichungen (1) des §. 9 für den Fall zu untersuchen, dass der Punkt (x, y, z) auf der äusseren oder auf der inneren Normale unendlich nahe an die Oberfläche heranrückt.

Dabei zeigt sich, dass jedes der drei Raumintegrale für beide Lagen des Punktes (x, y, z) Werthe von unendlich kleiner Differenz besitzt. Die Grenzwerthe der Oberflächen-Integrale haben aber eine endliche Differenz, und zwar sind die Werthe für den inneren Punkt um resp.

$$4\pi\rho\cos\alpha^2, \quad 4\pi\rho\cos\beta^2, \quad 4\pi\rho\cos\gamma^2$$

kleiner, als für den äusseren Punkt. Dabei bezeichnen α, β, γ die Winkel, welche die Richtung der nach innen gezogenen Normale mit den positiven Coordinaten-Axen einschliesst, und ρ ist die Dichtigkeit in dem unendlich nahe an der Oberfläche gelegenen inneren Punkte. Der Beweis dieser Behauptung stützt sich im wesentlichen auf Entwickelungen, welche im §. 15 für einen anderen Zweck vorgenommen werden.

Die Durchführung des Beweises kann hier unterbleiben, da von hauptsächlichem Interesse die unstetige Aenderung der Summe $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ ist, und diese lässt sich mit einfacheren Hülfsmitteln nachweisen (§. 13).

Der anziehende Körper werde durch eine innere Scheidungsfläche in zwei getrennte Räume zerlegt, so dass die Dichtigkeit sich stetig ändert in jedem einzelnen der beiden Räume, aber sprungweise beim Durchgange durch die Scheidungsfläche. Errichtet man dann in irgend einem Punkte dieser Fläche nach beiden Seiten hin die Normale und lässt auf ihr von beiden Seiten her den Punkt (x, y, z) unendlich nahe an die Scheidungsfläche heranrücken, so wird jede der zweiten Derivirten von V sich einem bestimmten endlichen Grenzwerthe unaufhörlich annähern. Aber der Grenzwerth irgend einer von den zweiten Derivirten in unendlich kleinem Abstande von der Scheidungsfläche ist auf der einen Seite verschieden von dem Grenzwerthe auf der anderen Seite. Jede von den zweiten Derivirten ändert sich sprungweise, wenn der Punkt (x, y, z) beim stetigen Durchlaufen der Normale durch jene Fläche hindurchgeht. In der Scheidungsfläche selbst sind die Ausdrücke für die zweiten Derivirten von V ohne alle Bedeutung.

Nach dieser Orientirung über das Verhalten der zweiten Derivirten kommt es darauf an, die Summe

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

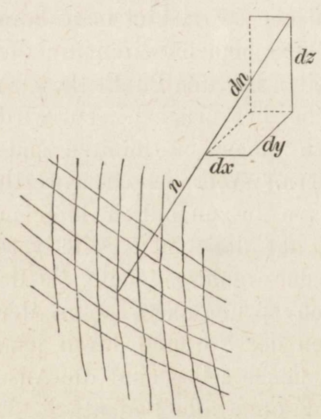
für einen Punkt (x, y, z) im Innern des mit Masse erfüllten Körpers zu ermitteln. Wir gelangen dazu mit Hülfe eines von Gauss aufgestellten allgemeinen Satzes, welcher zunächst entwickelt werden soll.

§. 11.

Das Oberflächen-Integral $\int \frac{1}{r^2} \cos(rn)\, d\sigma$. Satz von Gauss.

Wir bezeichnen mit T einen beliebig, aber vollständig begrenzten Raum und mit $d\sigma$ ein Element seiner Oberfläche. In irgend einem Punkte dieses Oberflächen-Elementes errichten wir nach dem Innern des Raumes T die Normale und nehmen auf ihr einen Punkt (x, y, z), welcher von dem Fusspunkte der Normale den Abstand n hat. Es lassen sich dann zwei veränderliche Grössen q und s so wählen, dass sie in irgend einem Punkte der Oberfläche je einen und nur einen Werth haben, und dass umgekehrt zu einer bestimmten Werthen-Combination von q und s jedesmal nur ein bestimmter Punkt der Oberfläche gehört. Die Lage des Punktes (x, y, z) lässt sich dann auch dadurch angeben, dass man sagt, welche Werthe die Grössen q und s im Fusspunkte der Normale haben und wie lang die Strecke n auf der Normale ist. Man hat also jede der drei Coordinaten x, y, z als eine Function von den drei unabhängigen Variabeln q, s, n anzusehen. Lässt man q und s ihre Werthe beibehalten und ertheilt der dritten Variabeln den Zuwachs dn, so erhält man auf derselben Normale einen zweiten Punkt, dessen rechtwinklige Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sind (**Fig. 5**), und es ist hier speciell $dx = \frac{\partial x}{\partial n} dn$, $dy = \frac{\partial y}{\partial n} dn$, $dz = \frac{\partial z}{\partial n} dn$. Man erkennt leicht,

Fig. 5.



dass dx, dy, dz die Projectionen von dn auf den rechtwinkligen Coordinatenaxen sind. Bezeichnet man also mit (xn), (yn), (zn) die Winkel, welche die Richtung der Normale mit den positiven Richtungen der x, der y, der z einschliesst, so ergibt sich

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \cos(xn), \qquad \frac{\partial y}{\partial n} = \cos(yn), \qquad \frac{\partial z}{\partial n} = \cos(zn).$$

Wir denken uns nun die gesammte anziehende Masse, die gleich der Einheit genommen werden möge, in einem Punkte (a, b, c) concentrirt, der entweder innerhalb oder ausserhalb oder in der Oberfläche des Raumes T liegen soll. Der Punkt (a, b, c) übt auf den Punkt (x, y, z) eine Anziehung, deren Componente in der Richtung der wachsenden n mit N bezeichnet werden möge. Man findet

$$(1) \qquad N = \frac{1}{r^2} \cos(rn),$$

wenn r den Abstand des Punktes (x, y, z) von dem Punkte (a, b, c) bezeichnet, also

$$(2) \qquad r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2.$$

Die Linie r ist von dem Punkte (x, y, z) nach dem Punkte (a, b, c) hingezogen, und unter (rn) ist der Winkel zu verstehen, welchen diese Richtung mit der Richtung der wachsenden n einschliesst. Für den Cosinus dieses Winkels ergibt sich

$$\cos(rn) = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial n}.$$

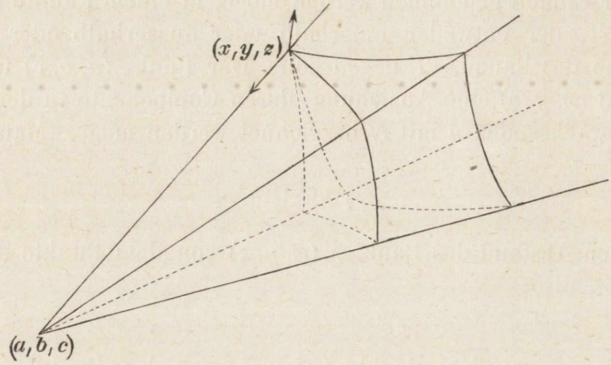
Mit $d\sigma$ soll ein Element der Oberfläche von T bezeichnet werden, und der Punkt (x, y, z) soll in der Begrenzungslinie dieses Elementes liegen, so dass für ihn $n = 0$ ist. Es handelt sich darum, den Werth des Integrals

$$(3) \qquad \int N\, d\sigma = \int \frac{1}{r^2} \cos(rn)\, d\sigma$$

zu ermitteln, wenn die Integration über die ganze Oberfläche von T erstreckt wird. Zu dem Ende betrachten wir $d\sigma$ als die Basisfläche eines Kegels, dessen Spitze im Punkte (a, b, c) liegt. Die conische Oberfläche wird dadurch erzeugt, dass man einen von (a, b, c) ausgehenden beweglichen Radius vector längs der Begrenzung von $d\sigma$ hingleiten lässt. Beschreibt man nun (**Fig. 6.**) um (a, b, c) als Mittelpunkt mit dem Radius r eine Kugelfläche, so schneidet der eben construirte Kegel aus ihr ein Flächenelement heraus, welches als die rechtwinklige Projection von $d\sigma$ angesehen werden kann. Denn wegen der unendlich kleinen Dimensionen darf man sowohl $d\sigma$, wie das Element der Kugelfläche als ebene

Flächen ansehen. Die Erzeugenden des Kegels sind dann die projicirenden Strahlen. Sie stehen als Radien sämmtlich rechtwinklig

Fig. 6.



auf der Kugelfläche. Man erhält also das Element der Kugelfläche, indem man $d\sigma$ mit dem Cosinus des spitzen Winkels multiplicirt, welchen die im Punkte (x, y, z) errichteten Normalen der Kugel und des Flächenelementes $d\sigma$ einschliessen, d. h. mit dem absoluten Werthe von $\cos(r\,n)$. Das Element, welches der Kegel aus der Kugelfläche vom Radius r ausschneidet, ist demnach

$$\pm\, d\sigma \,.\, \cos(r\,n),$$

und es gilt das negative oder das positive Zeichen, je nachdem der von (a, b, c) ausgehende Radius vector an der Stelle (x, y, z) in den Raum T eintritt oder aus ihm austritt. Die Richtigkeit dieser Vorzeichen-Bestimmung ist leicht einzusehen. Die Richtung der wachsenden n schliesst nemlich spitze Winkel ein mit allen geraden Linien, die vom Punkte (x, y, z) aus nach dem Innern des Raumes T gezogen werden, und stumpfe Winkel mit allen Linien, die vom Punkte (x, y, z) nach aussen gehen. Der von (a, b, c) nach (x, y, z) gezogene Radius vector ist aber der Richtung von r gerade entgegengesetzt.

Legt man nun um den Punkt (a, b, c) als Mittelpunkt eine zweite Kugelfläche mit der Längeneinheit als Radius, so schneidet aus dieser der Kegel ein Element $d\Sigma$ heraus, dessen Inhalt sich berechnet

$$d\Sigma = \pm \frac{1}{r^2} \cos(r\,n)\, d\sigma. \tag{4}$$

Der eben betrachtete Kegel kann die Oberfläche des Raumes T öfter treffen. Dann ist $d\Sigma$ die centrale Projection aller ausgeschnittenen Oberflächen-Elemente, und es ist in der Gleichung (4) das negative oder das positive Vorzeichen gültig, je nachdem das Element $d\sigma$ an einer Eintritts- oder an einer Austrittsstelle liegt.

Der Punkt (a, b, c) befinde sich zunächst im Innern des Raumes T. Dann tritt der Kegel einmal öfter aus als ein.

Jede Austritts- und jede Eintrittsstelle liefert einen Beitrag zu dem Integral (3), und zwar sieht man aus Gleichung (4), dass dieser Beitrag gleich $+d\Sigma$ ist an allen Austrittsstellen und gleich $-d\Sigma$ an allen Eintrittsstellen. Der Inbegriff aller Beiträge, welche die durch den Kegel ausgeschnittenen Oberflächen-Elemente liefern, ist demnach

$$= d\Sigma.$$

Denn der Beitrag jeder Eintrittsstelle hebt den Beitrag der vorhergehenden Austrittsstelle auf und es bleibt nur der Beitrag der letzten Austrittsstelle übrig. Der Werth des Integrals (3) ist also

$$= \int d\Sigma, \tag{5}$$

wenn man das letztere über alle die Stellen der Kugel vom Radius 1 erstreckt, welche Projectionen von Oberflächen-Elementen des Raumes T sind. Da aber der Punkt im Innern des Raumes T liegt, so kann der Elementarkegel durch kein Element der Kugelfläche vom Radius 1 hindurchgehen, ohne irgendwo auch die Oberfläche von T zu durchschneiden. D. h. das Integral (5) ist über die ganze Kugelfläche zu erstrecken, und folglich hat man

$$\int \frac{1}{r^2} \cos(rn)\, d\sigma = 4\pi, \tag{6}$$

wenn der Punkt (a, b, c) im Innern des Raumes T liegt.

Nimmt man aber zweitens den Punkt (a, b, c) ausserhalb des Raumes T, so trifft der Elementarkegel die Oberfläche von T entweder gar nicht, oder er tritt ebenso oft aus wie ein. Jede Eintrittsstelle liefert zu dem Integral (3) auch hier den Beitrag $-d\Sigma$, und jede Austrittsstelle den Beitrag $+d\Sigma$. Folglich heben sich die Beiträge auf, welche von jedem einzelnen Elementarkegel herrühren, und man hat

$$(7) \qquad \int \frac{1}{r^2} \cos(rn)\, d\sigma = 0,$$

wenn der Punkt (a, b, c) ausserhalb des Raumes T liegt.

Wenn drittens der Punkt (a, b, c) in der Oberfläche des Raumes T genommen wird, und zwar an einer stetig gekrümmten Stelle, so zerschneidet die Tangentialebene dieses Punktes die Kugelfläche vom Radius 1 in zwei Halbkugeln. Die eine Halbkugel wird von allen den Elementarkegeln getroffen, deren Erzeugende anfänglich innerhalb des Raumes T verlaufen. Die andere Halbkugel wird von allen den Elementarkegeln getroffen, deren Erzeugende anfänglich ausserhalb des Raumes T liegen. Rücksichtlich der ersteren ist der Punkt (a, b, c) anzusehen als innerhalb des Raumes T liegend, rücksichtlich der letzteren als ausserhalb liegend. Folglich erhält man

$$(8) \qquad \int \frac{1}{r^2} \cos(rn)\, d\sigma = 2\pi.$$

wenn der Punkt (a, b, c) an einer stetig gekrümmten Stelle der Oberfläche des Raumes T sich befindet.

Liegt endlich der Punkt (a, b, c) in einer Kante oder einer Spitze der Oberfläche von T, so sieht man leicht, dass das Integral (3) gleich demjenigen Theil der Kugelfläche vom Radius 1 ist, für welchen die schneidenden Elementarkegel anfänglich innerhalb des Raumes T liegen. Um die Begrenzung dieses Flächentheils zu finden, braucht man nur im Punkte (a, b, c) den Tangentenkegel der Oberfläche von T zu construiren. Diese Kegelfläche schneidet die Kugel in der gesuchten Begrenzungslinie.

Der Satz dieses Paragraphen rührt von Gauss her. Soweit er sich in den Gleichungen (6), (7), (8) ausspricht, bildet er das Theorema 4 der Abhandlung: Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata.*) Den letzten Zusatz hat Gauss später gemacht im 22. Artikel der Abhandlung: Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte.**)

---

*) Commentationes Societ. reg. Gotting. recent. Vol. 2. Gottingae 1813. — Carl Friedrich Gauss' Werke. Bd. 5. Göttingen 1867.

**) Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839. Herausgegeben von Gauss und Weber. Leipzig 1840. — Gauss' Werke. Bd. 5. Göttingen 1867.

§. 12.

Das Oberflächen-Integral $\int N\,d\sigma$. Satz von Gauss.

Wir wollen das Resultat des vorigen Paragraphen verallgemeinern. Vorab werde folgende Bemerkung gemacht. Wir haben einen beliebig, aber vollständig begrenzten Raum betrachtet und ihn mit T bezeichnet. Ein Element dieses Raumes soll nun mit dT bezeichnet werden. Der Ausdruck für dT ist ein anderer, je nachdem man andere Coordinaten nimmt. So hat man z. B.

$$dT = dx\,dy\,dz$$

für rechtwinklige Coordinaten, dagegen

$$dT = r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

für Kugel-Coordinaten.

Ein Flächen-Element wollen wir mit $d\sigma$ bezeichnen und ein Linien-Element mit ds. Die Ausdrücke für $d\sigma$ und für ds sind ebenfalls abhängig von der Wahl der Coordinaten.

Bisher ist fast ausschliesslich der Fall betrachtet, dass die anziehende Masse über einen Raum von drei Dimensionen stetig vertheilt ist, und dass nur in einem Raume von endlicher Grösse sich eine endliche Masse befindet. Der Allgemeinheit wegen sollen aber auch die beiden abstracten Fälle mit berücksichtigt werden, dass die Masse in einer Fläche oder in einer Linie stetig ausgebreitet ist, und dass in einer Fläche von endlicher Grösse oder resp. in einer Linie von endlicher Grösse eine endliche Masse zu finden ist. Bezeichnet man mit dm ein Massenelement und mit ρ die Dichtigkeit, so hat man

$$dm = \rho\,dT^* \tag{1}$$

bei räumlicher Vertheilung der Masse; dagegen

$$dm = \rho\,d\sigma^* \tag{2}$$

bei der Vertheilung auf einer Fläche; und endlich

$$dm = \rho\,ds^* \tag{3}$$

bei der Vertheilung auf einer Linie. Dabei ist resp. mit dT^*, $d\sigma^*$, ds^* ein Element des Raumes, oder der Fläche oder der Linie bezeichnet, über welche die Masse vertheilt ist. Jedenfalls ist die Componente der Anziehung, welche auf den Punkt (x, y, z) in der Richtung der wachsenden n ausgeübt wird:

$$(4) \qquad N = \int \frac{1}{r^2} \cos(rn)\, dm.$$

Wir wollen nun wieder den Punkt (x, y, z) in die Oberfläche eines beliebig, aber völlig, begrenzten Raumes T legen und das Integral

$$\int N\, d\sigma$$

über die ganze Oberfläche von T erstrecken. Es ist

$$\int N\, d\sigma = \int d\sigma \left\{ \int \frac{1}{r^2} \cos(rn)\, dm \right\}$$

oder, wenn man in der umgekehrten Reihenfolge integrirt:

$$\int N\, d\sigma = \int dm \left\{ \int \frac{1}{r^2} \cos(rn)\, d\sigma \right\}.$$

Wir haben aber im vorigen Paragraphen bewiesen, dass das Integral

$$\int \frac{1}{r^2} \cos(rn)\, d\sigma$$

den Werth 0 oder 4π hat, je nachdem der Punkt (a, b, c), in welchem das Massenelement dm concentrirt gedacht wird, ausserhalb oder innerhalb des Raumes T liegt. Folglich ist

$$\int N\, d\sigma = \int 4\pi\, dm,$$

und man hat die Integration rechts nur über die Massenelemente zu erstrecken, welche innerhalb T liegen. Bezeichnet man mit M die gesammte Masse, welche innerhalb T liegt, so ergibt sich

$$(5) \qquad \int N\, d\sigma = 4\pi M.$$

Dies Resultat bezieht sich auf den Fall, dass die anziehende Masse über einen Raum oder über eine Fläche oder über eine Linie vertheilt ist, und dass ein endlicher Theil davon in das Innere des Raumes T fällt, in den beiden letzten Fällen aber kein endlicher Theil in die Oberfläche von T.

Ist die Masse M über eine Fläche oder eine Linie ausgebreitet, die nicht im Innern des Raumes T, sondern in seiner stetig gekrümmten Oberfläche liegt, so erhält man

$$(6) \qquad \int N\, d\sigma = 2\pi M.$$

Ist die Masse M über eine Kante der Oberfläche von T vertheilt, so hat man sie in Linienelemente zu zerlegen. Die Masse dm eines solchen Linienelementes kann man sich in einem Punkte (a, b, c) desselben concentrirt denken. Für diesen Punkt hat man das Integral

$$\int \frac{1}{r^2} \cos(rn)\, d\sigma \tag{7}$$

nach Anleitung des vorigen Paragraphen zu ermitteln. Der Werth des Integrals ist mit dm zu multipliciren und hierauf eine neue Integration über die mit Masse erfüllte Kante auszuführen.

Wenn endlich die Masse M in einem Punkte concentrirt ist, der entweder an einer stetig gekrümmten Stelle oder in einer Kante oder Spitze der Oberfläche von T liegt, so hat man wieder den Werth des Integrals (7) nach dem Satze des vorigen Paragraphen zu ermitteln und diesen mit M zu multipliciren.

Beispielsweise sei der Raum T ein rechtwinkliges Parallelepipedon. Befindet sich in seinem Innern die endliche Masse M, dagegen keine Masse in der Oberfläche, so ist

$$\int N\, d\sigma = 4\pi M.$$

Ist die Masse M über die Oberfläche ausgebreitet, aber im Innern und in den Kanten und Ecken keine endliche Masse vorhanden, so hat man

$$\int N\, d\sigma = 2\pi M.$$

Ist die Masse M allein über die Kanten vertheilt, so findet sich

$$\int N\, d\sigma = \pi M.$$

Wenn endlich nur in den Eckpunkten sich Masse befindet, deren gesammtes Quantum $= M$ ist, so ist

$$\int N\, d\sigma = \frac{1}{2}\pi M.$$

Es ist nicht unwichtig, hier noch eine Bemerkung zu machen. Versteht man unter V die Potentialfunction der anziehenden Masse auf den Punkt (x, y, z), so hat man

$$V = \int \frac{dm}{r}. \tag{8}$$

Für jede Lage des Punktes (x, y, z), in welcher die Componente der Anziehung N einerseits, der Differentialquotient $\frac{\partial V}{\partial n}$ andererseits je einen bestimmten Werth haben, ist

$$N = \frac{\partial V}{\partial n}. \tag{9}$$

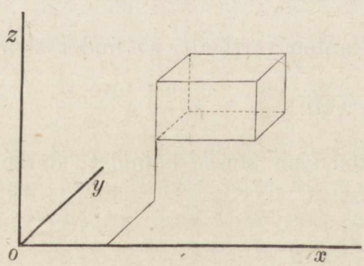
Trifft dies an jeder Stelle der Oberfläche von T ein, so kann man in dem Satze dieses Paragraphen statt $\int N\, d\sigma$ auch schreiben $\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma$. Es trifft ein, wenn kein endlicher Theil der Masse in der Oberfläche von T gelegen ist. Wir werden aber im §. 14 sehen, dass es nicht mehr eintrifft, wenn eine endliche Masse in der Oberfläche von T vertheilt ist. Es muss aber betont werden, dass der Satz dieses Paragraphen sich auf die Componente der Anziehung bezieht. Der Satz rührt von Gauss her.*)

§. 13.

Die Gleichung: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho$.

Die Masse sei in einem Raume von drei Dimensionen stetig vertheilt. Im Innern dieses Raumes betrachten wir ein gerades Parallelepipedon, von welchem ein Eckpunkt, dem Anfangspunkte zunächst gelegen, die Coordinaten x, y, z hat. Die von diesem Eckpunkte (**Fig. 7**) ausgehenden Kanten von der Länge dx, dy, dz sollen den rechtwinkligen Coordinatenaxen parallel laufen. Auf dieses Parallelepipedon wenden wir den Satz des vorigen Paragraphen an. Rechtwinklig zur Axe der x liegen zwei Seitenflächen, jede vom Inhalt $dy\, dz$, die eine im Abstande x, die andere im Abstande $x + dx$ von der yz Ebene. Für die erste ist

Fig. 7.



$$N = \frac{\partial V}{\partial x},$$

*) Allgemeine Lehrsätze etc. Art. 22.

für die andere

$$N = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x+dx}.$$

Folglich liefern die beiden eben betrachteten Flächen zu dem Integral

(1) $$\int N\,d\sigma$$

den Beitrag

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx\,dy\,dz.$$

Ebenso findet sich

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\,dx\,dy\,dz$$

als der Beitrag, welchen die beiden zur y Axe rechtwinkligen Begrenzungsflächen liefern, und

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\,dx\,dy\,dz$$

als der Beitrag, welcher von den beiden zur z Axe rechtwinkligen Begrenzungsflächen herrührt. Das Integral (1), über die ganze Begrenzung des Parallelepipedon erstreckt, hat also den Werth

(2) $$-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz.$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ je einen bestimmten endlichen Werth haben, dass also der Punkt (x, y, z) weder in der Oberfläche des anziehenden Körpers noch in einer Unstetigkeitsstelle der Dichtigkeit liege.

Nach dem Satze des vorigen Paragraphen ist das Integral (1) gleich

(3) $$4\pi\rho\,dx\,dy\,dz,$$

wenn mit ρ die Dichtigkeit im Punkte (x, y, z) bezeichnet wird. Folglich erhält man aus (2) und (3)

(4) $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho.$$

Dies ist die Verallgemeinerung des Satzes von Laplace. Wir haben sie an einem Beispiele bereits in §. 5, Gleichung (8) kennen gelernt. Hier ist sie für jeden Punkt (x, y, z) bewiesen, der innerhalb eines beliebig gestalteten, mit Masse erfüllten Raumes liegt, nur nicht in der Oberfläche und nicht in einer Unstetigkeitsstelle der Dichtigkeit.

§. 14.

Die anziehende Masse ist über eine Fläche ausgebreitet. Die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+\varepsilon} - \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{-\varepsilon} = -4\pi\rho.$$

Wir betrachten den abstracten Fall, dass die Masse über eine Fläche stetig vertheilt ist. Ein Punkt der Fläche habe die Coordinaten a, b, c. Die Dichtigkeit an dieser Stelle sei ρ. Wir verstehen darunter den Quotienten, der sich ergibt, wenn die Masse des an (a, b, c) anstossenden Flächen-Elementes $d\sigma$ durch den Inhalt dieses Elementes dividirt wird. Die Dichtigkeit soll in keinem Punkte der Fläche unendlich gross sein und, wenn nichts anderes ausdrücklich gesagt ist, sich überall stetig ändern. Dann haben wir

(1) $$V = \int \frac{\rho\, d\sigma}{r},$$

und die Integration ist über die ganze anziehende Fläche zu erstrecken.

Liegt der angezogene Punkt (x, y, z) ausserhalb der anziehenden Fläche in endlichem, wenn auch noch so kleinem Abstande von derselben, so haben V und ihre Derivirten bestimmte, endliche Werthe, und die Untersuchung bietet nichts neues dar. Wir wenden uns deshalb zu dem Falle, dass der Punkt (x, y, z) in der anziehenden Fläche selbst liegt, oder dass er auf der Normale von der einen oder von der anderen Seite in die Fläche hineinrückt.

Von jedem Punkte der Fläche aus verläuft die unbegrenzte Normale nach zwei entgegengesetzten Richtungen, die wir als positiv und negativ unterscheiden. Ist für irgend einen Punkt der Fläche festgesetzt, nach welcher Seite hin die Normale positiv genannt werden soll, so hat man damit über die positiven Normalen aller anderen Punkte der Fläche entschieden. Verschiebt man nemlich die positive Normale eines Punktes so, dass ihr Fusspunkt in der Fläche sich bewegt und sie selbst stets normal zur Fläche bleibt, so fällt sie der Reihe nach mit den positiven Normalen aller der Punkte zusammen, welche ihr Fusspunkt in der Fläche durchläuft. Um einen Punkt herum, in welchem die Fläche stetig gekrümmt ist, kann man auf derselben immer in endlichem Abstande eine Begrenzung so zeichnen, dass die positiven Normalen aller Punkte des umgrenzten Gebietes spitze Winkel mit einander bilden.

Auf der unbegrenzten Normale einer Fläche wollen wir von dem Fusspunkte aus eine veränderliche Strecke mit p bezeichnen. Die Grösse p ist positiv oder negativ, je nachdem die Strecke von dem Fusspunkte aus auf der positiven oder auf der negativen Normale abgetragen ist. Auf jeder Normale gibt es hiernach nur eine Richtung der wachsenden p, und in dieser Richtung ist der positive Zuwachs dp zu rechnen.

Wir legen nun den Anfangspunkt der Coordinaten in den Punkt der Fläche, in welchen der angezogene Punkt hineinrücken soll. Die Axe der positiven x werde in die positive Normale gelegt, die Axen der y und der z in die Tangentialebene. Es sei α der Winkel, welchen die auf $d\sigma$ errichtete positive Normale mit der Axe der positiven x einschliesst. Um den Anfangspunkt der Coordinaten herum grenzen wir ein endliches Gebiet der Fläche so ab, dass innerhalb desselben $\frac{\rho}{\cos\alpha}$ endlich und stetig variabel ist. Der Theil der Potentialfunction V, welcher von diesem Gebiete herrührt, werde mit V_1, der übrige Theil mit V_2 bezeichnet. Für die anziehende Masse, von welcher V_2 herrührt, ist der Punkt (x, y, z) ein äusserer und daher ist die Function V_2 mit allen ihren Derivirten endlich und stetig variabel. Es kömmt also nur noch auf V_1 an.

In der yz Ebene führen wir Polar-Coordinaten ein, so dass

$$b = s\cos\psi,$$
$$c = s\sin\psi.$$

Für einen Punkt (a, b, c) innerhalb des Gebietes, welches den Anfangspunkt der Coordinaten in sich enthält, kann man ein angrenzendes Flächenelement ausdrücken durch

$$\frac{s\,ds\,d\psi}{\cos\alpha}.$$

Alsdann findet sich

$$(2) \qquad V_1 = \int\int \frac{\rho}{\cos\alpha}\,\frac{s}{r}\,ds\,d\psi.$$

Das Gebiet, von welchem V_1 herrührt, habe in der yz Ebene eine Kreisfläche vom Radius S zur Projection. Dann ist in (2) die Integration von 0 bis S in Beziehung auf s und von 0 bis 2π in Beziehung auf ψ auszudehnen. Nun lässt sich leicht zeigen, dass V_1 einen bestimmten, endlichen Werth hat. Denn zunächst ist die Function $\frac{\rho}{\cos\alpha}\frac{s}{r}$ innerhalb der Integrationsgrenzen überall endlich. Für $s = 0$ wird freilich auch $r = 0$, wenn man den angezogenen Punkt auf der Normale des Anfangspunktes der Coordinaten in diesen selbst hineinrücken lässt. Aber der Bruch $\frac{s}{r}$ kann in die Form gebracht werden

$$\frac{s}{r} = \frac{s}{\sqrt{(a-x)^2 + s^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a-x}{s}\right)^2}}.$$

Für $s = 0$ ist auch $a = 0$. Lassen wir nun auch x in Null übergehen, so nimmt der positive Bruch $\left(\frac{a-x}{s}\right)^2$ die Form $\frac{0}{0}$ an. Welchen Werth er aber auch haben möge, so sieht man doch, dass $\frac{s}{r}$ nicht unendlich werden kann. Die Function unter dem Integralzeichen in (2) ist also innerhalb des Integrationsgebietes überall endlich, und deshalb hat auch das Integral V_1 einen durchaus bestimmten endlichen Werth.

Behält man auf der Fläche dasselbe abgegrenzte Gebiet, von welchem die Potentialfunction V_1 herrührt, bei, lässt aber den angezogenen Punkt von aussen her an eine andere Stelle dieses Gebiets rücken, so nimmt auch V_1 einen anderen, jedenfalls aber einen bestimmten, endlichen Werth an. Es lässt sich demnach eine Grösse δ angeben, die nicht unendlich gross ist und so beschaffen, dass

$$V_1 < \delta,$$

an welcher Stelle des abgegrenzten Gebietes der angezogene Punkt liegen möge. Wird dieser Punkt unendlich wenig in der Fläche verschoben, so gilt für die dadurch entstehende Aenderung dV_1 um so mehr die Ungleichung

$$dV_1 < \delta,$$

Die Grösse δ lässt sich aber kleiner und kleiner machen und dem Grenzwerthe Null unaufhörlich annähern. Dazu hat man nur nöthig, den Radius S unaufhörlich abnehmen zu lassen. Folglich ist

$$\lim dV_1 = 0.$$

Von V_2 ist schon oben nachgewiesen, dass es endlich und stetig variabel ist. Folglich ist auch

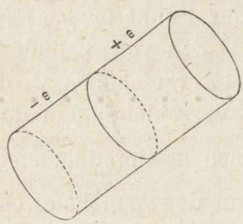
$$\lim dV = \lim dV_1 + \lim dV_2 = 0,$$

d. h. die Function V ist endlich, wenn auch der Punkt (x, y, z) in die anziehende Fläche hineinfällt, und der Werth von V ändert sich stetig, wenn der Punkt in der Fläche stetig verschoben wird. Bezeichnen wir mit ds eine unendlich kleine Verschiebung in der Fläche, so hat der Differentialquotient $\frac{\partial V}{\partial s}$ einen bestimmten, endlichen Werth. Er ist nur unendlich wenig von den Werthen verschieden, welche derselbe Differentialquotient annimmt, wenn der Punkt (x, y, z) auf der einen oder auf der anderen Seite unendlich nahe an der Fläche liegt. Der Differentialquotient ist identisch mit der Componente der Anziehung in der Richtung von ds, so lange der Punkt (x, y, z) nicht in der Fläche liegt. Fällt aber der Punkt in die Fläche, so ist zwischen dem Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial s}$ und der Componente der Anziehung zu unterscheiden. Jener behält, wie eben bewiesen, einen bestimmten angebbaren Werth. Diese wird völlig unbestimmt, weil das Integral, durch welches sie ausgedrückt wird, jede Bedeutung verliert, sobald der angezogene Punkt in die anziehende Fläche fällt.

Fasst man aber eine Verschiebung auf der Normale ins Auge, so findet sich, dass die Componente der Anziehung P in der Richtung dieser Verschiebung und die Derivirte $\frac{\partial V}{\partial p}$ in derselben Richtung identisch sind, falls der Punkt (x, y, z) auf der positiven oder der negativen Normale der Fläche unendlich nahe genommen wird. Legt man ihn aber in die Fläche selbst, so hat die Componente der Anziehung einen bestimmten Werth, die Derivirte $\frac{\partial V}{\partial p}$ ist dagegen völlig unbestimmt.

Um dies zu beweisen, errichten wir auf der Stelle, in welche der Punkt (x, y, z) hineinrücken soll, die Normale und tragen auf ihr die unendlich kleinen Strecken $p = +\varepsilon$ und $p = -\varepsilon$ ab. Die Componente der Anziehung in der Richtung der positiven Normale werde resp. mit P_0, $P_{+\varepsilon}$, $P_{-\varepsilon}$ bezeichnet, je nachdem der angezogene Punkt auf der Normale in ihrem Fusspunkte liegt oder um die Strecke $+\varepsilon$ oder $-\varepsilon$ von dem Fusspunkte entfernt. Ein Flächenelement, in dessen Begrenzung der Fusspunkt der Normale liegt, werde mit $d\sigma$ bezeichnet. Wir nehmen die Begrenzung von $d\sigma$ zur Directrix einer Cylinderfläche, deren Erzeugende zu der Normale parallel läuft, und legen zwei Schnittebenen rechtwinklig zur Normale (**Fig. 8**) im Abstande $+\varepsilon$ und resp. $-\varepsilon$ von dem Fusspunkte. Dadurch werden zwei unendlich kleine cylindrische Räume abgegrenzt, deren gemeinschaftliche Basisfläche $d\sigma$ ist, und die nach der Seite der positiven und resp. der negativen Normale zu liegen. Auf jeden dieser beiden Räume wenden wir den Satz von Gauss (§. 12) an. Der Beitrag, welchen die cylindrischen Mantelflächen zu dem Integral liefern, kann vernachlässigt werden, weil wir die Höhe ε so klein nehmen, dass das Verhältnis der Mantelflächen zu $d\sigma$ unendlich klein wird. Betrachten wir zuerst den Cylinder, welcher nach der Seite der positiven Normale liegt, so liefert die Basisfläche $d\sigma$ zu dem Integral den Beitrag

Fig. 8.



$$P_0 \, d\sigma,$$

denn die auf $d\sigma$ nach dem Innern des Cylinders gezogene Normale fällt mit der positiven Normale der anziehenden Fläche zusammen. Die Gegenfläche liefert den Beitrag

$$-P_{+\varepsilon} \, d\sigma,$$

denn ihre nach dem Innern des Cylinders gezogene Normale fällt in die Richtung der negativen Normale der anziehenden Fläche. Im Innern des Cylinders ist keine anziehende Masse vorhanden, sondern nur in seiner einen Begrenzungsfläche $d\sigma$. Das Quantum dieser Masse ist $\rho_0 \, d\sigma$, wenn mit ρ_0 die Dichtigkeit im Fusspunkte der Normale bezeichnet wird. Der Satz von Gauss lautet hier also

$$P_0 \, d\sigma - P_{+\varepsilon} \, d\sigma = 2\pi \rho_0 \, d\sigma,$$

und daraus findet sich

(3) $$P_{+\varepsilon} = P_0 - 2\pi \rho_0.$$

In derselben Weise wenden wir den Satz von Gauss auf den zweiten Cylinder an, der nach der Seite der negativen Normale liegt. Hier ergibt sich

$$-P_0 \, d\sigma + P_{-\varepsilon} \, d\sigma = 2\pi \rho_0 \, d\sigma,$$

d. h.

(4) $$P_{-\varepsilon} = P_0 + 2\pi \rho_0.$$

Die Componente der Anziehung in der Richtung der positiven Normale nimmt also sprungweise um $2\pi\rho_0$ ab, wenn der angezogene Punkt von der Seite der negativen Normale in die Fläche eintritt, und aufs neue um $2\pi\rho_0$, wenn er aus der Fläche nach der Seite der positiven Normale austritt.

Was nun den Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial p}$ betrifft, so hat man

$$(5)\qquad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+\varepsilon} = P_{+\varepsilon}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{-\varepsilon} = P_{-\varepsilon}.$$

Denn so lange der Punkt (x, y, z) ausserhalb der Fläche liegt, haben die ersten Differentialquotienten von V einerseits und die Componenten der Anziehung andererseits bestimmte, endliche Werthe, und wo dies der Fall ist, gelten die Gleichungen (5). Fällt aber der Punkt (x, y, z) in die Fläche hinein, so hat der Differentialquotient $\frac{\partial V}{\partial p}$ keinen bestimmten Werth mehr. Er ist gleich $P_{+\varepsilon}$ oder gleich $P_{-\varepsilon}$, je nachdem man den Punkt auf der positiven oder auf der negativen Normale in deren Fusspunkt hineinrücken lässt, d. h. eben: sein Werth ist unbestimmt.

Aus den Gleichungen (3), (4), (5) folgt noch

$$(6)\qquad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+\varepsilon} - \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{-\varepsilon} = -4\pi\rho_0.$$

Der Differentialquotient $\frac{\partial V}{\partial p}$ nimmt also sprungweise um $4\pi\rho_0$ ab, wenn der Punkt (x, y, z) von der Seite der negativen Normale nach der Seite der positiven Normale durch die Fläche hindurchgeht.

§. 15.

Fortsetzung: Die Componente der Anziehung normal zur Fläche.

Wir haben den Anfangspunkt der Coordinaten an die Stelle der anziehenden Fläche gelegt, in welche der angezogene Punkt hineinrücken soll, die Axe der positiven x in die positive Normale, die yzEbene in die Tangentialebene. Die Componente der Anziehung in der Richtung der positiven Normale, die wir im vorigen Paragraphen mit P bezeichnet haben, ist für dieses Coordinatensystem dasselbe wie X und wird ausgedrückt durch das Integral

$$(1)\qquad X = \int \rho \, \frac{a - x}{r^3} \, d\sigma,$$

welches über die ganze anziehende Fläche zu erstrecken ist. Grenzt man nun auf der Fläche ein Gebiet ab, welches den Anfangspunkt der Coordinaten in sich enthält, und dessen Begrenzungslinie von diesem Punkte überall endlichen Abstand hat, so kann man das Integral in zwei Bestandtheile zerlegen. Für den ersten Bestandtheil wird die Integration über das abgegrenzte Gebiet erstreckt, für den zweiten Bestandtheil über die ganze Fläche ausserhalb des abgegrenzten Gebietes. Der angezogene Punkt soll auf der Axe der x liegen, jedenfalls in endlicher Entfernung von allen Punkten des äusseren Gebietes. Danach sieht man, dass der zweite Bestandtheil des Integrals eine endliche Function ist, die sich überall stetig ändert, selbst dann noch, wenn der angezogene Punkt beim stetigen Durchlaufen der x Axe von der negativen Seite durch den Nullpunkt auf die positive Seite übergeht. Diese stetige Function soll mit $f.\,c.$ bezeichnet werden *(functio continua)*. Das abgegrenzte Gebiet, über welches bei dem ersten Bestandtheil von X die Integration zu erstrecken ist, werde so gewählt, dass seine Projection in der yz Ebene einen Kreis vom Radius S einfach bedeckt, und dass innerhalb der Integrationsgrenzen der Quotient $\dfrac{\rho}{\cos\alpha}$ überall endlich und stetig variabel ist. Führen wir dann für das abgegrenzte Gebiet dieselben Coordinaten ein, wie in Gleichnng (2) des vorigen Paragraphen, so ergibt sich

$$X = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^S \frac{\rho}{\cos\alpha}\,\frac{a-x}{r^3}\, s\, ds + f.\,c. \tag{2}$$

Dabei ist $s^2 = b^2 + c^2$ und $r^2 = (a-x)^2 + s^2$. Wir wollen zur Abkürzung $\dfrac{\rho}{\cos\alpha} = k$ setzen. Zunächst ist das Integral

$$\int_0^S k\,\frac{a-x}{r^3}\, s\, ds \tag{3}$$

zu untersuchen. Wir haben

$$r\frac{\partial r}{\partial s} = (a-x)\frac{\partial a}{\partial s} + s,$$

folglich

$$\frac{s}{r^3} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial r}{\partial s} - \frac{a-x}{r^3}\,\frac{\partial a}{\partial s} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial s} - \frac{a-x}{r^3}\,\frac{\partial a}{\partial s}.$$

Multiplicirt man hier auf beiden Seiten mit $(a-x)\,k\,ds$ und integrirt, so findet sich

$$\int \frac{a-x}{r^3}\,k\,s\,ds = -\int (a-x)\,k\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial s}\,ds - \int \frac{(a-x)^2}{r^3}\,k\,\frac{\partial a}{\partial s}\,ds.$$

Den ersten Bestandtheil der rechten Seite transformiren wir durch Integration nach Theilen:

$$-\int (a-x)\,k\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial s}\,ds = -\frac{(a-x)\,k}{r} + \int \frac{1}{r}\left\{(a-x)\,\frac{\partial k}{\partial s} + k\,\frac{\partial a}{\partial s}\right\} ds.$$

Demnach ist

$$\int \frac{a-x}{r^3}\,k\,s\,ds = -\frac{(a-x)\,k}{r} + \int \frac{a-x}{r}\,\frac{\partial k}{\partial s}\,ds + \int k\,\frac{\partial a}{\partial s}\,\frac{r^2-(a-x)^2}{r^3}\,ds,$$

d. h. kürzer

$$\int \frac{a-x}{r^3}\,k\,s\,ds = -\frac{(a-x)\,k}{r} + \int \frac{a-x}{r}\,\frac{\partial k}{\partial s}\,ds + \int k\,\frac{s^2}{r^3}\,\frac{\partial a}{\partial s}\,ds.$$

Handelt es sich um die bestimmte Integration zwischen den Grenzen 0 und S, so hat man den Werth von $-\dfrac{(a-x)\,k}{r}$ an diesen Grenzen zu ermitteln. Für $s=0$ ist $\cos\alpha = 1$, folglich $k = \rho_0$. Ferner ist für $s=0$ auch $a=0$ und deshalb:

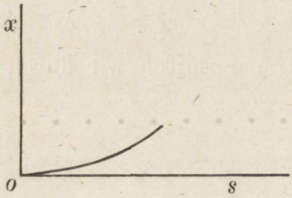
$$\left[-\frac{a-x}{r}\right]_0 = -\frac{-x}{\sqrt{(-x)^2}} = \begin{cases} +1 & \text{für } x > 0, \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Nehmen wir $x=0$, so ist

$$\frac{a-x}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+s^2}} = \frac{\frac{a}{s}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{s^2}}}.$$

Es fragt sich also, was aus $\dfrac{a}{s}$ wird für $s=0$. Wir legen eine Ebene, welche die Axe der x in sich enthält und mit der Axe der positiven y den Winkel ψ einschliesst. Diese Ebene schneidet die yz Ebene in der geraden Linie, auf welcher s gezählt wird. Da nun die yz Ebene die anziehende Fläche berührt, so ist (**Fig. 9**) die Axe der s im Anfangspunkte der Coordinaten Tangente an der Curve, in welcher die Fläche von der Hülfsebene geschnitten wird, und es findet sich

Fig. 9.



$$\lim \frac{a}{s} = \frac{\partial a}{\partial s} = 0 \quad \text{für } s = 0.$$

Folglich lautet das Ergebnis

$$\left[-\frac{a-x}{r}k\right]_{s=0} = \begin{cases} \rho_0 & \text{für} \quad x > 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0, \\ -\rho_0 & \text{für} \quad x < 0. \end{cases}$$

An der oberen Grenze S sei $k = K$, $r = R$, $a = A$. Die Grössen K, R und A sind endliche und stetige Functionen von ψ. Man findet also

$$(4) \quad \int_0^S \frac{a-x}{r^3} k\, s\, ds = C - \frac{A-x}{R} K + \int_0^S \frac{a-x}{r} \frac{\partial k}{\partial s} ds + \int_0^S k \frac{s^2}{r^3} \frac{\partial a}{\partial s} ds,$$

und die Constante C hat den Werth $-\rho_0$ oder $+\rho_0$ oder 0, je nachdem x positiv oder negativ oder Null ist. Die Function $\frac{A-x}{R}K$ hat immer einen endlichen Werth, der sich nur unendlich wenig ändert, wenn x von unendlich kleinen negativen durch Null zu unendlich kleinen positiven Werthen übergeht.

Es bleibt noch übrig, die beiden Integrale auf der rechten Seite der Gleichung (4) zu untersuchen. Wir zerlegen das Intervall von 0 bis S in zwei, nemlich von 0 bis zu einer beliebig kleinen Grösse ν und von ν bis S. Die Grösse ν soll so klein gewählt werden, dass $\frac{\partial k}{\partial s}$ zwischen $s = 0$ und $s = \nu$ sein Vorzeichen nicht ändert. Da $\frac{a-x}{r}$ ein echter Bruch ist, auch für $x = 0$, so ist der absolute Werth des Integrals

$$\int_0^\nu \frac{a-x}{r}\,\frac{\partial k}{\partial s}\,ds$$

jedenfalls kleiner als der absolute Werth von

$$\int_0^\nu \frac{\partial k}{\partial s}\,ds,$$

d. h. kleiner als der absolute Werth der Differenz $k_\nu - k_0$. Nun ist aber k stetig variabel, folglich kann diese Differenz durch unendliches Abnehmen von ν kleiner gemacht werden als irgend eine angebbare Zahl. Um so mehr wird

$$(5)\qquad \int_0^\nu \frac{a-x}{r}\,\frac{\partial k}{\partial s}\,ds$$

beim unendlichen Abnehmen von ν unter jeden angebbaren Werth herabsinken.

Das Integral

$$(6)\qquad \int_\nu^S \frac{a-x}{r}\,\frac{\partial k}{\partial s}\,ds$$

hat einen endlichen Werth, der mit x sich stetig ändert, auch für $x=0$ und für unendlich kleine positive oder negative x. Denn eine Aenderung von x bewirkt unter dem Integralzeichen nur eine Aenderung des Factors $\frac{a-x}{r}$. So lange s einen endlichen Werth hat, nimmt dieser Factor Werthe an, die sich nur unendlich wenig unterscheiden, man möge $x=0$ oder unendlich klein $=\pm\varepsilon$ nehmen. Bei unendlich abnehmendem s hat man aber

$$\lim\frac{a-x}{r} = \lim\frac{\frac{a}{s}-\frac{x}{s}}{\sqrt{1+\left(\frac{a-x}{s}\right)^2}},$$

d. h. da $\lim\frac{a}{s}=0$ ist:

$$\lim\frac{a-x}{r} = \lim\frac{-\frac{x}{s}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{s^2}}}.$$

Man kann aber bei einem gegebenen unendlich kleinen ε das unendlich kleine ν so wählen, dass $\lim \frac{\varepsilon}{\nu} = 0$ ist. Innerhalb der Integrationsgrenzen ν und S ist demnach für ein unendlich kleines s

$$\lim \frac{a - x}{r} = 0,$$

gleichgültig, ob $x = 0$ oder $= \pm \varepsilon$ ist. Damit ist die eben behauptete Eigenschaft des Integrals (6) bewiesen auch für ein unendlich abnehmendes ν. Wir gehen über zu dem Integral

$$\int_0^\nu k \frac{s^2}{r^3} \frac{\partial a}{\partial s} ds. \tag{7}$$

Da $\frac{\partial a}{\partial s} = 0$ ist für $s = 0$, so kann man im allgemeinen setzen

$$\frac{\partial a}{\partial s} = \mu s^\lambda,$$

wobei λ eine positive Constante und μ eine Function von s und ψ bedeutet, die innerhalb der Integrationsgrenzen überall von Null verschieden, endlich und stetig variabel ist. Daher findet sich

$$\int_0^\nu k \frac{s^2}{r^3} \frac{\partial a}{\partial s} ds = \int_0^\nu \mu k \frac{s^3}{r^3} s^{\lambda - 1} ds.$$

$\frac{s}{r}$ ist ein echter Bruch, der sich für $x = 0$ und $\lim s = 0$ dem Grenzwerthe $+ 1$ annähert. Also ist $\mu k \frac{s^3}{r^3}$ innerhalb der Integrationsgrenzen endlich. Der grösste Werth dieser Function sei M.

Dann haben wir

$$M \frac{\nu^\lambda}{\lambda} > \int_0^\nu k \frac{s^2}{r^3} \frac{\partial a}{\partial s} ds,$$

und man sieht, dass durch unaufhörliches Abnehmen von ν der Werth des Integrals (7) unter jede angebbare Zahl herabsinkt. Der Werth dieses Integrals ist demnach für ein unendlich kleines ν davon unabhängig, ob $x = 0$ oder gleich $= \pm \varepsilon$ genommen wird.

Das Integral

$$\int_\nu^S k \frac{s^2}{r^3} \frac{\partial a}{\partial s} ds \tag{8}$$

hat für ein endliches ν einen bestimmten, endlichen Werth, der sich nur unendlich wenig ändert, wenn x von unendlich kleinen negativen Werthen durch Null zu unendlich kleinen positiven Werthen übergeht. Lässt man aber die untere Grenze ν unendlich klein werden, so kommen zu dem Integral nur solche Beiträge hinzu, deren Inbegriff selbst unendlich klein ist, und die deshalb auch bei einer Aenderung von x einen wesentlichen Einfluss nicht ausüben.

Nach diesen Erörterungen kann man nun in Gleichung (4) auf beiden Seiten mit $d\psi$ multipliciren und hierauf in Beziehung auf ψ von 0 bis 2π integriren. Die rechte Seite gibt dann den Werth von X. Auf diese Weise bestätigt sich der Satz des vorigen Paragraphen über die sprungweise eintretende Aenderung der zur Fläche normalen Componente der Anziehung.

Es muss noch erwähnt werden, dass in einem Ausnahmefalle das Integral

$$\int_0^S k \frac{s^2}{r^3} \frac{\partial a}{\partial s} ds$$

keinen endlichen Werth behält, nemlich wenn für $s = 0$ der Differentialquotient $\frac{\partial a}{\partial s} = 0$ wird wie $\frac{1}{\lg\left(\frac{1}{s}\right)}$. Setzt man

$$\frac{\partial a}{\partial s} = \frac{\mu}{\lg\left(\frac{1}{s}\right)},$$

so ist

$$\int_0^S k \frac{s^2}{r^3} \frac{\partial a}{\partial s} ds = -\int_0^S \mu\, k \frac{s^3}{r^3} \cdot \frac{d \lg\left(\frac{1}{s}\right)}{\lg\left(\frac{1}{s}\right)}.$$

Daraus folgt, dass das unbestimmte Integral eine Function von s ist, die für $s = 0$ unendlich gross wird wie $\lg \lg\left(\frac{1}{s}\right)$. Das bestimmte Integral hat also keinen angebbaren Werth. Dieser Ausnahmefall darf aber ohne Nachtheil von der Untersuchung ganz ausgeschlossen werden.*)

*) Gauss. Allgemeine Lehrsätze etc. Art. 15. 16.

§. 16.

Die anziehende Masse ist über eine unendliche gerade Linie vertheilt.

Wir gehen zu dem abstracten Falle über, dass die Masse in einer Linie vertheilt ist. Unter der Dichtigkeit ρ im Punkte (a, b, c) dieser Linie verstehen wir den Quotienten, den man erhält, wenn die Masse des an den Punkt anstossenden Linienelementes ds durch die Länge dieses Elementes dividirt wird. Die Dichtigkeit soll in jedem Punkte der Linie endlich sein und, wenn nichts anderes ausdrücklich gesagt ist, an keiner Stelle sich sprungweise ändern.

Zunächst nehmen wir den einfachsten Fall, dass die Masse mit constanter Dichtigkeit in einer unbegrenzten geraden Linie vertheilt ist. Wir legen in sie die Axe der x. Das an den Punkt $(a, 0, 0)$ anstossende Massenelement ist $\rho\, da$. Die Entfernung von dem angezogenen Punkte (x, y, z) ist $r = \sqrt{(a-x)^2 + y^2 + z^2}$. Statt mit $\frac{1}{r}$ darf man auch mit $\frac{1}{r} + \varphi(a)$ multipliciren und hat demnach

$$(1) \qquad V = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} da \left(\frac{1}{r} + \varphi(a)\right).$$

Denn die Derivirten dieser Function nach x oder nach y oder nach z sind dieselben, als wenn unter dem Integral einfach $\frac{da}{r}$ stände. Die Function $\varphi(a)$ wird eingeführt, weil das Integral

$$\int \frac{da}{r}$$

keine Bedeutung mehr hat, wenn die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ genommen werden. Man hat deshalb $\varphi(a)$ so einzurichten, dass das Integral (1) einen bestimmten, angebbaren Werth erhalte. Wir setzen

$$\begin{aligned}
\varphi(a) &= -\frac{1}{a} \quad && \text{für } a \geqq k \\
\varphi(a) &= 0 && \text{für } k > a > -k \\
\varphi(a) &= +\frac{1}{a} && \text{für } a \leqq -k
\end{aligned}$$

und verstehen unter k eine beliebige endliche, positive Grösse. Die unbestimmte Integration

$$\int \frac{da}{\sqrt{(a-x)^2+y^2+z^2}}$$

lässt sich ausführen. Man erhält

$$\lg\{a-x+\sqrt{(a-x)^2+y^2+z^2}\}+C,$$

und daher ergibt sich

$$(2)\int_{-k}^{k} \frac{da}{\sqrt{(a-x)^2+y^2+z^2}} = \lg \frac{(k-x)+\sqrt{(k-x)^2+y^2+z^2}}{-(k+x)+\sqrt{(k+x)^2+y^2+z^2}}.$$

Auf demselben Wege berechnet man

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{(a-x)^2+y^2+z^2}}-\frac{1}{a}\right)da$$

$$= \lg\left\{1-\frac{x}{a}+\sqrt{\left(1-\frac{x}{a}\right)^2+\frac{y^2+z^2}{a^2}}\right\}+C,$$

folglich

$$(3) \qquad \int_{k}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{(a-x)^2+y^2+z^2}}-\frac{1}{a}\right)da$$

$$= \lg 2 - \lg\left\{1-\frac{x}{k}+\sqrt{\left(1-\frac{x}{k}\right)^2+\frac{y^2+z^2}{k^2}}\right\}$$

$$= \lg 2k - \lg\{(k-x)+\sqrt{(k-x)^2+y^2+z^2}\}.$$

Endlich gelangt man durch einfache Umformungen zu der Gleichung

$$(4) \qquad \int_{-\infty}^{-k}\left(\frac{1}{\sqrt{(a-x)^2+y^2+z^2}}+\frac{1}{a}\right)da$$

$$= \int_{k}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{(a+x)^2+y^2+z^2}}-\frac{1}{a}\right)da$$

$$= \lg 2 - \lg\left\{1+\frac{x}{k}+\sqrt{\left(1+\frac{x}{k}\right)^2+\frac{y^2+z^2}{k^2}}\right\}$$

$$= \lg 2k - \lg\{(k+x)+\sqrt{(k+x)^2+y^2+z^2}\}.$$

Aus (2), (3), (4) setzt sich das Integral auf der rechten Seite von (1) durch Addition zusammen. Das Resultat lautet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} da\left(\frac{1}{r}+\varphi(a)\right) = 2\lg 2k - \lg(y^2+z^2).$$

Die willkürliche Zahl k darf man nun $= \frac{1}{2}$ setzen. Dann wird

(5) $$V = -\rho \lg (y^2 + z^2)$$

oder, wenn man den Abstand des Punktes (x, y, z) von der anziehenden Linie mit t bezeichnet:

(6) $$V = 2\rho \lg \frac{1}{t}.$$

Die Potentialfunction ist hier also von x unabhängig und daher die Componente der Anziehung in der Richtung parallel zur anziehenden Linie gleich Null. Dies war bei dem unbegrenzten Verlauf der Linie und der constanten Dichtigkeit ihrer Masse vorauszusehen. Man hätte auch den Anfangspunkt der Coordinaten auf der Axe der x so verschieben können, dass der angezogene Punkt in die neue yz Ebene fällt. Dadurch wird $x = 0$ und r geht über in $\sqrt{a^2 + t^2}$. Die Integration in (1) bleibt aber von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken.

Von der Richtigkeit der Gleichung (6) kann man sich auch auf folgendem Wege überzeugen. Man nehme ausser dem Punkte $(0, y, z)$ noch einen Punkt $(0, y_1, z_1)$ und bezeichne die Potentialfunction der anziehenden Linie auf den ersten Punkt mit V, auf den anderen mit V_1. Setzt man $y^2 + z^2 = t^2$ und $y_1^2 + z_1^2 = t_1^2$, so hat man

(7) $$V - V_1 = \rho \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + t_1^2}} \right) da.$$

Die Integration erstrecken wir zunächst von $-k$ bis $+k$ und suchen den Grenzwerth für $\lim k = \infty$. Nun ist aber

$$\int_{-k}^{k} \frac{da}{\sqrt{a^2 + t^2}} = \lg \frac{k + \sqrt{k^2 + t^2}}{-k + \sqrt{k^2 + t^2}} = 2 \lg \frac{k + \sqrt{k^2 + t^2}}{t},$$

folglich

$$V - V_1 = 2\rho \lim \lg \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{t^2}{k^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{t_1^2}{k^2}}} \cdot \frac{t_1}{t} \right\}$$

für $\lim k = \infty$, d. h.

(8) $$V - V_1 = 2\rho \left(\lg \frac{1}{t} - \lg \frac{1}{t_1} \right).$$

Da aber V nur von t und V_1 nur von t_1 abhängig ist, so zerfällt die Gleichung (8) in die beiden folgenden:

$$V = 2\rho \lg \frac{1}{t} + \text{const.}, \quad V_1 = 2\rho \lg \frac{1}{t_1} + \text{const.}$$

Die Constante hat in beiden Gleichungen denselben Werth. Es kömmt aber auf sie gar nichts an. Man darf sie also auch $= 0$ setzen und erlangt so wieder die Gleichung (6).

Uebrigens ist es auch leicht, die Potentialfunction für den Fall herzustellen, dass die Masse mit constanter Dichtigkeit über einen endlichen Theil der x Axe (von $a = k$ bis $a = k_1$) vertheilt ist. Man erhält

$$V = \rho \int_k^{k_1} \frac{da}{\sqrt{(a-x)^2 + t^2}}. \tag{9}$$

Die Integration lässt sich ausführen. Wir bringen das Resultat in drei verschiedene Formen, je nachdem $x > k_1$ oder $k > x$ oder $k_1 > x > k$ ist, nemlich

$$V = \rho \lg \frac{x - k + \sqrt{(x-k)^2 + t^2}}{x - k_1 + \sqrt{(x-k_1)^2 + t^2}} \tag{10}$$

für $x > k_1$; dagegen

$$V = \rho \lg \frac{k_1 - x + \sqrt{(k_1 - x)^2 + t^2}}{k - x + \sqrt{(k-x)^2 + t^2}} \tag{11}$$

für $k > x$; und endlich

$$\begin{aligned} V = {} & 2\rho \lg \frac{1}{t} \\ & + \rho \lg \{k_1 - x + \sqrt{(k_1 - x)^2 + t^2}\} \\ & + \rho \lg \{x - k + \sqrt{(x-k)^2 + t^2}\} \end{aligned} \tag{12}$$

für $k_1 > x > k$.

Lässt man in (12) $t = 0$ werden, d. h. den angezogenen Punkt in die anziehende Linie fallen, so wird V unendlich wie $2\rho \lg \frac{1}{t}$, also gerade so wie bei der unbegrenzten anziehenden Linie.

§. 17.

Die anziehende Masse ist über eine beliebige Linie vertheilt. Die Gleichung:

$$\left(t \frac{\partial V}{\partial t}\right)_{t=0} = -2\rho.$$

Die anziehende Masse sei über eine krumme Linie vertheilt. Wir bezeichnen mit s die Länge des Bogens von dem Anfangspunkte der Curve bis zum Punkte (a, b, c). Im Endpunkte sei $s = s_1$. Die Dichtigkeit ρ wird als eine stetige Function von s vorausgesetzt. Wir legen den Anfangspunkt der Coordinaten in einen Punkt der Curve, in welchem die Krümmungsradien nicht unendlich klein sind. Die Tangente der Curve in diesem Punkte wählen wir zur Axe der x. Der angezogene Punkt soll in der yz Ebene liegen. Es handelt sich hauptsächlich um die Frage, was aus der Potentialfunction wird, wenn der angezogene Punkt unendlich nahe an den Anfangspunkt der Coordinaten heranrückt. Wir haben

$$(1) \qquad r^2 = a^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2,$$

$$(2) \qquad V = \int_0^{s_1} \frac{\rho\, ds}{r}.$$

Zur Abkürzung werde $y^2 + z^2 = t^2$ gesetzt. Bezeichnen wir mit ρ_0 die Dichtigkeit im Anfangspunkte der Coordinaten, so lässt sich leicht beweisen, dass für $t = 0$ die Function V unendlich wird wie $2\rho_0 \lg \frac{1}{t}$. Um den Beweis zu führen, bringen wir V zunächst in die Form

$$(3) \qquad V = \int_k^{k_1} \frac{\rho\, da}{r \frac{da}{ds}} = \int_k^{k_1} \frac{\rho\, da}{r \cos\lambda}.$$

Hier sind k und k_1 die Werthe von a für $s = 0$ und resp. $s = s_1$, und λ ist der Winkel, welchen die Tangente der Curve mit der Axe der positiven x einschliesst. Denken wir uns nun die Axe der x von der Stelle $a = k$ bis zu der Stelle $a = k_1$ mit anziehender Masse von der constanten Dichtigkeit ρ_0 belegt und bezeichnen die davon herrührende Potentialfunction mit V', so findet sich

$$(4) \qquad V' = \rho_0 \int_k^{k_1} \frac{da}{\sqrt{a^2 + t^2}} = \rho_0 \int_k^{k_1} \frac{da}{R}.$$

Aus (3) und (4) erhält man

$$(5) \qquad V - V' = \int_k^{k_1} da \left\{ \frac{\rho}{r \cos \lambda} - \frac{\rho_0}{R} \right\}.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung hat einen bestimmten, endlichen Werth, so lange t von Null verschieden. Für $t = 0$ nimmt der Factor von da an einer Stelle zwischen den Integrationsgrenzen die Form $\infty - \infty$ an, nemlich an der Stelle $a = 0$. Um den wahren Werth zu ermitteln, bringen wir die Function in die Form

$$\frac{\frac{a}{r} \frac{\rho}{\cos \lambda} - \frac{a \rho_0}{R}}{a}.$$

Nun kann man leicht zeigen, dass für $t = 0$ die Brüche $\frac{a}{r}$ und $\frac{a}{R}$ sich derselben endlichen Grenze annähern, wenn man a in 0 übergehen lässt. Denn es ist

$$\frac{a}{R} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{a^2}}},$$

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} - \frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{z}{a}\right)^2}}.$$

Lässt man a in Null übergehen, so werden gleichzeitig auch b und c zu Null. Man erhält $\lim \frac{b}{a} = \frac{db}{da}$, $\lim \frac{c}{a} = \frac{dc}{da}$. Beide Differentialquotienten sind aber gleich Null für $a = 0$, weil die Axe der x im Anfangspunkte die Curve berührt. Für $a = 0$ hat man also

$$\lim \frac{a}{R} = \lim \frac{a}{r} = \lim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{a^2}}}.$$

Dieser gemeinschaftliche Grenzwerth ist aber jedenfalls verschieden von $\frac{1}{0}$, d. h. er ist endlich, selbst wenn man $t = 0$ nehmen will.

Man kann also schreiben

$$\lim\left\{\frac{\frac{a}{r}\,\frac{\rho}{\cos\lambda}-\frac{a\,\rho_0}{R}}{a}\right\}=\lim\frac{a}{R}\cdot\lim\left\{\frac{\frac{\rho}{\cos\lambda}-\rho_0}{a}\right\}$$

und es handelt sich jetzt nur noch um den Grenzwerth von

$$\frac{\frac{\rho}{\cos\lambda}-\rho_0}{a}.$$

Dieser findet sich nach den Regeln der Differentialrechnung

$$=\frac{\frac{1}{\cos\lambda}\,\frac{d\rho}{ds}-\frac{\rho}{\cos\lambda^2}\,\frac{d\cos\lambda}{ds}}{\frac{da}{ds}}$$

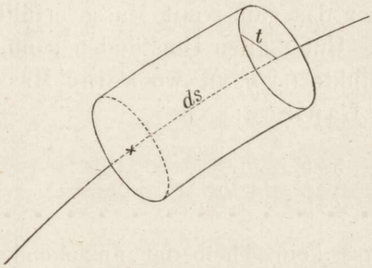
$$=\frac{1}{\cos\lambda^2}\,\frac{d\rho}{ds}-\frac{\rho}{\cos\lambda^3}\,\frac{d\cos\lambda}{ds}.$$

Nun ist aber $\cos\lambda = 1$ für $a = 0$. Die Differentialquotienten $\frac{d\cos\lambda}{ds}$ und $\frac{d\rho}{ds}$ sind endlich. Ist also $t = 0$, so erhält man selbst an der Stelle $a = 0$ zu dem Integral (5) nur einen unendlich kleinen Beitrag. Alle übrigen Elemente des Integrals sind ebenfalls unendlich klein. Folglich hat das Integral einen bestimmten, endlichen Werth auch für $t = 0$, und die Differenz $V - V'$ ist eine endliche und stetige Function von t. Die Function V' ist aber in Gleichung (12) des vorigen Paragraphen ausgedrückt. Wir haben demnach

$$V = 2\rho_0 \lg\frac{1}{t} + f.\,c., \tag{6}$$

wenn mit $f.\,c.$ eine endliche und stetige Function bezeichnet wird. Das eben gewonnene Resultat lässt sich auch aus dem Satze von Gauss (§. 12) herleiten. Wir machen auf der Curve ein Element ds, das als geradlinig angesehen werden darf, zur Axe eines geraden Kreiscylinders mit dem Radius t (**Fig. 10**). Da t in Null übergehen soll, so kann man es so klein wählen, dass das Verhältnis $t : ds$ gleich Null wird. Die Endflächen des Cylinders sind dann verschwindend klein im Vergleich zu der Mantelfläche, und daher darf der Beitrag zu dem Integral $\int N\,d\sigma$, welcher von den Endflächen herrührt, vernachlässigt werden. Für einen Punkt der Mantelfläche fällt die Richtung der nach innen gezogenen Normale zusammen mit der Richtung der abnehmenden t. Es ist also hier

Fig. 10.



$$N = -\frac{\partial V}{\partial t},$$

und diese Componente der Anziehung hat wegen der unendlich kleinen Dimensionen des Cylinders denselben Werth in allen Punkten seiner Mantelfläche. Danach findet sich das Integral $\int N\,d\sigma$ hier

$$= -\frac{\partial V}{\partial t} \cdot 2\pi\, t\, ds.$$

Die anziehende Masse liegt im Innern des Cylinders, in seiner Axe. Bezeichnen wir die Dichtigkeit in einem Punkte von ds mit ρ_0, so lautet der Satz von Gauss:

$$-\frac{\partial V}{\partial t} \cdot 2\pi\, t\, ds = 4\pi\, \rho_0\, ds,$$

d. h. nach gehöriger Reduction

$$\text{(7)} \qquad \lim\left(t\,\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{t=0} = -2\rho_0.$$

Daraus geht ohne weiteres hervor, dass für ein unendlich abnehmendes t die Function V unendlich wird wie $2\rho_0 \lg \frac{1}{t}$.

§. 18.
Recapitulation.

Wir recapituliren noch einmal die gewonnenen Resultate.

Die anziehende Masse kann in einzelnen getrennt liegenden Punkten concentrirt sein. Dann ist

$$V = \sum \frac{m}{r},$$

und die Summirung bezieht sich auf sämmtliche Massenpunkte.

Oder die Masse ist stetig vertheilt über einen Raum, resp. über eine Fläche, resp. über eine Linie. In diesen drei Fällen ist

$$V = \int \frac{dm}{r},$$

und man hat die Integration über das ganze mit Masse erfüllte geometrische Gebilde auszudehnen. Unter allen Umständen genügt die Potentialfunction in einem Punkte (x, y, z), wo keine Masse vorhanden ist, der Gleichung von Laplace:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Wir wollen voraussetzen, dass kein Theil der anziehenden Masse in unendlicher Entfernung liege.

Ist die Masse über einen Raum stetig vertheilt, so genügt die Potentialfunction ausserhalb dieses Raumes der partiellen Differentialgleichung (1), innerhalb desselben aber [§. 13 (4)] der partiellen Differentialgleichung

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho,$$

und es bedeutet ρ die Dichtigkeit in dem inneren Punkte (x, y, z). Die Function V und ihre ersten Derivirten sind im ganzen unendlichen Raume endlich und stetig variabel.

Bei stetiger Vertheilung der Masse auf einer Fläche genügt die Potentialfunction V im ganzen unendlichen Raume der partiellen Differentialgleichung (1). Die Function V selbst ist überall endlich und stetig variabel. Die ersten Derivirten $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ sind endlich und stetig variabel, so lange der Punkt (x, y, z) in endlicher, wenn auch noch so kleiner Entfernung von der Fläche sich befindet. Für einen Punkt in der Fläche oder unendlich nahe an derselben hat man eine Verschiebung ds in der Fläche von einer Verschiebung dp auf der Normale zu unterscheiden. Die Derivirte $\frac{\partial V}{\partial s}$ ist in der Fläche endlich und stetig variabel. Sie weicht nur unendlich wenig ab von den Werthen der gleichnamigen Derivirten in einem ausserhalb der Fläche unendlich nahe gelegenen Punkte auf der einen wie auf der anderen Seite. Die

Derivirte $\frac{\partial V}{\partial p}$ ändert sich sprungweise beim Durchgang durch die Fläche, und zwar so, dass

$$(3) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+\varepsilon} - \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{-\varepsilon} = -4\pi\rho.$$

Mit ρ ist die Dichtigkeit in dem Punkte der Fläche bezeichnet, auf dessen Normale die unendlich kleinen Abstände $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$ gezählt werden.

Bei stetiger Vertheilung der Masse in einer Linie (§. 16) genügt die Potentialfunction V im ganzen unendlichen Raume der Differentialgleichung (1). Sie ist endlich und stetig variabel, so lange der Punkt (x, y, z) in endlicher Entfernung von der anziehenden Linie bleibt. Nimmt man seinen Abstand t von der Linie unendlich klein, so wird die Function V unendlich wie $2\rho \lg \frac{1}{t}$, und es gilt demnach die Gleichung:

$$(4) \qquad \lim \left(t \frac{\partial V}{\partial t}\right) = -2\rho \quad \text{für } t = 0.$$

Hier bedeutet ρ die Dichtigkeit an der Stelle der anziehenden Linie, in welche der Punkt (x, y, z) für $t = 0$ hineinrückt.

Ist endlich die Masse m in einem Punkte concentrirt, so gilt für den ganzen unendlichen Raum die partielle Differentialgleichung (1). Die Function V ist endlich und stetig variabel, so lange der Punkt (x, y, z) in endlicher Entfernung von dem anziehenden Punkte liegt. Bezeichnet r diese Entfernung, so findet sich leicht

$$(5) \qquad rV = -r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = m,$$

und diese Gleichung gilt noch für $r = 0$.

Je nach der Art der Massenvertheilung gilt also neben der partiellen Differentialgleichung (1) noch eine von den Gleichungen (2), (3), (4), (5). Zur vollständigen Bestimmung der Function V sind nun noch Gleichungen hinzuzufügen, in denen sich ausspricht, was aus der Function und ihren ersten Derivirten wird, wenn der Punkt (x, y, z) in unendliche Entfernung rückt.

Wir setzen

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

und bemerken, dass

$$\lim \frac{R}{r} = \lim \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}} = 1$$

ist, wenn keine der Coordinaten a, b, c unendlich und $\lim R = \infty$ genommen wird. Liegt also die anziehende Masse ganz im endlichen Gebiete, so hat man bei stetiger Vertheilung:

$$\lim \int \frac{R}{r}\, dm = \int dm = M;$$

dagegen bei einer Vertheilung in discreten Punkten:

$$\lim \sum m \frac{R}{r} = \sum m = M,$$

d. h. es ist in allen Fällen

(6) $$\lim R\, V = M \quad \text{für } \lim R = \infty.$$

Ferner sieht man leicht, dass

$$\lim \frac{a-x}{r} = \lim \frac{R}{r}\left(\frac{a}{R} - \frac{x}{R}\right) = -\cos(Rx)$$

ist für $\lim R = \infty$. Dabei ist die Linie R in der Richtung von dem Anfangspunkte der Coordinaten nach dem unendlich fernen Punkte (x, y, z) genommen. Die letzte Gleichung lässt sich auch so schreiben:

$$\lim \cos(rx) = -\cos(Rx) \quad \text{für } \lim R = \infty.$$

Also hat man bei stetiger Massenvertheilung

$$\lim R^2 \int \frac{a-x}{r^3}\, dm = -\cos(Rx) \int dm;$$

dagegen bei einer Vertheilung in discreten Punkten

$$\lim R^2 \sum \frac{a-x}{r^3}\, m = -\cos(Rx) \sum m.$$

Entsprechende Gleichungen finden sich, wenn y und resp. z statt x genommen wird. Dadurch erlangt man die Resultate:

(7) $$\lim \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial x}\right) = -M \cos(Rx),$$

(8) $$\lim \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial y}\right) = -M \cos(Ry),$$

(9) $$\lim \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial z}\right) = -M \cos(Rz).$$

Durch die partielle Differentialgleichung (1), die Gleichungen (6) bis (9) und eine der Gleichungen (2) bis (5) ist die Potentialfunction für jeden Punkt (x, y, z) vollständig und eindeutig bestimmt. Dieser wichtige Satz soll im §. 22 bewiesen werden.

Zweiter Abschnitt.

Der Satz von Green.

§. 19.

Hülfssatz aus der Analysis.

Wir schalten einen Hülfssatz ein, der häufig in Anwendung kommt.

Es sei T ein vollständig begrenzter Raum und F eine Function von x, y, z, die im Innern des Raumes T an jeder Stelle einen endlichen, bestimmten Werth hat und bei einer stetigen Verschiebung des Punktes (x, y, x) sich stetig ändert. Wir wollen das Integral

$$J = \int\int\int \frac{\partial F}{\partial x}\, dx\, dy\, dz \tag{1}$$

über den ganzen Raum T erstrecken. Die Coordinaten-Ebenen mögen so gelegt sein, dass jedem Punkte im Innern und in der Oberfläche von T positive Coordinaten x, y, z angehören, In der yz Ebene zeichnen wir ein Rechteck, dessen einer Eckpunkt, dem Anfangspunkte zunächst gelegen, die Coordinaten $0, y, z$ hat, und dessen Seiten von der Länge dy, dz parallel den Axen liegen. (**Fig. 11.**) Ueber diesem Rechteck als Grundfläche errichten wir ein Prisma, dessen Kanten zu der Axe der x parallel laufen. Der Punkt $(0, y, z)$ sei so gewählt, dass das Prisma den Raum T durchschneide. Es sind dann ebenso viele Austritts- wie Eintrittsstellen vorhanden, und zwar findet abwechselnd Ein- und Austritt statt. Wir bezeichnen mit $x_1, x_3, \ldots x_{2m-1}$ die Werthe von x an den Stellen, wo die im Punkte $(0, y, z)$ errichtete Kante des Prisma in den Raum T eintritt, und mit $x_2, x_4, \ldots x_{2m}$ die Werthe von x an den Stellen, wo sie austritt. Diese Abscissen sind nach ihrer Grösse geordnet:

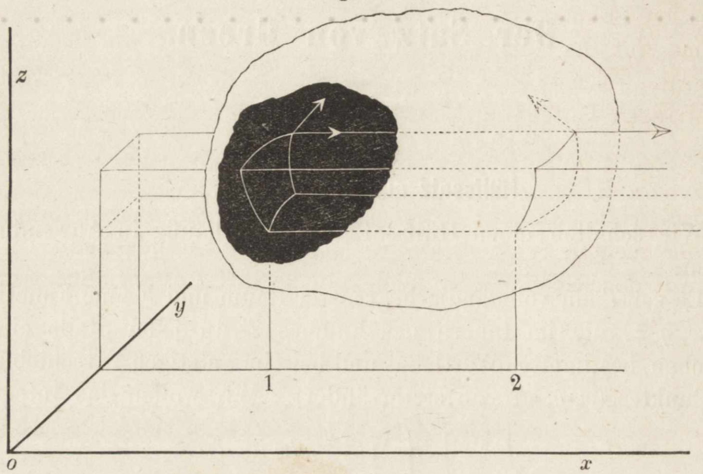
$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots x_{2m-1} < x_{2m}.$$

Die Werthe von F an den Ein- und Austrittsstellen sollen mit $F_1, F_2, F_3, \ldots F_{2m}$ bezeichnet werden. Dann hat man zunächst

$$\int \frac{\partial F}{\partial x} dx = -F_1 + F_2 - F_3 + - \ldots + F_{2m}.$$

Das Prisma schneidet an den Ein- und Austrittsstellen aus der

Fig. 11.



Oberfläche des Raumes T Elemente heraus, die wir mit $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $\ldots d\sigma_{2m}$ bezeichnen. Denkt man sich nun die im §. 11 gebrauchten Coordinaten q, s, n eingeführt, so ist $\frac{\partial x}{\partial n}$ der Cosinus des Winkels, welchen die auf $d\sigma$ nach dem Innern des Raumes T gezogene Normale mit der Richtung der positiven x einschliesst. Dieser Cosinus ist positiv an allen Eintrittsstellen und negativ an allen Austrittsstellen. Nun ist aber das Rechteck $dy\,dz$ die Projection aller Flächenelemente $d\sigma$, welche das Prisma aus der Oberfläche von T ausschneidet. Man hat also die Gleichungen

$$dy\,dz = \left(\frac{\partial x}{\partial n} d\sigma\right)_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial n} d\sigma\right)_3 = \ldots = \left(\frac{\partial x}{\partial n} d\sigma\right)_{2m-1}$$

und

$$-dy\,dz = \left(\frac{\partial x}{\partial n} d\sigma\right)_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial n} d\sigma\right)_4 = \ldots = \left(\frac{\partial x}{\partial n} d\sigma\right)_m.$$

Folglich ergibt sich

$$(2) \qquad -dy\,dz \int \frac{\partial F}{\partial x} dx = +\sum F \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma.$$

Das Zeichen Σ auf der rechten Seite von (2) bedeutet, dass die Werthe der Function $F\frac{\partial x}{\partial n}d\sigma$ an allen Eintritts- und Austrittsstellen summirt werden sollen. Es bleibt dann noch die doppelte Integration nach y und nach z auszuführen. Dies geschieht, wenn man auf der rechten Seite von (2) nicht nur die Beiträge nimmt, welche ein einzelnes Elementarprisma liefert, sondern die Beiträge von allen Prismen, die den Raum T überhaupt treffen. D. h. die Summe auf der rechten Seite der Gleichung (2) wird zu einem Integral, welches über die ganze Oberfläche von T zu erstrecken ist. Danach lautet das Resultat:

$$(3)\qquad \int\int\int\frac{\partial F}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = -\int F\frac{\partial x}{\partial n}\,d\sigma.$$

Die Integration auf der linken Seite ist über den ganzen Raum T, auf der rechten Seite über seine Oberfläche auszudehnen.

Auf demselben Wege findet man noch die etwas allgemeinere Gleichung:

$$(4)\qquad \int\int\int\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$
$$= -\int\left(F_1\frac{\partial x}{\partial n}+F_2\frac{\partial y}{\partial n}+F_3\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma.$$

Dabei ist nur vorausgesetzt, dass die von x, y, z abhängigen Functionen F_1, F_2, F_3 im Innern des Körpers endlich und stetig variabel sind.

§. 20.

Satz von Green.

Es seien U und V zwei Functionen von x, y, z, deren Werthe wir für jeden Punkt im Innern des Raumes T als gegeben ansehen. Wir betrachten das Integral

$$(1)\quad J=\int\int\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

welches über den ganzen Raum T erstreckt werden soll. Nun ist

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)}{\partial x}-U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

und zwei entsprechende Gleichungen ergeben sich, wenn man die

Differentiationen nach y und nach z vornimmt. Folglich kann man schreiben:

$$J = -\int\int\int U\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz$$
$$+\int\int\int \frac{\partial\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)}{\partial x} dx\, dy\, dz$$
$$+\int\int\int \frac{\partial\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right)}{\partial y} dx\, dy\, dz$$
$$+\int\int\int \frac{\partial\left(U\frac{\partial V}{\partial z}\right)}{\partial z} dx\, dy\, dz.$$

Auf die drei letzten Integrale lässt sich die Transformation des vorigen Paragraphen anwenden, wenn vorausgesetzt wird, dass $U\frac{\partial V}{\partial x}$, $U\frac{\partial V}{\partial y}$, $U\frac{\partial V}{\partial z}$ im Innern des Raumes T endliche und stetige Functionen sind. Man erhält danach

$$J = -\int\int\int U\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz$$
$$-\int U\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}\right) d\sigma$$

oder kürzer

$$(2)\qquad J = -\int\int\int U\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz$$
$$-\int U\frac{\partial V}{\partial n} d\sigma.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist über den Raum T, das zweite über seine Oberfläche zu erstrecken.

Die Voraussetzung, unter welcher das Integral (1) in die Form (2) gebracht werden kann, ist erfüllt, wenn U und V und die ersten Derivirten von V im Innern des Raumes T endlich und stetig variabel sind. Setzt man dasselbe auch noch von den ersten Derivirten der Function U voraus, so gilt auch die Transformation:

$$(3)\qquad J = -\int\int\int V\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz$$
$$-\int V\frac{\partial U}{\partial n} d\sigma.$$

Aus (2) und (3) geht dann ohne weiteres der Satz hervor:

$$(4)\int\int\int\left[V\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)-U\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\right]dx\,dy\,dz$$
$$+\int\left(V\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial V}{\partial n}\right)d\sigma$$
$$=0.$$

Dieser Satz ist gültig, wenn im Innern des Raumes T die Functionen U und V, sowie die ersten Derivirten von U und von V endlich und stetig variabel sind.

Treten im Innern von T in einzelnen Flächen oder Linien oder Punkten Unstetigkeiten von U oder von V oder von den ersten Derivirten dieser Functionen auf, so hat man den Raum T in zwei Bestandtheile T_1 und T_2 zu zerlegen, so dass alle Unstetigkeiten der Functionen in T_2 liegen. Auf den Raum T_1 darf man dann den Satz (4) anwenden, und es ist die Frage aufzuwerfen, welchen Grenzwerthen sich die Integrale annähern, wenn man den Raum T_2 unendlich abnehmen lässt. Sind solche bestimmte, endliche Grenzwerthe vorhanden, so gilt der Satz (4) auch für den Raum T. Das dreifache Integral ist über den ganzen Raum T zu erstrecken, das Oberflächen-Integral über seine Oberfläche und über die Umhüllungen der Unstetigkeitsstellen.

Dieser Satz ist von Green aufgestellt im 3. Artikel einer Abhandlung, die zuerst in Nottingham 1828 erschienen und später in Crelle's Journal, Bd. 39, 44, 47, wieder abgedruckt ist.*)

§. 21.

Herstellung der Potentialfunction im Innern eines vorgeschriebenen Raumes. Werth in der Oberfläche und partielle Differentialgleichung im Innern gegeben.

Der Satz von Green dient zu der Lösung der Aufgabe: die Potentialfunction V' für jeden Punkt (x', y', z') im Innern eines vollständig begrenzten Raumes T zu bestimmen, wenn ihr Werth in jedem Punkte der Oberfläche gegeben und $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ im Innern von T bekannt ist.

*) An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism.

Wir setzen $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ und verstehen unter U_1 eine Function von x, y, z, die der Gleichung von Laplace Genüge leistet, im Innern des Raumes T überall endlich und stetig variabel ist und in der Oberfläche den Werth $-\frac{1}{r}$ annimmt. Dann soll

$$(1) \qquad U = U_1 + \frac{1}{r}$$

genommen werden. Die Function U genügt also im Innern des Raumes T der partiellen Differentialgleichung

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Sie ist im Innern dieses Raumes endlich und stetig variabel, ausser im Punkte (x', y', z'), wo sie unendlich wird wie $\frac{1}{r}$, und sie hat in der Oberfläche von T den Werth Null. Es soll später (§. 34) bewiesen werden, dass eine solche Function existirt.

Der Punkt (x', y', z') ist zunächst zum Mittelpunkt einer Kugel vom Radius $r = c$ zu machen, deren Oberfläche ganz im Innern des Raumes T liegen soll. Das Innere dieser Kugel ist der Raum T_2. Ihre Oberfläche und die Oberfläche von T bilden zusammen die Begrenzung des Raumes T_1.

Im Innern des Raumes T_1 erfüllen U und V die Bedingungen, unter denen die Gleichung (4) des vorigen Paragraphen Gültigkeit hat. Wir dürfen also von dieser Gleichung hier Gebrauch machen, wenn das Raum-Integral auf das Innere von T_1 und das Oberflächen-Integral über seine Oberfläche erstreckt wird. Es handelt sich dann um die Frage, welches Resultat für $\lim c = 0$ zu Stande kommt.

Das Raum-Integral

$$\iiint V \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) dx\, dy\, dz$$

nimmt vermöge der partiellen Differentialgleichung (2) den Werth Null an, man mag es über den Raum T_1 oder über den ganzen Raum T ausdehnen. Es kömmt also, selbst für $\lim c = 0$, nicht weiter in Betracht.

Hiernach bleibt in der Gleichung (4) des vorigen Paragraphen von dem Raum-Integrale nur noch übrig

$$-\int\int\int U\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz.$$

Da der Raum T völlig begrenzt ist, also seine Begrenzung ganz im endlichen Gebiete liegt, so hat dieses Integral, über den Raum T_1 erstreckt, einen bestimmten, endlichen Werth. Dies gilt noch selbst für $\lim c = 0$. Denn innerhalb der Kugel vom Radius c kann man als Raumelement einführen

$$r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi,$$

und da U nur die erste Potenz von r im Nenner hat, so verschwinden die Beiträge, welche für $\lim c = 0$ zu dem Raum-Integral hinzukommen. Man hat dasselbe also für diesen Grenzfall über den ganzen Raum T zu erstrecken, und es behält einen bestimmten, endlichen Werth.

Das Oberflächen-Integral in der Gleichung (4) des vorigen Paragraphen ist aus zwei Bestandtheilen zusammengesetzt. Der erste rührt von der Oberfläche des Raumes T her und reducirt sich auf

$$\int V\frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma.$$

Der andere ist das über die Umhüllung des Punktes (x', y', z') ausgedehnte Integral. Hier fällt die nach dem Innern von T_1 gezogene Normale mit der Richtung der wachsenden r zusammen. Der zweite Bestandtheil des Oberflächen-Integrals lautet also

$$\int\left(V\frac{\partial U}{\partial r}-U\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=c} c^2\, d\omega,$$

wenn mit $d\omega$ das Oberflächen-Element einer Kugel vom Radius 1 bezeichnet wird. Dieses letzte Integral lässt sich nun auch so schreiben

$$\begin{aligned}
&c^2\int\left(V\frac{\partial U_1}{\partial r}-U_1\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=c} d\omega \\
&+c^2\int\left[V\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial r}\right]_{r=c} d\omega \\
&= c^2\int\left(V\frac{\partial U_1}{\partial r}-U_1\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=c} d\omega \\
&\quad -\int V\, d\omega - c\int\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=c} d\omega.
\end{aligned}$$

Für $\lim c = 0$ bleibt nur das Integral $-\int V d\omega$, und wenn man den Werth von V im Punkte (x', y', z') mit V' bezeichnet, so ergibt sich

$$\lim \int \left(V \frac{\partial U}{\partial r} - U \frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=c} c^2 \, d\omega = -4\pi V'.$$

Aus der Gleichung (4) des vorigen Paragraphen erhalten wir also

$$(3)\quad 4\pi V' = -\int\int\int U\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz$$
$$+ \int V \frac{\partial U}{dn} d\sigma,$$

und hier ist das dreifache Integral über den Raum T, das Oberflächen-Integral über seine Begrenzung zu erstrecken.

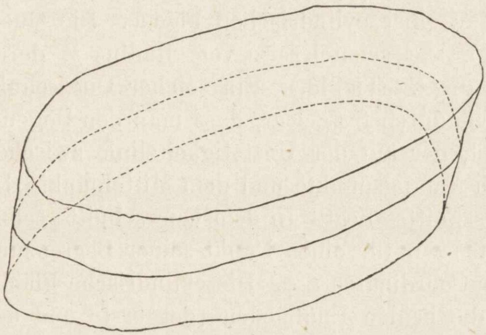
Dabei ist vorausgesetzt, dass die Function V und ihre ersten Derivirten innerhalb des Raumes T überall endlich und stetig bleiben.

Es fragt sich noch, welche Modificationen eintreten, wenn der Raum T sich ins Unendliche erstreckt. In diesem Falle hat man zu der schon vorhandenen Begrenzung noch eine solche hinzuzufügen, welche alle aus dem endlichen Gebiete austretenden Bestandtheile von T ausschliesst. Es fragt sich dann, was aus den Integralen auf der rechten Seite der Gleichung (3) wird, wenn man die neu hinzugefügten Begrenzungstheile so ins Unendliche rücken lässt, dass der gegebene Raum T wieder zu Stande kömmt. Behalten die Integrale in diesem Falle bestimmte, endliche Werthe, so bleibt die Gleichung (3) in Gültigkeit.

Sind Unstetigkeitsstellen der Function V oder der ersten Derivirten vorhanden, so kommen zu dem Oberflächen-Integral noch Beiträge hinzu. Wir unterscheiden die drei Fälle, dass die Unstetigkeit in einer Fläche, oder in einer Linie oder in einem Punkte stattfindet.

E r s t e n s. Wenn die Unstetigkeit in einer Fläche auftritt, so legen wir ihr unendlich nahe zwei Flächen, welche auf der positiven und auf der negativen Normale der Unstetigkeitsfläche überall die constante Strecke $+\varepsilon$ und resp. $-\varepsilon$ abschneiden. Wir wollen dann ε unendlich klein werden lassen. Diese beiden Flächen und ein Cylinder von der unendlich kleinen Höhe 2ε, welcher dem Rande der Unstetigkeitsfläche unendlich nahe liegt, bilden die vollständige Begrenzung eines Raumes, der die Unstetigkeitsstelle in sich enthält (**Fig. 12**). Ueber diese Begrenzung ist das Oberflächen-Integral noch zu erstrecken. Die Cylinderfläche kann dabei ausser Betracht bleiben, weil über sie ausgedehnt das Integral unendlich klein ist. Wir bezeichnen mit $+p$ und resp. $-p$ einen Abstand, der von der Unstetigkeitsstelle aus auf der positiven und resp. auf der negativen Normale genommen wird. Dann ist auf der Seite der positiven Normale

Fig. 12.



$$\frac{\partial V}{\partial n} = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+0}, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_{+0}$$

und auf der Seite der negativen Normale

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{-0}, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = -\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_{-0}.$$

Der angehängte Index ± 0 drückt aus, dass die Derivirte an der Stelle $p = \pm \varepsilon$ genommen und ε der Null unendlich angenähert werden soll. Erstreckt man nun das Oberflächen-Integral über die beiden Hüllen der Unstetigkeitsfläche, so erhält man auf der Seite der positiven Normale

$$\int \left\{ V_{+0} \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_{+0} - U_{+0} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+0} \right\} d\sigma$$

und auf der Seite der negativen Normale

$$-\int \left\{ V_{-0} \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_{-0} - U_{-0} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{-0} \right\} d\sigma.$$

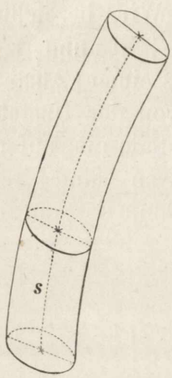
Es ist aber $U_{+0} = U_{-0}$ und $\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_{+0} = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_{-0}$. Zu dem Oberflächen-Integral auf der rechten Seite der Gleichung (3) kommt also in diesem Falle der Beitrag hinzu:

$$(4) \qquad \int d\sigma \left\{ \frac{\partial U}{\partial p} (V_{+0} - V_{-0}) - U \left[\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{-0} \right] \right\}$$

und dieses Integral ist über die Unstetigkeitsfläche zu erstrecken.

Wenn zweitens die Unstetigkeit in einer Linie auftritt, so machen wir diese zur Axe einer cylindrischen Fläche. Die Querschnitte rechtwinklig zur Axe seien Kreise vom Radius t, deren Mittelpunkt auf der Axe liegt. (**Fig. 13.**) Ein solcher Querschnitt wird dadurch festgelegt, dass man den Bogen s angibt, der auf der Unstetigkeitslinie zwischen ihrem Anfangspunkte und dem Mittelpunkte des Querschnittes liegt. In dem Querschnitte selbst nehmen wir für einen Punkt seiner Begrenzung Polar-Coordinaten t, φ. Die cylindrische Fläche und die beiden Endflächen (der erste und der letzte Querschnitt: $s = 0$, $s = s_1$) bilden dann die Begrenzung des Raumes T_2, der bei Anwendung des Satzes von Green zunächst aus dem Integrationsgebiete auszuschliessen ist. Wir nehmen das Verhältniss $t : s_1$ unendlich klein, so dass der Inhalt der Endflächen gegen die cylindrische Mantelfläche vernachlässigt werden kann. Das Oberflächen-Integral ist dann nur über die letztere zu erstrecken. Für sie fällt die nach dem Innern des Raumes T_1 gerichtete Normale mit der Richtung der wachsenden t zusammen. Es ist also hier

Fig. 13.



$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial t}, \qquad \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Auf der rechten Seite der Gleichung (3) ist demnach zu dem Oberflächen-Integral der Beitrag

$$\lim \int_0^{s_1} ds \int_0^{2\pi} t \left(V \frac{\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial V}{\partial t} \right) d\varphi \quad \text{für } t = 0$$

hinzuzufügen. Wir haben im §. 17 gesehen, dass die Function V in einer Linie unstetig wird, wenn über diese Linie eine endliche Masse vertheilt ist. Es ist dann

$$V = -2\rho \lg t + V_1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{2\rho}{t} + \frac{\partial V_1}{\partial t},$$

und es bleiben für $t = 0$ die Functionen V_1 und $\frac{\partial V_1}{\partial t}$ endlich und stetig. Daraus folgt

$$\lim \int_0^{2\pi} t\, V_1 \frac{\partial U}{\partial t}\, d\varphi = 0,$$

$$\lim \int_0^{2\pi} t\, U \frac{\partial V_1}{\partial t}\, d\varphi = 0.$$

Betrachten wir in einem und demselben Querschnitte zwei einander diametral gegenüberliegende Punkte der cylindrischen Fläche, so zeigt sich, dass in ihnen $\lg t$ gleiche Werthe besitzt, dagegen $\frac{\partial U}{\partial t}$ entgegengesetzte Werthe, wenn t unendlich klein genommen wird. Also heben sich in dem Integral

$$-2 \int_0^{2\pi} t\, \rho \lg t \frac{\partial U}{\partial t}\, d\varphi$$

je zwei Elemente auf, und man erhält

$$\lim 2 \int_0^{2\pi} t\, \rho \lg t \frac{\partial U}{\partial t}\, d\varphi = 0 \quad \text{für } t = 0.$$

Demnach bleibt von dem Oberflächen-Integral nur noch der Bestandtheil

$$\lim \int_0^{s_1} ds \int_0^{2\pi} t \frac{2\rho}{t}\, U\, d\varphi = 2\pi \int_0^{s_1} 2\rho\, U\, ds$$

übrig. Beachtet man also, dass

$$-2\rho = \lim \left(t \frac{\partial V}{\partial t}\right)_0$$

ist, so ergibt sich

$$-2\pi \int_0^{s_1} U\, ds \,.\, \lim \left(t \frac{\partial V}{\partial t}\right)_0 \tag{5}$$

als der Beitrag, welcher auf der rechten Seite der Gleichung (3) zu dem Oberflächen-Integral hinzukommt. Die Integration in (5) ist über die Linie zu erstrecken, in welcher die Function V unstetig wird.

Es werde endlich drittens die Function V in einem Punkte unstetig. Dies tritt ein, wenn in dem fraglichen Punkte eine endliche Masse m concentrirt ist. Wir machen ihn zum Mittelpunkte einer Kugelfläche vom Radius $\mathfrak{r}$. Mit $d\omega$ soll das Flächenelement auf einer Kugel vom Radius 1 bezeichnet werden. Dann lautet der Beitrag, welcher jetzt zu dem Oberflächen-Integral hinzukommt:

$$\lim \int \left(V \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{r}} - U \frac{\partial V}{\partial \mathfrak{r}} \right) \mathfrak{r}^2 \, d\omega \quad \text{für } \mathfrak{r} = 0.$$

Es ist aber hier

$$V = \frac{m}{\mathfrak{r}} + V_1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{r}} = -\frac{m}{\mathfrak{r}^2} + \frac{\partial V_1}{\partial \mathfrak{r}},$$

und es bleiben V_1 und $\frac{\partial V_1}{\partial \mathfrak{r}}$ endlich und stetig für $\mathfrak{r} = 0$. Folglich erhalten wir

$$\lim \int \left(V \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{r}} - U \frac{\partial V}{\partial \mathfrak{r}} \right) \mathfrak{r}^2 \, d\omega = \lim \int U m \, d\omega = 4 \pi m U_0,$$

wenn mit U_0 der Werth von U in dem Unstetigkeitspunkte der Function V bezeichnet wird. In diesem letzten Falle hat man also auf der rechten Seite der Gleichung (3) zu dem Oberflächen-Integral den Beitrag

$$4 \pi m U_0 \tag{6}$$

hinzuzufügen.

§. 22.

Die Potentialfunction ist durch die Kennzeichen des §. 18 im ganzen unendlichen Raume eindeutig bestimmt.

Die im vorigen Paragraphen gewonnenen Resultate bieten zunächst die Mittel dar, die im §. 18 aufgestellte Behauptung zu beweisen, dass durch die partielle Differentialgleichung von Laplace [§. 18: (1)], durch eine der Gleichungen [§. 18: (2), (3), (4), (5)] und die vier Nebenbedingungen [§. 18: (6), (7), (8), (9)] die Potentialfunction vollständig und eindeutig bestimmt ist.

Um diesen Beweis zu führen, setzen wir fest, dass T der ganze unendliche Raum sein soll. Die Hülfsfunction U hat in diesem Falle einen sehr einfachen Ausdruck, nemlich

$$(1) \qquad U = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}.$$

Denn diese Function genügt den aufgestellten Bedingungen. Sie ist gleich Null in der Begrenzung des Raumes T, d. h. in unendlicher Entfernung. Sie ist überall endlich und stetig, ausser im Punkte (x', y', z'), wo sie unendlich wird wie $\frac{1}{r}$. Sie erfüllt im ganzen unendlichen Raume die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Als Begrenzung des Raumes T können wir eine Kugelfläche nehmen, deren Mittelpunkt im Punkte (x', y', z') liegt und deren Radius R unendlich gross ist. Der Satz des vorigen Paragraphen lautet dann:

$$(2) \qquad 4\pi V' = -\int\int\int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz$$
$$+ \int \left(V \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial V}{\partial n}\right) d\sigma.$$

Das dreifache Integral ist über den ganzen unendlichen Raum auszudehnen, das Oberflächen-Integral über die Kugel vom Radius R und über die Hüllen der Unstetigkeitsstellen der Function V und ihrer ersten Derivirten. Die Beiträge, welche diese Unstetigkeitsstellen liefern, sind für jeden einzelnen Fall in (4), (5), (6) des vorigen Paragraphen ausgedrückt. Es handelt sich also nur noch um die Kugel vom Radius R. Für sie ist

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\partial V}{\partial R}, \qquad \frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{1}{R^2}, \qquad d\sigma = R^2\, d\omega,$$

wenn $d\omega$ das Oberflächen-Element einer Kugel vom Radius 1 bezeichnet. Folglich erhalten wir

$$\int \left(V \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial V}{\partial n}\right) d\sigma = \int d\omega \left(V + R\frac{\partial V}{\partial R}\right).$$

Nun geht aber aus der Nebenbedingung des §. 18, (6) ohne weiteres hervor

$$\lim V = \frac{M}{R} = 0 \quad \text{für } R = \infty.$$

Multiplicirt man ferner auf beiden Seiten der Gleichungen (7), (8), (9) des §. 18 resp. mit $\cos(Rx)$, $\cos(Ry)$, $\cos(Rz)$ und addirt die Resultate, so ergibt sich

$$\lim R^2 \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cos(Rx) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(Ry) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(Rz)\right) = -M$$

oder kürzer

$$\lim \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R}\right) = -M,$$

und daraus sieht man, dass

$$\lim \left(R \frac{\partial V}{\partial R}\right) = 0 \quad \text{für } R = \infty.$$

Das Integral, über die Kugelfläche vom Radius R erstreckt, ist also Null, und deshalb hat man in (2) das Oberflächen-Integral nur noch über die Hüllen der Unstetigkeitsstellen von V und seinen ersten Derivirten auszudehnen.

Es sei nun erstens die anziehende Masse über einen im endlichen Gebiete völlig begrenzten Körper stetig vertheilt und nirgends eine endliche Masse über eine Fläche oder eine Linie ausgebreitet oder in einzelnen Punkten concentrirt. Dann sind die Function V und ihre ersten Derivirten überall endlich und stetig. Es fällt also in (2) das Oberflächen-Integral gänzlich weg. Die Summe der zweiten Derivirten $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ ist aber Null, wenn der Punkt (x, y, z) ausserhalb des anziehenden Körpers liegt, und gleich $-4\pi\rho$, wenn er innerhalb liegt. Dies ist in den partiellen Differentialgleichungen (1) und (2) des §. 18 ausgesprochen. Danach erhält man aus der Gleichung (2) des gegenwärtigen Paragraphen, wenn man noch den Factor 4π auf beiden Seiten weglässt:

$$(3) \qquad V' = \int\int\int \rho \frac{dx\, dy\, dz}{r}.$$

Die dreifache Integration ist über den mit Masse erfüllten Raum auszudehnen.

Wir nehmen zweitens den Fall, dass die anziehende Masse allein ausgebreitet ist über eine im endlichen Gebiete völlig begrenzte Fläche, und dass in einzelnen Linien oder Punkten eine endliche Masse nicht vorhanden ist. Alsdann ist im ganzen unendlichen Raume

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Ferner ist V überall endlich und stetig variabel, folglich in unendlicher Nähe der anziehenden Fläche $V_{+0} = V_{-0}$. Danach wird aus der Gleichung (2), wenn man den Beitrag (4) des vorigen Paragraphen in Betracht zieht:

$$4\pi V' = -\int \frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{-0}\right\} d\sigma.$$

Hier hat p dieselbe Bedeutung wie in der Gleichung (3) des §. 18. Vermöge dieser Gleichung erhalten wir also

$$V' = \int \rho \frac{d\sigma}{r}. \tag{4}$$

Die Integration ist über die anziehende Fläche auszudehnen.

Es sei drittens die anziehende Masse nur über eine Linie ausgebreitet und keine endliche Masse in einzelnen Punkten concentrirt. Dann ist in dem ganzen unendlichen Raume

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

In unendlicher Nähe der anziehenden Linie gilt die Gleichung (4) des §. 18. Folglich erhalten wir zu dem Oberflächen-Integral der Gleichung (2) den Beitrag [§. 21, (5)]:

$$4\pi \int \rho \frac{ds}{r},$$

und die Gleichung (2) gibt jetzt

$$V' = \int \rho \frac{ds}{r}. \tag{5}$$

Das Integral ist über die anziehende Linie zu erstrecken.

Wenn endlich viertens die anziehende Masse m in einem einzigen Punkte (x, y, z) concentrirt ist, so gilt wieder für den unendlichen Raum die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Ausserdem haben wir die Gleichung (5) des §. 18. In Folge davon ergibt sich zu dem Oberflächen-Integral der Gleichung (2) der Beitrag [§. 21, (6)]

$$\frac{4\pi m}{r},$$

und wir erhalten aus Gleichung (2):

$$V' = \frac{m}{r}. \tag{6}$$

Aus den Gleichungen (3), (4), (5), (6) ersieht man, dass für jeden der zu betrachtenden Fälle die Differentialgleichungen des §. 18 und die dort aufgestellten Unstetigkeits- und Nebenbedingungen je eine einzige, völlig bestimmte Function liefern, und zwar stimmt der Ausdruck dieser Function, wie er aus den Vorschriften des §. 18 hervorgeht, überein mit dem Ausdrucke, welcher als Definition der Potentialfunction aufgestellt ist. Man erkennt dies unmittelbar durch Vergleichung der Ausdrücke (3), (4), (5), (6) mit resp. §. 2, (5), §. 14, (1), §. 17, (2), §. 2, (2). Damit ist die Behauptung des §. 18 bewiesen.

§. 23.

Beispiel: Die Green'sche Function U für das Innere eines rechtwinkligen Parallelepipedon.

In §. 21 ist allgemein gezeigt worden, wie man mit Hülfe des Satzes von Green die Potentialfunction V' für jeden Punkt (x', y', z') im Innern eines Raumes T bestimmt, wenn ihr Werth überall in der Oberfläche gegeben und die Summe $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ im Innern bekannt ist.

Die Green'sche Hülfsfunction U soll hier für einen besonderen Fall hergestellt werden. Der Raum T sei ein rechtwinkliges Parallelepipedon. Wir legen die Coordinaten so, dass der Anfangspunkt in den Mittelpunkt des Parallelepipedon fällt, dass die Begrenzungs-Ebenen zu zweien je einer Coordinaten-Ebene parallel laufen und dass sie auf den Axen resp. die Strecken $\pm \frac{a}{2}, \pm \frac{b}{2}, \pm \frac{c}{2}$ abschneiden.

Nach der Methode von Green ist es erforderlich, eine Function U herzustellen, welche

1) in der Oberfläche überall den Werth Null hat;
2) im Punkte (x', y', z') unendlich wird wie der reciproke Werth der Entfernung von diesem Punkte, übrigens aber im Innern des Parallelepipedon endlich und stetig variabel ist;
3) im Innern des Parallelepipedon der partiellen Differentialgleichung Genüge leistet:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Wir legen drei Schaaren von Ebenen, rechtwinklig resp. gegen die Axen der x, der y, der z. Je zwei benachbarte Ebenen derselben Schaar sollen in constantem Abstande von einander sein und zwar in dem Abstande a für die erste, b für die zweite, c für die dritte Schaar. Die beiden Ebenen jeder Schaar, welche dem Anfangspunkte der Coordinaten zunächst liegen, sollen je eine Begrenzungsfläche des gegebenen Parallelepipedon in sich enthalten. Auf diese Weise wird der unendliche Raum in lauter congruente Parallelepipeda zerlegt. Eins von ihnen ist das gegebene Parallelepipedon selbst.

Wir gehen nun darauf aus, die Function U für jeden Punkt des unendlichen Raumes herzustellen, so dass sie der dritten Bedingung überall genügt, und dass sie entgegengesetzte Werthe besitzt in je zwei Punkten, die zu irgend einer der gelegten Ebenen symmetrisch liegen. Durch diese Bestimmung wird erreicht, dass die erste Bedingung erfüllt wird. Soll dann auch noch der zweiten Genüge geschehen, so muss die Function unendlich werden in allen Punkten, deren Coordinaten von der Form sind

$$ka + (-1)^k x', \quad mb + (-1)^m y', \quad nc + (-1)^n z',$$

und zwar positiv oder negativ unendlich, je nachdem $k + m + n$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Für k sind alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu setzen, ebenso für m und für n. Man erhält alle Unstetigkeitspunkte der Function U, wenn man jeden Werth von k der Reihe nach mit allen Werthen von m zusammenstellt und zu jeder solchen Zusammenstellung der Reihe nach alle Werthe von n hinzusetzt. Hiernach erhält man als Ausdruck für U eine dreifach unendliche Reihe, nemlich

$$(1) \qquad U = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m+n}}{\sqrt{N}},$$

wobei zur Abkürzung N geschrieben ist für die Summe der drei Quadrate

$$\{ka + (-1)^k x' - x\}^2 + \{mb + (-1)^m y' - y\}^2 + \{nc + (-1)^n z' - z\}^2.$$

Von diesem Ausdrucke für U ist leicht nachzuweisen, dass er den aufgestellten Bedingungen Genüge leistet. Er befriedigt die Gleichung von Laplace, weil jeder Summand es thut. Die Nenner der einzelnen Summanden drücken den Abstand des Punktes (x, y, z) von je einem der Unstetigkeitspunkte aus. Es wird also jedesmal ein Nenner in vorgeschriebener Weise zu Null, wenn der Punkt (x, y, z) in einen Unstetigkeitspunkt hineinrückt. Endlich nimmt die Function entgegengesetzte Werthe an für irgend welche zwei Punkte, die symmetrisch liegen zu irgend einer Ebene aus den drei Schaaren. Betrachten wir z. B. zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2), die zu einer Ebene der ersten Schaar symmetrisch liegen. Dies ist der Fall, wenn die Coordinaten den Gleichungen genügen

$$x_1 = h\,a + (-1)^h\,\xi, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z,$$

$$x_2 = (h+1)\,a + (-1)^{h+1}\,\xi, \quad y_2 = y, \quad z_2 = z,$$

worin h irgend eine ganze Zahl ist. Die Punkte liegen symmetrisch zu der Ebene.

$$x = \left(h + \frac{1}{2}\right) a. \tag{2}$$

Der Ausdruck unter dem dreifachen Summenzeichen unterscheidet sich für die beiden Punkte nur in dem ersten Quadrat unter dem Wurzelzeichen des Nenners. Dasselbe lautet für den ersten Punkt

$$\{(k-h)\,a + (-1)^k\,x' - (-1)^h\,\xi\}^2 \tag{3}$$

und für den zweiten Punkt

$$\{(k-h-1)\,a + (-1)^k\,x' - (-1)^{h+1}\,\xi\}^2. \tag{4}$$

Statt des Ausdruckes (3) kann man auch schreiben

$$\{(-1)^h\,(k-h)\,a + (-1)^{k-h}\,x' - \xi\}^2$$

oder, wenn man $(-1)^h\,(k-h) = \lambda$ setzt:

$$\{\lambda\,a + (-1)^\lambda\,x' - \xi\}^2. \tag{5}$$

Da k allen ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ der Reihe nach gleichgesetzt werden soll, so gilt dasselbe von λ. Für den ersten Punkt erhalten wir also

$$U_1 = \sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^h\,(-1)^{\lambda+m+n}}{\sqrt{N_1}}, \tag{6}$$

wobei zur Abkürzung N_1 geschrieben ist für die Summe der drei Quadrate

$$\{\lambda a + (-1)^\lambda x' - \xi\}^2 + \{m b + (-1)^m y' - y\}^2 + \{n c + (-1)^n z' - z\}^2.$$

Statt des Ausdruckes (4) kann man schreiben

$$\{(-1)^{h+1}(k-h-1)\,a + (-1)^{k-h-1}\,x' - \xi\}^2$$

oder, wenn man jetzt $(-1)^{h+1}(k-h-1)=\lambda$ setzt:

(7) $$\{\lambda\, a+(-1)^{\lambda}\, x'-\xi\}^2.$$

Auch hier hat man bei der Summirung die Grösse λ allen ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ der Reihe nach gleichzusetzen. Folglich ergibt sich für den zweiten Punkt

(8) $$U_2=\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{h+1}(-1)^{\lambda+m+n}}{\sqrt{N_1}},$$

und es hat hier N_1 dieselbe Bedeutung wie vorher in der Gleichung (6). Aus (6) und (8) erkennt man ohne weiteres, dass

(9) $$U_2=-U_1$$

ist. Nimmt man nun speciell $\xi=(-1)^h\frac{a}{2}$, so fallen beide Punkte zusammen in einen und denselben Punkt der Ebene (2). Da die Function U einwerthig ist, so muss in diesem Falle

$$U_2=U_1$$

sein, und dies gibt mit Rücksicht auf (9):

(10) $$U_1=U_2=0.$$

Auf demselben Wege ist der Beweis zu führen, wenn die beiden Punkte symmetrisch liegen zu einer Ebene der zweiten oder der dritten Schaar. Demnach erfüllt der Ausdruck (1) auch die erste der aufgestellten Bedingungen.

Dies kann man auch aus der mechanischen Bedeutung der durch (1) ausgedrückten Function U erkennen. Danach ist nemlich U die Potentialfunction für den Fall, dass in jedem Unstetigkeitspunkte eine Masseneinheit concentrirt ist, und zwar die positive oder die negative, je nachdem $k+m+n$ gerade oder ungerade ist. Da eine positive Masse den Punkt (x, y, z) anzieht, so ist die Bedeutung der negativen Masse leicht zu erkennen. Sie stösst den Punkt ab. Nehmen wir nun irgend eine Ebene aus den drei Schaaren, so findet sich zu jedem anziehenden Massenpunkte ein abstossender, so dass beide in Beziehung auf die Ebene symmetrisch liegen. Von einem Punkte (x, y, z) in dieser Ebene haben demnach beide Massenpunkte gleiche Entfernung. Ihre Massen sind entgegengesetzt gleich. Sie liefern also zu der Potentialfunction den Beitrag Null. Dies gilt aber von allen mit Masse erfüllten Punkten, und daher ist der Werth der Potentialfunction für jeden Punkt (x, y, z) in der Ebene überhaupt gleich Null.

Wir können die Function U auch in Form eines bestimmten Integrals ausdrücken. Es ist nemlich

$$\int_0^\infty e^{-s} \frac{ds}{\sqrt{s}} = \sqrt{\pi}.$$

Setzt man $s = Nt$, so ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-Nt} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Wir erhalten danach für U den neuen Ausdruck:

$$(11) \qquad U = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (-1)^{k+m+n} e^{-Nt} \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Hier ist nun freilich zuerst die Integration und nachher sind die drei Summirungen auszuführen. Man darf aber auch zuerst die drei Summirungen vornehmen und dann integriren, also:

$$(12) \qquad U = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{k+m+n} e^{-Nt} \right).$$

Die dreifach unendliche Reihe in (12) zerfällt ohne weiteres in das Product der drei einfachen Reihen:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-t[ka + (-1)^k x' - x]^2},$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^m e^{-t[mb + (-1)^m y' - y]^2},$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-t[nc + (-1)^n z' - z]^2}.$$

Jede dieser Reihen lässt sich leicht durch die Functionen ϑ ausdrücken, welche Jacobi in die Theorie der elliptischen Functionen eingeführt hat.

§. 24.

Beispiel: Potentialfunction eines homogenen Ellipsoids.

Ehe wir in der allgemeinen Untersuchung der Function U weiter gehen, soll die Potentialfunction in einigen besonderen Fällen betrachtet werden.

Der anziehende Körper sei ein Ellipsoid mit den Halbaxen a, b, c. Die Dichtigkeit ρ soll constant sein. Der Punkt (x, y, z) liegt in der Oberfläche des Ellipsoids, wenn

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

ist. Er liegt ausserhalb oder innerhalb des Ellipsoids, je nachdem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

positiv oder negativ. Um die Unterscheidung dieser drei Fälle möglichst zu vereinfachen, betrachten wir die Function

(1) $$F(s) = \frac{x^2}{s + a^2} + \frac{y^2}{s + b^2} + \frac{z^2}{s + c^2} - 1.$$

Dieselbe wird unendlich für drei Werthe von s, nemlich für $s = -a^2$, für $s = -b^2$ und für $s = -c^2$. Bezeichnen wir mit ε eine unendlich kleine positive Grösse, so zeigt sich

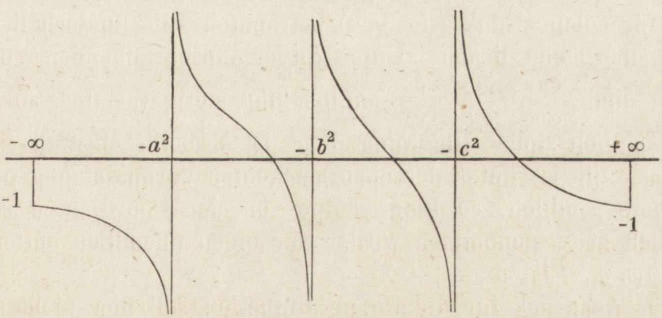
$$F(-a^2 - \varepsilon) = -\infty, \quad F(-b^2 - \varepsilon) = -\infty, \quad F(-c^2 - \varepsilon) = -\infty,$$
$$F(-a^2 + \varepsilon) = +\infty, \quad F(-b^2 + \varepsilon) = +\infty, \quad F(-c^2 + \varepsilon) = +\infty.$$

Ferner ist

$$F(-\infty) = -1, \qquad F(+\infty) = -1.$$

Nimmt man also $a^2 > b^2 > c^2$ und betrachtet s als Abscisse, $F(s)$ als Ordinate einer ebenen Curve (**Fig. 14**), so ist der Verlauf derselben leicht zu überblicken. Wenn die Abscisse stetig wachsend durch eine der drei Unstetigkeitsstellen hindurchgeht, so springt die Ordinate von $-\infty$ auf $+\infty$. Abgesehen von den

Fig. 14.



Unstetigkeitsstellen, nimmt mit wachsendem s die Ordinate fortwährend ab, weil

$$F'(s) = -\frac{x^2}{(s+a^2)^2} - \frac{y^2}{(s+b^2)^2} - \frac{z^2}{(s+c^2)^2}$$

durchaus negativ ist. Die Curve schneidet demnach die Abscissenaxe je einmal zwischen $-a^2$ und $-b^2$, zwischen $-b^2$ und $-c^2$ und zwischen $-c^2$ und $+\infty$. Die Werthe von s an diesen drei Schnittstellen sind die Wurzeln der Gleichung $F(s) = 0$. Nun ist aber, wie schon hervorgehoben, $F(0)$ positiv oder Null oder negativ, je nachdem der Punkt (x, y, z) ausserhalb des Ellipsoids liegt, oder in seiner Oberfläche, oder innerhalb. Daraus ergibt sich leicht für die Gleichung $F(s) = 0$, dass ihre grösste Wurzel positiv ist im ersten, Null im zweiten, negativ im dritten Falle. Die beiden anderen Wurzeln sind immer negativ. Wir wollen mit σ nur die grösste Wurzel der Gleichung $F(s) = 0$ bezeichnen.

Zur Abkürzung werde

$$\left(\frac{x}{\sigma+a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sigma+b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sigma+c^2}\right)^2 = l$$

gesetzt. Betrachtet man in der Gleichung $F(\sigma) = 0$ die vier Grössen x, y, z, σ als variabel und σ als Function von x, y, z, so ergibt sich durch Differentiation

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} = \frac{2x}{(a^2+\sigma)\,l}, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial y} = \frac{2y}{(b^2+\sigma)\,l}, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial z} = \frac{2z}{(c^2+\sigma)\,l}.$$

So lange der Punkt (x, y, z) ausserhalb oder in der Oberfläche des Ellipsoids liegt, sind die Grössen $a^2+\sigma$, $b^2+\sigma$, $c^2+\sigma$ positiv und verschieden von Null. Die Grösse l ist positiv und wird nur dann zu Null, wenn entweder $x = y = z = 0$ oder wenn eine dieser Coordinaten unendlich gross ist. Wir wollen die Function σ nur für solche Punkte (x, y, z) betrachten, die ausserhalb oder in der Oberfläche liegen. Unter dieser einschränkenden Voraussetzung sind $\frac{\partial\sigma}{\partial x}$, $\frac{\partial\sigma}{\partial y}$, $\frac{\partial\sigma}{\partial z}$ endlich und stetig variabel, so lange x, y, z endlich sind. Die Function σ ist deshalb ebenfalls stetig variabel. Sie ist unter der eben gemachten Voraussetzung positiv und bleibt endlich, so lange keine von den Coordinaten x, y, z unendlich gross genommen wird. Für einen unendlich entfernten Punkt (x, y, z) ist $\sigma = +\infty$.

Der Ausdruck für die Potentialfunction soll hier nicht abgeleitet werden. Wir wollen ihn als gegeben ansehen und den Beweis führen, dass er allen Bedingungen genügt, durch welche die

Potentialfunction vollständig und eindeutig charakterisirt wird (§§. 18. 22).

Wir setzen zur Abkürzung

$$\sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)} = D$$

und bezeichnen mit $\triangle$ den Werth, welchen D annimmt für $s = \sigma$.

Es soll nun bewiesen werden, dass

$$(2) \qquad V = \pi\rho \int_0^\infty \frac{ds}{D}\left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right),$$

wenn der Punkt (x, y, z) im Innern des Ellipsoids liegt; und

$$(3) \qquad V = \pi\rho \int_\sigma^\infty \frac{ds}{D}\left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right),$$

wenn er ausserhalb liegt. Man kann die Ausdrücke (2) und (3) auch in die Form bringen

$$V = \pi\rho \left\{\int^\infty \frac{ds}{D} - x^2 \int^\infty \frac{ds}{D(a^2+s)} - y^2 \int^\infty \frac{ds}{D(b^2+s)} - z^2 \int^\infty \frac{ds}{D(c^2+s)}\right\}.$$

Die untere Grenze der Integration ist 0 oder σ, je nachdem die Gleichung (2) oder (3) zu Stande kommen soll.

Liegt der angezogene Punkt im Innern des Ellipsoids, so ist V eine rationale ganze Function zweiten Grades von x, y, z, und da diese Variabeln durchaus endliche Werthe behalten, so ist die Function V für jeden Punkt im Innern des Ellipsoids endlich und stetig variabel.

Liegt der angezogene Punkt ausserhalb des Ellipsoids, so hängt die Function V von x, y, z direct ab, insofern die Factoren x^2, y^2, z^2 auftreten, und indirect, insofern die untere Integrationsgrenze σ eine Function von x, y, z ist. Die Aenderung, welche V bei einer unendlich kleinen Verschiebung des angezogenen Punktes erleidet, setzt sich also aus zweien zusammen, nemlich aus der unendlich kleinen Aenderung, die von den Factoren x^2, y^2, z^2 herrührt, und aus der Aenderung, die sich ergibt, wenn man nur σ variabel nimmt. Nun sind aber die Integrale stetige Functionen von σ, und σ selbst ist eine stetige Function von x, y, z. Daher ist V endlich und stetig variabel, wenn der Punkt (x, y, z) ausserhalb des Ellipsoids liegt. Dies gilt auch noch, wenn er in unendliche Entfernung rückt. Denn wenn irgend eine der Coordinaten (x, y, z) unendlich gross wird, so wird die grösste Wurzel σ der Gleichung $F(s) = 0$ ebenfalls unendlich gross. Dann hat in (3) die letzte Klammer unter dem Integral den Werth Null. Der Factor $\frac{1}{D}$ ist auch gleich Null, und die Grenzen der Integration fallen zusammen. Folglich wird $V = 0$, wenn der angezogene Punkt in unendlicher Entfernung liegt.

Für einen Punkt (x, y, z) in der Oberfläche des Ellipsoids ist $\sigma = 0$. Die Integrale (2) und (3) sind dann also einander gleich. Folglich erleidet V auch dann eine stetige Aenderung, wenn der angezogene Punkt durch die Oberfläche des Ellipsoids hindurchgeht.

Danach ist bewiesen, dass die Function V im ganzen unendlichen Raume endlich und stetig variabel ist, und dass sie den Werth Null hat in unendlicher Entfernung.

Wir untersuchen die ersten Derivirten. Aus (2) findet sich

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi\rho x \int_0^\infty \frac{ds}{D(a^2+s)}. \tag{4}$$

Dies gilt für einen Punkt (x, y, z) im Innern des Ellipsoids. Aus (3) ergibt sich dagegen

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi\rho x \int_\sigma^\infty \frac{ds}{D(a^2+s)}$$
$$-\pi\rho \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{2x}{(a^2+\sigma)\,l}\left(1 - \frac{x^2}{a^2+\sigma} - \frac{y^2}{b^2+\sigma} - \frac{z^2}{c^2+\sigma}\right).$$

Da nun $\frac{1}{\Delta}$ und $\frac{2x}{(a^2+\sigma)\,l}$ nicht unendlich werden können und die letzte Klammer gleich Null ist, so erhält man

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi\rho x \int_\sigma^\infty \frac{ds}{D(a^2+s)}. \tag{5}$$

Dies gilt für einen Punkt (x, y, z) ausserhalb des Ellipsoids. Liegt der Punkt in der Oberfläche, so ist in (5) die Grösse $\sigma = 0$ zu setzen, und die Integrale (4) und (5) sind einander gleich. Folglich ist $\frac{\partial V}{\partial x}$ überall endlich und stetig variabel. Dies gilt auch in unendlicher Entfernung. Denn es ist für einen unendlich entfernten Punkt (x, y, z) der Quotient $\frac{x}{a^2+s}$ innerhalb der Integrationsgrenzen nicht unendlich gross. Der Factor $\frac{1}{D}$ ist Null und die Integrationsgrenzen fallen zusammen. Folglich ist $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ in unendlicher Entfernung.

Die Ausdrücke $\frac{\partial V}{\partial y}$ und $\frac{\partial V}{\partial z}$ finden sich, wenn man in (4) und in (5) y und b, resp. z und c vertauscht mit x und a. Daher sind auch $\frac{\partial V}{\partial y}$ und $\frac{\partial V}{\partial z}$ überall endlich und stetig variabel und in unendlicher Entfernung gleich Null.

Aus (4) ergibt sich durch nochmalige Differentiation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -2\pi\rho \int_0^\infty \frac{ds}{D(a^2+s)}. \tag{6}$$

Dies gilt für einen Punkt (x, y, z) im Innern des Ellipsoids. Aus (5) erhält man dagegen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -2\pi\rho \int_\sigma^\infty \frac{ds}{D(a^2+s)} + \frac{2\pi\rho x}{\triangle(a^2+\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \tag{7}$$

Dies gilt für einen Punkt (x, y, z) ausserhalb des Ellipsoids. Beide Ausdrücke sind endlich und ändern sich stetig, wenn nur der Punkt (x, y, z) im einen Falle innerhalb, im andern Falle ausserhalb des Ellipsoids bleibt. Lässt man ihn von der einen und von anderen Seite in die Oberfläche hineinrücken, so geben die Ausdrücke (6) und (7) verschiedene Werthe. Nur für $x = 0$ sind sie einander gleich.

Die Ausdrücke $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ ergeben sich aus (6) und (7) durch Buchstaben-Vertauschung. Wir bilden die Summe der zweiten Derivirten und erhalten für einen inneren Punkt (x, y, z)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -2\pi\rho \int_0^\infty \frac{ds}{D}\left(\frac{1}{a^2+s} + \frac{1}{b^2+s} + \frac{1}{c^2+s}\right).$$

Es findet sich aber

$$\frac{d \lg(D^2)}{ds} = \frac{1}{a^2+s} + \frac{1}{b^2+s} + \frac{1}{c^2+s},$$

folglich ist

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\rho\int_0^\infty\frac{d\lg D}{ds}\frac{ds}{D}$$

$$=-4\pi\rho\int_0^\infty\frac{d\left(-\frac{1}{D}\right)}{ds}ds.$$

Für $s=\infty$ ist $D=\infty$, für $s=0$ dagegen $D=1$. Also ergibt sich

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\rho, \tag{8}$$

wenn der Punkt (x, y, z) im Innern des Ellipsoids liegt.

Dagegen haben wir für einen äusseren Punkt

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$=-4\pi\rho\int_\sigma^\infty\frac{d\left(-\frac{1}{D}\right)}{ds}ds$$

$$+\frac{2\pi\rho}{\Delta}\left(\frac{x}{a^2+\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{y}{b^2+\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial y}+\frac{z}{c^2+\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right).$$

Der Werth des Integrals ist $=\frac{1}{\Delta}\cdot$ Ferner haben wir

$$\frac{x}{a^2+\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{y}{b^2+\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial y}+\frac{z}{c^2+\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z}$$

$$=\frac{2x^2}{(a^2+\sigma)^2 l}+\frac{2y^2}{(b^2+\sigma)^2 l}+\frac{2z^2}{(c^2+\sigma)^2 l}$$

$$=\frac{2}{l}\left\{\left(\frac{x}{a^2+\sigma}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2+\sigma}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2+\sigma}\right)^2\right\}.$$

$$=2.$$

Folglich erhalten wir

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0, \tag{9}$$

wenn der Punkt (x, y, z) ausserhalb des Ellipsoids liegt.

Damit ist bewiesen, dass die Integrale (2) und (3) in der That die Potentialfunction des Ellipsoids von der constanten Dichtigkeit ρ ausdrücken.

§. 25.

Fortsetzung: Anziehung des Ellipsoids.

Wir suchen die Gesetze der Anziehung auf, wie sie aus der Potentialfunction des Ellipsoids sich ergeben. Die Gesammtmasse M des Ellipsoids wird ausgedrückt:

$$M = \frac{4}{3} abc \, \pi \, \rho.$$

Demnach ist die Potentialfunction

$$(1) \qquad V = \frac{3}{4} M \int_0^\infty \frac{\left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right)}{\sqrt{(a^2+s)\;(b^2+s)\;(c^2+s)}} \, ds,$$

wenn der Punkt (x, y, z) im Innern des Ellipsoids liegt. Für einen äusseren Punkt muss die untere Integrationsgrenze nicht 0, sondern σ sein. Man kann aber auch in diesem Falle die untere Grenze 0 wiederherstellen, wenn man unter dem Integral statt s überall $s + \sigma$ schreibt. Setzt man dann noch zur Abkürzung

$$a^2 + \sigma = a_1^2, \qquad b^2 + \sigma = b_1^2, \qquad c^2 + \sigma = c_1^2,$$

so ergibt sich für einen äusseren Punkt (x, y, z)

$$(2) \qquad V = \frac{3}{4} M \int_0^\infty \frac{\left(1 - \frac{x^2}{a_1^2+s} - \frac{y^2}{b_1^2+s} - \frac{z^2}{c_1^2+s}\right)}{\sqrt{(a_1^2+s)\;(b_1^2+s)\;(c_1^2+s)}} \, ds.$$

Darin spricht sich der Satz aus:

Das Ellipsoid von constanter Dichtigkeit übt auf einen **äusseren** Punkt (x, y, z) dieselbe Anziehung aus, als ob seine Gesammtmasse gleichförmig über das confocale Ellipsoid vertheilt wäre, auf dessen Oberfläche der Punkt (x, y, z) liegt.*)

Beachtet man nemlich die Gleichungen, durch welche a_1^2, b_1^2, c_1^2 definirt sind, so geht die Gleichung $F(\sigma) = 0$ in folgende über:

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} - 1 = 0.$$

*) Ueber diesen Satz vergleiche man die Abhandlung von Gauss: Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum. In dem Artikel 1 findet man auch die Geschichte des Problems.

Diese Gleichung drückt aus, dass der Punkt (x, y, z) auf der Oberfläche eines Ellipsoids liegt, welches mit dem gegebenen den Mittelpunkt und die Lage der Hauptaxen gemein hat. Die Oberfläche des gegebenen Ellipsoids und die Fläche (3) schneiden die Coordinaten-Ebenen in je zwei Ellipsen mit gemeinschaftlichen Brennpunkten. Solche Ellipsen heissen confocal, und die in Rede stehenden Ellipsoide werden ebenfalls confocal genannt.

Die Componenten der Anziehung auf einen inneren Punkt sind:

$$X = \frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi\rho x \int_0^\infty \frac{ds}{D(a^2+s)},$$

$$(4) \qquad Y = \frac{\partial V}{\partial y} = -2\pi\rho y \int_0^\infty \frac{ds}{D(b^2+s)},$$

$$Z = \frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi\rho z \int_6^\infty \frac{ds}{D(c^2+s)}.$$

Setzen wir $s = a^2 s_1$, so ergibt sich

$$X = -2\pi\rho x \int_0^\infty \frac{ds_1}{(1+s_1)\sqrt{(1+s_1)\left(1+\frac{a^2}{b^2}s_1\right)\left(1+\frac{a^2}{c^2}s_1\right)}},$$

$$(5) \qquad Y = -2\pi\rho y \int_0^\infty \frac{ds_1}{\left(\frac{b^2}{a^2}+s_1\right)\sqrt{(1+s_1)\left(1+\frac{a^2}{b^2}s_1\right)\left(1+\frac{a^2}{c^2}s_1\right)}},$$

$$Z = -2\pi\rho z \int_0^\infty \frac{ds_1}{\left(\frac{c^2}{a^2}+s_1\right)\sqrt{(1+s_1)\left(1+\frac{a^2}{b^2}s_1\right)\left(1+\frac{a^2}{c^2}s_1\right)}}.$$

Diese Ausdrücke bleiben dieselben, wenn die Verhältnisse $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ constant genommen werden. Sie sind von der Grösse der Halbaxen unabhängig.

Zwei ähnliche Ellipsoide von derselben constanten Dichtigkeit, welche den Mittelpunkt und die Lage der Hauptaxen gemein haben, üben demnach auf einen Punkt (x, y, z) gleiche Anziehung, wenn er im Innern oder auf der

Oberfläche des kleineren Ellipsoids liegt. Der Raum zwischen beiden Oberflächen übt auf den **inneren** Punkt gar keine Wirkung.

Hiernach ist die Anziehung eines Ellipsoids von constanter Dichtigkeit auf einen inneren wie auf einen äusseren Punkt dieselbe wie die Anziehung eines Hülfsellipsoids, welches mit dem gegebenen den Mittelpunkt und die Lage der Axen gemein hat und den angezogenen Punkt in seiner Oberfläche enthält. Für einen äusseren Punkt ist das Hülfsellipsoid dem gegebenen confocal, für einen inneren Punkt ist es ihm ähnlich. Die Dichtigkeit des Hülfsellipsoids ist in beiden Fällen constant. Für einen äusseren Punkt hat das Hülfsellipsoid dieselbe Gesammtmasse, für einen inneren Punkt dieselbe Dichtigkeit wie das gegebene.

Ist der Punkt (x, y, z) ausserhalb des anziehenden Ellipsoids gelegen, so hat man in den Integralen (4) als untere Grenze σ zu setzen, folglich in (5) als untere Grenze $\frac{\sigma}{a^2}$. Die Ausdrücke (5) sind also nicht mehr unabhängig von a. Man kann deshalb ausser dem ersten Ellipsoid ein zweites concentrisches betrachten, dessen Hauptaxen dieselbe Lage haben, aber im Verhältnis $1+\varepsilon : 1$ grösser sind. Wir wollen dann ε unendlich klein werden lassen und nach der Anziehung der unendlich dünnen Schicht zwischen den beiden ellipsoidischen Oberflächen fragen.

In den Integralen, welche für (5) an die Stelle treten, ist von einem Ellipsoid zum andern nur die untere Grenze $\frac{\sigma}{a^2}$ variabel. Man hat also:

$$dX = 2\pi\rho x \frac{1}{\Delta\left(1+\frac{\sigma}{a^2}\right)} d\left(\frac{\sigma}{a^2}\right).$$

Für σ gilt die Gleichung:

$$\frac{x^2}{1+\frac{\sigma}{a^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}+\frac{\sigma}{a^2}} + \frac{z^2}{\frac{c^2}{a^2}+\frac{\sigma}{a^2}} = a^2.$$

Daraus ergibt sich durch Differentiation:

$$-\left[\left(\frac{x}{1+\frac{\sigma}{a^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{b^2}{a^2}+\frac{\sigma}{a^2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\frac{c^2}{a^2}+\frac{\sigma}{a^2}}\right)^2\right] d\left(\frac{\sigma}{a^2}\right) = 2a\,da$$
$$= 2a^2\varepsilon;$$

dies lässt sich kürzer schreiben

$$-a^4\, l\, d\left(\frac{\sigma}{a^2}\right) = 2\, a^2\, \varepsilon.$$

Folglich ist

$$dX = -\frac{4\,\pi\,\rho\,\varepsilon}{\triangle\, l} \cdot \frac{x}{a^2 + \sigma}.$$

Dies ist die eine Componente der Anziehung, welche die unendlich dünne ellipsoidische Schicht auf den äusseren Punkt (x, y, z) ausübt. Wir wollen sie mit Ξ bezeichnen. Die beiden anderen Componenten H und Z finden sich durch Buchstabenvertauschung. Also hat man

$$\Xi = -\frac{4\,\pi\,\rho\,\varepsilon}{\triangle\, l} \cdot \frac{x}{a^2 + \sigma},$$

(6)
$$\mathrm{H} = -\frac{4\,\pi\,\rho\,\varepsilon}{\triangle\, l} \cdot \frac{y}{b^2 + \sigma},$$

$$\mathrm{Z} = -\frac{4\,\pi\,\rho\,\varepsilon}{\triangle\, l} \cdot \frac{z}{c^2 + \sigma}.$$

Hieraus ergibt sich die Gesammtkraft P, mit welcher der Punkt (x, y, z) von der unendlich dünnen Schicht angezogen wird:

$$\mathrm{P} = \frac{4\,\pi\,\rho\,\varepsilon}{\triangle\, l} \sqrt{\left(\frac{x}{a^2 + \sigma}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2 + \sigma}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2 + \sigma}\right)^2},$$

d. h. kürzer

(7)
$$\mathrm{P} = \frac{4\,\pi\,\rho\,\varepsilon}{\triangle \sqrt{l}}.$$

Die Winkel, welche die Richtung von P mit den positiven Coordinatenaxen einschliesst, finden sich aus den Gleichungen:

$$\cos(x\,\mathrm{P}) = \frac{-x}{a^2 + \sigma} : \sqrt{l},$$

(8)
$$\cos(y\,\mathrm{P}) = \frac{-y}{b^2 + \sigma} : \sqrt{l},$$

$$\cos(z\,\mathrm{P}) = \frac{-z}{c^2 + \sigma} : \sqrt{l}.$$

Diese Gleichungen sind leicht zu interpretiren. Legt man im Punkte (x, y, z) an die Fläche (3) die Tangentialebene, so lautet deren Gleichung

$$\frac{x}{a_1^2}\,\xi + \frac{y}{b_1^2}\,\eta + \frac{z}{c_1^2}\,\zeta - 1 = 0,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{x}{a^2+\sigma}\xi+\frac{y}{b^2+\sigma}\eta+\frac{z}{c^2+\sigma}\zeta-1=0.$$

Bringt man diese Gleichung in die Normalform, so erhält man

$$\xi\cos\alpha+\eta\cos\beta+\zeta\cos\gamma-\frac{1}{\sqrt{l}}=0.$$

Darin ist $\frac{1}{\sqrt{l}}$ die Länge des Perpendikels, welches vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die Tangentialebene gefällt ist, und α, β, γ sind die Winkel, welche dies Perpendikel (in der Richtung vom Anfangspunkte nach der Ebene) mit den positiven Coordinatenaxen einschliesst. Für die Cosinus dieser Winkel erhält man die Ausdrücke:

$$\cos\alpha=\frac{x}{a^2+\sigma}:\sqrt{l},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{b^2+\sigma}:\sqrt{l}, \tag{9}$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{c^2+\sigma}:\sqrt{l}.$$

Dieselbe Richtung, wie das eben betrachtete Perpendikel, hat die im Punkte (x, y, z) nach aussen gezogene Normale der Fläche (3). Vergleicht man nun die Ausdrücke (8) und (9), so ergibt sich ohne weiteres, dass die Richtung von P durch die vom Punkte (x, y, z) aus nach i n n e n gezogene Normale der Hülfs-Ellipsoidfläche (3) angegeben wird.

Man kann sich aber das gegebene Ellipsoid von den Halbaxen a, b, c in lauter unendlich dünne Schichten zerlegt denken. Von einer Schicht zur andern haben die Axen der Begrenzungsflächen andere Werthe. Aber die Verhältnisse der Axen sollen dieselben bleiben. Auch sind $a^2+\sigma$, $b^2+\sigma$, $c^2+\sigma$ constant, so lange der Punkt (x, y, z) festliegt. Daher fallen die anziehenden Kräfte, welche die einzelnen Schichten auf diesen Punkt ausüben, in dieselbe Richtung. D. h. wir haben den Satz:

Um die Richtung der Kraft anzugeben, mit welcher ein Ellipsoid von constanter Dichtigkeit den **äusseren** Punkt (x, y, z) anzieht, hat man das confocale Ellipsoid herzustellen, in dessen Oberfläche der angezogene Punkt liegt, und in diesem Punkte gegen die Oberfläche die nach innen gerichtete Normale zu ziehen. Dies gilt auch noch, wenn der Punkt (x, y, z) in der Oberfläche des anziehenden Ellipsoids selbst liegt.*)

§. 26.

Anziehung eines homogenen elliptischen Cylinders.

Wir gehen zu der Aufgabe über, die Anziehung eines geraden Cylinders zu berechnen, dessen Endflächen Ellipsen sind. Die Dichtigkeit ρ sei constant. Wir legen das Coordinatensystem so, dass die Endflächen ausgedrückt werden durch die Gleichungen

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = a$$

und die krumme Oberfläche durch die Gleichung

$$\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0. \tag{1}$$

Die Axe der x fällt dann in die Axe des Cylinders und die Basisfläche liegt in der yz Ebene.

Die Untersuchung lässt sich auf eine einfachere zurückführen. Man betrachte einen Cylinder, der mit dem gegebenen die krumme Oberfläche gemein hat, aber keine Endflächen besitzt, also von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ sich erstreckt. In seinem Innern sei die Dichtigkeit $= -\frac{1}{2}\rho$ von $x = -\infty$ bis $x = 0$ und $= +\frac{1}{2}\rho$ von $x = 0$ bis $x = +\infty$. Auch hier soll die im Punkte (x, y, z) concentrirte positive Masseneinheit angezogen werden von einer positiven Masse, dagegen abgestossen werden von einer negativen Masse. Man denke sich, die Potentialfunction dieser Masse sei bekannt, nemlich

$$F(x, y, z).$$

Dann ist, wie man leicht sieht,

$$F(x - a, y, z)$$

die Potentialfunction, die von demselben Cylinder herrührt, wenn die Dichtigkeit $= -\frac{1}{2}\rho$ ist von $x = -\infty$ bis $x = +a$ und $= +\frac{1}{2}\rho$ von $x = +a$ bis $x = +\infty$.

Durch Superposition erhält man

$$F(x, y, z) - F(x - a, y, z)$$

*) Man vergleiche auch: Ivory. (Philosophical Transactions 1809.) Dirichlet. (Abhandlungen der Berliner Akademie. 1839.)

als Potentialfunction für den Fall, dass im Innern des Cylinders die Dichtigkeit $= 0$ ist von $x = -\infty$ bis $x = 0$ und von $x = +a$ bis $x = +\infty$, dagegen $= \rho$ von $x = 0$ bis $x = a$. Dieser Fall ist der unserer Aufgabe.

Wir setzen

$$t = s\left(1 - \frac{y^2}{s + \beta^2} - \frac{z^2}{s + \gamma^2}\right)$$

und sehen s als Unbekannte an sowohl in der Gleichung

$$(2) \qquad t - x^2 = 0,$$

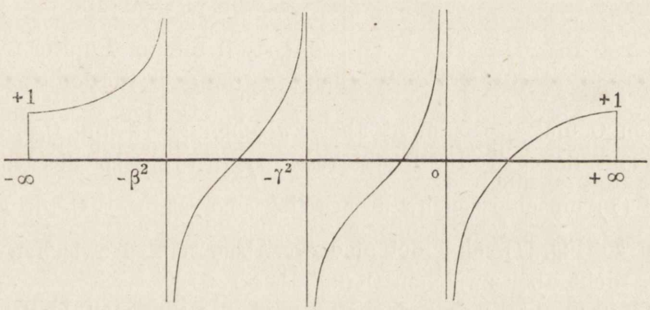
als auch in der Gleichung

$$(3) \qquad t = 0.$$

Beide Gleichungen sind vom dritten Grade. Dass sie lauter reelle Wurzeln haben, beweist man auf demselben Wege wie für die Gleichung $F(s) = 0$ in §. 24.

So lange x von Null verschieden ist, hat die Gleichung (2) dieselben Wurzeln wie die Gleichung $\frac{t - x^2}{s} = 0$. Nimmt man also s als Abscisse und $\frac{t - x^2}{s}$ als Ordinate einer Curve (**Fig. 15**), so sieht man, dass bei stetig wachsendem s die Ordinate von $+\infty$

Fig. 15.



auf $-\infty$ springt an den drei Stellen $s = -\beta^2$, $s = -\gamma^2$, $s = 0$. Ist $\beta^2 > \gamma^2$, so schneidet die Curve die Abscissenaxe je einmal zwischen $-\beta^2$ und $-\gamma^2$, zwischen $-\gamma^2$ und 0, und zwischen 0 und $+\infty$. Die grösste Wurzel der Gleichung (2) ist also positiv. Wir bezeichnen sie mit σ.

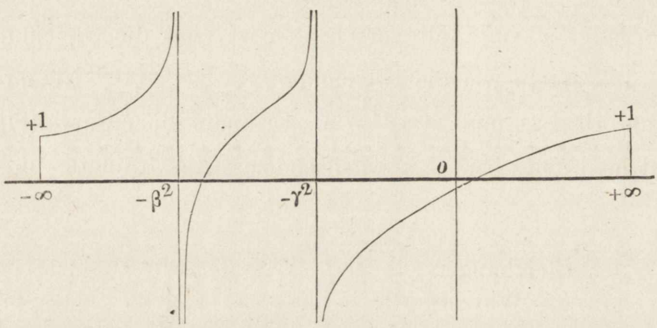
Die Gleichung (3) hat eine Wurzel $= 0$. Die beiden anderen finden sich, wenn man

$$(4) \qquad 1 - \frac{y^2}{s + \beta^2} - \frac{z^2}{s + \gamma^2} = 0$$

setzt. Nimmt man auch hier s als Abscisse, aber $\frac{t}{s}$ als Ordinate einer Curve, so springt bei stetig wachsendem s die Ordinate von $+\infty$ auf $-\infty$ an den beiden Stellen $s = -\beta^2$ und $s = -\gamma^2$. Für $\beta^2 > \gamma^2$ zeigt sich, dass die Curve die Abscissenaxe je einmal schneidet zwischen $-\beta^2$ und $-\gamma^2$ und zwischen $-\gamma^2$ und $+\infty$. Hier ist aber noch zu unterscheiden, ob der Punkt (x, y, z) ausserhalb des Raumes liegt, welchen die unbegrenzte Cylinderfläche (1) umschliesst, oder innerhalb.

Liegt der Punkt (x, y, z) ausserhalb, so ist $\frac{t}{s} < 0$ für $s = 0$, und folglich schneidet die Curve (**Fig. 16**) die Abscissenaxe

Fig. 16.



zwischen 0 und $+\infty$, nicht aber zwischen $-\gamma^2$ und 0.

Wenn dagegen der Punkt (x, y, z) innerhalb des von der Fläche (1) umschlossenen Raumes liegt, so ist $\frac{t}{s} > 0$ für $s = 0$. Die Curve (**Fig. 17**) schneidet also die Abscissenaxe zwischen $-\gamma^2$ und 0, nicht aber zwischen 0 und $+\infty$.

Daraus geht hervor, dass die grösste Wurzel der Gleichung (3) positiv ist, wenn der Punkt (x, y, z) ausserhalb des von der Fläche (1) umschlossenen Raumes liegt, und dass sie gleich Null ist, wenn er innerhalb liegt. Wir bezeichnen diese grösste Wurzel der Gleichung (3) mit σ'. Jedenfalls ist $\sigma > \sigma'$, wenn x von Null verschieden. Für einen inneren Punkt (x, y, z) sieht man dies ohne weiteres, weil σ positiv und σ' Null ist. Für einen äusseren Punkt hat man dagegen die Gleichungen

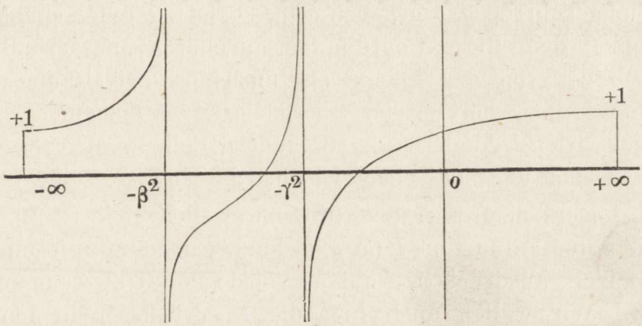
$$1 - \frac{y^2}{\sigma' + \beta^2} - \frac{z^2}{\sigma' + \gamma^2} = 0,$$

$$1 - \frac{y^2}{\sigma + \beta^2} - \frac{z^2}{\sigma + \gamma^2} = \frac{x^2}{\sigma}$$

zu beachten, in denen σ und σ' positiv sind. Diese Gleichungen geben zu erkennen, dass die positive Summe $\frac{y^2}{\sigma' + \beta^2} + \frac{z^2}{\sigma' + \gamma^2}$ grösser sein muss als die ebenfalls positive Summe $\frac{y^2}{\sigma + \beta^2} + \frac{z^2}{\sigma + \gamma^2}$. D. h. es muss $\sigma > \sigma'$ sein.

Für $x = 0$ ist $\sigma = \sigma'$.

Fig. 17.



In den Gleichungen (2) und (3) wollen wir von jetzt an nur den grössten Wurzelwerth in Betracht ziehen. Man kann in der Gleichung (2) σ als gegeben ansehen. So lange der Werth von σ grösser als Null ist, darf man statt der Gleichung (2) auch schreiben:

$$1 - \frac{x^2}{\sigma} - \frac{y^2}{\sigma + \beta^2} - \frac{z^2}{\sigma + \gamma^2} = 0.$$

Dann ist der Punkt (x, y, z) auf der Oberfläche eines Ellipsoids zu suchen, dessen Hauptaxen in die Coordinatenaxen fallen. Lässt man σ alle positiven Werthe bis $+\infty$ durchlaufen, so erhält man eine Schaar von unendlich vielen confocalen Ellipsoiden. Ihre Durchschnitte mit der yz Ebene sind Ellipsen, die mit der Schnitt-Ellipse der yz Ebene und der Cylinderfläche (1) die Brennpunkte gemein haben.

Für $\sigma = 0$ degenerirt das Ellipsoid in eine Cylinderfläche, nemlich die Fläche (1).

Sollen umgekehrt in der Gleichung (2) x, y, z gegeben sein, so wird dadurch aus der Schaar von Ellipsoiden ein einziges herausgehoben, oder, was dasselbe sagt, es wird dadurch σ eindeutig bestimmt.

Sieht man in der Gleichung (3) die grösste Wurzel σ' als gegeben an, so ist der Punkt (x, y, z) auf der Oberfläche eines elliptischen Cylinders zu suchen, dessen Axe in der Axe der x liegt. Legt man der Grösse σ' alle Werthe von 0 bis $+\infty$ bei, so erhält man eine Schaar von unendlich vielen elliptischen Cylindern. Ihre Durchschnitte mit der yz Ebene sind confocale Ellipsen. Eine von ihnen ist zugleich der Durchschnitt der yx Ebene und der Cylinderfläche (1). Sie wird von allen anderen umschlossen. Sollen umgekehrt x, y, z gegeben sein, so ist zu unterscheiden, ob der Punkt, dem diese Coordinaten angehören, ausserhalb oder innerhalb des von der Fläche (1) umschlossenen Raumes liegt. Im ersten Falle gehört er der Oberfläche eines einzelnen von den unendlich vielen Cylindern an, im andern Falle wird er von allen Cylinderflächen umschlossen. In beiden Fällen ist σ' eindeutig bestimmt, im ersten grösser als Null, im zweiten gleich Null.

Die Potentialfunction $F(x, y, z)$ kann man durch ein einfaches Integral nicht ausdrücken, wohl aber jede der Kraft-Componenten X, Y, Z. Wir wollen auch hier die Ausdrücke nicht herleiten, sondern sie als gegeben ansehen und ihre Richtigkeit nachträglich beweisen.

Diese Ausdrücke sind

$$(5) \qquad X = 2\rho \int_{\sigma}^{\infty} \frac{\sqrt{t - x^2}\, ds}{s\sqrt{\left(1 + \frac{s}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma^2}\right)}},$$

$$(6) \qquad Y = -\frac{2\rho x y}{\beta^2 - \gamma^2} \int_{\sigma}^{\infty} \frac{s + \gamma^2}{\sqrt{\left(1 + \frac{s}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma^2}\right)}} \cdot \frac{\frac{\partial t}{\partial s}\, ds}{t\sqrt{t - x^2}}$$

$$+ 2\varepsilon\pi\rho \frac{y}{\beta^2 - \gamma^2} \cdot \frac{\sigma' + \gamma^2}{\sqrt{\left(1 + \frac{\sigma'}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{\sigma'}{\gamma^2}\right)}},$$

$$(7) \qquad Z = -\frac{2\rho x z}{\gamma^2 - \beta^2} \int_\sigma^\infty \frac{(s+\beta^2)}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}} \cdot \frac{\frac{\partial t}{\partial s}\, ds}{t\sqrt{t-x^2}}$$

$$+ 2\varepsilon\pi\rho \frac{z}{\gamma^2-\beta^2} \cdot \frac{\sigma' + \beta^2}{\sqrt{\left(1+\frac{\sigma'}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{\sigma'}{\gamma^2}\right)}}.$$

In (6) und (7) ist $\varepsilon = +1$ für $x > 0$ und $\varepsilon = -1$ für $x < 0$.

Um die Ausdrücke (5), (6), (7) zu verificiren, ist es nothwendig, zunächst zu beweisen, dass sie den partiellen Differentialgleichungen genügen:

$$(8) \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}.$$

Es muss ferner bewiesen werden, dass ausserhalb des mit Masse erfüllten Cylinders, also für $\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} > 1$, die Gleichung erfüllt ist:

$$(9) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0;$$

dagegen im Innern jenes Cylinders, d. h. für $\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} < 1$, die andere Gleichung:

$$(10) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -2\varepsilon\pi\rho,$$

wenn $\varepsilon = +1$ für $x > 0$ und $\varepsilon = -1$ für $x < 0$.

Es muss endlich gezeigt werden, dass in unendlicher Entfernung von dem mit Masse erfüllten Cylinder, d. h. für $\lim(y^2 + z^2) = \infty$:

$$(11) \qquad X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Wir wollen noch bemerken, dass nach der Natur der Aufgabe

$$(12) \qquad \left.\begin{aligned} Y &= 0 \\ Z &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } x = 0.$$

Denn zu irgend einem Massenelemente auf der Seite der positiven x lässt sich ein zugehöriges Massenelement auf der Seite der negativen x finden, so dass sie zur yzEbene symmetrisch liegen. Die beiden Massenelemente sind einander entgegengesetzt gleich. Sie haben von einem beliebigen Punkte $(0, y, z)$ der yzEbene gleichen Abstand. Folglich ist der Beitrag, den sie zu dem Werthe der Potentialfunction im Punkte $(0, y, z)$ liefern, gleich Null. In dieser Weise lassen sich aber alle Massenelemente paarweise zusammenordnen, und es hat deshalb die Potentialfunction V an jeder Stelle der yzEbene den constanten Werth Null. Daraus ergibt sich, dass auch die Derivirten $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ in der yzEbene überall gleich Null sein müssen. Dies liefert die Gleichungen (12).

Wir betrachten zuerst den Ausdruck für X, also die Gleichung (5). Differenziren wir partiell nach y, so ergibt sich

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial y}.$$

Es ist aber $-\frac{\partial X}{\partial \sigma}$ nichts anderes als 2ρ multiplicirt mit der Function unter dem Integralzeichen, wenn man darin überall $s = \sigma$ setzt. Dadurch wird $t - x^2 = 0$, folglich auch $\frac{\partial X}{\partial \sigma} = 0$. Wir erhalten also einfach

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -2\rho y \int_\sigma^\infty \frac{1}{\sqrt{t - x^2}} \cdot \frac{ds}{(s+\beta^2)\sqrt{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{4\rho y}{1 - \frac{\beta^2}{\gamma^2}} \int_{s=\sigma}^\infty \frac{1}{\sqrt{t - x^2}} \cdot d\sqrt{\frac{1+\frac{s}{\gamma^2}}{1+\frac{s}{\beta^2}}}. \tag{13}$$

Die Function Y aus Gleichung (6) nehmen wir zunächst in der Form

(14)
$$Y = -\frac{2\rho x y}{\beta^2 - \gamma^2} \int_\sigma^\infty \frac{s+\gamma^2}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}} \cdot \frac{\frac{\partial t}{\partial s}\, ds}{t\sqrt{t - x^2}} + \Phi(y, z),$$

indem wir uns vorbehalten, die Function $\Phi(y, z)$ so zu bestimmen, dass für $x = 0$ die erste der Gleichungen (12) erfüllt werde.

Nun ist aber durch Differentiation leicht zu beweisen, dass

$$\frac{1}{t\sqrt{t-x^2}} \cdot \frac{\partial t}{\partial s} = \frac{2}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left(\arcsin\sqrt{1-\frac{x^2}{t}}\right),$$

wenn die Quadratwurzeln auf beiden Seiten positiv genommen werden. Folglich kann man auf das Integral in (14) die Integration nach Theilen anwenden. Man hat zunächst für das unbestimmte Integral die Gleichung

$$\int \frac{s+\gamma^2}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}} \cdot \frac{\frac{\partial t}{\partial s}}{t\sqrt{t-x^2}}\, ds$$

$$= \frac{2\gamma^2}{\sqrt{x^2}}\sqrt{\frac{1+\frac{s}{\gamma^2}}{1+\frac{s}{\beta^2}}} \cdot \arcsin\sqrt{1-\frac{x^2}{t}}$$

$$-\frac{2\gamma^2}{\sqrt{x^2}}\int \arcsin\sqrt{1-\frac{x^2}{t}}\;.\; d\sqrt{\frac{1+\frac{s}{\gamma^2}}{1+\frac{s}{\beta^2}}}.$$

Der freie Theil ist Null für $s=\sigma$, dagegen gleich $\frac{\beta\gamma\pi}{\sqrt{x^2}}$ für $s=\infty$. Folglich lautet das Resultat der Transformation:

$$(15)\qquad Y = -\frac{2\varepsilon\beta\gamma\pi\rho y}{\beta^2-\gamma^2} + \Phi(y,z)$$

$$-\frac{4\varepsilon\rho y}{1-\frac{\beta^2}{\gamma^2}}\int_{s=\sigma}^{\infty} \arcsin\sqrt{1-\frac{x^2}{t}}\;.\; d\sqrt{\frac{1+\frac{s}{\gamma^2}}{1+\frac{s}{\beta^2}}},$$

und hier ist $\varepsilon = +1$ für $x>0$, dagegen $\varepsilon=-1$ für $x<0$.

Wenn wir in (15) partiell nach x differenziren, so ergibt sich

$$(16)\qquad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{4\rho y}{1-\frac{\beta^2}{\gamma^2}}\int_{s=\sigma}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{t-x^2}}\cdot d\sqrt{\frac{1+\frac{s}{\gamma^2}}{1+\frac{s}{\beta^2}}}.$$

Der Beitrag $\frac{\partial Y}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x}$, der auf der rechten Seite noch hinzugefügt werden müsste, fällt weg, weil $\frac{\partial Y}{\partial \sigma} = 0$ ist.

Aus (13) und (16) erkennt man auf den ersten Blick, dass die erste der Gleichungen (8) in der That erfüllt ist.

Es kommt nun darauf an, die Function $\Phi(y, z)$ richtig zu bestimmen, so dass für $x = 0$ auch $Y = 0$ wird. Dabei ist zu beachten, dass für $x = 0$ die untere Grenze σ des Integrals in (15) übergeht in σ'. Nun ist aber für $s = \sigma'$ die Function $t = 0$, und folglich wird dann der Werth von

$$\arcsin \sqrt{1 - \frac{x^2}{t}}$$

völlig unbestimmt. Wir nehmen deshalb in dem zu ermittelnden Integral zunächst $\sigma' + \varkappa\delta$ als untere Grenze und verstehen unter $\varkappa$ eine unbestimmte positive Constante und unter δ eine positive Grösse, die nachher der Null unaufhörlich angenähert werden soll. Unter dieser Verabredung bleibt zwischen den Integrationsgrenzen ($s = \sigma' + \varkappa\delta$ und $s = \infty$) die Function t positiv. Folglich ist jetzt der Arcussinus $= \frac{\pi}{2}$, und das Integral in (15) hat für $x = 0$ einen angebbaren, endlichen Werth, wenn als untere Grenze $\sigma' + \varkappa\delta$ genommen wird. Dieser Werth geht für $\lim \delta = 0$ über in

$$\frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\beta}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\sigma' + \gamma^2}{\sqrt{\left(1 + \frac{\sigma'}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{\sigma'}{\gamma^2}\right)}} \right\},$$

also in einen Grenzwerth, der von der unbestimmten Grösse $\varkappa$ unabhängig ist. Dieser Grenzwerth ist der Werth des Integrals in (15), wenn σ' als untere Grenze genommen und $x = 0$ gesetzt wird. Daraus ergibt sich nun leicht, dass

$$(17) \quad \Phi(y, z) = 2 \varepsilon \pi \rho \frac{y}{\beta^2 - \gamma^2} \cdot \frac{\sigma' + \gamma^2}{\sqrt{\left(1 + \frac{\sigma'}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{\sigma'}{\gamma^2}\right)}}$$

sein muss, damit die erste der Gleichungen (12) erfüllt werde.

Die Function Z aus Gleichung (7) nehmen wir zunächst in der Form

(18)
$$Z = -\frac{2\rho x z}{\gamma^2-\beta^2}\int_\sigma^\infty \frac{s+\beta^2}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}\cdot\frac{\frac{\partial t}{\partial s}\,ds}{t\sqrt{t-x^2}}+\Psi(y,z).$$

Durch Integration nach Theilen erhalten wir dafür

$$(19)\qquad Z = -\frac{2\varepsilon\beta\gamma\pi\rho z}{\gamma^2-\beta^2}+\Psi(y,z)$$
$$-\frac{4\varepsilon\rho z}{1-\frac{\gamma^2}{\beta^2}}\int_\sigma^\infty \text{arc sin}\sqrt{1-\frac{x^2}{t}}\cdot d\sqrt{\frac{1+\frac{s}{\gamma^2}}{1+\frac{s}{\beta^2}}},$$

und es ist auch hier wieder $\varepsilon = +1$ für $x > 0$ und $\varepsilon = -1$ für $x < 0$. Indem wir jetzt in (5) partiell nach z, in (19) partiell nach x differenziren und die Resultate vergleichen, finden wir, dass auch die letzte der Gleichungen (8) erfüllt ist.

Die Function $\Psi(y, z)$ wird auf demselben Wege bestimmt wie vorher die Function $\Phi(y, z)$. Man gelangt zu dem Resultate, dass

$$(20)\qquad \Psi(y,z) = 2\varepsilon\pi\rho\frac{z}{\gamma^2-\beta^2}\cdot\frac{\sigma'+\beta^2}{\sqrt{\left(1+\frac{\sigma'}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{\sigma'}{\gamma^2}\right)}}$$

genommen werden muss, damit die zweite der Gleichungen (12) erfüllt werde.

Nun bleibt von den Gleichungen (8) noch die zweite zu beweisen.

Aus der Gleichung (15) leiten wir her

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{2\rho x y z}{\beta^2\gamma^2}\int_\sigma^\infty\frac{s\,ds}{t\sqrt{t-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)^3}},$$

und aus der Gleichung (19) geht hervor

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial\Psi}{\partial y}-\frac{2\rho x y z}{\beta^2\gamma^2}\int_\sigma^\infty\frac{s\,ds}{t\sqrt{t-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)^3}}.$$

Folglich erhalten wir

$$(21)\qquad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

Nun ist für einen Punkt im Innern des unendlich langen Cylinders $\sigma' = 0$, also

$$\Phi(y, z) = 2\varepsilon\pi\rho \frac{\gamma^2 y}{\beta^2 - \gamma^2},$$

$$\Psi(y, z) = 2\varepsilon\pi\rho \frac{\beta^2 z}{\gamma^2 - \beta^2}.$$

In diesem Falle haben wir

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0.$$

Für einen Punkt im äusseren Raume ist dagegen σ' die positive Wurzel der Gleichung

$$(22)\qquad 1 - \frac{y^2}{\sigma' + \beta^2} - \frac{z^2}{\sigma' + \gamma^2} = 0.$$

Daraus berechnet sich

$$(23)\qquad \frac{\partial \sigma'}{\partial y} = \frac{2y : (\sigma' + \beta^2)}{\left(\frac{y}{\sigma' + \beta^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sigma' + \gamma^2}\right)^2},$$

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial z} = \frac{2z : (\sigma' + \gamma^2)}{\left(\frac{y}{\sigma' + \beta^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sigma' + \gamma^2}\right)^2}.$$

Aus (17) und (20) geht dann durch Differentiation hervor

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{2\varepsilon\pi\rho y z : \left\{\left(\frac{y}{\sigma' + \beta^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sigma' + \gamma^2}\right)^2\right\}}{\beta^2\gamma^2\sqrt{\left(1 + \frac{\sigma'}{\beta^2}\right)^3\left(1 + \frac{\sigma'}{\gamma^2}\right)^3}}.$$

Es ist demnach sowohl für einen inneren, wie für einen äusseren Punkt die zweite der Gleichungen (8) erfüllt.

Wir gehen dazu über nachzuweisen, dass unsere Ausdrücke für X, Y, Z auch den Gleichungen (9) und (10) Genüge leisten.

Aus der Gleichung (5) berechnen wir zunächst

$$(24)\qquad \frac{\partial X}{\partial x} = -2\rho x \int_\sigma^\infty \frac{ds}{\sqrt{t - x^2}} \cdot \frac{1}{s\sqrt{\left(1 + \frac{s}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma^2}\right)}}.$$

Der Beitrag $\frac{\partial X}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial x}$, welcher auf der rechten Seite noch hinzugefügt werden müsste, ist gleich Null, weil $\frac{\partial X}{\partial \sigma} = 0$ ist.

Die Function Y nehmen wir in der Form (15). Danach berechnet sich

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{2\varepsilon\pi\rho\beta\gamma}{\beta^2-\gamma^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$-\frac{4\varepsilon\rho}{1-\frac{\beta^2}{\gamma^2}}\int\limits_{s=\sigma}^{\infty} \arc\sin\sqrt{1-\frac{x^2}{t}}\,.\,d\sqrt{\frac{1+\frac{s}{\gamma^2}}{1+\frac{s}{\beta^2}}}$$

$$-2\rho x\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{s}{t\sqrt{t-x^2}}\left(\frac{y}{s+\beta^2}\right)^2\frac{ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}.$$

Das erste Integral rechts lässt sich transformiren durch Integration nach Theilen. Wir erhalten

$$\frac{\partial Y}{\partial y} \tag{25}$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{2\rho x}{\beta^2-\gamma^2}\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{\frac{\partial t}{\partial s}\,ds}{t\sqrt{t-x^2}}\cdot\frac{s+\gamma^2}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}$$

$$-2\rho x\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{s}{t\sqrt{t-x^2}}\left(\frac{y}{s+\beta^2}\right)^2\frac{ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}.$$

Auf demselben Wege berechnen wir

$$\frac{\partial Z}{\partial z} \tag{26}$$

$$= \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{2\rho x}{\beta^2-\gamma^2}\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{\frac{\partial t}{\partial s}\,ds}{t\sqrt{t-x^2}}\cdot\frac{s+\beta^2}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}$$

$$-2\rho x\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{s}{t\sqrt{t-x^2}}\left(\frac{z}{s+\gamma^2}\right)^2\frac{ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}.$$

Aus den Gleichungen (24), (25), (26) ergibt sich unmittelbar durch Addition

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

$$+ 2 \rho x \int_\sigma^\infty \frac{\frac{\partial t}{\partial s} ds}{t \sqrt{t - x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{s}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma^2}\right)}}$$

$$- 2 \rho x \int_\sigma^\infty \frac{ds}{t \sqrt{t - x^2}} \cdot \frac{\left(\frac{t}{s} + \frac{s y^2}{(s + \beta^2)^2} + \frac{s z^2}{(s + \gamma^2)^2}\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{s}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma^2}\right)}}.$$

Diese Gleichung reducirt sich noch, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{t}{s} + \frac{s y^2}{(s + \beta^2)^2} + \frac{s z^2}{(s + \gamma^2)^2} = \frac{\partial t}{\partial s}$$

ist. Man erhält

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}. \tag{27}$$

Nun ist zu unterscheiden, ob der Punkt (x, y, z) im Innern des unendlich langen Cylinders liegt oder ausserhalb.

Für einen Punkt im Innern ist $\sigma' = 0$ und in Folge davon

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2 \varepsilon \pi \rho \frac{\gamma^2}{\beta^2 - \gamma^2},$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 2 \varepsilon \pi \rho \frac{\beta^2}{\gamma^2 - \beta^2}.$$

Für einen inneren Punkt geht also die Gleichung (27) über in folgende:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = - 2 \varepsilon \pi \rho.$$

Dies ist die partielle Differentialgleichung (10).

Liegt der Punkt (x, y, z) im äusseren Raume, so ist σ' die eine positive Wurzel der Gleichung (22), also eine Function von y und z. Deshalb erhalten wir

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{2\varepsilon\pi\rho}{\beta^2 - \gamma^2} \cdot \frac{\sigma' + \gamma^2}{\sqrt{\left(1 + \frac{\sigma'}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{\sigma'}{\gamma^2}\right)}}$$

$$+ \frac{\varepsilon\pi\rho}{\sqrt{\left(1 + \frac{\sigma'}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{\sigma'}{\gamma^2}\right)}} \cdot \frac{y}{\sigma' + \beta^2} \cdot \frac{\partial \sigma'}{\partial y}$$

und ferner

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{2\varepsilon\pi\rho}{\gamma^2 - \beta^2} \cdot \frac{\sigma' + \beta^2}{\sqrt{\left(1 + \frac{\sigma'}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{\sigma'}{\gamma^2}\right)}}$$

$$+ \frac{\varepsilon\pi\rho}{\sqrt{\left(1 + \frac{\sigma'}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{\sigma'}{\gamma^2}\right)}} \cdot \frac{z}{\sigma' + \gamma^2} \cdot \frac{\partial \sigma'}{\partial z}.$$

Beachtet man nun, dass nach den Gleichungen (23)

$$\frac{y}{\sigma' + \beta^2}\frac{\partial \sigma'}{\partial y} + \frac{z}{\sigma' + \gamma^2}\frac{\partial \sigma'}{\partial z} = 2$$

ist, so erhält man für einen äusseren Punkt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{-2\varepsilon\pi\rho + 2\varepsilon\pi\rho}{\sqrt{\left(1 + \frac{\sigma'}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{\sigma'}{\gamma^2}\right)}} = 0.$$

Die Gleichung (27) geht also für einen äusseren Punkt in folgende über:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Dies ist die partielle Differentialgleichung (9).

Endlich fragt sich noch, welche Werthe X, Y, Z annehmen, wenn y oder z oder beide unendlich gross werden.

Dass $X = 0$ wird, wenn man irgend eine der drei Coordinaten x, y, z unendlich gross nimmt, ist leicht zu erkennen. Denn es wird dann $\sigma = \infty$. Die Grenzen des Integrals in (5) fallen also zusammen, und ausserdem wird die Function unter dem Integralzeichen zu Null für $s = \infty$.

Für Y nehmen wir den Ausdruck (15) und führen unter dem Integralzeichen die vorgeschriebene Differentiation aus. Wird dann noch $\Phi(y, z)$ aus (17) genommen, so lässt sich schreiben:

$$Y = \frac{2\varepsilon\beta\gamma\pi\rho}{\beta^2 - \gamma^2}\, y \left\{\sqrt{\frac{\sigma' + \gamma^2}{\sigma' + \beta^2}} - 1\right\}$$

$$+ 2\varepsilon\rho \int_\sigma^\infty \arcsin\sqrt{1 - \frac{x^2}{t}} \cdot \frac{y}{s + \beta^2} \cdot \frac{ds}{\sqrt{\left(1 + \frac{s}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma^2}\right)}}.$$

Das Integral wird zu Null, wenn wir irgend eine der Coordinaten x, y, z unendlich gross nehmen. Denn es wird dann $\sigma = \infty$, die Grenzen der Integration fallen also zusammen. Die Function unter dem Integralzeichen wird $= 0$ für $s = \infty$, selbst dann noch, wenn $y = \infty$ sein sollte. Denn vermöge der Gleichung $\frac{t - x^2}{s} = 0$ kann $\frac{y^2}{s + \beta^2}$ nicht unendlich gross werden, wenn $s = \sigma$ gesetzt wird und $\sigma = \infty$ ist. Der Werth dieses Bruches ist endlich oder unendlich klein, je nachdem y unendlich gross oder endlich ist, und folglich ist $\frac{y}{s + \beta^2}$ jedenfalls unendlich klein für $s = \sigma = \infty$.

Wenn also eine der Coordinaten x, y, z unendlich gross wird, so hat man

$$Y = \frac{2\varepsilon\beta\gamma\pi\rho}{\beta^2 - \gamma^2}\, y \left\{\sqrt{\frac{\sigma' + \gamma^2}{\sigma' + \beta^2}} - 1\right\}.$$

Ist nun y endlich, $z = \infty$, so wird $\sigma' = \infty$ und in Folge dessen $Y = 0$. Ist $y = \infty$, so nimmt der letzte Ausdruck für Y die Form $\infty \,.\, 0$ an. Wir schreiben ihn deshalb so:

$$Y = \frac{2\varepsilon\beta\gamma\pi\rho}{\beta^2 - \gamma^2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\sigma' + \gamma^2}{\sigma' + \beta^2}} - 1}{1 : y}$$

und ermitteln den wahren Werth nach den Regeln der Differentialrechnung. Derselbe findet sich

$$= \varepsilon\beta\gamma\pi\rho \sqrt{\frac{\sigma' + \beta^2}{\sigma' + \gamma^2}} \cdot \frac{-y^2}{(\sigma' + \beta^2)^2} \cdot \frac{\partial\sigma'}{\partial y}$$

$$= -2\varepsilon\beta\gamma\pi\rho \sqrt{\frac{\sigma' + \beta^2}{\sigma' + \gamma^2}} \cdot \frac{y}{\sigma' + \beta^2} \cdot \frac{\left(\frac{y}{\sigma' + \beta^2}\right)^2}{\left(\frac{y}{\sigma' + \beta^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sigma' + \gamma^2}\right)^2},$$

wenn man σ' und y unendlich gross nimmt. Von den drei variabeln Factoren ist der letzte ein positiver echter Bruch, dessen

Werth höchstens gleich 1 ist. Der erste hat den Grenzwerth 1, und der zweite den Grenzwerth Null. Denn vermöge der Gleichung (22) muss $y^2 : (\sigma' + \beta^2)$ endlich sein, selbst wenn y und σ' unendlich gross genommen werden. Folglich ist

$$\lim \frac{y}{\sigma' + \beta^2} = 0$$

für $y = \infty$.

Damit ist bewiesen, dass $Y = 0$ für $\lim (y^2 + z^2) = \infty$.

Auf demselben Wege wird der Beweis geführt, dass $Z = 0$ für $\lim (y^2 + z^2) = \infty$.

§. 27.

Fortsetzung: Integration durch complexe Werthe der Variablen.

Die Richtigkeit der Ausdrücke für X, Y, Z ist zwar im vorigen Paragraphen vollständig bewiesen. Doch erscheint es nicht unzweckmässig, einen Theil der Untersuchung noch auf einem anderen Wege vorzunehmen. Es ist dies namentlich die Bestimmung der Functionen $\Phi(y, z)$ und $\Psi(y, z)$, wenn man dabei von den Gleichungen (14) und (18) des vorigen Paragraphen ausgehen will.

Es handelt sich darum, den Werth von Y aus der Gleichung (14) des vorigen Paragraphen zu ermitteln für $x = 0$. Man hat dabei zu beachten, dass für $x = 0$ die Grösse σ übergeht in σ'. Dadurch wird aber der Werth des Integrals in (14) unendlich gross, und der erste Bestandtheil von Y nimmt in Gleichung (14) die unbestimmte Form $0 . \infty$ an.

Um den wahren Werth zu ermitteln, kann man statt des reellen Integrationsweges einen anderen einschlagen, welcher durch complexe Werthe der Variablen führt.

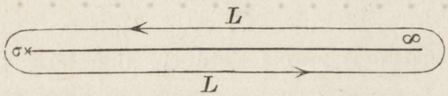
Wir denken uns nach dem Vorgange von Gauss eine complexe Zahl $s = \xi + \eta \sqrt{-1}$ repräsentirt durch den Punkt einer Ebene, dessen rechtwinklige Coordinaten ξ, η sind. Die Zahl s nimmt dann alle möglichen complexen Werthe an, wenn der Punkt (ξ, η) in der unbegrenzten Ebene in alle möglichen Lagen gebracht wird. Die Werthe von s ändern sich stetig, wenn der Punkt (ξ, η) eine ununterbrochene Linie stetig durchläuft. Wir sagen dafür der Kürze wegen: die complexe Variable s durchläuft die Linie.

Die Ebene, in welcher der Punkt (ξ, η) beweglich ist, heisst die Zahlenebene. Es ist vortheilhaft, sie im Unendlichen als geschlossen anzusehen, d. h. sie als eine Kugel von unendlich grossem

Radius aufzufassen. Dem Werthe $s = \infty$ entspricht dann nur ein einziger Punkt, welcher auf der unendlich grossen Kugel dem Nullpunkte diametral gegenüberliegt.

Wir zeichnen in der Zahlenebene eine in sich zurücklaufende Linie L (**Fig. 18**), welche sich selbst nicht durchschneidet und einen Theil der Ebene vollständig begrenzt. Innerhalb dieses abgegrenzten Theiles soll die Axe der positiven ξ von $s = \sigma$ bis $s = \infty$ liegen, ausserhalb dagegen die Punkte, welche die beiden negativen Wurzeln der Gleichung (2) des vorigen Paragraphen repräsentiren. Dann liegen auch die beiden Punkte der Abscissenaxe ($s = -\beta^2$) und ($s = -\gamma^2$) ausserhalb. Der Punkt $s = 0$ soll nur dann innerhalb des abgegrenzten Gebietes liegen, wenn $\sigma = \sigma'$ und $\sigma' = 0$ ist, d. h. wenn $x = 0$ und $\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} < 1$.

Fig. 18.



Wir wollen nun zunächst in dem Ausdrucke für X den reellen Integrationsweg durch einen complexen ersetzen.

Für jeden Werth, den die Variable s annimmt, hat die Function

$$(1) \qquad f(s) = \frac{1}{s} \sqrt{\frac{t - x^2}{\left(1 + \frac{s}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma^2}\right)}}$$

zwei Werthe, weil die Quadratwurzel zweideutig ist. Diese beiden Werthe sind innerhalb des abgegrenzten Flächenstückes an zwei Stellen einander gleich, und zwar $= 0$, wenn nemlich $s = \sigma$ und wenn $s = \infty$. Für alle übrigen Werthe von s innerhalb und auf der Begrenzung des Flächenstückes soll nur ein Werth von $f(s)$ in Betracht gezogen werden, und zwar nach folgender Vorschrift. Wir zerschneiden die Zahlenebene längs der reellen Zahlenaxe von $s = \sigma$ bis $s = +\infty$ und setzen fest, dass die Variable s bei ihrer Bewegung in der Ebene diesen Schnitt nicht überschreiten, wohl aber umgehen darf. Soll sie also die reelle Zahlenaxe von σ bis ∞ durchlaufen, so ist zu unterscheiden, ob dies unendlich nahe an dem Schnitt auf der rechten oder auf der linken Seite geschieht. Für solche Werthe von s ist $f(s)$ reell. Wir setzen fest, dass der positive Werth von $f(s)$ genommen werden soll, wenn s unendlich nahe an dem Schnitt auf der rechten (unteren) Seite liegt, und der negative Werth von $f(s)$, wenn s unendlich nahe an dem

Schnitt auf der linken (oberen) Seite liegt. Wir lassen dann die Variable s von dem Rande des Schnittes aus im Innern des begrenzten Flächenstückes eine Linie stetig durchlaufen, die im Innern oder auf der Begrenzung L endigt. Dabei soll, wie wir ferner festsetzen, von den beiden Werthen der Function $f(s)$ nur die stetige Fortsetzung des Anfangswerthes in Betracht kommen. Dadurch wird erreicht, dass auf der Linie L und im Innern des von ihr begrenzten und von σ bis ∞ zerschnittenen Flächenstückes die Function $f(s)$ überall einwerthig, endlich und stetig variabel ist. Nur wenn $\sigma = 0$ ist, wird die Function an einer Stelle des Flächenstückes unendlich, nemlich an der Stelle $s = 0$. In diesem besonderen Falle legen wir um den Unstetigkeitspunkt einen Kreis von beliebig kleinem Radius δ, schliessen das Innere desselben von dem betrachteten Flächenstück aus und lassen schliesslich $\lim \delta = 0$ werden.

Wir setzen nun einen Fundamentalsatz aus der Theorie der Functionen einer complexen Variablen als bekannt voraus. Derselbe lautet:

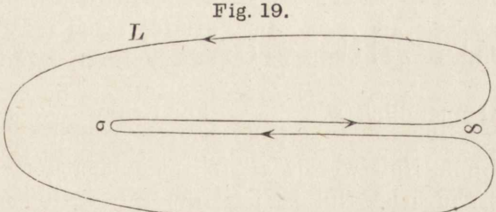
Wenn für alle Werthe von s innerhalb eines vollständig begrenzten Gebietes der Zahlenebene und auf der Begrenzung die Function $f(s)$ überall einwerthig, endlich und stetig variabel ist, so hat das Integral

$$\int f(s)\, ds,$$

ausgedehnt durch die ganze Begrenzung, den Werth Null.

Ist $\sigma > \sigma'$, also x von Null verschieden, so hat man folgenden Integrationsweg (**Fig. 19**): Von ∞ bis σ unendlich nahe an dem Schnitt auf der rechten (unteren) Seite, von σ bis ∞ ebenso auf der linken (oberen) Seite, dann von ∞ durch die Linie L um σ herum bis ∞ in der Richtung der Pfeile.

Fig. 19.



Das Integral auf dem reellen Wege von ∞ bis σ und von σ bis ∞ hat den Werth

$$(2) \qquad -2\int_\sigma^\infty \frac{\sqrt{t-x^2}\,ds}{s\sqrt{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}},$$

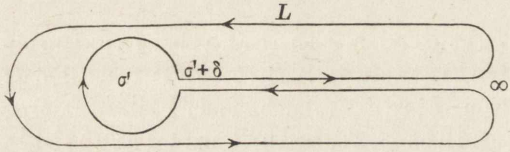
wenn die Quadratwurzeln positiv genommen werden. Mit Hülfe des eben citirten Satzes findet sich also

$$(3) \qquad X = \rho\int \frac{\sqrt{t-x^2}\,ds}{s\sqrt{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}},$$

und es ist das Integral durch complexe Werthe von s zu nehmen längs der Linie L von ∞ bis ∞ in der Richtung der in **Fig. 18** angegebenen Pfeile.

Die Gleichung (3) bleibt gültig, auch wenn $\sigma = \sigma'$ und $\sigma' = 0$ ist. Der Integrationsweg (**Fig. 20**) führt jetzt von ∞ bis $\sigma' + \delta$ an dem unteren Rande des Schnittes, dann durch die Peripherie des um σ' gelegten Kreises, hierauf von $\sigma' + \delta$ bis ∞ an dem oberen Rande des Schnittes und schliesslich längs der Linie L von ∞ bis ∞, immer in der Richtung der Pfeile. Soweit der Integrationsweg reell ist, erhält man für $\lim \delta = 0$ das Integral (2). Das Integral, durch die Kreisperipherie erstreckt, hat den Grenzwerth Null. Denn es geht für $x = 0$ die Function $f(s)$ über in

Fig. 20.



$$\sqrt{\frac{1-\frac{y^2}{s+\beta^2}-\frac{z^2}{s+\gamma^2}}{s\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}},$$

und diese wird für $s = 0$ unendlich wie $\frac{1}{\sqrt{s}}$. Folglich wird der Integralwerth an dieser Stelle Null wie $\sqrt{s}$. Wir kommen demnach auf die Gleichung (3) zurück. Nur ist jetzt der Integrationsweg L so zu legen, dass er die Stelle $s = \sigma'$ mit umschliesst.

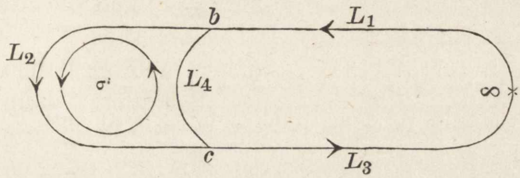
Soll nun auch in der Gleichung (14) des vorigen Paragraphen ein complexer Integrationsweg eingeschlagen werden, so haben wir

(4)
$$Y = -\frac{\rho x y}{\beta^2 - \gamma^2} \int \frac{s + \gamma^2}{\sqrt{\left(1 + \frac{s}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma^2}\right)}} \cdot \frac{\frac{\partial t}{\partial s}\, ds}{t\sqrt{t - x^2}} + \Phi(y, z),$$

und es ist die Integration durch die Linie L (**Fig. 18**) zu erstrecken von ∞ bis ∞ in der Richtung der vorgeschriebenen Pfeile.

Für $x = 0$ wird $\sigma = \sigma'$. In diesem Falle ist für das Integral in (4) die Linie L so zu legen, dass sie den Punkt σ' mit umschliesst, nicht aber die beiden anderen Wurzeln der Gleichung $t = 0$. Das Integral ist mit besonderer Vorsicht zu behandeln, weil für $s = \sigma'$ die Function $t = 0$ wird, und in Folge davon die Function unter dem Integral unendlich gross. Wir wählen auf der Linie L zwei Punkte b und c. Durch sie und den unendlich entfernten Punkt wird die ganze Linie in drei Bestandtheile L_1, L_2, L_3 zerlegt. L_1 läuft von ∞ bis b, L_2 von b bis c, L_3 von c bis ∞. Wir ziehen ferner von b nach c durch das Innere des von L begrenzten Flächenstücks eine Linie L_4 (**Fig. 21**), so dass L_4 und L_2 ein Flächenstück begrenzen, innerhalb dessen der Punkt σ' liegt. Das Integral

Fig. 21.



(5)
$$\int \frac{(s + \gamma^2)}{\sqrt{\left(1 + \frac{s}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma^2}\right)}} \cdot \frac{\frac{\partial t}{\partial s}\, ds}{t\sqrt{t - x^2}},$$

durch die ganze Linie L erstreckt, soll mit J bezeichnet werden, mit J_1, J_2, J_3 dagegen die drei Bestandtheile, die sich ergeben bei der Integration von ∞ bis b längs der Linie L_1, von b bis c längs L_2, von c bis ∞ längs L_3. Endlich soll J_4 der Werth des Integrals von b bis c, durch L_4 genommen, sein. Dann hat man

$$J = (J_1 + J_4 + J_3) + (J_2 - J_4).$$

Hierin ist $J_1 + J_4 + J_3$ ein Integral von endlichem Werthe. Also hat man

$$\lim \{x(J_1 + J_4 + J_3)\} = 0 \quad \text{für } x = 0.$$

Das Integral $J_2 - J_4$ kann durch irgend ein anderes ersetzt werden, dessen geschlossener Integrationsweg um σ' herumführt. Wir machen σ' zum Mittelpunkt eines Kreises vom Radius r, der so gewählt ist, dass die Peripherie ganz in das von L_2 und L_4 begrenzte Flächenstück hineinfällt. Wenn man dann das Integral (5) in der Richtung des Pfeiles (**Fig. 21**) durch die Kreisperipherie erstreckt, so ist sein Werth $= J_2 - J_4$. Dieses Integral bedarf noch der Untersuchung. Es ist

$$t = s - \frac{s\,y^2}{s+\beta^2} - \frac{s\,z^2}{s+\gamma^2},$$

$$0 = \sigma' - \frac{\sigma'\,y^2}{\sigma'+\beta^2} - \frac{\sigma'\,z^2}{\sigma'+\gamma^2};$$

daraus ergibt sich durch Subtraction

$$t = (s-\sigma')\left\{1 - \frac{\beta^2\,y^2}{(s+\beta^2)(\sigma'+\beta^2)} - \frac{\gamma^2\,z^2}{(s+\gamma^2)(\sigma'+\gamma^2)}\right\}.$$

Wir nehmen auf beiden Seiten Logarithmen und erhalten durch Differentiation

$$\frac{1}{t}\,\frac{\partial t}{\partial s}\,ds = d\lg(s-\sigma') + \psi(s)\,ds,$$

wenn mit $\psi(s)$ eine Function bezeichnet wird, die auf der Peripherie und im Innern des Kreises endlich und stetig variabel ist, auch für $s = \sigma'$. Dann ist zunächst das Integral

$$\int \frac{(s+\gamma^2)\,\psi(s)\,ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)(t-x^2)}},$$

durch die Kreisperipherie erstreckt, unter keinen Umständen unendlich gross. Denn setzt man $x = 0$, so erhält man unter dem Integralzeichen ein Product, dessen einer Factor $\frac{ds}{\sqrt{s-\sigma'}}$ ist, und dessen anderer Factor auf der Kreisperipherie und im Innern des Kreises überall endlich ist. Da nun das unbestimmte Integral

$$\int \frac{ds}{\sqrt{s-\sigma'}} = 2\sqrt{s-\sigma'}$$

auf dem ganzen Integrationswege endlich bleibt, so ist auch, durch die Kreisperipherie erstreckt,

$$\int \frac{(s+\gamma^2)\,\psi(s)\,ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)(t-x^2)}}$$

endlich, und der Werth dieses Integrals nähert sich der Grenze Null, wenn man den Radius des kreisförmigen Integrationsweges unendlich klein werden lässt.

Es bleibt also nur noch das Integral

$$\int f(s)\,d\lg(s-\sigma')$$

zu ermitteln, worin wir der Kürze wegen

$$\frac{s+\gamma^2}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)(t-x^2)}} = f(s) \tag{6}$$

gesetzt haben. Wir führen nun Polar-Coordinaten r, φ ein, so dass

$$s-\sigma' = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\,e^{\varphi i}$$

zu setzen ist ($i=\sqrt{-1}$). Demnach haben wir $\lg(s-\sigma')=\lg r+\varphi i$. Für Punkte auf der Kreisperipherie ist r constant, folglich

$$d\lg(s-\sigma') = i\,d\varphi.$$

Die Richtung des Integrationsweges ist dieselbe wie die Richtung des wachsenden Bogens. Demnach ergibt sich

$$\int f(s)\,d\lg(s-\sigma') = i\int_0^{2\pi} f(s)\,d\varphi.$$

Nun darf man den Radius r beliebig klein wählen. Wir lassen ihn unendlich abnehmen und erhalten

$$J_2 - J_4 = \lim \int f(s)\,d\lg(s-\sigma') = 2\pi i f(\sigma') \tag{7}$$

$$= \frac{2\pi(\sigma'+\gamma^2)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{\sigma'}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{\sigma'}{\gamma^2}\right)}}.$$

Die gewonnenen Resultate beantworten die Frage, was aus der Gleichung (4) wird für $x=0$. Die linke Seite soll nach der Bedingung (12) des vorigen Paragraphen in Null übergehen. Auf der rechten Seite hat man für das Integral einzusetzen $(J_1+J_4+J_3)+(J_2-J_4)$ und hierauf den Grenzwerth zu ermitteln für lim $x=0$. Es ist aber, wie schon bewiesen:

$$\lim \{x(J_1 + J_4 + J_3)\} = 0 \quad \text{für } x = 0.$$

Ferner ist nach Gleichung (7)

$$x(J_2 - J_4) = \frac{2\varepsilon\pi(\sigma' + \gamma^2)}{\sqrt{\left(1 + \frac{\sigma'}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{\sigma'}{\gamma^2}\right)}},$$

und es ist $\varepsilon = +1$ oder $= -1$, je nachdem das reelle x positiv oder negativ genommen wird.

Soll nun $Y = 0$ werden für $x = 0$, so sieht man, dass in Gleichung (4) zu setzen ist:

$$(8) \qquad \Phi(y, z) = 2\varepsilon\pi\rho \frac{y}{\beta^2 - \gamma^2} \cdot \frac{\sigma' + \gamma^2}{\sqrt{\left(1 + \frac{\sigma'}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{\sigma'}{\gamma^2}\right)}}.$$

Dies Resultat stimmt mit der im vorigen Paragraphen gewonnenen Gleichung (17) überein.

In derselben Weise kann man verfahren, um die Function $\Psi(y, z)$ zu bestimmen.

§. 28.

Fortsetzung: Die Componente X kann als Potentialfunction einer Ellipsenfläche aufgefasst werden.

Es sollte $F(x, y, z)$ die Potentialfunction bezeichnen für den Fall, dass der von der Fläche (1) des §. 26 begrenzte cylindrische Raum von $x = -\infty$ bis $x = 0$ mit Masse von der constanten Dichtigkeit $-\frac{1}{2}\rho$ und von $x = 0$ bis $x = \infty$ mit Masse von der constanten Dichtigkeit $+\frac{1}{2}\rho$ erfüllt ist. Dann ist, wie wir gesehen haben,

$$F(x, y, z) - F(x - a, y, z)$$

die Potentialfunction des Cylinders von der Dichtigkeit ρ, der von den Endflächen $x = 0$ und $x = a$ begrenzt wird. Lässt man nun a unendlich klein werden, so erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx, \quad \text{d. h. } X\,dx$$

als Potentialfunction des Cylinders, der von den Endflächen $x = 0$ und $x = dx$ begrenzt wird. Ein Element dieses Cylinders enthält die Masse $\rho\,dx\,dy\,dz$. Man kann sich dies auch so vorstellen, als ob die Masse mit der Dichtigkeit $\rho\,dx$ auf der Basisfläche des

Cylinders ausgebreitet wäre. Folglich ist X die Potentialfunction der Ellipsenfläche

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0,$$

über welche die Masse mit der constanten Dichtigkeit ρ ausgebreitet ist.

Wir wollen nun direct beweisen, dass der Ausdruck (5) des §. 26 allen den Bedingungen Genüge leistet, durch welche die Potentialfunction der eben genannten Ellipsenfläche eindeutig bestimmt ist. Es ist dies eine zweite Art, den Ausdruck für X zu verificiren.

Es kömmt darauf an zu beweisen, dass

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} = 0$$

im ganzen unendlichen Raume, dass

$$(2) \qquad \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{-0} = -4\pi\rho$$

für jeden Punkt der anziehenden Fläche, und dass

$$(3) \qquad X = 0$$

ist, wenn eine der drei Coordinaten x, y, z unendlich gross genommen wird.

Wir gehen aus von der Gleichung (3) des vorigen Paragraphen, nemlich

$$(4) \qquad X = \rho \int \frac{\sqrt{(t - x^2) : s}}{\sqrt{s\left(1 + \frac{s}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma^2}\right)}} ds.$$

Die Integration ist durch die Linie L (**Fig. 18**) zu erstrecken. Zur Abkürzung schreiben wir

$$\frac{t - x^2}{s} = m,$$

$$s\left(1 + \frac{s}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma^2}\right) = D.$$

Durch Differentiation findet sich

$$\frac{\partial\left(m^{\frac{1}{2}}\right)}{\partial x} = \frac{1}{2} m^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2\left(m^{\frac{1}{2}}\right)}{\partial x^2} = -\frac{1}{4} m^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} m^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2}.$$

Ferner hat man

$$\frac{\partial m}{\partial x} = -2\,\frac{x}{s}, \qquad \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} = -\frac{2}{s},$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = -2\,\frac{y}{s+\beta^2}, \qquad \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} = -\frac{2}{s+\beta^2},$$

$$\frac{\partial m}{\partial z} = -2\,\frac{z}{s+\gamma^2}, \qquad \frac{\partial^2 m}{\partial^2 z} = -\frac{2}{s+\gamma^2}.$$

Daraus berechnet sich

(5)
$$\frac{\partial^2 (m^{\frac{1}{2}})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (m^{\frac{1}{2}})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (m^{\frac{1}{2}})}{\partial z^2}$$
$$= -m^{-\frac{3}{2}} \left\{ \left(\frac{x}{s}\right)^2 + \left(\frac{y}{s+\beta^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{s+\gamma^2}\right)^2 \right\}$$
$$- m^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{s} + \frac{1}{s+\beta^2} + \frac{1}{s+\gamma^2} \right\}.$$

Man findet aber leicht

$$\frac{\partial m}{\partial s} = \left(\frac{x}{s}\right)^2 + \left(\frac{y}{s+\beta^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{s+\gamma^2}\right)^2,$$

$$\frac{d \lg D}{ds} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+\beta^2} + \frac{1}{s+\gamma^2}.$$

Folglich vereinfacht sich die Gleichung (5). Man erhält nemlich

(6)
$$\frac{\partial^2 (m^{\frac{1}{2}})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (m^{\frac{1}{2}})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (m^{\frac{1}{2}})}{\partial z^2}$$
$$= -m^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{m}\,\frac{\partial m}{\partial s} + \frac{d \lg D}{ds} \right)$$
$$= -m^{-\frac{1}{2}}\, \frac{d \lg (m\,D)}{ds}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung ergibt sich

(7)
$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}$$
$$= -\rho \int \frac{1}{\sqrt{m\,D}}\, \frac{d \lg (m\,D)}{ds}\, ds$$
$$= -\rho \int (m\,D)^{-\frac{3}{2}}\, d\,(m\,D).$$

Das Integral ist zu erstrecken durch die Linie L (**Fig. 18**) von ∞

um σ herum bis ∞. Das unbestimmte Integral lässt sich ausrechnen, nemlich

$$-\int (m\,D)^{-\frac{3}{2}}\, d\,(m\,D) = \frac{2}{\sqrt{m\,D}}.$$

Diese Function ist auf dem ganzen Integrationswege einwerthig, endlich und stetig variabel. Man findet also das bestimmte Integral gleich der Differenz der Werthe des unbestimmten Integrals an den Grenzen. Diese Werthe sind aber an den Grenzen ($s = \infty$) beide gleich Null. Folglich

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} = 0. \tag{8}$$

Dies ist die zu beweisende Gleichung (1).

Um die zweite Eigenschaft der Function X nachzuweisen, stellen wir $\frac{\partial X}{\partial x}$ her nemlich

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -x\,\rho \int \frac{ds}{s\sqrt{t - x^2}\sqrt{\left(1 + \frac{s}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma^2}\right)}}. \tag{9}$$

Soll hier $x = 0$ genommen werden, so muss der Integrationsweg von ∞ nach ∞ durch eine geschlossene Linie L führen, welche den Punkt σ' mit umschliesst. Dabei ist zu unterscheiden, ob $\sigma' > 0$ oder $\sigma' = 0$ ist.

Es sei e r s t e n s $\sigma' > 0$. Dann können und dürfen wir die Linie L so legen, dass der Punkt $s = 0$ ausserhalb des umschlossenen Flächenstücks liegt. Das Integral auf der rechten Seite von (9) kann ersetzt werden durch den doppelten Werth des Integrals zwischen den reellen Grenzen σ' und ∞. Nun wird zwar für $s = \sigma'$ die Function unter dem Integralzeichen unendlich wie $(t - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, aber das unbestimmte Integral wird an dieser Stelle Null wie $(t - x^2)^{\frac{1}{2}}$, und daher hat das bestimmte Integral einen angebbaren endlichen Werth. Folglich ist für $x = 0$ auch $\frac{\partial X}{\partial x} = 0$, gleichgültig, ob x von der positiven oder von der negativen Seite in Null übergeht. Wir haben also (für $x = 0$)

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{-0} = 0, \tag{10}$$

wenn $\sigma' > 0$, d. h. wenn $\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} > 1$. In diesem Falle liegt der

Punkt (x, y, z) zwar in der yzEbene, aber nicht an einer mit Masse erfüllten Stelle.

Es sei zweitens $\sigma' = 0$. Dann umschliesst die Linie L den Punkt $s = 0$. In ihm wird die Function unter dem Integralzeichen unendlich. Wir zerlegen jetzt das Integral (9) in zwei Bestandtheile. Für den ersten Bestandtheil ist der Integrationsweg zusammengesetzt aus der Linie L_1 (**Fig. 21**) von ∞ bis b, der Linie L_4 von b bis c und der Linie L_3 von c bis ∞. Für den zweiten Bestandtheil wird die Integration erstreckt von b bis c längs der Linie L_2 und von c bis b längs der Linie L_4. Der erste Bestandtheil hat einen endlichen Werth. Multiplicirt man diesen mit x, so wird für $x = 0$ das Product zu Null, gleichgültig, ob x von der negativen oder von der positiven Seite in Null übergeführt ist. Es bleibt also nur der zweite Bestandtheil des Integrals (9) zu berücksichtigen. Für diesen kann der Integrationsweg ersetzt werden durch einen Kreis, der den Punkt $s = \sigma' = 0$ zum Mittelpunkt hat. Setzen wir dann zur Abkürzung

$$\frac{1}{\sqrt{(t - x^2)\left(1 + \frac{s}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma^2}\right)}} = f(s),$$

so ist das Integral, um das es sich handelt,

$$= i \int_0^{2\pi} f(s)\, d\varphi.$$

Der Radius des Kreises darf unendlich klein genommen werden. Das Integral hat also den Werth

$$2\pi i f(0),$$

d. h. mit Rücksicht auf den Werth von $f(0)$:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{x^2}}.$$

Folglich erhält man aus der Gleichung (9)

$$\text{(11)} \qquad \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{x=0} = -\frac{2\pi\rho x}{\sqrt{x^2}} = -2\pi\rho\varepsilon,$$

wobei $\varepsilon = +1$ oder $= -1$, je nachdem x von der positiven oder von der negativen Seite in Null übergeht. Demnach findet sich (für $x = 0$):

$$(12) \qquad \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{-0} = -4\pi\rho,$$

unter der Voraussetzung, dass $\sigma' = 0$, d. h. dass $\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} < 1$ ist.

Damit ist bewiesen, dass X auch der Bedingung (2) Genüge leistet.

Endlich muss $X = 0$ sein, wenn der Punkt (x, y, z) in unendliche Entfernung rückt. Dass dies wirklich eintrifft, ist schon in §. 26 bewiesen.

Die Function X genügt also in der That den Bedingungen (1), (2), (3).

§. 29.

Beispiel: Potentialfunction einer nicht homogenen Kugel.

Wir wollen die Potentialfunction V einer kugelförmigen Masse bestimmen, wenn die Dichtigkeit ρ nicht constant ist und der Werth von V in der Oberfläche als gegeben vorausgesetzt wird. Der Radius der anziehenden Kugel sei $= a$. In ihren Mittelpunkt legen wir den Anfangspunkt des rechtwinkligen Coordinatensystems.

Zunächst kömmt es darauf an, von den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z zu Kugel-Coordinaten r, θ, φ als unabhängigen Variabeln überzugehen.

Wir legen den Mittelpunkt der Kugel-Coordinaten in den Anfangspunkt des rechtwinkligen Systems. Auf der Kugel vom Radius 1, welche diesen Punkt zum Centrum hat, wählen wir den Pol an der Stelle, welche von der Axe der positiven z getroffen wird. Als Anfangsmeridian soll der vom Pol zum Gegenpol verlaufende grösste Halbkreis genommen werden, den die Axe der positiven x durchschneidet. Der Punkt, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sind, hat den Radius vector r. Dieser schneidet die Kugel vom Radius 1 in einem Punkte, dessen Poldistanz mit θ und dessen geographische Länge mit φ bezeichnet werden möge. Der Zusammenhang von r, θ, φ mit x, y, z wird durch die Gleichungen ausgesprochen:

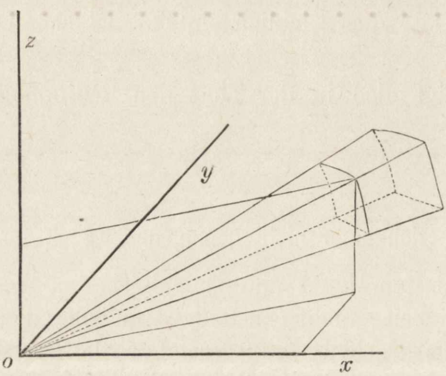
$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= r \cos\theta. \end{aligned}$$

Auf Grund dieser Gleichungen könnte man den Ausdruck

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

durch blosse Rechnung transformiren. Wir ziehen es vor, den neuen Ausdruck direct herzuleiten, indem wir den Satz von Gauss (§. 12) auf ein Raumelement des Kugelcoordinaten-Systems anwenden. Dieses Raumelement (**Fig. 22**) wird begrenzt von zwei concentrischen Kugelflächen, die mit den Radien r und $r + dr$ um den Mittelpunkt der Kugel-Coordinaten beschrieben sind, ferner von zwei Kegelflächen, welche die z Axe zur Axe haben, und deren Erzeugende mit dieser Axe die Winkel θ und resp. $\theta + d\theta$ einschliessen, endlich von zwei Meridian-Ebenen, die mit der Ebene des Anfangsmeridians die Winkel φ und $\varphi + d\varphi$ bilden. Die sechs Begrenzungsflächen durchschneiden sich in zwölf Kanten. Je drei von ihnen, welche eine dreiseitige Ecke bilden, stehen rechtwinklig aufeinander.

Fig. 22.



Der Satz von Gauss lautet:

$$(2) \qquad \int N\, d\sigma = 4\pi M,$$

wenn die Integration über die Oberfläche des Raumelementes erstreckt wird. N ist die Componente der Anziehung in der Oberfläche, genommen in der Richtung der nach innen gezogenen Normale, und M die Masse im Innern des Raumelementes.

Das Integral zerlegt sich in sechs Bestandtheile, deren jeder von einer Seitenfläche herrührt. Wir haben zunächst zwei Seitenflächen, rechtwinklig gegen den Radius vector r. Der Flächeninhalt derselben ist $r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ und resp. $(r + dr)^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$. Für die erste ist $N = \frac{\partial V}{\partial r}$, für die andere $N = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r+dr}$. Folglich liefern diese beiden Seitenflächen zu dem Integral den Beitrag

$$\left\{r^2 \frac{\partial V}{\partial r} - \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r+dr}\right\} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$
$$= - \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r} \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

Es kommen ferner in Betracht zwei Seitenflächen, rechtwinklig gegen den Meridian. Ihr Flächeninhalt ist $r \sin\theta \, dr \, d\varphi$ und resp. $r \sin(\theta + d\theta) \, dr \, d\varphi$. Für die eine ist $N = \frac{\partial V}{r \, \partial \theta}$, für die andere $N = -\left(\frac{\partial V}{r \, \partial \theta}\right)_{\theta + d\theta}$. Folglich lautet der Beitrag zu dem Integral

$$\left\{\frac{\partial V}{r \, \partial \theta} \sin\theta - \left(\frac{\partial V}{r \, \partial \theta} \sin\theta\right)_{\theta + d\theta}\right\} r \, dr \, d\varphi$$
$$= - \frac{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \sin\theta\right)}{\partial \theta} dr \, d\theta \, d\varphi.$$

Endlich handelt es sich noch um zwei Seitenflächen, rechtwinklig gegen den Parallelkreis. Jede von ihnen hat den Flächeninhalt $r \, dr \, d\theta$. Für die eine ist $N = \frac{\partial V}{r \sin\theta \, d\varphi}$, für die andere $N = \left(\frac{\partial V}{r \sin\theta \, d\varphi}\right)_{\varphi + d\varphi}$. Wir erhalten also zu dem Integral den Beitrag

$$\left\{\frac{\partial V}{r \sin\theta \, \partial \varphi} - \left(\frac{\partial V}{r \sin\theta \, \partial \varphi}\right)_{\varphi + d\varphi}\right\} r \, dr \, d\theta$$
$$= - \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} dr \, d\theta \, d\varphi.$$

Fassen wir diese Beiträge zusammen, so wird aus der linken Seite der Gleichung (2):

$$- dr \, d\theta \, d\varphi \left\{\frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r} \sin\theta + \frac{\partial \left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right\}.$$

Auf der rechten Seite ist

$$M = \rho \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

Stellt man hiernach die Gleichung (2) auf und dividirt auf beiden Seiten durch $- r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$, so ergibt sich:

$$(3) \quad \frac{1}{r^2} \left\{\frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial \left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right\} = - 4 \pi \rho.$$

Dies ist die partielle Differentialgleichung, welche für Kugel-Coordinaten an die Stelle der Gleichung (4) des §. 13 tritt.

Die Gleichung von Laplace lautet demnach für dieses Coordinatensystem:

$$(4)\qquad \frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0.$$

§. 30.

Fortsetzung: Die Function U.

Soll zunächst die Function V für irgend einen Punkt (r', θ', φ') im Innern der Kugel vom Radius a hergestellt werden $(r' < a)$, so handelt es sich nach Green's Methode darum, eine Function U ausfindig zu machen, die den folgenden Bedingungen Genüge leistet:

$$(1)\qquad \frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = 0$$

im Innern der Kugel vom Radius a $(r < a)$;

(2) $U = 0$ in der Oberfläche $(r = a)$;

(3) $U = \infty$ im Punkte (r', θ', φ'),

wie der reciproke Werth der Entfernung von diesem Punkte.

Die partielle Differentialgleichung (1) lässt sich durch eine andere ersetzen, wenn man eine Function u einführt durch die Gleichung:

$$(4)\qquad U = r^{-\frac{1}{2}} u$$

und $\lg r$ als Variable nimmt statt r. Es ist nemlich

$$r^2\frac{\partial U}{\partial r} = r\frac{\partial U}{\partial \lg r},$$

folglich

$$\frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right)}{\partial r} = \frac{\partial^2 U}{\partial \lg r^2} + \frac{dU}{\partial \lg r}.$$

Aus der Gleichung (4) findet sich durch Differentiation

$$\frac{\partial U}{\partial \lg r} = r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial \lg r} - \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} u,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \lg r^2} = r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial \lg r^2} - r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial \lg r} + \frac{1}{4} r^{-\frac{1}{2}} u.$$

Führt man dies in die partielle Differentialgleichung (1) ein, so erhält man, nach Wegwerfung des Factors $r^{-\frac{1}{2}}$:

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \lg r^2} - \frac{1}{4}u + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Ist

$$(6)\qquad u = F(\lg r, \theta, \varphi)$$

eine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung, so kann man darin $\lg r$ ersetzen durch *const.* $- \lg r$ und erhält dadurch eine neue Lösung. Man überzeugt sich davon leicht, wenn man bemerkt, dass in (5) nur $(d \lg r)^2$ vorkommt. Es ist also auch

$$(7)\qquad u_1 = c \,.\, F(\lg r_1, \theta, \varphi)$$

eine Lösung, wenn $\lg r + \lg r_1 =$ *const.* genommen wird.

Gehört nun r zu einem Punkte innerhalb der Kugel, so lässt es sich leicht einrichten, dass r_1 einem äusseren Punkte angehört. Man hat nur

$$(8)\qquad \lg r + \lg r_1 = 2 \lg a, \quad \text{d. h. } r r_1 = a^2$$

zu setzen. Zwei solche Punkte, welche auf demselben Radius vector liegen, und deren Abstände vom Mittelpunkte r und r_1 der Gleichung (8) Genüge leisten, sollen der eine der Bildpunkt des anderen genannt werden.

Vermöge der Gleichungen (6), (7) und (8) ist es nun leicht, die Function u über die Oberfläche der Kugel hinaus so in den äusseren Raum fortzusetzen, dass sie überall der partiellen Differentialgleichung (5) genügt, und dass sie in der Oberfläche der Kugel $(r = a)$ an jeder Stelle den Werth Null annimmt.

Man braucht nur die Bestimmung zu treffen, dass die Functionswerthe u und u_1 einander entgegengesetzt gleich sein sollen für zwei Punkte (r, θ, φ) und (r_1, θ, φ), von denen der eine des anderen Bildpunkt ist. Also

$$(9)\qquad F(\lg r, \theta, \varphi) = -F(2\lg a - \lg r, \theta, \varphi).$$

Daraus geht zunächst hervor

$$(10)\qquad F(\lg a, \theta, \varphi) = 0.$$

Ferner, wenn man mit F' die Derivirte nach $\lg r$ bezeichnet:

$$(11)\qquad F'(\lg r, \theta, \varphi) = F'\left(\lg\frac{a^2}{r}, \theta, \varphi\right).$$

Für $r = a$ zeigt sich, dass die Derivirte in der Oberfläche denselben Werth annimmt, der Punkt mag von aussen oder von innen in die Oberfläche hineinrücken.

Durch die Bestimmung, die wir über die Fortsetzung der Function u getroffen haben, wird auch U über die Kugeloberfläche vom Radius a nach aussen fortgesetzt. Und zwar genügt bei dieser Art der Fortsetzung die Function U im ganzen unendlichen Raume der partiellen Differentialgleichung (1). Sie hat in der Oberfläche ($r = a$) an jeder Stelle den Werth Null. Es ist also nur noch darauf Acht zu geben, dass U überall endlich und stetig variabel sein soll, ausser in dem Punkte (r', θ', φ') und in seinem Bildpunkte $\left(\frac{a^2}{r'}, \theta', \varphi'\right)$.

Bezeichnen wir mit U und U_1 die Werthe der Function U für zwei gegenseitige Bildpunkte, so findet sich aus (9) und (4):

$$r_1^{\frac{1}{2}} U_1 = - r^{\frac{1}{2}} U = - a r_1^{-\frac{1}{2}} U,$$

also

$$U_1 = - \frac{a}{r_1} U. \tag{12}$$

Diese Relation lässt sich zur Herstellung des Ausdruckes für die Function U verwerthen, wenn man noch ihr Verhalten in der Nähe des Unstetigkeitspunktes im Innern und seines äusseren Bildpunktes beachtet. Es seien r', θ', φ' die Coordinaten des inneren Unstetigkeitspunktes und r_1', θ', φ' die Coordinaten seines äusseren Bildpunktes, so dass $r' r_1' = a^2$. Ferner seien $r' + \varepsilon, \theta', \varphi'$ und resp. $r_1' - \varepsilon_1, \theta', \varphi'$ die Coordinaten von zwei gegenseitigen Bildpunkten, welche mit den Unstetigkeitspunkten auf demselben Radius vector liegen. Nehmen wir ε unendlich klein, so hat die Function im Punkte $(r' + \varepsilon, \theta', \varphi)$ den Werth

$$U = \frac{1}{\varepsilon} + f. c., \tag{13}$$

wenn mit $f. c.$ eine Function bezeichnet wird, welche für $\varepsilon = 0$ endlich und stetig bleibt. In dem äusseren Bildpunkte $(r_1' + \varepsilon_1, \theta', \varphi')$ erhält man nach Gleichung (12)

$$U_1 = - \frac{a}{r_1' - \varepsilon_1} \cdot \frac{1}{\varepsilon} + \varphi. c.,$$

wenn $\varphi. c.$ eine Function bezeichnet, welche für $\varepsilon = 0$ endlich und stetig bleibt. Nun ist aber

$$(r_1' - \varepsilon_1)(r' + \varepsilon) = a^2,$$

folglich

$$(r_1' - \varepsilon_1)\varepsilon = a^2 - r'(r_1' - \varepsilon_1) = r'\varepsilon_1.$$

Demnach kann der Ausdruck für U_1 auch so geschrieben werden

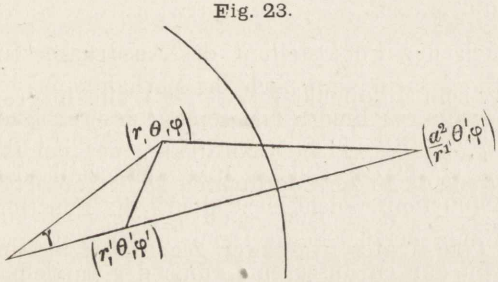
$$(14) \qquad U_1 = -\frac{a}{r'} \cdot \frac{1}{\varepsilon_1} + \varphi.\, c.$$

Jetzt ist es leicht, für eine beliebige Lage des Punktes (r, θ, φ) einen Ausdruck aufzustellen, der in (13) oder (14) übergeht, je nachdem der Punkt (r, θ, φ) unendlich nahe an den inneren Unstetigkeitspunkt oder an dessen äusseren Bildpunkt heranrückt. Wir bezeichnen mit t und t_1 die Abstände des Punktes (r, θ, φ) von dem inneren Unstetigkeitspunkte (r', θ', φ') und resp. von dessen äusserem Bildpunkte $\left(\frac{a^2}{r'}, \theta', \varphi'\right)$. Dann ist

$$(15) \qquad U = \frac{1}{t} - \frac{a}{r'}\frac{1}{t_1}$$

die Function, welche allen gestellten Bedingungen Genüge leistet.

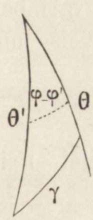
Fig. 23.



Es bleibt noch übrig, die Abstände t und t_1 durch die Coordinaten r, θ, φ und die Coordinaten des Unstetigkeitspunktes und seines Bildpunktes auszudrücken. Bezeichnen wir mit γ den Winkel, welchen die Radien r und r' mit einander einschliessen, so findet man (**Fig. 23**):

$$(16) \qquad \begin{aligned} t^2 &= r^2 + r'^2 - 2\, r\, r' \cos\gamma, \\ t_1^2 &= r^2 + \left(\frac{a^2}{r'}\right)^2 - 2\, r \left(\frac{a^2}{r'}\right) \cos\gamma. \end{aligned}$$

Fig. 24.



Um $\cos\gamma$ auszudrücken, legen wir um den Mittelpunkt des Kugelcoordinaten-Systems die Kugel vom Radius 1. Auf ihr merken wir ausser dem Pol und dem Anfangsmeridian die Punkte an, welche von den Radien r und r' getroffen werden (**Fig. 24**). Die Poldistanzen dieser beiden Punkte sind θ und θ', und ihre sphärische Entfernung ist γ. Die Meridiane, auf welchen θ und θ'

gezählt werden, schliessen den sphärischen Winkel $\varphi - \varphi'$ ein. Folglich haben wir

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi'). \tag{17}$$

Wenn die Wahl des Coordinatensystems freisteht, so dient es zur Vereinfachung, die zAxe des rechtwinkligen Systems (und folglich auch die Polaraxe des Kugelcoordinaten-Systems) durch den Unstetigkeitspunkt zu legen. Dann ist $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = r'$, ferner $\theta' = 0$, φ' beliebig und folglich $\gamma = \theta$. Die Gleichung (15) geht dadurch über in

$$U = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}} - \frac{a}{r'} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{a^2}{r'}\right)^2 - 2r\left(\frac{a^2}{r'}\right)\cos\theta}}. \tag{18}$$

Aus der Gleichung (15) kann man noch die mechanische Bedeutung der Function U herauslesen. Es ist U die Potentialfunction für den Fall, dass im Punkte (r', θ', φ') die Masse 1, in seinem Bildpunkte $\left(\frac{a^2}{r'}, \theta', \varphi'\right)$ die Masse $-\frac{a}{r'}$ concentrirt ist.

Uebrigens kann auch der Punkt (r', θ', φ') ausserhalb der Kugel liegen. Dann ist sein Bildpunkt $\left(\frac{a^2}{r'}, \theta', \varphi'\right)$ ein innerer Punkt. Der Ausdruck für U wird derselbe wie in Gleichung (15).

Versteht man unter (r', θ', φ') einen Punkt ausserhalb der Kugel, so ist U die Hülfsfunction, welche dazu dient, die Function V für den äusseren Raum herzustellen. Denn in der That genügt diese Function U im ganzen äusseren Raume der partiellen Differentialgleichung (1). Sie hat den Werth Null in der Begrenzung des äusseren Raumes, d. h. in der Oberfläche der Kugel vom Radius a und in einer Kugelfläche von unendlich grossem Radius. Sie ist im ganzen äusseren Raume endlich und stetig variabel, ausser im Punkte (r', θ', φ'), wo sie in vorgeschriebener Weise unendlich wird.

§. 31.

Fortsetzung: Die Masse ist nur in der Oberfläche ausgebreitet, V in der Oberfläche gegeben.

Wir wollen speciell voraussetzen, dass im Innern der Kugel und in dem ganzen äusseren Raume keine anziehende Masse vorhanden sei. Die Masse soll vielmehr über die Oberfläche vertheilt sein, und zwar in der Weise, dass für jeden Punkt der Oberfläche die Potentialfunction einen gegebenen Werth besitzt.

$$V = f(\theta, \varphi) \quad \text{für } r = a. \tag{1}$$

Die Function $f(\theta, \varphi)$ soll einwerthig und endlich sein für jede Werthencombination der Variablen θ und φ zwischen den äussersten Werthen 0 und π von θ und den äussersten Werthen 0 und 2π von φ.

Für das Innere der Kugel und ausserhalb gilt dann überall die Gleichung von Laplace:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{2}$$

Der Satz von Green (§. 21) gibt für irgend einen Punkt (r', θ', φ') den Werth V' der Potentialfunction durch die Gleichung

$$4\pi V' = \int V \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma. \tag{3}$$

Die Integration hat man über die Kugeloberfläche auszudehnen. Die Function U ist in Gleichung (15) des vorigen Paragraphen ausgedrückt, und es ist

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \pm \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=a},$$

wobei das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem r' grösser oder kleiner als a ist, d. h. je nachdem der Punkt (r', θ', φ') ausserhalb oder innerhalb der Kugel liegt.

Folglich haben wir

$$4\pi V' = \pm a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_a f(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta, \tag{4}$$

je nachdem $r' \gtrless a$.

Diese Formel drückt den Werth der Potentialfunction aus, wenn die anziehende Masse nur in der Oberfläche der Kugel vertheilt und der Werth der Potentialfunction in jedem Punkte dieser Oberfläche bekannt ist.

Es fragt sich dann noch, wie gross die Dichtigkeit ρ in jedem Punkte der Kugeloberfläche ist. Diese Frage ist nach §. 14 Gleichung (6) zu beantworten. Man erhält

$$-4\pi\rho = \left(\frac{\partial V'}{\partial r'}\right)_{a+0} - \left(\frac{\partial V'}{\partial r'}\right)_{a-0},$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft:

$$-(4\pi)^2 \rho = \left(\frac{\partial (4\pi V')}{\partial r'}\right)_{a+0} - \left(\frac{\partial (4\pi V')}{\partial r'}\right)_{a-0}.$$

Nun ist aber

$$\left(\frac{\partial (4\pi V')}{\partial r'}\right)_{a+0} = +a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r\, \partial r'}\right)_{r=a,\ r'=a} f(\theta, \varphi) \sin\theta\, d\theta$$

$$\left(\frac{\partial (4\pi V')}{\partial r'}\right)_{a-0} = -a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r\, \partial r'}\right)_{r=a,\ r'=a} f(\theta, \varphi) \sin\theta\, d\theta.$$

Folglich ergibt sich

$$(5) \qquad -(4\pi)^2 \rho = 2a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r\, \partial r'}\right)_{r=a,\ r'=a} f(\theta, \varphi) \sin\theta\, d\theta.$$

Der bei $\frac{\partial^2 U}{\partial r\, \partial r'}$ angehängte doppelte Index soll bedeuten, dass nach Ausführung der Differentiation $r = a$ und $r' = a$ gesetzt werden soll.

Es bleibt noch übrig, in (4) und (5) die Function U des vorigen Paragraphen wirklich einzusetzen und die vorgeschriebenen Differentiationen auszuführen. Wir wollen dabei die Polaraxe des Kugelcoordinaten-Systems durch den Punkt legen, für welchen der Werth V' der Potentialfunction ausgedrückt werden soll. Dann ist $\theta' = 0$, φ' beliebig, und es gilt für U die Gleichung (18) des vorigen Paragraphen. Danach findet sich

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=a} = -\frac{a - r'\cos\theta}{(a^2 + r'^2 - 2ar'\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{a}{r'}\left(a - \frac{a^2}{r'}\cos\theta\right)}{\left(a^2 + \left(\frac{a^2}{r'}\right)^2 - 2a\frac{a^2}{r'}\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{r'}{a}\right)^2 \left(a - \frac{a^2}{r'}\cos\theta\right) - (a - r'\cos\theta)}{(a^2 + r'^2 - 2ar'\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{r'^2 - a^2}{a(a^2 + r'^2 - 2ar'\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man dies in Gleichung (4) ein, so erhält man

$$(6)\quad 4\pi V' = \pm a(r'^2 - a^2)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{f(\theta, \varphi)\sin\theta\, d\theta}{(a^2 + r'^2 - 2ar'\cos\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

und es gilt das obere oder das untere Zeichen, je nachdem $r'^2 - a^2$ positiv oder negativ ist.

Es fragt sich, welchen Werth V' annimmt für $r' = a$. Dies ist leicht vorauszusagen, wenn man daran denkt, dass der Punkt (r', θ', φ') auf der Polaraxe liegt ($x' = 0$, $y' = 0$, $z' = r'$). Für $r' = a$ rückt er also in den Pol der Kugeloberfläche, und für diesen ist $\theta' = 0$ und φ' beliebig. Es muss also dann V' in den Werth übergehen, den $f(\theta, \varphi)$ für $\theta = 0$ annimmt, und dieser Werth muss von φ unabhängig sein. Wir wollen zeigen, dass das wirklich aus der Gleichung (6) sich ergibt.

Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi)\, d\varphi = F(\theta).$$

Dann ist $F(\theta)$ der Mittelwerth von allen den Werthen, welche die Function $f(\theta, \varphi)$ auf dem Parallelkreis von der Poldistanz $a\theta$ annimmt. Bei dieser abgekürzten Schreibweise geht die Gleichung (6) in folgende über:

$$2V' = \pm a(r'^2 - a^2)\int_0^{\pi} \frac{F(\theta)\sin\theta\, d\theta}{(a^2 + r'^2 - 2ar'\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Betrachten wir zunächst das unbestimmte Integral, so gibt die Integration nach Theilen:

$$\int F(\theta)\,\{a^2 + r'^2 - 2ar'\cos\theta\}^{-\frac{3}{2}}\, d(-\cos\theta)$$

$$= -F(\theta)\frac{(a^2 + r'^2 - 2ar'\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}}{ar'}$$

$$+ \frac{1}{ar'}\int \frac{F'(\theta)\, d\theta}{(a^2 + r'^2 - 2ar'\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}.$$

Geht man also zu der Integration zwischen den vorgeschriebenen Grenzen 0 und π über, so findet sich

$$2\,V' = \mp \frac{r' - a}{r'} F(\pi) \pm \frac{1}{r'} \frac{(r'^2 - a^2)}{\pm (r' - a)} F(0)$$

$$\pm \frac{r'^2 - a^2}{r'} \int_0^\pi \frac{F'(\theta)\, d\theta}{(a^2 + r'^2 - 2\,a\,r' \cos\theta)^{\frac{1}{2}}}.$$

In dieser Gleichung gelten überall gleichzeitig die oberen Zeichen, wenn $r' > a$, und die unteren, wenn $r' < a$ ist. Die Gleichung lässt sich kürzer schreiben:

$$(7) \qquad 2\,V' = \mp \frac{r' - a}{r'} F(\pi) + \frac{r' + a}{r'} F(0)$$

$$\pm \frac{r'^2 - a^2}{r'} \int_0^\pi \frac{F'(\theta)\, d\theta}{(a^2 + r'^2 - 2\,a\,r' \cos\theta)^{\frac{1}{2}}}.$$

Soll nun $r' = a$ gesetzt werden, so erhält man

$$2\,V = 2\,F(0) \pm \lim \frac{r'^2 - a^2}{r'} \int_0^\pi \frac{F'(\theta)}{2\,a \sin\frac{1}{2}\theta}\, d\theta.$$

Das letzte Integral hat dann, aber auch nur dann, einen endlichen Werth, wenn $F'(0) = 0$ ist. Wir wollen nachher zeigen, dass diese Bedingung im allgemeinen erfüllt ist. Unter dieser Voraussetzung reducirt sich die letzte Gleichung auf folgende:

$$V = F(0) = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi)\, d\varphi \quad \text{für } \theta = 0.$$

Der letzte Ausdruck ist aber das arithmetische Mittel von allen den Werthen, welche die Function $f(\theta, \varphi)$ auf einem Parallelkreis von unendlich kleiner Poldistanz annimmt, d. h. da $f(\theta, \varphi)$ einwerthig vorausgesetzt ist, gleich dem Werthe dieser Function im Pole selbst. Und das war zu beweisen.

§. 32.

Fortsetzung: Die Dichtigkeit in jedem Punkte der Oberfläche.

Für die Dichtigkeit haben wir die Gleichung abgeleitet

$$(1) \qquad -4\pi\rho = \left(\frac{\partial V'}{\partial r'}\right)_{a+0} - \left(\frac{\partial V'}{\partial r'}\right)_{a-0}.$$

Für V' nehmen wir am besten den Ausdruck (7) des vorigen Paragraphen. Dann findet sich

$$(2)\quad 2\frac{\partial V'}{\partial r'} = \mp \frac{a}{r'^2} F(\pi) - \frac{a}{r'^2} F(0)$$

$$\pm\left(1+\frac{a^2}{r'^2}\right)\int_0^\pi \frac{F'(\theta)\,d\theta}{(a^2+r'^2-2\,a\,r'\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\pm\frac{r'^2-a^2}{r'}\int_0^\pi \frac{(-r'+a\cos\theta)}{(a^2+r'^2-2\,a\,r'\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} F'(\theta)\,d\theta,$$

und daraus wird für $r' = a \pm 0$

$$(3)\quad 2\left(\frac{\partial V'}{\partial r'}\right)_{a\pm 0} = \mp\frac{1}{a}F(\pi) - \frac{1}{a}F(0) \pm 2\int_0^\pi \frac{F'(\theta)\,d\theta}{2\,a\sin\frac{1}{2}\theta}$$

$$\pm\lim\frac{r'^2-a^2}{r'}\int_0^\pi \frac{(-r'+a\cos\theta)\,F'(\theta)\,d\theta}{(a^2+r'^2-2\,a\,r'\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Das letzte Integral ist noch zu transformiren. Wir schreiben

$$\begin{aligned} a\cos\theta - r' &= (a-r') - a\,(1-\cos\theta) \\ &= (a-r') - 2\,a\sin\frac{1}{2}\,\theta^2. \end{aligned}$$

Demnach ist

$$\lim\frac{r'^2-a^2}{r'}\int_0^\pi \frac{(-r'+a\cos\theta)\,F'(\theta)\,d\theta}{(a^2+r'^2-2\,a\,r'\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \lim\frac{(r'+a)}{r'}\int_0^\pi \frac{-(r'-a)^2\,F'(\theta)\,d\theta}{(a^2+r'^2-2\,a\,r'\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$-\lim\frac{(r'^2-a^2)}{r'}\int_0^\pi \frac{2\,a\sin\frac{1}{2}\,\theta^2}{\left(2\,a\sin\frac{1}{2}\,\theta\right)^3} F'(\theta)\,d\theta.$$

Der letzte Bestandtheil der rechten Seite verschwindet, wenn das Integral einen endlichen Werth hat, d. h. wenn $F'(0) = 0$ ist. Den ersten Bestandtheil zerlegen wir weiter. Es ist nemlich

$$-(r'-a)^2 = -(a^2+r'^2-2\,a\,r'\cos\theta)+4\,a\,r'\sin\frac{1}{2}\theta^2.$$

Folglich

$$\lim\frac{(r'^2-a^2)}{r'}\int_0^\pi\frac{(-r'+a\cos\theta)\,F'(\theta)\,d\theta}{(a^2+r'^2-2\,a\,r'\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-2\int_0^\pi\frac{F'(\theta)\,d\theta}{2\,a\sin\frac{1}{2}\theta}+2\int_0^\pi\frac{4\,a^2\sin\frac{1}{2}\theta^2\,F'(\theta)\,d\theta}{8\,a^3\sin\frac{1}{2}\theta^3}=0.$$

Danach geht die Gleichung (3) über in

$$2\left(\frac{\partial V'}{\partial r'}\right)_{a\pm 0}=\mp\frac{1}{a}F(\pi)-\frac{1}{a}F(0)\pm\frac{1}{a}\int_0^\pi\frac{F'(\theta)\,d\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta},$$

und die Gleichung (1) gibt jetzt

$$\rho=\frac{1}{4\,a\,\pi}\left\{F(\pi)-\int_0^\pi\frac{F'(\theta)\,d\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\right\}. \tag{4}$$

Man sieht aus dieser Gleichung, wie die Dichtigkeit ρ in irgend einem Punkte der Kugeloberfläche abhängig ist von den Werthen, welche die Potentialfunction in allen Punkten dieser Oberfläche besitzt.

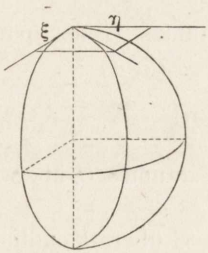
Zur Berechnung von ρ ist die Formel nicht brauchbar. Vielmehr hat man zu diesem Zweck sie in eine Reihe von Kugelfunctionen zu entwickeln. Die Convergenz der Reihe darf nicht a priori angenommen, sie muss vielmehr bewiesen werden. Das hat Dirichlet*) gethan, indem er die Reihe summirt und allgemein nachweist, dass ihre Summe gleich dem obigen Integral-Ausdruck ist.

---

*) Dirichlet. Ueber einen neuen Ausdruck zur Bestimmung der Dichtigkeit einer unendlich dünnen Kugelschale, wenn der Werth des Potentials in jedem Punkte der Oberfläche gegeben ist. (Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1850. Seite 99.)

Wir haben noch zu zeigen, dass im allgemeinen, d. h. abgesehen von einzelnen Ausnahmefällen, $F'(\theta) = 0$ ist für $\theta = 0$. Zu dem Ende ziehen wir im Pol der Kugel (**Fig. 25**) zwei Tangenten, parallel resp. zu den Axen der positiven x und der positiven y, und bezeichnen die auf ihnen gezählten Strecken resp. mit ξ und η. Nehmen wir dann auf irgend einem Meridian, der mit dem Anfangsmeridian den Winkel φ einschliesst, vom Pol aus eine unendlich kleine Strecke θ, so darf man diese durch ihre Tangente ersetzen und hat (unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von θ) die Gleichungen

Fig. 25.



$$\xi = \theta \cos \varphi,$$
$$\eta = \theta \cos \varphi.$$

Setzen wir voraus, dass $f(\theta, \varphi)$ in der Nähe des Pols endliche Derivirte hat, so können wir nach Taylor's Satze entwickeln

$$f(\theta, \varphi) = V = V_0 + \xi \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_0 + \eta \left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)_0 + \cdots$$

Dabei sind die nicht hingeschriebenen Glieder der zweiten und höheren Potenzen von θ proportional. Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} F(\theta) &= V_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\theta \cos \varphi \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_0 + \theta \sin \varphi \left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)_0 \right] d\varphi \\ &\quad + \cdots \\ &= V_0 + \frac{1}{2\pi}\, \theta \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_0 \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi + \frac{1}{2\pi}\, \theta \left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)_0 \int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi \\ &\quad + \cdots \\ &= V_0 + \theta \, . \, 0 + \cdots \end{aligned}$$

In der Entwicklung von $F(\theta)$ nach Potenzen von θ ist also der Coefficient der ersten Potenz gleich Null, d. h.

$$F'(\theta) = 0 \quad \text{für } \theta = 0,$$

was zu beweisen war.

In besonderen Fällen können Ausnahmen eintreten, die dann eine besondere Untersuchung nöthig machen.

§. 33.

Allgemeine Eigenschaften der Green'schen Function U.

Wir gehen zu der Betrachtung der allgemeinen Eigenschaften der Function U über. Sie ist im §. 21 durch drei charakteristische Merkmale definirt:

Erstens: Sie genügt im Innern des Raumes S der partiellen Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

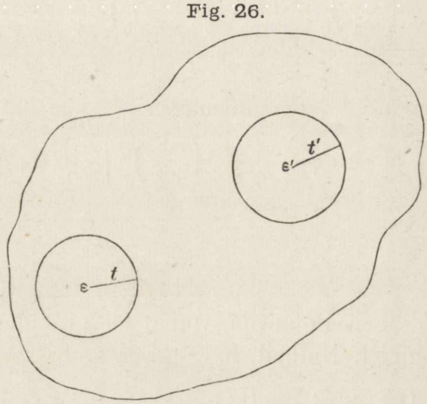
Zweitens: Sie hat in der Oberfläche des Raumes S überall den Werth Null.

Drittens: Sie ist im Innern des Raumes S überall endlich und stetig variabel, ausser im Punkte (x', y', z'), wo sie unendlich wird wie $\frac{1}{t}$, wenn

$$t = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

Hiernach ist U eine Function einerseits von den Coordinaten x', y', z' des Unstetigkeitspunktes, andererseits von den Coordinaten x, y, z irgend eines Punktes im Innern oder auf der Oberfläche des Raumes S. Wir wollen mit U_ε die Function U bezeichnen, welche im Punkte ε unendlich wird, und mit $U_\varepsilon(\varepsilon')$ den Werth, welchen sie im Punkte ε' annimmt. Ebenso soll $U_{\varepsilon'}$ die Function U sein, welche im Punkte ε' unendlich wird, und $U_{\varepsilon'}(\varepsilon)$ soll den Werth bezeichnen, den sie im Punkte ε annimmt. Um die Punkte ε und ε' als Mittelpunkte legen wir zwei Kugelflächen mit den Radien t und t'. Den inneren Raum dieser Kugeln schliessen wir von dem Raume S aus und bezeichnen mit S_1 den Raum, der übrig bleibt. Dann sind U_ε und $U_{\varepsilon'}$, sowie ihre ersten Derivirten im Innern von S_1 überall endlich und stetig variabel. Ausserdem

Fig. 26.



genügen im Innern von S_1 beide Functionen der partiellen Differentialgleichung (1). Folglich ist nach dem Satze von Green (§. 20)

$$\int \left(U_\varepsilon \frac{\partial U_{\varepsilon'}}{\partial n} - U_{\varepsilon'} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial n} \right) d\sigma = 0, \tag{2}$$

wenn das Integral über die Begrenzung von S_1 erstreckt wird und n die in der Begrenzung nach dem Innern von S_1 gezogene Normale bezeichnet. Die Begrenzung von S_1 besteht aus der Oberfläche des Raumes S und aus den beiden Kugelflächen um ε und ε'. In der Oberfläche von S sind U_ε und $U_{\varepsilon'}$ beide gleich Null, folglich liefert diese Oberfläche zu dem Integral (2) ebenfalls den Beitrag Null. Für die Kugelfläche um ε (Fig. 26) fällt die Richtung von n mit der Richtung der wachsenden t zusammen. Das Oberflächen-Element $d\sigma$ ist $t^2\, d\omega$, wenn mit $d\omega$ das Element auf einer Kugel vom Radius 1 bezeichnet wird. Die um ε gelegte Kugelfläche liefert also zu dem Integral (2) den Beitrag

$$\int \left(U_\varepsilon \frac{\partial U_{\varepsilon'}}{\partial t} - U_{\varepsilon'} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} \right) t^2\, d\omega.$$

Nun sind $U_{\varepsilon'}$ und $\dfrac{\partial U_{\varepsilon'}}{\partial t}$ in der Kugelfläche endlich. Ferner ist in ihr

$$U_\varepsilon = \frac{1}{t} + f.\, c.$$

$$\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} = -\frac{1}{t^2} + f'.\, c.$$

Folglich haben wir für ein unendlich abnehmendes t

$$\lim t^2\, U_\varepsilon \frac{\partial U_{\varepsilon'}}{\partial t} = 0,$$

$$\lim t^2\, U_{\varepsilon'} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} = -\, U_{\varepsilon'}(\varepsilon),$$

und der Beitrag, welchen die Kugelfläche um ε zu dem Integral (2) liefert, hat für $\lim t = 0$ den Grenzwerth

$$4\,\pi\, U_{\varepsilon'}(\varepsilon).$$

Ebenso findet sich der Beitrag, welchen die um ε gelegte Kugelfläche zu dem Integral (2) liefert. Sein Grenzwerth für $\lim t = 0$ ist

$$-\,4\,\pi\, U_\varepsilon(\varepsilon').$$

Der in Gleichung (2) ausgesprochene Satz lautet jetzt also

$$4\pi \{ U_{\varepsilon'}(\varepsilon) - U_{\varepsilon}(\varepsilon') \} = 0$$

oder kürzer

(3) $$U_{\varepsilon'}(\varepsilon) = U_{\varepsilon}(\varepsilon').$$

D. h. die Function U ist eine symmetrische Function von (x, y, z) und von (x', y', z').

§. 34.

Eindeutige Existenz der Function U. Dirichlet's Princip.

Die Herstellung der Potentialfunction ist zuerst von Green auf die Herstellung der Function U zurückgeführt in der oben (§. 20) citirten Abhandlung: an essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism. Green gibt aber keinen Beweis dafür, dass für jede Gestalt des Raumes S auch wirklich eine Function U und nur eine existirt, die den gestellten Bedingungen Genüge leistet. Er beruft sich einfach auf die physikalische Bedeutung der Function U.*) Diese Lücke hat Gauss ausgefüllt.**) Er bezeichnet mit U eine Grösse, die in jedem Punkte der Oberfläche von S einen bestimmten, endlichen, nach der Stetigkeit sich ändernden Werth hat, und mit V die Potentialfunction einer über dieselbe Oberfläche auszubreitenden Masse M. Die Ausbreitung der Masse darf so geschehen, dass die Dichtigkeit ρ entweder überall positiv ist, oder dass sie in einzelnen Theilen der Fläche auch negativ sein kann. In dem zweiten Falle ist M die algebraische Summe der positiven und der negativen Massen. Gauss beweist dann, dass es allemal eine und nur eine Vertheilung der Masse gibt, bei welcher die Differenz $V - U$ in allen Punkten der Fläche einen constanten Werth hat, und dass die Gesammtmasse M so gewählt werden kann, dass dieser constante Werth $= 0$ ist. Bezeichnet man nun mit r den Abstand eines Punktes der Oberfläche von dem gegebenen Unstetigkeitspunkte im Innern von S, so hat $-\frac{1}{r}$ die Eigenschaften, welche

*) Green. An essay on the application etc. Art. 5. (Crelle, Bd. 44, S. 366, 367.) „To convince ourselves that there does exist a function as we have supposed U to be, conceive the surface to be a perfect conductor put in communication with the earth and a unit of positive electricity to be concentrated in the point p', then the total potential function arising from p' and from the electricity it will induce upon the surface, will be the required value of U."

**) Allgemeine Lehrsätze etc. Art. 31 bis 34.

Gauss seiner Function U zuschreibt. Man darf also den Satz von Gauss speciell so aussprechen: Auf der Oberfläche eines gegebenen Raumes S lassen sich immer in einer und nur in einer Weise entweder positive, oder theils positive, theils negative Massen so ausbreiten, dass die Function $V + \frac{1}{r}$ für jeden Punkt der Oberfläche den Werth Null hat. Diese Function befriedigt alle Bedingungen, welche Green für seine Function U aufstellt.

Dieser Beweis ist, wie man sieht, nicht rein analytisch. Seine Einkleidung ist der Theorie der Potentialfunction selbst entnommen. Einen rein analytischen Beweis hat später Dirichlet gegeben.*)

Der Satz von Dirichlet lautet:

Ist die Function v einwerthig, endlich und stetig variabel für jeden Punkt in der Oberfläche eines begrenzten Raumes S gegeben, so lässt sie sich immer und nur auf eine Weise für das Innere so bestimmen, dass sie auch da einwerthig, endlich und stetig variabel ist und der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

Genüge leistet.

Um diesen Satz zu beweisen, bilden wir das über den Raum S auszudehnende Integral

$$\Omega(u) = \int\int\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz. \tag{2}$$

Darin soll mit u eine Function bezeichnet werden, die in der Oberfläche des Raumes S überall mit der gegebenen Function v übereinstimmt, die aber im Innern des Raumes nur an die Bedingung geknüpft ist, dass sie selbst und ihre ersten Derivirten überall einwerthig, endlich und stetig variabel seien. Solcher Functionen u gibt es unendlich viele. Bezeichnet man eine von ihnen mit u_1, so lässt jede andere sich in die Form bringen

$$u = u_1 + h\, s,$$

wenn h eine passend zu wählende Constante bedeutet und s eine

*) In seinen Vorlesungen über die dem umgekehrten Quadrat der Entfernung proportional wirkenden Kräfte.

Function von x, y, z ist, die in der Oberfläche des Raumes S den Werth Null hat, im Innern aber an dieselbe Bedingung geknüpft ist wie die Functionen u.

Das Integral (2) hat unter dieser Voraussetzung einen endlichen, positiven Werth, der im allgemeinen ein anderer sein wird, wenn man von einer Function u zu einer andern übergeht. Nun gibt es zwar unendlich viele Functionen u, die den aufgestellten Bedingungen genügen, und folglich wird man ihnen entsprechend auch unendlich viele Integralwerthe erhalten. Die letzteren sind aber sämmtlich positiv und endlich. Demnach ist unter ihnen jedenfalls einer vorhanden, der kleiner als alle übrigen ist. Dieser kleinste Werth des Integrals $\Omega(u)$ kann nur in einem Falle gleich Null sein, nemlich wenn im Innern des Raumes S die ersten Derivirten der zugehörigen Function u überall gleich Null sind. Es müsste also diejenige Function u, welche das Minimum zu Stande bringt, im Innern von S constant sein, und da sie eine stetige Fortsetzung der in der Oberfläche gegebenen Function v ist, so müsste auch diese an jeder Stelle der Oberfläche denselben constanten Werth haben. Schliessen wir diesen Specialfall durch die Voraussetzung aus, dass v in der Oberfläche stetig variabel sein soll, so ist der Minimalwerth des Integrals um eine positive endliche Grösse von Null verschieden.

Diejenige Function u, für welche das Integral (2) seinen kleinsten Werth annimmt, soll für das Innere des Raumes S mit v bezeichnet werden. Dann lässt sich jede andere Function u in die Form bringen

$$u = v + h\,s.$$

Wir wollen nun die Constante h unendlich klein nehmen. Dann lautet die Bedingung des Minimum

$$\Omega(v) \leqq \Omega(v + h\,s). \tag{3}$$

Nun hat man aber

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} + h\,\frac{\partial s}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + h\,\frac{\partial s}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} + h\,\frac{\partial s}{\partial z}.$$

Folglich ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right\}$$
$$+2h\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial s}{\partial z}\right\}$$
$$+h^2\left\{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2\right\},$$

und danach findet sich

$$(4)\qquad \Omega(v+hs)$$
$$=\Omega(v)+2h\int\int\int\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial s}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$
$$+h^2\,\Omega(s).$$

Wird nun für $u=v+hs$ die Bedingung (3) befriedigt, so ist der Coefficient von $2h$ auf der rechten Seite der Gleichung (4) nothwendiger Weise gleich Null. Denn sonst könnte man das Vorzeichen von h so wählen, dass das Product

$$2h\int\int\int\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial s}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

negativ ausfiele, und den Zahlwerth von h so klein, dass das positive Glied $h^2\,\Omega(s)$ kleiner würde als der absolute Werth des vorhergehenden negativen Gliedes. Dann hätte man

$$\Omega(v+hs)<\Omega(v),$$

was mit (3) im Widerspruch steht. Also ist

$$(5)\qquad \int\int\int\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial s}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=0$$

die nothwendige und, wie man leicht sieht, auch die ausreichende Bedingung für das Zustandekommen des Minimum $\Omega(v)$. Die linke Seite der Gleichung (5) transformiren wir nach §. 20 und erhalten

$$(6)\qquad \int\int\int\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial s}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$
$$=-\int s\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma-\int\int\int s\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite ist über die Oberfläche des Raumes S zu erstrecken. Sein Werth ist Null, da nach der Voraussetzung in jedem Punkte der Oberfläche $s=0$ ist. Die Bedingung (5) für das Minimum geht also über in

$$(7) \qquad \int\int\int s\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz = 0.$$

Da aber im Innern des Raumes S die Function s gänzlich unbestimmt ist, so kann diese Gleichung nur dadurch erfüllt werden, dass im Innern überall

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

Nun existirt immer ein Minimum des Integrals $\Omega(u)$. Folglich muss es unter den unendlich vielen Functionen u, welche in der Oberfläche von S mit der dort gegebenen Function v zusammenfallen, eine geben, welche jenes Minimum zu Stande bringt, und das kann nicht anders geschehen als durch Befriedigung der Gleichung (8). Diese Function ist die für das Innere von S verlangte stetige Fortsetzung der in der Oberfläche gegebenen Function v.

Die Transformation (6), durch welche die Bedingung (5) in (8) übergeht, ist nach §. 20 nur dann zulässig, wenn die Functionen s und v und die ersten Derivirten von v im Innern des Raumes S überall endlich und stetig variabel sind. Diese Bedingung ist für s und v erfüllt. Denn wir haben von allen Functionen u und s vorausgesetzt, dass jede von ihnen mit ihren ersten Derivirten einwerthig, endlich und stetig variabel sei. Denken wir uns aber den Fall, dass die ersten Derivirten von v im Innern des Raumes S sich sprungweise änderten, wenn der Punkt (x, y, z) von der negativen auf die positive Seite einer gewissen Fläche übertritt, so würde zu dem Oberflächen-Integral auf der rechten Seite von (6) noch der Beitrag hinzutreten

$$(9) \qquad -\int s\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{+0}-\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{-0}\right\} d\sigma.$$

In diesem Beitrage ist $d\sigma$ ein Element der Unstetigkeitsfläche, p die Normale. Die Integration ist über die ganze Unstetigkeitsfläche zu erstrecken. Zur Erfüllung der Bedingung (5) würde dann die Gleichung (8) nicht genügen. Es müsste ausserdem das Integral (9) den Werth Null haben, und das ist bei der Unbestimmtheit von s nicht anders möglich, als wenn an jeder Stelle der angenommenen Unstetigkeitsfläche

$$(10) \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{+0}=\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{-0}.$$

Diese Gleichung sagt aber aus, dass, wenn $\Omega(v)$ ein Minimum ist, die ersten Derivirten von v im Innern des Raumes S nicht unstetig sind.

Es fragt sich noch, ob ausser der einen Function $u = v$, welche das Integral $\Omega(u)$ zu einem Minimum macht, noch eine andere $u = v + s$ dieselbe Eigenschaft besitzt. Unter s soll hier wieder eine Function verstanden werden, welche in der Oberfläche von S den Werth Null hat und im Innern derselben Bedingung genügt wie die Functionen u. Nun ist $\Omega(v + s)$ ein Minimum, wenn für eine Constante h, die unendlich nahe an 1 heranrückt, die Bedingung erfüllt ist:

(11) $$\Omega(v + s) \leqq \Omega(v + hs).$$

Wir haben nach den Gleichungen (4) und (5)

$$\Omega(v + hs) = \Omega(v) + h^2\,\Omega(s),$$

und wenn man hierin $h = 1$ setzt:

$$\Omega(v + s) = \Omega(v) + \Omega(s).$$

Dadurch geht die Bedingung (11) in folgende über

(12) $$\Omega(s) \leqq h^2\,\Omega(s)$$

Da man aber die Constante h^2, die unendlich nahe an 1 liegen soll, nicht bloss grösser, sondern auch kleiner als 1 nehmen darf, so kann der Bedingung (12) nur dadurch genügt werden, dass man setzt:

(13) $$\Omega(s) = 0.$$

Bei der eigenthümlichen Form des Integrals $\Omega(s)$ kann diese Gleichung nur dann zu Stande kommen, wenn im Innern des Raumes S überall

(14) $$\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial z} = 0,$$

d. h. $s = const.$ ist. Der constante Werth von s muss aber Null sein, weil in der Oberfläche $s = 0$ ist.

Von allen den Functionen u, welche die in der Oberfläche des Raumes S gegebene Function v ins Innere stetig fortsetzen, gibt es also eine und nur eine, die das Integral (2) zu einem Minimum macht. Diese Function und ihre ersten Derivirten sind im Innern von S überall endlich und stetig variabel, und sie selbst erfüllt die partielle Differentialgleichung (8).

Mit Hülfe dieses Satzes ist nun leicht zu beweisen, dass für jede Gestalt des Raumes S eine und nur eine Function U existirt, welche die von Green aufgestellten charakteristischen Eigenschaften besitzt. Wir setzen

$$U = U_1 + \frac{1}{r}, \tag{15}$$

wobei r den Abstand des Punktes (x, y, z) von dem inneren Unstetigkeitspunkte (x', y', z') der Function U bezeichnet. Dann hat man U_1 in der Oberfläche gleich $-\frac{1}{r}$ zu nehmen und diese Function ins Innere des Raumes S endlich und stetig variabel so fortzusetzen, dass

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = 0.$$

Das kann nach dem Satze von Dirichlet immer in einer und nur in einer Weise geschehen. Da nun $\frac{1}{r}$ der Gleichung von Laplace ebenfalls genügt, so ist die in (15) ausgedrückte Function U in der That die von Green verlangte. Sie ist Null in der Oberfläche von S, sie ist im Innern überall endlich und stetig variabel ausser im Punkte (x', y', z'), wo sie unendlich wird wie der reciproke Werth des Abstandes, und genügt im Innern von S der Gleichung von Laplace.*)

§. 35.

Eine Function V, die der Gleichung von Laplace genügt, hat weder Maximum noch Minimum.

Wir wollen noch zeigen, dass eine endliche und stetige Function V in keinem Theile des Raumes, wo sie die Gleichung von Laplace erfüllt, ein Maximum oder ein Minimum haben kann.

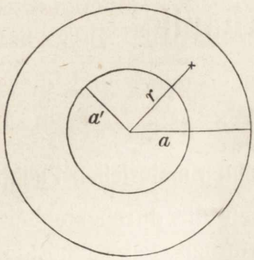
Die Function V und die Function $\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$ genügen beide der Gleichung von Laplace. Nach dem Satze von Green ist also

$$\int \left\{ \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} \right\} d\sigma = 0, \tag{1}$$

*) Man vergleiche die Abhandlung von Dirichlet: Sur un moyen général de vérifier l'expression du potentiel relatif à une masse quelconque, homogène ou hétérogène. (Crelle. Journal, Bd. 32. S. 80.)

wenn man das Integral über die Oberfläche eines Raumes erstreckt, in welchem V und $\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$ nebst ihren ersten Derivirten endlich und stetig variabel sind. Einen solchen Raum erhalten wir zwischen zwei concentrischen Kugelflächen von den Radien a und a', deren Centrum in dem Punkte liegt, von welchem aus r gezählt wird. Wir nehmen $a' < a$ und lassen schliesslich $\lim a' = 0$ werden. Die äussere Oberfläche (**Fig. 27**) gibt als Beitrag zu dem Integral (1)

Fig. 27.



$$\int \left\{ -\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) \frac{\partial V}{\partial r} - V \frac{1}{r^2} \right\} r^2 \, d\omega$$

für $r = a$, d. h.

$$-\int V_a \, d\omega.$$

Die innere Oberfläche liefert dagegen den Beitrag

$$\int \left\{ \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) \frac{\partial V}{\partial r} + V \frac{1}{r^2} \right\} r^2 \, d\omega$$

für $r = a'$, d. h.

$$\int \left\{ \left(a' - \frac{a'^2}{a}\right) \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{a'} + V_{a'} \right\} d\omega.$$

Lässt man a' in Null übergehen, so nimmt dieser Beitrag den Grenzwerth an

$$\int V_0 \, d\omega.$$

Folglich erhalten wir aus Gleichung (1)

$$\int (V_0 - V_a) \, d\omega = 0,$$

d. h. es kann $V_0 - V_a$ nicht in allen Punkten der Kugeloberfläche vom Radius a dasselbe Vorzeichen haben, und deshalb ist V_0 weder ein Maximum noch ein Minimum.

Dritter Abschnitt.

Hülfssätze aus der Mechanik.

---

§. 36.

Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft für einen materiellen Punkt.

Um nicht allein die Kräfte, sondern auch die durch sie hervorgebrachten Bewegungen untersuchen zu können, ist es nöthig, an einige Sätze der Dynamik zu erinnern.

Wir betrachten einen materiellen Punkt von der Masse m. Seine Coordinaten x, y, z sind Functionen der Zeit t, und die Aufgabe der Dynamik besteht darin, diese Functionen ausfindig zu machen, wenn zu jeder Zeit die bewegende Kraft K gegeben ist. Zur Lösung dieser Aufgabe sind Integrationen auszuführen. Den dabei auftretenden Integrations-Constanten hat man dann Specialwerthe beizulegen, so dass gewisse Nebenbedingungen des Problems erfüllt werden. Als solche Nebenbedingungen können z. B. gegeben sein die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit des bewegten materiellen Punktes, oder auch seine Anfangs- und seine Endlage.

Die bewegende Kraft, welche auf den materiellen Punkt wirkt, sei K. Ihre Componenten in den Richtungen der positiven Coordinatenaxen bezeichnen wir resp. mit X, Y, Z. Dann haben wir die Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z. \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen multipliciren wir auf beiden Seiten der Reihe nach mit $\frac{dx}{dt}dt$, $\frac{dy}{dt}dt$, $\frac{dz}{dt}dt$, verbinden die Resultate links und rechts durch Addition und integriren nach t. Dadurch ergibt sich

$$(2) \qquad \frac{1}{2} m \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right\}$$
$$= const. + \int \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) dt.$$

Wir bezeichnen mit s die Länge der Bahn, welche der materielle Punkt bis zum Ablauf der Zeit t durchlaufen hat, so dass $s = 0$ ist für $t = 0$. Dann haben wir $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, und die Gleichung (2) geht über in

$$(3) \qquad \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = const. + \int \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) dt.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung können wir auch s als Integrations-Variable einführen und unter dem Integralzeichen schreiben

$$\left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) ds.$$

Hier sind $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ die Cosinus der Winkel, welche das Bahnelement ds mit den positiven Coordinatenaxen einschliesst. Bezeichnet man nun ferner mit α, β, γ die Winkel, welche die Richtung von K mit den Richtungen der Componenten bildet, so findet sich

$$X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds}$$
$$= K \left(\frac{dx}{ds} \cos \alpha + \frac{dy}{ds} \cos \beta + \frac{dz}{ds} \cos \gamma \right)$$
$$= K \cos (K s).$$

Dabei ist unter $(K s)$ der Winkel zu verstehen, welchen die im Punkte (x, y, z) angelegte Tangente der Bahn mit der Richtung der bewegenden Kraft einschliesst.

Die Gleichung (3) lautet hiernach in anderer Form

$$(4) \qquad \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = const. + \int K \cos (K s)\, ds.$$

Wir bezeichnen die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ mit v und den Werth, den sie zur Zeit $t = 0$ hat, mit v_0. Nehmen wir die bestimmte Integration vor und setzen für die Zeit die Grenzen 0 und t, also für den Weg die Grenzen 0 und s fest, so ergibt sich

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\, m\, v^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_0^2 = \int_0^s K \cos{(K\, s)}\, ds.$$

In dieser Gleichung spricht sich der Satz aus, dass die in dem Zeitintervall von $t = 0$ bis t gewonnene lebendige Kraft gleich ist der während derselben Zeit verrichteten mechanischen Arbeit. Im allgemeinen ist die Arbeit nicht allein von der Anfangs- und Endlage des bewegten Punktes abhängig, sondern auch von der Bahn, die er durchläuft. Sie setzt sich ja aus allen den Producten zusammen, die man erhält, wenn jedes Bahnelement mit der in seine Richtung fallenden Componente der bewegenden Kraft multiplicirt wird. Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, dass die Arbeit für alle Bahnen, die aus einer gegebenen Anfangslage in eine gegebene Endlage überführen, dieselbe ist, dass sie nur von der Anfangs- und Endlage des bewegten Punktes abhängig ist. Dieser Fall tritt ein, wenn die Componenten X, Y, Z die resp. nach x, y, z genommenen partiellen Derivirten einer und derselben Function mV sind, welche direct nur von x, y, z abhängt, deren Ausdruck also die Zeit t nicht explicite enthält. In diesem Falle geht die Gleichung (3) über in

$$(6) \qquad \frac{1}{2}\, m\, v^2 = const. + mV,$$

und die Gleichung (5) geht über in

$$(7) \qquad \frac{1}{2}\, m\, v^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_0^2 = m(V - V_0).$$

Dabei ist V_0 der Werth, welchen die Function V annimmt, wenn man den Coordinaten x, y, z des bewegten Punktes ihre Anfangswerthe beilegt.

In den Gleichungen (6) und (7) spricht sich der Satz aus:

Wenn die Componenten X, Y, Z die resp. nach x, y, z genommenen Derivirten derselben Function mV sind, welche direct nur von x, y, z abhängt, so ist die während einer Bewegung gewonnene lebendige Kraft gleich der Differenz der Werthe, welche die Function mV in der Anfangs- und in der Endlage des bewegten Punktes annimmt.

Dieser Satz ist das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft.

§. 37.

Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft für ein freies System von materiellen Punkten. Die Gleichung: $T - P = const.$

Wir gehen über zu der Betrachtung eines Systems von bewegten materiellen Punkten. Ihre Massen seien $m_1, m_2, \ldots m_n$. Die Coordinaten des Punktes von der Masse m_i bezeichnen wir mit x_i, y_i, z_i und die Componenten der auf ihn wirkenden bewegenden Kraft mit X_i, Y_i, Z_i. Diese Componenten sollen von der gegenseitigen Lage der Punkte abhängig sein. Deshalb können wir jetzt nicht jeden Punkt einzeln betrachten, wir fassen sie gleichzeitig in ihrer Gesammtheit auf, wir untersuchen die Bewegung des Systems.

Das System soll frei sein, d. h. jeder Punkt soll der auf ihn wirkenden bewegenden Kraft ohne Hindernis Folge leisten. Dann gelten für jeden einzelnen Punkt die Gleichungen (1) des vorigen Paragraphen. Wir können demnach für den Punkt m_i die Gleichung (3) des vorigen Paragraphen ableiten, welche jetzt lautet:

$$\frac{1}{2} m_i \left(\frac{ds_i}{dt}\right)^2 = const. + \int \left(X_i \frac{dx_i}{dt} + Y_i \frac{dy_i}{dt} + Z_i \frac{dz_i}{dt}\right) dt,$$

oder, wenn man $\frac{ds_i}{dt} = v_i$ setzt:

$$\frac{1}{2} m_i v_i^2 = const. + \int \left(X_i \frac{dx_i}{dt} + Y_i \frac{dy_i}{dt} + Z_i \frac{dz_i}{dt}\right) dt.$$

Diese letzte Gleichung stellt n einzelne Gleichungen vor, die man erhält, wenn für i der Reihe nach die ganzen Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ gesetzt werden. Wir wollen diese n Gleichungen durch Addition verbinden. Dadurch ergibt sich

$$(1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = const. + \int dt \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \frac{dx_i}{dt} + Y_i \frac{dy_i}{dt} + Z_i \frac{dz_i}{dt}\right).$$

Hier ist wieder der Fall von besonderer Wichtigkeit, dass X_i, Y_i, Z_i die resp. nach x_i, y_i, z_i genommenen partiellen Derivirten einer und derselben Function P sind, welche direct nur von den Coordinaten der sämmtlichen bewegten Punkte abhängt, deren Ausdruck also die Zeit t nicht explicite enthält. Dann ist

$$dt \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \frac{dx_i}{dt} + Y_i \frac{dy_i}{dt} + Z_i \frac{dz_i}{dt}\right) = \frac{dP}{dt} dt$$

das vollständige Differential der Function P. Es gibt die Arbeit an, welche das System in dem auf die abgelaufene Zeit t folgenden Zeitelement dt verrichtet.

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = T,$$

so kann unter der eben gemachten Voraussetzung die Gleichung (1) geschrieben werden

$$(2) \qquad T - P = const.$$

Die Differenz der beiden Functionen T und P nennt man die mechanische Kraft des Systems. Die Function T heisst die virtuelle mechanische Kraft, P die potentielle mechanische Kraft.

Wir bezeichnen mit T_0 und P_0 die Werthe, welche die Functionen T und P zur Zeit $t = 0$ haben. Dann ergibt sich aus (2) unmittelbar

$$(3) \qquad T - T_0 = P - P_0.$$

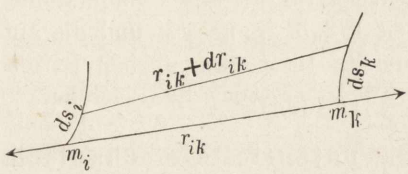
Wenn also die Bedingung für das Vorhandensein der Function P erfüllt ist, so berechnet sich der Zuwachs an lebendiger Kraft (virtueller mechanischer Kraft), welche das freie System von materiellen Punkten bei einer wirklich ausgeführten Bewegung erfährt, als die Differenz der Werthe, welche die Function P für die Anfangs- und die Endlage der Punkte des Systems besitzt. Diese Differenz ist aber unabhängig von den Wegen, auf welchen die Punkte aus ihrer Anfangslage in die Endlage übergeführt werden. Dieser Satz, welcher in Gleichung (3), oder auch in Gleichung (2) sich ausspricht, ist für das freie System von bewegten materiellen Punkten das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft.

§. 38.

Das Potential.

Wir gehen zu einem besonderen Falle über. Die Kräfte, von welchen die materiellen Punkte des freien Systems in Anspruch genommen werden, sollen gegenseitige Anziehungen oder Abstossungen sein, deren Grösse nur von den Massen der auf einander wirkenden Punkte und von ihrer Entfernung abhängt. Dann gibt es eine Function P, wie sie im vorigen Paragraphen eingeführt ist. Um dies zu beweisen, betrachten wir irgend welche zwei von den n Punkten und bezeichnen ihre Masse resp. mit m_i und m_k. Diese beiden Punkte sollen in der Richtung ihrer Verbindungslinie eine bewegende Kraft auf einander ausüben, die wir mit $f_{ik}(r_{ik})$ bezeichnen. Die Kraft ist Abstossung oder Anziehung, je nachdem der Werth dieser Function positiv oder negativ ist. In dem Zeitelement dt durchlaufe der Punkt m_i den Weg ds_i und der Punkt m_k den Weg ds_k (**Fig. 28**). Dabei verrichtet der Punkt m_i die mechanische Arbeit

Fig. 28.



$$-f_{ik}(r_{ik})\, ds_i \cos(r_{ik}, ds_i),$$

und der Punkt m_k verrichtet die Arbeit

$$f_{ik}(r_{ik})\, ds_k \cos(r_{ik}, ds_k).$$

Es findet sich aber leicht

$$\cos(r_{ik}, ds_i) = \frac{x_k - x_i}{r}\frac{dx_i}{ds_i} + \frac{y_k - y_i}{r}\frac{dy_i}{ds_i} + \frac{z_k - z_i}{r}\frac{dz_i}{ds_i}$$

$$= -\frac{1}{2\, r_{ik}}\frac{\partial(r_{ik}^2)}{\partial s_i} = -\frac{\partial r_{ik}}{\partial s_i},$$

und auf demselben Wege

$$\cos(r_{ik}, ds_k) = \frac{\partial r_{ik}}{\partial s_k}.$$

Die von beiden Punkten im Zeitelement dt verrichtete Arbeit ist demnach

$$= f_{ik}(r_{ik})\left\{\frac{\partial r_{ik}}{\partial s_i} ds_i + \frac{\partial r_{ik}}{\partial s_k} ds_k\right\}$$

$$= f_{ik}(r_{ik})\, dr_{ik}.$$

Bezeichnen wir nun mit $F_{ik}(r_{ik})$ eine Function von r_{ik}, deren Differentialquotient $f_{ik}(r_{ik})$ ist:

$$\frac{dF_{ik}(r_{ik})}{dr_{ik}} = f_{ik}(r_{ik}),$$

so ist die von $t = 0$ bis zur abgelaufenen Zeit t vermöge der Wechselwirkung zwischen den Massen m_i und m_k geleistete Arbeit:

$$\int_0^t f_{ik}(r_{ik}) \frac{dr_{ik}}{dt} dt = F_{ik}(r_{ik}) - [F_{ik}(r_{ik})]_{t=0}.$$

Die Gesammtarbeit aller Massen des ganzen Systems findet sich, indem man in dem letzten Ausdruck für $i\,k$ alle Combinationen zweiter Klasse aus den Elementen 1, 2, 3, ... n setzt und die entstehenden einzelnen Werthe summirt. Die Gesammtarbeit ist also

$$(1) \qquad \sum F_{ik}(r_{ik}) - \sum [F_{ik}(r_{ik})]_{t=0}.$$

Die Summe $\sum F_{ik}(r_{ik})$ ist die potentielle mechanische Kraft P. Wir nennen sie kürzer das Potential. Die Integrations-Constante soll so gewählt werden, dass $P = 0$ ist, wenn alle Punkte in unendlicher Entfernung liegen.

Das Potential ist also die Arbeit, welche verrichtet würde bei der Uebertragung der Punkte aus unendlicher Entfernung in ihre wirkliche Lage.

Das Potential ist unabhängig von den Wegen, auf welchen man diese Uebertragung vornehmen will. Ebenso ist aber die Gesammtarbeit (1) des Massensystems, die bei dem Uebergange aus einer Lage im endlichen Gebiete in eine andere solche Lage verrichtet wird, unabhängig von den Wegen, welche die einzelnen Punkte durchlaufen. Sie hängt allein von der Anfangs- und von der Endlage der Punkte des Systems ab. Man kann also, wenn es nur auf die Berechnung der verrichteten mechanischen Arbeit ankommt, alle Punkte aus ihrer Anfangslage in unendliche Entfernung rücken und hierauf in ihre Endlage übergehen lassen. Bei der ersten Bewegung erhält man als Arbeit den negativen Werth des Potentials für die Anfangslage, bei der zweiten das Potential selbst für die Endlage. Dies ist die Bedeutung des Ausdrucks (1).

Bei Anziehung im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung ist das Potential

$$(2) \qquad P = \sum \frac{m_i\, m_k}{r_{ik}}.$$

Hier ist wieder für $i\,k$ jede Combination zweiter Klasse aus den Elementen 1, 2, 3, ... n zu nehmen, und die entstehenden einzelnen Ausdrücke sind zu summiren.

Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, dass jeder Punkt des Systems mit allen anderen in Wechselwirkung stehe. Das Potential, welches man dabei erhält, nennt man das Potential des Massensystems auf sich selbst.

Es ist aber auch der Fall zu betrachten, dass jeder Punkt des einen Massensystems in Wechselwirkung steht mit jedem Punkte eines zweiten Systems.

Wir wollen die Massen des einen Systems mit $m_1, m_2, \ldots m_n$, die des anderen Systems mit $M_1, M_2, \ldots M_\nu$ bezeichnen. Wenn die Wechselwirkung in Anziehung oder Abstossung besteht, deren Grösse eine Function der Entfernung ist, so erhalten wir für die geleistete Arbeit wieder den Ausdruck (1). Die Entfernung r_{ik} bezieht sich aber jetzt auf einen Punkt m_i des einen Systems und einen Punkt M_k des anderen. Es ist also jetzt

$$r_{ik}^2 = (\xi_i - x_k)^2 + (\eta_i - y_k)^2 + (\zeta_i - z_k)^2.$$

Die Summirung ist so zu verstehen, dass je ein Punkt des ersten Systems $(m_1, m_2, \ldots m_n)$ mit je einem Punkte des andern $(M_1, M_2, \ldots M_\nu)$ zusammengestellt, für jede Zusammenstellung die Function $F_{ik}(r_{ik})$ gebildet und alle entstehenden Functionen summirt werden. In dem Integral

$$F_{ik}(r_{ik}) = \int f_{ik}(r_{ik})\, dr_{ik}$$

ist die Integrationsconstante so zu wählen, dass $F_{ik}(r_{ik}) = 0$ wird für $r_{ik} = \infty$. Dann ist

(3) $$P = \sum F_{ik}(r_{ik})$$

das Potential des einen Massensystems auf das andere.

Bei Anziehung im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung hat man jetzt das Potential

(4) $$P = \sum_{k=1}^{\nu} M_k \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_{ik}}.$$

Bei Abstossung nach demselben Gesetze ist in (2) und (4) auf der rechten Seite negatives Vorzeichen zu setzen.

Die Potentialfunction einer anziehenden (oder abstossenden) Masse auf einen Punkt (x, y, z) ist das Potential dieser Masse auf die in dem Punkte (x, y, z) concentrirte Masseneinheit.

§. 39.

Das Princip des Lagrange für ein freies System. Die Gleichung:

$$\delta \int_0^t (T + P)\, dt = 0.$$

Das Princip des Lagrange ist für ein freies System in der Gleichung ausgesprochen:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \delta x_i + \left(Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) \delta y_i + \left(Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \delta z_i \right\} = 0.$$

Darin sind die $3n$ Variationen der Coordinaten von einander unabhängig. Man hat also zur Erfüllung der Gleichung (1) für sich gleich Null zu setzen, was mit jeder einzelnen Variation multiplicirt ist. Auf diese Weise erhält man für die n Punkte des Systems die $3n$ Differentialgleichungen der Bewegung.

Wenn die auf die Punkte einwirkenden Kräfte so beschaffen sind, dass ein Potential vorhanden ist, so lässt die Gleichung (1) sich schreiben:

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \delta x_i + \left(\frac{\partial P}{\partial y_i} - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) \delta y_i + \left(\frac{\partial P}{\partial z_i} - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \delta z_i \right\} = 0.$$

Dafür gibt es aber einen kürzeren Ausdruck, nemlich

$$(3) \quad \delta \int_0^t (T + P)\, dt = 0.$$

Diese Gleichung ist so zu verstehen. Aus einer gegebenen Anfangslage (für $t = 0$) kann man sich die Punkte des Systems in eine gegebene Endlage (zur Zeit t) auf unendlich vielen verschiedenen Wegen übergeführt denken. Für jeden Uebergang auf bestimmten Wegen hat das Integral

$$(4) \quad \int_0^t (T + P)\, dt$$

einen bestimmten Werth, der aber sich ändert, sobald die Wege der einzelnen Punkte des Systems geändert werden. Vergleicht man nun zwei Uebergänge mit einander, bei denen die Wege, die jeder einzelne Punkt durchläuft, nur unendlich wenig von einander abweichen, so sind auch die Werthe des Integrals (4) für den einen und für den anderen Uebergang nur unendlich wenig von einander verschieden. Die Aenderung, welche dem Integralwerth für den ersten Uebergang zu ertheilen ist, damit der Integralwerth für den zweiten Uebergang herauskomme, wird die Variation des Integrals (4) genannt.

Die Gleichung (3) sagt aus, dass von allen denkbaren Uebergängen aus der gegebenen Anfangslage in die gegebene Endlage in Wirklichkeit derjenige zu Stande kommt, für welchen die Variation des Integrals (4) gleich Null ist.

Um zu beweisen, dass dieser Satz nichts anderes ist als das Princip des Lagrange, führen wir die Variation wirklich aus.

Es ist zunächst

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left\{ \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right\},$$

also findet sich

$$\delta T = \sum m_i \left\{ \frac{dx_i}{dt} \frac{d\,\delta x_i}{dt} + \frac{dy_i}{dt} \frac{d\,\delta y_i}{dt} + \frac{dz_i}{dt} \frac{d\,\delta z_i}{dt} \right\}$$

und in Folge davon

$$\delta \int_0^t T\,dt = \int_0^t \sum m_i \left\{ \frac{dx_i}{dt} \frac{d\,\delta x_i}{dt} + \frac{dy_i}{dt} \frac{d\,\delta y_i}{dt} + \frac{dz_i}{dt} \frac{d\,\delta z_i}{dt} \right\} dt$$

$$= \sum m_i \int_0^t \left\{ \frac{dx_i}{dt} \frac{d\,\delta x_i}{dt} + \frac{dy_i}{dt} \frac{d\,\delta y_i}{dt} + \frac{dz_i}{dt} \frac{d\,\delta z_i}{dt} \right\} dt.$$

Den Ausdruck

$$\int_0^t \frac{dx_i}{dt} \frac{d\,\delta x_i}{dt}\,dt$$

wollen wir durch Integration nach Theilen umformen. Dadurch ergibt sich

$$\int_0^t \frac{dx_i}{dt} \frac{d\,\delta x_i}{dt}\,dt = \left(\frac{dx_i}{dt}\,\delta x_i\right)_t - \left(\frac{dx_i}{dt}\,\delta x_i\right)_{t=0} - \int_0^t \delta x_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}\,dt.$$

Für die Anfangslage ($t = 0$) und für die Endlage (nach Ablauf der Zeit t) ist aber $\delta x_i = 0$, also fällt der vom Integralzeichen freie Bestandtheil auf der rechten Seite der letzten Gleichung weg, und wir erhalten

$$\int_0^t \frac{dx_i}{dt}\frac{d\,\delta x_i}{dt}\,dt = -\int_0^t \delta x_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}\,dt.$$

Auf demselben Wege findet sich

$$\int_0^t \frac{dy_i}{dt}\frac{d\,\delta y_i}{dt}\,dt = -\int_0^t \delta y_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}\,dt,$$

$$\int_0^t \frac{dz_i}{dt}\frac{d\,\delta z_i}{dt}\,dt = -\int_0^t \delta z_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}\,dt.$$

Folglich geht jetzt die Gleichung (3) in folgende über:

$$(5)\qquad 0 = \int_0^t dt\left[\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial P}{\partial x_i} - m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)\delta x_i + \sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial P}{\partial y_i} - m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right)\delta y_i + \sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial P}{\partial z_i} - m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)\delta z_i\right].$$

Zu ihrer Erfüllung ist nothwendig und hinreichend, dass für jeden Zeitmoment die Function unter dem Integralzeichen gleich Null sei, also:

$$(6)\sum_{i=1}^n\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial x_i} - m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)\delta x_i + \left(\frac{\partial P}{\partial y_i} - m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right)\delta y_i + \left(\frac{\partial P}{\partial z_i} - m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)\delta z_i\right\} = 0.$$

Dies ist aber die Gleichung (2). Folglich ist bewiesen, dass das Princip des Lagrange bei dem Vorhandensein eines Potentials durch die Gleichung (3) ausgedrückt wird.

In unserm Falle ist das System frei. Die $3\,n$ Variationen der Coordinaten sind also von einander unabhängig. Demnach zerfällt die Gleichung (6) in $3\,n$ einzelne Gleichungen, indem — wie schon oben bemerkt — für sich gleich Null zu setzen ist, was mit jeder einzelnen von den $3\,n$ Variationen multiplicirt vorkommt. Also findet sich

$$
(7) \qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x_i} - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= 0, \\
\frac{\partial P}{\partial y_i} - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= 0, \\
\frac{\partial P}{\partial z_i} - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= 0.
\end{aligned}
$$

Hierin ist i der Reihe nach $= 1, 2, 3, \ldots n$ zu setzen. Dann sind die Gleichungen (7) nichts anderes als die Differentialgleichungen der Bewegung, wie sie aus dem Princip des Lagrange hervorgehen.

§. 40.

Das nicht freie System.

Das System der n Punkte ist nicht frei, wenn zwischen den Punkten oder zwischen einigen von ihnen, solche Verbindungen vorhanden sind, vermöge deren die einzelnen Punkte zu anderen Bewegungen gezwungen werden, als sie bloss unter dem Einfluss der auf sie wirkenden Kräfte ausgeführt hätten. Dieser Fall soll jetzt betrachtet werden.

Nehmen wir den Punkt (x_i, y_i, z_i) von der Masse m_i. In Folge der vorhandenen Verbindungen vollführt er eine andere Bewegung, als wenn er frei und nur dem Antriebe der Kraftcomponenten X_i, Y_i, Z_i ausgesetzt wäre. Es fragt sich dann, welche Kräfte X'_i, Y'_i, Z'_i man noch hinzufügen müsse, damit sie mit jenen Componenten zusammen den völlig frei gedachten Punkt gerade in die Bewegung versetzen, die wirklich zu Stande kommt. Kennt man diese Zusatzkräfte X'_i, Y'_i, Z'_i für jeden Punkt, so kann man die Bewegung des Systems aus einem doppelten Gesichtspunkte betrachten. Einmal kommt sie wirklich zu Stande unter Einwirkung der gegebenen bewegenden Kräfte und der vorhandenen Verbindungen. Das andere mal würde sie in genau derselben Weise zu Stande kommen, wenn die Punkte des völlig frei gemachten Systems von den gegebenen Kräften und von den eben betrachteten Zusatzkräften getrieben würden. Da nun die Wirkung in beiden Fällen dieselbe ist, und nur die Wirkung in Betracht kommt, so hat man das Recht, die eine Ursache durch die andere zu ersetzen. D. h. man darf die Bewegung so auffassen, als ob die Punkte des Systems frei wären und ausser den gegebenen Kräften noch die Zusatzkräfte in Wirksamkeit träten. Die gegebenen Kräfte sollen wieder so beschaffen sein, dass ein Potential vorhanden ist. Dann spricht sich das Princip des Lagrange in der Gleichung aus:

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial x_i} - m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} + X'_i\right)\delta x_i + \left(\frac{\partial P}{\partial y_i} - m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} + Y'_i\right)\delta y_i + \left(\frac{\partial P}{\partial z_i} - m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} + Z'_i\right)\delta z_i\right\} = 0.$$

Es kömmt nun darauf an, für jeden Punkt des Systems die Zusatzkräfte X'_i, Y'_i, Z'_i wirklich ausfindig zu machen. Zu dem Ende kann man die Sache auch so auffassen. Es ist erlaubt, für jeden Punkt des unfreien Systems solche Kräfte hinzuzufügen, die sich gegenseitig im Gleichgewicht halten. Für den Punkt (x_i, y_i, z_i) fügen wir parallel den Coordinatenaxen die Kräfte

$$X'_i,\quad Y'_i,\quad Z'_i$$

und die Kräfte

$$-X'_i,\quad -Y'_i,\quad -Z'_i$$

hinzu. Die letztgenannten sollen so gewählt werden, dass ihre Wirkung und die Wirkung der vorhandenen Verbindungen sich gegenseitig vernichten. Dadurch wird eben das System zu einem freien, und zu den gegebenen Kräften treten die Zusatzkräfte X'_i, Y'_i, Z'_i hinzu. Diese sind aber völlig bestimmt, sobald man die Kräfte $-X'_i, -Y'_i, -Z'_i$ kennt, durch welche die Wirkung der Verbindungen aufgehoben wird.

Fig. 29.

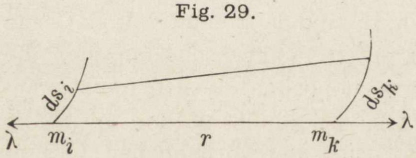
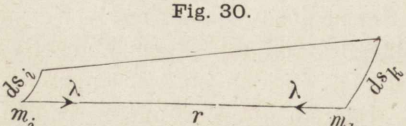


Fig. 30.



Es ist also vor allem nothwendig, zu untersuchen, wie die Kräfte beschaffen sind, welche durch die Verbindungen aufgehoben werden und ihrerseits die Wirkungen der Verbindungen aufheben. Wir betrachten deshalb die verschiedenen Arten der Verbindungen.

Erstens. Zwei Punkte (x_i, y_i, z_i) und (x_k, y_k, z_k) seien durch eine starre Verbindungslinie gezwungen, in constanter Entfernung von einander zu bleiben (**Fig. 29** u. **30**). Die Bedingung, welche dadurch eingeführt wird, lässt sich durch die Gleichung aussprechen:

(2) $$u \equiv r - const. = 0,$$

wenn

$$r = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2}$$

gesetzt wird. Durch diese Verbindung können nur solche Kräfte aufgehoben werden, welche die Entfernung der beiden Punkte zu vermehren oder zu vermindern streben, d. h. zwei gleich grosse Kräfte, deren Richtungen einander entgegengesetzt in die Verbindungslinie der beiden Punkte fallen, und von denen die eine auf den Punkt m_i, die andere auf den Punkt m_k wirkt. Folglich sind auch X_i', Y_i', Z_i' die Componenten einer Kraft λ, welche in der Richtung $m_i m_k$ oder in der Richtung $m_k m_i$ auf den Punkt m_i wirkt. Und es sind X_k', Y_k', Z_k' die Componenten einer ebenso grossen Kraft λ, die der vorigen entgegengesetzt auf den Punkt m_k wirkt. Es ist also

(3) $$\begin{aligned} X_i' &= \lambda \cdot \frac{x_i - x_k}{r} = \lambda \frac{\partial r}{\partial x_i}, \\ Y_i' &= \lambda \cdot \frac{y_i - y_k}{r} = \lambda \frac{\partial r}{\partial y_i}, \\ Z_i' &= \lambda \cdot \frac{z_i - z_k}{r} = \lambda \frac{\partial r}{\partial z_i} \\ X_k' &= \lambda \cdot \frac{x_k - x_i}{r} = \lambda \frac{\partial r}{\partial x_k}, \\ Y_k' &= \lambda \cdot \frac{y_k - y_i}{r} = \lambda \frac{\partial r}{\partial y_k}, \\ Z_k' &= \lambda \cdot \frac{z_k - z_i}{r} = \lambda \frac{\partial r}{\partial z_k}. \end{aligned}$$

Das virtuelle Moment der Zusatzkräfte ist demnach

(4) $$\begin{aligned} &\lambda \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial r}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial r}{\partial z_i} \delta z_i \right) \\ &+ \lambda \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial r}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial r}{\partial z_k} \delta z_k \right), \end{aligned}$$

d. h.

$$\lambda\, \delta r \quad \text{oder auch} \quad \lambda\, \delta u.$$

Die Grösse der Kraft λ bleibt vorläufig unbestimmt. Ihr Vorzeichen kann sowohl positiv als auch negativ sein. Es ist positiv für

Fig. 29, negativ für **Fig. 30**. Man hat aber zu bemerken, dass $\lambda\,\delta u = 0$ ist in Folge der Bedingungsgleichung (2).

Zweitens. Die beiden Punkte (x_i, y_i, z_i) und (x_k, y_k, z_k) seien durch einen biegsamen, aber unausdehnsamen Faden verbunden. Sie werden dadurch an eine Bedingung geknüpft, deren analytischer Ausdruck ist

$$u \geqq 0, \tag{5}$$

wenn $u = const. - r$ gesetzt wird. In diesem Falle bildet die Verbindung gar kein Hindernis, so lange $u > 0$ ist, und es ist ebenso lange die Zusatzkraft $\lambda = 0$. Wenn aber $u = 0$ ist, so hebt die Verbindung zwei gleich grosse Abstossungskräfte auf, deren Richtungen einander entgegengesetzt in die Verbindungslinie der beiden Punkte fallen, und von denen die eine auf den Punkt m_i, die andere auf den Punkt m_k wirkt. Bezeichnet man also mit λ die absolute Grösse der beiden Zusatzkräfte, welche im Punkte m_i und im Punkte m_k anzubringen sind, so hat man (**Fig. 30**) für die Componenten die Gleichungen

$$\begin{aligned}
X'_i &= \lambda \cdot \frac{x_k - x_i}{r} = -\lambda \frac{\partial r}{\partial x_i}, \\
Y'_i &= \lambda \cdot \frac{y_k - y_i}{r} = -\lambda \frac{\partial r}{\partial y_i}, \\
Z'_i &= \lambda \cdot \frac{z_k - z_i}{r} = -\lambda \frac{\partial r}{\partial z_i}; \\
X'_k &= \lambda \cdot \frac{x_i - x_k}{r} = -\lambda \frac{\partial r}{\partial x_k}, \\
Y'_k &= \lambda \cdot \frac{y_i - y_k}{r} = -\lambda \frac{\partial r}{\partial y_k}, \\
Z'_k &= \lambda \cdot \frac{z_i - z_k}{r} = -\lambda \frac{\partial r}{\partial z_k}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Das virtuelle Moment dieser Zusatzkräfte ist

$$-\lambda\,\delta r = \lambda\,\delta u. \tag{7}$$

Dieses Moment ist gleich Null für $u > 0$, weil dann $\lambda = 0$ ist. Es ist gleich Null oder positiv, wenn $u = 0$ ist. Denn dann ist $\delta u \geqq 0$ vermöge der Bedingung (5). Der Werth der absoluten Grösse λ bleibt für $u = 0$ vorläufig unbestimmt.

Drittens. Die beiden Punkte (x_i, y_i, z_i) und (x_k, y_k, z_k) seien so mit einander verbunden, dass ihr Abstand von einer gegebenen

Grösse an beliebig vermehrt, aber unter diese Grösse herab nicht vermindert werden kann. Diese Bedingung lässt sich durch (5) ausdrücken, wenn

$$u = r - const.$$

gesetzt wird. Die Verbindung bildet kein Hindernis, so lange $u > 0$, und ebenso lange ist demnach die Zusatzkraft $\lambda = 0$. Wenn aber $u = 0$ ist, so hebt die Verbindung zwei gleich grosse Anziehungskräfte auf, deren Richtungen einander entgegengesetzt in die Verbindungslinie der beiden Punkte fallen, und von denen die eine auf den Punkt m_i, die andere auf den Punkt m_k wirkt. Bezeichnet man wieder mit λ die absolute Grösse der beiden Zusatzkräfte, welche im Punkte m_i und im Punkte m_k anzubringen sind, so gelten (**Fig. 29**) für die Componenten die Gleichungen (3). Das virtuelle Moment dieser Zusatzkräfte ist demnach

$$\lambda\, \delta r = \lambda\, \delta u. \tag{8}$$

Es ist gleich Null für $u > 0$, weil dann $\lambda = 0$. Es ist gleich Null oder positiv, wenn $u = 0$ ist. Denn dann ist $\delta u \geqq 0$ vermöge der Bedingung (5). Der Werth der absoluten Grösse λ bleibt für $u = 0$ wieder vorläufig unbestimmt.

Viertens. Der Punkt (x_i, y_i, z_i) sei gezwungen, in einer Fläche zu bleiben, welche durch die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0 \tag{9}$$

charakterisirt wird. Die Fläche scheidet zwei Räume von einander. Für jeden Punkt (x, y, z) in dem einen Raume ist $F(x, y, z) > 0$, für jeden Punkt in dem anderen Raume ist $F(x, y, z) < 0$. Für irgend einen Punkt (x, y, z) in der Fläche selbst unterscheiden wir die positive und die negative Normale. Die positive Normale geht von dem Punkte aus in den Raum, für welchen $F(x, y, z)$ positiv ist. Sie schliesst mit den positiven Richtungen der Coordinatenaxen Winkel ein, deren Cosinus die Werthe haben

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} : \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} : \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

Die Bedingung, an welche die Bewegung des Punktes (x_i, y_i, z_i) geknüpft ist, lässt sich durch die Gleichung ausdrücken:

(10) $$u = 0,$$

wenn $u = F(x_i, y_i, z_i)$ gesetzt wird. Das Hindernis, welches dadurch der freien Bewegung des Punktes entgegengesetzt wird, kann nur eine Kraft aufheben, deren Richtung stets in die negative oder in die positive Normale der Fläche fällt. Also wird auch die Zusatzkraft μ, welche im Punkte (x_i, y_i, z_i) anzubringen ist, die Richtung der positiven oder der negativen Normale haben. Setzen wir zur Abkürzung

(11) $$\mu : \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z_i}\right)^2} = \lambda,$$

so hat jene Zusatzkraft die Componenten

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \lambda \frac{\partial u}{\partial y_i}, \quad \lambda \frac{\partial u}{\partial z_i},$$

und ihr virtuelles Moment ist

(12) $$\lambda \frac{\partial u}{\partial x_i} \delta x_i + \lambda \frac{\partial u}{\partial y_i} \delta y_i + \lambda \frac{\partial u}{\partial z_i} \delta z_i = \lambda \delta u.$$

Das Vorzeichen von λ ist positiv oder negativ, je nachdem die Zusatzkraft in die positive oder in die negative Normale fällt. Der Werth von λ bleibt vorläufig unbestimmt. Aber das virtuelle Moment $\lambda \delta u$ ist gleich Null, weil $\delta u = 0$ vermöge der Gleichung (10).

Fünftens. Der Punkt (x_i, y_i, z_i) soll sich frei bewegen können in dem Raume, für welchen $F(x, y, z) > 0$ ist, und auf der Fläche (9). Er werde aber verhindert, durch diese Fläche hindurch in den Raum überzutreten, für welchen $F(x, y, z) < 0$. Diese Bedingung lässt sich so aussprechen:

(13) $$u \geqq 0,$$

wenn $u = F(x_i, y_i, z_i)$ gesetzt wird. Hier ist die Zusatzkraft μ, welche dieselbe Wirkung ausübt wie das Hindernis, gleich Null, so lange $u > 0$. Sie ist positiv, wenn $u = 0$. Ihr virtuelles Moment ist

(14) $$\lambda \delta u,$$

wobei λ wieder durch die Gleichung (11) definirt wird. Dieses Moment ist $= 0$, so lange $u > 0$, weil dann $\lambda = 0$ ist. Es ist Null oder positiv für $u = 0$. Denn dann ist λ positiv und $\delta u \geqq 0$ vermöge der Bedingung (13).

Fassen wir die gewonnenen Resultate zusammen. Die Bedingungen, welche den Punkten des unfreien Systems durch die vorhandenen Verbindungen auferlegt werden, lassen sich analytisch ausdrücken durch Gleichungen oder Ungleichungen von der Form

$$u_1 \geqq 0, \quad u_2 \geqq 0, \ldots$$

Die Functionen $u_1, u_2, \ldots$ sind abhängig von den Coordinaten der Punkte des Systems oder von einigen derselben. Das Princip des Lagrange ist jetzt in der Gleichung enthalten

$$\int_0^t dt \left\{ \delta\,(T + P) + \sum \lambda\, \delta u \right\} = 0. \tag{15}$$

Dafür kann man auch schreiben

$$\delta \int_0^t (T + P)\, dt = - \sum \int_0^t \lambda\, \delta u\, dt. \tag{16}$$

Die durch das Zeichen $\sum$ vorgeschriebene Summirung bezieht sich auf sämmtliche Functionen $u_1, u_2, \ldots$, die in den Bedingungen des Systems vorkommen. Die Variationen $\delta u_1, \delta u_2, \ldots$ sind der Reihe nach mit den vorläufig noch unbestimmten Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ zu multipliciren. Die rechte Seite der Gleichung (16) ist entweder Null oder negativ, weil jedes einzelne $\lambda\, \delta u$ gleich Null oder positiv ist.

§. 41.

Fortsetzung: Bestimmung der Grössen λ.

Es handelt sich nun noch darum, die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ zu bestimmen. Ihrer Bedeutung nach sind diese Grössen entweder gleich oder proportional den Zusatzkräften, welche man einzuführen hat, damit das System als völlig frei betrachtet werden könne. Nach Einführung der Grössen λ sind demnach die Variationen der $3\,n$ Coordinaten $x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n$ wieder von einander unabhängig. Man hat also in Gleichung (15) des vorigen Paragraphen für jedes δu zu schreiben

$$\begin{aligned} \delta u = & \frac{\partial u}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial u}{\partial z_1} \delta z_1 \\ & + \frac{\partial u}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial u}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial u}{\partial z_2} \delta z_2 \\ & + \cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{\partial u}{\partial x_n} \delta x_n + \frac{\partial u}{\partial y_n} \delta y_n + \frac{\partial u}{\partial z_n} \delta z_n. \end{aligned}$$

Man hat ferner, wie in §. 39, das Integral

$$\int_0^t \delta T\,dt$$

zu transformiren. Nachher findet sich unter dem Integralzeichen, wenn alles zusammengefasst wird, eine Summe von $3n$ Gliedern, welche der Reihe nach die Variationen $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \ldots \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n$ als Factoren enthalten. Zur Erfüllung der Gleichung ist dann nothwendig und hinreichend, dass für sich besonders gleich Null gesetzt werde, was mit jeder einzelnen Variation multiplicirt ist. Dadurch erhält man die $3n$ Differentialgleichungen der Bewegung, welche jetzt lauten

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x_i} - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \sum \lambda \frac{\partial u}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial P}{\partial y_i} - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \sum \lambda \frac{\partial u}{\partial y_i} &= 0, \\ \frac{\partial P}{\partial z_i} - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} + \sum \lambda \frac{\partial u}{\partial z_i} &= 0. \end{aligned}$$

Als unbekannt sind in diesen Gleichungen anzusehen die $3n$ Coordinaten, insofern ihre Abhängigkeit von t gesucht wird, ausserdem aber ebenso viele Grössen λ, als Bedingungen in der Form $u \geqq 0$ gegeben sind. Die Gleichungen (1) und die analytischen Ausdrücke der Bedingungen sind also an Zahl ebenso gross wie die Anzahl der Unbekannten. So lange eine Ungleichung von der Form $u > 0$ erfüllt ist, hat man das zugehörige $\lambda = 0$ zu setzen. Erst wenn die Coordinaten aufhören, die Ungleichung zu erfüllen, tritt die Gleichung $u = 0$ in Kraft, und das zugehörige λ hat dann einen unbekannten Werth. Umgekehrt bleibt, wenn die Bedingung in der doppelten Form $u \geqq 0$ auftritt, die Gleichung $u = 0$ allein nur so lange bestehen, als das zugehörige λ von Null verschieden ist, und von dem Augenblicke an, in welchem $\lambda = 0$ wird, erhält neben der Gleichung $u = 0$ auch die Ungleichung $u > 0$ ihre Gültigkeit. Man hat also immer ebenso viele Gleichungen als Unbekannte, und daraus geht hervor, dass die Grössen λ vermöge der vorhandenen Gleichungen bestimmte Werthe besitzen. Hat man diese ermittelt und in die Gleichungen (1) eingesetzt, so handelt es sich nur noch um die Integration von $3n$ simultanen Differentialgleichungen, in welchen die Coefficienten sämmtlich bekannt sind.

Um die Werthe der von Null verschiedenen Grössen λ zu ermitteln, hat man in den Gleichungen von der Form $u = 0$ zweimal hinter einander nach t zu differentiiren. Aus den so gewonnenen neuen Gleichungen, deren Zahl wieder gleich der Zahl der unbekannten λ ist, werden mit Hülfe der Gleichungen (1) die nach t genommenen zweiten Differentialquotienten der Coordinaten eliminirt. Dadurch hat man die Gleichungen erlangt, aus welchen die Grössen λ sich berechnen lassen.

Diese Methode rührt von Lagrange her.

§. 42.

Fortsetzung: Andere Methode.

Die Berücksichtigung der Bedingungen des Systems lässt sich auch noch in anderer Weise bewerkstelligen. Es seien diese Bedingungen in $3n - k$ Gleichungen ausgesprochen:

$$(1) \qquad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots \quad u_{3n-k} = 0.$$

Die Grössen $u_1, u_2, \ldots u_{3n-k}$ sind gegebene Functionen der $3n$ Coordinaten. Mit Hülfe der Gleichungen (1) kann man $3n - k$ von den Coordinaten als Functionen der übrigen ausdrücken, und es werden dann, wenn man diese Abhängigkeit beachtet, die Gleichungen (1) identisch erfüllt. Man kann aber auch, — und das ist noch allgemeiner — k neue Variable $q_1, q_2, \ldots q_k$ einführen und jede der $3n$ Coordinaten $x_1, y_1, z_1 \ldots x_n, y_n, z_n$ als Function dieser neuen Variabeln so ausdrücken, dass die Gleichungen (1) identisch erfüllt sind. Geht man dann darauf aus, die Grössen $q_1, q_2, \ldots q_k$ nach dem Princip des Lagrange als Functionen von t zu bestimmen, so ist dieses Problem von Nebenbedingungen frei.

Um den eben ausgesprochenen Grundgedanken zu verwirklichen, hat man zunächst in die Functionen T und P die neuen Variabeln $q_1, q_2, \ldots q_k$ einzuführen. Es ist

$$(2) \qquad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left\{ \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right\}.$$

Man hat aber

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
\frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k} q_k', \\
\frac{dy_i}{dt} &= \frac{\partial y_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} q_k', \\
\frac{dz_i}{dt} &= \frac{\partial z_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} q_k',
\end{aligned}
$$

wenn zur Abkürzung q' für $\frac{dq}{dt}$ gesetzt wird. In den Gleichungen (3) sind $\frac{\partial x_i}{\partial q_1}, \frac{\partial x_i}{\partial q_2}, \dots$ bekannte Functionen von $q_1, q_2, \dots q_k$. Führt man also in die Gleichung (2) für $\frac{dx_i}{dt}, \frac{dy_i}{dt}, \frac{dz_i}{dt}$ die Ausdrücke ein, welche die rechten Seiten von (3) angeben, so geht dadurch T in eine homogene Function zweiten Grades von den Grössen $q_1', q_2', \dots q_k'$ über, und die auftretenden Coefficienten sind Functionen von $q_1, q_2, \dots q_k$.

Das Potential P ist eine Function von $q_1, q_2, \dots q_k$.

In unserm Problem wird die Anfangs- und die Endlage des Systems als bekannt vorausgesetzt. Es sind also die Anfangs- und die Endwerthe von $q_1, q_2, \dots q_k$ bekannt.

Gehen wir nun daran, das Princip des Lagrange in Anwendung zu bringen, so ist die Variation

$$\delta \int_0^t (T + P)\, dt$$

herzustellen. Es findet sich

$$\delta \int_0^t (T + P)\, dt$$

$$= \int_0^t \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^k \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i' + \sum_{i=1}^k \frac{\partial P_i}{\partial q_i} \delta q_i \right\} dt.$$

Der Bestandtheil

$$\int_0^t \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i'\, dt$$

ist zu transformiren. Wir erhalten

$$\int_0^t \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i' \, dt = \int_0^t \frac{\partial T}{\partial q_i'} \frac{d\, \delta q_i}{dt} \, dt$$

$$= \left[\frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i\right]_t - \left[\frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i\right]_{t=0}$$

$$- \int_0^t \delta q_i \frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)}{dt} \, dt.$$

Der vom Integralzeichen freie Theil auf der rechten Seite dieser Gleichung fällt weg, weil für die Anfangs- und die Endlage des Systems $\delta q_i = 0$ ist. Also erhalten wir

$$\delta \int_0^t (T + P) \, dt \tag{4}$$

$$= \int_0^t \left\{ \sum_{i=1}^k \delta q_i \left(- \frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i} \right) \right\} dt.$$

Nach dem Princip des Lagrange ist nun

$$\delta \int_0^t (T + P) \, dt = 0,$$

und zur Erfüllung dieser Gleichung ist nothwendig und hinreichend, dass während der Dauer der Bewegung zu jeder Zeit

$$\sum_{i=1}^k \delta q_i \left(- \frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i} \right) = 0 \tag{5}$$

sei. Diese Gleichung zerfällt in k einzelne Gleichungen. Da nemlich die Variationen von $q_1, q_2, \ldots q_k$ völlig willkürlich und von einander unabhängig sind, so muss in (5) für sich gleich Null gesetzt werden, was mit jeder einzelnen Variation multiplicirt ist. Dadurch ergibt sich

$$- \frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i} = 0, \tag{6}$$

und hierin ist i der Reihe nach $= 1, 2, \ldots k$ zu setzen. Dann hat man in (6) ein System von k simultanen Differentialgleichungen, durch deren Integration die Grössen $q_1, q_2, \ldots q_k$ als Functionen von t gefunden werden.

§. 43.

Der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft hergeleitet aus dem Princip des Lagrange.

Aus dem Princip des Lagrange lässt sich die Gültigkeit des Satzes von der Erhaltung der lebendigen Kraft herleiten, unter der Voraussetzung, dass das Potential P die Variable t nicht explicite enthält. Da der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft in der Gleichung sich ausspricht:

$$T - P = const.,$$

so kommt es nur darauf an, zu beweisen, dass

$$\frac{d(T-P)}{dt} = 0$$

ist. Nun berechnet sich aber

$$(1) \qquad \frac{d(T-P)}{dt} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial q_i} q_i' + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial q_i'} q_i'' - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial P}{\partial q_i} q_i',$$

wenn P, wie vorausgesetzt wird, die Variable t nicht explicite enthält. Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, dass T eine homogene Function zweiten Grades von den Grössen $q_1', q_2', \ldots q_k'$ ist, also:

$$(2) \qquad T = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_{ij} \cdot q_i' \cdot q_j' \,.$$

Hier sollen i und j irgend welche ganzen Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots k$ sein. Jeder Werth, den i annehmen kann, soll mit jedem Werthe von j einmal zusammengestellt, und die entstehenden einzelnen Ausdrücke sollen addirt werden. Danach ist T eine Summe von k^2 Gliedern, von denen jedes seinen eigenen Coefficienten a_{ij} hat. Diese Coefficienten, für welche wir allgemein die Relation $a_{ij} = a_{ji}$ feststellen, sind Functionen der Grössen $q_1, q_2, \ldots q_k$.

Aus der Gleichung (2) ergibt sich durch Differentiation

$$\frac{\partial T}{\partial q_i'} = 2 \sum_{j=1}^{k} a_{ij} \cdot q_j'$$

und ferner

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)}{dt} = 2\sum_{j=1}^{k} \frac{da_{ij}}{dt} \cdot q_j' + 2\sum_{j=1}^{k} a_{ij} \cdot q_j'' .$$

In dieser letzten Gleichung wollen wir auf beiden Seiten mit q_i' multipliciren, dann für i der Reihe nach alle ganzen Zahlen $1, 2, \ldots k$ einsetzen und die Resultate rechts und links vom Gleichheitszeichen addiren. Dadurch findet sich

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{k} \frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)}{dt} \cdot q_i' = 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \frac{da_{ij}}{dt} \cdot q_i' \cdot q_j' + 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij} \cdot q_i' \cdot q_j''.$$

Betrachten wir zunächst den ersten Bestandtheil der rechten Seite. Es ist

$$\frac{da_{ij}}{dt} = \sum_{h=1}^{k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_h} \cdot q_h'$$

und in Folge davon

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \frac{da_{ij}}{dt} \cdot q_i' \cdot q_j' = \sum_{h=1}^{k} q_h' \cdot \left\{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_h} q_i' \cdot q_j'\right\} = \sum_{h=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial q_h} \cdot q_h',$$

Der zweite Bestandtheil auf der rechten Seite der Gleichung (3) lässt sich schreiben

$$\sum_{i=1}^{k} q_i'' \cdot \left\{2\sum_{j=1}^{k} a_{ij} \cdot q_j'\right\},$$

und demnach hat man

$$(5) \qquad 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij} \cdot q_i' \cdot q_j'' = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial q_i'} \cdot q_i''.$$

Benutzt man die Gleichungen (4) und (5), so geht die Gleichung (3) in folgende über

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{k} \frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)}{dt} \cdot q_i' = 2\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial q_i} \cdot q_i' + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial q_i'} \cdot q_i''.$$

Das Princip des Lagrange spricht sich aus in der Gleichung (6) des vorigen Paragraphen, in welcher man i der Reihe nach $= 1, 2, \ldots k$ setzen darf. Multiplicirt man nun in dieser Gleichung auf beiden Seiten mit q_i' und summirt über alle Werthe von i, so ergibt sich

$$-\sum_{i=1}^{k} \frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)}{dt} \cdot q_i' + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial q_i} \cdot q_i' + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial P}{\partial q_i} \cdot q_i' = 0.$$

Hier braucht man aber nur die eben abgeleitete Gleichung (6) zu berücksichtigen, um zu finden

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial q_i} q_i' + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial q_i'} q_i'' - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial P}{\partial q_i} q_i' = 0,$$

d. h. mit Rücksicht auf (1):

$$(8) \qquad \frac{d(T - P)}{dt} = 0,$$

und das sollte bewiesen werden.

Die Untersuchungen der §§. 40 bis 43 sind in dem besonderen Falle anwendbar, dass die materiellen Punkte des Systems ihre gegenseitige Lage nicht ändern. Sie gelten demnach auch für die Bewegung eines starren Körpers. Die Lage eines solchen starren Körpers ist im Raume völlig bestimmt, wenn man sechs von einander unabhängige Grössen kennt, nemlich die drei Coordinaten eines mit dem Körper fest verbundenen Punktes, z. B. des Schwerpunktes, dann zwei Winkel, welche die Richtung einer geraden Linie festlegen, die durch jenen Punkt geht und mit dem Körper fest verbunden ist, und endlich ein Winkel, welcher die Lage einer Ebene bestimmt, die jene Linie in sich enthält und mit dem Körper ebenfalls fest verbunden ist. Bei der Bewegung eines starren Körpers hat man also diese sechs Grössen als die Variabeln q zu nehmen.

Zweiter Theil.

Elektricität und Magnetismus.

Vierter Abschnitt.

Elektrostatik.

§. 44.

Grundgesetz der Elektrostatik.

Zur Erklärung der elektrischen Erscheinungen stellen wir die Hypothese auf, dass in jedem ponderablen Körper zwei imponderable elektrische Fluida vorhanden sind: das positive und das negative elektrische Fluidum.

Die ponderablen Körper als Träger der Elektricität werden in zwei Klassen eingetheilt, in Leiter (Conductoren) und Nichtleiter (Isolatoren). Unter einem Leiter versteht man einen solchen ponderablen Körper, innerhalb dessen die elektrischen Flüssigkeiten sich vollkommen frei bewegen können. Unter einem Nichtleiter dagegen versteht man einen Körper, in welchem jedes kleinste Theilchen der elektrischen Flüssigkeiten an dem Körpermolekül haftet, dem es ursprünglich angehört hat. Zwar gibt es in der Natur keine vollkommenen Leiter und keine vollkommenen Nichtleiter. Vielmehr setzt jeder Leiter der Bewegung der elektrischen Theilchen einen, wenn auch sehr geringen, Widerstand entgegen, und in jedem Nichtleiter ist eine Lagenänderung der elektrischen Theilchen in seinem Innern nicht gänzlich ausgeschlossen, wenn sie auch nur sehr langsam zu Stande kömmt. Es erleichtert aber die Untersuchung der elektrostatischen Erscheinungen, wenn man bei den Leitern den sehr geringen Widerstand, bei den Nichtleitern die sehr geringe Beweglichkeit der elektrischen Theilchen ganz ausser Betracht lässt.

Die elektrischen Fluida sind imponderabel, d. h. sie werden von der Schwerkraft nicht in Anspruch genommen. Dagegen übt jedes elektrische Theilchen auf jedes andere elektrische Theilchen eine bewegende Kraft aus. Zwei elektrische Theilchen haben gleiche Elektricitätsmengen, wenn jedes von ihnen unter gleichen

Umständen auf ein und dasselbe dritte Theilchen nach Grösse und Richtung dieselbe Kraft ausübt.

Nach dieser Definition erkennt man die Möglichkeit, gleiche Quantitäten desselben Fluidums herzustellen und in Folge davon, bei Annahme irgend einer Einheit, verschiedene Quantitäten desselben Fluidums zu messen. Es kömmt noch darauf an, mit demselben Maass auch die Elektricitätsmengen des anderen Fluidums zu messen. Zu dem Ende definiren wir weiter: Zwei elektrische Theilchen haben entgegengesetzt gleiche Elektricitätsmengen, wenn sie unter gleichen Umständen auf ein und dasselbe dritte Theilchen Kräfte ausüben, die an Grösse gleich, in der Richtung einander entgegengesetzt sind. Hiernach üben zwei gleiche Quantitäten des einen und des anderen elektrischen Fluidums, wenn sie in demselben Punkte des Raumes vereinigt sind, gar keine Kraft aus. Dies ist der Grund, weshalb man die beiden Flüssigkeiten als positives und negatives Fluidum unterschieden hat.

Es ist nicht unwichtig, hier eine Bemerkung anzuknüpfen. Denken wir uns einen Körper, der durchaus keine elektrische Wirkung ausübt, so lässt sich sein elektrischer Zustand in doppelter Weise auffassen. Entweder nemlich kann man sagen: an jeder Stelle des Körpers ist die Elektricitätsmenge Null vorhanden. Oder man kann sagen: an jeder Stelle des Körpers ist eine Quantität positiver und eine eben so grosse Quantität negativer Elektricität in neutralem Gemisch vorhanden. Ist der Körper, der in diesem Zustande sich befindet, ein Leiter, so lehrt die Erfahrung, dass bei blosser Annäherung einer positiven oder negativen elektrischen Ladung ein Theil der Leiteroberfläche positive und der übrige Theil negative Elektricität zu erkennen gibt. Diese Thatsache lässt sich nur aus der zweiten Auffassung erklären, nemlich so, dass durch die in der Nähe befindliche elektrische Ladung der positive und der negative Bestandtheil des neutralen Gemisches in jedem inneren Punkte des Leiters nach entgegengesetzten Seiten auseinander getrieben werden. Ist diese Erklärung richtig, so muss nach der Scheidung ebenso viel positive wie negative Elektricität vorhanden sein. Auch dies ist durch das Experiment bestätigt.

Die Erfahrung hat über die elektrostatische Wechselwirkung von zwei elektrischen Theilchen das folgende Gesetz festgestellt:

Zwei elektrische Theilchen, welche in zwei Punkten concentrirt in Ruhe sich befinden, üben auf einander eine

Kraft aus, deren Richtung in die Verbindungslinie der beiden Punkte fällt. Die Grösse der Kraft ist proportional dem Producte der beiden Elektricitätsmengen und umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung. Sie ist Abstossung, wenn die beiden elektrischen Theilchen gleichartig, sie ist Anziehung, wenn die Theilchen ungleichartig sind.

Sind also ε und ε' zwei Zahlen, die nach Zahlwerth und Vorzeichen die Elektricitätsmenge des einen und des anderen elektrischen Theilchens angeben, und ist r die Entfernung der beiden Theilchen, so ist

$$(1) \qquad K = \frac{\varepsilon\,\varepsilon'}{r^2}$$

die Kraft, welche sie in der Richtung der Verbindungslinie auf einander ausüben. Diese Kraft ist Abstossung oder Anziehung, je nachdem sie positiv oder negativ ist. Die Einheit der Elektricitätsmenge ist dabei so gewählt, dass $K = 1$ ist, wenn $\varepsilon = \varepsilon' = 1$ und $r = 1$ ist.

§. 45.

Aufgabe der Elektrostatik.

Die Aufgabe der Elektrostatik lässt sich so aussprechen:

Es ist eine Anzahl Isolatoren gegeben und in jedem von ihnen die Vertheilung der Elektricität bekannt. Ausserdem hat man k Leiter, denen der Reihe nach die Elektricitätsmengen $m_1, m_2, \ldots m_k$ mitgetheilt sind. Es fragt sich, wie im Gleichgewichtszustande die Elektricität sich in jedem Leiter und an seiner Oberfläche vertheilt hat.

Wir bezeichnen mit V die Potentialfunction der gesammten Elektricität. Der Ausdruck für V ist leicht herzustellen. Wir nehmen im Punkte (x, y, z) die positive Einheit der Elektricität an und bezeichnen mit ε die Elektricitätsmenge im Punkte (a, b, c). Mit r werde der Abstand beider Punkte bezeichnet. Dann ist nach der Definition der Potentialfunction

$$(1) \qquad V = -\sum \frac{\varepsilon}{r},$$

wenn die Summirung über alle elektrisch geladenen Punkte (a, b, c)

erstreckt wird. Bei stetiger Vertheilung der Elektricität geht die Summe in ein Integral über und man hat

(2) $$V = -\int \frac{d\varepsilon}{r}.$$

Im Innern eines Leiters kann die Elektricität sich völlig frei bewegen. Es kann daher in einem Punkte (x, y, z) im Innern eines Leiters nicht anders Gleichgewicht stattfinden, als wenn die Componenten der bewegenden Kraft in diesem Punkte gleich Null sind. Also haben wir für jeden Punkt im Innern eines Leiters:

(3) $$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Daraus folgt unmittelbar, dass im Innern jedes Leiters

(4) $$V = const.$$

und

(5) $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

ist. Nun lässt sich aber der Ausdruck (2), den wir hier für V gefunden haben, vergleichen mit dem Ausdruck des §. 18, welcher die Potentialfunction einer anziehenden ponderablen Masse gibt. Dort ist dm das Element der ponderablen Masse, hier $d\varepsilon$ das Element der elektrischen Ladung. Wenn man das eine durch das andere ersetzt, so ist hier $-V$ dasselbe wie dort V. Der Grund ist leicht einzusehen. Dort findet Anziehung statt, wenn dm positiv, hier Abstossung, wenn $d\varepsilon$ positiv ist. Demnach gilt die Gleichung (2) des §. 18 auch hier, nur muss man, was dort V war, ersetzen durch $-V$. Also gilt überall da, wo man die Elektricität über einen Raum von drei Dimensionen vertheilt findet, die folgende partielle Differentialgleichung

(6) $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4\pi\rho.$$

Hier bedeutet ρ die elektrische Dichtigkeit im Punkte (x, y, z), oder mit anderen Worten: es ist in einem Raumelemente $dx\,dy\,dz$, welches an den Punkt (x, y, z) anstösst, die Elektricitätsmenge $\rho\, dx\, dy\, dz$ enthalten.

Dies gilt auch für den Fall, dass der Punkt (x, y, z) im Innern eines Leiters liegt.

Aus der Vergleichung von (5) und (6) ergibt sich demnach, dass im Gleichgewichtszustande die Dichtigkeit im Innern jedes Leiters überall gleich Null ist. Die elektrischen Ladungen der Leiter sind also mit endlicher Dichtigkeit über ihre Oberflächen ausgebreitet. Um die Dichtigkeit in einem Punkte (x, y, z) der Oberfläche zu finden, bemerken wir, dass auch der Satz (3) des §. 18 hier gültig ist mit der Modification, dass hier $-V$ zu schreiben ist, wo dort V steht. Bezeichnen wir also mit p eine Strecke, die vom Punkte (x, y, z) aus auf der Normale der Oberfläche gezählt wird, negativ nach dem Innern des Leiters zu, positiv nach aussen, so ergibt sich

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{-0} = 4\pi\rho. \tag{7}$$

Nun ist aber im Innern des Leiters und (wegen der Stetigkeit) auch in der Oberfläche $V = const.$ Folglich haben wir

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{-0} = 0,$$

und die Gleichung (7) geht über in

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+0} = 4\pi\rho. \tag{8}$$

Es fragt sich jetzt, wie gross die Elektricitätsmenge ist, welche sich auf der Oberfläche irgend eines Leiters angesammelt hat. Zunächst das Quantum m, welches ihm ursprünglich mitgetheilt worden. Dazu kommen noch die positiven und die negativen Elektricitätsmengen, welche unter der Einwirkung aller überhaupt vorhandenen Ladungen aus dem neutralen Gemisch des betrachteten Leiters ausgeschieden sind. Das Quantum der durch Scheidung hervorgerufenen positiven Elektricität ist aber ebenso gross wie das der negativen. Demnach ist die algebraische Summe aller auf der Oberfläche eines Leiters vorhandenen Elektricität gleich der Elektricitätsmenge m, welche ihm ursprünglich mitgetheilt worden.

Es sei $d\sigma_1$ ein Oberflächen-Element des ersten Leiters. Wir errichten in einem Punkte (x, y, z) dieses Elementes die Normale, auf welcher von ihrem Fusspunkte aus die Strecke p negativ nach innen, positiv nach aussen gezählt wird, und bilden das Product

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+0} d\sigma_1.$$

Dasselbe gibt, wie man aus Gleichung (8) ersieht, die Elektricitätsmenge an, welche über das Oberflächen-Element $d\sigma_1$ ausgebreitet ist. Führt man also eine Integration über die ganze Oberfläche des ersten Leiters aus, so erhält man die gesammte Elektricitätsmenge, welche auf dieser Oberfläche sich befindet. In derselben Weise hat man rücksichtlich aller übrigen Leiter zu verfahren und gelangt so zu den Gleichungen:

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
m_1 &= \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+0} d\sigma_1,\\
m_2 &= \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+0} d\sigma_2,\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
m_k &= \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+0} d\sigma_k.
\end{aligned}
$$

Die Integrationen sind der Reihe nach über die Oberfläche jedes einzelnen Leiters zu erstrecken.

§. 46.

Fortsetzung: Lösung der Aufgabe.

Wir wollen mit $a_1, a_2, \ldots a_k$ die constanten Werthe bezeichnen, welche nach eingetretenem Gleichgewichtszustande die Potentialfunction V im Innern und auf der Oberfläche der einzelnen Leiter besitzt. Die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_k$ stehen mit den Grössen $m_1, m_2, \ldots m_k$ in einem Zusammenhange, der jetzt näher untersucht werden soll. Zu dem Ende ist es zweckmässig, die Potentialfunction V in folgender Weise in einzelne Bestandtheile zu zerlegen.

Es sei u_i eine Function von x, y, z, die im ganzen unendlichen Raume der Gleichung von Laplace Genüge leistet:

$$
(1)\qquad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = 0,
$$

die in der Oberfläche und im Innern des $i$ten Leiters den Werth 1, in der Oberfläche und im Innern aller übrigen Leiter den Werth 0 besitzt. Wir nehmen i der Reihe nach $= 1, 2, 3, \ldots k$, und stellen so die k Functionen $u_1, u_2, u_3, \ldots u_k$ her. Dann ist die Differenz

$$
V - (a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k) = w,
$$

eine Function, die in der Oberfläche und im Innern sämmtlicher Leiter den Werth Null hat, die überall ausserhalb der Isolatoren der Gleichung von Laplace genügt und für einen Punkt im Innern eines Isolators in derselben Weise wie die Potentialfunction die Dichtigkeit der Elektricität kundgibt. Wir haben dann also

(2) $$V = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k + w,$$

und hieraus

$$\frac{\partial V}{\partial p} = a_1 \frac{\partial u_1}{\partial p} + a_2 \frac{\partial u_2}{\partial p} + \dots + a_k \frac{\partial u_k}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial p}.$$

Nehmen wir nun das Integral

$$\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+0} d\sigma_q,$$

ausgedehnt über die Oberfläche des $q$ten Leiters, und setzen zur Abkürzung

(3) $$\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial u_i}{\partial p}\right)_{+0} d\sigma_q = \mu_{qi},$$

(4) $$\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_{+0} d\sigma_q = \nu_q,$$

so gehen die Gleichungen (9) des vorigen Paragraphen in folgende über:

(5) $$\begin{array}{l} m_1 = \mu_{11} a_1 + \mu_{12} a_2 + \dots + \mu_{1k} a_k + \nu_1, \\ m_2 = \mu_{21} a_1 + \mu_{22} a_2 + \dots + \mu_{2k} a_k + \nu_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ m_k = \mu_{k1} a_1 + \mu_{k2} a_2 + \dots + \mu_{kk} a_k + \nu_k. \end{array}$$

Die physikalische Bedeutung dieser Gleichungen ist leicht zu erkennen. Wird ein Leiter durch einen unendlich dünnen Draht mit der Erde in leitende Verbindung gesetzt, so ist in seiner Oberfläche und in seinem Innern die Potentialfunction gleich Null, weil sie in der Erde (in unendlicher Entfernung) den Werth Null hat. Nehmen wir also den Fall, dass in den Isolatoren keine Elektricität vorhanden und dass alle Leiter, mit Ausnahme des $q$ten, mit der Erde in leitende Verbindung gesetzt sind, so reducirt sich die Potentialfunction auf

$$V = a_q u_q,$$

und die auf den einzelnen Leitern vorhandenen Elektricitätsmengen sind resp.

$$\mu_{1q} a_q, \ \mu_{2q} a_q, \ \dots \ \mu_{kq} a_q.$$

Ebenso findet sich, dass

$$\nu_1, \ \nu_2, \ \dots \ \nu_k$$

die Elektricitätsmengen auf den einzelnen Leitern sein würden, wenn alle ableitend berührt sind und nur die Ladungen der Isolatoren wirken.

Es lässt sich beweisen, dass $\mu_{iq} = \mu_{qi}$ ist. Nehmen wir nemlich das Integral

$$\int \left(u_i \frac{\partial u_q}{\partial p} - u_q \frac{\partial u_i}{\partial p} \right) d\sigma,$$

ausgedehnt über sämmtliche Leiter-Oberflächen, so ist der Werth desselben nach dem Satze von Green gleich Null. Das Integral reducirt sich aber wegen der Eigenschaften der Functionen u auf die Differenz

$$\int \frac{\partial u_q}{\partial p} d\sigma_i - \int \frac{\partial u_i}{\partial p} d\sigma_q,$$

wobei das erste Integral nur über die Oberfläche des $i$ten, das zweite nur über die Oberfläche des $q$ten Leiters zu erstrecken ist. Demnach haben wir

$$\int \frac{\partial u_q}{\partial p} d\sigma_i - \int \frac{\partial u_i}{\partial p} d\sigma_q = 0,$$

oder

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial u_q}{\partial p} d\sigma_i = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial u_i}{\partial p} d\sigma_q,$$

d. h. nach Gleichung (3):

(6) $$\mu_{iq} = \mu_{qi}.$$

Lösen wir die Gleichungen (5) in Beziehung auf $a_1, a_2, \ldots a_k$ als Unbekannte auf, so ergibt sich

(7)
$$\begin{aligned}
a_1 &= \alpha_{11} m_1 + \alpha_{12} m_2 + \ldots + \alpha_{1k} m_k + \beta_1, \\
a_2 &= \alpha_{21} m_1 + \alpha_{22} m_2 + \ldots + \alpha_{2k} m_k + \beta_2, \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\
a_k &= \alpha_{k1} m_1 + \alpha_{k2} m_2 + \ldots + \alpha_{kk} m_k + \beta_k.
\end{aligned}$$

Die Coefficienten α genügen in Folge der Gleichung (6) den Bedingungen, dass

(8) $$\alpha_{iq} = \alpha_{qi}.$$

§. 47.

Bewegung der Leiter. Das elektrostatische Potential.

Sind die Leiter beweglich, so ändern sie in Folge der elektrischen Anziehung und Abstossung ihre Lage. Für jede neue Lage der Leiter ist aber auch die Gleichgewichtslage der elektrischen Theilchen eine andere. Mit der Bewegung der Leiter ist also eine fortwährende Aenderung in der Vertheilung der Elektricität auf den Leiter-Oberflächen verbunden. Diese geht aber so rasch vor sich, dass man in jedem einzelnen Augenblicke der Bewegung der ponderabeln Leiter das Gleichgewicht der Elektricität als hergestellt ansehen kann.

Die elektrischen Theilchen ε_μ und ε_ν, die wir in zwei um die Strecke r von einander entfernten Punkten concentrirt denken, üben auf einander eine abstossende Kraft

$$\frac{\varepsilon_\mu\,\varepsilon_\nu}{r^2}.$$

Das Potential dieser beiden Theilchen ist also

$$F(r) = \int \frac{\varepsilon_\mu\,\varepsilon_\nu}{r^2}\,dr = -\frac{\varepsilon_\mu\,\varepsilon_\nu}{r},$$

und das Gesammtpotential der elektrischen Massen ist

$$(1) \qquad P = -\sum \frac{\varepsilon_\mu\,\varepsilon_\nu}{r},$$

wobei die Summirung sich auf alle Combinationen von je zwei elektrischen Theilchen bezieht. Die Formel (1) setzt voraus, dass die Elektricitäten in einzelnen discreten Punkten concentrirt sind. Bei einer stetigen Vertheilung über die Oberflächen der Leiter und über den Raum der Nichtleiter tritt eine Integration an die Stelle der Summirung. Wir bezeichnen mit $d\varepsilon$ die Elektricitätsmenge, welche in einem Raum-, resp. in einem Flächen-Elemente sich befindet. Dann ist

$$(2) \qquad P = -\int \frac{d\varepsilon\,.\,d\varepsilon'}{r},$$

und die Integration ist nun auszudehnen über alle Combinationen von je zwei elektrischen Theilchen $d\varepsilon$ und $d\varepsilon'$. Dafür lässt sich auch schreiben

$$(3) \qquad P = -\frac{1}{2}\int d\varepsilon \int \frac{d\varepsilon'}{r},$$

wobei jede der beiden Integrationen über alle elektrischen Theilchen zu erstrecken ist. Bei dieser Art, die Integration auszuführen, kommt jede Combination von zwei Theilchen doppelt vor. Da sie aber nur einmal genommen werden soll, so ist der Factor

$\frac{1}{2}$ vorangesetzt. Dies ist das Potential der gesammten Elektricität auf sich selbst.

Nun haben wir aber

$$V = -\int \frac{d\varepsilon'}{r}$$

als Ausdruck für die Potentialfunction im Punkte (x, y, z) gefunden, d. h. für das Potential aller elektrischen Massen auf die in diesem Punkte concentrirt gedachte positive elektrische Einheit. Wir können also auch schreiben

$$(4) \qquad P = \frac{1}{2} \int V \, d\varepsilon.$$

In dem Falle, dass die Isolatoren keine elektrische Ladung enthalten, ist die Integration nur über die Oberflächen der Leiter zu erstrecken. In jeder Leiter-Oberfläche ist aber V constant, und zwar der Reihe nach gleich $a_1, a_2, \ldots a_k$. Also wird jetzt

$$P = \frac{1}{2} a_1 \int \rho \, d\sigma_1 + \frac{1}{2} a_2 \int \rho \, d\sigma_2 + \ldots + \frac{1}{2} a_k \int \rho \, d\sigma_k$$

oder, mit Rücksicht auf die Gleichungen (8) und (9) des §. 45:

$$(5) \qquad P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} a_i m_i.$$

Um die Bewegung der Leiter zu bestimmen, hat man P als Function von den Ortscoordinaten der Leiter auszudrücken. Die Grössen $m_1, m_2, \ldots m_k$ sind dabei constant, es sind die den Leitern ursprünglich mitgetheilten Elektricitätsmengen. Die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_k$ sind in den Gleichungen (7) des vorigen Paragraphen ausgedrückt, wenn man darin für den hier vorliegenden Fall die Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k$ gleich Null setzt. Danach sind die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_k$ homogene lineäre Functionen von $m_1, m_2, \ldots m_k$ und nur die auftretenden Coefficienten α sind von den Ortscoordinaten der Leiter abhängig. Wir erhalten

$$(6) \qquad P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} m_i m_j.$$

Wir bezeichnen wieder mit T die lebendige Kraft des Leitersystems. Die Bewegung der Leiter geht dann so vor sich, dass

$$(7) \qquad \delta \int_0^t (T+P)\,dt = 0.$$

Wie aus dieser Bedingung die Differentialgleichungen der Bewegung abzuleiten, ist in den §§. 36 bis 42 auseinandergesetzt.

§. 48.

Beispiel: Zwei elektrisch geladene Kugeln.

Wir wenden uns zu der Behandlung einer speciellen Aufgabe. Es seien als Leiter zwei Kugeln gegeben, deren Radien a und b sind und deren Mittelpunkte die Entfernung c haben, die grösser als $a+b$ vorausgesetzt wird. In den Isolatoren soll keine Elektricität vorhanden sein. Jedem der beiden Leiter ist eine gewisse Elektricitätsmenge mitgetheilt, und nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes hat die Potentialfunction V im Innern und auf der Oberfläche der beiden Kugeln je einen constanten Werth. Wir bezeichnen denselben mit g für die erste Kugel, mit h für die zweite Kugel.

Die Aufgabe besteht darin, die Potentialfunction V, von den Werthen g und h in den Kugeloberflächen ausgehend, so in den äusseren Raum fortzusetzen, dass sie überall endlich und stetig verläuft, dass sie in unendlicher Entfernung gleich Null wird wie der reciproke Werth des Abstandes von dem Anfangspunkte der Coordinaten, und dass sie überall der partiellen Differentialgleichung genügt:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Die Derivirten von V sind dann ebenfalls überall endlich und ändern sich stetig, ausser beim Durchgange durch die eine oder die andere Kugeloberfläche.

Diese Aufgabe lässt sich nach der Methode von Green behandeln. Die Hülfsfunction U ist dann eine Potentialfunction, die von der im Punkte (x', y', z') des äusseren Raumes concentrirt gedachten negativen elektrischen Einheit*) herrührt unter der Vor-

*) Ueber diese physikalische Bedeutung von U vergleiche man die erste Anmerkung auf Seite 144. Der Umstand, dass Green dort die Einheit positiver Elektricität im Punkte (x', y', z') concentrirt denkt, während hier gerade die entgegengesetzte Einheit verlangt wird, könnte auffällig erscheinen. Er ist aber leicht zu erklären. Bei elektrostatischen Kräften ist nemlich die Green'sche Potentialfunction gerade das Entgegengesetzte von dem, was hier

aussetzung, dass die Kugeln durch unendlich dünne Drähte mit der Erde in leitende Verbindung gesetzt sind.

Wir wollen diesen Weg nicht einschlagen, sondern die Function V direct bestimmen. Da es nur noch darauf ankömmt, dieselbe für alle Punkte des äusseren Raumes herzustellen, so ist es gleichgültig, wie wir sie durch die Kugeloberflächen hindurch in das Innere fortsetzen. Wir müssen nur nachher bei dem Gebrauche der Function V die zu Hülfe genommenen Fortsetzungen fallen lassen und im Innern der Kugeln die wahren Werthe g und resp. h wieder aufnehmen.

Nun liegt aber eine Schwierigkeit der Aufgabe darin, dass die Derivirten der für den ganzen Raum richtig bestimmten Potentialfunction V beim Durchgange durch die Kugeloberflächen unstetig sind. Wir wollen deshalb die für den äusseren Raum richtig bestimmte Function V nach einer noch näher festzustellenden Vorschrift so ins Innere der Kugeln fortsetzen, dass sie selbst und ihre Derivirten beim Durchgang durch die Kugeloberflächen sich stetig ändern. Oder mit anderen Worten: wir betrachten eine andere Function V', die im äusseren Raume mit der gesuchten Potentialfunction V übereinstimmt, im Innern der Kugeln aber nicht. Vielmehr soll sie mit ihren sämmtlichen Derivirten beim Durchgange durch die Kugeloberflächen sich stetig ändern, und es soll der Functionswerth für einen Punkt im Innern der einen oder der anderen Kugel nach einem noch vorzuschreibenden Gesetze mit dem Functionswerthe in einem entsprechenden Punkte ausserhalb der Kugel im Zusammenhange stehen.

Wir verbinden einen Punkt (x, y, z), der ausserhalb der ersten Kugel liegt, mit dem Mittelpunkte dieser Kugel und bezeichnen den Abstand mit r. Alsdann suchen wir auf der Verbindungslinie den Punkt, dessen Entfernung r' von dem ersten Kugelmittelpunkte der Bedingung genügt:

(2) $$r\,r' = a^2.$$

Dieser Punkt, der im Innern der ersten Kugel liegt, soll das Bild

als Potentialfunction definirt worden ist. Soll also eine und dieselbe Function (die Hülfsfunction U) als eine Potentialfunction, herrührend von elektrostatischen Kräften, angesehen werden, so ist klar, dass man die fingirte Ladung mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmen hat, je nachdem für die Potentialfunction die Definition von Green, oder die hier aufgestellte Definition in Anwendung kommen soll.

des betrachteten äusseren Punktes genannt werden. Ebenso verbinden wir einen Punkt (x, y, z), der ausserhalb der zweiten Kugel liegt, mit dem Mittelpunkte derselben und bezeichnen den Abstand mit s. Auf der Verbindungslinie suchen wir dann den Punkt, dessen Entfernung s' vom zweiten Kugelmittelpunkte an die Bedingung geknüpft ist:

$$s\,s' = b^2. \tag{3}$$

Diesen Punkt, der im Innern der zweiten Kugel liegt, nennen wir das Bild des äusseren Punktes.

Denken wir uns nun, die gesuchte Function V' sei für jeden Punkt des äusseren Raumes bereits hergestellt. Wir setzen sie ins Innere der ersten Kugel so fort, dass

$$(V' - g)_{r'} = -\frac{r}{a}(V' - g)_r \tag{4}$$

ist, und in das Innere der zweiten Kugel so, dass

$$(V' - h)_{s'} = -\frac{s}{b}(V' - h)_s. \tag{5}$$

Die Indices r und r' in der Gleichung (4) sollen andeuten, dass es sich um die Werthe der Function $V' - g$ in den Abständen r und r' vom ersten Kugelmittelpunkte handelt. Stillschweigend ist dabei vorausgesetzt, dass diese Abstände auf demselben Radius vector gezählt werden und dass sie die Gleichung (2) erfüllen. In entsprechender Weise hat man die Indices in der Gleichung (5) zu verstehen.

Durch die Gleichung (4) kann man sich die zweite Kugel innerhalb der ersten abbilden und hierauf durch die Gleichung (5) von diesem Bilde wieder das Bild innerhalb der zweiten Kugel herstellen. Fährt man auf diese Weise fort, indem man abwechselnd die Gleichungen (4) und (5) in Anwendung bringt, so ergeben sich Bilder, die wir der Reihe nach das erste, zweite und dritte Bild u. s. f. der zweiten Kugel nennen wollen. Es lässt sich leicht beweisen, dass alle Bilder kugelförmig sind, dass jedes folgende kleiner ist als das vorhergehende, und dass von den Bildern innerhalb derselben Kugel jedes folgende ganz innerhalb des vorhergehenden liegt. Wenn man also die Anwendung der Gleichungen (4) und (5) unaufhörlich wiederholt, so gelangt man in beiden Kugeln zu Bildern, deren Rauminhalt kleiner ist als jede angebbare Zahl.

Durch die Gleichung (4) wird die Function V' in das Innere der ersten Kugel fortgesetzt, und zwar zunächst so, dass nur das erste Bild der zweiten Kugel als der Raum übrig bleibt, innerhalb dessen die Function noch nicht bekannt ist. Wendet man dann die Gleichung (5) an, so bleibt innerhalb der zweiten Kugel nur ihr zweites Bild als das Gebiet übrig, für welches man die Function noch nicht kennt. Bringt man so fortfahrend die Gleichungen (4) und (5) abwechselnd in Anwendung, so kann man in beiden Kugeln das Gebiet, innerhalb dessen die Function unbekannt bleibt, beliebig klein machen und kleiner als irgend eine angebbare Zahl.

Es fragt sich nun, wo $V' = \infty$ wird. Da die Function im ganzen äusseren Raume endlich ist, so kann ein Unendlichwerden nur im Innern der Kugeln eintreten. Und zwar sieht man zunächst aus Gleichung (4), dass $V'_{r'} = \infty$ wird für $r' = 0$, und aus Gleichung (5), dass $V'_{s'} = \infty$ für $s' = 0$. Denn für $r' = 0$ ist $r = \infty$ und $\lim r\, V'_r$ endlich, und für $s' = 0$ ist $s = \infty$ und $\lim s\, V'_s$ endlich. Folglich ergibt sich

$$\text{für } r' = 0 \quad V' = \infty \text{ wie } \frac{a\,g}{r'},$$

$$\text{für } s' = 0 \quad V' = \infty \text{ wie } \frac{b\,h}{s'}.$$

Hieraus erkennt man, dass die Function V' unendlich wird in beiden Kugelmittelpunkten. Nach Vorschrift der Gleichungen (4) und (5) wird sie dann aber ebenfalls unendlich in den sämmtlichen Bildpunkten sowohl des einen wie des anderen Kugelcentrums. Diese Bildpunkte liegen innerhalb der Kugeln zwischen beiden Mittelpunkten auf der Centrallinie, und ihre Anzahl ist für jede der beiden Kugeln unendlich gross. Die Function V' kann also aufgefasst werden als Potentialfunction, herrührend von elektrischen Ladungen, die in den Kugelmittelpunkten und deren unendlich vielen Bildpunkten concentrirt sind.

Wir wollen die Punkte, in welchen die Function V' unendlich wird, in vier Gruppen abtheilen, nemlich

erstens: den Mittelpunkt der ersten Kugel und seine Bilder im Innern der ersten Kugel;

zweitens: die Bilder des ersten Kugelmittelpunktes im Innern der zweiten Kugel;

drittens: den Mittelpunkt der zweiten Kugel und seine Bilder im Innern der zweiten Kugel;

viertens: die Bilder des zweiten Kugelmittelpunktes im Innern der ersten Kugel.

Wir legen den Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems in den Mittelpunkt der ersten Kugel und die Axe der positiven x in die Centrallinie. Für sämmtliche Unstetigkeitspunkte ist dann $y = 0$ und $z = 0$. Ihre erste Coordinate soll der Reihe nach bezeichnet werden für die erste Gruppe mit $x'_0, x'_1, x'_2, \ldots$, für die zweite Gruppe mit $x''_1, x''_2, x''_3, \ldots$, für die dritte Gruppe mit $x'''_0, x'''_1, x'''_2, \ldots$ und für die vierte Gruppe mit $x''''_1, x''''_2, x''''_3, \ldots$ Die Elektricitätsmenge, welche wir in irgend einem der Unstetigkeitspunkte anzunehmen haben, möge mit dem Buchstaben m bezeichnet werden, dem wir dieselben Indices beifügen, wie der x-Coordinate des zugehörigen Punktes.

Nach §. 45, Gleichung (1') ist dann zu setzen:

$$V' = V'_1 + V'_2 + V'_3 + V'_4; \tag{6}$$

$$
\begin{aligned}
V'_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-m'_k}{\sqrt{(x - x'_k)^2 + y^2 + z^2}}, \\
V'_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-m''_k}{\sqrt{(x - x''_k)^2 + y^2 + z^2}}, \\
V'_3 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-m'''_k}{\sqrt{(x - x'''_k)^2 + y^2 + z^2}}, \\
V'_4 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-m''''_k}{\sqrt{(x - x''''_k)^2 + y^2 + z^2}}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Die nächste Aufgabe besteht darin, für jeden Unstetigkeitspunkt die beiden constanten Grössen zu bestimmen, welche seine Lage und die in ihm concentrirt gedachte Elektricitätsmenge angeben. Diese Aufgabe soll in den beiden nächsten Paragraphen behandelt werden. Vorläufig beschränken wir uns auf eine Bemerkung, die nicht unwichtig ist. Aus der Art, wie die Function V' in den Kugelmittelpunkten unstetig wird, und aus dem Abbildungsgesetz [Gleichungen (4) und (5)] geht nemlich hervor, dass sämmtliche Elektricitätsmengen der ersten und der zweiten Gruppe proportional der Grösse g, und dass sämmtliche Elektricitätsmengen der dritten und der vierten Gruppe proportional der Grösse h sind. Es werden also in den Entwicklungen von V'_1 und V'_2 sämmtliche Glieder mit dem Factor g, und in den Entwicklungen von V'_3 und V'_4 sämmtliche Glieder mit dem Factor h behaftet sein.

§. 49.
Fortsetzung: Fingirte Ladungen einzelner Punkte.

Wir wollen zunächst den Punkt (x, y, z) auf der Centrallinie zwischen beiden Kugeln nehmen. Es ist also $c - b \geqq x \geqq a$, $y = z = 0$, und wir haben

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
V_1' &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-m_k'}{x - x_k'}, & V_2' &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-m_k''}{x_k'' - x}, \\
V_3' &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-m_k'''}{x_k''' - x}, & V_4' &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-m_k''''}{x - x_k''''}.
\end{aligned}
$$

Hier hat man besonders die Nenner zu beachten. Sie sind dadurch entstanden, dass man in den Gleichungen (7) des vorigen Paragraphen $y = z = 0$ setzt und die Quadratwurzeln auszieht. Aber es sind, dem Wesen der Potentialfunction entsprechend, immer die positiven Wurzeln zu nehmen. Will man also für eine der in (1) ausgedrückten Functionen die Variable x über das vorgeschriebene Gebiet hinausgehen lassen, so hat man die Vorsicht zu beobachten, dass jedesmal nach Ueberschreitung eines Unstetigkeitspunktes derjenige Nenner, welcher in diesem Punkte Null wird, wieder positiv gemacht, d. h. mit -1 multiplicirt werden muss. Lässt man dagegen die Variable x nur auf solche Gebiete übergehen, die keinen Unstetigkeitspunkt der betreffenden Function enthalten, so bleibt der in (1) gegebene Ausdruck ohne weiteres gültig. Es darf also die Variable x in V_1' und in V_4' auch grösser als $c - b$, in V_2' und V_3' auch kleiner als a gemacht werden, ohne dass die Ausdrücke (1) ihre Gültigkeit verlieren.

Wir schreiben zur Abkürzung:

$$(2) \qquad \frac{r}{a} = \eta,$$

$$(3) \qquad \frac{s}{b} = \zeta.$$

Für einen Punkt auf der Centrallinie zwischen den beiden Kugeln gilt die Gleichung

$$(4) \qquad a\,\eta + b\,\zeta = c,$$

in welcher η und ζ beide positiv und nicht kleiner als 1 sind.

Die Function V' kann in doppelter Weise aufgefasst werden, je nachdem man η oder ζ als unabhängige Variable ansieht. Wir setzen also

$$(5) \qquad V' = \varphi(\eta) = \chi(\zeta).$$

Die Gleichungen (4) und (5) des vorigen Paragraphen lauten jetzt:

$$(6) \qquad \varphi\left(\frac{1}{\eta}\right) - g = -\eta \,\{\varphi(\eta) - g\},$$

$$(7) \qquad \chi\left(\frac{1}{\zeta}\right) - h = -\zeta \,\{\chi(\zeta) - h\}.$$

Aus (5), (6) und (7) folgt

$$(8) \qquad \frac{1}{\eta}\,\varphi\left(\frac{1}{\eta}\right) - \frac{1}{\zeta}\,\chi\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{g}{\eta} + g - \frac{h}{\zeta} - h.$$

Um dieser Functionalgleichung in bequemer Weise genügen zu können, zerlegen wir jede der beiden Functionen φ und χ in zwei Bestandtheile

$$(9) \qquad \varphi(\eta) = \varphi_1(\eta) + \varphi_2(\eta),$$

$$(10) \qquad \chi(\zeta) = \chi_1(\zeta) + \chi_2(\zeta),$$

und setzen fest, dass

$$\varphi_1(\eta) = \chi_1(\zeta)$$
$$\varphi_2(\eta) = \chi_2(\zeta)$$

sein soll. Der Gleichung (8) ist Genüge geleistet, wenn

$$(11) \qquad \frac{1}{\eta}\,\varphi_1\left(\frac{1}{\eta}\right) - \frac{g}{\eta} - g = \frac{1}{\zeta}\,\chi_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

$$(12) \qquad \frac{1}{\eta}\,\varphi_2\left(\frac{1}{\eta}\right) \qquad\qquad = \frac{1}{\zeta}\,\chi_2\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{h}{\zeta} - h$$

gesetzt wird. Da φ eine Potentialfunction ist, so findet man leicht die Form der Entwicklung im allgemeinen, nemlich

$$(13) \qquad \varphi_1(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_k\,\eta + q_k},$$

und es kommt nur noch darauf an, die Coefficienten p und q zu bestimmen. Nach der über χ_1 getroffenen Bestimmung ist

$$(14) \qquad \chi_1(\zeta) = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{p_k\left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a}\,\zeta\right) + q_k}.$$

Aus den Gleichungen (13) und (14) leiten wir ab:

$$\frac{1}{\eta}\varphi_1\left(\frac{1}{\eta}\right)=\sum_0^\infty \frac{1}{p_k+q_k\eta},$$

$$\frac{1}{\zeta}\chi_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\sum_0^\infty \frac{1}{\left(p_k\frac{c}{a}+q_k\right)\zeta-\frac{b}{a}p_k}$$

$$=\sum_0^\infty \frac{1}{\left(p_k\frac{c}{a}+q_k\right)\left(\frac{c}{b}-\frac{a}{b}\eta\right)-\frac{b}{a}p_k}.$$

Wir disponiren nun über die Coefficienten so, dass das $k$te Glied in der Entwicklung von $\frac{1}{\zeta}\chi_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ gleich dem $(k+1)$ten Gliede in der Entwicklung von $\frac{1}{\eta}\varphi_1\left(\frac{1}{\eta}\right)$ ist. Dann erhält man

$$(15)\qquad \frac{1}{\eta}\varphi_1\left(\frac{1}{\eta}\right)-\frac{1}{\zeta}\chi_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{1}{p_0+q_0\eta}.$$

Damit dies zu Stande komme, hat man

$$(16)\qquad \begin{aligned} p_{k+1}&=p_k\frac{c^2-b^2}{ab}+q_k\frac{c}{b}\\ q_{k+1}&=-\frac{1}{b}(p_k c+q_k a)\end{aligned}$$

zu setzen. In den Bedingungsgleichungen (16) kommt k nicht explicite vor. Wir schreiben deshalb

$$p_k=\mathfrak{P}\alpha^k,$$
$$q_k=\mathfrak{Q}\alpha^k.$$

Dadurch gehen die Gleichungen (16) über in

$$(17)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{P}\left(\alpha-\frac{c^2-b^2}{ab}\right)&=\mathfrak{Q}\frac{c}{b},\\ \mathfrak{Q}\left(\alpha+\frac{a}{b}\right)&=-\mathfrak{P}\frac{c}{b},\end{aligned}$$

und wenn man $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ eliminirt, so ergibt sich zur Bestimmung von α die quadratische Gleichung

$$(18)\qquad \alpha^2+\alpha\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}+1=0.$$

Wir bezeichnen die Wurzeln mit α_1 und α_2, und bemerken, dass

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{c^2 - (a^2 + b^2)}{ab},$$
$$\alpha_1\, \alpha_2 = 1$$

ist. Da nun $c > a + b$ vorausgesetzt ist, so zeigt sich, dass $\alpha_1 + \alpha_2$ positiv ist, und da beide Wurzeln einerlei Vorzeichen haben (ihr Product ist $= 1$), so muss $\alpha_1 > 0$ und $\alpha_2 > 0$ sein.

Aus der zweiten der Gleichungen (17) findet sich

$$\mathfrak{P} = -\frac{\alpha b + a}{c}\,\mathfrak{Q}.$$

Je nachdem wir die Wurzel α_1 oder α_2 nehmen, erhalten wir particuläre Lösungen für p_k und q_k. Daraus setzt sich die allgemeine Lösung zusammen, nemlich

$$(19)\qquad \begin{aligned} q_k &= \mathfrak{Q}_1\, \alpha_1^k + \mathfrak{Q}_2\, \alpha_2^k \\ p_k &= -\frac{a}{c}(\mathfrak{Q}_1\, \alpha_1^k + \mathfrak{Q}_2\, \alpha_2^k) - \frac{b}{c}(\mathfrak{Q}_1\, \alpha_1^{k+1} + \mathfrak{Q}_2\, \alpha_2^{k+1}). \end{aligned}$$

Es bleiben jetzt nur noch die beiden Constanten $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ zu bestimmen. Zu dem Ende bemerken wir, dass aus (15) und (11) hervorgehen würde

$$\frac{1}{p_0 + q_0 \eta} = g + \frac{g}{\eta}.$$

Dieser Gleichung lässt sich nicht ohne weiteres genügen. Wir können aber die Function $\varphi_1(\eta)$ wieder zerlegen:

$$(20)\qquad \varphi_1(\eta) = \varphi_{11}(\eta) + \varphi_{12}(\eta),$$

und setzen dann, sofern ζ als unabhängige Variable eingeführt wird,

$$\varphi_{11}(\eta) = \chi_{11}(\zeta), \quad \varphi_{12}(\eta) = \chi_{12}(\zeta).$$

Die Gleichung (11) kann in der Weise befriedigt werden, dass wir setzen

$$(21)\qquad \frac{1}{\eta}\,\varphi_{11}\Big(\frac{1}{\eta}\Big) - \frac{1}{\zeta}\,\chi_{11}\Big(\frac{1}{\zeta}\Big) = g,$$

$$(22)\qquad \frac{1}{\eta}\,\varphi_{12}\Big(\frac{1}{\eta}\Big) - \frac{1}{\zeta}\,\chi_{12}\Big(\frac{1}{\zeta}\Big) = \frac{g}{\eta}.$$

Nimmt man nun zunächst für $\varphi_{11}(\eta)$ die Entwicklung (13) vor, so ergibt sich aus den Gleichungen (15) und (21):

$$\frac{1}{p_0 + q_0 \eta} = g,$$

$$\text{d. h. } p_0 = \frac{1}{g}, \ q_0 = 0.$$

Aus (19) haben wir aber

$$q_0 = \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2,$$
$$p_0 = -\frac{a}{c}(\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2) - \frac{b}{c}(\mathfrak{Q}_1 \alpha_1 + \mathfrak{Q}_2 \alpha_2).$$

Folglich müssen wir hier setzen:

$$\mathfrak{Q}_2 = -\mathfrak{Q}_1, \quad \mathfrak{Q}_1 = -\frac{c}{bg(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Wird dies in die Gleichungen (19) und von da in (13) eingeführt, so erhält man speciell für $\varphi_{11}(\eta)$ die Entwicklung

$$(23) \quad \varphi_{11}(\eta) = g\frac{b}{c}(\alpha_2 - \alpha_1)\sum_0^\infty \frac{1}{(\alpha_1^k - \alpha_2^k)(1 - \frac{a}{c}\eta) - (\alpha_1^{k+1} - \alpha_2^{k+1})\frac{b}{c}\eta}.$$

In entsprechender Weise findet man aus (15) und (22) die Bedingung

$$\frac{1}{p_0 + q_0 \eta} = \frac{g}{\eta},$$

also muss jetzt für die Entwicklung von $\varphi_{12}(\eta)$ gesetzt werden

$$p_0 = 0 = -\frac{a}{c}(\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2) - \frac{b}{c}(\mathfrak{Q}_1 \alpha_1 + \mathfrak{Q}_2 \alpha_2),$$
$$q_0 = \frac{1}{g} = \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2.$$

Daraus lassen sich $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ bestimmen, und wenn man ihre Werthe in (19) und von da in (13) einführt, so hat man speciell die Entwicklung von $\varphi_{12}(\eta)$.

Man gelangt dazu einfacher auf dem folgenden Wege. Wir setzen

$$(24) \qquad \chi_{12}(\zeta) = -\frac{1}{\zeta}\chi_{11}\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

folglich nach Gleichung (21)

$$(25) \qquad \varphi_{12}(\eta) = -\frac{1}{\eta}\varphi_{11}\left(\frac{1}{\eta}\right) + g,$$

und wollen beweisen, dass hierdurch die Gleichung (22) befriedigt wird. Es ist nemlich

$$\frac{1}{\eta}\,\varphi_{12}\Big(\frac{1}{\eta}\Big) = -\,\varphi_{11}(\eta) + \frac{g}{\eta},$$

$$\frac{1}{\zeta}\,\chi_{12}\Big(\frac{1}{\zeta}\Big) = -\,\chi_{11}(\eta),$$

und hieraus ergibt sich durch Subtraction

$$\frac{1}{\eta}\,\varphi_{12}\Big(\frac{1}{\eta}\Big) - \frac{1}{\zeta}\,\chi_{12}\Big(\frac{1}{\zeta}\Big) = \frac{g}{\eta},$$

d. h. die Bedingungsgleichung (22). Vermöge der Gleichungen (23) und (25) erhält man

$$\varphi_{12}(\eta) = g - g\,\frac{b}{c}\,(\alpha_2 - \alpha_1)\sum_0^\infty \frac{1}{(\alpha_1^k - \alpha_2^k)\Big(\eta - \frac{a}{c}\Big) - \frac{b}{c}\,(\alpha_1^{k+1} - \alpha_2^{k+1})},$$

oder kürzer:

(26)
$$\varphi_{12}(\eta) = g\,\frac{b}{c}\,(\alpha_1 - \alpha_2)\sum_1^\infty \frac{1}{(\alpha_1^k - \alpha_2^k)\Big(\eta - \frac{a}{c}\Big) - \frac{b}{c}\,(\alpha_1^{k+1} - \alpha_2^{k+1})}.$$

Setzt man die Entwicklungen (23) und (26) in die Gleichung (20) ein, so ist nun die Function $\varphi_1(\eta)$ vollständig bestimmt.

Die Function $\varphi_2(\eta) = \chi_2(\zeta)$, welche an die Gleichung (12) gebunden ist, zerlegen wir in zwei Bestandtheile

(27) $$\varphi_2(\eta) = \varphi_{21}(\eta) + \varphi_{22}(\eta)$$

und setzen, sofern ζ als unabhängige Variable eingeführt wird:

$$\varphi_{21}(\eta) = \chi_{21}(\zeta), \quad \varphi_{22}(\eta) = \chi_{22}(\zeta).$$

Dann lässt sich die Gleichung (12) in die beiden einfacheren zerlegen:

(28) $$\frac{1}{\zeta}\,\chi_{21}\Big(\frac{1}{\zeta}\Big) - \frac{1}{\eta}\,\varphi_{21}\Big(\frac{1}{\eta}\Big) = h,$$

(29) $$\frac{1}{\zeta}\,\chi_{22}\Big(\frac{1}{\zeta}\Big) - \frac{1}{\eta}\,\varphi_{22}\Big(\frac{1}{\eta}\Big) = \frac{h}{\zeta}.$$

Vergleicht man nun (28) mit (21) und (29) mit (22), so erkennt man, dass $\chi_{21}(\zeta)$ aus $\varphi_{11}(\eta)$ und $\chi_{22}(\zeta)$ aus $\varphi_{12}(\eta)$ hervorgeht, indem man die erste Kugel mit der zweiten vertauscht, also g mit h, a mit b, η mit ζ. Sobald die Ausdrücke für $\chi_{21}(\zeta)$ und für $\chi_{22}(\zeta)$ gefunden sind, ist nur für ζ an die Stelle zu setzen $\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\,\eta$.

Dann hat man die Functionen $\varphi_{21}(\eta)$ und resp. $\varphi_{22}(\eta)$. Die durchgeführte Rechnung gibt nach leichter Reduction:

(30)
$$\varphi_{21}(\eta) = h\,\frac{b}{c}\,(\alpha_2 - \alpha_1) \sum_0^\infty \frac{1}{(\alpha_1^k - \alpha_2^k)\,\frac{b}{c}\,\eta - (\alpha_1^{k+1} - \alpha_2^{k+1})\left(1 - \frac{a}{c}\,\eta\right)},$$

(31)
$$\varphi_{22}(\eta) = h\,\frac{b}{c}\,(\alpha_1 - \alpha_2) \sum_1^\infty \frac{1}{(\alpha_1^k - \alpha_2^k)\left(\frac{c^2 - b^2}{ac} - \eta\right) - \frac{b}{c}\,(\alpha_1^{k+1} - \alpha_2^{k+1})}.$$

Für einen Punkt auf der Centrallinie zwischen beiden Kugeln ist hiernach die Potentialfunction

(32) $$\varphi(\eta) = \varphi_{11}(\eta) + \varphi_{12}(\eta) + \varphi_{21}(\eta) + \varphi_{22}(\eta).$$

Es handelt sich noch darum, die Convergenz der Reihen (23), (26), (30), (31) zu untersuchen. In jeder dieser Reihen ist das allgemeine Glied von der Form

$$\frac{1}{K_1\,\alpha_1^k + K_2\,\alpha_2^k},$$

und es bedeutet in einer und derselben Entwicklung K_1 in allen Gliedern dasselbe, ebenso K_2. Dividirt man nun ein Glied durch das vorhergehende, so lautet der Quotient:

$$\frac{K_1\,\alpha_1^k + K_2\,\alpha_2^k}{K_1\,\alpha_1^{k+1} + K_2\,\alpha_2^{k+1}}.$$

Bei Gleichung (18) ist aber bemerkt worden, dass $\alpha_1\,\alpha_2 = 1$ ist und dass beide Wurzeln positiv sind. Wir nehmen $\alpha_1 < 1$, folglich $\alpha_2 > 1$, und können den eben gewonnenen Quotienten so schreiben

$$\frac{\alpha_2^k\,(K_1\,\alpha_1^{2k} + K_2)}{\alpha_2^{k+1}\,(K_1\,\alpha_1^{2k+2} + K_2)} = \alpha_1 \cdot \frac{K_1\,\alpha_1^{2k} + K_2}{K_1\,\alpha_1^{2k+2} + K_2}.$$

Der Grenzwerth für $k = \infty$ ist α_1. Folglich convergiren die Reihen unter allen Umständen.

§. 50.

Fortsetzung: Grösse und Lage jeder einzelnen fingirten Ladung.

Wir betrachten zunächst die Function $\varphi_{11}(\eta)$, welche durch die Reihe (23) des vorigen Paragraphen ausgedrückt ist. Der

Nenner des allgemeinen Gliedes lässt sich leicht in die Form bringen

$$\alpha_1^k\left(1-\frac{a+b\,\alpha_1}{c}\,\eta\right)-\alpha_2^k\left(1-\frac{a+b\,\alpha_2}{c}\,\eta\right)$$

oder kürzer

(1) $$\alpha_1^k(1-\lambda_1\,\eta)-\alpha_2^k(1-\lambda_2\,\eta).$$

Hier sieht man ohne weiteres, dass $\lambda_2 > \lambda_1$ ist, denn wir haben $\alpha_2 > \alpha_1$ genommen. Bilden wir nun das Product $\lambda_1\,\lambda_2$, so findet sich:

$$\lambda_1\,\lambda_2=\frac{(a+b\,\alpha_1)(a+b\,\alpha_2)}{c^2}=\frac{a^2+ab(\alpha_1+\alpha_2)+b^2\,\alpha_1\alpha_2}{c^2}.$$

Nach der Gleichung (18) des vorigen Paragraphen ist aber $ab\,(\alpha_1+\alpha_2)=c^2-(a^2+b^2)$ und $\alpha_1\,\alpha_2=1$. Setzt man dies in die letzte Gleichung ein, so zeigt sich:

(2) $$\lambda_1\,\lambda_2=1.$$

Beide Grössen λ_1 und λ_2 sind positiv und $\lambda_2 > \lambda_1$, folglich muss $\lambda_2 > 1$ und $\lambda_1 < 1$ sein. Der Ausdruck (1) kann nun so geschrieben werden

(3) $$\alpha_1^k(1-\lambda_1\,\eta)-\alpha_2^k\left(1-\frac{1}{\lambda_1}\,\eta\right).$$

Nehmen wir $\eta \geqq 1$, so ist

$$\alpha_2^k\left(\frac{1}{\lambda_1}\,\eta-1\right)$$

jedenfalls positiv und unter keinen Umständen Null. Ferner ist

$$\frac{1}{\lambda_1}\,\eta-1>\lambda_1\,\eta-1$$

und

$$\alpha_2^k>\alpha_1^k,$$

folglich

$$\alpha_2^k\left(\frac{1}{\lambda_1}\,\eta-1\right)>\alpha_1^k\,(\lambda_1\,\eta-1)$$

oder, was dasselbe ist:

$$\alpha_1^k\,(1-\lambda_1\,\eta)-\alpha_2^k\left(1-\frac{1}{\lambda_1}\,\eta\right)>0.$$

Es kann also für $\eta \geqq 1$ der Nenner des allgemeinen Gliedes in $\varphi_{11}(\eta)$ nicht Null und deshalb $\varphi_{11}(\eta)$ nicht unendlich werden. Dasselbe lässt sich von $\varphi_{22}(\eta)$ beweisen. In entsprechender Weise findet man, dass $\chi_{12}(\zeta)$ und $\chi_{21}(\zeta)$ nicht unendlich werden können für $\zeta \geqq 1$. Für $\eta \geqq 1$ hat man aber $\infty > x \geqq a$ und für $\zeta \geqq 1$ ist $c - b \geqq x > -\infty$. Man darf also das Gültigkeitsgebiet der Ausdrücke für $\varphi_{11}(\eta)$ und $\varphi_{22}(\eta)$ einerseits und für $\varphi_{12}(\eta)$ und $\varphi_{21}(\eta)$ andererseits erweitern. Für jene darf der Punkt $(x, 0, 0)$, der anfänglich zwischen beiden Kugeln lag, durch die zweite Kugel hindurch beliebig weit auf der Axe der positiven x fortrücken, ohne dass die Ausdrücke (23) und (31) des vorigen Paragraphen irgendwo unendlich werden. Für diese darf der Punkt $(x, 0, 0)$ aus seinem anfänglichen Gebiete durch die erste Kugel hindurch in der Richtung der negativen x beliebig weit verschoben werden, ohne dass die Ausdrücke (26) und (30) des vorigen Paragraphen irgendwo unendlich grosse Werthe geben. Da nun aber die vier Functionen nur innerhalb der einen oder der anderen Kugel unendlich werden können, so liegen die Unstetigkeitspunkte von $\varphi_{11}(\eta)$ und von $\varphi_{22}(\eta)$ innerhalb der ersten Kugel und die Unstetigkeitspunkte von $\varphi_{12}(\eta)$ und von $\varphi_{21}(\eta)$ innerhalb der zweiten Kugel. Beachtet man noch, dass die Ausdrücke für $\varphi_{11}(\eta)$ und $\varphi_{12}(\eta)$ mit dem Factor g, die Ausdrücke für $\varphi_{21}(\eta)$ und $\varphi_{22}(\eta)$ mit dem Factor h behaftet sind, und erinnert sich der Bemerkung am Schlusse des §. 48, so findet sich, dass für einen Punkt auf der Centrallinie zwischen beiden Kugeln

$$V_1' = \varphi_{11}(\eta), \tag{4}$$

$$V_2' = \varphi_{12}(\eta), \tag{5}$$

$$V_3' = \varphi_{21}(\eta), \tag{6}$$

$$V_4' = \varphi_{22}(\eta). \tag{7}$$

Die Gleichungen (4) und (7) gelten auch noch für $x > c - b$, und die Gleichungen (5) und (6) für $x < a$. Danach hat man ein Mittel, die Constanten zu bestimmen, welche die Lage und die elektrische Ladung jedes Unstetigkeitspunktes angeben. Man hat nur in den Gleichungen (23), (26), (30), (31) des vorigen Paragraphen die Grösse η zu ersetzen durch $\frac{x}{a}$ und hierauf die Nenner mit denen der entsprechenden Ausdrücke in den Gleichungen (1) des vorigen Paragraphen in Uebereinstimmung zu bringen. Dann lassen die Werthe von x_k und m_k sich ohne weiteres ablesen. Man erhält

$$
(8)\quad \begin{aligned}
x_k' &= \frac{a\,c\,(\alpha_2^k - \alpha_1^k)}{a\,(\alpha_2^k - \alpha_1^k) + b\,(\alpha_2^{k+1} - \alpha_1^{k+1})},\\
m_k' &= \frac{-\,a\,b\,g\,(\alpha_2 - \alpha_1)}{a\,(\alpha_2^k - \alpha_1^k) + b\,(\alpha_2^{k+1} - \alpha_1^{k+1})};
\end{aligned}
$$

$$
(9)\quad \begin{aligned}
x_k'' &= \frac{a^2\,(\alpha_2^k - \alpha_1^k) + a\,b\,(\alpha_2^{k+1} - \alpha_1^{k+1})}{c\,(\alpha_2^k - \alpha_1^k)}\\
m_k'' &= \frac{a\,b\,g\,(\alpha_2 - \alpha_1)}{c\,(\alpha_2^k - \alpha_1^k)};
\end{aligned}
$$

$$
(10)\quad \begin{aligned}
x_k''' &= \frac{a\,c\,(\alpha_2^{k+1} - \alpha_1^{k+1})}{a\,(\alpha_2^{k+1} - \alpha_1^{k+1}) + b\,(\alpha_2^k - \alpha_1^k)},\\
m_k''' &= \frac{-\,a\,b\,h\,(\alpha_2 - \alpha_1)}{a\,(\alpha_2^{k+1} - \alpha_1^{k+1}) + b\,(\alpha_2^k - \alpha_1^k)};
\end{aligned}
$$

$$
(11)\quad \begin{aligned}
x_k'''' &= \frac{(\alpha_2^k - \alpha_1^k)\,(c^2 - b^2) - a\,b\,(\alpha_2^{k+1} - \alpha_1^{k+1})}{c\,(\alpha_2^k - \alpha_1^k)},\\
m_k'''' &= \frac{a\,b\,h\,(\alpha_2 - \alpha_1)}{c\,(\alpha_2^k - \alpha_1^k)}.
\end{aligned}
$$

Diese Werthe der Constanten hat man in die Ausdrücke (7) des §. 48 einzusetzen. Dann sind die Functionen V_1', V_2', V_3', V_4' für jede beliebige Lage des Punktes (x, y, z) völlig bestimmt.

Uebrigens ist zu bemerken, dass die Lösung der Aufgabe sich durch Superposition aus vier speciellen Lösungen zusammensetzt. Es sind nemlich V_1' und V_2' die Potentialfunctionen, welche herrühren von den elektrischen Ladungen der Unstetigkeitspunkte resp. der ersten und zweiten Gruppe unter der Voraussetzung, dass g von Null verschieden und $h = 0$. Und es sind V_3' und V_4' die Potentialfunctionen, welche herrühren von den elektrischen Ladungen der Unstetigkeitspunkte resp. der dritten und vierten Gruppe, wenn $g = 0$ und h von Null verschieden.

Wir wollen noch den Satz zur Anwendung bringen, welcher in der Gleichung (6) des §. 18 ausgesprochen ist. Dabei ist nur zu beachten, dass hier $-V$ dieselbe Rolle spielt wie dort V. Wir setzen

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$$

und finden nach dem eben citirten Satze:

$$(12)\qquad \begin{aligned} \lim\,(-R\,V_1') &= \sum_0^\infty m_k', \\ \lim\,(-R\,V_2') &= \sum_1^\infty m_k'', \\ \lim\,(-R\,V_3') &= \sum_0^\infty m_k''', \\ \lim\,(-R\,V_4') &= \sum_1^\infty m_k''''. \end{aligned}$$

$$\text{für } \lim R = \infty.$$

Man kann die Elektricitätsmengen auch auf einem anderen Wege berechnen, indem man den Satz (5) des §. 12 anwendet und die Bemerkung macht, dass die Gleichung (9) desselben Paragraphen hier zutrifft, dass aber hier $-\frac{\partial V}{\partial n}$ statt N gesetzt werden muss. Bezeichnet man also mit $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ ein Oberflächenelement der ersten und resp. der zweiten Kugel und mit n die nach innen gezogene Normale, so findet sich

$$(13)\qquad \begin{aligned} -\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial V_1'}{\partial n}\right)_0 d\sigma_1 &= \sum_0^\infty m_k', \\ -\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial V_2'}{\partial n}\right)_0 d\sigma_2 &= \sum_1^\infty m_k'', \\ -\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial V_3'}{\partial n}\right)_0 d\sigma_2 &= \sum_0^\infty m_k''', \\ -\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial V_4'}{\partial n}\right)_0 d\sigma_1 &= \sum_1^\infty m_k''''. \end{aligned}$$

Dagegen ist

$$(14)\qquad \int\left(\frac{\partial V_1'}{\partial n}\right)_0 d\sigma_2 = \int\left(\frac{\partial V_2'}{\partial n}\right)_0 d\sigma_1 = \int\left(\frac{\partial V_3'}{\partial n}\right)_0 d\sigma_1 = \int\left(\frac{\partial V_4'}{\partial n}\right)_0 d\sigma_2 = 0,$$

wie ebenfalls aus dem Satze (5) des §. 12 hervorgeht.

Es ist leicht zu beweisen, dass die Reihen auf der rechten Seite der Gleichungen (12) convergent sind.

§. 51.

Fortsetzung: Die wirkliche Ladung der Kugel-Oberflächen.

Die Vertheilung von Elektricitätsmengen über die Unstetigkeitspunkte innerhalb der beiden Kugeln ist nur eine Fiction, mit der wir nichts anderes bezweckt haben, als die Function V' herzustellen, die im Raume ausserhalb der Kugeln mit der gesuchten Function V übereinstimmt. Diese Function V rührt her von der beim Gleichgewicht wirklich eingetretenen Elektricitätsvertheilung auf den beiden Kugeloberflächen. Wie nun V' in vier Bestandtheile zerlegt ist, so kann man auch

(1) $$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

setzen und die Bestimmung treffen, dass im Raume ausserhalb der Kugeln und auf ihren Oberflächen

(2) $$V_1 = V_1', \quad V_2 = V_2', \quad V_3 = V_3', \quad V_4 = V_4'$$

sein soll. In das Innere der Kugeln haben wir jede der Functionen V_1, V_2, V_3, V_4 von der Oberfläche aus stetig so fortzusetzen, dass überall die partielle Differentialgleichung von Laplace erfüllt ist. Man kann noch bemerken, dass $V_1 + V_2 = g$ ist im Innern der ersten Kugel, und $= 0$ im Innern der zweiten Kugel, und ferner, dass $V_3 + V_4 = h$ ist im Innern der zweiten und $= 0$ im Innern der ersten Kugel.

Wir wollen die Aufgabe so zerlegen, dass zuerst g verschieden von Null und $h = 0$ genommen wird, und nachher umgekehrt $g = 0$ und h verschieden von Null. Zuerst also $h = 0$. Dann ist $V_3 = V_4 = 0$. Es fragt sich, wie gross in einem Punkte der ersten oder der zweiten Kugeloberfläche die Dichtigkeit der Elektricität ist, von welcher die Potentialfunction $V = V_1 + V_2$ herrührt. Auf diese Frage gibt die Gleichung (8) des §. 45 Antwort. Bezeichnen wir mit M_1 und M_2 die gesammte Elektricitätsmenge auf der ersten und resp. zweiten Kugeloberfläche, so findet sich

(3) $$M_1 = \frac{1}{4\pi}\int \left\{ \left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_{+0} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_{+0} \right\} d\sigma_1,$$

(4) $$M_2 = \frac{1}{4\pi}\int \left\{ \left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_{+0} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_{+0} \right\} d\sigma_2.$$

Hier kommen die Derivirten in unendlich kleiner Entfernung von der Oberfläche, aber ausserhalb, in Betracht. Für sie ist

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_{+0} = \left(\frac{\partial V_1'}{\partial p}\right)_{+0} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_{+0} = \left(\frac{\partial V_2'}{\partial p}\right)_{+0}.$$

Die Functionen V_1' und V_2' haben die Eigenschaft, dass sie selbst und ihre Derivirten beim Durchgang durch die Oberfläche der Kugeln sich stetig ändern. D. h. es ist

$$\left(\frac{\partial V_1'}{\partial p}\right)_{-0} = \left(\frac{\partial V_1'}{\partial p}\right)_{+0} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial V_2'}{\partial p}\right)_{-0} = \left(\frac{\partial V_2'}{\partial p}\right)_{+0}.$$

Gibt man nun noch Acht auf die Gleichungen (13) und (14) des vorigen Paragraphen, so erhält man (weil $n = -p$ für $p < 0$):

(5) $$M_1 = \sum_0^\infty m_k',$$

(6) $$M_2 = \sum_1^\infty m_k''.$$

Es sei ferner $g = 0$, h verschieden von Null, also $V_1 = V_2 = 0$. Wir bezeichnen jetzt mit M_3 und M_4 die Elektricitätsmenge auf der zweiten und resp. der ersten Kugeloberfläche, von welcher die Potentialfunction $V = V_3 + V_4$ herrührt. Zu ihrer Berechnung ist derselbe Weg einzuschlagen, wie vorher zur Berechnung von M_1 und M_2. Es findet sich

(7) $$M_3 = \sum_0^\infty m_k''',$$

(8) $$M_4 = \sum_1^\infty m_k''''.$$

Dieselben Elektricitätsmengen, welche vorher bei der fingirten Vertheilung in den Unstetigkeitspunkten irgend einer Gruppe concentrirt waren, sind also jetzt in Wirklichkeit stetig über die Oberfläche der zugehörigen Kugel ausgebreitet.

§. 52.

Fortsetzung: Die Kugeln berühren sich.

Sollen die beiden Kugeln sich berühren, so ist $g = h$, $c = a + b$ und die Gleichung (18) des §. 49 lautet jetzt

(1) $$\alpha^2 - 2\,\alpha + 1 = 0.$$

Folglich ist $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Die Ausdrücke (8), (9), (10), (11) des

§. 50 nehmen die Form $\frac{0}{0}$ an. Ihre Werthe sind aber leicht zu ermitteln. Man erhält

$$(2)\qquad \begin{aligned} x'_k &= \frac{kac}{kc+b}, & m'_k &= \frac{-abg}{kc+b}; \\ x''_k &= \frac{a(kc+b)}{kc}, & m''_k &= \frac{abg}{kc}; \\ x'''_k &= \frac{(k+1)ac}{kc+a}, & m'''_k &= \frac{-abg}{kc+a}; \\ x''''_k &= \frac{a(kc-b)}{kc}, & m''''_k &= \frac{abg}{kc}. \end{aligned}$$

Hier entsteht nun die Schwierigkeit, dass die Reihen (7) des §. 48, sowie die Reihen (12) des §. 50, einzeln genommen, nicht mehr convergiren. Das Problem ist aber bei den in (2) ausgesprochenen Daten ein durchaus bestimmtes, man wird also auch eine einzige bestimmte Lösung zu verlangen haben. Diese Lösung ist vollständig hergestellt, wenn man für jeden Punkt des äusseren Raumes die Functionen $V_1 + V_4$ und $V_2 + V_3$ kennt, von denen die erste herrührt von der Elektricität auf der ersten, die andere von der Elektricität auf der zweiten Kugel. Aus diesen Functionen lässt sich dann nach § 45 (8) die Dichtigkeit der Elektricität in jedem Punkte der beiden Kugeloberflächen finden, und es lässt sich die gesammte Ladung $M_1 + M_4$ für die erste Kugel und $M_2 + M_3$ für die zweite Kugel berechnen.

Wir fangen mit dieser letzten Aufgabe an. Es ist, wie im vorigen Paragraphen nachgewiesen worden:

$$(3)\qquad M_1 + M_4 = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial(V'_1 + V'_4)}{\partial p}\right)_{+0} d\sigma_1,$$

$$(4)\qquad M_2 + M_3 = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial(V'_2 + V'_3)}{\partial p}\right)_{+0} d\sigma_2,$$

wenn man in (3) über die erste, in (4) über die zweite Kugeloberfläche integrirt. Die Integrale auf der rechten Seite geben aber, wie ebenfalls im vorigen Paragraphen auseinandergesetzt ist, die Summe der fingirten Ladungen in den Unstetigkeitspunkten im Innern der einen und der andern Kugel an. Also erhält man

$$(5)\qquad M_1 + M_4 = \sum_0^\infty m'_k + \sum_1^\infty m''''_k,$$

$$(6) \qquad M_2 + M_3 = \sum_1^\infty m_k'' + \sum_0^\infty m_k''''.$$

Diese beiden letzten Gleichungen sind nun insofern noch unbestimmt, als jede der vier Reihen, einzeln genommen, divergirt. In Gleichung (5) besteht die erste Reihe aus lauter negativen, die zweite aus lauter positiven Gliedern, und umgekehrt ist es in Gleichung (6). Vereinigt man die Glieder auf der rechten Seite zu einer einzigen Reihe, so lässt sich je nach dem Gesetze, nach welchem positive und negative Glieder auf einander folgen, jede beliebige Zahl als Summe herstellen.*) Nach der Natur des Problems muss aber in jeder der beiden Gleichungen eine einzige bestimmte Zahl als die richtige Summe zu Stande kommen, und es fragt sich also, welche Anordnung der Glieder die allein richtige ist.

Um darüber ins Klare zu kommen, gehen wir auf den Satz (6) des §. 18 zurück, wonach

$$(7) \qquad M_1 + M_4 = \lim \{ - R\,(V_1' + V_4') \},$$

$$(8) \qquad M_2 + M_3 = \lim \{ - R\,(V_2' + V_3') \}$$

$$\text{für } \lim R = \infty.$$

Es genügt, die Potentialfunctionen in (7) für solche Punkte der positiven Abscissenaxe herzustellen, deren Abscisse $x > c + b$ ist, und dann $\lim x = \infty$ zu nehmen.

Statt aber die wahren Werthe der Potentialfunctionen in Rechnung zu bringen, wollen wir je einen zu grossen und einen zu kleinen nehmen. Wir gelangen dazu durch die Bemerkung, dass $x_{k+1}' > x_{k+1}'''' > x_k'$. Durchläuft man also die Centrallinie im Innern der ersten Kugel im Sinne der wachsenden x, so gelangt man abwechselnd zu elektrischen Ladungen der ersten und der vierten Gruppe. Nun kann man sich jede Ladung der vierten Gruppe verschoben denken, das eine Mal in den nächstvorhergehenden, das andere Mal in den nächstfolgenden Unstetigkeitspunkt der ersten Gruppe. Dadurch erhält man im ersten Falle im Punkte x_k' die Ladung $m_k' + m_{k+1}''''$, und dies gilt von $k = 0$ an. Im andern Falle hat man im Punkte x_0' die Ladung m_0', und im Punkte x_k' (mit $k = 1$ anfangend) die Ladung $m_k' + m_k''''$. Durch die erste

---

*) Ueber diesen Satz vergleiche man: Riemann, partielle Differentialgleichungen. Bearbeitet von Hattendorff. § 20.

Verschiebung werden aber die Ladungen der vierten Gruppe von dem Punkte (x, 0, 0) zu weit entfernt, im zweiten Falle werden sie ihm zu sehr genähert. Gibt man dabei Acht auf die Form der Potentialfunction und auf die Vorzeichen der Ladungen, so ergibt sich bei der abgeänderten Vertheilung im ersten Falle ein zu grosser Werth, im zweiten Falle ein zu kleiner Werth der Potentialfunction, verglichen mit dem wahren Werthe, der bei richtiger Vertheilung zu Stande kommen muss. Wir haben danach

$$(9)\qquad \sum_0^\infty \frac{-m'_k - m''''_{k+1}}{x - x'_k} > V'_1 + V'_4 > -\frac{m_0}{x} + \sum_1^\infty \frac{-m'_k - m''''_k}{x - x'_k}.$$

Die beiden unendlichen Reihen, welche in (9) vorkommen, sind (für $x > a$ und um so mehr für $x > c + b$) unter allen Umständen convergent, auch wenn man für die Constanten die Werthe aus den Gleichungen (2) einsetzt. Multiplicirt man nun mit x und geht zu den Grenzwerthen über für $\lim x = \infty$, so ergibt sich

$$\sum_0^\infty (-m'_k - m''''_{k+1}) > \lim \{x(V'_1 + V'_4)\} > -m_0 + \sum_1^\infty (-m'_k - m''''_k).$$

Hier kommen links und rechts in den Reihen dieselben Glieder in derselben Reihenfolge vor. Die doppelte Ungleichung geht also in eine Gleichung über, nemlich:

$$\lim \{x(V'_1 + V'_4)\} = \sum_0^\infty (-m'_k - m''''_{k+1})$$

$$= \sum_0^\infty \left(\frac{abg}{kc + b} - \frac{abg}{(k+1)c}\right).$$

Danach erhalten wir aus Gleichung (7):

$$(10)\qquad M_1 + M_4 = -\frac{abg}{c} \sum_0^\infty \left(\frac{1}{k + \frac{b}{c}} - \frac{1}{k+1}\right).$$

In der Reihe auf der rechten Seite ist die Folge der Glieder keine willkürliche mehr, sondern genau vorgeschrieben. Die Reihe ist convergent. Man kann auch je zwei zusammengehörige Glieder vereinigen und erhält:

$$(11)\qquad M_1 + M_4 = -\frac{a^2 bg}{c^2} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\left(k + \frac{b}{c}\right)(k+1)}.$$

Die unendliche Reihe lässt sich in ein bestimmtes Integral verwandeln. Es ist nemlich für ein positives k:

$$\int_0^1 t^{k-1}\,dt = \frac{1}{k}.$$

Folglich können wir schreiben

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+\frac{b}{c}} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1\left(t^{k+\frac{b}{c}-1} - t^k\right)dt$$

$$= \int_0^1\left(t^{\frac{b}{c}-1} - 1\right)dt\sum_0^{\infty} t^k = \int_0^1 \frac{t^{-\frac{a}{c}} - 1}{1-t}\,dt.$$

Benutzt man dies für Gleichung (10), so erhält man schliesslich:

$$(12)\qquad M_1 + M_4 = -\frac{abg}{c}\int_0^1 \frac{t^{-\frac{a}{c}} - 1}{1-t}\,dt.$$

In entsprechender Weise verfahren wir zur Berechnung von $M_2 + M_3$. Das Resultat lautet:

$$(13)\qquad M_2 + M_3 = -\frac{abg}{c}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+\frac{a}{c}} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= -\frac{ab^2g}{c^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\left(k+\frac{a}{c}\right)(k+1)}\right).$$

Auch hier kann man die unendliche Reihe durch ein bestimmtes Integral summiren, nemlich:

$$(14)\qquad M_2 + M_3 = -\frac{abg}{c}\int_0^1 \frac{t^{-\frac{b}{c}} - 1}{1-t}\,dt.$$

Nun lassen sich auch die richtigen Ausdrücke für die Potentialfunctionen $V_1' + V_4'$ und $V_2' + V_3'$ leicht herstellen. Zunächst hat man:

$$V_1' + V_4' = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{-m_k'}{\sqrt{(x-x_k')^2 + y^2 + z^2}}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-m_k''''}{\sqrt{(x-x_k'''')^2 + y^2 + z^2}}.$$

Die beiden Reihen, einzeln genommen, sind divergent. Die erste hat lauter positive, die zweite lauter negative Glieder. Vereinigt man die Glieder zu den Bestandtheilen einer einzigen Reihe, so kann man je nach der Anordnung jede beliebige Summe zu Stande bringen. Nach der Natur der Aufgabe hat man aber für irgend einen gegebenen Punkt (x, y, z) nur e i n e n bestimmten Werth zu erwarten. Folglich kann auch nur eine einzige Anordnung der Glieder die richtige sein, und man sieht leicht, dass es diejenige ist, für welche die Gleichung (7) den richtigen Werth von $M_1 + M_4$ liefert. Da dieser nun schon bekannt ist, so hat es keine Schwierigkeit, jene allein richtige Anordnung ausfindig zu machen. Man erhält:

$$(15)\qquad V_1' + V_4'$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{-m_k'}{\sqrt{(x - x_k')^2 + y^2 + z^2}} - \frac{m_{k+1}''''}{\sqrt{(x - x_{k+1}'''')^2 + y^2 + z^2}} \right\}$$

und in entsprechender Weise:

$$(16)\qquad V_2' + V_3'$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{-m_k'''}{\sqrt{(x - x_k''')^2 + y^2 + z^2}} - \frac{m_{k+1}''}{\sqrt{(x - x_{k+1}'')^2 + y^2 + z^2}} \right\}.$$

Die Reihen in (15) und (16) sind convergent, wenn der Punkt (x, y, z) nicht in einen Unstetigkeitspunkt der ersten, resp. der zweiten Kugel fällt.

Ueber die Integrale (12) und (14) ist noch eine Bemerkung zu machen. Die Integration lässt sich nemlich in geschlossener Form ausführen, wenn $\frac{a}{c}$ $\left(\text{und folglich auch } \frac{b}{c}\right)$ ein rationaler Bruch ist. Es sei $\frac{a}{c} = \frac{p}{q}$, so dass p und q ganze Zahlen, und zwar relative Primzahlen sind. Dann setze man in (12) $t = s^q$. Dadurch erhält man

$$(12^*)\qquad M_1 + M_4 = -q\,\frac{a\,b\,g}{c} \int_0^1 \frac{s^{q-p-1} - s^{q-1}}{1 - s^q}\,ds.$$

Ebenso ergibt sich aus (14)

$$(14^*)\qquad M_2 + M_3 = -q\,\frac{a\,b\,g}{c} \int_0^1 \frac{s^{p-1} - s^{q-1}}{1 - s^q}\,ds.$$

Die Integration geschieht dann nach bekannten Methoden durch Zerlegung in Partialbrüche.

Sind die Brüche $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ irrational, so kann man auf die Gleichungen (10) und (13) zurückgehen und zur Werthermittelung der unendlichen Reihen die Tafel zu Hülfe nehmen, welche Gauss der Abhandlung: Disquisitiones circa seriem infinitam*) beigegeben hat. Gauss schreibt:

$$(17) \qquad \Psi(z) = \lim \left\{ \lg m - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{z+k+1} \right\}$$

für $\lim m = \infty$. Folglich ist

$$(10^*) \qquad M_1 + M_4 = \frac{a\,b\,g}{c} \left\{ \Psi\left(-\frac{a}{c}\right) - \Psi(0) \right\}$$

und

$$(13^*) \qquad M_2 + M_3 = \frac{a\,b\,g}{c} \left\{ \Psi\left(-\frac{b}{c}\right) - \Psi(0) \right\}.$$

Das Resultat der theoretischen Entwicklung stimmt überein mit dem Ergebnis der experimentellen Untersuchung.

§. 53.

Fortsetzung: Bewegung der Kugeln.

Wir kehren zurück zu der Voraussetzung, dass die Entfernung der Kugelmittelpunkte grösser ist als die Summe der Radien:

$$c > a + b.$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$(1) \qquad -a\,b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{a\,(\alpha_2^k - \alpha_1^k) + b\,(\alpha_2^{k+1} - \alpha_1^{k+1})} = E_1,$$

$$(2) \qquad a\,b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{c\,(\alpha_2^k - \alpha_1^k)} = E_2,$$

$$(3) \qquad -a\,b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{a\,(\alpha_2^{k+1} - \alpha_1^{k+1}) + b\,(\alpha_2^k - \alpha_1^k)} = E_3,$$

$$(4) \qquad M_1 + M_4 = \mathfrak{M}_1,$$

$$(5) \qquad M_2 + M_3 = \mathfrak{M}_2$$

und machen die Bemerkung, dass $\mathfrak{M}_1$ die gesammte Ladung der

*) Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. II. Gottingae 1813. — Gauss' Werke. Bd. 3. Göttingen 1866.

ersten, $\mathfrak{M}_2$ die gesammte Ladung der zweiten Kugel ist. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (8), (9), (10), (11) des §. 50 und (5), (6), (7), (8) des §. 51 haben wir dann

$$\mathfrak{M}_1 = g E_1 + h E_2, \tag{6}$$

$$\mathfrak{M}_2 = g E_2 + h E_3. \tag{7}$$

Hieraus berechnet sich

$$g = \frac{\mathfrak{M}_1 E_3 - \mathfrak{M}_2 E_2}{E_1 E_3 - E_2^2}, \tag{8}$$

$$h = \frac{\mathfrak{M}_2 E_1 - \mathfrak{M}_1 E_2}{E_1 E_3 - E_2^2}. \tag{9}$$

Dabei ist zu beachten, dass $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ gegebene constante Grössen sind. E_1, E_2 und E_3 hängen ab von a, b, c und den Wurzeln α_1 und α_2 der Gleichung (18) des §. 49. Diese Wurzeln sind aber selbst abhängig von a, b, c. Da nun a und b constant sind und nur der Abstand c der Kugelmittelpunkte sich ändern kann, so sieht man, dass E_1, E_2, E_3 und folglich auch g und h Functionen von c sind.

Um die Bewegung der Kugeln zu untersuchen, hat man das Potential der gesammten Elektricitätsmenge auf sich selbst auszudrücken. Man erhält nach §. 47, (4):

$$P = \frac{1}{2} \int V \, d\varepsilon, \tag{10}$$

wenn das Integral über die Oberfläche beider Kugeln erstreckt wird. Es ist aber $V = g$ auf der ersten, $V = h$ auf der zweiten Kugel. Ferner ergibt sich durch Integration über die erste Kugel:

$$\int d\varepsilon = \mathfrak{M}_1;$$

und durch Integration über die zweite Kugel:

$$\int d\varepsilon = \mathfrak{M}_2.$$

Folglich ist

$$P = \frac{1}{2} g \mathfrak{M}_1 + \frac{1}{2} h \mathfrak{M}_2,$$

und wenn man aus (8) und (9) die Werthe von g und h einführt:

$$P = \frac{\mathfrak{M}_1^2 E_3 - 2 \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 E_2 + \mathfrak{M}_2^2 E_1}{2(E_1 E_3 - E_2^2)}. \tag{11}$$

Aendert sich der Abstand der Kugelmittelpunkte um dc, so wird die dabei geleistete Arbeit ausgedrückt durch

$$\frac{dP}{dc}\,dc.$$

Die Kugeln wirken also auf einander ebenso, als ob ihre Mittelpunkte sich mit der Kraft

$$\frac{dP}{dc}$$

abstiessen.*)

*) Die Aufgabe der §§. 48 bis 53 hat zuerst Poisson mathematisch behandelt in zwei Aufsätzen, welche unter den Mémoires de l'institut de France 1811 abgedruckt sind. Ferner sind zu citiren:

Plana. Sur la distribution de l'électricité à la surface de deux sphères. (Memorie dell' accademia di Torino. T. 7. 1845.)

Kirchhoff. Ueber die Vertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln. (Borchardt, Journal Bd. 59. S. 89.)

Murphy, R. Elementary principles of the theories of electricity, heat and molecular actions. Part I, Chapter V. Cambridge 1833.

Thomson, W. On the mutual attraction or repulsion between two electrified spherical conductors. (Philosophical Magazine. Series 5, Vol. IV.)

Man vergleiche auch die Lehrbücher:

Riess. Die Lehre von der Reibungs-Elektricität. Bd. 1. Berlin 1853.

Kötteritzsch. Lehrbuch der Elektrostatik. Leipzig 1872.

Die oben gegebene Entwicklung ist Riemann's Eigenthum.

Die experimentellen Untersuchungen sind zuerst von Coulomb angestellt. (Mémoires de l'Académie de Paris 1785—1788.)

Fünfter Abschnitt.

Galvanische Ströme.

§. 54.

Specifische Stromintensität.

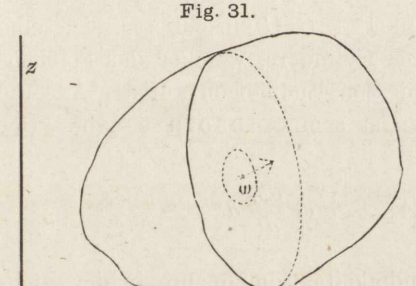
Wir betrachten jetzt den Fall, dass in den Leitern die beiden Elektricitäten fortwährend geschieden werden. Die scheidenden Kräfte setzen wir als bekannt voraus.

In jedem Leiter ist eine unendliche Menge elektrischer Theilchen enthalten. Soll nach aussen keine Wirkung ausgeübt werden, so muss in jedem, noch so kleinen elektrischen Theilchen des Leiters die algebraische Summe der Elektricitätsmengen gleich Null sein.

Die Elektricitätsmenge ε, die in einem elektrischen Theilchen vorhanden, ist das Maass der Anziehung oder Abstossung, welche es in der Einheit der Entfernung auf die elektrische Einheit ausübt.

Wir nehmen im Innern des Leiters eine beliebige Fläche (**Fig. 31**) und betrachten an irgend einer Stelle derselben ein Flächenelement ω. Die Normale dieses Flächenelementes geht von ihm aus in zwei verschiedenen Richtungen, die wir als die Richtungen der positiven und der negativen Normale unterscheiden. Die positive (resp. negative) Seite der Fläche ist dem Raume zugekehrt, in welchen die positive (resp. negative) Normale eintritt. In dem Zeitelement dt gehen durch das Flächenelement ω sehr viele elektrische Theilchen von der negativen Seite der Fläche nach der positiven und umgekehrt von der positiven nach der negativen hinüber.

Fig. 31.

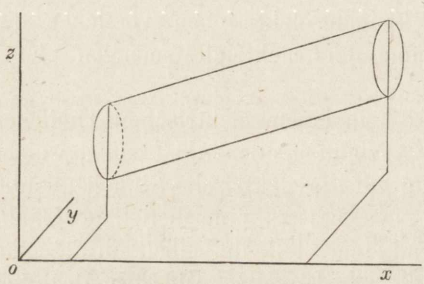


Die algebraische Summe der Elektricitätsmengen, welche in der Zeit dt durch das Flächenelement ω von der negativen auf die positive Seite übergehen, vermindern wir um die algebraische Summe der Elektricitätsmengen, welche in derselben Zeit durch dasselbe Flächenelement von der positiven auf die negative Seite übergehen. Die Differenz dividiren wir durch die Grösse ω des Flächenelementes und durch dt. Der Quotient soll die specifische Stromintensität in der Richtung der positiven Normale des Flächenelementes genannt werden. Bezeichnen wir dieselbe mit i, so ist hiernach

$$i\,\omega\,dt$$

die Elektricitätsmenge, welche in der Zeit dt durch das Flächenelement ω von der negativen auf die positive Seite mehr übertritt als von der positiven auf die negative.

Fig. 32.



Das Flächenelement liege (Fig. 32) rechtwinklig zu der Axe der x. Die elektrischen Theilchen werden durch dasselbe im allgemeinen in sehr verschiedenen Richtungen mit sehr verschiedenen Geschwindigkeiten hindurchgehen. Wir betrachten zunächst nur eine einzige Geschwindigkeit v, deren Richtung mit den positiven Coordinatenaxen die Winkel A, B, C einschliesse. Dieselbe Richtung geben wir der Axe eines Cylinders, welcher das Flächenelement ω zur Basis hat, und dessen Endflächen auf der Axe die Länge $v\,dt$ abschneiden. Dabei ist v eine absolute Zahl. Der Inhalt des Cylinders findet sich

$$(1) \qquad \pm\,\omega\,v\,dt\cos A = \pm\,\omega\,\frac{dx}{dt}\,dt,$$

da $v\cos A = \frac{dx}{dt}$ die Geschwindigkeits-Componente in der Richtung der x ist. In dem Ausdrucke (1) ist das positive oder das negative Vorzeichen gültig, je nachdem $\frac{dx}{dt}$ positiv oder negativ ist. Wir nehmen an, dass zur Zeit t und während des nächstfolgenden Zeitelementes dt die Elektricitätsmengen, die mit der vorgeschriebenen Geschwindigkeit v in der gegebenen Richtung sich bewegen, in unendlicher Nähe des Punktes (x, y, z) völlig gleichmässig vertheilt vorkommen. Nun sei zur Zeit t das an den Punkt (x, y, z) anstossende Raumelement dS mit elektrischen Theilchen von der fraglichen Geschwindigkeit erfüllt, deren Elektricitätsmenge die algebraische Summe $\sum \varepsilon$ habe. Dann sieht man, dass

$$\pm \frac{\sum \varepsilon\, \omega \frac{dx}{dt}\, dt}{dS} = \pm \frac{\omega\, dt \sum \varepsilon \frac{dx}{dt}}{dS} \tag{2}$$

die algebraische Summe der Elektricitätsmenge derjenigen Theilchen ist, welche mit der vorgeschriebenen Geschwindigkeit behaftet den Cylinder zur Zeit $t + dt$ erfüllen. Diese und nur diese sind es aber, die während des vorhergehenden Zeitelementes dt in der vorgeschriebenen Richtung die Basisfläche ω des Cylinders mit der Geschwindigkeit v durchschritten haben.

Wiederholt man diese Betrachtung für jede Richtung und jede Geschwindigkeit, so sind alle elektrischen Theilchen berücksichtigt, welche nach Ablauf der Zeit t in dem nächstfolgenden Zeitelement dt überhaupt durch das Flächenelement ω hindurchgehen. Man erhält dann so viel Ausdrücke von der Form (2), als Geschwindigkeiten nach Grösse und Richtung verschieden vorkommen. Diese Ausdrücke lassen sich in zwei Gruppen zusammenfassen, je nachdem $\frac{dx}{dt}$ positiv oder negativ ist. Für die erste Gruppe gibt der Ausdruck

$$\frac{\omega\, dt \sum \varepsilon \frac{dx}{dt}}{dS} \tag{3}$$

die algebraische Summe der Elektricitätsmengen, welche während des betrachteten Zeitelementes dt von der negativen auf die positive Seite von ω übergehen. Man hat dann aber in (3) die Summirung über alle elektrischen Theilchen zu erstrecken, welche mit positiver Geschwindigkeits-Componente $\frac{dx}{dt}$ behaftet in dem Raumelement dS vorkommen. Ebenso erhält man für die zweite Gruppe

$$-\frac{\omega\, dt \sum \varepsilon \frac{dx}{dt}}{dS} \tag{4}$$

als algebraische Summe der Elektricitätsmengen, die von der positiven auf die negative Seite von ω übergehen. Die Summirung in (4) bezieht sich auf alle in dS enthaltenen Theilchen, deren Geschwindigkeits-Componente $\frac{dx}{dt}$ negativ ist. Um daher der Definition gemäss die specifische Stromintensität in der Richtung der x zu berechnen, hat man die Summe (4) von (3) zu subtrahiren und die Differenz durch $\omega\, dt$ zu dividiren. In entsprechender Weise verfahren wir für die Richtungen der beiden anderen Axen.

Bezeichnen wir also mit i_1, i_2, i_3 die specifischen Stromintensitäten in den Richtungen der drei Coordinatenaxen, so ergeben sich für sie die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
i_1\, dS &= \sum \varepsilon \frac{dx}{dt}, \\
i_2\, dS &= \sum \varepsilon \frac{dy}{dt}, \\
i_3\, dS &= \sum \varepsilon \frac{dz}{dt}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Die Summirungen beziehen sich auf alle elektrischen Theilchen, welche zur Zeit t in dem an den Punkt (x, y, z) angrenzenden Raumelement dS vorhanden sind. Für jedes Theilchen ist seine Elektricitätsmenge mit der zugehörigen Geschwindigkeits-Componente zu multipliciren und alle so gebildeten Producte sind zu summiren.

Aus den drei Grössen i_1, i_2, i_3 lässt sich die specifische Stromintensität in irgend einer Richtung ableiten. Es sei $\frac{dp}{dt}$ die Geschwindigkeits-Componente eines einzelnen elektrischen Theilchens in der Richtung, welche mit den positiven Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ einschliesst. Dann haben wir

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dx}{dt}\cos\alpha + \frac{dy}{dt}\cos\beta + \frac{dz}{dt}\cos\gamma. \tag{6}$$

Bezeichnen wir mit $i_{\alpha\beta\gamma}$ die specifische Stromintensität in derselben Richtung, so erhalten wir entsprechend den drei Gleichungen (5):

$$i_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\sum \varepsilon \frac{dp}{dt}}{dS}$$

und hieraus unter Benutzung der Gleichungen (6) und (5):

$$i_{\alpha\beta\gamma} = i_1 \cos\alpha + i_2 \cos\beta + i_3 \cos\gamma. \tag{7}$$

Wir wollen nun eine Richtung aufsuchen, in welcher die specifische Stromintensität i durch die Gleichung ausgedrückt wird:

$$i = \sqrt{i_1^2 + i_2^2 + i_3^2}. \tag{8}$$

Sind a, b, c die Winkel, welche diese Richtung mit den Coordinatenaxen einschliesst, so ergeben sich zu ihrer Bestimmung die Gleichungen:

$$\cos a = \frac{i_1}{i}, \quad \cos b = \frac{i_2}{i}, \quad \cos c = \frac{i_3}{i}. \tag{9}$$

Denn durch diese Werthe geht die Gleichung (7) in (8) über, wenn $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$ gesetzt wird. Man kann aber auch direct von (9) zu (8) gelangen, da bekanntlich

$$\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 = 1.$$

Um die Bedeutung der specifischen Stromintensität i zu erkennen, deren Richtung durch die Gleichungen (9) festgelegt wird, führen wir die Werthe von i_1, i_2, i_3 aus (9) in (7) ein. Dadurch ergibt sich:

$$i_{\alpha\beta\gamma} = i\,(\cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma). \tag{10}$$

Die Klammergrösse ist aber $= \cos \delta$, wenn δ den Winkel der beiden Richtungen (a, b, c) und (α, β, γ) bezeichnet. Wir haben also kürzer:

$$i_{\alpha\beta\gamma} = i \cos \delta. \tag{11}$$

Speciell ergibt sich

$$\begin{aligned} i_{\alpha\beta\gamma} &= i \quad \text{für } \delta = 0, \\ i_{\alpha\beta\gamma} &= 0 \quad \text{für } \delta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Die durch die Gleichungen (9) festgelegte Richtung hat also die Eigenschaft, dass rechtwinklig zu ihr die specifische Stromintensität gleich Null ist, in ihr selbst aber ein Maximum. Diese Richtung ist demnach die Richtung der Strömung. Kennt man im Innern eines Leiters an irgend einer Stelle (x, y, z) die specifischen Stromintensitäten in drei auf einander rechtwinkligen Richtungen, so findet sich daraus die Richtung der Strömung und die specifische Stromintensität in dieser Richtung nach demselben Gesetze, welches für die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten und für die Zusammensetzung der Kräfte gilt. Man kann dasselbe das Gesetz vom Parallelepipedon der specifischen Stromintensitäten nennen.

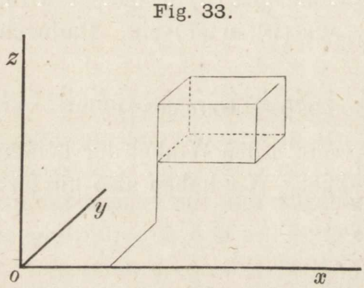
§. 55.

Freie Elektricität. Die Gleichung: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial i_1}{\partial x} + \frac{\partial i_2}{\partial y} + \frac{\partial i_3}{\partial z}\right)$.

Unter der freien Elektricität, welche in einem Körperelement resp. in einem Oberflächenelement enthalten ist, verstehen wir die algebraische Summe der in dem Körperelement, resp. dem Oberflächenelement überhaupt vorhandenen Elektricitätsmengen. Dividiren wir diese Summe durch den Rauminhalt des Körperelementes, resp. durch den Flächeninhalt des Oberflächenelementes, so ergibt sich ein Quotient, der die Dichtigkeit der freien Elektricität an der betreffenden Stelle genannt wird. Wir bezeichnen ihn mit ρ.

Im Innern eines Leiters werde nun ein unendlich kleines Parallelepipedon betrachtet, dessen Kanten von der Länge dx, dy, dz den Coordinatenaxen parallel laufen. Der dem Anfangspunkte zunächst gelegene Eckpunkt habe die Coordinaten x, y, z (**Fig. 33**). Es handelt sich um die Berechnung der Elektricitätsmenge, um welche während eines Zeitelementes dt sich die freie Elektricität im Innern des Parallelepipedon vermehrt. Dazu hat man den Durchgang durch die sechs Begrenzungsflächen zu betrachten. Rechtwinklig zur Axe der x liegen zwei Seitenflächen, jede vom Flächeninhalt $dy\,dz$. In der einen haben alle Punkte die erste Coordinate $= x$, in der anderen $= x + dx$. Durch jene strömt in der Zeit dt die Elektricitätsmenge

Fig. 33.



$$i_1\, dy\, dz\, dt,$$

durch diese die Elektricitätsmenge

$$\left(i_1 + \frac{\partial i_1}{\partial x} dx\right) dy\, dz\, dt.$$

Die zuerst berechnete Elektricitätsmenge tritt in das Parallepipedon ein, die zweite tritt aus, und es ergibt sich als Zuwachs für das Innere:

$$-\frac{\partial i_1}{\partial x} dx\, dy\, dz\, dt.$$

In derselben Weise berechnen wir die Zunahmen, welche von dem Durchgang durch die Seitenflächen herrühren, auf denen die y Axe und resp. die z Axe rechtwinklig stehen. Wir erhalten

$$-\frac{\partial i_2}{\partial y}\,dx\,dy\,dz\,dt,$$

$$-\frac{\partial i_3}{\partial z}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

Die ganze Zunahme an freier Elektricität, welche dem unendlich kleinen Parallelepipedon in dem Zeitelement dt zu Theil wird, findet sich, wenn man die drei letzten Ausdrücke addirt.

Andererseits hat man zu beachten, dass

$$\rho\,dx\,dy\,dz$$

die gesammte freie Elektricität ist, welche zur Zeit t in dem Parallelepipedon sich befindet. Diese erleidet in dem nächsten Zeitelement dt die Zunahme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

Wir haben danach für dieselbe Zunahme zwei verschiedene Ausdrücke gewonnen und erhalten durch ihre Gleichsetzung die wichtige Gleichung:

$$(1)\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial i_1}{\partial x} + \frac{\partial i_2}{\partial y} + \frac{\partial i_3}{\partial z}\right).$$

§. 56.

Die Scheidungskraft, die specifische Stromintensität und der specifische Widerstand.

Für einen beliebigen Leiter besteht, wie wir (§. 45) gesehen haben, das elektrische Gleichgewicht darin, dass die freie Elektricität mit einer für jeden Punkt bestimmten Dichtigkeit über die Oberfläche vertheilt ist, und dass an jeder Stelle im Innern die Dichtigkeit der Elektricität den Werth Null hat. Dieser Zustand ist jedoch so aufzufassen (§. 44), dass in jedem noch so kleinen Raumelement des Innern gleiche Quantitäten positiver und negativer Elektricität in n e u t r a l e m G e m i s c h vorhanden sind.

Betrachten wir nun nach e i n g e t r e t e n e m G l e i c h g e w i c h t ein einzelnes elektrisches Theilchen, so bieten sich über sein Verhalten zwei Auffassungen dar. Entweder kann man nemlich annehmen, dass jedes Theilchen sich in Ruhe befinde. Oder man kann sich alle elektrischen Theilchen in einer fortwährenden Bewegung begriffen denken, in einer Bewegung, bei der das Gleichgewicht der Elektricitäten darin besteht, dass an keiner Stelle des Leiters die Dichtigkeit eine Aenderung erleidet, und dass die specifische Stromintensität überall gleich Null ist.

Aendert der Leiter, den wir betrachten, seine Lage gegen andere elektrisch geladene Körper, so bleibt im Innern die Dichtigkeit überall Null. In der Oberfläche gehört aber zu jeder neuen Lage des Leiters eine bestimmte neue Vertheilung der freien Elektricität, die sich in demselben Momente fertig herstellt, in welchem der Leiter die neue Lage einnimmt (§. 47). Wenn man die relative Bewegung des betrachteten Leiters und aller übrigen geladenen Körper plötzlich unterbricht, so ist die neue Gleichgewichtslage der elektrischen Theilchen in demselben Moment (oder doch nach unmessbar kurzer Zeit) fertig vorhanden. Dies Verhalten ist noch der Erklärung bedürftig.

Nimmt man an, dass beim elektrischen Gleichgewichte jedes einzelne elektrische Theilchen in Ruhe sei, so kann bei einer Bewegung des Leiters die neue Vertheilung der freien Elektricität nur durch eine Bewegung der elektrischen Theilchen zu Stande kommen. Bei einer plötzlichen Fixirung aller geladenen Körper erklärt sich dann die momentane Herstellung des neuen elektrischen Gleichgewichtes nur dadurch, dass die Geschwindigkeit jedes elektrischen Theilchens in unmessbar kurzer Zeit zu Null wird.

Anders verhält sich die Sache, wenn man die elektrischen Theilchen unter allen Umständen in Bewegung begriffen annimmt. Beim elektrischen Gleichgewicht ist diese Bewegung so beschaffen, dass überall die specifische Stromintensität gleich Null ist und die Dichtigkeit der freien Elektricität nirgends eine Aenderung erleidet. Während der relativen Bewegung der geladenen Körper modificirt sich die Bewegung der elektrischen Theilchen so, dass die specifische Stromintensität nicht mehr überall gleich Null ist. Die auftretenden specifischen Stromintensitäten bewirken, dass im Innern des betrachteten Leiters die Dichtigkeit überall Null bleibt, und dass in der Oberfläche bei jeder neuen Lage der geladenen Körper die neue Vertheilung der freien Elektricität vorhanden ist, wie das elektrostatische Gesetz sie verlangt. Bei plötzlicher Fixirung der geladenen Körper gehen die Geschwindigkeiten der elektrischen Theilchen nicht in Null über. Sie ändern sich nur so, dass sofort die specifische Stromintensität überall Null ist.

Wir geben dieser zweiten Auffassung den Vorzug. Wir nehmen an, dass die elektrischen Theilchen im Innern jedes Leiters in einer fortwährenden, ausserordentlich raschen Bewegung begriffen sind, die nur davon herrührt, dass jedes elektrische Theilchen durch die unmittelbar benachbarten Theilchen getrieben wird. So lange zu diesen molekularen Einwirkungen keine scheidenden Kräfte hinzutreten, ist die specifische Stromintensität überall Null. Findet aber an irgend einer Stelle im Innern des Leiters eine Scheidung der Elektricitäten statt, so besteht die Wirkung darin, dass in einer bestimmten Richtung die eine Elektricität beschleunigt, die entgegengesetzte verzögert wird. Durch ein Flächenelement, dessen Normale in jene Richtung fällt, gehen in Folge dessen nicht mehr ebenso grosse Elektricitätsmengen von der negativen zur positiven Seite über wie umgekehrt von der positiven zur negativen Seite. Oder mit anderen Worten: Ueberall da, wo Scheidung stattfindet, ist die specifische Stromintensität in der Richtung der scheidenden Kraft nicht mehr gleich Null. Für jede Richtung normal zu der scheidenden Kraft bleibt dagegen die specifische Stromintensität Null.

Im Vergleich zu den Molekularkräften, welche die fortdauernde, sehr rasche Bewegung der elektrischen Theilchen hervorbringen, haben wir die Scheidungskräfte verschwindend klein anzunehmen. Die specifische Stromintensität an irgend einer Stelle ist nun eine stetige Function der daselbst auftretenden Scheidungskraft, die mit dieser gleichzeitig Null wird. Man könnte sich diese Function nach positiven, ganzen, ungeraden Potenzen der Scheidungskraft entwickelt denken, und darf, so lange das Verhältnis der letzteren zu den elektrischen Molekularkräften verschwindend klein ist, sich auf die erste Potenz beschränken. D. h. die specifische Stromintensität ist der Scheidungskraft proportional.

Bezeichnen wir also mit $\varepsilon\Pi$ die gesammte elektrische Scheidungskraft im Punkte (x, y, z) im Innern eines Leiters und mit $\varepsilon\Xi$, $\varepsilon\mathrm{H}$, $\varepsilon\mathrm{Z}$ ihre Componenten in der Richtung der Coordinatenaxen, so gelten die Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} w\,i_1 &= \Xi, \\ w\,i_2 &= \mathrm{H}, \\ w\,i_3 &= \mathrm{Z}, \end{aligned}$$

$$w\,i = w\sqrt{i_1^2 + i_2^2 + i_3^2} = \Pi.$$

Den Factor w nennen wir den **specifischen Widerstand** des Leiters und die reciproke Grösse $\frac{1}{w} = k$ seine **Leitungsfähigkeit**. Die Grösse w (und folglich auch k) ist constant für ein und denselben homogenen Leiter. Der Werth derselben ist aber ein anderer, je nachdem der Stoff ein anderer ist, aus welchem der Leiter besteht.

§. 57.

Beharrliche Ströme. Die drei Bedingungsgleichungen für V.

Wir wollen die besondere Voraussetzung machen, dass die **scheidende Kraft** von der Zeit unabhängig, also für alle Punkte im Innern des betrachteten Leiters eine Function nur von den Raum-Coordinaten x, y, z sei. Die Componenten der scheidenden Kraft, welche im Punkte (x, y, z) auf die dort vorhandenen Elektricitätsmenge ε einwirkt, sollen mit $\varepsilon\,\Xi$, $\varepsilon\,\mathrm{H}$, $\varepsilon\,\mathrm{Z}$ bezeichnet werden und als Functionen von x, y, z im Innern des Leiters gegeben sein. In Folge der Scheidung sammelt sich freie Elektricität an. Die davon herrührende Potentialfunction bezeichnen wir mit V. Es ist also (§. 45)

$$V = -\sum \frac{\varepsilon}{r}.$$

Danach sind die Componenten der elektromotorischen Gesammtkraft, welche auf die im Punkte (x, y, z) vorhandene Elektricitätsmenge ε ausgeübt wird, resp.

$$\varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \Xi\right),$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \mathrm{H}\right),$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \mathrm{Z}\right),$$

und diese Componenten haben resp. die Richtung der Axen der x, der y, der z. Für die specifischen Stromintensitäten in denselben Richtungen erhalten wir also, entsprechend den Gleichungen (1) des vorigen Paragraphen, die Ausdrücke:

$$i_1 = k\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \Xi\right),$$

$$i_2 = k\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \mathrm{H}\right),$$

$$i_3 = k\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \mathrm{Z}\right).$$

Die angesammelte freie Elektricität wirkt einer unaufhörlich fortgesetzten neuen Ansammlung von freier Elektricität entgegen. In Folge dessen wird von einem gewissen Zeitpunkte an die Dichtigkeit der freien Elektricität an keiner Stelle des Leiters mehr sich ändern, d. h. es wird von diesem Zeitpunkte an $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ sein. Mit Rücksicht auf die Gleichung (1) des §. 55 erhalten wir also für jeden Punkt im Innern des Leiters:

$$\frac{\partial i_1}{\partial x} + \frac{\partial i_2}{\partial y} + \frac{\partial i_3}{\partial z} = 0,$$

oder, wenn für i_1, i_2, i_3 die obigen Ausdrücke eingesetzt werden:

$$(1) \quad \frac{\partial\left\{k\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \Xi\right)\right\}}{\partial x} + \frac{\partial\left\{k\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \mathrm{H}\right)\right\}}{\partial y} + \frac{\partial\left\{k\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \mathrm{Z}\right)\right\}}{\partial z} = 0.$$

Die freie Oberfläche des Leiters soll isolirt sein. Dann ist in jedem ihrer Punkte die normal gegen sie gerichtete specifische Stromintensität gleich Null. Wir ziehen von einem Punkte (x, y, z) in der freien Oberfläche die Normale nach innen und bezeichnen einen auf ihr genommenen Abstand mit n. Die specifische Stromintensität normal gegen die Oberfläche ist

$$-\left(i_1 \frac{\partial x}{\partial n} + i_2 \frac{\partial y}{\partial n} + i_3 \frac{\partial z}{\partial n}\right).$$

Wenn man diese gleich Null setzt, so ergibt sich für jeden Punkt der freien Oberfläche die Bedingungsgleichung:

$$(2) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \Xi\right)\frac{\partial x}{\partial n} + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \mathrm{H}\right)\frac{\partial y}{\partial n} + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \mathrm{Z}\right)\frac{\partial z}{\partial n} = 0.$$

Aendern sich die Grössen Ξ, H, Z, k im Innern des Leiters an keiner Stelle sprungweise, so treten weiter keine Gleichungen auf. Wir wollen aber noch den Fall betrachten, dass jene Grössen im Innern des Leiters beim Durchgang durch einzelne Flächen sich sprungweise ändern. Es werde von einem Punkte (x, y, z)

einer Unstetigkeitsfläche aus nach beiden Seiten die Normale gezogen und darauf ein Abstand p nach der einen Seite hin positiv, nach der anderen Seite negativ gerechnet. Dann ist noch auszudrücken, dass für zwei Punkte dieser Normale, die auf verschiedenen Seiten der Fläche unendlich nahe am Punkte (x, y, z) liegen, die specifische Stromintensität in der Richtung der wachsenden p dieselbe ist. Oder mit anderen Worten: dass an jeder Stelle der Unstetigkeitsfläche in den Raum auf der positiven Seite in jedem Zeitelement eben so viel Elektricität einströmt, als aus dem Raume auf der negativen Seite ausströmt. Dies spricht sich aus in der Gleichung:

$$(3)\quad \left\{k\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\Xi\right)\frac{\partial x}{\partial p}+k\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\mathrm{H}\right)\frac{\partial y}{\partial p}+k\left(\frac{\partial V}{\partial z}+\mathrm{Z}\right)\frac{\partial z}{\partial p}\right\}_{p=-0}$$
$$=\left\{k\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\Xi\right)\frac{\partial x}{\partial p}+k\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\mathrm{H}\right)\frac{\partial y}{\partial p}+k\left(\frac{\partial V}{\partial z}+\mathrm{Z}\right)\frac{\partial z}{\partial p}\right\}_{p=+0}.$$

Die Gleichung (3) gilt für jeden Punkt (x, y, z) der Unstetigkeitsflächen im Innern des Leiters.

§. 58.

Eindeutige Existenz von V.

Es soll nun bewiesen werden, dass immer eine Function V existirt, welche den Bedingungen (1), (2), (3) des vorigen Paragraphen Genüge leistet und zu beiden Seiten jeder Unstetigkeitsfläche Werthe von gegebener Differenz besitzt. Um diesen Beweis zu führen, schliessen wir von dem Raume, welchen der Leiter ausfüllt, solche Räume von unendlich kleiner Dicke aus, welche die Unstetigkeitsflächen in sich fassen. Wie dies gemacht wird, ist in §. 21 auseinandergesetzt und durch Figur 12 erläutert. Der übrig bleibende Raum des Leiters soll mit S bezeichnet werden. In seinem Innern sind Ξ, H, Z, k überall endlich und frei von Unstetigkeiten. Unter v werde irgend eine Function von x, y, z verstanden, die den folgenden beiden Bedingungen genügt. Für je zwei Punkte, die unendlich nahe an einander auf entgegengesetzten Seiten einer Unstetigkeitsfläche liegen, sollen die Werthe von v eine gegebene endliche Differenz besitzen, und im Innern des Raumes S sollen die ersten Derivirten von v überall endlich und stetig variabel sein.

Solcher Functionen v gibt es unendlich viele. Wird eine von ihnen mit V bezeichnet, so lässt sich jede andere in die Form bringen:

$$v = V + h\,s,$$

wenn h eine passend zu wählende Constante bedeutet und s eine Function von x, y, z ist, die denselben Bedingungen genügt wie v, die aber selbst in den Unstetigkeitsflächen von v nicht unstetig wird.

Hiernach hat das Integral:

$$(1)\quad \Omega(v) = \int k \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \Xi\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mathrm{H}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \mathrm{Z}\right)^2 \right\} dS,$$

über den Raum S erstreckt, einen endlichen, positiven Werth. Dieser Werth ändert sich, wenn man von einer Function v zu einer anderen übergeht. Unter allen zulässigen Functionen v gibt es demnach mindestens eine — wir wollen sie mit V bezeichnen —, welche den Integralwerth zu einem Minimum macht. Die Bedingung dafür lautet

$$(2)\qquad \Omega(V) \leq \Omega(V + h\,s),$$

wenn h unendlich klein genommen wird. Nun lässt sich aber $\Omega(V + h\,s)$ entwickeln. Der Rechnungsgang ist in §. 34 vorgeschrieben. Man erhält:

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\Omega(V + h\,s) \\ &= \Omega(V) \\ &+ 2h \int k \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \Xi\right) \frac{\partial s}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \mathrm{H}\right) \frac{\partial s}{\partial y} + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \mathrm{Z}\right) \frac{\partial s}{\partial z} \right\} dS \\ &+ h^2 \int k \left\{ \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 \right\} dS. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der Gleichung (3) ist der erste und der dritte Bestandtheil positiv. Der zweite kann sowohl positiv als auch negativ ausfallen. Soll die Bedingung (2) befriedigt werden, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass

$$(4)\quad \int k \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \Xi\right) \frac{\partial s}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \mathrm{H}\right) \frac{\partial s}{\partial y} + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \mathrm{Z}\right) \frac{\partial s}{\partial z} \right\} dS = 0$$

sei. Denn in der That kommt dann auf der rechten Seite von (3) zu $\Omega(V)$ ein positives Glied hinzu, das nur dann zu Null wird, wenn überall $s = const.$ Die Gleichung (4) ist also hinreichend für das Zustandekommen von (2). Sie ist aber auch nothwendig. Denn wenn sie nicht erfüllt wäre, so könnte man das Vorzeichen von h so wählen, dass auf der rechten Seite von (3) der zweite

15*

Bestandtheil negativ ausfiele, und den Zahlwerth von h so klein machen, dass der dritte Bestandtheil kleiner würde als der Zahlwerth des zweiten Bestandtheils. Dann hätte man

$$\Omega(V+hs)<\Omega(V),$$

was mit (2) im Widerspruch steht.

Nun können wir das Integral auf der linken Seite der Gleichung (4) nach §. 20 transformiren. Dadurch geht die Gleichung (4) in folgende über:

$$\text{(5)}\quad \begin{aligned} &-\int s\left\{\frac{\partial\left\{k\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\Xi\right)\right\}}{\partial x}+\frac{\partial\left\{k\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\mathrm{H}\right)\right\}}{\partial y}+\frac{\partial\left\{k\left(\frac{\partial V}{\partial z}+\mathrm{Z}\right)\right\}}{\partial z}\right\}dS\\ &-\int ks\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\Xi\right)\frac{\partial x}{\partial n}+\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\mathrm{H}\right)\frac{\partial y}{\partial n}+\left(\frac{\partial V}{\partial z}+\mathrm{Z}\right)\frac{\partial z}{\partial n}\right\}d\sigma\\ &=0.\end{aligned}$$

Das erste der beiden Integrale ist über den ganzen Raum S zu erstrecken, das zweite über seine gesammte Oberfläche. Soll die Gleichung (5) erfüllt werden, so hat man jedes der beiden Integrale für sich gleich Null zu setzen. Das Raum-Integral wird zu Null, wenn für jeden Punkt (x, y, z) im Innern von S die mit $s\,dS$ multiplicirte Klammergrösse den Werth Null hat. Dies liefert die Bedingungsgleichung (1) des vorigen Paragraphen.

Die Oberfläche von S besteht erstens aus der freien Oberfläche des Leiters und zweitens aus den Hüllen der Unstetigkeitsflächen im Innern. Man hat also zunächst für jeden Punkt (x, y, z) in der freien Oberfläche des Leiters gleich Null zu setzen, was mit $ks\,d\sigma$ multiplicirt ist. Dies liefert die Bedingungsgleichung (2) des vorigen Paragraphen.

Die Hüllen einer Unstetigkeitsfläche sind zwei Flächen, welche auf entgegengesetzten Seiten unendlich nahe an ihr liegen und auf ihren Normalen resp. die unendlich kleinen Abschnitte $p=-\varepsilon$ und $p=+\varepsilon$ hervorbringen. Da die Normale n immer nach dem Innern des Raumes S gezogen wird, so hat man auf der positiven Seite der Unstetigkeitsfläche $n=p$ und auf der negativen Seite $n=-p$. Die Function s ändert sich stetig, wenn der Punkt (x, y, z) durch die Unstetigkeitsfläche hindurchgeht. Für zwei Punkte, die auf der negativen und auf der positiven Seite derselben Normale unendlich nahe an der Fläche liegen, hat also s zwei Werthe, die von dem Werthe in dem Fusspunkte der Normale nur unendlich wenig verschieden sind. Das Oberflächen-Integral, welches über die beiden Hüllen einer Unstetigkeitsfläche erstreckt werden soll, ist demnach so zu schreiben:

$$-\int d\sigma . s . \left\{ \begin{array}{l} \left[k\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\Xi\right)\frac{\partial x}{\partial p}+k\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\mathrm{H}\right)\frac{\partial y}{\partial p}+k\left(\frac{\partial V}{\partial z}+\mathrm{Z}\right)\right]_{p=+0} \\ -\left[k\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\Xi\right)\frac{\partial x}{\partial p}+k\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\mathrm{H}\right)\frac{\partial y}{\partial p}+k\left(\frac{\partial V}{\partial z}+\mathrm{Z}\right)\right]_{p=-0} \end{array} \right\}.$$

Als Beitrag zu der Gleichung (5) ist dieses Integral einmal über alle Unstetigkeitsflächen zu erstrecken. Damit es den Werth Null erhalte, hat man für jeden Punkt (x, y, z) in allen Unstetigkeitsflächen gleich Null zu setzen, was unter dem letzten Integral mit $s\, d\sigma$ multiplicirt ist. Dies liefert die Bedingungsgleichung (3) des vorigen Paragraphen.

Da nun unter allen zulässigen Functionen v mindestens eine das Integral (1) zu einem Minimum macht, so erfüllt diese eine Function V die Bedingungen (1), (2), (3) des vorigen Paragraphen. Es lässt sich noch zeigen, dass, abgesehen von einer additiven Constanten, diese Function V die einzige Lösung der Aufgabe ist. Angenommen, es gäbe ausser V noch eine andere Function $V+s$, welche das Integral (1) ebenfalls zu einem Minimum macht, so würde die Bedingung dafür lauten:

$$(6) \qquad \Omega\,(V+s) \leqq \Omega\,(V+h\,s),$$

wenn jetzt unter h eine Constante verstanden wird, die unendlich nahe an 1 liegt. Beachtet man aber, dass die Function V der Gleichung (4) Genüge leistet, so ergibt sich:

$$\Omega\,(V+h\,s) = \Omega\,(V) + h^2 \int k\left\{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2\right\} dS$$

und

$$\Omega\,(V+s) = \Omega\,(V) + \int k\left\{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2\right\} dS.$$

Folglich geht die Bedingung (6) in folgende Form über:

(7)

$$\int k\left\{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2\right\} dS \leqq h^2 \int k\left\{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2\right\} dS.$$

Man darf aber die Constante h^2, welche unendlich nahe an 1 liegen soll, nicht bloss grösser, sondern auch kleiner als 1 nehmen. Die Bedingung (7) lässt sich deshalb nur dadurch erfüllen, dass das Integral den Werth Null erhält. Um das zu erreichen, hat man für jeden Punkt im Innern des Leiters

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial z} = 0,$$

d. h. $s = const.$ zu setzen.

Es gibt also immer eine Function V, welche den Bedingungsgleichungen (1), (2), (3) des vorigen Paragraphen Genüge leistet und zu beiden Seiten jeder inneren Unstetigkeitsfläche Werthe von gegebener Differenz besitzt. Jede andere Function, die dies auch thut, unterscheidet sich von jener nur durch eine additive Constante.

Der Werth der additiven constanten Grösse lässt sich aus den gegebenen scheidenden Kräften nicht bestimmen. Ist ein Punkt der Leiteroberfläche mit der Erde durch einen unendlich dünnen Draht in Verbindung gesetzt, so ist in diesem Punkte $V = 0$. Ist dagegen der Leiter vollständig isolirt, so ist die algebraische Summe der Elektricitätsmengen constant, und zwar gleich Null, wenn ursprünglich keine freie Elektricität vorhanden war. In beiden Fällen gibt dies eine Nebenbedingung zur Bestimmung der additiven Constanten.

Nachdem die Function V für das Innere und die Oberfläche des Leiters bestimmt ist, kommt es noch darauf an, sie in den äusseren Raum hinein stetig so fortzusetzen, dass sie dort für jeden Punkt die Laplace'sche Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

erfülle und dass sie in unendlicher Entfernung gleich Null sei. Es ist früher schon (§. 34) gezeigt, dass diese Fortsetzung der Function V immer und nur auf eine Weise existirt. Zu ihrer Ermittlung ist der Green'sche Satz in Anwendung zu bringen (§. 21).

Ist die Function V für jeden Punkt im ganzen unendlichen Raume bekannt, so findet sich die Dichtigkeit der freien Elektricität im Innern des Leiters nach der Formel (6) und in der Oberfläche nach der Formel (7) des §. 45. Wenn in einem Theile des Leiters $k = const.$ und $\Xi = \mathrm{H} = \mathrm{Z} = 0$ ist, so geht hier die Gleichung (1) des vorigen Paragraphen über in:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

d. h. es ist dann in diesem Theile des Leiters die Dichtigkeit der Elektricität gleich Null.

§. 59.
Die von der bewegten Elektricität geleistete Arbeit.

Wir wollen noch untersuchen, welche Bedeutung das Integral (1) des vorigen Paragraphen in dem Falle hat, dass sein Werth ein Minimum ist. Dasselbe lautet:

$$(1) \qquad \int k \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \Xi\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \mathrm{H}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \mathrm{Z}\right)^2 \right\} dS.$$

Die Function V, welche den Minimalwerth zu Stande bringt, ist bewiesenermaassen die Potentialfunction der freien Elektricität. Folglich gelten die Gleichungen (§. 57):

$$(2) \qquad \begin{aligned} w\, i_1 &= \frac{\partial V}{\partial x} + \Xi, \\ w\, i_2 &= \frac{\partial V}{\partial y} + \mathrm{H}, \\ w\, i_3 &= \frac{\partial V}{\partial z} + \mathrm{Z}, \end{aligned}$$

mit deren Hülfe der Ausdruck (1) sich schreiben lässt:

$$(3) \qquad \int \left\{ i_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \Xi\right) + i_2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \mathrm{H}\right) + i_3 \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \mathrm{Z}\right) \right\} dS$$

oder auch:

$$(4) \qquad \int w\, (i_1^2 + i_2^2 + i_3^2)\, dS$$

oder endlich:

$$(5) \qquad \int dS \,.\, w\, i^2.$$

Die mechanische Bedeutung dieser Ausdrücke ist leicht zu erkennen. Wegen der Gleichungen (5) des §. 54 kann man statt (3) auch schreiben:

$$(6) \qquad \sum \varepsilon \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \Xi\right) \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \mathrm{H}\right) \frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \mathrm{Z}\right) \frac{dz}{dt} \right\}.$$

Die Summirung bezieht sich auf alle elektrischen Theilchen des ganzen Leiters. Bezeichnet man mit A die zur Zeit t von der bewegten Elektricität geleistete Arbeit, so ist der Ausdruck (6) nichts anderes als $\frac{dA}{dt}$. Wir haben also:

$$\int dS \,.\, w\, i^2 = \frac{dA}{dt}. \tag{7}$$

§. 60.

Besonderer Fall: Die Scheidung findet nur in einer unendlich dünnen Schicht statt.

Es soll nun der besondere Fall behandelt werden, dass die elektromotorischen Kräfte $\varepsilon\Xi$, $\varepsilon\mathrm{H}$, $\varepsilon\mathrm{Z}$ nur in einer unendlich dünnen Schicht auftreten, z. B. an der Berührungsfläche von zwei heterogenen Bestandtheilen des Leiters. In diesem Falle lässt sich die Bedingung, der V im Innern des Leitersystems genügen muss, noch transformiren. Diese Bedingung lautet so, dass das Integral

$$\int k\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \Xi\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \mathrm{H}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \mathrm{Z}\right)^2\right\} dS, \tag{1}$$

über das ganze Leitersystem ausgedehnt, ein Minimum sein muss, und wenn dieselbe erfüllt ist, so hat das Integral (1) den Werth:

$$\int dS \,.\, w\, i^2. \tag{2}$$

Es gibt nun zwar unendlich viele Functionen V, welche die Bedingung erfüllen. Aber je zwei von ihnen haben überall im Innern des Leiters eine constante Differenz. In Folge dessen bringen sie alle einen und denselben Minimalwerth (2) des Integrals (1) zu Stande. Von diesem Minimalwerthe wird man einen abweichenden Werth erhalten, wenn man für $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ überall Null setzt. Da aber nur ein Minimalwerth des Integrals (1) vorhanden ist, so muss jeder abweichende Werth grösser ausfallen als der wahre Minimalwerth (2). D. h. wir haben die Ungleichung:

$$\int k(\Xi^2 + \mathrm{H}^2 + \mathrm{Z}^2)\, dS > \int dS \,.\, w\, i^2. \tag{3}$$

Nun sind aber nach der Voraussetzung die Componenten Ξ, H, Z nur in einer unendlich dünnen Schicht von Null verschieden. Aus der linken Seite von (3) fallen also alle Beiträge heraus, welche zu Raumelementen ausserhalb jener Schicht gehören. Für das Integral

$$\int k(\Xi^2 + \mathrm{H}^2 + \mathrm{Z}^2)\,dS$$

bleibt deshalb nur ein Integrationsgebiet übrig, welches unendlich klein ist im Vergleich zu dem Raume, über welchen das Integral (2) zu erstrecken ist. Daraus folgt, dass die Ungleichung (3) nicht anders erfüllt werden kann, als wenn der Werth, welchen $\Xi^2 + \mathrm{H}^2 + \mathrm{Z}^2$ in der Grenzschicht besitzt, unendlich gross ist im Vergleich zu i^2. Für diese Schicht gehen demnach die Gleichungen (2) des vorigen Paragraphen in folgende über:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -\Xi, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -\mathrm{H}, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -\mathrm{Z}. \end{aligned}$$

In irgend einem Punkte der Fläche, welche die beiden heterogenen Leiterbestandtheile trennt, errichten wir nach beiden Seiten die Normale und zählen auf derselben die von dem Fusspunkte aus genommenen Abstände p nach der einen Seite positiv, nach der anderen negativ. Auf der negativen und auf der positiven Normale wählen wir je einen Punkt unendlich nahe an der Trennungsfläche. Der erste habe die Coordinaten x, y, z, dann hat der andere die Coordinaten $x + \frac{\partial x}{\partial p}dp$, $y + \frac{\partial y}{\partial p}dp$, $z + \frac{\partial z}{\partial p}dp$, und es ist dp ihr Abstand von einander. Multipliciren wir auf beiden Seiten der Gleichungen (4) resp. mit $\frac{\partial x}{\partial p}dp$, $\frac{\partial y}{\partial p}dp$, $\frac{\partial z}{\partial p}dp$ und addiren, so ergibt sich

$$(5)\qquad V_{+0} - V_{-0} = -\left(\Xi\frac{\partial x}{\partial p} + \mathrm{H}\frac{\partial y}{\partial p} + \mathrm{Z}\frac{\partial z}{\partial p}\right)dp.$$

Dabei sind mit V_{-0} und V_{+0} die Werthe der Function V in jenen beiden der Trennungsfläche unendlich nahe gelegenen Punkten bezeichnet. Die Differenz dieser Werthe ist endlich und für jeden Punkt der Trennungsfläche bekannt, da Ξ, H, Z überall in der unendlich dünnen Grenzschicht gegeben sind. Hier trifft also die Voraussetzung des §. 58 zu, dass die Differenz der Werthe von V für je zwei Punkte gegeben ist, welche unendlich nahe an einander auf entgegengesetzten Seiten der Unstetigkeitsfläche liegen. Ausserhalb der Grenzschicht ändert die Function V in dem übrigen von dem Leitersystem erfüllten Raume sich stetig. In diesem übrigen Raume ist $\Xi = \mathrm{H} = \mathrm{Z} = 0$. Folglich lautet die Bedingung für V jetzt einfacher:

$$\int k \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right\} dS = Min., \tag{6}$$

wenn $V_{+0} - V_{-0}$ für die Trennungsfläche gegeben.

Hat man V für das Innere des Leiters bestimmt, so finden sich die specifischen Stromintensitäten in der Richtung der Coordinatenaxen aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} w\,\dot{i}_1 &= \frac{\partial V}{\partial x}, \\ w\,\dot{i}_2 &= \frac{\partial V}{\partial y}, \\ w\,\dot{i}_3 &= \frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned} \tag{7}$$

Diesen Fall hat zuerst Ohm*) behandelt. Er nannte die Function V die Spannung. Ueber die Bedeutung dieser Function war er aber im Irrthum. Er glaubte, sie drücke die Dichtigkeit der Elektricität aus.

Die Differenz der Spannungen $V_{+0} - V_{-0}$ zu beiden Seiten der Grenzfläche zweier heterogenen Leiterbestandtheile hängt von der Natur dieser beiden Bestandtheile ab. Ist die Spannungsdifferenz für die Grenzfläche (oder wenn ihrer mehrere vorhanden sind, für jede derselben) bekannt, so ist durch die Bedingung (6) die Function V bis auf eine additive Constante eindeutig bestimmt. Wie der Werth dieser Constante zu ermitteln und wie die Function V nur in einer Weise stetig in den äusseren Raum sich fortsetzt, ist in §. 58 bereits erörtert.

§. 61.

Weitere Specialisirung: Drahtförmiger Leiter. Das Ohm'sche Gesetz.

Ein Theil des Leitersystems sei drahtförmig. Unter einem Draht verstehen wir einen Körper, in dessen Innern eine stetig verlaufende Linie (die Axe) sich so ziehen lässt, dass jeder normal zu ihr gelegte ebene Querschnitt q verschwindend kleine Dimensionen hat im Vergleich zu der Länge der Axe. Auf der Axe soll der

*) Ohm, G. S. Die galvanische Kette, mathematisch behandelt. Berlin 1827.

von ihrem Anfangspunkte bis zu einem unbestimmten Punkte hin durchlaufene Bogen mit s bezeichnet werden. Der Querschnitt q braucht zwar nicht überall derselbe zu sein. Doch setzen wir fest, dass bei einer stetigen Aenderung von s auch die Aenderungen des Querschnittes nur stetig vor sich gehen, so dass man an jeder Stelle zwei Querschnitte einander hinreichend nahe legen kann, die von einander und von allen zwischenliegenden Querschnitten nur unendlich wenig abweichen. Zwischen je zwei solchen Querschnitten kann der Draht als ein Cylinder von beliebig gestaltetem, aber unverändertem Querschnitt angesehen werden.

Wir betrachten zunächst nur einen solchen Cylinder an einer beliebigen Stelle des Drahtes. Die Axe dieses Cylinders soll zu den Dimensionen des Querschnittes q in endlichem Verhältnis stehen. Wir dürfen sie deshalb als geradlinig ansehen und legen in sie die Axe der x des rechtwinkligen Coordinatensystems. Die normalen Querschnitte sind also zur yz-Ebene parallel. Da die Dimensionen jedes Querschnittes unendlich klein sind, so dürfen wir die Strömung in seiner Ebene vernachlässigen im Vergleich zu der Strömung, die normal gegen diese Ebene gerichtet ist. D. h. wir dürfen in jeder Richtung, die in die Ebene eines Querschnittes fällt, die specifische Stromintensität gleich Null setzen:

(1) $$i_2 = 0, \quad i_3 = 0.$$

Ferner dürfen wir in einem und demselben Querschnitt jede der Componenten Ξ, H, Z und den specifischen Widerstand w constant nehmen. Nun folgt aber aus (1) und aus den Gleichungen (2) des §. 59:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\mathrm{H}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\mathrm{Z},$$

d. h. für jeden Punkt innerhalb desselben Querschnittes:

$$V = -\mathrm{H}\, y - \mathrm{Z}\, z + f(x).$$

Da aber in jedem Querschnitt y und z unendlich klein sind, so hat man kürzer

$$V = f(x).$$

Die erste der Gleichungen (2) des §. 59 gibt hiernach:

(2) $$w\, i_1 = f'(x) + \Xi.$$

Nun ist $f'(x)$ nur von x abhängig, und ebenso hat nach der Voraussetzung Ξ in allen Punkten desselben Querschnittes denselben

Werth. Folglich ist für einen und denselben Querschnitt die normal gegen ihn gerichtete specifische Stromintensität in allen seinen Punkten constant.

Nach dieser Vorbereitung betrachten wir den drahtförmigen Leiter in seiner ganzen Ausdehnung. Wir legen normal gegen die Axe einen Querschnitt q, der auf jener die Bogenlänge s abschneidet. Ein Flächenelement des Querschnittes ist dq. Dasselbe soll als Basis eines Raumelementes angesehen werden, dessen Höhe ds ist. Das Volumen dieses Raumelementes ist demnach:

$$dS = dq\, ds.$$

Bezeichnen wir nun wieder mit A die zur Zeit t von der bewegten Elektricität geleistete Arbeit, so haben wir nach §. 59, Gleichung (7):

$$(3) \qquad \frac{dA}{dt} = \int\int dq\, ds\, w\, i^2 = \int\int dq\, ds\, i\left(\frac{\partial V}{\partial s} + \Pi\right).$$

Hier ist V die Potentialfunction der freien Elektricität und Π die in der Richtung von s genommene Componente der elektromotorischen Kraft.

Nach der Erklärung der specifischen Stromintensität ist $i\, dq\, dt$ die algebraische Summe der Elektricitätsmengen, welche im Zeitelement dt an der Stelle s von der negativen zur positiven Seite des Querschnittes dq übergehen, vermindert um die algebraische Summe derjenigen Mengen, welche in demselben Zeitelement an derselben Stelle in entgegengesetzter Richtung hindurchgehen. Für den ganzen Querschnitt q beträgt die betreffende Differenz:

$$i\, q\, dt,$$

die wir mit $J\, dt$ bezeichnen wollen. Es ist also:

$$(4) \qquad J = i\, q.$$

Wir nennen J die Stromintensität an der Stelle des Querschnittes q. Die Axe, auf welcher der Bogen s gezählt wird, liegt normal gegen alle Querschnitte. Deshalb lassen wir für jeden Querschnitt die positive Normale mit der Richtung des wachsenden Bogens s zusammenfallen. Da wir nun voraussetzen, dass keine Ansammlung von freier Elektricität mehr stattfindet, vielmehr ein Beharrungszustand eingetreten ist, so muss J an allen Stellen des Drahtes denselben Werth haben, oder — was dasselbe sagt, — es ist J von s unabhängig. Die Gleichung (3) geht über in folgende:

$$\frac{dA}{dt} = \int w \frac{J^2}{q} ds = \int J \left(\frac{\partial V}{\partial s} + \Pi \right) ds,$$

und diese kann nach der zuletzt über J gemachten Bemerkung auch so geschrieben werden:

$$\frac{dA}{dt} = J^2 \int w \frac{ds}{q} = J \int \left(\frac{\partial V}{\partial s} + \Pi \right) ds. \tag{5}$$

Wir setzen

$$\int w \frac{ds}{q} = W,$$

$$\int \Pi \, ds = E$$

und nennen W den Widerstand des drahtförmigen Leiters, E den Integralwerth der elektromotorischen Kraft. Bezeichnen wir mit V_1 und resp. V_2 die Werthe, welche die Function V im Anfangs- und resp. im Endpunkte des drahtförmigen Leiters besitzt, so geht aus Gleichung (5) hervor:

$$\frac{dA}{dt} = J^2 . W = \{E + (V_2 - V_1)\} . J. \tag{6}$$

Bei einem in sich zurücklaufenden drahtförmigen Leiter ist $V_2 = V_1$. Folglich ergibt sich hier:

$$\frac{dA}{dt} = J^2 . W = E . J \tag{7}$$

und es ist deshalb in einem geschlossenen linearen Strome:

$$J = \frac{E}{W}. \tag{8}$$

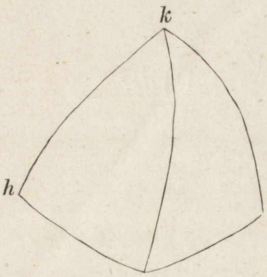
Der in dieser Gleichung ausgesprochene Zusammenhang zwischen der Stromintensität, dem Widerstande und dem Integralwerth der elektromotorischen Kraft wird das Ohm'sche Gesetz genannt.

§. 62.

Fortsetzung: Verzweigte Drähte.

Ist das Leitersystem aus beliebigen drahtförmigen Zweigen zusammengesetzt, so wenden wir die Gleichung (6) des vorigen Paragraphen auf jeden Theil zwischen zwei Knotenpunkten an. Die Knotenpunkte seien numerirt. Der Werth, welchen die Function V in irgend einem derselben hat, werde dadurch bezeichnet, dass die Nummer des Punktes bei V als Index angehängt wird. Bei J, E und W sollen zwei Indices angebracht werden, die resp. den Anfangs- und den Endpunkt des Zweiges angeben, welchem die Werthe von J, E und W angehören. Dann ist allgemein

Fig. 34.



$$J_{h,k} = - J_{k,h},$$
$$E_{h,k} = - E_{k,h},$$
$$W_{h,k} = W_{k,h}.$$

Die Anzahl der unverzweigten Bestandtheile des Leitersystems sei m, die Anzahl der Knotenpunkte n. Dann haben wir zunächst m Gleichungen von der Form:

$$(1) \qquad J_{h,k}\, W_{h,k} = V_k - V_h + E_{h,k}.$$

Ausserdem ist noch auszudrücken, dass in keinem Knotenpunkt eine Ansammlung von Elektricität stattfindet. Es muss also zu jeder Zeit die im nächsten Zeitelement dt in den Knotenpunkt eintretende Elektricitätsmenge ebenso gross sein, wie die während desselben Zeitelementes aus ihm austretende Elektricitätsmenge. Oder, mit anderen Worten, die algebraische Summe der Stromintensitäten in allen von dem Knotenpunkte ausgehenden Zweigen, überall in der Richtung von dem Knotenpunkte weg, muss gleich Null sein. Gehen z. B. von dem Knotenpunkte 1 nur die Zweige 1, 2; 1, 3; 1, 4 aus und keine anderen, so hat man:

$$(2) \qquad J_{1,2} + J_{1,3} + J_{1,4} = 0.$$

Von dieser Form sind n Gleichungen vorhanden. Eine von ihnen ist aber eine identische Folge der $n - 1$ übrigen. Denn vermöge der Relation $J_{h,k} = - J_{k,h}$ erhält man identisch $0 = 0$, wenn man die sämmtlichen Gleichungen (2) durch Addition zusammenfasst.

Die Werthe von E und W sind für jeden Zweig des Leitersystems bekannt. Dagegen sind V und J unbekannt. Die Anzahl dieser Unbekannten ist $m + n$. Da nun die Anzahl der von einander unabhängigen lineären Gleichungen (1) und (2) gleich $m + n - 1$ ist, so kann man aus ihnen jene Unbekannten eindeutig berechnen, wenn eine von ihnen, z. B. V_1, bekannt ist. In der That kann in der Function V eine additive Constante von willkürlichem Werthe vorkommen, ohne dass die Differenzen in (1) sich ändern.

§. 63.

Die Arbeit in dem besonderen Falle des §. 60.

Wir kehren zu der Untersuchung der §§. 57, 58, und 59 zurück unter der besonderen Voraussetzung des §. 60, dass nemlich die elektromotorischen Kräfte $\varepsilon\,\Xi$, $\varepsilon\,H$, $\varepsilon\,Z$ nur in der unendlich dünnen Grenzschicht an der Berührungsstelle von zwei heterogenen Bestandtheilen des Leiters auftreten. Unter dieser Voraussetzung geht die Gleichung (7) des §. 59 in folgende über:

$$(1)\qquad \frac{dA}{dt} = \int\!\!\int\!\!\int\left\{i_1\frac{\partial V}{\partial x} + i_2\frac{\partial V}{\partial y} + i_3\frac{\partial V}{\partial z}\right\} dx\,dy\,dz.$$

Hier ist $dx\,dy\,dz$ ein Raumelement im Innern des Leiters, und die Integration ist über den ganzen von dem Leiter ausgefüllten Raum zu erstrecken. Nun haben wir aber die identischen Gleichungen:

$$i_1\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial(i_1\,V)}{\partial x} - V\frac{\partial i_1}{\partial x},$$

$$i_2\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial(i_2\,V)}{\partial y} - V\frac{\partial i_2}{\partial y},$$

$$i_3\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial(i_3\,V)}{\partial z} - V\frac{\partial i_3}{\partial z}.$$

Danach lässt die Gleichung (1) sich transformiren. Wir erhalten:

$$(2)\qquad \frac{dA}{dt} = -\int\!\!\int\!\!\int V\left(\frac{\partial i_1}{\partial x} + \frac{\partial i_2}{\partial y} + \frac{\partial i_3}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$
$$-\int d\sigma\,.\,V\left(i_1\frac{\partial x}{\partial n} + i_2\frac{\partial y}{\partial n} + i_3\frac{\partial z}{\partial n}\right).$$

In dieser Gleichung erstreckt sich das erste Integral auf den ganzen von dem Leiter erfüllten Raum, das zweite auf seine gesammte Oberfläche, d. h. auf die isolirte freie Oberfläche und auf die Hüllen der Unstetigkeitsflächen. Diese Unstetigkeitsflächen sind hier die Flächen, in denen je zwei heterogene Leiterbestandtheile an einander stossen. Mit n ist die auf dem Flächenelement $d\sigma$ nach dem Innern des Leiters gezogene Normale bezeichnet.

Für den Beharrungszustand, den wir voraussetzen, ist im Innern des Leiters an jeder Stelle:

$$(3)\qquad \frac{\partial i_1}{\partial x} + \frac{\partial i_2}{\partial y} + \frac{\partial i_3}{\partial z} = 0$$

und an jeder Stelle der isolirten freien Oberfläche:

$$(4)\qquad i_1 \frac{\partial x}{\partial n} + i_2 \frac{\partial y}{\partial n} + i_3 \frac{\partial z}{\partial n} = 0.$$

Folglich bleibt auf der rechten Seite der Gleichung (2) nur noch das Oberflächen-Integral, erstreckt über beide Seiten jeder Unstetigkeitsfläche, übrig:

$$(5)\qquad \frac{dA}{dt} = -\int d\sigma\, V\left(i_1 \frac{\partial x}{\partial n} + i_2 \frac{\partial y}{\partial n} + i_3 \frac{\partial z}{dn}\right).$$

Wir nehmen in irgend einer Unstetigkeitsfläche ein Flächenelement $d\sigma$, errichten in einem Punkte desselben die Normale nach beiden Seiten und zählen auf ihr von dem Fusspunkte aus den Abstand p positiv nach der einen, negativ nach der anderen Seite. Dann ist auf der Seite der positiven Normale $n = p$ und auf der Seite der negativen Normale $n = -p$. Folglich lässt sich statt der Gleichung (5) auch schreiben:

$$(6)\qquad \frac{dA}{dt} = -\int d\sigma \,. \left\{ \begin{array}{l} \left[V\left(i_1 \frac{\partial x}{\partial p} + i_2 \frac{\partial y}{\partial p} + i_3 \frac{\partial z}{\partial p}\right)\right]_{p=+0} \\ -\left[V\left(i_1 \frac{\partial x}{\partial p} + i_2 \frac{\partial y}{\partial p} + i_3 \frac{\partial z}{\partial p}\right)\right]_{p=-0} \end{array} \right\}.$$

Hier ist die Integration über jede Unstetigkeitsfläche nur einmal zu erstrecken. Nehmen wir aber Rücksicht auf die Gleichung (3) des §. 57, so ergibt sich sofort:

$$\left(i_1 \frac{\partial x}{\partial p} + i_2 \frac{\partial y}{\partial p} + i_3 \frac{\partial z}{\partial p}\right)_{p=-0}$$
$$= \left(i_1 \frac{dx}{\partial p} + i_2 \frac{\partial y}{\partial p} + i_3 \frac{dz}{\partial p}\right)_{p=+0}$$

und danach erhält man statt (6) einfacher:

$$(7)\qquad \frac{dA}{dt} = -\int d\sigma\,(V_{+0} - V_{-0})\left(i_1 \frac{\partial x}{\partial p} + i_2 \frac{\partial y}{\partial p} + i_3 \frac{\partial z}{\partial p}\right).$$

Auch hier ist die Integration über jede Unstetigkeitsfläche nur einmal zu erstrecken. Setzen wir nun speciell voraus, dass in allen Punkten einer und derselben Unstetigkeitsfläche die Resultirende der elektromotorischen Kräfte $\varepsilon\,\Xi$, $\varepsilon\,\mathrm{H}$, $\varepsilon\,\mathrm{Z}$ constant und normal zur Fläche gerichtet sei, so ist für jede einzelne dieser Flächen die Spannungsdifferenz

$$V_{+0} - V_{-0} = const.,$$

es ist ferner für irgend eine Unstetigkeitsfläche

$$\int d\sigma \left(i_1 \frac{\partial x}{\partial p} + i_2 \frac{\partial y}{\partial p} + i_3 \frac{\partial z}{\partial p} \right) = J,$$

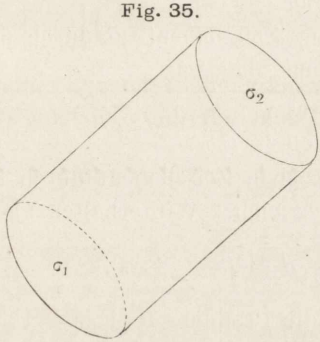
wobei J die Stromintensität in der Richtung der wachsenden p vorstellt, also $J\,dt$ die Elektricitätsmenge ist, welche in dem Zeitelement dt durch die Unstetigkeitsfläche in der angegebenen Richtung hindurchgeht. Hiernach vereinfacht sich die Gleichung (7) zu der folgenden:

$$\frac{dA}{dt} = -\sum J\,(V_{+0} - V_{-0}), \tag{8}$$

in welcher das Zeichen $\sum$ bedeuten soll, dass das Product $J\,(V_{+0} - V_{-0})$ für jede Unstetigkeitsfläche gebildet, und dass die sämmtlichen Producte summirt werden sollen.

Wir legen durch den Leiter zwei Schnittflächen σ_1 und σ_2, welche aus demselben ein vollständig begrenztes Stück herausschneiden. Die Fläche σ_1 soll einfach zusammenhängend sein. Ihre Begrenzung soll aus einer einzigen in sich zurücklaufenden und sich selbst nicht durchschneidenden Linie bestehen, die zugleich in der freien Oberfläche des Leiters liegt. Dasselbe soll für σ_2 gelten (**Fig. 35**). Ferner sollen σ_1 und σ_2 Niveauflächen der Potentialfunction sein, d. h. die Potentialfunction soll in allen Punkten von σ_1 denselben constanten Werth V_1 und in allen Punkten von σ_2 denselben constanten Werth V_2 haben.

Fig. 35.



Es handelt sich darum, $\frac{dA}{dt}$ für das zwischen σ_1 und σ_2 liegende Stück des Leiters zu berechnen. Hier ist das Integral (1) über eben dieses Stück des Leiters zu erstrecken, und in gleicher Weise das Raum-Integral in (2). Das Oberflächen-Integral in (2) ist dagegen auszudehnen über die isolirte freie Oberfläche zwischen den Begrenzungslinien von σ_1 und σ_2, ferner über σ_1 und σ_2 und über die Umhüllungen der in dem Leiterstück etwa vorhandenen Unstetigkeitsflächen. Das Raum-Integral in (2) ist wieder gleich Null. Ebenso das über die isolirte freie Oberfläche erstreckte Oberflächen-

Integral. Für die Umhüllungen der Unstetigkeitsflächen gelten die in den Gleichungen (5), (6), (7), (8) enthaltenen Transformationen. Von den Unstetigkeitsflächen rührt also für das zu berechnende Integral (1) ein Beitrag

$$-\sum J(V_{+0} - V_{-0})$$

her, in welchem die Summirung sich nur auf die in dem Leiterstück vorhandenen Unstetigkeitsflächen bezieht. Es bleiben noch die über σ_1 und σ_2 auszudehnenden Oberflächen-Integrale übrig. Diese können, da V_1 und V_2 constant sind, geschrieben werden:

$$- V_1 \int \left(i_1 \frac{\partial x}{\partial p} + i_2 \frac{\partial y}{\partial p} + i_3 \frac{\partial z}{\partial p} \right) d\sigma_1$$

$$+ V_2 \int \left(i_1 \frac{\partial x}{\partial p} + i_2 \frac{\partial y}{\partial p} + i_3 \frac{\partial z}{\partial p} \right) d\sigma_2 .$$

Dabei ist die Richtung der positiven p so gelegt, dass sie von σ_1 in das Leiterstück hineinführt, von σ_2 dagegen aus demselben heraus. Nun ist

$$dt \int \left(i_1 \frac{\partial x}{\partial p} + i_2 \frac{\partial y}{\partial p} + i_3 \frac{\partial z}{\partial p} \right) d\sigma_1 = J_1\, dt$$

die Elektricitätsmenge, welche in dem Zeitelement dt durch die Fläche σ_1 in das Leitersystem einströmt, dagegen

$$dt \int \left(i_1 \frac{\partial x}{\partial p} + i_2 \frac{\partial y}{\partial p} + i_3 \frac{\partial z}{\partial p} \right) d\sigma_2 = J_2\, dt$$

die Elektricitätsmenge, welche in demselben Zeitelement durch σ_2 austritt. Beide Mengen sind einander gleich. Wir erhalten also:

$$(9) \qquad \frac{dA}{dt} = J_1 (V_2 - V_1) - \sum J (V_{+0} - V_{-0}).$$

Hier bezieht sich die Summirung auf die Producte $J(V_{+0} - V_{-0})$ für alle innerhalb des Leiterstückes befindlichen Unstetigkeitsflächen.*)

§. 64.

Erwärmung des Leiters. Gesetz von Joule.

Die elektromotorischen Kräfte bringen ausser dem galvanischen Strom noch eine andere Wirkung hervor, nemlich eine Erwärmung

---

*) Ueber den Inhalt der §§. 57, 58, 59, 60, 63 vergleiche man: Kirchhoff, über die Anwendbarkeit der Formeln für die Intensitäten der galvanischen Ströme in einem Systeme linearer Leiter auf Systeme, die zum Theil aus nicht linearen Leitern bestehen. Poggendorff, Annalen. Bd. 75. S. 189.

des Leiters. Die mechanische Wärmetheorie stellt den Satz auf, dass die mechanische Kraft eines Systems das Maass der darin enthaltenen Wärmemenge ist. Wir bezeichnen mit P das Potential aller zwischen den Bestandtheilen des Systems auftretenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. Dann ist (§. 37)

$$\sum \frac{1}{2} m v^2 - P$$

der Ausdruck für die mechanische Kraft. Sind ausser jenen Anziehungs- und Abstossungskräften keine anderen Kräfte wirksam, so hat man nach §. 37, Gleichung (2)

$$(1) \qquad \sum \frac{1}{2} m v^2 - P = Const.$$

In diesem Falle ist also die mechanische Kraft des Systems unveränderlich und folglich auch die in dem System vorhandene Wärmemenge constant. Treten aber ausser jenen inneren Anziehungs- und Abstossungskräften noch andere, äussere Kräfte auf, deren Componenten im Punkte (x, y, z) mit X, Y, Z bezeichnet werden mögen, so lautet der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft jetzt so:

$$(2) \sum \frac{1}{2} m v^2 - P - \sum \int_0^t \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) dt = Const.$$

Folglich ist in diesem Falle die mechanische Kraft des Systems

$$(3) \qquad \sum \frac{1}{2} m v^2 - P$$

$$= Const. + \sum \int_0^t \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) dt,$$

und sie hat in der Zeit von $t = 0$ bis t zugenommen um die von den äusseren Kräften während derselben Zeit geleistete Arbeit. Die in dem System vorhandene Wärmemenge hat also nach dem eben citirten Satze der mechanischen Wärmetheorie sich vermehrt um ein Quantum, welches jener Arbeit der äusseren Kräfte proportional ist.

Soll dies auf den vorliegenden Fall angewandt werden, so haben wir

$$X = \varepsilon\left(\Xi + \frac{\partial V}{\partial x}\right),$$
$$Y = \varepsilon\left(\mathrm{H} + \frac{\partial V}{\partial y}\right),$$
$$Z = \varepsilon\left(\mathrm{Z} + \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

zu setzen. Von diesen Kräften wird nach §. 59 in dem Zeitelement dt die Arbeit geleistet

$$dA = dt \,.\int dS \,.\, w\, i^2, \tag{4}$$

und folglich ist der in demselben Zeitelement dt zu Stande gekommene Wärmezuwachs dieser Grösse proportional.

In dem besonderen Falle, dass die äusseren elektromotorischen Kräfte $\varepsilon\,\Xi$, $\varepsilon\,\mathrm{H}$, $\varepsilon\,\mathrm{Z}$ nur an den Berührungsstellen von je zwei heterogenen Leiterbestandtheilen auftreten, und dass ihre Resultirende für alle Punkte derselben Unstetigkeitsfläche constant und normal zu ihr gerichtet ist, gelten für dA die Umformungen des vorigen Paragraphen. In dem Zeitelement dt kommt dann also in dem ganzen Leiter ein Wärmezuwachs zu Stande, welcher der Arbeit

$$-\,dt \sum J\,(V_{+0} - V_{-0}) \tag{5}$$

proportional ist. Soll nur ein Theil des Leiters in Betracht gezogen werden, so ergibt sich für ihn in der Zeit dt ein Wärmezuwachs, proportional der Arbeit

$$dt\,\{J_1\,(V_2 - V_1) - \sum J\,(V_{+0} - V_{-0})\}. \tag{6}$$

Für einen drahtförmigen Theil des Leiters lässt sich nach §. 61 die in dem Zeitelement dt geleistete Arbeit durch

$$J^2\ W\,dt$$

ausdrücken. Nehmen wir J von t unabhängig, so erhält demnach in der Zeiteinheit der Leiter einen Wärmezuwachs, welcher der Arbeit

$$J^2\ W \tag{7}$$

proportional ist. Dieses von Joule*) aufgestellte Gesetz ist vielfach experimentell bewiesen worden.

---

*) Philosophical Magazine. New and united series. Vol. XIX. 1841. Page 260.

Sechster Abschnitt.

Magnetismus, Elektromagnetismus und Elektrodynamik.

---

§. 65.

Grundgesetz der magnetischen Wechselwirkung. Die Potentialfunction der magnetischen Kräfte.

Zur Erklärung der magnetischen Erscheinungen kann man eine ähnliche Hypothese aufstellen, wie sie der Theorie der Elektricität zu Grunde gelegt ist. Wir nehmen zwei einander entgegengesetzte magnetische Fluida an, ein positives und ein negatives. Zwei magnetische Theilchen, deren magnetische Massen (nach Zahlwerth und Vorzeichen) μ_1 und μ_2 sind, üben in der Entfernung r eine Kraft

$$\frac{\mu_1 \mu_2}{r^2}$$

auf einander aus, deren Richtung in die Verbindungslinie der beiden Theilchen fällt. Die Kraft ist Abstossung oder Anziehung, je nachdem das Product $\frac{\mu_1 \mu_2}{r^2}$ positiv oder negativ ist. Insofern eine Anziehung als negative Abstossung angesehen werden kann, darf man auch sagen: zwei magnetische Theilchen von den magnetischen Massen μ_1 und μ_2, die in der Entfernung r von einander sich befinden, üben in der Richtung ihrer Verbindungslinie eine Abstossung

$$K = \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2} \tag{1}$$

auf einander aus.

Als magnetische Masseneinheit ist dabei dasjenige Quantum magnetischen Fluidums genommen, welches ein ihm gleiches Quantum in der Einheit der Entfernung mit der Krafteinheit abstösst.

Unter einem Magnet verstehen wir einen ponderablen Körper, welcher die magnetischen Fluida in einer solchen Vertheilung in sich enthält, dass er nach aussen magnetische Wirkungen ausübt. Die Erfahrung lehrt, dass kein Magnet von dem in ihm enthaltenen magnetischen Fluidum etwas nach aussen abgeben kann, und dass in jedem experimentell darstellbaren Magnet die algebraische Summe der magnetischen Massen gleich Null ist:

$$(2) \qquad \sum \mu = 0, \quad \text{resp.} \int d\mu = 0,$$

je nachdem die magnetischen Fluida in discreten Punkten oder stetig über den Magnet vertheilt sind.

Die in den Gleichungen (2) ausgesprochene Thatsache schliessen wir aus der Einwirkung, welche der Erdmagnet auf jeden experimentell darstellbaren Magnet ausübt. Die erdmagnetische Kraft lässt sich in eine verticale und eine horizontale Componente zerlegen. Wenn man nun einen Magnet so aufhängt, dass er nur in horizontaler Richtung sich frei bewegen kann, so kommt die verticale Componente der erdmagnetischen Kraft nicht zur Geltung. Die horizontale Componente hat für jeden Ort an der Erdoberfläche eine bestimmte Grösse und eine bestimmte Richtung. Bei der verhältnissmässig geringen Ausdehnung des aufgehängten Magnets werden demnach allen seinen magnetischen Theilchen parallele und gleiche Beschleunigungen ertheilt. Bezeichnen wir diese Beschleunigung mit T, so wird der Magnet in der Richtung des erdmagnetischen Meridians von einer horizontalen Gesammtkraft

$$\sum T\mu = T \sum \mu, \quad \text{resp.}$$

$$\int T\, d\mu = T \int d\mu$$

in Anspruch genommen. Nun übt aber der Erdmagnet keinerlei Anziehung oder Abstossung, sondern nur eine drehende Wirkung aus. Folglich muss

$$T \sum \mu = 0, \quad \text{resp.} \; T \int d\mu = 0$$

sein, d. h. es muss, da T constant und von Null verschieden ist, die eine oder die andere der Gleichungen (2) erfüllt sein.

Den eben ausgesprochenen Erfahrungssätzen wird dadurch Genüge geleistet, dass wir in jedem Körpermolekül des Magnets gleiche Quantitäten beider magnetischen Fluida annehmen, die von dem Molekül unter keinen Umständen auf ein anderes übergehen können. Der Magnet heisst im Maximum magnetisirt, wenn innerhalb jedes Moleküls die magnetischen Fluida so vertheilt sind, dass die Gesammtwirkung nach aussen ein Maximum ist.

Die von einem Magnet herrührende Potentialfunction ist

$$V = -\sum \frac{\mu}{r}, \tag{3}$$

resp.

$$V = -\int \frac{d\mu}{r}, \tag{4}$$

je nachdem die Fluida in discreten Punkten concentrirt oder stetig vertheilt angenommen werden. Dabei bezeichnet r die Entfernung des magnetischen Theilchens μ, resp. $d\mu$ von dem Punkte (x, y, z). Die Summirung in (3) und die Integration in (4) ist über alle Bestandtheile des Magnets auszudehnen.

Auf die im Punkte (x, y, z) concentrirt gedachte positive Einheit magnetischer Masse wirkt hiernach eine Kraft, deren Componenten parallel den Coordinatenaxen ausgedrückt werden durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial V}{\partial x}, \\ Y &= \frac{\partial V}{\partial y}, \\ Z &= \frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned} \tag{5}$$

Ausserhalb der magnetischen Massen, von denen die Potentialfunction V herrührt, ist überall

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

oder, was dasselbe sagt:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0. \tag{6}$$

Ferner ergibt sich noch aus den Gleichungen (5), dass X, Y, Z den partiellen Differentialgleichungen genügen müssen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Obgleich wir in Wirklichkeit nur körperliche Magnete kennen, so ist es doch nicht überflüssig, den idealen Fall mit in Betracht zu ziehen, dass die magnetischen Flüssigkeiten über eine Fläche stetig vertheilt sind. Die Integration in (4) und in (2) ist dann über alle Elemente dieser Fläche auszudehnen.

Da die Gleichung (4) dieselbe Form hat wie die Gleichung (2) des §. 45, so gelten hier auch die Folgerungen, welche in demselben Paragraphen in den Gleichungen (6) und (7) ausgesprochen sind. Kennt man also im ganzen unendlichen Raume die von einem Magnet herrührende Potentialfunction V, so findet sich leicht die magnetische Dichtigkeit ρ im Punkte (x, y, z). Man erhält

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4 \pi \rho, \tag{8}$$

wenn die magnetischen Massen stetig über einen Raum von drei Dimensionen vertheilt sind; dagegen

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{-0} = 4 \pi \rho, \tag{9}$$

wenn sie über eine Fläche stetig ausgebreitet sind.

§. 66.

Die magnetischen Wirkungen des galvanischen Stromes.

Die Erfahrung zeigt, dass nicht nur Magnete, sondern auch galvanische Ströme nach aussen magnetische Wirkungen üben. Um diese Wirkungen zu untersuchen, stellen wir die Hypothese auf, dass die magnetischen Kräfte, welche in einem galvanischen Strome ihren Grund haben, überall ausserhalb des Stromes denselben Gesetzen unterliegen, als rührten sie von magnetischen Massen her.

Der galvanische Strom sei lineär und einfach in sich zurücklaufend. Als Leiter des Stromes wird also eine Linie (ein unendlich dünner Draht) genommen, deren Endpunkt mit dem Anfangspunkte zusammenfällt, und die zwischen dem Anfangs- und Endpunkte keine einander schneidende oder deckende Bestandtheile besitzt. Im Punkte (x, y, z), der irgendwo ausserhalb des Leiters liegt, sei die positive Einheit der magnetischen Masse concentrirt. Der galvanische Strom übt auf sie eine magnetische Kraft, deren Componenten parallel den Coordinatenaxen mit X, Y, Z bezeichnet werden sollen. Nach der aufgestellten Hypothese genügen diese Componenten den partiellen Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

In Folge der Gleichungen (2) ist

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

ein vollständiges Differential, also gibt es eine Function V von x, y, z, die so beschaffen ist, dass überall ausserhalb des galvanischen Stromes

$$(3) \qquad X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Erstrecken wir nun das Integral

$$(4) \qquad \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

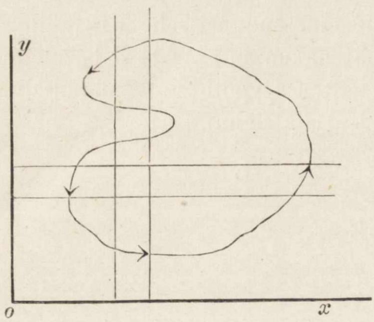
durch eine im endlichen Gebiete verlaufende Curve, deren Endpunkt mit dem Anfangspunkte zusammenfällt und deren übrige Punkte bei einem einfachen Umlauf sämmtlich nur einmal getroffen werden. Um über den Werth dieses Integrals ins Klare zu kommen, ist es wünschenswerth, einen Hülfssatz vorauszuschicken.

§. 67.

Hülfssatz aus der Analysis.

Wir zeichnen in dem endlichen Gebiete der xyEbene eine Curve, deren Endpunkt und Anfangspunkt zusammenfallen und deren übrige Punkte bei einem einfachen Umlauf sämmtlich nur einmal getroffen werden. Das Flächenstück, welches von der Curve umschlossen wird (**Fig. 36**), soll ganz in dem Quadranten liegen, in welchem x und y positiv sind. Wir durchlaufen die Curve im positiven Sinne, wenn dabei die Tangente in der Richtung des wachsenden Bogens zu der nach innen gezogenen Normale ebenso liegt, wie die Axe der positiven x zu der Axe der positiven y.

Fig. 36.



Es seien P und Q zwei Functionen von x und y, die innerhalb des von der Curve begrenzten Flächenstückes einwerthig, endlich und stetig variabel vorausgesetzt werden. Wir betrachten das Integral

$$(1) \qquad -\int\int\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\delta x\,\delta y,$$

ausgedehnt über das von der Curve begrenzte Flächenstück. Dabei bezeichnen δx und δy positive Zunahmen der Variabeln. Für den ersten Bestandtheil des Integrals können wir mit der Integration nach y beginnen. Wir ziehen die Ordinaten, welche zu den Abscissen x und $x + \delta x$ gehören. Zwischen ihnen liegt ein unendlich schmaler Flächenstreifen, welcher ebenso oft in das von der Curve begrenzte Flächengebiet eintritt, wie aus demselben austritt. Wir bezeichnen die Ordinaten der Eintrittsstellen mit

$$y_1,\ y_3,\ y_5,\ \ldots\ y_{2n-1},$$

die Ordinaten der Austrittsstellen dagegen mit

$$y_2,\ y_4,\ y_6\ \ldots\ y_{2n}$$

und bemerken, dass

$$y_1 < y_2 < y_3 < \cdots y_{2n-1} < y_{2n}.$$

Die Bogenelemente, welche der unendlich schmale Flächenstreifen bei seinem Ein- und Austritt auf der Begrenzungscurve abschneidet, seien

$$ds_1,\ ds_2,\ ds_3,\ \ldots\ ds_{2n-1},\ ds_{2n}.$$

Der Cosinus des Winkels, welchen ein solches Bogenelement mit der Richtung der positiven x einschliesst, ist positiv an allen

Eintrittsstellen, dagegen negativ an allen Austrittsstellen. Bezeichnet man also (nach Zahlwerth und Vorzeichen) mit dx_k die Projection von ds_k auf der Axe der x, so ergibt sich

$$dx_1 = dx_3 = dx_5 = \ldots = dx_{2n-1} = \delta x,$$
$$dx_2 = dx_4 = dx_6 = \ldots = dx_{2n} = -\delta x.$$

Danach finden wir

$$\delta x \int \frac{\partial P}{\partial y}\,\delta y = \delta x\,(-P_1 + P_2 - P_3 + \ldots + P_{2n})$$
$$= -P_1\,dx_1 - P_2\,dx_2 - \ldots - P_{2n}\,dx_{2n}.$$

Das lässt sich kürzer schreiben

$$\delta x \int \frac{\partial P}{\partial y}\,\delta y = -\sum P\,dx,$$

wobei das Summenzeichen auf der rechten Seite bedeutet, dass die Werthe von $P\,dx$ an allen Eintritts- und Austrittsstellen des unendlich schmalen Flächenstreifens genommen werden sollen. Die Integration nach x wird dadurch ausgeführt, dass man nicht einen einzelnen Flächenstreifen in Betracht zieht, sondern alle, die überhaupt (von Parallelen zur y-Axe begrenzt) das Flächengebiet durchschneiden. Folglich ergibt sich

$$\int\int \frac{\partial P}{\partial y}\,\delta x\,\delta y = -\int P\,dx$$

und es ist die Integration rechts durch die ganze in sich zurücklaufende Curve zu erstrecken.

In entsprechender Weise kommen wir zu der Gleichung

$$\int\int \frac{\partial Q}{\partial x}\,\delta y\,\delta x = \int Q\,dy,$$

und auch hier ist das Integral auf der rechten Seite (im positiven Sinne des Umlaufs) durch die ganze Curve zu erstrecken.

Danach gelangen wir zu dem Resultat, dass

$$(2) \qquad -\int\int\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\delta x\,\delta y = \int (P\,dx + Q\,dy)$$

ist, vorausgesetzt, dass wir unter P und Q zwei Functionen von x und y verstehen, die einwerthig, endlich und stetig variabel sind innerhalb des Flächengebietes, über welches die Integration auf der linken Seite ausgedehnt wird, und dass man die Integration rechts in positivem Sinne des Umlaufs durch die Begrenzungscurve erstrecke.*)

In dem besonderen Falle, dass innerhalb des von der Curve umschlossenen Flächengebiets überall

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

ist, geht die Gleichung (2) über in

$$\int (P\,dx + Q\,dy) = 0. \tag{4}$$

Uebrigens bleiben, wie man leicht sieht, die Sätze (2) und (4) auch dann gültig, wenn die Curve nicht durchaus in dem Quadranten der positiven x und der positiven y verläuft. Diese Voraussetzung dient nur zur leichteren Entwicklung des Beweises. Ist sie von vorn herein nicht erfüllt, so kann man, da die Curve sich nirgends ins Unendliche erstreckt, durch parallele Verschiebung der Axen es leicht erreichen, dass die verlangte Lage vorhanden ist.

§. 68.

Das Integral $\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$.

Nach dieser Vorbereitung kehren wir zu dem Integral (4) des §. 66 zurück. Wir nehmen eine stetig gekrümmte Fläche zu Hülfe, die ganz im endlichen Gebiete liegt, und die den vorgeschriebenen Integrationsweg zur vollständigen und alleinigen Begrenzung hat. Die Gleichung dieser Fläche sei

$$z = f(x, y). \tag{1}$$

Da der vorgeschriebene Integrationsweg auf der Fläche liegt, so hat man in §. 66, (4)

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

zu setzen und aus X, Y, Z die Coordinate z mit Hülfe der Gleichung (1) zu eliminiren. Dadurch geht das Integral (4) des §. 66 über in

$$\int \left\{ \left(X + Z\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(Y + Z\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy \right\}, \tag{2}$$

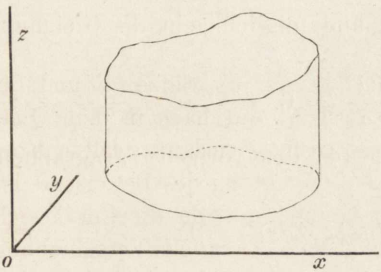
und hier ist die Integration durch die in der xy-Ebene liegende Projection der gegebenen Curve zu erstrecken.

---

*) Riemann. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. Göttingen 1851. Art. 7 und 8.

Das Coordinatensystem lässt sich immer so legen, dass diese Projection ebenso einfach in sich zurückläuft wie die projicirte Curve selbst, und dass sie bei der Integration (2) im positiven Sinne durchlaufen wird, d. h. dass (von einem Punkte der positiven z-Axe aus gesehen) die Tangente in der Richtung des wachsenden Bogens zu der nach innen gezogenen Normale ebenso liegt wie die Axe der positiven x zu der Axe der positiven y (**Fig. 36** und **Fig. 37**). Bei dieser Lage, die wir der Einfachheit wegen und ohne Schaden für die Allgemeinheit der Untersuchung voraussetzen dürfen, lässt sich auch die Fläche (1) so einrichten, dass ihre Projection einfach der Theil der xy-Ebene ist, welchen die Projection ihrer Begrenzungscurve umschliesst. Dann ist die durch die Gleichung (1) ausgedrückte Function z nebst ihren ersten Derivirten einwerthig, endlich und stetig variabel für das ganze Werthengebiet von x und y, welches hier in Betracht kommt. Da die Functionen X, Y, Z ebenfalls einwerthig, endlich und stetig variabel sind, so dürfen wir in der Untersuchung des vorigen Paragraphen speciell setzen

Fig. 37.



(3)
$$P = X + Z\frac{\partial f}{\partial x},\qquad Q = Y + Z\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Dadurch ergibt sich

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x} + Z\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}.$$

Folglich haben wir hier

(4)
$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$$
$$= \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Wenn nun die Curve, durch welche das Integral

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

erstreckt werden soll, nicht kettenförmig mit dem Leiter des galvanischen Stromes verschlungen ist, so lässt sich die Fläche (1) immer so legen, dass sie keinen Punkt mit diesem Leiter gemein hat. Dann sind für jeden Punkt der Fläche die Gleichungen (2) des §. 66 erfüllt, und folglich geht die Gleichung (4) über in

(5) $$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Es gilt also auch die Gleichung (4) des vorigen Paragraphen, d. h. es ist

(6) $$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = 0,$$

wenn dieses Integral durch eine in sich zurücklaufende Curve erstreckt wird, die nicht kettenförmig mit dem Leiter des galvanischen Stromes verschlungen ist.

Wenn dagegen die Integrationscurve mit dem Stromleiter kettenförmig verschlungen ist, so ist es unmöglich, die Fläche (1) so zu legen, dass sie keinen Punkt mit dem Leiter gemein habe. Dann ist also die Gleichung (5) nicht überall erfüllt und deshalb hat auch das Integral (6) nicht den Werth Null.

§. 69.

Die Potentialfunction V der elektromagnetischen Kräfte.

Wir legen eine Fläche S in der Weise, dass der Leiter des galvanischen Stromes ihre vollständige und alleinige Begrenzung bilde. Dann gilt der Satz (6) des vorigen Paragraphen für jeden Integrationsweg, welcher die Fläche S nicht schneidet. Nehmen wir an irgend einer Stelle des Raumes den Anfangspunkt der Integration und erstrecken von da aus das Integral

(1) $$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

bis zum Punkte (x, y, z) auf verschiedenen Wegen, von denen aber keiner die Fläche S schneidet, so sind die Integralwerthe, die auf allen diesen Wegen zu Stande kommen, einander gleich.

Das Integral (1) ist also eine Function V von x, y, z, die überall ausserhalb der Fläche S sich stetig ändert.

Wir errichten in irgend einem Punkte der Fläche S nach beiden Seiten hin die Normale und zählen darauf den Abstand p von ihrem Fusspunkte aus positiv nach der einen, negativ nach der anderen Seite. Auf der positiven und auf der negativen Normale nehmen wir je einen Punkt unendlich nahe an der Fläche S, und bezeichnen die Werthe, welche die Function V in ihnen annimmt, mit V_{+0} und resp. V_{-0}. Die Differenz

$$V_{+0} - V_{-0}$$

ergibt sich, wenn man das Integral (1) von dem Punkte auf der negativen Normale nach dem unendlich nahe gelegenen Punkte auf der positiven Normale durch eine Curve erstreckt, welche die Fläche S nicht schneidet.

Nun sind aber X, Y, Z im ganzen unendlichen Raume ausserhalb der Strombahn einwerthig, endlich und stetig variabel. Daraus folgt, dass in unendlicher Nähe der Fläche S die Derivirte von V, sowohl parallel als auch normal zur Fläche genommen, auf der positiven Seite denselben Werth hat, wie auf der negativen Seite. Es ist also für jede beliebige Stelle der Fläche

$$V_{+0} - V_{-0} = A, \tag{2}$$

wobei A eine constante Grösse bezeichnet, und es ist ferner

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+0} = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{-0}. \tag{3}$$

Vermöge der Gleichung (1) des §. 66 genügt die Function V im ganzen unendlichen Raume ausserhalb der Strombahn der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \tag{4}$$

und sie hat den Werth Null in unendlicher Entfernung:

$$V = 0 \text{ für } x^2 + y^2 + z^2 = \infty. \tag{5}$$

Diesen Bedingungen (2), (3), (4), (5) entsprechend, lässt sich die Function V immer und nur in einer Weise herstellen, wie man mit Hülfe des Dirichlet'schen Princips leicht beweisen kann.

Wir wollen statt dessen nach Green's Methode den Ausdruck für die Function V direct bilden.

§. 70.
Herstellung der Function V.

Der Satz von Green (§. 20) lässt sich hier folgendermaassen verwerthen.

Wir setzen

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}=r$$

und

$$U=\frac{1}{r}. \tag{1}$$

Der Raum T, welcher für uns in Betracht kommt, wird begrenzt von den beiden Seiten der Fläche S und von zwei Kugelflächen, von denen die eine mit dem Radius $r=R$, die andere mit dem Radius $r=c$ um den Punkt (x', y', z') als Mittelpunkt construirt ist, und zwar für lim $R=\infty$ und lim $c=0$.

Hier treffen alle Voraussetzungen des §. 21 zu mit der einen Modification, dass U in der Oberfläche des Raumes T nicht überall Null ist. Durch Wiederholung des dort angewandten Verfahrens gelangt man demnach zu der Gleichung

$$4\pi V'=-\int\int\int U\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz \\ +\int d\sigma\left(V\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial V}{\partial n}\right), \tag{2}$$

und es bezeichnet V' den Werth von V im Punkte (x', y', z'). Das Raumintegral ist Null vermöge der Gleichung (4) des vorigen Paragraphen. Das Oberflächen-Integral ist auszudehnen über die Kugel vom Radius R und über die beiden Seiten der Fläche S.

Für die Kugelfläche fällt die nach dem Innern des Raumes T gezogene Normale in die Richtung der abnehmenden r. Folglich kann das über diese Kugelfläche erstreckte Integral geschrieben werden:

$$-R^2\int d\omega\left(V\frac{\partial U}{\partial r}-U\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=R}$$

wobei $d\omega$ das Element einer Kugelfläche vom Radius 1 bezeichnet. Nun steht für lim $R=\infty$ sowohl U als V in endlichem Verhältnis zu $\frac{1}{R}$. Folglich wird

$$\lim\left(V\frac{\partial U}{\partial r}-U\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=\infty}=\frac{const.}{R^3},$$

und man sieht, dass das Integral den Grenzwerth Null hat für $\lim R = \infty$.

Hiernach bleibt auf der rechten Seite der Gleichung (2) nichts weiter übrig als das Oberflächen-Integral, ausgedehnt über beide Seiten der Fläche S.

Wir errichten im Punkte (x, y, z) der Fläche S die Normale nach beiden Seiten und zählen auf ihr von dem Fusspunkte aus den Abstand p positiv nach der einen, negativ nach der andern Seite. Dann ist auf der positiven Seite $n = p$, auf der negativen $n = -p$. Die Gleichung (2) geht dadurch in folgende über:

$$\begin{aligned} 4\pi V' = & \int d\sigma \left\{ V \frac{\partial U}{\partial p} - U \frac{\partial V}{\partial p} \right\}_{p=+0} \\ & - \int d\sigma \left\{ V \frac{\partial U}{\partial p} - U \frac{\partial V}{\partial p} \right\}_{p=-0}. \end{aligned}$$

Dafür kann man auch schreiben:

$$\begin{aligned} 4\pi V' = & \int d\sigma \,.\, \frac{\partial U}{\partial p} (V_{+0} - V_{-0}) \\ & - \int d\sigma \,.\, U \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{-0} \right\}. \end{aligned}$$

Hier ist das zweite Integral gleich Null in Folge der Gleichung (3) des vorigen Paragraphen. In dem ersten Integrale hat man für V die Gleichung (2) des vorigen und für U die Gleichung (1) dieses Paragraphen zu beachten. Dadurch ergibt sich schliesslich:

$$4\pi V' = A \int d\sigma \,.\, \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}. \tag{3}$$

§. 71.

Fortsetzung.

Wir stellen noch die Hypothese auf, dass die magnetischen Kräfte, welche von mehreren galvanischen Strömen auf die im Punkte (x, y, z) concentrirt gedachte positive magnetische Masseneinheit ausgeübt werden, sich nach dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte zusammensetzen. Für einen einzigen Strom folgt daraus unmittelbar, dass eine $n$fache Stromintensität auch $n$fache Kräfte ausübt. Die Componenten X, Y, Z sind also der Stromintensität J proportional, und deshalb auch

$$A = kJ. \tag{1}$$

Da wir die Stromintensität immer in der Richtung nehmen, in welcher die Bogenlänge s des Stromleiters zunimmt (§. 61), so ist zunächst festzustellen, wie diese Richtung und die Richtung der auf der Fläche S errichteten positiven Normale zu einander liegen sollen. Wir treffen die Bestimmung, dass, von einem Punkte der auf S errichteten positiven Normale aus gesehen, die Richtung des wachsenden Bogens s dieselbe sein soll, wie die Richtung, in welcher für einen auf das Zifferblatt sehenden Beobachter die Spitze des Uhrzeigers weiterrückt. Oder mit andern Worten: wenn jemand auf der positiven Seite der Fläche S sich aufrecht hinstellt und dann die Begrenzung in der Richtung des wachsenden Bogens s durchläuft, so hat er die Fläche S zur rechten Hand.

Die Erfahrung lehrt nun, dass bei dieser gegenseitigen Lage der positiven Normale und des wachsenden Bogens die Differenz $V_{+0} - V_{-0}$ positiv ausfällt, wenn J positiv ist. Folglich ist die Constante k positiv. Der Einfachheit wegen wollen wir die Einheit der Stromintensität so wählen, dass $k = 4\pi$ ist. Dann geht die Gleichung (2) des §. 69 über in:

$$(2) \qquad V_{+0} - V_{-0} = 4\pi J,$$

und statt der Gleichung (3) des vorigen Paragraphen erhalten wir:

$$(3) \qquad V' = J \int d\sigma \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}.$$

Das hier eingeführte Maass der Stromintensität wird das magnetische genannt.

§. 72.

Mechanische Bedeutung des Ausdruckes für V.

Wir suchen die mechanische Bedeutung des für V' gefundenen Ausdruckes. Es ist

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} = \lim \frac{\left(\frac{1}{r}\right)_{p=\delta} - \left(\frac{1}{r}\right)_{p=0}}{\delta}$$

für $\lim \delta = 0$. Folglich kann man V so schreiben:

$$(1) \qquad V' = \lim \int d\sigma \left\{ \frac{J}{\delta} \left(\frac{1}{r}\right)_{p=\delta} - \frac{J}{\delta} \left(\frac{1}{r}\right)_{p=0} \right\}.$$

Der Ausdruck für V' hat also die Form der Potentialfunction einer idealen magnetischen Massenvertheilung. Denken wir uns, man könnte die magnetischen Fluida stetig über eine Fläche ausbreiten, und es wäre $d\mu$ die in dem Flächenelement $d\sigma$ enthaltene magnetische Masse, so würde

$$V = -\int \frac{d\mu}{r}$$

die Potentialfunction dieser magnetischen Masse sein, wenn man die Integration über die ganze Fläche ausdehnt.

Belegen wir also die Fläche S (für $p = 0$) in jedem Flächenelemente mit der magnetischen Masse

$$d\mu = \frac{J}{\delta}\, d\sigma$$

und eine zu S parallele Fläche (für $p = \delta$) in jedem Flächenelemente mit der magnetischen Masse

$$d\mu = -\frac{J}{\delta}\, d\sigma,$$

so ist die Wirkung der über beide Flächen ausgebreiteten magnetischen Massen dieselbe wie die Wirkung des durch die Begrenzung von S hindurchgehenden galvanischen Stromes.

Die magnetischen Massen der beiden Belegungen sind von entgegengesetztem Zeichen, von gleicher und constanter Dichtigkeit, und diese Dichtigkeit ist der Scheidungsweite umgekehrt proportional.

Die Wirkung auf einen Punkt im inneren Raume zwischen den beiden unendlich nahe an einander liegenden Flächen ist hier nicht mit einbegriffen.

§. 73.

Geometrische Bedeutung des Ausdruckes für V.

Das Integral in der Gleichung (3) des §. 71 hat auch eine geometrische Bedeutung. Wir ziehen vom Punkte (x', y', z') einen Strahl, welcher die Strombahn s durchschneidet, und setzen ihn so in Bewegung, dass der Schnittpunkt die Curve s von Anfang bis zu Ende durchläuft. Dadurch wird eine Kegelfläche erzeugt, welche den Punkt $(x'\ y'\ z')$ zum Scheitel hat. Um denselben Punkt als Mittelpunkt legen wir eine Kugelfläche vom Radius 1. Diese wird von der Kegelfläche in einer geschlossenen Linie s_1 durchschnitten. Wir wollen zunächst der Einfachheit wegen voraussetzen, dass die Linie s_1 (die Projection von s auf der Kugel) ebenso einfach in sich zurückläuft wie die Linie s selbst, dass also, wenn man sie von Anfang bis zu Ende durchläuft, keiner ihrer Punkte mehr als einmal getroffen wird. Ueber die Gestalt der Fläche S, welche von der Strombahn s begrenzt wird, haben wir keinerlei besondere Voraussetzung gemacht. Wenn nun, wie eben verabredet worden, die Projection s_1 auf der Kugel vom Radius 1 eine einfach in sich zurücklaufende Linie ist, so können wir der Fläche S eine solche Gestalt geben, dass ihre Projection ein von s_1 umschlossenes Stück der Kugeloberfläche einfach bedeckt. Zieht man dann vom Punkte (x', y', z') aus durch irgend einen Punkt dieses umschlossenen Stückes der Kugeloberfläche einen Strahl, so wird dieser, gehörig verlängert, die Fläche S in einem Punkte, aber auch nur in einem Punkte durchschneiden. Der wachsende Strahl tritt an dieser Stelle von der dem Punkte (x', y', z') zugekehrten Seite der Fläche S auf die abgekehrte Seite über. Der Theil der Kugeloberfläche, welcher von der Projection der Fläche S nicht bedeckt wird, darf als das durch s_1 ausgeschlossene Gebiet bezeichnet werden. Zieht man von (x', y', z') aus durch irgend einen Punkt des ausgeschlossenen Gebietes einen Strahl, so trifft dieser, wie weit man ihn auch verlängern möge, die Fläche S gar nicht.

Wir wählen auf der Fläche S irgend einen Punkt (x, y, z) und bezeichnen mit r die Länge des Strahles, welcher vom Punkte (x', y', z') nach (x, y, z) hingezogen ist. Mit $d\sigma$ werde ein auf der Fläche S genommenes Flächenelement bezeichnet, auf dessen Begrenzung der Punkt (x, y, z) liegt. Lassen wir nun einen von (x', y', z') ausgehenden beweglichen Strahl an der ganzen Begrenzung von $d\sigma$ hingleiten, so beschreibt er eine Kegelfläche. Diese schneidet die Kugeloberfläche vom Radius 1 in einer einfach in sich zurücklaufenden Linie, der Begrenzung eines auf der Kugel liegenden Flächenelementes $d\Sigma$, welches die Projection von $d\sigma$ ist.

Die gegen die Fläche S im Punkte (x, y, z) errichtete positive Normale p schliesst mit der Richtung des wachsenden r einen Winkel ein, dessen Cosinus

$$\cos(r\,p) = \frac{\partial r}{\partial p}$$

ist, und dieser Cosinus ist positiv oder negativ, je nachdem die dem Punkte (x', y', z') abgekehrte Seite der Fläche S die positive oder die negative ist.

Die Projection von $d\sigma$ auf einer um (x', y', z') beschriebenen Kugel vom Radius r berechnet sich

$$= \pm\, d\sigma \frac{\partial r}{\partial p},$$

und es gilt das obere oder das untere Vorzeichen, je nachdem $\frac{\partial r}{\partial p}$ positiv oder negativ ist. Soll die Projection $d\Sigma$ auf der Kugel vom Radius 1 ausgedrückt werden, so hat man noch durch r^2 zu dividiren, also

$$(1) \qquad d\Sigma = \pm \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial p} d\sigma = \mp\, d\sigma \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}.$$

Wir bezeichnen mit Σ den Flächeninhalt der auf der Kugel vom Radius 1 liegenden Projection von S, und zwar in dem Sinne, dass Σ eine absolute Zahl ist. Alsdann ergibt sich aus (1) durch Integration

$$(2) \qquad \int d\sigma \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} = \mp\, \Sigma,$$

und es gilt das positive oder das negative Vorzeichen, je nachdem die Fläche S dem Punkte (x', y', z') ihre positive oder ihre negative Seite zukehrt.

Nun ist noch auf das Vorzeichen von J Acht zu geben. Wenn die Fläche S dem Punkte (x', y', z') ihre positive Seite zukehrt, so ist J positiv oder negativ, je nachdem — von dem Punkte aus gesehen — der positive Strom in derselben Richtung fliesst, in welcher der Uhrzeiger weiterrückt, oder in der entgegengesetzten Richtung. Kehrt die Fläche S dem Punkte (x', y', z') ihre negative Seite zu, so gilt für J die umgekehrte Vorzeichenregel. Dies lässt sich auch noch anders ausdrücken, nemlich: Das Vorzeichen von J ist dasselbe wie auf der rechten Seite der Gleichung (2), wenn — vom Punkte (x', y', z') aus gesehen — die Richtung des positiven Stromes mit der Drehungsrichtung des Uhrzeigers übereinstimmt. Und das Vorzeichen von J ist das entgegengesetzte von dem auf der rechten Seite der Gleichung (2), wenn — vom Punkte (x', y', z') aus gesehen — die Richtung des positiven Stromes der Drehungsrichtung des Uhrzeigers entgegengesetzt ist. Das Product

$$J \int \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} d\sigma$$

ist also positiv oder negativ, je nachdem vom Punkte (x', y', z') gesehen — der positive oder der negative Strom in der Drehungsrichtung des Uhrzeigers fliesst.

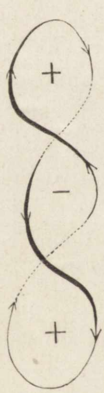
Für ein im Punkte (x', y', z') angebrachtes Auge verstehen wir unter der Himmelskugel die um diesen Punkt als Mittelpunkt construirte Kugel vom Radius 1.

Hiernach erhält man für die Herstellung der Potentialfunction im Punkte (x', y', z') die folgende Regel:

Man multiplicire den absoluten Werth der Stromintensität mit dem Theile der Himmelskugel, welcher für ein im Punkte (x', y', z') befindliches Auge von der Strombahn umschlossen erscheint, und gebe dem Producte positives oder negatives Vorzeichen, je nachdem für dasselbe Auge die Richtung des positiven Stromes mit der Drehungsrichtung des Uhrzeigers übereinstimmt oder ihr entgegengesetzt ist.

Diese von Gauss*) ausgesprochene Regel behält auch dann ihre Gültigkeit, wenn die Projection der einfach in sich zurücklaufenden Strombahn auf der Himmelskugel Doppelpunkte enthält.

Fig. 38.



Dann kehrt die Fläche S dem Punkte (x', y', z') nicht mehr einerlei Seite zu. Vielmehr gehören (**Fig. 38**) zwei Bestandtheile von Σ, deren Begrenzungen in einem Doppelpunkte zusammenstossen, zu solchen Theilen der Fläche S, welche dem Punkte (x', y', z') entgegengesetzte Seiten zukehren. Die einzelnen auf einander folgenden Bestandtheile von Σ kommen also nach Gleichung (2) mit abwechselnden Vorzeichen in Rechnung und haben alle dasselbe J mit einerlei Vorzeichen als gemeinschaftlichen Factor. Will man aber die absoluten Werthe der einzelnen Bestandtheile von Σ mit dem absoluten Werthe von J multiplicirt in Rechnung bringen, so hat man den Producten abwechselnde Vorzeichen zu geben und kommt so auf die von Gauss aufgestellte Regel zurück.

*) Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus, Art. 38. (Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins. 1838. — Gauss' Werke, Bd. 3.)

§. 74.

Wirkung des einzelnen Stromelementes auf das einzelne magnetische Theilchen.

Nachdem wir zu einer geometrischen Interpretation der Formel (3) §. 71 gelangt sind, welche die Potentialfunction der von dem galvanischen Strome ausgeübten magnetischen Kraft ausdrückt, können wir davon eine Anwendung auf die Kraftcomponenten selbst machen. Um die Componente X parallel der Axe der positiven x zu finden, haben wir den Punkt (x', y', z') in dieser Richtung um die Strecke δx zu verschieben und die davon herrührende Aenderung der Function V' durch die Grösse der Verschiebung zu dividiren. Nun ist die Function V' ein Product von zwei Factoren, von denen der erste — die Stromintensität J — bei der vorgenommenen Verschiebung keine Aenderung erleidet. Der zweite Factor ist der Theil der Himmelskugel, den das Auge das eine mal vom Punkte (x', y', z'), das andere mal vom Punkte $(x' + \delta x, y', z')$ aus durch die Strombahn umschlossen sieht. Statt aber die Strombahn im Raume fest beizubehalten und das Auge aus dem Punkte (x', y', z') in den Punkt $(x' + \delta x, y', z')$ zu verschieben, kann man auch das Auge in dem ersten Punkte lassen und dagegen die Strombahn so verschieben, dass jeder ihrer Punkte in der Richtung der abnehmenden x den Weg δx durchläuft. Es fragt sich, welche Theile der Himmelskugel dabei aus der Umschliessung austreten und welche in sie neu eintreten (**Fig. 39** und **40**). Jedes Element ds der Strombahn erzeugt bei der Verschiebung ein unendlich kleines Parallelogramm, dessen Projection auf der Himmelskugel zu suchen ist. Wir lassen die Richtung des wachsenden Bogens mit der Richtung des positiven Stromes zusammenfallen. Sie möge in Fig. 39 mit der Drehungsrichtung des Uhrzeigers übereinstimmen, in Fig. 40 aber die entgegengesetzte sein. Hat man zur Berechnung von V' die absoluten Werthe der Projection auf der Himmelskugel und der Stromintensität mit einander multiplicirt, so ist das Product für Fig. 39 mit positivem, für Fig. 40 mit negativem Vorzeichen zu versehen. Danach erhält man die Aenderung von V' mit dem richtigen Vorzeichen, wenn man bei Fig. 39 die aus der Umschliessung austretenden Theile der Himmelskugel mit negativem Zeichen, die eintretenden mit positivem Zeichen in Rechnung bringt und mit dem absoluten

Werthe der Stromintensität multiplicirt. Bei Fig. 40 hat man dagegen die austretenden Theile der Himmelskugel mit positivem

Fig. 39.

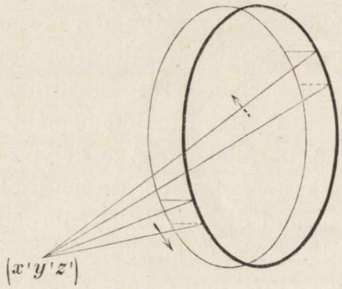
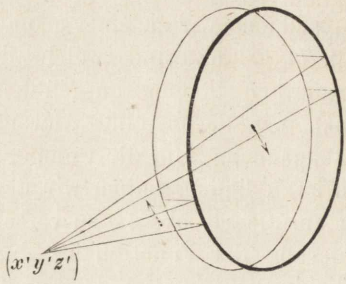


Fig. 40.



Zeichen, die eintretenden mit negativem Zeichen zu nehmen und auch hier mit dem absoluten Werthe der Stromintensität zu multipliciren.

Sehen wir nun das Bogenelement ds als eine unendlich kleine gerade Linie an, so können wir durch sie und den Punkt (x', y', z') eine Ebene festlegen. Wir ziehen die Normale p dieser Ebene und zwar positiv auf derjenigen Seite der Ebene, auf welcher ein dem Strome zugewandter Beobachter aufrecht stehend den positiven Strom von rechts nach links vorbeifliessen sieht. Wir bezeichnen mit cos (x, p) den Cosinus des Winkels, den die Richtung der positiven Normale mit der Richtung der positiven x einschliesst. Dann ist zu bemerken, dass für Fig. 39 dieser Cosinus positiv oder negativ ist, je nachdem das Bogenelement ds einem in die Umschliessung eintretenden Parallelogramm angehört oder einem austretenden. Für Fig. 40 gilt die entgegengesetzte Zeichenregel.

Ein solches Parallelogramm hat die Seiten ds und δx, deren Projectionen auf der Himmelskugel resp.

$$\frac{ds}{r} \sin (r, ds) \text{ und } \pm \frac{\delta x}{r} \cos (x, p)$$

sind. Diese Projectionen stehen rechtwinklig auf einander, denn die eine liegt in der Ebene des Winkels (r, ds) und die andere in der Normale dieser Ebene. Das Parallelogramm projicirt sich also auf der Himmelskugel in der Gestalt eines Rechteckes, dessen Inhalt (abgesehen vom Vorzeichen)

$$= \frac{ds}{r} \frac{\delta x}{r} \sin(r, ds) \cos(x, p)$$

ist. Dieses Product hat nun aber dasselbe Vorzeichen wie $\cos(x, p)$. Folglich ist für Fig. 39 das Product positiv oder negativ, je nachdem das dadurch ausgedrückte Flächenelement in die Umschliessung eintritt oder aus ihr heraustritt. Und die entgegengesetzten Zeichen ergeben sich bei Fig. 40. Man bringt also in jedem Falle das betreffende Element richtig in Rechnung, wenn man das Product selbst nimmt mit dem ihm eigenen Vorzeichen. Folglich ergibt sich

(1) $$\delta V' = \delta x \,.\, J \int \frac{ds}{r^2} \sin(r, ds) \cos(x, p)$$

und

(2) $$X = J \int \frac{ds}{r^2} \sin(r, ds) \cos(x, p).$$

Hier sind δx und J absolut zu nehmen. Aus der Gleichung (2) können wir auf die Kraftcomponente schliessen, mit welcher ein einzelnes Stromelement ds die im Punkte (x', y', z') concentrirte positive Einheit der magnetischen Masse in der Richtung der wachsenden x in Angriff nimmt. Diese Kraftcomponente in der Richtung der wachsenden x ist nemlich

$$J \frac{ds}{r^2} \sin(r, ds) \cos(x, p).$$

In derselben Weise finden sich die Kraftcomponenten in der Richtung der wachsenden y und resp. der wachsenden z:

$$J \frac{ds}{r^2} \sin(r, ds) \cos(y, p),$$

$$J \frac{ds}{r^2} \sin(r, ds) \cos(z, p).$$

Daraus geht hervor, dass die Gesammtkraft, welche das Stromelement ds auf den Punkt (x', y', z') ausübt, in die Richtung von p fällt, d. h. in die positive Normale der Ebene, welche durch das Stromelement ds und den Punkt (x', y', z') festgelegt wird. Die Grösse dieser Kraft ist

(3) $$J \frac{ds}{r^2} \sin(r, ds).$$

Die positive Normale tritt aus der Ebene in denjenigen Raum, in welchem man auf der Ebene aufrecht stehend den positiven Strom von rechts nach links an sich vorüberfliessen sieht.

Diese Regel setzt uns in den Stand, nach Grösse und Richtung die Kräfte anzugeben, welche von den sämmtlichen Stromelementen eines geschlossenen galvanischen Stromes oder auch von mehreren Strömen auf die im Punkte (x', y', z') befindliche Einheit der positiven magnetischen Masse ausgeübt werden. Die einzelnen Kräfte setzen sich nach dem Gesetze vom Parallelogramm zusammen.

§. 75.

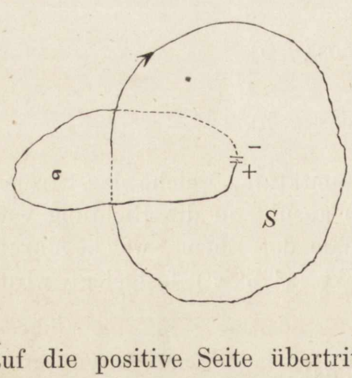
Das Integral $\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ und die Stromintensität.

Wir betrachten, wie vorher, einen geschlossenen linearen Strom und legen eine Fläche S, so dass die in sich zurücklaufende Strombahn deren alleinige und vollständige Begrenzung bildet (**Fig. 41**). Als positive Seite der Fläche nehmen wir diejenige, welche dem Beobachter zugekehrt sein muss, damit er den positiven Strom in der Drehungsrichtung des Uhrzeigers fliessen sehe. Nach dem magnetischen Maass gilt für die Stromintensität die Gleichung:

$$(1)\quad 4\pi J = \int dV = \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = V_{+0} - V_{-0},$$

wenn die Integration durch eine Curve ausgedehnt wird, die, ohne die Fläche S zu durchschneiden, von einem Punkte auf der negativen Seite der Fläche nach dem unendlich nahe gelegenen Punkte auf der positiven Seite führt. Wir legen eine Fläche σ so, dass dieser Integrationsweg ihre alleinige Begrenzung ausmacht. Diese Fläche σ wird von der Strombahn durchschnitten. Wir unterscheiden bei σ die positive und die negative Seite in der Weise, dass der positive Strom von der negativen Seite durch die Fläche hindurch auf die positive Seite übertritt. Wenn man also auf der positiven Seite von σ sich aufrecht hinstellt und dann den für das

Fig. 41.



Integral in (1) einzuschlagenden Integrationsweg durchläuft, so hat man die Fläche σ zur linken Hand. Oder mit anderen Worten: vor einem Beobachter, der auf der positiven Seite der Fläche σ aufrecht steht, führt der Integrationsweg von rechts nach links vorbei.

Ist J von der Zeit unabhängig, so gibt es die algebraische Summe der Elektricitätsmengen an, welche in der Zeiteinheit von der negativen auf die positive Seite von σ übergehen, vermindert um die algebraische Summe derjenigen Mengen, welche in derselben Zeit von der positiven zur negativen Seite übergehen. Diesen Ueberschuss berechnet man also nach der Gleichung (1), indem man das Integral

$$\frac{1}{4\pi}\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) \tag{2}$$

in der vorgeschriebenen Richtung durch die Begrenzung von σ erstreckt. Dies gilt auch dann, wenn die Fläche σ von der Strombahn nicht durchschnitten wird. Denn in solchem Falle ist sowohl die durch σ hindurchgehende Elektricitätsmenge als auch das Integral (2) gleich Null.

Sind mehrere galvanische Ströme vorhanden, welche als Componenten der magnetischen Kräfte liefern

$$\begin{gathered} X_1,\ Y_1,\ Z_1, \\ X_2,\ Y_2,\ Z_2, \\ \cdots\cdots \end{gathered}$$

so ist nach dem Gesetz vom Parallelogramm zu schreiben:

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \ldots \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \ldots \\ Z &= Z_1 + Z_2 + \ldots \end{aligned} \tag{3}$$

und es gilt dann allgemein der Satz:

Das Integral

$$\frac{1}{4\pi}\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

von rechts nach links durch die Begrenzung von σ erstreckt, gibt an, wie viel grösser die Elektricitätsmenge ist, welche in der Zeiteinheit von der negativen Seite auf die positive Seite von σ übertritt, als diejenige, welche während derselben Zeit in der entgegengesetzten Richtung durch die Fläche σ hindurchgeht.

§. 76.

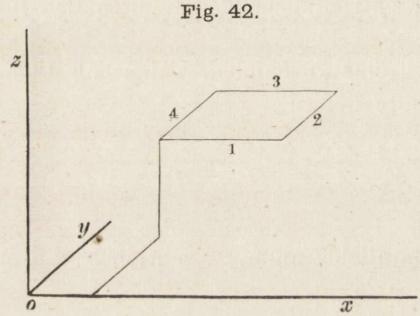
Die specifischen Stromintensitäten ausgedrückt durch die Componenten der elektromagnetischen Kraft.

Wir wollen den Satz des vorigen Paragraphen auf unendlich kleine Flächenelemente anwenden. Wir betrachten zunächst ein ebenes Rechteck, dessen Seiten dx und dy resp. zu den Axen der x und der y parallel laufen. Der dem Anfangspunkte zunächst gelegene Eckpunkt soll die Coordinaten x, y, z haben. Die Ebene des Rechtecks liegt normal gegen die z-Axe. Die specifische Stromintensität in der Richtung dieser Axe ist i_3. Folglich geht die Gleichung (1) des vorigen Paragraphen hier in folgende über

$$4\pi\, i_3\, dx\, dy = \int (X\, dx + Y\, dy + Z\, dz).$$

Das Integral auf der rechten Seite ist in positivem Sinne durch die Begrenzung des Rechtecks zu erstrecken. Wir bezeichnen die Seiten des Rechtecks (**Fig. 42**) so, wie sie bei einem positiven Umlauf auf einander folgen, mit 1, 2, 3, 4 und setzen fest, dass die Seite 1 vom Punkte (x, y, z) nach dem Punkte $(x + dx, y, z)$ hinführen soll. Wir geben ferner den Componenten X, Y, Z die Indices 1, 2, 3, 4, um anzudeuten, dass es sich um die Werthe in den gleichnamigen Seiten handelt. Das Integral, durch die Begrenzung des Rechtecks genommen, gibt dann

Fig. 42.



$$X_1\, dx + Y_2\, dy - X_3\, dx - Y_4\, dy.$$

Nun ist aber

$$X_1 = X, \quad X_3 = X + \frac{\partial X}{\partial y}\, dy,$$

$$Y_4 = Y, \quad Y_2 = Y + \frac{\partial Y}{\partial x}\, dx.$$

Folglich geht das Integral über in

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\, dy$$

und die Gleichung (1) des vorigen Paragraphen lautet jetzt

$$4\pi\, i_3\, dx\, dy = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Zwei entsprechende Gleichungen erhält man, wenn durch den Punkt (x, y, z) noch zwei ebene Flächenelemente normal gegen die Axen der x und der y gelegt werden. Die Resultate lauten:

$$(1) \qquad 4\pi\, i_1 = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},$$

$$(2) \qquad 4\pi\, i_2 = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x},$$

$$(3) \qquad 4\pi\, i_3 = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Diese Gleichungen können dazu dienen, für die Stelle (x, y, z) die specifischen Stromintensitäten zu berechnen, wenn die Componenten der von den galvanischen Strömen ausgeübten magnetischen Kraft gegeben sind.

§. 77.

Die Componenten der elektromagnetischen Kraft ausgedrückt durch die specifischen Stromintensitäten.

Es werde umgekehrt die Aufgabe gestellt, die Componenten der von den galvanischen Strömen ausgeübten magnetischen Kraft zu bestimmen, wenn für jede Stelle des Raumes die specifischen Stromintensitäten gegeben sind. Es handelt sich also darum, die Functionen X, Y, Z so zu bestimmen, dass sie den partiellen Differentialgleichungen genügen:

$$(1) \qquad \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 4\pi\, i_1,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 4\pi\, i_2,$$

$$(3) \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 4\pi\, i_3.$$

Die specifischen Stromintensitäten i_1, i_2, i_3 sind nur innerhalb der von Strömen durchflossenen Leiter von Null verschieden und im ganzen übrigen Raume gleich Null. Da wir voraussetzen, dass die magnetischen Kräfte nur von den galvanischen Strömen herrühren sollen, nicht aber von magnetischen Massen, so ist im ganzen unendlichen Raume die partielle Differentialgleichung (6) des §. 65 erfüllt, nemlich:

(4) $$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0.$$

Noch ist anzumerken, dass in unendlicher Entfernung die magnetischen Kräfte gleich Null sind:

(5) $$X_\infty = Y_\infty = Z_\infty = 0.$$

Die Gleichungen (1), (2), (3) sind nicht völlig unabhängig von einander. Sie erfüllen die Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial i_1}{\partial x}+\frac{\partial i_2}{\partial y}+\frac{\partial i_3}{\partial z}=0.$$

Um nun unsere Aufgabe zu lösen, eliminiren wir zunächst Y und Z. Dies geschieht dadurch, dass wir in Gleichung (4) nach x, in (3) nach $-y$, in (2) nach z differenziren und die Resultate links und rechts addiren. Auf diese Weise ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}=4\pi\left(\frac{\partial i_2}{\partial z}-\frac{\partial i_3}{\partial y}\right).$$

Durch Vergleichung mit §. 13, (4) gelangt man zu einer mechanischen Interpretation des gewonnenen Resultates. Danach darf man X wie die von einer anziehenden schweren Masse herrührende Potentialfunction ansehen, wenn im Punkte (x, y, z) die Dichtigkeit der Masse

$$=-\left(\frac{\partial i_2}{\partial z}-\frac{\partial i_3}{\partial y}\right)$$

ist. Es ergibt sich also ohne weiteres:

(6) $$X' = -\int\left(\frac{\partial i_2}{\partial z}-\frac{\partial i_3}{\partial y}\right)\frac{dT}{r}$$

und in entsprechender Weise:

(7) $$Y' = -\int\left(\frac{\partial i_3}{\partial x}-\frac{\partial i_1}{\partial z}\right)\frac{dT}{r},$$

(8) $$Z' = -\int\left(\frac{\partial i_1}{\partial y}-\frac{\partial i_2}{\partial x}\right)\frac{dT}{r}.$$

In diesen Gleichungen bedeutet dT das an den Punkt (x, y, z) anstossende Raumelement, r ist die Entfernung des Punktes $(x' y' z')$ vom Punkte (x, y, z) und X', Y', Z' sind die Componenten der magnetischen Kraft, welche auf die im Punkte (x', y', z') concentrirte positive Einheit der magnetischen Masse ausgeübt wird. Die Integrationen in (6), (7), (8) sind über die sämmtlichen von galvanischen Strömen durchflossenen Leiter auszudehnen.

§. 78.

Fortsetzung: Andere Lösung der Aufgabe.

Die Aufgabe des vorigen Paragraphen lässt sich auch noch auf einem anderen Wege lösen. Wir setzen

$$(1)\qquad \begin{aligned} X &= \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial y}, \\ Y &= \frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial z}, \\ Z &= \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x}. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind so beschaffen, dass sie die Gleichung (4) des vorigen Paragraphen von selbst erfüllen. Die Gleichungen (1), (2), (3) des vorigen Paragraphen geben jetzt:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y\,\partial x} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial z\,\partial x} &= 4\pi\, i_1, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial z\,\partial y} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x\,\partial y} &= 4\pi\, i_2, \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y\,\partial z} &= 4\pi\, i_3. \end{aligned}$$

Durch diese partiellen Differentialgleichungen sind die Functionen u_1, u_2, u_3 noch nicht völlig bestimmt. Denn angenommen, man habe eine Lösung u_1, u_2, u_3 gefunden, so bezeichne man mit $F(x, y, z)$ irgend eine Function von x, y, z, die mit ihren Derivirten endlich und stetig variabel ist. Dann genügen auch die Functionen

$$u_1 + \frac{\partial F}{\partial x}, \quad u_2 + \frac{\partial F}{\partial y}, \quad u_3 + \frac{\partial F}{\partial z}$$

den partiellen Differentialgleichungen (2) und geben vermöge der Gleichungen (1) für X, Y, Z dasselbe wie die Lösung u_1, u_2, u_3. Und umgekehrt, wenn man ausser der Lösung u_1, u_2, u_3 noch eine andere Lösung U_1, U_2, U_3 gefunden hat, so sind die Differenzen

$$\begin{aligned} &U_1 - u_1 \\ &U_2 - u_2 \\ &U_3 - u_3 \end{aligned}$$

die partiellen Derivirten einer und derselben Function $F(x, y, z)$, resp. nach x, nach y, nach z genommen. Denn aus den Gleichungen (2) ergibt sich für diese Differenzen:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial (U_1 - u_1)}{\partial y} - \frac{\partial (U_2 - u_2)}{\partial x}\right\}$$
$$= \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial (U_3 - u_3)}{\partial x} - \frac{\partial (U_1 - u_1)}{\partial z}\right\},$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial (U_2 - u_2)}{\partial z} - \frac{\partial (U_3 - u_3)}{\partial y}\right\}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial (U_1 - u_1)}{\partial y} - \frac{\partial (U_2 - u_2)}{\partial x}\right\},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial (U_3 - u_3)}{\partial x} - \frac{\partial (U_1 - u_1)}{\partial z}\right\}$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial (U_2 - u_2)}{\partial z} - \frac{\partial (U_3 - u_3)}{\partial y}\right\}.$$

Diese partiellen Differentialgleichungen sind erfüllt, wenn man setzt:

$$\frac{\partial (U_1 - u_1)}{\partial y} = \frac{\partial (U_2 - u_2)}{\partial x},$$
$$\frac{\partial (U_2 - u_2)}{\partial z} = \frac{\partial (U_3 - u_3)}{\partial y},$$
$$\frac{\partial (U_3 - u_3)}{\partial x} = \frac{\partial (U_1 - u_1)}{\partial z}.$$

Darin spricht sich aber aus, dass die Differenzen $U_1 - u_1$, $U_2 - u_2$, $U_3 - u_3$ die resp. nach x, y, z genommenen Derivirten einer und derselben Function $F(x, y, z)$ sind.

Um nun die Functionen u_1, u_2, u_3 völlig zu bestimmen, darf man noch eine Gleichung hinzufügen. Wir wählen die Gleichung:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

Durch sie gehen die Gleichungen (2) in folgende über:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = 4\pi\, i_1,\\
&\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = 4\pi\, i_2,\\
&\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} = 4\pi\, i_3.
\end{aligned} \tag{4}$$

Diesen partiellen Differentialgleichungen genügen die Lösungen:

$$
\begin{aligned}
u'_1 &= -\int \frac{i_1\, dT}{r}, \\
u'_2 &= -\int \frac{i_2\, dT}{r}, \qquad (5)\\
u'_3 &= -\int \frac{i_3\, dT}{r}.
\end{aligned}
$$

Hier bedeuten i_1, i_2, i_3 die specifischen Stromintensitäten im Punkte (x, y, z), es ist dT das an diesen Punkt anstossende Raumelement und r die Entfernung desselben Punktes von dem Punkte (x', y', z'). Mit u'_1, u'_2, u'_3 sind die Werthe von u_1, u_2, u_3 in dem letztgenannten Punkte bezeichnet. Die Integrationen hat man über alle von Strömen durchflossenen Leiter auszudehnen.

§. 79.

Aufgabe aus der Theorie des Erdmagnetismus.

Wir gehen zu der Behandlung einer Aufgabe über, die in der Theorie des Erdmagnetismus von Wichtigkeit ist.

Im Innern eines einfach zusammenhangenden Körpers sind magnetische Massen vorhanden, deren Vertheilung man nicht kennt. Es sollen aber für jeden Punkt im äusseren Raume die Componenten X, Y, Z der von jenen Massen ausgeübten magnetischen Kraft bekannt sein. Diese Componenten sind die partiellen Derivirten einer Potentialfunction V, die bis auf eine additive Constante für jeden Punkt des äusseren Raumes eindeutig bestimmt ist. Der Werth der additiven Constanten ergibt sich aus der Bedingung, dass in unendlicher Entfernung die Function V den Werth Null hat.

Im äusseren Raume ist die Function V nebst ihren sämmtlichen Derivirten überall endlich und stetig variabel, und sie genügt an jeder Stelle des äusseren Raumes der partiellen Differentialgleichung

$$
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \qquad (1)
$$

Nun lässt sich die Function V in unendlich mannichfaltiger Weise ins Innere des gegebenen Körpers stetig fortsetzen, d. h. so, dass sie im Innern endlich und stetig variabel ist, und dass sie in jedem Punkte der Oberfläche den dort gegebenen Werth annimmt. Jede solche Fortsetzung liefert dann für einen inneren Punkt im allgemeinen einen anderen Werth der Summe

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Diese Summe, durch 4π dividirt, gibt aber die magnetische Dichtigkeit in dem betreffenden Punkte an. Es gibt also, wie man sieht, unendlich viele Vertheilungen magnetischer Massen im Innern des Körpers, so beschaffen, dass sie die im ganzen äusseren Raume vorgeschriebenen magnetischen Wirkungen zu Stande bringen.

Nun kann man aber den Fall besonders ins Auge fassen, dass im ganzen inneren, wie im äusseren Raume keine magnetischen Massen und keine galvanischen Ströme vorhanden sind. Es entstehen dabei zwei Fragen, nemlich:

1) Können die im äusseren Raume vorgeschriebenen magnetischen Wirkungen dadurch hervorgebracht werden, dass in der Oberfläche des Körpers keine galvanischen Ströme, sondern nur magnetische Massen vertheilt sind?

2) Können jene Wirkungen dadurch zu Stande kommen, dass in der Oberfläche des Körpers keine magnetischen Massen, sondern nur galvanische Ströme auftreten?

Jede dieser beiden Fragen ist besonders zu behandeln. Es wird sich finden, dass in dem einen wie in dem anderen Falle eine einzige bestimmte Vertheilung des Magnetismus, resp. der Ströme das Verlangte leistet.

Zunächst sind die Bedingungsgleichungen aufzustellen, in denen sich ausspricht, dass im Innern des Körpers keine magnetischen Massen und keine galvanischen Ströme vorhanden sind. Dazu wird erfordert, dass im Innern des Körpers an jeder Stelle

$$(2) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

sei, und dass ebenfalls im Innern an jeder Stelle die drei Gleichungen erfüllt seien:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

In Folge dieser Gleichungen (2) und (3) sind X, Y, Z im Innern des Körpers die partiellen Derivirten einer Function V, nemlich:

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}, \tag{4}$$

und diese Function V genügt im Innern des Körpers der partiellen Differentialgleichung (1).

Wir bezeichnen mit S die Oberfläche des Körpers. In einem Punkte (x, y, z) derselben werde die Normale nach aussen und nach innen gezogen, und eine auf derselben abgetragene Strecke p nach aussen positiv, nach innen negativ gerechnet. Durch $p = +0$, resp. $p = -0$ soll ausgedrückt werden, dass es sich um einen Punkt auf der Normale handelt, welcher ausserhalb, resp. innerhalb des Körpers unendlich nahe an der Oberfläche liegt. Die Werthe der Function V und ihrer ersten Derivirten in einem solchen Punkte mögen durch den angehängten Index $+0$ resp. -0 bezeichnet werden. Es ist zu bemerken, dass V_{+0} und $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+0}$ für jeden Punkt der Oberfläche S bekannt sind.

§. 80.

Fortsetzung: Fingirte Vertheilung magnetischer Massen in der Oberfläche des Magnets.

Zunächst sollen die im äusseren Raume gegebenen magnetischen Wirkungen dadurch hervorgebracht werden, dass magnetische Massen **nur** in der Oberfläche des Körpers vertheilt sind, und keine galvanischen Ströme auftreten.

Dies Problem lässt sich folgendermaassen formuliren:

Die Function V ist für jeden Punkt im äusseren Raume gegeben. Sie ist daselbst mit allen ihren Derivirten überall endlich und stetig variabel und genügt der partiellen Differentialgleichung (1) des vorigen Paragraphen. Die Function V soll für das Innere des Körpers so bestimmt werden, dass sie darin der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

Genüge leiste, dass sie nebst ihren Derivirten im Innern endlich und stetig variabel sei, und dass an jeder Stelle der Oberfläche

$$V_{-0} = V_{+0} \tag{2}$$

sei.

Die Gleichung (1) sagt aus, dass im Innern keine magnetischen Massen und keine Ströme, die Gleichung (2), dass in der Oberfläche keine Ströme vorhanden sind.

Diese Aufgabe ist im §. 21 gelöst, und im §. 34 ist bewiesen, dass es immer eine und nur eine Auflösung gibt. Hat man dieselbe gefunden, so ergibt sich die Dichtigkeit der magnetischen Massen in einem Punkte (x, y, z) der Oberfläche nach §. 65 (9) aus der Gleichung:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{-0} = 4\pi\rho. \tag{3}$$

§. 81.

Fortsetzung: Fingirte galvanische Ströme in der Oberfläche des Magnets.

Wir gehen zu der zweiten Aufgabe über. Die im äusseren Raume gegebenen magnetischen Wirkungen sollen dadurch zu Stande kommen, dass galvanische Ströme **nur** in der Oberfläche des Körpers auftreten und nirgends magnetische Massen vorhanden sind.

Diese Aufgabe formulirt sich wie folgt:

Die Function V ist für jeden Punkt im äusseren Raume in derselben Weise gegeben, wie bei der vorigen Aufgabe. Ihre Fortsetzung soll für das Innere des Körpers so bestimmt werden, dass sie darin der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

Genüge leistet, dass sie nebst ihren Derivirten im Innern endlich und stetig variabel sei, und dass an jeder Stelle der Oberfläche

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{-0} = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+0} = N \tag{2}$$

sei.

Die Gleichung (1) sagt aus, dass im Innern keine magnetischen Massen und keine Ströme, die Gleichung (2), dass in der Oberfläche keine magnetischen Massen vorhanden sind.

Aus der Gleichung (1) folgt noch

$$\int N\, d\sigma = 0, \tag{3}$$

wenn das Integral über die Oberfläche des Körpers erstreckt wird. Um dies zu beweisen, errichten wir im Punkte (x, y, z) der Oberfläche nach innen zu die Normale und bezeichnen eine von jenem Punkte aus darauf abgetragene Strecke mit n, so dass $n = -p$ ist für negative Werthe von p. Durch Anwendung des in §. 19 (4) entwickelten Hülfsatzes erhält man

$$\int\int\int\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$
$$= -\int\left(X\frac{\partial x}{\partial n} + Y\frac{\partial y}{\partial n} + Z\frac{\partial z}{\partial n}\right) d\sigma.$$

Dabei ist das Integral links über den ganzen Körper, das Integral rechts über seine Oberfläche auszudehnen. Beachtet man aber die Gleichungen (4) des §. 79, so lässt sich die letzte Gleichung so schreiben:

$$\int\int\int\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz = -\int\frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma.$$

Nun ist aber vermöge der Gleichung (1) die linke Seite gleich Null. Es ist ferner

$$(4) \qquad -\frac{\partial V}{\partial n} = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{-0} = N.$$

Setzt man dieses ein, so erlangt man die zu beweisende Gleichung (3).

Es kommt nun darauf an, zu beweisen, dass es immer eine, und nur eine Function V gibt, die den aufgestellten Bedingungen Genüge leistet. Zu dem Ende bezeichnen wir mit u eine einwerthige Function von x, y, z, über die nichts weiter festgesetzt wird, als dass sie selbst und ihre ersten Derivirten im Innern des Körpers überall endlich und stetig variabel sein sollen. Solcher Functionen gibt es unendlich viele. Folglich kann auch das über den Körper ausgedehnte Integral

$$(5) \qquad \Omega(u) = \int\int\int\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} dx\, dy\, dz$$

unendlich viele verschiedene Werthe annehmen. Welche Function u man aber auch nehmen möge, immer wird der Werth von $\Omega(u)$ positiv und endlich ausfallen. Das Erste ergibt sich aus der Form des Integrals, das Andere folgt unmittelbar aus der Voraussetzung. Wir wollen nur solche Functionen u in Betracht ziehen, von denen keine zwei in constantem Verhältniss zu einander stehen. Diese Beschränkung wird eingeführt durch die Nebenbedingung, dass das Oberflächen-Integral

$$(6)\qquad \int u\, N\, d\sigma = A$$

sein soll. Unter A verstehen wir eine von Null verschiedene Constante, deren Grösse vorläufig unbestimmt bleiben möge.

Bezeichnen wir eine von den unendlich vielen Functionen u mit v, so lässt jede andere sich in die Form bringen

$$u = v + h\, s,$$

wenn h eine passend zu wählende Constante bedeutet und s eine Function, die im Innern des Körpers an dieselbe Bedingung geknüpft ist wie die Functionen u, mit der aus (6) hervorgehenden Nebenbedingung, dass das Oberflächen-Integral

$$(7)\qquad \int s\, N\, d\sigma = 0.$$

Da die Werthe von $\Omega(u)$ endlich und positiv sind, so gibt es unter den Integralen (5), bei denen die Nebenbedingung (6) erfüllt ist, mindestens ein Minimum. Wir bezeichnen mit v die Function, welche dieses Minimum zu Stande bringt. Dann lässt sich jede andere Function u in die Form bringen

$$u = v + h\, s,$$

und wenn man nun h unendlich klein annimmt, so lautet die Bedingung des Minimum

$$(8)\qquad \Omega(v) \leqq \Omega(v + h\, s).$$

Das Integral $\Omega(v + h\, s)$ lässt sich in derselben Weise entwickeln wie in §. 34. Wir erhalten

$$(9)\qquad \Omega(v + h\, s)$$
$$= \Omega(v) + 2h \int\int\int \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial s}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$
$$+ h^2\, \Omega(s).$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung wollen wir den zweiten Bestandtheil nach §. 20 transformiren. Es findet sich

$$(10)\qquad \int\int\int \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial s}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$
$$= -\int s\frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma - \int\int\int s\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz.$$

Nun kommen aber nur solche Functionen s in Betracht, welche die Nebenbedingung (7) erfüllen. Um diese mit zu berücksichtigen, multipliciren wir ihre beiden Seiten mit einer vorläufig noch unbestimmten constanten Grösse k, ferner mit $2h$ und verbinden das Resultat mit (10) durch Addition. Dadurch findet sich, dass bei Gültigkeit der Gleichung (7) die Gleichung (9) in folgende übergeht:

$$\begin{aligned}(11)\qquad & \Omega(v+hs) \\ &= \Omega(v) - 2h\int s\left(\frac{\partial v}{\partial n} - kN\right)d\sigma \\ &- 2h\int\int\int s\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz \\ &+ h^2\,\Omega(s).\end{aligned}$$

Dies gilt für jeden Werth der Constanten h. Soll für ein unendlich kleines h die Bedingung (8) erfüllt sein, so muss der Inbegriff dessen, was auf der rechten Seite von (11) mit $2h$ multiplicirt ist, gleich Null gesetzt werden. Dazu ist nöthig und hinreichend, dass

$$(12)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

sei an jeder Stelle im Innern des Körpers und

$$(13)\qquad \frac{\partial v}{\partial n} = kN$$

in jedem Punkte seiner Oberfläche.

Setzen wir dann

$$(14)\qquad V = -\frac{1}{k}\,v,$$

so genügt die Function V allen aufgestellten Bedingungen.

Die Constante k ist von dem Werthe der Grösse A abhängig, jedenfalls aber von Null verschieden. Denn angenommen, es wäre $k = 0$, so müsste vermöge der Gleichung (13) in jedem Punkte der Oberfläche $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$ sein. Man hätte also, wenn man dies und die Gleichung (12) beachtet:

$$-\int v\,\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma - \int\int\int v\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right\}dx\,dy\,dz = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung geht aber durch die Transformation des §. 20 hervor aus dem Integral

$$\int\int\int\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right\} dx\, dy\, dz.$$

Dieses Integral müsste also den Werth Null haben, was nicht anders möglich ist, als wenn man $v = const.$ setzt. Hieraus würde aber ohne weiteres folgen:

$$\int v\, N\, d\sigma = c\int N\, d\sigma = 0$$

nach Gleichung (3), und das steht mit der Nebenbedingung (6) im Widerspruch. Demnach muss k von Null verschieden sein.

Es bleibt noch zu beweisen, dass es ausser v keine andere Function gibt, welche unter der Bedingung (6) das Integral (5) zu einem Minimum macht. Angenommen, es wäre $u = v + s$ eine Function, die dies leistete, so würde sie die Bedingung erfüllen:

(15) $$\Omega\,(v + s) \leqq \Omega\,(v + h\, s),$$

wenn hier die Constante h unendlich nahe an 1 genommen wird. Nun ist aber nach den Gleichungen (11), (12) und (13):

$$\Omega\,(v + h\, s) = \Omega\,(v) + h^2\, \Omega\,(s),$$
$$\Omega\,(v + s) = \Omega\,(v) + \Omega\,(s).$$

Folglich lautet die Bedingung (15) jetzt:

(16) $$\Omega\,(s) \leqq h^2\, \Omega\,(s).$$

Man darf aber die Constante h^2, welche hier unendlich nahe an 1 liegen soll, nicht bloss grösser, sondern auch kleiner als 1 nehmen, und deshalb kann die Bedingung (16) nur dadurch erfüllt werden, dass man setzt:

$$\Omega\,(s) = 0, \quad \text{d. h. } s = const.$$

Sieht man von einer willkürlichen additiven Constanten ab, so ist demnach v die einzige Function, welche unter Innehaltung der Nebenbedingung (6) das Integral (5) zu einem Minimum macht.

Endlich kann man noch den Zusammenhang zwischen k und A aufsuchen. Es ist schon bewiesen, dass

$$\int\int\int\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right\} dx\, dy\, dz$$
$$= -\int\int\int v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz$$
$$-\int v\,\frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma.$$

Das dreifache Integral links ist das Minimum $\Omega\,(v)$. Auf der rechten Seite fällt das dreifache Integral heraus wegen der Gleichung (12). Zieht man also noch die Gleichung (13) heran, so geht die letzte Gleichung über in

$$\Omega(v) = -k \int v N d\sigma,$$

d. h. in

$$\Omega(v) = -k A.$$

Da wir über A noch disponiren können, so dürfen wir

$$A = \Omega(v)$$

setzen und erhalten aus (14):

$$V = v. \tag{17}$$

Es gibt also, abgesehen von einer additiven Constanten, nur eine Function V, welche den zu Anfang dieses Paragraphen aufgestellten Bedingungen Genüge leistet.

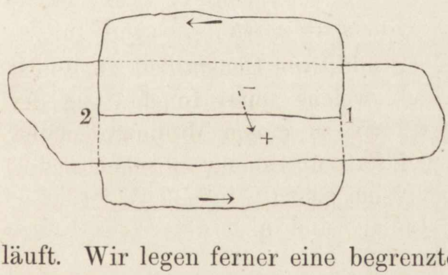
Der Satz ist nur dann gültig, wenn der gegebene Körper einfach zusammenhangend ist.

§. 82.

Fortsetzung: Die Strömungslinien.

Hat man bei der Behandlung der Aufgabe des vorigen Paragraphen die Function V für das Innere des Körpers bestimmt, so bleibt noch übrig, die Strömung in der Oberfläche S zu untersuchen. Zu diesem Zwecke ziehen wir in der Oberfläche (**Fig. 43**) eine beliebige, sich selbst nicht durchschneidende Curve vom Punkte 1 nach dem Punkte 2. Als positive Seite derselben betrachten wir diejenige, die zur linken Hand liegt, wenn man auf der Aussenseite der Oberfläche S die Curve von 1 nach 2 durchläuft. Wir legen ferner eine begrenzte Fläche T, welche die Oberfläche S längs der Curve 1 2 durchschneidet. Die Curve 1 2 zerlegt diese Fläche T in zwei getrennte Theile, von denen der eine ausserhalb, der andere innerhalb des gegebenen Körpers liegt. Als positiven Umlauf durch die Begrenzung von T bezeichnen wir denjenigen, welcher ausserhalb des Körpers von 1 nach 2 und innerhalb von 2 nach 1 führt.

Fig. 43.



Um die Elektricitätsmenge J zu finden, welche in der Zeiteinheit durch die Curve 1 2 von ihrer negativen auf die positive Seite mehr überströmt als umgekehrt, haben wir nach §. 75 das Integral

$$\frac{1}{4\pi}\int dV$$

in positiver Richtung durch die Begrenzung von T zu erstrecken. Es ergibt sich für den Integrationsweg 1 2 ausserhalb des Körpers:

$$\int dV = (V_2)_{p=+0} - (V_1)_{p=+0},$$

und für den Integrationsweg 2 1 innerhalb:

$$\int dV = (V_1)_{p=-0} - (V_2)_{p=-0}.$$

Setzen wir also

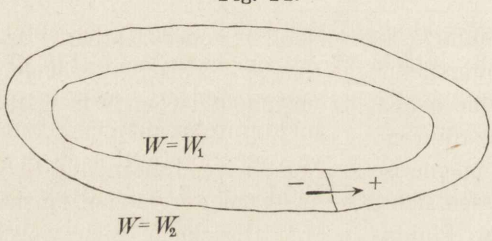
(1) $$V_{+0} - V_{-0} = 4\pi W,$$

so erhalten wir

(2) $$J = W_2 - W_1.$$

Man kann nun in der Fläche S ein System von in sich zurücklaufenden Linien ziehen (**Fig. 44**), so dass in einer und derselben Linie W einen constanten Werth hat, der sich ändert, wenn man von einer Linie zur anderen übergeht. Durch eine solche Linie strömt in der Zeiteinheit immer ebenso viel Elektricität von der einen auf die andere Seite wie umgekehrt. Das kommt auf dasselbe hinaus, als ob man sagt: durch eine solche Linie geht gar keine Elektricität hindurch. Diese Linien sind also die Strömungslinien. Für zwei solche Linien:

Fig. 44.



$$W = W_1,$$
$$W = W_2,$$

gibt die Differenz

$$W_2 - W_1$$

die Stromintensität der zwischen ihnen sich bewegenden Elektricität an.

Es ist zu bemerken, dass die Function W ebenso mit einer willkürlichen additiven Constanten behaftet ist wie die Function V des vorigen Paragraphen. Auf die Differenz $W_2 - W_1$ übt aber diese Constante gar keinen Einfluss, weil sie in Minuend und Subtrahend dieselbe ist. Es gibt also nur ein System von Strömungslinien und zwischen irgend welchen zwei Linien dieses Systems nur eine bestimmte Stromintensität.

Nehmen wir in der Oberfläche S ein unendlich kleines Linienelement ds, so ist

$$W_{s+ds} - W_s = \frac{\partial W}{\partial s} ds$$

die Elektricitätsmenge, welche in der Zeiteinheit normal gegen das Linienelement von der negativen auf die positive Seite desselben übertritt, vermindert um die Elektricitätsmenge, welche in derselben Zeiteinheit in entgegengesetzter Richtung hindurchgeht. Diese Grösse, dividirt durch ds, nennen wir die specifische Stromintensität in der gegen das Linienelement normalen Richtung. Bezeichnen wir dieselbe mit i, so ist demnach

$$(3) \qquad i = \frac{\partial W}{\partial s}.$$

Die Erde ist ein einfach zusammenhangender Körper. Auf sie lassen sich also die Untersuchungen der §§. 79 bis 82 anwenden. Um die im äusseren Raume beobachteten magnetischen Wirkungen auf ihren Grund zurückzuführen, kann man unendlich viele verschiedene Vertheilungen magnetischer Massen im Innern der Erde annehmen. Dieselben lassen sich aber ersetzen durch eine einzige Vertheilung magnetischer Fluida an der Oberfläche oder durch eine einzige Anordnung galvanischer Ströme an der Oberfläche.

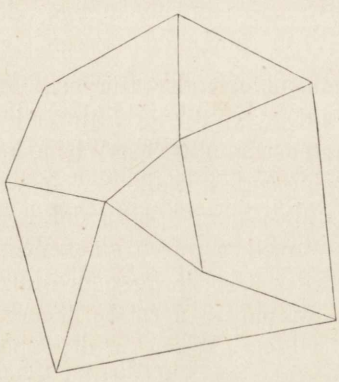
Die Vertheilung von magnetischen Flüssigkeiten an der Oberfläche der Erde ist nur eine ideale. Dagegen können die galvanischen Ströme in der Oberfläche wirklich vorhanden sein. Wollte man die äusseren magnetischen Wirkungen allein aus magnetischen Massen im Innern der Erde erklären, so müssten dieselben in enormen Quantitäten vorhanden sein. Dagegen reichen schon sehr schwache galvanische Ströme in der Oberfläche hin, um jene äusseren magnetischen Wirkungen hervorzubringen. Nur muss für die Ströme eine fortdauernde elektromotorische Kraft nachgewiesen werden.

§. 83.
Mehrfach zusammenhangende Körper.

Wir wollen jetzt einen mehrfach zusammenhangenden Körper genauer betrachten. Ein Körper heisst einfach zusammenhangend, wenn sich in keiner Weise eine Schnittfläche hindurchlegen lässt, durch welche er nicht in völlig getrennte Stücke zerfiele. Lässt sich ein Körper durch q Schnittflächen in einen einfach zusammenhangenden verwandeln, so nennen wir ihn $(q+1)$fach zusammenhangend. Für einen solchen Körper ist auch der äussere Raum mehrfach zusammenhangend, und zwar wie jener $(q+1)$fach, falls der Körper selbst vollständig begrenzt im endlichen Gebiete liegt.

Um diesen Satz zu beweisen, haben wir zunächst das Schema eines mehrfach zusammenhangenden Körpers herzustellen. Als solches bietet sich das Drahtsystem des §. 62 dar, wenn wir (um nicht einen besonderen Fall im Auge zu haben) die Querschnitte aller Drähte in zwei Dimensionen endlich voraussetzen. Wir numeriren die sämmtlichen m einzelnen Drahtzweige und die sämmtlichen n Knoten. Der zu führende Beweis beruht auf Abzählungen, die der Einfachheit wegen an einer ebenen Hülfsfigur ausgeführt werden können. Wir nehmen in der Ebene in endlicher Entfernung von einander ebenso viel Punkte, als das Drahtsystem Knoten hat. Je ein Punkt der Ebene und der gleichnumerirte Knoten des Drahtsystems entsprechen einander. Die Punkte der Ebene sollen nun durch gerade Linien so verbunden werden, dass je einer solchen Linie ein besonderer einzelner Drahtzweig entspricht und umgekehrt, und dass Anfangs- und Endpunkt irgend einer Linie resp. den Knoten correspondiren, zwischen denen der der Linie entsprechende Drahtzweig liegt. Da über die gegenseitige Lage der Knotenpunkte in der Ebene nichts vorausgesetzt ist, so kann man sie immer so anordnen, dass keine von den Verbindungslinien zwischen ihrem Anfangs- und ihrem Endpunkte von einer anderen

Fig. 45.

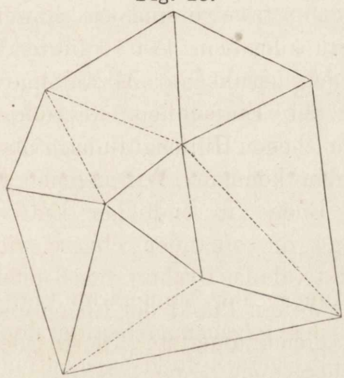


durchschnitten wird, und dass keine zwei Linien, die in einem Knotenpunkte zusammenstossen, einen Winkel von genau 180^0 einschliessen (**Fig. 45**).

Die ebene Hülfsfigur besteht nun aus einem Polygon, dessen sämmtliche Eckpunkte Knotenpunkte sind, und welches die übrigen Knotenpunkte in seinem Innern enthält. Ein Theil der gezogenen Linien bildet die Begrenzung des Polygons, die übrigen liegen im Innern und zerlegen dasselbe in eine noch näher zu bestimmende Anzahl einzelner Figuren.

Zerschneidet man jede Linie der Figur 45 an einer zwischen den Knotenpunkten liegenden Stelle und schreibt vor, dass beim stetigen Durchlaufen des Liniensystems keine Schnittstelle überschritten werden darf, so zerfällt dasselbe in n einfach zusammenhangende Systeme, von denen jedes einen Knotenpunkt in sich enthält. In der That kann man von jedem Knotenpunkte aus auf allen von dort auslaufenden Linien sich stetig fortbewegen, auf jeder aber nur bis an die Schnittstelle. Lässt man nun einen Schnitt fallen, so werden dadurch die beiden einfach zusammenhangenden Systeme, welche daselbst an einander stossen, zu einem einzigen einfach zusammenhangenden Systeme vereinigt. Oder mit anderen Worten: durch die Aufhebung eines Schnittes wird die Anzahl der einfach zusammenhangenden Liniensysteme um 1 vermindert. Will man also nur ein einziges einfach zusammenhangendes System behalten, so muss man $n-1$ Schnitte beseitigen.

Fig. 46.



Das gegebene Liniensystem wird demnach durch $m-n+1$ Schnitte im Innern der Linien in ein einfach zusammenhangendes System verwandelt.

In Fig. 45 seien nun a äussere Knotenpunkte vorhanden, folglich auch a äussere Begrenzungslinien. Um die Anzahl der einzelnen Figuren zu betimmen, in welche das a-Eck durch die inneren Linien zerlegt wird, ziehen wir in jeder Figur, die mehr als drei Seiten hat, von einem Punkte aus die Diagonalen. (Sie sind in **Fig. 46** punktirt.)

Dadurch zerfallen die inneren Figuren in lauter Dreiecke, deren Anzahl leicht aus ihrer Winkelsumme bestimmt werden kann. Die Summe der Winkel an den äusseren Knotenpunkten ist nemlich

$$= (a - 2)\, 2\, R$$

und an den inneren Knotenpunkten

$$= (n - a)\, 4\, R.$$

Folglich haben wir

$$2\,(n - 1) - a$$

Dreiecke und

$$6\,(n - 1) - 4a$$

innere Dreiecksseiten. Dabei ist jede innere Linie der Fig. 46 doppelt gezählt. Die Anzahl dieser inneren Linien ist also

$$3\,(n - 1) - 2a.$$

In der ursprünglichen Fig. 45 sind aber nur

$$m - a$$

innere Linien vorhanden. Folglich hat man in Fig. 46

$$3\,(n - 1) - a - m$$

punktirte Linien, die wieder weggenommen werden müssen, wenn man auf die ursprüngliche Figur zurückkommen will. Durch jede weggenommene punktirte Linie werden zwei benachbarte Figuren zu einer einzigen vereinigt. Die Anzahl der einzelnen Figuren, in welche das a-Eck der Fig. 45 durch die inneren Linien zerlegt wird, ist demnach

$$2\,(n - 1) - a - \{3\,(n - 1) - a - m\}$$
$$= m - n + 1.$$

Nun entspricht jedem Schnitt im Innern der Linien von Fig. 45 eine Querschnittsfläche im Innern des gegebenen Drahtsystems. Dasselbe wird also durch $m - n + 1$ Querschnittsflächen in einen einfach zusammenhangenden Körper verwandelt. Jeder einzelnen einfachen Figur in 45 entspricht eine Querschnittsfläche im äusseren Raume. Die Anzahl dieser Querschnittsflächen ist demnach auch $m - n + 1$. Sind sie alle vorhanden, so besitzt der äussere Raum noch vollen Zusammenhang. Denn man kann von einem Punkte auf der einen Seite irgend eines Querschnittes nach allen Punkten auf der einen wie auf der andern Seite jedes Querschnittes gelangen, ohne den äusseren Raum zu verlassen. Wollte man aber im äusseren Raume noch eine neue Querschnittsfläche legen, so würde er dadurch in zwei getrennte Stücke zerfallen. Der gegebene Körper und der äussere Raum sind also beide $(m - n + 2)$-fach zusammenhangend.

Aus dem Gange des Beweises ersieht man zugleich, dass der gegebene Körper in mannichfaltiger Weise in einen einfach zusammenhangenden zerlegt werden kann. Die Anzahl der Querschnitte ist aber bei allen Zerlegungen dieselbe.

Nach dieser Einschaltung kehren wir zu der Untersuchung des §. 81 zurück.

§. 84.

Die Aufgabe des §. 81 für einen mehrfach zusammenhangenden Körper.

Die Aufgabe des §. 81 soll jetzt unter der Voraussetzung behandelt werden, dass der gegebene Körper $(q + 1)$fach zusammenhangend ist.

Wir zerlegen zunächst den äusseren Raum durch q Querschnittsflächen $S_1, S_2, \ldots S_q$ in einen einfach zusammenhangenden und setzen fest, dass alle Verschiebungen, die mit einem Punkte (x, y, z) im äusseren Raume vorgenommen werden, völlig innerhalb dieses einfach zusammenhangenden Raumes liegen sollen, d. h. dass keine Verschiebung durch die Oberfläche des gegebenen Körpers oder durch irgend eine der Querschnittsflächen $S_1, S_2, \ldots S_q$ schneidend hindurchgehen darf. Nach §. 79 (4) ist

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dV$$

an jeder Stelle des äusseren Raumes ein vollständiges Differential. Erstreckt man also das Integral

$$V = \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) \tag{1}$$

aus unendlicher Entfernung nach dem im äusseren Raume gelegenen Punkte (x, y, z), so ist der Werth desselben unabhängig von dem Integrationswege, wenn nur dieser Weg seiner ganzen Erstreckung nach in dem einfach zusammenhangenden äusseren Raume liegt. Die Function V ist demnach innerhalb des genannten Raumes eine einwerthige, überall endliche Function des Ortes, deren Werthe bei jeder zulässigen stetigen Verschiebung des Punktes (x, y, z) sich stetig ändert.

Für zwei Punkte, die einander unendlich nahe auf entgegengesetzten Seiten irgend eines der Querschnitte S liegen, hat die

Function V Werthe von endlicher Differenz. Man findet diese Differenz, indem man das Integral

$$\int (X dx + Y dy + Z dz)$$

von dem einen Punkte nach dem andern hin längs eines Integrationsweges erstreckt, welcher völlig innerhalb des einfach zusammenhangenden äusseren Raumes liegt. Für einen und denselben Querschnitt ist die Differenz

$$V_{+0} - V_{-0}$$

constant, an welcher Stelle dieses Querschnittes man auch die beiden unendlich nahe gelegenen Punkte nehmen möge. Denn zieht man längs eines Querschnittes zwei einander unendlich nahe gelegene Linien, die eine auf der positiven, die andere auf der negativen Seite des Querschnittes, so haben in irgend einem Punkte der einen Linie die Componenten X, Y, Z resp. dieselben Werthe wie in dem unendlich nahe gelegenen Punkte der andern Linie.

Die q constanten Werthe, welche die Differenz

$$V_{+0} - V_{-0}$$

zu beiden Seiten der Querschnitte S_1, S_2, ... S_q besitzt, sind nach der Natur der Aufgabe bekannt. Wir wollen sie mit C_1, C_2, ... C_q bezeichnen.

Soll nun die Function gemäss den Bedingungen (1) und (2) des §. 81 in das Innere des gegebenen Körpers fortgesetzt werden, so kann man dazu genau den dort eingeschlagenen Weg wieder durchmachen. Aber die Function, welche sich dabei ergibt (sie soll hier mit V' bezeichnet werden), ist nicht mehr die einzige Lösung der Aufgabe. Man kann nemlich noch eine Function V'' hinzufügen, welche q willkürliche constante Grössen c_1, c_2, ... c_q als lineär auftretende Factoren enthält. Wir stellen durch q Querschnittsflächen Q_1, Q_2, ... Q_q im Innern des gegebenen Körpers einfachen Zusammenhang her, und gehen darauf aus, die Function v_μ den folgenden Bedingungen gemäss zu bestimmen. Es soll

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 v_\mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_\mu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_\mu}{\partial z^2} = 0$$

sein im ganzen Innern. Es soll

$$(3) \qquad \frac{\partial v_\mu}{\partial n} = 0$$

sein für jeden Punkt der Oberfläche des $q$fach zusammenhangenden Körpers. Dabei ist mit n die nach innen gezogene Normale dieses Punktes gemeint. Es soll

$$(v_\mu)_{+0} - (v_\mu)_{-0} = 1 \tag{4}$$

sein für je zwei Punkte, die einander unendlich nahe auf entgegengesetzten Seiten des Querschnittes Q_μ liegen. Es soll endlich für denselben Querschnitt

$$\left(\frac{\partial v_\mu}{\partial P}\right)_{+0} = \left(\frac{\partial v_\mu}{\partial P}\right)_{-0} \tag{5}$$

sein, wenn wir mit P eine Strecke bezeichnen, die von einem Punkte des Querschnittes Q_μ aus auf der Normale abgetragen ist, positiv nach der einen, negativ nach der andern Seite.

Im Uebrigen soll die Function v_μ nebst ihren Derivirten überall endlich und stetig variabel sein innerhalb des ganzen $q$fach zusammenhangenden Raumes, in welchen der gegebene $(q+1)$fach zusammenhangende Körper durch den Querschnitt Q_μ verwandelt wird.

Diese Aufgabe ist im §. 60 gelöst. Man braucht nur die dort vorkommende Grösse k zu beiden Seiten des Querschnittes Q_μ und durch den ganzen Körper hindurch constant zu nehmen. Es ist ferner bewiesen, dass die Aufgabe nur eine Lösung zulässt. Nimmt man jetzt der Reihe nach $\mu = 1, 2, \ldots q$, so erhält man q verschiedene Functionen

$$v_1, v_2, v_3, \ldots v_q,$$

bei denen die Gleichungen (2), (3), (4), (5) erfüllt sind. Die in (4) vorgeschriebene Unstetigkeit tritt für jede Function nur an einem der Querschnitte $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_q$ ein und für jede an einem besondern.

Wir setzen nun

$$V'' = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_q v_q \tag{6}$$

im Innern des gegebenen Körpers. Da die im äusseren Raume gegebene Function V bei der Herstellung von V' nach §. 81 ihren Einfluss (wenn man sich so ausdrücken darf) bereits völlig geltend gemacht hat, so muss jetzt nothwendig für den äusseren Raum

$$V'' = 0 \tag{7}$$

genommen werden. Dann genügt die Function

$$V = V' + V'' \tag{8}$$

den folgenden Bedingungen. Sie stimmt im ganzen äusseren Raume mit der dort gegebenen Function V überein. Sie erfüllt im äusseren Raume wie im Inneren des gegebenen Körpers die partielle Differentialgleichung (2). Für jeden Punkt in der Oberfläche des $(q+1)$fach zusammenhangenden Körpers ist

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{-0} = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+0}. \tag{9}$$

Beim Durchgange durch die Querschnitte $Q_1, Q_2, \ldots Q_q$ von der negativen auf die positive Seite ändert sich die Function V sprungweise um die constanten Grössen $c_1, c_2, \ldots c_q$. Uebrigens ist sie nebst ihren ersten Derivirten endlich und stetig variabel im Innern des einfach zusammenhangenden Körpers, welcher durch die Querschnitte $Q_1, Q_2, \ldots Q_q$ zu Stande gebracht ist. Für zwei unendlich nahe gelegene Punkte auf verschiedenen Seiten des Querschnitts Q hat die Derivirte in der Richtung der wachsenden Normale denselben Werth.

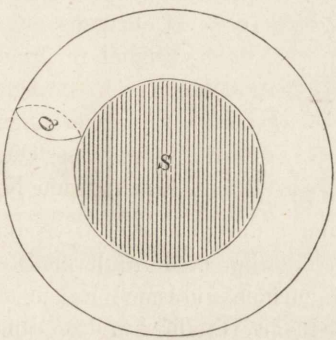
Da die Coefficienten $c_1, c_2, \ldots c_q$ völlig willkürlich sind, so gibt es in der Oberfläche eines mehrfach zusammenhangenden Körpers unendlich viele verschiedene Stromvertheilungen, von denen jede die im äusseren Raume vorgeschriebenen magnetischen Wirkungen hervorbringt.

Hat man ein bestimmtes System von Constanten $c_1, c_2, \ldots c_q$ angenommen, so ergeben sich die Strömungslinien und die Stromintensitäten durch Anwendung des in §. 82 entwickelten Verfahrens. Man hat dabei zweierlei Arten von Strömen zu unterscheiden. Setzt man nemlich die sämmtlichen Constanten $c_1, c_2, \ldots c_q$ gleich Null, woraus auch $V'' = 0$ folgt, so erhält man eine einzige Anordnung von Strömen, von denen allein die äusseren magnetischen Wirkungen herrühren. Setzt man dagegen $V' = 0$, so erhält man für jedes bestimmte System von Constanten $c_1, c_2, \ldots c_q$ eine Stromvertheilung, von der im äusseren Raume gar keine magnetischen Wirkungen ausgeübt werden. Es geht dies unmittelbar aus der Gleichung (7) hervor. Wir wollen den einfachsten Fall, nemlich $q = 1$, im nächsten Paragraphen noch näher betrachten.

§. 85.
Fortsetzung: Der Ring.

Der gegebene Körper sei ein Ring, also zweifach zusammenhangend (**Fig. 47**). Wir zerlegen ihn durch einen Querschnitt Q und den äusseren Raum durch einen Querschnitt S je in einen einfach zusammenhangenden Raum. Die Begrenzungslinien der Querschnitte Q und S liegen, wie immer, in der Oberfläche des Ringes. Es sind zwei in sich zurücklaufende Linien, die einander in einem Punkte durchschneiden.

Fig. 47.



Die Begrenzungslinie von Q ist so beschaffen, dass jede Fläche, der sie zur vollständigen Begrenzung dient, die Axe des Ringes in einem Punkte schneidet. Die Fläche S lässt sich dagegen über ihre Begrenzung so in das Innere des Ringes fortsetzen, dass die Axe desselben ganz in dieser Fortsetzung liegt. Nun kann man auf der Oberfläche des Ringes zwei Systeme von in sich zurücklaufenden Linien ziehen, so dass die Linien eines und desselben Systems von einander völlig getrennt liegen, dagegen jede Linie des ersten Systems die Linien des zweiten Systems in je einem Punkte schneidet. Die Systeme sollen so beschaffen sein, dass je zwei benachbarte Linien desselben Systems einander unendlich nahe liegen, und dass die Begrenzung von S zu dem ersten, die Begrenzung von Q zu dem zweiten Systeme gehört.

Wir nehmen zwei Punkte, die einander unendlich nahe auf entgegengesetzten Seiten des Querschnittes S liegen und verbinden sie durch eine Linie, die ganz innerhalb des einfach zusammenhangenden äusseren Raumes verläuft. Diese Linie kann man zur Begrenzung einer Fläche machen, welche die Oberfläche des Ringes in irgend einer Linie des zweiten Systems durchschneidet. Wir stellen uns auf derjenigen Seite der Fläche auf, auf welcher ein positiver Umlauf durch die Begrenzung von der negativen auf die positive Seite von S führt. Um die Elektricitätsmenge J' zu finden, welche in der Zeiteinheit von unten nach oben durch die eben gelegte Fläche mehr hindurchströmt als von oben nach unten, haben wir nach §. 75 das Integral

$$\frac{1}{4\pi}\int dV$$

durch die Begrenzungslinie zu erstrecken, und zwar von der negativen bis auf die positive Seite von S. Der Werth dieses Integrals ist

$$\frac{1}{4\pi}(V_{+0} - V_{-0}).$$

Nun lässt sich aber im äusseren Raume wie im Innern des Ringes

$$V = V' + V''$$

setzen und dabei bemerken, dass im ganzen äusseren Raume

$$V' = V, \quad V'' = 0$$

ist. Dadurch erhält man die Gleichung

(1) $$J' = \frac{1}{4\pi}(V'_{+0} - V'_{-0}) = \frac{C}{4\pi}.$$

Diese Gleichung würde unverändert bleiben, wenn man überall $V'' = 0$ setzen wollte. Geht also ein Strom, dem die Function V'' angehört, an einer Stelle durch eine Linie des zweiten Systems hindurch, so tritt er an derselben oder an einer anderen Stelle wieder auf die ursprüngliche Seite zurück. Folglich lassen sich die Linien des zweiten Systems auf der Oberfläche des Ringes (und mit ihnen die Begrenzung des Querschnittes Q) so zurechtschieben, dass sie zu Strömungslinien der Ströme zweiter Art werden. Ihre Gleichungen sind in der allgemeinen Form enthalten

(2) $$4\pi W'' = - V''_{-0} = const.,$$

und es bedeutet V''_{-0} den Werth der Function V'' im Innern des Ringes unendlich nahe an seiner Oberfläche.

Auf demselben Wege findet sich, dass die Linien des ersten Systems, passend angeordnet, Strömungslinien der Ströme erster Art sind. Sie werden festgelegt durch Gleichungen von der Form

(3) $$4\pi W' = V'_{+0} - V'_{-0} = const.,$$

wobei V'_{+0} und V'_{-0} die Werthe von V' in zwei Punkten sind, die einander unendlich nahe auf der äusseren und der inneren Seite der Ringoberfläche liegen.

Die magnetischen Wirkungen im äusseren Raume rühren bloss von den Strömen her, die in den Bahnen (3) fliessen. Die Ströme, denen die Strömungslinien (2) angehören, üben im äusseren Raume keine magnetische Wirkung aus.

§. 86.

Das magnetische Potential.

Wir können die Wechselwirkung zwei permanenter Magnete bestimmen, indem wir ihr Potential auf einander bilden. Es sei in irgend einem Raumelement des ersten Magnets die magnetische Masse $d\mu$, in einem Raumelement des zweiten Magnets die magnetische Masse $d\mu'$ vorhanden. Diese Massen $d\mu$ und $d\mu'$ sollen von der Zeit t unabhängig sein. Dann ist

$$(1) \qquad V = -\int \frac{d\mu}{r}$$

die Potentialfunction des ersten Magnets auf die im Punkte (x, y, z) concentrirt gedachte positive magnetische Einheit. Es ist ferner

$$(2) \qquad V' = -\int \frac{d\mu'}{r}$$

die Potentialfunction des zweiten Magnets auf die im Punkte (x, y, z) concentrirt gedachte positive magnetische Einheit. Dabei bezeichnet r die Entfernung eines Punktes in dem mit der magnetischen Masse $d\mu$, resp. $d\mu'$, erfüllten Raumelemente von dem Punkte (x, y, z). Die Integration erstreckt sich in (1) über den ganzen ersten, in (2) über den ganzen zweiten Magnet.

Das Potential P der beiden Magnete auf einander wird ausgedrückt durch die Gleichung

$$(3) \qquad P = -\int\int \frac{d\mu \,.\, d\mu'}{r}.$$

Hier bedeutet r die Entfernung zweier Punkte, von denen der eine dem mit $d\mu$, der andere dem mit $d\mu'$ erfüllten Raumelemente angehört. Die Integration in (3) ist über beide Magnete auszudehnen. Durch Vergleichung der Formeln (1), (2), (3) erkennt man, dass P sich in der doppelten Weise ausdrücken lässt:

$$(4) \qquad P = \int V' \, d\mu,$$

$$(5) \qquad P = \int V \, d\mu'.$$

Die Gleichung (4) ist so zu verstehen, dass der in (2) vorkommende Punkt (x, y, z) in das mit $d\mu$ erfüllte Raumelement des ersten Magnets verlegt ist. In (5) hat man dagegen den in

(1) vorkommenden Punkt (x, y, z) in das mit $d\mu'$ erfüllte Raumelement des zweiten Magnets zu verlegen. Die Integration erstreckt sich in (4) über den ersten, in (5) über den zweiten Magnet.

§. 87.
Die elektromagnetische Elementar-Arbeit.

Wir wollen dazu übergehen, die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen einem constanten linearen galvanischen Strome und einem Magnet zu betrachten. Wir brauchen nur eine Fläche S zu construiren, welche die Strombahn zur Begrenzung hat, und diese Fläche, sowie eine unendlich nahe liegende, nach §. 72 mit magnetischer Masse zu belegen. Dadurch erhalten wir einen Magnet, welcher nach aussen dieselbe magnetische Wirkung übt wie der gegebene Strom.

In einem Punkte der Fläche S errichten wir nach einer Seite die Normale und bezeichnen mit p eine auf ihr von jenem Punkte aus gezählte Strecke. Dann hat man zu setzen:

$$d\mu = \frac{J}{\delta}\, d\sigma \quad \text{für } p = 0,$$

$$d\mu = -\frac{J}{\delta}\, d\sigma \quad \text{für } p = \delta.$$

Hier bezeichnet J die Intensität des linearen Stromes, δ eine unendlich kleine Länge und $d\sigma$ ein Element der Fläche S.

Ist also V' die Potentialfunction des gegebenen Magnets, so haben wir

$$(1) \qquad P = \int V'\, d\mu = \int V_0' \cdot \frac{J}{\delta}\, d\sigma - \int V_\delta' \frac{J}{\delta}\, d\sigma$$

$$= \int \frac{V_0' - V_\delta'}{\delta} \,.\, J\, d\sigma = -\int \frac{\partial V'}{\partial p} J\, d\sigma.$$

Statt J können wir noch die Potentialfunction V der von dem galvanischen Strome ausgeübten magnetischen Kraft einführen. Es ist nemlich (§. 71) nach magnetischem Maasse

$$4\pi J = V_{+0} - V_{-0}.$$

Folglich ergibt sich

$$(2) \qquad P = -\frac{1}{4\pi}\int (V_{+0} - V_{-0}) \frac{\partial V'}{\partial p}\, d\sigma.$$

Bei einer unendlich kleinen Verschiebung des Magnets ändert sich der Werth von P. Die Aenderung gibt die Arbeit an, welche die von dem Strome ausgeübten magnetischen Kräfte zu leisten haben, um jene Verschiebung zu Stande zu bringen. Nach dem Satze von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung findet sich umgekehrt die Wirkung des Magnets auf den Strom.

§. 88.

Die elektrodynamische Elementar-Arbeit. Zwei constante lineäre Ströme.

Wir haben im §. 86 die Wechselwirkung zwischen zwei Magneten betrachtet. In §. 87 ist für den ersten Magnet ein constanter galvanischer Strom an die Stelle gesetzt. Man kann aber auch noch statt des andern Magnets einen constanten Strom nehmen. Dann handelt es sich um die Wechselwirkung zwischen zwei constanten Strömen. Insofern die dabei geleistete Arbeit zur Bewegung der Ströme mit den Stromleitern verbraucht wird, nennen wir die Wechselwirkung die elektrodynamische.

Es soll jetzt die Function P hergestellt werden, deren unendlich kleine Aenderung die elektrodynamische Elementar-Arbeit angibt, welche bei einer unendlich kleinen Verschiebung der beiden Ströme geleistet wird.

Wir können dabei von der Gleichung (2) des vorigen Paragraphen ausgehen, haben aber jetzt V' als die Potentialfunction der magnetischen Kraft anzusehen, welche von einem lineären galvanischen Strome ausgeübt wird. Im Punkte (x, y, z) sind die Componenten dieser Kraft

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial V'}{\partial x} = X', \quad \frac{\partial V'}{\partial y} = Y', \quad \frac{\partial V'}{\partial z} = Z',$$

und es ist zu beachten, dass X', Y', Z' überall ausserhalb des lineären Stromes, von dem sie herrühren, endlich und stetig variabel sind. Nun findet sich

$$\frac{\partial V'}{\partial p} = X' \frac{\partial x}{\partial p} + Y' \frac{\partial y}{\partial p} + Z' \frac{\partial z}{\partial p},$$

und folglich kann man die Gleichung (2) des vorigen Paragraphen jetzt so schreiben:

$$(2)\qquad P = -\frac{1}{4\pi}\int V_{+0}\, d\sigma \left\{ X' \frac{\partial x}{\partial p} + Y' \frac{\partial y}{\partial p} + Z' \frac{\partial z}{\partial p} \right\}$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int V_{-0}\, d\sigma \left\{ X' \frac{\partial x}{\partial p} + Y' \frac{\partial y}{\partial p} + Z' \frac{\partial z}{\partial p} \right\}.$$

Betrachtet man aber die beiden Seiten der Fläche S als einen Theil der Begrenzung des unendlichen Raumes (die übrige Begrenzung ist eine unendlich entfernte Kugelfläche), so kann man auf der positiven, wie auf der negativen Seite von S die Normale n nach dem Innern dieses Raumes hin ziehen. Auf der Seite der positiven p hat man $n = p$, auf der Seite der negativen p dagegen $n = -p$. Die Gleichung (4) gibt demnach jetzt:

$$(3)\qquad P = -\frac{1}{4\pi}\int V\, d\sigma \left\{ X' \frac{\partial x}{\partial n} + Y' \frac{\partial y}{\partial n} + Z' \frac{\partial z}{\partial n} \right\},$$

wenn die Integration über beide Seiten der Fläche S ausgedehnt wird.

Dieses Integral lässt sich durch ein Raum-Integral ersetzen. Bezeichnen wir nemlich mit T den unendlichen Raum, welcher eine unendlich entfernte Kugelfläche und die beiden Seiten der Fläche S zur Begrenzung hat, so findet sich nach §. 19 (4), dass das über den unendlichen Raum ausgedehnte Integral

$$\int dT \left(\frac{\partial (V X')}{\partial x} + \frac{\partial (V Y')}{\partial y} + \frac{\partial (V Z')}{\partial z} \right)$$

gleich ist dem Oberflächen-Integral

$$-\int V\, d\sigma \left(X' \frac{\partial x}{\partial n} + Y' \frac{\partial y}{\partial n} + Z' \frac{\partial z}{\partial n} \right),$$

wenn dieses über die beiden Seiten der Fläche S und über die unendlich ferne Kugelfläche erstreckt wird. Nun sind aber in unendlicher Entfernung sowohl V als X', Y', Z' gleich Null. Das Integral über die Kugelfläche fällt also weg, und wir erhalten

$$(4)\qquad P = \frac{1}{4\pi}\int dT \left\{ \frac{\partial (V X')}{\partial x} + \frac{\partial (V Y')}{\partial y} + \frac{\partial (V Z')}{\partial z} \right\}.$$

Die Integration in (4) ist über den ganzen unendlichen Raum auszudehnen.

Wir können noch weiter transformiren. Durch Ausführung der Differentiation ergibt sich nemlich

$$\frac{\partial (V X')}{\partial x} + \frac{\partial (V Y')}{\partial y} + \frac{\partial (V Z')}{\partial z}$$
$$= X' \frac{\partial V}{\partial x} + Y' \frac{\partial V}{\partial y} + Z' \frac{\partial V}{\partial z}$$
$$+ V\left(\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Z'}{\partial z}\right).$$

Da aber X', Y', Z' von einem linearen galvanischen Strome herrühren, so ist in dem ganzen unendlichen Raume ausserhalb des Stromleiters

$$\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Z'}{\partial z} = 0.$$

Es ist ferner V die Potentialfunction der magnetischen Kraft, welche der erste lineäre galvanische Strom ausübt, folglich

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = Z.$$

Danach kann man statt der Gleichung (4) auch

$$(5) \qquad P = \frac{1}{4\pi} \int dT (X X' + Y Y' + Z Z')$$

setzen, und das Integral erstreckt sich über den ganzen unendlichen Raum.

§. 89.

Fortsetzung: Zwei beliebige constante Ströme.

Die Gleichung (5) des vorigen Paragraphen bleibt auch dann gültig, wenn der erste Leiter nicht lineär ist. Denn wir können jeden geschlossenen nichtlineären Strom als ein System von lineären Strömen auffassen. Dabei würde resp. ΣX, ΣY, ΣZ an die Stelle treten für X, Y, Z, und ΣP an die Stelle für P. Nachher kann man dann wieder die Summen mit einfachen Buchstaben bezeichnen, so dass die Formel (5) wieder zu Stande kömmt.

Ebenso kann man auch den zweiten Strom nichtlineär nehmen. Die Gleichung (5) des vorigen Paragraphen bleibt dabei in unveränderter Form gültig. Nur hat man jetzt unter X, Y, Z die Componenten der gesammten magnetischen Kraft zu verstehen, welche der nichtlineäre erste Strom ausübt, und unter X', Y', Z' die Componenten der gesammten magnetischen Kraft, die der nichtlineäre zweite Strom ausübt.

Wir können nun auf die Gleichungen (1) des §. 78 zurückgehen. Durch sie lässt sich der Ausdruck (5) des vorigen Paragraphen so transformiren:

$$(1)\qquad P = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\,dz \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial u_2}{\partial z}X' - \frac{\partial u_3}{\partial y}X' \\ +\frac{\partial u_3}{\partial x}Y' - \frac{\partial u_1}{\partial z}Y' \\ +\frac{\partial u_1}{\partial y}Z' - \frac{\partial u_2}{\partial x}Z' \end{array}\right\}.$$

Hier erscheint es zweckmässig, die Integration nach Theilen anzuwenden. Wir erhalten

$$\int \frac{\partial u_2}{\partial z}X'\,dz = u_2 X' - \int u_2 \frac{\partial X'}{\partial z}\,dz.$$

Um das bestimmte Integral zu ermitteln, hat man auf beiden Seiten die Grenzen einzusetzen. Dabei verschwindet rechts der vom Integralzeichen freie Bestandtheil. Denn es ist für $z = \pm\infty$ sowohl u_2 als X' gleich Null. Man erhält also

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u_2}{\partial z}X'\,dx\,dy\,dz = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u_2\frac{\partial X'}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$

In derselben Weise lassen sich die übrigen Bestandtheile auf der rechten Seite von (1) umformen. Es ergibt sich danach

$$P = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\,dz \left\{\begin{array}{l} u_1\left(\frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y}\right) \\ +u_2\left(\frac{\partial Z'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial z}\right) \\ +u_3\left(\frac{\partial X'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial x}\right) \end{array}\right\}.$$

Die Integration ist noch zu vereinfachen. Es sind nemlich die Differenzen

$$\frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y},$$

$$\frac{\partial Z'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial z},$$

$$\frac{\partial X'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial x}$$

nur im Innern des zweiten Leiters von Null verschieden [§. 66, (2), §. 77, (1), (2), (3)]. Bezeichnen wir also mit dS' ein Raumelement des zweiten Leiters, so erhalten wir jetzt

$$(2) \qquad P = \frac{1}{4\pi}\int dS' \left\{ \begin{array}{l} u_1\left(\frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y}\right) \\ + u_2\left(\frac{\partial Z'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial z}\right) \\ + u_3\left(\frac{\partial X'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial x}\right) \end{array} \right\},$$

und die Integration erstreckt sich nur über den Raum des zweiten Leiters.

Die Functionen u_1, u_2, u_3 sind durch die Gleichungen (5) des §. 78 ausgedrückt. Es ist nemlich

$$(3) \qquad \begin{aligned} u_1 &= -\int \frac{i_1\, dS}{r}, \\ u_2 &= -\int \frac{i_2\, dS}{r}, \\ u_3 &= -\int \frac{i_3\, dS}{r}. \end{aligned}$$

Hier beziehen sich u_1, u_2, u_3 nur auf die magnetischen Kräfte, die von dem ersten Strome ausgeübt werden. Folglich hat man in den Gleichungen (3) unter dS ein Raumelement im Innern des ersten Leiters zu verstehen. Es sind i_1, i_2, i_3 die Componenten der specifischen Stromintensität in einem Punkte dieses Raumelementes, und r ist der Abstand desselben Punktes von dem Punkte (x, y, z). Die Integrationen in (3) erstrecken sich nur über den Raum des ersten Leiters.

Bezeichnen wir ferner mit i_1', i_2', i_3' die Componenten der specifischen Stromintensität in einem Punkte des zweiten Leiters, so haben wir nach den Gleichungen (1), (2), (3) des §. 77

$$(4) \qquad \begin{aligned} 4\pi i_1' &= \frac{\partial Z'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial z}, \\ 4\pi i_2' &= \frac{\partial X'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial x}, \\ 4\pi i_3' &= \frac{\partial Y'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial y}. \end{aligned}$$

Wir führen dies zunächst in Gleichung (2) ein und erhalten

$$P = -\int dS' (u_1 i'_1 + u_2 i'_2 + u_3 i'_3). \tag{5}$$

Die Integration ist über den Raum des ganzen zweiten Leiters auszudehnen.

In derselben Weise hätte man auch zu dem Ausdrucke gelangen können:

$$P = -\int dS (u'_1 i_1 + u'_2 i_2 + u'_3 i_3). \tag{6}$$

Hier hängen u'_1, u'_2, u'_3 mit den magnetischen Kräften zusammen, die der zweite Strom ausübt, und es sind i_1, i_2, i_3 die Componenten der specifischen Stromintensität in einem Punkte im Innern des ersten Leiters. Die Integration in (6) hat man über den Raum des ersten Leiters auszudehnen.

Setzt man in (5) für u_1, u_2, u_3 ihre Ausdrücke ein aus (3), so ergibt sich

$$P = \int dS' \left\{ i'_1 \int \frac{i_1\, dS}{r} + i'_2 \int \frac{i_2\, dS}{r} + i'_3 \int \frac{i_3\, dS}{r} \right\}.$$

Dafür lässt sich kürzer schreiben:

$$P = \int \int \frac{dS \,.\, dS'}{r} \left\{ i_1 \,.\, i'_1 + i_2 \,.\, i'_2 + i_3 \,.\, i'_3 \right\}. \tag{7}$$

Die Bedeutung des Ausdruckes

$$i_1 \,.\, i'_1 + i_2 \,.\, i'_2 + i_3 \,.\, i'_3$$

ist leicht zu erkennen. Es ist nemlich, wenn i die gesammte specifische Stromintensität in einem Punkte von dS bezeichnet, nach §. 54, (9):

$$i_1 = i \cos a,$$
$$i_2 = i \cos b,$$
$$i_3 = i \cos c.$$

Dem entsprechend erhalten wir

$$i'_1 = i' \cos a',$$
$$i'_2 = i' \cos b',$$
$$i'_3 = i' \cos c',$$

wenn i' die gesammte specifische Stromintensität in einem Punkte von dS' bezeichnet. Demnach ist

$$i_1 \,.\, i_1' + i_2 \,.\, i_2' + i_3 \,.\, i_3'$$

$$= i \,.\, i' \,(\cos a \;\; \cos a' + \cos b \;\; \cos b' + \cos c \;\; \cos c')$$

$$= i \,.\, i' \,\cos\,(i\, i'),$$

und die Gleichung (7) geht schliesslich in die folgende über:

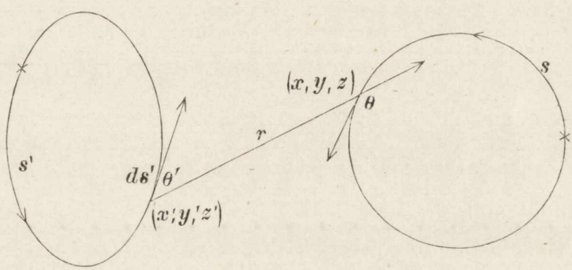
$$(8) \qquad P = \int\!\!\int \frac{dS \,.\, dS'}{r} \,.\, i \,.\, i' \cos\,(i\, i').$$

§. 90.

Fortsetzung: Zwei lineäre constante Ströme.

Wir kehren zu dem speciellen Falle von zwei constanten geschlossenen lineären Strömen zurück. Der erste Leiter (**Fig. 48**) ist ein in sich zurücklaufender Draht vom Querschnitt q. Die im Innern

Fig. 48.



des Drahtes normal gegen alle Querschnitte verlaufende Axe ist eine Curve, deren Länge von einem festen Punkte aus bis zum Punkte (x, y, z) mit s bezeichnet werden möge. Der zweite Leiter ist ebenfalls ein in sich zurücklaufender Draht. Sein Querschnitt werde mit q' bezeichnet. Auf der Axe wählen wir einen festen Ausgangspunkt und einen beweglichen Punkt (x', y', z'). Der zwischen beiden liegende Bogen der Axe habe die Länge s'.

Die Querschnitte q und q' sollen im Vergleich zu den Drahtlängen so klein sein, dass in allen Punkten eines und desselben Querschnittes die specifische Stromintensität constant und überall normal gegen den Querschnitt gerichtet ist. Wir bezeichnen dieselbe im Punkte (x, y, z) des ersten Leiters mit i, im Punkte (x', y', z') des zweiten Leiters mit i'.

Hiernach sind x, y, z, q und i Functionen von s, und es sind x', y', z', q', und i' Functionen von s'. Für constante lineäre Ströme gilt der §. 61. Es ist also

$$qi = J, \quad q' i' = J',$$

und hier sind J und J' constant.

Im vorliegenden Falle ist $dS = dq\, ds$ und $dS' = dq'\, ds'$. Folglich lautet jetzt die Gleichung (8) des vorigen Paragraphen

$$P = \int\int\int\int \frac{1}{r}\, dq\, ds \,.\, dq'\, ds' \,.\, i \,.\, i' \,.\, \cos\,(i\, i'),$$

oder kürzer

$$(1) \qquad P = J\, J' \int\int \frac{ds\, ds'}{r} \cos\,(i\, i').$$

Der Winkel $(i\, i')$ ist derselbe, wie der Winkel, welchen die Bogenelemente ds und ds' mit einander einschliessen. Folglich haben wir

$$(2) \qquad \cos\,(i\, i') = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial y'}{\partial s'} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial z'}{\partial s'}.$$

Ferner ist zu beachten, dass

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2;$$

daraus findet sich

$$(3) \qquad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s\, \partial s'} = \frac{\partial \left(r \dfrac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'} = -\left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial y'}{\partial s'} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial z'}{\partial s'}\right).$$

Gibt man hierauf Acht, so lässt sich statt der Gleichung (1) auch schreiben:

$$(4) \qquad P = -\, J\, J' \int\int \frac{ds\, ds'}{r} \,.\, \frac{\partial \left(r \dfrac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'},$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt:

$$(5) \qquad P = -\,\frac{1}{2}\, J\, J' \int\int \frac{ds\, ds'}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s\, \partial s'}.$$

Den Ausdruck (4) kann man transformiren. Die unbestimmte Integration nach Theilen gibt

$$\int \frac{ds'}{r} \frac{\partial \left(r \frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'} = \frac{1}{r} \cdot r \frac{\partial r}{\partial s} - \int \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial s'} r \frac{\partial r}{\partial s} ds'$$

$$= \frac{\partial r}{\partial s} + \int \frac{ds'}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'}.$$

Setzt man die Grenzen ein, so fällt der vom Integralzeichen freie Theil heraus, da die Integration durch die geschlossene Linie s' auszudehnen ist. Folglich erhalten wir

(6) $$P = -J J' \int \int \frac{ds\, ds'}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'}.$$

Nun ergibt sich aus dem Ausdrucke für r durch Differentiation

$$dr = \frac{x - x'}{r} \left(\frac{\partial x}{\partial s} ds - \frac{\partial x'}{\partial s'} ds'\right)$$

$$+ \frac{y - y'}{r} \left(\frac{\partial y}{\partial s} ds - \frac{\partial y'}{\partial s'} ds'\right)$$

$$+ \frac{z - z'}{r} \left(\frac{\partial z}{\partial s} ds - \frac{\partial z'}{\partial s'} ds'\right).$$

Andererseits ist $dr = \frac{\partial r}{\partial s} ds + \frac{\partial r}{\partial s'} ds'$. Durch Vergleichung finden wir

$$\frac{x - x'}{r} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{y - y'}{r} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{z - z'}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial s},$$

$$\frac{x - x'}{r} \cdot \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{y - y'}{r} \cdot \frac{\partial y'}{\partial s'} + \frac{z - z'}{r} \cdot \frac{\partial z'}{\partial s'} = -\frac{\partial r}{\partial s'}.$$

Bezeichnet man mit θ und θ' die Winkel, welche die Richtung der von (x', y', z') nach (x, y, z) führenden Linie r mit den Richtungen des wachsenden s und des wachsenden s' einschliesst, so erkennt man leicht, dass die beiden letzten Gleichungen auch so geschrieben werden können:

(7) $$\cos \theta = \frac{\partial r}{\partial s}, \quad \cos \theta' = -\frac{\partial r}{\partial s'}.$$

Folglich geht die Gleichung (6) in die neue Form über:

(8) $$P = J J' \int \int \frac{ds\, ds'}{r} \cos \theta \cos \theta'.$$

Die Winkel θ und θ' sind in Fig. 48 bezeichnet.

§. 91.

Ampère's Gesetz.

Aus der Function P lässt sich die Kraft finden, mit der die beiden Stromelemente ds und ds' auf einander wirken. Wir bezeichnen mit $F\,ds\,ds'$ die abstossende Kraft, welche ds und ds' in der Richtung von r auf einander ausüben. Denken wir uns, dass während der unendlich kleinen Zeit dt die Entfernung r sich um δr geändert habe, so ist die bei der Verschiebung der Elemente ds und ds' geleistete Arbeit

$$F\,ds\,ds'\,\delta r,$$

und die Gesammtarbeit bei der Verschiebung beider geschlossenen Leiter

$$\int\int F\,ds\,ds'\,\delta r.$$

Diese Gesammtarbeit ist gleich der Aenderung von P. Wir haben also die Gleichung

$$\text{(1)} \qquad \delta P = \int\int F\,ds\,ds'\,\delta r.$$

Nun berechnet sich aber aus der Gleichung (5) des vorigen Paragraphen

$$\delta P = -\frac{1}{2} J\,J' \int\int ds\,ds' \left\{ -\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s\,\partial s'}\delta r + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\,\delta\,(r^2)}{\partial s\,\partial s'} \right\}.$$

Der zweite Bestandtheil auf der rechten Seite ist noch durch Integration nach Theilen umzuformen. Man erhält, indem man unbestimmt integrirt:

$$\int \frac{1}{r}\frac{\partial^2\,\delta\,(r^2)}{\partial s\,\partial s'}\,ds' = \frac{1}{r}\frac{\partial\,\delta\,(r^2)}{\partial s} - \int \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial s'}\frac{\partial\,\delta\,(r^2)}{\partial s}\,ds'.$$

Setzt man die Grenzen ein, so verschwindet der freie Theil, weil die Integration durch den geschlossenen zweiten Leiter erstreckt wird. Man hat also

$$\int\int \frac{ds\,ds'}{r}\frac{\partial^2\,\delta\,(r^2)}{\partial s\,\partial s'} = -\int\int \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial s'}\frac{\partial\,\delta\,(r^2)}{\partial s}\,ds\,ds'.$$

Wir transformiren weiter. Bei unbestimmter Integration ist

$$\int \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial s'} \frac{\partial\, \delta\,(r^2)}{\partial s}\, ds = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial s'}\, \delta\,(r^2) - \int \delta\,(r^2) \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial s'\, \partial s}\, ds.$$

Setzt man hier die Grenzen ein, so verschwindet wieder der freie Theil. Denn es ist hier die Integration durch den geschlossenen ersten Leiter ausgedehnt. Also hat man schliesslich

$$\int\int \frac{ds\, ds'}{r} \frac{\partial^2\, \delta\,(r^2)}{\partial s\, \partial s'} = \int\int \delta\,(r^2) \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial s\, \partial s'}\, ds\, ds',$$

und es ist deshalb

(2)
$$\delta P = -\frac{1}{2} J J' \int\int \delta r \left\{ -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\,(r^2)}{\partial s\, \partial s'} + 2\, r \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial s\, \partial s'} \right\} ds\, ds'.$$

Nun finden wir durch Differentiation

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial s} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s} = -\frac{1}{2\, r^3} \frac{\partial\,(r^2)}{\partial s},$$

folglich

$$\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial s\, \partial s'} = -\frac{1}{2\, r^3} \frac{\partial^2\,(r^2)}{\partial s\, \partial s'} + \frac{3}{2\, r^4} \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{\partial\,(r^2)}{\partial s}$$

$$= -\frac{1}{2\, r^3} \frac{\partial^2\,(r^2)}{\partial s\, \partial s'} + \frac{3}{r^3} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'}.$$

Setzen wir dies in den Ausdruck für δP ein und beachten die Gleichungen (1) und (2), so ergibt sich

$$(3) \qquad F\, ds\, ds' = -\frac{J\, J'\, ds\, ds'}{r^2} \left(3 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} - 2 \frac{\partial \left(r \frac{\partial r}{\partial s} \right)}{\partial s'} \right).$$

Wir bezeichnen den Winkel $(i\, i')$ mit ε. Dann lässt mit Rücksicht auf die Gleichungen (2), (3) und (7) des vorigen Paragraphen die eben gewonnene Gleichung (3) sich auch so schreiben:

$$(4) \qquad F\, ds\, ds' = \frac{J\, J'\, ds\, ds'}{r^2} (3 \cos \theta \cos \theta' - 2 \cos \varepsilon),$$

Dies ist das von Ampère gefundene Gesetz der elektrodynamischen Wechselwirkung zwei lineärer Stromelemente.*)

*) Ampère. Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques. (Mémoires de l'Académie de Paris. T. VI. 1823.)

Siebenter Abschnitt.

Induction.

§. 92.

Das Phänomen der Induction.

Wir haben bisher die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen einem Magnet und einem galvanischen Strome, sowie die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen zwei galvanischen Strömen betrachtet. Die Erscheinungen, um die es sich handelt, bestehen darin, dass die bei jenen Wechselwirkungen geleistete Arbeit dazu verbraucht wird, die ponderabeln Träger des Magnetismus und resp. der galvanischen Ströme mit zu bewegen. Es vollführen also die magnetischen Fluida und ihr ponderabler Träger eine gemeinschaftliche Bewegung, und ebenso der galvanische Strom und sein ponderabler Leiter.

Hier sind es die zwischen Magnet und Strom, resp. zwischen zwei Strömen auftretenden Kräfte, welche eine Aenderung in der relativen Lage der ponderabeln Träger bewirken. Umgekehrt wird zu erwarten sein, dass eine Aenderung der gegenseitigen Lage, die den ponderabeln Trägern ertheilt wird, eine neue Scheidung der Elektricitäten, also die Erregung neuer Ströme zur Folge haben könne.

Dass eine solche Erscheinung in Wirklichkeit eintritt, hat zuerst Faraday*) experimentell nachgewiesen. Man hat diese Art der Stromerregung mit dem Namen Induction belegt.

Wenn ein unbewegter Magnet auf die in einem unbewegten Leiter strömende Elektricität einwirkt, so erfahren positive und

*) Faraday. Experimental Researches on Electricity. Series I. II. 1831. 1832.

negative Elektricität einen gleichen und gleich gerichteten Antrieb. Kehrt man die Stromrichtung um, so bleibt die Grösse des Antriebes dieselbe, die Richtung geht in die entgegengesetzte über. In beiden Fällen übertragen die beiden Elektricitäten den ihnen eingeprägten gemeinsamen Bewegungs-Impuls auf den Leiter, und dieser folgt dem Impulse, wenn er beweglich ist.

Man kann dies so erklären, dass die Einwirkung, welche ein ruhender Magnet auf die in einer bestimmten Richtung strömende Elektricität von einerlei Art ausübt, in doppelter Weise in die entgegengesetzte Einwirkung verwandelt werden kann. Einmal, indem man die Richtung beibehält und statt der strömenden Elektricität die entgegengesetzte Art an die Stelle setzt. Das andere mal, indem man die Elektricitätsart beibehält und die Strömungsrichtung umkehrt.

Ist diese Erklärung richtig, so lässt sich voraussagen, was eintreten wird, wenn in einem geschlossenen Leiter positive und negative Elektricitäten in entgegengesetzten Richtungen strömen, und man nun den Leiter gegen den Magnet (oder den Magnet gegen den Leiter, oder beide gegen einander) bewegt. Hier haben wir eine relative Lagenänderung, welche für positive und negative Elektricität von einerlei Richtung und Grösse ist. Folglich werden die ungleichnamigen Elektricitäten von Seiten des Magnets entgegengesetzte Einwirkungen erfahren. Die positive und die negative Elektricität werden in entgegengesetzten Richtungen aus einander getrieben: es findet Scheidung statt.

Das Experiment hat gezeigt, dass dieser Erfolg wirklich eintritt.

Dasselbe Resultat kömmt zu Stande, wenn der Magnet durch einen constanten galvanischen Strom ersetzt wird.

Hier ist es die relative Bewegung des Leiters gegen den inducirenden Magnet oder den inducirenden Strom, welche in jenem Leiter den Inductionsstrom hervorruft. Es kann aber auch bei unveränderter gegenseitiger Lage eine Induction stattfinden, wenn nemlich in dem inducirenden Magnet die Vertheilung des Magnetismus, resp. in dem inducirenden Strome die Stromintensität eine Aenderung erleidet.

Je nachdem die Induction von einem Magnet oder von einem galvanischen Strome ausgeübt wird, hat man sie mit verschiedenen Namen belegt. Man nennt sie im ersten Falle magnet-elektrische Induction, im zweiten Falle Volta-Induction.

§. 93.

Die Volta-Induction. Neumann's Gesetz.

Wir betrachten insbesondere die Volta-Induction für den Fall, dass die beiden Stromleiter lineär sind. In dem einen Leiter sei ein Strom von der Intensität J, in dem anderen von der Intensität J' vorhanden. Um das Gesetz der Volta-Induction zu erforschen, untersuchen wir zunächst nach Anleitung des §. 90 die geleistete elektrodynamische Arbeit. Wir müssen deshalb von constanten Strömen ausgehen. Denn für solche constante Ströme haben wir in den §§. 88 bis 91 eine Function P hergestellt, deren Aenderung die elektrodynamische Arbeit angibt, welche bei einer unendlich kleinen Verschiebung der Stromleiter geleistet wird. Ein lineärer constanter Strom ist ein solcher, dessen Stromintensität constant ist. Unter einem nichtlineären constanten Strome wollen wir einen solchen verstehen, bei welchem an jeder Stelle des Leiters die specifische Stromintensität von der Zeit t unabhängig ist.

Für zwei lineäre constante Ströme gehen wir auf die Gleichung (5) des §. 90 zurück, nemlich:

$$(1) \qquad P = -J J' Q.$$

Dabei haben wir mit Q den Factor bezeichnet, welcher nur von der Gestalt und der gegenseitigen Lage der Leiter abhängt, nemlich:

$$(2) \qquad Q = \frac{1}{2}\int\!\!\int \frac{ds\, ds'}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s\, \partial s'}.$$

Die während des Zeitelementes von t bis $t + dt$ verrichtete elektrodynamische Arbeit ist

$$(3) \qquad = -J J' . \frac{dQ}{dt} dt,$$

d. h. gleich dem Zuwachs, welchen P in jenem Zeitelement erleidet, insofern J und J' constant genommen werden. Diese Arbeit wird geleistet durch die Wechselwirkung der in dem einen und in dem anderen Leiter in Strömung begriffenen elektrischen Theilchen. Sie ist aber nicht die einzige Arbeit, welche vermöge der Wechselwirkung der beiden galvanischen Ströme während des Zeitelementes dt geleistet wird, sondern es kommt, wie wir sehen werden, noch elektromotorische Arbeit hinzu.

Vorab ist es wichtig zu bemerken, dass unter Umständen die in dem Zeitelement von t bis $t+dt$ verrichtete elektrodynamische Elementararbeit selbst dann noch durch (3) ausgedrückt wird, wenn die Stromintensitäten J und J' nicht constant sind. Wir wollen J und J' variabel nehmen, aber die Annahme machen, dass zu jeder Zeit die Zunahmen von J und J', welche während des nächstfolgenden Zeitelementes dt zu Stande kommen, unendlich klein sind. In diesem Falle darf man nemlich die Zunahmen von J und J' so auffassen, als ob sie in dem Moment nach Ablauf jenes Zeitelementes plötzlich zu Stande kämen. Dann gelten während des Zeitintervalles von t bis $t+dt$ die Stromintensitäten J und J' als constant, und die während des genannten Zeitintervalles geleistete elektrodynamische Elementararbeit wird in der That wieder durch (3) ausgedrückt.

Wir wollen jetzt darauf ausgehen, den Begriff des Potentials zu erweitern. Bis dahin haben wir unter dem Potential eine Function verstanden, welche nur von den Coordinaten der bewegten Theilchen abhängig ist, deren Ausdruck die Zeit t explicite nicht enthält, und deren Differenz für eine Anfangslage und eine Endlage der bewegten Theilchen die Arbeit angibt, welche bei der Ueberführung aus der Anfangs- in die Endlage geleistet ist. Bei dem Vorhandensein eines Potentials ist dann also die geleistete Arbeit nur abhängig von der Anfangs- und der Endlage der Theilchen und unabhängig von den Wegen, die aus der Anfangs- in die Endlage führen. Es gilt der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Der Begriff des Potentials soll nun unter Beibehaltung der wesentlichen Bedeutung dieser Function dahin erweitert werden, dass sie ausser von den Coordinaten auch noch von den Geschwindigkeiten der bewegten Theilchen abhängig sein soll, dass aber ihr Ausdruck nach wie vor die Zeit t explicite nicht enthält. In diesem Falle ist die Arbeit, welche bei der Ueberführung aus der Anfangs- in die Endlage geleistet worden, allein abhängig erstens von der Anfangs- und der Endlage der Theilchen und zweitens von ihren Anfangs- und Endgeschwindigkeiten. Sie ist aber unabhängig von den durchlaufenen Wegen und von den Geschwindigkeiten während dieses Laufs. Es gilt wieder der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Die elektrodynamische Arbeit, welche bei veränderlichen Stromintensitäten in dem Zeitintervall von 0 bis t geleistet wird, ist

$$-\int_0^t JJ' \frac{dQ}{dt}\, dt.$$

Diese Arbeit setzt sich durch Summirung aus allen Elementararbeiten zusammen. Die Summe ist aber nicht bloss abhängig von der Anfangs- und Endlage und von den Anfangs- und Endgeschwindigkeiten der Theilchen. Wenn also die elektrodynamische Arbeit die einzige Arbeit wäre, welche durch die Wechselwirkung der beiden galvanischen Ströme geleistet würde, so wäre bei veränderlichen Stromintensitäten kein Potential vorhanden, und es wäre der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft nicht gültig.

Nun ist aber schon hervorgehoben, dass vermöge der Wechselwirkung der beiden galvanischen Ströme auch noch elektromotorische Arbeit verrichtet wird, nemlich die Arbeit, durch welche die Inductionsströme in beiden Leitern zu Stande kommen. Diese Arbeit zu erforschen, ist unsere eigentliche Aufgabe.

Wir wollen annehmen, die gesammte Arbeit, welche vermöge der Wechselwirkung der beiden Ströme geleistet wird, sei so beschaffen, dass (in dem erweiterten Sinne des Wortes) ein Potential vorhanden ist. Mit anderen Worten: wir stellen die Hypothese auf, dass bei den Bewegungen, welche auf der Wechselwirkung der beiden Ströme beruhen, der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft in Gültigkeit sei.

Dann muss die im Zeitelement dt verrichtete elektromotorische Arbeit, von der die Inductionsströme herrühren, zu der Arbeit (3) hinzugefügt, eine Summe geben, die ein vollständiges Differential ist, und zwar das vollständige Differential einer Function, die explicite nur von den Coordinaten und von den Geschwindigkeiten der bewegten elektrischen Theilchen abhängig ist.

Der verlangte Beitrag zu dem Ausdrucke (3) ist

$$(4) \qquad J \frac{d\,(J'Q)}{dt}\, dt + J' \frac{d\,(JQ)}{dt}\, dt.$$

Die Summe der beiden Ausdrücke (3) und (4) ist das vollständige Differential der Function

$$D_1 = J J' Q, \tag{5}$$

welche der Function P entgegengesetzt gleich ist.

Der Beitrag (4) besteht aus zwei Theilen, von denen jeder als elektromotorische Arbeit aufzufassen ist. Es lässt sich leicht zeigen, dass der erste Bestandtheil die elektromotorische Arbeit im ersten Leiter und der zweite Bestandtheil die elektromotorische Arbeit im zweiten Leiter ausdrückt.

Wir dürfen nemlich nicht vergessen, dass auch von den äusseren elektromotorischen Kräften und von den Kräften der freien Elektricität Arbeit geleistet wird. Bezeichnen wir mit E und E' die Integralwerthe dieser elektromotorischen Kräfte resp. für den ersten und zweiten Leiter, und beachten, dass hier die Gleichung (7) des §. 61 Gültigkeit hat, so findet sich die ganze elektromotorische Arbeit, welche in dem Zeitintervall von t bis $t + dt$ geleistet wird:

$$= J \left\{ E + \frac{d\,(J'\,Q)}{dt} \right\} dt + J' \left\{ E' + \frac{d\,(J\,Q)}{dt} \right\} dt.$$

Dieser Ausdruck ist leicht zu interpretiren. Es ist

$$E + \frac{d\,(J'\,Q)}{dt}$$

der Integralwerth der gesammten elektromotorischen Kraft im ersten Leiter, und

$$E' + \frac{d\,(J\,Q)}{dt}$$

hat dieselbe Bedeutung für den zweiten Leiter. Von E und resp. E' rühren die beharrlichen Ströme her. Folglich ist

$$\frac{d\,(J'\,Q)}{dt} \tag{6}$$

der Integralwerth der elektromotorischen Kraft für den Inductionsstrom im ersten Leiter, und es ist

$$\frac{d\,(J\,Q)}{dt} \tag{7}$$

der Integralwerth der elektromotorischen Kraft für den Inductionsstrom im zweiten Leiter.

Darin spricht sich das von Neumann*) aufgestellte Gesetz der Volta-Induction für zwei geschlossene lineäre Leiter aus. Die Erfahrung hat dasselbe als richtig bestätigt.

*) Neumann, F. E. Allgemeine Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. — Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme. (Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1845. S. 1. 1847. S. 1.)

Achter Abschnitt.

Das Grundgesetz der elektrischen Wechselwirkung.

§. 94.

Das Potential der Wechselwirkung zweier Ströme.

Der Satz des vorigen Paragraphen lässt sich ohne weiteres auf zwei nichtlineäre geschlossene Ströme übertragen. Man hat nur anzunehmen, dass die specifischen Stromintensitäten an jeder Stelle des ersten wie des zweiten Leiters im Zeitelement dt nur unendlich kleine Aenderungen erfahren, und die Hypothese aufzustellen, dass die gesammte Arbeit, welche im Zeitelemente dt von der Wechselwirkung der beiden galvanischen Ströme herrührt, das vollständige Differential einer Function sei, welche die charakteristischen Eigenschaften eines Potentials (im weiteren Sinne) besitzt.

Um dies einzusehen, braucht man nur zu bedenken, dass man den einen wie den anderen nichtlineären Strom je als ein System von lineären Strömen auffassen kann.

Es wiederholt sich hier der Gedankengang des vorigen Paragraphen. Für die Function P haben wir in §. 89 [Gleichungen (5), (6), (7)] die Ausdrücke gefunden:

$$(1) \qquad P = -\int dS\,(u'_1\,i_1 + u'_2\,i_2 + u'_3\,i_3)$$

$$= -\int dS'(u_1\,i'_1 + u_2\,i'_2 + u_3\,i'_3)$$

$$= \int\int \frac{dS\,.\,dS'}{r}\,(i_1\,i'_1 + i_2\,i'_2 + i_3\,i'_3).$$

Wir wollen nun diese Function P auch für den Fall betrachten, dass die specifischen Stromintensitäten von der Zeit mit abhängig sein können. Dann kommt es auf die Aenderungen an, welche die Function P im Zeitelemente dt unter den verschiedenen zulässigen Voraussetzungen erleidet. Es werde mit $\delta_r P$ die Aenderung bezeichnet, welche zu Stande kömmt, wenn die specifischen Stromintensitäten in beiden Leitern als unabhängig von t angesehen werden, mit $\delta_{ri} P$ die Aenderung, welche davon herrührt, dass man die specifischen Stromintensitäten nur im zweiten Leiter von der Zeit t unabhängig nimmt, und mit $\delta_{ri'} P$ die Aenderung, welche sich ergibt, wenn die specifischen Stromintensitäten nur im ersten Leiter von t unabhängig genommen werden. Endlich soll dP das vollständige Differential von P sein, welches in dem Zeitelement dt zu Stande kommt, wenn die gegenseitige Lage der Elemente des ersten und zweiten Leiters und die specifischen Stromintensitäten an jeder Stelle beider Leiter in jenem Zeitelement unendlich kleine Aenderungen erleiden.

Dann haben wir zunächst

$$dP = -\delta_r P + \delta_{ri} P + \delta_{ri'} P. \tag{2}$$

Setzt man die beiden Ströme als constant voraus, so wird nach §. 89 in dem Zeitintervall von t bis $t + dt$ die elektrodynamische Elementararbeit

$$\delta_r P \tag{3}$$

geleistet. Dieser Ausdruck für die elektrodynamische Elementararbeit bleibt auch dann noch richtig, wenn an jeder Stelle des einen wie des anderen Leiters die specifischen Stromintensitäten in dem Zeitelemente dt unendlich kleine Aenderungen erleiden. In diesem Falle ist $\delta_r P$ kein vollständiges Differential und folglich für die elektrodynamische Arbeit allein kein Potential vorhanden. Nun werden aber auch noch in beiden Leitern elektromotorische Arbeiten verrichtet, welche von der Wechselwirkung der beiden galvanischen Ströme herrühren.

Wir stellen die Hypothese auf, dass für die gesammte Arbeit, welche vermöge der Wechselwirkung der beiden galvanischen Ströme geleistet wird, ein Potential existirt. Um diese Gesammtarbeit zu finden, haben wir also zu (3) einen solchen Beitrag hinzuzufügen, dass die Summe ein vollständiges Differential ist. Dieser Beitrag ist

(4) $$-\delta_{ri} P - \delta_{ri'} P$$

und die Summe ist dann das vollständige Differential von $-P$.

Folglich ist

(5) $$D_1 = \int dS\,(u_1' i_1 + u_2' i_2 + u_3' i_3)$$
$$= \int dS'(u_1 i_1' + u_2 i_2' + u_3 i_3')$$
$$= -\int\int \frac{dS\,.\,dS'}{r}(i_1 i_1' + i_2 i_2' + i_3 i_3')$$

das Potential der Wechselwirkung der beiden galvanischen Ströme.

Die gesammte Arbeit zerlegt sich in drei Bestandtheile, nemlich

erstens: die elektromotorische Arbeit im ersten Leiter
$$dt \int dS \left(i_1 \frac{du_1'}{dt} + i_2 \frac{du_2'}{dt} + i_3 \frac{du_3'}{dt}\right);$$

zweitens: die elektromotorische Arbeit im zweiten Leiter
$$dt \int dS' \left(i_1' \frac{du_1}{dt} + i_2' \frac{du_2}{dt} + i_3' \frac{du_3}{dt}\right);$$

drittens: die elektrodynamische Arbeit beider Ströme auf einander
$$dt \int\int dS\,.\,dS' \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt}(i_1 i_1' + i_2 i_2' + i_3 i_3').$$

Nachdem wir das Potential der Wechselwirkung der beiden galvanischen Ströme kennen gelernt haben, wollen wir diese Wechselwirkung zu erklären versuchen aus der Wechselwirkung der einzelnen elektrischen Theilchen.

Zu dem Ende ist es nöthig, allgemein zu erörtern, wie die Sätze der §§. 36 bis 43 abzuändern sind, wenn das Potential nicht nur von den Coordinaten, sondern auch von den Geschwindigkeiten der bewegten materiellen Punkte abhängt.

§. 95.

Der erweiterte Satz von Lagrange: $\delta \int_0^t (T - D + S)\, dt = 0.$

Wir betrachten ein System von bewegten materiellen Theilchen. Es sei T die lebendige Kraft dieses Systems. Der Ausdruck für die zur Zeit t geleistete Arbeit (das Potential) möge in zwei Theile zerlegt werden

$$S + D,$$

so dass S nur von den Coordinaten der Theilchen abhängig ist, D ausserdem noch von den Geschwindigkeiten. Wir bezeichnen mit x, y, z die Coordinaten irgend eines der materiellen Punkte und schreiben zur Abkürzung $\frac{dx}{dt} = x'$, $\frac{dy}{dt} = y'$, $\frac{dz}{dt} = z'$, und entsprechend die zweiten Derivirten. Die Componenten der auf den Punkt (x, y, z) wirkenden Kraft seien X, Y, Z. In dem Zeitelement dt, nach Ablauf der Zeit t, wird die Arbeit geleistet

$$(1) \qquad \sum (Xx' + Yy' + Zz')\, dt.$$

Die Summirung ist über sämmtliche Punkte auszudehnen. Diese Arbeit ist gleich dem Zuwachs, welchen das Potential in dem Zeitelement dt erleidet:

$$(2) \qquad \sum (Xx' + Yy' + Zz')\, dt = \left(\frac{dS}{dt} + \frac{dD}{dt}\right) dt.$$

Nun haben wir aber

$$(3) \qquad \frac{dS}{dt} = \sum \left(x' \frac{\partial S}{\partial x} + y' \frac{\partial S}{\partial y} + z' \frac{\partial S}{\partial z}\right)$$

$$(4) \qquad \frac{dD}{dt} = \sum \left(x' \frac{\partial D}{\partial x} + y' \frac{\partial D}{\partial y} + z' \frac{\partial D}{\partial z}\right)$$

$$+ \sum \left(x'' \frac{\partial D}{\partial x'} + y'' \frac{\partial D}{\partial y'} + z'' \frac{\partial D}{\partial z'}\right).$$

Aus der Gleichung (2) geht hervor, dass in $\frac{dS}{dt} + \frac{dD}{dt}$ kein Glied vorkommen darf, das nicht eine von den Geschwindigkeits-Componenten als Factor enthielte. Die Derivirte $\frac{dS}{dt}$ genügt dieser Bedingung. Damit dasselbe mit $\frac{dD}{dt}$ der Fall sei, darf in D kein Glied vorhanden sein, in welchem die Geschwindigkeiten nur in der ersten Potenz aufträten. Denn dadurch würde der zweite Bestandttheil von $\frac{dD}{dt}$ mit Gliedern behaftet sein, die von x', y', z' frei wären. Man sieht also, dass in D die Grössen x', y', z' mindestens in der zweiten Potenz enthalten sein müssen.

Am einfachsten nehmen wir für D eine homogene Function zweiten Grades von x', y', z', also

$$(5)\qquad D = \sum_{ij} \left\{ \begin{array}{l} \quad A_{ij}\, x'_i x'_j + \quad B_{ij}\, y'_i y'_j + \quad C_{ij}\, z'_i z'_j \\ + 2 D_{ij}\, z'_i x'_j + 2 E_{ij}\, x'_i y'_j + 2 F_{ij}\, y'_i z'_j \end{array} \right\}.$$

Die Coefficienten $A_{ij} \dots F_{ij}$ sind Functionen der Coordinaten sämmtlicher Punkte. Die Derivirte $\frac{dD}{dt}$ besteht dann aus einer homogenen Function dritten Grades von x', y', z' und einer homogenen Function ersten Grades derselben Variabeln und die auftretenden Coefficienten sind Functionen der Coordinaten x, y, z. Nun hat aber die homogene lineäre Function von x', y', z', welche in $\frac{dD}{dt}$ vorkommt, ebenso wie die Function $\frac{dS}{dt}$, von selbst schon die Form (1) und lässt sich in keiner andern Weise in diese Form bringen. Dagegen kann man die in $\frac{dD}{dt}$ auftretende Function dritten Grades in sehr mannigfaltiger Weise in die Form (1) bringen. Aus dem Ausdruck für die Arbeit sind also die bewegenden Kräfte nicht völlig bestimmt.

Der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft spricht sich aus in der Formel

$$T - S - D = \text{const.}$$

Wir fragen nun, wie die Bewegung vor sich gehen müsse, damit dieser Satz in Gültigkeit sei.

Zur Beantwortung dieser Frage haben wir einen Fingerzeig im §. 43. Dort ist bewiesen:

Wenn P nur von den Coordinaten $q_1, q_2, \dots$ abhängig ist und der Ausdruck dieser Function die Zeit t explicite nicht enthält, wenn ferner T eine homogene Function zweiten Grades von $q'_1, q'_2, \dots$ ist, so ist

$$\delta \int_0^t (T + P)\, dt = 0$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung, damit

$$T - P = \text{const.}$$

sei.

Hier ist nun S eine Function nur von den Coordinaten $x, y, z \ldots$, eine Function, deren Ausdruck die Zeit t explicite nicht enthält, es ist $T - D$ eine homogene Function zweiten Grades von x', y', z', ... Folglich können wir ohne weiteres den Satz des §. 43 anwenden, der jetzt so lautet:

Wenn die Bewegung so vor sich gehen soll, dass der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft

$$T - S - D = \text{const.} \tag{6}$$

in Gültigkeit ist, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung zu erfüllen:

$$\delta \int_0^t (T - D + S)\, dt = 0. \tag{7}$$

Diese Bedingung führt auf Differentialgleichungen von der Form (6) des §. 42. Man hat dort für unsern vorliegenden Fall nur $T - D$ statt T und S statt P zu schreiben.

§. 96.

Das Potential zwei elektrischer Theilchen. Weber's Form.

Es kömmt nun darauf an, den Satz des vorigen Paragraphen auf den Fall anzuwenden, dass die bewegten materiellen Punkte elektrische Theilchen, und die Kräfte, unter deren Einwirkung sie sich bewegen, ihre gegenseitigen Anziehungen und Abstossungen sind.

Für diese Aufgabe ist D das Potential der Wechselwirkungen der elektrischen Theilchen, soweit es von den Geschwindigkeiten mit abhängt. Dasselbe besteht aus drei Theilen, nemlich dem Potential D_1 der beiden Ströme auf einander, dem Potential D_2 des ersten Stromes auf sich selbst, und dem Potential D_3 des zweiten Stromes auf sich selbst. Nach §. 94 (5) ist

$$D_1 = -\int\int \frac{dS \,.\, dS'}{r} (i_1\, i_1' + i_2\, i_2' + i_3\, i_3'). \tag{1}$$

Wenn ein Leiter der Elektricität bewegt wird, und in ihm die elektrischen Theilchen gleichzeitig in Bewegung begriffen sind, so kann man die Bewegung jedes solchen Theilchens in zwei zerlegt denken, nemlich die Bewegung mit dem Leiter und die relative Bewegung gegen den Leiter. Es seien

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

die Componenten der absoluten Geschwindigkeit des im Punkte (x, y, z) concentrirten elektrischen Theilchens ε, und es seien

$$v_1, \quad v_2, \quad v_3$$

die Componenten der absoluten Geschwindigkeit des Leiterelementes.

Dann sind

$$w_1 = \frac{dx}{dt} - v_1, \quad w_2 = \frac{dy}{dt} - v_2, \quad w_3 = \frac{dz}{dt} - v_3$$

die Componenten der relativen Geschwindigkeit des elektrischen Theilchens gegen den Leiter.

Wir bezeichnen mit x, y, z die Coordinaten eines Punktes von dS und mit x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines Punktes von dS'. Dann ist

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

folglich durch Differentiation

$$\frac{\partial^2 (r^2)}{\partial x\, \partial x_1} = \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial y\, \partial y_1} = \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial z\, \partial z_1} = -2,$$

$$\frac{\partial^2 (r^2)}{\partial x\, \partial y_1} = \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial x_1\, \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 (r^2)}{\partial y\, \partial z_1} = \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial y_1\, \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 (r^2)}{\partial z\, \partial x_1} = \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial z_1\, \partial x} = 0.$$

Führen wir nun eine Function F ein durch die Definitions-Gleichung

$$F = i_1' \frac{\partial (r^2)}{\partial x_1} + i_2' \frac{\partial (r^2)}{\partial y_1} + i_3' \frac{\partial (r^2)}{\partial z_1}, \tag{2}$$

so haben wir

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2 i_1', \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2 i_2', \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -2 i_3'.$$

Dadurch lässt sich der Ausdruck (1) für D_1 in die folgende Form bringen:

$$(3)\qquad D_1 = \frac{1}{2}\int\int\frac{dS\,dS'}{r}\left(i_1\frac{\partial F}{\partial x}+i_2\frac{\partial F}{\partial y}+i_3\frac{\partial F}{\partial z}\right).$$

Wir beginnen mit der Integration über den ersten Leiter, also mit dem Integral

$$\int\frac{dS}{r}\left(i_1\frac{\partial F}{\partial x}+i_2\frac{\partial F}{\partial y}+i_3\frac{\partial F}{\partial z}\right).$$

Durch Integration nach Theilen [§. 20, Gleichungen (1) und (2)] erhält man dafür

$$(4)\qquad -\int dS\,.\,F\,.\left\{\frac{\partial\left(\frac{i_1}{r}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{i_2}{r}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{i_3}{r}\right)}{\partial z}\right\}$$
$$-\int d\sigma\,.\,\frac{F}{r}\,.\left\{i_1\frac{\partial x}{\partial n}+i_2\frac{\partial y}{\partial n}+i_3\frac{\partial z}{\partial n}\right\},$$

und es ist das erste dieser beiden Integrale über den Raum des ersten Leiters, das zweite über seine Oberfläche zu erstrecken. Wir setzen aber Ströme voraus, bei denen an keiner Stelle die Dichtigkeit der freien Elektricität sich ändert [§. 57, Gleichung (1)] und bei denen die Oberfläche des Leiters isolirt ist [§. 57, Gleichung (2)]. Wir haben also

$$\frac{\partial i_1}{\partial x}+\frac{\partial i_2}{\partial y}+\frac{\partial i_3}{\partial z}=0,$$

$$i_1\frac{\partial x}{\partial n}+i_2\frac{\partial y}{\partial n}+i_3\frac{\partial z}{\partial n}=0.$$

Hiernach vereinfacht sich das Raum-Integral in (4), und das Oberflächen-Integral fällt ganz weg. Der Ausdruck (3) geht in Folge dessen über in:

$$(5)\qquad D_1=-\frac{1}{2}\int\int dS\,dS'.\,F.\left\{i_1\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}+i_2\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}+i_3\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\right\}.$$

In dieser Formel braucht man nur die Differentiation von $\frac{1}{r}$ wirklich auszuführen und die Function F aus Gleichung (2) wieder einzusetzen, um den neuen Ausdruck zu erlangen:

$$(6)\qquad D_1=\int\int\frac{dS\,dS'}{r}\left(i_1\frac{\partial r}{\partial x}+i_2\frac{\partial r}{\partial y}+i_3\frac{\partial r}{\partial z}\right)\left(i'_1\frac{\partial r}{\partial x_1}+i'_2\frac{\partial r}{\partial y_1}+i'_3\frac{\partial r}{\partial z_1}\right).$$

Für die weitere Transformation ist es von Nutzen, den Zusammenhang zwischen den specifischen Stromintensitäten und den

Componenten der Geschwindigkeit des einzelnen elektrischen Theilchens in Betracht zu ziehen. Nach §. 54, (5) ist nemlich bei der hier gebrauchten Bezeichnung

$$i_1\,dS = \sum \varepsilon\, w_1 = \sum \varepsilon \frac{dx}{dt} - \sum \varepsilon\, v_1,$$

$$i_2\,dS = \sum \varepsilon\, w_2 = \sum \varepsilon \frac{dy}{dt} - \sum \varepsilon\, v_2,$$

$$i_3\,dS = \sum \varepsilon\, w_3 = \sum \varepsilon \frac{dz}{dt} - \sum \varepsilon\, v_3.$$

Die Summirung erstreckt sich über alle im Raumelemente dS enthaltenen elektrischen Theilchen. Nun können aber für ein und dasselbe Leiterelement die Geschwindigkeits-Componenten v_1, v_2, v_3 vor das Summenzeichen genommen werden. Und da im Innern des Leiters an keiner Stelle freie Elektricität vorhanden ist, so haben wir

(7) $$\sum \varepsilon = 0.$$

Folglich vereinfachen sich die letzten Gleichungen und wir erhalten

(8) $$i_1\,dS = \sum \varepsilon \frac{dx}{dt},\quad i_2\,dS = \sum \varepsilon \frac{dy}{dt},\quad i_3\,dS = \sum \varepsilon \frac{dz}{dt}.$$

Drei entsprechende Gleichungen ergeben sich für das Raumelement dS' des zweiten Leiters. Mit Hülfe dieser Gleichungen geht der Ausdruck (6) über in:

(9) $$D_1 = \sum\sum \frac{\varepsilon\varepsilon'}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial r}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial r}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dt}\right).$$

Die eine Summirung ist über alle elektrischen Theilchen des ersten, die andere über alle Theilchen des zweiten Stromes zu erstrecken.

Die Gleichung (9) lässt sich noch einfacher schreiben. Bezeichnet man nemlich die in der Zeit dt eintretende Aenderung von r, die von der Bewegung des Theilchens ε herrührt, mit δr, die entsprechende Aenderung von r, die von der Bewegung des Theilchens ε' herrührt, mit $\delta' r$, so findet sich schliesslich:

(10) $$D_1 = \sum\sum \frac{\varepsilon\varepsilon'}{r} \cdot \frac{\delta r}{dt} \cdot \frac{\delta' r}{dt}.$$

Dieser Ausdruck gibt das Potential D_1 abhängig von der absoluten Bewegung der elektrischen Theilchen. Nun dürfen in (10) noch solche Glieder hinzugefügt werden, die bei der Summation sich aufheben, und durch deren Einführung bewirkt wird, dass nur noch die relative Geschwindigkeit vorkömmt.

Der Inbegriff dieser Glieder ist

$$\frac{1}{2}\sum\sum\frac{\varepsilon\,\varepsilon'}{r}\left\{\left(\frac{\delta r}{dt}\right)^2+\left(\frac{\delta' r}{dt}\right)^2\right\}. \tag{11}$$

Es ist leicht einzusehen, dass diese Doppelsumme den Werth Null hat. Beginnen wir nemlich in

$$\sum\sum\frac{\varepsilon\,\varepsilon'}{r}\left(\frac{\delta r}{dt}\right)^2$$

mit der Summirung über den zweiten Leiter, so kann der Factor ε aus dem inneren Summenzeichen herausgenommen werden. Für irgend ein einzelnes Element des zweiten Leiters ist $\frac{1}{r}\left(\frac{\delta r}{dt}\right)^2$ constant und $\sum\varepsilon' = 0$. Folglich liefert jedes Element des zweiten Leiters zu der Summe den Beitrag Null, und deshalb ist die ganze Summe gleich Null. In entsprechender Weise zeigen wir, dass auch der zweite Bestandtheil von (11) den Werth Null hat.

Fügen wir nun den Beitrag (11) auf der rechten Seite von (10) hinzu und schreiben

$$\frac{\delta r}{dt}+\frac{\delta' r}{dt}=\frac{dr}{dt},$$

so ergibt sich

$$D_1=\frac{1}{2}\sum\sum\frac{\varepsilon\,\varepsilon'}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2. \tag{12}$$

Dieser Ausdruck kömmt zu Stande, wenn man für die Wechselwirkung der beiden einzelnen bewegten Theilchen ε und ε' setzt:

$$D=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\,\varepsilon'}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2. \tag{13}$$

Das elektrostatische Potential der beiden Theilchen ist

$$S=-\frac{\varepsilon\,\varepsilon'}{r}. \tag{14}$$

Hier muss aber beachtet werden, dass in (13) und (14) die Elektricitätsmengen nach verschiedenem Maasse gemessen sind, nemlich in D nach magnetischem, in S nach elektrostatischem Maass. Sollen beide Ausdrücke zusammengefasst werden, so müssen sie vorher auf einerlei Maass gebracht werden. Wir können z. B. in D elektrostatisches Maass einführen. Dies geschieht, indem wir in (12) und (13) $\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{c}$ statt ε und $\frac{\varepsilon'\sqrt{2}}{c}$ statt ε' schreiben. Die Grösse c ist eine durch Experiment zu bestimmende Constante. Hiernach erhalten wir schliesslich das Potential zwei elektrischer Theilchen:

$$\text{(I)} \qquad S + D = -\frac{\varepsilon\varepsilon'}{r}\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}.$$

Dieser Ausdruck führt auf Weber's Grundgesetz der Wechselwirkung zwischen zwei elektrischen Theilchen. Wir wollen dasselbe im nächsten Paragraphen ableiten.

§. 97.

Weber's Grundgesetz.

Wir haben angenommen, dass bei der Wechselwirkung zwischen elektrischen Theilchen der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft in Gültigkeit sei. Folglich geht die Bewegung so vor sich, dass der erweiterte Satz von Lagrange (§. 95) erfüllt ist, nemlich

$$\text{(1)} \qquad \delta\int_0^t (T - D + S)\,dt = 0.$$

Wir nehmen nur zwei elektrische Theilchen, die in den Punkten (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) concentrirt sind. Ihre Elektricitätsmengen seien ε und ε', ihre Massen m und m_1. In diesem Falle ist

$$T = \frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{1}{2} m_1 (x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2),$$

$$D = \frac{1}{c^2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

$$S = -\frac{\varepsilon\varepsilon'}{r}.$$

Danach erhalten wir

$$\delta\int_0^t T\,dt = m\int_0^t (x'\,\delta x' + y'\,\delta y' + z'\,\delta z')\,dt$$

$$+ m_1\int_0^t (x_1'\,\delta x_1' + y_1'\,\delta y_1' + z_1'\,\delta z_1')\,dt.$$

Hier ist dieselbe Transformation wie im §. 39 auszuführen. Dadurch ergibt sich

$$(2)\quad -\delta\int\limits_0^t T\,dt = m\int\limits_0^t\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right)dt$$

$$+m_1\int\limits_0^t\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}\,\delta x_1 + \frac{d^2y_1}{dt^2}\,\delta y_1 + \frac{d^2z_1}{dt^2}\,\delta z_1\right)dt.$$

Ferner haben wir

$$\delta\int\limits_0^t S\,dt = \varepsilon\,\varepsilon'\int\limits_0^t\frac{\delta r}{r^2}\,dt.$$

$$\delta\int\limits_0^t(-D)\,dt = \frac{\varepsilon\,\varepsilon'}{c^2}\int\limits_0^t\frac{\delta r}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 dt$$

$$-2\,\frac{\varepsilon\,\varepsilon'}{c^2}\int\limits_0^t\frac{1}{r}\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\,\delta r}{dt}\,dt.$$

Das letzte Integral ist noch zu transformiren. Die Integration nach Theilen gibt

$$\int\frac{1}{r}\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\,\delta r}{dt}\,dt = \frac{1}{r}\,\frac{dr}{dt}\,\delta r$$

$$-\int\frac{d\left(\frac{1}{r}\,\frac{dr}{dt}\right)}{dt}\,\delta r\,dt.$$

Bei der Einsetzung der Grenzen fällt der freie Theil heraus, weil $\delta r = 0$ ist zu Anfang und zu Ende der Bewegung. Folglich erhalten wir

$$\int\limits_0^t\frac{1}{r}\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\,\delta r}{dt}\,dt = -\int\limits_0^t\frac{1}{r}\,\frac{d^2r}{dt^2}\,\delta r\,dt$$

$$+\int\limits_0^t\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\delta r\,dt,$$

und deshalb

$$(3) \qquad \delta \int_0^t (-D + S)\, dt$$

$$= \int_0^t dt\, \delta r \, . \, \frac{\varepsilon \varepsilon'}{r^2} \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2 r}{dt^2} \right\}.$$

Setzt man nun aus (2) und (3) in (1) ein, so findet sich, dass zwei elektrische Theilchen ε und ε' in der Entfernung r eine Abstossung auf einander ausüben, deren Richtung in ihre Verbindungslinie fällt, und deren Grösse

$$\frac{\varepsilon \varepsilon'}{r^2} \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2 r}{dt^2} \right\}$$

ist. Dies ist Weber's Grundgesetz.*)

§. 98.

Das Potential zwei elektrischer Theilchen. Riemann's Form.

Wir kehren zu dem Ausdruck (5) in §. 94 zurück. Danach ist

$$D_1 = -\int\int \frac{dS\, dS'}{r} (i_1 i_1' + i_2 i_2' + i_3 i_3')$$

für magnetisches Maass, dagegen

$$(1) \qquad D_1 = -\frac{2}{c^2} \int\int \frac{dS\, dS'}{r} (i_1 i_1' + i_2 i_2' + i_3 i_3')$$

für elektrostatisches Maass. Führen wir hier, mit Hülfe der Gleichungen (8) des vorletzten Paragraphen und der drei entsprechenden Gleichungen für den zweiten Leiter, sofort die Geschwindigkeiten ein, so erhalten wir

$$(2) \quad D_1 = \frac{1}{c^2} \sum\sum \frac{\varepsilon \varepsilon'}{r} \left\{ -2 \left(\frac{dx}{dt} \frac{dx_1}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{dy_1}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{dz_1}{dt} \right) \right\}.$$

Wir wollen wieder so transformiren, dass nur die relative Lage und die relativen Bewegungen in Betracht kommen. Es ist

$$(3) \qquad \frac{1}{c^2} \sum\sum \frac{\varepsilon \varepsilon'}{r} \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right\} = 0.$$

*) Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen. Theil 1. Seite 99. (Abhandlungen der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig 1846.)

Denn wir können mit der Summirung über den zweiten Leiter beginnen. Dann tritt

$$\varepsilon\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}$$

vor das innere Summenzeichen. Für irgend ein beliebiges Element des zweiten Leiters ist $\frac{1}{r}$ constant. Bei der Summirung über dieses Element kann also auch $\frac{1}{r}$ als Factor vorangenommen werden. Es ist aber für jedes einzelne Element des zweiten Leiters $\sum \varepsilon' = 0$. Folglich liefern alle einzelnen Elemente des zweiten Leiters den Beitrag Null, und deshalb ist die ganze Summe gleich Null. In entsprechender Weise zeigen wir, dass

$$(4) \qquad \frac{1}{c^2}\sum\sum\frac{\varepsilon\,\varepsilon'}{r}\left\{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right\}=0$$

ist. Aus (2), (3), (4) ergibt sich dann

(5)

$$D_1=\frac{1}{c^2}\sum\sum\frac{\varepsilon\,\varepsilon'}{r}\left\{\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right\}.$$

Für zwei einzelne Theilchen setzen wir demnach

$$(\mathrm{II})\; D=\frac{1}{c^2}\frac{\varepsilon\,\varepsilon'}{r}\left\{\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right\}.$$

§. 99.

Riemann's Grundgesetz.

Wir wollen auch mit Hülfe dieses zweiten Ausdruckes für D die Wechselwirkung zwischen zwei elektrischen Theilchen berechnen. Wir gehen wie in §. 97 aus von der Formel

$$(1) \qquad \delta\int_0^t (T-D+S)\,dt=0,$$

in welcher der erweiterte Satz von Lagrange sich ausspricht. Wir könnten nun wieder denselben Weg einschlagen wie in §. 97. Es ist aber auch erlaubt, sofort von der Formel (6) des §. 42 Gebrauch zu machen, welche hier lautet:

$$(2) \qquad \frac{d\left(\frac{\partial\,(T-D)}{\partial q'}\right)}{dt}=\frac{\partial\,(T-D+S)}{\partial q}.$$

Für q sind der Reihe nach die Coordinaten x, y, z, x_1, y_1, z_1 einzusetzen. Wir führen die Rechnung durch für $q=x$. Es ist

$$T = \frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{1}{2} m_1 (x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2),$$

also

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = m x', \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Demnach haben wir jetzt

$$X = m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{\partial D}{\partial x'}\right)}{dt} - \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x}. \tag{3}$$

Es findet sich aber aus der Formel (II) des vorigen Paragraphen

$$\frac{\partial D}{\partial x'} = 2 \frac{\varepsilon \varepsilon'}{c^2} \frac{1}{r} \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right),$$

$$\frac{\partial D}{\partial x} = -\frac{\varepsilon \varepsilon'}{c^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \left\{\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right)^2\right\}.$$

Endlich ist

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\varepsilon \varepsilon'}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x}.$$

Setzt man dies ein in Gleichung (3), so erhält man

$$X = \frac{\varepsilon \varepsilon'}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\varepsilon \varepsilon'}{c^2} \frac{d\left\{\frac{2}{r}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)\right\}}{dt} \tag{4}$$

$$+ \frac{\varepsilon \varepsilon'}{c^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \left\{\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right)^2\right\}.$$

Ebenso findet sich

$$Y = \frac{\varepsilon \varepsilon'}{r^2} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\varepsilon \varepsilon'}{c^2} \frac{d\left\{\frac{2}{r}\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)\right\}}{dt} \tag{5}$$

$$+ \frac{\varepsilon \varepsilon'}{c^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial y} \left\{\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right)^2\right\}.$$

$$Z = \frac{\varepsilon \varepsilon'}{r^2} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\varepsilon \varepsilon'}{c^2} \frac{d\left\{\frac{2}{r}\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right)\right\}}{dt} \tag{6}$$

$$+ \frac{\varepsilon \varepsilon'}{c^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial z} \left\{\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right)^2\right\}.$$

Ueber bewegte freie Elektricität ist es bis jetzt nicht gelungen, Versuche anzustellen.

§. 100.

Wirkung sämmtlicher Theilchen ε' auf ein Theilchen ε. Riemann's Gesetz.

Um die Wirkung sämmtlicher elektrischer Theilchen ε' auf das eine Theilchen ε zu untersuchen, haben wir zu setzen

$$(1) \qquad S = \varepsilon \sum \left(-\frac{\varepsilon'}{r}\right) = \varepsilon V,$$

wenn V die elektrostatische Potentialfunction der Theilchen ε' auf den Punkt (x, y, z) bezeichnet. Was D betrifft, so sind die beiden Hypothesen (§§. 96 u. 98) zu unterscheiden. Nach Weber's Formel ist

$$(2^a) \qquad D = \varepsilon \sum \frac{\varepsilon'}{c^2} \frac{1}{r} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2;$$

nach Riemann's Formel dagegen

$$(2^b) \quad D = \varepsilon \sum \frac{\varepsilon'}{c^2} \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right)^2 \right\}.$$

Wir wollen die letztgenannte zuerst behandeln. Werden in (2^b) die Quadrate ausgerechnet, so zerlegt sich D in drei Bestandtheile, nemlich:

$$\begin{aligned} D = {} & \varepsilon \sum \frac{\varepsilon'}{c^2} \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right\} \\ & + \varepsilon \sum \frac{\varepsilon'}{c^2} \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 \right\} \\ & - 2 \varepsilon \sum \frac{\varepsilon'}{c^2} \frac{1}{r} \left\{ \frac{dx}{dt}\frac{dx_1}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{dy_1}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{dz_1}{dt} \right\}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des Theilchens ε mit v, die Geschwindigkeit des Theilchens ε' mit v', so lässt sich kürzer schreiben:

$$\begin{aligned} D = {} & \frac{\varepsilon}{c^2} v^2 \sum \frac{\varepsilon'}{r} + \frac{\varepsilon}{c^2} \sum \frac{\varepsilon'}{r} v'^2 \\ & - 2 \frac{\varepsilon}{c^2} \sum \frac{\varepsilon'}{r} \left\{ \frac{dx}{dt}\frac{dx_1}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{dy_1}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{dz_1}{dt} \right\} \\ = {} & - \frac{\varepsilon}{c^2} v^2 V + \frac{\varepsilon}{c^2} \sum \frac{\varepsilon'}{r} v'^2 \\ & - 2 \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{dx}{dt} \sum \frac{\varepsilon'}{r} \frac{dx_1}{dt} \\ & - 2 \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{dy}{dt} \sum \frac{\varepsilon'}{r} \frac{dy_1}{dt} \\ & - 2 \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{dz}{dt} \sum \frac{\varepsilon'}{r} \frac{dz_1}{dt}. \end{aligned}$$

Zur Abkürzung wollen wir setzen

$$\sum \frac{\varepsilon'}{r} v'^2 = W,$$

$$\sum \frac{\varepsilon'}{r} \frac{dx_1}{dt} = u_1,$$

$$\sum \frac{\varepsilon'}{r} \frac{dy_1}{dt} = u_2,$$

$$\sum \frac{\varepsilon'}{r} \frac{dz_1}{dt} = u_3.$$

Dann haben wir

(3) $$D = -\frac{\varepsilon}{c^2} v^2 V + \frac{\varepsilon}{c^2} W - 2\frac{\varepsilon}{c^2}\left(u_1 \frac{dx}{dt} + u_2 \frac{dy}{dt} + u_3 \frac{dz}{dt}\right).$$

Die Functionen V, W, u_1, u_2, u_3 genügen der Gleichung von Laplace, folglich auch D, insofern es von x, y, z abhängig ist:

(4) $$\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial z^2} = 0.$$

Wir wollen noch die Aenderung von V herstellen, die in dem Zeitelement dt dadurch zu Stande kommt, dass die Theilchen ε' sich bewegen, und x, y, z constant genommen werden. Es findet sich

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\sum \varepsilon' \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} - \sum \varepsilon' \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt} - \sum \varepsilon' \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dt}.$$

Nun haben wir aber

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x_1} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x},$$

folglich

$$-\sum \varepsilon' \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} = \sum \varepsilon' \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial x},$$

und ebenso

$$-\sum \varepsilon' \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt} = \sum \varepsilon' \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}\frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial u_2}{\partial y},$$

$$-\sum \varepsilon' \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dt} = \sum \varepsilon' \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\frac{dz_1}{dt} = \frac{\partial u_3}{\partial z}.$$

Der Ausdruck für $\frac{\partial V}{\partial t}$ geht dadurch in den folgenden über

(5) $$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}.$$

Auf Grund dieser Differentialgleichung könnte man über die Bedeutung der Functionen V, u_1, u_2, u_3 eine Annahme machen. Man kann annehmen, die elektrische Wirkung werde durch einen Aether vermittelt. Vermöge der Gleichung (5) liessen sich dann V als die Dichtigkeit, u_1, u_2, u_3 als die Stromintensitäten dieses Aethers ansehen.

§. 101.

Fortsetzung: Weber's Gesetz.

Wir wollen für die Wirkung der sämmtlichen Theilchen ε' auf das eine Theilchen ε das Potential auch nach Weber's Theorie herstellen.

Zunächst ist wieder

(1) $$S = \varepsilon V.$$

Diese Function genügt der Gleichung von Laplace. Zur Abkürzung möge für irgend eine Function F die Summe der drei Derivirten

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \Delta_2 F$$

gesetzt werden. Bei dieser Bezeichnung haben wir also

(2) $$\Delta_2 S = 0.$$

Die Function D ist jetzt aus Gleichung (2^a) des vorigen Paragraphen zu nehmen. Es ist nun aber

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

folglich

$$\frac{dr}{dt} = \frac{(x - x_1)}{r}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right) + \frac{(y - y_1)}{r}\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right) + \frac{(z - z_1)}{r}\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right).$$

Setzen wir dies in den Ausdruck für D ein, so ergibt sich

(3) $$D = \frac{\varepsilon}{c^2} \sum \frac{\varepsilon'}{r^3} \left\{(x - x_1)\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right) + (y - y_1)\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right) + (z - z_1)\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right)\right\}^2.$$

Diese Function genügt, insofern sie von x, y, z abhängig ist, nicht der Gleichung von Laplace, sondern der complicirteren Differentialgleichung

(4) $$\Delta_2 \Delta_2 D = 0.$$

Um das zu beweisen, setzen wir

$$\frac{1}{r^3}\left\{(x-x_1)\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\right)+(y-y_1)\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy_1}{dt}\right)+(z-z_1)\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz_1}{dt}\right)\right\}=G,$$

$$(x-x_1)\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\right)+(y-y_2)\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy_1}{dt}\right)+(z-z_1)\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz_1}{dt}\right)=H.$$

Die einzelnen Summanden in D sind dann, abgesehen von constanten Factoren, von der Form

$$G\,.\,H.$$

Es ist aber

$$\Delta_2\,(GH)=G\Delta_2 H+H\Delta_2 G$$
$$+2\left(\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial z}\right),$$

und es lässt sich durch Differentiation leicht beweisen, dass

$$\Delta_2\,G=0,$$
$$\Delta_2\,H=0.$$

Folglich erhalten wir einfacher

$$\Delta_2\,(GH)=2\left(\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial z}\right).$$

Die Factoren $\frac{\partial H}{\partial x}$, $\frac{\partial H}{\partial y}$, $\frac{\partial H}{\partial z}$ sind von x, y, z unabhängig. Es wird also

$$\Delta_2\,\Delta_2\,(GH)=2\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial \Delta_2 G}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial \Delta_2 G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial \Delta_2 G}{\partial z}\right)$$

und dies ist gleich Null, da $\Delta_2 G=0$ ist. Damit ist auch die Gleichung (4) bewiesen.

Weber's Hypothese führt also bei dem vorliegenden Problem auf eine complicirtere Differentialgleichung.

§. 102.

Bewegung des Theilchens ε. Riemann's Gesetz.

Wir wollen jetzt für das Theilchen ε die Bewegungsgleichungen selbst ableiten, und zwar zunächst nach Riemann's Hypothese:

(1) $$S=\varepsilon\,V.$$

(2) $$D=-\frac{\varepsilon}{c^2}v^2\,V+\frac{\varepsilon}{c^2}W$$
$$-2\frac{\varepsilon}{c^2}\left(u_1\frac{dx}{dt}+u_2\frac{dy}{dt}+u_3\frac{dz}{dt}\right).$$

Für die Bewegung gilt der erweiterte Satz von Lagrange und aus ihm ergibt sich wie in §. 99, (2):

$$\frac{d\left(\frac{\partial (T-D)}{\partial q'}\right)}{dt} = \frac{\partial (T-D+S)}{\partial q}.$$

Hier sind für q der Reihe nach die Coordinaten x, y, z einzusetzen. Wir erhalten für $q = x$ in derselben Weise wie in §. 99, (3):

$$(3) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{\partial D}{\partial x'}\right)}{dt} - \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x}.$$

Die nach x genommenen partiellen Derivirten $\frac{\partial D}{\partial x}$ und $\frac{\partial S}{\partial x}$ sind von der Beschleunigung unabhängig. Wohl aber kommt die Beschleunigung vor in $\frac{d\left(\frac{\partial D}{\partial x'}\right)}{dt}$. Es ist nemlich

$$\frac{\partial D}{\partial x'} = -2\frac{\varepsilon}{c^2}V\frac{dx}{dt} - 2\frac{\varepsilon}{c^2}u_1,$$

folglich

$$\frac{d\left(\frac{\partial D}{\partial x'}\right)}{dt} = -2\frac{\varepsilon}{c^2}V\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{dV}{dt}\frac{dx}{dt} - 2\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{du_1}{dt}$$

oder kürzer

$$\frac{d\left(\frac{\partial D}{\partial x'}\right)}{dt} = -2\frac{\varepsilon}{c^2}V\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\delta\left(\frac{\partial D}{\partial x'}\right)}{dt},$$

wenn man mit δ eine Differentiation nach t andeutet, bei welcher $\frac{dx}{dt}$ als constant angesehen wird. Führt man dies in Gleichung (3) ein, so ergibt sich:

$$(4) \qquad \left(m + \frac{2\varepsilon}{c^2}V\right)\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\delta\left(\frac{\partial D}{\partial x'}\right)}{dt} - \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x}.$$

Auf demselben Wege erhalten wir die beiden anderen Gleichungen:

$$(5) \qquad \left(m + \frac{2\varepsilon}{c^2}V\right)\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\delta\left(\frac{\partial D}{\partial y'}\right)}{dt} - \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial y},$$

$$(6) \qquad \left(m + \frac{2\varepsilon}{c^2}V\right)\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\delta\left(\frac{\partial D}{\partial z'}\right)}{dt} - \frac{\partial D}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial z}.$$

§. 103.

Fortsetzung: Weber's Gesetz.

Endlich sollen für das elektrische Theilchen ε die Bewegungsgleichungen auch aus Weber's Formel hergeleitet werden:

$$S = \varepsilon V, \tag{1}$$

$$D = \frac{\varepsilon}{c^2} \sum \frac{\varepsilon'}{r^3} \left\{ (x - x_1)\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right) + (y - y_1)\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right) + (z - z_1)\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right) \right\}^2. \tag{2}$$

Hier findet sich

$$\frac{\partial D}{\partial x'} = a \frac{dx}{dt} + b \frac{dy}{dt} + c \frac{dz}{dt} + k,$$

wobei a, b, c, k Functionen von x, y, z sind, welche der partiellen Differentialgleichung genügen

$$\Delta_2 \, \Delta_2 \, F = 0.$$

Durch Differentiation nach t erhalten wir

$$\frac{d\left(\frac{\partial D}{\partial x'}\right)}{dt} = a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{d^2 z}{dt^2} + g,$$

und hier ist die Function g nur von den Coordinaten x, y, z und den Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ abhängig. Demnach lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} (m - a) \frac{d^2 x}{dt^2} - b \frac{d^2 y}{dt^2} - c \frac{d^2 z}{dt^2} &= g - \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x}, \\ - a_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + (m - b_1) \frac{d^2 y}{dt^2} - c_1 \frac{d^2 z}{dt^2} &= g_1 - \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial y}, \\ - a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} - b_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + (m - c_2) \frac{d^2 z}{dt^2} &= g_2 - \frac{\partial D}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial z}. \end{aligned} \tag{3}$$

Hier müsste also zunächst eliminirt werden.

§. 104.

Zusammenhang mit Ampère's Gesetz.

Der Ausdruck (12) des §. 96 ist von uns so interpretirt worden, dass der von den Geschwindigkeiten abhängige Theil des Gesammtpotentials zwei geschlossener Ströme auf einander sich durch Summirung aus lauter Einzelpotentialen zusammensetzt. Das Einzelpotential bezieht sich überhaupt auf zwei elektrische Theilchen ε und ε'. Handelt es sich um das Potential D_1 zweier Ströme auf einander, so hat man jedes Theilchen ε des einen Stromes mit jedem Theilchen ε' des anderen Stromes zusammenzufassen, für jede solche Zusammenstellung das Einzelpotential zu bilden und alle Einzelpotentiale zu summiren. So kömmt aus §. 96 (13) der Ausdruck für D_1 in Gleichung (12) desselben Paragraphen richtig zu Stande, und ebenso aus (II) der Ausdruck für D_1 in Gleichung (5) des §. 98.

Soll nun aus dem Fundamentalgesetze Weber's

$$(1) \qquad S + D = -\frac{\varepsilon\,\varepsilon'}{r}\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}$$

oder aus dem Fundamentalgesetze Riemann's

$$(2) \quad S + D = -\frac{\varepsilon\,\varepsilon'}{r} + \frac{\varepsilon\,\varepsilon'}{c^2\,r}\left\{\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right)^2\right\}$$

die gesammte Wechselwirkung aller elektrischen Theilchen berechnet werden, welche überhaupt in zwei geschlossenen Leitern in Ruhe und in Strömung begriffen sind, so hat man für jede Combination von zwei verschiedenen Theilchen ε und ε' den Ausdruck (1) resp. (2) herzustellen und zu summiren.

Hier sind dreierlei Combinationen zu unterscheiden, nemlich zwei ruhende Theilchen, ein ruhendes und ein bewegtes Theilchen und endlich zwei bewegte Theilchen.

Wir wollen den besonderen Fall von zwei geschlossenen constanten Strömen betrachten, um zu untersuchen, ob Weber's Grundgesetz, resp. Riemann's Grundgesetz mit Ampère's Gesetze im Einklang stehen oder nicht. Bei Ampère handelt es sich um die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen zwei Stromelementen, von denen das eine dem ersten, das andere dem zweiten Strome angehört. Es kommen also hier nur die Wechselwirkungen zwischen den bewegten elektrischen Theilchen der beiden constanten Ströme in Betracht.

Nun lässt sich zunächst beweisen, dass der von S herrührende Beitrag zu dem Gesammtpotential der bewegten elektrischen Theilchen gleich Null ist. Denn wir können mit einem einzelnen Theilchen ε zunächst alle anderen Theilchen ε' in Combination bringen. Dann tritt ε aus dem Summenzeichen heraus, und es ist die

Summirung $\sum \frac{\varepsilon'}{r}$ über alle von ε verschiedenen Theilchen ε' auszudehnen. Nehmen wir zunächst die Summirung über ein Stromelement vor, so kann auch $\frac{1}{r}$ vor das Summenzeichen gebracht werden. Für beharrliche (hier: constante) Ströme ist aber $\sum \varepsilon' = 0$ in jedem Stromelemente. Alle Beiträge zu der zu bildenden Summe sind also Null. Dies gilt für die Zusammenstellung jedes einzelnen Theilchens ε mit den davon verschiedenen Theilchen ε'. Folglich ist hier

$$(3) \qquad -\sum \frac{\varepsilon\,\varepsilon'}{r} = 0.$$

Es bleibt nur noch die Summe aller Werthe von D übrig für die Combinationen von je zwei bewegten Theilchen. Diese Combinationen zerfallen in drei Gruppen, nemlich:

erstens: je ein Theilchen des ersten Stromes mit je einem Theilchen des zweiten Stromes;
zweitens: je zwei Theilchen des ersten Stromes;
drittens: je zwei Theilchen des zweiten Stromes.

Diese Gruppen liefern der Reihe nach die Potentiale, welche in §. 96 mit D_1, D_2, D_3 bezeichnet sind.

Für constante Ströme sind D_2 und D_3 constant. Gehen wir von (1) aus, so ist

$$(4) \qquad D_2 = \frac{1}{c^2} \sum \frac{\varepsilon\,\varepsilon'}{r} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

wenn die Summirung über alle Combinationen von Theilchen des ersten Stromes ausgedehnt wird.

Da der Leiter von unveränderlicher Gestalt vorausgesetzt wird, so dürfen wir ein mit demselben fest verbundenes Coordinatensystem x, y, z zu Grunde legen. Dann ist bei einem constanten Strome die Function

$$\frac{\varepsilon\,\varepsilon'}{r} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

nur abhängig von x, y, z einerseits und x_1, y_1, z_1 andererseits. Nimmt man zunächst ein einzelnes ε und summirt über alle ε', so ist die Summe eine Function einzig und allein von x, y, z d. h. von den Coordinaten jenes Theilchens ε. Bildet man aber diese Summe für jede Werthen-Combination x, y, z, die überhaupt zu

Punkten im Innern des Leiters gehört und fasst alle diese Summen durch Addition zusammen, so ist das Resultat constant.

Dasselbe gilt von der Summe

$$(5)\ D_2 = \frac{1}{c^2}\sum\frac{\varepsilon\,\varepsilon'}{r}\left\{\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right\},$$

wenn sie über alle Combinationen von Theilchen des ersten Stromes erstreckt wird.

Ebenso beweisen wir, dass bei constanten Strömen D_3 constant ist.

Bei constanten Strömen ist also die von den bewegten elektrischen Theilchen geleistete Gesammtarbeit gleich der Aenderung von D_1 allein. Danach zeigt sich, dass Weber's und Riemann's Grundgesetze mit Ampère's Gesetze im Einklang stehen. Denn Ampère's Gesetz bezieht sich auf constante Ströme. Ampère hat bei seinen Beobachtungen die Gleichgewichtslage beweglicher Stromleiter abgewartet, die von constanten Strömen durchflossen waren. Aus diesen Beobachtungen hat er sein Gesetz abstrahirt. Da wir nun Ampère's Gesetz aus D_1 abgeleitet haben, und der Ausdruck für D_1 aus Weber's und auch aus Riemann's Grundgesetze sich herstellen lässt, so ist jener Einklang in der That nachgewiesen.*)

*) Ueber die Bewegung der Elektricität in drahtförmigen und in beliebigen Leitern hat Kirchhoff zwei Abhandlungen veröffentlicht in Poggendorff's Annalen Bd. 100 (S. 193) und Bd. 102 (S. 529). Die elektromotorische Kraft wird darin angesehen als herrührend von vorhandener freier Elektricität und von der Induction, die in Folge der Aenderungen der Stromstärke in allen Theilen des Leiters stattfindet. Kirchhoff gelangt dadurch zu Strömen, bei denen nur ausnahmsweise die Dichtigkeit der freien Elektricität im Innern des Leiters gleich Null ist. Diese Untersuchungen Kirchhoff's bilden den Ausgangspunkt für die Entwicklungen von Weingarten und Lorberg. (Weingarten. Ueber die Bewegung der Elektricität in Leitern. Borchardt's Journal. Bd. 63. — Lorberg. Zur Theorie der Bewegung der Elektricität in nicht linearen Leitern. Borchardt's Journal Bd. 71. S. 53.)

Im Jahre 1858 hat Riemann der K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen einen Aufsatz überreicht, später aber wieder zurückgezogen. Derselbe ist unter dem Titel: „Ein Beitrag zur Elektrodynamik" im 131. Bande von Poggendorff's Annalen (S. 237) abgedruckt. Darin ist die Hypothese ausgesprochen, dass die Kraft, welche zur Zeit t in einem elektrischen Theilchen ihren Sitz hat, auf ein anderes solches Theilchen in endlicher Entfernung erst zu einer späteren Zeit $t+\Delta t$ ihre Wirksamkeit beginne. Diesen Grundgedanken finden wir auch in einem gleichzeitig (1867) veröffentlichten Aufsatze von L. Lorenz: Ueber die Identität der Schwingungen des Lichts mit den elektrischen Strömen. (Poggendorff's Annalen. Bd. 131. S. 243.) Denselben Grundgedanken hat C. Neumann weiter behandelt. (Die Principien der Elektrodynamik. Tübingen 1868. Gratulationsschrift. — Allgemeine Betrachtungen über das Weber'sche Gesetz. Mathematische Annalen Bd. 8. 1875.)

Weber's Grundgesetz ist in den letzten Jahren Gegenstand einer von Helmholtz angeregten Controverse gewesen. Man sehe darüber die Abhandlungen:

Helmholtz. Ueber die Bewegungsgleichungen für ruhende leitende Körper. (Borchardt's Journal Bd. 72.) — Ueber die Theorie der Elektrodynamik. (Borchardt's Journal Bd. 75 und Bd. 78.)

Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie. (Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften Bd. 10.)

C. Neumann. Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze. (Dieselben Abhandlungen Bd. 10.)

Ferner: Die Aufsätze von C. Neumann im 5. und 6. Bande der Mathematischen Annalen und die Monographie desselben Verfassers: Die elektrischen Kräfte. Theil 1. Leipzig 1873.

Von besonderem Interesse für den Mathematiker sind die beiden Abhandlungen von H. Weber: Ueber die Bessel'schen Functionen und ihre Anwendung auf die Theorie der elektrischen Ströme. (Borchardt's Journal Bd. 75.) — Ueber die stationären Strömungen der Elektricität in Cylindern. (Borchardt's Journal Bd. 76.)

Von Lehrbüchern sind zu citiren:

Beer. Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik. Braunschweig 1865.

Wiedemann. Die Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. 2. Auflage. Bd. I. II. 1 und 2. Braunschweig 1872. 1873. 1874.

Maxwell. A treatise on electricity and magnetism. Vol. I. II. Oxford 1873.

Bei Wiedemann findet man auch eine ausführliche Uebersicht über die Literatur.

Neunter Abschnitt.

Erdmagnetismus.

§. 105.

Die Potentialfunction V^* der erdmagnetischen Kräfte.

Eine Magnetnadel, die um ihren Schwerpunkt frei drehbar aufgehängt ist, stellt sich an jedem Orte der Erdoberfläche in eine ganz bestimmte Richtung ein, selbst dann, wenn künstliche Magnete oder galvanische Ströme in ihrer Nähe nicht vorhanden sind. Man erklärt diese Erscheinung dadurch, dass man die Erde selbst als einen Magnet ansieht. Man nimmt an, dass im Innern der Erde magnetische Massen vorhanden sind oder galvanische Ströme im Innern, resp. an der Oberfläche der Erde, oder dass beide Ursachen neben einander auftreten und die beobachteten magnetischen Wirkungen im äusseren Raume hervorbringen. Nun lässt sich aber jeder geschlossene nichtlineäre Strom als ein System von lineären Strömen auffassen (§. 89). Und wenn es nur auf die äussere magnetische Wirkung ankömmt, so darf man (nach §. 72) den geschlossenen lineären Strom durch eine gewisse Vertheilung fingirter magnetischer Massen ersetzen.

Ohne der Allgemeinheit der Untersuchung zu schaden, nehmen wir also an, dass die magnetischen Wirkungen, welche der Erdkörper an seiner Oberfläche und im äusseren Raume ausübt, allein herrühre von einer (freilich unbekannten) Vertheilung magnetischer Massen in seinem Innern. Wir betrachten die Erde als eine Kugel vom Radius a und legen in ihren Mittelpunkt den Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen positive z-Axe den Nordpol treffen möge. Bezeichnet man mit $d\mu$ ein unendlich kleines magnetisches Massenelement im Innern der Erde, mit x, y, z die Coordinaten eines Punktes an der Oberfläche oder im äusseren Raume und mit $\mathfrak{r}$ die Entfernung dieses Punktes von dem magnetischen Element $d\mu$, so hat die von dem Erdmagnetismus herrührende Potentialfunction im Punkte (x, y, z) den Werth

(1) $$V^* = -\int \frac{d\mu}{\mathfrak{r}}.$$

Die Integration ist über alle magnetischen Massen im Innern der Erdkugel zu erstrecken. Dabei bemerken wir, dass wie bei jedem anderen Magnet auch hier die algebraische Summe der magnetischen Massen im Innern der Erde gleich Null sein muss:

(2) $$\int d\mu = 0.$$

Die Vertheilung der magnetischen Massen ist uns nicht bekannt. Wir können also die Function V^* nicht a priori aus ihrer Definitionsgleichung (1) herstellen. Wohl aber sind wir im Stande, an beliebig vielen Punkten der Erdoberfläche die auf die positive magnetische Einheit ausgeübte erdmagnetische Kraft ihrer Grösse und Richtung nach zu beobachten, und daraus lässt sich mit grösserer oder geringerer Genauigkeit der Werth der Potentialfunction V^* in jedem Punkte der Erdoberfläche berechnen. Mit absoluter Genauigkeit, wenn man an jeder Stelle der Erdoberfläche die nach Norden gerichtete horizontale Componente der erdmagnetischen Kraft als bekannt voraussetzt.

In der That denken wir uns auf der Erdoberfläche ein System von Meridianen gezogen und auf irgend einem Meridian vom Pole aus den sphärischen Abstand s genommen. Kennt man dann auf diesem Meridian für jedes s (von $s = 0$ bis $s = a\pi$) die nördlich gerichtete horizontale Componente $-\frac{\partial V^*}{\partial s}$, so ergibt sich durch Integration

(3) $$V^* - V_0^* = \int_0^s \frac{\partial V^*}{\partial s}\, ds,$$

und die Integrationsconstante V_0^* ist der Werth der Potentialfunction V^* im Nordpol. Der Werth dieser additiven Constanten bestimmt sich, wie wir später (§. 110) zeigen werden, daraus, dass die magnetischen Massen im Innern der Erde die Bedingungsgleichung (2) erfüllen.

Kennt man also auf jedem Meridian die nördlich gerichtete horizontale Componente der erdmagnetischen Kraft, so ist auch die Potentialfunction V^* in jedem Punkte der Erdoberfläche bekannt. Diesen Satz hat Gauss aufgestellt im Artikel 15 seiner Abhandlung: allgemeine Theorie des Erdmagnetismus.*)

Die Voraussetzung, dass die Function V^* in jedem Punkte der Oberfläche gegeben sei, bildet das Fundament der weiteren Untersuchung.

§. 106.

Fingirte magnetische Belegung der Erdoberfläche.

Wenn die Potentialfunction V^* an jeder Stelle der Erdoberfläche gegeben ist, so lässt sie sich, wie in den §§. 21 und 34 gezeigt worden, immer in einer und nur in einer Weise in den äusseren Raum hinein fortsetzen, so dass sie in diesem äusseren Raume überall endlich und stetig variabel ist, dass sie in unendlicher Entfernung den Werth Null hat, und dass an jeder Stelle des äusseren Raumes die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V^*}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

erfüllt wird. Man hat als Begrenzung des Raumes T (§. 21) die Erdoberfläche und eine concentrische Kugelfläche von unendlich grossem Radius zu nehmen. Diese Potentialfunction entspricht der Voraussetzung, dass im äusseren Raume keine magnetischen Massen vorhanden sind.

Im §. 79 ist nachgewiesen, dass man die Function V^*, ausgehend von den Werthen in der Erdoberfläche, in unendlich mannichfaltiger Weise ins Innere stetig fortsetzen kann. Jede solche Fortsetzung liefert dann für einen inneren Punkt im allgemeinen einen anderen Werth des Ausdruckes

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial^2 V^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V^*}{\partial z^2}\right).$$

Folglich gibt es unendlich viele verschiedene Vertheilungen von magnetischen Massen im Innern der Erde, welche sämmtlich dieselbe magnetische Wirkung an der Oberfläche und im äusseren Raume ausüben, nemlich die Wirkung, welche aus der in der Oberfläche gegebenen Potentialfunction V^* und ihrer eindeutigen Fortsetzung im äusseren Raume sich berechnet.

---

*) Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838. Herausgegeben von Gauss und Weber. Leipzig 1839. — Gauss' Werke. Band 5. Göttingen 1867.

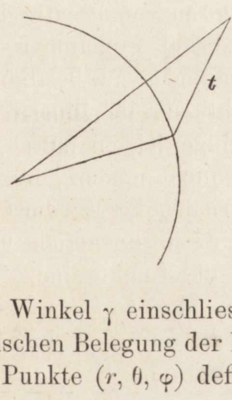
Im §. 80 haben wir den wichtigen Satz entwickelt, dass man die unbestimmte räumliche Vertheilung der magnetischen Massen im Innern ersetzen kann durch eine einzige, ganz bestimmte Vertheilung über die Oberfläche. Die Potentialfunction, welche von dieser fingirten Belegung der Oberfläche herrührt, soll zur Unterscheidung mit V bezeichnet werden. In einem Punkte der Erdoberfläche oder des äusseren Raumes ist dann

$$(2) \qquad V = V^*.$$

Im Innern der Erde ist V eine einwerthige, endliche und stetige Function des Ortes, dagegen V^* völlig unbestimmt.

Wir wollen von der fingirten Belegung der Erdoberfläche ausgehen und die davon herrührende Potentialfunction V für den ganzen unendlichen Raum herstellen. Es sei $d\sigma'$ ein Element der Erdkugel-Oberfläche und a ihr Radius. Wir nehmen Kugelcoordinaten zu Hülfe. Auf einer mit der Erde concentrischen Hülfskugel vom Radius 1 soll der Pol in dem Punkte liegen, welcher von der Axe der positiven z getroffen wird, und der Anfangsmeridian soll die Axe der positiven x durchschneiden. Wir verbinden einen Punkt, der dem Flächenelement $d\sigma'$ angehört, mit dem Mittelpunkte der Kugel. Der Radius vector schneidet die Hülfskugel in einem Punkte, dessen Poldistanz θ' und dessen geographische Länge φ' sei. Dann sind a, θ', φ' die Kugelcoordinaten des erstgenannten Punktes. In diesem Punkte sei ρ' die Dichtigkeit der fingirten magnetischen Massenbelegung. Also ist $\rho' d\sigma'$ das Quantum magnetischen Fluidums, welches über das Element ausgebreitet ist. In einem Punkte, dessen Kugelcoordinaten r, θ, φ sind, denken wir uns die positive Einheit der magnetischen Masse concentrirt. Dieser Punkt, der an einer beliebigen Stelle im äusseren Raume oder im Innern der Erde oder in der Erdoberfläche liegen kann, habe von dem Punkte (a, θ', φ') den Abstand t (**Fig. 49**), und die Radien beider Punkte mögen den Winkel γ einschliessen. Dann wird die von der fingirten magnetischen Belegung der Erdoberfläche herrührende Potentialfunction im Punkte (r, θ, φ) definirt durch die Gleichung:

Fig. 49.

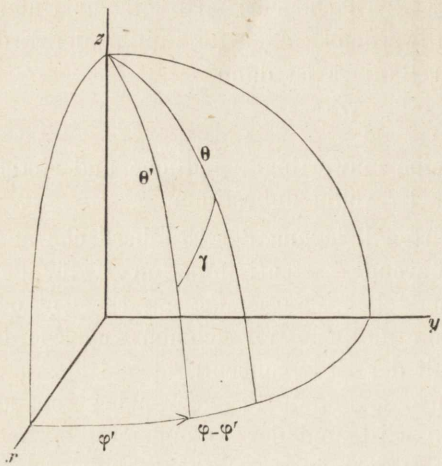


(3) $$V = -\int \frac{\rho' \, d\sigma'}{t},$$

und es ist

(4) $$t^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos\gamma.$$

Fig. 50.



Die Integration in (3) ist über die ganze Erdoberfläche zu erstrecken. Der Winkel γ wird auf der Hülfskugel vom Radius 1 gemessen durch den Bogen eines grössten Kreises. Dieser Bogen (**Fig. 50**) ist die dritte Seite eines sphärischen Dreiecks, dessen beide andere Seiten θ und θ' den Winkel $\varphi - \varphi'$ einschliessen. Folglich gilt für $\cos\gamma$ die Formel:

(5) $$\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi').$$

Die Dichtigkeit ρ' ist eine Function von θ' und φ'. Wir haben θ' variabel von 0 bis π und φ' variabel von 0 bis 2π zu nehmen. Die Function

(6) $$\rho' = f(\theta', \varphi')$$

ist nun freilich a priori nicht bekannt. Folglich geben uns die Gleichungen (3) und (4) auch nicht ohne weiteres die Werthe von V im ganzen unendlichen Raume. Sie machen uns aber darauf aufmerksam, dass V sich nach ganzen Potenzen von r entwickeln lässt. Die Coefficienten der Entwicklung sind Functionen von θ und φ, deren Form wir aus den Bedingungen zu bestimmen haben, dass V im äusseren Raume sowohl wie im Innern der Erdkugel der Gleichung von Laplace Genüge leisten muss und beim Durchgange durch die Erdoberfläche nicht unstetig werden darf [§. 79 (1), §. 80 (1) und (2)]. Ist hiernach die Entwicklung von V vollständig durchgeführt, so treten darin unendlich viele constante Coefficienten auf, die vorläufig unbestimmt sind. Sie erhalten dadurch bestimmte Werthe, dass die so entwickelte Function V an jeder Stelle der Erdoberfläche mit der dort gegebenen Potentialfunction V^* übereinstimmen soll.

Auf diese Weise gelangt man zu einem völlig bestimmten Ausdrucke für die Function V, und wenn dieser hergestellt ist, so ergibt sich die Dichtigkeit der fingirten magnetischen Belegung der Erdoberfläche mit Hülfe der Gleichung (3) des §. 80.

Nach diesem Ueberblick über den einzuschlagenden Weg gehen wir zu der Durchführung der Rechnung selbst über.

§. 107.

Entwicklung der Function V nach Kugelfunctionen.

Das Element $d\sigma'$ der Kugeloberfläche vom Radius a lässt sich ausdrücken

$$d\sigma' = a^2 \sin\theta' \, d\theta' \, d\varphi'.$$

Führt man dies in die Gleichung (3) des vorigen Paragraphen ein und benutzt die Gleichungen (4) und (6) desselben Paragraphen, so erhält man

$$(1) \qquad V = -\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \frac{a^2 f(\theta', \varphi') \sin\theta' \, d\theta'}{\sqrt{(a^2 + r^2 - 2\,ar\cos\gamma)}}.$$

Nun können wir für $r > a$ entwickeln:

$$(2) \qquad (a^2 + r^2 - 2\,ar\cos\gamma)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{r}\left\{P_0 + P_1\left(\frac{a}{r}\right) + P_2\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \ldots + P_n\left(\frac{a}{r}\right)^n + \ldots\right\}.$$

Dagegen hat man für $r < a$:

$$(3) \qquad (a^2 + r^2 - 2\,ar\cos\gamma)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{a}\left\{P_0 + P_1\left(\frac{r}{a}\right) + P_2\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \ldots + P_n\left(\frac{r}{a}\right)^n + \ldots\right\}.$$

Die auftretenden Coefficienten $P_0, P_1, P_2, \ldots P_n \ldots$ sind in beiden Entwicklungen dieselben. Es sind algebraische, rationale, ganze Functionen von $\cos\gamma$, und zwar jede von dem Grade, den ihr Index angibt. Es ist nicht schwer, einen Ausdruck für P_n zu finden. Man hat nur zu beachten, dass die Gleichungen (2) und (3) auf der einen Entwicklung beruhen

$$(1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\gamma)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= P_0 + P_1\alpha + P_2\alpha^2 + \ldots + P_n\alpha^n + \ldots,$$

wenn α positiv und kleiner als 1 genommen wird. Man kann aber schreiben

$$(1+\alpha^2-2\alpha\cos\gamma)^{-\frac{1}{2}}=\left(1-\frac{2\alpha\cos\gamma}{1+\alpha^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}},$$

und da der absolute Zahlwerth von $2\alpha\cos\gamma$ kleiner als $1+\alpha^2$ ist, so darf man auf der rechten Seite der letzten Gleichung den ersten Factor nach dem binomischen Lehrsatze entwickeln und jedes Glied der Reihe mit dem zweiten Factor ausmultipliciren. Dadurch ergibt sich

$$(1+\alpha^2-2\alpha\cos\gamma)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{(1+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{\alpha\cos\gamma}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1.3}{1.2}\frac{\alpha^2\cos\gamma^2}{(1+\alpha^2)^{\frac{5}{2}}}+\ldots$$
$$+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\frac{\alpha^n\cos\gamma^n}{(1+\alpha^2)^{\frac{2n+1}{2}}}+\ldots$$

Hier hat man die Potenzen von $(1+\alpha^2)$ mit negativen, gebrochenen Exponenten wieder nach dem binomischen Lehrsatze zu entwickeln und schliesslich nach ganzen Potenzen von α zu ordnen. Auf diesem Wege findet sich

(4) $$P_0=1$$

und für jedes ganze n, das grösser als 0 ist:

(5) $$\frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots(2n-1)}P_n$$
$$=\cos\gamma^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\cos\gamma^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4\,(2n-1)(2n-3)}\cos\gamma^{n-4}$$
$$-+\ldots$$

Hiernach dürfen wir die Coefficienten $P_0, P_1, P_2, \ldots P_n \ldots$ in (2) und (3) als bekannte Functionen von $\cos\gamma$ ansehen.*) Für $r=a$ stimmen beide Entwicklungen überein. Werden die in (2) und (3) gewonnenen Reihen in die Gleichung (1) eingeführt, so ergibt sich

für einen Punkt im äusseren Raume $(r>a)$:

(6) $$V=-a\sum_{n=0}^{\infty}Q_n\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1};$$

*) Andere Entwicklungen für P_n findet man im 17. Bande von Crelle's Journal in der Abhandlung von Dirichlet: Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données. — Man vergleiche auch Heine, Handbuch der Kugelfunctionen. Berlin 1861. — Sidler, die Theorie der Kugelfunctionen. Bern 1861.

ferner für einen Punkt im Innern der Erde ($r < a$)

$$(7) \qquad V = -a \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \left(\frac{r}{a}\right)^n;$$

endlich für einen Punkt der Erdoberfläche ($r = a$)

$$(8) \qquad V = -a \sum_{n=0}^{\infty} Q_n.$$

In den drei letzten Gleichungen hat Q_n überall dieselbe Bedeutung, nemlich

$$(9) \qquad Q_n = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} P_n \, . \, f(\theta', \varphi') \sin\theta' \, d\theta'.$$

Nun ist aber P_n eine ganze Function $n$ten Grades von $\cos\gamma$, d. h. nach Gleichung (5) des vorigen Paragraphen eine ganze Function $n$ten Grades von den drei Grössen $\cos\theta$, $\sin\theta \cos\varphi$, $\sin\theta \sin\varphi$. Folglich gilt dasselbe in Betreff der Function Q_n. Um einen Ausdruck für Q_n zu erhalten, haben wir zu beachten, dass die Function V im äusseren Raume sowohl wie im Innern der Erde der Gleichung von Laplace Genüge leisten muss. Es lässt sich dabei nach (9) und (4) vorab bemerken, dass $Q_0 = const.$ ist.

§. 108.

Die Kugelfunction $n$ten Ranges.

Die Gleichung von Laplace lautet für Kugelcoordinaten [§. 29, (4)]

$$(1) \qquad \frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Nehmen wir zunächst einen Punkt im äusseren Raume, so ergibt sich aus Gleichung (6) des vorigen Paragraphen:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \, Q_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2},$$

$$r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \, Q_n \left(\frac{a}{r}\right)^n,$$

$$\frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r} = -a \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \, n \, Q_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}.$$

Handelt es sich dagegen um einen Punkt im Innern der Erde, so berechnen wir nach Gleichung (7) des vorigen Paragraphen

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\sum_{n=0}^{\infty} n\, Q_n \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1},$$

$$r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = -a^2 \sum_{n=0}^{\infty} n\, Q_n \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1},$$

$$\frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r} = -a \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, n\, Q_n \left(\frac{r}{a}\right)^{n}.$$

Im einen wie im anderen Falle ist dies in die partielle Differentialgleichung (1) einzuführen. Die Differentiationen nach θ und φ treffen nur die Functionen Q_n. Nachdem auch diese Differentiationen vorschriftsmässig bewirkt und die Resultate der Rechnung in (1) eingesetzt sind, hat man für sich gleich Null zu setzen, was mit jeder einzelnen Potenz von r multiplicirt ist. Dadurch erhält man für einen äusseren wie für einen inneren Punkt in gleicher Weise die partielle Differentialgleichung

$$(2) \qquad n(n+1)\, Q_n + \frac{1}{\sin \theta^2} \frac{\partial^2 Q_n}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \left(\sin \theta \frac{\partial Q_n}{\partial \theta}\right)}{\sin \theta\, \partial \theta} = 0.$$

Eine Function Q_n, welche dieser partiellen Differentialgleichung Genüge leistet, wird eine Kugelfunction $n$ten Ranges genannt.

Um zu einer Entwicklung dieser Function zu gelangen, erinnern wir uns daran, dass Q_n eine ganze Function $n$ten Grades von $\cos \theta$, $\sin \theta \cos \varphi$, $\sin \theta \sin \varphi$ ist, dass also in dem zu bildenden Ausdrucke nur Potenzen mit ganzen, positiven Exponenten auftreten können und überhaupt kein Exponent grösser als n. Nun lassen sich aber die Potenzen von $\cos \varphi$ und von $\sin \varphi$ durch die Cosinus und Sinus der Vielfachen von φ ausdrücken, und da keine höhere Potenz als die $n$te vorhanden ist, so wird auch höchstens das $n$fache von φ auftreten.

Wir setzen deshalb

$$(3) \quad Q_n = G_{n0} + G_{n1} \cos \varphi + G_{n2} \cos 2\varphi + \ldots + G_{nn} \cos n\varphi$$
$$+ H_{n1} \sin \varphi + H_{n2} \sin 2\varphi + \ldots + H_{nn} \sin n\varphi$$

und führen diesen Ausdruck in die partielle Differentialgleichung (2) ein. Dadurch ergibt sich eine Reihe, geordnet nach Cosinus und Sinus der Vielfachen von φ, bis zum $n$fachen, und der Werth dieser Reihe soll Null sein. Dazu ist nöthig und hinreichend, dass man für sich gleich Null setze, was mit $\cos m\varphi$ und was mit $\sin m\varphi$ multiplicirt ist, und zwar für jedes ganze m von 0 bis n.

Durch Ausführung der Rechnung ergeben sich zur Bestimmung von G_{nm} und von H_{nm} die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\{n(n+1)\sin\theta^2 - m^2\}\, G_{nm} + \sin\theta \,.\, \frac{d\left(\sin\theta \dfrac{dG_{nm}}{d\theta}\right)}{d\theta} = 0,$$

$$\{n(n+1)\sin\theta^2 - m^2\}\, H_{nm} + \sin\theta \,.\, \frac{d\left(\sin\theta \dfrac{dH_{nm}}{d\theta}\right)}{d\theta} = 0.$$

Beide Gleichungen sind in derselben Form enthalten, nemlich in der Form

$$(4) \quad \{n(n+1)\sin\theta^2 - m^2\}\, Q_{nm} + \sin\theta \,.\, \frac{d\left(\sin\theta \dfrac{dQ_{nm}}{d\theta}\right)}{d\theta} = 0.$$

Nun bemerken wir, dass G_{nm} und H_{nm} in der Gleichung (3) mit $\cos m\varphi$ und resp. $\sin m\varphi$ multiplicirt auftreten. Dem Cosinus und dem Sinus von $m\varphi$ entspricht aber als höchste Potenz von $\cos\varphi$ und resp. $\sin\varphi$ die $m$te Potenz. Da nun in dem Ausdrucke für Q_n die letztgenannten beiden Functionen nur in der Verbindung

$$\sin\theta \cos\varphi \text{ und } \sin\theta \sin\varphi$$

auftreten, so hat man sich darauf gefasst zu machen, dass in Q_{nm} der gemeinschaftliche Factor $\sin\theta^m$ auftreten werde.

Wir setzen also

$$(5) \qquad Q_{nm} = \sin\theta^m\, F(\cos\theta)$$

und erhalten zur Bestimmung der Function $F(\cos\theta)$ aus (4) die Differentialgleichung

$$(6) \qquad \begin{aligned} F''(u) &+ \{n(n+1) - m(m+1)\}\, F(u) \\ &- 2(m+1)\, u\, F'(u) - u^2 F''(u) = 0, \end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung $\cos\theta = u$ gesetzt wird. Die Form dieser Gleichung weist uns darauf hin, eine Entwicklung nach absteigenden Potenzen von u mit der Exponentendifferenz 2 vorzunehmen:

$$(7) \qquad F(u) = u^p + A_2\, u^{p-2} + A_4\, u^{p-4} + \ldots$$

Führt man dies in (6) ein, so ist u^p die höchste dort auftretende Potenz von u. Dieselbe ist multiplicirt mit

$$n(n+1) - m(m+1) - 2(m+1)p - p(p-1).$$

Ferner ist dann u^{p-2k} multiplicirt mit

$$A_{2k}\{n(n+1)-m(m+1)-2(m+1)(p-2k)-(p-2k)(p-2k-1)\}$$
$$+ A_{2k-2}(p-2k+2)(p-2k+1).$$

Soll aber die Gleichung (6) erfüllt sein, so ist für sich gleich Null zu setzen, was mit jeder einzelnen Potenz von u multiplicirt ist. Es ist also zunächst

$$n(n+1)-m(m+1)-2(m+1)p-p(p-1)=0.$$

Dies liefert zwei Werthe von p, nemlich

$$p_1 = n-m \quad \text{und} \quad p_2 = -n-m-1,$$

und dem entsprechend erhalten wir zwei von einander unabhängige particuläre Integrale. Das zweite ist für unsern Zweck nicht brauchbar, da die Exponenten von u negativ sind und deshalb das Integral unendlich wird für $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

Es ist ferner

$$A_{2k}\{n(n+1)-m(m+1)-2(m+1)(p-2k)-(p-2k)(p-2k-1)\}$$
$$= - A_{2k-2}(p-2k+2)(p-2k+1)$$

zu setzen, oder, wenn man die Bedingung für p berücksichtigt:

$$A_{2k}\,.\,2k(2m+2p-2k+1) = - A_{2k-2}(p-2k+2)(p-2k+1).$$

Danach haben wir für das erste particuläre Integral die Coefficienten-Bestimmung

$$(8)\quad A_{2k} = (-1)^k \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)\ldots(n-m-2k+1)}{2.4.6\ldots 2k(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k+1)},$$

und dieses erste particuläre Integral selbst liefert die für unsern Zweck allein brauchbare Function

$$(9)\quad Q_{nm} = \sin\theta^m \{\cos\theta^{n-m} + A_2 \cos\theta^{n-m-2} + A_4 \cos\theta^{n-m-4}$$
$$+ \ldots + A_{2k}\cos\theta^{n-m-2k} + \ldots\}.$$

Hiernach ergibt sich für Q_n die Entwicklung

$$(10)\qquad \begin{aligned} Q_n = g_{n0}\,Q_{n0} &+ Q_{n1}(g_{n1}\cos\varphi + h_{n1}\sin\varphi) \\ &+ Q_{n2}(g_{n2}\cos 2\varphi + h_{n2}\sin 2\varphi) \\ &+ \ldots . \\ &+ Q_{nn}(g_{nn}\cos n\varphi + h_{nn}\sin n\varphi). \end{aligned}$$

Die Functionen Q_{n0}, Q_{n1}, Q_{n2}, ... Q_{nn} sind durch die Gleichungen (9) und (8) vollständig gegeben, und es treten in dem Ausdrucke (10) noch die $2n+1$ unbestimmten constanten Coefficienten auf

$$g_{n0},\ g_{n1},\ g_{n2},\ \ldots\ g_{nn};$$
$$h_{n1},\ h_{n2},\ \ldots\ h_{nn}.$$

Eine wichtige Bemerkung ist noch über die constante Grösse Q_0 zu machen. Im äusseren Raume stimmt nemlich die von dem wirklich vorhandenen Erdmagnet herrührende Potentialfunction V^* überein mit der Function V, die von der fingirten Belegung der Oberfläche herrührt und in der Gleichung (6) des vorigen Paragraphen entwickelt ist. Es gilt also für jeden Punkt (x, y, z) im äusseren Raume die Gleichung

$$(11) \qquad V^* = -a \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}.$$

Nun können wir aber (wenn die bekannte Vorzeichen-Aenderung vorgenommen wird) den Satz in Anwendung bringen, der in der Gleichung (6) des §. 18 ausgesprochen ist. Hier bedeutet r dasselbe, was dort mit R bezeichnet ist. Wir erhalten danach

$$(12) \qquad \lim r\, V^* = -\int d\mu \quad \text{für } \lim r = \infty.$$

Aus (11) berechnet sich

$$(13) \qquad \lim r\, V^* = -a^2 Q_0 \quad \text{für } \lim r = \infty.$$

Zieht man die Gleichung (2) des §. 105 in Betracht, so ergibt sich aus (12) und (13), dass

$$(14) \qquad Q_0 = 0$$

sein muss. Wir dürfen also in den Gleichungen (6), (7), (8) des vorigen Paragraphen die Summirung mit $n = 1$ anfangen.

Uebrigens sieht man, dass auch für die fingirte Belegung der Oberfläche

$$(15) \qquad \int \rho\, d\sigma = 0$$

ist. Denn wir haben nach dem eben citirten Satze [§. 18, (6)]

$$\lim r\, V = -\int \rho\, d\sigma \quad \text{für } \lim r = \infty,$$

und da für jeden Punkt im äusseren Raume $V = V^*$ ist, so ergibt sich

$$\int \rho\, d\sigma = \int d\mu = 0,$$

und damit ist die Gleichung (15) bewiesen.

§. 109.

Fundamentalsatz für die Entwicklung nach Kugelfunctionen.

Es kommt nun vor allen Dingen darauf an, zu beweisen, dass eine Function von θ und φ, die für alle Werthe dieser Variabeln von $\theta = 0$ bis $\theta = \pi$ und von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ einwerthig und endlich, übrigens aber ganz willkürlich gegeben ist, sich immer nach Kugelfunctionen entwickeln lässt, und dass für jede willkürlich gegebene Function nur eine solche Entwicklung möglich ist.

Zu dem Ende gehen wir auf die Gleichung (3) des §. 80 zurück, die hier so zu schreiben ist

$$(1) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=a+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=a-0} = 4\pi\rho.$$

Für $r > a$ erhalten wir nach (1) und (2) des §. 107

$$V = -a \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \cdot \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} P_n \, . \, f(\theta', \varphi') \sin\theta' \, d\theta' \right\}.$$

Daraus berechnet sich für $r > a$

$$(2) \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \cdot \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} P_n \, . \, f(\theta', \varphi') \sin\theta' \, d\theta' \right\}.$$

Dagegen haben wir für $r < a$ nach (1) und (3) des §. 107

$$V = -a \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n} \cdot \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} P_n \, . \, f(\theta', \varphi') \sin\theta' \, d\theta' \right\}.$$

Folglich ergibt sich für $r < a$

$$(3) \quad \frac{\partial V}{\partial r} = -\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \cdot \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} P_n \, . \, f(\theta', \varphi') \sin\theta' \, d\theta' \right\}.$$

Die Gleichung (2) ist noch gültig für $r = a + 0$, die Gleichung (3) für $r = a - 0$. Setzen wir also in beiden Gleichungen $r = a$ und führen die in (1) vorgeschriebene Subtraction aus, so ergibt sich mit Rücksicht auf §. 106 (6) der merkwürdige Satz:

$$(4) \quad f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} P_n \, . \, f(\theta', \varphi') \sin\theta' \, d\theta'.$$

Hier ist über die Function $f(\theta, \varphi)$ rein analytisch nichts weiter vorausgesetzt, als dass sie willkürlich gegeben ist, aber einwerthig und endlich für jede Werthencombination von θ und φ innerhalb der vorgeschriebenen Grenzen. Folglich gilt die Gleichung (4) für jede Function $f(\theta, \varphi)$, welche diese Eigenschaft besitzt. Denn man kann jeder solchen Function die in §. 106, Gleichung (6) ausgesprochene physikalische Bedeutung unterlegen, und dann gelten die Entwicklungen, welche zu der Gleichung (4) dieses Paragraphen führen.

Es lässt sich also jede Function von θ und φ, die von $\theta = 0$ bis $\theta = \pi$ und von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ willkürlich, aber einwerthig und endlich gegeben ist, in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe entwickeln. Bezeichnen wir irgend eine solche Function mit $J(\theta, \varphi)$, so ist

$$(5) \qquad J(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n,$$

$$S_n = \frac{(2n+1)}{4\pi} \int_0^{\pi} d\varphi' \int_0^{2\pi} P_n \,.\, J(\theta', \varphi') \sin\theta' \, d\theta'.$$

Der Beweis, den wir hier für diesen wichtigen Satz gegeben haben, ist nicht rein analytisch. Es muss eben für den Gang dieses Beweises der Function $J(\theta, \varphi)$ eine physikalische Bedeutung untergelegt werden. Der Satz lässt sich aber auch rein analytisch beweisen. Das hat Dirichlet gethan.*) Er bringt die Summe der $(n+1)$ ersten Glieder

$$S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + S_n$$

in geschlossene Form und zeigt, dass für $\lim n = \infty$ der Grenzwerth dieser Summe $= J(\theta, \varphi)$ ist.

Dirichlet beweist in derselben Abhandlung noch weiter, dass für jede Function $J(\theta, \varphi)$ nur eine einzige Entwicklung nach Kugelfunctionen möglich ist. Auch dieser Satz ist für uns von Wichtigkeit. Er soll deshalb jetzt bewiesen werden.

Es seien Q_n und S_m zwei beliebige Kugelfunctionen vom $n$ten resp. vom $m$ten Range, und es seien m und n von einander und von Null verschieden. Wir betrachten das Integral

---

*) Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles etc. (Crelle's Journal Bd. 17. Seite 35.)

$$(6) \qquad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Q_n\, S_m \sin\theta\, d\theta.$$

Die Function Q_n genügt der partiellen Differentialgleichung (2) des §. 108. Wenn man also das Integral (6) mit $n\,(n+1)$ multiplicirt, so kann man $n\,(n+1)\,Q_n$ ersetzen durch

$$-\frac{1}{\sin\theta^2}\frac{\partial^2 Q_n}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial\left(\sin\theta\,\dfrac{\partial Q_n}{\partial\theta}\right)}{\sin\theta\,\partial\theta}.$$

Dadurch ergibt sich die Gleichung

$$(7) \qquad n\,(n+1)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Q_n\, S_m \sin\theta\, d\theta$$

$$= -\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sin\theta}\int_0^{2\pi} S_m\frac{\partial^2 Q_n}{\partial\varphi^2}\,d\varphi - \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} S_m\frac{\partial\left(\sin\theta\,\dfrac{\partial Q_n}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta}\,d\theta.$$

Nun findet man durch Integration nach Theilen

$$-\int_0^{2\pi} S_m\frac{\partial^2 Q_n}{\partial\varphi^2}\,d\varphi = \left(S_m\frac{\partial Q_n}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=0} - \left(S_m\frac{\partial Q_n}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=2\pi}$$
$$+\left(Q_n\frac{\partial S_m}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=2\pi} - \left(Q_n\frac{\partial S_m}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=0}$$
$$-\int_0^{2\pi} Q_n\frac{\partial^2 S_m}{\partial\varphi^2}\,d\varphi.$$

Der vom Integralzeichen freie Theil der rechten Seite ist Null. Denn wenn man die Gleichung (10) des §. 108 und die entsprechende Entwicklung für S_m in Betracht zieht, so erkennt man leicht, dass jede Kugelfunction für $\varphi = 0$ den nemlichen Werth hat wie für $\varphi = 2\pi$, und dass dasselbe von den nach φ genommenen Derivirten jeder Kugelfunction gilt. Wir haben also

$$(8) \qquad -\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sin\theta}\int_0^{2\pi} S_m\frac{\partial^2 Q_n}{\partial\varphi^2}\,d\varphi = -\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sin\theta}\int_0^{2\pi} Q_n\frac{\partial^2 S_m}{\partial\varphi^2}\,d\varphi.$$

Ebenso ergibt sich durch Integration nach Theilen

$$-\int_0^\pi S_m \frac{\partial\left(\sin\theta\,\frac{\partial Q_n}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta}\,d\theta = \left(\sin\theta\, S_m \frac{\partial Q_n}{\partial\theta}\right)_{\theta=0} - \left(\sin\theta\, S_m \frac{\partial Q_n}{\partial\theta}\right)_{\theta=\pi}$$
$$+ \left(\sin\theta\, Q_n \frac{\partial S_m}{\partial\theta}\right)_{\theta=\pi} - \left(\sin\theta\, Q_n \frac{\partial S_m}{\partial\theta}\right)_{\theta=0}$$
$$-\int_0^\pi Q_n \frac{\partial\left(\sin\theta\,\frac{\partial S_m}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta}\,d\theta.$$

Der freie Theil der rechten Seite ist Null, weil $\sin\theta = 0$ für $\theta = 0$ und für $\theta = \pi$. Folglich haben wir

(9)
$$-\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi S_m \frac{\partial\left(\sin\theta\,\frac{\partial Q_n}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta}\,d\theta = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi Q_n \frac{\partial\left(\sin\theta\,\frac{\partial S_m}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta}\,d\theta.$$

Fasst man die Gleichungen (7), (8) und (9) zusammen, so ergibt sich

(10)
$$n(n+1)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi Q_n\, S_m \sin\theta\, d\theta$$
$$= -\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sin\theta}\int_0^{2\pi} Q_n \frac{\partial^2 S_m}{\partial\varphi^2}\,d\varphi - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi Q_n \frac{\partial\left(\sin\theta\,\frac{\partial S_m}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta}\,d\theta.$$

Genau dasselbe, was auf der rechten Seite dieser Gleichung steht, kömmt aber zu Stande, wenn man das Integral (6) mit $m(m+1)$ multiplicirt und hierauf das Product $m(m+1)\,S_m$ ersetzt durch

$$-\frac{1}{\sin\theta^2}\frac{\partial^2 S_m}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial\left(\sin\theta\,\frac{\partial S_m}{\partial\theta}\right)}{\sin\theta\,\partial\theta},$$

was zulässig ist vermöge der partiellen Differentialgleichung, der S_m Genüge leistet. Man erhält also aus (10) die Gleichung

$$n(n+1)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi Q_n\, S_m \sin\theta\, d\theta = m(m+1)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi Q_n\, S_m \sin\theta\, d\theta,$$

wofür man auch schreiben kann

$$(n - m)(n + m + 1)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Q_n\, S_m \sin\theta\, d\theta = 0.$$

Nach der über m und n gemachten Voraussetzung sind die beiden Factoren vor dem Integral von Null verschieden. Die Gleichung kann also nur dadurch erfüllt sein, dass

$$(11) \qquad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Q_n\, S_m \sin\theta\, d\theta = 0$$

ist. Der Satz gilt auch dann noch, wenn einer der beiden Indices Null ist, z. B. $m = 0$. Dann ist nemlich $S_0 = const.$, und die Gleichung (7) lautet einfacher

$$n(n+1)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Q_n\, S_0 \sin\theta\, d\theta$$

$$= - S_0 \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sin\theta} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 Q_n}{\partial\varphi^2}\, d\varphi - S_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\partial\left(\sin\theta \frac{\partial Q_n}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta}\, d\theta.$$

Hier lässt auf der rechten Seite an beiden Stellen die innere Integration sich ausführen. Man erhält

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 Q_n}{\partial\varphi^2}\, d\varphi = \left(\frac{\partial Q_n}{\partial\varphi}\right)_{2\pi} - \left(\frac{\partial Q_n}{\partial\varphi}\right)_0 = 0,$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\partial\left(\sin\theta \frac{\partial Q_n}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta}\, d\theta = \left(\sin\theta \frac{\partial Q_n}{\partial\theta}\right)_{\pi} - \left(\sin\theta \frac{\partial Q_n}{\partial\theta}\right)_0 = 0.$$

Folglich gilt die Gleichung (11) allgemein für $m \gtrless n$, auch wenn der kleinere Index Null sein sollte.

Denken wir uns den Fall, dass eine und dieselbe Function in doppelter Weise nach Kugelfunctionen sich entwickeln lasse, so würde man durch Gleichsetzung der beiden Entwicklungen erhalten:

$$(12) \quad Q_0 + Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n + \ldots = S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots$$

Setzt man $Q_n - S_n = T_n$, so folgt aus der Gleichung (12):

$$(13) \qquad T_0 + T_1 + T_2 + \ldots + T_n + \ldots = 0.$$

Hier sind T_0, T_1, T_2 ... wieder Kugelfunctionen. Wir dürfen also von dem Satze (11) Gebrauch machen. Wir multipliciren in (13) auf beiden Seiten mit $T_m \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$ und integriren zwischen den Grenzen 0 und π für θ und den Grenzen 0 und 2π für φ. Dann kömmt auf der rechten Seite Null heraus und links fallen nach Gleichung (11) alle Glieder, mit Ausnahme eines einzigen, heraus. Es ergibt sich

$$(14) \qquad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} T_m^2 \sin\theta \, d\theta = 0.$$

Dies kann aber nur dadurch zu Stande kommen, dass überall identisch

$$(15) \qquad T_m = 0$$

ist, und das sollte bewiesen werden.

§. 110.

Bestimmung der Constanten in der Entwicklung von V.

Wir kehren zurück zu den Gleichungen (6), (7), (8) des §. 107. Die darin auftretenden Functionen Q_1, Q_2, ... Q_n ... sind in ihrer Abhängigkeit von θ und φ durch die Gleichung (10) des §. 108 vollständig ausgedrückt. Es handelt sich nur noch um die Bestimmung der constanten Coefficienten. Diese sind für alle drei Gleichungen (6), (7), (8) des §. 107 dieselben. Wir halten uns deshalb an die Gleichung (8), welche für die Erdoberfläche gültig ist. An der Erdoberfläche ist, wie in der Gleichung (2) des §. 106 bereits bemerkt worden,

$$(1) \qquad V = V^*.$$

Wenn es nun gelingt, die Function V^* in eine Reihe von Kugelfunctionen mit bekannten Coefficienten zu entwickeln, so muss nach dem Satze des vorigen Paragraphen diese Entwicklung mit derjenigen in §. 107 (8) identisch übereinstimmen. Dadurch sind dann alle unbekannten Coefficienten bestimmt.

Wir wollen das Integral in §. 105, Gleichung (3) mit $J(\theta, \varphi)$ bezeichnen:

$$(2) \qquad J(\theta, \varphi) = \int_0^s \frac{\partial V^*}{\partial s} ds,$$

und mit $J(\theta', \varphi')$ den Werth, welchen dasselbe im Punkte (a, θ', φ') besitzt. Dieses Integral ist, wie wir voraussetzen, in jedem Punkte der Erdoberfläche bekannt. Für die Function $J(\theta, \varphi)$ setzen wir die Entwicklung (5) des §. 109, in welcher durchaus nichts Unbekanntes mehr auftritt. Dann haben wir also für irgend einen Punkt der Erdoberfläche

$$(3) \qquad V^* = V_0^* + S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots$$

$$S_n = \frac{(2n+1)}{4\pi} \int_0^{\pi} d\varphi' \int_0^{2\pi} P_n \,.\, J(\theta', \varphi') \sin \theta' \, d\theta'.$$

Diese Entwicklung muss identisch mit §. 107 (8) übereinstimmen. Wir haben also

$$(4) \qquad V_0^* + S_0 = -a\,Q_0 = 0.$$

$$(5) \qquad -a\,Q_n = S_n \quad \text{für } n > 0.$$

Damit ist die Potentialfunction vollständig hergestellt aus der einen Voraussetzung, dass in jedem Punkte der Erdoberfläche die nördlich gerichtete Componente der erdmagnetischen Kraft bekannt ist.

Wenn in allen Punkten eines einzigen Meridians die nördlich gerichtete Componente, ausserdem aber an jeder Stelle der Erdoberfläche die westlich gerichtete Componente der erdmagnetischen Kraft gegeben ist, so lässt auch daraus die Potentialfunction sich vollständig herstellen. Denn es ist in diesem Falle

$$(6) \qquad -\frac{\partial V^*}{a \sin \theta \, \partial \varphi}$$

die westlich gerichtete Componente. Daraus berechnet sich

$$(7) \quad J(\theta, \varphi) = V^* - V_0^* = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\partial V^*}{a \sin \theta \, \partial \varphi} a \sin \theta \, d\varphi + J(\theta, \varphi_0).$$

Hier bedeutet φ_0 die geographische Länge des Meridians, auf welchem die nördlich gerichtete Componente bekannt ist, und $J(\theta, \varphi_0)$ bezeichnet das auf diesem Meridian genommene Integral (2), wenn $s = a\theta$ gesetzt wird. Dann treten die Gleichungen (3), (4), (5) wie vorher in Gültigkeit.

Die Potentialfunction kann vollständig auch dann hergestellt werden, wenn man an jeder Stelle der Erdoberfläche die vertical nach unten gerichtete Componente der erdmagnetischen Kraft kennt. Wir bezeichnen dieselbe mit Z und verstehen unter Z' den Werth, den sie im Punkte (a, θ', φ') besitzt. Alsdann kann man nach Kugelfunctionen entwickeln:

$$(8) \qquad Z = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n + \ldots$$

$$Z_n = \frac{(2n+1)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} P_n \,.\, Z' \sin\theta' \, d\theta'.$$

Andererseits ist

$$Z = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=a+0},$$

folglich nach §. 107, Gleichung (6)

$$(9) \quad Z = -Q_0 - 2\,Q_1 - 3\,Q_2 - \ldots - (n+1)\,Q_n - \ldots$$

Es muss also in der Entwicklung (8) nothwendig

$$Z_0 = 0$$

sein, weil $Q_0 = 0$ ist, und es bestimmen sich die Coefficienten in den übrigen Functionen Q durch die für $n = 1, 2, 3, \ldots$ zu erfüllende Gleichung

$$(10) \qquad Q_n = \frac{-1}{n+1} Z_n.$$

Dadurch ist auch wieder in der Gleichung (6) des §. 107 alles bekannt.

§. 111.

Die Componenten der erdmagnetischen Kraft.

Wir wollen den Punkt (a, θ, φ) der Erdoberfläche zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems (ξ, η, ζ) machen. Die Axe der positiven ξ soll tangential am Meridian nach Norden, die Axe der positiven η tangential am Parallelkreis nach Westen und die Axe der positiven ζ vertical nach unten gerichtet sein. Bezeichnen wir mit Ξ, H, Z die Componenten der auf die positive Einheit des Magnetismus im Punkte (a, θ, φ) einwirkenden erdmagnetischen Kraft, so hat man

$$(1) \quad \Xi = -\left(\frac{\partial V}{a\,\partial\theta}\right)_{r=a} = \frac{\partial Q_1}{\partial\theta} + \frac{\partial Q_2}{\partial\theta} + \ldots + \frac{\partial Q_n}{\partial\theta} + \ldots,$$

$$(2) \quad H = -\left(\frac{\partial V}{a\sin\theta\,\partial\varphi}\right)_{r=a} = \frac{\partial Q_1}{\sin\theta\,\partial\varphi} + \frac{\partial Q_2}{\sin\theta\,\partial\varphi} + \ldots + \frac{\partial Q_n}{\sin\theta\,\partial\varphi} + \ldots,$$

$$(3) \quad Z = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=a+0} = -2\,Q_1 - 3\,Q_2 - \ldots - (n+1)Q_n - \ldots.$$

Diese Gleichungen können dazu dienen, für jeden Punkt der Erdoberfläche die Componenten der erdmagnetischen Kraft zu berechnen, wenn die Potentialfunction bekannt ist. Hat man dagegen umgekehrt an einer gewissen Anzahl von Orten der Erdoberfläche die drei Componenten der erdmagnetischen Kraft durch Beobachtung gefunden, und will man sich dazu entschliessen, die Entwicklungen (6), (7), (8) des §. 107 mit dem Q_n enthaltenden Gliede abzubrechen, so können die Gleichungen (1), (2), (3) direct dazu dienen, die unbekannten Coefficienten, die in den Functionen Q auftreten, zu berechnen. Beachtet man, dass $Q_0 = 0$ ist, so sind für $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_n$ zusammen $n^2 + 2n$ Coefficienten zu bestimmen. Die Anzahl der Gleichungen (1), (2), (3) ist dreimal so gross wie die Anzahl der Beobachtungsorte. In diesen Gleichungen sind die linken Seiten bekannt und es treten rechts jene $n^2 + 2n$ Coefficienten als Unbekannte auf. Zu ihrer Bestimmung sind also die vollständigen Beobachtungen an $\frac{n^2 + 2n}{3}$ Orten nothwendig und hinreichend, und man hat n so zu wählen, dass entweder n oder $n + 2$ durch 3 theilbar ist. Gauss hat $n = 4$ genommen. Dann handelt es sich um $3 + 5 + 7 + 9 = 24$ unbekannte Coefficienten, zu deren Bestimmung also (rein theoretisch genommen) die vollständigen Beobachtungen an 8 verschiedenen Orten der Erdoberfläche nothwendig und hinreichend sind. Es wird dabei vorausgesetzt, dass diese Beobachtungen frei von Beobachtungsfehlern sind, und dass keine zufälligen Störungen Einfluss geübt haben. Da diese Voraussetzung in Wirklichkeit nicht erfüllt ist, so hat man vollständige Beobachtungen an einer erheblich grösseren Anzahl von Orten nöthig. Ein zweckmässiges Verfahren zur Verwerthung dieser Beobachtungen hat Gauss im 23. Artikel seiner allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus angegeben.

Ausser der eben genannten Abhandlung von Gauss ist noch zu citiren der übrige Inhalt der „Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins", sowie die „Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata, auctore Carolo Friderico Gauss." (Commentationes societatis regiae Gotting. recentiores. Vol. VIII. Gottingae 1841. — Gauss' Werke Bd. 5. Göttingen 1867.)